ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE
IN BERLIN.

W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN.

12. BAND.

MIT 57 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

Inhalt.

Rezensionen.

Vermischte Mitteilungen.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

Zu der Abhandlung des Herrn Neuberg „Über drei Sätze von Dr. P. Zeeman *Gz*".[1])

Erste Mitteilung.

Von W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr.

Im Folgenden möge auf den zweiten Zeemanschen Satz näher eingegangen werden, einmal im Sinne seiner projektiven und n-dimensionalen Verallgemeinerung, sodann aber auch hauptsächlich hinsichtlich der mit ihm verknüpften algebraischen Identitäten.

1. *Der Zeemansche Satz in der Ebene.* — Es liege ein Koordinatendreieck

$$x_i = 0, \quad x_k = 0, \quad x_l = 0 \qquad (i, k, l = 1, 2, 3)$$

mit den Ecken A_i, A_k, A_l zugrunde; dessen Innenwinkel seien bezeichnet mit α_i, ihre Kosinus mit $c_i = c_{kl} = c_{lk}$, ihre Sinus mit s_i. Es wird der Ort eines Punktes $P(x)$ gesucht, für den die senkrechten Projektionen P_i auf die Seiten des Dreiecks in einer Geraden liegen.

Durch einen Punkt (x) eine Senkrechte (u) zur Dreiecksseite $x_i = 0$ legen, heißt diejenige Gerade (u) durch (x) ziehen, die zu $x_i = 0$ bezüglich des *„Kreispunktepaares"*:

$$\text{(I)} \quad K \equiv c_{11}u_1^2 + c_{22}u_2^2 + c_{33}u_3^2 + 2c_{12}u_1u_2 + 2c_{13}u_1u_3 + 2c_{23}u_2u_3 = 0$$
$$(c_{ii} = -1, \quad c_{ik} = c_{ki} = c_l = \cos\alpha_l)$$

konjugiert ist.

Somit bestehen für die Koordinaten der Geraden (u) die beiden Relationen:

$$(1) \qquad u_i c_{ii} + u_k c_{ik} + u_l c_{il} = 0, \quad u_i x_i + u_k x_k + u_l x_l = 0.$$

Für den Schnittpunkt P_i von (u) mit $x_i = 0$ wird das Koordinatenverhältnis $\frac{x_k^{(i)}}{x_l^{(i)}} = \frac{-u_l}{u_k}$, also gemäß (1):

$$(2) \qquad \frac{x_k^{(i)}}{x_l^{(i)}} = \frac{c_{ii}x_k - c_{ik}x_i}{c_{ii}x_l - c_{il}x_i}.$$

Sollen die drei Punkte P_i $(i = 1, 2, 3)$ auf einer Geraden liegen, so muß das zyklisch genommene Produkt der drei Verhältnisse (2) den

1) S. dieses Archiv **11**, 225—238.

Wert -1 besitzen (und umgekehrt). Mithin beschreibt der Punkt (x) eine Kurve 3. Ordnung C_3:

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} C_3 \equiv & (c_{ii} x_k - c_{ik} x_i)(c_{kk} x_l - c_{kl} x_k)(c_{ll} x_i - c_{li} x_l) \\ & + (c_{ii} x_l - c_{il} x_i)(c_{kk} x_i - c_{ki} x_k)(c_{ll} x_k - c_{lk} x_l) = 0. \end{aligned}$$

Setzt man hier die Werte der c ein: $c_{ii} = -1$, $c_{ik} = c_{ki} = c_l = \cos \alpha_l$, und entwickelt, so geht die linke Seite von (II) über in:

$$\text{(III)} \qquad C_3 \equiv 2 x_1 x_2 x_3 (1 + c_1 c_2 c_3) + \sum_i x_i (x_k^2 + x_l^2)(c_i + c_k c_l).$$

Nun ist nach den Elementen der Trigonometrie, da die α_i die Innenwinkel eines Dreiecks sind:

$$\text{(3)} \qquad 2(1 + c_1 c_2 c_3) = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \quad c_i + c_k c_l = s_k s_l.$$

Damit zerfällt aber C_3 in zwei Faktoren, wie folgt:

$$\text{(IV)} \quad C_3 \equiv x_1 x_2 x_3 (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + \sum_i x_i (x_k^2 + x_l^2) s_k s_l \equiv \sum_i x_i s_i \cdot \sum_l x_i x_k s_l.$$

Wie bekannt, ist $\sum x_i s_i = 0$ die Gleichung der unendlich fernen Geraden g_∞, $\sum x_i x_k s_l = 0$ die Gleichung vom *Umkreise* des Koordinatendreiecks. Sieht man also von den unendlich fernen Punkten als uneigentlichen Lösungen der Aufgabe ab, so erscheint der Kreis als Ort eines Punktes P derart, daß, wenn man auf dem Kreise irgend drei Punkte A_1, A_2, A_3 markiert, die Fußpunkte der von P auf die Seiten des Dreiecks (A_1, A_2, A_3) gefällten Lote stets in einer Geraden liegen.

Da aber der Kreis durch drei Punkte bestimmt ist, so folgt daraus der Zeemansche Satz: „Liegen 4 Punkte in einer Ebene, von denen keine 3 einer Geraden angehören, und gehören für irgend einen der 4 Punkte die Fußpunkte der auf die Seiten des von den 3 andern gebildeten Dreiecks gefällten Lote einer Geraden an, so kommt diese Eigenschaft entsprechend auch den 3 andern Punkten zu."

2. *Projektive Verallgemeinerung.* — Für ganz *beliebige* Koeffizienten c_{ik} eines Klassenkegelschnitts K in § 1 nimmt (II) die Gestalt an:

$$\text{(II}^{\text{a}}\text{)} \qquad \begin{aligned} C_3 \equiv & \, 2 x_1 x_2 x_3 (c_{11} c_{22} c_{33} - c_{12} c_{23} c_{31}) \\ & + \sum_i x_i (c_{kk} x_l^2 + c_{ll} x_k^2)(c_{ik} c_{il} - c_{ii} c_{kl}) = 0, \end{aligned}$$

d. h. der Ort des Punktes (x) ist eine nicht zerfallende, durch die Ecken des Koordinatendreiecks gehende Kurve 3. Ordnung C_3. Nunmehr werde dem Klassenkegelschnitt K (I) die Beschränkung auferlegt, in ein Paar getrennter (reeller oder komplexer) Punkte $A(a)$, $B(b)$ zu zerfallen. Diese Beschränkung findet ihren Ausdruck in den Relationen:

$$\text{(4)} \qquad c_{ik} = a_i b_k + a_k b_i, \quad c_{ii} = 2 a_i b_i.$$

Setzt man alsdann zur Abkürzung:

(5) $$-\beta_i = 2\,a_i b_i (a_k b_l - a_l b_k) = 2\,a_i b_i (ab)_{kl},$$

so geht nach einfacher Umrechnung die linke Seite C_3 von (II^a) über in:

(II^b) $$C_3 \equiv \sum_i x_i (ab)_{kl} \cdot \sum_i x_k x_l \beta_i .$$

Es zerfällt also die Kurve 3. Ordnung $C_3 = 0$ wiederum in eine Gerade g: $\sum x_i (ab)_{kl} = 0$, die keine andere ist, als die Verbindungslinie der Punkte A, B, und in einen Kegelschnitt C_2: $\sum x_k x_l \beta_i = 0$, der durch die Ecken A_1, A_2, A_3 des Koordinatendreiecks geht, und überdies durch die Punkte A, B.

Denn setzt man z. B. $x_i = a_i$, so wird $\sum a_i b_i a_k a_l (ab)_{kl} = a_1 a_2 a_3 \sum b_i (ab)_{kl}$, verschwindet also identisch.[1]) Daß die Gerade g einen Bestandteil des geometrischen Ortes C_3 bilden muß, ist geometrisch unmittelbar zu erkennen. Sei S_i der Schnittpunkt von $x_i = 0$ mit g, so konstruiere man auf g den zu S_i bezüglich des Punktepaares harmonischen Punkt S_i'. Dann erhält man für irgend einen Punkt P der Ebene die durch ihn gehende und zur Dreiecksseite $x_i = 0$ in bezug auf den zerfallenden Klassenkegelschnitt (A, B) konjugierte Gerade (u), wenn man P mit S_i' verbindet. Liegt nun P insbesondere auf der Geraden g, so fallen die drei zu P gehörigen Geraden (u) mit g zusammen, die Schnittpunkte von g mit $x_i = 0$, $x_k = 0$, $x_l = 0$ sind wiederum die Punkte S_i, S_k, S_l, die eben in g liegen.

Hieraus geht zugleich hervor, daß die Punkte der Geraden g nur uneigentliche Lösungen der in Rede stehenden Aufgabe sind. Zugleich ist ersichtlich, daß die Ecken des Koordinatendreiecks dem geometrischen Orte C_3, mithin dem nach Ausscheidung von g verbleibenden Kegelschnitte C_2 angehören.

Nimmt man nunmehr umgekehrt einen nicht zerfallenden Ordnungskegelschnitt C_2 beliebig an und markiert auf ihm einmal drei Punkte A_1, A_2, A_3, andrerseits ein Punktepaar A, B, so erscheint nach Obigem C_2 als der (eigentliche) Ort eines Punktes P, für den die drei durch ihn laufenden Geraden, die resp. zu den Seiten des Dreiecks A_1, A_2, A_3 in bezug auf das Punktepaar A, B konjugiert sind, jene Seiten stets in drei auf einer Geraden liegenden Punkten schneiden.

---

1) Umgekehrt ist die Gleichung des durch die Punkte A_1, A_2, A_3, A, B gehenden Kegelschnitts:

$$\begin{vmatrix} x_k x_l, & x_l x_i, & x_i x_k \\ a_k a_l, & a_l a_i, & a_i a_k \\ b_k b_l, & b_l b_i, & b_i b_k \end{vmatrix} \equiv \sum x_k x_l a_i b_i (ab)_{kl} = 0.$$

Da aber durch irgend 5 Punkte A_1, A_2, A_3, A, B, von denen keine 3 in einer Geraden liegen, ein nicht zerfallender Kegelschnitt C_2 eindeutig bestimmt ist, so ergibt sich als projektive Verallgemeinerung des Zeemanschen Satzes (§ 1):

„Irgend ein Punktesextupel $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ der Ebene, von dem keine 3 Punkte auf einer Geraden liegen, zerlege man auf irgend eine der $3.20 = 60$ möglichen Arten in ein Tripel, etwa A_1, A_2, A_3, ein Paar, etwa A_4, A_5, und einen Restpunkt (A_6). Wenn dann die drei durch den Restpunkt A_6 laufenden Geraden, die in bezug auf das Punktepaar A_4, A_5 zu den Seiten des Dreiecks A_1, A_2, A_3 konjugiert sind, eben diese Seiten in drei Punkten einer Geraden treffen, so findet die entsprechende Eigenschaft bei *jeder* der 60 Zerlegungsarten statt."

Es ist zu beachten, daß diese Eigenschaft eines beliebigen, einem Kegelschnitt C_2 angehörigen Punktesextupels *nicht als äquivalent* mit der Pascalschen Eigenschaft[1]) desselben anzusehen ist. Denn der Kegelschnitt C_2 wird erst durch Vereinigung mit der Geraden A_4, A_5 zu einer zerfallenden Kurve dritter Ordnung $C_3 = 0$ umgeformt, wo die linke Seite C_3 vermöge der Relationen (4) in die Gestalt (II^a) gebracht werden kann, und die Gerade A_4, A_5 stellt dann die uneigentliche Lösung der Aufgabe dar, während der Kegelschnitt C_2 als deren eigentliche Lösung erscheint.

Sind im besonderen wieder A_4, A_5 die beiden „Kreispunkte" der Ebene, so gelangt man zum Satze des § 1 zurück.

3. *Symmetrie der Kreisgleichung in vier Argumentenpaaren.* — Die Gleichung des Umkreises des Koordinatendreiecks war (§ 1):

$$\sum x_i x_k s_l = 0. \tag{1}$$

Hier sind die x_i proportional den (mit geeigneten Vorzeichen zu nehmenden) Abständen des Punktes (x) von den Seiten des Koordinatendreiecks, und die $s_l = \sin \alpha_l$ proportional den Längen der Seiten.

Soll jetzt der Kreis durch drei beliebige Punkte der Ebene gehen, deren rechtwinklige Koordinaten x_i, y_i ($i = 1, 2, 3$) sind, und setzt man:

$$r_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2, \tag{2}$$

1) Man vergleiche die dem Pascalschen Satze zugrunde liegende Identität in der Note des Verfassers, Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung IX[1] (1900) S. 91.

bedeutet ferner (xik) die Determinante $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}$, so nimmt (1) die Gestalt an:

$$(3) \qquad K \equiv r_{23}^2 (x\,12)(x\,13) + r_{31}^2 (x\,21)(x\,23) + r_{12}^2 (x\,31)(x\,32) = 0.$$

Gemäß § 1 muß es möglich sein, diese Gleichung in eine hinsichtlich der Koordinaten der vier darin auftretenden Punkte symmetrische Gestalt zu bringen. Da der Grad von K in den Koordinaten der drei Punkte (1), (2), (3) zu hoch ist, nämlich gleich drei, liegt die Vermutung nahe, daß K den Faktor (123) enthält, und daß der Restfaktor die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Der Beweis soll so geführt werden, daß er sich weiterhin auf den entsprechenden Fall im Raume von n Dimensionen ausdehnen läßt.

Zunächst ist leicht zu sehen, daß K identisch verschwindet[1]), sobald $(123) = 0$ ist. Denn ist die letztere Bedingung erfüllt, so kann man setzen, für λ_1, λ_2 als zwei homogene Parameter:

$$(4) \qquad x_3(\lambda_1 + \lambda_2) = x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2, \quad y_3(\lambda_1 + \lambda_2) = y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2.$$

Dann bestehen die Relationen:

$$(5) \qquad \begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2)(x\,12)(x\,13) = \lambda_2 (x\,12)^2, \\ (\lambda_1 + \lambda_2)(x\,21)(x\,23) = \lambda_1 (x\,12)^2, \\ (\lambda_1 + \lambda_2)^2 (x\,31)(x\,32) = -\lambda_1\lambda_2 (x\,12)^2, \end{cases}$$

$$(6) \qquad (\lambda_1 + \lambda_2)^2 r_{23}^2 = \lambda_1^2 r_{12}^2, \quad (\lambda_1 + \lambda_2)^2 r_{31}^2 = \lambda_2^2 r_{12}^2,$$

und die Gleichung (3) geht über in die identisch verschwindende:

$$(7) \qquad (\lambda_1 + \lambda_2)^2 K \equiv (x\,12)^2 r_{12}^2 (\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2) \equiv 0.$$

Um nunmehr für drei *beliebige* Punkte (1), (2), (3) aus $K(3)$ den Faktor (123) abzusondern, schreibe man lieber für x, y die Koordinaten x_4, y_4 irgend eines vierten Punktes (4). Setzt man zur Abkürzung:

$$(8) \qquad N = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4,$$

so lassen sich die Koordinaten von (3) mittels dreier homogener Parameter λ_1, λ_2, λ_4 linear durch die der Punkte (1), (2), (3) ausdrücken:

$$(9) \qquad Nx_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_4 x_4, \quad Ny_3 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_4 y_4.$$

---

1) Geometrisch ist einleuchtend, daß, sobald $(123) = 0$ ist, d. h. sobald die drei Punkte (1), (2), (3) in einer Geraden liegen, *jeder* Punkt der Ebene die Eigenschaft besitzt, daß die Fußpunkte der drei, auf die Seiten des uneigentlichen Dreiecks (1), (2), (3) gefällten Lote einer Geraden angehören.

Dann treten an die Stelle der Relationen (5), (6) die folgenden allgemeineren:

$$(10)\quad \begin{cases} N\,(412)\,(413) = \lambda_2\,(412)^2, & N(421)\,(423) = \lambda_1\,(412)^2, \\ N^2(431)\,(432) = -\,\lambda_1\,\lambda_2\,(412)^2, & -\,N(123) \qquad = \lambda_4\,(124), \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} N^2\,r_{23}^2 = \lambda_1^2\,r_{12}^2 + \lambda_4^2\,r_{24}^2 + 2\,\lambda_1\,\lambda_4\,\{(x_2 - x_1)\,(x_2 - x_4) + (y_2 - y_1)\,(y_2 - y_4 \\ N^2\,r_{13}^2 = \lambda_2^2\,r_{12}^2 + \lambda_4^2\,r_{14}^2 - 2\,\lambda_1\,\lambda_4\,\{(x_2 - x_1)\,(x_1 - x_4) + (y_2 - y_1)\,(y_1 - y_4 \end{cases}$$

Damit nimmt die linke Seite K von (3) die Gestalt an:

$$(\mathrm{I})\qquad N^2\,K \equiv (123)\,(124)\,\{\lambda_1\,\lambda_2\,r_{12}^2 + \lambda_1\,\lambda_4\,r_{14}^2 + \lambda_2\,\lambda_4\,r_{24}^2\},$$

oder:

$$(\mathrm{I}')\qquad K \equiv (123)\,K'.$$

Vertauscht man je zwei der drei Punkte (1), (2), (3), so ändert (123) sein Vorzeichen, K selbst ändert sich gar nicht, mithin ändert auch K' sein Vorzeichen.

Vertauscht man dagegen den Punkt (4) mit einem der Punkte (1) oder (2), etwa mit (1), so vertauschen sich auch λ_1 und λ_4, (124) ändert sein Vorzeichen, während der Restfaktor von (124) ungeändert bleibt, so daß wiederum K' sein Vorzeichen ändert. Das letztere gilt endlich auch für die Vertauschung von (4) mit (3), da man ebensogut in (9) den Punkt (1) durch die Punkte (2), (3), (4) hätte darstellen können, wobei die rechte Seite von (I′) dieselbe bleibt.

„Somit ändert der nach Abspaltung des Faktors (123) aus K verbleibende Restfaktor K' immer nur sein Vorzeichen, wenn man irgend zwei der vier Punkte (1), (2), (3), (4) miteinander vertauscht, d. h. die Gleichung $K' = 0$ des in § 1 auftretenden Kreises ist hinsichtlich jener vier Punkte symmetrisch."

Das ist aber das algebraische Äquivalent für den Inhalt des Zeemanschen Satzes.

Schwieriger ist die *direkte* Überführung der Gleichung $K' = 0$ in die übliche Gleichung eines durch drei Punkte (1), (2), (3) gehenden Kreises.

Zu dem Behuf erledigen wir erst die analoge Aufgabe für die projektive Verallgemeinerung der Nr. 2.

4. *Umformungen einer Kegelschnittsgleichung.* — Treten in Nr. 2 ebenfalls an die Stelle der Ecken des Koordinatendreiecks drei beliebige Punkte (1), (2), (3) mit den Dreieckskoordinaten x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, 3$), und gibt man dem variablen Punkte (x) irgend eine Lage (4), so wird die Gleichung des Kegelschnitts C_2 durch die 6 Punkte (1), (2), ... (6), unter (ikl) die Determinante der Dreieckskoordinaten der Punkte (i), (k), (l) verstanden:

$$(1)\qquad \varDelta \equiv \begin{vmatrix} (412)(413), & (421)(423), & (431)(432) \\ (512)(513), & (521)(523), & (531)(532) \\ (612)(613), & (621)(623), & (631)(632) \end{vmatrix} = 0.$$

Da der Ausdruck $\varDelta$ zwar in den Koordinaten der Punkte (4), (5), (6) vom Grade 2, dagegen in denen der Punkte (1), (2), (3) vom Grade 4 ist, so läßt sich vermuten, daß in $\varDelta$ der Faktor $(123)^2$ enthalten ist.

Zunächst kann man zeigen, daß die Unterdeterminanten irgend einer Zeile von $\varDelta$, etwa der ersten, sämtlich den Faktor (123) besitzen.

Die Unterdeterminante A_1 von (412)(413) hat den Wert:

$$(2)\qquad A_1 = (523)(623) \begin{vmatrix} (512) & (531) \\ (612) & (631) \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man die ersten Minoren von (123) mit den resp. griechischen Buchstaben, so entwickelt sich die zweireihige Determinante in (2), wie folgt:

$$(3)\qquad \begin{cases} \begin{vmatrix} (512), & (531) \\ (612), & (631) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_5\xi_3 + y_5\eta_3 + z_5\zeta_3, & x_5\xi_2 + y_5\eta_2 + z_5\zeta_2 \\ x_6\xi_3 + y_6\eta_3 + z_6\zeta_3, & x_6\xi_2 + y_6\eta_2 + z_6\zeta_2 \end{vmatrix} \\ = \sum \begin{vmatrix} x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_3 & \eta_3 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = -(123) \sum z_1 \begin{vmatrix} x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} = -(123)(156), \end{cases}$$

da

$$\begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix} = z_1(123), \text{ etc.}$$

„Damit ist die oft brauchbare Hilfsformel bewiesen:

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{vmatrix} (rik), & (ril) \\ (sik), & (sil) \end{vmatrix} = (ikl)(irs)."$$

Daher spaltet sich aus der Determinante $\varDelta$(1) der Faktor (123) zuvörderst *einmal* ab:

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} \varDelta = (123)\varDelta', \quad -\varDelta' = (412)(413)(523)(623)(156) \\ \qquad\qquad + (421)(423)(531)(631)(256) \\ \qquad\qquad + (431)(432)(512)(612)(356). \end{cases}$$

Um nunmehr aus $\varDelta'$ den Faktor (123) nochmals abzuspalten, drücke man, wie in Nr. **3** (9) etwa die Koordinaten des Punktes (3) durch die der Punkte (1), (2), (5) aus:

$$(4)\quad x_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_5 x_5,\; y_3 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_5 y_5,\; z_3 = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_5 z_5.$$

Dann gelten die Relationen:

$$(5)\quad \begin{cases} (413) = \lambda_2(412) + \lambda_5(415), & (423) = \lambda_1(421) + \lambda_5(425), \\ (523) = \lambda_1(521),\quad (531) = \lambda_2(521), & (431) = -\lambda_2(412) - \lambda_5(415), \\ (356) = \lambda_1(156) + \lambda_2(256), & (432) = \lambda_1(412) - \lambda_5(425), \\ (623) = \lambda_1(621) + \lambda_5(625), & (631) = \lambda_2(621) + \lambda_5(651). \end{cases}$$

Damit geht der Ausdruck $\varDelta'$, da $(123) = \lambda_5(125)$, über in:

$$(6)\quad \begin{aligned} \frac{\varDelta'}{(123)} = {} & \lambda_1(412)(156)\{-\lambda_1(415)(612) + \lambda_2(412)(256) + \lambda_5(415)(256)\} \\ & + \lambda_2(412)(256)\{-\lambda_1(412)(156) + \lambda_2(425)(612) + \lambda_5(425)(156)\} \\ & + (612)\{\lambda_1(156) + \lambda_2(256)\}\{\lambda_1(412)(415) - \lambda_2(412)(425) - \lambda_5(415)(425)\}. \end{aligned}$$

Entwickelt man hier die rechte Seite, so verschwinden die Faktoren von λ_1^2 und λ_2^2, und mittels wiederholter Anwendung des Hilfssatzes (I) kommt:

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} \varDelta' = (123)\,\varDelta'', \\ \varDelta'' = -(512)\{\lambda_1\lambda_2(412)(456)(612) + \lambda_1\lambda_5(415)(426)(156) \\ \qquad\qquad + \lambda_2\lambda_5(416)(425)(256)\}, \end{cases}$$

also mit Rücksicht auf (II):

$$(\mathrm{IV})\qquad \varDelta = (123)^2\,\varDelta''.$$

Hier ist wiederum leicht zu zeigen, daß der Restfaktor $\varDelta''$ bei Vertauschung irgend zweier der 6 Punkte (1), ... (6) nur sein Vorzeichen ändert.

Denn vertauscht man irgend zwei der drei Punkte (4), (5), (6), oder auch irgend zwei der drei Punkte (1), (2), (3), so ändert $\varDelta(1)$ selbst sein Zeichen, mithin auch $\varDelta''$.

Vertauscht man aber einen Punkt des ersten Tripels mit einem des zweiten, etwa (1) mit (5), so ändert (512) sein Zeichen, während der Restfaktor von (512) in $\varDelta''$ ungeändert bleibt. Die Gleichung $\varDelta'' = 0$ ist somit hinsichtlich aller sechs Punkte *symmetrisch*.

Um endlich den Faktor $\varDelta''$ in (IV) auf eine bekannte Form zu bringen, führe man rückwärts den Punkt (3) ein. Auf Grund der Identität:

$$(7)\qquad (412)(456) \equiv (415)(426) - (416)(425)$$

und der Relationen (5) geht $\varDelta''$ ohne weiteres über in:

$$\text{(V)} \qquad \varDelta'' = \begin{vmatrix} (415)(426), & (416)(425) \\ (315)(326), & (316)(325) \end{vmatrix},$$

wo das Verschwinden der rechten Seite unmittelbar aussagt, daß ein Kegelschnitt des Büschels $\{(1), (2), (5), (6)\}$ auch die Punkte (3), (4) enthält.

Die Form (V) von $\varDelta''$ läßt sich endlich in eine, auch äußerlich hinsichtlich aller sechs Punkte symmetrische Gestalt überführen, nämlich in die der sechsreihigen Determinante $|x_i^2, y_i^2, z_i^2, x_i y_i, x_i z_i, y_i z_i|$.

Denn man erkennt leicht bei der wirklichen Ausrechnung der zweireihigen Determinante $\varDelta''$ (V), daß das Glied $x_5^2 y_6^2 \cdot x_4 y_4 \cdot x_3 z_3 \cdot y_2 z_2 \cdot x_1 z_1$ wirklich auftritt. Da aber nach Obigem $\varDelta''$ bei Vertauschung irgend zweier der Indizes $1, 2, \ldots 6$ stets sein Vorzeichen ändert, und $\varDelta''$ in den Koordinaten aller sechs Punkte homogen vom zweiten Grade ist, so wird in der Tat nach der Definition einer Determinante:

$$\text{(VI)} \qquad \varDelta'' = |x_i^2, y_i^2, z_i^2, x_i y_i, x_i z_i, y_i z_i| \qquad (i = 1, 2, \ldots 6).$$

5. *Der spezielle Fall der Kreisgleichung.* — Nunmehr mögen zwei der sechs Punkte des § 4, etwa die Punkte (5), (6), die „Kreispunkte" sein. Läßt man die x_i, y_i, z_i jetzt homogene rechtwinklige Koordinaten bedeuten, so werden die Koordinaten der Kreispunkte $1, \pm i, 0$, wo i die imaginäre Einheit bedeutet. Indem man bei den übrigen vier Punkten die dritte Koordinate wieder gleich Eins nimmt, hat man die Beziehungen ($r, s = 1, 2, 3, 4$):

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} (5rs) = (y_r - y_s) - i(x_r - x_s), \\ (6rs) = (y_r - y_s) + i(x_r - x_s), \\ (5rs)(6rs) = (x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2, \\ (r56) = -2i. \end{cases}$$

Damit erhält man unmittelbar zwischen den Formen $\varDelta$ (§ 4, (1)) und K (§ 3, (3)) (letztere gebildet für die vier Punkte (1), (2), (3), (4)) die Identität:

$$\text{(I)} \qquad \varDelta = 2i(123)\sum_{1,2,3}(412)(413)r_{23}^2 = 2i(123)K,$$

also mit Rücksicht auf die Identitäten (IV) und (VI) der Nr. 4:

$$\text{(II)} \qquad 2iK = (123) \cdot |x_i^2, y_i^2, x_i y_i, x_i, y_i, 1| \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Die rechtsstehende sechsreihige Determinante nimmt aber im Falle der Kreispunkte (5), (6) der Reihe nach die Gestalten an:

$$(2)\quad \begin{vmatrix} x_1^2, & y_1^2, & x_1 y_1, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^2, & . & . & . & . & . \\ x_3^2, & . & . & . & . & . \\ x_4^2, & . & . & . & . & . \\ 1, & -1, & +i, & 0 & 0 & 0 \\ 1, & -1, & -i, & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^2, & y_1^2, & x_1 y_1, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^2, & . & . & . & . & . \\ x_3^2, & . & . & . & . & . \\ x_4^2, & . & . & . & . & . \\ 1, & -1 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0, & 0, & -2i, & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2i \begin{vmatrix} x_1^2, & y_1^2, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^2, & . & . & . & . \\ x_3^2, & . & . & . & . \\ x_4^2, & . & . & . & . \\ 1, & -1, & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2i \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2, & y_1^2, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^2 + y_2^2, & . & . & . & . \\ x_3^2 + y_3^2, & . & . & . & . \\ x_4^2 + y_4^2, & . & . & . & . \\ 0 & -1, & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2i \, | x_k^2 + y_k^2, \ x_k, \ y_k, \ 1 | \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Folglich geht die Identität (II) über in:

$$\text{(III)} \qquad K = (123) \, | x_k^2 + y_k^2, \ x_k, \ y_k, \ 1 | \qquad (k = 1, 2, 3, 4),$$

d. h. die in Nr. 2 auf Grund der Aufgabe der Nr. 1 erhaltene Form K der Kreisgleichung ist direkt in die bekannte Form umgewandelt worden.

6. *Der Zeemansche Satz im Raume.* — Es liege ein Koordinatentetraeder $T: x_i = 0, \ x_k = 0, \ x_l = 0, \ x_m = 0 \ (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4)$ mit den Ecken A zugrunde; die Kosinus von dessen inneren Flächenwinkeln α_{ik} seien $c_{ik} = c_{ki}$. Es wird der Ort eines Punktes $P(x)$ gesucht, für den die senkrechten Projektionen P_i auf die Ebenen des Tetraeders in einer Ebene liegen. Durch einen Punkt (x) eine zur Ebene $x_i = 0$ senkrechte Gerade legen, heißt, diejenige Gerade durch (x) ziehen, die zu $x_i = 0$ bezüglich des *„Kugelkreises“*:

$$\text{(I)} \qquad K = c_{11} u_1^2 + \cdots + c_{44} u_4^2 + 2 c_{12} u_1 u_2 + \cdots + 2 c_3 c_4 u_3 u_4 = 0$$
$$(c_{ii} = -1, \qquad c_{ik} = \cos \alpha_{ik})$$

konjugiert ist, oder, was dasselbe ist, die den Punkt (x) mit dem Pole $S_i(c_{ii}, c_{ik}, c_{il}, c_{im})$ der Ebene $x_i = 0$ bezüglich K verbindet. Somit besitzt der Schnittpunkt P_i dieser Geraden mit $x_i = 0$ die Koordinaten 0, $x_i c_{ik} - x_k c_{ii}, \ x_i c_{il} - x_l c_{ii}, \ x_i c_{im} - x_m c_{ii}$, und das Kriterium dafür, daß die vier Punkte P_i einer Ebene angehören, lautet:

$$\text{(II)}\ F_4 \equiv \begin{vmatrix} 0, & x_i c_{ik} - x_k c_{ii}, & x_i c_{il} - x_l c_{ii}, & x_i c_{im} - x_m c_{ii} \\ x_k c_{ki} - x_i c_{kk}, & 0, & x_k c_{kl} - x_l c_{kk}, & x_k c_{km} - x_m c_{kk} \\ x_l c_{li} - x_i c_{ll}, & x_l c_{lk} - x_k c_{ll}, & 0, & x_l c_{lm} - x_m c_{ll} \\ x_m c_{mi} - x_i c_{mm}, & x_m c_{mk} - x_k c_{mm}, & x_m c_{ml} - x_l c_{mm}, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

so daß der Ort des Punktes $P(x)$ eine Fläche 4. Ordnung $F_4 = 0$ ist. Daß die unendlich ferne Ebene E_∞ einen Bestandteil der Fläche F_4 bildet, ist zunächst geometrisch leicht einzusehen. Denn verbindet man irgend einen Punkt P_∞ der Ebene E_∞ mit dem Punkte S_i, der ebenfalls der Ebene E_∞ angehört, und schneidet die Verbindungsgerade mit $x_i = 0$, so müssen diese 4 Schnittpunkte in einer Ebene, nämlich eben in der Ebene E_∞ liegen.

Dasselbe Ergebnis erhält man analytisch, wie folgt. Irgend ein Punkt P_∞ von E_∞ hat Koordinaten von der Form:

$$\lambda_i c_{ii} + \lambda_k c_{ik} + \lambda_l c_{il}, \ \ldots, \ \lambda_i c_{mi} + \lambda_k c_{mk} + \lambda_l c_{ml}. \tag{1}$$

Die Elemente der Determinante (II) werden daher ebenfalls ganz linear und homogen in den drei Parametern λ_i, λ_k, λ_l, so daß die Determinante für die Koordinaten aller Punkte P_∞ identisch verschwindet.

Die Fläche F_4 zerfällt daher in die Ebene E_∞ und eine Fläche 3. Ordnung F_3. Letztere kann man aber leicht direkt erhalten.

Fällt man von irgend einem im Endlichen gelegenen Raumpunkte $P(x)$ die drei Lote x_k, x_l, x_m auf die Ebene $x_k = 0$, $x_l = 0$, $x_m = 0$, so bilden die Fußpunkte P_k, P_l, P_m mit P ein Tetraeder T_i, dessen sechsfacher Inhalt $6\,T_i$ das Produkt aus $x_k x_l x_m$ mit dem Eckensinus Σ_i jener drei Lote ist. Aber Σ_i ist zugleich der Sinus der Koordinaten-Tetraederecke A_i, und die Sinus Σ_i der 4 Tetraederecken A_i verhalten sich wie die Seitenflächen Δ_i der im Koordinatentetraeder gegenüberliegenden Dreiecke. Andererseits ist die algebraische Summe der vier Inhalte T_i gleich dem Inhalte des von den vier Projektionen S_i gebildeten Tetraeders, und dieser letztere Inhalt verschwindet dann und nur dann, wenn die 4 Punkte P_i in einer Ebene liegen. Mithin ist der eigentliche Ort der Punkte $P(x)$, für die die zugehörigen P_i in einer Ebene liegen, die Fläche 3. Ordnung F_3:

$$F_3 \equiv \Delta_i x_k x_l x_m + \Delta_k x_i x_l x_m + \Delta_l x_i x_k x_m + \Delta_m x_i x_k x_l = 0, \tag{III}$$

die in den Ecken A_i Knotenpunkte besitzt.[1])

Nunmehr seien die A_i vier *beliebige* Raumpunkte (i), (k), (l), (m) mit den rechtwinkligen homogenen Koordinaten (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, 3, 4;\ t_i = 1)$. Die Gleichung der Ebene (2), (3), (4) ist $(x\,234) = 0$, unter $(x\,234)$ die aus den Koordinaten der vier Punkte (x), (2), (3), (4) und vier Einern gebildete Determinante verstanden.

---

1) Über diese Fläche F_3 findet man Näheres in meinen Abhandlungen: dieses Archiv (3) 1 (1901), S. 372; Verhandlungen des 3. internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg (1905), S. 333 f.

Berechnet man die Länge des Lotes von einem beliebigen Raumpunkte auf die Ebene (234) gemäß der Hesseschen Regel, andererseits den Inhalt $\Delta_1 = \Delta_{234}$ des Dreiecks (234), so nimmt die Gleichung (III) der Fläche F_3 die Gestalt an:

$$\text{(IV)}\quad F_3 \equiv \Delta^2_{234}(x\,123)(x\,134)(x\,124) - \Delta^2_{134}(x\,234)(x\,124)(x\,123) \\ + \Delta^2_{124}(x\,234)(x\,134)(x\,123) - \Delta^2_{123}(x\,124)(x\,134)(x\,234) = 0,$$

wo:

$$\text{(2)}\qquad \Delta^2_{ikl} = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_i & z_i & 1 \\ x_k & z_k & 1 \\ x_l & z_l & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_i & z_i & 1 \\ y_k & z_k & 1 \\ y_l & z_l & 1 \end{vmatrix}^2 \\ = (ikl)^2_z + (ikl)^2_y + (ikl)^2_x.$$

Entsprechend wie in Nr. 3 würde man sich davon überzeugen, daß der Ausdruck F_3 unter der Bedingung $(1234) = 0$ identisch verschwindet, daß also F_3 den Faktor (1234) besitzen muß. Es soll aber dieser Faktor gleich direkt von F_3 abgespalten werden.

Indem man wiederum den variablen Punkt (x) mit (5) bezeichnet und setzt:

$$\text{(3)}\qquad \begin{cases} x_4 N = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_5 x_5, \\ y_4 N = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \lambda_5 y_5, \\ z_4 N = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + \lambda_5 z_5, \\ \quad N = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5, \end{cases}$$

entstehen die Relationen:

$$\text{(4)}\qquad \begin{cases} N^2(5123)(5134)(5124) = \lambda_2\lambda_3(5123)^3, \\ N^2(5234)(5124)(5123) = \lambda_1\lambda_3(5123)^3, \\ N^2(5234)(5134)(5123) = \lambda_1\lambda_2(5123)^3, \\ N^2(5124)(5134)(5234) = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3(5123)^3, \\ \qquad N(1234) = \lambda_5(1235), \\ N^2\Delta^2_{234} = \lambda_1^2\Delta^2_{123} + \lambda_5^2\Delta^2_{235} + 2\lambda_1\lambda_5\sum\limits_x(231)_x(235)_x, \\ N^2\Delta^2_{134} = \lambda_1^2\Delta^2_{123} + \lambda_5^2\Delta^2_{135} + 2\lambda_2\lambda_5\sum\limits_x(312)_x(315)_x, \\ N^2\Delta^2_{124} = \lambda_1^2\Delta^2_{123} + \lambda_5^2\Delta^2_{125} + 2\lambda_3\lambda_5\sum\limits_x(123)_x(125)_x. \end{cases}$$

Setzt man dies in (IV) ein und berücksichtigt die einfache Determinantenrelation:

$$\text{(5)}\qquad \sum(231)_x(235)_x + \sum_x(312)_x(315)_x + \sum_x(123)_x(125)_x \\ = \sum(231)_x\{(235)_x + (315)_x + (125)_x\} = \sum_x(231)^2_x = \Delta^2_{123},$$

so nimmt F_3 (IV) die Gestalt an:

$$\text{(V)}\quad N^3 F_3 = -(1234)(1235)^2 \cdot \{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \Delta_{123}^2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_5 \Delta_{125}^2 + \lambda_1\lambda_3\lambda_5 \Delta_{135}^2 + \lambda_2\lambda_3\lambda_5 \Delta_{235}^2\},$$

oder kürzer:

$$\text{(V')}\qquad F_3 = (1234)\, F_3'.$$

Vertauscht man jetzt irgend zwei der Punkte (1), (2), (3), (4), etwa (1) mit (2), so ändert sowohl (1234) wie F_3 (IV) sein Zeichen, mithin bleibt der Restfaktor F_3' in (V') hierbei ungeändert. Bei Vertauschung von (5) mit einem der Punkte (1), (2), (3) bleibt ersichtlich F_3' ungeändert; das Gleiche muß aber auch gelten, wenn man (5) mit (4) vertauscht, da man an Stelle von (3) ebensowohl den Punkt (3) durch die Punkte (1), (2), (4), (5) hätte ausdrücken können.

„Somit ist der Restfaktor F_3', der nach Abspaltung des Faktors (1234) aus F_3 verbleibt, hinsichtlich aller fünf auftretenden Punkte symmetrisch."

Das ist das algebraische Äquivalent für den Zeemanschen Satz im Raume: „Wenn von fünf Raumpunkten (von denen keine vier in einer Ebene liegen) irgend einer die Eigenschaft besitzt, daß die Fußpunkte der Lote, die man von ihnen aus auf die Ebenen des von den vier andern gebildeten Tetraeders fällt, einer Ebene angehören, so kommt auch jedem der vier übrigen Punkte die entsprechende Eigenschaft zu."

Offenbar bietet es durchaus keine prinzipielle Schwierigkeit, den soeben geführten Beweis auf den Raum von n Dimensionen auszudehnen.

7. *Projektive Verallgemeinerung.* — In Nr. **6** war indirekt gezeigt, daß die Determinante (II) bei Zugrundelegung des Kugelkreises (I) in die beiden Faktoren $\Sigma x_i \Delta_i$ und $\Sigma \Delta_i x_k x_l x_m$ zerfallen muß.

Die entsprechende Zerlegung möge jetzt für eine im übrigen ganz *beliebige* in einen Kegelschnitt ausartende Fläche 2. Klasse:

$$\text{(I)}\qquad \Phi \equiv c_{11}u_1^2 + \cdots + c_{44}u_4^2 + 2c_{12}u_1u_2 + \cdots + 2c_3c_4u_3u_4 = 0, \quad (|c| = 0)$$

direkt ausgeführt werden; man gelangt dadurch zu einer bemerkenswerten Eigenschaft der Fläche 4. Ordnung $F_4 = 0$, dem Ort der Punkte $P(x)$, für die die Spuren der vier Geraden, die durch P gehen und zu den Koordinatenebenen $x_i = 0$ bez. der Fläche Φ konjugiert sind, einer Ebene angehören. Ersetzt man in der Determinante F_4 (Nr. 6, II) die vier Diagonalnullen resp. durch die Nullwerte $x_i c_{ii} - x_i c_{ii}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, und entwickelt die Determinante in der üblichen Weise, indem man vorderhand von der Bedingung $|c| = 0$ absieht, so ergibt sich sofort, daß von den 16 so hervorgehenden Teildeterminanten 11 identisch verschwinden, während sich die 5 übrigen zu der fünfreihigen Determinante zusammenfassen lassen:

$$\text{(II)}\quad F_4 \equiv \begin{vmatrix} x_1c_{11}, & x_1c_{12}, & x_1c_{13}, & x_1c_{14}, & c_{11} \\ x_2c_{21}, & x_2c_{22}, & x_2c_{23}, & x_2c_{24}, & c_{22} \\ x_3c_{31}, & x_3c_{32}, & x_3c_{33}, & x_3c_{34}, & c_{33} \\ x_4c_{41}, & x_4c_{42}, & x_4c_{43}, & x_4c_{44}, & c_{44} \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & 1 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, & c_{13}, & c_{14}, & c_{11}x_2x_3x_4 \\ c_{21}, & c_{22}, & c_{23}, & c_{24}, & c_{22}x_1x_3x_4 \\ c_{31}, & c_{32}, & c_{33}, & c_{34}, & c_{33}x_1x_2x_4 \\ c_{41}, & c_{42}, & c_{43}, & c_{44}, & c_{44}x_1x_2x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_1x_2x_3x_4 \end{vmatrix}$$

$$\equiv |c| \cdot x_1x_2x_3x_4 + \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, & c_{13}, & c_{14}, & c_{11}x_2x_3x_4 \\ c_{21}, & c_{22}, & c_{23}, & c_{24}, & c_{22}x_1x_3x_4 \\ c_{31}, & c_{32}, & c_{33}, & c_{34}, & c_{33}x_1x_2x_4 \\ c_{41}, & c_{42}, & c_{43}, & c_{44}, & c_{44}x_1x_2x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & 0 \end{vmatrix}.$$

Der Ort des Punktes P ist also selbst für eine völlig beliebige Fläche 2. Klasse Φ eine Fläche 4. Ordnung $F_4 = 0$, die in den Ecken des Koordinatentetraeders Knotenpunkte besitzt.

Nunmehr trete die Bedingung $|c| = 0$ hinzu, sodaß Φ in einen Kegelschnitt ausartet, dann fällt das Glied $|c|x_1x_2x_3x_4$ in (II) fort; die ersten Minoren irgend einer Zeile oder Kolonne von $|c|$ werden stets denselben vier Größen proportional, die wiederum mit $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ bezeichnet seien, und die mit den beiden Größenreihen (x_i), $(x_kx_lx_mc_{ii})$ geränderte Determinante der c_{ik} wird nach einem elementaren Determinantensatze proportional dem Produkte der beiden Faktoren $\sum\limits_i x_i\Delta_i$, $\sum\limits_i c_{ii}\Delta_i x_kx_lx_m$.

„Demnach zerfällt die Fläche 4. Ordnung F_4 in die Ebene $\sum x_i\Delta_i = 0$, d. i. die Ebene des Kegelschnittes Φ (I), und die Fläche 3. Ordnung F_3:

$$\text{(III)}\quad F_3 \equiv c_{11}\Delta_1x_2x_3x_4 + c_{22}\Delta_2x_1x_3x_4 + c_{33}\Delta_3x_1x_2x_4 + c_{44}\Delta_4x_1x_2x_3 = 0.\text{“}$$

Für $c_{ii\,(i=1,2,3,4)} = -1$ reduziert sich diese Gleichung auf die in Nr. 6 unter (III) erhaltene Gestalt.

Unterwirft man daher die Koeffizienten c_{ik} von Φ (II) lediglich den folgenden drei Bedingungen:

1) Die Determinante $|c|$ der c_{ik} verschwinde;
2) die ersten Minoren irgend einer Zeile (Kolonne) von $|c|$ sollen *gegebenen* Größen $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ proportional sein;
3) die Koeffizienten der Quadrate der Koordinaten der Φ sollen *gegebenen* Größen c_{ii} proportional sein;

so bleibt, *wie auch* im übrigen die Koeffizienten c_{ik} von Φ *variiert* werden mögen, die Fläche 3. Ordnung $F_3 = 0$ (III) *ungeändert*. Umgekehrt, hält man die irgend einem Kegelschnitt Φ entsprechende Fläche 3. Ordnung F_3 fest und desgleichen die Ebene von Φ, so sind damit gerade die drei obigen Bedingungen erfüllt. Um daher das eben ausgesprochene Ergebnis geometrisch auszusprechen, bedarf es nur noch der geometrischen Deutung der Bedingung 3).

Faßt man zunächst den Spezialfall $c_{11} = c_{22} = c_{33} = c_{44}$ ins Auge, so sagt das aus, daß (bei Erfülltsein der Bedingungen 1) und 2)) die entsprechenden Klassenkegelschnitte K_2 der Ebene E_2 apolar sind zu den drei Ebenenpaaren:

$$(1) \qquad x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad x_1^2 - x_3^2 = 0, \quad x_1^2 - x_4^2 = 0,$$

und damit zu dem Netze N von Flächen 2. Ordnung, dessen Grundpunkte $M_i (c = 1, 2, \ldots 8)$ die Mittelpunkte der dem Tetraeder T einbeschriebenen Kugeln sind. Die Klassenkegelschnitte K_2 bilden dann noch eine lineare ∞^2-Schar, der der Kugelkreis K angehört. Durch jeden Kegelschnitt K_2 der Schar gehen acht Flächen 2. Ordnung, die dem Tetraeder T einbeschrieben sind, und deren Mittelpunkte mit den Punkten M übereinstimmen.

Der ∞^2-Schar (K_2) gehört insbesondere eine lineare ∞^1-Schar von Punktepaaren an; jedes Paar (x), (y) dieser Punkte ist apolar (konjugiert) zum Netze N, genügt also den Bedingungen:

$$(2) \qquad \sigma x_i y_i = 1.$$

Vermöge der Transformation (2) geht aber die unendlich ferne Ebene E_∞:

$$(3) \qquad E_\infty = \Delta_1 x_1 + \Delta_2 x_2 + \Delta_3 x_3 + \Delta_4 x_4 = 0$$

über in die F_3 des § 6:

$$(4) \qquad F_3 = \Delta_1 x_2 x_3 x_4 + \Delta_2 x_1 x_3 x_4 + \Delta_3 x_1 x_2 x_4 + \Delta_4 x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Da die ∞^1 Punktepaare (x), (y) den Bedingungen (3), (4) zugleich genügen, so erfüllen sie als Ort eine Kurve 3. Ordnung C_3, den Schnitt von F_3 (4) mit E_∞, d. h. die C_3 erscheint in bekannter Weise als Ort der Punktepaare einer linearen ∞^2-Schar von Klassenkegelschnitten, nämlich eben der obigen Schar von K_2.

Unter den Punktepaaren (x), (y) der Ebene E_∞ befinden sich speziell die Gegenpunkte des Vierseits, das die Ebenen von T aus der Ebene E_∞ ausschneiden.

Umgekehrt ist durch diese drei Paare von Gegenpunkten und durch den Kugelkreis K die Schar der K_2 und damit die C_3 völlig und eindeutig bestimmt.

Von hier aus ist der Übergang zu der allgemeineren Fläche 3. Ordnung F_3 (III) leicht zu vollziehen; man hat nur die Koordinaten (x) der Kollineation:

$$\varrho x_i = c_{ii} \xi_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{5}$$

zu unterwerfen d. h. irgend einer Kollineation, die die Ebenen von T je in sich überführt. Die acht Punkte M gehen dadurch über in acht andere Punkte M'; hat man bei beliebigen c_{ii} irgend einen dieser Punkte M', etwa M_0, willkürlich gewählt, so verbinde man M_0 mit den Kanten von T durch sechs Ebenen und konstruiere die jeweils vierten harmonischen Ebenen dazu, dann schneiden sich die so hervorgehenden sechs Ebenenpaare gerade in den acht Punkten M'.

Somit ist der Satz bewiesen:

„Gegeben sei ein Tetraeder T und irgend eine Ebene E, sowie in letzterer irgend ein Kegelschnitt K_2. Der Ort der Punkte P, für die die zu den Ebenen von T bez. K_2 konjugierten und durch P laufenden Geraden jene vier Ebenen in vier Punkten einer Ebene treffen, ist (abgesehen von der Ebene E selbst) eine Fläche 3. Ordnung F_3, die in den Ecken (1), (2), (3), (4) von T Knotenpunkte besitzt. Für diese Fläche F_3 gilt der Zeemansche Satz, d. h. ist (5) irgend ein Punkt der F_3, so liegt z. B. (1) auf der durch das Tetraeder (2), (3), (4), (5) und K_2 bestimmten F_3.

Die zum Tetraeder T und zum Kegelschnitt K_2 gehörige F_3 bleibt dieselbe, wenn man K_2 durch irgend einen Klassenkegelschnitt einer gewissen linearen ∞^2-Schar ersetzt; diese Schar ist durch K_2 und die Gegenpunkte des durch die Ebenen von T aus E ausgeschnittenen Vierseits eindeutig bestimmt. Die Punktepaare dieser ∞^2-Schar erfüllen als Ort eine C_3, den Schnitt von F_3 mit E.

Durch irgend einen Kegelschnitt K_2 der ∞^2-Schar gehen acht dem Tetraeder T einbeschriebene Flächen 2. Ordnung; die acht Pole von E bez. dieser Flächen bilden die Grundpunkte eines Netzes N von Flächen 2. Ordnung F_2; die ∞^2-Schar der K_2 ist dann gerade die in der Ebene E gelegene, zu N konjugierte Schar von Klassenkegelschnitten, und der Ort der Punkte P, die zu den Punkten von E bez. N konjugiert sind, ist die obige F_3."

Die entsprechenden Ergebnisse für den Raum von n Dimensionen können unmittelbar ausgesprochen werden.

8. *Grenzen des Zeemanschen Satzes.* — Der Zeemansche Satz für den Raum war in Obigem dahin ausgedehnt, daß der ursprünglich

zugrunde gelegte Kugelkreis K durch einen beliebigen Raumkegelschnitt K_2 ersetzt wurde. Nunmehr soll gezeigt werden, daß der Zeemansche Satz *aufhört* zu gelten, wenn man an die Stelle von K_2 irgend eine *nicht ausgeartete* Fläche 2. Klasse Φ setzen wollte.

Es seien (r), (s), (t), (u) vier beliebige (nicht in einer Ebene gelegene) Raumpunkte mit den Tetraederkoordinaten (x_r, y_r, z_r, q_r) $(r = r, s, t, u)$, ferner Φ eine vorerst ganz beliebige Fläche 2. Klasse Φ:

$$\text{(I)} \qquad \Phi_{u^2} \equiv \sum\sum c_{ik} u_i u_k = 0.$$

Versteht man unter $(c_i rst)$ die aus den $c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4}$ und den Koordinaten der Punkte (r), (s), (t) gebildete Determinante, so sind die $(c_i rst)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Koordinaten des Poles P_{rst} der Ebene (rst) bez. Φ. Irgend ein Punkt der Geraden g_u, die einen Raumpunkt $P(x)$ mit P_{rst} verbindet, die also bez. Φ zur Ebene (rst) konjugiert ist, hat Koordinaten von der Form

$$\text{(1)} \qquad x + \lambda(c_1 rst), \quad y + \lambda(c_2 rst), \quad z + \lambda(c_3 rst), \quad q + \lambda(c_4 rst).$$

Setzt man daher zur Abkürzung:

$$\text{(2)} \qquad C_{rst} = \sum_i (c_i rst)(rst)_i,$$

wo die $(rst)_i$ die Determinanten der aus den Koordinaten x_k, y_k, z_k, q_k $(k = r, s, t)$ gebildeten Matrix sind, so sind die Koordinaten des Schnittpunktes P_u von g_u mit der Ebene (rst), wenn man noch die Determinante $(xrst)$ mit X_u bezeichnet, proportional den Werten:

$$\text{(3)} \qquad x C_{rst} - (c_1 rst) X_u, \quad y C_{rst} - (c_2 rst) X_u, \quad z C_{rst} - (c_3 rst) X_u,$$
$$q C_{rst} - (c_4 rst) X_u;$$

mithin ist der Ort der Punkte P, für die jeweils die vier zugehörigen Punkte P_u in einer Ebene liegen, eine Fläche 4. Ordnung F_4, deren Gleichung durch das Verschwinden der Determinante der Größen (3) angegeben wird:

$$\text{(II)} \quad 0 = F_4 \equiv | x C_{rst} - (c_1 rst) X_u, \; y C_{rst} - (c_2 rst) X_u, \; z C_{rst} - (c_3 rst) X_u,$$
$$q C_{rst} - (c_4 rst) X_u |.$$

Die rechte Seite von (II) ist in den Koordinaten der vier Punkte (r), (s), (t), (u) vom Grade 6, es läßt sich daher wiederum erwarten, daß sich der Faktor $(rstu)$ zweimal absondern lassen wird. *Indessen wird sich zeigen, daß diese Absonderung von $(rstu)$ sogar dreimal möglich ist.*

Entwickelt man die Determinante (II) analog wie in Nr. 7, so nimmt sie die Gestalt einer fünfreihigen Determinante an. Nimmt man nämlich die vier Indizes r, s, t, u stets in dieser Reihenfolge, und bedient sich der Abkürzungen:

$$\text{(4)} \quad \begin{cases} (xrst) = X_u, \; (xrtu) = X_s, \; (xrsu) = X_t, \; (xstu) = X_r, \\ (c_i rst) = C_i^{(u)}, \; (c_i rtu) = C_i^{(s)}, \; (c_i rsu) = C_i^{(t)}, \; (c_i stu) = C_i^{(r)}, \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

so geht F_4 über in:

$$
\text{(II}') \qquad F_4 \equiv \begin{vmatrix} C_{stu}X_sX_tX_u, & C_1^{(r)}, & C_2^{(r)}, & C_3^{(r)}, & C_4^{(r)} \\ C_{rtu}X_rX_tX_u, & C_1^{(s)}, & C_2^{(s)}, & C_3^{(s)}, & C_4^{(s)} \\ C_{rsu}X_rX_sX_u, & C_1^{(t)}, & C_2^{(t)}, & C_3^{(t)}, & C_4^{(t)} \\ C_{rst}X_rX_sX_t, & C_1^{(u)}, & C_2^{(u)}, & C_3^{(u)}, & C_4^{(u)} \\ X_rX_sX_tX_u, & x, & y, & z, & q \end{vmatrix}.
$$

Entwickelt man diese Determinante nach den Elementen der ersten Kolonne, und versteht unter Δ_{xk} $(k=r,s,t,u)$ die mit den Koordinaten der Punkte P und (r) geränderte Determinante der c_{ik}, während die letztere selbst mit $|c|$ bezeichnet wird, so kommt unter Anwendung elementarer Determinantensätze:

$$
\text{(III)} \qquad \begin{aligned} F_4 \equiv (rstu)^2[\,|c|(rstu)X_rX_sX_tX_u &+ C_{stu}X_sX_tX_u\Delta_{xr} \\ - C_{rtu}X_rX_tX_u\Delta_{xs} + C_{rsu}X_rX_sX_u\Delta_{xt} &- C_{rst}X_rX_sX_t\Delta_{xu}]. \end{aligned}
$$

Hier ist das in der eckigen Klammer von $(rstu)$ freie Aggregat weiter zu untersuchen.

Zunächst haben die C_{rst} eine einfache Bedeutung. Führt man die ersten Minoren ϱ_i, σ_i, τ_i, v_i $(i=1,2,3,4)$ von $(rstu)$ ein (d. s. die Koordinaten der vier Ebenen des Tetraeders (r), (s), (t), (u)), so wird vermöge (2) unmittelbar:

$$
\text{(5)} \qquad C_{rst} = \Phi_{v^2}, \text{ etc.}
$$

Dann soll gezeigt werden, daß, selbst wenn Δ_{xr} eine ganz *beliebige*, in den Koordinaten von P und (r) bilineare Form vorstellt, das Aggregat

$$
\text{(6)} \qquad \begin{aligned} G_4 \equiv \Phi_{\varrho^2}X_sX_tX_u\Delta_{xr} - \Phi_{\sigma^2}X_rX_tX_u\Delta_{xs} &+ \Phi_{\tau^2}X_rX_sX_u\Delta_{xt} \\ &- \Phi_{v^2}X_rX_sX_t\Delta_{xu} \end{aligned}
$$

den Faktor $(rstu)$ besitzt.

Aus der Annahme des Verschwindens von $(rstu)$ wird nämlich das Verschwinden von G_4 folgen.

Für $(rstu)=0$ darf man setzen:

$$
\text{(7)} \qquad x_u = \lambda_r x_r + \lambda_s x_s + \lambda_t x_t, \text{ etc.}
$$

Dann wird aber:

$$
\text{(8)} \qquad \begin{cases} X_r = \lambda_r X_u, \quad X_s = -\lambda_s X_u, \quad X_t = \lambda_t X_u, \\ \Phi_{\varrho^2} = \lambda_r^2\Phi_{v^2}, \quad \Phi_{\sigma^2} = \lambda_s^2\Phi_{v^2}, \quad \Phi_{\tau^2} = \lambda_t^2\Phi_{v^2}, \\ \Delta_{xu} = \lambda_r\Delta_{xr} + \lambda_s\Delta_{xs} + \lambda_t\Delta_{xt}, \end{cases}
$$

und G_4 (6) geht über in

$$
\text{(9)} \qquad \begin{aligned} G_4 \equiv \Phi_{v^2}X_u^3\{ -\lambda_r^2\Delta_{xr}\lambda_s\lambda_t - \lambda_s\Delta_{xs}\lambda_r\lambda_t - \lambda_t^2\Delta_{xt}\lambda_r\lambda_s \\ + (\lambda_r\Delta_{xr} + \lambda_s\Delta_{xs} + \lambda_t\Delta_{xt})\lambda_r\lambda_s\lambda_t\}, \end{aligned}
$$

verschwindet also in der Tat identisch.

Damit tritt aus der Form F_4 (III) der Faktor $(rstu)^3$ heraus, der Restfaktor stellt mithin eine Form vierten Grades in den Koordinaten x, y, z, q von P dar, die, solange $|c|$ von Null verschieden ist, sicher nicht zerfällt, wie aus (7) hervorgeht, wo im besondern die Punkte (r), (s), (t), (u) als Ecken des Koordinatentedraeders gewählt waren. Andererseits ist der nämliche Restfaktor nur vom *dritten* Grade in den Koordinaten der Punkte (r), (s), (t), (u), sein Verschwinden kann demnach keine in den Koordinaten aller fünf Punkte symmetrische Gestalt besitzen, d. h. der Zeemansche Satz gilt dann nicht mehr. Sobald dagegen die Determinante $|c|$ von Φ (I) verschwindet, also das Glied mit $X_r X_s X_t X_u$ in F_4 (III) herausfällt, wird der Faktor $\varDelta_x$ aus F_4 heraustreten und der Restfaktor F_3 wird sich wiederum nach Abspaltung von $(rstu)$ in eine in den Koordinaten aller fünf Punkte *symmetrische* Gestalt bringen lassen. In der Tat, sobald $|c| = 0$, artet die Fläche Φ in einen Kegelschnitt K_2 aus, und es wird z. B. die mit den x, y, z, q; x_r, y_r, z_r, q_r geränderte Determinante der c proportional dem Produkte $\varDelta_x \varDelta^{(r)}$, wo

$$(10) \qquad \varDelta_x \equiv \varDelta_1 x + \varDelta_2 y + \varDelta_3 z + \varDelta_4 q = 0$$

die Gleichung der Ebene von K_2 ist, und:

$$(11) \qquad \varDelta^{(r)} \equiv \varDelta_1 x_r + \varDelta_2 y_r + \varDelta_3 z_r + \varDelta_4 q_r.$$

Es tritt also jetzt aus der rechten Seite von F_4 (III) zunächst der Faktor $(rstu)^2 \varDelta_x$ heraus, und der Restfaktor wird:

$$(\mathrm{IV}) \qquad G_3 \equiv \Phi_{\varrho^2} X_s X_t X_u \varDelta^{(r)} - \Phi_{\sigma^2} X_r X_t X_u \varDelta^{(s)} + \Phi_{\tau^2} X_r X_s X_u \varDelta^{(t)} - \Phi_{\upsilon^2} X_r X_s X_t \varDelta^{(u)}.$$

Um nunmehr aus G_3 den Faktor $(rstu)$ nochmals abzuspalten und zu erkennen, daß der verbleibende Restfaktor in den Koordinaten der fünf Punkte (r), (s), (t), (u), (P) symmetrisch ist, bezeichne man die letzteren wiederum lieber mit (1), (2), (3), (4), (5), und stelle etwa den Punkt (4) linear durch die Punkte (1), (2), (3), (5) dar:

$$(12) \qquad x_4 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_5 x_5.$$

Dann gelten die Relationen:

$$(13) \quad \begin{cases} X_1 = (5234) = \lambda_1 (5123), \quad X_2 = (5134) = -\lambda_2 (5123), \\ X_3 = \lambda_3 (5123), \quad X_4 = (5123), \quad (1234) = -\lambda_5 (5123), \\ \varDelta^{(4)} = \lambda_1 \varDelta^{(1)} + \lambda_2 \varDelta^{(2)} + \lambda_3 \varDelta^{(3)} + \lambda_5 \varDelta^{(5)}, \\ \Phi_{(234)^2} = \lambda_1^2 \Phi_{(123)^2} + \lambda_5^2 \Phi_{(235)^2} + 2 \lambda_1 \lambda_5 \Phi_{(123), (235)}, \\ \Phi_{(134)^2} = \lambda_2^2 \Phi_{(123)^2} + \lambda_5^2 \Phi_{(135)^2} + 2 \lambda_2 \lambda_5 X_{(123), (135)}, \\ \Phi_{(124)^2} = \lambda_3^2 \Phi_{(123)^2} + \lambda_5^2 \Phi_{(125)^2} + 2 \lambda_3 \lambda_5 \Phi_{(123), (125)}, \end{cases}$$

wo z. B. $\Phi_{(123)^2}$ die Form Φ bedeutet, geschrieben in den Koordinaten $(123)_i$ der Ebene (123), und $\Phi_{(123),(235)}$ die hinsichtlich der $(123)_\varrho$, $(235)_i$ polarisierte Form.

Damit nimmt G_3 (IV) die Gestalt an:

$$\left\{\begin{aligned}
&(\mathrm{V}) && G_3 \equiv -(1234)\,H_3,\\
&(14) && H_3 = \lambda_2\lambda_3\lambda_5\Delta^{(1)}\Phi_{(235)^2} + \lambda_1\lambda_3\lambda_5\Delta^{(2)}\Phi_{(135)^2} + \lambda_1\lambda_2\lambda_5\Delta^{(3)}\Phi_{(125)^2}\\
& && \quad + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\{\Delta^{(1)}\Phi_{(123),(235)} - \Delta^{(2)}\Phi_{(123),(135)} + \Delta^{(3)}\Phi_{(123),(125)}\}\\
& && \quad - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\Delta^{(5)}\Phi_{(123)^2}.
\end{aligned}\right.$$

Läßt sich nun noch beweisen, daß die identische Relation besteht:

$$(15) \quad \Delta^{(1)}\Phi_{(123),(235)} - \Delta^{(2)}\Phi_{(123),(135)} + \Delta^{(3)}\Phi_{(123),(125)} - \Delta^{(5)}\Phi_{(123)^2} \equiv 0,$$

so erhält H_3 (14) die übersichtliche Gestalt

$$(\mathrm{VI}) \quad H_3 \equiv \lambda_2\lambda_3\lambda_5\Delta^{(1)}\Phi_{(235)^2} + \lambda_1\lambda_3\lambda_5\Delta^{(2)}\Phi_{(135)^2} + \lambda_1\lambda_2\lambda_5\Delta^{(3)}\Phi_{(125)^2} + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\Delta^{(5)}\Phi_{(123)^2},$$

die unmittelbar erkennen läßt, daß bei Vertauschung irgend zweier der vier Punkte (1), (2), (3), (4), oder auch bei Vertauschung eines der drei Punkte (1), (2), (3) mit (5) keine Änderung eintritt, die also, da man an Stelle der Formeln (12) ebensowohl den Punkt (3) durch die Punkte (1), (2), (4), (5) hätte ausdrücken können, hinsichtlich aller fünf Punkte *symmetrisch* ist.

Die Identität (15) geht aber daraus hervor, daß, wenn man die linke Seite in der Gestalt schreibt

$$\Phi_{(123),\,\Delta^{(1)}(235) - \Delta^{(2)}(135) + \Delta^{(3)}(125) - \Delta^{(5)}(123)},$$

und die vier Werte bildet:

$$\Delta^{(1)}(235)_x - \Delta^{(2)}(135)_x + \Delta^{(3)}(125)_x - \Delta^{(5)}(123)_x, \quad (x = x, y, z, q)$$

man bis auf den Faktor (1235) gerade die Koeffizienten $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ in (10) erhält, sodaß die Identität resultiert:

$$(16) \quad \Phi_{(123),\,\Delta^{(1)}(135) - \Delta^{(2)}(135) + \Delta^{(3)}(125) - \Delta^{5}(123)} \equiv (1235)\,\Phi_{(123),\,\Delta_i}. \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Aber die Polarenbildung $\Phi_{(123),\Delta_i}$ verschwindet bekanntlich identisch, was geometrisch aussagt, daß *jede* Ebene (123) zur Ebene (Δ) des Kegelschnitts Φ bez. Φ konjugiert ist.

Damit ist nicht nur der Zeemansche Raumsatz in der allgemeinsten Form bewiesen, sondern zugleich dargetan, daß er dann und nur dann gilt, wenn die Determinante der Fläche Φ verschwindet.

Und da die verwendeten Determinantensätze vom Grade der auftretenden Determinanten unabhängig sind, so gelten die entsprechenden Entwicklungen ohne weiteres auch für den Raum von n Dimensionen.

Königsberg i. Pr., 27. Mai 1905.

Geometrographische Beiträge.

Von JAKOB REUSCH in Thann i. E.

Im folgenden möchte ich einige Vereinfachungen und Ergänzungen zu Konstruktionen angeben, welche Herr E. Lemoine in seiner „Géométrographie“, Collection Scientia, und in (3) **1**, 334 dieser Zeitschrift mitgeteilt hat.

Zu Scientia XXXVIII. — Die vierte Proportionale x zu den drei Strecken m, n, p zu konstruieren.

Ist die größere der beiden Strecken n und p ausgezogen, so wird die auf dem Sekantensatze beruhende klassische Konstruktion geometrographisch, wenn man folgendermaßen verfährt.

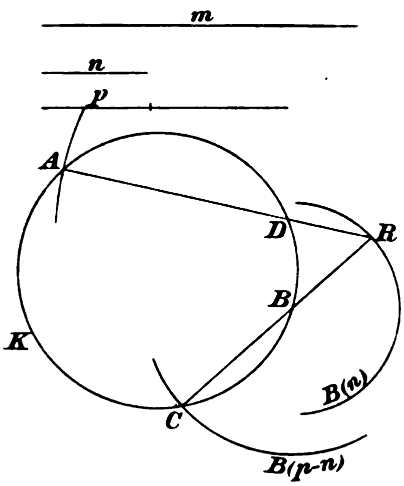


Fig. 1.

Geometrographische Konstruktion. — Sei $p > n$. Man beschreibe (Fig. 1) einen beliebigen, aber hinreichend großen Kreis $k\,[C_3]$ und um einen beliebigen Punkt B von k den Kreis $B(n)\,[3\,C_1 + C_2 + C_3]$. Dann schneide man n von p ab $[C_1 + C_3]$, beschreibe $B(p-n)$ $[2C_1 + C_3]$, der k in C schneidet, ziehe $BC\,[2\,R_1 + R_2]$, welche $B(n)$ in R trifft (R außerhalb BC). Dann ist $RC = n + (p-n) = p$. Ferner beschreibe man $R(m)\,[3\,C_1 + C_3]$, der k in A schneidet, und ziehe schließlich $RA\,[2\,R_1 + R_2]$. Ist D der Schnittpunkt von RA und k, so ist RD die gesuchte Strecke x.

Op.: $(4\,R_1 + 2\,R_2 + 9\,C_1 + C_2 + 5\,C_3) : S = 21$; $E = 13$; 2 Gerade, 5 Kreise.[1])

Zu Scientia LXIII. — Gegeben ein Punkt A auf einer Geraden BC; auf dieser Geraden Punkte A_1 derart zu bestimmen, daß man hat

$$\frac{AB}{AC} = \pm\,\frac{\overline{A_1B}^2}{\overline{A_1C}^2}.$$

---

1) Zur vorstehenden Aufgabe hat Herr R. Güntsche eine in geometrographischem Sinne einfachere Konstruktion angegeben (vgl. dieses Archiv (3) **9**, 258, 259, 1905).

Zweiter Fall. A liegt zwischen B und C.

Geometrographische Konstruktion. — Man konstruiere (Fig. 2) über BC als Durchmesser den Kreis $[2\,R_1 + R_2 + 4\,C_1 + 3\,C_3]$. Sei O sein Mittelpunkt, D und D' seine Schnittpunkte mit der Mittelsenkrechten von BC. Dann beschreibe man den Kreis $A(OB)$, der die Mittelsenkrechte in E trifft $[C_1 + C_3]$, nehme, während die Zirkelspitze in A bleibt, AO in den Zirkel und beschreibe den Kreis $E(AO)\,[2\,C_1 + C_3]$, der $O(OB)$ in F schneidet.

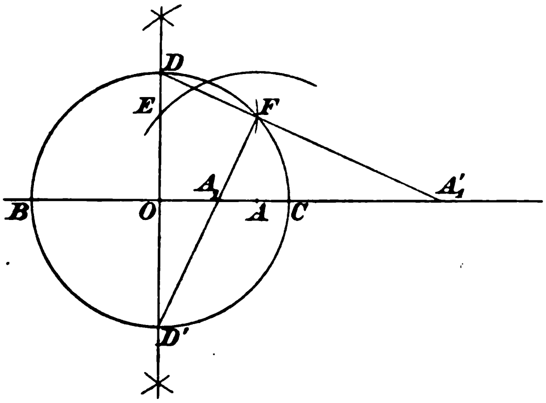


Fig. 2.

Schließlich ziehe man DF und $D'F\,[4\,R_1 + 2\,R_2]$. Diese treffen BC in den gesuchten Punkten A_1 und A_1'.

Beweis: $EFAO$ ein Rechteck und AF Höhe in dem rechtwinkligen $\triangle\,BFC$; ferner $DF \perp D'F$ und $\sphericalangle\,BFD' = CFD' = 45^0$, mithin BF und CF Halbierungslinien der rechten Winkel bei F. Darum

$$\overline{A_1B}^2 : \overline{A_1C}^2 = \overline{BF}^2 : \overline{CF}^2$$
$$= AB : AC \text{ etc.}$$

Op.: $(6R_1 + 3R_2 + 7C_1 + 5C_3) : S = 21$; $E = 13$; 3 Gerade, 5 Kreise.

(Reduktion um 2 Elementaroperationen.)

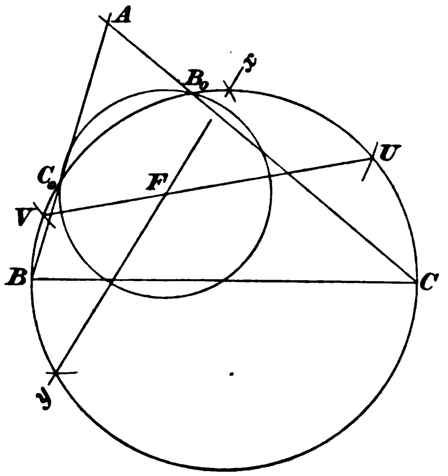


Fig. 3.

Zu Archiv der Math. u. Phys. (3) ***1****, 334, Nr. 16.* — ***Den Feuerbachschen Kreis des Dreiecks ABC zu konstruieren.***

Geometrographische Konstruktion. — Man konstruiere (Fig. 3) über BC als Durchmesser den Kreis k, der AB in C_0 und AC in B_0 schneidet $[2\,R_1 + R_2 + 4\,C_1 + 3\,C_3]$. Hierauf beschreibe man mit dem Radius $\frac{a}{2}$, den man im Zirkel hat, die Kreise $C_0\left(\frac{a}{2}\right)$ und

$B_0\left(\frac{a}{2}\right)[2\,C_1 + 2\,C_3]$. Der Kreis k werde von $C_0\left(\frac{a}{2}\right)$ in X und Y, von $B_0\left(\frac{a}{2}\right)$ in U und V getroffen. Man ziehe XY und UV, die sich in F schneiden $[4\,R_1 + 2\,R_2]$, und beschreibe $F(FC_0)\,[2\,C_1 + C_3]$. Dies ist der **Feuerbachsche** Kreis.

Op.: $(6R_1 + 3R_2 + 8C_1 + 6C_3) : S = 23;\; E = 14;$ 3 Geraden, 6 Kreise.

(Reduktion um 2 Elementaroperationen.)

Zu Scientia XLIII. — Eine Strecke AB nach dem goldenen Schnitte zu teilen.

Für die dritte Konstruktion schlage ich folgende Form vor, welche, falls nur die Strecke AB (nicht auch ihre Verlängerung) gezogen ist, und falls man nur den inneren Teilpunkt braucht, einen Vorteil bietet.

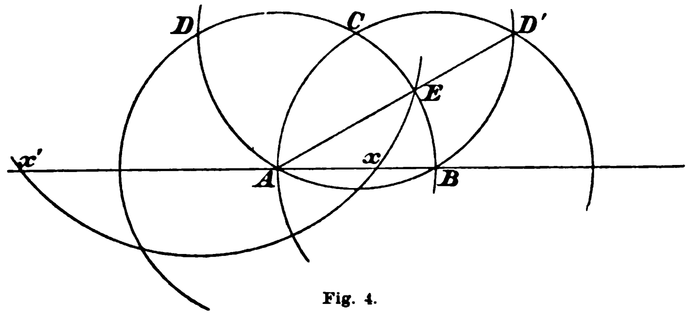


Fig. 4.

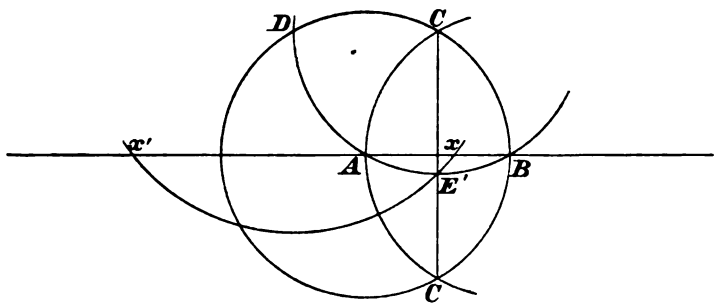


Fig. 5.

Geometrographische Konstruktion. — Man beschreibe (Fig. 4) $A(AB)$ und $B(AB)$, die sich in C schneiden $[3\,C_1 + 2\,C_3]$, dann $C(AB)$, der $A(AB)$ in D und $B(AB)$ in D' trifft $[C_1 + C_3]$. Dann ziehe man $AD'\,[2\,R_1 + R_2]$, welche $A(AB)$ in E trifft, und beschreibe $D(DE)$ $[2C_1 + C_3]$. Dieser trifft BC in den gesuchten Teilpunkten.

Op.: $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 4C_3) : S = 13;\; E = 8;$ 1 Gerade, 4 Kreise.

Anstatt die Gerade AD' zu ziehen und dann den Kreis $D(DE)$ zu beschreiben, kann man auch (Fig. 5) die Mittelsenkrechte CC' von

AB ziehen, welche $C(AB)$ in E' trifft, und dann den Kreis $D(DE')$ beschreiben.

Das Symbol bleibt dasselbe.

Zu Scientia XLVIII. — Die vier Ähnlichkeitsachsen dreier Kreise O_1, O_2, O_3 *zu konstruieren.*

Die Konstruktion läßt sich folgendermaßen mit $S = 37$ ausführen.

Geometrographische Konstruktion. — Man ziehe (Fig. 6) die Zentralen $O_1 O_2$, $O_2 O_3$, $O_3 O_1$ $[6 R_1 + 3 R_2]$. $O_1 O_2$ schneide den Kreis O_1 in B_1 und C_1, den Kreis O_2 in B_2 und C_2 ($B_1 C_1$ und $B_2 C_2$ von dem-

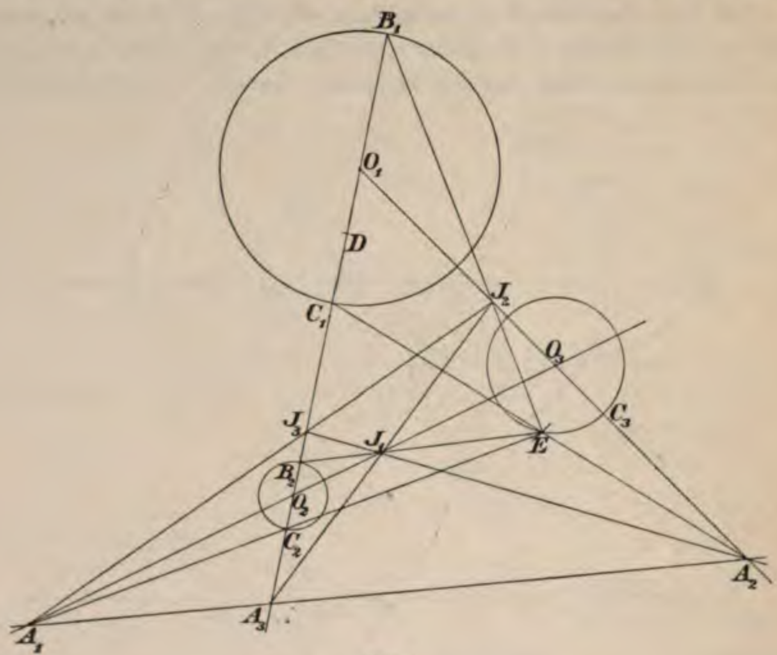


Fig. 6.

selben Sinne wie $O_1 O_2$); $O_3 O_1$ schneide den Kreis O_3 in C_3. Man beschreibe den Kreis $O_1(O_3 C_3)$ $[3 C_1 + C_3]$, der $O_1 O_2$ in D trifft. Ohne die Spitze von O_1 abzuheben, nehme man dann $O_1 O_3$ in den Zirkel und beschreibe $D(O_1 O_3)$ $[2 C_1 + C_3]$, der O_3 in E trifft (D und E auf derselben Seite von $O_1 O_3$). Dann ist $O_3 E$, welches nicht gezogen zu werden braucht, parallel zu $O_1 O_2$ und von demselben Sinne. Hierauf ziehe man $B_2 E$ und $C_2 E [4 R_1 + 2 R_2]$, welche auf $O_2 O_3$ den inneren Ähnlichkeitspunkt I_1 und den äußeren A_1 der Kreise O_2 und O_3 bestimmen. Man ziehe $B_1 E [2 R_1 + R_2]$, welche auf $O_1 O_3$ den inneren Ähnlichkeitspunkt I_2 der Kreise O_1 und O_3 festlegt. Dann ziehe man $A_1 I_2 [2 R_1 + R_2]$. Dies ist eine der Ähnlichkeitsachsen. $A_1 I_2$ schneide

$O_1 O_2$ in I_3. Man ziehe $I_3 I_1\,[2R_1 + R_2]$. Dies ist eine zweite Ähnlichkeitsachse. Man ziehe $I_2 I_1\,[2R_1 + R_2]$, welche $O_1 O_2$ in A_3 trifft. Dies ist eine dritte Ähnlichkeitsachse. Endlich ziehe man $A_1 A_3\,[2R_1 + R_2]$. Dies ist die vierte Ähnlichkeitsachse.

Op.: $(20R_1 + 10R_2 + 5C_1 + 2C_3)$; $S = 37$; $E = 25$; 10 Gerade, 2 Kreise.

12. Mai 1904.

Zu Scientia XV. — Durch den Punkt A außerhalb der Geraden g eine Gerade zu ziehen, die mit g einen Winkel $= \sphericalangle\, \sigma$ bildet.

Folgendermaßen läßt sich die Aufgabe mit $S = 15$ lösen:

Geometrographische Konstruktion (Fig. 7). — Mit einem hinreichend großen Radius ϱ beschreibe man um den Scheitel S von σ den Kreis

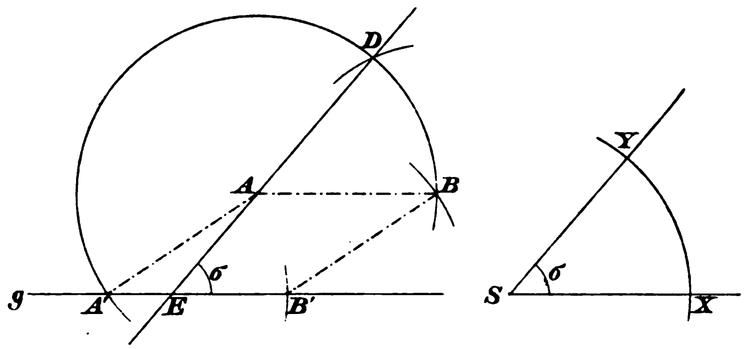


Fig. 7.

$S(\varrho)$, der die Schenkel in X und Y schneidet $[C_1 + C_3]$. Dann beschreibe man $A(\varrho)$, der g in A' trifft $[C_1 + C_3]$, dann $A'(\varrho)$, der g in B' trifft $[C_1 + C_3]$, dann $B'(\varrho)$, der $A(\varrho)$ in B trifft (A und B auf derselben Seite von g) $[C_1 + C_3]$.

Nun mache man in dem Kreise $A(\varrho)$ Bogen $BD = XY\,[3C_1 + C_3]$ und ziehe AD, welche g in E trifft $[2R_1 + R_2]$. Dies ist die verlangte Gerade; denn $AA'B'B$ ein Rhombus und $\sphericalangle\, AEB' = DAB = XSY = \sigma$.

Op.: $(2R_1 + R_2 + 7C_1 + 5C_3) = (15; 9)$ (1 Gerade, 5 Kreise).

23. Juni 1904.

Über eine Dreiecksaufgabe und bezügliche Sätze.

Von A. Kiefer in Zürich.

Ein Dreieck aus dem Höhenpunkt H und den Mittelpunkten M, m des Um- und Inkreises zu konstruieren.[1])

1. Bezeichnet man die Radien der beiden Kreise mit R, r, so ist bekanntlich

$$R^2 - 2Rr = \overline{Mm}^2.$$

Die Mitte N von HM ist der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises, dessen Radius $\frac{1}{2}R$ ist, und welcher den Inkreis berührt.

Somit $\frac{1}{2}R - r = Nm$ und durch Division der zwei Gleichungen

$$R = \frac{\overline{Mm}^2}{2\,Nm}$$

und ferner

$$r = \frac{\overline{Mm}^2 - 4\,\overline{Nm}^2}{2\,Nm}.$$

Legt man den Feuerbachschen Kreis und den Inkreis und berücksichtigt, daß der erstere die Fußpunkte der Lote enthält von den Punkten M, H auf die Dreiecksseiten, so ergeben sich die letzteren als gemeinsame Tangenten des Inkreises und der Ellipse, für welche M, H die Brennpunkte sind, und deren große Achse gleich R ist.

Eine der vier Tangenten stellt eine uneigentliche Lösung dar. Es gibt nämlich unendlich viele Kegelschnitte, welche die Seiten des Dreiecks berühren und die Mittelpunkte auf der Geraden mN haben. Alle diese Kegelschnitte bilden eine Schar, deren vierte Grundtangente auch den Inkreis und die benützte Ellipse berührt und die uneigentliche Lösung bildet.

Die Aufgabe läßt sich noch anders lösen: Die Tangentenpaare von M, H an die konzentrischen Kreise mit dem Mittelpunkte m bilden zwei halbperspektivische Strahleninvolutionen, deren Erzeugnis eine einfache zirkulare Kurve dritter Ordnung ist, welche den Umkreis in den Ecken des Dreiecks schneidet.

---

1) Für die bezügliche Literatur sei auf das Dezemberheft 1904 des Intermédiaire verwiesen, das auch eine analytische und eine geometrische Lösung der Aufgabe enthält. Vorliegende Arbeit war schon geschrieben, als ihrem Verfasser jenes Heft zu Gesicht kam.

Die Kurve ist nämlich der Ort eines Punktes, von dem aus die Strecken mH, mM unter gleichen Winkeln erscheinen; daher ist sie auch der Ort der Brennpunkte für die Kegelschnitte der oben erwähnten Schar. Unter diesen Kegelschnitten gibt es eine Parabel, deren einer Brennpunkt der unendlich ferne Punkt der Geraden mN ist; ihr anderer Brennpunkt wird also gefunden, indem man durch H, M die Parallelen zu mN zieht, um m den Kreis legt, der die Parallelen berührt und dann von M, H die Tangenten an den Kreis legt. Der Schnittpunkt der Tangenten ist der Brennpunkt Z der Parabel. Bekanntlich liegt derselbe auf dem Umkreis des Dreiecks ABC, und die Leitlinie der Parabel geht durch den Höhenpunkt H. Folglich ist die Mittelsenkrechte von ZH die vierte Grundtangente der Kegelschnittschar, oder die uneigentliche Lösung. Man hat folgende Konstruktion:

Sind H, M, m die gegebenen Punkte und ist N die Mitte von HM, so ziehe man durch H, M die Parallelen zu mN, lege um m den Kreis, der die Parallelen berührt, und ziehe von H, M die Tangenten an den Kreis. Ist Z ihr Schnittpunkt, so kann man den Umkreis des gesuchten Dreiecks legen, indem er durch Z geht und den Mittelpunkt M hat; hierauf ergibt sich der Feuerbachsche Kreis, der N zum Mittelpunkt, $\frac{1}{2}MZ$ als Radius hat, ferner der Inkreis, der m zum Mittelpunkt hat und den Feuerbachschen Kreis im Schnittpunkt mit der Verlängerung von Nm über m hinaus berührt. Legt man jetzt die Parabel mit Z als Brennpunkt und dem Lot von H auf Nm als Leitlinie, so ist die Mittelsenkrechte von ZH eine gemeinschaftliche Tangente von Parabel und Inkreis, und die drei anderen gemeinsamen Tangenten bilden das gesuchte Dreieck.

Die oben erwähnte Kurve dritter Ordnung schneidet den Umkreis außer in Z in den Ecken des Dreieckes und trifft die Seiten des Dreiecks in ihren Schnittpunkten mit der vierten Grundtangente. Denkt man sich um H als Mittelpunkt den Kreis gelegt, für den das Dreieck ABC ein Tripel ist und dann die oben aufgetretene Kegelschnittschar in bezug auf diesen Kreis polarisiert, so entsteht ein Kegelschnittbüschel, dessen Grundpunkte A, B, C und ein vierter Punkt Z' sind. Die Polarfigur der Parabel ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt derjenige Schnittpunkt des Feuerbachschen Kreises mit ZH ist, der nicht in der Mitte von ZH liegt; die Asymptoten der Hyperbel sind parallel zu den Halbierungslinien der von HZ und dem Lot von H auf Nm gebildeten Winkel. Die Hyperbel geht durch H; der vierte Grundpunkt Z' ist der zweite Schnittpunkt der Geraden ZH mit dem Umkreis, nämlich der Pol der vierten Grundtangente in bezug auf den Polarisationskreis. Wird auch die Kurve dritter Ordnung polarisiert, so entsteht eine Kurve dritter Klasse, welche die Seiten des Dreiecks berührt.

Die Fußpunktkurve von M in bezug auf den Inkreis schneidet den Feuerbachschen Kreis in den Mitten der Dreiecksseiten, und die Fußpunktkurve von H in bezug auf den Inkreis liefert in den Schnittpunkten mit dem Feuerbachschen Kreise die Fußpunkte der Dreieckshöhen. Da die Halbierungslinien eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels die Strecke MH harmonisch teilen, so kann man um m eine Gerade drehen, zum Schnittpunkt mit MH den vierten harmonischen aufsuchen und von dem letztern immer auf die Gerade das Lot ziehen; diese Lote umhüllen eine Parabel als das Erzeugnis von zwei projektivischen Punktreihen, deren eine im Unendlichen liegt. Nun ist ersichtlich, daß die Fußpunktkurve vom m in bezug auf die Parabel die erwähnte Kurve dritter Ordnung ist, und daß die Halbierungslinien der Dreiecksaußenwinkel die gemeinschaftlichen Tangenten sind zwischen der Parabel und der Ellipse, für welche m ein Brennpunkt und der Umkreis der Kreis über der großen Achse ist.

2. Die Aufgabe steht mit einigen Sätzen von Steiner in Zusammenhang, die in Bd. II seiner Werke, S. 673, Abschnitt e, angegeben sind. Hält man M, m fest, läßt R, r konstant sein, so bleibt auch $mN = \frac{1}{2}R - r$ konstant, und wenn das Dreieck ABC sich ändert, so beschreibt N einen Kreis mit dem Mittelpunkt m. Sind H, S Höhenpunkt und Schwerpunkt des Dreiecks, so ist bekanntlich $MH = 2MN$; $MS = \frac{2}{3}MN$, d. h.:

Der Ort des Höhenpunktes der Schar Dreiecke ABC, die festen Um- und Inkreis haben, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt h in der Geraden Mm liegt; ebenso ist der Ort des Schwerpunktes ein Kreis, dessen Mittelpunkt s in der gleichen Geraden liegt; die vier Punkte M, m, s, h sind harmonisch, und man hat $Mh : hm = 2 : 1 = Ms : sm$ oder $Ms : sm : Mh : mh = 2 : 1 : 6 : 3$.

Es seien A_0, B_0, C_0 die Punkte, in denen die Seiten des Dreiecks ABC den Inkreis berühren, so stehen die Seiten von Dreieck $A_0B_0C_0$ auf den Winkelhalbierenden von ABC senkrecht, und die Höhen des Dreiecks $A_0B_0C_0$ sind zu diesen Winkelhalbierenden parallel; die letzteren selber halbieren die bezüglichen Bogen des Umkreises. Siehe Abb. 1; aus derselben folgt

$$\frac{R}{r} = \frac{MA_1}{mA_0} = \frac{MB_1}{mB_0} = \frac{Mm}{mH_0},$$

wobei H_0 der Höhenpunkt des Dreiecks $A_0B_0C_0$ ist, d. h.:

Die Schar Dreiecke $A_0B_0C_0$ haben den Höhenpunkt H_0 gemein; derselbe liegt auf der Geraden Mm, und es verhält sich $Mm : mH_0 = R : r$.

Die Lote in m auf den Winkelhalbierenden mA, mB, mC mögen die zu ihnen parallelen Höhen des Dreieckes $A_0B_0C_0$ in P, Q, T und die bezüglichen Gegenseiten von ABC in P_1, Q_1, T_1 schneiden; dann folgt

$$r^2 = \overline{mA_0}^2 = mP \cdot mP_1$$
$$= \overline{mB_0}^2 = mQ \cdot mQ_1$$
$$= \overline{mC_0}^2 = mT \cdot mT_1.$$

Nun verlängere man mH_0 bis F, sodaß

$$r^2 = mH_0 \cdot mF$$

ist, so müssen die Vierecke PH_0FP_1, QH_0FQ_1, TH_0FT_1 Kreisvierecke mit rechten Winkeln bei F sein; die Punkte P_1, Q_1, T_1 liegen also auf der senkrechten Geraden durch F zu der Geraden Mm, und man hat

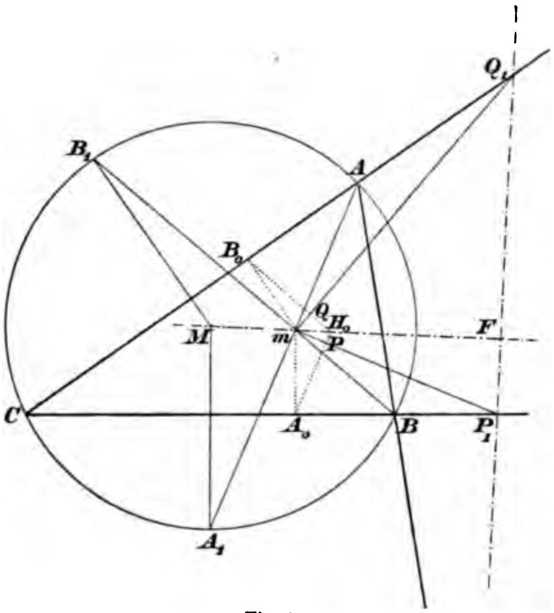


Fig. 1.

$$mF = \frac{r^2}{mH_0};$$

aber $mH_0 = Mm \cdot \frac{r}{R}$, also

$$mF = \frac{rR}{Mm}.$$

Aus $R^2 - 2Rr = \overline{Mm}^2$ folgt $r = \frac{R^2 - \overline{Mm}^2}{2R}$. Eingesetzt

$$mF = \frac{R^2 - \overline{Mm}^2}{2Mm}.$$

Bezeichnet man den Schnittpunkt der Geraden Mm mit der Potenzlinie von Um- und Inkreis mit G, so ist

$$\overline{MG}^2 - \overline{mG}^2 = R^2 - r^2,$$
$$MG - mG = Mm, \qquad MG + mG = \frac{R^2 - r^2}{Mm},$$
$$mG = \frac{R^2 - r^2 - \overline{Mm}^2}{2Mm}.$$

Somit ist der Abstand der Geraden $P_1Q_1T_1$ von jener Potenzlinie

$$mF - mG = GF = \frac{r^2}{2Mm}.$$

Wenn die Ecke A des Dreiecks ABC in A_1 gewählt wird, so ändert sich das Lot mP_1 und daher auch der Punkt P_1 nicht. Zusammengefaßt:

Errichtet man in m die Lote auf den Linien von m nach den Ecken irgend eines der Dreiecke ABC, so schneiden die Lote die Gegenseiten des Dreiecks in drei Punkten, die auf einer Geraden liegen, und diese Gerade ist für alle Dreiecke eine und dieselbe; sie steht auf der Geraden Mm senkrecht und hat von dem Punkte m den Abstand[1]) $mF = (R^2 - \overline{Mm}^2) : 2Mm$, und von der Potenzlinie des Um- und Inkreises den Abstand $GF = r^2 : 2Mm$. — Schneidet eine durch m gehende Gerade den Umkreis in zwei Punkten, so sind sie Ecken zweier verschiedener Dreiecke ABC, und die ihnen gegenüber liegenden Seiten treffen einander auf derselben genannten festen Geraden.

Die Steinerschen Sätze am Schlusse des Abschnittes e S. 674 ergeben sich durch entsprechende Spezialisierung der Formel für das Quadrat des Abstandes der zwei Kreismittelpunkte. Sollen sich die Kreise rechtwinklig schneiden, so muß der eine Kreis Ankreis sein, und man hat die Formel $\overline{Mm}^2 = R^2 + 2Rr$ zu nehmen und darin zu setzen $\overline{Mm}^2 = R^2 + r^2$. Wenn die Kreise gleich sein sollen, so ist in der gleichen Formel $R = r$ zu setzen.

3. Aus der Abbildung 1 ergeben sich einige Folgerungen. Für ein Dreieck $A_0B_0C_0$ ist m der Mittelpunkt des festen Umkreises, und daher liegt der Schwerpunkt S_0 so, daß $mS_0 : S_0H_0 = 1:2$ ist, d. h.:

Die Dreiecke $A_0B_0C_0$ haben alle den gleichen Schwerpunkt; derselbe liegt ebenfalls auf der Geraden Mm.

Die Mitte von mH_0 ist für das Dreieck $A_0B_0C_0$ der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises, dessen Radius $\frac{r}{2}$ ist, d. h.:

Die Dreiecke $A_0B_0C_0$ haben alle den gleichen Feuerbachschen Kreis; sein Mittelpunkt liegt ebenfalls auf der Geraden Mm. Dieser Kreis schneidet daher die Winkelhalbierenden Am, Bm, Cm des Dreieckes ABC in den Mitten der Dreiecksseiten B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 und halbiert auch die Linien H_0A_0, H_0B_0, H_0C_0.

Es ist ersichtlich, daß die Seiten der Dreiecke $A_0B_0C_0$ die Polarfigur des Umkreises M in bezug auf den Inkreis m umhüllen. Bezeichnet man für ein Dreieck $A_0B_0C_0$ den Mittelpunkt seines In-

1) In den Steinerschen Angaben ist mF mit mG verwechselt.

kreises mit μ, dessen Radius mit ϱ und die Mitte von mH_0 mit n, so hat man

$$r^2 - \overline{m\mu}^2 = 2r\varrho, \qquad \tfrac{1}{2}r - \mu n = \varrho,$$

folglich

$$r^2 - \overline{m\mu}^2 = 2r\,(\tfrac{1}{2}r - \mu n), \qquad \overline{m\mu}^2 = 2r \cdot \mu n.$$

Diese Relation sagt aus, daß für die Dreiecke $A_0B_0C_0$ die Mittelpunkte ihrer Inkreise auf einer Kurve vierter Ordnung liegen.

Weil $\sphericalangle\, mPH_0 = mQH_0 = mTH_0 = 90^0$, so liegen die Punkte P, Q, T auf dem Kreis mit mH_0 als Durchmesser, und weil mP, mQ, mT parallel zu B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 sind, so ist Dreieck PQT ähnlich $A_0B_0C_0$.

Für die Dreiecke PQT gelten also dieselben Sätze wie für die Dreiecke $A_0B_0C_0$.

Denkt man sich m, H_0 gewählt, r gegeben, so folgt aus den zwei Gleichungen

$$R^2 - \overline{Mm}^2 = 2Rr, \qquad \frac{R}{r} = \frac{mM}{mH_0},$$

$$R = \frac{2r^3}{r^2 - \overline{mH_0}^2}, \qquad Mm = \frac{2r^2 \cdot mH_0}{r^2 - \overline{mH_0}^2}, \quad \text{d. h.:}$$

Bewegt man die Ecken eines Dreiecks $A_0B_0C_0$ auf einem Kreis m (r), sodaß der Höhenpunkt H_0 des Dreiecks fest bleibt, so bilden die Kreistangenten in den Punkten A_0, B_0, C_0 solche Dreiecke ABC, die einem festen Kreise eingeschrieben sind.

Für die Dreiecke ABC bewegt sich, wie eingangs Abschnitt 2 gezeigt ist, der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises auf einem Kreis, und der Radius des erstern ist konstant $\frac{1}{2}R$, d. h.:

Die Feuerbachschen Kreise der Dreiecke ABC berühren zwei feste konzentrische Kreise.

Verlängert man mA_1, mB_1, mC_1 je um sich selber über A_1, B_1, C_1 hinaus, so sind die entstehenden Punkte m_1, m_2, m_3 die Ankreismittelpunkte des Dreieckes ABC, folglich:

Die Ankreismittelpunkte der Dreiecke ABC bilden Dreiecke $m_1m_2m_3$, die einem festen Kreis vom Radius $2R$ eingeschrieben sind; da die Dreiecke $m_1m_2m_3$ den festen Punkt m zum Höhenpunkt haben, so gelten für sie dieselben Sätze wie für die Dreiecke $A_0B_0C_0$.

4. Zum Schlusse soll die Abb. 2 benutzt werden, um einen einfachen Beweis des Feuerbachschen Satzes und einige metrische Relationen für ein Dreieck abzuleiten. (Abb. 2). Von dem Schnittpunkt I

der Winkelhalbierenden AA_1 mit der Gegenseite BC ziehe man das Lot auf die Linie DL, die zu MA parallel ist, so muß dieses Lot IK aus Symmetriegründen ($\sphericalangle CAM = BAH$) den Inkreis und auch den Ankreis, der zu BC gehört, berühren. Legt man den Inkreisradius mK' nach dem Berührungspunkt, so sind ND und mK' parallele Radien von Feuerbach- und Inkreis, und zum Beweise für die Berührung der zwei Kreise genügt es, nachzuweisen, daß die Gerade DK'

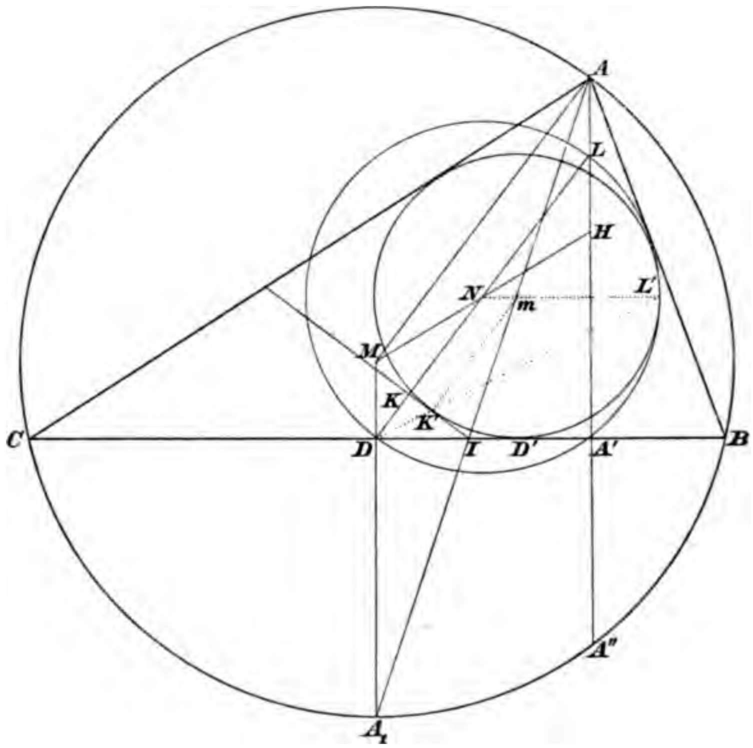


Fig. 2.

die zwei Kreise im gleichen Punkte L' schneidet, der dann äußerer Ähnlichkeitspunkt und Berührungspunkt ist. Die vier Punkte A, m, I, m_1 (wobei $mA_1 = A_1 m_1$ und m_1 der Mittelpunkt des Ankreises ist) sind harmonisch und also auch ihre Projektionen auf BC. Folglich

$$\overline{DD'}^2 = DI \cdot DA'.$$

Aus dem Kreisviereck $KIA'L$ mit rechten Winkeln bei K und A' folgt

$$DI \cdot DA' = DK \cdot DL, \quad \text{also} \quad \overline{DD'}^2 = DK \cdot DL.$$

Nun hat man für L' auf dem Inkreis $DK' \cdot DL' = \overline{DD'}^2$ und für L' auf dem Feuerbachschen Kreis wegen des Kreisviereckes $KK'L'L$ mit rechten Winkeln bei K und L'

$$DK' \cdot DL' = DK \cdot DL = \overline{DD'}^2,$$

wie es sein muß.

Auf dieselbe Weise zeigt man, daß der Feuerbachsche Kreis auch die Ankreise berührt.

Verlängert man die Höhe AA' des Dreieckes ABC bis zum Schnittpunkt A'' mit dem Umkreis, so ist bekanntlich

$$HA' = A'A'', \quad HA'' = 2HA'.$$

Die Potenz des Höhenpunktes H in bezug auf den Umkreis des Dreieckes ist daher $2 \cdot HA \cdot HA'$. Dieselbe ist aber auch $R^2 - \overline{HM}^2$, folglich

$$\overline{HM}^2 = R^2 - 2 \cdot HA \cdot HA'. \tag{1}$$

Da N in der Mitte von MH liegt und $Nm = \frac{1}{2}R - r$ ist, so hat man $\overline{Hm}^2 + \overline{Mm}^2 = 2\left(\frac{HM}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}R - r\right)^2$; setzt man hierin für HM^2 den obigen Wert und $\overline{Mm}^2 = R^2 - 2Rr$, so folgt

$$\overline{Hm}^2 = 2r^2 - HA \cdot HA'. \tag{2}$$

Wählt man den Mittelpunkt m_1 des Ankreises über BC, dessen Radius r_1 sein möge, so ist

$$\overline{Mm_1}^2 = R^2 + 2Rr_1, \qquad Nm_1 = \tfrac{1}{2}R + r_1,$$

$$\overline{Hm_1}^2 + \overline{Mm_1}^2 = 2\left(\frac{HM}{2}\right)^2 + 2\left(\tfrac{1}{2}R + r_1\right)^2.$$

Also

$$\overline{Hm_1}^2 = 2r_1^2 - HA \cdot HA', \tag{3}$$

und analog

$$\overline{Hm_2}^2 = 2r_2^2 - HA \cdot HA', \tag{4}$$

$$\overline{Hm_3}^2 = 2r_3^2 - HA \cdot HA'. \tag{5}$$

Betrachtet man H als gegeben und den Umkreis, beziehungsweise den Inkreis oder einen Ankreis gewählt, so enthalten die Formeln 1 bis 5 folgenden Satz:

Alle Dreiecke mit dem Höhenpunkt H, die dem Umkreis einbeschrieben und ebenso diejenigen, die dem Inkreis umschrieben oder einem Ankreis anbeschrieben werden können, sind Tripel für denjenigen Kreis, der H zum Mittelpunkt und den Radius $\sqrt{\frac{1}{2}(\overline{HM}^2 - R^2)}$ hat. Die Seiten der *ersten Dreiecke umhüllen den Polarkegelschnitt des Umkreises, und die Ecken der andern Dreiecke liegen auf den Polarkegelschnitten des In- und der Ankreise in bezug auf den Kreis mit dem Mittelpunkt H.*

Aus den Gleichungen (1), (2), (3), (4), (5) lassen sich verschiedene andere ableiten, z. B.

$$\overline{HM}^2-2\,\overline{Hm}^2=R^2-4r^2,\ \overline{HM}^2-2\,\overline{Hm}_1^2=R^2-4r_1^2,\ \overline{Hm}_1^2-\overline{Hm}_2^2=2(r_1^2-r_2^2),$$

$$\overline{Hm}_1^2+\overline{Hm}_2^2+\overline{Hm}_3^2-3\,\overline{Hm}^2=2(r_1^2+r_2^2+r_3^2-3r^2),$$

$$\overline{Hm}_1^2+\overline{Hm}_2^2-\overline{HM}^2=2(r_1^2+r_2^2)-R^2,$$

$$\overline{Hm}^2+\overline{Hm}_1^2+\overline{Hm}_2^2+\overline{Hm}_3^2-2\,\overline{HM}^2=2(r_1^2+r_2^2+r_3^2+r^2-R^2).$$

Zürich, Ende Dezember 1904.

Zum Beweise des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik.

Von CL. SCHAEFER in Breslau.

Bei allen Beweisen des zweiten Hauptsatzes wird von der Zustandsgleichung der idealen Gase in folgender Weise Gebrauch gemacht: Wenn ein System eine Wärmemenge dQ in einem umkehrbaren Prozesse aufnimmt, so läßt sich eine Funktion h so bestimmen, daß das Produkt $h\,dQ$ gleich dem totalen Differential einer Funktion S ist, die nur von dem augenblicklichen Zustande des Systems abhängt. Da dQ nach dem ersten Hauptsatz keineswegs ein totales Differential ist, so ist h der, oder genauer gesagt, *ein* integrierender Faktor von dQ. Es kann ferner gezeigt werden, daß h *nur* eine Funktion der Temperatur ist, bei der das betreffende System die Wärmemenge dQ aufnimmt, *dagegen unabhängig von allen individuellen Eigenschaften des Systems.* Ist also der integrierende Faktor h für eine einzige Substanz bekannt — er ist es in der Tat für ein ideales Gas — so ist er für alle Substanzen bestimmt. Unter Zuhilfenahme der bekannten thermodynamischen Eigenschaften eines idealen Gases ergibt sich $h=\frac{1}{T}$, wenn T die sogenannte absolute Temperatur bedeutet. Man gewinnt dann den zweiten Hauptsatz in der Form

$$\frac{dQ}{T}=dS. \tag{1}$$

Aus den obigen Darstellungen ergibt sich sofort, daß es *keineswegs prinzipiell* notwendig ist, sich auf die thermodynamischen Daten eines idealen Gases zu stützen, vielmehr würde *jede beliebige andere Substanz* dasselbe leisten, wenn nur eben diese Daten bekannt wären. Durch die Forschungen der letzten Jahre ist das nun in der Tat für eine zweite Substanz der Fall, nämlich für ein von gleich temperierten Wänden umschlossenes Vakuum, in dem die schwarze Strahlung herrscht, mit anderen Worten für den Kirchhoffschen Hohlraum.

Wir wissen durch die experimentellen Untersuchungen von Lummer und Pringsheim, daß die Energie pro Volumeneinheit eines solchen Hohlraumes gleich ist σT^4, wo T die Temperatur in Celsiusgraden, vermehrt um 273^0 bedeutet; σ ist eine Konstante, deren absoluter Wert bekannt ist, uns aber hier nicht interessiert.

Hat der Hohlraum das Volumen V, so ist die Energie

(2) $$U = \sigma T^4 V.$$

Auf die Wände dieses Hohlraumes wirkt der Maxwellschen Theorie zufolge ein Druck

(2) $$p = \frac{\sigma}{3} T^4,$$

dessen Existenz und Betrag durch die Untersuchungen von Lebedew, Nichols und Hull festgestellt ist. Das ist hinreichend, um in dem Beweise des zweiten Hauptsatzes das ideale Gas zu ersetzen durch den schwarzen Körper.

Wir wollen zunächst den ersten Hauptsatz auf diese „Substanz" anwenden, und zwar wollen wir zwei besonders einfache Fälle betrachten, nämlich einen *isothermen* und einen *adiabatischen* Prozeß, die beide *reversibel* geführt werden.

Setzt man in die Gleichung des ersten Hauptsatzes für U und p ihre Werte aus (2) und (3) ein, so folgt für den *isothermen* Vorgang:

$$dU = \sigma T^4 dV = dQ + A = dQ - \frac{\sigma}{3} T^4 dV,$$

oder

$$dQ = \frac{4}{3} \sigma T^4 dV;$$

für einen *endlichen* isothermen Prozeß folgt also

(4) $$Q = \frac{4}{3} \sigma T^4 (V_2 - V_1),$$

wenn V_2 des Volumen des Endzustandes, V_1 das des Anfangszustandes bedeutet.

Der *adiabatische* Vorgang ist charakterisiert durch $dQ = 0$; also liefert der erste Hauptsatz die Beziehung:

(5) $$dU = -p dV$$

oder mit Benutzung der Werte aus (1) und (3):

$$\sigma T^4 dV + 4\sigma T^3 V dT = -\frac{\sigma}{3} T^4 dV$$

oder

$$\tfrac{4}{3}\,\sigma T^4 dV + 4\sigma T^3 V dT = 0$$

oder

$$\tfrac{4}{3}\,\sigma\left(\frac{dV}{V} + 3\,\frac{dT}{T}\right) = 0$$

oder endlich

$$(6) \qquad T^3 \cdot V = \text{Constans.}$$

Das ist die Bedingung für einen *adiabatischen* Prozeß.

Der größeren Anschaulichkeit halber wollen wir nun noch einen reversibeln Carnotschen Kreisprozeß durchführen. Derselbe besteht bekanntlich aus 2 isothermen und 2 adiabatischen Veränderungen, wie aus dem Diagramm Fig. 1 zu ersehen ist.

Der Hohlraum befinde sich zu Anfang auf der Temperatur T_1 und habe das Volumen V_1. Durch isotherme Dilatation wird letzteres auf V_2 vermehrt, wobei aus einem Wärmereservoir von einer Temperatur, die nur unendlich wenig höher ist als T_1, die Wärmemenge Q_1 an den Hohlraum abgegeben wird. Nach Gleichung (4) ist

$$(7) \qquad Q_1 = \tfrac{4}{3}\,\sigma T_1^4 (V_2 - V_1).$$

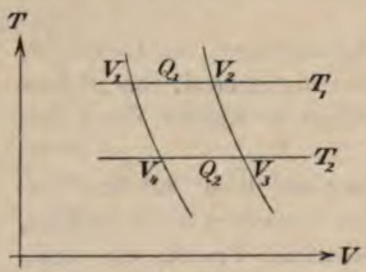


Fig. 1.

Dann wird die „Substanz" adiabatisch dilatiert, wobei die Temperatur auf T_2 sinkt und das Volumen auf V_3 steigt; im dritten Stadium wird durch isotherme Kompression bei der Temperatur T_2 das Volumen auf V_4 verkleinert, wobei aus einem zweiten Wärmereservoir (ebenfalls reversibel) die Wärmemenge $Q_2 = -Q_2'$ aufgenommen wird. Endlich wird wieder adiabatisch dilatiert, bis die Temperatur auf T_1 gesunken und das Volumen wieder den ursprünglichen Wert angenommen hat. Der Hohlraum ist dann wieder in seinem Anfangszustande, d. h. seine Energie ist unverändert; folglich liefert der erste Hauptsatz das Resultat:

$$Q_1 + Q_2 = Q_1 - Q_2' = -A = \sum\int p\,dV,$$

wobei die Summe über die 4 Teilprozesse zu erstrecken ist. Diese Summe kann man berechnen; es ist nämlich:

$$\sum\int p\,dV = \int_{T_1 V_1}^{T_1 V_2} p\,dV + \int_{T_1 V_2}^{T_2 V_3} p\,dV + \int_{T_2 V_3}^{T_2 V_4} p\,dV + \int_{T_2 V_4}^{T_1 V_1} p\,dV;$$

dabei ist, wie aus den Grenzbezeichnungen ersichtlich, das erste und dritte Integral auf *isothermem*, das zweite und vierte auf *adiabatischem* Wege zu erstrecken. Es ergibt sich so der Reihe nach:

$$\int_{T_1 V_1}^{T_1 V_2} p\,dV = \frac{\sigma}{3}\, T_1^4 (V_2 - V_1), \qquad \int_{T_2 V_3}^{T_2 V_4} p\,dV = \frac{\sigma}{3}\, T_2^4 (V_4 - V_3);$$

ferner nach Gleichung (5)

$$\int_{T_1 V_2}^{T_2 V_3} p\,dV = -\int_{T_1 V_2}^{T_2 V_3} dU = -\,\sigma\,(T_2^4 V_3 - T_1^4 V_2),$$

$$\int_{T_2 V_4}^{T_1 V_1} p\,dV = -\int_{T_2 V_4}^{T_1 V_1} dU = -\,\sigma\,(T_1^4\, V_1 - T_2^4 V_4).$$

Durch Addition folgt daraus

$$(8) \qquad \sum \int p\,dV = -A = \tfrac{4}{3}\sigma \{ T_1^4 (V_2 - V_1) + T_2^4 (V_4 - V_3) \}.$$

Diesen Ausdruck kann man vermittels Gleichung (6) vereinfachen. Beachtet man nämlich, daß V_2 und V_3 einerseits, und V_4 und V_1 andrerseits durch einen adiabatischen Prozeß ineinander übergeführt werden, so folgt:

$$T_1^3 V_2 = T_2^3 V_3, \qquad T_1^3 V_1 = T_2^3 V_4,$$

oder durch Subtraktion:

$$T_1^3 (V_2 - V_1) = T_2^3 (V_3 - V_4).$$

Dies in (8) eingesetzt, ergibt

$$(9) \qquad -A = \tfrac{4}{3}\sigma T_1^3 (V_2 - V_1)(T_1 - T_2).$$

A ist die dem System von außen zugeführte Arbeit. Setzt man $A = -A'$, so ist A' die vom System nach außen geleistete Arbeit; also geht (9) über in

$$(9\text{a}) \qquad A' = \tfrac{4}{3}\,\sigma\, T_1^3 (V_2 - V_1)\,(T_1 - T_2).$$

Das Verhältnis von A' zu der aus dem ersten Wärmereservoir entnommenen Wärmemenge Q_1 nennt man den *Wirkungsgrad* η des Carnotschen Kreisprozesses. Derselbe wird demgemäß nach (9a) und (7):

$$(10) \qquad \frac{A'}{Q_1} = \eta = \frac{\tfrac{4}{3}\sigma T_1^3 (V_2 - V_1)(T_1 - T_2)}{\tfrac{4}{3}\sigma T_1^4 (V_2 - V_1)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

das ist der nämliche Wert, den man bei Benutzung eines idealen Gases erhält, wie es sein muß.

Führt man für A' nach dem ersten Hauptsatz noch den Wert $Q_1 + Q_2$ ein, so folgt aus (10) das bekannte Resultat:

$$\frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad \text{oder} \quad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \tag{11}$$

Bevor wir nun zum Beweise des zweiten Hauptsatzes übergehen, wollen wir noch ein spezielles Resultat für unseren Hohlraum ableiten, indem wir, diesmal ganz allgemein, den ersten Hauptsatz darauf anwenden. Es ergibt sich

$$dU = d(\sigma T^4 V) = dQ - p\,dV = dQ - \frac{\sigma}{3}\,T^4 dV,$$
$$dQ = \tfrac{4}{3}\,T^4 dV + 4\sigma T^3 V dT.$$

Bilden wir nun den Ausdruck $\frac{dQ}{T}$, so folgt

$$\frac{dQ}{T} = \tfrac{4}{3}\,\sigma\{T^3 dV + 3T^2 dT\,V\} = \frac{4}{3}\,\sigma d(T^3 V), \tag{12}$$

d. h. für unseren Hohlraum ist $\frac{dQ}{T}$ ein *totales* Differential; der integrierende Faktor von dQ ist $\frac{1}{T}$.

Dieses Resultat werden wir zur Ableitung des zweiten Hauptsatzes benutzen.

Wir berechnen zu diesem Zwecke den Wirkungsgrad eines *unendlich kleinen* Carnotschen Prozesses, der mit einer beliebigen Substanz ausgeführt wird. Wir nehmen demgemäß an, daß die Temperaturen T_1 und T_2 sich nur um unendlich wenig von einander unterscheiden; also $T_1 - T_2 = \delta T$. Auch die beiden adiabatischen Kurven des Kreisprozesses unterscheiden sich nur um unendlich wenig von einander. Nehmen wir an, daß die adiabatische Bedingung für unsere Substanz durch die Gleichung $S =$ constans gegeben sei,

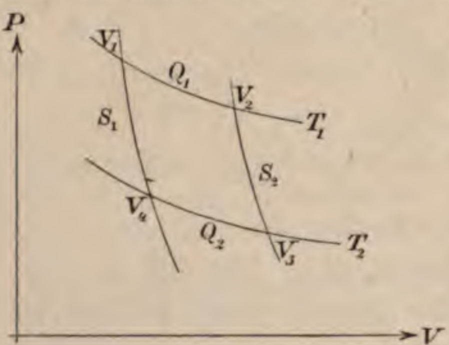


Fig. 2.

so erteilen wir der ersten Adiabate den Wert S_1 und der zweiten den Wert S_2 und setzen dabei fest, daß $S_1 - S_2 = \delta S$ sein soll. Man erhält so das Diagramm Fig. 2.

Statt den Zustand des Körpers anzugeben durch die Koordinaten p und V, können wir ihn offenbar auch gegeben denken durch korrespondierende Werte von T und S; d. h. wir fassen p (den Druck) und V (das Volumen) auf als Funktionen der neuen unabhängigen Veränderlichen T, S.

Die bei dem Kreisprozeß geleistete Arbeit wird durch den Inhalt des krummlinigen Vierecks $ABCD$ gegeben, welches aus geometrischen Gründen sich ergibt zu:

$$\delta A' = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\partial p}{\partial S}\frac{\partial V}{\partial T}\right)\delta S \cdot \delta T;$$

der Klammerausdruck ist die Substitutionsdeterminante von dp und dV als Funktionen von S und T.

Der Wirkungsgrad wird gegeben durch den Ausdruck:

$$\text{(13)} \qquad \frac{\delta A'}{\delta Q_1} = \frac{\delta Q_1 + \delta Q_2}{\delta Q_1} = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\partial p}{\partial S}\frac{\partial V}{\partial T}\right)\delta S\,\delta T}{\delta Q_1}.$$

Nun ist auf den Adiabaten, d. h. den Kurven $dS = 0$, auch die Gleichung $dQ = 0$ erfüllt, d. h. S und Q verschwinden gleichzeitig, sodaß man setzen kann

$$dS = h \cdot dQ,$$

wo h eine Funktion der Zustandsvariabeln ist, in der im allgemeinen aber noch als Parameter die individuellen Eigenschaften des betreffenden Körpers enthalten sein könnten. In unserem Falle also gilt die Doppelgleichung:

$$\text{(14)} \qquad \delta S = h_1 \delta Q_1 = -h_2 \delta Q_2 \; (= h_2 \delta Q_2')$$

wo h_1 und h_2 die den Temperaturen T_1 und T_2 zugehörigen Werte dieser Funktion bedeuten. Wir können also in (13) setzen

$$\text{(15)} \qquad \frac{\delta A'}{\delta Q_1} - \left\{\frac{\partial p}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial p}{\partial S}\frac{\partial V}{\partial T}\right) h\,\delta T = F(S,T)\,\delta T;$$

der Faktor von δT ist hier, um seine Natur zu charakterisieren, in die Form $F(S,T)$ gebracht worden.

Es läßt sich nun zeigen, daß $F(S,T)$ für *alle Körper* denselben Wert hat, wenn man diese Körper zwischen den nämlichen Temperaturen T_1 und T_2 arbeiten läßt; darauf gehen wir hier nicht ein, da dieser Beweis in allen Lehrbüchern der Thermodynamik eingesehen werden kann. F kann also nur Funktion *der Temperatur* sein, und zwar für alle Körper *die nämliche.*

Es ist nun immer nach Gleichung (14)

$$\delta Q_1 + \delta Q_2 = \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right)\delta S;$$

da $T_1 - T_2 = \delta T$ sehr klein ist, darf man setzen $\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} = \frac{\partial \frac{1}{h}}{\partial T}\delta T,$

also
$$\delta A' = \delta Q_1 + \delta Q_2 = \frac{\partial \frac{1}{h}}{\partial T}\delta T\,\delta S;$$

bildet man den Wirkungsgrad, so folgt

$$\frac{\delta A'}{\delta Q_1} = \frac{\delta Q_1 + \delta Q_2}{\delta Q_1} = h \frac{\frac{\delta \frac{1}{h}}{\partial T} \delta S \delta T}{\delta S} = h \frac{\partial \frac{1}{h}}{\partial T} \delta T. \tag{16}$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem andern in Gleichung (15), so folgt

$$h \frac{\partial \frac{1}{h}}{\partial T} = F(T) \qquad \text{oder} \qquad \frac{dh}{h} = - F(T)\, dT$$

$$\log h = - \int F(T)\, dT + \psi(S)$$

$$h = e^{-\int F(T)\, dT} \cdot \varphi(S).$$

$\varphi(S)$ ist dabei eine vollkommen willkürliche Funktion der andern Zustandsvariabeln S.

Wir erhalten also unendlich viele integrierende Faktoren: zu jedem $\varphi(S)$ gehört *ein* h. Setzen wir *willkürlich* $\varphi(S) = 1$, so ist durch Kenntnis des Wertes von h für eine *einzige* Substanz h für *alle* Substanzen bekannt.

Nach Gleichung (12) ist aber für einen Hohlraum $h = \frac{1}{T}$; folglich für *alle Substanzen* $h = \frac{1}{T}$. *Also ist allgemein*

$$\frac{dQ}{T} = dS \text{ ein totales Differential.}$$

Das ist der Inhalt des zweiten Hauptsatzes.[1])

Breslau, im Februar 1907.

---

1) Ich möchte hier auf eine Arbeit von A. Byk (Ann. d. Phys. **19**, 1906) hinweisen, die mit der vorliegenden mehrfache Berührungspunkte hat; Herr **Planck** hat mich auf dieselbe aufmerksam gemacht. Was die von mir gewählte Beweisform des zweiten Hauptsatzes angeht, so habe ich mich an Helmholtz's „Vorlesungen über die Theorie der Wärme" mit Absicht so eng als möglich angeschlossen, um mich hier kürzer fassen zu können.

Tangentenkonstruktionen für die Unikursalkurven, welche als Orthogonalprojektionen der Selbstschattengrenzen von Regelschraubenflächen auf eine achsennormale Ebene auftreten.

Von EDUARD JANISCH in Prag.

1. Hat man zwei konzentrische Kreise $\mathfrak{C}$, Π und in ihrer Ebene einen festen Punkt a gegeben, und zieht man durch a einen beliebigen Strahl $\mathfrak{a}$, der $\mathfrak{C}$ im Punkte c trifft, zeichnet man ferner in dem Punkte π auf Π, der mit c und dem Mittelpunkte o der beiden Kreise in gerader Linie liegt, die Tangente an Π, dann trifft diese die $\mathfrak{a}$ in einem Punkte p, der eine Unikursalkurve 4. Ordnung beschreibt, wenn $\mathfrak{a}$ um a sich dreht. Diese Kurve stellt die orthogonale Projektion auf die Zeichenebene der Eigenschattengrenze einer offenen Regelschraubenfläche vor, deren Achse durch o senkrecht zur Zeichenebene geht.[1])

Errichtet man noch in o auf dem Radius $oc\pi$ die Senkrechte, so trifft diese die $\mathfrak{a}$ in einem Punkte d, welcher ebenfalls einer Unikursalkurve 4. Ordnung angehört, die analoge Bedeutung wie die Kurve (p) hat, nur ist die in Betracht kommende Regelschraubenfläche eine geschlossene.

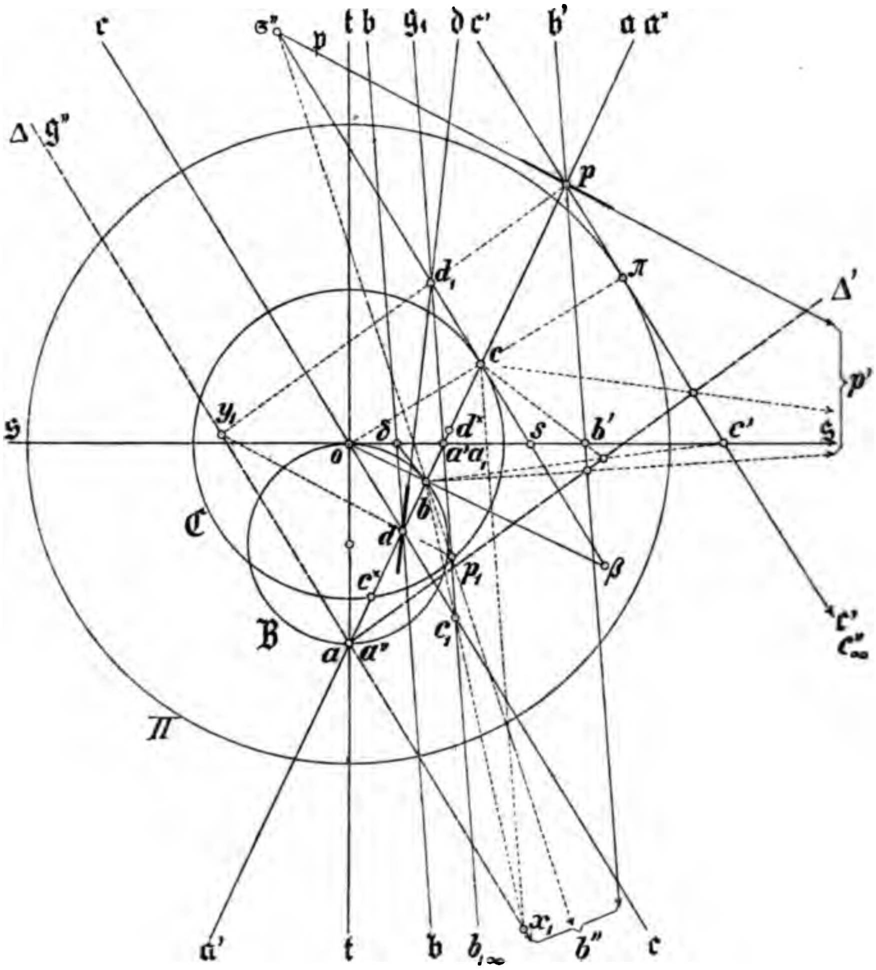
2. Eine Quelle für mannigfaltige einfache Tangentenkonstruktionen für die d- und die p-Kurve unter **1.** liefert die Auffassung dieser Kurven als tafelparallele Schnitte einer windschiefen Fläche 4. Grades, die wie folgt zustande kommt.

Es sei o, in der Tafel gelegen, die Spitze eines Rotationskegels (K) mit tafelnormaler Achse; $\mathfrak{C}$ und Π seien beziehungsweise die orthogonalen Projektionen auf die Zeichenebene zweier Parallelkreise $(\mathfrak{C})$, (Π) von (K), so daß $oc\pi$ die Projektion einer Mantellinie von (K) darstellt. In a endlich treffe die Zeichenebene eine zu ihr normale Gerade $(\mathfrak{A})$. Stellen wir uns nun vor, die $\mathfrak{a}$ sei die Projektion einer Tangente $(\mathfrak{a})$ des Kegels (K) und zwar jener, die den Parallelkreis $(\mathfrak{C})$ im Punkte (c), dessen Projektion der Punkt c ist, trifft, so bemerken wir, daß die $(\mathfrak{a})$ die $(\mathfrak{A})$ in einem Punkte (a) schneidet, dessen Projektion a ist. Der Ort der Geraden $(\mathfrak{a})$ ist ersichtlich eine windschiefe

1) Vgl. etwa Rohn-Papperitz, Darstellende Geometrie, 2. Bd., S. 144ff., wo eine Übersicht über die verschiedenen Gestalten gegeben wird, welche diese Kurve annehmen kann.

Fläche (F) vom 4. Grade, deren Tafelspur durch die d-Kurve dargestellt wird, während die p-Kurve die Projektion ihrer Schnittkurve mit der Ebene des Kreises (Π) bedeutet.

3. Die Doppelkurve 3. Ordnung der (F) zerfällt in die Gerade $(\mathfrak{A})$ und in eine Ellipse $(\mathfrak{B})$, deren Projektion der über ao als Durchmesser



beschriebene Kreis $\mathfrak{B}$ ist. Daß $(\mathfrak{A})$ eine Doppellinie der (F) vorstellt, sieht man unmittelbar ein, denn die tafelnormale Ebene durch ao ist ja eine Symmetrieebene von (F).

Bemerkt man, daß in der tafelprojizierenden Ebene durch $(\mathfrak{a})$ noch eine zweite Erzeugende $(\mathfrak{a}^*)$ der (F) enthalten ist, deren Schnittpunkte (c^*) und (d^*) mit $(\mathfrak{C})$ beziehungsweise mit der Tafel leicht angegeben werden können [denn es ist offenbar c^* der zweite Schnittpunkt von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{a}$, während d^* so liegt, daß cd^* und c^*d gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind], so findet man die Projektion b des Schnittpunktes $b^* = (\mathfrak{a}) \times (\mathfrak{a}^*)$, welcher der Doppelkurve $(\mathfrak{B})$ angehört, als Mitte von cc^* oder also als Fußpunkt des Lotes aus o auf $\mathfrak{a}$.

Der Ort von b ist mithin der über ao als Durchmesser beschriebene Kreis. Bedenken wir jetzt, daß die $o(b)$ in der Tangentialebene des Kegels (K) längs $o(c)$ liegt, so stellt uns β — der Schnitt der Tangente an $\mathfrak{C}$ in c mit der ob — die Projektion des Spurpunktes (β) der $o(b)$ mit der Ebene des Parallelkreises $(\mathfrak{C})$ dar. Der Ort von β ist aber die Polare von a für $\mathfrak{C}$, somit ist $(\mathfrak{B})$ eine ebene Kurve und zwar ist die zu ao normale Gerade $\mathfrak{s}$ durch o die Tafelspur der Ellipse $(\mathfrak{B})$.

4. Wir sind nunmehr in der Lage für irgend einen Punkt der $(\mathfrak{a})$ die Tangentialebene der (F) anzugeben, denn wir kennen die Tangentialebenen in den drei Punkten (a), (b), (c). Nennen wir $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Tafelspuren dieser Tangentialebenen, so ist $\mathfrak{a}$ identisch mit der gleichbezeichneten Projektion der $(\mathfrak{a})$, und $\mathfrak{c}$ ist die Tafelspur der Berührungsebene an (K) längs $o(c)$. Die $\mathfrak{b}$ ist die Gerade $d\delta$, wo δ den Schnittpunkt von $\mathfrak{s}$ mit der Tangente an den Kreis $\mathfrak{B}$ im Punkte b bedeutet. Dieser Punkt ist die Mitte der Strecke, die von o und dem Punkte $\mathfrak{a} \times \mathfrak{s}$ begrenzt wird. Um für einen vierten Punkt (p) der $(\mathfrak{a})$ die Tafelspur $\mathfrak{p}$ der Tangentialebene verzeichnen zu können, berücksichtigen wir die bekannte Beziehung, daß das Doppelverhältnis $((a)(b)(c)(p))$ gleich ist dem Doppelverhältnisse der vier Tangentialebenen in (a), (b), (c), (p), welches aber denselben Wert hat wie das Doppelverhältnis $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{p})$ der vier Tafelspuren jener Ebenen. Da die Projektionen a, b, c, p ein Doppelverhältnis besitzen, welches dem Doppelverhältnisse der vier Punkte im Raume gleichkommt, so haben wir mithin $\mathfrak{p}$ so zu bestimmen, daß $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{p}) = (abcp)$ ist. Man sieht leicht ein, daß die $\mathfrak{p}$ eine Parallele der Tangente in p an die Projektion des tafelparallelen ebenen Schnittes der (F) durch (p) darstellt, so daß jede Ermittelung von $\mathfrak{p}$ zugleich das Problem der Tangentenkonstruktion der p-Kurve löst.

5. Wir wenden die Ausführung des vorigen Artikels zunächst an, um die Tafelspur $\mathfrak{d}$ der Tangentialebene im Tafelspurpunkte d der $(\mathfrak{a})$ zu konstruieren. Die $\mathfrak{d}$ ist offenbar zugleich Tangente im Punkte d der d-Kurve. Wir können unmittelbar den Schnittpunkt d_1 der $\mathfrak{d}$ mit irgend einer Geraden $\mathfrak{g}_1$ der Zeichenebene ermitteln. Nennen wir $\mathfrak{a}_1$, b_1, c_1 die Schnittpunkte der $\mathfrak{g}_1$ mit beziehungsweise $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, so ist $(abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$, und es gibt also der Punkt $x_1 = bc_1 \times cb_1$, mit a verbunden, die Direktionsachse $\varDelta$ der beiden projektiven Punktreihen

$(abcd\ldots)$ und $(a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots)$, so daß d_1 etwa erhalten werden kann, indem wir den Schnittpunkt von Δ mit $c_1 d$ verbinden mit c und die Verbindungslinie mit der $\mathfrak{g}_1$ in d_1 zum Schnitte bringen. In der Figur erscheint die $\mathfrak{g}_1$ als die Parallele zu $\mathfrak{b}$ durch den Schnittpunkt $\mathfrak{a} \times \mathfrak{s}$, der also den Punkt a_1 darstellt, angenommen. Der Punkt $\mathfrak{b}_1$ liegt unendlich fern und $c_1 = \mathfrak{c} \times \mathfrak{g}_1$ liegt im Endlichen.

Es läßt sich leicht zeigen, daß in diesem Falle $\Delta = a x_1$ parallel zu $\mathfrak{c}$ läuft. Wegen $(\overline{ob})^2 = \overline{bc} \cdot \overline{bd} = \overline{ba} \cdot \overline{ba_1}$ besteht die Proportion $\frac{\overline{ba_1}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{bd}}{\overline{ba}}$. Nun ist, da $cx_1 \parallel a_1 c_1$, $\frac{\overline{ba_1}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{bc_1}}{\overline{bx_1}}$; und daher ist $\frac{\overline{bc_1}}{\overline{bx_1}} = \frac{\overline{bd}}{\overline{ba}}$, woraus unmittelbar unsere Behauptung $\Delta = a x_1$ parallel zu $c_1 d$ oder $\mathfrak{c}$ folgt. Da die cx_1 offenbar die Strecke $a_1 s$ (s Schnittpunkt von $\mathfrak{s}$ mit der Tangente an $\mathfrak{C}$ in c halbiert, so ist $\overline{d_1 s} = 2\,\overline{cs}$.[1]) Verbinden wir p mit d_1 und den Schnittpunkt y_1 der Δ und der pd_1 mit d, so trifft diese Verbindungslinie die $\mathfrak{g}_1$ in p_1, und dp_1 stellt die Tafelspur der Tangentialebene in (p) der (F) vor, d. h. die Parallele zu $p_1 d$ durch p liefert die Tangente der p-Kurve im Punkte p.

6. Von der Ermittelung des Punktes d_1 unabhängige Konstruktionen für die Tangente in p ergeben sich natürlich ebenfalls sehr leicht. Ziehen wir durch p die Parallelen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ zu bezw. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ($\mathfrak{a}' \equiv \mathfrak{a}$); so ist, wenn $\mathfrak{p}'$ die Tangente in p bedeutet: $(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{p}') = (abcp)$. Nennen wir a', b', c', p' die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden $\mathfrak{s}$ mit den Strahlen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{p}'$, so ist auch $(a'b'c'p') = (abcp)$, und die Verbindungslinie von a mit dem Schnittpunkte $bc' \times cb'$ ist die Direktionsachse der beiden projektiven Reihen $(a'b'c'p')$ und $(abcp)$, so daß p' erhalten werden kann als Schnitt von $\mathfrak{s}$ mit der Verbindungslinie der Punkte c und $\Delta' \times \mathfrak{c}'$ oder b und $\Delta' \times \mathfrak{b}'$.

Ziehen wir speziell durch a eine Gerade $\mathfrak{g}''$, so schneidet diese den Büschel $(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{p}')$ in einer Punktreihe $(a''b''c''p'')$, welche mit der Reihe $(abcp)$ perspektiv liegt, und es ist daher der Schnittpunkt von bb'' und cc'' das Perspektivitätszentrum σ'', welches offenbar der $\mathfrak{p}''$ angehört. In der Figur ist $\mathfrak{g}''$ mit Δ identisch angenommen.

Prag, 24. Juli 1904.

1) Vgl. Wiener, Darstellende Geometrie, 2. Bd., S. 503.

La spirale de Pappus;

Par M. GINO LORIA à Gênes.

1. Un célèbre géomètre grec, Pappus d'Alexandrie, a remarqué[1]) que, comme on fait naître dans le plan une spirale par la trace d'un point qui se meut avec une vitesse constante sur une droite tournant autour d'un de ses points avec une vitesse également constante, on peut engendrer sur une sphère une spirale d'une manière semblable. Imaginons, en effet, qu'un grand cercle de la sphère (dont nous appellerons O le centre et R le rayon) tourne uniformément autour d'un de ses diamètres (l'*axe* de la figure) en partant d'une certaine position initiale; supposons encore qu'un point P parte d'une des extrémités A de l'axe et parcoure la périphérie de ce cercle avec un mouvement également uniforme et tel que, lorsque le plan du cercle a fait un tour complet, le point P ait décrit un quadrant.[2]) Par le concours de ce double mouvement le point P tracera sur la sphère une courbe, qui est l'analogue de la spirale d'Archimède, et qu'on peut bien appeler (ce que nous ferons) «spirale de Pappus».

Pour la représenter analytiquement nous nous servirons d'un système de coordonnées polaires sur la sphère: à savoir l'arc ϱ du grand cercle compris entre le point considéré et le point A et l'angle ω que l'arc AP fait avec la position initiale du grand cercle mobile. Alors les conditions imposées au mouvement donnent tout de suite la relation

$$\omega = 4\varrho \tag{1}$$

qui est précisément l'équation polaire de la courbe dont il s'agit.

A l'aide de cette équation il est aisé[3]) d'établir une propriété métrique dont jouit la courbe de Pappus et qui n'a pas échappé à ce géomètre. En effet, la différentielle dS de l'aire balayée par l'arc AP lorsque le point P décrit la courbe, s'exprime par la formule

$$dS = R^2 d\omega\,(1 - \cos\varrho)$$

1) *Collectiones mathematicae* (ed. Hultsch), p. 264.

2) Cette dernière condition peut bien être supprimée sans qu'il en résulte la perte d'un bon nombre des propriétés de la courbe en question; en l'ôtant on voit naître toute une classe de courbes, quelques-unes algébriques, d'autres transcendantes.

3) Comp. mon ouvrage *Le scienze esatte nell' antica Grecia.* Libro II: *Il periodo argenteo della geometria greca,* p. 12.

ou bien, à cause de l'équation (1),

$$dS = 4R^2 d\varrho\,(1-\cos\varrho);$$

en intégrant dépuis $\varrho = 0$ jusqu'à $\varrho = \frac{\pi}{2}$ on trouve:

$$S = 4R^2(\varrho - \sin\varrho)_0^{\frac{\pi}{2}} = 4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot$$

Mais la surface E de la demi-sphère est $= 2\pi R^2$, par conséquent

$$\frac{E}{S} = \frac{\pi}{2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}},$$

égalité qui exprime la propriété citée.

2. Pour parvenir à une représentation des coordonnées de la spirale de Pappus en fonction d'un paramètre, nous choisirons un système d'axes cartésiens orthogonaux, ayant l'axe des z parallèle à l'axe de la figure. Alors, si a, b, c sont les coordonnées du centre O de la sphère et x, y, z celles du point P, on aura

$$x = a + R\sin\varrho\cdot\cos\omega,\quad y = b + R\sin\varrho\cdot\sin\omega,\quad z = c + R\cos\varrho,$$

c'est-à-dire, à cause de l'équation (1),

$$(2)\quad x = a + R\sin\varrho\cdot\cos 4\varrho,\quad y = b + R\sin\varrho\cdot\sin 4\varrho,\quad z = c + R\cos\varrho,$$

ou bien

$$(3)\qquad \begin{cases} x = a + \frac{R}{2}(\sin 5\varrho - \sin 3\varrho) \\ y = b + \frac{R}{2}(\cos 3\varrho - \cos 5\varrho) \\ z = c + R\cos\varrho. \end{cases}$$

Or si l'on pose $t = \operatorname{tg}\frac{\varrho}{2}$, ces équations se transforment en d'autres qui donnent x, y, z comme fonctions rationnelles entières de degrés ≤ 10 de la variable t. Cela prouve que (tandis que la spirale d'Archimède est une courbe transcendente):

La spirale de Pappus est une courbe rationnelle du dixième ordre.[1])

1) Tout le monde sait que les anciens ont connu une courbe gauche *du quatrième ordre:* c'est celle dont s'est servi Archytas pour résoudre le problème de Délos. Mais, si je ne me trompe, personne jusqu' à présent n'avait fait la remarque qu'ils en ont considéré une d'un degré aussi élevé que la spirale de Pappus; M. Gomes Teixeira, qui a appliqué à cette courbe les méthodes et les théories de l'analyse infinitésimale (voyez son *Tratados de las curvas especiales notables;* Madrid 1905, p. 521—524), n'a pas remarqué, au moins explicitement, qu'il s'agissait d'une courbe algébrique.

Il est en général plus avantageux de conserver ϱ comme variable indépendante et par suite les équations (2) ou (3) comme équations de la courbe.

3. De ces équations on tire

$$\frac{y-b}{x-a} = \operatorname{tg} 4\varrho, \quad \overline{x-a}^2 + \overline{y-b}^2 = R^2 \sin^2\varrho;$$

si donc on pose

$$\frac{y-b}{x-a} = \operatorname{tg}\varphi, \quad \sqrt{\overline{x-a}^2 + \overline{y-b}^2} = u,$$

on aura

$$\varphi = 4\varrho, \qquad u = R\sin\varrho$$

d'où, par l'élimination de ϱ,

$$u = R\sin\frac{\varphi}{4}; \tag{4}$$

c'est l'équation, en coordonnées polaires u, φ de la projection orthogonale sur le plan xy, de la spirale de Pappus; or l'équation (4) représente une rosace,[1]) donc:

La projection orthogonale de la spirale de Pappus sur un plan normal à l'axe est une rosace (du dixième ordre).

On parvient à deux autres courbes du même ordre, mais qui n'appartiennent, à ce que je crois, à aucune classe connue, en projetant la spirale de Pappus (sur le plan xz, c'est-à-dire) sur un plan parallèle à la position initiale du cercle mobile ou bien (sur le plan yz, c'est-à-dire) sur un plan parallèle à l'axe de la figure et normal à cette position initiale.

Si au contraire on projette la courbe du centre O (a, b, c) de la sphère donnée sur le plan xy, on parvient à la courbe ayant les équations suivantes:

$$x = a - \frac{c(\sin 5\varrho - \sin 3\varrho)}{2\cos\varrho}, \quad y = b - \frac{c(\cos 3\varrho - \cos 5\varrho)}{2\cos\varrho}.$$

Or ces équations donnent

$$\overline{x-a}^2 + \overline{y-b}^2 = (c\operatorname{tg}\varrho)^2, \quad \frac{y-b}{x-a} = \operatorname{tg} 4\varrho,$$

et si l'on introduit deréchef les variables u, φ définies ci-dessus, on arrive à l'équation polaire de la projection:

$$u = c\operatorname{tg}\frac{\varrho}{4}. \tag{5}$$

---

1) Comp. *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven* (Leipzig 1902, B. G. Teubner), p. 297 et suiv.

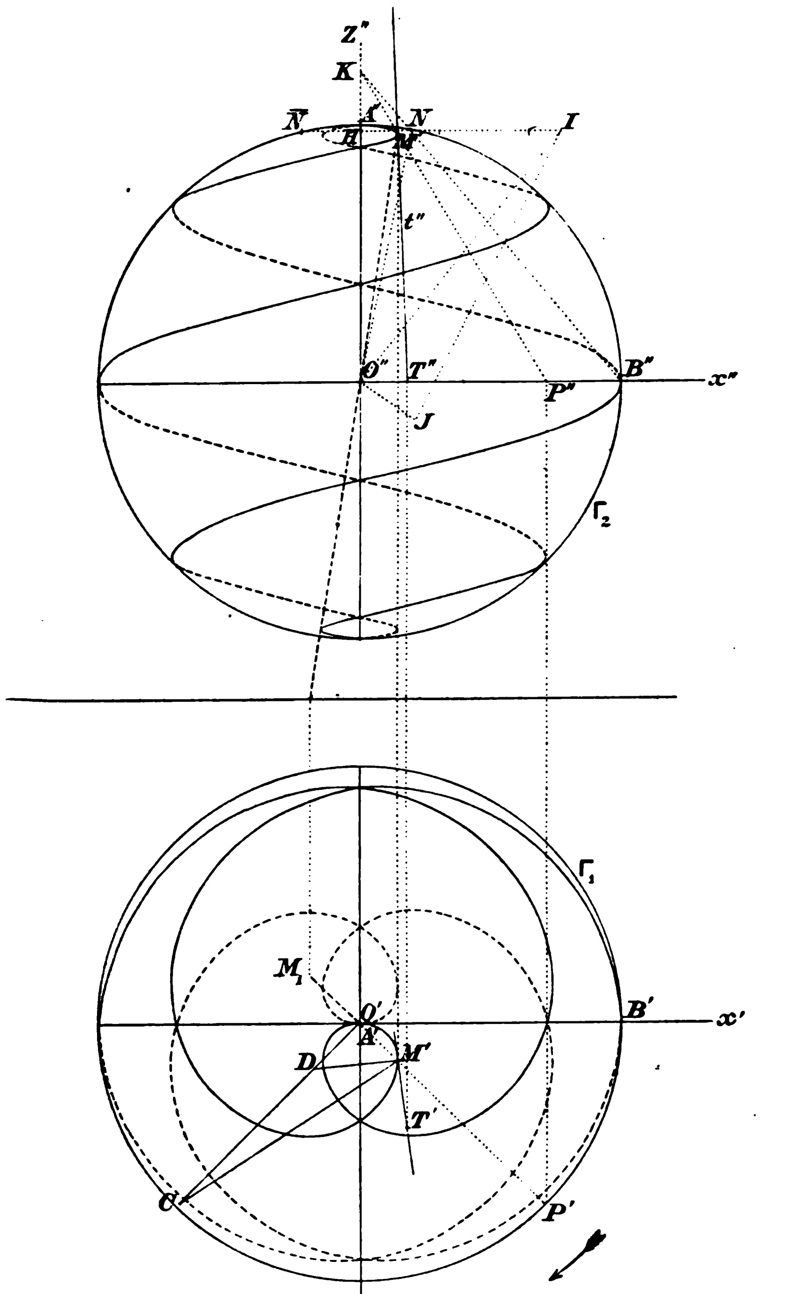
Or cette équation représente un nœud[1]); donc:

La projection de la spirale de Pappus faite du centre de la sph où elle est tracée sur un plan normal à l'axe est un nœud (du dixième ordr

4. On peut représenter graphiquement d'une manière assez commo la spirale de Pappus en ayant recours à la méthode de Monge et choisissant les plans horizontal et vertical de projection parallèles re aux plans xy et xz de la représentation analytique. Marquons (voyez figure) les points $O \equiv (O', O'')$ et $A \equiv (A', A'')$ avec les conditions q A' coïncide avec O' et que $O' (= A')$, O'', A'' se trouvent sur la mê *ordonnée* (c'est-à-dire sur la même perpendiculaire à la ligne de terr Alors tous les points réels de la sphère donnée se projetteront ho zontalement (verticalement) à l'intérieur du cercle Γ_1 (ou Γ_2) de centre (ou O'') et rayon R. Soit $B = (B', B'')$ la position à laquelle arr le point générateur de la courbe lorsque le grand cercle consid a fait un tour complet autour de l'axe de la figure. Divisons quadrant $A''B''$ en un certain nombre n (p. ex. 8) de parties égales faisons subir la même division au cercle Γ_1; numérotons les points division de manière que la numération procède sur le quadrant de vers B'' et sur Γ_1 depuis B' dans le sens de la rotation du gra cercle générateur; soient N et P' deux points de divisions homologues et le point où $O''B''$ est coupée par l'ordonnée de P. La corde NH du cercle Γ_2 sera la projection verticale d'un petit cercle de la sph sur lequel tombe le point de la spirale de Pappus relatif au quadrant A Or celui-ci se projette verticalement dans le quadrant elliptique dont O'' et $O''P''$ sont les demi-axes; par conséquent M'' n'est que le point ce quadrant elliptique est coupé par la droite NH. Mais ce quadra et le quadrant circulaire $A''B''$ sont des figures correspondantes da une affinité dont $O''A''$ est l'axe et B'', P'' un couple de points hom logues; donc M'' est le point qui correspond dans cette affinité point N. Pour le construire il suffit évidemment de déterminer point K où se coupent les droites $B''N$ et $O''A''$ et d'unir ce point à cette droite coupera NA'' au point M'' cherché. L'ordonnée du point rencontre le rayon $O'P'$ au point M'. En répétant cette construct sur les n points N on parvient a n points $M \equiv (M', M'')$ de l'arc de la spirale; variant n on parviendra à autant de points que l voudra de cet arc. La courbe complète est formée par quatre a pareils.

Menons la droite OM et déterminons sa trace horizontale M_1; lieu des points M_1 est le «nœud» (comp. n°. **3**), projection de la cou

1) Ouvr. cité dans la note préc., p. 184.



faite du point O sur un plan à l'axe de la figure; et si l'on considère le point M comme placé sur la correspondante génératrice du cylindre qui projette la courbe sur le premier plan, M pourra[1]) se représenter, par la méthode de la projection centrale, par la notation $M \equiv (M_1; M', O')$.

5. Nous allons nous proposer la recherche d'un procédé pour construire les deux projections de la tangente dans un point quelconque M de la spirale. Remarquons avant tout que les équations de la tangente à la spirale sont

$$\frac{X-x}{\frac{1}{2}(5\cos 5\varrho - 3\cos 3\varrho)} = \frac{Y-y}{\frac{1}{2}(5\sin 5\varrho - 3\sin 3\varrho)} = \frac{z-Z}{-\sin\varrho} \tag{6}$$

où X, Y, Z sont les coordonnées d'un point quelconque de cette droite, tandis que les coordonnées x, y, z du point de contact sont données par les relations (2) ou (3).

Remarquons ensuite que la projection de la tangente est la tangente de la projection; donc la projection horizontale de la tangente en M à la spirale est la tangente en M' à la courbe (4). Or de cette équation on tire

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{4} R \cos\frac{\varphi}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{R^2 - u^2},$$

valeur de la sous-normale polaire; cette valeur prouve que si l'on mène le segment $O'C$ tel que l'angle $M'OC$ soit égal à $\frac{\pi}{2}$ dans le sens positif du mouvement et que $\overline{M'C} = R$, et si l'on marque le point D tel que $\overline{O'D} = \frac{1}{4}\overline{O'C}$, la droite DM' sera la normale en M' de la projection horizontale; la tangente sera donc la perpendiculaire de M' à DM'.

Quant à la projection verticale, on en connait déjà un point (M''); il suffira donc d'en trouver un autre; il est bon de prendre comme point auxiliaire celui, T, où la tangente dont il s'agit perce le plan horizontal qui passe par le centre O de la sphère donnée. Les coordonnées de T se déduisent des équations (6) en y faisant $Z = z$; les relations qui en résultent donnent:

$$\overline{M'T'}^2 = \overline{X-x}^2 + \overline{Y-y}^2 = R^2 \cot^2\varrho\,(\cos^2\varrho + 16\sin^2\varrho).$$

Or pour construire cette valeur on peut s'y prendre de la manière suivante. Prolongeons la droite HM'' jusqu'au point I de manière qu'on ait $\overline{HI} = 4\overline{HN}$. Comme l'angle $A''O''N$ est égal à ϱ et $O''H = R\cos\varrho$, $\overline{IH} = 4R\sin\varrho$, on aura

$$\overline{O''I} = R\sqrt{\cos^2\varrho + 16\sin^2\varrho};$$

---

1) Voir pour cette notation mes *Vorlesungen über darstellende Geometrie*, I. Bd. (Leipzig 1907), p. 93.

construisons à présent le triangle $O''IJ$ rectangle en O'' et dont l'angle aigu $O''IJ$ soit égal à ϱ; il viendra

$$\overline{O''J} = \overline{O''I} \cot \varrho = R \cot \varrho \sqrt{\cos^2 \varrho + 16 \sin^2 \varrho} = \overline{M'T'}.$$

Si donc on porte à partir du point M' sur la direction positive de la tangente t' le segment $M'T' = O''J$, l'ordonnée qui passe par T' coupera en T'' la droite $O''B''$. $M''T''$ sera la projection cherchée verticale t''.

6. On peut remarquer que, lorsque le point M décrit la spirale, le point T' détermine sur le plan horizontal la courbe dont les équations sont (comme il est facile de voir)

$$X = a - \frac{R}{\sin \varrho} (\cos 2\varrho - \cos 4\varrho - \cos 6\varrho),$$

$$Y = b - \frac{R}{\sin \varrho} (\sin 2\varrho - \sin 4\varrho - \sin 6\varrho).$$

Cette courbe est la projection horizontale de la section de la développable osculatrice de la spirale de Pappus sur le plan horizontal mené par O; il s'ensuit que la tangente u' en T' à cette courbe est la projection horizontale de la trace sur ce plan du plan osculateur en M à la spirale; u'' tombe évidemment sur $O''B''$. Or les droites $t \equiv (t', t'')$ et $u \equiv (u', u'')$ suffisent évidemment pour déterminer le plan osculateur en M (point quelconque) de la spirale. Rien ne prouve, cependant, qu'on ne puisse pas trouver pour ce plan une construction plus simple; nous engageons les lecteurs à la chercher.

Gênes, 30 octobre 1906.

Streuströme in der Rückleitung elektrischer Bahnen.

Von CARL MICHALKE in Charlottenburg.

1. Elektrisch betriebenen Straßenbahnwagen wird am einfachsten und wirtschaftlichsten die erforderliche Energie zugeführt, wenn die Schienen zur Fortleitung des elektrischen Stromes benutzt werden. In der Regel wird der oberirdisch geführte Fahrdraht mit dem positiven, das Gleis mit dem negativen Pol der Gleichstrommaschine verbunden. Die Verwendung der Schienen für die Rückleitung des Stromes gibt jedoch zu verschiedenen Störungen Veranlassung. Hauptsächlich stören die aus den Schienen in den Erdboden entweichenden Streuströme, die sogenannten vagabundierenden Ströme. Es ist nämlich im allgemeinen nicht möglich, die Schienen vollkommen von dem umgebenden Erd-

boden zu isolieren. Die gut leitenden Schienen befinden sich in einem weniger gut leitenden nach einzelnen Richtungen hin unendlich ausgedehnten Medium, in dem sich noch andere elektrisch gut leitende Körper, wie z. B. Gas- und Wasserrohre befinden. Durch das Abirren der Ströme aus den Gleisen in den Erdboden werden die Schienen zum Teil entlastet, der Spannungsverlust wird vermindert.

Die aus den Gleisen entweichenden Streuströme durchdringen teilweise auch die in dem Erdboden vorhandenen metallischen Leiter. Da der feuchte Erdboden im wesentlichen elektrolytisch leitet, so bringt der Strom an den Stellen, an denen er aus den Leitern, etwa den Gas- und Wasserrohren, austritt, chemische Zersetzungen hervor, durch die die Lebensdauer der Rohre vermindert wird.

Die Streuströme in der Erde verändern auch die örtlichen Werte des Erdmagnetismus der Größe und Richtung nach, können daher physikalische Meßgeräte auf weite Entfernung hin stören. Die Streuströme können in Telephon-, Telegraphen- und Signalanlagen eindringen, wenn bei diesen die Erde zur Rückleitung benutzt wird, und können auch in diesen Störungen verursachen.

Während alle diese letzteren Störungen der unmittelbaren Beobachtung unterliegen, können Rohranfressungen ganz unbemerkt vor sich gehen, sodaß größere Schäden erst nach einer längeren Reihe von Jahren bemerkt werden. Dies und der hohe Wert der ausgedehnten, gemeinnützigen Zwecken dienenden Rohrleitungen gab Veranlassung, daß sich die Techniker aller Länder auf das eingehendste mit den Fragen des Schutzes der Rohre gegen die Streuströme beschäftigten. Diese Fragen sind nach vielen Richtungen hin durch Rechnung und Beobachtungen verfolgt worden. Rein experimentelle Untersuchungen lassen meist bei der Schwierigkeit der Materie nur örtlich gültige Schlußfolgerungen zu. Bei der mathematischen Behandlung muß man sich mit Näherungswerten begnügen, da der stete Wechsel der Bodenbeschaffenheit, die veränderliche Lage und Verschiedenartigkeit der im Erdboden befindlichen Metallmassen, die Begrenzung des Bodens durch Mauerwerk und dergl., der Grundwasserstand usw. die Verhältnisse örtlich und zeitlich ändern. Diese Diskontinuität in der Leitfähigkeit des Bodens beeinflußt stark den Verlauf der Streuströme in der Erde, sodaß sich genaue Funktionswerte nicht aufstellen lassen. Es muß jedoch die Rechnung der Beobachtung zu Hilfe kommen, wenn Regeln aufgestellt werden sollen, um schon beim Bau einer Bahn auf die Gefährdung der Rohrleitungen Rücksicht nehmen, den voraussichtlichen Verlauf der Streuströme in der Nähe der Rohrleitungen bestimmen und die zweckdienlichsten Schutzmaßnahmen treffen zu können.

Den Verlauf der Erdströme in größerer Entfernung, sowohl seitlich von den Gleisen als auch in größerer Tiefe zu verfolgen, hat viele Vorteile; für die Frage der Gefährdung der Rohrleitungen kommt aber im wesentlichen Richtung und Dichte des Stromes in der Erde in Betracht, der von den Rohren zu den Gleisen verläuft.

2. Gewöhnlich ist der positive Pol der Gleichstrommaschine mit der Oberleitung der elektrischen Bahn, dem Fahrdraht, verbunden, während die Schienen an einem oder mehreren Punkten (Schienenspeisepunkten) mit dem negativen Pol der stromerzeugenden Maschine verbunden sind. Die Schienen bilden also die Rückleitung des Stromes. Die aus den Schienengleisen in den Erdboden austretenden Streuströme verbleiben zum Teil in der Erde, um an geeigneten Stellen wieder zu den Gleisen zurückzukehren, ein Teil, und dieser interessiert besonders, dringt in

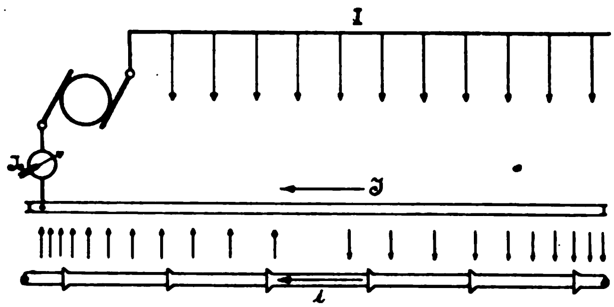


Fig. 1.

die Rohrleitungen ein. Parallel zu den Gleisen besteht also noch der Stromweg: Erde, Rohrleitung, Erde. Es sei im folgenden zunächst angenommen, daß der Strom im wesentlichen von den Gleisen nach Rohrleitungen fließe (Fig. 1), wie dies von Haber[1]) bei nicht zu großer Rohrentfernung beobachtet wurde.

Der von der Oberleitung durch die Wagenmotoren den Gleisen zufließende Strom sei vom Endpunkt der Strecke aus gerechnet $I(x)$. Der Wert hängt von der Entfernung und der Belastung der Wagen ab. Sind die Wagen in geringen Abständen gleichmäßig über die (unverzweigte) Strecke verteilt, so kann man setzen

$$I(x) = \frac{J_0 x}{L},$$

wenn x die Entfernung vom Endpunkt, L die Länge der ganzen Strecke (gewöhnlich freitragende Strecke genannt) und J_0 der gesamte Maschinenstrom ist.

1) Zeitschr. für Elektrochemie 1906, 12, 49.

Der Strom J in den Gleisen ist gleich dem zugeführten I vermindert um den in die Erde entwichenen Betrag i

$$J = I(x) - i.$$

Ist der Widerstand des Gleises für die Streckeneinheit W_s, so ist er für die Strecke dx gleich $W_s dx$. Entsprechend sei der Rohrwiderstand für die Streckeneinheit W_r, also für die Strecke dx gleich $W_r dx$. Ist V_s das Potential an einem Gleispunkt, V_r das entsprechende am Rohr, so ist

$$-dV_s = J W_s dx, \quad -dV_r = i W_r dx.$$

Ist w der Übergangswiderstand für die Längeneinheit vom Gleis nach dem Rohr, so ist der auf der Strecke dx übertretende Strom

$$di = (V_s - V_r)\frac{dx}{w}.$$

Daraus folgt

$$\frac{d^2 i}{dx^2} = \frac{1}{w}\left(\frac{dV_s}{dx} - \frac{dV_r}{dx}\right) = \frac{1}{w}(W_r i - W_s J).$$

Nun ist:

$$\frac{d^2 J}{dx^2} = \frac{d^2 I(x)}{dx^2} - \frac{d^2 i}{dx^2},$$

folglich:

$$w\frac{d^2 J}{dx^2} - J(W_r + W_s) + I(x)\, W_r - \frac{w\, d^2 I(x)}{dx^2} = 0.$$

Unter der Annahme, daß die Strecke gleichmäßig belastet ist $\left(I(x) = \frac{J_0 x}{L}\right)$, wird $\frac{d^2 I(x)}{dx^2} = 0$, demnach

$$\frac{d^2 J}{dx^2} - \frac{J(W_r + W_s)}{w} + \frac{J_0 x W_r}{L w} = 0.$$

Die Auflösung der Differentialgleichung ergibt, wenn $\alpha^2 = \frac{W_r + W_s}{w}$ gesetzt wird,

$$J = \frac{J_0 W_r x}{L(W_r + W_s)} + C_1 e^{x\alpha} + C_2 e^{-x\alpha}.$$

Die Konstanten sind aus den Grenzwerten zu bestimmen. Es ist

$$J = 0 \quad \text{für} \quad x = 0,$$
$$J = J_0 \quad \text{für} \quad x = L,$$

demnach

$$C_1 + C_2 = 0, \quad J_0 = \frac{J_0 W_r}{W_r + W_s} + C_1 e^{L\alpha} + C_2 e^{-L\alpha}.$$

Dies ergibt

$$C_1 = \frac{J_0 W_s}{(W_r + W_s)(e^{L\alpha} - e^{-L\alpha})}, \quad C_2 = -\frac{J_0 W_s}{(W_r + W_s)(e^{L\alpha} - e^{-L\alpha})};$$

demnach erhält man für den Gleisstrom:

$$(1)\qquad J = \frac{J_0 W_r x}{L(W_r + W_s)} + \frac{J_0 W_s (e^{x\alpha} - e^{-x\alpha})}{(W_r + W_s)(e^{L\alpha} - e^{-L\alpha})}$$

unter der Voraussetzung, daß den Gleisen gleichmäßig Strom zugeführt wird $\left(I(x) = \frac{J_0 x}{L}\right)$. Werden andere Voraussetzungen für $I(x)$ gemacht, so ändert sich die Differentialgleichung. Befindet sich z. B. nur ein Wagen am Ende der Strecke, so ist $I(x) = J_0 = \text{const.}$

Der Streustrom i ergibt sich aus $i = I - J = \frac{J_0 x}{L} - J$:

$$(2)\qquad i = \frac{J_0 W_s}{W_r + W_s}\left(\frac{x}{L} - \frac{e^{x\alpha} - e^{-x\alpha}}{e^{L\alpha} - e^{-L\alpha}}\right).$$

Für die praktischen Bedürfnisse geeigneter sind einfachere Gleichungen in Annäherung. Wenn man Zähler und Nenner des Exponentialausdrucks von Gleichung (2) in Reihen entwickelt, erhält man den Näherungswert

$$(2a)\qquad i = \frac{J_0 W_s x (L^2 - x^2)}{L[6w + L^2(W_r + W_s)]}.$$

Der Höchstwert von i wird erreicht für $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$.

Für diesen Wert wird

$$(2b)\qquad \hat{i} = \frac{0{,}385\, J_0 L^2 W_s}{6w + L^2(W_r + W_s)}.$$

Am Anfang und am Ende der freitragenden Strecke ist der Streustrom Null.

Nun war $\frac{dV_s}{dx} = -J W_s$ oder

$$\int_{x_1}^{x_2} dV_s = -W_s \int_{x_1}^{x_2} J\,dx = -\frac{J_0 W_s}{W_r + W_s}\left[\frac{W_r x^2}{2L} + \frac{W_s}{\alpha}\,\frac{e^{x\alpha} + e^{-x\alpha}}{e^{L\alpha} - e^{-L\alpha}}\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Der Spannungsverlust längs der ganzen freitragenden Strecke L des Gleises ist

$$(3)\qquad E_s = \frac{J_0 W_s}{W_r + W_s}\left[\frac{L W_r}{2} + \frac{W_s}{\alpha}\,\frac{e^{L\alpha} + e^{-L\alpha} - 2}{e^{L\alpha} - e^{-L\alpha}}\right]$$

oder angenähert:

$$(3a)\qquad E_s = \frac{J_0 W_s L}{2}\cdot\frac{6w + W_r L^2}{6w + L^2(W_r + W_s)};$$

für $w = \infty$, d. h. wenn durch Isolierung der Schienen die Entwickelung von Streuströmen verhindert ist, wird $E_s' = \frac{J_0 W_s L}{2}$.

Wird der Wert für E_s (Gleichung (3a)) in Gleichung (2b) eingesetzt, so erhält man als Höchstwert für den Erdstrom

$$i = \frac{0{,}76\, L E_s}{6\, w + W_r L^2}. \tag{2c}$$

Der Höchstwert des Erdstroms hängt demnach von dem Produkt der Länge L der freitragenden Strecke und der Spannung auf dieser Strecke ab.

Durch das Entweichen von Strom aus den Gleisen wird das Spannungsgefälle in den Gleisen vermindert. Der Spannungsverlust vermindert sich bei gleichmäßiger Schienenbelastung um

$$\varDelta E = E_s' - E_s = \frac{J_0 L^3 W_s^2}{12\, w + 2\, L^2 (W_r + W_s)}.$$

Obwohl die Verminderung der Spannung in den Gleisen durch Verminderung des Gleiswiderstandes (starkes Schienenprofil, gute Stoßverbindung, geringe Belastung mit Strom) die Entwickelung von Erdströmen vermindert, gibt geringer Spannungsverlust in den Gleisen noch nicht Sicherheit gegen großes Stromentweichen, da E_s auch bei kleinem w und kleinem W_r klein wird.

Die Spannung im Rohr längs der Gleise ist $\frac{d V_r}{d x} = - i W_r dx$, woraus

$$[V_r]_{x_1}^{x_2} = - W_r \int_{x_1}^{x_2} i dx.$$

Die Spannung im Rohr auf der ganzen Strecke L ist demnach:

$$E_r = \frac{J_0 W_r W_s}{W_r + W_s} \left(\frac{L}{2} - \frac{e^{L\alpha} + e^{-L\alpha} - 2}{\alpha \left(e^{L\alpha} - e^{-L\alpha} \right)} \right), \tag{4}$$

angenähert:

$$E_r = \frac{J_0 W_s W_r L^3}{12\, w + 2\, L^2 (W_r + W_s)} = \varDelta E \cdot \frac{W_r}{W_s}. \tag{4a}$$

Die höchste Spannung in den Rohren ist proportional der in den Gleisen. Es ist:

$$\frac{E_r}{E_s} = \frac{1}{1 + \frac{6\, w}{W_r L^2}}.$$

Das Spannungsgefälle nähert sich demnach umsomehr dem der Gleise, je größer der Rohrwiderstand W_r, je länger die freitragende Strecke L und je kleiner der Übergangswiderstand w ist.

Ist der Erdboden bei zu großer Entfernung von den Gleisen gleichmäßig leitend, befinden sich also keine Rohrleitungen in der Nähe, so verzweigen sich die Ströme gesetzmäßig. Die Äquipotentialflächen für einen solchen Fall zu bestimmen und so die Spannung zwischen Gleis und den einzelnen Punkten der Erde zu finden, hat meist nur theoretisches Interesse, da hierbei die Erdströme nur an den Gleisen selbst Korrosionen veranlassen. Sind parallel zu den Gleisen in nicht zu weitem Abstande Rohrleitungen verlegt, so ist die Spannung zwischen Gleis und Rohr:

$$(5)\qquad \begin{cases} e = w\dfrac{di}{dx} = V_s - V_r \\ e = \dfrac{J_0 W_s w}{W_r + W_s}\left[\dfrac{1}{L} - \dfrac{\alpha(e^{x\alpha} + e^{-x\alpha})}{e^{L\alpha} - e^{-L\alpha}}\right] \end{cases}$$

oder angenähert:

$$(5a)\qquad e = \frac{J_0 W_s}{L} \cdot \frac{(L^2 - 3x^2)w}{6w + L^2(W_r + W_s)}.$$

Demnach ist der aus den Gleisen oder Rohren auf einer Strecke dx (z. B. auf eine Länge von 1 m) austretende Strom

$$\frac{di}{dx} = \frac{J_0 W_s}{L} \cdot \frac{(L^2 - 3x^2)}{6w + L^2(W_r + W_s)}.$$

Es treten die Höchstwerte für die Spannungen zwischen Gleis und Rohr und demnach auch für Strömung zwischen Gleis und Rohr am Schienenspeisepunkt ($x = L$) und dem Endpunkt der freitragenden Strecke ($x = 0$) auf. Der Strom in den Rohren selbst ist an diesen Stellen Null. Sind mehrere Schienenspeisepunkte vorhanden, setzt sich also die Gleisstrecke zwischen zwei Speisepunkten aus zwei freitragenden Strecken zusammen, so wechselt an den Enden der freitragenden Strecke der Strom in den Rohren die Richtung.

In der Entfernung $\frac{L}{\sqrt{3}}$ vom Endpunkt der freien Strecke ist bei den Voraussetzungen, unter denen die Rechnung durchgeführt wurde, die Spannung zwischen Gleis und Rohr Null (neutraler Bereich); es findet demnach keine Strömung zwischen Gleis und Rohr statt, während der Rohrstrom (Gleichung 2a) seinen Höchstwert erreicht. Ist der Fahrdraht mit dem positiven Pol des Generators verbunden, so ist nach dem Endpunkt der freitragenden Strecke hin der Erdstrom von den Gleisen nach dem Rohr gerichtet. Infolge der Wasserstoffpolarisation wird das Rohr geschützt (Schutzbereich), während nach dem Speisepunkt hin die Stromrichtung umgekehrt ist. Im letzteren Bereich (Gefahrbereich) werden die Rohre korrodiert, falls sich das Eisen nicht passiv (unangreifbar) verhält, was jedoch im Erdboden fast nie der Fall ist.

Auch im Schutzbereich sind Korrosionen nicht völlig ausgeschlossen. Sind z. B. Rohrleitungen von verschiedenem Widerstande in verschiedener Entfernung vom Gleise vorhanden oder Rohrleitungen un etwa nahezu widerstandslose Grundwasserleitung von großem Quer schnitt, so sind, wenn die Übergangswiderstände w' und w'', die Leitungs widerstände W_r' und W_r'' sind, die Spannungen zwischen Gleis und de Rohrleitungen (unter Vernachlässigung der Verschiebungen, die durc den Stromausgleich auftreten) angenähert:

$$e' = \frac{J_0 W_s}{L} \cdot \frac{(L^2 - 3x^2)w'}{6w' + L^2(W_r' + W_s)}, \quad e'' = \frac{J_0 W_s}{L} \cdot \frac{(L^2 - 3x^2)w''}{6w'' + L^2(W_r'' + W_s)}.$$

Die zwischen den Rohrleitungen auftretende Spannung ist

$$e' - e'' = C(L^2 - 3x^2).$$

C enthält die Schienen- und Rohrwiderstände, Übergangswiderständ und Länge der freitragenden Strecke. Im Schutzbezirk z. B. würde Ströme von den Gleisen zu den Rohrleitungen, außerdem Ströme vo Rohrleitungen mit größerem $\frac{W_r + W_s}{w}$ zu solchen mit kleinerem $\frac{W_r + W}{w}$ verlaufen. In den Straßen ist der Rohrwiderstand wegen des wechselnde Querschnitts und der vielen Abzweigungen nicht auf größere Läng konstant, weshalb eine genaue Berechnung schwierig, wenn nicht un möglich ist. Würden die Widerstandswerte konstant sein, so würd im neutralen Bereich $\left(\text{für } x = \frac{L}{\sqrt{3}}\right)$ keine Spannung zwischen den ein zelnen Rohrleitungen bestehen.

Verlaufen parallel zum Gleise mehrere Rohrleitungen voneinande isoliert oder metallisch verbunden, so ist in den entwickelten Gleichunge für die Leitfähigkeit des Rohrs $\frac{1}{W_r}$ die gesamte Leitfähigkeit $\sum \frac{1}{W_r}$ für den Übergangswiderstand w alsdann ein mittlerer Wert zu setze Für $W_r = 0$ wäre dann der Höchstwert für die aus den Gleisen aus tretenden Streuströme gegeben, in dem auch etwa durch Grundwasser leitung abgefangene Erdströme enthalten sind.

Da durch die Inhomogenität des Erdbodens und die Unstetig keit der in Betracht kommenden Widerstandswerte die Rechnungs ergebnisse beeinflußt werden, so sind durch Rechnung allein voll kommen zuverlässige Zahlen nicht zu gewinnen. Es unterstützen abe die entwickelten Gleichungen wesentlich die Beurteilung über di Größe und den Verlauf der Streuströme und geben wertvolle Anhalts punkte für die Untersuchungen und die zu ergreifenden Schutzmaß nahmen.

3. Der Messung unmittelbar zugänglich sind unter Anwendung geeigneter Maßnahmen die Spannungen zwischen Gleisen und Rohren zwischen verschiedenen Rohrleitungen, ferner die Spannungen längs der Gleise und der Rohre. Der Strom in einer unverzweigten Rohrleitung kann aus Spannungsmessungen bestimmt werden, wenn der Widerstand der Rohre bekannt ist.

Der Rohrwiderstand kann am vorteilhaftesten nach Betriebsschluß gemessen werden. Voraussetzung ist hierbei, daß längs der Meßstrecke keine wesentliche Stromentweichung nach der Erde stattfindet. Erforderlich ist eine Starkstromquelle, die entsprechend Fig. 2 an die Rohrleitung an den Stellen A und B resp. A und C angeschlossen wird.[1]) Der Strom J verzweigt sich in dem Rohrleitungsnetz. Ein Teil J fließt direkt zwischen den Anschlußpunkten, den aus den Gleisen in die Rohre gelangten Streustrom verstärkend oder schwächend. Wird gleichzeitig die Spannung e_1 an den Klemmen ab innerhalb AB und

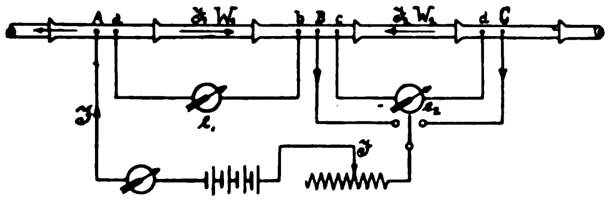


Fig. 2.

der Spannung e an den Klemmen cd gemessen, so ist, wenn e_1 und e_2 die bei Anschluß an AB gemessenen Spannungen, e_1' e_2' die Spannungen bei Anschluß AC sind, und J der Meßstrom ist:

$$W_1 = \frac{e_1 \cdot e_2' - e_1' \cdot e_2}{(e_2' - e_1')J}, \quad W_2 = \frac{e_2'}{e_1'} W_1 \cdot$$

Dies sind in Ohm gemessene Widerstände. Der Widerstand pro Längeneinheit wird durch Division mit der Meßlänge gefunden. Ist der Rohrwiderstand der Meßstrecken bekannt, so kann nach Abschalten der Meßbatterie aus den Spannungsmessungen e_1 oder e_2 während des Betriebes der Rohrstrom i ermittelt werden: $i = \frac{e_1}{W_1} = \frac{e_2}{W_2} \cdot$ Sind in den Meßstromkreisen Polarisationsspannungen z. B. in den Rohrmuffen vorhanden, so sind diese, falls sie gegenüber den gemessenen Spannungen in Betracht kommen, bei der Berechnung zu berücksichtigen. Solche Polarisationsspannungen lassen sich nur nach Betriebsschluß ermitteln, wenn keine Ströme von den Straßenbahngleisen oder anderen Stromleitungen herrührend die Rohre durchfließen.

1) Journ. für Gasbeleuchtg. u. Wasserversorg. 1907, S. 226.

Ist in Fig. 3 der Strom J so geregelt, daß $e_1 = 0$, also J_1
wird, so ist $J = J_2$.

Ist das Rohrnetz so ausgedehnt, daß die Stromverteilung im R
netz durch das elektrische Abschalten der Strecke AB, auf der
Spannungsabfall auf den Wert Null gebracht ist, nicht wesentlich
ändert wird, wie dies meist zutreffen dürfte, so gibt J den Rohrst
an. Bei dieser Meßanordnung würden nur bei A und B Meßdr
anzuschließen sein; es würden daher die Rohre nur an zwei Ste
freizulegen sein, während bei der genaueren Anordnung mit Wi
standsbestimmung an drei Stellen die Rohre freigelegt werden müs

Die Spannung in den Gleisen ist am vorteilhaftesten mi
Meßdrähte zu messen. Wesentlich ist die Kontrolle der Stoßverbindu
an den Stoßstellen der Schienen. Fehlerhafte Stoßverbindungen
großem Widerstand können durch Schienenstoßprüfer ermittelt wer

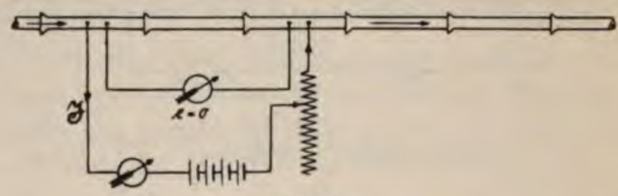


Fig. 3.

Diese enthalten ein Differentialgalvanometer, das gestattet, den Wi
stand der Stoßverbindung mit dem Widerstand eines Schienenstück
vergleichen.

Beim Messen der Spannung zwischen Gleis oder Rohr und
Erdboden oder zwischen verschiedenen Stellen in der Erde ist auf
Polarisation an den Meßelektroden Rücksicht zu nehmen. Um Po
sationsfehler zu vermeiden, verwendet Haber[1]) unpolarisierbare T
elektroden. Sie bestehen aus einem Glaszylinder, dessen Boden d
eine kleine poröse Tonzelle abgeschlossen ist. Das Glasrohr ist
einer Paste von Zinksulfat gefüllt, in die ein Zinkstab mit oben
gelötetem Meßdraht taucht. Die Spannung zwischen Eisen und
Tastelektrode, die genau bestimmt ist, wird bei den Messungen
rücksichtigt.

Die Erdstromdichte, von der die Stärke der Korrosion der R
abhängt, kann mit dem Haberschen unpolarisierbaren Stromdic
messer ermittelt werden. Dieser besteht aus zwei aufeinander gele
Silberplatten, die in einen Holzrahmen eingespannt werden. Die Pla

1) Haber u. Goldschmidt. Zeitschr. für Elektrochemie 1906, Bd. 12, S

werden auf den Außenseiten mit einer Paste von essigsaurem Silber überstrichen, die durch ein Pergamentblatt abgedeckt wird. Hierüber wird noch eine Schicht Erde gestrichen. So hergestellte Apparate werden an geeigneten Stellen eingegraben. Bietet der Apparat dem Durchgang des Erdstroms den gleichen Widerstand, wie der verdrängte Erdboden, verdichtet er also weder durch gesteigerte Leitfähigkeit den Erdstrom, noch zerstreut er die Stromlinien durch zu hohen Widerstand, so durchdringt den Apparat ein Strom, der dem wirklichen Erdstrom entspricht. Aus der Gewichtszunahme der einen Platte durch galvanischen Niederschlag, oder der Gewichtsabnahme der anderen Platte durch chemische Zersetzung kann die Stromdichte berechnet werden. Ein ähnliches Verfahren wie in Fig. 3 für die Ermittelung

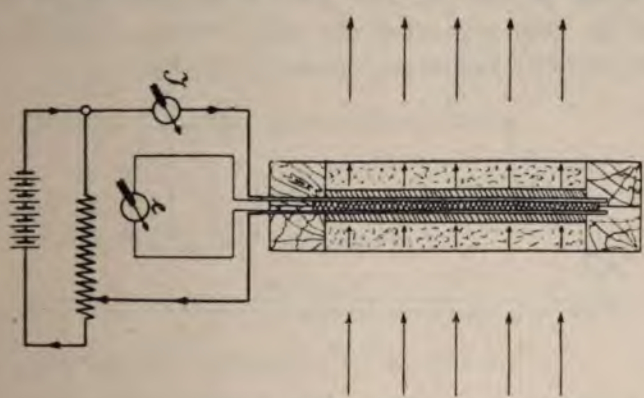


Fig. 4.

der Rohrströme verwandt wurde, kann auch für angenäherte Bestimmung der Erdstromdichte benutzt werden. Zwei Kupferplatten, isoliert aufeinander gelegt, werden in Holzrahmen eingespannt nach Haberscher Angabe mit Kupfersulfatpaste bestrichen und durch Pergamentblätter abgedeckt, ähnlich wie bei den Stromdichtemessern aus Silberplatten. Von den Kupferplatten werden Strom- und Spannungsdrähte herausgeführt. Ist die Spannung an den Kupferplatten kompensiert ($e = 0$), so gibt J (Fig. 4) den Erdstrom für die Größe der Kupferplatte an, vorausgesetzt, daß die Kupferplatten senkrecht zur Strombahn sich befinden. Um den Erdstrom nach Größe und Richtung zu bestimmen, würden drei rechtwinklig zueinander stehende Stromdichtemesser anzuordnen sein.

An der Trennungsfläche zwischen Schienen oder Rohren und dem Erdboden kann ein Übergangswiderstand vorhanden sein, wenn die Berührung von Eisen und Erdboden nicht genügend innig ist. Je feuchter der Boden ist, um so inniger ist die Berührung, um so geringer ist der Übergangswiderstand an der Trennfläche, auch wenn die Rohre durch isolierenden Anstrich scheinbar geschützt sind, da die Feuchtigkeit in die feineren Risse der Isolierschicht eindringt. Nach den Messungen von Haber ist bei feuchtem Boden der Übergangswiderstand an der Berührungsfläche von Rohr und Erdboden gegenüber dem Leitungswiderstand der Erde verschwindend klein.

Der gesamte aus dem Rohr austretende Strom wirkt zersetzend, wenn das Eisen aktiv (angriffsfähig) ist und der Erdboden nur elektrolytisch nicht auch gleichzeitig metallisch leitend ist. Mit passivem (unangreifbarem) Zustand des Eisens im Erdboden dürfte in der Praxis nicht zu rechnen sein. Obwohl der Erdboden auch in völlig trockenem Zustande etwas leitend ist, also metallische Leitfähigkeit vorhanden ist, so ist sie doch gegenüber der elektrolytischen Leitfähigkeit des gewöhnlich feuchten Erdbodens verschwindend klein.

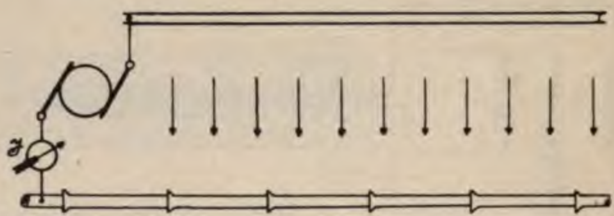


Fig. 5.

Sehr schwierig ist die Messung des Übergangswiderstands zwischen Gleis und Rohrleitung. Würde nach einer der üblichen Widerstandsmeßanordnungen, etwa nach der Brückenmethode mit Telephon, der Widerstand bestimmt werden, indem die Meßleitungen einfach an einer Stelle an Rohr und Schienen angeschlossen würden, so würden unzuverlässige Werte gewonnen werden, auch wenn eine Gleisstrecke und eine Rohrstrecke vom Gleis- resp. Rohrnetz getrennt würde. Unter bestimmten Voraussetzungen, wenn die Leitfähigkeit des Erdbodens außerhalb des Rohrs als homogen angenommen wird, die parallel zu den Gleisen verlegte Rohrleitung keine Abzweigungen besitzt, und Gleis und Rohr auf der ganzen Strecke gleichmäßig leitend sind, etwa bei eigens zu den Meßversuchen auf freier Landstraße verlegten Leitungsstrecken, könnte der Übergangswiderstand aus Messungen bestimmt werden. Wird am Anfang der Strecke L Gleis und Rohr unter Spannung gesetzt, so treten längs der ganzen Strecke Ströme zwischen Gleis und Rohr über. Unter den gemachten Voraussetzungen würde die Strömung normal zu der Gleisrichtung verlaufen, es würde also für jede Entfernung der Rohrstrom gleich dem Gleisstrom sein. Die Meßstrecke L sei genügend lang, so daß die Wirkung der Enden vernachlässigt werden kann.

Sind V_s und V_r die Gleis- oder Rohrpotentiale, so ist unter Verwendung der früher gewählten Bezeichnungen (Fig. 5)

$$dJ = (V_s - V_r)\frac{dx}{w}, \quad w\frac{d^2J}{dx^2} = \frac{dV_s}{dx} - \frac{dV_r}{dx}$$

$$dV_s = JW_s dx, \quad dV_r = -JW_r dx$$

$$\frac{d^2J}{dx^2} - J\frac{W_s + W_r}{w} = 0, \quad J = C_1 e^{x\alpha} + C_2 e^{-x\alpha}.$$

Zur Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2 hat man die Grenzgleichungen

$$\text{für } x = 0\colon \frac{dJ}{dx} = \frac{e_2}{w}, \quad \text{für } x = L\colon \frac{dJ}{dx} = \frac{e_1}{w}, \quad \text{also}$$

$$C_1 = \frac{e_1 - e_2 e^{-L\alpha}}{\alpha w(e^{L\alpha} - e^{-L\alpha})}, \quad C_2 = \frac{e_1 - e_2 e^{L\alpha}}{\alpha w(e^{L\alpha} - e^{-L\alpha})},$$

folglich

$$J = \frac{e_1(e^{x\alpha} + e^{-x\alpha}) - e_2(e^{(L-x)\alpha} + e^{(x-L)\alpha}}{\alpha w(e^{L\alpha} - e^{-L\alpha})}.$$

Der Strom am Ende der Leitung ist

$$J_{x=0} = \frac{2e_1 - e_2(e^{L\alpha} + e^{-L\alpha})}{\alpha w(e^{L\alpha} - e^{-L\alpha})}.$$

Am Anschlußpunkt der Meßbatterie ist der Strom

$$J_{x=L} = \frac{e_1(e^{Lx} + e^{-L\alpha}) - 2e_2}{\alpha w(e^{L\alpha} - e^{-L\alpha})}.$$

Ist am Ende der Strecke kein Widerstand zwischengeschaltet, so daß nur durch die Erde Ströme vom Gleis zum Rohr fließen, so ist $J_{x=0} = 0$. Dies ist der Fall, wenn $2e_1 - e_2(e^{L\alpha} + e^{-L\alpha}) = 0$, d. h.

$$\frac{2e_1}{e_2} = e^{L\alpha} + e^{-L\alpha}$$

ist. Wird dieser Wert in die Gleichung für $J_{x=L}$ eingesetzt, so wird

$$J_1 = J_{x=L} = \frac{e_1(e^{L\alpha} - e^{-L\alpha})}{\alpha w(e^{L\alpha} + e^{-L\alpha})}.$$

Nach einigen Umformungen erhält man hieraus $w = \frac{\sqrt{e_1^2 - e_2^2}}{\alpha J_1}$, ferner

$$e^{L\alpha} = \frac{e_1 + J_1\alpha w}{e_2} = \frac{e_1 + \sqrt{e_1^2 - e_2^2}}{e_2}, \quad \alpha = \frac{1}{L}\log\frac{e_1 + \sqrt{e_1^2 - e_2^2}}{e_2},$$

(7)
$$w = \frac{L\sqrt{e_1^2 - e_2^2}}{J_1 \log\frac{e_1 + \sqrt{e_1^2 - e_2^2}}{e_2}}.$$

Es würde hiernach zur Bestimmung des Übergangswiderstandes das Messen der Spannung am Anfang und Ende der Strecke außer dem Meßstrom und der Länge der Meßstrecke erforderlich sein. Ist w gefunden, so kann nach Bestimmung von α auch $W_s + W_r$ berechnet werden.

(Die einzelnen durch Messung gefundenen oder angenommenen Widerstandswerte sind zusammengestellt in Michalke, „Die vagabundierenden Ströme elektrischer Bahnen", Braunschweig 1904.)

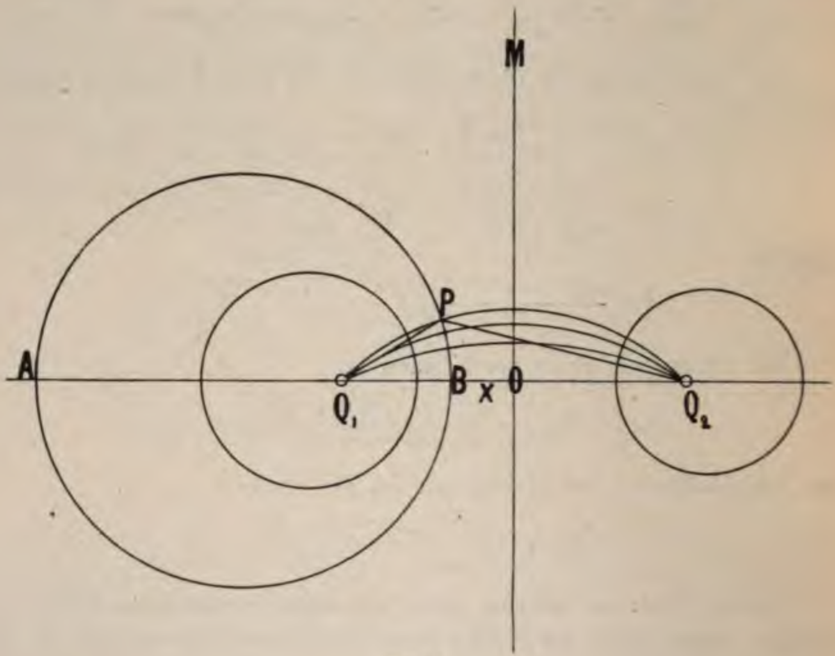


Fig. 6.

4. Die Strömung zwischen den Gleisen und der Rohrleitung kann auf Grund der bekannten Kirchhoffschen Gesetze der Stromverzweigung[1]) verfolgt werden.

Sind Q_1 und Q_2 (Fig. 6) zwei Quellpunkte, so sind die Strombahnen Bogen von exzentrischen Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Geraden M liegen, die in der Mitte von $Q_1 Q_2$ auf dieser Verbindungslinie senkrecht steht. Die Orte gleichen Potentials sind (Apollonische) Kreise. Für jeden Kreis ist das Verhältnis der Entfernung der Peripheriepunkte von Q_1 und Q_2 konstant. ABQ_1Q_2 sind harmonische

1) Pogg. Ann. 1845, **64**, 497.

Punkte auf der Verbindungslinie $Q_1 Q_2$. Ist D der Abstand der Quellpunkte, $AB = 2R$, $BO = x$, so ist $\frac{AQ_1}{Q_1 B} = \frac{AQ_2}{Q_2 B}$,

$$D^2 = 4(2R + x)x.$$

Bei homogenem Rohrmaterial verlaufen die Rohrströme im wesentlichen in der Längsrichtung des Rohres. Die äußere Peripherie des Rohrquerschnittes stellt daher einen Äquipotentialkreis dar, der (exzentrisch) einen Quellpunkt umschließt. Die Strombahnen schneiden senkrecht den Äquipotentialkreis. Die Stromlinien treten senkrecht aus dem Rohr aus.

Nach Kirchhoff ist für einen Peripheriepunkt P eines Äquipotentialkreises die Spannung gegen den Punkt O in der Mitte von $Q_1 Q_2$

$$e = \frac{cJ}{2\pi\delta} \log \frac{r_1}{r_2},$$

wobei r_1 und r_2 die Entfernungen des Peripheriepunktes P von den Quellpunkten Q_1 und Q_2 sind, c der spezifische Widerstand des Erdbodens, δ eine (kurze) Rohrstrecke ist. J bedeutet den gesamten zwischen den Quellpunkten Q_1 und Q_2 fließenden Strom.

Die Gleichung kann, wenn nur das Potentialgefälle längs der Geraden $Q_1 Q_2$ betrachtet wird, geschrieben werden

$$e = \frac{cJ}{2\pi\delta} \log \frac{L - 2x}{L + 2x}.$$

Den Gleisquerschnitt kann man sich ersetzt denken durch eine äquivalente Kreisfläche, deren Peripherie ebenfalls ein Äquipotentialkreis darstellt. Die Gleise befinden sich an der Grenzfläche von leitendem und nichtleitendem Medium. Für die Rechnung sei zunächst angenommen, daß Rohr und Gleis allseitig von homogenen Medien umschlossen seien, wobei die gesamte Leitfähigkeit etwas zu hoch angenommen wird.

Bezeichnet man die Größen links von der Mittellinie M, die einen Äquipotentialkreis vom Radius ∞ darstellt, mit dem Index 1, die entsprechenden rechts mit dem Index 2, so ist

$$e_1 = \frac{Jc}{2\pi\delta} \log \frac{L - 2x_1}{L + 2x_1}, \quad e_2 = \frac{Jc}{2\pi\delta} \log \frac{L + 2x_2}{L - 2x_2}.$$

Die Spannung zwischen Gleis und Rohr ist dann

$$e = e_2 - e_1 = \frac{Jc}{2\pi\delta} \log \frac{(L + 2x_1)(L + 2x_2)}{(L - 2x_1)(L - 2x_2)}.$$

Es ist

$$\frac{D^2}{4} = 2R_1 x_1 + x_1^2, \quad \frac{D^2}{4} = 2R_2 x_2 + x_2^2.$$

Es sei $x_1 + x_2 = a$; hieraus ist zu berechnen

$$x_1 = \frac{a(a + 2R_2)}{2(a + R_1 + R_2)}, \quad x_2 = \frac{a(a + 2R_1)}{2(a + R_1 + R_2)}.$$

Werden die Werte in die Gleichung für e eingesetzt, so erhält man nach einigen Umrechnungen

$$e = \frac{Jc}{2\pi\delta} \log \frac{\sqrt{(a + 2R_1)(a + 2R_2)} + \sqrt{a(a + 2R_1 + 2R_2)}}{\sqrt{(a + 2R_1)(a + 2R_2)} - \sqrt{a(a + 2R_1 + 2R_2)}}.$$

Der Widerstand zwischen Rohr und Gleis ist für die Rohrlänge resp. Gleislänge δ:

$$(8) \qquad w_\delta = \frac{e}{J} = \frac{c}{2\pi\delta} \log \frac{\sqrt{(a + 2R_1)(a + 2R_2)} + \sqrt{a(a + 2R_1 + 2R_2)}}{\sqrt{(a + 2R_1)(a + 2R_2)} - \sqrt{a(a + 2R_1 + 2R_2)}},$$

wobei sich die Werte unter den Wurzelzeichen nur durch den Summanden $4R_1R_2$ unterscheiden.

Ist der Radius R_2 unendlich groß, will man z. B. den Übergangswiderstand vom Gleis zum Grundwasser bestimmen, so ist, wenn man bei nicht zu kleinem Abstand den Grundwasserspiegel als Äquipotentialfläche gelten läßt, für $R_2 = \infty$:

$$w_\delta = \frac{c}{2\pi\delta} \log \frac{\sqrt{a + 2R_1} + \sqrt{a}}{\sqrt{a + 2R_1} - \sqrt{a}}.$$

Die Oberfläche des Rohres für die Länge δ ist $2R_2\pi\delta$. Die mittlere Stromdichte am Rohr ist demnach

$$\frac{e}{w_\delta 2R_2\pi\delta} = J'.$$

Ist das Eisen aktiv und wird der Erdboden als nur elektrolytisch leitend angenommen, so wird, wenn t Betriebsstunden im Jahre der Strom J zwischen Rohr und Gleis fließt, durch den auf der Strecke δ austretenden Strom $Jt\,1{,}042$ g Eisen im Jahre zersetzt.

Der Widerstand des Erdbodens ist je nach der Menge der in ihm gelösten Salze sehr verschieden. Lehmiger Boden hat im allgemeinen einen geringen, Sandboden einen hohen spezifischen Widerstand. Die Widerstände für ein abgegrenztes Stück Erde, etwa im Holzkasten, lassen sich leicht mittels Telephonmeßbrücke messen. Im Mittel kann man annehmen, daß der Widerstand zwischen gegenüberliegenden Flächen eines Kubikmeters Erde etwa 300 Ohm beträgt. Unter Benutzung der entwickelten Gleichungen erhält man, wenn man für die Gleise, reichlich gerechnet, einen äquivalenten Kreisdurchmesser von 20 cm und für das Rohr einen Durchmesser von 1 m annimmt, bei einem Rohrabstand von 1 m einen Überleitungswiderstand von 0,183 Ohm für 1 km. Für dünnere Rohre wird der Widerstand bei gleichem Abstand größer, steigt aber nicht in gleichem Verhältnis, als der Rohrdurchmesser abnimmt. Für Rohre von nur 10 cm Durchmesser ergibt sich unter sonst gleichen Verhältnissen ein Überleitungswiderstand von 0,265 Ohm für 1 km.

Haben die Rohre, wie dies gewöhnlich der Fall ist, größeren Abstand von den Gleisen, so wächst der Übergangswiderstand, und zwar in bedeutend geringerem Verhältnis als der Abstand. Für ein Rohr von 50 cm Durchmesser würde bei einem Abstand von 50 cm von den Gleisen der Widerstand für 1 km Rohrlänge 0,155 Ohm, bei einem Abstand von 2 m 0,257 Ohm sein.

Die Stromdichte ist nicht gleichmäßig über den Rohrumfang verteilt. Die mittlere Stromdichte ist unter den obigen Annahmen bei 1 m Abstand für ein Rohr von 1 m Durchmesser bei 1 Volt Spannung zwischen Rohr und Gleis 0,0174 Amp pro qdm, für ein Rohr von 50 cm Durchmesser 0,0313 Amp/qdm, für ein Rohr von 10 cm Durchmesser 0,120 Amp/qdm. Es sind demnach bei gleicher Spannung des Gleises gegen das Rohr und gleichem Abstand dünnere Rohre stärker gefährdet als Rohre von größerem Durchmesser. Durch den größeren Rohrwiderstand der dünneren Rohre in der Längsrichtung wird entsprechend den früher entwickelten Gleichungen eine geringere Spannung gegen die Gleise erzeugt, da die Spannung längs der Rohre sich um so mehr der der Gleise nähert, je größer der Rohrwiderstand ist. Sind jedoch dünnere Rohre in Verbindung mit stärkeren, z. B. bei Abzweigungen für Hausanschlüsse, so sind die dünneren Rohre stärker gefährdet als die dickeren.

Die Stromdichte auf dem Rohr ist, da der benachbarte Äquipotentialzylinder nicht mit der Rohrfläche konzentrisch ist, auf der den Gleisen zugewandten Seite größer als auf der entgegengesetzten.

Ist C (Fig. 7) der Mittelpunkt eines Äquipotentialkreises mit dem Radius R, der von der Mittellinie M den Abstand x hat, C' der Mittelpunkt eines Äquipotentialkreises in der Entfernung x', so ist

$$L^2 = 8Rx + 4x^2, \quad L^2 = 8R'x' + 4x'^2.$$

Sind die Kreise unendlich nahe, so ist der Stromübergang von einer Potentialfläche auf die benachbarte (also auch die Stromdichte) dem Abstand der Kreise umgekehrt proportional. Es wird $R' - R = dR$, $x' - x = dx$. Man erhält $dx = -\frac{x\,dR}{R+x}\cdot$ Bezeichnet man den Abstand der Kreise auf der abgewandten Seite mit dy, so ist $dy + 2R' + dx = 2R$ oder $dy + 2dR + dx = 0$, woraus

$$dy - \frac{2(R+x)dx}{x} + dx = 0 \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \frac{2R+x}{x}.$$

Dies Verhältnis stellt das Verhältnis der Stromdichten auf der den Gleisen zugewandten und der abgewandten Seite des Rohres dar. Setzt man für x den für den Abstand des Rohres von der Mittellinie M (S. 66) gefundenen Wert (x_1) ein, so erhält man

$$(9) \qquad \frac{dy}{dx_1} = 1 + \frac{4R_1}{a} \cdot \frac{(a + R_1 + R_2)}{(a + 2R_2)}.$$

Die Stromdichte auf dem Rohre kann auf folgende Weise berechnet werden. Es ist für eine Äquipotentialfläche (Rohroberfläche von geringer Länge δ)

$$e = \frac{cJ}{2\pi\delta} \log \frac{L - 2x}{L + 2x}.$$

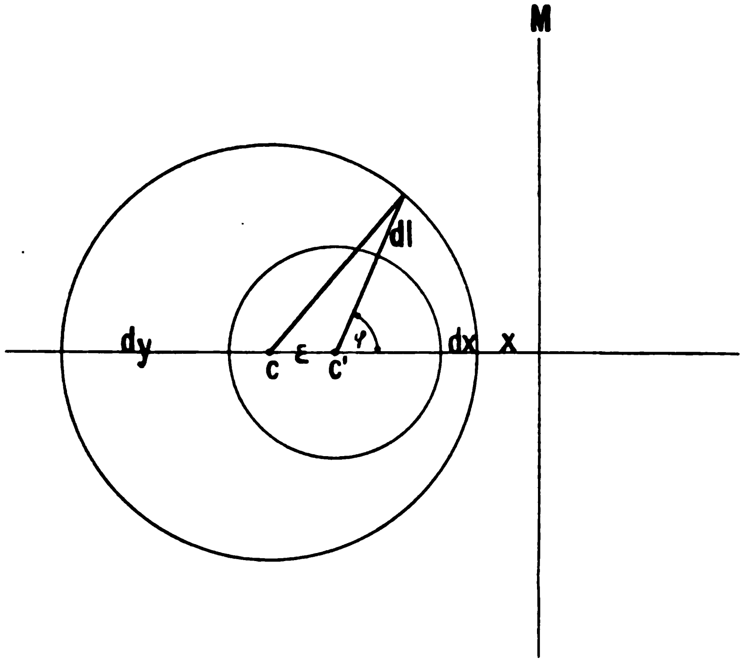


Fig. 7.

Die Spannung zwischen zwei unendlich nahen Äquipotentialflächen, die auf der den Gleisen zugewandten Seite die Entfernung dx haben, ist

$$de = -\frac{2JLc\,dx_1}{\pi\delta(L^2 - 4x_1^2)}.$$

Der Widerstand für einen Rohrstreifen von der Länge δ und der Breite ds ist bei einem Abstand dl (Fig. 7)

$$w_{dl} = \frac{c\,dl}{\delta\,ds}, \quad i_{dl} = \frac{de}{w_{dl}} = \frac{JL\,dx_1\,ds}{4R_1 x_1 \pi\,dl}.$$

Die Stromdichte (Strom pro Flächeneinheit) ist demnach

$$i'_{dl} = \frac{i}{\delta\, ds} = \frac{J L\, dx_1}{4 R_1 x_1 \pi \delta\, dl}.$$

Bezeichnet man die mittlere Stromdichte am Rohr mit J', so ist

$$J' = \frac{J}{2 R_1 \pi \delta}, \quad i' = \frac{J' L\, dx_1}{2 x_1\, dl}.$$

Setzt man für L und x_1 die gefundenen Werte ein, so ist

$$i' = J' \frac{dx_1}{dl} \sqrt{\frac{(a + 2R_1)(a + 2R_1 + 2R_2)}{a(a + 2R_2)}}.$$

Für die Bestimmung von $\frac{dx_1}{dl}$ hat man die Gleichungen (Fig. 7)

$$R^2 = \varepsilon^2 + (R' + dl)^2 + 2\varepsilon(R' + dl)\cos\varphi,$$

$$R = \varepsilon + R' + dx \quad \text{oder} \quad dx + dR = -\varepsilon = -\frac{R\,dx}{x}.$$

Man erhält so

$$\frac{dx}{dl} = \frac{x}{R + x - R\cos\varphi}.$$

Unter Berücksichtigung der Indizes für die eine Seite von der Mittellinie aus

$$\frac{dx_1}{dl} = \frac{x_1}{R_1 + x_1 - R_1 \cos\varphi},$$

$$\text{(10)} \qquad \frac{dx_1}{dl} = \frac{a(a + 2R_2)}{a(a + 2R_2) + 2R_1(a + R_1 + R_2)(1 - \cos\varphi)}.$$

Es ist dies das Verhältnis der Stromdichte an irgend einer Stelle des Rohrs zu der maximalen, den Gleisen zugewandten. Für $\varphi = 180^0$ ergibt sich das (S. 68) gefundene Verhältnis.

Die Stromdichte i' ist

$$\text{(11)} \qquad i' = J' \frac{\sqrt{(a+2R_1)(a+2R_2)(a + 2R_1 + 2R_2)\,a}}{a(a+2R_2)+2R_1(a+R_1+R_2)(1-\cos\varphi)(1-\cos\varphi)}.$$

Der Höchstwert auf der den Gleisen zugewandten Seite (für $\varphi = 0$) ist

$$\text{(11a)} \qquad i'_{\max} = J' \sqrt{\frac{(a + 2R_1)(a + 2R_1 + 2R_2)}{a(a + 2R_2)}}.$$

Für $\varphi = 180^0$, also auf der den Gleisen abgewandten Seite des Rohrs, erhält man als den Niedrigstwert

$$\text{(11b)} \qquad i'_{\min} = J' \frac{\sqrt{a(a + 2R_1)(a + 2R_2)(a + 2R_1 + 2R_2)}}{a(a + 2R_2) + 4R_1(a + R_1 + R_2)}.$$

Zur Berechnung des auf einer Sektorfläche zwischen φ_1 und φ_2 austretenden Stromes setzt man in obiger Gleichung

$$i' = \frac{i}{\delta\, ds}, \quad J' = \frac{J}{2 R_1 \pi \delta}, \quad d\varphi = \frac{ds}{R_1}.$$

Man erhält alsdann $i_{1\,(\varphi_1 - \varphi_2)} =$

$$\frac{J\sqrt{a(a+2R_1)(a+2R_2)(a+2R_1+2R_2)}}{2\pi}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{a(a+2R_2)+2R_1(a+R_1+R_2)(1-\cos\varphi)}$$

$$i_1 = \frac{J}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg} y\sqrt{\frac{(a+2R_1)(a+2R_1+2R_2)}{a(a+2R_2)}}\right]_{\varphi_2}^{\varphi_1},$$

wobei $y = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. Für $\varphi_1 - \varphi_2 = 360^0$ wird $i_1 = J$.

Für ein Rohr von 10 cm Durchmesser in 1 m Entfernung von den Gleisen beträgt bei 1 Volt Spannung unter den früher gemachten Annahmen die mittlere Stromdichte am Rohr 0,120 Milliampere. Die höchste Stromdichte ist hierbei etwa 1,09 mal so groß, als die mittlere, also rund 0,131 Milliampere. Das Verhältnis der größten Stromdichte zur geringsten $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ist 1,24. Für ein Rohr von 100 cm Durchmesser würden unter sonst gleichen Verhältnissen sich folgende Werte ergeben: Mittlere Stromdichte am Rohr 0,0174 Ampere, die höchste Stromdichte ist 1,915 mal so hoch wie die mittlere, also 0,0246 Ampere pro qdm, das Verhältnis der höchsten zur geringsten Stromdichte ist 3,68.

Für dünne Rohre ist demnach nicht bloß die mittlere, sondern auch die höchste Stromdichte größer als bei den dickeren Rohren.

Die ermittelten Werte galten für den Fall der Einbettung von Gleis und Rohr in homogen leitenden allseitig unbegrenzten Boden. Für Straßenbahngleise trifft dies nicht zu. Die Gleise befinden sich an der Grenzschicht von einem Leiter (Erdboden) und einem Nichtleiter. Die nach den entwickelten Formeln berechneten Werte sind daher nur Grenzwerte, die etwas zu hohe Korrosionsströme ergeben. Die Äquipotentialflächen sind in diesem Falle nicht mehr Zylinderflächen von kreisförmigem Querschnitt. Angenähert könnte man den Betrag, um den sich der Stromübergang vermindert, berücksichtigen, wenn obenstehende Gleichung benutzt wird. Es würde der Betrag des Stroms abzuziehen sein, der aus der freiliegenden Fläche austreten würde, wenn diese nicht von Luft, sondern von Erde begrenzt wäre.

5. Korrosionen treten an Rohrleitungen nicht auf, wenn elektrolytisch wirkender Stromaustritt aus den Rohren verhindert wird.

Um den Stromaustritt aus den Rohren ungefährlich zu machen, ist schon wiederholt vorgeschlagen worden, die Rohre an den Stellen, wo sie positiv gegen die Gleise sind, metallisch mit diesen zu verbinden. Ferner wurde versucht, durch Erdung der Rohre die Ströme ungefährlich abzuleiten.

Die metallische Verbindung von Rohr und Gleis kann zwar an der Verbindungsstelle die Spannung zwischen Rohr und Gleis nahezu aufheben, durch eine solche Verbindung werden jedoch die Rohrströme erhöht. Sind die einzelnen Rohre im ganzen Netz metallisch gut leitend verbunden, so könnte wohl durch eine derartige Maßnahme die Rohrleitung geschützt werden; es werden aber gleichzeitig auch die Erdströme vermehrt, die in benachbarte metallisch nicht verbundene Metallmassen eindringen und an diesen Zerstörungen veranlassen können.

Auch durch Erdung der Rohre an den gefährdeten Stellen kann die Stromüberleitung zwischen Rohr und Gleise begünstigt, die Rohrströme können verstärkt werden. Durch Verwendung von gewöhnlichen Erdplatten kann nicht viel erreicht werden, da der Stromübertritt vom Rohr zum Gleis nur in dem Maße vermindert wird, als die Spannung vermindert wird. Soll die Erdung wirksam sein, so muß, da die Äquipotentialflächen von niedrigerem Potential die Rohrleitungen ganz umschließen, auch die Erdung rings um das zu schützende Rohr erfolgen. Dies kann durch ein weiteres, mit dem zu schützenden Rohr metallisch verbundenes Rohr geschehen. Dieses Schutzrohr nimmt alsdann die Korrosionen auf. Eine solche Schutzmaßnahme kann praktisch nicht über den ganzen Gefahrbereich ausgedehnt werden, hat daher nur rein örtliche Bedeutung. Sie kann z. B. von Vorteil sein, wenn Rohrleitungen nur an bestimmten Stellen, etwa an Kreuzungen gefährdet sind.

Größere Bedeutung haben die Maßnahmen, die eine Verminderung der Rohrströme bezwecken. Nach den entwickelten Gleichungen wird dies erreicht, wenn der Gleiswiderstand, ebenso der Gleisstrom, möglichst vermindert, der Rohrwiderstand, ebenso der Übergangswiderstand von Gleis zur Erde oder Rohr, möglichst erhöht und die freitragende Strecke möglichst kurz gewählt wird.

Der Gleiswiderstand kann durch Verwendung starker Schienenprofile und möglichst widerstandsloser, unter dauernder Kontrolle gehaltener Stoßverbindungen klein gehalten werden. Den Rohrwiderstand etwa durch isolierende Stoßverbindungen zu vergrößern, macht technische Schwierigkeiten, ist aber anscheinend mit Erfolg schon versucht worden. Voraussetzung ist für eine derartige Maßnahme, daß es gelingt, die Entwicklung von Erdströmen, die die erwähnten Rohrleitungen durchsetzen können, in hohem Maße zu vermindern. Ebenso ist eine dauernd gut zu erhaltende Isolierung von Straßenbahngleisen schwierig.

Um die Länge der freitragenden Strecke zu vermindern und die Gleise vom Strom teilweise zu entlasten, um so die Potentialunterschiede im Gleisnetz nach Möglichkeit zu vermindern, werden die Gleise an verschiedenen zweckmäßig ausgewählten Stellen gespeist. Um an den Schienenspeisepunkten die Potentiale nahezu gleich zu halten, werden in die Speiseleitungen gewöhnlich Widerstände geschaltet, die während des Betriebes den Betriebsverhältnissen entsprechend passend einreguliert werden. In die Leitungen zu den Gleisen in der Nähe der Zentralstation werden die größten, in die Leitungen für die entferntesten Anschlußpunkte werden keine Widerstände eingeschaltet. Die Verhältnisse sind hierbei so zu wählen, daß entsprechend den entwickelten

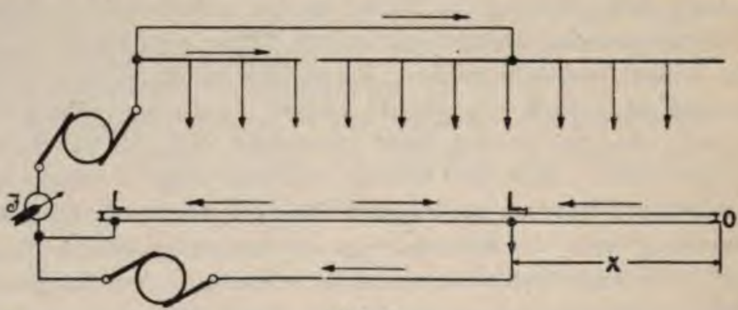


Fig. 8.

Gleichungen das Produkt von Spannung in den Gleisen und freitragender Strecke möglichst klein ist. Diese Anordnung ist wegen ihrer Einfachheit viel im Gebrauch; sie hat aber den Nachteil, daß in den eingeschalteten Widerständen viel Arbeit verbraucht wird, und daß bei Änderungen in der Stromverteilung im Schienennetz die Widerstände nachreguliert werden müssen. Änderungen der Stromverteilung können durch Änderung des Fahrplans oder Verlängerung der einzelnen Bahnlinien auftreten oder auch im Laufe des Tagesbetriebs, wenn z. B. die eine Bahnlinie völlig stromlos ist, während eine andere an die gleiche Zentrale angeschlossene Linie starken Betrieb hat.

Vorteilhaft sind, besonders wenn es sich um lange Speiseleitungen handelt, die sog. Kappschen Saugdynamos, die in die Schienenspeiseleitungen eingeschaltet werden. Es sind dies durch den Oberleitungsstrom erregte Maschinen. In der Schaltung (Fig. 8) sei x vom Endpunkt der Strecke gerechnet, die Belastung sei gleichmäßig auf der Strecke verteilt. Es gilt dann für die Strecke vom Endpunkt bis L_1

$J_x = \frac{Jx}{L}$. Die Spannung zwischen den Endpunkten dieser Strecke ist, wenn W der Widerstand für die Längeneinheit ist:

$$\int_0^{L_1} J_x \, W dx = \frac{J W L_1^2}{2L}.$$

Ist J_s der Strom der Saugdynamo, so ist auf der Strecke zwischen L_1 und L der Gleisstrom

$$J_x = \frac{xJ}{L} - J_s,$$

die Spannung zwischen den Speisepunkten L_1 und L

$$\int_{L_1}^{L} \left(\frac{xJ}{L} - J_s\right) W dx = \frac{J W}{2L}(L^2 - L_1^2) - J_s W (L - L_1).$$

Soll an den Speisepunkten Potentialgleichheit herrschen, so muß $J(L + L_1) = 2 J_s L$ sein oder

$$J_s = \frac{J(L + L_1)}{2L}.$$

Würde man hiernach $L_1 = \frac{L}{3}$ wählen, für welche Verhältnisse die Spannung in den Gleisen den niedrigsten Wert annimmt, so würde die Länge der freitragenden Strecke, ebenso der Höchststrom in den Gleisen, auf den dritten Teil verringert werden.

Stimmen die Speisepunkte für Oberleitung und Gleise örtlich überein, so stimmen, gleiche Stromverteilung in Oberleitung und Gleisen vorausgesetzt, auch die Speiseströme für Oberleitung und Gleise überein. Es gibt dies schon eine Kontrolle für richtig bemessene Schienenspeisung, falls nicht noch durch Messen der Spannung zwischen den Speisepunkten eine weitere Kontrolle vorgezogen wird.

Die Spannung der Saugdynamo muß den Spannungsverlust der Saugleitung decken. Je mehr Saugleitungen und in je kürzerem Abstand diese vorhanden sind, um so mehr ähnelt die Anordnung einer Dreileiteranlage, in der die Schienen als Mittelleiter dadurch, daß ihnen Ströme von verschiedener Richtung von zwei Seiten zugeführt werden, von Strom entlastet werden.

Ein Dreileiternetz in der Weise herzustellen, daß bei zweigleisigen Bahnen für das eine Gleis ein positiver, für das andere ein negativer Fahrdraht verwandt wird, während die Gleise den Nulleiter bilden, macht wegen der Isolation an Kreuzungen technische Schwierigkeiten.

Unter Verwendung von nur wenig Saugleitungen können dem Dreileitersystem ähnliche Verhältnisse geschaffen werden (Fig. 9). Es werde wieder gleichmäßige Verteilung der Streckenbelastung angenommen. Die Schienenspeiseleitung sei am Ende unmittelbar in einzelnen Abständen durch Widerstände mit dem Gleise verbunden. Die Abzweigwiderstände seien $w_1, w_2, \cdots$, die von Strömen $i_1, i_2, \cdots$ durchflossen werden.

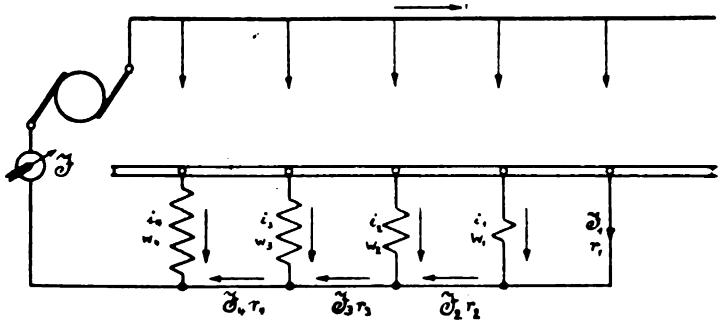


Fig. 9.

Die Widerstände in den einzelnen Teilen der Speiseleitung seien $r_1, r_2, \cdots$, die von den Strömen $J_1, J_2, \cdots$ durchflossen werden. Wenn an den Anschlußpunkten Potentialgleichheit herrschen soll, muß sein:

$$\begin{aligned} J_1 r_1 - i_1 w_1 &= 0 \\ i_1 w_1 + J_2 r_2 - i_2 w_2 &= 0 \\ i_2 w_2 + J_3 r_3 - i_3 w_3 &= 0 \\ &\vdots \\ i_{n-1} w_{n-1} + J_n r_n - i_n w_n &= 0, \end{aligned}$$

ferner:

$$\begin{aligned} J_1 + i_1 &= J_2 \\ J_2 + i_2 &= J_3 \\ &\vdots \\ J_{n-1} + i_{n-1} &= J_n \\ J_n + i_n &= J. \end{aligned}$$

Die Ströme i müssen der Belastungsverteilung auf der Strecke entsprechen. Bei gleichmäßiger Streckenbelastung müssen die Absaugströme i gleich sein, $i_1 = i_2 = i_3 = \cdots = i_n = J_1$.

Hieraus ergeben sich für die Abzweigwiderstände die Werte:

$$w_1 = r_1$$
$$w_2 = r_1 + 2r_2$$
$$w_3 = r_1 + 2r_2 + 3r_3$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$w_n = r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \cdots + nr_n.$$

Die Stromstärke in der Speiseleitung nimmt nach dem Ende zu ab. Der Querschnitt kann demnach hinter jedem Abzweigpunkt kleiner gewählt werden. Würde man, wie dies bei Verwendung einfacher Speiseleitungen erforderlich ist, diese bis zum Ende gleich stark wählen, und würden die Anschlußwiderstände in gleichen Abständen angeschlossen, so würde $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = r$ sein. Es ist dann $w_n = r(n+1)\frac{n}{2}$. Der Spannungsverlust am ersten Abzweigwiderstand, um den die Maschinenspannung erhöht werden muß, um die verlangte Spannung zwischen Gleis und Oberleitung zu erhalten, ist unter den gemachten Voraussetzungen

$$e = i_n w_n = i_n rn\left(\frac{n+1}{2}\right), \quad i_n = \frac{J}{n+1},$$

also

$$e = \frac{Jrn}{2}.$$

nr ist der Widerstand des ganzen Kabels. Ist dieser R, so ist $e = \frac{JR}{2}$.

Gegenüber der Anordnung der Schienenspeisung mit nur einem Anschlußpunkt der Speiseleitung hat die zuletzt beschriebene Anordnung den großen Vorteil, daß die Länge der freitragenden Strecke ohne Vermehrung der Speiseleitungen beliebig verringert und die Schienen in hohem Maße von Strom entlastet werden können. Dies geschieht für die ganze Gleisstrecke, wenn die Speiseleitung bis an das Ende der Strecke geführt wird. Bei verzweigten Bahnnetzen können die Abzweigwiderstände (w) durch Abzweigspeiseleitungen ersetzt werden. Dieses Speisesystem kann in einzelnen Fällen auch mit den vorher erwähnten Systemen mit einfachen Speiseleitungen unter Einschalten von Widerständen oder Saugdynamos verbunden werden.

Es gibt noch eine Anzahl von Maßnahmen, die gegen die zerstörende Wirkung der Streuströme getroffen werden, die aber zum Teil nur örtliche Bedeutung haben.

Die Gleise ganz von der Stromführung auszuschließen, ist aus technischen und wirtschaftlichen Gründen in vielen Fällen nicht angängig; werden aber die Gleise auch nur teilweise zur Stromführung benutzt, so ist eine vollkommene Beseitigung der Erdströme nicht möglich. Es sind in diesen Fällen dann Maßnahmen zu treffen, um die Stromentweichung möglichst niedrig zu halten. Von seiten der Beteiligten ist den Erdstromfragen dauernd die größte Beachtung geschenkt worden. Bei der Schwierigkeit des Stoffs sind umfangreiche Untersuchungen erforderlich und Aufgaben physikalisch-chemischer Art zu lösen, um die zweckdienlichsten Schutzmaßregeln aufzustellen, ohne die Wirtschaftlichkeit einzelner Anlagen in Frage zu stellen.

Rezensionen.

Herzog, Josef, und **Feldmann, Cl. Die Berechnung elektrischer Leitungsnetze in Theorie und Praxis.** 2. Auflage. 2 Teile. Berlin 1903, 1905, J. Springer.

Als im Jahre 1893 die erste Auflage des Werkes erschien, war es noch möglich, die Grundlagen der Leitungsberechnung in einem mäßig starken Bande erschöpfend zu behandeln und dabei noch die wichtigsten Eigenschaften der Konsumapparate zu besprechen.

Die jetzt vollständig vorliegende zweite Auflage, deren Vorwort 10 Jahre später datiert ist, umfaßt 2 starke Bände, wobei es sich noch als notwendig erwies, um den Umfang des Werkes nicht noch größer zu gestalten, die Besprechung der Konsumapparate fast vollständig zu unterlassen.

Das Werk hat sich durch die zweite Auflage den ersten Platz, den ihrer Zeit die erste Auflage einnahm, wieder erobert; es dürfte weitaus das vollständigste Werk über das ganze mit dem Leitungsnetz zusammenhängende Gebiet der Elektrotechnik sein, und jeder Ingenieur, der auf diesem Gebiete auf der Höhe sein will, muß das Werk eingehend durchstudieren. Der Riesenstoff, der in den zwei Bänden zusammengetragen ist, spiegelt die rasche Entwicklung der Elektrotechnik getreulich wieder, das Suchen nach einer exakten Erforschung der Vorgänge, trotzdem gerade die theoretische Verfolgung der Netzberechnung insofern eine sehr undankbare Aufgabe ist, als bei ihrer Übertragung in die Praxis mit so viel angenommenen Faktoren (Konsum, Gleichzeitigkeitsfaktor) gearbeitet werden muß, daß eine Übereinstimmung von Rechnung und tatsächlichem Verhalten nie zu erwarten ist.

Es hat den Anschein, als ob durch die Fülle die Einteilung des Stoffes gelitten hat. Allerdings trägt hierzu wohl auch der Umstand bei, daß die zwei Bände nicht gleichzeitig erschienen sind, sondern in einem Zwischenraum von $1^1/_2$ Jahren. Dadurch sahen sich die Verfasser genötigt, jeden Band als abgeschlossenes Ganzes zu betrachten, und man kann den zweiten Band als erweiterte Auflage des ersten bezeichnen. Die von den Verfassern gewählte Zweiteilung „Strom- und Spannungsverteilung in Netzen“ und „Dimensionierung der Leitungen“ ist eine zu gekünstelte, die einerseits zu einer willkürlichen Zerreißung des Stoffes, anderseits zu Wiederholungen geführt hat. So finden sich z. B. im ersten Kapitel des ersten Bandes unter Stromarten einige Angaben über Zwei- und Dreiphasenstrom, weitere und zwar gerade Strom- und Spannungsverteilung im ersten Kapitel des zweiten Bandes. So finden sich die verschiedenen Netzberechnungen im ersten Band abgeleitet und an Beispielen erläutert, im zweiten Band an weiteren Beispielen noch einmal ausführlich behandelt (Transfiguration, Gleichungsmethoden, Berechnung der Fernleitungen). Es wäre jedenfalls für das Verständnis aller Ableitungen vorteilhafter, wenn gleich die ausführlichen Beispiele sich an diese anschließen würden. Die Dimensionierung der Leitungen ist eben keine selbständige Aufgabe, wie z. B. die Konstruktion einer Dynamo aus den Rechnungsdaten, sondern ergibt sich aus der Strom- und Spannungsverteilung ganz eindeutig durch das Ohmsche Gesetz.

Dieser Punkt ist aber auch der einzige Einwand, der sich gegen das Werk erheben läßt, abgesehen von einigen belanglosen Bemerkungen, die bei der nun folgenden Besprechung der einzelnen Kapitel zu machen wären.

Dem ersten Kapitel des ersten Bandes schicken die Verfasser eine Einleitung voraus, welche zuerst eine Klassifikation der Anlagen bringt. Der Vollständigkeit halber wären dieser auch die verschiedenen Bahnsysteme einzureihen, sei es als Gruppe für sich, sei es als Unterabteilung der einzelnen Stromsysteme. In großen Zügen wird sodann die großartige Entwicklung der Starkstromtechnik und insbesondere der elektrischen Verteilungssysteme besprochen. Den Schluß der Einleitung bilden Angaben über die Literatur, von den ersten Abhandlungen über Leitungsberechnungen bis zu den ausführlichen Werken der Jetztzeit. Unter diesen wäre auch die im zweiten Band erwähnte Abhandlung von Frick (Zeitschrift für Elektrotechnik 1894) und das Buch von Galluser und Hausmann der Vollständigkeit halber aufzunehmen.

Im anschließenden Kapitel werden zunächst die Grundbegriffe über elektrische Energie und Strömung erläutert, sodann das Ohmsche Gesetz in seiner vereinfachten Form für Gleichstrom und seiner allgemeinen Form für Wechselströme besprochen. Diese Betrachtung führt dann zur Behandlung der Richtungswiderstände, der Diagramme der Ströme und Spannungen, deren Anwendung an dem Beispiel der Ermittlung des Spannungsabfalles in induktiv belasteten Leitungen gezeigt wird. Bei der Ableitung der Formel für die Sekundärspannung ist auf S. 60 in dem Ausdruck für AD_1 ein kleiner Druckfehler unterlaufen, insofern es nicht DF sondern DF_1, ferner in der ersten Formel für E_2 nicht E_1 sondern E_1' heißen muß. Sehr instruktiv sind die Diagramme und Kurven für die Strom- und Spannungsverhältnisse bei Variation der Belastung und der Phasenverschiebung für eine gegebene Fernleitung.

Im zweiten Kapitel werden zunächst die einfachsten Leiterverbindungen und im Anschluß hieran die Verwendung von komplexen Größen zur Darstellung von Richtungsgrößen besprochen. Gerade bei der Berechnung langer Fernleitungen bietet diese Darstellungsweise große Vorteile und ist daher die Aufnahme der Rechenoperationen mit diesen Größen wohl berechtigt. Sehr prägnant ist die Definition des Begriffes „Richtungsgröße“ als „Strecke mit Inbegriff der Lage.“

Bei der anschließenden Behandlung der Parallelschaltung von Widerständen werden, neben den rechnerischen und trigonometrischen, auch die graphischen Methoden in erschöpfender Weise besprochen.

Die Verfasser gehen dann zur Besprechung der Sekundärerscheinungen bei Fernleitungen über und geben die theoretischen Grundlagen zur Berechnung der gegenseitigen und eigenen Induktion. Im letzten Teil des zweiten Kapitels werden die Eigenschaften des allgemeinen Wechselstromtransformators

Rezensionen.

Herzog, Josef, und **Feldmann, Cl.** **Die Berechnung elektrischer Leitungsnetze in Theorie und Praxis.** 2. Auflage. 2 Teile. Berlin 1903, 1905, J. Springer.

Als im Jahre 1893 die erste Auflage des Werkes erschien, war es noch möglich, die Grundlagen der Leitungsberechnung in einem mäßig starken Bande erschöpfend zu behandeln und dabei noch die wichtigsten Eigenschaften der Konsumapparate zu besprechen.

Die jetzt vollständig vorliegende zweite Auflage, deren Vorwort 10 Jahre später datiert ist, umfaßt 2 starke Bände, wobei es sich noch als notwendig erwies, um den Umfang des Werkes nicht noch größer zu gestalten, die Besprechung der Konsumapparate fast vollständig zu unterlassen.

Das Werk hat sich durch die zweite Auflage den ersten Platz, den ihrer Zeit die erste Auflage einnahm, wieder erobert; es dürfte weitaus das vollständigste Werk über das ganze mit dem Leitungsnetz zusammenhängende Gebiet der Elektrotechnik sein, und jeder Ingenieur, der auf diesem Gebiete auf der Höhe sein will, muß das Werk eingehend durchstudieren. Der Riesenstoff, der in den zwei Bänden zusammengetragen ist, spiegelt die rasche Entwicklung der Elektrotechnik getreulich wieder, das Suchen nach einer exakten Erforschung der Vorgänge, trotzdem gerade die theoretische Verfolgung der Netzberechnung insofern eine sehr undankbare Aufgabe ist, als bei ihrer Übertragung in die Praxis mit so viel angenommenen Faktoren (Konsum, Gleichzeitigkeitsfaktor) gearbeitet werden muß, daß eine Übereinstimmung von Rechnung und tatsächlichem Verhalten nie zu erwarten ist.

Es hat den Anschein, als ob durch die Fülle die Einteilung des Stoffes gelitten hat. Allerdings trägt hierzu wohl auch der Umstand bei, daß die zwei Bände nicht gleichzeitig erschienen sind, sondern in einem Zwischenraum von $1\frac{1}{2}$ Jahren. Dadurch sahen sich die Verfasser genötigt, jeden Band als abgeschlossenes Ganzes zu betrachten, und man kann den zweiten Band als erweiterte Auflage des ersten bezeichnen. Die von den Verfassern gewählte Zweiteilung „Strom- und Spannungsverteilung in Netzen“ und „Dimensionierung der Leitungen“ ist eine zu gekünstelte, die einerseits zu einer willkürlichen Zerreißung des Stoffes, anderseits zu Wiederholungen geführt hat. So finden sich z. B. im ersten Kapitel des ersten Bandes unter Stromarten einige Angaben über Zwei- und Dreiphasenstrom, weitere und zwar gerade Strom- und Spannungsverteilung im ersten Kapitel des zweiten Bandes. So finden sich die verschiedenen Netzberechnungen im ersten Band abgeleitet und an Beispielen erläutert, im zweiten Band an weiteren Bei-deren einfachster Fall, die verzweigte Leitung an dem Beispiel einer Hausinstallation erläutert wird.

Den Schluß des ersten Kapitels bilden Angaben über das Drei- und Fünfleitersystem, ferner über die Mehrphasensysteme, Angaben, welche zweckmäßiger im ersten Band Platz gefunden hätten. Das zweite Kapitel führt zunächst den Begriff der Löschbarkeit und den damit eng zusammenhängenden Begriff der Elastizität ein und bringt sodann die Bedingungen, welche ein Netz mit Rücksicht auf Motoren erfüllen muß. Bei Besprechung des Wechselstrommotorenbetriebes ist auf S. 55 der Ausdruck normale und maximale Belastung des Motors gebraucht. Dieser Begriff hat sich leider sehr eingebürgert, obwohl er für Motoren und Generatoren leicht irreführend ist. Er stammt aus dem Dampfmaschinenbau, bei welchem er insofern berechtigt ist als unter Normalleistung die Leistung zu verstehen ist, bei welcher der Dampfverbrauch ein Minimum ist, während unter Maximalleistung die maximale Dauerleistung zu verstehen ist. Bei Generatoren und Motoren ist nur der letztere Begriff festlegbar, eine zwischen Leerlauf und dieser maximalen Dauerleistung durch irgend welche Sondereigenschaften besonders hervortretende Normalleistung gibt es nicht, und deshalb ist dieser Begriff zu verwerfen.

Sodann folgen Abschnitte über das Wesen und die Berechnung von Speise- und Ausgleichsleitungen. Den Schluß des zweiten Kapitels bildet die Behandlung der asymmetrischen Belastung von Dreileiteranlagen und Mehrphasensystemen.

Das dritte Kapitel ist der wichtigen Frage der Erwärmung elektrischer Leitungen gewidmet, welche erst in den letzten Jahren insbesonders durch die angeführten Arbeiten von Dr. Apt. Wilkens eine bedeutende Klärung erfahren hat. Die Verfasser besprechen hierbei die Erwärmung bei blanken Drähten, bei isolierten Leitungen nach den verschiedenen Verlegungsarten und bringen auch die neuesten Belastungstabellen für Niederspannungskabel, wie sie vom Verbande aufgestellt wurden.

Das folgende Kapitel behandelt die Dimensionierung der Leitungen vom wirtschaftlichen Standpunkt aus. Es wäre wünschenswert gewesen, wenn die Verfasser etwas ausführlicher auf den Gleichzeitigkeitsfaktor, d. h. das Verhältnis der maximal gleichzeitig auftretenden Stromentnahme zu dem installierten Werte, eingegangen wären, da dieser Faktor das grundlegende Moment aller Netzberechnung ist. Gerade bei diesem Kapitel wäre auch ein Hinweis auf die Statistik der Vereinigung der Elektrizitätswerke nützlich gewesen, da diese das einzig zuverlässige Material für wirtschaftliche Daten ausgeführter Anlagen bildet und für Betriebskostenberechnungen, approximative Anschläge, Kontrollrechnungen von allergrößtem Nutzen ist.

Im fünften Kapitel werden die verschiedenen indirekten Stromsysteme behandelt und zwar zunächst die Verteilung mittels Akkumulatoren, wobei die Dimensionierungen der Zellenschalterleitungen in überaus ausführlicher Weise behandelt werden. Anschließend folgt ein Abschnitt über Verteilung mittels Transformatoren, Motorgeneratoren und rotierender Umformer. Den Schluß des Kapitels bildet ein Vergleich der verschiedenen Verteilungsarten in bezug auf die erforderliche Menge an Leitungsmetall.

Das sechste Kapitel, das umfangreichste des zweiten Bandes, umfaßt die Berechnung geschlossener Leitungsnetze, wobei die Verfasser in der

Hauptsache die im ersten Bande angegebenen Verfahren durch größere Beispiele illustrieren.

Auch das siebente Kapitel baut sich im wesentlichen auf die im ersten Band gegebenen Daten über Fernleitungen auf.

Sehr interessant ist der Abschnitt über die Ursachen und Größe der Ableitung, welche bei der heute herrschenden Tendenz mit der Spannung immer höher zu gehen (auch in Deutschland sind z. Z. 2 Anlagen mit 50000 Volt im Bau) eine immer größere Rolle spielt. Eine ausführliche Abhandlung über diesen Punkt findet sich in den Transactions of the American Institute of Electrical Engineers (März 1904), in welcher von H. R. Ryan für die maximale Spannung bei einem gegebenen Querschnitt die Formel gegeben wird: $E_{\max} \cdot \frac{17{,}94\,b}{459 \cdot t} \times 35\,000 \log \frac{d}{r} (r \times 0{,}7)$. Alle Maße in inches, die Temperatur in Fahrenheit gemessen.

An zwei Beispielen werden die verschiedenen Methoden erläutert, was gerade bei diesem Kapitel besonders dankenswert ist, da es sich um Rechnungen handelt, welche noch nicht allgemein bekannt sind.

Den Schluß des zweiten Bandes und damit des ganzen Werkes bildet das Kapitel über Leitungen für elektrische Bahnen. Ein ausführliches Beispiel über eine Gleichstromlinie zeigt die Aufstellung des graphischen Fahrplanes, die Ermittlung des Kraftbedarfes, die Berechnung der Speiseleitungen und der Schienenrückleitung. Zum Schlusse ist noch auf die Grundzüge zur Berechnung einer Wechselstrombahn hingewiesen.

Die Ausstattung des Buches, der Druck und vor allem die große Anzahl der Zeichnungen sind erstklassig. Nur mit der Art der Literaturangabe kann ich mich nicht befreunden. Will man eine Angabe nachschlagen, so muß man sich erst überzeugen, wo das betreffende Kapitel zu Ende ist, da man sonst unfehlbar die Angabe des nächsten Kapitels aufschlägt. Es empfiehlt sich entweder alle Nachweise am Schlusse jedes Bandes zu vereinigen oder aber, was für den Leser das bequemste ist, dieselben als Fußnote auf der betreffenden Seite anzubringen.

Ulm. M. Neustätter.

P. Appell. Éléments d'analyse mathématique à l'usage des ingénieurs et des physiciens. 2^{me} Ed. 690 p. 4°. Paris 1905. Gauthier-Villars.

In 25 Kapiteln gibt Appell eine sehr reichhaltige Darstellung der Differential- und Integralrechnung, einschließlich ausgedehnter Anwendungen auch auf die Differentialgeometrie des Raumes, ferner die Integration einer Reihe von Differentialgleichungen, die Theorie der trigonometrischen Reihen, viele bestimmte Integrale, Annäherungsmethoden für die Integration (mechanische Quadratur) usw.

Der deutsche Leser staunt, welche Kenntnisse in dem „elementaren" Buch als von der Schule her bekannt vorausgesetzt sind, z. B. die Differentiationsregeln und die Differentialquotienten der elementaren Funktionen, Exponentialfunktion usw.

Der „elementare" Charakter andrerseits zeigt sich doch bei manchen Definitionen (stetige Funktion einer Veränderlichen = ligne ininterrompue

— p. 4; Vertauschbarkeit der Differentiation bei einer Funktion von zwei Veränderlichen — p. 11), während wieder in der Einzelausführung der Resultate, sobald es sich um physikalische oder geometrische Probleme handelt, sehr weit gegangen wird (genaue Berechnung der Schwingungsdauer des Pendels mit Reihenentwickelung des elliptischen Integrals p. 193, vorher Bogenlänge der Ellipse p. 187).

Auf die reiche Fülle kann hier unmöglich eingegangen werden (z. B. sind der Differentialgeometrie des Raumes allein fünf Kapitel gewidmet!). Auch Integrationsapparate werden ausführlich behandelt, wobei der harmonische Analysator vielleicht noch hätte berücksichtigt werden können.

Was an Durchbildung und Vollendung die Werke von Picard und Jordan in der höchsten Analysis bieten, das gibt Appell für ein „elementares" (man muß aber die Grenze, was die extensive Seite betrifft, sehr weit ziehen!) mehr der Anwendung gewidmetes, nicht auf funktionentheoretische Feinheiten und komplizierte Funktionen sich erstreckendes Gebiet.

Leipzig. H. Liebmann.

R. Gans. Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Mit 31 Figuren im Text. 98 Seiten. 4°. Leipzig 1905, B. G. Teubner.

Der Verfasser ist ein eifriger Verfechter der Ansicht, daß die moderne Elektrodynamik als „natürliche Rechenmethode" die Vektoranalysis fordert, und tritt sehr energisch dem zum Teil von hervorragenden Forschern gezeigten aktiven und passiven Widerstand entgegen.

Inhaltlich zeigen die drei ersten Kapitel, welche in der Hauptsache der Algebra und Analysis der Vektoren gewidmet sind, natürlich enge Verwandtschaft mit den Darlegungen des (nach Vollendung des Manuskripts erschienenen) ersten Bandes von Abrahams Elektrizitätslehre.

Was nun die *Anwendungen* betrifft, so bringen schon die drei ersten Kapitel mancherlei, z. B. das zweite (nicht erste!) Keplersche Gesetz (S. 15), die Schraubenbewegung eines elektrischen Punktes im Magnetfeld (S. 22) usw. — Die Zerlegung eines Vektorfeldes in ein lamellares und ein solenoïdales (S. 59), die unter der Voraussetzung einer bestimmten Ordnung des Verschwindens im Unendlichen ausgeführt ist, hat Blumenthal inzwischen unter allgemeineren Annahmen bewiesen (Math. Annalen 61, S. 235 ff.).

Es folgen im vierten Kapitel Anwendungen auf Hydrodynamik (Helmholtz' Wirbeltheorie), elektrolytische Verschiebung und Elektrodynamik. Die Maxwellschen Gleichungen werden aus dem Biot-Savartschen Gesetz und dem Faradayschen Induktionsgesetz erklärt, und zwar mit Hilfe des Stokesschen Satzes aus Vektorintegralen gewonnen. Besonders zeigt die damit verwandte, aber zuerst noch die Formel für die Strömung durch eine veränderliche Fläche (S. 50) erfordernde Ableitung der Hertzschen Gleichungen für bewegte Körper die Macht der Vektoranalysis. Es ergibt sich nämlich unmittelbar, daß die Gleichungen auch für ein bewegliches Koordinatensystem ihre Form behalten.

Mit der Lorentzschen Elektronentheorie schließt das inhaltreiche und in seinem vierten Kapitel für Nichtphysiker etwas knapp gehaltene Buch.

Leipzig. H. Liebmann.

C. Burali-Forti. Lezioni di Geometria metrico-proiettiva. 308 p. 4°. Torino 1904, Fratelli Bocca.

Seit Cremona 1860 der kinematischen Erzeugung der Kurven dritter Ordnung von Grassmann gedacht hat und die „méthode très expéditive et très curieuse", die Ausdehnungslehre, ins rechte Licht gesetzt hatte, pflegten italienische Mathematiker mit besonderer Vorliebe die so lange unbeachtete Schöpfung des deutschen Meisters auszubauen und anzuwenden.

Das vorliegende Werk, welches eine systematische und didaktisch leichte (?) Einführung des zur Physik, Mechanik und darstellenden Geometrie Notwendigen geben soll, ist ein neuer Beweis dafür.

Im ersten Teil werden, nachdem das Produkt von vier Punkten als mit Vorzeichen behafteter Tetraederinhalt definiert ist, durch die Forderung der assoziativen Multiplikation die Produkte von drei und zwei Punkten in ihrer geometrischen Bedeutung deduktiv gewonnen, ebenso spezielle Aggregate (z. B. die Vektoren als Differenz von zwei Punkten, der Schwerpunkt als Summe usw.). Sodann wird die Vektoranalysis in Grassmanns Form auf Kegelschnitte usw. angewendet.

Der zweite Teil bringt die geometrische Deutung der allgemeinen Aggregate („Formationen"), z. B. die Deutung der allgemeinen F_2 im Raum als linearer Komplex und die Einführung der projektiven Geometrie, deren Ausbau mit Behandlung der Kegelschnitte (Pascal und Brianchon) der dritte Teil gewidmet ist.

Im vierten Teil gibt der Verfasser einen kurzen Abriß der Differentialgeometrie, wo die Vektorenrechnung wieder die Hauptrolle spielt. Sogar die Klassifikation der singulären Punkte von Raumpunkten findet sich hier (S. 205).

Es folgt im fünften Teil eine Darstellung der projektiven Raumgeometrie einschließlich der Flächen zweiten Grades.

In einer Schlußnote werden noch kurz die Rotationsflächen konstanter Krümmung entwickelt.

Leider fehlt ein Sachregister, auch sind die Rückverweise nicht sehr reichlich, sodaß schon aus diesem Grunde das oben vom Referenten eingefügte Fragezeichen wohl nicht ganz unberechtigt ist.

Während die Vektoranalysis ja immer mehr an Verbreitung gewonnen hat, wird man doch sagen können, daß die viel mehr Abstraktion erfordernde Punktrechnung kaum zum Allgemeingut und wohl noch weniger zum didaktischen Ausgangspunkt der Geometrie werden wird, ohne damit ihrer namentlich in der gewaltigen Konzentrationskraft liegenden Bedeutung nahe treten zu wollen, für die Burali-Fortis Werk ein sprechendes Zeugnis ist.

Leipzig. H. Liebmann.

H. Wieleitner. Bibliographie der höheren algebraischen Kurven für den Zeitabschnitt von 1890—1904. 58 S. Leipzig 1905, Göschen.

Das Heft gibt eine systematische Übersicht von etwa 1400 Arbeiten des genanntes Gebietes, mit Benutzung von etwa 300 Zeitschriften. Den Schluß bilden die 500 Autorennamen, alphabetisch geordnet. — Eine wertvolle Ergänzung zu den Werken von Loria und Wieleitner selbst über algebraische Kurven!

Leipzig. H. Liebmann.

V. Lebeau. Sur un nouveau curvigraphe. J. Neuberg. Sur les lignes tracées par le curvigraphe Victor Lebeau. 39 p., 14 p. Bruxelles 1904.

Der Apparat besteht im wesentlichen aus zwei beweglichen Dreiecken ABC und DEF, bei denen die Seiten AC und FE übrigens nur zur Versteifung der für jede Bewegung beliebig einstellbaren Winkel $ABC = \omega$ und $FDE = \lambda$ dienen. ABC hat einen Grad der Freiheit; es gleitet mit der Seite BC auf einem festen Lineal. Die Kurve wird von irgend einem mit dem zweiten Dreieck festverbundenen Punkte beschrieben. D liegt immer auf BA, FD geht durch einen mit dem Lineal, also mit der Zeichenebene fest verbundenen Punkt O. Um die Bewegung des zweiten Dreiecks vollständig zu bestimmen, wird entweder die Länge der Strecke DH (H ist der Schnittpunkt von DE und BC) konstant gehalten („konchoidale Bewegung"), oder die Länge der Strecke BH („Bewegung mit konstanter Projektion" — die Projektion BH von DH, also die Projektion parallel zu AB auf BC oder die Linealkante ist konstant).

Die konchoidale Bewegung gibt je nach Wahl der Konstante und Einsetzung des Zeichenstiftes eine Reihe von Kurven dritter und vierter Ordnung (Ophiuride, Kissoide, Konchoide, Kappakurve usw.), die Bewegung „mit konstanter Projektion" Kegelschnitte.

Herr Lebeau gibt kurz die Beschreibung des Apparats und die Resultate, Herr Neuberg, der über kinematische Erzeugung algebraischer Kurven viele Untersuchungen angestellt hat, die Theorie.

Leipzig. H. Liebmann.

N. I. Lobatschewsky. Pangéometrie où précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles. (Réimpression fac-similé conforme à l'édition originale) 62 p. Paris 1905.

Der — leider ohne Vorwort und Anmerkungen, ja ohne Angabe, wo und wann das Original erschienen, — gegebene Neudruck ist sehr willkommen. In der Sammlung gelehrter Abhandlungen, verfaßt von Professoren der kaiserlichen Universität Kasan zur Erinnerung an deren fünfzigjähriges Bestehen (Kasan 1856) hat L. zuerst seine Pangeometrie in französischer Sprache veröffentlicht (S. 279—340). Prof. Engel charakterisiert in seiner Ausgabe und Übersetzung zweier geometrischen Abhandlungen L.'s (Leipzig 1899) das Werk dahin, daß es gegenüber den früheren Abhandlungen L.'s nicht viel Neues bietet. Der alternde L. will aber hier noch einmal seine neue Geometrie, die jetzt sogenannte „nichteuklidische Geometrie", eindringlich in Erinnerung bringen, verweilt z. B. auch bei der Frage, ob in unserem Raume die euklidische oder die „Pangeometrie" gilt. — Referent hat bei seiner mit Paragrapheneinteilung, Figuren und Anmerkungen versehenen Übersetzung der Pangeometrie (Ostwald's Klassikersammlung, Nr. 130) Gelegenheit gehabt sich zu überzeugen, daß das Werk nur „an wenigen Stellen mit umständlichen Rechnungen belastet ist", und daß „der Verfasser der Pangeometrie sich noch im vollen Besitz seiner Geisteskräfte zeigt" (Engel). Im übrigen waren manche kleine Ungenauigkeiten zu verbessern, die aber hier nicht aufgezählt werden können.

Leipzig. H. Liebmann.

H. C. E. Martus. Astronomische Erdkunde. Ein Lehrbuch angewandter Mathematik. Große Ausgabe. 3. Aufl. Mit 100 Figg. XVI und 473 S. Dresden 1904, C. A. Koch.

Dem durch Reichhaltigkeit des Inhalts und peinlichste Genauigkeit in der Ausführung bekannten Werke bei seinem Neu-Erscheinen einige Begleitworte mit auf den Weg zu geben, ist eine dankbare Aufgabe. Das Buch zerfällt in zwei Abschnitte: I. Der Sternhimmel. II. Die Erde. α) Kugelgestalt, β) Größe, γ) Bewegung, δ) ellipsoidische Gestalt. Ohne Übertreibung darf man sagen, daß aus jeder Zeile desselben ein reiches Wissen mit einer pädagogischen Einsicht gepaart spricht, wie man es selten in einem Buche findet. Darum möge es in keiner Lehrer-Bibliothek fehlen; es ist ein Ratgeber für jeden Lehrer, der in mathematischer Geographie unterrichtet. Vornehmlich aber sei es als Prämie oder Geschenk für die Primaner unserer höheren Lehranstalten empfohlen.

Einer kleinen Einzelheit Erwähnung zu tun, möchte ich nicht unterlassen. Auf S. 25 gibt Hr. Martus eine Erklärung des Wortes Theodolit, indem er unter Berufung auf Weigand und Hugo Bieling wahrscheinlich macht, daß das Wort durch Verschmelzung des englischen Artikels the mit dem ursprünglich arabischen alidade, das zu athelida bei englischen Autoren des 16. Jahrhunderts geworden, entstanden sei. Demgegenüber gibt neuerdings (Preuß. Jahrbücher, 1904, 116, S. 362—364) Hr. Didolff eine recht plausible Erklärung aus θεά(ομαι) schauen, ὁδ(ός) Weg, Bahn, und λίθ(ος) Stein, Fels. Denkt man sich die Meßscheibe ursprünglich als Steinplatte, was viel Wahrscheinlichkeit für sich hat, so würde unser Wort soviel als „Wegschaustein", „Streckenmeßplatte", „Entfernungsmeßscheibe" bedeuten.

E. Haentzschel.

Bruno Schulze. Das militärische Aufnehmen unter besonderer Berücksichtigung der Arbeiten der Königlich Preußischen Landesaufnahme nebst einigen Notizen über Photogrammetrie und über die topographischen Arbeiten Deutschland benachbarter Staaten. Nach den auf der Königlichen Kriegsakademie gehaltenen Vorträgen bearbeitet. Mit 129 Abbildungen im Text. XIV und 305 S. Leipzig 1903, B. G. Teubner.

Der leider inzwischen verstorbene Verfasser war Chef der topographischen Abteilung der Landesaufnahme. Sein Werk bedarf keiner Empfehlung, es hat sozusagen einen amtlichen Charakter, indem es die bei E. S. Mittler und Sohn zuletzt 1883 erschienene „Instruktion" für die *Topographen* der topographischen Abteilung der Königlich Preußischen Landesaufnahme wissenschaftlich durchdringt und vertieft. Demgemäß ist das Arbeitsgebiet der *Trigonometrischen Abteilung* der Landesaufnahme, dem der Referent seine Monographie *„Das Erdsphäroid und seine Abbildung"*, Leipzig, B. G. Teubner, 1903, gewidmet hat, nur sehr kurz, desgleichen das der *kartographischen Abteilung"* nur im Umriß geschildert. Die Reichhaltigkeit des Inhalts und der auf das Praktische gerichtete Sinn des Werkes möge durch die folgenden Angaben erläutert werden:

Geschichtliche Entwicklung der Topographie, ganz besonders in Preußen S. 5—15. Organisation der preußischen Landesaufnahme.

I. Teil. Die Vorarbeiten für die topographische Aufnahme; S. 18—54.

II. Teil. Die topographische Aufnahme. A.—F. Instrumentenkunde, insbesondere G. Der *Meßtisch* und seine Hilfsinstrumente. S. 56—116. Anwendung des Meßtischapparates. Die praktische Ausführung der mit dem Meßtisch vorzunehmenden Arbeiten (Stationieren; Höhenbestimmung).

Die Darstellung von Grundriß und Bodenformen bei der Aufnahme S. 158—200 (Signaturen, Schriftproben, Schichtlinien).

Die praktische Ausführung der Aufnahme eines Meßtischblattes. Die Tagesarbeit des Topographen im Zusammenhang. Fertigstellung der Aufnahme im Winter. S. 201—237.

III. Teil. Die kartographische Verwertung der Meßtischaufnahme. Notizen über die außerpreußischen Vermessungs- und Kartierungsarbeiten, und zwar in den deutschen Bundesstaaten und ferner in Österreich, Rußland, Frankreich, Italien, Schweiz, Belgien, Niederlande, Dänemark, Schweden, Norwegen.

Referent möchte das Werk zum Studium allen Kollegen empfehlen, die Lust haben, ihren Unterricht in der Trigonometrie in Obersekunda und Prima mit Rücksicht auf die Praxis lebensvoll und anregend zu gestalten.

E. Haentzschel.

H. Becker. Geometrisches Zeichnen. Neubearbeitet von I. Vonderlinn. 3. Aufl. Mit 290 Fig. und 23 Tafeln im Text. 136 S. Leipzig 1903, Göschen.

Das Buch hat eine Reichhaltigkeit des Inhalts, die bei seinem niedrigen Preise geradezu staunenswert ist. Indem daher der Verlagsbuchhandlung das höchste Lob zu spenden ist für ihr Bestreben, Kenntnisse in der Geometrie in immer weitere Kreise dringen zu lassen, möchte Referent nicht zurückhalten mit Wünschen, deren Erfüllung für die nächste Auflage er für ausführbar hält.

Die erste Ausgabe des Werkchens (1896) durch H. Becker enthielt auf der Rückseite des Titels einen Hinweis auf Werke, aus denen Beispiele entnommen sind: Owen Jones, Grammatik der Ornamente; Fr. Sales Meyer, Handbuch der Ornamentik; Hoffstadt, Gotisches ABC; Eggers, Lehrbuch des Zirkelzeichnens. Eine solche Angabe ist wissenschaftlich und weist zugleich den Anfänger darauf hin, daß es auch noch Werke des betreffenden Gebiets gibt, die umfassender sind als das vorliegende. Sie bewahrt zugleich den Autor vor dem Vorwurf des Plagiats, als z. B. aus Eggers Büchlein Teile des Textes wörtlich übernommen sind. Da der Hinweis auf die oben genannten vier Werke jetzt fehlt, wünscht Referent denselben wiederhergestellt.

Im einzelnen folgendes. S. 22, Aufgabe 10 und 11 fehlt bei der Rektifikation des Kreises die doch so notwendige Angabe, daß nur eine *Näherungskonstruktion* gegeben wird. S. 23 unten: Man macht (?) eine Strecke AB = 5 (m? cm? Ref.), beschreibt um A mit AC einen Kreisbogen und trägt *auf ihm* (?! doch wohl als Sehne! Ref.) CD = 3 (??) ab . . . Größere Sorgfalt im Ausdruck wäre hier wohl am Platze. S. 46 g) findet sich die Aufgabe 10 von S. 22 unnötigerweise und ohne Hinweis wiederholt. S. 56 u. ff. Ellipsenkonstruktionen: warum fehlt die bekannteste von allen, die Fadenkonstruktion? S. 59, Fig. 131: „Ellipsenkonstruktion von Leonardo da Vinci" ist hinzuzusetzen! S. 128 u. ff. Erklärung und figürliche Erläuterung des *Storchschnabels* könnte vielleicht in dem Abschnitt über das Verkleinern und Vergrößern von Figuren hinzugefügt werden. Referent steht nicht an, das Büchlein im ganzen als sehr empfehlenswert zu bezeichnen.

E. Haentzschel.

R. Vater. Dampf und Dampfmaschine. — Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Wärmekraftmaschinen. Aus Natur und Geisteswelt Nr. 63 u. 86. Leipzig 1905, 1906, B. G. Teubner.

Die Teubnersche Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt" steht in der ersten Linie der buchhändlerischen Unternehmen, die einem weiteren Leserkreise gediegene, von wirklichen Fachleuten geschriebene Darstellungen begrenzter Gebiete zu sehr niedrigem Preise vermitteln wollen. Gegenüber den zahlreichen, mit vielen Bildern und meist sehr oberflächlichem Texte versehenen, weder ihrem Gehalte noch ihrem Preise nach als „populär" zu bezeichnenden Büchern, die mehr der flüchtigen Neugier, als wirklichem Interesse der Leser dienen können, verdienen solche Bestrebungen die Teilnahme aller Fachkreise. Denn gut geschriebene, einfache Darstellungen können auch angehenden Fachleuten wesentliche Dienste leisten, da sie unter Vermeidung schulmäßiger feierlicher Form einen einführenden Überblick gewähren und sehr anregend wirken können.

Die beiden vorliegenden Bändchen entsprechen nach Anlage und Durchführung vollständig den Anforderungen, die sich aus dem Zwecke der Sammlung ergeben. Unter richtiger Auswahl des Stoffes bietet der Verfasser eine von klaren schematischen Skizzen begleitete Darstellung der Kolbendampfmaschine und der neueren Erscheinungen auf dem Gebiete der Wärmemotoren, in der Absicht, einen Einblick in die physikalischen Vorgänge bei diesen Maschinen zu geben. In einfacher verständlicher Sprache, was hier besonders hervorzuheben ist, und mit nicht gewöhnlichem Lehrgeschick hat der Verfasser für jeden zum Nachdenken willigen Leser alle wesentlichen Gesichtspunkte entwickelt.

In der Einleitung des ersten Bändchens sind zunächst einige elementare Grundbegriffe der Mechanik erläutert. Dieser leidigen Notwendigkeit können sich Schriften für weitere Kreise immer noch nicht entziehen, da diese von dem bunten physikalischen Allerlei, das ihnen die Mittelschule bot, erfahrunggemäß einigermaßen klare Vorstellungen der notwendigsten Grundbegriffe im allgemeinen nicht mitbringen. Nicht durch ihre Schuld. Der Erfolg der dadurch veranlaßten propädeutischen Einleitungen kann leicht bezweifelt werden, eine sorgfältige, wie die vorliegende, wird aber mindestens den Wert einer selten ganz überflüssigen Auffrischung haben. Wie üblich, ist bei Entwicklung der Begriffe Kraft, Arbeit, Leistung in dieser Reihenfolge verfahren. Referent hat gelegentlich zugunsten möglichster Anschaulichkeit auch die umgekehrte Reihenfolge versucht, wie hier im Interesse gemeinverständlicher Darstellungen erwähnt sein mag. Dem Zwecke der Arbeit entsprechend, ist in den einleitenden Abschnitten auch das Wesen des Kolbenindikators erläutert, und mit Hilfe der daran gewonnenen Anschauungen die zunächst wichtigsten thermodynamischen Eigenschaften der Gase.

Mit dem zweiten Abschnitte, dem Wasserdampfe und seiner Erzeugung gewidmet, tritt der Verfasser in sein eigentliches Thema ein und gibt zunächst einen sehr klaren und anschaulichen Überblick über die Physik des Dampfes, in der nur vielleicht, um Mißverständnisse zu vermeiden, mehrere Beispiele für die äußere Verdampfungswärme bei verschiedenen Drucken dienlich sein dürften. Leider gibt das beigegebene Diagramm der Dampfwärmen wohl den Charakter der einzelnen Wärmekurven wieder, ihre Maßstäbe stimmen aber nicht zu einander, und darunter leidet der Wert des Diagrammes für den vorliegenden Zweck überhaupt. Im Zusammenhang damit müßten auch mehrere Textstellen verändert werden.

Bei Betrachtung der Dampfkessel ist von der Mitteilung von Wärmedurchgangskoëffizienten Abstand genommen, die im Kesselbau ja auch keine Verwendung finden. Immerhin würde aber eine kurze Erwähnung der die fraglichen Werte bedingenden Verhältnisse den Einblick in die Vorgänge erleichtern. Die Bemerkung auf Seite 50 über die Dicke der Kesselwand könnte leicht so mißverstanden werden, als ob die praktisch in Frage kommenden Wanddicken einen wesentlichen Einfluß auf den Wärmeübergang hätten, was tatsächlich doch nicht der Fall ist. Einige Andeutungen über die Feuerungen und die höchst verwickelten Vorgänge bei der Verbrennung würden nicht überflüssig sein.

Die Betrachtung der eigentlichen Dampfmaschine geht von deren historischer Entwicklung aus. Dabei erscheinen aber die Verdienste Watts nicht vollkommen gewürdigt. Watt hat zwar durch Aufnahme der Schwungradmaschine und sorgfältige Ausbildung ihrer Einzelheiten die spätere Anwendung höheren Druckes ermöglicht, er selbst hat aber immer an der Kondensatormaschine mit ganz niedrigem Kesseldrucke festgehalten. Sein größtes, erst spät richtig erkanntes Verdienst um die Kolbendampfmaschine muß vielmehr in seiner klaren Anschauung von dem Wärmeaustausche zwischen der inneren Zylinderwand und dem eingeschlossenen Dampfe gesehen werden, der bahnbrechenden Erkenntnis, die bei Watt zunächst ihren Ausdruck fand in der Erfindung des vom Zylinder getrennten Kondensators. Daß dieser Kernpunkt der heutigen Dampfmaschinentheorie nicht greifbarer hervortritt, wenn auch einzelne Bemerkungen an verschiedenen Stellen darauf hindeuten, kann überhaupt als eigentlicher Mangel der vorliegenden Arbeit empfunden werden. Das Verhalten des Dampfes in nassem, trockenem und überhitztem Zustande an den inneren dampfberührten Metallflächen des Zylinders bei wechselnden Temperaturen, gegen dessen schädliche Folgen keine noch so wärmedichte Umhüllung des Zylinders schützt, vermag allein die tatsächliche theoretische Überlegenkeit der mehrstufigen Expansion (trotz größerer dampfberührter Flächen), den günstigen Einfluß des Dampfmantels (der auffallenderweise nicht erwähnt wird), beigemischter Luft, des Dampfölens, der Dampfüberhitzung (trotz größerer, die schädliche innere Kondensation scheinbar begünstigender Temperaturdifferenzen) zu erklären. Gerade weil diese Erkenntnis, zu der Watt den Grund legte, erst in den letzten Jahrzehnten gebührend gewürdigt wurde, während man noch in den 70er Jahren den Fortschritt vornehmlich in der mechanischen Ausbildung der Dampfmaschine, besonders der Steuerung suchte, sollte sie in einem modernen Buche mit besonderem Nachdrucke hervorgehoben werden, auch in einem elementaren, was um so leichter geschehen kann, als die streng physikalische

Behandlung der fraglichen Erscheinungen ohnehin noch in weitem Felde steht. Damit würde sich auch der Nutzen des überhitzten Dampfes schärfer erläutern lassen, als dem Verfasser ohne vorhergehende zusammenfassende Betrachtung der Flächenwirkung möglich war.

Dagegen sind die kinetischen Verhältnisse der Kolbendampfmaschine so vollständig behandelt, wie der Umfang der Arbeit zuließ. Ihr praktischer Wert wird dadurch wesentlich erhöht, daß ähnliche Veröffentlichungen gewöhnlich garnichts darüber mitteilen.

Den Schluß des Bändchens bildet sehr richtig eine allgemeine thermodynamische Betrachtung, die ein Urteil über den wirtschaftlichen Wert der Dampfmaschine ermöglicht. Es ist hier wohl zum ersten Male und zwar mit Glück in einer für weitere Kreise bestimmten Behandlung der Dampfmaschine von dem Entropiediagramme Gebrauch gemacht, das für mehrere bestimmte Beispiele durchgebildet ist. Das Verständnis dafür würde noch gefördert werden, wenn die mechanischen Bilder zur Versinnlichung der nicht leichten Begriffe noch weiter geführt und für die Entropie selbst ein naheliegendes mechanisches Analogon gegeben würde, schon um die hier unvermeidliche Lücke genauerer Begründung weniger fühlbar zu machen. Auch dürfte noch größere Vorsicht beim Vergleiche mit den mechanischen und elektrischen Größen geboten sein, da die zufällige Entwicklung gefügt hat, daß wir Wärmemengen, im Gegensatze zu Gewichten und Elektrizitätsmengen, selbst schon in Energiemaß ausdrücken.

Das zweite Bändchen beschäftigt sich mit den jetzt besonders lebhaften Bestrebungen, größere Gasmaschinen mit billig herzustellendem oder von den Hüttenwerken unmittelbar gebotenen Gasgemischen zu betreiben, mit der Dampfturbine und Gasturbine, endlich mit den in neuerer Zeit wieder versuchten sogenannten Abwärmemaschinen. Es handelt sich hier also um ganz junge Erscheinungen der Technik, die der Verfasser ersichtlich mit besonderem Interesse und bei aller räumlichen und sachlichen Beschränkung doch so vollständig behandelt hat, daß seine Arbeit als leicht und angenehm lesbare Übersicht nicht bloß weiteren Kreisen überhaupt, sondern auch weiteren Fachkreisen willkommen sein wird.

Namentlich mit Rücksicht auf diese letzteren Kreise erscheint aber bei Beschreibung der Gaserzeuger eine genauere Darstellung der Bildungsweise der Gase am Platze. Die üblichen Ausdrücke „unvollkommene Verbrennung", „beschränkter Luftzutritt" usw. sind zu unbestimmt und werden entbehrlich, sobald man als Bedingung für die möglichst vollständige Reduktion der immer zunächst gebildeten CO_2 zu CO genügend hohe, glühende Kohleschicht bei entsprechend mäßiger Durchströmgeschwindigkeit angibt. Auch die „außerordentlich hohe" Temperatur des hier als „Luftgas" bezeichneten, wesentlich CO als brennbaren Bestandteil enthaltenden Gemisches beim Austritte aus dem Generator, ferner der praktische Einfluß der verschiedenen Diffusionsgeschwindigkeit der hier in Betracht kommenden Gase bei Bildung der Zylinderladung, endlich die niedrigere Temperatur bei der Verbrennung von H gegenüber von CO werden bezweifelt werden. Die Darstellung der Schwierigkeiten, die großen Gasmaschinen genügend zu kühlen, wirkt nicht recht überzeugend.

Bei der Betrachtung der Dampfturbinen macht sich wieder der Übelstand bemerkbar, mechanische Grundbegriffe verwenden zu müssen, die nicht vorausgesetzt werden sollen. Es ist aber für den Einblick in die Arbeitsweise der Turbinen wenig förderlich, den hier wichtigsten Begriff der Bewegungsenergie nur mitzuteilen, weil seine Ableitung zu weit führen würde, ohne ihn wenigstens dem Empfinden näher zu bringen. Das läßt sich unschwer erreichen, wenn man etwa ausgeht von einer Tabelle der Fallgeschwindigkeiten und Fallhöhen, die auch der noch ganz Unbewanderte mit dem bloßen Begriffe der Beschleunigung aufstellen kann. Auf diesem Wege gelangt man sehr anschaulich zu der Schätzung der Bewegungsenergie in Arbeitsmaß und zu der zusammenfassenden Formel selbst, wie auch zu dem Begriffe der Masse, dem man eine Bemerkung über das terrestrische Maßsystem anhängen mag. Bei einer solchen, übrigens auch ganz kurzen Vorbereitung würde sich die Mühe, die der Verfasser dem Turbinenelemente gewidmet hat, noch mehr bezahlt machen. Ähnliches ließe sich sagen von der günstigsten Umfangsgeschwindigkeit eines Turbinenrades, die sich etwa am Peltonrade leicht ermitteln läßt. Die sehr hübsche Übersicht über die jetzt wichtigsten Systeme von Dampfturbinen würden durch solche knappe Hinweise nur gewinnen. Eine besondere Betonung des thermischen Vorzuges der Dampfturbine gegenüber der Kolbenmaschine, nämlich der gleichbleibenden Temperatur des Dampfes an denselben Flächenelementen, erscheint nicht überflüssig.

Das Wesen der bis jetzt, mangels eines brauchbaren Kompressors, noch nicht lebensfähigen Gasturbine konnte in Anlehnung an die Gasmaschine einerseits und die Dampfturbine andererseits sehr faßlich dargestellt werden, während der Bericht über die Abwärmemaschinen — zu denen man eigentlich auch den besonders behandelten Rateauschen Wärmespeicher zählen müßte — vornehmlich die neueren Versuche mit schwefliger Säure berücksichtigt.

Im ganzen verdienen die beiden Arbeiten in besonderem Maße die Bezeichnung „lehrreich", denn sie bewältigen umfangreiche Stoffe in wohl abgemessener Beschränkung mit den einfachsten Mitteln, deren Art und Verwendung auch für Lehrende von Interesse sein wird.

Berlin. A. Rotth.

Arwed Fuhrmann. Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage. Erster Teil: Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper. Mit 34 Fig. XII und 206 S. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Geb. 3,60 ℳ.

Diese rühmlichst bekannte Aufgabensammlung hat in der neuen Auflage eine nicht unbeträchtliche Vermehrung des Umfangs erfahren; sie bietet auf immer noch verhältnismäßig kleinem Raum in ihren 165 Aufgaben eine Fülle schöner Anwendungen der Differential- und Integralrechnung. Besonders willkommen werden vielen die sehr ausführlichen Literaturnachweise am Schlusse jedes Kapitels sein.

Straßburg i. E. Paul Epstein.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

180. Die kubische Parabel

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

ist das Erzeugnis eines Strahlenbüschels und einer gleichseitig-hyperbolischen Parallelstrahleninvolution, welche den Schnitt einer gewöhnlichen Parabel und eines Parallelstrahlenbüschels projiziert. Beide Strahlenbüschel sind projektiv und erzeugen eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten $x = 1$ und $y = 0$ sind und deren Potenz $-a_0$ ist. Dieser geometrische Zusammenhang ist aus der Kurvengleichung herzuleiten.

Holzminden. G. Kober.

---

181. Gegeben eine Cassinische Kurve (in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten):

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = c^4 - a^4.$$

I. Wenn $a^2 > c^2$, besteht die Kurve aus 2 getrennten oval-ähnlichen Stücken, deren eines das Spiegelbild des andern (für die y-Achse als Spiegel) ist. Unter allen Ellipsen, die mit dem einen Kurventeil einen Brennpunkt[1]) gemeinsam haben, diejenige zu finden, die sich dem Cassinischen Ovale am besten anschließt. Dazu ist der Abstand der Ellipse vom Oval, gemessen auf der Ovalnormalen, zu betrachten, dieser hat für jede der erwähnten Ellipsen irgendwo ein Maximum, und nun soll diejenige Ellipse gefunden werden, für die das Maximum seinen kleinstmöglichen Wert besitzt.

II. Ist $c^2 > a^2$, so besteht die Kurve aus *einem* geschlossenen Zuge, der bei festem a und hinreichend großem c eine ellipsenähnliche Gestalt annimmt. Es soll wieder die Ellipse bestimmt werden, deren Brennpunkte die der Cassinischen Kurve sind, und die sich dieser möglichst gut anschließt. Ebenso ist der Radius desjenigen Kreises um O als Mittelpunkt zu bestimmen, für den die größte Abweichung zwischen den beiderseitigen Peripherien, gemessen auf der Normalen der Cassinischen Kurve, ein Minimum ist.

Potsdam, 4. Februar 1906. Otto Meissner.

1) Z. B. den, der die Koordinaten $x = a$, $y = 0$ hat.

B. Lösungen.

Zu **9** (Bd. I, S. 207) (St. Jolles). — „Es ist durch geometrische Betrachtungen zu zeigen, daß die Differenz $\omega - \sin\omega$ bei infinitesimalem ω von dritter Ordnung unendlich klein wird.“ — Es ist geometrisch evident, daß für jeden zwischen Null und π enthaltenen Winkel ω die Ungleichung

$$2 \sin\frac{\omega}{2} < \omega < 2 \tan\frac{\omega}{2}$$

besteht, weil ω am Einheitskreise den Bogen, $2 \sin\frac{\omega}{2}$ die hierzugehörige Sehne und $2 \tan\frac{\omega}{2}$ die zur Sehne parallele Tangente, soweit sie zwischen die Schenkel von ω fällt, bedeutet. Aus dieser Ungleichung folgt durch Subtraktion von $\sin\omega$

$$2 \sin\frac{\omega}{2} - \sin\omega < \omega - \sin\omega < 2 \tan\frac{\omega}{2} - \sin\omega.$$

Nun ist aber:

$$2 \sin\frac{\omega}{2} - \sin\omega = 2 \sin\frac{\omega}{2}\left(1 - \cos\frac{\omega}{2}\right) = 8 \sin^3\frac{\omega}{4} \cos\frac{\omega}{4}$$

$$2 \tan\frac{\omega}{2} - \sin\omega = 2 \tan\frac{\omega}{2}\left(1 - \cos^2\frac{\omega}{2}\right) = 2 \sin^2\frac{\omega}{2} \tan\frac{\omega}{2};$$

also haben wir:

$$8 \sin^3\frac{\omega}{4} \cos\frac{\omega}{4} < \omega - \sin\omega < 2 \sin^2\frac{\omega}{2} \tan\frac{\omega}{2}.$$

Da man bekanntlich bei infinitesimalem Winkel den Sinus und die Tangente durch den Bogen und den Kosinus durch 1 ersetzen kann, so erhält man hieraus, wenn ω infinitesimal ist,

$$\frac{\omega^3}{8} < \omega - \sin\omega < \frac{\omega^3}{4}.$$

Die Differenz $\omega - \sin\omega$ ist also bei unendlich kleinem ω infinitesimal von der dritten Ordnung.

Aussig (Böhmen). stud. math. J. Krug.

Zu **10** (Bd. I, S. 207) (St. Jolles). — „Es ist der Wert von $\sum_{k=2}^{\infty} 2^{k+1} \sin^3\frac{\omega}{2^k} \cos\frac{\omega}{2^k}$ zu bestimmen.“

Erste Lösung. — Setzt man in der identischen Gleichung

$$\sum_{k=2}^{n} [f(k) - f(k-1)] = f(n) - f(1)$$

die willkürliche Funktion

$$f(k) = 2^{k-1} \sin\frac{\omega}{2^{k-1}},$$

so wird

$$f(k) - f(k-1) = 2^{k+1}\left[\frac{1}{4} \sin\frac{\omega}{2^{k-1}} - \frac{1}{8} \sin\frac{\omega}{2^{k-2}}\right].$$

Da aber allgemein

$$\frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{8}\sin 2x = \sin^3\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

so ist

$$f(k) - f(k-1) = 2^{k+1}\sin^3\frac{\omega}{2^k}\cos\frac{\omega}{2^k},$$

und die obige Identität lautet:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k+1}\sin^3\frac{\omega}{2^k}\cos\frac{\omega}{2^k} = 2^{n-1}\sin\frac{\omega}{2^{n-1}} - \sin\omega.$$

Läßt man n ins Unendliche wachsen, so wird daraus:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k+1}\sin^3\frac{\omega}{2^k}\cos\frac{\omega}{2^k} = \omega - \sin\omega.$$

Zweite Lösung. — Es ist durch eine einfache Betrachtung klar, daß die Glieder der Folge

$$a_1 = \omega - \sin\omega,\quad a_2 = \omega - 2\sin\frac{\omega}{2},\quad a_3 = \omega - 3\sin\frac{\omega}{3},\ \cdots,\ a_n = \omega - n\sin\frac{\omega}{n}$$

mit wachsendem n unbegrenzt abnehmen, sodaß also $\lim_{n=\infty} a_n = 0$. Es gilt daher folgende identische Gleichung:

$$a_1 = (a_1 - a_{i_1}) + (a_{i_1} - a_{i_2}) + (a_{i_2} - a_{i_3}) + \cdots \text{ in inf.},$$

worin die Indices $i_1, i_2, i_3, \cdots$ beliebige Zahlen der natürlichen Zahlenreihe sind, die nur der Bedingung $1 < i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$ genügen müssen.

Wählen wir nun $i_1 = 2$, $i_2 = 4$, $i_3 = 8, \cdots$, allgemein $i_n = 2^n$, so geht die angeführte Identität über in:

$$\omega - \sin\omega = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^n\sin\frac{\omega}{2^n} - 2^{n-1}\sin\frac{\omega}{2^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\left(2\sin\frac{\omega}{2^n} - \sin\frac{\omega}{2^{n-1}}\right).$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$2\sin\frac{\omega}{2^n} - \sin\frac{\omega}{2^{n-1}} = 2^3\sin^3\frac{\omega}{2^{n+1}}\cos\frac{\omega}{2^{n+1}}.$$

Wir haben also:

$$\omega - \sin\omega = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+2}\sin^3\frac{\omega}{2^{n+1}}\cos\frac{\omega}{2^{n+1}}.$$

Die Annahme $i_n = 3^n$ führt zu folgender Gleichung:

$$\omega - \sin\omega = \sum_{n=1}^{\infty}\left(3^n\sin\frac{\omega}{3^n} - 3^{n-1}\sin\frac{\omega}{3^{n-1}}\right)$$

oder nach kurzer Umformung:

$$\omega - \sin\omega = 4\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}\sin^3\frac{\omega}{3^n}.$$

Ganz ähnliche Überlegungen gelten bezüglich der Folge:

$$b_1 = \tan\omega - \omega,\quad b_2 = 2\tan\frac{\omega}{2} - \omega,\quad b_3 = 3\tan\frac{\omega}{3} - \omega,\ \cdots,\ b_n = n\tan\frac{\omega}{n} - \omega,$$

welche $\left(\omega < \frac{\pi}{2}\text{ vorausgesetzt}\right)$ ebenfalls eine Reihe von unbegrenzt abnehmenden Größen bildet. Es ist wieder $\lim\limits_{n=\infty} b_n = 0$, daher die Identität:

$$b_1 = (b_1 - b_{i_1}) + (b_{i_1} - b_{i_2}) + (b_{i_2} - b_{i_3}) + \cdots \text{ in inf.},$$

worin wieder $1 < i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$ eine unendliche Anzahl ganzer, positiver Zahlen bilden.

Ist hier z. B. $i_n = 2^n$, so erhält man folgende Formel:

$$\tan\omega - \omega = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\left(\tan\frac{\omega}{2^{n-1}} - 2\tan\frac{\omega}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\tan\frac{\omega}{2^{n-1}}\tan^2\frac{\omega}{2^n}.$$

Andere Annahmen für i_n liefern ähnliche Formeln.

Aussig (Böhmen). stud. math. J. Krug.

Zu **16** (Bd. I, S. 370) (E. N. Barisien). — Démontrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{(a^2\cos^2\Theta - b^2\sin^2\Theta)^2(a^2\cos^2\Theta + b^2\sin^2\Theta)}{(a^4\cos^2\Theta + b^4\sin^2\Theta)^2}\, d\Theta$$

$$= (a^2+b^2)^2 \int_0^{2\pi} \frac{(a^2\sin^2\Theta + b^2\cos^2\Theta)\sin^2\Theta\cos^2\Theta}{(a^4\sin^2\Theta + b^4\cos^2\Theta)^2}\, d\Theta = \frac{\pi(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}.$$

Setzt man in dem ersten Integral $\Theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, so wird es:

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi)^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}{(a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi)^2}\, d\varphi.$ Durch Umrechnung des Zählers ergibt sich:

$$-[a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi]\cdot[(a^2+b^2)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi - (a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi)],$$

woraus die beiden Integrale hervorgehen:

$$J_1 = -(a^2+b^2)^2 \int_0^{2\pi} \frac{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi)^2}\, d\varphi,$$

$$J_2 = \int_0^{2\pi} \frac{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}{a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi}\, d\varphi.$$

Zerlegt man das Integrationsintervall von J_2: $\int_0^{2\pi} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}$ und setzt im zweiten Summanden $2\pi - \varphi = \psi$, so überzeugt man sich, daß

$$J_2 = 2\int_0^{\pi} \frac{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}{a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi}\, d\varphi$$

wird. Durch weitere Zerlegung: $\int_0^\pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi$ erhält man:

$$J_2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}{a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi}\, d\varphi.$$

Durch die Substitution $\operatorname{tg}\varphi = t$ geht dieses Integral über in: $\int_0^\infty \frac{a^2t^2 + b^2}{(a^4t^2 + b^4)(1 + t^2)}\, dt.$

Die Methode der Partialbruchzerlegung liefert:

$$\int_0^\infty \frac{a^2t^2 + b^2}{(a^4t^2 + b^4)(1 + t^2)}\, dt = \frac{1}{a^2 + b^2}\int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^2} + \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}\int_0^\infty \frac{dt}{a^4t^2 + b^4}.$$

Das erste Integral rechter Hand ist bekanntlich $\frac{\pi}{2}$; das zweite $\frac{1}{a^2b^2}\cdot\frac{\pi}{2}$. Mithin

$$J_2 = \frac{4\pi}{a^2 + b^2}.$$

Das Integral J_1 geht durch dieselbe Teilung des Integrationsintervalls mit nachfolgender Substitution $\operatorname{tg}\varphi = t$ über in:

$$J_1 = -4(a^2 + b^2)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi)^2}\, d\varphi$$

$$= -4(a^2 + b^2)^2 \int_0^\infty \frac{(a^2t^2 + b^2)t^2}{(1 + t^2)^2(a^4t^2 + b^4)^2}\, dt.$$

Durch Zerlegung in Partialbrüche zerfällt letzteres Integral in eine Summe von vier Integralen:

$$\int_0^\infty \frac{a^2t^4 + b^2t^2}{(1 + t^2)^2(a^4t^2 + b^4)^2}\, dt = B_1\int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^2} + B_2\int_0^\infty \frac{dt}{(1 + t^2)^2} + B_3\int_0^\infty \frac{dt}{a^4t^2 + b^4}$$

$$+ B_4\int_0^\infty \frac{dt}{(a^4t^2 + b^4)^2},$$

wo die Konstanten B_i die Werte haben:

$$B_1 = -\frac{b^2}{(a^2 + b^2)^2(a^4 - b^4)}, \qquad B_2 = \frac{1}{(a^2 + b^2)^2(a^2 - b^2)},$$

$$B_3 = \frac{a^4b^2}{(a^2 + b^2)^2(a^4 - b^4)}, \qquad B_4 = -\frac{a^2b^6}{(a^2 + b^2)^2(a^2 - b^2)}.$$

Die vier Integrale ergeben:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{2}; \quad \int_0^\infty \frac{dt}{(1 + t^2)^2} = \frac{\pi}{4};$$

$$\int_0^\infty \frac{dt}{a^4t^2 + b^4} = \frac{1}{a^2b^2}\cdot\frac{\pi}{2}; \quad \int_0^\infty \frac{dt}{(a^4t^2 + b^4)^2} = \frac{1}{a^2b^6}\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Demnach nimmt das Integral J_1 die Form an:

$$J_1 = \pi\left\{\frac{2b^2}{a^4-b^4} - \frac{1}{a^2-b^2} - \frac{2a^2}{a^4-b^4} + \frac{1}{a^2-b^2}\right\}$$

oder

$$J_1 = -\frac{2\pi}{a^2+b^2}.$$

Mithin wird das vorgelegte Integral:

$$J_1 + J_2 = -\frac{2\pi}{a^2+b^2} + \frac{4\pi}{a^2+b^2} = \frac{2\pi}{a^2+b^2}.$$

Es ist unmittelbar ersichtlich, daß, wenn das Integral J_2 vernachlässigt würde, der absolute Wert des ursprünglichen Integrals ungeändert bliebe.

Das von Herrn Barisien angegebene Resultat ist hiermit zu berichtigen: Statt $\frac{\pi(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}$ muß es heißen: $\frac{2\pi}{a^2+b^2}$.

Berlin, den 18. November 1906. stud. math. Werner Gaedecke.

Zu **149** (Bd. X, S. 327) (E. Lampe). — Erste Lösung: Zwei Geraden einer Ebene schneiden sich in C unter dem Winkel γ; im Punkte P der beliebigen Kurve K ist die Kurventangente gezogen, die die Geraden in A und B schneidet; der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist $\varDelta$. Zu beweisen ist, daß $\varDelta$ einen größten oder kleinsten Wert erreicht, 1) wenn die Tangente in P durch C geht, 2) wenn P ein Wendepunkt der Kurve K ist, 3) wenn P die Mitte von AB ist. Bekanntlich wird bei einer Hyperbel der Tangentenabschnitt zwischen den beiden Asymptoten durch den Berührungspunkt gehälftet, und der Flächeninhalt des von den Asymptoten und diesem Tangentenabschnitt gebildeten Dreiecks ist konstant. Unter Benutzung dieses Satzes ergibt sich leicht, daß Dreiecke, gebildet von Kurventangenten, deren Berührungspunkt das Tangentensegment zwischen den beiden gegebenen Geraden hälftet, Maxima oder Minima sein müssen. In der Tat kann dann die Kurve in der Umgebung des Berührungspunktes durch einen berührenden Hyperbelbogen von infinitesimaler Ausdehnung (mit den beiden Geraden als Asymptoten) ersetzt werden. Eine unendlich kleine Variation der Tangente ändert dann an dem Flächeninhalte des Dreieckes, das durch die Tangente und die beiden Geraden gebildet wird, nichts, woraus folgt, daß dieses in diesem Falle ein Maximum oder Minimum sein muß. — Ferner ist klar, daß das durch eine Wendetangente und die beiden Geraden gebildete Dreieck ein Maximum oder Minimum ist, weil die durch die Wendetangenten auf den beiden Geraden abgeschnittenen Strecken stets gleichzeitig beide Maxima oder Minima sind und weil der Flächeninhalt des betrachteten Dreieckes dem Produkte dieser Abschnitte proportional ist.

Analytisch kann man so schließen: Die beiden gegebenen Geraden seien Achsen eines schiefwinkeligen Koordinatensystems. Die Gleichung der Kurve sei in sogenannten Plückerschen Linienkoordinaten gegeben: $f(u, v) = 0$. $-\frac{1}{u}$ und $-\frac{1}{v}$ sind die Abschnitte der Tangenten auf den Koordinatenachsen, die miteinander den Winkel γ einschließen. Der Flächeninhalt des von einer Tangente und den Koordinatenachsen eingeschlossenen Dreiecks ist also $\Delta = \frac{\sin \gamma}{2uv}$. Wenn wir von dem selbstverständlichen Extremum $\Delta = 0$ absehen, welches dann entsteht, wenn u und v unendlich sind, d. h., wenn die betreffende Tangente durch den Ursprung des Koordinatensystems hindurchgeht, so wird Δ dann ein Maximum oder Minimum, wenn uv ein Minimum oder Maximum wird, also wenn $udv + vdu = 0$ ist; d. h. die Kurve kann an der Berührungsstelle ersetzt werden durch einen Bogen der Hyperbel $uv = \text{const.}$, deren Asymptoten die Koordinatenachsen sind. Außerdem ist diese Differentialgleichung noch erfüllt, wenn $du = 0$ und gleichzeitig $dv = 0$ ist, welches die bekannten Bedingungsgleichungen für eine Wendetangente sind.

Außig (Böhmen). stud. math. J. KRUG.

Zweite Lösung: In dem Koordinatensystem, dessen Achsen die Geraden CA und CB sind, sei

$$y = F(x)$$

die Gleichung der Kurve K, und man setze

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} = y', \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2F(x)}{dx^2} = y''.$$

Die Tangente im Kurvenpunkte P schneidet von der Abszissenachse die Strecke $CA = \frac{y'x - y}{y'}$ und von der Ordinatenachse die Strecke $CB = y - y'x$ ab; mithin ist

$$\Delta = -\frac{(y - y'x)^2}{y'} \cdot \frac{1}{2} \sin \gamma,$$

woraus man durch Differentiation erhält

$$\frac{d\Delta}{dx} = \frac{y''(y + y'x)(y - y'x)}{y'^2} \cdot \frac{1}{2} \sin \gamma.$$

Die größten oder kleinsten Werte von Δ treten also ein, wenn entweder

$$y'' = 0 \quad \text{oder} \quad y + y'x = 0 \quad \text{oder} \quad y - y'x = 0$$

ist. Die erste dieser Gleichungen liefert die Wendepunkte der Kurve K; aus der zweiten erhält man in Verbindung mit der Gleichung $CB = y - y'x$ $y = \frac{1}{2} CB$, d. h. Punkt P ist die Mitte von AB; aus der dritten Gleichung und der für CB ergibt sich $CB = 0$, d. h. Punkt P ist einer von den Punkten, deren Tangente durch C geht.

Um zu entscheiden, welche von den ausgezeichneten Werten des Dreiecks ABC Maxima und welche Minima sind, bilde man den zweiten Differentialquotienten der Funktion Δ, nämlich

$$\frac{d^2\Delta}{dx^2} = \frac{2y'^2y''(y - y'x) + y'y'''(y + y'x)(y - y'x) - 2y''^2y^2}{y'^3} \cdot \frac{1}{2} \sin \gamma.$$

Hieraus ergibt sich

1. für $y'' = 0$: die Funktion Δ wird ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem $y'''(y + y'x)(y - y'x)$ negativ oder positiv ist;

2. für $y + y'x = 0$: die Funktion Δ wird ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem $y'^2y''(y - y'x) - y''^2y^2$ und y' entgegengesetztes oder gleiches Vorzeichen haben;

3. für $y - y'x = 0$: die Funktion Δ wird ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem y' positiv oder negativ ist.

Zu beachten ist dabei, daß die Funktion Δ negativ werden kann, nämlich wenn die Strecken CA und CB als Abszisse und Ordinate verschiedene Vorzeichen haben, daß daher der Wert $\Delta = 0$ nicht nur ein Minimum, sondern auch ein Maximum sein kann; ferner, daß der absolute Flächeninhalt des Dreiecks ABC für ein negatives Δ bei Eintritt des Maximums einen kleinsten Wert, bei Eintritt des Minimums aber einen größten Wert erreicht.

Anwendung auf die Kurve $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Man kann die Gleichung schreiben

$$y = (x-1)(x-2)(x-3);$$

die durch sie dargestellte Kurve schneidet demnach die Abszissenachse in den Punkten $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ und die Ordinatenachse in dem Punkte $y = -6$. Man findet

$$y' = 3x^2 - 12x + 11, \quad y'' = 6x - 12, \quad y''' = 6,$$

$$\Delta = -\frac{(2x^3 - 6x^2 + 6)^2}{3x^2 - 12x + 11} \cdot \frac{1}{2} \sin\gamma,$$

$$\frac{d\Delta}{dx} = -\frac{(6x-12)(4x^3 - 18x^2 + 22x - 6)(2x^3 - 6x^2 + 6)}{(3x^2 - 12x + 11)^2} \cdot \frac{1}{2} \sin\gamma.$$

Ausgezeichnete Werte von Δ treten ein für

(1) $x = 2$, (2) $2x^3 - 9x^2 + 11x - 3 = 0$, (3) $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$.

Gleichung (1) liefert den einzigen Wendepunkt der Kurve ($x_1 = 2$, $y_1 = 0$); das zugehörige y' ist -1; die Tangente schneidet von den Koordinatenachsen die gleichen Strecken $CA = CB = 2$ ab, und $\Delta_1 = 2 \sin\gamma$ ist ein Maximum. Aus Gleichung (2) erhält man die drei Punkte

$$x_2 = \frac{3}{2}, \quad y_2 = \frac{3}{8}; \quad x_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad y_3 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \quad x_4 = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

$$y_4 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$$

Dies sind die Punkte, die das Tangentensegment AB halbieren; die zugehörigen Werte von Δ sind

$$\Delta_2 = \tfrac{9}{8} \sin\gamma, \text{ ein Minimum,}$$
$$\Delta_3 = -2 \sin\gamma, \text{ ein Maximum,}$$
$$\Delta_4 = -2 \sin\gamma, \text{ ein Minimum.}$$

Durch Gleichung (3) sind die Punkte bestimmt, deren Tangenten durch C gehen, für die also $\Delta = 0$ ist. Ihre Abszissen sind

$$x_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2\cos 10^0}, \quad x_6 = \frac{\sqrt{3}}{2\cos 50^0}, \quad x_7 = \frac{\sqrt{3}}{2\cos 70^0}.$$

Da die Funktion y' positiv ist in dem Intervalle von $x = -\infty$ bis $x = 2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$ und negativ in dem Intervalle von $2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$ bis $2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$, da ferner x_5 und x_6 in dem ersten Intervalle liegen und x_7 im zweiten, so ist

$$\Delta_5 = 0 \text{ ein Maximum,}$$
$$\Delta_6 = 0 \text{ ein Maximum,}$$
$$\Delta_7 = 0 \text{ ein Minimum.}$$

Prenzlau. W. Stegemann.

Zu **150—152** (Bd. X, S. 327) (G. Kober). — Erste Lösungen: Auf dem Kegelschnitt $\lambda = x_1 : x_2 = x_2 : x_3$ oder $K \equiv x_1 x_3 - x_2^2 = 0$ seien die Punkte P_1 und P_2 durch

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

bestimmt; ferner seien R_1 und R_2 die Kegelschnittpunkte $\lambda = -\frac{a_1}{a_0}$ und $\lambda = -\frac{a_2}{a_1}$. Die Gleichung des Strahls $P_1 P_2$ ist

$$a_0 x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3 = 0.$$

Er ist der gemeinsame Strahl der beiden Strahlenbüschel, die als Grundstrahlen

(1) $\quad a_0 x_1 + a_1 x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ oder $A_3 R_1$ und $A_1 A_2$,

(2) $\quad x_1 = 0$ und $a_1 x_2 + a_2 x_3 = 0$ oder $A_3 A_2$ und $A_1 R_2$

haben. In dem besonderen Falle $a_1 = 0$ fallen beide Strahlenpaare mit dem Strahlenpaar $A_2 A_3$ und $A_2 A_1$ zusammen; es ist $\lambda_1 = -\lambda_2$; $A_2 P_1 P_2$ ist eine Gerade, und die Punkte A_1, A_3, P_1, P_2 sind harmonische Punkte des Kegelschnitts.

Es seien jetzt vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 des Kegelschnitts $K = 0$ durch die Gleichung

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$$

gegeben. Setzt man hierin $\lambda^2 = \frac{x_1}{x_3}$ und $\lambda = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3}$, so erhält man die Gleichung eines Kegelschnitts

$$H \equiv a_0 x_1^2 + a_1 x_1 x_2 + a_2 x_1 x_3 + a_3 x_2 x_3 + a_4 x_3^2 = 0,$$

der durch die vier Punkte P geht. Man kann diese Gleichung in den Formen

$$x_1(a_0 x_1 + a_1 x_2) + x_3(a_2 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_3) = 0,$$
$$x_1(a_0 x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3) + x_3(a_3 x_2 + a_4 x_3) = 0$$

schreiben. Demnach gehört der Kegelschnitt $H = 0$ erstens dem Kegelschnittbüschel an, das durch die Strahlenpaare $x_1 = 0$, $a_0 x_1 + a_1 x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, $a_2 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_3 = 0$ bestimmt wird, und zweitens demjenigen, das durch die Strahlenpaare $x_1 = 0$, $a_0 x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3 = 0$ und $x_3 = 0$, $a_3 x_2 + a_4 x_3 = 0$ bestimmt wird. Hierin sind die Strahlen $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$ die Dreiecksseiten $A_3 A_2$ und $A_1 A_2$; der Strahl $a_0 x_1 + a_1 x_2 = 0$ verbindet die Punkte A_3 und $\lambda = -\frac{a_1}{a_0}$, der Strahl $a_3 x_2 + a_4 x_3 = 0$ die Punkte A_1 und $\lambda = -\frac{a_4}{a_3}$; der Strahl $a_2 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_3 = 0$ geht durch die beiden Punkte $a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$ und der Strahl $a_0 x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3 = 0$ durch die Punkte $a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$.

In dem besonderen Falle $a_0 = 0$ ist eine der Wurzeln der gegebenen Gleichung vierten Grades, etwa λ_4, unendlich groß, und Punkt P_4 fällt mit dem Punkte $\lambda = \infty$, d. h. mit A_1 zusammen, so daß nur 3 Punkte übrigbleiben: die Gleichung reduziert sich auf eine Gleichung dritten Grades.

Es seien nun die drei Punkte P_1, P_2, P_3 des Kegelschnitts $K = 0$ durch die Gleichung

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

gegeben; dann läßt sich zeigen, daß, wenn $\lambda - \lambda_i = 0$ einer dieser Punkte ist, die beiden anderen jedesmal die Schnittpunkte derjenigen Sekante sind, die den Schnittpunkt der beiden Strahlen

$$x_1 + \lambda_i x_2 = 0, \qquad a_1 x_1 + a_3 x_3 = 0$$

mit dem Schnittpunkte der beiden Strahlen

$$x_2 + \lambda_i x_3 = 0, \qquad a_0 x_1 + a_2 x_3 = 0$$

verbindet. Es sei $i = 1$, also P_1 der Punkt $\lambda - \lambda_i = 0$. Die Gleichung des Strahls $P_2 P_3$ ist

$$x_1 - (\lambda_2 + \lambda_3) x_2 + \lambda_2 \lambda_3 x_3 = 0$$

oder, weil $-(\lambda_2 + \lambda_3) = \frac{a_1}{a_0} + \lambda_1$ und $\lambda_2 \lambda_3 = -\frac{a_3}{a_0 \lambda_1}$ ist,

$$a_0 \lambda_1 x_1 + \lambda_1 (a_1 + a_0 \lambda_1) x_2 - a_3 x_3 = 0.$$

Addiert man hierzu die Gleichungen

$$-(a_1 + a_0 \lambda_1)(x_1 + \lambda_1 x_2) = 0 \quad \text{und} \quad a_1 x_1 + a_3 x_3 = 0,$$

so wird die linke Seite gleich Null. Die Gerade $P_2 P_3$ geht also durch den Schnittpunkt der beiden Strahlen $x_1 + \lambda_1 x_2 = 0$ und $a_1 x_1 + a_3 x_3 = 0$. Addiert man ferner die Gleichungen

$$\lambda_1 [a_0 \lambda_1 x_1 + \lambda_1 (a_1 + a_0 \lambda_1) x_2 - a_3 x_3] = 0,$$
$$(a_2 \lambda_1 + a_3)(x_2 + \lambda_1 x_3) = 0,$$
$$-\lambda_1^2 (a_0 x_1 + a_2 x_3) = 0,$$

so wird die linke Seite ebenfalls gleich Null; denn es ist

$$\lambda_1^2 (a_1 + a_0 \lambda_1) = -\lambda_1^2 (\lambda_2 + \lambda_3) = -\lambda_1 (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -(\lambda_1 a_2 + a_3).$$

Die Gerade $P_2 P_3$ geht also auch durch den Schnittpunkt der beiden Strahlen $x_2 + \lambda_1 x_3 = 0$ und $a_0 x_1 + a_2 x_3 = 0$.

Die hier in Betracht kommenden Strahlenpaare erhält man aus dem schon vorhandenen Punkte P_1 oder $\lambda = \lambda_1$ und aus den 3 Punkten R_i oder $\lambda = -\frac{a_i}{a_{i-1}}$ folgendermaßen: Der Strahl $A_2 P_1$ treffe den Kegelschnitt $K = 0$ zum zweiten Male in P_1'; dann ist P_1' der Punkt $\lambda = -\lambda_1$; daher ist $x_1 + \lambda x_2 = 0$ der Strahl $A_3 P_1'$, $x_2 + \lambda_1 x_3 = 0$ der Strahl $A_1 P_1'$. Ferner sind $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$, $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$, $a_0 x_1 + a_1 x_2 = 0$, $a_1 x_2 + a_2 x_3 = 0$ der Reihe nach die Strahlen $A_3 R_2$, $A_1 R_3$, $A_3 R_1$, $A_1 R_2$. Der Schnittpunkt S der Strahlen $A_3 R_2$ und $A_1 R_3$ liegt auf dem Strahl $a_1 x_1 - a_3 x_3 = 0$ oder $A_2 S$; demnach ist $a_1 x_1 + a_3 x_3 = 0$ oder $A_2 Q_1$ der vierte harmonische Strahl des Büschels A_2 $(A_1, A_3; S, Q_1)$. Der Schnittpunkt T der Strahlen $A_3 R_1$ und $A_1 R_2$ liegt auf dem Strahl $a_0 x_1 - a_2 x_3 = 0$ oder $A_2 T$; demnach ist $a_0 x_1 + a_2 x_3 = 0$ oder $A_2 Q_2$ der vierte harmonische Strahl des Büschels A_2 $(A_1, A_3; T, Q_2)$. Man findet also der Reihe nach die Punkte P_1', S, T und die Strahlen $A_2 Q_1$, $A_2 Q_2$. Schneiden sich dann die Strahlen $A_3 P_1'$ und $A_2 Q_2$ in U, die Strahlen $A_1 P_1'$ und $A_2 Q_2$ in V, so ist UV derjenige Strahl, der den Kegelschnitt $K = 0$ in den Punkten P_2 und P_3 oder $\lambda = \lambda_2$ und $\lambda = \lambda_3$ trifft.

Prenzlau. W. Stegemann.

Zu **150** (Bd. X, 327) (G. Kober). — Die zwei Punkte $a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ des Kegelschnittes $\lambda = x_1 : x_2 = x_2 : x_3$ sind die Schnittpunkte eines Strahles, den zwei Strahlenbüschel gemein haben. Welche Strahlen bestimmen beide Büschel? Welche Strahlen ergeben sich in dem besonderen Falle $a_1 = 0$?

Zweite Lösung. — Die zwei Punkte, in denen die zwei Strahlen $a_0x_1^2 + a_1x_1x_2 + a_2x_2^2 = 0$ den Kegelschnitt $x_1x_3 = x_2^2$ zum zweiten Male schneiden, sind die Schnittpunkte des Strahles $a_0x_1 + a_1x_2 + a_2x_3 = 0$, welcher sowohl den Schnittpunkt der beiden Strahlen

$$a_0x_1 + a_1x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

als auch den Schnittpunkt der beiden Strahlen

$$a_1x_2 + a_2x_3 = 0, \quad x_1 = 0$$

enthält. In dem besonderen Falle $a_1 = 0$ sind beide Strahlen beide Mal $x_1x_3 = 0$; der dritte Strahl beider Büschel ist dann $a_0x_1 + a_2x_3 = 0$.

Holzminden. G. Kober.

Zu **151** (Bd. X, 327) (G. Kober). — Die vier Punkte $a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$ des Kegelschnittes $\lambda = x_1 : x_2 = x_2 : x_3$ sind die Schnittpnnkte eines zweiten Kegelschnittes, die zwei Kegelbüschel gemein haben. Welche Strahlenpaare bestimmen beide Büschel? Welche Besonderheit ergibt sich in dem Falle $a_0 = 0$?

Zweite Lösung. — Die vier Punkte, in denen die vier Strahlen $a_0x_1^4 + a_1x_1^3x_2 + a_2x_1^2x_2^2 + a_3x_1x_2^3 + a_4x_2^4 = 0$ den Kegelschnitt $x_1x_3 = x_2^2$ zum zweiten Male schneiden, sind die Schnittpunkte der Hyperbel $a_0x_1^2 + a_1x_1x_2 + a_2x_1x_3 + a_3x_2x_3 + a_4x_3^2 = 0$, welche sowohl die Schnittpunkte der Strahlenpaare

$$(a_0x_1 + a_1x_2 + a_2x_3)x_1 = 0, \quad (a_3x_2 + a_4x_3)x_3 = 0$$

als auch die Schnittpunkte der Strahlenpaare

$$(a_0x_1 + a_1x_2)x_1 = 0, \quad (a_2x_1 + a_3x_2 + a_4x_3)x_3 = 0,$$

mithin zweimal die drei Punkte

$$(a_0x_1 + a_1x_2)x_3 = 0, \quad (a_3x_2 + a_4x_3)x_1 = 0, \quad x_1x_3 = 0$$

wie außerdem die beiden Punkte

$$(a_0x_1 + a_1x_2 + a_2x_3)(a_3x_2 + a_4x_3) = 0,$$
$$(a_0x_1 + a_1x_2)(a_2x_1 + a_3x_2 + a_4x_3) = 0,$$

enthält. Im Fundamentalpunkte $x_1x_3 = 0$ wird dieser Kegelschnitt von $a_1x_1 + a_3x_3 = 0$ berührt; seine Tangenten in den beiden andern Doppelpunkten sind:

$$(a_0x_1 + a_1x_2 + a_2x_3) : a_3x_3 = a_0 : a_1,$$
$$a_1x_1 : (a_2x_1 + a_3x_2 + a_4x_3) = a_3 : a_4,$$

mithin Strahlen desjenigen Punktes, in welchem sich die beiden Strahlen

$$a_1x_2 + a_2x_3 = 0, \quad a_2x_1 + a_3x_2 = 0$$

schneiden. Im Falle $a_0 = 0$ wird der gesuchte Kegelschnitt in $x_2x_3 = 0$ von $a_1x_2 + a_2x_3 = 0$ berührt.

Holzminden. G. Kober.

Zu **152** (Bd. X, 327) (G. Kober). — Ist $\lambda - \lambda_i = 0$ einer von den drei Punkten $a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$ des Kegelschnittes $\lambda = x_1 : x_2 = x_2 : x_3$, so sind die beiden anderen Punkte jedesmal die Schnittpunkte derjenigen Sekante, welche den Schnittpunkt der beiden Strahlen $x_1 + \lambda_i x_2 = 0$, $a_1 x_1 + a_3 x_3 = 0$ mit dem Schnittpunkte der beiden Strahlen $x_2 + \lambda_i x_3 = 0$, $a_0 x_1 + a_2 x_3 = 0$ verbindet. Wie folgen diese Strahlen aus dem vorhandenen Punkte $\lambda - \lambda_i = 0$ und den gegebenen drei Punkten $a_{i-1}\lambda + a_i = 0$ des Kegelschnittes?

Zweite Lösung: Die Entwicklung von $f(\lambda) - f(\lambda_i) : (\lambda - \lambda_i) = 0$ gibt

$$a_0\lambda^2 + (a_0\lambda_i + a_1)\lambda + (a_0\lambda_i^2 + a_1\lambda_i + a_2) = 0$$

als Gleichung der gesuchten Punkte. In ihnen wird der Kegelschnitt $\lambda = x_1 : x_2 = x_2 : x_3$ von der Geraden

$$a_0 x_1 + (a_0\lambda_i + a_1) x_2 + (a_0\lambda_i^2 + a_1\lambda_i + a_2) x_3 = 0$$

geschnitten, welche die beiden Strahlen

$$(a_0\lambda_i + a_1)(x_2 + \lambda_i x_3) + (a_0 x_1 + a_2 x_3) = 0,$$
$$(a_0\lambda_i + a_1)(x_1 + \lambda_i x_2) - (a_1 x_1 + a_3 x_3) = 0$$

deckt. Der hier benutzte Punkt $\lambda + \lambda_i = 0$ des Kegelschnitts ist dem vorhandenen Punkte $\lambda - \lambda_i = 0$ desselben konjugiert, d. h. der zweite Schnittpunkt der durch diesen Punkt gehenden Sekante $x_1 - \lambda_i^2 x_3 = 0$. Die beiden Punkte aber auf $x_2 = 0$, die mit der gegenüberliegenden Fundamentalecke zu verbinden sind, sind die Schnittpunkte der beiden Strahlen

$$a_0 x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3 = 0,$$
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

welche die auf $x_3 = 0$ und $x_1 = 0$ geworfenen Projektionen der beiden ersten und der beiden letzten von den drei gegebenen Punkten verbinden.

Holzminden. G. Kober.

Zu **154** (Bd. X, S. 328) (H. Wieleitner). — Gegeben sind die Kreise K mit dem Durchmesser $AB = 2R$ und K' mit dem Durchmesser $A'B = 2r$. Beide Kreise berühren sich in B. Nimmt man A' als Anfangspunkt und $A'B$ als positive x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so ist die Gleichung des Kreises K

$$[x - (2r \mp R)]^2 + y^2 = R^2$$

und die des Kreises K'

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2.$$

Das obere oder untere Vorzeichen ist zu nehmen, je nachdem sich die Kreise von *innen* oder von *außen* berühren. Durch den Punkt A' lege man den beliebigen Strahl $y = \lambda x$, der den Kreis K in Q und den Kreis K' in Q' schneidet, und trage auf dem Strahl von A' aus die Strecke $A'P = A'Q - A'Q'$ ab. Dann sind die Abscissen von Q und Q'

$$x_1 = \frac{2r \mp R + \sqrt{R^2 + 4\lambda^2 r(\pm R - r)}}{1 + \lambda^2} \text{ bzw. } x_2 = \frac{2r}{1 + \lambda^2},$$

mithin die Abscisse von P

$$x = x_1 - x_2 = \frac{\mp R + \sqrt{R^2 + 4\lambda^2 r(\pm R - r)}}{1 + \lambda^2}.$$

Setzt man hierin $\lambda = \frac{y}{x}$, so erhält man die Gleichung des Ortes von P, d. h. die Gleichung der als Kreis-Kissoide bezeichneten Kurve, nämlich

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 \pm 2Rx) - 4r(\pm R - r)y^2 = 0.$$

Für $R = \infty$ wird hieraus

$$x(x^2 + y^2) - 2ry^2 = 0,$$

also die Kissoide des Diokles; für $R = 2r$, wenn sich die Kreise K und K' von innen berühren,

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 4rx) - 4r^2y^2 = 0,$$

d. i. die Kardioide.

Hiernach läßt sich die Kardioide als Kreis-Kissoide konstruieren. Um zu zeigen, daß diese Erzeugungsweise der Kardioide der sonst üblichen äquivalent ist, zeichne man noch den Kreis K'' mit dem Durchmesser $AA' = 2r$. Der durch A' gelegte Strahl treffe K'' in S. Nach dem gewöhnlichen (konchoidalen) Verfahren erhält man einen Kardioidenpunkt X, wenn man auf dem Strahl in der Richtung von S nach A' die Strecke $SX = 2r$ abträgt. Nun ist, weil die Kreise K' und K'' kongruent sind und A' ihr innerer Ähnlickeitspunkt ist, $SA' = A'Q'$, also $A'X = SX - SA' = 2r - A'Q' = A'Q - A'Q' = A'P$; folglich fällt X mit P zusammen, was zu beweisen war.

Prenzlau. W. Stegemann.

Eine ähnliche Lösung von stud. math. A. Wieferich (Münster i. W.).

Red.

Zu **155** (Bd. X, 328) (H. Wieleitner). — **Man zeige, daß die acht Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten zweier Kreise mit den Radien R und r, wenn der Mittelpunktsabstand $a = \sqrt{2(R^2 + r^2)}$ ist, auf zwei zueinander senkrechten Geraden liegen, deren Schnittpunkt die Zentrale a im Verhältnis $R^2 : r^2$ teilt.**

Erste Lösung: Ich lege der Betrachtung ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde, dessen Ursprung in dem Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius R liegt, und dessen x-Achse mit der Richtung der Zentrale a zusammenfällt. Sind (x_λ, y_λ) und (x'_λ, y'_λ) die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf dem Kreise mit dem Radius R bezw. r, dann mögen die acht Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten bezeichnet werden mit

$$A_\nu \equiv (x_\nu, y_\nu), \quad A'_\nu \equiv (x'_\nu, y'_\nu), \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

wobei sich die Indices 1 und 2 auf die äußeren, 3 und 4 auf die inneren Tangenten beziehen. Vermöge der Relation $a = \sqrt{2(R^2 + r^2)}$ ergeben sich die Längen der äußeren und inneren Tangenten gleich $R + r$ bezw. $R - r$. Analytisch ausgedrückt, ist

$$(1) \qquad (x_m - x'_m)^2 + (y_m - y'_m)^2 = (R + r)^2 \qquad (m = 1, 2)$$

$$(2) \qquad (x_n - x'_n)^2 + (y_n - y'_n)^2 = (R - r)^2, \qquad (n = 3, 4)$$

Beachtet man noch, daß für die Punkte A_r und A_r' die Gleichungen

$$(3) \qquad x_r^2 + y_r^2 = R^2 \quad \text{bezw.} \quad (x_r' - a)^2 + y_r'^2 = r^2$$

gelten, so gehen die Gleichungen (1) und (2) über in

$$a x_m' - (x_m x_m' + y_m y_m') = R^2 + Rr + r^2,$$
$$a x_n' - (x_n x_n' + y_n y_n') = R^2 - Rr + r^2.$$

Nun folgt aber aus der Gleichung der Kreistangente

$$x_r x_r' + y_r y_r' = R^2,$$

also ist

$$a x_m' = 2R^2 + Rr + r^2, \qquad a x_n' = 2R^2 - Rr + r^2$$

oder

$$x_m' = \frac{2R^2 + Rr + r^2}{\sqrt{2(R^2 + r^2)}}, \qquad x_n' = \frac{2R^2 - Rr + r^2}{\sqrt{2(R^2 + r^2)}}.$$

Da sich ferner $\frac{x_m}{R} = \frac{x_m' - a}{r}$ und $\frac{x_n}{R} = \frac{a - x_n'}{r}$ verhalten, so folgt

$$x_m = \frac{R(R - r)}{\sqrt{2(R^2 + r^2)}}, \qquad x_n = \frac{R(R + r)}{\sqrt{2(R^2 + r^2)}}.$$

Aus der Kreisgleichung (3) ergeben sich die zugehörigen Werte von y:

$$y_m = \pm \frac{R(R + r)}{\sqrt{2(R^2 + r^2)}}, \qquad y_n = \pm \frac{R(R - r)}{\sqrt{2(R^2 + r^2)}},$$
$$y_m' = \pm \frac{r(R + r)}{\sqrt{2(R^2 + r^2)}}, \qquad y_n' = \pm \frac{r(R - r)}{\sqrt{2(R^2 + r^2)}}.$$

Sollen vier Berührungspunkte, z. B. A_1, A_2', A_3', A_4 auf einer Geraden liegen, so muß die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' + x_4 & y_3' + y_4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

identisch erfüllt sein. In der Tat ist

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' + x_4 & y_3' + y_4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2(R^2 + r^2)} \cdot \begin{vmatrix} R(R - r) & R(R + r) & 1 \\ 2R^2 + Rr + r^2 & -r(R + r) & 1 \\ 3R^2 + r^2 & R^2 - r^2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{2(R^2 + r^2)} \begin{vmatrix} R(R - r) & R(R + r) & 1 \\ 2R^2 + Rr + r^2 & -r(R + r) & 1 \\ R(R - r) & R(R + r) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

weil in der letzten Determinante zwei Zeilen gleich sind. Es liegen also die genannten Punkte auf einer Geraden. Wegen der Symmetrie in bezug auf die Zentrale folgt unmittelbar, daß auch die Punkte A_1', A_2, A_3, A_4' auf einer Geraden liegen.

Die Gleichungen der beiden Geraden lauten beziehungsweise

$$y = -x + \frac{2R^2}{\sqrt{2(R^2+r^2)}} \quad \text{und} \quad y = x - \frac{2R^2}{\sqrt{2(R^2+r^2)}}.$$

Aus ihnen ist sofort ersichtlich, daß die Geraden aufeinander senkrecht stehen und sich in einem Punkte der Zentrale schneiden, der von dem Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius R (dem Koordinatenanfangspunkt) den Abstand $\frac{2R^2}{\sqrt{2(R^2+r^2)}}$ hat. Die Entfernung von dem Mittelpunkt des andern Kreises beträgt $\frac{2r^2}{\sqrt{2(R^2+r^2)}}$, also teilt der Schnittpunkt der beiden Geraden die Zentrale im Verhältnis $R^2 : r^2$.

Berlin. stud. math. Alfred Baruch.

Die gleiche Lösung ist noch von stud. math. W. Gaedecke eingelaufen.
Red.

Zweite Lösung: Es sind zwei Kreise gegeben, deren Radien R und r sind und deren Mittelpunktsabstand $M_1 M_2 = a = \sqrt{2(R^2 + r^2)}$ ist, und es soll bewiesen werden, daß die 8 Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten dieser Kreise auf zwei zueinander senkrechten Geraden liegen, deren Schnittpunkt die Zentrale a im Verhältnis $R^2 : r^2$ teilt. — Die Berührungspunkte der äußeren gemeinsamen Tangenten seien A_1, B_1 und A_2, B_2, die der inneren A_3, B_3 und A_4, B_4; das durch die Diagonale $M_1 M_2$ bestimmte Quadrat sei $M_1 N_1 M_2 N_2$. Dann ist, weil $M_1 M_2 = \sqrt{2(R^2 + r^2)}$ ist, $M_1 N_1 = N_1 M_2 = M_2 N_2 = N_2 M_1 = \sqrt{R^2 + r^2}$; folglich, wenn man von N_1 aus an die Kreise M_1 und M_2 diejenigen Tangenten $N_1 X$ und $N_1 Y$ zieht, die die Gerade $M_1 M_2$ außerhalb der Strecke $M_1 M_2$ treffen, $N_1 X = r$ und $N_1 Y = R$. Daraus ergibt sich die Kongruenz der Dreiecke $M_1 N_1 X$ und $N_1 M_2 Y$, woraus dann folgt: $\sphericalangle M_1 N_1 X + M_2 N_1 Y = 90^0$, und da auch $\sphericalangle M_1 N_1 M_2 = 90^0$ ist, so ist $X N_1 Y$ eine gerade Linie, d. h. die Punkte X, Y fallen mit A_1, B_1 zusammen, und die Gerade $X N_1 Y$ ist die gemeinsame äußere Tangente $A_1 B_1$. Zieht man von N_1 aus an die Kreise M_1 und M_2 die zweiten Tangenten, so liegen diese symmetrisch zu $A_1 B_1$, in bezug auf $N_1 M_1$ bez. $N_1 M_2$; sie fallen also in eine Gerade zusammen, nämlich in die gemeinsame innere Tangente $N_1 A_3 B_3$. Aus der Symmetrie der Figur folgt die entsprechende Lage der gemeinsamen Tangenten $A_2 N_2 B_2$ und $N_2 A_4 B_4$. Außerdem ergeben sich leicht folgende Beziehungen: die Tangenten $A_1 B_1$ und $A_4 B_4$ schneiden sich rechtwinklig im Punkte K_1, und es ist $K_1 A_1 = R$, $K_1 B_1 = r$; entsprechendes gilt von den Tangenten $A_2 B_2$ und $A_3 B_3$ und ihrem Schnittpunkt K_2; die Vierecke $A_1 M_1 A_4 K_1$, $A_2 M_1 A_3 K_2$, $B_1 M_2 B_4 K_1$, $B_2 M_2 B_3 K_2$ sind Quadrate, die Vierecke $M_1 N_1 B_1 A_4$, $M_1 N_2 B_2 A_3$, $M_2 N_1 A_1 B_4$, $M_2 N_2 A_2 B_3$ Parallelogramme; die Dreiecke $M_1 K_1 M_2$ und $M_1 K_2 M_2$ sind dem Dreieck $M_1 A_1 N_1$ ähnlich. Hiernach ist $A_1 B_4 \parallel M_2 N_1$ und $A_3 B_2 \parallel M_2 N_1$; es ist aber auch $A_1 A_3 \parallel M_2 N_1$ und $B_2 B_4 \parallel M_2 N_1$; mithin liegen die Punkte A_1, A_3, B_2, B_4 in einer Geraden, die die Zentrale unter einem Winkel von 45^0 schneidet; der Schnittpunkt sei O. Ebenso liegen die Punkte A_2, A_4, B_1, B_3 in einer Geraden, die ebenfalls durch O geht und die

Gerade $A_1 O$ rechtwinklig schneidet. Man hat weiter: $\triangle A_1 O B_1 \sim \triangle M_1 A_1 N_1$, weil die Winkel gleich sind; mithin $OA_1 : OB_1 = A_1 M_1 : A_1 N_1 = R : r$. Da $A_1 K_1 = R$ und $B_1 K_1 = r$, so ist OK_1 die Halbierungslinie des Winkels $A_1 O B_1$, steht also senkrecht auf $M_1 M_2$ und ist die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks $M_1 K_1 M_2$. Daraus ergibt sich: $M_1 O : M_2 O = M_1 K_1^2 : M_2 K_2^2 = R^2 : r^2$.

Prenzlau. W. Stegemann.

Dritte Lösung: Folgender Satz ist bekannt (s. etwa Salmon-Fiedler, *Kegelschnitte* Art. 366—369): Der Ort aller Punkte P, von denen aus an zwei Kegelschnitte K_1 und K_2 zueinander harmonische Tangentenpaare gehen, ist ein zu K_1, K_2 kovarianter Kegelschnitt F, der sämtliche acht Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von K_1 und K_2 enthält.

Im vorliegenden Falle ist, unter Benutzung des in der Lösung von Herrn A. Baruch angewendeten Koordinatensystems

$$\mathsf{K}_1 \equiv x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$
$$\mathsf{K}_2 \equiv (x-a)^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Hat P die Koordinaten ξ, η, so erhält man für die beiden Tangentenpaare die Gleichungen

$$\mathsf{T}_1 \equiv (x\xi + y\eta - R^2)^2 - (x^2 + y^2 - R^2)(\xi^2 + \eta^2 - R^2) = 0,$$
$$\mathsf{T}_2 \equiv ((x-a)(\xi - a) + y\eta - r^2)^2 - ((x-a)^2 + y^2 - r^2) \cdot ((\xi - a)^2 + \eta^2 - r^2) = 0$$

oder umgeformt

$$\mathsf{T}_1 \equiv (x-\xi)^2 (R^2 - \eta^2) + 2(x-\xi)(y-\eta)\xi\eta + (y-\eta)^2 (R^2 - \xi^2) = 0,$$
$$\mathsf{T}_2 \equiv (x-\xi)^2 (r^2 - \eta^2) + 2(x-\xi)(y-\eta)(\xi - a)\eta + (y-\eta)^2 (r^2 - (\xi - a)^2) = 0.$$

Die Bedingung nun, daß T_1 und T_2 harmonisch liegen, ist das Verschwinden der harmonischen Invariante, wobei T_1 und T_2 als quadratische Formen in $(x-\xi)$, $(y-\eta)$ aufgefaßt werden. Es ergibt sich (s. Salmon-Fiedler, Art. 15 und 340):

$$\mathsf{F} \equiv (R^2 - \xi^2)(r^2 - \eta^2) - 2\xi\eta^2(\xi - a) + (R^2 - \eta^2)(r^2 - (\xi - a)^2) = 0.$$

Dies ist für variable ξ, η die Gleichung des kovarianten Kegelschnitts. Man bringt dieselbe leicht in die Form

$$\mathsf{F} \equiv \left(\xi - \frac{aR^2}{R^2 + r^2}\right)^2 - \eta^2 \cdot \frac{a^2 - (R^2 + r^2)}{R^2 + r^2} - \frac{R^2 r^2 (2R^2 + 2r^2 - a^2)}{(R^2 + r^2)^2} = 0.$$

Verschwindet hier die Konstante, so ergeben sich zwei senkrechte Gerade durch den Punkt $\xi = \frac{aR^2}{R^2 + r^2}$, $\eta = 0$. Dann ist aber $2R^2 + 2r^2 - a^2 = 0$, d. h. $a = \sqrt{2(R^2 + r^2)}$. Das Weitere wie oben. Das Linienpaar bildet die Grenze zwischen zwei in verschiedener Lage befindlichen Hyperbeln für $a^2 > 2(R^2 + r^2)$ und $R^2 + r^2 < a^2 < 2(R^2 + r^2)$. Für $a = \sqrt{R^2 + r^2}$ ergibt sich ein Parallelenpaar, das für $a < \sqrt{R^2 + r^2}$ in eine Ellipse übergeht, bis schließlich für $a = 0$ ein zwischen den beiden gegebenen Kreisen verlaufender Kreis resultiert.

Speyer. H. WIELEITNER.

Ähnliche Lösungen noch von den Herren C. Hoffmann (Schorndorf, Württemberg) und H. Egerer (Frankfurt a. M.). Red.

Zu **156** (Bd. X, S. 328) (O. Meißner). Dem gegebenen Dreieck ABC mit dem Inhalt J ein ihm ähnliches vom Inhalte $i\,(< J)$ einzubeschreiben. Wann $\left(\text{bei welchem Verhältnis } \frac{i}{J}\right)$ hat die Aufgabe mehr als die drei evidenten Lösungen? — Nimmt man der einfacheren Behandlung wegen die Punkte $A'B'C'$ so an, daß A' auf AB, B' auf BC und C' auf AC liegt, und setzt man ferner die Seiten des gesuchten Dreiecks zu a', b', c' an und $\sphericalangle C'B'C = \sphericalangle A'C'A = \sphericalangle B'A'B = \varphi$, sowie $AA' = z$, $BB' = x$ und $CC' = y$, so folgt

$$x \sin\beta = c' \sin\varphi, \qquad y \sin\gamma = a' \sin\varphi, \qquad z \sin\alpha = b' \sin\varphi.$$

Liegen nun zuerst A', B', C' auf den Seiten von ABC selbst, und nicht auf deren Verlängerungen, so ergibt sich mit Benutzung der Inhaltsgleichungen:

$$(ab - a'b') \sin\gamma = \sin\varphi(c'(c - z) + a'(a - x) + b'(b - y)).$$

Setzt man für x, y, z die aus den ersten Gleichungen berechneten Werte ein, so folgt

$$(ab - a'b') \sin\alpha \sin\beta \sin^2\gamma = \sin\varphi(a' \sin\alpha \sin\gamma(a \sin\beta - c' \sin\varphi)$$
$$+ b' \sin\alpha \sin\beta(b \sin\gamma - a' \sin\varphi) + c' \sin\beta \sin\gamma(c \sin\alpha - b' \sin\varphi)).$$

Nimmt man $\sin\beta = \frac{b}{a} \sin\alpha$, $\sin\gamma = \frac{c}{a} \sin\alpha$ sowie $J = \eta^2 i$, also

$$a' = \frac{1}{\eta} a, \qquad b' = \frac{1}{\eta} b, \qquad c' = \frac{1}{\eta} c,$$

so folgt nach einiger Umformung

$$(\eta^2 - 1) b^2 c^2 \sin^2\alpha = \sin\varphi \sin\alpha \cdot \eta bc(a^2 + b^2 + c^2) - \sin^2\varphi(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2).$$

Die Diskriminante dieser Gleichung ist mit Weglassung des von Null verschiedenen überflüssigen Faktors $b^2 c^2 \sin^2\alpha$:

$$D = \eta^2((a^2 + b^2 + c^2)^2 - 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)) + 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

Daraus folgt, daß für φ entweder 2, 1 oder keine reelle Lösung vorhanden ist, je nachdem

$$\eta^2 \gtreqless 4 \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}.$$

Liegen nun A', B', C' auf den Verlängerungen der Seiten von ABC, so geht die Inhaltsgleichung über in

$$(a'b' - ab) \sin\gamma = \sin\varphi(a'(a + x) + b'(b + y) + c'(c + y))$$

und durch Einsetzen der Werte wie oben folgt

$$(1-\eta^2)b^2c^2\sin^2\alpha = \sin\varphi\sin\alpha\,\eta\, b c(a^2+b^2+c^2)+\sin^2\varphi(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2).$$

Wie ein Vergleich sofort zeigt, ist die Diskriminante in diesem Fall genau gleich dem obigen Werte, sodaß also allgemein folgt, daß sich mehr denn 3, nämlich 6 Lösungen geben lassen, wenn

$$\left(\frac{J}{i}\right) < \frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma} \text{ ist.}$$

Frankfurt a. M. H. Egerer.

Zu **164** (Bd. XI, S. 129) (L. Saalschütz). — Die Diskriminante der Funktion $f(x)=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_{n-1}x+A_n$ ist definiert durch den Ausdruck:

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}f'(\alpha_1)\cdot f'(\alpha_2)\cdots f'(\alpha_n)$$

(vgl. Weber, Algebra 2. Aufl. I, S. 169).

Die Summe aller Zahlenkoeffizienten der Diskriminante erhalten wir, wenn wir in $f(x)$ alle Koeffizienten $A_1=A_2=\cdots=A_n=1$ setzen und für diese Funktion die Diskriminante bilden. Ist also

$$f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1,$$

so ist $(x-1)f(x)=x^{n+1}-1$. Daraus erhält man durch Differentiation $(x-1)f'(x)+f(x)=(n+1)x^n$. Ersetzt man hierin x durch die Wurzel α_i, dann ist

$$f'(\alpha_i)=\frac{(n+1)\cdot\alpha_i^n}{\alpha_i-1}=-\frac{(n+1)\cdot\alpha^n}{1-\alpha_i}.$$

Mithin ergibt sich

$$D=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+n}(n+1)^n(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)^n}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_n)}.$$

Da nun $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n$ und $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_n)$ $=f(1)=n+1$, so ist weiter

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+n+n^2}\cdot(n+1)^{n-1},$$

im Exponenten von (-1) kann man die gerade Zahl $n+n^2$ weglassen; also ist

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(n+1)^{n-1}.$$

Die Frage nach dem Koeffizienten von A_n^{n-1} erledigt sich durch die Berechnung der Diskriminante der Funktion

$$f(x)=x^n+A_n.$$

In diesem Falle ist $f'(x)=nx^{n-1}$ und

$$\begin{aligned}D&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n^n(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)^{n-1}\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n^n\cdot(-1)^{n(n-1)}\cdot A_n^{n-1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot n^n\cdot A_n^{n-1},\end{aligned}$$

weil $(-1)^{n(n-1)}=+1$ ist. Hiernach ist ein Fehler in Cesàro-Kowalevski, Algebr. Analysis, S. 402, Z. 1 zu berichtigen.

Aussig (Böhmen). stud. math. J. Krug.

2. Anfragen und Antworten.

(Vacat.)

3. Kleinere Notizen.

Über eine Aufgabe der Biomechanik.

In Fig. 1 ist ein Teil des Samenstandes der Sonnenblume in schematischer Weise dargestellt, wobei die rautenförmigen Felder die einzelnen Samenkörner repräsentieren. Die Körner schmiegen sich nun nach 2 Richtungen besonders innig aneinander. Verfolgt man dieselben in diesen Richtungen, so bemerkt man, daß sie durch zwei entgegengesetzt laufende Scharen von polygonalen Zügen eingeschlossen werden: AB und $A'B'$.

Betrachtet man die Seiten eines Polygonalzuges als Tangenten, so kann man nach der Kurve fragén, die von einem solchen Polygonzug umhüllt wird, oder — mit anderen Worten — „In welches Kurvensystem geht das doppelte System polygonaler Züge über, wenn die einzelnen Körner immer kleiner und schließlich unendlich klein werden?"

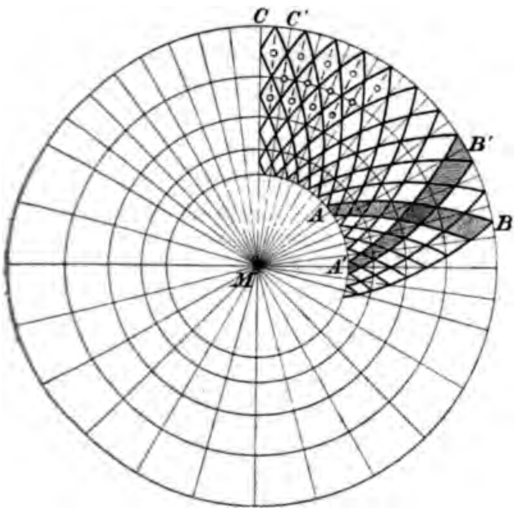


Fig. 1.

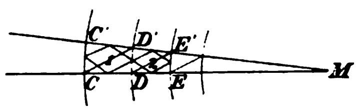


Fig. 2.

[Fig. 2 enthält die Konstruktion der Rauten, wenn man etwa Radius mc und Raute (1) gemessen, oder passend gewählt hat. $DE' \parallel CD'$ etc.]

Die Aufgabe dürfte ein doppeltes Interesse beanspruchen, da sie zeigt, wie eine interessante Kurve der höheren Geometrie in der Natur vorkommen kann. Die Kurven sind — wie leicht zu erkennen — isogonale Trajektorien der Radien, also logarithmische Spiralen. Die beiden Kurvensysteme sind auch welchelseitig isogonale Trajektorien. In einer biomechanischen Untersuchung müßte nun gezeigt werden, wie diese Anordnung aus einem Prinzip mit Notwendigkeit gefolgert werden kann.

Sulzbach-Saarbrücken. L. Blatter.

Erweiterung der Aufgabe 5 (Bd. I, S. 206) (E. Lampe).

1. Nimmt man auf der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ einen beliebigen Punkt P mit den Koordinaten $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ an, so genügen die drei Normalen N_1, N_2, N_3, die sich von diesem Punkte auf die Ellipse fällen lassen, der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{a^2(a^2-4b^2\cos^2\varphi)}{e^2} - N^2 & \frac{2a^2(a^2-2b^2)\cos\varphi}{e^2} & (a^2+b^2)\cos^2\varphi \\ \frac{a^2(a^2+b^2)\cos\varphi}{e^2} & \frac{a^4+e^4\cos^2\varphi}{e^2} - N^2 & (a^2-2b^2)\cos\varphi \\ \frac{a^2(a^2-2b^2)}{e^2} & 2(a^2+b^2)\cos\varphi & 4b^2+e^2\cos^2\varphi - N^2 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Zieht man von einem beliebigen Punkte $P(\xi, \eta)$ der Ebene an die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ die vier Normalen N_1, N_2, N_3, N_4, so besteht die Gleichung:

$$N_1^2 \cdot N_2^2 \cdot N_3^2 \cdot N_4^2 = \frac{1}{e^4}(b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2)^2 \cdot [(\xi + e)^2 + \eta^2]\,[(\xi - e)^2 + \eta^2],$$

worin sich die Faktoren rechter Hand leicht geometrisch deuten lassen.

Aussig (Böhmen). stud. math. J. Krug.

4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

d'Adhémar, R., Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles: No. 29 Scientia. Paris 1907, Gauthier-Villars. 86 S.

Adler, C., Samuel Pierpont Langley. S. A. aus Phil. Soc. Wash. 1907.

Bangert, K. W., Versuche zum Nachweis der magnetischen Kraft bei elektromagnetischen Wellen auf Drähten. Inaug. Diss. Marburg 1907.

Bardey-Lengauer, Aufgabensammlung für bayrische Mittelschulen. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 2.20.

Bertini, E., Indroduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità. Pisa 1907, E. Spoerri. 426 S.

Blythe, W. H., On models of cubic surfaces. Cambridge 1905, University Press. 106 S.

Bopp, K., Die Kegelschnitte des Gregorius a St. Vincentio in vergleichender Bearbeitung. Heft 20 aus „Abh. zur Gesch. d. Math. Wiss". Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 10.—.

Bryan, G. H., Thermodynamics. An introductory treatise dealing mainly with first principles and their direct applications. Nr. 21 von „Teubners Lehrbücher der math. Wiss.". Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 7.—.

Byerly, W. E., Harmonic functions. Math. Monogr. Nr. 5. New York 1906, J. Wiley & Sons. 66 S.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Dritte Auflage. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 24.—.

Capilleri, A., Einführung in die Ausgleichungsrechnung. Leipzig 1907, F. Deuticke. 132 S. ℳ 3.—.

Chappuis, J. et Berget, A., Leçons de physique générale. 2e édition. Tome I: Instruments de mesure. — Pesanteur. — Elasticité. — Statique des liquides et des gaz. — Chaleur. 669 S. fr. 18.—.

Dolze, P., Über Bernoullische Zahlen und Funktionen, welche zu einer Fundamentaldiskriminante gehören, und deren Anwendung auf die Summation unendlicher Reihen. Inaug. Diss. Rostock 1907.

Emden, R., Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische Probleme. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 493 S.

Enzyklopädie der math. Wiss. Band V_1, Heft 4: L. Boltzmann und J. Nabl, Kinetische Theorie der Materie. — H. Minkowski, Kapillarität.
Band III_1, Heft 1: F. Enriques, Prinzipien der Geometrie. — H. v. Mangoldt, Die Begriffe der „Linie" und „Fläche". — M. Dehn und P. Heegaard, Analysis situs. Leipzig 1907, B. G. Teubner.

Frommel, W., Radioaktivität. Sammlung Göschen Nr. 317. ℳ —.80.

Galle, A., Geodäsie. Sammlung Schubert Nr. 23. Leipzig 1907, Göschen. ℳ 8.—.

Gérard, E., et Bast, Omer de, Exercices et projets d'électrotechnique. Tome premier: Applications de la théorie de l'électricité et du magnétisme. Paris 1907, Gauthier-Villars. 239 S. fr. 6.—.

Hagenbach, A., Die Stellung der Physik zu den Naturwissenschaften und der Technik. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 25 S. ℳ —.80.

Helmert, F. R., Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Zweite Auflage. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 16.—.

Herwig, K., Das 200jährige Jubiläum der Dampfmaschine 1706—1906. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 57 S. ℳ 1.60.

Hinneberg, P., Die Kultur der Gegenwart, ihre Entwicklung und ihre Ziele. Teil I, Abteilung VI: Systematische Philosophie von W. Dilthey, A. Riehl, W. Wundt, W. Ostwald, H. Ebbinghaus, R. Eucken, Fr. Paulsen, W. Münch, Th. Lipps. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 12.—.

Huntington, E. V., La Kontinuo. Elementa teorio starigita sur la ideo de ordo kun aldono pri transfinitaj nombroj. Tradukita de la angla lingvo de R. Bricard. Paris 1907, Gauthier-Villars. 125 S. fr. 2.75.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. Dritter Band: Landesvermessung und Grundaufgaben der Erdmessung. 5. Aufl. von C. Reinhertz. Stuttgart 1907, Metzler. VIII + 678 + [7*] S. ℳ 15.—.

Kammerer, Technik der Lastenförderung. München 1907, R. Oldenbourg. ℳ 8.—.

Klein, F., und Schimmack, R., Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Teil 1: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig 1907, B. G. Teubner.

Kuenen, J. P., Die Zustandsgleichung der Gase und Flüssigkeiten und die Kontinuitätstheorie. „Die Wissenschaft", Heft 20. Braunschweig 1907, Vieweg & Sohn. 237 S. ℳ 6.50.

Kunz, J., Theoretische Physik auf mechanischer Grundlage. Stuttgart 1907, F. Enke.

Laisant, C. A., La Mathématique, Philosophie, Enseignement. 2e édition. Paris 1907, Gauthier-Villars. fr. 5.—.

Lorentz, H. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung nebst einer Einführung in andere Teile der Mathematik. Übersetzt von G. C. Schmidt. Zweite Auflage. Leipzig 1907, J. A. Barth. 562 S. ℳ 13.—.

Lorey, W., Leonhard Euler. Vortrag, Naturforsch. Ges. Görlitz. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 20 S.

Loria, G., Vorlesungen über darstellende Geometrie. Deutsch von Fr. Schütte. Erster Teil: Die Darstellungsmethode. Leipzig, 1907, B. G. Teubner. ℳ 6.80.

Merriman, M., The solution of equations. Mathem. Monogr. Nr. 10. 4. Aufl. New York 1906, J. Wiley & Sons. 46 S. $ 1.—.

Meyer, R., Kleines mathematisches Wörterbuch in zwei Teilen. I. Russisch-Deutsch — II. Deutsch-Russisch. Dorpat 1906, F. Schledt. 81 S.

Müller, H., Einführung in die Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 38 S. ℳ 1.20.

Müller, H., und Kutnewsky, M., Aufgabensammlung. Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie. Ausgabe B II. Zweite Auflage. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 3.—.

Müller, H., und Zwerger, M., Rechenbuch für die unteren Klassen der höhere Lehranstalten. Erster und Zweiter Teil: Lehraufgabe der 1.—4. Klasse. Leipzi 1907, B. G. Teubner. je ℳ 1.6

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 10. Aufl. Zweite Band. — Erste Abteilung. Drittes Buch: Die Lehre von der strahlenden Energi (Optik) von O. Lummer. Braunschweig 1907, Vieweg & Sohn. ℳ 15.—

Newest, Th., Erdendämmerung. Vergangene und zukünftige Katastrophen. Wie 1907, C. Konegen. ℳ 2.50

Richert, P., Die ganzen rationalen Funktionen der ersten drei Grade und ihr Kurven. Exponentialreihen höherer Grade. Wiss. Beil. 3. Realschule. Oster 1907. Berlin, Weidmann. ℳ 1.—

Richter, O., Dreist. logarithm. Tafeln. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ —.2

Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte I. Siebente Auflage Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 10.—

Schacht, J., Zur Energielehre im physikalischen Unterricht. Wiss. Beil. 4. Real schule. Ostern 1907. Berlin, Weidmann. ℳ 1.—

Scheele, F., Über die Dandelinschen Kugeln. Wiss. Beil. 10. Realschule. Oster 1907. Berlin, Weidmann. ℳ 1.—

Schlink, W., Statik der Raumfachwerke. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 9.—

Schmidt, G. C., Die Kathodenstrahlen. Heft 2 von „Die Wissenschaft". Brau schweig 1907, Vieweg & Sohn. 127 S. ℳ 3.6

Schubert, H., und Schumpelick, A., Arithmetik für Gymnasien. Erstes Heft: Fü mittlere Klassen. Leipzig 1907, Göschen.

Schubert, H., und Schumpelick, A., Ausgewählte Resultate zur Arithmetik f Gymnasien. Erstes Heft. Leipzig 1907, Göschen.

Schülke, A., Differential- und Integralrechnung im Unterricht. Leipzig 190 B. G. Teubner. 30 S. ℳ 1.-

Schulz-Euler, Leonhard Euler. Mit 2 Portr. Frankfurt a. M. 1907, C. Fr. Schulz. ℳ 1.5

Schuster, A., Einführung in die theoretische Optik. Deutsch von H. Kone Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 13.-

Smithsonian Institution. Annual report 1905. Washington 1906, Governme printing office.

Sommer, J., Vorlesungen über Zahlentheorie. Einführung in die Theorie der alg braischen Zahlkörper. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 11.-

Sundmann, F., Recherches sur le problème des trois corps. Acta soc. sc. fennic 34. Helsingfors 1907.

Tarry, G. Tablettes des cotes relatives à la base 20580 des facteurs premiers d' nombre inférieur à N et non divisible par 2, 3, 5 ou 7. Paris 1906, Gauthi Villars. fr. 1.

Treutlein, P., Mathematische Aufgaben aus den Reifeprüfungen der badisch Mittelschulen. 1. Teil: Aufgaben. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 2.

Ulrich, G., Der Begriff des Raumes. Wiss. Beil. 7. Realschule Ostern 19 Berlin, Weidmann. ℳ 1.-

Volk, K. G., die Elemente der neueren Geometrie. Für die oberen Klassen höhe Lehranstalten. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 2.-

Walter, F., Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Unter- und Mittelstu Mit Anhang (für Realanstalten): I. Ebene Trigonometrie. — II. Abbildung u Berechnung einfacher Körper. Berlin 1907, O. Salle. 204 S.

Wangerin, A., Franz Neumann und sein Wirken als Forscher und Lehrer. Heft aus „Die Wissenschaft". Braunschweig 1907, Vieweg & Sohn. ℳ 6.

Weber, H., und Wellstein, J., Encyklopädie der Elementarmathmatik. III. Ba Angewandte Elementarmathematik. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 666 ℳ 14.-

Das Prinzip der speziellen Lage.

Von Rudolf Sturm in Breslau.

Das ist der Name, welchen Schubert zuerst in einer Veröffentlichung in den Göttinger Nachrichten vom Jahre 1874 dem Prinzip gegeben hat, während es später von ihm Prinzip der Erhaltung der Anzahl genannt wurde. Ich ziehe den älteren Namen vor, und Schubert teilt mir mit, daß er es jetzt auch tue.

In den ersten Paragraphen des „Kalküls der abzählenden Geometrie" (Leipzig 1879) erörtert Schubert den Begriff der Konstantenzahl eines geometrischen Gebildes oder, wie ich lieber sage, seinen Mannigfaltigkeitsgrad: z. B. neun für die Fläche zweiten Grades, zwölf für das Tetraeder, ebenso für die kubische Raumkurve, acht für den Kegelschnitt im Raume, usw.

Darauf wird besprochen, daß für ein Gebilde eine ihm auferlegte Bedingung eine bestimmte Vielfachheit hat. So ist die Bedingung, durch einen gegebenen Punkt zu gehen, für eine Fläche einfach, für eine Kurve zweifach, die Bedingung, eine gegebene Ebene zu berühren, für beide einfach, diejenige, eine gegebene Gerade zu tangieren, für eine Fläche einfach, für eine Kurve aber dreifach.

Die mangelhafte Orientierung über diese Dinge hat früher vielfach zu Fehlern geführt. Ich erinnere an den Fehler über den Ort der Spitzen der Kegel zweiten Grades durch sechs gegebene Punkte, als welchen man die kubische Raumkurve durch diese Punkte annahm, während er doch eine Fläche sein muß; ferner an den unglücklichen durch mehrere Bücher fortgeschleppten Fehler über den Ort der Geraden, von denen nach vier gegebenen Punkten Ebenenbüschel von gegebenem Doppelverhältnisse gehen, an den Irrtum über den Grad der Mannigfaltigkeit der Büschel-Grundkurven in einem Netze von Flächen, u. a.

Schuberts Erörterungen haben in dieser Beziehung, nach meiner Erfahrung, fördernd und aufklärend gewirkt, und sein Buch sollte viel höher geschätzt werden, als es neuerdings geschieht.

Nach diesen Feststellungen kommt dann Schubert in § 4 zum erwähnten Prinzip. Werden einem Gebiete Γ so viele Bedingungen auferlegt, daß deren Vielfachensumme gleich seinem Mannigfaltigkeitsgrade ist, so wird ihnen durch eine endliche Anzahl von Γ genügt. Diese Zahl N ist immer gleich, wie man auch die in den Bedingungen steckenden Gebilde in ihrer Lage verändert, eventuell auch in spezielle Lage bringt. Nur solche spezielle Lagen sind auszuschließen, bei denen nicht eine endliche Zahl von Lösungen sich ergibt, sondern unendlich viele.

Die Anzahl der Flächen zweiten Grades durch neun gegebene Punkte ist immer 1, wie auch diese Punkte gegeben sind, ob in ganz allgemeiner Lage, oder z. B. drei in gerader Linie, die übrigen beliebig, vier oder fünf in einer Ebene, die übrigen beliebig, usw.

Nur auf einer Raumkurve vierter Ordnung erster Art dürfen sie nicht liegen, weil dann ∞^1 Flächen sich ergeben.

Schubert sagt selbst, daß das Prinzip schon lange, bevor er es als solches formuliert, als Forschungsinstrument bei der Bestimmung geometrischer Anzahlen benutzt sei; vor allem geschah es durch Cremona. Auch ich selbst habe es getan.

Dies Prinzip ist in der letzten Zeit vielfach angegriffen, als krank, unheilbar krank bezeichnet worden. Es ist vielleicht doch angezeigt, daß sich auch einmal einer äußert, der es angewandt und Erfahrung in seiner Anwendung hat.

Da möchte ich, an die Abhandlung von G. Kohn[1]) anknüpfend, die dort angeführten Beispiele, welche gegen das Prinzip sprechen sollen, kritisieren. Ich kann nicht umhin, dieselben als ungeeignet zu bezeichnen; sie fallen sämtlich nicht in das Gebiet von Problemen, auf das alle die, welche das Prinzip verständig anzuwenden gewohnt sind, sich beschränkt haben, und entsprechen auch nicht dem, was Schubert in § 4 gesagt hat.

Wir ziehen das Prinzip nur dann heran, wenn es sich um die Bestimmung einer Anzahl handelt, welche zu Bedingungen gehört, deren Vielfachensumme gleich dem Mannigfaltigkeitsgrade ist; bei den meisten Kohnschen Beispielen ist sie größer.

Das eine Beispiel behandelt die Frage: Wie viele Punkte hat eine beliebige Ebene mit drei denselben Kegelschnitt enthaltenden, aber sonst beliebigen Flächen zweiten Grades gemein? Das ist zunächst eine gekünstelte Form der Frage; im Grunde lautet sie doch: wie viele Punkte hat die Ebene mit dem Kegelschnitte gemeinsam? Aber bleiben wir bei jener Form der Frage. Da werden eben dem Punkte, dessen Mannigfaltigkeitsgrad 3 ist, die vier Bedingungen auferlegt: auf drei Flächen und einer Ebene zu liegen, also zu viele, und deshalb fällt die

1) Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, Bd. 4, S. 312.

Frage gar nicht in das Gebiet, in welchem das Prinzip anzuwenden ist. Wenn nun den drei Flächen ein gemeinsamer Kegelschnitt gegeben wird, so werden günstigere Verhältnisse geschaffen; dann wird die unmögliche Aufgabe zu einer möglichen und hat zwei Lösungen und kann, wenn auch die Ebene noch eine günstige Lage bekommt, drei oder vier Lösungen haben. Ähnlich könnte man bei vier Flächen zweiten Grades verfahren, indem man die vierte durch eine beliebige Anzahl von den gemeinsamen Punkten der drei ersten führt. So erhalten wir, immer günstigere Annahmen machend, verschiedene Zahlen, was aber gar nicht gegen das Prinzip spricht; denn *für solche Anzahlen, die nur bei günstigen Lagen sich ergeben, während im allgemeinen keine Lösung vorhanden ist*, weil zu viel verlangt wird, *ist das Prinzip nicht anzuwenden* und von uns niemals angewandt worden.

Auch das zweite Beispiel Kohns, ihm von Study mitgeteilt, ist von dieser Art. Es lautet: Wie viele Projektivitäten transformieren ein Quadrupel von vier Punkten einer Geraden in sich selbst. Da handelt es sich wiederum um ein Problem, welches verallgemeinert Unmögliches verlangt und nur durch eine günstige Verhältnisse herstellende Spezialisierung Lösungen erhält. Die Verallgemeinerung ist: Wie viele Projektivitäten führen das Quadrupel $ABCD$ auf einer Geraden in das Quadrupel $A'B'C'D'$ auf einer anderen oder derselben Geraden über? Keine, weil zu viel verlangt wird. Liegt aber der günstige Umstand vor, daß die beiden Quadrupel dasselbe Doppelverhältnis haben, dann werden Projektivitäten möglich und zwar 4, und sie können noch zahlreicher werden, z. B. wenn die Quadrupel harmonisch sind. Dieser günstige Umstand liegt in dem Study-Kohnschen Beispiele vor.

Von anderer Art ist Kohns erstes Beispiel: Die Aufgabe, die Geraden zu konstruieren, welche vier gegebene Geraden in verschiedenen Punkten treffen, hat im allgemeinen zwei Lösungen, dagegen nur eine, wenn zwei von den vier Geraden sich schneiden. Hier wird nicht zu viel verlangt; aber der Zusatz „in verschiedenen Punkten" bringt eine Modifikation in diese Anzahlbestimmung, durch welche sie wiederum dem Anwendungsgebiete des Prinzips entzogen wird. Das Prinzip ist nur für die Ermittelung der Gesamtzahl 2 der treffenden Geraden anzuwenden; wie dies auch in § 9 des Schubertschen Buches geschehen ist. Die Unterscheidung der treffenden Geraden in verschiedene Arten und die Abzählung, wie viele zu jeder Art gehören, hat nichts mit dem Prinzip zu tun. Illustrativer ist vielleicht folgendes Problem: wie viele Geraden treffen vier gegebene kubische Raumkurven? Nur die Frage nach der Gesamtzahl ($2 \cdot 3^4 = 162$) der Treffgeraden könnte mit Hilfe des Prinzips beantwortet werden. Wenn Begegnungspunkte zwischen den Raumkurven vorhanden sind[1]), so kann das Treffen in drei versch[i]denen Weisen erfolgen: 1. alle vier Treffpunkte sind verschieden, 2. zw[ei] vereinigen sich in einem Begegnungspunkte, 3. auch die beiden ander[n] tun es. Die Bestimmung der Anzahlen der Treffgeraden, welche de[n] drei Arten entsprechen, ist nicht eine Aufgabe, bei welcher mit de[m] Prinzip der speziellen Lage gearbeitet werden kann. In den ver[-]schiedenen möglichen Fällen wird man z. B. für die Treffgeraden de[r] ersten Art die verschiedensten Zahlen erhalten, vielleicht alle bis 16[.] Ich habe mich mit solchen Fragen vielfach beschäftigt; es ist mi[r] niemals eingefallen, daß ich es da mit dem Prinzip der speziellen Lag[e] zu tun habe, oder vielmehr, daß da ein Widerspruch gegen das Prin[-]zip der Erhaltung der Anzahl vorliege. —

Es gibt wichtige Sätze, welche man mit Hilfe des Prinzips de[r] speziellen Lage beweist und bis jetzt nicht anders beweisen kann.

Für den Satz, daß diejenigen Strahlen einer Kongruenz m^{ter} Ord[-]nung und n^{ter} Klasse, welche eine gegebene Gerade l treffen, ein[e] Regelfläche vom Grade $m+n$ erzeugen, kenne ich keinen andere[n] Beweis als den, in welchem gezeigt wird, daß l eine m-fache Leit[-]gerade ist, und jede Ebene durch l noch n Erzeugende enthält. E[s] wird also nur für die Geraden, welche l treffen, die Zahl der Schnitt[-]punkte oder nur für die Ebenen durch l die Ordnung der Schnitt[-]kurve ermittelt.

Die Ordnung $n-i$ der i^{ten} Polare eines Punktes in bezug au[f] eine Kurve oder Fläche n^{ter} Ordnung wird — wenigstens synthetisch — nur auf den durch den Pol gehenden Geraden festgestellt.

Vielfach schließt man, nachdem für eine Raumkurve festgestell[t] ist, daß sie einer gewissen Geraden in m (einfachen) Punkten begegnet und mit jeder Ebene durch sie noch n Punkte gemein hat, oder für eine auf der Trägerfläche zweier verbundener Regelscharen verlaufende Raumkurve, daß sie den Geraden der einen Regelschar in m, denen der andern in n Punkten begegnet, sofort auf die Ordnung $m+n$.

Ich bin auch von solchen Beweisen nicht befriedigt, möchte aber die Beschäftigung mit dem Prinzip der speziellen Lage in andere Wege lenken.

Man möge in den obigen Beweisen für wichtige Sätze und in wertvollen Abzählungen mit Hilfe des Prinzips, welche sich in der Literatur finden, den begangenen Fehler — wenn wirklich einer begangen ist — ordentlich nachweisen, aber auch erörtern, wie, wenn

[1]) Zwei kubische Raumkurven können 0 bis 5 Begegnungspunkte haben; [s]o scheinen 6^6 Fälle vorzuliegen. Aber sie sind nicht alle möglich; z. B. sind vier kubische Raumkurven möglich, von denen je zwei 5 Begegnungspunkte [habe]n (welche immer bloß zweien gemeinsam sind).

die Anzahl des allgemeinen Falles wirklich verschieden ist von der im speziellen Falle erhaltenen, man durch Kontinuität von dem allgemeinen zu dem speziellen Resultate gelangt. Ich bin auf eine solche Verschiedenheit noch nicht gestoßen und kann sie mir schwer vorstellen.

Am meisten erwünscht aber ist es, solche „mangelhaften“ Beweise durch bessere zu ersetzen; das wäre positive Arbeit, wertvoller als die negative Kritik, insbesondere, wenn sie sich künstlich konstruierter oder ungeeigneter Beispiele bedient.

Vor allem empfehle ich die obigen Sätze, den Satz von der Regelfläche $(m+n)^{\text{ten}}$ Grades bei der Kongruenz und den Polarensatz für diese Verbesserung. —

Das Vorangehende war schon geschrieben, ehe **Zeuthens** Artikel: „Abzählende Methoden“ und sein Abschnitt II: „Das Prinzip der Erhaltung der Anzahl“ in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften III 2, Heft 3 erschien. Ich bin jetzt in der Lage, auf diesen Artikel meines Freundes, welcher auf diesem Gebiete Autorität ist, zu verweisen, glaube aber, daß meine Bemerkungen nicht überflüssig geworden sind.

Die Versiera der Agnesi und verwandte Linien als Orthogonalprojektionen von Raumkurven dritter Ordnung.

Von EDUARD JANISCH in Prag.

1. Es seien zwei windschiefe Gerade $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$ gegeben, von denen $(\mathfrak{a})$ in der Aufrißebene liege und senkrecht zur Grundrißebene stehe, während $(\mathfrak{b})$ zur Kreuzrißebene parallel in der rückwärtigen Halbierungsebene verlaufen möge. Der Aufriß $\mathfrak{b}$ fällt dann mit dem Grundrisse $\mathfrak{b}'$ in eine zur Projektionsachse normale Gerade. Diese beiden Geraden wählen wir als Leitlinien eines orthogonalen hyperbolischen Paraboloides (P) mit der Grundrißebene als Richtebene. Es ergibt sich sofort, daß die Projektionsachse als eine Erzeugende $\mathfrak{e}_0$, die $(\mathfrak{a})$ in a_0 und $(\mathfrak{b})$ in b_0 schneidet, der (P) angehört. Eine beliebige Erzeugende $(\mathfrak{e})$ von (P) hat eine Parallele $\mathfrak{e}$ zur $\mathfrak{e}_0$ zum Aufriß. Wir finden den Grundriß $\mathfrak{e}' = a'\,b'$, wo $a' \equiv a_0$ der Grundriß des Schnittpunktes $(a) = (\mathfrak{e}) \times (\mathfrak{a})$ ist, dessen Aufriß durch $a = \mathfrak{e} \times \mathfrak{a}$ dargestellt wird, und b' den Grundriß von $(b) = (\mathfrak{e}) \times (\mathfrak{b})$ bedeutet, der mit dem Aufriß $b = \mathfrak{e} \times \mathfrak{b}$ zusammenfällt, da $(\mathfrak{b})$ in der Koinzidenzebene liegend angenommen wurde. Bringen wir nun das Paraboloid (P) mit einem geraden Kreiszylinder (Z) zum Schnitte, der den Kreis $(\mathfrak{K})$ der Grundrißebene, welchen wir über $a_0\,b_0$ als Durchmesser beschreiben, zur Basis hat, so ist, da (P)

und (Z) die Gerade $(\mathfrak{a})$ gemein haben, der Restschnitt eine Raumku
(R) dritter Ordnung, deren Aufriß, wie sich leicht zeigen läßt, du
die Kurve der **Agnesi** dargestellt wird.[1])

2. Es ergibt sich nämlich in $p' = \mathfrak{e}' \times \mathfrak{K}'$ der Grundriß des
(a) verschiedenen der (R) angehörenden Schnittpunktes (p) der $(\mathfrak{e})$
(Z), dessen Aufriß p mithin als Schnitt von $\mathfrak{e}$ mit dem aus p' auf
gefällten Lote dargestellt wird. Wir konstruieren also beliebig vi
Lagen von p, indem wir durch den Punkt a_0 auf $\mathfrak{K}'$ Strahlen zieh
durch deren Schnitte mit der Kreistangente in b_0 Parallelen zu
zeichnen und diese jeweils zum Schnitte bringen mit den Senkrecht
auf $\mathfrak{e}_0$, welche durch die zweiten Schnittpunkte von $\mathfrak{K}'$ mit den dur
a' geführten Strahlen gezogen werden können. Der Ort aller Lag
von p ist demzufolge die Kurve der **Agnesi** mit der Achse $\mathfrak{e}_0$, de
Scheitel b_0 und der Asymptote $\mathfrak{a}$.[2])

Auf Grund dieser Darstellung der Versiera gelangt man leicht
eleganten Tangentenkonstruktionen. Die Tangente $\mathfrak{t}$ in p ist der Au
riß der Tangente $(\mathfrak{t})$ im Punkte (p) der (R), welch letztere als Schni
linie der Tangentialebenen in (p) an (P) und (Z) gefunden wi
Nun ist die Tangentialebene (T) in (p) an (P) die Verbindungsebe
der beiden durch (p) gehenden Erzeugenden $(\mathfrak{e})$ und $(\mathfrak{c})$. Der Auf
$\mathfrak{c}$ fällt mit dem Grundrisse $\mathfrak{c}'$ in eine Parallele zu $\mathfrak{a}$, da die Richtebe
der Leitschar von (P) die Kreuzrißebene ist. Die Grundrißspur T^1
(T) geht also durch $c_0 = \mathfrak{c} \times \mathfrak{e}_0$ und ist parallel $\mathfrak{e}'$, während die Aufr
spur T^2 durch ac_0 dargestellt wird. Von der Zylindertangentialebe
$(\mathfrak{T})$ längs der durch (p) gehenden Mantellinie (f) benötigen wir bl
die Grundrißspur $\mathfrak{T}^1$, welche als Tangente an $(\mathfrak{K}')$ in $c' \equiv p'$ zu zieh
ist. Den Grundrißspurpunkt π der $(\mathfrak{t})$ erhalten wir mithin als d
Grundriß π' in $\mathfrak{T}^1 \times T^1$ und den Aufriß als Fußpunkt des auf $\mathfrak{e}_0$ a
π' gefällten Lotes. Die πp liefert alsdann bereits $\mathfrak{t}$, den Aufriß v
$(\mathfrak{t})$ oder die Tangente der Versiera in p.

Man bemerkt leicht, daß π' mit Umgehung von T^1 auch
Fußpunkt des Lotes aus b_0 auf $\mathfrak{T}^1$ erhalten werden kann. De
$\sphericalangle(\mathfrak{T}^1, b_0 c) = \sphericalangle c' a_0 b_0 = \sphericalangle b_0 c' c_0$, und da $c_0 \pi'$ (oder T') $\perp c' b_0$,
ist das Dreieck $\pi' c c_0'$ gleichschenkelig, und das Dreieck $c' c_0 b_0$ liegt
bezug auf $c' b_0$ symmetrisch mit dem folglich bei π' rechtwinklig
Dreiecke $c' \pi' b_0$. Die Grundrißspurkurve der abwickelbaren Tangent
fläche der (R) ist dergestalt eine Kardioide, die Fußpunktslinie d
Kreises $(\mathfrak{K})$ für b_0 als Pol.

---

1) Die Kurve (R) selbst ist ein *Horopter*. Vergl. **Fred. Schuh**, I
Horopterkurve (Ztschrift f. Math. u. Phys., **47**, 1902; S. 375 ff.).

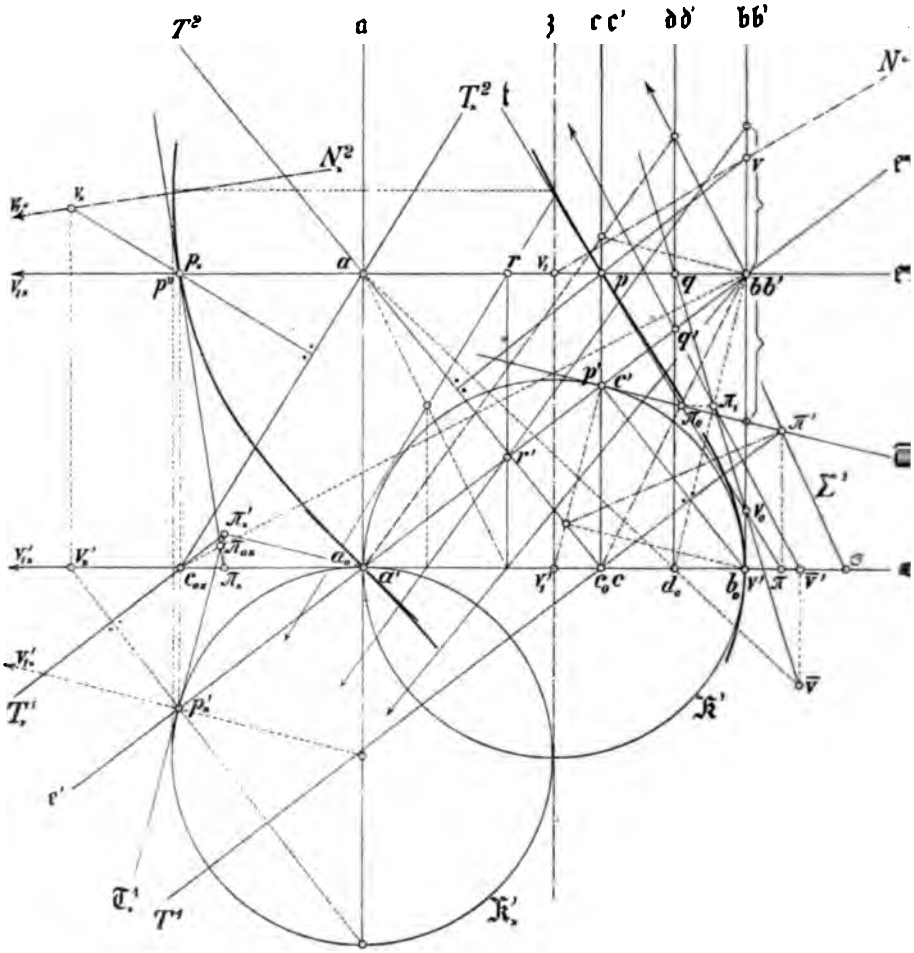
2) **Gino Loria**, Spez. algebr. u. transzend. Kurven. Seite 75 ff.

Noch einfacher wird die Tangentenkonstruktion mit Benutzung des in der rückwärtigen Halbierungsebene gelegenen Punktes π_0 der (t). Nachdem die Schnittlinie der Tangentialebene (T) mit der rückwärtigen Halbierungsebene im Aufriß und Grundriß durch die bc_0 dargestellt wird und der Grundriß der (t) in die $\mathfrak{T}'$ fällt, so ist der mit dem Grundrisse π_0' zusammenfallende Aufriß π_0 von (π) der Schnitt von bc_0 mit $\mathfrak{T}_1$, und $\pi_0 p$ ist dann die Tangente t. Der Ort von π_0 wird durch einen Kegelschnitt dargestellt mit a_0 und b_0 als Scheiteln, denn die rückwärtige Halbierungsebene ist die Schmiegungsebene der Raumkurve (R) für den Punkt b_0 in $\mathfrak{e}_0$. Die Spurkurve der Tangentenfläche einer Raumkurve 3. Ordnung in einer ihrer Oskulationsebenen ist aber bekanntlich ein Kegelschnitt.

Eine andere Konstruktion der Tangente t beruht auf folgender Überlegung. Die Tangente (t) der (R) in (p) steht senkrecht auf der Normalebene (N) der (R) in (p). Die (N) ist aber bestimmt durch zwei Kurvennormalen, als welche sich sofort die Normalen in (p) an (P) und an (Z) ergeben. Die Aufrißspur N^2 der (N) ist aber senkrecht auf der Tangente t, welche daher unmittelbar angebbar ist, sobald N^2 vorliegt.

Um N^2 zeichnen zu können, benötigen wir die Vertikalspurpunkte v, v_1 der Normalen in (p) an (P) und (Z). Der Aufriß der Normalen in (p) an (P) ist die Senkrechte auf T^2 aus p, und der Grundriß als Lot auf T^1 aus p' fällt mit $p'b_0$ zusammen, so daß $v' \equiv b_0$ und v als Schnitt des Lotes aus p auf T^2 mit $\mathfrak{b}$ resultiert. Der Aufrißspurpunkt v_1 der Zylindernormalen ist offenbar $\mathfrak{e} \times \mathfrak{z}$, wo $\mathfrak{z}$ die Achse des Zylinders (Z) bedeutet. Die Senkrechte aus p auf $v v_1 = N^2$ ergibt alsdann die t.

5. Konstruieren wir die Schmiegungsebene (Σ) der Raumkurve (R) im Punkte (p), so schneidet diese das hyperbolische Paraboloid (P) nach einer die (R) in (p) oskulierenden Hyperbel (H), deren Aufriß H eine die Versiera in p oskulierende gleichseitige Hyperbel mit zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}_0$ parallelen Asymptoten ist. Ermittelt man diese Asymptoten, so kann man in einfacher Weise den Krümmungskreis der Versiera im Punkte p auffinden. Nun hat die Schmiegungsebene (Σ) die Tangente in π' an die in Art. 3. erwähnte Kardioide zur Grundrißspur Σ^1. (In der Figur erscheint zunächst die Normale der Kardioide in π_1 konstruiert, welche bekanntlich durch den Fußpunkt des Lotes aus b_0 auf den Radius von $\mathfrak{K}'$ im Punkte p' geht.) Der Punkt $\sigma = \mathfrak{e}_0 \times \Sigma^1$ gehört dann der gleichseitigen Hyperbel H an, die demnach vollständig bestimmt ist. Von dem Diagonaldreiecke des vollständigen der H eingeschriebenen Viereckes, dessen Ecken p, σ und die unendlich fernen Punkte von $\mathfrak{e}_0$ und $\mathfrak{a}$ sind, stellt c_0 eine Ecke dar; eine zweite Ecke ist der unendlich ferne Punkt von $p\sigma$. Demzufolge liefert der Schnittpunkt der $\mathfrak{t}$ mit der Parallelen zu $p\sigma$ durch c_0 einen Punkt der zu $\mathfrak{e}_0$ parallelen Asymptote von H. Ein Punkt der nämlichen Asymptote ist auch der Schnittpunkt von b' mit der



Parallelen durch a_0 zur Σ^1. Denn diese Asymptote ist offenbar der Aufriß jener horizontalen Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloides (P), die zur Σ^1 parallel läuft, deren Grundriß die angegebene Gerade durch a_0 repräsentiert.

Wie man nunmehr die Ermittlung der zu $\mathfrak{a}$ parallelen Asymptote durchführt, braucht wohl kaum auseinandergesetzt zu werden. Hinsichtlich der Konstruktion des oskulierenden Kreises für die H in

p sei etwa auf die Ausführungen in dem Lehrbuche der darstellenden Geometrie von Rohn und Papperitz verwiesen (1. Bd. 1. Aufl. S. 283). Die angegebenen Konstruktionen konnten für den gewählten Punkt p in der Figur nicht ersichtlich gemacht werden.

6. Bezeichnen wir mit q' die Mitte von $p'b'$, so ist der Ort von q' die von Herrn Peano mit dem Namen Visiera der Agnesi belegte Kurve.[1]) Wir betrachten q' als Grundriß eines Punktes (q) auf dem hyperbolischen Paraboloide (P) und finden dann den Aufriß q als Mitte von pb. Der Ort von q ergibt sich dergestalt als eine orthogonal Affine der Versiera für b als Affinitätsachse. Die Visiera tritt also auch als Normalprojektion einer Raumkurve 3. Ordnung (R_1) auf, welche dem Paraboloide (P) aufgeschrieben ist.

Die Tangente in q an den Aufriß R_1 der (R_1) geht durch $v_0 = \mathfrak{t} \times \mathfrak{b}$, und mithin ergibt ein Punkt $\bar{v}'$ der Tangente in q' an R_1' — die Visiera — als Fußpunkt des Lotes auf $\mathfrak{e}_0$ aus $\bar{v} = ad_0 \times qv_0$. Denn $\bar{v}$ ist der Aufrißspurpunkt der Tangente in (q) an die (R^1), weil ad_0 die Vertikalspur der Tangentialebene in (q) an das hyperbolische Paraboloid (P) darstellt. Die Tangentenkonstruktion gestaltet sich wiederum einfacher, wenn der Schnittpunkt (π_1) der Tangente in (q) der (R^1) mit der rückwärtigen Halbierungsebene verwendet wird. Der Punkt π_1, mit welchem die beiden Projektionen von (π_1) zusammenfallen, liegt offenbar in $d_0 b$, dem Aufrisse und Grundrisse der Schnittlinie der rückwärtigen Halbierungsebene mit der Tangentialebene in (q) an (P), und zwar ist $\pi_0 \pi_1 \parallel \mathfrak{e}_0$, wo π_0 derselbe Punkt ist, der zum Schlusse des Art. 3 benützt wurde. Zum Beweise dessen bemerken wir vorerst, daß $\pi_1 = bd_0 \times v_0 q$ ist, und denken uns nun q und d_0 auf bezw. $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_0$ kongruente gleichstimmige Punktreihen beschrieben. Projizieren wir die Reihe $[q]$ aus v_0 und die Reihe $[d_0]$ aus b, so ergeben sich zwei perspektive Strahlenbüschel, deren Erzeugnis offenbar eine zu $\mathfrak{e}_0$ parallele Gerade ist, auf der π_0 und π_1 liegen müssen, denn gelangt q nach p, so fällt d_0 nach c_0, und $v_0 p \times b c_0$ ist ja π_0. Da die Örter von π_1 und π_0 othogonal affin sind (Affinitätsachse $\mathfrak{b}$), so wird auch der Ort von π_1 durch eine Ellipse dargestellt werden. Scheitel dieser Ellipse bilden die Punkte v_1' und b_0.

7. Die vorliegende Visiera können wir übrigens auch auffassen als Grundriß eines Horizontalschnittes der windschiefen Fläche 3. Grades (F), welche zu Leitlinien besitzt: den Kreis $(\mathfrak{K})$ in der Grundrißebene, die Gerade $\mathfrak{a}$ in der Aufrißebene und eine horizontale Gerade $(\mathfrak{b})$, deren Grundriß mit der $\mathfrak{b}'$ der Figur zusammenfällt. Die $\mathfrak{e}'$ stellt uns

1) Gino Loria, l. c.

dann auch den Grundriß einer Erzeugenden der (F) vor, und m
bemerkt, daß q' der Grundriß jenes Punktes q dieser Erzeugenden der in der horizontalen Ebene $(\mathfrak{Q})$ liegt, welche den Abstand Grundrißebene von der Horizontalebene $(\mathfrak{B})$ durch $(\mathfrak{b})$ hälftet. Tangenten an (F) in den Punkten jeder Erzeugenden bilden aber hyperbolisches Paraboloid, dessen scheinbarer Umriß für die Horizont projektion eine Parabel ist. Im vorliegenden Falle berührt diese Parab die $\mathfrak{e}'$ in a', sie hat ferner die $\mathfrak{T}^1$ und die $\mathfrak{b}'$ zu Tangenten. W können daher leicht in mannigfacher Weise ihre durch q' gehend Tangente, welche zugleich Tangente der Visiera in q' ist, konstruiere Betrachten wir die Parabel etwa als Erzeugnis der Punktreihe $(a'c'b'q'\cdots$ und der projektiven auf der unendlich fernen Geraden durch die Parabe tangenten ausgeschnittenen Reihe, so erhalten wir die Direktionsach beider Reihen als Verbindungslinie von a' mit dem Schnittpunkte d $\mathfrak{c}'$ und der Parallelen zu $\mathfrak{T}'$ durch b'. Der Schnittpunkt der Direktion achse mit der $\mathfrak{d}'$ gibt alsdann, mit b' verbunden, eine Parallele zu Tangente in q'.

Konstruieren wir mit a_0 als Spitze den Richtkegel der (F), ist dessen Schnitt mit der Ebene $(\mathfrak{B})$ eine gemeine Kissoide, der bestimmen wir r' auf $\mathfrak{e}'$ so, daß $\overline{a_0 r'} = \overline{c'b'}$ ist, so stellt uns r' d Grundriß eines Punktes der Spurkurve in der $(\mathfrak{B})$ des Richtkegels d (F) dar. Betrachten wir jetzt r' gleichzeitig als Grundriß eines Punkt auf dem hyperbolischen Paraboloide (P), so liegt der Aufriß r sy metrisch zu p in bezug auf $\mathfrak{z}$ als Symmetrieachse. Der Aufriß d Raumkurve, die (r) beschreibt, ist also eine Versiera, so daß jetzt d Möglichkeit besteht, vermittels der Tangentialebene in (r) an (P) u der Tangente an die Kissoide im Punkte r' die Tangente der Versie in r in analoger Weise zu finden, wie dies in Art. 6 für den Pun q' der Visiera geschehen.

8. Von Interesse ist noch der Kreuzriß der Raumkurve (R) (Art. Wir legen die Kreuzrißebene direkt durch $\mathfrak{a}$ und finden den Kreuz p'' des Punktes (p) der (R), welcher auf der Erzeugenden $(\mathfrak{e})$ von (liegt, als jenen Punkt von $\mathfrak{e}$, der von a einen Abstand gleich $\overline{c}$ besitzt. Bezeichnen wir p'' zugleich mit p_*, und nehmen wir an, sei Aufriß eines Punktes (p_*) der $(\mathfrak{e})$, so ist sofort zu ersehen, d der Grundriß p'_* auf einem Kreise $\mathfrak{K}'_*$ liegt, der kongruent mit $\mathfrak{K}'$ und in a_0 die $\mathfrak{e}_0$ berührt, denn das rechtwinkelige Dreieck, von d $\overline{a_0 p'_*}$ eine Kathete ist und dessen Hypotenuse in die $\mathfrak{a}$ fällt, ist k gruent mit dem Dreiecke $a_0 p' b_0$. Der Kreuzriß der (R) ist mit identisch mit dem Aufrisse einer Raumkurve 3. Ordnung (R_*) = (P), welche durch den mit dem Rotationszylinder (Z) kongruen

Zylinder (Z_*) ausgeschnitten wird. Nach einem bekannten Satze des Herrn Mannheim über gerade Konoide sind die beiden Kurven (R) und (R_*) selbst kongruent. Die vorliegende Projektionskurve ist aber nichts anderes als eine Newtonsche *Serpentine*.[1]) Ihre Wendetangente in a_0 als Kreuzriß der (b) ist unter 45° gegen die Asymptote $\mathfrak{a}$ geneigt.

Die Erörterungen in den Art. 3—5, welche zu Tangenten- bezw. Krümmungsmittelpunktskonstruktionen für die Versiera geführt haben, können wörtlich gleichlautend für die Serpentine angestellt werden. In der Figur sind die betreffenden Punkte und Linien, die denen für die Versiera entsprechen, durchwegs mit denselben Buchstaben bezeichnet, denen rechts unten ein * beigesetzt wurde. Es ist ferner ohne weiteres klar, daß auch die Art. 6 und 7, welche sich mit der Versiera beschäftigen, analoge Auseinandersetzungen gestatten für den Ort der Mitten q'_* der Strecken $b'p'_*$. Der Ort der Punkte r'_* ist natürlich nicht mehr eine gemeine Kissoide, sondern eine solche allgemeinerer Art, für welche übrigens auch recht einfache Tangentenkonstruktionen bekannt sind.[2])

9. Mit geringfügigen Modifikationen können die oben durchgeführten Schlußfolgerungen auch dann noch Verwendung finden, wenn an Stelle des Kreises $\mathfrak{K}'$ irgend ein durch a_0 gehender Kreis der Grundrißebene als Basis eines Rotationszylinders tritt, der mit dem Paraboloide (P) zum Durchschnitte gebracht wird. Es ergeben sich untereinander orthogonal affine Kurven 3. Ordnung für die Aufrisse einerseits und für die Kreuzrisse andererseits für alle Durchdringungskurven von (P) mit Rotationszylindern, welche längs $\mathfrak{a}$ von derselben Ebene berührt werden.

Fassen wir speziell jenen Rotationszylinder ins Auge, dessen Basis der um b_0 mit dem Radius b_0a_0 beschriebene Kreis ist, so ist der Aufriß der Durchdringungskurve mit (P) die von Herrn Loria *Pseudoversiera* genannte Kurve, die oft mit der Versiera verwechselt wurde.[3])

Prag, 25. Juli 1904.

---

1) Gino Loria, l. c.

2) Vergl. G. Stiner, Metrische Eigenschaften der Kurve 3. Ordnung mit einem Doppelpunkte, Mathem. Monatshefte 4, Jahrgang 1893, S. 99—114.

3) So noch in Herrn E. Pascals Repertorium der höheren Mathematik II (S. 527 ff.) trotz der Bezugnahme auf Loria. Die daselbst angegebene Tangentenkonstruktion ist wesentlich umständlicher als irgend eine der nach den obigen Prinzipien zu gewinnende.

Über eine Klasse unendlicher Reihen.[1]

Von O. Spiess in Basel.

Jede reelle Zahl kann auf unendlich viele Arten als Summe von Stammbrüchen dargestellt werden. Dies folgt direkt aus der Divergenz der Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ Unter allen Reihen von Stammbrüchen, die eine gegebene Zahl z darstellen, muß es eine geben, die dadurch ausgezeichnet ist, daß sie stärker konvergiert als jede andere, die sich daher zur Auswertung am besten eignet. Um diesen Begriff der stärksten Konvergenz scharf zu formulieren, denken wir uns alle möglichen Darstellungen von z als Summe (positiver oder negativer) Stammbrüche aufgestellt

$$z=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots \quad \text{usw.}$$

und bilden zu jeder solchen Reihe die sukzessiven Restglieder

$$A_n=\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}}+\cdots,\quad B_n=\frac{1}{b_{n+1}}+\frac{1}{b_{n+2}}+\cdots \quad (n=1,2,3\ldots).$$

1) Die Aufgabe, eine Zahl durch eine Summe von Stammbrüchen darzustellen, hat bekanntlich schon im alten Ägypten ihre Behandlung gefunden. Die ziemlich regellosen Entwicklungen sind indes durch keine Rücksicht auf möglichst rasche Konvergenz geleitet. Vgl. hierüber: Cantor, Geschichte der Math. Bd. I, und speziell Loria, Giornale di Matematiche T. XXXII. In der Neuzeit haben besonders die Dezimalbrüche die Aufmerksamkeit der Mathematiker gefesselt: es sind dies Maximalreihen bei vorgeschriebenen Nennern. Lambert (Acta helvetica, T. III 1758, Acta eruditorum 1769) betrachtet Reihen vom Typus der hypergeometrischen und sucht durch Umformungen ihre Konvergenz zu vergrößern. Lagrange (Journal de l'École Polyt. T. II) entwickelt allgemein rationale Brüche in Reihen vom Typus

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{xx_1}+\frac{1}{xx_1x_2}+\cdots$$

und macht auf die starke Konvergenz dieser Entwicklungen aufmerksam. Eine solche Reihe ist aber für rationale Werte der dargestellten Größe niemals Maximalreihe in unserem Sinn, nur im Fall einer quadratischen Irrationalität von der Form $a-\sqrt{a^2-1}$ tritt, wie wir sahen, dieser besondere Fall ein. Da meines Wissens unsere Stammbruchreihen maximaler Konvergenz noch keine systematische, tiefer eindringende Behandlung erfahren haben, wie dies doch für die nahe verwandten Kettenbrüche geschehen ist, so schien es mir nicht überflüssig, die Aufmerksamkeit auf einige Punkte dieser Theorie zu lenken.

Es gibt dann (von einem unwichtigen Spezialfall abgesehen) *eine* bestimmte Reihe

$$z = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots, \quad R_n = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}} + \cdots,$$

für welche der absolute Betrag von jedem der Reste $R_1, R_2, R_3, \ldots$ *kleiner oder wenigstens nicht größer* ist als der mit gleichem Index versehene (absolut genommene) Rest jeder andern der obigen Reihen. Von dieser so definierten Reihe sagen wir, sie habe unter allen Reihen der betrachteten Art die *stärkste Konvergenz* und nennen sie kurz die *Maximalreihe* von z.

Es ist offenbar, daß der Begriff der stärksten Konvergenz, der sich auch auf Reihen anderer Art erweitern läßt, ein relativer ist und sich nach den Verfügungen richtet, die über die Form der Reihenglieder getroffen worden sind. Wenn wir z. B. bei den obigen Reihen noch verlangen, daß die Glieder alle positiv, oder abwechselnd positiv und negativ sind, oder daß die Nenner bestimmte Primzahlen enthalten, so erhalten wir jedesmal eine wesentlich andere Maximalreihe als wenn wir von solchen Einschränkungen absehen.

Wir begnügen uns hier auf den Fall näher einzugehen, wo die Glieder der Reihe alle positiv sind. Wir verstehen demnach, wo nichts anderes bemerkt wird, unter x_k, y_k, ε_k lauter reelle positive Zahlen. Ist eine Zahl z zur Entwicklung vorgelegt, so trennen wir die größte in z enthaltene ganze Zahl davon ab und bezeichnen den Rest mit $\frac{1}{y}$, wo also $y > 1$ ist.

Setzen wir dann sukzessive

$$(1) \qquad \frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y_1}, \quad \frac{1}{y_1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{y_n} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_{n+1}},$$

so erhalten wir

$$(2) \qquad \frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x_1} + \cdots \frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_{n+1}}.$$

$x, x_1, x_2, \ldots$ sollen ganze Zahlen bedeuten. Um unsere Reihe größter Konvergenz zu erhalten, haben wir $x, x_1, x_2, \ldots$ so zu wählen, daß die einzelnen Reste $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \ldots$ möglichst klein ausfallen. Dies tritt offenbar ein, wenn wir allgemein für x_k die nächste auf y_k folgende ganze Zahl nehmen. Nur wenn zufällig y_k selbst ganz ist, müssen wir $x_k = y_k$ setzen. In allen Fällen haben wir also zu setzen

$$y_k = x_k - \varepsilon_k \quad \text{wo} \quad 0 \leqq \varepsilon_k < 1\,.$$

Durch Einführung der Größen ε gewinnen wir aus (1) das folgend gleichbedeutende Gleichungssystem

$$(3)\quad \begin{cases} y = x - \varepsilon, \\ y_1 = \frac{x\,y}{\varepsilon} = x_1 - \varepsilon_1, \\ y_2 = \frac{x_1\,x}{\varepsilon_1\,\varepsilon}\,y = x_2 - \varepsilon_2, \\ \vdots \\ y_n = \frac{x_{n-1}\cdots x}{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon}\,y = x_n - \varepsilon_n, \\ y_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1}\cdots x}{\varepsilon_n \varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon}\,y = x_{n+1} - \varepsilon_{n+1}. \end{cases}$$

Eliminieren wir y aus den beiden zuletzt angeschriebenen Gleichungen, so erhalten wir

$$(4)\quad x_{n+1} + x_n = \frac{x_n^2}{\varepsilon_n} + \varepsilon_{n+1}.$$

Bezeichnen wir allgemein mit $\overset{+}{[z]}$ die nächste auf z folgende ganze Zahl, und beachten, daß ε_{n+1} ein echter Bruch ist, so können wir aus (4) schließen, daß

$$(5)\quad x_{n+1} = \overset{+}{\left[\frac{x_n^2}{\varepsilon_n}\right]} - x_n, \quad \varepsilon_{n+1} = \overset{+}{\left[\frac{x_n^2}{\varepsilon_n}\right]} - \frac{x_n^2}{\varepsilon_n}$$

mit Ausnahme nur wieder des Falles, daß zufällig $\varepsilon_{n+1} = 0$ und $\frac{x_n^2}{\varepsilon_n}$ ganze Zahl ist. Die Rekursionsformeln (5) dienen zur sukzessiven Berechnung der Teilnenner x_n.

Da ε_n die Eins zur oberen Grenze hat, so ergibt sich aus den ersten Formeln (5)

$$(6)\quad x_{n+1} \geqq x_n^2 - x_n + 1.$$

Die Nenner der Stammbrüche wachsen also etwa wie x_n^2. Brechen wir die Reihe nach dem Glied $\frac{1}{x_n}$ ab, so ist der Rest

$$\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{1}{x_{n+1} - \varepsilon_{n+1}} < \frac{1}{x_n^2 - x_n} = \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{x_n^2(x_n - 1)}$$

also kleiner oder nur wenig größer als das Quadrat des letzten Gliedes. Um eine Zahl $z = \frac{1}{y}$ etwa bis auf die 1000. Dezimalstelle genau zu kennen, braucht man nur wenige Glieder unserer Entwicklung zu besitzen, nämlich für den kleinsten Wert $x = 2$ höchstens 13, sonst sicher weniger.

Die Formeln (5) bedurften einer Modifikation in dem Fall, daß eine der Größen $\varepsilon_n = 0$ wird. Ein Blick auf das System (3) lehrt, daß dann die Reihe der Stammbrüche mit $\frac{1}{x_n}$ abbricht und y eine *rationale* Zahl ist. Umgekehrt, wenn y rational ist, so ist die Minimalreihe endlich, also wird ein gewisses $\varepsilon_n = 0$. In der Tat, falls etwa $y = \frac{b}{a}$ gesetzt wird, ist das System (3) dem Wesen nach identisch mit dem folgenden

$$
(7) \qquad \left\{
\begin{array}{ll}
b = xa - a_1, & a_1 < a, \\
xb = x_1 a_1 - a_2, & a_2 < a_1, \\
x_1 xb = x_2 a_2 - a_3, & a_3 < a_2, \\
\vdots & \\
x_{n-2} xb = x_{n-1} a_{n-1} - a_n, & a_n < a_{n-1}.
\end{array}
\right.
$$

Da hierin $a, a_1, a_2, \ldots$ eine Reihe monoton abnehmender ganzer Zahlen sind, muß $a_n = 0$ werden für einen Index $n \leqq a$.

Beispielsweise ist

$$\frac{19}{61} = \frac{1}{4} + \frac{1}{17} + \frac{1}{378} + \frac{1}{156795} + \frac{1}{40974296580}.$$

Ist also z irrational, so kann die Reihe der x nicht abbrechen. Aber auch jedes rationale $z = \frac{1}{y}$ kann natürlich durch unendliche Reihen von Stammbrüchen dargestellt werden, und man darf nach derjenigen unter ihnen fragen, welche stärker konvergiert als alle übrigen. Es ist klar, daß diese *unendliche* Maximalreihe für $\frac{1}{y}$ mit der oben definierten *endlichen* Maximalreihe von (n) Gliedern in den ($n - 1$) ersten Gliedern übereinstimmen muß, da sich sonst eine andere Reihe angeben ließe, die stärker konvergiert. Man erhält also die unendliche Maximalreihe einer rationalen Zahl, indem man das letzte Glied der endlichen Maximalreihe $\frac{1}{x_{n-1}}$ ersetzt durch die entsprechende unendliche Entwicklung stärkster Konvergenz. Die Aufgabe ist also zurückgeführt auf die Frage nach der Maximalreihe eines Stammbruches.

Nehmen wir aber in den Gleichungen (3) y als ganze Zahl an, so erkennt man, daß ε und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, usw. alle gleich Eins sein müssen, da $\varepsilon_n = 0$ ausgeschlossen wurde. Tragen wir diese Werte in die Rekursionsformel (5) ein, die auch für diesen Fall gilt, so finden wir für jeden Index n

$$(8) \qquad x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1.$$

Die Teilnenner der Maximalreihe eines Stammbruchs entstehen also durch sukzessive Iteration einer quadratischen Funktion, d. h. es gilt die Entwicklung

$$(9)\qquad \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}-1}$$
$$(x_{k+1} = x_k^2 - x_k + 1).$$

Diese Gleichung gilt natürlich für beliebige Werte von x, nur verliert die rechte Seite für nicht ganzzahliges x den Charakter der Maximalreihe. Man beweist sie am einfachsten, indem man der Rekursionsformel für x_k die Form gibt

$$\frac{1}{x_k-1} - \frac{1}{x_{k+1}-1} = \frac{1}{x_k},$$

woraus das Bestehen der Gleichung (9) in die Augen springt.

Die Frage, wann die Reihenentwicklung (9) ins Unendliche fortgesetzt werden darf, ist offenbar identisch mit der, alle Punkte x der komplexen Ebene zu bestimmen, für welche x_n und n über alle Grenzen wächst. Es würde indes hier zu weit führen, auf die interessanten Verhältnisse (wie sie in ähnlicher Weise bei allen Reihen auftreten, deren Glieder durch Iteration einer Funktion entstehen) näher einzugehen. Ich begnüge mich daher folgenden Satz zu beweisen:

*Zieht man mit dem Punkt $x = \frac{1}{2}$ als Zentrum zwei Kreise bez. mit den Radien $\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{2}$, so ist für alle Punkte die **außerhalb** des größeren Kreises liegen,*

$$\lim_{n=\infty} x_n = \infty \quad \textit{und} \quad \sum_0^\infty \frac{1}{x_k} \textit{ konvergiert,}$$

für alle Punkte im Inneren des kleineren Kreises aber ist

$$\lim_{n=\infty} x_n = 1 \quad \textit{und} \quad \sum_0^\infty \frac{1}{x_k} \textit{ divergiert.}$$

Beweis: Die Funktion $x_1 = x^2 - x + 1$ bildet jeden Kreis mit dem Mittelpunkt $z = \frac{1}{2}$ auf einen Kreis mit dem Zentrum $x = \frac{3}{4}$ ab. In der Tat setzt man $x = \xi + i\eta$, $x_1 = \xi_1 + i\eta_1$, so gilt

$$(10)\qquad \left(\xi_1 - \frac{1}{2}\right) = \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 - \eta^2 + \frac{1}{4}, \quad \eta_1 = 2\left(\xi - \frac{1}{2}\right)\cdot\eta,$$

woraus

$$\left(\xi_1 - \frac{3}{4}\right)^2 + \eta_1^2 = \left\{\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2\right\}^2 = r^4.$$

Insbesondere wird das Innere des Kreises $\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2 = \frac{1}{4}$ auf das Innere des Kreises $\left(\xi_1 - \frac{3}{4}\right)^2 + \eta_1^2 = \frac{1}{16}$ abgebildet, der im Inneren des ersteren liegt und ihn im Punkt $\xi = 1$ berührt. Zieht man durch $\xi - \frac{1}{2}$ einen Durchmesser des größeren Kreises, so entsprechen seine beiden Endpunkte seinem zweiten Schnittpunkt mit dem kleineren Kreis. Man schließt dann leicht, daß die Bilder des kleineren Kreises wiederum auf einer Kurve liegen, die von ihm eingeschlossen ist und nur den Punkt $\xi = 1$ mit ihm gemein hat. Und da dieser Schluß fortgesetzt gilt, so ergibt sich, daß $\lim_{n=\infty} x_n = 1$ für alle Punkte x des Kreises vom Radius $\frac{1}{2}$ wird. W. z. b. w.

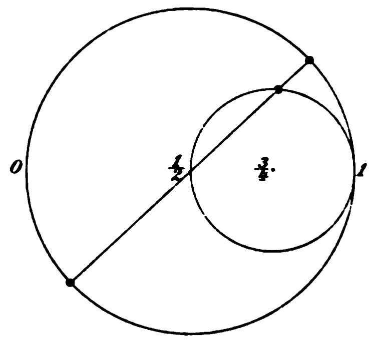


Fig. 1.

Aus (10) zieht man ferner die Formel

$$\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta_1^2 - \frac{1}{4} = \left\{\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2 - \frac{1}{4}\right\}^2 + \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Bestimmen wir einen Radius r, so daß

$$\left(r^2 - \frac{1}{4}\right) = \left(r^2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

so erkennt man leicht, daß die Bilder aller Punkte auf einem Kreise vom Radius $R > r$, für die also

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2 = R^2 > \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{1}{2}} = (1{,}2071)^2,$$

auf das Äußere eines konzentrischen Kreises von größerem Radius fallen, daß also für alle Punkte außerhalb des Kreises vom Radius $1{,}2071\ldots$ $\lim_{n=\infty} x_n = \infty$ sein muß.

Für reelle Werte von x leuchtet übrigens ein, daß die betrachtete Reihe *konvergiert* für alle Punkte *außerhalb* des Intervalles von 0 bis 1, *divergiert* für alle Punkte *innerhalb und auf der Grenze* desselben Intervalles.

Aus der einen Darstellung von $\frac{1}{x-1}$ als Summe rationaler Funktionen kann durch folgenden Prozeß eine Menge anderer gefunden werden. Schreiben wir nämlich in

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1}$$
$$+ \frac{1}{x^8 - 4x^7 + 8x^6 - 10x^5 + 9x^4 - 6x^3 + 3x^2 - x + 1} + \cdots$$

$-x$ für x, und addieren die neue Gleichung zur alten, so hängt das Resultat nach Vereinigung der entsprechenden Glieder nur noch von x^2 ab. Schreiben wir dafür wieder x, so kommt

$$\frac{1}{x-1}=\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{(x+1)^2}{x^4+2x^2+3x+1}$$
$$+\frac{(x+1)(x^3+7x^2+2x+1)}{x^8+2x^6+2x^5+3x^4+14x^3+15x^2+5x+1}+\cdots$$

Diesen Prozeß können wir beliebig oft wiederholen, wobei der Nenner des ersten Gliedes sich stets reproduziert, während die übrigen Nenner ihre Gestalt wechseln.

Nachdem wir die Maximalreihen der rationalen Brüche besprochen haben, wäre die nächste Frage die nach der entsprechenden Entwicklung einer quadratischen Irrationalität $y=a+b\sqrt{D}$. Hier treten aber bereits beträchtliche Schwierigkeiten auf, die noch zu überwinden sind. Nur in einem bemerkenswerten Fall können die Glieder der gesuchten Reihe angegeben werden, nämlich dann, wenn der zu entwickelnde echte Bruch die Form hat $\frac{1}{y}=a-b\sqrt{D}$, wo a, b ganze Zahlen sind, die der Gleichung $a^2-b^2\cdot D=1$ genügen.

Wenden wir nämlich die Rekursionsformeln (5) an, so haben wir zu setzen

$$x=\overset{+}{[}a+b\sqrt{D}]=\overset{+}{[}a+\sqrt{a^2-1}]=2a,\quad \varepsilon=a-\sqrt{a^2-1}$$
$$x_1=\overset{+}{\left[\frac{x^2}{\varepsilon}\right]}-x=\overset{+}{[}4a^3+4a^2\sqrt{a^2-1}]-2a$$
$$=\overset{+}{[}4a^3+\sqrt{(4a^3-2a)^2-4a^2}]-2a.$$

Da $4a^2<2(4a^3-2a)-1$, so muß $\overset{+}{[}\sqrt{(4a^3-2a)^2-4a^2}]=4a^3-2a$ sein, und wir haben

$$x_1=2a\cdot 2a_1,\quad \varepsilon_1=2a\left(a_1-\sqrt{a_1^2-1}\right),$$

wo wir $a_1=2a^2-1$ gesetzt haben. Fährt man so fort, und bestimmt die Größen $a_2, a_3, \ldots a_k$ nach der Rekursionsformel $a_{k+1}=2a_k^2-1$, so findet man

$$x_n=2a\cdot 2a_1\ldots 2a_n=2a_n\cdot x_{n-1},\quad \varepsilon_n=x_{n-1}\left(a_n-\sqrt{a_n^2-1}\right).$$

Wir nehmen dies für den Index n als bewiesen an und folgern

$$x_{n+1}=\overset{+}{\left[\frac{x_n^2}{\varepsilon_n}-x_n\right]}=\overset{+}{[}x_n(2a_n^2-1)+(2a_n\sqrt{a_n^2-1})]$$
$$=\overset{+}{[}x_n(a_{n+1}+\sqrt{a_{n+1}^2-1})].$$

Nun folgt aus $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$ leicht $(a_{n+1}^2 - 1) = (2a_n)^2(a_n^2 - 1)$ und somit

$$(a_{n+1}^2 - 1) = (2a_n \cdot 2a_{n+1} \ldots 2a)^2 (a^2 - 1) = x_n^2 (a^2 - 1).$$

Da $a \geqq 2$ sein muß, so ist also immer

$$a_{n+1} > x_n^2 \quad \text{und} \quad x_n \sqrt{a_{n+1}^2 - 1} > (x_n a_{n+1} - 1),$$

d. h. es wird

$$x_{n+1} = x_n \cdot 2a_{n+1}, \quad \varepsilon_{n+1} = x_n (a_{n+1} - \sqrt{a_{n+1}^2 - 1}), \qquad \text{q. e. d.}$$

Wir haben so den Satz erhalten:

Sind a, b positive ganze Zahlen, welche der Pellschen Gleichung $a^2 - b^2 D = 1$ genügen, so gilt für die Irrationalzahl $a - b\sqrt{D}$ die Reihenentwicklung

$$a - b\sqrt{D} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a \cdot 2a_1} + \frac{2}{2a \cdot 2a_1 \cdot 2a_2} + \cdots \qquad \text{ad. inf.}$$

$$(2a_{k+1}) = (2a_k)^2 - 2,$$

und zwar konvergiert die Reihe rascher als jede andere Darstellung derselben Zahl als Summe positiver Stammbrüche.

Die Reihe (10) hat zur numerischen Auswertung die denkbar günstigste Form und kann gelegentlich zur Berechnung einer Quadratwurzel dienen, falls zufällig eine Lösung der zugehörigen Pellschen Gleichung bekannt ist, indem meist schon die beiden ersten Glieder eine größere Genauigkeit geben, als mit den gewöhnlichen Logarithmentafeln zu erreichen ist. So ist z. B.

$$\sqrt{63} = 8 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16 \cdot 254} + \cdots\right) = 7{,}93725393 \ldots$$

Die Gültigkeit der Gleichung (10) hört im allgemeinen nicht auf, wenn wir dem a irgend welchen komplexen Wert geben, nur ist dann der Wert der Quadratwurzel jedesmal zu bestimmen. Die Reihe ist auch noch dadurch interessant, daß die sämtlichen Punkte, für welche sie nicht mehr konvergiert, ein endliches, nicht geschlossenes Linienstück stetig erfüllen. Es gilt nämlich der Satz:

Die Reihe

(10a) $$\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \cdots, \qquad \text{ad. inf.}$$

wo $x_{k+1} = 2x_k^2 - 1$ ist, konvergiert in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Punkte der reellen Achse zwischen -1 und $+1$ und stellt denjenigen Wert des zweideutigen Ausdrucks $x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ dar, dessen absoluter Betrag kleiner als Eins ist.

Beweis.

Betrachten wir die ganze algebraische Funktion z von x, die durch die Gleichung gegeben ist

$$z^2 - 2xz + 1 = 0. \tag{11}$$

Es leuchtet ein, daß die Potenzen von z wieder Gleichungen derselben Form genügen müssen. Setzt man insbesondere

$$z^2 = z_1, \quad z^4 = z_2, \quad \ldots, \quad z^{2^k} = z_k, \ldots,$$
$$2x^2 - 1 = x_1, \quad \ldots, \quad 2x_k^2 - 1 = x_{k+1}, \ldots,$$

so gilt

$$z_1^2 - 2x_1z_1 + 1 = 0, \quad \ldots, \quad z_k^2 - 2x_kz_k + 1 = 0, \tag{12}$$

welche Relationen wir auch in der Form schreiben können

$$2x = z + \frac{1}{z}, \quad \ldots, \quad 2x_k = z^{2^k} + z^{-2^k}. \tag{13}$$

Nun folgt aus den Gleichungen (11), (12) die Formel

$$z = \frac{1}{2x} + \frac{z^2}{2x} = \frac{1}{2x} + \frac{z_1}{2x} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x \cdot 2x_1} + \frac{z_2}{2x \cdot 2x_1},$$

also

$$z = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x \cdot 2x_1} + \frac{1}{2x \cdot 2x_1 \cdot 2x_2} + \cdots + \frac{1}{2x \cdot 2x_1 \ldots 2x_n} + \frac{z^{2^n}}{2x \cdot 2x_1 \ldots 2x_n}. \tag{14}$$

Es bleibt noch übrig, das Restglied der Reihe rechts zu untersuchen. Ziehen wir in der Ebene den Einheitskreis um den Nullpunkt und betrachten die Punktzuordnung, die durch die Gleichung (11) vermittelt wird.

Zu jedem x gehören zwei verschiedene Wurzeln dieser Gleichung (ausgenommen für $x = \pm 1$, wo $z = x$ wird). Da ihr Produkt $= 1$ ist, so liegt die eine im allgemeinen innerhalb des Einheitskreises, die andere außerhalb. Wir bezeichnen die erstere mit z, die andere mit $z' = \frac{1}{z}$, so daß also immer $|z| \leqq 1$ ist. Eine Unbestimmtheit tritt nur ein, wenn der absolute Betrag beider Wurzeln gleich Eins ist. Suchen wir die Werte von x, für welche dies eintritt, und setzen dazu $z = e^{i\varphi}$. Nach (13) wird dann

$$x = \cos\varphi, \quad \ldots, \quad x_n = \cos(2^n\varphi).$$

Also: *Für alle reellen Werte von x zwischen -1 und $+1$ und nur für diese wird $|z| = 1$. Zugleich bleibt $|x_n|$ bei wachsendem n endlich und < 1, und die Reihe* (10a) *divergiert.*

Umgibt man also die gerade Strecke von -1 bis $+1$ durch ein beliebig schmales Rechteck, so bleibt für das ganze äußere Gebiet

$z < 1$ und $|z'| > 1$. Für alle diese Werte wächst aber nach (13) x_n mit n über alle Grenzen, so daß also die Reihe (10a) gleichmäßig konvergiert und diejenige eindeutige Funktion von x, die wir mit z bezeichnet haben, vollständig darstellt.

Um den Zusammenhang zwischen z und x noch etwas zu verdeutlichen, denken wir uns irgend einen Punkt z im Einheitskreis. Indem wir ihn erst an der reellen Achse und dann am Einheitskreis spiegeln, gelangen wir zum Punkt $z' = \frac{1}{\bar{z}}$. Der Mittelpunkt auf der Geraden (z, z') ist dann das zugehörige x. Man sieht hieraus, daß zusammengehörige Werte von x und z stets auf der gleichen Seite der Ordinatenachse, aber auf entgegengesetzten Seiten der Abszissenachse liegen.

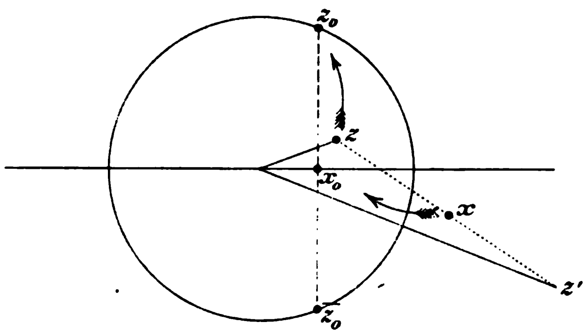


Fig. 2.

Reellen Werten von x *außerhalb* des Intervalles $(-1, +1)$ entsprechen reelle z, z'. Einem reellen Wert x_0 zwischen -1 und $+1$ entsprechen zwei Punkte z_0, $\bar{z}_0$ des Einheitskreises, die man erhält, wenn man in x_0 die Ordinaten bis zum Kreis zieht. Läßt man x sich von der negativen Seite her diesem Punkte nähern, so wandert das positive z zum Punkt z_0 hinauf. Kommt aber x von der positiven Seite an x_0 heran, so nähert sich z dem Punkte $\bar{z}_0$. Also hat z an beiden Rändern des Verzweigungsschnittes $(-1, +1)$ konjugiert komplexe Werte.

Wir haben im Vorhergehenden nur die Stammbruchreihen mit lauter positiven Gliedern behandelt. Das Verfahren bleibt aber im wesentlichen dasselbe, wenn über das Vorzeichen der Glieder andere Bestimmungen getroffen werden. Um z. B. die Reihen mit alternierend positiven und negativen Gliedern zu erhalten, haben wir in den Gleichungen (3) rechts den Größen ε das positive Vorzeichen zu geben. Die Rekursionsformel der Teilnenner wird jetzt

$$x_{k+1} = \left[\frac{x_k^2}{\varepsilon_k}\right] + x_k, \quad \varepsilon_{k+1} = \frac{x_k^2}{\varepsilon_k} - \left[\frac{x_k^2}{\varepsilon_k}\right],$$

und als unendliche Maximalreihe eines Stammbruchs finden wir

(15) $$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} + \cdots,$$

worin

$$x_{k+1} = x_k^2 + x_k - 1$$

ist.

Indessen gibt es für quadratische Irrationalitäten keine Maximalreihe von so einfachem Gesetz wie Reihe (10). Man kann zwar für die Zahl $\sqrt{a^2+1} - a$ in analoger Weise wie S. 132 aus der Gleichung $z^2 + 2az - 1 = 0$ eine alternierende Stammbruchreihe herleiten, dieselbe besitzt aber nicht den Charakter der Maximalreihe.

Basel, 20. Sept. 1903.

Theorie der Potenzreste für zusammengesetzte Moduln.

Von PAUL EPSTEIN in Straßburg i. E.

Die elementare Theorie der Potenzreste für zusammengesetzte Moduln ist — wenn man von Dirichlets Verallgemeinerung der Indizesdarstellung absieht — nicht wesentlich über den Stand in Gauß' Disquisitiones hinausgekommen. Sie findet eine natürliche Schranke in dem Satze, daß für zusammengesetzte Moduln im allgemeinen keine primitiven Wurzeln existieren. In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch gemacht, diese Schranke zu beseitigen, indem für jeden Modul primitive Wurzeln definiert werden, die natürlich für die Moduln, für welche bisher primitive Wurzeln existierten, mit diesen zusammenfallen müssen. Die Bestimmung der Anzahl dieser primitiven Wurzeln und ihre Einteilung bildet den Hauptgegenstand der Untersuchung. Dabei werden, um die Arbeit in methodischer Beziehung möglichst einheitlich zu gestalten, als wichtigstes Hilfsmittel geeignet gewählte *zahlentheoretische Funktionen* benutzt. Unter diesem Gesichtspunkt ist in den folgenden Entwicklungen auch eine neue Darstellung der bisherigen Theorie der Potenzreste enthalten.

1. Bedeutet m irgend eine ganze Zahl, so wird nach dem verallgemeinerten Fermatschen Lehrsatze die Kongruenz

$$x^{\varphi(m)} \equiv 1 \bmod m$$

durch *jede zu m relativ prime* Zahl erfüllt. Im allgemeinen ist dies aber nicht die Kongruenz *niedrigsten* Grades von der angegebenen Eigenschaft, sondern nur dann, wenn m *Potenz einer ungeraden Prim-*

zahl oder das *Doppelte* einer solchen Potenz ist. Sei in Primfaktoren zerlegt

$$(1)\qquad m = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n},$$

a irgend eine zu m relativ prime Zahl, so bestehen die Kongruenzen

$$a^{\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right)} \equiv 1 \bmod p_1^{\alpha_1},\quad a^{\varphi\left(p_2^{\alpha_2}\right)} \equiv 1 \bmod p_2^{\alpha_2},\ \dots,\ a^{\varphi\left(p_n^{\alpha_n}\right)} \equiv 1 \bmod p_n^{\alpha_n},$$

und dazu kommen

$$\begin{aligned} &\text{für } \alpha_0 = 0, 1 && a \equiv 1 \bmod 2^{\alpha_0}, \\ &\alpha_0 = 2, 3 && a^2 \equiv 1 \bmod 2^{\alpha_0}, \\ &\alpha_0 > 3 && a^{2^{\alpha_0 - 2}} \equiv 1 \bmod 2^{\alpha_0}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen das *kleinste gemeinsame Vielfache* mehrerer Zahlen a, b, c, ... mit

$$[a, b, c, \dots]$$

und bilden[1])

$$(2)\qquad \begin{cases} \text{für } \alpha_0 = 0, 1, 2, 3 & \psi(m) = \left[\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right), \varphi\left(p_2^{\alpha_2}\right), \dots, \varphi\left(p_n^{\alpha_n}\right)\right], \\ \text{für } \alpha_0 > 3 & \psi(m) = \left[2^{\alpha_0 - 2}, \varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right), \varphi\left(p_2^{\alpha_2}\right), \dots, \varphi\left(p_n^{\alpha_n}\right)\right]. \end{cases}$$

Dann ist nicht nur für jede zu m relativ prime Zahl a:

$$a^{\psi(m)} \equiv 1 \bmod m,$$

sondern

$$x^{\psi(m)} \equiv 1 \bmod m$$

ist die Kongruenz *niedrigsten* Grades, die alle Zahlen eines reduzierten Restesystems mod m zu Wurzeln hat.

Die so definierte zahlentheoretische Funktion $\psi(m)$ möge „*Hauptexponent* zum Modul m" heißen.[2]) Sie ist immer ein Teiler von $\varphi(m)$ und nur für $m = p^\alpha$ und $m = 2p^\alpha$ ist sie mit $\varphi(m)$ identisch. Für jede zu m relativ prime Zahl a gibt es einen *kleinsten* Exponenten e, so daß

$$a^e \equiv 1 \bmod m$$

ist; diese Zahl e ist immer ein Teiler von $\psi(m)$ und soll „*Minimalexponent von a* für den Modul m" heißen. Der Hauptexponent $\psi(m)$ ist der *größte* für den Modul m mögliche Minimalexponent.

Eine Zahl, die den Hauptexponenten zum Minimalexponenten besitzt, heißt primitive Wurzel von m.

---

1) Vgl. Lucas, Théorie des nombres, S. 429.

2) Merkwürdigerweise wird dieselbe deutsche Bezeichnung „Hauptexponent", — aber in anderer Bedeutung —, in einer Arbeit von Cunningham, Mess. of Math. Bd. 33, S. 145 gebraucht.

Wir stellen uns die Aufgabe, für einen Modul m die Anzahl der Zahlen mit gegebenem Minimalexponenten und insbesondere die *Anzahl der primitiven Wurzeln* von m zu bestimmen.

2. Es bedeute

$\chi(m, \mu)$ die *Anzahl der inkongruenten Lösungen der Kongruenz*

$$x^{\mu} \equiv 1 \bmod m, \tag{1}$$

$\theta(m, \mu)$ die *Anzahl der Zahlen mit dem Minimalexponenten* μ.

In diesen Funktionen kann μ beliebige ganzzahlige Werte annehmen; ist μ relativ prim zu $\psi(m)$, so ist $\chi(m, \mu) = 1$, und wenn μ nicht Teiler von $\psi(m)$ ist, so ist jedenfalls $\theta(m, \mu) = 0$.

Wo kein Mißverständnis bezüglich des Moduls möglich ist, kann man das Argument m weglassen.

Ist $\mu = \psi(m)$, so ist $\theta(m, \mu)$ die *Anzahl der primitiven Wurzeln* von m, und wir schreiben dann

$$\text{für } \mu = \psi(m): \qquad \theta(m, \mu) = \omega(m). \tag{2}$$

Jede Lösung der Kongruenz (1) hat entweder μ oder einen Teiler von μ zum Minimalexponenten, und umgekehrt ist jede Zahl mit einem solchen Minimalexponenten eine Lösung der Kongruenz. Also besteht zwischen den Funktionen χ und θ der Zusammenhang

$$\chi(m, \mu) = \sum_{\delta : \mu} \theta(m, \delta), \qquad \delta \text{ alle Teiler von } \mu. \tag{3}$$

In der Summe auf der rechten Seite sind nur diejenigen Funktionen θ von Null verschieden, bei denen δ zugleich Teiler von $\psi(m)$ ist; es braucht also δ nur die Gesamtheit der Teiler des *größten gemeinsamen Divisors* von μ und $\psi(m)$ zu durchlaufen. Bezeichnen wir diesen mit d, so haben wir folglich den Satz:

Es ist stets

$$\chi(m, \mu) = \chi(m, d). \tag{4}$$

Oder anders ausgedrückt: *Die Kongruenz* $x^{\mu} \equiv 1 \bmod m$ *hat dieselbe Anzahl Lösungen, wie die Kongruenz* $x^{d} \equiv 1 \bmod m$.

Es sei nun

1. *m ungerade:* $\qquad m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$.

Die Lösungen von $x^{\mu} \equiv 1 \bmod m$ sind die simultanen Lösungen der Kongruenzen

$$x^{\mu} \equiv 1 \bmod p_1^{\alpha_1}, \quad x^{\mu} \equiv 1 \bmod p_2^{\alpha_2}, \ldots, x^{\mu} \equiv 1 \bmod p_n^{\alpha_n}.$$

Diese haben der Reihe nach $d_1, d_2, \ldots, d_n$ Lösungen, wobei

(5) d_i *der größte gemeinsame Teiler von* μ *und* $\varphi\left(p_i^{\alpha_i}\right)$

ist.[1]) Durch Kombination der Lösungen der einzelnen Kongruenzen miteinander erhält man sämtliche Lösungen von $x^\mu \equiv 1 \bmod m$ also ist

$$\chi(m, \mu) = d_1 d_2 \ldots d_n.$$

Ist aber

2. *m gerade:* $m = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$,

so kommt zu den obigen Kongruenzen noch

$$x^\mu \equiv 1 \bmod 2^{\alpha_0}$$

hinzu. Diese besitzt

für $\alpha_0 = 1$: *eine* Lösung

für $\alpha_0 > 1$ und μ *ungerade: eine* Lösung,

μ *gerade:* $2\,d_0$ Lösungen, wobei

(5a) d_0 *der größte gemeinsame Teiler von* μ *und* $2^{\alpha_0 - 2}$

ist.

Fassen wir alles zusammen, so können wir also sagen: *Wenn m durch 4 teilbar und μ gerade ist, so ist*

(6a) $$\chi(m, \mu) = 2\,d_0 d_1 \ldots d_n.$$

In allen übrigen Fällen ist

(6b) $$\chi(m, \mu) = d_1 d_2 \ldots d_n.$$

Nimmt man beispielsweise $\mu = \psi(m)$, so ist es jedenfalls eine gerade Zahl und $d_i = \varphi\left(p_i^{\alpha_i}\right)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Weiter ist, sobald $\alpha_0 \geqq 2$ ist $d_0 = 2^{\alpha_0 - 2}$, also $2\,d_0 = \varphi(2^{\alpha_0})$, folglich erhält man, wie es sein muß:

$$\chi(m, \psi(m)) = \varphi\left(2^{\alpha_0}\right) \varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right) \ldots \varphi\left(p_n^{\alpha_n}\right) = \varphi(m).$$

Aus den Formeln (6) erkennt man, daß für *zwei relativ prime Zahlen* μ, μ' stets

(7) $$\chi(m, \mu\mu') = \chi(m, \mu)\, \chi(m, \mu')$$

ist.

3. Wir wenden uns nun zur Bestimmung der Funktion $\theta(m, \mu)$ und bedienen uns dabei des folgenden Satzes[2]):

---

1) Gauß, Disquisitiones arithm. Art. 85.

2) Dieser einfache Satz, der bisher noch nicht ausdrücklich formuliert zu sein scheint, läßt sich auch aus einem kleinen Aufsatz von Liouville, Journ. de Math. 1857, S. 110 ablesen. Er bildet die Quelle für zahlreiche Relationen zwischen zahlentheoretischen Funktionen.

Sind zwei zahlentheoretische Funktionen χ und θ für jedes Argument μ durch die Relation

(1) $$\chi(\mu) = \sum_{\delta/\mu} \theta(\delta), \quad \delta \text{ alle Teiler von } \mu,$$

verbunden, ist $\chi(1) = 1$ *und für irgend zwei relativ prime* μ, μ'

(2) $$\chi(\mu\mu') = \chi(\mu)\,\chi(\mu'),$$

so ist auch

(3) $$\theta(\mu\mu') = \theta(\mu)\,\theta(\mu'),$$

und wenn, in Primfaktoren zerlegt:

$$\mu = p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$$

ist, so ist

(4) $$\theta(\mu) = (\chi(p^\alpha) - \chi(p^{\alpha-1}))\,(\chi(q^\beta) - \chi(q^{\beta-1}))\ldots$$

Beweis. Ist μ Potenz einer Primzahl:

$$\mu = p^\alpha,$$

so folgt aus (1):

$$\theta(p^\alpha) = \chi(p^\alpha) - \chi(p^{\alpha-1}).$$

Ist q^β Potenz einer zweiten Primzahl, so ist

$$\chi(p^\alpha q^\beta) = \theta(p^\alpha q^\beta) + \sum_{\delta'} \theta(\delta').$$

Darin durchläuft δ' alle Teiler von $p^\alpha q^\beta$ mit Ausnahme von $p^\alpha q^\beta$ selbst. Diese kann man so erhalten, daß man *sämtliche* Teiler von $p^\alpha q^{\beta-1}$, ferner von $p^{\alpha-1}q^\beta$ nimmt; dabei erhält man die Teiler von $p^{\alpha-1}q^{\beta-1}$ *zweimal*, man hat sie also einmal wieder wegzunehmen; daraus folgt

$$\chi(p^\alpha q^\beta) = \theta(p^\alpha q^\beta) + \chi(p^\alpha q^{\beta-1}) + \chi(p^{\alpha-1}q^\beta) - \chi(p^{\alpha-1}q^{\beta-1}),$$

also nach (2):

$$\theta(p^\alpha q^\beta) = (\chi(p^\alpha) - \chi(p^{\alpha-1}))\,(\chi(q^\beta) - \chi(q^{\beta-1}))$$

oder auch

$$\theta(p^\alpha q^\beta) = \theta(p^\alpha)\,\theta(q^\beta).$$

In entsprechender Weise weiterschließend gelangt man unmittelbar zu dem obigen Satze.

Fügen wir in Formel (4) sämtlichen Funktionen ein erstes Argument m hinzu, so haben wir die *Anzahl* $\theta(m, \mu)$ *der Zahlen, die für den Modul* m *den Minimalexponenten* μ *besitzen*, durch die im vorigen Paragraphen bestimmte Funktion $\chi(m, \mu)$ ausgedrückt. Wir wollen die

Formel nur für den Fall $\mu = \psi(m)$ weiter ausführen[1]) und erhalten dadurch die *Anzahl der primitiven Wurzeln* von m. Es sei in Primfaktoren zerlegt:

(5) $$\varphi(m) = 2^{\lambda_0} q_1^{\lambda_1} q_2^{\lambda_2} \ldots q_\varkappa^{\lambda_\varkappa}, \qquad \psi(m) = 2^{\nu_0} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} \ldots q_\varkappa^{\nu_\varkappa}.$$

Dann ist nach (4), wenn wir für $\mu = \psi(m)$ anstelle von $\theta(\mu)$ die Bezeichnung $\omega(m)$ wählen und bei den χ-Funktionen wieder das erste Argument m weglassen, die Anzahl der primitiven Wurzeln:

(6) $$\omega(m) = \left[\chi(2^{\nu_0}) - \chi(2^{\nu_0 - 1})\right]\left[\chi\left(q_1^{\nu_1}\right) - \chi\left(q_1^{\nu_1 - 1}\right)\right] \ldots \left[\chi\left(q_\varkappa^{\nu_\varkappa}\right) - \chi\left(q_\varkappa^{\nu_\varkappa - 1}\right)\right].$$

Wir bestimmen zunächst für irgend eine der *ungeraden* Primzahlen q die Werte von $\chi(q^\nu)$ und $\chi(q^{\nu-1})$.

Es seien die *höchsten* Potenzen von q, die der Reihe nach in den Funktionen $\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right), \varphi\left(p_2^{\alpha_2}\right), \ldots, \varphi\left(p_n^{\alpha_n}\right)$ enthalten sind,

$$q^{\gamma_1}, \; q^{\gamma_2}, \ldots, q^{\gamma_n}.$$

Dann ist q in der Funktion $\varphi(m)$ mit dem Exponenten

$$\lambda = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$$

enthalten; dagegen ist der Exponent ν von q in $\psi(m)$ nach der Definition dieser Funktion die *größte der Zahlen* $\gamma_1, \ldots \gamma_n$. Folglich ist nach (6) des vorigen Paragraphen:

(8a) $$\chi\left(q^\nu\right) = q^{\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n} = q^\lambda.$$

Um aber $\chi(q^{\nu-1})$ zu bestimmen, bezeichnen wir mit

(7) *ε die Anzahl der durch q^ν teilbaren Funktionen* $\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right), \ldots, \varphi\left(p_n^{\alpha_n}\right)$

und finden durch eine leichte Überlegung

(8b) $$\chi\left(q^{\nu-1}\right) = q^{\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n - \varepsilon\nu + \varepsilon(\nu - 1)} = q^{\lambda - \varepsilon},$$

also ist

(8c) $$\theta(q^\nu) = \chi(q^\nu) - \chi(q^{\nu-1}) = q^{\lambda-\varepsilon}(q^\varepsilon - 1).$$

Eine entsprechende Formel findet man für die Differenz $\chi(2^{\nu_0}) - \chi(2^{\nu_0 - 1})$, nämlich

(9) $$\theta(2^{\nu_0}) = \chi(2^{\nu_0}) - \chi(2^{\nu_0-1}) = 2^{\lambda_0 - \varepsilon_0}(2^{\varepsilon_0} - 1),$$

nur muß man dabei die Zahl ε_0 in geeigneter Weise definieren. Ist

1. m nicht durch 4 teilbar, so ist

ε_0 die Anzahl der durch 2^{ν_0} teilbaren Funktionen

(7a) $$\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right), \varphi\left(p_2^{\alpha_2}\right), \ldots, \varphi\left(p_n^{\alpha_n}\right).$$

1) Der allgemeine Fall wird in Nr. 5 behandelt.

2. Ist m durch 4 teilbar und $\nu_0 > 1$, so ist ε_0 *die Anzahl der durch* 2^{ν_0} *teilbaren Funktionen*

$$\frac{1}{2}\varphi(2^{\alpha_0}),\ \varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right),\ldots,\ \varphi\left(p_n^{\alpha_n}\right). \tag{7b}$$

3. Ist aber $\nu_0 = 1$, was immer eintritt, wenn m keinen Primfaktor von der Form $4h+1$ enthält und durch keine höhere Potenz von 2 als 8 teilbar ist, so ist

$$\varepsilon_0 = \lambda_0. \tag{7c}$$

Aus (8) und (9) findet man nunmehr, wenn man die nach (7) zu bestimmenden Zahlen ε durch Indizes entsprechend den Primfaktoren $q_i^{\nu_i}$ von $\psi(m)$ unterscheidet, die Anzahl der primitiven Wurzeln von m:

$$\omega(m) = 2^{\lambda_0-\varepsilon_0}(2^{\varepsilon_0}-1)\, q_1^{\lambda_1-\varepsilon_1}\left(q_1^{\varepsilon_1}-1\right)\ldots q_\varkappa^{\lambda_\varkappa-\varepsilon_\varkappa}\left(q_\varkappa^{\varepsilon_\varkappa}-1\right). \tag{10}$$

Führt man aber eine zahlentheoretische Funktion

$$\eta(m) = 2^{\varepsilon_0-1} q_1^{\varepsilon_1-1}\ldots q_\varkappa^{\varepsilon_\varkappa-1} \tag{11}$$

ein und bezeichnet mit $S(\mu)$ die *Summe der Teiler* von μ, so kann man, wie man leicht sieht, schließlich folgenden Satz aussprechen:

Um die Anzahl der primitiven Wurzeln einer Zahl

$$m = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n}$$

zu bestimmen, berechnet man die Funktionen $\varphi(2^{\alpha_0})$, $\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right),\ldots,\varphi\left(p_n^{\alpha_n}\right)$, *ferner*

$$\varphi(m) = 2^{\lambda_0} q_1^{\lambda_1}\ldots q_\varkappa^{\lambda_\varkappa}$$

und nach Formel (2) *in Nr. 1 den Hauptexponenten*

$$\psi(m) = 2^{\nu_0} q_1^{\nu_1}\ldots q_\varkappa^{\nu_\varkappa}.$$

Ermittelt man dann nach (7) *die Zahlen* $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_\varkappa$ *und entsprechend der Formel* (11) *die Funktion* $\eta(m)$, *so ist die Anzahl der primitiven Wurzeln von* m:

$$\omega(m) = \varphi\varphi(m)\frac{S\,\eta(m)}{\eta(m)}. \tag{12}$$

Ist $m = p^\alpha$ oder $2p^\alpha$, so ist $\eta(m) = 1$, und man hat die aus den Elementen bekannte Anzahl der primitiven Wurzeln: $\omega(m) = \varphi\varphi(p^\alpha)$.

4. Ist a primitive Wurzel von m, und bildet man die Reste der Potenzen von a nach dem Modul m, so ist $a_1 \equiv a^\mu \bmod m$ dann und nur dann ebenfalls primitive Wurzel, sobald μ *relativ prim zu* $\psi(m)$ ist. Umgekehrt ist dann auch $a \equiv a_1^{\mu_1} \bmod m$, wobei μ_1 die zu μ assoziierte

Zahl, d. h. $\mu\mu_1 \equiv 1 \mod \psi(m)$ ist. Solche primitiven Wurzeln, von denen jede einer Potenz der anderen $\mod m$ kongruent ist, sollen miteinander *verwandt* heißen. Dagegen möge eine Zahl b, *welche keiner Potenz von a kongruent* ist, *fremd* zu a genannt werden. Ist b auch primitive Wurzel, so sind sämtliche mit b verwandten Wurzeln fremd zu sämtlichen mit a verwandten und umgekehrt. Hieraus folgt der Satz:

Sämtliche primitiven Wurzeln von m lassen sich in „Familien" von je $\varphi(\psi(m))$ miteinander verwandten Wurzeln einteilen. Jede Familie ist fremd zu jeder anderen. Die Anzahl der Familien ist $\frac{\omega(m)}{\varphi(\psi(m))}$.

Die Einteilung läßt sich aber weiter treiben. Sei a primitive Wurzel und r eine zu a *fremde* Zahl vom *Minimalexponenten* 2, also eine Lösung der Kongruenz

$$x^2 \equiv 1 \mod m, \tag{1}$$

so ist

$$b \equiv ra \mod m \tag{2}$$

ebenfalls *primitive Wurzel* und *fremd zu a*. Denn wäre der Minimalexponent β von b ungerade, so wäre $b^\beta \equiv ra^\beta \equiv 1 \mod m$, also $r \equiv a^{\psi(m)-\beta}$, was unmöglich ist, da r fremd zu a sein soll. Für einen geraden Minimalexponenten β ist aber $b^\beta \equiv a^\beta \equiv 1 \mod m$, also kann nur $\beta = \psi(m)$ sein. Wäre nun b mit a verwandt, so könnte wieder r nicht fremd zu a sein.

Aus (2) folgt aber, wenn μ *relativ prim* zu $\psi(m)$, also jedenfalls ungerade ist:

$$b^\mu \equiv ra^\mu \mod m, \tag{3}$$

es geht also auf diese Weise die ganze *Familie* primitiver Wurzeln, zu der a gehört, in eine neue Familie über. Macht man denselben Übergang mit Hilfe von sämtlichen zu a fremden Lösungen der Kongruenz (1), so kann es vorkommen, daß man dieselbe neue Familie mehrmals erhält. Es müßte dann, wenn r' eine zweite zu a fremde Lösung von (1) ist:

$$r'a \equiv ra^\mu \mod m \quad (\mu \text{ relativ prim zu } \psi(m)) \tag{4}$$

sein, also wenn man beiderseits zum Quadrat erhebt:

$$a^{2(\mu-1)} \equiv 1 \mod m.$$

Hieraus würde aber, da jedenfalls $\mu < \psi(m)$ ist,

$$\mu = \frac{\psi(m)}{2} + 1$$

folgen, und dies ist *nur dann relativ prim zu* $\psi(m)$, wenn $\psi(m)$ *durch 4 teilbar* ist. In diesem Falle besteht dann für die Lösungen r, r' die Beziehung

$$rr' \equiv a^{\frac{\psi(m)}{2}} \bmod m.$$

Hiermit haben wir den Satz:

Jede zu a fremde Lösung der Kongruenz $x^2 \equiv 1 \bmod m$ *erzeugt eine zur Familie von a fremde Familie primitiver Wurzeln* $b^\mu \equiv ra^\mu \bmod m$; *sobald aber* $\psi(m)$ *durch* 4 *teilbar ist, liefern je zwei durch die Kongruenz* $rr' \equiv a^{\frac{\psi(m)}{2}} \bmod m$ *verbundene Lösungen* r, r' *die gleiche Familie.*

Wir wollen die Gesamtheit der in dieser Weise aus einer Familie entspringenden neuen Familien mit Einrechnung der ersten einen *Stamm* von Familien nennen. Da aus $b \equiv ra \bmod m$ auch

$$a \equiv rb \bmod m$$

folgt, so kann man einen Stamm aus *jeder* ihm zugehörigen Familie erzeugen. Dagegen erzeugt jede Familie, die dem Stamme nicht zugehört, einen neuen Stamm.

Nun sind von den Lösungen der Kongruenz $x^2 \equiv 1 \bmod m$ mit Ausnahme der Lösungen $r \equiv 1 \bmod m$ und $r \equiv a^{\frac{1}{2}\psi(m)} \bmod m$ *alle* Lösungen fremd zu a. Die Anzahl *aller* Lösungen ist nach der bisherigen Bezeichnung $\chi(m, 2)$, und es ist[1]) nach (6) in Nr. **2.**, wenn wieder $m = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ ist:

$$\begin{aligned} \text{für } \alpha_0 &= 0, 1 & \chi(m, 2) &= 2^n, \\ \alpha_0 &= 2 & \chi(m, 2) &= 2^{n+1}, \\ \alpha_0 &> 2 & \chi(m, 2) &= 2^{n+2}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also schließlich der Satz:

Die primitiven Wurzeln zerfallen in Stämme. Jeder Stamm hat,

A) *wenn* $\psi(m)$ *nicht durch* 4 *teilbar ist*, $\chi(m, 2) - 1$,

B) *wenn* $\psi(m)$ *durch* 4 *teilbar ist*, $\frac{1}{2}\chi(m, 2)$

Familien von je $\varphi(\psi(m))$ *primitiven Wurzeln.*

5. Wir wollen noch die Frage behandeln, ob unter den Resten der Potenzen aller primitiven Wurzeln von m sämtliche zu m relativ primen Zahlen auftreten; wir werden finden, daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist.

1) Vgl. Bachmann, Niedere Zahlentheorie, S. 172.

Es seien a und b primitive Wurzeln, und es möge für einen Exponenten μ die Kongruenz

(1) $$a^{\mu} \equiv b^{\mu} \bmod m$$

bestehen. Bedeutet d *den größten gemeinsamen Teiler von* μ *und* $\psi(m)$, so daß

$$\mu = d\mu', \quad \psi(m) = d\psi'$$

und μ' relativ prim zu ψ' ist, so läßt sich eine Zahl μ_1 derart bestimmen, daß $\mu'\mu_1 \equiv 1 \bmod \psi'$ ist. Erhebt man also die Kongruenz (1) zur μ_1^{ten} Potenz, so folgt

(2) $$a^{d} \equiv b^{d} \bmod m.$$

Bezeichnet nun $g(m, \mu)$ *die Anzahl aller inkongruenten Werte, die* a^{μ} *annimmt, wenn* a *sämtliche primitiven Wurzeln von* m *durchläuft*, so wird offenbar

(3) $$g(m, \mu) = g(m, d)$$

sein. Andererseits ist aber nur dann

$$g(m, \mu) = g(m, \nu),$$

wenn μ und ν *denselben größten gemeinsamen Teiler mit* $\psi(m)$ besitzen; denn nur unter dieser Bedingung kann für zwei primitive Wurzeln die Kongruenz

$$a^{\mu} \equiv b^{\nu} \bmod m$$

bestehen. Da also hiernach die Funktionen $g(m, \mu)$ nur für den Fall zu betrachten sind, daß das zweite Argument ein Teiler von $\psi(m)$ ist, so können wir mit einer leichten Änderung der Bezeichnung an ihrer Stelle die Funktionen

(4) $$f(m, d) = g\left(m, \frac{\psi(m)}{d}\right)$$

einführen, und wir stellen uns die Aufgabe, den Wert von $f(m, d)$ für einen gegebenen Teiler d von $\psi(m)$ zu ermitteln.

Es bedeutet also $f(m, d)$ die Anzahl aller inkongruenten Werte von $a^{\frac{\psi(m)}{d}}$. Die Kongruenz

(5) $$x^{\frac{\psi(m)}{d}} \equiv a^{\frac{\psi(m)}{d}} \bmod m$$

hat $\chi\left(m, \frac{\psi(m)}{d}\right)$ Lösungen. Durchläuft a alle primitiven Wurzeln, so erhält man $f(m, d)$ Kongruenzen, deren Lösungen sämtlich inkongruent sind, also haben alle Kongruenzen zusammen

(6) $$f(m, d)\, \chi\left(m, \frac{\psi(m)}{d}\right)$$

verschiedene Lösungen.

Diese Anzahl kann man auch auf andere Weise bestimmen. Jede Lösung x der Kongruenz (5) hat einen *Minimalexponenten* $\frac{\psi(m)}{\xi}$, und es muß ξ *relativ prim zu* d sein; denn hätten ξ und d einen von 1 verschiedenen gemeinsamen Teiler D, so daß $\xi = D\xi'$ und $d = Dd'$ wäre, so wäre $x^{\frac{\psi(m)}{D\xi'}} \equiv 1 \bmod m$, also auch $x^{\frac{\psi(m)}{D}} \equiv 1 \bmod m$; ferner wäre $x^{\frac{\psi(m)}{Dd'}} \equiv a^{\frac{\psi(m)}{Dd'}} \bmod m$, folglich $x^{\frac{\psi(m)}{D}} \equiv a^{\frac{\psi(m)}{D}} \equiv 1 \bmod m$, und dies ist unmöglich, da a primitive Wurzel sein soll. Umgekehrt aber ist *jede Zahl* x *mit einem Minimalexponenten* $\frac{\psi(m)}{\xi}$, wobei ξ relativ prim zu d ist, Lösung einer der $f(m, d)$ Kongruenzen (5), d. h. *ist*

$$(7) \qquad x^{\frac{\psi(m)}{\xi}} \equiv 1 \bmod m \quad \left(\frac{\psi(m)}{\xi} \text{ Minimalexponent}\right),$$

so gibt es stets primitive Wurzeln a, so daß

$$x^{\frac{\psi(m)}{d}} \equiv a^{\frac{\psi(m)}{d}} \bmod m$$

ist.

Beweis. Da d und ξ relativ prim sein sollen, so muß

$$\psi(m) = d \cdot \xi \cdot e$$

sein. Sei nun x eine *gegebene* Zahl vom Minimalexponenten $\frac{\psi(m)}{\xi} = d \cdot e$, so ist zu zeigen, daß unter den Lösungen der Kongruenz

$$(8) \qquad z^{\xi e} \equiv x^{\xi e} \bmod m$$

sich primitive Wurzeln befinden.

Es sei r eine Zahl mit dem *Minimalexponenten* $\xi e = \frac{\psi(m)}{d}$, so ist

$$a \equiv xr \bmod m$$

eine Lösung von (8), und für keinen Exponenten $\varepsilon < \xi e$ besteht eine Kongruenz $a^\varepsilon \equiv x^\varepsilon \bmod m$. Da nun x den Minimalexponenten de hat und d relativ prim zu ξ ist, so hat a den Minimalexponenten $d\xi e = \psi(m)$, d. h. a ist *primitive Wurzel*, und die Kongruenz (8) hat mithin $\theta(m, \xi e) = \theta\left(m, \frac{\psi(m)}{d}\right)$ primitive Wurzeln zu Lösungen.

Es stimmt also die durch Formel (6) bestimmte Anzahl sämtlicher Lösungen der $f(m, d)$ Kongruenzen (5) überein mit der Anzahl sämtlicher Zahlen x mit einem Minimalexponenten $\frac{\psi(m)}{\xi}$, in dem ξ relativ prim zu d ist, d. h. es muß sein:

$$(9) \qquad f(m, d)\, \chi\left(m, \frac{\psi(m)}{d}\right) = \sum_{\xi} \theta\left(m, \frac{\psi(m)}{\xi}\right),$$

und hierin ist die Summe auf der rechten Seite über *alle zu d relativ primen Teiler von* $\psi(m)$ zu erstrecken.

Wir wollen nun allgemein einen Teiler t einer Zahl n, der zu seinem komplementären Teiler $\frac{n}{t}$ *relativ prim* ist, einen *Hauptteiler* von n nennen. Es gehört dann zu *irgend einem* Teiler d ein ganz bestimmter Hauptteiler, der *alle in d vorkommenden Primzahlen in den Potenzen enthält, in denen sie in n auftreten.* Sei in unserem Falle

(d) der zu d gehörige Hauptteiler von $\psi(m)$,

so durchläuft ξ alle Teiler von $\frac{\psi(m)}{(d)}$, die wir mit δ bezeichnen wollen, und es ist also

$$\frac{\psi(m)}{\xi} = (d) \cdot \delta$$

und δ relativ prim zu (d). Folglich ist

$$\sum_{\xi} \theta\left(m, \frac{\psi(m)}{\xi}\right) = \theta(m, (d)) \sum_{\delta / \frac{\psi(m)}{(d)}} \theta(m, \delta) = \theta(m, (d))\, \chi\left(m, \frac{\psi(m)}{(d)}\right),$$

und wir erhalten

$$f(m, d) = \frac{\theta(m, (d))\, \chi\left(m, \frac{\psi(m)}{(d)}\right)}{\chi\left(m, \frac{\psi(m)}{d}\right)}.$$

Es ist aber

$$\frac{\psi(m)}{d} = \frac{(d)}{d} \cdot \frac{\psi(m)}{(d)}$$

und $\frac{(d)}{d}$ relativ prim zu $\frac{\psi(m)}{(d)}$, folglich

$$\chi\left(m, \frac{\psi(m)}{d}\right) = \chi\left(m, \frac{(d)}{d}\right) \cdot \chi\left(m, \frac{\psi(m)}{(d)}\right)$$

und daher schließlich

$$f(m, d) = \frac{\theta(m, (d))}{\chi\left(m, \frac{(d)}{d}\right)}. \tag{10}$$

Ist d' ein zu d relativ primer Teiler von $\psi(m)$, so sind auch die zugehörigen Hauptteiler (d) und (d') relativ prim, und der zum Produkt dd' gehörige Hauptteiler (dd') ist gleich dem Produkt der einzelnen Hauptteiler; es ist also

$$f(m, dd') = f(m, d)\, f(m, d'). \tag{11}$$

Die Entwicklungen in Nr. 3 machen es möglich, die Funktionen $f(m, d)$ explicite durch die Primfaktoren von $\psi(m)$ darzustellen; wir benutzen das, um als wichtigste Eigenschaft dieser Funktionen den Satz zu beweisen, daß *immer*

$$f(m, d) \leqq \theta(m, d)$$

ist.

Es sei, wie in Nr. 3

$$m = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n},$$

$$\varphi(m) = 2^{\lambda_0} q_1^{\lambda_1} \dots q_\varkappa^{\lambda_\varkappa},$$

$$\psi(m) = 2^{\nu_0} q_1^{\nu_1} \dots q_\varkappa^{\nu_\varkappa}.$$

Es genügt, wenn wir m als nicht durch 4 teilbar annehmen.

Irgend ein Teiler d von $\psi(m)$ sei

$$d = 2^{\varrho_0} q_1^{\varrho_1} \dots q_\varkappa^{\varrho_\varkappa};$$

dann ist nach (11), wenn man das Argument m wegläßt:

$$f(d) = f(2^{\varrho_0}) f\left(q_1^{\varrho_1}\right) \dots f\left(q_\varkappa^{\varrho_\varkappa}\right),$$

wir brauchen also nur den Wert von $f(q^\varrho)$ für $\varrho = 0, 1, \dots, \nu$ zu berechnen, wobei q irgend einen der Primfaktoren von $\psi(m)$, auch 2 bedeuten kann und ν den Exponenten, mit dem q in $\psi(m)$ auftritt. Nach (10) ist

$$f(q^\varrho) = \frac{\theta(q^\nu)}{\chi(q^{\nu-\varrho})} = \frac{\chi(q^\nu) - \chi(q^{\nu-1})}{\chi(q^{\nu-\varrho})}. \tag{12}$$

Die hier vorkommenden Funktionen χ bestimmen wir nach (6) in Nr. 2. Wir haben dann die Zahlen

$$\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right),\ \varphi\left(p_2^{\alpha_2}\right), \dots, \varphi\left(p_n^{\alpha_n}\right) \tag{13}$$

ins Auge zu fassen, und es bedeute unter ihnen

π_1	die	Anzahl	der	durch	q	teilbaren	Zahlen,
π_2	"	"	"	"	q^2	"	"
π_3	"	"	"	"	q^3	"	"
$\vdots$							
π_ν	"	"	"	"	q^ν	"	"

Es ist also π_ν gleichbedeutend mit ε in Nr. 3, (7). Dann ist

$$\pi_1 \geqq \pi_2 \geqq \pi_3 \dots \geqq \pi_\nu,$$

und ferner ist

$\pi_1 - \pi_2$	die	Anzahl	der	*nur*	durch	q	teilbaren	Zahlen (13),
$\pi_2 - \pi_3$	"	"	"	"	"	q^2	"	"
$\pi_3 - \pi_4$	"	"	"	"	"	q^3	"	"

$$\vdots$$

Man erhält nun leicht nach (6) in Nr. 2:

$$
\begin{aligned}
&\chi(q) = q^{\pi_1},\\
&\chi(q^2) = q^{\pi_1-\pi_2+2\pi_2} = q^{\pi_1+\pi_2},\\
(14)\qquad &\chi(q^3) = q^{\pi_1-\pi_2+2(\pi_2-\pi_3)+3\pi_3} = q^{\pi_1+\pi_2+\pi_3},\\
&\vdots\\
&\chi(q^\varrho) = q^{\pi_1+\pi_2+\cdots\pi_\varrho}. \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, \nu)
\end{aligned}
$$

Der Exponent λ, mit dem q in $\varphi(m)$ auftritt, ist offenbar

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \pi_1 - \pi_2 + 2(\pi_2 - \pi_3) + 3(\pi_3 - \pi_4) + \cdots + \nu\pi_\nu\\
&= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \cdots + \pi_\nu,
\end{aligned}
$$

also ist übereinstimmend mit (8) in Nr. 3:

$$\chi(q^\nu) = q^\lambda, \qquad \chi(q^{\nu-1}) = q^{\lambda-\pi_\nu}.$$

Nach (12) und (14) erhalten wir jetzt

$$(15)\quad f(m, q^\varrho) = \frac{q^{\lambda-\pi_\nu}(q^{\pi_\nu}-1)}{q^{\pi_1+\pi_2+\cdots\pi_{\nu-\varrho}}} = q^{\pi_{\nu-\varrho+1}+\pi_{\nu-\varrho+2}+\cdots\pi_{\nu-1}}(q^{\pi_\nu}-1).$$

Vergleichen wir dies mit

$$\theta(m, q^\varrho) = q^{\pi_1+\pi_2+\cdots\pi_{\varrho-1}}(q^{\pi_\varrho}-1),$$

so ist

$$\pi_{\nu-\varrho+1} \leqq \pi_1,\ \pi_{\nu-\varrho+2} \leqq \pi_2,\ \ldots,\ \pi_{\nu-1} \leqq \pi_{\varrho-1},\ \pi_\nu \leqq \pi_\varrho,$$

folglich

$$f(m, q^\varrho) \leqq \theta(m, q^\varrho)$$

und daher auch *für jeden Teiler* d *von* $\psi(m)$

$$(16)\qquad f(m, d) \leqq \theta(m, d).$$

Wenden wir uns nun zu der im Anfang dieses Paragraphen gestellten Aufgabe, so bedeute $g(m)$ *die Anzahl der inkongruenten Werte, welche die Reste der Potenzen aller primitiven Wurzeln von* m *annehmen können.* Man findet dann unmittelbar

$$g(m) = \sum_{d/\psi(m)} g(m, d)$$

oder auch

$$(17)\qquad g(m) = \sum_{d/\psi(m)} f(m, d).$$

Nach (16) ist also

$$g(m) \leqq \sum{}' \theta(m, d),$$

aber nach Nr. 2:

$$\sum \theta(m, d) = \chi(m, \psi(m)) = \varphi(m),$$

folglich ist

$$g(m) \leqq \varphi(m), \tag{18}$$

und man hat den Satz:

Im allgemeinen ist es nicht möglich, jede zu m relativ prime Zahl als Rest einer Potenz irgend einer primitiven Wurzel von m darzustellen, sondern es gibt $\varphi(m) - g(m)$ Zahlen, *welche keiner Potenz irgend einer primitiven Wurzel* mod m *kongruent sind.*

6. Zur Erläuterung der vorstehenden Entwicklungen mögen einige Beispiele dienen.

Es sei

1. $m = 63 = 3^2 \cdot 7$. Dann ist

$$\varphi(m) = 6 \cdot 6 = 2^2 \cdot 3^2, \quad \psi(m) = 6 = 2 \cdot 3.$$

Die folgende Tabelle enthält die Reste aller Potenzen für den Modul 63.

a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
2	4	8	16	32	1
4	16	1			
5	25	62	58	38	1
8	1				
10	37	55	46	19	1
11	58	8	25	23	1
13	43	55	22	34	1
16	4	1			
17	37	62	46	26	1
19	46	55	37	10	1
20	22	62	43	41	1
22	43	1			
23	25	8	58	11	1
25	58	1			
26	46	62	37	17	1
29	22	8	43	50	1
31	16	55	4	61	1
32	16	8	4	2	1
34	22	55	43	13	1
37	46	1			
38	58	62	25	5	1
40	25	55	58	52	1
41	43	62	22	20	1
43	22	1			
44	46	8	37	53	1

a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
46	37	1			
47	4	62	16	59	1
50	43	8	22	29	1
52	58	55	25	40	1
53	37	8	46	44	1
55	1				
58	25	1			
59	16	62	4	47	1
61	4	55	16	31	1
62	1.				

Es sind also 24 primitive Wurzeln, was mit Formel (12) in Nr. 3 übereinstimmt; denn es ist nach (7) und (7a) dieses Paragraphen

$$\varepsilon_0 = 2, \quad \varepsilon_1 = 2, \quad \text{also} \quad \eta(m) = 2 \cdot 3, \quad S\eta(m) = 12,$$

ferner $\varphi\varphi(m) = 12$, mithin

$$\omega(m) = 12 \cdot \tfrac{12}{6} = 24.$$

Die primitiven Wurzeln zerfallen nach Nr. 4 in 12 Familien von je $\varphi\psi(m) = 2$ Wurzeln. Nach dem Schlußsatze dieses Paragraphen bilden je $\chi(m, 2) - 1 = 3$ Familien einen Stamm; mit Hilfe der Lösungen 8, 55, 62 der Kongruenz $x^2 \equiv 1 \bmod 63$ findet man leicht die folgende Einteilung der primitiven Wurzeln:

I.	II.	III.	IV.
2,32	5,38	10,19	13,34
47,59	40,52	17,26	41,20
61,31	23,11	53,44	50,29

Die Entwicklungen der Nr. 5 zeigen, daß für alle Teiler d von $\psi(m)$:

$$f(m, d) = \theta(m, d)$$

ist, also ist

$$g(m) = \varphi(m),$$

d. h. in diesem Falle treten unter den Resten der Potenzen der primitiven Wurzeln alle zu m relativ primen Zahlen auf.

2. $m = 35 = 5 \cdot 7$.

$$\varphi(m) = 4 \cdot 6 = 2^3 \cdot 3. \qquad \psi(m) = 2 \cdot 6 = 12 = 2^2 \cdot 3.$$

Hier ist $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 1$, also $\eta(m) = 1$ und

$$\omega(m) = \varphi\varphi(m) = 8.$$

Wir haben folgende Tabelle der Potenzreste:

a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^{12}
2	4	8	16	32	29	23	11	22	9	18	1
3	9	27	11	33	29	17	16	13	4	12	1
4	16	29	11	9	1						
6	1										
8	29	22	1								
9	11	29	16	4	1						
11	16	1									
12	4	13	16	17	29	33	11	27	9	3	1
13	29	27	1								
16	11	1									
17	9	13	11	12	29	3	16	27	4	33	1
18	9	22	11	23	29	32	16	8	4	2	1
19	11	34	16	24	1						
22	29	8	1								
23	4	22	16	18	29	2	11	8	9	32	1
24	16	34	11	19	1						
26	11	6	16	31	1						
27	29	13	1								
29	1										
31	16	6	11	26	1						
32	9	8	11	2	29	18	16	22	4	23	1
33	4	27	16	3	29	12	11	13	9	17	1
34	1.										

Hier ist $\varphi\psi(m) = 4$ und $\chi(m, 2) = 4$, also bestehen die 8 primitiven Wurzeln aus 1 Stamm von $\frac{1}{2}\chi(m, 2) = 2$ Familien zu je 4 primitiven Wurzeln, nämlich:

1. Familie: 2, 32, 23, 18.
2. Familie: 3, 33, 17, 12.

Schließlich ist

$$f(m, 1) = 1, \quad f(m, 2) = \frac{\theta(m, 4)}{\chi(m, 2)} = \frac{4}{4} = 1, \quad f(m, 3) = \frac{\theta(m, 3)}{\chi(m, 1)} = 2,$$

$$f(m, 4) = \frac{\theta(m, 4)}{\chi(m, 1)} = 4, \quad f(m, 6) = \frac{\theta(m, 12)}{\chi(m, 2)} = \frac{8}{4} = 2, \quad f(m, 12) = \theta(m, 12) = 8,$$

also $g(m) = \sum f(m, d) = 18$, und es sind $\varphi(m) - g(m) = 6$ Zahlen nicht durch Potenzen primitiver Wurzeln darstellbar, nämlich die Zahlen 6, 34; 19, 24, 26, 31.

Straßburg i. E., März 1905.

Zu der Abhandlung des Herrn Neuberg „Über drei Sätze von Dr. P. Zeeman *Gz*".[1])

Zweite Mitteilung.

Von W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr.

Versteht man unter der Höhenfläche eines Tetraeders die die Höhen des Tetraeders enthaltende Regelfläche zweiter Ordnung, so lautete der dritte der Zeemanschen Sätze: „Liegt irgend einer von 5 Raumpunkten auf der Höhenfläche des von den 4 anderen gebildeten Tetraeders, so kommt die nämliche Eigenschaft auch jedem der 4 anderen Punkte zu."

Der Satz gilt, wie im Folgenden gezeigt werden soll, auch dann noch, wenn der ihm zugrunde liegende imaginäre „Kugelkreis" durch eine völlig beliebige Fläche zweiter Klasse Φ ersetzt wird. Der Kürze halber mag die so entstehende projektive Verallgemeinerung der Höhenfläche als „Φ-Höhenfläche" bezeichnet sein. Zugleich wird man den eigentlichen geometrischen Grund des Satzes erkennen.

1. Die Gleichung der Φ-Höhenfläche des Koordinatentetraeders. — Es liege ein Koordinatentetraeder T mit den Ecken A_i und den Ebenen A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ zugrunde, und überdies eine beliebige Fläche zweiter Klasse Φ:

$$\text{(I)} \qquad \Phi_{u^2} \equiv \Phi \equiv \sum\sum c_{ik} u_i u_k = 0.$$

Die Ebene $\mathsf{A}_i (x_i = 0)$ besitzt als Pol bez. Φ den Punkt P_i' mit den Koordinaten $c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4}$. Die Gerade g_i, die die Ecke A_i mit P_i' verbindet, die also zur Ebene A_i bez. Φ konjugiert ist, trifft die Ebene A_i in einem Punkte P_i mit den Koordinaten

$$x_i = 0, \quad x_k : x_l : x_m = c_{ik} : c_{il} : c_{im} \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4).$$

Dann hat (s. meine Abhandlung dieses Archiv (3) 8, 1904, S. 142f.) eine Fläche zweiter Ordnung G:

$$\text{(1)} \qquad G_x \equiv G \equiv \sum\sum a_{ik} x_i x_k = 0,$$

die die vier Geraden g_i enthalten soll, die $3 \cdot 4$ Bedingungen zu erfüllen:

$$\begin{cases} \text{(IIa)} & a_{ii} = 0, \\ \text{(IIb)} & a_{ik} c_{ik} + a_{il} c_{il} + a_{im} c_{im} = 0, \\ \text{(IIc)} & \dfrac{a_{ik}}{c_{lm}} + \dfrac{a_{il}}{c_{km}} + \dfrac{a_{im}}{c_{kl}} = 0, \end{cases}$$

1) S. dieses Archiv (3) 11, 225—238.

und diese 12 Gleichungen führen zu der einzigen Lösung:

$$\text{(III)} \qquad G \equiv (\pi_3 - \pi_4) Q_2 + (\pi_4 - \pi_2) Q_3 + (\pi_2 - \pi_3) Q_4 = 0,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\begin{cases} (2) & \pi_2 = c_{12} c_{34}, \quad \pi_3 = c_{13} c_{24}, \quad \pi_4 = c_{14} c_{23}; \\ (3) & Q_2 = c_{12} x_3 x_4 + c_{34} x_1 x_2, \quad Q_3 = c_{13} x_2 x_4 + c_{24} x_1 x_3, \quad Q_4 = c_{14} x_2 x_3 + c_{23} x_1 x_4. \end{cases}$$

Es ist unmittelbar ersichtlich, daß sowohl die 4 Gleichungen (IIb), wie die 4 Gleichungen (IIc) je voneinander linear unabhängig sind, da nicht alle der aus den Koeffizienten der 6 a_{ik} zu bildenden vierreihigen Determinanten verschwinden.[1])

Da die Gleichungen (IIa) und (IIc) aussagen, daß die Fläche G einmal die Ecken A_i von T, andererseits die Punkte P_i enthält, so geht demnach durch diese $2 \cdot 4$ Punkte gerade eine ∞^1 Schar B (ein Büschel) von Flächen zweiter Ordnung, die sich in einer Raumkurve vierter Ordnung C_4 schneiden.

Diese C_4 ist leicht mittels (III) darstellbar. Denn da

$$\text{(4)} \qquad (\pi_3 - \pi_4) + (\pi_4 - \pi_2) + (\pi_2 - \pi_3) = 0,$$

so läßt sich G (III) auch in irgend eine der drei Gestalten setzen:

$$\begin{cases} (\mathrm{III}\alpha) & G \equiv (\pi_3 - \pi_4)(Q_2 - Q_4) + (\pi_4 - \pi_2)(Q_3 - Q_4) = 0, \\ (\mathrm{III}\beta) & G \equiv (\pi_3 - \pi_4)(Q_2 - Q_3) + (\pi_2 - \pi_3)(Q_4 - Q_3) = 0, \\ (\mathrm{III}\gamma) & G \equiv (\pi_4 - \pi_2)(Q_3 - Q_2) + (\pi_2 - \pi_3)(Q_4 - Q_2) = 0. \end{cases}$$

Die Fläche G erscheint also als Individuum eines Büschels, dem die drei Flächen

$$\text{(5)} \qquad Q_2 - Q_3 = 0, \quad Q_3 - Q_4 = 0, \quad Q_4 - Q_2 = 0$$

angehören. In der Tat bestätigt man ohne weiteres, daß die Gleichungen (5) durch die Koordinaten $c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4}$ der vier Punkte P_i erfüllt werden. Das Büschel (5) ist also gerade das durch die Raumkurve C_4 gehende, und die drei Flächen (5) sind innerhalb des Büschels B dadurch charakterisiert, daß sie je eine Kante von T und damit zugleich die Gegenkante ganz enthalten.[2])

---

1) Noch kürzer ist der folgende Weg. Bezeichnet man die linken Seiten von (IIb) bez. (IIc) mit B_i bez. C_i ($i = 1, 2, 3, 4$), so müßte in einer etwaigen linearen Identität $\Sigma \varkappa_i B_i = 0$ bez. $\Sigma \lambda_i C_i = 0$ stets $\varkappa_i + \varkappa_k$ bez. $\lambda_i + \lambda_k$ verschwinden, was nur möglich ist, wenn alle $\varkappa$ bez. λ verschwinden.

2) Entsprechend gilt der leicht beweisbare Satz, daß diejenige Fläche des Büschels B, die irgend eine Kante des aus den vier Punkten P_i gebildeten Tetraeders enthält, stets auch deren Gegenkante enthalten muß.

2. Die Gleichung der Φ-Höhenfläche eines beliebigen Tetraeders. — Nunmehr sei T ein beliebiges Tetraeder mit den Ecken (1), (2), (3), (4), wo z. B. die Ecke (1) die Koordinaten $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}$ besitze.

Wollte man, um zur Gleichung der Φ-Höhenfläche des Tetraeders T zu gelangen, dasselbe Verfahren wie in § 1 einschlagen, so würde man zunächst eine Gleichung erhalten, die in den Koordinaten der Punkte (1), (2), (3), (4) vom sechsten Grade wäre. Erst durch eine Reihe nicht einfacher Operationen, die den in der ersten Mitteilung verwendeten analog sind, gelingt es, aus jener Gleichung den Faktor (1234) viermal abzuspalten, unter (1234) die Determinante der $x_i^{(k)}(i, k = 1, 2, 3, 4)$ verstanden, und so eine Endgleichung herzustellen, die sowohl in den Koordinaten (x_i) eines beliebigen Punktes der Fläche, wie in denen der Ecken von T nur vom zweiten Grade ist.

Man gewinnt indessen weit kürzer die fragliche Endgleichung der Φ-Höhenfläche von T im Anschlusse an Nr. 1 mit Hilfe einiger geometrischer Überlegungen.

Indem wir etwa von der Gleichung (IIIγ) der Φ-Höhenfläche G des Koordinatentetraeders ausgehen, fragen wir nach einer geeigneten geometrischen Bedeutung des Verschwindens der einzelnen, in jener Gleichung auftretenden Faktoren, und übertragen dann diese Bedeutung auf ein beliebiges Tetraeder.

Die Gleichung

$$\pi_4 - \pi_2 \equiv c_{14}c_{23} - c_{12}c_{34} = 0 \tag{6}$$

sagt aus[1]), daß die Kanten (1), (3) und (4), (2) des Koordinatentetraeders in bezug auf die Klassenfläche Φ (I) konjugiert sind.

Die entsprechende Bedingung für das beliebige Tetraeder T lautet gemäß der Polaritätstheorie der Flächen zweiter Klasse:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & x_1^{(4)} & x_1^{(2)} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & x_2^{(4)} & x_2^{(2)} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & x_3^{(4)} & x_3^{(2)} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & x_4^{(4)} & x_4^{(2)} \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & x_4^{(1)} & 0 & 0 \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & x_4^{(3)} & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv C_{13,42} = 0, \tag{6'}$$

und analog die beiden anderen.

1) S. meine Abhandlung „Über Grundzüge einer Theorie des Tetraeders“, Verhandlungen des 3. internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg 1905, S. 336.

In der Tat, gibt man den Ecken A_i des Koordinatentetraeders d[…] Normalkoordinaten:

(7)

	x_1	x_2	x_3	x_4
A_1	1	0	0	0
A_2	0	1	0	0
A_3	0	0	1	0
A_4	0	0	0	1

,

so spezialisieren sich die Ausdrücke $C_{12,34}$, $C_{13,42}$, $C_{14,23}$ wie folgt:

$$(8)\qquad \begin{cases} C_{12,34} \longrightarrow c_{13}c_{24} - c_{14}c_{23} = \pi_3 - \pi_4, \\ C_{13,42} \longrightarrow c_{14}c_{23} - c_{12}c_{34} = \pi_4 - \pi_2, \\ C_{14,23} \longrightarrow c_{12}c_{34} - c_{13}c_{24} = \pi_2 - \pi_3. \end{cases}$$

Diese drei Ausdrücke $C_{12,34}$, $C_{13,42}$, $C_{14,23}$ sind je linear in den Ko- dinaten der Ecken von T und quadratisch hinsichtlich der c_{ik}, und sichtlich irreduzibel.

Der Identität (4) entspricht, wie man sich auch leicht dur direkte Ausrechnung überzeugt, die allgemeinere:

$$(4')\qquad C_{12,34} + C_{13,42} + C_{14,23} \equiv 0.$$

Nunmehr schreiten wir zu der Verallgemeinerung der Flächen gleichungen (5) für ein beliebiges Tetraeder T.

Die Fläche zweiter Ordnung

$$(9)\qquad Q_4 - Q_2 \equiv (c_{14}x_2x_3 + c_{23}x_1x_4) - (c_{12}x_3x_4 + c_{34}x_1x_2) = 0$$

war geometrisch dadurch charakterisiert, daß sie einmal durch die vi „Φ-Höhenfußpunkte" $P_i(c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4})$ des Koordinatentetraeders gin andererseits dessen Kanten (1), (3) und (4), (2) ganz enthielt.

Um die unbequeme Rechnung mit den Koordinaten der Φ-Höhen fußpunkte von T zu vermeiden, bedienen wir uns einer einfachen Übe legung.

Beim Koordinatentetraeder (§ 1) war die „Φ-Höhe" A_1P_1 konju giert zur Ebene A_1 in bezug auf Φ (I); insbesondere sind also d drei durch A_1P_1 gehenden Ebenen $(P_1A_1A_2)$, $(P_1A_1A_3)$, $(P_1A_1A$ konjugiert zur Ebene A_1. Man kann dies auch so ausdrücken, daß di Ebenen $(P_1A_1A_2)$, $(P_1A_1A_3)$, $(P_1A_1A_4)$ bez. konjugiert sind zu de Ebenen $(P_1A_3A_4)$, $(P_1A_4A_2)$, $(P_1A_2A_3)$. Das Entsprechende gilt fü die drei anderen Φ-Höhenfußpunkte. Bezeichnet daher für den Augen blick P irgend einen der vier Höhenfußpunkte, so ist stets $(PA_1A$ konjugiert zu (PA_3A_4), (PA_1A_3) zu (PA_4A_2), (PA_1A_4) zu $(PA_2A_3$

Etwa die zweite dieser drei Eigenschaften werde jetzt für jede Punkt (x) einer Fläche zweiter Ordnung hinsichtlich des beliebige

Tetraeders T verlangt, und überdies, daß sie die Kanten (1), (3) und (4), (2) ganz enthalte; existiert diese Fläche, so muß sie zu T in derselben Beziehung stehen, wie die Fläche (9) $Q_4 - Q_2 = 0$ zum Koordinatentetraeder.

Nun ist die Bedingung für das Konjugiertsein zweier Ebenen (u), (v) in bezug auf Φ (I):

$$\Phi_{u,v} \equiv \sum_i \sum_k u_i v_k c_{ik} = 0. \tag{10}$$

Die Koordinaten z. B. der Ebene $(x13)$ sind die dreireihigen Determinanten der aus den Koordinanten der Punkte (x), (1), (3) gebildeten Matrix:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & x_4^{(1)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & x_4^{(3)} \end{vmatrix}; \tag{11}$$

diese Koordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 der Ebene $(x13)$ seien so normiert, daß sie geradezu bez. gleich jenen (mit alternierenden Vorzeichen genommenen) Determinanten werden, wobei der u_1-Determinante das positive Vorzeichen beigelegt werde. Genau das Entsprechende gelte für die Koordinaten der Ebene $(x42)$ usw. Setzt man alsdann in die linke Seite $\Phi_{u,v}$ von (10) die soeben normierten Koordinaten der Ebenen $(x13)$, $(x42)$ ein, wodurch sie in $\Phi_{x13,x42}$ übergehe, so ist damit dieser Ausdruck einschließlich des Vorzeichens eindeutig festgelegt, und analog die beiden weiteren Ausdrücke $\Phi_{x14,x23}$, $\Phi_{x12,x34}$.

Damit ist bewiesen, daß die Fläche:

$$\Phi_{x13,x42} = 0 \tag{12}$$

die gewünschte Fläche zweiter Ordnung ist, denn die Gleichung (12) wird erfüllt durch die vier Φ-Höhenfußpunkte von T und enthält ganz die Kanten (1), (3) und (4), (2).

Die linke Seite von (12) ist linear in den c_{ik} und quadratisch in den x, und kann hinsichtlich der c_{ik} und x nicht reduzibel sein, da es die spezielle Gleichung (9) nicht ist; endlich ist (12) linear in den Koordinaten der Ecken von T und auch hinsichtlich dieser Größen irreduzibel; denn da bei Vertauschung zweier Ecken von T (12) höchstens sein Vorzeichen ändert, müßte ein etwa sich abspaltender Faktor, der die Koordinaten irgend einer Ecke (linear) enthielte, zugleich die der anderen Ecken enthalten, mithin würde der verbleibende Restfaktor von den Ecken von T ganz unabhängig sein, was nicht möglich ist.

Nun überzeugt man sich ohne weiteres, daß, wenn man T wieder speziell als Koordinatentetraeder wählt, bei Zugrundelegung des normierten Schemas (7) direkt die Reduktionen eintreten:

$$(13)\quad \begin{cases} \Phi_{x13,\,x42} \rightarrow Q_4 - Q_2 \equiv (c_{14}x_2x_3 + c_{23}x_1x_4) - (c_{12}x_3x_4 + c_{34}x_1x_2), \\ \Phi_{x14,\,x23} \rightarrow Q_2 - Q_3 \equiv (c_{12}x_3x_4 + c_{34}x_1x_2) - (c_{13}x_2x_4 + c_{24}x_1x_3), \\ \Phi_{x12,\,x34} \rightarrow Q_3 - Q_4 \equiv (c_{13}x_2x_4 + c_{24}x_1x_3) - (c_{14}x_2x_3 + c_{23}x_1x_4). \end{cases}$$

Faßt man daher die betreffs der Ausdrücke $C_{ik,\,lm}$ und $\Phi_{xik,\,xlm}$ $(i, k, l, m$ zyklisch $= 1, 2, 3, 4)$ erhaltenen Ergebnisse zusammen, so erkennt man, daß sich die Gleichung der Φ-Höhenfläche eines beliebigen Tetraeders T in eine der drei kovarianten Gestalten setzen läßt:

$$(\mathrm{IV}\alpha)\qquad G \equiv C_{13,\,42}\,\Phi_{x12,\,x34} - C_{12,\,34}\,\Phi_{x13,\,x24} = 0,$$

$$(\mathrm{IV}\beta)\qquad G \equiv C_{12,\,34}\,\Phi_{x14,\,x23} - C_{14,\,23}\,\Phi_{x12,\,x34} = 0,$$

$$(\mathrm{IV}\gamma)\qquad G \equiv C_{14,\,23}\,\Phi_{x13,\,x42} - C_{13,\,42}\,\Phi_{x14,\,x23} = 0,$$

deren linke Seiten genau in die entsprechenden linken Seiten von (III) übergehen, wenn T auf Grund von (7) als Koordinatentetraeder gewählt wird.

Der Identität

$$(Q_3 - Q_4) + (Q_4 - Q_2) + (Q_2 - Q_3) = 0$$

entspricht die allgemeinere (die man leicht direkt bestätigt):

$$(14)\qquad \Phi_{x12,\,x34} + \Phi_{x13,\,x42} + \Phi_{x14,\,x23} = 0,$$

und diese, zusammen mit den Darstellungen (IV), führen zu dem Satze:

„Trifft es für einen Raumpunkt P zweimal zu, daß die Ebenen, die ihn mit je zwei Gegenkanten eines Tetraeders T verbinden, zueinander in bezug auf eine beliebige Fläche zweiter Klasse Φ konjugiert sind, so trifft es auch für das dritte Paar zu. Der Ort dieser Punkte P ist eine Raumkurve vierter Ordnung (1. Art) C_4, die durch die Ecken von T und durch die Φ-Höhenfußpunkte von T geht, und umgekehrt durch diese 8 Punkte völlig bestimmt ist."

3. Der projektiv verallgemeinerte Zeemansche Satz. — Nunmehr möge in einer der Gleichungen der Fläche G, etwa in (IVγ) der laufende Punkt (x) mit irgend einer der Ecken von T, etwa mit (1), vertauscht werden.

Dadurch gehe die Fläche G über in eine Fläche G':

$$(\mathrm{V})\qquad G' \equiv C_{x4,\,23}\,\Phi_{x13,\,142} - C_{x3,\,42}\,\Phi_{x14,\,123} = 0.$$

Sobald sich beweisen läßt, daß die Flächen G und G' übereinstimmen, ist damit auch der Zeemansche Satz und zwar für eine beliebige Fläche zweiter Klasse Φ (I) abgeleitet. Wie in § 2, bediene man sich geometrischer Schlüsse.

Die Gleichung

$$C_{x4,23} = 0 \tag{15}$$

sagt aus, daß der Punkt (x) der Ebene angehört, die durch den Punkt (4) geht und zur Kante (2) (3) bez. Φ konjugiert ist, und das Entsprechende gilt für $C_{x3,42} = 0$.

Oder, was auf dasselbe hinauskommt, man fälle im Dreieck (234) von den Ecken (4) bez. (3) aus die Φ-Höhen auf die Gegenseiten und lege durch diese die Ebenen, die zur Ebene des Dreiecks bez. Φ konjugiert sind.

Bezeichnet man den Schnittpunkt jener Höhen als „Φ-Höhenschnittpunkt K_1" des Dreiecks (234), so schneiden sich die beiden Ebenen $C_{x4,23} = 0$, $C_{x3,42} = 0$ in der Geraden h_1'', die durch K_1 geht und zur Ebene (234) bez. Φ konjugiert ist.

Die Fläche G' enthält daher diese Gerade h_1''.

Die Gleichung

$$\Phi_{x13,142} = 0 \tag{16}$$

sagt aus, daß der Punkt (x) der Ebene angehört, die die Kante (1) (3) enthält und zur Ebene (142) bez. Φ konjugiert ist, die also auch die von der Ecke (3) auf die Gegenebene (142) gefällte Φ-Höhe h_3 enthält, und das Entsprechende gilt wiederum von der Ebene $\Phi_{x14,123} = 0$.

Beide Ebenen schneiden sich in einer Geraden h_1', die durch die Ecke (1) geht und die beiden Φ-Höhen h_3, h_4 trifft.

Diese Gerade h_1' liegt also sowohl auf G' wie auf G, und zwar gehört sie auf letzterer Fläche derjenigen „zweiten" Regelschar an, die die Φ-Höhen von T nicht enthält.

Endlich schneiden sich die Ebenen $C_{x4,23} = 0$, $\Phi_{x14,123} = 0$ in der Φ-Höhe h_4, und analog die Ebenen $C_{x3,42} = 0$, $\Phi_{x13,142} = 0$ in der Φ-Höhe h_3.

Auch diese beiden Φ-Höhen h_4, h_3 liegen daher sowohl auf G', wie auf G.

Aber die Φ-Höhenfläche G enthält auch die zuerst erwähnte Gerade h_1''.

Sei, wie in § 1, der Pol der Ebene (234) bez. Φ mit P_1' bezeichnet, durch den also die Φ-Höhe h_1 hindurchgeht, so geht durch den Punkt P_1' der Φ-Höhenfläche G eine Gerade g_1'' der zweiten Regelschar. Diese Gerade g_1'' fällt aber mit h_1'' zusammen. Denn jede der beiden Geraden gehört der zweiten Regelschar der Φ-Höhenfläche an und ist gerade diejenige Gerade der Schar, die zur Ebene (234) bez. Φ konjugiert ist.

Da demnach G und G' die vier Geraden h_1'', h_1', h_3, h_4 gemein haben, muß G dem Büschel angehören, das durch die beiden zerfallenden Flächen zweiter Ordnung $C_{x4,23}\,\Phi_{x13,142} = 0$ und $C_{x3,42}\,\varPhi_{x14,213} = 0$ bestimmt ist. Mithin läßt sich die Gleichung von G auch in die Gestalt setzen:

$$(17) \qquad G \equiv \varkappa_4\, C_{x4,23}\,\Phi_{x13,142} - \varkappa_3\, C_{x3,42}\,\varPhi_{x14,123} = 0,$$

wo $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ Zahlenfaktoren sind. Da aber G, wie unmittelbar ersichtlich, bei Vertauschung irgend zweier der drei Punkte (2), (3), (4) nur sein Vorzeichen wechselt, folgt $\varkappa_3 = \varkappa_4$, und die Flächen G und G' fallen in der Tat zusammen.

Da man mit jeder Ecke von T operieren kann, wie soeben mit der Ecke (1), so gibt es mit Rücksicht auf die drei Darstellungsformen (IV) von G im ganzen zwölf äquivalente Darstellungen von G vom Typus (V).

Damit ist aber nachgewiesen, daß sich die Gleichung der Φ-Höhenfläche G nicht ändert, wenn die fünf Punkte (x), (1), (2), (3), (4) irgend einer Permutation unterworfen werden, und das ist der Inhalt des Zeemanschen, nur auf eine beliebige Fläche zweiter Klasse Φ ausgedehnten Satzes.

Spezialisiert man hinterher die Fläche Φ (I) zum Kugelkreise K, so gehen die Gebilde „Φ-Höhen, Φ-Höhenfußpunkte, Φ-Höhenfläche" eines Tetraeders T über in die elementaren Gebilde „Höhen, Höhenfußpunkte, Höhenfläche" des Tetraeders, und die Eigenschaft des „Konjugiertseins bez. Φ" wird zur elementaren Eigenschaft des „Senkrechtstehens". Im besondern folgt noch, daß die Höhenfläche eines Tetraeders auch die vier Geraden $h_i''(i = 1, 2, 3, 4)$ enthält, die in den Höhenschnittpunkten der Seitendreiecke auf den Ebenen der letzteren senkrecht errichtet sind und eben diese Erscheinung ist, wie auch bei der projektiven Verallgemeinerung, die geometrische Quelle des Zeemanschen Satzes.

Ob nicht den beiden Sätzen, die in dieser und der voraufgehenden Mitteilung untersucht sind, ein allgemeines Prinzip zugrunde liegt, dahingehend, daß es eine ganze Klasse von Flächen gibt, die zu einem Tetraeder und einer gegebenen (eventuell ausgearteten) Fläche zweiter Klasse Φ in kovarianter Beziehung stehen, und die in sich übergehen, wenn man den laufenden Punkt derselben mit irgend einer der Ecken des Tetraeders vertauscht, muß weiterer Untersuchung vorbehalten bleiben.

Königsberg i. Pr., Mai 1905.

Über Aufnahme von Wechselstromkurven durch Oszillographen und ihre Analyse.

Von E. ORLICH in Charlottenburg.[1])

I. Theorie der Oszillographen.

Oszillographen sind Galvanometer, deren bewegliche Systeme so außerordentlich kleine Abmessungen haben, daß die Ablenkungen den Augenblickswerten eines das Galvanometer durchfließenden veränderlichen Stromes in jedem Augenblick nahezu proportional sind. Sie haben in den letzten Jahren in der Wechselstromtechnik eine größere Bedeutung gewonnen, weil man mittels dieser Apparate in bequemer Weise den Verlauf der Wechselströme innerhalb einer Periode (d. h. ihre Kurvenform) studieren kann.

Erfinder der Oszillographen ist Blondel.[2]) Er hat nicht nur die vollständige Theorie der Apparate entwickelt, sondern auch zuerst seine Ideen in brauchbaren Konstruktionen durchgeführt. Um die weitere Ausbildung der Apparate haben sich verdient gemacht Duddell[3]) (Type der Cambridge Scientific Instrument Cie.) und die Firma Siemens & Halske, die neuerdings gut durchkonstruierte Apparate in den Handel gebracht hat.

Theorie der Oszillographen. — Für die Drehung des beweglichen Systems eines Galvanometers gilt die Differentialgleichung:

(1) $$K\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + A\frac{d\vartheta}{dt} + C\vartheta = F.$$

Darin bedeutet: ϑ den Winkel, welchen das System zur Zeit t mit der Ruhelage des Systems bei stromlosem Galvanometer bildet; K das Trägheitsmoment des beweglichen Systems; A die Dämpfungskonstante (die bremsende Kraft ist proportional der jeweiligen Geschwindigkeit des Systems); C die Direktionskraft (zurücktreibende Richtkraft im stromlosen Galvanometer); F das Drehmoment der äußeren ablenkenden Kraft. Weiter sei zur Abkürzung gesetzt:

(2) $$\Theta = 2\pi\sqrt{\frac{K}{C}}, \qquad \alpha = \frac{A}{2\sqrt{CK}}.$$

1) Der größte Teil dieser Arbeit entstammt dem Werkchen des Verfassers: Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven (Bd. VII der Elektrotechnik in Einzeldarstellungen, herausgegeben von Dr. Benischke) Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig.

2) Compt. rend. **116**, 502, 748. 1893.

3) Electrician **39**, 636. 1897.

Ist das Galvanometer stromlos, so ist $F = 0$, und die Gleichung hat das Integral:

$$(3)\qquad \vartheta_0 = e^{-\frac{2\pi\alpha}{\theta}t} M \sin\left(\frac{2\pi t}{\theta}\sqrt{1-\alpha^2} + \mu\right),\ \text{wenn } \alpha < 1$$

$$(4)\qquad \vartheta_0 = M e^{-\frac{2\pi\alpha}{\theta}t},\ \text{wenn } \alpha = 1,$$

$$(5)\qquad \vartheta_0 = e^{-\frac{2\pi\alpha}{\theta}t}\left[M_1 e^{\frac{2\pi t}{\theta}\sqrt{\alpha^2-1}} + M_2 e^{-\frac{2\pi t}{\theta}\sqrt{\alpha^2-1}}\right],\ \text{wenn } \alpha > 1$$

(M, μ, M_1, M_2 sind Integrationskonstanten).

In jedem Fall wird also $\vartheta_0 = 0$ für $t = \infty$, d. h. das bewegliche System des stromlosen Galvanometers kehrt schließlich in die Ruhelage zurück. Ist die Dämpfung nur schwach ($\alpha < 1$), so führt es mehr oder weniger rasch abnehmende Schwingungen von der Dauer $\theta/\sqrt{1-\alpha^2}$ aus. θ ist die Dauer der Eigenschwingung des ungedämpften ($\alpha = 0$) beweglichen Systems.

Sei nun das äußere ablenkende Drehmoment F nicht gleich Null, sondern ebenfalls mit der Zeit veränderlich. Hat man ein partikuläres Integral ϑ_1 gefunden, welches der Gleichung (1) genügt, so ist $\vartheta_1 + \text{Const.}\,\vartheta_0$ das allgemeine Integral, d. h physikalisch gesprochen, über die Ablenkung ϑ_1, die von der äußeren Kraft herrührt, lagert sich beim Einschalten die mehr oder weniger gedämpfte Eigenbewegung des beweglichen Systems, die nach einer gewissen Zeit praktisch verschwindet und nur bei einer etwaigen Diskontinuität von F wieder hervortreten kann. Kommt es darauf an, daß ϑ_0 möglichst rasch verschwindet, so ist es, wie leicht einzusehen ist, am günstigsten, den Dämpfungsgrad so groß zu machen, daß $\alpha = 1$ ist.

Die ablenkende Kraft werde nun hervorgebracht durch einen Wechselstrom von beliebiger Kurvenform; dann kann man F in einer Fourierschen Reihe darstellen:

$$(6)\qquad F = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \sin(k\,\omega t - \varphi_k),$$

wo ω das Produkt aus 2π und Frequenz (Periodenzahl pro Sekunde) des Wechselstromes bedeutet. Man findet das Integral:

$$(7)\qquad \vartheta_1 = \frac{1}{C}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k}{\sqrt{(1-k^2\lambda^2)^2 + 4\alpha^2 k^2\lambda^2}} \sin(k\,\omega t - \varphi_k - \gamma_k);$$

darin ist zur Abkürzung gesetzt

$$(8)\qquad \lambda = \frac{\theta}{\tau}\ (\tau \text{ Dauer einer Wechselstromperiode})$$

$$(9)\qquad \operatorname{tg}\gamma_k = \frac{2\alpha k\lambda}{1-k^2\lambda^2}.$$

Soll der Oszillograph richtige Kurvenbilder geben, so müßte F proportional ϑ_1 sein; abgesehen von einer Konstanten müßten also die Reihen (6) und (7) übereinstimmen. Dies ist in aller Strenge nicht möglich, vielmehr sind die Teilamplituden der Abbildung im Verhältnis $\varepsilon = 1 : \sqrt{(1 - k^2\lambda^2)^2 + 4\alpha^2 k^2 \lambda^2}$ verkleinert und die Teilwellen in der Phase um γ_k gegen die entsprechenden von F verschoben. Es handelt sich also darum, die Bedingungen aufzusuchen, unter denen die Verzerrungen möglichst gering werden. Zu dem Zwecke sind in Fig. 1 die Werte von ε als Funktionen von $(k\lambda)$ für verschiedene Dämpfungsgrade α aufgetragen. Wie man sieht, weicht ε z. T. sehr stark von dem gewünschten Wert 1 ab. Die günstigsten Resultate erhält man für $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $k\lambda < 0{,}1$.

Nun bedeutet λ nach Gl. (8) das Verhältnis der Schwingungsdauer der Eigenschwingung des ungedämpften beweglichen Systems zur Periodendauer des aufzunehmenden Wechselstromes. Die Zahl

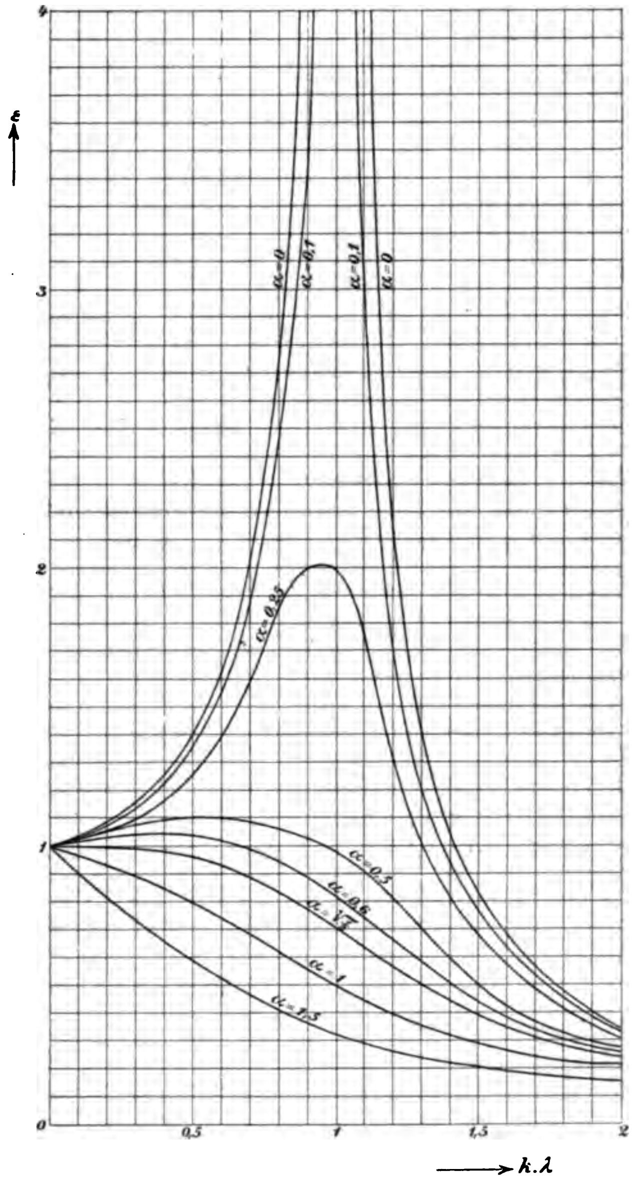


Fig. 1

wird man, da k (die Ordnungszahl der Oberschwingungen) große Werte annehmen kann, nur klein wählen dürfen.

Die Erfahrung hat gelehrt, daß es gelingt, die Frequenz der Eigenschwingungen des beweglichen Systems auf 5000 und mehr zu bringen. Hat man es also mit dem in der Praxis am häufigsten vorkommenden Wechselstrom von der Frequenz 50 zu tun, so genügt es $\lambda = \frac{1}{100}$ zu setzen.

Man berechnet für $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$ folgende Tabelle:

$k\lambda$	ε	γ_x
0,1	1,000	$8{,}01^0$
0,2	1,000	$16{,}42^0$
0,3	0,996	25^0
0,4	0,987	$33{,}95^0$.

Ist also $\lambda = \frac{1}{100}$, so wird die Amplitude bis zur zwanzigsten Oberschwingung bis auf $\frac{1}{1000}$ ihres Wertes genau abgebildet, ist λ nur $\frac{1}{50}$, so beträgt bei der zwanzigsten Oberschwingung der Fehler erst 1,3%. Um den Einfluß von γ_k beurteilen zu können, hat man zu bedenken, daß sämtliche Teilwellen verschoben sind, und die Verschiebung in Bruchteilen der Länge der Grundwelle auszudrücken; da nun die Grundwelle $k$mal so lang ist, als die k^{te} Oberwelle, so ist $\frac{\gamma_k}{k\,360}$ zu berechnen. Das ergibt bei $\lambda = \frac{1}{50}$

für $k =$	1	5	10	15	20
$\frac{\gamma_k}{k}$	0,00450	0,00445	0,00456	0,00463	0,00472

d. h. sämtliche Teilwellen werden nahezu um den gleichen Betrag verschoben. Ist z. B. eine Periode der fertig gezeichneten Kurve 100 mm lang, so beträgt die Verschiebung der einzelnen Teilwellen: 0,45, 0,45, 0,46, 0,46, 0,47 mm, d. h. sämtliche Teilwellen sind praktisch um denselben Betrag verschoben; das Kurvenbild erfährt also keine Veränderung.

Man kommt demnach zu folgendem Ergebnis: Enthält die aufzunehmende Kurve Diskontinuitäten, so ist die Dämpfung groß ($\alpha = 1$) zu wählen, weil hierdurch die Eigenschwingungen, die sich über das Kurvenbild lagern, verschwinden. Sind solche Unstetigkeiten nicht vorhanden, so empfiehlt es sich, schwächer zu dämpfen $\left(\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, um die aufzunehmende Kurve möglichst treu abbilden zu können.

II. Ausführungsformen der Oszillographen.

Nachdem die allgemeinen Bedingungen, welche die schwingenden Systeme der Oszillographen zu erfüllen haben, festgestellt sind, hat man nach passenden Konstruktionsformen zu suchen, die diesen Bedingungen genügen. Dazu erinnern wir uns, daß es zwei Formen von Galvanometern gibt: die Nadelgalvanometer, bei denen die Stromleiter fest sind, und der Magnet beweglich ist, und die Spulengalvanometer, bei denen die Stromleiter beweglich und die Magnete fest sind.

Dementsprechend gibt es zwei Oszillographentypen: die *Nadeloszillographen* und die *bifilaren Oszillographen.*

Die Nadeloszillographen sind von Blondel in verschiedenen Formen ausgeführt worden.[1]) Bei den älteren Apparaten (Fig. 2) besteht das bewegliche System aus einem schmalen Eisenblech M, das durch einen permanenten Magneten oder einen Elektromagneten NS quermagnetisiert wird. Um die magnetischen Kraftlinien auf das Blech zu konzentrieren, sind in die Pole zwei dünne trapezförmige Polschuhe PP eingesetzt. Das Eisenblech endet oben und unten in Spitzen, die in Steinen gelagert sind; auf der Mitte des Bleches ist ein winziger Spiegel befestigt. Zu beiden Seiten der Nadel sind zwei Spulen BB' aufgestellt, welche von dem zu untersuchenden Wechselstrom durchflossen werden. Die Pole PP sind in horizontaler Richtung unterteilt, weil sonst das von den Spulen BB' erzeugte Wechselfeld in den Polen störende Wirbelströme erzeugen würde.

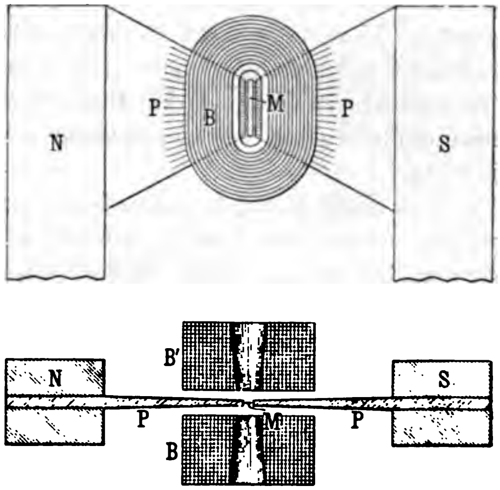


Fig. 2.

Unterbricht man den Kraftlinienweg des Richtungsmagneten an zwei Stellen, so kann man zwei Systeme unterbringen und auf die Weise gleichzeitig zwei Kurven aufnehmen (z. B. Strom und Spannung), und ihre Lage zueinander studieren.

Eine wesentliche Vereinfachung und Vervollkommnung des Nadeloszillographen wurde dadurch erzielt, daß Blondel die Nadel durch

1) Zu beziehen durch Carpentier, Paris, Rue Delambre.

ein schmales 0,2 bis 0,3 mm dickes Eisenband ersetzte, das durch ei Feder zwischen den Polen eines Magneten ausgespannt wird. D zwischen den Polen PP befindliche Teil wird durch zwei Stege b grenzt. Auch bei dieser Anordnung wird das Band quermagnetisi und bildet gewissermaßen eine unendliche Zahl kleiner Magnetnade die übereinander angeordnet sind. Die Richtkraft wird nicht nur v dem starken magnetischen Felde geliefert, in dem das Band sich b findet, sondern sehr erheblich von der Torsion, die ihrerseits von Zugspannung des Bandes abhängt. Mit dieser Type ist es Blond gelungen, die Frequenz der Eigenschwingungen des beweglichen Syste auf 50000 zu steigern.

Zu einer getreuen Abbildung gehört aber auch, wie oben a einandergesetzt, eine Dämpfung von ganz bestimmter Größe. Zu d Zweck ist das bewegliche System in ein mit Öl gefülltes Röhrc gesetzt. Vaselinöl genügt für alle Fälle, wo es sich nicht um s rapide Stromänderungen handelt; Ricinusöl bei gewöhnlicher Tempe tur dämpft etwas zu stark. Eine Regulierung der Dämpfung ka man durch Ändern der Öltemperatur oder durch Mischen zweier C bewirken.

Die Nadeloszillographen haben gegenüber den bifilaren den nic zu unterschätzenden Vorteil, daß sie auch einer gröberen Behandlu standhalten; selbst größere Stromüberlastungen schaden ihnen nicht dem steht gegenüber, daß sie unempfindlicher sind als die bifilare Bei einer Eigenfrequenz 6000 und einem Spulenwiderstand von 3 Oh sind etwa 0,3 Ampere erforderlich, um brauchbare Kurven zu erhalte Außerdem kann durch die Selbstinduktion der ablenkenden Spule ein Verzerrung der aufzunehmenden Kurve eintreten. Dies ist namentlic zu befürchten, wenn der Apparat zur Aufnahme einer Stromkurve im Nebenschluß zu einem Abzweigwiderstand gebraucht werden soll.

Bifilare Oszillographen. Um die Eigenfrequenz der beweglichen Spule möglichst groß zu machen, muß ihre Richtkraft möglichst groß ihr Trägheitsmoment möglichst klein werden. Man erreicht dies an einfachsten dadurch, daß man die Spule durch eine bifilare Schleif ersetzt, bestehend aus zwei einander parallelen, dicht nebeneinande gespannten Stromleitern (Blondel). Quer über die Mitte beider Bände ist ein kleiner Spiegel geklebt. Der Spiegel m (Fig. 3) läßt sich an besten befestigen, wenn man an Stelle runder Drähte schmale Bänder b nimmt (Duddell), die durch eine Rolle R gleichmäßig gespann werden und durch den Klotz L derart geführt werden, daß ihre flache Seiten in einer Ebene liegen. Um eine genügende Stromempfindlich keit zu erzielen muß die Bifilarschleife in ein möglichst starkes mag netisches Feld gebracht werden. Man bringt deshalb das bewegliche System in den Luftraum eines kräftigen Elektromagneten, dessen Pole *NS* zugeschärft werden, um die Kraftlinien auf die Bänder zu konzentrieren.

Sollen gleichzeitig mehrere Kurven aufgenommen werden, so wird auch hier der Kraftlinienweg durch mehrere Luftzwischenräume unterbrochen, in welche die Systeme eingesetzt werden. Die Dämpfung wird genau ebenso wie bei den Nadeloszillographen durch Öl bewerkstelligt.

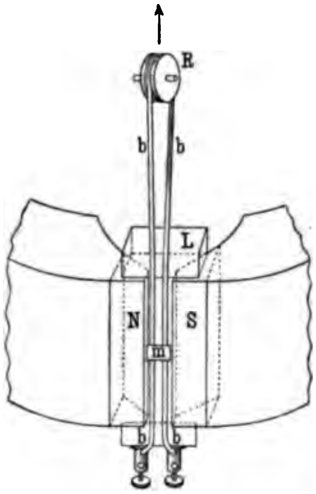


Fig. 3.

Die bifilaren Oszillographen haben gegenüber den Nadeloszillographen den Vorteil, daß sie praktisch induktionslos sind und eine größere Empfindlichkeit besitzen. Sie können sehr gut im Nebenschluß gebraucht werden. Demgegenüber sind sie viel leichter Beschädigungen ausgesetzt. Eine Stromüberlastung hat ein Reißen der Bänder und in der Regel damit einen Verlust des Spiegelchens zur Folge; letzterer wird schon durch ein ungleichmäßiges Anspannen der beiden Bänder gefährdet. Das Einziehen neuer Bänder erfordert ziemliche Übung und Geschicklichkeit.

Die Richtkraft des aus Bändern bestehenden beweglichen Systems wird nicht nur durch die geradlinig hin- und herschwingende Bewegung, sondern auch wesentlich durch die Torsion der Bänder verursacht.

Mit Aluminiumbändern von 10 bis 15 mm Länge erzielte Blondel Eigenschwingungen von 10000 bis 15000 pro Sekunde und eine Empfindlichkeit von 4 cm für 0,1 Ampere bei $\frac{1}{2}$ m Skalenabstand. Dabei hatte der Spiegel eine Fläche von 1,5 $\times$ 0,5 mm und war 0,1 bis 0,2 mm dick.

Die Eigenfrequenz der Apparate von Siemens und Halske (Fig. 4), ist normalerweise 6000 pro Sekunde. 0,1 Amp. geben bei 0,5 m Skalenabstand etwa 4 bis 5 cm Ausschlag. Wird die Eigenfrequenz auf 4000 in der Sekunde erniedrigt, so wird die Empfindlichkeit etwa zehnmal so groß.

Eine gewisse Schwierigkeit bildet bei den winzigen Spiegeln, die angewandt werden müssen, die Optik der Oszillographen. Ein wesentliches Moment bildet dabei die von Boys eingeführte Zylinderlinse, die jetzt allgemein verwandt wird. Als Lichtquelle wird eine Bogen-lampe benutzt, die zweckmäßig etwas schräg aufgestellt wird, damit der helle Krater A (Fig. 5) der positiven Kohle in horizontaler Richtung möglichst intensive Strahlen aussenden kann.

Fig. 4.

Durch ein Linsensystem oder eine einfache Linse werden die Lichtstrahlen auf den Oszillographenspiegel M konzentriert, wobei in den Strahlengang ein vertikaler Schlitz S eingeschaltet ist. Hält man in den reflektierten Strahlengang ein Papier, so erblickt man eine schmale vertikale Lichtlinie. Diese wird durch die Zylinderlinse Z in einen

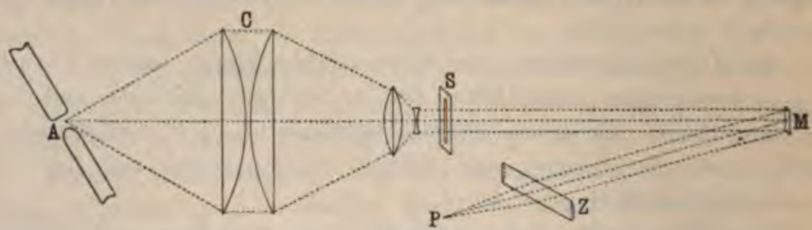


Fig. 5.

Punkt P zusammengezogen; Z ist so gestellt, daß S und P konjugierte Punkte der Linse bilden. Oszilliert M um eine vertikale Achse, so schwingt P in horizontaler Richtung hin und her. Auf einem in P angebrachten Schirm erblickt man daher bei stromdurchflossenem Oszillograph eine helle Linie.

Um nun die Kurve selbst sichtbar zu machen, hat man dem schwingenden Lichtstrahl senkrecht zur Schwingungsrichtung eine zweite

Bewegung proportional der Zeit zu erteilen. Dies geschieht am einfachsten dadurch, daß man den schwingenden Lichtstrahl im rotierenden Spiegel betrachtet, wobei die Achse dieses Spiegels parallel zur Schwingungsrichtung des Strahles verlaufen muß.

Treibt man den Spiegel durch einen passenden Synchronmotor an, so kann man auf einer Mattscheibe das Bild der Kurve erblicken (**Blondel, Duddell**). Störend wirkt dabei zuweilen das Pendeln des Synchronmotors.

Die Kurven können photographiert werden, wenn man die Mattscheibe durch eine photographische Kassette ersetzt. Hat man Pendeln des Synchronmotors zu befürchten, so muß durch einen geeigneten Kontakt Vorsorge getroffen werden, daß nur während einer Welle die Platte den Lichtstrahlen ausgesetzt wird. Oder man verwendet statt rotierenden Spiegels und Synchronmotors in bekannter Weise eine fallende photographische Platte.

(Fortsetzung folgt.)

Rezensionen.

John Edward Campbell. Introductory treatise on Lie's theory of finite continuous transformation groups. XX, 416 S. Oxford 1903, at the Clarendon Press.

Lies „Theorie der Transformationsgruppen", in drei Bänden, bearbeitet von Engel, gibt eine abstrakte Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, in der alles das zu einem monumentalen Bau zusammengetragen worden ist, was Lie im Laufe von Jahrzehnten geschaffen hatte. Dabei traten didaktische oder pädagogische Rücksichten vollkommen in den Hintergrund. Lie selbst erkannte, daß das große Hauptwerk doch immer noch eine Lücke lassen würde, daß nämlich der Wunsch nach elementaren und weniger umfangreichen Einführungen in seine Disziplin bestehen bleiben würde. Aus dieser Erkenntnis entsprang der Entschluß zur Herausgabe zweier Werke, die während der Drucklegung der „Theorie der Transformationsgruppen" vom Rezensenten für Lie ausgearbeitet wurden. Eine ähnliche Tendenz wie das zweite dieser Bücher, die „Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen" (1893), verfolgt Campbell; und daher darf es wohl dem Rezensenten gestattet sein, zunächst auf jene Hauptpunkte hinzuweisen, in denen diese beiden Einleitungen erheblich voneinander abweichen.

Vor allem ist das Campbellsche Werk äußerlich gerade halb so umfangreich, gewiß ein empfehlender Umstand. Zweitens enthält es alle wesentlichen Teile der Lieschen Theorie in genügender Ausdehnung, abgesehen nur von jenen Untersuchungen, die sich auf die Bestimmung der Typen von Zusammensetzungen von Gruppen beziehen; so z. B. auch die Theorie der Berührungstransformationen, die in dem Buche des Rezensenten beiseite gelassen wurde, weil ihnen ein anderer, später erschienener Band gewidmet werden sollte. Das Campbellsche Buch birgt überhaupt eine außerordentliche Stofffülle in sich; und der Rezensent darf, wenn er auch nicht jede Seite davon gelesen hat, sein Urteil dahin zusammenfassen, daß die Liesche Theorie eine exakte und angemessene Wiedergabe gefunden hat, und daß das Campbellsche Buch in hohem Maße dazu geeignet ist, schnell über den weiten Umfang der Lieschen Gruppentheorie zu orientieren. So sehr dies unumwunden anzuerkennen ist, muß doch betont werden, daß dieser Vorzug notwendig einen Übelstand nach sich zieht: Das Buch ist außerordentlich knapp geschrieben, und der Leser, der die Lieschen Untersuchungen erst aus ihm kennen lernen will und unter dem wir uns einen Studenten in älteren Semestern vorstellen, hat gewiß keine leichte Arbeit. Rezensent hatte, wenn ein Gleichnis gebraucht werden darf, eine breite, sanft ansteigende Fahrstraße eingeschlagen; Campbell jedoch schlägt von vornherein steile Fußpfade ein, die jenen sicherlich viele langweilenden bequemen Weg bedeutend abkürzen. Wer aber wollte bestreiten, daß gar mancher Tourist, der marschtüchtig genug ist, diese mühevollen, aber kürzeren Pfade vorzieht, zumal er dabei noch dadurch belohnt wird, daß er mehr zu sehen bekommt als auf jenem glatten Wege, der manchen lohnenden Aussichtspunkt beiseite gelassen hat?

Nachdem sich Rezensent erlaubt hat, das Campbellsche Buch mit dem zitierten in Vergleichung zu bringen, sei nun besonders ein charakteristischer Zug des neuen Werkes hervorgehoben. Wenn Campbell im Vorworte sagt, daß selbst diejenigen, die mit der Theorie der Transformationsgruppen vertraut sind, etwas Neues in der Form finden werden, in der die Theorie hier dargeboten wird, so hat er vollkommen recht. Lie hatte bei der Abfassung des großen dreibändigen Hauptwerkes von vornherein die Absicht, im wesentlichen nur seine eigenen Untersuchungen zu bringen, und erst am Schlusse des dritten Bandes gab er kurze Übersichten über gleichzeitige Arbeiten anderer. Nachdem er damit zu seinem guten Rechte gekommen war, darf aber heute sehr wohl der Wunsch gehegt werden, diejenigen Bausteine, die von anderen zu seinem Werke herbeigetragen worden sind, beim Aufbau mit verwendet zu sehen. So z. B. bedeuten Schurs Arbeiten über die Fundamentalsätze der Gruppentheorie eine wesentliche Bereicherung. Und deshalb ist es nur anzuerkennen, daß Campbell diese Arbeiten bei den Beweisen der Fundamentalsätze, namentlich beim Beweise des zweiten, mit berücksichtigt. Da ist es nun recht interessant zu sehen, wie der englische Mathematiker, den seiner Heimat vertrauten Operationskalkul in weitem Maße benutzend, eine Reihe der Schurschen Überlegungen in ein neues Gewand kleidet. Wir verweisen dabei insbesondere auf das vierte Kapitel. Die Formeln werden, wenn sie uns deutschen Mathematikern so auch weniger vertraut erscheinen, recht kurz und übersichtlich. Nur will es dem Rezensenten scheinen, als ob die Frage, für welche Variabilitätsbereiche die Entwicklungen gelten, etwas genauer hätte untersucht werden sollen, selbst wenn man nicht in funktionentheoretischer Richtung soweit gehen will, wie es Schur getan hat und wie es für ein einleitendes Werk ja auch nicht wohl am Platze ist.

Das Werk zerfällt in 25 Kapitel, von denen das erste auf nur 22 Seiten die Begriffe: Transformation, Gruppe, endliche kontinuierliche Gruppe, infinitesimale Transformationen der Gruppe, Klammerausdrücke, Isomorphismus, Parametergruppen, lineare homogene Gruppen, ausgezeichnete Untergruppen, projektive Gruppen usw. bringt. Zu Beginn des zweiten Kapitels über erweiterte Punkttransformationen fällt es auf, daß von der Ausführung von Punkttransformationen auf Differentialgleichungen die Rede ist, bevor definiert wird, was das heißt. Im 3. Kapitel über die Erzeugung der Gruppe aus ihren infinitesimalen Transformationen wird u. a. Engels Beispiel einer endlichen kontinuierlichen Gruppe ohne identische Transformation gebracht, und das vierte gibt die Beweise der beiden ersten Fundamentalsätze, wovon schon vorhin die Rede war, während das fünfte den Beweis des dritten Fundamentalsatzes bringt, indem nach Lie dargetan wird, daß man eine Gruppe mit der gegebenen Zusammensetzung konstruieren kann. So werden auf nur 80 Seiten die Grundlagen der gesamten Theorie entwickelt.

Das 6., 7. und 8. Kapitel sind der Theorie der Differentialgleichungen gewidmet, die Gruppen gestatten. Von besonderer Bedeutung ist das achte, in dem es dem Verfasser in sehr anschaulicher Weise gelingt, ausgehend vom Beispiele der Invariantentheorie der binären Formen, klarzulegen, wie zu jeder Gruppe analoge Invariantentheorien gehören, wodurch dann die Verbindung mit den von Klein in seinem Erlanger Programme in ihren großen Zügen skizzierten Ideen hergestellt ist und dem Leser ein Begriff von der Bedeutung der Theorie für die gesamte Mathematik, insbesondere für ihre Methodik, gegeben wird.

Die Kapitel vom 9. bis zum 13. gehören wieder enger zusammen; ihr Hauptthema ist die Ähnlichkeit und der Isomorphismus von Gruppen. Systatische Gruppen nennt Campbell übrigens stationär.

Wir sind hier etwa bis zur Mitte des Werkes gelangt, und wer das Buch bis hierhin studiert hat, wird einen reichlichen und schön abgerundeten Abriß von der allgemeinen Theorie der kontinuierlichen Gruppen und ihren Anwendungen auf Invariantenprobleme kennen gelernt haben.

Von der zweiten Hälfte des Werkes berichten wir nur in kürzester Form, da die zu gebenden Stichworte den Kenner genügend orientieren werden. Pfaffsche Gleichungen, Funktionengruppen, Berührungstransformationen und ihre Erweiterungen bilden den Inhalt der Kapitel bis zum 19. Das 20. bespricht die Differentialinvarianten unter allgemeinen Gesichtspunkten. Der Rest des Buches gibt Anwendungen im engeren Kreise, doch muß bemerkt werden, daß schon von Anfang an überall wichtige Beispiele in die allgemeinen Entwicklungen eingestreut sind. In den Kapiteln 21—24 werden die Gruppen von Punkttransformationen der Geraden, der Ebene und des Raumes sowie die Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene abgehandelt, während das letzte Kapitel, wie Campbell selbst hervorhebt, im wesentlichen eine Bearbeitung von des Rezensenten Darstellung des Zusammenhanges zwischen höheren komplexen Zahlen und einfach transitiven Gruppen in dem oben erwähnten Werke ist. Wir vermissen aber hierin den Namen Studys für den fundamentalen Satz dieser Theorie.

Man sieht, daß Campbell im wesentlichen einen Fortschritt vom Allgemeinen zum Speziellen liebt, wie es ja auch in Lies großem Hauptwerke der Fall ist. Es muß allerdings dabei gesagt werden, daß der Verfasser dennoch, wie schon angedeutet, überall erläuternde Beispiele einstreut. Ob man den Weg vom Allgemeinen zum Speziellen oder umgekehrt vorzieht, ist ja Geschmacksache, und wenn man gereiftere Leser für ein Buch voraussetzt, ist der erstere unbedenklich. Dennoch sei es erlaubt, die Meinung auszudrücken, daß dem Rezensenten der umgekehrte Weg für eine Einführung besser geeignet erscheint, wenn er auch den Nachteil hat, daß dem Leser die Haupttheoreme erst viel später vollkommen geboten werden können. Die Art des Campbellschen Vorganges jedoch wird insbesondere solchen Fachmathematikern sympathischer sein, die einen schnellen Eingang in die Lieschen Theorien gewinnen wollen. Wir dürfen daher das Werk ganz besonders den älteren Mathematikern hierfür empfehlen.

Der Druck ist mit der nötigen Sorgfalt überwacht, ein ausführliches Sachregister beschließt den Band.

Darmstadt. G. Scheffers.

L. Heffter und **C. Köhler. Lehrbuch der analytischen Geometrie.** Bd. I. XVI, 526 S. gr. 8°. Leipzig 1905, B. G. Teubner.

Mit diesem Werke legen die Herren Verfasser der mathematischen Welt den ersten Teil eines durchaus modernen Lehrbuches der analytischen Geometrie vor, denn es entwickelt diese Disziplin nach den Grundsätzen, die uns heute nach Cayley und F. Klein als die einzig richtigen erscheinen müssen. Nach Herrn F. Klein haben wir nämlich bei systematischen geometrischen Forschungen vom Begriffe der Transformationsgruppe auszugehen; jeder Gruppe von Transformationen, die sich auf irgendwelche Raumelemente beziehen, entspricht eine besondere Art der Geometrie, diejenige Geometrie nämlich, die nur mit solchen Begriffen arbeitet, welche gegenüber allen Transformationen der Gruppe invariant sind. Für unser Buch kommen nur die Gruppe der *projektiven Transformationen* und ihre geometrisch wichtigsten Untergruppen, die der *affinen* und der *äquiformen* oder *Ähnlichkeitstransformationen*, in Betracht. Wir treiben dementsprechend, indem wir von der Hauptgruppe zu den Untergruppen vorschreiten, nacheinander *projektive*, *affine* und *äquiforme Geometrie*, wobei wir ganz im Einklang mit Cayley die sogenannten metrischen Begriffe der affinen und äquiformen Geometrie durchweg als mit Hilfe der unendlichfernen Raumelemente *spezialisierte projektive Begriffe* erhalten.

Schon dieses Wenige dürfte zur Genüge zeigen, wie sehr sich unser Buch von den üblichen Lehrbüchern der analytischen Geometrie unterscheidet. Von vorn herein herrscht ein fester Plan, nach dem das Lehrgebäude aufgeführt wird, nichts erscheint willkürlich in der Anordnung des Stoffes, sondern jedem Gegenstand ist eine bestimmte Stelle zugewiesen, an der er zuerst behandelt werden kann. Durch systematisches Spezialisieren von projektiven Sätzen werden wir die affine und äquiforme Geometrie mit neuen Sätzen bereichern; tritt uns umgekehrt ein Satz entgegen, so werden wir daran gewöhnt zu fragen, welcher Geometrie er angehört; ist es ein affiner oder äquiformer Satz, so werden wir weiter fragen, ob er sich projektiv verallgemeinern läßt, und so zu neuen projektiven Sätzen gelangen können. Wir dürfen daher nicht nur das von den Verfassern befolgte Prinzip mit diesen als „ordnend und klärend" bezeichnen, sondern auch ihre Methode eine fruchtbare und ungemein anregende nennen.

Sehen wir jetzt zu, wie das Lehrgebäude der Geometrie nach dem eben in den Grundzügen entworfenen Plane im Euklidischen Raume aufgeführt wird. Die Bausteine bilden, wie in der Einleitung ausgeführt wird, die einfachsten Raumelemente: der Punkt, die Gerade und die Ebene; verbunden werden sie durch die drei elementaren Beziehungen der Inzidenz, der Parallelität und der Orthogonalität, die durch Einführung der unendlich fernen (uneigentlichen) Raumelemente und der orthogonalen Paarung von Punkten und Geraden der uneigentlichen Ebene sämtlich als Inzidenzbeziehungen aufgefaßt werden können.

Nachdem hierauf die Teilgebiete des Raumes, die Grundgebilde I. und II. Stufe definiert wurden — der Raum selbst erscheint als Grundgebilde III. Stufe —, kann eine Klassifikation der Geometrie nach den benutzten Gebieten erfolgen; wir haben diesen entsprechend die Geometrie in den Grundgebilden I., II. und III. Stufe zu unterscheiden.

Die von den Verfassern aufgestellten Definitionen der verschiedenen Geometrien (S. 16) können uns ferner durchaus nicht befriedigen, denn sie geben wohl eine Klassifikation der *Beziehungen zwischen den Elementen* eines Grundgebildes, aber nicht eine Klassifikation der *Lehrsätze.* Man könnte, um die Definitionen zu halten, vielleicht sagen, daß jeder Lehrsatz aus Beziehungen $\mathfrak{A}$ Beziehungen $\mathfrak{B}$ folgere, also gewissermaßen ein Komplex von Beziehungen vorstelle und somit nach jenen Definitionen klassifiziert werden könne. Dem gegenüber aber ist zu bemerken, daß ein Lehrsatz wohl immer aus einer Beziehung $\mathfrak{A}$ eine Beziehung $\mathfrak{B}$ folgert, daß aber $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht immer Beziehungen zwischen den *Elementen*, wohl aber immer Beziehungen zwischen *Begriffen* vorstellen. Sind z. B. A, B, C, D vier beliebige Punkte einer Geraden, so ist durch die drei Abstandsverhältnisse

$$\frac{AB}{AC} \equiv (A, BC) \equiv (BC, A), \ (A, CD), \ (A, DB)$$

eine Beziehung $\mathfrak{A}$ zwischen den 4 Punkten A, B, C, D gegeben; aus dieser folgt die Beziehung $\mathfrak{B}$:

$$(A, BC)(A, CD)(A, DB) = 1.$$

Diese Beziehung $\mathfrak{B}$ ist aber eine Beziehung *zwischen Abstandsverhältnissen* und keine Beziehung *zwischen den Punkten* A, B, C, D. Denn eine Beziehung zwischen den Elementen eines Grundgebildes kann — analytisch gesprochen — nur durch eine oder mehrere nicht identische Gleichungen zwischen den Koordinaten der Elemente gegeben sein. Wir würden, um unseren Standpunkt kurz zu präzisieren, etwa so vorgehen[1]):

Die Elemente eines Grundgebildes können wir als geometrische Grundbegriffe bezeichnen. Indem wir die Elemente eines Grundgebildes — unter Zuhilfenahme des Zahlenbegriffes — miteinander in Beziehung setzen, gelangen wir zu neuen geometrischen Begriffen, die wir als abgeleitete Begriffe bezeichnen können. Ein geometrischer *Begriff* heißt ein projektiver, affiner, äquiformer Begriff, wenn er bei allen Transformationen der projektiven, affinen, äquiformen Gruppe ungeändert bleibt. Diejenigen *Eigenschaften einer Figur,* die durch projektive, affine, äquiforme Begriffe allein beschrieben werden können, heißen projektive, affine, äquiforme Eigenschaften der Figur. Formeln, die solche Eigenschaften analytisch darstellen, werden projektive usw. Formeln genannt. Ein geometrischer *Lehrsatz*, in dem ausschließlich projektive, affine, äquiforme Begriffe auftreten, heißt ein projektiver, affiner, äquiformer Lehrsatz. Ein solcher Lehrsatz folgert aus projektiven usw. Eigenschaften einer Figur andere ebensolche Eigenschaften. — Der Teil der Geometrie, der nur projektive, affine, äquiforme Lehrsätze enthält, heißt die *projektive, affine, äquiforme Geometrie.* Man kann die projektive usw. Geometrie auch als die Lehre von den projektiven usw. Eigenschaften der Figuren bezeichnen. — Affine (äquiforme) Begriffe, Formeln, Lehrsätze, die nicht projektiv (affin) sind, heißen parallelmetrische (orthogonalmetrische) Begriffe, Formeln und Sätze. Der Teil der affinen (äquiformen) Geometrie,

---

1) Man vergleiche zum folgenden: M. Pasch: Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, S. 74f. und des Ref. Grundlagen für die geom. Anw. der Invariantentheorie, Leipzig 1895, S. 75f. und S. 121.

der nur parallelmetrische (orthogonalmetrische) Sätze enthält, heißt die *Parallelmetrik* (*Orthogonalmetrik*).

Der *Hauptteil* unseres Buches beschäftigt sich zunächst mit der *projektiven Geometrie in der eigentlichen Punktreihe*; wir lernen hier zuerst die Messung einer absoluten Strecke durch eine andere und die Multiplikation einer absoluten Strecke mit einer absoluten Zahl kennen. Will man diese Dinge nicht überhaupt als bekannt voraussetzen, so sollten sie auch wirklich vollständig vorgetragen werden, und Ref. hätte es gern gesehen, wenn dies geschehen, wenn also insbesondere ausführlich dargelegt worden wäre, wie auf Grund des Dedekindschen Stetigkeitsaxioms, auf das nur in einer Anmerkung hingewiesen wird, die erwähnte Multiplikation ausgeführt werden kann. — Nunmehr können das Abstandsverhältnis (AV) eines Punktes in bezug auf zwei beliebige Punkte, die Abszissen als besondere AVe und weiterhin der uneigentliche Punkt der Reihe mit der Abszisse ∞, sowie die imaginären Punkte eingeführt werden. Es wird bei solchen grundlegenden Betrachtungen stets mit sehr anerkennungswerter Strenge verfahren, wie z. B. das Imaginäre hier und späterhin mit besonderer Sorgfalt behandelt wird. Wenn aber die Verfasser den uneigentlichen (unendlich fernen reellen oder imaginären) Punkten des Raumes *alle* übrigen Punkte, also auch die übrigen imaginären Punkte, als eigentliche gegenüberstellen, so kann Ref. dies nicht billigen. Denn von einem imaginären eigentlichen Punkte zu sprechen, erscheint doch als eine Vergewaltigung des Begriffes „eigentlich". Für ganz überflüssig halten wir ferner die Neueinführung: „aggregiert imaginäre" statt „konjugiert imaginäre Punkte", weil eine Verwechslung von konjugiert imaginären Punkten mit Punkten, die in bezug auf ein Gebilde II. Ordnung konjugiert sind, durch das — ohnehin fast nie fehlende — Wort „imaginär" völlig ausgeschlossen werden kann (S. 24—35).

Das Doppelverhältnis (DV)[1]) eines Punktwurfes A, B, C, D wird durch $(ABCD) \equiv \frac{(A, CD)}{(B, CD)}$ definiert, erscheint sonach als Verhältnis zweier AVe. Es ist eine *absolute Invariante* der projektiven Gruppe, und zwar eine *charakteristische*, weil eine ein-eindeutige Zuordnung zweier Punktreihen, bei der jedem Wurf der einen ein Wurf der anderen von gleichem DV entspricht, eine projektive ist. Daraus ergibt sich nach dem in der Einleitung erwähnten Schlusse die wichtige Tatsache, daß jede projektive Beziehung zwischen den Punkten einer Punktreihe sich lediglich auf Beziehungen zurückführen läßt, die durch die Werte von DVen auszudrücken sind. Damit sind wir zu der oben in Aussicht gestellten positiven Charakterisierung der projektiven Geometrie in der Geraden gelangt, und zwar auch von unserem Standpunkt aus. Denn nach dem vorhin Gesagten kann jeder projektive Satz in der Geraden so abgefaßt werden, daß er nur Aussagen über die DVe von Punkwürfen macht. — Hieran schließen sich der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, die DV-Koordinaten, die als naturgemäße Koordinaten der projektiven Geometrie nachgewiesen werden, und endlich die Formeln für die Transformation der DV-Koordinaten, die

---

1) Diese vom Ref. nach einem Vorschlag des Herrn Pasch eingeführte, sehr praktische Abkürzung haben die Herren Verfasser erfreulicherweise adoptiert und weitere analoge Kürzungen eingeführt.

Die von den Verfassern aufgestellten Definitionen der verschiedenen Geometrien (S. 16) können uns ferner durchaus nicht befriedigen, denn sie geben wohl eine Klassifikation der *Beziehungen zwischen den Elementen* eines Grundgebildes, aber nicht eine Klassifikation der *Lehrsätze*. Man könnte, um die Definitionen zu halten, vielleicht sagen, daß jeder Lehrsatz aus Beziehungen $\mathfrak{A}$ Beziehungen $\mathfrak{B}$ folgere, also gewissermaßen ein Komplex von Beziehungen vorstelle und somit nach jenen Definitionen klassifiziert werden könne. Dem gegenüber aber ist zu bemerken, daß ein Lehrsatz wohl immer aus einer Beziehung $\mathfrak{A}$ eine Beziehung $\mathfrak{B}$ folgert, daß aber $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht immer Beziehungen zwischen den *Elementen*, wohl aber immer Beziehungen zwischen *Begriffen* vorstellen. Sind z. B. A, B, C, D vier beliebige Punkte einer Geraden, so ist durch die drei Abstandsverhältnisse

$$\frac{AB}{AC} \equiv (A, BC) \equiv (BC, A),\ (A, CD),\ (A, DB)$$

eine Beziehung $\mathfrak{A}$ zwischen den 4 Punkten A, B, C, D gegeben; aus dieser folgt die Beziehung $\mathfrak{B}$:

$$(A, BC)(A, CD)(A, DB) = 1.$$

Diese Beziehung $\mathfrak{B}$ ist aber eine Beziehung *zwischen Abstandsverhältnissen* und keine Beziehung *zwischen den Punkten* A, B, C, D. Denn eine Beziehung zwischen den Elementen eines Grundgebildes kann — analytisch gesprochen — nur durch eine oder mehrere nicht identische Gleichungen zwischen den Koordinaten der Elemente gegeben sein. Wir würden, um unseren Standpunkt kurz zu präzisieren, etwa so vorgehen[1]):

Die Elemente eines Grundgebildes können wir als geometrische Grundbegriffe bezeichnen. Indem wir die Elemente eines Grundgebildes — unter Zuhilfenahme des Zahlenbegriffes — miteinander in Beziehung setzen, gelangen wir zu neuen geometrischen Begriffen, die wir als abgeleitete Begriffe bezeichnen können. Ein geometrischer *Begriff* heißt ein projektiver, affiner, äquiformer Begriff, wenn er bei allen Transformationen der projektiven, affinen, äquiformen Gruppe ungeändert bleibt. Diejenigen *Eigenschaften einer Figur*, die durch projektive, affine, äquiforme Begriffe allein beschrieben werden können, heißen projektive, affine, äquiforme Eigenschaften der Figur. Formeln, die solche Eigenschaften analytisch darstellen, werden projektive usw. Formeln genannt. Ein geometrischer *Lehrsatz*, in dem ausschließlich projektive, affine, äquiforme Begriffe auftreten, heißt ein projektiver, affiner, äquiformer Lehrsatz. Ein solcher Lehrsatz folgert aus projektiven usw. Eigenschaften einer Figur andere ebensolche Eigenschaften. — Der Teil der Geometrie, der nur projektive, affine, äquiforme Lehrsätze enthält, heißt die *projektive, affine, äquiforme Geometrie*. Man kann die projektive usw. Geometrie auch als die Lehre von den projektiven usw. Eigenschaften der Figuren bezeichnen. — Affine (äquiforme) Begriffe, Formeln, Lehrsätze, die nicht projektiv (affin) sind, heißen parallelmetrische (orthogonalmetrische) Begriffe, Formeln und Sätze. Der Teil der affinen (äquiformen) Geometrie,

---

1) Man vergleiche zum folgenden: M. Pasch: Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, S. 74f. und des Ref. Grundlagen für die geom. Anw. der Invariantentheorie, Leipzig 1895, S. 75f. und S. 121.

der nur parallelmetrische (orthogonalmetrische) Sätze enthält, heißt die *Parallelmetrik* (*Orthogonalmetrik*).

Der *Hauptteil* unseres Buches beschäftigt sich zunächst mit der *projektiven Geometrie in der eigentlichen Punktreihe*; wir lernen hier zuerst die Messung einer absoluten Strecke durch eine andere und die Multiplikation einer absoluten Strecke mit einer absoluten Zahl kennen. Will man diese Dinge nicht überhaupt als bekannt voraussetzen, so sollten sie auch wirklich vollständig vorgetragen werden, und Ref. hätte es gern gesehen, wenn dies geschehen, wenn also insbesondere ausführlich dargelegt worden wäre, wie auf Grund des Dedekindschen Stetigkeitsaxioms, auf das nur in einer Anmerkung hingewiesen wird, die erwähnte Multiplikation ausgeführt werden kann. — Nunmehr können das Abstandsverhältnis (AV) eines Punktes in bezug auf zwei beliebige Punkte, die Abszissen als besondere AVe und weiterhin der uneigentliche Punkt der Reihe mit der Abszisse ∞, sowie die imaginären Punkte eingeführt werden. Es wird bei solchen grundlegenden Betrachtungen stets mit sehr anerkennungswerter Strenge verfahren, wie z. B. das Imaginäre hier und späterhin mit besonderer Sorgfalt behandelt wird. Wenn aber die Verfasser den uneigentlichen (unendlich fernen reellen oder imaginären) Punkten des Raumes *alle* übrigen Punkte, also auch die übrigen imaginären Punkte, als eigentliche gegenüberstellen, so kann Ref. dies nicht billigen. Denn von einem imaginären eigentlichen Punkte zu sprechen, erscheint doch als eine Vergewaltigung des Begriffes „eigentlich". Für ganz überflüssig halten wir ferner die Neueinführung: „aggregiert imaginäre" statt „konjugiert imaginäre Punkte", weil eine Verwechslung von konjugiert imaginären Punkten mit Punkten, die in bezug auf ein Gebilde II. Ordnung konjugiert sind, durch das — ohnehin fast nie fehlende — Wort „imaginär" völlig ausgeschlossen werden kann (S. 24—35).

Das Doppelverhältnis (DV)[1] eines Punktwurfes A, B, C, D wird durch $(ABCD) \equiv \frac{(A, CD)}{(B, CD)}$ definiert, erscheint sonach als Verhältnis zweier AVe. Es ist eine *absolute Invariante* der projektiven Gruppe, und zwar eine *charakteristische*, weil eine ein-eindeutige Zuordnung zweier Punktreihen, bei der jedem Wurf der einen ein Wurf der anderen von gleichem DV entspricht, eine projektive ist. Daraus ergibt sich nach dem in der Einleitung erwähnten Schlusse die wichtige Tatsache, daß jede projektive Beziehung zwischen den Punkten einer Punktreihe sich lediglich auf Beziehungen zurückführen läßt, die durch die Werte von DVen auszudrücken sind. Damit sind wir zu der oben in Aussicht gestellten positiven Charakterisierung der projektiven Geometrie in der Geraden gelangt, und zwar auch von unserem Standpunkt aus. Denn nach dem vorhin Gesagten kann jeder projektive Satz in der Geraden so abgefaßt werden, daß er nur Aussagen über die DVe von Punkwürfen macht. — Hieran schließen sich der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, die DV-Koordinaten, die als naturgemäße Koordinaten der projektiven Geometrie nachgewiesen werden, und endlich die Formeln für die Transformation der DV-Koordinaten, die

---

1) Diese vom Ref. nach einem Vorschlag des Herrn Pasch eingeführte, sehr praktische Abkürzung haben die Herren Verfasser erfreulicherweise adoptiert und weitere analoge Kürzungen eingeführt.

zugleich den analytischen Ausdruck für die projektive Verwandtschaft se
vorstellen (S. 35—59).

Zeichnen wir den uneigentlichen Punkt U der Geraden aus, so weitert sich die projektive Geometrie zur *affinen*. Das spezielle DV $(A\,U\,B$ das AV von A in bezug auf B und C, ist eine *absolute charakteristis Invariante* der affinen Gruppe, woraus dann wieder folgt, daß jede aff Beziehung sich hier auf Beziehungen zurückführen läßt, die durch die We von AVen auszudrücken sind. Alle affinen Formeln und Sätze gehen a projektiven einfach durch Spezialisieren hervor (S. 59—67).

Die binären, später die ternären quadratischen Formen sind geeigne Objekte, um nach Entwicklung der Grundlagen weiterhin in den einzeln Grundgebilden projektive, affine und äquiforme Geometrie zu treiben. der Geraden zunächst führt die binäre quadratische Form zur projektiv und affinen *Einteilung der Punktepaare* und der durch sie bestimmten I volutionen. Es bietet sich dabei die Gelegenheit, hier, wo die Verhältnis sehr einfach liegen, die Methoden vorzubereiten, die später bei den ternär quadratischen Formen zur Anwendung kommen (S. 68—91).

Im folgenden wird dann gezeigt, daß die *projektive Geometrie in d eigentlichen Büscheln* aus der in der eigentlichen Geraden einfach dadu erhalten wird, daß man „Strahl" bezw. „Ebene" statt „Punkt" setzt. Di Geometrie in den Büscheln erweitert sich um die Orthogonalmetrik *äquiformen Geometrie* dadurch, daß man die besondere Involution, bei orthogonale Elemente gepaart sind, oder was dasselbe ist, die konjug imaginären Doppelelemente dieser Involution — das absolute Elemen paar — auszeichnet. Ist das Element $\bar{a}$ zu a senkrecht $(\bar{a} \perp a)$, so w das spezielle DV

$$(a\bar{a}bc) \equiv (a,\, bc) \equiv (bc,\, a)$$

als Richtungsverhältnis (RV) des Elementes a in bezug auf b u bezeichnet und als *charakteristische absolute Invariante* der äquifor Gruppe nachgewiesen. Ein spezielles RV wieder ist die goniometri Tangente oder der Tangenswert eines Elementepaares. Bei einer ä formen Transformation bleibt der Tangenswert — vom Vorzeichen abges — ungeändert. Äquiforme Büschel sind mithin ähnlich bezw. kongru Außer der schon erwähnten absoluten Involution ist von den orthogo metrisch ausgezeichneten Involutionen für spätere Partien des Buches n die gleichseitig hyperbolische Involution — mit reellen, orthogonalen Dop elementen — besonders wichtig (S. 92—116).

Die Geometrie im Parallel- Strahl- oder Ebenenbüschel und in uneigentlichen Gebilden I. Stufe läßt sich stets auf die Geometrie in ein eigentlichen Grundgebilde I. Stufe zurückführen. So deckt sich z. B. Geometrie in der uneigentlichen Punktreihe vollständig mit der im eige lichen Büschel. Die konjugiert imaginären Doppelpunkte der hier auftreten orthogonalen Involution — das absolute Punktepaar der uneigentlich Geraden — spielen bekanntlich in der ebenen Geometrie eine wicht Rolle (S. 116—118).

In der *Ebene* ist das DV eines Punkt-Geraden-Wurfes

$$(PQgh) \equiv (PQGH) \equiv (pqgh),$$

wo der Strahlenwurf p, q, g, h perspektiv zum Punktwurf P, Q, G, H liegt, eine *charakteristische absolute Invariante* der projektiven Gruppe, also jeder abgeleitete projektive Begriff auf den Begriff des DVes eines Punkt-Geraden-Wurfes zurückführbar. Nach Einführung der DV-Koordinaten folgen die Transformation dieser Koordinaten, das Dualitätsgesetz und eine Reihe projektiver Sätze über Punkte und Gerade. Das vollständige Viereck wird mit Rücksicht auf das Kegelschnittbüschel sehr eingehend behandelt, wobei sich eine Reihe schöner Sätze über den Charakter der durch ein solches Viereck auf den Geraden seiner Ebene erzeugten Involutionen ergibt (S. 119—173).

Nunmehr kann auch eine noch bestehende Lücke ausgefüllt werden. Man kann nämlich auf Grund der harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits nachweisen, daß jede kollineare Transformation der Ebene eine projektive ist, daß also in der Tat kollineare und projektive Transformation der Ebene, projektive Geometrie und Inzidenzgeometrie hier *identische* Begriffe sind. Danach muß sich z. B. der Begriff „DV" lediglich auf den Begriff der Inzidenz zurückführen lassen. Innerhalb der Grenzen, die sich die Herren Verfasser gesteckt haben, ist der direkte Nachweis hierfür nicht erbringlich, aber es sollte wenigstens im Interesse des Anfängers eine größere erläuternde Anmerkung angebracht werden (die Anm. S. 41 genügt nicht). Ferner müßte der Schluß des nach Darboux geführten Beweises, daß harmonisch aufeinander bezogene Gebilde I. Stufe projektiv sind, der gerade die meiste Schwierigkeit bietet, etwas ausführlicher gehalten sein (S. 174—193).

Nach Untersuchungen über die kollineare und reziproke Verwandtschaft folgt die *affine Geometrie in der Ebene*. Ist g_u deren uneigentliche Gerade, so stellt das spezielle DV

$$(g g_u P Q) \equiv (g, PQ) \equiv (PQ, g)$$

— das AV der Geraden g in bezug auf die Punkte P und Q — eine *charakteristische absolute Invariante* der affinen Gruppe vor. Auch das Verhältnis paralleler Strecken und das Flächenverhältnis sind solche Invarianten. Naturgemäße Koordinaten sind hier diejenigen DV-Koordinaten, bei denen eine Fundamentalgerade mit der g_u zusammenfällt; sie werden homogen als allgemeinste Hessesche Koordinaten, nicht homogen als allgemeinste Cartesische Punkt- und Plückersche Linienkoordinaten bezeichnet. Ganz besonderes Interesse dürften in diesem Kapitel die Entwicklungen erwecken, die sich an die Einführung der Eichkurve des Cartesischen Koordinatensystems — einer reellen Ellipse — knüpfen, wobei wir auch den affinen Stammsatz des Pythagoräischen Lehrsatzes kennen lernen (S. 194—226).

Zeichnen wir die absoluten Punkte I_1 und I_2 der Ebene (das absolute Paar der Geraden g_u) aus, so erweitert sich die affine Geometrie um die Orthogonalmetrik zur *äquiformen ebenen Geometrie*. Sind $G_u, \bar{G}_u, H_u, I_u$ die uneigentlichen Punkte der eigentlichen Geraden $g, \bar{g}, h, i$, ist ferner $g \perp \bar{g}$, so wird das spezielle DV

$$(G_u \bar{G}_u H_u I_u) \equiv (g, hi) \equiv (hi, g)$$

das RV der Geraden h und i in bezug auf die Gerade g genannt. Es wird also hier (ähnlich wie im eigentlichen Büschel) nicht direkt das absolute Paar benutzt, um durch das DV $(g h I_1 I_2)$ einen neuen, orthogonalmetrischen Begriff zu erlangen, weil die Zahl $(g h I_1 I_2)$ durch g und h allein nicht eindeutig bestimmt und für reelle g und h im allgemeinen imaginär ist. Das AV und RV bilden zusammen ein *charakteristisches System absoluter Invarianten* der äquiformen Gruppe. Jeder abgeleitete äquiforme Begriff muß sich daher auf die Begriffe des AVes und RVes zurückführen lassen. In äquiformen Feldern sind homologe Winkel kongruent; die Transformationen der äquiformen Gruppe führen mithin ihren Namen mit Recht. Naturgemäße Koordinaten sind hier die gleichseitig orthogonalen Parallelkoordinaten; die nicht homogenen Punktkoordinaten dieser Art sind identisch mit den rechtwinkligen Koordinaten. Die geometrische Bedeutung von Sinus und Cosinus wird in der äquiformen Geometrie gegeben, der auch die Begriffe des Lot- und Sinusverhältnisses (in bezug auf ein Speerepaar) angehören. Das DV eines Punkt-Geraden-Wurfes kann als Quotient zweier Lotverhältnisse, das eines Strahlenwurfes als Quotient zweier Sinusverhältnisse dargestellt werden (S. 227—255).

Der Rest des Buches bringt *Anwendungen* auf die Kurven II. Ordnung und II. Klasse, deren allgemeine projektive Eigenschaften zuerst entwickelt werden (S. 256—274).

Alsdann folgen rein algebraische Betrachtungen über reelle quadratische Formen von n Variabeln, so das Trägheitsgesetz, ferner die Bestimmung des Ranges $\varrho(f)$ und der Signatur $S(f)$ einer solchen Form f aus ihrer charakteristischen Reihe nach Frobenius. Die Zahl $n - \varrho(f)$ heißt der Verschwindungsgrad $v(A)$ der Determinante A von f, der absolute Wert $s(f)$ von $S(f)$ die Signatur der Gleichung $f = 0$ oder auch die Signatur $s(A)$ von A. Die numerischen Invarianten $v(A)$ und $s(A)$ der Form f reichen hin, um wie früher im Falle $n = 2$ die *projektive Klassifikation* der Elementepaare, nun auch für $n = 3$ diejenige der Kurven II. Ordnung oder II. Klasse vorzunehmen. Die nicht entarteten Kegelschnitte $[v(A) = 0]$ zerfallen z. B. in imaginäre $[s(A) = 3]$ und reelle $[s(A) = 1]$ (S. 275—297). Bei der affinen Klassifikation dieser Kurven haben wir dann weiter die *projektive* Beschaffenheit des Punktepaares zu untersuchen, das die g_u mit der Kurve II. Ordnung bezw. mit der zur Kurve II. Klasse adjungierten Kurve II. Ordnung gemein hat. So ergibt sich *aus zwei projektiven* Klassifikationen die *affine Klassifikation* der Kurven II. Ordnung bezw. II. Klasse, wobei nur noch bei dem reellen Punktepaar auf einer eigentlichen Geraden und dem Doppelpunkte eine weitere Spaltung in das eigentliche und das eigentlich-uneigentliche Paar bezw. in den eigentlichen und uneigentlichen Doppelpunkt nötig ist. Dieses Einteilungsprinzip kommt in der Tabelle für die affinen Klassen der Kurven II. Ordnung besonders klar zum Ausdruck (S. 346—353). Bei der *äquiformen Klassifikation* wird endlich das projektive Verhalten des unendlich fernen Punktepaares eines Kegelschnittes zum absoluten Punktepaar I_1, I_2 seiner Ebene in Betracht gezogen. So zerfallen bei der affinen Klassifikation die reellen, nicht entarteten Kegelschnitte in Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln; bei der äquiformen wird dann von den Ellipsen der Kreis als Ellipse, welche durch die Punkte I_1 und I_2 geht, und von den Hyperbeln die gleichseitige Hyperbel, deren uneigentliche Punkte die Punkte I_1 und I_2 harmonisch trennen, orthogonalmetrisch ausgezeichnet (S. 418—422).

Die projektive Geometrie der Kegelschnitte befaßt sich des weiteren mit der Polarität in bezug auf einen Kegelschnitt (KS). Was hierbei S. 306 über die Poldreiecke in bezug auf einen KS gesagt wird, ist nicht ganz korrekt. Zunächst müssen natürlich daselbst unter 4a) die Worte „hyperbolisch“ und „elliptisch“ vertauscht werden. Dann muß es unter 4b) heißen: „Nur eine Ecke und ihre Gegenseite sind reell; diese Elemente sind dann entweder hyperbolisch und die beiden imaginären Ecken (Seiten) sind konjugiert imaginär oder nicht konjugiert imaginär, oder aber diese Elemente sind elliptisch und die beiden imaginären Ecken (Seiten) sind nicht konjugiert imaginär.“ Nach dem eben und dem l. c. unter 3b) Gesagten kann man also aus dem elliptischen bezw. hyperbolischen Charakter der reellen Elemente eines beliebigen Poldreiecks *nicht immer* erkennen, ob sein KS imaginär oder reell ist (S. 298—311).

Aus der Polarentheorie fließen in der affinen Geometrie der KSe die Begriffe „Mittelpunkt“ und „Durchmesser eines KS“, auch treten jetzt die Asymptoten eines KS auf. Als Eichkurve des Koordinatensystems wird hier auch die Hyperbel eingeführt und ein schon oben erwähnter Satz zum Pythagoräischen Lehrsatz der affinen Geometrie erweitert. Besonders hervorzuheben sind hier noch die affinen Verallgemeinerungen der Sätze über die Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis (S. 353—386).

In der äquiformen Geometrie der KSe werden die Hauptachsen sehr zweckmäßig als dasjenige Durchmesserpaar definiert, das sowohl das Asymptotenpaar, als auch das von den Polaren der Kreispunkte I_1, I_2 gebildete Geradenpaar — das Paar der Kreispunktpolaren — harmonisch trennt. Die Transformation eines KSes auf den Mittelpunkt gehört in die affine, die auf die Hauptachsen in die äquiforme Geometrie der KSe. Die scharfe Trennung der Geometrien hat, wie man sieht, auch ihre Schattenseiten, indem eng zusammenhängende Dinge auseinandergerissen werden müssen (S. 422—450).

Die drei verschiedenen Geometrien des KS-Büschels und der KS-Schar werden so ausführlich behandelt, daß es unmöglich ist, diesem Gegenstand auf beschränktem Raume auch nur einigermaßen gerecht zu werden. Wir wollen diese schönen Untersuchungen nur allgemein dahin charakterisieren, daß die Realitätsverhältnisse im weitgehendsten Maße Berücksichtigung finden, und daß die Einteilung der KS-Büschel und KS-Scharen in den verschiedenen Geometrien systematisch und vollständig durchgeführt wird. Unter den orthogonalmetrisch ausgezeichneten KS-Scharen ist die konfokale Schar die wichtigste. Aus den allgemeinen projektiven Eigenschaften der KS-Scharen werden die wichtigsten Eigenschaften der konfokalen Schar, die früher teilweise direkt entwickelt worden waren (S. 451—470), systematisch abgeleitet (S. 312—345; S. 387—417; S. 471—501).

Den Schluß des I. Bandes bildet ein kurzer, leichtfaßlicher *Anhang über Determinanten* aus der Feder des Herrn Heffter (S. 502—517).[1]

Möge es dem Ref. gelungen sein, dem Leser einen hinreichend tiefen Einblick in das Buch gegeben zu haben, um ihn zu einem eingehenden

1) Druckfehler: S. 91, Klammer: $=0$ statt $+0$; S. 224, Z. 11 v. u.: $\varrho = 3$ statt $\varrho = \frac{1}{3}$; S. 229, (5) letzte Klammer: C'_u statt C_u; S. 349, vor der größten Klammer: $\Delta = 0$.

Studium des schönen Werkes zu veranlassen, eines Werkes, das mit dazu geeignet erscheint, den Lehrbüchern der analytischen Geometrie in Zukunft ein ganz neues Gepräge aufzudrücken, wobei es für den Kundigen von besonderem Interesse sein wird, ob und in welcher Weise sich die gelegentlich geäußerten prinzipiellen und pädagogischen Bedenken beseitigen lassen werden.

Osthofen (Rheinhessen). P. Muth.

M. Simon. Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht erstattet der deutschen Mathematiker-Vereinigung. VIII, 278 S. Mit 28 Fig. gr. 8°. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Eine große Vorarbeit für die Geschichte der Elementargeometrie im 19. Jahrhundert ist in dem vorliegenden Buche geleistet. Ursprünglich war das Werk für die Enzyklopädie geschrieben; die gewählte äußere Form, der stark gedrungene Stil, dann die Schwierigkeit, das riesige Zitatenmaterial auf Grund der Zettelsammlung bibliographisch treu zu revidieren, nicht zuletzt wohl auch der Umfang, auf den die Sammlung angewachsen war, schienen dem Rahmen der Enzyklopädie nicht zu entsprechen und veranlaßten eine gesonderte Herausgabe. M. Simon hat mit ausdauerndem Fleiße die Literatur des 19. Jahrhunderts, soweit sie die auf den höheren Lehranstalten gepflegte Elementargeometrie betrifft, gesichtet und in scharf gegliederter Disposition zusammengestellt. In Betracht gezogen ist nicht nur die deutsche Literatur, wenn sie auch bevorzugt erscheint, sondern auch die ausländische; bei dem umfangreichen Kapitel „Lehrbücher, Aufgabensammlungen" ist geradezu eine Untergruppierung nach Nationen vorgenommen. Das Jahr 1900 ist streng als Grenze festgehalten; nur wenige Notizen, die dem Verfasser gelegentlich aufstießen, führen weiter. Im allgemeinen Teil rechtfertigt Simon die gewählte Stoffumgrenzung, charakterisiert in kurzen Zügen den von der Geometrie im 19. Jahrhundert eingeschlagenen Entwicklungsgang und behandelt die Geschichtsforschung auf dem Gebiete der Mathematik während dieses Zeitraumes, dann die Methodik und die Lehrmittel. Der spezielle Teil umfaßt neun dem Umfange nach recht ungleichartige Abschnitte: Parallelentheorie, Kreis, Flächeninhalt, Dreiecke, Polygone, allgemeine ebene Konfigurationen, allgemeine räumliche Beziehungen, besondere räumliche Beziehungen, Trigonometrie. Sämtliche Abschnitte sind wieder mehrfach weiter gegliedert; so werden beim Kreis 7 Unterabteilungen aufgestellt: Quadratur des Zirkels, reguläre Polygone und Kreisteilung, Trisektion des Winkels, verschiedene Kreissätze, Inversion, Taktionsproblem, Schließungsproblem; bei der ersten Unterabteilung „Quadratur des Zirkels" z. B. finden sich nach einleitenden Bemerkungen die Untergruppen: a) zusammenfassende und geschichtliche Werke, b) Quadraturen, c) Näherungskonstruktionen, d) Bogen, e) Numerische Berechnung von π, f) π durch Wahrscheinlichkeitsrechnung, g) Methode des Archimedes, h) Methode der Isoperimetrie, i) Lunulae Hippocratis. — Den größten Teil des Buches beansprucht die Titelsammlung; vielfach sind den angeführten Schriften kleine referierende oder kritisierende Bemerkungen beigegeben. Die zusammenfassenden Übersichten sind sehr aphoristisch gehalten, zum Teil in stark subjektiver Färbung.

Die Literaturangaben sind äußerst reichhaltig und in den Einzeltiteln zumeist wohl auch genau genug, um jedem, der sich über ein bestimmtes Gebiet Auskunft holen will, das nötige Material an die Hand zu geben. Die Geschichte der Mathematik zu bearbeiten, wird um so schwieriger, je weiter sich der Forscher der Neuzeit nähert. Der in Aussicht gestellte vierte Band zu **Cantors** Vorlesungen über Geschichte der Mathematik wird nur durch die Mitarbeit eines ganzen Stabes von Gelehrten möglich. Die Bearbeitung selbst spezieller Gebiete aus dem 19. Jahrhundert kann eines Mannes Schulter nicht mehr tragen. Um so mehr ist die Leistungskraft **Simons** anzuerkennen, der für ein durchaus nicht kleines Gebiet wie die Elementargeometrie dem Geschichtsforscher das Material vorzubereiten und die Wege zu ebenen versucht hat.

Berlin. J. Tropfke.

Vonderlinn. Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie. 112 S. Mit 121 Fig. Sammlung Göschen. Leipzig, Göschen. ℳ 0,80.

In den beiden ersten Abschnitten wird mit Benutzung des Grund- und Aufrisses eines Körpers die Entstehung und Herstellung seines axonometrischen Bildes für die verschiedenen Projektionsarten angegeben; im dritten folgen Aufgaben über Lagen- und Maßbeziehungen unabhängig von der orthogonalen Projektion, und schließlich werden die Schattenkonstruktionen besprochen. Die Darstellung ist klar und einfach, und viele Figuren erleichtern das Verständnis.

Berlin. P. Schafheitlin.

Elsässer. Leitfaden der Stereometrie. Mit 61 Fig. Stuttgart 1906, Grub. geb. ℳ 1,50.

Mit Rücksicht auf die Lehrpläne von 1901 zerfällt der Leitfaden in zwei Teile; der erste propädeutische gibt die Beschreibung, Abwicklung und Inhaltsformeln der einfachsten Körper, der zweite die systematische Begründung der stereometrischen Hauptsätze.

Aus dem ersten Teile hätte der Satz des **Cavalieri** ganz wegbleiben können, oder er hätte ohne einen Beweisversuch angegeben werden sollen, dagegen hätte im zweiten Teile eine strengere Begründung der Inhaltsformel für Pyramiden angegeben werden müssen.

Die Ableitung der Hauptformeln der Stereometrie bewegt sich in den üblichen Gleisen, die nicht immer die einfachsten Beweise liefern. So sind die Beweise für den Hauptsatz über das Lot auf einer Ebene (§ 12. 1) und für den Neigungswinkel einer schrägen Geraden (§ 15. 4) recht schwerfällig.

Die Figuren in einem stereometrischen Lehrbuche müssen mit besonderer Sorgfalt hergestellt werden, um bei den Schülern einen räumlichen Eindruck zu erwecken. Hier sind bei der Mehrzahl der Figuren alle Ebenen durchsichtig behandelt, d. h. die verdeckt gelegenen Kanten etc. sind ebenso gezeichnet wie die vorn gelegenen; meiner Meinung nach erschwert dies den räumlichen Eindruck ganz erheblich. Besonders unangenehm aber berührt es, daß von dieser Methode an einzelnen Stellen abgewichen ist. So sind gleich bei der ersten Figur die verdeckten Würfelkanten gestrichelt, di ebenso unsichtbaren Diagonalen und die Mittellinie dagegen sind ausgezoge gezeichnet; recht auffällig ist die verschiedene Art der Zeichnung bei de nebeneinander gelegenen Figuren 31 und 32. Auf eine gründliche Durch arbeitung des figürlichen Teiles muß bei einer neuen Auflage besonders ge achtet werden.

Berlin. P. Schafheitlin.

W. Voigt. Thermodynamik. 2 Bände. 360 u. 370 S. Sammlun Schubert XXXIX u. XLVIII. Leipzig 1903 u. 1904, G. J. Göschen.

Das vortreffliche Werk bietet in klarer, mathematischer Form und i steter Anlehnung an die Resultate der experimentellen Forschung eine vor zügliche Einführung in das weite Gebiet der Thermodynamik. Zuers werden die allgemeinen Grundlagen sowohl der Mechanik wie der reine Wärmelehre, auf denen sich die Thermodynamik aufbaut, in kurzer, präziser un höchst eleganter Form entwickelt. Sodann folgt die Thermodynamik fü ideale Gase, wobei die Zustandsänderung sowohl als Funktion von Druc und Volumen, wie als Funktion von Entropie und Temperatur dargestellt un die Bedeutung beider Darstellungsarten klargelegt wird. Den Methoden zu experimentellen Bestimmung des Verhältnisses der spezifischen Wärmen, sow den Anwendungen der für ideale Gase geltenden Gesetze auf kosmisc Vorgänge ist je ein Abschnitt dieses Kapitels gewidmet, das Grundprinz des Arbeits- und Kältemaschinen wird an dem Carnotschen Kreisproze entwickelt. Das dritte Kapitel „Thermodynamik für beliebige zweivaria Körper, insbesondere solche die unter allseitig gleichem Druck stehe beschäftigt sich mit dem zweiten Hauptsatze und seinen Anwendungen a die wirklichen Gase, wobei u. a. das Prinzip der Lindeschen Kältemaschin erläutert wird, auf Flüssigkeiten und feste Körper, die unter allseitig gleiche Druck stehen und auf zylindrische feste Körper unter einseitigem Zuge Ferner wird die W. Thomsonsche absolute Temperaturskala besproche Das Schlußkapitel des ersten Bandes behandelt die Thermodynamik vo Körpern, deren Zustand von beliebig vielen Variablen abhängig ist, mit An wendungen auf die Theorie der Elektrizität.

Der zweite Band zerfällt in zwei Teile: Thermo-chemische und Thermo elektrische Umsetzungen. In dem ersten Teil werden vom Standpunkt de Phasenlehre aus die Vorgänge der Verdampfung und Kondensation, de Schmelzens und Erstarrens, der Mischung und Lösung, der allgemeine chemischen Umsetzung, ferner die Theorien der verdünnten Lösungen, de gewöhnlichen und der elektrolytischen Dissoziation thermodynamisch be handelt. Es werden Anwendungen auf meteorologische Vorgänge und au die Theorie der Dampf-Arbeits- und der Dampf-Kälte-Maschinen, sowi der Explosionsmaschinen gemacht. Der zweite Teil beschäftigt sich zunächs mit der Elektrostatik, besonders der mechanischen Arbeit bei der Elektri sierung und bei der Erregung eines Dielektrikums, der Pyro- und Piezo-Elek trizität und den analogen magnetischen Vorgängen. Sodann folgt die Thermo dynamik des Galvanismus, insbesondere die Theorie der Stromwärme, de Thomson- und Peltier-Effekts und der galvanischen Elemente. Das dritt und letzte, als Anhang bezeichnete Kapitel, beschäftigt sich mit der Thermo dynamik der Wärmestrahlung. Dieses, wie überhaupt der ganze letzte Tei etwas aphoristisch gehaltene Kapitel, in welchem auch die neueren Arbeiten über die Strahlungsgesetze bis zum Jahre 1901 besprochen werden, enthält in seinem letzten Paragraphen einen interessanten Hinweis darauf, daß es nicht erlaubt ist, das Kirchhoffsche Gesetz auf eine einzige zirkularpolarisierte Schwingungsart allein anzuwenden, weil bei der Reflexion rechts zirkularpolarisiertes Licht in links zirkulares umgewandelt wird.

Schon aus dieser kurzen Übersicht ist wohl erkennbar, wie reich der Inhalt dieses Buches ist. In der Tat führt es den Leser tief in die Materie hinein und bietet durch die gleich liebevolle und vollendete Behandlung der mathematischen Analyse, wie der Darstellung der Experimente und der Anwendungen auf allgemein wissenschaftliche und technische Probleme eine zwar nicht immer leichte, aber stets anregende und abwechslungsreiche Belehrung.

Breslau. E. Pringsheim.

J. Classen. Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. 2 Bände, 184 u. 251 Seiten. Sammlung Schubert XLI u. XLII. Leipzig 1903 u. 1904, G. J. Göschen.

Auf verschiedenen Wegen können wir die steilen Höhen der Faraday-Maxwellschen Theorie erklimmen. Wer vermöchte zu entscheiden, welcher von ihnen der beste ist, und ob überhaupt einer von ihnen der beste ist? Das Urteil hängt von der Neigung und Begabung des Touristen und von der Tüchtigkeit und Geschicklichkeit des Führers ab. In jedem Falle müssen wir unserm Führer dankbar sein, wenn er mit sicheren Schritten voranschreitet, die zum Ziel führende Richtung möglichst fest im Auge behält und uns auf dem Wege schöne und weite Blicke über das durchwanderte Gebiet gewährt. Und wir dürfen es ihm nicht allzu sehr verübeln, wenn er uns auch einmal über eine schwierige Stelle in kühnem Sprunge hinwegträgt, selbst wenn wir nachher nicht recht begreifen, wie wir auf den neugewonnenen Standpunkt gekommen sind. In diesem Sinne wird jeder, der sich durch das vorliegende Buch in die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus einführen läßt, dem Verfasser aufrichtigen Dank zollen.

Das Buch ist nach einem wohl durchdachten Plane angelegt in dem ersichtlichen Bestreben, alle an die alte Fernwirkungstheorie erinnernden Rudimente abzustreifen. Zunächst wird eine kurze, vielleicht etwas zu abstrakte Übersicht über die Grundversuche der Elektrostatik gegeben, aus denen zwei einfache Methoden zur experimentellen Bestimmung der fundamentalen Eigenschaften des elektrischen Feldes folgen. So werden die Begriffe der Niveauflächen, Induktionslinien und Induktionsröhren eingeführt und sodann aus der Analogie mit einer strömenden Flüssigkeit die mathematischen Grundgleichungen der Elektrostatik in physikalischer Anschaulichkeit gewonnen. Die sehr bescheidene Anwendung einiger weniger Begriffe der Vektoranalysis wird selbst demjenigen das Verständnis erleichtern, dem diese Begriffe zum ersten Male entgegentreten sollten. Die zunächst hypothetisch eingeführte Zulässigkeit des hydrodynamischen Bildes wird durch den Vergleich der theoretisch gewonnenen Resultate mit der Erfahrung gestützt. Die so gefestigte Theorie findet dann auf die zuerst besprochenen Grundversuche und auf die wichtigsten elektrostatischen Meßmethoden und Apparate lohnende Anwendung. Ganz im Sinne der oben hervorgehobenen

Grundtendenz des Werkes wird das Coulombsche Gesetz nicht zur Begründ der Theorie herangezogen, sondern erst aus ihr entwickelt. Dieser t retische Vorzug hätte sich aber auch wohl erreichen lassen, ohne daß nötig gewesen wäre, bei der Grundlegung der Theorie statt der allgem üblichen Coulombschen Methode zur Messung der elektrischen Kraft physikalisch sehr viel weniger anschauliches Verfahren zu Hilfe zu nehn

Der 2. Teil des 1. Bandes gibt die Elektrokinetik und behandelt Theorie der stationären elektrischen Ströme, die elektrochemischen Vorgä und die Thermoelektrizität. Auch hier ist die Analogie mit der Flüssigke strömung sehr anschaulich durchgeführt.

Der 2. Band bringt die Darstellung des Magnetismus und des Elek magnetismus. Wenn im allgemeinen auch diesem Bande die gleichen V züge nachzurühmen sind, wie dem ersten, so ist doch die Darstellung Grundbegriffe des Magnetismus nicht einwandfrei. Der Verf. macht z mit aller Schärfe darauf aufmerksam, daß es keinen wahren Magnetismus keine magnetischen Leiter gibt, und daß daher ein fundamentaler Un schied zwischen der Elektrostatik und dem Magnetismus besteht, trotz aber führt er die magnetische Kraft und magnetische Induktion durch rein äußerliche Analogie mit den entsprechenden elektrischen Größen und die physikalische Bedeutung dieser magnetischen Grundbegriffe gela nicht klar genug zur Anschauung.

Sehr zu loben ist die große Sorgfalt, mit welcher der Verf. übe sich bemüht die Hypothesen klar als solche zu kennzeichnen und auf i Erweiterungsfähigkeit und Erweiterungsbedürftigkeit hinzuweisen.

Breslau. E. Pringsheim.

Irving Fisher. Kurze Einleitung in die Differential- und Integ rechnung. Aus der 3. englischen Auflage übersetzt von N. Pink IV, 72 S. Mit 11 Fig. gr. 8. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Geb. 1,80

Der durch seine Arbeiten über Anwendungen der Mathematik auf Nationalökonomie bekannte Verfasser hat in erster Linie für seine Zuh einen kurzen Leitfaden der Infinitesimalrechnung geschrieben, der auch weite Kreisen von Nichtmathematikern, die durch Beruf oder Neigung zur schäftigung mit höherer Mathematik veranlaßt werden, empfohlen wer kann. Natürlich wird man an ein derartiges Buch nicht die Forder großer Strenge stellen; es entspricht in diesem Punkte ungefähr den frü so beliebten Lehrbüchern von Lübsen. Dafür zeigt es aber die frische stets auf anschauliches Erfassen gerichtete Form der Darstellung, die ei Vorzug der populären englischen Literatur bildet. Die Auswahl und schränkung des Stoffes ist im großen und ganzen zweckmäßig. Die et naive Bemerkung auf S. 61: „Abhandlungen über Integralrechnung pfle sehr umfangreich zu sein“, kann entbehrt werden, ebenso wie der m würdige Satz: „Eine absolut vollständige Tafel von Integralen gibt es ni da sehr viele Integrale bis jetzt noch nicht aufgelöst worden sind“. S dessen wäre wohl eine Darstellung der mechanischen Quadratur am Pl gewesen. Die Übersetzung ist lesbar, wenn auch nicht frei von Anglizism auf jeden Fall aber hätten die englischen Maße, wie Fuß oder Meile, du metrische Maße ersetzt werden sollen.

Straßburg i. E. Paul Epstein.

Robert Fricke. Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen. 4. Auflage. VII, 218 S. Braunschweig 1905, Vieweg und Sohn.

Die dritte Auflage dieses bekannten trefflichen Buches ist in Bd. VI., S. 325 dieser Zeitschrift besprochen worden. Die neue Auflage unterscheidet sich von der voraufgehenden nur durch eine größere Reihe stilistischer Änderungen und durch einige sachliche Umgestaltungen in der Erklärung von Begriffen und der Anlage von Beweisen.

Straßburg i. E. PAUL EPSTEIN.

Oskar Schlömilch. Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Fünfte Auflage, bearbeitet von Dr. E. Naetsch. Erster Teil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. VIII, 372 S. Mit 85 Fig. gr. 8°. Leipzig 1904, B. G. Teubner. Geb. 8 *M.*

Schlömilchs Übungsbuch, das sich gleich den anderen Lehrbüchern dieses Verfassers bei vielen Generationen von Studierenden einer großen Beliebtheit erfreute, hat in Herrn Naetsch einen sorgfältigen Herausgeber gefunden, der treu bemüht war, dem Werke seine Eigenart zu erhalten. Er hat deshalb weder im Stoff noch in der Anordnung wesentliche Änderungen vorgenommen und seine eignen Zusätze auf wenige Einschaltungen beschränkt, von denen nur eine über Transformationen in der Ebene einen größeren Umfang besitzt. Fast möchte man wünschen, er hätte sich etwas weniger Zurückhaltung auferlegt, denn nach meiner Auffassung liegt in der Neigung des Verfassers zu speziellen und oft abseits führenden, wenn auch fast immer interessanten Entwicklungen eine gewisse Gefahr für jüngere Studenten, für die es doch in erster Linie bestimmt ist. So könnte die Einleitung über Grenzwerte von Funktionen sehr stark gekürzt, das Kapitel über Reihen mit übersprungenen Termen ganz weggelassen werden; dafür würde man gern eine weitergehende Berücksichtigung der Anwendungen in Tausch nehmen, denn obwohl § 62 die Überschrift trägt: „Geometrische und physikalische Aufgaben", so findet man hier nur eine einzige sehr spezielle Aufgabe mit physikalischem Anstrich, nämlich über das Maximum der Flächenbeleuchtung, wenn die Lichtquelle sich auf einer vorgeschriebenen Bahn bewegt; sonstige Anwendungen, mit Ausnahme von geometrischen, sucht man im ganzen Buche vergebens.

Straßburg i. E. PAUL EPSTEIN.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

182. Welche Kurve wird durch die beiden Gleichungen dargestellt:

$$x = 4r\cos^2\omega\cos 2\omega \qquad y = 4r\sin^2\omega\sin 2\omega?$$

Welches ist die geometrische Bedeutung des Parameters ω?

Speyer. H. Wieleitner.

183. a) Zwei Kreise mit den Mittelpunkten O und O' haben, auf OO' gemessen, die Durchmesser $AB = 2R$, $A'B' = 2r$; $A'O$ sei gleich a. Man ziehe durch A' irgend einen Strahl, der die Kreise bez. in Q, Q' schneidet, und mache $A'P = A'Q - A'Q'$, so beschreibt P im allgemeinen eine bizirkulare Quartik mit Doppelpunkt in A'. Welche Beziehungen müssen zwischen R, r und a bestehen, damit die erzeugte Kurve 1) eine Pascalsche Schnecke, 2) eine Bernoullische Lemniskate sei?

b) Wenn sich die beiden Kreise in $B(=B')$ berühren, so entsteht in A' offenbar eine Spitze (vgl. Aufgabe **154** in Bd. **10**, 328). Man drücke die Fläche der so entstandenen Kurve durch R und r aus und zwar 1) bei äußerer Berührung (birnförmiger Typus), 2) bei innerer Berührung (Kardioidentypus).

Speyer. H. Wieleitner.

184. Als Transversale eines Polardreieckes hat jede Tangente eines Kegelschnittes einen harmonisch zugeordneten Punkt. Wie lautet die Ortsgleichung dieses Punktes? Wie findet man in ihm die jedesmalige Tangente der zurückgelegten Kurve?

Holzminden. G. Kober.

185. Es sei $OA = OB$ und $\sphericalangle AOB = 90^0$. Betrachtet man alle durch B laufenden Hyperbeln, die OA in O berühren und die Eigenschaft haben, daß eine ihrer Asymptoten durch A geht, so schneidet jede den Umkreis des Dreiecks AOB außer in O und B noch in zwei Punkten U und V. Es soll rein geometrisch bewiesen werden, daß die durch O zu den Asymptoten gezogenen Parallelen die Gerade UV stets in zwei Punkten treffen, die auf dem Kreise über dem Durchmesser OA liegen. Dieser Kreis ist also der geometrische Ort für die Schnittpunkte sämtlicher Geraden UV mit den durch O zu den Asymptoten der Hyperbelschar gezogenen Parallelen.

Breslau. O. Gutsche.

B. Lösungen.

Zu **157** (Bd. X, S. 328) (O. Meißner). — Man trägt auf den Seiten des Dreieckes ABC von A aus auf AB bis D, von B aus auf BC bis E, von C aus auf CA bis F die gleiche Strecke p ab; wie ist p zu wählen, damit $\triangle DEF = \frac{1}{2}\triangle ABC$ wird?

Erste Lösung. — Wenn $\triangle DEF = \frac{1}{2}\triangle ABC$ ist, so ist auch

$$\triangle ADF + \triangle BED + \triangle CFE = \tfrac{1}{2}\triangle ABC.$$

Nun ist

$$\triangle ADF = \tfrac{1}{2}p(b-p)\sin\alpha, \quad \triangle ABC = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha,$$

$$\triangle BED = \tfrac{1}{2}p(c-p)\sin\beta = \tfrac{1}{2}p(c-p)\frac{b}{a}\sin\alpha,$$

$$\triangle CFE = \tfrac{1}{2}p(a-p)\sin\gamma = \tfrac{1}{2}p(a-p)\frac{c}{a}\sin\alpha.$$

Also ist p zu bestimmen aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}p(b-p)\sin\alpha + \tfrac{1}{2}p(c-p)\frac{b}{a}\sin\alpha + \tfrac{1}{2}p(a-p)\frac{c}{a}\sin\alpha = \tfrac{1}{4}bc\sin\alpha,$$

woraus

$$ap(b-p) + bp(c-p) + cp(a-p) = \tfrac{1}{2}abc,$$

$$(a+b+c)p^2 - (ab+bc+ca)p + \tfrac{1}{2}abc = 0,$$

$$p = \frac{ab+bc+ca \pm \sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{2(a+b+c)}.$$

Es existieren also zwei Werte für die Strecke p.

Berlin. stud. math. Alfred Baruch.

Eine ähnliche Lösung ist noch von Herrn stud. math. Werner Gaedecke (Berlin) eingelaufen

Zweite Lösung. — Wie ist p zu wählen, damit $\varDelta DEF = \frac{1}{n}\varDelta ABC$? — Nach dem bekannten Satze, daß die Flächeninhalte zweier Dreiecke mit einem gemeinschaftlichen Winkel sich wie die Produkte der diesen Winkel bildenden Seiten verhalten, ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{\varDelta ADF}{\varDelta ABC} + \frac{\varDelta BED}{\varDelta ABC} + \frac{\varDelta CFE}{\varDelta ABC} = 1 - \frac{1}{n}$$

die folgende:

$$\frac{p(b-p)}{bc} + \frac{p(c-p)}{ca} + \frac{p(a-p)}{ab} = \frac{n-1}{n},$$

hieraus folgt:

$$p = \frac{(bc+ca+ab)n \pm \sqrt{(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)n^2 - 2n(n-2)abc(a+b+c)}}{2n(a+b+c)}.$$

Der größte Wert, den n annehmen kann, ist:

$$n = \frac{4abc(a+b+c)}{2abc(a+b+c) - (b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)};$$

in diesem Falle ist:

$$p = \frac{bc+ca+ab}{2(a+b+c)}$$

und das eingeschriebene Dreieck ist am kleinsten.

Aussig (Böhmen). stud. math. J. Krug.

Eine Lösung, die im wesentlichen mit der Lösung des Herrn **Baruch** übereinstimmt, ist noch von Herrn W. **Stegemann** (Prenzlau) eingelaufen, der für $n = 2$ den Abschnitt p in die Form bringt

$$p = \frac{\varDelta}{a+b+c}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} \pm \frac{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}{2\varDelta}\right),$$

wo α, β, γ die Dreieckswinkel bedeuten, und dann fortfährt: „Bezeichnet man mit ϱ den Inkreisradius und mit ω den Brocardschen Winkel des Dreiecks ABC, so ist

$$\frac{\varDelta}{a+b+c} = \frac{\varrho}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}{2\varDelta} = \frac{1}{\sin\omega};$$

also erhält man

$$p = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} \mp \frac{1}{\sin\omega}\right).$$

Nimmt man bei dem letzten Gliede in der Klammer das negative Vorzeichen, so erhält man immer einen brauchbaren Wert von p. Nimmt man aber das positive Vorzeichen, so wird, wenn c die kleinste Dreiecksseite ist, $p = c$ für $c = \sqrt{\frac{1}{2}ab}$; dann fällt Punkt D mit B zusammen. Für $c > \sqrt{\frac{1}{2}ab}$ wird $p < c$, und für $c < \sqrt{\frac{1}{2}ab}$ wird $p > c$. Dieser letzte Wert ist unbrauchbar; das positive Vorzeichen ist also nur dann anwendbar, wenn $c \geqq \sqrt{\frac{1}{2}ab}$ ist."

Ähnliche Lösungen von den Herren C. **Hoffmann** (Schorndorf, Württemberg), H. **Egerer** (Frankfurt a. M.) und Herrn stud. math. A. **Wieferich** (Münster i. W.). Red.

Zu **158** (Bd. X, 328) (O. **Meißner**). — Auf den Seiten des Dreiecks ABC sollen drei Punkte A, B, Γ so bestimmt werden, daß durch die Linien AB, $A\Gamma$, $B\Gamma$ das Dreieck ABC in vier inhaltsgleiche Dreiecke zerfällt. —

Bezeichnen a, b, c, α, β, γ die Seiten und Winkel des Dreiecks ABC, a', b', c' die Strecken $A\Gamma$, BA, CB, so wird verlangt

$$\triangle A\Gamma B = \triangle BA\Gamma = \triangle CBA = \tfrac{1}{4}\triangle ABC.$$

Nun ist aber

$$\triangle A\Gamma B = \tfrac{1}{2}c'(b-b')\sin\alpha, \quad \triangle BA\Gamma = \tfrac{1}{2}a'(c-c')\sin\beta,$$
$$\triangle CBA = \tfrac{1}{2}b'(a-a')\sin\gamma,$$
$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \tfrac{1}{2}ca\sin\beta = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Demnach bestehen die Beziehungen

$$\tfrac{1}{2}c'(b-b')\sin\alpha = \tfrac{1}{8}bc\sin\alpha,$$
$$\tfrac{1}{2}a'(c-c')\sin\beta = \tfrac{1}{8}ca\sin\beta,$$
$$\tfrac{1}{2}b'(a-a')\sin\gamma = \tfrac{1}{8}ab\sin\gamma$$

oder

$$c'(b-b') = \tfrac{1}{4}bc, \quad a'(c-c') = \tfrac{1}{4}ca, \quad b'(a-a') = \tfrac{1}{4}ab,$$

woraus sich ergeben

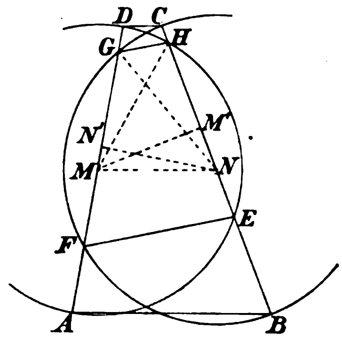
$$a' = \frac{a}{2}, \quad b' = \frac{b}{2}, \quad c' = \frac{c}{2}.$$

Die Punkte A, B, Γ sind also die Mitten von BC, CA, AB.

Berlin. stud. math. ALFRED BARUCH.

Eine ähnliche Lösung noch von den Herren stud. math. A. Wieferich (Münster i. W.) und W. Gaedecke. Red.

Zu **162** (Bd. XI. 129) (P. Schafheitlin). Steht in einem gewöhnlichen oder überschlagenen Trapeze der eine Schenkel auf den Grundseiten senkrecht, und beschreibt man um beide Schenkel als Durchmesser Kreise, so bilden ihre zwei Paare Schnittpunkte mit den Gegenschenkeln wieder ein Trapez, in dem der eine Schenkel auf den Grundseiten senkrecht steht. —



Erste Lösung: Ich fasse den Satz allgemeiner: Beschreibt man in einem beliebigen Trapez $ABCD$ um beide Schenkel als Durchmesser Kreise, so bilden ihre zwei Paare Schnittpunkte mit den Gegenschenkeln wieder ein Trapez $EFGH$, dessen Winkel mit den Winkeln des ursprünglichen Trapezes gleich sind, so daß (s. Fig.)

$$\sphericalangle A = \sphericalangle E, \quad \sphericalangle B = \sphericalangle F,$$
$$\sphericalangle C = \sphericalangle G, \quad \sphericalangle D = \sphericalangle H.$$

Beweis: Man fällt von der Mitte jedes Trapezschenkels ein Lot auf den andern Schenkel und zwar $MM' \perp BC$ und $NN' \perp AD$. Da sich diese Lote wie die Trapezschenkel verhalten, diese aber wie die Kreisradien, so hat man die Proportion $MM' : NN' = MH : NG$ oder

$$\frac{MM'}{MH} = \frac{NN'}{NG}.$$

Daher ist $\sphericalangle MHM' = \sphericalangle NGN'$, das Viereck $MNHG$ ist also ein Sehnenviereck; aus analogen Gründen ist auch das Viereck $MNEF$ ein Sehnenviereck. Es ist daher $\sphericalangle FEN = \pi - \sphericalangle FMN = \sphericalangle GMN = \sphericalangle DAB$ oder $\sphericalangle A = \sphericalangle E$, und ebenso bei den übrigen Winkeln.

Aussig (Böhmen). stud. math. J. KRUG.

Zweite Lösung: Ist in der Ebene eines Kreises auf einer Sekante, deren Schnittpunkte E und F sind, AB die Projektion eines Durchmessers DC und HG auf diesem die Projektion der Sehne EF, so soll HG Sehne desjenigen Kreises sein, dessen Durchmesser AB ist. Um dieses zu beweisen, verbinde man nicht nur die Punkte A und B mit H und G, sondern auch D und C mit E und F; dann läßt sich leicht zeigen, daß $\sphericalangle AHB = \sphericalangle DEC$ und $\sphericalangle AGB = \sphericalangle DFC$ ist. Denn sowohl EH als auch FG teilt das Trapez $ABCD$ in Kreisvierecke; infolge dessen ist das eine Mal $\sphericalangle EAH = \sphericalangle EDH$ und $\sphericalangle EBH = \sphericalangle ECH$, das andere Mal $\sphericalangle FAG = \sphericalangle FDG$ und $\sphericalangle FBG = \sphericalangle FCG$, mithin auch $\sphericalangle AHB = \sphericalangle DEC$ und $\sphericalangle AGB = \sphericalangle DFC$

Im Fall des überschlagenen Trapezes ist jedesmal eines der beiden Kreisvierecke, deren Gegenwinkel die benutzten Winkel sind, nicht überschlagen; der eine dieser beiden Winkel ist also dann durch seinen Nebenwinkel zu ersetzen.

Holzminden. G. Kober.

Eine ähnliche Lösung noch von Herrn Köstlin. Red.

Dritte Lösung: In dem gegebenen Trapeze $ABCD$ sei M die Mitte von AB, N die Mitte von CD, und man setze $MA = r_1$, $ND = r_2$.

Man ziehe die Gerade MN, fälle von D aus auf MN das Lot DJ, von M aus auf CD das Lot MO, von E aus auf MO das Lot EP. Dann folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke NDJ und NMO

$$MO : MN = JD : ND = MA : ND = r_1 : r_2.$$

MO ist die Entfernung der Sehne GH des Kreises (M, r_1) vom Mittelpunkte M und MN die Entfernung der Sehne EF des Kreises (N, r_2) vom Mittelpunkte N. Da sich diese Entfernungen wie die Radien verhalten, so haben die genannten Sehnen in den Kreisen ähnliche Lage und verhalten sich ebenfalls wie die Radien; dasselbe gilt von den halben Sehnen, und es verhält sich demnach

$$HO : EM = r_1 : r_2.$$

Ferner folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke DNJ und EMP

$$EP : EM = JD : ND = r_1 : r_2,$$

und aus beiden Proportionen ergibt sich $HO = EP$. Nun sind nach Konstruktion die Winkel HOP und EPO rechte Winkel, mithin ist Viereck $EPOH$ ein Rechteck und $HE \perp GH$. In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß auch $GF \perp GH$, und damit ist der verlangte Beweis gegeben.

Prenzlau. W. Stegemann.

Zu **165** (Bd. XI, S. 129) (F. Schlegel). — Der Satz „Alle Ebenen, die aus zwei festen Kugeln Kreise von gleichem Radius ausschneiden, umhüllen ein Rotationsparaboloid, das die Potenzebenen der beiden Kugeln zur Scheiteltangentialebene und die Mitte der Zentrale zum Hauptbrennpunkt hat“ ist eine Folgerung aus dem Satze der Aufgabe No. **145** (Beweis S. 149), der da besagt, daß eine Gerade g, die aus zwei festen Kreisen Sehnen von gleicher Länge ausschneidet, diejenige Parabel P umhüllt, deren Scheiteltangente die Potenzlinie der beiden Kreise und deren Brennpunkt die Mitte der Zentrale ist. Läßt man nämlich diese ganze Figur um die Zentrale rotieren, so beschreiben die Kreise die beiden festen Kugeln und jede Gerade g einen Rotationskegel. Alle Tangentialebenen eines jeden dieser Rotationskegel schneiden aus den beiden Kugeln Kreise von gleichem Radius aus und berühren zugleich das durch die Parabel P erzeugte Rotationsparaboloid, das mit dem im obigen Satze bezeichneten Rotationsparaboloid identisch ist.

Prenzlau. W. Stegemann.

Eine ähnliche Lösung ist noch von Herrn C. Hoffmann in Schorndorf (Württemberg) eingesandt. Red.

Zu **166** (Bd. XI, S. 130) (O. Meissner). — Gegeben ist eine reguläre Astroide mit dem Parameter a. Die auf den positiven Halbachsen liegenden Spitzen seien A und B. Um den Punkt P ($x = y = a$) ist mit dem Radius a derjenige Viertelkreis beschrieben, dessen Endpunkte A und B sind. Gesucht wird die Maximalentfernung zwischen dem *Kreisbogen* AB und dem *Astroidenbogen* AB.

Erste Lösung. — Zieht man von P aus einen Strahl, der den Kreisbogen in Q_1, den Astroidenbogen in Q_2 trifft, so kann man die Strecke $Q_1 Q_2$ als die Entfernung der beiden Kurvenbogen für den Kreispunkt Q_1 bezeichnen. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß bei dieser Definition das Maximum der Entfernung eintritt, wenn der von P ausgehende Strahl durch O geht. Trifft PO den Kreis in Q_1', die Astroide in Q_2', so ist die Strecke $Q_1' Q_2''$ oder $\pm OQ_2' \mp OQ_1'$ die gesuchte Maximalentfernung. Setzt man $x = y$ in der Astroidengleichung $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, so ergibt sich $x = y = \frac{1}{4} a\sqrt{2}$; mithin ist $OQ_2' = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}a$. Ferner ist $OQ_1' = PO \mp PQ_1' = a(\sqrt{2} \mp 1)$. Also ist die gesuchte Maximalentfernung $Q_1' Q_2' = \begin{cases} \frac{1}{2}a(3 - 2\sqrt{2}) \sim 0{,}086\, a \\ a(\sqrt{2} + \frac{1}{2}) \sim 1{,}914\, a. \end{cases}$

Prenzlau. W. Stegemann.

Eine ähnliche Lösung ist noch von Herrn stud. math. J. Krug (Aussig) eingetroffen. Red.

Zweite Lösung. — Die Gleichung der Astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ lautet in Polarkoordinaten:

$$r^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{\cos^{\frac{2}{3}} \varphi + \sin^{\frac{2}{3}} \varphi}.$$

Aus den Symmetrieverhältnissen folgt, daß die größte Entfernung zwischen Kreisbogen und Astroidenbogen für $\varphi = 45^0$ eintritt, es ist dann $\cos\varphi = \sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, folglich: $r = \frac{a}{2}$. Für den entsprechenden Kreispunkt ist: $r_1 = a(\sqrt{2} \mp 1)$, folglich ist die Entfernung beider Punkte $\pm r \mp r_1 = \begin{cases} (1{,}5 - \sqrt{2})a \sim 0{,}0858\, a \\ (\sqrt{2} + 0{,}5)a \sim 1{,}914\, a \end{cases}$. Den Wert $r = \frac{a}{2}$ für die Astroide kann man auch sofort angeben, wenn man sich auf die Erzeugung der Kurve als Envoloppe der Strecke a zwischen den Koordinatenaxen beruft.

Schorndorf (Württemberg). C. Hoffmann.

Eine ähnliche Lösung ist noch von Herrn H. Wieleitner (Speyer) eingelaufen. Red.

Zu **169** (Bd. XI, S. 131) (J. Krug). — Es ist ein beliebiger Kegelschnitt mit dem Halbparameter p und der numerischen Exzentrizität ε gegeben. Für den Scheitel S ist der Oskulationskreis konstruiert, dessen Radius p, dessen Mittelpunkt O ist, und der von der Hauptachse des Kegelschnittes zum zweiten Male in C getroffen wird. Von dem beliebigen Kegelschnittspunkte Q aus sind diejenigen beiden Kegelschnittssehnen QP und QR gezeichnet, die zugleich Tangenten des Kreises O sind und diesen in A und B berühren. Zu beweisen ist, daß zwischen den Tangentenabschnitten $QA = QB = t_Q$, $PA = t_P$, $RB = t_R$ die Gleichung

$$\frac{1}{t_P} - \frac{2}{t_Q} + \frac{1}{t_R} = \frac{4\varepsilon}{p}$$

besteht.

Man nehme O als Anfangspunkt und OC als positive x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Dann ist die Gleichung des Kegelschnitts

$$\text{(I)} \qquad (1-\varepsilon^2)x^2 - 2\varepsilon^2 px + y^2 - (1+\varepsilon^2)p^2 = 0.$$

Es werde zunächst vorausgesetzt, daß A und B auf verschiedenen Seiten der x-Achse liegen, und man setze $\sphericalangle COA = \varphi$, $\sphericalangle COB = \psi$. Dann ist die Gleichung der Tangente QP

$$\text{(II)} \qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$$

und die der Tangente QR

$$\text{(III)} \qquad x\cos\psi - y\sin\psi - p = 0.$$

Bezeichnet man die Koordinaten des Punktes A mit x_a, y_a und die Koordinaten der andern Punkte entsprechend, so ist

$$x_a = p\cos\varphi, \quad y_a = p\sin\varphi;$$
$$x_b = p\cos\psi, \quad y_b = -p\sin\psi.$$

Ferner erhält man durch Verbindung der Gleichungen (II) und (III) mit (I)

$$x_q = p\,\frac{\cos\varphi + \varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}, \quad y_q = \quad p\,\frac{\sin\varphi - \varepsilon(1+\cos\varphi)}{1-\varepsilon\sin\varphi};$$
$$x_p = p\,\frac{\cos\varphi - \varepsilon\sin\varphi}{1+\varepsilon\sin\varphi}, \quad y_p = \quad p\,\frac{\sin\varphi + \varepsilon(1+\cos\varphi)}{1+\varepsilon\sin\varphi};$$
$$x_q = p\,\frac{\cos\psi + \varepsilon\sin\psi}{1-\varepsilon\sin\psi}, \quad y_q = -p\,\frac{\sin\psi - \varepsilon(1+\cos\psi)}{1-\varepsilon\sin\psi};$$
$$x_r = p\,\frac{\cos\psi - \varepsilon\sin\psi}{1+\varepsilon\sin\psi}, \quad y_r = -p\,\frac{\sin\psi + \varepsilon(1+\cos\psi)}{1+\varepsilon\sin\psi}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden für x_q gefundenen Werte ergibt sich die zwischen den Größen ε, φ, ψ bestehende Beziehung

$$\frac{\cos\varphi + \varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi} = \frac{\cos\psi + \varepsilon\sin\psi}{1-\varepsilon\sin\psi},$$

woraus man findet

$$\varepsilon = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi+\psi) + \cos\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}$$

oder

$$\text{(IV)} \qquad 2\varepsilon = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi.$$

Man erhält weiter

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} t_P = PA = \sqrt{(x_p - x_a)^2 + (y_p - y_a)^2} = p\,\dfrac{\varepsilon(1+\cos\varphi)}{1+\varepsilon\sin\varphi}, \\ t_R = RB = \sqrt{(x_r - x_b)^2 + (y_r - y_b)^2} = p\,\dfrac{\varepsilon(1+\cos\psi)}{1+\varepsilon\sin\psi}, \\ t_Q = QA = \sqrt{(x_q - x_a)^2 + (y_q - y_a)^2} = p\,\dfrac{\varepsilon(1+\cos\varphi)}{1-\varepsilon\sin\varphi}, \\ \quad\;\; = QB = \sqrt{(x_q - x_b)^2 + (y_q - y_b)^2} = p\,\dfrac{\varepsilon(1+\cos\psi)}{1-\varepsilon\sin\psi}. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{PA}-\frac{1}{QA}=\frac{2\sin\varphi}{p(1+\cos\varphi)}=\frac{2}{p}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi,\quad \frac{1}{RB}-\frac{1}{QB}=\frac{2\sin\psi}{p(1+\cos\psi)}=\frac{2}{p}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi;$$

$$\frac{1}{PA}-\frac{1}{QA}+\frac{1}{RB}-\frac{1}{QB}=\frac{2}{p}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi\right),$$

also mit Rücksicht auf (IV)

$$\frac{1}{t_P}-\frac{2}{t_Q}+\frac{1}{t_R}=\frac{4\varepsilon}{p},$$

w. z. b. w.

Liegen die Punkte A und B auf derselben Seite der Abszissenachse, so ist einer der Winkel φ und ψ als negativ anzusehen; im übrigen bleiben die vorstehenden Entwickelungen ungeändert.

Aus den Gleichungen (V) ist ersichtlich, daß die Tangentenabschnitte t_P und t_R niemals unendlich oder negativ werden können. Dasselbe gilt auch für t_Q, wenn $\varepsilon < 1$, der Kegelschnitt also eine Ellipse ist. Ist $\varepsilon = 1$, d. h. der Kegelschnitt eine Parabel, so wird t_Q unendlich in dem einen Falle $\varphi = \psi = 90^0$; AOB ist dann eine Gerade, die zur Achse senkrecht ist, und es ist $t_P = t_R = \frac{1}{2}p$. Für $\varepsilon > 1$, d. h. wenn der Kegelschnitt eine Hyperbel ist, wird t_Q unendlich in den beiden Fällen $\sin\varphi = \sin\psi = \frac{1}{\varepsilon}$. Dann sind φ und ψ Supplementwinkel, und AOB ist eine Gerade, die zu einer der beiden Asymptoten senkrecht ist. Wenn $\sin\varphi > \frac{1}{\varepsilon}$ ist, so ist auch $\sin\psi > \frac{1}{\varepsilon}$ und $\varphi + \psi > 180^0$; dann liegt Punkt Q auf dem andern Hyperbelast, und t_Q wird negativ.

Prenzlau. W. Stegemann.

Zusatz des Aufgabestellers: Nimmt man am Kegelschnitt mehrere Punkte $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ so an, daß die Sehnen $Q_0Q_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, \ldots$ den Oskulationskreis O berühren, und ist allgemein t_i die Länge des Tangentenabschnittes von Q_i bis zum Berührungspunkt am Kreise, so ist also:

$$\frac{1}{t_0}-\frac{2}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{4\varepsilon}{p},\quad \frac{1}{t_1}-\frac{2}{t_2}+\frac{1}{t_3}=\frac{4\varepsilon}{p}$$

und durch Subtraktion

$$\frac{1}{t_0}-\frac{3}{t_1}+\frac{3}{t_2}-\frac{1}{t_3}=0;$$

allgemein gilt für alle ganzen $n > 2$:

$$\frac{1}{t_0}-\binom{n}{1}\frac{1}{t_1}+\binom{n}{2}\frac{1}{t_2}-\cdots\pm\binom{n}{n}\frac{1}{t_n}=0.$$

Aussig, 2. Dezember 1906. stud. math. J. Krug.

Zu **171** (Bd. XI, S. 131) (H. Wieleitner). — *Ein Rotationskegel und eine gewöhnliche Schraubenfläche, deren Achse mit der Kegelachse zusammenfällt, schneiden einander in einer gewissen Raumkurve; es soll bestimmt werden, welche Gestalt die Kurve bei Abwickelung des Kegels in eine Ebene annimmt.*

Erste Lösung. — Die Kegelgleichung in Zylinderkoordinaten lautet: $r = z \operatorname{tg} \alpha$, wo α der halbe Öffnungswinkel des Kegels ist, die Schraubenfläche hat die Gleichung: $z = a\varphi$. Beide Gleichungen zusammen geben die Schnittkurve. Die Elimination von z gibt die Projektion auf eine zur z-Achse senkrechte Ebene: $r = a \operatorname{tg} \alpha \cdot \varphi$, also eine Archimedische Spirale. Um die Abwickelung zu erhalten, sei P ein Punkt der Kurve, dann ist, wenn O die Spitze des Kegels bedeutet:

$$OP = \varrho = \frac{r}{\sin \alpha},$$

ferner ist: $\widehat{AP} = r\varphi$, wenn $\widehat{AP}$ der Bogen des Parallelkreises durch P im Winkelraum φ ist. Für die Abwickelung nimmt man O als Anfangspunkt, OA als Achse eines Polarkoordinatensystems ϱ, ϑ; dann ist:

$$\vartheta = \frac{\widehat{AP}}{\varrho} = \frac{r\varphi}{\varrho} = \sin \alpha \cdot \varphi, \quad \varrho = \frac{r}{\sin \alpha} = \frac{a \operatorname{tg} \alpha \cdot \varphi}{\sin \alpha} = \frac{a}{\cos \alpha} \cdot \varphi.$$

Die Elimination von φ ergibt endlich als Gleichung zwischen ϱ und ϑ:

$$\varrho = \frac{a}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \vartheta = \frac{2a}{\sin 2\alpha} \cdot \vartheta,$$

die Abwickelung ist also ebenfalls eine Archimedische Spirale.

Das Resultat zeigt eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit dem Fall der zylindrokonischen Helix, die man als Schnitt mit einem Zylinder erhält, dessen Basis eine logarithmische Spirale ist und deren Abwickelung wieder eine logarithmische Spirale ist. (E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik, Bd. II, Leipzig 1902, S. 553. — Ausführl. Literaturangaben bei G. Scheffers, Enz. math. Wiss. Bd. III 3, S. 251/2).

Schorndorf (Württemberg). C. Hoffmann.

Eine ähnliche Lösung hat Herr W. Stegemann (Prenzlau) geliefert. Red.

Zweite Lösung. — Take the Z-axis for the common axis of cone and helicoidal surface; let the vertex of the cone be at the origin, and the half angle at the vertex be α. Then, using the cylindrical (semi-polar) coordinates ϱ and θ as parameters, the cone is given by

$$x = \varrho \cos \theta, \quad y = \varrho \sin \theta, \quad z = \varrho \cot \alpha,$$

and the helicoidal surface by

$$x = \varrho \cos \theta, \quad y = \varrho \sin \theta, \quad z = \varkappa \theta.$$

Where these surfaces intersect

$$(1) \qquad \varkappa \theta = \varrho \cot \alpha,$$

which defines a spiral of Archimedes in the XY-plane.

Now introduce as parameters the radius-vector $r = \varrho \operatorname{cosec} \alpha$, and the angle φ, swept out on the slant-surface of the cone by the radius vector, and reckoned from the element along which the cone is to be slit.

$$d\varphi = \sin \alpha \, d\theta \quad \text{or} \quad \varphi = C + \theta \sin \alpha.$$

The slant-surface may be conceived as consisting of a sector of unlimited angle wrapped around itself.

Substituting φ and r for θ and ϱ in (1) we get

$$\frac{\varkappa}{\sin\alpha}(\varphi - C) = r\cos\alpha,$$

which is again a spiral of Archimedes when the cone is spread out. If we consider the cone as consisting of merely a single sheet not wrapped around itself, we shall have, on spreading it out, a sector of angle $2\pi\sin\alpha$ crossed by a set of spirals of Archimedes with poles at the centre, and cut by any radius-vector in points, each of which is separated from its neighbour by a distance $\frac{2\pi\varkappa}{\cos\alpha}$. The radius-vector of any curve at the initial radius of the sector is equal to the radius vector of the curve immediately within at the terminal radius of the sector.

Washington. W. D. Lambert.

2. Anfragen und Antworten.

Zu **19** (Bd. VIII, S. 268; Bd. IX, S. 98) (O. Gutsche). — Collignon hat 1891 folgenden Satz bewiesen: Wenn man über den Seiten eines Vierecks, dessen Diagonalen gleich lang sind und auf einander senkrecht stehen, nach außen Quadrate konstruiert, so bilden ihre Mitten die Ecken eines Vierecks derselben Art; die Ecken beider Vierecke haben denselben Schwerpunkt.

Ich habe durch einfache elementar-geometrische Betrachtungen gefunden, daß auch die Flächen beider Vierecke denselben Schwerpunkt haben. Ist diese Erweiterung des Collignonschen Satzes und ein rein geometrischer, von Rechnung freier Beweis dafür schon bekannt? —

Etwas Literatur und einige Beweisführungen von besonderem Charakter mögen wohl hier am Orte sein.

1. Die ersten Kenntnisse über Zusammensetzung von Kräften finden oft Anwendung in der neueren Geometrie und liefern gleichsam anschauliche Beweise. Ich stelle hier mehrere Sätze zusammen, welche häufig gebraucht werden.

a) Größe und Richtung der Schlußlinie eines Linienzuges sind unabhängig von der Reihenfolge der Komponenten.

b) Sind zwei in derselben Ebene gelegene Linienzüge so beschaffen, daß ihre Komponenten zu je zweien gleich und zu einander senkrecht sind, so sind auch ihre Schlußlinien gleich und zueinander senkrecht.

Es versteht sich von selbst, daß die rechten Winkel zwischen entsprechenden Komponenten gleichen Sinnes sein müssen.

Voriger Satz kann verallgemeinert werden, indem man ein konstantes Verhältnis und einen konstanten Winkel zwischen zwei entsprechenden Komponenten voraussetzt.

c) Die bekannte Konstruktion des Schwerpunktes[1]) gibt unmittelbar folgenden Satz:

1) Zur größeren Einfachheit spreche ich nur vom Schwerpunkte von Punkten gleicher Gewichte, obschon man die Sätze c) und d) auch auf ungleiche Gewichte ausdehnen kann.

Ist S der Schwerpunkt der Punkte $A_1, A_2, \ldots A_n$, und verschieb man den Punkt A_n nach B_n, so erleidet S eine zu der Gerade A_nB_n parallele Verschiebung, welche gleich $\frac{A_nB_n}{n}$ ist.

d) Wiederholte Anwendung dieses Satzes führt zum folgenden Theorem Vorgelegt sind zwei Systeme von n Punkten $(A_1A_2 \ldots A_n$ $(B_1B_2 \ldots B_n)$. Dann geht man vom Schwerpunkte S des erste zum Schwerpunkte S' des andern über vermittels eines Linie zuges $SC_1C_2 \ldots C_{n-1}S'$, dessen Komponenten äquipollent[1]) sin zu $\frac{1}{n}A_1B_1$, $\frac{1}{n}A_2B_2, \ldots, \frac{1}{n}A_nB_n$.

e) Zwei Punktsysteme $(A_1A_2 \ldots A_n)$, $(B_1B_2 \ldots B_n)$ haben eine gemeinsamen Schwerpunkt, wenn die Verbindungsgeraden A_1B $A_2B_2, \ldots A_nB_n$ äquipollent zu den Seiten eines geschlossene Linienzuges sind.

Die Umkehrung lautet: Wenn zwei Punktsysteme $(A_1A_2 \ldots A_n$ $(B_1B_2 \ldots B_n)$ denselben Schwerpunkt haben, so sind die Strecken A_1B $A_2B_2, \ldots A_nB_n$ äquipollent zu den Komponenten eines geschlossenen Linie zuges.

f) Teilt man die Seiten A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$, A_nA_1 eine Vielecks nach demselben Verhältnisse, so fällt der Schwerpunk der Teilpunkte mit dem Schwerpunkt der Ecken zusammen.

Diesen Satz, für das Dreieck, findet man schon in den *Coll. math.* vo Pappus.

g) Errichtet man über den Seiten eines ebenen Vieleck $A_1A_2 \ldots A_n$ ähnliche und gleichwendige Dreiecke $A_1A_2B_1$, A_2A_3B $\ldots A_{n-1}A_nB_{n-1}$, $A_nA_1B_n$, so haben die Spitzen $B_1, B_2, \ldots B_n$ den selben Schwerpunkt wie die Ecken des ursprünglichen Vieleck

Die Sätze f) und g) folgen unmittelbar aus e). Sie sind zuerst vo Laisant[2]) mit Hilfe der Äquipollenzenlehre aufgestellt worden. Ich hab sie auch ausgesprochen in der *Nouvelle Correspondance mathématique*, Bd. V (1880), S. 474, ohne Laisants Untersuchungen zu kennen.

2. Über den Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC mit den Seite mitten M_a, M_b, M_c errichtet man nach außen die Quadrate BCC_2B_1, CAA_2C ABB_2A_1 mit den Mittelpunkten I_a, I_b, I_c. Diese Figur ist eine d interessantesten der Dreieckslehre.

Nach dem Satze g) haben die Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $I_aI_bI_c$ de selben Schwerpunkt wie ABC.

Die Komponenten der beiden Linienzüge $AM_bM_aI_a$, $I_bM_bM_cI_c$ sin zu je zwei gleich und zueinander senkrecht; mithin sind auch die Schlu linien AI_a, I_bI_c gleich und rechtwinklig. Nennt man *Pseudoquadrat* e Viereck, dessen Diagonalen gleich und rechtwinklig sind, so bietet die Fig drei Pseudoquadrate $I_aI_bAI_c$, $I_bI_aBI_c$, $I_aI_cI_bC$.[3])

1) Äquipollent ist synonym mit *gleich, parallel und von demselben Sinn* Zwei äquipollente Strecken haben dieselbe Bedeutung wie zwei gleiche Vektore

2) *AFAS*, Havre, 1877, S. 142—154. *AFAS* ist die gebräuchliche Abkürzun für *Association française pour l'avancement des Sciences.* Diese Vereinigung hä jedes Jahr eine Zusammenkunft in einer oder anderen Stadt Frankreichs und ve öffentlicht ein Jahrbuch.

3) Diese Eigenschaft findet man (mit vielen anderen) in: *AFAS*, 1877, S. 1

Die Linienzüge $I_c M_c M_a$, $M_a M_b I_b$ sind auch aus gleichen und zueinander senkrechten Komponenten zusammengesetzt; hieraus folgt, daß die Seitenmitten des Dreiecks ABC die Mittelpunkte der nach innen auf den Seiten des Dreiecks $I_a I_b I_c$ errichteten Quadrate sind.

Aus diesen Sätzen schließt man zwei Lösungen der Aufgabe, das Dreieck ABC aus dem Dreiecke $I_a I_b I_c$ geometrisch abzuleiten. Eine algebraische Lösung findet man in der erwähnten Abhandlung des Herrn Collignon.

Die Vierecke ABC_2C_1, BCA_2A_1, CAB_2B_1 sind ebenfalls Pseudoquadrate.

3. Betrachten wir jetzt ein beliebiges ebenes Viereck $A_1A_2A_3A_4$. Die Mitten der Seiten A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 sollen B_1, B_2, B_3, B_4 heißen. Über diesen Seiten errichte man nach außen vier Quadrate mit den Zentren E_1, E_2, E_3, E_4 und nach innen vier Quadrate mit den Zentren I_1, I_2, I_3, I_4. Die Diagonalen A_1A_3, A_2A_4 schneiden sich in K, und ihre Mitten werden mit M, N bezeichnet.

Wendet man den Satz b) auf die Linienzüge $E_1B_1MB_3E_3$, $E_2B_2MB_4E_4$ an, so findet man, daß die Mittelpunkte der äußeren Quadrate die Ecken eines Pseudoquadrates sind.[1]) Gleiches gilt für das Viereck $I_1I_2I_3I_4$.

Nach Satz g) haben die Punktsysteme $A_1A_2A_3A_4$, $E_1E_2E_3E_4$, $I_1I_2I_3I_4$ denselben Schwerpunkt S.

4. Das ursprüngliche Viereck sei jetzt ein Pseudoquadrat. Dann ist $KA_1E_1A_2$ ein Kreisviereck und wegen $E_1A_1 = E_1A_2$ ist die Gerade KE_1 die Halbierende des Winkels A_1KA_2. Man sieht sofort, daß die Diagonalen E_1E_3, E_2E_4 des Viereckes $E_1E_2E_3E_4$ mit den Halbierenden der Diagonalwinkel des Viereckes $A_1A_2A_3A_4$ zusammenfallen.[2])

Nach einem Satze von Stoll[3]) liegen der Diagonalenschnitt K des Vierecks, der Schwerpunkt S der Ecken und der Schwerpunkt S_1 der Fläche des Vierecks in einer Geraden, und $KS = 3SS_1$. Da die Punkte K und S dieselben sind in den beiden Pseudoquadraten $A_1A_2A_3A_4$, $E_1E_2E_3E_4$, haben auch die Flächen dieser Vierecke denselben Schwerpunkt (Gutsche).

Es drängt sich hier die Frage auf, ob dieser Satz auch für andere Vierecke $A_1A_2A_3A_4$ gültig ist. Ich will also untersuchen, wann die Gerade E_1E_3 durch den Punkt K geht. Zu diesem Zwecke nenne ich α_1, α_2, α_3, α_4 die Winkel KA_1A_2, KA_2A_1, KA_3A_4, KA_4A_3. Die Abstände der Punkte E_1, E_3 von den Diagonalen A_1A_3, A_2A_4 haben die Werte:

$$E_1A_1\sin(\alpha_1+45^0),\ E_1A_2\sin(\alpha_2+45^0),\ E_3A_3\sin(\alpha_3+45^0),\ E_3A_4\sin(\alpha_4+45^0);$$

(Laisant); *Nouvelle Correspondance mathématique*, 1878, S. 40 (H. Van Aubel), und S. 143 (J. Neuberg); *AFAS*, 1891, S. 138 (Collignon), und 1893, S. 26 (J. Neuberg).

1) Laisant und H. Van Aubel, loc. cit.

2) Collignon, loc cit.

3) Hier ein einfacher Beweis des Stollschen Satzes; ist er neu? Ich nenne $3f_1$, $3f_2$, $3f_3$, $3f_4$, $3F$ die Flächen der Dreiecke KA_1A_2, KA_2A_3, KA_3A_4, KA_4A_1 und des Vierecks $A_1A_2A_3A_4$. Das Gewicht der Fläche KA_1A_2 kann man ersetzen durch drei Gewichte f_1, in K, A_1, A_2 angebracht. Fährt man so fort, so bekommt man in K das Gewicht F, und in den Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 bezüglich die Gewichte f_4+f_1, f_1+f_2, f_2+f_3, f_3+f_4. Es seien M', N' die zu K symmetrischen Punkte in bezug auf M, N. Da

$$\frac{f_1+f_4}{f_2+f_3} = \frac{A_1K}{KA_3} = \frac{A_3M'}{MA_1},$$

das Verhältnis der beiden ersten muß gleich dem Verhältnisse der beiden letzten sein, und somit

$$\frac{\sin(\alpha_1 + 45^0)}{\sin(\alpha_2 + 45^0)} = \frac{\sin(\alpha_3 + 45^0)}{\sin(\alpha_4 + 45^0)}.$$

Hieraus folgert man

$$\frac{\sin(\alpha_1 + 45^0) + \sin(\alpha_2 + 45^0)}{\sin(\alpha_1 + 45^0) - \sin(\alpha_2 + 45^0)} = \frac{\sin(\alpha_3 + 45^0) + \sin(\alpha_4 + 45^0)}{\sin(\alpha_3 + 45^0) - \sin(\alpha_4 + 45^0)}$$

oder einfacher

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + 90^0)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4 + 90^0)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_4)}.$$

Beachtet man, daß $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$ und behält nur die annehmbaren Lösungen zurück, so kann man setzen

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + 90^0) = \infty, \quad \text{oder} \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_3 - \alpha_4.$$

Die erste Lösung gibt ein *orthodiagonales* Viereck, wie auch sofort aus dem obigen Beweise einleuchtet, da die Längen der Diagonalen A_1A_3, A_2A_4 keine Rolle spielten. Die zweite Lösung, verbunden mit $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$ führt zu $\alpha_1 = \alpha_3$, $\alpha_1 = \alpha_4$: die Seiten A_1A_2, A_3A_4 müssen parallel sein, welche Bedingung man direkt bestätigen kann.

Hiernach ist der Satz des Herrn Gutsche wahr für jedes Viereck mit rechtwinkligen Diagonalen und für jedes Parallelogramm.

5. Ist $A_1A_2A_3A_4$ ein Pseudoquadrat, so fallen die Punkte I_1, I_3 in die Mitte der Strecke E_2E_4, und die Punkte I_2, I_4 in die Mitte der Strecke E_1E_3.[1])

Erstens sind die Strecken I_1B_1, B_1B_3, B_3I_3 gleich den Komponenten des Linienzuges MB_4B_2M und senkrecht zu diesen; somit fällt I_3 auf I_1. Dann stehen in den Dreiecken $I_1A_2E_2$, $A_1A_2A_3$ die Seiten I_1A_2 und A_1A_2, A_2I_2 und A_2A_3 in demselben Verhältnisse $1:\sqrt{2}$ und bilden untereinander denselben Winkel 45^0; folglich ist I_1E_2 gleich $\frac{A_1A_3}{\sqrt{2}}$ und bildet mit A_1A_3 den Winkel 45^0. Derselbe Schluß gilt auch für I_1E_4.

Andere Lehrsätze und Aufgaben findet man in Mathesis; ich erwähne nur noch hier das folgende hübsche Theorem von H. Van Aubel (1894, S. 176 und 1896, S. 94).

Errichtet man über den Seiten eines Pseudoquadrates $A_1A_2A_3A_4$ vier ähnliche gleichwendige Dreiecke $A_1A_2C_1$, $A_2A_3C_2$, $A_3A_4C_3$, $A_4A_1C_4$, so sind die Spitzen C_1, C_2, C_3, C_4 die Ecken eines zweiten Pseudoquadrates.

Der Gutschesche Satz ist noch wahr, wenn die Aufsatzdreiecke $A_1A_2E_1$, ... ähnlich und rechtwinklig an der Spitze sind, welches auch das Verhältnis der Katheten sei.

Lüttich, Mai 1905. J. Neuberg.

---

können die Gewichte in A_1 und A_3 durch das Gewicht F in M' ersetzt werden. In ähnlicher Weise erhält man anstatt der Gewichte in A_2 und A_4 das Gewicht F in N'. Schließlich ist der Schwerpunkt S_1 der Fläche des Viereckes auch der Schwerpunkt von gleichen Massen, in K, M', N' angebracht.

1) *AFAS*, Besançon, 1893, S. 31 (Neuberg).

Zu **30** (Bd. XI, S. 278) (O. Gutsche). — Die Formel $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}$ findet sich an mehreren Stellen, z. B. in J. H. van Swinden, Elemente der Geometrie, deutsch von C. F. A. Jacobi, Jena 1834, S. 337, Nr. 824 und in Lieber-v. Lühmann, Trigon. Aufgaben, 3. Aufl., Berlin 1889, S. 81.

Charlottenburg. P. Zühlke.

---

3. Kleinere Notizen.

Über einige zahlentheoretische Funktionen.

1. Es bezeichne $\sigma_0(m)$ die Anzahl der Teiler von m:

(1) $$\sigma_0\left(\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu^{m_\nu}\right) = \prod_{\nu=1}^{n}(m_\nu + 1),$$

$\sigma(m)$ die Teilersumme selbst:

(2) $$\sigma\left(\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu^{m_\nu}\right) = \prod_{\nu=2}^{n}\frac{p_\nu^{m_\nu+1}-1}{p_\nu - 1},$$

$\tau(m)$ die Summe der *echten* Teiler:

(3) $$\tau(m) = \sigma(m) - m,$$

$\sigma_k(m)$ die Summe der k-Potenzen der Teiler:

(4) $$\sigma_k\left(\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu^{m_\nu}\right) = \prod_{\nu=1}^{n}\frac{p_\nu^{k(m_\nu+1)}-1}{p_\nu^k - 1}.$$

Es bedeute ferner $a \sim b$, daß a *höchstens* von der Größenordnung von b unendlich wird.

2. Es ist
$$\frac{\sigma(m)}{m} = \prod_{\nu=1}^{n}\frac{p_\nu^{m_\nu+1}-1}{p_\nu^{m_\nu}(p_\nu - 1)},$$
also:

(1) $$\frac{\sigma(m)}{m} < \prod_{\nu=1}^{n}\frac{p_\nu}{p_\nu - 1}$$

Andrerseits ist offenbar:
$$\frac{\sigma(m)}{m} \geqq \prod_{\nu=1}^{n}\frac{p_\nu + 1}{p_\nu}.$$

Es sei nun $2 \leqq p_1 < p_2 < \cdots < p_n$, so ist: $\frac{p_\nu + 1}{p_\nu} < \frac{p_{\nu+1}}{p_{\nu+1} - 1}$, weil $p_{\nu+1} - p_\nu \geqq 1$; folglich ist:

(2) $$\frac{\sigma(m)}{m} > \prod_{\nu=2}^{n}\frac{p_\nu}{p_\nu - 1}.$$

Nun ist:

$$\lim\left[\sum_{\mu=1}^{m}\frac{1}{\mu}-\prod_{(p)}\frac{p}{p-1}\right]=0,$$

wenn man gleichzeitig m ins Unendliche wachsen läßt und das Produkt über alle Primzahlen erstreckt.

Da ferner

$$\lim_{m=\infty}\left(\sum_{\mu-1}^{m}\frac{1}{\mu}-\log m\right)=C,$$

der Eulerschen Konstanten, ist, mit andern Worten, da die *harmonische Reihe* logarithmisch unendlich wird, so ist $\frac{\sigma(m)}{m}$ für gewisse unendlich viele Werte von m beliebig großer Werte fähig, aber:

$$(3)\qquad 1<\frac{\sigma(m)}{m\log m}<G,$$

wo G eine von m unabhängige endliche Zahl ist. Ein Grenzwert existiert natürlich nicht, da für hinreichend große Primzahlen (deren es ja nach Euklides unendlich viele gibt) $\frac{\sigma(m)}{m}$ sich von 1 beliebig wenig unterscheidet. Da $\lim\limits_{m=\infty}\frac{\log m}{m}=0$, so folgt aus der Ungleichung (3) der *Grenzwert*

$$(4)\qquad \lim_{m=\infty}\frac{\sigma(m)}{m^2}=0.$$

Ebenso ist $\lim\limits_{m=\infty}\frac{\tau(m)}{m^2}=0$. Da aber für die in unendlicher Anzahl vorhandenen überschießenden Zahlen $\tau(m)>m$, also: $\frac{\tau(m)}{m^2}>\frac{1}{m}$, d. h. größer als das Glied der harmonischen Reihe ist, so ist $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\tau(m)}{m^2}$ divergent, a fortiori $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\sigma(m)}{m^2}$. Dagegen konvergiert $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\sigma(m)}{m^s}$ für $s=3$, 4 usw.

3. Es werde gesetzt: $\tau[\tau(m)]=\tau^{(2)}(m)$, $\tau[\tau^{(2)}(m)]=\tau^{(3)}(m)$ usw. Ist $\tau(m)=m$, so heißt bekanntlich m eine vollkommene Zahl; ist $\tau^{(2)}(m)=m$, so heißen m und $\tau(m)$ befreundete Zahlen. Man kann nun fragen:

1) Gibt es Zahlen für die $\tau^{(\mu)}(m)=m$, falls $\mu\geqq 3$? Solche Zahlensysteme: m, $\tau(m)$, $\ldots\,\tau^{(\mu-1)}(m)$ könnte man etwa als befreundete Zahlen höherer Ordnung bezeichnen.

2) Führt die Wiederholung der Operation τ stets nach einer endlichen Zahl n von Schritten auf prime, vollkommene oder befreundete Zahlen? Oder: gibt es eine, nicht von μ, vielleicht aber von m abhängige Zahl G' von der Beschaffenheit, daß $\lim\limits_{\mu=\infty}\tau^{(\mu)}(m)<G'$?

3) Wächst die Zahl n mit wachsendem m auch ins Unendliche?

4) Wächst G' mit m ins Unendliche? Dies ist sicher der Fall, wenn es beliebig große, d. h. wenn es unendlich viele vollkommene oder befreundete Zahlen gibt.

5) Die kleinste Zahl $\bar{G}$ unter allen (ganzzahligen) G', die der erwähnten Ungleichung genügen, kann als zahlentheoretische Funktion $\bar{G}(m)$ von m aufgefaßt werden. Im allgemeinen ist, wenigstens für $m < 200$, $\bar{G} = 0$, während für eine vollkommene Zahl $\bar{G}$ dieser gleich, für befreundete Zahlen $\bar{G}$ gleich der größeren ist.

6. Es sei $\tau^{(\mu+1)}(m) > \tau^{(\mu)}(m)$ für $\mu \leqq N$. Dabei ist unter $\tau^{(0)}(m)$ die Zahl m selbst zu verstehen. Auch N kann als zahlentheoretische Funktion von m aufgefaßt werden. Wächst N mit m ins Unendliche? Nein. Aber man kann fragen, ob N beliebig großer Werte fähig ist. Es könnte auch Zahlen $\bar{m}$ von der Beschaffenheit geben, daß $\tau^{(\mu+1)}(\bar{m}) > \tau^{(\mu)}(\bar{m})$ für *jedes* endliche μ wäre; dann wäre $N(\bar{m}) = \infty$, folglich auch $\bar{G}(\bar{m}) = \infty$.

7. Welches ist überhaupt der Zusammenhang zwischen N und $\bar{G}$?

4. Es ist $\log\log m < \log m$ und:

$$\lim_{m=\infty}\left(\frac{\log^{\mu} m}{m}\right) = 0.$$

Bei Anwendung der Bezeichnungen von Nr. **1** ist nach Nr. **2**:

$$(1) \qquad \tau(m) \sim m \log m,$$

also $\tau^{(2)}(m) \sim \tau(m \log m) \sim m \log m \log(m \log m)$, $\tau^{(2)}(m) \sim m \log^2 m$, und allgemein:

$$(2) \qquad \tau^{(\mu)}(m) \sim m \log^{\mu} m,$$

daher:

$$(3) \qquad \lim_{m=\infty}\frac{\tau^{\mu}(m)}{m^2} = 0$$

für ein beliebiges endliches, aber festes μ. Hieraus folgt auch die Konvergenz von $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau^{(\mu)}(m)}{m^3}$.

5. Es ist in üblicher Bezeichnung für komplexe $s \equiv \Re(s) + i\Re\left(\frac{s}{i}\right)$:

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}$$

die Riemannsche Zetafunktion, wenn $\Re(s) > 1$. In dieser Halbebene ist $\zeta(s)$ eindeutig und:

$$\zeta'(s) = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log m}{m^s}.$$

Nach Nr. 2 ist $\sigma(m) \sim m \log m$, folglich:

$$(1) \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sigma(m)}{m^s} \sim \zeta'(s-1)$$

für $s > 1$. Aus Nr. 4 folgt ferner:

$$(2) \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau^{(\mu)}(m)}{m^s} \sim \zeta(s-2).$$

6. Nach Nr. **1** ist:

$$\frac{\sigma_k(m)}{m^k} = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu^{k(m_\nu+1)} - 1}{p_\nu^{k m_\nu}(p_\nu^k - 1)},$$

also:

$$\frac{\sigma_k(m)}{m^k} < \prod_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu^k}{p_\nu^k - 1}. \tag{1}$$

Da nun das Produkt über alle Primzahlen:

$$\prod_{(p)} \frac{p^k}{p^k - 1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k} = \zeta(k)$$

für $k > 1$ *konvergiert*, so ist der Quotient $\frac{\sigma_k(m)}{m^k}$ für $k \geqq 2$ *nicht* beliebig großer Werte fähig, sondern:

$$0 < \frac{\sigma_k(m)}{m^k} < G^* \tag{2}$$

oder:

$$\sigma_k(m) \sim m^k. \tag{3}$$

Das ist ein Unterschied gegenüber dem Falle $k = 1$, $\sigma_1 = \sigma$.

7. Zusammenfassung. — $\sigma_0(m) \sim \log m$, $\sigma(m) \sim \tau(m) \sim m \log m$, $\sigma^{(\mu)}(m) \sim \tau^{(\mu)}(m) \sim m \log^\mu m$, $\sigma_k(m) \sim m^k (k \geqq 2)$.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma(m)}{m^s} \sim \zeta'(s-1), \quad s > 2,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma^{(\mu)}(m)}{m^s} \sim \zeta(s-2), \quad s > 3,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(m)}{m^s} \sim \zeta(s-k-1), \quad s > k+1.$$

Potsdam, den 15. Juni 1903. OTTO MEISSNER.

Zur Konstruktion der vier Normalen eines Kegelschnittes in einem Punkte seiner Ebene.

Wenn man die Gleichung der Fußpunktkurve eines Kegelschnittes für irgend einen Punkt der Ebene mit der Gleichung des Kegelschnittes kombiniert, so erhält man als Ort der vier Berührungspunkte die Gleichung eines zweiten Kegelschnittes

$$m_o : m_p = \varrho_a : a.$$

In ihr bedeuten m_o und m_p die Neigungsverhältnisse der Fahrstrahlen im Mittelpunkte O und in dem Punkte P; ϱ_a ist der Krümmungshalbmesser im Endpunkte der Halbachse $OA = a$. Auf jedem Durchmesser OX des ersten Kegelschnittes ist demzufolge jeder Punkt des zweiten Kegelschnittes derjenige Punkt X, welcher in dem Normalstrahle PX der konjugierten Richtung liegt. Man hat also den Satz:

Die Fußpunkte der vier Normalen eines Kegelschnittes in einem Punkte P der Ebene sind die Schnittpunkte einer gleichseitigen Hyperbel; diese Hyperbel ist der Ort desjenigen Punktes X, in welchem jeder Durchmesser OX von dem Normalstrahle PX der konjugierten Richtung geschnitten wird.

Der Ort für einen solchen Punkt läßt sich aber auch unabhängig von der Fußpunktkurve aus dem Kegelschnitte selbst, d. h. aus dem Polarsysteme, dessen Kern derselbe ist, sehr leicht synthetisch finden. Den Nachweis hat Schröter in einer Fußnote zu § 45 seiner „Theorie der Kegelschnitte" (Leipzig 1867) geführt, doch allgemein nur für Ellipse und Hyperbel, so daß im Falle der Parabel die Konstruktion versagt und umgeändert werden muß; auch sind, dem Zwecke dieser Note entsprechend die Möglichkeiten, welche sich aus den verschiedenen Lagen des Punktes P zum Kegelschnitt und zu seiner Evolute ergeben, nicht in Betracht gezogen. Es liegt in der Natur der Sache, daß nur mit Hilfe der unendlich fernen Geraden das Normalenproblem erschöpfend behandelt werden kann; denn sie allein ist es, welche von sämtlichen Strahlen der Ebene und ihren Normalstrahlen involutorisch geschnitten wird, die also die einem Strahle normale Richtung als konjugierte Richtung enthält. In diesem Sinne will ich jetzt die Synthesis der Aufgabe verallgemeinern und eine Determination derselben geben, welche dadurch an Interesse gewinnt, daß sie zu einer rein linearen Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes für jeden Punkt des Kegelschnittes führt.[1])

Die Strahlen OX und PX beschreiben projektive Strahlenbüschel; denn die dem Strahle OX konjugierte Richtung ist ihrem Normalstrahle PX konjugiert in dem unendlich fernen Schnitte sämtlicher Normalstrahleninvolutionen. Die konjugierten Richtungen, die diese Involution und die dem Kegelschnitte zugehörige Involution auf der unendlich fernen Geraden gemein haben, sind die Richtungen der Achsen des Kegelschnittes; diesen Lagen des Strahles OX sind also die entsprechenden Lagen des Strahles PX parallel. In der Lage $OX = OP$ wird $PX = PP$, und durch $PX = PO$ wird $OX = OO$. Der Ort des Schnittpunktes

$$(OX, PX) = X$$

ist also eine gleichseitige Hyperbel, welche die Punkte O und P enthält, und deren Asymptoten den Achsen des Kegelschnittes parallel sind. Sie ist es, die den Kegelschnitt viermal in einem Punkte

$$(OX_k, PX_k) = X_k$$

schneidet, ihm also diejenigen vier Punkte X_k gibt, deren Strahlen PX_k Normalstrahlen des Kegelschnittes sind.

1) Die übliche Konstruktion des Krümmungshalbmessers durch Darstellung seiner Länge ist keineswegs rein linear; denn sie bedarf entweder des rechten Winkels oder des Zirkels. Auch die auf die Steinersche Parabel gestützte Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes (vgl. Schröter a. a. O. § 37) nimmt ein drehbares Achsenkreuz, mithin stillschweigend einen Kreis zuhilfe.

Als Normalen des Kegelschnittes sind die vier Strahlen PX_k d Tangenten seiner Evolute im Punkte P; von ihnen sind alle vier od zwei reell, je nachdem P innerhalb oder außerhalb der Evolute, d. h. einem Felde liegt, welches von allen oder nicht von allen Normalen b strichen wird. Im Grenzfalle, wenn P ein Punkt der Evolute, d. h. e Krümmungsmittelpunkt des Kegelschnittes ist, fallen jedesmal zwei von de Strahlen PX_k zusammen. Der Ort des Punktes X berührt also in diese Falle den Kegelschnitt und kann, wenn dieser Punkt und seine Tangen gegeben sind, zur Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes benutzt werde Man braucht zu diesem Zwecke nur die Tangente in X dem Durchmesser O und den Achsen in O die Parallelstrahlen in X entsprechend zu setz und nun zu diesen drei Paaren entsprechender Strahlen den der Normale X entsprechenden Durchmesser OP, d. h. in zwei entsprechenden Schnitt den dem Schnittpunkte der Normale entsprechenden Punkt zu suchen, dan ist der Schnittpunkt

$$(OP, XP) = P$$

der Krümmungsmittelpunkt des Punktes X. Ist P ein Rückkehrpunkt de Evolute, d. h. der Krümmungsmittelpunkt eines Scheitels, so fallen dre von den vier Punkten X_k in diesen Scheitel; der vierte Fußpunkt ist de andere Scheitel auf OP. Der Ort für X zerfällt also in diesem Falle i die Achse OP und die Tangente des betreffenden Scheitels. Aus diese beiden Richtungen und den Punkten O und A allein kann aber offenbar nicht gefunden werden; zu seiner Konstruktion ist eine fünfte Lage d Punktes X, mithin die Drehung eines Rechten erforderlich.

Ein anderer Punkt der einen oder anderen Achse hat zwei von seinen zwar auch auf dieser Achse, doch außerdem noch zwei reelle oder imaginä Lagen des Punktes X auf dem Kegelschnitte, welche, weil jetzt der ande Teil des Ortes zwar auch eine Normale, aber keine Scheitelnormale von O ist, zu den Achsen symmetrisch liegen. Aus den vier Punkten X_k werde die vier Scheitel, wenn P in beiden Achsen liegt, d. h. mit O zusamme fällt; der Ort für X zerfällt alsdann in beide Achsen, weil jede eine Lag von OX und PX ist. Ist P ein Punkt des Kegelschnittes, so ist eine de reellen Normalen gleich Null, weil einer der Punkte X_k dann mit P zu sammenfällt. Ist aber P ein Punkt in der unendlich fernen Geraden, d. h nur eine Richtung, so ist der Ort sämtlicher Richtungen und der de Normalrichtung der gegebenen Richtung konjugierte Durchmesser der O für X. Von den unendlich fernen Loten abgesehen, gibt es also in jed Richtung nur zwei Lote des Kegelschnittes; das sind die beiden Lote den Endpunkten eines Durchmessers auf den Tangenten. Die Parabel hat in der unendlich fernen Geraden; bei ihr ist also jedesmal PO eine Norma Beim Kreise bleibt PX stets parallel OX, der Ort für X zerfällt also ihm, auch wenn P nicht in der unendlich fernen Geraden liegt, in di Gerade und OP. Im Mittelpunkte wird $OP = OO$; in diesem Punkte Kreises ist daher jedes OX ein PX, d. h. jeder Strahl ein Normalstr

Holzminden, 3. Dezember 1903. Georg Kober.

Albert Girard und die Waringsche Formel.

Die Auflösung der Newtonschen Formel zwischen den Koeffizienten einer algebraischen Gleichung $A_1 A_2 A_3 \ldots$ und den Potenzsummen ihrer Wurzeln $s_1 s_2 s_3 \ldots$, nämlich

$$(1) \qquad s_k + A_1 s_{k-1} + A_2 s_{k-2} + \cdot \;\cdot + A_{k-1} s_1 + k A_k = 0$$

mittels der Gleichung

$$(2) \qquad s_k = k \sum_r (-1)^r \frac{(r-1)!}{\alpha!\, \beta!\, \gamma!\, \delta! \ldots} A_1^\alpha A_2^\beta A_3^\gamma A_4^\delta \ldots,$$

wobei $\alpha\beta\gamma\delta \ldots$ sämtliche ganzzahligen nicht-negativen Auflösungen der Gleichung

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + \cdots = k$$

sind und für jede Auflösungsgruppe

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots = r$$

gesetzt ist, wurde solange immer auf Waring zurückgeführt, bis in einem Artikel des Herrn Vahlen in der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften" (1. Bd. S. 451) Albert Girard durch die Bezeichnung der Gl. (2) als „Girardscher Formel" zum Erfinder derselben erklärt wurde. Das kann aber nicht zugegeben werden. Waring schreibt in der Vorrede zu seinen Meditationes algebraicae 3. Auflage Cambridge 1782 auf S. VIII: „Albert Girard fand die Summe der Quadrate, Kuben, Biquadrate der Wurzeln einer Gleichung [aus den Koeffizienten], die [allgemeine] Regel gab Newton[1]) ..., er entwickelte aus den gefundenen Summen aller niedrigeren Potenzen der Wurzeln einer Gleichung die Summe der nächst höheren Potenzen. In der ersten Auflage dieses Werkes[2]) wird das Gesetz der Reihe [d. h. des Ausdrucks] angegeben, welche die genannte Summe durch die Koeffizienten der Gleichung darstellt". Das hier von Waring Gesagte entspricht genau den Tatsachen. Die Summe der 1., 2., 3. und 4. Potenzen der Wurzeln der Gleichung

$$x^n - C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} - C_3 x^{n-3} + C_4 x^{n-4} \mp \cdots = 0$$

stellt A. Girard[3]) in folgender Art durch die Koeffizienten dar:

$$(3) \qquad \begin{cases} s_1 = C_1, \;\; s_2 = C_1^2 - 2C_2, \;\; s_3 = C_1^3 - 3C_1C_2 + 3C_3, \\ s_4 = C_1^4 - 4C_1^2C_2 + 4C_1C_3 + 2C_2^2 - 4C_4. \end{cases}$$

Aber weder gibt er die Art ihrer Ableitung an, noch spricht er ein Wort über die Darstellung höherer Potenzsummen, noch legt er überhaupt Gewicht auf dieselben; im Gegenteil — diese Formeln (3) stellt er fast als abschreckendes Beispiel für den Mangel an Einfachheit auf. Girard betont

1) Arithm. univers. 1707 S. 251.
2) 1762, wie S. XI der Vorrede zur 3. Auflage angegeben wird.
3) *Invention nouvell een l'algèbre*, Amsterdam 1629, neu herausgeg. von Bierens de Haan, Leyden 1884. Obige Gleichungen Seite F2.

nämlich in ganz besonderer Weise die Gleichheit der Koeffizienten „alternierend" d. h. in der Form

$$x^n + C_2x^{n-2} + C_4x^{n-4} + \cdots = C_1x^{n-1} + C_3x^{n-3} + \cdots$$

geordneten Gleichung mit den Kombinationen 1., 2., 3., ... Klasse der Wu der Gleichung, welche er als 1., 2., 3., ... Faktion bezeichnet, und sagt vo Aufstellung der Formeln (3): „Es könnte jemandem scheinen, daß Faktionen [d. h. hier die Koeffizienten der Gleichung] noch anders ausde wären als oben, als ob anstatt zu sagen: Summe, Summe der Produkt zweien, Summe der Produkte zu dreien etc., man einfacher sagen kö Summe, Summe der Quadrate, Summe der Kuben, etc., es verhält sich nicht so, denn wenn mehrere Lösungen vorhanden sind, so wird ihre Su den 1. Koeffizienten geben, die Summe der Produkte zu zweien den 2., wie es schon genügend auseinander gesetzt ist; aber etwas derartiges bei den Potenzen, wie man einwerfen [erwarten? „objecter"] kö nicht statt.

Exempel."

Nun folgen die Formeln (3), sodann ein Beispiel und darauf: „we die Gleichung auch sei, auch mit negativen Wurzeln, dies wird immer ergeben, wodurch man erkennt, daß diese Potenzen (Quadrate, Kuben nicht die Koeffizienten machen, sondern im Gegenteil die Koeffizi machen *sie*: weit entfernt von der Einfachheit der Faktionen."

Weiter enthält Girards Buch kein Wort über die Formel (3), wä Waring die Gl. (2) vollständig beweist (a. a. O. S. 1 ff). Daher s es nur billig, dieselbe auch weiterhin als Waringsche Formel z zeichnen.

Schlußbemerkung: Sei bei dieser Gelegenheit noch ein Wort übe Verhältnis zwischen Girard und seinem bedeutenden Vorgänger V dessen Schriften ersterer sehr wohl kannte, inbezug auf die algebrai Gleichungen gestattet. Girard legt auf die Gleichheit der Faktione den Koeffizienten der Gleichung so großes Gewicht, als ob die Entde derselben von ihm selbst herrührte, das ist aber nicht der Fall, sonde stammt, wie schon Waring (S. II der zitierten Vorrede) angibt, und von M. Cantor ausführlicher erörtert wird (Gesch. d. Math. 2. Aufl. I S. 639) von Franz Vieta und findet sich am Schluß seiner Abhan De emendatione aequationum (1615), und er hält sie für so bedeutsam er sagt: „Und diese elegante Schlußfolgerung einer sehr schönen Betrac soll dieser in anderer Hinsicht reichlich ausgeführten Abhandlung (tra alioquin effuso) endlich Ziel und Abschluß (coronida) bringen".[1])

Aber Girard geht merklich über Vieta hinaus, indem er es (nat ohne Beweis) ausspricht (Seite E 4, ff.): *Alle algebraischen Gleichungen b soviel Auflösungen, als ihr Grad beträgt, ausgenommen die unvollstän* diese letztere Einschränkung kann sich aber nur auf die reellen ode nur auf die positiven Auflösungen beziehen, welche die älteren Mathem mit Einschluß von Vieta allein als Auflösungen gelten ließen. Daß G

1) M. Cantor (a. a. O.) liest, ich weiß nicht nach welcher Ausgabe des V etwas anders und übersetzt demgemäß.

bei Hinzuziehung der negativen und unmöglichen Auflösungen von der Richtigkeit seiner Behauptung ohne Einschränkung überzeugt ist, zeigen die weiteren Ausführungen und Beispiele; eine $k$fache Wurzel zählt er $k$mal. Dabei zeigt er aber noch, daß und wie bei Kenntnis *einer* Wurzel einer Gleichung *der Grad derselben mit Hilfe der Faktionen um eine Einheit erniedrigt werden kann,* wobei er unter anderen Gleichungen diese (Seite F1):

$$x^4 = 4x - 3$$

mit den Wurzeln: $1,\ 1,\ -1+\sqrt{-2},\ -1-\sqrt{-2}$ als Beispiel benutzt. Diesem Umstande legt er mit Recht seine volle Bedeutung bei und zeigt, wie es ihm hierdurch öfters gelingt, die Auflösungen von Gleichungen durch Hinzufügung von Wurzeln zu vervollständigen, welche Stevin und Vieta ausgelassen hatten.

Königsberg, April 1906. LOUIS SAALSCHÜTZ.

---

4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

AUERBACH, F., Das Zeißwerk und die Karl-Zeißstiftung in Jena. 3. vermehrte Auflage.

BACHMANN, F., und KANNING, R., Rechenbuch für höhere Mädchenschulen. Drittes Heft. Dritte Auflage. Leipzig 1907, G. Freytag. ℳ 0.70.

BECKER, L., Betrachtungen über die Verluste bei Ilgner-Förderanlagen und Bestimmung der wirtschaftlichen Schlüpfung ihrer Anlaßmotoren. Dr.-Ing.-Dissert. Techn. Hochsch. Berlin 1907.

BURKHARDT, H., Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen. Leipzig 1907, B. G. Teubner. XI, 252 S. ℳ 6.—.

BUSTELLI, A. M., Elementi di filosofia della matematica nei riguardi didascalici con prefazione di V. Cerruti. Fasc. 1°: Prolegomeni. — Fasc. 2°, Appunti di logica della matematica. — Fasc. 3°: La singolarità e la pluralità. — Fasc. 4: La grandezza e la quantità. Roma 1907, Albrighi & C.

EGGERT, O., Einführung in die Geodäsie. Leipzig 1907, B. G. Teubner. X, 437 S. ℳ 10.—.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Band IV, 2 II, Heft 1: C. H. MÜLLER in Göttingen und A. TIMPE in Danzig, Die Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie. — O. TEDONE in Genua, Allgemeine Theoreme der mathematischen Elastizitätslehre (Integrationstheorie). ℳ 3.60. — Band VI 1, Heft 2: P. PIZZETTI in Pisa, Höhere Geodäsie. ℳ 3.60.

Encyclopédie des Sciences mathématiques. Leipzig et Paris 1907, B. G. Teubner et Gauthier-Villars. Tome I, Volume 1, fascicule 2: A. PRINGSHEIM, Nombres irrationnels et notion de limite (suite et fin). — A. PRINGSHEIM, Algorithmes illimités. Exposés par J. MOLK. ℳ 4.20.

ENRIQUES, F., Fragen der Elementargeometrie. Deutsche Ausgabe von H. FLEISCHER, II. Teil: Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. Leipzig 1907, B. G. Teubner. XII, 348 S. ℳ 9.—.

FACK, M., Zur didaktischen Darstellung von Stoffen aus der niederen und höheren Mathematik. Gotha 1907, Thienemann. ℳ 1.40.

FISCHER, K. T., Vorschläge zur Hochschulausbildung der Lehramtskandidaten für Physik. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 0.80.

Föppl, A., Vorlesungen über technische Mechanik. Fünfter Band: Die wichtigsten Lehren der höheren Elektrizitätstheorie. Leipzig 1907, B. G. Teubner. XII, 391 S. Mit 44 Fig. ℳ 10.—.

Heiberg, J. L., und Zeuthen, H. G., Eine neue Schrift des Archimedes. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 363 S.

Heilermann-Diekmann. Algebra. I. Teil: Die vier Grundrechnungen. Die linearen Gleichungen. Die Potenzrechnungen. Die quadratischen Gleichungen. 12. Aufl. von K. Knops. Essen 1907, Baedeker.

Höhm, F., Geometrische Anschauungslehre für die I. bis IV. Klasse der Mädchen-Lyzeen. I. Teil: Für die I. und II. Klasse. — II. Teil: III. und IV. Klasse. Wien 1907, Tempsky.

Kammerer, O., Der Ingenieur als Persönlichkeit. Rektorats-Rede. Techn. Hochsch. Berlin 1907.

Kleiber-Scheffler, Physik für die Oberstufe. 2. Auflage. München 1907, Oldenbourg. 446 S. ℳ 4.60.

Knopp, K., Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze Inaug.-Diss. Berlin 1907.

Kohlrausch, L., Einführung in die Differential- und Integralrechnung nebst Differentialgleichungen. Berlin 1907, J. Springer. 191 S. ℳ 6.—.

Koppe-Diekmann, Geometrie. III. Teil: Grundlehren der darstellenden Geometrie. — Die wichtigsten Sätze über Kegelschnitte in elementar-synthetischer Behandlung. Analytische Geometrie der Ebene. 3. Aufl. von K. Knops. Essen 1907, Baedeker.

Lamb, H., Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsch von Johannes Friedel. Leipzig 1907, B. G. Teubner. XIV, 788 S.

Lehmann, O., Die wichtigsten Begriffe und Gesetze der Physik unter alleiniger Anwendung der gesetzlichen und der damit zusammenhängenden Maßeinheiten. Berlin 1907, J. Springer. 58 S.

Lesser, O., Die Entwicklung des Funktionsbegriffes und die Pflege des funktionalen Denkens im Mathematikunterricht unserer höheren Schulen. 74 S.

Malina, F., Über Sternbahnen und Kurven mit mehreren Brennpunkten. Wien 1907, Seidel.

Mie, G., Moleküle, Atome, Weltäther. Zweite Auflage. Nr. 58 „Aus Natur und Geisteswelt". Leipzig 1907, B. G. Teubner. IV, 142 S. ℳ 1.—.

Minkowski, H., Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie. Leipzig 1907, B. G. Teubner. VIII, 236 S. ℳ 8.—.

Nernst und Schönflies, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Fünfte Auflage. München 1907, R. Oldenbourg. ℳ.11—.

Petronievics, B., Die typischen Geometrien und das Unendliche. Heidelberg 1907, C. Winter. 87 S. ℳ 3.—.

Rohrbach, C., Sternkarten in gnomonischer Projektion. Gotha 1907, Thienemann. ℳ 1.40.

Schumacher, Hermann, Über eine Riemannsche Funktionenklasse mit zerfallender Thetafunktion. Inaug.-Diss. Straßburg 1907.

Technik und Schule. Herausgeg. von M. Girndt. I. Bd. 3. Heft. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 1.60.

Thieme, H., Leitfaden der Mathematik für Gymnasien. Zweiter Teil: Die Oberstufe. Leipzig 1907, G. Freytag. ℳ 1.60.

Zimmermann, H., Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte. Fünfte Auflage. Berlin 1907, W. Ernst u. Sohn. 204 S. ℳ 5.—.

Über die Darstellung algebraischer Funktionen und Abelscher Integrale aus gegebenen Elementen.

Von Hermann Stahl in Tübingen.

Seit Riemann sind die allgemeinen Sätze über algebraische Funktionen und Abelsche Integrale auf mannigfache Weise hergeleitet und begründet worden. Weniger entwickelt ist die explizite Darstellung dieser Funktionen und Integrale. Hier ist eine Lücke, zu deren Ausfüllung das Folgende beitragen möchte. Besonders einfach und natürlich erscheint ein Weg, den bereits Christoffel[1]) und später Fields[2]) vorzugsweise zum Beweis von Sätzen gewählt haben. Die weitere Verfolgung dieses Weges führt aber auch in vielen Fällen zu einer sehr einfachen Darstellung der Funktionen und Integrale. Es zeigt sich, daß zu diesen Bildungen eine einzige Funktion $\lambda(x; x_1)$ genügt, die nur von zwei Punkten abhängt und die auch in komplizierten Fällen noch eine einfache Form bewahrt. An dieser Stelle soll kurz und mit Übergehung einiger Beweise der einfachste Fall behandelt werden, in dem die algebraische Grundgleichung $F(x, y) = 0$ nur Doppelpunkte und die zu bildende Funktion $R(x, y)$ nur Unstetigkeiten erster Ordnung besitzt. Dieser Fall ist in einer Weise vorbildlich, daß beim Auftreten von höheren Singularitäten und von höheren Unstetigkeiten der Gedankengang genau derselbe bleibt und nur die analytischen Ausdrücke entsprechend sich ändern.

Ich knüpfe an eine früher gegebene Übersicht[3]) über die Theorie der algebraischen Funktionen an. Vorausgesetzt wird, daß die algebraische Grundgleichung $F(x, y) = 0$ eine Kurve vom Grade n und vom Geschlecht p sei, und daß die n Tangenten im Unendlichen alle verschieden seien, oder die n Blätter der Riemannschen Verzweigungsfläche von y im Unendlichen getrennt verlaufen, was sich durch lineare Transformation

---

1) Christoffel, Annali di Mat. (2) 10, 81 ff. 1880.

2) Fields, Acta Math. 26, 157 ff. 1901 und Journal für Math. 124, 179 ff. 1902.

3) H. Stahl, Archiv d. Math. u. Phys. (3) 7, 15 ff. 1904.

stets erreichen läßt. Es seien nur einfache Verzweigungspunkte und von singulären Stellen nur Doppelpunkte vorhanden, r an der Zahl so daß

$$p + r = \frac{n-1 \cdot n-2}{2}. \tag{1}$$

1. *Fundamentalaufgabe. Satz von Fields.* — Wir behandeln die *fundamentale Aufgabe*, die allgemeinste, zu $F(x, y) = 0$ gehörige, algebraische Funktion $R(x, y)$ zu bilden, die in m gegebenen, regulären Punkten ∞^1 wird.

Die Lösung dieser Aufgabe gründet sich auf die Eigenschaften, die der Ausdruck

$$T(x; \alpha) = \frac{F(\alpha, y)}{x - \alpha \cdot y - \beta} \tag{2}$$

als Funktion von (x, y) hat. Sind $(\alpha_k \beta_k)$ oder kurz (α_k) $(k = 1, \ldots, r)$ die r Doppelpunkte von $F(x, y) = 0$, (α_{r+l}) $(l = 1, \ldots, m)$ die m ∞^1 Punkte von $R(x, y)$ und $A_0, A_1, \ldots, A_{r+m}$ Konstanten, so ist die Lösung der Aufgabe enthalten in dem Satze von Fields:

Die allgemeinste Funktion der verlangten Art wird dargestellt durch den Ausdruck

$$R(x, y) = \sum_{k=1}^{r+m} A_k T(x; \alpha_k) + A_0 \tag{3}$$

mit der Bedingung, daß zwischen den Größen A_k und den Punkten α_k die $p + r$ Gleichungen bestehen

$$\sum_{k=1}^{r+m} A_k \alpha_k^\sigma \beta_k^\tau = 0. \qquad (\sigma + \tau = 0, 1, \ldots, n-3) \tag{4}$$

Einen ähnlichen, allgemeinen Satz beweist Fields für den Fall, daß $F(x, y) = 0$ vielfache Punkte besitzt. Die Beweise von Fields lassen sich aber vereinfachen und auf andere Arten von Singularitäten der Gleichung $F(x, y) = 0$ ausdehnen mittels einer Methode, die Christoffel a. a. Ort benutzt hat.

Indem man den Fall $m = 0$ betrachtet, beweist man auf rein algebraischem Wege, daß die Bedingungen der Adjunktion für eine Kurve $\Phi(x, y) = 0$ vom Grade $n - 3$ linear-unabhängig sind, und daß die Zahl der linear-unabhängigen Φ-Funktionen genau gleich dem durch die Gleichung (1) bestimmten Geschlecht p von $F = 0$ ist. Daraus folgt in bekannter Weise[1]) der Riemann-Rochsche Satz, nämlich:

---

[1]) Nach Roch, Journ. für Math. 64, 372 ff. (1864). Fields, Acta l. c. S. 166. … Abelschen Funktionen S. 98—101 (1896).

Sind die m ∞^1-Punkte der Funktion $R(x, y)$ von allgemeiner Lage, d. h. derart unabhängig, daß sie nicht sämtlich Nullpunkte ein und derselben adjungierten Funktion Φ sind, so muß $m > p$ sein. Von den m 0^1-Punkten sind alsdann noch $m - p$ willkürlich, die p letzten aber durch sie und die m ∞^1-Punkte eindeutig bestimmt.

Sind dagegen die m ∞^1-Punkte der Funktion $R(x, y)$ nicht unabhängig, sondern von solch spezieller Lage, daß für jeden von ihnen die nämlichen q linear-unabhängigen Φ-Funktionen verschwinden, so muß $m > p - q$ sein. Von den m 0^1-Punkten sind alsdann noch $m - p + q$ willkürlich, die $p - q$ letzten aber durch sie und die m ∞^1-Punkte eindeutig bestimmt.[1])

Ähnlich wie (3) beweist man auch, daß für die allgemeinste *ganze* algebraische Funktion $G(x, y)$, die in jedem der n Punkte im Unendlichen von der Ordnung $s > n - 2$ (ähnlich für $s \overline{\gtrless} n - 2$) ∞ wird, die Darstellung gilt:

$$G(x, y) = \sum_{k=1}^{r} A_k T(x; \alpha_k) + G_0(x, y), \tag{4a}$$

wo (α_k, β_k) die r Doppelpunkte und A_k ganz beliebige Konstanten sind, während $G_0(x, y)$ die Form hat:

$$G_0(x, y) = u_s + y u_{s-1} + \cdots + y^{n-1} u_{s-n+1},$$

wobei u_i eine ganze rationale Funktion in x vom Grade i ist. Die Zahl der Koeffizienten in (4a) ist $= r + ns + \frac{n \cdot \overline{n-3}}{2} = ns - p + 1$, in Übereinstimmung mit dem Riemannschen Satze, da die Funktion (4a) in jedem der n Punkte im Unendlichen $= \infty^s$ wird, also von der Ordnung ns ist. Soweit Fields.

2. *Umformungen.* — Wir gehen weiter, indem wir zunächst die Bezeichnung ändern. Die r Doppelpunkte seien wie bisher $\alpha_k (k = 1, \ldots, r)$, die zugehörigen Konstanten A_k; die m ∞^1-Punkte von $R(x, y)$ aber seien fortan (x_l, y_l) oder kurz (x_l) $(l = 1, \ldots, m)$, die zugehörigen Konstanten B_l. Ferner seien $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ p linear-unabhängige, *adjungierte* Funktionen vom Grade $n - 3$, d. h. Funktionen, die den Gleichungen genügen:

$$\Phi_h(\alpha_k, \beta_k) = 0 \qquad (h = 1, \ldots, p;\ k = 1, \ldots, r \tag{5}$$

und $\chi_1, \ldots, \chi_r$ r *nicht adjungierte* Funktionen vom Grade $n - 3$, die

1) Selbstverständlich kann die Eindeutigkeit aufhören, wenn man die $m - p$ (oder $m - p + q$) willkürlichen 0^1-Punkte nicht allgemein, sondern so wählt, daß durch sie mehr als eine Funktion $R(x, y)$ bestimmt wird (s. Schlußbemerkung).

unter sich und mit den Φ_h linear-unabhängig sind. Dann nimmt die Funktion $R(x, y)$ (3) die Form an (Archiv l. c. S. 23)

$$(6) \qquad R(x, y) = \sum_{k=1}^{r} A_k T(x;\, \alpha_k) + \sum_{l=1}^{m} B_l T(x;\, x_l) + B_0.$$

Die $r + p$ Bedingungen (4) aber zerfallen wegen (5) in zwei Systeme, nämlich die p Gleichungen

$$(7) \qquad \sum_{l=1}^{m} B_l \Phi_h(x_l) = 0 \qquad (h = 1, \ldots, p)$$

zwischen den Größen B_l und den Punkten x_l und die r Gleichungen für die Größen A_k

$$\sum_{k=1}^{r} A_k \chi_i(\alpha_k) = -\sum_{l=1}^{m} B_l \chi_i(x_l) \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Wir führen die A_k wirklich in (6) ein. Setzt man abkürzend $\chi_i(\alpha_k) = \chi_{ik}$; ferner $\sum \pm \chi_{11} \cdots \chi_{rr} = \Delta$, bezeichnet die nach χ_{ik} genommene und durch Δ dividierte Unterdeterminante mit X_{ik} und führt den Funktionsausdruck

$$(8) \qquad \lambda(x;\, x_1) = T(x;\, x_1) - \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} X_{ik} \chi_i(x_1) T(x;\, \alpha_k)$$

ein, so erhält man statt (6):

$$(9) \qquad R(x, y) = \sum_{l=1}^{m} B_l \lambda(x;\, x_l) + B_0$$

und damit den Satz:

Die allgemeinste algebraische Funktion $R(xy)$, *die* ∞^1 *wird in den m regulären Punkten* (x_l, y_l) $(l = 1, \ldots, m)$, *stellt sich dar als ein Aggregat von m Funktionen* $\lambda(x;\, x_l)$. *Dabei sind die m Koeffizienten* B_l *den p Bedingungsgleichungen* (7) *unterworfen.*

3. *Die Eigenschaften der Funktion* $\lambda(x;\, x_1)$. — Der in (8) definierte *Funktionsausdruck* $\lambda(x;\, x_1)$ hat folgende Eigenschaften: Er hängt nur von zwei Punkten (x, y) und (x_1, y_1) ab und ist rational in den Koordinaten dieser Punkte; er ist symmetrisch in den Koordinaten der r Doppelpunkte (α_k, β_k) und folglich rational darstellbar in den Koeffizienten der Gleichung $F(x, y) = 0$. Die r Funktionen $\chi_1, \ldots, \chi_r$ lassen sich durch ein äquivalentes System ersetzen, ohne daß $\lambda(x;\, x_1)$ sich ändert. Ferner hat $\lambda(x;\, x_1)$ *als Funktion von* (x, y) folgende Eigenschaften:

Sie ist $=\infty^1$ in $(x, y)=(x_1, y_1)$ wie $(F'y)_{x_1 y_1}\cdot(x-x_1)^{-1}$; sie ist $=\infty^{n-2}$ in jedem der n Punkte im Unendlichen; sie ist endlich und verschiedenwertig in den beiden Punkten eines jeden Doppelpunktes (α_x, β_x); sie ist stetig in allen übrigen Punkten der Verzweigungsfläche, besonders auch in jedem zu (x_1, y_1) gehörigen konjugierten Punkte (x_1, y_1').

Dagegen hat $\lambda(x; x_1)$ *als Funktion von* (x_1, y_1) folgende Eigenschaften:

Sie ist $=0^1$ in jedem der r Doppelpunkte (α_k, β_k); sie ist $=\infty^1$ in (x, y) wie $-(F'y)_{x_1 y_1}(x_1-x)^{-1}$; sie ist $=\infty^{n-2}$ in jedem der n Punkte im Unendlichen; sie ist stetig in allen übrigen Punkten der Verzweigungsfläche, besonders auch in jedem zu (x, y) konjugierten Punkte (x, y').

Daher zeigt der Ausdruck

(10) $$\lambda(x; x_1):(F'y)_{x_1 y_1}$$

als Funktion von (x_1, y_1) *folgendes* Verhalten:

Er ist $=\infty^1$ in jedem Verzweigungspunkt; er ist endlich und verschiedenwertig in den beiden Punkten eines jeden Doppelpunktes; er ist $=\infty^1$ in (x, y) wie $-(x_1-x)^{-1}$; er ist $=0^1$ in jedem der n Punkte im Unendlichen und zwar im ϱten Blatte wie $-N_\varrho x_1^{-1}$, wobei N_ϱ unabhängig von (x, y) und $\sum_{\varrho=1}^{n} N_\varrho = 1$ ist.

4. *Weitere Darstellungen durch die Funktion* $\lambda(x; x_1)$. — Eine algebraische Funktion $R(x, y)$ der $m$ten Ordnung, die in den m Punkten (x_l, y_l) gleich ∞^1, in den m Punkten (x_l^0, y_l^0) $(l=1,\ldots,m)$ gleich 0^1 wird, ist bis auf einen konstanten Faktor bereits bestimmt durch die m ∞^1-Punkte und $m-p$ der 0^1-Punkte. Zwischen den $2m$ ∞^1 und 0^1-Punkten bestehen p Gleichungen. In der Tat, soll (9) für die $m-p$ ersten 0^1-Punkte verschwinden, so muß sein

$$0=\sum_{l=1}^{m} B_l \lambda(x_\nu^0; x_l)+B_0 \qquad (\nu=1,\ldots,m-p)$$

Aus diesen und den p Gleichungen (7) kann man die Verhältnisse der Koeffizienten B bestimmen und in (9) eintragen. Man erhält so für $R(x, y)$, abgesehen von einem unbestimmt bleibenden, konstanten Faktor, einen Determinantenausdruck, der sich in leicht verständlicher Abkürzung schreiben läßt:

(11) $$\begin{vmatrix} \lambda(x; x_1) \ldots \lambda(x; x_m) & 1 \\ \lambda(x_\nu^0; x_1) \ldots \lambda(x_\nu^0; x_m) & 1 \\ \Phi_h(x_1) \ldots\ldots \Phi_h(x_m) & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ (\nu=1,\ldots m-p) \\ (h=1,\ldots p). \end{matrix}$$

Um die p Bedingungsgleichungen zwischen den $2m$ Punkten (x_l, y_l) und (x_l^0, y_l^0) zu erhalten, hat man der Reihe nach für (x, y) die letzten 0^1-Punkte $(x_{m-p+h}^0, y_{m-p+h}^0)$ $(h=1,\ldots p)$ einzutragen und die Determinante jedesmal gleich 0 zu setzen.

An Stelle dieser p algebraischen Bedingungsgleichungen können die p transzendenten Bedingungen des Abelschen Theorems treten:

$$(12) \qquad \sum_{l=1}^{m} \int_{x_l}^{x_l^0} \frac{(\Phi_h(xy)}{F'y}\, dx \equiv 0. \qquad (h=1,\ldots$$

die sich sehr einfach aus den Gleichungen (7) ergeben (s. Archiv l. c. § 1

Mittels der Funktion $\lambda(x; x_1)$ kann man u. a. auch gewisse Funktionen explizite darstellen, die Weierstraß[1]) vielfach benutzt, aber nur ihrem Charakter nach definiert hat. Zuerst die Funktion $H(x;$ d. i. eine rationale Funktion von (x, y) der $(p+1)$ten Ordnung, der gegeben sind ein 0^1-Punkt (a_0, b_0) und $p+1$ ∞^1-Punkte $(a_1, b_1), \ldots, (a_p, b_p)$ und (x_1, y_1) mit dem Zusatz, daß die Funktion (x_1, y_1) ∞^1 sei wie $(x-x_1)^{-1}$. Ferner eine Reihe von abgeleiteten Funktionen $H(x_1)_h$, $H^0(x_1)_h$, $H'(x_1)_h$, $H''(x_1)_h, \ldots$, die definiert sind durch die Entwicklung von $H(x; x_1)$ in der Umgebung von $(x, y = a_h, b_h)$ nämlich

$$(13) \qquad \begin{aligned} H(x; x_1) = (x-a_h)^{-1} H(x_1)_h + H^0(x_1)_h + (x-a_h) H'(x_1)_h \\ + (x-a_h)^2 H''(x_1)_h + \cdots \end{aligned}$$

Diese Funktionen erweisen sich (für $h = 1, \ldots, p$ genommen) als Systeme von je p Integranden der 1., 3., 2., 2. ... Gattung und lassen sich in einfachster Form anschreiben.

5. *Die Abelschen Integrale 3ter und 2ter Gattung.* — Die Funktion $\lambda(x; x_1)$ führt auch zur Darstellung der Abelschen Integrale 3ter und 2ter Gattung in folgender Weise. Ist (a_0, b_0) verschieden von (x, y) so hat der Ausdruck

$$(14) \qquad [\lambda(a_0; x_1) - \lambda(x; x_1)] : (F'y)_{x_1 y_1}$$

nach Nr. **3** als *Funktion von* (x_1, y_1) folgende Eigenschaften. Er ist $= \infty^1$ in (x, y) und (a_0, b_0) bezw. wie $+(x_1 - x)^{-1}$ und $-(x_1 - a_0)^{-1}$ er ist $= 0^2$ in jedem der n Punkte im Unendlichen; er ist $= \infty^1$ in jedem Verzweigungspunkt; er ist endlich und verschiedenwertig in den beiden Punkten eines jeden Doppelpunktes.

---

1) Weierstraß, Ges. Werke. Bd. IV (1902). Vgl S. 60. 73. 79. 97. 176 193. 206.

Dies Verhalten charakterisiert die Funktion (14) von (x_1, y_1) als Integranden 3ter Gattung oder den Ausdruck

(15) $$W_{x\,a_0}^{x_1 x_0} = \int_{x_0}^{x_1} [\lambda(a_0;\, x_1) - \lambda(x;\, x_1)] \frac{dx_1}{F'y_1}$$

als *Integral 3ter Gattung,* das logarithmisch wird in (x, y) und (a_0, b_0) bezüglich wie

(16) $$+\log(x_1 - x) \quad \text{und} \quad -\log(x_1 - a_0)$$

und die Ableitung nach x, nämlich

(17) $$\Gamma_x^{x_1 x_0} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\lambda(x;\, x_1)}{dx} \frac{dx_1}{F'y_1}$$

als *Integral 2ter Gattung,* das in (x, y) gleich ∞^1 wird wie $-(x_1 - x)^{-1}$.

Das *allgemeinste Abelsche Integral* setzt sich aus den p Integralen 1ter Gattung, aus Integralen 3ter und 2ter Gattung der Form (15) und (17) und ev. aus algebraischen Funktionen der Form (9) und den Logarithmen solcher Funktionen zusammen, Bildungen, die sich alle mittels $\lambda(x;\, x_1)$ herstellen lassen.

6. *Die Primfunktion* $P(x;\, x_1,\, x_0)$. — Die Funktion $\lambda(x;\, x_1)$ führt endlich zu einer sehr *einfachen Primfunktion.*

Nach Nr. 3 hat der *Ausdruck* (14) als *Funktion von* (x, y) folgende Eigenschaften. Er ist $= 0^1$ für $(x, y) = (a_0, b_0)$; er ist $= \infty^1$ in (x_1, y_1), wie $-(x - x_1)^{-1}$; er ist $= \infty^{n-2}$ in jedem der n Punkte im Unendlichen; er ist endlich und verschiedenwertig in den beiden Punkten eines jeden Doppelpunktes.

Hiernach hat der *Integralausdruck* (15) *als Funktion von* (x, y) folgende Eigenschaften:

Er ist $= 0^1$ in (a_0, b_0); er ist logarithmisch ∞ in (x_1, y_1) und (x_0, y_0) bezw. wie $+\log(x - x_1)$ und $-\log(x - x_0)$; er ist $= \infty^{n-2}$ in jedem der n Punkte im Unendlichen; er ist stetig und eindeutig an allen anderen Stellen der Verzweigungsfläche mit Ausnahme des zwischen (x_0, y_0) und (x_1, y_1) verlaufenden Integrationsweges, an dem er eine Wertdifferenz $= 2i\pi$ hat.

Hiernach endlich zeigt *der Ausdruck*

(18) $$P(x;\, x_1,\, x_0) = e^{W_{x\,a_0}^{x_1 x_0}}$$

als *Funktion von* (x, y) *folgendes Verhalten:*

Er ist $= 1$ in (a_0, b_0); er ist $= 0^1$ in (x_1, y_1) und $= \infty^1$ in (x_0, y_0); er ist wesentlich singulär in den n Punkten im Unendlichen; er ist stetig und eindeutig an allen übrigen Stellen der Verzweigungsfläche. Daher der Satz:

Der Ausdruck $P(x; x_1, x_0)$ ist als Funktion von (x, y) eine transzendente Primfunktion mit einer 0^1-Stelle (x_1, y_1) und einer ∞^1-Stelle (x_0, y_0) und mit wesentlich singulären Stellen im Unendlichen.

Hieraus folgt weiter der Satz:

Jede algebraische Funktion $R(x, y)$ läßt sich als Produkt von Primfunktionen $P(x; x_1, x_0)$ darstellen, gebildet mit den Koordinaten der 0^1- und ∞^1-Punkte von $R(x, y)$.

Sind nämlich wieder (x_l^0, y_l^0) und (x_l, y_l) $(l=1,\ldots,m)$ die 0^1 und ∞^1-Punkte von $R(x, y)$, so erhält man die Darstellung

$$(19)\qquad \frac{R(x,y)}{R(a_0, b_0)} = \prod_{l=1}^{m} P(x;\, x_l^0, x_l) = \prod_{l=1}^{m} \frac{P(x;\, x_l^0, \alpha)}{P(x;\, x_l, \alpha)},$$

wo (α, β) ein beliebiger Punkt ist, nur verschieden von den (x_l^0, y_l^0) und (x_l, y_l). Hierbei sind die Integrationswege zwischen den Paaren (x_0^l, y_0^l) und (x_l, y_l) in bestimmter Weise zu wählen. Werden sie beliebig gewählt, so tritt zu dem Produkt der rechten Seite noch ein von (x, y) abhängiger Faktor hinzu von der Form $e^{\omega(x,y)}$, wo $\omega(x, y)$ den allgemeinen Periodizitätsmodul des Integrals $W_{x\,a_0}^{x_1 x_0}$ bedeutet.

Man beweist die Gleichung (19), indem man statt des Integrals $W_{x\,a_0}^{x_1 x_0}$ durch Zufügung eines allgemeinen Integrals erster Gattung das Normalintegral $V_{x\,a_0}^{x_1 x_0}$, für das der Satz der Vertauschung von Parameter und Argument gilt, einführt und die bekannte Formel[1]) anwendet:

$$(20)\qquad \log \frac{R(x, y)}{R(a_0; b_0)} = \sum_{l=1}^{m} V_{x_l^0 x_l}^{x\,a_0} = \sum_{l=1}^{m} V_{x\,a_0}^{x_l^0 x_l} = \sum_{l=1}^{m} W_{x\,a_0}^{x_l^0 x_l},$$

die den Logarithmus von $R(x, y)$ durch eine Summe von Normalintegralen 3ter Gattung darstellt. Dabei kommt das Abelsche Theorem (12) für Integrale erster Gattung zur Anwendung.

Darstellungen der Form (19) sind zuerst von Weierstraß[2]) gegeben worden. Die von ihm benutzte Primfunktion $E(x; x_1, x_0)$ hängt noch von p willkürlichen Punkten (a_h, b_h) $(h=1,\ldots,p)$ ab (vgl. Nr. 4), in denen $E(x; x_1, x_0)$ wesentlich singulär ist. Die hier benutzte Primfunktion $P(x; x_1, x_0)$ ist insofern einfacher, als ihre wesentlich singulären Punkte in die unendlich fernen Punkte der Verzweigungsfläche fallen.

1) H. Stahl, Theorie der Abelschen Funktionen (1896) S. 146.

2) Weierstraß l. c. S. 377. 383. 390.

7. *Verallgemeinerungen.* — Für den Fall, daß $F(x, y) = 0$ höhere Singularitäten und $R(x, y)$ Unstetigkeiten höherer Ordnung besitzen, gelten ähnliche Betrachtungen und Formeln. Man ersieht dies bereits aus dem nächst einfachen Fall, auf den auch Herr Fields[1]) seine Beweise der Sätze ausgedehnt hat. Die Gleichung $F(x, y) = 0$ besitze r vielfache Punkte (mit getrennten Tangenten oder getrennten Blättern) $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ bez. von der Ordnung $\varrho_1, \ldots, \varrho_r$, und es sei $\varrho = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r} \varrho_k(\varrho_k - 1)$. Dann ist das Geschlecht p bestimmt durch die Gleichung

$$p + \varrho = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2). \tag{21}$$

Die Funktion $R(x, y)$ habe m Unendlichkeitspunkte $x_1, \ldots, x_m$ bez. von der Ordnung $\mu_1, \ldots, \mu_m$, und es sei $\mu = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} \mu_l(\mu_l - 1)$. Bedeutet $T(x; \alpha)$ wieder den Ausdruck (2), so wird die Funktion $R(x, y)$ dargestellt durch den Ausdruck

$$R(x, y) = \sum_{k=1}^{r} A_k[T(x;\ \alpha_k)] + \sum_{l=1}^{m} B_l[T(x;\ x_l)] + B_0. \tag{22}$$

Hier sind aber die A_k und B_l nicht konstante Faktoren, sondern *Operationssymbole*, nämlich

$$\left\{\begin{aligned} A_k &= \sum_s \sum_t a_{stk} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_k}\right)^s \left(\frac{\partial}{\partial \beta_k}\right)^t && (s+t = 0, 1, \ldots, \varrho_k - 2) \\ B_l &= \sum_s \sum_t b_{stl} \left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)^s \left(\frac{\partial}{\partial y_l}\right)^t && (s+t = 0, 1, \ldots, \mu_l - 2). \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Die Zahl der Koeffizienten a_{stk} in A_k ist $= \frac{1}{2}\varrho_k(\varrho_k - 1)$ und die Gesamtzahl der a_{stk} gleich ϱ. Die Zahl der Koeffizienten b_{stl} in B_l ist $= \frac{1}{2}\mu_l(\mu_l - 1)$ und die Gesamtzahl der b_{stl} gleich μ. Für die Bedingungsgleichungen gilt folgendes. Seien $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ p linear-unabhängige *adjungierte* Funktionen vom Grade $n - 3$, d. h. Funktionen, die den Gleichungen genügen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_k}\right)^s \left(\frac{\partial}{\partial \beta_k}\right)^t [\Phi_h(\alpha_k, \beta_k)] = 0 \qquad \left(\begin{matrix} k = 1, \ldots, r;\ h = 1, \ldots, p \\ s+t = 0, 1, \ldots, \varrho_k - 2 \end{matrix}\right) \tag{24}$$

und $\chi_1, \ldots \chi_\varrho$ ϱ *nicht adjungierte* Funktionen vom Grade $n - 3$, unter

---

1) Fields, Journal für Math. **124**, 179 ff. 1902.

sich und von den Φ_h linear-unabhängig. Dann bestehen ähnlich dem früheren die p Gleichungen:

$$\sum_{l=1}^{m} B_l[\Phi_h(x_l)] = 0 \qquad (h = 1, \ldots, p) \tag{25}$$

und die ϱ Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{r} A_k[\chi_i(\alpha_k)] = -\sum_{l=1}^{m} B_l[\chi_i(x_l)] \qquad (i = 1, \ldots, \varrho) \tag{26}$$

Setzt man nun

$$stk = j (j = 1, \ldots, \varrho); \; \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_k}\right)^s \left(\frac{\partial}{\partial \beta_k}\right)^t [T(x;\, \alpha_k)] = T_j(x),$$

ferner

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_k}\right)^s \left(\frac{\partial}{\partial \beta_k}\right)^t [\chi_i(\alpha_k)] = m_{ij}, \qquad \binom{i = 1, \ldots, \varrho}{j = 1, \ldots, \varrho},$$

und bezeichnet man die Determinante der m_{ij} mit M und die nach m_{ij} genommene und durch M dividierte Unterdeterminante mit M_{ij}, so erhält man

$$R(x, y) = \sum_{l=1}^{m} B_l[\lambda(x;\, x_l)] + B_0, \tag{27}$$

wenn $\lambda(x;\, x_1)$ den Funktionalausdruck bedeutet:

$$\lambda(x;\, x_1) = T(x;\, x_1) - \sum_{i=1}^{\varrho} \sum_{j=1}^{\varrho} M_{ij} \chi_i(x_1) T_j(x). \tag{28}$$

Diese Funktion $\lambda(x;\, x_1)$ hat nun ganz ähnliche Eigenschaften wie in dem früheren einfachen Fall und führt genau wie früher zu dem Integral 3ter Gattung $W_{x\,\alpha_0}^{x_1 x_0}$, dem Integral 2ter Gattung $\Gamma_x^{x_1 x_0}$ und der Primfunktion $P(x;\, x_1,\, x_0)$.

Man übersieht bereits, daß und wie sich diese Formeln und ihre Beweise ausdehnen lassen auf andere Singularitäten von $F(x, y) = 0$ und andere Unstetigkeiten von $R(x, y)$. Man hat wieder die Form (22). Unter die Punkte (α_k, β_k) sind alle singulären Punkte aufzunehmen und in das Symbol A_k die Ableitungen nach α_k und β_k so weit, daß $A_k[T(x;\, \alpha_k)]$ noch endlich bleibt in (α_k, β_k). In das Symbol $B_l T[(x;\, x_1)]$ sind die Ableitungen nach x_l und y_l so weit aufzunehmen, als es die Unstetigkeit von $R(x, y)$ in (x_l, y_l) erfordert. Man kann aber auch noch Unstetigkeiten von $R(x, y)$ berücksichtigen, die in singuläre Punkte von $F(x, y) = 0$ fallen. Ich teile demnächst an andrer Stelle eine ausführlichere Begründung der vorstehenden Formeln und weitere Angaben über die Tragweite dieser Darstellungen mit.

Ich möchte die Erwähnung des Riemann-Rochschen Satzes (Nr. 1) benutzen, um einige Bemerkungen richtig zu stellen, die sich in der Habilitationsschrift von Herrn G. Rost „Theorie der Riemannschen Thetafunktionen" (Leipzig, Teubner 1901) finden. Es heißt dort S. III: „Diese Theorie enthält noch wesentliche, von den bisherigen Bearbeitern nicht bemerkte Lücken, und es hat dies seinen Grund darin, daß die Möglichkeit des Auftretens von Punktsystemen mit speziellem Charakter übersehen worden ist. Die vorliegende Arbeit bezweckt, die in der Theorie der Riemannschen Thetafunktionen noch vorhandenen Lücken auszufüllen." Auffallend ist, daß Herr Rost auf seinen Hauptzweck, nämlich auf die Untersuchung jener übersehenen speziellen Punktsysteme in seiner Arbeit mit keinem Wort mehr zurückkommt. Er gibt nur ein dem hyperelliptischen Fall entnommenes Beispiel (l. c. S. 63, Anm. 6). Es ist nicht schwer zu sehen, daß die ihm vorschwebenden speziellen Punktsysteme sich einfach aus dem Umstand erklären, daß im Riemann-Rochschen Satze bei einer algebraischen Funktion $R(x, y)$ der $m$ten Ordnung die Eindeutigkeit in der Bestimmung der p letzten 0^1-Punkte aus den übrigen 0^1-Punkten und den m ∞^1-Punkten aufhören kann, wenn man die $m-p$ ersten 0^1-Punkte nicht allgemein wählt (vergl. Anm. zu Nr. 1). Ich habe diese Bemerkungen übrigens Herrn R. schon im Jahre 1901 mitgeteilt. Nach dem Vorstehenden dürfte auch das Referat von Herrn Krazer (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik Bd. 32, S. 458) und ebenso die Bemerkung in seinem Lehrbuch der Thetafunktionen (Leipzig, Teubner 1903) S. 436: „daß die Mängel, welche früheren Darstellungen von v. Dalwigk, Stahl und Christoffel anhaften, durch Herrn Rost eingehend kritisch beleuchtet seien", als wenig zutreffend erscheinen. Was Herr Rost bez. des Riemann-Rochschen Satzes und der zugehörenden Sätze über das Verschwinden der Thetafunktion gibt, sind „übrigens leicht ersichtliche Änderungen, welche die Gleichungen dieser Sätze im Falle mehrfacher Null- und Unendlichkeitspunkte einer Funktion $f(x, y)$ (Quotient zweier Integranden erster Gattung) zu erfahren haben", wie Herr Krazer in seinem Lehrbuch S. 416 Anmerkung richtig bemerkt.

Über das Problem, eine Fläche II. Grades in einem der Gestalt und Größe nach gegebenen Kegelschnitte zu schneiden.

Von W. LUDWIG in Braunschweig.

1. *Einleitung.* — Die Ebenen, die aus einer Fläche II. Grades Kegelschnitte ausschneiden, die einem gegebenen Kegelschnitt kongruent sind, bilden eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit, einen Torsus; solcher Torsen gibt es, entsprechend der Anzahl der nach Gestalt und Größe verschiedenen Kegelschnitte, bei derselben Fläche II. Grades ein doppelt unendliches System. Dieses Torsensystem nun hat M. Krewer in einer mit dieser gleich betitelten Abhandlung[1]) im 12. Bande der

1) Sie ist hervorgegangen aus einer Preisarbeit, die Herr F. Schur, wie ich seiner gütigen Mitteilung verdanke, in Dorpat kurz vor seinem Fortgange von dort gestellt hat.

zweiten Reihe dieser Zeitschrift (1894) mittels einer auch in der Theorie der Flächen IV. Ordnung gebrauchten Transformation auf einen bekannten Bündel von kubischen Raumkurven abgebildet, um aus diesem Kriterien dafür abzuleiten, ob ein gegebener Kegelschnitt auf einer gegebenen Fläche II. Grades reell möglich ist oder nicht; jedoch ist die Untersuchung nicht so einfach und anschaulich durchgeführt, wie es möglich ist, und demgemäß sind auch die erhaltenen Kriterien unübersichtlich und praktisch unbrauchbar. Deshalb soll im folgenden das Problem mit Hilfe derselben Abbildung nochmals behandelt werden, obwohl inzwischen wenigstens für das Ellipsoid die gesuchten Kriterien von Herrn Georg Diem[1]) aufgestellt worden sind.

2. *Die analytische Formulierung des Problems.* — Wir denken uns ein rechtwinkliges Koordinatensystem und in ihm die vorgelegte Fläche II. Grades durch die Gleichung

$$F \equiv aX^2 + bY^2 + cZ^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

gegeben, indem wir uns vorläufig auf die allgemeinen zentrischen Flächen II. Grades beschränken. Die Fläche schneiden wir mit einer Ebene, deren Gleichung

$$UX + VY + WZ = 1 \tag{2}$$

laute und als deren Koordinaten wir U, V, W verwenden wollen; die Schnittkurve bestimmt sich in folgender Weise[2]): Die Ebene (2) nehmen wir zur $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene ($\mathfrak{z} = 0$) eines dem XYZ-System kongruenten $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$-Koordinatensystems, dessen $\mathfrak{z}$-Achse durch den Ursprung jenes gehe; setzen wir dann abkürzungshalber

$$\Omega \equiv U^2 + V^2 + W^2, \tag{3}$$

so haben wir die Koordinatentransformationsformeln:

$$X = \frac{U}{\Omega} + f_1\mathfrak{x} + f_2\mathfrak{y} + \frac{U}{\sqrt{\Omega}}\mathfrak{z},$$

$$Y = \frac{V}{\Omega} + g_1\mathfrak{x} + g_2\mathfrak{y} + \frac{V}{\sqrt{\Omega}}\mathfrak{z},$$

$$Z = \frac{W}{\Omega} + h_1\mathfrak{x} + h_2\mathfrak{y} + \frac{W}{\sqrt{\Omega}}\mathfrak{z}.$$

1) Über Ellipsen auf einem Ellipsoid, deren Achsen gegebenen einfachen Bedingungen genügen, insbesondere über kongruente Ellipsen. Dissertation, München 1898. Seite 28.

2) Vgl. F. Schur, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Leipzig 1898, § 22.

etzt ist die Schnittkurve durch die Gleichungen

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{y}^2 + 2\,\mathfrak{C}\mathfrak{x}\mathfrak{y} + 2\,\mathfrak{D}\mathfrak{x} + 2\,\mathfrak{E}\mathfrak{y} + \mathfrak{F} = 0, \quad \mathfrak{z} = 0$$

geben, wobei

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= af_1^2 + bg_1^2 + ch_1^2, & \mathfrak{D} &= \frac{1}{\Omega}(af_1 U + bg_1 V + ch_1 W), \\ \mathfrak{B} &= af_2^2 + bg_2^2 + ch_2^2, & \mathfrak{E} &= \frac{1}{\Omega}(af_2 U + bg_2 V + ch_2 W), \\ \mathfrak{C} &= af_1 f_2 + bg_1 g_2 + ch_1 h_2, & \mathfrak{F} &= \frac{1}{\Omega^2}(aU^2 + bV^2 + cW^2) - 1; \end{aligned}$$

st sie zunächst ein zentrischer Kegelschnitt mit den Halbachsen A und B und mit der Diskriminante $\triangle$, so bestimmen sich A und B durch die Gleichungen

$$\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2)(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}{\triangle}, \quad \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)^2 = \frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2} \tag{4}$$

und

$$\left\{ \begin{aligned} \triangle &= \frac{bcU^2 + caV^2 + abW^2 - abc}{\Omega} \equiv \frac{\Phi}{\Omega}, \\ \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2 &= \frac{bcU^2 + caV^2 + abW^2}{\Omega} \equiv \frac{X}{\Omega}, \\ \mathfrak{A} + \mathfrak{B} &= \frac{(b+c)U^2 + (c+a)V^2 + (a+b)W^2}{\Omega} \equiv \frac{\Psi}{\Omega}, \end{aligned} \right. \tag{5}$$

in denen wir Φ, X, Ψ als Abkürzungen eingeführt haben. Unser Kegelschnitt ist nun einem gegebenen zentrischen Kegelschnitt kongruent, wenn die Gleichungen

$$\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = r, \quad \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)^2 = s \tag{6}$$

erfüllt sind, in denen die Größen r und s sich aus den Achsen des gegebenen Kegelschnittes den Gleichungen (6) entsprechend berechnen. Da umgekehrt

$$A^2 = \frac{s + \sqrt{s(s-4)}}{2r}, \quad B^2 = \frac{s - \sqrt{s(s-4)}}{2r} \tag{6a}$$

ist, sehen wir, daß wir nur reelle Werte von r und s, und auch diese nur zum Teil, werden in Betracht zu ziehen haben; es ist nämlich

bei einer reellen Ellipse:

$$r > 0, \quad 4 \leqq s < \infty,$$

bei einer Hyperbel, die im stumpfen Winkel ihrer Asymptoten liegt:

$$r > 0, \quad s < 0,$$

bei einer Hyperbel, die im spitzen Winkel ihrer Asymptoten liegt:

$$r < 0, \quad s < 0,$$

Bei der *gleichseitigen Hyperbel* ist $r = s = 0$ und bei der *Parabel*, die sich dadurch hier einordnet, daß für sie erstens $\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2 = 0$ ist und daß zweitens A und B so unendlich geworden sind, daß der Parameter $p = \frac{B^2}{A}$ endlich bleibt, ist $r = 0$, $s = \infty$. In diesen beiden Fällen ist die Größe des Kegelschnittes nicht durch r und s bestimmt, aber es werden sich ungezwungen Mittel finden, die uns auch diese Fälle zu erledigen gestatten. Andere besondere Werte von r und s führen zu Ausartungen und können außer Acht gelassen werden.

Die Bedingungen nun, die gleichzeitig von den Ebenen (U, V, W) erfüllt werden müssen, die durch ein Wertepaar r, s der Gestalt und Größe nach gegebene Kegelschnitte aus der Fläche (1) ausschneiden, lauten gemäß den Gleichungen (4), (5), (6) folgendermaßen:

$$(7) \qquad \Pi_r \equiv r \cdot \Phi\Omega - X\Psi = 0, \quad K_s \equiv s \cdot X\Omega - \Psi^2 = 0;$$

die Ebenen bilden deshalb einen Torsus, der den beiden durch die Gleichungen (7) dargestellten Flächen IV. Klasse gemeinsam ist und der in zwei Torsen zerfällt; der eine davon ist durch $\Psi = 0$, $\Omega = 0$ bestimmt und scheidet aus unserer Betrachtung aus, da er aus lauter imaginären Ebenen, Berührungsebenen des unendlich fernen imaginären Kugelkreises, besteht; dagegen haben wir die Aufgabe, zu untersuchen, wann der übrig bleibende Torsus XII. Klasse reelle Ebenen besitzt.

3. *Abbildung des erhaltenen Systems von Torsen XII. Klasse auf einen Bündel von kubischen Raumkurven.* — Die von uns eingeführten Ausdrücke Φ, X, Ψ, Ω haben einfache Bedeutungen; setzen wir sie nämlich gleich 0, so erhalten wir die in Ebenenkoordinaten geschriebenen Gleichungen der Fläche (1) und dreier unendlich fernen Kegelschnitte, und zwar ist, wenn wir kurz das durch eine Gleichung $\Xi = 0$ dargestellte Gebilde mit Ξ bezeichnen, X der unendlich ferne Kegelschnitt von Φ und Ω der unendlich ferne imaginäre Kugelkreis, während Ψ die acht Tangenten berührt, die X und Ω in ihren Schnittpunkten haben (das letzte folgt daraus, daß der durch X und Ω in der unendlich fernen Ebene bestimmte Kegelschnittbüschel in den homogenen Geradenkoordinaten $U : V : W$ die Gleichung $X + \varkappa\Psi + \varkappa^2\Omega = 0$ hat).

Unsere vier Flächen II. Klasse:

$$\Phi = 0, \quad X = 0, \quad \Psi = 0, \quad \Omega = 0$$

bestimmen nun ein lineares System III. Stufe von Flächen II. Klasse dessen Gleichung wir in der Form

$$\alpha U^2 + \beta V^2 + \gamma W^2 = 1$$

schreiben können, in der α, β, γ veränderliche Parameter sind. Mit seiner Hilfe bilden wir den Raum Σ, in dem wir bisher gearbeitet haben, so auf einen andern Raum σ' ab, wie es für den dualen Fall Herr Th. Reye in seiner „Geometrie der Lage" im 3. Band der 3. Auflage, Seite 142, schildert: Wir denken uns in σ' dasselbe Koordinatensystem wie in Σ, nur daß wir die Koordinaten mit x', y', z', bezw. mit u', v', w' bezeichnen, und ordnen jeder Fläche des obigen Systems den in bezug auf sie der Ebene $u' = v' = w' = 1$ zugehörigen Pol zu; da dessen Gleichung

$$\alpha u' + \beta v' + \gamma w' = 1$$

ist, drückt sich die Beziehung der Ebenen der Räume Σ und σ' folgendermaßen aus:

$$U^2 = u', \quad V^2 = v', \quad W^2 = w'.$$

Der Anschaulichkeit halber ersetzen wir noch den Raum σ' durch den zu ihm in bezug auf die Einheitskugel polaren Raum σ, in dem die, auf dieselben Achsen bezogenen, Koordinaten mit x, y, z, bezw. u, v, w bezeichnet seien. So erhalten wir die Abbildung:

$$(8) \qquad U^2 = x, \quad V^2 = y, \quad W^2 = z;$$

durch sie gehen die Ausdrücke Φ, X, Ψ, Ω über in

$$(9) \qquad \begin{cases} \varphi \equiv bcx + cay + abz - abc, \\ \chi \equiv bcx + cay + abz, \\ \psi \equiv (b+c)x + (c+a)y + (a+b)z, \\ \omega \equiv x + y + z \end{cases}$$

und die Gleichungen (7) in

$$(10) \qquad \pi_r \equiv r \cdot \varphi\omega - \chi\psi = 0, \quad \varkappa_s \equiv s \cdot \chi\omega - \psi^2 = 0.$$

Die Bilder der beiden Flächen IV. Klasse Π_r und K_s sind also die beiden Flächen II. Grades π_r und $\varkappa_s$, und das Bild des jenen gemeinsamen Torsus XII. Klasse ist die diesen neben der Geraden $\psi = 0$, $\omega = 0$ gemeinsame kubische Raumkurve, die wir mit $R_{r,s}$ bezeichnen. Wir haben auf diese Weise das System von Torsen XII. Klasse durch ein viel bequemer zu behandelndes System von kubischen Raumkurven ersetzt. Vermöge der Transformationsgleichungen (8) stellt sich auch die Frage nach der Realität der Torsen sehr einfach dar: *Ein Torsus besitzt reelle Ebenen, wenn die zugehörige $R_{r,s}$ in den positiven Oktanten des xyz-Koordinatensystems eintritt.* Jedoch wollen wir, ehe wir uns dieser Hauptfrage zuwenden, noch einige Worte über das System der $R_{r,s}$ sagen.

4. *Der Bündel der kubischen Raumkurven* $R_{r,s}$. — Die vier

$$\varphi = 0, \quad \chi = 0, \quad \psi = 0, \quad \omega = 0$$

bilden ein Tetraeder, dessen eine Ecke, (χ, ψ, ω), der Ursprung Koordinatensystems und dessen eine Kante, $\overline{\varphi\chi}$, unendlich fern is Flächen π_r sind hyperbolische Paraboloide und bilden einen B dessen Grundkurve sich aus den vier Geraden $\overline{\varphi\chi}$, $\overline{\varphi\psi}$, $\overline{\omega\chi}$, sammensetzt. Die Flächen $\varkappa_s$ sind Kegel II. Grades, deren S der Koordinatenursprung ist, und berühren sämtlich die Ebenen ω längs ihren Schnittgeraden mit ψ, bilden also eine soge Büschelschar. Hieraus folgt, daß die Kurven $R_{r,s}$ im Koord ursprung die Gerade $\overline{\psi\omega}$ zur Tangente und die Ebene ω zur Schmie ebene haben, während sie im Punkte (φ, χ, ψ) die Gerade $\overline{\varphi\chi}$ be und die Ebenen φ oskulieren; sie bilden also einen Büsch kubischen parabolischen Hyperbeln, die das Tetraeder $(\varphi, \chi, \psi$ derselben Weise zum Schmiegungstetraeder haben. Solche Bünd bereits eingehend untersucht worden.[1])

In unserm Bündel bestimmt (mit gewissen Ausnahmen) jedes paar r, s umkehrbar eindeutig eine Kurve $R_{r,s}$; die Kegelschnitt die eine Eigenschaft besitzen, die man durch eine Beziehung zw r und s ausdrücken kann, werden repräsentiert sein durch die einer Fläche, die von ∞^1 Kurven $R_{r,s}$ erfüllt ist. So führen u besondere die Kegel $\varkappa_s$ (s = const.) zu den Ebenen, die aus der geg Fläche II. Grades Kegelschnitte ausschneiden, die einem geg ähnlich sind.[2])

Die Flächen π_r haben nur die Bedeutung für uns, daß d dingung r = const. die einfachste ist, die mit der Bedingung s = die Gestalt und Größe eines Kegelschnittes festlegt; für die Fä gleichseitigen Hyperbel und der Parabel, in denen die Verei dieser beiden Bedingungen versagt, ersetzen wir den Büschel durch zwei andere möglichst einfache Flächenbüschel, nämlich die beiden Büschel von Kegeln III. Ordnung, deren Gleichungen

$$(11) \qquad \varphi^2\omega - m \cdot \chi^3 = 0, \qquad (12) \quad \varphi\omega^2 - n \cdot \psi^3 = 0$$

---

1) R. Sturm, Journ. f. Math. **79** u. **80**; Math. Ann. **26** u. **28**. E. Hei Über den Bündel derjenigen kubischen Raumkurven, welche ein gegebene eder in derselben Art zum gemeinsamen Schmiegungstetraeder haben; Disse Münster 1887. M. Stuyvaert, Surfaces algébriques engendrées par des du II. et III. ordre, Dissertation, Gent 1902 (worin weitere Literatur angefü

2) Vgl. W. Ludwig, Über die Ebenen, die aus einer Fläche II. einem gegebenen Kegelschnitt ähnliche Kegelschnitte ausschneiden; Disse Breslau 1898.

sind[1]), und untersuchen die zu unserem Bündel gehörigen ebenen Kurven III. Ordnung, die diese Kegelbüschel mit dem in die Doppelebene ψ entarteten Kegel $\varkappa_0$, bezw. mit dem in das Ebenenpaar χ, ω zerfallenen Kegel $\varkappa_\infty$ gemeinsam haben; es sind dies die in ψ liegenden Kurven $R_{0,m}$ und die in χ liegenden Kurven $R_{\infty,n}$.

Für die Punkte eines durch die Gleichung (11) oder (12) definierten Kegels ist nach (10)

$$\frac{s}{r^2} = m, \quad \text{bezw.} \quad \frac{1}{rs} = n$$

und deshalb nach (6) für die durch sie gelieferten Kegelschnitte

$$A^2 B^2 = m, \quad \text{bezw.} \quad \frac{A^4 B^4}{(A^2 + B^2)^3} = n.$$

Die erste Bedingung bestimmt bei positivem m flächengleiche Ellipsen[2]), bei negativem m aber Hyperbeln, bei denen der konstante Inhalt des von den Asymptoten und einer beliebigen Tangente begrenzten Dreiecks einen gegebenen Wert hat; deshalb ist bei einer gleichseitigen Hyperbel ($B = A \cdot \sqrt{-1}$) $m = -A^4$ zur Bestimmung ihrer Größe geeignet. Die zweite Bedingung geht, wenn es sich um eine Parabel handelt, wenn also A und B so unendlich werden, daß der Parameter $p = \frac{B^2}{A}$ endlich bleibt, über in $p^2 = n$ und definiert uns ebenfalls die Größe der Parabel (wir kommen hierzu auch unmittelbar von den Gleichungen (5) aus, weil eine Parabel durch

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2 = 0, \quad p^2 = \frac{\Delta}{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^3}$$

d. h. durch

$$X = 0, \quad \Phi\Omega^2 - p^2 \cdot \Psi^3 = 0$$

vollständig bestimmt ist). Die Parabel ist nur reell, wenn $n > 0$.

5. *Der Gang der Realitätsuntersuchung.* — Wie am Ende von Nr. 3 gesagt wurde, ist die Frage, ob ein durch ein Wertepaar r, s gegebener Kegelschnitt auf der vorgelegten Fläche II. Grades reell möglich ist, identisch mit der Frage, ob die zu demselben Wertepaar r, s gehörige kubische Raumkurve $R_{r,s}$ in den positiven Oktanten des Koordinatensystems eintritt. Dafür, daß das geschieht, ist die Vorbedingung, daß der Kegel $\varkappa_s$, auf dem $R_{r,s}$ liegt, und dessen Scheitel der Koordinatenursprung ist, Kanten hat, die im positiven Oktanten (und in seinem Scheiteloktanten) verlaufen. Da $\varkappa_s$ durch die projektiven Ebenenbüschel

(13) $$s\chi + \lambda\psi = 0, \quad \psi + \lambda\omega = 0$$

1) Vgl. Heinrichs, a. a. O. Seite 38.
2) Vgl. Diem, a. a. O. Seite 13 u. 14.

erzeugt gedacht werden kann, entspricht jeder seiner Kanten eindeutig ein Wert des Parameters λ; auf ihr ist

$$x:y:z$$
$$=(c-b)(\lambda^2+as\lambda+a^2s):(a-c)(\lambda^2+bs\lambda+b^2s):(b-a)(\lambda^2+cs\lambda+c^2s)$$

und es handelt sich somit darum, ob es auf $\varkappa_s$ ein oder mehrere Intervalle von λ gibt, für die

$$(14)\quad \begin{cases}(c-b)\cdot(\lambda^2+as\lambda+a^2s), & (a-c)\cdot(\lambda^2+bs\lambda+b^2s),\\ (b-a)\cdot(\lambda^2+cs\lambda+c^2s) & \text{gleiches Vorzeichen haben,}\end{cases}$$

und welches die untere Grenze λ_u und die obere Grenze λ_o jedes dieser Intervalle sind.

Haben wir nun ein solches Intervall ($\lambda_u \leqq \lambda \leqq \lambda_o$) festgestellt, so müssen wir des weiteren noch untersuchen, ob auf den zugehörigen Kegelkanten die Punkte der $R_{r,s}$ im positiven Oktanten selbst oder in seinem Scheiteloktanten liegen. Das geschieht am einfachsten dadurch, daß wir die Punkte der $R_{r,s}$ uns in die Kanten von $\varkappa_s$ eingeschnitten denken durch Ebenen, deren jede immer nur den einen der beiden fraglichen Scheiteloktanten, aber niemals beide zugleich durchsetzt, also z. B. durch Ebenen, die zur Ebene ω parallel sind; dann ist aus diesem Parallelebenenbüschel jeder Kante λ von $\varkappa_s$ eine Ebene zugeordnet (die umgekehrt zu drei Kanten gehört), und ihre Gleichung erhalten wir folgendermaßen: Nehmen wir zu den Ebenenbüscheln (13) noch den zu ihnen projektiven Büschel

$$(13\text{a})\qquad r\varphi+\lambda\chi=0$$

hinzu, so ist vermöge der Gleichungen (10) $R_{r,s}$ der Ort der Schnittpunkte je dreier zusammengehörigen Ebenen aus diesen drei projektiven Büscheln; mit Hilfe der aus (9) folgenden Identität $\chi\equiv\varphi+abc$ ergibt sich aus (13) und (13a) durch Elimination von φ, χ, ψ sofort die gesuchte Gleichung

$$(15)\qquad \omega-\frac{abcrs}{\lambda^2(r+\lambda)}=0 \quad\text{oder}\quad x+y+z=\frac{abcrs}{\lambda^2(r+\lambda)}.$$

Damit diese Ebene in den positiven Oktanten eintritt, muß

$$(16)\qquad \frac{abcrs}{r+\lambda}>0$$

sein; also lautet unser Problem jetzt so: *Wann gibt es ein Intervall* ($\lambda_u \leqq \lambda \leqq \lambda_o$), *in dem die Bedingungen (14) und (16) erfüllt sind?*

Zur weiteren Untersuchung müssen wir jetzt die drei Fälle unterscheiden, die bei einer zentrischen Fläche II. Grades möglich sind; sie sind:

I. Ellipsoid: $a > b > c > 0$.

II. Einmanteliges Hyperboloid: $a > b > 0 > c$.

III. Zweimanteliges Hyperboloid: $a > 0 > b > c$.

Durch diese Festsetzungen nehmen die Bedingungen (14) für alle drei Flächen die einfachere Form an:

(14a) $\begin{cases} \alpha \equiv \lambda^2 + as\lambda + a^2 s \text{ und } \gamma \equiv \lambda^2 + cs\lambda + c^2 s \text{ müssen dasselbe} \\ \text{Vorzeichen haben, aber } \beta \equiv \lambda^2 + bs\lambda + b^2 s \text{ das davon verschiedene.} \end{cases}$

Ferner folgt, daß *in allen drei Fällen die* λ *eines jeden Intervalls* ($\lambda_u \leqq \lambda \leqq \lambda_o$) *ein und dasselbe Vorzeichen haben*; denn die sich für $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ ergebenden Kegelkanten, die Geraden $\overline{\chi\psi}$ und $\overline{\psi\omega}$, liegen immer außerhalb des positiven Oktanten.

Bei jeder dieser drei Flächen sind dann noch die sich auf den Kegelschnitt beziehenden drei Fälle zu unterscheiden, nämlich (vgl. Nr. 2):

1. Ellipse: $r > 0,\ s \geqq 4$.
2. Stumpfe Hyperbel: $r > 0,\ s < 0$.
3. Spitze Hyperbel: $r < 0,\ s < 0$.

Da die Kombinationen I 2 und I 3 von vornherein fortfallen, erhalten wir 7 Fälle; und zwar ist die Bedingung (16) erfüllt:

in den Fällen I 1, II 2, III 1, III 3, wenn $r + \lambda > 0$, und in den Fällen II 1, II 3, III 2, wenn $r + \lambda < 0$ ist.

Das heißt: *Die Bedingung (16) ist für ein Intervall* ($\lambda_u \leqq \lambda \leqq \lambda_o$) *erfüllt in den Fällen I 1, II 2 und III 1, wenn entweder* $\lambda_u > 0$ *oder* $\lambda_o < 0$ *und zugleich* $|\lambda_o| < r$ *ist; in den Fällen II 1 und III 2, wenn* $\lambda_o < 0$ *und zugleich* $|\lambda_u| > r$ *ist; im Falle II 3, wenn entweder* $\lambda_o < 0$ *oder* $\lambda_u > 0$ *und zwar* $\lambda_u < |r|$ *ist; im Falle III 3, wenn* $\lambda_u > 0$ *und zugleich* $\lambda_o > |r|$ *ist.*

6. *Die Ellipsen auf dem Ellipsoid.* — Wir gehen jetzt daran, die Realitätsbedingungen im einzelnen aufzustellen und zwar zuerst für den Fall I 1. Da es sich dabei um die Vorzeichen von α, β, γ handelt, brauchen wir die Nullstellen[1]) dieser drei quadratischen Funktionen von λ. Die Nullstellen von α sind

$$\lambda'_a = -\tfrac{1}{2}a\sigma', \quad \lambda''_a = -\tfrac{1}{2}a\sigma'',$$

1) Diese Nullstellen sind die Werte von λ, die die Schnittkanten des Kegels $\varkappa^2$ mit den Koordinatenebenen liefern; das ist der geometrische Grund ihres Auftretens an dieser Stelle.

worin

$$\sigma' = s + \left|\sqrt{s(s-4)}\right|, \quad \sigma'' = s - \left|\sqrt{s(s-4)}\right|;$$

da für $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda'_\alpha + \lambda''_\alpha) = -\frac{1}{2}as$ $\alpha = -\frac{a^2}{4}s(s-4)$ ist, sehen wir, daß *für alle reellen Werte von s, die nicht zwischen* 0 *und* 4 *liegen,* α *negativ ist, wenn* λ *dem von* λ'_α *und* λ''_α *begrenzten Intervall angehört, sonst aber positiv.* Genau dasselbe gilt für β und γ, deren Nullstellen wir mit λ'_β, λ''_β und λ'_γ, λ''_γ bezeichnen.

Wenn wir s von 4 bis ∞ wachsen lassen, wächst σ' stetig von 4 bis ∞, während σ'' stetig von 4 bis 2 abnimmt; also haben wir dabei immer

$$\sigma' > \sigma'' > 0;$$

deshalb ist im Fall I 1

$$\lambda'_\alpha < \lambda''_\alpha < 0, \quad \lambda'_\beta < \lambda''_\beta < 0, \quad \lambda'_\gamma < \lambda''_\gamma < 0.$$

Wir suchen nun ein Intervall $(\lambda_u \leqq \lambda \leqq \lambda_o)$, für dessen λ α und γ dasselbe, von dem Vorzeichen von β verschiedene Vorzeichen haben; also muß dieses Intervall *entweder* sowohl zwischen λ'_α und λ''_α als auch zwischen λ'_γ und λ''_γ, nicht aber zwischen λ'_β und λ''_β begriffen sein *oder* ganz zwischen λ'_β und λ''_β liegen und von den beiden anderen Nullstellenpaaren ausgeschlossen sein. Es ist nun in unserm Fall

$$\lambda'_\alpha < \lambda'_\beta < \lambda'_\gamma \quad \text{und} \quad \lambda''_\alpha < \lambda''_\beta < \lambda''_\gamma,$$

und deshalb ist nur die zweite Möglichkeit denkbar; das heißt:

Unter der Vorbedingung, daß $\lambda''_\alpha < \lambda'_\gamma$ ist, ist λ_u der größere der beiden Werte λ''_α und λ'_β und λ_o der kleinere der beiden Werte λ'_γ und λ''_β.

Da nun λ''_α und λ'_γ negativ sind, ist $\lambda''_\alpha < \lambda'_\gamma$, sobald $\frac{\lambda''_\alpha}{\lambda'_\gamma} > 1$ ist, und das ist der Fall, wenn $4 \leqq s \leqq \frac{(c+a)^2}{ca}$; denn es ist $\frac{\lambda''_\alpha}{\lambda'_\gamma} = \frac{a}{c} \cdot \frac{\sigma''}{\sigma'}$ $= \frac{a}{c}\left(\frac{1}{2}\sigma'' - 1\right)$ und nimmt deshalb stetig von $\frac{a}{c}$ bis 0 ab, wenn s von 4 bis ∞ wächst, wobei dem Werte $s = \frac{(c+a)^2}{ca}$ der Wert $\frac{\lambda''_\alpha}{\lambda'_\gamma} = 1$ entspricht. Ganz ebenso finden wir, daß $\lambda''_\beta \leqq \lambda'_\gamma$, wenn $4 \leqq s \leqq \frac{(b+c)^2}{bc}$, und daß $\lambda'_\gamma < \lambda''_\beta$, wenn $s > \frac{(b+c)^2}{bc}$ ist. Ziehen wir dann noch in Betracht, daß es für die Erfüllung der Bedingung (16), da die λ negativ sind, auf die obere Grenze λ_o ankommt, und ferner, daß beim Ellipsoid

$$\frac{(c+a)^2}{ca} - \frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{(a-b)(ab-c^2)}{abc} > 0,$$

also

$$\frac{(c+a)^2}{ca} > \frac{(b+c)^2}{bc}$$

ist, so haben wir folgendes Resultat:

Sollen auf unserem Ellipsoid die durch ein Wertepaar r, s gegebenen Ellipsen reell möglich sein, so muß entweder

$$4 \leqq s \leqq \frac{(b+c)^2}{bc}, \quad r > \tfrac{1}{2} b \sigma''$$

oder

$$\frac{(b+c)^2}{bc} < s \leqq \frac{(c+a)^2}{ca}, \quad r > \tfrac{1}{2} c \sigma'$$

sein.[1])

Hat das Ellipsoid die Halbachsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$,[2]) so daß

$$a = \frac{1}{\mathfrak{A}^2}, \quad b = \frac{1}{\mathfrak{B}^2}, \quad c = \frac{1}{\mathfrak{C}^2}, \quad \mathfrak{A} < \mathfrak{B} < \mathfrak{C}$$

ist, und die Ellipse die Halbachsen A, B, so daß nach (6a)

$$A^2 = \frac{\sigma'}{2r}, \quad B^2 = \frac{\sigma''}{2r}, \quad A > B$$

ist, so gehen die Bedingungen $r > \frac{1}{2} b\sigma''$, $r > \frac{1}{2} c\sigma'$ ohne weiteres über in $B < \mathfrak{B}$, $A < \mathfrak{C}$ und vermöge (6) jede Bedingung $s_1 \leqq s \leqq s_2$ in

$$|\sqrt{s_1}| \leqq \frac{A}{B} + \frac{B}{A} \leqq |\sqrt{s_2}|;$$

setzen wir $\frac{A}{B} + \frac{B}{A} = \xi$, $\frac{B}{A} = \eta$ und betrachten wir η als Funktion von ξ, so kommt es hier nur auf den Zweig $\eta = \frac{1}{2}\left(\xi - |\sqrt{\xi^2 - 4}|\right)$ an, der stetig von 1 bis 0 abnimmt, wenn ξ von 2 bis ∞ wächst; mithin folgt, sobald $s_1 \geqq 4$ ist, aus der Bedingung $s_1 \leqq s \leqq s_2$:

$$\tfrac{1}{2}\left(|\sqrt{s_2}| - |\sqrt{s_2 - 4}|\right) \leqq \frac{B}{A} \leqq \tfrac{1}{2}\left(|\sqrt{s_1}| - |\sqrt{s_1 - 4}|\right).$$

Hiernach können wir das gewonnene Resultat auch so[3]) ausdrücken:

Sollen auf einem Ellipsoid, dessen Halbachsen $\mathfrak{A} < \mathfrak{B} < \mathfrak{C}$ sind, reelle Ellipsen von den Halbachsen $A > B$ liegen, so muß entweder

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} \leqq \frac{B}{A} \leqq \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} \quad \textit{und} \quad A \leqq \mathfrak{C}$$

---

1) $\frac{(b+c)^2}{bc}$, $\frac{(c+a)^2}{ca}$, $\frac{(a+b)^2}{ab}$ sind die Werte von s, für die die zugehörigen Kegelgerade durch die x-, bezw. y-, bezw. z-Achse des Koordinatensystems gehen; darin liegt der geometrische Grund für die Rolle, die sie spielen.

2) Wir brauchen hier und im folgenden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in anderer Bedeutung als in Nr. 2.

3) Vergl. G. Diem a. a. O. S. 28.

oder

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} \leqq \frac{B}{A} \leqq 1 \quad \textit{und} \quad B \leqq \mathfrak{B}$$

sein.

Wenn wir alle einander ähnlichen Ellipsen als „*eine Art*“ bezeichnen, so gibt es auf unserem Ellipsoid für jede Art eine oder mehrere größte Ellipsen, für die $A = \mathfrak{C}$, bezw. $B = \mathfrak{B}$ ist. Für diese Ellipsen ist $r = -\lambda'_\gamma$, bezw. $r = -\lambda''_\beta$, d. h. $r + \lambda = 0$; die Ebene (15) geht demnach in die unendlich ferne Ebene über, und die Ebenen der „größten“ Ellipsen werden in unserer Abbildung (8) durch die unendlich fernen Punkte der Kanten der Kegel $\varkappa_s$ dargestellt, die durch $\lambda = \lambda'_\gamma$, bezw. $\lambda = \lambda''_\beta$ bestimmt sind und deshalb in der xy-, bezw. zx-Ebene des Koordinatensystems liegen; sie bilden also die Ebenenbüschel um die z-Achse und um die y-Achse des Koordinatensystems, denen ja vermöge (8) die unendlich fernen Geraden der xy- und der zx-Ebene entsprechen. Da jedem Punkt dieser Geraden zwei Ebenen aus dem zugehörigen Ebenenbüschel zugeordnet sind, haben wir hiermit gefunden:

Auf dem Ellipsoid gibt es von jeder reell möglichen Art von Ellipsen zwei größte Ellipsen (die einander kongruent sind); die Ebenen aller dieser „größten“ Ellipsen bilden die Ebenenbüschel um die größte und um die mittlere Achse des Ellipsoides.

(Fortsetzung folgt.)

Über Aufnahme von Wechselstromkurven durch Oszillographen und ihre Analyse.

Von E. ORLICH in Charlottenburg.

(Schluß.)

III. Harmonische Analyse der Wechselströme.

Ist die Kurve eines Wechselstromes auf experimentellem Wege gefunden und gezeichnet, so handelt es sich nun darum, die Fouriersche Reihe zu finden, welche diese Kurve darstellt. Dafür sind die verschiedensten Methoden und Apparate angegeben worden; letztere werden als harmonische Analysatoren bezeichnet.

Im folgenden soll ein Weg gezeigt werden, durch den man auf verschiedene Methoden der Analyse kommt.

Die zu analysierende Kurve ist darstellbar durch eine Fouriersche Reihe von unendlich großer Gliederzahl:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{A}_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}_k \cos k\omega t. \tag{10}$$

Hat man es nicht mit einem reinen Wechselstrom zu tun, d. h. ist die gesamte innerhalb einer Periode transportierte Elektrizitätsmenge nicht gleich Null, so tritt noch ein konstantes Glied $\mathfrak{B}_0$ auf, d. h. über den reinen Wechselstrom ist ein Gleichstrom gelagert. Man rechnet in diesem Falle einfach alle Summen von $k = 0$ an. Die folgenden Formeln werden hierdurch nur unwesentlich verändert.

Eine weitere Beschränkung wird dadurch eingeführt, daß in der Reihe (10) nur Glieder *ungerader* Ordnung vorkommen (k ungerade). Dieser die Praxis allein interessierende Fall tritt ein, wenn Ordinaten, die einen Abstand von einer halben Periode haben, einander gleich sind, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben, d. h. wenn positive und negative Kurvenhälfte einander spiegelbildlich gleich sind.

Wir teilen nun vom Anfangspunkt der Koordinaten aus auf der Abszissenachse eine Periode τ in p Teile und messen die Längen y_1, $y_2, \ldots y_p$ der in den Teilpunkten errichteten Ordinaten ab. Dabei gehöre die Ordinate y_λ zur Abszisse $t_\lambda = \frac{\lambda \tau}{p}$. Diese zusammengehörenden Werte y_λ und t_λ müssen aber die Gleichung (10) befriedigen, d. h.

$$y_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{A}_k \sin k\omega t_\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}_k \cos k\omega t_\lambda. \tag{10a}$$

Sei nun γ eine ganze Zahl, die zunächst noch unbestimmt gelassen wird, so werde gebildet[1]):

$$\sum_{\lambda=1}^{p} y_\lambda \sin \frac{2\pi\gamma\lambda}{p} = s_1 + s_2.$$

1) Für das Folgende ist es nützlich, sich an folgende Formeln zu erinnern:

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \sin \lambda\alpha = \frac{\sin \frac{p\alpha}{2} \sin \frac{p+1}{2} \cdot \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \cos \lambda\alpha = \frac{\sin \frac{p\alpha}{2} \cos \frac{p+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Dabei ist:

$$s_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{p} \mathfrak{A}_k \sin \frac{2\pi k \lambda}{p} \sin \frac{2\pi \gamma \lambda}{p}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{p} \tfrac{1}{2} \mathfrak{A}_k \left[\cos \frac{2\pi\lambda}{p}(k-\gamma) - \cos \frac{2\pi\lambda}{p}(k+\gamma) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{2} \mathfrak{A}_k \frac{\sin \pi(k-\gamma) \cos \frac{p+1}{p} \pi(k-\gamma)}{\sin \frac{\pi(k-\gamma)}{p}}$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{2} \mathfrak{A}_k \frac{\sin \pi(k+\gamma) \cos \frac{p+1}{p} \pi(k+\gamma)}{\sin \frac{\pi(k+\gamma)}{p}},$$

d. h. sämtliche Summanden werden gleich Null mit Ausnahme derjenigen, in denen auch der Nenner Null wird, wo also $\frac{k \mp \gamma}{p} = z$ eine ganze Zahl ist. Mit Einführung dieser Bezeichnung wird:

$$s_1 = \sum_{z} \tfrac{1}{2} \mathfrak{A}_{pz+\gamma} \frac{\sin \pi p z \cos \pi(p+1)z}{\sin \pi z}$$

$$- \sum_{z} \tfrac{1}{2} \mathfrak{A}_{pz-\gamma} \frac{\sin \pi p z \cos \pi(p+1)z}{\sin \pi z},$$

also

$$s_1 = \frac{p}{2} \sum_{z} \mathfrak{A}_{pz+\gamma} - \frac{p}{2} \sum_{z} \mathfrak{A}_{pz-\gamma},$$

wo die Summe über alle Zahlen z zu erstrecken ist, die einen positiven ungeraden Index für $\mathfrak{A}$ angeben.

Andrerseits ist:

$$s_2 = \sum_{k} \sum_{\lambda} \mathfrak{B}_k \cos \frac{2\pi k \lambda}{p} \sin \frac{2\pi\gamma\lambda}{p}$$

$$= \sum_{k} \sum_{\lambda} \tfrac{1}{2} \mathfrak{B}_k \left[\sin \frac{2\pi\lambda}{p}(k+\gamma) - \sin \frac{2\pi\lambda}{p}(k-\gamma) \right]$$

$$= \sum_{k} \tfrac{1}{2} \mathfrak{B}_k \frac{\sin \pi(\gamma+k) \sin \frac{p+1}{p} \pi(\gamma+k)}{\sin \frac{\pi(\gamma+k)}{p}} - \tfrac{1}{2} \mathfrak{B}_k \frac{\sin \pi(\gamma-k) \sin \frac{p+1}{p} \pi(\gamma-k)}{\sin \frac{\pi(\gamma-k)}{p}}$$

$$= \sum_{z} \tfrac{1}{2} \mathfrak{B}_{pz+\gamma} \frac{\sin \pi p z \sin \pi(p+1)z}{\sin \pi z} - \sum \tfrac{1}{2} \mathfrak{B}_{pz-\gamma} \frac{\sin \pi p z \sin \pi(p+1)z}{\sin \pi z}$$

$$= 0.$$

In genau derselben Weise wird die Rechnung durchgeführt für

$$\sum_{\lambda=1}^{p} y_\lambda \cos\frac{2\pi\lambda\gamma}{p} = c_1 + c_2.$$

Man findet:

$$c_1 = 0,$$

$$c_2 = \frac{p}{2}\sum_s \mathfrak{B}_{ps+\gamma} + \frac{p}{2}\sum_s \mathfrak{B}_{ps-\gamma}.$$

Ebenso werde die Rechnung wiederholt, nachdem der Koordinatenanfangspunkt um eine Viertelperiode nach vorn verschoben ist; setzt man in (10) $t + \frac{\tau}{4}$ statt t, so erhält man:

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{\frac{k+1}{2}}\mathfrak{B}_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\mathfrak{A}_k \cos k\omega t. \tag{10b}$$

Zur Berechnung der Koeffizienten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ stehen daher folgende Gleichungen zur Verfügung:

$$\sum_{\lambda=1}^{p} y_\lambda \sin\frac{2\pi\lambda\gamma}{p} = \frac{p}{2}\sum_{k=ps+\gamma}\mathfrak{A}_k - \frac{p}{2}\sum_{k=ps-\gamma}\mathfrak{A}_k \tag{11}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{p} y_\lambda \cos\frac{2\pi\lambda\gamma}{p} = \frac{p}{2}\sum_{k=ps+\gamma}\mathfrak{B}_k + \frac{p}{2}\sum_{k=ps-\gamma}\mathfrak{B}_k \tag{12}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \eta_\lambda \sin\frac{2\pi\lambda\gamma}{p} = \frac{p}{2}\sum_{k=ps+\gamma}(-1)^{\frac{k+1}{2}}\mathfrak{B}_k - \frac{p}{2}\sum_{k=ps-\gamma}(-1)^{\frac{k+1}{2}}\mathfrak{B}_k \tag{11a}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \eta_\lambda \cos\frac{2\pi\lambda\gamma}{p} = \frac{p}{2}\sum_{k=ps+\gamma}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\mathfrak{A}_k + \frac{p}{2}\sum_{k=ps-\gamma}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\mathfrak{A}_k. \tag{12a}$$

Diese Gleichungen enthalten die Methoden von Fischer-Hinnen[1]) und von Runge.[2])

a) Die Methode von Fischer-Hinnen erhält man, wenn man $\gamma = 0$ setzt. Dann ergeben die Gleichungen (12) und (12a):

$$\sum_{\lambda=1}^{p} y_\lambda = p\sum \mathfrak{B}_{ps}, \quad \sum_{\lambda=1}^{p} \eta_\lambda = p\sum(-1)^{\frac{ps-1}{2}}\mathfrak{A}_{ps},$$

---

1) Elektrotechn. Zeitschr. 1901, S. 396.

2) Zeitschr. f. Math. und Phys. 48, 443, 1903. Diese Methode war zwar schon vor Runge bekannt, ist aber von ihm am vollkommensten begründet worden.

d. h. für:

$$p = 3 \quad y_1 + y_2 + y_3 = 3(\mathfrak{B}_3 + \mathfrak{B}_9 + \mathfrak{B}_{15} + \cdots) \quad (\tau \text{ in 3 Teile geteilt})$$

$$p = 5 \quad y_1 + \cdots + y_5 = 5(\mathfrak{B}_5 \qquad + \mathfrak{B}_{15} + \cdots) \quad (\tau \text{ in 5 Teile geteilt})$$

$$p = 9 \quad y_1 + \cdots + y_9 = 9(\qquad \mathfrak{B}_9 + \cdots \qquad) \quad (\tau \text{ in 9 Teile geteilt});$$

$$p = 3 \quad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 3(-\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_9 - \mathfrak{A}_{15} + \cdots)$$

$$p = 5 \quad \eta_1 + \cdots + \eta_5 = 5(\mathfrak{A}_5 \qquad - \mathfrak{A}_{15} + \cdots)$$

$$p = 9 \quad \eta_1 + \cdots + \eta_9 = 9(\qquad \mathfrak{A}_9 - \cdots \qquad).$$

Sind also die Koeffizienten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ höherer Ordnung so klein, daß man sie vernachlässigen kann, so kann man auf bequeme Weise die einzelnen Koeffizienten niederer Ordnung finden.

b) Methode von Runge. Es sei p eine gerade Zahl $= 2n$, so folgt aus (11) und (12):

$$\sum_{\lambda=1}^{2n} y_\lambda \sin \frac{\pi \gamma \lambda}{n} = n[\mathfrak{A}_\gamma + \mathfrak{A}_{\gamma+2n} + \mathfrak{A}_{\gamma+4n} + \cdots$$
$$- \mathfrak{A}_{2n-\gamma} - \mathfrak{A}_{4n-\gamma} - \cdots]$$

$$\sum_{\lambda=1}^{2n} y_\lambda \cos \frac{\pi \gamma \lambda}{n} = n[\mathfrak{B}_\gamma + \mathfrak{B}_{\gamma+2n} + \mathfrak{B}_{\gamma+4n} + \cdots$$
$$+ \mathfrak{B}_{2n-\gamma} + \mathfrak{B}_{4n-\gamma} + \cdots].$$

Es mag nun $2n$ so groß gewählt werden, daß alle Koeffizienten von $\mathfrak{A}_{n+1}$ und $\mathfrak{B}_{n+1}$ an vernachlässigt werden können. Gibt man γ nacheinander die Werte $1, 3, 5, \ldots n$, so folgt, wenn man wieder statt γ den Buchstaben k setzt:

$$\left.\begin{aligned} &(13) \qquad n\mathfrak{A}_k = \sum_{\lambda=1}^{2n} y_\lambda \sin \frac{\pi k \lambda}{n} \\ &(14) \qquad n\mathfrak{B}_k = \sum_{\lambda=1}^{2n} y_\lambda \cos \frac{\pi k \lambda}{n} \end{aligned}\right\} k = (1, \ldots n-1)$$

$$(14\text{a}) \qquad 2n\mathfrak{B}_n = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \cos \pi \lambda.$$

Diese Formeln lassen sich weiter vereinfachen. Es war vorausgesetzt, daß Ordinaten, die einen Abstand von einer halben Periode haben, einander entgegengesetzt gleich sind. Da nun auf eine halbe Periode n Teilpunkte fallen, so ist für diesen Fall

$$y_{n+\lambda} = -y_\lambda,$$

und wenn man bedenkt, daß k nur ungerade ist, d. h. $\cos k\pi = -1$, so folgt

$$y_{n+\lambda}\sin\frac{k(n+\lambda)\pi}{n} = y_\lambda \sin\frac{k\lambda\pi}{n}, \quad y_{n+\lambda}\cos\frac{k(n+\lambda)\pi}{n} = y_\lambda\cos\frac{k\lambda\pi}{n}.$$

Man kann somit in den Summen (13), (14) je zwei einander gleiche Glieder zusammenfassen und erhält zwei nur über eine halbe Periode zu erstreckende Summen:

$$n\mathfrak{A}_k = 2\sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \sin\frac{k\lambda\pi}{n}, \quad n\mathfrak{B}_k = 2\sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda\cos\frac{k\lambda\pi}{n}.$$

In diesen Summen lassen sich, wenn n *gerade* ist, wiederum je zwei Glieder zusammenfassen, die gleich weit von dem in der Mitte stehenden Gliede $\left(\lambda = \frac{n}{2}\right)$ entfernt sind. Es ist nämlich:

$$\sin\frac{k(n-\lambda)\pi}{n} = \sin\frac{k\lambda\pi}{n}$$

$$\cos\frac{k(n-\lambda)\pi}{n} = -\cos\frac{k\lambda\pi}{n}.$$

Daraus ergibt sich:

$$n\mathfrak{A}_k = 2\sum_{\lambda=1}^{\frac{n}{2}-1}(y_\lambda + y_{n-\lambda})\sin\frac{k\lambda\pi}{n} + 2y_{\frac{n}{2}}\sin\frac{k\pi}{2} \tag{15}$$

$$n\mathfrak{B}_k = 2\sum_{\lambda=1}^{\frac{n}{2}-1}(y_\lambda - y_{n-\lambda})\cos\frac{k\lambda\pi}{n} - 2y_n. \tag{16}$$

Diese Formel mag durchgerechnet werden für den Fall $n = 12$ (Halbperiode in 12 gleiche Teile geteilt). $\frac{\pi}{n}$ entspricht also 15^0.

Man schreibe die Werte der 12 Ordinaten in der folgenden Weise untereinander und bilde die Summen u und die Differenzen v:

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
	y_{12}	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
Summe		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
Differenz	v_6	v_5	v_4	v_3	v_2	v_1,	

wobei

$$u_1 = y_1 + y_{11}, \quad v_1 = y_5 - y_7$$

. . . .

und

$$u_6 = y_6, \quad v_6 = -y_{12}$$

gesetzt ist. Dann ist:

$$6\mathfrak{A}_k = u_1 \sin 15k + u_2 \sin 30k + \cdots + u_5 \sin 75k + u_6 \sin 90k,$$

$$6\mathfrak{B}_k = v_5 \cos 15k + v_2 \cos 30k + \cdots + v_1 \cos 75k + v_6.$$

Verwandelt man alle vorkommenden Winkelfunktionen in Si von Winkeln, die zwischen $0 \ldots 90^0$ liegen, und ordnet nach Winkeln, so erhält man folgende Tabellen:

sin 0		u_4			u_4	
sin 15	u_1		u_5	u_5		[illegible]
sin 30	u_2		u_2	$-u_2$		$-$ [illegible]
sin 45	u_3	$u_1 + u_3 - u_5$	$-u_3$	$-u_3$	$u_1 + u_3 - u_5$	[illegible]
sin 60	u_4		$-u_4$	u_4		$-$ [illegible]
sin 75	u_5		u_1	u_1		[illegible]
sin 90	u_7	$u_2 - u_6$	u_6	$-u_6$	$-u_2 + u_6$	$-$ [illegible]
	$6\mathfrak{A}_1$	$6\mathfrak{A}_3$	$6\mathfrak{A}_5$	$6\mathfrak{A}_7$	$6\mathfrak{A}_9$	$6\mathfrak{A}_1$[illegible]

sin 0		v_4			v_4	
sin 15	v_1		v_5	$-v_5$		$-$ [illegible]
sin 30	v_2		v_2	v_2		[illegible]
sin 45	v_3	$v_5 - v_3 - v_1$	$-v_3$	v_3	$-v_5 + v_3 + v_1$	$-$ [illegible]
sin 60	v_4		$-v_4$	$-v_4$		[illegible]
sin 75	v_5		v_1	$-v_1$		$-$ [illegible]
sin 90	v_6	$v_6 - v_2$	v_6	v_6	$v_6 - v_2$	[illegible]
	$6\mathfrak{B}_1$	$6\mathfrak{B}_3$	$6\mathfrak{B}_5$	$6\mathfrak{B}_7$	$6\mathfrak{B}_9$	$6\mathfrak{B}_1$[illegible]

Man hat jedes in der Tabelle stehende u oder v mit der in d selben Horizontallinie stehenden Winkelfunktion zu multiplizieren, u nach der Multiplikation die Vertikalkolonnen zu addieren. Die zwe Tabelle entsteht aus der ersten, wenn man überall die u durch di mit gleichen Indices ersetzt. Die Vertikalsummen ergeben dann:

$$6\mathfrak{B}_1, \quad -6\mathfrak{B}_3, \quad 6\mathfrak{B}_5, \quad -6\mathfrak{B}_7, \quad 6\mathfrak{B}_9, \quad -6\mathfrak{B}_{11}.$$

Die Anordnungen in den Vertikalkolonnen findet man auf e fachem, mechanischem Wege. Um z. B. die Kolonne für $\mathfrak{A}_9$ zu find zählt man, angefangen von der Reihe sin 15, ununterbrochen herab u hinauf durch sämtliche sieben Reihen von 1 bis 9, und setzt jedesm sobald man an die Zahl 9 kommt, nacheinander u_1, u_2 bis u_5 an betreffende Stelle; dabei wird das Vorzeichen der u umgedreht, sob man die Reihe sin 0 passiert. Hat man auf diese Weise in Kolonnen die Werte u_1 bis u_5 untergebracht, wird in die Horizont reihe mit sin 90 abwechselnd $+u_6$ und $-u_6$ eingesetzt.

Setzt man die Zahlenwerte für die Sinus ein, so ergibt sich folgende für praktische Berechnungen brauchbare Tabelle:

0,043 14	u_1	u_1	u_6	u_5		
0,083 33	u_2	$-u_2$	u_2	$-u_2$		
0,117 85	u_3	u_3	$-u_3$	$-u_3$	$u_1 + u_3 - u_5$	$u_1 + u_3 - u_5$
0,144 34	u_4	$-u_4$	$-u_4$	u_4		
0,160 99	u_5	u_5	u_1	u_1		
0,166 67	u_6	$-u_6$	u_6	$-u_6$	$u_2 - u_6$	$-(u_2 - u_6)$
	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{A}_{11}$	$\mathfrak{A}_5$	$\mathfrak{A}_7$	$\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{A}_9$
bzw.	$\mathfrak{B}_1$	$-\mathfrak{B}_{11}$	$\mathfrak{B}_5$	$\mathfrak{B}_7$	$-\mathfrak{B}_3$	$\mathfrak{B}_9$

Nach dem Gesagten ist es nicht schwer, die Rechnung auch für andere Werte von n durchzuführen.

IV. Harmonischer Analysator von Michelson und Stratton.[1])

Vergleicht man die Formeln (10a) und (13, 14) miteinander und bedenkt, daß $k\omega t_\lambda = \frac{\pi k \lambda}{n}$ ist, so erkennt man, daß zwischen den Ordinaten y_λ einerseits und den Koeffizienten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ andererseits ein gewisses Reziprozitätsgesetz besteht. Gelingt es also einen Apparat zu konstruieren, der eine endliche Reihe von Gliedern der Form (10a) zu summieren gestattet, so kann ein solcher Apparat dazu dienen, sowohl die Kurve zu einer gegebenen Fourierschen Reihe zu zeichnen, als auch die Fouriersche Reihe zu der gegebenen Kurve zu finden.

Ein derartiger Apparat ist von Michelson und Stratton angegeben worden.

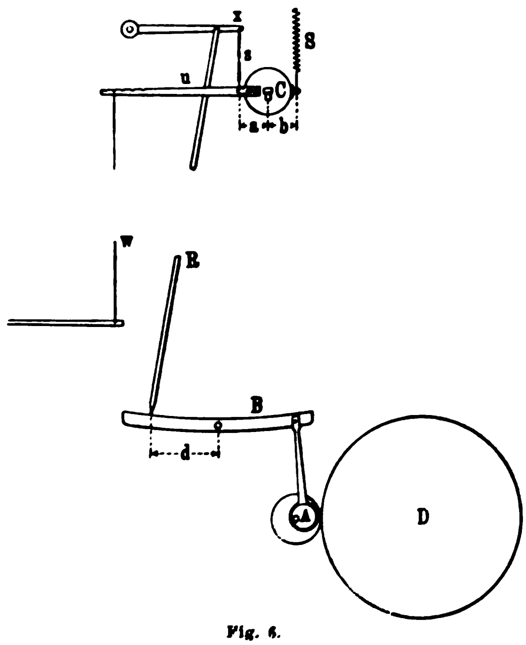


Fig. 6.

Eine Achse D (Fig. 6) ist gekuppelt mit einer Trommel, auf welche die Kurve gezeichnet werden soll; andererseits trägt D eine Reihe von

1) Der Apparat ist zu beziehen durch Wm. Gaertner & Co., Chicago, 5347—5349 Lake avenue.

80 Zahnrädern, welche in 80 Exzenter (in der Figur nur einer, A, zeichnet) eingreifen. Die Zahnzahlen sind derartig gewählt, daß die Drehgeschwindigkeiten der Exzenter wie 1 : 2 : 3: . . . : 80 verhal und daß der am langsamsten laufende Exzenter und die Regist

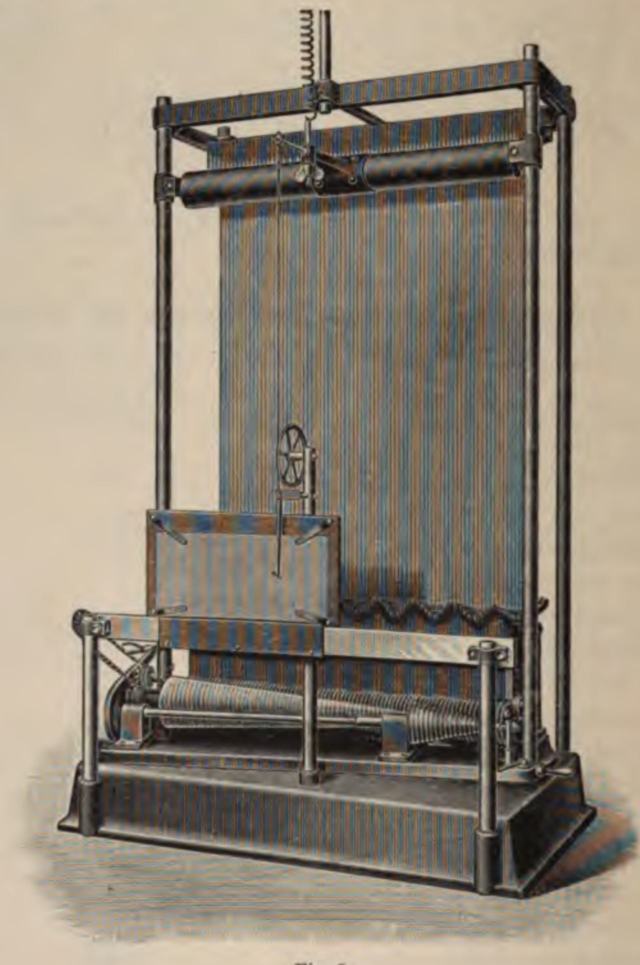


Fig. 7.

trommel gleichzeitig eine volle Umdrehung ausführen, entsprech einer Periode. Die Bewegung des Exzenters A wird durch den H B und die Stange R auf den Punkt x übertragen, wobei die Gr der Bewegung von x abhängt von der regulierbaren Entfernung d Stange R vom Drehpunkt des Hebels B. Ist A der k^{te} Exzenter, hat er anfangs die in der Figur gezeichnete Lage, so führt der Punkt x auf- und abgehende Bewegung aus, die proportional $s_k = d \sin k\omega t$

Die 80 Punkte x sind durch ebensoviele, einander gleiche Spiralfedern s mit einem Hohlzylinder C verbunden, der auf zwei Schneiden ruht; eine stärkere Feder S hält dem durch die 80 Federn ausgeübten Drehmoment das Gleichgewicht. Die Bewegung des Zylinders C wird durch Hebel u und Draht w auf eine Schreibfeder übertragen, welche auf der Registriertrommel aufliegt. Seien nun L und l die natürlichen Längen der entspannten Federn S und s, δL und δl ihre Verlängerungen in der Anfangslage von A, dann kann man setzen:

die Zugkraft je einer kleinen Feder . . . $p = \frac{e\,\delta l}{l}$,

die Zugkraft der großen Feder . . . . $p = \frac{E\,\delta L}{L}$,

wo e und E Konstanten sind. Sind n Exzenter vorhanden, so ist also

$$\frac{a n e\,\delta l}{l} = \frac{b E\,\delta L}{L}. \tag{17}$$

Nun werde D aus seiner Anfangslage herausgedreht, dann erfährt S eine gewisse Verlängerung y, folglich muß der untere Befestigungspunkt jeder Feder s um $\frac{a}{b}y$ gehoben werden.

Andrerseits wird aber der obere Befestigungspunkt der k^{ten} Feder s gehoben um z_k; d. h. die gesamte Verlängerung der k^{ten} Feder beträgt nunmehr $\delta l + z_k - \frac{a}{b}y$; die Zugkraft dieser Feder ist $\frac{e}{l}\left(\delta l + z_k - \frac{a}{b}y\right)$, folglich die Gleichgewichtsbedingung für den Zylinder C

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{ae}{l}\left(\delta l + z_k - \frac{a}{b}\,y\right) = \frac{bE}{L}(\delta L + y). \tag{18}$$

Davon Gleichung (17) abgezogen ergibt:

$$\frac{ae}{l}\left(\sum z_k - n\,\frac{a}{b}\,y\right) = \frac{bEy}{L}. \tag{19}$$

Dies durch (17) dividiert, folgt:

$$\frac{\left(\frac{1}{n}\sum z_k - \frac{a}{b}\,y\right)}{\delta l} = \frac{y}{\delta L},$$

oder

$$y = \frac{\sum z_k}{n\left(\frac{\delta l}{\delta L} + \frac{a}{b}\right)} = \frac{\sum d_k \sin k\omega t}{n\left(\frac{\delta l}{\delta L} + \frac{a}{b}\right)}. \tag{20}$$

Stellt man also an den Hebeln d die einzelnen Amplituden $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ... der Oberschwingungen ein, so beschreibt die Schreibfeder die zugehörige Fouriersche Reihe. Der Nenner des Ausdruckes (20) ist eine Konstante, die nur von den Konstruktionsdaten des Apparates abhängt, und gibt Anhaltspunkte über die Regulierbarkeit der Empfindlichkeit.

Wird die Anfangsstellung der Exzenter A gegenüber der bisher angenommenen um 90^0 gedreht, so wird, wie leicht einzusehen ist:

$$y = \frac{\sum d_k \cos k\omega t}{n\left(\frac{\delta l}{\delta L} + \frac{a}{b}\right)}.$$

Um das Einstellen der Anfangslagen leicht bewerkstelligen zu können, sind die Exzenter A ausrückbar konstruiert; nach dem Ausrücken werden sie durch eine Führungsstange gleichzeitig in die richtige Anfangslage gebracht.

In dieser Form ist der Apparat nur imstande, entweder eine Sinusreihe oder eine Kosinusreihe zu summieren.

Um den Apparat auch als Analysator einer gegebenen Kurve zu gebrauchen, erinnern wir uns der Gleichungen (13) und (14). Setzen wir in diesen Gleichungen $n = 40$, so kann man sie schreiben:

$$40\mathfrak{A}_\lambda = \sum_{k=1}^{80} y_k \sin\frac{\lambda k\pi}{40}, \qquad 40\mathfrak{B}_\lambda = \sum_{k=1}^{80} y_k \cos\frac{\lambda k\pi}{40},$$

für $\lambda = 1, 2, \ldots 39$.

Man teilt nun auf der Abszissenachse der aufzunehmenden Kurve eine Periode in 80 gleiche Teile und macht die 80 Hebel d gleich den 80 in den Teilpunkten errichteten Ordinaten y. Bei dieser Einstellung zeichnet man mit dem Analysator sowohl die Sinuskurve wie die Kosinuskurve: $z = \sum_{k=1}^{80} y_k \sin k\omega t$, $u = \sum_{k=1}^{80} y_k \cos k\omega t$. Auf der Abszissenachse von jeder dieser Kurven z und u wird wiederum eine Periode abgegrenzt und in je 80 Teile geteilt.

Der λ^{te} Teilpunkt der Abszissenachse hat vom Anfangspunkt den Abstand $\frac{\lambda\tau}{80}$ und die zugehörige Ordinate der Sinuskurve die Größe

$$z_\lambda = \sum y_k \sin k\omega\frac{\lambda\tau}{80} = \sum y_k \sin\frac{\lambda k\pi}{40} = 40\mathfrak{A}_\lambda,$$

d. h. die Ordinaten in den ersten 39 Teilpunkten sind

$$40 \times \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_{39} \quad \text{bezw.} \quad 40 \times \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_{39}.$$

Über den Wechsel der unabhängigen Variablen bei Differentiationsprozessen.

Von OTTO BIERMANN in Brünn.

Ist eine Funktion z von n unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gegeben, und sind die Ableitungen von z nach diesen Variablen durch Ableitungen nach neuen Variablen $u_1, u_2, \ldots u_n$ darzustellen, die etwa durch Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ x_2 &= \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_n &= \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

eingeführt seien, worauf auch z eine Funktion dieser Variablen wird:

$$z = \varphi_{n+1}(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

so läßt sich diese wohlbekannte Aufgabe in folgender Weise ganz allgemein ausführen, und in der Allgemeinheit der Behandlung besteht allein der Wert des hier vorgelegten Gedankens.

Man entwickle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in der Umgebung einer Stelle $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0$, wo die Werte von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Reihe nach $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ seien, bilde also bei Gebrauch der symbolischen Schreibweise

$$x_\nu - x_\nu^0 = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\infty} \frac{1}{\varkappa!}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}(u_1 - u_1^0) + \cdots + \frac{\partial}{\partial u_n}(u_n - u_n^0)\right)_0^{(\varkappa)} \varphi_\nu$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots n),$$

wo der Index $_0$ bei der symbolisch genommenen $\varkappa$ten Potenz anzeigen soll, daß die Ableitungen an der Stelle (u^0) zu nehmen sind, kehre diese als konvergent angenommenen Reihen um, entnehme also, welches die Koeffizienten in den Reihen

$$\begin{aligned} u_\nu - u_\nu^0 &= a_1^{(\nu)}(x_1 - x_1^0) + \cdots + a_n^{(\nu)}(x_n - x_n^0) \\ &+ \frac{1}{2!}\left[a_{11}^{(\nu)}(x_1 - x_1^0)^2 + \cdots + a_{nn}^{(\nu)}(x_n - x_n^0)^2\right] + \cdots \\ &(\nu = 1, 2, \ldots n) \end{aligned}$$

sind, setze dann diese Reihen in der Darstellung

$$z - z^0 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda!}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}(u_1 - u_1^0) + \cdots + \frac{\partial}{\partial u_n}(u_n - u_n^0)\right)_0^{(\lambda)} \varphi_{n+1}$$

ein, so sieht man in der Entwicklung von z nach den ersten Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$z - z^0 = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{1}{\mu!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}(x_n - x_n^0)\right)_0^{(\mu)} z$$

den Koeffizienten von

$$(x_1 - x_1^0)^{\mu_1}(x_2 - x_2^0)^{\mu_2} \cdots (x_n - x_n^0)^{\mu_n},$$

der abgesehen von einem Zahlenfaktor durch das Symbol

$$\left(\frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n} z}{\partial x_1^{\mu_1}\partial x_2^{\mu_2}\cdots\partial x_n^{\mu_n}}\right)_0$$

auszudrücken ist, in der erwünschten Weise durch Ableitungen der Funktionen φ_ν nach den neuen Variablen dargestellt, und damit ist die Aufgabe dann gelöst.

Diesen Vorgang kann man auch in der Weise auffassen, daß man für das ∞^n ausgedehnte Gebilde, das durch die Gleichung

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$$

definiert sei, eine Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x_\nu &= \varphi_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ z &= \varphi_{n+1}(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

einführt, dann aus den ersten n dieser Transformationsgleichungen die analytischen Darstellungen der n Differenzen $u_\nu - u_\nu^0$ in der Umgebung der Stelle (x^0) ermittelt, mit deren Hilfe die Entwicklung von $z - z^0$ nach Potenzen der n Größen $u_\nu - u_\nu^0$ umformt und das Element der durch die Gleichung $f = 0$ bestimmten Funktion $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ableitet.

Bei dieser Auffassung ist es vollends erklärlich, was betreffs der Bestimmung der Ableitungen nach den Veränderlichen x durch Ableitungen nach den Veränderlichen u gesagt war, und warum man in den zweierlei Entwicklungsformen nur die Koeffizienten gleichnamiger Potenzen einander gleichzusetzen hat.

Es bleibt daher hier nur mehr übrig, diese Methode auf die einfachsten Fälle $n = 1$ und $n = 2$ anzuwenden und hier etwa die Ableitungen der ersten zwei Ordnungen nach den ersten Veränderlichen durch Ableitungen nach den neuen Veränderlichen darzustellen.

Ist also eine ebene Kurve in den zweierlei Arten dargestellt, erstens durch eine Gleichung $f(x, y) = 0$ und zweitens mit Hilfe eines Para-

meters t durch die Gleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, und ist (x_0, y_0) eine **reguläre** Stelle der Kurve, die dem Parameterwerte t_0 zugehören mag, so **gelten** die Entwicklungen

$$y - y_0 = \frac{1}{1!}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \cdots$$

und

$$x - x_0 = \frac{1}{1!}\varphi'(t - t_0) + \frac{1}{2!}\varphi''(t - t_0)^2 + \cdots,$$

$$y - y_0 = \frac{1}{1!}\psi'(t - t_0) + \frac{1}{2!}\psi''(t - t_0)^2 + \cdots,$$

wo φ', φ'', ..., ferner ψ', ψ'', ... die Werte der ersten, zweiten, ... **Ableitungen** von $\varphi(t)$ bzw. $\psi(t)$ an der Stelle t_0 vorstellen sollen.

Nun hat man die vorletzte Reihe umzukehren, hat somit in der **Reihe**

$$t - t_0 = \alpha_1(x - x_0) + \frac{\alpha_2}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

die Koeffizienten so zu bestimmen, daß der früheren Reihe für $x - x_0$ **nach** Substitution der letzten identisch Genüge geleistet wird.

Man erhält so die Gleichungen

$$\alpha_1 \varphi' = 1,$$

$$\alpha_2 \frac{\varphi'}{2} + \alpha_1^2 \frac{\varphi''}{2} = 0,$$

$$\alpha_3 \frac{\varphi'}{6} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2}\varphi'' + \frac{\alpha_1^3}{6}\varphi''' = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

aus **denen** schrittweise hervorgeht

$$\alpha_1 = \frac{1}{\varphi'}, \quad \alpha_2 = -\frac{\varphi''}{\varphi'^3}, \quad \alpha_3 = \frac{3\varphi''^2}{\varphi'^5} - \frac{\varphi'''}{\varphi'^4}, \cdots.$$

Und wenn man nun die zu bildende Reihe für $t - t_0$ in der Entwick**lung** für $y - y_0$ nach Potenzen von $t - t_0$ einsetzt, so folgt:

$$y - y_0 = \frac{1}{1!}\frac{\psi'}{\varphi'}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\frac{\begin{vmatrix}\varphi' & \varphi'' \\ \psi' & \psi''\end{vmatrix}}{\varphi'^3}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$\equiv \frac{1}{1!}\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}(x - x_0)^2 + \cdots,$$

und hier ersieht man — wie es notwendig ist — für den Koeffizienten von $\frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}$, d. i. $\left(\frac{d^\nu y}{dx^\nu}\right)_0$, eine Darstellung durch eine rationale gebrochene Funktion solcher Ableitungen von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ an der Stelle (t_0) auftreten, die höchstens von der Ordnung ν sind.

Wenn man das Element der durch die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ definierten Funktion, also die Entwicklung

$$z - z_0 = f_1(x-x_0) + f_2(y-y_0) + \frac{1}{2!}[f_{11}(x-x_0)^2 + 2f_{12}(x-x_0)(y-y_0) + f_{22}(y-y_0)^2] + \cdots,$$

wo $f_\varkappa$ und $f_{\varkappa\lambda}$ die Ableitungen nach der $\varkappa$ten bzw. $\varkappa$ten und λten der beiden Variablen x und y an der Stelle (x_0, y_0) bedeuten, dadurch bildet, daß man die Entwicklungen für

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v)$$

in der Umgebung einer Stelle (u_0, v_0), nämlich

$$x - x_0 = \varphi_1(u-u_0) + \varphi_2(v-v_0) + \frac{1}{2!}[\varphi_{11}(u-u_0)^2 + 2\varphi_{12}(u-u_0)(v-v_0) + \varphi_{22}(v-v_0)^2] + \cdots$$

$$y - y_0 = \psi_1(u-u_0) + \psi_2(v-v_0) + \frac{1}{2!}[\psi_{11}(u-u_0)^2 + 2\psi_{12}(u-u_0)(v-v_0) + \psi_{22}(v-v_0)^2] + \cdots$$

umkehrt und in die Entwicklung von

$$z = \chi(u, v),$$

nämlich in

$$z - z_0 = \chi_1(u-u_0) + \chi_2(v-v_0) + \frac{1}{2!}[\chi_{11}(u-u_0)^2 + 2\chi_{12}(u-u_0)(v-v_0) + \chi_{22}(v-v_0)^2] + \cdots$$

einsetzt und nach wachsenden Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ ordnet, so löst wieder der Vergleich der Glieder gleicher Potenzen in der so zu bildenden Reihe und der ersten hier genannten die gestellte Aufgabe.[1])

Heißen die zu suchenden Reihen für $u - u_0$ und $v - v_0$:

$$u - u_0 = \frac{1}{1!}(\alpha_1(x-x_0) + \alpha_2(y-y_0)) + \frac{1}{2!}(\alpha_{11}(x-x_0)^2 + 2\alpha_{12}(x-x_0)(y-y_0) + \alpha_{22}(y-y_0)^2) + \cdots$$

$$v - v_0 = \frac{1}{1!}(\beta_1(x-x_0) + \beta_2(y-y_0)) + \frac{1}{2!}(\beta_{11}(x-x_0)^2 + 2\beta_{12}(x-x_0)(y-y_0) + \beta_{22}(y-y_0)^2) + \cdots,$$

1) Könnte man aus dem in der genannten Weise eingeführten Elemente z als Funktion von x und y diese Funktion so weit durchschauen, daß man auch die Beziehung $f(x, y, z) = 0$ ersähe, so wüßte man auch die Bedingungen für den zweifachen singulären Punkt anzugeben. (Vergleiche dieses Archiv (3), **5**, 245.)

so sind die Koeffizienten α und β bei den Gliedern erster und zweiter Dimension aus folgenden Relationen zu bestimmen:

$$\begin{aligned}\alpha_1\varphi_1 + \beta_1\varphi_2 &= 1,\\ \alpha_1\psi_1 + \beta_1\psi_2 &= 0,\\ \alpha_2\varphi_1 + \beta_2\varphi_2 &= 0,\\ \alpha_2\psi_1 + \beta_2\psi_2 &= 1,\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{11}\varphi_1 + \beta_{11}\varphi_2 + (\alpha_1^2\varphi_{11} + 2\alpha_1\beta_1\varphi_{12} + \beta_1^2\varphi_{22}) &= 0,\\ \alpha_{11}\psi_1 + \beta_{11}\psi_2 + (\alpha_1^2\psi_{11} + 2\alpha_1\beta_1\psi_{12} + \beta_1^2\psi_{22}) &= 0\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{12}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + (\alpha_1\alpha_2\varphi_{11} + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\varphi_{12} + \beta_1\beta_2\varphi_{22}) &= 0,\\ \alpha_{12}\psi_1 + \beta_{12}\psi_2 + (\alpha_1\alpha_2\psi_{11} + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\psi_{12} + \beta_1\beta_2\psi_{22}) &= 0\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{22}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + (\alpha_2^2\varphi_{11} + 2\alpha_2\beta_2\varphi_{12} + \beta_2^2\varphi_{22}) &= 0,\\ \alpha_{22}\psi_1 + \beta_{22}\psi_2 + (\alpha_2^2\psi_{11} + 2\alpha_2\beta_2\psi_{12} + \beta_2^2\psi_{22}) &= 0\end{aligned}\right\}.$$

Bestimmen wir die Reihen für $u - u_0$ und $v - v_0$, setzen diese in die aus der Relation $z = \chi(u, v)$ fließende Reihe ein und ordnen nach Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$, so liefert uns der Vergleich der Koeffizienten gleichnamiger Glieder in dieser und in der allerersten Reihe folgende Relationen:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = \frac{-\begin{vmatrix}\psi_1 & \chi_1\\ \psi_2 & \chi_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\varphi_1 & \psi_1\\ \varphi_2 & \psi_2\end{vmatrix}}, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = \frac{+\begin{vmatrix}\varphi_1 & \chi_1\\ \varphi_2 & \chi_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\varphi_1 & \psi_1\\ \varphi_2 & \psi_2\end{vmatrix}},$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)^3}\begin{vmatrix}\varphi_1, & \varphi_2, & \varphi_{11}\psi_2^2 - 2\varphi_{12}\psi_1\psi_2 + \varphi_{22}\psi_1^2\\ \psi_1, & \psi_2, & \psi_{11}\psi_2^2 - 2\psi_{12}\psi_1\psi_2 + \psi_{22}\psi_1^2\\ \chi_1, & \chi_2, & \chi_{11}\psi_2^2 - 2\chi_{12}\psi_1\psi_2 + \chi_{22}\psi_1^2\end{vmatrix},$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)_0 = \frac{1}{(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)^3}\begin{vmatrix}\varphi_1, & \varphi_{11}\varphi_2\psi_2 - \varphi_{12}(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1) + \varphi_{22}\varphi_1\psi_1, & \varphi_2\\ \psi_1, & \psi_{11}\varphi_2\psi_2 - \psi_{12}(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1) + \psi_{22}\varphi_1\psi_1, & \psi_2\\ \chi_1, & \chi_{11}\varphi_2\psi_2 - \chi_{12}(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1) + \chi_{22}\varphi_1\psi_1, & \chi_2\end{vmatrix},$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)^3}\begin{vmatrix}\varphi_{11}\varphi_2^2 - 2\varphi_{12}\varphi_1\varphi_2 + \varphi_{22}\varphi_1^2, & \varphi_1, & \varphi_2\\ \psi_{11}\varphi_2^2 - 2\psi_{12}\varphi_1\varphi_2 + \psi_{22}\varphi_1^2, & \psi_1, & \psi_2\\ \chi_{11}\varphi_2^2 - 2\chi_{12}\varphi_1\varphi_2 + \chi_{22}\varphi_1^2, & \chi_1, & \chi_2\end{vmatrix}.$$

Ableitungen von höherer als der zweiten Ordnung sind methodisch in gleicher Weise zu bilden.

Brünn, den 6. Dezember 1905.

Pascalscher Satz, Desarguesscher Satz und Nullsystem.

Von EUGEN MEYER in Charlottenburg.

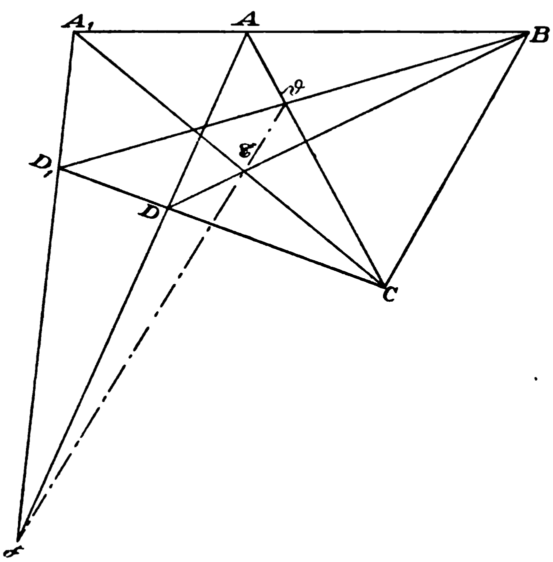
Die aus dem speziellen Pascalschen Satz (für das Geradenpaar und die aus dem Desarguesschen Satz über zwei perspektive Dreieck entspringenden Konfigurationen haben die Eigenschaft gemeinsam, da immer je drei Punkte auf einer Geraden liegen und je drei Gerade durch einen Punkt gehen; sie unterscheiden sich dadurch, daß die erstere aus je neun, die zweite aus je zehn Geraden und Punkten besteht. Die Existenz der ersteren folgt schon aus den Verknüpfungsaxiomen, die der zweiten nach Herrn Hilbert nur, wenn man entweder die Kongruenzaxiome oder das Archimedische Axiom zu ihnen hinzunimmt. In Übereinstimmung hiermit läßt sich die Desarguessche Konfiguration durch Projizieren und Schneiden aus einer räumlichen gewinnen, deren Herstellung auf Grund ausschließlicher Benutzung der Verknüpfungsaxiome möglich ist, die Pascalsche dagegen nur aus einer solchen, deren Herstellung noch die Hinzunahme der genannten andern Axiome erfordert. Eine zu dem ersten Zweck geeignete Konfiguration ist ein vollständiges Fünfeck im Raume[1]), d. h. die zehn Verbindungsgeraden und die zehn Verbindungsebenen von fünf Punkten, von denen niemals vier in derselben Ebene liegen; eine zu dem andern Zweck brauchbare besteht aus zwei Geradenquadrupeln, die zu je einer Geradenschar eines Hyperboloides gehören.[2])

Die erste dieser beiden Raumkonfigurationen läßt sich etwas anders auffassen. Man nehme zwei Tetraeder, denen drei Ecken gemeinsam sind, und ziehe die Verbindungslinie der nicht gemeinsamen Ecken, — oder zwei Tetraeder, denen drei Ebenen gemeinsam sind, und zeichne die Schnittlinie der nicht gemeinsamen Ebenen. Schneidet man das erste Tetraederpaar durch eine Ebene (die nur nicht durch einen der Schnittpunkte von zwei der in der Figur vorkommenden Geraden gehen darf), oder projiziert man das zweite Tetraederpaar von einem beliebigen Punkte aus (der nur nicht auf einer der durch zwei der vorkommenden Geraden gehenden Ebene liegen darf) auf eine Ebene, so erhält man beide Male die Desarguessche Konfiguration.

1) v. Staudt, Geometrie der Lage, S. 41.

2) K. Th. Vahlen, Abstrakte Geometrie, Leipzig 1905, S. 70. — Auf Zeil[illegible] von oben und Zeile 17 von unten ist dort durch einen Druckfehler $\mathfrak{G}_0$ und [illegible] vertauscht. — Ferner: G. Hessenberg, Math. Ann., Bd. 61, S. 164.

In jedem der beiden Tetraederpaare fallen je drei Kantenpaare in dieselben Geraden; im ersten Fall liegen sie in derselben Ebene, im zweiten gehen sie durch denselben Punkt. Nun nehme man zwei Tetraeder, $ABCD$ und A_1BCD_1 (vgl. die Figur), von deren Kanten auch dreimal je zwei in dieselbe Gerade fallen, *ohne* aber in derselben Ebene zu liegen oder durch denselben Punkt zu gehen. Projiziert man die Figur von einem allgemein gewählten Raumpunkt auf eine allgemein gewählte Ebene, läßt die Verbindungslinie BC der beiden gemeinsamen Tetraederecken fort und fügt die Gerade $\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ ein, so hat man die Pascalsche Konfiguration.



Daß $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ in einer Geraden liegen, ergibt sich folgendermaßen aus der räumlichen Figur. Durch AD und A_1D_1 als konjugierte Polaren und BC als Leitstrahl ist ein Nullsystem bestimmt. In diesem sind die beiden Tetraeder einander zugeordnet, und zwar entsprechen den Ebenen ABC, BCD, CDA, ADB des einen bzw. die Ecken B, C, D_1, A_1 des andern. Es sind zwei Möbiussche Tetraeder in besonderer Lage. Da also die Kanten D_1B, A_1C, A_1D_1 bzw. zu AC, BD, AD konjugiert sind, so müssen, wenn S das Projektionszentrum bedeutet, die Raumgeraden $S\mathfrak{D}$, $S\mathfrak{E}$, $S\mathfrak{F}$ Leitstrahlen sein. Als solche liegen sie in einer Ebene, also $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ in einer Geraden. Diese noch hinzukommende Gerade ist also der Schnitt der Projektionsebene mit der Nullebene des Projektionszentrums. Es können also im Desarguesschen sowohl wie im Pascalschen Falle die Tetraederpaare durch bloßes Verbinden und Schneiden von Punkten, Geraden und Ebenen hergestellt werden. Während aber zur Vollendung der Raumfigur im ersten Falle dann nur noch die Verbindungslinie zweier Punkte, bzw. die Schnittlinie zweier Ebenen nötig ist, bedarf man im zweiten Falle dazu der Nullebene eines Punktes in einem eindeutig bestimmten Nullsystem. Hierin liegt der wesentliche Unterschied.

Herr G. Hessenberg hat darauf hingewiesen[1]), daß die beid ebenen Konfigurationen in der affinen Spezialisierung als besonde Fälle zweier Viereckspaare angesehen werden können von der Ar daß jede Seite und jede Diagonale des einen Vierecks einer Seite, bzw einer Diagonale des andern parallel ist. Nennt man die parallele Seiten entsprechend, so besteht der Unterschied der Konfiguratione darin, daß im Desarguesschen Falle drei Gerade der Figur stets dan ein Dreieck bilden, bzw. durch denselben Punkt gehen, wenn dies f die entsprechenden gilt, im Pascalschen Falle aber ein Dreie bilden, wenn die entsprechenden durch denselben Punkt gehen, u umgekehrt.

Diese allgemeineren Konfigurationen lassen sich gleichfalls lei als Projektionen von Tetraederpaaren erhalten. Im Pascalschen Fa nimmt man zwei Möbiussche Tetraeder in allgemeiner Lage; statt unendlich fernen Geraden der Konfiguration tritt wieder die Schn linie der Projektionsebene mit der Nullebene des Projektionszentru zu der Figur hinzu. Diese Schnittlinie rückt ins Unendliche, we man als Projektion eine Parallelprojektion nimmt mit den Dur messern des Nullsystems als Projektionsstrahlen. Man sieht: es ist d Art, wie Cremona die reziproken Figuren in der graphischen Stat herstellt.[2])

Im Desarguesschen Falle nimmt man zwei Tetraeder, dere Flächen durch die vier Seiten desselben ebenen Vierecks gehen, un projiziert das Tetraederpaar von einem Punkt der Ebene dieses Vierecks auf eine in allgemeiner Lage befindliche Projektionsebene.

Dieses zweite Tetraederpaar ist, wie es sein muß, allein auf Grund der Verknüpfungsaxiome herstellbar, das erste dagegen nicht.

Charlottenburg, 10. Oktober 1906.

---

1) a. a. O. § 2. Der Unterschied zweier solcher Viereckspaare findet sich auch erörtert bei Steiner-Schröter-Sturm, Theorie der Kegelschnitte, 3. Aufl., S. 73.

2) Le figure reciproche nella statica grafica. 3. ed. Milano 1879.

The groups of isomorphisms of the simple groups whose degree is less than fifteen.

By G. A. MILLER in the University of Illinois.

A list of the orders of all the possible simple groups which can be represented as substitution groups on 14 or a smaller number of letters was published in the Quarterly Journal of Mathematics, volume 29 (1897), page 225. The groups of isomorphisms of most of these groups are well known. The principal exception is the important five-fold transitive group of degree 12 and of order 95040. We proceed to determine the group of isomorphisms (ϑ) of this well known group (G) which was discovered by Mathieu nearly half a century ago, but whose simplicity was discovered much more recently.

It is known that G is not invariant under a larger group of degree 12. It can therefore not have any other isomorphisms unless it contains subgroups of degree 12 and of order 7920. Moreover, the existence of such subgroups implies other isomorphisms. Their existence may be proved as follows: It is known that the subgroups of order 7920 and of degree 11 which are contained in G include subgroups of order 660 and degree 11, and therefore also the transitive icosahedral group of degree 10[1]). With respect to such a subgroup of order 660 each of the given groups of order 7920 may be represented as a transitive group of degree 12[2]). If it is represented in this way, we may suppose that it contains a particular subgroup of order 660 and degree 11 which is included in G.

To complete the proof that G contains a transitive subgroup of degree 12 and of order 7920, it is only necessary to observe that one of the icosahedral groups of degree 10 is transformed into itself by exactly 120 substitutions both under G and also under one of the group of degree 12 and order 7920. As these substitutions must be positive and involve 12 letters, they are completely determined by those of the given icosahedral subgroup. This proves that the given group of orders 95040 and 7920 and of degree 12 may be constructed by adjoining the same substitution to the groups of orders 7920 and 660 respectively, the latter being a subgroup of the former.

1) Cole, Quarterly Journal of Mathematics, 27 (1894), 49.

2) Dyck, Mathematische Annalen, 22 (1883), 172.

Having proved that G contains transitive subgroups of degree and order 7920 it remains to determine the order of ϑ. This or is twice the order of G if G contains only one set of 12 subgro which are simply isomorphic with its subgroup of degree 11 and order 7920. That there is only one such set in G may be proved follows: The group of order 7920 and of degree 11 is a compl group and hence it contains exactly 12 subgroups of order 660. there were more than 12 subgroups of order 7920 and of degree in G, at least two of them would involve the same subgroup of ord 660 and of degree 11. Each of these would contain 120 substitutio which would transform an icosahedral subgroup of degree 10 into itse while the maximal common subgroup of order 660 would contain on 60 substitutions having this property. Hence this icosahedral group wou be transformed into itself by more than 120 substitutions of G. As this impossible we have proved that the order of ϑ is twice the order of

As an imprimitive group ϑ can be represented on 24 letters, b it cannot be represented as a transitive group of a lower degree. it is represented as an imprimitive group of degree 24 it has tw systems of imprimitivity and its intransitive subgroup of half its ord is simply isomorphic with G. As the largest subgroup which leav one letter fixed is of degree 23, it follows that the subgroup degree 12 and order 7920 corresponds to the one of degree 11 in t intransitive subgroup of half the order of ϑ.

The simple group of order 5616 and of degree 13 contains maximal subgroup of degree 12 groups which are simply isomorp with the holomorph of the non-cyclic group of order 9[1]). It a follows readily from its generating substitutions that it contains s groups which may be constructed by establishing an (18,1) isom phism between this holomorph and the symmetric group of degree One of the latter subgroups has 108 substitutions in common w one of the former. As the given holomorph contains only 4 subgro of order 108 and these are conjugate under this holomorph of order 4 it follows that the simple group of order 5616 and degree 13 cont only one system of 13 conjugate subgroups of degree 13 and of or 432. Its group of isomorphisms is therefore of order 11232 and may be represented as an imprimitive group of degree 26 having tw systems of imprimitivity and containing one and only one subgro of order 5616, which is simply isomorphic with the simple grou under consideration.

1) Quarterly Journal of Mathematics, 29 (1897), 231.

The group of isomorphisms of the groups of order 2, 3, 5, 7, 11, 13 are the cyclic groups of orders 1, 2, 4, 6, 10, 12 respectively. The alternating groups of degrees 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 have the symmetric groups of the same degrees for their groups of isomorphisms, while the alternating group of degree 6 has for its group of isomorphisms a group of order 1440 which may be represented as a primitive group of degree 10 or as an imprimitive group of degree 12[1]), and is included in the published lists of these groups. The only other simple groups which can be represented as substitution groups on 14 or a smaller number of letters are given in the following list:

Degree of group	7	9	11	11	12	13	14
Order of group	168	504	660	7920	95040	5616	1092
Order of its θ	336	1512	1320	7920	190080	11232	2184.

The simple groups of orders 660 and 7920 may be represented as transitive groups of both degrees 11 and 12, while the simple group of order 168 appears among the transitive groups of degrees 7, 8 and 14. The group of isomorphisms of this group appears among the transitive groups of degree 8, the group of isomorphisms of the simple group of order 504 is the well known triply transitive group of degree 9 and order 1512, while the groups of isomorphisms of simple groups of orders 660 and 1092 appear among the transitive groups of degrees 12 and 14 respectively. All the other groups of isomorphisms were considered above as substitution groups.

Über die größte Schwankung einer analytischen Funktion auf einer Kreisperipherie.

Von K. A. POUKKA in Helsingfors.

Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

eine reguläre analytische Funktion für $|x| \leqq R$. Wenn a und b zwei beliebige Punkte der Kreisperipherie $|x| = R$ bedeuten, so nennt man den größten Wert von $|f(a) - f(b)|$ die größte Schwankung der Funktion $f(x)$ auf dieser Kreisperipherie und bezeichnet diese größte Schwankung mit D.

1) Bulletin of the American Mathematical Society vol. 1 (1895), p. 258.

Die Herren E. Landau und O. Toeplitz haben bewiesen[1]), daß

$$D \geqq 2 \,|\, a_1 \,|\, R$$

ist, und Herr Hartogs hat in demselben Aufsatz gezeigt, daß das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn $f(x)$ eine lineare Funktion ist:

$$f(x) = a_0 + a_1 x.$$

Wir werden aber hier ganz allgemein beweisen, daß für jedes $n \geqq 1$

$$D \geqq 2 \,|\, a_n \,|\, R^n$$

ist und das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn $f(x)$ die Form hat

$$f(x) = a_0 + a_n x^n.$$

Der Beweis des ersten Teiles unseres Satzes ergibt sich aus der bekannten Ungleichheit

$$M \geqq |\, a_n \,|\, R^n \quad \text{oder} \quad |\, a_n \,| \leqq \frac{M}{R^n},$$

wo M den größten absoluten Betrag von $f(x)$ auf der Kreisperipherie bedeutet. Für den zweiten Teil müssen wir zeigen, daß die Gleichung

$$M = |\, a_n \,|\, R$$

dann und nur dann gilt, wenn $f(x)$ die Form hat

$$f(x) = a_n x^n.$$

Die Ungleichheit

$$|\, a_n \,| \leqq \frac{M}{R^n}$$

folgt, wenn C die Peripherie des Kreises $|\, x \,| = R$, in positiver Richtung genommen bedeutet, direkt aus der Gleichung

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(x)}{x^{n+1}} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) R^{-n} e^{-n\varphi i} \, d\varphi$$

oder

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\, f(Re^{i\varphi}) \,|\, R^{-n} e^{(\Phi - n\varphi) i} \, d\varphi,$$

wo Φ das Argument von $f(Re^{i\varphi})$ bedeutet.

Damit die Gleichung

$$|\, a_n \,| = \frac{M}{R^n}$$

1) Archiv der Mathematik und Physik, (3) 11, 302—307, 1907.

gilt, muß man zuerst notwendig

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(Re^{i\varphi})|\, d\varphi$$

haben, was voraussetzt, daß das Argument des Integranden für das ganze Intervall $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ denselben Wert c hat, so daß

$$\Phi = n\varphi + c$$

wird. Zweitens ist notwendig, daß

$$|f(Re^{i\varphi})| = M$$

für alle φ auf der Kreisperipherie ist.

Es ist also

$$f(Re^{i\varphi}) = Me^{ic} \cdot e^{in\varphi}.$$

Wenn man dies in die Gleichung für a_n einsetzt, sieht man, daß

$$Me^{ic} = a_n R^n$$

sein muß und also

$$f(Re^{i\varphi}) = a_n R^n e^{in\varphi}.$$

Auf der Peripherie des Kreises $|x| = R$ haben wir also

$$f(x) = a_n x^n,$$

und nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung muß diese Gleichung überall bestehen, w. z. b. w.

Nun gehen wir zum Beweis unseres eigentlichen Satzes über und bilden dazu die Funktion

$$f(x) - f\left(e^{\frac{\pi i}{n}} x\right) = \left(1 - e^{\frac{\pi i}{n}}\right) a_1 x + \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) a_2 x^2 + \cdots + 2a_n x^n + \cdots$$

Hieraus sieht man sofort, daß auf der Kreisperipherie $|x| = R$

$$\operatorname{Max}\left|f(x) - f\left(e^{\frac{\pi i}{n}} x\right)\right| \geqq 2\,|a_n|\,R^n$$

ist und somit auch

$$D \geqq 2\,|a_n|\,R^n.$$

Das Gleichheitszeichen kann nur dann gelten, wenn in der Reihe für $f(x) - f\left(e^{\frac{\pi i}{n}} x\right)$ alle Koeffizienten, derjenige von x^n ausgenommen, Null werden. Es muß daher $a_\nu = 0$ sein, wenn ν nicht gleich n oder $2kn$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ ist. Die Funktion $f(x)$ muß also folgende Form haben:

$$f(x) = a_0 + a_n x^n + a_{2n} x^{2n} + a_{4n} x^{4n} + \cdots$$

Wir zeigen, daß auch die Koeffizienten $a_{2n}, a_{4n}, a_{6n}, \ldots$ verschwinden müssen.

Wenn man $x^n = z$ setzt, ist

$$g(z) = a_0 + a_n z + a_{2n} z^2 + a_{4n} z^4 + \cdots$$

für $|z| \leq R^n$ eine reguläre Funktion von z. Wären die Koeffizienten $a_{2n}, a_{4n}, a_{6n}, \ldots$ nicht sämtlich Null, so würde nach dem Satz von Herrn Hartogs die größte Schwankung von $g(z)$ auf der Kreisperipherie $|x| = R^n$ und somit auch unser D größer als $2|a_n| R^n$ sein.

Wir haben also bewiesen, daß für das Bestehen der Gleichung

$$D = 2|a_n| R^n$$

auch das Verschwinden aller Koeffizienten $a_{2n}, a_{4n}, a_{6n}, \cdots$ erforderlich ist. Die Funktion $f(x)$ kann mithin nur die Form haben:

$$f(x) = a_0 + a_n x^n.$$

Daß für die Funktion $f(x) = a_0 + a_n x^n$ wirklich

$$D = 2|a_n| R^n$$

ist, kann man leicht ersehen. Es ist, wie man am besten geometrisch sieht,

$$|f(Re^{i\varphi_1}) - f(Re^{i\varphi_2})| = 2|a_n| R^n \cdot \left| \sin \frac{n(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} \right|,$$

und somit haben wir für

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{(4k \pm 1)\pi}{n} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

die größte Schwankung $= 2|a_n| R^n$.

Den 4. Juli 1907.

Die Scheitel-Konchoiden der Kegelschnitte.

Von H. WIELEITNER in Speyer.

Zu jeder Kurve Γ gehören ∞^3 aus ihr durch den „*konchoidalen Prozeß*" abgeleitete Kurven. Man nehme Γ als Basis, einen beliebigen Punkt O der Ebene als Pol und verlängere, bzw. verkürze jeden Radiusvektor um die konstante Strecke l. Von diesen „*Konchoiden*" sind bis jetzt nur die der Geraden (Konchoiden des Nikomedes), des Kreises mit dem Pol auf dem Kreise (die Pascalschen Schnecken) und die der archimedischen Spirale, die der Basis kongruent sind, näher untersucht worden. Wir wollen im folgenden zu der Theorie der Konchoiden einen kleinen Beitrag liefern, indem wir die *Konchoiden der Kegelschnitte* einer näheren Betrachtung unterziehen, mit der Spezialisierung, daß der Pol O in einem Scheitel liege.[1])

Um alle Kurven dieser Art gleichzeitig zu erhalten und alle Übergänge verfolgen zu können, gehen wir aus von der Scheitelgleichung[2])

$$(1) \qquad y^2 = 2px + qx^2,$$

wo für die Ellipse

$$p = -b^2/a; \quad q = -b^2/a^2; \quad q + 1 = (a^2 - b^2)/a^2 = e^2/a^2 = \varepsilon^2$$

oder umgekehrt

$$a = p/q; \quad b^2 = -p^2/q.$$

Dann erhalten wir für unsere Konchoidengleichung in Polarkoordinaten (ϱ, φ) sofort

$$(2) \qquad \varrho = \frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi - q\cos^2\varphi} \pm l.$$

Die Transformation zu Punktkoordinaten ergibt

$$(3) \qquad (x^2 + y^2)(y^2 - 2px - qx^2)^2 = l^2(y^2 - qx^2)^2$$

oder geordnet

$$(3^*) \qquad \begin{cases} (x^2 + y^2)(y^2 - qx^2)^2 - 4px(x^2 + y^2)(y^2 - qx^2) \\ + \underbrace{(4p^2 - l^2q^2)x^4 + 2(2p^2 + l^2q)x^2y^2 - l^2y^4}_{Q} = 0. \end{cases}$$

$Q = 0$ stellt das Tangentenquadrupel des Anfangspunktes dar, der sonach in jedem Falle ein vierfacher Punkt ist. Wir beginnen, wegen der Realität der unendlichfernen Singularitäten, am besten mit einer Hyperbel, indem wir $q > 0$ (b rein imaginär) voraussetzen.

---

1) Von solchen Kegelschnittkonchoiden spricht allerdings schon de la Hire in Mém. Ac. Sc. 1708 (Paris 1730), S. 32 ff. und Réaumur, ebd. S. 197 ff. Der erstere nimmt einen Brennpunkt als Pol, gibt aber nur einiges über Flächeninhalte, der letztere zeichnet wohl Stücke der Kurven, hat aber von deren Gesamtverlauf noch keine Vorstellung. Aus der neuesten Zeit ist zu erwähnen F. Gomes Teixeira, *Tratado de las curvas speciales notables*, Memorias de la Real Academia de Ciencias de Madrid 22, 1905, S. 242—253, der auch einen Brennpunkt als Pol wählt. — Das Progr. von F. Spencker *„Über Konchoiden"*, Großh. Gymn. Schwerin i. M. 1902, 11 S. 4° sei aus rein bibliographischen Rücksichten genannt. — Ein in Bearbeitung befindlicher Band der Sammlung Schubert *„Spezielle ebene Kurven"* wird Näheres über mehrere Gattungen von Konchoiden bringen.

2) Hier erlaubt sich der Verfasser auf den kleinen Aufsatz *„Zwei Anwendungen der sog. Scheitelgleichung der Kegelschnitte"* in Ztschr. f. math. u. naturw. Unterr. 35 (1904) S. 493/97 hinzuweisen, wo der Übergang der Kegelschnitte in einander auf eine vielleicht weniger bekannte Art anschaulich gemacht wird.

Sei dann

$$\Delta \equiv (2p^2 + l^2 q)^2 + l^2(4p^2 - l^2 q^2) \equiv 4p^2(p^2 + (q+1)l^2),$$

so läßt sich Q in die beiden Faktoren zerlegen:

$$(4)\qquad \begin{cases} Q_1 \equiv x^2(4p^2 - q^2 l^2) + y^2(2p^2 + ql^2 + \sqrt{\Delta}) \\ Q_2 \equiv x^2(4p^2 - q^2 l^2) + y^2(2p^2 + ql^2 - \sqrt{\Delta}). \end{cases}$$

In Q_1 ist der Koeffizient von y^2 wesentlich positiv. Die weitere Zerlegbarkeit hängt also davon ab, ob $l \gtrless 2p/q$, d. h. $\gtrless 2a$ ist. Für den Koeffizienten von y^2 in Q_2 ergibt sich das Zeichen „+“, wenn $l > 2a$, aber „−“, wenn $l < 2a$; im ersten Falle ist aber der Koeffizient von x^2 negativ, im zweiten Falle positiv. Q_2 ist also für $l \gtrless 2a$ immer zerlegbar. Wir haben demnach für $l < 2a$ zwei reelle und zwei imaginäre Zweige im Anfangspunkt, für $l > 2a$ vier reelle Zweige. Dazwischen liegt der Fall $l = 2a$, für den Q_1 eine Spitze anzeigt, während Q_2 zunächst unbestimmt wird. Durch Differentiation beider Koeffizienten nach l ergibt sich aber

$$(5)\qquad Q_2^{(2a)} \equiv x^2 q(q+2) - y^2 = 0.$$

Dies würde man leichter und direkt für $l = 2a$ aus Q selbst erhalten; es sei hier noch bemerkt, daß sich die Neigungswinkel der vier Tangenten des Anfangspunktes auch ergeben, wenn man in der Polargleichung des Kegelschnittes $\varrho = 2p/q$ setzt. Wir können zusammenfassend sagen:

Der Anfangspunkt ist ein vierfacher Punkt, der aus zwei Doppelpunkten zusammengesetzt[1]) *gedacht werden kann. Von diesen ist der eine immer ein Knoten, während der andere isoliert, Spitze oder Knoten ist, je nachdem* $l < 2a$, $= 2a$, $> 2a$.

Die Fig. 1 gibt für $l \lessgtr 2a$ je ein Beispiel (Kurve *1* für $l < 2a$, Kurve *2* für $l > 2a$), zwischen denen der Leser den Übergang sich leicht selbst herstellt.

Wir müssen nun die unendlich fernen Punkte betrachten, die durch $z = 0$, $(x^2 + y^2)(y^2 - qx^2)^2 = 0$ gegeben sind. *Wegen des ersten Faktors sind alle in Frage kommenden Kurven zirkular.* Da aber $x^2 + y^2$ auch im zweiten Glied der Gleichung (3*) enthalten ist, sind die durch $x^2 + y^2 = 0$ dargestellten Geraden selbst die Asymptoten; der Anfangspunkt, durch den sie gehen, ist also ein außerordentlicher Brennpunkt der Kurve. Die übrigen unendlich fernen Punkte liegen zu je zweien

1) Nur fürs Auge. In der Tat ist ein vierfacher Punkt sechs Doppelpunkten äquivalent.

in den unendlich fernen Punkten des Kegelschnittes vereinigt. Um über das Verhalten der Kurven in diesen Punkten Gewißheit zu erhalten, führen wir neue Achsen ein mittels der Gleichungen:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l|l} y + x\sqrt{q} = \xi & y = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \\ y - x\sqrt{q} = \eta & x = \frac{1}{2\sqrt{q}}(\xi - \eta). \end{array}\right.$$

Dadurch wird die Kurvengleichung

$$(7)\quad \frac{1}{4}\left[(\xi^2 + \eta^2)\left(1 + \frac{1}{q}\right) + 2\xi\eta\left(1 - \frac{1}{q}\right)\right] \cdot \left[\eta\left(\xi + \frac{p}{\sqrt{q}}\right) - \xi\frac{p}{\sqrt{q}}\right]^2 = l^2\xi^2\eta^2.$$

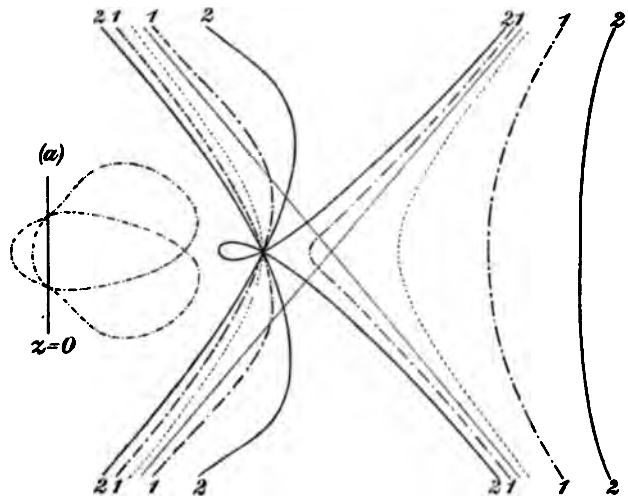


Fig. 1.

Hiernach ergeben sich die Tangenten der Kurve in der Ecke $\xi = 0$, $z = 0$ durch den Faktor von η^4 zu

$$\left(\xi + \frac{p}{\sqrt{q}}\right)^2 = 0,$$

ebenso die der Ecke $\eta = 0$, $z = 0$ durch den Faktor von ξ^4 als

$$\left(\eta - \frac{p}{\sqrt{q}}\right)^2 = 0,$$

also zusammenfallend. Setzt man aber in (7) etwa $\xi + \frac{p}{\sqrt{q}} = 0$, so hebt sich ξ^2 heraus, so daß nur eine quadratische Gleichung übrig bleibt. Daher berührt die Tangente in der Singularität vierpunktig. Das zeigt einen Berührungsknoten an. Dasselbe gilt für die andere Ecke. Nun ist aber (für die Hyperbel)

$$\xi + \frac{p}{\sqrt{q}} \equiv x\sqrt{q} + y + \frac{p}{\sqrt{q}} \equiv \frac{1}{b}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + 1\right) \equiv \frac{1}{b}\left(\frac{x+a}{a} + \frac{y}{b}\right),$$

d. h., da eine ähnliche Umformung auch für die Tangente der ander Ecke gilt:

Die Asymptoten des Kegelschnittes sind auch (Doppel-) Asymptot der Konchoide in deren unendlich fernen Berührungsknoten.

Da jeder Berührungsknoten für zwei Doppelpunkte, der vierfac Punkt für sechs solche zählt, so sind unsere Konchoiden *ration Kurven sechster Ordnung.*

Wir gehen nun zur **Parabel** für $q = 0$ über. Dann lautet (Kurvengleichung:

$$(8) \quad (x^2 + y^2)y^4 - 4pxy^2(x^2 + y^2) + \underbrace{4p^2x^4 + 4p^2x^2y^2 - l^2y^4} = 0 .$$

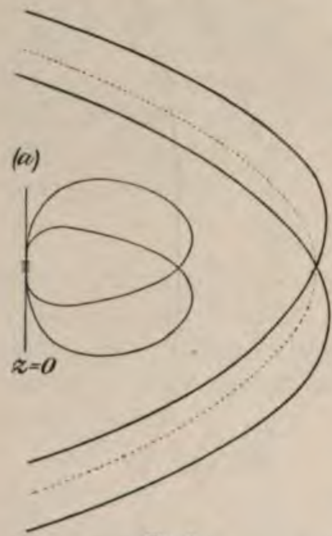


Fig. 2.

Hier ist Q_1 nie, Q_2 immer reell zerlegba auf die Länge von l kommt es dabei nic an. Im Anfangspunkt ist demnach nur e reeller Knoten sichtbar (s. Fig. 2).

Die unendlich fernen Punkte lieg wieder je einer in den Kreispunkten, übrigen vier in $z = 0$, $y = 0$ verein Um die Art dieser Singularität zu erken suchen wir eine Näherungskurve für d Ecke, indem wir die Glieder der Kur gleichung in das analytische Dreieck[1]) e tragen und die der betreffenden Ecke nächst liegenden durch eine Gerade v binden. Wir finden drei Punkte auf ein Geraden liegend, nämlich:

$$x^2y^4 - 4px^3y^2 + 4p^2x^4 \equiv x^2(y^2 - 2px)^2 =$$

Das ist die doppeltzählende Parabel selbst. Diese gibt uns noch nicl genügenden Aufschluß. Setzen wir $x = 1$ und führen dafür z ein, haben wir jetzt ein weiteres Glied u zu suchen, indem wir setzen

$$z = \frac{y^2}{2p} + u$$

und dies in die Kurvengleichung substituieren. Hier haben wir, nac dem die Glieder der neuen Gleichung in ein Koordinatensystem (u, eingetragen sind, die dem Anfangspunkt zunächst liegenden Glied durch eine Gerade zu verbinden. Das ergibt die Näherung

$$4p^2u^2 - \frac{l^2}{4p^2}y^8 = 0, \quad \text{daher} \quad z_1 = \frac{y^2}{2p} + \frac{ly^4}{4p^2} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{y^2}{2p} - \frac{ly^4}{4p^2}$$

1) Die bez. Methoden sind ausführlich dargestellt in des Verfassers „*Theor der ebenen algebraischen Kurven*", Sammlung Schubert XLIII (Göschen) 1905.

als Näherungskurven für die zwei nach dem Unendlichen laufenden Zweige der Parabelkonchoide. Da $\frac{dz_1}{dy}$, $\frac{d^2z_1}{dy^2}$ und $\frac{d^3z_1}{dy^3}$ für $y = 0$ mit den entsprechenden Differentialquotienten von z_2 übereinstimmen, berühren sich die Näherungskurven vierpunktig in $y = 0$, $z = 0$; *daher hat auch die Kurve einen vierpunktigen Berührungsknoten.* In der Tat können wir uns leicht vorstellen, daß die beiden zweipunktigen Berührungsknoten der Hyperbel für die Parabel in einen vierpunktigen zusammenrücken. Durch die Figuren $1(a)$ und $2(a)$ wird dies deutlich gemacht. Dieselben stellen ungefähre Projektionen der betreffenden Konchoiden ins Endliche vor.

Eine weitere stetige Deformation führt wieder die Trennung der beiden Berührungsknoten herbei, die dann konjugiert imaginär werden. Wir kommen zur Ellipse. Hier ist im Unendlichen analytisch alles so wie bei der Hyperbel, nur imaginär. Nachdem wir da nichts sehen können, wenden wir unsere Aufmerksamkeit dem vierfachen Punkt des Koordinatenursprungs zu, der um so interessantere Erscheinungen bietet.

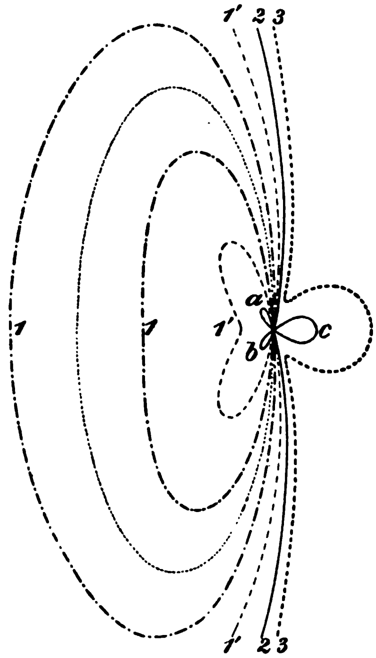


Fig. 3.

Es sei zunächst $q < 0$, $|q| < 1$, d. h. $a > b$, so resultieren *den Pascalschen Schnecken äußerlich ähnliche Kurven*, langgestreckt, die für $l < 2a$, $= 2a$, $> 2a$ Knoten, Spitze, isolierten Punkt im Ursprung haben.

Für $q = -1$, d. h. $a = b\,(p = -a)$ müssen *die Pascalschen Schnecken selbst* sich ergeben. Die Erniedrigung der Ordnung sieht man am besten aus (3), wo sich $x^2 + y^2$ abspaltet. Man erhält durch die übrigbleibenden Faktoren sofort die gebräuchliche Form

$$(x^2 + y^2 + 2ax)^2 - l^2(x^2 + y^2) = 0$$

für die Gleichung der Pascalschen Schnecken.

Es sei nun aber $q < 0$, $|q| > 1$, die Ellipse also hochgestellt. Auch hier werden die entsprechenden Kurven, solange l ziemlich klein bleibt, Pascalschen Schnecken äußerlich ähnlich sehen (Fig. 3, Kurve *1*). Auch werden die Kurven, solange $b < a\sqrt{2}\,(|q| < 2)$ genau so wie diese variieren, wenn man l variiert. Denn der Kreis um den Anfangspunkt mit l als Radius schneidet dann die Ellipse, wenn $l > 2a$, gar nicht, berührt sie im anderen Scheitel, wenn $l = 2a$, und schneidet sie zweimal, wenn $l < 2a$. Das letztere ist nun offensichtlich für jeden Wert von q der Fall. Aber für $l = 2a$ kann der Kreis die Ellipse außerdem noch in zwei weiteren reellen Punkten treffen. Wir sehen dies am besten, wenn wir in der Polargleichung der Ellipse $\varrho = l = 2p/q$ setzen. Man erhält ganz allgemein

$$(9) \qquad \cos\varphi = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + (q+1)l^2}}{l(q+1)},$$

daher für $l = 2p/q$ und $q' = -q$

$$\cos\varphi_1 = 1, \quad \cos\varphi_2 = \frac{1}{q'-1}.$$

Hier ist φ_2 nur ein reeller Winkel für $q' - 1 > 1$ oder $q' = |q| > 2$.

Wenn nun $|q| > 2$ und $l > 2a$, so wird, wenn l nicht viel von $2a$ abweicht, der Kreis die Ellipse viermal reell schneiden, *also der Anfangspunkt vier reelle Zweige haben* (s. Fig. 3, Kurve *2*), *die drei kleine und eine große Schleife bilden*. Den Übergang von $l < 2a$ (Kurven *1* und *1'*) durch die Spitze (für $l = 2a$; Schleife c muß zusammengeschrumpft gedacht werden) zu der Kurve *2* wird sich der Leser leicht vorstellen. Wird l größer, so tritt der Fall ein, daß der Kreis die Ellipse doppelt berührt. Wir sehen aus (9), daß dann

$$p^2 + (q+1)l^2 = 0 \quad \text{sein muß, was} \quad l^2 = -\frac{p^2}{q+1} = \frac{b^4}{b^2 - a^2}$$

ergibt.[1]) Dann schrumpfen im Anfangspunkt die beiden Schleifen a und b zu Spitzen zusammen. Dieser Wert von l ist auch reell, wenn $b < a\sqrt{2}$; dann sind aber die Berührungspunkte und die Tangenten der Spitzen konjugiert imaginär. Für noch größeres l ist der vierfache Punkt ganz isoliert (Kurve *3*).

Es ist noch ein Wort zu sagen über den Grenzfall $q = -2$, $l = 2a$. Die Tangenten des Anfangspunktes ergeben sich nach (4) und (5) in diesem Falle durch $y^4 = 0$. Wir haben einen *vierfachen Punkt mit vier zusammenfallenden Tangenten (Rückkehrspitzpunkt)*. Eine Näherungskurve ergibt sich als $y^4 + \frac{8}{p}x^5 = 0$. Das ist eine Rückkehrspitzparabel.[2]) Die Kurve hat eine sehr scharfe Spitze, die alle drei Schleifen a, b, c absorbiert hat. Der Kreis um den Anfangspunkt mit $2a$ als Radius ist der Krümmungskreis im andern Scheitel. Alle Übergänge sind hiernach leicht zu verfolgen.

Speyer, den 18. November 1905.

---

1) Denselben Wert erhält man auch aus (4), wie man überhaupt die Diskussion mit $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ fortsetzen könnte. Dies ist aber bei negativem q unbequem und viel weniger anschaulich.

2) S. etwa Sauerbeck, *De Gua* (Teubner 1902) S. 33/34.

Rezensionen.

Meyer, W. Fr. Differential- und Integralrechnung. Zweiter Band: Integralrechnung. (Bd. XI der „Sammlung Schubert".) XVI u. 444 S. Leipzig 1905. Göschen.

Über den ersten, die Differentialrechnung behandelnden Teil des vorliegenden Werkes, ist im Bd. 4, S. 164 des Archivs berichtet worden. Die dort gegebene allgemeine Charakteristik gilt auch vom zweiten Teile. Der Verfasser hat eine in Stoffauswahl und Anordnung selbständige Darstellung der Integralrechnung geliefert, welche insoweit eine exakte Entwicklung des Gegenstandes abgibt, als dies ohne durchgängige Arithmetisierung möglich ist. Zahlreiche, sowohl zur Einführung der Begriffe, als zur Erläuterung dienende Beispiele sind der analytischen Geometrie entnommen. Das Buch wird mit Vorteil den Studierenden der Mathematik beim ersten Studium der Integralrechnung dienen können, während es wegen der Darstellung im einzelnen und der Disposition im großen (Fehlen weitergehender Anwendungen, starkes Zurücktreten der Differentialgleichungen) etwas weniger für solche Leser geeignet erscheint, welche die Differential- und Integralrechnung nur als Hilfswissenschaft betreiben wollen.

Die Einteilung des Stoffes ist in der Art vollzogen, daß im ersten Abschnitte die wesentlichsten Grundbegriffe entwickelt werden, die alsdann, ehe an die systematische Durcharbeitung der Integration der Differentiale gegangen wird, zu geometrischen Anwendungen verwandt werden. Hier ist das Buch besonders reichhaltig und bietet an Quadraturen, Rektifikationen, Kubaturen und Komplanationen vielseitige Ausführungen.

Im Anschluß an diese geometrischen Anwendungen der Integralrechnung finden sich dann hier auch diejenigen der Differentialrechnung, welche im ersten Bande vermißt wurden. Bei dieser Gelegenheit sind einige Andeutungen über Differentialgleichungen eingeschoben. Dagegen fehlt jedes systematische Eingehen auf die Integration einfacher Differentialgleichungen, ein Gegenstand, den man sonst gewöhnlich in Lehrbüchern der Integralrechnung antrifft.

Der zweite Abschnitt gibt in einem ersten Kapitel den systematischen Ausbau der elementar ausführbaren Integrale, wobei (hier ein wenig deplaziert) eine längere Erörterung über komplexe Variabele und Funktionen eingeschoben ist. Den Beschluß bildet das zweite Kapitel, in dem fünf verschiedene Gegenstände zusammengestellt sind. Weiter wird ein gedrängter Abriß der elliptischen Integrale und Funktionen nach Legendre-Jacobi gegeben. Es finden sich endlich der Satz über Differentiation eines

Integrales nach einem Parameter, Entwicklungen von Integralen in Reih Behandlung der Integrale totaler Differentialausdrücke, sowie endlich e Besprechung der Doppelintegrale. Bei letzterem Gegenstande kommen lei die geometrischen Ausführungen etwas zu kurz.

Braunschweig. R. Fricke.

Hermite et **Stieltjes.** **Correspondance publiée par les soins B. Baillaud et H. Bourget.** Avec une préface de E. Picard. Tom (8 novembre 1882 — 22 juillet 1889). — Tome II (18 octobre 18 — 15 décembre 1894). XX + 477, VI + 464. Paris 1905, Gauth Villars. Chaque tome 16 fr.

Es ist wohlbekannt, einen wie umfassenden Briefwechsel Charles Herm mit französischen und ausländischen Gelehrten unterhalten hat, wohlbeka welche Rolle dieser Briefwechsel in dem Leben des anerkannten Meis und Führers der französischen Schule gespielt hat. Dürfte es doch wenige Mathematiker unter seinen Zeitgenossen geben, die mit dem Franzo nicht in Korrespondenz gestanden haben. Aber keiner dieser Briefwech war so intensiv und so fruchtbar zugleich, keiner wurde mit der schwindigkeit eines Wechselstroms von solcher Frequenz geführt, der Briefwechsel mit Thomas Stieltjes (geb. 29. Dezember 1856 Holland).

Eine Notiz der Comptes Rendus vom Jahre 1882, wo Stieltjes einfache und elegante Ableitung Tisserandscher Sätze mitteilt, gab Anstoß zur Korrespondenz, die bis wenige Tage vor seinem Tode (31. zember 1894) gedauert hat.

Hermite gibt sich hier, wie ihn alle diejenigen kennen, denen a das Glück einer Korrespondenz mit dem Nestor der französischen Ma matiker zuteil wurde: stets ist er hilfsbereit und aufmunternd, wenn d andern plötzliche Schwierigkeiten den Mut zu rauben drohen, nie mang ihm die Zeit zur Antwort; mit rührender Bescheidenheit bewundert u anerkennt er die Resultate des andern und wird nicht müde, die Originali der Gedankengänge des jungen Freundes ins rechte Licht zu setzen. W erfahren aus dem Briefwechsel von Schwierigkeiten, die sich der math matischen Laufbahn von Stieltjes in seiner Heimat entgegenstell Hermite weiß Rat. Auf seinen Vorschlag siedelt der Holländer n Frankreich über und wird nach kurzer Zeit — Hermite ebnet ihm s Wege — zum Professor an der Toulouser Universität ernannt.

Der Ton des Briefwechsels wird intimer und intimer, je mehr s die mathematische Verwandtschaft zwischen beiden offenbart, je m Hermite, um mit Jacobi zu reden, des vir arithmeticus in Stielt inne wird. In einem der letzten Briefe schreibt Hermite: „M. Kronec me disait en dînant à Flanville, où j'ai eu sa visite, que nous avions tête faite de la même manière; je crois que s'il vous avait connu, binome aurait été changé en trinome". Und an einer späteren Stelle fin Stieltjes Gelegenheit, dem großen Franzosen sein arithmetisches Glaube bekenntnis abzulegen, worauf dann Hermite erwidert: „Je me sens t joyeux de vous savoir en si bonne disposition que vous vous transfor en naturaliste pour observer les phénomènes du monde arithmétique. Vo doctrine est la mienne; je crois que les nombres et les fonctions de l'Analyse ne sont pas le produit arbitraire de notre esprit; je pense qu'ils existent en dehors de nous avec le même caractère de nécessité que les choses de la réalité objective, et que nous les rencontrons ou les découvrons et les étudions, comme les physiciens, les chimistes et les zoologistes."

Und der junge Holländer, erfüllt von aufrichtiger Dankbarkeit gegen den väterlichen Freund, fühlt „la nécessité de ne jamais cesser de travailler, d'être toujours sur la brèche pour ne pas laisser s'endormir l'esprit et le tenir en haleine".

Es ist überraschend, mit welcher Schnelligkeit er auf jede, von Hermite vorgelegte Frage antwortet, und wie sich sein Forschungsgebiet mehr und mehr erweitert. Die Kugelfunktionen, kubische und biquadratische Reste, Zerlegung einer Zahl in fünf Quadrate, mechanische Quadratur, die Riemannsche Transzendente $\zeta(s)$, die Theorie der Kettenbrüche und die halbkonvergenten Reihen, das sind im großen und ganzen die Gebiete, über welche der Briefwechsel gepflogen wird.

Es ist ein schönes Denkmal, das die Herren Baillaud und Bourget der Freundschaft Hermites mit Stieltjes durch sorgsame Herausgabe der Korrespondenz errichtet haben; und die mathematische Welt weiß ihnen lebhaften Dank! Ich glaube, daß es jedem, der sich entschließt, einen Band in die Hand zu nehmen, so ergehen wird, wie es dem Referenten ergangen ist: er wird von dem Eindruck dieser ganz einzigen Korrespondenz gepackt und gefangen genommen werden. Die abstrakte Sprache der Analysis verliert in dem Munde dieser beiden Freunde an ihrer Trockenheit, ja zuweilen wird die Darstellung dramatisch bewegt, „la Mathématique y devient plus humaine", wie sich Hermites Schwiegersohn in der Vorrede ausdrückt.

Dem ersten Bande sind die Heliogravüren von Hermite und Stieltjes aus ihren letzten Jahren beigefügt, den zweiten Band ziert ein schönes Bild des fünfundzwanzigjährigen Hermite.

Berlin. E. Jahnke.

Laguerre, Oeuvres de. Publiées sous les auspices de l'académie des sciences, par MM. Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché. Tome II: Géométrie. 715 p. Paris 1905, Gauthier-Villars.

Mit nicht geringer Spannung erwartet, ist endlich, nach siebenjähriger Pause, auch der zweite Band von Laguerres gesammelten Werken erschienen. Er enthält sein Lebenswerk als Geometer; gehören doch von 140 Abhandlungen, die er hinterlassen hat, mehr als die Hälfte zur Geometrie.

Noch Schüler des Lycée Barbet, gelang ihm (1853) die Lösung eines Problems, das Poncelet und Chasles viel beschäftigt hatte, nämlich die Antwort auf die Frage, wie sich die metrischen Eigenschaften der Figuren, insbesondere die Winkelrelationen gegen projektive Transformation verhalten. Der jugendliche Laguerre gab die ebenso einfache wie elegante Lösung in einem Aufsatz: Sur la théorie des foyers, der in den Nouvelles Annales zum Abdruck gelangte. Bereits in dieser Arbeit macht er ausgedehnten Gebrauch vom Imaginären. Weiterhin erkennt er als einer der ersten die bedeutsame Rolle, welche der Inhalt des sphärischen Dreiecks in der

Kugelgeometrie spielt, und dehnt die Theorie der Brennpunkte auf a algebraischen ebenen und sphärischen Kurven aus.

Aus der erstaunlichen Fülle von Laguerres Untersuchungen begnü ich mich hier diejenigen über die anallagmatischen Kurven und Fläch herauszuheben, welche zu jener Zeit die bedeutendsten Mathematiker b schäftigten. Mehrere ihrer wichtigsten Eigenschaften hat Laguerre a gedeckt. Er untersucht zugleich alle Kurven vierter Ordnung, insbesond die dreispitzige Hypozykloide, die Kardioide, die Lemniskate, die Cassi schen Kurven und die Raumkurven vierter Ordnung.

Und noch auf eine, Laguerre eigenste Schöpfung will ich hinweis seine Géométrie de direction. „Il est peu d'exemples", sagt Poinca in seiner Vorrede zum ersten Bande der gesammelten Werke, „ fassent mieux voir combien l'idée la plus simple peut devenir fécon quand un esprit ingénieux et profond s'en empare." Eine Gerade oder Kreis läßt sich als Bahn eines beweglichen Punktes auffassen, aber die Punkt kann die Bahn in zwei entgegengesetzten Richtungssinnen dur laufen. Diese Überlegung führt dazu, eine Gerade als aus zwei Halbgera (semi-droites) und einen Kreis als aus zwei Zyklen (cycles) bestehend a zufassen. Auf diesem Wege gelingt es Laguerre, den wohlbekannten Tra formationen eine neue geometrische Transformation hinzuzufügen.

„S'il était vrai", sagt Poincaré an derselben Stelle, „qu'on ne pût r contrer la gloire sans la chercher, Laguerre serait resté toujours igno mais, heureusement, ses beaux travaux lui avaient attiré l'estime et bien l'admiration des juges les plus compétents, et il ne devait pas attendre vain qu'on lui rendît justice. L'Institut lui ouvrit ses portes le 11 m 1883." Indessen, Laguerre hat diesen Erfolg nicht lange überlebt, er st bereits am 14. August 1886 in seiner Geburtsstadt Bar-le-Duc.

Berlin. E. Jahnke.

Bouasse, H. Essais des matériaux. Notions fondamentales relativ aux déformations élastiques et permanentes. Bibliothèque l'Elève ingénieur. 150 S. Paris 1905, Gauthier-Villars. 5 fr.

Der Verfasser hat sich vorgenommen, auf Grund langjähriger Versuc darzulegen, was das Experiment an gesichertem Besitzstand bezüglich d Deformationen zu Tage gefördert hat. Genauer gesprochen, behandelt folgende Aufgabe: Wenn man einen Körper dehnt, spannt oder tordiert, so b stehen bestimmte Beziehungen zwischen den geometrischen Variablen, d. der Verlängerung, der Durchbiegung, der Torsion auf der einen Seite, u den mechanischen Variablen, nämlich der Kraft, dem Kräftepaar auf d anderen. Wie lauten diese Relationen und wie lassen sie sich graphis darstellen?

Ich begnüge mich den Inhalt des interessanten Buches durch Anga der Kapitelüberschriften anzudeuten: I. Definition und allgemeine Betrac tungen über die verschiedenen Arten der Deformationen. II. Deformatio kurven, und zwar Kurven für den Zug und für die Torsion. Die Elas zitätsgrenzen. III. Vollkommen elastische Deformationen. Elastizitätsmodu nach Young und Coulomb. Poissonscher Koeffizient σ, welcher, bei d Dehnung eines kreisförmigen Zylinders, das Verhältnis der (auf die Einh bezogenen) Änderung des Querschnittsdurchmessers zur entsprechenden Änderung der Zylinderlänge bezeichnet. IV. Experimentelle Untersuchung der vollkommen elastischen Deformationen, Kritik des Hookeschen Gesetzes. V. Zugkurven bei bleibender Deformation. VI. Torsionskurven bei bleibender Deformation. VII. Über die Theorien der elastischen und bleibenden Deformation.

Berlin. E. Jahnke.

Macfarlane, A. Vector analysis and quaternions. Nr. 8 der Mathematical monographs. 4. Auflage. 50 S. New-York 1906, J. Wiley.

Das Büchelchen bietet eine recht geschickte Zusammenstellung der elementarsten Begriffe aus der Vektoranalyse nebst einer Menge einfacher Übungen aus Geometrie, Mechanik und Elektrizität. Der Verfasser legt Wert darauf, auch den Quaternionenbegriff einzuführen und seine Bedeutung an der sphärischen Trigonometrie und an der Zusammensetzung endlicher Drehungen darzulegen, im Gegensatz zu den neueren Schriftstellern über Vektoranalyse, welche fast durchweg geneigt sind den Quaternionenbegriff abzulehnen.

Das Werk kann als Seitenstück zu dem in derselben Sammlung erschienenen Büchelchen von Hyde bezeichnet werden, wo die Graßmannsche Vektorenrechnung ihren Interpreten gefunden hat.

Berlin. E. Jahnke.

Dressel, L. S. J. Elementares Lehrbuch der Physik nach den neusten Anschauungen für höhere Schulen und den Selbstunterricht. 3. vermehrte, umgearbeitete Auflage mit 665 in den Text gedruckten Figuren. 2. Bände, XXVI und 1094 S. Freiburg 1905. Herdersche Verlagsbuchhandlung. Geheftet 16,00 *M.*, gebunden 17,60 *M.*

Das Dresselsche Lehrbuch nimmt eine Mittelstellung ein zwischen den Lehrbüchern, die unmittelbar für die Hand des Schülers bestimmt sind, und den umfangreicheren Werken, wie z. B. Müller-Pouillet, Wüllner, Winkelmann, Gray, Chwolson usw., die für spezielle wissenschaftliche Studien geschrieben sind. Da das Buch dem neuesten Stande der physikalischen Wissenschaft angepaßt und in allen seinen Teilen wissenschaftlich durchgebildet ist, kann man es als ein vorzügliches Werk für die Hand des Lehrers empfehlen, der seine Kenntnisse für die Zwecke der Schule vertiefen und sich mit den neuesten wissenschaftlichen Ansichten vertraut machen will. Auch auf die praktischen Anwendungen der Physik, auf die Technik ist vielfach Rücksicht genommen. So wird z. B. an einer eingehenden Durchführung der Berechnung einer Dynamomaschine die Anwendung der elektrischen Gesetze auf die Technik gezeigt. Daß das Buch in erster Linie für die Hand des Lehrers geschrieben ist, geht daraus hervor, daß am Schlusse jedes Paragraphen die in der „Zeitschr. für den physikalischen und chemischen Unterricht" enthaltene Literatur über den behandelten Gegenstand angegeben ist. Dadurch wird der Lehrer in den Stand gesetzt, für die Ausführung der Versuche sich leicht näher zu informieren. Das Buch kann in jeder Beziehung empfohlen werden.

Homburg. E. Grimsehl.

Mandl, J: Kurzgefaßtes Lehrbuch der Mathematik für Ingenieu
VIII u. 327 S. Wien 1906, Lehmann & Wentzel. Geb. 9,50 *M.*

Der Verfasser, ein Oberstleutnant, schreibt: „Das vorliegende Buch aus dem Bedürfnisse hervorgegangen, jenen technisch gebildeten Offizier die eine höhere Ausbildung an der Kriegsschule oder an den Technisch Militärfachkursen anstreben, einen möglichst gedrängten Leitfaden für Vorbereitung zur Aufnahmsprüfung aus der höheren Mathematik an Hand zu geben. Es enthält demgemäß in einer für das Selbststudium eigneten Form den für diese Aufnahmsprüfung vom k. und k. Reic Kriegsministerium vorgeschriebenen Prüfungsstoff." Und weiter: „In sein gegenwärtigen Form enthält das Buch das zum Verständnis von Vorlesung über Ingenieurwissenschaften an einer technischen Hochschule erforderlic Minimum an Lehren aus der höheren Mathematik nebst einigen einleiten Abschnitten aus der Elementarmathematik, und kann daher als Hilfsb für studierende Ingenieure wie für Praktiker dieser Richtung dienen."

Das Buch dürfte seinen Zweck durchaus erfüllen. Nach Inhalt Darstellung macht es einen vorteilhaften Eindruck, der durch eine g Zahl von Beispielen und Übungen noch verstärkt wird. Hin und wi möchte man wohl an der Darstellung einiges geändert wissen. So, der Verfasser die Ordinate eines Punktes auf dem Einheitskreise schle hin den Sinus, seine Abszisse schlechthin den Kosinus nennt. Die durch verursachte Verwirrung wird durch die spätere Einführung derse Funktionen als „Projektionsfaktoren" nicht völlig beseitigt. So, wenn Sinussatz zunächst nur der erste Teil $(a : \sin\alpha = b : \sin\beta = c : \sin\gamma)$ bracht wird, der auf den Umkreis bezügliche Teil aber seltsamerweise einige Seiten später. Ein Exkurs in die analytische Geometrie des Pun und der geraden Linie sowie Kapitel über den Funktions- und Grenzbe leiten über zur Differential- und Integralrechnung. Hier ist zu beme daß es sich für eine Einführung in die Infinitesimalrechnung empfe dürfte, nach der Definition des Differentialquotienten mit dem Differe weiter zu operieren. Wenn übrigens der Verfasser bei dieser Gelege erwähnt, daß die Differentialrechnung fast gleichzeitig mit Leibniz Newton auch von Fermat erdacht worden sei, so wird hier dem gr Franzosen eine Vaterschaft zugestanden, von der er selber nichts Hieran schließt sich die analytische Geometrie der ebenen Kurven. Kegelschnitte erfahren ausführliche Behandlung, und zwar nicht bloß a tisch, auch elementargeometrisch. Wie sehr dem Verfasser dieser Ge stand am Herzen liegt, zeigt die Verwendung der Affinitätsverwandts für Konstruktion von Kegelschnitten. Von transzendenten Kurven we die logarithmische, die Ketten- und die Wahrscheinlichkeitslinie, die Zykl und die Kreisevolvente abgehandelt.

Zum Schluß noch eines, was dem Referenten aufgefallen ist: die wendungen treten in diesem Textbuch für Ingenieure stark in den Hin grund, nicht einmal Anwendungen auf einzelne Teile der Mechanik tau in den Übungen auf.

Alles in allem: das Buch ist recht gut durchgearbeitet und verd Verbreitung.

Berlin. E. Jahnke.

Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik und Meteorologie. Zehnte umgearbeitete und vermehrte Auflage, herausgegeben von Leop. Pfaundler. Unter Mitwirkung von O. Lummer-Breslau, A. Waßmuth-Graz, J. M. Pernter-Wien, Karl Drucker-Leipzig, W. Kaufmann-Bonn, A. Nippolt-Potsdam. In vier Bänden. Erster Band: *Mechanik und Akustik* von Leop. Pfaundler. Erste Abteilung. 593 Fig. XVI und 544 S. gr. 8. Braunschweig 1907, Friedr. Vieweg und Sohn. Brosch. 7 *M.*

Die zehnte Auflage des altbekannten und geschätzten Werkes wird sich von der vorigen Auflage wesentlich dadurch unterscheiden, daß die Neubearbeitung der einzelnen Teile der Physik von verschiedenen bekannten Physikern übernommen ist. Mit Recht hebt Leop. Pfaundler im Vorwort hervor, daß es einem einzelnen Mann kaum möglich ist, ein Werk von solchem Umfange bei dem stetigen und unaufhörlichen Anwachsen der physikalischen Wissenschaft allein in solch kurzer Zeit zu bearbeiten, daß nicht die ersten vollendeten Teile des Werkes schon veraltet sind, wenn der letzte Teil noch in Arbeit ist. Schon bei der neunten Auflage hatte O. Lummer die Optik mit Erfolg bearbeitet; so ist es selbstverständlich und auch im Interesse des Lehrbuches erwünscht, daß dieses Gebiet in denselben bewährten Händen bleibt. Von den übrigen Gebieten haben übernommen: W. Kaufmann den Magnetismus und die Elektrizität, J. M. Pernter die Meteorologie, A. Nippolt den Erdmagnetismus, K. Drucker die physikalisch-chemischen Teile und A. Waßmuth die Wärmeleitung und Thermodynamik.

Der vorliegende erste Teil des ersten Bandes ist von L. Pfaundler wieder selbst bearbeitet. Ursprünglich hatte H. v. Wild-Zürich die Neubearbeitung übernommen und auch schon einen Teil der Arbeit fertig, als der Tod dieses Mannes die Vollendung des Manuskripts unmöglich machte. Pfaundler hat nun den schon von v. Wild fertig gestellten Teil des Manuskripts mit benutzt. Dadurch hat das erste Kapitel der Mechanik einen ganz besonderen Charakter angenommen es behandelt ausschließlich die Meßmethoden und Meßwerkzeuge für Längen, Flächen, Volumina, Winkel, Zeiten und Massen mit großer Ausführlichkeit und Gründlichkeit auf über achtzig Seiten. Die Ergänzung, die das Buch hierdurch erfahren hat, kann man nur mit Freuden begrüßen; denn es ist im hohen Grade erwünscht, daß jeder Physiker innerhalb des Rahmens eines Lehrbuches Gelegenheit findet, sich über die präzisen Meßmethoden und Meßwerkzeuge für die fundamentalen Größen der Physik zu informieren, denn nur wenige werden in der Lage sein, sich durch Spezialstudium von besonderen Werken auf diesen Gebieten Belehrung zu verschaffen.

Es lag kein Grund vor, in der Anlage der übrigen Kapitel wesentliche Änderungen zu treffen, und es sind diese denn auch, abgesehen von Ergänzungen und Verbesserungen und abgesehen von der Aufnahme der neuesten wissenschaftlichen Ergebnisse, im wesentlichen unverändert geblieben. Wie in den früheren Auflagen, so sind auch in dieser Auflage schwierige mathematische Entwicklungen vermieden. Dadurch ist das Werk auch verständlich geblieben für solche Studierende, die sich nicht auf Mathematik und Physik als Spezialstudium geworfen haben. Das Studium des Buches wird durch die gefällige und klare Sprache und durch die vorzüglich ausgeführten Figuren leicht verständlich. Ohne Voraussetzung irgend welcher schon vorhandenen Kenntnisse werden auch die elementarsten Sätze und die einfachsten Instrumente und Apparate beschrieben, gewiß nicht zum Schaden des Buches. Die schlichte Darstellung der schwierigeren Gebiete ermöglicht es auch dem Physiker, sich ohne große Mühe rasch Aufschluß zu verschaffen über Dinge, die seinem Spezialstudium ferner liegen, wenn er ihrer zu irgend einem Zweck rasch bedarf.

Homburg. E. Grimsehl.

Bachmann, P. Zahlentheorie Teil V: Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper. XXII u. 548 S. Leipzig 1905, B. G. Teubner. Geh. ℳ 16, geb. ℳ 17.

Von seiner „Gesamtdarstellung der Zahlentheorie in ihren Hauptteilen“ läßt der Verfasser hier außer der Reihe den fünften Teil „Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper“ erscheinen, weil augenblicklich dies Gebiet der Zahlentheorie das aktuellste Interesse darbietet. Das Buch ist dem Altmeister der Zahlentheorie, Richard Dedekind, gewidmet. Diese Widmung kennzeichnet zugleich den Inhalt des Buches, denn es sind hauptsächlich die Dedekindschen Entwicklungen und Anschauungen, die in dem Werke zur Geltung kommen.

Es ist die Absicht des Verfassers, alles das, was man über den allgemeinen endlichen algebraischen Zahlkörper weiß, darzustellen, alle Untersuchungen über spezielle Zahlkörper dagegen einem späteren Bande vorzubehalten. Die allgemeine Theorie läßt sich, soweit sie hier zur Darstellung gelangt ist, in drei größere Abschnitte teilen: Theorie der Ideale, der Diskriminanten und der Einheiten. Von den zwölf Kapiteln des vorliegenden Werkes sind das 4. bis 6. und das 9. und 10. im wesentlichen der Theorie der Ideale gewidmet, nachdem in drei einleitenden Kapiteln von zum Teil algebraischer Natur der allgemeine Begriff des algebraischen Zahlkörpers, die Dedekindschen Moduln und die höheren Kongruenzen behandelt sind. Die fundamentale Tatsache der Idealtheorie, daß nach Hinzufügung der Ideale zu den Körperzahlen in dem erweiterten Gebiete eindeutige Zerlegung in Primfaktoren herrscht, wird in bekannter Weise auf den „Kernsatz“ zurückgeführt, daß jedes Ideal durch Multiplikation mit einem geeigneten anderen Ideal in ein Hauptideal, d. h. eine Körperzahl, verwandelt werden kann. Für diesen Kernsatz werden mehrere Beweise gegeben, zwei im Anschluß an Dedekind, ein Beweis von Hurwitz und in einem späteren Kapitel ein Beweis von Hilbert, der den Galoisschen Zahlkörper zu Hilfe nimmt. Besonders hingewiesen sei auf den Beweis von Hurwitz, der mit Hilfe eines dem Euklidischen Algorithmus analogen Verfahrens die Endlichkeit der Anzahl der Idealklassen erschließt und von hier aus den Kernsatz gewinnt. Dieser Beweis ist nicht nur wegen der erwähnten Analogie bemerkenswert, sondern auch deshalb, weil hier der Kernsatz gleich in der schärferen Form herauskommt, daß es von jedem Ideal eine Potenz gibt, die Hauptideal ist. Daraus läßt sich dann ohne weiteres schließen, daß man an Stelle der Ideale durchaus wirkliche algebraische Zahlen setzen kann, die nur nicht dem betrachteten Rationalitätsbereich angehören. Gerade im Hinblick auf die gegenwärtige Entwicklung der Theorie ist es aber für den Leser von Wichtigkeit, diesen Gedankengang klar zu erfassen.

Das 7. Kapitel ist den Diskriminanten gewidmet, das 8. der Dirichletschen Einheitentheorie. Im 7. Kapitel werden auch die Kronecker-

Henselschen Entwickelungen herangezogen, bei denen neben den Zahlen noch Unbestimmte, also Formen, benutzt werden. Der Verfasser hatte ursprünglich die Absicht, die Dedekindsche und Kroneckersche Theorie der Ideale nebeneinander darzustellen, hat aber diese Absicht fallen lassen, um den Umfang seines Werkes nicht allzusehr wachsen zu lassen. Der Referent kann darin dem Verfasser nur zustimmen; nicht ebenso unbedingt kann er es aber gutheißen, daß auch die Gittertheorie ganz mit Stillschweigen übergangen ist, weil durch Hinzuziehung derselben manchem Leser der Zugang zur Theorie doch vielleicht erleichtert wäre. Denn sowohl die Theorie der Ideale wie die der Einheiten gewinnt dadurch an Anschaulichkeit, und an die letzte hätte sich ungezwungen die Theorie der periodischen Approximationsprozesse für mehrere algebraische Zahlen angeschlossen, welche die Verallgemeinerung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung bilden. Die Theorie dieser Prozesse gehört aber sicher zu einer allgemeinen Theorie der algebraischen Zahlen, denn ihre Periodizität ist eine allgemeine und gleichzeitig charakteristische Eigenschaft derselben.

Das letzte Kapitel des Werkes gibt im engen Anschluß an Hilbert die Theorie des Galoisschen Zahlkörpers, scheinbar im Widerspruch mit der allgemeinen Tendenz des Werkes, aber sachlich durchaus berechtigt, denn der Galoissche Körper kann nicht als spezieller Körper aufgefaßt werden. In einem Anhang endlich wird ein kurzer Abriß der Henselschen Untersuchungen, die sich auf die Reihenentwicklung der algebraischen Zahlen beziehen, gegeben, hauptsächlich um die Lehre von den Diskriminantenteilern zu vervollständigen.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Darstellung, die der Verfasser von den Grundlagen der allgemeinen Arithmetik der Zahlkörper gegeben hat, klar geschrieben und leicht lesbar ist, so daß das vorliegende Werk jedem, der tiefer in dies zukunftreiche Gebiet eindringen will, nur angelegentlich empfohlen werden kann.

Bonn. Ph. Furtwängler.

Mayer, I. W. und **Czap, E.** **Die praktische Wartung der Dampfkessel und Dampfmaschinen.** Dritte Auflage. IV, 191 S. mit 216 Abb. Leipzig 1906, B. G. Teubner. Geh. ℳ 3,50, geb. ℳ 4,30.

Das Buch soll ein Lehrbuch sein für Dampfkessel- und Dampfmaschinenwärter sowie für Fabrikbeamte ohne technische Vorbildung. Der Inhalt ist ein sehr reicher, denn er umfaßt so ziemlich alles, was beim Dampfkessel- und Dampfmaschinenbetriebe von Wichtigkeit ist. Ich fürchte sogar, daß in einigen Abschnitten mit Rücksicht auf die Kreise, für welche das Buch bestimmt ist, zu weit gegangen ist, unter anderem beim Kapitel der Steuerungen. Die Abbildungen lassen zum Teil an Deutlichkeit zu wünschen übrig. Ich bezweifele z. B., daß einem Maschinenwärter oder einem Fabrikbeamten ohne technische Vorbildung die Wirkung der auf S. 57 abgebildeten Moorepumpe, selbst an Hand der beigefügten Beschreibung klar werden dürfte. Dem Bestreben, möglichst kurz zu sein, sind offenbar einige Erklärungen zuzuschreiben, die zum mindesten ungenau sind. So z. B. die auf S. 125 ausgesprochene Behauptung, daß die Expansion des gesättigten Dampfes nach dem Mariotteschen Gesetze erfolge, oder S. 155 daß der Zweck

des Receivers nur der sei, durch Zuführung von Wärme den Dampf
pansionsfähiger zu machen, usw. Im allgemeinen wird das Buch aber
Kreisen, für die es bestimmt ist, namentlich in anbetracht seines billi
Preises sicherlich sehr willkommen sein, was ja auch schon aus der N
wendigkeit einer dritten Auflage hervorgehen dürfte.

Grunewald. R. Vater.

Krause, H. Maschinenelemente. 241 S. Mit 305 Abb. Berlin 19
Julius Springer. Preis geb. ℳ 5.

Das Buch ist ein Leitfaden für Berechnung und Bau der Maschi
elemente und zunächst als Lehrbuch für technische Mittelschulen geda
Der Verfasser war dabei bestrebt, ein kurzgefaßtes, wohlfeiles Buch
schaffen, welches die allgemeinen Gesichtspunkte enthält, von denen
beim Entwurf und der Herstellung der Maschinenelemente auszugehen
und welches die Hauptformeln zur Berechnung dieser Elemente zusam
faßt. Man kann dieses Bestreben nur gut heißen und muß zugestehen,
Verfasser sein Ziel erreicht hat. Denn trotz des knappen Umfanges
des, namentlich in anbetracht der sehr hübschen Ausstattung, wir
billigen Preises, enthält das Buch die Grundzüge für die Berechnung
wichtigen Maschinenteile. Durch die zahlreichen Angaben der zur Be
nung notwendigen Koeffizienten, durch die bei allen wichtigeren Abschn
eingefügten Rechenbeispiele und nicht zuletzt durch die große Zahl
facher, aber im allgemeinen recht klarer Abbildungen wird das Buch vi
willkommen sein, die sich des hohen Preises oder der beschränkten
wegen in das Studium ausführlicher Werke, wie z. B. des von Bach, n
vertiefen können.

Grunewald. R. Vater.

Fischer, O. Theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebend Körper. Mit speziellen Anwendungen auf den Menschen sowie s
einige Bewegungsvorgänge an Maschinen in möglichst elementarer u
anschaulicher Weise dargestellt. Mit 67 in den Text gedruckten Figur
und 4 Tafeln. Leipzig und Berlin 1906, B. G. Teubner. X u. 372
Preis gebunden ℳ. 14.—.

Wer wie der Verfasser seit mehr als zwanzig Jahren auf einem Spezi
gebiete tätig gewesen ist, der wird mit berechtigtem Stolze Rückblick üb
das Erreichte halten. Wenn er noch dazu als erster und einziger Pion
die Grundlagen dieser Wissenschaft sich erst schaffen mußte, so wird
durch Weiterverbreitung der geschaffenen Methoden andere zur Bearbeitu
von Einzelfragen anzuregen und sie mit dem nötigen Rüstzeug zu verseh
gern bereit sein. Aus diesen Erwägungen besonders ist die Entstehung
vorliegenden Buches zu erklären, und wir möchten gleich hier sagen, d
es seinen Zweck sicherlich voll erreicht hat. Es wird — so zweifeln
nicht — in weiten Kreisen Interesse für die Mechanik der Gelenksyste
erwecken und sowohl dem Techniker, der die Bewegungsvorgänge an
schinen studiert, als auch dem Mediziner, der sich die Mechanik von Gele
verbindungen am menschlichen Körper zu bearbeiten vornimmt, die th
retischen Grundlagen und die Methode der Forschung an die Hand ge

Für den Mathematiker — das sagt der Verfasser selbst — hätte eine viel kürzere Darstellung genügt. Bedurfte es für diesen überhaupt einer solchen Anleitung? Sind nicht die „theoretischen Grundlagen“ auch für dieses Spezialgebiet in Lagranges analytischer Mechanik enthalten? Gewiß, wer aber die Mühsale kennt, die selbst die Darstellung der Theorie der einfachsten Gelenkverbindung verursacht — das Problem von Glocke und Klöppel und das des Pendels mit kardanischer Aufhängung sind typische Beispiele — wird die Vorteile zu schätzen wissen, die die vom Verfasser eingeführten „reduzierten Systeme“ liefern. Wie einfach gestalten sich die Differentialgleichungen für die dreigliedrigen ebenen Gelenkketten, von denen ausgegangen wird, bei Einführung der „Hauptpunkte“ und „Hauptstrecken“, die in einfachen, durch Addition von Vektoren zu erhaltenden Beziehungen zu den Schwerpunkten des Ganzen und der Teilsysteme stehen. Die Gleichungen werden aus der zweiten Lagrangeschen Form gewonnen, sie erfahren aber sodann noch eine ganz elementare, nur von den einfachsten Definitionen der Kräfte Gebrauch machende, dabei durchaus elegante Herleitung, die auch den in die Prinzipien der höheren Analysis nicht eingeweihten Medizinern verständlich sein muß. Aus pädagogischen Gründen wird dieses spezielle und sodann das zweigliedrige räumliche System vorausgeschickt, während die allgemeine ebene n-gliedrige Kette und die räumliche allgemeine sodann ausführlicher behandelt werden. Auch dem Mathematiker wird dieses Aufsteigen vom Besondern zum Allgemeinen bei den immerhin nicht leicht zu übersehenden allgemeinen Gleichungen erwünscht sein.

Im folgenden speziellen Teile werden diejenigen Aufgaben behandelt, für welche die Theorie entworfen wurde, und die der Verfasser in einer großen Zahl von Abhandlungen der k. sächs. Ak. bearbeitet hat. Nur über eine spezielle Verwendung der Gleichungen haben wir (dieses Archiv (3) **9**, 66 f.) berichtet. Hier war durch eine Art kinematographischer Aufnahmen des menschlichen Ganges die Möglichkeit gegeben, in den Gleichungen alle Kräfte graphisch zu bestimmen und die einzig noch unbekannten Muskelkräfte abzuleiten. Die Vorteile der Theorie haben sich hier durch das schöne Ergebnis gezeigt, daß jene es sind, die den Gang des Menschen viel stärker beeinflussen, als die Schwerkraft. Indessen sind die physiologischen Aufgaben viel mannigfaltiger. Es werden eine Anzahl von solchen, die die Statik und Kinetik der Muskeln betreffen, zur völligen Lösung gebracht, so daß z. B. die zur Gleichgewichtsstellung des Armes unter dem Einflusse der Schwerkraft und eines Unterarmbeugers gehörigen Koordinaten tabuliert und danach diese Stellungen zeichnerisch wiedergegeben und die durch Kontraktion eines Muskels entstehenden Bewegungen wenigstens in ihrem Beginn in gleicher Weise klargestellt werden. Dieses auch in exakter Weise für den ganzen Verlauf einer Bewegung zu vollbringen, gelingt im allgemeinen nicht wegen der meist unüberwindlichen Schwierigkeiten, welche sich der Integration der Differentialgleichungen entgegenstellen. Nur im besondern Falle ist durch die hier möglichen Vernachlässigungen die Integration möglich gemacht, und damit die durch *einen* Muskel für sich allein erzeugte Bewegung ermittelt. Aber die Wahrscheinlichkeit spricht nicht dafür, daß bei einer Bewegung überhaupt je nur *ein* Muskel tätig ist, so daß gerade hier sehr viel dankbare Arbeit übrig bleibt, durch die es gilt, die Komplikationen in Summationen einfacher Fälle aufzulösen.

Zum Schlusse zeigt der Verfasser, welchen Nutzen die Technik aus den in dem Buche eingeführten Begriffen ziehen kann, indem er das Problem der Schubkurbelbewegung behandelt und dabei die wichtige Frage des Massenausgleiches wenigstens berührt, die durch moderne Untersuchungen in den Vordergrund des Interesses gerückt ist. Den Schluß bildet die Behandlung des Pendels, das mit seiner Linse gelenkig verbunden ist. Die Schnelligkeit, mit der man hier zum Hinschreiben der Bewegungsgleichungen gelangt, lassen in der Tat die „theoretischen" Grundlagen äußerst *praktisch* und ihre Verbreitung als sehr empfehlenswert erscheinen. Ein ausführliches Register erleichtert den Gebrauch des auch sonst recht übersichtlichen Buches.

Charlottenburg. H. Samter.

---

v. Neumayer, Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen. Unter Mitwirkung zahlreicher Gelehrter herausgegeben. In zwei Bänden. Dritte Auflage. XXIV u. 844 S. XV u. 880 S. Hannover 1906, Max Jänecke. Preis ℳ 49.

Rechtzeitig zum 80. Geburtstage des hochverdienten Herausgebers ist die dritte Auflage des in dieser Vollständigkeit und Zuverlässigkeit einzig in der Weltliteratur dastehenden umfassenden Werkes erschienen. Wenn in den 18 Jahren, seitdem die zweite Auflage die Presse verlassen hat, so mancher weiße Fleck auf den Erdkarten sich gefüllt hat, manches Licht über die Natur fernliegender Länder und Meere ausgegossen wurde, die Erforschung menschlicher Sprachen, Gewohnheiten, Einrichtungen uns erschlossen wurde, wenn überhaupt die Detailforschung auf allen Gebieten der Erkenntnis sich über die Welt verbreitet hat, so hat dieses Buch einen wesentlichen Anteil daran. Die eingehende „Anleitung" ist die notwendige Voraussetzung für das Gelingen jeder Forschung, sie kürzt die Vorbereitung, sie verhindert sonst so häufige Mißerfolge. Demnach ist das Buch jedem Forschungsreisenden im wahren Sinne des Wortes unentbehrlich. Damit ist freilich die Bedeutung des Buches keineswegs erschöpft. Auch demjenigen, der sich etwa über die Grundzüge der Pflanzengeographie, oder über die landwirtschaftlichen Kulturgewächse naher und ferner Zonen mit leichter Mühe gute Kenntnisse schaffen will, dem, der diese Kenntnisse seinen Schülern zu übermitteln hat, dem, der in der Heimat sich — sagen wir — die Erforschung des Lebens in einem Binnensee zum Ziele steckt, kann die Lektüre des betreffenden Abschnittes in diesem Buche nicht dringend genug empfohlen werden. Wer — wie der Referent — diesem Buche weiteste Verbreitung wünscht, der ist sich zugleich bewußt, daß er die Anregung zu dankbarer Spezialforschung in die weitesten Kreise der Studierten und Laien trägt, eine Anregung, die für den Ausbau der Wissenschaft, die je heute auf immer ausgedehntere Einzelbeobachtungen angewiesen ist, nur vorteilhaft werden kann.

Die Namen der Mitarbeiter dieser neuen Auflage bürgen dafür, daß die in den letzten 18 Jahren gemachten Fortschritte der Wissenschaft und der Forschungstechnik die gebührende Berücksichtigung erfahren haben. Daß ganz neue Methoden eine eingehende Besprechung erfahren, nimmt bei der Umsicht des ewig jungen Herausgebers nicht wunder. So hat S. Finsterwalder einen Beitrag über „die Photogrammetrie als Hilfsmittel der Geländeaufnahme" geliefert als Ergänzung der diesmal von P. Nagel bearbeiteten „Aufnahme des Reiseweges und des Geländes". Der geologische Abschnitt stammt noch von dem kürzlich dahingegangenen F. Frhr. von Richthofen, dem bei der Korrektur dieser seiner letzten Arbeit die Feder entglitten ist. Hier hat der Verblichene noch die neuesten Ansichten über den Vulkanismus berücksichtigen können. Als neuer Bearbeiter der Erdbebenbeobachtungen ist G. Gerland eingetreten, der dieselben etwas anders beleuchtet, scharf und klar nach den internationalen Vereinbarungen auffaßt und die Fragen, die für die Lösung der verschiedenen Probleme zu beantworten sind, einheitlich und streng gliedert. Die erdmagnetische Forschung wurde in zwei verschiedenen Abschnitten behandelt, nämlich je nachdem sie an Land oder an Bord geübt wird. Für die Landbeobachtungen wurde auf die Frage des Einflusses der geologischen Formation in den Verlauf der erdmagnetischen Kurven eingegangen, während für die Messungen an Bord den neuesten Erfahrungen, insbesondere der deutschen Südpolarexpedition Rechnung getragen ward. Bei beiden Abschnitten finden wir eine sehr anregende Auseinandersetzung der Grundlagen und rechnerisch genau durchgeführte Beispiele. Auch der Neubearbeitung der Ebbe- und Fluterscheinungen, bei der die neueren Forschungen von G. H. Darwin u. a. berücksichtigt und auf die Behandlung der harmonischen Analyse gebührend eingegangen wird, steht auf dem neuesten Standpunkte, wie der vorhergehende, die nautischen Vermessungen behandelnde. Der Abschnitt über die Meeresforschung ist den geltenden internationalen Vereinbarungen entsprechend umgearbeitet, und die dem ersten Bande beigegebene Karte der Meeresströmungen zeigt, wie keine andere irgendwo, bis zu welchem Punkte dieser Zweig der Forschung gediehen ist. Zu den älteren Wetterbeobachtungen, die wieder durch die bewährte Feder J. Hanns geschildert werden, tritt eine Ergänzung durch die an Bord vorzunehmenden Aufzeichnungen einerseits, sowie durch die neueste Beobachtungstechnik in Form von Drachenaufstiegen, die W. Köppen ausführlich darstellt. Aus der bewährten Feder von J. Plaßmann stammt die diesmalige Bearbeitung der mit freiem Auge und mit einfachen Instrumenten anzustellenden astronomischen Beobachtungen, welche den in den letzten Jahren gerade unter der Teilnahme dieses Mitarbeiters gemachten großen Fortschritten gerecht wird.

Die Schwierigkeiten, welche sich den für koloniale Zwecke so besonders wichtigen hydrotechnischen Untersuchungen entgegenstellen, werden denjenigen, die das von v. Lorenz-Liburnau bearbeitete Kapitel, das die Grundprinzipien, nach denen hier verfahren werden soll, wenn auch in ganz allgemeiner Weise auseinandersetzt, gelesen haben, sehr viel geringer erscheinen. Den Schluß des ersten Bandes machen einige aktuelle „Winke über die Ausführung und Ausrüstung für Forschungsreisen" von G. Wislicenus, die dazu beitragen werden, manche vergebliche Mühe zu ersparen und den Reisenden zu schützen und zu schonen. In einem Anhange ist den maritimen, meteorologischen und hydrographischen Arbeiten, die dem Reisenden empfohlen werden können, ein ansehnlicher Raum gewidmet, besonders wird durch einen Plan, der die Methoden der Aufnahme und die Bezeichnungen der kaiserlichen Marine enthält, die Anordnung der zu machenden Aufzeichnungen klar beleuchtet. In einem andern Anhange wird noch zu Erhebungen über die gewaltigen Klimaveränderungen angeregt, die in geologischen Zeitepochen eingetreten sind. Eine Reihe anderer Ergänzunge Erörterungen und Tafeln macht den Schluß dieses ersten Bandes aus, d für die Leser dieser Zeitschrift das größere Interesse haben wird. D auch der zweite Band eine Fülle von belehrendem, anregendem Materia für Forscher und Laien enthält, deuteten wir schon an. Wir fürchten ab mit einem weitern Eingehen die uns angewiesenen Grenzen zu überschreite

Charlottenburg. H. SAMTER.

Fleming, J. A. Elektrische Wellen-Telegraphie. Deutsch von E. Asc kinaß. Mit 53 Abb. VIII, 185 S. gr. 8⁰. Leipzig 1906, B. G. Teubn Geh. ℳ 4.20, geb. ℳ 5.—.

Das vorliegende Buch umfaßt vier Vorlesungen, welche der Verfas als „Cantor-Lectures" 1903 vor der Society of Arts zu London gehalt hat. Wenn wir nun auch bereits zahlreiche Bücher über drahtlose Te graphie besitzen — ich nenne nur das ausgezeichnete Werk von Righ Dessau —, so wird sich meiner Meinung nach doch auch das vorliegen sicher zahlreiche Freunde erwerben, wegen seiner besondern Eigenart. S ist begründet, wie der Übersetzer mit Recht hervorhebt, in der innigen Ve schmelzung und gleichmäßigen Beherrschung von Theorie und Praxis; un gerade die letztere kann dem physikalischen Leserpublikum nur erwünsc sein. Aber auch die theoretischen Darlegungen sind überaus durchsichtig un elegant, so daß der Lehrende manche Anregung in dieser Hinsicht haben wir Hinzugefügt sei, daß die Übersetzung tadellos ist. Man braucht demnach ke Prophet zu sein, wenn man dem Buch eine weite Verbreitung voraussag

Breslau. CLEM. SCHAEFER.

Lorentz, H. A. Abhandlungen über theoretische Physik. I. Band. Ers Lieferung. Mit 8 Fig. 298 S. gr. 8⁰. Leipzig 1906, B. G. Teubner. Geh. ℳ 10.–

Es ist aufs freudigste zu begrüßen, daß die Verlagshandlung B. Teubner es unternommen hat, die wissenschaftlichen Arbeiten Lorent gesammelt herauszugeben. Denn unter diesen Abhandlungen befindet si kaum eine, die nicht nachhaltigen Einfluß auf die Entwicklung der Wiss schaft gehabt hätte. Dies gilt nicht nur von den augenblicklich im Vord grunde des Interesses stehenden Arbeiten über die Elektronentheorie, sond auch von den in der vorliegenden Lieferung vereinigten Abhandlungen dem Gebiete der Mechanik, der Thermodynamik und der kinetischen Theo der Gase. Es sind im ganzen elf Abhandlungen in der vorliegend Lieferung enthalten. Es sei gestattet, wenigstens auf zwei derselben a merksam zu machen. Die erste von diesen ist neu, nämlich ein Teil ei Vorlesung des Verfassers, und führt den Titel: „Über den zweiten Hau satz der Thermodynamik und dessen Beziehung zu den Molekulartheori Die große Tragweite und Fruchtbarkeit dieser Zusammenhänge hat erst kürzlich wieder in den Planckschen Untersuchungen über das St lungsgesetz des schwarzen Körpers gezeigt. Die andere, betitelt „Über Gleichgewicht der lebendigen Kraft unter Gasmolekülen", beschäftigt mit den Untersuchungen Boltzmanns über das Maxwellsche Verteilu gesetz. Ihre Bedeutung ist zu bekannt, als daß hier mehr als ein Hin darauf gegeben zu werden brauchte.

Es ist zu hoffen, daß die Fortsetzung des Werkes nicht allzu lange auf sich warten lassen wird. Für den Physiker ist es unentbehrlich, der Inhalt wird aber auch gewiß jeden Mathematiker interessieren.

Breslau. CLEM. SCHAEFER.

Ebner, F. Leitfaden der technisch wichtigen Kurven. VIII, 197 S. 8°. Mit 93 Fig. Leipzig 1906, B. G. Teubner. Geb. ℳ 4.—.

Das vorliegende Buch will einerseits das große Werk von Loria ergänzen, insbesondere in bezug auf die Koppelkurven jeder Gattung, und es soll andrerseits „dem mathematischen Unterricht an technischen Mittelschulen ein weites und fruchtbares Gebiet der Anwendungen erschließen, das bisher aus Mangel an einer zusammenhängenden Darstellung fast ganz vernachlässigt werden mußte". Beide Absichten, das wollen wir vorweg sagen, erreicht der Verfasser vollkommen. Freilich mußte infolge der zweiten Absicht manches elementarer dargestellt werden, als es für die erste Absicht gut war. Wir glauben aber, daß der Verfasser, nachdem einmal beide Zwecke verfolgt wurden, den richtigen Mittelweg eingeschlagen hat.

Das Buch enthält zunächst einen kleinen Exkurs über die zykloidale Ellipsenerzeugung, sodann ein Kapitel über die Schubkurbelbewegung und ein großes Kapitel über die Dreistabbewegung, bez. die Koppelkurve. Die Behandlung ist analytisch und sehr durchsichtig. Überall sind auch die betreffenden Polbahnen in Betracht gezogen. Die Einhüllenden der Stäbe sind ja wohl technisch nicht wichtig, vielleicht hätte aber doch die Astroide bei der elliptischen Bewegung erwähnt werden können. Die Koppelkurven sind für die verschiedenen Getriebe bis ins einzelne übersichtlich diskutiert und viele Fälle mit anschaulichen Figuren belegt. So exakt sind aber die Figuren doch nicht, daß sie der Verfasser im Vorwort selbst hätte loben müssen. Wir erwähnen folgendes. Fig. 4 dürfte außerhalb $B_1 B_4$ keine Wendepunkte mehr haben; Fig. 5 müßte in B_0, wie Fig. 76 (S. 139) die y-Achse zur Wendetangente haben; in Fig. 10 liegt C unnötigerweise gerade auf dem Kreis; die Kurven der Figuren 16a, 16b u. 69 haben deutliche Ecken statt nur scharfgekrümmte Stellen; in Fig. 27 und 29 und bes. in Fig. 44 ist der Mittelpunkt von AB sehr ungenau; in Fig. 69 soll $C'A'$ um sich selbst verlängert den zweiten Zweig treffen — man muß es aber um das $1\frac{1}{2}$ fache verlängern. Merkwürdig ist auch, daß auf S. 142/44 der Erfinder des Inversors durchweg Peancellier statt Peaucellier heißt.

Es folgen noch zwei Kapitel, kurz und gut, eines über höhere Parabeln und Hyperbeln mit Einführung des Differentialquotienten und Integrals und ein letztes über die zyklischen Kurven im Anschluß an die Arbeit von Schilling im 44. Bd. der Zeitschr. Math. Phys. Vielleicht trägt dieses Kapitel mit dazu bei, die einzig mögliche, schon seit mehr als 20 Jahren bekannte Einteilung der zyklischen Kurven in weiteren Kreisen Wurzel fassen zu lassen. Erwähnt sei nur noch, daß in Fig. 93 die Ziffern I′, II′, III′ fehlen. Auch hätte angegeben werden können, daß die »sternförmigen Trochoiden« (S. 186) schon seit Guido Grandi »Rhodoneen (Rosenkurven)« heißen.

Speyer. H. WIELEITNER.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

186. Für x, y als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes in der Ebene möge ein nicht zerfallender Kegelschnitt durch eine beliebige Gleichung 2. Grades in x, y gegeben sein. Dann sollen die Koordinaten x, y eines Kegelschnittpunktes als rationale Funktionen (2. Grades, mit demselben Nenner) eines Parameters dargestellt werden.

Königsberg i. P. W. Fr. Meyer.

187. Wenn man von einem Punkte eines Kegelschnittes die vier Schnittpunkte eines zweiten Kegelschnittes auf diesen projiziert, so erhält man die Schnittpunkte eines dritten Kegelschnittes, welcher den ersten Kegelschnitt im Projektionszentrum berührt und in den Schnittpunkten der anderen Polare dieses Punktes schneidet.

Holzminden. G. Kober.

188. Die Summe der Quadrate der Binomialkoeffizienten der $(\frac{1}{2})^{\text{ten}}$ Potenz ist gleich $\frac{4}{\pi}$ und die Summe

$$1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}\binom{-\frac{1}{2}}{1} + \binom{\frac{1}{2}}{2}\binom{-\frac{1}{2}}{2} + \binom{\frac{1}{2}}{3}\binom{-\frac{1}{2}}{3} + \cdots = \frac{2}{\pi}.$$

Für ein positives ganzes gerades n ist

$$S = 1 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \binom{n}{3}^2 \pm \cdots = (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}};$$

nach Beweis dieser Gleichung ist die Summe der positiven und die der negativen Glieder in S anzugeben und der Wert von S für ein beliebiges n, soweit die Reihe dafür konvergiert, aufzusuchen.

Für positive ganze n und beliebige v ist:

$$1 + \binom{n}{1}\binom{v}{1}\binom{v+n+1}{1} + \binom{n}{2}\binom{v}{2}\binom{v+n+2}{2}$$
$$+ \binom{n}{3}\binom{v}{3}\binom{v+n+3}{3} + \cdots = \binom{v+n}{n}^2.$$

Die Reihe läßt sich auch summieren, wenn n eine negative ganze Zahl oder wenn $v+n$ eine nicht-negative ganze Zahl ist.

Königsberg. Louis Saalschütz.

B. Lösungen.

Zu **172** (Bd. XI, S. 132) (H. Wieleitner). — *Gegeben ist eine Bernoullische Lemniskate mit der Achse $AB = 2a$ und dem Mittelpunkte M. Eine beliebige parallel zur Achse gezogene Gerade treffe die Kurve der Reihe nach in P, Q, Q', P'; durch die Punkte M, P, Q' wird der Kreis gelegt, dessen Mittelpunkt X sei. Zu bestimmen ist der Ort von X, wenn die Parallele zur Achse ihre Lage ändert, und aus dem Ergebnis soll eine einfache Konstruktion der Lemniskate hergeleitet werden.*

Erste Lösung: Man nehme MA zur Polarachse eines Polarkoordinatensystems oder zur positiven x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und setze

$$MP = MP' = r_1, \quad MQ = MQ' = r_2,$$
$$\sphericalangle AMP' = BMP' = \vartheta_1, \quad \sphericalangle AMQ = BMQ' = \vartheta_2.$$

Aus der Polargleichung der Lemniskate $r = a\sqrt{\cos 2\vartheta}$ folgt sodann

$$\text{(I)} \qquad r_1^2 = a^2 \cos 2\vartheta_1, \quad r_2^2 = a^2 \cos 2\vartheta_2$$

und außerdem besteht die Bedingung

$$\text{(II)} \qquad r_1 \sin \vartheta_1 = r_2 \sin \vartheta_2.$$

Hieraus erhält man

$$\cos 2\vartheta_1 \sin^2 \vartheta_1 = \cos 2\vartheta_2 \sin^2 \vartheta_2,$$
$$(\cos 2\vartheta_1 - \cos 2\vartheta_2)(1 - \cos 2\vartheta_1 - \cos 2\vartheta_2) = 0.$$

Der erste Faktor auf der linken Seite der letzten Gleichung bezieht sich auf zwei symmetrisch zur y-Achse liegende Kurvenpunkte und kommt daher nicht in Betracht; mithin ist

$$\text{(III)} \qquad \cos 2\vartheta_1 + \cos 2\vartheta_2 = 1.$$

Weiter findet man aus (I)

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \cos 2\vartheta_1 = \frac{r_1^2}{a^2}, \ \cos 2\vartheta_2 = \frac{r_2^2}{a^2}, \ r_1^2 + r_2^2 = a^2, \\ \cos^2\vartheta_1 \ = \frac{a^2 + r_1^2}{2a^2}, \ \sin^2\vartheta_1 = \frac{a^2 - r_1^2}{2a^2}, \\ \cos^2\vartheta_2 \ = \frac{a^2 + r_2^2}{2a^2}, \ \sin^2\vartheta_2 = \frac{a^2 - r_2^2}{2a^2}. \end{cases}$$

Es ist nun X der Durchschnittspunkt der Mittelsenkrechten von MP und MQ'. Die Gleichungen dieser Mittelsenkrechten sind

$$\text{(V)} \qquad x \cos \vartheta_1 + y \sin \vartheta_1 = \tfrac{1}{2} r_1, \quad - x \cos \vartheta_2 + y \sin \vartheta_2 = \tfrac{1}{2} r_2.$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $\sin \vartheta_1$, die zweite mit $\sin \vartheta_2$ und subtrahiert, so ergibt sich

$$\tfrac{1}{2}x(\sin 2\vartheta_1 + \sin 2\vartheta_2) + y\,(\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_2) = \tfrac{1}{2}(r_1 \sin\vartheta_1 - r_2 \sin\vartheta_2)$$

oder mit Rücksicht auf (II) und (IV)

$$\text{(VI)} \qquad a^2 x(\sin 2\vartheta_1 + \sin 2\vartheta_2) - y\,(r_1^2 - r_2^2) = 0.$$

Quadriert man ferner die Gleichungen (V) und subtrahiert, so erhält man

$$x^2(\cos^2\vartheta_1 - \cos^2\vartheta_2) + xy(\sin 2\vartheta_1 + \sin 2\vartheta_2) + y^2(\sin^2\vartheta_1 - \sin^2\vartheta_2) = \tfrac{1}{4}(r_1^2 - r_2^2)$$

oder

(VII) $(r_1^2 - r_2^2)x^2 + 2a^2xy(\sin 2\vartheta_1 + \sin 2\vartheta_2) - (r_1^2 - r_2^2)y^2 = \frac{1}{2}a^2(r$

Multipliziert man jetzt (VI) mit $-2y$ und addiert dazu (VII), so find

$$(r_1^2 - r_2^2)(\tfrac{1}{2}a^2 - x^2 - y^2) = 0.$$

Der erste Faktor auf der linken Seite dieser Gleichung ist im allge von Null verschieden; mithin ist

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}a^2$$

die Gleichung des gesuchten Ortes von X. Dieser ist der Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

Dieses Ergebnis führt zu folgender einfachen Konstruktion der I kate mit der Achse $AB = 2a$:

Man zeichne um den Mittelpunkt M von AB den Kreis m Radius $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$, nehme auf ihm den Punkt X beliebig an, doch s $\sphericalangle AMX > 45^0$ ist, und schlage um X den durch M gehenden Die gemeinsame Sehne beider Kreise sei CD; sie geht durch die M von MX. Das von X aus auf die Achse AB gefällte Lot treffe F, und die durch F parallel zur Achse gezogene Gerade schneide de X in den Punkten Y und Z. Dann liegen Y und Z auf der Lem

Beweis: Da F die Mitte von YZ ist, so haben die Punkte Z von der Geraden CD gleiche Entfernung; mithin ist, wenn man und Z aus auf MX die Lote YR und ZS fällt, $ER = ES$, und die Mitte von MX ist,

$$XR + XS = MX.$$

Ferner ist

$$\sphericalangle MXZ = 2MYZ = 2AMY$$

und

$$\sphericalangle MXY = 2MZY = 2BMZ;$$

also:

$$XR = XY \cdot \cos MXY = MX \cdot \cos 2BMZ;$$
$$XS = XZ \cdot \cos MXZ = MX \cdot \cos 2AMY;$$
$$XR + XS = MX = MX(\cos 2AMY + \cos 2BMZ).$$

Daraus ergibt sich

$$\cos 2AMY + \cos 2BMZ = 1,$$

und diese Gleichung entspricht der Gleichung (III). Mithin sind Y Punkte der Lemniskate.

Prenzlau. W. STEGEMA

Zweite Lösung: Die Gleichung der Lemniskate ist: $(x^2$ $-2a^2(x^2 - y^2) = 0$ (Achse $2a\sqrt{2}$). Man bringt die Kurve zum mit der Geraden $y = \text{konst.} = y_1$ und erhält für die Abszissen der S punkte den Wert: $x = \pm\sqrt{a^2 - y_1^2 \pm a\sqrt{a^2 - 4y_1^2}}$. Der Kreis i durch die drei Punkte:

$$\left(x_1 = -\sqrt{a^2 - y_1^2 + a\sqrt{a^2 - 4y_1^2}},\ \ y_1\right),$$
$$\left(x_1' = +\sqrt{a^2 - y_1^2 - a\sqrt{a^2 - 4y_1^2}},\ y_1\right),\quad (0, 0)$$

zu legen; hat sein Mittelpunkt die Koordinaten α, β, so ist sein Radius $=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ und seine Gleichung hat die Form:

$$x^2 - 2\alpha x + y^2 - 2\beta y = 0.$$

Damit kommen für α und β die Gleichungen:

$$2\alpha x_1 + 2\beta y_1 = x_1^2 + y_1^2, \quad 2\alpha x_1' + 2\beta y_1 = x_1'^2 + y_1^2,$$

woraus folgt:

$$2\alpha = \frac{x_1^2 - x_1'^2}{x_1 - x_1'} = x_1 + x_1'$$

$$2\beta = \frac{x_1 x_1'(x_1 - x_1') + y_1^2(x_1' - x_1)}{y_1(x_1' - x_1)} = y_1 - \frac{x_1 x_1'}{y_1};$$

nun ist aber:

$$x_1 x_1' = -\sqrt{(a^2 - y_1^2)^2 - a^2(a^2 - 4y_1^2)} = -y_1\sqrt{2a^2 + y_1^2},$$

folglich wird:

(1) $$2\beta = y_1 + \sqrt{2a^2 + y_1^2}\cdot$$

Um die Gleichung des Orts der Mittelpunkte zu erhalten, eliminiert man y_1; es wird: $y_1 = \frac{2\beta^2 - a^2}{2\beta}$, ferner kommt:

$$4\alpha^2 = 2(a^2 - y_1^2) - 2y_1\sqrt{2a^2 + y_1^2} = -4\beta^2 + 4a^2.$$

Die Gleichung des Ortes ist also:

(2) $$\alpha^2 + \beta^2 = a^2,$$

die Mittelpunkte dieser Kreise liegen somit auf einem Kreis um den Mittelpunkt der Lemniskate, der durch die Brennpunkte geht.

Aus (1) und (2) läßt sich nun eine Konstruktion der Kurve ableiten. Es seien A und B die gegebenen Brennpunkte, dann beschreibt man um die Mitte O von $AB = 2a$ den Kreis mit Radius $OA = a$ und errichtet auf AB in O das Lot. Ferner macht man auf AB die Strecke $OC = a\sqrt{2}$ und errichtet in C auf OC das Lot h. (Dieses ist dann Scheiteltangente der Lemniskate.) Sollen nun die Kurvenpunkte auf einer Parallelen l zu AB in beliebigem Abstand $\left(\text{aber} \leq \frac{a}{2}\right)$ gefunden werden, so verbindet man den Schnittpunkt D von l und h mit O, macht $OC' = OD + DC$ und zieht im Abstande $OE = \frac{1}{2}OC'$ zu AB die Parallele, die den Kreis in F und F' schneidet. Um F und F' beschreibt man die durch O gehenden Kreise, die auf l die 4 Kurvenpunkte ergeben.

Schorndorf (Württemberg). C. Hoffmann.

Dritte Lösung: Subtrahiert man in der Lemniskatengleichung (Achse $2a$), die man in die Form bringen kann

(1) $$x^4 + y^2(y^2 + a^2) = (a^2 - 2y^2)x^2$$

beiderseits $2x^2y\sqrt{y^2+a^2}$, so erhält man nach Radizierung für x (bei konstantem y) die quadratische Gleichung

(2) $$x^2 - y\sqrt{y^2 + a^2} = x\sqrt{a^2 - 2y^2 - 2y\sqrt{y^2 + a^2}}\cdot$$

Wenn wir jede der beiden Quadratwurzeln mit doppeltem Zeichen nehmen, sind dies vier quadratische Gleichungen für x. Wir setzen nun

$$\sqrt{y^2 + a^2} = 2\eta - y \tag{3}$$

$$\sqrt{a^2 - 2y^2 - 2y\sqrt{y^2 + a^2}} = \sqrt{a^2 - 4y\eta} = 2\xi \cdot \tag{4}$$

Dann wird aus (2):

$$x^2 - 2\xi x + y^2 - 2\eta y = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises durch den Ursprung mit dem Mittelpunkt (ξ, η) und dem Radius $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Wenn man aber (3) und (4) quadriert und addiert, so ergibt sich

$$\xi^2 + \eta^2 = \tfrac{1}{2}a^2. \tag{5}$$

Die Kreisgleichung lautet also:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \tfrac{1}{2}a^2. \tag{6}$$

Endlich kommt noch aus (3)

$$\eta = \tfrac{1}{2}\left(y + \sqrt{y^2 + a^2}\right), \tag{7}$$

sodaß (1) durch (5), (6) und (7) ersetzt ist. Nun ist (5) der Kreis um den Mittelpunkt der Lemniskate durch ihre Brennpunkte. Auf diesem Kreis läuft der Mittelpunkt des Kreises (6), der denselben Radius hat, also durch den Mittelpunkt der Lemniskate geht. Die beiden weiteren Schnitt punkte dieses Kreises mit der Lemniskate liegen auf $y = konst.$ Darau ergibt sich der Kreis (5) als der gesuchte Ort.

Konstruktion: AA' sei die Achse der Lemniskate, O der Mitt punkt, F und F' die Brennpunkte, B und B' die Mittelpunkte von O bez. OA'. Ist nun $y = konst. = ON$ gegeben, so schneide diese Parall zur Achse das in B auf dieser errichtete Lot in C, CB' die Ordinat achse in M. Dann ist $MC = \frac{1}{2}\sqrt{y^2 + a^2}$. Da $OM = \frac{1}{2}y$, erhalten sofort $OQ' = \eta_1 = \frac{1}{2}\left(y + \sqrt{y^2 + a^2}\right)$, $OQ'' = \eta_2 = \frac{1}{2}\left(y - \sqrt{y^2 + a^2}\right)$. Achsenparallelen durch Q' und Q'' schneiden den Kreis (5) in O' und bez. in O'' und O^{II}. Das sind die Mittelpunkte der Kreise (6), die $y = konst.$ die Lemniskatenpunkte ausschneiden, und zwar schneidet K (O') diese Gerade in P_1, P_3, der Kreis (O^{I}) in P_2, P_4, der Kreis (O'') P_1, P_2 und Kreis (O^{II}) in P_3, P_4.

Im Texte der Aufgabe würde es daher besser heißen statt „nicht a einanderfolgende Schnittpunkte“: „nicht zur Ordinatenachse symmetrisc Punkte“.

Aussig (Böhmen). stud. math. Josef Krug.

Eine ähnliche Lösung ist von Herrn J. Rose (Nivelles, Belgien) eingelaufen.

Vierte Lösung: Indem ich zum Teil die Bezeichnungsweise des Herrn Stegemann und andrerseits die Rechnungen des Herrn C. Hoffmann benütze, will ich die Konstruktion des Herrn Stegemann etwas modifizieren. Ich verlängere noch XF bis zum Schnittpunkt G mit AB und dann XG um sich selbst bis zum anderen Schnittpunkte X' mit dem Kreis über $AB = 2a$. Dann ist

$$FX \cdot FX' = (\beta - y_1)(\beta + y_1) = \tfrac{1}{2}\left(a^2 - y_1^2 + y_1\sqrt{2a^2 + y_1^2}\right).$$

Dieser Ausdruck ist aber das Quadrat von

$$\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2-y_1^2-a\sqrt{a^2-4y_1^2}} + \sqrt{a^2-y_1^2+a\sqrt{a^2-4y_1^2}}\right) = \tfrac{1}{2}(x_1'-x_1) = \tfrac{1}{2}\overline{YZ}.$$

Daher ist

$$\overline{FY}^2 = \overline{FZ}^2 = FX \cdot FX',$$

d. h. die Punkte X, X', Y, Z liegen ebenfalls auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte G. Die Konstruktion der Lemniskate lautet dann: Zeichne über $AB = 2a$ als Durchmesser den Kreis, ziehe irgend eine Sehne $XX' \perp AB$ und über XX' als Durchmesser den Kreis, sodann noch den Kreis um X (bez. X') mit dem Radius a, der den zweiten (über XX' gezeichneten) in Y, Z schneidet. Die Punkte Y, Z beschreiben die Lemniskate. F ist der Chordalpunkt der drei zur Konstruktion verwendeten Kreise. A und B sind die Brennpunkte der Lemniskate. Ist $\sphericalangle AMX > 45^0$, so sind die Punkte Y, Z nicht aufeinanderfolgend, wie ursprünglich verlangt; ist aber $\sphericalangle AMX < 45^0$, so folgen Y, Z aufeinander, ohne zur Ordinatenachse symmetrisch zu sein. Die Einschränkung, die Herr Stegemann gibt, darf nach der Bemerkung des Herrn J. Krug in Wegfall kommen.

Gibt man dem Kreis um X (und X') den Radius $b + a$, so ist das Erzeugnis der Punkte Y, Z (Y', Z') eine Kurve 8. Ordg., die man sich leicht zeichnet. Sie hat die Gleichung

$$(1)\quad [(x^2+y^2)^2 - 2a^2x^2 + 2b^2y^2 + (a^2-b^2)^2]^2 = 4(a^2-b^2)^2y^2(y^2+2b^2),$$

welche für $b = a$ offensichtlich in das Quadrat der Lemniskatengleichung übergeht.

Man sehe ferner die zwei Antworten, die auf eine Anfrage des Unterzeichneten im Interméd. des math. **13**, 1906, S. 165—168 von den Herren E. Malo und H. Brocard einliefen, sowie eine dritte von V. Retali (ebd. S. 253).

Die Anregung den allgemeineren Ort (1) zu untersuchen, erhielt der Aufgabensteller von Herrn stud. math. H. Wittmann. Daraus ergab sich die in Rede stehende Eigenschaft und Konstruktion der Bernoullischen Lemniskate.

Speyer. H. Wieleitner.

Eine weitere von Herrn stud. math. A. Wieferich (Münster) eingesandte Lösung ist im analytischen Teil der Lösung des Herrn C. Hoffmann ähnlich und gibt die Konstruktion von Herrn Stegemann. Red.

Zu **173** (Bd. XI, 132) (G. Kober). — *Werden die Ecken eines Dreiecks mit einem vierten Punkte seiner Ebene verbunden, so liegen die drei Punkte, in denen die harmonisch zugeordneten Eckenstrahlen die gegenüberliegenden Seiten schneiden, in der dem willkürlichen Punkte harmonisch zugeordneten Transversale. Welche Enveloppe hat in der Ebene eines Kegelschnitts diejenige Transversale eines Polardreiecks, deren harmonisch zugeordneter Punkt den Kegelschnitt beschreibt? Welcher Punkt der Ebene beschreibt dieselbe?*

Nehmen wir das Dreieck als Fundamentaldreieck, so findet man die Gleichung der harmonisch zugeordneten Transversale eines Punktes $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, indem man

$$\Delta \equiv x_1 x_2 x_3 = 0 \tag{1}$$

als Kubik auffaßt und die gerade Polare zu P sucht (s. etwa Wieleitner, *Theorie der algebr. Kurven.* Leipzig, Göschen 1905, S. 17 ff.). Die Gleichung dieser Transversale wird dann

$$\mathsf{T} \equiv \sum_1^3{}^i\, x_i \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_i} \equiv x_1 \xi_1^{-1} + x_2 \xi_2^{-1} + x_3 \xi_3^{-1} = 0. \tag{2}$$

Die Gleichung eines Kegelschnittes, der Δ zum Polardreieck hat, ist (in ξ_1, ξ_2, ξ_3 geschrieben)

$$\mathsf{K} \equiv \alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \alpha_3 \xi_3^2 = 0. \tag{3}$$

Es ist nun die Enveloppe von T zu suchen, wenn der Pol P den Kegelschnitt K beschreibt. Sind u_1, u_2, u_3 die Koordinaten von T, so hat man

$$\vartheta u_i = \xi_i^{-1}. \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4}$$

Vermittels (3) erhält man sofort die Gleichung der Einhüllenden in Linienkoordinaten

$$\mathsf{A} \equiv \alpha_1 u_1^{-2} + \alpha_2 u_2^{-2} + \alpha_3 u_3^{-2} = 0 \tag{5}$$

oder

$$\mathsf{A} \equiv \alpha_1 u_2^2 u_3^2 + \alpha_2 u_3^2 u_1^2 + \alpha_3 u_1^2 u_2^2 = 0. \tag{5*}$$

Für die Transformation zu Punktkoordinaten hat man aus (5) und (4) als Koordinaten des jeweiligen Berührungspunktes Q (vgl. a. a. O. § 9)

$$\begin{cases} \theta\, x_i = -\, 2 \alpha_i u_i^{-3}, & \text{oder} \\ \theta'\, x_i = \alpha_i \xi_i^3. \end{cases} \tag{6}$$

Die Kurve A *wird also von einem Punkte Q beschrieben, dessen Koordinate den Kuben der Koordinaten des Punktes P proportional sind.* Vermittel (3) erhält man als Gleichung von A in Punktkoordinaten

$$\mathsf{A} \equiv \alpha_1^{\frac{1}{3}} x_1^{\frac{2}{3}} + \alpha_2^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} + \alpha_3^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{2}{3}} = 0 \tag{7}$$

oder rational gemacht

$$\mathsf{A} \equiv (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2)^3 - 27\, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 0. \tag{7*}$$

Die Kurve ist also eine C_6^4 (6. Ordg. u. 4. Klasse). Ihre Singularitäten erge sich aus (5*) und (7*) folgendermaßen. A hat auf jeder Fundamentals zwei Spitzen in den Punkten, wo K die Seiten schneidet, mit je der b Seite als gemeinsamer (Doppel-)Tangente. Außerdem muß A auch n Doppelpunkte haben. Für diese muß

$$\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial x_i} \equiv 3(\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2)^2 \cdot 2 \alpha_i x_i - 27 \cdot 2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 x_i x_{i+1}^2 x_{i-1}^2 = 0 \tag{8}$$

oder

$$\begin{cases} (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2)^2 - 9\, \alpha_2 \alpha_3 x_2^2 x_3^2 = 0 \\ (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2)^2 - 9\, \alpha_3 \alpha_1 x_3^2 x_1^2 = 0 \\ (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2)^2 - 9\, \alpha_1 \alpha_2 x_1^2 x_2^2 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

sein. Dieses System ist offenbar durch die Werte

$$\alpha_1 x_1^2 = \alpha_2 x_2^2 = \alpha_3 x_3^2 \tag{10}$$

erfüllt. Es gibt also vier Doppelpunkte mit den Koordinaten

$$x_1 : x_2 : x_3 = \alpha_1^{-\frac{1}{2}} : \pm \alpha_2^{-\frac{1}{2}} : \pm \alpha_3^{-\frac{1}{2}}. \tag{10*}$$

Was die Gestalt von A betrifft, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Erstens kann das Fundamentaldreieck reell sein. Damit dann K reell sei, muß einer der Koeffizienten α_i negativ sein. Infolgedessen werden die Doppelpunkte sämtlich imaginär, während vier Spitzen reell sind. Man kann nun sofort alle Gestalten der Kurve übersehen, wenn man bedenkt, daß das Viereck dieser vier Spitzen in ein Quadrat projiziert werden kann. Man hat dann nur $x_3 = 0$ als unendlich ferne Gerade, $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ als rechtwinklige Achsen zu nehmen und $\alpha_1 = \alpha_2 = -\alpha_3 = 1$ zu setzen. Diesem Falle entspricht nach Konstruktion und Gleichung die reguläre Astroide (vierspitzige Hypozykloide). *Die Kurve* A *ist also eine reelle Projektion der regulären Astroide, eine sogenannte »Projektive Astroide«* (vgl. Loria, *Spezielle Kurven*, Leipzig, B. G. Teubner 1902, S. 226). Sind $\mathfrak{x}_1 = 0$ und $x_2 = 0$ schiefwinklige Achsen, $x_3 = 0$ die unendlich ferne Gerade, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, so ergeben sich Amesedersche Astroiden (Loria S. 229), und wenn $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ rechtwinklig sind, die Evoluten der Ellipse und Hyperbel (s. Wieleitner, Zeitschr. math. nat. Unterr. **37**, 1906, S. 249—252).

Es kann nun aber zweitens das Fundamentaldreieck konjugiert imaginäre Seiten haben. Sei

$$x_1 = \mathfrak{x}_1 + i\mathfrak{x}_2, \quad x_2 = \mathfrak{x}_1 - i\mathfrak{x}_2, \tag{11}$$

dann muß, wenn die Kurve reell sein soll, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ sein, und es lautet ihre Gleichung

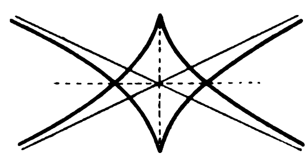
$$\mathsf{A}' \equiv [2\alpha(\mathfrak{x}_1^2 - \mathfrak{x}_2^2) + \alpha_3 x_3^2]^3 - 27\alpha^2\alpha_3(\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2)x_3^2 = 0. \tag{12}$$

Es sind dann nur zwei Spitzen reell (auf $x_3 = 0$), aber auch zwei Doppelpunkte (auf $\mathfrak{x}_2 = 0$, wenn $\alpha > 0$, $\alpha_3 > 0$; auf $\mathfrak{x}_1 = 0$, wenn $\alpha > 0$, $\alpha_3 < 0$), wie man aus (10*) leicht ableitet.

Um eine typische Form zu erhalten, setzen wir etwa $\mathfrak{x}_1 = 1$, $\mathfrak{x}_2 = y$, $x_3 = x$ für rechtwinklige Koordinaten, $\alpha_3 = 2\alpha$. Dann ergibt sich

$$\mathsf{A}_0' \equiv 4(x^2 - y^2 + 1)^3 - 27(1 + y^2)^2 x^2 = 0. \tag{13}$$

Diese Kurve A_0' hat auf $x = 0$ die beiden Spitzen mit den Ordinaten $y = \pm 1$; auf $y = 0$ die beiden Doppelpunkte mit den Abszissen $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ und zwei imaginäre Schnittpunkte ($x = \pm 2i$); auf der unendlich fernen Geraden zwei reelle Punkte (Asymptoten $y = \pm \frac{1}{2}x$) und zwei imaginäre Doppelpunkte ($y = \pm ix\sqrt{2}$). Ihre Gestalt ist die der beigegebenen Figur. *Die Kurve* A′ *ist also eine reelle Projektion der durch die Figur gegebenen Kurve, eine imaginäre Projektion der regulären Astroide.* Dieser Typus scheint noch nicht näher untersucht worden zu sein.



Da die Aufgabe projektiv ist, läßt sie sich ins Dualistische umwerten, was wir nur andeuten wollen. Dem ersten Typus entspricht die *Kreuzkurve* (Loria S. 210), dem zweiten die *Bernoullische Lemniskate.*

Speyer. H. Wieleitner.

Die Frage, welcher Punkt der Ebene die Kurve $\mathsf{A} = 0$ beschreibt, e
ledigt sich dadurch, daß seine Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3 = \alpha_1 \xi_1^3 : \alpha_2 \xi_2^3 : \alpha_3$
nicht nur der Gleichung $\frac{x_1}{\xi_1} + \frac{x_2}{\xi_2} + \frac{x_3}{\xi_3} = 0$, sondern auch den dre
Gleichungen

$$\left(\frac{x_3}{\xi_3} + \frac{x_1}{\xi_1}\right) : \left(\frac{x_1}{\xi_1} + \frac{x_2}{\xi_2}\right) = \alpha_2 \xi_2^2 : \alpha_3 \xi_3^2$$

$$\left(\frac{x_1}{\xi_1} + \frac{x_2}{\xi_2}\right) : \left(\frac{x_2}{\xi_2} + \frac{x_3}{\xi_3}\right) = \alpha_3 \xi_3^2 : \alpha_1 \xi_1^2$$

$$\left(\frac{x_2}{\xi_2} + \frac{x_3}{\xi_3}\right) : \left(\frac{x_3}{\xi_3} + \frac{x_1}{\xi_1}\right) = \alpha_1 \xi_1^2 : \alpha_2 \xi_2^2$$

genügen. Er ist also vom Sehnendreieck $\left(\frac{x_2}{\xi_2} + \frac{x_3}{\xi_3}\right)\left(\frac{x_3}{\xi_3} + \frac{x_1}{\xi_1}\right)\left(\frac{x_1}{\xi_1} + \frac{x_2}{\xi_2}\right) = 0$ des Kegelschnittes $\mathsf{K} = 0$ und dessen Tangentendreiseit

$$(-\alpha_1 \xi_1 x_1 + \alpha_2 \xi_2 x_2 + \alpha_3 \xi_3 x_3)(\alpha_1 \xi_1 x_1 - \alpha_2 \xi_2 x_2 + \alpha_3 \xi_3 x_3) \cdot (\alpha_1 \xi_1 x_1 + \alpha_2 \xi_2 x_2 - \alpha_3 \xi_3 x_3) = 0$$

das auf $\mathsf{T} = 0$ liegende Zentrum.

Holzminden. G. Kober.

2. Anfragen und Antworten.

32. Wenn in einem (natürlich spitzwinkligen) Dreiecke eine Höhe durch die beiden anderen halbiert wird, so liegt der Kosinus des Winkels, von dessen Scheitel die halbierte Höhe ausgeht, zwischen $\frac{1}{3}$ und 0. Ändert man das Teilungsverhältnis und läßt auch äußere Teilungen zu, so kommt man auf eine allgemeinere Aufgabe. Ist hierüber etwas veröffentlicht?

Halensee. P. Zühlke.

33. Existieren Untersuchungen über die von den Geraden der Ebene eingehüllten Kurven bei derjenigen Bewegung einer Ebene in sich, die durch Kurbelgetriebe (Gelenkviereck mit einer festgestellten Seite) vermittelt wird?

Speyer. A. Wieleitner.

Zu **6** (III. 85) (E. Jahnke). — Der Satz ist von dem nur allzu früh verstorbenen Oberlehrer Dr. H. Kühne verallgemeinert und in folgender Form ausgesprochen worden:

Das Zeigersystem $[h_1 \ldots h_m]$, wo die h der Reihe $1 \ldots n$ entnommen sind, wo ferner die h der Größe nach $h_1 < h_2 < \cdots < h_m$ geordnet sind, werde mit deutschen Buchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{e}$ bezeichnet. Es sei nun (a_{hi}) $(h, i = 1 \cdots n)$ eine beliebige quadratische Matrix mit nicht verschwindender Determinante und (α_{ih}) die zu ihr reziproke; dann ist bekanntlich

$$\sum_i a_{hi}\, \alpha_{ik} = \delta_{hk} \quad (h, i, k = 1, \cdots n)\,(\delta_{hh} = 1,\ \delta_{hk} = 0,\ h \neq k).$$

Nun setze man

$$\left| a_{h_j i_l} \right| (j, l = 1, \cdots m) = a_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{a} = [h_1, \ldots h_m] \\ \mathfrak{c} = [i_1, \ldots i_m] \end{pmatrix}$$

und entsprechend

$$\left|\alpha_{i_j k_l}\right| = \alpha_{\mathfrak{c}\mathfrak{e}} \quad [\mathfrak{e} = k_1 \ldots k_m],$$

dann ist:

$$\sum_{\mathfrak{c}} a_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\, \alpha_{\mathfrak{c}\mathfrak{e}} = \delta_{\mathfrak{a}\mathfrak{e}},$$

wobei über die verschiedenen $\mathfrak{c}$ summiert wird und $\delta_{\mathfrak{a}\mathfrak{e}}$ nur dann von 0 verschieden ist, wenn $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{e}$ übereinstimmt, dann aber den Wert 1 annimmt (vgl. Math. Ann. **56** (1903, 258).

Berlin. E. Jahnke.

---

3. Kleinere Notizen.

Über konvexe Kurven mit einer überall dichten Menge von Ecken.

Herr Jensen hat in einer Arbeit: Sur les fonctions convexes et les inégalités entre leurs valeurs moyennes (Acta Mathematica Bd. 30, p. 175—193) ein analytisches Beispiel einer konvexen Kurve gegeben, welche in der Umgebung jeder Stelle Ecken besitzt. Man kann nicht leicht aus jeder perfekten linearen Menge *geometrisch* eine solche Kurve auf anschauliche Weise aufbauen. Es sei P eine solche nirgends dichte perfekte lineare Punktmenge, welche bekanntlich durch eine Intervallmenge $\{\delta_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ definiert wird.

Wir denken nun diese Menge P als Wertmenge $\{y\}$ der Werte $y = f(x)$ einer ständig wachsenden höchstens zweiwertigen Funktion auf der y-Achse in folgender Weise ausgebreitet:

Mittels einer *ähnlichen* Abbildung (d. h. einer Abbildung mit Aufrechterhaltung der Ordnung) entspricht jedem rationalen Werte x_ν der Abszissenachse ein Intervall δ_ν der Intervallmenge $\{\delta_\nu\}$ mit den oberen und unteren Endpunkten $\bar{y}_\nu$ und $\underline{y}_\nu$. Diese seien die zu x_ν gehörigen beiden Funktionswerte. Im übrigen aber sei die Funktion $y = f(x)$ eindeutig, und zwar mögen den Punkten der Menge P, welche Grenzpunkte einer unendlichen Reihe von Intervallen $\{\delta_\mu\}$ sind, diejenigen irrationalen Punkte entsprechen, die in ähnlicher Abbildung Grenzpunkte der entsprechenden $\{x_\mu\}$ sind.

Diese Funktion ist, da infolge der ähnlichen Abbildung zu größeren x-Werten größere y-Werte gehören und umgekehrt, eine ständig wachsende Funktion. Wir wollen es durch geeignete Wahl der Abbildung einrichten, daß sie für $x = 0$ selbst Null, aber für negative x negativ, für positive x positiv ist. Zugleich ist sie aber auch das, was man eine *möglichst stetige* Funktion nennt. Geht man nämlich von einer überall dichten Menge von Stetigkeitsstellen der Funktion aus und bildet nach rechs und links die Ableitungen, so erhält man wieder genau die sämtlichen Funktionswerte.

Da in einer Intervallmenge $\{\delta_\nu\}$ die Zahl der Intervalle $\delta_\nu > h$, wo h eine willkürliche Zahl ist, *endlich* sind, falls man sich auf einen endlichen Bereich beschränkt, so erkennen wir, daß die Integrierbarkeitsbedingung für unsere Funktion erfüllt ist, da ja diese Intervalle zugleich die Größen des Sprunges an den Unstetigkeitsstellen bedeuten.

Das Integral $F(x) = \int\limits_0^x f(x)\,dx$ der Funktion $f(x)$ ist überdies, da sie *möglichst stetig* ist, so beschaffen, daß eindeutig wieder $F'(x) = f(x)$ ist. *Die Funktion $F(x)$ ist die verlangte konvexe Funktion.* In der Tat ist der Differenzenquotient

$$\Phi(x) = \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1}$$

für $x > x_1$ eine ständig wachsende Funktion. Denn er besitzt eine Ableitung nach x, die gleich

$$\Phi'(x) = \frac{F'(x)}{x - x_1} - \frac{F(x) - F(x_1)}{(x - x_1)^2} = \frac{F'(x)(x - x_1) - [F(x) - F(x_1)]}{(x - x_1)^2}$$

ist. Wir formulieren jetzt den ersten *Mittelwertsatz* für integrierbare Funktionen in der genaueren Form:

Ist $f(x)$ eine höchstens zweiwertige integrierbare Funktion im Intervalle $(a \dots b)$, so ist

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b - a) \cdot M(f(x)),$$

wo $M(f(x))$ einen Wert bedeutet, der derartig beschaffen ist, daß $f(x)$ im Intervall größere und kleinere Werte annimmt, falls nicht alle Werte mit $Mf(x)$ zusammenfallen, d. h. *$Mf(x)$ ist ein innerer Punkt des Intervalls der Ordinatenwerte von $f(x)$ zwischen a und b.*

Der Satz folgt unmittelbar aus der Definition des bestimmten Integrals. Ist die integrierte Funktion monoton, so ist die Ordinatenmenge begrenzt durch $f(a)$ und $f(b)$ und also $M(f(x)) < f(b)$ oder $\int\limits_a^b f(x)\,dx < f(b)(b - a)$, was auch unmittelbar klar ist.

Wenden wir diesen Satz auf den Zähler von $\Phi'(x)$ an, so folgt sofort

$$\int\limits_{x_1}^x f(x)\,dx = F(x) - F(x_1) = (x - x_1)\,M(f(x)) < f(x)\,(x - x_1),$$

also ist stets $\Phi'(x) > 0$ und $\Phi(x)$ eine ständig zunehmende Funktion.

Setzen wir jetzt $x_1 < x_3$ und $2x_2 = x_1 + x_3$, so ist

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{F(x_3) - F(x_1)}{x_3 - x_1},$$

oder da

$$x_3 - x_1 = 2(x_2 - x_1),$$

$$2F\left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right) < \frac{F(x_1) + F(x_3)}{2} \quad \text{q. e. d.}$$

Halle. Felix Bernstein.

Über einen Satz von Steiner.

Steiner hat in dem Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 2 (wiederabgedruckt in seinen gesammelten Werken, Bd. 1, S. 161) folgenden Satz aufgestellt:

„Ist im Raume irgend eine Anzahl n beliebiger Punkte gegeben, und ordnet man dieselben auf willkürliche Weise, zieht dann aus dem ersten nach dem zweiten die Gerade A; aus der Mitte der Geraden A nach dem dritten Punkte die Gerade B; aus dem Punkte, welcher von der Geraden B, von ihrem Anfange an gerechnet, das erste Drittel abschneidet, nach dem vierten Punkte die Gerade C; aus dem Punkte, welcher von D das erste Viertel abschneidet, nach dem fünften Punkte die Gerade D; aus dem Punkte, welcher von D das erste Fünftel abschneidet, nach dem sechsten Punkte die Gerade E usw.; multipliziert hierauf die Quadrate der genannten Geraden nach der Ordnung mit den Brüchen

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{5}{6}, \ldots, \frac{n-1}{n},$$

so hat die Summe aller Produkte, nämlich die Summe

$$\tfrac{1}{2}A^2 + \tfrac{2}{3}B^2 + \tfrac{3}{4}C^2 + \tfrac{4}{5}D^2 + \tfrac{5}{6}E^2 + \cdots + \frac{n-1}{n}Z^2$$

allemal einerlei Größe, in welcher beliebigen Ordnung man auch die gegebenen Punkte aufeinanderfolgen läßt."

Dieser Satz läßt sich nun in folgender Weise verallgemeinern:

Es seien n im Raume beliebig gelegene Punkte gegeben und in willkürlicher Reihenfolge mit $P_1, P_2, \cdots, P_n$ bezeichnet. O sei der Schwerpunkt dieses Punktsystems. Man ziehe die Gerade OP_1 und teile die Strecke $OP_1 = l_1$ durch den Punkt Q_1 so, daß das Verhältnis der gerichteten Strecken

$$\overline{OQ_1} : \overline{Q_1P_1} = 1 : \mu$$

ist, wo μ eine beliebige Zahl, ausgenommen nur die Zahlen $-1, -2, \cdots, -n$, bezeichnet. Darauf verbinde man den Teilpunkt Q_1 mit dem Punkte P_2 und teile die Strecke $Q_1P_2 = l_2$ durch den Punkt Q_2 so, daß sich

$$\overline{Q_1Q_2} : \overline{Q_2P_2} = 1 : \mu + 1$$

verhält. Weiter verbinde man den Punkt Q_2 mit dem Punkte P_3 und teile die Strecke $Q_2P_3 = l_3$ durch den Punkt Q_3 so, daß sich

$$\overline{Q_2Q_3} : \overline{Q_3P_3} = 1 : \mu + 2$$

verhält. So fahre man fort, schließlich verbinde man den Punkt Q_{n-1}, der die Strecke $Q_{n-2}P_{n-1} = l_{n-1}$ so teilt, daß sich

$$\overline{Q_{n-2}Q_{n-1}} : \overline{Q_{n-1}P_{n-1}} = 1 : \mu + n - 2$$

verhält, mit P_n und setze $Q_{n-1}P_n = l_n$.

Multipliziert man dann die Quadrate der Strecken $l_1, l_2, \cdots, l_n$ der Reihe nach mit den Brüchen

$$\frac{\mu}{\mu+1}, \frac{\mu+1}{\mu+2}, \ldots, \frac{\mu+n-1}{\mu+n},$$

so hat die Summe S aller dieser Produkte:

$$S = \frac{\mu}{\mu+1} l_1^2 + \frac{\mu+1}{\mu+2} l_2^2 + \cdots + \frac{\mu+n-1}{\mu+n} l_n^2$$

stets denselben Wert, in welcher beliebigen Weise man auch die gegebenen n Punkte aufeinanderfolgen läßt und welchen Wert auch μ haben mag, und zwar ist S gleich der Summe der Quadrate der Abstände der gegebenen n Punkte von ihrem Schwerpunkte.

Für $\mu = 0$ erhält man den Steinerschen Satz als speziellen Fall. Für $\mu = \infty$ ist S unmittelbar die Summe

$$\overline{OP_1}^2 + \overline{OP_2}^2 + \cdots + \overline{OP_n}^2.$$

Die Figur schließt sich stets, da $Q_{n-1} P_n$ durch O hindurchgehen muß und von O im Verhältnis $1 : \mu + n - 1$ geteilt wird.

Der Satz, dessen Beweis sich mit den elementarsten Mitteln der analytischen Geometrie führen läßt, findet vielleicht öfter als hübsches Übungsbeispiel in ihr Verwendung.

Jena, 30. April 1907. R. Haussner.

Ein Beitrag zum isoperimetrischen Problem in der Ebene.

Steiner beweist die bekannte Eigenschaft des Kreises unter Benutzung des Satzes, daß der Umfangswinkel im Halbkreise ein rechter ist, nachdem er gezeigt hat, daß rechtwinklige Dreiecke auftreten müssen. In folgendem Beitrag soll ein etwas anderer Weg eingeschlagen werden.

Ein in einer Ebene gegebener, sich nicht durchsetzender, geschlossener Linienzug von endlicher Länge umschließt eine Fläche von bestimmtem Inhalte. Zu jedem Punkte X der Linie kann man ein-eindeutig einen

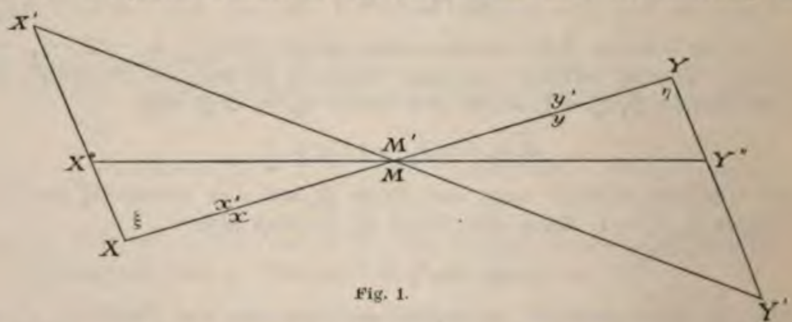


Fig. 1.

Punkt Y so bestimmen, daß der Linienzug durch das Punktepaar X, [illegible] halbiert wird. Desgleichen gibt es zu jedem Punkte X ein-eindeutig einen solchen Punkt Z, daß die Gerade XZ die von dem Linienzug umschlossene Fläche halbiert. Ist der Linienzug z. B. ein Dreieck ABC, und läßt man X mit A zusammenfallen, so ist Y auf BC der Berührungspunkt des der Seite a anbeschriebenen Kreises und Z ist der Mittelpunkt von a.

Wir untersuchen nun einen Linienzug, bei dem für jede Lage von X die zugehörigen Punkte Y und Z zusammenfallen. Sei also X, Y ein b[illegible] liebiges Punktpaar und X', Y' ein benachbartes, so muß zunächst $XX' = YY'$ sein und der Schnittpunkt M von XY und $X'Y'$ wird innerhalb der Fläche liegen. Nehmen wir XX' sowie YY' als geradlinig an und setzen

$$XM = x, \quad YM = y, \quad \widehat{X} = \xi, \quad \widehat{Y} = \eta,$$

so folgt aus der weiteren Bedingung $\triangle\, XX'M = \triangle\, YY'M$ die Gleichung

$$x \sin \xi = y \sin \eta .$$

Wählt man nun X'' zwischen X und X', so liegt der zugeordnete Punkt Y'' zwischen Y und Y', und es ist $XX'' = YY''$. Schneiden sich die Geraden XY und $X''Y''$ in M', und setzt man $XM' = x'$, $YM' = y'$, so folgt aus der Bedingung $\triangle\, XX''M' = \triangle\, YY''M'$ die Gleichung

$$x' \sin \xi = y' \sin \eta .$$

Da aber $x + y = x' + y'$, so ergibt sich $x = x'$, $y = y'$, M' fällt mit M zusammen und endlich ist $XX' \parallel YY'$.

Es folgt also der Satz:

Ein im Endlichen gelegener, geschlossener, sich nicht durchsetzender Linienzug von der Eigenschaft, daß durch jeden seiner Punkte eine Gerade geht, die Umfang und Inhalt zugleich halbiert, ist eine Figur mit Mittelpunkt.

Als Beispiel sei etwa erwähnt die Ellipse, ferner ein Polygon mit gerader Eckenzahl und parallelen Gegenseiten. Jede durch den Mittelpunkt gehende Strecke XY heißt ein Durchmesser der Figur.

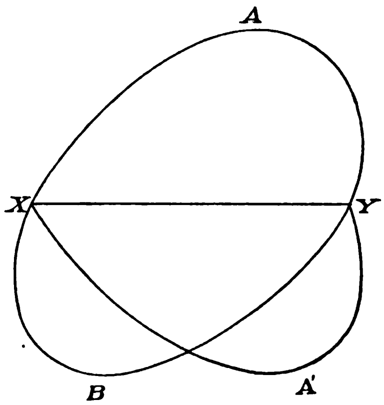


Fig. 2.

Mit Hilfe des soeben bewiesenen Satzes kann man nun einfach zeigen, *daß unter allen Linien gleicher Länge in einer Ebene der Kreis die größte Fläche umschließt.*

Zunächst ist sofort klar, daß die gesuchte Maximalfläche gegebenen Umfanges von einer nach außen überall konvexen Linie begrenzt ist, also ein Oval sein muß, oder ein „gewöhnliches" Polygon, dessen Seiten geradlinig oder krumm sein können. Man würde ja sonst durch Überbrücken einer etwa vorhandenen einspringenden Ecke eine Figur von kleinerem Umfange und größerer Fläche, also durch ähnliche Vergrößerung eine Figur von dem gegebenen Umfange und noch größerer Fläche erhalten.

Sei nun k die gesuchte Linie, und bestimmen wir zu irgend einem ihrer Punkte X den zugehörigen, den *Umfang* halbierenden Punkt Y, so muß die Gerade XY auch den Inhalt halbieren. Denn wollte man behaupten, daß der Teil XAY größer wäre als XBY, so spiegle man jenen an XY; dann würde das neue Stück $XA'Y$ mit XAY zusammen eine Figur ergeben, die bei demselben Umfange eine größere Fläche einschlösse, als $XAYB$. Die Figur k hat demnach die Eigenschaft, daß durch jeden ihrer Punkte eine den Umfang und zugleich den Inhalt halbierende Gerade geht; *sie hat also einen Mittelpunkt.*

Weiter aber ergibt sich sofort, *daß die Tangente in Y auf XY senkrecht stehen muß*, denn andernfalls würde die Figur $XAYA'$, die mit k gleichen Umfang und Inhalt hat, eine einspringende Ecke haben. Daraus aber folgt unmittelbar, daß alle Durchmesser von k einander gleich sind. *k ist also ein Kreis.*

Dresden. A. Witting.

Über einen geometrischen Satz von Dirichlet.

In einer seiner klassischen Abhandlungen gab Dirichlet[1]) ein geometrischen Satz in der Ebene an, der später auch in seine Zahlentheorie aufgenommen wurde — allerdings in einer etwas geänderten und einfachen Form. Dieser Satz läßt sich, wie der vorliegende Aufsatz zeigen soll, sehr leicht auf den Raum ausdehnen; in seiner ursprünglichen[3]) Fassung lautet er folgendermaßen: Es sei eine geschlossene ebene Kurve gegeben und σ der Inhalt der von ihr begrenzten Fläche. $F(\sigma)$ soll die Anzahl der Gitterpunkte innerhalb der Fläche bedeuten; dieselben werden aus zwei Systemen von zur y- und x-Achse parallelen Geraden (die voneinander um die Strecke a resp. b abstehen) gebildet. Falls nun die Kurve über jedes Maß hinaus wächst, dabei aber immer sich selbst ähnlich bleibt, so ist

$$(1) \qquad \lim_{\sigma=\infty} \frac{F(\sigma)\cdot a\cdot b}{\sigma} = 1.$$

Im III. Supplement zur Zahlentheorie wird der Satz etwas anders formuliert: es wird nämlich angenommen, die Fläche sei unveränderlich und endlich, die Abstände δ der äquidistanten Parallelen konvergieren aber gegen die Null. Dann wird behauptet und bewiesen, daß

$$(2) \qquad \lim_{\delta=0} F(\sigma)\cdot\delta^2 = \sigma$$

ist.

Den so gefaßten Satz wollen wir nun auf den Raum erweitern und zeigen, daß, falls eine einfach zusammenhängende, geschlossene, endliche Fläche F vorliegt (V sei das Volumen des von ihr umschlossenen Körpers) und wir ein räumliches Punktgitter haben, das aus drei Systemen von äquidistanten (δ sei der Abstand), zu den Koordinatenachsen senkrechten, parallelen Ebenen gebildet wird, die Gleichung

$$(3) \qquad \lim_{\delta=0} G\cdot\delta^3 = V$$

richtig ist; dabei bezeichnet G die Anzahl der im Inneren des Körpers liegenden Gitterpunkte.

Wir denken uns den Körper in kleine Prismen, die zur x-Achse parallel sind, zerschnitten; die Achse eines jeden Prismas sei eine zur x-Achse parallele Punktreihe, der Querschnitt der Prismen ein Quadrat vom Flächeninhalte δ^2 (Fig. 1.). So ist nun jede zur x-Achse parallele Reihe von Punkten

1) Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres. Crelle, Journ. f. Math., Bd. 19, pag. 324 = Werke, Bd. 1, pag. 411.

2) Vorles. üb. Zahlentheorie, herausgeg. von R. Dedekind, 4. Aufl. 1894, Supplement III, (§ 120), pag. 311.

3) Recherches etc. § 1.

von einem Prisma umschlossen, in dessen Achse sie liegt; die Höhe eines Prismas sei mit h bezeichnet (Fig. 2.). Dabei soll bemerkt werden, daß, falls der Körper

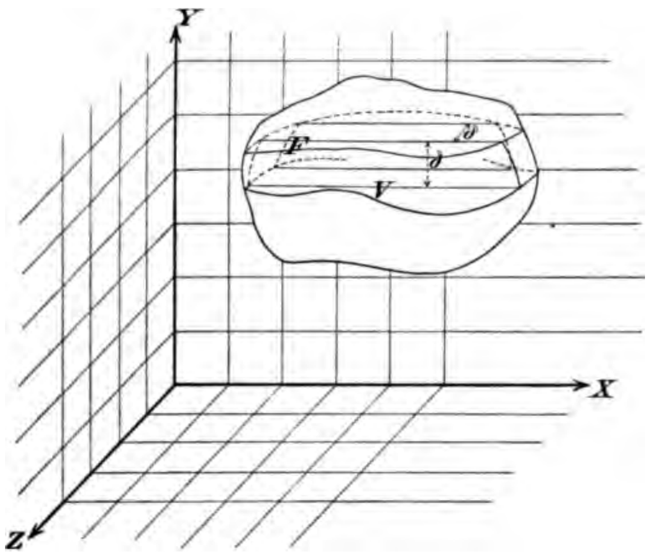


Fig. 1.

ein stellenweise **konkaver** ist, dies bei der Beweisführung kein Hindernis ist, weil wir ihn dann so in andere Teilkörper zerlegen, daß diese auf der

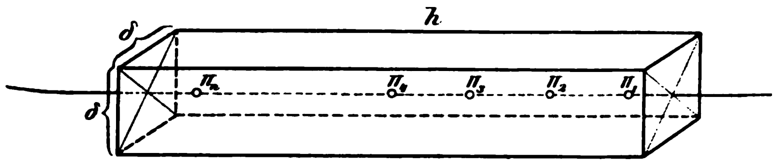


Fig. 2.

ganzen Oberfläche **konvex** sind, und führen dann den Beweis für jeden Körper einzeln. Nach den Grundprinzipien der Infinitesimalrechnung (Kubatur) ist

$$\lim_{\delta=0} \sum P = \lim_{\delta=0} \sum h\delta^2 = V \tag{4}$$ [1]),

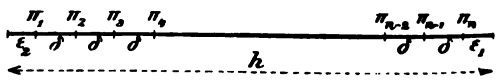


Fig. 3.

da ja $h\delta^2$ das Volumen eines jeden einzelnen Prismas bedeutet. (Die Summation ist über den ganzen Körper zu erstrecken.) Wenn n die Anzahl der auf der Achse der Prismen liegenden Gitterpunkte bezeichnet, so ist (Fig. 3)

$$h = (n-1)\delta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad (0 \leqq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \leqq 2\delta), \tag{5}$$

1) P sei das Volumen eines einzelnen Prismas.

also auch

$$h = n\delta + \varepsilon\delta \qquad (0 \leqq |\varepsilon| \leqq 1). \tag{6}$$

Somit ist

$$\sum P = \sum(n\delta^3 + \varepsilon\delta^3) = \delta^3 G + \sum \varepsilon\delta^3, \quad \text{weil } \sum n = G.$$

Die Summe $\sum \varepsilon\delta^3$ ist auch gleich $\delta \sum \varepsilon\delta^2$; diese letzte ($\sum \varepsilon$ höchstens gleich dem zur yz-Ebene parallelen Querschnitt des I also jedenfalls endlich ($= C$), somit konvergiert $\delta \sum \varepsilon\delta^2$ gleichzei δ gegen Null, d. h. es ist $\lim\limits_{\delta=0} \sum \varepsilon\delta^3 = \lim\limits_{\delta=0} C \cdot \delta = 0$. Es i $\lim\limits_{\delta=0} \sum P = \lim\limits_{\delta=0} \delta^3 G$, somit ist die anfangs behauptete Gleich $\lim\limits_{\delta=0} G \cdot \delta^3 = V$ bewiesen.

Diesen Satz können wir so formulieren, daß er dem ursprün Dirichletschen Satze ganz analog ist, und sagen: Es sei ein Kör Raume gegeben und V sein Volumen. $F(V)$ soll die Anzahl der räu Gitterpunkte bedeuten, die aus drei zueinander senkrechten Ebenen gebildet sind; die Abstände von je zwei benachbarten Ebenen sei a, b, c. Der Körper soll über jedes Maß hinaus wachsen, dabei abe sich selbst ähnlich bleiben; dann ist

$$\lim_{V=\infty} \frac{F(V) \cdot a \cdot b \cdot c}{V} = 1. \tag{7}$$

Dieser Satz ist inhaltlich gleichbedeutend mit dem früheren, ka leicht auch selbständig bewiesen werden, was jedoch dem Leser überla

Fiume. M. Kiselj

Über eine bekannte Eigenschaft der Zahl 30 und ihre Verallgeme

Es ist bereits des längeren bekannt, daß 30 die größte Zahl is Eigenschaft, daß sämtliche unter ihr liegenden, zu ihr teilerfremd Primzahlen sind; die Zahl 1 werde hier als Primzahl angesehen. wurde dieser Satz zunächst mit Hilfe des Tschebyschefsch „Zwischen a und $2a$ liegt wenigstens eine Primzahl, wo a irgen Zahl bedeutet." Später zeigte Herr Landau[1]), daß es nicht sei, beim Beweise dieses Satzes auf den Tschebyschefschen S zugehen, und bewies die oben erwähnte Eigenschaft der Za Abschätzung einer unendlichen Reihe. Herr Dehn regte mic an, es zu versuchen, selbige Eigenschaft der Zahl 30 ohne von unendlichen Reihen zu beweisen, und zugleich diese E verallgemeinern, d. h. zu untersuchen, ob es nicht eine grö der Eigenschaft gibt, daß alle zu ihr teilerfremden und unter Zahlen höchstens 2 oder 3 Primfaktoren enthalten. Im folg es denn versucht, zunächst in Nr. **1** für jene oben erwäh der Zahl 30 einen Beweis zu geben, der im wesentlichen Induktion stützt; in ganz analoger Weise soll in Nr. **2** b

---

1) Vergleiche dieses Archiv **1**, 138—142, 1901.

daß es auch eine größte Zahl von der Eigenschaft gibt, daß alle zu ihr teilerfremden und unter ihr liegenden Zahlen höchstens zwei Primfaktoren enthalten.

1. a) Ich betrachte das Produkt $A = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n$, wo $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$ ist, ferner $p_5, p_6, p_7, \ldots p_n$ sämtlich Primzahlen sind und endlich auch noch $p_5 < p_6 < p_7 \cdots < p_n$ ist. Von diesem Produkte sondere ich ab das Produkt der i ersten Primzahlen, also $B = p_1 p_2 p_3 \ldots p_i$, wo i der Bedingung genügt: $n - i + 1 < p_i$. Für $A = p_1 p_2 p_3 \ldots p_7$ bekomme ich also etwa: $B = p_1 p_2 p_3 p_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Nun ist aber $B = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 < \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_7}$, da $p_5 p_6 p_7 \geq 11 \cdot 13 \cdot 17$ ist. Füge ich zu diesem A weitere auf die früheren und aufeinanderfolgende Primfaktoren hinzu, so kann ich stets zu A mindestens 3 solche Faktoren hinzufügen, ehe ich zu B, um immer noch der Bedingung $n - i + 1 < p_i$ zu genügen, einen Faktor hinzufügen muß, da ja die Differenz zweier Primzahlen ≥ 2 ist. Füge ich aber immer nur dann, wenn ich zu A wieder drei Faktoren hinzugefügt habe, zu B einen Primfaktor hinzu, der überdies noch kleiner ist als jeder der zu A hinzukommenden Primfaktoren, so muß auch stets $B < \sqrt{A}$ bleiben für $n \geq 7$. Beweise ich nun noch, daß es eine Zahl $\varrho > 1$ und $< p_1 p_2 p_3 \ldots p_i$ gibt, die zu $p_1 p_2 p_3 \ldots p_n$ teilerfremd ist, so ist sicher auch $\varrho^2 < p_1 p_2 \ldots p_n$ teilerfremd zu $p_1 p_2 \ldots p_n$, also nicht mehr sämtliche zu $p_1 p_2 \ldots p_n$ teilerfremden Zahlen sind Primzahlen.

b) Es ist $(p_1 p_2 p_3 \ldots p_{i-1}) - 1$ teilerfremd zu $p_1 p_2 \ldots p_{i-1}$, also sind auch alle Glieder der arithmetischen Reihe $(p_1 p_2 \ldots p_{i-1}) - 1 + l(p_1 p_2 \ldots p_{i-1})$, wo $0 \leqq l < p_i$ ist, teilerfremd zu $p_1 p_2 \ldots p_{i-1}$. Unter den Gliedern dieser Reihe ist aber höchstens ein Glied durch p_i, ein Glied durch p_{i+1} usw., endlich höchstens ein Glied durch p_n teilbar; denn wäre $(p_1 p_2 \ldots p_{i-1}) - 1 + l_1(p_1 p_2 \ldots p_{i-1})$ und auch $(p_1 p_2 \ldots p_{i-1}) - 1 + l_2(p_1 p_2 \ldots p_{i-1})$ durch $p_{i+\sigma}$, wo $0 \leq \sigma \leqq (n - i)$ ist, teilbar, so müßte auch $l_1 - l_2$ durch $p_{i+\sigma}$ teilbar sein, und das ist unmöglich, da l_1 sowohl wie $l_2 < p_{i+\sigma}$ sind. Da die arithmetische Reihe aber p_i Glieder hat und nur $n - i + 1$ Faktoren von der Form $p_{i+\sigma}$ vorhanden sind, so muß sicher wegen $n - i + 1 < p_i$ ein Glied der Reihe zu $p_i p_{i+1} \ldots p_n$ teilerfremd sein, und da jedes Glied zu $p_1 p_2 \ldots p_{i-1}$ teilerfremd ist, so muß sicher ein Glied der arithmetischen Reihe zu $p_1 p_2 \ldots p_n$ teilerfremd sein.

c) Es existiert also eine Zahl $\varrho > 1$, die den Bedingungen genügt:

$$\varrho < \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n} \quad \text{und} \quad \varrho \text{ zu } p_1 p_2 \ldots p_n \text{ teilerfremd.}$$

Sind dann $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n, p_{n+1}$ die $n + 1$ ersten unmittelbar aufeinanderfolgenden Primzahlen, so muß ϱ mindestens einen Primzahlfaktor $> p_n$ enthalten. Aus $\varrho^2 < p_1 p_2 \ldots p_n$ folgt also für $n \geq 7$ allgemein $p_{n+1}^2 < p_1 p_2 \ldots p_n$. Es ist aber auch

$$p_7^2 = 17^2 < 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = p_1 p_2 \ldots p_6,$$

ferner

$$p_6^2 = 13^2 < 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = p_1 p_2 \ldots p_5$$

und

$$p_5^2 = 11^2 < 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = p_1 p_2 p_3 p_4.$$

Also gilt allgemein der Satz:

Das Quadrat der $(n+1)$ten Primzahl ist kleiner als das Produkt d[illegible]er n ersten Primzahlen, wenn nur $n \geqq 4$ ist.

d) Kein Produkt von n aufeinanderfolgenden Primzahlen hat al[illegible] für $n \geqq 4$ die verlangte Eigenschaft; dasselbe gilt aber auch von jede[illegible] Multiplum eines solchen Produktes, da dann immer das Quadrat des kleinste[illegible] in diesem Multiplum fehlenden Primfaktors kleiner ist als das Produkt d[illegible] vorhergehenden Primfaktoren, um so mehr also kleiner ist als jenes Multi[illegible] plum. Die Zahl $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ endlich hat die verlangte Eigenschaft; würd[illegible] eine Zahl m den Faktor 2 oder 3 oder 5 nicht enthalten, so müßte si[illegible] falls sie auch noch die verlangte Eigenschaft haben soll, schon $< 2^2$ od[illegible] 3^2 oder 5^2 sein. Da endlich noch kein Produkt von 30 mit einer Za[illegible] außer 7 (für 7 ist der Beweis oben schon gegeben) die verlangte Eige[illegible] schaft hat, da dann stets 7^2 kleiner als dieses Produkt und zu diese[illegible] Produkt teilerfremd ist, so muß mithin 30 die größte Zahl sein von d[illegible] Eigenschaft, daß sämtliche unter ihr liegenden, zu ihr teilerfremden Zahl[illegible] Primzahlen sind.

2. a) Daß es eine größte Zahl von der Eigenschaft gibt, daß a[illegible]alle unter ihr liegenden, zu ihr teilerfremden Zahlen höchstens 2, 3 oder [illegible] allgemein a Primfaktoren enthalten, wo 1 nicht als Primfaktor gilt, ist bere[illegible]its von Herrn Maillet[1]) bewiesen worden, doch auch nur mit Hilfe des o[illegible]ben erwähnten Tschebyschefschen Satzes. Um analog wie in Nr. **1** nun zu beweisen, daß es eine größte Zahl gibt von der Eigenschaft, daß alle u[illegible]ter ihr liegenden, zu ihr teilerfremden Zahlen höchstens zwei Primfakt[illegible]en enthalten, betrachte ich wieder das Produkt $A = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n$, [illegible]wo jetzt ist $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, ferner $p_6, p_7, \ldots p_n$ Primzahlen sind und endlich $p_6 < p_7 < p_8 < \cdots < p_n$ ist. Von die[illegible]em Produkte sondere ich wieder ab das Produkt der i ersten Primza[illegible]en, also $B = p_1 p_2 \ldots p_i$, wo i wieder der Bedingung genügt: $n - i + 1 < p_i$, z. B. für $A = p_1 p_2 \cdots p_{12}$, $B = p_1 p_2 \ldots p_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Nun ist $B = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 < 2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 29 < \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 37} \leqq \sqrt[3]{p_1 p_2 p_3 \cdots p_{12}}$. Also bleibt wie in Nr. **1**, da ich zu A stets erst drei Primfaktoren hi[illegible]zunehmen kann, ehe ich zu B einen Faktor hinzunehmen muß, für $n \geqq 12$ auch stets $B = p_1 p_2 \cdots p_i < \sqrt[3]{p_1 p_2 \cdots p_n} = \sqrt[3]{A}$.

b) Nun existiert, wie in **1** b) bewiesen wurde, stets ein $\varrho < p_1 p_2 p_3 \cdots p_i$, das teilerfremd ist zu $p_1 p_2 p_3 \cdots p_n$. Sind also wieder wie in N[illegible] **1** $p_1, p_2, p_3 \cdots p_n, p_{n+1}$ die $n+1$ ersten unmittelbar aufeinanderfolge[illegible]den Primzahlen, so muß ϱ wenigstens einen Primzahlfaktor $> p_n$ enthalten, es f[illegible]lgt also wegen $\varrho^3 < p_1 p_2 \cdots p_n$ für $n \geqq 12$, $p_{n+1}^3 < p_1 p_2 \cdots p_n$. Es ist aber a[illegible]ch:

$$p_{12}^3 = 37^3 < 2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 29 \cdot 31 = p_1 p_2 p_3 \cdots p_{10} p_{11},$$
$$p_{11}^3 = 31^3 < 2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 23 \cdot 29 = p_1 p_2 p_3 \cdots p_9 p_{10},$$
$$p_{10}^3 = 29^3 < 2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 19 \cdot 23 = p_1 p_2 p_3 \cdots p_8 p_9,$$
$$p_9^3 = 23^3 < 2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 17 \cdot 19 = p_1 p_2 p_3 \cdots p_7 p_8,$$
$$p_8^3 = 19^3 < 2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 13 \cdot 17 = p_1 p_2 p_3 \cdots p_6 p_7,$$
$$p_7^3 = 17^3 < 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6,$$

1) Vergl. L'Intermédiaire des Mathématiciens VII, 1900.

und endlich

$$p_6^3 = 13^3 < 2 . 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 .$$

Es folgt also allgemein der Satz:

Die dritte Potenz der $(n + 1)$*ten Primzahl ist kleiner als das Produkt der* n *ersten Primzahlen, wenn nur* $n \geqq 5$ *ist.*

c) Kein Produkt der n ersten unmittelbar aufeinanderfolgenden Primzahlen hat also für $n \geqq 5$ die verlangte Eigenschaft; dasselbe gilt von jedem Multiplum eines solchen Produktes. Die Zahl $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ hat die verlangte Eigenschaft, aber auch noch die Zahl $6 \cdot 210 = 1260$; nicht mehr hat aber $m = t \cdot 210$ für $t \geqq 7$ die verlangte Eigenschaft, da ja, wenn t den Faktor 11 nicht enthält, $11^3 < m$ und zu m teilerfremd ist, und wenn t den Faktor 11 enthält, wir auf den oben schon erledigten Fall zurückkommen, wo m das Produkt der n ersten Primzahlen, $n \geqq 5$, enthält. Enthält endlich m den Faktor 2 oder 3 oder 5 oder 7 nicht, so müßte m, wenn es doch noch die verlangte Eigenschaft haben sollte, schon $< 2^3$ oder 3^3 oder 5^3 oder 7^3 sein. Mithin ist 1260 die größte Zahl, die die verlangte Eigenschaft hat. Alle Zahlen, die diese Eigenschaft haben, sind:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96, 102, 108, 114, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 330, 420, 630, 840, 1050 und 1260.

Zusatz: Um zu zeigen, daß es eine größte Zahl gibt von der Eigenschaft, daß alle unter ihr liegenden, zu ihr teilerfremden Zahlen höchstens drei Primfaktoren enthalten, beachte ich den Umstand, daß die Differenz einer Primzahl und der übernächsten $\geqq 6$ ist. Ich sondere also wieder wie in Nr. **1** und **2** das Produkt der i ersten Primzahlen $B = p_1 p_2 \ldots p_i$ ab von dem Produkte $A = p_1 p_2 \ldots p_n$, doch so, daß jetzt i der Bedingung genügt: $(n - i + 9) < p_i$. Ich kann dann stets zu A erst 8 Primzahlen hinzunehmen, ehe ich zu B zwei Primfaktoren hinzufügen muß, um immer noch der Bedingung zu genügen: $n - i + 1 < p_i$. Also bleibt auch, da ich zu A immer 4 mal soviel Primzahlen hinzufüge als zu B, auch immer $B^4 < A$, wenn es nur eine erste Absonderung $B = p_1 p_2 \ldots p_i$ gibt, für die $B^4 < A$ ist; daß es eine solche gibt, zeigt der Versuch. Indem ich analog verfahre wie in Nr. **1** und **2**, finde ich dann, daß 30030 die größte Zahl ist von der Eigenschaft, daß alle unter ihr liegenden, zu ihr teilerfremden Zahlen höchstens drei Primfaktoren enthalten.

Münster, Juli 1907. H. Bonse.

Verallgemeinerung der Aufgaben 145 (P. Epstein) und 165 (F. Schlegel).

Geht man in **145** von der ursprünglichen Ebene zu einer affinen Ebene über (etwa durch Parallelprojektion), so erhält man den Satz: „Alle Geraden, die aus zwei festen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen Sehnen von gleicher Länge ausschneiden, umhüllen eine gewisse Parabel."

Ebenso folgt aus dem Satz **165** durch Übergang zum affinen Raume: „A... Ebenen, die aus zwei festen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoi... flächengleiche (und daher kongruente) Ellipsen ausschneiden, umhüllen ... gewisses elliptisches Paraboloid."

Aussig, Böhmen. stud. math. J. Krug.

4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Band III 1. Heft 2: G. Fa... Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historisc... Entwicklung im XIX. Jahrhundert. — G. Fano, Kontinuierliche geometris... Gruppen. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip. — Band IV 2... Heft 2: O. Tedone: und A. Timpe, Spezielle Ausführungen zur Statik elastisc... Körper. — H. Lamb, Schwingungen elastischer Körper, insbesondere Akust... Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 5.—

Fenkner, H., Arithmetische Aufgaben. Ausgabe A. Teil II: Pensum der Pri... 2. umgearb. Auflage. Berlin 1907, O. Salle. ℳ 2.—

Gutzmer, A., Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutsc... Naturforscher und Ärzte. Leipzig 1907, B. G. Teubner.

Heussi, J., Lehrbuch der Physik. 7. Aufl., E. Götting. Berlin, O. Salle. ℳ 5.—

Lampa, A., Lehrbuch der Physik. Wien 1908, W. Braumüller. ℳ 10.—

Lorentz, H. A., Abhandlungen über theoretische Physik. In zwei Bänden. Erster Ba... Zweite Lieferung. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 6.—. I. Band kompl. ℳ 16.—

Michaelis, C., Die Stadt Berlin und das Reformgymnasium. Zweite Aufl... Leipzig 1907, Dürrsche Buchhandlung. ℳ 0...

Montcheuil, M. de, Etude d'un système de six couples de surfaces applicab... Bruxelles 1907, J. Polleunis.

Müller-Pouillet. Lehrbuch der Physik und Meterologie. Zehnte Aufl... Dritter Band, viertes Buch. Wärmelehre, chemische Physik, Thermodyna... und Meteorologie. Braunschweig 1907, Fr. Vieweg u. Sohn. ℳ 18.—

Neikes, H., Der goldene Schnitt und die „Geheimnisse der Cheopspyrami... Cöln 1907, Du Mont-Schauberg.

Rozé, P., Théorie et usage de la règle à calculs. Paris 1907, Gauthier-Villa...

Saltykow, N., Recherches sur la théorie des équations aux dérivées partielle... premier ordre d'une fonction inconnue. Charkow 1905.

Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Bd. II. Integralrechnung. 3. Aufl. neu bearb. von G. Scheffers. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 1...

Schmids, B., Der naturwissenschaftliche Unterricht und die wissensch. Ausbildung der Lehramtskandidaten der Naturwiss. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 6.—

Vogt, H., Mathematik und Reformgymnasium. Leipzig 1907, Dürr. ℳ 0.75.

Wüllner-Hagenbach, Lehrbuch der Experimentalphysik. Erster Band: Allgemeine Physik und Akustik. Leipzig 1907, B. G. Teubner.

Berichtigung.

Auf S. 113, vorletzte Zeile, ist statt „Gebiete" zu lesen: „Gebilde".

S. 173 sind Z. 14 v. u. die Worte „I_a und" zu streichen. Ebendaselbst Z. 1 v. u. lies II_a statt II.

Über hyperboloïdische Würfe.

Von J. Neuberg in Lüttich.

Ich nenne *hyperboloïdisches Quadrupel* oder kürzer *hyperboloïdischen Wurf* den Verein von vier Erzeugenden derselben Art eines Hyperboloïds. In der neueren Geometrie bilden oft vier analoge Ecktransversalen eines Tetraeders ein solches Gebilde und ersetzen die drei sich in einem Punkte treffenden Ecktransversalen des Dreiecks. Dies ist z. B. der Fall mit den Höhen des Tetraeders; mit den Geraden, welche die Ecken und die Berührungspunkte der gegenüberliegenden Ebenen mit der eingeschriebenen Kugel (oder irgend einer eingeschriebenen Quadrik) verbinden usw. An Stelle von zwei perspektiven Dreiecken treten oft zwei *hyperboloïdische Tetraeder* auf, d. h. solche, deren Verbindungslinien der entsprechenden Ecken oder, was dasselbe ist, deren Schnittgeraden der entsprechenden Ebenen einen hyperboloïdischen Wurf abgeben.

Die folgende Abhandlung enthält bekannte Tatsachen[1]), mitunter aber auch einige neue Sätze. Sie hat zum Hauptzwecke, stärker als es gewöhnlich in den Lehrbüchern und Zeitschriften geschieht, die einfachsten geometrischen und analytischen Methoden hervorzuheben, um hyperboloïdische Würfe zu erkennen. Ich selbst habe öfter diesen Gegenstand behandelt[2]) oder Beispiele angegeben.

1. Es seien m_1, m_2, m_3, m_4 vier von den Ecken des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ ausgehende Geraden, welche die gegenüberliegenden Ebenen in den Punkten M_1, M_2, M_3, M_4 schneiden. Wenn sie einen hyperboloïdischen Wurf bilden, so geht durch A_1 eine Gerade n_1, welche

1) Die nachstehenden Betrachtungen zeigen unter anderem manche Analogien [m]it den Untersuchungen von O. Hermes: „Sätze über das Tetraeder, welche dem [de]n Desargues über ebene Dreiecke analog sind“ im Programm des Cölnischen [Gy]mnasiums, Berlin 1856, S. 1—25. — „Über homologe Tetraeder“, Journ. für die [rei]ne und angewandte Mathematik **56**, 218—246, 1857.

2) Ich führe nur an: *Nouvelle Correspondance mathématique*, Band V, 1879, [S]. 315—320; *Mémoire sur le Tétraèdre*, 1883, veröffentlicht in den Mémoires de [l'A]cadémie royale de Belgique.

m_2, m_3, m_4 trifft und folglich der gemeinsame Schnitt der Ebenen $A_1 m_2$, $A_1 m_3$, $A_1 m_4$ ist. Nennt man P_2, P_3, P_4 die Schnittpunkte $(A_1 M_2, A_3 A_4)$, $(A_1 M_3, A_4 A_2)$, $(A_1 M_4, A_2 A_3)$, so sind die Geraden $A_2 P_2$, $A_3 P_3$, $A_4 P_4$ die Spuren der Ebenen $A_1 m_2$, $A_1 m_3$, $A_1 m_4$ in der Ebene $A_2 A_3 A_4$, und als solche müssen sie sich in einem Punkte N_1 treffen, was man oft vermittels des Cevaschen Satzes erkennen kann. Ähnliche Bedingungen finden statt in den andern Ebenen des Tetraeders; aber es genügen drei Bestätigungen.

Beispiele: Die Geraden, welche die Ecken des Tetraeders mit dem Mittelpunkte der den gegenüberliegenden Dreiecken eingeschriebenen Kreise verbinden, bilden einen hyperboloïdischen Wurf. So auch die Ecktransversalen, welche durch die Lemoineschen Punkte der gegenüberliegenden Dreiecke gehen.

2. Es seien jetzt $A_1 A_2 A_3 A_4$, $B_1 B_2 B_3 B_4$ zwei hyperboloïdische Tetraeder; die Geraden $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, $A_4 B_4$ mögen m_1, m_2, m_3, m_4 heißen. Die Koordinaten der Punkte B_1, B_2, B_3, B_4 in bezug auf das Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ bezeichne ich wie folgt:

$$\text{(I)} \qquad \begin{array}{llll} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \ldots B_1, \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \ldots B_2, \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \ldots B_3, \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \ldots B_4. \end{array}$$

Die Gleichungen der Ebenen $A_1 m_2$, $A_1 m_3$, $A_1 m_4$ sind:

$$\text{(II)} \qquad \frac{x_3}{\alpha_{23}} = \frac{x_4}{\alpha_{24}}, \quad \frac{x_4}{\alpha_{34}} = \frac{x_2}{\alpha_{32}}, \quad \frac{x_2}{\alpha_{42}} = \frac{x_3}{\alpha_{43}}.$$

Damit diese Ebenen eine gemeinsame Schnittgerade n_1 haben, muß man setzen

$$\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{42} = \alpha_{32}\alpha_{43}\alpha_{24}.$$

Ähnlich findet man die Bedingungen für die Schnittgeraden n_2, n_3, n_4:

$$\alpha_{34}\alpha_{41}\alpha_{13} = \alpha_{43}\alpha_{14}\alpha_{31},$$
$$\alpha_{41}\alpha_{12}\alpha_{24} = \alpha_{14}\alpha_{21}\alpha_{42},$$
$$\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} = \alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13}.$$

Da das Produkt der ersten und dritten Gleichung gleich ist dem Produkte der zweiten und vierten, hat man nur drei verschiedene Bedingungen.

Wenn man beachtet, daß einzig die Verhältnisse der Koordinaten eines Punktes in Betracht kommen, können die Koordinaten der Punkte B_2, B_3, B_4 mit solchen Zahlen multipliziert werden, daß man $\alpha_{21} = \alpha_{12}$, $\alpha_{31} = \alpha_{13}$, $\alpha_{41} = \alpha_{14}$ erhält; dann geben die drei letzten Bedingungen sofort: $\alpha_{43} = \alpha_{34}$, $\alpha_{42} = \alpha_{24}$, $\alpha_{32} = \alpha_{23}$. Dieses Ergebnis kann man folgendermaßen ausdrücken:

Das Tetraeder $B_1 B_2 B_3 B_4$ ist hyperboloïdisch mit dem Bezugtetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$, wenn die Matrix (I) der Koordinaten der Ecken symmetrisch ist oder nach Multiplikation der Zeilen mit geeigneten Zahlen[1]) *symmetrisch wird.*

Wir werden jetzt immer die Symmetrie der Matrix (I) voraussetzen.

3. Die Gleichungen der Geraden m_1, m_2, m_3, m_4 sind

$$\begin{aligned}
& && \frac{x_2}{\alpha_{12}} = \frac{x_3}{\alpha_{13}} = \frac{x_4}{\alpha_{14}}, \\
& \frac{x_1}{\alpha_{21}} = && \frac{x_3}{\alpha_{23}} = \frac{x_4}{\alpha_{24}}, \\
& \frac{x_1}{\alpha_{31}} = \frac{x_2}{\alpha_{32}} && = \frac{x_4}{\alpha_{34}}, \\
& \frac{x_1}{\alpha_{41}} = \frac{x_2}{\alpha_{42}} = \frac{x_3}{\alpha_{43}}. &&
\end{aligned}$$

Man kann die Nenner als *Koordinaten* dieser Ecktransversalen auffassen und sie in der symmetrischen Matrix

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} \cdot & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \cdot & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \cdot & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \cdot \end{vmatrix}$$

mit leerer Hauptdiagonale aufstellen.

Die Gleichungen (II) der Geraden n_1 werden jetzt

$$\alpha_{34} x_2 = \alpha_{42} x_3 = \alpha_{23} x_4;$$

hieraus schließt man die Koordinatenmatrix der Erzeugenden zweiter Art der Regelfläche $m_1 m_2 m_3 m_4$, welche durch die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 gehen:

$$\text{(IV)} \qquad \begin{vmatrix} \cdot & \frac{1}{\alpha_{34}} & \frac{1}{\alpha_{42}} & \frac{1}{\alpha_{23}} \\ \frac{1}{\alpha_{34}} & \cdot & \frac{1}{\alpha_{41}} & \frac{1}{\alpha_{13}} \\ \frac{1}{\alpha_{24}} & \frac{1}{\alpha_{41}} & \cdot & \frac{1}{\alpha_{12}} \\ \frac{1}{\alpha_{23}} & \frac{1}{\alpha_{31}} & \frac{1}{\alpha_{12}} & \cdot \end{vmatrix}$$

---

1) Aus dieser Regel kann man leicht die von Herrn E. Jahnke angegebenen Bedingungen der vierfach hyperboloïdischen Tetraeder ableiten (Archiv (3) 8, 81).

Man nenne *komplementar* die Elemente α_{12} und α_{34}, α_{13} und α_{24}, α_{14} und α_{23} einer symmetrischen Matrix vierter Ordnung; dann geh man von (III) zu (IV) über, indem man die Elemente durch die um gekehrten Werte der komplementaren Elemente ersetzt.

4. Es seien jetzt p_1, p_2, p_3, p_4 vier in den Ebenen des Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ liegende Geraden. Wenn sie einen hyperboloïdischen Wu bilden, trifft die durch p_1 gehende Ebene $A_2A_3A_4$ die Linien $p_2, p_3,$ in drei Punkten Q_2, Q_3, Q_4, welche auf einer Geraden q_1 liege Diese Punkte sind offenbar die Schnittpunkte (p_2, A_3A_4), $(p_3, A_4A$ (p_4, A_2A_3); die Kollinearität wird oft in den Anwendungen mit Hil des Satzes von Menelaus bestätigt. Ähnlich verfährt man in d anderen Tetraederebenen.

5. Betrachten wir jetzt ein Tetraeder $B_1B_2B_3B_4$, dessen Eben die entsprechenden Ebenen des Grundtetraeders $A_1A_2A_3A_4$ in v hyperboloïdischen Geraden p_1, p_2, p_3, p_4 schneiden. Die Gleichung der ersten Ebenen seien

$$u_{i1}x_1 + u_{i2}x_2 + u_{i3}x_3 + u_{i4}x_4 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Die oben genannten Punkte Q_2, Q_3, Q_4 genügen in der Eb ne $A_2A_3A_4$ den Gleichungen

$$\begin{aligned} x_2 &= 0, & & u_{23}x_3 + u_{24}x_4 = 0, \\ x_3 &= 0, & u_{32}x_2 & \phantom{+ u_{23}x_3} + u_{34}x_4 = 0, \\ x_4 &= 0, & u_{42}x_2 &+ u_{43}x_3 \phantom{+ u_{24}x_4} = 0. \end{aligned}$$

Drückt man aus, daß sie auf derselben Geraden liegen, so fi det man die Bedingung

$$u_{23}u_{34}u_{42} = u_{32}u_{43}u_{24}.$$

Fährt man auf diesem Wege fort in den anderen Koordina en-ebenen, so gelangt man zum folgenden Schluß:

Wenn die Schnittgeraden der Ebenen eines Tetraeders $B_1B_2B_3B_4$ mit den Ebenen des Koordinatentetraeders $A_1A_2A_3A_4$ einen hyperb loï-dischen Wurf bilden, so sind die Koordinaten der ersten Ebenen die Elemente einer symmetrischen Matrix oder werden es nach Mult pli-kation der Zeilen mit passenden Zahlen.

Man kann die Größen (u_{12}, u_{13}, u_{14}), (u_{21}, u_{23}, u_{24}), ... als K or-dinaten der in den Koordinatenebenen liegenden Geraden p_1, p_2, p_3, p_4 auffassen.

Der Übergang von der Koordinatenmatrix der Geraden p_1, p_2, p_3, p_4 zu der Koordinatenmatrix der Geraden q_1, q_2, q_3, q_4 geschieht, wie schon oben (3) angedeutet wurde.

Das Dualitätsprinzip hätte uns erlaubt sofort die Schlüsse der zwei letzten Nummern aus den vorhergehenden abzuleiten.

6. *Sind zwei Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ so beschaffen, daß die Verbindungsgeraden der entsprechenden Ecken einen hyperboloïdischen Wurf bilden, so kommt dieselbe Eigenschaft den Schnitten der entsprechenden Ebenen zu.*

In der Tat, die Koordinaten der Ebenen des Tetraeders $B_1B_2B_3B_4$ sind den ersten Minoren der Matrix (I) gleich und sind somit die Elemente einer zweiten symmetrischen Matrix.

7. *Ein Tetraeder und sein Poltetraeder in bezug auf eine Quadrik sind hyperboloïdisch.*

Zum Beweise genügt es die Gleichungen der Polarebenen der Ecken des Koordinatentetraeders hinzuschreiben.

8. Jede lineare Verwandtschaft verwandelt einen hyperboloïdischen Wurf in einen andern hyperboloïdischen Wurf.

Es gibt auch andere Verwandtschaften, welche die hyperboloïdische Lage beibehalten. Die Matrix (1) bleibt noch symmetrisch, wenn man die Elemente durch ihre umgekehrten Werte ersetzt. Legt man normale Koordinaten zugrunde, so verwandeln sich die Ecktransversalen in ihre isogonal verwandten (oder winkeltreuen); führt man baryzentrische Koordinaten ein, so werden die Ecktransversalen durch ihre isotomisch verwandten ersetzt. Auch kann man die Elemente einer symmetrischen Matrix einmal als Punktkoordinaten, ein andermal sie oder ihre umgekehrten Werte als Linienkoordinaten ansehen.

9. Nach einem Satze von Desargues schneidet jede Transversale die drei Paare gegenüberliegender Seiten eines vollständigen Vierecks und jeden diesem Vierecke umgeschriebenen Kegelschnitt in Punktepaaren einer Involution. Eine Umkehrung dieses Satzes lautet:

Schneidet eine Transversale u die Seiten eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ in den Punkten B_1, B_2, B_3, und sind C_1, C_2, C_3 die zu B_1, B_2, B_3 konjugierten Punkte einer Involution, so gehen die Geraden A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 durch einen und denselben Punkt A_4, und alle durch die vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 gelegten Kegelschnitte schneiden u in zwei zugeordneten Punkten derselben Involution.

Den ersten Teil dieser Umkehrung habe ich kürzlich folgendermaßen auf den Raum ausgedehnt[1]):

---

1) Siehe Mathesis, 1904, S. 33. Einen einfachen synthetischen Beweis hat Herr H. De Vries in den *Wiskundige Opgaven*, 1904, S. 135 gegeben: Er projiziert nämlich die Involution (B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, B_4C_4) aus jeder Ecke des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ auf die gegenüberliegende Ebene und wendet dann den planimetrischen Satz an.

Schneidet eine Transversale u die Ebenen des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ in den Punkten B_1, B_2, B_3, B_4, und sind C_1, C_2, C_3, C_4 die zugeordneten Punkte einer auf u liegenden Involution, so bilden die Geraden A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, A_4C_4 einen hyperboloïdischen Wurf.

Der analytische Beweis kann sehr einfach geführt werden. Es seien (f_1, f_2, f_3, f_4), (g_1, g_2, g_3, g_4) die Koordinaten der Doppelpunkte F, G der Involution, auf das Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ bezogen. Die Koordinaten der Punkte B_1, C_1 welche die Strecke FG harmonisch teilen, sind von der Form:

$$B_1 \ldots \lambda f_1 + \mu g_1, \quad \lambda f_2 + \mu g_2, \quad \lambda f_3 + \mu g_3, \quad \lambda f_4 + \mu g_4;$$

$$C_1 \ldots \lambda f_1 - \mu g_1, \quad \lambda f_2 - \mu g_2, \quad \lambda f_3 - \mu g_3, \quad \lambda f_4 - \mu g_4.$$

Da aber B_1 in der Ebene $A_2A_3A_4$ liegt, hat man $\lambda f_1 + \mu g_1 = 0$; man kann also setzen $\lambda = g_1$, $\mu = -f_1$, und die Koordinaten von C_1 werden

$$g_1f_1 + g_1f_1, \quad g_1f_2 + g_2f_1, \quad g_1f_3 + g_3f_1, \quad g_1f_4 + g_4f_1.$$

Setzt man also $g_if_k + g_kf_i = \alpha_{ik} = \alpha_{ki}$, so ist die Koordinatenmatrix der Punkte C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44}. \end{matrix}$$

Da sie symmetrisch ist, hat man den obigen Satz bewiesen.

Der korrelative Satz lautet:

Man gibt ein Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ und eine Ebeneninvolution mit der Achse u. Die zu den Ebenen uA_1, uA_2, uA_3, uA_4 konjugierten Ebenen der Involution schneiden die entsprechenden Tetraederebenen in vier hyperboloïdischen Geraden.

10. Folgender Satz scheint mir neu zu sein:

Eine Ebene μ schneidet die Ebenen des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ in den Geraden d_1, d_2, d_3, d_4. Man bestimmt die Pole D_1, D_2, D_3, D_4 dieser Geraden in bezug auf einen in der Ebene μ liegenden Kegelschnitt K. Dann bilden die Ecktransversalen A_1D_1, A_2D_2, A_3D_3, A_4D_4 einen hyperboloïdischen Wurf.

Es seien in bezug auf das Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$

$$\mu_1x_1 + \mu_2x_2 + \mu_3x_3 + \mu_4x_4 = 0, \quad f(u) \equiv \sum f_{12}u_1u_2 = 0$$

die Gleichungen der Ebene μ (in Punktkoordinaten) und einer durch den Kegelschnitt K gehenden Quadrik (in Ebenenkoordinaten). Bezeichnet man mit $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$, $f_4(u)$ die halben Derivierten der Funktion $f(u)$ nach u_1, u_2, u_3, u_4, so sind die Koordinaten der Pole der beiden Ebenen μ und $A_2 A_3 A_4$ bzw.:

$$f_1(\mu),\quad f_2(\mu),\quad f_3(\mu),\quad f_4(\mu),$$
$$f_{11},\quad f_{12},\quad f_{13},\quad f_{14}.$$

D_1 liegt auf der Verbindungslinie dieser Pole; mithin sind seine Koordinaten von der Form

$$\lambda f_{11} + \varrho f_1(\mu),\quad \lambda f_{12} + \varrho f_2(\mu),\quad \lambda f_{13} + \varrho f_3(\mu),\quad \lambda f_{14} + \varrho f_4(\mu);$$

setzt man sie ein in die Gleichung der Ebene μ, so kommt:

$$\lambda f_1(\mu) + \varrho f(\mu) = 0,$$

und folglich

$$\lambda = f(\mu),\quad \varrho = -f_1(\mu).$$

Mithin sind die Koordinaten von D_1:

$$f_{11} f(\mu) - f_1(\mu) f_1(\mu),\quad f_{12} f(\mu) - f_1(\mu) f_2(\mu),\ \ldots$$

Man sieht sofort, daß die Koordinatenmatrix der Punkte D_1, D_2, D_3, D_4 symmetrisch ist.

Der korrelative Satz lautet:

Man gibt ein Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ und einen Kegel zweiter Ordnung mit beliebiger Spitze P. Die Polarebenen der Geraden PA_1, PA_2, PA_3, PA_4 in bezug auf den Kegel treffen die Ebenen des Tetraeders in vier Geraden eines hyperboloïdischen Wurfes.

11. Im Vorhergehenden haben wir die geometrische Deutung einer symmetrischen Matrix vierter Ordnung gegeben.

Ohne Beweis erinnere ich hier an die Deutung einer schiefsymmetrischen Matrix:

$$\begin{matrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0. \end{matrix}$$

Die Zeilen geben die Koordinaten der Ecken (oder Ebenen) eines dem Koordinatentetraeder zugleich ein- und umgeschriebenen Tetraeders.[1]

12. Die Systeme (III) und (IV) (3) fallen zusammen, wenn

$$\alpha_{12}\alpha_{34} = \alpha_{13}\alpha_{24} = \alpha_{14}\alpha_{23}.$$

1) Neuberg, *Sur les tétraèdres de Möbius* (Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége, 1884).

Der Schluß liegt nahe, daß die Geraden m_1, m_2, m_3, m_4 sich in einem Punkte begegnen. Um dies zu bestätigen, ersetzen wir in (III) die Größen $\alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha_{42}$ durch ihre Werte $\frac{K}{\alpha_{14}}, \frac{K}{\alpha_{12}}, \frac{K}{\alpha_{13}}$ und schaffen die Nenner in den Zeilen weg; dann bekommt das System (III) die Form

$$\begin{matrix} \cdot & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \beta & \cdot & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \beta & \alpha_{12} & \cdot & \alpha_{14} \\ \beta & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdot\,, \end{matrix}$$

wo $\beta = \frac{\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{14}}{K}$ und K das Produkt $\alpha_{12}\alpha_{34}$ bedeutet. Die Koordinaten des Schnittpunktes der vier Geraden sind $\beta, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$.

Nachtrag. — 1. Nimmt man in Nr. 7 für die Klassenquadrik den Kugelkreis, so sieht man, daß die vier Höhen eines Tetraeders einen hyperboloïdischen Wurf bilden.[1])

2. Eine reziproke Verwandtschaft verwandelt zwei perspektive oder hyperboloïdische Tetraeder in zwei Tetraeder derselben Art. Bei einer polaren Korrelation in bezug auf den Kugelkreis gelangt man so zu dem Steinerschen Satz über orthologische Tetraeder[2]) und einer Verallgemeinerung desselben. Diese Bemerkung über orthologische Tetraeder habe ich erst kürzlich in Herrn Kötters Bericht über die Entwickelung der synthetischen Geometrie gelesen.[3])

3. Als Analogon zu dem Satze über den Lotpunkt einer Geraden in bezug auf ein Dreieck[4]) hat Herr Fr. W. Meyer folgenden Satz ausgesprochen:

Man projiziere die Ecken des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ orthogonal auf eine beliebige Ebene μ, und aus den Projektionen B_1, B_2, B_3, B_4 fälle man die Lote b_1, b_2, b_3, b_4 respektive auf die Ebenen $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$. Dann bilden die Geraden b_1, b_2, b_3, b_4 einen hyperboloïdischen Wurf.

Denselben Satz hatte ich im Journal de Bourget, 1891, S. 24 m[it] einer Erweiterung als Aufgabe vorgelegt. Ich werde hier nur auf den zweiten Teil eingehen; er lautet:

---

1) Herr W. Fr. Meyer hat in mehreren Aufsätzen die Rolle des Kugelkreises betont, so noch in diesem Archiv (3) 12, 158.

2) S. meine Abhandlung „Über orthologische Tetraeder" in den Monatsheften für Math. und Physik 18, 212—218.

3) Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver. V, S. 272.

4) K. Cwojdzinski, Der Lotpunkt, ein neuer merkwürdiger Punkt des Dreiecks, Archiv (3) 1, 174—180; E. Jahnke, Bemerkung zu diesem Aufsatze, 1, 181—18[?]; J. Neuberg, Verwandtschaft zwischen einer Geraden und deren Lotpunkt, 3, 89—9[?]; W. Fr. Meyer, Lotpunkt eines Dreiecks, 1, 372.

Man bestimme die Höhenschnitte C_1, C_2, C_3, C_4 der Dreiecke $B_2B_3B_4$, $B_3B_4B_1$, $B_4B_1B_2$, $B_1B_2B_3$ und fälle aus diesen Punkten die Lote c_1, c_2, c_3, c_4 auf die Ebenen $A_2A_3A_4, \ldots$. Die acht Geraden b_i, c_i liegen auf demselben Hyperboloïd $\mathfrak{H}$; die aus den Mittelpunkten D_1, D_2, D_3, D_4 der Strecken $B_1C_1, \ldots$ bezüglich auf die Ebenen $A_2A_3A_4, \ldots$ gefällten Perpendikel treffen sich im Zentrum des Hyperboloïds $\mathfrak{H}$, und die acht Punkte B_i, C_i liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel.

Die Gerade c_4 ist parallel zu b_4 und trifft b_1, b_2, b_3. Denn die Gerade b_1, welche senkrecht zur Ebene $A_2A_3A_4$ ist, ist senkrecht zu der Geraden A_2A_3; so ist auch c_4 senkrecht zu A_2A_3; auch ist die Gerade B_1C_4, welche senkrecht zu B_2B_3 steht, senkrecht zu der Geraden A_2A_3, da diese sich in B_2B_3 auf die Ebene μ projiziert. Hieraus folgt, daß die drei Geraden b_1, c_4, B_1C_4 sich in einer zu A_2A_3 lotrechten Ebene befinden.

Wir haben somit vier Paare paralleler Erzeugenden des Hyperboloïds $\mathfrak{H}$; die Mittelparallelen dieser Paare treffen sich offenbar im Zentrum von $\mathfrak{H}$. Der Schnitt der Fläche $\mathfrak{H}$ mit der Ebene μ ist ein Kegelschnitt, welcher durch die acht Punkte B_i, C_i geht; da aber C_4 der Höhenschnitt des Dreiecks $B_1B_2B_3$ ist, ist dieser Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel.

Wenn das Viereck $B_1B_2B_3B_4$ ein Kreisvierek ist, fallen die vier Punkte D_i zusammen ins Zentrum des Hyperboloïds $\mathfrak{H}$.

Über das Problem, eine Fläche II. Grades in einem der Gestalt und Größe nach gegebenen Kegelschnitte zu schneiden.

Von W. LUDWIG in Braunschweig.

(Schluß.)

7. *Die Ellipsen auf den Hyperboloiden.* — Nachdem wir für den Fall I 1 alle nötigen Überlegungen ausführlich dargestellt haben, können wir uns im folgenden kürzer fassen. Im Fall II 1 haben wir

$$\lambda_\alpha' < \lambda_\alpha'' < 0, \quad \lambda_\beta' < \lambda_\beta'' < 0, \quad 0 < \lambda_\gamma'' < \lambda_\gamma'; \quad \lambda_\alpha' < \lambda_\beta', \quad \lambda_\alpha'' < \lambda_\beta'';$$

also muß das gesuchte Intervall ($\lambda_u \leq \lambda \leq \lambda_o$) wieder zwischen λ_β' und λ_β'' und außerhalb sowohl von λ_α' und λ_α'' als auch von λ_γ'' und λ_γ' liegen. Ein solches Intervall ist immer vorhanden; es ist bei ihm λ_u gleich dem größeren der beiden Werte λ_α'' und λ_β' und immer $\lambda_o = \lambda_\beta''$. Da die λ des Intervalles negativ sind, kommt es auf λ_u an, und wir finden ganz wie vorher:

Sollen auf einem einmanteligen Hyperboloid, dessen Halbachsen $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C} \cdot \sqrt{-1}$ sind, reelle Ellipsen von den Halbachsen $A > B$ liegen, so muß sein: entweder

$$0 < \frac{B}{A} \leqq \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \quad \text{und} \quad B \geqq \mathfrak{A}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \leqq \frac{B}{A} \leqq 1 \quad \text{und} \quad A \geqq \mathfrak{B}.$$

Ferner ergibt sich:

Beim einmanteligen Hyperboloid gehören die Ebenen, die aus ihm die kleinsten Ellipsen aller reell möglichen Arten ausschneiden, den Ebenenbüscheln um seine beiden reellen Achsen an.

Im Falle III 1 haben wir

$$\lambda_\alpha' < \lambda_\alpha'' < 0, \quad 0 < \lambda_\beta'' < \lambda_\beta', \quad 0 < \lambda_\gamma'' < \lambda_\gamma'; \quad \lambda_\beta'' < \lambda_\gamma'', \quad \lambda_\beta' < \lambda_\gamma';$$

also ist das Intervall $(\lambda_u \leqq \lambda \leqq \lambda_o)$ wieder zwischen λ_β'' und λ_β' begriffen; aber wir brauchen, da es positiv ist, seine Grenzen nicht zu bestimmen, sondern erhalten ohne weiteres das — übrigens unmittelbar einleuchtende — Resultat:

Aus dem zweimanteligen Hyperboloid kann man reelle Ellipsen aller Gestalten und Größen ausschneiden.

8. *Die Hyperbeln auf dem einmanteligen Hyperboloid.* — In den Fällen II 2 und II 3 ist $s < 0$; wenn s von $-\infty$ bis 0 wächst, geht σ' von 1 bis 0 und σ'' von $-\infty$ bis 0; deshalb ist $\sigma' > 0 > \sigma''$, und wir haben

$$\lambda_\alpha' < \lambda_\beta' < 0 < \lambda_\beta'' < \lambda_\alpha'', \quad \lambda_\gamma'' < 0 < \lambda_\gamma'.$$

Die λ des gesuchten Intervalles $(\lambda_u \leqq \lambda \leqq \lambda_o)$ müssen jetzt also außerhalb des Intervalles von λ_β' bis λ_β'' und sowohl zwischen λ_α' und λ_α'' als auch zwischen λ_γ'' und λ_γ' liegen, und zwar sind zwei Möglichkeiten vorhanden:

(a) Sie sind, unter der Bedingung, daß $\lambda_\gamma'' < \lambda_\beta'$, negativ, wobei $\lambda_u = \lambda_\alpha'$ oder $= \lambda_\gamma''$ und $\lambda_o = \lambda_\beta'$ ist.

(b) Sie sind, unter der Bedingung, daß $\lambda_\gamma' > \lambda_\beta''$, positiv, wobei $\lambda_u = \lambda_\beta''$ und $\lambda_o = \lambda_\alpha''$ oder $= \lambda_\gamma'$ ist.

Hinsichtlich der Bedingung (16) kommt es im Fall II 2b und II 3a gar nicht auf die Grenzen λ_u und λ_o an, im Fall II 2a nur auf die obere Grenze: $r > |\lambda_\beta'|$, und im Fall II 3b nur auf die untere: $|r| > \lambda_\beta''$. Dagegen müssen wir bezüglich der Bedingungen

$$\text{(a)} \qquad \lambda_\gamma'' < \lambda_\beta' \text{ oder } \frac{\lambda_\gamma''}{\lambda_\beta'} = \frac{|c|}{b} \cdot \frac{|\sigma''|}{\sigma'} > 1$$

und

(b) $$\lambda'_\gamma > \lambda''_\beta \text{ oder } \frac{\lambda''_\beta}{\lambda'_\gamma} = \frac{b}{|c|} \cdot \frac{|\sigma''|}{\sigma'} < 1$$

noch unterscheiden, ob $|c| < b$ oder $|c| > b$ ist.

Da $\frac{|\sigma''|}{\sigma'} = 1 - \frac{1}{2}\sigma''$ stetig von ∞ bis 1 abnimmt, wenn s von $-\infty$ bis 0 wächst, ist für $|c| < b$ die Bedingung (b) unerfüllbar; dagegen ist (a) erfüllt, sobald $s < \frac{(b+c)^2}{bc}$ ist; im Fall einer stumpfen Hyperbel muß dann außerdem noch $r > |\lambda'_\beta| = \frac{1}{2} b\sigma'$ sein.

Ist $|c| > b$, so wird (a) durch alle negativen Werte von s befriedigt, (b) aber nur, wenn $\frac{(b+c)^2}{bc} \leqq s < 0$ ist; daraus folgt, daß jetzt alle spitzen Hyperbeln möglich sind und von stumpfen die, für die

entweder $-\infty < s \leqq \frac{(b+c)^2}{bc}$ und $r > \frac{1}{2} b\sigma'$ ist oder $\frac{(b+c)^2}{bc} \leqq s < 0$.

Die gegebene Hyperbel habe nun die Halbachsen A' und $B' \cdot \sqrt{-1}$; dann ist vermöge der Gleichungen (6a), wenn die Hyperbel stumpf ist, $A'^2 = A^2 = \frac{\sigma'}{2r}$, $B'^2 = -B^2 = \frac{|\sigma''|}{2r}$ und $B' > A'$ und, wenn sie spitz ist, $A'^2 = B^2 = \frac{|\sigma''|}{2|r|}$, $B'^2 = -A^2 = \frac{\sigma'}{2|r|}$ und $A' > B'$. Eine Bedingung $s_1 \leqq s \leqq s_2$ geht hiernach im Fall einer spitzen Hyperbel über in

$$-|\sqrt{-s_1}| \leqq \frac{B'}{A'} - \frac{A'}{B'} \leqq -|\sqrt{-s_2}|$$

und im Falle einer stumpfen Hyperbel in

$$|\sqrt{-s_2}| \leqq \frac{B'}{A'} - \frac{A'}{B'} \leqq |\sqrt{-s_1}|.$$

Setzen wir $\frac{B'}{A'} - \frac{A'}{B'} = \xi$ und $\frac{B'}{A'} = \eta$, so durchlaufen wir alle spitzen und darauf alle stumpfen Hyperbeln, wenn wir ξ von $-\infty$ über 0 bis $+\infty$ wachsen lassen; von η kommt dabei nur der positive Zweig $\eta = \frac{1}{2}(\xi + |\sqrt{\xi^2 + 4}|)$ in Betracht, der stetig von 0 über 1 bis $+\infty$ wächst. Demnach erhalten wir als Bedingung für die spitzen Hyperbeln:

$$\tfrac{1}{2}(-|\sqrt{-s_1}| + |\sqrt{-s_1+4}|) \leqq \frac{B'}{A'} \leqq \tfrac{1}{2}(-|\sqrt{-s_2}| + |\sqrt{-s_2+4}|)$$

und für die stumpfen:

$$\tfrac{1}{2}(|\sqrt{-s_2}| + |\sqrt{-s_2+4}|) \leqq \frac{B'}{A'} \leqq \tfrac{1}{2}(|\sqrt{-s_1}| + |\sqrt{-s_1+4}|);$$

hiermit drückt sich unser Ergebnis folgendermaßen aus:

Auf einem einmanteligen Hyperboloid, dessen Halbachsen $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{C} \cdot \sqrt{-1}$ *sind, liegen reelle Hyperbeln von den gegebenen Halbachsen* A' *und* $B' \cdot \sqrt{-1}$ *unter folgenden Bedingungen:*

Ist $\mathfrak{C} > \mathfrak{B}$, *so sind alle spitzen Hyperbeln möglich, für die*

$$0 < \frac{B'}{A'} \leqq \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}},$$

und alle stumpfen Hyperbeln, für die

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}} \leqq \frac{B'}{A'} < \infty \quad \textit{und} \quad A' \leqq \mathfrak{B}.$$

Ist $\mathfrak{C} < \mathfrak{B}$, *so sind alle spitzen Hyperbeln ohne Einschränkun möglich und von den stumpfen Hyperbeln die, für die entweder:*

$$1 < \frac{B'}{A'} \leqq \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$$

oder:

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} \leqq \frac{B'}{A'} < \infty \quad \textit{und} \quad A' \leqq \mathfrak{B}$$

ist.

Analog wie früher fügen wir noch hinzu:

Die Ebenen der stumpfen Hyperbeln, die von jeder auf dem e manteligen Hyperboloid möglichen Art die größten Achsen haben, geh dem Ebenenbüschel um seine größere reelle Achse an.

Für die hier auftretende mannigfaltige Spaltung der Bedingun können wir leicht einen rein geometrischen Grund angeben[1]: größte innere Winkel des Asymptotenkegels des einmanteligen Hy boloides ist $\varphi = 2 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$ und der Asymptotenwinkel der gegebe Hyperbel ist $\vartheta = 2 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{B'}{A'}$. Ist $\vartheta < \varphi$, so lassen sich im Hyperbeln ausschneiden, die der gegebenen selbst ähnlich — ihr „wirklich ähnlich" — oder ihrer konjugierten Hyperbel ähnlich — der gegebenen „konjugiert ähnlich" — sind. In einem Büschel von paralle Ebenen, die Hyperbeln ausschneiden, gibt es stets zwei reelle Tangent ebenen des Hyperboloides; die außerhalb derselben befindlichen Ebenen Büschels tragen, bei geeigneter Wahl des Büschels, der gegebenen wirkl ähnliche Hyperbeln und zwar in allen möglichen Größen. Somit se wir wieder, daß es immer der gegebenen Hyperbel kongruente Hyperb

1) Vergl. hierzu: W. Ludwig a. a. O. Nr. 9, S. 24 und „Über die „ϑ-Kurv des einmanteligen Hyperboloides und des hyperbolischen Paraboloides", di Archiv (3) **3**, 220 u. 221.

gibt, wenn $\frac{B'}{A'} \leqq \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$ ist. Die zwischen den beiden Tangentialebenen befindlichen Ebenen unseres Büschels dagegen tragen Hyperbeln, die der gegebenen konjugiert ähnlich sind, die also den Asymptotenwinkel $\vartheta' = \pi - \vartheta$ haben und die Bedingung $\vartheta' > \pi - \varphi$ erfüllen. Ist nun $\mathfrak{C} > \mathfrak{B}$, also $\varphi < \frac{\pi}{2}$, so bestimmt die Bedingung $\vartheta' \geqq \pi - \varphi$ oder $\frac{B'}{A'} \geqq \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$ ganz andere (stumpfe) Hyperbelarten als die Bedingung $\vartheta < \varphi$; ist aber $\mathfrak{C} < \mathfrak{B}$, also $\varphi > \frac{\pi}{2} > \pi - \varphi$, so ist dem nicht mehr so, sondern wir erhalten nur für $\vartheta > \varphi$ oder $\frac{B'}{A'} > \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$ neue Hyperbelarten. Diese neuen Hyperbelarten aber, von deren Ebenen jede zwischen zwei zu ihr parallelen Tangentialebenen des Hyperboloides verläuft, haben, wie man sofort sieht, je eine oder mehrere größte mögliche Hyperbeln, deren Ebenen unter den Durchmesserebenen des Hyperboloides zu suchen sind; wir haben oben gefunden, daß diese Ebenen, entsprechend der Bedingung $A < \mathfrak{B}$, den Büschel um die größere reelle Achse des Hyperboloides bilden.

9. *Die Hyperbeln auf dem zweimanteligen Hyperboloid.* — In den Fällen III 2 und III 3 haben wir

$$\lambda'_\alpha < 0 < \lambda''_\alpha, \quad \lambda''_\gamma < \lambda''_\beta < 0 < \lambda'_\beta < \lambda'_\gamma;$$

also bestehen für die λ des gesuchten Intervalles $(\lambda_u \leqq \lambda \leqq \lambda_o)$ wieder zwei Möglichkeiten:

(a) Sie sind, unter der Bedingung $\lambda'_\alpha < \lambda''_\beta$, negativ, wobei $\lambda_u = \lambda'_\alpha$ oder $= \lambda''_\gamma$ und $\lambda_o = \lambda''_\beta$ ist.

(b) Sie sind, unter der Bedingung $\gamma''_\alpha > \lambda'_\beta$, positiv, wobei $\lambda_u = \lambda'_\beta$ und $\lambda_o = \lambda''_\alpha$ oder $= \lambda'_\gamma$ ist.

Die Bedingung (16) ist im Fall III 2 mit (b) und im Fall III 3 mit (a) unverträglich; also sind nur die Kombinationen III 2a und III 3b möglich, bei denen $r < |\lambda_u|$, bezw. $|r| < \lambda_o$ sein muß.

Ist nun $a < |b|$ (und folglich auch $a < |c|$), so ist die Bedingung (a) oder

$$\frac{\lambda''_\beta}{\lambda'_\alpha} = \frac{|b|}{a} \cdot \frac{|\sigma''|}{\sigma'} < 1$$

durch keinen negativen Wert von s erfüllt. Die Bedingung (b) oder

$$\frac{\lambda''_\alpha}{\lambda'_\beta} = \frac{a}{|b|} \cdot \frac{|\sigma''|}{\sigma'} > 1$$

ist es nur, wenn

$$-\infty \leqq s \leqq \frac{(a+b)^2}{ab}$$

ist; dabei ist dann, wie aus dem Verhalten von $\frac{\lambda''_\alpha}{\lambda'_\gamma} = \frac{a}{|c|} \cdot \frac{|\sigma''|}{\sigma'}$ folgt, $\lambda_o = \lambda'_\gamma$ für $-\infty \leqq s \leqq \frac{(c+a)^2}{ca}$ und $\lambda_o = \lambda''_\alpha$ für $\frac{(c+a)^2}{ca} \leqq s \leqq \frac{(a+b)^2}{ab}$.

Ist aber $a > |b|$, so ist die Bedingung (a) erfüllt, wenn

$$\frac{(a+b)^2}{ab} \leqq s \leqq 0$$

ist; dabei ist wegen des Verhaltens von $\frac{\lambda''_\gamma}{\lambda'_\alpha} = \frac{|c|}{a} \cdot \frac{|\sigma''|}{\sigma'}$, wenn $|c| > a$ ist, immer $\lambda_u = \lambda'_\alpha$ und, wenn $|c| < a$ ist, $\lambda_u = \lambda'_\alpha$ für $\frac{(a+b)^2}{ab} \leqq s \leqq \frac{(c+a)^2}{ca}$ und $\lambda_u = \lambda''_\gamma$ für $\frac{(c+a)^2}{ca} \leqq s < 0$.

Der Bedingung (b) dagegen genügt jeder negative Wert von s, und es ergibt sich aus dem Verhalten von $\frac{\lambda''_\alpha}{\lambda''_\gamma} = \frac{a}{|c|} \cdot \frac{|\sigma''|}{\sigma'}$, daß, wenn $|c| > a$, $\lambda_o = \lambda'_\gamma$ für $-\infty \leqq s \leqq \frac{(c+a)^2}{ca}$ und $\lambda_o = \lambda''_\alpha$ für $\frac{(c+a)^2}{ac} \leqq s < 0$ ist, daß dagegen, wenn $|c| < a$, immer $\lambda_o = \lambda'_\gamma$ ist.

Fassen wir nun zusammen, so erhalten wir folgendes:

Ist $|c| > |b| > a$, so gibt es überhaupt keine stumpfen Hyperbeln, aber spitze, und für diese ist entweder:

$$-\infty < s \leqq \frac{(c+a)^2}{ca}, \quad |r| < \tfrac{1}{2}\,|c|\,\sigma'$$

oder:

$$\frac{(c+a)^2}{ca} \leqq s \leqq \frac{(a+b)^2}{ab}, \quad |r| < \tfrac{1}{2}\,a\,|\sigma''|.$$

Ist $|c| > a > |b|$, so gibt es stumpfe Hyperbeln, für die

$$\frac{(a+b)^2}{ab} \leqq s < 0 \quad \text{und} \quad 0 < r < \tfrac{1}{2}\,a\,\sigma',$$

und spitze Hyperbeln, für die entweder:

$$-\infty < s \leqq \frac{(c+a)^2}{ca}, \quad |r| < \tfrac{1}{2}\,|c|\,\sigma'$$

oder:

$$\frac{(c+a)^2}{ca} \leqq s < 0, \qquad |r| < \tfrac{1}{2}\,a\,|\sigma''|$$

ist.

Ist $a > |c| > |b|$, so gibt es stumpfe Hyperbeln, für die entweder:

$$\frac{(a+b)^2}{ab} \leqq s \leqq \frac{(c+a)^2}{ca}, \quad 0 < r < \tfrac{1}{2}\,a\,\sigma'$$

oder:

$$\frac{(c+a)^2}{ca} \leqq s < 0, \qquad 0 < r < \tfrac{1}{2}\,|c|\,|\sigma''|,$$

und spitze Hyperbeln, bei denen s jeden negativen Wert annehmen kann und $|r| < \frac{1}{2}|c|\sigma'$ ist.

Analog wie früher können wir dieses Ergebnis auch so ausdrücken:

Auf einem zweimanteligen Hyperboloid, dessen Halbachsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\cdot\sqrt{-1}$ und $\mathfrak{C}\cdot\sqrt{-1}$ ($\mathfrak{B} > \mathfrak{C}$) sind, liegen reelle Hyperbeln von den gegebenen Halbachsen A' und $B'\cdot\sqrt{-1}$ unter folgenden Bedingungen: Ist $\mathfrak{C} < \mathfrak{B} < \mathfrak{A}$, so sind keine stumpfen Hyperbeln möglich, aber die spitzen, für die entweder:

$$0 < \frac{B'}{A'} \leqq \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \text{ und } B' \geqq \mathfrak{C}$$

oder:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \leqq \frac{B'}{A'} \leqq \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \text{ und } A' \geqq \mathfrak{A}.$$

Ist $\mathfrak{C} < \mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, so sind die stumpfen Hyperbeln möglich, für die

$$1 < \frac{B'}{A'} \leqq \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \text{ und } A' \geqq \mathfrak{A},$$

und die spitzen Hyperbeln, für die entweder:

$$0 < \frac{B'}{A'} \leqq \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \text{ und } B' \geqq \mathfrak{C}$$

oder:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \leqq \frac{B'}{A'} < 1 \text{ und } A' \geqq \mathfrak{A}$$

ist.

Ist $\mathfrak{A} < \mathfrak{C} < \mathfrak{B}$, so sind die stumpfen Hyperbeln möglich, für die entweder:

$$1 < \frac{B'}{A'} \leqq \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \text{ und } B' \geqq \mathfrak{C}$$

oder:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \leqq \frac{B'}{A'} \leqq \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \text{ und } A' \geqq \mathfrak{A},$$

und die spitzen Hyperbeln, für die

$$0 \leqq \frac{B'}{A'} < 1 \text{ und } B' \geqq \mathfrak{C}$$

ist.

Das läßt sich in folgender Weise zusammenfassen:

Es muß entweder:

$$0 < \frac{B'}{A'} \leqq \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \text{ und } B' \geqq \mathfrak{C}$$

oder:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \leqq \frac{B'}{A'} \leqq \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \text{ und } A' \geqq \mathfrak{A}$$

sein.

Endlich finden wir noch analog wie früher:

Die Ebenen der Hyperbeln, die von jeder auf dem zweimanteligen Hyperboloid möglichen Art die kleinsten Achsen haben, bilden die Büschel um seine reelle Achse und um die seiner beiden anderen Achsen, der die kleinere reelle Achsenstrecke zugehört.

10. *Die gleichseitigen Hyperbeln und die Parabeln auf den Hyperboloiden.* — In den Ergebnissen von Nr. 8 und Nr. 9 ist vermöge der Kontinuität schon der — dort eigentlich ausgeschlossene — Fall der gleichseitigen Hyperbel mit inbegriffen. Der Vollständigkeit halber sei er aber noch mit Hilfe der am Ende von Nr. 4 angegebenen Mittel behandelt: In der von uns benutzten Abbildung entsprechen den Ebenen, die gleichseitige Hyperbeln tragen, die Punkte der Schnittkurven $R_{0,m}$ der Ebene ψ mit den Kegeln (11). Um zu erkennen, wann diese Kurven in den positiven Oktanten des Koordinatensystems eintreten, werden wir zunächst das Intervall $(\lambda_u \leqq \lambda \leqq \lambda_0)$ aufsuchen, das in dem Strahlenbüschel

$$\psi = 0, \quad \chi + \lambda\omega = 0$$

die im positiven Oktanten verlaufenden Strahlen liefert, d. h. das der Bedingung genügt, daß

$$(18) \qquad \begin{cases} a^2 - \lambda \text{ und } c^2 - \lambda \text{ dasselbe Vorzeichen,} \\ b^2 - \lambda \text{ aber das davon verschiedene haben müssen.} \end{cases}$$

Dann werden wir durch die beiden vom Koordinatenursprung verschiedenen Schnittpunkte eines jeden dieser Strahlen mit jedem der Kegel (11) die zur Ebene ω parallelen Ebenen

$$(19) \qquad x + y + z = \frac{-abc}{\lambda(1 \pm |\sqrt{m\lambda}|)}$$

legen und nachsehen, wann wenigstens eine dieser Ebenen den positiven Oktanten durchsetzt, wann also

$$(20) \qquad \frac{-abc}{\lambda(1 \pm |\sqrt{-m\lambda}|)} \text{ reell und positiv}$$

ist.

Beim einmanteligen Hyperboloid $(a > b > 0 > c)$ ist die Bedingung (18) nur erfüllbar, wenn $|c| > b$ ist; dann ist $\lambda_u = b^2$ und $\lambda_0 = a^2$ oder $= c^2$. Ist A' die reelle Halbachse der durch m bestimmten gleichseitigen Hyperbel, so ist $m = -A'^4$; in (20) handelt es sich also darum, daß $\frac{ab \cdot |c|}{\lambda(1 \pm A'^2 \cdot |\sqrt{\lambda}|)}$ reell und positiv ist, und das ist für die λ unseres Intervalls immer der Fall, wenigstens soweit das obere Vorzeichen im Nenner in Betracht kommt. Wir haben somit:

Auf dem einmanteligen Hyperboloid ($\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \cdot \sqrt{-1}$) *sind, wenn* $\mathfrak{C} > \mathfrak{B}$, *gar keine, wenn* $\mathfrak{C} < \mathfrak{B}$, *alle gleichseitigen Hyperbeln möglich.*

Beim zweimanteligen Hyperboloid ($a > 0 > b > c$) ist die Bedingung (18) nur erfüllbar, wenn $|b| < a$ ist; dann ist $\lambda_u = b^2$ und $\lambda_0 = a^2$ oder $= c^2$. Bei der Bedingung (20) handelt es sich darum, daß $\frac{-a\,|b|\cdot|c|}{\lambda\,(1 \pm A'^2 \cdot |\sqrt{\lambda}\,|)}$ reell und positiv, daß also $\lambda > 0$ und $1 - A'^2 \cdot |\sqrt{\lambda}\,| < 0$ sein muß; die λ unseres Intervalls sind immer positiv, so daß nur noch $A'^2 > \frac{1}{|\sqrt{\lambda_0}\,|}$, d. h. A'^2 größer als der größere der beiden Werte $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{|c|}$ zu sein braucht. Mithin haben wir:

Auf dem zweimanteligen Hyperboloid ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \cdot \sqrt{-1}$, $\mathfrak{C} \cdot \sqrt{-1}$, $\mathfrak{B} > \mathfrak{C}$) *sind, wenn* $\mathfrak{C} < \mathfrak{B} < \mathfrak{A}$ *ist, keine gleichseitigen Hyperbeln möglich, dagegen, wenn* $\mathfrak{C} < \mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ *ist, diejenigen, deren reelle Halbachse* $A' \geqq \mathfrak{A}$, *und, wenn* $\mathfrak{A} < \mathfrak{C} < \mathfrak{B}$ *ist, diejenigen, bei denen* $A' \geqq \mathfrak{C}$ *ist.*

Die Behandlung der Parabeln, deren Ebenen in unserer Abbildung durch die Punkte der Schnittkurven $R_{\infty,n}$ der Ebene χ mit den Kegeln (12) dargestellt sind, ist genau analog der Behandlung der gleichseitigen Hyperbeln. An die Stelle von (17), (18), (19), (20) treten:

$$\chi = 0, \quad \psi + \lambda\omega = 0; \tag{17a}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a(a+\lambda) \text{ und } c(c+\lambda) \text{ müssen dasselbe Vorzeichen haben,} \\ b(b+\lambda) \text{ aber das davon verschiedene;} \end{array}\right. \tag{18a}$$

$$x + y + z = \frac{abc}{n\lambda^2}; \tag{19a}$$

$$\frac{abc}{n\lambda^2} > 0 \quad \text{oder, da } a > 0 \text{ und } n > 0, \quad \frac{bc}{\lambda^2} > 0. \tag{20a}$$

Wir erkennen hieraus ohne weiteres:

Auf den Hyperboloiden sind alle Parabeln reell vorhanden.

11. *Die Kegel und Zylinder zweiten Grades.* — Mit den Kegeln brauchen wir uns nicht weiter zu beschäftigen; denn es ist ja klar, daß man aus einem Kegel immer einen gegebenen Kegelschnitt ausschneiden kann, sobald es diesem ähnliche Kegelschnitte auf dem Kegel gibt, und das letztere ist stets der Fall, wenn der Kegelschnitt eine Ellipse oder Parabel ist oder eine Hyperbel, deren Asymptotenwinkel nicht größer als der größte innere Winkel des Kegels ist.

Den elliptischen Zylinder erhalten wir als Übergangsfall zwischen dem Ellipsoid und dem einmanteligen Hyperboloid, wenn wir $a > b > 0$ und $c = 0$ setzen. Gegen die allgemeinen Fälle tritt dann die Abweichung ein, daß $\varphi \equiv \chi$ (s. die Formeln (9)) wird und daß die Raumkurven $R_{r,s}$ als Schnittkurven der Flächen (s. die Formeln (10))

$$\pi_r \equiv \chi \cdot (r\omega - \psi) = 0 \quad \text{und} \quad \varkappa_s \equiv s \cdot \chi\omega - \psi^2 = 0$$

je in drei Geraden zerfallen, nämlich in die allen gemeinsame, doppelt zu rechnende Gerade $\overline{\chi\psi}$ und in die Gerade mit den Gleichungen

$$r\omega - \psi = 0, \quad s\chi - r^2\omega = 0.$$

Es handelt sich also darum, zu untersuchen, wann die letztere Gerade im positiven Oktanten verläuft: Da auf ihr

$$x : y : z = -b(r^2 - asr + a^2s) : a(r^2 - bsr + b^2s) : (b - a)r^2$$

ist und a positiv, $-b$ und $(b-a)$ aber negativ sind, muß $r^2 - asr + a^2s$ positiv und $r^2 - bsr + b^2s$ negativ sein. Wir finden ganz analog, wie früher bei den λ, daß es für $4 \leqq s < \infty$ immer ein Intervall $(r_u \leqq r \leqq r_o)$ gibt, in dem das stattfindet, und daß $r_u = \frac{1}{2}b\sigma''$ und r_o gleich dem kleineren der Werte $\frac{1}{2}a\sigma''$ und $\frac{1}{2}b\sigma'$ ist; und zwar ist, ebenfalls analog wie früher, $r_o = \frac{1}{2}a\sigma''$, wenn $s > \frac{(a+b)^2}{ab}$ und $r_o = \frac{1}{2}b\sigma'$, wenn $4 \leqq s \leqq \frac{(a+b)^2}{ab}$ ist. Daraus folgt:

Auf einem elliptischen Zylinder, dessen Halbachsen $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ sind, liegen reelle Ellipsen von den Halbachsen $A > B$, wenn

$$\textit{entweder:} \quad 0 < \frac{B}{A} \leqq \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \quad \textit{und} \quad \mathfrak{A} \leqq B \leqq \mathfrak{B}$$

$$\textit{oder:} \quad \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \leqq \frac{B}{A} \leqq 1 \quad \textit{und} \quad B \leqq \mathfrak{B} \leqq A$$

ist.

Der hyperbolische Zylinder ergibt sich als Übergangsfall zwischen den beiden Hyperboloiden, wenn wir $a > 0 > c$ und $b = 0$ setzen; wie beim elliptischen Zylinder zerfallen die Kurven $R_{r,s}$ je in drei Geraden, von denen immer nur eine in Betracht kommt. Auf dieser Geraden ist

$$x : y : z = c(r^2 - asr + a^2s) : (a - c)r^2 : -a(r^2 - csr + c^2s),$$

und es müssen also, damit sie im positiven Oktanten liegt, $r^2 - asr + a^2s$ und $r^2 - csr + c^2s$ beide negativ sein. Für $s < 0$ gibt es immer zwei Intervalle $(r_u \leqq r \leqq r_o)$, für deren r dies eintritt. Das eine liefert die spitzen Hyperbeln und hat $r_o = 0$, während, wenn $a < |c|$ ist, $r_u = \frac{1}{2}c\sigma'$ für $s \leqq \frac{(c+a)^2}{ca}$ und $r_u = \frac{1}{2}a\sigma''$ für $\frac{(c+a)^2}{ca} \leqq s < 0$, wenn aber $a > |c|$ ist, immer $r_u = \frac{1}{2}c\sigma'$ wird. Das andere Intervall liefert die stumpfen Hyperbeln und hat $r_u = 0$, während, wenn $a < |c|$ ist, imme

$r_0 = \frac{1}{2} a \sigma'$, wenn aber $a > |c|$ ist, $r_o = \frac{1}{2} a \sigma'$ für $s \leqq \frac{(c+a)^2}{ca}$ und $r_o = \frac{1}{2} c \sigma''$ für $\frac{(c+a)^2}{ca} \leqq s < 0$ wird. Hieraus folgt:

Auf einem hyperbolischen Zylinder, dessen Halbachsen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C} \cdot \sqrt{-1}$ sind, liegen reelle Hyperbeln von den Halbachsen A' und $B' \cdot \sqrt{-1}$ unter folgenden Bedingungen:

Ist $\mathfrak{A} > \mathfrak{C}$, so sind die spitzen Hyperbeln möglich, für die

$$\textit{entweder:}\quad 0 < \frac{B'}{A'} \leqq \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \quad \textit{und} \quad B' \geqq \mathfrak{C}$$

$$\textit{oder:}\quad \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \leqq \frac{B'}{A'} < 1 \quad \textit{und} \quad A' \geqq \mathfrak{A},$$

und alle stumpfen Hyperbeln, für die

$$A' \geqq \mathfrak{A}.$$

Ist $\mathfrak{A} < \mathfrak{C}$, so sind alle spitzen Hyperbeln möglich, für die

$$B' \geqq \mathfrak{C},$$

und die stumpfen Hyperbeln, für die

$$\textit{entweder:}\quad 1 < \frac{B'}{A'} \leqq \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \quad \textit{und} \quad B' \geqq \mathfrak{C}$$

$$\textit{oder:}\quad \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \leqq \frac{B'}{A'} < \infty \quad \textit{und} \quad A' \geqq \mathfrak{A}$$

ist. Das heißt zusammengefaßt genau wie beim zweimanteligen Hyperboloid:

Es muß entweder

$$0 < \frac{B'}{A'} \leqq \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \quad \textit{und} \quad B' \geqq \mathfrak{C}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \leqq \frac{B'}{A'} < \infty \quad \textit{und} \quad A' \geqq \mathfrak{A}$$

sein.

12. *Die parabolischen Flächen zweiten Grades.* — Die ganze von uns angewandte Methode läßt sich auch für den Fall umgestalten, daß die gegebene Fläche zweiten Grades ein Paraboloid oder ein parabolischer Zylinder ist. Doch können wir bei diesen Flächen unser Problem auf viel einfachere Weise erledigen.

Aus einem elliptischen Paraboloid kann man zu jeder Ellipse und aus einem hyperbolischen Paraboloid zu jeder Hyperbel durch reelle Ebenen wirklich ähnliche Kegelschnitte ausschneiden[1]); nehmen wir

1) Vgl. W. Ludwig, a. a. O. S. 24 u. 26.

eine solche Ebene, ε, so gibt es immer eine reelle und endliche Tangentialebene des Paraboloides, die ihr parallel ist, und die zu ε parallelen Ebenen, die auf derselben Seite dieser Tangentialebene wie ε liegen, schneiden, wie unmittelbar ersichtlich, aus dem Paraboloide dem gegebenen Kegelschnitt wirklich ähnliche Kegelschnitte aus, deren Achsengrößen keiner Beschränkung unterliegen; also gibt es auch immer dem gegebenen Kegelschnitt kongruente:

Auf dem elliptischen Paraboloid sind alle Ellipsen und auf dem hyperbolischen Paraboloid sind alle Hyperbeln reell vorhanden.

Schneiden wir ferner ein Paraboloid, dessen Gleichung

$$aX^2 + bY^2 - 2Z = 0$$

sei, mit einer zur Z-Achse parallelen Ebene, deren Gleichung in der Normalform

$$X \cos\delta + Y \sin\delta - d = 0$$

laute, so hat die Schnittparabel den Parameter

$$p = \frac{1}{|a \sin^2\delta + b \cos^2\delta|} = \frac{1}{|(a-b)\sin^2\delta + b|}.$$

Da p von d unabhängig ist, so heißt das: *Auf den Paraboloiden sind in parallelen Ebenen gelegene Parabeln kongruent.*

Lassen wir nun δ von 0^0 bis 90^0 gehen, so erhalten wir alle reell möglichen Werte von p und finden damit:

Auf dem elliptischen Paraboloid, dessen Gleichung

$$\frac{X^2}{\mathfrak{A}^2} + \frac{Y^2}{\mathfrak{B}^2} = 2Z, \quad \mathfrak{A} < \mathfrak{B},$$

ist, sind alle Parabeln mit dem Parameter p möglich, für die

$$\mathfrak{A}^2 \leqq p \leqq \mathfrak{B}^2.$$

Auf dem hyperbolischen Paraboloid, dessen Gleichung

$$\frac{X^2}{\mathfrak{A}^2} - \frac{Y^2}{\mathfrak{B}^2} = 2Z$$

ist, sind alle Parabeln möglich, deren Parameter p nicht kleiner als der kleinere der beiden Werte $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{B}^2$ ist.

Als letzte Fläche bleibt uns noch der *parabolische Zylinder;* schneiden wir ihn durch eine Ebene senkrecht zu seinen Kanten, so bekommen wir eine Parabel von einem gewissen Parameter p_0; die Ebenen, die durch die Scheiteltangente dieser Parabel laufen, tragen Parabeln, deren Parameter alle Werte von 0 bis p_0, und die Ebenen, die durch die Symmetrieachse jener Parabel laufen, solche, deren Parameter alle Werte von p_0 bis ∞ annehmen; also sind alle Parabeln möglich.

Breslau, den 3. April 1905.

Zur Schattenkonstruktion für das Plückersche Konoid.

Von Eduard Janisch in Prag.

1. In dem bekannten Lehrbuche der darstellenden Geometrie der Herren Rohn und Papperitz wird in dem Kapitel „Verschiedene Flächen" u. a. auch das Plückersche Konoid eingehend behandelt.[1])

Die beiden letzten Artikel, welche auf diese Fläche Bezug haben, sind insbesondere der Schattenkonstruktion für Parallelbeleuchtung gewidmet. In der vorliegenden Arbeit beabsichtigen wir uns über dieses Thema ausführlicher zu verbreiten, als es dort geschehen ist, und werden auf ganz elementarem Wege Aufschluß erhalten über den Charakter der auftretenden Kurven.

2. Wir untersuchen zunächst den einfachen Spezialfall: die Lichtstrahlen fallen parallel zu einer der beiden Symmetrie-Ebenen der Fläche ein. In der Figur ist die Achse $(\mathfrak{a})$ des *Konoides* senkrecht zur Grundriß-Ebene angenommen, die Torsallinie $(\mathfrak{t}_1)$ läuft parallel zur Projektions-Achse, die Torsallinie $(\mathfrak{t}_2)$ liegt in der Grundriß-Ebene und steht senkrecht zur Aufriß-Ebene. Die Fläche besitzt also eine zur Aufriß-Ebene parallele Symmetrie-Ebene, und es soll die Schattenkonstruktion für zur genannten Projektions-Ebene und unter sich parallel einfallende Lichtstrahlen hier durchgeführt werden. Als Leitellipse (L) des Konoides wählen wir seinen Schnitt mit der durch die untere Torsallinie $(\mathfrak{t}_2)$ gehenden aufrißprojizierenden Lichtebene. Der Aufriß (L) ist somit nichts anderes als der Aufriß des durch den unteren Kuspidalpunkt (S_2) gehenden Lichtstrahles, und der Grundriß L' ergibt sich dann als der über $S_2^* a'$ als Durchmesser beschriebene Kreis, wo (a) der in $(\mathfrak{t}_1)$ gelegene Scheitel von (L) ist. (Aufr. $a = L \times \mathfrak{t}_1$). Wir zeichnen nun ein Quadrupel von Erzeugenden ein, von denen das eine Paar $(\mathfrak{e})$, $(\mathfrak{f}_1)$ durch den beliebigen Punkt (m) auf der Achse $(\mathfrak{a})$ geht, während das andere Paar $(\mathfrak{f})$, $(\mathfrak{e}_1)$ die $(\mathfrak{a})$ in (n) trifft, wo (n) der in bezug auf den Mittelpunkt (z) des Konoides (d. i. der Halbierungspunkt der Distanz der Kuspidalpunkte (S_1), (S_2)) symmetrisch gelegene Punkt ist. Die zwei Parallelen zur Projektions-Achse durch m und n stellen folglich die Aufrisse der vier Erzeugenden dar, und zwar fällt $\mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{e}_1$ mit $\mathfrak{f}$ zusammen. Sind (μ), (ν), (μ_1), (ν_1) die Schnittpunkte von (L) mit beziehungsweise $(\mathfrak{e})$, $(\mathfrak{f})$, $(\mathfrak{e}_1)$, $(\mathfrak{f}_1)$, so ist Aufriß

1) Im 2. Bd. d. 1. Aufl. in den Art. 733—738 (S. 268 ff.).

$\mu \equiv \nu_1 = \mathfrak{e} \times L$ und $\nu \equiv \mu_1 = \mathfrak{f} \times L$, und durch Herabloten in L' ergeben sich die Grundrisse $\mu', \nu', \mu_1', \nu_1'$, welche, mit $S_2^* (\equiv S_2', S_1', m', n', z')$ verbunden, die Grundrisse $\mathfrak{e}', \mathfrak{f}', \mathfrak{e}_1', \mathfrak{f}_1'$ ergeben. Man sieht, daß sowohl $(\mathfrak{e})$ und $(\mathfrak{f})$ als auch $(\mathfrak{e}_1)$ und $(\mathfrak{f}_1)$ sich senkrecht kreuzen.

Konstruieren wir nun den Schlagschatten dieses Erzeugenden-Quadrupels auf die untere Torsalebene (die Grundriß-Ebene). Vorerst sei bemerkt, daß der Grundrißschlagschatten $\mathfrak{t}_1^*$ von $(\mathfrak{t}_1)$ mit $\mathfrak{t}_1'$ zusammenfällt, während $\mathfrak{t}_2^* \equiv \mathfrak{t}_2'$ ist und zudem, da (L) laut Voraussetzung in der durch die Torsallinie $(\mathfrak{t}_2)$ gehenden Lichtebene liegt, zugleich den Grundrißschlagschatten L^* darstellt. Die Punkte S_1^* und S_2^* sind die Schlagschatten der Kuspidalpunkte. — Weil die Grundrisse der Lichtstrahlen zur Projektions-Achse parallel laufen, so ergibt sich μ^* als Schnitt von $\mathfrak{t}_2^*$ mit $\overline{\mu' \mu_1'}$, und μ_1^* ist identisch mit μ^*, so daß uns bereits die Parallelen durch μ^* zu $\mathfrak{e}', \mathfrak{e}_1'$ bzw. die Grundrißschlagschatten $\mathfrak{e}^*, \mathfrak{e}_1^*$ der horizontalen Geraden $(\mathfrak{e})$ und $(\mathfrak{e}_1)$ liefern. Analog ergibt sich ν^*, und die Parallelen durch ν^* zu $\mathfrak{f}', \mathfrak{f}_1'$ sind die Grundrißschlagschatten von $(\mathfrak{f}), (\mathfrak{f}_1)$. Sind m^*, n^* die Schatten von (m) und (n), so ist klar, daß $\mathfrak{e}^*, \mathfrak{f}_1^*$ sich in m^* schneiden, während $\mathfrak{e}_1^*, \mathfrak{f}^*$ durch n^* gehen. Die Mitte von $m^* n^*$ ist dann der Schlagschatten z^* von (z).

Wir bemerken jetzt sofort, daß das Dreieck $m^* \mu^* \nu^*$ ein gleichschenkliges Dreieck ist, dessen Höhenschnitt nach n^* fällt. Der *Feuerbachsche Kreis* dieses Dreieckes ist mithin der über $S_2^* z^*$ als Durchmesser beschriebene Kreis Λ^*. *Alle gleichschenkligen Dreiecke, deren Basis in die* $\mathfrak{t}_2^*$ *fällt und deren Schenkel die Grundrißschlagschatten zweier im selben Punkte der Achse* $(\mathfrak{a})$ *sich schneidender Erzeugenden des Plückerschen Konoides bilden, haben den festen Kreis* Λ^* *zum Feuerbachschen Kreis.*

3. Der Kreis Λ^* ist zugleich der Ort der Schnittpunkte der Schlagschatten je zweier sich rechtwinklig kreuzender Erzeugenden des Konoides, wie $\mathfrak{e}^*, \mathfrak{f}^*$, die sich in η^* treffen, welcher Punkt als Höhenfußpunkt im Dreiecke $m^* \mu^* \nu^*$ offenbar auf Λ^* liegen muß. Die $\mathfrak{e}^*$ trifft Λ^* noch in $\mathfrak{x}^*$ — der Mitte von $\overline{m^* \mu^*}$. Fassen wir $\mathfrak{x}^*$ als Schlagschatten eines Punktes $(\mathfrak{x})$ der $(\mathfrak{e})$ auf, so ist $(\mathfrak{x})$ nichts anderes als der Halbierungspunkt der Strecke $(m\mu)$. Der Aufriß $\mathfrak{x}$ ist die Mitte von $\overline{m\mu}$, und der Grundriß $\mathfrak{x}'$ halbiert $\overline{m'\mu'}$, d. i. $S_2^* \mu'$. Der Kreis Λ^* ergibt sich folglich auch als Schlagschatten der Ellipse (Λ) auf dem Konoide, deren Aufriß Λ durch die Gerade αS_2 (α Mitte von $a S_1$) und deren Grundriß Λ' durch den über $\alpha' S_2^*$ als Durchmesser beschriebenen mit Λ^* kongruenten Kreis dargestellt wird, was sich unmittelbar verifizieren läßt.

Nennen wir η_1^* den Schnittpunkt $\mathfrak{e}_1^* \times \mathfrak{f}_1^*$, ξ_1^* den zweiten Schnittpunkt von $\mathfrak{e}_1^*$ mit Λ^*, und verbinden wir beide Punkte mit s^*, so ist $s^*\xi_1^* \parallel \mathfrak{e}^*$; und $\triangle s^* m^* \eta_1^*$ ist gleichschenklig, da offenbar $s^*m^* = s^*n^* = s^*\eta_1^*$ ist. Hieraus folgt nun $\sphericalangle\, \xi_1^* s^* S_2^* = \sphericalangle\, \mu^* m^* S_2^*$ und $\sphericalangle\, \eta_1^* s^* S_2^* = 2 \sphericalangle\, \nu^* m^* S_2^* = 2 \sphericalangle\, \mu^* m^* S_2^*$; d. h. der Bogen $\eta_1^* S_2^*$ ist doppelt so groß als der

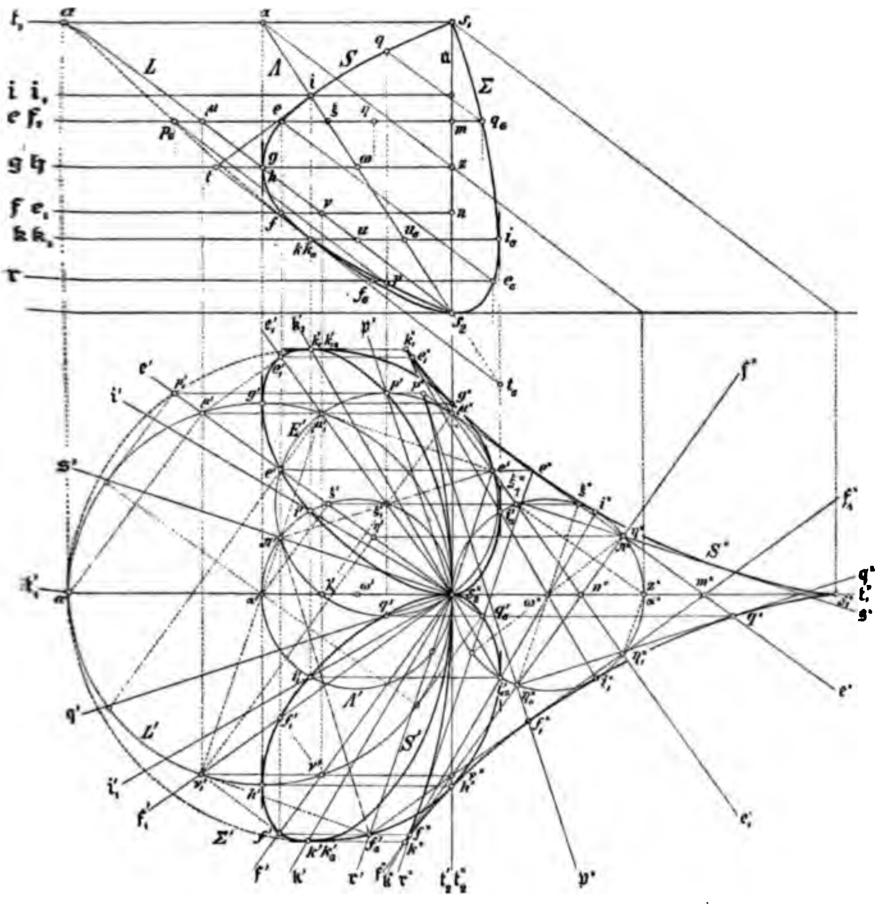


Fig. 1.

Bogen $\xi_1^* S_2^*$, und der *Schlagschatten* S^* *des Konoides auf die Grundrißebene ergibt sich demnach als Enveloppe der Verbindungsgeraden gleichzeitiger Lagen zweier Punkte des Kreises* Λ^*, *die von* S_2^* *aus in entgegengesetzter Richtung den Kreis mit gleichbleibenden Geschwindigkeiten, die im Verhältnisse* 1 : 2 *stehen, durchlaufen.* S^* *ist folglich eine Steinersche Hypotrochoide mit* Λ^* *als dem sie dreifach berührenden Scheitelkreis.*

4. Auf Grund des eben gewonnenen Resultates sind wir in der Lage, auf dem Schlagschatten irgend einer Erzeugenden den Berührungspunkt anzugeben. Den Berührungspunkt e^* der $\mathfrak{e}^*$ erhalten wir z. B., indem wir $\eta^*\xi^*$ um sich selbst über ξ^* hinaus verlängern. Durch Zurückziehen des Lichtstrahles könnte man jetzt leicht Aufriß e und Grundriß e' des auf $(\mathfrak{e})$ gelegenen Punktes (e) der Selbstschattengrenze (S) des Konoides finden und auch über den Charakter der beiden Kurven Aufschluß erhalten. Wir ziehen es jedoch vor, e' direkt zu konstruieren. Zu dem Behufe legen wir durch $(\mathfrak{e})$ die Lichtebene. Dieselbe ist Tangentialebene des Konoides im Punkte (e) der (S), und zwar ergibt sich (e) als der von (m) verschiedene Schnittpunkt der in jener Ebene gelegenen Ellipse (E) des Konoides. Der Grundriß dieser Ellipse ist der Kreis E', von dem $\mu^*\lambda'$ als Grundriß der einen Achse von (E) ein Durchmesser ist. Die $\mathfrak{e}^*$ als Grundrißspur der Lichtebene durch $(\mathfrak{e})$ ist nämlich Tangente in ihrem Schnittpunkte mit der Torsallinie $(\mathfrak{t}_1)$, welcher mit μ^* zusammenfällt, und die zu $\mathfrak{e}^*$ parallele Tangente von (E) wird von der oberen Torsalebene ausgeschnitten, welche die (E) im Scheitel (λ) auf $(\mathfrak{t}_1)$ berührt. Da nun der Grundriß von (E) ein Kreis E' ist, so finden wir λ', indem wir in μ^* ein Lot auf seine Tangente $\mathfrak{e}^*$ errichten und dasselbe mit $\mathfrak{t}_1'$ zum Schnitte bringen. Man sieht nun sofort, daß λ' auch in $\overline{\mu_1'\nu'}$ liegen muß, denn das rechtwinklige Dreieck $\mu_1'\mu^*S_2^*$ ist kongruent mit dem Dreiecke $\lambda'S_2^*\mu^*$. Der Kreis E' ist mithin dem Rechtecke $\mu^*\mu_1^*\lambda'S_2^*$ umschrieben und hat seinen Mittelpunkt in ξ_1' auf A'. Der Schnittpunkt von $\mathfrak{e}'$ und E' stellt alsdann den Grundriß e' dar, welcher demnach auch einfacher als Fußpunkt des von μ_1' auf $\mathfrak{e}'$ gefällten Lotes gefunden werden kann. Auf diese Art sind e_1', f', f_1' konstruiert worden. Durch Hinaufloten ergeben sich die Aufrisse e, f (e_1, f_1 sind nicht eingetragen, da e_1 mit f und f_1 mit e zusammenfallen). Der Aufriß S der Trennungslinie ist also eine Kurve mit der Horizontalen durch z als Symmetrieachse. *Im Grundriß S' erkennen wir das gerade Zweiblatt*[1]*, die Fußpunktskurve einer Steinerschen Hypotrochoide für einen Scheitel als Pol.* Es ist nämlich sofort zu ersehen, daß der Bogen $\widehat{\mu_1'S_2^*}$ des Kreises L' halb so groß ist als der Bogen zwischen S_2^* und dem nicht bezeichneten Schnittpunkte der Verlängerung des Lotes $\mu_1'e'$ mit dem Kreise L'. Die Enveloppe der Lote $\mu_1'e'$ ist daher die *Steinersche Hypotrochoide* mit L' als Scheitelkreis und S_2^* als einem Scheitel.

5. Der in (e) das Konoid berührende Lichtstrahl trifft dasselbe, da die Fläche vom 3. Grade ist, außerdem noch in einem Punkte (e_a),

---

1) Gino Loria, Spezielle algebraische und transzendente Kurven, S. 157.

der offenbar auf (E) liegt. Wir erhalten daher e'_σ als 2. Schnittpunkt der Parallelen zur Projektions-Achse durch e' mit E'. Der Ort der Punkte e'_σ — der Grundriß Σ' des Schlagschattens (Σ), den die Trennungslinie (S) auf die Fläche wirft — ist nun, wie wir zeigen können, eine *Kardioide*, und zwar die Fußpunktslinie von L' für S_2^* als Pol. Zunächst erkennen wir, daß die Tangente in (e_σ) an (Σ) offenbar als Schnittlinie der Tangentialebene an das Konoid in (e_σ) mit der Tangentialebene längs der Mantellinie $(e)(e_\sigma)$ an den Lichtstrahlenzylinder mit der Basis S^* resultiert und folglich nichts anderes ist als die Tangente in (e_σ) an (E). Die Tangente in e'_σ an Σ' stimmt demnach überein mit der Tangente an E', so daß Σ' als Enveloppe der durch S_2^* gehenden Kreise erscheint, deren Mittelpunkte auf dem Kreise $\varDelta'$ liegen, womit unsere Behauptung, Σ sei eine Kardioide, schon bewiesen ist.

Da $e'_\sigma S_2^*$ aufgefaßt werden kann als Chordale des Kreises E' und des ihm unendlich benachbarten Kreises durch S_2^*, dessen Mittelpunkt der zu ξ'_1 konsekutive Punkt auf $\varDelta'$ ist, so steht $e'_\sigma S_2^*$ senkrecht auf der Zentrale beider Kreise, d. h. auf der Tangente an $\varDelta'$ in ξ'_1, und $\xi'_1 S_2^* e_\sigma$ ist folglich ein gleichschenkliges Dreieck, und die Normale Σ' in e'_σ — die $e'_\sigma \xi'$ — geht durch $\pi' = E' \times \varDelta'$, weil $\pi' S_2^*$ als Chordale von E' und $\varDelta'$ senkrecht auf $\omega' \xi'_1$ oder also auch auf $S_2^* e'_\sigma$ stehen muß. Die Figur $e'_\sigma S_2^* \pi' \mu'_1$ ist offenbar ein Rechteck, und zwar ist $\overline{\mu'_1 e'_\sigma}$ Tangente in μ'_1 an L. Die $\overline{\mu'_1 \pi'}$ geht verlängert durch α' und ν'_1; daher liefert die Tangente in ν'_1 an L' dort, wo sie die verlängerte $e'_\sigma S_2^*$ trifft, den Grundriß f'_σ des Schlagschattens (f_σ) herrührend vom Punkte (f). Es liegen daher (e_σ) und (f_σ) auf derselben Erzeugenden $(\mathfrak{r})$ des Konoides, deren Grundrißschlagschatten $\mathfrak{r}^*$ durch $\overline{e^* f^*}$ dargestellt wird, da die Grundrißschlagschatten von e_σ und f_σ ja identisch sind mit e^* bezw. f^*. Nun ist $\overline{e^* f^*} \mathrel{\#} \overline{e'_\sigma f'_\sigma}$, womit beiläufig gezeigt ist, daß die Strecke, welche von zwei Schnittpunkten irgend einer Tangente der *Steinerschen Hypotrochoide* mit der Kurve abgegrenzt wird, konstante Länge besitzt. Weiter ist unmittelbar ersichtlich, daß die Tangenten in zwei solchen Punkten sich rechtwinklig auf dem Scheitelkreise der Kurve treffen. Wenn wir nun noch bedenken, daß der Halbierungspunkt von $\overline{e^* f^*}$ auf $\varDelta^*$ liegt, weil die Mitte von $\overline{e'_\sigma f_\sigma}$ der π' diametral gegenüberliegende Punkt auf $\varDelta'$ ist, so erkennen wir in $\varDelta^*$ den Feuerbachschen Kreis des Dreieckes $e^* f^* \eta^*$, der auch durch die Mitten der Katheten geht, weshalb $\overline{\eta^* e^*} = 2\overline{\eta^* \xi^*}$ ist, womit wieder eine bekannte Tangenteneigenschaft der *Steinerschen Hypotrochoide* bestätigt erscheint. Endlich ist noch zu erwähnen, daß die

Höhe auf die Hypotenuse in jenem rechtwinkligen Dreiecke den Schlagschatten $\mathfrak{s}^*$ der durch (π) gehenden Erzeugenden $(\mathfrak{s})$ darstellt $(\pi^* \equiv \eta^*)$.

6. Zu denselben Resultaten kommen wir übrigens auch durch folgende Überlegungen: Die Ellipse (E) wird von zwei Lichtstrahlen in den Punkten (p), (q) berührt. Die Grundrisse p', q' sind die Endpunkte des zu $\mathfrak{t}_1'$ normalen Durchmessers von E'. Diese Punkte (p), (q) gehören selbstverständlich gleichwie (e) der Trennungslinie (S) an. Ihre Schlagschatten p^*, q^* fallen in e^* und ihre Schatten auf dem Konoide p_σ, q_σ (von denen p_σ hier ein uneigentlicher Schatten ist) liegen auf $(\mathfrak{e})$. Die Punkte (p), (q) liegen weiter auf zwei sich rechtwinklig kreuzenden Erzeugenden $(\mathfrak{p})$, $(\mathfrak{q})$ der Fläche. Nennen wir den Winkel, den $\overline{p^*q^*}$ oder die parallele und gleichlange $\overline{p_\sigma' q_\sigma'}$ (d. i. ein *Stück* von $\mathfrak{e}'$) mit $\overline{p'q'}$ einschließt, φ, so ist $\overline{p'q'} = \overline{p^*q^*}\cos\varphi = \overline{p_\sigma' q_\sigma'}\cos\varphi$. Da $\sphericalangle S^* a' \mu'$ als Normalwinkel gleich $\sphericalangle S_2^* \mu' \nu_1'$ ist, welcher ebenfalls mit φ übereinstimmt, so haben wir $\overline{a'\mu'} = \overline{a' S_2^*}\cos\varphi$ und ziehen hieraus wegen $\overline{a'\mu'} \# \overline{\lambda'\mu^*} = \overline{p'q'}$ den Schluß, daß $\overline{p^*q^*} = \overline{p_\sigma' q_\sigma'} = \overline{a' S_2^*}$ — also konstant ist.

Weil $\mathfrak{x}'$ die Mitte von $\overline{p_\sigma' q_\sigma'}$ ist, so läßt sich Σ' leicht konstruieren. Wir haben bloß von den Schnittpunkten des Kreises Λ' mit beliebigen durch S_2^* gezogenen Strahlen den Durchmesser von Λ' nach beiden Seiten abzutragen. Die Σ' erscheint so als Konchoide abgeleitet aus Λ' und dem um S_2^* als Mittelpunkt beschriebenen doppelt so großen Kreis für S_2^* als Pol. Demgemäß treffen sich die Normalen an Σ' in p_σ' und q_σ' in dem $\mathfrak{x}'$ diametral gegenüberliegenden Punkte auf Λ'[1]; die Identität der Σ' mit der Fußpunktskurve von Λ' für S_2^* als Pol ist unmittelbar der Figur zu entnehmen.

Betrachten wir noch die Schlagschatten $\mathfrak{p}^*$, $\mathfrak{q}^*$ der durch (p), (q) gehenden Erzeugenden $(\mathfrak{p})$, $(\mathfrak{q})$ des Konoides, so ist leicht einzusehen, daß deren auf Λ^* zu liegen kommender Schnittpunkt η_0^* kein anderer als der $\mathfrak{x}^*$ diametral gegenüberliegende Punkt sein kann, oder also der von η^* verschiedene Schnittpunkt von $\mathfrak{f}^*$ und Λ^*. Denn $\mathfrak{x}^*$ als Mitte von $\overline{p^*q^*}$ ist das Zentrum des Umkreises für das rechtwinklige Dreieck $p^*q^*\eta_0^*$. Nun ist aber der Radius dieses Kreises dem Durchmesser von Λ^* gleich, woraus unsre Behauptung folgt. Λ^* ist wiederum der *Feuerbachsche Kreis* dieses rechtwinkligen Dreiecks, der also auch durch die Kathetenmitten geht, was wiederum auf die einfache Berührungspunktskonstruktion für die Tangenten von S^* führt $(\overline{\eta^* e^*} = 2\overline{\eta^*\mathfrak{x}^*})$.

---

1) Chr. Wiener, Lehrbuch d. darst. Geometrie, 2. Bd., Art. 174, S. 182.

7. In der Figur sind noch eingetragen die Konstruktionen des sogleich näher zu charakterisierenden Erzeugendenquadrupels (i), ($\mathfrak{i}_1$), ($\mathfrak{k}$), ($\mathfrak{k}_1$) samt den Schlagschatten der vier Geraden, den auf ihnen gelegenen Punkten (i), (i_1), (k), (k_1) von (S) und deren Schatten auf die Grundrißebene. Außerdem sind die auf (L) gelegenen Punkte (g), (h) von (S) ersichtlich, die den beiden durch (z) gehenden Erzeugenden ($\mathfrak{g}$), ($\mathfrak{h}$) des Konoides angehören. Ihre Grundrißschatten g^*, h^* fallen in $\mathfrak{t}_2^*$, und sie gehören zugleich als Punkte g'_σ, h'_σ der Σ' an, woraus folgt, daß der Aufriß Σ in S_2 die Projektions-Achse berührt. Daß g' und h' Berührungspunkte der zu $\mathfrak{t}'_1$ normalen Doppeltangente von S' sind, ist leicht einzusehen. Die Aufrisse von (g), (h) fallen zusammen; der betreffende mit g und h bezeichnete Punkt ist offenbar ein Scheitel von S. Da (i), ($\mathfrak{i}_1$) als die durch die Mitte von $\overline{(z)(S_1)}$ und ($\mathfrak{k}$), ($\mathfrak{k}_1$) als die durch die Mitte von $\overline{(z)(S_2)}$ gehenden Erzeugenden des Konoides angenommen wurden, so schließen $\mathfrak{i}'$ und $\mathfrak{i}'_1$ mit $\mathfrak{t}'_1$ einen Winkel von 30° ein, während $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{k}'_1$ gegen $\mathfrak{t}'_1$ unter 60° geneigt sind. Die Punkte i', i'_1 liegen auf $\varDelta'$; i^*, i^*_1 sind daher Scheitel von S^*. In den Punkten (k), (k_1) sind die durch sie gehenden Lichtstrahlen *Haupttangenten* des Konoides, denn der Grundriß des Lichtstrahles durch (k) schließt mit k' — dem Grundriß der Erzeugenden durch (k) — einen Winkel von 60° ein, also einen doppelt so großen Winkel als $\mathfrak{k}'$ mit $\mathfrak{t}'_2$ bildet. Analoges gilt aber von ($\mathfrak{k}_1$).

Demzufolge fällt (k_σ) mit (k) und $(k_{1\sigma})$ mit (k_1) zusammen, und (i_σ) kommt auf ($\mathfrak{k}$) zu liegen, während $(i_{1\sigma})$ auf ($\mathfrak{k}_1$) enthalten ist, da ja die auf eine Erzeugende fallenden Schlagschatten von Punkten der (S) herrühren, die auf zueinander rechtwinkligen Erzeugenden liegen. Die Normalen in k'_σ und i'_σ an Σ' schneiden sich in i' (Nr. 6) und sind aufeinander rechtwinklig. Daher sind die Tangenten der Σ' in k'_σ, $k'_{1\sigma} \parallel \mathfrak{t}_1$, während sie in i'_σ, $i'_{1\sigma}$ zu $\mathfrak{t}'_1$ normal sind und in eine Gerade fallen. In k', k'_1 berühren sich demnach S' und Σ'.

8. Wir können nunmehr in die Untersuchung des Aufrisses der Kurven (S) und (Σ) eingehen. Zunächst zeigen wir, daß S eine Kurve 2. Grades ist. Der Gesamtschnitt des Konoides mit dem Lichtstrahlenzylinder durch den Kreis $\varDelta^*$ der Grundrißebene besteht aus der Ellipse $(\varDelta)$ und einer Raumkurve 4. Ordnung (H), die offenbar symmetrisch zur aufrißparallelen Verbindungsebene von ($\mathfrak{t}_1$) und ($\mathfrak{a}$) liegt und daher zum Aufriß eine Kurve 2. Grades hat. Diese Kurve ist aber schiefsymmetrisch zum Aufriß S für die Gerade $\varDelta$ (oder αS_2) als Symmetrieachse und für zur Projektions-Achse parallele Symmetriestrahlen. Daraus folgt dann, daß auch S vom 2. Grade ist. Um dies alles einzusehen, genügt es einen Punkt (η) von (H) ins Auge zu

fassen. Mit (η) bezeichneten wir den auf $(\mathfrak{e})$ gelegenen Punkt der (H). Sein Grundrißschlagschatten ist $\eta^* = \mathfrak{e}^* \times \mathfrak{f}^*$, hiernach ist η' auf $\mathfrak{e}'$ und mithin auch η auf $\mathfrak{e}$ leicht einzuzeichnen. Nun ist aber $\overline{\eta^* \xi^*} = \overline{\xi^* e^*}$ und demgemäß $\overline{\eta' \xi'} = \overline{\xi' e'}$ und $\overline{\eta \xi} = \overline{\xi e}$, welch letztere Relation unmittelbar unsere obigen Behauptungen beweist. Beiläufig folgt noch aus $\overline{\xi' \eta'} = \overline{\xi' e'}$, wegen $\overline{\xi' \alpha'} \parallel \overline{\mu_1' e_1'}$, daß die Normale auf $\mathfrak{e}'$ in η' durch ν_1' geht. Da die Gerade $\overline{\eta' \nu_1'}$ in bezug auf α' zentrisch symmetrisch zur Geraden $\overline{\mu_1' e'}$ liegt, so gilt dies auch für ihre Enveloppen. Mithin ist der Grundriß H' die Fußpunktslinie für S_2^* als Pol einer *Steinerschen Hypotrochoide* mit L' als Scheitelkreis und a' als einem ihrer Scheitel. H ist somit ein *gerades Dreiblatt.*[1])

Daß nun S speziell eine Parabel ist, erschließen wir, wie folgt. Die Tangente an S in $\mathfrak{k}$ ist der Aufriß des Lichtstrahles durch (k), also die Parallele zur Geraden L. Die Tangente in i trifft die g im nämlichen Punkte t wie die Tangente in k. Dieser Punkt ist also Pol der $\overline{ik}$. Stellt sich heraus, daß g die Mitte des Abstandes der $\overline{ik}$ von ihrem Pole t ist, so kann S nur eine Parabel sein. Nun ist Abstand $(g,\ ik) =$ Abstand $(\alpha' i' i_1') = \frac{1}{2} \overline{\alpha' \omega'}$, ferner ist $\overline{tg} = \overline{ku}$, und da u als Mitte von $\overline{gS_2}$ mit ω und ω' in einer Geraden liegt, so haben wir $\overline{tg} = \overline{ku} =$ Abstand $(\omega',\ i' i_1') = \frac{1}{2} \overline{\alpha' \omega'}$. Es ist also tatsächlich $\overline{tg} =$ Abstand $(g,\ ik)$. Die Eigenschattengrenze (S) selbst ist eine Raumkurve 4. Ordnung, denn der aufrißprojizierende parabolische Zylinder durch S_1 geht durch die Torsallinie $(\mathfrak{t}_2)$ des Konoides und durch dessen unendlich ferne einfache Leitgerade — die unendlich ferne Gerade der Grundrißebene —, so daß der Restschnitt (S) von der 4. Ordnung ist. Der längs (S) dem Konoide umschriebene berührende Lichtzylinder 4. Ordnung hat endlich mit der Fläche noch die Raumkurve (Σ) gemein, welche demnach ebenfalls von der 4. Ordnung ist. Diese projiziert sich im Aufriß wiederum als Kurve 2. Ordnung und zwar ebenfalls als Parabel.

Wir bemerken zunächst, daß $\Delta(\alpha S_2')$ ein Durchmesser von Σ ist, und zwar jener, der die zur Projektions-Achse parallelen Sehnen halbiert (wegen $p_\sigma \xi = \xi q_\sigma$). Der Punkt u_σ ist speziell die Mitte von $\overline{k_\sigma i_\sigma}$, zugleich auch die Mitte des Abstandes $(u,\ \mathfrak{a})$. Da $\overline{uk_\sigma} = \overline{uu_\sigma}$, so wird die Strecke $\overline{k_\sigma i_\sigma}$ durch u, u_σ und ihren Schnittpunkt mit $\mathfrak{a}$ in vier gleiche Teile geteilt, und weil die Tangente an Σ und $k_\sigma \parallel L$ und jene

1) Gino Loria, l. c.

in $i_\sigma \parallel \mathfrak{a}$ läuft, so treffen sich diese beiden Tangenten in einem Punkte t_σ auf $\varLambda$, dessen Entfernung von $S_2 = \overline{u_\sigma S_2}$ ist, womit auch Σ als Parabel charakterisiert erscheint.

9. Wir gehen jetzt daran, die Schattenkonstruktion für parallele Lichtstrahlen von allgemeiner Lage gegen das Konoid zu untersuchen. Wir arbeiten bloß mit einer Projektion und wählen als Projektionsebene (P. E.) die Torsalebene durch die Torsallinie $(\mathfrak{t}_2)$. (Fig. 2). Es sollen der Schlagschatten auf diese Torsalebene und die Projektionen der Eigenschattengrenze und ihres Schlagschattens auf die Fläche konstruiert werden. Von der Ausführung der Konstruktion im Detail sehen wir jedoch ab. Da $(\mathfrak{t}_2)$ in der Projektionsebene liegend angenommen wird, so ist $\mathfrak{t}_2 \equiv \mathfrak{t}_2^*$ — dem Schlagschatten der $(\mathfrak{t}_2)$ auf die Projektionsebene. Die Projektion $\mathfrak{t}_1$ der Torsallinie $(\mathfrak{t}_1)$ ist eine Normale auf $\mathfrak{t}_2$, und ihr bloß mit S_2^* bezeichneter Schnittpunkt mit $\mathfrak{t}_2$ stellt die Projektion der Achse $(\mathfrak{a})$ des Konoides und folglich aller ihrer Punkte dar. Die Gerade $\mathfrak{l}$ sei die Projektion des durch den Kuspidal-

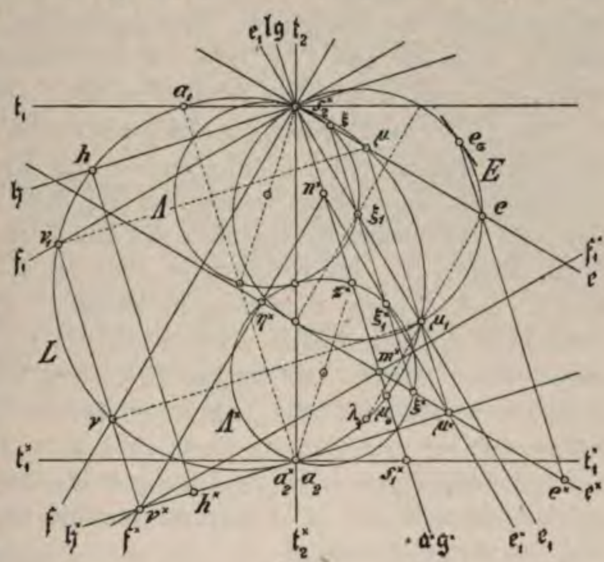


Fig. 2.

punkt S_1 gehenden Lichtstrahles, und S_1^* sei der Schlagschatten von (S_1) auf die Projektionsebene. Dann ist $\mathfrak{t}_1^* \parallel \mathfrak{t}_1$ durch S_1^* der Schlagschatten von $(\mathfrak{t}_1)$. Die Erzeugende des Konoides, deren Projektion mit $\mathfrak{l}$ zusammenfällt, heiße $(\mathfrak{g})$, die zu ihr normale Erzeugende $(\mathfrak{h})$. Die durch $(\mathfrak{h})$ gehende Lichtebene schneidet die Fläche in einer Ellipse (L), welche wir als Leitlinie wählen. Die Projektion von (L) ist ein Kreis, welcher offenbar in $a_2^* \equiv a_2 = \mathfrak{t}_1^* \times \mathfrak{t}_2^*$ die zu $\mathfrak{h}$ parallele $\mathfrak{h}^*$ berührt. Der a_2 gegenüberliegende Punkt a_1 ist auf $\mathfrak{t}_1$ enthalten und kann leicht gefunden werden. L ist hierauf über $\overline{a_1 a_2}$ als Durchmesser zu beschreiben. Die Punkte a_1, a_2 sind ersichtlich die Projektionen der in $(\mathfrak{t}_1)$, $(\mathfrak{t}_2)$ gelegenen Hauptscheitel (a_1), (a_2) der (L). Der Schnittpunkt h von L und $\mathfrak{h}$ gehört der Projektion S der Eigenschattengrenze (S) an, und h^* in $\mathfrak{h}^*(hh^* \parallel \mathfrak{l})$ ist der Berührungspunkt der Tangente $\mathfrak{h}^*$ des Schlagschattens S^* auf die Projektionsebene.

10. Fassen wir wiederum wie in Nr. 2 ein Quadrupel $(\mathfrak{e}), (\mathfrak{f}), (\mathfrak{e}_1), (\mathfrak{f}_1)$ von Erzeugenden ins Auge von der Beschaffenheit, daß $(\mathfrak{e}) \times (\mathfrak{a}) = (\mathfrak{f}_1) \times (\mathfrak{a}) = (m)$, $(\mathfrak{f}) \times (\mathfrak{a}) = (\mathfrak{e}_1) \times (\mathfrak{a}) = (n)$ und $\overline{(z)(m)} = \overline{(z)(n)}$ ist, so bilden die Projektionen μ, ν, μ_1, ν_1 ihrer Schnittpunkte mit (L) die Ecken eines L eingeschriebenen Rechteckes $\mu\mu_1\nu\nu_1$, in welchem die Gegenseiten $\overline{\mu\mu_1}, \overline{\nu\nu_1} \parallel \mathfrak{g}$ und die Gegenseiten $\overline{\mu_1\nu}, \overline{\mu\nu_1} \parallel \mathfrak{h}$ laufen. Die Schlagschatten auf die P. E. der Paare $(\mu), (\mu_1)$ und $(\nu), (\nu_1)$ sind dargestellt durch $\mu^* = \mathfrak{h}^* \times \overline{\mu\mu_1}$ und $\nu^* = \mathfrak{h}^* \times \overline{\nu\nu_1}$. Ziehen wir nun durch ν^* die Parallelen $\mathfrak{f}^*, \mathfrak{f}_1^*$ zu $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_1$, so stellen diese Linien die Schlagschatten der bezüglichen Erzeugenden dar, und es treffen sich dann $\mathfrak{e}^*, \mathfrak{f}_1^*$ in m^* und $\mathfrak{f}^*, \mathfrak{e}_1^*$ in n^*, welche beiden Pnnkte auf $\mathfrak{a}^* \equiv \mathfrak{g}$ liegen, und zwar in gleichen Abständen von z^*, der Mitte von $S_1^* S_2^*$.

Als *Feuerbachschen Kreis* des Dreieckes $m^*\mu^*\nu^*$, für welches n^* der Höhenschnittpunkt ist, erhalten wir den Kreis $\varLambda^*$ über $\overline{a_2^* z^*}$ als Durchmesser, und mithin treffen sich die Schlagschatten zweier sich senkrecht kreuzenden Erzeugenden des Konoides in den Punkten des festen Kreises $\varLambda^*$. Im vorliegenden Falle ist $\eta^* = \mathfrak{e}^* \times \mathfrak{f}^*$ ein solcher Punkt. Auf $\varLambda^*$ liegen aber auch die Mitten ξ^*, ξ_1^* von $\overline{m^*\mu^*}$ und $\overline{n^*\mu^*}$. Betrachten wir diese Punkte als Schatten von $(\mathfrak{e})$, beziehungsweise $(\mathfrak{e}_1)$ angehörenden Punkten, so ergeben sich deren Projektionen sofort als Mitten von $\overline{S_2^*\mu}$ und $\overline{S_2^*\mu_1}$, d. h. $\varLambda^*$ ist der Schlagschatten einer Ellipse $(\varLambda)$ auf dem Konoide, deren Projektion $\varLambda$ der in S_2^* den Kreis L berührende, durch dessen Zentrum gehende, halb so große Kreis ist, welcher folglich mit $\varLambda^*$ kongruent ausfällt und in der Mitte von $\overline{S_2^* a_2^*}$ den Kreis $\varLambda^*$ berührt.

Um den Berührungspunkt e^* der Tangente $\mathfrak{e}^*$ des Schlagschattens S^* des Konoides auf die P. E. zu ermitteln, legen wir konform dem Vorgange in Nr. 4 durch $(\mathfrak{e})$ die Lichtebene und suchen deren Berührungspunkt (e) auf $(\mathfrak{e})$; der Schlagschatten von (e) ist e^*. Der Punkt (e) selbst gehört der Trennungslinie (S) und der noch vorhandene Schnittpunkt (e_σ) des in (e) das Konoid berührenden Lichtstrahles mit der Fläche ist ein Punkt des Schlagschattens (Σ), den (S) auf das Konoid wirft. Der Punkt (e_σ) wird natürlich auf der Ellipse (E) liegen, welche die Lichtebene durch $(\mathfrak{e})$ ausschneidet.

Die Projektion der Ellipse (E) ist ein Kreis E, welcher die $\mathfrak{e}^*$ — die Spur der Lichtebene auf der P. E., d. i. der Torsalebene durch $(\mathfrak{t}_2)$ — in ihrem Schnitte mit $\mathfrak{t}_2$ berührt. Der Kreis E geht auch durch S_2^* und ferner durch μ_1, welcher die Projektion des Schnittpunktes der

Erzeugenden $(\mathfrak{e}_1)$ mit dem durch (μ) auf $(\mathfrak{e})$ gehenden Lichtstrahle ist.

Wir können nun leicht zeigen, daß $\mathfrak{x}_1$ der Mittelpunkt von E ist. Wir brauchen bloß einzusehen, daß $\mathfrak{e}_1$ $(\mu_1 S_2^*)$ die Normale in S_2^* an E, also einen Durchmesser von E vorstellt. Die Normale an E in S_2^* muß aber mit $\mathfrak{t}_2$ denselben Winkel einschließen, den die Normale in $\mathfrak{t}_2 \times \mathfrak{e}^*$ mit der $\mathfrak{t}_2$ bildet. Der letztere Winkel ist nun als Normalwinkel dem Winkel $(\mathfrak{e}, \mathfrak{t}_1)$ gleich, welcher wiederum mit $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{t}_2)$ übereinstimmt vermöge der Symmetrieverhältnisse des Plückerschen Konoides. Damit ist $\mathfrak{x}_1$ tatsächlich als Zentrum des Kreises E nachgewiesen. Der Punkt $e = \mathfrak{e} \times E$ der Projektion der Eigenschattengrenze (S) ergibt sich dergestalt einfach als Fußpunkt des Lotes aus μ_1 auf $S_2^*\mu$ (oder $\mathfrak{e}$). Der Ort der Punkte e — die Projektion S der (S) — erscheint auch hier als Fußpunktslinie einer *Steinerschen Hypotrochoide* mit dem Scheitelkreise L und für S_2^* als Pol. Nennen wir λ_1 den zweiten Schnittpunkt der $\overline{e\mu_1}$ mit L, so muß zum Beweise dieser Behauptung gezeigt werden, daß bei einer gleichmäßigen Drehung von $\mathfrak{e}$ um S_2^*, die zugehörigen Punkte μ_1, λ_1 in entgegengesetzter Richtung auf L sich gleichförmig bewegen mit Geschwindigkeiten im Verhältnisse $1:2$. Gelangt bei dieser Drehung $\mathfrak{e}$ speziell nach $\mathfrak{g}$, so kommt μ nach μ_0, μ_1 nach S_1^* und λ_1 nach h. Der Punkt μ_1 hat also den Bogen $\widehat{\mu_1 S_2^*}$ durchlaufen (über μ) und λ_1 den Bogen $\widehat{\lambda_1 h}$ (über ν). Nun ist $\overline{S_2^*\nu} \parallel \overline{e\mu_1}$, folglich $\operatorname{arc} \widehat{\nu\lambda_1} = \operatorname{arc} \widehat{\mu_1 S_2^*}$; ferner ist auch wegen $\overline{\mu_1\nu} \parallel \overline{S_2^* h}$ $\operatorname{arc} \widehat{\nu h} = \operatorname{arc} \widehat{\mu_1 S_2^*}$, und mithin in der Tat $\operatorname{arc} \widehat{\lambda_1 h} = 2 \operatorname{arc} \widehat{\mu_1 S_2^*}$.

Ziehen wir jetzt durch e die Projektion des Lichtstrahles, die Parallele zu $\mathfrak{l}$, so trifft diese die E noch in e_σ — einem Punkte der Projektion Σ des Schlagschattens (Σ), und der Schnitt mit $\mathfrak{e}^*$ ist der Punkt e^* — der Berührungspunkt $\mathfrak{e}^*$ der S^*. Die Tangente in e_σ stimmt überein mit der Tangente an die E, so daß Σ als Enveloppe der durch S_2^* gehenden Kreise auftritt, deren Zentren auf dem Kreise Λ liegen. Die Σ ist demnach wiederum eine *Kardioide* mit S_2^* als Spitze, die auch als Fußpunktslinie von L für S_2^* als Pol erhalten werden kann.

Um endlich die S^* als *Steinersche Hypotrochoide* nachzuweisen, genügt es, zu zeigen, daß $\overline{\eta^* e^*} = 2\overline{\eta^* \mathfrak{x}^*}$ ist. Denn kommt, wie hier die S^*, eine Kurve als Enveloppe der Verbindungslinien zweier gesetzmäßig auf einem Kreise Λ^* sich bewegender Punkte $\mathfrak{x}^*$, η^* zu stande, so ist vor allem klar, daß, wenn e^* der Berührungspunkt einer Lage $\mathfrak{e}^*$ der beweglichen Geraden $\overline{\mathfrak{x}^*\eta^*}$ ist, das Verhältnis $\frac{\overline{\mathfrak{x}^* e^*}}{\overline{\eta^* e^*}}$ lediglich in sehr einfacher Weise abhängt vom Verhältnisse der Momentangeschwindig-keiten der Punkte ξ^* und η^*. Ist nun jenes Verhältnis konstant, un setzt man voraus, ξ^* bewege sich gleichförmig auf $\varLambda^*$, so gilt da nämliche von η^*. Die Konstanz des Verhältnisses $\frac{\overline{\xi^* e^*}}{\overline{\eta^* e^*}}$ läßt sic aber wie folgt nachweisen. Es ist $\triangle \mu\mu_1 S_2^* \cong \triangle m^* n^* \mu^*$, und dah $\overline{\mu\mu_1} = \overline{m^* n^*}$, was die Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke $\mu\mu_1 e$ u $m^* n^* \eta^*$ nach sich zieht. Die Strecke $\overline{\mu e}$ ist daher mit der zu i parallelen, aber entgegengesetzt gerichteten Strecke $\overline{m^* \eta^*}$ von gleic Länge. Die $\overline{\mu e}$ ist ferner gleichlang, parallel, aber gleich gerichtet μ so daß wegen ξ^* als Mitte von $\overline{m^* \mu^*}$ derselbe Punkt auch in die M von $\overline{\eta^* e^*}$ zu liegen kommt, und mithin $\frac{\overline{\xi^* e^*}}{\overline{\eta^* e^*}} = \frac{1}{2}$ ist.

Dieser spezielle Wert des Teilverhältnisses $(\xi^* \eta^* e^*)$ bedin gt, wenn ξ^* den Kreis $\varLambda^*$ mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchlä ft, daß η^* sich auf dem Kreise $\varLambda^*$ mit doppelter Geschwindigkeit in e nt-gegengesetzter Richtung bewegt, und somit e^* auf einer *Steinersc en Hypotrochoide* abrollt, die $\varLambda^*$ zum Scheitelkreise besitzt. Ei en Scheitel derselben erhielten wir durch Drittelung des Bogens $\widehat{\xi^* \eta^*}$ in dem ξ^* näher gelegenen Teilpunkte.

Prag, 4. Juli 1904.

Beitrag zur trigonometrischen Analysis.

Von Franz Rogel in Limbach bei Chemnitz.

1. Es folgt aus

$$e^{re^{i\varphi}} = e^{r\cos\varphi} \cdot [\cos(r \sin\varphi) + i \sin(r\sin\varphi)] \tag{1}$$

zunächst

$$e^{r\cos\varphi} \cdot \cos(r\sin\varphi) = 1 + \frac{1}{1!} r\cos\varphi + \frac{1}{2!} r^2 \cos 2\varphi + .$$

$$e^{r\cos\varphi} \sin(r\sin\varphi) = \frac{1}{1!} r\sin\varphi + \frac{1}{2!} r^2 \sin 2\varphi + \ldots,$$

und wenn hierin $r = ix \sec\varphi$, ferner

$$\frac{\sin n\varphi}{\cos^n\varphi} = P_n, \quad \frac{\cos n\varphi}{\cos^n\varphi} = Q_n \tag{2}$$

gesetzt wird, weiter

$$(3)\quad \cos x\,\mathfrak{Sin}\,(x\tan\varphi)=\frac{1}{1!}\,xP_1-\frac{1}{3!}\,x^3P_3+\frac{1}{5!}\,x^5P_5-\cdots,$$

$$(4)\quad \sin x\,\mathfrak{Sin}\,(x\tan\varphi)=\frac{1}{1!}\,x^2P_2-\frac{1}{4!}\,x^4P_4+\frac{1}{6!}\,x^6P_6-\cdots,$$

$$(5)\quad \cos x\,\mathfrak{Cof}\,(x\tan\varphi)=1-\frac{1}{2!}\,x^2Q_2+\frac{1}{4!}\,x^4Q_4-\frac{1}{6!}\,x^6Q_6+\cdots,$$

$$(6)\quad \sin x\,\mathfrak{Cof}\,(x\tan\varphi)=\frac{1}{1!}\,x\,Q_1-\frac{1}{3!}\,x^3Q_3+\frac{1}{5!}\,x^5Q_5-\cdots,$$

worin $\mathfrak{Sin}$ und $\mathfrak{Cof}$ die Funktionszeichen für den hyperbolischen Sinus bezw. Cosinus bedeuten.

2. Durch Multiplikation von (3) und (5) mit $\sin x$ und von (4) und (6) mit $\cos x$ ergibt sich

$$(7)\quad \begin{cases} \sin x\cdot\left[xP_1-\frac{1}{3!}x^3P_3+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}P_{2n+1}+\cdots\right.\\ =\cos x\cdot\left[\frac{1}{2!}\,x^2P_2-\frac{1}{4!}x^4P_4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\,P_{2n}+\cdots\right.\end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \sin x\left[1-\frac{1}{2!}\,x^2Q_2+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\,Q_{2n}+\cdots\right]\\ =\cos x\left[xQ_1-\frac{x^3}{3!}\,Q_3+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,Q_{2n+1}+\cdots\right],\end{cases}$$

woraus durch Ersetzung von $\sin x$ und $\cos x$ durch Potenzreihen, Multiplikation und Gleichstellung der Koeffizienten hervorgeht:

$$(9)\quad \begin{cases} \binom{2n}{1}P_1+\binom{2n}{3}P_3+\cdots+\binom{2n}{2n-3}P_{2n-3}+\binom{2n}{2n-1}P_{2n-1}\\ =\binom{2n}{2}P_2+\binom{2n}{4}P_4+\cdots+\binom{2n}{2n-2}P_{2n-2}+\binom{2n}{2n}P_{2n}\end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \binom{2n+1}{0}+\binom{2n+1}{2}Q_2+\cdots+\binom{2n+1}{2n-2}Q_{2n-2}+\binom{2n+1}{2n}Q_{2n}\\ =\binom{2n+1}{1}Q_1+\binom{2n+1}{3}Q_3+\cdots+\binom{2n+1}{2n-1}Q_{2n-1}+\binom{2n+1}{2x+1}Q_{2n+1}.\end{cases}$$

3. Wird (7) in die Formen

$$(11)\quad \begin{aligned} &xP_1-\frac{1}{3!}\,x^3P_3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\,P_{2n-1}+\cdots\\ &=\left[\frac{x^2}{2!}\,P_2-\frac{1}{4!}\,x^4P_4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\,P_{2n}+\cdots\right]\cdot\operatorname{cotg} x\\ &\frac{x^2}{2!}\,P_2-\frac{1}{4!}\,x^4P_4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\,P_{2n}+\cdots\\ &=\tan x\cdot\left[xP_1-\frac{1}{3!}x^3P_3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\,P_{2n-1}+\cdots\right]\end{aligned}$$

gebracht, $\tan x$ und $\cot x$ durch Potenzreihen ersetzt und ausmultipliziert, so kommt

$$(12)\qquad 2nP_{2n-1} = P_{2n} + \binom{2n}{2} 2^2 B_1 P_{2n-2} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n}{2n-4} 2^{2n-4} B_{n-2} P_4 + (-1)^n \binom{2n}{2n-2} 2^{2n-2} B_{n-1} P_2,$$

$$(13)\qquad (2n+1) P_{2n} = \binom{2n+1}{2} 2^2 (2^2-1) B_1 P_{2n-1} -$$

$$\binom{2n-1}{4} 2^4 (2^4-1) B_2 P_{2n-3} + \cdots + (-1)^n \binom{2n+1}{2n-2} 2^{2n-2}(2^{2n-2}-1) B_{n-1} P_3$$

$$+ (-1)^{n+1}\binom{2n+1}{2n} 2^{2n}(2^{2n}-1) B_n P_1,$$

wodurch die P *ungerader* Ordnung durch die P gerader Ordnung und umgekehrt ausgedrückt werden. Durch Differentiation von (12) und (13) bezüglich φ gehen mit Beachtung von

$$\frac{d}{d\varphi} P_m = m\, Q_{m-1} \sec^2 \varphi,$$

wenn noch mit $\sec^2 \varphi$ gekürzt wird, die analogen Relationen hervor

$$(14)\ (2n+1) Q_{2n} = Q_{2n+1} + \binom{2n+1}{1} 2^2 B_1 Q_{2n-1} - \binom{2n-1}{4} 2^4 B_2 Q_{2n-3} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{2n} 2^n B_n Q_1,$$

$$(15)\ 2n\, Q_{2n-1} = \binom{2n}{2} 2^2(2^2-1) B_1 Q_{2n-2} - \binom{2n}{4} 2^4 (2^4-1) B_2 Q_{2n-4} +$$

$$\cdots + (-1)^n \binom{2n}{2n-2} 2^{2n-2}(2^{2n-2}-1) B_{n-1} Q_2 + (-1)^{n+1} 2^{2n}(2^{2n}-1) B_n Q_0,$$

wodurch die Q gerader Ordnung durch solche ungerader Ordnung und umgekehrt ausgedrückt werden.

4. Wenn in (3) und (4) $\cos x$ bezw. $\sin x$ auf die rechte Seite geschafft und dann $\sec x$ bezw. $\operatorname{cosec} x$ durch die gleichwertige Potenzreihe ausgedrückt wird, so ergeben sich

$$\mathfrak{Sin}(x \tan\varphi) = \left(E_0 + \frac{E_1}{2!} x^2 + \frac{E_2}{4!} x^4 \cdots\right)\left(x P_1 - \frac{1}{3!} x^3 P_3 + \cdots\right)$$

$$\mathfrak{Sin}(x \tan\varphi) = \left(\frac{1}{x} + \frac{2(2^1-1)}{2!} B_1 x + \frac{2(2^3-1)}{4!} B_2 x^3 \cdots\right)\left(\frac{x^2}{2!} P_2 - \frac{x^4}{4!} P_4 \cdots\right)$$

und hieraus, da

$$\mathfrak{Sin}(x \tan \varphi) = x \tan \varphi + \frac{x^3}{3!} \tan^3 \varphi + \cdots,$$

die Beziehungen

$$(16)\quad \tan^{2n}\varphi = E_n - \binom{2n}{2} E_{n-1} Q_2 + \binom{2n}{4} E_{n-2} Q_4 + \cdots + (-1)^n \binom{2n}{2n} E_0 Q_{2n},$$

$$(17)\quad \operatorname{tang}^{2n-1}\varphi = \frac{(-1)^n}{2n} P_{2n} + \frac{1}{n}\Big[\binom{2n}{2}(2^{2n-3}-1) B_{n-1} P_2 -$$

$$- \binom{2n}{4}(2^{2n-5}-1) B_{n-2} P_4 + \cdots + (-1)^n \binom{2n}{2n-2}(2^1-1) B_1 P_{2n-2}\Big],$$

aus welchen durch Differentiation bezüglich φ mit Beachtung von

$$\frac{d}{d\varphi} P_m = \frac{m Q_{m-1}}{\cos^2\varphi}, \quad \frac{d}{d\varphi} Q_m = -\frac{m P_{m-1}}{\cos^2\varphi}$$

nach Kürzung mit $\sec^2\varphi$ und $2n$ bezw. $2n-1$ hervorgeht:

$$(18)\quad \tan^{2n-1}\varphi = \binom{2n-1}{1} E_{n-1} P_1 - \binom{2n-1}{3} E_{n-1} P_3 + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1}\binom{2n-1}{2n-1} E_0 P_{2n-1},$$

$$(19)\quad \tan^{2n}\varphi = \frac{(-1)^n Q_{2n+1}}{2n+1} + \frac{2}{2n+1}\Big[-\binom{2n+1}{1}(2^{2n-1}-1) B_n Q_1$$

$$+ \binom{2n+1}{3}(2^{2n-3}-1) B_{n-1} Q_3 - \cdots + (-1)^n \binom{2n+1}{2n-1}(2^1-1) B_1 Q_{2n-1}\Big].$$

5. Da in den Resultaten (12) bis (19) eine Veränderliche auftritt, die *jeden* Wert annehmen kann, so können dieselben als Ausgangspunkte für die mannigfachsten Relationen zwischen Bernoullischen und Eulerschen Zahlen gelten.

Insbesondere kann der einfache Zusammenhang dieser Zahlen mit dem *Sinus* bezw. *Cosinus* der Vielfachen des Bogens zur Ausscheidung aller jener B bezw. E, deren Zeiger einer vorgegebenen Zahl bezüglich eines bestimmten Moduls kongruent sind, verwendet werden.

So bewirkt die Einsetzung $\varphi = \frac{\pi}{p}$, $1 < p < 2n-1$, p ungerade, in (18) das Verschwinden aller Glieder mit E_{n-r}, wo $r \equiv 0 \bmod p$ ist; desgleichen in (12) das Verschwinden aller Glieder mit $B_{n-\frac{1}{2}(r-1)}$, wo $r \equiv 0 \bmod p$ ist.

Ferner verursacht die Annahme $\varphi = \frac{\pi}{2p}$, $1 < p < 2n-2$, in (17) den Ausfall aller B_{n-r}, $r \equiv 0 \bmod p$, p ungerade, ebenso in (12); ferner in (15) und (19) aller $B_{n-\frac{1}{2}(r-1)}$, $r \equiv 0 \bmod p$; in (16) aller $E_{n-\frac{1}{2}r}$, $r \equiv 0 \bmod p$ und in (15) aller $B_{n-\frac{1}{2}(r-1)}$.

gebracht, $\tan x$ und $\cot x$ durch Potenzreihen ers... ...rch die Ein-
so kommt

(12) $$2nP_{2n-1} = P_{2n} + \binom{2n}{2} 2 \ldots \qquad n \text{ ungerade}$$

$$\cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n}{2n-4} 2^{2n-4} B_{n-2} P_4 + \ldots$$

...rade

(13) $$(2n+1)P_{2n} = \binom{2n+1}{2} \ldots$$

$$\binom{2n-1}{4} 2^4(2^4-1)B_2 P_{2n-3} + \cdots \ldots, \quad n \equiv 2$$

$$+ (-1)^{n+1} \ldots \quad n \equiv 4 \qquad \text{mod } 4$$

wodurch die P *ungerader* ... $B_{\frac{1}{2}\nu} = n, \quad n \equiv 2$
umgekehrt ausgedrückt ... mod 4
(13) bezüglich φ gehe ... $B_{\frac{1}{2}\nu} = n, \quad n \equiv 0$

... (12) bis (19) die Zahlen B und E ...
wenn noch mit se... den für $n = 0$, $n = 1, \ldots$ herv...
... werden[2]), so erhält man *neue*, eine ga...
(14) $(2n+1)Q_2$ ... enthaltende Ausdrücke und zwar:

$$\ldots \frac{p_2}{p_1^n}\mathfrak{E}_{n-1} + \frac{p_4}{p_1^{n-1}}\mathfrak{E}_{n-2} + \cdots \frac{p_{2n-2}}{p_1^2}\mathfrak{E}_1 + \frac{p_{2n}}{p_1};$$

(15) $2nQ_{2\nu}$ ...

$$p_i = \frac{P_i}{i!}$$

$\cdots + (-$ ...

$$\ldots = \sum (-1)^{\alpha_0} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_k)!}{\alpha_1!\,\alpha_2! \cdots \alpha_k!} p_1^{\alpha_0} p_3^{\alpha_1} p_5^{\alpha_2} \cdots p_{2k+1}^{\alpha_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

wodur...
umge...

$$\ldots \mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}_n' + \frac{x^2}{2!}\mathfrak{E}_{n-1}' + \frac{x^4}{4!}\mathfrak{E}_{n-2}' + \cdots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}\mathfrak{E}_1' + \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

gesc...
rei...

$$\ldots \mathfrak{E}_i' = \sum (-1)^{\alpha_0} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)!}{\alpha_1!\,\alpha_2! \cdots \alpha_k!} q_2^{\alpha_1} q_4^{\alpha_2} \cdots q_{2k}^{\alpha_k}\text{[3]})$$

$\mathfrak{S}$ ...

1) Die Formeln (22) und (25) fanden auf anderem Wege bereits J. C. Kapteyn und W. Kapteyn, siehe „*Die höheren Sinus*" Sitzungsb. d. Kais. Ak. in Wien XCIII 1896 p. 807. Formeln (77) und (78).

2) Der Gedanke, die B und E als Unbekannte eines Systems von Gleichungen anzusehen, findet sich schon in den Vorlesungen von Herrn L. Saalschütz über die Bernoullischen Zahlen.

3) F. Meyer, „Über die höheren Ableitungen eines Quotienten zweier Funktionen" (Monatshefte f. Math. u. Physik I, 1890, 33 ff.).

...zahligen, nicht negativen, den Bedingungen

$$... = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + k\alpha_k = k$$

...fen, und

$$q_i = \frac{Q_i}{i!}, \quad x = \tan\varphi.$$

...n B und E auch in Determinantenform dargestellt ...ts die Herren **Saalschütz** und **Haussner** gezeigt

... π ergeben sich hieraus einfache independente Ausdrücke ...nd E.

...ie Gleichungen (16), (17), (18), (19) ermöglichen die Ent-...ng einer *endlichen* oder *unendlichen*, nach Potenzen von $\tan\varphi = t$ ...chreitenden Reihe nach den P und Q. Die Frage, ob sich dieselbe ...f eine einzige Art bewirken läßt, erledigt sich durch die aus den bisherigen Ergebnissen hervorgehenden Tatsachen:

α) Zwischen aufeinanderfolgenden $\begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix}$ bestehen die linearen Beziehungen (9), (10).

β) Zwischen einer *endlichen* Anzahl *gerader* $\begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix}$ oder *ungerader* $\begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix}$ besteht keine Beziehung.

γ) Es bestehen Nulldarstellungen durch die sämtlichen $\begin{Bmatrix} \text{geraden} \\ \text{ungeraden} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix}$.

Denn es ist, zufolge

$$P_r = \frac{(1+it)^r - (1-it)^r}{2i}, \quad Q_r = \frac{(1+it)^r + (1-it)^r}{2},$$

$$(28) \quad \sum_{\varepsilon=1,3}^{\infty} (-1)^{\frac{\varepsilon-1}{2}} \frac{k^\varepsilon}{\varepsilon!} Q_\varepsilon = \tfrac{1}{2}[\sin k(1+it) + \sin k(1-it)] = \sin k \,\mathrm{Cof}\, kt,$$

$$(29) \quad \sum_{\varepsilon=1,3}^{\infty} (-1)^{\frac{\varepsilon-1}{2}} \frac{k^\varepsilon}{\varepsilon!} P_\varepsilon = \frac{1}{2i}[\sin k(1+it) - \sin k(1-it)] = \cos k \,\mathrm{Sin}\, kt,$$

$$(30) \quad \sum_{\varepsilon=0,2,4}^{\infty} (-1)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{k^\varepsilon}{\varepsilon!} P_\varepsilon = \frac{1}{2i}[\cos k(1+it) - \cos k(1-it)] = -\sin k \,\mathrm{Sin}\, kt,$$

$$(31) \quad \sum_{\varepsilon=0,2,4}^{\infty} (-1)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{k^\varepsilon}{\varepsilon!} Q_\varepsilon = \tfrac{1}{2}[\cos k(1+it) + \cos k(1-it)] = \cos k \,\mathrm{Cof}\, kt.$$

6. Bemerkenswerte besondere Formeln entstehen dur ... er negativ
setzung von $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ in (14), (15), (16): ... ositive ode

(20) $\sum_{\nu=2,6,10\ldots}(-1)^{\frac{\nu-2}{2}} 2^{\frac{\nu}{2}} \frac{2^{n-\nu}-1}{n-\nu+1}\binom{n}{\nu} B_{\frac{n-\nu+1}{2}} = \frac{1}{2},$ ... r Reihe =

(21) $\sum_{\nu=0,4,8\ldots}(-1)^{\frac{\nu}{4}} 2^{\frac{\nu}{2}}\binom{n}{\nu} E_{\frac{n-\nu}{2}} = 1,$ n ger ...

(22) $\sum_{\nu=4,8,12\ldots}(-1)^{\frac{\nu-4}{4}} 2^{\frac{\nu+2}{2}}\binom{n}{\nu} B_{\frac{1}{2}\nu} = n - \ldots + \cdots$

(23) $\sum_{\nu=2,6,10\ldots}(-1)^{\frac{\nu-4}{4}} 2^{\frac{\nu+2}{2}}\binom{n}{\nu} B_{\frac{1}{2}\nu} = \ldots$ positive oder negative *ganze* ... der negative *ungerade* Zahlen

(24) $\sum_{\nu=2,6,10\ldots}(-1)^{\frac{\nu-2}{4}} 2^{\frac{\nu+2}{2}} (2^{\nu}-1) \ldots$ ... aten. Die Anzahl der Glieder ... für jedes ε jedoch gleich groß. ... ihrer allgemeinsten Form sind

(25)[1] $\sum_{\nu=4,8,12,\ldots}(-1)^{\frac{\nu-4}{4}} 2^{\frac{\nu+2}{2}} (2^{\nu} \ldots$

$\ldots \frac{\ldots}{\varepsilon!} K_{\varepsilon} Q_{\varepsilon} = 0,$

7. Wenn in den Form ...
Unbekannte angesehen u ...
gehenden Systemen bere ...
willkürliche Veränderli ...

$\ldots \frac{\ldots}{\varepsilon!} K_{\varepsilon} P_{\varepsilon} = 0,$

$(-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} \ldots$ $\ldots(-1)^{\frac{\varepsilon-1}{2}} \frac{L_{\varepsilon}}{\varepsilon!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\varepsilon} P_{\varepsilon} = 0,$

worin

(26) $\sum(-1)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{L_{\varepsilon}}{\varepsilon!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\varepsilon} Q_{\varepsilon} = 0.$

$(-1)^k \mathfrak{E}_k = \sum \ldots$

... sich nun:

(27) $E,$ ... Funktion $f(t) = f(-t)$ läßt sich entweder du ...
worin ... ungerader Ordnung und eine ganze Funkti ...
... $t = \tan\varphi$, durch P gerader oder ungerader Ordnu ...
... Art ausdrücken.

... unendliche Potenzreihe $f(t) = f(-t)$ kann in eine unend ...
... entweder nach Q von gerader oder von ungerader
und ... Reihe, fortschreitet, und eine unendliche Potenzreihe $g(t) = -g(-t)$
XCI ... nach P von gerader oder von ungerader Ordnung fort-
... Reihe auf *unendlich* viele Arten transformiert werden.

c) Darstellungen durch $\begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix}$ von gerader *und* ungerader Ordnung
können auf unendlich viele Arten bewirkt werden.

und $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ alle ganzzahligen, nicht negativen, den Bedingungen

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + k\alpha_k = k$$

genügenden Werte durchlaufen, und

$$q_i = \frac{Q_i}{i!}, \quad x = \tan\varphi.$$

Übrigens können B und E auch in Determinantenform dargestellt werden, wie bereits die Herren Saalschütz und Haussner gezeigt haben.

Für $\varphi = \pi$ ergeben sich hieraus einfache independente Ausdrücke für die B und E.

8. Die Gleichungen (16), (17), (18), (19) ermöglichen die Entwicklung einer *endlichen* oder *unendlichen*, nach Potenzen von $\tan\varphi = t$ fortschreitenden Reihe nach den P und Q. Die Frage, ob sich dieselbe auf eine einzige Art bewirken läßt, erledigt sich durch die aus den bisherigen Ergebnissen hervorgehenden Tatsachen:

α) Zwischen aufeinanderfolgenden $\begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix}$ bestehen die linearen Beziehungen (9), (10).

β) Zwischen einer *endlichen* Anzahl *gerader* $\begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix}$ oder *ungerader* $\begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix}$ besteht keine Beziehung.

γ) Es bestehen Nulldarstellungen durch die sämtlichen $\begin{Bmatrix} \text{geraden} \\ \text{ungeraden} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix}$.

Denn es ist, zufolge

$$P_r = \frac{(1+it)^r - (1-it)^r}{2i}, \quad Q_r = \frac{(1+it)^r + (1-it)^r}{2},$$

$$(28) \quad \sum_{\varepsilon=1,3}^{\infty} (-1)^{\frac{\varepsilon-1}{2}} \frac{k^\varepsilon}{\varepsilon!} Q_\varepsilon = \tfrac{1}{2}[\sin k(1+it) + \sin k(1-it)] = \sin k \,\mathfrak{Cof}\, kt,$$

$$(29) \quad \sum_{\varepsilon=1,3}^{\infty} (-1)^{\frac{\varepsilon-1}{2}} \frac{k^\varepsilon}{\varepsilon!} P_\varepsilon = \frac{1}{2i}[\sin k(1+it) - \sin k(1-it)] = \cos k \,\mathfrak{Sin}\, kt,$$

$$(30) \quad \sum_{\varepsilon=0,2,4}^{\infty} (-1)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{k^\varepsilon}{\varepsilon!} P_\varepsilon = \frac{1}{2i}[\cos k(1+it) - \cos k(1-it)] = -\sin k \,\mathfrak{Sin}\, kt,$$

$$(31) \quad \sum_{\varepsilon=0,2,4}^{\infty} (-1)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{k^\varepsilon}{\varepsilon!} Q_\varepsilon = \tfrac{1}{2}[\cos k(1+it) + \cos k(1-it)] = \cos k \,\mathfrak{Cof}\, kt.$$

Wird nun in (28) und (30) $k = a\pi$, a beliebige positive oder negative ganze Zahl, und in (29) und (31) $k = b\frac{\pi}{2}$, b beliebige positive oder negative *ungerade* Zahl, gesetzt, so ist die Summe jeder Reihe $= 0$, was auch noch der Fall ist, wenn

$$a^\varepsilon \text{ durch } K_\varepsilon = \alpha a_1^\varepsilon + \beta a_2^\varepsilon + \gamma a_3^\varepsilon + \cdots$$

und

$$b^\varepsilon \text{ durch } L_\varepsilon = \alpha b_1^\varepsilon + \beta b_2^\varepsilon + \gamma b_3^\varepsilon + \cdots$$

ersetzt wird, worin $a_1, a_2, a_3, \ldots$ beliebige positive oder negative *ganze* Zahlen, $b_1, b_2, b_3, \ldots$ beliebige positive oder negative *ungerade* Zahlen und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ beliebige Zahlen bedeuten. Die Anzahl der Glieder von K_ε und L_ε ist hierbei beliebig, für jedes ε jedoch gleich groß. Die gesuchten Nulldarstellungen in ihrer allgemeinsten Form sind demnach

$$\sum_{\varepsilon=1,3}^{\infty} (-1)^{\frac{\varepsilon-1}{2}} \frac{\pi^\varepsilon}{\varepsilon!} K_\varepsilon Q_\varepsilon = 0, \tag{32}$$

$$\sum_{\varepsilon=2,4}^{\infty} (-1)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\pi^\varepsilon}{\varepsilon!} K_\varepsilon P_\varepsilon = 0, \tag{33}$$

$$\sum_{\varepsilon=1,3,\ldots}^{\infty} (-1)^{\frac{\varepsilon-1}{2}} \frac{L_\varepsilon}{\varepsilon!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^\varepsilon P_\varepsilon = 0, \tag{34}$$

$$\sum_{\varepsilon=0,2,4}^{\infty} (-1)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{L_\varepsilon}{\varepsilon!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^\varepsilon Q_\varepsilon = 0. \tag{35}$$

Hieraus ergibt sich nun:

a) Eine ganze Funktion $f(t) = f(-t)$ läßt sich entweder durch Q von gerader oder ungerader Ordnung und eine ganze Funktion $g(t) = -g(-t)$, $t = \tan\varphi$, durch P gerader oder ungerader Ordnung nur auf *einzige* Art ausdrücken.

b) Eine unendliche Potenzreihe $f(t) = f(-t)$ kann in eine unendliche Reihe, die entweder nach Q von gerader oder von ungerader Ordnung fortschreitet, und eine unendliche Potenzreihe $g(t) = -g(-t)$ kann in eine nach P von gerader oder von ungerader Ordnung fortschreitende Reihe auf *unendlich* viele Arten transformiert werden.

c) Darstellungen durch $\begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix}$ von gerader *und* ungerader Ordnung nen auf unendlich viele Arten bewirkt werden.

9. ***Beispiele.*** 1. *Potenzen* von P:

$$P_m^n = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2^{-n-1} \sum_{\varkappa=0}^{m\frac{n-1}{2}} \mathfrak{M}_{mn-\varkappa}\, P_{mn-\varkappa}, \quad n \text{ ungerade} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{mn-\varkappa} = (-1)^\varkappa\, 2^\varkappa \Bigg[& (-1)^{m+1}\binom{n}{1}\binom{m}{\varkappa} + \binom{n}{2}\binom{2m}{\varkappa} + \cdots \\ & + (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)(n-3)} \binom{n}{\frac{n-3}{2}}\binom{m\frac{n-3}{2}}{\varkappa} \\ & + (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)(n-1)} \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\binom{m\frac{n-1}{2}}{\varkappa}\Bigg].\end{aligned}$$

$$P_m^n = (-1)^{\frac{n}{2}}\, 2^{-n+1} \sum_{\varkappa=0}^{\frac{1}{2}mn} \mathfrak{N}_{mn-\varkappa}\, Q_{mn-\varkappa}, \quad n \text{ gerade} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_{mn-\varkappa} = (-1)^\varkappa\, 2^\varkappa \Bigg[& (-1)^{m+1}\binom{n}{1}\binom{m}{\varkappa} + \binom{n}{2}\binom{2m}{\varkappa} + \cdots \\ & + (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)(n-2)} \binom{n}{\frac{n-2}{2}}\binom{m\frac{n-2}{2}}{\varkappa} + \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m+1)n}}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}}\binom{\frac{mn}{2}}{\varkappa}\Bigg].\end{aligned}$$

2. *Potenzen* von Q:

$$Q_m^n = 2^{-n+1} \sum_{\varkappa=0}^{\frac{1}{2}mn} \mathfrak{N}'_{mn-\varkappa}\, Q_{mn-\varkappa}, \quad n \text{ gerade} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}'_{mn-\varkappa} = (-1)^\varkappa\, 2^\varkappa \Bigg[& (-1)^{m}\binom{n}{1}\binom{m}{\varkappa} + \binom{n}{2}\binom{2m}{\varkappa} + \cdots \\ & + (-1)^{m\frac{n-2}{2}} \binom{n}{\frac{n-2}{2}}\binom{m\frac{n-2}{2}}{\varkappa} + \frac{(-1)^{\frac{mn}{2}}}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}}\binom{\frac{mn}{2}}{\varkappa}\Bigg],\end{aligned}$$

$$Q_m^n = 2^{-n+1} \sum_{\varkappa=0}^{m\frac{n-1}{2}} \mathfrak{M}'_{mn-\varkappa}\, Q_{mn-\varkappa}, \quad n \text{ ungerade} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}'_{mn-\varkappa} = (-1)^\varkappa\, 2^\varkappa \Bigg[& (-1)^{m}\binom{n}{1}\binom{m}{\varkappa} + \binom{n}{2}\binom{2m}{\varkappa} + \cdots \\ & + (-1)^{m\frac{n-3}{2}} \binom{n}{\frac{n-3}{2}}\binom{m\frac{n-3}{2}}{\varkappa} + (-1)^{m\frac{n-1}{2}} \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\binom{m\frac{n-1}{2}}{\varkappa}\Bigg].\end{aligned}$$

3. *Gerade Potenzen* von $\sec\varphi$:

(40) $$\sec^{2n}\varphi = Q_{2n} + (-1)^n \sum_{\varkappa=0,1}^{n} (-1)^\varkappa\, 2^\varkappa \binom{n}{\varkappa} Q_{2n-\varkappa}.$$

4. *Kugelfunktionen* $K_n(x)$ *erster Art*:

(41) $$K_n(t) = (-1)^{\frac{n}{2}}\, 2^{-2n+1}\, n \sum_{\varkappa=0}^{n} \binom{2n-\varkappa}{n} \mathfrak{A}_{2n-\varkappa}\, Q_{n-\varkappa}, \quad n \text{ gerade}$$

$$\mathfrak{A}_{2n-\varkappa} = (-1)^\varkappa\, 2^\varkappa \Bigg[\binom{n}{1}\binom{2}{\varkappa} + \binom{n}{2}\binom{4}{\varkappa} + \cdots$$

$$+ \binom{n}{\frac{n}{2}-1}\binom{n-2}{\varkappa} + \tfrac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}\binom{n}{\varkappa}\Bigg],$$

(42) $$K_n(t) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2^{-n+1}\, n \sum_{\varkappa=0}^{n-1} \binom{2n-\varkappa}{n} \mathfrak{B}_{2n-\varkappa}\, P_{n-\varkappa}, \quad n \text{ ungerade}$$

$$\mathfrak{B}_{2n-\varkappa} = (-1)^\varkappa\, 2^\varkappa \Bigg[\binom{n}{1}\binom{2}{\varkappa} + \binom{n}{2}\binom{4}{\varkappa} + \cdots$$

$$+ \binom{n}{\frac{n-3}{2}}\binom{n-3}{\varkappa} + \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\binom{n-1}{\varkappa}\Bigg].$$

5. *Bernoullische Funktion* $\mathrm{B}\left(\frac{it}{2}, n\right)$, nach Schlömilchs *Definition*:

(43) $$(-1)^{m+1}\, i 2^{2m-2}\, \mathrm{B}\left(\frac{it}{2}, 2m-1\right) + i\,\frac{2m-1}{2}\, t^{2m-2} =$$

$$= (2m-1)! \sum_{\varkappa=0,1}^{m} (-1)^\varkappa (2m-2\varkappa-1)(2^{2m-2\varkappa-1}-1)\, B_{m-\varkappa}\, P_{2\varkappa}$$

$$(t = \tan\varphi, \quad m > 1),$$

(44) $$(-1)^{m+1}\, i 2^{2m-2}\, \mathrm{B}\left(\frac{it}{2}, 2m-1\right) + i\,\frac{2m-1}{2}\, t^{2m-2} =$$

$$= \sum_{\varkappa=0,1}^{m} (-1)^\varkappa\, \frac{2^{2m-2\varkappa-1}-1}{2\varkappa} \binom{2m-1}{2\varkappa-1} B_{m-\varkappa} P_{2\varkappa-1}, \quad m > 1,$$

(45) $$(-1)^{m+1}\, 2^{2m-1}\, \mathrm{B}\left(\frac{it}{2}, 2m\right) + imt^{2m-1} =$$

$$= \sum_{\varkappa=0,1}^{m} (-1)^{\varkappa+1} (2^{2m-2\varkappa-1}-1) \binom{2m}{2\varkappa} B^{\bullet}_{m-\varkappa}\, Q_{2\varkappa},$$

$$(46)\qquad (-1)^{m+1}\, 2^{2m-1}\, \mathsf{B}\left(\frac{it}{2}, 2m\right) + imt^{2m-1} =$$

$$-(2m!)\sum_{\varkappa=0,1}^{m}(-1)^{\varkappa}\,\frac{2m-2\varkappa-1}{2\varkappa+1}\,(2^{2m-2\varkappa-1}-1)\,B_{m-\varkappa}\,Q_{2\varkappa+1\varkappa}.$$

6. *Eulersche Funktionen* $\mathsf{E}(t, n)$ *erster Art*[1]):

$$(47)\qquad \mathsf{E}(t,n) = \binom{n}{0}E_0 t^n - \binom{n}{3}E_2 t^{n-2} + \binom{n}{4}E_4 t^{n-4} - + \cdots$$

$$+\begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{n}E_n & n \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n-1}{n}E_{n-1}\,t & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$(E_0 = 1,\quad E_3 = 1,\quad E_4 = 5,\quad E_6 = 61,\ \cdots$

Sekanten-Koeffizienten)

$$(48)\quad \mathsf{E}(it, 2m) = (-1)^m\, 2^{2m-\varkappa}\sum_{\varkappa=0,1}^{m}(-1)^{\varkappa}\,\frac{2^{2m-2\varkappa}-1}{2^{2\varkappa}(m-\varkappa)}\binom{2m}{2\varkappa}B_{m-\varkappa}\,Q_{2\varkappa}$$

$$(49)\quad \mathsf{E}(it, 2m) = E_m + 2^{2m}\sum_{\varkappa=0,1}^{m}(-1)^{\varkappa}\,\frac{2^{2m-2\varkappa-1}-1}{(2\varkappa+1)\,2^{2\varkappa-1}}\binom{2m}{2\varkappa}B_{m-\varkappa}\,Q_{2\varkappa+1}$$

$$)\quad i\mathsf{E}(it, 2m-1) = (-1)^{m-1}2^{2m-1}\sum_{\varkappa=0,1}^{m}(-1)^{\varkappa}\,\frac{2^{2m-2\varkappa}-1}{2^{2\varkappa}(m-1)}\binom{2m-1}{2\varkappa-1}B_{m-\varkappa}P_{2\varkappa-1}$$

$$)\quad i\mathsf{E}(it, 2m-1) = 2^{2m+1}\sum_{\varkappa=0,1}^{m}(-1)^{\varkappa-1}\,\frac{2^{2m-2\varkappa-1}-1}{2^{2\varkappa}}\binom{2m}{2\varkappa}B_{m-\varkappa}P_{2\varkappa}.$$

Limbach, September 1905.

---

1) S. d. Verf. „*Theorie der Eulerschen Funktionen*“ Sitzgs.-Ber. d. Kgl. Böhm. Gesellsch. d. Wiss. 1893. XXIII.

Die Kugeln, die einem unebenen Vierecke eingeschrieben sin

Von R. Heger in Dresden.

Über diesen Gegenstand sind im Laufe der letzten fünfzig Ja zwei Abhandlungen erschienen: Im 20. Bande der Sitzungsberichte Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften veröffentlichte J. H. T. Mül (Wiesbaden) Untersuchungen „*Über die Kugeln, welche die Kanten e beliebigen Tetraeders berühren*“ (vorgel. i. d. Sitzung vom 13. Juli 18 Die Arbeit bezieht sich in ihrem größten Teile auf die Kugeln, die Kanten einer Ecke, bez. die Kanten einer Seite und außerde noch eine vierte Kante berühren. Nur die Seite 248 beschäftigt si mit den Kugeln, die zwei Paar Gegenkanten berühren. Dabei ist d Verfasser der irrigen Meinung, daß diese Aufgabe nur lösbar sei, wen die Summe oder die Unterschiede beider Gegenkantenpaare einande gleich sind. — Im Jahre 1882 gab Vogt (Breslau) im 92. Bande vo Crelles Journal eine bis auf Einzelheiten in gewissem Sinne e schöpfende Arbeit „*Über die ein räumliches Vierseit berührenden Kugeln*“ Er begründet seine Angaben über die mögliche Lage der Berührung punkte auf gewisse Sätze über Regelscharen zweiter Ordnung, vo denen man wohl sagen kann, daß sie dem elementaren Wesen d Aufgabe nicht gemäß sind.

Dasselbe Ziel erreicht man, wenn man sich lediglich auf die B stimmung der Teilung der Seiten durch die Berührungskugeln beschränk die vollständige Durchführung ist nicht mühsamer, als die Arbeit, d man nötig hat, wenn man Vogts Gedankengang vollständig durchführ

In Schlömilchs Handbuch der Mathematik, 2. Aufl., 2. Bd., S. 8 hat der Verfasser im Anschlusse an andere Berührungsaufgaben auc einige nicht erschöpfende Bemerkungen über die hier vorliegende g macht, ohne damals mit Vogts Arbeit bekannt gewesen zu sein; au S. 366 wird dann aus den Gleichungen der Ebenen, die die Wink und Außenwinkel eines unebenen Vierseits senkrecht halbieren, nach gewiesen, daß die Gleichungen dieser vier Ebenenpaare durch ein homogene lineare Identität verbunden sind. Vielleicht ist es nich überflüssig, von demselben Ausgangspunkte aus, wie in Schlömilch Handbuche, die Aufgabe vollständig zu behandeln.

Die aufeinanderfolgenden Ecken des Vierseits seien A, B, C, D, di Längen der Seiten seien

$$AB = 2a, \quad BC = 2b, \quad CD = 2c, \quad DA = 2d.$$

Ein Punkt im Innern einer Seite werde mit P, einer auf der Verlängerung vor dem Anfangspunkte mit Q, einer auf der Verlängerung hinter dem Endpunkte mit R bezeichnet; die Seite, auf der ein solcher Punkt liegt, wird als Zeiger angehängt. Sind x, y, z, t die auf den Schenkeln der Winkel und Außenwinkel A, B, C, D bis an eine eingeschriebene Kugel reichenden Tangenten, ihren absoluten Längen nach, so gilt für diese Strecken ein Verein von vier Gleichungen, die aus je einer Gleichung jeder der folgenden vier Zeilen besteht:

P	Q	R
$x+y=2a$	$y-x=2a$	$x-y=2a$
$y+z=2b$	$z-y=2b$	$y-z=2b$
$z+t=2c$	$t-z=2c$	$z-t=2c$
$t+x=2d$	$x-t=2d$	$t-x=2d.$

Die zugehörigen Lösungsvereine haben die Form

$$\pm a \pm b \pm c \pm d;$$

zur Abkürzung soll gesetzt werden

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 1, & a+b-c-d &= 5,\\ a+b+c-d &= 2, & a-b+c-d &= 6,\\ a+b-c+d &= 3, & a-b-c+d &= 7,\\ a-b+c+d &= 4, & -a+b+c+d &= 8. \end{aligned}$$

Sieht man zunächst von den relativen Größen der Seiten ab, so lassen sich doch aus den 81 Vereinen mehrere ausmustern, die unbedingt unmöglich, und andere, die nur bedingt möglich, im allgemeinen aber ebenfalls unmöglich sind. Um diese auszuscheiden, braucht man nicht alle 81 Vereine zu untersuchen, sondern kann sie gruppenweise zusammenfassen, dergestalt, daß alle Vereine einer Gruppe immer zugleich zurückgewiesen werden können. Bezeichnet man nämlich einen Verein durch die Folge der Berührungspunkte, z. B. $P_a Q_b Q_c R_d$, so gilt das, was unabhängig von der Größe von a, b, c, d gilt, in gleicher Weise, wenn man die Zeiger zyklisch vertauscht; es gilt ferner dasselbe, wenn man die Umlaufsrichtung umkehrt, wobei nur zu beachten ist, daß dabei R und Q gegen einander vertauscht werden müssen. Danach gehören zu einer Gruppe z. B.

$$\begin{array}{llll} P_a Q_b Q_c R_d, & Q_a Q_b R_c P_d, & Q_a R_b P_c Q_d, & R_a P_b Q_c Q_d, \\ Q_a R_b R_c P_d, & R_a R_b P_c Q_d, & R_a P_b Q_c R_d, & P_a Q_b R_c R_d \end{array}$$

Es ergeben sich folgende 15 Gruppen, die durch einen Vertreter und die dahinter bemerkte Anzahl der Vereine der Gruppe bezeichnet werden:

1) $P_a P_b P_c P_d (1)$; 2) $P_a P_b P_c Q_d (8)$; 3) $P_a P_b Q_c Q_d (8)$;
4) $P_a P_b Q_c R_d (4)$; 5) $P_a P_b R_c Q_d (4)$; 6) $P_a Q_b P_c Q_d (4)$;
7) $P_a Q_b R_c R_d (4)$; 8) $P_a Q_b Q_c Q_d (8)$; 9) $P_a Q_b Q_c R_d (8)$;
10) $P_a R_b Q_c Q_d (8)$; 11) $P_a Q_b R_c Q_d (8)$; 12) $Q_a Q_b Q_c R_d (8)$;
13) $Q_a Q_b R_c R_d (4)$; 14) $R_a Q_b R_c Q_d (2)$; 15) $Q_a Q_b Q_c Q_d (2)$.

Hiervon sind die Gruppen 3), 7), 8), 10), 12), 15) *unbedingt unmöglich*. Denn $P_a P_b Q_c Q_d$ z. B. bedeutet den Verein

$$x + y = 2a, \quad y + z = 2b, \quad t - z = 2c, \quad x - t = 2d,$$

woraus folgt $a - b - c - d = 0$, und Gleiches zeigt sich bei 7) und 12). Bei 8) hat man z. B.

$$x + y = 2a, \quad z - y = 2b, \quad t - z = 2c, \quad x - t = 2d,$$

folglich $y = a - b - c - d$. Ähnliches zeigt sich bei 10). Bei 15) hat man

$$y - x = 2a, \quad z - y = 2b, \quad t - z = 2c, \quad x - t = 2d,$$

folglich $a + b + c + d = 0$.

Die Gruppen 1), 4), 5) 6), 13), 14) *sind ebenfalls im allgemeinen unmöglich;* denn aus allen zugehörigen Vereinen kommt man zu einem der Schlüsse:

$$a + c = b + d, \quad a + d = b + c, \quad a + b = c + d,$$

die im allgemeinen nicht zutreffen.

Hiernach bleiben die Gruppen 2), 9) *und* 11) *übrig, mit zusammen 24 Vereinen.*

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man voraussetzen, daß a nicht kleiner als b, c oder d ist. Von den Ungleichungen

$$a + b < c + d, \quad a + c < b + d, \quad a + d < b + c$$

können dann nicht zwei zusammen bestehen; denn aus

$$a + b < c + d, \quad a + c < b + d$$

folgt

$$2a + b + c < b + c + 2d, \quad a < d.$$

Daher besteht nur eine der vier Voraussetzungen

1) $a + b > c + d, \quad a + c > b + d, \quad a + d > b + c$;
2) $a + b > c + d, \quad a + c > b + d, \quad a + d < b + c$;
3) $a + b > c + d, \quad a + c < b + d, \quad a + d > b + c$;
4) $a + b < c + d, \quad a + c > b + d, \quad a + d > b + c$,

die man auch ersetzen kann durch

$$\begin{aligned}
&1)\ 5 > 0,\quad 6 > 0,\quad 7 > 0;\\
&2)\ 5 > 0,\quad 6 > 0,\quad 7 < 0;\\
&3)\ 5 > 0,\quad 6 < 0,\quad 7 > 0;\\
&4)\ 5 < 0,\quad 6 > 0,\quad 7 > 0.
\end{aligned}$$

Um die Untersuchung zu Ende zu führen, hat man die 24 Vereine Nr. 2), 9), 11) aufzulösen, der Reihe nach diese Voraussetzungen 1) bis 4) anzuwenden, und zu ermitteln, welche Vereine positive Lösungen ergeben.

Die 24 Lösungsvereine sind aus folgender, sofort verständlicher Übersicht zu entnehmen:

Nr.	$2a$	$2b$	$2c$	$2d$	x	y	z	t	Nr.	$2a$	$2b$	$2c$	$2d$	x	y	z	t
1	P	P	P	Q	4	5	8	6	13	P	Q	R	R	5	4	1	3
2	P	P	Q	P	7	2	−6	8	14	Q	R	R	P	8	1	4	7
3	P	Q	P	P	3	6	2	−5	15	R	R	P	Q	1	8	−5	2
4	Q	P	P	P	−6	3	−7	4	16	R	P	Q	R	2	−7	3	1
5	P	P	P	R	6	3	−7	4	17	P	Q	R	Q	3	6	2	5
6	P	P	R	P	4	5	8	−6	18	Q	R	Q	P	−6	3	7	4
7	P	R	P	P	7	2	6	8	19	R	Q	P	Q	4	−5	8	6
8	R	P	P	P	3	−6	2	−5	20	Q	P	Q	R	−7	2	−6	8
9	P	Q	Q	R	2	7	3	1	21	P	R	Q	R	6	3	7	4
10	Q	Q	R	P	−5	4	1	3	22	R	Q	R	P	4	−5	8	−6
11	Q	R	P	Q	8	1	4	−7	23	Q	R	P	R	−7	2	6	8
12	R	P	Q	Q	1	8	5	2	24	R	P	R	Q	3	−6	2	5

Unter der Voraussetzung 1): $5 > 0$, $6 > 0$, $7 > 0$ geben positive Lösungen nur die Vereine Nr. 1, 7, 9, 12, 13, 14, 17, 21;

unter der Voraussetzung 2): $5 > 0$, $6 > 0$, $7 < 0$ geben positive Lösungen nur die Vereine Nr. 1, 5, 11, 12, 13, 16, 17, 23;

unter der Voraussetzung 3): $5 > 0$, $6 < 0$, $7 > 0$ finden sich positive Lösungen nur bei den Vereinen: Nr. 2, 6, 9, 12, 13, 14, 18, 24;

und unter der Voraussetzung 4): $5 < 0$, $6 > 0$, $7 > 0$ sind positive Lösungen bei: Nr. 3, 7, 9, 10, 14, 15, 19, 21.

Da es nun in jedem Falle acht berührende Kugeln gibt, so sind die je acht Lösungen nicht nur nicht unmöglich, sondern wirklich vorhanden.

Entwirft man sich eine ganz einfache Zeichnung, die weiter nichts zu enthalten braucht, als das Viereck mit Punkten auf den Seiten, die nur die Lage der Berührungspunkte insofern richtig darstellen, als die P, Q und R unterschieden sind, so erkennt man mit geringer Mühe:

Bei den acht Kugeln, die die Seiten eines unebenen Vierecks berühren, gehen im allgemeinen durch vier Mitten solcher Kugeln je drei senkrecht hälftende Ebenen von Innenwinkeln nebst der des vierten Außenwinkels, — und durch die vier andern gehen die senkrecht hälftenden Ebenen von drei Außenwinkeln nebst der des vierten Innenwinkels.

Ferner findet man leicht: Ist die Summe zweier Nachbarseiten $AB + BC$ gleich der der beiden andern $CD + DA$, so haben die senkrecht hälftenden Ebenen der Winkel A und C und die der Außenwinkel B und D eine Gerade gemeinsam; jeder Punkt dieser Geraden ist die Mitte einer dem Viereck eingeschriebenen Kugel; außerdem gibt es noch vier eingeschriebene Kugeln, deren Mitten sind

$$H_a' H_b H_c H_d, \quad H_a' H_b' H_c' H_d, \quad H_a H_b H_c' H_d, \quad H_a' H_b H_c' H_d',$$

wenn H_a und H_a' die senkrecht hälftenden Ebenen des Innen- und des Außenwinkels A bedeuten usw.

Ist dagegen die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden andern, so haben die Ebenen, die die Innenwinkel senkrecht hälften, eine gemeinsame Gerade, und jeder Punkt dieser Geraden ist die Mitte einer dem Viereck eingeschriebenen Kugel; außerdem gibt es noch vier eingeschriebene Kugeln, in deren Mitten sich die senkrecht hälftenden Ebenen von drei Außenwinkeln mit der des vierten Innenwinkels schneiden.

Wir schließen hieran einige Formeln für die *Halbmesser und Mittelpunkte* der einem unebenen Vierecke eingeschriebenen Kugeln.

Hat eine eingeschriebene Kugel den Mittelpunkt M mit den Koordinaten ξ, η, ζ und den Halbmesser ϱ, sind ferner 2α, 2β, 2γ, 2δ die Winkel des Vierecks, M_a, M_b, M_c, M_d die Richtbilder von M auf den Ebenen der Winkel A, B, C, D, sind ferner, wie oben, P_a (oder Q_a, R_a) ... die Berührungspunkte, so hat man z. B. für die Kugel $P_a P_b P_c Q_d$ (Nr. 1)

$$(1) \qquad \begin{cases} M_a Q_d = M_a P_a = x \tan\alpha, & M_b P_a = M_b P_b = y \tan\beta, \\ M_c P_b = M_c P_c = z \tan\gamma, & M_d P_c = M_d Q_d = t \tan\gamma. \end{cases}$$

Aus dem Kreisvierecke $M M_a P_a M_b$ folgt, wenn man die Raumwinkel des Tetraeders $ABCD$, die an den Seiten $2a, 2b, 2c, 2d$ liegen, mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ bezeichnet,

$$\varrho^2 = (M_a P_a^2 + M_b P_a^2 - 2\, M_a P_a \cdot M_b P_a \cdot \cos\mathfrak{a}),$$

woraus die Formeln hervorgehen

$$(2)\quad \begin{cases} \varrho^2 = (x^2 \tan^2 \alpha + y^2 \tan^2 \beta - 2xy \tan \alpha \tan \beta \cos \mathfrak{a}) \sec^2 \mathfrak{a}, \\ \quad = (y^2 \tan^2 \beta + z^2 \tan^2 \gamma - 2yz \tan \beta \tan \gamma \cos \mathfrak{b}) \sec^2 \mathfrak{b}, \\ \quad = (z^2 \tan^2 \gamma + t^2 \tan^2 \delta - 2zt \tan \gamma \tan \delta \cos \mathfrak{c}) \sec^2 \mathfrak{c}, \\ \quad = (t^2 \tan^2 \delta + x^2 \tan^2 \alpha - 2tx \tan \delta \tan \alpha \cos \mathfrak{d}) \sec^2 \mathfrak{d}. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Cayleyschen Gleichung[1]) der Strecken zwischen fünf Punkten kann man ϱ^2 auch durch die Seiten und Diagonalen des Tetraeders ausdrücken.

Bezeichnet man die Diagonalen AC und BD mit $2e$ und $2f$ und beachtet, daß M von den Ecken des Vierecks die Quadratabstände hat

$$\varrho^2 + x^2, \quad \varrho^2 + y^2, \quad \varrho^2 + z^2, \quad \varrho^2 + t^2,$$

so hat man nach Cayley

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4a^2 & 4e^2 & 4d^2 & \varrho^2 + x^2 \\ 1 & 4a^2 & 0 & 4b^2 & 4f^2 & \varrho^2 + y^2 \\ 1 & 4e^2 & 4b^2 & 0 & 4c^2 & \varrho^2 + z^2 \\ 1 & 4d^2 & 4f^2 & 4c^2 & 0 & \varrho^2 + t^2 \\ 1 & \varrho^2 + x^2 & \varrho^2 + y^2 & \varrho^2 + z^2 & \varrho^2 + t^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man hier nach Potenzen von ϱ^2, so erkennt man leicht, daß der Koeffizient von ϱ^4 verschwindet; für ϱ^2 erhält man den Quotienten

$$(3)\quad \varrho^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4a^2 & 4e^2 & 4d^2 & x^2 \\ 1 & 4a^2 & 0 & 4b^2 & 4f^2 & y^2 \\ 1 & 4e^2 & 4b^2 & 0 & 4c^2 & z^2 \\ 1 & 4d^2 & 4f^2 & 4c^2 & 0 & t^2 \\ 1 & x^2 & y^2 & z^2 & t^2 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4a^2 & 4e^2 & 4d^2 \\ 1 & 4a^2 & 0 & 4b^2 & 4f^2 \\ 1 & 4e^2 & 4b^2 & 0 & 4c^2 \\ 1 & 4d^2 & 4f^2 & 4c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Für die Abstände MM_a, MM_b, MM_c, MM_d, die homogenen Koordinaten der Kugelmitte M für das Tetraeder $ABCD$, hat man, wenn h, k, l, m die auf den Ebenen der Winkel 2α, 2β, 2γ, 2δ stehenden Höhen sind,

$$\frac{MM_a}{h} + \frac{MM_b}{k} + \frac{MM_c}{l} + \frac{MM_d}{m} = 1;$$

1) Vgl. u. a. Baltzer, Determinanten, 4. Aufl., S. 218.

die Dreiecke MM_aP_a, M_aP_aA usw. ergeben

$$(4)\qquad \begin{cases} MM_a^2 = \varrho^2 - x^2 \tan^2\alpha, & MM_b^2 = \varrho^2 - y^2 \tan^2\beta, \\ MM_c^2 = \varrho^2 - z^2 \tan^2\gamma, & MM_d^2 = \varrho^2 - t^2 \tan^2\delta^2; \end{cases}$$

daher folgt für ϱ die Gleichung

$$(5)\qquad \begin{cases} \frac{1}{h}\sqrt{\varrho^2 - x^2\tan^2\alpha} + \frac{1}{k}\sqrt{\varrho^2 - y^2\tan^2\beta} + \frac{1}{l}\sqrt{\varrho^2 - z^2\tan^2\gamma} \\ \qquad + \frac{1}{m}\sqrt{\varrho^2 - t^2\tan^2\delta} = 1. \end{cases}$$

Die rechtwinkligen Koordinaten ξ, η, ζ einer Kugelmitte ergeben sich aus den rechtwinkligen Koordinaten $\xi_a, \eta_a, \zeta_a, \ldots$ der Ecken A, B, C, D. Man hat zunächst

$$\begin{aligned} (\xi - \xi_a)^2 + (\eta - \eta_a)^2 + (\zeta - \zeta_a)^2 &= \varrho^2 + x^2, \\ (\xi - \xi_b)^2 + (\eta - \eta_b)^2 + (\zeta - \zeta_b)^2 &= \varrho^2 + y^2, \\ (\xi - \xi_c)^2 + (\eta - \eta_c)^2 + (\zeta - \zeta_c)^2 &= \varrho^2 + z^2, \\ (\xi - \xi_d)^2 + (\eta - \eta_d)^2 + (\zeta - \zeta_d)^2 &= \varrho^2 + t^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgen, wenn man die Abstände des Nullpunktes von A, B, C, D mit r_a, r_b, r_c, r_d bezeichnet,

$$\begin{aligned} (\xi_a - \xi_b)\xi + (\eta_a - \eta_b)\eta + (\zeta_a - \zeta_b)\zeta &= \tfrac{1}{2}(r_a^2 - r_b^2 - x^2 + y^2), \\ (\xi_b - \xi_c)\xi + (\eta_b - \eta_c)\eta + (\zeta_b - \zeta_c)\zeta &= \tfrac{1}{2}(r_b^2 - r_c^2 - y^2 + z^2), \\ (\xi_c - \xi_d)\xi + (\eta_c - \eta_d)\eta + (\zeta_c - \zeta_d)\zeta &= \tfrac{1}{2}(r_c^2 - r_d^2 - z^2 + t^2). \end{aligned}$$

Sind $ax, ay, az, \ldots$ die Winkel der Achsen mit den Seiten $2a, \ldots$, so hat man

$$\xi_a - \xi_b = 2a\cos ax, \quad \eta_a - \eta_b = 2a\cos ay, \quad \zeta_a - \zeta_c = 2a\cos az$$

usw. und erhält daher für ξ, η, ζ schließlich den Verein

$$\begin{aligned} \cos ax \cdot \xi + \cos ay \cdot \eta + \cos az \cdot \zeta &= \frac{1}{4a}(r_a^2 - r_b^2 - x^2 + y^2), \\ \cos bx \cdot \xi + \cos by \cdot \eta + \cos bz \cdot \zeta &= \frac{1}{4b}(r_b^2 - r_c^2 - y^2 + z^2), \\ \cos cx \cdot \xi + \cos cy \cdot \eta + \cos cz \cdot \zeta &= \frac{1}{4c}(r_c^2 - r_d^2 - z^2 + t^2); \end{aligned}$$

hierzu tritt noch die vierte Gleichung

$$\cos dx \cdot \xi + \cos dy \cdot \eta + \cos dz \cdot \zeta = \frac{1}{4d}(r_d^2 - r_a^2 - t^2 + x^2).$$

Dresden, Februar 1907.

Sur la génération cissoïdale des quartiques unicursales bicirculaires;

Par M. E. MALO à Caen.

M. H. Wieleitner (Spire) a demandé dans *l'Intermédiaire des Mathématiciens* (Question 3147, tome XIV, 1907, p. 8) si la génération cissoïdale des quartiques unicursales bicirculaires avait été déjà signalée dans quelque ouvrage mathématique: cette génération est la suivante.

Etant donnés un cercle de centre A et un point O sur ce cercle, puis un second cercle de centre B, on mène par O une droite quelconque rencontrant le cercle (A) en un certain point P et le cercle (B) en deux points Q, Q': sur cette sécante, à partir de O et dans le sens $\overrightarrow{PQ}$, on porte un segment $\overline{OM}$ égal à $\overline{PQ}$, puis un segment OM', égal à $\overline{PQ'}$; la quartique est le lieu des points M et M'.

M. Gomes Teixeira (*Intermédiaire*, tome XIV, 1907, p. 120) s'est référé à une étude publiée par lui dans les *Annali di Matematica* (Milan 1904). — En ce qui concerne la *cubique* unicursale circulaire générale, qu'on obtient en supposant que le centre B du deuxième cercle passe à l'infini, j'avais eu antérieurement plusieurs occasions d'invoquer sa génération cissoïdale dans *l'Intermédiaire des Mathématiciens* même, comme je l'ai rappelé en 1905 (Tome XII, p. 235) et 1906 (Tome XIII, p. 204).

Quoi qu'il en soit, et bien que des considérations extrêmement ingénieuses aient été développées à ce propos par MM. Retali et Bickart, il me semble que le sujet n'est pas si complètement épuisé qu'il n'offre encore matière à quelques remarques d'un certain intérêt.

Tout d'abord, puisque la construction précédemment décrite fournit deux points du lieu sur une sécante quelconque issue de O, qu'il ne peut y avoir sur cette sécante d'autre point *courant* du lieu, et que pour deux positions particulières de la sécante (celles qui joignent le point O aux intersections des cercles (A) et (B)) l'un des points mobiles, en même temps qu'elle, se réunit au pôle fixe O; cela, dis-je, en conséquence de la notion même de *l'ordre* d'une courbe, entraîne qu'il s'agit d'une *quartique, nodale en* O.

J'imagine maintenant que sur chaque vecteur OQ on marque les deux points R et R' qui le divisent dans un certain rapport donné et dans le rapport inverse: les segments OR et $R'Q$ sont égaux, et, lorsque le vecteur pivote autour de O, les points R et R' décrivent deux cercles homothétiques du cercle (B) relativement au pôle fixe O; les points où chacun de ces cercles coupe le cercle (A) correspondent à deux des points où l'autre cercle coupe la quartique étudiée. Or, lorsque le rapport donné est négatif et qu'on lui attribue successivement des valeurs absolues indéfiniment croissantes, les cercles $\widehat{R}$ et $\widehat{R'}$ passent en même temps à l'infini et leurs intersections avec la quartique viennent coïncider avec les points cycliques, que celle-ci par suite admet comme points doubles.

On sait par d'autres considérations que les quartiques unicursales bicirculaires sont identiques avec les transformées par rayons vecteurs réciproques des coniques comme avec les podaires de coniques, et il ne s'agirait que de montrer comment par exemple s'effectue la détermination de la conique *antipodaire* relativement au pôle O de la quartique considérée, au moyen des éléments intervenant dans la génération cissoïdale.

Négligeant pour le présent ce détail, je montrerai de préférence comment de la génération cissoïdale envisagée par M. Wieleitner on peut géométriquement conclure à la *réduction de certaines aires trapézoïdales mixtilignes de la quartique à des aires analogues circulaires, et, notamment, de l'aire totale de la quartique à l'aire d'un cercle.*

En effet l'aire élémentaire balayée par le segment $\overline{MM'}$ a pour expression

$$\tfrac{1}{2}(\overline{OM'}^2 - \overline{OM}^2)d\omega = \frac{\overline{OM'} + \overline{OM}}{2}(\overline{OM'} - \overline{OM})d\omega,$$

$d\omega$ mesurant la rotation infinitésimale de la sécante. Or on a manifestement

$$\overline{OM'} - \overline{OM} = \overline{OQ'} - \overline{OQ},$$

$$\frac{\overline{OM'} + \overline{OM}}{2} = \frac{\overline{OQ'} + \overline{OQ}}{2} - \overline{OP},$$

et par suite l'expression de l'aire élémentaire devient

$$\tfrac{1}{2}(\overline{OQ'}^2 - \overline{OQ}^2)d\omega - \overline{OP}\cdot\overline{QQ'}\cdot d\omega.$$

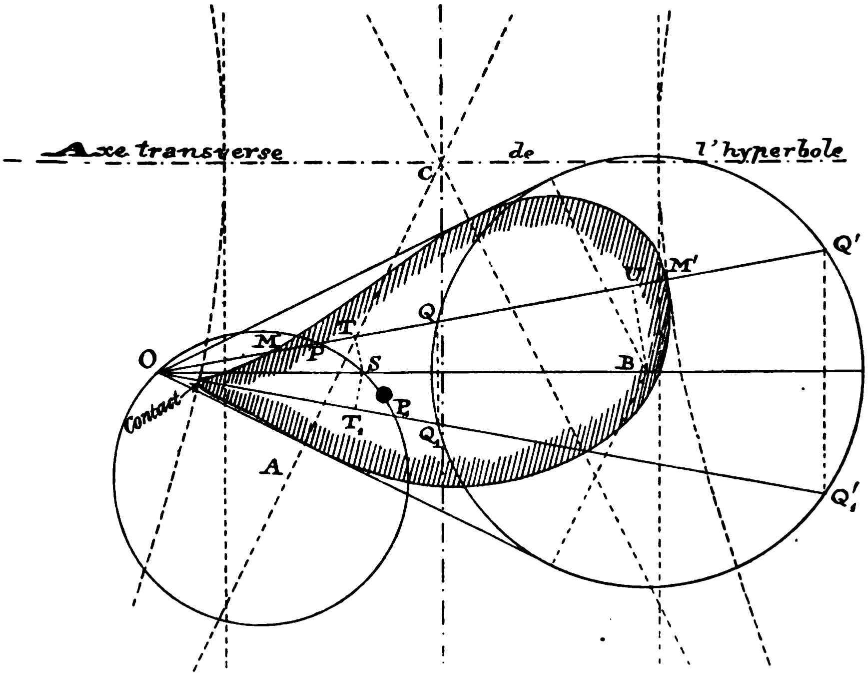
Donc, la sécante tournant autour de O, l'aire finie balayée par le segment $\overline{MM'}$ est égale à l'aire balayée par le segment $\overline{QQ'}$ (c'est-à-dire à une certaine aire trapézoïdo-circulaire) diminuée d'une aire d'une autre nature, qu'il est cependant possible d'évaluer moyennant la supposition suivante.

J'envisage simultanément les secteurs élémentaires correspondant à deux sécantes $\overline{OPQQ'}$, $\overline{OP_1Q_1Q_1'}$ symétriques par rapport à la droite

$\overline{OB}$, dont je désignerai par S le deuxième point d'intersection avec le cercle (A). Le point S étant projeté en T sur $\overline{OPQQ'}$ et en T_1 sur $\overline{OP_1Q_1Q_1'}$, j'aurai deux segments $\overline{OT}$, $\overline{OT}_1$, égaux entre eux et à la demi-somme des segments $\overline{OP}$ et $\overline{OP}_1$ (je passe sur la démonstration géométrique qui est des plus simples). De là suit que la somme des deux secteurs élémentaires est

$$2 \cdot \overline{OT} \cdot \overline{QQ'} \cdot d\omega,$$

et la suppression du facteur 2 reviendra à faire varier la sécante dans la même étendue angulaire totale que précédemment.



Mais le cercle décrit par le point T est homothétique par rapport au pôle fixe du cercle décrit par le point U, milieu de la corde QQ' le rapport d'homothétie étant $\frac{\overline{OS}}{\overline{OB}}$; d'autre part $OU \cdot d\omega$ est le chemin élémentaire décrit par le point U perpendiculairement à la direction $\overline{OPQQ'}$; en conséquence $\overline{QQ'} \cdot \overline{OU} \cdot d\omega$ est l'aire élémentaire balayée par le segment $\overline{QQ'}$, et l'aire finie qu'il s'agissait d'évaluer est celle de l'aire trapézoïdo-circulaire $QQ_1Q_1'Q'$, multipliée par le coëfficient de réduction $\frac{\overline{OS}}{\overline{OB}}\cdot$ Par suite l'aire totale de la quartique a pour expression

$$\frac{\overline{SB}}{\overline{OB}}\cdot\pi\varrho^2,$$

ϱ désignant le rayon du cercle (B).

La démonstration qui précède et le résultat obtenu ne sont valables que dans le cas où le pôle fixe O étant extérieur au cercle (B) la quartique peut être considérée comme la podaire d'une hyperbole ayant pour asymptotes les normales à la quartique menées par les points de contact des tangentes issues du point O, qui sont évidemment les tangentes au cercle (B) issues du même point: l'axe transverse de l'hyperbole est parallèle à la droite $\overline{OSB}$ et sa longueur est égale au diamètre du cercle (B); la distance du pôle fixe à l'axe non-transverse est égal à $\overline{SB}$.

En outre il faut remarquer que l'évaluation de l'aire doit être faite conformément aux principes posés par Gauss, l'aire extérieure infinie étant caractérisée par le coëfficient *zéro* et les aires comprises dans un contour fermé affectées du coëfficient *relatif* ± 1 selon qu'elles se trouvent d'un côté ou de l'autre du contour supposé parcouru dans un sens déterminé.

Sous le bénéfice de ces deux observations on peut énoncer que:

Le rapport de l'aire de la podaire de l'hyperbole à l'aire du cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre est le même que le rapport des distances à l'axe non-transverse du pôle fixe et du foyer.

J'avais indiqué ce résultat dans la solution analytique que j'ai donnée de la question n° 2885 de *l'Intermédiaire des Mathématiciens* (Tome XII, 1905, p. 187); mais la démonstration géométrique exposée ici est bien plus directe et plus simple.

L'aire des podaires d'ellipse donne lieu à des considérations un peu différentes, mais qui sont généralement connues et sur lesquelles il serait superflu d'insister.

Theorie zweier Beugungsversuche mit elektrischen Wellen.

Von Clemens Schaefer in Breslau.

In seinem bekannten Buche „Die Optik der elektrischen Schwingungen" hat Righi auf Seite 111 ff. zwei Beugungsversuche beschrieben, die infolge der dabei auftretenden Dimensionen mit Lichtwellen kaum anzustellen sind.

Er läßt ebene elektrische Wellen von 10 cm Länge auf ein zylindrisches Hindernis aus dielektrischem Material auffallen; der Radius des Zylinders beträgt 2 cm, die Achse desselben ist parallel der elektrischen Kraft. Hinter dem Zylinder steht in einiger Entfernung der Empfänger der elektrischen Wellen. Gemessen wird die Energie derselben, einmal bei freier Strahlung, d. h. wenn der Zylinder entfernt ist, ein zweites Mal, wenn er in der beschriebenen Weise in den Strahlengang eingeführt worden ist.

Man beobachtet dann regelmäßig eine *Veränderung der Intensität der Strahlung.*

Aber es lassen sich zwei Fälle deutlich unterscheiden:

1. Besteht der Zylinder aus Paraffin, Ebonit, Olivenöl, Benzin (letztere in dünnen Glasröhren), so wird durch Einschieben des Zylinders in den Strahlengang *die Intensität gesteigert.*
2. Besteht dagegen der Zylinder aus Spiegelglas oder Alkohol, so tritt eine deutliche *Abnahme der Intensität auf.*

Righi vermutet bereits ganz richtig, daß der Unterschied im Verhalten der beiden Fälle durch den Unterschied im Reflexionsvermögen, d. h. durch den Unterschied der Dielektrizitätskonstanten hervorgebracht werde. Indessen wird sich zeigen, daß man mit leichter Mühe Fälle realisieren kann, wo Paraffin und Spiegelglas sich *vollkommen gleichartig* verhalten. Mit anderen Worten: Es wird sich zeigen, daß die Righische Beschreibung der Versuche nicht vollständig hinreichend ist.

Aus diesen Gründen erschien es mir wichtig, die genaue Theorie der Erscheinung zu entwickeln. Vorarbeiten, allerdings ohne Bezugnahme auf diese Righischen Versuche, liegen bereits vor von J. J. Thomson[1]), W. Seitz[2]), W. von Ignatowsky[3]), Lord

1) J. J. Thomson, Rec. researches in Electricity and Magnetism. p. 428.
2) W. Seitz, Ann. d. Phys. **16**, 747, 1905; **19**, 554, 1906.
3) W. von Ignatowsky, Ann. d. Phys. **18**, 495, 1905.

Rayleigh[1]), Cl. Schaefer[2]). Ich schließe mich in der Bezeichnung und der Darstellung an die überaus übersichtliche Abhandlung des Herrn Seitz an.

Wir transformieren die Maxwellschen Gleichungen für Isolatoren

$$(1) \qquad \text{a)}\ \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{H}, \qquad \text{b)}\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{curl} \mathfrak{E},$$

wo $\mathfrak{E}$ die elektrische, $\mathfrak{H}$ die magnetische Kraft, ε die Dielektrizitätskonstante, μ die Permeabilität, c die Lichtgeschwindigkeit bedeuten, zunächst auf Zylinderkoordinaten (r, φ, z), die mit den Cartesischen folgendermaßen zusammenhängen:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z.$$

Nennen wir die in die Koordinatenrichtungen fallenden Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ $\mathfrak{E}_r$, $\mathfrak{E}_\varphi$, $\mathfrak{E}_z$ resp. $\mathfrak{H}_r$, $\mathfrak{H}_\varphi$, $\mathfrak{H}_z$, so lauten diese Gleichungen folgendermaßen:[3])

$$(2)\left\{\begin{aligned} &\text{a)}\ \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathfrak{H}_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \varphi}, && \text{d)}\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathfrak{E}_\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \varphi},\\ &\text{b)}\ \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial z}, && \text{e)}\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial z},\\ &\text{c)}\ \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial r}, && \text{f)}\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r}. \end{aligned}\right.$$

Wir legen die Achse des Zylinders in die z-Achse; nach den Bedingungen des Versuches muß dann auch die elektrische Kraft der einfallenden Welle parallel der z-Achse sein. Dann werden, da der Zylinder als unendlich lang vorausgesetzt wird, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ unabhängig von z; es treten ferner nach dem oben Gesagten die Komponenten $\mathfrak{E}_r$ und $\mathfrak{E}_\varphi$ überhaupt nicht auf. Somit vereinfachen sich die Gleichungen (2) in folgender Weise:

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned} &\text{a)}\ \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathfrak{H}_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \varphi},\\ &\text{b)}\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \varphi},\\ &\text{c)}\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r}. \end{aligned}\right.$$

Dazu treten noch die Grenzbedingungen der Maxwellschen Theorie, die an der Oberfläche des Zylinders erfüllt sein müssen; dieselben sagen bekanntlich aus, daß die tangentiellen Komponenten der elektrischen

1) Lord Rayleigh, Scient. Papers I 518ff. Cambridge 1899.

2) Cl. Schaefer, Annalen der Phys. **23**, 163, 1907.

3) Vergl. z. B. A. Sommerfeld, Wied. Ann. **67**, 237; 1899.

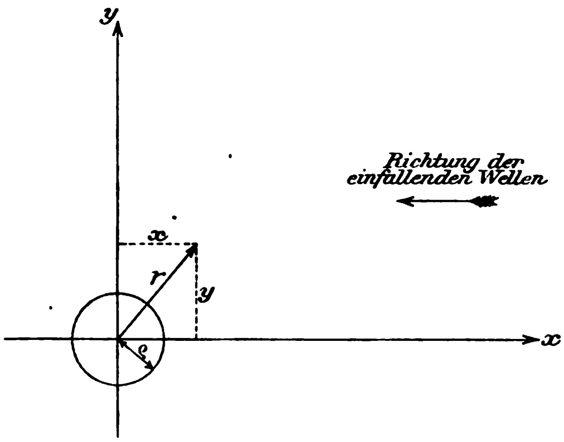
und magnetischen Kraft *stetig* sein müssen. Bezeichnen wir die auf den Außenraum bezüglichen Größen durch den Index 1, die den Innenraum betreffenden mit 2, so ist dementsprechend:

(4) $$\text{a)}\ (\mathfrak{E}_z)_1 = (\mathfrak{E}_z)_2, \qquad \text{b)}\ (\mathfrak{H}_\varphi)_1 = (\mathfrak{H}_\varphi)_2.$$

Statt der letzteren Gleichung kann man, wie sich durch Differentiation nach t und Beachtung von (3c) leicht ergibt, auch schreiben

(4c) $$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r}\right)_1 = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r}\right)_2.$$

Endlich tritt noch eine Bedingung hinzu, die aussagt, daß in unendlicher Entfernung von dem zylindrischen Hindernis ($r = \infty$) die durch dasselbe hervorgebrachte Störung unmerklich klein geworden ist, d. h. daß wir in unendlicher Entfernung wieder eine reine ebene Welle haben.



Nach nebenstehender Figur wollen wir uns denken, daß parallel der x-Achse, und zwar in Richtung der abnehmenden x, der ebene Wellenzug auffällt; dann ist zu setzen:

(4d) $$(\mathfrak{E}_z)_{r=\infty} = e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(ct+x)} = e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(ct+r\cos\varphi)}.$$

Durch Differentiation von (3a) nach t und Einsetzen der Werte $\frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial t}$ aus (3b) und (3c) erhält man dann für $\mathfrak{E}_z$ folgende Beziehung:

(5) $$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial \varphi^2}.$$

Da $\mathfrak{E}_z$ die einzige Komponente der elektrischen Kraft ist, die vorkommt, so ist der Index z überflüssig und kann fortgelassen werden. Der Gleichung (5), die *ganz allgemein* gilt, sowohl für den Außen- als den Innenraum des Zylinders, hat die elektrische Kraft zu genügen.

Um zu einer Integration der Gleichung (5) zu gelangen, ist zu beachten, daß wir einen *rein periodischen* Vorgang betrachten wollen, sodaß wir also $\mathfrak{E}$ in der Form schreiben können:

(6) $$\mathfrak{E} = e^{\frac{2\pi i}{\lambda}t} \cdot u = e^{int} \cdot u,$$

wo u unabhängig von t ist. Dann wird aus (5) durch Einsetzen dieses Wertes

$$-\frac{\varepsilon\mu n^2}{c^2}u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \tag{7}$$

Für den Außenraum haben nun Dielektrizitätskonstante und Permeabilität den Wert 1; im Innenraum dagegen ist ε von 1 verschieden $(=\varepsilon)$, während die Permeabilität auch hier gleich 1, wie im Außenraum ist. Der Faktor von u wird also

im Außenraume: $\qquad -\frac{n^2}{c^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} = -k_1^2,$

im Innenraume: $\qquad -\frac{n^2\varepsilon}{c^2} = -\frac{4\pi^2\varepsilon}{\lambda^2} = -k_2^2.$

Entwickeln wir endlich u noch in eine Fouriersche Reihe, und zwar in eine Kosinusreihe, da für $+\varphi$ derselbe Wert sich ergeben muß, wie für $-\varphi$, so ist $u = \sum\limits_0^\infty Q_m \cos m\varphi$, und durch Einsetzen dieses Wertes in (7) folgt die Gleichung:

$$\frac{d^2 Q_m}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dQ_m}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)Q_m = 0, \tag{8}$$

die nichts anderes ist, als die Besselsche Differentialgleichung.

Die Integrale derselben sind die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art vom Argumente kr, die wir mit $I_m(kr)$ und $Q_m(kr)$ bezeichnen wollen. Statt $Q_m(kr)$ kann man auch eine Funktion $K_m(kr)$ als Besselsche Funktion zweiter Art bezeichnen, die mit $Q_m(kr)$ folgendermaßen zusammenhängt:

$$Q_m = K_m - \frac{i\pi}{2} I_m.$$

Die Funktionen I_0 und K_0 sind definiert durch folgende Reihen:

$$I_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 2} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 4} - \cdots + \frac{(-1)^s x^{2s}}{2\cdot 4\cdots 2s\cdot 2\cdot 4\cdots 2s}, \tag{9}$$

$$K_0(x) = I_0(x)\left\{\log\frac{2}{x} - 0{,}5772157\right\} - 2\left\{I_2(x) - \tfrac{1}{2}I_4(x) + \tfrac{1}{3}I_6(x)\cdots\right. \tag{10}$$

Beide Funktionen gehorchen ferner gewissen Rekursionsformeln, [illegible] zur Berechnung der höheren Ordnungen dienen können, wenn die Fu[illegible]tionen 0ter und 1ter Ordnung bekannt sind. Diese Formeln lauten[illegible]

$$\begin{cases} \text{a)}\ I_m'(x) = \frac{m}{x}I_m(x) - I_{m+1}(x), \\ \text{b)}\ 2m\,I_m(x) = x\{I_{m-1}(x) + I_{m+1}(x)\}. \end{cases} \tag{11}$$

$$I_0(\pi_1)\} = k_2 b_0' I_0'(\pi_2),$$

$$I_1(\pi_1)\} = k_2 b_1' I_1'(\pi_2),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$I_m(\pi_1)\} = k_m b_m' I_m'(\pi_2).$$

$2m$ Unbekannten, die also
mmen. Man erhält nach

$$\pi_1) \quad + \frac{i\pi}{2}.$$
$$\pi_2)$$

nken Seite zu unterdrücken;
. doch interessiert uns im
also als endgültige Lösung:

$$p_1)\} \cos m\varphi + e^{i p_1 \cos \varphi}\Big],$$

Fällen gut konvergent,
n beschränken darf.
ißt man nun stets den
eichnen wollen. Bringt

r Berechnung der kon-
ist: $\varepsilon = 2$; ferner nach
2 cm; $\lambda = 10$ cm; also

$$\lambda = 0{,}628; \qquad \frac{k_1}{k_2} = 0{,}6888.$$
$$h_2 = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} = 1{,}56;$$

$k_2 r$ mit p_2 (Innenraum), so ergibt sich nach (15) und (6) für den Außenraum:

$$(16)\quad \mathfrak{E}_1 = e^{int}\sum_0^\infty \left[b_m I_m(p_1) + a_m\left\{K_m(p_1) - \tfrac{i\pi}{2} I_m(p_1)\right\}\right]\cos m\varphi;$$

für den Innenraum:

$$(17)\quad \mathfrak{E}_2 = e^{int}\sum_0^\infty \left[b'_m I_m(p_2) + a'_m\left\{K_m(p_2) - \tfrac{i\pi}{2} I_m(p_2)\right\}\right]\cos m\varphi.$$

Die Koeffizienten a_m, b_m, a'_m, b'_m sind durch die Grenzbedingungen (4a, 4c, 4d) zu bestimmen, was in folgender Weise geschehen kann.

Aus den asymptotischen Darstellungen geht hervor, daß im Unendlichen der reellen Achse die Q_m verschwinden. Für $r = \infty$ reduziert sich also $\mathfrak{E}_1$ nach Formel (4d) auf

$$\mathfrak{E}_{1\,r=\infty} = e^{int}\sum b_m I_m(p_1)\cos m\varphi = e^{int}e^{ip_1\cos\varphi},$$

d. h.:

$$\sum_0^\infty b_m I_m(p_1)\cos m\varphi = e^{ip_1\cos\varphi}.$$

Wir haben also die Aufgabe vor uns, $e^{ip_1\cos\varphi}$ nach Besselschen Funktionen zu entwickeln. Wir entnehmen das Resultat dem schon genannten Werke von Gray und Mathews auf S. 18, Formel 39 u. f.:

$$(18)\quad e^{ip_1\cos\varphi} = I_0(p_1) + \sum_1^\infty 2i^m I_m(p_1)\cos m\varphi;\quad \text{d. h.: } b_0 = 1;\ b_m = 2i^m.$$

Ferner läßt sich zeigen, daß die sämtlichen Koeffizienten a'_m in Gleichung (17) verschwinden müssen; denn nach (10) wird für $p_2 = 0$, d. h. für $r = 0$ (in der Achse des Zylinders) $K_m(p_2)$ unendlich; um also die Endlichkeit der elektrischen Kräfte zu erhalten, müssen die a'_m verschwinden.

Wir haben also jetzt noch die übrig bleibenden Koeffizienten a_m und b'_m zu bestimmen. Dazu verhelfen uns die Bedingungen (4a, 4c); setzen wir den Radius des Zylinders $= \varrho$, so werden diese Bedingungen erfüllt, indem man die zu jedem m gehörigen Werte gleich setzt. Also erhält man folgendes System von Gleichungen (π_1 resp. π_2 sind die Werte von p_1 und p_2 für $r = \varrho$):

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} I_0(\pi_1) + a_0\left\{K_0(\pi_1) - \frac{i\pi}{2} I_0(\pi_1)\right\} = b'_0 I_0(\pi_2), \\ 2i I_1(\pi_1) + a_1\left\{K_1(\pi_1) - \frac{i\pi}{2} I_1(\pi_1)\right\} = b'_1 I_1(\pi_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2i^m I_m(\pi_1) + a_m\left\{K_m(\pi_1) - \frac{i\pi}{2} I_m(\pi_1)\right\} = b'_m I_m(\pi_2). \end{array}\right.$$

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned}
&k_1 I_0'(\pi_1) + k_1 a_0\left\{K_0'(\pi_1) - \frac{i\pi}{2} I_0'(\pi_1)\right\} = k_2 b_0' I_0'(\pi_2),\\
&2ik_1 I_1'(\pi_1) + k_1 a_1\left\{K_1'(\pi_1) - \frac{i\pi}{2} I_1'(\pi_1)\right\} = k_2 b_1' I_1'(\pi_2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&2 i^m k_1 I_m'(\pi_1) + k_1 a_m\left\{K_m'(\pi_1) - \frac{i\pi}{2} I_m'(\pi_1)\right\} = k_m b_m' I_m'(\pi_2).
\end{aligned}\right.$$

Dies sind $2m$ lineare Gleichungen mit $2m$ Unbekannten, die also gerade hinreichen, die letzteren zu bestimmen. Man erhält nach leichten Rechnungen:

$$(21)\qquad \frac{2\,i^m}{a_m} = \frac{\frac{k_1}{k_2} K_m'(\pi_1) - \frac{I_m'(\pi_2)}{I_m(\pi_2)} K_m(\pi_1)}{I_m(\pi_1)\frac{I_m'(\pi_2)}{I_m(\pi_2)} - \frac{k_1}{k_2} I_m'(\pi_2)} + \frac{i\pi}{2}.$$

Dabei ist für $m = 0$ der Faktor 2 auf der linken Seite zu unterdrücken; eine ähnliche Gleichung erhält man für b_m', doch interessiert uns im folgenden der Innenraum nicht. Wir erhalten also als endgültige Lösung:

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \mathfrak{E}_1 = e^{int}\left[\sum_0^\infty a_m\left\{K_m(p_1) - \frac{i\pi}{2} I_m(p_1)\right\}\cos m\varphi + e^{ip_1\cos\varphi}\right],\\
&\text{b)}\quad \mathfrak{E}_2 = e^{int}\sum_0^\infty b_m' I_m(p_2)\cos m\varphi.
\end{aligned}\right.$$

Die Reihen sind in den uns interessierenden Fällen gut konvergent, so daß man sich auf ein paar Glieder derselben beschränken darf.

Bei Messungen mit elektrischen Wellen mißt man nun stets den zeitlichen Mittelwert von $\mathfrak{E}_1^2$, den wir mit $\overline{\mathfrak{E}_1^2}$ bezeichnen wollen. Bringt man $\mathfrak{E}_1$ in die Form:

$$(23)\qquad \mathfrak{E}_1 = A\cos nt + B\sin nt,$$

so ist

$$(24)\qquad \overline{\mathfrak{E}_1^2} = \frac{A^2 + B^2}{2};$$

dieser Ausdruck mißt die Strahlungsintensität.

Wir sind jetzt soweit gelangt, daß wir zur Berechnung der konkreten Fälle übergehen können. Für *Paraffin* ist: $\varepsilon = 2$; ferner nach den Versuchsbedingungen von Righi: $\varrho = 2\,\text{cm}$; $\lambda = 10\,\text{cm}$; also

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{2\pi\varrho}{\lambda} = 1{,}25; & k_1 &= \frac{2\pi}{\lambda} = 0{,}628; & \\
\pi_2 &= \frac{2\pi\varrho}{\lambda}\sqrt{\varepsilon} = 1{,}80; & k_2 &= \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} = 1{,}56; & \frac{k_1}{k_2} = 0{,}6888.
\end{aligned}$$

Wir können uns begnügen mit der Berechnung der *3 ersten* Koeffizien[t]
a_0, a_1, a_2, da die folgenden sehr klein sind und keinen merklichen Beit[r]
zu den ersten Gliedern liefern können. Nach (21) ist

$$\frac{1}{a_0} = \frac{\frac{k_1}{k_2} K_0'(\pi_1) - \frac{I_0'(\pi_2)}{I_0(\pi_2)} K_0(\pi_1)}{I_0(\pi_1)\frac{I_0'(\pi_2)}{I_0(\pi_2)} - \frac{k_1}{k_2} I_0'(\pi_1)} + \frac{i\pi}{2}.$$

Aus den Meißelschen Tabellen findet man:

$$I_0(\pi_1) = 0{,}6460; \quad I_0'(\pi_1) = -I_1(\pi_1) = -0{,}5106; \qquad \frac{I_0'(\pi_2)}{I_0(\pi_2)} = -1,$$
$$I_0(\pi_2) = 0{,}3400; \quad I_0'(\pi_2) = -I_1(\pi_2) = -0{,}5816;$$

Ferner aus den Smithschen Tabellen:

$$K_0(\pi_1) = -0{,}4042; \quad K_0'(\pi_1) = -K_1(\pi_1) = -0{,}9187.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung für a_0 ein, so folgt als Resu[ltat]

$$\boldsymbol{a_0 = 0{,}316 - 0{,}284\,i.}$$

Genau ebenso verfahren wir bei der Berechnung von a_1. Nach (21)

$$\frac{2i}{a_1} = \frac{\frac{k_1}{k_2} K_1'(\pi_1) - \frac{I_1'(\pi_2)}{I_1'(\pi_2)} K_1(\pi_1)}{I_1(\pi_1)\frac{I_1'(\pi_2)}{I_1(\pi_2)} - \frac{k_1}{k_2} I_1'(\pi_1)} + \frac{i\pi}{2}.$$

$I_1(\pi_1)$, $I_1(\pi_2)$, $K_1(\pi_1)$ sind bereits bekannt; $I_1'(\pi_1)$, $I_1'(\pi_2)$, $K_1'(\pi_1)$ kön[nen]
vermittels der Rekursionsformeln (11a und b) aus den schon gegebe[nen]
Daten berechnet werden; man findet:

$$I_1'(\pi_1) = 0{,}2375; \quad I_1'(\pi_2) = 0{,}0170; \quad K_1'(\pi_1) = -1{,}1392.$$

Mit Hilfe dieser Angaben ergibt sich

$$\boldsymbol{a_1 = 0{,}254 + 0{,}893\,i.}$$

Zur Berechnung von a_2 findet man aus den schon berechneten We[rten]
mit Hilfe der Rekursionsformeln

$$I_2(\pi_1) = 0{,}1710; \quad I_2'(\pi_1) = 0{,}2370;$$
$$I_2(\pi_2) = 0{,}3061; \quad I_2'(\pi_2) = 0{,}2417;$$
$$K_2(\pi_1) = 1{,}8742; \quad K_2'(\pi_1) = -3{,}5730.$$

Daraus folgt

$$\boldsymbol{a_2 = -0{,}014 + 0{,}00002\,i.}$$

Man sieht, daß der Koeffizient a_2 bereits erheblich kleiner ist, als
vorhergehende; a_3 würde bereits ganz einflußlos sein, und wir sind d[a]
berechtigt, die Rechnung an dieser Stelle abzubrechen.

Genau ebenso gestaltet sich die Berechnung für *Spiegelglas*. Dafür ist $\varepsilon = 6{,}25$; ist ferner nach den Versuchen von Righi, wie vorher, $\varrho = 2$ cm, $\lambda = 10$ cm, also:

$$\left.\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{2\pi\varrho}{\lambda} = 1{,}25; \quad k_1 = 0{,}628;\\ \pi_2 &= \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon} = 3{,}12; \quad k_2 = 1{,}56;\end{aligned}\right\} \frac{k_1}{k_2} = 0{,}4,$$

dann findet man für Spiegelglas die 3 ersten Koeffizienten:

$$\begin{aligned}a_0 &= 0{,}016 - 0{,}636\,i,\\ a_1 &= 0{,}910 + 0{,}575\,i,\\ a_2 &= -0{,}146 + 0{,}017\,i.\end{aligned}$$

Wir können nun zur Berechnung von $\overline{\mathfrak{E}_1^2}$ für beide Fälle übergehen. Zunächst aber wollen wir zum Vergleich diesen Mittelwert für den Fall berechnen, daß wir *freie* Strahlung haben, d. h., daß der Zylinder gar nicht vorhanden ist. Dann ist $\mathfrak{E}_1 = e^{i(nt + p_1 \cos\varphi)}$. Begeben wir uns (s. Fig.) auf einen Punkt der negativen Abszissenachse (d. h. *hinter* die Stelle, wo sonst der Zylinder sich befindet), so ist $\varphi = \pi$ zu setzen. Also ist $\mathfrak{E}_1 = e^{i(nt - p_1)}$ oder, bei Beschränkung auf den reellen Teil:

$$\mathfrak{E}_1 = \cos(nt - p_1) = \cos nt \cos p_1 + \sin nt \sin p_1 .$$

Daraus ergibt sich nach (23) und (24) die freie Strahlung: $\overline{\mathfrak{E}_1^2} = \frac{1}{2}$. Soll also unsere Theorie das Resultat der Righischen Beobachtungen ergeben, so müssen wir im Falle des *Paraffin*-Zylinders einen Wert erhalten, der größer ist als $\frac{1}{2}$, und im Falle des *Spiegelglas*-Zylinders einen Wert, der kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Das wird in der Tat der Fall sein.

Bei Beschränkung auf die 3 ersten Glieder können wir nun nach (22a) schreiben:

$$(25) \qquad \mathfrak{E}_1 = e^{int - p_1} + e^{int}[a_0 Q_0(p_1) - a_1 Q_1(p_1) + a_2 Q_2(p_1)],$$

wobei $Q(p_1)$ als Abkürzung von $K(p_1) - \frac{i\pi}{2} I(p_1)$ gebraucht ist. Für große Werte von p_1, d. h. für große Entfernungen r des Beobachtungspunktes von der Zylinderachse können wir die asymptotischen Werte benutzen, denen zufolge $Q_m(p_1) = i^m Q_0(p_1)$ ist. Setzen wir dies in (25) ein, so folgt:

$$\mathfrak{E}_1 = e^{int - p_1} + e^{int}[a_0 - a_1 i - a_2]\, Q_0(p_1);$$

setzen wir hierin

$$a_m = \alpha_m + i\beta_m, \quad Q_0(p_1) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2p_1}}\, e^{i(\pi/4 - p_1)},$$

so folgt, wenn wir uns auf die reellen Teile beschränken,

$$\mathfrak{E}_1 = \cos(nt - p_1) + \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}}\{A_0 \sin(nt+\psi) + B_0 \cos(nt+\psi)\},$$

wo zur Abkürzung:

$$A_0 = \alpha_0 + \beta_1 - \alpha_2, \quad B_0 = \beta_0 - \alpha_1 - \beta_2, \quad \psi = \pi/4 - p_1$$

gesetzt ist. Ordnen wir diesen Wert, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(26)\qquad \mathfrak{E}_1 = \cos nt&\left[\cos p_1 + \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} A_0 \sin\psi + \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} B_0 \cos\psi\right]\\ + \sin nt&\left[\sin p_1 + \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} A_0 \cos\psi - \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} B_0 \sin\psi\right].\end{aligned}$$

Nach (24) ist dann

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{E}_1^2} = \tfrac{1}{2}\Bigg[&\left\{\cos p_1 + \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} A_0 \sin\psi + \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} B_0 \cos\psi\right\}^2\\ &+\left\{\sin p_1 + \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} A_0 \cos\psi - \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} B_0 \sin\psi\right\}^2\Bigg]\\ = \tfrac{1}{2}\Bigg[&1 + \frac{\pi}{2p_1}(A_0^2 + B_0^2) + 2\sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} A_0 \sin(p_1+\psi) + 2\sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} B_0 \cos(p_1+\psi)\Bigg]\end{aligned}$$

oder, da $\psi = \pi/4 - p_1$ ist,

$$\overline{\mathfrak{E}_1^2} = \tfrac{1}{2}\left[1 + \frac{\pi}{2p_1}(A_0^2 + B_0^2) + 2\sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} A_0 \sin\pi/4 + 2\sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} B_0 \cos\pi/4\right]$$

oder

$$(27)\qquad \overline{\mathfrak{E}_1^2} = \tfrac{1}{2}\left[1 + \frac{\pi}{2p_1}(A_0^2 + B_0^2) + \sqrt{\frac{\pi}{p_1}}(A_0 + B_0)\right].$$

In diese Formel (27) haben wir nun unsere Werte von A_0, B_0, p_1 einzusetzen. Die ersteren sind durch die Koeffizienten bereits festgelegt; dagegen wurde über p_1 bisher nur vorausgesetzt, daß es so groß sei, daß wir die asymptotischen Formeln der Besselschen Funktionen benutzen dürfen. Wir wollen $r = 100$ cm nehmen; dann ist $p_1 = \frac{2\pi r}{\lambda} = 20$[illegible]. Für *Paraffin* erhalten wir so

$$A_0 + B_0 = 0{,}685; \quad A_0^2 + B_0^2 = 1{,}785.$$

Daraus der Wert für

$$\overline{\mathfrak{E}_1^2} = \tfrac{1}{2}\cdot 1{,}198 > \tfrac{1}{2},$$

d. h. nach Einschieben des Paraffin-Zylinders ist die Strahlung um etwa 20% verstärkt.

Für *Spiegelglas* dagegen ergibt sich

$$A_0 + B_0 = -0{,}826; \quad A_0^2 + B_0^2 = 2{,}986.$$

Daraus der Wert für

$$\overline{\mathfrak{E}_1^2} = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}891 < \tfrac{1}{2},$$

d. h. nach Einbringen des Spiegelglas-Zylinders ist die Strahlung um etwa 11% vermindert.

Die Theorie bestätigt also die Richtigkeit des Righischen Versuches.

Es wäre indessen durchaus falsch, zu glauben, daß nun unter allen Umständen ein Paraffin-Zylinder den entgegengesetzten Effekt geben müsse, wie ein Spiegelglas-Zylinder.

Vielmehr sieht man aus der theoretischen Darlegung, daß es außer auf die Dielektrizitätskonstante auch noch auf das Verhältnis $\frac{\varrho}{\lambda} = \left(\frac{\text{Zylinder-Radius}}{\text{Wellenlänge}}\right)$ ankommt.

Würde man z. B. einen Spiegelglas-Zylinder von 0,1 cm Radius zu dem Versuche benutzen, so würde er eine Verstärkung liefern; ja sogar Wasser ($\varepsilon = 81$!) würde in zylindrischen Röhren von 0,1 cm Radius noch verstärkend wirken. Würde man umgekehrt den Zylinder-Radius erheblich größer wählen wie 2 cm bei derselben Wellenlänge, so würde man auch erzielen können, daß Stoffe mit kleiner Dielektrizitätskonstante wie Paraffin *schwächend* wirken.[1]) Diese Aussagen müssen zur Righischen Beschreibung seiner Versuche ergänzend hinzutreten.

Breslau, im Oktober 1907.

Physikalisches Institut der Universität.

Berichtigung.

Von Clemens Schaefer.

Am Schlusse meiner Arbeit: „Zum Beweise des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik"[2]) habe ich folgende Anmerkung gemacht. „Was die von mir gewählte Beweisform des 2ten Hauptsatzes angeht, so habe ich mich mit Absicht so eng als möglich an Helmholtz, „Vorlesungen über die Theorie der Wärme" angeschlossen, um mich hier kürzer fassen zu können." Diese Notiz ist insofern unvollständig, als ich außer dem Helmholtzschen Texte auch Gedanken des Herausgebers, Herrn Prof. F. Richarz, verwertet habe, die als solche durch die Note „Anmerkung des Herausgebers" kenntlich sind. Doch bemerke ich zur Vermeidung von Mißverständnissen, daß sich das *nicht* auf den Gedanken bezieht, den ich in jener Arbeit allein für mich in Anspruch nehme, nämlich auf die Ersetzung der thermodynamischen Daten eines idealen Gases durch die des absolut schwarzen Körpers.

Breslau, den 11. November 1907.

1) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys., **23**, 163; 1907.

2) Dieses Archiv (3) **12**, 40.

Rezensionen.

F. Fricks Physikalische Technik oder Anleitung zu Experimentalvorträgen sowie zur Selbstherstellung einfacher Demonstrationsapparate. 7. Auflage von Otto Lehmann. Braunschweig 1904, Vieweg & Sohn.

Zurzeit liegen von dem genannten Werke die beiden Abteilungen de ersten Bandes vor. Die erste Abteilung beschäftigt sich allein mit de Ausrüstung eines physikalischen Institutes einschließlich allem Zubehör, an gefangen vom Hörsaal bis zur Werkstatt und den Nebengelassen. Di zweite Abteilung, die in gleicher Weise wohl im nächsten Bande fortgesetz werden soll, bildet die eigentliche Anleitung zur Ausführung physikalische Demonstrationen und Experimente. Die erste Abteilung umfaßt 630 Druck seiten, die zweite 1001 Druckseiten, so daß bis jetzt 1631 Druckseite vorliegen. Bei dieser imposanten Ausdehnung des Werkes, das ursprünglic als einbändiges Werk von höchstens 800 Seiten erschienen war, ist es klar welche Ausführlichkeit herrscht, und welche Menge von Arbeit und Müh aufgewendet werden mußte, um den Stoff zu sichten und zu ordnen. Ob allerdings diese bis ins kleinste Detail gehende Ausführlichkeit den Hauptzwecken des Buches nützend und förderlich ist, das mag füglich bezweifelt werden. Denn unter dieser Ausführlichkeit leidet die Übersicht, die für eine schnelle Orientierung des Lesers so wesentlich ist. Das Buch ist, wie in der Vorrede noch besonders hervorgehoben, hauptsächlich für den Lehrer an Mittelschulen geschrieben; es soll natürlich auch dem Dozenten an Hochschulen und auch dem Fabrikanten ein Leitfaden sein. Für den Mittelschullehrer geht es wohl in allen Punkten weit über das Maß dessen hinaus, was durch den vorgeschriebenen Lehrplan und mehr und zwingender noch durch die meist recht kärgliche pekuniäre Dotierung dieses Lehrzweiges bedingt wird. Der Lehrer an Hochschulen hat wieder in langem Ausbildungsgange und durch steten Konnex mit der einschlägigen Fachliteratur Mittel und Wege an der Hand, seine Demonstrationen auf der Höhe zu halten, daß er dieser Ausführlichkeit billig entraten kann. Was nun endlich den Fabrikanten betrifft, so sind da zwei Fälle scharf zu unterscheiden. Erstens solche Fabrikanten, die selbst Lehrmittel herstellen, und zweitens solche, die Lehrapparate als Hilfsmittel in ihrer Fabrikation brauchen. Die ersten unterrichten sich gewöhnlich selbst durch Bezug von Preislisten ihrer Konkurrenten über deren Leistungen, denn das verlangt ihr Geschäft. Die zweiten endlich werden aus dem Werk manchen Nutzen ziehen, wenn sie für irgendeinen Zweck Apparate brauchen. Allein nach meiner Kenntnis moderner Fabrikationsleitung dürfte dem Buch aus deren

Kreis kein besonderes Interesse entgegengebracht werden; denn sie verfügt im allgemeinen über weitgehende Informationsmöglichkeiten, die meist einfacher und schneller zum Ziele führen.

Die erste Abteilung ist mit 2013, die zweite Abteilung mit 1905 Holzschnitten ausgestattet. Bei dieser außerordentlichen Reichhaltigkeit an Abbildungen, die zum großen Teil den Katalogen bekannter Lehrmittelfabrikanten und Händler entstammen, ist es natürlich nicht merkwürdig, dasselbe Bild zweimal an verschiedenen Stellen vorzufinden. Durch diese ungeheure Reichhaltigkeit an Abbildungen erhält das ganze Werk einen eigenartigen Charakter, der ihm eine gewisse Ähnlichkeit mit einer Preisliste und dazu geschriebenem Text verleiht. Man kann sich manchmal des Eindruckes nicht erwehren, daß der Text ein wenig zuliebe der Abbildungen und nicht, wie es eigentlich umgekehrt sein sollte, die Abbildungen zum Text eingefügt sind. Außerdem besteht durch diese vielen Abbildungen eine gewisse Gefahr für das Buch; denn, wie schon gesagt, der größte Teil der Abbildungen muß den Katalogen von Lehrmittelfabrikanten und Händlern entnommen werden, weil es ganz undenkbar wäre, daß ein Verlag die enormen Kosten für die zahlreichen Bilder tragen sollte. Infolgedessen ist der Autor, wenn vielleicht auch unwissentlich und unabsichtlich, gezwungen, an den beschriebenen Apparaten entweder gar keine oder eine lobende Kritik zu üben; denn tut er das nicht, so könnte es dem Verlage passieren, daß der verstimmte Besitzer der Holzschnitte dem Verlage sein Material nicht zur Verfügung stellt, was sofort eine große Reduktion des Umfanges des Werkes zur Folge haben würde.

Die Industrie, die sich mit der Herstellung von Lehrmittelapparaten zurzeit beschäftigt, hat sich gerade in den letzten Jahren außerordentlich vergrößert, weil der Bedarf an Apparaten eigentlich immer in ständigem Wachsen begriffen ist, und ich persönlich kann mich des Eindruckes nicht erwehren, daß viel zu viel Lehrapparate hergestellt werden. Jeder, der Demonstrationsvorlesungen zu halten hat, macht gern kleine Veränderungen an seinen Apparaten, und aus den kleinen Veränderungen, die in irgendwelchen wissenschaftlichen Zeitschriften beschrieben werden, gehen dann wieder neue selbständige Apparate hervor. Dazu gibt es noch eine ganze Reihe älterer typischer Apparate, die aus historischer Pietät weiter angefertigt und verkauft werden, obwohl sie eigentlich eine rechte Existenzberechtigung nicht mehr haben. Man kann auch nicht gerade behaupten, daß die neuen Konstruktionen immer Verbesserungen sind. Dazu kommt die Preisfrage für solche Apparate, und alles das hat dazu geführt, daß der physikalische Demonstrationsapparat ein Ding geworden ist, das von den sonstigen Erzeugnissen der Technik in allen Punkten, aber nie zu seinem Vorteil abweicht, deshalb wäre es eine allerdings schwierige, aber meines Erachtens sehr lohnende Aufgabe, wenn der Herr Verfasser bei der Auswahl des Materials etwas mehr siebend zu Werke gehen würde und Bauarten von Apparaten, die seiner Ansicht nach ihrem Zweck nicht gut entsprechen, entweder fortließe oder aber auch ihre Fehler anführte.

Als ein Beispiel nenne ich die Projektionslaterne von Dubosq, eine Ausführung, die nur ein Notbehelf war, um sich den damaligen Bogenlichtlampen anzupassen. Ebenso überflüssig ist natürlich die genaue Beschreibung der altertümlichen Regulatoren mit komplizierten Uhrwerken. Heute werden zu Projektionszwecken fast ausschließlich neben ganz einfachen Handregulatoren Nebenschluß- oder Differentiallampen gebraucht. Und gerade hier müßte ein Handbuch wie das vorliegende eingreifen, um dem unkundigen Leser als Führer zu dienen; denn der Projektionsapparat ist ein unentbehrlicher Faktor im modernen Unterricht, der so vollendet wie möglich eingerichtet sein sollte. Und dazu gehört vor allem die geeignete Einrichtung der Lampe. Alle alten Uhrwerkregulatoren regulieren auf konstante Stromstärke. Die modernen regulieren entweder auf konstante Spannung oder aber auf konstantes Verhältnis zwischen Strom und Spannung. Die alten Lampen sind hervorgegangen und angepaßt den früher üblichen Stromverhältnissen für Bogenlichtbeleuchtung. Diese dürften den Leserkreisen dieses Buches wenig geläufig sein. Während man heute von den Elektrizitätswerken Strom konstanter Spannung geliefert erhält und daran nach Belieben Bogenlampen, Glühlampen und Motore anschließt, kannte man früher nur *eine* elektrische Beleuchtungsart, und das war Bogenlicht. Man schaltete dabei alle Bogenlampen in Reihe, kümmerte sich um die Konstanz der erzeugten Spannung überhaupt nicht, wenn sie nur hoch genug war, sondern hielt die Stromstärke der Maschine genau konstant. Dazu baute man besondere Maschinen, wie die Thomson-Huston- und Brush-Maschinen. Als dann die Glühlampe in die Erscheinung trat, verließ man den hochgespannten Gleichstrom, um die Parallelschaltung der Lampen zu ermöglichen, und paßte die Stromspannung den Glühlampen an. Damit wurde es nun aber notwendig, den Bogenlampen veränderte Reguliermechanismen zu geben, wenn man überhaupt zwei oder mehrere davon in Reihe schalten wollte. Es erfand dann Hefner-Alteneck das Differentialsystem, Pieper die Nebenschlußregulierung.

Das ist der tatsächliche Hergang. Es wäre ja nun sehr wünschenswert, wenn dem hier ein wenig Rechnung getragen wäre, anstatt daß alle Lampensysteme, ohne auf ihre größere oder geringere Brauchbarkeit einzugehen, bunt durcheinander aufgeführt wären.

Zunächst finden wir Handregulatoren, dabei beschrieben die alte Laterne von Dubosq. Daß gerade diese Laterne für die beschriebenen Handregulatoren ganz unzweckmäßig ist, davon findet sich leider nichts. Dann kommen zwei Differentiallampen, jetzt eine Nebenschlußlampe. Und nun erst die alten Hauptstrom-Kontaktlampen. Endlich wieder eine Differentiallampe und die Lampe von Rühlmann. Die letzte ist wohl überflüssig und würde gut durch Nernstsche Projektionsbrenner, denen einige Aufmerksamkeit zu widmen wäre, zu ersetzen sein. Wird dieselbe Lampe, wie dies meist geschieht, außer zu Projektionszwecken auch noch zu Spektralarbeiten benützt, so ist fraglos eine Regulierung auf Stromstärke am besten, wenn die Lampe selbst eine Einrichtung zur Einstellung besitzt. In Verbindung mit einem veränderlichen Vorschaltwiderstand kann dann der Geübte alles nur Wünschenswerte mit der Lampe erreichen. Am unzweckmäßigsten sind in jedem Falle Differentiallampen. Jede geringste Änderung der Stromstärke verändert die Lichtbogenlänge außerordentlich, während der Kohlenabstand unabhängig von der Stromstärke veränderlich sein soll. Ein Regulierwiderstand im Nebenschlußkreise würde diesen Mangel einfach beheben. Doch gibt es solche Lampen nicht, trotzdem die sonst beste Lampe auch für Projektionszwecke die besten Dienste leisten würde. Die Neben-

-r Regulierung am Elektromagneten, sie ist infolge- ⁴nsicht des Verfassers, zu Projektionszwecken

-was ausführlicherer Form in das Werk ·rfahrene Leser sich eine Kritik bilden .ate einen Weg findet, auf dem er ver- Ich habe hier nur ein Beispiel anführen ᵢes Werk ausgestattet dächte. Das, was ich upen gesagt habe, läßt sich leider auf manche .nwenden, wo ich die einfache Beschreibung ohne u für ungenügend halte.

.s wieder gar nicht genug anzuerkennen, daß sich der .dlichen Mühe unterzogen hat, ein altbekanntes und mit ·tlich beliebtes Werk, das in seiner Anlage zwar seinerzeit ., aber bei dem rapiden Fortschritt der Technik natürlich .en mußte, von Grund aus umzuarbeiten und daraus ein eigent- .nmen neues Werk, neuen erhöhten Ansprüchen genügend, zu Erwägt man dabei die außerordentliche Schwierigkeit der sich :iederholenden Frage: „Was ist zur Aufnahme und Besprechung ge- t, was nicht?", so kann man sich einen ungefähren Begriff davon chen, welche Fülle von Kenntnissen auf allen möglichen Gebieten, welche -angwierigen Studien zerstreuter Literaturerzeugnisse allein schon notwendig sind, ehe ein Autor überhaupt nur an die Schaffung solch eines Werkes denken darf. Und schließlich ist diese Riesenarbeit am Ende recht undankbar. Denn wie leicht ist es möglich, daß der Anfang des Werkes zu einem Zeitpunkt schon nicht mehr ganz aktuell ist, wo das Ende des Werkes noch nicht erschienen ist. Da auch der Verleger seinerseits es an nichts hat fehlen lassen, was geeignet und notwendig ist, dem Buche ein ansprechendes Gewand zu geben, so ist der Wunsch wohl berechtigt, daß die Arbeit und Mühe beider durch ein reges Interesse an dem Werk seinen verdienten Lohn finden möge.

Berlin. HANS BOAS.

J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Sammlung Schubert Nr. 50. Leipzig 1905, Göschen.

Das vorliegende Werk unterscheidet sich von dem in derselben Sammlung erschienenen des Herrn Schlesinger dadurch, daß nicht, wie bei diesem, die Begriffsbildungen und Probleme der Fuchsschen Theorie im Mittelpunkte stehen, wenngleich sie in den Grundzügen behandelt werden. Wenn dadurch das vorliegende Werk einer einheitlichen Methode entbehrt, so gewinnt es doch größere Freiheit und besonders die Möglichkeit, die für die Anwendungen interessanten Fragen aus der Theorie der Differentialgleichungen, besonders die nach der asymptotischen Darstellung der Integrale, nach der Existenz periodischer Lösungen, nach der Gestalt der die reellen Integrale darstellenden Kurven eingehend zu behandeln. Das Werk ist überhaupt mit Erfolg bestrebt, den Leser mit allen wichtigen Untersuchungsrichtungen bekannt zu machen und überall zum neusten Standpunkte der wissenschaftlichen Entwicklungen hinaufzuführen. Der Verfasser mußte für ein solches Unternehmen durch seine vielfachen höchst erfolgreichen Untersuchungen über Differentialgleichungen besonders befähigt erscheinen und hat in der Tat ein Werk geliefert, das der wissenschaftlich arbeitende Mathematiker mit Dank aufnehmen wird.

Das Werk beginnt mit den beiden üblichen Beweisen für die Existenz der Integrale beliebiger Systeme von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen, dem auf Cauchys méthode des limites beruhenden und dem, der die Integrale durch sukzessive fortschreitende Approximation herstellt. Für viele Zwecke brauchbar sind die an die Existenzbeweise geknüpften Untersuchungen über die Abhängigkeit der Integrale von den Anfangswerten und von Parametern, die in den Differentialgleichungen auftreten. Es folgt ein Kapitel über die Grundlagen der Theorie der linearen, homogenen und kompletten Differentialgleichungen bei komplexen Werten des Arguments, und ein algebraisches Kapitel über die Theorie der linearen Substitutionen in Verbindung mit den Haupteigenschaften der Elementarteiler, die dazu benutzt werden, eine jede lineare Substitution auf die bekannte kanonische Form zu bringen, bei der sie sich aus Gleichungsgruppen von der Form

$$Y_1 = wy_1, \quad Y_2 = wy_2 + y_1, \quad \dots \quad Y_m = wy_\mu + y_{\mu-1}$$

zusammensetzt. Ein weiteres einleitendes Kapitel behandelt die linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und untersucht als Beispiel die kleinen Schwingungen eines dynamischen Systems mit und ohne Dämpfung.

Die nächsten Abschnitte leiten zu höheren Fragen über; sie enthalten im wesentlichen die Grundlagen der Fuchsschen Theorie der linearen Differentialgleichungen. Die lineare Substitution, die ein Integralsystem beim Umgang um einen singulären Punkt erleidet, wird untersucht; die singulären Stellen der Bestimmtheit sowie die Fuchssche Klasse von Gleichungen werden gekennzeichnet und erörtert. Zur Anwendung dieser Theorie werden neben den allgemein bekannten dem Leser eine Anzahl neuer und interessanter Beispiele empfohlen.

Mit besonderem Interesse wenden wir uns zum siebenten, die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen in der Umgebung von Stellen der Unbestimmtheit, behandelnden Kapitel. Der Gegenstand ist für die Anwendungen in der mathematischen Physik, für die numerische Berechnung und für das Studium des Verlaufs der reellen Integrale sehr wichtig und in den letzten Jahren vielfältig gefördert, besonders auch vom Verfasser unseres Werks; die ersten Anregungen verdankt man Herrn Thomé, der die nach ihm benannten Normalreihen entdeckte, und Herrn Poincaré, der genau definierte, was unter der asymptotischen Darstellung durch eine divergente Reihe zu verstehen sei. In der vorliegenden Darstellung wird wesentlich ein Differentialgleichungssystem benutzt, in dem komplexe Konstanten vorkommen, die Variable aber reelle Werte durchläuft; das ist auch sachgemäß, da bei der asymptotischen Darstellung in der komplexen Umgebung einer singulären Stelle die den verschiedenen Annäherungsrichtungen entsprechenden Darstellungen nicht immer zu einheitlichen zusammengefaßt werden können. Auf S. 205 wird ein hervorgehoben, für den die durchgeführten Entwicklungen versagen, jenige nämlich, in welchem ∞ die singuläre Stelle ist, und das betra Integral auf der reellen Achse unzählige Nullstellen besitzt, als etwa wie $\sin x$ verhält. Dieser Fall ist in den Anwendungen so ziemlich der wichtigste; es wäre deshalb erwünscht gewesen, wenn nicht nur auf die Literatur verwiesen, sondern die nötige Ergänzung der Theorie wirklich gegeben wäre, etwa auf Grund der im 4. Bande dieser Zeitschrift abgedruckten Abhandlung von Herrn Horn selbst. Ferner wäre es an dieser Stelle vielleicht angebracht gewesen, auf die neuen wichtigen Arbeiten von Herrn Dini in den Annali di matematica zu verweisen, die, auf sukzessive fortschreitender Approximation beruhend, allgemeine und zur Diskussion geeignete Formeln zur Darstellung der Integrale in der Nähe der Unbestimmtheitsstellen ergeben.

Doch es wird Zeit, den reichen Inhalt unseres Werks weiter zu durchmustern. Wir finden einen Abschnitt über die Anwendungen unendlicher Determinanten und in ihm ein für die mathematische Physik und Astronomie wichtiges Beispiel, die Gleichung

$$y'' + (a + b \cos 2x)\, y = 0;$$

endlich als letztes, den linearen Differentialgleichungen gewidmetes Kapitel das über Gleichungen mit periodischen Koeffizienten, in dem die Lamésche Gleichung kurz betrachtet wird.

In eine andere Welt von Begriffen, die Eulersche und Jacobische, führt der Abschnitt über elementare Integrationsmethoden und Multiplikatoren; zu modernen Gegenständen kehren wir im elften Abschnitt zurück, der die für die Himmelsmechanik, wie für die analytische Mechanik überhaupt wichtigen Fragen nach den von Herrn Poincaré herrührenden Methoden erörtert. Der Einfluß desselben Forschers macht sich auch in dem Kapitel über die Singularitäten geltend; in ihm werden besonders die Formen der Lösungen simultaner Systeme in der Nähe solcher singulärer Stellen untersucht, wie sie bei den dynamischen Differentialgleichungen durch die Gleichgewichtslagen des bewegten Systems geliefert werden; man erhält so Sätze, die für das Studium der kleinen Schwingungen in höherer Annäherung, sowie für die Theorie der asymptotischen Bewegungen an labile Gleichgewichtslagen heran zu verwerten sind. Daneben werden eingehend gewisse Singularitäten der reellen Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer einzigen Unbekannten behandelt. Endlich erwähnen wir nur die Überschriften der letzten beiden Kapitel: Singuläre Lösungen; Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit eindeutigem Integral.

Man sieht, unser Werk bringt vieles und wird deshalb manchem etwas bringen. Wir bezweifeln nicht, daß es binnen kurzem ein unentbehrliches Hilfsmittel der wissenschaftlichen Arbeit sein wird, vor allem für diejenigen Mathematiker, die die Fragen der mathematischen Physik, der allgemeinen Dynamik und der Himmelsmechanik mit allen Mitteln der modernen Analysis bearbeiten wollen.

Breslau. A. Kneser.

E. Grimsehl, Ausgewählte physikalische Schülerübungen. 42 S. Leipzig 1906, B. G. Teubner. Preis gebunden 80 ₰.

Wiewohl für die physikalischen Schülerübungen, die von Jahr zu Jahr immer weitere Verbreitung finden, bereits eine Anzahl von Aufgabensammlungen vorliegt, kommt die vorliegende kleine Auswahl doch einem Bedürfnisse entgegen. Es sind lauter Aufgaben, die mit billigen Apparaten lösbar sind, welche der Lehrer oder ein geschickter Schüler selbst herstellen kann. Trotzdem sind die Resultate doch von befriedigender Genauigkeit. Der Referent hat sich einige der Apparate hergestellt und die Aufgaben, die er von Schülern hat ausführen lassen, für recht geeignet gefunden.

Charlottenburg. H. Samter.

Lippmann, Die absolute Wahrheit der Euklidischen Geometrie. Eine kritische Untersuchung der Grundlagen der Euklidischen Geometrie. Beweise für die Wahrheit der Axiome und Postulate, insbesondere für die des Parallelenaxioms (V. Postulat Euklids). 68 S. Leipzig 1906, Rudolf Gerstäcker. Preis 3,60 *M.*

Der Verfasser, welcher den größten Denkern Fehler vorwirft, begeht, indem er die Unmöglichkeit der nichteuklidischen Geometrie demonstrieren will, selbst die ärgsten logischen Schnitzer. Für das Verständnis Kants, den er bekämpft, fehlt ihm das Organ. Es verlohnt sich nicht, im einzelnen auf diese unkritische Kritik einzugehen; das Buch ist zum Glück schon durch seinen hohen Preis gegen Verbreitung geschützt.

Charlottenburg. H. Samter.

Bronzin, Lehrbuch der politischen Arithmetik zum Gebrauche an höheren Handelsschulen (Handelsakademien) sowie zum Selbstunterricht. IV u. 172 S. Wien und Leipzig 1906, Franz Deuticke. Preis gebunden 3 K.

Dieses Buch steckt sich ungefähr dieselben Ziele, ist aber nicht so elementar gehalten wie das bekannte Buch von Cantor. Es beginnt mit der Zinseszinsrechnung und schließt den ersten Abschnitt mit der Berechnung von Tilgungsplänen, Anlehenskursen und -konvertierungen. Der zweite mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung beginnende Teil setzt die Kenntnis der Kombinationslehre voraus und behandelt dann die einfache und die auf zwei verbundene Leben lautende Lebensversicherung.

Es zeichnet sich durch klare und scharfe Sprache aus. Bei jedem Abschnitte ist eine Anzahl von Beispielen durchgerechnet, während eine Sammlung von geschickt gewählten ungelösten Aufgaben als Anhang beigegeben ist, die sowohl im Schul- wie im Selbstunterrichte, dem das Buch im Deutschen Reiche wohl hauptsächlich wird dienen müssen, da wir nach Art der österreichischen Handelsakademien eingerichtete Anstalten noch nicht haben, sich sehr nützlich erweisen werden. Eine Anzahl Tabellen — die gleich dem Texte korrekt sind — wird die Rechnungen erleichtern.

Charlottenburg. H. Samter.

John und Sachsse, Lehrbuch der Chemie für höhere Lehranstalten. Kleine Ausgabe. VIII u 334 S. Leipzig und Berlin 1906, B. G. Teubner. Preis 3 *M.*

Daß dieses Buch ein aus dem praktischen Unterrichte hervorgegangenes ist, gibt sich auf jeder Seite zu erkennen. Der erste Abschnitt, der als

Einführung in die Chemie dienen soll, ist methodisch angelegt, die folgenden Teile sind mehr systematisch gehalten. Doch ist im dritten Teile, der organischen Chemie, aus dem reichen Materiale nur eine Auswahl von wenigen, besonders ins praktische Leben hineinspielenden chemischen Vorgängen ausgesucht und — was von den auch mit biologischem Unterrichte betrauten Fachgenossen freudig begrüßt werden wird — dem Assimilationsprozeß der Pflanzen und dem Stoffwechsel von Menschen und Tieren je ein besonderer Abschnitt gewidmet. Durch den vierten Teil, der ausgewählte Kapitel der chemischen Technologie behandelt, der aber im Unterrichte sicher mit den theoretischen Teilen zugleich verarbeitet werden wird, soll und wird dem an sich trockenen Stoffe Leben eingeflößt, die Wichtigkeit der chemischen Praxis im wirtschaftlichen Leben der Völker den Schülern nahe gebracht. Die neueren wissenschaftlichen Untersuchungen, insbesondere die elektrochemischen, sind wenigstens kurz gestreift. Das Buch wird in der Hand der Schüler sich bewähren und auch manchem Kollegen z. B. mit Bezug auf pflanzenphysiologische Versuche Anregung geben.

Charlottenburg. H. Samter.

H. Müller, J. Plath, Lehrbuch der Mathematik zur Vorbereitung auf die Mittelschullehrer-Prüfung und auf das Abiturientenexamen am Realgymnasium. 8⁰. VIII u. 236 S. Leipzig und Berlin 1906, B. G. Teubner. geb. 4,00 ℳ.

Kambly-Roeder, Trigonometrie. Ausgabe A: Für Gymnasien. Lehraufgabe der Ober-Sekunda und der Prima. Unter Voranstellung der planimetrischen Lehraufgabe der Ober-Sekunda. Fünfte Auflage. 8⁰. 175 S. Breslau 1906, F. Hirt. geb. 2,00 ℳ. Ausgabe B: Für Realgymnasien und Oberrealschulen. Sechste Auflage. 189 S. geb. 2,00 ℳ.

Im Gegensatz zu Büchern, die wie das von Mehler die Hauptsätze der Elementarmathematik schlechtweg darstellen, werden in neuerer Zeit aus mathematischen Elementarbüchern bei immer weiter gehender Spezialisierung der Ausgaben „Unterrichtswerke". Die Herausgeber wollen nicht bloß die Hauptresultate geben, sondern mehr ins einzelne gehen und auch die methodische Darbietung und Verarbeitung berücksichtigen; sie treffen, um Umfang und Preis des Buches nicht zu sehr anwachsen zu lassen, Auswahlen, die bei Mehler, soweit sie erforderlich sind, dem Benutzer überlassen bleiben. Wenn man für den Unterricht größere Bewegungsfreiheit für ersprießlich erachtet, so dürfte weitgehende Spezialisierung der Lehrbücher keinen Vorzug derselben darstellen, und manche Sonderausgaben an sich vorzüglicher Bücher erscheinen so entbehrlich.

Im Vorwort der Baltin-Maiwaldschen Seminarausgabe des H. Müllerschen Lehrbuches wird auf S. 4 besonders darauf „aufmerksam gemacht", „daß die Oberstufe, Ausgabe B des Müllerschen Lehrbuches den gesamten für die Mittelschullehrerprüfung erforderlichen mathematischen Lehrstoff in natürlicher Fortsetzung des vorliegenden Baltin-Maiwald-Müllerschen Lehrbuches enthält." Im Gegensatz hierzu sagt J. Plath im Vorwort zu seiner neuen Ausgabe von Müllers Lehrbuch inbezug auf die Erwerbung der Befähigung zum Unterrichten in der Mathematik an Mittelschulen und höheren Mädchenschulen: „Bisher fehlte ein Lehrbuch, an dessen Hand diese

Ziele mit Sicherheit erreicht werden konnten." Ref. möchte der älteren Ansicht, nach der sich die Neuausgabe erübrigt hätte, zustimmen. Im einzelnen ist neu bei Müller-Plath: die wenig glückliche erste Vergleichung, einiges in der Darstellung, so bei den Lehrsätzen des Menelaus und Ceva, bei der Berührungsaufgabe des Apollonius und beim Additionstheorem, die Einführung des Differentialquotienten und die Angabe der Themata zu häuslichen mathematischen Prüfungsarbeiten für die Mittelschullehrerprüfung. Von dem, was für das Abiturientenexamen am Realgymnasium zu fordern ist, fehlt die darstellende Geometrie, dagegen sind alle für das Mittelschullehrerexamen genannten Stoffgebiete behandelt. Zu wünschen bleibt, daß die Prüflinge für eine solche Lehrerprüfung sich überhaupt nicht auf das Studium eines einzelnen Lehrbuches beschränken.

Die zweiten oben angezeigten Neuausgaben sind die von Kambly-Roeders Trigonometrie. Es liegen jetzt zwei Sonderausgaben vor. Ausgabe B entspricht dem bisherigen ungeteilten Buche. In die Ausgabe A sind den Bedürfnissen der humanistischen Gymnasien entsprechend, wie sie die Lehrpläne von 1901 bedingen, die Anfangsgründe der Trigonometrie aufgenommen (§ 31—38). Die gleichzeitige Verkürzung des planimetrischen Pensums dieser Ausgabe durch Fortlassung der Abschnitte über Pol und Polare, Kreispotenzen und Ähnlichkeitspunkte wird bei besonders günstigen Verhältnissen an humanistischen Gymnasien bedauert werden. Da die wenigen Seiten über die trigonometrischen Anfangsgründe (S. 55—65) einer einheitlichen Ausgabe wohl noch hätten hinzugefügt werden können, so hätte Ref. die Beibehaltung einer so eingerichteten ungeteilten Ausgabe für empfehlenswerter gehalten.

Gera. E. Kullrich.

K. Schwering, Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten. Dritte verbesserte Auflage. 8⁰. VIII u. 88 S. Freiburg i. B. 1906, Herder. geb. 1,40 *M*.

E. Wrobel, Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra, enthaltend die Formeln, Lehrsätze und Auflösungsmethoden in systematischer Anordnung und eine große Anzahl von Fragen und Aufgaben. Zum Gebrauche an Gymnasien, Realgymnasien und andern höheren Lehranstalten. I. Teil. Pensum der Tertia und Untersekunda. Elfte, durchgesehene Doppelauflage. XII u. 320 S. II. Teil. Pensum der Obersekunda und Prima des Gymnasiums. Sechste Auflage. IV u. 164 S. Anhang, für höhere realistische Lehranstalten (Realgymnasien, Oberrealschulen usw.). Vierte Auflage. 8⁰. IV u. 71 S. Rostock 1906, Hermann Koch. 3,30 *M* (geb.), 1,60 *M* (geb.) und 1,00 *M* (kart.).

E. Wrobel, Leitfaden der Stereometrie nebst einer großen Anzahl von Übungsaufgaben. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage. 8⁰. IV u. 106 S. Rostock 1906, Hermann Koch. geb. 2,00 *M*.

Frühere Auflagen der angezeigten Bücher wurden im Archiv 1901 S. 190, 1890 L. B. XXXV S. 32, Archiv 1901 S. 188 und 1886 L. B. XIII S. 9 besprochen. Die Neuauflagen tragen noch zur Erhöhung der Verwendbarkeit der gern benutzten Bücher bei.

In Schwerings Arithmetik und Algebra ist der Druck an vielen

Stellen übersichtlicher geworden, außerdem wurden mit Rücksicht auf die Lehrpläne von 1901 je ein Abschnitt über Verhältnisgleichungen, über Kombinationen und über Wahrscheinlichkeit hinzugefügt. In den letzten beiden neuen Abschnitten läßt sich einiges noch durchsichtiger gestalten.

Von Wrobels Übungsbuch bietet der in den früheren Referaten noch nicht erwähnte Anhang für die auf realistischen höheren Lehranstalten zu behandelnden Reihen, die kubischen Gleichungen und die Maxima und Minima eine recht brauchbare Ergänzung des zweiten Teiles. Auch den Gleichungen 4. Grades ist ein Paragraph gewidmet.

Der Leitfaden der Stereometrie hat durch Neuzeichnung der Figuren gewonnen. Die frühere Darstellung durch weiße Linien auf schwarzem Grunde wurde aufgegeben zugunsten der empfehlenswerteren durch schwarze Linien auf weißem Grunde. Zugleich wurden verschiedentlich Verbesserungen an den Figuren vorgenommen. Es finden sich freilich auch noch jetzt nicht einwandsfreie Figuren, so Fig. 75 und 76. Neu bringt die dritte Auflage eine zweite Ableitung für den Inhalt des Obelisken und Übungsaufgaben zu den einzelnen Kapiteln des ersten und zweiten Abschnittes. Eine Berücksichtigung des Projizierens und Körperzeichnens ist leider nicht erfolgt, auch nicht in den Übungsaufgaben.

Gera. E. Kullrich.

Congresso di Parma 1907.

Si è costituita la „Società italiana per il progresso delle scienze". Essa ha tenuto il suo primo congresso a Parma dal 23 al 27 Settembre 1907. Il discorso inaugurale, intitolato „Il movimento scientifico presente e la nuova società italiana per il progresso delle scienze" è stato pronunciato dal prof. Senatore Vito Volterra. Questo fu poi eletto Presidente della Società alla quasi unanimità dei suffragi.

La società consta di 14 sezioni, in cui sono rappresentati i vari rami delle scienze matematiche, fisiche, naturali, tecniche ed economiche.

La sezione I (Matematica, Astronomia e Geodesia) fu presieduta dal prof. Senatore V. Cerruti, che tenne un discorso di apertura di carattere storico „Le matematiche pure e applicate nei precedenti convegni degli scienziati italiani".

Ecco i titoli delle comunicazioni di matematica e di fisica matematica, fatte in quel congresso:

U. Amaldi „Intorno agli ultimi risultati nella teoria dei gruppi continui di trasformazioni" (rapporto).
E. Bortolotti „Sulla ristampa dei lavori matematici di Paolo Ruffini".
P. Burgatti „Sulle equazioni differenziali".
G. Fubini „I recenti metodi per la risoluzione del problema di Dirichlet".
A. Garbasso „Il miraggio" (rapporto teorico e sperimentale).
G. Lauricella „Intorno alle equazioni funzionali".
T. Levi-Civita „Sulla massa elettromagnetica" (rapporto).
R. Marcolongo „Rapporto sull' elasticità".
C. Somigliana „Sulla preparazione matematica degli allievi-ingegneri".
O. Tedone „Sulle equazioni della fisica matematica".
G. Vailati „Sull' insegnamento della matematica nelle scuole secondarie".

Padova. T. Levi-Civita.

Vermischte Mitteilungen.

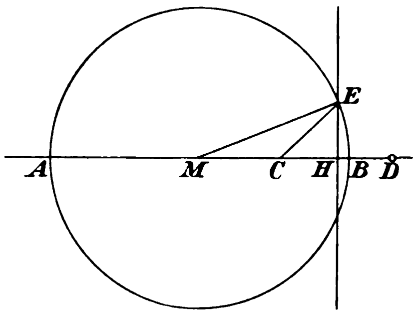
1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

189. *Ein geometrischer Trugschluß.* Daß ein jeder Punkt C auf dem Durchmesser AB des Kreises ABE auch auf dem Umfange dieses Kreises liegt, läßt sich so beweisen. Man konstruiere zu A, B, C den vierten harmonischen Punkt D und halbiere CD durch H. Dann ist, wenn noch M den Mittelpunkt des Kreises bezeichnet, nach einem bekannten Satze: $MC \cdot MD = MA^2$. Nun hat man aber: $MC = MH - CH$, $MD = MH + CH$, also ist

$$MH^2 - CH^2 = MA^2. \tag{1}$$

Andererseits ist, wenn das in H auf AB errichtete Lot den Kreisumfang in E schneidet:



$$ME^2 = MH^2 + HE^2,$$
$$CE^2 = CH^2 + HE^2,$$

also ist

$$MH^2 - CH^2 = ME^2 - CE^2 = MA^2 - CE^2. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) zusammen folgt, daß

$$MA^2 = MA^2 - CE^2 \tag{3}$$

ist, also muß $CE = 0$ sein, d. h. der Punkt C liegt auf dem Umfange des Kreises, und da C ganz beliebig gewählt werden durfte, gilt dies für jeden Punkt des Durchmessers AB. Wo steckt der Fehler?

Hannover. PAUL STÄCKEL.

---

190. Ein Kegelschnitt sei auf das System der Tangente und Normale eines Kurvenpunktes A bezogen. Welches sind die Koordinaten seines Mittelpunktes, wenn die Halbachsen a, b und der Krümmungsradius in A gleich R gegeben sind?

Speyer. H. WIELEITNER.

B. Lösungen.

Zu **16** (Bd. I, S. 370) (E. N. Barisien). — Wie die Herren L. Saalschütz und stud. math. W. Gaedecke (Bd. XII, S. 96) bemerkt haben, muß das Resultat des Aufgabenstellers in $\frac{2\pi}{a^2+b^2}$ umgeändert werden. Herr Saalschütz macht noch folgenden *Zusatz*. Bei Auswertung der Barisienschen Integrale kann man den Wert des Integrals:

$J = \int\limits_0^\pi \frac{\beta - \alpha \cos \varphi}{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \varphi} d\varphi$ benutzen, und bei dieser Gelegenheit zeigt sich, daß J eine gewisse Analogie mit dem bekannten Diskontinuitäts-Integral $U = \int\limits_0^\infty \frac{\sin (a x)}{x} dx$ besitzt, denn wie dieses im allgemeinen von a unabhängig, jedoch gleich $\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}$ ist, jenachdem $a \gtreqless 0$, so ist J unabhängig von dem speziellen Werte von α, aber:

$$J = 0, \text{ wenn } \alpha^2 > \beta^2; \; J = \frac{\pi}{2\beta}, \text{ wenn } \alpha^2 = \beta^2; \; J = \frac{\pi}{\beta}, \text{ wenn } \alpha^2 < \beta^2.$$

Hier läßt sich auch noch durch Differentiation unter dem Integralzeichen vermöge der Rekursionsformel

$$(b^2 + c^2 - a^2)\int \frac{d\varphi}{\Phi^2} = \frac{b \sin \varphi - c \cos \varphi}{\Phi} - a\int \frac{d\varphi}{\Phi},$$

wo

$$\Phi = a + b \cos \varphi + c \sin \varphi,$$

direkt zeigen, daß $\frac{dJ}{d\alpha}$ für $\alpha^2 \gtrless \beta^2$ verschwindet und für $\alpha^2 = \beta^2$ unbestimmt wird.

Königsberg. L. Saalschütz.

Zu **30** (Bd. II, S. 212) (E. Lampe). — Ein beweglicher materieller Punkt, der von einem festen Zentrum nach dem Newtonschen Gesetze angezogen wird, hat beim Beginn der Bewegung den Abstand 1 m von dem festen Punkte und die Geschwindigkeit 5 cm, deren Richtung mit der Verbindungslinie beider Punkte den Winkel 60^0 einschließt. Die Umlaufszeit beträgt eine Minute. Die Bewegung zu untersuchen, insbesondere die Lage und die Dimensionen der Bahnkurve zu bestimmen. Welches ist das Resultat, wenn die Anziehung der Entfernung proportional ist? Welches aber, wenn die Anziehung umgekehrt proportional dem Kubus der Entfernung ist und nicht die Umlaufszeit gegeben ist, sondern die Anziehungskonstante denselben Wert hat wie in der ersten Frage? —

1. Das feste Zentrum sei Anfangspunkt der Koordinaten. Dann ergibt: 1) das Prinzip der lebendigen Kraft für den ersten Fall $q^2 - 2\frac{c}{r} = C$, wo q die Geschwindigkeit bezeichnet, C durch q_0 und r_0 im Anfangspunkt der Bewegung bestimmt ist: $C = q_0^2 - \frac{2c}{r_0}$, und 2) das Prinzip der Flächen:

$r^2\,d\varphi = C'dt$, wo die in allen drei Fällen gleiche Konstante $C' = r_0 q_0 \sin$ und α der Winkel ist, den die Richtung der Geschwindigkeit mit dem Radiu- vektor bildet.

Die Bahnkurve, die sich durch Verbindung von (1) und (2) ergibt, eine Ellipse, deren Gleichung die Gestalt hat:

$$\varphi = \operatorname{arc\,cos} \frac{C'^2 - cr}{r\sqrt{c^2 + CC'^2}} + C''.$$

Die Integrationskonstante C'' können wir willkürlich wählen, ohne der Al- gemeinheit Abbruch zu tun. Setzen wir $C'' = 0$, so treffen wir über d Lage der X-Achse die Verfügung, daß für $t = 0$ der Winkel $\varphi = \varphi_0$ se Aus der vorstehenden Polargleichung der Ellipse ergibt sich der Parameter $p = \frac{1}{c}C'^2$ und die numerische Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}CC'^2}$. Die Halb- achsen sind demnach $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = -\frac{c}{C}$ und $b^2 = a \cdot p = -\frac{C'^2}{C}$. Die Größe C können wir berechnen, wenn wir die Umlaufszeit T hinzu- nehmen. Es ist $2ab\pi = C'T$ oder für a und b die Werte eingesetzt:

$$-4\pi^2\frac{c^2}{C^3} = -\frac{4\pi^2 c^2}{\left(q_0^2 - \frac{2c}{r_0}\right)^3} = T^2.$$

Die Einführung der Zahlenwerte, im C-G-S-System ausgedrückt, liefert für die Konstante c folgende kubische Gleichung:

$$c^3 - \tfrac{1250}{9}(\pi^2 + 27)\,c^2 + 3 \cdot (1250)^2 c = (1250)^3,$$

deren einzige reelle Wurzel ist $c = 4091{,}875$. Demnach wird $C = -56{,}83$ d. h. < 0, wie es sein muß. Für C' ergibt sich $250 \cdot \sqrt{3}$.

Mithin erhält man für den ersten Fall als Bahnkurve eine Ellipse, deren einem Brennpunkt das feste Zentrum gelegen ist; die Halbachsen sind $a = 71{,}994$ cm und $b = 57{,}436$ cm.

2. Im zweiten Falle bestimmt sich die Bahnkurve aus den beiden Gleichungen: $q^2 + cr^2 = C$, $r^2\,d\varphi = C'dt$. Ihre Gleichung lautet:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,sin} \frac{\frac{C}{2}r^2 - C'^2}{r^2\sqrt{\frac{C^2}{4} - C'^2 \cdot c}}.$$

oder, wenn man zur Abkürzung $a' = \dfrac{C'^2}{\sqrt{\frac{C^2}{4} - C'^2 \cdot c}}$, $b' = \dfrac{\frac{1}{2}C}{\sqrt{\frac{C^2}{4} - C'^2 \cdot c}}$ setzt, in kartesischen Koordinaten:

$$b'x^2 - 2xy + b'y^2 - a' = 0.$$

Diese Kegelschnittsgleichung geht durch Transformation über in:

$$\frac{\xi^2(b'+1)}{a'} + \eta^2 \cdot \frac{b'-1}{a'} = 1$$

durch Drehung der positiven X-Achse um 135^0. Der Nullpunkt bleibt unverändert. Die Quadrate der Halbachsen werden

$$a^2 = \frac{a'}{b'+1} = \frac{\frac{1}{2}C - \sqrt{\frac{C^2}{4} - C'^2 \cdot c}}{c}, \quad b^2 = \frac{a'}{b'-1} = \frac{\frac{1}{2}C + \sqrt{\frac{C^2}{4} - C'^2 \cdot c}}{c}.$$

Um die Zahlenwerte der Halbachsen angeben zu können, muß man noch die Anziehungskonstante c berechnen. Es war: $4a^2 b^2 \pi^2 = C'^2 T^2$, woraus sich ergibt $c = \frac{4\pi^2}{T^2} = 0{,}0\,190\,662$. Daher wird $C = q_0^2 + cr_0^2 = 134{,}662$. Für die Halbachsen folgt $a = 103{,}34$ cm und $b = 40{,}015$ cm. Unsere Bahnkurve ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt das feste Zentrum ist. Man sieht leicht, daß sie gleiche Strecken auf der X- und Y-Achse abschneidet. Es wird

$$x = 0, \quad y = \pm\sqrt{\frac{a'}{b'}} = \pm\frac{C'}{C}\sqrt{2\,C}$$

$$y = 0, \quad x = \pm\frac{C'}{C}\sqrt{2\,C} = \pm\,52{,}77.$$

3. Im dritten Falle liefert das Prinzip der lebendigen Kraft: $q^2 - \frac{c}{r^2} = C$ in Verbindung mit dem Prinzip der Flächen $r^2\,d\varphi = C'dt$ als Gleichung der Bahnkurve:

$$e^{\frac{\sqrt{C'^2 - c}}{C'}\varphi} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{C}{C'^2 - c}\,r^2}}{r}.$$

Dies ist die Gleichung einer spiralförmigen Kurve. Die Konstante C wird, wenn der im ersten Falle für c ermittelte Wert $c = 4\,091{,}875$ genommen wird, $C = 24{,}5\,908\,125$. Dann wird unsere Gleichung übergeführt in:

$$e^{0{,}989\,\varphi} = \frac{1 + \sqrt{1 - 0{,}00\,013\,408\,r^2}}{r} \quad \text{oder in} \quad r = \frac{2\,e^{0{,}989\,\varphi}}{e^{2\cdot 0{,}989\,\varphi} + 0{,}00\,013\,408}.$$

Für $\varphi = 0$ ist $r = 1{,}998\,832$. r läßt sich auch auf die Form bringen:

$$r = \frac{2}{e^{0{,}989\,\varphi} + \frac{0{,}00\,013\,408}{e^{0{,}989\,\varphi}}}$$

Man erkennt dann, daß den von 0 bis $+\infty$ wachsenden φ unendlich viele, immer enger werdende Windungen entsprechen, die sich dem Nullpunkte, unserem festen Zentrum, als asymptotischem Punkte nähern. Schreibt man für die negativen Werte von φ: $r = \frac{\frac{2}{e^{0{,}899\,\varphi}}}{\frac{1}{e^{2\cdot 0{,}989\,\varphi}} + 0{,}00\,018\,408}$, so ist ersichtlich, daß r mit wachsendem φ zunächst sehr schnell zunimmt: für $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $-\pi$ wird $r = 9{,}4296$ bzw. $41{,}906$. r erreicht den Maximalwert von $86{,}361$ cm bei $\varphi = -275^0\,16'\,48''$ — die Anfangslage ($r = 100$)

$r^2 d\varphi = C' dt$, wo die in allen drei Fällen gleich ... noch größerem Maße ab und α der Winkel ist, den die Richtung der Ge ... $-\frac{5\pi}{2}$ wird $r = 28{,}982$ vektor bildet.

Die Bahnkurve, die sich durch Verbi ... endem negativen φ langsam eine Ellipse, deren Gleichung die Gest ... vielen immer enger werdenden ... nähert. Aus diesen Daten läßt

$\varphi =$ arc cos

stud. math. WERNER GAEDECKE.

Die Integrationskonstante C'' ... gemeinheit Abbruch zu tu ... Lage der X-Achse die V ... Aus der vorstehenden ...

$p = \frac{1}{c} C'^2$ und die

achsen sind ...

Größe C k ... nehmen.

... ul Epstein) — Sind $s_{\mu\nu}$ die Elemente ... n^2 Größen, bedeutet ω eine n^{te} Ein- ... für irgend ein ganzzahliges $\varkappa$ die Größen ... $\alpha + \varkappa$, sobald es größer als n wird, der ... ist, so bilden die Größen $q_{\mu\nu}$ ein *zyklisches* ... charakteristische Gleichung die Wurzeln $\omega^{\varkappa}, \omega^{2\varkappa}$ ...

... werde durch S, das konjugierte System durch S' ... und das *Einheitssystem* durch E bezeichnet. Es ist ... Orthogonalität von S: $SS' = E$ oder $S' = S$. Betrachtet ... das System

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

so erkennt man leicht folgende Eigenschaften:

1) H ist ein *zyklisches orthogonales System*, d. h. es ist $\bar{H} = H'$ und $H^n = E$.

2) Die charakteristische Gleichung von H ist

$$\begin{vmatrix} -z & 1 & & & 0 \\ 0 & -z & 1 & & \\ 0 & 0 & -z & 1 \ldots & \\ 0 & 0 & & 0 \ldots & -z \quad 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \quad -z \end{vmatrix} = (-1)^n (z^n - 1) = 0,$$

sie hat also die Lösungen $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^n$, während die charakteristische Gleichung des durch $\varkappa$-fache Wiederholung entstehenden Systems $H^{\varkappa}$ die Lösungen $\omega^{\varkappa}, \omega^{2\varkappa}, \ldots, \omega^{n\varkappa}$ besitzt. Mit Hilfe dieses speziellen zyklischen Systems läßt sich nun das System $Q_{\varkappa}$ der Größen $q_{\mu\nu}$ folgendermaßen ausdrücken: $Q_{\varkappa} = S' H^{\varkappa} S$, und man erkennt daraus, daß die Systeme $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ die aufeinander folgenden Potenzen des Systems $Q = S' H S$ sind, also $Q_{\varkappa} = Q^{\varkappa}$.

ieht nun sofort, daß Q ein *zyklisches orthogonales System* ist, asselbe von allen Systemen $Q_\varkappa$, deren es n verschiedene gibt. eite der charakteristischen Gleichung von Q ist die Determinante s

$$Q - Ez = S'HS - S'Sz = S'(H - Ez)S,$$

$$|S'|\cdot|H - Ez|\cdot|S| = |H - Ez|,$$

arakteristische Gleichung von Q stimmt überein mit der charak- Gleichung von H, hat also die Lösungen $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^n$. Damit z bewiesen.

eterminante des Systems H hat den Wert $(-1)^{n-1}$, also ist inante von $Q_\varkappa$: $|Q_\varkappa| = (-1)^{\varkappa(n-1)}$.

ıgeradem n erhält man also nur *eigentliche* orthogonale Systeme, *n* dagegen gehören zu *gradem $\varkappa$ uneigentliche* orthogonale Systeme.

urg i. E. Paul Epstein.

---

5 (Bd. X, S. 328) (H. Wieleitner). — Seien O_1, O_2 die Mittel- zwei Kreise mit den Radien R, r; dann A_1, A_2; B_1, B_2 die Be- ıkte der äußeren, $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$; $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ die der inneren gemeinschaftlichen C der äußere, $\mathfrak{C}$ der innere Ähnlichkeitspunkt. Ist nun $O_1O_2 =$ $+ r^2$), so zeigt man zunächst leicht, daß $A_1A_2 = B_1B_2 = R + r$, $\mathfrak{B}_2 = R - r$. Dann kann man folgende beiden parallelen Be- anstellen:

re O_1O_2 in M, A_1A_2 in N. $M = NA_1 = NA_2$, mithin er A_1A_2 errichtete Kreis

chtw. Dreieck A_1MA_2 ist lig, folglich die Basis- 45^0. Der Kreis A_1A_2 Zentrale noch in P, dann

$M = A_1A_2M = 45^0$,

$_2PC = A_2A_1M = 45^0$ inden der Symmetrie auch

$B_2PC = 45^0$,

B_2 eine Gerade und eben- 1

A_2B_1 schneiden die Zen- unter einem Winkel von $_1B_2 \perp A_2B_1$.

ferner $O_2P\cdot O_2M = r^2$, $= R^2$, also $O_2P : O_1P =$

Halbiere O_1O_2 in M, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ in $\mathfrak{N}$. Nun ist $\mathfrak{N}M = \mathfrak{N}\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{N}\mathfrak{A}_1$, mithin geht der über $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ errichtete Kreis durch M.

Das rechtw. Dreieck $\mathfrak{A}_1M\mathfrak{A}_2$ ist gleichschenklig, folglich die Basiswinkel $= 45^0$. Der Kreis $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ schneide die Zentrale noch in P, dann ist

1) $\sphericalangle\, \mathfrak{A}_1PM = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2M = 45^0$,

ferner $\sphericalangle\, \mathfrak{A}_2P\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1M = 45^0$ und aus Gründen der Symmetrie auch

2) $\sphericalangle\, \mathfrak{B}_2P\mathfrak{C} = 45^0$,

mithin $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2P$ eine Gerade und ebenfalls $\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2P$

oder:

$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1$ schneiden die Zentrale in P unter einem Winkel von 45^0 und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 \perp \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1$.

Es ist ferner $O_2P\cdot O_2M = r^2$, $O_1P\cdot O_1M = R^2$, also $O_2P : O_1P = r^2 : R^2$.

Hieraus ergibt sich, daß A_1B_2 und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2$ die Zentrallinie in dem gleichen Punkt P und unter dem gleichen Winkel schneiden, so daß die vier Berührungspunkte A_1, B_2, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_2$ in einer Geraden liegen müssen usw.

Kolsnap (Nordschleswig.) K. Hagge.

2. Anfragen und Antworten.

(Vacat.)

3. Kleinere Notizen.

Einfaches Beispiel einer n-punktigen Berührung zwischen zwei Kurven.

Die bekannten Laméschen Kurven, deren Gleichung in kartesischen Koordinaten (1) $x^n/a^n + y^n/b^n = 1$ ist $(n = 3, 4, 5, \ldots)$, bieten ein einfaches Beispiel für die n-punktige Berührung einer Geraden mit einer Kurve. Offenbar hat nämlich die Kurve (1) mit der Geraden $x = a$ im Punkte $P_1\,(a, 0)$ einen Kontakt $(n-1)$-ter Ordnung, ebenso mit der Geraden $y = b$ im Punkte $P_2\,(0, b)$. Ist n eine gerade Zahl, so ist die Kurve nach Art der Ellipse geschlossen und besitzt außer den beiden singulären Tangenten in P_1 und P_2 noch zwei andere in $P_3\,(-a, 0)$ und $P_4\,(0, -b)$. Wenn aber n eine ungerade Zahl ist, so besitzt die Kurve nur die beiden singulären Tangenten in P_1 und P_2 und hat die Gerade $x/a + y/b = 0$ zur Asymptote.

Wendet man auf die Kurven (1) eine rationale algebraische Transformation höherer Ordnung an, so verwandeln sich die Kurven selbst und ihre singulären Tangenten in andere Kurven höherer Ordnung, zwischen denen in den Punkten, welche durch die Transformation aus P_1 und P_2 hervorgehen, die Ordnung des Kontaktes erhalten bleibt. So verwandelt die Transformation durch reziproke Radien die singulären Tangenten in Kreise und liefert ein anschauliches Beispiel für die n-punktige Berührung eines Kreises mit einer Kurve. Nehmen wir zur Vereinfachung statt der Gleichung (1) die Gleichung (2) $x^n + y^n = a^n$, wählen den Nullpunkt als Transformationszentrum und a^2 als Potenz der Inversion, so geht (2) über in (3) $r^n = a^n(\cos^n\varphi + \sin^n\varphi)$, wo r und φ Polarkoordinaten bedeuten, oder in (4) $(x^2+y^2)^n = a^n(x^n + y^n)$. Die Gerade $x = a$ geht über in den Kreis $x^2 + y^2 = ay$ vom Radius $\frac{1}{2}a$. Dieser Kreis hat also mit der Kurve (4) im Punkte $x = a$, $y = 0$ eine n-punktige Berührung. Ein extremer Wert des Krümmungsradius der Kurven (4) ist $\frac{1}{2}a$ in P_1 jedoch nur im Falle eines geraden n; für ein ungerades n schneidet der Kreis, gerade wie die Wendetangente in P_1, die Kurve (4) in $(a, 0)$. Für $n = 5$ z. B. stellt die Gleichung $r^5 = a^5(\cos^5\varphi + \sin^5\varphi)$ oder $(x^2+y^2)^5 = a^5(x^5+y^5)$ ein geschlossenes Oval dar, das durch den Nullpunkt geht, in ihm einen fünffachen Punkt besitzt, aber nur einen durch ihn gehenden reellen Zweig mit der singulären Tangente $x + y = 0$ (fünfpunktige Berührung).

„Scheitel" einer Kurve sollte man nach Analogie der Kegelschnitte nur solche Punkte einer Kurve nennen, in denen der Krümmungsradius einen extremen Wert (Maximum oder Minimum) hat. Wenn man alle Punkte

Scheitel nennt, in denen das Differential des Krümmungsradius den Wert Null hat, so fallen unter diesen Namen auch solche Punkte, bei denen der Krümmungskreis im Berührungspunkte mit der Kurve eine ungerade Anzahl $n > 3$ von Punkten gemeinschaftlich hat ($n = 5, 7, 9, \ldots$); dies scheint aber nicht angemessen zu sein.

Berlin. E. Lampe.

Zur altägyptischen Bruchrechnung.

Schon als ich zum ersten Mal in meiner Vorlesung Winter 1903 altägyptische Mathematik behandelte, wurde mir klar, daß die ägyptische Bruchrechnung vielfach mißverstanden ist. Von Eisenlohr, der 1877 den Ahmose herausgab, abgesehen, hat noch der um die Geschichte der hellenischen Mathematik so hoch verdiente Fr. Hultzsch in einer längeren Abhandlung vom Jahre 1895 (Sächs. Abhandlungen) erklärt, die Ägypter kannten keine gemeine Bruchrechnung, sondern nur Teilung in der Einheitsreihe. Eisenlohr sagt, ein Bruch wie $^7/_8$ war ihnen undenkbar. — Die Sache liegt meines Erachtens so: Zu der aufsteigenden Zahlenreihe bildeten die Ägypter die absteigende. Es sind ganz ähnliche Gedanken und seltsamer Weise im hieratischen auch dieselbe Bezeichnung wie bei den Indern. Diese faßten die aufsteigende Reihe z. B. 3 als $0 + 1 + 1 + 1$ und die 3 in der absteigenden ist dann $0 - 1 - 1 - 1$, das ist $\dot{3}$. Der Ägypter faßt die 3 als 1×3 und dem entspricht absteigend die Zahl, welche mit 3 multipliziert 1 gibt, das ist $^1/_3$. Die 1 entspricht sich selbst. Diese auf- und absteigende Reihe war ihnen so geläufig wie uns die unsere. Und wie wir von der Größe des Bruches erst eine wirkliche Vorstellung haben, wenn wir ihn in Dezimalform vor uns haben, so war für jene die Rechnung erst zu Ende, die genaue Vorstellung der im Bruche enthaltenen Größe erst gewonnen, wenn der Bruch in Zahlen seiner Reihe ausgesprochen war. Wie ausgezeichnet die Ägypter die gemeine Bruchrechnung samt Doppelbrüchen etc. beherrschten, dafür genügen schon allein die Beispiele Nr. 31, 32, 33 der sogen. „Hau (ʿhʿ)“ Rechnung.

Meine Ansicht wurde mir gewiß, als ich das nis 2 ḫent [ḫ = ch] deuten lernte. Es heißt: Sprich aus 2 vor (z. B. 17), das chent entspricht genau dem französischen „sur“ und unserem auf, also 2 auf 17, und nis, determiniert durch den auf den Mund zeigenden Mann, heißt: Verkünde, mache deutlich, gib den Wert übersichtlich an. Und noch eins: Ganz Asien bildete vor 4000 v. Chr. bis 1000 vom Jangsekiang bis zum Nil ein einziges Kulturgebiet, und wie uns die Tel-Amarna-Funde bewiesen, mit Präponderanz der Babylonier um 1800, d. h. zur Zeit des Ahmose; wie aber diese schon 1000 Jahr früher rechneten, beweist u. a. die von J. Oppert untersuchte magische Quadrattafel, Zeitschr. für Assyr. 1903, p. 60 und die Einmaleins-Tabelle bis 1×1350, die Hilprecht aus sargonischer Zeit konstatiert hat. Sehr schwierige zahlentheoretische Aufgaben, völlige Kenntnis der Zerlegung in Quadrate (Pythagoras?), Kubikzahlentabellen waren ihnen geläufig und damit sicher auch der ägyptischen Intelligenz.

Max Simon.

4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Abraham, M. und Föppl, A., Theorie der Elektrizität I. Dritte Auflage. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 12.—.

Aus Natur und Geisteswelt. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Je ℳ 1.25.
Ahrens, W., Mathematische Spiele. (Nr. 170.) — Blochmann, R., Luft, Wasser, Licht und Wärme. 3. Aufl. (Nr. 5.) — Börnstein, R., Die Lehre von der Wärme. (Nr. 172.) — Bruns, J., Die Telegraphie. (Nr. 183.) — Thurn, H., Die Funkentelegraphie. (Nr. 167.)

Baire, R., Leçons sur les théories générales de l'analyse. Tome I: Principes fondamentaux. — Variables réelles. Paris 1907, Gauthier-Villars. fr. 8.—.

Bennecke, F., Eine konforme Abbildung als zweidimensionale Logarithmentafel zur Rechnung mit komplexen Zahlen. Festschr. d. Kgl. Viktoria-Gymn. Potsdam zur 300 jähr. Jubelfeier des Kgl. Joachimsthalschen Gymn. Berlin. 1907. ℳ 2.—.

Boelitz, O., Die Lehre vom Zufall bei Emile Boutroux. Ein Beitrag zur Geschichte der neuesten französischen Philosophie. Heft 3 der Abhandlungen zur Philosophie und ihrer Geschichte. 120 S. Leipzig 1907, Quelle & Meyer. ℳ 4.—.

Brillouin, M., Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz. Seconde partie: Viscosité des gaz. Caractères généraux des théories moléculaires. 141 S. Paris 1907, Gauthier-Villars. fr. 5.—.

Dingler, H., Grundlagen einer Kritik und exakten Theorie der Wissenschaften, insbesondere der mathematischen. München 1907, Th. Ackermann. ℳ 1.60.

Engel, P., Déviations des compas. Etude géométrique. Compensation du compas Thomson. 64 S. Paris 1907, Gauthier-Villars. fr. 2.75.

Fenkner, H., Lehrbuch der Geometrie. Dritter Teil: Ebene Trigonometrie. Nebst einer Aufgabensammlung. 102 S. Berlin 1908, O. Salle. ℳ 1.60.

Fouët, E. A., Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. 2e édition entièrement refondue. Tome I: Les fonctions en général. Paris 1907, Gauthier-Villars. fr. 3.50.

Haas, A., Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen. Aus Kleyers Encyklopädie. Bremerhaven 1906, L. v. Vangerow.

Kielhauser, E. A., Die Stimmgabel, ihre Schwingungsgesetze und Anwendungen in der Physik. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 6.—.

Kohlrausch, F., Kleiner Leitfaden der praktischen Physik. 2. verm. Aufl. 268 S. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 4.—.

Krauss, F., Die Thermodynamik der Dampfmaschinen. 144 S. Berlin 1907, J. Springer. ℳ 3.—.

Lange, Synthetische Geometrie der Kegelschnitte nebst Übungsaufgaben für die Prima höherer Lehranstalten. 3. Auflage von P. Zühlke. 68 S. Berlin 1908, H. W. Müller. ℳ 1.50.

Lehmann, O., Leitfaden der Physik zum Gebrauch bei Experimentalvorlesungen nach Frick, physikal. Technik, 7. Aufl. XVI u. 320 S. Braunschweig 1907, Vieweg & Sohn. ℳ 5.—.

d'Ocagne, M., Calcul graphique et Nomographie. Aus der Encyclopédie scientifique. XXVI u. 392 S. Paris 1907, O. Doin.

Sachs, J., Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie. Dritter Teil: Pol und Polare. Mittelpunktseigenschaften. Involution. Brennpunktseigenschaften der Kurven zweiten Grades. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten. Aus Kleyers Encyklopädie. Bremerhaven 1907, L. v. Vangerow.

Schmehl, Chr., Arithmetik und Algebra nebst Aufgabensammlung. Erster Teil. 391 S. Gießen 1908, E. Roth. ℳ 3.20.

Schwering, K., Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer. 407 S. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 8.—.

Simon, M., Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. München 1907, C. H. Becker.

SITZUNGSBERICHTE
DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT.

SECHSTER JAHRGANG.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

Inhaltsverzeichnis.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

46. Sitzung am 31. Oktober 1906.

Vorsitzender: Herr Knoblauch.

Herr Färber erstattet den Kassenbericht. Bei der Neuwahl des Vorstandes wird, nachdem Herr Knoblauch von vornherein die Erklärung abgibt, daß er eine Wiederwahl nicht annehmen würde, Herr Schafheitlin zum Vorsitzenden gewählt. Zum stellvertretenden Vorsitzenden und Schriftführer wird Herr Jahnke und zum Kassenwart Herr Färber wiedergewählt.

Anwesend: 35 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilung:

Herr Meißner: Einige Bemerkungen zu Herrn M. Simons Bericht über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert.

47. Sitzung am 28. November 1906.

Vorsitzender: Herr Schafheitlin.

Die Schaffung einer Redaktionskommission wird beschlossen, und zu ihren Mitgliedern werden außer dem Schriftführer die Herren Knoblauch und Hessenberg gewählt.

Auf Antrag von Herrn F. Müller wird über eine Feier von Leonhard Eulers zweihundertstem Geburtstag (15. April 1907) beraten. Es wird eine Festsitzung geplant, wo voraussichtlich drei Mitglieder der Gesellschaft Vorträge halten werden, und zwar über Eulers Aufenthalt in Berlin, seine bahnbrechenden Arbeiten und eines seiner speziellen Forschungsgebiete.

Anwesend: 33 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Fleck: Drei zahlentheoretische Sätze.

Herr Güntsche: Rationale Tetraeder (s. S. 2).

48. Sitzung am 12. Dezember 1906.

Vorsitzender: Herr Schafheitlin.

Fortsetzung der Beratung über die Eulerfeier, insbesondere über die Festschrift, wo die in Aussicht genommenen Vorträge zum Abdruck kommen sollen.

Anwesend: 28 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Koppe: Zwei einfache Aufgaben über scheinbare Schwere und relative Bewegung.

Herr Hessenberg: Beitrag zur zeichnerischen Behandlung der Kegelschnitte (s. S. 17).

Rationale Tetraeder.

Von R. Güntsche.

1. Unter einem *rationalen Tetraeder* soll ein Tetraeder verstanden werden, bei welchem *die Kanten, die Seiteninhalte und der Rauminhalt rationale Maßzahlen* besitzen. Das Aufsuchen solcher Tetraeder erscheint von nicht geringem Interesse, denn bei ihnen sind außer den vorgeschriebenen elf noch viele andere Größen rational, vor allem die Höhen, die Radien sämtlicher Berührungskugeln, das Quadrat des Radius der Umkugel, ferner an jeder der vier Ecken der von Staudtsche Eckensinus und der polare Eckensinus, nebst dem Quotient beider, dem „Modul" der Ecke, sodann die beiden Junghannschen Tetraedermoduli, nämlich 1) der für alle vier Ecken gleiche Quotient aus dem doppelten Inhalt eines Begrenzungsdreiecks und dem polaren Eckensinus der gegenüberliegenden Ecke, 2) der für alle vier Ecken gleiche Quotient aus dem Umkreisdurchmesser eines Begrenzungsdreiecks und dem Modul der gegenüberliegenden Ecke; diese Tetraeder stellen also in bemerkenswerter Weise das räumliche Analogon zu den heronischen Dreiecken dar.

2. Ein rationelles Verfahren zur Auffindung rationaler Tetraeder war meines Wissens noch nicht bekannt.[1]) In Angriff genommen hat die Aufgabe, Tetraeder dieser Art aufzustellen, R. Hoppe[2]) in einer Abhandlung vom Jahre 1877; er geht dabei, wie es auch im folgenden geschehen wird, von Dreikanten aus, bei denen die goniometrischen Funktionen der Kanten- und Flächenwinkel rational sind. Numerische Beispiele solcher Dreikante ermittelt er durch ein Tastverfahren; die Untersuchung führt er aber, von einigen Zahlenbeispielen abgesehen, die einem ganz speziellen Falle (vgl. unten Art. **19**) angehören, nicht bis zur Aufstellung rationaler Tetraeder durch. — Später hat Herr F. Bessell[3]) Hoppes Verfahren insofern vervollkommnet, als er auf rationellem Wege für Dreikante, deren Kanten- und Flächenwinkel rationale goniometrische Funktionen haben, partikuläre allgemeine Lösungen aufgestellt hat, Lösungen nämlich, welche zwar partikulär, d. h. nicht umfassend sind, aber wegen der willkürlichen Wahl der darin vorkommenden Parameter einen gewissen Grad von Allgemeinheit besitzen. Bessells Abhandlung enthält also Vorarbeiten zur Auffindung rationaler Tetraeder; auf diese selbst geht sie nicht ein. — Allgemeine partikuläre Lösungen für Tetraeder mit rationalen Kanten und rationalem Inhalt hat Herr K. Schwering[4]) 1895 auf rationellem Wege finden gelehrt. Diese Aufgabe ist von der vorliegenden verschieden; bei den rationalen Tetraedern in unserem

1) Ein numerisches Beispiel veröffentlichte ich Arch. (3) **7**, 178—179, 1904, Anfrage 10; die daran geknüpfte Anfrage, ob Beispiele von Tetraedern dieser Art bekannt wären, hatte ebensowenig wie andere Nachforschungen Erfolg.

2) R. Hoppe: Über rationale Dreikante und Tetraeder. Arch. (1) **61**, 86—98, 1877.

3) F. Bessell: Rationale sphärische Dreiecke. Arch. (1) **65**, 363—372, 1880.

4) K. Schwering: Rationale Tetraeder. Journ. f. Math. **115**, 301—307, 1895. K. Schwering: Geometrische Aufgaben mit rationalen Lösungen. Programmbeilage Düren 1898.

Sinne wird außerdem noch gefordert, daß die Inhalte der vier Seiten rational sind. Daß diese vier Bedingungen voneinander und von den übrigen sieben unabhängig sind, erhellt aus dem bekannten Eulerschen Beispiel eines Tetraeders, in dem drei aneinanderstoßende Kanten $a = 117$, $b = 240$, $c = 44$, die gegenüberliegenden $a' = 244$, $b' = 125$, $c' = 267$ und der Rauminhalt rational sind, während von den vier Seiten zwar drei, welche pythagoreische Dreiecke sind, rationalen Inhalt haben, die vierte dagegen nicht. — Schließlich sei erwähnt, daß Herr H. A. Schwarz über Tetraeder mit rationalen Kanten und rationalem Inhalt nach verschiedener Richtung Untersuchungen angestellt hat.

3. Eine vollständige Erledigung des Problems, rationale Tetraeder in unserem Sinne zu finden, wäre erreicht, wenn es gelänge, Ausdrücke für die Kanten, die Seiteninhalte und das Volumen aufzustellen, welche *sechs* willkürliche Parameter enthalten, und außerdem nachzuweisen, daß damit alle möglichen Lösungen erschöpft sind. Im folgenden soll ein rationelles Verfahren elementarer Natur beschrieben werden, das zur Aufstellung von partikulären allgemeinen Lösungen rationaler Tetraeder führt; diese enthalten statt der erforderlichen sechs nur *zwei* willkürliche Parameter, von denen der eine, der Proportionalitätsfaktor, in den Formeln weggelassen werden wird, und unterliegen zudem der Einschränkung, daß zwei der Dreikante, aus denen die Tetraeder gebildet sind, den Modul *Eins* besitzen. Die Anregung zu diesen Untersuchungen verdanke ich einer Notiz von Herrn K. Schwering in seinen „Hundert Aufgaben“; erst als sie im wesentlichen abgeschlossen waren, wurde ich auf die erwähnten Arbeiten von Hoppe und Bessell aufmerksam, die auf ähnlichem Wege vorzugehen versucht hatten.

4. Bei den Untersuchungen über heronische Dreiecke, überhaupt bei vielen Aufgaben, in welchen an geometrischen Figuren rationale Zahlen auftreten, sind die Winkel, deren goniometrische Funktionen rational sind, von grundlegender Bedeutung. Wie schon früher angedeutet[1]), gilt dies auch von den Untersuchungen über rationale Tetraeder. Bekanntlich sind die goniometrischen Funktionen eines Winkels rational, wenn es die Tangente (oder Kotangente) seiner Hälfte ist, und umgekehrt. Im Folgenden soll ein Winkel mit der Kotangente seiner Hälfte durch denselben Buchstaben bezeichnet, der Winkel jedoch durch das darübergesetzte Zeichen ^ charakterisiert werden:

$$(1) \qquad \varphi \text{ bedeutet } \cot \tfrac{1}{2}\hat{\varphi},$$

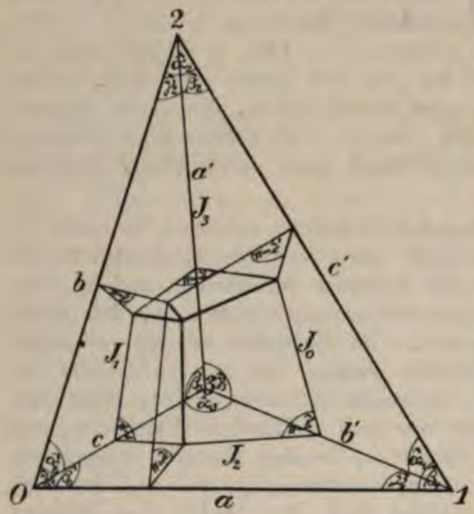
wo unter φ irgend eine rationale Zahl zu verstehen ist. Es ist also

$$(2) \qquad \sin\hat{\varphi} = \frac{2\varphi}{\varphi^2+1}, \quad \cos\hat{\varphi} = \frac{\varphi^2-1}{\varphi^2+1}, \quad \frac{1+\cos\hat{\varphi}}{\sin\hat{\varphi}} = \frac{\sin\hat{\varphi}}{1-\cos\hat{\varphi}} = \varphi.$$

Für das Tetraeder möge folgende Bezeichnung gelten (s. Figur): Die vier Ecken seien 0, 1, 2, 3; die Kanten 01, 02, 03 seien mit a, b, c, die gegenüberliegenden 23, 31, 12 mit a', b', c' bezeichnet, die Supple-

1) Vgl. die erwähnten Abhandlungen von Hoppe und Bessell, ferner Güntsche: Heronische Dreiecke mit einer rationalen Mittellinie, diese Berichte 5, 28 und 29, 1906.

mente der an diesen Kanten liegenden Flächenwinkel mit $\dot{\mathfrak{a}}$, $\dot{\mathfrak{b}}$, $\dot{\mathfrak{c}}$, $\dot{\mathfrak{a}}'$, $\dot{\mathfrak{b}}'$, $\dot{\mathfrak{c}}'$, die in jedem Begrenzungsdreieck den Kanten a und a', b und b', c und c' gegenüberliegenden Kantenwinkel mit $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, unter Hinzufügung des Index 0, 1, 2, 3 zur Bezeichnung der Ecke, der sie angehören, die Inhalte der Begrenzungsdreiecke, die den Ecken 0, 1, 2, 3 gegenüberliegen, seien J_0, J_1, J_2, J_3 und der Rauminhalt des Tetraeders T.



5. Da in einem rationalen Tetraeder die Seiten heronische Dreiecke sind, so sind die Sinus und Kosinus sämtlicher zwölf Kantenwinkel der vier Ecken rational; nach dem ersten sphärischen Kosinussatz, z. B. für die Ecke 0:

$$(3) \qquad \cos\dot{\alpha}_0 = \cos\dot{\beta}_0 \cos\dot{\gamma}_0 - \sin\dot{\beta}_0 \sin\dot{\gamma}_0 \cos\dot{\mathfrak{a}},$$

gilt mithin dasselbe von den Kosinus der sechs Flächenwinkel, und aus der Formel

$$(4) \qquad T = \tfrac{1}{6} abc \triangle_0,$$

wo der v. Staudtsche Eckensinus der Ecke 0

$$(5) \qquad \triangle_0 = \sin\dot{\beta}_0 \sin\dot{\gamma}_0 \sin\dot{\mathfrak{a}} = \sin\dot{\gamma}_0 \sin\dot{\alpha}_0 \sin\dot{\mathfrak{b}} = \sin\dot{\alpha}_0 \sin\dot{\beta}_0 \sin\dot{\mathfrak{c}}$$

ist, und den entsprechenden Formeln der übrigen Ecken ergibt sich schließlich, daß auch die Sinus der sechs Flächenwinkel rational sind — kurz: *in einem rationalen Tetraeder haben sämtliche Kanten- und Flächenwinkel der vier Ecken rationale goniometrische Funktionen.*

6. Man hat also, um rationale Tetraeder herstellen zu können, zunächst Dreikante aufzusuchen, bei welchen die goniometrischen Funktionen der Kanten- und Flächenwinkel rational sind. Dies gelingt, wenn man die Formeln der sphärischen Trigonometrie durch Einführung der Kotangente des halben Winkels umformt.[1] Es soll dies hier für einige Formeln geschehen; es mögen dabei $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ die Kantenwinkel, $\dot{\mathfrak{a}}$, $\dot{\mathfrak{b}}$, $\dot{\mathfrak{c}}$ die Supplemente[2] der gegenüberliegenden Flächenwinkel eines Dreikantes bedeuten, und mit α, β, γ, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Kotangenten der Hälften der Kantenwinkel und der

1) Die hierher gehörigen Formeln finden sich zum Teil bei Hoppe und Bessell a. a. O., ferner in E. Study: Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen, Leipzig 1893, § 4—6; sie bieten, wie die letztere Arbeit zeigt, ein über den vorliegenden Zweck hinausgehendes Interesse. Vgl. hierzu auch eine demnächst im Archiv erscheinende Notiz des Verf.

2) Durch Einführung der Supplemente der Flächenwinkel anstelle dieser selbst erhalten die Formeln erst die wünschenswerte Symmetrie und Übersichtlichkeit, vgl. hierzu Study a. a. O. § 1, insbesondere S. 92, Fußnote.

Flächenwinkelsupplemente bezeichnet werden. Aus den Neperschen Analogien entstehen folgende Formeln

$$(6^a)\qquad \alpha(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})(\beta-\gamma)+(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})(\beta\gamma+1)=0,$$

$$(6^b)\qquad \alpha(\mathfrak{b}\mathfrak{c}-1)(\beta+\gamma)+(\mathfrak{b}\mathfrak{c}+1)(\beta\gamma-1)=0,$$

$$(6^c)\qquad \mathfrak{a}(\beta+\gamma)(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})+(\beta-\gamma)(\mathfrak{b}\mathfrak{c}+1)=0,$$

$$(6^d)\qquad \mathfrak{a}(\beta\gamma-1)(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})+(\beta\gamma+1)(\mathfrak{b}\mathfrak{c}-1)=0.$$

Aus den analogen Formeln, welche $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, α, β enthalten, folgt

$$(7)\qquad \alpha=\beta\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}-\mathfrak{c}\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}+1}{-\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}+1},$$

$$(8)\qquad \alpha=\frac{1}{\beta}\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\mathfrak{a}-\mathfrak{a}\mathfrak{b}+1}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}-1},$$

oder, wenn man

$$(9)\qquad 2\mathfrak{t}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}+1$$

einführt,

$$(10)\qquad \alpha=\beta\frac{\mathfrak{t}-\mathfrak{c}\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}-\mathfrak{b}\mathfrak{c}},$$

$$(11)\qquad \alpha=\frac{1}{\beta}\frac{\mathfrak{t}-\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{t}-1}.$$

Hiernach ist

$$(12)\qquad \alpha^2=\frac{(\mathfrak{t}-\mathfrak{c}\mathfrak{a})(\mathfrak{t}-\mathfrak{a}\mathfrak{b})}{(\mathfrak{t}-\mathfrak{b}\mathfrak{c})(\mathfrak{t}-1)},$$

also

$$(13)\qquad \alpha^2=\frac{(\mathfrak{b}\mathfrak{c}-\mathfrak{c}\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}+1)(\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\mathfrak{a}-\mathfrak{a}\mathfrak{b}+1)}{(-\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}+1)(\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}-1)};$$

hieraus folgt

$$(14)\qquad \mathfrak{a}^2=\frac{\alpha^2(\mathfrak{b}\mathfrak{c}-1)^2+(\mathfrak{b}\mathfrak{c}+1)^2}{\alpha^2(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})^2+(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})^2}.$$

Aus (6^a) und (6^b) ergibt sich ferner durch Elimination von α nach einer einfachen Umrechnung

$$(15)\qquad \frac{\dfrac{\mathfrak{a}^2+1}{\mathfrak{a}}}{\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}}=\frac{\dfrac{\mathfrak{b}^2+1}{\mathfrak{b}}}{\dfrac{\beta^2+1}{\beta}}=\frac{\dfrac{\mathfrak{c}^2+1}{\mathfrak{c}}}{\dfrac{\gamma^2+1}{\gamma}}=\mu;$$

μ bedeutet hierbei den „Modul" des Dreikants. Die Formeln (12)—(14) hätte man auch aus dem sphärischen Kosinussatz, (15) aus dem Sinussatz erhalten können. Buchstäblich analoge Formeln erhält man durch polare Transformation. Auf die Wiedergabe dieser, sowie der durch zyklische Transformation und Transformation auf die Nachbardreiecke zu erhaltenden Formeln möge hier verzichtet werden.

7. Unser Hilfsproblem, Dreikante zu finden, für welche die goniometrischen Funktionen der Kanten- und Flächenwinkel rational sind, kommt, wie man aus den angeführten Gleichungen erkennt, darauf hinaus, eine diophantische Gleichung, in welcher die vier Unbekannten bis zum zweiten Grade aufsteigen, rational zu lösen. Es liegt also eine Aufgabe vor, die bei verwandten Problemen häufig auftritt, und auf welche das Eulersc fahren angewandt werden kann, auf das wir weiter unten (Art. **11**) kommen. Diese Aufgabe ist noch nicht umfassend gelöst. Wohl al wie erwähnt, F. Bessell in der genannten Abhandlung partikuläre L der Aufgabe gegeben, welche willkürliche Parameter enthalten. D fachste von ihm angegebene Typus ist (nach einer kleinen Umgestaltu folgende, der den Modul *Eins* besitzt und ohne weiteres aus den Nep Analogien entnommen werden kann:

$$\text{(16)} \qquad \left.\begin{matrix}\mathfrak{a}\\ \alpha\end{matrix}\right\} = m, \quad \left.\begin{matrix}\mathfrak{b}\\ \beta\end{matrix}\right\} = n, \quad \left.\begin{matrix}\mathfrak{c}\\ \gamma\end{matrix}\right\} = -\frac{mn+1}{m+n}.$$

Hierin bedeuten m und n beliebige rationale Zahlen. Von diesem werden wir im folgenden Gebrauch machen.

8. Vorerst ist auf die Umkehrung des oben im Art. **5** ange Satzes einzugehen. Ein Tetraeder ist rational, wenn die Kante Flächenwinkel rationale Sinus und Kosinus haben[1]), und zwar genü zu noch nicht die Rationalität dieser Funktionen an zwei Ecken (un für je einen Kanten- und zwei Flächenwinkel der beiden anderen sondern dazu ist notwendig und hinreichend, daß noch ein Kante Flächenwinkel einer der beiden anderen Ecken, etwa der diesen gem Flächenwinkel, rationale goniometrische Funktionen besitzt, wie a unter (6^a)—(6^d) angegebenen umgeformten Neperschen Analogien

9. Um nun rationale Tetraeder zu bilden, legen wir den oben un angeführten Typus eines Dreikantes, dessen Kanten- und Fläche rationale goniometrische Funktionen haben, für die Ecken 0 und 1 zu Für die Ecke 0 soll sein:

$$\text{(17)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{a} = p, & \mathfrak{b} = -\dfrac{pq+1}{p+q}, \quad \mathfrak{c} = q, \\ \alpha_0 = p, & \beta_0 = -\dfrac{pq+1}{p+q}, \quad \gamma_0 = q; \end{cases}$$

für die Ecke 1 soll sein:

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{a} = p, & \mathfrak{b}' = r, \quad \mathfrak{c}' = -\dfrac{pr+1}{p+r}, \\ \alpha_1 = p, & \beta_1 = r, \quad \gamma_1 = -\dfrac{pr+1}{p+r}. \end{cases}$$

Hierbei sollen p, q und r rationale Zahlen bedeuten, die vorläuf wahlfrei bleiben mögen.

Nunmehr sind die Ecken 2 und 3 auch bestimmt. An der Ec

$$\text{(19)} \qquad \alpha_2 = \frac{\beta_1 + \gamma_0}{\beta_1 \gamma_0 - 1} = \frac{q+r}{qr-1},$$

ferner nach der Formel (14)

$$\text{(20)} \qquad \mathfrak{a}'^2 = \frac{[\alpha_2(\mathfrak{b}\mathfrak{c}' - 1)]^2 + (\mathfrak{b}\mathfrak{c}' + 1)^2}{[\alpha_2(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}')]^2 + (\mathfrak{b} - \mathfrak{c}')^2}.$$

Führt man die obigen Ausdrücke für $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}'$ und α_2 ein, so wird (

$$\text{(21)} \qquad \mathfrak{a}'^2 = \frac{\dfrac{1}{[(p+q)(p+r)]^2} \cdot A}{\dfrac{1}{[(qr-1)(p+q)(p+r)]^2} \cdot B};$$

1) Hoppe a. a. O. S. 86.

hierin ist

$$(22)\quad A=\{r(p^2-1)+q(p^2-1)\}^2+\{r[q(p^2+1)+2p]+[q\cdot 2p+(p^2+1)]\}^2,$$

$$(23)\quad \begin{aligned} B=&\{r^2(q\cdot 2p+p^2+1)+r[q^2\cdot 2p+q\cdot 2(p^2+1)+2p]+[q^2(p^2+1)\\ &+q\cdot 2p]\}^2+\{(p^2-1)[r^2q-r(q^2+1)+q]\}^2, \end{aligned}$$

folglich

$$(24)\quad \begin{aligned} A=&(p^2+1)\{r^2[q^2(p^2+1)+q\cdot 4p+(p^2+1)]+2r[q^2\cdot 2p+q\cdot 2(p^2+1)\\ &+2p]+[q^2(p^2+1)+q\cdot 4p+(p^2+1)]\} \end{aligned}$$

$$)\quad B=\begin{cases} r^4(p^2+1)[\qquad q^2(p^2+1)\ +q\cdot 4p\qquad +(p^2+1 \\ +r^3\cdot 2\cdot[\qquad -q^3(p^4-6p^2+1)+q^2\cdot 6p(p^2+1)+q(p^4+10p^2+1)+2p(p^2+ \\ +r^2\cdot(p^2+1)[q^4(p^2+1)+q^3\cdot 12p\qquad +q^2\cdot 10(p^2+1)+q\cdot 12p\qquad +(p^2+ \\ +r\cdot 2\cdot[q^4\cdot 2p(p^2+1)+q^3(p^4+10p^2+1)+q^2\cdot 6p(p^2+1)-q(p^4-6p^2+1)] \\ +(p^2+1)[q^4(p^2+1)+q^3\cdot 4p\qquad +q^2(p^2+1)]. \end{cases}$$

Eine Lösung der Aufgabe ist gefunden, wenn es gelingt, durch passende Wahl von rationalen Werten für p, q, r und a' die Gleichungen (21), (22) und (23), oder (21), (24) und (25) zu erfüllen. — Statt dessen soll, was auf dasselbe hinauskommt, der Ausdruck $C^2=A\cdot B$ zu dem Quadrat einer rationalen Zahl gemacht werden.

10. Es sei

$$(26)\qquad C^2=A\cdot B=r^6\cdot c_6+r^5c_5+r^4c_4+r^3c_3+r^2c_2+rc_1+c_0, \qquad \text{wo}$$

$$(27)\quad \begin{cases} c_6=\{(p^2+1)[q^2(p^2+1)+q\cdot 4p+(p^2+1)]\}^2, \\ c_5=2(p^2+1)[q^2(p^2+1)+q\cdot 4p+(p^2+1)][q^3(-p^4+6p^2-1) \\ \qquad +q^2(8p^3+8p)+q(3p^4+14p^2+3)+(4p^3+4p)], \\ c_4=(p^2+1)[q^6(p^6+3p^4+3p^2+1)+q^5(8p^5+80p^3+8p) \\ \qquad +q^4(4p^6+172p^4+172p^2+4)+q^3(120p^5+368p^3+120p) \\ \qquad +q^2(21p^6+255p^4+255p^2+21)+q(48p^5+160p^3+48p) \\ \qquad +(2p^6+22p^4+22p^2+2)], \\ c_3=(p^2+1)[q^6(8p^5+16p^3+8p)+q^5(4p^6+108p^4+108p^2+4) \\ \qquad +q^4(120p^5+368p^3+120p)+q^3(40p^6+376p^4+376p^2+40) \\ \qquad +q^2(120p^5+368p^3+120p)+q(4p^6+108p^4+108p^2+4) \\ \qquad +(8p^5+16p^3+8p)], \\ c_2=(p^2+1)[q^6(2p^6+22p^4+22p^2+2)+q^5(48p^5+160p^3+48p) \\ \qquad +q^4(21p^6+255p^4+255p^2+21)+q^3(120p^5+368p^3+120p) \\ \qquad +q^2(4p^6+172p^4+172p^2+4)+q(8p^5+80p^3+8p) \\ \qquad +(p^6+3p^4+3p^2+1)], \\ c_1=2(p^2+1)q[q^2(p^2+1)+q\cdot 4p+(p^2+1)][q^3(4p^3+4p) \\ \qquad +q^2(3p^4+14p^2+3)+q(8p^3+8p)+(-p^4+6p^2-1)], \\ c_0=\{(p^2+1)q[q^2(p^2+1)+q\cdot 4p+(p^2+1)]\}^2. \end{cases}$$

Es ist also ein Ausdruck, der in q und r vom sechsten, in p vom achten Grade ist, zu einem Quadrat zu machen, daher ist die Aussicht, auf diesem Wege zum Ziel zu gelangen, anscheinend gering. Bei der besonderen Natur unseres Ausdrucks gelingt es jedoch, die Aufgabe unter bestimmten Annahmen auf die einfachere zurückzuführen, eine ganze rationale Funktion vierten Grades zu einem Quadrat zu machen. Wir setzen:

$$C^2 = D^2 + r^2 \cdot F, \tag{28}$$ wobei

$$D = r^3 d_3' + r^2 d_2' + r d_1' + d_0', \tag{29}$$

$$F = r^2 f_2 + r f_1 + f_0, \tag{30}$$ und

$$\left\{\begin{aligned}
d_3' &= (p^2+1)[q^2(p^2+1) + q \cdot 4p + (p^2+1)],\\
d_2' &= q^3(-p^4+6p^2-1) + q^2(8p^3+8p) + q(3p^4+14p^2+3) + (4p^3+4p),\\
d_1' &= q^3(-4p^3-4p) + q^2(-3p^4-14p^2-3) + q(-8p^3-8p)\\
&\quad + (p^4-6p^2+1),\\
d_0' &= -(p^2+1)q[q^2(p^2+1) + q \cdot 4p + (p^2+1)]
\end{aligned}\right. \tag{31}$$

sein möge. Es ergibt sich

$$D^2 = r^6 d_6 + r^5 d_5 + r^4 d_4 + r^3 d_3 + r^2 d_2 + r d_1 + d_0, \tag{32}$$

$$\left\{\begin{aligned}
d_6 &= d_3'^2 = c_6,\\
d_5 &= 2 d_3' d_2' = c_5,\\
d_4 &= d_2'^2 + 2 d_3' d_1'\\
&= q^6(p^8-12p^6+38p^4-12p^2+1) + q^5(-24p^7+56p^5+56p^3-24p)\\
&\quad + q^4(-12p^8+152p^4-12) + q^3(-8p^7+104p^5+104p^3-8p)\\
&\quad + q^2(5p^8+36p^6+126p^4+36p^2+5) + q(16p^7+48p^5+48p^3+16p)\\
&\quad + (2p^8+8p^6+12p^4+8p^2+2),\\
d_3 &= 2(d_3' d_0' + d_2' d_1')\\
&= 2 \cdot [q^6(4p^7-20p^5-20p^3+4p) + q^5(2p^8-40p^6-148p^4-40p^2+2)\\
&\quad + q^4(-36p^7-268p^5-268p^3-36p)\\
&\quad + q^3(-12p^8-176p^6-456p^4-176p^2-12)\\
&\quad + q^2(-36p^7-268p^5-268p^3-36p)\\
&\quad + q(2p^8-40p^6-148p^4-40p^2+2) + (4p^7-20p^5-20p^3+4p)],\\
d_2 &= d_1'^2 + 2 d_2' d_0'\\
&= q^6(2p^8+8p^6+12p^4+8p^2+2) + q^5(16p^7+48p^5+48p^3+16p)\\
&\quad + q^4(5p^8+36p^6+126p^4+36p^2+5) + q^3(-8p^7+104p^5+104p^3-8p)\\
&\quad + q^2(-12p^8+152p^4-12) + q(-24p^7+56p^5+56p^3-24p)\\
&\quad + (p^8-12p^6+38p^4-12p^2+1),\\
d_1 &= 2 d_1' d_0' = c_1,\\
d_0 &= d_0'^2 = c_0.
\end{aligned}\right. \tag{33}$$

Die Ausdrücke für f_2, f_1, f_0 in (30) erhalten wir aus (28), (26), (27), (32), (33); es ist

$$
(34)\left\{\begin{aligned}
f_2 &= 16[q^6(p^6 - 2p^4 + p^2) + q^5(2p^7 + 2p^5 + 2p^3 + 2p) \\
&\quad + q^4(p^8 + 11p^6 + 12p^4 + 11p^2 + 1) + q^3(8p^7 + 24p^5 + 24p^3 + 8p) \\
&\quad + q^2(p^8 + 15p^6 + 24p^4 + 15p^2 + 1) + q(2p^7 + 10p^5 + 10p^3 + 2p) \\
&\quad + (p^6 + 2p^4 + p^2)], \\
f_1 &= 16[q^6(4p^5 + 4p^3) + q^5(12p^6 + 32p^4 + 12p^2) \\
&\quad + q^4(12p^7 + 64p^5 + 64p^3 + 12p) + q^3(4p^8 + 48p^6 + 104p^4 + 48p^2 + 4) \\
&\quad + q^2(12p^7 + 64p^5 + 64p^3 + 12p) + q(12p^6 + 32p^4 + 12p^2) \\
&\quad + (4p^5 + 4p^3)], \\
f_0 &= 16[q^6(p^6 + 2p^4 + p^2) + q^5(2p^7 + 10p^5 + 10p^3 + 2p) \\
&\quad + q^4(p^8 + 15p^6 + 24p^4 + 15p^2 + 16) + q^3(8p^7 + 24p^5 + 24p^3 + 8p) \\
&\quad + q^2(p^8 + 11p^6 + 12p^4 + 11p^2 + 1) + q(2p^7 + 2p^5 + 2p^3 + 2p) \\
&\quad + (p^6 - 2p^4 + p^2)].
\end{aligned}\right.
$$

Durch geeignete Absonderung gewinnen sie eine einfachere Gestalt; wir können setzen:

$$(35)\qquad F = 16(q + p)^2(qp + 1)^2 \cdot G,$$

wo

$$(36)\qquad G = r^2 g_2 + r g_1 + g_0,$$

$$
(37)\quad\left\{\begin{aligned}
g_2 &= q^2(p^4 - 2p^2 + 1) + q(4p^3 + 4p) + (p^4 + 2p^2 + 1), \\
g_1 &= q^2(4p^3 + 4p) + q(4p^4 + 16p^2 + 4) + (4p^3 + 4p), \\
g_0 &= q^2(p^4 + 2p^2 + 1) + q(4p^3 + 4p) + (p^4 - 2p^2 + 1).
\end{aligned}\right.
$$

Man kann G auch nach fallenden Potenzen von q statt von r ordnen und schreiben:

$$(38)\qquad H = q^2 h_2 + q h_1 + h_0,$$

$$
(39)\quad\left\{\begin{aligned}
h_2 &= r^2(p^4 - 2p^2 + 1) + r(4p^3 + 4p) + (p^4 + 2p^2 + 1), \\
h_1 &= r^2(4p^3 + 4p) + r(4p^4 + 16p^2 + 4) + (4p^3 + 4p), \\
h_0 &= r^2(p^4 + 2p^2 + 1) + r(4p^3 + 4p) + (p^4 - 2p^2 + 1),
\end{aligned}\right.
$$

wobei man erkennt, daß $G = H$ inbezug auf q und r symmetrisch ist.

Um C aus (28) rational zu erhalten, reicht es hin, die Gleichung $F = 0$ zu erfüllen; unsere Aufgabe ist also jetzt, die Gleichung

$$(40)\qquad G = H = 0$$

durch geeignete Wahl rationaler Werte für p, q, r zu lösen.

11. Hierzu dient uns ein Verfahren, ähnlich dem, das von Euler[1]), Kummer[2]), Schwering[3]) u. a. oft bei verwandten Aufgaben angewandt

1) s. z. B. Comm. Arithm. coll. **2**, p. 474.
2) J. f. Math. **37**, S. 1 ff. 1848.
3) vgl. insbesondere die angeführte Programmabhandlung.

worden ist.[1]) Die Gleichung (40) ist in q quadratisch; falls also bei einem bestimmten, in p rational ausgedrückten Werte r, $r = r^{(0)}$, eine rationale Wurzel für q, $q = q^{(0)}$, bekannt ist, ist die andere, $q = q'$, linear, also rational bestimmt. Aber die Gleichung (40) ist, wie erwähnt, auch in r quadratisch; falls wir nun bei einem bestimmten, in p rational ausgedrückten q, $q = q'$, eine Wurzel für r, $r = r^{(0)}$ kennen, ist die andere, $r = r'$, rational zu erhalten. Mit dieser kann man nun in der vorhin beschriebenen Weise einen neuen Wert für q, $q = q''$, auffinden, der $r = r'$ zugehört, mit diesem wieder einen neuen für r, $r = r''$, der $q = q''$ entspricht. In dieser Weise kann man beliebig weit fortschreiten. *Durch dies Verfahren, das wir kurz als Eulersches Verfahren bezeichnen wollen, gelingt es, unsere Aufgabe dadurch zu lösen, daß wir Wertegruppen für p, q, r in beliebiger Zahl aufstellen, bei denen ein Parameter, nämlich p, wahlfrei bleibt, von denen also jede immer noch einen gewissen Grad von Allgemeinheit besitzt.* Hierzu ist nur erforderlich, daß wir wenigstens *ein* rationales Wertepaar für q und r kennen, das die Gleichung (40) erfüllt. Hier kommen uns die ausgearteten Tetraeder zustatten. Es möge im folgenden ein Fall durchgeführt werden.

12. Eine Lösung kann erhalten werden, wenn wir in (40) für r

$$r^{(0)} = -q \tag{41}$$

einführen; die Ecke 2 rückt dann ins Unendliche. An die Stelle von (40) tritt dann die Gleichung

$$q^4(p^4 - 2p^2 + 1) + q^2(-2p^4 - 12p^2 - 2) + (p^4 - 2p^2 + 1) = 0, \tag{42}$$

die folgende vier rationalen Lösungen besitzt[2]):

$$q = \begin{cases} \pm \dfrac{p+1}{p-1}, \\ \pm \dfrac{p-1}{p+1}. \end{cases} \tag{43}$$

Diese vier Lösungen gehen aber ineinander über, wenn man p durch $-p$, $\frac{1}{p}$ oder $-\frac{1}{p}$ ersetzt; es genügt also, eine von ihnen zu behandeln. Wir wählen:

$$q' = +\frac{p+1}{p-1}; \tag{44}$$

dann wird, da die eine Wurzel von $G = 0$

$$r^{(0)} = -q' = -\frac{p+1}{p-1} \tag{45}$$

ist, die andere Wurzel $r = r'$ aus

$$r^{(0)} + r' = -\frac{g_1'}{g_2'} \quad \text{oder aus} \quad r^{(0)} r' = \frac{g_0'}{g_2'} \tag{46}$$

erhalten, wo g_2', g_1', g_0' aus g_2, g_1, g_0 durch Einführung von q' für q entstehen; das ergibt:

$$r' = -\frac{p^5 + p^4 + \cdot + 4p^2 - 3p + 1}{p^5 + 3p^4 + 4p^3 + \cdot + p - 1}. \tag{47}$$

---

1) vgl. auch Güntsche: Heronische Dreiecke mit einer rationalen Mittellinie, diese Berichte **5**, 27—38, 1906.

2) Der Fall $p = \pm 1$ bedarf einer besonderen Behandlung.

Führt man in (38) (39) und (40) r' für r ein, so wird h_2, h_1, h_0 zu h'_2, h'_1, h'_0, und eine neue Wurzel q'' für q ergibt sich aus

$$q' + q'' = -\frac{h'_1}{h'_2}, \text{ oder aus } q'q'' = \frac{h'_0}{h'_2}. \tag{48}$$

Man findet:

$$q'' = \frac{p^{13}+p^{12}+*-4p^{10}-25p^9-21p^8-8p^7+*+3p^5+11p^4-8p^3+4p^2-3p+1}{p^{13}+3p^{12}+4p^{11}+8p^{10}+11p^9-3p^8+*+8p^6-21p^5+25p^4-4p^3+*+p-1}. \tag{49}$$

Die Gleichungen $q = q'$ (44) und $r = r'$ (47) stellen eine partikuläre allgemeine Lösung unserer Aufgabe dar, eine zweite die Gleichungen $q = q''$ (49) und $r = r'$ (47); beliebig viele neue lassen sich in der soeben dargelegten Weise ermitteln.

13. In diesen Gleichungen werden q und r durch den Parameter p rational ausgedrückt; die Kotangenten der halben Kanten- und Flächenwinkel der Ecken 0 und 1 finden sich aus (17) und (18); aus (19) und (20) folgt dann, daß auch an der Ecke 2 vier Kanten- oder Flächenwinkel rationale goniometrische Funktionen haben; die übrigen beiden ergeben sich aus den oben in Art. 6 angeführten Formeln, etwa aus den folgenden, die man aus den Gleichungen (9) — (11) erhält:

$$2\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{b}\mathfrak{c}' + \mathfrak{c}'\mathfrak{a}' + \mathfrak{a}'\mathfrak{b} + 1, \tag{50}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 \frac{\mathfrak{t}_2 - \mathfrak{b}\mathfrak{c}'}{\mathfrak{t}_2 - \mathfrak{c}'\mathfrak{a}'} = \frac{1}{\alpha_2}\frac{\mathfrak{t}_2 - \mathfrak{a}'\mathfrak{b}}{\mathfrak{t}_2 - 1}, \tag{51}$$

$$\gamma_2 = \alpha_2 \frac{\mathfrak{t}_2 - \mathfrak{b}\mathfrak{c}'}{\mathfrak{t}_2 - \mathfrak{a}'\mathfrak{b}} = \frac{1}{\alpha_2}\frac{\mathfrak{t}_2 - \mathfrak{c}'\mathfrak{a}'}{\mathfrak{t}_2 - 1}. \tag{52}$$

Wie die Ecke 2 könnte man — etwa zur Kontrolle — die Ecke 3 behandeln. Aus den Funktionen der einem Begrenzungsdreieck angehörigen Kantenwinkel $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ ergeben sich die Seiten a, b, c des Dreiecks nach bekannten Formeln: ist der Inkreisradius des Dreiecks ϱ, der halbe Umfang s, der Inhalt J, so ist

$$\alpha = \frac{s-a}{\varrho}, \quad \beta = \frac{s-b}{\varrho}, \quad \gamma = \frac{s-c}{\varrho}, \quad \varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}, \tag{53}$$

mithin

$$a = \varrho(\beta+\gamma),\ b = \varrho(\gamma+\alpha),\ c = \varrho(\alpha+\beta),\ J = \varrho^2\alpha\beta\gamma = \varrho^2(\alpha+\beta+\gamma), \tag{54}$$

woraus man a, b, c und J, vorläufig noch mit einem Proportionalitätsfaktor, erhält; durch geeignete Wahl dieser Faktoren kann man die gemeinsamen Seiten dieser Dreiecke in Übereinstimmung bringen. Nachdem man so die Kanten des Tetraeders berechnet hat, erhält man den Rauminhalt T etwa aus den Gleichungen (4) und (5).

14. Auf diese Weise ergibt sich aus

$$q = q' = \frac{p+1}{p-1} \tag{44}$$

$$r = r' = -\frac{p^5+p^4+4p^2-3p+1}{p^5+3p^4+4p^3+p-1} \tag{47}$$

nach Beseitigung von Nennern und negativen Vorzeichen der folgende

Typus I eines rationalen Tetraeders:

$$a=4p(p+1)(p-1)(p^2+1)(p^2+2p-1)(p^3+p^2+p-1)(p^3+p^2-p+1)\times$$
$$\times(p^4+2p^3-2p+1),$$
$$b=(p+1)(p-1)(p^3+p^2+p-1)(p^3+p^2-p+1)(p^5+p^4+4p^2-3p+1)\times$$
$$\times(p^5+3p^4+4p^3+p-1),$$
$$c=(p^2+1)(p^2+2p-1)(p^4-4p^2+1)(p^4+2p^3+2p^2-2p+1)\times$$
$$\times(p^6+2p^5+3p^4-3p^2+2p-1),$$
$$a'=2p(p^4+2p^3-2p+1)(p^{12}+4p^{11}+6p^{10}+4p^9+3p^8+16p^7+12p^6-16p^5+3p^4-4p^3+6p^2-4p$$
$$b'=(p^2+1)(p^2+2p-1)^2(p^4+1)(p^8+2p^7+2p^6+6p^5+2p^4-6p^3+2p^2-2p+1),$$
$$c'=(p+1)^2(p-1)^2(p^3+p^2+p-1)(p^3+p^2-p+1)(p^4+4p^2-4p+1)(p^4+4p^3+4p^2+1),$$
$$J_0=p(p+1)^2(p-1)^2(p^2+2p-1)^2(p^3+p^2+p-1)(p^3+p^2-p+1)(p^4+1)(p^4+4p^2-4p+1)$$
$$\times(p^4+4p^3+4p^2+1)(p^8+2p^7+2p^6+6p^5+2p^4-6p^3+2p^2-2p+1),$$
$$J_1=p(p+1)(p-1)(p^2+2p-1)(p^3+p^2+p-1)(p^3+p^2-p+1)(p^4-4p^2+1)(p^4+2p^3+2p^2-2p$$
$$\times(p^5+p^4+4p^2-3p+1)(p^5+3p^4+4p^3+p-1)(p^6+2p^5+3p^4-3p^2+2p-1),$$
$$J_2=2p(p+1)(p-1)(p^2+1)^3(p^2+2p-1)^3(p^3+p^2+p-1)(p^3+p^2-p+1)(p^4-4p^2+1)\times$$
$$\times(p^4+2p^3-2p+1)(p^6+2p^5+3p^4-3p^2+2p-1),$$
$$J_3=2p(p+1)^3(p-1)^3(p^2+2p-1)(p^3+p^2+p-1)^2(p^3+p^2-p+1)^2(p^4+2p^3-2p+1)\times$$
$$\times(p^5+p^4+4p^2-3p+1)(p^5+3p^4+4p^3+p-1),$$
$$=\tfrac{4}{3}p^2(p+1)^3(p-1)^3(p^2+1)(p^2+2p-1)^3(p^3+p^2+p-1)^2(p^3+p^2-p+1)^2(p^4+2p^3-2p+$$
$$\times(p^4-4p^2+1)(p^5+p^4+4p^2-3p+1)(p^5+3p^4+4p^3+p-1)(p^6+2p^5+3p^4-3p^2+$$

Hierbei bedeutet p eine beliebige rationale Zahl.

Es mögen einige Beispiele folgen, die man für besondere Zahlenwerte von p erhält.

Beispiele zum Typus I eines rationalen Tetraeders.

1) $p=\frac{1}{2}$ $a=4200$ $b=2793$ $c=2015$
$a'=2260$ $b'=2465$ $c'=2583$
$J_0=2\,546\,838$ $J_1=2\,251\,158$
$J_2=1\,627\,500$ $J_3=3\,519\,180$
$T=727\,297\,200;$

2) $p=2$ $a=3\,483\,480$ $b=2\,860\,143$ $c=216\,265$
$a'=2\,735\,860$ $b'=3\,419\,465$ $c'=2\,091\,375$
$J_0=2\,860\,553\,445\,750$ $J_1=247\,419\,530\,358$
$J_2=356\,316\,460\,500$ $J_3=2\,988\,975\,281\,292$
$T=163\,058\,564\,845\,416\,240;$

3)[1]) $p=\frac{1}{3}$ $\quad a = 157\,080 \quad b = 250\,096 \quad c = 168\,935$

$a' = 153\,255 \quad b' = 64\,985 \quad c' = 200\,200$

$J_0 = 3\,902\,999\,100 \qquad J_1 = 12\,674\,990\,328$

$J_2 = 5\,103\,136\,500 \qquad J_3 = 15\,714\,031\,872$

$T = 204\,203\,844\,176\,640;$

4) $p = 3$ $\quad a = 17\,635\,800 \quad b = 16\,940\,704 \quad c = 10\,692\,815$

$a' = 10\,559\,055 \quad b' = 17\,407\,985 \quad c' = 15\,475\,576$

$J_0 = 80\,819\,578\,462\,308 \qquad J_1 = 54\,343\,144\,152\,528$

$J_2 = 89\,191\,515\,367\,500 \qquad J_3 = 119\,505\,147\,041\,280$

$T = 241\,754\,729\,784\,362\,995\,200;$

5) $p = \frac{2}{3}$ $\quad a = 128\,888\,760 \quad b = 164\,328\,065 \quad c = 19\,113\,913$

$a' = 157\,964\,988 \quad b' = 119\,438\,137 \quad c' = 67\,189\,375$

$J_0 = 3\,703\,834\,050\,551\,250 \qquad J_1 = 1\,449\,670\,309\,785\,390$

$J_2 = 1\,028\,370\,356\,073\,060 \qquad J_3 = 4\,073\,084\,717\,509\,500$

$T = 19\,998\,829\,670\,632\,774\,962\,000.$

15. Ein zweiter Typus eines rationalen Tetraeders ergibt sich, wenn man $q = q''$ aus (49) und $r = r'$ aus (47) entnimmt; die allgemeinen, wie die numerischen Ausdrücke werden in diesem Falle so umfangreich (für $p = \frac{1}{2}$ erhält man $q = \frac{691}{423}$ und $r = -\frac{19}{7}$, also $\mathfrak{a}' = \frac{51\,777\,620}{32\,367\,449}$), daß auf eine Durchrechnung verzichtet werden mag. Weitere Typen könnte man durch Fortsetzung des oben in Art. **11** und **12** auseinandergesetzten Eulerschen Verfahrens in unbegrenzter Zahl aufstellen.

16. Erheblich einfacher gestaltet sich die Parameterdarstellung rationaler Tetraeder, wenn dieselben eine Symmetrieebene besitzen sollen. Statt dessen suchen wir, was auf dieselbe Bedingungsgleichung führt, eines der beiden Tetraeder auf, in welche ein solches durch die Symmetrieebene zerfällt. Wir legen wieder den unter (16) angeführten Typus für die Ecken 0 und 1 zugrunde.

Für die Ecke 0 soll sein:

$$\mathfrak{a} = \alpha_0 = p, \quad \mathfrak{b} = \beta_0 = -\frac{pq+1}{p+q}, \quad \mathfrak{c} = \gamma_0 = q, \tag{55}$$

für die Ecke 1 soll sein:

$$\mathfrak{a} = \alpha_1 = p, \quad \mathfrak{b}' = \beta_1 = \mathfrak{c}' = \gamma_1 = 1. \tag{56}$$

Es wird dann ganz ähnlich wie oben (Glchgn. (19)—(21))

$$\alpha_2 = \frac{q+1}{q-1}, \tag{57}$$

$$\mathfrak{a}'^2 = \frac{(p+1)^2(q+1)^4+(p-1)^2(q-1)^4}{2(p^2+1)(q+1)^2(q-1)^2}. \tag{58}$$

---

1) Dies ist das eingangs erwähnte Beispiel, das auf die hier dargelegte Weise gefunden und Archiv a. a. O. 1904 mitgeteilt worden ist.

Hier ist also

$$(59)\qquad C^2 = 2(p^2+1)[(p+1)^2(q+1)^4+(p-1)^2(q-1)^4]$$

zu einem vollständigen Quadrat zu machen. Man findet

$$(60)\qquad C^2 = 4D^2,$$

wo

$$(61)\quad D^2=q^4(p^2+1)^2+q^3(8p^3+8p)+q^2(6p^4+12p^2+6)+q(8p^3+8p)+(p^2+1)^2.$$

Hierauf läßt sich, da die Koeffizienten der höchsten und niedrigsten Potenzen von q quadratisch sind, das Eulersche Verfahren (oder das ursprüngliche Fermatsche) unmittelbar anwenden. Unter Benutzung des in einem früheren Vortrage[1]) angeführten Lösungsweges setzen wir:

$$P = q\cdot 4p + (p^2+1),$$
$$QR = D^2 - P^2 = q^2[q^2(p^2+1)^2 + q\cdot 8p(p^2+1)+(6p^4-4p^2+6)]$$

und erhalten so die kanonische Gleichung:

$$(62)\quad \begin{aligned} y^2q^2+y\cdot 2[q\cdot 4p+(p^2+1)]-[q^2(p^2+1)^2+q\cdot 8p(p^2+1)\\ +(6p^4-4p^2+6)]=0,\end{aligned}$$

$$(62^a)\quad \begin{aligned} q^2[y^2-(p^2+1)^2]+q[y\cdot 8p-8p(p^2+1)]+[y\cdot 2(p^2+1)\\ -(6p^4-4p^2+6)]=0.\end{aligned}$$

Diese ist rational zu erfüllen. Geht man von $y = y^{(0)} = -(p^2+1)$ aus, so bekommt man für q

$$(63)\qquad q' = -\frac{p^4+1}{2p(p^2+1)}$$

als erste nicht triviale Lösung. Damit kann in der wiederholt auseinandergesetzten Weise ein zweiter Wert für y, y', erhalten werden, der wiederum einen neuen Wert q'' für q liefert. Dies Verfahren kann beliebig fortgesetzt werden.

17. Unter Benutzung des in Gleichung (63) aufgestellten Wertes $q = q'$ gewinnen wir den folgenden Typus I der verlangten Art.

Typus I eines rationalen Tetraeders, das von zwei pythagoreischen Dreiecken, welche eine Kathete gemeinsam haben, und zwei heronischen Dreiecken begrenzt ist:

$$\begin{aligned}
a &= (p+1)(p-1)(p^4+2p^3+2p+1)(p^4-2p^3-2p+1),\\
b &= (p+1)(p-1)(p^4+2p^3+4p^2+2p+1)(p^4-2p^3+4p^2-2p+1),\\
c &= (p^2+1)(p^4+2p^3-2p+1)(p^4-2p^3+2p+1),\\
a' &= 2p(p^8+4p^6-6p^4+4p^2+1),\\
b' &= 2p(p^4+2p^2-1)(p^4-2p^2-1),\\
c' &= 4p(p+1)(p-1)(p^2+1)(p^4+1),\\
J_0 &= 8p^3(p+1)(p-1)(p^4+1)(p^4+2p^2-1)(p^4-2p^2-1),\\
J_1 &= p(p+1)(p-1)(p^4+2p^3-2p+1)(p^4-2p^3+2p+1)\times\\
&\quad\times(p^4+2p^3+4p^2+2p+1)(p^4-2p^3+4p^2-2p+1),\\
J_2 &= \tfrac{1}{2}ab',\quad J_3 = \tfrac{1}{2}ac',\quad T = \tfrac{1}{3}J_0 a.
\end{aligned}$$

---

1) Diese Berichte, 5, 36 und 37, Artikel 11, 1906.

p ist dabei eine beliebige rationale Zahl. Die letzten drei Formeln ergeben sich daraus, daß die Kante a auf den Kanten b' und c' senkrecht steht.

Beispiele zum vorstehenden Typus:

1) $p = 2$ $\quad a = 333 \quad b = 2067 \quad c = 725$

$a' = 1732 \quad b' = 644 \quad c' = 2040$

$J_0 = 525\,504 \qquad J_1 = 599\,430$

$J_2 = 107\,226 \qquad J_3 = 339\,660$

$T = 58\,330\,944;$

2) $p = 3$ $\quad a = 3124 \quad b = 10\,324 \quad c = 5525$

$a' = 6771 \quad b' = 4557 \quad c' = 9840$

$J_0 = 13\,452\,264 \qquad J_1 = 17\,112\,030$

$J_2 = 7\,118\,034 \qquad J_3 = 15\,370\,080$

$T = 14\,008\,290\,912;$

3) $p = 3:2$ $\quad a = 74\,635 \quad b = 168\,725 \quad c = 75\,517$

$a' = 156\,108 \quad b' = 11\,508 \quad c' = 151\,320$

$J_0 = 803\,718\,720 \qquad J_1 = 5\,880\,741\,150$

$J_2 = 429\,449\,790 \qquad J_3 = 5\,646\,884\,100$

$T = 19\,995\,182\,222\,400.$

18. Weitere Typen könnte man durch Fortsetzung des Eulerschen Verfahrens in unbegrenzter Zahl erhalten, doch werden auch hier die Ausdrücke bald recht umfangreich.

19. Ein besonderer Fall, der ebenfalls eine Parameterdarstellung zuläßt, möge noch erwähnt werden. Wenn man für ein rationales Tetraeder

(64) $$\alpha_0 = \alpha_1, \quad \beta_0 = \beta_2, \quad \gamma_0 = \gamma_3$$

annimmt, so hat man, wie Hoppe a. a. O. Seite 97 gezeigt hat, die Bedingungsgleichung

(65) $$k^2 = (\beta^2 - 1)(\gamma^2 - 1)(\beta\gamma + \beta + \gamma - 1)(-\beta\gamma + \beta + \gamma + 1)$$

rational zu lösen. Hoppe tut dies durch Probieren und findet auf diesem Wege acht Zahlenbeispiele. Man kann aber mit Hülfe des Eulerschen Verfahrens rationell vorgehen. Setzt man zunächst etwa

(66) $$\beta\gamma = \gamma + 1,$$

eliminiert β und wendet auf die neue Form der Bedingungsgleichung das Eulersche Verfahren, von dem Anfangswert $\gamma = -1$ ausgehend, an, so gewinnt man eine unendliche Serie von Werten für γ, zu deren jedem wieder, unter Ausübung desselben Verfahrens an der Gleichung (65), unzählige zugehörige Werte für β gefunden werden können. Statt der Gleichung (66) könnte man u. a. auch

(67) $$\beta\gamma = -\gamma + 1$$

zugrunde legen. Jedes geeignete Wertepaar für β und γ liefert ein rat Tetraeder, wenn man

$$(68)\qquad \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3, \quad \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3, \quad \gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3,$$

also die Seiten kongruent annimmt. So erhält man aus (66), von γ ausgehend, das zu dem Wertepaare $\beta = \frac{7}{5}$, $\gamma = \frac{5}{3}$ gehörige Hop Beispiel

$$(69)\qquad a = a' = 195, \quad b = b' = 203, \quad c = c' = 148.$$

Im Anschluß an (66) gewinnt man hiernach folgende Darst eines rationalen Tetraeders, in der J den Inhalt der kongruenten bedeutet:

Falls

$$(70)\qquad q = \sqrt{(2p^2 + p + 1)(2p^2 - p - 1)}$$

rational ist, wird ein rationales Tetraeder erhalten aus

$$(71)\begin{cases} a = a' = p(p^2 + p + 1), \quad b = b' = (p+1)(p^2+1), \quad c = c' = 2p^2 + 2 \\ J = p^2(p+1)(p^2+p+1), \quad T = \frac{1}{3}p(p+1)^2(p^2+p+1)q. \end{cases}$$

Zahlenbeispiele hierzu ergeben sich u. a. für $p = \frac{5}{3}$ (Beispiel (69)), für $p = \frac{17}{15}$, nämlich

$$a = a' = 13\,073, \quad b = b' = 16\,448, \quad c = c' = 19\,695,$$

$$J = 106\,675\,680, \quad T = 323\,290\,060\,800,$$

sowie für $p = \frac{6833}{5152}$.

Wie der vorliegende Sonderfall, der eines rationalen Tetraede kongruenten Seiten, auch zu einer Darstellung durch einen willkür Parameter führt, möge bei einer späteren Gelegenheit dargelegt werd

20. Denkt man sich die Scheitel der den vier Ecken 0, 1, 2, Tetraeders zugehörigen Polardreikante in den Mittelpunkt einer Berüh kugel, etwa der einbeschriebenen Kugel, verlegt, so erkennt man, da Lösung der vorliegenden Aufgabe zugleich eine Lösung der folg darstellt: ein sphärisches vollständiges Viereck zu finden, in welche goniometrischen Funktionen aller sechs Seiten und zwölf Winkel rationa

Beitrag zur zeichnerischen Behandlung der Kegelschnitte.

Von Gerhard Hessenberg.

1. So durchsichtig und einfach die Theorie der Kegelschnitte an der Hand projektivischer Methoden sich gestaltet, so darf doch die Bedeutung solcher Methoden für die zeichnerisch-praktische Behandlung dieser wichtigen Kurven nur cum grano salis behauptet werden. Dies wird jeder an sich erfahren haben, der beispielsweise eine übersichtliche Figur des Pascalschen Sechsecks zu zeichnen versucht hat: Will man verhindern, daß Schnittpunkte zur Zeichenebene hinausfallen, so muß man auf Kosten der Übersichtlichkeit eine möglichst überschlagene Anordnung des Sechsecks wählen. Läßt man aber unter Beibehaltung einer einmal gewählten Anordnung einen Punkt des Sechsecks den Kegelschnitt der fünf übrigen durchlaufen, so fallen sofort wieder Schnittpunkte aus der Zeichenebene hinaus, und man ist daher, will man eine wirklich geschlossene Figur erhalten, gezwungen, die Anordnung wiederholt zu wechseln.

Die Möglichkeit, durch Wechsel der Anordnung geschlossene Figuren zu erhalten, bietet zwar die von Hauck mit Recht betonte *Modulationsfähigkeit*, aber sie tut des Guten zu viel; denn unter den 60 möglichen Anordnungen des Pascalschen Sechsecks schnell die jeweils günstigste herauszufinden, erfordert eine große Routine und einen geübten geometrischen Blick, namentlich darum, weil die günstigen Anordnungen gerade die überschlagenen sind. (Übrigens zeichnet sich das Brianchonsche Sechseck dadurch vorteilhaft vor dem Pascalschen aus, daß es in der nichtüberschlagenen Form die geschlossenste Figur liefert).

Hierzu kommt, daß theoretisch einfache Konstruktionen in technischer Hinsicht nicht immer einfach sind; unzugängliche oder flache Schnittpunkte sind für die Theorie eine quantité négligeable, für den Zeichner ein lästiger, störender Aufenthalt. Und umgekehrt sind für den Zeichner manche Konstruktionen völlig elementar, die in der Theorie durch Verknüpfung mit Existenzbeweisen zu Prinzipienfragen werden. Hierhin zählt das Lotefällen, Parallelenziehen und vor allem das Ziehen der Tangente an einen Kreis; den klassischen Halbkreis, der den Berührungspunkt ausschneidet, muß der Lehrer in darstellender Geometrie dem frisch von der Schule ankommenden Hörer meist mühsam wieder abgewöhnen. Auch die Sucht, durch möglichstes Zusammenziehen aller einzelnen Schritte an Konstruktionslinien zu sparen, ist ein der Theorie entsprungenes Übel, mit dem besonders in der Graphostatik gründlich aufgeräumt wird.

2. Hierdurch mag es begreiflich erscheinen, daß man in Lehrbüchern der darstellenden Geometrie sehr lange, wenn nicht überhaupt vergeblich nach einer brauchbaren *Konstruktion der Hauptachsen eines durch 5 Punkte gegebenen Kegelschnittes* suchen kann. Im Prinzip ist ja die Aufgabe einfach: durch einen der *fünf* Punkte zieht man zu einer der *sechs* nicht durch ihn laufenden gegebenen Sehnen die Parallele und bestimmt aus einem der *zwölf* möglichen Pascalschen Sechsecke ihren zweiten Schnittpunkt mit dem

Kegelschnitt. Zwei parallele Sehnen ergeben durch Verbindung ihrer Mittelpunkte einen Ort für das Kegelschnittszentrum und ein Paar konjugierter Richtungen d_1, d_1'. Die Wiederholung des Verfahrens gibt daher das Zentrum selbst und ein zweites Paar konjugierter Richtungen, d_2, d_2'.

An einem Hilfskreis findet man nun das zu $d_1\, d_1'$, $d_2\, d_2'$ involutorische Rechtwinkelpaar $a\,a'$, und die Bestimmung der Hauptachsenlängen erfordert danach die Anwendung bekannter Konstruktionen zur Ermittlung der Doppelelemente konjektiver Punktreihen. Die praktische Durchführung des Verfahrens krankt an dem Übelstand zu großer Modulationsfähigkeit. Ferner wird die Figur des Kegelschnitts selbst von Linien bis zur Unübersichtlichkeit überladen, und dabei ist die Bestimmung der Hauptachsen vielfach nur Mittel zum Zweck, d. h. Anfang einer weiteren Reihe von Konstruktionen. Der brauchbarste Gedanke des Verfahrens liegt in der Einführung der Hilfskreise.[1]) Ihn praktisch auszugestalten, ist der Zweck dieser Ausführungen.

3. Zieht man durch einen Punkt S eines Kreises Parallele zu den sechs Seiten eines vollständigen Vierecks mit den Ecken 1, 2, 3, 4, so schneiden diese den Kreis in sechs Punkten 12, 13, 14, 23, 24, 34. Diese liegen

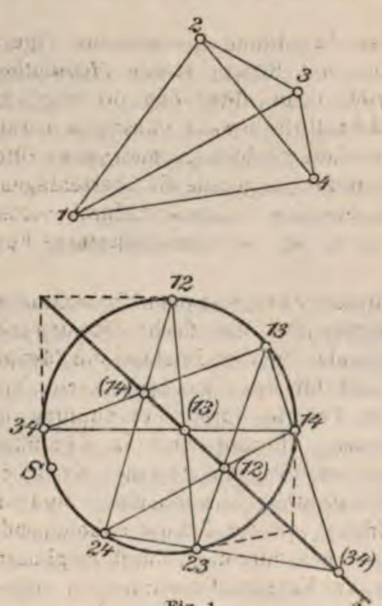


Fig. 1.

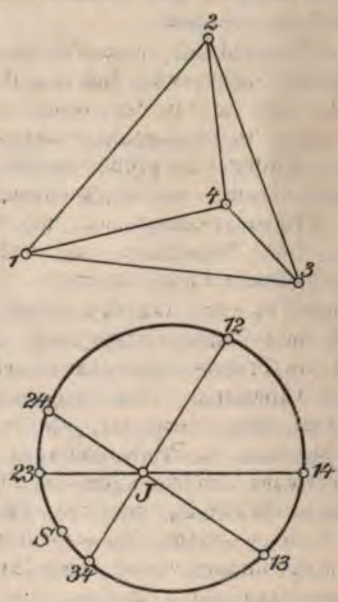


Fig. 2.

involutorisch, es gehen daher die Geraden (12, 34), (13, 24), (14, 23) durch einen Punkt J. (Fig. 2.) Fällt dieser aus der Zeichenebene, so ist sicher seine Polare erreichbar. Auf ihr schneiden sich dann die Geraden (12, 13), (42, 43) usf., ferner die Tangenten in 12 und 34, in 13 und 24, in 14 und 23. (Fig. 1.) Von diesen 9 Punkten der Polare können niemals alle

1) Diese Hilfskreise sind von den graphischen Methoden der Technik in einem Umfang adoptiert worden, der ihre Zweckmäßigkeit außer Zweifel setzt.

unzugänglich sein, und welche zugänglich sind, kann auch der Ungeübteste leicht überschauen.

Fünf Punkte 1, 2, 3, 4, 5 bestimmen fünf Vierecke: (I) = (2, 3, 4, 5), (II) = (3, 4, 5, 1) usw., deren Seitenrichtungen, von S aus auf den Hilfskreis übertragen, zehn Punkte und fünf Involutionszentra I bis V nebst den zugehörigen, ebenfalls mit I bis V zu benennenden Polaren ergeben. Diese Zentra liegen auf einer Geraden i, daher schneiden sich ihre Polaren in dem Pol J dieser Geraden. In dem Pascalschen Sechseck 13, 24, 15, 23, 14, 25 sind nämlich III, IV und V die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare. Die Gerade i kann, sofern sie überhaupt zugänglich ist (andernfalls ist ihr Pol J im Innern des Kreises gelegen, also zugänglich), mit großer Genauigkeit gefunden werden, da man günstigenfalls fünf ihrer Punkte und jeden durch drei seiner Geraden bestimmen kann. Trotz der großen Modulationsfähigkeit dieser Konstruktion sind die zugänglichen Elemente leicht zu übersehen. (Siehe Fig. 3, die kleine Hilfsfigur links unten.)

Es ist vielleicht angebracht, bereits an dieser Stelle zu betonen, daß der zweite Schnitt einer Geraden mit einem Kreise aus dem ersten, S, stets scharf zu bestimmen ist. Man hat nur von dem S diametral gegenüberliegenden Punkt S^* das Lot auf die Gerade zu fällen, was durch Verschieben des beim Parallelenziehen ohnehin benutzten Rechtwinkeldreiecks mit einem einzigen Griff erfolgt. Ebenso ist die Verbindungslinie zweier Punkte SQ des Kreises auch dann scharf zu bekommen, wenn SQ dicht beieinander liegen, da sie zu S^*Q senkrecht steht. Das Parallelenziehen selbst ist eine dem geübten Zeichner aus der Graphostatik geläufige Konstruktion.

Die Wahl des *„Übertragungspunktes“* S ist für die Zugänglichkeit von i oder J belanglos, da die Bogenabstände der Punkte 12, 13 usf. von der Wahl von S unabhängig sind.

4. Es sei jetzt 6 ein Punkt des Kegelschnitts (1 2 3 4 5). Dann sind die Büschel 1 (3 4 5 6) und 2 (3 4 5 6) projektiv, am Hilfskreis schneiden sich daher (13, 24), (23, 14); (13, 25), (12, 35); (13, 26), (12, 36) auf einer Geraden. Die Schnittpunkte der erstgenannten Paare sind aber V und IV, diese Gerade ist also i. Daraus folgt:

Sind p, q, r, s vier Punkte eines Kegelschnitts C, und zieht man zu den sechs Seiten des Vierecks $pqrs$ die Parallelen durch einen Punkt S des Hilfskreises K bis zum zweiten Schnitt pq, rs, etc. mit dem Hilfskreis, so schneiden sich die Geraden (pq, rs), (pr, sq), (ps, qr) auf einer, durch den Kegelschnitt, den Hilfskreis und den Übertragungspunkt S eindeutig festgelegten Geraden i.

Wir bezeichnen von nun an mit p' den zweiten Endpunkt des durch den Punkt p auf C gehenden Durchmessers und beschränken uns auf Zentralkegelschnitte. In dem Viereck $pp'qq'$ sind die Seiten pq, $p'q'$ parallel, ebenso $p'q$ und pq'. Ihnen entspricht daher auf K je ein Punkt $pq = p'q'$, $p'q = pq'$. Aus den Geraden $(pq, p'q')$, $(p'q, pq')$ werden Tangenten an K, und sie schneiden sich mit (pp', qq') auf i; somit geht $(p'q, pq)$ durch J. Nun sind aber die Richtungen $p'q$, pq konjugiert, woraus folgt, daß der Punkt J bereits das Involutionszentrum für die auf K übertragene Durchmesserinvolution von C darstellt. *Verbinden wir daher J mit dem Mittelpunkt O von K* (wenn J unzugänglich, fällen wir von O das Lot

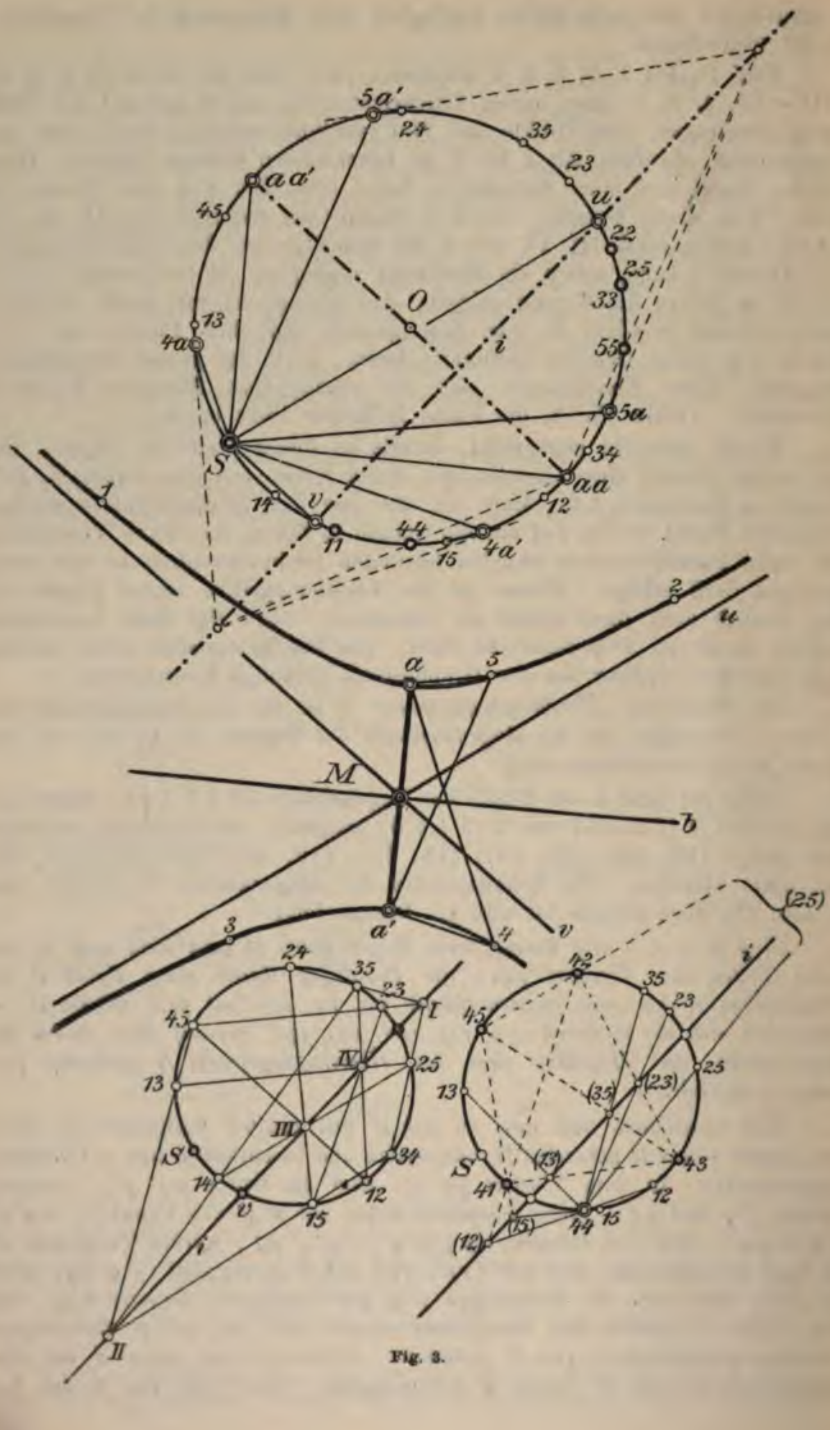

5a'
24
35
23
aa'
45
u
22
25
33
O
13
4a
i
55
5a
S
34
aa
1
14
v
12
11
44
4a'
15
2
u
a
5
M
b
(25)
3
a'
4
v
24
35
23
I
45
IV
25
13
III
S
34
14
12
v
15
II
42
35
23
45
25
13
(35)
(23)
S
(13)
43
41
12
(15)
44
15
(12)

Fig. 3.

auf i), *so geben die Endpunkte* aa', bb' *dieses Durchmessers, mit* S *verbunden, die Hauptachsenrichtungen von* C *an.* Diese lassen sich also aus fünf gegebenen Punkten von C am Hilfskreis K bestimmen, ohne daß in der Figur der fünf Punkte auch nur eine Linie gezogen wird. Ist C eine Hyperbel, so ergeben, wie man sofort sieht, die Schnitte u, v von i mit K die Asymptotenrichtungen von C. Demnach ist der Kegelschnitt C seiner Exzentrizität nach durch K und i völlig bestimmt; es müssen sich alle seine Proportionen am Hilfskreis allein bestimmen lassen.

5a. Sind die Endpunkte pp' eines Durchmessers gegeben, so können wir nach dem letzten Paragraphen die eines beliebigen anderen von bekannter Richtung konstruieren. Wir wählen als solchen aa', eine Hauptachse. Wir ziehen an K (pp', aa') bis zum Schnitt x mit i und von x aus die Tangenten an K. Sie berühren in $ap = a'p'$ und $a'p = ap'$ und geben damit die Richtungen der entsprechenden Sehnen an.

b. Da aa zu aa', pp zu pp' konjugiert ist, läßt sich x auch als Schnitt von (aa, pp) mit i bestimmen. Dies entspricht dem degenerierten Viereck (a, a, p, p) an C, in dem zwei Gegenseiten zu Tangenten aa, pp an C, die vier andern zur Sehne ap geworden sind.

c. Ist i unzugänglich, so bestimmt man die Polare von x, die direkt die gesuchten Berührungspunkte ausschneidet. Sie geht durch J, ferner durch die Schnittpunkte der Tangenten in aa', pp' und in aa, pp; sollten diese Tangentenschnittpunkte unzugänglich sein, so führt das Verfahren für die zweite Achse bb' sicher zum Ziele; die Richtungen ab, ab' werden durch das Lot in J auf (aa', bb') an K ausgeschnitten. Auch ist man niemals auf einen Durchmesser pp' allein angewiesen.

6a. Nun sind uns mit den fünf Punkten 1, 2, 3, 4, 5 zwar noch keine Durchmesser gegeben. Da wir aber zu den Sehnen 12, 13 etc. an K sofort die konjugierten Richtungen entnehmen können, sind wir im Besitz des Mittelpunktes M von C und erhalten daraus $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ und $5'$. Die Richtungen $11'$ etc. lassen sich aber bereits an K allein konstruieren. Zum Beispiel schneiden sich $(13, 1'2)$ und $(12, 1'3)$ auf i in y, und auf $(y, 23)$ liegt $11'$. Da $1'2$ zu 12 konjugiert ist, erhält man $1'2$, $1'3$ aus 12 und 13 über J.

b. Ist J unzugänglich, so betrachten wir das Viereck (1123) an C, in dem eine Seite zur Tangente 11 geworden ist. An K schneiden sich (11, 23) und (12, 13) in z auf i. Aus 11 erhält man nach § 5b die Richtungen $1a$, $1a'$.

c. Ist i unzugänglich, so polarisieren wir die letzte Konstruktion, indem wir die Polare zu z zeichnen. Sie geht durch J und den Schnittpunkt der Tangenten in 12, 13. Auf ihr treffen sich (11, 13), (12, 23) und ebenso (11, 12), (13, 23).

d. Sind zwei der Richtungen 11, $11'$ etc. bekannt, so kann man die Hauptachsen hiernach ohne Kenntnis des Mittelpunktes von C konstruieren, doch wird man zweckmäßigerweise nicht auf die gesonderte Konstruktion von M verzichten.

7. Von den Figuren 3 bis 5 behandelt 3 eine Hyperbel. Hierbei ist J unzugänglich. Die Konstruktion von i (§ 3) ist durch die erste kleine Hilfsfigur am unteren Ende der Tafel, die von 44 (§ 6b) durch die zweite

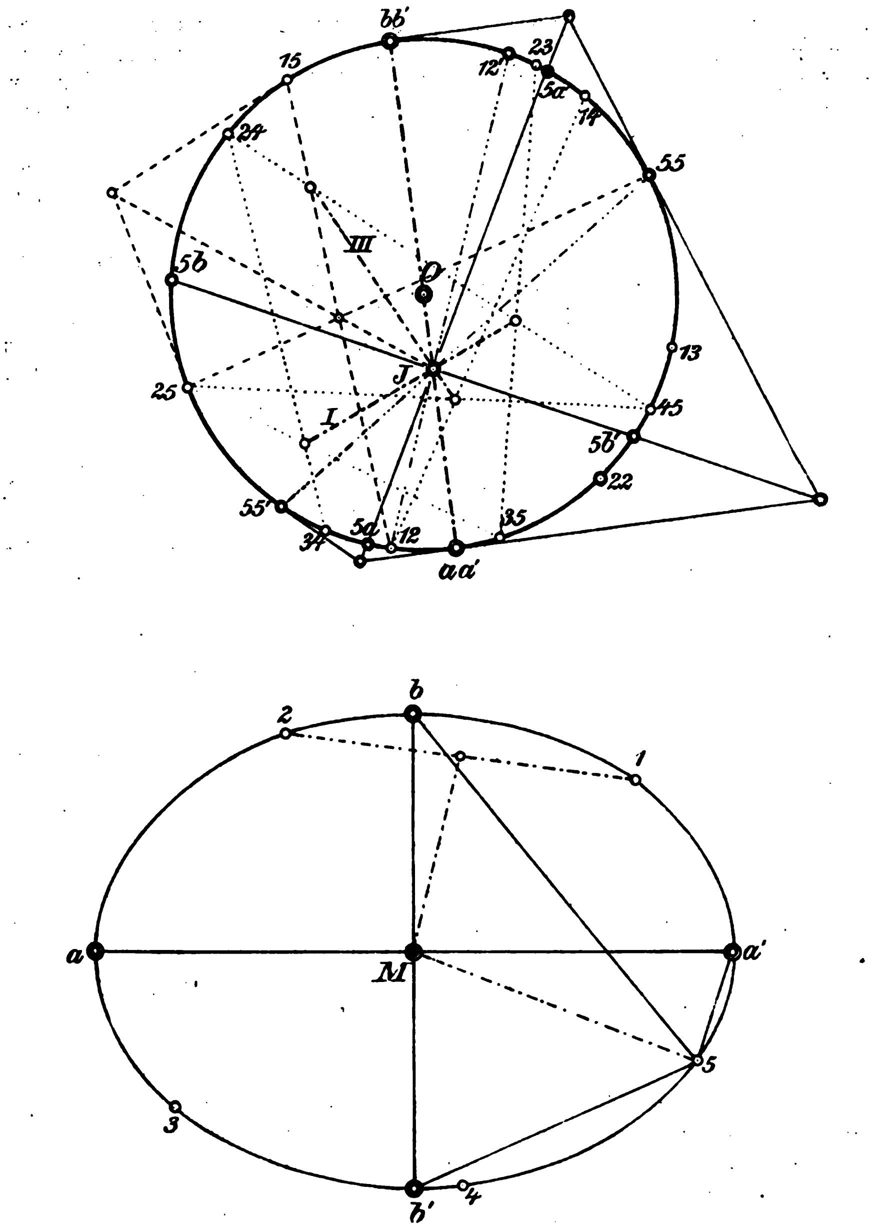


Fig. 4.

gesondert dargestellt, unter Verwendung aller zugänglichen Schnittpunkte. Die Hauptfigur des Hilfskreises *über* der Hyperbel zeigt gestrichelt die Konstruktion von $5a$, $5a'$, $4a$, $4a'$ (§ 5b). Die ausgezogenen Linien geben diejenigen Richtungen an, zu denen in der Figur von C Parallele ausgezogen sind. Es sind natürlich nicht die einzigen, die bei der Konstruktion wirklich benutzt wurden (§ 5d).

Fig. 4 zeigt eine Ellipse mit unzugänglichem *i*. Punktiert ist die Konstruktion der strichpunktierten Polaren von I und III (§ 3), gestrichelt die Konstruktion von 55 (§ 6c), durchgezogen die von $5a$, $5a'$, $5b$, $5b'$ (§ 5c). Übertragungspunkt S ist hier 12 auf K. Die Figur ist trotz der unnötig weit ausgezogenen Linien gut zu übersehen.

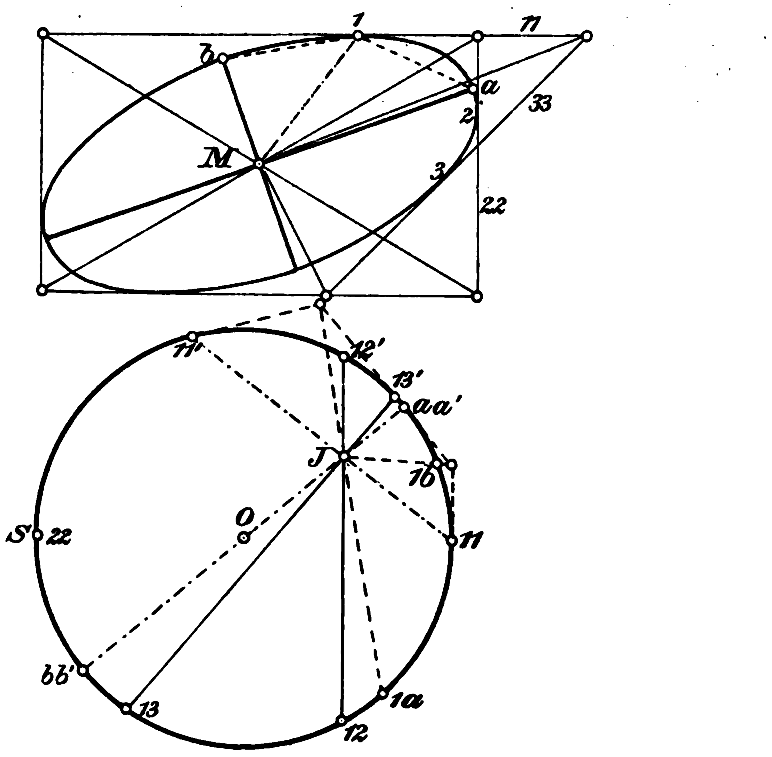


Fig. 5.

Fig. 5 gibt den speziellen, bei der Bestimmung der Trägheitsellipse auftretenden Fall wieder, daß von einer Ellipse der Mittelpunkt und drei Tangenten bekannt sind. Hier hat man sogleich drei Paar konjugierter Richtungen (angegeben sind nur zwei, 12, 12′, 13, 13′) aus den Diagonalen umgeschriebener Parallelogramme und mit ihnen Punkt J der Hilfsfigur. Da 11 bereits bekannt ist, erhält man weiter 11′, daraus in der Figur des Kegelschnitts durch die strichpunktierte Linie $M1 \parallel S11'$ den Punkt 1 (kontrollierbar durch ein Brianchon-Sechseck) und nunmehr a, b wie vorher.

Bemerkung zu meinem Vortrage über Vierecke mit rechtwinkligen Diagonalen (IV. Jahrgang, Seite 39—42).

Von M. Zacharias.

Wie mir mitgeteilt worden ist, sind die Sätze I und II des obigen Vortrags bereits früher in Form von Aufgaben in der Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht veröffentlicht und zwar I von Emmerich (Jahrg. XXVI, S. 427) und II von Meyer (Jahrg. XXI, S. 110).

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

49. Sitzung am 30. Januar 1907.

Vorsitzender: Herr Schafheitlin.

Bei der weiteren Beratung über die Eulerfeier wird beschlossen, am 15. April, dem zweihundertsten Geburtstag Leonhard Eulers, um 6 Uhr in dem großen Hörsaal des Physikalischen Instituts eine Festsitzung zu veranstalten, wo Herr Valentin über Eulers Aufenthalt in Berlin, Herr Kneser über Euler und die Variationsrechnung, und Herr Kötter über Euler und das Kreiselproblem sprechen werden. Im Anschluß an die Festsitzung werden sich die Teilnehmer zu einem einfachen Abendessen im Restaurant Heidelberger, Dorotheenstraße 18/21 vereinigen.

Anwesend: 36 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Rothe: Über einen Satz aus der Vektorenrechnung.

Herr Meißner: Über einige arithmetische Funktionen.

50. Sitzung am 27. Februar 1907.

Vorsitzender: Herr Schafheitlin.

Anwesend: 33 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Wallenberg: Zur Theorie der homogenen linearen Differenzengleichungen zweiter Ordnung (s. S. 25).

Herr Güntsche: Rationale Tetraeder von kongruenten Seiten.

Beitrag zur Theorie der homogenen linearen Differenzengleichungen zweiter Ordnung.

Von Georg Wallenberg.

Die Differenzenrechnung, die ältere Schwester der Differentialrechnung, ist von ihrer jüngeren Schwester weit überholt worden. Während die Differentialrechnung sich seit ihrer Erfindung kontinuierlich weiter entwickelt hat und insbesondere die Theorie der Differentialgleichungen schon heute einen imposanten Bau darstellt, an dem noch immer weiter gearbeitet wird und dessen Fortführung zu ungemessenen Höhen führt, ist die Differenzenrechnung bis vor kurzem gewissermaßen ein „enfant arriéré“ geblieben, obwohl gerade sie berufen erscheint, wegen ihrer vielfachen Anwendungen in der mit endlichen Differenzen operierenden Praxis eine große Bedeutung zu gewinnen. Der Torso der bisher gewonnenen Resultate, an denen Jakob Bernoulli, Lagrange und besonders Euler hervorragenden Anteil besitzen, ist in wenigen Lehrbüchern niedergelegt, von denen aber eigentlich nur das neuere Werk von Markoff (deutsch von Friesendorf und Prym) Anspruch auf die heutzutage unerläßliche Strenge der Beweisführung erheben darf; (zur Einführung in dieses Gebiet kann das vortreffliche Büchlein von Seliwanoff, der diese Disziplin auch für die Enzyklopädie bearbeitet hat, empfohlen werden). — Erst in neuester Zeit hat man angefangen, sich mit den Differenzengleichungen systematisch zu beschäftigen: einerseits hat man begonnen, die linearen Differenzengleichungen erster Ordnung funktionentheoretisch zu behandeln (Boole, Pincherle, Guichard; für komplexe Variable Appell, Mellin, Prym, Hurwitz und Barnes), anderseits hat ein Landsmann Abels und Lies, Alf Guldberg aus Christiania, in einer Reihe von Arbeiten gezeigt, daß die Analogie zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen viel weiter reicht als man bisher ahnte, derart daß die meisten über die linearen Differentialgleichungen gewonnenen Resultate sich direkt auf Differenzengleichungen, natürlich cum grano salis, übertragen lassen, so der Begriff der Reduktibilität, die ganze Picard-Vessiotsche Gruppentheorie, welche bekanntlich der Galoisschen Gruppentheorie der algebraischen Gleichungen entspricht, die Theorie der adjungierten und assoziierten Differentialgleichungen usw. Insbesondere sind es „homogene“ Probleme, die sich ohne erhebliche Schwierigkeiten auf Differenzengleichungen übertragen lassen, und ich selber bin dabei, meine Untersuchungen über die Vertauschbarkeit der homogenen linearen Differentialausdrücke (C. R. **134** (1902); Arch. d. Math. u. Phys. (3) **4** (1903), 252—268) sowie die daran anknüpfende Arbeit von Schur aus den Ber. der Berliner Math. Ges. **4** (1905), 2—8 auf Differenzengleichungen zu übertragen.

In meinem heutigen Vortrage habe ich mir nun das Ziel gesteckt, gerade ein *nicht* homogenes Problem zu behandeln, bei dem die Schwierigkeiten der Übertragung viel beträchtlicher sind und neben den Analogien zwischen Differential- und Differenzengleichungen markante Unterschiede in der Untersuchungsmethode auftreten. Zur besseren Vergleichung will ich das entsprechende Problem zuerst für lineare *Differentialgleichungen* zweiter Ordnung erledigen im Anschluß an eine Arbeit im Journ. für die reine u. angew. Math. (Bd. 111 (1893), 89—97), wo ich dieses Problem allgemein für Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung erledigt habe.

I.

Zwischen den Fundamentalintegralen y_1 und y_2 der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{d z^2} + p_1(z)\frac{dy}{dz} + p_2(z) y = 0$$

möge eine algebraische Relation mit konstanten Koeffizienten bestehen:

$$(2) \qquad F(y_1, y_2) = 0 \quad \text{oder} \quad (2') \qquad y_2 = f(y_1),$$

wo f eine algebraische Funktion von y_1 bedeutet. *Welche Schlüsse kann man daraus auf den Funktionscharakter von y_1 und y_2 selber ziehen?* Dies ist das in Frage stehende Problem. — Durch Differentiation von (2′):

$$\frac{dy_2}{dz} = f'(y_1)\frac{dy_1}{dz}, \quad \frac{d^2y_2}{dz^2} = f''(y_1)\left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2 + f'(y_1)\frac{d^2y_1}{dz^2}$$

ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichung (1):

$$(3) \qquad \left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2 = p_2\frac{y_1 f'(y_1) - f(y_1)}{f''(y_1)}.$$

Ferner ist bekanntlich:

$$(4) \qquad y_1\frac{dy_2}{dz} - y_2\frac{dy_1}{dz} = C_1 e^{-\int p_1 dz} = (y_1 f'(y_1) - f(y_1))\frac{dy_1}{dz}.$$

Durch Elimination von $\frac{dy_1}{dz}$ aus (3) und (4) erhält man:

$$(5) \qquad C\frac{e^{-2\int p_1 dz}}{p_2} = \frac{(y_1 f'(y_1) - f(y_1))^3}{f''(y_1)} \qquad (C = C_1^2)$$

Dies ist eine algebraische Beziehung zwischen y_1, p_2 und $e^{\int p_1 dz}$; ist also p_2 eine algebraische Funktion und p_1 die logarithmische Ableitung einer algebraischen Funktion von z, so ist y_1 und daher wegen (2) auch y_2 selber eine algebraische Funktion von z.

Diese Beziehung kann illusorisch werden:

I. Wenn $f''(y_1) = 0$, also $y_2 = f(y_1) = c_1 y_1 + c_2$ und $p_2 = 0$ ist; die Differentialgleichung (1) lautet in diesem Falle $\frac{d^2y}{dz^2} + p_1\frac{dy}{dz} = 0$ und ist nun keiner weiteren Bedingung unterworfen, da die Relation $y_2 = c_1 y_1 + c_2$ hier von selbst erfüllt ist. Ihr allgemeines Integral $y = c_1\int e^{-\int p_1 dz} dz + c_2$ braucht *nicht* algebraisch zu sein.

II. Wenn $y_1 f'(y_1) - f(y_1) = 0$, also $C = 0$ ist; in diesem Falle lautet die Relation (2) $y_2 = cy_1$, d. h. y_1 und y_2 würden kein Fundamentalsystem bilden. Dieser Fall ist also auszuschließen.

III. Wenn der Quotient $\frac{(y_1 f'(y_1) - f(y_1))^3}{f''(y_1)}$ eine von Null verschiedene Konstante wird; dann wird auch die linke Seite von (5) eine Konstante, also

$$p_2 = ce^{-2\int p_1 dz} \quad \text{oder} \quad p_1 = -\tfrac{1}{2}\frac{p_2'}{p_2}.$$

Die Differentialgleichung (1) lautet dann, wenn noch $-p_2$ an Stelle von p_2 geschrieben wird:

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \tfrac{1}{2}\frac{p_2'}{p_2}\frac{dy}{dz} - p_2 y = 0.$$

Ein Fundamentalsystem von Integralen dieser Differentialgleichung ist bekanntlich

$$\eta_1 = e^{+\int\sqrt{p_2}dz}, \quad \eta_2 = e^{-\int\sqrt{p_2}dz};$$

dieselben genügen der Relation $\eta_1 \cdot \eta_2 = 1$. Die Integrale brauchen in diesem Falle *nicht* algebraisch zu sein.

Dies findet man auch durch Betrachtung der rechten Seite von (5); es sei der dort stehende Quotient gleich der Konstanten $-a$, also:

(6) $$(y_1 f'(y_1) - f(y_1))^3 + a f''(y_1) = 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung für $f(y_1)$; um $f(y_1)$ daraus zu bestimmen, setze man

(7) $$y_1 f'(y_1) - f(y_1) = u;$$

dann wird $y_1 f''(y_1) = \frac{du}{dy_1}$; also ergibt sich aus (6):

$$u^3 + a \frac{1}{y_1} \frac{du}{dy_1} = 0 \quad \text{oder} \quad -a \frac{du}{u^3} = y_1 dy_1.$$

Durch Integration erhält man

$$\frac{a}{2} \frac{1}{u^2} = \frac{y_1^2}{2} + \frac{C_2}{2}, \quad \text{d. h.} \quad u = \sqrt{\frac{a}{y_1^2 + C_2}},$$

also wegen (7):

$$y_1 f'(y_1) - f(y_1) = \sqrt{\frac{a}{y_1^2 + C_2}}$$

oder

$$f'(y_1) - \frac{1}{y_1} f(y_1) - \frac{1}{y_1} \sqrt{\frac{a}{y_1^2 + C_2}} = 0.$$

Die nochmalige Integration ergibt

$$f(y_1) = C_1 y_1 + y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \sqrt{\frac{a}{y_1^2 + C_2}}\, dy_1$$

oder

$$y_2 = f(y_1) = C_1 y_1 - \frac{\sqrt{a}}{C_2} \sqrt{C_2 + y_1^2},$$

d. h.

$$(y_2 - C_1 y_1)^2 = \frac{a}{C_2^2} (C_2 + y_1^2)$$

oder

(8) $$y_2^2 + 2 a_1 y_1 y_2 + a_2 y_1^2 = a_3,$$

worin $a_1 = -C_1$, $a_2 = C_1^2 - \frac{a}{C_2^2}$, $a_3 = \frac{a}{C_2}$ ist; da C_1, C_2 und a willkürlich, so sind auch a_1, a_2 und a_3 willkürliche Konstanten. — Hier ist also eine binäre Form zweiten Grades der Fundamentalintegrale gleich einer Konstanten. Schreibt man die Relation (8): $(y_2 + \alpha y_1)(y_2 + \beta y_1) = a_3$ und setzt $\frac{1}{a_3} y_2 + \frac{\alpha}{a_3} y_1 = \eta_1$, $y_2 + \beta y_1 = \eta_2$, so erhält man sie in der bereits oben gefundenen Form $\eta_1 \cdot \eta_2 = 1$.

II.

Dasselbe Problem soll nunmehr für lineare *Differenzen*gleichungen zweiter Ordnung behandelt werden: Zwischen zwei Fundamentalintegralen η_x und ζ_x der homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung

(A) $$y_{x+2} = p_x y_{x+1} + q_x y_x$$

bestehe eine irreduktible algebraische Beziehung mit konstanten Koeffizienten:

$$F(\eta_x, \zeta_x) = 0$$

oder

(B) $$\zeta_x = f(\eta_x);$$

dann ist

$$\zeta_{x+1} = f(\eta_{x+1}), \quad \zeta_{x+2} = f(\eta_{x+2});$$

also mit Rücksicht auf (A):

(1) $$f(p_x \eta_{x+1} + q_x \eta_x) - p_x f(\eta_{x+1}) - q_x f(\eta_x) = 0.$$

Die Differenzengleichung (A) ist also jedenfalls i. a. reduktibel in dem weiteren Sinne, daß die Partikularlösung η_x einer *nicht* linearen Differenzengleichung erster Ordnung genügt, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereiche von (A) angehören. Wir können aber mehr erschließen: es besteht nämlich die leicht ersichtliche Relation

$$\begin{vmatrix} \eta_{x+1} & \zeta_{x+1} \\ \eta_{x+2} & \zeta_{x+2} \end{vmatrix} = - q_x \begin{vmatrix} \eta_x & \zeta_x \\ \eta_{x+1} & \zeta_{x+1} \end{vmatrix}.$$ [1])

Setzt man $\begin{vmatrix} \eta_x & \zeta_x \\ \eta_{x+1} & \zeta_{x+1} \end{vmatrix} = d_x$, so lautet diese Gleichung: $d_{x+1} = - q_x d_x$; daraus ergibt sich $d_x = C \prod_0^{x-1} (- q_i) = C(-1)^x q_0 \cdot q_1 \ldots q_{x-1}$.[2])

Wir haben also außer (1) noch die Gleichung:

(2) $$\eta_x f(\eta_{x+1}) - \eta_{x+1} f(\eta_x) = d_x.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt sich durch Elimination von η_{x+1} im allgemeinen η_x, also nach (B) auch ζ_x als algebraische Funktion von p_x, q_x und d_x; sind diese Größen selber algebraische Funktionen von x, so ist demnach *die allgemeine Lösung der Gleichung* (A) *eine algebraische Funktion von x.*

Es kommt nun der interessantere, aber auch bei weitem schwierigere Teil der Untersuchung, die Erledigung des Ausnahmefalles, d. h. die Beantwortung der Frage: Wann ist die Elimination von η_{x+1} aus den beiden Gleichungen

(1) $$f(p_x \eta_{x+1} + q_x \eta_x) - p_x f(\eta_{x+1}) - q_x f(\eta_x) = 0$$

(2) $$\eta_{x+1} f(\eta_x) - \eta_x f(\eta_{x+1}) + d_x = 0$$

unmöglich? — Zunächst könnte Gleichung (1) eine Identität sein; das ist aber nur dann der Fall, wenn f eine lineare Funktion ihres Argumentes und $p_x + q_x = 1$ ist. Die Differenzengleichung (A) besitzt in diesem Falle ein *konstantes* Partikularintegral (an Stelle dieser Konstanten kann auch all-

1) Eine analoge Beziehung gilt für Differenzengleichungen n^{ter} Ordnung; sie rührt von W. Heymann her (J. für Math. **109**, 114) und entspricht der bekannten, für Differentialgleichungen geltenden Abelschen Relation $\Delta = Ce^{-\int p_1 dx}$, worin Δ die Wronskische Determinante eines Fundamentalsystems von Integralen bedeutet.

2) Siehe z. B. Seliwanoff, Differenzengleichungen, S. 70; dort ist auch die Modifikation angegeben für den Fall, daß eine der Größen q_i verschwindet oder unendlich wird.

gemeiner eine periodische Funktion von der Periode 1, etwa $e^{2\pi i x}$, treten); es besteht daher zwischen zwei beliebigen Fundamentallösungen η_x, ζ_x von (A) ohne weiteres die Beziehung

$$\zeta_x = C_1 \eta_x + C_2;$$

das allgemeine Integral braucht in diesem Falle *nicht* algebraisch zu sein. Dieser Fall $p_x + q_x = 1$ kann nunmehr für das Folgende ausgeschlossen werden. — Im übrigen ist die Elimination von η_{x+1} aus (1) und (2) dann und nur dann unmöglich, wenn diese beiden Gleichungen nicht unabhängig von einander sind, d. h. wenn die Funktionaldeterminante ihrer linken Seiten verschwindet. Setzt man zur Abkürzung $p_x = p$, $q_x = q$, $\eta_{x+1} = u$, $\eta_x = v$, $pu + qv = w$, so erhält man als gesuchte Bedingung:

$$\text{(3)} \qquad \begin{vmatrix} pf'(w) - pf'(u), & qf'(w) - qf'(v) \\ f(v) - vf'(u), & uf'(v) - f(u) \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine „Differential-Funktionalgleichung“ für f, und es ist zu untersuchen, ob dieser durch eine *algebraische* Funktion genügt werden kann. Um dieses Problem der Behandlung zugänglicher zu machen, müssen wir es zu einem rationalen zu gestalten suchen; dies gelingt durch folgende Bemerkung: setzt man $\zeta_{x+1} = r$, $\zeta_x = s$, $pr + qs = t$, so ist nach (B): $r = f(u)$, $s = f(v)$ und infolge von (1) $t = f(w)$ oder in rationaler Form: $F(u, r) = 0$, $F(v, s) = 0$, $F(w, t) = 0$.

Durch Differentiation ergibt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{dr}{du} = 0, \quad \frac{dr}{du} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial r}};$$

d. h. $\frac{dr}{du} = f'(u)$ ist eine rationale Funktion von u und r:

$$f'(u) = R(u, r); \quad \text{ebenso} \quad f'(v) = R(v, s), \quad f'(w) = R(w, t).$$

Die Bedingungsgleichung (3) nimmt dann die rationale Form an:

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} &prR(u, r) + qsR(v, s) - wR(u, r)R(v, s) \\ &+ R(w, t)(puR(v, s) + qvR(u, r) - t) = 0, \end{aligned}$$

und zwar muß diese Gleichung eine *Identität* werden, wenn man darin $r = f(u)$, $s = f(v)$, $w = pu + qv$, $t = pf(u) + qf(v)$ einsetzt. Setzt man daher $v = u$, also $s = r$, und $p + q = \alpha$ in (4), so erhält man:

$$\alpha r R(u, r) - \alpha u R^2(u, r) + R(\alpha u, \alpha r)(\alpha u R(u, r) - \alpha r) = 0$$

oder

$$(R(\alpha u, \alpha r) - R(u, r))(uR(u, r) - r) = 0$$

für ein willkürliches α. Wäre $R(u, r) = \frac{r}{u}$ (unter der Bedingung $r = f(u)$ oder $F(u, r) = 0$), d. h. $\frac{dr}{du} = \frac{r}{u}$, so würde sich ergeben $r = Cu$ und ebenso $s = Cv$; dieser Fall ist auszuschließen, da $s = \zeta_x$ und $v = \eta_x$ als Fundamentallösungen vorausgesetzt waren. Es bleibt also

$$R(\alpha u, \alpha r) = R(u, r)$$

unter der Bedingung $r = f(u)$, wobei zu bemerken ist, daß $f(u)$ von α unabhängig ist. Ist

$$R(u, r) = \frac{P(u, r)}{Q(u, r)},$$

worin P und Q Polynome bedeuten, so muß daher

$$Z \equiv P(\alpha u, \alpha r) Q(u, r) - Q(\alpha u, \alpha r) P(u, r)$$

durch $F(u, r)$ teilbar sein. Es sei nach Dimensionen geordnet

$$P(u, r) = P_m + P_{m-1} + \cdots + P_1 + P_0 \quad (P_m \neq 0),$$
$$Q(u, r) = Q_n + Q_{n-1} + \cdots + Q_1 + Q_0,$$

worin einige der P_i oder Q_i, aber nicht alle, gleich 0 sein können, also:

$$P(\alpha u, \alpha r) = \alpha^m P_m + \alpha^{m-1} P_{m-1} + \cdots + \alpha P_1 + P_0,$$
$$Q(\alpha u, \alpha r) = \alpha^n Q_n + \alpha^{n-1} Q_{n-1} + \cdots + \alpha P_1 + Q_0.$$

Zunächst sei $m > n$, dann wird $Z \equiv \alpha^m P_m Q + \cdots$; es muß also $P_m Q$ durch $F(u, r)$ teilbar sein und, da $F(u, r)$ irreduktibel, entweder P_m oder Q, was unmöglich ist, da beide von kleinerer Dimension als F sind; dieselbe Überlegung gilt auch für $m < n\,(Q_n \neq 0)$; es muß also zunächst $m = n$ sein. Dann wird:

$$Z \equiv \alpha^m (P_m Q - Q_m P) + \alpha^{m-1}(P_{m-1} Q - Q_{m-1} P) + \cdots + \alpha^k (P_k Q - Q_k P),$$

wenn P_k, Q_k die Glieder niedrigster Dimension bezeichnen; und zwar sind P_i, Q_i stets gleichzeitig von Null verschieden oder gleich Null, da sonst die obige Schlußweise eintritt. Es muß nun $P_i Q - Q_i P$ $(i = k, \ldots m)$ durch $F(u, r)$ teilbar sein; insbesondere muß also unter der Bedingung $F(u, r) = 0$

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_k}{Q_k}$$

werden. Wir können daher setzen

$$R(u, r) \equiv \frac{P_k(u, r)}{Q_k(u, r)},$$

worin P_k und Q_k homogene Polynome k^{ter} Dimension in u und r bezeichnen; alsdann ist übrigens *identisch*, d. h. auch ohne die Bedingung $F(u, r) = 0$:

$$R(\alpha u, \alpha r) = R(u, r).$$

Wir werden nunmehr nachweisen, daß $k = 1$ sein muß. Es sei zunächst $k = 2$, also:

$$P(u, r) = \alpha_1 u^2 + 2\beta_1 ur + \gamma_1 r^2, \quad Q(u, r) = \alpha_2 u^2 + 2\beta_2 ur + \gamma_2 r^2;$$
$$P(v, s) = \alpha_1 v^2 + 2\beta_1 vs + \gamma_1 s^2, \quad Q(v, s) = \alpha_2 v^2 + 2\beta_2 vs + \gamma_2 s^2.$$

Dann ist:

$$P(pu + qv, pr + qs) = p^2 P(u, r) + 2pqP_1 + q^2 P(v, s),$$
$$Q(pu + qv, pr + qs) = p^2 Q(u, r) + 2pqQ_1 + q^2 Q(v, s),$$

worin

$$P_1 = \alpha_1 uv + \beta_1 (us + vr) + \gamma_1 rs, \quad Q_1 = \alpha_2 uv + \beta_2 (us + vr) + \gamma_2 rs$$

gesetzt ist. — Wenn man $R = \frac{P}{Q}$ in (4) einsetzt, so erhält man:

$$(5)\quad \begin{cases} p(rQ(v,s) - uP(v,s))(P(u,r)Q(pu+qv, pr+qs) \\ \qquad - Q(u,r)P(pu+qv, pr+qs)) \\ + q(sQ(u,r) - vP(u,r))(P(v,s)Q(pu+qv, pr+qs) \\ \qquad - Q(v,s)P(pu+qv, pr+qs)) = 0. \end{cases}$$

Da die Gleichung (5) eine Identität wird, wenn man darin $r = f(u)$ und $s = f(v)$ einsetzt, und da $f(u)$ von p und q unabhängig ist, so müssen, wenn man in (5) für P und Q ihre obigen Werte einträgt und nach Potenzen von p und q ordnet, die Koeffizienten der einzelnen Potenzen verschwinden. Der Koeffizient von p^3 wird:

$$(rQ(v,s) - uP(v,s))(P(u,r)Q(u,r) - Q(u,r)P(u,r)),$$

der Koeffizient von q^3:

$$(sQ(u,r) - vP(u,r))(P(v,s)Q(v,s) - Q(v,s)P(v,s));$$

dieselben sind ohne weiteres identisch gleich Null. Ferner werden die Koeffizienten von p^2q bez. pq^2:

$$(6)\quad \begin{cases} (P(v,s)Q(u,r) - Q(v,s)P(u,r))(sQ(u,r) - vP(u,r)) \\ \qquad + 2(P(u,r)Q_1 - Q(u,r)P_1)(rQ(v,s) - uP(v,s)) = 0, \\ 2(P(v,s)Q_1 - Q(v,s)P_1)(sQ(u,r) - vP(u,r)) \\ \qquad + (P(u,r)Q(v,s) - Q(u,r)P(v,s))(rQ(v,s) - uP(v,s)) = 0. \end{cases}$$

Es kann nicht gleichzeitig

$$sQ(u,r) - vP(u,r) = 0,$$
$$rQ(v,s) - uP(v,s) = 0$$

sein; denn wenn diese beiden Gleichungen, die auch in der Form

$$(7)\quad \begin{cases} f(v) - vf'(u) = 0, \\ f(u) - uf'(v) = 0 \end{cases}$$

geschrieben werden können, von einander unabhängig sind, so ergeben sich aus ihnen u und v als Konstanten, und zwar ist, da $v = \eta_x$, $u = \eta_{x+1}$, die einzig brauchbare Lösung $u = v$, wo v eine Wurzel der Gleichung $f(v) - vf'(v) = 0$ ist; dieser Fall eines konstanten Integrals ist aber bereits oben (S. 29, 30) erledigt worden. Sind dagegen die Gleichungen (7) nicht unabhängig von einander, so muß, wie man sich durch Betrachtung ihrer Funktionaldeterminante leicht überzeugt, $f(u) = cu$, $f(v) = cv$, d. h. $\zeta_x = c\eta_x$ sein, und dieser Fall ist auszuschließen, da η_x und ζ_x Fundamentalintegrale von (A) sind. Es folgt daher aus den Gleichungen (6), daß die Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} P(v,s)Q(u,r) - Q(v,s)P(u,r), & 2(P(u,r)Q_1 - Q(u,r)P_1 \\ 2(P(v,s)Q_1 - Q(v,s)P_1, & P(u,r)Q(v,s) - Q(u,r)P(v,s) \end{vmatrix} = 0$$

sein muß. Es ist aber:

$$\Delta = -(us - vr)^4 [(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)^2 - 4(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)].$$

Aus $us - vr = 0$ würde folgen $\frac{u}{r} - \frac{v}{s} = 0$, d. h. $\frac{\eta_{x+1}}{\zeta_{x+1}} - \frac{\eta_x}{\zeta_x} = 0$, also $\frac{\eta_x}{\zeta_x} =$ const.; dieser Fall ist wieder auszuschließen; es bleibt daher:

$$(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)^2 - 4(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) = 0.$$

Diese Gleichung stellt aber die Bedingung dafür dar, daß $P(u, r)$ und $Q(u, r)$ einen gemeinsamen linearen Faktor besitzen. Ganz in derselben Weise zeigt man, daß, wenn $P(u, r)$ und $Q(u, r)$ von der k^{ten} Dimension in u und r angenommen werden, sie $k - 1$ gemeinsame lineare Faktoren besitzen. Denkt man sich in $R(u, r) = \frac{P(u, r)}{Q(u, r)}$ diese gemeinsamen Faktoren fortgehoben, so kann man demnach $P(u, r)$ und $Q(u, r)$ von der ersten Dimension voraussetzen:

$$P(u, r) = \alpha u + \beta r, \quad Q(u, r) = \gamma u + \delta r,$$

und analog:

$$P(v, s) = \alpha v + \beta s, \quad Q(v, s) = \gamma v + \delta s;$$

darin muß $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$ sein, da sonst $\frac{ds}{dv} = \frac{P(v, s)}{Q(v, s)} = c$, also $s = cv + c_1$, d. h. $\zeta_x = c\eta_x + c_1$ wäre, ein Fall, der oben (S. 30) erledigt worden ist. Setzt man diese Werte von P und Q in die Gleichung (5) ein und ordnet wieder nach Potenzen von p und q, so verschwinden die Koeffizienten von p^2 und q^2 identisch, und der Koeffizient von pq wird:

$$-(\alpha\delta - \beta\gamma)(\beta + \gamma)(us - vr)^2;$$

es muß daher $\beta + \gamma = 0$ sein, d. h.

$$\frac{ds}{dv} = \frac{\alpha v + \beta s}{-\beta v + \delta s}$$

oder:

$$(\alpha v + \beta s)\,dv + (\beta v - \delta s)\,ds = 0.$$

Daraus folgt durch Integration die Beziehung:

$$\alpha v^2 + 2\beta vs - \delta s^2 = c, \text{ d. h. } \alpha\eta_x^2 + 2\beta\eta_x\zeta_x - \delta\zeta_x^2 = c.$$

Dies ist die gesuchte algebraische Relation zwischen η_x und ζ_x im Ausnahmefalle; sie ist der für die entsprechende Differentialgleichung gefundenen ganz analog. Dividiert man durch c und zerlegt die linke Seite in Faktoren, so ergibt sich:

$$(a_1\eta_x + a_2\zeta_x)(b_1\eta_x + b_2\zeta_x) = 1,$$

worin die Konstanten a_i, b_i der Bedingung $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ genügen, da man sonst wieder auf den Fall $\zeta_x = c\eta_x + c_1$ zurückkommt. Setzt man die neuen Fundamentalintegrale $a_1\eta_x + a_2\zeta_x = u_x$, $b_1\eta_x + b_2\zeta_x = v_x$, so wird $u_x v_x = 1$, d. h. die Differenzengleichung (A) ist *reziprok*.

Es erübrigt noch, die Bedingungsgleichung dafür aufzustellen: Besitzt die Differenzengleichung (A) zwei Fundamentalintegrale u_x und v_x derart, daß $v_x = \frac{1}{u_x}$, so ist (vergl. S. 29):

$$\frac{1}{p_x u_{x+1} + q_x u_x} - \frac{p_x}{u_{x+1}} - \frac{q_x}{u_x} = 0,$$

oder:

(1)
$$\frac{u_x}{u_{x+1}} + \frac{u_{x+1}}{u_x} = \frac{1 - p_x^2 - q_x^2}{p_x q_x} = h_x,$$

ferner:

(2)
$$\frac{u_x}{u_{x+1}} - \frac{u_{x+1}}{u_x} = d_x.$$

Daraus ergibt sich die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$h_x^2 - d_x^2 = 4;$$

und es wird:

$$\frac{u_{x+1}}{u_x} = \tfrac{1}{2}(h_x - d_x), \quad \frac{v_{x+1}}{v_x} = \frac{u_x}{u_{x+1}} = \tfrac{1}{2}(h_x + d_x),$$

also:

$$u_x = \prod_0^{x-1} \tfrac{1}{2}(h_x - d_x), \quad v_x = \prod_0^{x-1} \tfrac{1}{2}(h_x + d_x).$$

Die Integrale u_x und v_x brauchen in der Tat keine algebraischen Funktionen von p_x und q_x zu sein, obwohl hier d_x eine algebraische Funktion von p_x und q_x ist $\left(d_x = \sqrt{h_x^2 - 4}\right)$.

Die Spezialfälle $q_x = 0$, $p_x = 0$.

I. $q_x = 0$.

Die Differenzengleichung $y_{x+2} = p_x y_{x+1}$ wird durch die Substitution $y_{x+1} = z_x$ auf die lineare Differenzengleichung erster Ordnung $z_{x+1} = p_x z_x$ zurückgeführt, deren *sämtliche* Integrale sich nur durch eine Konstante unterscheiden.

II. $p_x = 0$.

Besteht zwischen den Fundamentalintegralen u_x und v_x der Differenzengleichung

$$y_{x+2} = q_x y_x$$

die algebraische Beziehung mit konstanten Koeffizienten $v_x = f(u_x)$, so ist

$$f(q_x u_x) - q_x f(u_x) = 0;$$

diese Gleichung wird nur dann *identisch* erfüllt, wenn $f(u_x) = c u_x$, was unzulässig, oder wenn $q_x = 1$ ist. Ist das nicht der Fall, so bilde man mit den konjugierten Werten der algebraischen Funktion f das Produkt:

$$F(q_x, u_x) = \prod (f_i(q_x u_x) - q_x f_i(u_x)) = 0.$$

F ist eine rationale Funktion von q_x und u_x; es ergibt sich also im allgemeinen eine algebraische Beziehung zwischen u_x und q_x und daher auch zwischen $v_x = f(u_x)$ und q_x. Dieselbe wird illusorisch, wenn

$$F(q_x, u_x) = \varphi(q_x) \cdot \psi(u_x)$$

ist. Dann ergibt sich entweder $\psi(u_x) = 0$, d. h. $u_x = \text{const.}$ und daher auch $v_x = f(u_x) = \text{const.}$, was unzulässig ist, oder aber $\varphi(q_x) = 0$, d. h. $q_x = c$ (const.). Die Differenzengleichung

$$y_{x+2} = c y_x$$

besitzt die Fundamentalintegrale ϱ^x und $(-\varrho)^x$, wenn $\varrho = |\sqrt{c}|$ ist, und es fragt sich, wann zwischen ϱ^x und $(-\varrho)^x$, also auch zwischen ϱ^x und $(-1)^x$, d. h. zwischen $e^{x \ln \varrho}$ und $e^{\pi i x}$ eine algebraische Beziehung besteht. Das ist aber nur dann der Fall, wenn $\ln \varrho = \frac{p}{q}\pi i$ (p und q ganze Zahlen), also $\varrho = e^{\frac{p}{q}\pi i}$, d. h. wenn ϱ und daher auch c eine *Einheitswurzel* ist (auch der Fall $q_x = 1$ gehört noch hierher). Es läßt sich nun leicht zeigen, daß diese algebraische Beziehung stets von der des Ausnahmefalles verschieden ist, und daß in der Tat die beiden Fundamentallösungen der Differenzengleichung $y_{x+2} = c y_x$ algebraische Funktionen von c und $\prod\limits_0^{x-1}(-c) = (-c)^x$ (vgl. S. 29) sind: Die Differenzengleichung $y_{x+2} = \varrho^2 y_x$, worin $\varrho = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ ($k \neq 0$ und relativ prim zu n), besitzt die Fundamentalintegrale $u_x = \varrho^x = e^{\frac{2k\pi i x}{n}}$ und $v_x = (-\varrho)^x = e^{\frac{(2k+n)\pi i x}{n}}$; zwischen denselben besteht die algebraische Beziehung $v_x = u_x^{\frac{2k+n}{2k}}$ $\left(\text{für ein gerades } n = 2m \text{ lautet sie } v_x = u_x^{\frac{k+m}{k}}\right)$. Nun ist:

$$d_x = v_x u_{x+1} - u_x v_{x+1} = 2\varrho(-\varrho^2)^x$$

und

$$u_x v_x = u_x^{\frac{4k+n}{2k}} = (-\varrho^2)^x = \frac{d_x}{2\varrho}$$

$\left(\text{für gerade } n = 2m \text{ wieder } u_x^{\frac{2k+m}{k}} = \frac{d_x}{2\varrho}\right)$; hieraus ergibt sich aber u_x und daher auch v_x als algebraische Funktion von ϱ und d_x.

Beispiele:

1. d_x *algebraisch.*

$$y_{x+2} - 2\frac{x+2}{x+1}y_{x+1} + \frac{x+2}{x}y_x = 0;$$

$d_x = x(x+1)$; $u_x = x$, $v_x = x^2$; $v_x = u_x^2$. Die Integrale sind algebraisch.

2. d_x *transzendent.*

$$y_{x+2} - 6y_{x+1} + 8y_x = 0;$$

$$d_x = 2 \cdot 8^x = 2 \cdot 2^{3x}; \quad u_x = 2^x, \quad v_x = 4^x; \quad v_x = u_x^2.$$

Die Integrale sind transzendent, aber algebraisch in d_x:

$$u_x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} d_x^{\frac{1}{3}}, \quad v_x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} d_x^{\frac{2}{3}}.$$

Ausnahmefall:

3. $$y_{x+2} - \frac{(x^2+x+1)(x^2+x-1)}{(x+1)^2(x-1)} y_{x+1} + \frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2(x-1)} y_x = 0;$$

$$d_x = \frac{x^2-1}{x};\ h_x = \frac{1-p_x^2-q_x^2}{p_x q_x} = \frac{x^2+1}{x};\ h_x^2 - d_x^2 = 4;\ \frac{h_x+d_x}{2} = x,\ \frac{h_x-d_x}{2} = \frac{1}{x};$$

$$u_x = \prod_1^{x-1} \frac{h_x+d_x}{2} = \Gamma(x),\quad v_x = \prod_1^{x-1} \frac{h_x-d_x}{2} = \frac{1}{\Gamma(x)};\quad v_x = \frac{1}{u_x}.$$

4. $y_{x+2} - \frac{5}{2} y_{x+1} + y_x = 0;\quad (z^2 - \frac{5}{2} z + 1 = 0 : z_1 = 2,\ z_2 = \frac{1}{2});$

$u_x = 2^x - \frac{1}{2^x},\ v_x = 2^x + \frac{1}{2^x};\ v_x^2 - u_x^2 = 4$ oder $v_x = \sqrt{4+u_x^2};\ d_x = -3;$

(I) $$\sqrt{4 + (\tfrac{5}{2} u_{x+1} - u_x)^2} = \tfrac{5}{2}\sqrt{4+u_{x+1}^2} - \sqrt{4+u_x^2};$$

in rationaler Form:

$$4u_{x+1}^2 - 10 u_{x+1} u_x + 4 u_x^2 - 9 = 0.$$

(II) $$u_{x+1}\sqrt{4+u_x^2} - u_x \sqrt{4+u_{x+1}^2} = 3;$$

in rationaler Form:

$$(4u_{x+1}^2 + 10u_{x+1}u_x + 4u_x^2 - 9)(4u_{x+1}^2 - 10u_{x+1}u_x + 4u_x^2 - 9) = 0.$$

Da nicht gleichzeitig

$4u_{x+1}^2 + 10u_{x+1}u_x + 4u_x^2 - 9 = 0$ und $4u_{x+1}^2 - 10u_{x+1}u_x + 4u_x^2 - 9 = 0$

sein kann (daraus würde folgen $u_{x+1} = 0,\ u_x = \pm\frac{3}{2}$ oder $u_x = 0,\ u_{x+1} = \pm\frac{3}{2}$, was unmöglich ist), so bleibt als *einzige* Gleichung:

$$4u_{x+1}^2 - 10u_{x+1}u_x + 4u_x^2 - 9 = 0,$$

aus der sich in der Tat u_x *nicht* als algebraische Funktion von x ergibt.

5. Algebraische Integrale im Ausnahmefalle:

$$y_{x+2} - \frac{4(x+1)^2}{(x+2)(2x+1)} y_{x+1} + \frac{x(2x+3)}{(x+2)(2x+1)} y_x = 0;$$

$$h_x = \frac{2x^2+2x+1}{x(x+1)};\ d_x = \frac{2x+1}{x(x+1)};\ h_x^2 - d_x^2 = 4;$$

$$\tfrac{1}{2}(h_x + d_x) = \frac{x+1}{x},\quad \tfrac{1}{2}(h_x - d_x) = \frac{x}{x+1};$$

$$u_x = \prod_1^{x-1} \tfrac{1}{2}(h_x + d_x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{x}{x-1} = x;$$

$$v_x = \prod_1^{x-1} \tfrac{1}{2}(h_x - d_x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x} = \frac{1}{x}.$$

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

51. Sitzung am 20. März 1907.

Vorsitzender: Herr Jahnke.
Anwesend: 25 Herren.
Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Koebe: Über die Darstellbarkeit der Koordinaten der Punkte einer beliebigen reellen algebraischen Kurve durch eindeutige analytische Funktionen eines reellen Parameters.

Herr Salkowski: Das Aoustsche Problem der Kurventheorie.

52. Sitzung am 15. April 1907.

Festsitzung zur Feier des zweihundertsten Geburtstages Eulers im großen Hörsaal des Physikalischen Instituts der Universität.

Vorsitzender: Herr Schafheitlin.

An eine einleitende Ansprache des Vorsitzenden schlossen sich die Vorträge an:

Herr Valentin: Leonhard Euler in Berlin.
Herr Kneser: Euler und die Variationsrechnung.
Herr Kötter: Euler und das Kreiselproblem.

Diese Vorträge werden demnächst als Festschrift in den „Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften" erscheinen, zusammen mit den Abhandlungen von Herrn F. Müller: „Über bahnbrechende Arbeiten Leonhard Eulers aus der reinen Mathematik" und von Herrn Lampe: „Zur Entstehung der Begriffe der Exponentialfunktion und der logarithmischen Funktion eines komplexen Arguments bei Leonhard Euler".

53. Sitzung am 29. Mai 1907.

Vorsitzender: Herr Schafheitlin.
Anwesend: 30 Herren.
Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Jahnke: Die Graßmannsche Fundamentalformel und die Additionstheoreme der Thetafunktionen von zwei Argumenten.

Rationale Tetraeder mit kongruenten Seiten.

Von R. Güntsche.

1. In einem früheren Vortrage[1]) habe ich einen Weg angegeben, auf dem es gelingt, partikuläre Lösungen für *rationale Tetraeder* in Parameterdarstellungen zu gewinnen, d. h. für Tetraeder, bei denen *die Kanten, die Seiteninhalte und das Volumen in rationalen Zahlen* gemessen werden. Die einzigen Beispiele solcher Tetraeder, die ich in der Literatur habe entdecken können, sind die, welche R. Hoppe[2]) anführt; sie gehören sämtlich dem besonderen Falle an, daß die *Seiten des Tetraeders einander kongruent* sind. Hoppe gelangt zu seinen acht Beispielen durch ein Tastverfahren. Wenn nun auch ein solches Verfahren, hier wenigstens, den Vorzug hat, zu besonders einfachen Zahlenbeispielen zu führen, so befriedigt es doch wissenschaftlich nicht hinreichend; es erscheint daher wünschenswert, ein rationelles Verfahren für das Problem auch in diesem besonderen Falle zu ermitteln.

Im folgenden sollen nun auf rationellem Wege Typen rationaler Tetraeder mit kongruenten Seiten abgeleitet werden, bei denen die Ausdrücke für die Kanten, die Seiteninhalte und das Volumen, von einem Proportionalitätsfaktor abgesehen, *einen* willkürlichen Parameter enthalten. Damit sind allerdings auch nur partikuläre Lösungen des besonderen Falles gewonnen, denn eine umfassende Lösung dieses Falles würde neben dem Proportionalitätsfaktor *zwei* willkürliche Parameter erfordern; wohl aber läßt sich dartun, daß die unten mitgeteilten Typen sämtliche Hoppeschen Beispiele für besondere Zahlenwerte des Parameters in sich begreifen, und daß man, von irgend einem Zahlenbeispiel oder Typus ausgehend, unzählige neue erhalten kann.

2. Die vier Ecken des Tetraeders seien 0, 1, 2, 3; die Kanten 01, 02, 03, sowie die gegenüberliegenden 23, 31, 12 seien a, b, c, der Inhalt eines der vier kongruenten Begrenzungsdreiecke sei J und der Rauminhalt T. Ferner mögen die Kantenwinkel, die den Kanten a, b, c gegenüberliegen, mit $\mathring{\alpha}$, $\mathring{\beta}$, $\mathring{\gamma}$, und die Supplemente der Flächenwinkel, die diesen Kanten zugehören, mit $\mathring{\mathfrak{a}}$, $\mathring{\mathfrak{b}}$, $\mathring{\mathfrak{c}}$ bezeichnet werden; dieselben Buchstaben, aber unter Weglassung des Zeichens $\mathring{}$, sollen für die Kotangenten der Hälften dieser Winkel gelten.

Wie in Hoppes Abhandlung, sowie in jenem Vortrage (S. 4—6) ausgeführt wurde, hat man, um ein rationales Tetraeder zu erhalten, die goniometrischen Funktionen der Kanten- und Flächenwinkel rational zu machen. Im vorliegenden Sonderfalle, in dem die vier Ecken einander kongruent sind, reicht es daher aus, zu bewirken, daß neben der bekannten Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha\beta\gamma, \tag{1}$$

1) R. Güntsche: Rationale Tetraeder, diese Berichte **6**, 2—16, 1907. Auf die daselbst angegebene Literatur möge hiermit verwiesen werden.

2) R. Hoppe: Über rationale Dreikante und Tetraeder. Arch. (1) **61**, 86—98, 1877.

elche ausdrückt, daß $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ und $\hat{\gamma}$ die Winkel eines Dreiecks sind[1]), noch lgende, von Hoppe entwickelte Gleichung[2])

)
$$\alpha^2 = \frac{(\beta\gamma - \gamma\alpha + \alpha\beta + 1)(\beta\gamma + \gamma\alpha - \alpha\beta + 1)}{(-\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta + 1)(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta - 1)},$$

ılche für ein Dreikant besteht, rational erfüllt wird. Bringt man die ziehung (1) mit der Gleichung (2) (oder, was auf dasselbe hinauskommt, it den Neperschen Analogien) in Verbindung, so findet man leicht, daß e Aufgabe verlangt, es soll gleichzeitig mit der Relation (1) die Gleichung

)
$$h^2 = (\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1)(\gamma^2 - 1)$$

tional gelöst werden. Im wesentlichen ist es in der Tat die Gleichung), welche Hoppe seinem Tastverfahren zugrunde legt. Wie man mit lfe dieser Gleichung, statt zu probieren, rationell vorgehen kann, ist in m erwähnten Vortrage (S. 15 u. 16) mitgeteilt worden, doch wurde mals für den vorliegenden Sonderfall noch keine Parameterdarstellung geben; das soll im folgenden geschehen.

Die Gestalt der Gleichung (3) legt es nahe, statt der Winkel $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$: Komplemente $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$, $\hat{\vartheta}$, deren Hälften die Kotangenten φ, ψ, ϑ haben igen, einzuführen, so daß die Gleichungen bestehen:

)
$$\alpha = \frac{\varphi + 1}{\varphi - 1}, \quad \beta = \frac{\psi + 1}{\psi - 1}, \quad \gamma = \frac{\vartheta + 1}{\vartheta - 1}.$$

e beiden Bedingungsgleichungen lauten dann:

)
$$\varphi\psi\vartheta - \psi\vartheta - \vartheta\varphi - \varphi\psi - \varphi - \psi - \vartheta + 1 = 0,$$

auch in folgender Form geschrieben werden kann:

)
$$\frac{\varphi + 1}{\varphi - 1} = \frac{\psi\vartheta - 1}{\psi + \vartheta}, \quad \frac{\psi + 1}{\psi - 1} = \frac{\vartheta\varphi - 1}{\vartheta + \varphi}, \quad \frac{\vartheta + 1}{\vartheta - 1} = \frac{\varphi\psi - 1}{\varphi + \psi},$$

d

)
$$\varphi\psi\vartheta = k^2.$$

Neben der Gleichung (7) ist die Gleichung (5) oder eine der Gleichungen) rational zu erfüllen. Eliminiert man φ, so bleibt *eine* Bedingungs- ichung rational zu lösen, nämlich:

)
$$\psi\vartheta(\psi\vartheta + \psi + \vartheta - 1)(\psi\vartheta - \psi - \vartheta - 1) = h^2;$$

erhält man aus:

)
$$\varphi = \frac{\psi\vartheta + \psi + \vartheta - 1}{\psi\vartheta - \psi - \vartheta - 1}.$$

Die Funktionen der Kantenwinkel ergeben sich aus (4), die der ächenwinkel etwa aus (2) und den beiden, welche durch zyklische Ver- ıschung daraus hervorgehen; die Ausdrücke für die Kanten und den eiecksinhalt erhält man sodann aus[3])

0)
$$a = \beta + \gamma, \; b = \gamma + \alpha, \; c = \alpha + \beta; \; J = \alpha\beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma;$$

1) Vgl. hierzu etwa: diese Berichte 5, 27, 1906.
2) Vgl. diese Berichte 6, 5, 1907, Gleichung (18) nach polarer Transformation.
3) Vgl. hierzu diese Berichte 6, 11, 1907, Artikel 13.

der Eckensinus einer Ecke ist definiert durch

$$(11)\qquad \varDelta = \sin \hat{\mathfrak{a}} \sin \hat{\beta} \sin \hat{\gamma} = \sin \hat{\mathfrak{b}} \sin \hat{\gamma} \sin \hat{\alpha} = \sin \hat{\mathfrak{c}} \sin \hat{\alpha} \sin \hat{\beta};$$

schließlich ist das Volumen des Tetraeders[1])

$$(12)\qquad T = \tfrac{1}{6} a b c \varDelta.$$

Außerdem ist die Höhe

$$(13)\qquad h = \frac{3T}{J}.$$

Zu den Ausdrücken für die Kanten (und die Höhe), den Dreiecksinhalt und das Volumen kann noch je ein linearer, quadratischer und kubischer Proportionalitätsfaktor treten.

Alle genannten Ausdrücke lassen sich durch zwei der Größen φ, ψ, ϑ darstellen, doch erhalten sie eine übersichtlichere Gestalt, wenn man alle drei beibehält. Führt man die Rechnung, soweit es angeht, unter Beseitigung von Nennern, durch, wobei man die einander gleichbedeutenden Gleichungen (5), (6), (9) zu benutzen hat, so kann man zusammenfassend sagen:

Hat man ein Tripel von Zahlen φ, ψ, ϑ, welche den Gleichungen

$$(14)\qquad \varphi\psi\vartheta - \psi\vartheta - \vartheta\varphi - \varphi\psi - \varphi - \psi - \vartheta + 1 = 0,$$

$$(15)\qquad \varphi\psi\vartheta = k^2$$

rational genügen, so ist ein rationales Tetraeder mit kongruenten Seiten bestimmt durch:

$$\left\{\begin{array}{ll}
(16\text{a}) & a = (\varphi + 1)(\psi + \vartheta) = (\varphi - 1)(\psi\vartheta - 1),\\
(16\text{b}) & b = (\psi + 1)(\vartheta + \varphi) = (\psi - 1)(\vartheta\varphi - 1),\\
(16\text{c}) & c = (\vartheta + 1)(\varphi + \psi) = (\vartheta - 1)(\varphi\psi - 1),\\
(17) & J = \tfrac{1}{4}(\varphi + 1)(\varphi - 1)(\psi + 1)(\psi - 1)(\vartheta + 1)(\vartheta - 1),\\
(18) & T = \tfrac{4}{3} J \sqrt{\varphi\psi\vartheta},\\
(19) & h = 4\sqrt{\varphi\psi\vartheta},\\
(20) & \alpha = \dfrac{\varphi + 1}{\varphi - 1},\quad \beta = \dfrac{\psi + 1}{\psi - 1},\quad \gamma = \dfrac{\vartheta + 1}{\vartheta - 1},\\
(21\text{a}) & \mathfrak{a} = \dfrac{1}{\varphi}\dfrac{\varphi - 1}{\psi + \vartheta}\sqrt{\varphi\psi\vartheta} = \dfrac{1}{\varphi}\dfrac{\varphi + 1}{\psi\vartheta - 1}\sqrt{\varphi\psi\vartheta},\\
(21\text{b}) & \mathfrak{b} = \dfrac{1}{\psi}\dfrac{\psi - 1}{\vartheta + \varphi}\sqrt{\varphi\psi\vartheta} = \dfrac{1}{\psi}\dfrac{\psi + 1}{\vartheta\varphi - 1}\sqrt{\varphi\psi\vartheta},\\
(21\text{c}) & \mathfrak{c} = \dfrac{1}{\vartheta}\dfrac{\vartheta - 1}{\varphi + \psi}\sqrt{\varphi\psi\vartheta} = \dfrac{1}{\vartheta}\dfrac{\vartheta + 1}{\varphi\psi - 1}\sqrt{\varphi\psi\vartheta},\\
(22) & \varDelta = 2\cdot\dfrac{\varphi - 1}{\psi + \vartheta}\cdot\dfrac{\psi - 1}{\vartheta + \varphi}\cdot\dfrac{\vartheta - 1}{\varphi + \psi}\sqrt{\varphi\psi\vartheta} = 2\cdot\dfrac{\varphi + 1}{\psi\vartheta - 1}\cdot\dfrac{\psi + 1}{\vartheta\varphi - 1}\cdot\dfrac{\vartheta + 1}{\varphi\psi - 1}\sqrt{\varphi\psi\vartheta}.
\end{array}\right.$$

Mit Hilfe dieser Formeln ist es möglich (was wohl nicht jedesmal eines besonderen Hinweises bedarf), aus einem bekannten Wertetripel φ, ψ, ϑ

1) Vgl. hierzu diese Berichte **6**, 4, 1907, Artikel 5.

ı entsprechenden Typus eines rationalen Tetraeders mit kongruenten Seiten ;uleiten.

In dem hier behandelten Sonderfalle bestehen übrigens noch die einfachen rmeln

(23a) $\Delta = 2\,\mathfrak{abc}$; (23b) $\Delta = 2\sqrt{\cos\hat{\alpha}\cos\hat{\beta}\cos\hat{\gamma}}$;

(24a) $T = \frac{1}{3}abc\mathfrak{abc}$; (24b) $T = \frac{1}{3}abc\sqrt{\cos\hat{\alpha}\cos\hat{\beta}\cos\hat{\gamma}}$;

zur Kontrolle der Rechnung verwendet werden können.

3. Noch eine Bemerkung wird im folgenden, ohne daß jedesmal be- .ders darauf hingewiesen wird, zur Beseitigung von negativen Werten rwendung finden. Bekanntlich[1]) sind Dreiecke als nicht wesentlich ver- ieden anzusehen, die sich nur in der folgenden Weise in den Winkel- .ktionen unterscheiden:

$$\begin{array}{llll} \beta,\ \gamma; & -\alpha,\ \frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\gamma}; & \alpha,\ -\frac{1}{\beta},\ -\frac{1}{\gamma}; & -\alpha,\ -\beta,\ -\gamma; \\ & \frac{1}{\alpha},\ -\beta,\ \frac{1}{\gamma}; & -\frac{1}{\alpha},\ \beta,\ -\frac{1}{\gamma}; & \\ & \frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta},\ -\gamma; & -\frac{1}{\alpha},\ -\frac{1}{\beta},\ \gamma. & \end{array}$$

werden daher Dreiecke (und damit Tetraeder) nicht als wesentlich ver- ieden zu betrachten sein, für welche folgende acht Tripel gelten:

$$\text{)}\quad \left\{\begin{array}{llll} \varphi,\ \psi,\ \vartheta; & \frac{1}{\varphi},\ -\psi,\ -\vartheta; & \varphi,\ -\frac{1}{\psi},\ -\frac{1}{\vartheta}; & \frac{1}{\varphi},\ \frac{1}{\psi},\ \frac{1}{\vartheta}; \\ & -\varphi,\ \frac{1}{\psi},\ -\vartheta; & -\frac{1}{\varphi},\ \psi,\ -\frac{1}{\vartheta}; & \\ & -\varphi,\ -\psi,\ \frac{1}{\vartheta}; & -\frac{1}{\varphi},\ -\frac{1}{\psi},\ \vartheta. & \end{array}\right.$$

4. Eine partikuläre Lösung unserer Aufgabe, zugleich eine der ein- hsten, bietet sich nun ohne weiteres dar: man setze in der Gleichung (8)

$$\text{)}\qquad \psi = \vartheta + 1;$$

Ausdruck, der zu einem Quadrat zu machen ist, lautet dann:

$$(\vartheta + 1)\cdot\vartheta\cdot\vartheta(\vartheta + 3)\cdot(\vartheta^2 - \vartheta - 2);$$

der letzte Faktor in $(\vartheta + 1)(\vartheta - 2)$ zerfällt, so ist der Ausdruck

$$(\vartheta - 2)(\vartheta + 3)$$

einem Quadrat zu machen. Wir setzen, indem wir, wie im folgenden chweg, unter p eine beliebige rationale Zahl, unter q das Quadrat der- ›en verstehen,

$$\frac{\vartheta + 3}{\vartheta - 2} = p^2 = q,$$

)

$$\vartheta = \frac{2q + 3}{q - 1};$$

1) Vgl. diese Berichte 5, 28, 1906.

die Rechnungsvorschriften des Artikels 2 ergeben dann zusammen mit der Gleichung (26) ohne Schwierigkeit den folgenden

Typus I_1 eines rationalen Tetraeders mit kongruenten Seiten:

$$a = 2 \cdot 5\,(q+1)(q-1)(q^2+3q+1),$$
$$b = (2q+3)(4q+1)(q^2+2q+2),$$
$$c = (q+4)(3q+2)(2q^2+2q+1),$$
$$J = (q+1)(q-1)(2q+3)(3q+2)(q+4)(4q+1)(q^2+3q+1),$$
$$T = J \cdot \frac{2^2}{3}(q-1)(2q+3)(3q+2)\sqrt{q},$$
$$\varphi = \frac{q(2q+3)}{3q+2}, \qquad \psi = \frac{3q+2}{q-1}, \qquad \vartheta = \frac{2q+3}{q-1},$$
$$\alpha = \frac{q^2+3q+1}{(q+1)(q-1)}, \qquad \beta = \frac{4q+1}{2q+3}, \qquad \gamma = \frac{3q+2}{q+4},$$
$$\mathfrak{a} = \frac{2(q-1)}{5q}\sqrt{q}, \qquad \mathfrak{b} = \frac{2q+3}{q^2+2q+2}\sqrt{q}, \qquad \mathfrak{c} = \frac{3q+2}{2q^2+2q+1}\sqrt{q}.$$

Man erhält dasselbe Tetraeder, ob man für p eine rationale Zahl oder ihren reziproken Wert einsetzt.

5. Die Gleichung (8), welche die Bedingungsgleichung unseres Problems darstellt, verlangt, daß ein Ausdruck zu einem rationalen Quadrat gemacht wird, der in ψ und ϑ vom dritten Grade ist. Nach dem jetzigen Stande der Zahlentheorie müssen wir vorläufig darauf verzichten, eine umfassende Lösung dieser Gleichung zu geben. Für Aufgaben dieser Art besitzen wir das bekannte Fermat-Eulersche Verfahren[1]), das es ermöglicht, aus einer bekannten partikulären Lösung beliebig viele neue abzuleiten. Wollte man allerdings, etwa von dem Typus I_1 ausgehend, das Eulersche Verfahren unmittelbar anwenden, so würden φ, ψ und ϑ, eine Gruppe bildend, ineinander oder in die unter (25) angegebenen Ausdrücke übergehen, und man würde keine neuen Tetraeder finden. Eine kleine Abänderung kann allerdings zu neuen Typen führen, da man aber dabei leicht zu umfangreichen Ausdrücken gelangt, ist es wohl angebracht, zunächst auf anderem Wege nach neuen Typen zu suchen.

Wir setzen an

$$\psi = \frac{\vartheta x + y}{\vartheta u + v}, \tag{27}$$

wobei die Koeffizienten x, y, u, v rational, sonst aber vorläufig noch beliebig sein mögen. Dann ist nach Gleichung (8) der Ausdruck

$$\vartheta(\vartheta x + y)(\vartheta u + v)[\vartheta^2(x+u) + \vartheta(x+y-u+v) + (y-v)] \times$$
$$\times [\vartheta^2(x-u) + \vartheta(-x+y-u-v) - (y+v)]$$

zu einem rationalen Quadrat zu machen. Er ist in ϑ vom siebenten Grade; der Grad reduziert sich aber, wenn drei der Zahlen x, y, u, v die Werte 0, $+1$ oder -1 erhalten. Es stellt sich heraus, daß der Ausdruck, welcher zu einem Quadrat zu machen ist, vom dritten oder vierten Grade

1) Vgl. diese Berichte **5**, 30, 1906, Artikel 2 und **6**, 9 ff., 1907, Artikel 11.

ist, wenn für ψ einer der folgenden 36 Ausdrücke eingeführt wird, welche Spezialfälle der Substitution (27) darstellen:

1) ϑx, 2) $\vartheta x + 1$, 3) $\vartheta x - 1$, 4) $(\vartheta + 1)x$, 5) $(\vartheta - 1)x$,

6) $\frac{1}{-\vartheta x + 1}$, 7) $-\frac{1}{\vartheta x + 1}$, 8) $\frac{\vartheta + y}{\vartheta}$, 9) $-\frac{\vartheta - y}{\vartheta}$, 10) $x\frac{\vartheta + 1}{\vartheta}$,

11) $x\frac{\vartheta - 1}{\vartheta}$, 12) $\frac{y}{\vartheta}$, 13) $\frac{\vartheta}{\vartheta - y}$, 14) $-\frac{\vartheta}{\vartheta + y}$, 15) $\frac{\vartheta x}{\vartheta + 1}$,

16) $\frac{\vartheta x + 1}{\vartheta + 1}$, 17) $\frac{\vartheta x - 1}{\vartheta + 1}$, 18) $\frac{\vartheta + y}{\vartheta + 1}$, 19) $-\frac{\vartheta - y}{\vartheta + 1}$, 20) $x\frac{\vartheta - 1}{\vartheta + 1}$,

21) $\frac{y}{\vartheta + 1}$, 22) $\frac{\vartheta + 1}{-\vartheta x + 1}$, 23) $-\frac{\vartheta + 1}{\vartheta x + 1}$, 24) $\frac{\vartheta + 1}{\vartheta - y}$, 25) $\frac{\vartheta + 1}{-\vartheta - y}$,

26) $\frac{\vartheta x}{\vartheta - 1}$, 27) $\frac{\vartheta x + 1}{\vartheta - 1}$, 28) $\frac{\vartheta x - 1}{\vartheta - 1}$, 29) $\frac{\vartheta + y}{\vartheta - 1}$, 30) $-\frac{\vartheta - y}{\vartheta - 1}$,

31) $x\frac{\vartheta + 1}{\vartheta - 1}$, 32) $\frac{y}{\vartheta - 1}$, 33) $\frac{\vartheta - 1}{-\vartheta x + 1}$, 34) $\frac{\vartheta - 1}{-\vartheta x - 1}$, 35) $\frac{\vartheta - 1}{\vartheta + y}$,

36) $-\frac{\vartheta - 1}{\vartheta + y}$.

Hierbei hängen die Substitutionen

1), 12),
2), 3), 6), 7), 8), 9), 13), 14),
4), 5), 10), 11), 15), 21), 26), 32),
16), 19), 23), 24), 27), 29), 34), 36),
17), 18), 22), 25), 28), 30), 33), 35),
20), 31),

welche in je einer Zeile stehen, in der Weise zusammen, daß die ihnen zugehörigen kubischen oder biquadratischen Ausdrücke, die zu einem Quadrat zu machen sind, ineinander übergehen, wenn man für ϑ, sowie für x (bzw. y) die entgegengesetzten oder umgekehrten oder entgegengesetzt umgekehrten Werte einführt. Diese Ausdrücke mögen zunächst für einige der Substitutionen angegeben werden.

1) $\psi = \vartheta x$; $\quad f^2 = x[\vartheta^2 x + \vartheta(x+1) - 1][\vartheta^2 x - \vartheta(x+1) - 1]$,

2) $\psi = \vartheta x + 1$; $\quad f^2 = (\vartheta x + 1)[\vartheta x + (x+2)][\vartheta^2 x - \vartheta x - 2]$,

4) $\psi = (\vartheta + 1)x$; $\quad f^2 = x\vartheta[\vartheta x + (-x-1)][\vartheta^2 x + \vartheta(2x+1) + (x-1)]$,

16) $\psi = \frac{\vartheta x + 1}{\vartheta + 1}$; $\quad f^2 = (x+1)(\vartheta x + 1)[\vartheta^2(x-1) + \vartheta(-x-1) - 2]$,

17) $\psi = \frac{\vartheta x - 1}{\vartheta + 1}$; $\quad f^2 = (\vartheta x - 1)[\vartheta(x+1) - 2][\vartheta(x-1) + (-x-3)]$,

20) $\psi = x\frac{\vartheta - 1}{\vartheta + 1}$; $\quad f^2 = x(x+1)\vartheta[\vartheta^2(x-1) + \vartheta(-2x-2) + (x-1)]$.

Es handelt sich nun darum, den in ϑ kubischen oder biquadratischen Ausdruck, der sich für die Substitutionen ergibt, zu einem rationalen Quadrat zu machen; dies soll an einigen Beispielen durchgeführt werden.

6. Der Substitution 26), nämlich

(28) $$\psi = \frac{\vartheta x}{\vartheta - 1},$$

entspricht die rational zu lösende Gleichung:

(29) $$f^2 = x[\vartheta(x-1) - 1][\vartheta^2(x+1) + \vartheta(x-2) + 1].$$

Es sei nun der Ausdruck $[\vartheta^2(x+1) + \vartheta(x-2) + 1]$, von eine[redacted]m noch zu bestimmenden Faktor abgesehen, ein vollständiges Quadrat in ϑ d. h. es sei

$$(x-2)^2 - 4(x+1) = 0,$$

mithin

$$x(x-8) = 0.$$

Es ist daher, wenn $x = 0$ als trivial verworfen wird,

$$x = 8$$

zu nehmen, also

$$\psi = \frac{8\vartheta}{\vartheta - 1}.$$

Nach der Gleichung (29) muß dann $2(7\vartheta - 1)$ zu einem rationa[redacted]en Quadrat gemacht werden, d. h. es ist

$$\vartheta = \frac{2p^2 + 1}{7}$$

zu setzen. Die Durchführung der Rechnung ergibt den

Typus II eines rationalen Tetraeders mit kongruenten Seite[redacted]:

$$a = (q+25)(2q+1)(16q^2+9q+25),$$
$$b = 7(q+1)(9q+1)(2q^2+2q+25),$$
$$c = 2(q-3)(q+4)(65q^2+58q+25),$$
$$J = 7(q+1)(q-3)(q+4)(q+25)(2q+1)(9q+1)(16q^2+9q+25)$$
$$T = J \cdot \frac{2^3 \cdot 7}{3}(q-3)(2q+1)(3q+5)\sqrt{q},$$
$$\varphi = \frac{(3q+5)^2}{7q(q-3)}, \qquad \psi = \frac{4(2q+1)}{q-3}, \qquad \vartheta = \frac{2q+1}{7},$$
$$\alpha = \frac{16q^2+9q+25}{(q+25)(2q+1)}, \quad \beta = \frac{9q+1}{7(q+1)}, \qquad \gamma = \frac{q+4}{q-3},$$
$$\mathfrak{a} = \frac{2(2q+1)}{q(3q+5)}\sqrt{q}, \quad \mathfrak{b} = \frac{7(3q+5)}{2(2q^2+2q+25)}\sqrt{q}, \quad \mathfrak{c} = \frac{4(q-3)(3q+5)}{65q^2+58q+25}\sqrt{q}$$

7. Einen weiteren Typus erhält man aus derselben Substitution 26[redacted] oder der ihr gleichwertigen 10)

(30) $$\psi = x\frac{\vartheta + 1}{\vartheta},$$

welche die Bedingungsgleichung

(31) $$f^2 = x[\vartheta(x-1) - x][\vartheta^2(x+1) + \vartheta(2x-1) + x]$$

nach sich zieht, auf die folgende Weise. Es soll nach der Gleichung (31) die Gleichung

$$\vartheta^2(x+1)+\vartheta(2x-1)+x=m^2x[\vartheta(x-1)-x], \tag{32}$$

in der m rational ist, oder die Gleichung

$$\vartheta^2(x+1)+\vartheta[-m^2x^2+x(m^2+2)-1]+x(m^2x+1)=0$$

rational erfüllt werden. Die Diskriminante

$$k^2=[-m^2x^2+x(m^2+2)-1]^2-4x(x+1)(m^2x+1)$$

soll also ein Quadrat werden. Dem Ausdruck kann man die Gestalt

$$k^2=(xm+1)^2(xm-1)^2-2x(m^2+4)(x^2m^2-\tfrac{1}{2}xm^2+1)$$

geben, und wir wollen nun, um eine partikuläre Lösung zu erhalten, festsetzen, daß

$$x^2m^2-\tfrac{1}{2}xm^2+1=(xm-1)^2$$

sein soll. Dies tritt ein für

$$m=4. \tag{33}$$

Es soll also

$$k^2=(4x-1)^2(16x^2-32x+1),$$

mithin

$$16x^2-32x+1$$

ein Quadrat werden. Wir setzen

$$16x^2-32x+1=(4x-r)^2,$$

wobei r eine rationale Zahl bedeutet, und finden

$$x=\frac{r^2-1}{8(r-4)}. \tag{34}$$

Mit den Gleichungen (33) und (34) läßt sich die Bedingungsgleichung (32) rational lösen; die eine Wurzel für ϑ ist

$$\vartheta=\frac{(r+1)(r+2)}{(r-3)(r-4)};$$

die andere läßt sich nebst dem zugehörigen Wert für ψ hierauf zurückführen, wenn man in ihr r durch $(4r-7):(r+2)$ ersetzt. Um den Ausdrücken eine symmetrische Gestalt zu geben, schreiben wir noch p statt $r-1$. Wir erhalten:

Typus III eines rationalen Tetraeders mit kongruenten Seiten:

$$a=(p+2)(p-2)(p^2+1)(p^2+6p+18)(p^2-6p+18),$$
$$b=(p+3)(p-3)(p^2+36)(p^2+2p+2)(p^2-2p+2),$$
$$c=2\cdot 5p(p^2+6)(p^4-8p^2+36),$$
$$J=5p(p+2)(p-2)(p+3)(p-3)(p^2+6)(p^2+2p+2)(p^2-2p+2)\times$$
$$\times(p^2+6p+18)(p^2-6p+18),$$
$$T=J\cdot\frac{2^3}{3}p(p+2)(p-2)(p+3)(p-3)(p^2+6),$$

$$\varphi=\frac{p(p^2+6)}{2^2(p+3)(p-3)},\qquad \psi=\frac{p(p+2)(p-2)}{p^2+6},\qquad \vartheta=\frac{(p+2)(p+3)}{(p-2)(p-3)},$$

$$\alpha=\frac{(p-2)(p^2+6p+18)}{(p+2)(p^2-6p+18)},\quad \beta=\frac{(p+3)(p^2-2p+2)}{(p-3)(p^2+2p+2)},\quad \gamma=\frac{p^2+6}{5p},$$

$$\mathfrak{a}=\frac{(p+2)(p-2)}{2(p^2+1)},\qquad \mathfrak{b}=\frac{2(p+3)(p-3)}{p^2+36},\qquad \mathfrak{c}=\frac{2^2p(p^2+6)}{p^4-8p^2+36}.$$

Die Faktoren in den Ausdrücken für a, b, c, J, T lassen sich so zusammenfassen, daß (von dem Faktor p abgesehen), p hierin nur in geraden Potenzen vorkommt, so daß p^2 durch q ersetzt werden kann. Zwei Parameter p, deren Produkt 6 ist, ergeben dasselbe Tetraeder.

8. Die Substitution 20)

$$\psi = x\frac{\vartheta - 1}{\vartheta + 1} \tag{35}$$

ergibt die Bedingungsgleichung

$$f^2 = x(x+1)\vartheta\left[\vartheta^2(x-1) - \vartheta \cdot 2(x+1) + (x-1)\right]. \tag{36}$$

Um nun eine weitere partikuläre Lösung zu erhalten, setzen wir

$$\vartheta^2(x-1) - \vartheta \cdot 2(x+1) = 0,$$

also

$$\vartheta = \frac{2(x+1)}{x-1};$$

die Bedingungsgleichung wird dann zu

$$x = 2p^2,$$

es ist mithin

$$\vartheta = \frac{2(2p^2+1)}{2p^2-1}.$$

Hieraus leiten wir den folgenden Typus ab.

Typus IV eines rationalen Tetraeders mit kongruenten Seiten:

$$a = 4(4q^3 + 16q^2 + 5q + 1)(16q^3 + 20q^2 + 16q + 1),$$

$$b = (2q+1)(2q-1)(4q^2 + 12q + 1)(20q^2 + 12q + 5),$$

$$c = (2q+3)(6q+1)(16q^4 + 48q^3 + 72q^2 + 12q + 1),$$

$$J = 2(2q+1)(2q-1)(2q+3)(6q+1)(4q^2+12q+1) \times$$
$$\times (4q^3 + 16q^2 + 5q + 1)(16q^3 + 20q^2 + 16q + 1),$$

$$T = J \cdot \frac{2^3}{3}(2q+1)(2q-1)^2(2q+3)(6q+1)\sqrt{q},$$

$$\varphi = \frac{(2q+1)(2q+3)(6q+1)}{(2q-1)^3}, \qquad \psi = \frac{2q(2q+3)}{6q+1}, \qquad \vartheta = \frac{2(2q+1)}{2q-1},$$

$$\alpha = \frac{16q^3 + 20q^2 + 16q + 1}{2(4q^3 + 16q^2 + 5q + 1)}, \qquad \beta = \frac{4q^2 + 12q + 1}{(2q+1)(2q-1)}, \qquad \gamma = \frac{6q+1}{2q+3},$$

$$\mathfrak{a} = \frac{4}{2q-1}\sqrt{q}, \qquad \mathfrak{b} = \frac{(2q+1)(2q-1)^2}{q(20q^2+12q+5)}\sqrt{q},$$

$$\mathfrak{c} = \frac{(2q-1)(2q+3)(6q+1)}{16q^4 + 48q^3 + 72q^2 + 12q + 1}\sqrt{q}.$$

9. Wir gehen wie im vor. Artikel von der Substitution 20)

$$\psi = x\frac{\vartheta - 1}{\vartheta + 1} \tag{35}$$

aus, welche die Bedingungsgleichung

$$f^2 = x(x+1)\vartheta\left[\vartheta^2(x-1) - \vartheta(2x+2) + (x-1)\right] \tag{36}$$

zur Folge hat, und wählen

$$\vartheta = p^2 x.$$

Der Ausdruck, der zu einem Quadrat zu machen ist, heißt dann

$$(x+1)[x^3p^4 - x^2(p^4+2p^2) + x(-2p^2+1) - 1].$$

In Übereinstimmung mit dem bekannten Fermat-Eulerschen Verfahren setzen wir

$$x^3p^4 - x^2(p^4+2p^2) + x(-2p^2+1) - 1 = (x+1)(xp^2+u)^2,$$

bestimmen u so, daß außer den dritten Potenzen von x auch die zweiten verschwinden, nehmen also

$$u = -p^2 - 1$$

und lösen die Gleichung nach x auf; es wird

$$x = \frac{(p^2+1)^2+1}{p^4-2p^2}$$

Hieraus folgt

$$\vartheta = \frac{(p^2+1)^2+1}{p^2-2}.$$

Auf diese Weise gelangen wir zu dem

Typus V eines rationalen Tetraeders mit kongruenten Seiten:

$$\mathfrak{a} = (q-2)(q+4)(q^2+1)(q^2+2q+2)(q^4+4q^3+16q^2+36q+16),$$
$$\mathfrak{b} = 2(q^2+4q+8)(q^3+7q^2+5q+4)(q^4+2q^3+q^2+5q+4),$$
$$\mathfrak{c} = q(q+3)(q^2+q+4)(q^6+4q^5+6q^4+24q^3+82q^2+80q+32),$$
$$\mathfrak{J} = q(q-2)(q+3)(q+4)(q^2+q+4)(q^2+2q+2)(q^3+7q^2+5q+4)$$
$$\times (q^4+2q^3+q^2+5q+4)(q^4+4q^3+16q^2+36q+16),$$
$$\mathfrak{T} = \mathfrak{J}\cdot \tfrac{4}{3}q(q-2)(q+3)(3q+4)(q^2+q+4)(q^2+2q+2)\sqrt{q}.$$
$$\varphi = \frac{q(q+3)(q^2+q+4)}{(3q+4)^2},\quad \psi = \frac{(q^2+q+4)(q^2+2q+2)}{q^2(q-2)(q+3)},\quad \vartheta = \frac{q^2+2q+2}{q-2},$$
$$\alpha = \frac{q^4+4q^3+16q^2+36q+16}{(q-2)(q+4)(q^2+2q+2)},\quad \beta = \frac{q^4+2q^3+q^2+5q+4}{q^3+7q^2+5q+4},\quad \gamma = \frac{q(q+3)}{q^2+q+4},$$
$$a = \frac{(q-2)(q^2+2q+2)}{(3q+4)(q^2+1)}\sqrt{q},\quad b = \frac{2(3q+4)}{q(q^2+4q+8)}\sqrt{q},$$
$$c = \frac{q(q+3)(3q+4)(q^2+q+4)}{q^6+4q^5+6q^4+24q^3+82q^2+80q+32}\sqrt{q}.$$

10. Wie für die vorigen beiden Typen benutzen wir die Substitution 20) oder vielmehr die ihr gleichbedeutende 31)

$$\psi = x\frac{\vartheta+1}{\vartheta-1} \tag{37}$$

mit der zugehörigen Bedingungsgleichung

$$f^2 = x(x-1)\vartheta[\vartheta^2(x+1) + 2\vartheta(x-1) + (x+1)], \tag{38}$$

an deren Stelle die folgende treten kann:

$$\vartheta^2(x+1) + 2\vartheta(x-1) + (x+1) = n^2\frac{x}{x-1}\vartheta,$$

die durch rationale Werte von ϑ, x und n zu lösen ist. Sie ist in ϑ quadratisch. Die Diskriminante der quadratischen Gleichung

$$\vartheta^2(x^2-1)+\vartheta[2(x-1)^2-n^2x]+(x^2-1)=0,$$

welche die Gestalt

$$D=x(4x-4-n^2)(-4x-xn^2+4)$$

annimmt, soll ein Quadrat werden; setzt man

$$x=-n^2,$$

so wird

$$D=n^2(n^2+2)^2(5n^2+4),$$

es ist mithin

$$5n^2+4$$

zu einem Quadrat zu machen. Dies geschieht, wie man leicht findet, für

$$n=\frac{4p}{p^2-5},$$

es ist also

$$x=-\frac{16p^2}{(p^2-5)^2}$$

zu nehmen. Führt man dies in die obige quadratische Gleichung ein, so ergibt sich als eine Wurzel

$$\vartheta=\frac{(p+1)(p+5)(p^2-2p+5)}{(p-1)(p-5)(p^2+2p+5)},$$

während die andere Wurzel von dieser nicht wesentlich verschieden ist.

Man gewinnt auf diese Weise den folgenden Typus:

Typus VI eines rationalen Tetraeders mit kongruenten Seiten:

$$\begin{aligned}
a=\;&(p^{10}+9p^8+16p^7+58p^6-416p^5+290p^4+400p^3+1125p^2+3125)\\
&\times(p^{10}+9p^8-16p^7+58p^6+416p^5+290p^4-400p^3+1125p^2+3125),\\
b=\;&(p+1)(p-1)(p+5)(p-5)(p^2+2p+5)(p^2-2p+5)\\
&\times(p^2+4p+5)(p^2-4p+5)(p^8+12p^6+214p^4+300p^2+625),\\
c=\;&8p(p^2+5)(p^4-2p^2+25)\\
&\times(p^{12}+6p^{10}-89p^8+1364p^6-2225p^4+3750p^2+15625),\\
J=\;&4p(p+1)(p-1)(p+5)(p-5)(p^2+5)(p^2+2p+5)(p^2-2p+5)\\
&\times(p^2+4p+5)(p^2-4p+5)(p^4-2p^2+25)(p^{10}+9p^8+16p^7+58p^6\\
&-416p^5+290p^4+400p^3+1125p^2+3125)(p^{10}+9p^8-16p^7+58p^6\\
&+416p^5+290p^4-400p^3+1125p^2+3125),\\
I=\;&J\cdot\frac{2^5}{8}p^2(p+1)(p-1)(p+5)(p-5)(p^2+5)(p^2-5)(p^2+2p+5)\\
&\times(p^2-2p+5)(p^4-2p^2+25),
\end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{(p^2+5)(p^2+2p+5)(p^2-2p+5)(p^4-2p^2+25)}{2^4p^2(p+1)(p-1)(p+5)(p-5)}, \quad \psi = \frac{(p^2+5)(p^2-5)^2}{2^2p(p^4-2p^2+25)},$$

$$\vartheta = \frac{(p+1)(p+5)(p^2-2p+5)}{(p-1)(p-5)(p^2+2p+5)},$$

$$\alpha = \frac{p^{10}+9p^8+16p^7+58p^6-416p^5+290p^4+400p^3+1125p^2+3125}{p^{10}+9p^8-16p^7+58p^6+416p^5+290p^4-400p^3+1125p^2+3125},$$

$$\beta = \frac{(p+1)(p+5)(p^2+2p+5)(p^2-4p+5)}{(p-1)(p-5)(p^2-2p+5)(p^2+4p+5)}, \quad \gamma = \frac{p^4-2p^2+25}{4p(p^2+5)},$$

$$\mathfrak{a} = \frac{p^2-5}{2p}, \quad \mathfrak{b} = \frac{2p(p+1)(p-1)(p+5)(p-5)(p^2+2p+5)(p^2-2p+5)}{(p^2-5)(p^8+12p^6+214p^4+300p^2+625)},$$

$$\mathfrak{c} = \frac{2^4p^2(p^2+5)(p^2-5)(p^4-2p^2+25)}{p^{12}+6p^{10}-89p^8+1364p^6-2225p^4+3750p^2+15625}.$$

11. Der Substitution 29)

39) $$\psi = \frac{\vartheta+y}{\vartheta-1}$$

entspricht die Bedingungsgleichung

40) $$f^2 = (y-1)\vartheta(\vartheta+y)[\vartheta^2\cdot 2+\vartheta(y-1)+(y+1)].$$

Wir setzen

$$y-1 = 2p^2,$$

dann lautet der Ausdruck, der zu einem Quadrat zu machen ist:

$$g^2 = \vartheta[\vartheta+(2p^2+1)][\vartheta^2+\vartheta p^2+(p^2+1)].$$

Hierfür lassen sich nach dem Fermat-Eulerschen Verfahren partikuläre Lösungen finden. Der Ausdruck wird für $\vartheta = 1$ zu $g^2 = (2p^2+2)^2$, also ein Quadrat; wenn wir daher

$$\vartheta = \nu + 1$$

setzen, so ist nicht nur der Koeffizient von ν^4, sondern auch das von ν freie Glied ein Quadrat; es wird

$$g^2 = \nu^4+\nu^3(3p^2+5)+\nu^2(2p^4+11p^2+10) + \nu\cdot 2(p^2+1)(3p^2+5)+4(p^2+1)^2,$$

und wir können setzen

$$g^2 = [\nu^2+\nu u-2(p^2+1)]^2,$$

wo u so zu bestimmen ist, daß nach Gleichsetzung der rechtsstehenden Ausdrücke auch die erste Potenz von ν verschwindet. Dies gibt

$$\nu = \frac{p^4-30p^2-31}{8(3p^2+5)},$$

also

$$\vartheta = \frac{(p^2-3)^2}{8(3p^2+5)}.$$

Auf diesem Wege erhält man den

Typus VII eines rationalen Tetraeders mit kongruenten Seiten:

$$\varphi = \frac{(q+1)(5q+41)^2}{8q(q-31)(3q+5)}, \quad \psi = \frac{49(q+1)}{q-31}, \quad \vartheta = \frac{(q-3)^2}{8(3q+5)}.$$

Auf die Wiedergabe der Ausdrücke für die übrigen Größen dieses Typus möge hier verzichtet werden; man findet sie leicht nach den Angaben des Artikels 2.

12. Wie aus dem vorhergehenden ersichtlich ist, hat es keine Schwierigkeit, auf ähnlichem Wege weitere Typen von Tetraedern der verlangten Art aufzustellen; ich gehe daher nicht weiter darauf ein. Wohl aber soll gezeigt werden, wie man, von bekannten Typen ausgehend, neue gewinnen kann. Es ist wiederum das Eulersche Verfahren[1]), das uns dazu führt.

Schon oben wurde erwähnt, daß eine unmittelbare Anwendung dieses Verfahrens auf die Gleichung (8) zu nichts Neuem führt. Wir wandeln daher die Gleichung (8) durch eine der im Artikel 5 angegebenen 36 Substitutionen um; welche wir wählen, ist, von wenigen Ausnahmen abgesehen, gleichgültig. Der Substitution 21)

$$\psi = \frac{y}{\vartheta + 1} \tag{41}$$

entspricht die Bedingungsgleichung

$$f^2 = -y\vartheta[\vartheta + (y-1)]\,[\vartheta^2 + \vartheta(-y+2) + (y+1)], \tag{42}$$

an deren Stelle eine der folgenden beiden in ϑ quadratischen Gleichungen treten kann, in denen m und n rationale Zahlen bedeuten;

$$y\,[\vartheta^2 + \vartheta(-y+2) + (y+1)] = -m^2\vartheta\,[\vartheta + (y-1)], \tag{43}$$

$$\vartheta^2 + \vartheta(-y+2) + (y+1) = -n^2 y\vartheta\,[\vartheta + (y-1)]. \tag{44}$$

Wir legen die Gleichung (43) zugrunde; sie lautet, nach ϑ und y geordnet,

$$\vartheta^2(y + m^2) + \vartheta[-y^2 + y(2+m^2) - m^2] + y^2 + y = 0 \tag{43a}$$

$$y^2(-\vartheta + 1) + y\,[\vartheta^2 + \vartheta(2+m^2) + 1] + \vartheta(\vartheta - 1)\,m^2 = 0. \tag{43b}$$

Hat man nun irgend ein Tripel φ_0, ψ_0, ϑ_0, das, für φ, ψ, ϑ eingesetzt, den Gleichungen (14) und (15) genügt, oder, was dasselbe ist, irgend ein Wertepaar ψ_0, ϑ_0, das die Gleichung (8) löst, so bestimme man y_0, den zugehörigen Wert von y, aus (41), sowie den entsprechenden Wert von m aus (43). Zu m und y_0 gehört dann außer ϑ_0 noch ein zweiter Wert ϑ_1 für ϑ, der aus (43a) rational zu erhalten ist; man findet

$$\vartheta_1 = \frac{y_0(y_0+1)}{(y_0+m^2)\vartheta_0}.$$

Die Elimination von m mit Hilfe der Gleichung (43), in der ϑ_0 und y_0 an die Stelle von ϑ und y zu treten hat, ergibt

$$\vartheta_1 = \frac{(y_0+1)\,[\vartheta_0 + (y_0-1)]}{\vartheta_0(2y_0-3) - (y_0+1)},$$

und die weitere Elimination von y_0 mit Hilfe der Gleichung (41), in der ψ, ϑ, y durch ψ_0, ϑ_0, y_0 ersetzt wird, liefert

$$\vartheta_1 = \frac{[\psi_0(\vartheta_0+1)+1]\,[\psi_0(\vartheta_0+1)+(\vartheta_0-1)]}{\psi_0(2\vartheta_0-1)(\vartheta_0+1)+(-3\vartheta_0-1)}.$$

---

1) Vgl. diese Berichte, 5, 30, 1906; 6, 9 und 10, 1907.

ψ_1 erhält man nunmehr aus der (41) entsprechenden Gleichung

$$\psi_1 = \frac{y_0}{\vartheta_1 + 1},$$

und φ_1 entnimmt man aus der Gleichung (9), in der φ_1, ψ_1, ϑ_1 für φ, ψ, ϑ zu schreiben ist. Aus einem Tripel φ_0, ψ_0, ϑ_0 gewinnt man auf diese Weise (nach Vertauschung von φ_1 mit ϑ_1) das folgende Tripel

$$\varphi_1 = \frac{[\psi_0(\vartheta_0+1)+1][\psi_0(\vartheta_0+1)+(\vartheta_0-1)]}{\psi_0(2\vartheta_0-1)(\vartheta_0+1)+(-3\vartheta_0-1)}, \quad \psi_1 = \frac{\psi_0[\psi_0(2\vartheta_0-1)(\vartheta_0+1)+(-3\vartheta_0-1)]}{\psi_0^2(\vartheta_0+1)+\psi_0(3\vartheta_0-1)-2},$$

$$\vartheta_1 = \frac{\vartheta_0[\psi_0^2(\vartheta_0+1)+\psi_0(3\vartheta_0-1)-2]}{[\psi_0(\vartheta_0+1)+1][\psi_0(\vartheta_0-1)-(\vartheta_0+1)]}.$$

Die Ausdrücke sind, da sie nur ψ_0 und ϑ_0 enthalten, unsymmetrisch und wenig übersichtlich; viel einfacher gestalten sie sich, wenn man mit Hilfe der Gleichung (9), in der φ_0, ψ_0, ϑ_0 an die Stelle von φ, ψ, ϑ zu setzen ist, in geeigneter Weise φ_0 einführt; man erhält dann den folgenden Satz:

Aus einem Tripel $\varphi = \varphi_0$, $\psi = \psi_0$, $\vartheta = \vartheta_0$, welches die Gleichungen

$$(14) \qquad \varphi\psi\vartheta - \psi\vartheta - \vartheta\varphi - \varphi\psi - \varphi - \psi - \vartheta + 1 = 0$$

$$(15) \qquad \varphi\psi\vartheta = k^2$$

rational löst, erhält man ein neues φ_1, ψ_1, ϑ_1 durch die Gleichungen

$$(45) \quad \varphi_1 = \varphi_0 \frac{\psi_0(\vartheta_0+1)+1}{\vartheta_0(\varphi_0+1)+1}, \quad \psi_1 = \psi_0 \frac{\vartheta_0(\varphi_0+1)+1}{\varphi_0(\psi_0+1)+1}, \quad \vartheta_1 = \vartheta_0 \frac{\varphi_0(\psi_0+1)+1}{\psi_0(\vartheta_0+1)+1}.$$

Da hierbei jedes Tripel nach den Darlegungen des Artikels 3 in achtfacher Weise zugrunde gelegt werden kann, ergibt jeder bekannte Typus eines Tetraeders der verlangten Art durch erstmalige Anwendung der Gleichungen (45) acht neue Typen: durch wiederholte Anwendung läßt das Verfahren eine unbegrenzte Vermehrung der Typen zu.

Wäre man, statt von der Gleichung (43a), von (43b) oder von (44) ausgegangen, oder hätte man eine andere der obigen 36 Substitutionen verfolgt, so hätten sich, falls man nicht zu schon Bekanntem zurückgekommen wäre, Ausdrücke ergeben, die sich von den obigen (45) nur nach den Angaben des Artikels 3 unterscheiden.

13. Um das vorstehende an einem Beispiel zu erläutern, wollen wir die Gleichungen (45) in zwei Fällen auf den Typus I_1 anwenden. Die ihm entsprechenden Ausdrücke für φ, ψ, ϑ bezeichnen wir mit φ_{I_1}, ψ_{I_1}, ϑ_{I_1}, setzen also

$$\varphi_{\mathrm{I}_1} = \frac{q(2q+3)}{3q+2}, \quad \psi_{\mathrm{I}_1} = \frac{3q+2}{q-1}, \quad \vartheta_{\mathrm{I}_1} = \frac{2q+3}{q-1}.$$

Den Typus I_{2a}, den wir erhalten, indem wir diese Ausdrücke für φ_0, ψ_0, ϑ_0 in (45) einführen, lassen wir beiseite und gehen sogleich dazu über,

$$\varphi_0 = \frac{1}{\varphi_{\mathrm{I}_1}}, \quad \psi_0 = -\psi_{\mathrm{I}_1}, \quad \vartheta_0 = -\vartheta_{\mathrm{I}_1}$$

in die Gleichungen (45) einzusetzen. Wir erhalten auf diese Weise den

Typus I_{2b} eines rationalen Tetraeders mit kongruenten

$$a = 2\,(2q+3)\,(q^2+4)\,(q^2+3q+1)\,(q^3+14q^2+9q+1),$$

$$b = (q+4)\,(q^2-4q-2)\,(5q^2+4q+1)\,(q^3+12q^2+8q+4$$

$$c = (q-1)\,(3q+2)\,(q^2+7q+2)\,(q^4+12q^3+58q^2+44q+$$

$$J = (q-1)\,(q+4)\,(2q+3)\,(3q+2)\,(q^2+3q+1)\,(q^2-4q$$

$$\times (q^2+7q+2)\,(q^3+12q^2+8q+4)\,(q^3+14q^2+$$

$$T = J\cdot\frac{2^2}{3}\,(q-1)\,(2q+3)\,(3q+2)\,(q^2-4q-2)\,(q^2+7q+$$

$$\varphi = \frac{(3q+2)(q^2+7q+2)}{(q-1)(q^2-4q-2)},\quad \psi = \frac{(q-1)(q^2+7q+2)}{(2q+3)(3q+2)},\quad \vartheta = \frac{q(2q+}{q^2-4q}$$

$$\alpha = \frac{(2q+3)(q^2+3q+1)}{q^3+14q^2+9q+1},\quad \beta = \frac{q^3+12q^2+8q+4}{(q+4)(q^2-4q-2)},\quad \gamma = \frac{(q-1}{q^2+}$$

$$\mathfrak{a} = \frac{2(2q+3)}{q^2+4}\sqrt{q},\quad \mathfrak{b} = \frac{q^2-4q-2}{5q^2+4q+1}\sqrt{q},\quad \mathfrak{c} = \frac{(q-1)(3q+2)(q^2+7q}{q(q^4+12q^3+58q^2+44q}$$

14. Gehen wir dagegen von

$$\varphi_0 = -\varphi_{\mathrm{I}_1},\quad \psi_0 = \frac{1}{\psi_{\mathrm{I}_1}},\quad \vartheta_0 = -\vartheta_{\mathrm{I}_1}$$

aus, so gelangen wir auf diesem Wege zu dem

Typus I_{2c} eines rationalen Tetraeders mit kongruenten

$$a = (q+4)\,(8q^2+12q+5)\,(8q^2+13q+4)\,(16q^3+49q^2+4$$

$$b = (4q+1)\,(4q^2+13q+8)\,(5q^2+12q+8)\,(16q^3+44q^2+4$$

	a	b	c	J	T	φ	
1	203	195	148	13 650	611 520	6	32
2	888	875	533	223 860	37 608 480	7	6
3	1 804	1 479	1 183	870 870	214 582 368	21	22
4	2 431	2 296	2 175	2 277 660	1 403 038 560	14:3	11
5	2 873	2 748	1 825	2 419 950	1 355 172 000	15:2	5
6	3 111	2 639	2 180	2 831 010	1 585 365 600	56:5	10
7	5 512	5 215	1 887	4 919 460	1 377 448 800	105	6
8	8 484	6 625	6 409	20 980 050	30 546 952 800	13	39
9	11 275	10 136	8 619	41 861 820	103 147 524 480	48:7	11
10	19 695	16 448	13 073	106 675 680	323 290 060 800	16	49
11	32 708	31 493	24 525	363 332 970	2 685 757 314 240	63:11	9
12	36 743	33 800	18 777	315 254 940	1 553 576 344 320	192:11	33
13	72 779	59 595	46 904	1 392 990 060	12 871 228 154 400	270:11	22
14	68 276	57 507	53 669	1 495 283 790	21 369 399 699 648	231:29	22
15	84 175	82 737	20 752	857 155 320	4 896 071 187 840	36	289
16	87 200	78 477	68 237	2 554 340 880	49 778 995 069 440	189:29	29
17	136 956	130 339	93 275	5 826 450 630	165 098 305 051 680	529:77	14
18	146 120	136 561	131 439	8 201 853 660	303 140 511 273 600	33:7	385
19	286 677	248 600	209 963	25 416 782 820	1 456 076 654 192 160	539:62	31
20	518 375	516 327	56 648	14 621 907 300	207 163 182 626 400	322:3	22
21	603 704	597 139	147 693	43 958 902 260	2 004 314 940 325 152	177:7	322
22	756 204	591 227	517 427	152 536 060 110	14 217 337 033 036 704	511:19	54
23	869 023	832 600	327 327	135 797 623 500	11 928 680 524 437 600	506:21	217

$$\ldots 1)(q-1)(2q+3)(3q+2)(32q^4+152q^3+257q^2+152q+32),$$

$$\ldots +1)(q-1)(2q+3)(3q+2)(q+4)(4q+1)(4q^2+13q+8)\times$$

$$\times(8q^2+13q+4)(16q^3+44q^2+49q+16)(16q^3+49q^2+44q+16),$$

$$\ldots\frac{2^3}{3}(q-1)(2q+3)(3q+2)(4q^2+13q+8)(8q^2+13q+4)\sqrt{q},$$

$$\ldots\frac{(3q+2)(4q^2+13q+8)}{2q(q-1)(2q+3)},\quad \psi=\frac{(2q+3)(8q^2+13q+4)}{2(q-1)(3q+2)},\quad \vartheta=\frac{8q^2+13q+4}{4q^2+13q+8},$$

$$\ldots=\frac{16q^3+49q^2+44q+16}{(q+4)(8q^2+13q+4)},\quad \beta=\frac{(4q+1)(4q^2+13q+8)}{16q^3+44q^2+49q+16},\quad \gamma=\frac{(2q+3)(3q+2)}{2(q+1)(q-1)},$$

$$\mathfrak{a}=\frac{8q^2+13q+4}{q(8q^2+12q+5)}\sqrt{q},\qquad \mathfrak{b}=\frac{4q^2+13q+8}{5q^2+12q+8}\sqrt{q},$$

$$\mathfrak{c}=\frac{4(q-1)(2q+3)(3q+2)}{32q^4+152q^3+257q^2+152q+32}\sqrt{q}.$$

15. Zum Schluß mögen einige Zahlenbeispiele in einer Tabelle zusammengestellt werden. Dabei bedeutet z. B. H_3 das dritte der acht von Hoppe angeführten Beispiele, ferner z. B. II (2), daß das Beispiel sich aus dem Typus II für $p=2$ ergibt. Es zeigt sich dabei die Merkwürdigkeit, daß ein Beispiel gleichzeitig verschiedenen Typen angehören kann. — Es ist ersichtlich, daß Hoppes acht Beispiele in den Typen I—VI für besondere Werte des Parameters auftreten. Das Beispiel 10 dagegen ist dasselbe, das diese Berichte 6, 16, 1907 mitgeteilt wurde; es ergibt sich aus dem Typus VII für $p=1$.

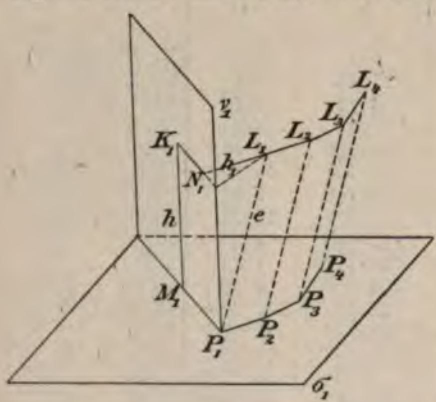
α	β	γ	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	
7:5	39:25	5:2	28:29	3:4	16:37	H_3, II (1), III (1)
4:3	7:5	41:13	36:37	21:25	1:3	H_5, I_1 (3:2)
11:10	29:15	35:13	88:41	6:17	7:26	III (3:2)
17:11	7:4	29:15	11:13	28:41	3:5	H_6, I_1 (2)
17:13	3:2	73:25	14:13	168:229	5:14	H_1, V (1)
61:51	13:7	5:2	3:2	14:29	40:109	H_2, I_1 (4), III (1:2)
53:52	7:5	17:3	4	35:149	3:37	H_4, IV (1)
7:6	53:25	29:13	168:101	2:5	13:34	III (9:2), V (2)
55:41	7:4	39:17	11:10	112:181	6:13	III (8)
17:15	32:17	769:289	2415:1313	736:1799	7:23	VII (1)
37:26	11:7	109:45	16:17	308:409	9:20	III (7)
203:181	20:13	11:3	7:4	32:65	132:569	H_8, III (1:3)
281:259	29:15	11:4	7:3	45:137	132:533	I_1 (6)
130:101	29:15	119:55	16:13	348:661	77:164	III (2:3)
37:35	317:261	8	119:65	9:17	136:1297	II (2)
109:80	37:21	29:13	16:15	63:101	87:181	I_1 (3)
303:226	17:11	35:13	24:23	506:697	161:410	II (1:2)
20:13	493:277	21:11	240:281	2:3	693:1138	H_7, VI (3)
601:477	20:11	31:13	9:7	308:565	217:521	I_1 (7:2)
325:319	23:21	73:4	11:5	483:1069	4:97	$I_{2\mathfrak{b}}$ (2)
92:85	349:295	105:13	276:193	59:87	63:541	$I_{2\mathfrak{c}}$ (3:2)
265:246	73:35	241:95	72:29	1022:3471	57:226	$I_{2\mathfrak{b}}$ (3:2)
527:485	125:92	77:15	31:17	92:181	231:1417	$I_{2\mathfrak{c}}$ (2)

Das Aoustsche Problem der Kurventheorie.

Von E. Salkowski.

1. Konstruiert man in allen Punkten einer Raumkurve die Schmiegungskugeln, so erfüllen deren Mittelpunkte eine Kurve, die mit der Ausgangskurve parallele Hauptnormalen hat, während ihre Tangenten den Binormalen, ihre Binormalen den Tangenten der gegebenen Kurve in entsprechenden Punkten parallel sind. Konstruiert man auf dieselbe Weise die Kugeln, die ihrerseits die Kurve der Schmiegungskugelmittelpunkte vierpunktig berühren, so erhält man als Ort ihrer Mittelpunkte eine Kurve, die mit der ursprünglichen Kurve in entsprechenden Punkten parallele Tangenten, infolgedessen aber auch parallele Bi- und Hauptnormalen besitzt. Die so abgeleitete Kurve kann im speziellen Falle mit der Ausgangskurve kongruent sein. Aoust[1]) hat sich mit der analytischen Bestimmung dieser Kurven beschäftigt, ohne die Aufgabe allgemein lösen zu können. R. Hoppe[2]) nahm dann die Frage wieder auf und erledigte sie mit Hilfe der ihm eigenen Methoden der analytischen Kurventheorie. Eine geometrische Behandlung des Problems liegt bisher noch nicht vor.[3]) Es bietet daher vielleicht ein gewisses Interesse, zu zeigen, wie die geometrische Anschauung in diesem Falle unmittelbar ein Resultat ergibt, das den analytischen Methoden zunächst nicht unerhebliche Schwierigkeiten bereitete.

2. Es seien P_1, P_2, P_3, P_4 Punkte einer gegebenen Raumkurve (P), M_1 der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $P_1P_2P_3$, K_1 der Mittelpunkt der Kugel durch P_1, P_2, P_3, P_4. In der Grenzlage bedeutet dann M_1 den Krümmungsmittelpunkt der Kurve (P) im Punkte P_1, K_1 ihren Schmiegungskugelmittelpunkt. Denkt man sich die Konstruktion, durch die man K_1 erhielt, für die Punkte P_2, P_3, P_4, P_5 usw. fortgesetzt, so erhält man weitere Punkte K_2, K_3, K_4 …, die, wenn die Punkte P einander unbeschränkt nähern, die Kurve der Schmiegungskugelmittelpunkte (K) erfüllen. Es ist bekannt, daß die Kurve (K) die Gratlinie der von den Normalebenen ν der gegebenen Kurve eingehüllten abwickelbaren Fläche ist, daß also die Krümmungsachse M_1K_1 Tangente und die Normalebene ν_1 von (P) Schmiegungsebene von (K) ist. Der Krümmungsmittelpunkt N_1 der Kurve



1) Bulletin de la société math. 7 (1878—1879).
2) Archiv der Math. u. Phys. (1) 66, 386—396.
3) Vgl. W. Schell. Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung. Leipzig 1898. Schlußwort S. 163.

(K) im Punkte K_1 liegt demnach in der Ebene ν_1, und zwar so, daß $K_1 N_1 \| M_1 P_1$ ist. Der Schmiegungskugelmittelpunkt L_1 liegt senkrecht zu ν_1 über dem Krümmungsmittelpunkt N_1 und die Krümmungsachse $N_1 L_1$ der Kurve (K) ist Tangente an die Kurve der Punkte L. Daraus folgt, daß $L_1 L_2 \| P_1 P_2$ ist, also die Kurven (P) und (L) parallele Tangenten besitzen. Setzt man nun $M_1 K_1 = h$, $N_1 L_1 = h_1$ und $K_1 N_1 = r_1$, so ist aus der Figur zu entnehmen, daß die Koordinaten des Punktes L_1 bezüglich des Fundamentaltrieders der Kurve (P) im Punkte P_1 der Reihe nach h_1, h, $(r - r_1)$ sind.

3. Soll nun die Kurve (L), wie das Aoustsche Problem verlangt, der Kurve (P) kongruent sein, so muß $L_1 L_2 = P_1 P_2$, also auch $P_1 L_1 = P_2 L_2 = e$ sein, d. h. entsprechende Punkte der Kurven (P) und (L) haben eine konstante Entfernung e voneinander. Für die analytische Darstellung dieser Aoustschen Kurven ist wichtig zu bemerken, daß, wenn (b, e) den Winkel zwischen der Binormale und $P_1 L_1$ bezeichnet, die Bedingung

$$h = e \cos (b, e) \tag{1}$$

für sie notwendig und hinreichend ist.

4. Die Konstruktion derartiger Kurven ergibt sich durch einen einfachen Grenzübergang aus der folgenden Herstellung von zwei parallelen Polygonalzügen. Man nehme drei Punkte P_1, P_2, P_3 beliebig so an, daß $P_1 P_2 = P_2 P_3 = ds$ wird, ferner drei Punkte L_1, L_2, L_3 derart, daß $L_1 L_2 \# P_1 P_2$, $L_2 L_3 \# P_2 P_3$. Man legt nun durch P_1 die Orthogonalebene ν_1 zu $P_1 P_2$, sowie die Orthogonalebene ν_2 zu $P_2 P_3$ durch P_2. Der Schnittpunkt der beiden Normalebenen mit der Ebene σ_1 des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ ist der Mittelpunkt M_1 seines Umkreises. Verlängert man $L_1 L_2$ bis zum Schnitt N_1 mit der Normalebene durch P_1 und zieht $N_1 K_1 \| P_1 M_1$, so erhält man in dem Schnittpunkte K_2 dieser Parallelen mit der Schnittgeraden p_1 der Ebenen ν_1 und ν_2 den Mittelpunkt einer Kugel, die P_1, P_2, P_3 und den folgenden noch zu bestimmenden Punkt P_4 des Polygonalzuges (P) enthält. Jetzt ist noch das Gesetz willkürlich, das die Lage des Punktes P_4 auf der Kugel bestimmt. Dieses kann etwa durch eine Vorschrift gegeben sein, nach welcher die Ebene $P_2 P_3 P_4$ von der Ebene σ_1 abweicht. Wird diese gegeben, so lege man durch $P_2 P_3$ die Ebene, die den vorgeschriebenen Winkel du mit σ_1 bildet, und nehme auf ihrem Schnittkreise mit der Kugel um K_1 den Punkt P_4 so an, daß $P_3 P_4 = ds$ wird. Dies Verfahren wird fortgesetzt, um aus $P_2 P_3 P_4$ einen Punkt P_5 zu erhalten, u. s. f. Läßt man die Punkte P_1, P_2, P_3 sich unbeschränkt nähern, so ergibt diese Konstruktion eine gesuchte Kurve, bei der der Torsionswinkel

$$du = \varphi(s) ds$$

in beliebig vorgeschriebener gesetzmäßiger Weise von der Bogenlänge abhängig ist.

Das die Veränderlichkeit des Punktes P_4 einschränkende Gesetz kann aber auch durch die Bedingung gegeben werden, daß die gesuchte Kurve einer beliebig gegebenen Fläche angehört. Daraus ist ersichtlich, daß man im allgemeinen auf jeder Fläche von einem Punkte P_1 nach P_2 und P_3 beliebig fortschreitend, sodann $L_1 L_2 \# P_1 P_2$, $L_2 L_3 \# P_2 P_3$ willkürlich im Raume annehmend, eine Kurve der verlangten Art konstruieren kann.

5. Eine nähere Untersuchung der Aoustschen Kurven wird indessen auf ihre analytische Darstellung nicht verzichten können. Während aber Aoust auf eine lineare Differentialgleichung vierter Ordnung kam, die erst von Hoppe durch die zufällig erscheinende Kenntnis partikulärer Integrale gelöst wurde, führt die Gleichung

$$h = e \cos (b, e) \tag{1}$$

sofort zum Resultat. Bezeichnet man die konstanten Richtungskosinus der Geraden e mit α, β, γ, die der Binormalen b mit a', b', c', und benutzt die durch infinitesimalgeometrische Überlegungen leicht herleitbare Formel[1])

$$h = \frac{dr}{du},$$

in welcher r den Krümmungsradius und

$$du = \tau ds$$

den Schmiegungswinkel bedeutet, so lautet die Gleichung (1):

$$\frac{dr}{du} = e\ (\alpha a' + \beta b' + \gamma c'). \tag{2}$$

Zur Bestimmung der Ausdrücke für die kartesischen Koordinaten der Aoustschen Kurven kann man sich mit Vorteil der Methode der Zuordnung durch parallele Tangenten bedienen, die in einer früheren Mitteilung dargestellt und auf andere Aufgaben der Kurventheorie angewandt worden ist.[2])

6. Sind X, Y, Z die Koordinaten eines Punktes einer beliebigen Raumkurve, so werden die Koordinaten der Punkte aller Raumkurven, die mit (XYZ) parallele Tangenten, also gleiche Krümmungs- und Torsionswinkel haben, durch die Gleichungen

$$x = \int \frac{K}{\varkappa} dX, \quad y = \int \frac{K}{\varkappa} dY, \quad z = \int \frac{K}{\varkappa} dZ, \quad s = \int \frac{K}{\varkappa} dS \tag{3}$$

dargestellt. Hierbei bedeuten K, T, dS Krümmung, Torsion und Bogenelement von (XYZ). Ist nun (XYZ) eine beliebige und (x, y, z) eine Aoustsche Kurve, so wird

$$r = \frac{1}{\varkappa} = e \int (\alpha a' + \beta b' + \gamma c') du, \tag{4}$$

eine Gleichung, in der a', b', c' die Richtungskosinus der Binormalen von (X, Y, Z) und

$$du = TdS$$

1) W. Schell. Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung. Leipzig 1898. S. 61.

2) E. Salkowski. Zur Bestimmung der Raumkurven, für welche zwischen Krümmung, Torsion und Bogenlänge eine gegebene Gleichung besteht. Diese Berichte 4, 64—69.

gesetzt ist. Führt man diese Werte in das System (3) ein, so erhält man die gesuchten Gleichungen der Aoustschen Kurven:

$$
(5)\qquad \begin{cases}
x = e\int K\left(\int(\alpha a' + \beta b' + \gamma c')\,T\,dS\right)dX \\
y = e\int K\left(\int(\alpha a' + \beta b' + \gamma c')\,T\,dS\right)dY \\
z = e\int K\left(\int(\alpha a' + \beta b' + \gamma c')\,T\,dS\right)dZ \\
s = e\int K\left(\int(\alpha a' + \beta b' + \gamma c')\,T\,dS\right)dS.
\end{cases}
$$

Diese Gleichungen erweisen sich als sehr geeignet zur weiteren Untersuchung der betrachteten Kurvenklasse. Insbesondere bestimmt man leicht in expliziter Form die zu ihr gehörigen Schraubenlinien, unter denen einige bemerkenswerte Kurven auftreten.

7. *Die Aoustschen Schraubenlinien.* — Alle Schraubenlinien, für welche das Verhältnis der beiden Krümmungen $\frac{\tau}{\varkappa}$ denselben konstanten Wert m hat, lassen sich durch parallele Tangenten aufeinander beziehen, vorausgesetzt, daß die Achsen der Zylinder, auf denen sie geodätische Linien sind, parallel gestellt sind. Man erhält daher, abgesehen von der Lage im Raume, alle Schraubenlinien der verlangten Art, wenn man für X, Y, Z in die Gleichungen (4) und (5) die Koordinaten der geodätischen Schraubenlinien eines geraden Kreiszylinders einsetzt, also

$$X = \cos v, \quad Y = \sin v, \quad Z = mv$$

wählt. Dabei wird

$$K = \frac{1}{1+m^2}, \quad T = \frac{m}{1+m^2}, \quad dS = \sqrt{1+m^2}\,dv, \quad du = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\,dv,$$

$$a' = \frac{-m \sin v}{\sqrt{1+m}}, \quad b' = \frac{m \cos v}{\sqrt{1+m^2}}, \quad c' = \frac{-1}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Hieraus ergibt sich

$$(4')\qquad r = \frac{em}{1+m^2}(m\alpha \cos v + m\beta \sin v - \gamma v) + C.$$

Oder, wenn

$$\frac{m^2 e}{1+m^2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 4A$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{tg} v_0$$

$$\frac{\gamma m e}{1+m^2} = 2B$$

gesetzt wird:

$$r = 4A \sin (v + v_0) - 2Bv + C.$$

Es bedarf nur einer Drehung des Koordinatensystems um den Winkel v_0, um die einfache Formel zu erhalten:

$$r = 4A \sin v - 2Bv + C,$$

eine Gleichung, in der A, B, C willkürliche Konstanten sind. Hieraus ergibt sich durch Ausführung der Quadraturen in den Gleichungen (5) als explizite Darstellung der Aoustschen Schraubenlinien:

$$(5') \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{1+m^2}[A(\sin 2v - 2v) - (2Bv - C)\cos v + 2B\sin v] \\[2mm] y = \dfrac{-1}{1+m^2}[A\cos 2v + (2Bv - C)\sin v + 2B\cos v] \\[2mm] z = \dfrac{-m}{1+m^2}[4A\cos v + Bv^2 - Cv]. \end{cases}$$

Daß unter diesen Schraubenlinien algebraische Kurven nicht vorkommen, ergibt sich leicht aus dem Umstand, daß die durch (5′) dargestellten Kurven mit der Parabel

$$x = \frac{-1}{1+m^2}\{2(A+B)v - C\}$$

$$y = \frac{-1}{1+m^2}\{A + 2B\}$$

$$z = \frac{-m}{1+m^2}\{4A + Bv^2 - Cv\}$$

die unendlich vielen Punkte, die den Parametern $v = 2k\pi$ entsprechen, gemein haben. Während also keine dieser Kurven gleichzeitig *zwei* algebraischen Flächen angehören kann, liegt jede von ihnen auf *einer* algebraischen Fläche. Aus zwei der Gleichungen (5′), etwa aus der zweiten und dritten, kann man nämlich $\cos v$ und v als Funktionen von y und z ausdrücken; setzt man die gefundenen Werte in die erste Gleichung (5′) ein, so ergibt sich eine algebraische Beziehung zwischen den Koordinaten; dieser entspricht eine algebraische Fläche, der die Kurve angehört. Ist im speziellen

$$A = 0,$$

so wird:

$$(1+m^2)x = -(2Bv - C)\cos v + 2B\sin v$$

$$(1+m^2)y = -(2Bv - C)\sin v - 2B\cos v$$

$$(1+m^2)z = -\frac{m}{4B}(2Bv - C)^2 + \frac{mC^2}{4B}.$$

Diese Kurve, deren natürliche Gleichungen

$$\frac{\tau}{\varkappa} = m, \quad s = -\frac{r^2}{4B}\sqrt{1+m^2}$$

sind, liegt demnach auf dem Rotationsparaboloid:

$$(1+m^2)^2(x^2+y^2) = (C^2 + 4B^2) - \frac{4B}{m}(1+m^2)z.$$

Die Linien konstanter Steigung auf einem Rotationsparaboloid mit vertikaler Achse sind Aoustsche Schraubenlinien.

Für den Fall, daß $B = C = 0$ ist, ergeben sich als natürliche Gleichungen der Kurve

$$\frac{\tau}{\varkappa} = m, \quad (1 + m^2)s^2 + r^2 = 16A^2,$$

während die algebraische Gleichung zwischen x, y, z die Form annimmt:

$$y = \frac{A}{1 + m^2} - \frac{(1 + m^2)}{8Am^2}z^2,$$

d. h. *die Kurven konstanter Steigung auf einem parabolischen Zylinder mit horizontalen erzeugenden Geraden gehören zu den Aoustschen Kurven.*

Die Graßmannsche Fundamentalformel und die Additionstheoreme der Thetafunktionen von zwei Argumenten.

Von E. Jahnke.

Man kennt für die Additionstheoreme der Thetafunktionen eine große Zahl von Beweisen.[1]) Ich knüpfe an die Casparysche Herleitung an, will mich aber auf den Fall der Thetas zweier Argumente beschränken. Caspary benutzt eine algebraische Identität, die ihn zunächst zu derjenigen Form des Additionstheorems führt, wo die Thetaquadrupel zu Göpelschen Systemen von Charakteristiken gehören.[2]) Diese Form möge die Göpelsche Form des Additionstheorems heißen. Aus ihr gewinnt er in bekannter Weise die Riemannsche Thetaformel. Eine dritte Form des Additionstheorems ist diejenige, wo die Thetaquadrupel zu Rosenhainschen Systemen von Charakteristiken gehören. Sie möge die Rosenhainsche Form des Additionstheorems heißen. Der Übergang von einer der drei Formen zur andern wird durch die Formeln der quadratischen Transformation vermittelt.

Im folgenden will ich zunächst zeigen, wie sich die von Caspary benutzte Identität[3]) aus der Graßmannschen Fundamentalformel für extensive Größen ableiten läßt, um gleichzeitig einen neuen Beleg für die Fruchtbarkeit dieser Formel zu liefern.[4])

Aus dieser Identität lassen sich alsdann zwei andere gewinnen. Man erhält so ein System von drei Identitäten der Art, daß jede von ihnen in jede durch quadratische Transformation übergeführt werden kann. Und diese Identitäten, welche sich zunächst auf Produkte von zwei Faktoren beziehen, lassen sich auf Produkte von beliebig vielen Faktoren verallgemeinern.

---

1) Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen. Leipzig 1903, B. G. Teubner.

2) Die Bedeutung der Casparyschen Identitätsmethode für die Theorie der Thetas ist neuerdings auch von Herrn Study anerkannt worden. Am. Journ. **16**, 156—163 (1894).

3) Journ. f. Math. **94**, 84 (1882); C. R. **104**, 1235 (1887) und Math. Ann. **30**, 574, 575 (1887).

4) Vermutlich ist auch Caspary auf diesem Wege zu seiner Identität gelangt. Daß er eine andere Darstellung gewählt hat, dafür sind vielleicht äußere Gründe maßgebend gewesen.

Bei Anwendung auf die Thetas führt eine der Identitäten zur Riemannschen Thetaformel, die beiden anderen Identitäten zu der Göpelschen und Rosenhainschen Form des Additionstheorems. Der Satz, daß die verschiedenen Formen des Additionstheorems durch quadratische Transformation in einander übergehen, folgt dann aus dem erwähnten Zusammenhang zwischen den Identitäten. Und die verallgemeinerten Identitäten gestatten die Ausdehnung der Additionstheoreme auf Produkte von mehr als vier Thetas.

Dieser Zusammenhang zwischen den verschiedenen Formen des Additionstheorems ist natürlich wohlbekannt und besonders durch die Untersuchungen von Herrn Krazer klargelegt worden. Immerhin schien es mir von Interesse darzulegen, daß er für die Thetas nicht charakteristisch ist, in dem Sinne als er sich bereits bei den Identitäten vorfindet, denen die Additionstheoreme entstammen.

Nebenbei ergibt sich auf diesem Wege eine Form des Additionstheorems, die mir neu zu sein scheint.

1. *Ableitung der Identitäten.* — Unter der Graßmannschen Fundamentalformel verstehe ich, wenn a_i, b_i, c_i, d_i vier extensive Größen eines Gebietes vierter Stufe bezeichnen, die folgende Formel [1])

$$[a_i d_i \mid b_i c_i] = [a_i \mid b_i][d_i \mid c_i] - [a^i \mid c_i][d_i \mid b_i].$$

Bekanntlich lassen sich die extensiven Größen eines Gebiets vierter Stufe aus vier Einheiten — sie mögen e_1, e_2, e_3, e_4 heißen — ableiten, wobei die Einheiten den Festsetzungen genügen:

$$e_i e_k = -e_k e_i$$

$$e_i \mid e_k \begin{cases} = 0, & i \neq k \\ = 1, & i = k \end{cases}$$

$$e_i e_k \mid e_i e_l \begin{cases} = 0, & l \neq k \\ = 1, & l = k \end{cases} \qquad (i,\ k,\ l = 1,\ 2.\ 3,\ 4).$$

Ich treffe jetzt über die Größen a_i, b_i, c_i, d_i folgende Wahl:

$$\begin{array}{ll}
a_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4, & b_1 = \beta_2 e_1 + \beta_1 e_2 - \beta_4 e_3 - \beta_3 e_4 \\
a_2 = \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4, & b_2 = \beta_4 e_1 + \beta_3 e_2 - \beta_2 e_3 - \beta_1 e_4 \\
a_3 = \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4, & b_3 = \beta_3 e_1 + \beta_4 e_2 - \beta_1 e_3 - \beta_2 e_4 \\
a_4 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4, & b_4 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 - \beta_3 e_3 - \beta_4 e_4 \\
c_1 = \gamma_2 e_1 + \gamma_1 e_2 - \gamma_4 e_3 - \gamma_3 e_4, & d_1 = \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3 + \delta_4 e_4 \\
c_2 = \gamma_4 e_1 + \gamma_3 e_2 - \gamma_2 e_3 - \gamma_1 e_4, & d_2 = \delta_1 e_1 - \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3 - \delta_4 e_4 \\
c_3 = \gamma_3 e_1 + \gamma_4 e_2 - \gamma_1 e_3 - \gamma_2 e_4, & d_3 - \delta_1 e_1 - \delta_2 e_2 - \delta_3 e_3 + \delta_4 e_4 \\
c_4 = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 - \gamma_3 e_3 - \gamma_4 e_4, & d_4 = \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 - \delta_3 e_3 - \delta_4 e_4,
\end{array}$$

1) Vgl. u. a. meine „*Vorlesungen über die Vektorenrechnung*" Leipzig 1905, B. G. Teubner, S. 104.

wo die Ableitungszahlen α_i, β_i, γ_i, δ_i sechzehn beliebige Parameter bedeuten. Alsdann nehmen die inneren Produkte der Fundamentalformel die Werte an:

$$\begin{array}{llll}
[a_1|b_1]=-(\alpha\beta)_{12}, & [c_1|d_1]=-(\gamma\delta)_{12}, & [a_1|c_1]=-(\alpha\gamma)_{12}, & [b_1|d_1]=-(\beta\delta)_{12} \\
[a_2|b_2]=-(\alpha\beta)_{23}, & [c_2|d_2]=-(\gamma\delta)_{23}, & [a_2|c_2]=-(\alpha\gamma)_{23}, & [b_2|d_2]=-(\beta\delta)_{23} \\
[a_3|b_3]=-(\alpha\beta)_{31}, & [c_3|d_3]=-(\gamma\delta)_{31}, & [a_3|c_3]=-(\alpha\gamma)_{31}, & [b_3|d_3]=-(\beta\delta)_{31} \\
[a_4|b_4]=(\alpha\beta)_{44}, & [c_4|d_4]=(\gamma\delta)_{44}, & [a_4|c_4]=(\alpha\gamma)_{44}, & [b_4|d_4]=(\beta\delta)_{44},
\end{array}$$

wobei gesetzt ist

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)_{12} &= -(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-\alpha_3\beta_4-\alpha_4\beta_3) \\
(\alpha\beta)_{23} &= -(\alpha_1\beta_4-\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1) \\
(\alpha\beta)_{31} &= -(\alpha_1\beta_3-\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_1-\alpha_4\beta_2) \\
(\alpha\beta)_{44} &= \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4.
\end{aligned}$$

Die Bezeichnung, welche ich hier für die Indizes der $(\alpha\beta)_{ik}$ angenommen habe, findet ihre Berechtigung in dem Zusammenhang der bilinearen Ausdrücke mit den Koeffizienten eines Orthogonalsystems, worauf ich später zurückkomme.

Ich bilde weiter die äußeren Produkte $a_i d_i$ und $b_i c_i$ sowie das innere Produkt $[a_i d_i \mid b_i c_i]$. Summiere ich endlich über $i=1, 2, 3, 4$, so ergibt sich, daß die Summe $\sum_i [a_i d_i \mid b_i c_i]$ identisch verschwindet. Hieraus entsteht die Identität

$$(1)\quad \begin{cases} (\alpha\beta)_{12}(\gamma\delta)_{12}+(\alpha\beta)_{23}(\gamma\delta)_{23}+(\alpha\beta)_{31}(\gamma\delta)_{31}+(\alpha\beta)_{44}(\gamma\delta)_{44} \\ =(\alpha\gamma)_{12}(\beta\delta)_{12}+(\alpha\gamma)_{23}(\beta\delta)_{23}+(\alpha\gamma)_{31}(\beta\delta)_{31}+(\alpha\gamma)_{44}(\beta\delta)_{44}. \end{cases}$$

Vertausche ich noch linker Hand δ mit γ, so bleibt offenbar die linke Seite ungeändert, da ja $(\gamma\delta)_{12}=(\delta\gamma)_{12}$, $(\gamma\delta)_{23}=(\delta\gamma)_{23}$, $(\gamma\delta)_{31}=(\delta\gamma)_{31}$, $(\gamma\delta)_{44}=(\delta\gamma)_{44}$. Demnach läßt sich die gefundene Identität wie folgt ergänzen:

$$(2)\quad \begin{cases} (\alpha\beta)_{12}(\gamma\delta)_{12}+(\alpha\beta)_{23}(\gamma\delta)_{23}+(\alpha\beta)_{31}(\gamma\delta)_{31}+(\alpha\beta)_{44}(\gamma\delta)_{44}= \\ =(\beta\gamma)_{12}(\alpha\delta)_{12}+(\beta\gamma)_{23}(\alpha\delta)_{23}+(\beta\gamma)_{31}(\alpha\delta)_{31}+(\beta\gamma)_{44}(\alpha\delta)_{44}= \\ =(\gamma\alpha)_{12}(\beta\delta)_{12}+(\gamma\alpha)_{23}(\beta\delta)_{23}+(\gamma\alpha)_{31}(\beta\delta)_{31}+(\gamma\alpha)_{44}(\beta\delta)_{44}. \end{cases}$$

Diese Identität kann in mannigfacher Weise umgeformt und ausgedehnt werden. Ich beginne mit ihrer Verallgemeinerung auf Produkte von mehr als zwei Faktoren. Zu dem Ende bringe ich die Identität (2) zunächst in eine andere Gestalt, indem ich nacheinander substituiere

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ -\delta_3 & \delta_4 & -\delta_1 & \delta_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ -\delta_4 & \delta_3 & \delta_2 & -\delta_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ -\delta_2 & -\delta_1 & \delta_4 & \delta_3 \end{pmatrix},$$

alsdann verwandeln sich bei den Koeffizienten $(\gamma\delta)_{ik}$, $(\alpha\delta)_{ik}$, $(\beta\delta)_{ik}$ die Indizes

12 23 31 44

nacheinander in

23	12	44	31
31	44	12	23
44	31	23	12.

Der ursprünglichen Identität treten auf diese Weise drei weitere an die Seite. Führe ich jetzt zwei skalare Größen e_1, e_2 ein, welche die positive oder negative Einheit bedeuten, dann lassen sich alle vier Identitäten in eine einzige zusammenfassen, so daß ich sagen kann:

Das Produkt

$$(3)\qquad \begin{cases} [(\alpha\beta)_{12} + e_1(\alpha\beta)_{23} + e_2(\alpha\beta)_{31} + e_1 e_2(\alpha\beta)_{44}] \times \\ [(\gamma\delta)_{12} + e_1(\gamma\delta)_{23} + e_2(\gamma\delta)_{31} + e_1 e_2(\gamma\delta)_{44}] \end{cases}$$

bleibt ungeändert bei zyklischer Vertauschung der Parameter α, β, γ.

In dieser Gestalt läßt sich die Identität leicht verallgemeinern. Ich führe zwei weitere Parameterquadrupel ε_i, η_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ ein und betrachte den Ausdruck

$$\begin{aligned} &[(\alpha\beta)_{12}(\gamma\delta)_{12} + (\alpha\beta)_{23}(\gamma\delta)_{23} + (\alpha\beta)_{31}(\gamma\delta)_{31} + (\alpha\beta)_{44}(\gamma\delta)_{44}](\varepsilon\eta)_{12} \\ +&[(\alpha\beta)_{12}(\gamma\delta)_{23} + (\alpha\beta)_{23}(\gamma\delta)_{12} + (\alpha\beta)_{31}(\gamma\delta)_{44} + (\alpha\beta)_{44}(\gamma\delta)_{31}](\varepsilon\eta)_{23} \\ +&[(\alpha\beta)_{12}(\gamma\delta)_{31} + (\alpha\beta)_{23}(\gamma\delta)_{44} + (\alpha\beta)_{31}(\gamma\delta)_{12} + (\alpha\beta)_{44}(\gamma\delta)_{23}](\varepsilon\eta)_{31} \\ +&[(\alpha\beta)_{12}(\gamma\delta)_{44} + (\alpha\beta)_{23}(\gamma\delta)_{31} + (\alpha\beta)_{31}(\gamma\delta)_{23} + (\alpha\beta)_{44}(\gamma\delta)_{12}](\varepsilon\eta)_{44}. \end{aligned}$$

Wende ich auf ihn nach einander die Substitutionen an, welche aus den vorhin benutzten hervorgehen, wenn ich δ durch η ersetze, dann nimmt der Ausdruck drei weitere Formen an. Und alle vier Formen lassen sich wieder unter Zuhilfenahme der Einheitsgrößen e_1, e_2 zusammenfassen zu einem einzigen Produkt. Beachte ich noch das obige Resultat bezüglich des Produktes zweier solcher Faktoren, dann kann ich den Satz aussprechen:

Das Produkt

$$(4)\qquad \begin{cases} [(\alpha\beta)_{12} + e_1(\alpha\beta)_{23} + e_2(\alpha\beta)_{31} + e_1 e_2(\alpha\beta)_{44}] \times \\ [(\gamma\delta)_{12} + e_1(\gamma\delta)_{23} + e_2(\gamma\delta)_{31} + e_1 e_2(\gamma\delta)_{44}] \times \\ [(\varepsilon\eta)_{12} + e_1(\varepsilon\eta)_{23} + e_2(\varepsilon\eta)_{31} + e_1 e_2(\varepsilon\eta)_{44}] \end{cases}$$

verhält sich invariant gegen die Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \varepsilon & \delta & \eta & \beta \end{pmatrix}$.

Und so kann ich fortfahren und den Satz auf Produkte von m Faktoren ausdehnen, worauf im wesentlichen die Casparysche Identität hinauskommt.

Ich gehe nun zu einer anderen Umformung der Identität (1) über. Zu dem Ende genügt es, sukzessive die Vorzeichen von α_1, α_2, β_1, β_2; α_1, α_3, β_2 β_4; α_1, α_4, β_2, β_3 zu ändern, dann verwandeln sich

$$(\alpha\beta)_{12}, \qquad (\alpha\beta)_{23}, \qquad (\alpha\beta)_{31}, \qquad (\alpha\beta)_{44}$$

sukzessive in

$$\begin{array}{cccc} (12) & -(23) & -(31) & (44) \\ (12) & (23) & -(31) & -(44) \\ (12) & -(23) & (31) & -(44), \end{array}$$

wenn ich der Kürze halber $(\alpha\beta)_{ik} = (ik)$ schreibe, und die Produkte

$$(\alpha\gamma)_{12}(\beta\delta)_{12}, \quad (\alpha\gamma)_{23}(\beta\delta)_{23}, \quad (\alpha\gamma)_{31}(\beta\delta)_{31}, \quad (\alpha\gamma)_{44}(\beta\delta)_{44}$$

verwandeln sich sukzessive in

$$\begin{array}{cccc} (21) & (14) & (42) & (33) \\ -(34) & -(41) & -(13) & -(22) \\ -(43) & -(32) & -(24) & -(11), \end{array}$$

wenn für den Augenblick $(\alpha\gamma)_{ik}(\beta\delta)_{ik} = (ik)$ geschrieben wird. Dabei habe ich gesetzt:

$$\begin{aligned}
(\alpha\gamma)_{21} &= \alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1 + \alpha_3\gamma_4 + \alpha_4\gamma_3 \\
(\alpha\gamma)_{14} &= \alpha_1\gamma_4 - \alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2 - \alpha_4\gamma_1 \\
(\alpha\gamma)_{42} &= -(\alpha_1\gamma_3 - \alpha_2\gamma_4 - \alpha_3\gamma_1 + \alpha_4\gamma_2) \\
(\alpha\gamma)_{33} &= \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 - \alpha_3\gamma_3 - \alpha_4\gamma_4 \\[1ex]
(\alpha\gamma)_{34} &= \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 - \alpha_3\gamma_4 + \alpha_4\gamma_3 \\
(\alpha\gamma)_{41} &= -(\alpha_1\gamma_4 + \alpha_2\gamma_3 - \alpha_3\gamma_2 - \alpha_4\gamma_1) \\
(\alpha\gamma)_{13} &= \alpha_1\gamma_3 + \alpha_2\gamma_4 + \alpha_3\gamma_1 + \alpha_4\gamma_2 \\
(\alpha\gamma)_{22} &= \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 - \alpha_4\gamma_4 \\[1ex]
(\alpha\gamma)_{43} &= -(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 + \alpha_3\gamma_4 - \alpha_4\gamma_3) \\
(\alpha\gamma)_{32} &= \alpha_1\gamma_4 + \alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2 + \alpha_4\gamma_1 \\
(\alpha\gamma)_{24} &= \alpha_1\gamma_3 + \alpha_2\gamma_4 - \alpha_3\gamma_1 - \alpha_4\gamma_2 \\
(\alpha\gamma)_{11} &= \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 - \alpha_3\gamma_3 + \alpha_4\gamma_4
\end{aligned}$$

und entsprechend die $(\beta\delta)_{ik}$.

Durch Addition der vier entstehenden Identitäten ergibt sich die Darstellung

$$(5)\quad \begin{cases} 4(\alpha\beta)_{12}(\gamma\delta)_{12} = \\ \sum\limits_{n=1}^{4}(-1)^n[(\alpha\gamma)_{1n}(\beta\delta)_{1n} - (\alpha\gamma)_{2n}(\beta\delta)_{2n} - (\alpha\gamma)_{3n}(\beta\delta)_{3n} + (\alpha\gamma)_{4n}(\beta\delta)_{4n}], \end{cases}$$

welcher ähnliche für die drei anderen Produkte an die Seite treten, d. h. die Produkte $(\alpha\beta)_{12}(\gamma\delta)_{12}$, $(\alpha\beta)_{23}(\gamma\delta)_{23}$, $(\alpha\beta)_{31}(\gamma\delta)_{31}$, $(\alpha\beta)_{44}(\gamma\delta)_{44}$ lassen sich als Summen derselben sechzehn Produkte $(\alpha\gamma)_{ik}(\beta\delta)_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ darstellen. Man übersieht auch sofort, daß *diese Summen von sechzehn Produkten ungeändert bleiben müssen, wenn ich γ mit δ vertausche.*

Noch auf eine dritte Weise will ich die Identität (1) umformen. Zu dem Ende knüpfe ich an die zuletzt gewonnene Identität (5) an. Einfache Parameterpermutationen führen zur Darstellung von $4(\alpha\beta)_{1i}(\gamma\delta)_{1i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Aus diesen vier Ausdrücken erhalte ich

$$(6) \quad \begin{cases} (\alpha\beta)_{11}(\gamma\delta)_{11} + (\alpha\beta)_{12}(\gamma\delta)_{12} + (\alpha\beta)_{13}(\gamma\delta)_{13} + (\alpha\beta)_{14}(\gamma\delta)_{14} \\ = (\alpha\gamma)_{44}(\beta\delta)_{44} - (\alpha\gamma)_{34}(\beta\delta)_{34} - (\alpha\gamma)_{24}(\beta\delta)_{24} + (\alpha\gamma)_{14}(\beta\delta)_{14}. \end{cases}$$

Durch Anwendung der Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & \alpha_4 & -\alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ -\alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ -\alpha_4 & -\alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ \delta_2 & -\delta_1 & -\delta_4 & \delta_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ -\delta_3 & -\delta_4 & \delta_1 & \delta_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ \delta_4 & -\delta_3 & \delta_2 & -\delta_1 \end{pmatrix}$$

fließen aus ihr fünfzehn weitere Identitäten, die sich sämtlich zusammenfassen lassen in das folgende *Multiplikationstheorem*:

$$(7) \begin{cases} \begin{array}{rrrr} (\alpha\beta)_{11} & (\alpha\beta)_{12} & (\alpha\beta)_{13} & (\alpha\beta)_{14} \\ -(\alpha\beta)_{12} & (\alpha\beta)_{11} & -(\alpha\beta)_{14} & (\alpha\beta)_{13} \\ -(\alpha\beta)_{13} & (\alpha\beta)_{14} & (\alpha\beta)_{11} & -(\alpha\beta)_{12} \\ (\alpha\beta)_{14} & (\alpha\beta)_{13} & -(\alpha\beta)_{12} & -(\alpha\beta)_{11} \end{array} \times \begin{array}{rrrr} (\gamma\delta)_{11} & (\gamma\delta)_{12} & (\gamma\delta)_{13} & (\gamma\delta)_{14} \\ (\gamma\delta)_{21} & (\gamma\delta)_{22} & (\gamma\delta)_{23} & (\gamma\delta)_{24} \\ (\gamma\delta)_{31} & (\gamma\delta)_{32} & (\gamma\delta)_{33} & (\gamma\delta)_{34} \\ (\gamma\delta)_{41} & (\gamma\delta)_{42} & (\gamma\delta)_{43} & (\gamma\delta)_{44} \end{array} \\ = \begin{array}{rrrr} (\alpha\gamma)_{44} & (\alpha\gamma)_{34} & -(\alpha\gamma)_{24} & -(\alpha\gamma)_{14} \\ (\alpha\gamma)_{43} & (\alpha\gamma)_{33} & -(\alpha\gamma)_{23} & -(\alpha\gamma)_{13} \\ -(\alpha\gamma)_{42} & -(\alpha\gamma)_{32} & (\alpha\gamma)_{22} & (\alpha\gamma)_{12} \\ -(\alpha\gamma)_{41} & -(\alpha\gamma)_{31} & (\alpha\gamma)_{21} & (\alpha\gamma)_{11} \end{array} \times \begin{array}{rrrr} (\beta\delta)_{44} & -(\beta\delta)_{34} & (\beta\delta)_{24} & -(\beta\delta)_{14} \\ (\beta\delta)_{34} & (\beta\delta)_{44} & -(\beta\delta)_{14} & -(\beta\delta)_{24} \\ -(\beta\delta)_{24} & (\beta\delta)_{14} & (\beta\delta)_{44} & -(\beta\delta)_{34} \\ -(\beta\delta)_{14} & -(\beta\delta)_{24} & -(\beta\delta)_{34} & -(\beta\delta)_{44}, \end{array} \end{cases}$$

wo die Multiplikation so zu verstehen ist, daß die i-te Horizontale des ersten mit der k-ten Horizontale des zweiten Systems multipliziert, gleich dem Produkt der entsprechenden Horizontalreihen des dritten und vierten Systems wird.

Sehe ich die Ausdrücke für die Koeffizienten der vier Sechzehnersysteme $(\alpha\beta)_{ik}$, $(\alpha\gamma)_{ik}$, $(\beta\delta)_{ik}$, $(\gamma\delta)_{ik}$ genauer an, so bemerke ich, daß sie Orthogonalsysteme bilden, deren Koeffizienten also — wenn sie allgemein mit g_{ik} bezeichnet werden — den Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} g_{i1}g_{k1} + g_{i2}g_{k2} + g_{i3}g_{k3} + g_{i4}g_{k4} &= 0 \\ g_{1i}g_{1k} + g_{2i}g_{2k} + g_{3i}g_{3k} + g_{4i}g_{4k} &= 0 \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, 3, 4 \\ i \neq k \end{pmatrix} \\ g_{i1}^2 + g_{i2}^2 + g_{i3}^2 + g_{i4}^2 &= g \\ g_{1i}^2 + g_{2i}^2 + g_{3i}^2 + g_{4i}^2 &= g. \end{aligned}$$

Ihre Darstellung stimmt genau mit der Euler-Cayleyschen Darstellung der Koeffizienten eines Orthogonalsystems mittels acht Parameter überein.

Hiernach lassen sich die gewonnenen Identitäten wie folgt charakterisieren: Die Identitäten (6) und (7) beziehen sich auf Vierersysteme von Koeffizienten eines Sechzehnersystems $\{g_{ik}\}$, die einer *Horizontal*- oder *Vertikal*reihe angehören, die Identitäten (1) bis (4) auf Vierersysteme von Koeffizienten, die zu einer *Diagonale* oder zu einem *Minor* gehören. Der Übergang von einer Identität zur anderen erfolgt durch Permutation der Parameter und nachfolgende Addition der entstehenden Gleichungen, d. h. durch Transformation einer bilinearen Form in eine andere.

2. *Die Additionstheoreme der Thetas.* — Ich will nun die Identitäten auf die Thetas von zwei Argumenten anwenden. Zu dem Ende setze ich für die Parameterquadrupel α, β je dasselbe Göpelsche System von Thetas mit verschiedenen Argumenten $x + y$, $x - y$ und doppelten Moduln und transformiere die bilinearen Ausdrücke der $(\alpha\beta)_{ik}$ vermittels der Formeln für die quadratische Transformation.[1]) Alsdann wird jeder dieser Ausdrücke gleich dem Produkt zweier Thetas mit gleicher Charakteristik, und zwar:

$$(\alpha\beta)_{11} = -(-i)^{g_1+g_2+h_1+h_2}\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1'+1 & g_2'+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1'+1 & h_2'+1 \end{bmatrix}$$

$$(\alpha\beta)_{12} = -(-i)^{g_2+h_2}\begin{bmatrix} g_1+1 & g_2 \\ g_1' & g_2'+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1+1 & h_2 \\ h_1' & h_2'+1 \end{bmatrix}$$

$$(\alpha\beta)_{13} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2+1 \\ g_1' & g_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 & h_2+1 \\ h_1' & h_2' \end{bmatrix}$$

$$(\alpha\beta)_{14} = (-i)^{g_1+h_1}\begin{bmatrix} g_1+1 & g_2+1 \\ g_1'+1 & g_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1+1 & h_2+1 \\ h_1'+1 & h_2' \end{bmatrix}$$

$$(\alpha\beta)_{21} = \begin{bmatrix} g_1+1 & g_2 \\ g_1' & g_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1+1 & h_2 \\ h_1' & h_2' \end{bmatrix}$$

$$(\alpha\beta)_{22} = (-i)^{g_1+h_1}\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1'+1 & g_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1'+1 & h_2' \end{bmatrix}$$

$$(\alpha\beta)_{23} = -(-i)^{g_1+g_2+h_1+h_2}\begin{bmatrix} g_1+1 & g_2+1 \\ g_1'+1 & g_2'+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1+1 & h_2+1 \\ h_1'+1 & h_2'+1 \end{bmatrix}$$

$$(\alpha\beta)_{24} = (i)^{g_2+h_2}\begin{bmatrix} g_1 & g_2+1 \\ g_1' & g_2'+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 & h_2+1 \\ h_1' & h_2'+1 \end{bmatrix}$$

$$(\alpha\beta)_{31} = -(-i)^{g_1+h_1}\begin{bmatrix} g_1 & g_2+1 \\ g_1'+1 & g_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 & h_2+1 \\ h_1'+1 & h_2' \end{bmatrix}$$

$$(\alpha\beta)_{32} = \begin{bmatrix} g_1+1 & g_2+1 \\ g_1' & g_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1+1 & h_2+1 \\ h_1' & h_2' \end{bmatrix}$$

$$(\alpha\beta)_{33} = (-i)^{g_2+h_2}\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1' & g_2'+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1' & h_2'+1 \end{bmatrix}$$

$$(\alpha\beta)_{34} = (-i)^{g_1+g_2+h_1+h_2}\begin{bmatrix} g_1+1 & g_2 \\ g_1'+1 & g_2'+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1+1 & h_2 \\ h_1'+1 & h_2'+1 \end{bmatrix}$$

$$(\alpha\beta)_{41} = -(-i)^{g_2+h_2}\begin{bmatrix} g_1+1 & g_2+1 \\ g_1' & g_2'+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1+1 & h_2+1 \\ h_1' & h_2'+1 \end{bmatrix}$$

$$(\alpha\beta)_{42} = -(-i)^{g_1+h_2+h_1+h_2}\begin{bmatrix} g_1 & g_2+1 \\ g_1'+1 & g_2'+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 & h_2+1 \\ h_1'+1 & h_2'+1 \end{bmatrix}$$

$$(\alpha\beta)_{43} = -(-i)^{g_1+h_1}\begin{bmatrix} g_1+1 & g_2 \\ g_1'+1 & g_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1+1 & h_2 \\ h_1'+1 & h_2' \end{bmatrix}$$

$$(\alpha\beta)_{44} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1' & g_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1' & h_2' \end{bmatrix},$$

1) Vgl. F. Caspary, J. f. M. 94, 77.

wo der Kürze wegen

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1' & g_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1' & h_2' \end{bmatrix} = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1' & g_2' \end{bmatrix}(x_1, x_2)\,\vartheta\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1' & h_2' \end{bmatrix}(y_1, y_2)$$

gesetzt ist.[1])

Das Entsprechende gilt für die $(\gamma\delta)_{ik}$, $(\varepsilon\eta)_{ik}$ usw., wenn die x, y ersetzt werden durch z, w; s, t usw.

Indem ich hier die allgemeinen Charakteristiken genommen habe, wird die Spezialität eliminiert, welche bei Anwendung der Identitäten darin liegt, daß ich den Koeffizienten der Identitäten spezielle Indizes erteilt habe.

Hiernach übersieht man, daß die Identität (5) zur Riemannschen Thetaformel führt, welche Herr Krazer zum Ausgangspunkt aller Thetarelationen gemacht hat.[2]) In dem speziellen Falle, wo die Charakteristiken g, h gleich Null gewählt werden, lautet die Formel

$$\begin{aligned} 4\Pi_0 = {} & \Pi_0' - \Pi_2' - \Pi_4' + \Pi_{13}' & = {} & \Pi_0'' - \Pi_2'' - \Pi_4'' + \Pi_{13}'' \\ & - \Pi_{01}' + \Pi_{12}' + \Pi_{14}' - \Pi_3' & & - \Pi_{01}'' + \Pi_{12}'' + \Pi_{14}'' - \Pi_3'' \\ & - \Pi_{03}' + \Pi_{23}' + \Pi_{34}' - \Pi_1' & & - \Pi_{03}'' + \Pi_{23}'' + \Pi_{34}'' - \Pi_1'' \\ & + \Pi_{24}' - \Pi_{04}' - \Pi_{02}' + \Pi_5' & & + \Pi_{24}'' - \Pi_{04}'' - \Pi_{02}'' + \Pi_5'', \end{aligned}$$

wenn

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta} &= \vartheta_{\alpha\beta}(x)\,\vartheta_{\alpha\beta}(y)\,\vartheta_{\alpha\beta}(z)\,\vartheta_{\alpha\beta}(w) \\ \Pi_{\alpha\beta}' &= \vartheta_{\alpha\beta}(x')\,\vartheta_{\alpha\beta}(y')\,\vartheta_{\alpha\beta}(z')\,\vartheta_{\alpha\beta}(w') \\ \Pi_{\alpha\beta}'' &= \vartheta_{\alpha\beta}(x'')\,\vartheta_{\alpha\beta}(y'')\,\vartheta_{\alpha\beta}(z'')\,\vartheta_{\alpha\beta}(w''), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x' &= x + y + z + w, & 2x'' &= x + y + z - w \\ 2y' &= x + y - z - w, & 2y'' &= x + y - z + w \\ 2z' &= x - y + z - w, & 2z'' &= x - y + z + w \\ 2w' &= x - y - z + w, & 2w'' &= x - y - z - w \end{aligned}$$

und

$$\vartheta(x_1 x_2) = \vartheta(x)$$

gesetzt ist.

Die anderen Identitäten führen zu der Göpelschen und Rosenhainschen Form des Additionstheorems und zu ihrer Verallgemeinerung auf Produkte von mehr als vier Thetas.

Auf die Existenz dieser Verallgemeinerung hat zuerst Caspary aufmerksam gemacht, nachdem er die Relationen für die elliptischen Thetas in dem Falle, wo die Produkte aus sechs Faktoren bestehen, mitgeteilt hatte.[3])

---

1) Caspary hat a. a. O. für seine Darstellung spezielle Charakteristiken, nämlich $g = h = 0$ gewählt.

2) *Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemannschen Thetaformel.* Leipzig 1882, B. G. Teubner. Vgl. auch M. Krause, *Die Transformation der hyperelliptischen Funktionen.* Leipzig 1886, B. G. Teubner, und F. Caspary, C. R. **104,** 1255 (1887).

3) Math. Ann. **28,** 496, 497 (1886).

Herr Krazer hat auf einem ganz anderen Wege die entsprechende Verallgemeinerung der Riemannschen Thetaformel abgeleitet.[1])

Nehme ich zuerst die Identitäten (1) bis (4), so will ich das Resultat für den Fall von sechs Faktoren hinschreiben, wenn die Charakteristiken g und h wieder gleich Null gewählt werden:

Das Produkt

$$\begin{aligned}
&[\vartheta_2(x)\vartheta_2(y) + e_1\vartheta_{14}(x)\vartheta_{14}(y) + e_2\vartheta_{03}(x)\vartheta_{03}(y) + e_1e_2\vartheta_5(x)\vartheta_5(y)]\\
\times\,&[\vartheta_2(z)\vartheta_2(w) + e_1\vartheta_{14}(z)\vartheta_{14}(w) + e_2\vartheta_{03}(z)\vartheta_{03}(w) + e_1e_2\vartheta_5(z)\vartheta_5(w)]\\
\times\,&[\vartheta_2(s)\vartheta_2(t) + e_1\vartheta_{14}(s)\vartheta_{14}(t) + e_2\vartheta_{03}(s)\vartheta_{03}(t) + e_1e_2\vartheta_5(s)\vartheta_5(t)]
\end{aligned}$$

bleibt ungeändert, wenn die Argumente x, y, z, w, s, t *durch* x', y', z', w', s', t' *ersetzt werden, wobei*

$$\begin{aligned}
2x' &= s + t + z - w\\
2y' &= s + t - z + w\\
2z' &= s - t + x - y\\
2w' &= s - t - x + y\\
2s' &= x + y + z + w\\
2t' &= x + y - z - w
\end{aligned}$$

gesetzt ist und e_1, e_2 *die positive oder negative Einheit bezeichnen.*

Die Thetaquadrupel, welche bei dieser Form des Additionstheorems auftreten, gehören zu den Göpelschen Systemen von Charakteristiken.

Aus (6) und (7) ergibt sich das Additionstheorem in der Form, wo die Thetaquadrupel zu den Rosenhainschen Systemen von Charakteristiken gehören. Es läßt sich alsdann in die Form eines *Multiplikationstheorems für Orthogonalsysteme* kleiden. Wähle ich wieder die Charakteristiken g, h gleich Null, dann lautet es:

$$\begin{array}{cccc}
\Pi_0^{xy} & -\Pi_2^{xy} & \Pi_4^{xy} & \Pi_{13}^{xy}\\
\Pi_2^{xy} & \Pi_0^{xy} & -\Pi_{13}^{xy} & \Pi_4^{xy}\\
-\Pi_4^{xy} & \Pi_{13}^{xy} & \Pi_0^{xy} & \Pi_2^{xy}\\
\Pi_{13}^{xy} & \Pi_4^{xy} & \Pi_2^{xy} & -\Pi_0^{xy}
\end{array}
\times
\begin{array}{cccc}
\Pi_0^{zw} & -\Pi_2^{zw} & \Pi_4^{zw} & \Pi_{13}^{zw}\\
\Pi_{01}^{zw} & \Pi_{12}^{zw} & -\Pi_{14}^{zw} & \Pi_3^{zw}\\
-\Pi_{03}^{zw} & \Pi_{23}^{zw} & \Pi_{34}^{zw} & \Pi_1^{zw}\\
-\Pi_{24}^{zw} & -\Pi_{04}^{zw} & -\Pi_{02}^{zw} & -\Pi_5^{zw}
\end{array}$$

$$= \begin{array}{cccc}
\Pi_5^{x'y'} & \Pi_1^{x'y'} & -\Pi_3^{x'y'} & -\Pi_{13}^{x'y'}\\
-\Pi_{02}^{x'y'} & \Pi_{34}^{x'y'} & \Pi_{14}^{x'y'} & -\Pi_4^{x'y'}\\
\Pi_{04}^{x'y'} & -\Pi_{23}^{x'y'} & \Pi_{12}^{x'y'} & -\Pi_2^{x'y'}\\
\Pi_{24}^{x'y'} & \Pi_{03}^{x'y'} & \Pi_{01}^{x'y'} & \Pi_0^{x'y'}
\end{array}
\times
\begin{array}{cccc}
\Pi_5^{z'w'} & -\Pi_1^{z'w'} & \Pi_3^{z'w'} & -\Pi_{13}^{z'w'}\\
\Pi_1^{z'w'} & \Pi_5^{z'w'} & -\Pi_{13}^{z'w'} & -\Pi_3^{z'w'}\\
-\Pi_3^{z'w'} & \Pi_{13}^{z'w'} & \Pi_5^{z'w'} & -\Pi_1^{z'w'}\\
\Pi_{13}^{z'w'} & \Pi_3^{z'w'} & \Pi_1^{z'w'} & \Pi_5^{z'w'}
\end{array},$$

wenn

$$\Pi_{\alpha\beta}^{xy} = \vartheta_{\alpha\beta}(x)\vartheta_{\alpha\beta}(y), \qquad \Pi_{\alpha\beta}^{zw} = \vartheta_{\alpha\beta}(z)\vartheta_{\alpha\beta}(w),$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^{x'y'} = \vartheta_{\alpha\beta}(x')\vartheta_{\alpha\beta}(y'), \quad \Pi_{\alpha\beta}^{z'w'} = \vartheta_{\alpha\beta}(z')\vartheta_{\alpha\beta}(w')$$

1) *Lehrbuch der Thetafunktionen,* S. 316—318.

und wieder

$$2x' = x + y + z + w, \quad 2y' = x + y - z - w,$$
$$2z' = x - y + z - w, \quad 2w' = x - y - z + w$$

gesetzt ist. Ich erhalte also z. B.

$$\begin{aligned}
&- \vartheta_0(x)\vartheta_0(y)\vartheta_{03}(z)\vartheta_{03}(x) - \vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_{23}(z)\vartheta_{23}(w) + \\
&+ \vartheta_4(x)\vartheta_4(y)\vartheta_{34}(z)\vartheta_{34}(w) + \vartheta_{13}(x)\vartheta_{13}(y)\vartheta_1(z)\vartheta_1(w) = \\
= &- \vartheta_5(x')\vartheta_5(y')\vartheta_3(z')\vartheta_3(w') + \vartheta_1(x')\vartheta_1(y')\vartheta_{13}(z')\vartheta_{13}(w') - \\
&- \vartheta_3(x')\vartheta_3(y')\vartheta_5(z')\vartheta_5(w') + \vartheta_{13}(x')\vartheta_{13}(y')\vartheta_1(z')\vartheta_1(w').
\end{aligned}$$

Dabei erfüllen die Koeffizienten der Sechzehnersysteme die Bedingungen der Orthogonalität.

Diese dritte Form des Additionstheorems, welche mir neu zu sein scheint, ist für die Thetas von zwei Argumenten charakteristisch in dem Sinne, als es bekanntlich[1]) nicht möglich ist, für den Fall von ϱ Argumenten, wo $\varrho = 1$ oder $\varrho \geqq 3$, die 4^ϱ Produkte je zweier Thetas als Koeffizienten eines Orthogonalsystems anzuordnen.

---

1) Vgl. M. Krause, Leipziger Ber. 1901, 67—75 und 105—123.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

54. Sitzung am 26. Juni 1907.

Vorsitzender: Herr Schafheitlin.

Anwesend: 29 Herren.

Vor Eintritt in die Tagesordnung widmet der Vorsitzende dem am 4. Mai 1907 verstorbenen Mitgliede Prof. Dr. Oscar Gutsche, Oberlehrer an der Oberrealschule in Breslau, Worte der Erinnerung.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Richert: Rationale Auflösung einer kubischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten und Wurzeln.

Herr Jacobsthal: Vertauschbarkeit transfiniter Ordnungszahlen.

Herr Knoblauch: Über den Plan der Herausgabe von Leonhard Eulers gesamten Werken (s. u.).

Über den Plan der Herausgabe von Leonhard Eulers gesamten Werken.

Von J. Knoblauch.

Die Bestrebungen, eine Gesamtausgabe der Schriften Leonhard Eulers zu veranstalten, reichen wahrscheinlich bis zn Eulers Tod, also bis zum Jahre 1783 zurück. Bekannt ist, daß sie um das Jahr 1843, gelegentlich der Publikation der Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du 18. siècle, greifbare Gestalt angenommen haben. Wie Paul Heinrich Fuß in seinem Vorwort zu den Commentationes arithmeticae berichtet, hat die Petersburger Akademie im Jahre 1844 bei dem russischen Unterrichtsministerium den Antrag gestellt, Eulers Werke gesammelt herauszugeben, und der Minister hat diesem Antrage zwar sein Wohlwollen nicht versagt, die Ausführung des Unternehmens jedoch auf eine günstigere Zeit verschoben wissen wollen. Seitdem ist wohl kaum eine Gelegenheitsschrift über Euler erschienen, in der nicht der Ruf nach einer Gesamtausgabe seiner Werke aufs neue laut geworden wäre.

Dabei werden meist auch die Schwierigkeiten erwähnt, die sich einer solchen Publikation entgegenstellen. Aber schon immer ist es mir aufgefallen, daß diese Schwierigkeiten fast ausschließlich auf finanziellem Gebiete gesucht werden. Nach der Schätzung von Fuß würden Eulers Werke etwa 25 Bände in Großquartformat, der Band zu 640 Seiten gerechnet, ausmachen, und die Kosten für deren Herausgabe nach J. G. Hagen ungefähr 150 000 Mark betragen. Nun, ich glaube annehmen zu sollen, daß es heutzutage durchaus im Bereiche der Möglichkeit liegt, eine solche Summe für ein wissenschaftliches Unternehmen großen Stils flüssig zu machen, wenn nur die Bedürfnisfrage rückhaltlos bejaht werden kann — und vielleicht auch ohne dies. Die eigentlichen Schwierigkeiten aber würden dann erst beginnen. Wer auch nur wenige Abhandlungen Eulers gelesen hat, weiß, daß diese Arbeiten eine unverhältnismäßig große Anzahl von Druck- und Schreibfehlern enthalten, außerdem aber auch von Schlüssen durchsetzt sind, die wir heute nicht nur als nicht streng, sondern vielfach als falsch betrachten müssen. Den Herausgebern würde es nun obliegen, nicht bloß, wie sich von selbst versteht, die Fehler der ersteren Art zu entfernen, sondern auch die Fehlschlüsse, die man bei ihrer großen Menge und weil sie für den mathematischen Standpunkt des 18. Jahrhunderts charakteristisch sind, nicht weglassen dürfte, mit ausführlichen Anmerkungen zu begleiten. Endlich würden sie die zahllosen numerischen Beispiele, die Euler, durch sein außerordentliches Gedächtnis und die Mitarbeit einer Reihe von Schülern unterstützt, seinen Untersuchungen beigegeben hat, kontrollieren müssen. Von den Kontroversen über chronologische oder sachliche Anordnung, die sich sogleich bei Beginn der Herausgabe erheben würden, schweige ich. Unzweifelhaft aber würde die Frage zu entscheiden sein, wie man sich angesichts des rapiden Rückganges der klassischen Bildung, dessen Zeugen wir sind, zu den lateinisch geschriebenen Arbeiten Eulers verhalten soll. Ganz abgesehen von dem ungeheuren Aufwande an Zeit und Mühe, den eine Übersetzung ins Deutsche erfordern würde, halte ich es in vielen Fällen nicht für leicht, den sprachlichen Ausdruck, dessen sich Euler im Lateinischen bedient, durch eine deutsche Wortverbindung treffend wiederzugeben.

Aber auch unabhängig von diesen Schwierigkeiten, die ja bei ernstem Willen, wenn auch nur in einer langen Frist, überwunden werden könnten, erscheint die Frage berechtigt, ob das, was durch eine Neuherausgabe der Werke Eulers erreicht werden kann, den damit verbundenen Aufwand an Arbeit, Zeit und Kosten lohnen würde. Wenn ich nicht anstehe, diese Frage zu verneinen, so glaube ich für meine Person mich nicht dem Vorwurf auszusetzen, daß ich die Wichtigkeit verkennte, die den Leistungen Eulers im Gebiete der Mathematik — nur von diesen möchte ich hier sprechen — noch heute beizulegen ist. Habe ich es doch unternommen, im laufenden Semester die hervorragendsten dieser Leistungen und ihre Bedeutung für die neuere Mathematik in einer vierstündigen Universitätsvorlesung darzulegen, und befinde mich zurzeit mitten in dieser Tätigkeit.

Der Zweck einer Publikation sämtlicher Schriften Eulers kann, sachlich betrachtet, nur der sein, diese Schriften zu verbreiten. Nun lassen sich aber Eulers Hauptwerke, sowie die einzelnen Bände der großen Zeitschriften, in denen die meisten seiner Abhandlungen erschienen sind, bei unseren in den letzten Jahren sehr vervollkommneten bibliothekarischen Einrichtungen mit verhältnismäßig leichter Mühe beschaffen. Sollte jemand aus irgendeinem Grunde dazu nicht in der Lage sein, so wird er aller Wahrscheinlichkeit nach auch die fünfundzwanzigbändige Gesamtausgabe nicht zur Verfügung haben. Es würde sich also wesentlich darum handeln, diejenigen Arbeiten

Eulers, die selten geworden oder in wenig bekannten, auch auf großen Bibliotheken nicht vorhandenen Zeitschriften enthalten sind, wieder abzudrucken und die etwa noch nicht publizierten Abhandlungen und Briefe planmäßig aufzusuchen, um sie dann, die Briefe soweit sie wissenschaftlichen Wert haben, ebenfalls zu veröffentlichen. Für ein solches Unternehmen ist rückhaltlos einzutreten, damit endlich in absehbarer Zeit sämtliche Arbeiten Eulers gedruckt vorliegen.

Daß dagegen bei einem Wiederabdruck der übrigen Werke und Abhandlungen vieles heute Überflüssige mit unterlaufen würde, wird niemand bezweifeln, der die Eigenart der Schreibweise Eulers in Betracht zieht. Von der Äußerlichkeit, daß Euler früher schon vorgekommene Formeln meist nicht durch einen einfachen Hinweis zitiert, sondern wo er sie braucht, noch einmal vollständig abdruckt, sehe ich ab. Das Verfahren ist zwar für den Leser sehr bequem, erhöht aber die Kosten des Druckes ganz bedeutend. Sachlich ist zu bemerken, daß Euler ein Problem, das er in Angriff nehmen will, in mehrere Einzelaufgaben zu zerlegen pflegt, die dann nach genau gleicher Methode behandelt werden. Stellt er eine Definition auf oder gibt er eine Formel an, die von einer ganzen Zahl n abhängt, so begnügt er sich bei der Beschreibung ihres Inhalts fast nie mit $n = 1$ und $n = 2$, sondern erläutert die Sachlage mindestens noch bis zu $n = 4$. Das erscheint uns heute mit Recht als unnötig. Freilich kann man einwenden, daß der mathematische Wissensstoff, den wir Euler verdanken, sich sicher sehr viel langsamer verbreitet haben würde, wenn Euler bei der Bekanntgabe seiner Resultate nicht auf die Form der Ausarbeitung und die Klarheit der Darstellung besonderes Gewicht gelegt hätte. Aber soll deshalb ganz davon abgesehen werden, daß wir heute in der wissenschaftlichen Methodik weiter sind als vor 150 Jahren, und sollen wir von neuem auch in den Grundlagen der verschiedenen mathematischen Gebiete uns in elementare Einzelheiten zu verlieren gezwungen sein?

Was uns fehlt, ist nicht eine neue Ausgabe des gedruckt Vorliegenden, sondern etwas ganz anderes, nämlich eine ins einzelne gehende wissenschaftliche Würdigung Eulers, die zugleich geeignet ist, ein Zurechtfinden in der Fülle seiner Arbeiten zu ermöglichen. Bilden diese doch auch heute, wie zu den Zeiten von Lagrange oder von Jacobi, eine noch unausgeschöpfte Quelle mathematischer Erkenntnis. Es ist an der Zeit, das, was noch Wichtiges in ihnen verborgen liegt, an das Tageslicht zu fördern, sowohl um Euler nach allen Seiten hin gerecht zu werden, wie auch um das Wiederentdecken von Wahrheiten, die er bereits gekannt hat, unnötig zu machen und demnach überflüssige Arbeit zu ersparen. Wer es auf sich nähme, ein klares und vollständiges Bild von Eulers mathematischen Leistungen zu entwerfen, der dürfte es sich freilich nicht verdrießen lassen, die vorliegenden Drucke auf das sorgfältigste zu zitieren, nicht nur bis zu den Seiten, sondern unter Umständen bis zu den Zeilen herabsteigend, und er hätte den wesentlichen Inhalt der einzelnen Abhandlungen, der sich häufig aus dem Titel nicht einmal erraten läßt, so genau wie möglich darzulegen. Trotz der großen Anzahl von Schriften erscheint dies als ohne übergroße Mühe durchführbar, weil Euler viele Aufgaben mehrmals bearbeitet hat und sich auch sonst oft wiederholt. Bei einer historisch-kritischen Behandlung der Probleme würden also die Arbeiten gruppenweise zusammengefaßt werden können und müssen. Von der oben erwähnten zeitraubenden und unfruchtbaren Arbeit des Ausmerzens der vorhandenen Druck- und Schreibfehler und der Kontrolle der Zahlenbeispiele würde man sich dagegen als befreit betrachten dürfen.

Ein solches Unternehmen nun wäre m. E. nicht einer vielköpfigen Kommission, sondern höchstens drei Mathematikern anzuvertrauen, von denen dann — die Sache nur im großen und ganzen betrachtet — einer die Zahlentheorie, ein anderer die reine Analysis mit Ausschluß der Variationsrechnung, der dritte diese, die Mechanik und bei der geringen Anzahl rein geometrischer Schriften Eulers auch die Geometrie zu übernehmen hätte. Die Wichtigkeit der Publikation läßt es von vornherein als erstrebenswert erscheinen, das Werk, eventuell durch Beihilfen von wissenschaftlichen Körperschaften oder Staatsregierungen, einem möglichst großen Kreise von Mathematikern zugänglich zu machen. Unter allen Umständen aber würde die Durchführung des Unternehmens gegenüber der Herausgabe von Eulers Werken mit unverhältnismäßig geringeren Kosten verbunden, von unvergleichlich größerem Nutzen und eine der Bedeutung Eulers wahrhaft würdige Arbeit sein.

Mitglieder-Verzeichnis.

Ackermann-Teubner, Hofr. Dr A., Verlagsbuchhändler, Leipzig, Poststr. 3.
Adler, Prof. Dr. A., Privatdozent, Wien VII, Neustiftgasse 97.
Ammerlahn, Oberlehrer G., Steglitz, Filandastr. 10.
Aron, GRR. Prof. Dr. H., Berlin W. 15, Kaiserallee 219/220.
Bahrdt, Oberlehrer Dr. W., Groß-Lichterfelde, Chausseestr. 26
Börsch, Prof. Dr. A., Potsdam, Burggrafenstr. 30.
Bonke, Oberlehrer R., Berlin NO. 18, Werneuchenerstr. 2.
Bornitz, Prof. F., Halensee, Georg Wilhelmstr. 2.
Budde, Prof. Dr. E., Charlottenburg, Berlinerstr. 54.
10 Burg, Oberlehrer Dr. R., Friedenau, Friedrich Wilhelmplatz 13.
Caratheodory, Privatdozent Dr. C., Göttingen, Nicolausbergerweg 49.
Cranz, GRR. Prof. Dr. C., Charlottenburg, Hardenbergstr. 32a.
Cwojdziński, cand. K., Berlin N. 24, Auguststr. 6.
Denizot, Dozent Dr. A., Lemberg (Östr.), K. K. Techn. Hochsch.
Dumas, Privatdozent Dr. G., Zürich, Asylstr. 81.
Dziobek, Prof. Dr. O., Charlottenburg, Schillerstr. 19.
Eichberg, Dr. Ing. F., Charlottenburg, Mommsenstr. 7.
Emde, Ingenieur F., Berlin NW. 87, Zinzendorfstr. 3.
Färber, Prof. Dr. C., Berlin S. 53, Wilmsstr. 13.
20 Fischer, Oberlehrer P. B., Gr. Lichterfelde, Kommandantenstr. 85.
Fleck, prakt. Arzt Dr. A., Berlin N. 31, Ackerstr. 117.
Freese, Oberlehrer O., Pankow, Breitestr. 16.
Fuchs, Oberlehrer u. Privatdozent Dr. R., Halensee, Ringbahnstr. 128.
Furtwaengler, Prof. Dr. Ph., Aachen, Theresienstr. 22.
Galle, Prof. Dr. A., Potsdam, Behlertstr. 36.
Güntsche, Prof. Dr. R., Berlin W. 30, Hohenstaufenstr. 7.

Haenlein, Prof. J., Berlin NW. 52, Spenerstr. 84.
Haentzschel, Prof. Dr. E., Berlin W. 30, Gleditschstr. 43.
Hagmann, Oberlehrer A., Charlottenburg, Friedbergstr. 10.
Hahn, Prof. H., Grunewald, Dachsberg 13.
Hamburger, Schulamtskandidat Dr. A., Charlottenburg, Herderstr. 1.
Hassel, Schulamtskandidat C., Charlottenburg 4, Schillerstr. 78.
Hauck, Oberlehrer A., Schönlanke bei Schneidemühl.
Hensel, Prof. Dr. K., Marburg (Hessen), Breiter Weg 7.
Hermes, Prof. Dr. O., Steglitz, Lindenstr. 35.
Hertzer, GRR. Prof. Dr. H., Halensee, Kurfürstendamm 137.
Hessenberg, Prof. Dr. G., Poppelsdorf-Bonn, Lessingstr. 30.
Heun, Prof. Dr. K., Karlsruhe (Bd.), Klauprechtstr. 33.
Hillmann, Schulamtskand. J., Neu-Ruppin, Ziethenstr. 10.
Holtze, Dipl. Ing. H., Gleiwitz O.-Schl., Markgrafenstr. 4.
Jacobsthal, Schulamtskandidat Dr. E., Berlin SW. 13, Alte Jakobstr. 128.
Jahnke, Prof. Dr. E., Berlin W. 15, Pariserstr. 36.
Jolles, Prof. Dr. St., Halensee, Kurfürstendamm 130.
Jonas, cand. prob. H. J., Gr. Lichterfelde, Drakestr. 23a.
Kneser, Prof. Dr. A., Breslau, Tiergartenstr. 106.
Knoblauch, Prof. Dr. J., Berlin W. 35, Karlsbad 12.
Knopp, Dr. K., Groß-Lichterfelde W., Steglitzerstr. 38.
Koebe, Dr. P., Göttingen, Planckstr. 17.
Koebke, Dr. E., Friedenau, Cranachstr. 5.
Koppe, Prof. M., Berlin SO. 33, Schlesischestr. 18.
Kötter, Prof. Dr. F., Charlottenburg, Oranienstr. 12.
Kreuter, G., Technischer Hilfsarbeiter bei der Kaiserl. Normaleichungskomm., Charlottenburg, Werner Siemensstr. 27/28.
Krüger, Prof. Dr. L., Potsdam, Geodät. Institut.
Kühnen, Prof. Dr. Fr., Potsdam, Wilhelmsplatz 2.
Kullrich, Realgymnasialdirektor Dr. E., Gera (Reuß), Blücherstr. 14.
Lampe, GRR. Prof. Dr. E., Berlin W. 15, Fasanenstr. 64.
Landau, Prof. Dr. E., Charlottenburg 2, Hardenbergstr. 13.
Lemke, Oberlehrer Dr. H., Wilmersdorf, Preußischestr. 8.
Lewent, Oberlehrer L., Berlin W. 30, Motzstr. 87.
Linsenbarth, Prof. Dr. H., Berlin N. 54, Lothringerstr. 76.
Löwenheim, Oberlehrer L., Berlin NW. 23, Schleswiger Ufer 19.
Lorenz, Ingenieur M., Kiel, Karlstr. 24.
Mann, Ingenieur L., Charlottenburg, Galvanistr. 2.
Marggraff, Prof. Dr. B., Pankow, Amalienpark 2.
Meder, Dozent A., Riga, Dorpaterstr. 23.
Meth, Dr. P., Charlottenburg, Leibnizstr. 23.
Meyer, Oberlehrer Dr. E., Charlottenburg 2, Goethestr. 6.
Meyer, Prof. Dr. F., Königsberg (Pr.), Villenkolonie Maraunenhof, Herzog Albrecht-Allee 27.
Michaelis, Prof. Dr. C., Potsdam, Schützenplatz 1a.
Michaelis, Stadt-Schulrat Dr. K., Berlin W. 35, Kurfürstenstr. 14.
Müller, Prof. Dr. F., Friedenau, Rönnebergstr. 16.
Müller, Prof. H., Charlottenburg, Grolmanstr. 15.
Müller, Oberrealschuldirektor Prof. Dr. R., Schöneberg, Grunewaldstr. 27.

Nahrwold, Oberrealschuldirektor Dr. R., Berlin C. 19, Niederwallstr. 12.
Opitz, Oberlehrer Dr. H., Johannisthal, Parkstr. 6.
Oppenheim, Oberlehrer, H., Charlottenburg 2, Pestalozzistr. 8.
Pahl, Oberlehrer F., Charlottenburg, Kantstr. 118/119.
Peters, Oberlehrer J., Cöln a. Rh., Hunnenrücken 30.
Pund, Oberlehrer Dr. O., Charlottenburg, Schloßstr. 61.
80 Quelle, R., Verlagsbuchhändler, Leipzig, Liebigstr. 6.
Reissner, Prof. Dr. Jng. H., Aachen, Lütticherstr. 166.
Richert, Prof. Dr. P., Berlin W. 30, Gleditschstr. 24.
Rothe, Privatdozent Dr. R., Charlottenburg 2, Schlüterstr. 78.
Rotth, Oberingenieur A., Berlin W. 35, Magdeburgerstr. 22.
Salkowski, Oberlehrer und Privatdozent Dr. E., Berlin SW. 29, Zossenerstr. 17.
Saltykow, Prof. N., Charkow (Rußland), Jumowskajastr. 5.
Samter, Prof. Dr. H., Charlottenburg, Herderstr. 14.
Sándor, Dr. der techn. Wiss. E., Charlottenburg, Guerickestr. 28.
Sarli, Dr. Jng. Cr., Berlin N. 54, Brunnenstr. 25.
90 Schafheitlin, Prof. Dr. P., Berlin W. 15, Schaperstr. 17.
Scheffers, Prof. Dr. G., Steglitz, Schloßstr. 42.
Schlesinger, Prof. Dr. O., Charlottenburg 1, Galvanistr. 17.
Schneidenbach, Oberlehrer J., Berlin NO. 55, Danzigerstr. 42.
Schneider, GBR. Prof. A., Berlin W. 57, Großgörschenstr. 31.
Schur, Privatdozent Dr. J., Berlin NW. 52, Thomasiusstr. 2.
Schwarz, Schulamtskandidat B., Landsberg.
Seliwanow, Prof. Dr. D., St. Petersburg, Fontanka, 116, log. 16.
Singer, Dr. O., Berlin NW. 52, Helgoländer Ufer 5.
Skutsch, Prof. R., Dortmund, Münsterstr. 38.
100 Steinitz, Prof. Dr. E., Berlin W. 50, Nachodstr. 38.
Stumpf, Ingenieur, Wilmersdorf, Kaiserplatz 14.
Tropfke, Prof. Dr. J., Berlin NW. 6, Marienstr. 14.
Valentin, Oberbibliothekar Dr. G., Berlin W. 62, Burggrafenstr. 6.
Vogler, GRR. Prof. Dr. Ch. A., Berlin W. 10, Kaiserin Augustastr. 80.
Wallenberg, Prof. Dr. G., Charlottenburg, Grolmanstr. 21.
Weingarten, GRR. Prof. Dr. J., Freiburg i. Breisgau, Schillerstr. 22.
Weiß, Oberlehrer Dr. F., Gr.-Lichterfelde Ost, Parallelstr. 10.
Weltzien, Prof. Dr. C., Zehlendorf, Prinz Handjerystr. 3.
Zacharias, Oberlehrer Dr. M., Berlin NW. 52, Melanchthonstr. 5.
110 Zühlke, Oberlehrer Dr. P., Halensee, Joachim Friedrichstr. 13.

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE (IN BERLIN), W. FRANZ MEYER (IN KÖNIGSBERG I. PR.), E. JAHNKE (IN BERLIN)

12. BAND. 1. HEFT

MIT 25 TEXTFIGUREN.

AUSGEGEBEN AM 28. JULI 1907.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Ludwigkirchstraße 6[I]

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 15, Fasanenstraße 64, und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Maraunenhof, Herzog Albrecht Allee 27, Sendungen für die Redaktion an.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band des Archivs umfaßt 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 16 Mark; jährlich sollen nicht mehr als 6 Einzel-Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Die Redaktion ersucht die Herren Autoren, in ihrem eigenen Interesse den Umfang der für das Archiv bestimmten Manuskripte nach Möglichkeit einschränken zu wollen, da nur solche geringen Umfanges Aussicht haben, in nächster Zeit abgedruckt zu werden. Die Redaktion teilt ferner mit, daß sie sich durch den Umfang des vorliegenden Manuskriptenmaterials für die nächste Zeit verhindert sieht, Inauguraldissertationen in extenso ins Archiv aufzunehmen.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

[Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.]

Eingelaufen sind und zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

[illegible]

Eingelaufene Lösungen: Zu 20 (E. Lampe) von stud. math. W. Gaedecke. — Zu 118 (P. Epstein) von P. Epstein. — Zu 157 (O. Meißner) von den stud. math. A. Barack, W. Gaedecke, J. Krug, von W. Stegemann, R. Sperer, C. Hoffmann in [illegible] und stud. math. Lecher in Berlin. — Zu 158 (O. Meißner) von den stud. math. A. Barack und A. Wieferich in Münster. — Zu 162 (F. Schuh) von stud. math. J. Krug, O. Köber, W. Stegemann, E. Schumacher in [illegible] und stud. math. Lecher in Berlin. — Zu 165 (F. Schilling) von W. Stegemann, C. Hoffmann und A. [illegible] in [illegible]. — Zu 166 (O. Meißner) von H. Wieleitner und stud. math. J. Krug. — Zu 169 (J. Krug) von W. Stegemann. — Zu 171 (H. Wieleitner) von C. Hoffmann, W. Stegemann, W. [illegible] und H. Wieleitner. — Zu 172 (H. Wieleitner) von W. Stegemann, stud. math. J. Krug, H. Wieleitner, A. Wieferich und J. [illegible]. — Zu 173 (O. Köber) von stud. math. A. Wieferich und von G. Köber.