Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Vierundzwanzigster Theil.

Mit dreizehn lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagshandlung

Th. Kunike.

1855.

Inhaltsverzeichniss des vierundzwanzigsten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Trigonometrie.

Geodäsie.

Mechanik.

Nautik.

Physik.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Literarische Berichte *).

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

I.

Ueber die Aufgabe, aus der gegebenen Anzahl aller denkbaren Durchmesser eines Kreises die Anzahl aller denkbaren Durchmesser einer Kugel zu finden.

Von

Herrn Professor Dr. *Hessel*

an der Universität zu Marburg.

Ich habe bei Abfassung meiner Schrift, die unter dem Titel: „Die Anzahl der Parallelstellungen und jene der Coincidenzstellungen eines jeden denkbaren Raumdinges mit seinem Ebenbilde und mit seinem Gegenbilde etc." bei Fischer in Kassel im vorigen Jahre erschienen ist, mich beschäftigt mit der Anzahl aller denkbaren Schwerlinien, mithin mit der Anzahl aller denkbaren Schwerebenen eines homogenen Körpers, oder, was dasselbe ist, eines nicht schweren Raumgebildes, sowie auch mit der Anzahl aller jener Schwerlinien desselben, die in einerlei Ebene liegen, also auch mit der Anzahl aller Schwerebenen des Raumgebildes, die zu einer und derselben in ihm vorhandenen Schwerebene senkrecht sind.

Die erste dieser beiden Zahlen, welche identisch ist mit der Anzahl aller denkbaren Durchmesser einer Kugel habe ich bezeichnet mit ⊕ (zu lesen: Grossall); die andere, welche gleich ist der Anzahl aller möglichen Durchmesser eines Kreises, bezeichne ich mit ⊖ (zu lesen: Kleinall).

Es fragt sich nun, in welcher Weise diese beiden Zahlen von einander abhängen.

Ist die Ebene eines grössten Kreises der berücksichtigten Kugel horizontal, so kann man alle grössten Kreise dieser Kugel unterscheiden in:

1) diesen einen eben genannten horizontalen;
2) solche, welche in verticalen Ebenen liegen;
3) solche, deren Ebenen weder horizontal noch vertical sind, die wir kurz als geneigte bezeichnen wollen.

Was die Anzahl der verticalen grössten Kreise betrifft, so ist diese offenbar so gross, als die Anzahl aller Durchmesser des horizontalen grössten Kreises, mithin $= \Theta$; denn durch jeden Durchmesser des horizontalen grössten Kreises lässt sich ein verticaler grösster Kreis legen.

Die geneigten grössten Kreise kann man verbinden in Gruppen, deren jede diejenigen geneigten grössten Kreise enthält, welche einen und denselben horizontalen Durchmesser gemein haben, d. h. in einem und demselben Durchmesser des horizontalen grössten Kreises sich schneiden.

Die Anzahl der, einer solchen Gruppe angehörigen geneigten grössten Kreise ist aber $= \Theta - 2$; denn würde man den horizontalen grössten Kreis und jenen verticalen grössten Kreis, in welchem der horizontale Durchmesser der betreffenden Gruppe liegt, nicht ausschliessen, so würde die so um zwei grösste Kreise erweiterte Gruppe die Gruppe aller grössten Kreise sein, die den betreffenden horizontalen Durchmesser gemein haben. Die Anzahl der grössten Kreise dieser so erweiterten Gruppe ist aber $= \Theta$, mithin die Anzahl der geneigten grössten Kreise einer solchen Gruppe $= \Theta - 2$.

Die Anzahl der Gruppen geneigter grösster Kreise ist aber gleich der Anzahl der Durchmesser des horizontalen grössten Kreises, denn zu jedem solchen Durchmesser gehört eine derartige Gruppe. Die Anzahl dieser Gruppen ist also $= \Theta$.

Es ist demnach die Anzahl aller geneigten grössten Kreise $= \Theta(\Theta - 2)$.

Es besteht also die Anzahl aller grössten Kreise einer Kugel aus folgenden drei Zahlen:

1) der Zahl 1, die dem horizontalen grössten Kreise entspricht;
2) der Zahl Θ, welche die Anzahl aller verticalen grössten Kreise ist;

3) der Zahl $\Theta(\Theta-2)$, welche die Anzahl aller geneigten grössten Kreise angiebt.

Sie ist sonach $=1+\Theta+\Theta(\Theta-2)$, mithin

$$=\Theta^2-\Theta+1.$$

Man hat daher auch für die Anzahl $\oplus$ der sämmtlichen Durchmesser einer Kugel, in Beziehung zur Anzahl Θ der sämmtlichen Durchmesser eines Kreises, die Gleichung:

$$\oplus=\Theta^2-\Theta+1.$$

II.

Construction der Kegelschnitte mit Hilfe von Krümmungskreisen.

Von

Herrn Dr. *H. Meyer*,

Lehrer an der öffentlichen Handelslehranstalt zu Leipzig.

1) Nicht selten kommen bei der Darstellung technischer und anderer Gegenstände etc. Kegelschnitte, namentlich Ellipsen vor, ist doch selbst die Projection des Kreises eine Ellipse; werden dieselben auch zuweilen noch, unbekümmert um ihre Eigenschaften als Kegelschnitte, wie jede andere Curve durch einzelne Punkte aus der zu projicirenden Raumgrösse abgeleitet, so ist diess doch der weniger zu empfehlende Weg, weit besser ist es, nur die *Axen* oder conjugirte Durchmesser o. a. zu projiciren und aus diesen dann *die* Curve vermöge ihrer bekannten Eigenschaften zu zeichnen.

Für die Zeichnung der Kegelschnitte lassen sich nun im Allgemeinen zwei Hauptmethoden unterscheiden, je nachdem man blos einzelne Punkte oder sogleich grössere Theile der Curve z. Th. genau findet.

Auf die Zeichnung der Kegelschnitte aus einzelnen Punkten wollen wir hier nicht weiter eingehen; eine Zusammenstellung der bis jetzt bekannten, sowie auch einiger neuer Constructionen, wird im Anhang der Axonometrie (3. Lieferung) mit erscheinen.

Die Construction der Kegelschnitte mit Hilfe von Kreisbögen zerfällt wieder in zwei Theile, je nachdem man beabsichtigt, wirkliche Ellipsen o. a. zu erhalten, wobei aber die freie Handzeichnung und wohl auch noch die Bestimmung einzelner Punkte der Curve nicht ganz zu vermeiden ist, oder lieber etwas von der Genauigkeit opfern und die Ellipse nur annähernd ganz aus Kreisbögen construiren will. Die erstere dieser zwei Verfahrungsweisen beruht auf der Construction der Krümmungskreise, und sie ist es, auf die wir hier etwas genauer eingehen wollen. Ganz mathematisch genaue Kegelschnittlinien erhält man zwar bei dieser Construction auch nicht, da die Krümmungskreise immer nur in drei (resp. vier) Elementen mit den wirklichen Curven zusammenfallen, man aber bei der Construction ein ziemliches Stück des Kreisbogens benutzt; berücksichtigt man jedoch die beim Zeichnen überhaupt nur mögliche geringere Genauigkeit, so dürfte doch diese Methode noch richtigere Ellipsen liefern, als selbst die Bestimmung durch einzelne Punkte, bei welcher man vermöge der beim Bestimmen vieler Punkte sich anhäufenden unvermeidlichen kleinen Fehler selten schöne Ellipsen erhält; auch werden die beim Zusammenziehen einer durch einzelne Punkte bestimmten Ellipse etc. aus freier Hand eintretenden Fehler zum grossen Theil ganz vermieden, z. Th. verringert, indem durch die vorhandenen Kreisbögen die freie Handzeichnung sehr erleichtert wird.

2) Zwei Kegelschnitte können sich in vier Punkten durchschneiden *), haben sechs gemeinschaftliche Secanten, vier gemeinschaftliche Tangenten und sechs gemeinschaftliche Vielstrahlen, doch sind nicht selten imaginäre Werthe darunter. Fallen zwei dieser Schnittpunkte zusammen, so geht die gemeinschaftliche Secante in die gemeinschaftliche Tangente über, die beiden Kegelschnitte bilden eine Osculation der ersten Ordnung. Fallen drei gemeinschaftliche Punkte beider Kegelschnitte in einen Punkt zusammen, so giebt diess die Osculation der zweiten Ordnung; die Kegelschnitte haben

---

*) Eine sehr deutliche Darstellung über die Verhältnisse, in denen zwei Kegelschnitte zu einander stehen können, s. Ch. Paulus: „Grundlinien der neueren ebenen Geometrie“ pag. 220—243.

eine gemeinschaftliche Tangente, durchschneiden sich aber im Berührungspunkte. Fallen alle vier gemeinschaftlichen Punkte beider Kegelschnitte in einen Punkt zusammen, so giebt diess eine Osculation der dritten Ordnung; beide Kegelschnitte haben eine gemeinschaftliche Tangente und der eine liegt ganz in der Fläche des andern. Die Curven zweier Kegelschnitte schmiegen sich bei der Osculation der zweiten Ordnung inniger an einander an, als bei der einfachen Berührung, und bei der Osculation der dritten Ordnung wieder inniger, als bei der Osculation der zweiten Ordnung; d. h. es ist nicht möglich, zwischen die Curven zweier Kegelschnitte, die eine Osculation der zweiten Ordnung vollziehen, einen Kegelschnitt zu zeichnen, der eine Berührung der ersten Ordnung hervorbringt, und ebenso schliesst sich die, eine Osculation der dritten Ordnung vollziehende Kegelschnittscurve enger an den gegebenen Kegelschnitt an, als die mit ihm eine Osculation der zweiten Ordnung bildende Curve.

Ist der mit einem Kegelschnitt eine Osculation höherer Ordnung eingehende zweite Kegelschnitt ein Kreis, so nennt man diesen Krümmungskreis. Da drei Punkte die Lage eines Kreises bestimmen, so ist für einen Punkt des Kegelschnitts immer nur ein Krümmungskreis möglich; eine Osculation der dritten Ordnung findet zwischen einem Kegelschnitt und einem Kreise nur in den Scheitelpunkten der Axen statt, dagegen ist hier die Osculation der zweiten Ordnung ausgeschlossen.

Die Bestimmung des Krümmungskreises für einen gegebenen Punkt eines Kegelschnitts kann entweder durch höhere Mathematik oder durch die neuere Geometrie erfolgen; wir beginnen mit letzterer, durch welche im Allgemeinen die Lehre von den Kegelschnitten an Klarheit und Zusammenhang viel gewonnen hat.

3) Zwei Kegelschnitte, die eine Osculation der ersten Ordnung vollziehen, sind perspectivisch collineär: erstens für den Berührungspunkt O (Taf. I. Fig. 1.) als Collineations-Centrum und die Tangente RS als Collineations-Axe *); zweitens für O als Collineations-Centrum und $\mathfrak{X}X$ als Collineations-Axe; drittens für einen ausserhalb RS liegenden Punkt O' als Collineations-Centrum und RS als Collineations-Axe und viertens für O' als Collineations-Centrum und $\mathfrak{X}X$ als Collineations-Axe **). Sind daher von einem

*) Was jedoch nicht benutzt werden kann, da hierdurch alle Punkte des einen Kegelschnitts mit O des anderen als homolog sich ergeben.

**) Ob noch andere gemeinschaftliche Vielstrahlen gleichartiger Lage vorhanden sind, deren Scheitel dann auf der gemeinschaftlichen Tan-

Kegelschnitte, der mit einem gegebenen Kegelschnitte ABC in O eine Osculation der ersten Ordnung vollziehen soll, noch drei Punkte A_1, B_1, C_1 gegeben, so können die weiteren Punkte gefunden werden, indem man zu A_1, B_1, C_1 die homologen Punkte A, B, C und somit die homologen Richtungen AB, A_1B_1; BC, B_1C_1; AC, A_1C_1 bestimmt; die Verbindungslinie der Convergenzpunkte α, β, γ liefert die Collineations-Axe XX für O als Collineations-Centrum. Umgekehrt lässt sich diess zur Construction der Kegelschnitte benutzen, sobald ausser einer Tangente RS nebst ihrem Berührungspunkte O noch drei Punkte A, B, C der Curve gegeben sind: Man zieht durch O einen beliebigen Berührungskreis, bestimmt für O als Collineations-Centrum die homologen Punkte A_1, B_1, C_1 im Kreise, und hiernach wie oben die Collineations-Axe. Der dem beliebigen Punkt F_1 des Kreises entsprechende Punkt F des Kegelschnitts wird als Schnitt des Collineations-Strahls OF_1 mit der zu $C_1F_1\delta$ homologen Linie $CF\delta$ erhalten, welche letztere durch C und den Convergenzpunkt δ der homologen Richtungen in der Collineations-Axe bestimmt ist.

4) Zwei Kegelschnitte, die eine Osculation der zweiten Ordnung vollziehen, sind perspectivisch collineär: erstens für den Berührungspunkt O (Taf. I. Fig. 2.) als Centrum und Tangente RS als Axe, was wiederum aus oben angegebenem Grunde nicht zu benutzen ist; zweitens für O als Collineations-Centrum und die gemeinschaftliche Secante OB als Axe; drittens für den Durchschnitt O' der Tangente RS mit der zweiten gemeinschaftlichen Tangente EO' als Collineations-Centrum und RS als Collineations-Axe und viertens für O' als Collineations-Centrum und OB als Axe.

Sind daher von einem Kegelschnitte, der mit einem gegebenen eine Osculation der zweiten Ordnung vollziehen soll, noch zwei Punkte gegeben, so ist derselbe vollkommen bestimmt, da der Convergenzpunkt α der homologen Richtungen AC und A_1C_1 den einen und O den zweiten Punkt der Collineations-Axe OB für O als Centrum bestimmt.

Da drei Punkte einen Kreis bestimmen, so giebt es für jeden Punkt der Kegelschnittscurve nur einen Krümmungskreis. Die Bestimmung dieses Krümmungskreises für einen beliebigen Punkt einer gegebenen Curve ist nach Paulus pag. 242. folgende: „Zieht man vom Collineations-Centrum O (Taf. I. Fig. 3.) aus $OD \perp OC$, so entspricht die Sehne CD des Kegelschnitts offenbar einem

---

gente liegen, hängt davon ab, ob zwischen Kreis- und Kegelschnitt noch reelle gemeinschaftliche Punkte und Tangenten vorhanden sind oder nicht.

Durchmesser des gesuchten Kreises. Construirt man noch eine zweite solche Sehne AB im Kegelschnitt, so wird der Convergenzpunkt M dieser zwei Sehnen dem Mittelpunkte M_1 des gesuchten Kreises homolog sein. Dann ist aber auch die Polare ab, welche dem Punkte M des Kegelschnitts entspricht, der Polaren homolog, welche dem Mittelpunkte M_1 des Kreises entspricht. Die letztgenannte Polare ist aber eine Gerade des unendlichen Raumes, folglich ist die Polare ab in dem Systeme des Kegelschnitts die Gegenaxe bei der Collineation des Kegelschnitts und des gesuchten Kreises. Die Axe der Collineation geht aber immer der Gegenaxe parallel, und weil dieselbe bei einer Osculation der zweiten Ordnung auch durch den Punkt O geht, so ist die Gerade $O\mathfrak{X}$, welche durch $O \parallel ab$ gezogen wird, die Axe der Collineation. Durch das Centrum O, die Axe $O\mathfrak{X}$ und die Gegenaxe ab ist aber die Collineation vollkommen bestimmt, und man kann sogleich den Kreis oder, wenn man lieber will, auch den Mittelpunkt desselben, welcher dem Punkte M homolog ist, construiren. Zieht man z. B. durch M die Richtung γc und an den Schnittpunkt c mit der Gegenaxe den Collineations-Strahl Oc und nun durch den Schnittpunkt γ mit der Axe $\gamma M_1 \parallel Oc$, so sind γM und γM_1 homologe Richtungen der zwei Systeme und der Collineations-Strahl OM bestimmt auf γM_1 den Mittelpunkt M_1 des gesuchten Kreises.

Ist die Tangente des Punktes O bekannt, ST, so ist $MO \perp ST$, und somit zur Bestimmung von M blos e i n e Sehne zu ziehen nöthig.

Will man diese Construction zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers für den Punkt E (Taf. I. Fig. 4.) einer durch zwei conjugirte Durchmesser gegebenen Ellipse (o. a. Curve) benutzen, so muss man zunächst die Grösse der auf EB winkelrecht gezogenen Linie EF bestimmen. (Bei der Ellipse kann diess mit Hilfe eines um AB geschlagenen Kreises durch Affinität geschehen, bei andern Curven kann man einen perspectivisch collineär liegenden Kreis zeichnen (s. 3.) und von diesem aus die Bestimmung vornehmen); M ist der dem gesuchten Mittelpunkt des Kreises homologe Punkt in der Ellipse. Zur Bestimmung der Polare braucht man noch eine zweite durch M gehende Linie; diese ergiebt sich jedoch leicht, indem man $EG \perp ED$ und DM zieht. Die zu FB und GD bestimmte Polare bestimmt die Richtung der durch E gehenden Collineations-Axe; die weitere Construction ist sodann wie oben.

Diese Construction lässt sich auch zur Angabe der Krümmungshalbmesser für die Endpunkte der conjugirten Durchmesser selbst benutzen. (Taf. I. Fig. 5.)

Da die Polare die zum Halbmesser MK conjugirte Richtung besitzt, so kann man auch sofort die Collineations-Axe durch C parallel dem zu MK conjugirten Durchmesser ziehen.

Sind die Hauptaxen der Ellipse gegeben und für E (Taf. I. Fig. 6.) der Krümmungskreis zu bestimmen, so ergiebt sich das rechtwinkelige Dreieck EHF sogleich durch die Ordinaten, und der zu FH conjugirte Durchmesser bestimmt sogleich die Richtung der Collineations-Axe. Da der conjugirte Durchmesser parallel der Tangente in F ist, so kann man auch die Collineations-Axe parallel der Tangente FL ziehen, welche letztere sich leicht sofort durch die Lage der Tangente EL ergiebt; da $LR = RN$, so kann man auch sofort N bestimmen und mit E verbinden. Zieht man nun zwischen EH und EF durch γ eine Linie so, dass sie von EM halbirt wird (was leicht geschieht, indem man EO in S halbirt und mit JS durch γ eine Parallele zieht), so ist diess der Durchmesser und M_1 der Mittelpunkt des gesuchten Krümmungskreises. Die in F gezogene Tangente muss sich mit der des homologen Punktes f in der Collineations-Axe schneiden, LF ist aber parallel der Collineations-Axe, somit auch diese Tangente parallel der Collineations-Axe. Diese Tangente steht aber winkelrecht auf $M_1 f$, folglich steht $\gamma M_1 \perp$ auf der Collineations-Axe, was man mit Vortheil für die Construction benutzen wird. Da wir von der Länge der Hauptaxen nicht besonders Gebrauch machen, so ist diese letztere einfachere Construction auch anwendbar, sobald nur die Richtung der Hauptaxen und sonst hinlängliche Stücke zur Bestimmung der Tangenten gegeben sind. Die Bestimmung der Richtung der Hauptaxe ist aber mit Hilfe der Kreis-Involution ziemlich leicht (s. Paulus).

Der gefundene Krümmungskreis lässt sich dann auch zur Angabe einzelner Punkte der Ellipse für E als Centrum und $E\gamma$ als Collineations-Axe benutzen. Dieselbe Construction gilt auch für die Hyperbel und Parabel (s. Taf. I. Fig. 7. und Fig. 8.).

5) Zwei Kegelschnitte, die eine Osculation der dritten Ordnung vollziehen, sind für den Berührungspunkt als Collineations-Centrum und für die gemeinschaftliche Tangente als Collineations-Axe auch für die einstimmige Lage der homologen Elemente perspectivisch collineär, es lässt sich daher dieses Verhalten sofort zur Construction des zweiten Kegelschnitts benutzen, sobald von diesem noch ein Punkt gegeben ist. Der Kreis konnte, wie bereits erwähnt, nur in den Scheitelpunkten der Axen eine Osculation der dritten Ordnung vollziehen; die Bestimmung dieses Krümmungskreises, der für die Zeichnung nun besonders wichtig wird,

kann ausser auf dem allgemeinen Wege durch Bestimmung des Mittelpunktes, wie oben nach Paulus angegeben, sehr einfach dadurch erfolgen, dass man den zweiten Endpunkt des Durchmessers des Kreises bestimmt.

Sind AB, CD (Taf. I. Fig. 9.) die Hauptaxen der Ellipse, so ergiebt sich der Krümmungskreis für C, indem man DB bis zur Collineations-Axe $C\gamma$ verlängert und vom Schnittpunkte γ auf CB eine Normale fällt; CD_1 ist der Durchmesser und M_1 somit der Mittelpunkt des gesuchten Kreises; denn die homologen Linien DB und D_1B_1 müssen sich in der Collineations-Axe, d. i. in γ, durchschneiden, und CB_1D_1 muss als Peripheriewinkel im Halbkreise ein rechter sein. Ist für B ein anderer Punkt gegeben, so bringt diess natürlich eine Aenderung nicht hervor. Für die Scheitel A und B bleibt die Construction ungeändert, wie in der Figur punktirt angegeben.

Dasselbe Verfahren ist auch bei der Hyperbel und Parabel zur Construction des Krümmungskreises im Scheitel anwendbar, nur ist darauf Rücksicht zu nehmen, dass bei der Hyperbel zwei Punkte, bei der Parabel ein Punkt im Unendlichen liegt.

Ist für den Scheitel C (Taf. I. Fig. 10.) der Hyperbel der Krümmungskreis zu zeichnen, wenn noch ein beliebiger Punkt B der Hyperbel gegeben ist, so zieht man zunächst die Collineations-Axe $C\gamma$, verbindet B mit C und D und zieht vom Schnittpunkte γ der Linie DB mit der Collineations-Axe $\gamma D_1 \perp CB$. CD_1 ist der Durchmesser des gesuchten Kreises. Der Beweis ist der obige, sobald man beachtet, dass D_1 im Kreise dem zweiten Scheitel D der Hyperbel homolog ist.

Ist statt des Punktes B die Asymptote KS (Taf. I. Fig. 11.) der Hyperbel gegeben, so ist der unendlich entfernte Punkt der Linie KS ein Punkt der Hyperbel, und hiernach wird D_1 sofort erhalten, indem man $D\gamma \parallel$ der Asymptote KS zieht und in γ die Normale γD_1 errichtet. U_1 sind die Punkte des Kreises, die den unendlich entfernten Punkten der Hyperbel entsprechen. Da $CT = T\gamma$, so kann man auch sofort im Durchschnitt T der Asymptote und Collineations-Axe eine Normale errichten und im Durchschnitt mit der Axe den Mittelpunkt M_1 des Krümmungskreises bestimmen.

Bei der Parabel entspricht D_1 (Taf. I. Fig. 12.) des Kreises einem unendlich entfernten Punkte D der Parabel; die Linie DB wird demnach hier eine durch den gegebenen Punkt B gezogene, mit der Axenrichtung CE parallele Linie; fällt man nun von γ auf

CB eine Normale, so erhält man in CD_1 den gesuchten Durchmesser des Krümmungskreises.

Da der so gefundene Krümmungskreis mit dem Kegelschnitt für den Berührungspunkt als Centrum- und die Tangente als Axe perspectivisch collineär ist, so kann man diesen Kreis dann auch zur Bestimmung einzelner Punkte, welche zum Zusammenziehen der Curve noch nöthig erscheinen dürften, benutzen. Wie man einzelne Punkte übertragen kann, ist als bekannt vorauszusetzen, jedoch auch in 3) beispielsweise gezeigt *).

6) Die Ableitung der Krümmungskreise durch höhere Mathematik bietet für einzelne Fälle noch einfachere Resultate dar.

Bezeichnet p den halben Parameter (Hauptparameter) und a die halbe Hauptaxe, so gilt für die Kegelschnitte bei rechtwinklichen Coordinaten vom Scheitel aus gezählt allgemein die Formel:

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a} \text{ **)},$$

und hiernach wird der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = [x(2-\frac{x}{a}) + p(1-\frac{x}{a})^2]^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \text{ ***)}.$$

Für $x=0$ wird $\varrho = p$, d. h. für die Scheitelpunkte der Hauptaxe ist der Krümmungskreis gleich dem halben Parameter. Der Parameter ist aber bei der Ellipse und Hyperbel die dritte Proportionale zur grossen Axe (Hauptaxe) und kleinen Axe (Zwerchaxe), bei der Parabel vier Mal so gross als die Brennweite. Bezeichnet a die halbe Hauptaxe, b die halbe zweite Axe, so ist bei der Ellipse und Hyperbel $a:b = b:p$, d. i.

$$p = \frac{b^2}{a};$$

bei der Parabel $p = 2 \times$ Brennweite, d. i. $=$ Abstand des Brennpunktes von der Directrize. Für die Ellipse und Hyperbel ergiebt sich demnach folgende Construction: Man errichtet auf der Verbin-

---

*) Aehnliche Constructionen enthält Olivier: „Compléments de géométrie descriptive“ pag. 461—467. mit Benutzung der höheren Mathematik.

**) Für a positiv giebt sie die Ellipse, für a negativ die Hyperbel, für $a = \infty$ die Parabel, für $a = p$ den Kreis.

***) S. Littrow: „Anleitung zur höheren Mathematik“ p. 187.

dungslinie AD (Taf. II. Fig. 13. und 14.) in D eine Normale; KE ist der Krümmungshalbmesser für die Scheitel A und B.

Sind die Asymptoten der Hyperbel gegeben, so kann man sofort in G (Taf. II. Fig. 14.) eine Normale errichten, M ist der Mittelpunkt des Krümmungskreises *). Wenden wir obige Formel speciell für die Ellipse an, indem wir für p den Werth $\frac{b^2}{a}$ einsetzen, so ergiebt sich:

$$\varrho=[x(2-\frac{x}{a})+\frac{b^2}{a}(1-\frac{x}{a})^2]^{\frac{3}{2}}.\frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{a}}}=[x(2-\frac{x}{a})+\frac{b^2}{a}(1-\frac{x}{a})^2]^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{a}}{b}.$$

Für $x=a$ wird

$$\varrho=[a(2-1)+\frac{b^2}{a}(1-\frac{a}{a})^2]^{\frac{3}{2}}.\frac{\sqrt{a}}{b}=\frac{a^{\frac{3}{2}}.\sqrt{a}}{b}=\frac{a^2}{b}.$$

Somit ergiebt sich der Krümmungshalbmesser für die Enden der kleinen Axe, indem wir auf die Sehne AD (Taf. II. Fig. 13.) in A eine Normale errichten; LK ist der Krümmungshalbmesser.

Ist der Brennpunkt F gegeben und man errichtet in F eine Normale $FM \perp FD$, so bestimmt diese sofort den Mittelpunkt M des Krümmungskreises für D, denn $FD=a$.

Für die Hyperbel wird die Formel, wenn wir für a sofort den negativen Werth herstellen:

$$\varrho=[x(2+\frac{x}{a})+p(1+\frac{x}{a})^2]^{\frac{3}{2}}.\frac{1}{\sqrt{p}},$$

---

*) Ist das Verhältniss der Axen bekannt, wie es z. B. bei den axonometrischen Ellipsen häufig vorkommt, so kann man die Mittelpunkte der Krümmungskreise zuweilen noch einfacher finden; z. B. bei der isometrischen Ellipse ist das Verhältniss der Axen $a:b=\sqrt{3}:1$, somit der Krümmungshalbmesser ϱ für die Enden der kleinen Axe $=\frac{a^2}{b}=\frac{(b\sqrt{3})^2}{b}=3b$; für die Scheitel der grossen Axe $\varrho_1=\frac{b^2}{a}=\frac{a}{3}$. Bei dem monodimetrischen Verhältniss $1:1:\frac{1}{3}$ ist in der Grundebene die kleine Axe $=\frac{1}{3}$ der grossen, demnach der Krümmungshalbmesser

$$\varrho=3a=9b,$$
$$\varrho_1=\tfrac{1}{3}a=\tfrac{1}{9}b$$
etc.

Ausführlicher hierüber s. Lehrbuch der Axonometrie. 1. Lief.

d. i. für $p = \frac{b^2}{a}$:

$$\varrho = \left[x\left(2 + \frac{x}{a}\right) + \frac{b^2}{a}\left(1 + \frac{x}{a}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{b}.$$

Für die **Parabel** ist $a = \infty$, demnach

$$\varrho = (2x + p)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

7) Einfachere Constructionen, als sich durch obige Formeln für einen **beliebigen** Punkt der Curve ergeben, erhält man durch Einführung der Normale

$$N = p^{\frac{1}{2}} . \sqrt{\left[x\left(2 - \frac{x}{a}\right) + p\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2\right]};$$

setzt man diesen Werth in obige Formel ein, so wird $\varrho = \frac{N^3}{p^2}$.

Wie man diese Formel auf einfache Weise construiren kann ist vom Herrn Fabr.-Commissionsrath A. **Brix** abgeleitet, wir begnügen uns daher mit der Angabe des Resultats: „Es sei F (Taf. II. Fig. 15.) der Brennpunkt, Q ein beliebiger Curvenpunkt, QN die Normale. Man ziehe durch Q und F die Secante FQ, errichte in N das Perpendikel NM auf QN, welches die Secante in M schneidet; dann ziehe man MO senkrecht auf QM und verlängere die Normale bis zum Durchschnitt O mit dieser Senkrechten, so ist QO der Krümmungshalbmesser des Curvenpunktes Q."

8) Diese Construction setzt die Brennpunkte, also auch die Hauptaxen als gegeben voraus; sind blos zusammengehörige Durchmesser bekannt, so lassen sich allerdings aus diesen die Hauptaxen auf ziemlich einfache Weise finden, in einzelnen Fällen dürfte es aber doch vortheilhafter sein, sogleich die Krümmungskreise der Enden der zusammengehörigen Durchmesser zeichnen zu können, und lässt sich hierfür das im Folgenden näher entwickelte Verfahren benutzen. Es ist dasselbe selbst bei gegebenen Hauptaxen für beliebige Punkte anwendbar, da es ziemlich einfach ist: Bezeichnen wir die conjugirten Durchmesser durch l und m und den Winkel, den sie einschliessen, durch z, so ist der Krümmungshalbmesser bei der Ellipse und Hyperbel für die Enden des Halbmessers m $\frac{l^2}{m . \sin z}$. Für die Enden des Halbmessers l der Ellipse wird $\varrho' = \frac{m^2}{l . \sin z}$. Für die Parabel ist der

Krümmungshalbmesser $=\frac{p_1}{\sin z}$, wenn p_1 den Parameter für die zusammengehörigen Durchmesser bezeichnet. Wir haben also die für rechtwinkelige Axen gefundenen Werthe nur durch $\sin z$ zu dividiren, um diese Formeln für conjugirte Durchmesser benutzen zu können. — Hiernach ergeben sich folgende Constructionen.

Für die Ellipse und Hyperbel: Man fällt vom Endpunkte A (Taf. II. Fig. 16. und Fig. 17.) die Normale AE, trägt $EG=KC$ ab und errichtet in G die Normale GH auf AG; $EH=\frac{l^2}{m\sin z}$ ist der gesuchte Krümmungshalbmesser für A und B.

Durch gleiche Construction erhält man bei der Ellipse den für C und D geltenden Krümmungshalbmesser, wie schon daraus folgt, dass man ja jeden der beiden Durchmesser als Abscissenlinie annehmen kann, aber auch durch die Formel gefunden wird; in Taf. II. Fig. 16. ist diese Construction punktirt angegeben.

Soll für einen beliebigen anderen Punkt der Krümmungskreis bestimmt werden, so kann man für diesen erst zwei conjugirte Durchmesser bestimmen und dann wie so eben gezeigt verfahren.

Für die Parabel ergab sich der für C (Taf. II. Fig. 18.) geltende Krümmungshalbmesser als $\frac{p_1}{\sin z}$. Der halbe Parameter für die zusammengehörigen Axen p_1 ist aber gleich $2CE$ oder auch $=\frac{1}{2}LK(=LG=GK)$, wenn LK eine parallel der Tangente von C durch den Brennpunkt F gezogene Linie ist, $=EG$. Es lässt sich dieser Parameter auch leicht aus einem gegebenen Punkte der Parabel ableiten, indem $y_1^2=2p_1x_1$, d. i. $p_1=\frac{y_1^2}{2x_1}$. — Aus p_1 ergiebt sich der Krümmungshalbmesser für C nun folgend: Man zieht $GH \perp CD$ und $LH \perp LK \perp TT$; GH ist der gesuchte Krümmungshalbmesser. Berücksichtigt man noch die Congruenz der Dreiecke CNM und LGH, so lässt sich noch leichter sofort M bestimmen, indem man $CN=$ halbem Parameter, d. i. $=LG=EG$, aufträgt und in N eine Normale auf CN errichtet.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Angaben lässt sich folgendermaassen führen:

Sei CD (Taf. II. Fig. 19.) eine beliebige Curve, C der durch die schiefwinkeligen Ordinaten x und y bestimmte Punkt, für welchen der Krümmungskreis gesucht werden soll; A der Anfangspunkt der Abscissen; ferner M der Mittelpunkt des gesuchten Krümmungskreises, α, β die Ordinaten desselben und ϱ der Halbmesser. Die Kreisgleichung wird unter diesen Voraussetzungen:

$$(\mathrm{I}) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-2(x-\alpha)(y-\beta)\cos z=\varrho^2.$$

Die weitere Ableitung kann nun ganz analog der in Littrow p. 180. für rechtwinkelige Coordinaten angegebenen erfolgen: Differentiirt man diese Gleichung zwei Mal nach einander und setzt das erste Differential ∂x constant, so erhält man:

$$2(x-\alpha)\partial x+2(y-\beta)\partial y-2\cos z[(x-\alpha)\partial y+(y-\beta)\partial x]=0,$$

$$(2) \qquad (x-\alpha)\partial x+(y-\beta)\partial y-\cos z(x-\alpha)\partial y-\cos z(y-\beta)\partial x=0$$

und

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} \partial x^2-\cos z.\partial x\partial y+\partial y^2+(y-\beta)\partial^2 y-\cos z.\partial y\partial x \\ \qquad -\cos z(x-\alpha)\partial^2 y=0. \end{array}\right.$$

Aus (2) und (3) folgt, wenn $\partial x^2+\partial y^2=\partial s^2$ gesetzt wird:

$$x-\alpha=\frac{(\cos z\partial x-\partial y)(\partial s^2-2\cos z\partial x\partial y)}{(\cos z^2-1)\partial x.\partial^2 y},$$

$$y-\beta=\frac{(\partial x-\cos z\partial y)(\partial s^2-2\cos z\partial x\partial y)}{(\cos z^2-1)\partial x.\partial^2 y};$$

und hiernach:

$$\varrho^2=[(\cos z\partial x-\partial y)^2+(\partial x-\cos z\partial y)^2-2\cos z(\cos z\partial x-\partial y)(\partial x-\cos z\partial y)]$$
$$\times\left(\frac{\partial s^2-2\cos z.\partial x\partial y}{(\cos z^2-1)\partial x\partial^2 y}\right)^2$$
$$=\frac{(\partial s^2-2\cos z\partial x\partial y)\sin z^2(\partial s^2-2\cos z.\partial x\partial y)^2}{[(\cos z^2-1)\partial x.\partial^2 y]^2}=\frac{(\partial s^2-2\cos z.\partial x\partial y)^3\sin z^2}{(-\sin z^2.\partial x\partial^2 y)^2},$$

$$\varrho=\frac{\sqrt{(\partial s^2-2\cos z\partial x\partial y)^3}}{-\sin z.\partial x\partial^2 y}.$$

Wenden wir nun diese für schiefwinkelige Coordinaten abgeleitete Formel des Krümmungshalbmessers auf die Gleichung der Kegelschnitte aus zusammengehörigen Coordinaten an:

Die zusammengehörigen Durchmesser seien l und m, m Abscissenaxe. Bezeichnen wir den Werth $\frac{l^2}{m}$ bei der Ellipse und Hyperbel durch p_1, und ebenso den Parameter der zusammengehörigen Durchmesser bei der Parabel mit p_1, so hat man für die gemeinsame Gleichung dieser drei Curven:

$$y^2=2p_1x-\frac{p_1x^2}{m};$$

sie gehört für die Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem m positiv, negativ oder unendlich gross ist.

Durch zweimaliges Differentiiren erhält man:

$$\partial y = \left(1 - \frac{x}{m}\right) \frac{p_1 \partial x}{y},$$

$$\partial s^2 = \left[y^2 + p_1^2 \left(1 - \frac{x}{m}\right)^2\right] \cdot \frac{\partial x^2}{y^2}$$

und

$$\partial^2 y = -\left[\frac{p}{m} \cdot y^2 + p_1^2 \left(1 - \frac{x}{m}\right)^2\right] \cdot \frac{\partial x^2}{y^3};$$

und hiernach:

$$\varrho = \frac{\left\{\left[y^2 + p_1^2\left(1 - \frac{x}{m}\right)^2\right] \frac{\partial x^2}{y^2} - 2\cos z \,.\, \partial x \,.\left(1 - \frac{x}{m}\right) \frac{p_1 \partial x}{y}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\sin z \,.\, \partial x \left[\frac{p_1}{m} y^2 + p_1^2 \left(1 - \frac{x}{m}\right)^2\right] \frac{\partial x^2}{y^3}},$$

$$\varrho = \frac{\left(y^2 + p_1^2\left(1 - \frac{x}{m}\right)^2 - 2\cos z \left(1 - \frac{x}{m}\right) p_1 y\right)^{\frac{3}{2}}}{\sin z \left[\frac{p_1}{m} y^2 + p_1^2 \left(1 - \frac{x}{m}\right)^2\right]};$$

und wird y in x umgesetzt:

$$\varrho = \frac{\left[2p_1 x - p_1 \frac{x^2}{m} + p_1^2 \left(1 - \frac{x}{m}\right)^2 - 2\cos z \left(1 - \frac{x}{m}\right) p_1 \sqrt{2p_1 x - \frac{p_1 x^2}{m}}\right]^{\frac{3}{2}}}{\sin z \left[\frac{p_1}{m}\left(2p_1 x - \frac{p_1 x^2}{m}\right) + p_1^2 \left(1 - \frac{x}{m}\right)^2\right]},$$

$$\varrho = \frac{\left[x\left(2 - \frac{x}{m}\right) + p_1 \left(1 - \frac{x}{m}\right)^2 - 2\cos z \left(1 - \frac{x}{m}\right) \sqrt{2p_1 x - \frac{p_1 x^2}{m}}\right]^{\frac{3}{2}}}{\sin z \,.\, p^{\frac{1}{2}}}.$$

Für $x = 0$ wird allgemein $\varrho = \frac{p_1}{\sin z}$, d. i. für die Ellipse und Hyperbel $= \frac{p^2}{m \sin z}$; für die Parabel $= \frac{p_1}{\sin z}$.

Für die Ellipse wird ferner für $x = m$ $\varrho_1 = \frac{m^{\frac{3}{2}}}{\sin z \,.\, p_1^{\frac{1}{2}}}$, d. i. wenn für $p_1 = \frac{p^2}{m}$ eingesetzt wird:

$$\varrho_1 = \frac{m^{\frac{3}{2}}}{\sin z \, . \sqrt{\frac{l^2}{m}}} = \frac{m^2}{l \sin z}.$$

9) Für das nach Angabe mehrerer Krümmungskreise noch erforderliche Zusammenziehen aus freier Hand ist zu beachten, dass nur die Krümmungskreise in den Scheiteln der Axen ganz innerhalb oder ausserhalb der Curve des Kegelschnitts liegen, in allen andern Punkten aber der Krümmungskreis die Curve durchschneidet. Die Krümmungskreise in den Scheiteln der Hauptaxe (grossen Axe bei der Ellipse) liegen ganz innerhalb des Kegelschnitts; der Krümmungskreis für die Scheitel der kleinen Axe umschliesst die Ellipse. Die Krümmungshalbmesser werden um so grösser, je weiter der Punkt von den Scheiteln der Hauptaxe entfernt liegt; bei der Ellipse findet der grösste Krümmungshalbmesser bei $x = a$ statt, wie sich durch Nullsetzen des ersten Differentialquotienten der Gleichung

$$\varrho = [x(2 - \frac{x}{a}) + p(1 - \frac{x}{a})^2]^{\frac{3}{2}}$$

ergiebt; bei der Parabel und Hyperbel für $x = \infty$.

Man muss daher beim Zusammenziehen der Kegelschnittscurve aus freier Hand bei dem nach dem Scheitel der grossen Axe zu gerichteten Theile des Krümmungskreises stets herein, bei dem vom Scheitel abgewendeten Bogen des Krümmungskreises heraus gehen, oder mit anderen Worten: der Krümmungskreis durchschneidet die Kegelschnittscurve so, dass der nach dem Scheitel gewendete Bogen des Krümmungskreises ausser die Curve, der vom Scheitel abgewendete Bogen in die Curve fällt. Mathematisch lässt sich diess leicht durch Aufsuchen der dritten Differentiale nachweisen, und wird auch durch einen Blick auf die Figur bestätigt, wenn man berücksichtigt, dass der Krümmungskreis die Kegelschnittscurve nur noch in einem Punkte schneiden kann, wie oben durch die neuere Geometrie bereits gezeigt.

10) Will man nur wenig Krümmungskreise zeichnen, so thut man gut, zwischen den gezeichneten Krümmungskreisen noch einzelne Punkte der Curve anzugeben, und hierzu kann man dann mit Vortheil die zwischen dem Krümmungskreise und der Kegelschnittscurve bestehende Collineation benutzen, wie oben gezeigt. Allerdings lässt sich hierzu auch jedes andere Verfahren der Bestimmung einzelner Punkte aus gegebenen Grössen anwenden. Hierauf genauer einzugehen, liegt nicht in der Absicht dieses Auf-

satzes, und geben wir daher nur noch speciell für die Ellipse einige hierher gehörige Constructionen an.

Es lassen sich nämlich für die Ellipse sehr leicht die zusammengehörigen Durchmesser bestimmen, die in die Diagonalen eines um die gegebenen Durchmesser beschriebenen Parallelogramms fallen, und diess sind eben Punkte, in welchen die für AB, CD (Taf. II. Fig. 20.) construirten Krümmungskreise schon bedeutend abweichen werden. Dass diese Diagonalen wieder zusammengehörige Durchmesser geben, geht schon daraus hervor, dass, wie leicht zu beweisen, $AC \parallel FF$ und $AH = HC$ ist. Die Grösse der auf diese Diagonalen fallenden Durchmesser beträgt: Diagonale $\times\sqrt{\frac{1}{2}}$, d. i. $JK = GK.\sqrt{\frac{1}{2}}$, $KL = KF.\sqrt{\frac{1}{2}}$ *). Man kann also diese

*) Der Beweis für den Satz, dass die auf die Diagonale eines um zwei zusammengehörige Durchmesser beschriebenen Parallelogramms fallenden zusammengehörigen Durchmesser gleich der Diagonale mal $\sqrt{\frac{1}{2}}$ sind, lässt sich am einfachsten dadurch führen, dass man die Ellipse als Projection eines Kreises betrachtet; die Diagonale eines um den Kreis beschriebenen Quadrats $=$ Halbmesser. $\sqrt{2}$. Es lässt sich dieser Satz jedoch auch sofort aus der Gleichung der Ellipse ableiten, wie folgt:

Bezeichnen a und b die halbe grosse und halbe kleine Axe der Ellipse, λ einen mit der Hauptaxe den Winkel α einschliessenden Durchmesser (Taf. II. Fig. 22.), so ist die Mittelpunktsgleichung der Ellipse:

$$\lambda = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2}}, \quad \text{(s. Lehmus, Curvenlehre. §. 171.)}$$

$$= ab\sqrt{\frac{1}{b^2 + \sin\alpha^2 (a^2 - b^2)}}.$$

Um hieraus zunächst die Mittelpunktsgleichung der Ellipse für zusammengehörige Halbmesser l und l_1, welche den Winkel z einschliessen, zu erhalten, setzen wir in obige Gleichung für α $\delta + \alpha_1$ ein, wenn δ den Winkel zwischen λ und l bezeichnet, diess giebt:

$$\lambda = ab\sqrt{\frac{1}{b^2 + (a^2 - b^2)\sin(\alpha_1 + \delta)^2}},$$

$$\lambda = ab\sqrt{\frac{1}{b^2 + (a^2 - b^2)(\sin\delta^2 \cos\alpha_1{}^2 + \sin\alpha_1{}^2 \cos\delta^2 + 2\sin\delta\cos\delta\sin\alpha_1\cos\alpha_1)}},$$

d. i., da nach der Mittelpunktsgleichung

$$\sin\alpha_1{}^2 = \frac{b^2 (a^2 - l^2)}{l^2 (a^2 - b^2)},$$

Längen leicht erhalten, indem man in den Halbirungspunkten H, H_1 Perpendikel $HN = HK$ und $H_1N_1 = H_1K$ errichtet und die Hypotenusen NK und N_1K auf die Diagonalen GG, FF aufträgt. Da $GK = \parallel AD$, $FK = \parallel AC$, so kann man die Zeichnung des

---

also

$$\cos\alpha_1{}^2 = \frac{a^2(l^2-b^2)}{l^2(a^2-b^2)}$$

ist:

$$\lambda = \frac{ab}{\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\left(\sin\delta^2 . \frac{a^2(l^2-b^2)}{l^2(a^2-b^2)} + \cos\delta^2 . \frac{b^2(a^2-l^2)}{l^2(a^2-b^2)} + \frac{2\sin\delta . \cos\delta\sqrt{b^2(a^2-l^2)a^2(l^2-b^2)}}{l^2(a^2-b^2)}\right)}}$$

$$= \frac{ab}{\sqrt{b^2+\frac{\sin\delta^2 . a^2(l^2-b^2)+\cos\delta^2 . b^2(a^2-l^2)+2\sin\delta . \cos\delta\sqrt{a^2b^2(a^2-l^2)(l^2-b^2)}}{l^2}}}$$

$$= \frac{ab}{\sqrt{b^2+\frac{b^2(a^2-l^2)+\sin\delta^2[a^2(l^2-b^2)-b^2(a^2-l^2)]+2\sin\delta . \cos\delta\sqrt{b^2(a^2-l^2)a^2(l^2-b^2)}}{l^2}}}.$$

Parallelogramms ersparen: Man zieht mit AC und AD Parallelen und bestimmt sodann ähnlich wie oben für die Diagonale GG $AD.\sqrt{\frac{1}{2}}$ und für FF $AC.\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Es ist nun ferner:

$$ab = ll_1 . \sin z,$$

$$a^2 + b^2 = l^2 + l_1^2;$$

folglich

$$a = \sqrt{\frac{l^2+l_1^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{l^2+l_1^2}{2}\right)^2 - l^2 l_1^2 \sin z^2}},$$

$$b = \sqrt{\frac{l^2+l_1^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{l^2+l_1^2}{2}\right)^2 - l^2 l_1^2 \sin z^2}};$$

mithin:

$$a^2(l^2-b^2) = \frac{l^2(l^2+l_1^2)}{2} + l^2\sqrt{\frac{(l^2+l_1^2)^2}{4} - l^2 l_1^2 \sin z^2} - l^2 l_1^2 \sin z^2,$$

$$b^2(a^2-l^2) = -\frac{l^2(l^2+l_1^2)}{2} + l^2\sqrt{\frac{(l^2+l_1^2)^2}{4} - l^2 l_1^2 \sin z^2} + l^2 l_1^2 \sin z^2$$

und

$$a^2(l^2-b^2) - b^2(a^2-l^2) = l^2(l^2+l_1^2) - 2l^2 l_1^2 \sin z^2.$$

Durch Substitution dieser Werthe in obige Gleichung folgt, wenn man der Kürze wegen

$$N = \sqrt{\left\{\begin{array}{c}\frac{l^2+l_1^2}{2} - \sqrt{\frac{(l^2+l_1^2)^2}{4} - l^2 l_1^2 \sin z^2} - \frac{l^2+l_1^2}{2} \\ + \sqrt{\frac{(l^2+l_1^2)^2}{4} - l^2 l_1^2 \sin z^2} + l_1^2 \sin z^2 + \sin\delta^2(l^2+l_1^2-2l_1^2\sin z^2)\end{array}\right\}}$$

$$+\frac{2\sin\delta\cos\delta}{l^2}\sqrt{\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{l^2(l^2+l_1^2)}{2} + l^2\sqrt{\frac{(l^2+l_1^2)^2}{4} - l^2 l_1^2 \sin z^2} - l^2 l_1^2 \sin z^2\right) \\ \times\left(-\frac{l^2(l^2+l_1^2)}{2} + l^2\sqrt{\frac{(l^2+l_1^2)^2}{4} - l^2 l_1^2 \sin z^2} \right. \\ \left. + l^2 l_1^2 \sin z^2\right)\end{array}\right\}}$$

setzt:

$$\lambda = \frac{ll_1 \sin z}{N},$$

Bei gegebenen rechtwinkeligen Axen erhält man auf diese Weise die gleichgrossen conjugirten Durchmesser; die für die Endpunkte derselben geltenden Krümmungshalbmesser sind $\frac{l}{\sin z}$, jedoch werden in den meisten Fällen vier Krümmungskreise und vier dergestalt bestimmte Punkte zur Construction der Ellipse vollkommen hinreichen. Uebrigens ist der Krümmungshalbmesser $\frac{l}{\sin z}$ leicht zu construiren, indem man nur nöthig hat, von J (Taf. II.

$$\lambda = \frac{l l_1 \sin z}{\sqrt{l_1^2 \sin z^2 + \sin\delta^2 (l^2 + l_1^2 - 2 l_1^2 \sin z^2) + 2 \sin\delta . \cos\delta . l_1^2 \sin z . \cos z}}$$

$$= \frac{l l_1 \sin z}{\sqrt{l_1^2 (\sin z^2 . \cos 2\delta + \sin 2\delta . \sin z . \cos z) + \sin\delta^2 (l^2 + l_1^2)}}.$$

Bei Bestimmung der Grösse MJ wird $\delta = \delta_1$, folglich, da

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \frac{l_1 \sin z}{l - l_1 \cos z}$$

ist:

$$MJ = \frac{l l_1 \sin z}{\sqrt{l_1^2 \left(\sin z^2 \frac{1 - \operatorname{tg}\delta_1^2}{1 + \operatorname{tg}\delta_1^2} + \sin z . \cos z . \frac{2 \operatorname{tg}\delta_1}{1 + \operatorname{tg}\delta_1^2}\right) + (l^2 + l_1^2) \frac{\operatorname{tg}\delta_1^2}{1 + \operatorname{tg}\delta_1^2}}},$$

$$MJ = \frac{l l_1 \sin z}{\sqrt{l_1^2 \left\{ \begin{array}{c} \sin z^2 . \dfrac{l^2 - l_1^2 + 2 l_1^2 \cos z^2 - 2 l l_1 \cos z}{l^2 + l_1^2 - 2 l l_1 \cos z} \\ + \sin z . \cos z \dfrac{2 l_1 \sin z (l - l_1 \cos z)}{l^2 + l_1^2 - 2 l l_1 \cos z} + \dfrac{(l^2 + l_1^2) l_1^2 \sin z^2}{l^2 + l_1^2 - 2 l l_1 \cos z} \end{array} \right\}}}$$

$$= \frac{l \sin z \sqrt{l^2 + l_1^2 - 2 l l_1 \cos z}}{\sqrt{\left\{ \begin{array}{c} \sin z^2 (l^2 - l_1^2 + 2 l_1^2 \cos z^2 - 2 l l_1 \cos z) \\ + \sin z . \cos z . 2 l_1 \sin z (l - l_1 \cos z) + (l^2 + l_1^2) l_1^2 \sin z^2 \end{array} \right\}}}$$

$$= \frac{l \sin z \sqrt{l^2 + l_1^2 - 2 l l_1 \cos z}}{\sqrt{2 l^2 \sin z^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{l^2 + l_1^2 - 2 l l_1 \cos z}}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{l^2 + l_1^2 - 2 l l_1 \cos z} . \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$= MK . \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Ebenso lässt sich beweisen, dass $ML = MN . \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist.

Fig. 21.) eine Normale auf LK zu fällen und in K eine Normale auf JK zu errichten; RJ ist der gesuchte Krümmungshalbmesser und zwar sogleich in der gewünschten Lage, d. h. R ist sofort Mittelpunkt des Krümmungskreises.

Bei rechtwinkeligen Axen lassen sich noch vier Punkte sehr leicht angeben, die ebenfalls für die Construction aus Krümmungskreisen günstig liegen; nämlich die Endpunkte der durch den Brennpunkt gehenden Ordinate, d. i. der Parameter p. Derselbe ist nämlich $=\frac{b^2}{a}$, d. i. gleich der Grösse des Krümmungshalbmesssers für die Scheitelpunkte der Hauptaxe. Diese Punkte lassen sich auf gleiche Weise auch bei der Hyperbel und Parabel bestimmen und benutzen.

III.

Ueber den Vortrag der Lehre von dem physischen Pendel und von den Momenten der Trägheit.

Von

dem Herausgeber.

Ich glaube, dass der Vortrag der Lehre von dem physischen Pendel und von den Momenten der Trägheit, so wie derselbe gewöhnlich in den Lehrbüchern der sogenannten höheren oder analytischen Mechanik gegeben wird, einiger Verbesserungen und Vereinfachungen fähig ist, namentlich wenn man diese Lehre weniger aus dem Gesichtspunkte der reinen Mechanik, als vielmehr aus dem Gesichtspunkte ihrer grossen Wichtigkeit für die Physik darzustellen beabsichtigt, wobei es wohl ganz unnöthig ist, auf die grosse Mangelhaftigkeit der meisten gangbaren physikalischen

Lehrbücher in dieser Beziehung, aus denen kein Anfänger eine nur einigermaassen richtige und deutliche Vorstellung von diesem Gegenstande bekommen wird, hier noch besonders hinzuweisen. Insbesondere in der Lehre von den Momenten der Trägheit hat mir immer die Verbindung einiger elementaren Betrachtungen mit den Anwendungen der Integralrechnung zweckmässig und der Einfachheit förderlich geschienen. Die Wichtigkeit des Gegenstandes, insbesondere auch für die Physik, veranlasst mich, denselben hier in der Weise zu entwickeln, welche ich in meinen Vorlesungen über sogenannte höhere oder analytische Mechanik zu befolgen pflege, was dem Zwecke dieser Zeitschrift, welche besonders auch die Verbesserung des mathematischen Unterrichts sich zur Aufgabe gemacht hat, durchaus nicht entgegen ist, hauptsächlich dann, wenn der Gegenstand von so grossem Interesse und von so grosser Wichtigkeit ist, wie der vorliegende. Um die Beurtheilung dieses Aufsatzes auf den richtigen Standpunkt zu stellen, wiederhole ich, dass ich in demselben hauptsächlich und zunächst die grosse Wichtigkeit des darin behandelten Gegenstandes für die Physik im Auge gehabt und namentlich deshalb auch möglichste Einfachheit zu erreichen gesucht habe.

---

§. 1.

Dass man bei der Entwickelung der Lehre vom physischen Pendel in einem Vortrage über sogenannte höhere oder analytische Mechanik von den allgemeinen Gleichungen der Bewegung eines Systems von Massen ausgehen, und diese Gleichungen als bekannt voraussetzen muss, versteht sich von selbst. In meiner Abhandlung: Ueber die Stabilität der Schiffe (Archiv. Thl. XV. Nr. 1.) habe ich die in Rede stehenden Gleichungen entwickelt, und kann mich daher, auch rücksichtlich der Bedeutung der im Folgenden gebrauchten Zeichen, auf jene Abhandlung beziehen. Bei der Entwickelung der Theorie des physischen Pendels brauchen wir jedoch nur die eine Gleichung, welche dem Falle entspricht, wenn das System der Massen um eine feste Axe drehbar ist. Diese Gleichung ist (a. a. O. S. 13.), wenn die Drehungsaxe als Axe der z, hier zugleich als horizontal, angenommen wird, die folgende:

$$(1) \qquad \Sigma m\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(xY-yX),$$

wo, wie schon erinnert, die Bedeutung aller Symbole aus der angeführten Abhandlung zu ersehen ist; und diese Gleichung ist es also, von der wir bei der Entwickelung der Theorie des physischen Pendels lediglich unseren Auslauf nehmen müssen.

Bezeichnet nun G die auf die Masseneinheit bezogene Schwere, und nehmen wir den positiven Theil der Axe der x vertikal abwärts, die Axe der y also, eben so wie die Axe der z, horizontal; so ist offenbar in den in der angeführten Abhandlung eingeführten Zeichen:

$$X' = mG,\quad Y' = 0,\quad Z' = 0;$$
$$X_1' = m_1 G,\quad Y_1' = 0,\quad Z_1' = 0;$$
$$X_2' = m_2 G,\quad Y_2' = 0,\quad Z_2' = 0;$$
$$X_3' = m_3 G,\quad Y_3' = 0,\quad Z_3' = 0;$$

u. s. w.

also:

$$X = \frac{X'}{m} = G,\quad Y = \frac{Y'}{m} = 0,\quad Z = \frac{Z'}{m} = 0;$$
$$X_1 = \frac{X_1'}{m_1} = G,\quad Y_1 = \frac{Y_1'}{m_1} = 0,\quad Z_1 = \frac{Z_1'}{m_1} = 0;$$
$$X_2 = \frac{X_2'}{m_2} = G,\quad Y_2 = \frac{Y_2'}{m_2} = 0,\quad Z_2 = \frac{Z_2'}{m_2} = 0;$$
$$X_3 = \frac{X_3'}{m_3} = G,\quad Y_3 = \frac{Y_3'}{m_3} = 0,\quad Z_3 = \frac{Z_3'}{m_3} = 0;$$

u. s. w.

Daher wird die Gleichung (1) unter den gemachten Voraussetzungen:

$$(2)\qquad \Sigma m\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) = -G\Sigma my,$$

weil man natürlich das constante G vor das Summenzeichen nehmen kann

Bezeichnen wir aber durch

$$r,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4, \ldots.$$

die Entfernungen der sämmtlich auf ihre Schwerpunkte reducirt oder in denselben vereinigt gedachten Massen

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4, \ldots.$$

von der horizontalen Drehungsaxe, und durch

$$\varphi,\quad \varphi_1,\quad \varphi_2,\quad \varphi_3,\quad \varphi_4,\ldots.$$

die von den Linien

$$r,\quad r_1,\quad r_2,\quad r_3,\quad r_4,\ldots.$$

mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen Winkel, indem man diese Winkel etwa nur von 0 bis 180° zählt, aber als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem die entsprechenden Linien

$$r,\quad r_1,\quad r_2,\quad r_3,\quad r_4,\ldots.$$

auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der xz liegen; so ist offenbar, wenn wir der Kürze wegen bloss die Masse m in's Auge fassen, in völliger Allgemeinheit:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi;$$

also, weil natürlich, wenn man nach t differentiirt, r als constant, φ aber als veränderlich zu betrachten ist:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=-r\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t},\quad \frac{\partial y}{\partial t}=r\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t};$$

folglich:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-r\sin\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-r\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2,$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\quad r\cos\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-r\sin\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2;$$

und hieraus, wie man sogleich übersieht:

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=r^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}.$$

Folglich ist nach (2):

$$(3)\qquad \Sigma mr^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-G\Sigma mr\sin\varphi.$$

Bezeichnen wir nun die Entfernung des Schwerpunkts der Massen

$$m,\quad m_1,\quad m_2,\quad m_3,\quad m_4,\ldots.$$

von der Drehungsaxe durch R, und durch Φ den auf ganz ähnliche Art wie vorher die Winkel

$$\varphi,\quad \varphi_1,\quad \varphi_2,\quad \varphi_3,\quad \varphi_4,\ldots.$$

genommenen Winkel, welchen die Linie R am Ende der Zeit t mit dem positiven Theile der Axe der x einschliesst, so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte:

$$\frac{my+m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3+\ldots.}{m+m_1+m_2+m_3+\ldots.}$$

$$=\frac{mr\sin\varphi+m_1r_1\sin\varphi_1+m_2r_2\sin\varphi_2+m_3r_3\sin\varphi_3+\ldots.}{m+m_1+m_2+m_3+\ldots.}=R\sin\Phi,$$

oder kürzer:

$$\frac{\Sigma mr\sin\varphi}{\Sigma m}=R\sin\Phi,$$

und folglich:

$$\Sigma mr\sin\varphi=R\sin\Phi\Sigma m;$$

also nach (3):

$$(4)\qquad \Sigma mr^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-GR\sin\Phi\Sigma m.$$

Weil aber die Winkel φ und Φ offenbar immer, d. h. für jedes t, um dieselbe constante Grösse verschieden sind, so ist

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2};$$

und natürlich ganz eben so:

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},\ldots.;$$

also nach (4) offenbar:

$$(5)\qquad \Sigma mr^2.\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-GR\sin\Phi\Sigma m.$$

Bezeichnen wir nun die Länge des einfachen Pendels, welches seine Schwingungen genau in derselben Weise vollendet, wie die Linie R in dem Systeme der Massen

$$m,\quad m_1,\quad m_2,\quad m_3,\quad m_4,\ldots.,$$

durch $\mathfrak{L}$, und den materiellen Punkt dieses einfachen Pendels etwa durch μ; so ist nach der Gleichung (5), wenn man sich das System der Massen

$$m,\quad m_1,\quad m_2,\quad m_3,\quad m_4,\ldots.$$

auf nur eine Masse reducirt oder vielmehr aus nur einer Masse bestehend denkt, offenbar:

$$\mu\mathfrak{L}^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-\mu G\mathfrak{L}\sin\Phi,$$

oder, wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$(6)\qquad \mathfrak{L}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-G\sin\Phi.$$

Dividirt man jetzt die Gleichung (5) durch die Gleichung (6), so erhält man die Gleichung:

$$(7)\qquad \frac{\Sigma mr^2}{\mathfrak{L}}=R\Sigma m,$$

oder

$$(8)\qquad R\mathfrak{L}=\frac{\Sigma mr^2}{\Sigma m},\quad \mathfrak{L}=\frac{\Sigma mr^2}{R\Sigma m}.$$

Die Summe, welche man erhält, wenn man in einem beliebigen Systeme von Massen jede dieser Massen in das Quadrat der Entfernung ihres Schwerpunkts von einer in dem Systeme beliebig als Axe angenommenen geraden Linie multiplicirt, und alle auf diese Weise erhaltenen Producte zu einander addirt, nennt man überhaupt das **Moment der Trägheit** oder das **Trägheitsmoment** der in Rede stehenden Massen in Bezug auf die angenommene Axe.

Bezeichnen wir ferner in dem oben betrachteten Massensysteme den Punkt, in welchem die horizontale Drehungsaxe oder Schwingungsaxe von der durch den **Schwerpunkt** des Systems, den wir von jetzt an durch S bezeichnen wollen, gehenden, auf der Drehungsaxe senkrecht stehenden Geraden getroffen wird, den sogenannten **Aufhängepunkt**, durch O, und tragen nun auf dem in Rede stehenden Perpendikel von dem Aufhängepunkte O aus eine der oben durch $\mathfrak{L}$ bezeichneten Länge gleiche gerade Linie auf: so heisst der Endpunkt dieser von dem Aufhängepunkte O aus aufgetragenen Linie, welchen wir im Folgenden durch Ω bezeichnen wollen, der **Mittelpunkt des Schwungs**, der **Oscillationspunkt** oder der **Schwingungspunkt** des Massensystems.

Dies vorausgesetzt, lässt sich nun der in der Gleichung

$$\mathfrak{L}=\frac{\Sigma mr^2}{R\Sigma m}$$

enthaltene höchst wichtige und merkwürdige Satz auf folgende Art aussprechen:

Satz.

Die Entfernung des Oscillationspunkts eines Systems

von Massen von der horizontalen Drehungsaxe des Systems wird erhalten, wenn man das Trägheitsmoment der Massen in Bezug auf die Drehungsaxe durch das Product der Summe der sämmtlichen Massen in die Entfernung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunkts von der Drehungsaxe dividirt.

§. 2.

Von den Trägheitsmomenten lässt sich ohne Schwierigkeit ein allgemeiner Satz beweisen, der für viele Untersuchungen von grosser Wichtigkeit ist. Zu diesem Satze kann man leicht auf folgende Art gelangen.

In dem Systeme der Massen

$$m,\quad m_1,\quad m_2,\quad m_3,\quad m_4,\ldots$$

nehme man beliebig zwei einander parallele Axen an, von denen jedoch die eine durch den Schwerpunkt des Systems gehen soll. Das Trägheitsmoment in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Axe sei $\mathfrak{T}$, dagegen werde das Trägheitsmoment in Bezug auf die nicht durch den Schwerpunkt gehende Axe durch T bezeichnet. Den Schwerpunkt nehme man als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y, z an, indem man die Axe der z mit der vorher durch den Schwerpunkt gelegten Axe zusammenfallen lässt. Die Coordinaten der Massen

$$m,\quad m_1,\quad m_2,\quad m_3,\quad m_4,\ldots.$$

in dem angenommenen Coordinatensysteme seien respective:

$$x,\ y,\ z;\quad x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_2,\ y_2,\ z_2;\quad x_3,\ y_3,\ z_3;\ldots.$$

Bezeichnen wir nun noch die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der nicht durch den Schwerpunkt gehenden Axe durch a, b, c, so ist nach dem allgemeinen Begriffe des Trägheitsmoments und den Lehren der analytischen Geometrie offenbar:

$$\begin{aligned}T=\{(x-a)^2+(y-b)^2\}m&+\{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2\}m_1\\&+\{(x_2-a)^2+(y_2-b)^2\}m_2\\&+\{(x_3-a)^2+(y_3-b)^2\}m_3\\&+\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und

$$\mathfrak{T} = (x^2 + y^2)m + (x_1^2 + y_1^2)m_1 \\ + (x_2^2 + y_2^2)m_2 \\ + (x_3^2 + y_3^2)m_3 \\ + \ldots\ldots$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt leicht durch Subtraction:

$$T - \mathfrak{T} = -2a(mx + m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots.) \\ -2b(my + m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \ldots.) \\ + (a^2 + b^2)(m + m_1 + m_2 + m_3 + \ldots.).$$

Weil nun der Schwerpunkt der Anfang der Coordinaten ist, so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte:

$$mx + m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots. = 0,$$

$$my + m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \ldots. = 0;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$T - \mathfrak{T} = (a^2 + b^2)(m + m_1 + m_2 + m_3 + \ldots.),$$

oder

$$T - \mathfrak{T} = (a^2 + b^2)\,\Sigma m,$$

oder

$$T = \mathfrak{T} + (a^2 + b^2)\,\Sigma m.$$

Bezeichnet man die Entfernung der beiden parallelen Axen von einander durch E, so ist offenbar

$$E^2 = a^2 + b^2,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$T = \mathfrak{T} + E^2 . \Sigma m.$$

Mittelst dieser Formel kann, wenn man das Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Systems gehende Axe kennt, immer leicht das Trägheitsmoment in Bezug auf jede andere dieser Axe parallele Axe gefunden werden.

§. 3.

Kehren wir jetzt wieder zu den in §. 1. angestellten Betrachtungen zurück und bezeichnen das Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehungsaxe durch T, das Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt S gelegte, der Drehungsaxe parallele Axe durch $\mathfrak{T}$, so ist, wenn wie früher O den Aufhängepunkt, Ω den Oscillationspunkt bezeichnet, nach dem in §. 1. bewiesenen Satze:

$$O\Omega = \frac{T}{OS.\Sigma m}.$$

Nach §. 2. ist aber

$$T = \mathfrak{T} + OS^2.\Sigma m,$$

also nach der vorhergehenden Gleichung:

$$O\Omega = OS + \frac{\mathfrak{T}}{OS.\Sigma m},$$

woraus auch zugleich hervorgeht, dass immer $O\Omega > OS$ ist, d. h. dass immer der Oscillationspunkt tiefer als der Schwerpunkt des Systems liegt.

Wir wollen nun einmal den Oscillationspunkt Ω zum Aufhängepunkte machen und dann den entsprechenden Oscillationspunkt durch $\mathfrak{O}$ bezeichnen. Dann ist natürlich ganz eben so wie vorher:

$$\Omega\mathfrak{O} = \Omega S + \frac{\mathfrak{T}}{\Omega S.\Sigma m},$$

wo wieder $\Omega\mathfrak{O} > \Omega S$ ist.

Fig. 1.

Fig. 2.

Der erste Fall ist in Fig. 1., der zweite Fall ist in Fig. 2. dargestellt.

Nun ist im ersten Falle, wobei Fig. 1. zu vergleichen:

$$O\Omega = OS + \Omega S = OS + \frac{\mathfrak{T}}{OS.\Sigma m},$$

also

$$\Omega S=\frac{\mathfrak{C}}{OS.\Sigma m},\quad \frac{1}{\Omega S}=\frac{OS.\Sigma m}{\mathfrak{C}}.$$

Führt man dies in die obige, dem zweiten Falle entsprechende Gleichung

$$\Omega\mathfrak{O}=\Omega S+\frac{\mathfrak{C}}{\Omega S.\Sigma m}$$

ein, so wird dieselbe

$$\Omega\mathfrak{O}=\frac{\mathfrak{C}}{OS.\Sigma m}+OS;$$

und vergleicht man diese Gleichung mit der dem ersten Falle entsprechenden Gleichung

$$O\Omega=OS+\frac{\mathfrak{C}}{OS.\Sigma m},$$

so erhält man auf der Stelle die folgende überaus merkwürdige und wichtige Gleichung:

$$O\Omega=\Omega\mathfrak{O}.$$

In dieser Gleichung ist der folgende Satz enthalten:

Wenn man in einem beliebigen Massensysteme den Aufhängepunkt mit dem Oscillationspunkte verwechselt, so schwingt in beiden Fällen die den Aufhängepunkt mit dem Schwerpunkte verbindende gerade Linie auf völlig gleiche Weise.

Dieser Satz hat bekanntlich die Veranlassung zu der wichtigen Erfindung des Reversions-Pendels gegeben.

§. 4.

Bei der Bestimmung der Momente der Trägheit ist uns die Summe der Reihe

$$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 7^2, \ldots,\ (2n-1)^2$$

nöthig, die wir daher jetzt in der Kürze entwickeln wollen.

Es ist

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+(2n)^2$$
$$=1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+(2n-1)^2+2^2+4^2+6^2+8^2+\ldots+(2n)^2$$
$$=1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+(2n-1)^2+4(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2)$$

oder

$$1^2+3^2+5^2+7^2+\dots+(2n-1)^2$$
$$=1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+(2n)^2-4(1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2),$$

und daher nach der allgemein bekannten Formel für die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen:

$$1^2+3^2+5^2+7^2+\dots+(2n-1)^2$$
$$=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-4.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(2n+1)(4n+1-2n-2)}{3},$$

also

$$1^2+3^2+5^2+7^2+\dots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

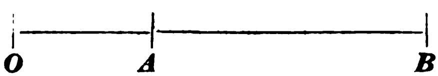
§. 5.

Trägheitsmoment einer geraden Linie in Bezug auf einen in ihr oder in ihrer Verlängerung nach der einen oder nach der anderen Seite hin liegenden Punkt *).

Die gerade Linie sei AB, der in ihr oder in einer ihrer Verlängerungen liegende Punkt, in Bezug auf welchen das Trägheitsmoment bestimmt werden soll, sei O.

Erster Fall.

Der Punkt O liege in der Verlängerung der geraden Linie AB über den Punkt A hinaus:



Man theile die gerade Linie AB in n gleiche Theile und bezeichne jeden dieser Theile durch i; auch setze man der Kürze wegen

$$OA=a, \quad OB=b.$$

Ist nun T das gesuchte Trägheitsmoment der Linie AB in Bezug auf den Punkt O, und bezeichnet hier und im Folgenden immer δ die Dichtigkeit der Materie, aus welcher der Körper, dessen Trägheitsmoment gesucht wird, bestehend gedacht wird, so ist offenbar T die Gränze, welcher

*) Eigentlich in Bezug auf eine in diesem Punkte auf der geraden Linie senkrecht stehende Axe. Diese Bemerkung hat man auch im Folgenden zu beachten.

$$\delta(a+\frac{1}{2}i)^2 i+\delta(a+\frac{3}{2}i)^2 i+\delta(a+\frac{5}{2}i)^2 i+\ldots.+\delta(a+\frac{2n-1}{2}i)^2 i$$

sich nähert, wenn man n in's Unendliche wachsen lässt, wobei man sich zu erinnern hat, dass immer die Masse gleich dem Producte der Dichtigkeit und des Volumens ist. Vorstehende Grösse, deren Gränze für in's Unendliche wachsende n gesucht wird, ist aber, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}
&\delta a^2.ni+\delta a\{1+3+5+7+\ldots.+(2n-1)\}i^2\\
&\qquad+\tfrac{1}{4}\delta\{1+3^2+5^2+7^2+\ldots.+(2n-1)^2\}i^3\\
&=\delta a^2.ni+\delta a.n^2i^2+\delta.\frac{n(2n-1)(2n+1)}{12}i^3\\
&=\delta a^2.ni+\delta a.(ni)^2+\delta.\frac{ni(2ni-i)(2ni+i)}{12}\\
&=\delta a^2(b-a)+\delta a(b-a)^2+\delta\frac{(b-a)(2(b-a)-i)(2(b-a)+i)}{12};
\end{aligned}$$

und nimmt man nun, indem n sich dem Unendlichen, also i sich der Null nähert, die Gränze, so erhält man auf der Stelle:

$$T=\delta a^2(b-a)+\delta a(b-a)^2+\tfrac{1}{3}\delta(b-a)^3,$$

oder

$$T=\delta(b-a)\{a^2+a(b-a)+\tfrac{1}{3}(b-a)^2\},$$

also, wie man sogleich findet:

$$T=\tfrac{1}{3}\delta(b-a)(a^2+ab+b^2),$$

oder

$$T=\tfrac{1}{3}\delta(b^3-a^3).$$

Zweiter Fall.

Der Punkt O liege in der Verlängerung der geraden Linie AB über den Punkt B hinaus:

Setzt man wieder

$$OA=a, \quad OB=b$$

und bezeichnet das Trägheitsmoment der geraden Linie AB in Bezug auf den Punkt O auch wieder durch T, so erhält man ganz wie vorher:

$$T=\tfrac{1}{3}\delta(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

oder

$$T=\tfrac{1}{3}\delta(a^3-b^3).$$

Dritter Fall.

Der Punkt O liege in der geraden Linie AB selbst:

Auch jetzt setze man

$$OA=a,\quad OB=b$$

und bezeichne das Trägheitsmoment der Linie AB in Bezug auf den Punkt O durch T. Bezeichnen wir nun ferner die Trägheitsmomente von OA und OB in Bezug auf den Punkt O respective durch $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$; so ist offenbar:

$$T=\mathfrak{T}+\mathfrak{T}',$$

und nach dem Ersten Falle ist, wenn man dort $a=0$, $b=a$ und $a=0$, $b=b$ setzt:

$$\mathfrak{T}=\tfrac{1}{3}\delta a^3,\quad \mathfrak{T}'=\tfrac{1}{3}\delta b^3.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$T=\tfrac{1}{3}\delta(a^3+b^3),$$

oder

$$T=\tfrac{1}{3}\delta(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Bezeichnet man die Länge der geraden Linie AB durch l und betrachtet in den beiden ersten Fällen, d. h. wenn O in einer der beiden Verlängerungen der geraden Linie AB über ihre Endpunkte hinaus liegt, a und b beide als positiv oder beide als negativ, in dem dritten Falle dagegen, wenn O in der geraden Linie AB selbst liegt, die eine der beiden Grössen a und b als positiv, die andere als negativ; so ist nach dem Vorhergehenden ganz allgemein:

$$T=\tfrac{1}{3}\delta l(a^2+ab+b^2).$$

§. 6.

Trägheitsmoment einer geraden Linie in Bezug auf eine ihr parallele Axe.

Man theile die gegebene gerade Linie, deren Länge wir durch l, ihre Entfernung von der gegebenen Axe durch a bezeichnen wollen, in n gleiche Theile, deren jeder i sein mag; so ist das gesuchte Trägheitsmoment T offenbar die Gränze, welcher $\delta n a^2 i = \delta a^2 . ni$ sich nähert, wenn n in's Unendliche wächst. Weil nun aber $ni = l$ ist, so ist offenbar

$$T = \delta l a^2.$$

§. 7.

Trägheitsmoment einer geraden Linie in Bezug auf einen beliebigen Punkt.

Durch den gegebenen Punkt, den wir durch O bezeichnen wollen, lege man zwei Axen, von denen die eine auf der gegebenen geraden Linie senkrecht steht, die andere ihr parallel ist. Sind nun die Trägheitsmomente der gegebenen geraden Linie in Bezug auf diese beiden Axen respective $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$, und wird das gesuchte Trägheitsmoment der gegebenen geraden Linie in Bezug auf den Punkt O durch T bezeichnet, so ergiebt sich mit Hülfe des pythagoräischen Lehrsatzes auf der Stelle die Gleichung:

$$T = \mathfrak{T} + \mathfrak{T}'.$$

Bezeichnen wir aber die Länge der gegebenen geraden Linie durch l, die gehörig als positiv oder negativ betrachteten Entfernungen ihrer Endpunkte von der auf ihr senkrecht stehenden Axe durch α und β, und ihre Entfernung von der ihr parallelen Axe durch a; so ist nach §. 5.

$$\mathfrak{T} = \tfrac{1}{3}\delta l(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2),$$

und nach §. 6. ist

$$\mathfrak{T}' = \delta l a^2.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden:

$$T = \delta l \{a^2 + \tfrac{1}{3}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)\}.$$

§. 8.

Trägheitsmoment eines Rechtecks in Bezug auf eine in seiner Ebene liegende und einer seiner Seiten parallele Axe.

Zwei zusammenstossende Seiten des Rechtecks seien a und b, und die Axe, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment des Rechtecks bestimmt werden soll, sei der Seite a parallel.

Man theile die Seite a in m gleiche Theile, deren jeder i sein mag, so dass $a = mi$ ist, trage einen dieser Theile auf b so oft auf, als es angeht, und ausserdem noch ein Mal, so dass

$$ni < b < (n+1)i$$

ist, und ziehe durch alle auf diese Weise auf den Seiten a und b erhaltene Theilpunkte Parallelen mit den Seiten des Rechtecks, so erhält man ein Netz von Quadraten, welche alle die Seite i haben. Von den Mittelpunkten aller dieser Quadrate fälle man auf die Axe Perpendikel und bezeichne die Summen der Quadrate dieser Perpendikel für jede der m auf der Axe senkrecht stehenden Schichten von n und $n+1$ dieser Quadrate mit der gemeinschaftlichen Seite i respective durch S und S', das gesuchte Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf die angenommene, der Seite a parallele Axe aber durch T. Dann ist offenbar T die Gränze, welcher

$$\delta m S i^2 \text{ oder } \delta m S' i^2,$$

d. i.

$$\delta S i . mi \text{ oder } \delta S' i . mi$$

sich nähert, wenn m in's Unendliche wächst. Weil nun aber $mi = a$ ist, und die Gränze, welcher $\delta S i$ oder $\delta S' i$ sich nähert, wenn m in's Unendliche wächst, offenbar das Trägheitsmoment der Seite b des Rechtecks in Bezug auf die angenommene Axe ist; so ist nach dem Vorhergehenden, wenn wir das letztere Trägheitsmoment durch $\mathfrak{T}$ bezeichnen,

$$T = a\mathfrak{T}.$$

Bezeichnen wir nun die gehörig als positiv und negativ betrachteten Entfernungen der Seite a und der ihr parallelen Seite des Rechtecks von der angenommenen Axe respective durch α und β, so ist nach §. 5.

$$\mathfrak{T} = \tfrac{1}{3}\delta b(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2),$$

also nach dem Obigen:

$$T = \tfrac{1}{3}\delta ab(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2).$$

§. 9.

Trägheitsmoment eines Rechtecks in Bezug auf einen beliebigen Punkt in seiner Ebene.

Die beiden zusammenstossenden Seiten des gegebenen Rechtecks seien a und b, und O sei der Punkt in seiner Ebene, in Bezug auf welchen das Trägheitsmoment T des Rechtecks bestimmt werden soll. Legt man nun durch den Punkt O zwei den Seiten a und b des Rechtecks parallele Axen, und bezeichnet die Trägheitsmomente des Rechtecks in Bezug auf diese beiden Axen respective durch $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$; so ist, wie mittelst des pythagoräischen Lehrsatzes auf der Stelle erhellet:

$$T=\mathfrak{T}+\mathfrak{T}'.$$

Bezeichnen wir die gehörig als positiv oder als negativ betrachteten Entfernungen der Seite a und der ihr parallelen Seite des Rechtecks von der mit der Seite a parallelen Axe durch α und β, die gehörig als positiv oder als negativ betrachteten Entfernungen der Seite b und der ihr parallelen Seite des Rechtecks von der mit der Seite b parallelen Axe durch α_1 und β_1; so ist nach §. 8.

$$\mathfrak{T}=\tfrac{1}{3}\delta ab(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2),$$

$$\mathfrak{T}'=\tfrac{1}{3}\delta ab(\alpha_1{}^2+\alpha_1\beta_1+\beta_1{}^2);$$

also nach dem Obigen:

$$T=\tfrac{1}{3}\delta ab(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+\alpha_1{}^2+\alpha_1\beta_1+\beta_1{}^2).$$

§. 10.

Trägheitsmoment einer beliebigen ebenen Figur in Bezug auf einen Punkt in ihrer Ebene.

Wir wollen zuerst wieder das im vorhergehenden Paragraphen betrachtete Rechteck, unter Beibehaltung aller dort gebrauchten Bezeichnungen, in's Auge fassen. Bezeichnen wir das Trägheitsmoment irgend einer in diesem Rechtecke mit der Seite b parallel gezogenen Linie, deren gehörig als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung von der durch den Punkt O mit der Seite b parallel gezogenen Axe im Allgemeinen durch x bezeichnet werden soll, in Bezug auf den Punkt O durch T_x; so ist nach §. 7.

$$T_x=\delta b\{x^2+\tfrac{1}{3}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\}.$$

Integrirt man nun das Differential

$$T_x\partial x=\delta b\{x^2+\tfrac{1}{3}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\}\partial x$$

zwischen den Gränzen α_1 und β_1, wobei $\alpha_1<\beta_1$ sein soll, so erhält man:

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} T_x \partial x = \delta b \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \{x^2 + \tfrac{1}{3}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)\} \partial x$$

$$= \tfrac{1}{3}\delta b \{\beta_1{}^3 - \alpha_1{}^3 + (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(\beta_1 - \alpha_1)\},$$

oder, wie man sogleich findet:

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} T_x \partial x = \tfrac{1}{3}\delta(\beta_1 - \alpha_1) b(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \alpha_1{}^2 + \alpha_1\beta_1 + \beta_1{}^2),$$

also, weil offenbar allgemein $\beta_1 - \alpha_1 = a$ ist:

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} T_x \partial x = \tfrac{1}{3}\delta a b(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \alpha_1{}^2 + \alpha_1\beta_1 + \beta_1{}^2).$$

Daher ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$T = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} T_x \partial x.$$

Nach der Theorie der bestimmten Integrale ist aber, wenn

$$i = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{n}$$

gesetzt wird, wo n eine positive ganze Zahl bezeichnet, für in's Unendliche wachsende n:

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} T_x \partial x = \text{Lim}.\,i(T_{\alpha_1} + T_{\alpha_1+i} + T_{\alpha_1+2i} + \ldots + T_{\alpha_1+ni});$$

also ist auch für in's Unendliche wachsende n:

$$T = \text{Lim}.\,i(T_{\alpha_1} + T_{\alpha_1+i} + T_{\alpha_1+2i} + \ldots + T_{\alpha_1+ni}).$$

Haben wir nun eine beliebige ebene Figur, deren Trägheitsmoment T in Bezug auf einen in ihrer Ebene liegenden Punkt O bestimmt werden soll, so bezeichne man das Trägheitsmoment einer beliebigen Sehne oder Chorde dieser Figur, deren gehörig als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung von dem Punkte O im Allgemeinen durch x bezeichnet werden soll, in Bezug auf den Punkt O durch T_x. Sind dann die gehörig als positiv oder als negativ betrachteten Entfernungen der beiden äussersten Chorden der Figur, welche der vorhergehenden parallel sind, von dem gegebenen Punkte a und b, wo $a < b$ sein soll; so erhellet aus dem Vorhergehenden und aus der Theorie der bestimmten Integrale mittelst einer einfachen Betrachtung sogleich, dass, wenn man

$$\frac{b-a}{n}=i$$

setzt, für in's Unendlich wachsende n

$$T=\mathrm{Lim.}\,i(T_a+T_{a+i}+T_{a+2i}+\ldots\ldots+T_{a+ni}),$$

also nach einem bekannten Satze von den bestimmten Integralen

$$T=\int_a^b T_x\partial x$$

ist.

§. 11.

Trägheitsmoment eines Kreises in Bezug auf seinen Mittelpunkt.

Der Halbmesser des gegebenen Kreises sei r; die gehörig als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung einer seiner Sehnen von dem Mittelpunkte sei im Allgemeinen x; dann wird nach §. 7. das Trägheitsmoment dieser Sehne in Bezug auf den Mittelpunkt, welches wir wie im vorhergehenden Paragraphen durch T_x bezeichnen wollen, durch die folgende Formel bestimmt:

$$T_x=2\delta\sqrt{r^2-x^2}\{x^2+\tfrac{1}{3}((\sqrt{r^2-x^2})^2-\sqrt{r^2-x^2}.\sqrt{r^2-x^2}+(\sqrt{r^2-x^2})^2)\},$$

oder kürzer:

$$T_x=2\delta\sqrt{r^2-x^2}\{x^2+\tfrac{1}{3}(r^2-x^2)\},$$

also

$$T_x=\tfrac{2}{3}\delta(r^2+2x^2)\sqrt{r^2-x^2}.$$

Bezeichnet nun T das gesuchte Trägheitsmoment des gegebenen Kreises in Bezug auf seinen Mittelpunkt, so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$T=\int_{-r}^{+r}T_x\partial x=\tfrac{2}{3}\delta\int_{-r}^{+r}(r^2+2x^2)\partial x\sqrt{r^2-x^2}.$$

Nun ist aber:

$$\int(r^2+2x^2)\partial x\sqrt{r^2-x^2}=r^2\int\partial x\sqrt{r^2-x^2}+2\int x^2\partial x\sqrt{r^2-x^2},$$

und mittelst einer bekannten Reductionsformel der Integralrechnung erhält man leicht:

$$\int x^2\partial x\sqrt{r^2-x^2}=-\tfrac{1}{4}x(r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2}+\tfrac{1}{4}r^2\int\partial x\sqrt{r^2-x^2};$$

also ist nach dem Vorhergehenden:

$$\int(r^2+2x^2)\partial x\sqrt{r^2-x^2}=\tfrac{3}{2}r^2\int\partial x\sqrt{r^2-x^2}-\tfrac{1}{2}x(r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2},$$

woraus sich sogleich

$$\int_{-r}^{+r}(r^2+2x^2)\partial x\sqrt{r^2-x^2}=\tfrac{3}{2}r^2\int_{-r}^{+r}\partial x\sqrt{r^2-x^2}$$

ergiebt. Daher ist nach dem Obigen:

$$T=\delta r^2\int_{-r}^{+r}\partial x\sqrt{r^2-x^2}.$$

Bezeichnen wir nun den Flächeninhalt unsers Kreises durch F, so ist nach der Lehre von der Quadratur der Curven bekanntlich

$$\tfrac{1}{2}F=\int_{-r}^{+r}\partial x\sqrt{r^2-x^2};$$

also

$$T=\tfrac{1}{2}\delta r^2F,$$

und da nun $F=r^2\pi$ ist, so ist

$$T=\tfrac{1}{2}\delta r^4\pi,$$

was sich auch elementar beweisen lässt *).

§. 12.

Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallelepipeds in Bezug auf eine seiner Kanten.

Die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipeds seien a, b, c, und c sei die Kante, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment des Parallelepipeds bestimmt werden soll. Die auf der Kante c senkrecht stehenden Schnitte des Parallelepipeds sind Rechtecke mit den Seiten a, b. Das Trägheitsmoment eines jeden dieser Rechtecke in Bezug auf die Kante c ist nach §. 9. offenbar:

$$\tfrac{1}{3}\delta ab(a^2+b^2),$$

*) M. s. mein Lehrbuch der Physik mit vorzüglicher Rücksicht auf mathematische Begründung. Thl. I. Leipz. 1845. S. 200.

wobei man zu beachten hat, dass im vorliegenden Falle eine der Grössen α, β in §. 9. b und die andere 0, eine der Grössen α_1, β_1 in §. 9. a und die andere 0 ist. Bezeichnen wir nun das gesuchte Trägheitsmoment des Parallelepipeds in Bezug auf die Kante c durch T, so ist offenbar

$$T=\int_0^c \tfrac{1}{3}\delta ab(a^2+b^2)\partial x=\tfrac{1}{3}\delta ab(a^2+b^2)\int_0^c \partial x,$$

also

$$T=\tfrac{1}{3}\delta abc(a^2+b^2).$$

Die Trägheitsmomente des Parallelepipeds in Bezug auf die Kanten a, b, c sind also respective:

$$\tfrac{1}{3}\delta abc(b^2+c^2),\quad \tfrac{1}{3}\delta abc(c^2+a^2),\quad \tfrac{1}{3}\delta abc(a^2+b^2).$$

Bezeichnen wir die Masse des Parallelepipeds durch M, so ist $M=\delta abc$, und die drei vorstehenden Trägheitsmomente sind also auch:

$$\tfrac{1}{3}(b^2+c^2)M,\quad \tfrac{1}{3}(c^2+a^2)M,\quad \tfrac{1}{3}(a^2+b^2)M.$$

§. 13.

Trägheitsmoment eines geraden Cylinders in Bezug auf einen Durchmesser einer seinen beiden Grundflächen.

Der Halbmesser der Grundfläche und die Höhe des gegebenen Cylinders seien respective r und h. Die auf dem Durchmesser der Grundfläche, für welchen das Trägheitsmoment gesucht wird, senkrecht stehenden Schnitte des Cylinders sind Rechtecke. Für das Rechteck, welches die Entfernung x vom Mittelpunkte der Grundfläche hat, ist nach §. 9. das Trägheitsmoment in Bezug auf die angenommene Axe:

$$\tfrac{2}{3}\delta h\sqrt{r^2-x^2}\{r^2-x^2-\sqrt{r^2-x^2}.\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2+h^2\}$$

oder, wie man leicht findet:

$$\tfrac{2}{3}\delta h(h^2+r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2}.$$

Folglich ist, wenn T das gesuchte Trägheitsmoment des Cylinders bezeichnet:

$$T=\tfrac{4}{3}\partial h\int_0^r (h^2+r^2-x^2)\partial x\sqrt{r^2-x^2}.$$

Nach §. 11. ist

$$\int x^2\partial x\sqrt{r^2-x^2}=-\tfrac{1}{4}x(r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2}+\tfrac{1}{4}r^2\int\partial x\sqrt{r^2-x^2},$$

folglich

$$\int_0^r x^2\partial x\sqrt{r^2-x^2}=\tfrac{1}{4}r^2\int_0^r\partial x\sqrt{r^2-x^2},$$

folglich nach dem Obigen offenbar:

$$T=\tfrac{4}{3}\delta h(h^2+\tfrac{3}{4}r^2)\int_0^r\partial x\sqrt{r^2-x^2}.$$

Bezeichnen wir aber den Inhalt der Grundfläche des Cylinders durch F, so ist nach der Lehre von der Quadratur der Curven:

$$F=4\int_0^r\partial x\sqrt{r^2-x^2},$$

also nach dem Obigen:

$$T=\tfrac{1}{3}\delta h(h^2+\tfrac{3}{4}r^2)F,$$

oder, weil $F=r^2\pi$ ist:

$$T=\delta hr^2(\tfrac{1}{3}h^2+\tfrac{1}{4}r^2)\pi.$$

Bezeichnet M die Masse des Cylinders, so ist

$$M=\delta hr^2\pi,$$

also

$$T=(\tfrac{1}{3}h^2+\tfrac{1}{4}r^2)M.$$

§. 14.

Trägheitsmoment eines Kugelsegments in Bezug auf seine Höhe.

Die auf der Axe der Momente senkrechten Schnitte des Kugelsegments sind Kreise. Das Trägheitsmoment eines dieser Kreise, dessen Halbmesser ϱ sein mag, in Bezug auf die angenommene Axe ist nach §. 11.

$$\tfrac{1}{2}\delta\varrho^4\pi.$$

Ist nun x die Entfernung dieses Kreises von der Grundfläche des Segments, h dessen Höhe, und r der Halbmesser der Kugel, von welcher das Segment ein Theil ist, so ist nach einem bekannten Satze vom Kreise offenbar

$$\varrho = \sqrt{(h-x)(2r-(h-x))},$$

und folglich, wenn das gesuchte Trägheitsmoment des Kugelsegments durch T bezeichnet wird, nach dem Obigen:

$$T = \tfrac{1}{2}\delta\pi \int_0^h \{\sqrt{(h-x)(2r-(h-x))}\}^4 \partial x,$$

also

$$T = \tfrac{1}{2}\delta\pi \int_0^h (h-x)^2(2r-h+x)^2 \partial x \cdot$$

Die Entwickelung dieses Integrals eines ganzen rationalen algebraischen Differentials hat nicht die mindeste Schwierigkeit, und man erhält nach leichter Rechnung:

$$T = \tfrac{1}{2}\delta h^3\pi(\tfrac{4}{3}r^2 - hr + \tfrac{1}{5}h^2).$$

Das Volumen des Kugelsegments ist bekanntlich

$$\pi \int_0^h \{\sqrt{(h-x)(2r-h+x)}\}^2 \partial x = \pi \int_0^h (h-x)(2r-h+x)\partial x,$$

also, wie man leicht findet:

$$\tfrac{1}{3}\pi h^2(3r-h).$$

Bezeichnet also M die Masse des Kugelsegments, so ist

$$M = \tfrac{1}{3}\delta\pi h^2(3r-h),$$

also

$$\delta h^2\pi = \frac{3M}{3r-h},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$T = \frac{h(20r^2 - 15hr + 3h^2)}{10(3r-h)} M.$$

Für die ganze Kugel ist $h = 2r$, also, wie man leicht findet:

$$T = \tfrac{2}{5}r^2 M.$$

§. 15.

Trägheitsmoment eines Ellipsoids in Bezug auf eine seiner Axen.

Die Gleichung des Ellipsoids sei

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

und das Trägheitsmoment werde in Bezug auf die Axe der z gesucht.

Wir betrachten einen auf der Axe der z senkrecht stehenden Schnitt des Ellipsoids, dessen gehörig als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung vom Anfange der Coordinaten z sei.

In diesem Schnitt betrachten wir ferner eine auf der Ebene der xz senkrecht stehende Sehne desselben, deren Entfernung von der Ebene der yz wir durch x bezeichnen wollen, so ist nach §. 7. das Trägheitsmoment dieser Sehne in Bezug auf die Axe der z, wie leicht erhellen wird:

$$2\partial b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2}\left\{x^2+\tfrac{1}{3}b^2\left[\begin{array}{c}1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2\\ -\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2}\\ \times\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2}\\ +1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2\end{array}\right]\right\}$$

oder kürzer:

$$2\partial b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2}\left\{x^2+\tfrac{1}{3}b^2\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2\right)\right\}$$

$$=2\partial b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2}\left\{\tfrac{1}{3}b^2\left(1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\right)+\left(1-\frac{b^2}{3a^2}\right)x^2\right\}.$$

Also ist das Trägheitsmoment des Schnitts:

$$2\partial b\int_{-a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}}^{+a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2}\left\{\tfrac{1}{3}b^2\left(1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\right)+\left(1-\frac{b^2}{3a^2}\right)x^2\right\}\partial x.$$

Nun ist nach einer bekannten Reductionsformel der Integralrechnung:

$$\int x^2\partial x\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2}$$

$$=-\tfrac{1}{4}a^2x\left\{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2\right\}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2}$$

$$+\tfrac{1}{4}a^2\left\{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\right\}\int\partial x\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2},$$

also offenbar:

$$\int_{-a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}}^{+a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}} x^2\partial x\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2}$$

$$=\tfrac{1}{4}a^2\left\{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\right\}\int_{-a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}}^{+a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}} \partial x\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2};$$

und weil nun

$$\tfrac{1}{3}b^2\left(1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\right)+\tfrac{1}{4}a^2\left(1-\frac{b^2}{3a^2}\right)\left(1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\right)=\tfrac{1}{4}(a^2+b^2)\left(1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\right)$$

ist, so ist das obige Trägheitsmoment:

$$\tfrac{1}{2}\delta b(a^2+b^2)\left\{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\right\}\int_{-a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}}^{+a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}} \partial x\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2}$$

Bringt man aber das Integral

$$\int_{-a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}}^{+a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}} \partial x\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2}$$

auf die Form

$$\frac{1}{a}\int_{-a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}}^{+a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}} \partial x\sqrt{\left\{a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}\right\}^2-x^2};$$

so erhellet aus §. 11. auf der Stelle, dass der Werth dieses Integrals

$$\frac{1}{a}\cdot\tfrac{1}{2}a^2\{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\}\pi=\tfrac{1}{2}a\pi\{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\},$$

und dass also das obige Trägheitsmoment

$$\tfrac{1}{4}\delta\pi ab(a^2+b^2)\{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\}^2$$

ist.

Bezeichnen wir jetzt endlich das gesuchte Trägheitsmoment des Ellipsoids durch T, so ist offenbar

$$T=\tfrac{1}{4}\delta\pi ab(a^2+b^2)\int_{-c}^{+c}\{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\}^2\partial z.$$

Aber

$$\int\{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\}^2\partial z=\int(1-\frac{2z^2}{c^2}+\frac{z^4}{c^4})\partial z=z-\frac{2z^3}{3c^2}+\frac{z^5}{5c^4},$$

also

$$\int_{-c}^{+c}\{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\}^2\partial z=2(c-\frac{2}{3}c+\frac{1}{5}c)=\frac{16}{15}c;$$

folglich nach dem Obigen:

$$T=\frac{4}{15}\delta abc(a^2+b^2)\pi.$$

Die Trägheitsmomente des Ellipsoids in Bezug auf die Axen der x, y, z sind also respective:

$$\frac{4}{15}\delta abc(b^2+c^2)\pi,$$

$$\frac{4}{15}\delta abc(c^2+a^2)\pi,$$

$$\frac{4}{15}\delta abc(a^2+b^2)\pi.$$

Wir wollen noch den Inhalt des Ellipsoids suchen. Der Inhalt des Schnitts ist:

$$2b\int_{-a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}}^{+a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}}\partial x\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2},$$

also nach dem Obigen:

$$ab\pi\{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\}.$$

Folglich ist der Inhalt des Ellipsoids:

$$ab\pi\int_{-c}^{+c}(1-\frac{z^2}{c^2})\partial z;$$

und weil nun

$$\int(1-\frac{z^2}{c^2})\partial z=z-\frac{z^3}{3c^2},$$

also

$$\int_{-c}^{+c}(1-\frac{z^2}{c^2})\partial z=2(1-\frac{1}{3})c=\frac{4}{3}c$$

ist, so ist $\frac{4}{3}abc\pi$ der Inhalt des Ellipsoids. Bezeichnet folglich M die Masse des Ellipsoids, so ist

$$\frac{4}{3}\delta abc\pi=M,\quad 4\delta abc\pi=3M;$$

also sind die drei Trägheitsmomente:

$$\frac{1}{5}(b^2+c^2)M,\quad \frac{1}{5}(c^2+a^2)M,\quad \frac{1}{5}(a^2+b^2)M.$$

Die Art und Weise, wie ich in diesem und in einigen der vorhergehenden Paragraphen die mehrfachen Integrationen ausgeführt habe, scheint mir, wenigstens für Anfänger, einige Vorzüge vor der gewöhnlichen Verfahrungsweise zu haben, weil sie den betreffenden Gegenstand gewissermassen Schritt für Schritt verfolgt, und daher an Anschaulichkeit gewinnt.

§. 16.

Wir wollen uns jetzt ein Pendel denken, welches aus einer cylindrischen Stange und einer daran befindlichen Linse besteht, und wollen die Länge des einfachen Pendels bestimmen, welches seine Schwingungen in gleicher Weise wie das in Rede stehende physische Pendel vollendet, vorausgesetzt, dass die Drehungsaxe oder die Schwingungsaxe der mit der grössten Dicke der Linse, welche wir im Folgenden die Axe der Linse nennen wollen, parallele Durchmesser der Stange an ihrem anderen Ende ist.

Hiebei kommt es zuerst und vor allen Dingen darauf an, das Trägheitsmoment des Pendels in Bezug auf die Schwingungsaxe zu finden.

Bezeichnen wir den Halbmesser, die Länge und die Masse der Pendelstange respective durch ϱ, λ, μ; so ist nach §. 13.

$$(\tfrac{1}{4}\varrho^2+\tfrac{1}{3}\lambda^2)\mu$$

das Trägheitsmoment der Pendelstange. Das Trägheitsmoment der Linse in Bezug auf ihre durch ihren Schwerpunkt gehende Axe ist nach §. 14., wenn die Dicke, die Breite, die Masse der Linse respective durch $2a$, $2b$, m, der Halbmesser der Kugel, welcher die beiden die Linse bildenden Kugelsegmente angehören, durch r bezeichnet werden:

$$2.\frac{a(20r^2-15ar+3a^2)}{10(3r-a)}\cdot\frac{m}{2}$$

oder

$$\frac{a(20r^2-15ar+3a^2)}{10(3r-a)}m.$$

Nach der Lehre vom Kreise ist aber

$$b^2=a(2r-a), \text{ also } r=\frac{a^2+b^2}{2a};$$

folglich das vorstehende Trägheitsmoment, wenn man diesen Ausdruck von r in die obige Formel einführt:

$$\frac{a^4+5a^2b^2+10b^4}{10(a^2+3b^2)}m.$$

Weil nun $\lambda+b$ die Entfernung des Schwerpunkts der Linse von der Schwingungsaxe ist, so ist nach §. 2.

$$\left\{(\lambda+b)^2+\frac{a^4+5a^2b^2+10b^4}{10(a^2+3b^2)}\right\}m$$

das Trägheitsmoment der Linse in Bezug auf die Schwingungsaxe. Daher ist nun

$$(\tfrac{1}{4}\varrho^2+\tfrac{1}{3}\lambda^2)\mu+\left\{(\lambda+b)^2+\frac{a^4+5a^2b^2+10b^4}{10(a^2+3b^2)}\right\}m$$

das Trägheitsmoment des ganzen Pendels in Bezug auf die Schwingungsaxe.

Die Entfernung des Schwerpunkts des ganzen Pendels von der Schwingungsaxe ist nach der Lehre vom Schwerpunkte:

$$\frac{\frac{1}{2}\lambda\mu+(\lambda+b)m}{\mu+m}.$$

Folglich ist nach §. 1. die gesuchte Länge des einfachen Pendels, welches seine Schwingungen ganz auf dieselbe Weise wie das physische Pendel vollendet:

$$\frac{(\frac{1}{4}\varrho^2+\frac{1}{3}\lambda^2)\mu+\{(\lambda+b)^2+\frac{a^4+5a^2b^2+10b^4}{10(a^2+3b^2)}\}m}{\frac{1}{2}\lambda\mu+(\lambda+b)m}.$$

Bezeichnet ϖ das Gewicht der Pendelstange, p das Gewicht der Linse, so ist die gesuchte Länge des einfachen Pendels:

$$\frac{(\frac{1}{4}\varrho^2+\frac{1}{3}\lambda^2)\varpi+\{(\lambda+b)^2+\frac{a^4+5a^2b^2+10b^4}{10(a^2+3b^2)}\}p}{\frac{1}{2}\lambda\varpi+(\lambda+b)p}.$$

Wäre die Linse so dünn, dass man näherungsweise ihre Dicke $2a$ als verschwindend betrachten könnte, so würde vorstehende Formel:

$$\frac{(\frac{1}{4}\varrho^2+\frac{1}{3}\lambda^2)\varpi+\{(\lambda+b)^2+\frac{1}{3}b^2\}p}{\frac{1}{2}\lambda\varpi+(\lambda+b)p}.$$

Wäre nun auch das Gewicht ϖ der Pendelstange so gering, dass es ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachtet werden könnte, so würde vorstehende Formel:

$$\lambda+b+\frac{b^2}{3(\lambda+b)},$$

oder, wenn man $\lambda+b=L$ setzt, wo L die Entfernung des Mittelpunkts der Linse von der Schwingungsaxe bezeichnet:

$$L+\frac{b^2}{3L},$$

welches eine bekannte Näherungsformel ist.

Geht die Linse in eine Kugel mit dem Halbmesser a über, so ist im Vorhergehenden a für b zu setzen, wodurch wir in diesem Falle für die Länge des einfachen Pendels den folgenden Ausdruck erhalten:

$$\frac{(\frac{1}{4}\varrho^2+\frac{1}{3}\lambda^2)\varpi+\{(\lambda+a)^2+\frac{2}{5}a^2\}p}{\frac{1}{2}\lambda\varpi+(\lambda+a)p}.$$

Wäre die Pendelstange ein rechtwinkliges Parallelepiped, ihre Länge λ und die eine darauf senkrecht stehende Kante $2k$, die Schwingungsaxe aber eine in der oberen Grundfläche der Pendelstange liegende, auf der Kante $2k$ in deren Mitte senkrecht stehende

Linie, das Gewicht der Pendelstange $\overline{\omega}$; so würde man nach §. 12. im Falle einer an der Pendelstange befestigten Linse für die Länge des seine Schwingungen in gleicher Weise vollendenden einfachen Pendels auf ganz ähnliche Art wie vorher den folgenden Ausdruck erhalten:

$$\frac{\frac{1}{3}(\lambda^2+k^2)\overline{\omega}+\{(\lambda+b)^2+\dfrac{a^4+5a^2b^2+b^4}{10(a^2+3b^2)}\}p}{\frac{1}{2}\lambda\overline{\omega}+(\lambda+b)p}.$$

Geht aber die Linse in eine Kugel von dem Halbmesser a über, so muss man in diesem Ausdrucke a für b setzen, wodurch sich in diesem Falle auf ganz ähnliche Art wie vorher der Ausdruck

$$\frac{\frac{1}{3}(\lambda^2+k^2)\overline{\omega}+\{(\lambda+a)^2+\frac{2}{5}a^2\}p}{\frac{1}{2}\lambda\overline{\omega}+(\lambda+a)p}$$

für die Länge des seine Schwingungen in gleicher Weise vollendenden einfachen Pendels ergiebt.

§. 17.

In seinem Traité de Géodésie T. II. Paris. 1819. p. 322. giebt Puissant eine Formel zur Reduction des physischen oder materiellen Pendels auf das einfache Pendel, welche im Wesentlichen auch ganz mit der von Biot in seinem Traité élémentaire d'Astronomie physique. T. III. p. 173. gegebenen Formel übereinstimmt. Diese bemerkenswerthe Formel, für welche Puissant eine genauere Entwickelung nicht gegeben hat, will ich nun noch entwickeln.

Wir wollen annehmen, dass das Pendel überhaupt aus mehreren materiellen Theilen bestehe, deren Schwerpunkte sämmtlich in einer und derselben, auf der Schwingungsaxe senkrecht stehenden geraden Linie liegen. Die Gewichte dieser einzelnen Theile des Pendels wollen wir durch

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ldots.$$

bezeichnen; die Entfernungen ihrer Schwerpunkte und ihrer Oscillationspunkte von der Schwingungsaxe seien respective:

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4,\ldots.$$

und

$$\varLambda_1,\ \varLambda_2,\ \varLambda_3,\ \varLambda_4,\ldots.;$$

die Trägheitsmomente dieser einzelnen Theile des Pendels seien respective

$$T_1,\quad T_2,\quad T_3,\quad T_4,\ldots.$$

Dann haben wir nach §. 1. die folgenden Gleichungen:

$$\varDelta_1=\frac{T_1}{L_1P_1},\quad \varDelta_2=\frac{T_2}{L_2P_2},\quad \varDelta_3=\frac{T_3}{L_3P_3},\quad \varDelta_4=\frac{T_4}{L_4P_4},\ldots;$$

woraus

$$T_1=L_1\varDelta_1P_1,\quad T_2=L_2\varDelta_2P_2,\quad T_3=L_3\varDelta_3P_3,\quad T_4=L_4\varDelta_4P_4,\ldots.$$

folgt. Bezeichnen wir nun die Entfernungen des Schwerpunkts und des Oscillationspunkts des ganzen Pendels von der Schwingungsaxe durch L und $\varDelta$, und sein Trägheitsmoment durch T, so ist nach §. 1.:

$$\varDelta=\frac{T}{L(P_1+P_2+P_3+P_4+\ldots)}.$$

Weil aber offenbar

$$T=T_1+T_2+T_3+T_4+\ldots,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$T=L_1\varDelta_1P_1+L_2\varDelta_2P_2+L_3\varDelta_3P_3+L_4\varDelta_4P_4+\ldots,$$

und nach der Lehre vom Schwerpunkte offenbar

$$L=\frac{L_1P_1+L_2P_2+L_3P_3+L_4P_4+\ldots}{P_1+P_2+P_3+P_4+\ldots}$$

ist, so ist nach dem Obigen offenbar:

$$\varDelta=\frac{L_1\varDelta_1P_1+L_2\varDelta_2P_2+L_3\varDelta_3P_3+L_4\varDelta_4P_4+\ldots}{L_1P_1+L_2P_2+L_3P_3+L_4P_4+\ldots},$$

welche Formel man leicht auf die Form

$$\varDelta=\varDelta_1-\frac{(\varDelta_1-\varDelta_2)L_2P_2+(\varDelta_1-\varDelta_3)L_3P_3+(\varDelta_1-\varDelta_4)L_4P_4+\ldots}{L_1P_1+L_2P_2+L_3P_3+L_4P_4+\ldots},$$

oder auf die Form

$$\varDelta=\varDelta_1-\frac{(\varDelta_1-\varDelta_2)\frac{L_2P_2}{L_1P_1}+(\varDelta_1-\varDelta_3)\frac{L_3P_3}{L_1P_1}+(\varDelta_1-\varDelta_4)\frac{L_4P_4}{L_1P_1}+\ldots}{1+\frac{L_2P_2}{L_1P_1}+\frac{L_3P_3}{L_1P_1}+\frac{L_4P_4}{L_1P_1}+\ldots}$$

bringt.

Das von **Puissant** und **Biot** betrachtete Pendel besteht nun aus drei Theilen, nämlich aus 1) einer Kugel; 2) einer kleinen

Calotte; 3) einem Faden, welcher mittelst der Calotte an der Kugel befestigt ist. Die Gewichte dieser drei Theile sollen im Obigen der Reihe nach P_1, P_2, P_3 sein. Der Halbmesser der Kugel sei ϱ, die Entfernung des Schwerpunkts der Calotte von dem Mittelpunkte der Kugel sei δ und die Länge des Fadens werde durch λ bezeichnet. Die Entfernung des Mittelpunkts der Kugel von der Schwingungsaxe, nämlich L_1, wird sich immer messen und also als bekannt annehmen lassen; dann ist offenbar

$$L_2 = L_1 - \delta,\quad L_3 = \tfrac{1}{2}\lambda$$

und die drei Längen L_1, L_2, L_3 sind also bekannt. Nun kommt es noch darauf an, $\varLambda_1$, $\varLambda_2$, $\varLambda_3$ zu finden.

Das Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf die durch ihren Schwerpunkt gehende, der Schwingungsaxe parallele Axe ist nach §. 14.

$$\tfrac{2}{5}\varrho^2 P_1;$$

also ist nach §. 2. das Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf die Schwingungsaxe:

$$(L_1{}^2 + \tfrac{2}{5}\varrho^2)P_1,$$

und folglich nach §. 1.

$$\varLambda_1 = \frac{(L_1{}^2 + \frac{2}{5}\varrho^2)P_1}{L_1 P_1},$$

also

$$\varLambda_1 = L_1 + \tfrac{2}{5}\cdot\frac{\varrho^2}{L_1}.$$

Den Oscillationspunkt der sehr kleinen Calotte lässt Puissant näherungsweise mit ihrem Schwerpunkte zusammenfallen, so dass also $\varLambda_2 = L_2$, und folglich nach dem Obigen

$$\varLambda_2 = L_1 - \delta$$

ist.

Bezeichnet nun d die Dicke des Fadens, so ist nach §. 13. sein Trägheitsmoment in Bezug auf die Schwingungsaxe:

$$(\tfrac{1}{3}\lambda^2 + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{d^2}{4})P_3 = (\tfrac{1}{3}\lambda^2 + \tfrac{1}{16}d^2)P_3,$$

und folglich nach §. 1.

$$\varLambda_3 = \frac{(\frac{1}{3}\lambda^2 + \frac{1}{16}d^2)P_3}{\frac{1}{2}\lambda P_3},$$

also

$$\varLambda_3 = \tfrac{2}{3}\lambda + \tfrac{1}{8}\cdot\frac{d^2}{\lambda}.$$

Weil $L_3 = \frac{1}{2}\lambda$ ist, so ist

$$\varLambda_3 = L_3 + \left(\tfrac{2}{3}\lambda - \tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{8}\cdot\frac{d^2}{\lambda}\right) = L_3 + \tfrac{1}{6}\lambda + \tfrac{1}{8}\cdot\frac{d^2}{\lambda} = L_3 + \tfrac{1}{12}\cdot\frac{\lambda^2}{L_3} + \tfrac{1}{8}\cdot\frac{d^2}{\lambda},$$

oder, wenn man, wie Puissant thut, wegen der Dünne des Fadens d als verschwindend betrachtet:

$$\varLambda_3 = L_3 + \tfrac{1}{12}\cdot\frac{\lambda^2}{L_3}.$$

Nun hat man alle Grössen, welche nöthig sind, um $\varLambda$ mittelst der Formel

$$\varLambda = \varLambda_1 - \frac{(\varLambda_1 - \varLambda_2)\dfrac{L_2 P_2}{L_1 P_1} + (\varLambda_1 - \varLambda_3)\dfrac{L_3 P_3}{L_1 P_1}}{1 + \dfrac{L_2 P_2}{L_1 P_1} + \dfrac{L_3 P_3}{L_1 P_1}}$$

berechnen zu können. Die von Biot a. a. O. der Formel gegebene Gestalt scheint mir eine weniger leichte Rechnung zu gestatten.

IV.

Bemerkungen über Höhenmessung mit dem Barometer.

Von

Herrn Professor *J. K. Steczkowski*
an der Universität zu Krakau.

(Aus einem Briefe an den Herausgeber.)

Im Jahre 1838, als ich noch Adjunct auf der hiesigen Sternwarte war, habe ich für den Professor Zeuschner, welcher damals in dem Tatra- und Karpathen-Gebirge wegen geologischer Untersuchungen verweilte und dabei barometrische Beobachtungen zum Behufe des Nivellirens dieses Gebirges anstellte, die correspondirenden Barometer- und Thermometer-Beobachtungen gemacht. Weil ich alle zwei Stunden täglich, von 6 Uhr früh bis 10 Uhr Abends inclusive, den Stand des Barometers und Thermometers aufzeichnete, so ist es mir eingefallen, ob es möglich wäre und in wie fern richtig, aus solchen Beobachtungen den Unterschied der Erhebungen zwei bedeutend entlegener Orte in wenigen Tagen zu ermitteln. In dieser Absicht wandte ich mich an meinen vielgeschätzten Freund Baranowski, jetzigen Director der Sternwarte in Warschau, mit der Bitte, er wolle die correspondirenden Barometer-Beobachtungen auch alle zwei Stunden täglich anstellen. Als er dies zugesagt hatte, fingen wir am 21. August an und setzten unsere Beobachtungen bis zum 2. September inclusive fort und erhielten jeder an 117 Aufzeichnungen. Als er mir die seinigen zuschickte, habe ich sie gleich nach der Gauss'schen Tafel der Rechnung unterzogen und ein sehr befriedigendes Resultat erhalten, aber nachher ganz vergessen, es in irgend einem Journal zu veröffentlichen; erst vor einem Monate ist mir wieder dieses Resultat durch Zufall in die Hände gerathen, und weil ich schon, wie ich mich zu erinnern weiss, in Ihrem schätzbaren Archiv eine längere Abhandlung meteorologischen Inhalts angetroffen habe, so trug ich kein Bedenken, Ihnen diese Kleinigkeit zu schicken. Finden Sie sie Ihres Archivs werth, so gönnen Sie ihr ein Plätzchen gütigst; erachten Sie sie aber für geringfügig, so lassen Sie sie ausser Acht und glauben nicht, mich dadurch beleidigt zu haben.

Hier folgen die Mittel der durch 13 Tage angestellten Beobachtungen, sowie die aus ihnen erhaltenen Resultate.

Mittel der Barometer- und Thermometer-Beobachtungen in Krakau und in Warschau zum Behufe des Ermittelns des Höhenunterschiedes dieser zwei Orte.

Stunde	Krakau		Warschau		Höhenunterschied in Toisen
	Barometer bei 0° R.	Thermometer nach Réaumur	Barometer bei 0° R.	Thermometer nach Réaumur	
6 Vorm.	328‴·455	+ 8°·94	331‴·345	+ 9°·70	37·59
8	512	10·96	429	11·38	38·12
10	575	13·21	543	13·33	39·21
12	541	14·50	551	15·30	40·12
2 Nachm.	542	14·72	445	15·32	38·72
4	435	14·97	511	14·65	41·01
6	482	13·96	580	13·73	41·03
8	645	11·82	687	11·80	39·84
10	666	10·33	728	10·81	40·00
Mittel	328‴·539	+ 12·60	331‴·536	+ 12·89	39·52

Aus eilfjährigen Beobachtungen 1826—1836 fand ich vormals den Barometer- und Thermometerstand

in Krakau 329‴·381 bei 0° R., äusseres Thermom. + 7°·459 R.,
in Warschau 332‴·489 „ „ „ „ „ + 6°·075 R.,

und erhielt daraus den Unterschied der Erhebungen = 238·6 paris. Fuss, also nur 1·6 Fuss anders als aus 13tägigen Beobachtungen.

Aus der obigen Tafel, in welcher für die einzelnen Stunden die Höhenunterschiede berechnet vorkommen, kann man leicht entnehmen: 1) Dass die Beobachtungen in den Vormittagsstunden überhaupt einen zu grossen, und die in den Nachmittagsstunden einen zu kleinen Unterschied der Erhebungen geben. 2) Dass die um 10 Uhr früh und 8 Uhr Abends gemachten Beobachtungen denselben Unterschied am nächsten geben, und zwar die erste gibt den Unterschied bloss um $+0\cdot31$ und die zweite um $-0\cdot32$ vom Mittel abweichend, so dass das Mittel dieser zwei Stunden genau dem allgemeinen Mittel gleich kommt. 3) Dass man sich auf die Beobachtungen um 6 Uhr Vor- und Nachmittags am wenigsten verlassen kann, indem das Resultat der ersten sich vom Endresultate um $+1\cdot93$ und das der zweiten um $-1\cdot51$ Toise unterscheidet.

Sollte sich also mein Versuch bestätigen, so könnte man, da Warschau 40 Meilen von Krakau entlegen ist, auf diesem Wege in wenigen Tagen aus zwei täglichen um 10 Uhr Vor- und 8 Uhr Nachmittags gemachten Beobachtungen eben so gut, als aus vieljährigen Beobachtungen den Höhenunterschied zweier bedeutend entlegener Orte ermitteln.

V.

Eigenthümliche Ableitung der Formeln der sphärischen Trigonometrie.

Von

Herrn Doctor *Oskar Werner*,

Lehrer der Mathematik in Dresden.

Die Seiten eines ebenen Dreieckes seien p, q, r und die diesen Seiten gegenüberstehenden Winkel P, Q, R, die 180 Grad nicht übersteigenden Seiten eines sphärischen Dreieckes dagegen a, b, c und deren Gegenwinkel A, B, C. Diese beiden Dreiecke mögen in einem solchen Zusammenhange unter einander stehen, dass

$$p = \frac{\sin}{\cos} \tfrac{1}{2}a . \cos \tfrac{1}{2}b, \quad q = \frac{\cos}{\sin} \tfrac{1}{2}a . \sin \tfrac{1}{2}b \text{ und } r = \frac{\sin}{\cos} \tfrac{1}{2}c$$

ist, wobei sich die oberen und unteren Zeichen auf einander beziehen sollen.

Ueber die Möglichkeit der Construction eines solchen ebenen Dreiecks entscheiden die Determinationen

$$p + q > r, \quad p + r > q \text{ und } q + r > p,$$

welche vermöge des Obigen für beiderlei Zeichen ohne grosse Rechnung in folgende:

$$a + b > c, \quad a + c > b \text{ und } b + c > a$$

übergehen, worin der Satz enthalten ist: Die Summe zweier Seiten eines sphärischen Dreieckes ist grösser als die dritte.

Indem wir die Grundformel der sphärischen Trigonometrie:

$$(1) \qquad \cos c = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b . \cos C$$

als bekannt voraussetzen, wollen wir uns jetzt vornehmen, die gebräuchlichsten Formeln des sphärischen Dreieckes mit Hülfe des obigen ebenen Dreieckes abzuleiten.

Bekanntlich ist

$$r^2 = p^2 + q^2 - 2pq . \cos R$$

oder

$$\frac{\sin}{\cos} \tfrac{1}{2}c^2 = \frac{\sin}{\cos} \tfrac{1}{2}a^2 . \cos \tfrac{1}{2}b^2$$

$$+ \frac{\cos}{\sin} \tfrac{1}{2}a^2 . \sin \tfrac{1}{2}b^2 - 2 \frac{\sin}{\cos} \tfrac{1}{2}a . \cos \tfrac{1}{2}b . \frac{\cos}{\sin} \tfrac{1}{2}a . \sin \tfrac{1}{2}b . \cos R,$$

folglich, wenn wir die goniometrischen Formeln

$$\sin \tfrac{1}{2}x^2 = \frac{1 - \cos x}{2} \text{ und } \cos \tfrac{1}{2}x^2 = \frac{1 + \cos x}{2} \text{ und } \sin \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}\sin x$$

benutzen,

$$\tfrac{1}{2}(1 \mp \cos c) = \tfrac{1}{4}(1 \mp \cos a)(1 + \cos b) + \tfrac{1}{4}(1 \pm \cos a)(1 - \cos b)$$
$$- \tfrac{1}{2} \sin a \sin b . \cos R,$$

oder

$$2 \mp 2 \cos c = 1 \mp \cos a + \cos b \mp \cos a \cos b + 1 \pm \cos a - \cos b$$
$$\mp \cos a \cos b - 2 \sin a \sin b \cos R,$$

d. i.

$$\cos c = \cos a \cos b \pm \sin a \sin b \,.\, \cos R.$$

Durch Vergleichung mit Formel (1) ziehen wir hieraus das Resultat:

$$\cos R = \pm \cos C, \quad \text{mithin} \quad R = \left\{ \begin{matrix} C \\ 180^0 - C \end{matrix} \right\}.$$

Ferner erhalten wir nach dem Vorhergehenden für die oberen Zeichen:

$$p+q+r = \sin\tfrac12(a+b) + \sin\tfrac12 c = 2\sin\tfrac14(a+b+c)\cos\tfrac14(a+b-c),$$
$$q+r-p = \sin\tfrac12 c - \sin\tfrac12(a-b) = 2\cos\tfrac14(a+c-b)\sin\tfrac14(b+c-a),$$
$$p+r-q = \sin\tfrac12 c + \sin\tfrac12(a-b) = 2\sin\tfrac14(a+c-b)\cos\tfrac14(b+c-a),$$
$$p+q-r = \sin\tfrac12(a+b) - \sin\tfrac12 c = 2\cos\tfrac14(a+b+c)\sin\tfrac14(a+b-c);$$

daher hieraus mit Hülfe des Satzes $2\sin\frac14 x\,.\cos\frac14 x = \sin\frac12 x$:

$$(p+r-q)(q+r-p) = \sin\tfrac12(b+c-a)\sin\tfrac12(a+c-b),$$
$$(p+q+r)(p+q-r) = \sin\tfrac12(a+b+c)\sin\tfrac12(a+b-c),$$

sowie

$$(p+q+r)(q+r-p)(p+r-q)(p+q-r)$$
$$= \sin\tfrac12(a+b+c)\sin\tfrac12(b+c-a)\sin\tfrac12(a+c-b)\sin\tfrac12(a+b-c),$$

und für die unteren Zeichen:

$$p+q+r = \cos\tfrac12(a-b) + \cos\tfrac12 c = 2\cos\tfrac14(b+c-a)\cos\tfrac14(a+c-b),$$
$$q+r-p = \cos\tfrac12 c - \cos\tfrac12(a+b) = 2\sin\tfrac14(a+b+c)\sin\tfrac14(a+b-c),$$
$$p+r-q = \cos\tfrac12 c + \cos\tfrac12(a+b) = 2\cos\tfrac14(a+b+c)\cos\tfrac14(a+b-c),$$
$$p+q-r = \cos\tfrac12(a-b) - \cos\tfrac12 c = 2\sin\tfrac14(b+c-a)\sin\tfrac14(a+c-b);$$

daher durch Multiplication mittels der Formel $2\sin\frac14 x\,.\cos\frac14 x = \sin\frac12 x$:

$$(p+r-q)(q+r-p) = \sin\tfrac12(a+b+c)\sin\tfrac12(a+b-c),$$
$$(p+q+r)(p+q-r) = \sin\tfrac12(a+c-b)\sin\tfrac12(b+c-a);$$

sowie

$$(p+q+r)(q+r-p)(p+r-q)(p+q-r)$$
$$= \sin\tfrac12(a+b+c)\sin\tfrac12(b+c-a)\sin\tfrac12(a+c-b)\sin\tfrac12(a+b-c).$$

Setzen wir jetzt diese Ausdrücke in die bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie:

$$r^2 = (p+q)^2 \sin \tfrac{1}{2}R^2 + (p-q)^2 \cos \tfrac{1}{2}R^2,$$

$$\sin \tfrac{1}{2}R = \sqrt{\frac{(p+r-q)(q+r-p)}{4pq}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2}R = \sqrt{\frac{(p+q+r)(p+q-r)}{4pq}}$$

und

$$\sin R = \frac{1}{2pq}\sqrt{(p+q+r)(q+r-p)(p+r-q)(p+q-r)}$$

ein, so erhalten wir

$$(2)\quad \begin{cases} \sin \tfrac{1}{2}c^2 = \sin \tfrac{1}{2}(a+b)^2 \sin \tfrac{1}{2}C^2 + \sin \tfrac{1}{2}(a-b)^2 \cos \tfrac{1}{2}C^2, \\ \cos \tfrac{1}{2}c^2 = \cos \tfrac{1}{2}(a+b)^2 \sin \tfrac{1}{2}C^2 + \cos \tfrac{1}{2}(a-b)^2 \cos \tfrac{1}{2}C^2, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \sin \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\dfrac{\sin \tfrac{1}{2}(b+c-a) \sin \tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a \sin b}}, \\ \cos \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\dfrac{\sin \tfrac{1}{2}(a+b+c) \sin \tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a \sin b}}, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \sin C = \dfrac{2}{\sin a \sin b} \\ \times \sqrt{\sin \tfrac{1}{2}(a+b+c) \sin \tfrac{1}{2}(b+c-a) \sin \tfrac{1}{2}(a+c-b) \sin \tfrac{1}{2}(a+b-c)}, \end{cases}$$

und, wenn wir in der Formel (4) C mit A, daher auch c mit a vertauschen, und die auf diese Weise erhaltene Gleichung durch die unter (4) dividiren:

$$(5)\qquad \sin A : \sin C = \sin a : \sin c.$$

In dieser Formel ist der Satz enthalten: Die Sinus zweier Seiten eines sphärischen Dreieckes verhalten sich wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

Ferner ist

$$\frac{\sin(P-Q)}{\sin R} = \frac{\sin P}{\sin R} \cdot \cos Q - \frac{\sin Q}{\sin R} \cdot \cos P = \frac{p}{r} \cos Q - \frac{q}{r} \cos P$$

$$= \frac{p}{r} \cdot \frac{p^2+r^2-q^2}{2pr} - \frac{q}{r} \cdot \frac{q^2+r^2-p^2}{2qr} = \frac{(p+q)(p-q)}{r^2},$$

d. i.

$$\frac{\sin(P-Q)}{\sin C}=\frac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}\tfrac{1}{2}(a\pm b).\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}\tfrac{1}{2}(a\mp b)}{\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}\tfrac{1}{2}c^2}.$$

In ähnlicher Weise finden wir mit Rücksicht auf den Satz (5):

$$\frac{\sin(A\mp B)}{\sin C}=\frac{\sin A}{\sin C}.\cos B\mp\frac{\sin B}{\sin C}.\cos A=\frac{\sin a}{\sin c}.\frac{\cos b-\cos a\cos c}{\sin a\sin c}$$

$$\mp\frac{\sin b}{\sin c}.\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}=\frac{(\cos b\mp\cos a)(1\pm\cos c)}{\sin c^2},$$

d. i.

$$\frac{\sin(A\mp B)}{\sin C}=\frac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}\tfrac{1}{2}(a\pm b)\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}\tfrac{1}{2}(a\mp b)}{\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}\tfrac{1}{2}c^2}.$$

Hieraus folgt durch Vergleichung mit dem nächst Vorhergehenden

$$\sin(P-Q)=\sin(A\mp B),$$

also entweder

$$P-Q=A\mp B$$

oder

$$P-Q=180^0-(A\mp B).$$

Bringen wir diese Ergebnisse mit den bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie:

$$(p+q)\sin\tfrac{1}{2}R=r.\cos\tfrac{1}{2}(P-Q)$$

und

$$(p-q)\cos\tfrac{1}{2}R=r.\sin\tfrac{1}{2}(P-Q)$$

in Verbindung, so erhalten wir durch einfache Substitution folgende beiden Formelsysteme:

$$\left\{\begin{aligned}&\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}\tfrac{1}{2}(a\pm b)\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}\tfrac{1}{2}C=\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}\tfrac{1}{2}c.\cos\tfrac{1}{2}(A\mp B),\\&\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}\tfrac{1}{2}(a\mp b)\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}\tfrac{1}{2}C=\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}\tfrac{1}{2}c.\sin\tfrac{1}{2}(A\mp B)\end{aligned}\right.$$

und

$$\left\{\begin{aligned}&\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}\tfrac{1}{2}(a\pm b)\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}\tfrac{1}{2}C=\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}\tfrac{1}{2}c.\sin(A\mp B),\\&\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}\tfrac{1}{2}(a\mp b)\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}\tfrac{1}{2}C=\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}\tfrac{1}{2}c.\cos\tfrac{1}{2}(A\mp B).\end{aligned}\right.$$

Da nur einer der beiden Werthe für $P-Q$ gelten kann, so müssen wir jetzt noch untersuchen, welcher von diesen beiden Werthen für die oberen und unteren Zeichen richtig ist.

Was zuvörderst die oberen Zeichen anlangt, so führt die Substitution $a=b$ in der zweiten Gleichung des zweiten Formelsystems auf die Absurdität $\cos\frac{1}{2}(A-B)=0$, d. i. $A-B=180^0$. Für die oberen Zeichen ist daher $P-Q=A-B$ zu setzen, mithin gilt hier nur das erste Formelsystem.

Was ferner die unteren Zeichen betrifft, so führt die Substitution $a+b=180^0$ in der zweiten Gleichung des ersten Formelsystems auf die Absurdität $\sin\frac{1}{2}(A+B)=0$, d. i. $A+B=360^0$, weswegen für die unteren Zeichen $P-Q=180^0-(A+B)$ zu setzen ist, mithin nur das zweite Formelsystem gelten kann.

Obige Formelsysteme geben daher nur folgende vier Gleichungen:

$$(6)\quad\begin{cases}\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C=\sin\frac{1}{2}c.\cos\frac{1}{2}(A-B),\\ \sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C=\sin\frac{1}{2}c.\sin\frac{1}{2}(A-B),\\ \cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C=\cos\frac{1}{2}c.\sin\frac{1}{2}(A+B),\\ \cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C=\cos\frac{1}{2}c.\cos\frac{1}{2}(A+B),\end{cases}$$

welche die Gaussischen genannt werden.

Aus diesen erhalten wir durch Division je zweier derselben die sogenannten Neper'schen Analogieen:

$$(7)\quad\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C,\\[2ex] \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C,\\[2ex] \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}c,\\[2ex] \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}c.\end{cases}$$

Um weitere Schlussfolgerungen aus dem vorliegenden ebenen Dreiecke zu ziehen, wollen wir vorher seine Winkel P und Q zu bestimmen suchen.

Nach dem Vorhergehenden ist für die oberen Zeichen:

$$P+Q=180^0-C \text{ und } P-Q=A-B,$$

folglich

$$P=90^0-\tfrac{1}{2}(B+C-A) \text{ und } Q=90^0-\tfrac{1}{2}(A+C-B),$$

und für die unteren Zeichen

$$P+Q=C \text{ und } P-Q=180^0-(A+B),$$

folglich

$$P=90^0-\tfrac{1}{2}(A+B-C) \text{ und } Q=\tfrac{1}{2}(A+B+C)-90^0.$$

Aus dem Werthe für Q im letzteren Falle folgt sofort

$$\tfrac{1}{2}(A+B+C)>90^0, \text{ d. i. } A+B+C>180^0,$$

so dass die Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks jederzeit 180 Grad übersteigt.

Führen wir diese Werthe für P und Q in die bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie

$$p\sin R=r\sin P \text{ und } q\sin R=r\sin Q$$

ein, so erhalten wir:

$$(8)\quad\begin{cases}\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\sin C=\sin\tfrac{1}{2}c.\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A),\\ \cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin C=\sin\tfrac{1}{2}c.\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B),\\ \cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\sin C=\cos\tfrac{1}{2}c.\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C),\\ \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin C=-\cos\tfrac{1}{2}c.\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C),\end{cases}$$

und, wenn wir die erste und zweite, dritte und vierte dieser Gleichungen mit einander multipliciren, die auf diese Weise entstandenen Gleichungen durch $\sin A.\sin B$ dividiren und zugleich beachten, dass nach Satz (5)

$$\frac{\sin a\sin b}{\sin A\sin B}=\frac{\sin c^2}{\sin C^2}$$

ist,

$$\tfrac{1}{4}\sin c^2=\sin\tfrac{1}{2}c^2.\frac{\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\sin A\sin B}$$

und

$$\tfrac{1}{4}\sin c^2=-\cos\tfrac{1}{2}c^2\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\sin A\sin B}.$$

Hieraus ergiebt sich wegen $\tfrac{1}{4}\sin c^2=\sin\tfrac{1}{2}c^2.\cos\tfrac{1}{2}c^2$:

$$
(9)\quad\left\{\begin{aligned}
\cos\tfrac{1}{2}c &= \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin A\sin B}},\\
\sin\tfrac{1}{2}c &= \sqrt{-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin A\sin B}};
\end{aligned}\right.
$$

und aus (9) durch Multiplication vermittels $\sin c = 2\sin\frac{1}{2}c.\cos\frac{1}{2}c$:

$$
(10)\qquad \sin c = \frac{2}{\sin A\sin B}
$$

$$
\times\sqrt{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}.
$$

Quadriren und subtrahiren wir aber die Formeln unter (9) und machen dabei von den goniometrischen Relationen

$$
\cos c = \cos\tfrac{1}{2}c^2 - \sin\tfrac{1}{2}c^2 \quad\text{und}\quad \cos x.\cos y = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}
$$

Gebrauch, so folgt

$$
\cos c = \frac{\cos C + \cos(A-B)}{2\sin A\sin B} + \frac{\cos C + \cos(A+B)}{2\sin A\sin B}
$$

oder

$$
\cos c = \frac{\cos A\cos B + \cos C}{\sin A\sin B},
$$

d. i.

$$
(11)\qquad \cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos c.
$$

Indem wir ferner den sphärischen Excess, d. i. den Ueberschuss der Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreieckes über 180 Grad, durch E bezeichnen, und berücksichtigen, dass für die oberen Zeichen:

$$
Q = 90^0 - \tfrac{1}{2}(A+C-B) = B - \tfrac{1}{2}E,
$$

$$
\begin{aligned}
p^2 + r^2 - q^2 &= \sin\tfrac{1}{2}a^2\cos\tfrac{1}{2}b^2 + \sin\tfrac{1}{2}c^2 - \cos\tfrac{1}{2}a^2\sin\tfrac{1}{2}b^2\\
&= \sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}(a-b) + \sin\tfrac{1}{2}c^2\\
&= \sin\tfrac{1}{2}a^2 - \sin\tfrac{1}{2}b^2 + \sin\tfrac{1}{2}c^2,
\end{aligned}
$$

und für die unteren Zeichen

$$
Q = \tfrac{1}{2}(A+B+C) - 90^0 = \tfrac{1}{2}E,
$$

$$
\begin{aligned}
p^2 + r^2 - q^2 &= \cos\tfrac{1}{2}a^2\cos\tfrac{1}{2}b^2 + \cos\tfrac{1}{2}c^2 - \sin\tfrac{1}{2}a^2\sin\tfrac{1}{2}b^2\\
&= \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b) + \cos\tfrac{1}{2}c^2\\
&= \cos\tfrac{1}{2}a^2 - \sin\tfrac{1}{2}b^2 + \cos\tfrac{1}{2}c^2\\
&= \cos\tfrac{1}{2}a^2 + \cos\tfrac{1}{2}b^2 + \cos\tfrac{1}{2}c^2 - 1
\end{aligned}
$$

ist, so erhalten wir mittels der bekannten Formeln

$$\cos Q = \frac{p^2+r^2-q^2}{2pr},$$

$$\sin Q = \frac{1}{2pr} \cdot \sqrt{(p+q+r)(q+r-p)(p+r-q)(p+q-r)},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} Q = \sqrt{\frac{(q+r-p)(p+q-r)}{4pr}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2} Q = \sqrt{\frac{(p+q+r)(p+r-q)}{4pr}}$$

und des Vorhergehenden leicht folgende Formeln:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos(B - \tfrac{1}{2}E) &= \frac{\sin \tfrac{1}{2}a^2 - \sin \tfrac{1}{2}b^2 + \sin \tfrac{1}{2}c^2}{2 \sin \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c}, \\ \cos \tfrac{1}{2}E &= \frac{\cos \tfrac{1}{2}a^2 + \cos \tfrac{1}{2}b^2 + \cos \tfrac{1}{2}c^2 - 1}{2 \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c}, \end{aligned} \right.$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sin(B - \tfrac{1}{2}E) = \frac{1}{2 \sin \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c} \\ &\times \sqrt{\sin \tfrac{1}{2}(a+b+c) \sin \tfrac{1}{2}(b+c-a) \sin \tfrac{1}{2}(a+c-b) \sin \tfrac{1}{2}(a+b-c)}, \\ &\sin \tfrac{1}{2}E = \frac{1}{2 \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c} \\ &\times \sqrt{\sin \tfrac{1}{2}(a+b+c) \sin \tfrac{1}{2}(b+c-a) \sin \tfrac{1}{2}(a+c-b) \sin \tfrac{1}{2}(a+b-c)}; \end{aligned} \right.$$

ferner:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sin(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{4}E) \\ &= \sqrt{\frac{\cos \tfrac{1}{4}(a+b+c) \sin \tfrac{1}{4}(b+c-a) \cos \tfrac{1}{4}(a+c-b) \sin \tfrac{1}{4}(a+b-c)}{\sin \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c}}, \\ &\sin \tfrac{1}{4}E \\ &= \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{4}(a+b+c) \sin \tfrac{1}{4}(b+c-a) \sin \tfrac{1}{4}(a+c-b) \sin \tfrac{1}{4}(a+b-c)}{\cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c}} \end{aligned} \right.$$

und

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &\cos(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{4}E) \\ &= \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{4}(a+b+c) \cos \tfrac{1}{4}(b+c-a) \sin \tfrac{1}{4}(a+c-b) \cos \tfrac{1}{4}(a+b-c)}{\sin \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c}}, \\ &\cos \tfrac{1}{4}E \\ &= \sqrt{\frac{\cos \tfrac{1}{4}(a+b+c) \cos \tfrac{1}{4}(b+c-a) \cos \tfrac{1}{4}(a+c-b) \cos \tfrac{1}{4}(a+b-c)}{\cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c}}. \end{aligned} \right.$$

Aus den beiden letzten Formelsystemen erhalten wir endlich durch Division die eleganten Ausdrücke:

$$(16)\left\{\begin{aligned} &\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{4}E)=\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(b+c-a)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+b-c)}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+c-b)}},\\ &\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(b+c-a)\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(a+c-b)\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(a+b-c)},\end{aligned}\right.$$

von welchen man letzteren Simon Lhuilier verdankt.

Aus den beiden Ausdrücken unter (16) erhält man leicht die Formel:

$$(17)\qquad \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{4}E)=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(b+c-a)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+b-c)}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}E},$$

wodurch wir eine bequeme Methode erhalten, aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks die drei Winkel zu berechnen.

Man berechnet nämlich zuerst die Grösse $\frac{1}{4}E$ mit Hülfe der Formel

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(b+c-a)\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(a+c-b)\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(a+b-c)},$$

und hierauf die Winkel A, B, C mittels der Formeln:

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{4}E)=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+c-b)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+b-c)}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}E},$$

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{4}E)=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(b+c-a)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+b-c)}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}E},$$

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{4}E)=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(b+c-a)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+c-b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}E}.$$

Zur Controle dient die Relation:

$$A+B+C-180^{0}=E.$$

Will man jedoch von einer Controle absehen, so kann man auch, nachdem man die beiden Winkel A und B gefunden hat, den dritten Winkel C mit Hülfe der Formel

$$C=180^{0}+E-(A+B)$$

berechnen.

A n m e r k u n g.

Die trigonometrischen Ausdrücke für den zuletzt genannten Winkel finden bei folgender Aufgabe Verwendung:

Aus den drei Seiten des sphärischen Dreieckes in Taf. II. Fig. 25., $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, die Lage des Pols P vom umschriebenen Kreise zu finden.

Es sei der Winkel $ACP=\mu$, der Bogen $AP=BP=CP=\omega$, so ist wegen der gleichschenkligen Dreiecke ACP, BCP und ABP

$$\mu=\tfrac{1}{2}(A+C-B)=90^0-(B-\tfrac{1}{2}E).$$

Nach Formel (16) ist aber:

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{4}E)=\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(b+c-a)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+b-c)}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+c-b)}},$$

daher

$$\text{I.}\qquad \operatorname{tg}(45^0-\frac{\mu}{2})=\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(b+c-a)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+b-c)}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+c-b)}},$$

wodurch μ gefunden wird.

Um endlich den Bogen ω zu ermitteln, haben wir aus dem Dreieck ACP:

$$\cos\widehat{AP}=\cos\widehat{AC}.\cos\widehat{PC}+\sin\widehat{AC}.\sin\widehat{PC}.\cos\widehat{ACP}$$

oder

$$\cos\omega=\cos b\cos\omega+\sin b\sin\omega\cos\mu,$$

also

$$\cos\omega(1-\cos b)=\sin b\sin\omega\cos\mu,$$

d. i.

$$\frac{1-\cos b}{\sin b\cos\mu}=\operatorname{tg}\omega,$$

daher

$$\text{II.}\qquad \operatorname{tg}\omega=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}b}{\cos\mu}.$$

Durch die Formeln I. und II. ist jetzt unsere Aufgabe vollständig gelöst. Indess kann man in letzterer Formel anstatt $\cos\mu$ noch einen anderen Ausdruck einführen. Zu diesem Zwecke wenden wir uns an Formel (13), wodurch wir

$$\sin(B-\tfrac{1}{2}E)=\cos\mu$$
$$=\frac{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}}{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c},$$

also nach II.:

$$\text{III.}\quad \operatorname{tg}\omega=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}}$$

erhalten.

Von den Formeln unter (13) lässt sich folgende Anwendung machen: Dividiren wir nämlich diese Formeln, so ergiebt sich

$$\frac{\sin\frac{1}{2}E}{\sin(B-\frac{1}{2}E)}=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\,.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c,$$

woraus der Satz folgt: Sphärische Dreiecke haben gleichen Flächen inhalt, sobald sie in einem Winkel und dem Producte der Tangenten der halben einschliessenden Seiten übereinstimmen.

VI.

Ueber die Hauptaxen eines beliebigen Systems materieller Punkte.

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Wir wollen uns ein beliebiges System materieller Punkte

$$m,\quad m_1,\quad m_2,\quad m_3,\quad m_4,\ldots.$$

und in demselben einen gewissen Punkt O denken. Diesen Punkt O nehmen wir als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, und bezeichnen die Coordinaten der Punkte

$$m,\quad m_1,\quad m_2,\quad m_3,\quad m_4,\ldots.$$

in Bezug auf dieses System respective durch

$$x,\,y,\,z;\quad x_1,\,y_1,\,z_1;\quad x_2,\,y_2,\,z_2;\quad x_3,\,y_3,\,z_3;\ldots..$$

Ferner legen wir durch den Punkt O eine beliebige Linie oder Axe $\overline{AA'}$, und bezeichnen die von einem der beiden Theile $\overline{OA}$ oder $\overline{OA'}$ dieser Axe mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch α, β, γ. Die Entfernungen der Punkte

$$m, \quad m_1, \quad m_2, \quad m_3, \quad m_4, \ldots.$$

von der Axe $\overline{AA'}$, d. h. die von denselben auf diese Axe gefällten Perpendikel wollen wir respective durch

$$r, \quad r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad r_4, \ldots.$$

bezeichnen, und nun einmal etwa r zu bestimmen suchen, indem natürlich zur Bestimmung der Entfernungen aller übrigen Punkte von der angenommenen Axe ganz dieselben Betrachtungen führen werden.

Die von dem Anfange der Coordinaten O nach dem Punkte m gezogene Linie wollen wir durch p, und den von dieser Linie mit dem der beiden Theile $\overline{OA}$ oder $\overline{OA'}$ der Axe $\overline{AA'}$, auf welchen sich die Winkel α, β, γ beziehen, eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel durch $\overline{\omega}$ bezeichnen; dann ist offenbar

$$r = p \sin \overline{\omega},$$

also

$$r^2 = p^2 \sin \overline{\omega}^2 = p^2 - p^2 \cos \overline{\omega}^2.$$

Nun ist aber nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$p^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

und wenn wir die von der Linie p mit den positiven Theilen der drei Axen eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel durch $\varkappa$, λ, μ bezeichnen, so ist nach einer bekannten Formel:

$$\cos \overline{\omega} = \cos \alpha \cos \varkappa + \cos \beta \cos \lambda + \cos \gamma \cos \mu,$$

oder, weil offenbar

$$x = p \cos \varkappa, \quad y = p \cos \lambda, \quad z = p \cos \mu,$$

also

$$\cos \varkappa = \frac{x}{p}, \quad \cos \lambda = \frac{y}{p}, \quad \cos \mu = \frac{z}{p}$$

ist:

$$\cos \overline{\omega} = \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{p},$$

folglich

$$p \cos \overline{\omega} = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma.$$

Daher erhält man nach dem Obigen für r^2 den folgenden Ausdruck:

1) $$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2.$$

Entwickelt man das Quadrat

$$(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2,$$

so erhält man auf der Stelle mittelst einiger ganz leichten Reductionen:

$$2)\left\{\begin{array}{l} r^2 = x^2\sin\alpha^2 + y^2\sin\beta^2 + z^2\sin\gamma^2 \\ -2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta. \end{array}\right.$$

Weil aber bekanntlich

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

und folglich

$$\sin\alpha^2 = \cos\beta^2 + \cos\gamma^2,$$
$$\sin\beta^2 = \cos\gamma^2 + \cos\alpha^2,$$
$$\sin\gamma^2 = \cos\alpha^2 + \cos\beta^2$$

ist, so erhält man auf der Stelle für r^2 auch den folgenden Ausdruck:

$$3)\left\{\begin{array}{l} r^2 = (y^2+z^2)\cos\alpha^2 + (z^2+x^2)\cos\beta^2 + (x^2+y^2)\cos\gamma^2 \\ -2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta. \end{array}\right.$$

Diesen Ausdruck kann man aber offenbar auch unter der folgenden Form darstellen:

$$4)\quad r^2 = (y\cos\gamma - z\cos\beta)^2 + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)^2 + (x\cos\beta - y\cos\alpha)^2.$$

Bekanntlich nennt man die Summe

$$\Sigma mr^2 = mr^2 + m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots.$$

das Trägheitsmoment der Punkte

$$m,\quad m_1,\quad m_2,\quad m_3,\quad m_4,\ldots.$$

in Bezug auf die angenommene Axe AA'. Daher ist, wie aus den Formeln 3) und 2) sich auf der Stelle ergiebt:

$$5)\left\{\begin{array}{l} \Sigma mr^2 = \cos\alpha^2\Sigma m(y^2+z^2) + \cos\beta^2\Sigma m(z^2+x^2) + \cos\gamma^2\Sigma m(x^2+y^2) \\ -2\cos\beta\cos\gamma\Sigma myz - 2\cos\gamma\cos\alpha\Sigma mzx - 2\cos\alpha\cos\beta\Sigma mxy \end{array}\right.$$

und

$$6)\left\{\begin{array}{l} \Sigma mr^2 = \sin\alpha^2\Sigma mx^2 + \sin\beta^2\Sigma my^2 + \sin\gamma^2\Sigma mz^2 \\ -2\cos\beta\cos\gamma\Sigma myz - 2\cos\gamma\cos\alpha\Sigma mzx - 2\cos\alpha\cos\beta\Sigma mxy; \end{array}\right.$$

oder, wenn wir im Folgenden der Kürze wegen

$$7)\quad A = \Sigma m(y^2+z^2),\quad B = \Sigma m(z^2+x^2),\quad C = \Sigma m(x^2+y^2);$$

$$8)\quad D = \Sigma myz,\quad E = \Sigma mzx,\quad F = \Sigma mxy;$$

$$9)\quad G = \Sigma mx^2,\quad H = \Sigma my^2,\quad J = \Sigma mz^2$$

setzen:

$$10)\quad \begin{cases} \Sigma mr^2 = & A\cos\alpha^2 + B\cos\beta^2 + C\cos\gamma^2 \\ & -2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\gamma\cos\alpha - 2F\cos\alpha\cos\beta \end{cases}$$

und

$$11)\quad \begin{cases} \Sigma mr^2 = & G\sin\alpha^2 + H\sin\beta^2 + J\sin\gamma^2 \\ & -2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\gamma\cos\alpha - 2F\cos\alpha\cos\beta. \end{cases}$$

Lassen wir die Axe AA' mit der Axe der x zusammenfallen, so ist offenbar

$$\cos\alpha = \pm 1,\quad \cos\beta = 0,\quad \cos\gamma = 0;$$

also nach 10) für die Axe der x:

$$\Sigma mr^2 = A.$$

Lassen wir die Axe AA' mit der Axe der y zusammenfallen, so ist offenbar

$$\cos\alpha = 0,\quad \cos\beta = \pm 1,\quad \cos\gamma = 0;$$

also nach 10) für die Axe der y:

$$\Sigma mr^2 = B.$$

Lassen wir die Axe AA' mit der Axe der z zusammenfallen, so ist offenbar

$$\cos\alpha = 0,\quad \cos\beta = 0,\quad \cos\gamma = \pm 1;$$

also nach 10) für die Axe der z:

$$\Sigma mr^2 = C.$$

Wir sehen hieraus, dass die in dem Ausdrucke 10) vorkommenden Coefficienten A, B, C die Trägheitsmomente des Systems der gegebenen materiellen Punkte in Bezug auf die drei angenommenen Axen der x, y, z sind.

Denken wir uns durch den Punkt O drei beliebige andere auf einander senkrecht stehende Axen der x', y', z' gelegt, und bezeichnen die Trägheitsmomente des Systems der gegebenen materiellen Punkte in Bezug auf diese Axen respective durch A', B', C'; so ist nach 10), wenn wir die Winkel, welche der positive Theil der Axe der x' mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, durch φ, ψ, χ; die Winkel, welche der positive Theil der Axe der y' mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, durch φ', ψ', χ'; die Winkel, welche der positive Theil der Axe der z' mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, durch $\varphi'', \psi'', \chi''$ bezeichnen, keinen dieser Winkel grösser als 180° genommen:

$$\begin{aligned}
A' = {} & A\cos\varphi^2 + B\cos\psi^2 + C\cos\chi^2 \\
& -2D\cos\psi\cos\chi - 2E\cos\chi\cos\varphi - 2F\cos\varphi\cos\psi, \\
B' = {} & A\cos\varphi'^2 + B\cos\psi'^2 + C\cos\chi'^2 \\
& -2D\cos\psi'\cos\chi' - 2E\cos\chi'\cos\varphi' - 2F\cos\varphi'\cos\psi', \\
C' = {} & A\cos\varphi''^2 + B\cos\psi''^2 + C\cos\chi''^2 \\
& -2D\cos\psi''\cos\chi'' - 2E\cos\chi''\cos\varphi'' - 2F\cos\varphi''\cos\psi''.
\end{aligned}$$

Addirt man nun diese drei Gleichungen zusammen, und beachtet, dass nach bekannten Sätzen offenbar

$$\cos\varphi^2 + \cos\varphi'^2 + \cos\varphi''^2 = 1,$$

$$\cos\psi^2 + \cos\psi'^2 + \cos\psi''^2 = 1,$$

$$\cos\chi^2 + \cos\chi'^2 + \cos\chi''^2 = 1;$$

$$\cos\psi\cos\chi + \cos\psi'\cos\chi' + \cos\psi''\cos\chi'' = 0,$$

$$\cos\chi\cos\varphi + \cos\chi'\cos\varphi' + \cos\chi''\cos\varphi'' = 0,$$

$$\cos\varphi\cos\psi + \cos\varphi'\cos\psi' + \cos\varphi''\cos\psi'' = 0$$

ist; so erhält man die folgende bemerkenswerthe Gleichung:

$$12)\qquad A' + B' + C' = A + B + C,$$

in welcher der Satz ausgesprochen ist, dass die Summe der Trägheitsmomente des Systems der materiellen Punkte $m, m_1, m_2, m_3, \ldots$ in Bezug auf jede drei durch den beliebigen Punkt O gelegte, auf einander senkrecht stehende Axen eine constante Grösse ist.

§. 2.

Wir wollen jetzt durch einen beliebigen Punkt (abc) eine der Axe $\overline{AA'}$ parallele Axe $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{A}'}$ legen, und das Trägheitsmoment des Systems der materiellen Punkte

$$m, \quad m_1, \quad m_2, \quad m_3, \quad m_4, \ldots$$

in Bezug auf diese neue Axe durch $\Sigma m\mathfrak{r}^2$ bezeichnen.

Legt man durch den Punkt (abc) ein neues dem primitiven paralleles Coordinatensystem, so sind nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die Coordinaten des Punktes m in diesem neuen System:

$$x-a, \quad y-b, \quad z-c.$$

Folglich ist nach §. 1. 1):

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}^2 = \; & (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \\ & -\{(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma\}^2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}^2 = \; & (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \\ & -\{(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)-(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)\}^2. \end{aligned}$$

Bezeichnet nun R die Entfernung der beiden parallelen Axen von einander, d. h. eigentlich die Entfernung des Punktes O von der Axe $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{A}'}$, so braucht man, um R zu erhalten, in der vorstehenden Gleichung offenbar bloss x, y, z verschwinden zu lassen, wodurch sich ergiebt:

$$R^2=a^2+b^2+c^2-(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)^2.$$

Weil nun nach dem Obigen, wie sogleich erhellet:

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}^2 = & \{x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2\} \\ & +\{a^2+b^2+c^2-(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)^2\} \\ & -2\{ax+by+cz-(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\} \end{aligned}$$

und

$$r^2=x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2$$

ist, so ist

$$\begin{aligned} & \mathfrak{r}^2=r^2+R^2 \\ & -2\{ax+by+cz-(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\}. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung erhält man auf der Stelle durch Summation, nachdem man vorher mit den Massen multiplicirt hat:

$$\begin{aligned} & \Sigma m\mathfrak{r}^2=\Sigma mr^2+R^2\Sigma m \\ & -2\{a\Sigma mx+b\Sigma my+c\Sigma mz-(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)(\cos\alpha\Sigma mx \\ & \qquad +\cos\beta\Sigma my+\cos\gamma\Sigma mz)\}. \end{aligned}$$

Bezeichnen nun $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Coordinaten des Schwerpunktes des Systems der Massen

$$m,\quad m_1,\quad m_2,\quad m_3,\quad m_4,\ldots.$$

in Bezug auf das primitive Coordinatensystem, so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte bekanntlich:

$$\mathfrak{x}\Sigma m=\Sigma mx,\quad \mathfrak{y}\Sigma m=\Sigma my,\quad \mathfrak{z}\Sigma m=\Sigma mz;$$

also nach dem Obigen:

$$1)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma m\mathfrak{r}^2=\Sigma mr^2+R^2\Sigma m \\ -2\Sigma m.\{a\mathfrak{x}+b\mathfrak{y}+c\mathfrak{z}-(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)(\mathfrak{x}\cos\alpha+\mathfrak{y}\cos\beta+\mathfrak{z}\cos\gamma)\}. \end{array}\right.$$

Für $\mathfrak{x}=0$, $\mathfrak{y}=0$, $\mathfrak{z}=0$, d. h. wenn die Axe $\overline{AA'}$, auf welche sich das Trägheitsmoment Σmr^2 bezieht, durch den Schwerpunkt des Systems der Massen

$$m,\quad m_1,\quad m_2,\quad m_3,\quad m_4,\ldots.$$

gelegt ist, ergiebt sich aus 1):

$$2)\qquad \Sigma m\mathfrak{r}^2=\Sigma mr^2+R^2\Sigma m.$$

Wenn man also das Trägheitsmoment der Massen m, m_1, m_2, m_3,.... in Bezug auf eine beliebige durch ihren Schwerpunkt gelegte Axe, nämlich Σmr^2, kennt, kann man das Trägheitsmoment $\Sigma m\mathfrak{r}^2$ in Bezug auf jede andere dieser Axe parallele Axe, deren Entfernung R von jener anderen durch den Schwerpunkt gelegten Axe gegeben ist, mittelst der Eormel

$$\Sigma m\mathfrak{r}^2=\Sigma mr^2+R^2\Sigma m$$

immer leicht finden.

Aus dieser Gleichung folgt auch, dass unter den Trägheitsmomenten in Bezug auf parallele Axen das Trägheitsmoment in Bezug auf die durch den Schwerpunkt des Massensystems gehende dieser parallelen Axen stets das kleinste ist.

§. 3.

Das Trägheitsmoment des Systems der Massen

$$m,\quad m_1,\quad m_2,\quad m_3,\quad m_4,\ldots.$$

in Bezug auf eine beliebige durch den beliebigen Punkt O, den wir immer als Anfang der rechtwinkligen Coordinaten annehmen, gehende Axe ist stets eine endliche völlig bestimmte positive Grösse. Daher muss es unter allen durch den Punkt O gehenden Axen offenbar immer mindestens eine geben, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment unseres Massensystems nicht kleiner ist als das Trägheitsmoment in Bezug auf jede andere durch den Punkt O gehende Axe. Diese durch den Punkt O gehende Axe, deren wirkliche Existenz keinem Zweifel unterliegt, wollen wir jetzt als Axe der x annehmen. Ganz eben so muss es unter allen im Punkte O auf der Axe der x senkrecht stehenden Axen immer mindestens eine geben, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment unseres Massensystems nicht kleiner ist als das Trägheitsmoment in Bezug auf jede andere im Punkte O auf der Axe der x senkrecht stehende Axe. Diese im Punkte O auf der Axe der x senkrecht stehende Axe, deren wirkliche Existenz wiederum keinem Zweifel unterliegt, wollen wir als Axe der y annehmen. Endlich nehmen wir die im Punkte O auf den so bestimmten Axen der x und y, d. h. auf der durch diese Axen der Lage nach bestimmten Ebene, senkrecht stehende Axe als Axe der z an. Die Trägheitsmomente des Massensystems in Bezug auf die Axen der x, y, z bezeichnen wir wie früher respective durch A, B, C, so dass also nach §. 1.

$$A = \Sigma m(y^2 + z^2),\quad B = \Sigma m(z^2 + x^2),\quad C = \Sigma m(x^2 + y^2)$$

ist. Wegen der jetzt getroffenen Auswahl der Axen der x, y, z ist aber offenbar ohne Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$A \overline{\gtrless} B \overline{\gtrless} C.$$

Legen wir nun durch den Punkt O eine vierte beliebige Axe $\overline{AA'}$, und behalten für diese Axe alle in §. 1. eingeführten Bezeichnungen auch jetzt bei, so ist nach §. 1. 10) für diese Axe:

$$\Sigma mr^2 = A\cos\alpha^2 + B\cos\beta^2 + C\cos\gamma^2$$
$$-2\cos\beta\cos\gamma\Sigma myz - 2\cos\gamma\cos\alpha\Sigma mzx - 2\cos\alpha\cos\beta\Sigma mxy.$$

Wegen der vorher getroffenen Auswahl der Axen der x, y, z ist, was auch die Winkel α, β, γ sein mögen, immer

$$A \overline{\gtrless} \Sigma mr^2,$$

also

$$A \overline{\gtrless} A\cos\alpha^2 + B\cos\beta^2 + C\cos\gamma^2$$
$$-2\cos\beta\cos\gamma\Sigma myz - 2\cos\gamma\cos\alpha\Sigma mzx - 2\cos\alpha\cos\beta\Sigma mxy,$$

folglich

$$A\sin\alpha^2 \geqq B\cos\beta^2 + C\cos\gamma^2$$

$$-2\cos\beta\cos\gamma\Sigma myz - 2\cos\gamma\cos\alpha\Sigma mzx - 2\cos\alpha\cos\beta\Sigma mxy.$$

Setzt man nun für α einen beliebigen 180^0 nicht übersteigenden Werth, für β einen durch die Gleichung $\cos\beta = \sin\alpha$ bestimmten Werth, was offenbar verstattet ist, so geht die Bedingungsgleichung

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$

deren Erfüllung natürlich immer vorausgesetzt werden muss, in

$$\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$

also in $\cos\gamma^2 = 0$ über, woraus sich $\cos\gamma = 0$ ergiebt. Folglich ist nach dem Obigen für jedes 180^0 nicht übersteigende α:

$$A\sin\alpha^2 \geqq B\sin\alpha^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha\Sigma mxy,$$

also

$$A \geqq B - 2\cot\alpha\Sigma mxy.$$

Wäre nun nicht

$$\Sigma mxy = 0,$$

so könnte

$$\Sigma mxy > 0 \text{ oder } \Sigma mxy < 0$$

sein. Wäre

$$\Sigma mxy > 0,$$

so würde, wenn α sich 180^0 näherte, die Grösse

$$-2\cot\alpha\Sigma mxy$$

sich dem positiven Unendlichen nähern, und es könnte also offenbar nicht für jedes zwischen 0 und 180^0 liegende α die Bedingung

$$A \geqq B - 2\cot\alpha\Sigma mxy$$

erfüllt sein. Wäre dagegen

$$\Sigma mxy < 0,$$

so würde, wenn α sich 0^0 näherte, die Grösse

$$-2\cot\alpha\Sigma mxy$$

sich dem positiven Unendlichen nähern, und also offenbar wiederum nicht für jedes zwischen 0 und 180^0 liegende α die Bedingung

$$A \overline{\gtrless} B - 2\cot\alpha\Sigma mxy$$

erfüllt sein. Daher kann weder

$$\Sigma mxy > 0,$$

noch

$$\Sigma mxy < 0$$

sein, und es muss also

$$\Sigma mxy = 0$$

sein.

Setzt man wieder für α einen beliebigen 180^0 nicht übersteigenden Werth, für γ einen durch die Gleichung $\cos\gamma = \sin\alpha$ bestimmten Werth, was offenbar verstattet ist, so geht die Bedingungsgleichung

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$

deren Erfüllung natürlich immer vorausgesetzt werden muss, in

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \sin\alpha^2 = 1,$$

also in $\cos\beta^2 = 0$ über, woraus sich $\cos\beta = 0$ ergiebt. Folglich ist nach dem Obigen für jedes 180^0 nicht übersteigende α

$$A\sin\alpha^2 \overline{\gtrless} C\sin\alpha^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha\Sigma mzx,$$

also

$$A \overline{\gtrless} C - 2\cot\alpha\Sigma mzx,$$

woraus man ganz auf dieselbe Art wie vorher schliesst, dass

$$\Sigma mzx = 0$$

sein muss.

Lassen wir nun die Axe $\overline{AA'}$ in die Ebene der yz hineinfallen, so ist $\alpha = 90^0$, und für das Trägheitsmoment Σmr^2 hat man daher jetzt nach dem Obigen den folgenden Ausdruck:

$$\Sigma mr^2 = B\cos\beta^2 + C\cos\gamma^2 - 2\cos\beta\cos\gamma\Sigma myz.$$

Wegen der getroffenen Auswahl der Axen ist

$$B \overset{=}{>} \Sigma mr^2,$$

also

$$B \overset{=}{>} B\cos\beta^2 + C\cos\gamma^2 - 2\cos\beta\cos\gamma\Sigma myz,$$

folglich

$$B\sin\beta^2 \overset{=}{>} C\cos\gamma^2 - 2\cos\beta\cos\gamma\Sigma myz.$$

Setzen wir nun für β einen beliebigen 180° nicht übersteigenden Werth, so ist wegen der Gleichung

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$

weil $\cos\alpha = 0$ ist, offenbar $\cos\gamma^2 = \sin\beta^2$, folglich

$$B\sin\beta^2 \overset{=}{>} C\sin\beta^2 - 2\sin\beta\cos\beta\Sigma myz,$$

also

$$B \overset{=}{>} C - 2\cot\beta\Sigma myz,$$

woraus sich ganz auf dieselbe Art wie früher

$$\Sigma myz = 0$$

ergiebt.

Wenn daher die Axen auf die angegebene Weise ausgewählt worden sind, so ist

1) $$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mzx = 0, \quad \Sigma mxy = 0;$$

und folglich nach dem Obigen für jede durch den Punkt O, den Anfang der x, y, z, gelegte Axe:

2) $$\Sigma mr^2 = A\cos\alpha^2 + B\cos\beta^2 + C\cos\gamma^2.$$

Weil bekanntlich

$$A \overset{=}{>} B \overset{=}{>} C$$

ist, ohne Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander, so ist unter derselben Bedingung:

$$C\cos\alpha^2 \overline{\overline{<}} A\cos\alpha^2,$$

$$C\cos\beta^2 \overline{\overline{<}} B\cos\beta^2,$$

$$C\cos\gamma^2 = C\cos\gamma^2;$$

also, wenn man auf beiden Seiten addirt, und dabei die Gleichung

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

berücksichtigt:

$$C \overline{\overline{<}} A\cos\alpha^2 + B\cos\beta^2 + C\cos\gamma^2,$$

folglich nach 2):

$$C \overline{\overline{<}} \Sigma mr^2,$$

d. h. bei der oben getroffenen Auswahl der Axen der x, y, z ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Axe der z nicht grösser als das Trägheitsmoment in Bezug auf irgend welche andere durch den Punkt O gelegte Axe.

Für $A=B=C$ wird wegen der Gleichung

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

nach 2) auch

$$\Sigma mr^2 = A = B = C,$$

d. h. es sind in diesem Falle die Trägheitsmomente in Bezug auf alle durch den Punkt O gelegten Axen einander gleich.

Sind nur zwei der Trägheitsmomente A, B, C einander gleich, etwa $A=B$, so ist nach 2)

$$\Sigma mr^2 = A(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2) + C\cos\gamma^2,$$

d. i., weil

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = 1 - \cos\gamma^2 = \sin\gamma^2$$

ist:

$$\Sigma mr^2 = A\sin\gamma^2 + C\cos\gamma^2.$$

Setzt man nun $\gamma = 90^0$, d. h. liegt die durch den Punkt O gelegte Axe, welcher das Trägheitsmoment Σmr^2 entspricht, in der Ebene der xy, so ist

$$\Sigma mr^2 = A = B,$$

d. h. es sind in diesem Falle die Trägheitsmomente für alle in der Ebene der xy durch den Punkt O gezogenen Axen einander gleich.

§. 4.

Im vorhergehenden Paragraphen ist für jeden Punkt O die Existenz dreier durch denselben gehender, auf einander senkrecht stehender Axen nachgewiesen worden, für welche, wenn man dieselben als Axen der x, y, z, den Punkt O natürlich als Anfang der xyz annimmt,

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mzx = 0, \quad \Sigma mxy = 0$$

ist. Diese drei Axen haben nach dem vorhergehenden Paragraphen die sehr bemerkenswerthe Eigenschaft, dass immer das Trägheitsmoment in Bezug auf die eine nicht kleiner, das Trägheitsmoment in Bezug auf eine andere nicht grösser als das Trägheitsmoment in Bezug auf irgend welche andere durch den Punkt O gelegte Axe ist, oder, in der Kürze gesprochen, die eine dieser drei Axen ist immer die Axe des grössten, eine andere ist die Axe des kleinsten Trägheitsmoments, nämlich für alle durch den Punkt O gelegte Axen.

Man nennt diese drei durch den Punkt O gelegten, auf einander senkrecht stehenden Axen, für welche

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mzx = 0, \quad \Sigma mxy = 0$$

ist, die drei auf einander senkrecht stehenden oder gegen einander rechtwinkligen Hauptaxen des Systems der Massen

$$m, \quad m_1, \quad m_2, \quad m_3, \quad m_4, \ldots.$$

für den Punkt O.

Wie die Lage dieser drei gegen einander rechtwinkligen Hauptaxen des Systems der Massen m, m_1, m_2, m_3, ... für jeden beliebigen Punkt O analytisch bestimmt werden kann, wollen wir jetzt im nächsten Paragraphen zeigen.

§. 5.

Den Punkt O nehme man als Anfang eines beliebigen rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz an, und setze der Kürze wegen:

$$1)\quad \begin{cases} A=\Sigma m(y^2+z^2), & B=\Sigma m(z^2+x^2), & C=\Sigma m(x^2+y^2); \\ D=\Sigma myz, & E=\Sigma mzx, & F=\Sigma mxy; \\ G=\Sigma mx^2, & H=\Sigma my^2, & J=\Sigma mz^2; \end{cases}$$

wo natürlich

$$A,\ B,\ C;\quad D,\ E,\ F;\quad G,\ H,\ J$$

sämmtlich gegebene Grössen sind, bestimmt durch die Grösse der Massen des Systems und deren Lage gegen die drei durch den gegebenen Punkt O gelegten Axen der x, y, z.

Ferner denke man sich durch den gegebenen Punkt O die drei demselben entsprechenden rechtwinkligen Hauptaxen des gegebenen Massensystems, von deren Existenz wir uns im vorhergehenden Paragraphen versichert haben, gelegt, und nehme dieselben jetzt als Axen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ an, indem wir zugleich die von dem positiven Theile der Axe der $\mathfrak{x}$ mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch φ, ψ, χ; die von dem positiven Theile der Axe der $\mathfrak{y}$ mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch φ', ψ', χ'; die von dem positiven Theile der Axe der $\mathfrak{z}$ mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch φ'', ψ'', χ'' bezeichnen. Auch setze man der Kürze wegen:

$$2)\qquad \mathfrak{X}=\Sigma m\mathfrak{x}^2,\quad \mathfrak{Y}=\Sigma m\mathfrak{y}^2,\quad \mathfrak{Z}=\Sigma m\mathfrak{z}^2$$

und bemerke, dass nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\Sigma m\mathfrak{y}\mathfrak{z}=0,\quad \Sigma m\mathfrak{z}\mathfrak{x}=0,\quad \Sigma m\mathfrak{x}\mathfrak{y}=0$$

ist.

Aus den in §. 1. angestellten Betrachtungen, oder auch aus den allgemeinen Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten, geht nun unmittelbar die Richtigkeit der folgenden Gleichungen hervor:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}&=x\cos\varphi+y\cos\psi+z\cos\chi, \\ \mathfrak{y}&=x\cos\varphi'+y\cos\psi'+z\cos\chi', \\ \mathfrak{z}&=x\cos\varphi''+y\cos\psi''+z\cos\chi'' \end{aligned}$$

und

$$x=\mathfrak{x}\cos\varphi+\mathfrak{y}\cos\varphi'+\mathfrak{z}\cos\varphi'',$$

$$y=\mathfrak{x}\cos\psi+\mathfrak{y}\cos\psi'+\mathfrak{z}\cos\psi'',$$

$$\mathfrak{z}=\mathfrak{x}\cos\chi\;+\mathfrak{y}\cos\chi'+\mathfrak{z}\cos\chi''.$$

Also ist

$$x\mathfrak{x}=x(x\cos\varphi+y\cos\psi+z\cos\chi)=\mathfrak{x}(\mathfrak{x}\cos\varphi+\mathfrak{y}\cos\varphi'+\mathfrak{z}\cos\varphi''),$$

$$y\mathfrak{x}=y(x\cos\varphi+y\cos\psi+z\cos\chi)=\mathfrak{x}(\mathfrak{x}\cos\psi+\mathfrak{y}\cos\psi'+\mathfrak{z}\cos\psi''),$$

$$z\mathfrak{x}=z(x\cos\varphi+y\cos\psi+z\cos\chi)=\mathfrak{x}(\mathfrak{x}\cos\chi+\mathfrak{y}\cos\chi'+\mathfrak{z}\cos\chi'');$$

woraus sich, nachdem man vorher mit den Massen gehörig multiplicirt hat, durch Summation auf der Stelle ergiebt:

$$\cos\varphi\Sigma mx^2+\cos\psi\Sigma mxy+\cos\chi\Sigma mzx$$

$$=\cos\varphi\Sigma m\mathfrak{x}^2+\cos\varphi'\Sigma m\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\cos\varphi''\Sigma m\mathfrak{z}\mathfrak{x},$$

$$\cos\varphi\Sigma mxy+\cos\psi\Sigma my^2+\cos\chi\Sigma myz$$

$$=\cos\psi\Sigma m\mathfrak{x}^2+\cos\psi'\Sigma m\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\cos\psi''\Sigma m\mathfrak{z}\mathfrak{x},$$

$$\cos\varphi\Sigma mzx+\cos\psi\Sigma myz+\cos\chi\Sigma mz^2,$$

$$=\cos\chi\Sigma m\mathfrak{x}^2+\cos\chi'\Sigma m\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\cos\chi''\Sigma m\mathfrak{z}\mathfrak{x};$$

also, weil

$$\Sigma m\mathfrak{x}\mathfrak{y}=0,\quad \Sigma m\mathfrak{z}\mathfrak{x}=0$$

ist, wenn man zugleich die aus dem Obigen bekannten abkürzenden Bezeichnungen einführt:

$$3)\quad\begin{cases}(G-\mathfrak{X})\cos\varphi+F\cos\psi+E\cos\chi=0,\\ F\cos\varphi+(H-\mathfrak{X})\cos\psi+D\cos\chi=0,\\ E\cos\varphi+D\cos\psi+(J-\mathfrak{X})\cos\chi=0.\end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$(H-\mathfrak{X})(J-\mathfrak{X})-D^2,$$

$$DE-F(J-\mathfrak{X}),$$

$$DF-E(H-\mathfrak{X});$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die folgende Gleichung:

$$4)\quad\left.\begin{array}{r}(G-\mathfrak{X})(H-\mathfrak{X})(J-\mathfrak{X})-D^2(G-\mathfrak{X})-E^2(H-\mathfrak{X})\\ -F^2(J-\mathfrak{X})+2DEF\end{array}\right\}=0,$$

welche Gleichung in Bezug auf $\mathfrak{X}$ als unbekannte Grösse vom dritten Grade ist.

Auf ganz ähnliche Art ist:

$$x\mathfrak{y}=x(x\cos\varphi'+y\cos\psi'+z\cos\chi')=\mathfrak{y}(\mathfrak{x}\cos\varphi+\mathfrak{y}\cos\varphi'+\mathfrak{z}\cos\varphi''),$$

$$y\mathfrak{y}=y(x\cos\varphi'+y\cos\psi'+z\cos\chi')=\mathfrak{y}(\mathfrak{x}\cos\psi+\mathfrak{y}\cos\psi'+\mathfrak{z}\cos\psi''),$$

$$z\mathfrak{y}=z(x\cos\varphi'+y\cos\psi'+z\cos\chi')=\mathfrak{y}(\mathfrak{x}\cos\chi+\mathfrak{y}\cos\chi'+\mathfrak{z}\cos\chi'');$$

folglich durch Summation:

$$3^*)\quad\left\{\begin{array}{l}(G-\mathfrak{Y})\cos\varphi'+F\cos\psi'+E\cos\chi'=0,\\ F\cos\varphi'+(H-\mathfrak{Y})\cos\psi'+D\cos\chi'=0,\\ E\cos\varphi'+D\cos\psi'+(J-\mathfrak{Y})\cos\chi'=0;\end{array}\right.$$

woraus:

$$4^*)\quad\left.\begin{array}{r}(G-\mathfrak{Y})(H-\mathfrak{Y})(J-\mathfrak{Y})-D^2(G-\mathfrak{Y})-E^2(H-\mathfrak{Y})\\ -F^2(J-\mathfrak{Y})+2DEF\end{array}\right\}=0.$$

Endlich ist:

$$x\mathfrak{z}=x(x\cos\varphi''+y\cos\psi''+z\cos\chi'')=\mathfrak{z}(\mathfrak{x}\cos\varphi+\mathfrak{y}\cos\varphi'+\mathfrak{z}\cos\varphi''),$$

$$y\mathfrak{z}=y(x\cos\varphi''+y\cos\psi''+z\cos\chi'')=\mathfrak{z}(\mathfrak{x}\cos\psi+\mathfrak{y}\cos\psi'+\mathfrak{z}\cos\psi''),$$

$$z\mathfrak{z}=z(x\cos\varphi''+y\cos\psi''+z\cos\chi'')=\mathfrak{z}(\mathfrak{x}\cos\chi+\mathfrak{y}\cos\chi'+\mathfrak{z}\cos\chi'');$$

also durch Summation:

$$3^{**})\quad\left\{\begin{array}{l}(G-\mathfrak{Z})\cos\varphi''+F\cos\psi''+E\cos\chi''=0,\\ F\cos\varphi''+(H-\mathfrak{Z})\cos\psi''+D\cos\chi''=0,\\ E\cos\varphi''+D\cos\psi''+(J-\mathfrak{Z})\cos\chi''=0;\end{array}\right.$$

woraus:

$$4^{**})\quad\left.\begin{array}{r}(G-\mathfrak{Z})(H-\mathfrak{Z})(J-\mathfrak{Z})-D^2(G-\mathfrak{Z})-E^2(H-\mathfrak{Z})\\ -F^2(J-\mathfrak{Z})+2DEF\end{array}\right\}=0$$

folgt. Aus den drei Gleichungen 4), 4^*), 4^{**}) erhellet unmittelbar, dass die drei reellen positiven Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

$$5)\quad\left.\begin{array}{r}(G-U)(H-U)(J-U)-D^2(G-U)-E^2(H-U)\\ -F^2(J-U)+2DEF\end{array}\right\}=0$$

sind, woraus sich, weil die wirkliche Existenz der dem Punkte O

entsprechenden drei rechtwinkligen Hauptaxen früher nachgewiesen worden ist, auch umgekehrt ergiebt, dass diese Gleichung immer drei reelle positive Wurzeln haben muss.

Hat man durch vollständige Auflösung der vorstehenden cubischen Gleichung $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ gefunden, so werden ferner die Winkel

$$\varphi,\ \psi,\ \chi;\quad \varphi',\ \psi',\ \chi';\quad \varphi'',\ \psi'',\ \chi''$$

mittelst der Gleichungen 3), 3*), 3**) in Verbindung mit den bekannten Relationen

$$\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2 = 1,$$

$$\cos\varphi'^2 + \cos\psi'^2 + \cos\chi'^2 = 1,$$

$$\cos\varphi''^2 + \cos\psi''^2 + \cos\chi''^2 = 1,$$

bestimmt.

Die Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptaxen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sind nach §. 1. bekanntlich respective

$$\Sigma m(\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2),\quad \Sigma m(\mathfrak{z}^2+\mathfrak{x}^2),\quad \Sigma m(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)$$

oder

$$\Sigma m\mathfrak{y}^2+\Sigma m\mathfrak{z}^2,\quad \Sigma m\mathfrak{z}^2+\Sigma m\mathfrak{x}^2,\quad \Sigma m\mathfrak{x}^2+\Sigma m\mathfrak{y}^2.$$

Nun ist aber nach dem Obigen

$$\mathfrak{X}=\Sigma m\mathfrak{x}^2,\quad \mathfrak{Y}=\Sigma m\mathfrak{y}^2,\quad \mathfrak{Z}=\Sigma m\mathfrak{z}^2.$$

Also sind die Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptaxen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ respective

$$\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z},\quad \mathfrak{Z}+\mathfrak{X},\quad \mathfrak{X}+\mathfrak{Y}.$$

Man kann unsere Aufgabe noch auf eine andere Art auflösen.

Es ist nämlich offenbar

$$x^2+y^2+z^2=\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2,$$

weil diese Ausdrücke beide das Quadrat der Entfernung des Punktes m von dem Anfange der Coordinaten darstellen. Also gelten offenbar die folgenden Gleichungen:

$$\Sigma mx^2+\Sigma m(y^2+z^2)$$

$$=\Sigma m\mathfrak{x}^2+\Sigma m(\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)=\Sigma m\mathfrak{y}^2+\Sigma m(\mathfrak{z}^2+\mathfrak{x}^2)=\Sigma m\mathfrak{z}^2+\Sigma m(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}^2),$$

$$\Sigma my^2+\Sigma m(z^2+x^2)$$

$$=\Sigma m\mathfrak{x}^2+\Sigma m(\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)=\Sigma m\mathfrak{y}^2+\Sigma m(\mathfrak{z}^2+\mathfrak{x}^2)=\Sigma m\mathfrak{z}^2+\Sigma m(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2),$$

$$\Sigma mz^2+\Sigma m(x^2+y^2)$$

$$=\Sigma m\mathfrak{x}^2+\Sigma m(\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)=\Sigma m\mathfrak{y}^2+\Sigma m(\mathfrak{z}^2+\mathfrak{x}^2)=\Sigma m\mathfrak{z}^2+\Sigma m(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2);$$

folglich, wenn der Kürze wegen

6) $\mathfrak{X}_1=\Sigma m(\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2),\ \mathfrak{Y}_1+\Sigma m(\mathfrak{z}^2+\mathfrak{x}^2),\ \mathfrak{Z}_1=\Sigma m(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)$

gesetzt wird:

$$G+A=\mathfrak{X}+\mathfrak{X}_1=\mathfrak{Y}+\mathfrak{Y}_1=\mathfrak{Z}+\mathfrak{Z}_1,$$
$$H+B=\mathfrak{X}+\mathfrak{X}_1=\mathfrak{Y}+\mathfrak{Y}_1=\mathfrak{Z}+\mathfrak{Z}_1,$$
$$J+C=\mathfrak{X}+\mathfrak{X}_1=\mathfrak{Y}+\mathfrak{Y}_1=\mathfrak{Z}+\mathfrak{Z}_1;$$

woraus

$$G-\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1-A,\quad G-\mathfrak{Y}=\mathfrak{Y}_1-A,\quad G-\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}_1-A;$$
$$H-\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1-B,\quad H-\mathfrak{Y}=\mathfrak{Y}_1-B,\quad H-\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}_1-B;$$
$$J-\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1-C,\quad J-\mathfrak{Y}=\mathfrak{Y}_1-C,\quad J-\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}_1-C$$

folgt. Also hat man nach dem Obigen auch die folgenden Gleichungen:

$$7^*)\quad\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{X}_1-A)\cos\varphi+F\cos\psi+E\cos\chi=0,\\ F\cos\varphi+(\mathfrak{X}_1-B)\cos\psi+D\cos\chi=0,\\ E\cos\varphi+D\cos\psi+(\mathfrak{X}_1-C)\cos\chi=0;\end{array}\right.$$

$$7^{**})\quad\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{Y}_1-A)\cos\varphi'+F\cos\psi'+E\cos\chi'=0,\\ F\cos\varphi'+(\mathfrak{Y}_1-B)\cos\psi'+D\cos\chi'=0,\\ E\cos\varphi'+D\cos\psi'+(\mathfrak{Y}_1-C)\cos\chi'=0;\end{array}\right.$$

$$7^{***})\quad\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{Z}_1-A)\cos\varphi''+F\cos\psi''+E\cos\chi''=0,\\ F\cos\varphi''+(\mathfrak{Z}_1-B)\cos\psi''+D\cos\chi''=0,\\ E\cos\varphi''+D\cos\psi''+(\mathfrak{Z}_1-C)\cos\chi''=0;\end{array}\right.$$

und $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ sind die drei Wurzeln der folgenden cubischen Gleichung:

$$8)\quad\left.\begin{array}{r}(U_1-A)(U_1-B)(U_1-C)-D^2(U_1-A)-E^2(U_1-B)\\ -F^2(U_1-C)+2DEF\end{array}\right\}=0.$$

Betrachtet man φ_1, ψ_1, χ_1 als allgemeine Repräsentanten der drei Systeme von Winkeln:

$$\varphi,\ \psi,\ \chi;\quad \varphi',\ \psi',\ \chi';\quad \varphi'',\ \psi'',\ \chi'';$$

so hat man zu deren Bestimmung überhaupt die Gleichungen:

$$9)\quad \begin{cases} (U_1-A)\cos\varphi_1+F\cos\psi_1+E\cos\chi_1=0,\\ F\cos\varphi_1+(U_1-B)\cos\psi_1+D\cos\chi_1=0,\\ E\cos\varphi_1+D\cos\psi_1+(U_1-C)\cos\chi_1=0,\end{cases}$$

mit denen man noch die Gleichung

$$10)\qquad \cos\varphi_1{}^2+\cos\psi_1{}^2+\cos\chi_1{}^2=1$$

zu verbinden hat, und in denen man für U_1 nach und nach die drei Wurzeln der cubischen Gleichung 8) setzen muss.

Um die Gleichungen 9) und 10) aufzulösen, bringen wir zuvörderst die Gleichungen 9) auf die folgende Form:

$$U_1-A+F\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1}+E\frac{\cos\chi_1}{\cos\varphi_1}=0,$$

$$F+(U_1-B)\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1}+D\frac{\cos\chi_1}{\cos\varphi_1}=0,$$

$$E+D\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1}+(U_1-C)\frac{\cos\chi_1}{\cos\varphi_1}=0.$$

Dann erhält man durch verschiedene Verbindung dieser Gleichungen zu je zweien die folgenden Gleichungen:

$$D(U_1-A)-EF+\{FD-E(U_1-B)\}\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1}=0,$$

$$(U_1-A)(U_1-C)-E^2+\{F(U_1-C)-DE\}\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1}=0,$$

$$F(U_1-C)-DE+\{(U_1-B)(U_1-C)-D^2\}\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1}=0$$

und

$$D(U_1-A)-EF+\{DE-F(U_1-C)\}\frac{\cos\chi_1}{\cos\varphi_1}=0,$$

$$(U_1-A)(U_1-B)-F^2+\{E(U_1-B)-FD\}\frac{\cos\chi_1}{\cos\varphi_1}=0,$$

$$E(U_1-B)-FD+\{(U_1-B)(U_1-C)-D^2\}\frac{\cos\chi_1}{\cos\varphi_1}=0.$$

Aus den ersten Gleichungen in diesen beiden Systemen folgt unmittelbar:

$$\{EF-D(U_1-A)\}\cos\varphi_1=\{FD-E(U_1-B)\}\cos\psi_1$$
$$=\{DE-F(U_1-C)\}\cos\chi_1,$$

und setzt man nun der Kürze wegen

11)
$$K^2=\left\{\frac{1}{EF-D(U_1-A)}\right\}^2+\left\{\frac{1}{FD-E(U_1-B)}\right\}^2+\left\{\frac{1}{DE-F(U_1-C)}\right\}^2,$$

so erhält man mittelst der Gleichung

$$\cos\varphi_1^2+\cos\psi_1^2+\cos\chi_1^2=1$$

leicht:

12)
$$\left\{\begin{aligned}\cos\varphi_1&=\pm\frac{1}{K\{EF-D(U_1-A)\}},\\ \cos\psi_1&=\pm\frac{1}{K\{FD-E(U_1-B)\}},\\ \cos\chi_1&=\pm\frac{1}{K\{DE-F(U_1-C)\}};\end{aligned}\right.$$

in welchen Gleichungen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen. Welche Zeichen man aber nimmt, ist natürlich an sich ganz gleichgültig, weil man sich die positiven Theile der gesuchten Axen beliebig angenommen denken kann.

Ferner erhält man aus den obigen Gleichungen:

$$\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1}=\frac{(U_1-C)(U_1-A)-E^2}{DE-F(U_1-C)},$$

$$\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1}=\frac{DE-F(U_1-C)}{(U_1-B)(U_1-C)-D^2}$$

und

$$\frac{\cos\chi_1}{\cos\varphi_1}=\frac{(U_1-A)(U_1-B)-F^2}{FD-E(U_1-B)},$$

$$\frac{\cos\chi_1}{\cos\varphi_1}=\frac{FD-E(U_1-B)}{(U_1-B)(U_1-C)-D^2}.$$

Aus diesen Ausdrücken ergiebt sich durch Multiplication:

$$\left(\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1}\right)^2=\frac{(U_1-C)(U_1-A)-E^2}{(U_1-B)(U_1-C)-D^2},$$

$$\left(\frac{\cos\chi_1}{\cos\varphi_1}\right)^2=\frac{(U_1-A)(U_1-B)-F^2}{(U_1-B)(U_1-C)-D^2};$$

also

$$\frac{\cos\varphi_1^2}{(U_1-B)(U_1-C)-D^2}=\frac{\cos\psi_1^2}{(U_1-C)(U_1-A)-E^2}$$
$$=\frac{\cos\chi_1^2}{(U_1-A)(U_1-B)-F^2}.$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$13)\quad L=\{(U_1-B)(U_1-C)-D^2\}+\{(U_1-C)(U_1-A)-E^2\}$$
$$+\{(U_1-A)(U_1-B)-F^2\},$$

so erhält man mittelst der Gleichung

$$\cos\varphi_1^2+\cos\psi_1^2+\cos\chi_1^2=1$$

leicht:

$$14)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1^2=\dfrac{(U_1-B)(U_1-C)-D^2}{L}, \\ \cos\psi_1^2=\dfrac{(U_1-C)(U_1-A)-E^2}{L}, \\ \cos\chi_1^2=\dfrac{(U_1-A)(U_1-B)-F^2}{L}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 3) gestatten natürlich eine ganz ähnliche Behandlung, was aber hier nicht weiter ausgeführt zu werden braucht.

Die drei Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptaxen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sind nach 6) respective die drei Grössen $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$.

§. 6.

Man kann sich die Lage der dem Punkte O entsprechenden rechtwinkligen Hauptaxen auf eine bemerkenswerthe Weise durch eine geometrische Construction deutlich machen.

In dem im vorhergehenden Paragraphen betrachteten, durch den Punkt O gelegten rechtwinkligen Systeme der xyz bezeichne man jetzt die veränderlichen Coordinaten durch X, Y, Z, und denke sich nun eine Fläche des zweiten Grades beschrieben, deren Gleichung

$$1)\quad AX^2+BY^2+CZ^2-2DYZ-2EZX-2FXY=1$$

ist, wo die Coefficienten A, B, C, D, E, F dieselbe Bedeutung haben, wie im vorhergehenden Paragraphen, so dass nämlich

$$2)\quad \left\{\begin{array}{lll} A=\Sigma m(y^2+z^2), & B=\Sigma m(z^2+x^2), & C=\Sigma m(x^2+y^2); \\ D=\Sigma myz, & E=\Sigma mzx, & F=\Sigma mxy \end{array}\right.$$

ist.

Um zu ermitteln, zu welcher Gattung der Flächen des zweiten Grades die in Rede stehende Fläche gehört, lege man durch den Punkt O als Anfang der Coordinaten eine beliebige gerade Linie, deren Gleichungen

$$3)\qquad Y=\alpha X,\quad Z=\beta X$$

sein mögen. Bezeichnet man nun die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser geraden Linie mit der durch die Gleichung 1) charakterisirten Fläche des zweiten Grades im Allgemeinen durch u, v, w; so hat man zur Bestimmung dieser Coordinaten nach 1) und 3) die drei folgenden Gleichungen:

$$(A+\alpha^2B+\beta^2C-2\alpha\beta D-2\beta E-2\alpha F)u^2=1,$$

$$v=\alpha u,\quad w=\beta u.$$

Nun ist aber nach 2):

$$\begin{aligned} & A+\alpha^2B+\beta^2C-2\alpha\beta D-2\beta E-2\alpha F \\ = \quad & \Sigma m(y^2+z^2)+\alpha^2\Sigma m(z^2+x^2)+\beta^2\Sigma m(x^2+y^2) \\ & -2\alpha\beta\Sigma myz-2\beta\Sigma mzx-2\alpha\Sigma mxy \\ = \quad & \alpha^2\Sigma mx^2-2\alpha\Sigma mxy+\Sigma my^2 \\ & +\beta^2\Sigma mx^2-2\beta\Sigma mzx+\Sigma mz^2 \\ & +\alpha^2\Sigma mz^2-2\alpha\beta\Sigma myz+\beta^2\Sigma my^2 \\ = \quad & \Sigma m(\alpha x-y)^2+\Sigma m(\beta x-z)^2+\Sigma m(\alpha z-\beta y)^2, \end{aligned}$$

also nach dem Obigen mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$4)\quad \left\{\begin{aligned} u&=\pm\frac{1}{\sqrt{\Sigma m(\alpha x-y)^2+\Sigma m(\beta x-z)^2+\Sigma m(\alpha z-\beta y)^2}}, \\ v&=\pm\frac{\alpha}{\sqrt{\Sigma m(\alpha x-y)^2+\Sigma m(\beta x-z)^2+\Sigma m(\alpha z-\beta y)^2}}, \\ w&=\pm\frac{\beta}{\sqrt{\Sigma m(\alpha x-y)^2+\Sigma m(\beta x-z)^2+\Sigma m(\alpha z-\beta y)^2}}. \end{aligned}\right.$$

Weil der gemeinschaftliche Nenner dieser Brüche offenbar stets eine reelle Grösse ist, so giebt es für u, v, w immer zwei Systeme reeller, absolut gleicher, dem Zeichen nach entgegengesetzter Werthe. Daher schneidet jede ganz beliebig durch den Punkt O gezogene gerade Linie die durch die Gleichung 1) charakterisirte Fläche des zweiten Grades in zwei von dem Punkte O offenbar gleich weit entfernten Punkten, eine Eigenschaft, welche unter den Flächen des zweiten Grades nur das Ellipsoid haben kann. Also ist die durch die Gleichung 1) charakterisirte Fläche des zweiten Grades ein Ellipsoid, und der Punkt O ist der Mittelpunkt dieses Ellipsoids, also jede durch O gezogene gerade Linie ein Durchmesser desselben.

Wir wollen uns nun die Aufgabe stellen, den oder die Durchmesser des durch die Gleichung 1) charakterisirten Ellipsoids zu ermitteln, welche auf der Fläche desselben normal stehen. Die Gleichungen eines solchen Durchmessers seien überhaupt

$$\frac{X}{\cos\varphi_1}=\frac{Y}{\cos\psi_1}=\frac{Z}{\cos\chi_1}.$$

Weil die partiellen Differentialquotienten der Function

$$AX^2+BY^2+CZ^2-2DYZ-2EZX-2FXY-1$$

nach X, Y, Z respective

$$2(AX-FY-EZ),$$
$$2(BY-DZ-FX),$$
$$2(CZ-EX-DY)$$

sind, so hat man, wenn man die Coordinaten der Durchschnittspunkte des gesuchten Durchmessers mit dem Ellipsoid von jetzt an durch X, Y, Z bezeichnet, zu deren Bestimmung nach den Lehren der analytischen Geometrie die folgenden Gleichungen:

$$\frac{AX-FY-EZ}{X}=\frac{BY-DZ-FX}{Y}=\frac{CZ-EX-DY}{Z};$$

und zur Bestimmung der Winkel φ_1, ψ_1, χ_1 hat man daher nach dem Obigen die folgenden Gleichungen:

$$\frac{A\cos\varphi_1-F\cos\psi_1-E\cos\chi_1}{\cos\varphi_1}=\frac{B\cos\psi_1-D\cos\chi_1-F\cos\varphi_1}{\cos\psi_1}$$
$$=\frac{C\cos\chi_1-E\cos\varphi_1-D\cos\psi_1}{\cos\chi_1}.$$

Bezeichnet man jede der drei vorstehenden gleichen Grössen durch U, so erhält man die drei Gleichungen:

$$5)\qquad \begin{cases} (U_1 - A)\cos\varphi_1 + F\cos\psi_1 + E\cos\chi_1 + 0, \\ F\cos\varphi_1 + (U_1 - B)\cos\psi_1 + D\cos\chi_1 = 0, \\ E\cos\varphi_1 + D\cos\psi_1 + (U_1 - C)\cos\chi_1 = 0; \end{cases}$$

und nimmt man hierzu noch die bekannte Gleichung

$$6)\qquad \cos\varphi_1{}^2 + \cos\psi_1{}^2 + \cos\chi_1{}^2 = 1,$$

so hat man zur Bestimmung der Grössen U_1 und φ_1, ψ_1, χ_1 ganz dieselben Gleichungen, welche wir im vorhergehenden Paragraphen zur Bestimmung der dort auf gleiche Weise bezeichneten Grössen gefunden haben.

Man sieht also, dass die drei rechtwinkligen Hauptaxen in Bezug auf den Punkt O mit den drei auf dem durch die Gleichung

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY = 1$$

charakterisirten Ellipsoid normalen Durchmessern desselben, d. h. mit den drei Axen dieses Ellipsoids, übereinstimmen.

VII.

Zur Theorie der Differenzenreihen.

Von

Herrn Doctor *Oskar Werner*,
Lehrer der Mathematik in Dresden.

Wenden wir auf jedes Glied der Reihe

$$a_0 + n_2 a_1 + n_4 a_2 + n_6 a_3 + \ldots,$$

in welcher n_x den $x$ten Binomialcoefficienten für den Exponenten n bezeichnet und a_0, a_1, a_2, a_3,.... willkührliche Grössen bedeuten, den bekannten Satz

$$a_n = a_0 + n_1 \varDelta a_0 + n_2 \varDelta^2 a_0 + \ldots + n_n \varDelta^n a_0$$

an, so erhalten wir

$$a_0 + n_2 a_1 + n_4 a_2 + n_6 a_3 + \ldots = a_0 + n_2 (a_0 + \varDelta a_0)$$
$$+ n_4 (a_0 + 2\varDelta a_0 + \varDelta^2 a_0) + n_6 (a_0 + 3\varDelta a_0 + 3\varDelta^2 a_0 + \varDelta^3 a_0) + \ldots,$$

oder, wenn wir die gleich hohen Differenzen vereinigen und zur Abkürzung

$$K_m = n_{2m} + (m+1)_1 n_{2(m+1)} + (m+2)_2 n_{2(m+2)} + \ldots$$

setzen,

$$a_0 + n_2 a_1 + n_4 a_2 + n_6 a_3 + \ldots = K_0 a_0 + K_1 \varDelta a_0$$
$$+ K_2 \varDelta^2 a_0 + K_3 \varDelta^3 a_0 + \ldots.$$

Um nun die Coefficienten K_0, K_1, K_2,.... in Form eines einfachen Ausdruckes zu bestimmen, gehen wir von folgender speziellen Hauptreihe aus:

$$a_0 = x^n, \quad a_1 = x^{n-2}y^2, \quad a_2 = x^{n-4}y^4, \ldots$$

und leiten aus derselben nachstehende Differenzenreihen ab:

erste Differenzenreihe:

$$\Delta a_0 = -x^{n-2}(x^2-y^2), \quad \Delta a_1 = -x^{n-4}y^2(x^2-y^2), \ldots;$$

zweite Differenzenreihe:

$$\Delta^2 a_0 = x^{n-4}(x^2-y^2)^2, \quad \Delta^2 a_1 = x^{n-6}y^2(x^2-y^2)^2, \ldots;$$

dritte Differenzenreihe:

$$\Delta^3 a_0 = -x^{n-6}(x^2-y^2)^3, \quad \Delta^3 a_1 = -x^{n-8}y^2(x^2-y^2)^3, \ldots,$$

u. s. w.

Wir haben daher nach dem Vorhergehenden:

$$x^n + n_2 x^{n-2}y^2 + n_4 x^{n-4}y^4 + \ldots = K_0 x^n - K_1 x^{n-2}(x^2-y^2)$$
$$+ K_2 x^{n-4}(x^2-y^2)^2 - \ldots,$$

oder nach dem Binomialtheorem für positive ganze Exponenten:

$$\frac{(x+y)^n + (x-y)^n}{2} = K_0 x^n - K_1 x^{n-2}(x^2-y^2) + K_2 x^{n-4}(x^2-y^2)^2 - \ldots,$$

folglich, wenn wir $x+y=\alpha$ und $x-y=\beta$, daher $x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $y=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ setzen:

$$\alpha^n + \beta^n = \frac{1}{2^{n-1}} K_0 (\alpha+\beta)^n - \frac{1}{2^{n-3}} K_1 (\alpha+\beta)^{n-2}(\alpha\beta)^1$$
$$+ \frac{1}{2^{n-5}} K_2 (\alpha+\beta)^{n-4}(\alpha\beta)^2 - \ldots.$$

Andererseits ist aber nach einem bekannten Satze *):

$$\alpha^n + \beta^n = (\alpha+\beta)^n - n_2 \cdot \frac{2_1}{(n-1)_1}(\alpha+\beta)^{n-2}(\alpha\beta)^1$$
$$+ n_4 \cdot \frac{4_2}{(n-1)_2}(\alpha+\beta)^{n-4}(\alpha\beta)^2 - \ldots.$$

Wir erhalten daher durch Vergleichung:

$$K_0 = 2^{n-1}, \quad K_1 = 2^{n-3} n_2 \cdot \frac{2_1}{(n-1)_1}, \quad K_2 = 2^{n-5} n_4 \cdot \frac{4_2}{(n-1)_2}, \ldots$$
$$\ldots K_m = 2^{n-2m-1} \cdot n_{2m} \cdot \frac{(2m)_m}{(n-1)_m},$$

*) Archiv Theil XXII. Seite 295. Formel 60.

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 2^{n-2m-1}\,.\,n_{2m}\cdot\frac{(2m)_m}{(n-1)_m} &= n_{2m}+(m+1)_1\,.\,n_{2(m+1)} \\ &+(m+2)_2\,.\,n_{2(m+2)}+\ldots. \end{aligned}\right.$$

und

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} a_0+n_2a_1+n_4a_2+n_6a_3+\ldots.&=2^{n-1}a_0+2^{n-3}.n_2\cdot\frac{2_1}{(n-1)_1}\varDelta a_0 \\ &+2^{n-5}n_4\cdot\frac{4_2}{(n-1)_2}\varDelta^2 a_0+2^{n-7}n_6\cdot\frac{6_3}{(n-1)_3}\varDelta^3 a_0+\ldots. \end{aligned}\right.$$

Eine ähnliche Formel erhalten wir, wenn wir von der Hauptreihe

$$A_0=a_0,\quad A_1=-\varDelta a_0,\quad A_2=\varDelta^2 a_0,\ldots.\ A_n=(-1)^n\varDelta^n a_0,\ldots.$$

ausgehen und vermittels der Relation

$$\varDelta^r a_{n-1}+\varDelta^{r+1}a_{n-1}=\varDelta^r a_n$$

deren Differenzenreihen bilden. Diese sind:

erste Differenzenreihe:

$$\varDelta A_0=-a_1,\quad \varDelta A_1=\varDelta a_1,\quad \varDelta A_2=-\varDelta^2 a_1,\ldots.;$$

zweite Differenzenreihe:

$$\varDelta^2 A_0=a_2,\quad \varDelta^2 A_1=-\varDelta a_2,\quad \varDelta^2 A_2=\varDelta^2 a_2,\ldots.;$$

u. s. w.

$k$te Differenzenreihe:

$$\varDelta^k A_0=(-1)^k a_k,\quad \varDelta^k A_1=(-1)^{k-1}\varDelta a_k,\quad \varDelta^k A_2=(-1)^{k-2}\varDelta^2 a_k,\ldots.$$

Nach (2) ist aber:

$$A_0+n_2A_1+n_4A_2+n_6A_3+\ldots.=2^{n-1}A_0+2^{n-3}n_2\cdot\frac{2_1}{(n-1)_1}\varDelta A_0$$
$$+2^{n-5}n_4\cdot\frac{4_2}{(n-1)_2}\varDelta^2 A_0+2^{n-7}n_6\cdot\frac{6_3}{(n-1)_3}\varDelta^3 A_0+\ldots.;$$

daher ergiebt sich aus dem unmittelbar Vorangehenden:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} a_0-n_2\varDelta a_0+n_4\varDelta^2 a_0-n_6\varDelta^3 a_0+\ldots.&=2^{n-1}a_0-2^{n-3}n_2\cdot\frac{2_1}{(n-1)_1}a_1 \\ &+2^{n-5}n_4\cdot\frac{4_2}{(n-1)_2}a_2-2^{n-7}n_6\cdot\frac{6_3}{(n-1)_3}a_3+\ldots. \end{aligned}\right.$$

Nehmen wir z. B. $a_0=1$, $a_1=-\operatorname{tg}\varphi^2$, $a_2=\operatorname{tg}\varphi^4$, $a_3=-\operatorname{tg}\varphi^6$,.... an, so erhalten wir

$$\varDelta a_0=-\frac{1}{\cos\varphi^2},\quad \varDelta^2 a_0=\frac{1}{\cos\varphi^4},\quad \varDelta^3 a_0=-\frac{1}{\cos\varphi^6},\ldots.$$

daher nach Formel (2):

$$1-n_2\operatorname{tg}\varphi^2+n_4\operatorname{tg}\varphi^4-n_6\operatorname{tg}\varphi^6+\ldots.=2^{n-1}-2^{n-3}n_2.\frac{2_1}{(n-1)_1}.\frac{1}{\cos\varphi^2}$$
$$+2^{n-5}n_4.\frac{4_2}{(n-1)_2}.\frac{1}{\cos\varphi^4}-2^{n-7}.n_6.\frac{6_3}{(n-1)_3}.\frac{1}{\cos\varphi^6}+\ldots.$$

oder nach einem bekannten goniometrischen Satze:

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}2\cos n\varphi&=(2\cos\varphi)^n-n_2.\frac{2_1}{(n-1)_1}(2\cos\varphi)^{n-2}\\&+n_4.\frac{4_2}{(n-1)_2}(2\cos\varphi)^{n-4}-\ldots.\end{aligned}\right.$$

Andere Anwendungen von den Formeln (2) und (3) zu machen, überlasse ich dem Leser. Namentlich empfehle ich in dieser Beziehung für a_0, a_1, a_2,.... Grössen zu setzen, die in arithmetischer Reihe höherer Ordnung fortschreiten.

VIII.

Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes.

Von

Herrn Doctor *Oskar Werner*,

Lehrer der Mathematik in Dresden.

1) Das aus den geraden Linien AB und CD als Seiten construirte Rechteck wollen wir durch $AB\times CD$, das aus AB als Seite gebildete Quadrat aber durch AB^2 bezeichnen.

2) Durch Betrachtung einer höchst einfachen Figur erhält man sofort:

$$(AB+CD)\times EF=AB\times EF+CD\times EF$$

und

$$(AB-CD)\times EF=AB\times EF-CD\times EF.$$

3) Das Quadrat $ABFE$ (Taf. II. Fig. 24.) über der Kathete AB des rechtwinklichen Dreiecks ABC verwandle man in das Parallelogramm $ACGE$ über der Hypotenuse AC als Grundlinie, und dieses wiederum in das Rechteck $ACHJ$. Es ist daher $AB^2=AC\times AJ$. Zieht man ferner noch die Höhe BD, so lässt sich leicht nachweisen, dass die Dreiecke AJE und ABD congruent sind. Hieraus folgt $AJ=AD$, daher nach dem Vorhergehenden

$$AB^2=AC\times AD.$$

4) Nach 3) ist

$$AB^2=AC\times AD \text{ und } BC^2=AC\times CD,$$

also

$$AB^2+BC^2=AC\times AD+AC\times CD,$$

oder nach 2):

$$AB^2+BC^2=AC\times(AD+CD)=AC\times AC,$$

d. i.

$$AB^2+BC^2=AC^2.$$

5) Zufolge 4) ist

$$BD^2=AB^2-AD^2,$$

daher nach 3)

$$BD^2=AC\times AD-AD\times AD,$$

und nach 2)

$$BD^2=AD\times(AC-AD),$$

d. i.

$$BD^2=AD\times CD.$$

Die Darstellung des pythagoräischen Lehrsatzes, wie ich sie im Vorhergehenden gegeben habe, verdient ihrer Einfachheit wegen in die Lehrbücher aufgenommen zu werden. Vielleicht ist dieselbe bekannt, jedenfalls aber nicht so bekannt, wie sie es nach meiner Meinung verdient.

IX.

Herleitung der Neper'schen Analogieen.

Von

Herrn Doctor *Oskar Werner*,

Lehrer der Mathematik in Dresden.

In Taf. II. Fig. 23. wollen wir die Kantenwinkel NSO, MSO und MSN des körperlichen Dreieckes $SMNO$ der Reihe nach durch a, b, c und die diesen Kantenwinkeln gegenüberstehenden Neigungswinkel der das körperliche Dreieck bildenden Ebenen durch A, B, C bezeichnen. Man gebe SO die Länge 1 und ziehe OP senkrecht auf die Ebene MSN; aus dem Punkte P, wo das Perpendikel OP die Ebene schneidet, ziehe man PM und PN auf SM und SN senkrecht; ferner verbinde man O und M, sowie O und N durch die Geraden OM und ON und verlängere PN bis zum Punkte R in der Kante SM. Endlich mache man $PQ=MP$ und ziehe OQ. Dann ist offenbar

$$MS=\cos b,\quad NS=\cos a,\quad MO=OQ=\sin b,\quad ON=\sin a,$$

$$\angle PMO=\angle PQO=A \text{ und } \angle PNO=B.$$

Da das Viereck $SMPN$ zwei gegenüberstehende rechte Winkel enthält, mithin ein Sehnenviereck ist, so folgt:

$$\angle MSN=\angle MPR=c.$$

Die noch unbekannten Seiten MP und PN dieses Vierecks erhält man durch folgendes Verfahren:

Addirt man zu der aus dem rechtwinkligen Dreieck MPR sich ergebenden Gleihung $MR=MP.\operatorname{tg}c$ die Gleichung $MS=\cos b$, so erhält man:

$$RS=MP.\operatorname{tg}c+\cos b$$

oder

$$\frac{\cos a}{\cos c} = MP.\operatorname{tg} c + \cos b,$$

also

$$MP = PQ = \frac{\cos a - \cos b . \cos c}{\sin c}.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich

$$PN = \frac{\cos b - \cos a . \cos c}{\sin c};$$

daher, wenn man diese beiden Gleichungen addirt:

$$PQ + PN = \frac{(\cos a + \cos b)(1 - \cos c)}{\sin c}$$

oder

$$NQ = (\cos a + \cos b) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c.$$

Setzt man endlich diesen Werth nebst den übrigen oben angegebenen Werthen für die Bestandtheile des Dreieckes NOQ in die hinlänglich bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie

$$\frac{ON + OQ}{NQ} = \frac{\cos \frac{1}{2}(NQO - ONQ)}{\cos \frac{1}{2}(NQO + ONQ)}$$

und

$$\frac{ON - OQ}{NQ} = \frac{\sin \frac{1}{2}(NQO - ONQ)}{\sin \frac{1}{2}(NQO + ONQ)}$$

ein, so erhalten wir

$$\frac{\sin a + \sin b}{(\cos a + \cos b) \operatorname{tg} \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B)}$$

und

$$\frac{\sin a - \sin b}{(\cos a + \cos b) \operatorname{tg} \frac{1}{2} c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}(A + B)},$$

folglich mittels Anwendung einfacher goniometrischer Formeln:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a + b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c,$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}(A + B)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c.$$

Vertauscht man endlich die Kantenwinkel mit den Supplementen der gegenüberstehenden Neigungswinkel der Ebenen des körperlichen Dreiecks und umgekehrt, so ergeben sich hieraus die Formeln

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C,$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C,$$

welche in Verbindung mit den beiden vorhergehenden die Neper'schen Analogieen genannt werden.

X.

Formeln für die Summen- und Differenzen-Rechnung.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Privatdocenten der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Die Euler'sche Summenformel ist bekanntlich folgende:

(1)

$$\Sigma f(x)=C+\frac{1}{h}\int f(x)dx-\tfrac{1}{2}f(x)+A_1hf'(x)-A_3h^3f'''(x)+A_5h^5f^{V}(x)-\ldots,$$

wo C eine willkührliche Constante oder eine solche periodische Function von x bezeichnet, welche ungeändert bleibt, wenn x um h wächst, wo ferner A_1, A_3, A_5.... Zahlen sind, welche mit den Bernoulli'schen in folgendem Zusammenhange stehen:

$$B_{2i+1}=(2i+2)!\,A_{2i+1}.$$

Diese Reihe zeigt in ihren ersten Gliedern einen auffallenden Mangel an Regelmässigkeit; diess bewog mich, eine andere Form für $\Sigma f(x)$ zu suchen, und ich fand, dass man statt der Gleichung (1) folgende Gleichung setzen könne:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} h\Sigma f(x) &= \int f\left(x-\frac{h}{2}\right)dx + \left(\frac{h}{2}\right)^2 C_2 f'\left(x-\frac{h}{2}\right) \\ &+ \left(\frac{h}{2}\right)^4 C_4 f'''\left(x-\frac{h}{2}\right) + \left(\frac{h}{2}\right)^6 C_6 f^V\left(x-\frac{h}{2}\right) + \cdots, \end{aligned}\right.$$

deren zweiter Theil noch durch eine willkührliche Constante oder durch eine periodische Function, die bei dem Wachsen von x um h ungeändert bleibt, zu completiren ist. Die hiebei auftretenden Zahlen C_2, C_4, C_6, ... ergeben sich aus der Auflösung folgender Gleichungen:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &C_2 + \frac{1}{3!} = 0, \\ &C_4 + \frac{C_2}{3!} + \frac{1}{5!} = 0, \\ &C_6 + \frac{C_4}{3!} + \frac{C_2}{5!} + \frac{1}{7!} = 0, \\ &C_8 + \frac{C_6}{3!} + \frac{C_4}{5!} + \frac{C_2}{7!} + \frac{1}{9!} = 0. \end{aligned}\right.$$

Der Beweis, dass die Gleichung (2) richtig ist, lässt sich leicht führen. Nimmt man nämlich von beiden Seiten derselben die endlichen Differenzen, so erhält man:

$$\begin{aligned} hf(x) &= \int \Delta f\left(x-\frac{h}{2}\right)dx + \left(\frac{h}{2}\right)^2 C_2 \Delta f'\left(x-\frac{h}{2}\right) \\ &+ \left(\frac{h}{2}\right)^4 C_4 \Delta f'''\left(x-\frac{h}{2}\right) + \left(\frac{h}{2}\right)^6 C_6 \Delta f^V\left(x-\frac{h}{2}\right) + \cdots, \end{aligned}$$

oder anders geschrieben:

$$\begin{aligned} hf(x) &= \int\left[f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right]dx + \left(\frac{h}{2}\right)^2 C_2\left[f'\left(x+\frac{h}{2}\right) - f'\left(x-\frac{h}{2}\right)\right] \\ &+ \left(\frac{h}{2}\right)^4 C_4\left[f'''\left(x+\frac{h}{2}\right) - f'''\left(x-\frac{h}{2}\right)\right] \\ &+ \left(\frac{h}{2}\right)^6 C_6\left[f^V\left(x+\frac{h}{2}\right) - f^V\left(x-\frac{h}{2}\right)\right] + \cdots \end{aligned}$$

Entwickelt man die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke, so hat man:

$$
\begin{aligned}
hf(x) = 2\int \Big[& \frac{h}{2} f'(x) + \frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3 f'''(x) + \frac{1}{5!}\left(\frac{h}{2}\right)^5 f^{V}(x) + \frac{1}{7!}\left(\frac{h}{2}\right)^7 f^{VII}(x) + \ldots \Big] dx \\
+ 2\left(\frac{h}{2}\right)^2 C_2 \Big[& \left(\frac{h}{2}\right) f''(x) + \frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3 f^{IV}(x) + \frac{1}{5!}\left(\frac{h}{2}\right)^5 f^{VI}(x) + \ldots \Big] \\
+ 2\left(\frac{h}{2}\right)^4 C_4 \Big[& \left(\frac{h}{2}\right) f^{IV}(x) + \frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3 f^{VI}(x) + \ldots \Big] \\
+ 2\left(\frac{h}{2}\right)^6 C_6 \Big[& \left(\frac{h}{2}\right) f^{VI}(x) + \ldots \Big] \\
+ \; & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{aligned}
$$

und wenn man diess gehörig reducirt:

$$
\begin{aligned}
hf(x) = hf(x) & + 2\left(\frac{h}{2}\right)^3 f''(x)\left(\frac{1}{3!} + C_2\right) + 2\left(\frac{h}{2}\right)^5 f^{IV}(x)\left(\frac{1}{5!} + \frac{C_2}{3!} + C_4\right) \\
& + 2\left(\frac{h}{2}\right)^7 f^{VI}(x)\left(\frac{1}{7!} + \frac{C_2}{5!} + \frac{C_4}{3!} + C_6\right) + \ldots,
\end{aligned}
$$

was in Folge der Gleichungen (3) wirklich identisch Null ist. Die Zahlen C_2, C_4, C_6, ... erscheinen in der Analysis auch noch bei anderen Gelegenheiten, so ist z. B.

(4) $$x \operatorname{cosec} x = 1 - C_2 x^2 + C_4 x^4 - C_6 x^6 + \ldots.$$

Denn schreibt man diese Gleichung in folgender Form:

$$\frac{x}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots} = 1 - C_2 x^2 + C_4 x^4 - C_6 x^6 + \ldots,$$

... beiderseits mit dem Nenner des ersten ... multiplicirt:

$$\ldots x^3 + \left.\begin{matrix} C_4 \\ \frac{C_2}{3!} \\ \frac{1}{5!} \end{matrix}\right\} x^5 - \left.\begin{matrix} -C_6 \\ -\frac{C_4}{3!} \\ -\frac{C_2}{5!} \\ -\frac{1}{7!} \end{matrix}\right\} x^7 + \ldots,$$

... ist, weil die Coefficienten von x^3, x^5, x^7, ... vermöge der Gleichungen (3) sämmtlich Null sind.

Wir wollen nun übergehen zur Bestimmung von $h^2\Sigma^2 f(x)$. Zu dem Behufe multiplicire man beide Theile der Gleichung (2) mit h und nehme dann beiderseits die Summe, man hat so:

$$h^2\Sigma^2 f(x) = h\int \Sigma f\left(x-\frac{h}{2}\right)dx + h\left(\frac{h}{2}\right)^2 C_2 \Sigma f'\left(x-\frac{h}{2}\right)$$
$$+ h\left(\frac{h}{2}\right)^4 C_4 \Sigma f'''\left(x-\frac{h}{2}\right) + h\left(\frac{h}{2}\right)^6 C_6 \Sigma f^V\left(x-\frac{h}{2}\right) + \ldots,$$

oder mit Anwendung der Gleichung (2):

$$h^2\Sigma^2 f(x) = \int dx \,\{\int f(x-h)dx$$
$$+\left(\frac{h}{2}\right)^2 C_2 f'(x-h) + \left(\frac{h}{2}\right)^4 C_4 f'''(x-h) + \left(\frac{h}{2}\right)^6 C_6 f^V(x-h) + \ldots\}$$
$$+\left(\frac{h}{2}\right)^2 C_2 \{\int f'(x-h)dx + \left(\frac{h}{2}\right)^2 C_2 f''(x-h) + \left(\frac{h}{2}\right)^4 C_4 f^{IV}(x-h) + \ldots\}$$
$$+\left(\frac{h}{2}\right)^4 C_4 \{\int f'''(x-h)dx + \left(\frac{h}{2}\right)^2 C_2 f^{IV}(x-h) + \ldots\}$$
$$+\left(\frac{h}{2}\right)^6 C_6 \{\int f^V(x-h)dx + \ldots\}$$
$$+ \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Reducirt man diess gehörig, so erhält man:

$$h^2\Sigma^2 f(x) = \iint f(x-h)dx^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 .2C_2 f(x-h)$$

$$+\left(\frac{h}{2}\right)^4 (2C_4 + C_2^2) f''(x-h) + \left(\frac{h}{2}\right)^6 (2C_6 + 2C_2C_4) f^{IV}(x-h) + \ldots,$$

was sich so schreiben lässt:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} h^2\Sigma^2 f(x) = \iint f(x-h)dx^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 D_2 f(x-h) \\ + \left(\frac{h}{2}\right)^4 D_4 f''(x+h) + \left(\frac{h}{2}\right)^6 D_6 f'''(x-h) + \ldots, \end{array} \right.$$

wenn man die folgenden Bezeichnungsweisen annimmt:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_2 = 2C_2, \\ D_4 = 2C_4 + C_2^2, \\ D_6 = 2C_6 + 2C_2C_4, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right.$$

Dieselben Zahlen D_2, D_4, D_6, ... kommen auch vor, wenn man die Reihe (4) zum Quadrate erhebt, man hat nämlich:

$$(7) \qquad x^2 \operatorname{cosec}^2 x = 1 - D_2x^2 + D_4x^4 - D_6x^6 + \ldots,$$

wie man sich leicht überzeugen kann. Wollte man zur Berechnung der Zahlen D_2, D_4, D_6, ... Formeln haben, die analog sind den in (3) aufgestellten, so verfahre man so: Es ist

$$(8) \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \frac{(2x)^8}{8} + \ldots\right\},$$

folglich

$$x^2 \operatorname{cosec}^2 x = \frac{2x^2}{\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \frac{(2x)^8}{8!} + \ldots}.$$

Diess mit (7) verglichen führt auf folgende Gleichung:

$$\frac{2x^2}{\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \frac{(2x)^8}{8!} + \ldots} = 1 - D_2x^2 + D_4x^4 - D_6x^6 + \ldots$$

Multiplicirt man beide Theile derselben mit dem Nenner des ersten Theils, so hat man:

so hat man, wenn man beiderseits mit dem Nenner des ersten Theils der Gleichung multiplicirt:

$$x = x - \left.\begin{matrix} C_2 \\ -\frac{1}{3!} \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} C_4 \\ \frac{C_2}{3!} \\ \frac{1}{5!} \end{matrix}\right\} x^5 - \left.\begin{matrix} -C_6 \\ -\frac{C_4}{3!} \\ -\frac{C_2}{5!} \\ -\frac{1}{7!} \end{matrix}\right\} x^7 + \ldots,$$

was identisch ist, weil die Coefficienten von x^3, x^5, x^7,.... vermöge der Gleichungen (3) sämmtlich Null sind.

Wir wollen nun übergehen zur Bestimmung von $h^2\Sigma^2 f(x)$. Zu dem Behufe multiplicire man beide Theile der Gleichung (2) mit h und nehme dann beiderseits die Summe, man hat so:

$$h^2\Sigma^2 f(x) = h\int \Sigma f(x-\tfrac{h}{2})\,dx + h\left(\frac{h}{2}\right)^2 C_2 \Sigma f'(x-\tfrac{h}{2})$$
$$+ h\left(\frac{h}{2}\right)^4 C_4 \Sigma f'''(x-\tfrac{h}{2}) + h\left(\frac{h}{2}\right)^6 C_6 \Sigma f^{V}(x-\tfrac{h}{2}) + \ldots,$$

oder mit Anwendung der Gleichung (2):

$$h^2\Sigma^2 f(x) = \int dx\,\Big\{\int f(x-h)\,dx$$
$$+\left(\frac{h}{2}\right)^2 C_2 f'(x-h) + \left(\frac{h}{2}\right)^4 C_4 f'''(x-h) + \left(\frac{h}{2}\right)^6 C_6 f^{V}(x-h) + \ldots\Big\}$$
$$+\left(\frac{h}{2}\right)^2 C_2 \Big\{\int f'(x-h)\,dx + \left(\frac{h}{2}\right)^2 C_2 f''(x-h) + \left(\frac{h}{2}\right)^4 C_4 f^{IV}(x-h) + \ldots\Big\}$$
$$+\left(\frac{h}{2}\right)^4 C_4 \Big\{\int f'''(x-h)\,dx + \left(\frac{h}{2}\right)^2 C_2 f^{IV}(x-h) + \ldots\Big\}$$
$$+\left(\frac{h}{2}\right)^6 C_6 \Big\{\int f^{V}(x-h)\,dx + \ldots\Big\}$$
$$+ \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.$$

Reducirt man diess gehörig, so erhält man:

$$h^2\Sigma^2 f(x) = \iint f(x-h)dx^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 .2C_2 f(x-h)$$

$$+ \left(\frac{h}{2}\right)^4 (2C_4 + C_2^2) f''(x-h) + \left(\frac{h}{2}\right)^6 (2C_6 + 2C_2C_4) f^{IV}(x-h) + \ldots,$$

was sich so schreiben lässt:

$$(5) \quad \begin{cases} h^2\Sigma^2 f(x) = \iint f(x-h)dx^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 D_2 f(x-h) \\ + \left(\frac{h}{2}\right)^4 D_4 f''(x+h) + \left(\frac{h}{2}\right)^6 D_6 f'''(x-h) + \ldots, \end{cases}$$

wenn man die folgenden Bezeichnungsweisen annimmt:

$$(6) \quad \begin{cases} D_2 = 2C_2, \\ D_4 = 2C_4 + C_2^2, \\ D_6 = 2C_6 + 2C_2C_4, \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Dieselben Zahlen D_2, D_4, D_6, ... kommen auch vor, wenn man die Reihe (4) zum Quadrate erhebt, man hat nämlich:

$$(7) \qquad x^2 \operatorname{cosec}^2 x = 1 - D_2x^2 + D_4x^4 - D_6x^6 + \ldots,$$

wie man sich leicht überzeugen kann. Wollte man zur Berechnung der Zahlen D_2, D_4, D_6, ... Formeln haben, die analog sind den in (3) aufgestellten, so verfahre man so: Es ist

$$(8) \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \frac{(2x)^8}{8} + \ldots\right\},$$

folglich

$$x^2 \operatorname{cosec}^2 x = \frac{2x^2}{\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \frac{(2x)^8}{8!} + \ldots}.$$

Diess mit (7) verglichen führt auf folgende Gleichung:

$$\frac{2x^2}{\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \frac{(2x)^8}{8!} + \ldots} = 1 - D_2x^2 + D_4x^4 - D_6x^6 + \ldots.$$

Multiplicirt man beide Theile derselben mit dem Nenner des ersten Theils, so hat man:

$$2x^2 = \frac{2^2}{2!}x^2 - \left.\begin{matrix} \frac{2^2}{2!}D^2 \\ -\frac{2^4}{4!} \end{matrix}\right\} x^4 \;\; \left.\begin{matrix} +\frac{2^2}{2!}D_4 \\ +\frac{2^4}{4!}D_2 \\ +\frac{2^6}{6!} \end{matrix}\right\} x^6 \;\; \left.\begin{matrix} -\frac{2^2}{2!}D_6 \\ -\frac{2^4}{4!}D_4 \\ -\frac{2^6}{6!}D_2 \\ -\frac{2^8}{8!} \end{matrix}\right\} x^8 + \ldots,$$

und diess gibt uns folgende, mit (3) analoge Gleichungen:

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{D_2}{2!} + \frac{2^2}{4!} = 0, \\ &\frac{D_4}{2!} + \frac{2^2 D_2}{4!} + \frac{2^4}{6!} = 0, \\ &\frac{D_6}{2!} + \frac{2^2 D_4}{4!} + \frac{2^4 D_2}{6!} + \frac{2^6}{8!} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Auf ganz ähnliche Weise, wie wir aus der Gleichung (2) die Gleichung (5) abgeleitet haben, leiten wir nun aus (5) eine Gleichung ab, die uns $h^3\Sigma^3 f(x)$ gibt. Wir multipliciren zu dem Behufe die Gleichung (5) mit h, und nehmen beiderseits die Summe; diess gibt:

$$h^3\Sigma^3 f(x) = h\iint \Sigma f(x-h)\,dx^2 + h\left(\frac{h}{2}\right)^2 D^2\,\Sigma f(x-h)$$
$$+ h\left(\frac{h}{2}\right)^4 D_4 \Sigma f''(x-h) + h\left(\frac{h}{2}\right)^6 D_6 \Sigma f^{IV}(x-h) + \ldots.$$

Jedes einzelne dieser Glieder ist eine Summe, die sich vermöge der Gleichung (2) in eine Reihe ausdrücken lässt; thut man diess, so erhält man:

$$\begin{aligned} h^3\Sigma^3 f(x) = \iint dx^2 \Big\{ & \int f(x-\tfrac{1}{2}h)\,dx \\ & + \left(\frac{h}{2}\right)^2 C_2 f'(x-\tfrac{1}{2}h) + \left(\frac{h}{2}\right)^4 C_4 f'''(x-\tfrac{1}{2}h) + \left(\frac{h}{2}\right)^6 C_6 f^{V}(x-\tfrac{1}{2}h) + \ldots \Big\} \\ & + \left(\frac{h}{2}\right)^2 D_2 \Big\{ \int f(x-\tfrac{1}{2}h)\,dx + \left(\frac{h}{2}\right)^2 C_2 f'(x-\tfrac{1}{2}h) + \left(\frac{h}{2}\right)^4 C_4 f'''(x-\tfrac{1}{2}h) + \ldots \Big\} \\ & + \left(\frac{h}{2}\right)^4 D_4 \Big\{ \int f''(x-\tfrac{1}{2}h)\,dx + \left(\frac{h}{2}\right)^2 C_2 f'''(x-\tfrac{1}{2}h) + \ldots \Big\} \\ & + \left(\frac{h}{2}\right)^6 D_6 \Big\{ \int f^{IV}(x-\tfrac{1}{2}h)\,dx + \ldots \Big\} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und reducirt man es, so ist:

$$h^3\Sigma^3 f(x) = \iiint f(x-\tfrac{3}{2}h)dx^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 (C_2+D_2)\int f(x-\tfrac{3}{2}h)dx$$

$$+ \left(\frac{h}{2}\right)^4 (C_4 + C_2D_2 + D_4) f'(x-\tfrac{3}{2}h)$$

$$+ \left(\frac{h}{2}\right)^6 (C_6 + C_4D_2 + C_2D_4 + D_6) f'''(x-\tfrac{3}{2}h) + \ldots,$$

was wir so schreiben wollen:

$$(10) \quad \begin{cases} h^3\Sigma^3 f(x) = \iiint f(x-\tfrac{3}{2}h)dx^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 E_2 \int f(x-\tfrac{3}{2}h)dx \\ + \left(\frac{h}{2}\right)^4 E_4 f'(x-\tfrac{3}{2}h) + \left(\frac{h}{2}\right)^6 E_6 f'''(x-\tfrac{3}{2}h) + \ldots \end{cases}$$

Die Zahlen E_2, E_4, E_6, ... haben folgende Bedeutungen:

$$(11) \quad \begin{cases} E_2 = C_2 + D_2, \\ E_4 = C_4 + C_2D_2 + D_4, \\ E_6 = C_6 + C_4D_2 + C_2D_4 + D_6, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

und erscheinen auch, wenn man die Gleichungen (4) und (7) mit einander multiplicirt; denn es ist:

$$(12) \quad x^3 \operatorname{cosec}^3 x = 1 - E_2x^2 + E_4x^4 - E_6x^6 + \ldots$$

Bemerkt man, dass

$$(13)$$

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} = \frac{x^3}{3!}\,\frac{3^3-3}{4} - \frac{x^5}{5!}\,\frac{3^5-3}{4} + \frac{x^7}{7!}\,\frac{3^7-3}{4} - \ldots,$$

folglich

$$x^3 \operatorname{cosec}^3 x = \frac{4x^3}{x^3 . \frac{3^3-3}{3!} - x^5\frac{3^5-3}{5!} + x^7\frac{3^7-3}{7!} - \ldots}$$

ist, so hat man durch Gleichstellung dieses Ausdruckes mit dem in (12) angegebenen:

$$\frac{4}{\frac{3^3-3}{3!}-x^2\frac{3^5-3}{5!}+x^4\frac{3^7-3}{7!}-\ldots}=1-E_2x^2+E_4x^4-E_6x^6+\ldots,$$

woraus folgende, den Gleichungen (3) und (9) analoge Gleichungen folgen:

$$(14)\quad\begin{cases}\dfrac{E_2}{3!}+\dfrac{1+3^2}{5!}=0,\\[2ex] \dfrac{E_4}{3!}+\dfrac{1+3^2}{5!}E_2+\dfrac{1+3^2+3^4}{7!}=0,\\[2ex] \dfrac{E_6}{3!}+\dfrac{1+3^2}{5!}E_4+\dfrac{1+3^2+3^4}{7!}E_2+\dfrac{1+3^2+3^4+3^6}{9!}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Setzt man diese Analyse fort, so findet man ganz allgemein:

$$(15)\quad\begin{cases}h^n\Sigma^n f(x)=\displaystyle\int^{(n)}f(x-\tfrac{n}{2}h)dx^n+\left(\frac{h}{2}\right)^2M_2\int^{(n-2)}f(x-\tfrac{n}{2}h)dx^{n-2}\\ \qquad+\left(\dfrac{h}{2}\right)^4M_4\displaystyle\int^{(n-4)}f(x-\tfrac{n}{2}h)\,dx^{n-4}\\ \qquad+\left(\dfrac{h}{2}\right)^6M_6\displaystyle\int^{(n-6)}f(x-\tfrac{n}{2}h)\,dx^{n-6}+\ldots,\end{cases}$$

wobei zu bemerken ist, dass das erste, nullte und $-r$te Integral definirt wird durch die Gleichungen:

$$\int^{(1)}f(x-\tfrac{n}{2}h)dx^1=\int f(x-\tfrac{n}{2}h)\,dx,$$

$$\int^{(0)}f(x-\tfrac{n}{2}h)dx^0=f(x-\tfrac{n}{2}h),$$

$$\int^{(-r)}f(x-\tfrac{n}{2}h)dx^{-r}=f^{(r)}(x-\tfrac{n}{2}h);$$

ferner dass $M_2, M_4, M_6,\ldots$ dieselben Zahlen sind, die in der Reihe

$$(16)\qquad x^n\operatorname{cosec}^n x=1-M_2x^2+M_4x^4-M_6x^6+\ldots,$$

oder, was eigentlich dasselbe ist, in der Reihe

$$\operatorname{cosec}^n x=x^{-n}-M_2x^{-n+2}+M_4x^{-n+4}-M_6x^{-n+6}+\ldots$$

auftreten; endlich dass der zweite Theil der Gleichung (15) noch zu completiren ist durch das Polynom

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\ldots.+\varkappa x^{n-1},$$

unter α, β, γ,.... $\varkappa$ constante Zahlen verstanden, oder solche periodische Functionen von x, die ungeändert bleiben, wenn x um h wächst.

Untersuchen wir nun, ob diese Gesetzmässigkeit sich auch auf die, der Summenrechnung inverse Rechnungsart, nämlich die Differenzen-Rechnung, ausdehnen lässt. Wir haben:

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x),$$

und stellt man diess auf folgende Weise dar:

$$\Delta f(x)=f((x+\frac{h}{2})+\frac{h}{2})-f((x+\frac{h}{2})-\frac{h}{2}),$$

so hat man, es entwickelnd:

$$\Delta f(x)=2\left\{\frac{h}{2}f'(x+\frac{h}{2})+\frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3 f'''(x+\frac{h}{2})+\frac{1}{5!}\left(\frac{h}{2}\right)^5 f^V(x+\frac{h}{2})+\ldots\right\}$$

oder

$$(17)\qquad \frac{\Delta f(x)}{h}=f'(x+\frac{h}{2})+\frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f'''(x+\frac{h}{2})+\frac{1}{5!}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^V(x+\frac{h}{2})+\ldots.$$

Die Coefficienten der einzelnen Glieder dieses Ausdrucks sind, abgesehen vom Zeichen, die in der Reihe für $\sin x$ erscheinenden, denn man hat:

$$(18)\qquad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots.$$

Nimmt man von beiden Seiten der Gleichung (17) die endlichen Differenzen und dividirt zu gleicher Zeit durch h, so hat man:

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}=\frac{\Delta f'(x+\frac{h}{2})}{h}+\frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^2\frac{\Delta f'''(x+\frac{h}{2})}{h}+\frac{1}{5!}\left(\frac{h}{2}\right)^4\frac{\Delta f^V(x+\frac{h}{2})}{h}+\ldots.$$

Jedes einzelne Glied dieser Entwickelung lässt sich nach (17) behandeln; thut man diess, so erhält man:

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{h^2} = f''(x+h)$$

$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f^{IV}(x+h) + \frac{1}{5!}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{VI}(x+h) + \frac{1}{7!}\left(\frac{h}{2}\right)^6 f^{VIII}(x+h) + \ldots$$

$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^2 [f^{IV}(x+h) + \frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f^{VI}(x+h) + \frac{1}{5!}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{VIII}(x+h) + \ldots]$$

$$+\frac{1}{5!}\left(\frac{h}{2}\right)^4 [\qquad f^{VI}(x+h) + \frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f^{VIII}(x+h) + \ldots]$$

$$+\frac{1}{7!}\left(\frac{h}{2}\right)^6 [\qquad f^{VIII}(x+h) + \ldots]$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

und diess gibt reducirt:

(19)

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{h^2} = f''(x+h) + \frac{2}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f(x+h) + \left(\frac{h}{2}\right)^4 \left(\frac{2}{5!} + \frac{1}{3!3!}\right) f^{VI}(x+h)$$
$$+\left(\frac{h}{2}\right)^6 \left(\frac{2}{7!} + \frac{2}{3!5!}\right) f^{VIII}(x+h) + \ldots$$

Die hier auftretenden Coefficienten, nämlich:

$$1, \quad \frac{2}{3!}, \quad \frac{2}{5!} + \frac{1}{3!3!}, \quad \frac{2}{7!} + \frac{1}{3!5!}, \ldots$$

erscheinen auch, wenn man die Gleichung (18) quadrirt; es ist nämlich:

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + \left(\frac{2}{5!} + \frac{1}{3!3!}\right)x^6 - \left(\frac{2}{7!} + \frac{2}{3!5!}\right)x^8 + \ldots,$$

oder vermöge der Gleichung (8):

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \frac{(2x)^8}{8!} + \ldots\right\}.$$

So fortfahrend, findet man ganz allgemein:

(20)

$$\frac{\Delta^n f(x)}{h^n} = f^{(n)}(x+\tfrac{n}{2}h) + \left(\frac{h}{2}\right)^2 N_2 f^{(n+2)}(x+\tfrac{n}{2}h) + \left(\frac{h}{2}\right)^4 N_4 f^{(n+4)}(x+\tfrac{n}{2}h)$$
$$+\left(\frac{h}{2}\right)^6 N_6 f^{(n+6)}(x+\tfrac{n}{2}h) + \ldots,$$

wo N_2, N_4, N_6,.... die in der Gleichung

$$(21) \qquad \sin^n x = x^n - N_2 x^{n+2} + N_4 x^{n+4} - N_6 x^{n+6} + \ldots$$

auftretenden Coefficienten sind.

Vergleicht man nun die beiden Gleichungen (15) und (20), so sieht man, dass man sehr leicht aus der einen von ihnen die andere ableiten kann; man hat nur nöthig, statt n, $-n$ zu setzen, wodurch sich zu gleicher Zeit von selbst die Coefficienten M_2, M_4, M_6,...., welche der Reihe für $\operatorname{cosec}^n x$ angehören, in N_2, N_4, N_6,.... umwandeln, welche der Reihe für $\sin^n x$ entsprechen; und ebenso auch umgekehrt verwandeln sich N_2, N_4, N_6,.... in M_2, M_4, M_6,....

Wenden wir nun unsere gewonnenen Formeln auf einige einfache Beispiele an. Es sei

$$\text{I.} \qquad f(x) = x^m,$$

folglich

$$\int^{(n)} f(x)\,dx^n = \frac{x^{m+n}}{n!\binom{m+n}{n}},$$

$$\int^{(n-2)} f(x)\,dx^{n-2} = \frac{x^{m+n-2}}{(n-2)!\binom{m+n-2}{n-2}},$$

$$\int^{(n-4)} f(x)\,dx^{n-4} = \frac{x^{m+n-4}}{(n-4)!\binom{m+n-4}{n-4}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Diese Gleichungen sind wahr, so lange keiner der auf der rechten Seite stehenden Brüche unendlich ist; schliesst man daher diejenigen Fälle aus, wo einer der genannten Brüche unendlich ist, so hat man:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} h^n \Sigma^n x^m = {} & \frac{(x-\frac{n}{2}h)^{m+n}}{n!\binom{m+n}{n}} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 M_2 \frac{(x-\frac{n}{2}h)^{m+n-2}}{(n-2)!\binom{m+n-2}{n-2}} \\ & + \left(\frac{h}{2}\right)^4 M_4 \frac{(x-\frac{n}{2}h)^{m+n-4}}{(n-4)!\binom{m+n-4}{n-4}} + \left(\frac{h}{2}\right)^6 M_6 \frac{(x-\frac{n}{2}h)^{m+n-6}}{(n-6)!\binom{m+n-6}{n-6}} + \ldots \end{aligned} \right.$$

und hieraus folgt für ein gerades $m+n$:

$$h^n \Sigma^n x^m = \varphi(x^2 - nhx + p),$$

und für ein ungerades $m+n$:

$$h^n \Sigma^n x^m = (x - \frac{nh}{2})\,\psi(x^2 - nhx + p),$$

unter p eine ganz beliebige constante Zahl verstanden.

Da ferner:

$$f^{(n)}(x) = n!\binom{m}{n} x^{m-n},$$

$$f^{(n+2)}(x) = (n+2)!\binom{m}{n+2} x^{m-n-2},$$

$$f^{(n+4)}(x) = (n+4)!\binom{m}{n+4} x^{m-n-4},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

ist, so hat man

(23)

$$\begin{aligned}\frac{\Delta^n . x^m}{h^n} = n!\binom{m}{n}(x + \tfrac{n}{2}h)^{m-n} &+ \left(\frac{h}{2}\right)^2 (n+2)!\binom{m}{n+2} N_2 (x + \tfrac{n}{2}h)^{m-n-2} \\ &+ \left(\frac{h}{2}\right)^4 (n+4)!\binom{m}{n+4} N_4 (x + \tfrac{n}{2}h)^{m-n-4} \\ &+ \left(\frac{h}{2}\right)^6 (n+6)!\binom{m}{n+6} N_6 (x + \tfrac{n}{2}h)^{m-n-6} + \ldots\end{aligned}$$

Ist daher $m-n$ eine gerade Zahl, so ist

$$\frac{\Delta^n . x^m}{h^n} = \varphi(x^2 + nhx + p);$$

ist hingegen $m-n$ eine ungerade Zahl, so hat man:

$$\frac{\Delta^n . x^m}{h^n} = (x + \frac{n}{2}h)\,\psi(x^2 + nhx + p).$$

Es sei

II. $$f(x) = \log x,$$

so ist:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n},$$

$$f^{(n+2)}(x)=\frac{(-1)^{n+3}(n+1)!}{x^{n+2}},$$

$$f^{(n+4)}(x)=\frac{(-1)^{n+5}(n+3)!}{x^{n+4}},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

folglich:

$$\frac{\Delta^n f(x)}{h^n}=(-1)^{n+1}\left\{\frac{(n-1)!}{(x+\frac{n}{2}h)^n}+\left(\frac{h}{2}\right)^2 N_2\frac{(n+1)!}{(x+\frac{n}{2}h)^{n+2}}+\left(\frac{h}{2}\right)^4 N_4\frac{(n+3)!}{(x+\frac{n}{2}h)^{n+4}}+\ldots\right\}.$$

Diese Formel setzt offenbar ein positives n voraus; ist dieses n zugleich gerade, so ist

$$\frac{\Delta^n \log x}{h^n}=\varphi(x^2+nhx+p),$$

und ist n ungerade, so hat man:

$$\frac{\Delta^n.\log x}{h^n}=(x+\frac{n}{2}h)\psi(x^2+nhx+p).$$

XI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Doctor Oskar Werner zu Dresden.

Bezeichnet man die Seiten eines Sehnenvierecks der Ordnung nach durch a, b, c, d und die Gerade, welche die Mittelpunkte seiner Diagonalen verbindet, durch e, so ist zu beweisen, dass

$$e^2 = \frac{bd(a^2 - c^2)^2 + ac(b^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)(ad + bc)}.$$

Im Falle $b = d$, erhält man

$$e = \tfrac{1}{2}(a - c),$$

d. h. in einem symmetrischen Trapez ist die Entfernung der Mittelpunkte der Diagonalen dem halben Unterschiede der parallelen Seiten gleich.

Man soll beweisen, dass

$$\int_0^\pi x\varphi(\sin x, \cos x^2)\partial x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \varphi(\sin x, \cos x^2)\partial x.$$

Aufgabe über eine gewisse Art von Summenreihen.

Sind

$$\begin{array}{llll} a_0, & a_1, & a_2, \ldots\ldots & a_x, \\ Sa_0, & Sa_1, & Sa_2, \ldots\ldots & Sa_x, \\ S^2a_0, & S^2a_1, & S^2a_2, \ldots\ldots & S^2a_x, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S^na_0, & S^na_1, & S^na_2, \ldots\ldots & S^na_x \end{array}$$

Reihen, welche in einem solchen Zusammenhange unter einander stehen, dass die auf einander folgenden Glieder jeder Horizontalreihe aus denen der nächstvorhergehenden gebildet werden, indem man in dieser das erste Glied, dann die Summe der zwei ersten, hierauf die Summe der drei ersten Glieder u. s. w. bildet, so dass

$$S^n a_0 = S^{n-1} a_0,$$

$$S^n a_1 = S^{n-1} a_0 + S^{n-1} a_1,$$

$$S^n a_2 = S^{n-1} a_0 + S^{n-1} a_1 + S^{n-1} a_2,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$S^n a_x = S^{n-1} a_0 + S^{n-1} a_1 + S^{n-1} a_2 + \ldots + S^{n-1} a_x,$$

so soll man beweisen, dass

$$S^n a_x = \binom{n+x-1}{x} a_0 + \binom{n+x-2}{x-1} a_1 + \binom{n+x-3}{x-2} a_2 + \ldots + \binom{n-1}{0} a_x,$$

wobei das Zeichen $\binom{\mu}{r}$ durch die Gleichungen

$$\binom{\mu}{r} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-r+1)}{1.2.3\ldots r} \text{ und } \binom{\mu}{0} = 1$$

definirt ist.

Nimmt man z. B.

$$a_0 = \binom{\mu}{0}, \quad a_1 = \binom{\mu+1}{1}, \quad a_2 = \binom{\mu+2}{2}, \ldots a_x = \binom{\mu+x}{x}$$

und entwickelt mit Hülfe der Formel

$$\binom{\nu}{0} + \binom{\nu+1}{1} + \binom{\nu+2}{2} + \ldots + \binom{\nu+x}{x} = (\nu+x+1)_x$$

die successiven Summenreihen, so erhält man

$$S^n a_x = \binom{\mu+n+x}{x}$$

und folglich nach obiger Formel:

$$\binom{\mu+n+x}{x} = \binom{n+x-1}{x}\binom{\mu}{0} + \binom{n+x-2}{x-1}\binom{\mu+1}{1}$$
$$+ \binom{n+x-3}{x-2}\binom{\mu+2}{2} + \ldots + \binom{n-1}{0}\binom{\mu+x}{x}.$$

XII.
Miscellen.

Von Herrn Joh. Bapt. Sturm, geprüftem Lehramts-Candidaten zu Rottenburg in Niederbaiern.

I.

Einfache Beweise zweier Sätze von der körperlichen Ecke.

Sei O eine körperliche Ecke und OO' irgend eine Linie, welche ganz innerhalb der Seitenwände derselben fällt. Wird durch den Punkt O' eine Ebene gezogen, auf welcher OO' senkrecht ist, so wird sie die Kanten in den Punkten A, B, C.... schneiden, welche dann das Vieleck ABC.... bilden. Zieht man in diesem Vielecke die Linien AO', BO', CO'...., so erhält man auf der Stelle folgende Sätze:

$$\angle AO'B > \angle AOB,$$

$$\angle BO'C > \angle BOC,$$

$$\angle CO'D > \angle COD,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Addirt man schliesslich auf beiden Seiten, so gelangt man augenblicklich zu dem Satze, dass die Kantenwinkel einer körperlichen Ecke kleiner als vier rechte Winkel sind.

Eben so leicht erhellt, dass die Winkel, welche zwei Seitenwände mit einander bilden, beziehlich immer grösser sind, als die entsprechenden inneren Winkel des Vieleckes ABC.... In jeder körperlichen Ecke ist also die Summe der Neigungswinkel der Seitenwände grösser als $(n-2).2R$, wenn n die Anzahl der Seitenwände ausdrückt.

II.

Einfache Ableitung der Ausdrücke für die Sinusse und Cosinusse der halben Winkel eines Dreieckes.

Zuerst werde das rechtwinklige, dann das gleichschenklige Dreieck betrachtet. Von da gehe man über zu dem ungleichseitigen Dreiecke. Verlängert man in diesem z. B. eine Seite AB über B hinaus nach D, so dass $BD = BC$ wird, und zieht dann DC, so ist für das Dreieck ADC:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD\,.\,CD\,.\cos\mathrm{in}\,\tfrac{1}{2}B.$$

Es ist aber

$$AD = AB + BC$$

und

$$CD = 2BC\,.\cos\mathrm{in}\,\tfrac{1}{2}B,$$

sonach:

$$AC^2 = (AB + BC)^2 - 4(AB + BC)\,.\,BC\,.\cos\mathrm{in}\,\tfrac{1}{2}B^2$$
$$+ 4BC^2\,.\cos\mathrm{in}\,\tfrac{1}{2}B^2$$

oder

$$AC^2 = (AB + BC)^2 - 4AB\,.\,BC\,.\cos\mathrm{in}\,\tfrac{1}{2}B^2,$$

$$AC^2 = (AB - BC)^2 + 4AB\,.\,BC\,.\sin\tfrac{1}{2}B^2,$$

womit das Verlangte geleistet ist.

III.

Zur Auflösung der quadratischen und kubischen Gleichungen.

Sei

$$x^2 + Px = Q$$

irgend eine quadratische Gleichung, so kann diese auch so geschrieben werden:

$$x(x + P) = Q.$$

Da nun bekanntlich

$$AB = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2$$

ist, so ist auch:

$$Q=\left(\frac{2x+P}{2}\right)^2-\left(\frac{P}{2}\right)^2,$$

wodurch die Auflösung gegeben ist.

Die in diesem Archiv mitgetheilte Auflösung der kubischen Gleichungen von Herrn Cockle ist nicht neu; die Priorität der Erfindung gehört einem Deutschen, nämlich Hulbe, welcher bereits schon am Ende des vorigen Jahrhunderts in seinen, Kästner gewidmeten „Analytischen Entdeckungen" die kubischen Gleichungen dadurch zu lösen gesucht hat, dass er sie durch die Substitution $x=a+\frac{1}{y}$ auf die Form:

$$y^3+3ay^2+3a^2y=P$$

brachte, was, wie der Sachkenner auf der Stelle sieht, mit der Cockle'schen Auflösung zusammenfällt.

IV.

Beweis des bekannten Euler'schen Satzes von den Polyedern.

Man denke sich in einer beliebigen Entfernung von einem Polyeder eine Ebene und durch die Ecken desselben Parallellinien gezogen, so werden diese, gehörig verlängert, auf jener ein System von Punkten bilden, von denen die einen äussere, die andern innere genannt werden sollen. Aeussere nennen wir jene, welche sich durch Linien so zu einem Vielecke verbinden lassen, dass alle übrigen innerhalb des Umfanges dieses Vieleckes liegen, die daher im Gegensatze zu jenen innere genannt werden. Dem Umfange dieses Polygons, das hier auch äusseres betitelt wird, entspricht ein zusammenhängender Zug von Kanten des Polyeders, durch welchen seine Oberfläche in zwei Theile getheilt wird. Betrachten wir zuvörderst den einen Theil, respective die den Ecken dieses Theiles entsprechenden Punkte auf der in Rede stehenden Ebene und ihre Verbindung durch Linien, entsprechend den Kanten dieses Polyedertheiles. Die Verbindung der äusseren Punkte gibt, wie schon bemerkt, das äussere Vieleck; die besagte Verbindung der innern Punkte aber eine Reihe innerer Vielecke, welche den Vielecken der Oberfläche des fraglichen Polyedertheiles entsprechen.

Sei nun die Anzahl der äusseren Punkte $=E$; die Anzahl der inneren $=J$; da im Allgemeinen die inneren Vielecke aus Dreiecken, Vierecken etc. nEcken bestehen, so sei die Summe aller dieser Dreiecke, Vierecke etc. nEcke beziehlich F^3, F^4,.... F^n. Die Summe aller Winkel dieser innern Vielecke ist bekanntlich ausgedrückt durch:

$$2R.(F^3+2F^4+3F^5+\ldots.(n-2)F^n);$$

dieselbe Summe kann aber, wie man sich selbst ohne viele Mühe überzeugen kann, auch dargestellt werden durch den Ausdruck:

$$(E-2).2R+J.4R;$$

es ist also:

$$(E-2).2R+J.4R=2R.(F^3+2F^4+3F^5+\ldots.+(n-2)F^n)$$

oder

$$(1)\qquad E-2+2J=F^3+2F^4+3F^5+\ldots.+(n-2)F^n.$$

Bezeichnen für den zweiten Polyedertheil J' und $F_1{}^3$, $F_1{}^4$, $F_1{}^5$,.... ...$F_1{}^n$ beziehlich dasselbe, was J und F^3, F^4, F^5,.... F^n für den ersten, so gilt auch für diesen die Gleichung:

$$(2)\qquad E-2+2J'=F_1{}^3+2F_1{}^4+3F_1{}^5+\ldots.+(n-2)F_1{}^n.$$

Addirt man die Gleichungen (1) und (2), so erhält man als Resultat:

$$2(E+J+J')-4=F^3+F_1{}^3+2(F^4+F_1{}^4)+\ldots.+(n-2)(F^n+F_1{}^n).$$

Nun ist aber, wie sogleich erhellt, durch $E+J+J'$ die Anzahl der Ecken des Polyeders, durch $F^3+F_1{}^3$, $F^4+F_1{}^4$,.... $F^n+F_1{}^n$ beziehlich die Anzahl der Dreiecke, Vierecke, ... nEcke ausgedrückt, aus denen die Oberfläche des Polyeders besteht. Bezeichnen wir demnach die Summe der Ecken eines Polyeders durch E, die Summen der Dreiecke, Vierecke, ... nEcke, welche die Oberfläche des Polyeders in sich beschliesst, durch F^3, F^4, ... F^n, so gilt die Relation:

$$(3)\qquad 2(E-2)=F^3+2F^4+3F^5+\ldots.+(n-2)F^n.$$

Zu dieser Relation gelangt man — im Vorübergehen sei es bemerkt — auch dadurch, wenn man innerhalb der Polyederoberfläche einen Punkt als Mittelpunkt einer Kugel so annimmt, dass ihre Oberfläche entweder ganz innerhalb oder ganz ausserhalb der Oberfläche des Polyeders fällt. Durch alle Ecken des Polyeders gezogene Radien der Kugel werden auf ihrer Oberfläche ein System von sphärischen Vielecken bezeichnen. Der Inhalt eines jeden sphärischen Vieleckes ist aber durch seine Winkel gegeben; die Summe der Inhalte aller dieser sphärischen Vielecke ist aber der

Oberfläche der Kugel gleich, und eben aus dieser Gleichung resultirt die Gleichung (3), was Jeder selbst leicht weiter ausführen kann.

Die Gleichung (3) lässt aber noch eine wichtige Umformung zu.

Denkt man sich nämlich die einzelnen Vielecke der Oberfläche des Polyeders abgesondert von den übrigen, so wird durch den Ausdruck:

$$3F^3+4F^4+5F^5+\ldots.+nF^n$$

die Anzahl aller Seiten dieser Vielecke bestimmt, jedoch, wie schon bemerkt, nur unter der obigen Voraussetzung. Sind nun diese Vielecke auf der Oberfläche des Polyeders so zu einander verbunden, dass zwei Vielecke immer eine Kante gemeinschaftlich haben, so ist, wenn K die Anzahl der Kanten des Polyeders bezeichnet, offenbar:

$$(4)\qquad 3F^3+4F^4+5F^5+\ldots.+nF^n=2K.$$

Verbindet man nun die Gleichungen (3) und (4), so erhält man:

$$(5)\qquad 2(E-2)=2K-2(F^3+F^4+F^5+\ldots.+F^n).$$

Die Summe $F^3+F^4+F^5+\ldots.+F^n$ drückt aber nichts anderes aus, als die Anzahl der Flächen des Polyeders; bezeichnet man diese schlechtweg durch F, so geht die Gleichung (5) über in die Gleichung:

$$2(E-2)=2K-2F$$

oder

$$(6)\qquad E+F=K+2,$$

i. q. e. d.

V.

Ueber den Satz von der Gleichheit der Pyramiden.

Es ist mir gelungen, den Gerwien'schen Beweis der Gleichheit der Dreiecke auch auf die dreiseitigen Pyramiden auszudehnen, und ich glaube, den Lesern des Archivs keinen unangenehmen Dienst zu erweisen, wenn ich davon Mittheilung mache.

Indem O, A, B, C die Ecken einer dreiseitigen Pyramide vorstellen, seien die Mitten der sechs Kanten OA, OB, OC, AB, AC, BC beziehlich M^1, M^2, M^3, M^4, M^5, M^6. Legt man durch je drei dieser Mitten, nämlich durch M^1, M^2, M^3; M^1, M^4, M^5; M^2, M^4, M^6; M^3, M^5, M^6 Ebenen, so ist ohne viele Mühe klar, dass dadurch 4 congruente dreiseitige Pyramiden: $OM^1M^2M^3$, $M^1AM^4M^5$, $M^2BM^4M^6$, $M^3CM^5M^6$ entstehen. Nimmt man in Gedanken diese 4 Pyramiden von der ursprünglichen weg, so bleibt ein Achtflächner übrig, welcher aus zwei symmetrisch liegenden vierseitigen Pyramiden besteht. Diese beiden Pyramiden sind in dem durch die Punkte M^1, M^2, M^5, M^6 bestimmten Parallelogramm als ihrer gemeinschaftlichen Grundfläche einander aufgesetzt, und haben ihre Spitzen in M^3 und M^4. Legt man nun durch die Punkte O, C und M^4 ebenfalls eine Ebene, so theilt diese die Dreiecke ABC und $M^1M^2M^3$ durch die Schnittlinien CM^4 und M^3M^7 (wo M^7 die Mitte von M^1M^2 bezeichnet) in gleiche Hälften. Die nämliche Schnittebene theilt ferner auch den in Rede stehenden Achtflächner in zwei symmetrisch liegende Stücke. Nun kann man bekanntlich symmetrische Stücke in congruente zerlegen, und sonach ist klar, dass die beiden Pyramiden $OACM^4$ und $OBCM^4$ in congruente Stücke zerlegt werden können, wenn das Nämliche auch von den Pyramiden gilt, in welche durch die Schnittebene OCM^4 die beiden Pyramiden $OM^1M^2M^3$ und $M^3CM^5M^6$ getheilt werden. Wir sind sofort gedrungen, den im Vorigen bei der Pyramide $OABC$ angewendeten Prozess auch auf die beiden letztern Pyramiden auszudehnen, und ihn in's Unendliche fortzusetzen. Geht man dann zu den Gränzen über, so gelangt man zur Ueberzeugung, dass die beiden Pyramiden $OACM^4$ und $OBCM^4$ durch die Schnittebene OCM^4 in zwei inhaltsgleiche Theile getheilt werden, indem sie sich als die Gränzsummen unendlich vieler congruenter Pyramiden darstellen lassen.

Diesen Satz vorausgesetzt, lässt sich nun der allgemeinere, dass Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen inhaltsgleich seien, leicht beweisen. Nach der Gerwien'schen Beweisführung lassen sich nämlich die gleichen Grundflächen in congruente Stücke zerlegen. Hat man also zwei dreiseitige Pyramiden von congruenten Grundflächen und gleichen Höhen, so setze man sie in ihren Grundflächen auf einander und verbinde ihre Spitzen durch eine Gerade, wodurch dann der vorige Satz zur Anwendung kömmt, wobei ich mich jedoch nicht aufhalten will, da die ganze Beweisführung der Gerwien'schen ganz analog ist.

Man ist gewöhnlich der Ansicht, dass der Gerwien'sche Beweis keine Ausdehnung auf den Raum zulasse; das Vorstehende dürfte vom Gegentheile zeugen. Dass aber die Anzahl der congruenten Stücke keine begränzte ist und die Gränzmethode nicht umgangen werden kann, liegt in der Natur des Raumes, worüber ich mich ein anderes Mal weiter auszulassen gesonnen bin.

Von dem Herausgeber.

Jacob Bernoulli theilt (Opera. Tom. II. p. 700. Nr. XXIV.) in dem Aufsatze:

Analysis et Constructio Problematis Hugeniani: E puncto dato rectam educere quae datae Parabolae ad rectos angulos occurrat

eine Construction der Normalen einer Parabel, die von einem gegebenen, nicht in, sondern innerhalb oder ausserhalb der Parabel liegenden Punkte ausgehen, mit, welche ich für sehr bemerkenswerth halte, die aber nicht sehr bekannt zu sein scheint. Jacob Bernoulli sagt von dieser Construction: „Cum non constet, utrum Problematis hujus constructio et demonstratio Hugeniana aliquando lucem viderit, nec si vidit, omnium manibus teratur; idcirco lubet hic exponere, qualiter existimemus illam a subtilissimo Viro olim concinnatam fuisse.“ Die Liebhaber der Geometrie der Alten wissen, wie eifrig sich Apollonius in seinem aus 77 Sätzen bestehenden fünften Buche mit der Construction der Normalen der Kegelschnitte, die durch gegebene, nicht in den Kegelschnitten liegende Punkte gehen, beschäftigt, insbesondere über die Anzahl der in jedem Falle möglichen Normalen eine Untersuchung, die jedenfalls zu den feinsten Untersuchungen der alten Geometrie überhaupt gehört und den grössten geometrischen Scharfsinn ihres Urhebers verräth, angestellt hat. Dass aber Apollonius die Normalen selbst zu construiren gelehrt habe, glaube ich nach den mir vorliegenden Notizen nicht, kann indess darüber jetzt nicht mit aller Bestimmtheit entscheiden, da mir in diesem Augenblicke nur die vier ersten, in der Ursprache vorhandenen Bücher in der Uebersetzung von Barrow, nicht aber auch die vier letzten nur in arabischer Uebersetzung, in der jedoch das achte fehlt, vorhandenen Bücher zu Gebote stehen. Jedenfalls ist die Construction für die Parabel von Huygens, welche Jacob Bernoulli a. a. O. mittheilt, sehr bemerkenswerth, und da sie mir nur sehr wenig bekannt zu sein scheint, so will ich sie im Folgenden in der Kürze entwickeln und mit einem Beweise versehen, um dadurch vielleicht dem einen oder dem andern Leser Veranlassung zu geben, diesem beachtenswerthen Gegenstande seine weitere Aufmerksamkeit zuzuwenden, wobei ich auch an die schöne Abhandlung von Herrn Gerono im Archiv. Thl. VI. S. 127. Nr. XX. erinnere.

In Taf. II. Fig. 26. sei PAQ eine Parabel, deren Scheitel und Axe A und AB sind; den Parameter wollen wir durch p bezeichnen. Der gegebene Punkt, durch welchen oder von welchem aus Normalen an die Parabel gezogen werden sollen, sei M. Die von Huygens gegebene Construction dieser Normalen ist nun folgende.

Von dem gegebenen Punkte M fälle man auf die Axe der Parabel das Perpendikel MN, mache NC gleich dem halben Parameter der Parabel, halbire AC in D, errichte in D auf AC ein dem vierten Theile von MN gleiches Perpendikel DE, ziehe EA oder EC, und beschreibe aus E als Mittelpunkt mit EA oder EC als Halbmesser einen Kreis, welcher die Parabel, ausser natürlich in A, noch in den drei Punkten F, F_1, F_2 schneiden mag. Zieht man dann von F, F_1, F_2 aus nach dem gegebenen Punkte M gerade Linien, so sind diese Linien die gesuchten Normalen der Parabel.

Die Richtigkeit dieser bemerkenswerthen Construction kann auf folgende Art bewiesen werden, wobei wir nur den Punkt F betrachten wollen, da sich dann die Punkte F_1 und F_2 in ganz ähnlicher Weise betrachten lassen.

Den Parameter der gegebenen Parabel haben wir schon durch p bezeichnet; als gegebene Linie setze man ferner $AN=a$, $MN=b$, so ist nach der Construction

$$NC=\tfrac{1}{2}p,\quad AC=a+\tfrac{1}{2}p,\quad DE=\tfrac{1}{4}b;\quad AD=CD=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{4}p.$$

Also ist das Quadrat des Halbmessers des beschriebenen Kreises

$$AE^2=(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{4}p)^2+\tfrac{1}{16}b^2.$$

Setzen wir nun $AH=x$, $FH=y$ und fällen noch von E auf FH das Perpendikel EK, so erhellet auf der Stelle die Richtigkeit der folgenden Gleichung:

$$(AH-AD)^2+(FH-DE)^2=EF^2=AE^2,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$(x-\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{4}p)^2+(y-\tfrac{1}{4}b)^2=(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{4}p)^2+\tfrac{1}{16}b^2,$$

welche, wenn man nach gehöriger Entwickelung der Quadrate aufhebt, was sich aufheben lässt, leicht auf die folgende einfachere Form gebracht wird:

$$x^2+y^2-(a+\tfrac{1}{2}p)x-\tfrac{1}{2}by=0.$$

Wegen der Natur der Parabel ist aber:

$$FH^2=p.AH,\quad y^2=px,\quad x=\frac{y^2}{p};$$

folglich, wenn man diesen letzteren Ausdruck von x in die vorstehende Gleichung einführt:

$$\frac{y^4}{p^2}+y^2-\frac{a+\tfrac{1}{2}p}{p}y^2-\tfrac{1}{2}by=0,$$

woraus sich nach einigen leichten Reductionen die Gleichung

$$y^3-p(a-\tfrac{1}{2}p)y-\tfrac{1}{2}bp^2=0$$

ergiebt. Setzen wir nun $HG=u$, so ist

$$NG=AH+HG-AN=x+u-a,$$

und folglich, weil $FH:MN=HG:NG$ ist:

$$y:b=u:x+u-a=u:\frac{y^2}{p}+u-a,$$

also

$$bu = y\left(\frac{y^2}{p} + u - a\right), \quad bpu = y\{y^2 - p(a-u)\}$$

oder

$$y^3 - p(a-u)y - bpu = 0.$$

Wir haben also jetzt die zwei folgenden Gleichungen:

$$y^3 - p(a - \tfrac{1}{2}p)y - bp.\tfrac{1}{2}p = 0,$$
$$y^3 - p(a-u)y - bpu = 0.$$

Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, so erhält man:

$$-p(u - \tfrac{1}{2}p)y + pb(u - \tfrac{1}{2}p) = 0$$

oder

$$py(u - \tfrac{1}{2}p) - pb(u - \tfrac{1}{2}p) = 0,$$

also

$$p(y-b)(u - \tfrac{1}{2}p) = 0;$$

folglich, insofern nicht $y = b$ oder $y - b = 0$ ist:

$$u - \tfrac{1}{2}p = 0, \quad \text{also} \quad u = \tfrac{1}{2}p;$$

d. i. $HG = \frac{1}{2}p$. Weil nun nach einer bekannten, auch sehr leicht ganz elementar zu beweisenden Eigenschaft der Parabel die Subnormale immer dem halben Parameter gleich ist, so steht die von F aus nach M gezogene Linie FN in F senkrecht auf der Parabel oder ist die Normale derselben in dem Punkte F, wie bewiesen werden sollte.

Es ist klar, dass es bei dieser Aufgabe eigentlich auf die Construction der Wurzeln einer cubischen Gleichung ankommt, in welcher Beziehung, offenbar mit Rücksicht darauf, dass dazu bekanntlich hauptsächlich und zunächst die Kegelschnitte dienen, Huygens nach Jacob Bernoulli's Worten die folgende beachtenswerthe Bemerkung macht: „Quae aequatio cum ad pauciores dimensiones deprimi non possit (quod hic absque ulteriori tentamine ex Regulis **Hudden.** 12 et 14 colligitur) indicat Problema solidum existere. **At quia in quaestionis datis ipsa jam Parabola includitur, illa mediante, constructio solis rectis lineis et circulo absolvi hoc modo:**" wo nun die obige Construction selbst folgt.

Druckfehler.

Im Literarischen Berichte XC. Theil XXIII. S. 10. Z. 15. v. u. statt „Schönlein" s. m. „Schönbein."

Theil XXIII. S. 387. Z. 5. v. u. statt „A" setze man „A_1".

Theil XXIII. S. 423. Z. 1. v. o. statt „bestimmen" s. m. „enthalten."

XIII.

Ueber eine neue bei der Ausführung höherer geodätischer Messungen und Rechnungen in Anwendung zu bringende Methode.

Von
dem Herausgeber.

Einleitung.

In der Geodäsie kann man von drei verschiedenen Voraussetzungen über die Gestalt des Erdkörpers ausgehen. Entweder kann man die Oberfläche desselben, worunter wir als die eigentliche, von allen Unebenheiten, allen Erhöhungen und Vertiefungen freie Erdoberfläche immer die Meeresfläche verstehen, als eine Ebene, als eine Kugelfläche oder als die Oberfläche eines durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstandenen Sphäroids betrachten. Unter der ersten Voraussetzung sind alle Normalen der Erdoberfläche einander parallel und ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt liegt, so zu sagen, im Unendlichen; unter der zweiten Voraussetzung laufen alle Normalen im Mittelpunkte der Erde zusammen und coincidiren mit den entsprechenden Erdhalbmessern; unter der dritten Voraussetzung schneiden sich nicht alle Normalen im Mittelpunkte der Erde und coincidiren also auch nicht mit den entsprechenden Erdhalbmessern. Man könnte, jenachdem man die erste, zweite oder dritte Voraussetzung zu Grunde legt, drei entsprechende Theile der Geodäsie von einander unterscheiden, und dieselben beziehungsweise mit den Namen der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Geodäsie belegen.

Bei dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnisse von der Gestalt des Erdkörpers dürfen die beiden ersten Voraussetzungen nur als näherungsweise richtige Annahmen betrachtet werden, die desto mehr absolute Richtigkeit besitzen, je kleiner die zur Betrachtung kommenden Theile der Oberfläche der Erde im Verhältniss zur ganzen Erdoberfläche sind; mit völliger geometrischer Schärfe richtig ist nur die dritte Voraussetzung, so weit nämlich, wie schon erinnert, unsere jetzigen Kenntnisse von der Gestalt der Erdoberfläche reichen, die uns bis jetzt wenigstens noch nicht berechtigen, eine Abweichung derselben von der Oberfläche eines durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstandenen Sphäroids anzunehmen, wenn auch allerdings Andeutungen einer solchen Abweichung hin und wieder hervorgetreten zu sein scheinen. Wir werden daher auch in dieser Abhandlung, die nicht mit den beiden ersten Theilen der Geodäsie, welche als längst vollständig erledigt und zum Abschluss gebracht betrachtet werden können, sondern nur mit deren drittem Theile sich zu beschäftigen beabsichtigt, immer von der geometrischen Voraussetzung ausgehen, dass die Oberfläche der Erde durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden sei. Wir sprechen diese Voraussetzung hier um so bestimmter und entschiedener aus, weil die vorliegende Abhandlung auch in mehreren Punkten eine kritische Beleuchtung der in der sogenannten höheren Geodäsie jetzt grösstentheils üblichen Verfahrungsarten, und die Angabe neuer, dieselben vertretenden Messungs- und Rechnungs-Methoden beabsichtigt, welche, geometrische Genauigkeit und Schärfe in allen Beziehungen erstrebend, natürlich und vor allen Dingen auch von einer klar ausgesprochenen bestimmten geometrischen Grundlage ausgehen müssen.

Alle Messungen, welche bei geodätischen Operationen ausgeführt werden, sind entweder Winkelmessungen oder Linienmessungen, und die ersteren werden bei dem gegenwärtigen Stande der Sache wieder entweder in Horizontalebenen oder in Vertikalebenen ausgeführt. Wir wollen einmal die Messung eines Horizontalwinkels etwas genauer betrachten. Zu dem Ende seien A, B, C drei beliebige Punkte auf der Erde in beliebigen Höhen oder Tiefen über oder unter der Meeresfläche als der eigentlichen, von allen Unebenheiten, allen Erhöhungen und Vertiefungen freien Erdoberfläche. Soll nun der an dem Punkte A als seiner Spitze liegende Horizontalwinkel zwischen den drei Punkten A, B, C gemessen werden, so wird nach dem gewöhnlichen Verfahren der Theodolit über dem Punkte A so aufgestellt, dass sein Mittelpunkt in der dem Punkte A entsprechenden Normale des Erdsphäroids liegt; hierauf wird die Ebene des Theodoliten in eine genau horizontale Lage gebracht, d. h. gegen die dem Punkte A entsprechende Normale des Erdsphäroids genau senkrecht gestellt, sodann mit dem Fernrohre des Theodoliten nach dem Punkte B, ferner auch nach dem Punkte C visirt, und endlich auf dem Limbus des Horizontalkreises des Theodoliten der von den horizontalen Projectionen der Visirlinie des Fernrohrs in seinen beiden Lagen eingeschlossene Winkel, welchen wir durch $B'A'C'$ bezeichnen wollen, abgelesen, worauf die Winkelmessung, insofern es sich bloss um die Messung des betreffenden Horizontalwinkels handelt, auf dem Punkte A beendigt ist.

Fragen wir nun, ob der gemessene Winkel $B'A'C'$ sich als ein auf, in oder an der Erde vorkommender Winkel in einem einfachen, aber völlig bestimmten und deutlichen Begriffe nachweisen lässt, so übersehen wir auf der Stelle, dass dieser Nachweis, wenn man, abgesehen von dem Falle der gewöhnlichen Feldmesskunst, wo die Oberfläche der Erde als eine Ebene betrachtet wird, die Erdoberfläche als eine Kugelfläche betrachtet, sogleich geführt werden kann, indem in diesem Falle der Winkel $B'A'C'$ offenbar der Winkel ist, unter welchem, wenn wir den Mittelpunkt der Erde hier und im Folgenden immer durch O bezeichnen, die beiden durch A, O, B und A, O, C gelegten Ebenen AOB und AOC, die in dem Erdhalbmesser OA sich schneiden, gegen einander geneigt sind; auch sieht man, dass es unter Voraussetzung der kugelförmigen Erde in Bezug auf die Grösse des Winkels $B'A'C'$ ganz gleichgültig ist, in welcher Höhe oder Tiefe die Punkte A, B, C über oder unter der Meeresfläche liegen, wenn nur die Lage der Erdhalbmesser, in denen diese Punkte liegen, keine Veränderung erleidet. Betrachten wir aber die Meeresfläche als die Oberfläche eines durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstandenen Sphäroids, so wüsste ich in der That nicht, wie ich in gleich einfacher und bestimmter Weise auf, in oder an der Erde einen dem durch das oben angegebene Verfahren gemessenen Winkel $B'A'C'$ gleichen, durch diesen Winkel gewissermassen vertretenen Winkel angeben sollte, wobei zugleich auch auf der Stelle in die Augen fällt, dass der gemessene Winkel in diesem Falle nicht mehr von der Höhe oder Tiefe der Punkte A, B, C über oder unter der Meeresfläche unabhängig ist, sondern anders ausfallen wird, wenn diese Höhen oder Tiefen sich ändern, selbst dann, wenn die Normalen des Erdsphäroids, in denen jene Punkte liegen, keine Aenderung erleiden, was daher kommt, dass die Normalen des Erdsphäroids nicht sämmtlich in dessen Mittelpunkte zusammenstossen.

Die vorher beschriebene, in der Geodäsie jetzt allgemein gebräuchliche Art der Winkelmessung in der Horizontalebene hat wohl jedenfalls ihren Grund in dem Zwecke, dessen Erreichung bisher als das nächste Ziel aller geodätischen Messungen und Rechnungen bezeichnet werden kann. Denkt man sich nämlich durch alle Punkte auf der Erde Normalen des Erdsphäroids gezogen, so werden die Fusspunkte dieser Normalen, d. h. deren Durchschnittspunkte mit der Meeresfläche, auf der letzteren eine Art von Netz bilden, und die Bestimmung der gegenseitigen Lage der Punkte dieses Netzes darf wohl als der nächste und erste Zweck aller bisherigen geodätischen Messungen und Rechnungen bezeichnet werden, wenn auch ausserdem allerdings noch die Bestimmung der verschiedenen Höhen oder Tiefen der entsprechenden Punkte auf der Erde über oder unter der Meeresfläche eine besondere Aufgabe geodätischer Operationen ausmacht.

Die so eben angegebene Auffassung der nächsten Aufgabe der höheren Geodäsie, die eigentlich wohl ursprünglich von der Kugelform der Erde hergenommen und von dieser auf das Erdsphäroid übertragen worden ist, wobei wohl auch immer die Berücksichtigung mit maassgebend war, dass man kleine Theile der Erdoberfläche näherungsweise als Theile einer Kugelfläche betrachten könne, ist nach meiner Meinung auch die Veranlassung zur Einführung der sogenannten geodätischen oder kürzesten Linien und einer nicht geringen Anzahl verschiedenartiger, dem grösseren Theile nach den höchsten Partieen der Mathematik angehörender Rechnungsmethoden in die Geodäsie gewesen, wodurch das Studium dieser so ungemein wichtigen Wissenschaft gegenwärtig ziemlich schwierig gemacht, das erstrebte Ziel aber doch immer nur annähernd erreicht wird, was aber nach meiner Meinung Alles seinen hauptsächlichsten, eigentlichen und letzten Grund hat in dem Mangel eines einfachen, mit vollständiger Klarheit und Bestimmtheit leicht darlegbaren Princips, dessen consequente Durchführung die sphäroidische Geodäsie sich zur Aufgabe macht, welcher Mangel, wie es mir scheint, am Deutlichsten und Einfachsten nachgewiesen wird durch die vorher besprochene völlige Unbestimmtheit des mit dem in einer Horizontalebene gemessenen Winkel $B'A'C'$ zu verbindenden strengen geometrischen Begriffs, diesen Winkel aufgefasst als ein auf, in oder an dem Erdsphäroid sich findendes und leicht nachweisbares Object, wobei ich mich jetzt nicht einlasse auf leicht vorher zu sehende Einwürfe gegen diese Ansicht, hergenommen von der sehr geringen Abweichung der Gestalt der Erde von der Kugelgestalt, und deshalb zulässigen Näherungen, indem ich mich, wie schon öfter erinnert, bei allen diesen Betrachtungen durchaus nur von ganz strengen geometrischen Anschauungen und Auffassungen leiten lasse, die doch am Ende immer am Sichersten und auch am Einfachsten das erstrebte Ziel erreichen lassen.

Endlich will ich mir in methodischer Rücksicht noch zu bemerken erlauben, wie es mir überhaupt einer guten Methode wenig zu entsprechen scheint, dass man die Messungen und Rechnungen der sphäroidischen Geodäsie so angeordnet hat, dass man dabei den speciellen Fall der sphärischen Erdoberfläche oder der sphärischen Geodäsie zu Grunde legte, und die in diesem Falle allerdings in aller Strenge gültigen und anwendbaren Methoden auf den allgemeineren Fall der ellipsoidischen Erdoberfläche übertrug, indem man letztere, namentlich in, verhältnissmässig zur ganzen Erdoberfläche, kleineren Theilen, näherungsweise als eine Kugelfläche zu betrachten, sich für berechtigt hielt. Nach meiner Meinung müsste man vielmehr gerade umgekehrt alle Messungen und Rechnungen so anordnen, dass dieselben für den allgemeinsten Fall der ellipsoidischen Erdoberfläche in völliger Strenge anwendbar sind, und dass sich von denselben, indem man einigen vorkommenden Grössen gewisse bestimmte oder specielle Werthe beilegt, unmittelbar in aller Strenge zu dem specielleren Falle der sphärischen Erdoberfläche, von diesem Falle aber wieder in ähnlicher Weise zu dem noch specielleren Falle der ebenen Erdoberfläche übergehen lässt, so dass also diese beiden letzteren Fälle unter dem ersten allgemeinsten Falle subsumirt und demselben untergeordnet werden. Nur dieser letztere Weg scheint mir einer wahrhaft guten und richtigen Methode zu entsprechen. Vielleicht giebt man mir dies in theoretischer Rücksicht zu, zieht sich aber zugleich, wie oft in Fällen dieser Art geschieht, hinter das Bollwerk der Praxis zurück, indem man, nach einer bei dergleichen Dingen sehr gewöhnlichen Redeweise, zu bemerken beliebt, dass das erstere Verfahren praktischer sei. Wenn ich nun aber auch nicht im Entferntesten den praktischen Gesichtspunkt geradezu und ganz zu verwerfen geneigt bin, so möchte ich doch auch auf der anderen Seite die Ansicht festhalten, dass man, wenn sich Mittel angeben lassen, die es möglich machen, auch in praktischer Rücksicht den, den strengsten theoretischen Anforderungen entsprechenden Weg mit hinreichender Leichtigkeit zu betreten, die selbst in mehreren Beziehungen den früher zu verfolgen gewohnten Weg weit mehr ebenen, sich wohl entschliessen müsste, diesen früheren Weg einstweilig zu verlassen und wenigstens versuchsweise die neu angelegte Strasse zu betreten. Freilich hat die neuere Zeit hinreichend gezeigt und zeigt es leider noch immer, wie schwer es gerade in der Mathematik, ja insbesondere in ihrem am Meisten theoretischen Theile, der sogenannten höheren Analysis, hält, dass neue, bessere und strengere Methoden sich allgemein Bahn brechen und das alte bröckliche, mit Sprüngen und Rissen allerwärts nur zu sehr verunzieret

Gebäude ganz über den Haufen werfen, weshalb um so weniger in einer vorzugsweise praktischen Wissenschaft eine ähnliche Wirkung von in Vorschlag gebrachten neuen Methoden in nächster Zeit erwartet werden darf, wobei sich jedoch auch auf der anderen Seite die beruhigende Ueberzeugung aufdrängt, dass, so wie im Leben, auch in der Wissenschaft das wahrhaft Gute und Richtige doch am Ende die Oberhand und bleibenden Eingang gewinnt; verdient aber das Neue die beiden letzten Prädicate in Wahrheit nicht, so ist es natürlich auch nur wünschenswerth, dass das Alte seine wohl erworbenen Rechte behalte und behaupte, wobei denn auch noch der Vortheil nicht gering anzuschlagen ist, dass durch das als verfehlt erkannte Neue die Berechtigung des Alten und Hergebrachten auf ferneres Bestehen sich nur noch sicherer und bestimmter herausstellte, ein Gesichtspunkt, der, wie immer in ähnlichen Fällen, auch bei der Publication der vorliegenden Abhandlung mich leitet und mir vorschwebt.

Mir scheint es nun, dass alle bisher gerügten Mängel der höheren Geodäsie sämmtlich beseitigt werden können, und dass sich dieser schönen Wissenschaft eine völlige geometrische Strenge, verbunden mit der grössten Einfachheit der ganzen wissenschaftlichen Behandlung und aller geodätischen Rechnungen, wobei selbst ein Eingehen auf die sogenannte höhere Mathematik fast ganz unnöthig gemacht wird, wenigstens nur auf einige der ersten und leichtesten Grundlehren derselben zurückgegangen zu werden braucht, verleihen lässt, wenn man von einer von der bisherigen verschiedenen Grundansicht bei geodätischen Arbeiten ausgeht und dann natürlich nach dieser neuen Grundansicht auch alle geodätischen Messungen und Rechnungen modificirt, kurz und gut, dass man der ganzen höheren Geodäsie eine von der bisherigen verschiedene Gestalt giebt. Je mehr ich besorge, dass im Obigen dem Leser noch manche Dunkelheit über das, was ich eigentlich will und erstrebe, geblieben sein mag, wie dies in der Mathematik bei ganz allgemein gehaltenen Betrachtungen überhaupt nicht selten der Fall ist: desto mehr werde ich mich bemühen, im Folgenden mit aller mir zu Gebote stehenden Deutlichkeit meine Gedanken über eine Umgestaltung der höheren Geodäsie in praktischer und theoretischer Rücksicht in's Licht zu stellen, und hoffe, dass dann alle Dunkelheit, welche jetzt vielleicht noch geblieben sein dürfte, beseitigt werden wird. Auf sofortige allgemeine Beistimmung der Geodäten rechne ich, wie schon erwähnt, nicht im Geringsten, wohl wissend, wie schwer namentlich bei praktischen Geschäften neue Ansichten sich Bahn zu brechen pflegen; ich werde zufrieden sein, wenn man zunächst nur aus dem Gesichtspunkte der strengen Theorie meinen Ansichten und Entwickelungen einige Gerechtigkeit widerfahren lässt, werde mich aber sehr freuen, wenn man auch deren praktische Ausführung für eben so leicht möglich halten sollte, wie ich selbst zu thun wohl geneigt bin. Sollten auch selbst die praktischen Messoperationen nach der neuen Weise etwas schwieriger und mit mehr Zeitaufwand ausführbar sein, als nach der bisher gebräuchlichen, so glaube ich doch, dass diese grössere Schwierigkeit durch die strengere Wissenschaftlichkeit der neuen Methode, durch die weit grössere Einfachheit, Leichtigkeit und fast ganz elementare Natur der auszuführenden Rechnungen, hinreichend aufgewogen werden wird.

Ich gehe jetzt zu der Darlegung meiner Ansichten über eine neue Gestaltung der höheren Geodäsie in praktischer und theoretischer Beziehung selbst über, und richte nur an die Leser dieser Abhandlung noch die Bitte, bei der Beurtheilung derselben vor Augen zu behalten, dass hier zunächst nur Vorschläge zur Neugestaltung und Vereinfachung einer der wichtigsten, in das Gebiet der Anwendung der Mathematik gehörenden Wissenschaften und Künste zu machen beabsichtigt wird, wobei ich mich wiederholt der Hoffnung hingebe, dass, wenn man auch vielleicht von Seiten der mit hinreichender Leichtigkeit und Genauigkeit praktischen Ausführbarkeit der gemachten Vorschläge einige Bedenken erheben sollte, doch von theoretischer Seite, auch rücksichtlich des Interesses mancher der im Folgenden vorkommenden Entwickelungen an sich, und der ganzen dieser Abhandlung zu Grunde liegenden theoretischen Anschauungsweise, Gerechtigkeit widerfahren zu lassen wohl geneigt sein wird.

---

§. 1.

Allen unseren folgenden Betrachtungen liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass die Meeresfläche, welche wir als die eigentliche, von allen Unebenheiten, allen Erhöhungen und Vertiefungen, freie Oberfläche der Erde ansehen, als die Oberfläche eines durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstandenen Sphäroids betrachtet werden könne, wobei wir jedoch bemerken, dass alles Folgende, wenigstens im Allgemeinen und im Wesentlichen und natürlich unter gewissen besonders fest zu stellenden Modificationen, auch dann noch seine Gültigkeit behalten würde, wenn man der Meeresfläche eine andere beliebige Gestalt beilegte, indem man dann nur für die im Folgenden in Bezug auf das Ellipsoid vorkommenden besonderen Grössen die diesen Grössen bei der anderen, die Meeresfläche repräsentirenden Fläche entsprechenden Grössen zu setzen haben würde, was bloss einige specielle, einer besonderen Schwierigkeit wohl in keinem Falle unterliegende Untersuchungen über diese Fläche mit Hülfe der bekannten allgemeinen Formeln der analytischen Geometrie nöthig machen würde.

Von der Meeresfläche unterscheiden wir von nun an die Erdoberfläche im eigentlichen Sinne, welcher wir eine regelmässige, auf ein bestimmtes geometrisches Entstehungsgesetz zurückführbare Gestalt nicht beilegen, deren Punkte also in verschiedenen Höhen oder Tiefen über oder unter der Meeresfläche liegen können.

Der Mittelpunkt der Erde, den wir im Folgenden stets mit O bezeichnen wollen, ist einerlei mit dem Mittelpunkte der Ellipse, durch deren Umdrehung um ihre kleine Axe die Meeresfläche entstanden gedacht wird.

Die kleine Axe der durch Umdrehung um diese Axe die Meeresfläche, oder vielmehr das von derselben umschlossene Ellipsoid, erzeugenden Ellipse nennen wir die Erdaxe, und die auf derselben im Mittelpunkte der Erde senkrecht stehende Ebene, oder auch der Kreis, in welchem von dieser Ebene die Meeresfläche geschnitten wird, heisst der Erdäquator.

Von der Ebene des Erdäquators wird der unendliche Raum in zwei Theile getheilt, welche wir die beiden Seiten des Erdäquators, und zwar die eine dessen positive, die andere dessen negative Seite nennen wollen, wobei es an sich ganz willkührlich ist, welche Seite wir als die positive und welche wir als die negative annehmen, indem nur, wenn einmal in dieser Beziehung ein Beschluss gefasst worden ist, die getroffene Bestimmung auch im ganzen Laufe der Untersuchung stets festgehalten werden muss.

Die beiden Durchschnittspunkte der Erdaxe mit der Meeresfläche heissen die Erdpole, welche füglich der positive und negative Pol genannt werden können, jenachdem sie auf der positiven oder negativen Seite des Erdäquators liegen, und der letztere theilt die Meeresfläche in zwei Hälften, welche wir die positive und negative Hälfte nennen wollen, jenachdem sie respective den positiven oder negativen Erdpol enthalten.

Lassen wir von der Erdaxe eine Ebene ausgehen, welche zugleich durch einen bestimmten Punkt der Erdoberfläche geht, so wird diese Ebene oder auch die halbe Ellipse, in welcher von derselben die Meeresfläche geschnitten wird, der Meridian des in Rede stehenden Punktes auf der Erdoberfläche genannt.

Ziehen wir von dem Mittelpunkte der Erde nach einem beliebigen Punkte auf der Erdoberfläche eine gerade Linie, so heisst der 90° nicht übersteigende Winkel, unter welchem diese Linie gegen die Ebene des Erdäquators geneigt ist, indem man diesen Winkel, jenachdem der in Rede stehende Punkt auf der positiven oder negativen Seite des Erdäquators liegt, als positiv oder als negativ betrachtet, die Breite des in Rede stehenden Punktes auf der Erdoberfläche; der 90° nicht übersteigende Winkel aber, unter welchem das von diesem Punkte auf die, der Seite des Aequators, auf welcher der Punkt liegt, entsprechende Hälfte der Meeresfläche gefällte Perpendikel, — die Normale des in Rede stehenden Punktes auf der Erdoberfläche, — indem man diesen Winkel wieder als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem der betreffende Punkt der Erdoberfläche auf der positiven oder negativen Seite des Erdäquators liegt, gegen die Ebene des Erdäquators geneigt ist, soll im Folgenden stets die Polhöhe des in Rede stehenden Punktes der Erdoberfläche genannt werden. Der diesem Punkte der Erdoberfläche entsprechende Erdhalbmesser endlich soll gemessen oder bestimmt werden durch die Entfernung des Punktes, in welchem die von dem Mittelpunkte der Erde nach dem in Rede stehenden Punkte der Erdoberfläche gezogene gerade Linie die Meeresfläche schneidet, von dem Mittelpunkte der Erde.

Wenn a den Halbmesser des Aequators, b die halbe Erdaxe bezeichnet, so wird der Bruch oder das Verhältniss $\frac{a-b}{a}$ die Abplattung der Erde genannt.

§. 2.

Um den Mittelpunkt der Erde denken wir uns nun mit beliebigem Halbmesser, der indess grösserer Einfachheit wegen der Längeneinheit gleich gesetzt werden mag, eine Kugelfläche beschrieben, welche wir im Folgenden die Projections-Kugelfläche nennen wollen.

Ziehen wir dann von dem Mittelpunkte der Erde aus nach allen Punkten der Erdoberfläche gerade Linien, so werden diese geraden Linien sämmtlich die Projections-Kugelfläche in gewissen Punkten schneiden, welche wir im Folgenden die Projectionen der entsprechenden Punkte der Erdoberfläche auf der Projections-Kugelfläche nennen wollen.

Denken wir uns nun ferner diese Projectionen der Punkte der Erdoberfläche auf der Projections-Kugelfläche sämmtlich durch

Bogen grösster Kreise der letzteren unter einander verbunden, so wird auf der Projections-Kugelfläche ein Netz entstehen, welches wir das Projections-Kugelnetz der Erdoberfläche oder eines bestimmten Theils derselben nennen wollen; und die Bestimmung der gegenseitigen Lage der Punkte dieses Projections-Kugelnetzes betrachten und bezeichnen wir hier als die erste und nächste Aufgabe, als den ersten und nächsten Zweck aller geodätischen Mess- und Rechnungs-Operationen.

§. 3.

Alle das Projections-Kugelnetz bildenden einzelnen Theile desselben sind auf der Projections-Kugelfläche liegende sphärische Dreiecke, und da nun bekanntlich ein sphärisches Dreieck durch seine drei Winkel vollkommen bestimmt wird, so wird es, um die gegenseitige Lage aller Punkte des Projections-Kugelnetzes bestimmen zu können, zunächst lediglich darauf ankommen, die sämmtlichen Winkel der das Projections-Kugelnetz bildenden sphärischen Dreiecke mit einem geeigneten Instrumente, wozu wir im Folgenden stets den Theodoliten wählen wollen, zu messen; und da gerade diese Winkelmessung das Hauptmoment der neuen Methode geodätischer Messungen und Rechnungen, welche wir hier darzulegen beabsichtigen, ausmacht, so wollen wir jetzt zunächst die Art dieser Winkelmessung, insbesondere auch das dabei nach unserer Meinung am besten zu befolgende praktische Verfahren, so wie die Behufs der Ausführung dieses Verfahrens dem Theodoliten zu gebenden besonderen Einrichtungen, im folgenden Paragraphen mit aller uns möglichen Deutlichkeit aus einander zu setzen und zu beschreiben suchen.

§. 4.

Es seien A, A_1, A_2 drei beliebige Punkte auf der Erdoberfläche und A', A_1', A_2' deren Projectionen auf der Projections-Kugelfläche, welche die Spitzen des auf der Projections-Kugelfläche liegenden sphärischen Dreiecks $A'A_1'A_2'$ sind, dessen Winkel wir, wie gewöhnlich in der sphärischen Trigonometrie, bloss durch die Buchstaben A', A_1', A_2' bezeichnen werden.

Um nun den Winkel A' zu messen, stelle man den Theodoliten so auf, dass sein Mittelpunkt mit dem Punkte A auf der Erdoberfläche so genau als möglich zusammenfällt; und wenn dies nicht mit absoluter Genauigkeit möglich war, wird man immer den Mittelpunkt des Theodoliten selbst als den Punkt A zu betrachten und alle Messungen und Rechnungen auf denselben zu beziehen haben.

Könnte man nun ferner der Ebene des Limbus des Theodoliten eine solche Lage geben, dieselbe so um den Mittelpunkt des Theodoliten drehen, dass diese Ebene auf der von dem Mittelpunkte O der Erde nach dem Punkte A auf der Erdoberfläche gezogenen geraden Linie OA genau senkrecht stände, so würde es offenbar sehr leicht sein, den Winkel A' mit aller erforderlichen Genauigkeit zu messen. Man brauchte die Visirlinie des Fernrohrs des Theodoliten bloss zuerst etwa auf den Punkt A_1 auf der Erdoberfläche, dann nach dem Punkte A_2 auf der Erdoberfläche zu richten, und auf dem Limbus des Theodoliten den Bogen abzulesen, welcher den Winkel misst, den die Projectionen der Visirlinie des Fernrohrs in seinen beiden Lagen auf der Ebene des Limbus des Theodoliten mit einander einschliessen, wobei es offenbar ganz gleichgültig ist, in welchen Entfernungen die Punkte A_1 und A_2 sich von dem Mittelpunkte O der Erde befinden, wenn nur, was natürlich vorausgesetzt werden muss, die Lagen der von dem Mittelpunkte O der Erde nach den Punkten A_1 und A_2 gezogenen geraden Linien sich nicht ändern, indem die Visirlinie des nach dem Punkte A_1 oder A_2 gerichteten Fernrohrs sich augenscheinlich immer in den Ebenen AOA_1 oder AOA_2 bewegen wird, wenn man das in allen seinen Theilen natürlich in gewöhnlicher Weise gehörig berichtigte Fernrohr in den, seinen beiden in Rede stehenden Lagen entsprechenden, auf der Ebene des Limbus des Theodoliten senkrecht oder normal stehenden Ebenen, es in bekannter Weise um seine der Ebene des Limbus des Theodoliten parallele Drehungsaxe herum drehend, auf und nieder bewegt.

Zugleich gestattet der sogenannte Höhenkreis des Theodoliten offenbar, wenn auch nicht eine unmittelbare Ablesung, aber doch eine sehr einfache Bestimmung aus den an demselben gemachten Ablesungen, der Winkel, welche die von dem Mittelpunkte des Theodoliten oder dem Punkte A nach den Punkten A_1 und A_2 auf der Erdoberfläche gerichteten Linien AA_1 und AA_2 mit der von dem Mittelpunkte O der Erde nach dem Punkte A gezogenen Linie OA einschliessen.

Bei der vorhergehenden Art der Winkelmessung, welche als der eigentliche Hauptpunkt aller in dieser Abhandlung angestellten Betrachtungen angesehen werden muss, und daher einer besonders sorgfältigen Besprechung bedarf, kommt nun, wie aus dem Vorhergehenden sich von selbst ergiebt, Alles darauf an, ein möglichst einfaches, mit Sicherheit und Genauigkeit ausführbares Verfahren anzugeben, die Ebene des Limbus des Theodoliten gegen die von dem Mittelpunkte O der Erde nach dem Mittelpunkte des Theodoliten oder dem Punkte A gezogene gerade Linie OA genau senkrecht zu stellen, indem die hier beschriebene Methode der Winkelmessung von der jetzt in der Geodäsie allgemein gebräuchlichen, und dem Falle der sphärischen Meeresfläche allerdings ganz entsprechenden, für den Fall der ellipsoidischen Meeresfläche aber nicht mehr passenden, Methode der Winkelmessung sich einzig und allein darin unterscheidet, dass die Ebene des Limbus des Theodoliten nicht gegen die dem Punkte A entsprechende Normale des Erdsphäroids, sondern gegen die von dem Mittelpunkte O der Erde nach dem Punkte A gezogene Gerade OA senkrecht gestellt wird. Im folgenden Paragraphen soll nun der Versuch gemacht werden, ein den in Rede stehenden Erfordernissen mit möglichster Einfachheit und Genauigkeit entsprechendes praktisches Verfahren anzugeben; und davon, ob dieses Verfahren als genügend erkannt wird, oder ob sich dasselbe wenigstens noch so weit vervollkommnen lässt, dass es rücksichtlich seiner Einfachheit und Genauigkeit allen Anforderungen, die man an ein solches Verfahren zu machen berechtigt ist, entspricht, wird es lediglich oder wenigstens hauptsächlich abhängen, ob die in dieser Abhandlung niedergelegten Betrachtungen eine Umgestaltung der Geodäsie herbeizuführen geeignet sein werden oder nicht; dass dieselben mit diesem Verfahren stehen und fallen werden, bescheide ich mich gern, zuzugeben, indem nur durch die Einführung dieses oder eines ähnlichen Verfahrens nach meiner Meinung allen geodätischen Rechnungen eine wesentliche Vereinfachung und Erleichterung zu Theil werden kann. Natürlich findet dieses Verfahren nur so lange Anwendung, so lange man sich vornimmt, die Meeresfläche als ellipsoidisch zu betrachten, und macht dem gewöhnlichen Verfahren der Winkelmessung, bei welchem man die Ebene des Limbus des Theodoliten gegen die Normale senkrecht stellt, sogleich wieder Platz, wenn man die Meeresfläche als sphärisch betrachtet, natürlich auch mit vollem Rechte, weil unter dieser Voraussetzung die Normale eines Punktes der Erdoberfläche mit der von dem Mittelpunkte der Erde nach diesem Punkte gezogenen Geraden zusammenfällt, oder eigentlich mit dieser Geraden identisch ist.

§. 5.

Um die Ebene des Limbus des Theodoliten gegen die von dem Mittelpunkte O der Erde nach seinem Mittelpunkte oder dem

Punkte A gezogene gerade Linie OA senkrecht zu stellen, verfahre man nach den folgenden Regeln.

I. Man gebe dem Theodoliten eine solche Aufstellung, dass die gerade Linie, welche seinen Mittelpunkt mit der Axe der einen Fussschraube seines Dreifusses verbindet, genau in die Ebene des Meridians des Punktes A fällt.

II. Man stelle die Ebene des Limbus des Theodoliten genau horizontal, d. h. senkrecht gegen die Normale des Punktes A, was mittelst des Niveau's des Theodoliten in allgemein bekannter Weise geschieht.

III. Endlich gebe man durch Drehung der in I. benutzten Fussschraube des Dreifusses des Theodoliten, oder durch ein anderes geeignetes Mittel, der Ebene seines Limbus eine solche Lage, dass die nach dem in der Hälfte der Meeresfläche, in welcher man sich auf dem Punkte A befindet, liegenden Erdpole hin liegende Hälfte des Limbus sich über den Horizont des Punktes A erhebt, und gegen den letzteren unter einem, dem von der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Punkte A gezogenen geraden Linie und der Normale des Punktes A eingeschlossenen spitzen Winkel gleichen Winkel geneigt ist.

Dass durch dieses Verfahren der beabsichtigte Zweck vollständig erreicht, nämlich die Ebene des Limbus des Theodoliten gegen die von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Punkte A gezogene gerade Linie senkrecht gestellt wird, erhellet auf der Stelle aus den einfachsten geometrischen Gründen, und bedarf einer weiteren Erläuterung hier nicht. Es frägt sich nur, wie und durch welche Mittel allen in I., II., III. an den Beobachter gestellten Forderungen entsprochen werden kann, wenigstens in Bezug auf I. und III., weil bei II. schon auf den Gebrauch des Niveau's hingewiesen worden ist, und ein Jeder weiss, dass mit dessen Hülfe der Bedingung in II. mit der grössten Genauigkeit genügt werden kann. Wir wenden uns daher jetzt sogleich zu der weiteren Besprechung von I. und III. in den beiden folgenden Paragraphen.

§. 6.

Um der in I. an den Beobachter gestellten Forderung genügen zu können, scheint mir eine mit dem Theodoliten zu verbindende

Boussole mit möglichst genau getheiltem Limbus das geeignet'ste Hülfsmittel zu sein, wodurch freilich die Vermeidung aller Eisentheile an dem Theodoliten nöthig gemacht wird, der aber, wie es mir scheint, wesentliche technische Schwierigkeiten nicht entgegen stehen, da schon jetzt, mit Ausnahme der Schrauben, nur wenige Theile des Theodoliten von dem in Rede stehenden Metall verfertigt zu werden pflegen, und nach meiner Erfahrung auch Schrauben von Messing oder einem ähnlichen Metall, wie man sie an Boussolen, Messtischen, u. s. w. antrifft, wo sie öfters ziemlich viel auszuhalten haben, grosse Dauerhaftigkeit besitzen. Die Boussole würde auf der die Nonien tragenden Kappe, auf welcher auch die Träger des Fernrohrs befestigt sind, so anzubringen sein, dass ihr Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte des Theodoliten zusammenfällt, und der durch den Nullpunkt der Theilung des Limbus der Boussole gehende Durchmesser dieses Limbus mit der Visirlinie des vorher in allen seinen Theilen auf gewöhnliche Weise sorgfältigst berichtigten Fernrohrs des Theodoliten genau parallel ist, oder eigentlich in die Ebene fällt, welche die Visirlinie des Fernrohrs beschreibt, wenn man dasselbe um seine der Ebene des Limbus des Theodoliten parallele Drehungsaxe herumdreht, und muss, um diesem Erfordernisse genau genügen zu können, mit den nöthigen Correctionsschrauben versehen sein, wobei zugleich die Richtung des durch den Nullpunkt der Theilung des Limbus der Boussole gehenden Durchmessers des letzteren durch ein Paar über demselben aufgestellte Diopter bezeichnet oder dargestellt sein muss, was gewiss jeder geschickte Künstler mit aller erforderlichen Genauigkeit zu erreichen im Stande sein wird. Auch muss an dem Theodoliten selbst eine einfache Marke angebracht sein, mit deren Hülfe durch geeignete Drehung der die Nonien und das Fernrohr tragenden Kappe die Visirlinie des in allen seinen Theilen gehörig berichtigten Fernrohrs, und nach dem Vorhergehenden also auch der durch den Nullpunkt der Theilung des Limbus der Boussole gehende Durchmesser des letzteren, in eine mit der den Mittelpunkt des Theodoliten und die Axe der mehr erwähnten Fussschraube verbindenden geraden Linie parallele Lage gebracht werden kann. Ich glaube nicht, dass der Herstellung aller dieser einfachen Einrichtungen irgend eine technische Schwierigkeit entgegen steht. Ist aber allen in Rede stehenden Erfordernissen genügt, so erhellet ganz von selbst, ohne dass hier noch eine Erläuterung nöthig sein sollte, wie man sich, wenn man nur noch die Abweichung der Magnetnadel kennt, der beschriebenen Einrichtungen zu bedienen hat, um der in I. an den Beobachter gestellten Forderung in leichter praktischer Weise genügen zu können.

Es ist daher jetzt nur noch zu zeigen, wie man mittelst des vorher beschriebenen Instruments selbst sich die erforderliche Kenntniss der Abweichung der Magnetnadel, die wegen ihrer Veränderlichkeit während einer geodätischen Messung öfter, überhaupt so oft als es die Umstände gestatten, zu bestimmen sein wird, auf eine möglichst einfache und leichte Weise verschafft. Mir scheint das folgende Verfahren zu dem hier beabsichtigten Zwecke hinreichende Genauigkeit mit grosser Leichtigkeit der Ausführung zu verbinden.

Um zuerst den durch den Nullpunkt der Theilung des Limbus der Boussole gehenden Durchmesser des letzteren mit der Visirlinie des vorher in allen seinen Theilen genau berichtigten Fernrohrs parallel zu machen, richte man die Visirlinie des Fernrohrs auf einen sehr weit entfernten Punkt, und gebe dann der Büchse der Boussole mittelst der angebrachten Correctionsschrauben eine solche Drehung, dass die durch die Visire der vorher erwähnten Dioptern dargestellte oder bestimmte Linie gleichfalls auf den in Rede stehenden entfernten Punkt gerichtet ist, so wird der verlangten Bedingung entsprochen sein, jederzeit mit desto grösserer Genauigkeit, je weiter der Punkt entfernt war.

Hierauf richte man in einer sternhellen Nacht das Fernrohr auf einen Fixstern und lese bei dieser Lage des Fernrohrs den Stand der Magnetnadel auf dem Limbus der Boussole ab; dann warte man die Zeit ab, wo der nämliche Fixstern wieder dieselbe Höhe erreicht, führe die Visirlinie des in derselben Höhe unverrückt stehen gebliebenen Fernrohrs wieder auf den Stern und lese auch bei dieser Lage des Fernrohrs den Stand der Magnetnadel auf dem Limbus der Boussole ab. Dass man aus beiden Ablesungen der Magnetnadel in allen Fällen leicht deren Abweichung ableiten kann, erhellet auf der Stelle.

Wäre z. B., um dies etwas näher zu erläutern, in dem in Taf. III. Fig. 1. dargestellten Falle n die Nordspitze und s die Südspitze der Magnetnadel, ferner N, S, O, W respective Norden, Süden, Osten und Westen, endlich AF und AF' das Fernrohr in seinen beiden Lagen, so wären Fn und $F'n$ die beiden entsprechenden Ablesungen der Nordspitze n der Magnetnadel, und deren westliche Abweichung würde durch den Bogen Nn dargestellt. Weil nun vermöge der Anordnung der angestellten Beobachtungen $NF=NF'$ und

$$NF=Nn-Fn,\quad NF'=F'n-Nn$$

ist, so ist

$$Nn - Fn = F'n - Nn,$$

folglich, wie sich hieraus sogleich ergiebt:

$$Nn = \frac{Fn + F'n}{2},$$

wodurch Nn gefunden ist. Wie man sich in allen anderen vorkommenden Fällen zu verhalten hat, bedarf nun keiner weiteren Erläuterung.

Wenn sich die Nadel excentrisch, etwa, wie in Taf. III. Fig. 2. dargestellt ist, um den Punkt A' dreht, lese man ausser der Nordspitze n auch noch die Südspitze s ab, wo dann Fn und $F'n$, von F und F' an nach der linken Seite hin gerechnet, die Ablesungen der Nordspitze, und Fs und $F's$, gleichfalls von F und F' an nach der linken Seite hin gerechnet, die Ablesungen der Südspitze sein mögen. Unter dieser Voraussetzung ist, wenn wir uns durch A' mit NS und OW die Parallelen $N'S'$ und $O'W'$ gezogen denken, der Winkel $N'A'n$, d. h. nach einem bekannten geometrischen Satze der Bogen

$$\frac{N'n + S's}{2},$$

die westliche Abweichung der Magnetnadel. Nun ist aber

$$NF = NN' + N'n - Fn,$$

$$NF' = F'n - NN' - N'n;$$

also, weil $NF = NF'$ ist:

$$NN' + N'n - Fn = F'n - NN' - N'n,$$

woraus

$$1) \qquad 2.N'n = Fn + F'n - 2.NN'$$

folgt. Ferner ist

$$NF = 180^\circ + Ss - Fs = 180^\circ + S's - SS' - Fs,$$

$$NF' = F's - 180^\circ - Ss = F's - 180^\circ - S's + SS';$$

also, weil $NF = NF'$ ist:

$$180^\circ + S's - SS' - Fs = F's - 180^\circ - S's + SS',$$

woraus

$$2) \qquad 2.S's = Fs + F's + 2.SS' - 360^\circ$$

folgt. Addirt man die Gleichungen 1) und 2) zusammen, so erhält man:

$$2.(N'n+S's)=Fn+Fs+F'n+F's-2.NN'+2.SS'-360^{\circ},$$

also, weil $NN'=SS'$ ist:

$$2.(N'n+S's)=Fn+Fs+F'n+F's-360^{\circ},$$

woraus, wenn man dies durch 4 dividirt, sich

$$\frac{N'n+S's}{2}=\frac{Fn+Fs+F'n+F's}{4}-90^{\circ}$$

ergiebt, welches nach dem Obigen die westliche Abweichung der Magnetnadel ist, die also aus den Ablesungen Fn, Fs, $F'n$, $F's$ ohne Rücksicht auf die excentrische Bewegung der Magnetnadel berechnet werden kann. Die nicht der mindesten Schwierigkeit unterliegende Betrachtung anderer von dem in Taf. III. Fig. 2. dargestellten Falle abweichenden Fälle überlassen wir dem Leser.

Wir dürfen hiernach das, was über I. zu sagen ist, im Allgemeinen als erledigt betrachten, finden uns jedoch noch zu den folgenden Bemerkungen veranlasst. Jedenfalls ist nämlich die Boussole ein Instrument von untergeordneter Genauigkeit, wie viele Sorgfalt auch der Künstler auf seine Anfertigung verwenden mag, und auch die übrigen oben von uns beschriebenen Einrichtungen dürfen nicht auf die grösste Genauigkeit Anspruch machen; daher entsteht jetzt die Frage, ob durch einen kleinen Fehler bei der in I. geforderten, durch die Boussole zu bewirkenden Aufstellung des Theodoliten ein merklicher Fehler in Bezug auf das Endresultat, nämlich in Bezug auf die Senkrechtstellung der Ebene des Limbus des Theodoliten gegen die von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Aufstellungspunkte gezogene gerade Linie herbeigeführt werden kann, oder ob man zu diesem Zwecke die oben angegebenen und beschriebenen Einrichtungen als genügend anzunehmen sich berechtigt halten darf. Diese Frage zu beantworten, werden die folgenden Betrachtungen geeignet sein.

Wir wollen die Horizontalebene des Beobachtungsorts als Ebene der xy, also dessen Normale als Axe der z annehmen. Die Mittagslinie, nämlich die Durchschnittslinie der Ebene des Horizonts mit der Ebene des Meridians, sei die Axe der x, und der positive Theil der Axe der x werde so angenommen, dass er mit der von dem Beobachtungsorte aus nach dem Mittelpunkte der Erde hin gezogenen geraden Linie einen spitzen Winkel einschliesst. Der positive Theil der Axe der z sei nach dem Zenith gerichtet. Der spitze Winkel, welchen die von dem Beobachtungsorte nach dem Mittelpunkte der Erde gezogene gerade Linie mit der Normale des Beobachtungsorts einschliesst, werde durch ω bezeichnet.

Dies vorausgesetzt, sind, wie aus Taf. III. Fig. 3. auf der Stelle erhellet, die Gleichungen der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Beobachtungsorte gezogenen geraden Linie in völliger Allgemeinheit:

$$y=0, \quad z=-x\tan(90^0-\omega);$$

also

$$y=0, \quad z=-x\cot\omega;$$

oder:

$$1^*) \qquad x=-z\tan\omega, \quad y=0.$$

Wir wollen uns nun durch den Beobachtungsort als Anfang ein neues, natürlich immer rechtwinkliges, Coordinatensystem der $x_1y_1z_1$ gelegt denken, dessen Ebene der x_1y_1 mit der Ebene der xy, also mit der Horizontalebene, und dessen Axe der z_1 mit der Axe der z zusammenfallt, wobei zugleich der positive Theil der Axe der z_1 eben so wie der positive Theil der Axe der z nach dem Zenith gerichtet sein soll. Die positiven Theile der Axen der x_1 und y_1 sollen so angenommen werden wie Taf. III. Fig. 4. zeigt, nämlich so, dass der positive Theil der Axe der x_1 mit dem positiven Theile der Axe der y einen spitzen Winkel einschliesst, und dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x_1 durch den rechten Winkel (x_1y_1) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y_1 zu gelangen, nach derselben Richtung bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen. Der von den positiven Theilen der Axen der x und x_1 eingeschlossene, 180^0 nicht übersteigende Winkel werde durch θ bezeichnet. Dann haben wir nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$x=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta, \quad y=x_1\sin\theta+y_1\cos\theta;$$

aus denen umgekehrt sogleich

$$2^*) \qquad x_1=x\cos\theta+y\sin\theta, \quad y_1=-x\sin\theta+y\cos\theta$$

folgt.

Durch die Axe der x_1 sei nun eine beliebige Ebene gelegt, und der 180^0 nicht übersteigende Winkel, welchen der auf der positiven Seite der Ebene der xy oder x_1y_1 liegende Theil dieser Ebene mit dem Theile der Ebene der x_1y_1 einschliesst, in welchem der negative Theil der Axe der y_1 liegt, werde durch i bezeichnet. Dann ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$z_1 = -y_1 \tang i \quad \text{oder} \quad y_1 \tang i + z_1 = 0$$

die Gleichung dieser Ebene in dem Systeme der $x_1y_1z_1$; weil nun aber nach dem Obigen

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y_1 &= -x\sin\theta + y\cos\theta, \\ z_1 &= z \end{aligned}$$

ist, so ist für das System der xyz die Gleichung dieser Ebene:

$$(x\sin\theta - y\cos\theta)\tang i - z = 0,$$

oder:

$$3^*) \qquad x\sin\theta\sin i - y\cos\theta\sin i - z\cos i = 0.$$

Seien jetzt

$$x = Az + \alpha, \quad y = Bz + \beta$$

die Gleichungen einer beliebigen Geraden, und

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

sei die Gleichung einer beliebigen Ebene; so ist, wenn J den Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene bezeichnet, nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\sin J = \pm\frac{AA' + BB' + C'}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}},$$

wo man das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem die Grösse $AA' + BB' + C'$ positiv oder negativ ist.

Lassen wir nun die vorhergehende Gerade mit der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Beobachtungsorte gezogenen Geraden zusammenfallen, so ist nach 1*):

$$A = -\tang\omega, \quad B = 0;$$

und wenn man ferner die vorhergehende Ebene mit der durch die Gleichung 3*) charakterisirten Ebene zusammenfallen lässt, so ist nach 3*):

$$A' = \sin\theta\sin i, \quad B' = -\cos\theta\sin i, \quad C' = -\cos i.$$

Also ist:

$$1+A^2+B^2=1+\tan g\,\omega^2=\sec\omega^2,$$

$$A'^2+B'^2+C'^2=(\sin\theta^2+\cos\theta^2)\sin i^2+\cos i^2=1,$$

$$\begin{aligned}AA'+BB'+C'&=-\sin\theta\sin i\tan g\,\omega-\cos i\\&=-(\cos i+\sin\theta\sin i\tan g\,\omega);\end{aligned}$$

und weil nun, wenn wir annehmen und beachten, dass i ein spitzer Winkel ist, θ und ω nach den oben gegebenen Bestimmungen respective nicht grösser als 180° und 90° sind, offenbar

$$AA'+BB'+C'=-(\cos i+\sin\theta\sin i\tan g\,\omega)$$

eine negative Grösse ist, so ist nach dem Obigen:

$$\sin J=\frac{\cos i+\sin\theta\sin i\tan g\,\omega}{\sec\omega},$$

oder

4*) $$\sin J=\cos i\cos\omega+\sin\theta\sin i\sin\omega.$$

Setzen wir $i=\omega$, was verstattet ist, weil bekanntlich ω ein spitzer Winkel ist, so wird:

$$\begin{aligned}\sin J&=\cos\omega^2+\sin\theta\sin\omega^2\\&=1-(1-\sin\theta)\sin\omega^2\\&=1-\{1-\cos(90^0-\theta)\}\sin\omega^2\\&=1-2\sin(45^0-\tfrac{1}{2}\theta)^2\sin\omega^2,\end{aligned}$$

oder, wenn wir

$$90^0-\theta=\overline{\omega},\quad 45^0-\tfrac{1}{2}\theta=\tfrac{1}{2}\overline{\omega}$$

setzen:

5*) $$\sin J=1-2\sin\omega^2\sin\tfrac{1}{2}\overline{\omega}^2,$$

oder endlich, wenn wir

$$J'=90^0-J$$

setzen:

6*) $$\cos J'=1-2\sin\omega^2\sin\tfrac{1}{2}\overline{\omega}^2.$$

In Bezug auf den praktischen Fall, mit dem wir es hier zu thun haben, hat man sich die vorher betrachtete Ebene als die Ebene des Limbus des Theodoliten vorzustellen, deren Neigungswinkel gegen die Ebene des Horizonts ω ist; der Neigungswinkel dieser Ebene gegen die von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Beobachtungsorte gezogene gerade Linie ist J, und J' ist die Abweichung dieses Winkels von 90°; endlich ist $\overline{\omega}$, was positiv und negativ sein kann, die Abweichung der von dem Mittelpunkte des Theodoliten nach der Axe der mehr erwähnten Fussschraube seines Dreifusses gezogenen geraden Linie von dem Meridiane. Die Formel 6*) bestimmt also den Einfluss, welchen die letztere Abweichung $\overline{\omega}$ auf die mehr oder weniger genaue Senkrechtstellung der Ebene des Limbus des Theodoliten gegen die von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Beobachtungsorte gezogene gerade Linie ausübt.

Für $\overline{\omega}=0$ ist nach 6*)

$$\cos J'=1,\quad J'=0,$$

also $J=90^{0}$, d. h. die Ebene des Limbus des Theodoliten steht, wie es sein soll, auf der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Beobachtungsorte gezogenen geraden Linie genau senkrecht.

Wenn wir, was zu unserem jetzigen Zwecke genügt, der Einfachheit wegen den Beobachtungsort in der Meeresfläche liegend annehmen, so ist, wie in dem folgenden Paragraphen gezeigt werden wird, der grösste Werth, den ω auf der Erde überhaupt haben kann, in runder Zahl $11'.30''$.

Setzen wir nun einmal den bei der in I. geforderten Anfstellung des Theodoliten begangenen Fehler $\overline{\omega}=\pm 8^{0}$, also $\frac{1}{2}\overline{\omega}=\pm 4^{0}$; so wäre:

$$\begin{array}{rl}
\log\sin\omega = & 7{,}5244231-10\\
\log\sin(\pm\frac{1}{2}\overline{\omega}) = & 8{,}8435845-10\\
\hline
& 0{,}3680076-4\\
\hline
& 0{,}7360152-8 \;(2\\
\log 2 = & 0{,}3010300\\
\hline
\log.2\sin\omega^{2}\sin\frac{1}{2}\overline{\omega}^{2} = & 0{,}0370452-7\\
2\sin\omega^{2}\sin\frac{1}{2}\overline{\omega}^{2} = & 0{,}0000001\\
\cos J' = & 1-0{,}0000001\\
= & 0{,}9999999\\
\log\cos J' = & \left\{\begin{array}{rl} 0{,}9999957 & -1\\ 39 & \\ 39 & \\ \hline 1{,}0000000 & -1 \end{array}\right.\\
= & 0{,}0000000
\end{array}$$

also $\cos J'=1$, $J'=0$, $J=90^{0}$.

Folglich bringt, auch bei dem Gebrauche siebenstelliger Tafeln, und für den grössten Werth, den ω überhaupt haben kann, selbst ein Fehler von $\pm 8^0$ bei der in I. geforderten Aufstellung des Theodoliten noch gar keinen *) Fehler in Bezug auf die Senkrechtstellung der Ebene des Limbus des Theodoliten gegen die von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Beobachtungsorte gezogene gerade Linie hervor. Dass aber bei dem sorgfältigen Gebrauch einer guten Boussole nach der im Obigen gegebenen Anweisung die Fehler bei der dadurch bewirkten Aufstellung des Theodoliten in der in I. geforderten Weise bis zu $\pm 8^0$ ansteigen sollten, ist nicht zu glauben, und ich halte mich daher zu der Ansicht berechtigt, dass die Boussole zu dem Zwecke, den man hier zu erreichen beabsichtigt, ein völlig geeignetes und hinreichend genaues Hülfsmittel ist.

§. 7.

A. Um den in III. an den Beobachter gestellten Forderungen entsprechen zu können, muss derselbe, ausser, was sich von selbst versteht, der den sämmtlichen Rechnungen zu Grunde zu legenden Abplattung der Erde, auch die Breite oder Polhöhe des Beobachtungsorts A, und dessen Entfernung von dem Mittelpunkte der Erde oder seine, jenachdem er über oder unter der Meeresfläche liegt, als positiv oder negativ zu betrachtende Höhe über der Meeresfläche kennen, um daraus den von der, von dem Mittelpunkte O der Erde nach dem Beobachtungsorte A gezogenen geraden Linie mit der Normale des letzteren eingeschlossenen Winkel ω berechnen zu können, dessen Kenntniss erforderlich ist, wenn die Ebene des Limbus des Theodoliten gegen die von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Beobachtungsorte gezogene gerade Linie senkrecht gestellt werden soll. Es könnte scheinen, als wenn die Kenntniss der Breite oder Polhöhe des Punktes A und seiner Entfernung von dem Mittelpunkte der Erde oder seiner Höhe über der Meeresfläche sich nicht voraussetzen lasse; dagegen ist aber zu bemerken, dass man bei grossen, die Meeresfläche als ellipsoidisch annehmenden geodätischen Messungen, von denen hier allein die Rede ist, immer wenigstens von einem Punkte der Erdoberfläche, für welchen die beiden genannten Elemente schon anderweitig genau bekannt sind, wird ausgehen müssen; und wie durch die weitere Fortführung der geodätischen

*) d. h. eigentlich in der siebenten Decimalstelle sich nicht offenbarenden.

Messung selbst die Kenntniss dieser beiden Elemente nach und nach für alle Punkte des Netzes erlangt wird, so dass man dieselben für jeden Punkt, auf dem man eine neue Winkelmessung vorzunehmen hat, schon als bekannt vorauszusetzen berechtigt ist: dies zu zeigen, werden wir zu einer besonderen Aufgabe unserer späteren Betrachtungen in dieser Abhandlung machen.

Nach Vorausschickung dieser allgemeinen Bemerkungen müssen wir daher jetzt zeigen, wie aus der bekannten Breite oder Polhöhe des Punktes A und seiner Entfernung vom Mittelpunkte der Erde oder seiner nach dem Obigen gehörig als positiv oder negativ betrachteten Höhe über der Meeresfläche der von der von dem Mittelpunkte O der Erde nach dem Punkte A gezogenen geraden Linie mit der Normale dieses Punktes eingeschlossene spitze Winkel ω berechnet werden kann, wobei zugleich die Entwickelung verschiedener Formeln vorkommen wird, die für das Folgende überhaupt von Wichtigkeit sind.

Den Halbmesser des Aequators und die halbe Erdaxe bezeichnen wir wie gewöhnlich durch a und b; die Polhöhe und Breite des Punktes A mögen respective durch B und B' bezeichnet werden, wobei wir, was zu unserem Zwecke jetzt hinreichend ist, B und B' als positiv annehmen wollen; so erhellet mittelst einer ganz einfachen geometrischen Betrachtung auf der Stelle, dass

$$1)\qquad \omega = B - B'$$

ist. Ferner wollen wir wie gewöhnlich

$$2)\quad \left\{\begin{aligned} e^2 &= \frac{a^2-b^2}{a^2} = 1-\left(\frac{b}{a}\right)^2 = (1+\frac{b}{a})(1-\frac{b}{a}) \\ &= (1+1-\frac{a-b}{a})(1-1+\frac{a-b}{a}) = \frac{a-b}{a}(2-\frac{a-b}{a}), \end{aligned}\right.$$

also

$$3)\qquad e = \sqrt{(1+\frac{b}{a})(1-\frac{b}{a})} = \sqrt{\frac{a-b}{a}(2-\frac{a-b}{a})}$$

setzen, wo $\frac{a-b}{a}$ die Abplattung des Erdsphäroids ist, aus welcher sich also die Grösse e berechnen lässt. Die Entfernung des Punktes A von dem Mittelpunkte der Erde mag durch R, seine, jenachdem er über oder unter der Meeresfläche liegt, respective als positiv oder als negativ betrachtete Höhe über der Meeresfläche durch h bezeichnet werden.

In der Ebene des Meridians des Punktes A wollen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xy annehmen, dessen Anfang der Mittelpunkt der Erde ist; die Axe der x sei die Durchschnittslinie der Ebene des Meridians des Punktes A mit der Ebene des Erdäquators, und die Axe der y sei die Erdaxe. Der positive Theil der Axe der x sei von dem Mittelpunkte der Erde aus nach der Seite hin gerichtet, nach welcher hin von der Erdaxe aus der Punkt A liegt, und der positive Theil der Axe der y liege auf der positiven Seite der Ebene des Erdäquators. Die Coordinaten des Durchschnittspunkts der Normale des Punktes A mit der Meeresfläche wollen wir durch x, y selbst, und die veränderlichen oder laufenden Coordinaten in dem angenommenen Systeme durch X, Y bezeichnen. Dann ist nach bekannten Lehren der analytischen Geometrie oder auch schon nach den Elementen der Kegelschnitte die Gleichung der Normale des Punktes A:

$$4)\qquad Y-y=\frac{a^2y}{b^2x}(X-x),$$

folglich offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$5)\qquad \operatorname{tang} B=\frac{a^2y}{b^2x}.$$

Ferner sind offenbar in völliger Allgemeinheit

$$x+h\cos B,\quad y+h\sin B$$

die Coordinaten des Punktes A in dem angenommenen Systeme; also

$$6)\qquad \operatorname{tang} B'=\frac{y+h\sin B}{x+h\cos B}.$$

Weil nun nach 1)

$$\operatorname{tang}\omega=\operatorname{tang}(B-B')=\frac{\operatorname{tang} B-\operatorname{tang} B'}{1+\operatorname{tang} B\operatorname{tang} B'}$$

ist, so ist nach 5) und 6):

$$7)\qquad \left\{\begin{aligned}\operatorname{tang}\omega &= \frac{a^2y(x+h\cos B)-b^2x(y+h\sin B)}{b^2x(x+h\cos B)+a^2y(y+h\sin B)}\\ &= \frac{(a^2-b^2)xy+h(a^2y\cos B-b^2x\sin B)}{a^2y^2+b^2x^2+h(a^2y\sin B+b^2x\cos B)}.\end{aligned}\right.$$

Zur Bestimmung von x und y hat man die beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,\quad \frac{a^2y}{b^2x}=\operatorname{tang} B.$$

Aus der zweiten Gleichung ergiebt sich

$$y=\frac{b^2}{a^2}x\tang B,$$

folglich, wenn man diesen Werth von y in die erste Gleichung einführt:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x}{a}\right)^2\tang B^2=1,$$

woraus

$$x^2=\frac{a^2}{1+\frac{b^2}{a^2}\tang B^2}=\frac{a^4\cos B^2}{a^2\cos B^2+b^2\sin B^2},$$

also, weil unter der gemachten Voraussetzung x stets positiv ist,

$$x=\frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\tang B^2}}=\frac{a^2\cos B}{\sqrt{a^2\cos B^2+b^2\sin B^2}}$$

folgt; und weil nun

$$y=\frac{b^2}{a^2}x\tang B$$

ist, so erhält man überhaupt:

$$8)\quad x=\frac{a^2\cos B}{\sqrt{a^2\cos B^2+b^2\sin B^2}},\quad y=\frac{b^2\sin B}{\sqrt{a^2\cos B^2+b^2\sin B^2}}.$$

Also ist, wie man leicht findet:

$$a^2y\cos B-b^2x\sin B=0,$$

$$a^2y\sin B+b^2x\cos B=\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2\cos B^2+b^2\sin B^2}};$$

folglich nach 7):

$$\tang\omega=\frac{(a^2-b^2)\sin B\cos B}{a^2\cos B^2+b^2\sin B^2+h\sqrt{a^2\cos B^2+b^2\sin B^2}}$$

$$=\frac{\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin B\cos B}{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin B^2+\frac{h}{a}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin B^2}},$$

also:

$$9)\quad\begin{cases}\tan g\,\omega = \dfrac{e^2\sin B\cos B}{1-e^2\sin B^2+\dfrac{h}{a}\sqrt{1-e^2\sin B^2}}\\[2ex] \quad = \dfrac{e^2\sin B\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin B^2}\left\{\dfrac{h}{a}+\sqrt{1-e^2\sin B^2}\right\}}\\[2ex] \quad = \dfrac{e^2\sin 2B}{2\sqrt{1-e^2\sin B^2}\left\{\dfrac{h}{a}+\sqrt{1-e^2\sin B^2}\right\}}.\end{cases}$$

Für $h=0$, d. h. wenn der Punkt A in der Meeresfläche liegt, ist

$$10)\quad \tan g\,\omega = \frac{e^2\sin B\cos B}{1-e^2\sin B^2} = \frac{e^2\sin 2B}{2(1-e^2\sin B^2)}.$$

Hierbei ist die Polhöhe B und die Höhe h über der Meeresfläche als bekannt angenommen worden. Nimmt man aber die Breite B' und die Entfernung R von dem Mittelpunkte der Erde als bekannt an, so muss man auf folgende Weise verfahren.

Die Coordinaten des Punktes A in dem angenommenen Systeme sind offenbar in völliger Allgemeinheit $R\cos B'$, $R\sin B'$, was, mit dem Obigen verglichen, unmittelbar zu den beiden folgenden Gleichungen führt:

$$R\cos B' = x + h\cos B,\quad R\sin B' = y + h\sin B.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$a^2R\cos B\sin B' = a^2y\cos B + a^2h\sin B\cos B,$$
$$b^2R\sin B\cos B' = b^2x\sin B + b^2h\sin B\cos B;$$

also, weil nach dem Obigen

$$a^2y\cos B - b^2x\sin B = 0$$

ist, durch Subtraction:

$$R(a^2\cos B\sin B' - b^2\sin B\cos B') = (a^2-b^2)h\sin B\cos B,$$

oder:

$$11)\quad \frac{h}{R} = \frac{a^2\dfrac{\sin B'}{\sin B} - b^2\dfrac{\cos B'}{\cos B}}{a^2-b^2}.$$

Ferner ist

$$R\sin B\cos B' = x\sin B + h\sin B\cos B,$$
$$R\cos B\sin B' = y\cos B + h\sin B\cos B;$$

also durch Subtraction:

$$R \sin(B - B') = x \sin B - y \cos B,$$

und folglich, weil nach 8)

$$x \sin B - y \cos B = \frac{(a^2 - b^2) \sin B \cos B}{\sqrt{a^2 \cos B^2 + b^2 \sin B^2}}$$

ist:

$$12) \qquad R \sin(B - B') = \frac{(a^2 - b^2) \sin B \cos B}{\sqrt{a^2 \cos B^2 + b^2 \sin B^2}}$$

oder:

$$13) \quad \sin(B - B') = \frac{a}{R} \cdot \frac{e^2 \sin B \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin B^2}} = \frac{a}{R} \cdot \frac{e^2 \sin 2B}{2\sqrt{1 - e^2 \sin B^2}}.$$

Für $h = 0$ hat man nach 6) die Gleichung

$$\operatorname{tang} B' = \frac{y}{x},$$

und weil nun nach 5)

$$\operatorname{tang} B = \frac{a^2 y}{b^2 x}$$

ist, so ist in diesem Falle:

$$14) \qquad \operatorname{tang} B = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tang} B'.$$

Also ist

$$\sec B^2 = 1 + \operatorname{tang} B^2 = \frac{a^4 \sin B'^2 + b^4 \cos B'^2}{b^4 \cos B'^2},$$

folglich

$$\cos B = \frac{b^2 \cos B'}{\sqrt{a^4 \sin B'^2 + b^4 \cos B'^2}};$$

und weil nach dem Obigen

$$\sin B = \frac{a^2}{b^2} \cos B \operatorname{tang} B'$$

ist, so ist in diesem Falle:

$$15) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sin B &= \frac{a^2 \sin B'}{\sqrt{a^4 \sin B'^2 + b^4 \cos B'^2}}, \\ \cos B &= \frac{b^2 \cos B'}{\sqrt{a^4 \sin B'^2 + b^4 \cos B'^2}}; \end{aligned} \right.$$

welche Formeln wir hier beiläufig bemerken. Weil aber

$$\tang\omega = \tang(B-B') = \frac{\tang B - \tang B'}{1+\tang B \tang B'}$$

ist, so ist nach 14)

$$\tang\omega = \frac{(a^2-b^2)\tang B'}{b^2+a^2\tang B'^2} = \frac{(a^2-b^2)\sin B'\cos B'}{a^2\sin B'^2+b^2\cos B'^2},$$

also offenbar:

$$16)\qquad \tang\omega = \frac{e^2\sin B'\cos B'}{1-e^2\cos B'^2} = \frac{e^2\sin 2B'}{2(1-e^2\cos B'^2)},$$

mittelst welcher Formeln, wenn $h=0$ ist, ω unmittelbar aus B' berechnet werden kann.

Wenn aber nicht $h=0$ ist, muss man sich bei der Berechnung von ω, B, h aus B', R auf folgende Art verhalten.

Mittelst der Gleichung 13), nämlich mittelst der Gleichung

$$\sin(B-B') = \frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin 2B}{2\sqrt{1-e^2\sin B^2}},$$

muss man B bestimmen; dann findet man ω mittelst der Gleichung

$$\omega = B - B',$$

und h ergiebt sich mittelst einer der folgenden, unmittelbar aus 11) fliessenden Formeln:

$$17)\quad \left\{\begin{aligned} h &= \frac{a^2\dfrac{\sin B'}{\sin B} - b^2\dfrac{\cos B'}{\cos B}}{a^2-b^2}R = \frac{\dfrac{\sin B'}{\sin B} - (1-e^2)\dfrac{\cos B'}{\cos B}}{e^2}R \\ &= \left\{\frac{\cos B'}{\cos B} - \frac{1}{e^2}\cdot\frac{\sin(B-B')}{\sin B\cos B}\right\}R = \left\{\frac{\cos B'}{\cos B} - \frac{2}{e^2}\cdot\frac{\sin(B-B')}{\sin 2B}\right\}R. \end{aligned}\right.$$

Die Auflösung der Gleichung 13) ist nur durch Näherung möglich. Man kann sich dabei auf folgende Art verhalten.

Weil $\omega = B - B'$ und folglich $B = B' + \omega$ ist, so lässt sich die Gleichung 13) unter der folgenden Form darstellen:

$$\sin\omega = \frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin 2(B'+\omega)}{2\sqrt{1-e^2\sin(B'+\omega)^2}}.$$

Aus dieser Gleichung muss ω bestimmt werden. Weil sich diese Gleichung auch unter der Form

$$\sin\omega = \frac{a}{2R}\cdot e^2\sin 2(B'+\omega)\{1-e^2\sin(B'+\omega)^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

schreiben lässt, so ist nach dem Binomischen Lehrsatze:

$$\sin\omega = \frac{a}{2R}\cdot e^2\sin 2(B'+\omega)\{1+\tfrac{1}{2}e^2\sin(B'+\omega)^2+\ldots\},$$

und folglich erst mit Vernachlässigung von Gliedern, die in Bezug auf e von der vierten Ordnung sind:

$$\begin{aligned}\sin\omega &= \frac{a}{2R}\cdot e^2\sin 2(B'+\omega)\\ &= \frac{a}{2R}\cdot e^2(\sin 2B'\cos 2\omega+\cos 2B'\sin 2\omega)\\ &= \frac{a}{2R}\cdot e^2(\sin 2B'\cos 2\omega+2\cos 2B'\sin\omega\cos\omega)\\ &= \frac{a}{2R}\cdot e^2\{\sin 2B'-\tfrac{1}{2}\sin 2B'.(2\omega)^2+\ldots+2\cos 2B'\sin\omega(1-\tfrac{1}{2}\omega^2+\ldots)\},\end{aligned}$$

folglich mit Vernachlässigung von Gliedern, die in Bezug auf e und ω erst von der vierten Ordnung sind:

$$\sin\omega = \frac{a}{2R}\cdot e^2(\sin 2B'+2\cos 2B'\sin\omega),$$

woraus sogleich

18) $$\sin\omega = \frac{\frac{ae^2}{R}\sin 2B'}{2(1-\frac{ae^2}{R}\cos 2B')}$$

folgt, oder:

18*) $$\sin\omega = \tfrac{1}{2}.\frac{\frac{a}{R}e^2\sin 2B'}{1-\frac{a}{R}e^2\cos 2B'}.$$

Schreibt man diese Formel auf folgende Art:

$$\sin\omega = \tfrac{1}{2}.\frac{a}{R}e^2\sin 2B'(1-\frac{a}{R}e^2\cos 2B')^{-1},$$

so erhält man nach dem Binomischen Lehrsatze:

$$\sin\omega = \tfrac{1}{2}.\frac{a}{R}e^2\sin 2B'(1+\frac{a}{R}e^2\cos 2B'+\ldots),$$

und folglich erst mit Vernachlässigung von Gliedern, die in Bezug auf e von der vierten Ordnung sind:

$$19)\qquad \sin\omega = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{a}{R}\,e^2\sin 2B',$$

oder auch mit Vernachlässigung von Gliedern, die in Bezug auf ω von der dritten Ordnung sind:

$$20)\qquad \omega = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{a}{R}e^2\sin 2B'.$$

Mittelst der so eben entwickelten Formeln kann man einen ersten Näherungswerth von ω berechnen, den wir der Kürze wegen jetzt durch ω selbst bezeichnen wollen. Dann findet man neue successive Näherungswerthe ω_1, ω_2, ω_3, ω_4,.... mittelst der Formeln:

$$\sin\omega_1 = \frac{a}{2R}\cdot\frac{e^2\sin 2(B'+\omega)}{\sqrt{1-e^2\sin(B'+\omega)^2}},$$

$$\sin\omega_2 = \frac{a}{2R}\cdot\frac{e^2\sin 2(B'+\omega_1)}{\sqrt{1-e^2\sin(B'+\omega_1)^2}},$$

$$\sin\omega_3 = \frac{a}{2R}\cdot\frac{e^2\sin 2(B'+\omega_2)}{\sqrt{1-e^2\sin(B'+\omega_2)^2}},$$

$$\sin\omega_4 = \frac{a}{2R}\cdot\frac{e^2\sin 2(B'+\omega_3)}{\sqrt{1-e^2\sin(B'+\omega_3)^2}},$$

u. s. w.

und setzt die Rechnung nach diesen Formeln überhaupt so lange fort, bis zwei auf einander folgende Näherungswerthe sich in der verlangten Anzahl von Decimalstellen nicht mehr von einander unterscheiden.

Für die Praxis ist es durchaus nothwendig, dass man sich die Berechnung von ω durch eine Tafel der Werthe dieses Winkels erleichtere. Eine solche Tafel müsste die beiden Eingänge oder Argumente B' und R haben, was dieselbe ziemlich weitläufig und unpraktisch machen würde, weshalb man es vorziehen dürfte, den folgenden Weg einzuschlagen.

Man setze

$$21)\qquad \sin\Omega = \frac{e^2}{2}\cdot\frac{\sin 2(B'+\Omega)}{\sqrt{1-e^2\sin(B'+\Omega)^2}}$$

und berechne eine Tafel der Grössen Ω, welche nur das eine Argument B' erfordert, und mit Zugrundelegung des Werthes von e, welcher für jetzt auf die meiste Sicherheit Anspruch zu machen berechtigt ist, mittelst der aus dem Vorhergehenden sich von selbst ergebenden Vorschriften leicht construirt werden kann. Es frägt sich nun, wie man aus den in dieser Tafel enthaltenen Werthen von Ω die der Gleichung

$$22)\qquad \sin\omega = \frac{a}{R}\cdot\frac{e^2}{2}\cdot\frac{\sin 2(B'+\omega)}{\sqrt{1-\sin(B'+\omega)^2}}$$

genügenden Werthe von ω mittelst einer ganz einfachen und leichten Rechnung ableiten kann, wobei man zu beachten hat, dass in allen in der Praxis vorkommenden Fällen $\frac{a}{R}$ eine nur sehr wenig von der Einheit verschiedene, oder $\frac{a-R}{R}$ eine der Null sehr nahe kommende Grösse, also auch ω von Ω immer nur sehr wenig verschieden sein wird. Setzt man, um die in Rede stehende Frage zu beantworten, $\omega = \Omega + \Delta\Omega$, wo $\Delta\Omega$ eine der Null sehr nahe kommende Grösse sein wird, so ist

$$\sin\omega = \frac{a}{R}\cdot\frac{e^2}{2}\cdot\frac{\sin 2(B'+\Omega+\Delta\Omega)}{\sqrt{1-\sin(B'+\Omega+\Delta\Omega)^2}},$$

also, wenn wir der Kürze wegen

$$F(\Omega) = \frac{\sin 2(B'+\Omega)}{\sqrt{1-e^2\sin(B'+\Omega)^2}}$$

setzen:

$$\sin\omega = \frac{a}{R}\cdot\frac{e^2}{2}F(\Omega+\Delta\Omega),$$

folglich nach dem Taylor'schen Satze:

$$\sin\omega = \frac{a}{R}\cdot\frac{e^2}{2}\left\{F(\Omega) + F'(\Omega)\cdot\frac{\Delta\Omega}{1} + F''(\Omega)\cdot\frac{\Delta\Omega^2}{1.2} + \ldots\right\},$$

und daher erst mit Vernachlässigung von Gliedern, die in Bezug auf e und $\Delta\Omega$ von der vierten Ordnung sind:

$$\sin\omega = \frac{a}{R}\cdot\frac{e^2}{2}F(\Omega) + \frac{a}{R}\cdot\frac{e^2}{2}F'(\Omega)\Delta\Omega.$$

Weil man nun durch Differentiation leicht

$$F'(\Omega) = 2\frac{\cos 2(B'+\Omega) + e^2\sin(B'+\Omega)^4}{\{1-e^2\sin(B'+\Omega)^2\}\sqrt{1-e^2\sin(B'+\Omega)^2}} =$$

findet, und nach dem Obigen

$$\sin\Omega = \frac{e^2}{2}F(\Omega)$$

ist, so ist

$$\sin\omega = \frac{a}{R}\sin\Omega + \frac{a}{R}e^2\frac{\cos 2(B'+\Omega)+e^2\sin(B'+\Omega)^4}{\{1-e^2\sin(B'+\Omega)^2\}^{\frac{3}{2}}}\varDelta\Omega,$$

also erst mit Vernachlässigung von Gliedern, die in Bezug auf e und $\varDelta\Omega$ von der fünften Ordnung sind:

$$\sin\omega = \frac{a}{R}\sin\Omega + \frac{a}{R}e^2\frac{\cos 2(B'+\Omega)}{\{1-e^2\sin(B'+\Omega)^2\}^{\frac{3}{2}}}\varDelta\Omega$$

$$= \frac{a}{R}\sin\Omega + \frac{a}{R}e^2\cos 2(B'+\Omega)\{1-e^2\sin(B'+\Omega)^2\}^{-\frac{3}{2}}\varDelta\Omega$$

$$= \frac{a}{R}\sin\Omega + \frac{a}{R}e^2\cos 2(B'+\Omega)\{1+\tfrac{3}{2}e^2\sin(B'+\Omega)^2+\ldots.\}\varDelta\Omega$$

$$= \frac{a}{R}\sin\Omega + \frac{a}{R}e^2\cos 2(B'+\Omega)\varDelta\Omega,$$

folglich, weil

$$\sin\omega = \sin(\Omega+\varDelta\Omega) = \sin\Omega + \cos\Omega\varDelta\Omega - \tfrac{1}{2}\sin\Omega\varDelta\Omega^2 - \ldots.$$

ist:

$$\sin\Omega + \cos\Omega\varDelta\Omega = \frac{a}{R}\sin\Omega + \frac{a}{R}e^2\cos 2(B'+\Omega)\varDelta\Omega,$$

wenn man die $\varDelta\Omega^2$ und höhere Potenzen von $\varDelta\Omega$ enthaltenden Glieder vernachlässigt. Also ist, wie man sogleich findet:

$$23)\qquad \varDelta\Omega = \frac{\frac{a-R}{R}\sin\Omega}{\cos\Omega - \frac{a}{R}e^2\cos 2(B'+\Omega)},$$

woraus man sieht, dass $\varDelta\Omega$ in Bezug auf Ω und $\frac{a-R}{R}$ von der zweiten Ordnung ist. Daher erhellet aus der oben gefundenen Formel

$$\sin\omega = \frac{a}{R}\sin\Omega + \frac{a}{R}e^2\frac{\cos 2(B'+\Omega)}{\{1-e^2\sin(B'+\Omega)^2\}^{\frac{3}{2}}}\varDelta\Omega,$$

dass, wenn man

$$24)\qquad \sin\omega = \frac{a}{R}\sin\Omega$$

setzt, doch nur erst Glieder vernachlässigt werden, welche in Bezug auf die der Null sehr nahe kommenden Grössen

$$e,\quad \Omega,\quad \frac{a-R}{R}$$

von der vierten Ordnung sind.

Mit hinreichender Genauigkeit wird man auch setzen können:

$$25)\qquad \omega=\frac{a}{R}\Omega.$$

Hat man also eine Tafel für Ω, so wird man mittelst derselben auch sehr leicht ω mit hinreichender Genauigkeit berechnen können.

Wir wollen nun unter der Voraussetzung, dass $h=0$ ist, d. h. für die Meeresfläche, die Polhöhe B oder die Breite B' bestimmen, für welche ω ein Maximum wird oder seinen grössten Werth erhält.

Für $h=0$ ist nach 16)

$$\operatorname{tang}\omega=\frac{e^2\sin 2B'}{2(1-e^2\cos B'^2)},$$

also, wenn man nach B' differentiirt:

$$\frac{\partial\operatorname{tang}\omega}{\partial B'}=\frac{e^2}{2}\cdot\frac{2(1-e^2\cos B'^2)\cos 2B'-2e^2\sin B'\cos B'\sin 2B'}{(1-e^2\cos B'^2)^2}$$

$$=e^2\frac{\cos 2B'-e^2\cos B'(\cos B'\cos 2B'+\sin B'\sin 2B')}{(1-e^2\cos B'^2)^2}$$

$$=e^2\frac{\cos 2B'-e^2\cos B'^2}{(1-e^2\cos B'^2)^2}.$$

Der Zähler von

$$\frac{1}{e^2}\cdot\frac{\partial^2\operatorname{tang}\omega}{\partial B'^2}$$

ist:

$$-2(1-e^2\cos B'^2)^2(\sin 2B'-e^2\sin B'\cos B')$$

$$-4e^2\sin B'\cos B'(1-e^2\cos B'^2)(\cos 2B'-e^2\cos B'^2)$$

$$=2(1-e^2\cos B'^2)\sin B'\cos B'\{-2+e^2(1+2\sin B'^2)+e^4\cos B'^4\},$$

wie man leicht findet; also ist

$$\frac{\partial^2\operatorname{tang}\omega}{\partial B'^2}=e^2\frac{\sin 2B'\{-2+e^2(1+2\sin B'^2)+e^4\cos B'^4\}}{(1-e^2\cos B'^2)^3}.$$

Weil nun, wenn ω ein Maximum wird, auch $\tang\omega$ ein Maximum wird, so muss

$$\frac{\partial \operatorname{tang}\omega}{\partial B'}=0$$

sein, was nach dem Obigen die Bedingungsgleichung

$$\cos 2B' - e^2 \cos B'^2 = 0$$

oder, wie man leicht findet, die Gleichung

$$-1+(2-e^2)\cos B'^2=0$$

giebt, woraus man

26) $$\cos B' = \frac{1}{\sqrt{2-e^2}}, \quad \sin B' = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{2-e^2}};$$

also

27) $$\operatorname{tang} B' = \sqrt{1-e^2}$$

erhält.

Nun ist

$$\begin{aligned}
&-2+e^2(1+2\sin B'^2)+e^4\cos B'^2\\
&=-2+e^2\left\{1+\frac{2(1-e^2)}{2-e^2}\right\}+\frac{e^4}{2-e^2}\\
&=-\frac{2(2-3e^2+e^4)}{2-e^2}=-\frac{2(1-e^2)(2-e^2)}{2-e^2}=-2(1-e^2),
\end{aligned}$$

und daher eine negative Grösse, so dass also, weil

$$\sin 2B' = 2\sin B' \cos B' = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{2-e^2},$$

$$1-e^2\cos B'^2 = 1-\frac{e^2}{2-e^2} = \frac{2(1-e^2)}{2-e^2}$$

ist, offenbar auch nach dem Obigen

$$\frac{\partial^2 \operatorname{tang}\omega}{\partial B'^2}$$

negativ ist, und daher in der That ein Maximum Statt findet. Nach gehöriger Substitution erhält man entwickelt:

$$\frac{\partial^2 \operatorname{tang}\omega}{\partial B'^2} = -\tfrac{1}{2}e^2(2-e^2)^2(1-e^2)^{-\frac{1}{2}},$$

oder

$$\frac{\partial^2 \tan \omega}{\partial B'^2} = -\frac{e^2(2-e^2)^2}{2(1-e^2)\sqrt{1-e^2}}.$$

Weil nach 14)

$$\tan B = \frac{a^2}{b^2} \tan B' = \frac{\tan B'}{1-e^2}$$

ist, so ist nach 27):

28)
$$\tan B = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Nach dem Obigen ist allgemein

$$\tan \omega = \frac{(a^2-b^2)\tan B'}{b^2+a^2\tan B'^2} = \frac{e^2 \tan B'}{1-e^2+\tan B'^2},$$

also wird nach 27) der grösste Werth von ω mittelst der Formel

$$\tan \omega = \frac{e^2\sqrt{1-e^2}}{1-e^2+(1-e^2)} = \frac{e^2\sqrt{1-e^2}}{2(1-e^2)},$$

d. i. mittelst der Formel

29)
$$\tan \omega = \frac{e^2}{2\sqrt{1-e^2}}$$

berechnet.

Setzt man die Abplattung in runder Zahl $\frac{1}{300}$, so ist

$$\frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} = \frac{1}{300},$$

also

$$\frac{b}{a} = 1 - \frac{1}{300} = \frac{299}{300}, \quad e^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \left(\frac{299}{300}\right)^2;$$

$$1-e^2 = \left(\frac{299}{300}\right)^2, \quad \sqrt{1-e^2} = \frac{299}{300}.$$

Daher ist nach 29):

$$\tan \omega = \frac{1-\left(\frac{299}{300}\right)^2}{\frac{299}{150}} = \frac{150}{299}\left\{1-\left(\frac{299}{300}\right)^2\right\} = \frac{150}{299}\cdot\frac{599}{90000} = \frac{599}{299.600},$$

folglich $\omega = 11'.29''$ oder in runder Zahl $\omega = 11'.30'' = 11\frac{1}{2}'$.

Ferner ist

$$\tang B' = \frac{299}{300}, \quad \tang B = \frac{300}{299};$$

woraus man

$$\begin{aligned} B &= 45^\circ.\ 5'.44'', \\ B' &= 44^\circ.54'.16'', \\ \omega = B - B' &= 11'.28'', \end{aligned}$$

nahe wie vorher, erhält.

B. Nachdem wir jetzt gezeigt haben, wie für jeden Beobachtungsort der Winkel ω berechnet werden kann, entsteht nun aber die Frage, durch welche mechanische Hülfsmittel der Ebene des Limbus des Theodoliten eine solche Lage gegeben werden kann, dass dieselbe gegen die Ebene des Horizonts unter dem Winkel ω geneigt ist, also der in III. gemachten Anforderung genügt werden kann. Dass diese Hülfsmittel eine grosse Genauigkeit gewähren müssen, geht schon daraus hervor, dass jeder Fehler in der Lage der Ebene des Limbus des Theodoliten gegen den Horizont sich offenbar ganz auf deren Lage gegen die von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Beobachtungsorte gezogene gerade Linie überträgt, wie auch zum Ueberfluss auf folgende Art analytisch gezeigt werden kann. Nach §. 6. ist in den dort gebrauchten Zeichen, deren Bedeutung wir hier nicht von Neuem erläutern wollen, allgemein:

$$\sin J = \cos i \cos \omega + \sin \theta \sin i \sin \omega,$$

oder wenn wir wie a. a. O.

$$J' = 90^\circ - J, \quad \overline{\omega} = 90^\circ - \theta$$

setzen:

$$\cos J' = \cos i \cos \omega + \cos \overline{\omega} \sin i \sin \omega,$$

also für $\overline{\omega} = 0$, wie es hier erforderlich ist:

$$\cos J' = \cos i \cos \omega + \sin i \sin \omega = \cos(i - \omega),$$

folglich

$$J' = \pm(i - \omega).$$

Ist nun nicht, wie es sein soll, genau $i = \omega$, sondern $i = \omega + i'$, wo i' den Fehler in der, der Ebene des Limbus des Theodoliten gegebenen Lage gegen die Ebene des Horizonts bezeichnet, so ist $J' = \pm i'$, da doch bekanntlich $J' = 0$ sein soll, woraus die Richtigkeit des oben Gesagten erhellet.

Auf den ersten Anblick scheint sich ohne Weiteres das Niveau in seiner gewöhnlichen Gestalt und zugleich auch ganz in der gewöhnlichen Art und Weise seines Gebrauchs als ein geeignetes Hülfsmittel zur Erreichung des beabsichtigten Zwecks zu empfehlen. Indess wollen wir einmal die Sache aus dem praktischen Gesichtspunkte etwas genauer untersuchen, wobei sich vielleicht, wie nicht selten bei Dingen dieser Art, ein anderes Resultat herausstellen könnte. Das Niveau eines in meinem Besitze befindlichen sehr schönen grossen Theodoliten mit gebrochenem Fernrohr, welcher, auf beiden Kreisen 10″ angebend, allen an ein solches Instrument bis jetzt gestellten Forderungen in ausgezeichneter Weise entspricht, hat, wie jetzt meistens gewöhnlich, zwei von einander abgesonderte Theilungen oder Scalen; jede dieser beiden Scalen umfasst 13 Scalentheile, und jeder dieser Scalentheile entspricht nach von mir angestellten Versuchen, bei denen das Niveau an dem Höhenkreise des Theodoliten fest gebunden wurde, im Mittel 4,5 Secunden, was für 13 Scalentheile etwa 60 Secunden oder 1 Minute beträgt. Da nun der grösste Werth von a bekanntlich $11\frac{1}{4}$ Minute beträgt, so sieht man sogleich, dass das Niveau, wenn sich Winkel bis zu dieser Grösse mit demselben sollten angeben oder messen lassen, eine sehr beträchtliche Länge haben müsste, die mit den übrigen Dimensionen des Instruments in gar keinem Verhältniss stehen würde. Wenn sich nun aber auch hieraus das Unpraktische unsers obigen Vorschlags deutlich ergiebt, so drängt sich dessenungeachtet die Frage auf, ob bei etwas veränderter Einrichtung und verändertem Gebrauche das Niveau doch nicht vielleicht ein sehr brauchbares Hülfsmittel zu dem beabsichtigten Zwecke werden kann. Um aber diese Frage genügend beantworten zu können, müssen wir zuerst die Theorie des Niveau's im Allgemeinen etwas strenger und etwas weiter entwickeln, als sonst zu geschehen pflegt, wozu wir daher jetzt zunächst übergehen wollen.

Theorie des Niveau's oder der Libelle.

1.

Der Neigungswinkel einer geraden Linie gegen den Horizont, welcher immer ein spitzer Winkel ist, soll jederzeit als positiv oder als negativ betrachtet werden, jenachdem der auf der rechten Seite des Beobachters liegende Endpunkt der in Rede stehenden geraden Linie höher oder tiefer liegt wie der auf der linken Seite des Beobachters befindliche Endpunkt dieser Linie.

Die Maasseinheit für die Winkel soll im Folgenden immer ein Intervall oder ein Scalentheil der Libelle sein, wobei wir zugleich wenigstens für's Erste annehmen wollen, dass die Libelle nur eine von einem Nullpunkte nach rechts und nach links hin gehende Theilung hat, unter welcher Voraussetzung Intervalle oder Scalentheile rechts vom Nullpunkte als positiv, Intervalle oder Scalentheile links vom Nullpunkte als negativ betrachtet werden sollen.

2.

In Taf. III. Fig. 5. sei der um den Mittelpunkt C beschriebene Kreis der Kreis, von welchem die Libelle ein Bogen ist; O sei der Nullpunkt der Theilung der Libelle, die Luftblase sei LR, und M sei der Mittelpunkt der Luftblase.

Denken wir uns nun durch M an den um C beschriebenen Kreis eine Berührende gezogen, so wird diese Berührende horizontal und die Neigung der durch O an den um C beschriebenen Kreis gezogenen Berührenden gegen die erstere Berührende wird die Neigung der Libelle gegen den Horizont sein.

In Bezug auf die Lage der Luftblase und ihres Mittelpunkts gegen den Nullpunkt der Theilung können offenbar bloss die vier verschiedenen, in Taf. III. Fig. 5. dargestellten und durch (a), (b), (c), (d) bezeichneten Falle vorkommen, welche wir nun der Reihe nach einzeln betrachten wollen, indem wir immer die Neigung der Libelle gegen den Horizont durch N, die an den beiden Endpunkten der Luftblase rechts und links gemachten Ablesungen respective durch ϱ und λ bezeichnen werden.

In dem ersten in Taf. III. Fig. 5. (a) dargestellten Falle ist, wenn wir den Winkel BFE durch α bezeichnen,

$$N=\alpha.$$

Zieht man aber CO und CM, so ist, weil im Viereck $COFM$ bei O und M rechte Winkel sind, der Winkel α offenbar dem Winkel OCM gleich, und wird also, so wie dieser letztere Winkel, von dem Bogen OM gemessen. Also ist auch

$$N=OM.$$

Weil nun

$$OM=OL+LM=OL+\frac{OR-OL}{2}=\frac{OL+OR}{2}$$

und im vorliegenden Falle offenbar

$$\lambda = +OL,\quad \varrho = +OR;\quad OL = \lambda,\quad OR = \varrho$$

ist, so ist

$$N = \frac{\lambda + \varrho}{2}.$$

In dem zweiten in Taf. III. Fig. 5. (b) dargestellten Falle ist, wenn wir wieder den Winkel BFE durch α bezeichnen,

$$N = \alpha.$$

Der Winkel α ist wie vorher dem Winkel OCM gleich und wird also, so wie dieser letztere, von dem Bogen OM gemessen. Daher ist auch

$$N = OM.$$

Nun ist aber

$$OM = -OL + LM = -OL + \frac{OR + OL}{2} = \frac{-OL + OR}{2},$$

also, weil in diesem Falle offenbar

$$\lambda = -OL,\quad \varrho = +OR;\quad OL = -\lambda,\quad OR = \varrho$$

ist:

$$N = \frac{\lambda + \varrho}{2}.$$

In dem dritten in Taf. III. Fig. 5. (c.) dargestellten Falle ist, wenn wir den Winkel AFE durch β bezeichnen,

$$N = -\beta.$$

Der Winkel β ist dem Winkel OCM gleich und wird also, so wie dieser letztere, von dem Bogen OM gemessen. Daher ist

$$N = -OM.$$

Nun ist aber

$$OM = OL - LM = OL - \frac{OR + OL}{2} = \frac{OL - OR}{2},$$

also, weil in diesem Falle offenbar

$$\lambda = -OL,\quad \varrho = +OR;\quad OL = -\lambda,\quad OR = \varrho$$

ist:

$$N = \frac{\lambda + \varrho}{2}.$$

In dem vierten in Taf. III. Fig. 5. (d.) dargestellten Falle ist, wenn wir wieder den Winkel AFE durch β bezeichnen,

$$N = -\beta.$$

Der Winkel β ist dem Winkel OCM gleich, und wird also, wie dieser letztere, von dem Bogen OM gemessen. Daher ist

$$N = -OM.$$

Nun ist aber

$$OM = OL - LM = OL - \frac{OL - OR}{2} = \frac{OL + OR}{2},$$

also, weil in diesem Falle offenbar

$$\lambda = -OL,\ \ \varrho = -OR;\ \ OL = -\lambda,\ \ OR = -\varrho$$

ist:

$$N = \frac{\lambda + \varrho}{2}.$$

Aus dieser Darstellung ergiebt sich, dass die Neigung der Libelle unter den gemachten Voraussetzungen in völliger Allgemeinheit mittelst der Formel

$$N = \frac{\lambda + \varrho}{2}$$

gefunden wird.

3.

Wenn die Libelle zwei abgesonderte Theilungen oder Scalen hat, deren jede auch von einem besonderen Nullpunkte an gerechnet wird, so bezeichne man den Abstand der beiden Nullpunkte, in Scalentheilen der Libelle ausgedrückt, von einander durch $2e$, wobei übrigens der Fall $e=0$ keineswegs ausgeschlossen wird, und die rechts und links gemachten Ablesungen, beide als positiv betrachtet, respective durch r und l. Nehmen wir nun hierbei an, dass bei dem Gebrauche der Libelle immer die beiden Endpunkte der Luftblase die beiden Theilungen links und rechts wirklich erreichen, so ist offenbar immer

$$\lambda = -(e+l),\ \ \varrho = e + r;$$

folglich

$$\lambda + \varrho = -(e+l) + (e+r) = r - l,$$

also, weil nach 2. allgemein

$$N=\frac{\lambda+\varrho}{2}$$

ist, unter den jetzigen Voraussetzungen allgemein:

$$N=\frac{r-l}{2}.$$

4.

Wir wollen uns nun eine gerade Linie denken, die unter einem nur kleinen Winkel gegen den Horizont geneigt ist, und wollen die auf der rechten und linken Seite des Beobachters liegenden Endpunkte dieser geraden Linie respective durch R und L bezeichnen; die Neigung dieser geraden Linie gegen den Horizont, wobei näherer Bestimmung wegen 1. zu vergleichen ist, werde durch J bezeichnet.

Von dem Endpunkte L dieser Linie aus nach derselben Seite hin, nach welcher hin die Linie LR liegt, denken wir uns mit der auf diese letztere gesetzten Libelle eine Parallele gezogen und bezeichnen den von dieser Parallele mit der Linie LR eingeschlossenen spitzen Winkel, indem wir diesen Winkel als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem die in Rede stehende Parallele unterhalb oder oberhalb der Linie LR liegt, durch Φ.

Die Neigung der Libelle oder, was Dasselbe ist, der mit ihr durch den Punkt L gezogenen Parallele, wird wie früher auch jetzt mit N bezeichnet.

Ist nun zuerst J positiv und folglich nach 1. der Punkt L der am Tiefsten liegende Endpunkt der Linie LR, so kann, wenn in Taf. III. Fig. 6. der Horizont durch die Linie LA, die von L aus mit der Libelle parallel gezogene Linie durch LB dargestellt wird, in Bezug auf die gegenseitige Lage der drei Linien LR, LA, LB bloss einer der drei in Taf. III. Fig. 6. dargestellten und durch (a), (b), (c) bezeichneten Fälle eintreten. In dem ersten in Taf. III. Fig. 6. (a) dargestellten Falle sind N und Φ positiv, und es ist offenbar

$$N+\Phi=J.$$

In dem zweiten in Taf. III. Fig. 6. (b) dargestellten Falle ist N positiv, Φ negativ, also $-\Phi$ positiv, und es ist offenbar $(-\Phi)+J=N$, also wieder

$$N+\Phi=J.$$

In dem dritten in Taf. III. Fig. 6. (c) dargestellten Falle ist N negativ, $-N$ positiv, Φ positiv, und es ist offenbar $(-N)+J=\Phi$, also wieder

$$N+\Phi=J.$$

Ist ferner J negativ und folglich nach 1. der Punkt L der am Höchsten liegende Endpunkt der Linie LR, so kann, wenn in Taf. III. Fig. 7. wieder der Horizont durch die Linie LA, die von L aus mit der Libelle parallel gezogene Linie durch LB dargestellt wird, in Bezug auf die gegenseitige Lage der Linien LR, LA, LB bloss einer der drei in Taf. III. Fig. 7. dargestellten und durch (a), (b), (c) bezeichneten Fälle eintreten. In dem ersten in Taf. III. Fig. 7. (a) dargestellten Falle ist N positiv, Φ negativ, $-\Phi$ positiv, und offenbar $N+(-J)=(-\Phi)$, also

$$N+\Phi=J.$$

In dem zweiten in Taf. III. Fig. 7. (b) dargestellten Falle ist N negativ, $-N$ positiv, Φ negativ, $-\Phi$ positiv und offenbar $(-N)+(-\Phi)=(-J)$, also

$$N+\Phi=J.$$

In dem dritten in Taf. III. Fig. 7. (c) dargestellten Falle ist N negativ, $-N$ positiv, Φ positiv und offenbar $\Phi+(-J)=(-N)$, also

$$N+\Phi=J.$$

Nehmen wir alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich, dass in allen möglichen Fällen die Gleichung

$$N+\Phi=J$$

in völliger Allgemeinheit gültig ist.

5.

Wenn man auf die vorher betrachtete Linie LR das Niveau, welches wir durch NJ bezeichnen wollen, ein zweites Mal so aufsetzt, dass seine Fusspunkte mit einander verwechselt werden, oder, wie man zu sagen pflegt, das Niveau umgekehrt wird, und man dann die den bei der ersten Aufstellung in 4. durch N und Φ bezeichneten Grössen entsprechenden Grössen bei der zweiten Aufstellung durch N' und Φ' bezeichnet, so hat man zuvörderst natürlich ganz wie in 4. die Gleichung

$$N'+\Phi'=J,$$

ausserdem aber auch noch die aus einer blossen Ansicht von Taf. III. Fig. 8. sich auf der Stelle ergebende Gleichung

$$\Phi+\Phi'=0.$$

6.

Mittelst der drei in 4. und 5. bewiesenen Gleichungen

$$N+\Phi=J,\quad N'+\Phi'=J,\quad \Phi+\Phi'=0$$

kann man J, Φ, Φ' bloss durch N und N' ausdrücken; man erhält nämlich mittelst leichter Rechnung:

$$J=\frac{N+N'}{2},\quad \Phi=\frac{N'-N}{2},\quad \Phi'=\frac{N-N'}{2}.$$

7.

Das allgemeine Verfahren, den Neigungswinkel einer Linie LR gegen den Horizont mit Hülfe des Niveau's zu messen, ist folgendes.

Man setze das Niveau zwei Mal auf die Linie LR auf, das zweite Mal in umgekehrter Lage, und lese beide Mal die beiden Endpunkte der Luftblase links und rechts ab.

Sind nun unter Voraussetzung der ersten der beiden aus dem Obigen bekannten Einrichtungen des Niveau's die Resultate der Ablesungen bei der ersten und zweiten Aufstellung des Niveau's respective λ, ϱ und λ', ϱ'; so ist mit Beibehaltung aller im Vorhergehenden eingeführten Bezeichnungen nach 2.:

$$N=\frac{\lambda+\varrho}{2},\quad N'=\frac{\lambda'+\varrho'}{2};$$

nach 6. ist aber

$$J=\frac{N+N'}{2};$$

also

$$J=\frac{(\lambda+\lambda')+(\varrho+\varrho')}{4}.$$

Auch ist nach 6.:

$$\Phi=\frac{N'-N}{2},\quad \Phi'=\frac{N-N'}{2};$$

also:

$$\Phi=\frac{(\lambda'-\lambda)+(\varrho'-\varrho)}{4},$$

$$\Phi' = \frac{(\lambda - \lambda') + (\varrho - \varrho')}{4}.$$

Sind unter Voraussetzung der zweiten der beiden aus dem Obigen bekannten Einrichtungen des Niveau's die Resultate der Ablesungen bei der ersten und zweiten Aufstellung des Niveau's respective l, r und l', r'; so ist nach 3.:

$$N = \frac{r-l}{2}, \quad N' = \frac{r'-l'}{2};$$

nach 6. ist aber

$$J = \frac{N+N'}{2};$$

also

$$J = \frac{(r+r') - (l+l')}{4}.$$

Auch ist nach 6.:

$$\Phi = \frac{N'-N}{2}, \quad \Phi' = \frac{N-N'}{2};$$

also:

$$\Phi = \frac{(l+r') - (r+l')}{4},$$

$$\Phi' = \frac{(r+l') - (l+r')}{4}.$$

8.

Das beste Verfahren, die Linie LR horizontal zu stellen und zugleich auch das Niveau zu berichtigen, ist folgendes.

Man stelle das Niveau auf der Linie LR auf und mache, die erste Einrichtung des Niveau's vorausgesetzt, die Ablesungen λ, ϱ; hierauf kehre man das Niveau um und mache die Ablesungen λ', ϱ'; dann schraube man die Linie LR so lange, bis die Angaben des Niveau's links und rechts respective $\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda)$ und $\frac{1}{2}(\varrho' - \varrho)$ sind, so ist die Linie LR horizontal.

Bezeichnen wir nämlich, alle früheren Bezeichnungen beibehaltend, die Neigung des Niveau's nach der letzten Operation durch N'', so ist nach 2.:

$$N'' = \frac{\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) + \frac{1}{2}(\varrho' - \varrho)}{2} = \frac{(\lambda' - \lambda) + (\varrho' - \varrho)}{4}.$$

Nun ist aber nach 7.:

$$\Phi = \frac{(\lambda' - \lambda) + (\varrho' - \varrho)}{4},$$

also

$$N'' = \Phi;$$

folglich, weil bekanntlich

$$N' = J - \Phi' = J + \Phi, \text{ also } \Phi = N' - J$$

ist:

$$N'' = N' - J \text{ oder } J = N' - N''.$$

Nun liegt es aber in der Natur des angewandten Verfahrens, dass

$$N' - N'' = J - J''$$

ist, wo J'' die Neigung der Linie LR nach der letzten Operation bezeichnet; also ist nach dem Vorhergehenden

$$J = J - J'', \text{ folglich } J'' = J - J = 0$$

und die Linie LR ist daher nach der letzten Operation horizontal, wie behauptet wurde.

Unter Voraussetzung der zweiten Einrichtung des Niveau's verfährt man im Allgemeinen ganz wie vorher; und hat man dann bei der ersten Aufstellung des Niveau's die Ablesungen l, r, nach der Umkehrung desselben die Ablesungen l', r' gemacht; so schraubt man zuletzt die Linie LR so lange, bis die Angaben des Niveau's links und rechts respective $\frac{1}{2}(r + l')$ und $\frac{1}{2}(l + r')$ sind, wonach die Linie LR horizontal sein wird.

Nach 3. ist nämlich

$$N'' = \frac{\frac{1}{2}(l + r') - \frac{1}{2}(r + l')}{2} = \frac{(l + r') - (r + l')}{4},$$

also, weil nach 7.:

$$\Phi = \frac{(l + r') - (r + l')}{4}$$

ist:

$$N'' = \Phi;$$

folglich, weil bekanntlich

$$N' = J - \Phi' = J + \Phi, \text{ also } \Phi = N' - J$$

ist:

$$N'' = N' - J \text{ oder } J = N' - N''.$$

Nun liegt es aber in der Natur des angewandten Verfahrens, dass

$$N' - N'' = J - J''$$

ist; also ist nach dem Vorhergehenden

$$J = J - J'', \text{ folglich } J'' = J - J = 0,$$

daher die Linie LR nach der letzten Operation horizontal, wie behauptet wurde.

Nachdem man durch das vorhergehende Verfahren die Linie LR horizontal gestellt hat, braucht man nur, um das darauf stehende Niveau zu berichtigen, bloss seine Luftblase mittelst der am Niveau befindlichen Schraube genau in die Mitte der Theilung zu bringen.

9.

Ein anderes in der Praxis sehr gebräuchliches Verfahren zur Berichtigung des Niveau's ist das folgende. Man setze das Niveau auf die Linie LR und schraube die letztere so lange, bis die Luftblase in der Mitte der Theilung steht oder eigentlich der Mittelpunkt der Luftblase genau mit dem Nullpunkte der Scale zusammenfällt, so dass also, wenn λ und ϱ die Ablesungen der beiden Enden der Blase sind, $\lambda + \varrho = 0$ ist. Kehrt man hierauf das Niveau um und sind dann λ' und ϱ' die Ablesungen der beiden Endpunkte der Blase, so ist nach 7.:

$$J = \frac{(\lambda + \lambda') + (\varrho + \varrho')}{4} = \frac{\lambda' + \varrho'}{4},$$

und nach 2. ist

$$N' = \frac{\lambda' + \varrho'}{2}.$$

Bezeichnen wir den Abstand des Mittelpunkts der Luftblase von dem Nullpunkte der Scale durch μ, so ist, weil man λ' und ϱ' als Abscissen der Endpunkte der Blase betrachten kann, nach den Lehren der analytischen Geometrie in völliger Allgemeinheit

$$\mu = \frac{\lambda' + \varrho'}{2},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$J = \tfrac{1}{2}\mu, \quad N' = \mu.$$

Schraubt man nun nach der Umkehrung des Niveau's die Linie LR so lange, bis der Abstand des Mittelpunkts der Luftblase von dem Nullpunkte der Scale $\frac{1}{2}\mu$ ist, so sind die entsprechenden Ablesungen der Endpunkte der Luftblase offenbar $\lambda'-\frac{1}{2}\mu$ und $\varrho'-\frac{1}{2}\mu$, folglich nach 2.:

$$N''=\frac{(\lambda'-\frac{1}{2}\mu)+(\varrho'-\frac{1}{2}\mu)}{2}=\frac{\lambda'+\varrho'-\mu}{2}=\frac{2\mu-\mu}{2}=\frac{1}{2}\mu.$$

In der Natur des angewandten Verfahrens liegt es aber, dass

$$J-J''=N'-N''$$

ist; also ist nach dem Vorhergehenden

$$\tfrac{1}{2}\mu-J''=\mu-\tfrac{1}{2}\mu=\tfrac{1}{2}\mu,\quad J''=\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\mu=0,$$

folglich die Linie LR horizontal. Bringt man also jetzt die Luftblase des auf der Linie LR stehenden Niveau's durch die an letzterem befindlichen Schrauben in die Mitte der Scale, so dass nämlich der Mittelpunkt der Luftblase mit dem Nullpunkte der Scale zusammenfallt, so ist das Niveau berichtigt.

Das hieraus sich ergebende Verfahren zur Berichtigung des Niveaus ist also in der Kürze folgendes. Man setze das Niveau auf die Linie LR, und bringe durch Schrauben der letzteren die Luftblase in die Mitte der Theilung, so dass der Mittelpunkt der Luftblase mit dem Nullpunkte der Scale zusammenfallt. Dann kehre man das Niveau um, beurtheile den Abstand μ des Mittelpunkts der Luftblase von dem Nullpunkte der Scale, schraube die Linie LR so lange, bis der Abstand des Mittelpunkts der Luftblase von dem Nullpunkte der Scale nur $\frac{1}{2}\mu$ ist, worauf die Linie LR horizontal oder nivellirt sein wird, und bringe dann die Luftblase durch die dazu an dem Niveau befindliche Schraube in die Mitte der Theilung, so dass der Mittelpunkt der Luftblase mit dem Nullpunkte der Scale zusammenfällt, so wird das Niveau berichtigt sein.

Gewöhnlich wird eine Wiederholung dieses Verfahrens erforderlich sein, bis das Niveau sich als vollständig berichtigt erweist, so dass nämlich die Blase bei'm Umkehren des Niveau's in der Mitte stehen bleibt.

Nachdem wir jetzt die allgemeine Theorie des Niveau's entwickelt haben, kehren wir wieder zu unserem eigentlichen Gegenstande zurück, und wollen daher nun zeigen, wie man mit

Hülfe des Niveau's einer geraden Linie eine beliebige, jedoch nicht sehr grosse, Neigung gegen den Horizont geben kann, bemerken aber vorher im Allgemeinen noch Folgendes.

Wenn wir das völlig unberichtigte Niveau auf der beliebigen geraden Linie LR aufstellen, und den Neigungswinkel des Niveau's und der Linie LR gegen den Horizont respective durch N und J, die Ablesungen der beiden Endpunkte der Blase aber durch λ und ϱ bezeichnen; so ist nach der allgemeinen Theorie des Niveau's, indem Φ seine aus dem Vorhergehenden bekannte Bedeutung behält:

$$N+\Phi=J,\quad N=\frac{\lambda+\varrho}{2}.$$

Schraubt man jetzt die Linie LR, bis die Blase links und rechts λ_1 und ϱ_1 zeigt, so ist in analoger Bezeichnung wie vorher:

$$N_1+\Phi_1=J_1,\quad N_1=\frac{\lambda_1+\varrho_1}{2}.$$

Also ist

$$N-N_1+\Phi-\Phi_1=J-J_1$$

oder

$$\frac{\lambda+\varrho}{2}-\frac{\lambda_1+\varrho_1}{2}+\Phi-\Phi_1=J-J_1.$$

Nun liegt es aber in der Natur des angewandten Verfahrens, weil bei demselben das Niveau in beiden Lagen der Linie LR gegen diese Linie ganz dieselbe Lage behält, dass $\Phi=\Phi_1$ ist, wobei man sich aus dem Vorhergehenden an die Bedeutung der Winkel Φ und Φ_1 erinnern muss; also ist

$$J-J_1=\frac{\lambda+\varrho}{2}-\frac{\lambda_1+\varrho_1}{2},$$

folglich

$$J_1=J+\frac{\lambda_1+\varrho_1}{2}-\frac{\lambda+\varrho}{2},$$

und wenn $\lambda+\varrho=0$ ist:

$$J_1=J+\frac{\lambda_1+\varrho_1}{2}.$$

wobei kaum noch besonders bemerkt zu werden braucht, dass die Bedingung $\lambda+\varrho=0$ allemal dann erfüllt ist, wenn die Luftblase genau in der Mitte der Theilung steht oder der Mittelpunkt der Blase mit dem Nullpunkte der Scale zusammenfällt.

Wir wollen nun das Niveau so einrichten, dass der eine seiner beiden Füsse mittelst einer sehr feinen Schraube oder irgend einer anderen zweckmässigen Vorrichtung um etwas Merkliches verlängert oder verkürzt werden kann, und uns vornehmen, einer Linie LR eine bestimmte, als gegeben zu betrachtende Neigung I gegen den Horizont zu geben.

Man setze das Niveau auf die Linie LR und bringe durch Schrauben der Linie LR die Luftblase genau in die Mitte der Theilung, bei welcher Lage der Linie LR wir ihre Neigung gegen den Horizont durch J bezeichnen wollen. Hierauf schraube man die Linie LR ferner, bis die Blase links und rechts λ_1 und ϱ_1 zeigt, und bezeichne jetzt die Neigung der Linie LR gegen den Horizont durch J_1, so ist nach dem Obigen

$$J_1 = J + \frac{\lambda_1 + \varrho_1}{2}.$$

Hierauf bringe man durch Drehung der Schraube an dem einen Fusse des Niveau's die Blase genau in die Mitte der Theilung, wobei die Neigung J_1 der Linie LR gegen den Horizont ganz ungeändert bleibt, schraube dann die Linie LR so lange, bis die Blase links und rechts λ_2 und ϱ_2 zeigt, und bezeichne jetzt die Neigung der Linie LR gegen den Horizont durch J_2, so ist nach dem Obigen

$$J_2 = J_1 + \frac{\lambda_2 + \varrho_2}{2}.$$

Nun bringe man durch Drehung der Schraube an dem einen Fusse des Niveau's die Blase genau in die Mitte der Theilung, wobei die Neigung J_2 der Linie LR gegen den Horizont ganz ungeändert bleibt, schraube dann die Linie LR so lange, bis die Blase links und rechts λ_3 und ϱ_3 zeigt, und bezeichne jetzt die Neigung der Linie LR gegen den Horizont durch J_3, so ist nach dem Obigen

$$J_3 = J_2 + \frac{\lambda_3 + \varrho_3}{2}.$$

Wie man dieses Verfahren auf dieselbe Art immer weiter fortsetzen kann, ist klar, und man wird sich durch dasselbe, wie weit man es auch fortsetzen mag, im Allgemeinen immer eine Reihe Gleichungen von der Form

$$J_1 = J + \frac{\lambda_1 + \varrho_1}{2},$$

$$J_2 = J_1 + \frac{\lambda_2 + \varrho_2}{2},$$

$$J_3 = J_2 + \frac{\lambda_3 + \varrho_3}{2},$$

$$J_4 = J_3 + \frac{\lambda_4 + \varrho_4}{2},$$

u. s. w.

$$J_k = J_{k-1} + \frac{\lambda_k + \varrho_k}{2}$$

verschaffen. Addirt man diese sämmtlichen Gleichungen zu einander und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man die Gleichung

$$J_k = J + \frac{\lambda_1 + \varrho_1}{2} + \frac{\lambda_2 + \varrho_2}{2} + \frac{\lambda_3 + \varrho_3}{2} + \ldots + \frac{\lambda_k + \lambda_k}{2}$$

oder

$$J_k = J + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_k) + (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots + \varrho_k)}{2},$$

und auf ähnliche Weise:

$$J_{k+1} = J + \frac{\lambda_1 + \varrho_1}{2} + \frac{\lambda_2 + \varrho_2}{2} + \frac{\lambda_3 + \varrho_3}{2} + \ldots + \frac{\lambda_{k+1} + \varrho_{k+1}}{2}$$

oder

$$J_{k+1} = J + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_{k+1}) + (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots + \varrho_{k+1})}{2}.$$

Ueberhaupt wird das obige Verfahren so lange fortgesetzt, bis

$$J_k < I < J_{k+1}$$

ist. Bestimmt man dann x mittelst der Gleichung

$$(\lambda_k - x) + (\varrho_k - x) = 2(I - J_k),$$

wodurch man

$$x = \frac{\lambda_k + \varrho_k}{2} - (I - J_k)$$

erhält, und setzt nun

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - x = \frac{\lambda_k - \varrho_k}{2} + (I - J_k) = (I - J_k) - \frac{\varrho_k - \lambda_k}{2},$$

$$\varrho_{k+1} = \varrho_k - x = \frac{\varrho_k - \lambda_k}{2} + (I - J_k) = (I - J_k) + \frac{\varrho_k - \lambda_k}{2};$$

so ist nach dem Obigen

$$J_{k+1} = J + \frac{\lambda_1 + \varrho_1}{2} + \frac{\lambda_2 + \varrho_2}{2} + \ldots + \frac{\lambda_k + \varrho_k}{2} + \frac{(\lambda_k - x) + (\varrho_k - x)}{2};$$

wegen der Gleichung

$$(\lambda_k - x) + (\varrho_k - x) = 2(I - J_k)$$

ist aber

$$I = J_k + \frac{(\lambda_k - x) + (\varrho_k - x)}{2},$$

also nach dem Obigen

$$I = J + \frac{\lambda_1 + \varrho_1}{2} + \frac{\lambda_2 + \varrho_2}{2} + \ldots + \frac{\lambda_k + \varrho_k}{2} + \frac{(\lambda_k - x) + (\varrho_k - x)}{2};$$

folglich

$$J_{k+1} = I,$$

so dass also jetzt die Neigung J_{k+1} der Linie LR der gegebenen Neigung I gleich ist, und dieser Linie also durch das obige Verfahren in der That die gegebene Neigung I gegen den Horizont verliehen wird, was eben der Zweck war, den zu erreichen wir beabsichtigten.

Es ist klar, dass man bei dem vorstehenden Verfahren die Neigung J nothwendig kennen muss. Zu dieser Kenntniss gelangt man aber auf folgende Art. Nachdem man das erste Mal das Niveau auf der Linie LR aufgestellt und durch Schrauben dieser Linie die Luftblase in die Mitte der Theilung gebracht hat, kehre man das Niveau um und mache links und rechts an der Blase die Ablesungen λ' und ϱ'; dann ist nach der allgemeinen Theorie des Niveau's, weil für die erste Aufstellung desselben $\lambda + \varrho = 0$ ist:

$$J = \frac{\lambda' + \varrho'}{4},$$

wodurch man J gefunden hat. Nun kehre man das Niveau wieder um, d. h. führe es in seine erste Lage zurück und setze dann das Verfahren ganz in derselben Weise fort, wie es oben beschrieben worden ist.

Am Zweckmässigsten scheint es zu sein, sich bei dem obigen Verfahren eines ursprünglich genau berichtigten Niveau's zu bedienen, wo dann offenbar $J=0$ ist, und also auch in alle obigen Formeln dieser Werth von J eingeführt werden muss, wodurch dieselben an Einfachheit einigermassen gewinnen. Nach welcher Richtung man die Linie LR schrauben muss, ist in allen Fällen sehr leicht zu beurtheilen.

An dem Niveau des in meinem Besitz befindlichen, schon vorher erwähnten grossen Theodoliten ist der eine seiner beiden Füsse so eingerichtet wie Taf. III. Fig. 9. zeigt. Bei dieser leicht durch sich selbst verständlichen Einrichtung kann der betreffende Fuss durch Anziehen der Schraube S etwas verlängert, durch Nachlassen der Schraube S etwas verkürzt werden, wenigstens in so fern, als, wenn das Niveau auf der Drehungsaxe des Fernrohrs steht, der dem in Rede stehenden Fusse entsprechende Endpunkt der Libelle nothwendig im ersten Falle etwas erhöhet, im zweiten Falle etwas erniedrigt werden wird. Ich habe diese sehr einfache Einrichtung in jeder Beziehung sehr zweckmässig gefunden, und bin schon mittelst derselben im Stande, der Ebene des Limbus des Theodoliten nach dem obigen Verfahren eine Neigung von einigen Minuten gegen den Horizont zu geben, wie ich durch Versuche gefunden habe. Es früge sich, ob man nicht, ohne eine andere künstlichere Einrichtung zur Verlängerung und Verkürzung des Fusses anzubringen, schon die vorher erwähnte Einrichtung so treffen könnte, dass dieselbe es möglich machte, der Ebene des Limbus des Theodoliten noch eine Neigung von mindestens 11¼ Minute gegen den Horizont zu geben.

C. Sollte man der vorhergehenden Methode, der Ebene des Limbus des Theodoliten die erforderliche Neigung gegen den Horizont zu geben, seinen Beifall zu schenken nicht geneigt sein, so möchte vielleicht eine an dem Fusse des Theodoliten anzubringende Mikrometerschraube sich als ein zur Erreichung des beabsichtigten Zwecks geeignetes Hülfsmittel erweisen. Die Möglichkeit, sich dieses Mittels zu bedienen, scheint mir kaum zweifelhaft zu sein, weil Professor Stampfer in Wien an den vortrefflichen Nivellir-Instrumenten, die in dem dortigen polytechnischen Institute in so grosser Vollkommenheit verfertigt werden, eine Mikrometerschraube angebracht hat, welche Neigungswinkel der Visirlinie des Fernrohrs gegen den Horizont bis fast zu der Grösse von 8^0 mit einer Genauigkeit von 1 bis 2 Secunden zu messen gestattet *).

Dass ausser den beiden im Vorhergehenden besprochenen noch sehr viele anderer Methoden sich denken und angeben lassen, welche es möglich machen, der Ebene des Limbus des Theodoliten eine bestimmte Neigung gegen den Horizont zu geben, versteht sich von selbst. Ich begnüge mich indess jetzt mit den beiden obigen, von denen mir insbesondere die erste auch in mehrfacher Beziehung ein theoretisches Interesse darzubieten, und

*) Anleitung zum Nivelliren. 2. Aufl. S. 77. §. 53.

den Gebrauch eines so nützlichen Instruments, wie das Niveau oder die Libelle ist, nicht unwesentlich zu erweitern scheint. Das Beste in dieser Beziehung herauszufinden, wird die Aufgabe der Künstler sein, wenn man überhaupt den in dieser Abhandlung niedergelegten Betrachtungen einige Aufmerksamkeit zu schenken geneigt sein sollte.

Nach den bisherigen, vorzugsweise die praktische Seite unsers Gegenstandes betreffenden und, wie ich glaube, hinreichend erledigenden Untersuchungen wenden wir uns nun zu der mehr theoretischen Seite desselben, nämlich zu den Rechnungsmethoden, mittelst welcher aus den angestellten Messungen am zweckmässigsten die Resultate, deren Gewinnung die Aufgabe jeder grossen geodätischen Messung ist, gezogen werden können.

§. 8.

Bei jeder die Meeresfläche als ellipsoidisch voraussetzenden geodätischen Messung muss man von zwei Punkten auf der Erdoberfläche ausgehen, deren Längen, Breiten und Entfernungen von dem Mittelpunkte der Erde mit grosser Genauigkeit als bekannt angenommen werden können. Dass man die Längen von jedem beliebigen Punkte des Aequators an rechnen kann, oder dass eigentlich bloss die Längendifferenz der beiden in Rede stehenden Punkte gegeben zu sein braucht, versteht sich von selbst. Meistens werden übrigens ursprünglich die Längen, Polhöhen und Höhen über der Meeresfläche gegeben sein, weshalb wir in der Kürze zeigen wollen, wie aus den beiden letzteren Elementen eines Punktes dessen Breite und Entfernung von dem Mittelpunkte der Erde berechnet werden können, wozu die erforderlichen Formeln im Wesentlichen schon in §. 7. A. entwickelt worden sind.

Zuerst berechnet man die Coordinaten x und y mittelst der Formeln

$$x=\frac{a^2\cos B}{\sqrt{a^2\cos B^2+b^2\sin B^2}},\quad y=\frac{b^2\sin B}{\sqrt{a^2\cos B^2+b^2\sin B^2}};$$

oder

$$x=\frac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin B^2}},\quad y=\frac{b\sqrt{1-e^2}.\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin B^2}};$$

oder

$$x=\frac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin B^2}},\quad y=\frac{a(1-e^2)\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin B^2}};$$

oder

$$x=\frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}B^2}},\quad y=\frac{b^2}{a^2}x\operatorname{tang}B;$$

und hat dann zur Bestimmung der Breite B' und der Entfernung R vom Mittelpunkte der Erde die Gleichungen

$$R\cos B'=x+h\cos B,\quad R\sin B'=y+h\sin B;$$

aus denen sich

$$\operatorname{tang}B'=\frac{y+h\sin B}{x+h\cos B},$$

$$R=\frac{x+h\cos B}{\cos B'},\quad R=\frac{y+h\sin B}{\sin B'}$$

ergiebt.

Berechnet man den absolut nicht grösser als 90^0 zu nehmenden Hülfswinkel Θ mittelst der Formel

$$\operatorname{tang}\Theta=\frac{b}{a}\operatorname{tang}B,$$

so ist nach dem Obigen

$$x=a\cos\Theta,\quad y=b\sin\Theta;$$

mittelst welcher Formeln die Berechnung von x und y äusserst leicht ist. Nicht viel schwieriger ist ferner die Berechnung von B' und R nach den obigen Formeln, wobei zugleich die doppelte Berechnung von R eine zweckmässige Controle für die Richtigkeit der ganzen Rechnung darbietet.

Zu zeigen, wie man zu der Kenntniss der Längen, Polhöhen und Höhen über der Meeresfläche der beiden der ganzen Messung zu Grunde zu legenden Punkte gelangt, gehört hier nicht zu meiner Aufgabe, weil die Bestimmung dieser Elemente grösstentheils astronomischen Beobachtungen anheim fällt und vorzugsweise den astronomischen Theil der ganzen Operation ausmacht.

Für nöthig halte ich es aber, um nicht missverstanden zu werden, hier noch die folgenden Bemerkungen einzuschalten. Ich habe nämlich gesagt, dass man bei jeder grossen geodätischen Operation von zwei Punkten ausgehen müsse, deren Längen, Breiten und Entfernungen von dem Mittelpunkte der Erde als genau bekannt angesehen werden können. Dies ist aber nur im Allgemeinen zu verstehen, und ich habe dabei für's Erste nur den mehr theoretischen Gesichtspunkt im Auge gehabt, aus welchem unser Gegenstand aufgefasst werden muss. In der Praxis, wo es nothwendig und zweckmässig ist, so wenig wie möglich Bestimmungen astronomischen Beobachtungen zu entlehnen, die letzteren so viel als möglich entbehrlich zu machen und möglichst Alles auf geodätische Messungen zurückzuführen, pflegt man dagegen nur von einem Punkte der Erdoberfläche auszugehen, dessen Polhöhe und Höhe über der Meeresfläche, oder die daraus abzuleitende Breite und Entfernung von dem Mittelpunkte der Erde, bekannt sind, und verschafft sich für einen zweiten Punkt der Erdoberfläche die Längendifferenz in Bezug auf den ersteren Punkt, die Breite und die Entfernung von dem Mittelpunkte der Erde durch besondere geodätische Messungen, was dann auf eine sogenannte Basismessung u. s. w. führt. Dieser zweite Fall soll weiter unten einer besonderen ausführlichen Besprechung unterworfen werden. Man sieht aber aus dem Vorhergehenden von selbst, dass dieser zweite Fall, nur mit theilweiser Hülfe besonderer hauptsächlich geodätischer Messungen, uns wieder auf den vorher näher bezeichneten ersten Fall zurückführt, so dass wir also ganz im Rechte zu sein glauben, wenn wir zuerst und vor allen Dingen jenen ersten Fall, wenn nämlich zwei Punkte, deren Längen, Breiten und Entfernungen von dem Mittelpunkte der Erde gegeben sind, der Messung zu Grunde gelegt werden, als den allgemeineren, einer sorgfältigen Betrachtung unterziehen, was daher jetzt zuvörderst geschehen soll. Die Zurückführung des zweiten Falls auf den ersten werden wir, wie schon gesagt, zum Gegenstande einer späteren Betrachtung machen.

§. 9.

Wir wollen uns jetzt drei Punkte A_0, A_1, A_2 auf der Erdoberfläche denken, deren Projectionen auf der Projections-Kugelfläche respective A_0', A_1', A_2' sein mögen. Die Längen, Breiten und Entfernungen von dem Mittelpunkte der Erde der Punkte A_0 und A_1 sollen als bekannt angenommen und respective durch L_0, B_0', R_0 und L_1, B_1', R_1 bezeichnet werden. Dieselben Elemente L_2, B_2', R_2 für den dritten Punkt A_2 zu bestimmen, ist der eigentliche und letzte Zweck unserer Aufgabe.

Zu dem Ende stelle man den Theodoliten etwa zuerst in dem Punkte A_0 so auf, dass die Ebene seines Limbus auf der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Punkte A_0 gezogenen geraden Linie senkrecht steht, und visire mit dem Fernrohre nach A_1 und nach A_2; dann kann man auf dem Limbus des Theodoliten unmittelbar den Winkel A_0' des sphärischen Dreiecks $A_0'A_1'A_2'$, und auf dem Höhenkreise des Theodoliten den Neigungswinkel $N_{0,2}$ der Linie A_0A_2 gegen die Ebene des Limbus des Theodoliten, d. h. gegen die in dem Punkte A_0 auf der von dem Mittelpunkte der Erde nach diesem Punkte gezogene gerade Linie senkrecht stehende Ebene, welchen Neigungswinkel wir als positiv oder als negativ betrachten wollen, jenachdem die Linie A_0A_2 oberhalb oder unterhalb der in Rede stehenden Ebene liegt, ablesen. Ganz auf dieselbe Weise stellt man ferner den Theodoliten in dem Punkte A_1 auf, und misst den Winkel A_1' des sphärischen Dreiecks $A_0'A_1'A_2$ und den eben so wie vorher gehörig als positiv oder negativ betrachteten Neigungswinkel $N_{1,2}$ der Linie A_1A_2 gegen die Ebene des Limbus des Theodoliten.

Aus den gegebenen Längen und Breiten der Punkte A_0 und A_1 kann man nun zuvörderst die Seite $A_0'A_1'$ des sphärischen Dreiecks $A_0'A_1'A_2'$ berechnen, welche wir der Kürze wegen durch Ω bezeichnen wollen. Bezeichnet nämlich P einen Erdpol und P' dessen Projection auf der Projections-Kugelfläche, so kann man offenbar aus den gegebenen Breiten B_0' und B_1' der Punkte A_0 und A_1 sehr leicht die Seiten $A_0'P'$ und $A_1'P'$, und aus den gegebenen Längen L_0 und L_1 der Punkte A_0 und A_1 sehr leicht den Winkel P' des sphärischen Dreiecks $A_0'P'A_1'$ ableiten, und kennt also jetzt zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel dieses sphärischen Dreiecks, woraus sich dessen Seite $A_0'A_1'$ nach den Regeln der sphärischen Trigonometrie berechnen lässt, was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

Man kann diese Rechnung aber auch nach den folgenden ganz allgemeinen analytischen Formeln führen. Es werde ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz zu Grunde gelegt, das seinen Anfang im Mittelpunkte der Erde hat; die Ebene der xy sei die Ebene des Erdäquators; der positive Theil der Axe der x gehe nach dem Null- oder Anfangspunkte der Längen, der positive Theil der Axe der y nach dem neunzigsten Grade der Längen, der positive Theil der Axe der z sei nach dem positiven Erdpole gerichtet. Bezeichnen wir nun die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem Mittelpunkte der Erde nach den Punkten A_0 und A_1 gezogenen geraden Linien mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliessen, respective durch α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1; so ist, wie man sogleich übersieht:

$$\cos\alpha_0 = \cos L_0 \cos B_0', \quad \cos\alpha_1 = \cos L_1 \cos B_1',$$
$$\cos\beta_0 = \sin L_0 \cos B_0', \quad \cos\beta_1 = \sin L_1 \cos B_1',$$
$$\cos\gamma_0 = \sin B_0'; \quad \cos\gamma_1 = \sin B_1';$$

mittelst welcher Formeln die Winkel α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1 leicht berechnet werden können. Dann hat man zur Berechnung von Ω die Formel

$$\cos\Omega = \cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1,$$

also nach dem Obigen:

$$\cos\Omega = \sin B_0'\sin B_1' + (\cos L_0\cos L_1 + \sin L_0\sin L_1)\cos B_0'\cos B_1',$$

folglich:

$$\cos\Omega = \sin B_0'\sin B_1' + \cos B_0'\cos B_1'\cos(L_0 - L_1),$$

welche Formel ganz allgemein ist.

Bei wirklichen praktischen Anwendungen wird man gewiss fast immer annehmen können, dass B_0' und B_1' gleiche Vorzeichen haben und der absolute Werth von $L_0 - L_1$ nicht grösser als 90° ist. Dann ist

$$\frac{\cos B_0'\cos B_1'\cos(L_0-L_1)}{\sin B_0'\sin B_1'} = \cot B_0'\cot B_1'\cos(L_0 - L_1)$$

offenbar eine positive Grösse, und man kann daher den Hülfswinkel Θ mittelst der Formel

$$\tang\Theta = \sqrt{\cot B_0'\cot B_1'\cos(L_0 - L_1)}$$

berechnen, worauf

$$\cos\Omega = \sin B_0'\sin B_1'\{1 + \cot B_0'\cot B_1'\cos(L_0 - L_1)\}$$
$$= \sin B_0'\sin B_1'(1 + \tang\Theta^2) = \sin B_0'\sin B_1'\sec\Theta^2,$$

also

$$\cos\Omega = \frac{\sin B_0'\sin B_1'}{\cos\Theta^2}$$

ist. Die Formeln

$$\tang\Theta = \sqrt{\cot B_0'\cot B_1'\cos(L_0 - L_1)},$$
$$\cos\Omega = \frac{\sin B_0'\sin B_1'}{\cos\Theta^2}$$

gestatten, insofern man sich zu den obigen Annahmen berechtigt halten darf, eine sehr einfache und leichte Berechnung der Seite Ω.

Aus der Seite $A_0'A_1' = \Omega$ und den beiden daran liegenden gemessenen Winkeln A_0' und A_1' des sphärischen Dreiecks $A_0'A_1'A_2'$ kann man nun die Seiten $A_0'A_2'$ und $A_1'A_2'$ dieses sphärischen

Dreiecks, die wir respective durch θ_0 und θ_1 bezeichnen wollen, berechnen. Da diese Rechnung bei der Fortführung der geodätischen Messung über das ganze Netz immer wiederkehrt, so wollen wir dieselbe etwas ausführlicher erläutern.

Das erste und eigentlich vorzüglichste Mittel zur Berechnung der Seiten $A_0'A_2'$ und $A_1'A_2'$ aus den gegebenen Stücken A_0', $A_0'A_1'$, A_1', zwei Winkeln und der eingeschlossenen Seite, des sphärischen Dreiecks $A_0'A_1'A_2'$ bieten die beiden folgenden Neper'schen Analogieen dar:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A_0'A_2'+A_1'A_2')=\frac{\cos\frac{1}{2}(A_1'-A_0')}{\cos\frac{1}{2}(A_1'+A_0')}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A_0'A_1',$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A_0'A_2'-A_1'A_2')=\frac{\sin\frac{1}{2}(A_1'-A_0')}{\sin\frac{1}{2}(A_1'+A_0')}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A_0'A_1';$$

und ich wüsste in der That auch gar kein besseres und zweckmässigeres Mittel, um zu dem gesuchten Resultate zu gelangen, als diese beiden vortrefflichen Formeln.

Man kann sich aber auch der folgenden Reihen bedienen, die aus den in dem Aufsatze: Archiv der Mathematik und Physik. Theil XVIII. Nr. XXX. *) entwickelten allgemeinen Reihen leicht abgeleitet werden.

I. Wenn $\operatorname{tang}\frac{1}{2}A_0'\operatorname{tang}\frac{1}{2}A_1'<1$ ist:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(A_0'A_2'+A_1'A_2')=\tfrac{1}{2}A_0'A_1'&+\tfrac{1}{1}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A_0'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A_1'\sin(1.A_0'A_1')\\&+\tfrac{1}{2}(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A_0'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A_1')^2\sin(2.A_0'A_1')\\&+\tfrac{1}{3}(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A_0'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A_1')^3\sin(3.A_0'A_1')\\&+\tfrac{1}{4}(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A_0'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A_1')^4\sin(4.A_0'A_1')\\&+\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

II. Wenn $\operatorname{tang}\frac{1}{2}A_0'\operatorname{tang}\frac{1}{2}A_1'>1$ ist:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(A_0'A_2'+A_1'A_2')=-\tfrac{1}{2}A_0'A_1'&-\tfrac{1}{1}\cot\tfrac{1}{2}A_0'\cot\tfrac{1}{2}A_1'\sin(1.A_0'A_1')\\&-\tfrac{1}{2}(\cot\tfrac{1}{2}A_0'\cot\tfrac{1}{2}A_1')^2\sin(2.A_0'A_1')\\&-\tfrac{1}{3}(\cot\tfrac{1}{2}A_0'\cot\tfrac{1}{2}A_1')^3\sin(3.A_0'A_1')\\&-\tfrac{1}{4}(\cot\tfrac{1}{2}A_0'\cot\tfrac{1}{2}A_1')^4\sin(4.A_0'A_1')\\&-\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

---

*) M. s. auch Archiv der Mathem. u. Phys. Thl. XIX. Nr. XII.

Ferner

I*. Wenn $\tang\frac{1}{2}A_0'\cot\frac{1}{2}A_1' < 1$ ist:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(A_0'A_2'-A_1'A_2') = \tfrac{1}{2}A_0'A_1' &- \tfrac{1}{1}\tang\tfrac{1}{2}A_0'\cot\tfrac{1}{2}A_1'\sin(1.A_0'A_1')\\ &+\tfrac{1}{2}(\tang\tfrac{1}{2}A_0'\cot\tfrac{1}{2}A_1')^2\sin(2.A_0'A_1')\\ &-\tfrac{1}{3}(\tang\tfrac{1}{2}A_0'\cot\tfrac{1}{2}A_1')^3\sin(3.A_0'A_1')\\ &+\tfrac{1}{4}(\tang\tfrac{1}{2}A_0'\cot\tfrac{1}{2}A_1')^4\sin(4.A_0'A_1')\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

II*. Wenn $\tang\frac{1}{2}A_0'\cot\frac{1}{2}A_1' > 1$ ist:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(A_0'A_2'-A_1'A_2') = -\tfrac{1}{2}A_0'A_1' &+ \tfrac{1}{1}\cot\tfrac{1}{2}A_0'\tang\tfrac{1}{2}A_1'\sin(1.A_0'A_1')\\ &-\tfrac{1}{2}(\cot\tfrac{1}{2}A_0'\tang\tfrac{1}{2}A_1')^2\sin(2.A_0'A_1')\\ &+\tfrac{1}{3}(\cot\tfrac{1}{2}A_0'\tang\tfrac{1}{2}A_1')^3\sin(3.A_0'A_1')\\ &-\tfrac{1}{4}(\cot\tfrac{1}{2}A_0'\tang\tfrac{1}{2}A_1')^4\sin(4.A_0'A_1')\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Dass man jetzt bloss mittelst der Regeln der sphärischen Trigonometrie die Länge und Breite des Punktes A_2 würde berechnen können, erhellet sehr leicht und bedarf einer weiteren Erläuterung hier nicht. Da man aber bei dieser Rechnung, der verschiedenen Fälle wegen, die vorkommen können, der Hülfe einer Figur nicht wohl wird entbehren können, so scheinen mir immer ganz allgemeine analytische Formeln, die das Zurückgehen auf eine Figur ganz unnöthig machen, den Vorzug vor den gewöhnlichen Regeln der sphärischen Trigonometrie zu verdienen. Dergleichen ganz allgemeine analytische Formeln, die, wie ich glaube, Anspruch auf eine gewisse Eleganz machen dürfen, werde ich im Folgenden entwickeln; um jedoch diese Entwickelung als ein möglichst selbstständiges Ganzes, unabhängig von den übrigen Betrachtungen, darzustellen, will ich dieselbe bis zum Schluss dieses Paragraphen aufsparen, und daher vorher noch zeigen, wie die Entfernung des Punktes A_2 von dem Mittelpunkte der Erde berechnet werden kann, wozu die bisher gewonnenen Resultate völlig hinreichend sind.

Den Coefficienten der terrestrischen Refraction für die Temperatur 0 und die Barometerhöhe $0^m,76$ wollen wir durch k bezeichnen, so ist der Refractions-Coefficient für die Temperatur t nach dem hunderttheiligen Thermometer und die Barometerhöhe b nach dem metrischen Barometer, weil der Refractions-Coefficient der Dichte der Luft proportional gesetzt werden kann:

$$\frac{bk}{0^m,76.(1+0,00375.t)},$$

oder μk, wenn wir der Kürze wegen

$$\mu=\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)}$$

setzen.

Für die Punkte A_0 und A_1 sei nun respective

$$\mu_0=\frac{b_0}{0^m,76.(1+0,00375.t_0)},\quad \mu_1=\frac{b_1}{0^m,76.(1+0,00375.t_1)},$$

wo t_0, b_0 und t_1, b_1 gleichzeitig mit der Winkelmessung auf den Punkten A_0 und A_1 am Thermometer und Barometer beobachtet worden sind; dann sind nach dem bekannten Hauptsatze der Theorie der terrestrischen Refraction, in seiner gewöhnlichen Gestalt, die Refractionen in den Punkten A_0 und A_1 respective:

$$k\mu_0.A_0'A_2' \text{ und } k\mu_1.A_1'A_2'$$

oder in der oben eingeführten abkürzenden Bezeichnung:

$$k\mu_0\theta_0 \text{ und } k\mu_1\theta_1.$$

Also sind die wahren Neigungswinkel der Linien A_0A_2 und A_1A_2 gegen die Ebene des Limbus des Theodoliten:

$$N_{0,2}-k\mu_0\theta_0 \text{ und } N_{1,2}-k\mu_1\theta_1,$$

welche wir im Folgenden durch N_0 und N_1 bezeichnen wollen, so dass also

$$N_0=N_{0,2}-k\mu_0\theta_0 \text{ und } N_1=N_{1,2}-k\mu_1\theta_1$$

ist, indem immer $N_{0,2}$ und $N_{1,2}$ die wirklich beobachteten Neigungswinkel der Linien A_0A_2 und A_1A_2 gegen die Ebene des Limbus des Theodoliten bezeichnen. Nun haben wir in den ebenen Dreiecken A_0OA_2 und A_1OA_2 offenbar die folgenden Proportionen:

$$R_0:R_2=\sin\{180^0-\theta_0-(90^0+N_0)\}:\sin(90^0+N_0),$$

$$R_1:R_2=\sin\{180^0-\theta_1-(90^0+N_1)\}:\sin(90^0+N_1);$$

oder:

$$R_0:R_2=\sin\{90^0-(\theta_0+N_0)\}:\sin(90^0+N_0),$$

$$R_1:R_2=\sin\{90^0-(\theta_1+N_1)\}:\sin(90^0+N_1);$$

also:

$$R_0 : R_2 = \cos(\theta_0 + N_0) : \cos N_0,$$
$$R_1 : R_2 = \cos(\theta_1 + N_1) : \cos N_1.$$

Hieraus folgt:

$$R_2 = \frac{\cos N_0}{\cos(\theta_0 + N_0)} R_0, \quad R_2 = \frac{\cos N_1}{\cos(\theta_1 + N_1)} R_1;$$

also

$$\frac{R_1}{R_0} = \frac{\cos N_0 \cos(\theta_1 + N_1)}{\cos N_1 \cos(\theta_0 + N_0)},$$

oder

$$\frac{R_1}{R_0} = \frac{\cos(N_{0,2} - k\mu_0\theta_0)\cos\{N_{1,2} + (1 - k\mu_1)\theta_1\}}{\cos(N_{1,2} - k\mu_1\theta_1)\cos\{N_{0,2} + (1 - k\mu_0)\theta_0\}},$$

mittelst welcher Gleichung k bestimmt werden muss.

Man kann diese Gleichung auf folgende Art ausdrücken:

$$\frac{R_1}{R_0} = \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_0} \cdot \frac{1 - \operatorname{tang}\theta_1 \operatorname{tang}(N_{1,2} - k\mu_1\theta_1)}{1 - \operatorname{tang}\theta_0 \operatorname{tang}(N_{0,2} - k\mu_0\theta_0)}$$

oder:

$$\frac{R_1 \cos\theta_0}{R_0 \cos\theta_1} = \frac{1 - \operatorname{tang}\theta_1 \operatorname{tang}(N_{1,2} - k\mu_1\theta_1)}{1 - \operatorname{tang}\theta_0 \operatorname{tang}(N_{0,2} - k\mu_0\theta_0)}.$$

Behufs einer ersten Näherung setze man:

$$\operatorname{tang}(N_{0,2} - k\mu_0\theta_0) = \operatorname{tang} N_{0,2} - \frac{k\mu_0\theta_0}{\cos N_{0,2}^2},$$

$$\operatorname{tang}(N_{1,2} - k\mu_1\theta_1) = \operatorname{tang} N_{1,2} - \frac{k\mu_1\theta_1}{\cos N_{1,2}^2};$$

so wird

$$\frac{R_1 \cos\theta_0}{R_0 \cos\theta_1} = \frac{1 - \operatorname{tang}\theta_1 \operatorname{tang} N_{1,2} + k\mu_1\theta_1 \dfrac{\operatorname{tang}\theta_1}{\cos N_{1,2}^2}}{1 - \operatorname{tang}\theta_0 \operatorname{tang} N_{0,2} + k\mu_0\theta_0 \dfrac{\operatorname{tang}\theta_0}{\cos N_{0,2}^2}}$$

$$= \frac{\cos\theta_0 \cos N_{0,2}}{\cos\theta_1 \cos N_{1,2}} \cdot \frac{\cos\theta_1 \cos N_{1,2} - \sin\theta_1 \sin N_{1,2} + k\mu_1\theta_1 \dfrac{\sin\theta_1}{\cos N_{1,2}}}{\cos\theta_0 \cos N_{0,2} - \sin\theta_0 \sin N_{0,2} + k\mu_0\theta_0 \dfrac{\sin\theta_0}{\sin N_{0,2}}},$$

also

$$\frac{R_1 \cos N_{1,2}}{R_0 \cos N_{0,2}} = \frac{\cos(\theta_1 + N_{1,2}) + k\mu_1\theta_1 \dfrac{\sin\theta_1}{\cos N_{1,2}}}{\cos(\theta_0 + N_{0,2}) + k\mu_0\theta_0 \dfrac{\sin\theta_0}{\cos N_{0,2}}},$$

woraus sich

$$k=\frac{R_1\dfrac{\cos(\theta_0+N_{0,2})}{\cos N_{0,2}}-R_0\dfrac{\cos(\theta_1+N_{1,2})}{\cos N_{1,2}}}{\mu_1\theta_1 R_0\dfrac{\sin\theta_1}{\cos N_{1,2}{}^2}-\mu_0\theta_0 R_1\dfrac{\sin\theta_0}{\cos N_{0,2}}},$$

und wenn man, unter der Voraussetzung, dass θ_0 und θ_1 nur klein sind, für θ_0 und θ_1 näherungsweise respective $\sin\theta_0$ und $\sin\theta_1$ setzt:

$$k=\frac{R_1\dfrac{\cos(\theta_0+N_{0,2})}{\cos N_{0,2}}-R_0\dfrac{\cos(\theta_1+N_{1,2})}{\cos N_{1,2}}}{\mu_1 R_0\left(\dfrac{\sin\theta_1}{\cos N_{1,2}}\right)^2-\mu_0 R_1\left(\dfrac{\sin\theta_0}{\cos N_{0,2}}\right)^2}.$$

Wie man, wenn man mittelst dieser Formeln einen ersten Näherungswerth für k gefunden hat, dann auch mittelst der obigen Gleichung diese Grösse leicht völlig genau berechnen kann, wird einer weiteren Erläuterung hier nicht bedürfen. Nachdem man aber k gefunden hat, erhält man R_2 leicht mittelst einer der beiden aus dem Obigen bekannten Formeln:

$$R_2=\frac{\cos N_0}{\cos(\theta_0+N_0)}R_0,\quad R_2=\frac{\cos N_1}{\cos(\theta_1+N_1)}R_1,$$

wo

$$N_0=N_{0,2}-k\mu_0\theta_0,\quad N_1=N_{1,2}-k\mu_1\theta_1$$

ist, und zugleich die doppelte Berechnung von R_2 nach den beiden vorstehenden Formeln eine Controle für die Richtigkeit der ganzen geführten Rechnung darbietet.

Hiernach wollen wir nun endlich zur Entwickelung der schon oben erwähnten allgemeinen Formeln zur Berechnung der Länge L_2 und Breite B_2' des Punktes A_2 übergehen.

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Punkte A_2 gezogene gerade Linie mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, durch α_2, β_2, γ_2, so kommt zunächst Alles auf die Bestimmung dieser drei Winkel an, weil sich, wie man sogleich übersieht, die Länge und Breite L_2 und B_2' aus diesen drei Winkeln leicht berechnen lassen werden. Die Lehren der analytischen Geometrie liefern uns aber zu der Bestimmung der drei in Rede stehenden Winkel unmittelbar die drei folgenden Gleichungen:

$$\cos\theta_0=\cos\alpha_0\cos\alpha_2+\cos\beta_0\cos\beta_2+\cos\gamma_0\cos\gamma_2,$$

$$\cos\theta_1 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2,$$

$$\cos\alpha_2^2 + \cos\beta_2^2 + \cos\gamma_2^2 = 1;$$

wobei natürlich θ_0 und θ_1 als bekannt vorausgesetzt werden, wozu wir nach dem Vorhergehenden berechtigt sind. Die Bestimmung der drei Winkel α_2, β_2, γ_2 aus diesen drei Gleichungen, namentlich in möglichst eleganter Form, ist nicht ganz leicht, wenn man sich dabei nicht eines Kunstgriffs bedient. Dieser Kunstgriff ist folgender.

Wenn der Kürze wegen

$$A = \frac{(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1 \cos\Omega)\cos\theta_0 + (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0 \cos\Omega)\cos\theta_1}{\sin\Omega^2},$$

$$B = \frac{(\cos\beta_0 - \cos\beta_1 \cos\Omega)\cos\theta_0 + (\cos\beta_1 - \cos\beta_0 \cos\Omega)\cos\theta_1}{\sin\Omega^2},$$

$$C = \frac{(\cos\gamma_0 - \cos\gamma_1 \cos\Omega)\cos\theta_0 + (\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0 \cos\Omega)\cos\theta_1}{\sin\Omega^2}$$

gesetzt wird, so setze man

$$\cos\alpha_2 = A + X,$$
$$\cos\beta_2 = B + Y,$$
$$\cos\gamma_2 = C + Z;$$

und führe nun X, Y, Z statt α_2, β_2, γ_2 als unbekannte Grössen ein.

Zu dem Ende überzeugt man sich, mit Rücksicht darauf, dass bekanntlich

$$\cos\Omega = \cos\alpha_0 \cos\alpha_1 + \cos\beta_0 \cos\beta_1 + \cos\gamma_0 \cos\gamma_1$$

ist, zuvörderst sogleich von der Richtigkeit der zwei folgenden Relationen:

$$A\cos\alpha_0 + B\cos\beta_0 + C\cos\gamma_0 = \cos\theta_0,$$
$$A\cos\alpha_1 + B\cos\beta_1 + C\cos\gamma_1 = \cos\theta_1;$$

und weil nun

$$\cos\alpha_0 \cos\alpha_2 + \cos\beta_0 \cos\beta_2 + \cos\gamma_0 \cos\gamma_2 = \cos\theta_0,$$
$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = \cos\theta_1$$

ist, so ergeben sich aus dem Obigen offenbar sogleich die beiden folgenden Gleichungen:

$$\cos\alpha_0 . X + \cos\beta_0 . Y + \cos\gamma_0 . Z = 0,$$
$$\cos\alpha_1 . X + \cos\beta_1 . Y + \cos\gamma_1 . Z = 0.$$

Drückt man ferner die Grössen A, B, C auf folgende Art aus:

$$A=\frac{\cos\alpha_0\cos\theta_0+\cos\alpha_1\cos\theta_1-\cos\Omega(\cos\alpha_0\cos\theta_1+\cos\alpha_1\cos\theta_0)}{\sin\Omega^2},$$

$$B=\frac{\cos\beta_0\cos\theta_0+\cos\beta_1\cos\theta_1-\cos\Omega(\cos\beta_0\cos\theta_1+\cos\beta_1\cos\theta_0)}{\sin\Omega^2},$$

$$C=\frac{\cos\gamma_0\cos\theta_0+\cos\gamma_1\cos\theta_1-\cos\Omega(\cos\gamma_0\cos\theta_1+\cos\gamma_1\cos\theta_0)}{\sin\Omega^2};$$

so erhält man leicht:

$$(A^2+B^2+C^2)\sin\Omega^4$$

$$\begin{aligned}
= \; & (1+\cos\Omega^2)(\cos\theta_0{}^2+\cos\theta_1{}^2+2\cos\Omega\cos\theta_0\cos\theta_1) \\
& -2\cos\Omega(\cos\alpha_0\cos\theta_0+\cos\alpha_1\cos\theta_1)(\cos\alpha_0\cos\theta_1+\cos\alpha_1\cos\theta_0) \\
& -2\cos\Omega(\cos\beta_0\cos\theta_0+\cos\beta_1\cos\theta_1)(\cos\beta_0\cos\theta_1+\cos\beta_1\cos\theta_0) \\
& -2\cos\Omega(\cos\gamma_0\cos\theta_0+\cos\gamma_1\cos\theta_1)(\cos\gamma_0\cos\theta_1+\cos\gamma_1\cos\theta_0) \\
= \; & (1+\cos\Omega^2)(\cos\theta_0{}^2+\cos\theta_1{}^2+2\cos\Omega\cos\theta_0\cos\theta_1) \\
& -2\cos\Omega\{\cos\Omega(\cos\theta_0{}^2+\cos\theta_1{}^2)+2\cos\theta_0\cos\theta_1\} \\
= \; & \sin\Omega^2(\cos\theta_0{}^2+\cos\theta_1{}^2-2\cos\Omega\cos\theta_0\cos\theta_1),
\end{aligned}$$

also

$$A^2+B^2+C^2=\frac{\cos\theta_0{}^2+\cos\theta_1{}^2-2\cos\Omega\cos\theta_0\cos\theta_1}{\sin\Omega^2}.$$

Auf der Stelle erhellet aber wegen der Gleichungen

$$\cos\alpha_0\,.\,X+\cos\beta_0\,.\,Y+\cos\gamma_0\,.\,Z=0,$$
$$\cos\alpha_1\,.\,X+\cos\beta_1\,.\,Y+\cos\gamma_1\,.\,Z=0$$

auch, dass

$$AX+BY+CZ=0$$

ist; daher ist, wie man sogleich findet, wenn man die Gleichungen

$$\cos\alpha_2=A+X,$$
$$\cos\beta_2=B+Y,$$
$$\cos\gamma_2=C+Z$$

quadrirt und dann zu einander addirt:

$$1=(A^2+B^2+C^2)+(X^2+Y^2+Z^2),$$

also

$$X^2+Y^2+Z^2=1-(A^2+B^2+C^2),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$X^2+Y^2+Z^2=1-\frac{\cos\theta_0{}^2+\cos\theta_1{}^2-2\cos\Omega\cos\theta_0\cos\theta_1}{\sin\Omega^2}.$$

Also haben wir zur Bestimmung von X, Y, Z jetzt die drei folgenden Gleichungen:

$$\cos\alpha_0\,.\,X+\cos\beta_0\,.\,Y+\cos\gamma_0\,.\,Z=0,$$

$$\cos\alpha_1\,.\,X+\cos\beta_1\,.\,Y+\cos\gamma_1\,.\,Z=0,$$

$$X^2+Y^2+Z^2=1-\frac{\cos\theta_0{}^2+\cos\theta_1{}^2-2\cos\Omega\cos\theta_0\cos\theta_1}{\sin\Omega^2}.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergiebt sich:

$$Y=\frac{\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1}{\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1}X,$$

$$Z=\frac{\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1}{\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1}X;$$

also

$$(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)^2\frac{X^2+Y^2+Z^2}{X^2}$$

$$=(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)^2$$

$$+(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)^2$$

$$+(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)^2$$

$$=(\cos\alpha_0{}^2+\cos\beta_0{}^2+\cos\gamma_0{}^2)(\cos\alpha_1{}^2+\cos\beta_1{}^2+\cos\gamma_1{}^2)$$

$$-\cos\alpha_0{}^2\cos\alpha_1{}^2-\cos\beta_0{}^2\cos\beta_1{}^2-\cos\gamma_0{}^2\cos\gamma_1{}^2$$

$$-2\cos\alpha_0\cos\alpha_1\cos\beta_0\cos\beta_1$$

$$-2\cos\beta_0\cos\beta_1\cos\gamma_0\cos\gamma_1$$

$$-2\cos\gamma_0\cos\gamma_1\cos\alpha_0\cos\alpha_1$$

$$=1-(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1)^2$$

$$=1-\cos\Omega^2=\sin\Omega^2,$$

folglich

$$X^2+Y^2+Z^2=\frac{\sin\Omega^2}{(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)^2}X^2;$$

also wegen der dritten der drei zwischen X, Y, Z Statt findenden Gleichungen:

$$X = \pm\frac{\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1}{\sin\Omega}\sqrt{1 - \frac{\cos\theta_0^2 + \cos\theta_1^2 - 2\cos\Omega\cos\theta_0\cos\theta_1}{\sin\Omega^2}}.$$

Daher ist mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander nach dem Obigen überhaupt:

$$X = \pm\frac{\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1}{\sin\Omega}\sqrt{1 - \frac{\cos\theta_0^2 + \cos\theta_1^2 - 2\cos\Omega\cos\theta_0\cos\theta_1}{\sin\Omega^2}},$$

$$Y = \pm\frac{\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1}{\sin\Omega}\sqrt{1 - \frac{\cos\theta_0^2 + \cos\theta_1^2 - 2\cos\Omega\cos\theta_0\cos\theta_1}{\sin\Omega^2}},$$

$$Z = \pm\frac{\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1}{\sin\Omega}\sqrt{1 - \frac{\cos\theta_0^2 + \cos\theta_1^2 - 2\cos\Omega\cos\theta_0\cos\theta_1}{\sin\Omega^2}}.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$a_0 = \frac{\cos\alpha_0}{\sin\Omega} = \frac{\cos L_0 \cos B_0}{\sin\Omega},$$

$$b_0 = \frac{\cos\beta_0}{\sin\Omega} = \frac{\sin L_0 \cos B_0}{\sin\Omega},$$

$$c_0 = \frac{\cos\gamma_0}{\sin\Omega} = \frac{\sin B_0}{\sin\Omega};$$

$$a_1 = \frac{\cos\alpha_1}{\sin\Omega} = \frac{\cos L_1 \cos B_1}{\sin\Omega},$$

$$b_1 = \frac{\cos\beta_1}{\sin\Omega} = \frac{\sin L_1 \cos B_1}{\sin\Omega},$$

$$c_1 = \frac{\cos\gamma_1}{\sin\Omega} = \frac{\sin B_1}{\sin\Omega};$$

$$\lambda_0 = \frac{\cos\theta_0}{\sin\Omega}, \quad \lambda_1 = \frac{\cos\theta_1}{\sin\Omega};$$

so ist:

$$A = (a_0 - a_1\cos\Omega)\lambda_0 + (a_1 - a_0\cos\Omega)\lambda_1,$$

$$B = (b_0 - b_1\cos\Omega)\lambda_0 + (b_1 - b_0\cos\Omega)\lambda_1,$$

$$C = (c_0 - c_1\cos\Omega)\lambda_0 + (c_1 - c_0\cos\Omega)\lambda_1$$

und

$$X = \pm(b_0c_1 - c_0b_1)\sin\Omega\sqrt{1-(\lambda_0^2+\lambda_1^2-2\lambda_0\lambda_1\cos\Omega)},$$

$$Y = \pm(c_0a_1 - a_0c_1)\sin\Omega\sqrt{1-(\lambda_0^2+\lambda_1^2-2\lambda_0\lambda_1\cos\Omega)},$$

$$Z = \pm(a_0b_1 - b_0a_1)\sin\Omega\sqrt{1-(\lambda_0^2+\lambda_1^2-2\lambda_0\lambda_1\cos\Omega)};$$

oder:

$$A = a_0(\lambda_0 - \lambda_1\cos\Omega) + a_1(\lambda_1 - \lambda_0\cos\Omega),$$

$$B = b_0(\lambda_0 - \lambda_1\cos\Omega) + b_1(\lambda_1 - \lambda_0\cos\Omega),$$

$$C = c_0(\lambda_0 - \lambda_1\cos\Omega) + c_1(\lambda_1 - \lambda_0\cos\Omega)$$

und

$$X = \pm(b_0c_1 - c_0b_1)\sin\Omega\sqrt{1-(\lambda_0^2+\lambda_1^2-2\lambda_0\lambda_1\cos\Omega)},$$

$$Y = \pm(c_0a_1 - a_0c_1)\sin\Omega\sqrt{1-(\lambda_0^2+\lambda_1^2-2\lambda_0\lambda_1\cos\Omega)},$$

$$Z = \pm(a_0b_1 - b_0a_1)\sin\Omega\sqrt{1-(\lambda_0^2+\lambda_1^2-2\lambda_0\lambda_1\cos\Omega)};$$

oder:

$$A = (a_0 - a_1)(\lambda_0 - \lambda_1)\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2 + (a_0 + a_1)(\lambda_0 + \lambda_1)\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2,$$

$$B = (b_0 - b_1)(\lambda_0 - \lambda_1)\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2 + (b_0 + b_1)(\lambda_0 + \lambda_1)\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2,$$

$$C = (c_0 - c_1)(\lambda_0 - \lambda_1)\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2 + (c_0 + c_1)(\lambda_0 + \lambda_1)\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2$$

und

$$X = \pm(b_0c_1 - c_0b_1)\sin\Omega\sqrt{1-(\lambda_0-\lambda_1)^2\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2-(\lambda_0+\lambda_1)^2\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2},$$

$$Y = \pm(c_0a_1 - a_0c_1)\sin\Omega\sqrt{1-(\lambda_0-\lambda_1)^2\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2-(\lambda_0+\lambda_1)^2\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2},$$

$$Z = \pm(a_0b_1 - b_0a_1)\sin\Omega\sqrt{1-(\lambda_0-\lambda_1)^2\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2-(\lambda_0+\lambda_1)^2\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2};$$

oder:

$$A = (a_0 - a_1)(\lambda_0 - \lambda_1) + 2(a_0\lambda_1 + a_1\lambda_0)\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2,$$

$$B = (b_0 - b_1)(\lambda_0 - \lambda_1) + 2(b_0\lambda_1 + b_1\lambda_0)\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2,$$

$$C = (c_0 - c_1)(\lambda_0 - \lambda_1) + 2(c_0\lambda_1 + c_1\lambda_0)\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2$$

und

$$X = \pm(b_0c_1 - c_0b_1)\sin\Omega\sqrt{1-(\lambda_0-\lambda_1)^2-4\lambda_0\lambda_1\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2},$$

$$Y = \pm(c_0a_1 - a_0c_1)\sin\Omega\sqrt{1-(\lambda_0-\lambda_1)^2-4\lambda_0\lambda_1\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2},$$

$$Z = \pm(a_0b_1 - b_0a_1)\sin\Omega\sqrt{1-(\lambda_0-\lambda_1)^2-4\lambda_0\lambda_1\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2};$$

oder:

$$A=(a_0+a_1)(\lambda_0+\lambda_1)-2(a_0\lambda_1+a_1\lambda_0)\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2,$$

$$B=(b_0+b_1)(\lambda_0+\lambda_1)-2(b_0\lambda_1+b_1\lambda_0)\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2,$$

$$C=(c_0+c_1)(\lambda_0+\lambda_1)-2(c_0\lambda_1+c_1\lambda_0)\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2$$

und

$$X=\pm(b_0c_1-c_0b_1)\sin\Omega\sqrt{1-(\lambda_0+\lambda_1)^2+4\lambda_0\lambda_1\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2},$$

$$Y=\pm(c_0a_1-a_0c_1)\sin\Omega\sqrt{1-(\lambda_0+\lambda_1)^2+4\lambda_0\lambda_1\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2},$$

$$Z=\pm(a_0b_1-b_0a_1)\sin\Omega\sqrt{1-(\lambda_0+\lambda_1)^2+4\lambda_0\lambda_1\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2}.$$

Die Berechnung der Wurzelgrösse erleichtert man sich auf folgende Art, wobei wir natürlich annehmen, dass

$$\sqrt{1-(\lambda_0-\lambda_1)^2-4\lambda_0\lambda_1\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2}$$

und

$$\sqrt{1-(\lambda_0+\lambda_1)^2+4\lambda_0\lambda_1\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2}$$

beide reell, also

$$1-(\lambda_0-\lambda_1)^2-4\lambda_0\lambda_1\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2 \quad\text{und}\quad 1-(\lambda_0+\lambda_1)^2+4\lambda_0\lambda_1\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2$$

beide positiv sind.

I. Wenn $1-(\lambda_0-\lambda_1)^2$ positiv und auch $\lambda_0\lambda_1$ positiv ist, so kann man

$$\sqrt{1-(\lambda_0-\lambda_1)^2-4\lambda_0\lambda_1\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2}=\sqrt{1-(\lambda_0-\lambda_1)^2}\,.\sqrt{1-\frac{4\lambda_0\lambda_1\sin\frac{1}{2}\Omega^2}{1-(\lambda_0-\lambda_1)^2}}$$

setzen, wo

$$\frac{4\lambda_0\lambda_1\sin\frac{1}{2}\Omega^2}{1-(\lambda_0-\lambda_1)^2}$$

positiv ist.

II. Wenn $1-(\lambda_0-\lambda_1)^2$ positiv und $\lambda_0\lambda_1$ negativ ist, so ist, weil

$$1-(\lambda_0+\lambda_1)^2+4\lambda_0\lambda_1\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2$$

positiv ist, $1-(\lambda_0+\lambda_1)^2$ positiv, und man kann also

$$\sqrt{1-(\lambda_0+\lambda_1)^2+4\lambda_0\lambda_1\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2}=\sqrt{1-(\lambda_0+\lambda_1)^2}\,.\sqrt{1-\frac{-4\lambda_0\lambda_1\cos\frac{1}{2}\Omega^2}{1-(\lambda_0+\lambda_1)^2}}$$

setzen, wo

$$\frac{-4\lambda_0\lambda_1\cos\frac{1}{2}\Omega^2}{1-(\lambda_0+\lambda_1)^2}$$

positiv ist.

III. Wenn $1-(\lambda_0-\lambda_1)^2$ negativ ist, so ist, weil

$$1-(\lambda_0-\lambda_1)^2-4\lambda_0\lambda_1\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2$$

positiv ist, $\lambda_0\lambda_1$ negativ, also, weil

$$1-(\lambda_0+\lambda_1)^2+4\lambda_0\lambda_1\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2$$

positiv ist, $1-(\lambda_0+\lambda_1)^2$ positiv; also kann man

$$\sqrt{1-(\lambda_0+\lambda_1)^2+4\lambda_0\lambda_1\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2}=\sqrt{1-(\lambda_0+\lambda_1)^2}.\sqrt{1-\frac{-4\lambda_0\lambda_1\cos\frac{1}{2}\Omega^2}{1-(\lambda_0+\lambda_1)^2}}$$

setzen, wo

$$\frac{-4\lambda_0\lambda_1\cos\frac{1}{2}\Omega^2}{1-(\lambda_0+\lambda_1)^2}$$

positiv ist.

Im Falle I. setzt man also

$$\left.\begin{matrix}\cos\overline{\omega}\\ \sin\overline{\omega}\end{matrix}\right\}=\frac{2\sin\frac{1}{2}\Omega\sqrt{\lambda_0\lambda_1}}{\sqrt{(1+\lambda_0-\lambda_1)(1-\lambda_0+\lambda_1)}},$$

und hat dann

$$\sqrt{1-(\lambda_0-\lambda_1)^2-4\lambda_0\lambda_1\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2}=\left.\begin{matrix}\sin\overline{\omega}\\ \cos\overline{\omega}\end{matrix}\right\}\sqrt{(1+\lambda_0-\lambda_1)(1-\lambda_0+\lambda_1)}.$$

In den Fällen II. und III. setzt man

$$\left.\begin{matrix}\cos\overline{\omega}\\ \sin\overline{\omega}\end{matrix}\right\}=\frac{2\cos\frac{1}{2}\Omega\sqrt{-\lambda_0\lambda_1}}{\sqrt{(1+\lambda_0+\lambda_1)(1-\lambda_0-\lambda_1)}},$$

und hat dann

$$\sqrt{1-(\lambda_0+\lambda_1)^2+4\lambda_0\lambda_1\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2}=\left.\begin{matrix}\sin\overline{\omega}\\ \cos\overline{\omega}\end{matrix}\right\}\sqrt{(1+\lambda_0+\lambda_1)(1-\lambda_0-\lambda_1)}.$$

Nachdem man die Grössen A, B, C und X, Y, Z berechnet hat, findet man α_2, β_2, γ_2 leicht mittelst der Formeln:

$$\cos\alpha_2=A+X,$$
$$\cos\beta_2=B+Y,$$
$$\cos\gamma_2=C+Z.$$

Weil nun aber

$$\cos\alpha_2=\cos L_2\cos B_2',$$
$$\cos\beta_2=\sin L_2\cos B_2',$$
$$\cos\gamma_2=\sin B_2'$$

ist, so hat man zur Berechnung der Breite B_2' und der Länge L_2 die folgenden einfachen Formeln:

$$\sin B_2' = \cos\gamma_2;$$

$$\cos L_2 = \frac{\cos\alpha_2}{\cos B_2'}, \quad \sin L_2 = \frac{\cos\beta_2}{\cos B_2'}, \quad \tang L_2 = \frac{\cos\beta_2}{\cos\alpha_2}.$$

Weil der absolute Werth von B_2' nie grösser als 90^0 ist, so lässt die erste Formel rücksichtlich der Breite nie eine Zweideutigkeit zu. Rücksichtlich der Länge L_2 hat man zu bemerken, dass, wenn

$\cos L_2$ positiv, $\sin L_2$ positiv;
„ negativ, „ positiv;
„ negativ, „ negativ;
„ positiv, „ negativ

ist, respective

$$0 < L_2 < 90^0,$$
$$90^0 < L_2 < 180^0,$$
$$180^0 < L_2 < 270^0,$$
$$270^0 < L_2 < 360^0$$

genommen werden muss, so dass also auch nie ein Zweifel bleiben kann, wie man die Länge zu nehmen hat.

Zwischen den Grössen a_0, b_0, c_0 und a_1, b_1, c_1 finden verschiedene leicht zu beweisende Relationen Statt, von denen wir uns die folgenden merken wollen:

$$a_0a_0 + b_0b_0 + c_0c_0 = \operatorname{cosec}\Omega^2,$$

$$a_1a_1 + b_1b_1 + c_1c_1 = \operatorname{cosec}\Omega^2,$$

$$a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1 = \cos\Omega \operatorname{cosec}\Omega^2;$$

$$(a_0b_1 - b_0a_1)^2 + (b_0c_1 - c_0b_1)^2 + (c_0a_1 - a_0c_1)^2 = \operatorname{cosec}\Omega^2.$$

Wegen der doppelten Vorzeichen der Grössen X, Y, Z liefert das Obige immer zwei Auflösungen unserer Aufgabe, was offenbar auch ganz in der Natur der Sache liegt. Welche dieser beiden Auflösungen man zu nehmen hat, muss aus den besonderen Umständen jedes einzelnen Falls entschieden werden, worüber sich allgemeine Regeln natürlich nicht geben lassen. Indess mögen die folgenden Betrachtungen einige Anhaltepunkte liefern.

Ist
$$Lx+My+Nz=0$$
die Gleichung der durch den Mittelpunkt der Erde und die Punkte A_0 und A_1 gelegten Ebene, so haben wir zur Bestimmung von L, M, N offenbar die beiden Gleichungen:
$$L\cos\alpha_0+M\cos\beta_0+N\cos\gamma_0=0,$$
$$L\cos\alpha_1+M\cos\beta_1+N\cos\gamma_1=0;$$
aus denen sich
$$L(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)-M(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)=0,$$
$$L(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)-N(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)=0$$
ergiebt, so dass man also
$$L=\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1=(b_0c_1-c_0b_1)\sin\Omega^2,$$
$$M=\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1=(c_0a_1-a_0c_1)\sin\Omega^2,$$
$$N=\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1=(a_0b_1-b_0a_1)\sin\Omega^2$$
setzen kann. Daher ist
$$(b_0c_1-c_0b_1)x+(c_0a_1-a_0c_1)y+(a_0b_1-b_0a_1)z=0$$
die Gleichung der durch den Mittelpunkt der Erde und die Punkte A_0 und A_1 gelegten Ebene.

Bezeichnen wir nun durch x_2, y_2, z_2 die Coordinaten des Punktes A_2, so ist offenbar
$$x_2=R_2\cos\alpha_2,\quad y_2=R_2\cos\beta_2,\quad z_2=R_2\cos\gamma_2;$$
und sind x_2', y_2', z_2' die Coordinaten des Punktes, in welchem das von dem Punkte A_2 auf die Ebene des Aequators gefällte Perpendikel die durch den Mittelpunkt der Erde und die Punkte A_0 und A_1 gelegte Ebene schneidet, so hat man zwischen diesen Coordinaten nach dem Obigen die Gleichung
$$(b_0c_1-c_0b_1)x_2'+(c_0a_1-a_0c_1)y_2'+(a_0b_1-b_0a_1)z_2'=0,$$
also, weil offenbar
$$x_2'=x_2,\quad y_2'=y_2$$
ist, die Gleichung
$$(b_0c_1-c_0b_1)x_2+(c_0a_1-a_0c_1)y_2+(a_0b_1-b_0a_1)z_2'=0$$
oder

$$\{(b_0c_1-c_0b_1)\cos\alpha_2+(c_0a_1-a_0c_1)\cos\beta_2\}R_2+(a_0b_1-b_0a_1)z_2'=0,$$

woraus sich

$$z_2'=-\frac{(b_0c_1-c_0b_1)\cos\alpha_2+(c_0a_1-a_0c_1)\cos\beta_2}{a_0b_1-b_0a_1}R_2$$

ergiebt. Aus der Vergleichung der Werthe von z_2 und z_2', oder von

$$\frac{z_2}{R_2}=\cos\gamma_2 \quad \text{und} \quad \frac{z_2'}{R_2}=-\frac{b_0c_1-c_0b_1}{a_0b_1-b_0a_1}\cos\alpha_2-\frac{c_0a_1-a_0c_1}{a_0b_1-b_0a_1}\cos\beta_2$$

mit einander wird man gewiss immer leicht zu beurtheilen im Stande sein, welche der beiden Auflösungen man in jedem einzelnen Falle zu nehmen hat.

§. 10.

Wir haben bisher angenommen, dass man bei der anzustellenden geodätischen Messung zwei Punkte A_0 und A_1 auf der Erdoberfläche zu Grunde lege, deren Längen, Breiten und Entfernungen von dem Mittelpunkte der Erde gegeben sind. Dies ist auch der allgemeinste Fall, auf den man immer zurückkommen muss. Man kann aber auch annehmen, dass nur für einen Punkt A_0 die astronomisch bestimmte Breite und die etwa mittelst eines Nivellements, das nöthigenfalls nur ein barometrisches sein kann, bestimmte Entfernung von dem Mittelpunkte der Erde gegeben sei, und kann dann zu der Länge in Bezug auf den Punkt A_0 als Anfang der Längen *), der Breite und der Entfernung von dem Mittelpunkte der Erde für den Punkt A_1 auf folgende Art gelangen.

Zwischen den beiden Punkten A_0 und A_1 wird eine sogenannte Basismessung mit Maassstäben vorgenommen, wobei wir annehmen, dass das gewählte Terrain einer solchen Operation, wie wir sie nachher genauer beschreiben werden, günstig sei, so dass ihre Ausführung in der nachher weiter zu besprechenden Weise möglich ist, und uns nun zunächst völlig bestimmt darüber erklären müssen, was wir hier unter einer Basismessung verstehen, indem sich dann von selbst an diesen Begriff die Methode der Ausführung einer solchen Messung knüpfen wird.

Um daher zuerst den Begriff einer Basismessung zwischen

*) Der Längendifferenz der Punkte A_0 und A_1, die man immer nur braucht.

den Punkten A_0 und A_1 gehörig festzustellen, denken wir uns durch die Punkte A_0, A_1 und den Mittelpunkt O der Erde eine Ebene gelegt, und in dieser Ebene zwischen den Linien OA_0 und OA_1 aus O als Mittelpunkt mit dem bekannten Halbmesser OA_0 einen Kreisbogen $A_0\mathfrak{A}_0$ beschrieben. Die Messung der Länge dieses Kreisbogens ist der Zweck einer zwischen den Punkten A_0 und A_1 auszuführenden Basismessung, nach der von uns in dieser Abhandlung stets festgehaltenen Auffassungsweise geodätischer Operationen.

Fragen wir uns jetzt, was wir durch eine solche Messung gewinnen, so erhellet leicht, dass dieselbe zu der Kenntniss des Winkels A_0OA_1 am Mittelpunkte der Erde, oder zu der Kenntniss des Bogens $A_0'A_1'$ auf der Projections-Kugelfläche führt, weil man offenbar die Proportion hat:

$$360^0 : A_0'A_1' = 2.OA_0.\pi : A_0\mathfrak{A}_0,$$

aus der sich

$$A_0'A_1' = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{A_0\mathfrak{A}_0}{OA_0}$$

ergiebt, mittelst welcher Formel $A_0'A_1'$ aus den bekannten Grössen OA_0 und $A_0\mathfrak{A}_0$ leicht in Graden berechnet werden kann.

Die Methode, nach welcher der Bogen $A_0\mathfrak{A}_0$ gemessen werden muss, ist nun in der Kürze folgende, wobei man nicht aus den Augen zu lassen hat, dass die Beschaffenheit des Terrains die Ausführung der zu beschreibenden Operationen möglich machen muss, und dass man sich freilich bei der Ausführung solcher Operationen immer wird einige Näherungen gestatten müssen, die nicht zu umgehen sind. In dem Punkte A_0 stelle man den Theodoliten so auf, dass die Ebene seines Limbus auf der Linie OA_0 senkrecht steht, wozu früher die erforderliche Anweisung ausführlich ertheilt worden ist. Richtet man dann das Fernrohr auf den Punkt A_1 und bewegt es um seine der Ebene des Limbus des Theodoliten parallele Drehungsaxe, so beschreibt bei dieser Bewegung seine Visirlinie offenbar die Ebene A_0OA_1, oder die Visirlinie bewegt sich fortwährend in dieser Ebene. Hierauf lege man einen Maassstab mit seinem einen Endpunkte an den Punkt A_0, bringe ihn mit Hülfe des Theodoliten-Fernrohrs in die Ebene A_0OA_1 und gebe ihm zugleich mittelst eines auf ihm angebrachten Niveau's oder einer anderen zweckdienlichen Einrichtung eine solche Neigung gegen den Horizont, dass er auf der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Punkte A_0 gezogenen Linie — eigentlich und streng genommen freilich auf der von dem

Mittelpunkte der Erde nach der Mitte des Maassstabes gezogenen Geraden — senkrecht steht, durch welche ganze Operation der Maassstab also offenbar mit der Durchschnittslinie der Ebene A_0OA_1 mit der auf der Linie OA_0 senkrecht stehenden Ebene zusammenfallend gemacht wird, woraus zugleich die Möglichkeit der Ausführung der ganzen Operation an sich deutlich erhellet. Ganz auf dieselbe Weise lege man an den anderen Endpunkt dieses ersten Maassstabes einen zweiten Maassstab an, und setze dieses leicht verständliche Verfahren so lange fort, bis man bei dem Punkte A_1 anlangt, worauf man dann durch Addition aller Maassstablängen den zu messenden Bogen A_0A_0 erhält, mit aller hierbei überhaupt erreichbaren Genauigkeit, wobei es uns völlig genügt, das Verfahren hier nur in seinen Grundzügen beschrieben zu haben.

Ganz vorzüglich entsteht nun aber die Frage, wie gross die Neigung gegen den Horizont ist, die man dem mit Hülfe des Theodoliten-Fernrohrs in die Ebene A_0OA_1 gebrachten ersten Maassstabe, den wir als Repräsentanten aller übrigen Maassstäbe hier besonders in's Auge fassen wollen, geben muss, wenn er auf der Linie OA_0 senkrecht stehen soll. Diese Frage kann auf folgende Weise beantwortet werden.

Alles auf den Punkt A_0 bezogen, sei für diesen Punkt als Anfang der Coordinaten der Horizont die Ebene der xy, der Meridian die Ebene der xz; der positive Theil der Axe der x sei nach der Seite des nächsten Erdpols hin gerichtet; der positive Theil der Axe der y liege auf der Seite des Meridians, auf welcher der Punkt A_1 liegt; der positive Theil der Axe der z gehe nach dem Zenith. Die Gleichungen der Linie OA_0 sind, wenn für den Punkt A_0 der im Vorhergehenden immer im Allgemeinen durch ω bezeichnete Winkel durch ω_0 bezeichnet wird, wie aus Taf. III. Fig. 10. auf der Stelle erhellet, in völliger Allgemeinheit:

$$z = -x \tang(90^0 - \omega_0) = -x \cot \omega_0, \quad y = 0;$$

also

$$x = -z \tang \omega_0, \quad y = 0.$$

Der Winkel, welchen die Ebene A_0OA_1 mit der Ebene des Meridians des Punktes A_0 einschliesst, indem wir diesen Winkel von der Seite der positiven x an nach der Seite der positiven y hin zählen und nicht grösser als 180^0 nehmen, werde durch N_0 bezeichnet, wobei wir bemerken, dass, wie dieser Winkel gemessen werden kann, nachher gezeigt werden wird. Dann ist in dem aus Taf. III. Fig. 10. leicht ohne weitere Erläuterung von selbst ersichtlichen Systeme der $x_1y_1z_1$, wo die positiven Theile der Axen der y und y_1 mit einander zusammenfallen, die Gleichung der Ebene A_0OA_1 offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$y_1 = x_1 \operatorname{tang} N_0.$$

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ist aber:

$$x = x_1 \cos\omega_0 - z_1 \sin\omega_0,$$
$$y = y_1,$$
$$z = x_1 \sin\omega_0 + z_1 \cos\omega_0;$$

also umgekehrt:

$$x_1 = x\cos\omega_0 + z\sin\omega_0,$$
$$y_1 = y,$$
$$z_1 = -x\sin\omega_0 + z\cos\omega_0;$$

folglich nach dem Obigen die Gleichung der Ebene A_0OA_1 in dem Systeme der xyz:

$$y = (x\cos\omega_0 + z\sin\omega_0) \operatorname{tang} N_0$$

oder:

$$x\cos\omega_0 \sin N_0 - y\cos N_0 + z\sin\omega_0 \sin N_0 = 0.$$

Die Gleichungen des Maassstabes seien:

$$x = a_0 z, \quad y = b_0 z.$$

Da derselbe in der Ebene A_0OA_1 liegen muss, so ist nach vorstehender Gleichung für jedes z:

$$(a_0 \cos\omega_0 \sin N_0 - b_0 \cos N_0 + \sin\omega_0 \sin N_0) z = 0,$$

also

$$a_0 \cos\omega_0 \sin N_0 - b_0 \cos N_0 + \sin\omega_0 \sin N_0 = 0.$$

Weil ferner der Maassstab auf der Linie OA_0, deren Gleichungen nach dem Obigen

$$x = -z \operatorname{tang}\omega_0, \quad y = 0$$

sind, senkrecht stehen muss, so haben wir nach den Lehren der analytischen Geometrie die Bedingungsgleichung

$$1 - a_0 \operatorname{tang}\omega_0 = 0,$$

woraus sich

$$a_0 = \cot\omega_0$$

ergiebt. Also ist wegen der obigen Gleichung zwischen a_0 und b_0:

$$(\cos\omega_0 \cot\omega_0 + \sin\omega_0)\sin N_0 - b_0 \cos N_0 = 0,$$

$$\frac{(\cos\omega_0{}^2 + \sin\omega_0{}^2)\sin N_0}{\sin\omega_0} - b_0 \cos N_0 = 0,$$

woraus sich

$$b_0 = \frac{\tang N_0}{\sin\omega_0}$$

ergiebt. Also sind die Gleichungen des Maassstabes:

$$x = z\cot\omega_0,\quad y = \frac{\tang N_0}{\sin\omega_0}z.$$

Ist nun i_0 der Neigungswinkel des Maassstabs gegen die Ebene des Horizonts, nämlich gegen die Ebene der xy, deren Gleichung

$$0.x + 0.y + z = 0$$

ist, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\sin i_0{}^2 = \frac{\left(0.\cot\omega_0 + 0.\frac{\tang N_0}{\sin\omega_0} + 1\right)^2}{1 + \cot\omega_0{}^2 + \frac{\tang N_0{}^2}{\sin\omega_0{}^2}},$$

woraus man leicht

$$\sin i_0{}^2 = \frac{\sin\omega_0{}^2}{1 + \tang N_0{}^2} = \sin\omega_0{}^2 \cos N_0{}^2$$

erhält.

Die zweite der beiden obigen Gleichungen des Maassstabes lässt sich auf folgende Art ausdrücken:

$$z = y\sin\omega_0 \cot N_0.$$

Für den Maassstab selbst, welcher ganz auf der Seite der positiven y liegt, ist y stets positiv, also z positiv oder negativ, d. h. der Maassstab liegt über oder unter dem Horizonte, jenachdem $\cot N_0$ positiv oder negativ, d. h. jenachdem

$$0 < N_0 < 90^\circ$$

oder

$$90^\circ < N_0 < 180^\circ$$

ist. Nimmt man nun i_0 positiv oder negativ, jenachdem der Maassstab über oder unter dem Horizonte liegt, so folgt aus der Gleichung

$$\sin i_0^2 = \sin \omega_0^2 \cos N_0^2$$

offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$\sin i_0 = \sin \omega_0 \cos N_0,$$

mittelst welcher Formel die Neigung des Maassstabes gegen den Horizont bestimmt werden kann, wenn man N_0 kennt, da die Bestimmung von ω_0 schon früher mit aller nöthigen Ausführlichkeit gezeigt worden ist.

Wie gelangt man nun zu der Kenntniss des Winkels N_0? Der nächste Erdpol sei P und seine Projection auf der Projections-Kugelfläche werde wie gewöhnlich durch P' bezeichnet. Man stelle den Theodoliten in dem Punkte A_0 so auf, dass die Ebene seines Limbus horizontal ist und die von seinem Mittelpunkte nach der Axe der oft erwähnten Fussschraube des Theodoliten gezogene gerade Linie so nahe wie möglich in dem Meridiane des Punktes A_0 liegt, welches letztere auf gewöhnliche Weise mittelst der Boussole geschieht. Nun wird man durch Beobachtung correspondirender Sternhöhen in einer sternhellen Nacht leicht genau den Punkt des Limbus des Theodoliten bestimmen können, welchem der Nullpunkt des Nonius entsprechen muss, wenn die Visirlinie des Fernrohrs bei der Drehung desselben um die der Ebene des Limbus parallele Drehungsaxe die Ebene des Meridians beschreiben soll. Dann stelle man auf gewöhnliche Weise die Ebene des Limbus des Theodoliten gegen die Linie OA_0 senkrecht, und messe den Winkel A_0' in dem sphärischen Dreiecke $A_0'P'A_1'$, so erhält man den Winkel N_0, weil offenbar $N_0 = A_0'$ ist. Dieses Verfahren ist freilich nur unter der Voraussetzung genau richtig, dass die Stellung des Theodoliten gegen den Meridian gleich Anfangs mittelst der Boussole richtig bewirkt worden ist. Indess übersieht man auf der Stelle, dass durch die weiteren Beobachtungen selbst eine Controle der ersten Aufstellung des Theodoliten dargeboten wird, da das Fernrohr durch dieselben genau in den Meridian gebracht wird. Sollten sich nun merkliche Abweichungen von der ersten Aufstellung zeigen, so müsste man die erste Aufstellung so lange corrigiren, bis völlige Uebereinstimmung, so weit dies bei praktischen Dingen überhaupt möglich ist, erreicht wird, was wir hier nicht werden weiter zu erläutern brauchen.

Wegen der verhältnissmässig geringen Ausdehnung, die einer solchen Basismessung immer nur gegeben zu werden pflegt, wird es verstattet sein, die Winkel ω_0 und N_0 für die ganze Messung als constant zu betrachten, so wie denn natürlich auch den Winkel i_0, welcher mittelst der Formel

$$\sin i_0 = \sin \omega_0 \cos N_0$$

bestimmt wird.

Wenn es die Verhältnisse gestatten, die Basis so genau als möglich senkrecht gegen den Meridian von A_0 anzunehmen, so wird wenigstens sehr nahe $N_0 = 90°$, also $\cos N_0 = 0$, folglich nach dem Obigen, noch ausserdem wegen der Kleinheit des Winkels ω_0, sehr nahe $\sin i_0 = 0$, also $i_0 = 0$ sein, und man wird also ohne merkliche Fehler die Maassstäbe sämmtlich horizontal legen können, immer vorausgesetzt, dass man sie wie früher mittelst des Fernrohrs des nach der vorher gegebenen Anweisung aufgestellten Theodoliten in die Ebene A_0OA_1 bringt. Kann man also die Basis auf die in Rede stehende Weise annehmen, so wird die auszuführende Operation nicht unwesentlich erleichtert werden.

In dem sphärischen Dreiecke $A_0'P'A_1'$ kennt man jetzt aus der gegebenen Breite des Punktes A_0 die Seite $A_0'P'$; aus der gemessenen Basis $A_0\mathfrak{A}_0$, wie schon oben gezeigt, die Seite $A_0'A_1'$; und den nach der kurz vorher gegebenen Anweisung gemessenen Winkel A_0'; man kennt also in diesem Dreiecke zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, aus denen man nach den Regeln der sphärischen Trigonometrie den Winkel P' und die Seite $A_1'P'$ berechnen, aus diesen berechneten Stücken aber in allen Fällen leicht die Längendifferenz der Punkte A_0 und A_1 und die Breite des Punktes A_1 ableiten kann, was einer weiteren Erläuterung hier nicht bedürfen wird.

Um endlich noch die Entfernung OA_1 des Punktes A_1 von dem Mittelpunkte der Erde bestimmen zu können, messe man noch den auf bekannte Weise gehörig als positiv oder negativ betrachteten Neigungswinkel J der Linie A_0A_1 gegen die Ebene des Limbus des in dem Punkte A_0 auf gewöhnliche Weise aufgestellten Theodoliten, und setze voraus, dass derselbe schon wegen der Refraction gehörig corrigirt sei, welche Voraussetzung zulässig ist, da wir $A_0'A_1'$ oder den Winkel A_0OA_1 am Mittelpunkte der Erde schon kennen. Dann haben wir in dem Dreiecke A_0OA_1 die Proportion:

$$\begin{aligned} OA_0 : OA_1 &= \sin\{180° - A_0OA_1 - (90° + J)\} : \sin(90° + J) \\ &= \sin\{90° - (A_0OA_1 + J)\} : \sin(90° + J) \\ &= \cos(A_0OA_1 + J) : \cos J, \end{aligned}$$

aus der sich zur Berechnung von OA_1 die Formel

$$OA_1 = \frac{\cos J}{\cos(A_0 OA_1 + J)} \cdot OA_0$$

ergiebt.

Da wir nun für die beiden Punkte A_0 und A_1 die Längen, Breiten und Entfernungen von dem Mittelpunkte der Erde kennen, so sind wir jetzt wieder bei unserem früher betrachteten Falle angelangt, wenn nämlich der ganzen geodätischen Messung zwei Punkte der Erdoberfläche zu Grunde gelegt werden, für welche die vorher genannten Elemente bekannt sind.

Rücksichtlich der Basismessung will ich noch bemerken, dass es mir bei einer solchen Operation zweckmässig scheint, nach Vollendung derselben die Richtigkeit der ganzen Operation, ausser durch eine zweite Messung der Basis, auch noch durch ein zwischen den Punkten A_0 und A_1 mit den gewöhnlichen Nivellir-Instrumenten nach den bekannten sehr genauen Methoden ausgeführtes Nivellement zu prüfen oder zu controliren. Durch das Nivellement erhält man nämlich den Höhenunterschied zwischen den beiden Punkten A_0 und A_1, und muss nun diesen Höhenunterschied auch noch aus den vorher bestimmten Breiten und Entfernungen von dem Mittelpunkte der Erde der Punkte A_0 und A_1 berechnen, worauf dann die grössere oder geringere Uebereinstimmung der beiden für den Höhenunterschied erhaltenen Resultate eine wünschenswerthe Controle für die Richtigkeit der ausgeführten Messoperationen abgeben wird. Aus den Breiten und den Entfernungen von dem Mittelpunkte der Erde der Punkte A_0 und A_1 findet man aber ihren Höhenunterschied auf folgende Art.

Die Polhöhe und Breite des Punktes A_0 seien B_0 und B_0'. Mittelst der Gleichung

$$\sin(B_0 - B_0') = \frac{a}{OA_0} \cdot \frac{e^2 \sin 2B_0}{2\sqrt{1 - e^2 \sin B_0^2}}$$

bestimme man die Polhöhe B_0, oder mittelst der Gleichung

$$\sin \omega_0 = \frac{a}{OA_0} \cdot \frac{e^2 \sin 2(B_0' + \omega_0)}{2\sqrt{1 - e^2 \sin (B_0' + \omega_0)^2}}$$

bestimme man den Winkel ω_0, worauf sich die Polhöhe B_0 mittelst der Formel

$$B_0 = B_0' + \omega_0$$

ergiebt. Ist nun n_0 die Normale des Punktes A_0, so hat man offenbar die Gleichung

$$OA_0 . \sin B_0' = n_0 \sin B_0,$$

woraus sich

$$n_0 = \frac{\sin B_0'}{\sin B_0} . OA_0$$

ergiebt.

Sind ferner B_1 und B_1' die Polhöhe und Breite des Punktes A_1, so bestimme man B_1 aus der Gleichung

$$\sin(B_1 - B_1') = \frac{a}{OA_1} . \frac{e^2 \sin 2B_1}{2\sqrt{1-e^2 \sin B_1^2}},$$

oder ω_1 aus der Gleichung

$$\sin \omega_1 = \frac{a}{OA_1} . \frac{e^2 \sin 2(B_1' + \omega_1)}{2\sqrt{1-e^2 \sin (B_1' + \omega_1)^2}},$$

worauf sich B_1 mittelst der Formel

$$B_1 = B_1' + \omega_1$$

ergiebt. Ist dann n_1 die Normale des Punktes A_1, so ist

$$OA_1 . \sin B_1' = n_1 \sin B_1,$$

also

$$n_1 = \frac{\sin B_1'}{\sin B_1} . OA_1 .$$

Folglich ist $n_0 - n_1$ der Höhenunterschied zwischen den Punkten A_0 und A_1, welcher mit dem durch das Nivellement gefundenen Höhenunterschiede übereinstimmen muss, wenn alle ausgeführten Messoperationen richtig sein sollen.

§. 11.

Wie wir im Vorhergehenden von den Punkten A_0 und A_1 zu der Bestimmung der Lage des Punktes A_2 fortschritten, kann man nun von A_0 und A_2 oder von A_1 und A_2 zu der Bestimmung der Lagen neuer Punkte, und in dieser Weise immer überhaupt von je zwei schon bestimmten Punkten zu der Ermittelung der Lage neuer Punkte übergehen, also überhaupt nach und nach das ganze aufzunehmende Netz bestimmen. Wie aus den Breiten und Entfernungen von dem Mittelpunkte der Erde die entsprechenden Polhöhen und Höhen über der Meeresfläche abzuleiten sind, erhellet aus den in den vorhergehenden Paragraphen gegebenen Entwickelungen ganz von selbst und bedarf einer weiteren Erläuterung hier nicht. Wie die auf die Meeresfläche bezogenen kürzesten Entfernungen der einzelnen Punkte des Netzes von einander, ihre kürzesten Entfernungen von einem bestimmten Meridian, u. s. w. berechnet werden können, wenn man deren bedürfen sollte, wird in der Theorie der kürzesten Linie *) gezeigt, gehört aber hierher jetzt gar nicht und bildet eine Aufgabe für sich, indem wir es hier uns vielmehr zur Aufgabe gemacht haben, die eigentliche Geodäsie von dem ganzen in sie aufgenommenen Systeme kürzester Linien u. s. w. zu befreien.

Schluss.

Dass der Ausführung geodätischer Messungen nach der in dieser Abhandlung vorgeschlagenen neuen Methode einige praktische Schwierigkeiten entgegenstehen, will ich keineswegs in Abrede stellen. Als einen wesentlichen Nachtheil derselben sehe ich es an, dass man, bevor man zur Winkelmessung auf einem neuen Punkte des Netzes schreiten kann, die Lage dieses Punktes schon kennen muss, weil die Aufstellung des Theodoliten Behufs der Winkelmessung für den in Rede stehenden Punkt die Kenntniss des im Vorhergehenden stets mit ω bezeichneten Winkels erfordert. Daher muss die Berechnung des Netzes immer nothwendig gleichmässig mit der Messung selbst fortschreiten, was bei dem bisher gewöhnlichen Verfahren nicht nöthig ist, indem bei demselben Messung und Rechnung getrennt und unabhängig von einander fortgeführt werden können. Aber einmal ist nach meiner Meinung dies kein Einwurf gegen das neue Verfahren, von welchem dasselbe in Bezug auf seine praktische und theoretische Strenge und Naturgemässheit getroffen wird, und die durch den in Rede stehenden Umstand allerdings entstehenden Schwierigkeiten müssen durch Anwendung der nöthigen Kräfte und zweckmässige Anordnungen in Bezug auf deren Verwendung sich beseitigen lassen; und zweitens sind bei dem neuen Verfahren gegen das frühere die erforderlichen Rechnungen im Ganzen so leicht und elementar, dass sich dieselben in kurzer Zeit ausführen lassen, besonders wenn man sich für's Erste nur mit einer annähernden Richtigkeit der Resultate begnügt, so weit deren Kenntniss für den nächsten Zweck der Aufstellung des Theodoliten erforderlich ist.

---

*) Archiv der Mathematik und Physik Thl. XXII. Nr. IX.

Hierzu kommen nun noch die folgenden Berücksichtigungen. Man pflegt bei geodätischen Messungen bekanntlich Dreiecke der ersten, zweiten und dritten Ordnung von einander zu unterscheiden. Strenge Begriffe der Dreiecke dieser verschiedenen Ordnungen werden aber eigentlich nirgends gegeben. Ich würde vorschlagen, Dreiecke erster Ordnung solche zu nennen, bei denen man die Meeresfläche als ellipsoidisch betrachtet; Dreiecke zweiter Ordnung solche, bei denen es verstattet ist, die Meeresfläche als sphärisch; und Dreiecke dritter Ordnung solche, bei denen man sich gestatten darf, die Meeresfläche als eben zu betrachten. Unsere neue Methode würde nun bloss bei der Bestimmung der Lagen der Eckpunkte der Dreiecke erster Ordnung in Anwendung zu bringen sein, und da die Anzahl dieser sehr grossen Dreiecke meistens nicht sehr beträchtlich sein wird, so wird dies ein Grund mehr sein, welcher unserer neuen Methode zur Aufnahme und Berechnung solcher ganz grossen Dreiecke, neben ihrer völligen Strenge und Naturgemässheit und der verhältnissmässigen Leichtigkeit der durch sie in Anspruch genommenen Rechnungen, zur Empfehlung dienen dürfte. Für die Dreiecke zweiter Ordnung, in die man die Dreiecke erster Ordnung zerlegt, wird natürlich immer das bisherige Verfahren in seinem wohlerworbenen Rechte bleiben, wobei man als Halbmesser der Kugel, als welcher angehörend das in Dreiecke zweiter Ordnung zerlegte Dreieck erster Ordnung betrachtet wird, etwa den mittleren Krümmungs-Halbmesser zwischen den Krümmungs-Halbmessern der drei Eckpunkte dieses Dreiecks erster Ordnung, welche aus den entsprechenden Polhöhen oder Breiten nach bekannten Formeln leicht berechnet werden können, annehmen wird. Die Aufnahme und Berechnung der Dreiecke dritter Ordnung fällt ganz der gewöhnlichen Feldmesskunst anheim. Auf diese Weise scheint mir die ganze Geodäsie an streng systematischer Gestalt und Uebersichtlichkeit zu gewinnen, und die anzuwendenden Messungs- und Berechnungs-Methoden werden jedem einzelnen Falle in völliger Naturgemässheit besonders angepasst, wodurch auch die Leitung und Ueberwachung solcher Operationen im Ganzen und Grossen nicht unwesentlich erleichtert und mehr systematisch als vielleicht bisher gestaltet werden wird.

Endlich bemerke ich noch, dass sich durch Anbringung entsprechender Correctionen an den durch unmittelbare Messung nach dem älteren oder bisherigen Verfahren erhaltenen Grössen dieses ältere Verfahren auf das neue zurückführen lassen würde; ja man kann auch nach dem älteren Verfahren angestellte Messungen mit völliger Strenge, wenn auch nicht ohne Weitläufigkeit, berechnen, wie ich schon in der

Abhandlung Nr. IX. im Archiv der Mathem. und Phys. Thl. VII. S. 68. zu zeigen versucht habe, und in einer späteren Abhandlung noch in verbesserter und vereinfachter Gestalt zu zeigen hoffe. Ueber alle diese Dinge sage ich aber für jetzt hier nichts weiter, weil dies meinem jetzigen Zwecke zuwider sein, und die Physiognomie, welche ich der vorliegenden Abhandlung zu geben wünsche, verwischen und wesentlich verändern würde. Mein Zweck bei dem neuen Verfahren, so wie ich die Sache auffasse und mir vorstelle, ist nämlich mit vorzüglich der, dass ein Theil der Mühe der Rechnung gewissermassen mit auf die Beobachtung genommen und auf dieselbe übertragen, dadurch die erstere erleichtert, überhaupt aber Beobachtung und Rechnung ganz der eigentlichen Natur der Sache gemäss gemacht, auch die letztere so viel als möglich in den Kreis des sogenannten bloss Elementaren gezogen werde. Wie schon in der Einleitung erwähnt, bin ich auf Widersprüche gegen die in dieser Abhandlung dargelegten Ansichten vollkommen gefasst, glaube aber, dass man, wie in jedem ähnlichen, auch in diesem Falle nur erst nach sorgfältiger Prüfung durch eigene Handanlegung und dadurch gewonnene Erfahrung Widerspruch erheben, und bedenken sollte, dass alles Neue, namentlich in praktischen Dingen, sich nur erst nach und nach und sehr allmälig Bahn brechen kann.

XIV.

Ausdruck des Trägheitsmoments eines beliebigen Polyeders für eine beliebige Axe.

Von
Herrn Doctor *R. Hoppe*,
Privatdocenten an der Universität zu Berlin.

Die lebendige Kraft eines um eine feste Axe rotirenden Körpers ist, da alle seine Elemente eine gemeinschaftliche Winkelgeschwindigkeit haben, dem halben Quadrate derselben proportional. Den Factor, mit welchem man letzteres multipliciren muss, um die lebendige Kraft daraus darzustellen, und dessen Bestimmung eine rein geometrische Untersuchung ist, nennt man das Trägheitsmoment des Körpers. Ist u die Winkelgeschwindigkeit, r die Entfernung des Elements ∂m von der Axe, so ist ur seine absolute Geschwindigkeit, $\frac{1}{2}u^2r^2\partial m$ seine lebendige Kraft. Da demnach die des ganzen Körpers

$$=\tfrac{1}{2}u^2\int r^2\partial m$$

ist, so ist der Definition gemäss das Trägheitsmoment

$$=\int r^2\partial m.$$

Obwohl nun die Berechnung dieser in der Mechanik sehr viel gebrauchten Grösse bei gegebener Gestalt des Körpers an sich keiner Schwierigkeit unterliegt, so kann sie doch sehr umständlich und ihr Resultat sehr complicirt werden, wenn man nicht über die einzuführenden Variabeln, so wie über die Bestimmungsstücke eine passende Wahl trifft. Ganz besonders möchte es daher bei ebenflächigen Körpern, wo sich letztere in grosser Mannichfaltigkeit darbieten, von Nutzen sein, die einfachste Methode zur Bestimmung der Trägheitsmomente ausfindig zu machen. Im Folgenden will ich ein Verfahren angeben, um auf leichte Weise eine bequeme Formel für den genannten Zweck herzuleiten, wodurch jene Umständlichkeit in Betreff aller Polyeder mit einem Male beseitigt wird.

Die Trägheitsmomente A, B, C des homogenen Polyeders m in Bezug auf drei rechtwinklige Coordinatenaxen der x, y, z, ausgedrückt durch die Werthe

$$A=\int(y^2+z^2)\partial m,\quad B=\int(z^2+x^2)\partial m,\quad C=\int(x^2+y^2)\partial m,$$

werden bestimmt sein, sobald eins der Integrale

$$\int x^2\partial m,\quad \int y^2\partial m,\quad \int z^2\partial m$$

durch messbare Linien dargestellt ist, insofern sich die Ausdrücke der beiden andern durch Analogie ergeben. Es sei demnach das erste derselben gesucht.

Man denke das Polyeder vom Anfangspunkt aus in Pyramiden zerlegt, deren Grundflächen die Seitenflächen sind, indem man diejenigen Pyramiden, welche ausserhalb des Polyeders fallen, als negativ betrachtet. Da jedoch die Uebertragung der Berechnung auf solche Pyramiden leicht ist, kann man der Einfachheit wegen annehmen, dass sämmtliche Pyramiden positive Bestandtheile des Polyeders wären.

Man ziehe (Taf. IV. Fig. 1.) vom Anfangspunkte M eine Gerade $=e$ nach dem Schwerpunkte D einer Seitenfläche, und von da eine zweite $=l$ nach der Mitte E einer ihrer Kanten FG, deren Hälfte $EF=k$ sei. Betrachtet man M, D, E, F als die vier Ecken einer Pyramide p, deren Grundfläche das Dreieck DEF sei, so kann man das Polyeder aus Pyramiden derselben Art zusammensetzen und schreiben

$$m=\Sigma p.$$

Ferner ziehe man von M eine Gerade $M\beta$ durch den Ort α des Elements ∂p bis zur Grundfläche, und von D eine zweite $D\gamma$ durch β bis zur Kante; bezeichne durch η_0 das Höhenperpendikel des Dreiecks, durch ζ_0 das der Pyramide, durch ξ die Gerade $E\gamma$, durch η die Projection von $D\beta$ auf η_0, durch ζ die Projection von $M\alpha$ auf ζ_0, so dass k, η_0, ζ_0 die grössten Werthe von ξ, η, ζ sind. Dann ist die Lage des Elements ∂p bestimmt durch die Variabeln ξ, η, ζ; seinen Inhalt findet man, indem man ξ, η, ζ einzeln um $\partial\xi$, $\partial\eta$, $\partial\zeta$ wachsen lässt, und aus den drei Geraden, welche dabei α beschreibt, ein Parallelepipedon ergänzt: dessen Inhalt ist

$$\partial p = \frac{\eta}{\eta_0}\frac{\zeta^2}{\zeta_0^2}\partial\xi\partial\eta\partial\zeta.$$

Damit das Integral dieses Ausdrucks die ganze Pyramide darstelle, müssen die Grössen

$$\frac{\xi}{k},\quad \frac{\eta}{\eta_0},\quad \frac{\zeta}{\zeta_0}$$

darin von 0 bis 1 variiren.

Ferner seien x, x', x'' die Abscissen der Punkte α, β, γ auf der Axe der x, und e_1, l_1, k_1 die Projectionen von e, l, k auf derselben; dann ist:

$$x = \frac{\zeta}{\zeta_0}x',$$

$$x' = e_1 + \frac{\eta}{\eta_0}(x'' - e_1),$$

$$x'' = e_1 + l_1 + \frac{\xi}{k}k_1;$$

woraus sich ergibt:

$$x = \frac{\zeta}{\zeta_0}\{e_1 + \frac{\eta}{\eta_0}(l_1 + \frac{\xi}{k}k_1)\}.$$

Nach Substitution der Werthe von x und ∂p in das gesuchte Integral ist die Ausführung der Integration äusserst einfach, und man findet:

$$\int x^2\partial p = \tfrac{1}{5}k\eta_0\zeta_0\{\tfrac{1}{2}e_1^2 + \tfrac{4}{3}e_1(l_1 + \tfrac{1}{2}k_1) + \tfrac{1}{4}(l_1^2 + l_1k_1 + \tfrac{1}{3}k_1^2)\},$$

wo man für $k\eta_0\zeta_0$ auch $6p$ schreiben kann. Addirt man die zwei Werthe dieses Integrals, welche den Hälften derselben Polyederkante entsprechen, so heben sich die Glieder e_1k_1 und l_1k_1, da k_1 in beiden Ausdrücken gleich und entgegengesetzt, alle übrigen Stücke beiden gemeinschaftlich sind; daher erhält man in der Summe:

$$\Sigma\int x^2\partial p = \tfrac{6}{5}\Sigma p(\tfrac{1}{2}e_1^2 + \tfrac{4}{3}e_1l_1 + \tfrac{1}{4}l_1^2 + \tfrac{1}{12}k_1^2).$$

Ferner ist

$$pe_1l_1 = \tfrac{1}{2}\zeta_0e_1\cdot\tfrac{1}{3}k\eta_0l_1,$$

wo $\frac{1}{2}\zeta_0e_1$ allen derselben Polyederseite zugehörenden Pyramiden gemeinschaftlich ist, während der andere Factor das statische Moment des Dreiecks ($DEF = \frac{1}{2}k\eta_0$) in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt der Polyederseite parallel der Ebene der yz gelegte Ebene darstellt. Da die Summe dieser statischen Momente $= 0$ ist, so fällt auch das Glied $e_1 l_1$ aus dem Ausdrucke weg und es bleibt

$$\int x^2 \partial m = \tfrac{3}{5}\Sigma p(e_1^2 + \tfrac{1}{2}l_1^2 + \tfrac{1}{6}k_1^2).$$

Wenn man durch $e_2, e_3, l_2, l_3, k_2, k_3$ die Projectionen von e, l, k auf den Axen der y und z bezeichnet, so ist nach Analogie:

$$\int y^2 \partial m = \tfrac{3}{5}\Sigma p(e_2^2 + \tfrac{1}{2}l_2^2 + \tfrac{1}{6}k_2^2),$$

$$\int z^2 \partial m = \tfrac{3}{5}\Sigma p(e_3^2 + \tfrac{1}{2}l_3^2 + \tfrac{1}{6}k_3^2).$$

Durch Addition aller drei Ausdrücke erhält man:

$$\frac{A+B+C}{2} = \int (x^2+y^2+z^2)\partial m = \tfrac{3}{5}\Sigma p(e^2 + \tfrac{1}{2}l^2 + \tfrac{1}{6}k^2).$$

Um eins der drei Trägheitsmomente einzeln zu erhalten, würde man zwei der obigen Ausdrücke addiren müssen. Da nun $e_1^2 + e_2^2$ das Quadrat der Projection von e auf die Ebene der xy darstellt (woraus man leicht die Bedeutung der übrigen vorkommenden Quadratsummen abnehmen wird), so kann man aus dem Ausdrucke für

$$\frac{A+B+C}{2}$$

die einzelnen Grössen A, B, C ableiten, indem man für e, l, k beziehungsweise die Projectionen dieser Linien auf den Ebenen der yz, der zx und der xy substituirt.

Noch leichter ist die Rechnung in den Fällen, wo alle drei Trägheitsmomente einander, also auch dem dritten Theile ihrer Summe gleich sind. Dann nämlich ist

$$A = B = C = \tfrac{2}{5}\Sigma p(e^2 + \tfrac{1}{2}l^2 + \tfrac{1}{6}k^2).$$

Dieser Fall findet bekanntlich bei den regelmässigen Polyedern statt, wo überdiess die Grössen e, l, k für alle Pyramiden dieselben sind, so dass sich letztere zum ganzen Polyeder vereinigen, und man hat

$$A = \tfrac{2}{5}m(e^2 + \tfrac{1}{2}l^2 + k^2).$$

Ferner ist hier

$$p = \tfrac{1}{6}elk$$

und, wenn jede Seitenfläche μ, jede Ecke ν Kanten hat, die Anzahl der Pyramiden, d. i. die vierfache Anzahl der Kanten,

$$=\frac{8\mu\nu}{2(\mu+\nu)-\mu\nu},$$

folglich

$$A=\frac{8}{15}\frac{\mu\nu elk}{2(\mu+\nu)-\mu\nu}(e^2+\tfrac{1}{2}l^2+\tfrac{1}{6}k^2),$$

wo sich ausserdem die drei Grössen e, l, k mittelst der Relationen

$$(e^2+l^2)\sin^2\frac{\pi}{\nu}=(e^2+l^2+k^2)\cos^2\frac{\pi}{\mu},$$

$$l\operatorname{tg}\frac{\pi}{\mu}=k$$

auf eine zurückführen lassen.

Um auch ein Beispiel für ungleiche Trägheitsmomente zu geben, so sei das Polyeder ein Parallelepipedon, dessen drei anstossende Kanten $=2a$, $2b$, $2c$. Die Axe gehe in beliebiger Richtung durch den Mittelpunkt, und die Sinus ihrer Richtungswinkel gegen jene drei Kanten seien beziehungsweise $=\alpha$, β, γ. Dann sind die Projectionen der halben Kanten auf eine zur Axe senkrechte Ebene einzeln $=a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, abgesehen von den Vorzeichen, welche nicht in Betracht kommen. Da nun unter den Stücken e, l, k, für alle Pyramiden genommen, der dritte Theil gleich und parallel a, und eben so viele gleich und parallel b und c sind, so leuchtet ein, dass unter den projicirten Stücken nur die drei verschiedenen Werthe

$$a\alpha,\quad b\beta,\quad c\gamma$$

und zwar in gleicher Anzahl vorkommen. Die Pyramiden sind sämmtlich einander gleich. Daher erleidet der Ausdruck des Trägheitsmoments keine Aenderung, wenn man für jede der Grössen e^2, l^2, k^2 ihr arithmetisches Mittel

$$\frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2}{3}$$

setzt, wodurch der Ausdruck

$$e^2+\tfrac{1}{2}l^2+\tfrac{1}{6}k^2$$

in folgenden:

$$(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6})\frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2}{3}=\tfrac{5}{9}(a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2)$$

übergeht. Da sich jetzt die Pyramiden zum ganzen Parallelepipedon zusammensetzen, so wird das Trägheitsmoment für die angenommene Axe

$$=\tfrac{1}{3}m(a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2),$$

ein Ausdruck, der von der gegenseitigen Neigung der Kanten nicht weiter abhängt, als insofern der Inhalt und die Richtungswinkel dadurch bedingt sind. Um hieraus das Trägheitsmoment für eine beliebige, vom Mittelpunkt um ein Stück $=r$ abstehende Axe abzuleiten, braucht man bekanntlich nur mr^2 zu addiren.

Es sei jetzt das Polyeder ein $n$seitiges gerades Prisma und die Axe der x gehe parallel den Endflächen durch den Schwerpunkt. Dann werden $4n$ Pyramiden auf den Endflächen, $8n$ solche auf den Seitenflächen stehen, und zwar $4n$ der letzteren mit den Endflächen zusammenstossen, so dass ihre Stücke e, l, k beziehungsweise den Stücken l, e, k der Endflächen-Pyramiden gleich und parallel sind, während die Stücke e, l, k der $4n$ übrigen gleich und parallel den Stücken l, k, e der Endflächen-Pyramiden werden.

Beziehen sich jetzt die Buchstaben e, l, k ausschliesslich auf die Endflächen, so hat man:

$$\frac{A+B+C}{2}=\tfrac{3}{5}\Sigma p(e^2+\tfrac{1}{2}l^2+\tfrac{1}{6}k^2+l^2+\tfrac{1}{2}e^2+\tfrac{1}{6}k^2+l^2+\tfrac{1}{2}k^2+\tfrac{1}{6}e^2)$$
$$=\Sigma p(e^2+\tfrac{3}{2}l^2+\tfrac{1}{2}k^2),$$

wo die Summe nur auf alle Endflächen-Pyramiden auszudehnen ist. Wir lassen sie statt dessen sich auf eine Endfläche beziehen und nehmen den Ausdruck doppelt, so dass

$$\Sigma p=\tfrac{1}{6}m$$

die Pyramide über einer Endfläche darstellt, deren Spitze im Schwerpunkte des Prismas liegt. Wenn man jetzt die Stücke e, l, k mit den gehörigen Projectionen vertauscht, so erhält man folgende Werthe für die einzelnen Trägheitsmomente:

$$A=\Sigma p(3l^2+k^2),$$

$$B=\Sigma p(2e^2+3l_2^2+k_2^2),$$

$$C=\Sigma p(2e^2+3l_3^2+k_3^2).$$

Es sei jetzt q die Grundfläche von p, also

$$p=\tfrac{1}{3}qe.$$

Man dividire die drei Ausdrücke durch $2e$ und lasse e verschwinden; dann erhält man die Trägheitsmomente für eine Endfläche:

$$A_0 = \tfrac{1}{2}\Sigma q(l^2 + \tfrac{1}{3}k^2),$$

$$B_0 = \tfrac{1}{2}\Sigma q(l_2^2 + \tfrac{1}{3}k_2^2),$$

$$C_0 = \tfrac{1}{2}\Sigma q(l_3^2 + \tfrac{1}{3}k_3^2),$$

woraus sich beiläufig ergibt, dass

$$A_0 = B_0 + C_0.$$

Da nun e nur einen Werth hat, nämlich die halbe Höhe des Prismas, so ist

$$\Sigma p.2e^2 = \tfrac{1}{3}me^2,$$

folglich nach Einführung der auf die Endflächen bezüglichen Grössen A_0, B_0, C_0:

$$A = 2A_0 e,$$

$$B = 2B_0 e + \tfrac{1}{3}me^2,$$

$$C = 2C_0 e + \tfrac{1}{3}me^2,$$

so dass die Trägheitsmomente eines geraden Prismas aus denen der Grundfläche gefunden werden können. Auf sie lassen sich wiederum die eines schiefen Prismas zurückführen, wenn man auch hier die eine Axe parallel der Seitenkante nimmt.

Schneidet man nämlich durch eine schräge Ebene von dem geraden Prisma m ein Stück m_1 ab und setzt es so an das andere Stück an, dass die Endflächen auf einander fallen, so entsteht ein schiefes Prisma, dessen Trägheitsmomente in Bezug auf die alten Axen $= A'$, B', C' seien. Durch die Ortsveränderung von m_1 ändert sich nicht der Abstand seines Schwerpunkts von der xAxe; daher ist

$$A' = A.$$

Dagegen ändert sich die Abscisse des Schwerpunkts auf dieser Axe. Setzt man seinen Abstand von der Endfläche $= h$, so ist die Abscisse zuerst $= e - h$, nachher $= e + h$. Die Differenz der Quadrate beider Grössen

$$(e+h)^2 - (e-h)^2 = 4eh$$

ist zugleich die Differenz der Quadrate der Abstände des Schwerpunkts von der yAxe sowohl, als von der zAxe; folglich ist

$$B' = B + 4ehm_1, \quad C' = C + 4ehm_1.$$

Zugleich rückt der Schwerpunkt des ganzen Prismas um ein Stück

$=2e\frac{m_1}{m}$ in der Richtung der x fort; man würde daher von B' und C' die Grösse

$$4e^2\frac{m_1^2}{m}$$

subtrahiren müssen, wenn man die drei Axen bei unveränderter Richtung durch den neuen Schwerpunkt gehen liesse.

XV.

Ueber die Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise berührt.

Von

Herrn *Ferdinand Kerz*,

Rittmeister in der Grossherzoglich Hessischen Gendarmerie zu Giessen.

Erste Abtheilung.

Bekanntlich löst die neuere Geometrie diese Aufgabe in folgender Weise:

„Man bestimme das Potenzcentrum der drei gegebenen Kreise, ihre vier Aehnlichkeitsaxen und die zu letzteren, beziehungsweise den drei gegebenen Kreisen, gehörigen zwölf Pole, verbinde das Potenzcentrum mit jedem der gefundenen zwölf Pole; so schneiden die geraden Verbindungslinien die gegebenen Kreise in vierundzwanzig Punkten, welches die Berührungspunkte der drei gegebenen mit acht neuen Kreisen sind, die sämmtlich der Aufgabe genügen. Die Mittelpunkte dieser acht Kreise ergeben sich durch die gerade Verbindung der Berührungspunkte mit den Mittelpunkten der drei gegebenen Kreise: Es gehen nämlich von diesen vierundzwanzig Verbindungslinien immer drei und drei durch einen und denselben Punkt."

Diese Lösung ist nicht anwendbar für den Fall, dass die Mittelpunkte der drei gegebenen Kreise in einer geraden Linie liegen. Für eine solche Lage der Mittelpunkte fallen nämlich die drei Centralen der gegebenen Kreise in Eine gerade Linie und mit dieser zugleich die vier Aehnlichkeitsaxen zusammen. Die zu den Aehnlichkeitspunkten gehörigen Polaren laufen sämmtlich, da alle auf der gemeinschaftlichen Centrale senkrecht stehen, mit einander parallel, daher schneiden sie sich nicht und die zugehörigen Pole fallen unendlich weit weg; letzteres ist auch mit dem Potenzcentrum der Fall, weil die drei Linien gleicher Potenzen der drei Kreise, als auf der gemeinschaftlichen Centrale senkrecht stehend, ebenfalls mit einander parallel laufen.

Gegenwärtiger Aufsatz bezweckt zunächst die Lösung der gestellten Aufgabe für den Fall, dass die drei Mittelpunkte der gegebenen Kreise in einer geraden Linie liegen, also unter Ausschliessung des Potenzcentrums und der zwölf Pole.

Die darzulegende Lösung ist aber anwendbar für jede Lage der Mittelpunkte und es soll auch vorerst eine willkührliche Lage derselben in Betracht gezogen werden. Der Verfasser hält dafür, dass einige Sätze, auf welche er seine Lösung gründet, dem grösseren mathematischen Publikum nicht bekannt seien und fügt daher denselben die Beweise bei.

§. 1.

Legt man (Taf. IV. Fig. 2.) durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt a zweier Kreise $\mathfrak{M}$ und M an beide Kreise eine Aehnlichkeitslinie, welche sie in den Punkten $\mathfrak{T}$ und T berührt und eine zweite Aehnlichkeitslinie, welche sie in $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}$, B, B' schneidet, so ist immer

$$1)\quad a\mathfrak{B}\,.\,aB = a\mathfrak{T}\,.\,aT,$$

$$2)\quad a\mathfrak{B}'\,.\,aB' = a\mathfrak{T}\,.\,aT.$$

Beweis. Zieht man $\mathfrak{M}\mathfrak{T}$, MT, $\mathfrak{M}\mathfrak{B}'$, MB, $\mathfrak{M}\mathfrak{B}$, MB', so ist:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{B}' \parallel MB$$

und $$\mathfrak{M}\mathfrak{T} \parallel MT$$

daher $$\text{W. } \mathfrak{B}'\mathfrak{M}\mathfrak{T} = BMT.$$

Nun ist

$$W.\ a\mathfrak{B}\mathfrak{T}=\tfrac{1}{2}.\mathfrak{B}'\mathfrak{M}\mathfrak{T}$$
$$W.\ aTB=\tfrac{1}{2}.BMT$$
daher
$$W.\ a\mathfrak{B}\mathfrak{T}=aTB.$$
Es ist aber
$$W.\ \mathfrak{B}a\mathfrak{T}=BaT$$
daher
$$\Delta\,\mathfrak{B}a\mathfrak{T}\sim BaT;$$
folglich
$$a\mathfrak{T}:a\mathfrak{B}=aB:aT$$
oder
$$1)\quad a\mathfrak{B}.aB=a\mathfrak{T}.aT.$$

Ganz auf dieselbe Weise ergiebt sich:
$$2)\quad a\mathfrak{B}'.aB'=a\mathfrak{T}.aT.$$

§. 2.

Berührt ein Kreis zwei andere Kreise gleichartig, so liegen die Berührungspunkte und der äussere Aehnlichkeitspunkt in einer geraden Linie.

§. 3.

Legt man (Taf. IV. Fig. 3.) durch den inneren Aehnlichkeitspunkt i zweier Kreise $\mathfrak{M}$ und M eine Aehnlichkeitslinie, welche sie in den Punkten $\mathfrak{G}$ und G berührt, und eine zweite Aehnlichkeitslinie, welche sie in $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}$, B', B schneidet, so ist immer:
$$1)\quad i\mathfrak{B}.iB=i\mathfrak{G}.iG,$$
$$2)\quad i\mathfrak{B}'.iB'=i\mathfrak{G}.iG.$$

Beweis. Zieht man $\mathfrak{M}\mathfrak{B}'$, MB, $\mathfrak{M}\mathfrak{G}$, MG etc., so ist
$$\mathfrak{M}\mathfrak{B}\parallel MB'$$
und
$$\mathfrak{M}\mathfrak{G}\parallel MG$$
daher
$$W.\ \mathfrak{B}\mathfrak{M}\mathfrak{G}=B'MG.$$
Nun ist
$$W.\ i\mathfrak{G}\mathfrak{B}=\tfrac{1}{2}.\mathfrak{B}\mathfrak{M}\mathfrak{G}$$
und
$$W.\ iBG=\tfrac{1}{2}.B'MG$$
daher
$$W.\ i\mathfrak{G}\mathfrak{B}=iBG.$$
Es ist aber
$$W.\ \mathfrak{B}i\mathfrak{G}=BiG$$
daher
$$\Delta\,\mathfrak{B}i\mathfrak{G}\sim BiG,$$

folglich

$$i\mathfrak{G} : i\mathfrak{B} = iB : iG$$

oder

$$1) \quad i\mathfrak{B} . iB = i\mathfrak{G} . iG.$$

Ganz auf dieselbe Weise ergiebt sich:

$$2) \quad i\mathfrak{B}' . iB' = i\mathfrak{G} . iG.$$

§. 4.

Berührt ein Kreis zwei andere Kreise ungleichartig, so liegen die Berührungspunkte und der innere Aehnlichkeitspunkt in einer geraden Linie.

§. 5.

Die Tangente $a\mathfrak{C}$ (Taf. IV. Fig. 4.) des äusseren Aehnlichkeitspunktes a zweier Kreise $\mathfrak{M}$ und M an jeden diese beiden Kreise gleichartig berührenden Kreis $\mathfrak{M}$ ist mittlere Proportionale zwischen den von dem äusseren Aehnlichkeitspunkt a an beide Kreise $\mathfrak{M}$ und M gezogenen Tangenten $a\mathfrak{T}$ und aT.

Es ist nämlich:

$$a\mathfrak{T} : a\mathfrak{C} = a\mathfrak{C} : aT$$

oder

$$a\mathfrak{C}^2 = a\mathfrak{T} . aT.$$

Beweis. Es ist:

$$a\mathfrak{T} . aT = a\mathfrak{B}' . aB' \quad (§. 1.)$$

und

$$a\mathfrak{C}^2 = a\mathfrak{B}' . aB'$$

daher

$$a\mathfrak{C}^2 = a\mathfrak{T} . aT,$$

d. h. die Tangenten, gezogen von dem äusseren Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise nach jedem, beide Kreise gleichartig berührenden Kreis sind einander gleich.

§. 6.

Beschreibt man daher aus dem äusseren Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise mit der an einen, diese Kreise gleichartig berührenden Kreis gelegten Tangente einen Kreis, so schneidet dieser alle gleichartig berührenden Kreise rechtwinkelig.

§. 7.

Die Halbsehne $i\mathfrak{B}$ (Taf. IV. Fig. 5.) des inneren Aehnlichkeitspunktes i zweier Kreise $\mathfrak{M}$ und M zu jedem diese beiden Kreise ungleichartig berührenden Kreis $\mathfrak{M}$ ist mittlere Proportionale zwischen den von dem inneren Aehnlichkeitspunkt i an beide Kreise $\mathfrak{M}$ und M gezogenen Tangenten $i\mathfrak{G}$ und iG.

Es ist nämlich:

$$i\mathfrak{G}:i\mathfrak{B}=i\mathfrak{B}:iG$$

oder

$$i\mathfrak{B}^2=i\mathfrak{G}.iG.$$

Beweis. Es ist:

$$i\mathfrak{G}.iG=i\mathfrak{B}.iB \quad (§. 3.)$$

und

$$i\mathfrak{B}^2=i\mathfrak{B}.iB$$

daher

$$i\mathfrak{B}^2=i\mathfrak{G}.iG,$$

d. h. die Halbsehnen, gezogen von dem inneren Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise zu jedem diese Kreise ungleichartig berührenden Kreis sind einander gleich.

§. 8.

Beschreibt man daher aus dem inneren Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise mit der zu einem, diese Kreise ungleichartig berührenden Kreis gezogenen Halbsehne einen Kreis, so wird die Peripherie desselben von allen, die beiden Kreise ungleichartig berührenden Kreisen halbirt.

§. 9.

Schneidet ein Kreis zwei andere rechtwinkelig, so liegt sein Mittelpunkt in der den beiden Kreisen zugehörigen Linie gleicher Potenzen.

§. 10.

Halbirt ein Kreis die Peripherien zweier Kreise, so liegt sein Mittelpunkt in der den beiden Kreisen zugehörigen Linie äquidifferenter Potenzen *).

*) Siehe Archiv der Mathem. XIX. Thl. 1. Hft. S. b.

§. 11.

Berührt (Taf. V.) ein Kreis $\mathfrak{M}^1$ ($\mathfrak{M}^2$) drei andere Kreise $\mathfrak{M}$, M und m gleichartig, so liegt der Mittelpunkt des berührenden Kreises $\mathfrak{M}^1$ ($\mathfrak{M}^2$) in der Linie gleicher Potenzen, welche zu den drei Kreisen gehört, die aus den drei äusseren Aehnlichkeitspunkten mit den aus diesen Punkten an den berührenden Kreis $\mathfrak{M}^1$ ($\mathfrak{M}^2$) gelegten Tangenten, also aus a, $\mathfrak{A}$ und A, mit den Halbmessern $a\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}\mathfrak{C}''$, $A\mathfrak{C}'''$ gezogen werden.

Beweis. Es schneidet sowohl der Kreis a wie der Kreis $\mathfrak{A}$ den Kreis $\mathfrak{M}^1$ ($\mathfrak{M}^2$) rechtwinkelig (§. 6.), daher liegt der Mittelpunkt $\mathfrak{M}^1$ ($\mathfrak{M}^2$) in der zu den Kreisen a und $\mathfrak{A}$ gehörigen Linie gleicher Potenzen (§. 9.). Ebenso schneidet sowohl der Kreis $\mathfrak{A}$, als auch der Kreis A den Kreis $\mathfrak{M}^1$ ($\mathfrak{M}^2$) rechtwinkelig (§. 6.), daher liegt der Mittelpunkt $\mathfrak{M}^1$ ($\mathfrak{M}^2$) auch in der zu den Kreisen $\mathfrak{A}$ und A gehörigen Linie gleicher Potenzen (§. 9.).

Hieraus folgt:

1) die drei Kreise a, $\mathfrak{A}$, A haben eine gemeinschaftliche Linie gleicher Potenzen;
2) schneiden sich die drei Kreise a, $\mathfrak{A}$, A, so schneiden sie sich in denselben Punkten O und O';
3) schneiden sich die drei Kreise a, $\mathfrak{A}$, A nicht, so schneidet sie derjenige Kreis rechtwinkelig, welcher aus irgend einem Punkte ihrer Linie gleicher Potenzen mit der an einen von ihnen gelegten Tangente als Halbmesser gezogen wird.

§. 12.

Berührt (Taf. VI.) ein Kreis $\mathfrak{M}^3$ ($\mathfrak{M}^4$) zwei andere Kreise $\mathfrak{M}$ und M gleichartig und einen dritten Kreis m ungleichartig, so liegt der Mittelpunkt des berührenden Kreises $\mathfrak{M}^3$ ($\mathfrak{M}^4$) in der Linie äquidifferenter Potenzen, welche zu den zwei Kreisen gehört, die aus den beiden jedesmal zu dem ungleichartig berührten Kreise m gehörigen, inneren Aehnlichkeitspunkten mit den aus diesen Punkten zu dem berührenden Kreise $\mathfrak{M}^3$ ($\mathfrak{M}^4$) gelegten Halbsehnen, also aus $\mathfrak{J}$ und J mit den Halbmessern $\mathfrak{J}\mathfrak{B}''$ und $J\mathfrak{B}'''$ gezogen werden.

Beweis. Es wird sowohl die Peripherie des Kreises $\mathfrak{J}$ als auch die des Kreises J von dem Kreise $\mathfrak{M}^3$ ($\mathfrak{M}^4$) halbirt (§. 8.), daher liegt der Mittelpunkt $\mathcal{M}^3$ ($\mathcal{M}^4$) in der zu den Kreisen $\mathfrak{J}$ und J gehörigen Linie äquidifferenter Potenzen (§. 10.), welche als solche auf der zu dem ungleichartig berührten Kreise m gehörigen inneren Aehnlichkeitsaxe $aJ\mathfrak{J}$ senkrecht steht.

§. 13.

Berühren zwei Kreise $\mathcal{M}^1$ und $\mathcal{M}^2$ (Taf. V.) drei andere Kreise $\mathfrak{M}$, M und m gleichartig, nämlich $\mathcal{M}^1$ die drei Kreise von aussen und $\mathcal{M}^2$ die drei Kreise von innen, so wird jeder der drei Kreise von den beiden andern in zwei Punkten berührt, und betrachtet man die gerade Verbindungslinie jeder solcher zwei Punkte als eine Polare des betreffenden Kreises, so liegt bekanntlich der dieser Polare zugehörige Pol in der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}A$.

Legt man nun aus jedem der drei Pole, z. B. aus dem zu der Polare $\mathfrak{B}'\mathfrak{B}^2$ des Kreises $\mathfrak{M}$ zugehörigen Pole $\mathfrak{P}$, an den betreffenden Kreis $\mathfrak{M}$ eine Tangente $\mathfrak{P}\mathfrak{B}'$ ($=\mathfrak{P}\mathfrak{B}^2$) und beschreibt mit derselben als Halbmesser einen Kreis, so werden von diesem nicht allein der berührte Kreis $\mathfrak{M}$, sondern auch der berührende $\mathcal{M}^1$ (und $\mathcal{M}^2$) rechtwinkelig geschnitten, weil der Halbmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{B}'$ ($=\mathfrak{P}\mathfrak{B}^2$) nicht allein Tangente an den Kreis $\mathfrak{M}$, sondern auch an den Kreis $\mathcal{M}^1$ ($\mathcal{M}^2$) ist. Dasselbe findet statt für die Kreise M und m, wenn man aus den, in der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}A$ gelegenen, zu den Polaren $B'B^2$ und $b'b^2$ der Berührungspunkte gehörigen Polen P und p mit den Tangenten PB' ($=PB^2$) und pb' ($=pb^2$) Kreise beschreibt.

Nun wird aber der Kreis $\mathcal{M}^1$ ($\mathcal{M}^2$) auch von den Kreisen a, $\mathfrak{A}$, A (§. 6.) rechtwinkelig geschnitten, daher schneidet auch $\mathcal{M}^1$ ($\mathcal{M}^2$) die sechs Kreise a, $\mathfrak{A}$, A, p, $\mathfrak{P}$, P rechtwinkelig. Diese sechs Kreise haben daher eine und dieselbe Linie gleicher Potenzen und die Bemerkungen des §. 11., 2) und 3) sind auch auf die drei Kreise p, $\mathfrak{P}$, P anwendbar.

§. 14.

Berühren zwei Kreise $\mathcal{M}^3$ und $\mathcal{M}^4$ (Taf. VI.) zwei andere Kreise $\mathfrak{M}$ und M gleichartig, nämlich $\mathcal{M}^3$ die beiden Kreise von aussen und $\mathcal{M}^4$ die beiden Kreise von innen, und einen dritten Kreis m ungleichartig, nämlich $\mathcal{M}^3$ denselben von innen und $\mathcal{M}^4$ von aussen; so wird jeder der drei Kreise von den beiden andern in zwei Punkten berührt, und betrachtet man die gerade Verbindungslinie jeder solcher zwei Punkte als eine Polare des betreffenden Kreises, so liegt bekanntlich der dieser Polare zugehörige Pol in der dem ungleichartig berührten Kreise m zugehörigen inneren Aehnlichkeitsaxe $a J \mathfrak{J}$.

Legt man nun aus jedem der drei Pole, z. B. aus dem zu der Polare $\mathfrak{B}^3\mathfrak{B}^4$ des Kreises $\mathfrak{M}$ zugehörigen Pol $\mathfrak{P}'$, an den betreffenden Kreis $\mathfrak{M}$ eine Tangente $\mathfrak{P}'\mathfrak{B}^3$ $(=\mathfrak{P}'\mathfrak{B}^4)$ und beschreibt mit derselben als Halbmesser einen Kreis, so werden von diesem nicht allein der berührte Kreis $\mathfrak{M}$, sondern auch der berührende $\mathfrak{M}^3$ $(\mathfrak{M}^4)$ rechtwinkelig geschnitten, weil der Halbmesser $\mathfrak{P}'\mathfrak{B}^3$ $(=\mathfrak{P}'\mathfrak{B}^4)$ nicht allein Tangente an den Kreis $\mathfrak{M}$, sondern auch an den Kreis $\mathfrak{M}^3$ $(\mathfrak{M}^4)$ ist.

Dasselbe findet statt für die Kreise M und m, wenn man aus den Polen P' und p' mit den Tangenten $P'B^3$ $(=P'B^4)$ und $p'b^3$ $(=p'b^4)$ Kreise beschreibt.

Es schneidet also der Kreis $\mathfrak{M}^3$ $(\mathfrak{M}^4)$ die Kreise p', $\mathfrak{P}'$, P' rechtwinkelig, daher haben diese drei Kreise eine und dieselbe Linie gleicher Potenzen, welche durch den Mittelpunkt des Kreises $\mathfrak{M}^3$ $(\mathfrak{M}^4)$ geht und auf der inneren Aehnlichkeitsaxe $a J \mathfrak{J}$ senkrecht steht.

Es geht aber auch die Linie äquidifferenter Potenzen der Kreise $\mathfrak{J}$ und J durch den Mittelpunkt des Kreises $\mathfrak{M}^3$ $(\mathfrak{M}^4)$ und steht auf $a J \mathfrak{J}$ senkrecht (§. 12.), mithin ist die Linie äquidifferenter Potenzen der Kreise $\mathfrak{J}$ und J die Linie gleicher Potenzen der Kreise p', $\mathfrak{P}'$, P'.

§. 15.

Schneiden sich die Kreise a, $\mathfrak{A}$, A (Taf. V.) (§. 11.) und folglich auch die Kreise p, $\mathfrak{P}$, P (§. 13), so ist jeder der drei Mittelpunkte p, $\mathfrak{P}$, P ein Punkt der Linie gleicher Potenzen zu jedem der beiden Schneidungspunkte O', O'' und dem zugehörigen Kreise m, $\mathfrak{M}$, M; denn jeder der Kreise p, $\mathfrak{P}$, P schneidet den zugehörigen Kreis m, $\mathfrak{M}$, M rechtwinkelig und geht durch die beiden Schneidungspunkte (§. 13.).

§. 16.

Schneiden sich die Kreise a, $\mathfrak{A}$, A (§. 11.) nicht, und folglich auch nicht die Kreise p, $\mathfrak{P}$, P (§. 13.), so ist jeder der drei Mittelpunkte p, $\mathfrak{P}$, P ein Punkt der Linie gleicher Potenzen zu demjenigen Kreise, welcher aus dem Durchschnittspunkte O der gemeinschaftlichen Linie gleicher Potenzen der sechs Kreise und der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}A$ als Mittelpunkt und der von diesem Mittelpunkt an einen der respektiven Kreise a, $\mathfrak{A}$, A gezogenen Tangente als Halbmesser gezogen ist, und dem zugehörigen Kreise m, $\mathfrak{M}$, M; denn jeder der Kreise p, $\mathfrak{P}$, P schneidet den zugehörigen Kreis m, $\mathfrak{M}$, M und den also gezogenen Kreis rechtwinkelig (§. 11. 3)).

§. 17.

Beschreibt man aus dem Durchschnittspunkte Q (Taf. VI.), der den Kreisen p', $\mathfrak{P}'$, P' (§. 14.) angehörigen Linie gleicher Potenzen $Q_{,}Q_{,,}$ und der inneren Aehnlichkeitsaxe $aJ\mathfrak{J}$, mit $Q\mathfrak{B}''$ ($=Q\mathfrak{B}'''$) als Halbmesser, einen Kreis; so halbirt derselbe bekanntlich die Peripherien der Kreise J und $\mathfrak{J}$ (§. 12.) und seine Peripherie wird, weil der Mittelpunkt Q ein Punkt der Linie äquidifferenter Potenzen der Kreise J und $\mathfrak{J}$ ist, von demjenigen Kreise, dessen Mittelpunkt in derselben Linie liegt und welcher die Peripherien der Kreise J und $\mathfrak{J}$ halbirt, also von dem berührenden Kreise $\mathfrak{M}^3$ ($\mathfrak{M}^4$), selbst halbirt, d. h. die Durchschnittspunkte Q' und Q'' der Kreise Q und $\mathfrak{M}^3$ ($\mathfrak{M}^4$) liegen in der in dem Mittelpunkte Q auf der Centralen $Q\mathfrak{M}^3$ ($Q\mathfrak{M}^4$) errichteten Senkrechten, also in der inneren Aehnlichkeitsaxe $aJ\mathfrak{J}$. Mithin ist auch diese Aehnlichkeitsaxe selbst eine Linie gleicher Potenzen der Kreise Q und $\mathfrak{M}^3$ ($\mathfrak{M}^4$). Da nun die Kreise p', $\mathfrak{P}'$, P' (§. 14.) die respektiven Kreise m, $\mathfrak{M}$, M rechtwinkelig schneiden, so schneiden auch diese drei Kreise den Kreis Q rechtwinkelig oder die Mittelpunkte p', $\mathfrak{P}'$, P' sind Punkte der Linien gleicher Potenzen des Kreises Q und der respektiven Kreise m, $\mathfrak{M}$, M.

§. 18.

Ehe wir zur Lösung der gestellten Aufgabe übergehen, dürfte es noch zweckmässig erscheinen, zur Abkürzung eine Nomenklatur einiger bisher betrachteten Linien und Punkte einzuführen:

1) Ein jeder aus den drei äusseren Aehnlichkeitspunkten a, $\mathfrak{A}$, A mit einem Halbmesser $a\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}\mathfrak{C}''$, $A\mathfrak{C}'''$ (§. 11.) (gleich der mittleren Proportionale der aus dem betreffenden äusseren Aehnlichkeitspunkt an beide zugehörige Kreise gelegten Tangenten) gezogene Kreis heisse ein äusserer Aehnlichkeitskreis.

2) Ein jeder aus den drei inneren Aehnlichkeitspunkten i, $\mathfrak{J}$, J

mit einem Halbmesser $i\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{J}\mathfrak{B}''$, $J\mathfrak{B}'''$ (§. 12.) (gleich der mittleren Proportionale der aus dem betreffenden inneren Aehnlichkeitspunkt an beide zugehörige Kreise gelegten Tangenten) gezogene Kreis heisse ein **innerer Aehnlichkeitskreis.**

3) Die den drei äusseren Aehnlichkeitskreisen gemeinschaftliche Linie gleicher Potenzen $O'O''$ (Taf. V.) heisse **äussere Axe.**

4) Jede zu zwei inneren Aehnlichkeitskreisen gehörige Linie äquidifferenter Potenzen $Q_{,}Q_{,,}$ (Taf. VI.) **innere Axe.**

5) Der Durchschnittspunkt O (Taf. V.) der äusseren Axe mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe heisse **Hauptpunkt der äusseren Axe oder der äusseren Aehnlichkeitsaxe.**

6) Jeder Durchschnittspunkt Q (Taf. VI.) einer inneren Axe mit der zugehörigen inneren Aehnlichkeitsaxe heisse **Hauptpunkt dieser inneren Axe oder dieser inneren Aehnlichkeitsaxe.**

7) Der aus dem Hauptpunkte O der äusseren Axe $O'O''$ (Taf. V.) beschriebene Kreis, dessen Halbmesser die aus diesem Hauptpunkte zu einem der äusseren Aehnlichkeitskreise gelegte Halbsehne oder Tangente ist, heisse **Hauptkreis der äusseren Axe oder Hauptkreis der äusseren Aehnlichkeitsaxe.**

8) Jeder aus dem Hauptpunkte Q einer inneren Axe $Q_{,}Q_{,,}$ (Taf. VI.) beschriebene Kreis, dessen Halbmesser die gerade Verbindungslinie dieses Hauptpunktes mit dem Endpunkte des in dem Mittelpunkte eines zugehörigen inneren Aehnlichkeitskreises auf die betreffende innere Aehnlichkeitsaxe senkrecht errichteten Halbmessers ist, heisse der **Hauptkreis dieser inneren Axe oder Hauptkreis dieser inneren Aehnlichkeitsaxe.**

9) Berühren zwei Kreise drei andere, und liegen ihre Mittelpunkte in einer und derselben Axe, so heissen sie **conjugirte Kreise**, die Berührungspunkte **conjugirte Berührungspunkte** und die gerade Verbindungslinie dieser heisse **Berührungspolare.**

10) Jeder Kreis, dessen Mittelpunkt in einer Aehnlichkeitsaxe liegt und dessen Peripherie durch zwei conjugirte Berührungspunkte geht, durch welchen also zwei Berührungspunkte bestimmt werden (§§. 13. und 14.), heisse ein **Bestimmungskreis der Berührungspunkte**, sein Mittelpunkt **Pol der Berührungspunkte.**

§. 19.

Aufgabe. Es sind drei Kreise *M*, 𝔐, *m* (Taf. V.) gegeben; man soll einen Kreis 𝔐 beschreiben, der die gegebenen Kreise gleichartig berührt.

Auflösung. Man bestimme:

1) die äussere Aehnlichkeitsaxe *a*𝔄*A*;

2) die äusseren Aehnlichkeitskreise *a*, 𝔄, *A*, welche sich entweder schneiden oder nicht schneiden. Schneiden sie sich, so hat man in der geraden Verbindungslinie der Schneidungspunkte bereits die äussere Axe; schneiden sie sich nicht, so ergiebt sich die äussere Axe als Linie gleicher Potenzen der gezogenen Aehnlichkeitskreise.

3) Im ersteren Falle suche man zu einem der Durchschnittspunkte O' (O'') und jedem der gegebenen Kreise *M*, 𝔐, *m* die Linie gleicher Potenzen, so ergeben sich als Durchschnittspunkte dieser Linien mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe die Pole *P*, 𝔓, *p* der Berührungspunkte. Im letzteren Falle lege man aus dem Hauptpunkte der äusseren Aehnlichkeitsaxe an einen der gezogenen äusseren Aehnlichkeitskreise eine Tangente, beschreibe mit derselben als Halbmesser aus dem Hauptpunkte einen Kreis, den Hauptkreis der äusseren Axe, und bestimme zu diesem und jedem der gegebenen Kreise *M*, 𝔐, *m* die Linie gleicher Potenzen, so ergeben sich als Durchschnittspunkte dieser Linien mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe die Pole *P*, 𝔓, *p* der Berührungspunkte.

4) Aus jedem der gefundenen Pole *P*, 𝔓, *p* beschreibe man mit einer an den betreffenden Kreis *M*, 𝔐, *m* gelegten Tangente als Halbmesser einen Bestimmungskreis der Berührungspunkte, so ergeben sich letztere als Durchschnittspunkte beider Kreise.

Für den Kreis *P* ergeben sich die Berührungspunkte B' und B^2, für 𝔓 ergeben sich 𝔅′ und 𝔅² und für *p* ergeben sich b' und b^2, und von diesen gehören B', 𝔅′ und b' dem Kreise an, welcher die gegebenen von aussen und B^2, 𝔅², b^2 dem Kreise an, welcher die gegebenen Kreise von innen berührt.

5) Die Mittelpunkte 𝔐¹ und 𝔐² erhält man durch gerade Verbindung der erhaltenen Berührungspunkte mit den

Mittelpunkten der drei gegebenen Kreise. Es schneiden sich nämlich von diesen sechs geraden Verbindungslinien jedesmal drei zusammengehörige in einem und demselben Punkte, der zugleich ein Punkt der äusseren Axe ist.

§. 20.

Aufgabe. Es sind drei Kreise M, $\mathfrak{M}$, m (Taf. VI.) gegeben, man soll einen Kreis $\mathfrak{M}$ beschreiben, der die beiden ersteren Kreise M und $\mathfrak{M}$ gleichartig und den dritten Kreis m ungleichartig berührt.

Auflösung. Man bestimme:

1) die zu dem ungleichartig zu berührenden Kreise m gehörige innere Aehnlichkeitsaxe $aJ\mathfrak{J}$;

2) die inneren Aehnlichkeitskreise J und $\mathfrak{J}$ und zu diesen ihre Linie äquidifferenter Potenzen oder die innere Axe $Q_{\prime}Q_{\prime\prime}$; sodann den Hauptkreis Q der inneren Aehnlichkeitsaxe.

3) Zu diesem Hauptkreise der inneren Aehnlichkeitsaxe und jedem der gegebenen Kreise M, $\mathfrak{M}$, m bestimme man die Linie gleicher Potenzen, so ergeben sich als Durchschnittspunkte dieser Linien mit der inneren Aehnlichkeitsaxe $aJ\mathfrak{J}$ die Pole P', $\mathfrak{P}'$, p' der Berührungspunkte.

4) Aus jedem der gefundenen Pole P', $\mathfrak{P}'$, p' beschreibe man mit einer an den betreffenden Kreis M, $\mathfrak{M}$, m gelegten Tangente als Halbmesser einen Bestimmungskreis der Berührungspunkte, so ergeben sich letztere als Durchschnittspunkte dieser beiden Kreise.

   Für den Kreis P' ergeben sich die Berührungspunkte B^3 und B^4, für $\mathfrak{P}'$ ergeben sich $\mathfrak{B}^3$ und $\mathfrak{B}^4$ und für p' ergeben sich b^3 und b^4, und von diesen gehören B^3, $\mathfrak{B}^3$, b^3 dem Kreise an, welcher M und $\mathfrak{M}$ von aussen und den Kreis m von innen, dagegen B^4, $\mathfrak{B}^4$, b^4 dem Kreise an, welcher die Kreise M und $\mathfrak{M}$ von innen und den Kreis m von aussen berührt.

5) Die Mittelpunkte $\mathfrak{M}^3$ und $\mathfrak{M}^4$ erhält man durch gerade Verbindung der erhaltenen Berührungspunkte mit den Mittelpunkten der drei gegebenen Kreise. Es schneiden sich nämlich von diesen sechs geraden Verbindungslinien jedesmal drei zusammengehörige in einem und demselben, der inneren Axe angehörigen Punkte.

§. 21.

Auf gleiche Weise (wie in §. 20.) geschieht die Auflösung, wenn das Verlangen gestellt wird, die Kreise *M* und *m* gleichartig und den Kreis 𝔐 ungleichartig oder die Kreise 𝔐 und *m* gleichartig und den Kreis *M* ungleichartig zu berühren.

§. 22.

Bei der in §. 19. gegebenen Auflösung für gleichartige Berührung dreier Kreise genügt die Bestimmung von nur zwei äusseren Aehnlichkeitskreisen, etwa der Kreise *a* und 𝔄, weil sich schon durch zwei solcher Kreise die äussere Axe bestimmen lässt.

Ebenso genügt die Bestimmung nur eines Poles der Berührungspunkte, etwa des Poles 𝔓, weil, hat man die zugehörigen zwei conjugirten Berührungspunkte $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}^2$ gefunden, die übrigen vier sich mit Hülfe des §. 2. leicht finden lassen.

Man verbinde nämlich, wenn die Berührungspunkte $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}^2$ bekannt sind, diese Punkte mit dem zugehörigen äusseren Aehnlichkeitspunkte *a*, so schneidet die gerade Verbindungslinie den Kreis *M* in den Berührungspunkten B' und B^2 und die gerade Verbindungslinie dieser Berührungspunkte mit dem zu *M* und *m* gehörigen äusseren Aehnlichkeitspunkt 𝔄 schneidet den Kreis *m* in den Berührungspunkten b' und b^2.

Man macht hiervon mit Vortheil Anwendung, wenn die Berührungspole, wie *P* und *p* (Taf. V.), über die Grenze des Papiers hinausfallen.

§. 23.

Auch bei ungleichartiger Berührung (Taf. VI.) genügt die Bestimmung nur eines Poles der Berührungspunkte (vergleiche §. 22.), weil, hat man zwei conjugirte Berührungspunkte gefunden, die übrigen vier sich mit Hülfe des §. 4. leicht ergeben.

§. 24.

Hat man, sowohl für gleichartige, als ungleichartige Berührung, zwei conjugirte Berührungspunkte gefunden, so ergeben sich auch die Mittelpunkte der conjugirten Berührungskreise alsbald, wenn man die gefundenen Berührungspunkte mit dem Mittelpunkte des zugehörigen Kreises durch gerade Linien verbindet und diese verlängert bis zu ihrem Durchschnitt mit der zugehörigen äusseren oder inneren Axe.

Von den in diesem und den beiden vorhergehenden Paragraphen erwähnten Abkürzungen wollen wir bei der Auflösung nachfolgender Aufgaben Gebrauch machen.

§. 25.

Aufgabe. Es sind drei Kreise 𝔐, M und m (Taf. VII.), deren Mittelpunkte in einer geraden Linie liegen, gegeben; man soll einen Kreis 𝔐 beschreiben, der die drei gegebenen gleichartig berührt.

Auflösung. Man bestimme:

1) die äussere Aehnlichkeitsaxe. Dieselbe fällt in *vorliegendem* Falle ganz mit der Richtung der in Einer Linie liegenden, den gegebenen Kreisen zugehörigen Centralen zusammen, und es genügt die Bestimmung von zwei äusseren Aehnlichkeitspunkten a und 𝔄.

2) Zu den Tangenten $a\mathfrak{T}'$ und aT', sowie zu $\mathfrak{A}t'$ und $\mathfrak{A}T''$ suche man die mittleren Proportionalen $a\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{C}''$ und beschreibe mit denselben als Halbmesser die äusseren Aehnlichkeitskreise a und 𝔄.

   Diese Aufgabe unterscheidet sich nun von der in §. 19. gestellten, auf Taf. V. bezüglichen Aufgabe dadurch, dass sich dort die beiden Aehnlichkeitskreise schneiden, hier nicht.

3) Zu den beiden Aehnlichkeitskreisen suche man die Linie gleicher Potenzen, d. i. die äussere Axe $O_{,}O_{,,}$, lege von ihrem Hauptpunkte O eine Tangente OO' an einen der Aehnlichkeitskreise und beschreibe mit derselben einen Kreis, nämlich den Hauptkreis der äusseren Axe (§. 11. 3)).

4) Zu diesem Hauptkreise O und einem der gegebenen Kreise, etwa dem Kreise 𝔐, suche man die Linie gleicher Potenzen, resp. deren Durchschnitt 𝔓 mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe, so hat man den Berührungspol 𝔓 für diesen Kreis 𝔐; und die von diesem Pol an den Kreis 𝔐 gelegten Tangenten bestimmen dann zwei conjugirte Berührungspunkte $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}^2$.

5) Man verbinde jeden der Berührungspunkte mit dem Mittelpunkte 𝔐 und verlängere die Verbindungslinien bis

die äussere Axe $O_{,}O_{,,}$ in den Punkten $\mathfrak{M}^1$ und $\mathfrak{M}^2$, d. i. in den Mittelpunkten derjenigen Kreise geschnitten wird, welche beide der Aufgabe genügen.

6) Die zwei Paar andere Berührungspunkte B' und B^2, sowie b' und b^2, ergeben sich dann durch die Verbindung der gefundenen Mittelpunkte $\mathfrak{M}^1$ und $\mathfrak{M}^2$ mit den Mittelpunkten der gegebenen Kreise M und m.

§. 26.

Aufgabe. Es sind drei Kreise m, M und $\mathfrak{M}$ (Taf. VIII.), deren Mittelpunkte in einer geraden Linie liegen, gegeben; man soll einen Kreis $\mathfrak{M}$ beschreiben, der zwei der gegebenen Kreise, etwa M und $\mathfrak{M}$, gleichartig und den dritten Kreis, also m, ungleichartig berührt.

Auflösung. Man bestimme:

1) die dem ungleichartig zu berührenden Kreise zugehörige innere Aehnlichkeitsaxe und es genügt die Bestimmung der inneren Aehnlichkeitspunkte $\mathfrak{J}$ und J.

2) Zu den Tangenten $J\mathfrak{G}'$ und Jg'', sowie zu $\mathfrak{J}g'$ und $\mathfrak{J}G'$, suche man die mittleren Proportionalen $J\mathfrak{B}''$ und $\mathfrak{J}\mathfrak{B}'''$ und beschreibe mit denselben als Halbmessern die inneren Aehnlichkeitskreise J und $\mathfrak{J}$.

3) Zu diesen beiden Aehnlichkeitskreisen suche man die Linie äquidifferenter Potenzen, d. i. die innere Axe $Q_{,}Q_{,,}$, und beschreibe aus ihrem Hauptpunkte Q mit $Q\mathfrak{B}''$ ($=Q\mathfrak{B}'''$) [nämlich mit der geraden Verbindungslinie des Hauptpunktes Q und des Endpunktes $\mathfrak{B}''$ ($\mathfrak{B}'''$) des auf der inneren Aehnlichkeitsaxe senkrecht stehenden Halbmessers des inneren Aehnlichkeitskreises J ($\mathfrak{J}$)] als Halbmesser einen Kreis, d. h. den Hauptkreis der inneren Axe.

4) Zu diesem Hauptkreise und einem der gegebenen Kreise, etwa dem Kreise M, suche man die Linie gleicher Potenzen, resp. deren Durchschnittspunkt P' mit der inneren Aehnlichkeitsaxe $\mathfrak{J}J$, so hat man den Berührungspol P' für diesen Kreis M. Die von diesem Pol an den Kreis M gelegten Tangenten bestimmen dann zwei conjugirte Berührungspunkte B^3 und B^4.

5) Man verbinde jeden der Berührungspunkte mit dem Mittelpunkte M und verlängere die Verbindungslinien, bis die innere Axe $Q_{,}Q_{,,}$ in den Punkten $\mathfrak{M}^3$ und $\mathfrak{M}^4$, d. i.

in den Mittelpunkten derjenigen Kreise geschnitten wird, welche beide der Aufgabe genügen.

6) Die zwei Paar andere Berührungspunkte $\mathfrak{B}^3$ und $\mathfrak{B}^4$, so wie b^3 und b^4, ergeben sich dann durch die Verbindung der gefundenen Mittelpunkte $\mathfrak{M}^3$ und $\mathfrak{M}^4$ mit den Mittelpunkten der gegebenen Kreise $\mathfrak{M}$ und m.

§. 27.

Liegen die Mittelpunkte M, $\mathfrak{M}$, m der drei gegebenen Kreise nicht, wie in Aufgabe §§. 25. und 26., in einer geraden Linie, so kann, wenn die Auflösung vollständig, nämlich die Bestimmung der acht Berührungskreise erfolgen soll, die in den §§. 19. und 20. gegebene Auflösung durch folgenden Satz eine Abkürzung erleiden.

§. 28.

Sämmtliche vier Axen, nämlich die äussere Axe und die drei inneren Axen, schneiden sich in einem Punkte und zwar in dem Potenzcentrum der drei gegebenen Kreise.

Um diese Behauptung einzusehen, nehme man in Betracht, dass jedesmal zwei conjugirte Berührungspunkte mit dem Potenzcentrum in einer geraden Linie liegen. Man verbinde nun zwei conjugirte Berührungspunkte, etwa $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}^2$ (Taf. V.), mit dem Potenzcentrum $\mathfrak{C}$ durch eine Gerade und verlängere sie bis zu ihrem Durchschnitte $\mathfrak{B}$ des Kreises $\mathfrak{M}^2$; alsdann verbinde man $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{B}'$ mit $\mathfrak{M}^1$, $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{M}^1$ und $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{M}^2$; so ist:

$$\text{W. } \mathfrak{M}^2\mathfrak{B}\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{M}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{B}$$

und
$$\text{W. } \mathfrak{M}\mathfrak{B}'\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{M}\mathfrak{B}^2\mathfrak{B}'$$

Es ist aber
$$\text{W. } \mathfrak{M}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{B} = \mathfrak{M}\mathfrak{B}^2\mathfrak{B}'$$

daher auch
$$\text{W. } \mathfrak{M}^2\mathfrak{B}\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{M}\mathfrak{B}'\mathfrak{B}^2$$

also
$$\mathfrak{M}^1\mathfrak{B}' \parallel \mathfrak{M}^2\mathfrak{B}.$$

Da aber diese Parallelen $\mathfrak{M}^1\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{M}^2\mathfrak{B}$ die in entgegengesetzter Richtung liegenden Halbmesser zweier Kreise $\mathfrak{M}^1$ und $\mathfrak{M}^2$ sind, so liegt bekanntlich auch in der Verbindungslinie $\mathfrak{B}'\mathfrak{B}$ ihrer Endpunkte der innere Aehnlichkeitspunkt dieser Kreise $\mathfrak{M}^1$ und $\mathfrak{M}^2$.

Verfährt man ebenso mit einem anderen Paare conjugirter Berührungspunkte, etwa mit b' und b^2 des Kreises m, verbindet sie nämlich mit dem Potenzcentrum $\mathfrak{C}$ durch eine Gerade und verlängert diese, bis $\mathfrak{M}^2$ in b geschnitten wird etc.; so ergiebt sich, dass der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise $\mathfrak{M}^1$ und $\mathfrak{M}^2$ auch in der Geraden $b'b$ liege; mithin liegt der innere Aehnlichkeitspunkt beider conjugirten Kreise in dem Durchschnitte der Linien $\mathfrak{B}'\mathfrak{B}$ und $b'b$.

Es ist aber dieser Durchschnitt das Potenzcentrum $\mathfrak{C}$ der Kreise M, $\mathfrak{M}$ und m; daher ist auch das Potenzcentrum $\mathfrak{C}$ dieser drei Kreise zugleich der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden conjugirten Kreise $\mathfrak{M}^1$ und $\mathfrak{M}^2$, welche sie gleichartig berühren, und die gezogenen Linien $\mathfrak{M}^1\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{M}^2\mathfrak{C}$ fallen in eine Richtung zusammen, d. h. das Potenzcentrum $\mathfrak{C}$ ist ein Punkt der äusseren Axe.

Auf gleiche Weise findet sich bei ungleichartiger Berührung (Taf. VI.), dass das Potenzcentrum $\mathfrak{C}$ auch der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden conjugirten Kreise $\mathfrak{M}^3$ und $\mathfrak{M}^4$, also ein Punkt der zu dem ungleichartig berührten Kreise m gehörigen inneren Axe ist. Und ebenso ergiebt sich, dass das Potenzcentrum $\mathfrak{C}$ auch ein Punkt derjenigen inneren Axen ist, die den ungleichartig berührten Kreisen $\mathfrak{M}$ und M angehören.

Das Potenzcentrum $\mathfrak{C}$ ist mithin der innere Aehnlichkeitspunkt der vier Paar conjugirter Berührungskreise, d. h. ein Punkt der vier Axen und daher ein gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt derselben.

§. 29.

Liegen daher die Mittelpunkte der drei gegebenen Kreise nicht in einer geraden Linie, so kann man auch zur Bestimmung der Axen das Potenzcentrum aufsuchen und von diesem auf die bezüglichen Aehnlichkeitsaxen Senkrechte fällen.

Für solche Fälle kann dieses Verfahren, namentlich wenn es sich um Bestimmung sämmtlicher acht Berührungskreise handelt, als Abkürzung gelten, unbeschadet der Allgemeinheit der gegebenen Auflösung für jede Lage der Mittelpunkte.

§. 30.

Das in den §§. 25. und 26. in Bezug auf die Berührung dreier Kreise gegebene Verfahren ist nicht allein allgemein in Bezug auf die Lage der Mittelpunkte, sondern auch in Bezug auf die Grösse der Halbmesser der gegebenen drei Kreise, nämlich auch noch dann anwendbar, wenn die Halbmesser derselben unendlich gross oder unendlich klein werden, d. h. die gegebenen Kreise in gerade Linien oder in Punkte übergehen.

Da indessen die allgemeine Auflösung sich auf Bestimmung der Aehnlichkeitsaxen, der Aehnlichkeitskreise, der Linien gleicher Potenzen etc. gründet, so soll nunmehr untersucht werden, welche Lage diese verschiedenen Linien einnehmen, wann die Halbmesser der drei gegebenen Kreise zum Theil oder alle unendlich gross oder unendlich klein werden.

(Die zweite Abtheilung dieser Abhandl. folgt in einem der nächsten Hefte.)

XVI.

Ueber die elementare Berechnung der briggischen Logarithmen.

Von

Herrn *Joh. Bapt. Sturm,*

geprüftem Lehramts-Candidaten zu Rottenburg in Nieder-Baiern.

Bekanntlich stützt sich die elementare Berechnung der briggischen Logarithmen auf den Satz: „Wenn C die mittlere geometrische Proportionale von A und B ist, so ist Log. C die mittlere arithmetische Proportionalzahl zu den Logarithmen von A und B.“ Das geometrische Mittel aus zwei Zahlen ist nämlich immer kleiner als wie diese, und dadurch ist es möglich, jede beliebige Zahl als die Gränze anzusehen, der man sich immer mehr nähert, je mehr man die Operation des geometrischen Mittels fortsetzt. In dem Lehrbuche der Zahlenlehre und Algebra von J. B. Weigl, das ich vor mir habe, ist auf diesem Wege der briggische Logarithmus von 3 berechnet, wobei 27 Mal das geometrische Mittel gesucht und am Schlusse mit Recht die Bemerkung hinzugefügt wird: „Aus dieser Berechnung mag man sich einen Begriff von der unendlichen Mühe machen, welche die Erfinder der Logarithmen hatten, um die Logarithmen für alle Zahlen zu finden." Diese fast ungeheure Schwierigkeit in der Ausrechnung der Logarithmen auf besagtem Wege verschwindet jedoch zum grossen Theile, wenn man die äussere Form des Verfahrens modifizirt dadurch, dass man systematischer zu Werke geht. Analysirt man nämlich dieses Verfahren, so läuft es dem Wesen nach auf nichts anderes hinaus, als den briggischen Logarithmus einer Zahl in der Form eines systematischen Bruches darzustellen, dessen Basis die Zahl 2 ist. In mathematischer Zeichensprache ausgedrückt, lautet dieses so:

$$\text{Log}.x = a + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{2^\gamma} + \ldots.$$

und

$$x = 10^a . 10^{\frac{1}{2^\alpha}} . 10^{\frac{1}{2^\beta}} . 10^{\frac{1}{2^\gamma}} \ldots.,$$

wo durch x eine beliebige Zahl, durch a die Kennziffer und durch die Bruchreihe, in welcher selbstredend $\alpha, \beta, \gamma \ldots.$ der Grösse nach zunehmende ganze Zahlen bedeuten, und jedes Glied grösser als die Summe aller nachfolgenden ist, die Mantisse des Logarithmus vorgestellt wird. Hieraus ersieht man aber auf der Stelle, dass es bei der Berechnung der briggischen Logarithmen im Grunde blos darauf ankömmt, für die Potenzen:

$$10^{\frac{1}{2}},\quad 10^{\frac{1}{2^2}},\quad 10^{\frac{1}{2^3}},\quad 10^{\frac{1}{2^4}}, \ldots.$$

die Werthe zu finden, was sehr leicht durch fortgesetztes Quadratwurzelausziehen geschehen kann. Ich habe nun vor Kurzem diese Werthe bis auf den von $10^{\frac{1}{2^{88}}}$ einschliesslich berechnet und zwar in 10 Dezimalen, und theile sie hier in einer Tafel *) mit, wobei ich jedoch nicht gut stehen kann, ob nicht hie und da die letzte Ziffer fehlerhaft ist. Das Prinzip der Rechnung war nämlich folgendes. Bezeichnet α irgend einen durch Quadratwurzelausziehen erhaltenen Werth in 10 Dezimalen, so kann der wahre Werth durch $(\alpha + \beta)$ ausgedrückt werden, wo $\beta < \frac{1}{10^{10}}$ ist. Zieht man nun auf's Neue aus $(\alpha + \beta)$ die Quadratwurzel aus, so kann diess, da β unbekannt ist, nur dadurch geschehen, dass man aus α die Quadratwurzel zieht; man begeht dabei wohl einen Fehler, allein es ist leicht zu bestimmen, auf die wievielte Dezimalstelle

*) Siehe am Ende.

von $\sqrt{\alpha}$ er einen Einfluss habe. Bezeichnet man nämlich diesen Fehler durch $\varDelta$, so ist,

$$\sqrt{(\alpha+\beta)} = \sqrt{\alpha} + \varDelta$$

und

$$\varDelta = \sqrt{(\alpha+\beta)} - \sqrt{\alpha}$$

oder

$$\varDelta = \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha+\beta)} + \sqrt{\alpha}}.$$

Da nun $\beta < \frac{1}{10^{10}}$ und immer $\sqrt{(\alpha+\beta)} + \sqrt{\alpha} > 2$ ist, so hat man offenbar auch:

$$\varDelta < \frac{1}{10^{10}}.$$

Der Werth von $\varDelta$ hat also einen Einfluss nur auf die 11te Dezimalstelle des Werthes von $\sqrt{\alpha}$, wenn dieser in 10 Dezimalen berechnet wird, wobei es sich nun ereignen kann, dass durch eben diesen Einfluss auch die 10te Dezimale von $\sqrt{\alpha}$ verändert wird.

Ueber die Anwendung der Tafel selbst habe ich nur Folgendes zu bemerken. Wollte man z. B. den briggischen Logarithmus von 5 berechnen, so ist das Verfahren, das sich in allen Fällen gleich bleibt, einfach dieses.

Da

$$\text{I)} \qquad 5 = 10^{\alpha} . 10^{\frac{1}{2^{\alpha}}} . 10^{\frac{1}{2^{\beta}}} . 10^{\frac{1}{2^{\gamma}}} \ldots .$$

sein soll, so ist vor Allem klar, dass $a = 0$ ist; nun suche man in der Tafel in der Reihe B. jenen Werth, welcher kleiner als die Zahl 5 ist, aber dieser am nächsten kömmt; er ist 3,1622776604, und ihm entspricht in der Reihe A. der Werth $\alpha = 1$; mit jenem in der Reihe B. gefundenen Werthe dividire man hierauf in 5 (der Quotus sei $= q$), wodurch die Gleichung I) übergeht in diese:

$$\text{II)} \qquad q = 10^{\frac{1}{2^{\beta}}} . 10^{\frac{1}{2^{\gamma}}} \ldots .$$

Auf diese Gleichung kann man das so eben gebrauchte Verfahren neuerdings anwenden, und dadurch β finden. Auf diese Weise fährt man fort, bis man endlich auf einen Quotienten kömmt, der kleiner als der kleinste in den Tafeln ist; die Rechnung wird jetzt abgebrochen, da der Logarithmus von 5 bereits in 10 Dezimalen bestimmt ist. Dieser ist, wie von selbst einleuchtet, durch die Gleichung:

$$\text{Log.}5 = \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{2^\gamma} + \ldots$$

gegeben, da α, β, $\gamma \ldots$ durch die im Vorigen angegebene Operation bestimmt worden sind.

Für die wirkliche Ausführung der Divisionen ist aber noch folgendes Raisonnement nothwendig. Werden zwei beliebige Zahlwerthe, von denen der eine durch den andern dividirt werden soll, und die in 10 Dezimalen gegeben sind, durch α und α' bezeichnet, so sind die wahren Werthe beziehlich $(\alpha + \beta)$ und $(\alpha' + \beta')$, wo dann β und β' kleiner als $\frac{1}{10^{10}}$ sind. Der Fehler, den man bei der Division dadurch begeht, dass statt der wahren Werthe $(\alpha + \beta)$ und $(\alpha' + \beta')$ die nur bis auf 10 Dezimalen berechneten α und α' genommen werden, ist nun durch die Gleichung:

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha' + \beta'} = \frac{\alpha}{\alpha'} + \Delta$$

gegeben, wo Δ den eben erwähnten Fehler bezeichnet. Hieraus ergibt sich:

$$\Delta = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha'(\alpha' + \beta')}.$$

Da α und α' weder gleich noch grösser als 10 sind, so wird jedes der Produkte $\alpha'\beta$ und $\alpha\beta'$, also auch der absolute Werth der Differenz $(\alpha'\beta - \alpha\beta')$, den Werth von $\frac{1}{10^{10}}$ niemals überschreiten, woraus folgt, dass der Fehler Δ immer kleiner ist als $\frac{1}{10^{10}}$, indem nämlich das Produkt $\alpha'(\alpha' + \beta')$ immer grösser als 1 ist.

Aus Vorstehendem ist klar, dass die Berechnung der briggischen Logarithmen für alle Zahlen in 10 Dezimalen sich zurückführen lässt auf 33 in der Form von $\frac{1}{2^n}$ sich darstellende Logarithmen. Die Anzahl der Divisionen ist im allerungünstigsten Falle höchstens 33. Ein geübter Rechner dürfte auf diesem Wege nun nicht viel langsamer das Ziel erreichen, als auf dem, welchen die Analysis gibt, wo man von langen Rechnungen gerade auch nicht frei ist, und die briggischen Logarithmen nur mittelbar findet insoferne, als sie nur die natürlichen direkt gibt, aus denen erst durch eine Multiplikation mit dem Modulus die briggischen gewonnen werden. Unstreitig ist aber der Berechnung durch Reihen, welche die Analysis gibt, vorzuziehen jene Art, die der vorigen ähnlich ist und darin besteht, dass zuerst die Potenzen:

$$10^{\frac{1}{10}},\quad 10^{\frac{2}{10}},\quad 10^{\frac{3}{10}},\ldots$$
$$10^{\frac{1}{100}},\quad 10^{\frac{2}{100}},\quad 10^{\frac{3}{100}},\ldots$$
$$10^{\frac{1}{1000}},\quad 10^{\frac{2}{1000}},\quad 10^{\frac{3}{1000}},\ldots$$

u. s. f.

berechnet werden, deren Anzahl 81 ist, wenn zehndezimalige Logarithmen gefordert sind.

A	B	A	B
$10^{\frac{1}{2}}$	3,1622776604	$10^{\frac{1}{2^{18}}}$	1,0000087836
$10^{\frac{1}{2^2}}$	1,7782794140	$10^{\frac{1}{2^{19}}}$	1,0000043917
$10^{\frac{1}{2^3}}$	1,3335214336	$10^{\frac{1}{2^{20}}}$	1,0000021958
$10^{\frac{1}{2^4}}$	1,1547819853	$10^{\frac{1}{2^{21}}}$	1,0000010978
$10^{\frac{1}{2^5}}$	1,0746078286	$10^{\frac{1}{2^{22}}}$	1,0000005488
$10^{\frac{1}{2^6}}$	1,0366329285	$10^{\frac{1}{2^{23}}}$	1,0000002743
$10^{\frac{1}{2^7}}$	1,0181517217	$10^{\frac{1}{2^{24}}}$	1,0000001371
$10^{\frac{1}{2^8}}$	1,0090350448	$10^{\frac{1}{2^{25}}}$	1,0000000685
$10^{\frac{1}{2^9}}$	1,0045073642	$10^{\frac{1}{2^{26}}}$	1,0000000342
$10^{\frac{1}{2^{10}}}$	1,0022511482	$10^{\frac{1}{2^{27}}}$	1,0000000170
$10^{\frac{1}{2^{11}}}$	1,0011249413	$10^{\frac{1}{2^{28}}}$	1,0000000084
$10^{\frac{1}{2^{12}}}$	1,0005623125	$10^{\frac{1}{2^{29}}}$	1,0000000041
$10^{\frac{1}{2^{13}}}$	1,0002811167	$10^{\frac{1}{2^{30}}}$	1,0000000020
$10^{\frac{1}{2^{14}}}$	1,0001405484	$10^{\frac{1}{2^{31}}}$	1,0000000009
$10^{\frac{1}{2^{15}}}$	1,0000702717	$10^{\frac{1}{2^{32}}}$	1,0000000004
$10^{\frac{1}{2^{16}}}$	1,0000351352	$10^{\frac{1}{2^{33}}}$	1,0000000001
$10^{\frac{1}{2^{17}}}$	1,0000175674		

XVII.
Miscellen.

Von dem Herausgeber.

Aufgabe.

Die Lage eines gegebenen Dreiecks ABC, dessen den Winkeln A, B, C gegenüberstehende Seiten, wie gewöhnlich, durch a, b, c bezeichnet werden sollen, gegen eine gegebene Ebene so zu bestimmen, dass seine Projection auf dieser Ebene ein gleichseitiges Dreieck ist.

Auflösung.

Man lege die Spitze C des Dreiecks ABC in die Projectionsebene und bezeichne die Neigungswinkel der Seiten $a=BC$ und $b=CA$ gegen die Projectionsebene, indem man diese Winkel absolut nicht grösser als 90^0, aber positiv oder negativ nimmt, jenachdem die entsprechenden Seiten über oder unter der Projectionsebene liegen, respective durch φ und ψ; so hat man nach den Bedingungen der Aufgabe zunächst offenbar die Gleichung

$$1)\qquad a\cos\varphi=b\cos\psi.$$

Ferner aber hat man nach den Lehren der sphärischen Trigonometrie die Gleichung

$$\frac{\cos C-\cos(90^0-\varphi)\cos(90^0-\psi)}{\sin(90^0-\varphi)\sin(90^0-\psi)}=\cos 60^0=\sin 30^0=\tfrac{1}{2},$$

also

$$\frac{\cos C-\sin\varphi\sin\psi}{\cos\varphi\cos\psi}=\tfrac{1}{2},$$

oder

$$2)\qquad \cos C=\sin\varphi\sin\psi+\tfrac{1}{2}\cos\varphi\cos\psi.$$

Aus der Gleichung 1) erhält man:

3) $$\cos\psi = \frac{a}{b}\cos\varphi,$$

also, wenn man dies in die Gleichung 2) einführt und dann $\sin\psi$ bestimmt:

4) $$\sin\psi = \frac{2b\cos C - a\cos\varphi^2}{2b\sin\varphi}.$$

Folglich hat man nach 3) und 4) zur Bestimmung von φ die Gleichung:

5) $$\frac{(2b\cos C - a\cos\varphi^2)^2}{4b^2\sin\varphi^2} + \frac{a^2\cos\varphi^2}{b^2} = 1$$

oder

6) $$(2b\cos C - a\cos\varphi)^2 + 4a^2\sin\varphi^2\cos\varphi^2 = 4b^2\sin\varphi^2,$$

die man nach leichter Entwickelung auf die Form

7) $$\cos\varphi^4 - \frac{4(a^2+b^2-ab\cos C)}{3a^2}\cos\varphi^2 = -\frac{4b^2}{3a^2}\sin C^2$$

bringt. Löst man diese Gleichung wie eine quadratische Gleichung auf, so erhält man zuvörderst sehr leicht:

$$\left\{\cos\varphi^2 - \frac{2(a^2+b^2-ab\cos C)}{3a^2}\right\}^2$$
$$= \frac{4\{a^4+b^4-a^2b^2-2ab(a^2+b^2)\cos C+4a^2b^2\cos C^2\}}{9a^4},$$

oder, weil

$$2ab\cos C = a^2+b^2-c^2$$

ist, wie man leicht findet:

$$\left\{\cos\varphi^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{3a^2}\right\}^2 = \frac{4(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)}{9a^4},$$

also:

8) $$\cos\varphi^2 = \frac{a^2+b^2+c^2 \pm 2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}}{3a^2}.$$

Weil aber

$$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2 = 2(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)$$

ist, so kann man vorstehende Formel auch schreiben:

9) $$\cos\varphi^2 = \frac{a^2+b^2+c^2 \pm \sqrt{2\{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\}}}{3a^2},$$

woraus zugleich erhellet, dass die Wurzelgrösse immer reell ist.

Weil das Product

$$\{a^2+b^2+c^2+2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}\}$$
$$\times\{a^2+b^2+c^2-2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}\}$$
$$=(a^2+b^2+c^2)^2-4(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)$$
$$=3(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4)$$

und

$$\sin C^2=\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4a^2b^2},$$

also obiges Product $=12a^2b^2\sin C^2$, folglich stets positiv ist, so haben die beiden Werthe, welche die Formel 8) für $\cos\varphi^2$ liefert, immer gleiche Vorzeichen; und da nun das obere Vorzeichen offenbar immer einen positiven Werth liefert, so liefert auch das untere Zeichen stets einen solchen Werth, und die Formel 8) oder 9) liefert daher für $\cos\varphi^2$ immer zwei positive Werthe.

Weil nach dem Vorhergehenden

$$a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-4a^2b^2\sin C^2$$

ist, so kann man auch setzen:

$$10)\quad \cos\varphi^2=\frac{a^2+b^2+c^2\pm 2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-4a^2b^2\sin C^2}}{3a^2}.$$

Weil der absolute Werth von φ nicht grösser als 90^0 ist, so ist $\cos\varphi$ stets positiv, und daher nach 9):

$$11)\quad \cos\varphi=\frac{\sqrt{\{a^2+b^2+c^2\pm\sqrt{2\{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\}}\}}}{a\sqrt{3}},$$

in welcher Formel man aber φ positiv und negativ nehmen kann. Hat man φ mittelst dieser Formel bestimmt, so ergiebt sich ψ, das ebenfalls seinem absoluten Werthe nach nicht grösser als 90^0 ist, aber auch positiv und negativ sein kann, mittelst der Formel 4), nämlich mittelst der Formel

$$12)\qquad \sin\psi=\frac{2b\cos C-a\cos\varphi^2}{2b\sin\varphi},$$

ohne alle Zweideutigkeit, indem im Gegentheil die Formel 3), nämlich

$$13)\qquad \cos\psi=\frac{a}{b}\cos\varphi,$$

es unentschieden lässt, ob man ψ positiv oder negativ zu nehmen hat.

Zu bemerken ist hierbei nun aber noch ganz besonders, dass, wenn die Berechnung der Winkel φ und ψ mittelst der Formeln

11) und 12) wirklich möglich sein soll, die Werthe, welche diese Formeln für $\cos\varphi$ und $\sin\psi$ liefern, absolut genommen, die Einheit nicht übersteigen dürfen.

Wäre nun

$$a^2+b^2+c^2-2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}>3a^2,$$

so wäre

$$b^2+c^2-2a^2>2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2},$$

also $b^2+c^2-2a^2$ positiv, und folglich

$$(b^2+c^2-2a^2)^2>4(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2),$$

woraus sich, wenn man die Grössen auf beiden Seiten des Zeichens gehörig entwickelt und dann aufhebt, was sich aufheben lässt, leicht ergiebt:

$$0>3b^4+3c^4-6b^2c^2, \text{ also } 0>3(b^2-c^2)^2,$$

was offenbar ungereimt ist. Daher ist immer

$$a^2+b^2+c^2-2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}<3a^2,$$

also

$$\frac{a^2+b^2+c^2-2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}}{3a^2}<1$$

oder

$$\frac{a^2+b^2+c^2-\sqrt{2\{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\}}}{3a^2}<1$$

Wäre ferner

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}<3a^2,$$

so wäre

$$b^2+c^2-2a^2<-2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2},$$

also $b^2+c^2-2a^2$ negativ, und

$$2a^2-b^2-c^2>2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2},$$

folglich

$$(2a^2-b^2-c^2)^2>4(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2\quad c^2a^2)$$

oder

$$(b^2+c^2-2a^2)^2>4(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2),$$

woraus ganz wie vorher

$$0 > 3b^4 + 3c^4 - 6b^2c^2, \text{ also } 0 > 3(b^2 - c^2)^2$$

folgt, was wieder ungereimt ist. Daher ist immer

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2} > 3a^2,$$

also

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2}}{3a^2} > 1$$

oder

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2\{(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2\}}}{3a^2} > 1.$$

Folglich darf man nur setzen:

14) $$\cos\varphi = \frac{\sqrt{\{a^2 + b^2 + c^2 - \sqrt{2\{(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2\}}\}}}{a\sqrt{3}},$$

und mittelst dieser Formel lassen sich auch immer zwei Werthe von φ finden, die, absolut gleich, dem Zeichen nach aber entgegengesetzt sind.

Aus dieser Formel ergiebt sich:

$$\cos\psi = \frac{a}{b}\cos\varphi = \frac{\sqrt{\{a^2 + b^2 + c^2 - \sqrt{2\{(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2\}}\}}}{b\sqrt{3}},$$

welcher Ausdruck natürlich ganz eben so, wie vorher der Ausdruck

$$\frac{\sqrt{\{a^2 + b^2 + c^2 - \sqrt{2\{(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2\}}\}}}{a\sqrt{3}},$$

immer kleiner als die Einheit ist. Also ist

$$\frac{a^2}{b^2}\cos\varphi^2 < 1,$$

und weil nun nach 5)

$$\frac{(2b\cos C - a\cos\varphi^2)^2}{4b^2\sin\varphi^2} + \frac{a^2\cos\varphi^2}{b^2} = 1,$$

also

$$\frac{(2b\cos C - a\cos\varphi^2)^2}{4b^2\sin\varphi^2} = 1 - \frac{a^2}{b^2}\cos\varphi^2$$

ist, so ist der absolute Werth von

$$\frac{2b\cos C - a\cos\varphi^2}{2b\sin\varphi}$$

stets kleiner als die Einheit, und $\sin\psi$ daher mittelst der Formel 12) immer ohne alle Zweideutigkeit bestimmbar.

Dass ich bei der vorhergehenden kleinen Untersuchung die Fälle, wo eine oder die andere Grösse, welche kleiner oder grösser als die Einheit ist oder sein soll, der Einheit auch gleich sein könnte, der Kürze wegen nicht besonders betrachtet oder hervorgehoben habe, wird man mir nicht zum Vorwurfe machen, da diese Fälle als Gränzfälle zu betrachten sind, deren Beurtheilung nach den obigen allgemeinen Formeln einer Schwierigkeit nie unterliegen kann.

Weitere Folgerungen aus den obigen Formeln zu ziehen, können wir füglich dem Leser überlassen, und wollen in dieser Beziehung daher nur noch bemerken, dass nach 14)

$$2b\cos C - a\cos\varphi^2$$

$$= 2b.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - a.\frac{a^2+b^2+c^2-\sqrt{2\{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\}}}{3a^2}$$

$$= \frac{a^2+b^2-c^2}{a} - \frac{a^2+b^2+c^2-\sqrt{2\{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\}}}{3a}$$

$$= \frac{2(a^2+b^2-2c^2)+\sqrt{2\{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\}}}{3a},$$

also nach 12):

$$15)\quad \sin\psi = \frac{2(a^2+b^2-2c^2)+\sqrt{2\{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\}}}{6ab\sin\varphi}$$

ist. Auch erhält man aus 14) leicht:

$$16)\quad \sin\varphi^2 = \frac{2a^2-b^2-c^2+\sqrt{2\{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\}}}{3a^2}$$

Von dem Herausgeber.

Aufgabe.

Zwischen den Schenkeln AC und BC des Winkels C eines Dreiecks ABC die kleinste Linie zu ziehen, welche, von der Spitze C an gerechnet, $\frac{m}{n}$ des gegebenen Dreiecks ABC abschneidet.

Auflösung.

Die gesuchte Linie sei $A'B'$, so dass

$$\Delta A'B'C = \frac{m}{n} \Delta ABC$$

ist. Setzen wir $A'C = x$, $B'C = y$, $A'B' = z$, so ist

$$\Delta A'B'C = \tfrac{1}{2} xy \sin C;$$

also, weil

$$\Delta ABC = \tfrac{1}{2} ab \sin C$$

ist, nach dem Obigen:

$$xy = \frac{m}{n} ab = \frac{mab}{n}.$$

Ferner ist

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos C,$$

also, weil

$$y = \frac{mab}{nx}$$

ist, wenn man diesen Werth von y in die vorstehende Gleichung einführt:

$$z^2 = x^2 + \frac{m^2a^2b^2}{n^2x^2} - \frac{2mab}{n} \cos C.$$

Differentiirt man nun nach x, so erhält man.

$$2z \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - \frac{2m^2a^2b^2}{n^2x^3}$$

oder

$$z \frac{\partial z}{\partial x} = x - \frac{m^2a^2b^2}{n^2x^3};$$

und weil nun

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

sein muss, so ergiebt sich die Gleichung:

$$x - \frac{m^2a^2b^2}{n^2x^3} = 0 \text{ oder } x^4 = \frac{m^2a^2b^2}{n^2},$$

woraus $x = \sqrt{\frac{mab}{n}}$ folgt. Nach dem Obigen ist

$$y=\frac{mab}{nx}, \quad \text{also} \quad y=\sqrt{\frac{mab}{n}},$$

so dass folglich $x=y$, das Dreieck $A'B'C$ also ein, seine Spitze in C habendes gleichschenkliges Dreieck ist.

Es frägt sich bloss noch, ob wirklich ein Minimum Statt findet. Um dies zu entscheiden, müssen wir bekanntlich den zweiten Differentialquotienten von z in Bezug auf x entwickeln. Differentiiren wir aber die aus dem Obigen bekannte Gleichung

$$z\frac{\partial z}{\partial x}=x-\frac{m^2a^2b^2}{n^2x^3}$$

von Neuem, so erhalten wir

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=1+\frac{3m^2a^2b^2}{n^2x^4},$$

und für $x=\sqrt{\frac{mab}{n}}$ ist also, weil für diesen Werth von x der erste Differentialquotient bekanntlich verschwindet:

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1+\frac{3m^2a^2b^2}{n^2}\cdot\frac{n^2}{m^2a^2b^2}=4,$$

der zweite Differentialquotient also offenbar positiv, welches die bekannte Bedingung des Minimums ist.

Für z^2 erhält man leicht nach dem Obigen:

$$z^2=2x^2(1-\cos C)=4x^2\sin\tfrac{1}{2}C^2,$$

also

$$z=2x\sin\tfrac{1}{2}C=2\sqrt{\frac{mab}{n}}\sin\tfrac{1}{2}C.$$

Druckfehler.

Thl. XX. S. 102. hinter y in der ersten Zeile, also am Anfange der zweiten Zeile, schalte man die Worte ein:

„oder nach den entgegengesetzten Richtungen."

Thl. XX. S. 105. Z. 3. v. u. muss im Nenner des Bruchs ein Wurzelzeichen gesetzt werden, nämlich:

$$r=\frac{\sqrt{(\mathfrak{z}v_2-\mathfrak{y}v_3)^2+(\mathfrak{x}v_3-\mathfrak{z}v_1)^2+(\mathfrak{y}v_1-\mathfrak{x}v_2)^2}}{\sqrt{(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}}.$$

XVIII.

Sur le mouvement d'un corps solide autour de son centre de gravité, l'orsqu'on suppose que ce point est fixe par rapport à la terre, et entrainé avec elle dans son mouvement diurne.

Par

Monsieur *G. F. W. Baehr,*

Docteur ès-Sciences à Groningue.

Soit l'origine de trois axes fixes au centre O (Planche IX. Fig. 1.) de la terre, que nous considérerons comme une sphère parfaite et homogène; et l'axe Ox_1, dirigé du centre vers le pôle du nord, coincidant avec l'axe de la rotation diurne. Prenons pour le plan x_1z_1 le méridien initial du point P, autour duquel le corps doit tourner, et l'axe Oz_1 tellement que le rayon terrestre, ou la verticale OP tombe dans l'angle droit entre les axes Ox_1 et Oz_1, alors la direction du troisième axe Oy_1, situé dans le plan de l'équateur, sera aussi déterminée en convenant que d'un systéme rectangulaire quelconque les axes positifs seront toujours pris tellement qu'en les rangéant par ordre alphabétique, savoir Ox, Oy, Oz, une rotation positive, ou de gauche à droite, pour un spectateur placé dans un de ces axes, les pieds appuyés sur le plan des deux autres, amène le premier sur le second, le second sur le troisième, ou le troisième sur le premier, lorsque l'angle parcouru est un angle droit. Par la rotation de la terre l'axe Oz_1 serait amèné sur Oy_1, ainsi cette rotation est négative par rapport à l'axe Ox_1.

Après cela, menons par le point P trois axes Px', Py', Pz', parallèles aux précédents; ceux-si formeront un systéme fixe par rapport à la terre, mais mobile avec elle dans l'espace, et désignant par n la vitesse angulaire du mouvement diurne, par R le rayon terrestre OP, par β la latitude du point P, ou l'angle $z_1 OP$, nous aurons après le temps t:

$$x_1 = R\,\mathrm{Sin}\,\beta + x',$$

$$y_1 = R\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,nt + y'\,\mathrm{Cos}\,nt + z'\,\mathrm{Sin}\,nt,$$

$$z_1 = R\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,nt - y'\,\mathrm{Sin}\,nt + z'\,\mathrm{Cos}\,nt,$$

ce qui donnera pour

$$2T' = \frac{dx_1^2}{dt^2} + \frac{dy_1^2}{dt^2} + \frac{dz_1^2}{dt^2},$$

ou le carré de la vitesse du point, dont x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées absolues, et x', y', z' les coordonnées relatives,

$$\left.\begin{aligned} 2T' = \frac{dx'^2}{dt^2} + \frac{dy'^2}{dt^2} + \frac{dz'^2}{dt^2} + 2n\left(z'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dz'}{dt}\right) \\ + 2nR\,\mathrm{Cos}\beta.\frac{dy'}{dt} + n^2(y'^2 + z'^2) + \ldots + 2n^2Rz'\,\mathrm{Cos}\beta + n^2R^2\mathrm{Cos}^2\beta. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

On peut écrire cette expression sous la forme de la somme de trois carrés, savoir:

$$2T' = \frac{dx'^2}{dt^2} + \left(\frac{dy'}{dt} + nz' + nR\,\mathrm{Cos}\,\beta\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt} - ny'\right)^2,$$

mais la première forme sera plus commode pour faire les substitutions suivantes.

Pour plus de généralité nous prendrons un nouveau systême d'axes rectangulaires Px, Py, Pz, fixe par rapport à la terre et qui a encore le point P pour origine. Si $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ sont les cosinus des angles que l'axe des x fait avec ceux des x', y', z', et (μ, μ', μ'') et (ν, ν', ν'') ces cosinus pour les axes des y et des z, on aura:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda x + \mu y + \nu z, \\ y' &= \lambda' x + \mu' y + \nu' z, \\ z' &= \lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

où l'on peut donner à λ, μ, ν', λ' etc. des valeurs arbitraires, pourvu qu'elles satisfassent aux six relations entre les neuf cosinus.

Substituant ces valeurs dans (1) elle devient

$$
\left.\begin{aligned}
&2T'=\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\\
&-2n\{\lambda(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt})+\mu(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt})+\nu(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt})\}\\
&+2nR\operatorname{Cos}\beta\{\lambda'\frac{dx}{dt}+\mu'\frac{dy}{dt}+\nu'\frac{dz}{dt}\}+\lambda^2\{x^2+y^2+z^2-(\lambda x+\mu y+\nu z)^2\}\\
&+2n^2R\operatorname{Cos}\beta\{\lambda''x+\mu''y+\nu''z\}+n^2R^2\operatorname{Cos}^2\beta.
\end{aligned}\right\}\quad(3)
$$

Considérons maintenant le système des axes principaux d'inertie du corps, passant par le point P; soient ξ, η, ζ les coordonnées par rapport à ces axes, on aura, en désignant par (a, a', a''), (b, b', b''), (c, c', c'') les cosinus des angles que ces axes font avec ceux des x, y, z,

$$
\begin{aligned}
x&=a\xi+b\eta+c\zeta,\\
y&=a'\xi+b'\eta+c'\zeta,\\
z&=a''\xi+b''\eta+c''\zeta,
\end{aligned}
$$

où ξ, η, ζ sont des constantes par rapport au temps, tandis que l'on a entre ces neuf quantités variables a, a', a'', b, etc. les relations connues :

$$
\left.\begin{aligned}
&a^2+a'^2+a''^2=1, && ab+a'b'+a''b''=0,\\
&b^2+b'^2+b''^2=1, && ac+a'c'+a''c''=0,\\
&c^2+c'^2+c''^2=1, && bc+b'c'+b''c''=0;
\end{aligned}\right\}\quad\ldots(4)
$$

ou

$$
\left.\begin{aligned}
&a^2+b^2+c^2=1, && aa'+bb'+cc'=0,\\
&a'^2+b'^2+c'^2=1, && aa''+bb''+cc''=0,\\
&a''^2+b''^2+c''^2=1, && a'a''+b'b''+c'c''=0;
\end{aligned}\right\}\quad\ldots(5)
$$

et encore

$$
\left.\begin{aligned}
&a=b'c''-c'b'', && a'=b''c-c''b, && a''=bc'-cb',\\
&b=c'a''-a'c'', && b'=c''a-a''c, && b''=ca'-ac',\\
&c=a'b''-b'a'', && c'=a''b-b''a, && c''=ab'-ba'.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots(6)
$$

Pour réduire les variables à leur plus petit nombre, soit ψ l'angle que la trace du plan $\xi\eta$ sur le plan xy fait avec l'axe des x; θ l'inclinaison de ces deux plans, c'est-à-dire l'angle entre les axes des z et des ζ; φ l'angle que l'axe des ξ fait avec la trace du plan $\xi\eta$. Les angles φ et ψ accroissent, chacun dans son plan, par une rotation de gauche à droite, en se plaçant du côté positif de l'axe perpendiculaire à ce plan; et l'angle ψ est compté jusqu'a cette partie de la trace autour de la quelle on amenerait par une rotation positive l'axe des z sur le nouveau axe des ζ, en lui faisant parcourir l'angle θ. Ainsi on aura

$$\left.\begin{array}{ll} a = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta, & \\ b = -(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta), & \\ c = \sin\psi\sin\theta; & \\ a' = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta, & a'' = \sin\varphi\sin\theta, \\ b' = -(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta), & b'' = \cos\varphi\sin\theta, \\ c' = -\cos\psi\sin\theta; & c'' = \cos\theta; \end{array}\right\} \quad (7)$$

de plus on saït qu'en posant

$$\left.\begin{array}{l} cdb + c'db' + c''db'' = pdt, \\ adc + a'dc' + a''dc'' = qdt, \\ bda + b'da' + b''da'' = rdt, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (8)$$

d'où resulte, en vertu des trois dernières relations (4):

$$\left.\begin{array}{l} bdc + b'dc' + b''dc'' = -pdt, \\ cda + c'da' + c''da'' = -qdt, \\ adb + a'db' + a''db'' = -rdt, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (9)$$

on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} p = \sin\varphi\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\dfrac{d\theta}{dt}, \\ q = \cos\varphi\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\dfrac{d\theta}{dt}, \\ r = \cos\theta\dfrac{d\psi}{dt} + \dfrac{d\varphi}{dt}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (10)$$

Ces quantités p, q, r sont les composantes, autour des axes des ξ, η, ζ, de la rotation du corps, qui a lieu quand les angles ψ, φ et θ varient d'une manière continue quelconque. De ces formules se déduisent encore les suivantes:

$$\left.\begin{array}{lll} aq - bp = \dfrac{dc}{dt}, & a'q - b'p = \dfrac{dc'}{dt}, & a''q - b''p = \dfrac{dc''}{dt}, \\ cp - ar = \dfrac{db}{dt}, & c'p - a'r = \dfrac{db'}{dt}, & c''p - a''r = \dfrac{db''}{dt}, \\ br - cq = \dfrac{da}{dt}, & b'r - c'q = \dfrac{da'}{dt}, & b''r - c''q = \dfrac{da''}{dt}. \end{array}\right\} \quad (11)$$

Maintenant il sera facile de substituer les nouvelles variables dans l'expression de la demi-somme des forces vives de tous les points du corps; *dm* étant la différentielle de la masse, cette fonction sera, en vertu de (1),

$$T=\int T' dm, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

l'intégrale s'étendant au corps entier.

Parce que les axes des ξ, η, ζ sont des axes principaux d'inertie, on a

$$\int \xi\eta dm=0, \quad \int \xi\zeta dm=0, \quad \int \eta\zeta dm=0,$$

et parce qu'ils passent par le centre de gravité qui est en P, on a de même

$$\int \xi dm=0, \quad \int \eta dm=0, \quad \int \zeta dm=0,$$

de sorte que dans la valeur de T' on devra seulement avoir égard aux termes qui contiendront la deuxième puissance des quantités ξ, η, ζ, et au terme constant; les autres disparaitront dans (12), quand les intégrales sont étendues au corps entier.

Soient donc les moments principaux d'inertie

$$\int(\eta^2+\zeta^2)dm=A, \quad \int(\zeta^2+\xi^2)dm=B, \quad \int(\xi^2+\eta^2)dm=C, \quad (13)$$

nous aurons, en laissant de côté les termes qui ne contiennent que les premières puissances de ξ, η, ζ,

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}=\left(\frac{da^2}{dt^2}+\frac{da'^2}{dt^2}+\frac{da''^2}{dt^2}\right)\xi^2+\left(\frac{db^2}{dt^2}+\frac{db'^2}{dt^2}+\frac{db''^2}{dt^2}\right)\eta^2$$
$$+\left(\frac{dc^2}{dt^2}+\frac{dc'^2}{dt^2}+\frac{dc''^2}{dt^2}\right)\zeta^2,$$

ce qui se réduit, en vertu des relations (11), ayant égard aux trois dernières de (4), à

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}=(r^2+q^2)\xi^2+(p^2+r^2)\eta^2+(q^2+p^2)\zeta^2$$
$$=(\eta^2+\zeta^2)p^2+(\zeta^2+\xi^2)q^2+(\xi^2+\eta^2)r^2,$$

et par conséquent, ayant égard à (13):

$$\int\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)dm=Ap^2+Bq^2+Cr^2. \quad . \quad . \quad (14)$$

On a pareillement

$$y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}=(a'\frac{da''}{dt}-a''\frac{da'}{dt})\xi^2+(b'\frac{db''}{dt}-b''\frac{db'}{dt})\eta^2$$
$$+(c'\frac{dc''}{dt}-c''\frac{dc'}{dt})\zeta^2,$$

ou, par (11) et (6),

$$y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}=(cr+bq)\xi^2+(ap+cr)\eta^2+(ap+bq)\zeta^2$$
$$=ap(\eta^2+\zeta^2)+bq(\xi^2+\zeta^2)+cr(\xi^2+\eta^2);$$

et par conséquent on trouvera la première des expressions (15), tandis qu'une substitution semblable donnera les deux autres;

$$\left.\begin{aligned}\int(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt})\,dm&=Apa+Bqb+Crc,\\ \int(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt})\,dm&=Apa'+Bqb'+Crc',\\ \int(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt})\,dm&=Apa''+Bqb''+Crc''.\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (15)$$

Enfin, l'on a encore

$$x^2+y^2+z^2-(\lambda x+\mu y+\nu z)^2$$
$$=\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\lambda^2(a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2)-2\lambda\mu(aa'\xi^2+bb'\eta^2+cc'\zeta^2)$$
$$-\mu^2(a'^2\xi^2+b'^2\eta^2+c'^2\zeta^2)-2\lambda\nu(aa''\xi^2+bb''\eta^2+cc''\zeta^2)$$
$$-\nu^2(a''^2\xi^2+b''^2\eta^2+c''^2\zeta^2)-2\mu\nu(a'a''\xi^2+b'b''\eta^2+c'c''\zeta^2)$$
$$=(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-\xi^2(\lambda a+\mu a'+\nu a'')^2-\eta^2(\lambda b+\mu b'+\nu b'')^2-\zeta^2(\lambda c+\mu c'+\nu c'')^2,$$

et remarquant l'identité

$$(\lambda a+\mu a'+\nu a'')^2+(\lambda b+\mu b'+\nu b'')^2+(\lambda c+\mu c'+\nu c'')^2=1,$$

le second membre se réduira à

$$(\eta^2+\zeta^2)(\lambda a+\mu a'+\nu a'')^2+(\xi^2+\zeta^2)(\lambda b+\mu b'+\nu b'')^2$$
$$+(\xi^2+\eta^2)(\lambda c+\mu c'+\nu c'')^2,$$

et par conséquent:

$$\left.\begin{aligned}&\int\{x^2+y^2+z^2-(\lambda x+\mu y+\nu z)^2\}\,dm\\ &=(\lambda a+\mu a'+\nu a'')^2A+(\lambda b+\mu b'+\nu b'')^2B+(\lambda c+\mu c'+\nu c'')^2C.\end{aligned}\right\}\ (16)$$

Substituant les valeurs (14), (15), (16) dans (3) et (12), on aura

$$2T = A\{p - n(\lambda a + \mu a' + \nu a'')\}^2 + B\{q - n(\lambda b + \mu b' + \nu b'')\}^2$$
$$+ C\{r - n(\lambda c + \mu c' + \nu c'')\}^2 + \ldots + n^2 R^2 \cos^2\beta \times \text{masse du corps},$$

ou bien

$$2T = Ap_1^2 + Bq_1^2 + Cr_1^2 + \text{quantité constante}, \quad . \quad . \quad (17)$$

en posant

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p - n(\lambda a + \mu a' + \nu a''), \\ q_1 &= q - n(\lambda b + \mu b' + \nu b''), \\ r_1 &= r - n(\lambda c + \mu c' + \nu c''). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

La fonction des forces, étendue au corps entier, sera nulle, parce que le centre de gravité, qui est le centre de la rotation, est fixe par rapport à la terre; d'ailleurs les formules $\int \xi dm = 0$, $\int \eta dm = 0$, $\int \zeta dm = 0$ supposent que le corps soit assez éloigné du centre de la terre pour que la direction de la gravité dans tous les points de la masse reste parallèle à elle même.

Ainsi les équations du mouvement, en faisant

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi', \quad \frac{d\psi}{dt} = \psi', \quad \frac{d\theta}{dt} = \theta',$$

seront

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{dT}{d\varphi'}\right) - \frac{dT}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{dT}{d\psi'}\right) - \frac{dT}{d\psi} = 0, \\ \frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{dT}{d\theta'}\right) - \frac{dT}{d\theta} = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (19)$$

tandis que l'on a

$$\frac{dT}{d\varphi} = \frac{dT}{dp_1}\cdot\frac{dp_1}{d\varphi} + \frac{dT}{dq_1}\cdot\frac{dq_1}{d\varphi} + \frac{dT}{dr_1}\cdot\frac{dr_1}{d\varphi} \text{ etc. etc.}$$

Des formules (18) on déduira facilement

$$\frac{dp_1}{d\varphi'} = 0, \quad \frac{dp_1}{d\varphi} = q_1; \quad \frac{dp_1}{d\psi'} = a'', \quad \frac{dp_1}{d\psi} = n(\lambda a' - \mu a);$$

$$\frac{dp_1}{d\theta'} = \cos\varphi, \quad \frac{dp_1}{d\theta} = \sin\varphi\left(r_1 - \frac{d\varphi}{dt}\right);$$

$$\frac{dq_1}{d\varphi'} = 0, \quad \frac{dq_1}{d\varphi} = -p_1; \quad \frac{dq_1}{d\psi'} = b'', \quad \frac{dq_1}{d\psi} = n(\lambda b' - \mu b);$$

$$\frac{dq_1}{d\theta'} = -\sin\varphi, \quad \frac{dq_1}{d\theta} = \cos\varphi\left(r_1 - \frac{d\varphi}{dt}\right);$$

$$\frac{dr_1}{d\varphi'}=1,\quad \frac{dr_1}{d\varphi}=0;\quad \frac{dr_1}{d\psi'}=c'',\quad \frac{dr_1}{d\psi}=n(\lambda c'-\mu c);$$

$$\frac{dr_1}{d\theta'}=0,\quad \frac{dr_1}{d\theta}=-(p_1 \operatorname{Sin}\varphi+q_1 \operatorname{Cos}\varphi).$$

Les équations (19) du mouvement deviendront donc:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\cdot\frac{dT}{dr_1}-q_1\frac{dT}{dp_1}+p_1\frac{dT}{dq_1}=0,\\
&\frac{d}{dt}\cdot\left\{a''\frac{dT}{dp_1}+b''\frac{dT}{dq_1}+c''\frac{dT}{dr_1}\right\}\\
&-n\left\{(\lambda a'-\mu a)\frac{dT}{dp_1}+(\lambda b'-\mu b)\frac{dT}{dq_1}+(\lambda c'-\mu c)\frac{dT}{dr_1}\right\}=0,\\
&\frac{d}{dt}\cdot\left\{\operatorname{Cos}\varphi\frac{dT}{dp_1}-\operatorname{Sin}\varphi\frac{dT}{dq_1}\right\}-\left(r_1-\frac{d\varphi}{dt}\right)\left(\operatorname{Sin}\varphi\frac{dT}{dp_1}+\operatorname{Cos}\varphi\frac{dT}{dq_1}\right)\\
&+(p_1 \operatorname{Sin}\varphi+q_1\operatorname{Cos}\varphi)\frac{dT}{dr_1}=0;
\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

en portant la valeur de $\frac{d}{dt}\cdot\frac{dT}{dr_1}$, donnée par la première, dans la deuxième équation, elle deviendra divisible par $\sin\theta$, et réduisant de même la troisième, on obtiendra

$$\sin\varphi\left\{\frac{d}{dt}\cdot\frac{dT}{dp_1}-r_1\frac{dT}{dq_1}+q_1\frac{dT}{dr_1}\right\}+\operatorname{Cos}\varphi\left\{\frac{d}{dt}\cdot\frac{dT}{dq_1}-p_1\frac{dT}{dr_1}+r_1\frac{dT}{dp_1}\right\}=0,$$

$$\operatorname{Cos}\varphi\left\{\frac{d}{dt}\cdot\frac{dT}{dp_1}-r_1\frac{dT}{dq_1}+q_1\frac{dT}{dr_1}\right\}-\operatorname{Sin}\varphi\left\{\frac{d}{dt}\cdot\frac{dT}{dq_1}-p_1\frac{dT}{dr_1}+r_1\frac{dT}{dp_1}\right\}=0;$$

qui se réduisent aux deux suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\cdot\frac{dT}{dp_1}-r_1\frac{dT}{dq_1}+q_1\frac{dT}{dr_1}=0,\\
&\frac{d}{dt}\cdot\frac{dT}{dq_1}-p_1\frac{dT}{dr_1}+r_1\frac{dT}{dp_1}=0;
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (21)$$

de sorte que les équations (20) et (21) donneront, en y portant la valeur de T donnée par (17), pour les équations du mouvement, réduites à leur forme la plus simple,

$$\left.\begin{aligned}
&A\frac{dp_1}{dt}+(C-B)q_1r_1=0,\quad B\frac{dq_1}{dt}+(A-C)p_1r_1=0,\\
&C\frac{dr_1}{dt}+(B-A)p_1q_1=0.
\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

Ces équations sont de la même forme que les équations du mouvement lorsque le point autour du quel le corps tourne est un point absolument fixe dans l'espace; elles donneront donc de même les deux intégrales

$$\left.\begin{aligned} Ap_1^2 + Bq_1^2 + Cr_1^2 = h, \\ A^2p_1^2 + B^2q_1^2 + C^2r_1^2 = k^2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

dans les quelles h et k^2 sont les constantes arbitraires, et des quantités positives.

Au moyen de ces dernières équations on peut exprimer deux des quantités p_1, q_1, r_1 en fonctions de la troisième: substituant ces valeurs dans une des équations, cette troisième quantité sera exprimée en fonction du temps et d'une nouvelle constante arbitraire, et par suite aussi les deux autres. Alors on aurait les équations (18) pour déterminer les variables φ, ψ et θ en fonctions du temps, et leurs expressions renfermeraient trois autres constantes arbitraires.

Mais on peut trouver d'autres intégrales des équations (22), qui donneront le moyen de simplifier la solution. Si l'on ajoute ces équations, après les avoir multipliées par a, b, c; ensuite par a', b', c' et a'', b'', c'', on trouvera

$$\left.\begin{aligned} & A\{a\frac{dp_1}{dt} + (br_1 - cq_1)p_1\} + B\{b\frac{dq_1}{dt} + (cp_1 - ar_1)q_1\} \\ & \qquad + C\{c\frac{dr_1}{dt} + (aq_1 - bp_1)r_1\} = 0, \\ & A\{a'\frac{dp_1}{dt} + (b'r_1 - c'q_1)p_1\} + B\{b'\frac{dq_1}{dt} + (c'p_1 - a'r_1)q_1\} \\ & \qquad + C\{c'\frac{dr_1}{dt} + (a'q_1 - b'p_1)r_1\} = 0, \\ & A\{a''\frac{dp_1}{dt} + (b''r_1 - c''q_1)p_1\} + B\{b''\frac{dq_1}{dt} + (c''p_1 - a''r_1)q_1\} \\ & \qquad + C\{c''\frac{dr_1}{dt} + (a''q_1 - b''p_1)r_1\} = 0; \end{aligned}\right\} (24)$$

mais on obtiendra des formules (18), en ayant égard aux relations (11) et (7):

$$aq_1 - bp_1 = \frac{dc}{dt} - n(\mu c'' - \nu c'), \quad a'q_1 - b'p_1 = \frac{dc'}{dt} - n(\nu c - \lambda c''),$$

$$a''q_1 - b''p_1 = \frac{dc''}{dt} - n(\lambda c' - \mu c);$$

$$cp_1 - ar_1 = \frac{db}{dt} - n(\mu b'' - \nu b'), \quad c'p_1 - a'r_1 = \frac{db'}{dt} - n(\nu b - \lambda b''),$$

$$c''p_1 - a''r_1 = \frac{db''}{dt} - n(\lambda b' - \mu b);$$

$$br_1 - cq_1 = \frac{da}{dt} - n(\mu a'' - \nu a'), \quad b'r_1 - c'q_1 = \frac{da'}{dt} - n(\nu a - \lambda a''),$$

$$b''r_1 - c''q_1 = \frac{da''}{dt} - n(\lambda a' - \mu a);$$

de sorte qu'en substituant ces valeurs dans les équations (24), et posant:

$$\left.\begin{aligned} Ap_1 a + Bq_1 b + Cr_1 c &= L, \\ Ap_1 a' + Bq_1 b' + Cr_1 c' &= M, \\ Ap_1 a'' + Bq_1 b'' + Cr_1 c'' &= N; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

elles deviennent:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dt} + n\nu M - n\mu N &= 0, \\ \frac{dM}{dt} + n\lambda N - n\nu L &= 0, \\ \frac{dN}{dt} + n\mu L - n\lambda M &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

On a déjà une intégrale de ces équations; car en prenant la somme des carrés des équations (25), on trouve, en vertu de la dernière (23):

$$k^2 = L^2 + M^2 + N^2, \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

que l'on trouverait aussi en multipliant les dernières par L, M, N, et en prenant l'intégrale de la somme des produits; multipliant les mêmes équations par λ, μ, ν, l'intégrale de la somme des produits donne

$$\lambda L + \mu M + \nu N = l,$$

l étant une nouvelle constante arbitraire.

Au moyen de ces deux intégrales il serait aisé de déterminer entièrement les quantités L, M et N; mais ici nous disposerons des valeurs de λ, μ, ν, pour obtenir les expressions les plus simples, en prenant

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = -1,$$

ce qui revient d'après les formules (2) à prendre l'axe des z en sens contraire de l'axe des x_1; cet axe est donc parallèle à l'axe de rotation de la terre, et dirigé vers le pôle du sud, tandis que les axes des x et y restent encore indéterminés. Une rotation positive autour de l'axe des z est de même sens que la rotation de la terre.

Ainsi les équations (26) deviennent

$$\frac{dL}{dt}=nM,\quad \frac{dM}{dt}=-nL,\quad \frac{dN}{dt}=0,$$

et par conséquent, ayant égard à (27),

$$L=l\,\mathrm{Sin}(nt+i),\quad M=l\,\mathrm{Cos}(nt+i),\quad N=\pm\sqrt{(k^2-l^2)},$$

l et i étant deux nouvelles constantes.

Ces valeurs, portées dans (25), donnent

$$\left.\begin{aligned} Ap_1a+Bq_1b+Cr_1c&=l\,\mathrm{Sin}(nt+i),\\ Ap_1a'+Bq_1b'+Cr_1c'&=l\,\mathrm{Cos}(nt+i),\\ Ap_1a''+Bq_1b''+Cr_1c''&=\pm\sqrt{(k^2-l^2)};\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; (28)$$

et dans ces équations, ainsi que dans (23), on aura maintenant:

$$\left.\begin{aligned} p_1&=\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\theta.\frac{d\psi}{dt}+\mathrm{Cos}\,\varphi.\frac{d\theta}{dt}+n\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\theta,\\ q_1&=\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\theta.\frac{d\psi}{dt}-\mathrm{Sin}\,\varphi.\frac{d\theta}{dt}+n\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\theta,\\ r_1&=\mathrm{Cos}\,\theta.\frac{d\psi}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}+n\,\mathrm{Cos}\,\theta.\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; (29)$$

Au lieu des équations (28) on peut en obtenir trois autres de formes plus simples. Si l'on décrit autour de l'axe des z une surface conique circulaire droite, dont le demi-angle ε au sommét soit déterminé par

$$\mathrm{Sin}\,\varepsilon=\frac{l}{k},\quad \mathrm{Cos}\,\varepsilon=\pm\frac{\sqrt{(k^2-l^2)}}{k},$$

les seconds membres des équations (28), divisés par k, savoir

$$\frac{l}{k}\,\mathrm{Sin}(nt+i),\quad \frac{l}{k}\,\mathrm{Cos}(nt+i),\quad \pm\frac{\sqrt{(k^2-l^2)}}{k},$$

seront les cosinus des angles que fait avec les axes des x, y, z une ligne qui se meut sur cette surface, tellement que la projection de cette ligne sur le plan xy se meut de l'axe des y vers celui des x, avec une vitesse angulaire n; l'angle entre cette projection et l'axe des y étant $(nt+i)$.

Les sommes des produits de ces quotients multipliés respectivement par a, a', a''; ensuite par b, b', b'' et c, c', c''; donneront les cosinus des angles que cette ligne fait avec les axes des ξ, η, ζ. Si donc on désigne cette ligne par Z, on aura en divisant les équations (28) par k, et en les multipliant par a, a', a'', etc., ayant égard à (4):

$$\frac{Ap_1}{k} = \text{Cos}(Z.\xi), \quad \frac{Bq_1}{k} = \text{Cos}(Z.\eta), \quad \frac{Cr_1}{k} = \text{Cos}(Z.\zeta).$$

Soit donc cette ligne l'axe des Z d'un système rectangulaire PX, PY, PZ, et soient ψ', θ', φ', par rapport à ce système et celui des ξ, η, ζ, ce que ψ, θ, φ sont par rapport au système x, y, z et celui des ξ, η, ζ, par conséquent:

$$\text{Cos}(Z.\xi) = \text{Sin}\,\theta'\,\text{Sin}\,\varphi', \quad \text{Cos}(Z.\eta) = \text{Sin}\,\theta'\,\text{Cos}\,\varphi', \quad \text{Cos}(Z.\zeta) = \text{Cos}\,\theta';$$

alors on aura au lieu des équations (28):

$$\frac{Ap_1}{k} = \text{Sin}\,\theta'\,\text{Sin}\,\varphi', \quad \frac{Bq_1}{k} = \text{Sin}\,\theta'\,\text{Cos}\,\varphi', \quad \frac{Cr_1}{k} = \text{Cos}\,\theta', \tag{30}$$

qui n'équivalent qu'a deux équations distinctes par ce que la somme de leurs carrés rentre dans l'équation (23).

Pour déterminer entièrement la position du système mobile X, Y, Z, il sera le plus simple de prendre l'axe des X dans le plan qui passe par l'axe fixe des z et l'axe mobile des Z, tellement que l'axe des z, ou son prolongement, tombe dans l'angle entre les deux axes des X et des Z. Ainsi le plan XZ tournera autour de la ligne fixe qui est parallèle à l'axe de la terre, et l'axe des Y se meut dans le plan xy; ces deux mouvements ont lieu en sens contraire de la rotation de la terre, et avec la même vitesse angulaire n.

Connaissant la position initiale de ce système, on connaîtra sa position après un temps quelconque, et celle du système des axes ξ, η, ζ ou la position du corps s'en suivra par les équations (30) si l'on a encore une équation qui détermine l'angle ψ'.

Soient dans la figure (Planche IX. Fig. 2.) Px, Py, Pz les directions des axes fixes; PX, PY, PZ les directions des axes mobiles, et soit alors $P\zeta$ la direction du troisième axe principal d'inertie, qui est fixe dans le corps. Décrivons le triangle sphérique $z\zeta Z$ sur la sphère dont le centre est en P; les trois côtés de ce triangle seront

$$z\zeta = \theta, \quad \zeta Z = \theta', \quad zZ = \varepsilon.$$

Si PA et PB sont les projections de PZ et de $P\zeta$ sur le plan xy, la perpendiculaire PC à PB sera la trace du plan $\xi\eta$ sur le plan xy; car en parcourant l'angle θ, par une rotation positive autour de PC, l'axe des z coïncidera avec l'axe des ζ; et on aura

$$\angle xPC = \psi, \quad \angle yPA = nt + i, \quad \angle BPA = (\psi + nt + i) - \pi,$$

(π désignant la demi-circonférence) donc, en posant

$$\psi + nt + i = \omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

l'angle sphérique z, qui est égal à BPA, sera

$$z = \omega - \pi.$$

Si PE est la projection de $P\zeta$ sur le plan XY, la perpendiculaire PD à PE dans le plan XY sera la trace du plan $\xi\eta$ sur XY, de sorte que $XPD = \psi'$, et l'angle sphérique Z, qui est égal à EPX, sera

$$Z = \tfrac{1}{2}\pi - \psi';$$

enfin l'angle sphérique ζ sera égal à l'angle des traces PC et PD, qui sont perpendiculaires aux plans adjacents de cet angle, et, comme les angles φ et φ' doivent être comptés à partir des lignes PC et PD dans la direction de PC vers PD, on aura pour la valeur analytique de l'angle CPD, $\varphi - \varphi'$ ou $2\pi + \varphi - \varphi'$; on aura donc toujours

$$\zeta = \varphi - \varphi'.$$

Maintenant il sera facile d'exprimer les quantités p_1, q_1, r_1, données par (29), en fonctions de ψ', φ' et θ'; dans le triangle sphérique $z\zeta Z$ on a:

$$\mathrm{Cos}\,\theta = \mathrm{Cos}\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\theta' + \mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,\theta'\,\mathrm{Sin}\,\psi',$$

$$\mathrm{Cot}\,\omega = \mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Cot}\,\theta'\,\mathrm{Sec}\,\psi' - \mathrm{Cos}\,\varepsilon\,\mathrm{Tang}\,\psi',$$

$$\mathrm{Cot}\,\zeta = \mathrm{Cot}\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,\theta'\,\mathrm{Sec}\,\psi' - \mathrm{Cos}\,\theta'\,\mathrm{Tang}\,\psi';$$

ce qui donnera par la differentiation, et après les reductions par les formules de la trigonometrie sphérique,

$$\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{Cos}\,\zeta\frac{d\theta'}{dt} - \mathrm{Sin}\,\theta'\,\mathrm{Sin}\,\zeta\frac{d\psi'}{dt},$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathrm{Sin}\,\zeta}{\mathrm{Sin}\,\theta}\,\frac{d\theta'}{dt} + \frac{\mathrm{Sin}\,\theta'\,\mathrm{Cos}\,\zeta}{\mathrm{Sin}\,\theta}\,\frac{d\psi'}{dt},$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\mathrm{Cos}\,\theta\,\mathrm{Sin}\,\zeta}{\mathrm{Sin}\,\theta}\,\frac{d\theta'}{dt} + \frac{\mathrm{Cos}\,\omega\,\mathrm{Sin}\,\theta'\,\mathrm{Sin}\,\zeta}{\mathrm{Sin}\,\omega\,\mathrm{Sin}\,\theta}\,\frac{d\psi'}{dt}.$$

Substituant ces valeurs dans (29) et remarquant que l'on a (31)

$$\frac{d\psi}{dt}+n=\frac{d\omega}{dt},$$

on obtient:

$$\left.\begin{aligned}p_1&=\operatorname{Sin}\theta'\operatorname{Sin}\varphi'\frac{d\psi'}{dt}+\operatorname{Cos}\varphi'\frac{d\theta'}{dt},\\ q_1&=\operatorname{Sin}\theta'\operatorname{Cos}\varphi'\frac{d\psi'}{dt}-\operatorname{Sin}\varphi'\frac{d\theta'}{dt},\\ r_1&=\operatorname{Cos}\theta'\frac{d\psi'}{dt}+\frac{d\varphi'}{dt}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (32)$$

Les équations (32) et (30) donneront enfin pour la troisième équation cherchée,

$$\frac{d\psi'}{dt}=\frac{h-Cr_1^2}{k^2-C^2r_1^2}k. \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

Si donc les valeurs initiales de φ, θ, ψ, etc., qui se rapportent aux axes des x, y, z, sont données, on pourra en déduire la position initiale du systéme X, Y, Z; et la position initiale du corps par rapport à ce systéme, ce qui donnera aussi les valeurs initiales de φ', ψ', θ', etc.

Après le temps t on connaîtra la nouvelle position du systéme mobile X, Y, Z, et par les équations précédentes aussi la nouvelle position du corps par rapport à ce systéme, de sorte que maintenant la position du corps est complètement déterminée pour chaque instant du mouvement.

Mais les équations (30) et (33) montrent que le mouvement par rapport aux axes mobiles X, Y, Z a lieu comme si ce systéme fut fixe.

On peut en conclure que le mouvement relatif du corps (le mouvement qui est observé à la surface de la terre) est composé de deux autres, savoir: du mouvement de rotation du corps par rapport aux axes mobiles X, Y, Z, et du mouvement qu'il a de commun avec ce systéme d'axes.

La composition de ces deux derniers fera connaître le premier, qui sera toujours une rotation autour du point auquel le corps est fixement attaché; et les formules (10), que l'on obtient par des considérations géométriques, exprimeront les composantes de cette rotation autour des axes principaux du corps.

Soient donc m la vitesse angulaire de cette rotation relative et λ, μ, ν les angles que son axe fait avec les axes des ξ, η, ζ, de sorte que $m\,\mathrm{Cos}\,\lambda$, $m\,\mathrm{Cos}\,\mu$, $m\,\mathrm{Cos}\,\nu$ sont ses composantes, les formules (29) donneront, ayant égard à (10) et (7):

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= m\,\mathrm{Cos}\,\lambda + na'', \\ q_1 &= m\,\mathrm{Cos}\,\mu + nb'', \\ r_1 &= m\,\mathrm{Cos}\,\nu + nc''; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

mais en désignant par α, α', α'' les cosinus des angles que l'axe des ξ fait avec ceux des X, Y, Z, et de même par β, β', β'' et γ, γ', γ'' ces cosinus pour les axes des η et ζ, on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{Cos}(\xi.z) &= a'' = \alpha\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon + \alpha''\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon, \\ \mathrm{Cos}(\eta.z) &= b'' = \beta\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon + \beta''\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon, \\ \mathrm{Cos}(\zeta.z) &= c'' = \gamma\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon + \gamma''\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon; \end{aligned}$$

en remarquant que les angles de l'axe des z avec les axes X, Y, Z sont $\frac{1}{2}\pi - \varepsilon$, $\frac{1}{2}\pi$, ε, de sorte que

$$\mathrm{Cos}(z.X) = \mathrm{Sin}\,\varepsilon, \quad \mathrm{Cos}(z.Y) = 0, \quad \mathrm{Cos}(z.Z) = \mathrm{Cos}\,\varepsilon,$$

et en appliquant les formules

$$\mathrm{Cos}(\xi.z) = \mathrm{Cos}(\xi.X)\mathrm{Cos}(z.X) + \mathrm{Cos}(\xi.Y)\mathrm{Cos}(z.Y) + \mathrm{Cos}(\xi.Z)\mathrm{Cos}(z.Z),$$

$$\mathrm{Cos}(\eta.z) = \ldots. \qquad\qquad \mathrm{Cos}(\zeta.z) = \ldots.$$

Ainsi les équations (34) se changent en

$$\left.\begin{aligned} p_1 - n\alpha\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon - n\alpha''\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon &= m\,\mathrm{Cos}\,\lambda, \\ q_1 - n\beta\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon - n\beta''\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon &= m\,\mathrm{Cos}\,\mu, \\ r_1 - n\gamma\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon - n\gamma''\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon &= m\,\mathrm{Cos}\,\nu, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (35)$$

d'où, en prenant la somme des carrés,

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= (p_1^2 + q_1^2 + r_1^2) \\ &+ n^2 - 2n(\alpha p_1 + \beta q_1 + \gamma r_1)\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon - 2n(\alpha'' p_1 + \beta'' q_1 + \gamma'' r_1)\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon; \end{aligned}\right\} (36)$$

mais p_1, q_1, r_1 étant en vertu des formules (32) les composantes de la rotation qui a lieu autour des axes mobiles X, Y, Z; et ce mouvement se faisant comme si ces axes fussent fixes, de sorte que toutes les proprietés connues du mouvement d'un corps autour d'un point fixe subsistent également dans ce cas-ci, on aura, en désignant la vitesse angulaire et l'axe de cette rotation par ϱ:

$$p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = \varrho^2,$$

et les cosinus des angles que l'axe ϱ fait avec les axes principaux ξ, η, ζ seront

$$\mathrm{Cos}(\varrho.\xi)=\frac{p_1}{\varrho},\quad \mathrm{Cos}(\varrho.\eta)=\frac{q_1}{\varrho},\quad \mathrm{Cos}(\varrho.\zeta)=\frac{r_1}{\varrho}.$$

de sorte que

(37)

$$\frac{\alpha p_1+\beta q_1+\gamma r_1}{\varrho}=\mathrm{Cos}(\xi.X)\mathrm{Cos}(\xi.\varrho)+\mathrm{Cos}(\eta.X)\mathrm{Cos}(\eta.\varrho)+\ldots=\mathrm{Cos}(\varrho.X),$$

$$\frac{\alpha' p_1+\beta' q_1+\gamma' r_1}{\varrho}=\ldots.=\mathrm{Cos}(\varrho.Y),\quad \frac{\alpha'' p_1+\beta'' q_1+\gamma'' r_1}{\varrho}=\ldots=\mathrm{Cos}(\varrho.Z),$$

ce qui change l'équation (36) en

$$m^2=\varrho^2+n^2-2\varrho n\{\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}(\varrho.X)+\mathrm{Cos}\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}(\varrho.Z)\};$$

mais on a de plus

$$\begin{aligned}&\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}(\varrho.X)+\mathrm{Cos}\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}(\varrho.Z)\\ &=\mathrm{Cos}(z.X)\,\mathrm{Cos}(\varrho.X)+\mathrm{Cos}(z.Y)\,\mathrm{Cos}(\varrho.Y)+\mathrm{Cos}(z.Z)\,\mathrm{Cos}(\varrho.Z)\\ &=\mathrm{Cos}(z.\varrho),\end{aligned}$$

donc

$$m^2=\varrho^2+n^2-2\varrho n\,\mathrm{Cos}(\varrho.Z),$$

ce qui montre en effét que la rotation relative m est la resultante d'une rotation négative, $-n$, autour de l'axe des z, et d'une rotation ϱ, par rapport aux axes mobiles des X, Y, Z. Si donc l'on prend sur le prolongement de l'axe des z, du côté négatif, une longueur n; sur l'axe de la rotation ϱ une longueur ϱ, et que l'on construit le parallélogramme dont ces deux longueurs sont les côtés, la diagonale D de ce parallélogramme sera la grandeur de la rotation relative: car on aura $D=m$. Pour montrer que cette diagonale coïncidera en même temps avec l'axe de la rotation m, nous remarquons que les projections de cette diagonale sur les trois axes des X, Y, Z sont

$$\varrho\,\mathrm{Cos}(\varrho.X)-n\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon,\quad \varrho\,\mathrm{Cos}(\varrho.Y)-0,\quad \varrho\,\mathrm{Cos}(\varrho.Z)-n\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon;$$

ce sont les sommes des projections correspondantes des côtés du parallélogramme; par conséquent les cosinus des angles que la diagonale fait avec ces axes, seront

$$\mathrm{Cos}(D.X)=\frac{\varrho\,\mathrm{Cos}(\varrho.X)-n\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon}{D},\quad \mathrm{Cos}(D.Y)=\frac{\varrho\,\mathrm{Cos}(\varrho.Y)}{D},$$

$$\mathrm{Cos}(D.Z)=\frac{\varrho\,\mathrm{Cos}(\varrho.Z)-n\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon}{D};$$

mais en multipliant les équations (35) par α, β, γ, puis par α', β', γ', enfin par $\alpha'', \beta'', \gamma''$, et en prenant la somme des produits, on aura, ayant égard aux relations des cosinus,

$$\left.\begin{aligned} \alpha p_1 + \beta q_1 + \gamma r_1 - n\mathrm{Sin}\varepsilon &= m(\alpha\mathrm{Cos}\lambda + \beta\mathrm{Cos}\mu + \gamma\mathrm{Cos}\nu), \\ \alpha' p_1 + \beta' q_1 + \gamma' r_1 &= m(\alpha'\mathrm{Cos}\lambda + \beta'\mathrm{Cos}\mu + \gamma'\mathrm{Cos}\nu), \\ \alpha'' p_1 + \beta'' q_1 + \gamma'' r_1 - n\mathrm{Cos}\varepsilon &= m(\alpha''\mathrm{Cos}\lambda + \beta''\mathrm{Cos}\mu + \gamma''\mathrm{Cos}\nu), \end{aligned}\right\} (38)$$

où les seconds facteurs des derniers membres sont les cosinus des angles que l'axe de la rotation m fait avec les axes X, Y, Z. On aura donc en vertu de (37)

$$\begin{aligned} \varrho\,\mathrm{Cos}(\varrho.X) - n\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon &= m\,\mathrm{Cos}(m.X), \\ \varrho\,\mathrm{Cos}(\varrho.Y) &= m\,\mathrm{Cos}(m.Y), \\ \varrho\,\mathrm{Cos}(\varrho.Z) - n\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon &= m\,\mathrm{Cos}(m.Z); \end{aligned}$$

et ainsi, à cause de $m = D$,

$$\mathrm{Cos}(D.X) = \mathrm{Cos}(m.X), \quad \mathrm{Cos}(D.Y) = \mathrm{Cos}(m.Y),$$
$$\mathrm{Cos}(D.Z) = \mathrm{Cos}(m.Z).$$

Il suit encore de ce qui précède que la vitesse relative m donne une composante constante par rapport à l'axe des Z, qui fait un angle constant, $\pi - \varepsilon$, avec l'axe de la rotation m.

En effet on aura par ce que la projection de la diagonale d'un parallélogramme est égal à la somme des projections de ses deux côtés:

$$m\,\mathrm{Cos}(m.Z) = \varrho\,\mathrm{Cos}(\varrho.Z) + n\,\mathrm{Cos}(n.Z),$$

mais d'après une proprieté connue du mouvement autour d'un point fixe $\varrho\,\mathrm{Cos}(\varrho.Z)$ doit être constant et égal à $\frac{h}{k}$, donc

$$m\,\mathrm{Cos}(m.Z) = \frac{h}{k} - n\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon,$$

ce qu'on trouvera aussi en mettant dans le premier membre de la dernière équation (38) pour $\alpha'', \beta'', \gamma''$ leurs valeurs en p_1, q_1, r_1 données par (30), savoir

$$\alpha'' = \frac{Ap_1}{k}, \quad \beta'' = \frac{Bq_1}{k}, \quad \gamma'' = \frac{Cr_1}{k},$$

ce qui donne

$$\frac{Ap_1^2 + Bq_1^2 + Cr_1^2}{k} - n\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon = m\,\mathrm{Cos}(m.Z).$$

Ainsi nous avons trouvé que l'axe de la rotation relative m, l'axe de la rotation ϱ et l'axe des z (ou la ligne qui est parallèle à l'axe de la terre) sont toujours dans un même plan, et de plus que m est la résultante de ϱ et de la rotation $-n$ autour de cet axe des z; ce qui suffira avec les considérations précédentes à déterminer complètement le mouvement relatif du corps, tel qu'il doit être observé à la surface de la terre, à cause du mouvement diurne, et en faisant abstraction des causes étrangères, comme la résistance de l'air, le frottement etc.

Supposons premièrement que le centre de la rotation soit un point absolument fixe dans l'espace. Le mouvement initial, communiqué d'une maniere quelconque, sera une rotation autour d'un axe passant par le point fixe. Lorsque ce point est le centre de gravité, ou qu'il n'y a pas de forces extérieures qui agissent sur le corps, comme c'est ici le cas, le mouvement que prendra le corps dans la suite du temps pourra être défini de la manière suivante, d'après la théorie de la rotation de M. Poinsot:

Autour du point fixe placez l'ellipsoïde central du corps dans sa position initiale; par l'extrémité du rayon vecteur, autour du quel la rotation initiale à lieu, menez un plan tangent à l'ellipsoïde, et supposez que ce plan reste invariablement fixé dans l'espace. Alors l'ellipsoïde, en quittant sa position initiale, roulera, sans glisser, sur ce plan invariable, avec une vitesse angulaire, autour du rayon vecteur du point de contact, proportionnelle à la longueur même de ce rayon.

Si la vitesse de rotation est représentée par certaine longueur variable, le rapport de cette longueur au rayon vecteur du point de contact sera constant, et égal à la valeur initiale de ce rapport.

Supposons maintenant que le centre de la rotation soit seulement un point fixe par rapport à la surface de la terre, de sorte que la rotation autour de ce point est un mouvement relatif, et soit le mouvement relatif initial une rotation dont la vitesse angulaire et la direction de l'axe sont connues, ce qui pourra être le cas lorsque le mouvement n'est pas produit par le choc d'une masse étrangère.

Alors d'après ce qui précède le mouvement du corps peut se définir de la manière suivante:

Autour du centre de rotation placez l'ellipsoïde central dans sa position initiale, et par ce centre menez une ligne parallèle à l'axe de la terre. Ayant pris deux longueurs dans le rapport de la vitesse angulaire de la terre à celle de la rotation initiale, portezles, à partir du centre de rotation, la première sur cette ligne, dans un sens tel qu'elle soit l'axe d'une rotation de même sens que celle de la terre, la seconde sur l'axe de la rotation relative initiale; ensuite achevez le parallélogramme dont ces deux lignes sont les côtés.

Par le point de rencontre de la diagonale de ce parallélogramme et de la surface de l'ellipsoïde, menez un plan tangent à l'ellipsoïde, et du centre de la rotation abaissez une perpendiculaire sur ce plan.

Supposez que le plan tangent soit invariablement fixé au plan qui passe par cette perpendiculaire et la ligne qui est parallèle à l'axe de la terre; alors l'ellipsoïde roulera, sans glisser, sur le plan tangent, avec une vitesse angulaire autour du rayon vecteur du point de contact, proportionnelle même à la longueur de ce rayon, tandis qu'en même temps le second plan, qui entraine le plan tangent, tourne autour de la ligne parallèle à l'axe de la terre, en sens contraire de la rotation diurne, et avec la vitesse angulaire même de cette rotation.

Le rapport de la longueur, qui représentera la vitesse angulaire de l'ellipsoïde, autour du rayon vecteur du point de contact, à la longueur même de ce rayon est constant, et sa valeur est déterminée au commencement du mouvement par le rapport de la diagonale du parallélogramme au rayon vecteur avec la quelle elle coïncide.

Ce resultat pourra servir à expliquer tous les phénomènes variés que le mouvement du gyroscope présenterait dans différents cas. Pour en faire l'application il faudra avoir égard à la construction des appareils particuliers; il donne lieu aux remarques suivantes.

D'abord on voit que le mouvement absolu est indépendant de la latitude du lieu de l'expérience, c'est-a-dire, le déplacement de l'axe de rotation est indépendant de la position de l'horizon et de la direction de la verticale des lieux différents d'observation, seulement le mouvement relatif, rapporté à l'horizon, dépend de l'angle que la ligne parallèle à l'axe terrestre fait avec ce plan. Aussi l'angle de la latitude β est disparu des équations du mouvement: et, rapporté à un plan parallèle à l'équateur, ce mouvement sera le même dans tous les lieux de la terre, comme le mouvement de l'ombre sur un cadran solaire équatorial. On en voit aisément la raison dans ce que les forces extérieures sont détruites lorsque le centre de rotation est le centre de gravité, de sorte que le corps est partout dans les mêmes circonstances par rapport au centre de ces forces; il en est autrement dans l'expérience du pendule, où la force qui agit sur le mobile change de direction avec le lieu du point de suspension.

On penserait qu'il y eût une exception aux points des poles, où la vitesse angulaire du mouvement diurne disparait avec le rayon du parallèle, et que là le mouvement fut simplement géometrique; mais c'est seulement dans le prolongement de l'axe terrestre que la vitesse angulaire est nulle, tandis que le corps ayant une certaine étendue chacun de ses points aura aussi la même vitesse angulaire que sous les autres points de la terre.

Si donc l'on connoit le mouvement du corps sous l'équateur, on poura en déduïre par des seules considérations géométriques son mouvement relatif pour toute autre latitude.

Ensuite on voit que pour expliquer complètement les phénomènes dans le gyroscope, abstraction faite du milieu ambiant, il faudrait avoir égard à la grandeur et au sens de la rotation relative initiale, qui doit être composée avec celle de la terre pour avoir la rotation initiale de l'ellipsoïde central, d'après le résultat trouvé. La direction de l'axe de cette dernière rotation et sa grandeur changera avec le sens de la rotation que l'on imprime au corps; elles seront la diagonale qui joint les sommêts des angles obtus ou ceux des angles aigús du parallélogramme, suivant que la rotation a été imprimée dans un sens, ou dans le sens opposé. Mais dans le gyroscope la vitesse angulaire de la terre disparait en comparaison de celle que l'on doit imprimer au corps pour que le mouvement continue pendant quelque temps. Alors le résultat trouvé donne immédiatement le déplacement de l'axe du tore tournant, tel que M. Foucault l'a fait connaître. En effet un solide de revolution ayant reçu un mouvement de rotation autour de son axe de figure, cet axe, qui contient le centre de gravité, ne changera pas de position dans l'ellipsoïde, qui elle méme ne se déplacera pas par rapport au plan tangent; et, en faisant tourner le plan, qui passe par cet axe et la ligne parallèle à l'axe terrestre, autour de cette dernière ligne, avec la vitesse angulaire même de la terre et en sens opposé de son mouvement diurne, l'axe du tore doit se mouvoir comme une lunette parallactique, qui serait constamment dirigée sur la méme étoile fixe. Cet axe décrira un cône circulaire droit autour de la ligne parallèle à l'axe de la terre, et dont la moitié de l'angle au sommêt est égal à l'angle que l'axe fait initialement avec cette ligne. Si alors l'axe est horizontal et dirigé vers le nord, il décrit le cône droit semblable au cône tangent au parallèle terrestre; ce cône devient un plan, si initialement l'axe horizontal est dirigé vers l'est ou l'ouest, parce qu'alors le demi-angle au sommet est un angle droit. (Comptes rendus etc. Tom. XXXV. p. 421.)

Il suit encore du résultat trouvé que si l'on n'inprime aucune vitesse à un corps dont le centre de gravité est le seul point qui reste fixe par rapport à la terre, ce corps ne resterait en repos relatif que lorsque l'un de ses axes principaux d'inertie coïncide avec la ligne parallèle à l'axe terrestre. Car alors cet axe, autour du quel il faut donner à l'ellipsoïde une rotation de même sens que celle de la terre, et avec la même vitesse angulaire, continuera à coïncider avec cette ligne parallèle; et ainsi la rotation de l'ellipsoïde sera détruite par le mouvement angulaire égal que l'on doit communiquer en sens opposé au système entier, autour de la ligne qui est ici en même temps axe de rotation.

Mais si aucun des axes principaux ne coïncide avec cette ligne parallèle, le plan tangent ne lui est pas perpendiculaire; l'axe de rotation changera de position dans l'ellipsoïde et s'écartera de cette ligne, de sorte que le mouvement angulaire en sens opposé autour d'elle ne pourra pas détruire la rotation de l'ellipsoïde.

Note. Les équations (22) avaient été obtenues d'abord d'une autre manière en suivant la marche de La Grange.

T étant fonction de φ, θ et ψ nous pouvons y substituer d'autres variables P, Q, R, liées aux précédentes par les équations

$$\left.\begin{aligned} \delta P &= \text{Sin}\,\varphi\,\text{Sin}\,\theta\delta\psi + \text{Cos}\,\varphi\delta\theta,\\ \delta Q &= \text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin}\,\theta\delta\psi - \text{Sin}\,\varphi\delta\theta,\\ \delta R &= \text{Cos}\,\theta\delta\psi + \delta\varphi; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad \text{(a)}$$

ce qui donnera

$$\text{Sin}\,\theta\delta\psi = \text{Sin}\,\varphi\delta P + \text{Cos}\,\varphi\delta Q,$$

$$\delta\theta = \text{Cos}\,\varphi\delta P - \text{Sin}\,\varphi\delta Q,$$

$$\text{Sin}\,\theta\delta\varphi = \text{Sin}\,\theta\delta R - \text{Sin}\,\varphi\,\text{Cos}\,\theta\delta P - \text{Cos}\,\varphi\,\text{Cos}\,\theta\delta Q;$$

les variations $\delta\varphi$, $\delta\theta$, $\delta\psi$ étant indépendantes entre elles, il en sera de même de δP, δQ, δR, et pour avoir les différentielles de P, Q, R, par rapport au temps, il ne faudra que changer $\delta\varphi$, $\delta\theta$ et $\delta\psi$ dans les différentielles

$$\frac{d\varphi}{dt}, \; \frac{d\theta}{dt} \text{ et } \frac{d\psi}{dt};$$

ainsi on aura:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dP}{dt}&=\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Sin}\theta\frac{d\psi}{dt}+\operatorname{Cos}\varphi\frac{d\theta}{dt}=p,\\ \frac{dQ}{dt}&=\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}\theta\frac{d\psi}{dt}-\operatorname{Sin}\varphi\frac{d\theta}{dt}=q,\\ \frac{dR}{dt}&=\operatorname{Cos}\theta\frac{d\psi}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}=r,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(b)$$

et par suite

$$\delta\frac{dP}{dt}=\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}\theta\delta\varphi\frac{d\psi}{dt}+\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\theta\delta\theta\frac{d\psi}{dt}-\operatorname{Sin}\varphi\delta\varphi\frac{d\theta}{dt}$$
$$+\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Sin}\theta.\delta\frac{d\psi}{dt}+\operatorname{Cos}\varphi\delta\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{d.\delta P}{dt}=\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}\theta\delta\psi\frac{d\varphi}{dt}+\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\theta\delta\psi\frac{d\theta}{dt}-\operatorname{Sin}\varphi\delta\theta\frac{d\varphi}{dt}$$
$$+\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Sin}\theta\frac{d.\delta\psi}{dt}+\operatorname{Cos}\varphi\frac{d.\delta\theta}{dt};$$

mais ψ et θ étant des variables finies et indépendantes, on aura

$$\delta.\frac{d\psi}{dt}=d.\frac{\delta\psi}{dt},\quad \delta.\frac{d\theta}{dt}=\frac{d.\delta\theta}{dt};$$

par conséquent

$$\delta.\frac{dP}{dt}-\frac{d.\delta P}{dt}=\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}\theta(\delta\varphi.\frac{d\psi}{dt}-\delta\psi.\frac{d\varphi}{dt})$$
$$+\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\theta(\delta\theta\frac{d\psi}{dt}-\delta\psi\frac{d\theta}{dt})-\operatorname{Sin}\varphi(\delta\varphi\frac{d\theta}{dt}-\delta\theta\frac{d\varphi}{dt}),$$

ce qui se réduit, par les équations (a) et (b), à

$$\delta\frac{dP}{dt}-\frac{d.\delta P}{dt}=\frac{dQ}{dt}\delta R-\frac{dR}{dt}\delta Q,$$

de sorte que l'on a

$$\delta\frac{dP}{dt}=\frac{d.\delta P}{dt}+\frac{dQ}{dt}\delta R-\frac{dR}{dt}\delta Q,$$

et pareillement

$$\delta\frac{dQ}{dt}=\frac{d.\delta Q}{dt}+\frac{dR}{dt}\delta P-\frac{dP}{dt}\delta R,$$
$$\delta\frac{dR}{dt}=\frac{d.\delta R}{dt}+\frac{dP}{dt}\delta Q-\frac{dQ}{dt}\delta P;$$

de plus en posant

$$\pi = n(\lambda a + \mu a' + \nu a''),$$
$$\chi = n(\lambda b + \mu b' + \nu b''),$$
$$\varrho = n(\lambda c + \mu c' + \nu c''),$$

on a

$$a\pi + b\chi + c\varrho = n\lambda,$$
$$a'\pi + b'\chi + c'\varrho = n\mu,$$
$$a''\pi + b''\chi + c''\varrho = n\nu,$$

et

$$a\delta\pi + b\delta\chi + c\delta\varrho + \pi\delta a + \chi\delta b + \varrho\delta c = 0,$$
$$a'\delta\pi + b'\delta\chi + c'\delta\varrho + \pi\delta a' + \chi\delta b' + \varrho\delta c' = 0,$$
$$a''\delta\pi + b''\delta\chi + c''\delta\varrho + \pi\delta a'' + \chi\delta b'' + \varrho\delta c'' = 0;$$

par conséquent, en multipliant les dernières équations par a, a', a'', puis par b, b', b'' et par c, c', c'', et en prenant la somme des produits:

$$\delta\pi + \chi(a\delta b + a'\delta b' + a''\delta b'') + \varrho(a\delta c + a'\delta c' + a''\delta c'') = 0,$$
$$\delta\chi + \pi(b\delta a + b'\delta a' + b''\delta a'') + \varrho(b\delta c + b'\delta c' + b''\delta c'') = 0,$$
$$\delta\varrho + \pi(c\delta a + c'\delta a' + c''\delta a'') + \chi(c\delta b + c'\delta b' + c''\delta b'') = 0;$$

ou, remarquant les relations (8), (9) et (b):

$$\delta\pi = \chi\delta R - \varrho\delta Q, \quad \delta\chi = \varrho\delta P - \pi\delta R, \quad \delta\varrho = \pi\delta Q - \chi\delta P;$$

et, comme on a (18)

$$\delta p_1 = \delta(p - \pi) = \delta\frac{dP}{dt} - \delta\pi,$$
$$\delta q_1 = \delta(q - \chi) = \delta\frac{dQ}{dt} - \delta\chi,$$
$$\delta r_1 = \delta(r - \varrho) = \delta\frac{dR}{dt} - \delta\varrho,$$

on trouvera pour la variation de T, (savoir

$$\delta T = \frac{dT}{dp_1}\delta p_1 + \frac{dT}{dq_1}\delta q_1 + \frac{dT}{dr_1}\delta r_1),$$

en y substituant les valeurs précédentes:

$$\delta T = \frac{dT}{dp_1}\left\{\frac{d.\delta P}{dt} + q_1\delta R - r_1\delta Q\right\} + \frac{dT}{dq_1}\left\{\frac{d.\delta Q}{dt} + r_1\delta P - p_1\delta R\right\}$$
$$+ \frac{dT}{dr_1}\left\{\frac{d.\delta R}{dt} + p_1\delta Q - q_1\delta P\right\};$$

ce qui conduira aux équations (22). Voyez Lagrange, Mécanique analytique. 2. édit. 1811. Sec. Part. Sect. IX. n°. 22.

XIX.

Ueber den Gebrauch empfindlicher kleiner Brückenwaagen für physikalische Zwecke.

Von
Herrn Professor *Theodor Schoenemann*
am Gymnasium zu Brandenburg a. d. H.

§. 1.

Den Entwickelungen der Dynamik schwerer Körper liegt bekanntlich die Hypothese zu Grunde: dass eine Druckkraft, die auf einen freien materiellen Punkt wirkt, eine Beschleunigung im Sinne der Druckkraft hervorruft, die sich zu der durch die Schwerkraft hervorgerufenen Beschleunigung verhält, wie die Druckkraft zu der Schwere des materiellen Punktes. Da nun aber der Druck gleich dem Gegendruck ist, so kann man auch sagen: Wird einem Körper eine gewisse Beschleunigung eingeprägt, so entwickelt er eine Druckkraft, welche sich zu seiner Schwere verhält, wie die ihm eingeprägte Beschleunigung zu der Beschleunigung, die ihm die Schwere, wenn er in freiem Zustande wäre, einprägen würde.

Es giebt bis jetzt noch kein Mittel, momentan wirkende Druckkräfte zu messen, und es ist schon sehr schwierig, für veränderliche Druckkräfte die Grenzen anzugeben, innerhalb welcher sie sich bewegen. Nur constante Druckkräfte, die längere Zeit wirken, lassen sich mit Schärfe durch die Waage messen. Hierin liegt wahrscheinlich der Grund, dass man die Richtigkeit jener Hypothese nicht direct durch das Experiment bewies, sondern sich damit begnügte, auf die Uebereinstimmung einer Anzahl von Folgerungen aus derselben auf dem Gebiete der Mechanik und Astronomie mit der Wirklichkeit hinzuweisen. (Vergl. Euler, Theorie der Bewegung fester oder starrer Körper, Kap. III. und IV., herausgegeben von Wolfers.)

Obgleich nun unbezweifelt in wissenschaftlicher Beziehung in jeder einzelnen Erscheinung, welche mit Hilfe der Mathematik aus jener Hypothese abgeleitet und durch die Erfahrung bestätigt wird, eine wesentliche Stütze derselben liegt, so machen dennoch die Zwecke des ersten Unterrichts in der Physik möglichst directe Experimente höchst wünschenswerth.

Als ich damit beschäftigt war, zu einer Reihe von Erscheinungen, welche sich auf jenen Grundsatz beziehen, kleine empfindliche Brückenwaagen meiner Construction in Anwendung zu bringen, veröffentlichte bereits Herr Professor Poggendorff einige ähnliche Experimente, die er mit Waagebalken eigenthümlicher Construction erzielt hatte. (Vergl. Monatsberichte der Berliner Academie, November 1853.)

Da ich indessen der Auffassung des Herrn Professor Poggendorff, welche mit den Principien der Mechanik nicht im Einklange steht, keineswegs beipflichten kann, auch meine Betrachtungen über blos pädagogische Zwecke hinausgehen, so will ich in Folgendem die vorzüglichsten derselben mittheilen, insoferne sie sich auf feste Körper beziehen. Vielleicht werde ich durch dieselben darauf hinwirken, dass kleine empfindliche Brückenwaagen zu den unentbehrlichen Instrumenten eines physikalischen Cabinets gerechnet werden, und dass Dunkelheiten aufgehellet werden, deren sich noch viele beim Widerstande fester und flüssiger Körper gegen Körper in Bewegung finden.

Die erste Anregung zu den vorliegenden Betrachtungen erhielt ich durch das Lesen des schönen Kapitels in Poncelet's „Introduction à la mécanique industrielle, physique et experimentale, de la communication du mouvement par le choc direct des corps libres et limités en tous sens“, und ich gehe von den Betrachtungen aus, welche dieser grosse Gelehrte auf eine so lichtvolle Weise auseinander gesetzt hat.

§. 2.

Da sich die Punkte eines Brückenkörpers (der Brücke einer Brückenwaage) auf vorgeschriebenen Bahnen bewegen, welche unter sich parallele Richtung haben, so folgt, dass eine Kraft, die auf einen Punkt eines Brückenkörpers senkrecht zu dessen

Bahn wirkt, auf das Resultat der Wägung keinen Einfluss haben kann, wenn sie nicht auf die Verbindung von Hebeln, Ketten u. s. w., durch welche die Brückenwaage Parallelbewegung erhält, störend einwirkt. Da bei den Brückenwaagen meiner Construction jene Verbindungen selbst durch bedeutende seitliche Kräfte nicht gestört werden können, so kann man sagen, dass von jeder Druckkraft, die auf den Brückenkörper wirkt, nur die Projection derselben auf eine Linie, die durch den Brückenkörper selbst bestimmt ist, zur Wirksamkeit komme. Diese Linie wird bei regelmässiger Aufstellung der Waage entweder physisch senkrecht sein oder sehr nahe mit dieser Richtung zusammen fallen.

§. 3.

Versuche über die Kraft der Trägheit und über den Fall der Körper.

(Siehe Taf. X. Fig. 1.)

Auf zwei mit Fussgestellen versehenen Säulen bringe man cylindrische, von oben nach unten gehende Löcher von etwa 4" Tiefe an; in diese Löcher passen die Schafte zweier gabelförmig ausspringenden Holzstücke, welche innerhalb ihrer Gabeln zwei leicht bewegliche Rollen tragen. Die eine dieser Säulen nebst Rolle befestige man durch eine Schraubzwinge auf dem Brückenkörper, die andere auf der horizontalen Tischplatte, auf der die Waage steht, in einer Entfernung von etwa 3′. Beide Säulen sind ungleich hoch und werden so aufgestellt, dass die höchsten Punkte der beiden von ihnen getragenen Rollen in einer Horizontalebene liegen und der mittlere Durchschnitt der Rinne, die sich auf ihrem Umfange befindet, für beide in dieselbe Vertikalebene falle. Nun lege man über beide Rollen eine recht biegsame seidene Schnur, an deren Enden man zwei gleiche Gewichte befestigt. Jetzt tarire man die Waage, welche unter der Einwirkung der Schnur ganz frei spielt. Nennt man nun die Rolle, welche auf der Waage steht, A, das daran hängende Gewicht α, die Rolle auf dem Tische B, und das daran hängende Gewicht β, so ist $\alpha = \beta$. Hierbei ist die Brücke ausser der Säule und der Rolle A belastet mit dem Gewichte α, wenn das Gewicht der Schnur ausser Acht gelassen wird. Die Spannung der horizontalen Schnurstrecke wirkt nicht auf die Waage, weil die Projection dieser Kraft auf eine physisch senkrechte Linie verschwindet. Befestigt man nun das Schnurende, an dem α hängt, am Brückenkörper, so kann man β beliebig vergrössern, ohne dass sich eine Einwirkung auf die Zunge der Waage zeigt. Befestigt man α nicht, vermehrt aber β um ein kleines Gewicht $\varDelta$, so dass $\beta+\varDelta$ sinkt und α steigt, so steigt zugleich die Zunge der Waage, als wenn α selbst vergrössert worden wäre, und oscillirt bei längerem Falle um einen gewissen Gleichgewichtspunkt. Legt man zu jedem Gewichte α und β das Gewicht $\varDelta$ hinzu, tarirt die Waage und nimmt dann das Gewicht $\varDelta$ von $\beta+\varDelta$ fort, so fällt das Gewicht $\alpha+\varDelta$, und zu gleicher Zeit sinkt die Zunge der Waage.

Nennt man t das auf die Peripherie des Schnurlaufs reducirte träge Gewicht der Rolle A, und gleicher Weise t_1 das auf seine Peripherie reducirte träge Gewicht der Rolle B, ferner die auf dieselben Peripherien reducirten Axenreibungen f und f_1, so ist die Beschleunigung im ersten Falle $\frac{g\varDelta}{\alpha+\beta+\varDelta+t+t_1+f+f_1}$ oder $\frac{g\varDelta}{n}$, wenn $\alpha+\beta+\varDelta+t+t_1+f+f_1=n$ gesetzt wird. Der Druck, der von α vermöge seiner Trägheit auf die Schnur ausgeübt wird, ist $\frac{\alpha\varDelta}{n}$. Der Druck, welcher von β vermöge der Trägheit auf das Schnurende ausgeübt wird, welches von β zu B geht, ist negativ und $=-\frac{(\beta+\varDelta)\varDelta}{n}$. Die beiden äussersten Schnurenden sind also während der Bewegung nicht gleich stark gespannt. Das zuerst genannte ist gespannt mit $\alpha+\frac{\alpha\varDelta}{n}$, das letztere mit $\beta+\varDelta-\frac{(\beta+\varDelta)\varDelta}{n}$. Der mittlere Theil der Schnur ist gespannt mit $\alpha+\frac{\alpha\varDelta}{n}+\frac{(t+f)\varDelta}{n}$, da die Trägheit der Rolle A und die Axenreibung die Spannung des erstgenannten Schnurendes noch um das letzte Glied des Ausdruckes vermehrt, oder mit $\beta+\varDelta-\frac{(\beta+\varDelta)\varDelta}{n}-\frac{(t_1+f_1)\varDelta}{n}$, da die Spannung des anderen Schnurendes durch die Trägheit der Rolle B und die betreffende Axenreibung um das letzte Glied des angeführten Ausdruckes verkleinert wird. Setzt man $\alpha=\beta$, so sind in der That die beiden angegebenen Ausdrücke für das mittlere Schnurende gleich. Dass diese drei Schnurstrecken ungleich gespannt sind, ist natürlich, da sie einer Reibung auf den Rollen ausgesetzt sind, ohne welche sie auf denselben gleiten würden.

Sobald die Schnur sich in Bewegung setzt, muss zu dem Druck, der von der Belastung der Brücke ausgeht, noch der Druck $\frac{\alpha\varDelta}{n}$, der von der Trägheit von α entspringt, hinzukommen. Merkt man sich den Punkt der zur Zunge gehörigen Scala, um den dieselbe beim Fall oscillirt, und mittelt man das Gewicht γ aus, das man ohne Einwirkung von Δ auf die Brücke legen muss, um denselben Ausschlag zu erhalten, so ist $\frac{\alpha\Delta}{n}=\gamma$. Der von β in der Zeit τ beschriebene Weg ist $g\frac{\Delta}{n}\cdot\frac{\tau^2}{2}=g.\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\tau^2}{2}$. Nennt man diesen Weg s, so erhält man $g=s\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{2}{\tau^2}$. Mit Hilfe eines Secunden-Pendels lässt sich g auf diese Weise vermöge der Waage ziemlich genau bestimmen.

Zusatz. Es ist bei der Rechnung nicht berücksichtigt worden, dass der mittlere Theil des Fadens seine horizontale Lage ändert. Nennt man die Spannung des mittleren Theiles des Fadens T, die Senkung der Brücke d, die Länge der mittleren Schnurstrecke L, so ist die Einwirkung von T auf die Waage $=-T.\frac{d}{L}$. Setzt man $T=\frac{1}{2}$ Pfund, $d=0{,}1''$, welches ein hinreichend grosser Werth für eine Decimalwaage ist, und $L=3'$, so ist $+T.\frac{d}{\alpha}=\frac{1}{22}$ Loth circa. Dennoch beträgt der in Ermittelung von γ begangene Fehler bedeutend weniger. Stellt nämlich γ den Widerstand der Trägheit vor, den α bei seiner Bewegung entwickelt, so hat man $\gamma=\frac{\alpha\Delta}{n}$ und $\frac{\alpha\Delta}{n}-T.\frac{d}{L}=\gamma_1-\alpha\frac{d}{L}$, wo γ_1 das Gewicht bedeutet, welches man, indem sich α und β an den Rollen das Gleichgewicht halten, auf die Brücke legen muss, um einen gleichen Ausschlag zu erhalten, wie durch den Widerstand der Trägheit von α. Man erhält mithin die Gleichung $\frac{\alpha\Delta}{n}=\gamma_1+(T-\alpha)\frac{d}{L}$. Die Spannung der mittleren Schnurstrecke oder T ist oben ermittelt und $=\alpha+\frac{\alpha\Delta}{n}+\frac{(t+f)\Delta}{n}$ gefunden worden. Hieraus folgt, dass $T-\alpha$ eine kleine Grösse, die bei gleicher Beschaffenheit beider Rollen sehr nahe $\frac{1}{2}\Delta$ liegt, sein müsse. Man kann also bei gleicher Beschaffenheit beider Rollen den Werth von $\frac{\alpha\Delta}{n}$, der oben gleich γ_1 gesetzt wurde, dadurch corrigiren, dass man noch zu γ_1 den Werth $\frac{1}{2}\Delta.\frac{d}{L}$ addirt. Beträgt, wie oben angenommen wurde, d den zehnten Theil eines Zolles und L drei Fuss, so ist $\frac{d}{L}=\frac{1}{360}$ und mithin $\gamma=\gamma_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{360}\cdot\Delta$.

Anmerkung I. Die in Anwendung gebrachten Gewichte dürfen nicht die Form haben, welche bei Fallmaschinen öfters gebräuchlich sind, weil bei den dünnen und breiten Platten der Widerstand der Luft zu wirksam ist, welches man sehr gut daraus erkennt, dass die Oscillationen der Waage grösser, anstatt kleiner werden. Mit gutem Erfolge habe ich lange cylinderförmige eiserne Gewichte von der Schwere eines halben Pfundes in Anwendung gebracht. Die Zulage Δ muss so klein sein, dass man mindestens eine vollständige Oscillation der Waage beobachten kann. Dies hängt zum Theil von dem Fallraum, zum Theil von der Schwingungszeit der Waage ab. Die Ermittelung des Gewichtes γ_1 geschieht leicht, wenn die Waage mit einer Scala versehen ist, durch Beobachtung der ersten Excursion bei vorsichtiger Zulage eines kleinen entsprechenden Gewichtes auf die Brücke. Sollte hierbei nicht der Theilstrich der Scala erreicht werden, der sich bei Zulage von Δ einfand, so kann man die Ausmittelung von γ_1 bedeutend abkürzen, indem man von dem Satze Gebrauch macht, dass sich die Ausschlagswinkel wie die Gewichte verhalten. (Vergl. Anmerkung III. zu §. 7.)

Anmerkung II. Es bleibt noch experimentell zu zeigen, dass ein Gewicht, welches sich geradlinig mit constanter Geschwindigkeit bewegt, keine neue Druckkraft entwickelt. Zu dem Ende befestige man an dem Fuss des Gestelles die Axe eines mehrfach gekrümmten Hebels, der sich vermöge seines Gewichtes mit hinreichendem Drucke an die Brückenwand anlehnt, um durch die entstehende Reibung die Waage zu verhindern zu schwingen. Durch einen Druck auf den anderen Arm des Hebels kann man die Waage plötzlich frei machen. Man tarire nun die Waage mit der Rolle A und dem Gewichte α wie oben, indem der erwähnte Hebel nicht anliegt. Dann lege man ein so kleines Uebergewicht zu β hinzu, dass wo möglich gerade die Widerstände der Reibung überwunden werden, dass also bei einer sehr kleinen Vergrösserung dieses Gewichtes sich schon Bewegung des Gewichtes α einstellt. Nun gebe man der Waage durch den erwähnten Hebel Unbeweglichkeit, und lege zu β noch ein Uebergewicht, welches zu beiden Seiten hinreichend hervorsteht. Nachdem dies Uebergewicht mit β eine kurze Strecke gefallen ist, lasse man es durch einen Ring oder durch eine sonstige, von der Fallmaschine bekannte Vorrichtung abheben, und mache durch einen Druck auf den andern Arm des Hebels die Waage frei, so wird man finden, dass sie, bei der jetzt eintretenden constanten Geschwindigkeit von α ihre Normalstellung nicht ändert, sondern dieselbe erst bei dem darauf erfolgenden unvermeidlichen Stosse aufgiebt.

§. 4.

Lehrsatz.

Erleidet ein körperliches System, welches sich auf der Brücke der Waage befindet, durch innere Kräfte irgend eine Veränderung, so ist der Druck, den es in jedem Augenblick auf die Waage ausübt, $P + \frac{P}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$, wo P die Schwere des Systems und $\frac{\partial v}{\partial t}$ die Beschleunigung des Schwerpunktes desselben in senkrechter und der Wirkung der Schwerkraft entgegengesetzter Richtung angiebt.

Beweis. Man kann sich die inneren Kräfte auf jeden materiellen Punkt durch elastische Federn wirkend denken. Denkt man die Elasticität fort, so ist die Schwere P. Durch die Bewegungen der Federn kommt hierzu noch folgende Summe von Trägheitskräften: $\frac{p_1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{p_2}{g} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial t} +$ etc., wo p_1, p_2 etc. die Schwere der einzelnen materiellen Punkte und $\frac{\partial v_1}{\partial t}$, $\frac{\partial v_2}{\partial t}$ etc. ihre Beschleunigungen im Sinne einer physisch senkrechten Linie angeben. Es ist aber bekanntlich $\frac{p_1}{g} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{p_2}{g} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial t} + \text{etc.} = \frac{P}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$.

Befindet sich ein Mensch auf der Brücke der Waage und erhebt sich, so kann dies zunächst nicht ohne eine Beschleunigung seines Schwerpunktes geschehen, deshalb hebt sich die Zunge und er scheint momentan schwerer zu werden. Senkt er sich, so findet zunächst das Umgekehrte statt. Die Oscillationen, in die eine Waage geräth, wenn ein Mensch in scheinbarer Ruhe auf der Brücke steht, rühren von den Veränderungen seines Schwerpunktes her, die mit dem Athmen verbunden sind.

§. 5.

Vom Stoss unelastischer Körper.

An einer auf der Brücke befestigten Säule bringe man in einer Entfernung von etwa einem Fusse von der Brücke einen hervortretenden Haken an, an dem ein Gewicht durch einen Faden aufgehängt wird. Man tarire die Waage und brenne den Faden ab. Ist nun der erfolgende Stoss mit der Brücke ein unelastischer, so geschieht Folgendes: Während der Zeit, dass der Körper fällt, sinkt die Zunge. Darauf tritt ein sehr kurzer Stillstand ein und die Brücke schwingt mit gewissen Excursionen, deren Grösse man vorzüglich im Anfange zu beobachten hat.

Gesetzt, das Gewicht des losgebrannten Körpers ist p und das auf einen Punkt der Brücke reducirte träge Gewicht des Waagebalkens, der Schale, der Brücke und der leitenden Theile, nachdem p abgebrannt ist, sei P, so werden die trägen Gewichte P und p mit derselben Kraft p, nachdem der Faden abgebrannt ist, nach entgegengesetzten Richtungen getrieben. Die Beschleunigungen von P und p werden sich also verhalten wie $\frac{1}{P}:\frac{1}{p}$, und man wird auch die erstere constant setzen können, wenn die in Betracht gezogene Zeit sehr klein und die Waage sehr empfindlich ist. Nach vollzogener Einwirkung des Stosses muss nach den bekannten Gesetzen des unelastischen Stosses augenblickliche Ruhe eintreten, und die Waage darauf mit den Excursionen schwanken, die ihrer Stellung im Augenblicke des vollendeten Stosses entsprechen.

Nimmt man p wie natürlich gegen P sehr klein an, so folgt, dass die Excursionen der Zunge bei verschiedenen Gewichten p und p_1 sich selbst wie p und p_1 verhalten müssen. Ebenso kann man über die verschiedenen Fallhöhen experimentiren, auch das Gewicht P aus dem Ergebniss eines Versuches leicht berechnen.

Anmerkung. Von besonderem Interesse ist es, dass man bei diesem Versuche sehr wohl die kurze Zeit des Zusammenstosses beobachten kann. Die Zunge bleibt eine merkliche Zeit stehen, oder macht vielmehr eine sehr kleine Bewegung, die sich sehr wesentlich von dem Uebergange einer Oscillation in die andere bei regelmässigem Gange unterscheidet. Besonders merklich kann man diese Zeit machen, wenn man den Körper auf weiche Gegenstände, etwa Wolle, fallen lässt; doch ist wohl zu beachten, dass diese Zeit auch merklich wird, wenn etwa ein Stück Eisen auf die eiserne Brücke einer Waage fällt. Um den Einfluss der Elasticität ganz zu beseitigen, muss man zuvor ein Brett auf die Brücke schrauben und ein pfeilförmig zugespitztes Eisen auf dasselbe fallen lassen, welches sich in das Holz einbohrt und haften bleibt. Es ist wahrscheinlich, dass man von hier aus durch Anwendung geeigneter Hilfsmittel über die zum Stoss verwendete Zeit und die allmälige Abnahme der Geschwindigkeit beim Stosse später noch mehr in's Klare kommen wird.

§. 6.

Vom Stoss elastischer Körper.

(Siehe Taf. X. Fig. II.)

1) Nimmt man an, der Körper p im vorigen Versuche sei vollkommen elastisch, so wird im Momente der grössten Zusammendrückung dasselbe wie beim unelastischen Stosse eintreten. Darauf wird p abspringen, und zwar bis zu der absoluten Höhe, von der es herunter gefallen. In diesem Augenblicke muss auch die Waage in Ruhe sein, denn offenbar ist in diesem Augenblick die von p vollzogene Arbeit $=0$, mithin die lebendige Kraft, welche dem ganzen System inne wohnt, auch $=0$. Dies kann aber nicht anders sein, als wenn die Waage ebenfalls zur Ruhe gekommen, oder als wenn die Geschwindigkeit aller einzelnen Theile des Systems gleich 0 ist. Von nun an müsste sich derselbe Act wiederholen, wenn die Widerstände der Reibung und der Luft nicht vorhanden wären.

2) Man befestige eine elastische Feder auf einem Gestell, so dass man dieselbe vermöge eines Fadens, den man am Gestell anbringen kann, aus ihrer Lage bringen kann. Darauf schraube man das Gestell auf die Brücke fest, tarire die Waage, brenne den Faden vorsichtig ab, so wird man, wenn die Feder sehr rasche Vibrationen macht, keine merkliche Einwirkung auf die Zunge wahrnehmen. Bei langsamen Vibrationen der Feder, die natürlich wesentlich in verticaler Richtung angenommen werden, wird sich die Zunge auch in Bewegung setzen, aber ihre Oscillationen mehr in Zeiten beschreiben, welche den Oscillationen der Feder, als denen der Waage entsprechen, bis dieselben allmählig in die Oscillationen der Waage übergehen.

Nennt man das auf die Brücke reducirte träge Gewicht der sämmtlichen schwingenden Theile mit Einschluss der Feder P, das Gewicht der Feder p und die Beschleunigung ihres Schwerpunktes b, und β die Beschleunigung der Brücke, so ist $\beta = g \cdot \frac{p \cdot \frac{b}{g}}{P}$ oder gleich der Beschleunigung beim freien Fall mal dem Drucke $p \cdot \frac{b}{g}$, der von der sich ausdehnenden Feder auf die Waage ausgeübt wird, dividirt durch das träge Gewicht P. Es ist mithin $\beta = \frac{bp}{P}$ oder $\frac{\beta}{b} = \frac{p}{P}$. Die Beschleunigungen der Feder und des trägen Gewichtes P verhalten sich also umgekehrt wie ihre Gewichte.

Bewegt sich die Brücke innerhalb sehr enger Grenzen, so kann man P constant setzen, zumal wenn die Waage sehr empfindlich ist, und es folgt alsdann, dass die Bewegungen der Brücke entgegengesetzt von denen der Feder seien, sich ganz ähnlich wie jene verhalten müssen, und durch eine Abschwächung, deren Maass $\frac{p}{P}$ ist, aus jenen hervorgehen. Dieser Fall wird im Allgemeinen eintreten, wenn das Product von $\frac{p}{P}$ mal dem Maass der Excursionen der Feder eine sehr kleine Grösse ist. Sollen daher ohne besondere Vorrichtung die Excursionen der Waage dem Auge sichtbar werden, so kann man das Gewicht der Feder dadurch vergrössern, dass man an dem Theile der Feder, der die grössten Excursionen macht, noch ein besonderes Gewicht befestigt.

Anmerkung. Mit vollständiger Klarheit würden die Erscheinungen hervortreten, wenn der Zustand des Gleichgewichtes der Waage ein vollkommen indifferenter wäre (d. h. ein solcher, der auch bei einer andern Stellung als der Normalstellung der Zunge indifferent wäre). In der That leiten die kurzen Schwingungen, in welche die Waage durch die Vibrationen der Feder versetzt wird, zugleich langsame Schwingungen ein, welche der Waage eigenthümlich sind, indem sich beide modificiren, und gehen ganz in die gewöhnlichen Schwingungen der Waage über, sobald die Schwingungen der Feder erloschen sind.

3) Brennt man die Feder wie bei No. 2. ab, lässt sie aber in dem Moment, in welchem sie ihre grösste Geschwindigkeit erreicht, gegen einen festen, mit dem Brückenkörper verbundenen Theil stossen, so dass die Bewegung plötzlich aufhört, so zeigen sich, wenn das Gewicht der Feder ein sehr geringes ist, nach vollendetem Stoss bei Waagen von grosser Empfindlichkeit fast keine Excursionen der Zunge. Bei geringer Empfindlichkeit kann man unter sonst gleichen Umständen bemerkliche Excursionen wahrnehmen.

Nach No. 2. ist die Beschleunigung des Brückenkörpers $b.\frac{p}{P}$. So lange man P als constant ansehen kann, ist mithin die Bewegung des Brückenkörpers eine ähnliche, wie die der Feder. Da nach erfolgtem Stosse im Moment der grössten Zusammendrückung die Geschwindigkeit der Feder $=0$ ist, so muss in demselben Moment die Geschwindigkeit des Brückenkörpers auch $=0$ sein, und die Zunge kann offenbar nur Excursionen machen, welche ihrer Entfernung von der Normallage zur Zeit der grössten Zusammendrückung entsprechen. Diese Entfernung ist mithin $\frac{p}{P}e$, wo e das Maass der Zusammendrückung der Feder angiebt.

Ist die Waage unempfindlich, so wächst P mit zunehmender Excursion, und die negative Summe der Beschleunigungen des Brückenkörpers ist insbesondere während der Zeit des Stosses wesentlich kleiner als die Summe der positiven Beschleunigungen, welche dem Stoss voranging. Deshalb ist in diesem Falle die Geschwindigkeit des Brückenkörpers noch nicht auf 0 reducirt, wenn der Stoss vollendet ist, und der Brückenkörper behält nach vollendetem Stosse noch eine merkliche Geschwindigkeit, welche der Bewegung der Feder entgegengesetzt ist.

4) Wenn beim zweiten Versuche nach dem Abbrennen des Fadens sich fast keine Bewegung der Waage zeigte, so kam dies daher, dass der Brücke in sehr kurz auf einander folgenden Zeiten entgegengesetzte Geschwindigkeiten eingeprägt wurden. Da die Sinne hiervon aber nichts wahrnehmen, so ist der Weg zu zeigen, wie man die erste dieser Geschwindigkeiten gewissermassen frei machen und beobachten kann.

Lässt man die Feder im Momente ihrer grössten-Geschwindigkeit gegen einen festen Körper stossen, der nicht mit dem Brückenkörper in Verbindung steht, so beobachtet man jederzeit an der Brücke eine der Feder entgegengesetzte Geschwindigkeit, und es ist zu zeigen, dass dieselbe jene eben besprochene frei gewordene Geschwindigkeit ist, wenn der angestossene Körper verhältnissmässig recht gross ist. Um dies Ziel zu erreichen, nehme man an, die Feder schlüge im Momente ihrer grössten Geschwindigkeit gegen ein frei schwebendes Gewicht von der Grösse Q. Dies Gewicht soll von der Schwerkraft nicht afficirt werden, sondern nur von der Trägheit. (Ein gleicharmiger Waagebalken, der sich im Zustande indifferenten Gleichgewichts befindet und an seinen beiden Endpunkten zwei Gewichte von der Grösse $\frac{1}{2}Q$ trägt, sonst aber nicht schwer ist, würde, wenn er mit dem einen Gewichte $\frac{1}{2}Q$ den Stoss aufnähme, jenes Gewicht Q ersetzen können, wenn sein Hypomochlium nicht von der Brücke getragen würde.) Im Augenblicke der grössten Zusammendrückung hat p die Geschwindigkeit $\frac{p \cdot v}{p+Q}$, wenn v die grösste Geschwindigkeit ist, die es durch die Elasticität erreicht. Indem nun p die Geschwindigkeit $v - \frac{pv}{p+Q} = \frac{Qv}{p+Q}$ verliert, verliert P die Geschwindigkeit $\frac{p}{P} \cdot \frac{Qv}{p+Q}$. Indem aber Q die Geschwindigkeit

$\frac{pv}{p+Q}$ gewinnt, gewinnt P die Geschwindigkeit $\frac{Q}{P}\cdot\frac{pv}{p+Q}$. Im Augenblick der grössten Zusammendrückung gewinnt also die Brücke im Ganzen durch den Stoss die Geschwindigkeit $\frac{Q}{P}\cdot\frac{pv}{p+Q}-\frac{p}{P}\cdot\frac{Qv}{p+Q}=0$. Setzt man nun Q unendlich gross, so kommt man auf den Fall unseres Experiments. Es verliert p seine ganze Geschwindigkeit durch den Anstoss, und die Brücke behält die Geschwindigkeit $\frac{pv}{P}$, die sie im Momente des Anstosses hatte, und die man durch die Zunge beobachten kann.

Wäre an den Berührungsflächen vollständige Elasticität wirksam, so würde nach erfolgtem Stosse p noch einmal die Geschwindigkeit $\frac{Qv}{p+Q}$ verlieren, und Q noch einmal die Geschwindigkeit $\frac{pv}{p+Q}$ gewinnen, wodurch für P so wenig wie im ersten Falle eine Zu- oder Abnahme an Geschwindigkeit entstehen würde. Die Feder würde sich dann bis auf das ursprüngliche Maass zusammenziehen und hierbei P die erlangte Geschwindigkeit $\frac{pv}{P}$ wieder verlieren, und für den Fall, dass Q unendlich wäre, würde sich nun der Vorgang wiederholen. Es ist natürlich vorausgesetzt worden, dass die Ausdehnung und der Stoss der Feder in einer Zeit vor sich gehen, die gegen die Schwingungszeit der Waage sehr klein ist.

Da die Erfahrung zeigt, dass nach erfolgtem Stoss keine wesentliche Zusammenziehung der Feder statt findet, wenn man die Berührungsfläche zweckmässig wählt, so wird der Brückenkörper seine Excursionen mit der Geschwindigkeit $\frac{p.v}{P}$ beginnen. Wie man dieselbe durch die Excursionen der Zunge der Waage messen kann, wird im folgenden Paragraphen gezeigt werden. Wie ich hoffe ist hierdurch ein beachtenswerthes Mittel gewonnen, den Werth von v selbst bei sehr grossen Geschwindigkeiten der Feder experimentell zu bestimmen.

§. 7.

Aufgabe. Die Schwingungszeit einer Brückenwaage zu entwickeln, wenn man nur die Schwere der Brücke, der Last, der Schale und des Gewichtes in Rechnung zieht.

Gesetzt, das Maass des Gewichtes nebst der Schale sei p, und das Maass der Last nebst der Brücke sei P, und der Schwingungsradius der Brücke R (d. h. jeder Punkt der Brücke beschreibe einen Bogen mit dem Radius R, wo dann alle diese Radien gleich gross und gleich gerichtet vorausgesetzt werden), der Schwingungsradius des Gewichtes sei ϱ, die Schwingungsebenen von R und ϱ seien vertical, und die Winkel, die ϱ und R mit dem Horizonte bilden, seien φ und ψ. Nimmt man nun an, $\delta\varphi$ sei ein kleiner Winkel, um den ϱ aus seiner Lage entfernt wird, indem R zugleich sich um den Winkel $\delta\psi$ aus seiner Lage entfernt, so wird das System, welches in stabilem Gleichgewicht vorausgesetzt wird, in seine ursprüngliche Lage zurückzukehren suchen.

Indem nun bei erfolgender Schwingung ϱ und R von ihrer Normallage nur noch um die Winkel $\varDelta\varphi$ und $\varDelta\psi$ entfernt sind, haben die Gewichte P und p eine mechanische Arbeit A ausgeführt, deren Maass durch folgende Formel angegeben wird:

$$\text{I)}\quad \left\{\begin{aligned} A &= \varrho p[\sin(\varphi+\varDelta\varphi)-\sin(\varphi+\delta\varphi)] \\ &+ RP[\sin(\psi+\varDelta\psi)-\sin(\psi+\delta\psi)]. \end{aligned}\right.$$

Um die Geschwindigkeit zu ermitteln, welche in diesem Augenblicke die einzelnen Theile des Systems haben, ist der Ausdruck von A weiter zu entwickeln, unter der Voraussetzung, dass P und p in ihrer Normallage das Gleichgewicht halten. Diese letzte Bedingung wird nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten angegeben durch die Gleichung:

$$\text{II)}\quad \varrho p\cos\varphi\partial\varphi + RP\cos\psi\partial\psi = 0.$$

Berücksichtigt man nur noch die zweiten Potenzen von $\delta\varphi$, $\varDelta\varphi$, $\delta\psi$ und $\varDelta\psi$, so ist $\sin(\varphi+\delta\varphi) = \sin\varphi(1-\frac{1}{2}\delta\varphi^2)+\cos\varphi\delta\varphi$, und mithin

$$\sin(\varphi+\varDelta\varphi)-\sin(\varphi+\delta\varphi) = \sin\varphi\left(\frac{\delta\varphi^2-\varDelta\varphi^2}{2}\right)+\cos\varphi(\varDelta\varphi-\delta\varphi),$$

$$\sin(\psi+\varDelta\psi)-\sin(\psi+\delta\psi) = \sin\psi\left(\frac{\delta\psi^2-\varDelta\psi^2}{2}\right)+\cos\psi(\varDelta\psi-\delta\psi).$$

Sieht man ψ als Function von φ an, so ist:

$$\varDelta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}.\varDelta\varphi+\frac{1}{2}.\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}.\varDelta\varphi^2,$$

und mithin:

$$\begin{aligned} &\sin(\psi+\varDelta\psi)-\sin(\psi+\delta\psi) \\ &= \sin\psi.\frac{\partial\psi^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\delta\varphi^2-\varDelta\varphi^2}{2}\right)+\cos\psi(\varDelta\varphi-\delta\varphi)\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+\cos\psi\left(\frac{\varDelta\varphi^2-\delta\varphi^2}{2}\right).\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}. \end{aligned}$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung II) erhält man nun aus Gleichung I) folgende Gleichung:

$$\text{III)}\quad \frac{A}{\varrho p}=\tfrac{1}{2}\cos\varphi\,(\delta\varphi^2-\varDelta\varphi^2)\left[\operatorname{tang}\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\operatorname{tang}\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi.\partial\psi}\right].$$

Setzt man den Factor $\operatorname{tang}\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}.\operatorname{tang}\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi.\partial\psi}=\frac{1}{E}$, so erhält man $\frac{A}{\varrho p}=\frac{1}{2E}[\delta\varphi^2-\varDelta\varphi^2]\cos\varphi$. Nach dem Princip der lebendigen Kräfte ist nun

$$A=\frac{1}{2g}p\varrho^2\left(\frac{\partial\varDelta\varphi}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2g}PR^2\left(\frac{\partial\varDelta\psi}{\partial t}\right)^2.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung II) und der vorigen Formeln erhält man hieraus:

$$\text{IV)}\qquad \frac{A}{\varrho p}=\frac{1}{2g}\left(\varrho-R.\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{\partial\varDelta\varphi}{\partial t}\right)^2,$$

und mithin durch Division der Gleichung III) durch IV), mit Berücksichtigung der Gleichung II):

$$\text{V)}\qquad \frac{\partial\varDelta\varphi}{\partial t}=\sqrt{\frac{(\delta\varphi^2-\varDelta\varphi^2)\cos\varphi.g}{\varrho\left(1+\frac{p}{P}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\psi}\right).E}},$$

woraus sich die Geschwindigkeiten der verschiedenen Theile des Systems ergeben. Aus der Gleichung V) folgt die Gleichung

$$\text{VI)}\qquad \partial t=\frac{\partial\varDelta\varphi}{\sqrt{\delta\varphi^2-\varDelta\varphi^2}}\cdot\sqrt{\frac{\varrho\left(1+\frac{p}{P}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\psi}\right)E}{g\cos\varphi}},$$

und hieraus durch Integration die ganze Schwingungszeit der Waage, die mit T bezeichnet werden soll:

$$\text{VII)}\qquad T=\pi.\sqrt{\frac{\varrho\left(1+\frac{p}{P}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\psi}\right).E}{g\cos\varphi}}.$$

Da bei den gebräuchlichen Waagen und gewöhnlicher Aufstellung φ und ψ entweder 0 sind oder sich doch sehr wenig von 0 unterscheiden, so kann man $\cos\varphi$ und $\cos\psi$ beide gleich 1 setzen. Ferner ist bei den verschiedenen Arten der gebräuchlichen Decimalwaagen $\varrho(1+\frac{p}{P})$ die Strecke des Waagebalkens, die sich zwischen den Schneiden befindet, welche die Last und das Gewicht tragen. Bezeichnet man diese Strecke durch L, so erhält man schliesslich:

$$\text{VIII)} \qquad T=\pi\sqrt{\frac{L}{g}.E}.$$

Es bleibt noch übrig, zu zeigen, wie E durch Versuche zu ermitteln ist. Differentiirt man die obige Formel II) oder $\varrho p\cos\varphi\partial\varphi + RP\cos\psi\partial\psi=0$ nach p und φ, so erhält man $\frac{\partial p}{p}\cdot\frac{1}{\partial\varphi}=\frac{1}{E}$, wo E genau denselben Werth hat wie in den vorigen Formeln. Der Differentialquotient auf der linken Seite wird offenbar um so grösser, je kleiner die Empfindlichkeit der Waage wird, und umgekehrt. Ich habe ihn deshalb in meiner Abhandlung über die Empfindlichkeit der Brückenwaagen (V. Band der Denkschriften der mathematisch naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien) mit $\frac{1}{E}$ bezeichnet und E die Empfindlichkeit der Brückenwaage genannt. Da nun $E=\frac{p}{\partial p}\cdot\partial\varphi$ ist, so kann man auch $E=\frac{p}{\partial p}\cdot\frac{\varrho_1\partial\varphi}{\varrho_1}$ setzen. Bezeichnet nun ϱ_1 die Entfernung des auf dem Waagebalken befestigten Zeigers vom Hypomochlium, so wird $\varrho_1\partial\varphi$ den Ausschlag des Zeigers bei der Mehrbelastung ∂p der Schale angeben. Der Quotient $\frac{p}{\partial p}\cdot\frac{\varrho_1\partial\varphi}{\varrho_1}$ wird noch mit grosser Genauigkeit erhalten werden, wenn man statt der unendlich kleinen Grösse ∂p nur eine Grösse setzt, die in Verhältniss zu p sehr klein ist, und statt $\varrho_1\partial\varphi$ den kleinen Ausschlag, den diese Grösse hervorbringt. Bezeichnet man daher diese kleine Grösse, durch die ∂p ersetzt wird, mit Δp, und den erfolgenden Ausschlag mit e, so ist $E=\frac{p}{\Delta p}\cdot\frac{e}{\varrho_1}$ und

$$T=\pi\sqrt{\frac{L}{g}\cdot\frac{p}{\Delta p}\cdot\frac{e}{\varrho_1}}.$$

Um ein Beispiel zu geben, wollen wir $\frac{L}{\varrho}=1$, $\frac{p}{\Delta p}=3500$ (circa den Quotienten von einem Centner durch 1 Loth) und $e=\frac{1}{8}''$ annehmen. Es ist nun $T=\pi\sqrt{\frac{3500}{8.31.12}}=3{,}4$ Secunden.

Soll mithin eine Brückenwaage bei einer so grossen Belastung, dass man das Gewicht der leitenden Theile übersehen kann, bei n Centnern Belastung bei einer Zulage von n Lothen mit einem Punkte des Balkens, der so weit vom Hypomochlium entfernt ist, wie die Last- und Gewichtsschneide des Waagebalkens von einander, einen Ausschlag von $\frac{1}{8}''$ geben, so muss ihre Schwingungszeit 3,4 Secunden sein.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, mit welcher Bequemlichkeit man den Werth von E aus einer Beobachtung der Schwingungszeit einer Waage ableitet. Hier kommt es darauf an, zu untersuchen, wie weit die Waage als Pendel zu benutzen ist, um durch sie zu einer Bestimmung von g zu gelangen. Um E experimentell zu ermitteln, ist zunächst zu bestimmen, wie stark das Gewicht des Waagebalkens selbst auf die Schneide wirkt, an der das Gewicht hängt. Nennt man dasselbe x, das Gewicht des Waagebalkens q, den Abstand seines Schwerpunktes vom Hypomochlium, den man durch einen einfachen Versuch findet, d, so ist $x=q.\frac{d}{\varrho}$. Bezeichnet man nun das Gewicht der Schale plus dem Gewichte in derselben plus x mit p, so ist $E=\frac{p}{\Delta p}.\frac{e}{\varrho_1}$, wo Δp ein kleines Uebergewicht bedeutet, das man in die Schale legt, e den erfolgenden Ausschlag und ϱ_1 die Entfernung der Zunge vom Hypomochlium. Man erhält nun aus Gleichung VIII) die Grösse $g=\frac{\pi^2.L.E}{T^2}$, welche Bestimmungsweise von g nach einigen vorläufigen Versuchen schon bei sehr mässigen Belastungen zu ziemlich genauem Resultate führt.

Welchen Einfluss die grossen Flächen, welche eine Brückenwaage dem Widerstande der Luft bietet, auf die Schwingungszeit haben, müssen spätere Versuche lehren. Im Allgemeinen ist nicht vorauszusetzen, dass derselbe bei grosser Belastung von bedeutendem Einfluss sein wird, da einestheils das Anhaften von Luftmasse an den beweglichen Theilen des Systems gegen die Massen der festen Theile, die in Bewegung sind, sehr zurücktreten muss, andererseits sich aus Gleichung V) ergiebt, dass die grösste Geschwindigkeit der Schale $e\sqrt{\frac{g}{LE}}$ sein wird, wo e die grösste

Entfernung der Zunge bei der Schwingung von ihrer Normallage bedeutet, und dass mithin diese Geschwindigkeit und mit ihr der Widerstand der Luft bei kleinen Schwingungen sehr gering sein müsse.

Anmerkung I. Es ist oben vorausgesetzt worden, dass alle Punkte des Brückenkörpers Kreisbogen beschreiben, deren Radien gleich gerichtet und gleich sind. Die erste dieser Bedingungen ist unerlässlich, wenn die Brücke richtig sein soll, d. h. wenn das Resultat der Wägung unabhängig von dem Ort der Belastung der Brücke sein soll. Da nämlich die virtuellen Geschwindigkeiten sämmtlicher Punkte der Brücke gleich sein müssen, da je zwei Punkte der Brücke durch starre Linien verbunden sind, ferner bei den angewandten Constructionen keine Drehung des Brückenkörpers um eine feste Axe desselben vorkommt, und mithin die Bahnen sämmtlicher Punkte in parallelen Ebenen liegen müssen, so folgt, dass die Krümmungshalbmesser dieser Bahnen für die Normalstellung parallel sein müssen, welche Construction auch angewandt sei; dass aber diese Krümmungsradien gleich gross sind, ist nicht durchaus nothwendig, und findet insbesondere sehr häufig bei den Strassburger Waagen nicht statt, welches daraus erkannt wird, dass solche Waagen, auf verschiedenen Stellen belastet, verschiedene Empfindlichkeit zeigen. (Vergl. meine Abhandlung über die Empfindlichkeit etc. §. 7.) Dessenungeachtet gelten die gewonnenen Resultate, insbesondere die Gleichungen VII) und VIII), auch für diese Art von Waagen. Sieht man nämlich R als den Krümmungsradius der Bahn des Schwerpunktes der ganzen Last inclusive der Brücke an, so gelten zunächst die Gleichungen I), II), III). Aber auch die aus dem Principe der lebendigen Kräfte gewonnene Gleichung gilt hier, weil die virtuellen Geschwindigkeiten sämmtlicher Punkte des Brückenkörpers gleich sind, mithin die Trägheitskräfte sämmtlicher Punkte des Brückenkörpers nur von ihrer Schwere und nicht von ihrer Lage abhängen können. Man kann mithin auch bei dieser Gleichung sämmtliche materielle Punkte im Schwerpunkte der Last vereinigt annehmen. Für die Anwendung der Formeln VII) und VIII) ist also bei diesen Waagen nur zu merken, dass E eine Zahl ist, die für dieselbe Waage nicht constant ist, sondern von der Lage des Schwerpunktes der Last abhängt. — Dass übrigens alle diese Betrachtungen nur für sehr kleine Oscillationen der Waage gelten, wird klar sein, eben so aber, dass dies der praktischen Anwendung keinen Eintrag thut, weil bei Decimalwaagen und noch mehr bei Centesimalwaagen die Excursionswinkel der Krümmungsradien der Bahnen, die von den einzelnen Punkten des Brückenkörpers beschrieben werden, in der That sehr klein sind.

Anmerkung II. Bei den angegebenen Ableitungen sind die Trägheitsmomente des Waagebalkens und der leitenden Theile ausser Rechnung gelassen worden. Es soll die Rechnung für Waagen meiner Construction nun noch so geführt werden, dass man den Einfluss dieser Theile auf die Schwingungszeit übersehen kann. Zu dem Ende setze man aber voraus, der Schwerpunkt des Waagebalkens liege auf der geraden Linie zwischen der Schneide des Hypomochliums und der Gewichtsschneide, welches in der That bei den angewendeten Constructionen beinahe erfüllt wird, und ferner der Schwerpunkt jeder Leitungskette liege auf der Linie zwischen den beiden Schneiden, von denen sich die eine am Gestelle, die andere am Brückenkörper befindet, welches ebenfalls der Wahrheit sehr nahe kommt. Wenn man nun das auf die Gewichtsschneide reducirte Gewicht des Waagebalkens x, das wirkende Gewicht nebst der Schale p, die Last P, das auf die Schneiden der Brücke reducirte Gewicht der Leitungsketten plus dem Gewichte der Hubkette y nennt, so erhält man zunächst die beiden Gleichungen:

$$\text{I)}\quad \left\{\begin{aligned} A &= \varrho(p+x)\left[\sin(\varphi+\Delta\varphi)-\sin(\varphi+\delta\varphi)\right] \\ &+ R(P+y)\left[\sin(\psi+\Delta\psi)-\sin(\psi+\delta\psi)\right], \end{aligned}\right.$$

$$\text{II)}\quad \varrho(p+x)\cos\varphi\partial\varphi + R(P+y)\cos\psi\partial\psi = 0,$$

aus welchen wie oben folgt:

$$\text{III)}\quad A = \tfrac{1}{2}\varrho(p+x)(\delta\varphi^2-\Delta\varphi^2)\cos\varphi\,.\,\frac{1}{E}.$$

Nennt man nun das Trägheitsmoment des Waagebalkens in Bezug auf die Axe des Hypomochliums $\alpha^2 x\varrho^2$ und die Summe der Trägheitsmomente der Leitungsketten in Bezug auf die Axen, welche durch die zugehörigen Schneiden des Gestelles bestimmt sind, plus dem Quadrate von R mal dem Gewichte der Hubkette $\beta^2 R^2 y$, so erhält man nach dem Princip der lebendigen Kräfte die Gleichung:

$$A = \frac{1}{2g}\left[(p\varrho^2+\alpha^2 x\varrho^2)\left(\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial t}\right)^2 + (PR^2+\beta^2 yR^2)\left(\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial t}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2\right]$$

oder

$$\text{IV)}\quad A = \frac{1}{2g}\left[\varrho^2(p+\alpha^2 x) + R^2(P+\beta^2 y)\cdot\frac{\varrho^2(p+x)^2\cos^2\varphi}{R^2(P+y)^2\cos^2\psi}\right]\left(\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial t}\right)^2.$$

Setzt man nun $\varphi=\psi=0$, wie es bei richtiger Aufstellung der Waage sehr nahe erfüllt wird, so erhält man:

$$\text{V)}\quad A = \frac{1}{2g}\varrho^2\left[(p+\alpha^2 x) + \frac{(P+\beta^2 y)(p+x)^2}{(P+y)^2}\right]\left(\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial t}\right)^2,$$

und mithin durch Combination dieser Gleichung mit der Gleichung III), wenn man auch in dieser $\varphi=0$ setzt:

$$\text{VI)}\quad \partial t=\frac{\partial\Delta\varphi\sqrt{E\frac{\varrho}{g}}}{\sqrt{\delta\varphi^2-\Delta\varphi^2}}\cdot\sqrt{\frac{(p+\alpha^2x)(P+y)^2+(P+\beta^2y)(p+x)^2}{(P+y)^2(p+x)}}.$$

Es ist nun

$$\frac{(p+\alpha^2x)(P+y)^2+(P+\beta^2y)(p+x)^2}{(P+y)^2(p+x)}$$

$$=1+\frac{p}{P}+\frac{x}{p}\,\frac{(\alpha^2-1)}{(1+\frac{x}{p})}+\frac{\frac{x}{P}(1+\beta^2.\frac{y}{P})+\frac{p}{P}\cdot\frac{y}{P}(\beta^2-2)-\frac{p}{P}\cdot\frac{y^2}{P^2}}{(1+\frac{y}{P})^2}.$$

Dieser Ausdruck muss offenbar in $1+\frac{p}{P}$ übergehen, wenn P und p unendlich werden. In diesem Falle werden wir daher auf die obigen Gleichungen zurückgeführt. — Nach den zu dem Waagebalken und den Ketten angewendeten Formen wird α^2-1 zwischen $-\frac{1}{3}$ und 0 liegen. Setzt man nun $\frac{x}{p}=0{,}1$, welches bereits bei einer sehr geringen Belastung eintritt, so übersieht man leicht, dass der Ausdruck wenig kleiner als $1+\frac{p}{P}$ sein werde. Ist nämlich $\frac{x}{p}=0{,}1$, so wird $\frac{x}{P}<0{,}01$ und $\frac{y}{P}$ höchstens 0,02 sein, und da β^2-1 ebenfalls zwischen $-\frac{1}{3}$ und 0 liegen muss, so wird, wenn $\frac{p}{P}=0{,}1$ ist, der obige Ausdruck kleiner sein als $1+\frac{p}{P}$ und zwar um weniger als $\frac{1}{30}$.

Um die Schwingungszeit eines einfachen Waagebalkens, der mit den Gewichten P und p belastet ist, zu bestimmen, wenn der Schwerpunkt desselben in das Hypomochlium fällt, nenne man sein Trägheitsmoment $a^2p_1\varrho^2$, wo p_1 das Gewicht des Waagebalkens ist. Alsdann ist

$$\partial t=\frac{\partial\Delta\varphi\sqrt{E.\frac{\varrho}{g}}}{\sqrt{\delta\varphi^2-\Delta\varphi^2}}\sqrt{\frac{(p+a^2p_1)P^2+P(p+x)^2}{P^2(p+x)}}$$

$$=\frac{\partial\Delta\varphi\sqrt{E.\frac{\varrho}{g}}}{\sqrt{\delta\varphi^2-\Delta\varphi^2}}\cdot\sqrt{\frac{(p+a^2p_1)P+(p+x)^2}{P(p+x)}}.$$

Ist der Waagebalken gleichschenklig, so ist $p+x=P$ und man erhält:

$$\partial t=\frac{\partial\Delta\varphi\sqrt{E.\frac{\varrho}{g}}}{\sqrt{\delta\varphi^2-\Delta\varphi^2}}\sqrt{2+\frac{a^2 p_1}{p+x}}.$$

Will man noch die Neigung beider Arme des Waagebalkens mit dem Horizonte in Rechnung ziehen, so hat man, wenn diese für beide φ beträgt, unter der Wurzel noch durch $\cos\varphi$ zu dividiren. Sollte der Waagebalken nicht so ajustirt sein, dass sein Schwerpunkt im Hypomochlium liegt, so kann man die in seinem Schwerpunkte vereinigte Schwere desselben, wenn seine drei Schneiden nicht in gerader Linie liegen, in drei Schwerkräfte zerlegen, die durch diese Schneiden hindurchgehen, wodurch die wirkenden Lasten eine gewisse Aenderung erleiden, die leicht zu bestimmen ist, sonst aber die Rechnungsausdrücke ungeändert bleiben. Auf ähnliche Weise kann man das Ajustement der Waagebalken bei Brückenwaagen in Rechnung bringen.

Anmerkung III. Es ist noch zu ermitteln, wie gross die Excursion der Zunge sein wird, wenn man ein kleines Gewicht von einer geringen Höhe auf die Brücke fallen lässt.

Legt man das Gewicht ohne Stoss auf die Waage, so erfolgt der entstehende Ausschlagswinkel $\Delta\varphi=E.\frac{\Delta P}{P}$, und der ganze Excursionswinkel $2\Delta\varphi=2E.\frac{\Delta P}{P}$.

Bedeutet nun P_1 das auf die Brücke reducirte träge Gewicht der beweglichen Theile der Waage und hat ΔP beim Stoss auf die Brücke die Geschwindigkeit v erlangt, so wird nach erfolgendem unelastischen Stosse die Geschwindigkeit der Brücke $\frac{v.\Delta P}{P_1+\Delta P}$ sein. Da aber ΔP in Vergleich zu P_1 sehr klein ist, so kann man auch für diesen Quotienten $\frac{v\Delta P}{P_1}$ setzen. Nimmt man nun an, die Zunge fiele mit der Gewichtsschneide zusammen, und die Waage sei decimalisch, so erhält man durch die obige Gleichung V) und die darauf folgenden Reductionen:

$$\frac{10.v}{\varrho}.\frac{\Delta P}{P_1}=\sqrt{\frac{\delta\varphi^2-\Delta\varphi^2}{L}.g}.$$

Liegt ΔP auf der Brücke, so geht die Waage in eine neue Gleichgewichtslage über. Der Winkel, den der Waagebalken der ersten Lage mit dem in der zweiten Lage bildet, ist $\frac{E\Delta P}{P}$, da $E = \frac{\Delta P}{P} \cdot \frac{1}{\Delta\varphi}$ ist, wenn $\Delta\varphi$ den kleinen Ausschlagswinkel bei dem Uebergewicht ΔP bedeutet. Sehen wir jetzt diese neue Lage als Normallage an und suchen, wie weit sich die Zunge durch die Einwirkung des Stosses von dieser neuen Lage entfernen wird, so kann man $\Delta\varphi = \frac{E\Delta P}{P}$ in der obigen Gleichung setzen und erhält:

$$\left(\frac{10v}{\varrho}\right)^2 \left(\frac{\Delta P}{P_1}\right)^2 = \left(\delta\varphi^2 - E^2\left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2\right)\frac{g}{L},$$

und hieraus:

$$\delta\varphi = \frac{E\Delta P}{P}\sqrt{1 + \frac{L}{g}\left(\frac{10v}{\varrho}\right)^2 \cdot \frac{P^2}{P_1^2} \cdot \frac{1}{E^2}}.$$

Setzt man $v^2 = 2sg$, wo s die Fallhöhe von ΔP bedeutet, so erhält man:

$$\delta\varphi = \frac{E\Delta P}{P}\sqrt{1 + \frac{200sL}{\varrho^2} \cdot \frac{P^2}{P_1^2} \cdot \frac{1}{E^2}}.$$

Um diesen Winkel $\delta\varphi$ würde sich also die Zunge aus ihrer neuen Normallage entfernt haben müssen, um in die erste mit der gleichen Geschwindigkeit wie bei dem vorausgesetzten Stosse anzukommen.

Wird das Gewicht ΔP ganz ohne Stoss auf die Brücke gelegt, so beschreibt die Zunge bei ihren ersten Excursionen einen Winkel $2\Delta\varphi = \frac{2E\Delta P}{P}$, beim Stoss hingegen beschreibt sie einen Winkel $2\delta\varphi$. Es lässt sich nun leicht übersehen, dass diese beiden Werthe nur sehr wenig von einander abweichen können, wenn s eine sehr kleine Grösse ist. Berücksichtigt man nämlich das träge Gewicht der leitenden Theile und des Waagebalkens nicht, so ist $P + \left(\frac{1}{10}P\right) . 10^2 = P_1$ oder $\frac{P}{P_1} = \frac{1}{11}$. In Wirklichkeit ist $\frac{P}{P_1}$ noch kleiner als $\frac{1}{11}$. Der Werth von $\frac{L}{\varrho}$ ist $\frac{11}{10}$ und den Werth von E kann man mindestens $= 20$ setzen. Setzt man nun $s = \frac{1}{4}''$ und $\varrho = 10''$, so ist $\delta\varphi$ noch um ein wenig kleiner als

$$\frac{E\Delta P}{P}\sqrt{1+5.\frac{11}{10}\cdot\frac{1}{11^2}\cdot\frac{1}{20^2}} \text{ oder als } E.\frac{\Delta P}{P}.\sqrt{1+\frac{1}{22}\cdot\frac{1}{20^2}}.$$

Setzt man $\varrho\Delta\varphi = e$ und $\varrho\delta\varphi = e_1$, so wird:

$$e_1 - e < \frac{\varrho E\Delta P}{P}\left(\sqrt{1+\frac{1}{22}\cdot\frac{1}{20^2}}-1\right)$$

oder kleiner als $\frac{\varrho E\Delta P}{P}\cdot\frac{1}{44}\cdot\frac{1}{20^2}$. Beträgt nun $\frac{\varrho E\Delta P}{P}$ weniger als 1", so ist diese Differenz so klein, dass sie in das Bereich der unvermeidlichen Beobachtungsfehler fällt, kann also bei den Versuchen des §. 3. übersehen werden.

Erklärung der Figuren.

Taf. X. Fig. I. Eine Brückenwaage auf einem Tische. *A* und *B* sind zwei Rollen, *α* und *β* zwei Gewichte, die durch einen seidenen Faden, der über beide Rollen geht, zusammenhängen; *cd* ist ein Winkelhebel, der sich an die Brückenwand anlegt und durch einen Druck auf *c* von ihr entfernt werden kann.

Taf. X. Fig. II. Eine Feder auf einem Gestelle, die durch einen Faden aus ihrer Lage gebracht ist.

XX.

Ueber Kepler's Logarithmen und einige Briefe von Kepler.

Von
Herrn Professor *Frisch*
zu Stuttgart.

Unter der grossen Anzahl handschriftlicher Schätze, welche ich bei meinen Vorarbeiten für die von mir beabsichtigte Ausgabe der sämmtlichen Schriften des Astronomen Kepler sammelte, befindet sich Manches, dessen Inhalt nicht blos für den Freund der Literaturgeschichte, sondern auch für den Mathematiker oder Astronomen vom Fach interessant sein wird. Indem ich aus meiner Sammlung einige Briefe, welche von der Entdeckung Neper's, den Logarithmen, handeln, auswähle, um sie einem grösseren Leserkreise bekannt zu machen, glaube ich nicht, dem Plane dieser Zeitschrift entgegenzuhandeln, welche auch früher schon ähnlichen Gegenständen ihre Spalten öffnete und in ihrem Inhaltsverzeichniss eine stehende Rubrik hat unter dem Titel: „Geschichte der Mathematik und Physik."

Zum besseren Verständniss des Inhalts dieser Briefe schicke ich folgende Bemerkungen voraus.

Unter den wenigen Gelehrten Deutschlands, welche Neper's Schrift (Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, ejusque usus in utraque Trigonometria, ut etiam in omni Logistica Mathematica, amplissimi, facillimi et expeditissimi explicatio. Edinb. 1614.) gleich Anfangs mit Beifall aufnahmen, steht Kepler in erster Linie da. Bei seinen vielen, weitläufigen und langweiligen Rechnungen hatte er schon lange das Bedürfniss einer Erleichterung gefühlt. Seine geringe Besoldung, die noch dazu bei den damaligen politischen Wirren und Verlegenheiten des Kaiserlichen Schatzmeisteramts häufig sehr unregelmässig ausbezahlt wurde, reichte nicht hin, einen für seine

Zwecke tauglichen Rechner zu bezahlen, und nur temporär gelang es ihm, für einen solchen aus der Kaiserlichen Kasse (in Prag) oder aus ständischen Mitteln (in Linz) einen Beitrag zu erhalten. Neben vielfachem häuslichen Unglück, manchen Anfällen von Krankheiten, die ihn in den Zeiten seines Aufenthalts in Prag (vom Jahre 1600 bis 1612) trafen, lag ihm somit grossentheils allein ob die Ausführung des Hauptgeschäfts, an welches seine Anstellung daselbst geknüpft war, die Herausgabe der Tychonischen Beobachtungen, eines Geschäftes, welches er bekanntlich nicht vollendete, auch nicht in der Weise vollenden konnte und wollte, wie man es von ihm verlangte, und wie es später von dem Jesuiten Albert Kurz geschah (Historia Coelestis, 1656), nämlich durch einfachen Abdruck des „Protokolls" jener Beobachtungen. Seine Absicht war, unter Zugrundelegung dieser Beobachtungen ein ganz neues astronomisches System zu gründen und astronomische Tafeln zu liefern, welche die bis dahin einzig dastehenden Prutenischen Tafeln ersetzen sollten. Den ersten Zweck führte er theilweise aus in seinen „Commentariis de motibus stellae Martis" (1609), den letzteren in den Rudolphinischen Tafeln (1627). Dieses Vorhaben verstanden aber Diejenigen nicht, welchen hauptsächlich des pecuniären Nutzens wegen die Tychonischen Beobachtungen am Herzen lagen, nemlich Tycho's Erben, darunter Franz Tengnagel, Schwiegersohn Tycho's, der am Kaiserlichen Hofe einigen Einfluss hatte. Auf dessen Drängen wurde Kepler'n eine Art von Mentor gesetzt in der Person des Jesuiten Johann Pistorius, der aber glücklicher Weise sein sonderbares Amt in einer Weise auffasste, dass die Wissenschaft keinen Schaden dabei litt, und, sich auf freundschaftlichen Fuss mit Kepler'n stellend, denselben in seinem Streben nach Höherem möglichst förderte, unterstützt hiebei von hohen Staatsbeamten, wie Matthaeus Wackkher von Wackenfels, Barwitz, Herwart von Hohenburg u. A. Ausser seinen theoretischen Arbeiten nahmen unsern Kepler noch manche andere Geschäfte in Anspruch, vor Allem die Beobachtungen am Himmel, welchen Kaiser Rudolphs II. Astronom fleissigst obzuliegen verbunden war. Eine bei seiner Lage nicht zu verachtende Erwerbsquelle bildeten seine „Nativitäten" und andere astrologischen Prophezeihungen, die in grosser Zahl von Kaiser und Edlen des Reichs von ihm verlangt wurden; andere verlangten von Kepler Berathungen über Maass und Gewicht (Ernst, Erzbischof von Köln), wieder Andere über hydraulische Maschinen (Herzog von Anhalt-Dessau), über verschiedene physikalische Gegenstände und historische Untersuchungen (Herwart u. A.); sein Briefwechsel war einer der ausgedehntesten, die man sich denken kann, — kurz, Alles weist darauf hin, dass Kepler's ganze Zeit in Anspruch genommen war, wie nicht leicht die eines anderen Gelehrten unter seinen Zeitgenossen, und dass er somit darauf bedacht sein musste, dieselbe so viel möglich zu sparen. Dazu kommt noch folgender, wohl zu beachtender Grund: Kepler war nicht der gewandteste Rechner. Bei meinen Arbeiten kamen mir viele hundert Seiten, mit Rechnungen aller möglichen Art von Kepler's Hand vollgeschrieben, vor Augen. Darunter sind nur wenige, wo gar keine Correctur vorkommt, dagegen finden sich auf den meisten mehr als eine, oft viele Correcturen von einfachen Multiplications- oder Divisionsfehlern. Er half sich zwar so gut er konnte, bediente sich immer der abgekürzten Multiplication und Division, wandte bei seinen trigonometrischen Rechnungen die sogenannte prosthaphäretische Methode an, und suchte sich durch alle möglichen Arten von Proben des Resultats zu vergewissern. Trotz alle dem entschlüpfte ihm doch hie und da ein Rechnungsfehler, der ihm nachher viel zu schaffen machte. Hören wir über das bisher Angeführte Kepler'n selbst: „Die Gründe, — schreibt er (1619), — warum die von mir erwarteten Werke so langsam vorrücken, sind vielfacher Art. Die mir vom Kaiser ausgesezte Besoldung wäre zwar ansehnlich genug (sane quam honestum; sie betrug 500 fl.), allein ich erhalte sie nicht; ohne den mässigen Zuschuss, den ich von den Ständen erhalte, wäre es mir nicht möglich, mein Hauswesen fortzuführen, und ich hätte ohne denselben schon längst nach auswärtiger Unterstützung mich umsehen müssen. Die Folge hievon ist, dass ich nur selten einen Gehülfen unterhalten kann, und der, welchen ich gegenwärtig habe, ein fleissiger Rechner und verständiger Mathematiker, wird, da ich ihn nicht bezahlen kann, wohl nicht lange bei mir ausharren. Alsdann fällt wieder alle Arbeit auf mich zurück, während ich sogar jezt nicht immer im Stande bin, meinen Briefwechsel, noch viel weniger meine Berechnungen fortzusetzen. Meine Natur selbst hat übrigens auch Theil an der Verzögerung. „Non omnia possumus omnes." Ich bin nicht im Stande, eine feste Ordnung einzuhalten, oft unklar, und wenn ich ja einmal etwas Geordnetes schaffe, so musste diess zehnmal umgearbeitet werden, ehe es die rechte Form erhielt. Gar oft wirft mich ein in der Eile begangener Rechnungsfehler weit zurück und hält mich lange Zeit auf. Gewiss, ich könnte sehr viel schreiben, indem den Mangel an Belesenheit die Phantasie ersetzen würde; allein derley unzusammenhängende Arbeiten sind mir zuwider, ja eckeln mich an, so dass ich sie entweder ganz vernichte oder beiseite lege, um sie später wieder durchzugehen, das heisst, um sie von Neuem zu bearbeiten, was meistens der Fall ist. Meine Freunde bitte ich nur um das, dass sie mich nicht ganz in das Tretrad mathematischer Rechnungen verurtheilen möchten; sie sollen mir Zeit lassen zu philosophischen Speculationen, meiner einzigen Freude. Manche sind ärgerlich auf mich, weil ich die Vollendung der Rudolphinischen Tafeln nicht mehr beschleunige. Allein Jeder hat seine Liebhabereien. Andere haben ihre Freude an Tabellen und Astrologischen Gegenständen, mir gefällt das Mark und der Kern der Astronomie, die Schönheit und Vollendung der Bewegungen. Jedoch auch die Tafeln selbst sind Schuld an der Verzögerung. Ich will nicht von der durch sie verursachten Mühe reden; die schon vollendete Berechnungsweise muss völlig umgearbeitet und den Logarithmen angepasst werden, so dass nach meinen Prinzipien neue Tafeln nach dieser bequemeren Methode berechnet werden können." .

Nach Allem diesem scheint die Ansicht keiner weiteren Begründung zu bedürfen, dass Kepler mit Eifer die Gelegenheit werde ergriffen haben, seine mannigfaltigen mühsamen Arbeiten sich zu erleichtern. Die erste Ursache, dass er ein selbständiges Werk über die Logarithmen schrieb, mag sein alter Lehrer Mästlin gewesen sein, der sich in einem Briefe an Kepler (v. J. 1620) folgendermassen über die neue Erfindung ausspricht: „Ich konnte bis jezt nicht ausfindig machen, welche Zahl der Verfasser (Neper) seinen Logarithmen zu Grunde legte. Er scheint absichtlich eine solche gewählt zu haben, die, wo nicht gar nicht, so doch äusserst schwer zu finden ist. Deshalb mache ich von dieser Rechnungsweise keinen Gebrauch, indem es mir eines Mathematikers unwürdig dünkt, durch Anderer Augen sehen zu wollen und sich auf Behauptungen zu stützen oder als bewiesen vorauszusetzen, was er nicht zu beweisen weiss. Es bleibt noch immer zweifelhaft, ob eine Rechnungsweise, welche zehn-, ja hundertmal sich bewährte, nicht doch einmal zum Irrthum führen könnte."

Darauf antwortet Kepler Folgendes: „Das Wesen der Logarithmen will ich dir erklären. Der Name weist darauf hin, dass es Zahlen sind, die ein Verhältniss bezeichnen (*ἀριθμοι του λογου*). Es sei z. B. ein sehr kleines Verhältniss gegeben, etwa 10000000 :9999999. Dieses Verhältniss bezeichnen wir durch die Einheit (diess ist nämlich der Unterschied der Glieder. Noch genauer ist diese Bezeichnung, wenn das Verhältniss noch viel kleiner ist). Nun ist bekannt, dass das Verhältniss 9999999:9999998 grösser ist als jenes, ebenso das folgende 9999998:9999997 noch grösser, u. s. f., so dass das Verhältniss 5000001:5000000 grösser ist als jedes vorhergehende, zwischen zwei auf einander folgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe. Weil nun die Grösse des ersten

Verhältnisses ausgedrückt ist durch die Zahl 1, so wird die des zweiten nicht durch 1 ausgedrückt werden, sondern durch eine etwas grössere Zahl u. s. f., und endlich das von 5000001:5000000 nahezu durch 2. Fragt man nun, wie gross das Verhältniss 10000000:5000000, d. h. 2:1, sei, ausgedrückt in derselben Form, in welcher oben das kleinste Verhältniss durch 1 bezeichnet wurde, so wird die Antwort folgende sein; würden alle Zwischenglieder der natürlichen Zahlenreihe, die paarweise immer um 1 verschieden sind, gleich grosse Verhältnisse bilden, so wäre, weil zwischen 10000000 und 5000000 4999999 Zahlen liegen, die Verhältnisszahl von 10000000:5000000 die Zahl 5000000. Weil aber jedes folgende Verhältniss grösser ist als 1, so wird die Verhältnisszahl von 2:1 nach der angenommenen Bezeichnungsweise werden: 6931472, denn so oft kommt das Verhältniss 10000000:9999999 bei dem Verhältniss 10000000:5000000 oder 2:1 vor *). Diess ist das Verfahren bei der Berechnung der Logarithmen."

„Nun gehe ich zur Erklärung des Wegfallens der Multiplication mit Hülfe der Logarithmen über. Es ist 10000000:9000000 = 8000000:7200000 ($a:b = c:d$). Hier ist das Verhältniss 10000000:7200000 ($a:d$) aus drei Verhältnissen zusammengesetzt, nämlich aus 10000000:9000000 ($a:b$), 9000000:8000000 ($b:c$) und 8000000:7200000 ($c:d$). Somit wird auch die Bezeichnung des Verhältnisses $a:d$ zusammengesetzt sein aus den Logarithmen von $a:b$, $b:c$ und $c:d$. Nun ist $c:d = a:b$, also der Logarithme von $a:d$ zusammengesetzt aus den zwei Logarithmen von $a:b$ und $b:c$. Aber der Logarithme von $a:b$ und der von $b:c$ sind zusammen gleich dem Logarithmen von $a:c$, weil die Verhältnisse $a:b$ und $b:c$ selbst Elemente des Verhältnisses $a:c$ sind. Folglich ist die Summe der Logarithmen von $a:b$ (1053605—) und von $a:c$ (2231436—) gleich dem Logarithmen von $a:d$ (3285040+)."

„Hast du diesen Beweis verstanden, so darfst du auch nicht mehr an den Logarithmen zweifeln. Denn du hast die Wahl, entweder mit Benutzung derselben zu addiren oder dafür die gegebenen Grössen selbst zu multipliciren."

Vergleicht man mit den beiden angeführten Schreiben die Vorrede Kepler's zu seiner Schrift: Supplementum Chiliadis Logarithmorum (Marburg 1625), so wird die oben ausgesprochene Vermuthung zur Gewissheit. Er sagt darin, als er auf einer Reise nach Süddeutschland (im Jahre 1621) mit verschiedenen gelehrten

*) D. h. diess ist die Summe der 5000000 Verhältnisszahlen, deren kleinste 1 ist.

Mathematikern über die Neper'schen Logarithmen gesprochen, habe er bemerkt, dass dieselben sich bedenken, diese Art von Zahlen an die Stelle der Sinustafeln aufzunehmen, indem sie, wenigstens die älteren, es für einen Professor der Mathematik unpassend gehalten haben, ohne genügenden Beweis eine Rechnungsform anzunehmen, durch welche man möglicherweise später zu ungeahnten Irrthümern verführt werden könnte. Aus diesem Grunde, fährt er fort, habe er sogleich (noch in Tübingen) einen Beweis versucht und denselben nach seiner Heimkehr (in Linz) vollendet. Das Manuscript seiner Schrift schickte er nach Tübingen, von wo es nach längerer Verzögerung an den Landgrafen Philipp von Hessen kam, der den Druck besorgen zu lassen sich bereit erklärt hatte *). Dieser längere Aufenthalt des Manuscripts in Tübingen und die Entfernung Kepler's vom Druckorte verursachten jedoch einen Uebelstand, dem durch eine besondere Schrift abgeholfen werden musste. Das nach Tübingen geschickte Manuscript enthielt neben den Tafeln blos die Theorie der Logarithmen, nicht aber die Gebrauchs-Anweisung, welche Kepler erst unmittelbar vor dem Drucke zu verfertigen gedachte. Während der drei Jahre, welche das Manuscript in Tübingen liegen blieb, kam die Sache ihm aus dem Gedächtniss, der Druck wurde in Marburg ohne sein Wissen begonnen, somit blieb auch die ursprünglich beabsichtigte Anweisung weg, und um diesen Mangel zu ergänzen, schrieb Kepler das Jahr darauf (1625) das oben angeführte „Supplementum Chiliadis Logarithmorum, continens praecepta de eorum usu."

Philipp von Hessen hatte durch folgendes Schreiben an Kepler diesem die Gelegenheit dargeboten, seine Logarithmen zur Oeffentlichkeit zu bringen:

Philips von Gottes Gnaden Landgrave zu Hessen, Grave zu Catzenelenbogen, Dietz, Ziegenhain und Nidda etc.

Unsern gnädigen Gruss zuvor, wolgelehrter Lieber Besonderer.

Demnach Wir die Continuation Unserer Astronomischen exercitien dahin gern dirigirt sehen wölten, dass Wir wo nicht ipsam perfectionem erreichen, doch derselben so viel müglich nahe beykommen möchten, so haben Wir, in Erwägung solche Astronomia

*) Das Werk erschien zu Marburg im Jahre 1624 unter dem Titel: „Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos, praemissa demonstratione legitima ortus Logarithmorum eorumque usus etc."

auf zweyen Punkten vornehmlich beruhet, nehmlich auf den observationibus, darauss die hypotheses zu formiren, und auf dem calculo, welcher die geometricas affectiones und triangulorum resolutiones imitirt, vor das erste zwar zimliche grosse instrumenta verfertigen lassen und in solchen mehrerntheils des Tychonis descriptiones gefolget, aber Wir haben bey solcher Fabrica auch zimliche obstacula befunden. Denn die grosse Instrumenta seindt zum adplicirn unbequem, so können auff den kleinen Instrumenten die darauff getheilte partes leichtlich (um eine?) partem arcus (quia lineae physicae sunt) abnehmen. Ferners so können auch die Transversales Tychonis inter aestimandum leichtlich in diessem subtilen Werck Hinderung bringen, weil die intersectiones propter angulum acutum sich sehr schleiffen; und über das alles so wöllen uns die pinnacidia Tychonis zu gewisser Erkandtnuss der Stern auch nicht genügen thun. Denn weil derselbe per rimam zu observiren, dardurch viel radii opertirt und sein Schein etwas dunckeler wirdt, bevorab (insbesondere) wenn der Stern an sich selbsten nicht gar klar ist, so verpleibt alsdann das Centrum Stellae zweiffelhafftig. Wieviel weniger aber andere pinnacidia beytreffen, haben Wir aus Euerer Optica zum Theil ersehen.

Gleichergestalt verhält es sich mit der Structur selbsten. Denn obschon der Mechanicus noch so fleissig arbeitet, kan es doch leichtlich geschehen, dass etwa ein Fehler, welcher sich so baldt nicht ad sensum eräugnet (bemerkt wird), begangen würdte, dardurch die Gewissheit, welche Tycho auf 3, 4 oder 5 Secunden haben will, ettlichermassen in Zweiffel mag gesetzt werden, anderer incommoditeten, so uns vorkommen, anitzo zu geschweigen. Also dass Wir wol wündschen möchten, ein solch Instrument, welches vom Tycho selbsten für gutt gehalten worden, mit allen seinen mensuren, pinnis, regulis, divisionibus, und die Sterck, die Riss oder Abtheilung etc. entweders zur Handt zu bringen und zu seiner Gedächtnuss verwahrlich auffzuhalten (aufzubewahren), oder zum wenigsten doch zu erlernen, ob und wie der Tycho richtig und ohne Zweiffel 3, 4 oder 5 minuta secunda zählen können.

Zum andern befinden wir, dass in resolutione triangulorum praesertim sphaericorum die numeri zimlichermassen variiren, wie auss beiliegendem calculo zu vernehmen *). So wöllen auch die loga-

*) Die Aufgabe ist: aus der gegebenen Länge und Breite des Polarsterns seine Declination und Rectascension zu berechnen. Die Auflösung derselben nimmt 4 Folioseiten ein, dabei sind zwei Multiplicationen mit je 2 Zahlen von 15 Ziffern und zwei Divisionen, wovon jede beinahe eine Seite füllt.

rithmi nicht allerdings beytreffen, weil sie uff den numerum canonis radicirt, welche radication mit Abwerfung der hindern Zahlen geschicht; darneben Wir uns auch Eueres calculi erinnern, da Ihr selbsten die logarithmos für insufficient haltet. Solte den in toto opere Astronomico alzeit der grosse Canon oder das opus Palatinum gebraucht werden, so were zwar solches fast dienlich, aber zu sehr mühesam und arbeitselig.

Gesinnen derowegen in gnaden an Euch, uns den Willen zu erweisen und sowol diesses, ob nicht compendiosiori via die resolutiones beschehen köndten? als auch anderer angeregter Punkten halber, gewiss und beständigern Bericht zu communiciren. Solches seindt Wir in Gnaden, darmit Wir Euch gewogen, hinwider zu erkennen geneigt.

Datum Butzbach den (fehlt) Junii anno 1623.

Philips.

(Die Addresse lautet: Dem wolgelehrten Vnserem lieben Besonderen Johanni Kepplero, Röm. Kay. May. besteltem Mathematico.

Lintz.)

Hierauf antwortet Kepler im December 1623 in folgendem Schreiben:

Durchleuchtiger, Hochgeporener, Gnädiger Fürst und Herr.

Euer Fürstlichen Gnaden seind meine vnderthänige arme Dienste bestes Vermügens bevor.

E. F. Gnaden Gnädiges Sendschreiben de dato Butzbach im Monat Junio diess ablauffenden 1623. Jahrs ist mir durch Gotfriden Tampachen, Buchführern in Frankfort *), neben etlichen begehrten Büchern allererst im Monat Novembri zukommen, auss wölchem Ich mit sonderlichen Freüden vernommen, das E. F. G. bey disser eüssersten Zerrüttlichkeit fast aller Provincien des Teütschen Landes nichts weniger Dero gewohnliche lobwürdige Erquikungen bey den Astronomicis exercitiis und Werckhen Gottes zu suchen fortfahren. Der Almächtige woll E. F. Gnaden und Dero zugehörige sampt den Nachpaurn (Nachbarn) für fernerem Vnheil und Verhinderung bewahren, und den seligen Friden wider bringen.

---

*) Derselbe, bei welchem der dritte Theil von Kepler's „Epitome Astr. Copernicanae", die „Harmonie", die zweite Aufl. des „Prodromus" etc. herauskamen.

Dieweil nun E. F. Gnaden mir etliche diss Orts fürfallende difficulteten Gnädig insinuiren, meines wenigen Gutachtens hierüber begehrend: als ist anlangend erstlich die observationes und instrumenta, nit weniger, dass Ich, damahlen (als) E. F. Gn. mir deren etliche fürgezeigt, mir die leichte Rechnung machen khönnen, was grosser verwunderlicher Vleiss, Mühe und Arbeitt darauf verwendet werden müesse, biss solche instrumenta zu Irer Müglichen perfection kommen; und wann diss mit aüsserster Menschlicher Müglighkhaitt verrichtet, das doch hernach khaine Müglichkhait sein werde, das Werckh selbsten Observationum auf eine solliche Scherffe zu richten. Ich erinnere mich, das E. F. Gn. Ich die Ursachen und Verhinderungen fast alle nach einander erzählet, so viel für das selbige mahl ohne Dero Abschreckhung von solchen so wol beliebenden exercitiis geschehen mögen.

Es haben aber E. F. Gn. auf einen recht eigentlichen Trost über diesen Verdriesslichkeiten gedacht, indem sie sich nach einem Tychonischen instrument verlangen lassen; dan sie gewisslich bey denselben nit so grossen Behelf zu verspüren haben würden, wie etwa des Herrn Tychonis Worte nach dem ersten Anblick einem die Hoffnung machen möchten. Es hat Tycho unserm Herrn Gott in Stellung und Scherffung seiner Gebotte den process abgelehrnet, die Norma soll und muss richtig sein, man thut Irer daunoch verfählen; es würde aber des Verfählens noch mehr sein, wan es an der Norma fählete. Man macht ein Schwartzes in die Scheibe, auf dass man zum wenigsten die Scheibe treffe. Mit dem Schwungen zwar hat Tycho so viel nit zu thuen gehabt, weil er nit lautter Metallene Instrumenta gemacht, sondern hat sie (was man hat müessen auff alle Seitten bewegen, also das sie sich nach dem Gewicht oder Schwäre geschwungen hatten) inwendig mit dickhen hölzenen Stollen versehen, die schwingen sich weniger, hernach hat er solche Stollen gesperret, wie in seinen Mechanicis zu sehen: letztlich hat er das Holz mit Mess (Messing) überzogen, unter wölchem das Holz über Hirn Luft gehabt, das es dem Mess khainen Mangel gebracht, wan schon das Holz nach dem Wetter eingegangen ist. (Vergl. Tychonis Astr. instauratae Mechanica. Norib. 1602. Seite C. 5^b, D. 5^b. Hier sagt Tycho, nachdem er die Methode beschrieben, wie das Holz zu behandeln sey, damit es sich nicht krümme oder schwinde, das beste Holz zu diesem Zwecke sey gutes und wohlgetrocknetes Fichtenholz, „ea parte applicata, quae cacumen et radicem respicit", was Kepler „über Hirn" übersetzt.)

Die Pinnacidia aber haben disen Vortl gehabt, wan der Stern groes und hell gewest, als der Jupiter, so hat man sie eng machen khönnen, hernach hat der Observator in Acht nemen müssen, dass er den Stern auf einer Seite des cylindri so hell habe, als auf der andern. Ist aber der Stern so klain und vnsichtig gewest, so hat man die Spälte oder rimas aufgeschraufet, oder mit einem Messer aufgewogen, das man also mehr Lufft und Liecht gehabt. Ich aber hab bessere Befürderung befunden, wan ich ein Liecht oder Kohlen rückling hab halten lassen, das der Cylinder erleüchtet und sichtig werden und das Liecht mir doch nit under das Gesicht geschinen. Dan von disser Erleüchtung des Cylinders gehen die pupillae oculi zusamen, und alsdan siehet man den Stern mehr rain, als wären Ime die übrige Streimen abgewischt; dan bedarf Ich auch der engen rimarum nit sonderlich, sondern kan underscheiden, wie weit der Stern vom Cylindro stehe, wan ich also sie beide zumahl ins Gesicht nemen khan.

Mit den Transversalibus ist es uns sehr oft geschehen, das, weil die regula nit alwegen gar gedräng (überall ganz vollkommen) auffligt, nachdem einer gerad oder schlims (von der Seite) auf die Theilung gesehen, nachdem hat er einen grossen oder kleinen Theil von einer Minuten gesehen. Wir haben auf den Sextanten nur tertias oder quartas minuti partes geschätzet, sie seind mit besonderen Pünctlein nit unterscheiden gewest. Allein (nur) auf einem grossen Quadranten seind sextae partes minutorum getüpffelt gewest *).

Mir wär zwar nichts liebers, dan das Ire Kay. Mt. derenmahlen einest zu dem erwünschten Frieden gelangen, Ire residentz in dem Königreich Böheim nemen, und ich mich bei dero Hofhaltung alda praesentiren möchte. Alsdan könte ich sehen, ob nach so langwüriger Zerrütlichkeit in Böheim auch noch etwas nutzes von den instrumentis Tychonis überig; und zweifelt mir nit, wan alsdan Irer Kay. Maj. Ich gehorsamist fürbrächte, das E. F. Gnaden umb deren instrumentorum eines oder das Ander Nachfrag haben, würden Ire Maj. E. F. Gnaden etwas darvon gnädigist zukommen lassen **).

Was anlanget die andere, nemlich Calculi difficultatem, da ist

---

*) Es ist dies wahrscheinlich der Quadrant, welcher in dem oben angeführten Werke pag. B. 4. beschrieben ist oder ein nach diesem Muster in Prag verfertigter. Dass Kepler in Prag ungefähr ein und ein halbes Jahr lang (vom Februar bis Ende Mai 1600 und vom October 1600 bis Ende October 1601) bei Tycho zubrachte, ist bekannt.

**) Der Zweifel Kepler's, ob die Tychonischen Instrumente, welche er bei seiner Uebersiedelung nach Linz in Prag zurücklassen musste, noch brauchbar sein werden, war wohl begründet. Schreibt er doch schon 20 Jahre vorher (an Fabricius): „observationes nostrae frigent. Instrumenta in horto Caesaris sub Dio putrescunt. Utor sextante et quadrante parvo ex Hofmanni liberalitate.“

wol etwas weniges in re, das meiste aber in persona, die Ir nit abbrechen kan, wa sie siehet, das sie sich vergeblich bemühet. Gott wolle mich behüetten, das ich nit vil Triangula mit solcher Mühe solvire, wie derjenige gehabt, der die beygelegte exempla gerechnet. Nit ohne ist es, die sinus mit 5 figuris seind zu kurtz, wan es an solliche kleine triangula und grosse angulos gehet. Man bedarf aber darumb des grossen Canonis nit. Es ist genug, wan man auff 7 oder zum höchsten auff 8 figuras khompt. So bedarf es sich auch nit, das man die multiplicationes und divisiones gantz aussmacht, sondern des Praetorii Weise *), ist sicher und gut, das ich anfahe mit dem ersten digito Multiplicantis ad sinistram, qui ducatur in multiplicandum totum. Darnach secundus illius ad sinistram ducatur in hunc non totum, sed demtâ ejus ultima figura ad dextram, et factum subscribatur, ut in margine apparet. Also auch mit dem dividiren. Dan was also abgeschnitten würt, das gibt im quotienten nit über 2 oder 3 Unitates Verfählung in digito ultimo ad dextram. Kan sich also der Calculator verlassen, das alle vorhergehende digiti gerecht.

4062051		4727487		
1163818		4755763		
4062051		42801866		9
406205		4473004		9
243723		4280187		
12186		192817		4
3250		190230		
40		2587		05
32		2378		
4727487		209		4
		190		
		19		4
		19		

*) Johannes Prätorius, Prof. in Altdorf, mehr bekannt durch seine Anwendungen der Geometrie, als in der Theorie, obgleich er eine Menge Manuscripte in Beziehung auf letztere hinterliess, gab bei Gelegenheit einer trigonometrischen Rechnung die abgekürzte Rechnungsart an Herwart von Hohenburg, welcher sie Keplern schickte, der, sehr erfreut darüber, in einem Briefe an letzteren sich folgendermassen ausspricht: Calculum Praetorii in magni beneficii loco habeo, qui duas obliquangulorum sphaericorum formas singulis operationibus solvere exemplo docet. Quidam in dolabra occupati paranda, ad aedificationem nunquam veniunt. Ego, contrario vitio, dolabra destitutus ridicule aedifico. Magnas itaque gratias ago pro tam commoda dolabra. Opto mihi familiaritatem hominis, ut exempla per alias etiam formas ab ipso habere possim.

Zum andern, so ist nit ohn, das die sinus nit auff das allerscherffeste gerechnet seind, obwol Pitiscus bey der Correctione Operis Palatini etwas gethan *). Hie haben aber E. F. Gnaden das remedium zu Handen, den E. Gnaden Underthan Jost Byrgius hatt die sinus auff ein Neues biss auff acht Figuren gerechnet, und so ich mich recht besinne, auff alle gerade secunda. Er hatt gleichwol das geschriebene Werckh nie von Handen gegeben, noch druckhen lassen. Nit weniger auch ein Engellender Heinricus Briggius gethan, dessen sinus aufs ehist in Truckh kommen sollen. Was dan die Logarithmos anlanget, ist auch nit ohn, wie E. F. Gnaden schreiben, das sie von der berührten Vrsach wegen noch nit gerecht, auch nit können gerecht werden auff die sinus, man habe dan zuvor dieselbe correct. Aber vmb dieser geringen Vrsach wegen, die sie mit den sinibus gemain haben, seind sie darumb nit gleich zu verwerffen. Dan die demonstratio ist gutt, sicher und edel. Allein kan man die processe mit denselben nit alwegen nach Pitisco anstellen, sondern es ist besser in sphäricis obliquangulis, das man durch perpendiculares rechne, wa man kan.

Item so seind albereit im Druckh (zu London gedruckt anno 1620) sinus Edmundi Guntheri Angli, die seind scherffer dan des Ursini oder auch des ersten Erfinders Baronis Merchistonii. Darumb ich zu Abschneidung viler vergeblichen Mühe meniglichen räthlich sein wolte, sich mit Ernst an dieselbe zu gewehnen. Auss sollichen Edm. Guntheri Logarithmis rechne Ich das fürgelegte Triangulum (Taf. IX. Fig. 3.) also:

AC datur 23° 31′ 30″.
BC „ 23 . 58 . 0. Quaeritur AB? et BAC?
ACB „ 6 . 41 . 0.

Ducatur ex A perpendicularis in CB, quae sit AP

Log. AC = 9601.1352
Log. ACP = 9065.8852

Ergo τῆς AP Log. = 8667.0204. Hujus Mesolog. **) 9999.5308
Mesolog. AC 9962.3703
37.1605
Hujus Compl. 9962.8395.

*) Thesaurus Mathematicus, ... a Rhetico olim supputatus, nunc primum in lucem edit. a Barth. Pitisco Grünbergensi Silesio. Frankf. 1613.

**) Das Wort Mesologarithmus bedeutet hier Cosinus, während in

Ergo Arcus *CP* ex Mesolog. 9962.8395 $23^{\circ}\,21'\,56''$

Hic ablatus a *BC* 23.58. 0

dat *BP* 0.36. 4.

Hujus Mesologar. 9999.9760

Adde Mesologarithmum *AP* 9999.5308

Ergo *AB* $2^{\circ}\,43'\,48''$ ex Mesolog. 9999.5068.

Declinatio igitur 87.16.12.

Jam ex $\left.\begin{matrix} AC,\ CP \\ AB,\ BP \end{matrix}\right\}$ quaeritur $\left\{\begin{matrix} PAC \\ PAB \end{matrix}\right.$ per contrapositionem laterum et angulorum.

Log. *AC* 9601.1352 (Sub.)	Log. *AB* 8677.8744 sub.
Log. *CP* 1.9598.3481	Log. *BP* 1.8020.8133
Log. 9997.2129	9342.9389
PAC est $83^{\circ}\,30'\,57''$	*PAB* est $12^{\circ}\,43'\,28''$
12.43.28	

Totus *BAC*. 96.14.25, igitur Ascensio recta $6^{\circ}\,14'\,25''$.

Allhie seind zwo Additiones und drey Subtractiones, das ist es alles mit einander.

So viel hab Ich für dissmahl auf E. F. Gnaden Befehl von baiden Puncten zu antworten gehabt. Wölchem Ich ferners diess beysetze, das Ich mich eben zu dem End (weil man die Logarithmos den sinibus nit anderst geben und dieselbe corrigiren kan, man habe dan die Logarithmos numerorum absolutorum) vor zwaien Jahren, nemlich sobald Ich nach glücklicher Schlichtung meiner Mutter Rechtssach, wieder nacher Lintz kommen, hinter die Demonstrationem Logarithmorum gemacht, dieselbige sampt der Chiliade Logarithmorum ad septem digitos absoluti numeri maximi, seu 100000.00 continuatorum nacher Tübingen zu Handen Herrn M. Michaelis Maestlini geschicket, ob etwa solliche unter seiner correction alda gedruckt werden möchten. Weil aber disser gutte alte Man nunmehr zu khainer Resolution weitters nit zu bringen ist, unangesehen er stettigs fürhabens ist, sich selber auch hinter

---

Neper's Tafeln durch diesen Ausdruck die Tangente bezeichnet wird. Günther soll übrigens zuerst die Bezeichnung Cosinus gebraucht haben. In Beziehung auf obige Rechnung ist zu bemerken: dass es anstatt Log. *AC*, Log. *ACP* heissen sollte Log. Sin. *AC* etc.

das Werckh Logarithmorum zu machen: also hab Ich endlich mit einer zimmlichen importunitet in Ine stehen, und das Wercklin zurückh abfordern lassen, wölches anjetzo bey Schickharden professore linguarum Orientalium behaltsweis hinterlegt ist. Weil dan E. F. Gnaden diss Werklin dedicirt ist, also stelle E. F. Gn. Ich es haim, Ob sie solches zu Tübingen unter Schickards Correctur wollen zu druckhen befehlen, oder ob sie zu Franckfort Jemand Tauglichen haben, der vleissig corrigire, weil alda schöne Typi seind, auff wöllichen Fall E. F. Gn. solches Wercklin bey Schickarden zu erheben haben werden.

Hiermit E. F. Gnaden Ich mich zu beharlichen F. Gnaden befehlen, auch denselben sampt Dero Fürstlichen Gemahelin, auch gantzer Freündtschafft ein freüdenreich Neü Jahr von dem Almechtigen gewünschet haben will.

E. F. Gnaden

Vnderthäniger und
gehorsamer

Johan Keppler
Mathematicus.

Die von Kepler erwähnte „Rechtssach" seiner Mutter ist der vielbesprochene Hexenprocess derselben, welcher im Ganzen sieben Jahre dauerte und blos durch die persönliche Anwesenheit ihres berühmten Sohnes zu einem für sie glücklichen Ende gebracht werden konnte.

Ueber die Unterschrift des vorstehenden, von Kepler eigenhändig geschriebenen Briefes ist Folgendes zu bemerken: Kepler schrieb, wie damals viele Andere, seinen Namen nicht immer auf die gleiche Weise, liess wohl auch den Setzern hierin freie Hand. So finden wir auf den Titeln der in Grätz gedruckten Kalender: „Schreib Calender, gestelt durch M. J. Kheplerum", in seinen späteren Schriften schrieb er abwechselungsweise seinen Namen bald mit einem, bald mit zwei p, meist jedoch mit einem; in den vielen eigenhändigen Briefen, die ich benutzte, beinahe immer auf die erste Art. Dieser Grund bestimmte mich, letztere Schreibweise beizubehalten, wie ich dieses auch schon an anderen Orten auseinandergesetzt habe.

Ueber Mästlin's Saumseligkeit klagt Schickard in einem Schreiben an Kepler (20. Sept. 1623) und sagt: „Ich muss kurz seyn, denn Mästlin hielt mich bis diesen Augenblick hin, obgleich

ich in der ganzen lezten Woche täglich in ihn drang, mir deine Logarithmen herauszugeben. Den Grund seines Zögerns kann ich nicht erklären." In einer Nachschrift setzt Schickard jedoch hinzu: „Der Bote hatte seine Abreise auf gestern Mittag festgesezt, weshalb ich eilig einige Linien an dich schrieb. Endlich erhielt ich nach mancherley Ausflüchten von Mästlin die Logarithmen. Ich werde dieselben bei mir aufbewahren, bis du mir einen Brief an den Landgrafen schickst, welchen ich denselben beilegen kann." Dieser Brief scheint bald darauf angelangt zu sein, denn Schickard schreibt (den 6. Juni 1624): „deine Logarithmen habe ich im vorigen Herbste richtig und sorgfältig bestellt. Ich zweifle auch nicht, dass sie der Landgraf erhalten hat, obgleich ich keine Antwort bekommen habe." Dass das Manuscript an Ort und Stelle gekommen, erhellt aus folgendem Schreiben:

Philips von Gottes Gnaden Landgrave zu Hessen etc.

Vnsern gnädigen Gruss zuvor, Wolgelehrter, lieber besonderer.

Wir haben Euer Antwortschreiben empfangen, darauss euer Gutachten auch mit mehreren vernommen. Mögen darauf in Gnaden Euch vnverhalten, dass Vns in nechst verschiener Fastenmess die Logarithmi gleichfalss zugeschickt worden, welche Wir zwar dem bono publico nicht verhalten, sondern gern zu Franckfurtt getruckt sehen mögen. Weil aber daselbsten Niemandt sich dessen vnterfangen wöllen, haben Wir das Werck einem Buchtrucker zu Giessen, Caspar Chemlin genandt, zu trucken vntergeben, welcher es auch also aussgefertiget, wie Ihr selbsten auss beygefügten exemplarien (deren Wir Euch hiermit zehen überschicken) zu sehen.

Sintemahl auch Vns die dedication zugeschrieben, so haben wir Euch hinwider 50 Reichsthaler loco remunerationis dediciren und gnädig verehren wöllen, beneben fernerm gnädigen gesinnen, Ihr den Usum gedachter Logarithmorum Uns zu communiciren, und da es Gelegenheit geben wolte, von den Tychonischen Instrumenten etwas zu erlangen, an solcher Beförderung nichts unterlassen wollet, daran beschehe Vns zu sondern Gefallen, so wir danckbarlich zu verschulden, auch jeder Zeit Euch gnädigen Willen zu erweisen geneigt.

Datum Butzbach den 7. Sept. anno 1624.

Philips LzH.

Dem in diesem Briefe geäusserten Verlangen Philipps, „den usum gedachter Logarithmorum“ zu erhalten, scheint Kepler eilig nach-, wo nicht zuvorgekommen zu sein. In der schon erwähnten Vorrede zu dem „Supplementum Log.“ schreibt er nemlich, er habe aus dem Frankfurter Messkataloge zuerst erfahren, dass sein Buch gedruckt werde, sowie ganz neuerdings gehört, dass ein Schreiben des Landgrafen an ihn unterwegs sei, und er vermuthe, in diesem Schreiben werde das Verlangen an ihn gestellt werden, dass er über den Gebrauch der Logarithmen nachträglich Etwas bekannt mache.

Die Antwort Philipps auf Kepler's Sendung ist vom 23. April 1625, und lautet folgendermassen:

Philips von Gottes Gnaden Landgrave zu Hessen etc.

Vnsern gnädigen Gruss bevor, Hochgelehrter, lieber besonderer.

Wir haben Euer Schreiben beneben dem geschriebenen Tractat de usu Logarithmorum zu recht eingeliefert empfangen, daraus auch Eure Intention mit mehrerem vernommen, insonderheit, dass unsere in verschienener Frankf. Herbstmess an Euch ausgefertigte Schreiben, darbey 10 exemplaria chiliadis Logarithmorum, beneben 50 Reichsthaler eingepackt, Euch noch nicht zukommen, welches zwar G. Tampachs Bericht nach allein aus Mangel sicherer Gelegenheit geschehen, weil aber derselbe sich vernehmen lassen, solches jeziger Fastmess Euch zuzuschicken, zweifeln wir nicht daran, er solches seiner Erklärung nach also verrichten werde. Sonsten möchten wir wünschen, dass die Druckfertigung Chiliadis Logarithmorum nach Eurem Begehren effectuirt worden, haben des Endes selbige auch ermeltem Tampacher zumuthen lassen, weil er aber sich sehr difficultirt, ists hernacher an ein andern kommen, welcher in dergleichen typis vielleicht nicht sehr wohl versiert gewesen und dannenhero formam compendiosiorem nicht in acht genommen; weil auch damals die Mess herbey gerucket, hat die Eilfertigkeit etliche errata darinn ersitzen lassen, welche doch künftig noch wohl zu corrigiren. Ebenderselbige Buchtrucker, welcher nunmehr zu Marpurg seine haussliche Wohnung helt, der will auch itzige überschickte praecepta zu trucken sich unterfangen und uff künftige Herbstmess aussfertigen, auch die typos numericos apicatos sonderlich darzu giessen lassen, wofern er nur in Zeiten den titulum, dedicationem, appendicem und indicem, welche zweifelsohne Kulsnerus der Buchtrucker zu Marburg noch unter Handen hat, bekommen kann, und wenn dieser solche auch geliefert und alles semmentlich uns zugeschickt, hette es vielleicht in catalogum noch können gebracht werden, wiewohl hieran noch zur Zeit nichts verweillet, sondern was itzund verplieben in promittendo, kan künftig resarciret und ersetzt werden in exhibendo.

Schliesslich achten wir ohne Noth, voriges Vnsers Schreibens, so (zweiffels ohn) Euch nunmehr zukommen, contenta anher zu erholen, sondern erwarten darauf Eure Erklärung und verpleiben Euch in Gnaden gewogen.

Dat. Butzbach etc.

Philips.

(Addr.: Dem Hochgelerten Vnserem lieben besondern, Johann Kepplero, der Röm. Kays. Maytt vornehmen Mathematico,

Anjzu zue Lintz.)

Ein vierter Brief Philipps an Kepler (15. Januar 1627) betrifft die Rudolphinischen Tafeln. In demselben benachrichtigt Philipp den in Ulm befindlichen Kepler, dass er seinetwegen an „Vnsers lieben Vettern und Sohns Herrn Georgen Landgraven zu Hessen etc., Agenten zu Wien“ geschrieben habe.

Ich bemerke noch zum Schlusse, dass dieser Landgraf Philipp der zweite Sohn des Landgrafen Georg von Hessen-Darmstadt war, der nach dem Regierungs-Antritt seines älteren Bruders Ludwig V. gegen Abtretung eines Theils seiner Apanage Stadt und Amt Butzbach erblich erhielt. Er verunglückte im Bade, 62 Jahre alt, im Jahre 1643. (Vgl. Rommel, Gesch. von Hessen, VI. Bd. S. 239.)

XXI.

Darstellung der Potenzen des Cosinus und Sinus eines Winkels durch Cosinusse und Sinusse der vielfachen Winkel.

Von

Herrn Professor Dr. *J. Ph. Wolfers*

zu Berlin.

In den verschiedenen Lehrbüchern der Analysis findet man die Ausdrücke der Potenzen vom Cosinus und Sinus eines Winkels durch Cosinusse und Sinusse der vielfachen Winkel; zum Theil ersieht man aber nicht das Gesetz, wonach diese letztern Ausdrücke fortgehen, zum Theil ist die Art ihrer Herleitung etwas weitläufig, endlich fehlt der Beweis ihrer Allgemeingültigkeit. Bei der häufigen Anwendung, welche von dieser Umformung gemacht zu werden pflegt, schien es nicht unangemessen, hier eine einfache Herleitung dieser Ausdrücke und zugleich einen Beweis durch Induction für ihre Allgemeingültigkeit mitzutheilen. Zunächst folgen hier einige Sätze der Binomial-Coefficienten, welche hierbei in Anwendung kommen und wobei wir uns der vielfach gebräuchlichen Bezeichnung n_m bedienen wollen.

§. 1. Sind nun n und m positive ganze Zahlen, so hat man:

1) $$n_m = n_{n-m},$$

2) $$n_m + n_{m+1} = (n+1)_{m+1},$$

3) $$(2\lambda+1)_{\lambda+1} = \tfrac{1}{2}(2\lambda+2)_{\lambda+1}.$$

Die beiden ersten Gleichungen sind bekannt genug, so dass sie weder einer Erläuterung, noch eines Beweises bedürfen; die weniger verbreitete dritte, in welcher λ jede beliebige positive ganze Zahl bezeichnet, möge hier als richtig dargethan werden. Es ist aber:

$$\text{A.}\qquad (2\lambda+1)_{\lambda+1}=\frac{(2\lambda+1)(2\lambda)(2\lambda-1)\ldots.(\lambda+2)(\lambda+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots.\;\lambda\;.\;(\lambda+1)},$$

ferner

$$(2\lambda+2)_{\lambda+1}=\frac{(2\lambda+2)(2\lambda+1)2\lambda\ldots.(\lambda+3)(\lambda+2)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots.\;\lambda\;.\;(\lambda+1)}$$

$$=\frac{(2\lambda+1).2\lambda\ldots.(\lambda+3)(\lambda+2)}{1\;.\;2\ldots.(\lambda-1)\;\;\lambda}\cdot\frac{2\lambda+2}{\lambda+1}$$

oder

$$\text{B.}\qquad (2\lambda+2)_{\lambda+1}=2\cdot\frac{(2\lambda+1)2\lambda\ldots.(\lambda+2)(\lambda+1)}{1\;.\;2\;\ldots.\;\lambda\;.\;(\lambda+1)},$$

mithin nach A. und B.:

$$(2\lambda+1)_{\lambda+1}=\tfrac{1}{2}(2\lambda+2)_{\lambda+1}.$$

Ausserdem mag noch

$$4)\qquad n_n=(n+1)_{n+1}=1$$

angeführt werden.

§. 2. Wir entnehmen nun der Trigonometrie die bekannte Formel:

$$5)\qquad 2\cos a\cos b=\cos(a-b)+\cos(a+b),$$

von welcher wir hier wiederholten Gebrauch machen wollen. Setzen wir in derselben $b=a$, so erhalten wir die bekannte Formel

$$6)\qquad 2^1.\cos a^2=1+\cos 2a,$$

und wenn wir diese mit $2\cos a$ multipliciren:

$$2^2.\cos a^3=2\cos a+2\cos a\cos 2a,$$

d. h. nach 5):

$$7)\qquad 2^2.\cos a^3=3\cos a+\cos 3a=3_2\cos a+3_3\cos 3a.$$

Multipliciren wir auch diese Gleichung wieder durch $2\cos a$, so erhalten wir, indem wir den letzten Werth benutzen:

$$2^3.\cos a^4=3_2.2\cos a^2+3_3.2\cos a\cos 3a$$

$$=3_2(1+\cos 2a)+3_3(\cos 2a+\cos 4a)$$

$$=3_2+(3_2+3_3)\cos 2a+3_3\cos 4a,$$

d. h. weil nach 3):

$$3_2 = \tfrac{1}{2}.4_2,$$

nach 2):

$$3_2 + 3_3 = 4_3$$

und nach 4):

$$3_3 = 4_4:$$

$$2^3 \cos a^4 = \tfrac{1}{2}.4_2 + 4_3 \cos 2a + 4_4 \cos 4a. \tag{8}$$

Wir wollen auch diese Gleichung noch durch $2\cos a$ multipliciren, und erhalten alsdann:

$$\begin{aligned} 2^4 \cos a^5 &= 4_2 \cos a + 4_3 . 2\cos a \cos 2a + 4_4 . 2\cos a \cos 4a \\ &= (4_2 + 4_3)\cos a + (4_3 + 4_4)\cos 3a + 4_4 \cos 5a \end{aligned}$$

oder

$$2^4 \cos a^5 = 5_3 \cos a + 5_4 \cos 3a + 5_5 \cos 5a. \tag{9}$$

Gesetzt, es sei nun

$$\left.\begin{aligned} 2^{2\lambda} \cos a^{2\lambda+1} &= (2\lambda+1)_{\lambda+1} . \cos a + (2\lambda+1)_{\lambda+2} . \cos 3a \\ &\quad + (2\lambda+1)_{\lambda+3} . \cos 5a + \text{etc.}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

alsdann wird, indem wir auf beiden Seiten durch $2\cos a$ multipliciren:

$$\begin{aligned} 2^{2\lambda+1} \cos a^{2\lambda+2} &= (2\lambda+1)_{\lambda+1} . 2\cos a^2 + (2\lambda+1)_{\lambda+2} . 2\cos a \cos 3a \\ &\qquad + (2\lambda+1)_{\lambda+3} . 2\cos a \cos 5a + \text{etc.} \\ &= (2\lambda+1)_{\lambda+1} + [(2\lambda+1)_{\lambda+1} + (2\lambda+1)_{\lambda+2}] \cos 2a \\ &\qquad + [(2\lambda+1)_{\lambda+2} + (2\lambda+1)_{\lambda+3}] \cos 4a \\ &\qquad + [(2\lambda+1)_{\lambda+3} + (2\lambda+1)_{\lambda+4}] \cos 6a \\ &\qquad \text{etc.}, \end{aligned}$$

offenbar also, indem beim ersten Gliede Formel 3) und bei den folgenden Formel 2) in Anwendung gebracht wird:

$$\left.\begin{aligned} 2^{2\lambda+1} \cos a^{2\lambda+2} &= \tfrac{1}{2}(2\lambda+2)_{\lambda+1} + (2\lambda+2)_{\lambda+2} \cos 2a \\ &\quad + (2\lambda+2)_{\lambda+3} \cos 4a + (2\lambda+2)_{\lambda+4} \cos 6a + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Diese Gleichung multiplicire man auf beiden Seiten wieder durch $2\cos a$, alsdann wird:

$$2^{2\lambda+2}\cos a^{2\lambda+3} = (2\lambda+2)_{\lambda+1}\cos a + (2\lambda+2)_{\lambda+2}.2\cos a\cos 2a$$
$$+ (2\lambda+2)_{\lambda+3}.2\cos a\cos 4a + \text{etc.}$$
$$= [(2\lambda+2)_{\lambda+1} + (2\lambda+2)_{\lambda+2}]\cos a$$
$$+ [(2\lambda+2)_{\lambda+2} + (2\lambda+2)_{\lambda+3}]\cos 3a$$
$$+ [(2\lambda+2)_{\lambda+3} + (2\lambda+2)_{\lambda+4}]\cos 5a$$
$$+ \text{etc.}$$

oder nach 2):

$$12)\quad \begin{cases} 2^{2\lambda+2}\cos a^{2\lambda+3} = (2\lambda+3)_{\lambda+2}\cos a + (2\lambda+3)_{\lambda+3}\cos 3a \\ \qquad + (2\lambda+3)_{\lambda+4}\cos 5a + \text{etc.} \end{cases}$$

Wenn wir auch diese Gleichung noch durch $2\cos a$ multipliciren, so wird, eben so wie 11) aus 10), jetzt hervorgehen:

$$13)\quad \begin{cases} 2^{2\lambda+3}\cos a^{2\lambda+4} = \tfrac{1}{2}(2\lambda+4)_{\lambda+2} + (2\lambda+4)_{\lambda+3}\cos 2a \\ \qquad + (2\lambda+4)_{\lambda+4}\cos 4a + \text{etc.} \end{cases}$$

Findet also das in 7) und 9) für bestimmte ungerade Exponenten dargestellte Gesetz nach 10) für einen unbestimmten ungeraden Exponenten statt, so gilt es nach 12) auch für den nächstfolgenden ungeraden Exponenten. Eben so wird das in 6) und 8) für bestimmte gerade Exponenten dargestellte Gesetz nach 13) für $2\lambda+4$ gelten, wenn es nach 11) für $2\lambda+2$ als gültig angenommen wird. Beide Gesetze sind demnach allgemein gültig.

§. 3. Setzt man daher allgemein

$$\cos\varphi^{2\lambda-1} = A\cos\varphi + B\cos 3\varphi + C\cos 5\varphi + \text{etc.},$$

so wird nach 10):

$$A = \frac{1}{2^{2\lambda-2}}.(2\lambda-1)_\lambda = \frac{1}{2^{2\lambda-2}}.\frac{(2\lambda-1)(2\lambda-2)\ldots.(\lambda+1)\lambda}{1.2\ldots.(\lambda-1)\lambda}$$
$$= \frac{1}{2^{\lambda-2}.2^\lambda}.\frac{(2\lambda-1)(2\lambda-2)\ldots.(\lambda+1)\lambda}{1.2\ldots.(\lambda-1)\lambda}.\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots.2.1}{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots.2.1}$$
$$= 2.\frac{(2\lambda-1)(2\lambda-2)\ldots.\lambda.(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots.2.1}{2.4\ldots.(2\lambda-2)2\lambda(2\lambda-2)(2\lambda-4)\ldots.4.2},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner durch alle in dem erstern vorkommenden geraden Factoren dividirt:

$$14)\quad A = 2.\frac{1.3.5\ldots.(2\lambda-1)}{2.4.6\ldots.2\lambda}.$$

Diess ist einer der Ausdrücke, welcher in **Euler's „Institutionum calculi integralis volumen primum** §. 272." vorkommt. Statt desselben erhält man auch leicht den a. a. O. vorkommenden zweiten Ausdruck:

15) $$A=\frac{2}{2^{2\lambda-1}}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{14}{4}\cdots\frac{4\lambda-2}{\lambda}.$$

Da ferner nach 10):

$$A=\frac{1}{2^{2\lambda-2}}(2\lambda-1)_\lambda,\quad B=\frac{1}{2^{2\lambda-2}}(2\lambda-1)_{\lambda+1},\quad C=\frac{1}{2^{2\lambda-2}}(2\lambda-1)_{\lambda+2},$$
etc.,

so wird, wenn man sich die verschiedenen Binomial-Coefficienten entwickelt denkt:

16) $$B=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}A,\quad C=\frac{\lambda-2}{\lambda+2}B,\quad D=\frac{\lambda-3}{\lambda+3}C,\text{ etc.}$$

Diese Formeln, welche ebenfalls a. a. O. vorkommen, dienen dazu, um aus einem bekannten Coefficienten den nächstfolgenden auf einfache Weise herzuleiten.

§. 4. Setzt man

$$\cos\varphi^{2\lambda}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos 2\varphi+\mathfrak{C}\cos 4\varphi+\mathfrak{D}\cos 6\varphi+\text{etc.},$$

so wird nach 11):

$$2^{2\lambda-1}\cos\varphi^{2\lambda}=\tfrac{1}{2}(2\lambda)_\lambda+(2\lambda)_{\lambda+1}.\cos 2\varphi+(2\lambda)_{\lambda+2}.\cos 4\varphi$$
$$+(2\lambda)_{\lambda+3}\cos 6\varphi+\text{etc.},$$

also

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{2^{2\lambda}}.(2\lambda)_\lambda=\frac{1}{2^\lambda.2^\lambda}.\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots.(\lambda+1)}{1.2\ldots.\lambda}.\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots.2.1}{\lambda(\lambda-1)\ldots.2.1}$$
$$=\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots.(\lambda+1)\,\lambda(\lambda-1)\ldots.2.1}{2.4\ldots.2\lambda.2\lambda.(2\lambda-2)\ldots.4.2},$$

also wie vorhin:

17) $$\mathfrak{A}=\frac{1.3.5\ldots.(2\lambda-1)}{2.4.6\ldots.2\lambda}$$

und

18) $$\mathfrak{A}=\frac{2}{2^{2\lambda-1}}.\frac{6}{2}.\frac{10}{3}\cdots\frac{(4\lambda-2)}{\lambda}.$$

Diese beiden Ausdrücke kommen ebenfalls a. a. O. vor, so wie die den obigen Formeln 16) analogen, um aus einem Coefficienten einfach den nächst folgenden herzuleiten; nämlich:

$$19)\qquad \mathfrak{B}=\frac{2\lambda}{\lambda+1}\mathfrak{A},\quad \mathfrak{C}=\frac{\lambda-1}{\lambda+2}\mathfrak{B},\quad \mathfrak{D}=\frac{\lambda-2}{\lambda+3}\mathfrak{C},\ \text{etc.},$$

von deren Richtigkeit man sich durch Entwickelung der betreffenden Binomial-Coefficienten leicht überzeugt.

§. 5. Wollte man auf ähnliche Weise die den Potenzen eines Sinus entsprechenden Reihen, welche theils nach Sinussen, theils nach Cosinussen der vielfachen Winkel fortschreiten, direct herleiten, so würde diess keine Schwierigkeit haben; statt der der Trigonometrie entnommenen Gleichung 5) würde man hier abwechselnd die zwei:

$$2\sin a\sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b),$$
$$2\cos a\sin b=\sin(a+b)-\sin(a-b)$$

in Anwendung zu bringen haben. Man kann sich aber diese Mühe ersparen und vielmehr die den Gleichungen 10) und 11) für den Sinus entsprechenden unmittelbar hinschreiben, wenn man statt a setzt 90^0-a und erwägt, dass alsdann

$$\begin{array}{lcl}\cos a & \text{in} & +\sin a,\\ \cos 2a & ,, & -\cos 2a,\\ \cos 3a & ,, & -\sin 3a,\\ \cos 4a & ,, & +\cos 4a\\ & \text{etc.} & \end{array}$$

übergeht. Hiernach wird man sogleich erhalten:

$$10^a)\quad \left\{\begin{array}{l}2^{2\lambda}\sin a^{2\lambda+1}=(2\lambda+1)_{\lambda+1}.\sin a-(2\lambda+1)_{\lambda+2}.\sin 3a\\ \qquad +(2\lambda+1)_{\lambda+3}.\sin 5a-\text{etc.},\end{array}\right.$$

$$11^a)\quad \left\{\begin{array}{l}2^{2\lambda+1}\sin a^{2\lambda+2}=\tfrac{1}{2}(2\lambda+2)_{\lambda+1}-(2\lambda+2)_{\lambda+2}.\cos 2a\\ \qquad +(2\lambda+2)_{\lambda+3}.\cos 4a-\text{etc.},\end{array}\right.$$

woraus man ersieht, dass eine ungerade Potenz von $\sin a$ durch lauter Sinusse, eine gerade Potenz durch lauter Cosinusse der Vielfachen von a ausgedrückt wird.

§. 6. Um ein Beispiel zur Anwendung dieser Umformung hinzuzufügen, möge hier die in Band XXI. dieses Archivs bereits behandelte Aufgabe folgen, den Bruch $\dfrac{1}{1-\mu\cos\varphi}$ in eine Reihe von der Form:

$$a+b\cos\varphi+c\cos 2\varphi+d\cos 3\varphi+e\cos 4\varphi+\text{etc.}$$

zu verwandeln.

Es wird unmittelbar

$$\frac{1}{1-\mu\cos\varphi}=1+\mu\cos\varphi+\mu^2\cos\varphi^2+\mu^3\cos\varphi^3+\mu^4\cos\varphi^4+\text{etc.},$$

und wenn wir statt der Potenzen von $\cos\varphi$ die Werthe nach 10) und 11) substituiren:

$$\begin{array}{lll|ll|ll|l}
\frac{1}{1-\mu\cos\varphi}=1 & & +\mu & \cos\varphi+\frac{1}{2}\mu^2 & & \cos 2\varphi+\frac{1}{4}\mu^3 & & \cos 3\varphi\ \text{etc.} \\
 & +\frac{1}{2}\mu^2 & +\frac{3}{4}\mu^3 & & +\frac{4}{8}\mu^4 & & +\frac{5}{16}\mu^5 & \\
 & +\frac{3}{8}\mu^4 & +\frac{10}{16}\mu^5 & & +\frac{15}{32}\mu^6 & & +\frac{21}{64}\mu^7 & \\
 & +\frac{10}{32}\mu^6 & +\frac{35}{64}\mu^7 & & +\frac{56}{128}\mu^8 & & \vdots & \\
 & +\frac{35}{128}\mu^8 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \text{etc.} & & & & & &
\end{array}$$

Nimmt man nun

$$20)\qquad \frac{1}{1-\mu\cos\varphi}=a+b\cos\varphi+c\cos 2\varphi+d\cos 3\varphi+e\cos 4\varphi+\text{etc.}$$

an, so wird nach vorstehender Entwickelung:

$$a=1+\frac{1}{2}\mu^2+\frac{3}{8}\mu^4+\frac{10}{32}\mu^6+\frac{35}{128}\mu^8+\text{etc.}$$

$$=1+\frac{1}{2}\mu^2+\frac{1.3}{2.4}\mu^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}\mu^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\mu^8+\text{etc.}$$

offenbar also ohne nothwendige Umformung:

$$21)\qquad a=\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Man würde auf dieselbe Weise geschlossene Ausdrücke für die folgenden Coefficienten b, c, d, e, etc. erhalten können, indessen wird sich dasselbe einfacher auf folgende Weise ergeben. Man multiplicire die Gleichung 20) durch den Nenner $1-\mu\cos\varphi$, ordne auf der rechten Seite, unter Benutzung der Formel 5), nach den Cosinussen der vielfachen Winkel; alsdann erhält man die Gleichung:

$$22)\quad 1 = \begin{array}{l|l|l|l|l} a \quad +b & \cos\varphi + c & \cos 2\varphi + d & \cos 3\varphi + e & \cos 4\varphi \\ \qquad -a\mu & -\tfrac{1}{2}b\mu & -\tfrac{1}{2}c\mu & -\tfrac{1}{2}d\mu & +\text{etc.} \\ -\tfrac{1}{2}b\mu - \tfrac{1}{2}c\mu & -\tfrac{1}{2}d\mu & -\tfrac{1}{2}e\mu & -\tfrac{1}{2}f\mu & \end{array}$$

und da diese Gleichung für jeden beliebigen Werth von φ stattfinden muss:

$$23)\quad \left\{\begin{array}{l} b = \dfrac{2}{\mu}(a-1), \\[2ex] c = \dfrac{2}{\mu}b - 2a, \\[2ex] d = \dfrac{2}{\mu}c - b, \\[2ex] e = \dfrac{2}{\mu}d - c, \\[1ex] \quad \text{etc.} \end{array}\right.$$

Aus diesen Formeln erhält man, unter Benutzung des Werthes von a aus 21):

$$24)\quad \left\{\begin{array}{l} b = \dfrac{2}{\mu}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} - 1\right) = \dfrac{2}{\sqrt{1-\mu^2}} \cdot \dfrac{1-\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}, \\[3ex] c = \dfrac{2}{\sqrt{1-\mu^2}}\left[\dfrac{2-2\sqrt{1-\mu^2}}{\mu^2} - 1\right] = \dfrac{2}{\sqrt{1-\mu^2}}\left(\dfrac{1-\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\right)^2, \\[3ex] d = \dfrac{2}{\sqrt{1-\mu^2}} \cdot \dfrac{1-\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\left[\dfrac{2-2\sqrt{1-\mu^2}}{\mu^2} - 1\right] \\[3ex] \qquad\qquad\qquad\qquad = \dfrac{2}{\sqrt{1-\mu^2}}\left(\dfrac{1-\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\right)^3, \\[3ex] e = \dfrac{2}{\sqrt{1-\mu^2}} \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\right)^2\left[\dfrac{2-2\sqrt{1-\mu^2}}{\mu^2} - 1\right] \\[3ex] \qquad\qquad\qquad\qquad = \dfrac{2}{\sqrt{1-\mu^2}}\left(\dfrac{1-\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\right)^4, \\[2ex] \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right.$$

Mittelst der so gefundenen Werthe erhält man für

$$\frac{1}{1-\mu\cos\varphi}$$

dieselbe Reihe, welche im Archiv Bd. XXI. Pag. 194. unter No. 14. aufgeführt ist.

Bei dieser Gelegenheit möge noch bemerkt werden, dass in der Ueberschrift meines früheren Aufsatzes die Coefficienten der Winkel falsch angesetzt sind, was übrigens aus dem Resultate der dortigen Untersuchung sogleich hervorgeht.

XXII.

Ueber die Beschreibung der regulären Vielecke.

Von

Herrn Professor *J. K. Steczkowski*

an der Universität zu Cracau.

Vor einiger Zeit kam zufällig eine praktische Geometrie in meine Hände, welche folgenden Titel führt: „Anweisung zum Zirckel und Lineal Gebrauch so wohl vor die Jugend als Professionisten und Handwerker. Verlegt in Augsburg von Johann Hertel“, ohne Jahreszahl. Das Werk ist auf Kupferplatten gestochen. Es besteht aus 244 Seiten in klein 4° und ist so eingerichtet, dass auf der einen Seite der zur Auflösung einer Aufgabe nöthige Handgriff beschrieben wird und daneben auf der anderen Seite die Auflösung selbst, worunter als Verzierung ein Kupferstich, der irgend eine Stadt, ein Schloss oder eine Gegend u. dergl. vorstellt, sich befindet. Der Verfasser dieser Geometrie ist mir unbekannt, weil er seinen Namen nicht beigesetzt hat; allein aus den Gegenständen, deren Abbildungen jede Aufgabe schmücken, kann man sicher schliessen, dass er ein Ungar war, denn alle Städte, die hier vorkommen, sind ungarische Städte. Das ganze Werk ist in sechs Bücher eingetheilt. Darunter enthält das dritte Buch Aufgaben von Einschreibungen regelmässiger Figuren in einen gegebenen Kreis oder in andere Vielecke. Die siebente von diesen Aufgaben lautet folgendermassen: „In einen jeden vorgegebenen Circkel ein solches Regular Viel-Ecke einzuschreiben als man verlanget, oder den Circkel-Creyss in so viel gleiche Theile abzutheilen, als man begehrt.“ Ich gebe die Auflösung dieser Aufgabe wortgetreu wie sie in dem Werke vorkommt. (Taf. X. Fig. 1.)

Der gegebene Circkel seye . . . . . . *AKB*

Man verlanget z. E. darein ein Regular-Dreyzehen-Eck einzuschreiben.

Hand-Griff.

Ziehe den Diameter . . . . *AB*
Aus dem Punct . . . . *A*
Ziehe nach gebührlicher Länge eine gerade Linie . *AC*
trage darauf (:angefangen von dem Punct:) . . *A*
gleiche dreyzehen Theile
Ziehe zusammen den letzten Theil mit einer Linie aus *B*
Durch den Theil oder Zahl 2
Ziehe die gerade Linie . . . . *EFD*
welche Parallel lauffe mit der Linie 13*B*
und den Diameter durchschneide in dem Punct . *F*
Fasse unterdessen die Weite des Diameters . . *AB*
und schreibe aus denen zwey Puncten . . . *AB*
Zwey gleiche Bögen, welche sich durchcreutzen in . *G*
Aus dem Punct . . . . *G*
und durch den Durchschnitts-Punct . . . . . *F*
Ziehe eine gerade Linie . . . . *GFH*
Der Theil . . . . *AH*
wird ein dreyzehender Theil seyn nach dem Verlangen.

Alle in diesem Werke vorkommende Aufgaben sind auf ähnliche Art aufgelöst.

Ich gestehe, dass ich diese allgemeine Construction nirgends angetroffen habe, und wiewohl sie bloss für die Praxis bestimmt ist, so schien es mir doch von Interesse, zu untersuchen, in wie weit sich diese Construction der Wahrheit nähert. Zu diesem Zwecke habe ich allgemein die Einschreibung eines *n*ecks vorgenommen. Nehmen wir nämlich den Mittelpunkt des gegebenen Kreises zum Anfangspunkte der rechtwinkligen Coordinaten, den Halbmesser des Kreises $=1$, so können wir den Punkt H leicht bestimmen. Es sind nämlich die Coordinaten der Punkte F und G bekannt, also auch die Lage der Geraden HG, deren Gleichung

$$y=\frac{n\sqrt{3}}{n-4}x-\sqrt{3}$$

ist. Verbindet man diese Gleichung mit der des Kreises $x^2+y^2=1$, so findet man die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Peripherie des Kreises, also den Punkt H, für welchen wir

$$x=\frac{(n-4)(3n+\sqrt{n^2+16n-32})}{4(n^2-2n+4)}$$

erhalten. Und weil die Abscisse x nichts anders ist, als der Cosinus des Bogens AH, welcher nach der Construction $=\frac{360^0}{n}$ sein soll, so haben wir auf diese Art:

$$\operatorname{Cos}\frac{360}{n}=\frac{(n-4)(3n+\sqrt{n^2+16n-32})}{4(n^2-2n+4)}.$$

Berechnet man sofort die Cosinus verschiedener Winkel nach dieser Formel und nach den trigonometrischen Tafeln, so wird man aus den Resultaten sehen, in wie weit diese Formel, also auch die obige Construction, richtig ist.

Ich habe für Vielecke sowohl von gerader, als auch von ungerader Anzahl Seiten etliche Cosinus berechnet, und zwar nur bis zur fünften Decimalstelle; ich erhielt dadurch:

Vielecke von gerader Anzahl der Seiten	Resultat aus der Formel	Resultat aus den Tafeln	Differenz
$\text{Cos}\,\frac{360}{4}$	0·00000	0·00000	0·00000
$\text{Cos}\,\frac{360}{6}$	0·50000	0·50000	0·00000
$\text{Cos}\,\frac{360}{8}$	0·70479	0·70711	0·00232
$\text{Cos}\,\frac{360}{10}$	0·80536	0·80902	366
$\text{Cos}\,\frac{360}{12}$	0·86186	0·86602	416
$\text{Cos}\,\frac{360}{14}$	0·89677	0·90097	420
$\text{Cos}\,\frac{360}{16}$	0·91985	0·92388	403
$\text{Cos}\,\frac{360}{20}$	0·94758	0·95106	348
$\text{Cos}\,\frac{360}{84}$	0·99674	0·99720	046

Vielecke von ungerader Anzahl der Seiten	Resultat aus der Formel	Resultat aus den Tafeln	Differenz
$\text{Cos}\,\frac{360}{3}$	—0·50000	—0·50000	0·00000
$\text{Cos}\,\frac{360}{5}$	+ 0·30979	+0·30902	0·00077
$\text{Cos}\,\frac{360}{7}$	0·62227	0·62349	122
$\text{Cos}\,\frac{360}{9}$	0·76292	0·76604	312
$\text{Cos}\,\frac{360}{11}$	0·83709	0·84125	416
$\text{Cos}\,\frac{360}{13}$	0·88124	0·88546	422
$\text{Cos}\,\frac{360}{17}$	0·92857	0·93247	390
$\text{Cos}\,\frac{360}{19}$	0·94212	0·94582	370
$\text{Cos}\,\frac{360}{29}$	0·97426	0·97662	236
$\text{Cos}\,\frac{360}{71}$	0·99547	0·99608	061

Diese Resultate zeigen, dass die grösste Differenz über 0·004 betrage, d. h. nach der angegebenen Construction fällt die Seite eines *n*ecks etwas zu klein aus, was aber für die Praxis ausreichend sein dürfte.

Das zweite Buch dieses Werks ist der Aufgabe, auf einer gegebenen Geraden ein verlangtes regelmässiges Polygon zu errichten, gewidmet. Weil diese Aufgabe in unseren Lehrbüchern der Geometrie sehr spärlich behandelt wird, und da sie mir wenigstens für die Praxis ziemlich wichtig vorkommt, so wurde sie auch Veranlassung gegenwärtiger Mittheilung. Ich suchte nämlich dort, wo es möglich war, die Begründung der in dem besagten Werke vorkommenden Constructionen zu finden und zuletzt allgemein die Aufgabe (es versteht sich nur näherungsweise) aufzulösen. Was den, in dem in Rede stehenden Werke ausgeführten Constructionen meines Erachtens Vorzug gibt, ist dies, dass sie bloss mit Zirkel und Lineal ausgeführt sind, ohne die hölzernen oder messingenen Dreiecke oder Winkelhaken zu gebrauchen; denn dadurch werden alle Senkrechte, Parallele und Berührende schärfer gezogen, eben so die Durchschnittspunkte besser bestimmt.

1. Ich fange mit der Errichtung des Quadrats auf einer gegebenen Geraden an. Die dazu nöthige Construction wird mit einer und derselben Oeffnung des Zirkels folgendermassen zu Stande gebracht. Es sei die gegebene Gerade AB (Taf. X. Fig. 2.); aus ihren beiden Enden A und B beschreibe man mit dem Halbmesser AB zwei Bogen, welche sich im Punkte D durchschneiden. Aus diesem Durchschnittspunkte schneide man mit dem nämlichen Halbmesser den Bogen DC ab; aus den Punkten D und C beschreibe man wieder zwei Bogen, welche sich in E schneiden, und verbinde die Punkte A und E durch die Gerade AE, welche den Bogen DC in F schneidet; zuletzt durchschneide man aus dem Punkte F immer mit demselben Halbmesser AB den aus dem Punkte B beschriebenen Bogen im Punkte G und verbinde die Punkte A, B, G, F durch gerade Linien, so wird man das verlangte Quadrat erhalten. Diese Construction braucht keinen Beweis.

2. Auf einer gegebenen Geraden ein regelmässiges Fünfeck zu construiren.

Die gegebene Gerade sei AB (Taf. X. Fig. 3.). In einem ihrer Enden, z. B. in B, errichte man eine Senkrechte auf AB und schneide darauf $BD = AB$ ab, halbire die gegebene Gerade AB im Punkte C, beschreibe aus diesem Punkte mit dem Halbmesser CD einen Bogen, welcher die verlängerte Gerade AB im Punkte E schneide, so ist die Gerade AE die Diagonale des verlangten Fünfecks. Man errichte also im Punkte C eine Senkrechte auf AB und beschreibe aus dem Punkte A mit dem Halbmesser AE einen Bogen, so wird er die letzte Senkrechte im Punkte F schneiden. Zuletzt beschreibe man aus den Punkten A und F, B und F mit dem Halbmesser AB Bögen, welche sich in den Punkten G und H durchschneiden werden; und wenn man die Punkte A, G; G, F; F, H und H, B durch Gerade verbindet, so wird man das verlangte Fünfeck erhalten. — Um die Richtigkeit dieser Construction sicher zu stellen, muss nur bewiesen werden, dass die Gerade AF wirklich die Diagonale des so construirenden Fünfecks ist. Zu diesem Behufe ziehe man die Gerade CD, so ist $\overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CB}^2$ oder, wenn man $AB = a$ setzt, $CE = \frac{a}{2}\sqrt{5}$, folglich

$$AE = CE + AC = \frac{a}{2}\sqrt{5} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Die Senkrechte CF ist gleich der Summe der Halbmesser des in und um das Fünfeck beschriebenen Kreises, wovon der erste bekanntlich

$$= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}$$

ist, und der zweite

$$= \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}},$$

folglich

$$CF = \frac{a}{2}\left(\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}\right).$$

Da aber im rechtwinkligen Dreiecke ACF, $\overline{AF}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{AC}^2$ ist, so wird

$$\overline{AF}^2 = \frac{a^2}{4}\left(\frac{16 + 4\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{5 - \sqrt{5}}\right) = a^2\left(\frac{4 + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{5 - \sqrt{5}}\right).$$

Aber $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = 1 + \sqrt{5}$, desswegen wird

$$\overline{AF}^2 = a^2\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right) = \frac{a^2(5 + \sqrt{5})^2}{20} = \frac{a^2}{4}\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{5}\right)^2$$

und zuletzt

$$AF = \frac{a}{2} \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}),$$

wie oben. Die vorhergehende Construction löst also die Aufgabe ganz genau auf.

3. Um auf einer gegebenen Geraden ein regelmässiges Sechseck zu errichten, beschreibt man aus den beiden Endpunkten derselben zwei Bogen, deren Durchschnittspunkt den Mittelpunkt des Kreises geben wird, in welchen sich das verlangte Sechseck einschreiben lässt; welche Construction keines Beweises bedarf.

4. Auf einer gegebenen Geraden ein regelmässiges Siebeneck zu errichten.

In dem am Anfange erwähnten Werke wird folgende Construction angegeben. Die gegebene Gerade sei AB. (Taf. X. Fig. 4.) Man verlängere sie bis C so, dass $BC = AB$ sei; aus den Punkten A und C beschreibe man mit dem Halbmesser AC zwei sich im Punkte D durchschneidende Bogen, mit dem nämlichen Halbmesser beschreibe man aus den Punkten D und C zwei andere, sich in E durchschneidende Bogen, verbinde die Punkte B und D, A und E durch die Geraden BD und AE, welche sich in F schneiden. Aus A und B beschreibe man mit dem Halbmesser AF wieder zwei Bogen, welche sich im Mittelpunkte S des Kreises, in welchen das verlangte Siebeneck sich einschreiben lässt, durchschneiden.

Um sich zu überzeugen, in wie weit sich diese Construction der Wahrheit nähert, berechnen wir den Halbmesser des um das erhaltene Siebeneck beschriebenen Kreises aus der bekannten Formel $r = \frac{a}{2 \operatorname{Sin} \frac{180^\circ}{7}}$, in welcher a die Seite des dem Kreise eingeschriebenen Siebenecks ist, und denselben Halbmesser, wie er aus der vorhergehenden Construction folgt. Aus der angeführten Formel ist der Halbmesser $= 1 \cdot 1524 \ldots . a$; um ihn aber aus der Construction zu berechnen, ziehe man die Geraden AD, CD, DE und CE, so ist das Viereck $ACED$ eine Raute, und ihre zwei Diagonalen halbiren sich im Punkte G. Das Dreieck ADC ist gleichseitig, also auch gleichschenklig, desswegen ist BD senkrecht auf AC, und AG senkrecht auf DC; ausserdem ist noch $AG = BD$. Aber diese zwei Senkrechten schneiden sich bekanntlich im Punkte F so, dass $DF = \frac{2}{3} BD$ und $AF = \frac{2}{3} AG$. Weil aber $AG = BD$, so ist $AF = \frac{2}{3} BD$. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke ABD hat man, wenn man $AB = a$ setzt, $BD = a\sqrt{3}$, desswegen ist auch $AF = \frac{2}{3} a\sqrt{3} = 1 \cdot 1547 \ldots . a$. Die zwei für den Halbmesser erhaltenen Werthe unterscheiden sich erst in der dritten Decimale, desswegen scheint diese Construction für die Praxis auszureichen.

5. Auf einer gegebenen Geraden ein regelmässiges Achteck zu errichten, lehrt das mehrmals erwähnte Werk folgendermassen.

Sei die gegebene Gerade AB (Taf. X. Fig. 5.); in ihrer Mitte C errichte man eine auf AB senkrechte Gerade CN und schneide darauf $CD=\frac{1}{2}AB$ ab, aus dem Punkte D schneide man wieder mit dem Halbmesser BA gegen N auf der nämlichen Senkrechten das Stück DE ab, so ist der Punkt E der Mittelpunkt des Kreises, in welchem das verlangte Achteck beschrieben werden kann. Dass diese Construction ganz genau ist, kann sehr leicht bewiesen werden. Im Dreiecke ADC ist nämlich der Winkel $ADC=45^0=DAE+AED=2AED=AEB$. Wir wissen aber, dass in einem regelmässigen Achtecke der Winkel an seinem Mittelpunkte $=\frac{360^0}{8}=45^0$ sei, desswegen ist die obige Construction ganz genau.

6. Auf einer gegebenen Geraden ein regelmässiges Neuneck zu beschreiben, gibt das erwähnte Werk folgende Construction.

Die gegebene Gerade sei AB (Taf. X. Fig. 6.), in ihrer Mitte C errichte man eine auf AB senkrechte Gerade CN, aus dem Punkte A schneide man mit dem Halbmesser AB darauf ein Stück CD ab, von dem Punkte D schneide man gegen N noch ein Stück $DE=\frac{1}{2}AB$ ab, so ist der auf diese Art bestimmte Punkt E der Mittelpunkt des Kreises, in welchem das verlangte Neuneck beschrieben werden kann. — Um zu zeigen, in wie weit diese Construction der Wahrheit sich nähert, muss man AE aus den trigonometrischen Tafeln und aus der obigen Construction berechnen. Aus den Tafeln haben wir

$$AE=\frac{a}{2\text{Sin}\frac{180^0}{9}}=\frac{a}{2\,\text{Sin}\,20^0}=1{\cdot}462\ldots.\,a.$$

Weil nach der Construction $AD=AB=a$ ist, so ist auch

$$CD=\frac{a}{2}\sqrt{3} \text{ und } CE=\frac{a}{2}(1+\sqrt{5}),$$

also

$$AE=\sqrt{\frac{a^2}{4}(5+2\sqrt{3})}=\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{3}}=1{\cdot}454\ldots.\,a;$$

die Differenz ist also $=0{\cdot}008\ldots.\,a$, was auch ein für die Praxis hinreichendes Resultat gibt.

7. Für ein auf der gegebenen Geraden zu errichtendes regelmässiges Zehneck sucht man den Mittelpunkt des Kreises, in

welchem das verlangte Zehneck beschrieben werden könnte, ganz so wie man beim Fünfecke den Punkt F (Taf. X. Fig. 3.) gesucht hat. Berechnet man dann den Halbmesser dieses Kreises aus den trigonometrischen Tafeln und nach der vorhergehenden Construction, so wird man ihn aus beiden ganz übereinstimmend finden.

8. Lösen wir nun die Aufgabe von der Errichtung eines $n$ecks auf einer gegebenen Geraden allgemein auf.

Es sei die gegebene Gerade AB (Taf. X. Fig. 7.), man verlängere sie bis zu D so, dass $BD = AB$ wird. Auf der Geraden AD als auf einem Durchmesser beschreibe man einen Halbkreis und ziehe aus dem Punkte D unter einem beliebigen Winkel die Gerade DP; schneide darauf, vom Punkte D angefangen, n beliebige, aber unter einander gleiche Theile ab; es sei z. B. $n = 11$; verbinde den letzten Theilpunkt 11 mit A durch die Gerade $A11$ und ziehe durch den Theilpunkt 2 eine Parallele, welche den Durchmesser in m schneiden wird. Mit dem Halbmesser AB bestimme man aus den Punkten A und D den Punkt H, ziehe die Gerade Hm, bis sie den Halbkreis in E schneidet, so wird der Bogen DE der $n$te Theil, in unserem Falle der 11te Theil, des ganzen Umkreises, und also der Winkel DBE der Centriwinkel des $n$ecks, und sein Nebenwinkel ABE der innere Winkel dieses Polygons sein. Errichtet man jetzt im Halbirungspunkte C eine Senkrechte auf AB und halbirt den Winkel ABE, so schneidet die Halbirende das in C errichtete Perpendikel in einem Punkte S, welcher der Mittelpunkt des Kreises, in welchen das $n$eck eingeschrieben werden kann, sein wird. — Diese Construction ist insofern richtig, als die bei den Einschreibungen angegebene, desswegen bedarf sie hier keines neuen Beweises, weil ich Anfangs gezeigt habe, wie sie mit der Wahrheit zusammenstimmt und dass sie bloss für die Praxis anwendbar sei.

Der Verfasser des so oft besprochenen Werks gibt noch andere Constructionen für die Vielecke vom Sechs- bis zum Zwölfecke und nachher eine besondere Construction für alle regelmässige Vielecke vom Zwölfecke an bis zum Vierundzwanzigecke einschliesslich, welche ich aber, um nicht zu weitläufig zu werden, für jetzt übergehe.

XXIII.

Darstellung der elliptischen Functionen der dritten Art durch Curvenbogen.

Von

Herrn Professor Dr. *M. W. Drobisch*,
an der Universität zu Leipzig.

In dem literarischen Berichte Nr. XCIII. des Archivs ist auf die Darstellung der elliptischen Functionen der dritten Art durch Curvenbogen aufmerksam gemacht worden, auf welche ich in meiner zweiten Abhandlung über das Florentiner Problem gekommen bin. Da dieselbe neu und der allgemeineren Kenntnissnahme nicht unwerth zu sein scheint, so erlaube ich mir, sie den Lesern des Archivs hiermit vorzulegen.

1.

Sei der geometrische Ort eines Punktes zu bestimmen, der auf dem Halbmesser ϱ einer Ellipse liegt und dessen Abstand vom Mittelpunkt derselben bei beliebiger Lage des Halbmessers jederzeit die vierte Proportionale zu ϱ und den beiden halben Axen a und b der Ellipse sein soll, so dass also $r=\frac{ab}{\varrho}$.

Da, wenn φ der Winkel, den ϱ mit a macht,

$$\varrho^2=\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi},$$

so folgt unmittelbar

$$r^2=a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi,$$

oder, wenn $r\cos\varphi = x$, $r\sin\varphi = y$ gesetzt wird, in rechtwinkligen Coordinaten

$$(y^2+x^2)^2 = a^2y^2+b^2x^2.$$

Setzt man statt der Ellipse eine mit ihr concentrische Hyperbel, deren erste und zweite Axe resp. $2b$ und $2a$, von denen aber jene in die y-Axe, diese in die x-Axe fallt, so ergiebt sich, wenn auch hier ϱ der Halbmesser, der mit der x-Axe den Winkel φ macht, und ebenfalls $r = \frac{ab}{\varrho}$ sein soll, auf gleiche Weise

$$r^2 = a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi,$$

oder für rechtwinklige Coordinaten

$$(y^2+x^2)^2 = a^2y^2 - b^2x^2.$$

Beide Paare von Gleichungen können wir in eins zusammenfassen, wenn wir $\frac{a^2 \mp b^2}{a^2} = m^2$ setzen, wo das obere Zeichen auf die Ellipse, das untere auf die Hyperbel zu beziehen ist und für jene $a > b$ vorausgesetzt wird. Hierdurch werden die Gleichungen des geometrischen Orts, der sich auf beide Kegelschnitte zugleich bezieht,

$$r^2 = a^2(1 - m^2\cos^2\varphi) \tag{1}$$

und

$$(y^2+x^2)^2 = a^2(y^2+(1-m^2)x^2), \tag{2}$$

wo, jenachdem der zu Grunde liegende Kegelschnitt die Ellipse oder Hyperbel, $m<1$ oder $m>1$ ist.

Es mag beiläufig bemerkt werden, dass die hierdurch dargestellte Curve zugleich der geometrische Ort der Fusspunkte aller Senkrechten ist, die aus dem Mittelpunkte eines Kegelschnitts auf sämmtliche Tangenten desselben gefällt werden können.

2.

Hinsichtlich der Gestalt, welche diese Curve annehmen kann, sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Ist $m=0$, also $b=a$, folglich der Kegelschnitt ein Kreis, so fallt die Curve offenbar mit diesem Kreise zusammen.

2) Ist $m^2 < \frac{1}{2}$, also $b\sqrt{2} > a$, so bildet die Curve ein gegen die angenommenen Coordinatenaxen symmetrisches Oval, dessen

grösster Durchmesser $=2a$ in die y-Axe und dessen kleinster Durchmesser $=2b$ in die x-Axe fällt.

3) Ist $m^2=\frac{1}{2}$, also $b\sqrt{2}=a$, so bleibt die Gestalt der Curve im Wesentlichen dieselbe, nur ist sie an den Endpunkten ihres kleinsten Durchmessers abgeplattet.

4) Ist $1>m^2>\frac{1}{2}$, also $b\sqrt{2}<a$, so geht die eben erwähnte Abplattung in Einbiegungen über.

5) Ist $m^2\doteq 1$, folglich b unendlich klein, so nähert sich die zum Grunde liegende Ellipse einer in die x-Axe fallenden, vom Coordinatenanfang halbirten Geraden von der Länge $2a$. Die Curve geht dann über in zwei zu beiden Seiten der x-Axe liegende, sowohl jene Gerade, als einander im Coordinatenanfang berührende Kreise vom Durchmesser a.

6) Ist $1<m^2<2$, wo nun an die Stelle der Ellipse die Hyperbel tritt, in welcher $b<a$, so wird die Curve eine Schleifenlinie, deren Zweige sich im Mittelpunkte der Hyperbel schneiden und von deren Asymptoten berührt werden. Sie schneiden sich daher unter einem stumpfen Winkel.

7) Ist $m^2=2$, folglich $b=a$, die Hyperbel also eine gleichseitige, so stellt die Curve die Lemniscata dar; ihre Zweige schneiden sich also hier im Mittelpunkte unter einem rechten Winkel.

8) Ist $m^2>2$, also $b>a$, so ist die Curve eine Schleifenlinie, deren Zweige sich im Mittelpunkte der Hyperbel unter einem spitzen Winkel schneiden.

3.

Aus der Gleichung (1) erhält man unmittelbar, wenn s den von $\varphi=0$ bis zu einem unbestimmten Werthe von φ, der $<\frac{\pi}{2}$, genommenen Bogen der Curve bedeutet:

$$\partial s=\sqrt{r^2\partial\varphi^2+\partial r^2}=a\partial\varphi\sqrt{\frac{1-(2-m^2)m^2\cos^2\varphi}{1-m^2\cos^2\varphi}}$$

$$=a\partial\varphi\sqrt{\frac{(1-m^2)^2+\mathrm{tg}^2\varphi}{1-m^2+\mathrm{tg}^2\varphi}}.$$

Sei nun

1) $m<1$, so folgt, wenn man $\mathrm{tg}\,\varphi=(1-m^2)\,\mathrm{tg}\,\omega$ setzt:

$$\partial s = \frac{(1-m^2)^{\frac{1}{2}} a \partial \omega}{[1-(2-m^2)m^2 \sin^2\omega]\sqrt{1-m^2\sin^2\omega}}.$$

Daher ist, da für $\varphi=0$ auch $s=0$,

$$s = a(1-m^2)^{\frac{1}{2}}\, \Pi(-(2-m^2)m^2, m, \omega). \qquad (3)$$

Da für $\varphi=\frac{\pi}{2}$ auch $\omega=\frac{\pi}{2}$, so wird durch diesen Werth von ω die Länge des Quadranten der Curve bestimmt.

2) Ist $m=1$, so folgt unmittelbar aus der ersten Formel für ∂s:

$$s = a\varphi. \qquad (4)$$

3) Ist $m>1$, so werde in der ersten Formel für ∂s zunächst $\partial s=-\partial s'$ gesetzt, wo nun s' den von $\varphi=\frac{\pi}{2}$ bis $\varphi=\varphi$ zu nehmenden Bogen der Curve bezeichnet. Setzt man nun $m\cos\varphi=\sin\chi$, so wird

$$\partial s' = a\partial\chi \sqrt{\frac{1+(m^2-1)\,\mathrm{tg}^2\chi}{m^2+(m^2-1)\,\mathrm{tg}^2\chi}}.$$

Setzt man ferner $\sqrt{m^2-1}.\mathrm{tg}\chi=\mathrm{tg}\,\omega$, so wird

$$\partial s' = \frac{\sqrt{m^2-1}.a\partial\omega}{m[m^2-1+(2-m^2)\sin^2\omega]\sqrt{1-\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right)\sin^2\omega}}.$$

Ist daher $1<m^2<2$, so wird

$$s' = \frac{a}{m\sqrt{m^2-1}}\,\Pi\left(\frac{2-m^2}{m^2-1}, \frac{\sqrt{m^2-1}}{m}, \omega\right); \qquad (5)$$

wo der Parameter positiv ist. Ist aber $m^2>2$, so wird

$$s' = \frac{a}{m\sqrt{m^2-1}}\,\Pi(-\left(\frac{m^2-2}{m^2-1}\right), \frac{\sqrt{m^2-1}}{m}, \omega), \qquad (5^*)$$

mit negativem Parameter.

Der Bogen s' kann hier nur von $\varphi=\frac{\pi}{2}$ bis $\varphi=\arccos\frac{1}{m}$ genommen werden, welchen Werthen aber die Grenzwerthe $\omega=0$ und $\omega=\frac{\pi}{2}$ entsprechen. Daher stellen die vorstehenden Ausdrücke, wenn $\omega=\frac{\pi}{2}$, den vierten Theil des Umfangs der Curve dar.

4) Ist $m^2 = 2$, so reduciren sich die Formeln (5) und (5*) auf

$$s' = \frac{a}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \omega\right), \tag{6}$$

also auf den bekannten Ausdruck für den Bogen der Lemniscata.

5) Auch für noch einen zweiten Werth von m lässt sich die Function Π auf F, unter Hinzufügung einer logarithmischen Function, zurückführen. Es ist nämlich bekannt, dass, wenn $b = \sqrt{1-c^2}$ und $\Delta = \sqrt{1-c^2\sin^2\omega}$,

$$\Pi(-1+b,\, c,\, \omega) = \frac{1+b}{2b} F(c,\, \omega) - \frac{1}{4b} \lg\left(\frac{\Delta + (1-b)\sin\omega\cos\omega}{\Delta - (1-b)\sin\omega\cos\omega}\right).$$

Nun ist in (5) $c = \frac{\sqrt{m^2-1}}{m}$, folglich $b = \frac{1}{m}$, $-1+b = \frac{-(m-1)}{m}$.

Setzt man daher den Parameter von Π in (5):

$$-\left(\frac{m^2-2}{m^2-1}\right) = -\left(\frac{m-1}{m}\right),$$

so erhält man

$$m = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Hieraus folgt:

$$c = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}, \quad b = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1);$$

daher ist für diesen Werth von m:

$$\left.\begin{aligned} s' = {} & \tfrac{1}{2}a\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)}\, F\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)},\, \omega\right) \\ & -\tfrac{1}{4}a\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}\, \lg\left(\frac{2\Delta + (3-\sqrt{5})\sin\omega\cos\omega}{2\Delta - (3-\sqrt{5})\sin\omega\cos\omega}\right), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

wo

$$\Delta = \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\sin^2\omega}.$$

Die Gleichungen dieser Schleifenlinie sind zufolge des gefundenen Werthes von m:

$$\left.\begin{aligned} (y^2+x^2)^2 &= a^2[y^2 - \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)x^2], \\ r^2 &= a^2[1 - \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1)^2\cos^2\varphi]. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Der Sinus des halben Winkels, unter dem sich die Zweige dieser Curve im Mittelpunkte schneiden, ist $= 2\sin\frac{\pi}{10}$.

Die Rectification dieser Schleifenlinie hat auf etwas andere Weise schon Clausen ausgeführt *).

4.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich nun hinsichtlich der Darstellbarkeit der Function $\Pi(n, c, \omega)$ durch Curvenbogen Folgendes. Findet zwischen dem Modulus c und dem Parameter n ein solcher Zusammenhang statt, dass

1) $n = -(2-c^2)c^2 = (1-c^2)^2 - 1$, also der Parameter zwischen den Grenzen 0 und -1 enthalten ist, die den Grenzwerthen 0 und 1 von c entsprechen, so sind die Bogen der Curve, deren Gleichung

$$r^2 = a^2(1 - c^2\cos^2\varphi),$$

wenn man $\operatorname{tg}\varphi = (1-c^2)\operatorname{tg}\omega$ setzt, die Form

$$r^2 = \frac{a^2(1-c^2)[1+(1-c^2)\operatorname{tg}^2\omega]}{1+(1-c^2)^2\operatorname{tg}^2\omega}$$

erhält, von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{\pi}{2}$ den Werthen von $\Pi(n, c, \omega)$ proportional. Die Bogen haben hier ihren Anfang in der x-Axe und die Curve hat die in Art. 2. unter 2) bis 4) angegebene Gestalt.

2) Setzt man in Formel (5) $c = \frac{\sqrt{m^2-1}}{m}$, so folgt $\frac{2-m^2}{m^2-1} = \frac{1}{c^2} - 2 = n$. Ist daher $n = \frac{1}{c^2} - 2$ und positiv, folglich c zwischen 0 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ enthalten, indess n alle Werthe von ∞ bis 0 durchläuft, so sind die Bogen derselben Curve, deren Gleichung, wenn man $c\cos\varphi = \sin\chi$ und $\operatorname{tg}\chi = \frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\operatorname{tg}\omega$ setzt, die Form

$$r^2 = \frac{a^2c^2}{c^2+(1-c^2)\operatorname{tg}^2\omega},$$

erhält, von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{\pi}{2}$ den Werthen von $\Pi(n, c, \omega)$ proportional. Die Bogen haben hier ihren Anfang in der y-Axe und die Curve ist die im Art. 2. unter 6) bemerkte Schleifenlinie.

---

*) Astron. Nachrichten Bd. 19. S. 181.

3) Ist $n=\frac{1}{c^2}-2$, aber negativ, folglich c zwischen $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und 1 enthalten, indess n die Werthe von 0 bis -1 durchläuft, so sind die Bogen der auf dieselbe Weise wie unter 2) ausgedrückten Curve von $\omega=0$ bis $\omega=\frac{\pi}{2}$ den Werthen von $\Pi(n, c, \omega)$ proportional. Die Bogen fangen in der y-Axe an und die Curve ist die in Art. 2. unter 8) angegebene Schleifenlinie.

5.

Denkt man sich die hier betrachtete Curve in der Ebene des Aequators einer Kugel vom Halbmesser a beschrieben, so dass ihr Mittelpunkt mit dem des Aequators zusammenfällt, und errichtet über ihr eine gerade Cylinderfläche, so durchbricht diese die Kugelfläche in einer sphärischen Curve. Zieht man den von dieser eingeschlossenen Flächenraum von dem der Halbkugel ab, so bleibt ein quadrirbarer Rest. Um nämlich die Gleichung dieser sphärischen Curve zu finden, hat man nur nöthig, in der obigen Gleichung (2)

$$x=a\cos\psi\sin\varphi,\quad y=a\cos\psi\cos\varphi$$

zu setzen, wo φ die Länge, ψ die Breite des Punktes der Kugelfläche ist, der, auf die Aequatorebene projicirt, den Punkt (x, y) giebt. Hierdurch erhält man sofort

$$\sin\psi=m\sin\varphi.$$

Von der durch diese Gleichung dargestellten sphärischen Curve hat aber schon Johann Bernoulli erwiesen, dass sie das Florentiner Problem löst und daher die angegebene Eigenschaft hat. Zugleich erhellt, da für $m=\sqrt{2}$ die ebene Curve in die Lemniscata übergeht, dass diese letztere nicht blos insofern, als sie, wie d'Arrest *) gezeigt hat, die stereographische Projection der durch die Gleichung $\psi=\varphi$ ausgedrückten sphärischen Curve auf eine Meridianebene, sondern auch, insofern als sie nach dem Vorstehenden offenbar zugleich die orthographische Projection der sphärischen Curve $\sin\psi=\sqrt{2}.\sin\varphi$ auf die Aequatorebene ist, dem Florentiner Problem Genüge leistet.

*) Astron. Nachrichten 1853. Nr. 875. vergl. Archiv. XXII. S. 225.

XXIV.

Ueber die Normalen einer Ellipse.

Von

Herrn Doctor *Heilermann*

zu Trier.

Eine Gerade, welche in dem Punkte (xy) auf der Berührungslinie der Ellipse

$$1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

senkrecht steht, wird bekanntlich dargestellt durch die Gleichung

$$\eta-y=\frac{a^2y}{b^2x}(\xi-x)$$

oder durch

$$2)\qquad \frac{a^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{\xi}{x}+\frac{b^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{\eta}{y}=1,$$

in welcher ξ und η die laufenden Coordinaten sind. Betrachten wir aber diese als die Coordinaten eines festen Punktes, so bestimmen die Gleichungen 1) und 2) die Coordinaten der Punkte, in welchen die Ellipse 1) von den Normalen des festen Punktes $(\xi\eta)$ getroffen wird. Nun ist aber durch 2) eine Hyperbel dargestellt, wenn die Coordinaten x und y als veränderlich genommen werden; also sind die Durchschnitte der Kegelschnitte 1) und 2) die Fusspunkte der Normalen des Punktes $(\xi\eta)$. Setzen wir noch zur Abkürzung

$$3)\qquad \xi_1=\frac{a^2}{a^2-b^2}\cdot\xi \text{ und } \eta_1=\frac{b^2}{b^2-a^2}\cdot\eta,$$

so nimmt die Gleichung 2) noch folgende Formen an:

$$4)\qquad (x-\xi_1)(y-\eta_1)=\xi_1\eta_1$$

und

$$\frac{\xi_1}{x}+\frac{\eta_1}{y}=1,$$

welche zeigen, dass der Punkt $(\xi_1\eta_1)$ der Mittelpunkt der Hyperbel, dass die Asymptoten derselben den Axen der Ellipse 1) parallel sind, also die Hyperbel gleichseitig ist, dass die Hyperbel durch den Mittelpunkt der Ellipse geht, und endlich dass alle Geraden, welche durch den Punkt $(\xi_1\eta_1)$ gehen, auf den Coordinatenaxen die Coordinaten eines Punktes der Hyperbel abschneiden. Folglich haben die Fusspunkte der vom Punkte $(\xi\eta)$ an die Ellipse gezogenen Normalen die Eigenschaft, dass die Geraden, welche durch die Endpunkte ihrer Coordinaten gehen, sich in dem Punkte $(\xi_1\eta_1)$ schneiden.

Weil der eine Zweig der Hyperbel durch den Mittelpunkt der Ellipse geht, so schneidet derselbe diese Curve in zwei Punkten, also lassen sich auch von dem Punkte $(\xi\eta)$ immer wenigstens zwei Normalen an die Ellipse ziehen. Der andere Zweig der Hyperbel hat mit der Ellipse zwei oder einen oder keinen Punkt gemeinsam, jenachdem das Minimum von $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ (wo x und y die laufenden Coordinaten der Hyperbel sind) kleiner oder so gross oder grösser als 1 ist. Die Werthe von x und y, welche zu diesem Minimum gehören, genügen bekanntlich folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial(\lambda\cdot\frac{x^2}{a^2}+\lambda.\frac{y^2}{b^2}+\frac{\xi_1}{x}+\frac{\eta_1}{y}-1)}{\partial x}=2\lambda.\frac{x}{a^2}-\frac{\xi_1}{x^2}=0,$$

$$\frac{\partial(\lambda\cdot\frac{x^2}{a^2}+\lambda\cdot\frac{y^2}{b^2}+\frac{\xi_1}{x}+\frac{\eta_1}{y}-1)}{\partial y}=2\lambda.\frac{y}{b^2}-\frac{\eta_1}{y^2}=0;$$

aus welchen durch Elimination des Coeffizienten λ sich ergibt:

$$5)\qquad \frac{x^3}{a^2\xi_1}=\frac{y^3}{b^2\eta_1}.$$

Wird hiemit die Gleichung 4) verbunden, so erhält man:

6)

$$x=\sqrt[3]{a^2\xi_1}\left(\sqrt[3]{\frac{\xi_1^2}{a^2}}+\sqrt[3]{\frac{\eta_1^2}{b^2}}\right)\quad\text{und}\quad y=\sqrt[3]{b^2\eta_1}\left(\sqrt[3]{\frac{\xi_1^2}{a^2}}+\sqrt[3]{\frac{\eta_1^2}{b^2}}\right)$$

als Coordinaten des Punktes (xy), für welchen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ ein Minimum ist. Der Werth des Minimums selbst ist also

$$\left(\sqrt[3]{\frac{\xi_1^2}{a^2}}+\sqrt[3]{\frac{\eta_1^2}{b^2}}\right)^3,$$

und die oben ausgesprochenen Bedingungen sind ausgedrückt durch

$$7)\qquad \left\{\begin{array}{l} \sqrt[3]{\frac{\xi_1^2}{a^2}}+\sqrt[3]{\frac{\eta_1^2}{b^2}}<1, \\ \sqrt[3]{\frac{\xi_1^2}{a^2}}+\sqrt[3]{\frac{\eta_1^2}{b^2}}=1, \\ \sqrt[3]{\frac{\xi_1^2}{a^2}}+\sqrt[3]{\frac{\eta_1^2}{b^2}}>1, \end{array}\right.$$

d. h. von dem Punkte $(\xi\eta)$ lassen sich vier oder drei oder nur zwei Normalen an die Ellipse 1) ziehen, jenachdem der ersten oder zweiten oder dritten der Bedingungen 7) Genüge geschieht. Die Bedeutung dieser Bedingungen wird deutlicher, wenn wir wieder

$$\xi_1=\frac{a^2}{a^2-b^2}\cdot\xi=\frac{a^2}{e^2}\xi \text{ und } \eta_1=\frac{b^2}{b^2-a^2}\cdot\eta=-\frac{b^2}{e^2}\cdot\eta$$

in dieselben einsetzen; dadurch gehen sie über in

$$8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \sqrt[3]{a^2\xi^2}+\sqrt[3]{b^2\eta^2}<\sqrt[3]{e^4}, \\ \sqrt[3]{a^2\xi^2}+\sqrt[3]{b^2\eta^2}=\sqrt[3]{e^4}, \\ \sqrt[3]{a^2\xi^2}+\sqrt[3]{b^2\eta^2}>\sqrt[3]{e^4}. \end{array}\right.$$

Wenn man nun noch beachtet, dass die mittlere dieser Bedingungen die Gleichung der Evolute der Ellipse 1) ist, so erhält man für den oben ausgesprochenen Satz folgenden Ausdruck:

Von einem Punkte lassen sich an eine Ellipse vier oder drei oder nur zwei Normalen ziehen, jenachdem der Punkt innerhalb der Evolute, oder in dieser Curve, oder ausserhalb derselben liegt.

Für die Hyperbel findet man dieselben Resultate in derselben Weise.

XXV.

Ueber die Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte.

Von
dem Herausgeber.

In einem Briefe Leibnizens an Oldenburg, der in Leibnizens mathematischen Schriften, herausgegeben von C. J. Gerhardt. Erste Abtheilung. Band I. Berlin. 1849. S. 60 — S. 69. unter Nr. XXV. abgedruckt ist, findet sich folgende Stelle, in welcher Leibniz eine von Newton herrührende Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte mittheilt:

„Descriptio Sectionis Conicae, per 5 puncta transeuntis.“

„In sequenti schemate (Tab. IX. Fig. 4.) puncta sint A, B, C, D, E: Junge horum tria quaelibet, e. g. A, B, C, ad Triangulum rectilineare ABC constituendum, cujus duobus quibuslibet angulis, puta A et B, duos sectores vel angulos mobiles applica, Polis ipsorum ad puncta angularia, eorundemque cruribus ad latera Triangulorum positis; dictosque angulos sic dispone, ut libere circumagantur circa polos suos A et B, citra angulorum, quibus opponuntur, variationem. Quo facto, reliquis duobus punctis D et E successive applica duo ipsorum crura PQ et RS, quae prius applicata fuerant ad C (quae crura distinctionis ergo, vocari possunt crura describentia, uti reliqua duo mn et TV, quae applicabantur ad A, B, crura eorum dirigentia appellari queunt), quas Intersectiones supponas esse F, facta ad D applicatione, et G, ea facta ad E. Duc lineam rectam FG, eamque produc, sufficienter utrimque: Et tunc si ita moveris Angulos, ut crura ipsorum dirigentia continuo se invicem intersecent ad lineam GF, reliquorum crurum intersectio describet Sectionem illam Conicam, quae per omnia, quae dixi, data puncta transibit.

Si tria ex datis punctis in eadem sint recta linea, impossibile est, ullam Sectionem Conicam transire ea omnia posse; eoque casu habebis illius loco duas lineas rectas.

Juxta eundem fere modum describi potest sectio Conica, quae per 4 data puncta transeat, tangatque lineam datam; vel quae transeat per 3 data puncta tangatque duas lineas datas, sive rectae illae fuerint sive curvae etc.

Existimat author, non injucundum fore speculationem Mathematum studiosis, hujus Theorematis demonstrationem invenire, nec non determinare Centra, Diametros, Axes, Vertices et Asymtotos Sectionum Conicarum ita descriptarum, vel describere parabolam per 4 data puncta transeuntem."

Ueber diese Stelle könnte man ein Buch schreiben. Ich begnüge mich jedoch hier mit der Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte, und werde mich freuen, wenn das Folgende geeignet sein sollte, andere Mathematiker zu weiteren Untersuchungen über diesen Gegenstand zu veranlassen. Die aus dem Obigen sich ergebende Methode, durch fünf gegebene Punkte einen Kegelschnitt zu beschreiben, ist aber, auf ihren deutlichsten Ausdruck gebracht, folgende:

Die fünf gegebenen Punkte, durch welche ein Kegelschnitt beschrieben werden soll, wollen wir durch

$$A_0, \; A_1, \; A_2, \; A_3, \; A_4$$

bezeichnen. Man wähle drei dieser Punkte aus, etwa A_0, A_1, A_2, und denke sich das durch dieselben bestimmte Dreieck $A_0A_1A_2$, dessen an der Seite A_0A_1 liegende Winkel $A_1A_0A_2$ und $A_0A_1A_2$ wir durch α_0 und α_1 bezeichnen wollen. Diese beiden Winkel wollen wir uns nun als zwei feste unveränderliche Winkel vorstellen, welche sich um ihre gleichfalls als fest oder unveränderlich zu denkenden Spitzen A_0 und A_1 herumdrehen lassen, und wollen die Schenkel A_0A_1 und A_1A_0 dieser Winkel die crura dirigentia, dagegen die Schenkel A_0A_2 und A_1A_2 die crura describentia nennen. Die Drehung der beiden in Rede stehenden Winkel um die Punkte A_0 und A_1 wollen wir grösserer Bestimmtheit wegen immer in solcher Weise vor sich gehen lassen, dass sich ihre crura dirigentia von der Seite A_0A_1 oder A_1A_0 des festen Dreiecks $A_0A_1A_2$ an nach den Seiten A_0A_2 und A_1A_2 dieses Dreiecks hin bewegen. Bringt man nun die beiden festen oder unveränderlichen Winkel α_0 und α_1 durch Drehung um A_0 und A_1 zuerst in eine solche Lage, dass ihre crura describentia beide durch den Punkt A_3 gehen, dann in eine solche Lage, dass ihre crura describentia beide durch den Punkt A_4 gehen, und bestimmt im ersten Falle den Durchschnittspunkt A_3', im zweiten Falle den Durchschnittspunkt A_4' ihrer crura dirigentia, legt durch die Punkte A_3' und A_4' eine gerade Linie, und lässt dann die beiden Winkel α_0 und α_1 um die festen Punkte A_0 und A_1 sich so drehen, dass der Durchschnittspunkt ihrer crura dirigentia fortwährend auf der in Rede stehenden geraden Linie hin gleitet, so beschreibt bei dieser Bewegung der beiden Winkel der Durchschnittspunkt ihrer crura describentia den gesuchten, durch die fünf gegebenen Punkte A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 gehenden Kegelschnitt.

Dass sich aus dieser organischen Beschreibung des gesuchten Kegelschnitts auch sogleich eine im Ganzen sehr leichte Beschreibung desselben durch Punkte ergiebt, versteht sich von selbst und bedarf einer weiteren Erläuterung hier nicht. Auch würde sich auf die obige organische Beschreibung die Einrichtung eines Instruments zur Beschreibung der Kegelschnitte durch gegebene Punkte gründen lassen. Die Angabe einer zweckmässigen Einrichtung eines solchen Instruments würde ich für recht verdienstlich halten.

Vorstehende Construction eines durch fünf gegebene Punkte gehenden Kegelschnitts wollen wir nun beweisen, und daran noch verschiedene andere, wie es uns scheint, beachtenswerthe Bemerkungen knüpfen.

Den Punkt A_0 wollen wir als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy annehmen, die Linie A_0A_1 sei der positive Theil der Axe der x, und die positiven y wollen wir auf der Seite der Linie A_0A_1 nehmen, auf welcher der Punkt A_2 liegt. Die Coordinaten der Punkte

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$$

in diesem Systeme seien respective:

$$0,\, 0;\ a_1,\, 0;\ a_2,\, b_2;\ a_3,\, b_3;\ a_4,\, b_4;$$

wo aber, wie sogleich erhellet,

$$a_2 = A_0A_2 . \cos\alpha_0,\quad b_2 = A_0A_2 . \sin\alpha_0$$

und folglich, weil

$$A_0A_1 : A_0A_2 = a_1 : A_0A_2 = \sin(\alpha_0+\alpha_1) : \sin\alpha_1,$$

also

$$A_0A_2=\frac{a_1\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_0+\alpha_1)}$$

ist,

1) $$a_2=\frac{a_1\cos\alpha_0\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_0+\alpha_1)},\quad b_2=\frac{a_1\sin\alpha_0\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_0+\alpha_1)}$$

ist.

Wir wollen nun eine beliebige Lage des Winkels α_0 betrachten, die durch $(A_1)A_0(A_2)$ bezeichnet werden mag. Der von dem Schenkel $A_0(A_1)$ mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossene Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an nach der Seite der positiven y hin von 0 bis 360° zählen, sei φ_0, so ist

2) $$y=x\operatorname{tang}\varphi_0$$

die Gleichung des Schenkels $A_0(A_1)$ in dem Systeme der xy. Legen wir nun durch den Punkt A_0 ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem der $x'y'$, nehmen $A_0(A_1)$ als den positiven Theil der Axe der x', und den positiven Theil der Axe der y' so an, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x' an durch den rechten Winkel $(x'y')$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y' zu gelangen, nach derselben Seite hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, so ist

3) $$y'=x'\operatorname{tang}\alpha_0$$

die Gleichung des Schenkels $A_0(A_2)$ in dem Systeme der $x'y'$. Weil nun nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten zwischen den Coordinaten xy und $x'y'$ die Gleichungen

$$x=x'\cos\varphi_0-y'\sin\varphi_0,\quad y=x'\sin\varphi_0+y'\cos\varphi_0$$

Statt finden, aus denen umgekehrt

$$x'=x\cos\varphi_0+y\sin\varphi_0,\quad y'=-x\sin\varphi_0+y\cos\varphi_0$$

folgt, so ist

$$-x\sin\varphi_0+y\cos\varphi_0=(x\cos\varphi_0+y\sin\varphi_0)\operatorname{tang}\alpha_0,$$

also

$$(\cos\alpha_0\cos\varphi_0-\sin\alpha_0\sin\varphi_0)y=(\sin\alpha_0\cos\varphi_0+\cos\alpha_0\sin\varphi_0)x,$$

oder

$$y\cos(\alpha_0+\varphi_0)=x\sin(\alpha_0+\varphi_0),$$

oder

4) $$y=x\operatorname{tang}(\alpha_0+\varphi_0)$$

die Gleichung des Schenkels $A_0(A_2)$ in dem Systeme der xy.

Durch den Punkt A_1 wollen wir uns ferner ein dem primitiven Systeme der xy paralleles Coordinatensytem der x_1y_1 gelegt denken, in welchem der positive Theil der Axe der x_1 nach der Richtung des negativen Theils der Axe der x hin liegt, der positive Theil der Axe der y_1 aber mit dem positiven Theile der Axe der y eine übereinstimmende Lage hat. Dann ist, wenn φ_1 in Bezug auf den Schenkel $A_1(A_0)$ des in einer beliebigen Lage $(A_0)A_1(A_2)$ gedachten Winkels α_1 eine ganz ähnliche Bedeutung hat, wie φ_0 in Bezug auf den Schenkel $A_0(A_1)$ des in einer beliebigen Lage $(A_1)A_0(A_2)$ gedachten Winkels α_0, ganz eben so wie vorher

5) $$y_1=x_1\operatorname{tang}\varphi_1$$

die Gleichung des Schenkels $A_1(A_0)$ in dem Systeme der x_1y_1, und

6) $$y_1=x_1\operatorname{tang}(\alpha_1+\varphi_1)$$

die Gleichung des Schenkels $A_1(A_2)$ in demselben Systeme. Nun finden aber zwischen den Coordinaten xy und x_1y_1. offenbar die folgenden ganz allgemeinen Gleichungen:

$$x+x_1=a_1,\quad y-y_1=0$$

Statt, so dass also

$$x_1=a_1-x,\quad y_1=y$$

ist; daher ist

7) $$y=(a_1-x)\operatorname{tang}\varphi_1$$

die Gleichung des Schenkels $A_1(A_0)$, und

8) $$y=(a_1-x)\operatorname{tang}(\alpha_1+\varphi_1)$$

die Gleichung des Schenkels $A_1(A_2)$, beide Gleichungen in Bezug auf das System der xy genommen.

Hiernach sind folglich für irgend eine beliebige Lage der Winkel α_0 und α_1 die Gleichungen ihrer crura dirigentia in dem Systeme der xy:

9) $$y=x\operatorname{tang}\varphi_0,\quad y=(a_1-x)\operatorname{tang}\varphi_1;$$

und die Gleichungen ihrer crura describentia in demselben Systeme sind:

10) $$y = x \operatorname{tang}(\alpha_0 + \varphi_0), \quad y = (a_1 - x) \operatorname{tang}(\alpha_1 + \varphi_1).$$

Legen wir jetzt die crura describentia durch den Punkt A_3 oder $(a_3 b_3)$, so ist

$$b_3 = a_3 \operatorname{tang}(\alpha_0 + \varphi_0), \quad b_3 = (a_1 - a_3) \operatorname{tang}(\alpha_1 + \varphi_1);$$

woraus man mittelst leichter Rechnung

$$\operatorname{tang}\varphi_0 = \frac{b_3 - a_3 \operatorname{tang}\alpha_0}{a_3 + b_3 \operatorname{tang}\alpha_0}, \quad \operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{b_3 - (a_1 - a_3)\operatorname{tang}\alpha_1}{(a_1 - a_3) + b_3 \operatorname{tang}\alpha_1}$$

erhält, so dass also nach dem Obigen

$$y = \frac{b_3 - a_3 \operatorname{tang}\alpha_0}{a_3 + b_3 \operatorname{tang}\alpha_0} x, \quad y = \frac{b_3 - (a_1 - a_3)\operatorname{tang}\alpha_1}{(a_1 - a_3) + b_3 \operatorname{tang}\alpha_1} (a_1 - x)$$

die Gleichungen der crura dirigentia sind; und bezeichnen wir folglich die Coordinaten des Durchschnittspunkts A_3' der crura dirigentia durch a_3', b_3', so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$b_3' = \frac{b_3 - a_3 \operatorname{tang}\alpha_0}{a_3 + b_3 \operatorname{tang}\alpha_0} a_3', \quad b_3' = \frac{b_3 - (a_1 - a_3)\operatorname{tang}\alpha_1}{(a_1 - a_3) + b_3 \operatorname{tang}\alpha_1} (a_1 - a_3');$$

aus denen man mittelst leichter Rechnung:

$$11)\quad \begin{cases} a_3' = \dfrac{(a_3+b_3\tan\alpha_0)\{b_3-(a_1-a_3)\tan\alpha_1\}a_1}{(b_3-a_3\tan\alpha_0)\{(a_1-a_3)+b_3\tan\alpha_1\}+(a_3+b_3\tan\alpha_0)\{b_3-(a_1-a_3)\tan\alpha_1\}}, \\[2ex] b_3' = \dfrac{(b_3-a_3\tan\alpha_0)\{b_3-(a_1-a_3)\tan\alpha_1\}a_1}{(b_3-a_3\tan\alpha_0)\{(a_1-a_3)+b_3\tan\alpha_1\}+(a_3+b_3\tan\alpha_0)\{b_3-(a_1-a_3)\tan\alpha_1\}}; \end{cases}$$

oder

$$12)\quad \begin{cases} a_3' = \dfrac{(a_3+b_3\tan\alpha_0)\{b_3-(a_1-a_3)\tan\alpha_1\}a_1\cos\alpha_0\cos\alpha_1}{a_1b_3\cos(\alpha_0+\alpha_1)-(a_1a_3-a_3a_3-b_3b_3)\sin(\alpha_0+\alpha_1)}, \\[2ex] b_3' = \dfrac{(b_3-a_3\tan\alpha_0)\{b_3-(a_1-a_3)\tan\alpha_1\}a_1\cos\alpha_0\cos\alpha_1}{a_1b_3\cos(\alpha_0+\alpha_1)-(a_1a_3-a_3a_3-b_3b_3)\sin(\alpha_0+\alpha_1)}; \end{cases}$$

oder

$$13)\quad \begin{cases} a_3' = \dfrac{(a_3\cos\alpha_0+b_3\sin\alpha_0)\{b_3\cos\alpha_1-(a_1-a_3)\sin\alpha_1\}a_1}{a_1b_3\cos(\alpha_0+\alpha_1)-(a_1a_3-a_3a_3-b_3b_3)\sin(\alpha_0+\alpha_1)}, \\[2ex] b_3' = \dfrac{(b_3\cos\alpha_0-a_3\sin\alpha_0)\{b_3\cos\alpha_1-(a_1-a_3)\sin\alpha_1\}a_1}{a_1b_3\cos(\alpha_0+\alpha_1)-(a_1a_3-a_3a_3-b_3b_3)\sin(\alpha_0+\alpha_1)} \end{cases}$$

erhält.

Legen wir die crura describentia durch den Punkt A_4 oder (a_4b_4), so ist

$$b_4 = a_4\tan(\alpha_0+\varphi_0),\quad b_4=(a_1-a_4)\tan(\alpha_1+\varphi_1);$$

woraus man mittelst leichter Rechnung

$$\tan\varphi_0 = \frac{b_4-a_4\tan\alpha_0}{a_4+b_4\tan\alpha_0},\quad \tan\varphi_1=\frac{b_4-(a_1-a_4)\tan\alpha_1}{(a_1-a_4)+b_4\tan\alpha_1}$$

erhält, so dass also nach dem Obigen

$$y=\frac{b_4-a_4\tan\alpha_0}{a_4+b_4\tan\alpha_0}x,\quad y=\frac{b_4-(a_1-a_4)\tan\alpha_1}{(a_1-a_4)+b_4\tan\alpha_1}(a_1-x)$$

die Gleichungen der crura dirigentia sind; und bezeichnen wir folglich die Coordinaten des Durchschnittspunkts A_4' der crura dirigentia durch a_4', b_4', so haben wir zu deren Besimmung die Gleichungen:

$$b_4'=\frac{b_4-a_4\tan\alpha_0}{a_4+b_4\tan\alpha_0}a_4',\quad b_4'=\frac{b_4-(a_1-a_4)\tan\alpha_1}{(a_1-a_4)+b_4\tan\alpha_1}(a_1-a_4');$$

aus denen man mittelst leichter Rechnung:

$$14)\left\{\begin{aligned}
a_4' &= \frac{(a_4+b_4\operatorname{tang}\alpha_0)\{b_4-(a_1-a_4)\operatorname{tang}\alpha_1\}a_1}{(b_4-a_4\operatorname{tang}\alpha_0)\{(a_1-a_4)+b_4\operatorname{tang}\alpha_1\}+(a_4+b_4\operatorname{tang}\alpha_0)\{b_4-(a_1-a_4)\operatorname{tang}\alpha_1\}},\\
b_4' &= \frac{(b_4-a_4\operatorname{tang}\alpha_0)\{b_4-(a_1-a_4)\operatorname{tang}\alpha_1\}a_1}{(b_4-a_4\operatorname{tang}\alpha_0)\{(a_1-a_4)+b_4\operatorname{tang}\alpha_1\}+(a_4+b_4\operatorname{tang}\alpha_0)\{b_4-(a_1-a_4)\operatorname{tang}\alpha_1\}};
\end{aligned}\right.$$

oder

$$15)\left\{\begin{aligned}
a_4' &= \frac{(a_4+b_4\operatorname{tang}\alpha_0)\{b_4-(a_1-a_4)\operatorname{tang}\alpha_1\}a_1\cos\alpha_0\cos\alpha_1}{a_1b_4\cos(\alpha_0+\alpha_1)-(a_1a_4-a_4a_4-b_4b_4)\sin(\alpha_0+\alpha_1)},\\
b_4' &= \frac{(b_4-a_4\operatorname{tang}\alpha_0)\{b_4-(a_1-a_4)\operatorname{tang}\alpha_1\}a_1\cos\alpha_0\cos\alpha_1}{a_1b_4\cos(\alpha_0+\alpha_1)-(a_1a_4-a_4a_4-b_4b_4)\sin(\alpha_0+\alpha_1)};
\end{aligned}\right.$$

oder

$$16)\left\{\begin{aligned}
a_4' &= \frac{(a_4\cos\alpha_0+b_4\sin\alpha_0)\{b_4\cos\alpha_1-(a_1-a_4)\sin\alpha_1\}a_1}{a_1b_4\cos(\alpha_0+\alpha_1)-(a_1a_4-a_4a_4-b_4b_4)\sin(\alpha_0+\alpha_1)},\\
b_4' &= \frac{(b_4\cos\alpha_0-a_4\sin\alpha_0)\{b_4\cos\alpha_1-(a_1-a_4)\sin\alpha_1\}a_1}{a_1b_4\cos(\alpha_0+\alpha_1)-(a_1a_4-a_4a_4-b_4b_4)\sin(\alpha_0+\alpha_1)}
\end{aligned}\right.$$

erhält.

Sei nun

$$17)\qquad y=Ax+B$$

die Gleichung einer beliebigen geraden Linie. Sind dann u, v im Allgemeinen die Coordinaten des Durchschnittspunkts der crura dirigentia, so hat man, wenn dieser Punkt auf der durch die vorstehende Gleichung charakterisirten geraden Linie liegen soll, nach 9) und 17) die folgenden Gleichungen:

$$18)\qquad v=u\,\mathrm{tang}\,\varphi_0,\quad v=(a_1-u)\,\mathrm{tang}\,\varphi_1,\quad v=Au+B;$$

und sind x, y die Coordinaten des entsprechenden Durchschnittspunkts der crura describentia, so ist nach 10):

$$19)\qquad y=x\,\mathrm{tang}\,(\alpha_0+\varphi_0),\quad y=(a_1-x)\,\mathrm{tang}\,(\alpha_1+\varphi_1).$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\mathrm{tang}\,\varphi_0=\frac{y-x\,\mathrm{tang}\,\alpha_0}{x+y\,\mathrm{tang}\,\alpha_0}=\frac{y\cos\alpha_0-x\sin\alpha_0}{x\cos\alpha_0+y\sin\alpha_0},$$

$$\mathrm{tang}\,\varphi_1=\frac{y-(a_1-x)\,\mathrm{tang}\,\alpha_1}{(a_1-x)+y\,\mathrm{tang}\,\alpha_1}=\frac{y\cos\alpha_1-(a_1-x)\sin\alpha_1}{(a_1-x)\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1};$$

also

$$v=\frac{y\cos\alpha_0-x\sin\alpha_0}{x\cos\alpha_0+y\sin\alpha_0}u,\quad v=\frac{y\cos\alpha_1-(a_1-x)\sin\alpha_1}{(a_1-x)\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1}(a_1-u);$$

folglich:

$$\frac{y\cos\alpha_0-x\sin\alpha_0}{x\cos\alpha_0+y\sin\alpha_0}u=\frac{y\cos\alpha_1-(a_1-x)\sin\alpha_1}{(a_1-x)\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1}(a_1-u)=Au+B.$$

Eliminirt man aus diesen zwei Gleichungen die Grösse u, so erhält man die Gleichung zwischen x und y für die Curve, welche der Durchschnittspunkt (xy) der crura describentia beschreibt, wenn der Durchschnittspunkt (uv) der crura dirigentia sich auf der durch die Gleichung

$$y=Ax+B$$

charakterisirten geraden Linie bewegt. Aus der Gleichung

$$\frac{y\cos\alpha_0-x\sin\alpha_0}{x\cos\alpha_0+y\sin\alpha_0}u=\frac{y\cos\alpha_1-(a_1-x)\sin\alpha_1}{(a_1-x)\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1}(a_1-u)$$

erhält man sehr leicht:

$$\varkappa = \frac{(x\cos\alpha_0 + y\sin\alpha_0)\{y\cos\alpha_1 - (a_1 - x)\sin\alpha_1\}a_1}{\left\{\begin{array}{l}(x\cos\alpha_0 + y\sin\alpha_0)\{y\cos\alpha_1 - (a_1 - x)\sin\alpha_1\}\\ + (y\cos\alpha_0 - x\sin\alpha_0)\{(a_1 - x)\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1\}\end{array}\right\}},$$

oder nach gehöriger Entwickelung des Nenners:

$$\varkappa = \frac{(x\cos\alpha_0 + y\sin\alpha_0)\{y\cos\alpha_1 - (a_1 - x)\sin\alpha_1\}a_1}{a_1 y\cos(\alpha_0 + \alpha_1) - (a_1 x - xx - yy)\sin(\alpha_0 + \alpha_1)}.$$

Also nach dem Obigen:

$$\frac{(y\cos\alpha_0 - x\sin\alpha_0)\{y\cos\alpha_1 - (a_1 - x)\sin\alpha_1\}a_1}{a_1 y\cos(\alpha_0 + \alpha_1) - (a_1 x - xx - yy)\sin(\alpha_0 + \alpha_1)}$$

$$= A\frac{(x\cos\alpha_0 + y\sin\alpha_0)\{y\cos\alpha_1 - (a_1 - x)\sin\alpha_1\}a_1}{a_1 y\cos(\alpha_0 + \alpha_1) - (a_1 x - xx - yy)\sin(\alpha_0 + \alpha_1)} + B,$$

woraus sich die Gleichung

$$20)\quad\left\{\begin{array}{l}(y\cos\alpha_0 - x\sin\alpha_0)\{y\cos\alpha_1 - (a_1 - x)\sin\alpha_1\}a_1\\ = A(x\cos\alpha_0 + y\sin\alpha_0)\{y\cos\alpha_1 - (a_1 - x)\sin\alpha_1\}a_1\\ + B\{a_1 y\cos(\alpha_0 + \alpha_1) - (a_1 x - xx - yy)\sin(\alpha_0 + \alpha_1)\}\end{array}\right.$$

für die Curve ergiebt, welche der Durchschnittspunkt der crura describentia beschreibt, wenn der Durchschnittspunkt der crura dirigentia sich auf der durch die Gleichung

$$y = Ax + B$$

charakterisirten geraden Linie bewegt.

Da die Gleichung 20) eine Gleichung des zweiten Grades zwischen den beiden veränderlichen Grössen x, y ist, so ist die in Rede stehende Curve jederzeit ein Kegelschnitt.

Weil die Gleichung 20) durch $x=0$, $y=0$ offenbar befriedigt wird, so liegt der Punkt A_0, dessen Coordinaten 0,0 sind, jederzeit in dem durch die Gleichung 20) charakterisirten Kegelschnitte.

Offenbar wird aber die Gleichung 20) auch durch $x = a_1$, $y=0$ befriedigt, und es liegt daher auch der Punkt A_1, dessen Coordinaten a_1,0 sind, immer auf dem durch diese Gleichung charakterisirten Kegelschnitte.

Die Coordinaten des Punktes A_2 sind nach 1):

$$\frac{a_1\cos\alpha_0\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_0+\alpha_1)},\quad \frac{a_1\sin\alpha_0\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_0+\alpha_1)}.$$

Führt man diese Coordinaten in die Gleichung 20) ein, so wird der Zähler des Factors

$$y\cos\alpha_1-(a_1-x)\sin\alpha_1,$$

wie man sogleich übersieht:

$$\begin{aligned}&a_1\sin\alpha_0\sin\alpha_1\cos\alpha_1-a_1\{\sin(\alpha_0+\alpha_1)-\cos\alpha_0\sin\alpha_1\}\sin\alpha_1\\ &=a_1(\sin\alpha_0\sin\alpha_1\cos\alpha_1-\sin\alpha_0\sin\alpha_1\cos\alpha_1)=0,\end{aligned}$$

und der Zähler des Factors

$$a_1y\cos(\alpha_0+\alpha_1)-(a_1x-xx-yy)\sin(\alpha_0+\alpha_1)$$

wird

$$a_1^2\left\{\begin{aligned}\sin\alpha_0\sin\alpha_1\cos(\alpha_0+\alpha_1)-\cos\alpha_0\sin\alpha_1\sin(\alpha_0+\alpha_1)+\cos\alpha_0^2\sin\alpha_1^2\\ +\sin\alpha_0^2\sin\alpha_1^2\end{aligned}\right\}$$

$$=a_1^2\left\{\begin{aligned}\sin\alpha_0\cos\alpha_0\sin\alpha_1\cos\alpha_1-\sin\alpha_0^2\sin\alpha_1^2+\sin\alpha_0^2\sin\alpha_1^2\\ -\sin\alpha_0\cos\alpha_0\sin\alpha_1\cos\alpha_1-\cos\alpha_0^2\sin\alpha_1^2+\cos\alpha_0^2\sin\alpha_1^2\end{aligned}\right\}$$

$=0$; daher wird die Gleichung 20) auch durch die Coordinaten des Punktes A_2 erfüllt, und der Punkt A_2 liegt daher immer in dem durch diese Gleichung charakterisirten Kegelschnitte.

Hieraus sieht man also zuvörderst, dass der Kegelschnitt, welchen der Durchschnittspunkt der crura describentia beschreibt, wenn der Durchschnittspunkt der crura dirigentia sich auf der beliebigen, durch die Gleichung

$$y=Ax+B$$

charakterisirten geraden Linie bewegt, immer durch die drei gegebenen Punkte A_0, A_1, A_2 geht.

Specialisiren wir jetzt die durch die Gleichung

$$y=Ax+B$$

im Allgemeinen charakterisirte gerade Linie dadurch, dass wir dieselbe durch den Punkt A_3' oder $(a_3'b_3')$ legen, so haben wir die Gleichung

$$b_3'=Aa_3'+B,$$

also nach 13):

$$\frac{(b_3\cos\alpha_0-a_3\sin\alpha_0)\{b_3\cos\alpha_1-(a_1-a_3)\sin\alpha_1\}a_1}{a_1b_3\cos(\alpha_0+\alpha_1)-(a_1a_3-a_3a_3-b_3b_3)\sin(\alpha_0+\alpha_1)}$$

$$=\frac{(a_3\cos\alpha_0+b_3\sin\alpha_0)\{b_3\cos\alpha_1-(a_1-a_3)\sin\alpha_1\}a_1}{a_1b_3\cos(\alpha_0+\alpha_1)-(a_1a_3-a_3a_3-b_3b_3)\sin(\alpha_0+\alpha_1)}A+B,$$

oder:

$$(b_3\cos\alpha_0-a_3\sin\alpha_0)\{b_3\cos\alpha_1-(a_1-a_3)\sin\alpha_1\}a_1$$

$$=A(a_3\cos\alpha_0+b_3\sin\alpha_0)\{b_3\cos\alpha_1-(a_1-a_3)\sin\alpha_1\}a_1$$

$$+B\{a_1b_3\cos(\alpha_0+\alpha_1)-(a_1a_3-a_3a_3-b_3b_3)\sin(\alpha_0+\alpha_1)\};$$

und vergleichen wir nun diese Gleichung mit der Gleichung 20), nämlich mit der Gleichung

$$(y\cos\alpha_0-x\sin\alpha_0)\{y\cos\alpha_1-(a_1-x)\sin\alpha_1\}a_1$$

$$=A(x\cos\alpha_0+y\sin\alpha_0)\{y\cos\alpha_1-(a_1-x)\sin\alpha_1\}a_1$$

$$+B\{a_1y\cos(\alpha_0+\alpha_1)-(a_1x-xx-yy)\sin(\alpha_0+\alpha_1)\},$$

so sehen wir, dass diese letztere Gleichung unter der gemachten Voraussetzung durch $x=a_3$, $y=b_3$ erfüllt wird, und dass also der durch die Gleichung 20) charakterisirte Kegelschnitt unter der in Rede stehenden Voraussetzung jederzeit durch den Punkt A_3, dessen Coordinaten a_3, b_3 sind, geht.

Specialisirt man die durch die Gleichung

$$y=Ax+B$$

im Allgemeinen charakterisirte gerade Linie dadurch, dass man sie durch den Punkt A_4' oder $(a_4'b_4')$ legt, so lässt sich ganz auf dieselbe Art wie vorher zeigen, dass der durch die Gleichung 20) charakterisirte Kegelschnitt durch den Punkt A_4, dessen Coordinaten a_4, b_4 sind, geht.

Wenn man also die im Allgemeinen durch die Gleichung

$$y=Ax+B$$

charakterisirte gerade Linie durch den Punkt A_3' legt, so geht der Kegelschnitt, den der Durchschnittspunkt der crura describentia beschreibt, indem der Durchschnittspunkt der crura dirigentia sich auf der in Rede stehenden geraden Linie bewegt, durch die vier Punkte A_0, A_1, A_2, A_3. Legt man dagegen die durch die Gleichung

$$y=Ax+B$$

im Allgemeinen charakterisirte gerade Linie durch den Punkt A_4', so geht der Kegelschnitt, den der Durchschnittspunkt der crura describentia beschreibt, indem der Durchschnittspunkt der crura dirigentia sich auf der in Rede stehenden geraden Linie bewegt, durch die vier Punkte A_0, A_1, A_2, A_4. Wenn man also die durch die Gleichung

$$y = Ax + B$$

im Allgemeinen charakterisirte gerade Linie mit der durch die beiden Punkte A_3' und A_4' der Lage nach bestimmten geraden Linie zusammenfallen lässt, so geht der Kegelschnitt, den der Durchschnittspunkt der crura describentia beschreibt, indem der Durchschnittspunkt der crura dirigentia sich auf der in Rede stehenden geraden Linie, welche also durch die Punkte A_3' und A_4' der Lage nach bestimmt wird, bewegt, sowohl durch die vier Punkte A_0, A_1, A_2, A_3, als auch durch die vier Punkte A_0, A_1, A_2, A_4, folglich durch die fünf Punkte A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, wodurch die Richtigkeit der obigen Construction des durch diese fünf Punkte gehenden Kegelschnitts vollständig bewiesen ist. Ueberhaupt aber enthält das Vorhergehende offenbar eine Anleitung zur Beschreibung der Kegelschnitte durch drei, vier, fünf gegebene Punkte.

Wenn man die Gleichung 20) gehörig entwickelt, so erhält sie die Form:

$$21)\left\{\begin{aligned}0 = \;& \{a_1 \sin\alpha_0 \sin\alpha_1 + Aa_1 \cos\alpha_0 \sin\alpha_1 + B\sin(\alpha_0+\alpha_1)\}\,x^2\\ &-\{a_1\cos\alpha_0\cos\alpha_1 - Aa_1\sin\alpha_0\cos\alpha_1 - B\sin(\alpha_0+\alpha_1)\}\,y^2\\ &+a_1\{\sin(\alpha_0-\alpha_1)+A\cos(\alpha_0-\alpha_1)\}\,xy\\ &-a_1\{a_1\sin\alpha_0\sin\alpha_1 + Aa_1\cos\alpha_0\sin\alpha_1 + B\sin(\alpha_0+\alpha_1)\}\,x\\ &+a_1\{a_1\cos\alpha_0\sin\alpha_1 - Aa_1\sin\alpha_0\sin\alpha_1 + B\cos(\alpha_0+\alpha_1)\}\,y,\end{aligned}\right.$$

und setzen wir nun der Kürze wegen

$$22)\left\{\begin{aligned}\Omega = \;& a_1^2\{\sin(\alpha_0-\alpha_1)+A\cos(\alpha_0-\alpha_1)\}^2\\ &+4\{a_1\sin\alpha_0\sin\alpha_1 + Aa_1\cos\alpha_0\sin\alpha_1 + B\sin(\alpha_0+\alpha_1)\}\\ &\times\{a_1\cos\alpha_0\cos\alpha_1 - Aa_1\sin\alpha_0\cos\alpha_1 - B\sin(\alpha_0+\alpha_1)\},\end{aligned}\right.$$

so ist bekanntlich, jenachdem

$$\Omega < 0,\quad \Omega = 0,\quad \Omega > 0$$

ist, der durch die Gleichung 20) oder 21) charakterisirte Kegelschnitt respective eine

Ellipse, Parabel, Hyperbel.

Die Grösse Ω bringt man nach gehöriger Entwickelung und einigen leichten Verwandlungen auf die folgende Form:

$$23)\begin{cases} \Omega = a_1^2\{\sin(\alpha_0+\alpha_1)+A\cos(\alpha_0+\alpha_1)\}^2 \\ +4B\{a_1\cos(\alpha_0+\alpha_1)-Aa_1\sin(\alpha_0+\alpha_1)-B\sin(\alpha_0+\alpha_1)\}\sin(\alpha_0+\alpha_1). \end{cases}$$

Weil nun aber

$$a_1^2\{\sin(\alpha_0+\alpha_1)+A\cos(\alpha_0+\alpha_1)\}^2+a_1^2\{\cos(\alpha_0+\alpha_1)-A\sin(\alpha_0+\alpha_1)\}^2$$
$$= a_1^2(1+A^2)$$

und

$$4B\{a_1\cos(\alpha_0+\alpha_1)-Aa_1\sin(\alpha_0+\alpha_1)-B\sin(\alpha_0+\alpha_1)\}\sin(\alpha_0+\alpha_1)$$
$$-a_1^2\{\cos(\alpha_0+\alpha_1)-A\sin(\alpha_0+\alpha_1)\}^2$$
$$=-a_1^2\{\cos(\alpha_0+\alpha_1)-A\sin(\alpha_0+\alpha_1)\}^2$$
$$+4a_1B\{\cos(\alpha_0+\alpha_1)-A\sin(\alpha_0+\alpha_1)\}\sin(\alpha_0+\alpha_1)-4B^2\sin(\alpha_0+\alpha_1)^2$$
$$=-\{a_1[\cos(\alpha_0+\alpha_1)-A\sin(\alpha_0+\alpha_1)]-2B\sin(\alpha_0+\alpha_1)\}^2$$
$$=-\{a_1\cos(\alpha_0+\alpha_1)-Aa_1\sin(\alpha_0+\alpha_1)-2B\sin(\alpha_0+\alpha_1)\}^2$$

ist, so ist auch:

$$24)\begin{cases} \Omega = a_1^2(1+A^2) \\ -\{a_1\cos(\alpha_0+\alpha_1)-Aa_1\sin(\alpha_0+\alpha_1)-2B\sin(\alpha_0+\alpha_1)\}^2, \end{cases}$$

welches der einfachste Ausdruck sein dürfte, auf welchen man die Grösse Ω bringen kann.

Wenn man durch die vier Punkte A_0, A_1, A_2, A_3 eine Parabel beschreiben will, so wird man die Grössen A und B aus den beiden Gleichungen

$$b_3' = Aa_3' + B,$$

$$a_1^2(1+A^2)-\{a_1\cos(\alpha_0+\alpha_1)-Aa_1\sin(\alpha_0+\alpha_1)-2B\sin(\alpha_0+\alpha_1)\}^2=0$$

oder

$$b_3' = Aa_3' + B,$$

$$a_1^2(1+A^2)\operatorname{cosec}(\alpha_0+\alpha_1)^2-\{a_1\cot(\alpha_0+\alpha_1)-Aa_1-2B\}^2=0,$$

wo für a_3' und b_3' ihre aus 13) bekannten Werthe zu setzen sind, bestimmen. Denn dann geht wegen der ersten dieser beiden Gleichungen die durch die Gleichung

$$y = Ax + B$$

charakterisirte gerade Linie durch den Punkt $(a_3'b_3')$ oder A_3', also nach dem Obigen der Kegelschnitt, welchen der Durchschnittspunkt der crura describentia beschreibt, indem sich der Durchschnittspunkt der crura dirigentia auf der durch die Gleichung

$$y = Ax + B$$

charakterisirten geraden Linie bewegt, durch die vier Punkte A_0, A_1, A_2, A_3, und da ausserdem die Gleichung $\Omega = 0$ erfüllt ist, so ist dieser Kegelschnitt eine Parabel.

XXVI.

Die Lehre vom Schwerpunkte in der elementaren Stereometrie.

Von

Herrn *E. Essen*,

Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Stargard.

---

1) *Aufgabe.* Die Summe beliebig vieler Seitenflächen eines schief abgeschnittenen geraden Prismas zu finden.

Auflösung. Es seien AB, BC, CD drei Grundkanten des gegebenen Prismas; ab, bc, cd die entsprechenden Seiten der Schnittfläche; F, G, H, sowie f, g, h, die Mitten der genannten Linien. Alsdann ist die Summe der drei Paralleltrapeze $ABab$, $BCbc$, $CDcd$ gleich der Summe

$$AB \times Ff + BC \times Gg + CD \times Hh.$$

Dieser Ausdruck lässt sich umformen. Zu dem Ende setzen wir fest, dass wir unter den zu den Punkten F, G, H gehörigen Längen diejenigen Seiten verstehen wollen, deren Mitten diese Punkte sind. Dies vorausgesetzt, bestimmen wir auf der Linie FG einen Punkt M dergestalt, dass seine Abstände von F und G sich umgekehrt verhalten wie die dazu gehörigen Längen. Errichtet man nun in M ein Loth auf der Grundfläche und verlängert es, bis es die Gegenfläche in m trifft, so hat man:

$$(1) \qquad (Ff - Mm):(Mm - Gg) = FM:GM,$$

$$(2) \qquad FM:GM = BC:AB,$$

woraus man ableitet:

$$AB \times Ff + BC \times Gg = (AB + BC) \times Mm.$$

Jetzt möge die Summe $AB + BC$ die zum Punkte M gehörige Länge heissen. Bestimmt man nun wiederum zwischen M und H einen Punkt N nach dem schon oben befolgten Gesetz, nämlich so, dass man habe

$$MN:HN = CD:(AB + BC),$$

und errichtet sodann in N das Loth Nn, so zeigt sich ähnlich wie zuvor, dass man habe:

$$AB \times Ff + BC \times Gg + CD \times Hh = (AB + BC + CD) \times Nn.$$

Um also die Summen beliebig vieler Seitenflächen eines Prismas der vorausgesetzten Art zu finden, hat man die Summe der Grundkanten mit einer gewissen Linie zu multipliciren, die senkrecht auf der Grundfläche steht und bis zur Schnittfläche geht. Die Lage dieser Geraden hängt offenbar von der Länge und Lage der betreffenden Grundkanten ab.

2) *Erklärung.* Um den erhaltenen Ausdruck bequemer in Worte fassen zu können, machen wir folgende Festsetzungen: Die Mitte einer geraden Linie soll auch ihr Centralpunkt heissen. Mehrere Linien zusammen heissen ein System von Linien. Der Centralpunkt eines Systems von zwei Linien soll derjenige Punkt auf der Verbindungslinie ihrer Centralpunkte heissen, dessen Abstände von diesen Punkten sich umgekehrt verhalten, wie die zugehörigen Längen. Centralpunkt eines Systems von beliebig vielen Linien soll ein nach folgender Regel aufzusuchender Punkt

genannt werden: Man verbindet nach und nach zwei, drei, vier der gegebenen Linien zu einem System und geht jedesmal von dem Centralpunkt des vorhergehenden Systems zu demjenigen des folgenden über, als hätte man den Centralpunkt eines Systems von zwei Linien zu suchen.

Fasst man nun mehrere Grundkanten eines geraden Prismas zu einem Systeme zusammen, so mag das im Centralpunkt dieses Systems errichtete Loth die Centralaxe jener Grundkanten heissen.

Hiernach hat man nun folgende Regel: Man findet die Summe von beliebigen Seitenflächen eines schief abgeschnittenen geraden Prismas, wenn man die Summe ihrer Grundkanten mit der zugehörigen, bis zur Gegenfläche verlängerten Centralaxe multiplicirt.

Hierdurch ist man in den Stand gesetzt, die Summe der Seitenflächen eines beliebigen schief abgeschnittenen Prismas zu berechnen, da sich ein solches immer in zwei gerade schief abgeschnittene Prismén zerlegen lässt.

3) Aus den beiden vorstehenden Sätzen ergeben sich sogleich nachstehende Folgerungen:

a) Jedes System von Grundkanten hat einen bestimmten Centralpunkt, und es ist bei der Aufsuchung desselben gleichgültig, welche Ordnung man befolgt, weil man sonst verschiedene Ausdrücke für dieselbe Oberfläche erhalten würde.

b) Der Centralpunkt eines aus zwei gleichen Linien gebildeten Systems liegt in der Mitte zwischen den Centralpunkten der einzelnen Linien.

c) Fallen die Centralpunkte zweier Systeme zusammen, so ist derselbe Punkt auch der Centralpunkt des aus beiden zusammengesetzten Systems.

d) Der Centralpunkt des Umfangs einer Figur von symmetrischer Gestalt liegt auf der Axe der Symmetrie, und der Centralpunkt des Umfangs einer regulären Figur ist der Mittelpunkt dieser Figur.

4) *Erklärung.* Centralpunkt der Fläche eines Dreiecks heisst derjenige Punkt, in welchem sich seine drei Mittellinien durchschneiden.

5) *Lehrsatz.* Man findet das Volumen eines schief abgeschnittenen geraden dreiseitigen Prismas, wenn

man seine Grundfläche mit dem in ihrem Centralpunkte bis zur Gegenfläche errichteten Loth, d. h. mit der Centralaxe seiner Grundfläche, multiplicirt.

Beweis. Man hat bekanntlich

$$V = \frac{G(l+m+n)}{3},$$

in welchem Ausdrucke G die Grundfläche, l, m, n die Seitenkanten Aa, Bb, Cc vorstellen. Halbirt man nun AB und ab bezüglich in D und d, so ist $Dd = \frac{l+m}{2}$. Schneidet man vom Fuss der Mittellinien CD und cd den dritten Theil ab und sind F und f die Endpunkte der abgeschnittenen Drittel, so steht Ff senkrecht auf der Grundfläche, und dabei hat man:

$$Cc - Ff = 2(Ff - Dd);$$

mithin ist $Ff = \frac{l+m+n}{3}$ und $V = G \times Ff$.

6) Zerlegt man die Grundfläche eines beliebigen geraden schief abgeschnittenen Prismas in die Dreiecke G_1, G_2, G_3...., und sind l_1, l_2, l_3 die Centralaxen dieser Flächen bis zur Gegenfläche gerechnet, so hat man:

$$V = G_1 l_1 + G_2 l_2 + G_3 l_3 + \ldots.$$

Dieser Ausdruck gestattet dieselbe Umformung wie der frühere für die Oberfläche und giebt zugleich Anlass zur Einführung des Centralpunkts eines Systems von Dreiecken, wobei ich mich jedoch nicht aufzuhalten gedenke.

7) *Aufgabe.* Es ist in einer Ebene MN eine Gerade PQ gegeben und ausserdem eine Figur $ABCD$...., die aber nur auf einer Seite der Geraden PQ liegt; es soll das Volumen und die Oberfläche desjenigen Körpers gefunden werden, welcher durch $ABCD$.... beschrieben wird, wenn die Ebene MN um die Gerade PQ gedreht wird.

Auflösung. Man suche den Centralpunkt des Umfangs und den Centralpunkt der Fläche der gegebenen Figur, der erstere möge durch U, der letztere durch V bezeichnet werden. Alsdann theile man einen der Kreise, welche von den Punkten A, B, C,

$D, \ldots U, V$ beschrieben wurden, in $2n$ Theile, lege durch sämmtliche Theilpunkte Ebenen, die jedesmal auch durch PQ gehen; dann werden offenbar alle genannten Kreise in $2n$ Theile getheilt. Zieht man nun an alle diese Kreise im ersten, dritten, fünften, überhaupt in jedem ungeraden Theilpunkte Tangenten, so schneiden sich je zwei benachbarte Tangenten desselben Kreises in derjenigen Ebene, die durch PQ und den zwischenliegenden Theilpunkt geht. Sämmtliche Tangenten bestimmen, wenn man von denjenigen absieht, welche durch die Centralpunkte der erzeugenden Figur gehen, einen aus lauter schief abgeschnittenen Prismen bestehenden ringförmigen Körper, und der senkrechte Durchschnitt sämmtlicher Prismen ist der erzeugenden Figur congruent. Folglich erhält man die Oberfläche jenes ringförmigen Körpers, wenn man den Umfang der Figur mit dem Umfange desjenigen regulären Vielecks multiplicirt, dessen Seiten den Kreis, der vom Centralpunkte des Umfangs der erzeugenden Figur beschrieben wurde, tangiren. Denkt man sich die Anzahl der $2n$ Theile in's Unendliche wachsend, so nähert sich die Oberfläche des betrachteten Körpers ohne Ende der Oberfläche des gegebenen Umdrehungskörpers, während sich jenes reguläre Polygon dem umschlossenen Kreise nähert; mithin erhält man die Oberfläche des Umdrehungskörpers, wenn man den Umfang der erzeugenden Figur mit dem Umfange desjenigen Kreises multiplicirt, der vom Centralpunkte des ersteren Umfanges beschrieben wurde.

Ganz Analoges ergiebt sich für das Volumen desselben Körpers.

8) *Erklärungen.* Man versteht unter dem Centralpunkte eines Kreisbogens denjenigen Punkt, welchem sich der Centralpunkt einer gebrochenen Linie mit gleichen Seiten ohne Ende nähert, wenn man die Anzahl dieser Seiten in's Unendliche wachsen lässt.

Man versteht unter dem Centralpunkte eines Kreissegments denjenigen Punkt, dem sich der Centralpunkt einer über der Sehne des Segments stehenden Figur, die dem Bogen dieses Segments einbeschrieben ist, ohne Ende nähert, wenn man die Zahl der Seiten dieser Figur ohne Ende wachsen lässt.

Man denke sich den Bogen AB in n Theile getheilt und die Theilpunkte durch Sehnen verbunden; x_n sei der Abstand des Centralpunkts der entstandenen gebrochenen Linie von einer beliebigen Geraden PQ, F_n die Oberfläche des Körpers, welcher erzeugt wird, wenn jene gebrochene Linie um PQ gedreht wird, F die vom Bogen AB mittelst derselben Umdrehung erzeugte Oberfläche. Alsdann hat man

$$F_n = 2x_n\pi l_n,$$

wofern man noch durch l_n die Länge der gebrochenen Linie bezeichnet. Denkt man sich nun n in's Unendliche wachsend, so nähert sich F_n ohne Ende der Grösse F, l_n der Länge l des Bogens AB; mithin nähert sich auch x_n ohne Ende der Grösse $\frac{F}{2l\pi}$. Nimmt man noch eine zweite Linie $P'Q'$ an und bezeichnet jetzt durch y_n, was vorhin durch x_n vorgestellt wurde, so nähert sich y_n ohne Ende der Grösse $\frac{F'}{2\pi l}$, indem man durch F' diejenige Oberfläche bezeichnet, welche durch Umdrehung des Bogens AB um $P'Q'$ entsteht. Mithin ist der Schwerpunkt des Bogens AB ein Punkt, dessen Abstände von PQ und $P'Q'$ bezüglich gleich $\frac{F}{2\pi l}$ und gleich $\frac{F'}{2\pi l}$ sind, d. h. es ist ein vollkommen bestimmter Punkt.

9) *Aufgabe.* Den Schwerpunkt eines Bogens AB zu finden.

Auflösung. Augenscheinlich liegt der Centralpunkt eines Bogens auf demjenigen Durchmesser, welcher durch seine Mitte geht; man hat daher nur seinen Abstand vom Mittelpunkte zu bestimmen. Denkt man sich den Bogen AB um einen mit der Sehne AB parallelen Durchmesser gedreht, so ist die vom Bogen AB beschriebene Zone bekanntlich gleich $2r\pi \times$ Sehne AB; mithin ist der Abstand des gesuchten Centralpunkts

$$= \frac{r.\pi \times \text{Sehne } AB}{\text{Bogen } AB}.$$

XXVII.

Miscellen.

Auszug aus einem Briefe des Herrn Doctor G. F. W. Baehr zu Gröningen an den Herausgeber.

Permettez moi encore de vous communiquer une remarque que j'ai faite en lisant dans un des archives (que je n'ai pas près de moi à l'instant) une démonstration de la proposition „que le carré de l'hypotenuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés." Peut être on l'a faite avant moi. Cette proposition ne serait qu'un cas particulier de la suivante:

Si sur les deux côtés AB et BC (Planche IX. Fig. 5.) d'un triangle quelconque on construit des parallélogrammes quelconques $ABDE$ et $BCFG$, et qu'on prolonge les côtés ED et FG, qui se coupent en H; on aura, en tirant HB, qui coupe le côté opposé en J, et en prenant $JK = HB$, après avoir achevé le parallélogramme $ACLM$, que ce dernier parallélogramme est égal à la somme des deux premiers.

La démonstration est assez simple; car en prolongeant LA jusqu'à la rencontre N avec EH, on aura $ABCD = ABNH = BHNA = JKAL$, et de même on aura $BCFG = JKCM$, etc., etc.

Maintenant si B est un angle droit, et qu'au lieu des parallélogrammes on construit les carrés des côtés, on aura par cette construction elle même, $BH = AC = JK$; car le triangle BDH est alors égal et semblable au triangle ABC et BH sera perpendiculaire à AC. Ainsi le théoréme du carré de l'hypotenuse serait un corollaire de cette dernière proposition que je viens d'énoncer.

Voici encore une construction de géométrie, que je n'ai encore rencontrée dans aucun livre élémentaire, et pour moi assez curieuse par la circonstance qu'elle me fut proposée dans un examen il y a déjà 18 ans:

Si dans un paral. $ABCD$ (Planche IX. Fig. 6.) on tire les diagonales AC et BD, et par leur point de rencontre EF parallèle au côté BC; puis FB et par le point de rencontre G, GH parallèle à BC; puis HB et par le point de rencontre J, JK parallèle à BC, etc.; on aura $EF=\frac{1}{3}BC$, $GH=\frac{1}{4}BC$, $JK=\frac{1}{5}BC$, etc.; la $n^{ième}$ ligne parallèle à BC sera égale à $\frac{1}{n+1}\times BC$. La démonstration est frès simple, et peut être elle vous semble bonne pour les exercices des commencants.

Il s'en suit, si GH est la $n^{ième}$ et JK la $(n+1)^{ième}$ ligne parallèle à BC et posant $DC=2$, $CH=\frac{2}{n+1}$, $CK=\frac{2}{n+2}$, partant

$$HK=\frac{2}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}.$$

Ainsi les segments tels que DF, FH, HK, etc. seraient l'inverse des nombres triagonaux, et comme leur somme est égal au côté $DC=2$ on aura, par là géometrie:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\ldots.=2\ ^{*)}.$$

Von dem Herausgeber.

I.

Wenn in Taf. IX. Fig. 7. O der Mittelpunkt des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, dessen Halbmesser wir durch r bezeichnen wollen, ist, und auf die Halbmesser OA, OB, OC in A, B, C Perpendikel errichtet werden, so entsteht ein neues Dreieck $A'B'C'$, dessen Seiten, indem die Seiten des Dreiecks ABC wie gewöhnlich durch a, b, c bezeichnet werden, wir auf die in der Figur angedeutete Weise durch $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$ bezeichnen wollen. Die Flächenräume der beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ seien respective Δ und Δ'.

Dann ist bekanntlich

$$16\Delta'^2=\{(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)\}\times\{-(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)\}$$
$$\times\{(\alpha+\beta)-(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)\}\times\{\ \ (\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)-(\gamma+\alpha)\},$$

also

---

*) Ich habe diesen Brief des verehrten Herrn Verfassers wegen seines interessanten Inhalts ganz abdrucken lassen; man vergl. aber auch die Noten des Herrn Prof. Steczkowski in Krakau in Thl. XXII. S. 354. Thl. XXIII. S. 359. G.

1) $$\Delta'^2 = \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma).$$

Nun ist aber auch

$$\Delta' = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)r + \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)r + \tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)r,$$

also

2) $$\Delta' = (\alpha+\beta+\gamma)r.$$

Vergleicht man 2) mit 1), so erhält man:

3) $$r^2 = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad r = \sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}.$$

Auf der Stelle erhellet die Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

4) $$A + \tfrac{1}{2}A' = 90^\circ, \quad B + \tfrac{1}{2}B' = 90^\circ, \quad C + \tfrac{1}{2}C' = 90^\circ.$$

Nun ist offenbar

$$\Delta' - \Delta = \tfrac{1}{2}\alpha^2 \sin A' + \tfrac{1}{2}\beta^2 \sin B' + \tfrac{1}{2}\gamma^2 \sin C',$$

also nach 4):

$$\Delta' - \Delta = \tfrac{1}{2}\alpha^2 \sin 2A + \tfrac{1}{2}\beta^2 \sin 2B + \tfrac{1}{2}\gamma^2 \sin 2C.$$

Aber

$$\tfrac{1}{2}a = \alpha \sin \tfrac{1}{2}A' = \alpha \cos A, \quad \alpha = \frac{a}{2\cos A};$$

$$\tfrac{1}{2}b = \beta \sin \tfrac{1}{2}B' = \beta \cos B, \quad \beta = \frac{b}{2\cos B};$$

$$\tfrac{1}{2}c = \gamma \sin \tfrac{1}{2}C' = \gamma \cos C, \quad \gamma = \frac{c}{2\cos C};$$

also nach dem Vorhergehenden, wie man leicht findet:

5) $$\Delta' - \Delta = \tfrac{1}{4}(a^2 \operatorname{tang} A + b^2 \operatorname{tang} B + c^2 \operatorname{tang} C).$$

Weil offenbar

$$\alpha = r \operatorname{tang} A, \quad \beta = r \operatorname{tang} B, \quad \gamma = r \operatorname{tang} C$$

ist, so ist nach 3)

$$r^2 = \frac{r^3 \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C}{r(\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C)},$$

also

6) $$\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C = \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C,$$

eine bekannte Relation zwischen drei der Bedingung

$$A + B + C = 180^\circ$$

genügenden Winkeln.

Nach 3) und den vorher gefundenen Ausdrücken

$$\alpha=\frac{a}{2\cos A},\quad \beta=\frac{b}{2\cos B},\quad \gamma=\frac{c}{2\cos C}$$

ist:

$$r^2=\frac{\dfrac{abc}{8\cos A\cos B\cos C}}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{\cos A}+\dfrac{b}{\cos B}+\dfrac{c}{\cos C}\right)},$$

woraus sich leicht die folgende Relation ergiebt:

$$7)\quad \left(\frac{1}{2r}\right)^2=\frac{\cos A}{a}\cdot\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos B}{b}\cdot\frac{\cos C}{c}+\frac{\cos C}{c}\cdot\frac{\cos A}{a}.$$

Auch ist nach 1):

$$8)\quad \Delta'^2=\frac{1}{16}\cdot\frac{a}{\cos A}\cdot\frac{b}{\cos B}\cdot\frac{c}{\cos C}\left(\frac{a}{\cos A}+\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}\right).$$

Nach 2), und weil nach dem Obigen

$$\alpha=r\tang A,\quad \beta=r\tang B,\quad \gamma=r\tang C$$

ist, ist auch:

$$9)\qquad \Delta'=r^2(\tang A+\tang B+\tang C),$$

also nach 6):

$$10)\qquad \Delta'=r^2\tang A\tang B\tang C$$

Im Vorhergehenden ist, was wohl zu beachten ist, überall angenommen worden, dass der Mittelpunkt O des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises innerhalb dieses Dreiecks liege. Wie man sich zu verhalten hat, wenn O ausserhalb des Dreiecks ABC fällt, bedarf einer weiteren Erläuterung hier nicht. Wir theilen das Obige nur mit, weil es vielleicht eine zweckmässige Uebung für Schüler abgeben kann, ohne uns auf eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes einzulassen.

II.

Geometrischer Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise berühren.

Wir wollen annehmen, dass die beiden gegebenen Kreise von den gesuchten Kreisen von Aussen berührt werden sollen.

Berührungen von Innen gestatten natürlich eine ganz ähnliche Behandlung, was wir hier nicht weiter berühren, weil das Folgende nur den Zweck hat, zur Uebung bei dem Unterrichte benutzt zu werden.

Die Halbmesser der beiden gegebenen Kreise seien r und r_1. Den Mittelpunkt des mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreises nehme man als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy an, und lege den positiven Theil der Axe der x durch den Mittelpunkt des mit dem Halbmesser r_1 beschriebenen Kreises. Die Entfernung der Mittelpunkte der beiden gegebenen Kreise von einander sei a. Sind dann ϱ der Halbmesser und u, v die Coordinaten des Mittelpunkts irgend eines der gesuchten Kreise, so hat man offenbar die beiden folgenden Gleichungen:

$$u^2+v^2=(r+\varrho)^2,$$

$$(u-a)^2+v^2=(r_1+\varrho)^2;$$

und findet nun die Gleichung des zu bestimmenden geometrischen Orts, wenn man aus den beiden vorstehenden Gleichungen ϱ eliminirt. Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so erhält man:

$$a^2-2au=r_1{}^2-r^2+2(r_1-r)\varrho,$$

also

$$\varrho=\frac{a^2-2au+r^2-r_1{}^2}{2(r_1-r)},$$

und folglich

$$r+\varrho=\frac{a^2-2au-(r-r_1)^2}{2(r_1-r)}.$$

Daher ist die Gleichung des Orts:

$$u^2+v^2=\frac{\{a^2-2au-(r-r_1)^2\}^2}{4(r-r_1)^2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$v^2=\frac{\{a^2-2au-(r-r_1)^2\}^2-4(r-r_1)^2u^2}{4(r-r_1)^2},$$

also, wenn man den Zähler in Factoren zerlegt:

$$v^2=\frac{\{a^2-2au-(r-r_1)^2+2(r-r_1)u\}\{a^2-2au-(r-r_1)^2-2(r-r_1)u\}}{4(r-r_1)^2},$$

oder, wenn man in jedem der beiden Factoren des Zählers u^2 addirt und subtrahirt:

$$v^2 = \frac{\{(a-u)^2-(r-r_1-u)^2\}\{(a-u)^2-(r-r_1+u)^2\}}{4(r-r_1)^2}.$$

Zerlegt man nun jeden der beiden Factoren des Zählers von Neuem in zwei Factoren, so erhält man:

$$v^2 = \frac{(a-r+r_1)(a+r-r_1)(a-r+r_1-2u)(a+r-r_1-2u)}{4(r-r_1)^2},$$

also:

$$v = \pm \frac{\sqrt{(a-r+r_1)(a+r-r_1)(a-r+r_1-2u)(a+r-r_1-2u)}}{2(r-r_1)}.$$

Mittelst dieser nicht ganz uninteressanten Formel lassen sich für jedes u die entsprechenden v, wenn dieselben überhaupt möglich sind, berechnen. Das Weitere bleibe dem Leser überlassen.

III.

Wenn $ABCDEF$ in Taf. IX. Fig. 8. ein sogenanntes vollständiges Viereck ist und $AB=a$, $BE=b$, $AD=c$, $DF=d$, $BC=e$, $CF=f$, $CD=g$, $CE=h$ gesetzt wird, so findet zwischen den acht Grössen a, b, c, d, e, f, g, h immer eine Gleichung oder Relation Statt, die auf folgende Art leicht gefunden werden kann.

Offenbar hat man die Gleichung:

$$\Delta ADE + \Delta CDF = \Delta ABF + \Delta BCE,$$

also nach einem bekannten Satze von dem Inhalte des Dreiecks:

$$(a+b)c\sin x + dg\sin w = (c+d)a\sin x + be\sin v.$$

In den Dreiecken ADE und ABF ist aber:

$$\sin x : \sin w = g+h : a+b,$$
$$\sin x : \sin v = e+f : c+d;$$

also

$$\sin w = \frac{a+b}{g+h}\sin x, \quad \sin v = \frac{c+d}{e+f}\sin x$$

und folglich, wenn man diese Werthe von $\sin w$ und $\sin v$ in die obige Gleichung einführt und dann durch $\sin x$ dividirt:

$$(a+b)c + dg\frac{a+b}{g+h} = (c+d)a + be\frac{c+d}{e+f}$$

oder

$$\frac{a+b}{g+h}\{dg+c(g+h)\}=\frac{c+d}{e+f}\{be+a(e+f)\}\cdot$$

Hebt man ac auf beiden Seiten dieser Gleichung auf, so wird dieselbe:

$$bc+dg\frac{a+b}{g+h}=ad+be\frac{c+d}{e+f},$$

oder

$$bc-be\frac{c+d}{e+f}=ad-dg\frac{a+b}{g+h},$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$b\frac{cf-de}{e+f}=d\frac{ah-bg}{g+h},$$

oder

$$b(g+h)(cf-de)=d(e+f)(ah-bg),$$

oder

$$\frac{b}{d}\cdot\frac{g+h}{e+f}\cdot\frac{cf-de}{ah-bg}=1.$$

Man kann auch auf folgende Art zu dieser Relation gelangen. Offenbar hat man die Gleichung:

$$\Delta ABF-\Delta CDF=\Delta ADE-\Delta BCE,$$

also

$$(e+f)a\sin v-fg\sin y=(g+h)c\sin w-eh\sin y;$$

aber in den Dreiecken BCE und CDF:

$$\sin y:\sin v=b:h,$$
$$\sin y:\sin w=d:f;$$

also

$$\sin v=\frac{h}{b}\sin y,\quad \sin w=\frac{f}{d}\sin y;$$

folglich nach dem Obigen:

$$(e+f)\frac{ah}{b}-fg=(g+h)\frac{cf}{d}-eh,$$

oder

$$\{a(e+f)+be\}\frac{h}{b}=\{c(g+h)+dg\}\frac{f}{d},$$

oder

$$\frac{bf}{dh}=\frac{a(e+f)+be}{c(g+h)+dg}=\frac{e(a+b)+af}{g(c+d)+ch}.$$

Diese Relation auf die obige Form zu bringen hat keine Schwierigkeit, und wir verweilen daher dabei nicht länger.

Man kann sich der obigen Gleichungen in vielen Fällen mit Vortheil bei dem Beweisen anderer Sätze bedienen. Um hierzu ein Beispiel zu geben, wählen wir den interessanten Satz von Monge *), dass der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide in der Mitte der geraden Linie liegt, welche die Mittelpunkte zweier gegenüberstehenden Kanten der Pyramide mit einander verbindet.

Wenn $AFGH$ in Taf. IX. Fig. 9. eine dreiseitige Pyramide ist, so findet man deren Schwerpunkt bekanntlich auf folgende Art, wie in jedem Lehrbuche der Statik bewiesen wird. Man halbire GH in E, ziehe AE, und nehme $BE=\frac{1}{3}AE$, so ist B der Schwerpunkt des Dreiecks AGH, und der Schwerpunkt der Pyramide wird ferner erhalten, wenn man FB zieht und $BC=\frac{1}{4}FB$ nimmt, wo dann C der Schwerpunkt der Pyramide sein wird.

Soll nun der Satz von Monge richtig sein, so müssen in dem vollständigen Vierecke $ABCDEF$ (Taf. IX. Fig. 8.) die Verhältnisse

$$\frac{BE}{AB}=\tfrac{1}{2},\quad \frac{BC}{CF}=\tfrac{1}{3},\quad \frac{AD}{DF}=1,\quad \frac{CD}{CE}=1$$

oder

$$\frac{b}{a}=\tfrac{1}{2},\quad \frac{e}{f}=\tfrac{1}{3},\quad \frac{c}{d}=1,\quad \frac{g}{h}=1$$

oder

$$a=2b,\quad f=3e,\quad d=c,\quad h=g$$

der Gleichung

$$\frac{b}{d}\cdot\frac{g+h}{e+f}\cdot\frac{cf-de}{ah-bg}=1$$

Genüge leisten. Führt man aber die obigen Werthe von a, f, d, h in diese Gleichung ein, so erhält man wirklich

---

*) Monge hat diesen Satz zuerst in der Correspondance sur l'école impériale polytechnique. II^e^ Volume. No. I^er^. Janvier 1809. p. 1. mitgetheilt und auf zwei verschiedene Arten bewiesen.

$$\frac{b}{c}\cdot\frac{2g}{4e}\cdot\frac{3ce-ce}{2bg-bg}=\frac{b}{c}\cdot\frac{g}{2e}\cdot\frac{2ce}{bg}=1,$$

so dass also die in Rede stehenden Verhältnisse der Gleichung

$$\frac{b}{d}\cdot\frac{g+h}{e+f}\cdot\frac{cf-de}{ah-bg}=1$$

in der That genügen, und der Satz von **Monge** also richtig ist.

Wählt man zum Beweise die Gleichung

$$\frac{bf}{dh}=\frac{a(e+f)+be}{c(g+h)+dg},$$

so muss sein:

$$\frac{3be}{cg}=\frac{8be+be}{2cg+cg}=\frac{9be}{3cg}=\frac{3be}{cg},$$

was also wirklich der Fall ist.

IV.

Aufgabe.

Wie gross ist der Körper, welcher durch Umdrehung eines mit der Drehungsaxe DF fest verbundenen Dreiecks ABC entsteht, wenn die Verlängerungen zweier Seiten AB und AC die Axe unter den Winkeln α und β in einem Abstande $DF=a$ schneiden, und wenn die verlängerte dritte Seite BC in der Mitte E von DF auf DF senkrecht steht? (Taf. IX. Fig. 10.)

Auflösung.

Bezeichnen wir den Inhalt des bei der Umdrehung des Dreiecks ABC entstandenen Körpers durch V, so ist offenbar, wenn AG auf DF senkrecht steht:

$$V=\tfrac{1}{3}\pi.BE^2.DE+\tfrac{1}{3}\pi.CE^2.EF-\tfrac{1}{3}\pi.AG^2.DF$$
$$=\tfrac{1}{3}\pi a(\tfrac{1}{2}BE^2+\tfrac{1}{2}CE^2-AG^2).$$

Aber

$$BE=\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tang}\,\alpha,\quad CE=\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tang}\,\beta,\quad AG=\frac{a}{\cot\alpha+\cot\beta};$$

also

$$V=\tfrac{1}{3}\pi a^3\left\{\frac{\mathrm{tang}\,\alpha^2+\mathrm{tang}\,\beta^2}{8}-\left(\frac{1}{\cot\alpha+\cot\beta}\right)^2\right\}.$$

Es ist aber

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha^2+\operatorname{tang}\beta^2}{8}-\left(\frac{1}{\cot\alpha+\cot\beta}\right)^2$$

$$=\frac{\operatorname{tang}\alpha^2+\operatorname{tang}\beta^2}{8}-\frac{\operatorname{tang}\alpha^2\operatorname{tang}\beta^2}{(\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta)^2}$$

$$=\frac{\operatorname{tang}\alpha^2+\operatorname{tang}\beta^2}{8}-\frac{\operatorname{tang}\alpha^2\operatorname{tang}\beta^2}{\operatorname{tang}\alpha^2+\operatorname{tang}\beta^2+2\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}$$

$$=\frac{(\operatorname{tang}\alpha^2+\operatorname{tang}\beta^2)^2+2\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta(\operatorname{tang}\alpha^2+\operatorname{tang}\beta^2)-8\operatorname{tang}\alpha^2\operatorname{tang}\beta^2}{8(\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta)^2}$$

$$=\frac{\operatorname{tang}\alpha^4-2\operatorname{tang}\alpha^2\operatorname{tang}\beta^2+\operatorname{tang}\beta^4+2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(\operatorname{tg}\alpha^2-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta^2)}{8(\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta)^2}$$

$$=\frac{(\operatorname{tang}\alpha^2-\operatorname{tang}\beta^2)^2+2\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta(\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\beta)^2}{8(\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta)^2}$$

$$=\frac{(\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\beta)^2\{(\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta)^2+2\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta\}}{8(\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta)^2}$$

$$=\tfrac{1}{8}\left(\frac{\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta}\right)^2(\operatorname{tang}\alpha^2+4\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta+\operatorname{tang}\beta^2)$$

$$=\tfrac{1}{8}\left\{\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right\}^2(\operatorname{tang}\alpha^2+4\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta+\operatorname{tang}\beta^2);$$

also

$$V=\frac{1}{24}\pi a^3\left\{\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right\}^2(\operatorname{tang}\alpha^2+4\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta+\operatorname{tang}\beta^2).$$

Auch ist

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha^2+\operatorname{tang}\beta^2}{8}-\left(\frac{1}{\cot\alpha+\cot\beta}\right)^2$$

$$=\tfrac{1}{8}\left\{\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right\}^2(\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta)^2\left\{1+\frac{2\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}{(\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta)^2}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{8}\left\{\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right\}^2\cdot\left\{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\right\}^2\left\{1+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)^2}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{8}\left\{\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\right\}^2\left\{1+\frac{\sin2\alpha\sin2\beta}{2\sin(\alpha+\beta)^2}\right\},$$

also

$$V=\frac{1}{24}\pi a^3\left\{\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\right\}^2\left\{1+\frac{\sin2\alpha\sin2\beta}{2\sin(\alpha+\beta)^2}\right\}.$$

Setzt man

$$\tang\varphi=\sqrt{\frac{\sin 2\alpha\sin 2\beta}{2\sin(\alpha+\beta)^2}},$$

so wird

$$V=\frac{1}{24}\pi a^3\left\{\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi}\right\}^2.$$

V.

Poissons Wahlspruch war folgender: „La vie n'est bonne qu'à deux choses: à faire des mathématiques et à les professer.“ (Institut. 1855. Nr. 1103. p. 168.)

Auszug aus einem Briefe des Herrn Lehramts-Praktikanten **Leopold Stizenberger** zu **Heidelberg** an den **Herausgeber**.

Erlauben Sie, dass ich Ihnen einen auf alte Geometrie gestützten Beweis des Lehrsatzes, dass sich die drei Mittellinien des Dreiecks in **einem** Punkte durchschneiden, mittheile. Ich glaube, dass der erwähnte Lehrsatz durch alte Geometrie nicht einfacher und eleganter bewiesen werden kann.

Lehrsatz.

Wenn man die drei Seiten eines Dreieckes ABC (Taf. IX. Fig. 11.) in den Punkten D, E, F halbirt und diese Punkte mit den gegenüberliegenden Spitzen C, A, B des Dreieckes durch gerade Linien verbindet, so schneiden sich letztere in einem Punkte O innerhalb des Dreieckes.

Beweis. Zuerst ziehe man die Geraden AE und CD; diese müssen sich nothwendig in irgend einem Punkte O innerhalb des Dreieckes ABC durchschneiden. Verbindet man nun den Punkt O einmal mit der Spitze B, dann mit dem Mittelpunkte F von AC, so läuft der Beweis darauf hinaus, darzuthun, dass BOF eine gerade Linie ist. Zieht man durch die Mittelpunkte D, E, F die Geraden DE und EF, so läuft jede derselben mit der gegenüberliegenden Seite des Dreieckes ABC parallel und ist jeweils die Hälfte davon; daraus folgt: $\angle DEA=EAC$ und $\angle EDC=DCA$, also $\triangle DOE \backsim AOC$. Es findet daher die Proportion statt: $OE:OA=DE:AC=1:2$; da zudem $FE=\frac{1}{2}AB$ und $\angle OEF=BAO$, so müssen auch die Dreiecke EOF und BOA ähnlich sein; demnach ist $\angle EOF=BOA$, was nur stattfinden kann, wenn BOF eine gerade Linie ist.

XXVIII.

Die Orientirung des Messtisches nach zwei gegebenen Punkten.

Von

Herrn Professor *K. Breymann*

an der k. k. Forstlehranstalt zu Mariabrunn.

Die Aufgabe des Rückwärtseinschneidens nach zwei oder drei ihrer Lage nach gegebenen Punkten gehört unstreitig unter die wichtigsten Aufgaben der ganzen Geodäsie, da man durch Lösung derselben im Stande ist, aus der bekannten Lage dieser, wenn auch ganz unzugänglichen Punkte die Lage beliebig vieler anderer Punkte zu bestimmen, und so die Vermessung einer ganzen Landesstrecke auf die bekannte Lage von zwei oder drei gegebenen Punkten zu gründen.

Es haben sich daher auch die berühmtesten Geometer, wie Lambert, Delambre, Bessel, Bohnenberger u. a. m. mit dieser Aufgabe beschäftigt und zu ihrer Lösung die scharfsinnigsten Methoden angegeben, von denen sich aber gleichwohl viele, der auszuführenden komplizirten Konstruktionen wegen, für die Praxis nur wenig eignen.

Namentlich hat die Aufgabe des Rückwärtseinschneidens nach drei ihrer Lage nach bekannten Punkten — die sogenannte Pothenotische Aufgabe — eine vielfache Bearbeitung gefunden, und wir besitzen zu ihrer direkten Lösung mittelst des Messtisches mehrere Methoden, unter denen sich vorzüglich die von Bohnenberger und Bessel angegebene durch Scharfsinn und Eleganz auszeichnet.

Trotzdem wenden aber die meisten Praktiker zur Lösung dieser Aufgabe mittelst des Messtisches fast ausschliesslich nur das von dem sächsischen Major Lehmann zuerst angegebene Näherungsverfahren an, da sie durch dieses unter allen Umständen anwendbare Verfahren eben so sicher und in der Regel schneller zum Ziele gelangen.

Viel seltener als die Pothenotische Aufgabe kam bis jetzt bei Messtischaufnahmen die Orientirung des Tisches nach zwei gegebenen Punkten in Anwendung, und es dürfte der Grund hiervon darin zu suchen sein, dass alle bekannten Auflösungen dieser Aufgabe ziemlich komplizirt sind und eine zweimalige Aufstellung des Messtisches nothwendig machen. Das nachstehende Verfahren der Orientirung des Messtisches nach zwei gegebenen Punkten erheischt nur eine einmalige Aufstellung des Tisches über dem zu bestimmenden Punkte, und scheint sich, obgleich es die richtige Lage des gesuchten dritten Punktes nur näherungsweise liefert, durch leichte und sichere Ausführbarkeit für die Messtischpraxis besonders zu empfehlen.

Zur Begründung dieses Verfahrens muss ich jedoch ein paar geometrische Sätze vorausschicken.

Erster Satz.

Halbirt man in dem Dreiecke ABC (Taf. XI. Fig. 1.) die zwischen den Schenkeln des Winkels ACB gezogene Gerade EF im Punkte g_1, und schneiden sich die durch die Punkte C und g_1 gezogene Linie CD_1 und die beiden Transversalen EB, FA nicht in einem Punkte, so ist auch die Linie EF nicht parallel zur Seite AB.

Beweis.

Man denke sich durch den Punkt C und den nicht auf der Linie CD_1 liegenden Durchschnittspunkt O der beiden Transversalen die Linie CD gezogen, so besteht nach einem bekannten geometrischen Satze die Gleichung:

$$CE.AD.BF = CF.BD.AE.$$

Wäre nun die Linie EF, trotzdem, dass sich die drei Transversalen CD_1, EB, FA nicht in einem Punkte schneiden, doch zur Seite AB parallel, so bestünde die Proportion

$$CE:EA = CF:FB,$$

aus welcher folgt:

$$CE.BF = CF.EA.$$

Man hätte daher auch mit Rücksicht auf die obige Gleichung:

$$AD = BD = \tfrac{1}{2}AB.$$

Unter der Voraussetzung der parallelen Lage der Linien AB und EF beständen aber auch die Proportionen:

$$CE:CA = Eg_1:AD_1,$$

$$CE:CA = EF:AB;$$

aus welchen folgt:

$$Eg_1:AD_1 = EF:AB,$$

$$AD_1 = \frac{Eg_1.AB}{EF},$$

oder, da, der Konstruktion gemäss, $Eg_1 = \tfrac{1}{2}EF$:

$$AD = \frac{\tfrac{1}{2}EF.AB}{EF} = \tfrac{1}{2}AB.$$

Wäre demnach, trotzdem, dass sich die drei Transversalen des Dreieckes ABC nicht in einem Punkte schneiden, die Linie EF doch parallel zur Seite AB, so müsste die Gleichung

$$AD = AD_1 = \tfrac{1}{2}AB$$

bestehen, welche eine Absurdität ausspricht; folglich kann auch die Linie DE nicht parallel zur Seite AB sein.

Zweiter Satz.

Halbirt man in dem Dreiecke ABC (Taf. XI. Fig. 2.) die Linie EF in g und schneiden sich die durch den Halbirungspunkt g gezogene Linie CD und die Transversalen EB und FA in einem Punkte O, so ist auch die Linie EF parallel zur Seite AB.

Beweis.

Wäre unter dieser Voraussetzung die Linie EF nicht parallel zu AB, so liesse sich durch den Punkt E eine andere Linie EF_1 parallel zur Seite AB ziehen. Denkt man sich nun wieder die Transversalen EB und F_1A gezogen, so kann die Transversale F_1A nicht durch den Durchschnittspunkt O der Halbirungslinie CD mit der Transversale EB gehen, wenn nicht auch EF_1 mit EF zusammenfällt. Schneiden sich aber die drei Transversalen CD, EB und F_1A nicht in einem Punkte, so ist nach dem ersten Satze auch EF_1 nicht parallel zur Seite AB. Da sich nun dasselbe von jeder anderen, durch den Punkt E gezogenen, nicht mit EF zusammenfallenden Linie beweisen lässt, so muss auch EF parallel zur Seite AB sein.

Aufgabe.

Es sei die Entfernung zweier Punkte A und B (Taf. XI. Fig. 3.) auf dem Felde auf dem Messtischblatte in der Verjüngung ab gegeben; man soll die Lage c eines dritten Punktes C in der Natur auf dem Tischblatte bestimmen, wenn man sich weder auf den Punkten A und B, noch auch in der Linie AB oder ihrer Verlängerung mit dem Messtische aufstellen kann.

Auflösung.

Man halbire die auf dem Tischblatte gegebene Verjüngung der Linie AB auf dem Felde in dem Punkte g, stelle den Messtisch über dem Punkte C so auf, dass die Verjüngung ab auf dem Tischblatte, dem Augenmaasse nach, eine zur Linie AB auf dem Felde parallele Lage hat, und befestige sodann das Tischblatt. Hierauf lege man das Visirlineal an die Punkte a, b, visire nach den gleichnamigen Punkten A, B auf dem Felde und ziehe diese Visirrichtungen nach rückwärts aus, bis sich dieselben auf dem Tischblatte in einem Punkte c schneiden, welcher eine vorläufige Verzeichnung des gleichnamigen Punktes C auf dem Felde liefert. Hätte man bei der Aufstellung des Messtisches in C die parallele Lage der Linien ab auf dem Tischblatte und AB auf dem Felde, dem Augenmaasse nach zufällig getroffen, so wäre nach dem beschriebenen Vorgange auch c die richtige Verzeichnung des in vertikaler Richtung unter ihm liegenden Punktes C auf dem Felde.

Um nun die parallele Lage der Linien ab und AB und somit auch die Richtigkeit der Verzeichnung des Punktes c zu prüfen, ziehe man durch den Punkt c auf dem Tischblatte und den Halbirungspunkt g der verjüngten Linie ab eine Linie cD von unbestimmter Länge gegen die Gerade AB auf dem Felde aus, lege das Visirlineal an den Punkt a auf dem Tischblatte, visire nach dem Punkte B auf dem Felde und bezeichne den Durchschnittspunkt o dieser Visirrichtung mit der gezogenen Linie cD durch einen ganz feinen Punkt. Nun lege man das Visirlineal an den Punkt b auf dem Tischblatte, visire nach dem Punkte A auf dem Felde und sehe zu, ob diese Visirrichtung durch den Punkt o auf dem Tischblatte hindurchgeht. Ist diess wie in Taf. XI. Fig. 3. der Fall, so schneiden sich die beiden Transversalen bA, aB und die Halbirungslinie cD in einem Punkte, und es ist nach dem zweiten Satze ab parallel zur Linie AB auf dem Felde, folglich auch der Punkt c auf dem Tischblatte die richtige Verzeichnung des vertikal unter ihm liegenden Punktes C auf dem Felde, den man durch Einlothung jederzeit leicht finden kann. Trifft aber die Visirrichtung durch die Punkte b und o, wie in Taf. XI. Fig. 4., nicht nach dem Punkte A, sondern etwa nach D, so ist nach dem ersten Satze ab nicht parallel zu AB, folglich auch die Lage des Punktes c auf dem Tischblatte nicht richtig bestimmt. Die Lage der Visirrichtung boD gegen die Transversale bA gibt uns aber ein Mittel an die Hand, zur richtigen Bestimmung dieses Punktes zu gelangen.

Man wird nämlich, um die noch nicht parallele Lage der verjüngten Linie ab auf dem Tischblatte gegen die Linie AB auf dem Felde zu verbessern, das Tischblatt so drehen müssen, dass sich dabei die Visirrichtung boD der Lage der Transversale bA nähert. Stellt man sodann das Tischblatt fest, legt das Visirlineal abermals an die Endpunkte a_1, b_1 der verjüngten Linie a_1b_1 in ihrer jetzigen, durch die vorgenommene Drehung des Tischblattes veränderten Lage, visirt nach den gleichnamigen Punkten A, B auf dem Felde und zieht diese Visirrichtungen nach rückwärts aus, so ergibt sich in ihrem Durchschnittspunkte c_1 eine neue Verzeichnung des vertikal unter ihm gelegenen Punktes C auf dem Felde.

Um die Richtigkeit dieser neuen Verzeichnung des Punktes C zu prüfen, ziehe man wieder durch den Punkt c_1 auf dem Tischblatte und den Halbirungspunkt g_1 der verjüngten Linie a_1b_1 in seiner jetzigen Lage eine feine Bleilinie c_1g_1J von unbestimmter Länge gegen die Gerade AB auf dem Felde, lege das Visirlineal an den Punkt a_1, visire nach dem Punkte B auf dem Felde und bezeichne den Durchschnittspunkt o_1 dieser Visur mit der Halbirungslinie c_1g_1J durch einen feinen Punkt. Hierauf lege man das Visirlineal an die Punkte b_1 und o_1 und sehe, ob die durch diese Punkte angegebene Visirrichtung genau auf den Punkt A auf dem Felde trifft, oder man lege das Visirlineal an den Punkt b_1 auf dem Tischblatte, visire nach dem Punkte A auf dem Felde und sehe, ob diese Visirrichtung durch den bereits auf dem Tischblatte festliegenden Punkt o_1 hindurchgeht. Ist diess der Fall, so ist nunmehr $a_1 b_1$ parallel zur Linie AB auf dem Felde und der Punkt c_1 auf dem Tischblatte die richtige Verzeichnung des in vertikaler Richtung unter ihm liegenden Punktes C auf dem Felde, welcher durch Einlothung jederzeit leicht gefunden werden kann.

Sollte aber die Visirrichtung $b_1 o_1$ noch nicht genau nach dem Punkte A auf dem Felde hinweisen, so drehe man das Tischblatt abermals in der Richtung, dass sich dabei die Visirrichtung $b_1 o_1$ der Richtung der Transversale $b_1 A$ nähert, und wiederhole das oben beschriebene, sehr schnell zu bewerkstelligende Verfahren so lange, bis die beiden Transversalen und die Halbirungslinie sich in einem Punkte schneiden, in welchem Falle dann die Verjüngung ab parallel zur Linie AB auf dem Felde und der durch Rückwärtseinschneiden erhaltene Punkt c auf dem Tischblatte die richtige Verzeichnung des vertikal unter ihm liegenden Punktes C auf dem Felde ist. Einige Wiederholungen dieses in sehr kurzer Zeit auszuführenden Verfahrens werden bei nur einiger Uebung genügen, um den beabsichtigten Zweck zu erreichen.

Dieses leicht und mit grosser Schärfe ausführbare Verfahren zur Orientirung des Messtisches nach zwei gegebenen Punkten erheischt nur eine einmalige Aufstellung des Messtisches über dem zu bestimmenden Punkte, und liefert daher die Verzeichnung eines dritten Punktes, besonders wenn die gegebenen und der zu bestimmende Punkt weit von einander entfernt sind, in der kürzesten Zeit. Dasselbe scheint daher zu graphischen Triangulirungen vorzüglich anwendbar zu sein und dürfte die jedenfalls komplizirtere Pothenotische Aufgabe in den meisten Fällen entbehrlich machen.

Ein minder scharfes Resultat liefert diese Methode des Rückwärtseinschneidens nur in dem Falle, wenn der zu bestimmende Punkt C zu nahe an den beiden gegebenen Punkten A und B liegt, weil dann die Lage der Linie cD (Taf. XI. Fig. 3.) durch die zwei sehr nahe an einander liegenden Punkte c und g auf dem Tischblatte nicht mit der nothwendigen Schärfe bestimmbar ist.

In dem erwähnten Falle liefern aber auch alle übrigen Methoden zur Festlegung des Punktes C gegen die gegebene Linie AB keine scharfen Resultate, weil sodann die Winkel an A und B zu spitz, der Winkel bei C aber zu stumpf wird, welcher Fall bei Triangulirungen jederzeit vermieden werden soll und auch vermieden werden kann, da die Wahl der Netzpunkte dem Geometer in der Regel frei steht.

Zweite Auflösung
mit Hilfe eines Winkelmessers, welcher die gemessenen Winkel in Gradmaass angibt.

Man begebe sich nach dem Punkte C (Taf. XI. Fig. 5.), nehme eine Schnur EF von beliebiger, jedoch nicht zu geringer Länge, deren Mittelpunkt G kennbar bezeichnet ist, und lasse dieselbe durch zwei Gehilfen zwischen den Schenkeln CA, CB des Winkels ACB so ausspannen, dass deren Endpunkte E, F auf die Schenkel CA, CB zu liegen kommen und die Lage der durch die ausgespannte Schnur dargestellten Linie EF dem Augenmaasse nach parallel zur Linie AB auf dem Felde ist. Nun lasse man im Halbirungspunkte G der Schnur einen Visirstab vertikal einstecken und markire die Visirrichtung CG durch einen in der Verlängerung dieser Linie vertikal eingesteckten Visirstab. Hierauf bestimmt der im Endpunkte E der ausgespannten Schnur stehende Beobachter gemeinschaftlich mit dem Beobachter in C den Durchschnittspunkt O der Visirrichtungen CD, EB, welcher durch einen im Punkte O vertikal eingesteckten Visirstab bezeichnet wird. Um nun die parallele Lage der Linien EF und AB zu prüfen, visirt der am andern Endpunkte F der ausgespannten Schnur stehende Beobachter nach A und sieht zu, ob diese Visirrichtung durch den bereits bezeichneten Durchschnittspunkt O der Transversalen CD und EB hindurch geht. Ist diess, wie in Taf. XI. Fig. 5., noch nicht der Fall, so ist nach dem ersten Satze die Linie EF auch nicht parallel zur Linie AB, folglich auch die Linie AB, welche von der verlängerten Halbirungslinie CO in D geschnitten wird, in diesem Punkte nicht halbirt, und es zeigt dem in F stehenden Beobachter die durch die Punkte O und A gelegte Visirrichtung, welche im Punkte F_1 in die Seite BC des Dreieckes ABC einschneidet, dass er den Endpunkt F der Schnur in der Visirrichtung CB dem Winkelpunkte C näher rücken müsse. In demselben Verhältnisse wird aber auch der in E befindliche Beobachter das Ende E der ausgespannten Schnur in der Visirrichtung CA dem Punkte A nähern müssen, um die noch nicht parallele Lage der Linien AB und EF zu verbessern. Wiederholt man nun bei der jetzigen verbesserten Lage der Schnur das oben angegebene Verfahren, so wird man nach einigen Versuchen leicht dahin gelangen, dass sich, wie in Taf. XI. Fig. 6. die drei Transversalen CD, EB und AF in einem Punkte O schneiden, welcher durch einen vertikal eingesteckten Visirstab bezeichnet wird.

Mit Rücksicht auf den zweiten Satz ist sodann die ausgespannte Schnur EF parallel zur Linie AB und auch diese Linie in dem in der Verlängerung von CO liegendem Punkte D halbirt.

Bei dieser Konstruktion darf jedoch die Schnur EF nicht zu kurz sein, weil ausserdem die Lage der Linie CO durch die zu nahe an einander liegenden Punkte C und G nicht mit der nothwendigen Schärfe bestimmt werden könnte. Ist der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt O der drei Transversalen CD, BE, AF auf dem Felde bereits durch einen vertikal eingesteckten Visirstab bezeichnet, so stelle man den Winkelmesser mit dem Mittelpunkte seines Horizontalkreises vertikal über dem Punkte C auf dem Felde auf und messe die Winkel $ACO = o$ und $ACB = C$, welche nebst der bekannten Länge der Linie AB zur Bestimmung der Lage des Punktes C gegen die gegebene Gerade AB ausreichen.

Man hat sodann in dem Dreiecke ABC:

$$AC = \frac{AB . \sin B}{\sin C},$$

$$BC = \frac{AB . \sin(B + C)}{\sin C};$$

und in den beiden Dreiecken ACD und BCD:

$$AC = \frac{AB . \sin m}{2 \sin o} = \frac{AB . \sin(B + C - o)}{2 \sin o},$$

$$BC = \frac{AB . \sin n}{2 \sin(C - o)} = \frac{AB . \sin(B + C - o)}{2 \sin(C - o)}.$$

Durch Gleichsetzung dieser Ausdrücke für die Seiten AC und BC ergibt sich:

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin(B + C - o)}{2 \sin o},$$

$$\frac{\sin(B + C)}{\sin C} = \frac{\sin(B + C - o)}{2 \sin(C - o)};$$

und durch Division der letzteren Gleichung durch die erstere:

$$\frac{\sin(B + C)}{\sin B} = \frac{\sin o}{\sin(C - o)},$$

$$\frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C}{\sin B} = \frac{\sin o}{\sin(C - o)},$$

$$\cos C + \cot B \sin C = \frac{\sin o}{\sin(C - o)},$$

$$\cot B \sin C = \frac{\sin o}{\sin(C-o)} - \cos C,$$

$$\cot B = \frac{\sin o}{\sin C \sin(C-o)} - \cot C.$$

Um diesen Ausdruck für die Kotangente des Winkels B zur logarithmischen Berechnung bequemer einzurichten, setze man

$$\cot \varphi = \frac{\sin o}{\sin C \sin(C-o)},$$

woraus endlich folgt:

$$\cot B = \cot \varphi - \cot C = \frac{\sin(C-\varphi)}{\sin C \sin \varphi}.$$

Die Seiten AC und BC ergeben sich nunmehr aus den Ausdrücken:

$$AC = \frac{AB.\sin B}{\sin C} = \frac{AB.\sin(B+C-o)}{2\sin o},$$

$$BC = \frac{AB.\sin(B+C)}{\sin C} = \frac{AB.\sin(B+C-o)}{2\sin(C-o)}.$$

Soll die Lage des Punktes C durch rechtwinklige Koordinaten bestimmt werden, und sieht man dabei die gegebene Gerade AB als Abscissenaxe und den Punkt B als Anfangspunkt der Koordinaten an, so ergeben sich für die Koordinaten des zu bestimmenden Punktes C die Ausdrücke:

$$\text{Absc. } C = BC.\cos B = \frac{AB.\sin(B+C)\cos B}{\sin C},$$

$$\text{Ord. } C = BC.\sin B = \frac{AB.\sin(B+C)\sin B}{\sin C}.$$

XXIX.

Die Theorie der Ellipse und Hyperbel, aus einem neuen Gesichtspunkte dargestellt.

Von
dem Herausgeber.

Jedem Astronomen ist es bekannt, welche grosse Vereinfachung aller die elliptische Bewegung der Planeten um die den einen Brennpunkt der elliptischen Bahn einnehmende Sonne betreffenden Formeln durch die Einführung der sogenannten excentrischen Anomalie, überhaupt des excentrischen Kreises, bewirkt wird. In der Theorie der Ellipse an sich in der Geometrie hat man von diesem vortrefflichen Hülfsmittel bis jetzt noch gar keinen Gebrauch gemacht. Zufällig habe ich die Bemerkung gemacht, dass viele diesen Kegelschnitt betreffende Sätze, insbesondere die bekannten Sätze von den conjugirten Durchmessern, auf überraschend einfache Weise durch das in Rede stehende Hülfsmittel bewiesen werden können; dass ferner dasselbe noch in vielen anderen Fällen vortreffliche Dienste leistet und selbst zu verschiedenen neuen Eigenschaften der Ellipse führen kann. Ferner ist mir die Bemerkung nicht entgangen, dass ähnliche Dienste, wie die Einführung des in Rede stehenden Kreises in der Theorie der Ellipse, die Einführung einer gleichseitigen Hyperbel in der Theorie der Hyperbel zu leisten im Stande ist, wenn auch freilich auf nicht ganz so einfache und elegante Weise wie im ersten Falle, wovon der übrigens ziemlich leicht ersichtliche Grund im Folgenden besonders hervorgehoben werden soll. Meine Untersuchungen über diesen, wie es mir scheint, sehr interessanten Gegenstand will ich mir in der vorliegenden Abhandlung den Lesern des Archivs mitzutheilen erlauben, und gebe mich der Hoffnung hin, dass die Einführung der in Rede stehenden Hülfsmittel, durch welche viele Rechnungen eine überraschend einfache und elegante Gestalt annehmen, in die analytische Theorie der Ellipse und Hyperbel späterhin noch manche erfreuliche Früchte tragen wird. Ich werde mich freuen, wenn diese Abhandlung zu weiteren Untersuchungen über diesen nach meiner Meinung sehr interessanten Gegenstand Veranlassung giebt, da ich hier eine vollständige Erschöpfung desselben nicht zur Absicht gehabt habe.

I.

Die Ellipse.

§. 1.

Von den beiden in dem Mittelpunkte C (Taf. XII. Fig. 1.) einer Ellipse sich schneidenden Axen $AA_1=2a$ und $BB_1=2b$ dieser Ellipse sei AA_1 die Axe der x und BB_1 die Axe der y, und CA und CB seien die positiven Theile dieser Axen, so ist bekanntlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

die Gleichung der Ellipse. Ueber der Axe $AA_1=2a$ als Durchmesser, also aus dem Mittelpunkte C und mit dem Halbmesser $CA=a$, beschreibe man einen Kreis; und wenn nun P ein beliebiger, durch die Coordinaten x, y bestimmter Punkt der Ellipse ist, so sei P' der Durchschnittspunkt der, der Coordinate y entsprechenden Linie PQ, wenn man dieselbe nöthigenfalls gehörig verlängert, mit dem über AA_1 als Durchmesser beschriebenen Kreise. Zieht man dann CP', so soll der von dieser Linie mit dem positiven Theile CA der Axe der x eingeschlossene Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile CA der Axe der x an nach dem positiven Theile CB der Axe der y hin von 0 bis 360° zählt, durch u bezeichnet werden. Die erste Coordinate des Punktes P' ist offenbar x, und die zweite Coordinate dieses Punktes wollen wir durch y' bezeichnen. Dann ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$x=a\cos u,\quad y'=a\sin u.$$

Nun ist aber

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y'}{a}\right)^2=1,\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1;$$

also

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2=\left(\frac{y'}{a}\right)^2 \quad \text{oder} \quad y^2=\frac{b^2}{a^2}y'^2,$$

und folglich, weil y und y' offenbar immer gleiche Vorzeichen haben, $y=\frac{b}{a}y'$; also nach dem Obigen, weil $y'=a\sin u$ ist:

$$y=b\sin u.$$

Daher können wir durch Einführung des Winkels u die Coordinaten x, y eines jeden Punktes der Ellipse immer in völliger Allgemeinheit unter der Form

$$x=a\cos u, \quad y=b\sin u$$

darstellen.

In Ermangelung eines besseren Namens, der auch späterhin in der Lehre von der Hyperbel zweckmässig Anwendung finden könnte, wollen wir den über der Axe AA_1 als Durchmesser beschriebenen Kreis überhaupt den Hülfskreis nennen, und der dem Punkte (xy) der Ellipse entsprechende Winkel u soll die Anomalie dieses Punktes genannt werden *).

§. 2.

Wir wollen zuerst die allgemeine Gleichung einer durch zwei Punkte der Ellipse, deren Anomalien u und u_1 sind, gehenden Geraden entwickeln.

Bezeichnen wir die gesuchte Gleichung durch

$$y=Ax+B,$$

so ist, weil nach dem vorhergehenden Paragraphen $a\cos u$, $b\sin u$ und $a\cos u_1$, $b\sin u_1$ die Coordinaten der beiden gegebenen Punkte sind:

*) In der Astronomie heisst der Winkel u die excentrische Anomalie, im Gegensatz zu den beiden anderen Anomalien, der wahren und der mittleren Anomalie. Die Einführung neuer Benennungen hat in der Mathematik immer Schwierigkeiten und Bedenklichkeiten, und ich bin im Allgemeinen kein Freund von denselben. Im vorliegenden Falle war aber die Einführung einer besonderen Benennung für den Winkel u nicht wohl zu umgehen, und ich habe deshalb den Namen Anomalie gewählt, um zugleich an den astronomischen Ursprung der hier zu entwickelnden Theorie zu erinnern.

$$b\sin u = aA\cos u + B,$$

$$b\sin u_1 = aA\cos u_1 + B;$$

und die gesuchte Gleichung hat also eine der beiden folgenden Formen:

$$y - b\sin u = A(x - a\cos u),$$

$$y - b\sin u_1 = A(x - a\cos u_1).$$

Ferner ist aber nach dem Vorhergehenden:

$$b(\sin u - \sin u_1) = aA(\cos u - \cos u_1),$$

also

$$A = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin u - \sin u_1}{\cos u - \cos u_1} = -\frac{b}{a}\cot\tfrac{1}{2}(u + u_1);$$

und die gesuchte Gleichung der durch die beiden gegebenen Punkte der Ellipse gehenden Geraden ist folglich:

$$y - b\sin u = -\frac{b}{a}\cot\tfrac{1}{2}(u + u_1)(x - a\cos u)$$

oder

$$y - b\sin u_1 = -\frac{b}{a}\cot\tfrac{1}{2}(u + u_1)(x - a\cos u_1).$$

Leicht bringt man die erste dieser beiden Gleichungen aber auch auf die folgende Form:

$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u + u_1) + ay\sin\tfrac{1}{2}(u + u_1)$$

$$= ab\{\cos\tfrac{1}{2}(u + u_1)\cos u + \sin\tfrac{1}{2}(u + u_1)\sin u\},$$

also auf die Form:

$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u + u_1) + ay\sin\tfrac{1}{2}(u + u_1) = ab\cos\tfrac{1}{2}(u - u_1).$$

Die Gleichung des Durchmessers der Ellipse, welcher der durch diese Gleichung charakterisirten Geraden parallel ist, ist:

$$y = -\frac{b}{a}x\cot\tfrac{1}{2}(u + u_1).$$

Bezeichnen wir die Länge der Sehne der Ellipse, deren Endpunkten die Anomalien u und u_1 entsprechen, durch s, so ist

$$s^2 = a^2(\cos u - \cos u_1)^2 + b^2(\sin u - \sin u_1)^2$$

oder

$$s^2 = 4a^2\sin\tfrac{1}{2}(u - u_1)^2\sin\tfrac{1}{2}(u + u_1)^2 + 4b^2\sin\tfrac{1}{2}(u - u_1)^2\cos\tfrac{1}{2}(u + u_1)^2,$$

also:

$$s^2 = 4\sin\tfrac{1}{2}(u-u_1)^2\{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2 + b^2\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2\}.$$

§. 3.

Die Gleichung des durch den durch die Anomalie u bestimmten Punkt der Ellipse gehenden Durchmessers derselben sei

$$y = Ax,$$

so ist, weil $a\cos u$ und $b\sin u$ die Coordinaten des in Rede stehenden Punktes der Ellipse sind:

$$b\sin u = aA\cos u,$$

woraus sich $A = \frac{b}{a}\tan u$ ergiebt. Daher ist die Gleichung des in Rede stehenden Durchmessers der Ellipse:

$$y = \frac{b}{a}x\tan u.$$

§. 4.

Wir wollen nun auch die Gleichung der Berührenden der Ellipse in dem durch die Anomalie u bestimmten Punkte derselben suchen.

Lassen wir die Anomalie u sich um Δu verändern, so ist nach §. 2. die Gleichung der Geraden, welche durch die beiden Punkte der Ellipse, deren Anomalien u und $u+\Delta u$ sind, geht:

$$y - b\sin u = -\frac{b}{a}\cot(u+\tfrac{1}{2}\Delta u)(x - a\cos u)$$

oder

$$y - b\sin u = -\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos u\cos\frac{1}{2}\Delta u - \sin u\sin\frac{1}{2}\Delta u}{\sin u\cos\frac{1}{2}\Delta u + \cos u\sin\frac{1}{2}\Delta u}(x - a\cos u)$$

$$= -\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos u - \sin u\tan\frac{1}{2}\Delta u}{\sin u + \cos u\tan\frac{1}{2}\Delta u}(x - a\cos u).$$

Lässt man nun Δu sich der Null nähern und geht dann zu der Gränzgleichung über, so ist diese Gränzgleichung die gesuchte Gleichung der Berührenden der Ellipse in dem durch die Anomalie u bestimmten Punkte derselben. Auf diese Weise ergiebt sich aus dem Vorhergehenden für diese Berührende sogleich die Gleichung:

$$y-b\sin u=-\frac{b}{a}\cot u(x-a\cos u),$$

die man auch sehr leicht auf die elegante Form

$$\frac{\cos u}{a}x+\frac{\sin u}{b}y=1$$

oder

$$\frac{x}{a}\cos u+\frac{y}{b}\sin u=1$$

bringt.

Die Gleichung der Normale der Ellipse in dem durch die Anomalie u bestimmten Punkte derselben ist

$$y-b\sin u=\frac{a}{b}\operatorname{tang} u(x-a\cos u)$$

oder, wie man leicht findet:

$$ax\sin u-by\cos u=(a^2-b^2)\sin u\cos u,$$

oder:

$$\frac{ax}{\cos u}-\frac{by}{\sin u}=a^2-b^2.$$

Die erste Coordinate des Durchschnittspunkts der Berührenden mit der Axe der x ist nach dem Obigen $a\sec u$. Bezeichnen wir nun die von diesem Durchschnittspunkte an gerechnete Subtangente der Ellipse für den durch die Anomalie u bestimmten Punkt derselben durch S, so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$a\cos u=a\sec u+S,$$

woraus sogleich

$$S=-a\sin u\operatorname{tang} u$$

folgt.

Die erste Coordinate des Durchschnittspunkts der Normale mit der Axe der x ist nach dem Obigen $\frac{a^2-b^2}{a}\cos u$. Bezeichnen wir nun die von dem Fusspunkte der Ordinate des durch die Anomalie u bestimmten Punktes der Ellipse an gerechnete Subnormale in diesem Punkte durch S_1, so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$\frac{a^2-b^2}{a}\cos u=a\cos u+S_1,$$

woraus sogleich

$$S_1 = -\frac{b^2}{a}\cos u$$

folgt.

Es ist also, wie aus den beiden für S und S_1 gefundenen Ausdrücken sich sogleich ergiebt:

$$SS_1 = b^2 \sin u^2.$$

Die Aufgabe: durch einen beliebig gegebenen Punkt (fg) eine Berührende an die Ellipse zu ziehen, gestattet jetzt eine ungemein leichte Auflösung. Denn aus dem Obigen erhellet, dass man den Berührungspunkt der gesuchten Berührenden mit der Ellipse erhält, wenn man dessen Anomalie u mittelst der aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebenden Gleichung

$$\frac{f}{a}\cos u + \frac{g}{b}\sin u = 1$$

bestimmt. Um diese Gleichung aufzulösen, bringe man sie auf die Form

$$\frac{f}{a}(\cos u + \frac{ag}{bf}\sin u) = 1,$$

und bestimme den Hülfswinkel ω mittelst der Formel

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{ag}{bf},$$

wo dann

$$\frac{f}{a}\cdot\frac{\cos(u-\omega)}{\cos\omega} = 1, \quad \text{also} \quad \cos(u-\omega) = \frac{a}{f}\cos\omega$$

ist.

Aus der Gleichung

$$\frac{\cos(u-\omega)}{\cos\omega} = \frac{a}{f}$$

folgt auch

$$\frac{\cos\omega - \cos(u-\omega)}{\cos\omega + \cos(u-\omega)} = \frac{f-a}{f+a},$$

also

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}u - \omega) = \frac{f-a}{f+a}$$

oder

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}u-\operatorname{tang}\omega}{1+\operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}\frac{1}{2}u}=\frac{f-a}{f+a},$$

woraus sich

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u^2-\frac{2f}{f+a}\operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u=\frac{f-a}{f+a},$$

und durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u=\frac{f\sin\omega\pm\sqrt{f^2-a^2\cos\omega^2}}{(f+a)\cos\omega}$$

ergiebt, wo ich mich bei der keiner Schwierigkeit unterliegenden weiteren Discussion dieser Gleichung nicht aufhalten will.

Leicht leitet man aus der Gleichung

$$\frac{f}{a}\cos u+\frac{g}{b}\sin u=1$$

auch die beiden Formeln

$$\frac{\cos u}{a}=\frac{b^2f\pm g\sqrt{a^2g^2+b^2f^2-a^2b^2}}{a^2g^2+b^2f^2},$$

$$\frac{\sin u}{b}=\frac{a^2g\mp f\sqrt{a^2g^2+b^2f^2-a^2b^2}}{a^2g^2+b^2f^2}$$

ab, in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen. Also ist auch:

$$\operatorname{tang}u=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2g\mp f\sqrt{a^2g^2+b^2f^2-a^2b^2}}{b^2f\pm g\sqrt{a^2g^2+b^2f^2-a^2b^2}}.$$

Wollte man durch den Punkt (fg) eine Normale an die Ellipse ziehen, so müsste man u aus der Gleichung

$$af\sin u-bg\cos u=(a^2-b^2)\sin u\cos u,$$

oder aus der Gleichung

$$\frac{f}{b}\sin u-\frac{g}{a}\cos u=\frac{a^2-b^2}{ab}\sin u\cos u,$$

oder aus der Gleichung

$$\frac{g}{a}-\frac{f}{b}\operatorname{tang}u+\frac{a^2-b^2}{ab}\sin u=0$$

bestimmen.

Weil

$$\sin u = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}u}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}u^2},\quad \cos u = \frac{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}u^2}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}u^2}$$

ist, so kann man die Gleichung

$$\frac{f}{b}\sin u - \frac{g}{a}\cos u = \frac{a^2-b^2}{ab}\sin u\cos u$$

auch auf den folgenden Ausdruck bringen:

$$\frac{2f}{b}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u(1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u^2) - \frac{g}{a}(1-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u^4) = \frac{2(a^2-b^2)}{ab}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u(1-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u^2),$$

welche Gleichung, gehörig entwickelt, die Form

$$\frac{g}{a}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u^4 + 2\left(\frac{f}{b}+\frac{a^2-b^2}{ab}\right)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u^3 + 2\left(\frac{f}{b}-\frac{a^2-b^2}{ab}\right)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u - \frac{g}{a} = 0$$

annimmt.

§. 5.

Nach §. 3. und §. 4. sind die Gleichungen zweier conjugirten Durchmesser überhaupt:

$$y = \frac{b}{a}x\operatorname{tang}u \quad \text{und} \quad y = -\frac{b}{a}x\cot u.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten der Durchschnittspunkte des ersten dieser beiden Durchmesser mit der Ellipse durch X, Y, so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 = 1,\quad Y = \frac{b}{a}X\operatorname{tang}u.$$

Also ist

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2(1+\operatorname{tang}u^2) = \left(\frac{X}{a}\right)^2\sec u^2 = 1,$$

und folglich mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$X = \pm a\cos u,\quad Y = \pm b\sin u.$$

Bezeichnen eben so X_1, Y_1 die Coordinaten der Durchschnittspunkte des zweiten der beiden obigen conjugirten Durchmesser mit der Ellipse, so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$\left(\frac{X_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y_1}{b}\right)^2 = 1,\quad Y_1 = -\frac{b}{a}X_1\cot u.$$

Also ist

$$\left(\frac{X_1}{a}\right)^2(1+\cot u^2)=\left(\frac{X_1}{a}\right)^2\operatorname{cosec} u^2=1,$$

und folglich mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$X_1=\pm a\sin u,\quad Y_1=\mp b\cos u.$$

Bezeichnen wir nun die beiden conjugirten Durchmesser durch $2A$ und $2B$, so ist

$$A^2=X^2+Y^2=a^2\cos u^2+b^2\sin u^2,$$

$$B^2=X_1{}^2+Y_1{}^2=a^2\sin u^2+b^2\cos u^2;$$

woraus sich, wenn man diese beiden Gleichungen zu einander addirt, unmittelbar die bekannte merkwürdige Gleichung

$$A^2+B^2=a^2+b^2$$

ergiebt.

Auch ist, wie sogleich erhellet:

$$A^2-B^2=(a^2-b^2)\cos 2u.$$

§. 6.

Wir wollen jetzt den von den beiden durch die Gleichungen

$$y=\frac{b}{a}x\operatorname{tang} u,\quad y=-\frac{b}{a}x\cot u$$

charakterisirten conjugirten Diametern eingeschlossenen Winkel durch θ bezeichnen, so ist nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie:

$$\operatorname{tang}\theta^2=\left\{\frac{\frac{b}{a}(\operatorname{tang} u+\cot u)}{1-\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang} u\cot u}\right\}^2,$$

also, wie man leicht findet:

$$\operatorname{tang}\theta^2=\frac{a^2b^2}{(a^2-b^2)^2\sin u^2\cos u^2}=\frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^2\sin 2u^2}.$$

Weil nun

$$\sin\theta^2=\frac{\operatorname{tang}\theta^2}{1+\operatorname{tang}\theta^2}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$\sin\theta^2 = \frac{a^2b^2}{a^2b^2 + (a^2-b^2)^2 \sin u^2 \cos u^2}$$

oder

$$\sin\theta^2 = \frac{4a^2b^2}{4a^2b^2 + (a^2-b^2)^2 \sin 2u^2};$$

also, da $\sin\theta$ immer positiv ist, wobei natürlich vorausgesetzt wird, dass man den Winkel θ nicht grösser als 180^0 nimmt:

$$\sin\theta = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + (a^2-b^2)^2 \sin u^2 \cos u^2}}$$

oder

$$\sin\theta = \frac{2ab}{\sqrt{4a^2b^2 + (a^2-b^2)^2 \sin 2u^2}}$$

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist nun:

$$\begin{aligned} A^2B^2 &= (a^2\cos u^2 + b^2 \sin u^2)(a^2 \sin u^2 + b^2 \cos u^2)\\ &= (a^4+b^4)\sin u^2 \cos u^2 + a^2b^2(\sin u^4 + \cos u^4)\\ &= (a^4+b^4)\sin u^2 \cos u^2 + a^2b^2(\sin u^2 + \cos u^2 - 2\sin u^2 \cos u^2), \end{aligned}$$

also

$$A^2B^2 = a^2b^2 + (a^2-b^2)^2 \sin u^2 \cos u^2,$$

folglich nach dem Obigen:

$$\sin\theta^2 = \frac{a^2b^2}{A^2B^2},$$

woraus sich unmittelbar die bekannte merkwürdige Gleichung

$$ab = AB\sin\theta$$

ergiebt.

Bezeichnen wir die beiden, von den auf der positiven Seite der Axe der x liegenden Theilen der durch die obigen Gleichungen charakterisirten conjugirten Durchmesser mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel durch $\bar{\omega}$ und $\bar{\omega}_1$, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie bekanntlich:

$$\operatorname{tang}\bar{\omega} = \frac{b}{a}\operatorname{tang} u, \quad \operatorname{tang}\bar{\omega}_1 = -\frac{b}{a}\cot u.$$

Also ist

$$\tang\overline{\omega}\tang\overline{\omega}_1 = -\frac{b^2}{a^2}\tang u \cot u = -\frac{b^2}{a^2},$$

woraus sich unmittelbar die bekannte merkwürdige Gleichung

$$b^2 + a^2\tang\overline{\omega}\tang\overline{\omega}_1 = 0$$

ergiebt.

§. 7.

Wir wollen nun auch die Gleichung der Ellipse in Bezug auf das System der beiden durch die Gleichungen

$$y = \frac{b}{a}x\tang u \quad \text{und} \quad y = -\frac{b}{a}x\cot u$$

charakterisirten conjugirten Durchmesser als Axen der X und Y suchen. Zu dem Ende betrachte man eine beliebige, der Axe der Y, d. h. dem durch die Gleichung

$$y = -\frac{b}{a}x\cot u$$

charakterisirten Durchmesser parallele Sehne der Ellipse; so ist, wenn $a\cos U$, $b\sin U$ die Coordinaten eines beliebigen der beiden Durchschnittspunkte dieser Sehne mit der Ellipse sind, deren Gleichung offenbar:

$$y - b\sin U = -\frac{b}{a}\cot u(x - a\cos U).$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieser Sehne mit der Axe der X, d. h. mit dem durch die Gleichung

$$y = \frac{b}{a}x\tang u$$

charakterisirten Durchmesser, durch x_1, y_1; so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$y_1 = \frac{b}{a}x_1\tang u,$$

$$y_1 - b\sin U = -\frac{b}{a}\cot u(x_1 - a\cos U);$$

aus denen sich mittelst einer sehr einfachen und leichten Rechnung die beiden Formeln

$$x_1 = a\cos u\cos(u-U),\quad y_1 = b\sin u\cos(u-U)$$

ergeben. Nun ist offenbar

$$X^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$X^2 = (a^2\cos u^2 + b^2\sin u^2)\cos(u-U)^2.$$

Ferner ist offenbar

$$Y^2 = (x_1 - a\cos U)^2 + (y_1 - b\sin U)^2,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$Y^2 = a^2\{\cos u\cos(u-U) - \cos U\}^2 + b^2\{\sin u\cos(u-U) - \sin U\}^2.$$

Nun ist aber

$$\cos u\cos(u-U) - \cos U = -\sin u(\sin u\cos U - \cos u\sin U),$$
$$\sin u\cos(u-U) - \sin U = \cos u(\sin u\cos U - \cos u\sin U);$$

also

$$\cos u\cos(u-U) - \cos U = -\sin u\sin(u-U),$$
$$\sin u\cos(u-U) - \sin U = \cos u\sin(u-U);$$

und folglich nach dem Obigen:

$$Y^2 = (a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2)\sin(u-U)^2.$$

Daher haben wir jetzt die beiden Gleichungen:

$$X^2 = (a^2\cos u^2 + b^2\sin u^2)\cos(u-U)^2,$$
$$Y^2 = (a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2)\sin(u-U)^2.$$

Nach §. 5. ist aber

$$A^2 = a^2\cos u^2 + b^2\sin u^2,$$
$$B^2 = a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2;$$

folglich

$$X^2 = A^2\cos(u-U)^2,\quad Y^2 = B^2\sin(u-U)^2$$

oder

$$\left(\frac{X}{A}\right)^2 = \cos(u-U)^2,\quad \left(\frac{Y}{B}\right)^2 = \sin(u-U)^2;$$

woraus sich unmittelbar die Gleichung

$$\left(\frac{X}{A}\right)^2+\left(\frac{Y}{B}\right)^2=1$$

ergiebt, welche die gesuchte Gleichung der Ellipse in Bezug auf die beiden durch $2A$, $2B$ bezeichneten conjugirten Durchmesser als Axen der X, Y ist.

§. 8.

Im Vorhergehenden sind die wichtigsten, bis jetzt bekannten Eigenschaften der Ellipse bewiesen worden. Wir wollen jetzt zu einigen anderen Eigenschaften derselben übergehen, welche weniger bekannt sein dürften.

Die Anomalien zweier Punkte der Ellipse seien wieder u und u_1, so ist nach §. 2. die Gleichung der durch diese beiden Punkte bestimmten Sehne der Ellipse, deren Länge wir durch s bezeichnen wollen:

$$y-b\sin u=-\frac{b}{a}\cot\tfrac{1}{2}(u+u_1)(x-a\cos u),$$

und für s^2 haben wir nach demselben Paragraphen den Ausdruck:

$$s^2=4\sin\tfrac{1}{2}(u-u_1)^2\{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2\}.$$

Die Gleichung des der Sehne s parallelen Durchmessers der Ellipse, den wir durch D bezeichnen wollen, ist

$$y=-\frac{b}{a}x\cot\tfrac{1}{2}(u+u_1).$$

Bezeichnen wir die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieses Durchmessers mit der Ellipse durch X, Y, so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$Y=-\frac{b}{a}X\cot\tfrac{1}{2}(u+u_1),\quad \left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{Y}{b}\right)^2=1;$$

aus denen mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander leicht folgt;

$$X=\pm a\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1),\quad Y=\mp b\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1).$$

Die Gleichung der durch den Punkt (XY) gehenden Berührenden der Ellipse ist, wie aus §. 4. sogleich folgt:

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=1,$$

oder

$$y=\frac{b^2}{Y}-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{X}{Y}x,$$

und die Gleichung des dem Durchmesser D conjugirten Durchmessers, den wir durch D_1 bezeichnen wollen, ist folglich nach der vorstehenden Gleichung:

$$y=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{X}{Y}x,$$

also nach dem Obigen:

$$y=\frac{b}{a}x\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u+u_1).$$

Bezeichnen wir die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieses Durchmessers mit der Ellipse durch X_1, Y_1, so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$Y_1=\frac{b}{a}X_1\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u+u_1),\quad \left(\frac{X_1}{a}\right)^2+\left(\frac{Y_1}{b}\right)^2=1;$$

aus denen mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander leicht folgt:

$$X_1=\pm a\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1),\quad Y_1=\pm b\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1).$$

Weil

$$\tfrac{1}{4}D^2=X^2+Y^2,\quad \tfrac{1}{4}D_1{}^2=X_1{}^2+Y_1{}^2$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$D=2\sqrt{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2},$$

$$D_1=2\sqrt{a^2\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2+b^2\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2}.$$

Durch den durch die Coordinaten $a\cos u$, $b\sin u$ bestimmten Punkt der Ellipse wollen wir jetzt eine dem Durchmesser D_1 parallele Sehne s_1 ziehen, so ist deren Gleichung nach dem Vorhergehenden:

$$y-b\sin u=\frac{b}{a}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u+u_1)(x-a\cos u),$$

und wenn wir die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Sehne mit der Ellipse durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bezeichnen, so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen

$$\left(\frac{\mathfrak{x}}{a}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{y}}{b}\right)^2=1,$$

$$\mathfrak{y}-b\sin u=\frac{b}{a}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u+u_1)(\mathfrak{x}-a\cos u);$$

oder, wie man leicht findet:

$$\left(\frac{\mathfrak{x}}{a}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{y}}{b}\right)^2=1,$$

$$\frac{\mathfrak{x}}{a}\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)-\frac{\mathfrak{y}}{b}\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)=-\sin\tfrac{1}{2}(u-u_1).$$

Durch Auflösung dieser beiden Gleichungen erhält man leicht:

$$\frac{\mathfrak{x}}{a}=-\sin\tfrac{1}{2}(u-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)\pm\cos\tfrac{1}{2}(u-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1),$$

$$\frac{\mathfrak{y}}{b}=\quad\sin\tfrac{1}{2}(u-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)\pm\cos\tfrac{1}{2}(u-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1);$$

also:

$$\mathfrak{x}=\pm a\cos\left\{\begin{matrix}u\\u_1\end{matrix}\right\},\quad \mathfrak{y}=\pm b\sin\left\{\begin{matrix}u\\u_1\end{matrix}\right\}.$$

Folglich ist

$$s_1^2=a^2(\cos u+\cos u_1)^2+b^2(\sin u+\sin u_1)^2$$

oder

$$s_1^2=4a^2\cos\tfrac{1}{2}(u-u_1)^2\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2+4b^2\cos\tfrac{1}{2}(u-u_1)^2\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2,$$

also:

$$s_1^2=4\cos\tfrac{1}{2}(u-u_1)^2\{a^2\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2+b^2\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2\}.$$

Aus

$$s^2=4\sin\tfrac{1}{2}(u-u_1)^2\{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2\},$$

$$D^2=4\{a^2\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2+b^2\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2\}$$

und

$$s_1^2=4\cos\tfrac{1}{2}(u-u_1)^2\{a^2\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2+b^2\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2\},$$

$$D_1^2=4\{a^2\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2+b^2\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2\}$$

folgt:

$$s^2=D^2\sin\tfrac{1}{2}(u-u_1)^2,\quad s_1^2=D_1^2\cos\tfrac{1}{2}(u-u_1)^2;$$

also immer

$$\left(\frac{s}{D}\right)^2+\left(\frac{s_1}{D_1}\right)^2=1,$$

was eigentlich wieder die Gleichung der Ellipse in Bezug auf das System zweier conjugirter Durchmesser ist.

Fällt man von dem Mittelpunkte der Ellipse auf die Sehne s ein Perpendikel, so ist dessen Gleichung nach dem Obigen:

$$y=\frac{a}{b}x\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u+u_1),$$

und wenn wir die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieses Perpendikels mit der Sehne s durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ bezeichnen, so haben wir zu deren Bestimmung die beiden folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{Y}=\frac{a}{b}\mathfrak{X}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u+u_1),$$

$$\mathfrak{Y}-b\sin u=-\frac{b}{a}\cot\tfrac{1}{2}(u+u_1)(\mathfrak{X}-a\cos u)$$

oder:

$$\mathfrak{Y}=\frac{a}{b}\mathfrak{X}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u+u_1),$$

$$b\mathfrak{X}\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)+a\mathfrak{Y}\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u-u_1).$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich leicht:

$$\mathfrak{X}=\frac{ab^2\cos\frac{1}{2}(u-u_1)\cos\frac{1}{2}(u+u_1)}{a^2\sin\frac{1}{2}(u+u_1)^2+b^2\cos\frac{1}{2}(u+u_1)^2},$$

$$\mathfrak{Y}=\frac{a^2b\cos\frac{1}{2}(u-u_1)\sin\frac{1}{2}(u+u_1)}{a^2\sin\frac{1}{2}(u+u_1)^2+b^2\cos\frac{1}{2}(u+u_1)^2}.$$

Bezeichnen wir nun die Entfernung der Sehne s von dem Mittelpunkte der Ellipse durch q, so ist

$$q^2=\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2,$$

also

$$q^2=\frac{a^2b^2\cos\frac{1}{2}(u-u_1)^2}{a^2\sin\frac{1}{2}(u+u_1)^2+b^2\cos\frac{1}{2}(u+u_1)^2},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$q^2=\frac{4a^2b^2}{D^2}\cos\tfrac{1}{2}(u-u_1)^2$$

oder

$$\cos\tfrac{1}{2}(u-u_1)^2=\frac{q^2D^2}{4a^2b^2}.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\sin\tfrac{1}{2}(u-u_1)^2=\frac{s^2}{D^2},$$

also

$$\frac{s^2}{D^2} + \frac{q^2D^2}{4a^2b^2} = 1,$$

welche Gleichung sich auf verschiedene Arten umgestalten lassen würde.

Bezeichnen wir die Entfernung der Sehne s_1 von dem Mittelpunkte der Ellipse durch q_1, so ist natürlich ganz eben so:

$$\frac{s_1^2}{D_1^2} + \frac{q_1^2D_1^2}{4a^2b^2} = 1.$$

Addirt man die beiden vorhergehenden Gleichungen zusammen und verbindet damit die aus dem Obigen bekannte Gleichung

$$\frac{s^2}{D^2} + \frac{s_1^2}{D_1^2} = 1,$$

so erhält man die Gleichung

$$q^2D^2 + q_1^2D_1^2 = 4a^2b^2.$$

Ferner ist

$$\frac{q^2D^2}{4a^2b^2} = 1 - \frac{s^2}{D^2} = \frac{s_1^2}{D_1^2},$$

$$\frac{q_1^2D_1^2}{4a^2b^2} = 1 - \frac{s_1^2}{D_1^2} = \frac{s^2}{D^2};$$

also:

$$qDD_1 = 2abs_1, \quad q_1DD_1 = 2abs;$$

woraus sich

$$\frac{q}{q_1} = \frac{s_1}{s} \text{ oder } sq = s_1q_1$$

ergiebt. Auch ist

$$qq_1D^2D_1^2 = 4a^2b^2ss_1,$$

folglich

$$D^2D_1^2 = 4a^2b^2 . \frac{ss_1}{qq_1}, \quad 4a^2b^2 = D^2D_1^2 . \frac{qq_1}{ss_1}.$$

Sind s, s', s'' drei dem Durchmesser D parallele Sehnen, deren Entfernungen von dem Mittelpunkte der Ellipse respective q, q', q'' sind, so ist nach dem Obigen:

$$\frac{D^2}{4a^2b^2}q^2 + \frac{1}{D^2}s^2 = 1,$$

$$\frac{D^2}{4a^2b^2}q'^2+\frac{1}{D^2}s'^2=1,$$

$$\frac{D^2}{4a^2b^2}q''^2+\frac{1}{D^2}s''^2=1.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$q'^2s''^2-q''^2s'^2,\quad q''^2s^2-q^2s''^2,\quad q^2s'^2-q'^2s^2$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Relation:

$$(q^2s'^2-q'^2s^2)+(q'^2s''^2-q''^2s'^2)+(q''^2s^2-q^2s''^2)=0,$$

oder

$$q^2(s'^2-s''^2)+q'^2(s''^2-s^2)+q''^2(s^2-s'^2)=0,$$

oder

$$s^2(q'^2-q''^2)+s'^2(q''^2-q^2)+s''^2(q^2-q'^2)=0.$$

Wer Vergnügen an der Ableitung solcher allerdings bemerkenswerthen Relationen findet, dem wird das Obige vielfache Gelegenheit zur Uebung seines Scharfsinns darbieten. Aber die Mathematik ist an dergleichen Dingen so unendlich reich, dass auf dieselben in der That nur ein geringer Werth zu legen ist, was hier im Vorbeigehen einmal nicht unbemerkt bleiben mag, weil jetzt Mancher, der einmal eine einigermassen bemerkenswerthe Relation, etwa nur bei'm ebenen Dreieck, gefunden hat, immer gleich meint, eine grosse mathematische Entdeckung gemacht zu haben, und darüber staunt, was das an sich so einfache ebene Dreieck für eine merkwürdige Figur sei. Wer fleissig arbeitet und nur ein Fünkchen mathematischen Scharfsinns besitzt, findet solche Dinge alle Tage. Wie wenig Werth in wissenschaftlicher Rücksicht ich selbst in Bezug auf meine Person auf dergleichen Dinge lege, mag man aus dieser gelegentlichen Bemerkung entnehmen. Man freu't sich darüber, wenn man sie gefunden, einen Augenblick, macht dann aber nicht gleich, wie jetzt hin und wieder geschieht, viel Aufhebens davon, als hätte man eine grosse mathematische Entdeckung gemacht.

§. 9.

Durch zwei Punkte der Ellipse, deren Anomalien u_0 und u_1 sind, wollen wir uns Berührende an die Ellipse gezogen denken, so sind nach §. 4. deren Gleichungen:

$$bx\cos u_0 + ay\sin u_0 = ab,$$
$$bx\cos u_1 + ay\sin u_1 = ab.$$

Bezeichnen nun x, y die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieser Berührenden, so ist, wie man aus diesen Gleichungen leicht findet:

$$x\sin(u_0-u_1) = \quad a(\sin u_0 - \sin u_1),$$
$$y\sin(u_0-u_1) = -b(\cos u_0 - \cos u_1);$$

also

$$x = a\frac{\cos\frac{1}{2}(u_0+u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)},\quad y = b\frac{\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)}.$$

Bezeichnen wir nun die Entfernungen des in Rede stehenden Durchschnittspunkts von den durch die Anomalien u_0 und u_1 bestimmten Berührungspunkten respective durch $E_{0,1}$ und $E_{1,0}$, so ist

$$E_{0,1}{}^2 = a^2\{\cos u_0 - \frac{\cos\frac{1}{2}(u_0+u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)}\}^2 + b^2\{\sin u_0 - \frac{\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)}\}^2,$$

$$E_{1,0}{}^2 = a^2\{\cos u_1 - \frac{\cos\frac{1}{2}(u_0+u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)}\}^2 + b^2\{\sin u_1 - \frac{\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)}\}^2;$$

also, weil

$$\cos u_0\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1) - \cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1) = -\sin u_0\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1),$$
$$\sin u_0\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1) - \sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1) = \quad \cos u_0\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)$$

und

$$\cos u_1\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1) - \cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1) = \quad \sin u_1\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1),$$
$$\sin u_1\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1) - \sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1) = -\cos u_1\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)$$

ist, offenbar:

$$E_{0,1}{}^2 = \tan g\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2(a^2\sin u_0{}^2 + b^2\cos u_0{}^2),$$
$$E_{1,0}{}^2 = \tan g\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2(a^2\sin u_1{}^2 + b^2\cos u_1{}^2);$$

folglich:

$$\frac{E_{0,1}{}^2}{E_{1,0}{}^2} = \frac{a^2\sin u_0{}^2 + b^2\cos u_0{}^2}{a^2\sin u_1{}^2 + b^2\cos u_1{}^2}.$$

Auch ist

$$E_{0,1}{}^2 - E_{1,0}{}^2 = \tan g\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2\left\{\begin{array}{l} a^2(\sin u_0 - \sin u_1)(\sin u_0 + \sin u_1) \\ + b^2(\cos u_0 - \cos u_1)(\cos u_0 + \cos u_1) \end{array}\right\}$$

$$= 4\tan g\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2\{a^2\sin(u_0-u_1)\sin(u_0+u_1) - b^2\sin(u_0-u_1)\sin(u_0+u_1)\},$$

also:

$$E_{0,1}{}^2 - E_{1,0}{}^2 = 4(a^2 - b^2)\sin(u_0 - u_1)\sin(u_0 + u_1)\tang\tfrac{1}{2}(u_0 - u_1)^2.$$

Wir wollen uns jetzt in drei Punkten der Ellipse, deren Anomalien u_0, u_1, u_2 sind, Berührende an die Ellipse gezogen denken. Die Entfernungen des Durchschnittspunkts der ersten und zweiten Berührenden von den durch die Anomalien u_0 und u_1 bestimmten Berührungspunkten seien $E_{0,1}$ und $E_{1,0}$; die Entfernungen des Durchschnittspunkts der zweiten und dritten Berührenden von den durch die Anomalien u_1 und u_2 bestimmten Berührungspunkten seien $E_{1,2}$ und $E_{2,1}$; die Entfernungen des Durchschnittspunkts der dritten und ersten Berührenden von den durch die Anomalien u_2 und u_0 bestimmten Berührungspunkten seien $E_{2,0}$ und $E_{0,2}$; dann ist nach dem Obigen:

$$\frac{E_{0,1}{}^2}{E_{1,0}{}^2} = \frac{a^2\sin u_0{}^2 + b^2\cos u_0{}^2}{a^2\sin u_1{}^2 + b^2\cos u_1{}^2},$$

$$\frac{E_{1,2}{}^2}{E_{2,1}{}^2} = \frac{a^2\sin u_1{}^2 + b^2\cos u_1{}^2}{a^2\sin u_2{}^2 + b^2\cos u_2{}^2},$$

$$\frac{E_{2,0}{}^2}{E_{0,2}{}^2} = \frac{a^2\sin u_2{}^2 + b^2\cos u_2{}^2}{a^2\sin u_0{}^2 + b^2\cos u_0{}^2};$$

also offenbar

$$\frac{E_{0,1}{}^2}{E_{1,0}{}^2}\cdot\frac{E_{1,2}{}^2}{E_{2,1}{}^2}\cdot\frac{E_{2,0}{}^2}{E_{0,2}{}^2} = 1$$

oder

$$E_{0,1}\cdot E_{1,2}\cdot E_{2,0} = E_{0,2}\cdot E_{2,1}\cdot E_{1,0},$$

welche Relation, in dem am Ende des vorigen Paragraphen angedeuteten Sinne, vielleicht auch einige Beachtung verdienen dürfte. Bei'm Kreise versteht sich diese Relation natürlich von selbst, da in diesem Falle

$$E_{0,1} = E_{1,0},\quad E_{1,2} = E_{2,1},\quad E_{2,0} = E_{0,2}$$

ist.

§. 10.

Um die Anwendung der Anomalien auch bei einem schwierigern Lehrsatze und einer schwierigern Aufgabe zu zeigen, wollen wir mittelst derselben in diesem Paragraphen zuvörderst das folgende berühmte Theorem für die Ellipse beweisen, welches für den Kreis bekanntlich von Pascal gefunden und mit dem

Namen des **Hexagrammum mysticum** belegt, späterhin auf alle Kegelschnitte erweitert worden ist:

Wenn man je zwei gegenüberstehende Seiten eines beliebigen, in eine Ellipse beschriebenen Sechsecks bis zu ihrem Durchschnittspunkte verlängert, so liegen die drei Durchschnittspunkte, welche man auf diese Weise erhält, jederzeit in einer geraden Linie.

Das in die Ellipse beschriebene Sechseck sei

$$A_0A_1A_2A_3A_4A_5$$

und die Anomalien der Punkte

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5$$

seien respective

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5.$$

Dann sind nach §. 2. die Gleichungen der Seiten

$$A_0A_1,\ A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4,\ A_4A_5,\ A_5A_0$$

nach der Reihe:

$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)+ay\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1),$$

$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)+ay\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2),$$

$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_3)+ay\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_3)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_3),$$

$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)+ay\sin\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_4),$$

$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u_4+u_5)+ay\sin\tfrac{1}{2}(u_4+u_5)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_4-u_5),$$

$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u_5+u_0)+ay\sin\tfrac{1}{2}(u_5+u_0)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_5-u_0).$$

Die gegenüberstehenden Seiten des Sechsecks sind:

$$A_0A_1,\ A_3A_4;\quad A_1A_2,\ A_4A_5;\quad A_2A_3,\ A_5A_0;$$

und bezeichnen wir nun die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser drei Paare gegenüberstehender Seiten nach der Reihe durch

$$\mathfrak{x}_0,\ \mathfrak{y}_0;\quad \mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{y}_1;\quad \mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{y}_2;$$

so haben wir zu deren Bestimmung die drei folgenden Systeme zweier Gleichungen:

$$b\mathfrak{x}_0\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)+a\mathfrak{y}_0\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1),$$

$$b\mathfrak{x}_0\cos\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)+a\mathfrak{y}_0\sin\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_4);$$

$$b\mathfrak{x}_1 \cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_2) + a\mathfrak{y}_1 \sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2) = ab\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2),$$

$$b\mathfrak{x}_1 \cos\tfrac{1}{2}(u_4+u_5) + a\mathfrak{y}_1 \sin\tfrac{1}{2}(u_4+u_5) = ab\cos\tfrac{1}{2}(u_4-u_5);$$

$$b\mathfrak{x}_2 \cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_3) + a\mathfrak{y}_2 \sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_3) = ab\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_3).$$

$$b\mathfrak{x}_2 \cos\tfrac{1}{2}(u_5+u_0) + a\mathfrak{y}_2 \sin\tfrac{1}{2}(u_5+u_0) = ab\cos\tfrac{1}{2}(u_5-u_0).$$

Hieraus erhalten wir sehr leicht:

$$\mathfrak{x}_0 = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_4) - \sin\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)}{\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_3-u_4)}\,a,$$

$$\mathfrak{y}_0 = -\frac{\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_4) - \cos\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)}{\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_3-u_4)}\,b;$$

$$\mathfrak{x}_1 = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)\cos\tfrac{1}{2}(u_4-u_5) - \sin\tfrac{1}{2}(u_4+u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)}{\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)}\,a,$$

$$\mathfrak{y}_1 = -\frac{\cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)\cos\tfrac{1}{2}(u_4-u_5) - \cos\tfrac{1}{2}(u_4+u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)}{\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)}\,b;$$

$$\mathfrak{x}_2 = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_3)\cos\tfrac{1}{2}(u_5-u_0) - \sin\tfrac{1}{2}(u_5+u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_3)}{\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_3-u_5-u_0)}\,a,$$

$$\mathfrak{y}_2 = -\frac{\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_3)\cos\tfrac{1}{2}(u_5-u_0) - \cos\tfrac{1}{2}(u_5+u_0)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_3)}{\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_3-u_5-u_0)}\,b.$$

Wir wollen nun die Gleichung der durch die beiden Durchschnittspunkte $(\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0)$ und $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1)$ gehenden Geraden, welche bekanntlich

$$y-\mathfrak{y}_0 = \frac{\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1}(x-\mathfrak{x}_0)$$

ist, entwickeln, wobei es also, weil wir die Coordinaten $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$ schon kennen, hauptsächlich auf die Bestimmung des Bruchs $\frac{\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1}$ ankommt.

Die beiden Gleichungen

$$b\mathfrak{x}_0 \cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1) + a\mathfrak{y}_0 \sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1) = ab\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1),$$

$$b\mathfrak{x}_0 \cos\tfrac{1}{2}(u_3+u_4) + a\mathfrak{y}_0 \sin\tfrac{1}{2}(u_3+u_4) = ab\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_4)$$

kann man auf die folgende Form bringen:

$$b(\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1) + a(\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)$$

$$= ab\left\{\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1) - \frac{\mathfrak{x}_1}{a}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1) - \frac{\mathfrak{y}_1}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\right\},$$

$$b(\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)+a(\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)$$
$$=ab\{\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_4)-\frac{\mathfrak{x}_1}{a}\cos\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)-\frac{\mathfrak{y}_1}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)\}.$$

Durch Einführung der aus dem Obigen bekannten Werthe von $\frac{\mathfrak{x}_1}{a}$ und $\frac{\mathfrak{y}_1}{b}$ erhält man mittelst ganz leichter Reductionen sogleich:

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)-\frac{\mathfrak{x}_1}{a}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)-\frac{\mathfrak{y}_1}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)=\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)$$
$$+\frac{\sin\frac{1}{2}(u_0-u_2)\cos\frac{1}{2}(u_4-u_5)-\cos\frac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1-u_4-u_5)}{\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)}.$$

Addirt man nun auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, so ist der Zähler des dadurch hervorgehenden Bruchs:

$$\begin{aligned}
&\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)\\
&+\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_2)\cos\tfrac{1}{2}(u_4-u_5)-\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_4-u_5)\\
=\;&\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_2-u_4-u_5)-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0-2u_1-u_2+u_4+u_5)\\
&+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_2+u_4-u_5)+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_2-u_4+u_5)\\
&-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_2-u_4-u_5)-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+2u_1-u_2-u_4-u_5)\\
=\;&\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_2+u_4-u_5)-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0-2u_1-u_2+u_4+u_5)\\
&+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_2-u_4+u_5)-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+2u_1-u_2-u_4-u_5)\\
=\;&\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1-u_2+u_4)\\
&-\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2-u_4)\\
=\;&2\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_4)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_5).
\end{aligned}$$

Auf ähnliche Art ist, wie man leicht findet:

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_4)-\frac{\mathfrak{x}_1}{a}\cos\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)-\frac{\mathfrak{y}_1}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)=\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_4)$$
$$-\frac{\sin\frac{1}{2}(u_3-u_5)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_2)+\cos\frac{1}{2}(u_4-u_5)\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2-u_3-u_4)}{\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)},$$

und subtrahirt man nun auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, so ist der Zähler des dadurch hervorgehenden Bruchs:

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_4)\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)$$

$$-\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)-\cos\tfrac{1}{2}(u_4-u_5)\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_3-u_4)$$

$$=\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_3-u_5)+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2+u_3-2u_4-u_5)$$

$$-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2+u_3-u_5)+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2-u_3+u_5)$$

$$-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_3-u_5)-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_3-2u_4+u_5)$$

$$=\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2-u_3+u_5)-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_3-2u_4+u_5)$$

$$-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2+u_3-u_5)+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2+u_3-2u_4-u_5)$$

$$=-\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_4)\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_3-u_4+u_5)$$

$$+\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_4)\cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_3-u_4-u_5)$$

$$=-2\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_4)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_4)\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_5).$$

Also ist nach dem Obigen:

$$b(\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)+a(\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)$$
$$=\frac{2ab\sin\frac{1}{2}(u_0-u_2)\sin\frac{1}{2}(u_1-u_4)\sin\frac{1}{2}(u_1-u_5)}{\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)},$$

$$b(\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)+a(\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)$$
$$=-\frac{2ab\sin\frac{1}{2}(u_1-u_4)\sin\frac{1}{2}(u_2-u_4)\sin\frac{1}{2}(u_3-u_5)}{\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)};$$

woraus man nun ferner leicht

$$b(\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_3-u_4)$$

$$=-\frac{2ab\sin\frac{1}{2}(u_1-u_4)}{\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)}\left\{\begin{array}{l}\sin\frac{1}{2}(u_2-u_4)\sin\frac{1}{2}(u_3-u_5)\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1)\\+\sin\frac{1}{2}(u_0-u_2)\sin\frac{1}{2}(u_1-u_5)\sin\frac{1}{2}(u_3+u_4)\end{array}\right\},$$

$$a(\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_3-u_4)$$

$$=\frac{2ab\sin\frac{1}{2}(u_1-u_4)}{\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)}\left\{\begin{array}{l}\sin\frac{1}{2}(u_2-u_4)\sin\frac{1}{2}(u_3-u_5)\cos\frac{1}{2}(u_0+u_1)\\+\sin\frac{1}{2}(u_0-u_2)\sin\frac{1}{2}(u_1-u_5)\cos\frac{1}{2}(u_3+u_4)\end{array}\right\}$$

erhält.

Die erste eingeklammerte Grösse ist:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_3-u_4+u_5)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\\
&-\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_3-u_4-u_5)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\\
&+\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1-u_2+u_5)\sin\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)\\
&-\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2-u_5)\sin\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)\\
=\;&\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u_3-u_4+u_5)\\
&+\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2+u_3+u_4-u_5)\\
&-\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2+u_3-u_4-u_5)\\
&-\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2-u_3+u_4+u_5)\\
&+\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1-u_2+u_3+u_4+u_5)\\
&-\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1-u_2-u_3-u_4+u_5)\\
&-\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2+u_3+u_4-u_5)\\
&+\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2-u_3-u_4-u_5)\\
=\;&\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1-u_2+u_3+u_4+u_5)\\
&+\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u_3-u_4+u_5)\\
&+\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(-u_0+u_1+u_2+u_3+u_4-u_5)\\
&-\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(-u_0-u_1+u_2+u_3+u_4+u_5)\\
&-\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2-u_3+u_4+u_5)\\
&-\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2+u_3-u_4-u_5).
\end{aligned}$$

Die zweite eingeklammerte Grösse ist:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_3-u_4+u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\\
&-\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_3-u_4-u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\\
&+\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1-u_2+u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)\\
&-\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2-u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)\\
=\;&\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u_3-u_4+u_5)\\
&+\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2+u_3+u_4-u_5)\\
&-\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2+u_3-u_4-u_5)\\
&-\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2-u_3+u_4+u_5)\\
&+\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1-u_2+u_3+u_4+u_5)\\
&+\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1-u_2-u_3-u_4+u_5)\\
&-\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2+u_3+u_4-u_5)\\
&-\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2-u_3-u_4-u_5)\\
=\;&\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1-u_2+u_3+u_4+u_5)\\
&+\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u_3-u_4+u_5)\\
&+\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(-u_0+u_1+u_2+u_3+u_4-u_5)\\
&-\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(-u_0-u_1+u_2+u_3+u_4+u_5)\\
&-\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2-u_3+u_4+u_5)\\
&-\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2+u_3-u_4-u_5).
\end{aligned}$$

$$b\mathfrak{x}_1 \cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)+a\mathfrak{y}_1 \sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2),$$
$$b\mathfrak{x}_1 \cos\tfrac{1}{2}(u_4+u_5)+a\mathfrak{y}_1 \sin\tfrac{1}{2}(u_4+u_5)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_4-u_5);$$

$$b\mathfrak{x}_2 \cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_3)+a\mathfrak{y}_2 \sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_3)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_3).$$
$$b\mathfrak{x}_2 \cos\tfrac{1}{2}(u_5+u_0)+a\mathfrak{y}_2 \sin\tfrac{1}{2}(u_5+u_0)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_5-u_0).$$

Hieraus erhalten wir sehr leicht:

$$\mathfrak{x}_0=\frac{\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\frac{1}{2}(u_3-u_4)-\sin\frac{1}{2}(u_3+u_4)\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)}{\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1-u_3-u_4)}a,$$

$$\mathfrak{y}_0=-\frac{\cos\frac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\frac{1}{2}(u_3-u_4)-\cos\frac{1}{2}(u_3+u_4)\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)}{\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1-u_3-u_4)}b;$$

$$\mathfrak{x}_1=\frac{\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2)\cos\frac{1}{2}(u_4-u_5)-\sin\frac{1}{2}(u_4+u_5)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_2)}{\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)}a,$$

$$\mathfrak{y}_1=-\frac{\cos\frac{1}{2}(u_1+u_2)\cos\frac{1}{2}(u_4-u_5)-\cos\frac{1}{2}(u_4+u_5)\cos\frac{1}{2}(u_1-u_2)}{\sin\frac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)}b;$$

$$\mathfrak{x}_2=\frac{\sin\frac{1}{2}(u_2+u_3)\cos\frac{1}{2}(u_5-u_0)-\sin\frac{1}{2}(u_5+u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_3)}{\sin\frac{1}{2}(u_2+u_3-u_5-u_0)}a,$$

$$\mathfrak{y}_2=-\frac{\cos\frac{1}{2}(u_2+u_3)\cos\frac{1}{2}(u_5-u_0)-\cos\frac{1}{2}(u_5+u_0)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_3)}{\sin\frac{1}{2}(u_2+u_3-u_5-u_0)}b.$$

Wir wollen nun die Gleichung der durch die beiden Durchschnittspunkte $(\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0)$ und $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1)$ gehenden Geraden, welche bekanntlich

$$y-\mathfrak{y}_0=\frac{\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1}(x-\mathfrak{x}_0)$$

ist, entwickeln, wobei es also, weil wir die Coordinaten $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$ schon kennen, hauptsächlich auf die Bestimmung des Bruchs $\frac{\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1}$ ankommt.

Die beiden Gleichungen

$$b\mathfrak{x}_0 \cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)+a\mathfrak{y}_0 \sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1),$$
$$b\mathfrak{x}_0 \cos\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)+a\mathfrak{y}_0 \sin\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_4)$$

kann man auf die folgende Form bringen:

$$b(\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)+a(\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)$$
$$=ab\left\{\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)-\frac{\mathfrak{x}_1}{a}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)-\frac{\mathfrak{y}_1}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\right\},$$

$$b(\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)+a(\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)$$
$$=ab\{\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_4)-\frac{\mathfrak{x}_1}{a}\cos\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)-\frac{\mathfrak{y}_1}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)\}.$$

Durch Einführung der aus dem Obigen bekannten Werthe von $\frac{\mathfrak{x}_1}{a}$ und $\frac{\mathfrak{y}_1}{b}$ erhält man mittelst ganz leichter Reductionen sogleich:

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)-\frac{\mathfrak{x}_1}{a}\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)-\frac{\mathfrak{y}_1}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)=\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)$$
$$+\frac{\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_2)\cos\tfrac{1}{2}(u_4-u_5)-\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_4-u_5)}{\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)}.$$

Addirt man nun auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, so ist der Zähler des dadurch hervorgehenden Bruchs:

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_2)\cos\tfrac{1}{2}(u_4-u_5)-\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_4-u_5)$$
$$=\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_2-u_4-u_5)-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0-2u_1-u_2+u_4+u_5)$$
$$+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_2+u_4-u_5)+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_2-u_4+u_5)$$
$$-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_2-u_4-u_5)-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+2u_1-u_2-u_4-u_5)$$
$$=\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_2+u_4-u_5)-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0-2u_1-u_2+u_4+u_5)$$
$$+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_2-u_4+u_5)-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_0+2u_1-u_2-u_4-u_5)$$
$$=\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1-u_2+u_4)$$
$$-\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2-u_4)$$
$$=2\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_4)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_5).$$

Auf ähnliche Art ist, wie man leicht findet:

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_4)-\frac{\mathfrak{x}_1}{a}\cos\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)-\frac{\mathfrak{y}_1}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)=\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_4)$$
$$-\frac{\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)+\cos\tfrac{1}{2}(u_4-u_5)\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_3-u_4)}{\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)},$$

und subtrahirt man nun auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, so ist der Zähler des dadurch hervorgehenden Bruchs:

$$\cos\tfrac{1}{2}(u_3-u_4)\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)$$

$$-\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2)-\cos\tfrac{1}{2}(u_4-u_5)\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_3-u_4)$$

$$=\ \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_3-u_5)+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2+u_3-2u_4-u_5)$$

$$-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2+u_3-u_5)+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2-u_3+u_5)$$

$$-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_3-u_5)-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_3-2u_4+u_5)$$

$$=\ \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2-u_3+u_5)-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_3-2u_4+u_5)$$

$$-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_2+u_3-u_5)+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2+u_3-2u_4-u_5)$$

$$=-\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_4)\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_3-u_4+u_5)$$

$$+\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_4)\cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_3-u_4-u_5)$$

$$=-2\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_4)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_4)\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_5).$$

Also ist nach dem Obigen:

$$b(\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)+a(\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)$$

$$=\frac{2ab\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_4)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_5)}{\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)},$$

$$b(\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)+a(\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)$$

$$=-\frac{2ab\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_4)\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_4)\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_5)}{\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)};$$

woraus man nun ferner leicht

$$b(\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_3-u_4)$$

$$=-\frac{2ab\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_4)}{\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)}\left\{\begin{array}{l}\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_4)\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_5)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\\+\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_5)\sin\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)\end{array}\right\},$$

$$a(\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_1)\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_3-u_4)$$

$$=\frac{2ab\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_4)}{\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2-u_4-u_5)}\left\{\begin{array}{l}\sin\tfrac{1}{2}(u_2-u_4)\sin\tfrac{1}{2}(u_3-u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\\+\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_2)\sin\tfrac{1}{2}(u_1-u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_3+u_4)\end{array}\right\}$$

erhält.

Die erste eingeklammerte Grösse ist:

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(u_2 - u_3 - u_4 + u_5)\sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1) \\
& - \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(u_2 + u_3 - u_4 - u_5)\sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1) \\
& + \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(u_0 - u_1 - u_2 + u_5)\sin\tfrac{1}{2}(u_3 + u_4) \\
& - \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 - u_2 - u_5)\sin\tfrac{1}{2}(u_3 + u_4) \\
= \; & \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 + u_2 - u_3 - u_4 + u_5) \\
& + \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 - u_2 + u_3 + u_4 - u_5) \\
& - \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 - u_4 - u_5) \\
& - \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 - u_2 - u_3 + u_4 + u_5) \\
& + \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0 - u_1 - u_2 + u_3 + u_4 + u_5) \\
& - \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 + u_5) \\
& - \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 - u_2 + u_3 + u_4 - u_5) \\
& + \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5) \\
= \; & \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0 - u_1 - u_2 + u_3 + u_4 + u_5) \\
& + \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 + u_2 - u_3 - u_4 + u_5) \\
& + \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(-u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - u_5) \\
& - \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(-u_0 - u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5) \\
& - \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 - u_2 - u_3 + u_4 + u_5) \\
& - \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 - u_4 - u_5).
\end{aligned}$$

Die zweite eingeklammerte Grösse ist:

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(u_2 - u_3 - u_4 + u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1) \\
& - \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(u_2 + u_3 - u_4 - u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1) \\
& + \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(u_0 - u_1 - u_2 + u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_3 + u_4) \\
& - \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 - u_2 - u_5)\cos\tfrac{1}{2}(u_3 + u_4) \\
= \; & \tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 + u_2 - u_3 - u_4 + u_5) \\
& + \tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 - u_2 + u_3 + u_4 - u_5) \\
& - \tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 - u_4 - u_5) \\
& - \tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 - u_2 - u_3 + u_4 + u_5) \\
& + \tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0 - u_1 - u_2 + u_3 + u_4 + u_5) \\
& + \tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 + u_5) \\
& - \tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 - u_2 + u_3 + u_4 - u_5) \\
& - \tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5) \\
= \; & \tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0 - u_1 - u_2 + u_3 + u_4 + u_5) \\
& + \tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 + u_2 - u_3 - u_4 + u_5) \\
& + \tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(-u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - u_5) \\
& - \tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(-u_0 - u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5) \\
& - \tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 - u_2 - u_3 + u_4 + u_5) \\
& - \tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 - u_4 - u_5).
\end{aligned}$$

Setzen wir also der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}
M = &\quad \sin\tfrac{1}{2}(u_0 - u_1 - u_2 + u_3 + u_4 + u_5)\\
&+ \sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 + u_2 - u_3 - u_4 + u_5)\\
&+ \sin\tfrac{1}{2}(-u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - u_5)\\
&- \sin\tfrac{1}{2}(-u_0 - u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5)\\
&- \sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 - u_2 - u_3 + u_4 + u_5)\\
&- \sin\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 - u_4 - u_5)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
N = &\quad \cos\tfrac{1}{2}(u_0 - u_1 - u_2 + u_3 + u_4 + u_5)\\
&+ \cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 + u_2 - u_3 - u_4 + u_5)\\
&+ \cos\tfrac{1}{2}(-u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - u_5)\\
&- \cos\tfrac{1}{2}(-u_0 - u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5)\\
&- \cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 - u_2 - u_3 + u_4 + u_5)\\
&- \cos\tfrac{1}{2}(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 - u_4 - u_5),
\end{aligned}$$

so ist nach dem Obigen offenbar:

$$\frac{a(\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{y}_1)}{b(\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_1)} = -\frac{N}{M}, \quad \text{also} \quad \frac{\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{y}_1}{\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_1} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{N}{M},$$

und die Gleichung der durch die beiden Durchschnittspunkte $(\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0)$ und $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1)$ gehenden Geraden ist folglich:

$$y - \mathfrak{y}_0 = -\frac{b}{a} \cdot \frac{N}{M}(x - \mathfrak{x}_0),$$

oder, wie sogleich erhellet, auch:

$$y - \mathfrak{y}_1 = -\frac{b}{a} \cdot \frac{N}{M}(x - \mathfrak{x}_1).$$

Um nun die Gleichung der durch die beiden Durchschnittspunkte $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1)$ und $(\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2)$ gehenden Geraden zu finden, müssen wir, wie aus dem Obigen auf der Stelle erhellet, in der Gleichung

$$y - \mathfrak{y}_0 = -\frac{b}{a} \cdot \frac{N}{M}(x - \mathfrak{x}_0)$$

für

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4, \quad u_5$$

respective

$$u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad u_4,\quad u_5,\quad u_0$$

setzen. Dadurch gehen $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$ in $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$ über, und wenn nun M, N in M', N' übergehen, so ist die Gleichung der durch die Durchschnittspunkte $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1)$ und $(\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2)$ gehenden Geraden:

$$y-\mathfrak{y}_1=-\frac{b}{a}\cdot\frac{N'}{M'}(x-\mathfrak{x}_1).$$

Nimmt man nun aber die in Rede stehende Substitution in der Grösse M vor, so erhält man:

$$\begin{aligned}
M'= &\ \ \sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2-u_3+u_4+u_5)\\
&+\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2+u_3-u_4-u_5)\\
&+\sin\tfrac{1}{2}(-u_0-u_1+u_2+u_3+u_4+u_5)\\
&-\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1-u_2+u_3+u_4+u_5)\\
&-\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u_3-u_4+u_5)\\
&-\sin\tfrac{1}{2}(-u_0+u_1+u_2+u_3+u_4-u_5)\\
=&-\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1-u_2+u_3+u_4+u_5)\\
&-\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u_3-u_4+u_5)\\
&-\sin\tfrac{1}{2}(-u_0+u_1+u_2+u_3+u_4-u_5)\\
&+\sin\tfrac{1}{2}(-u_0-u_1+u_2+u_3+u_4+u_5)\\
&+\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2-u_3+u_4+u_5)\\
&+\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2+u_3-u_4-u_5).
\end{aligned}$$

Nimmt man die in Rede stehende Substitution in N vor, so erhält man:

$$\begin{aligned}
N'= &\ \ \cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2-u_3+u_4+u_5)\\
&+\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2+u_3-u_4-u_5)\\
&+\cos\tfrac{1}{2}(-u_0-u_1+u_2+u_3+u_4+u_5)\\
&-\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1-u_2+u_3+v_4+u_5)\\
&-\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u_3-u_4+u_5)\\
&-\cos\tfrac{1}{2}(-u_0+u_1+u_2+u_3+u_4-u_5)\\
=&-\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1-u_2+u_3+v_4+u_5)\\
&-\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u_3-u_4+u_5)\\
&-\cos\tfrac{1}{2}(-u_0+u_1+u_2+u_3+u_4-u_5)\\
&+\cos\tfrac{1}{2}(-u_0-u_1+u_2+u_3+u_4+u_5)\\
&+\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2-u_3+u_4+u_5)\\
&+\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2+u_3-u_4-u_5).
\end{aligned}$$

Vergleicht man diese Ausdrücke von M', N' mit den obigen Ausdrücken von M, N, so ergiebt sich auf der Stelle:

$$M' = -M,\quad N' = -N;\quad \text{also}\ \frac{N'}{M'} = \frac{N}{M};$$

und die Gleichung der durch die Durchschnittspunkte $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1)$ und $(\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2)$ gehenden Geraden ist also nach dem Vorhergehenden:

$$y - \mathfrak{y}_1 = -\frac{b}{a}\cdot\frac{N}{M}(x - \mathfrak{x}_1).$$

Ganz durch dieselbe Gleichung wurde aber nach dem Obigen auch die durch die Durchschnittspunkte $(\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0)$ und $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1)$ gehende Gerade charakterisirt. Also liegen die drei Durchschnittspunkte $(\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0)$, $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1)$, $(\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2)$ in einer und derselben geraden Linie, welches der zu beweisende Satz war.

Der aus dem Vorhergehenden sich ergebende Ausdruck der Gleichung der Geraden, in welcher die drei Durchschnittspunkte jedes der drei Paare von Gegenseiten des in die Ellipse beschriebenen Sechsecks liegen, durch die beiden Halbaxen der Ellipse und die Anomalien der sechs Ecken des Sechsecks scheint mir an sich sehr bemerkenswerth zu sein und ist als das Hauptresultat der vorhergehenden Untersuchung zu betrachten. Die Grösse $-\frac{b}{a}\cdot\frac{N}{M}$ ist bekanntlich die trigonometrische Tangente des auf die aus der analytischen Geometrie bekannte Weise genommenen Neigungswinkel der in Rede stehenden Geraden gegen die Axe $2a$ der Ellipse.

§. 11.

Wir wollen nun die folgende Aufgabe auflösen:

In eine Ellipse ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten, nöthigenfalls gehörig verlängert, durch drei gegebene Punkte gehen.

Die Geschichte dieser für den Kreis zuerst Castillon von Cramer vorgelegten Aufgabe ist bekannt, und man weiss, wie ungemein weitläufig die von Lagrange, Euler, Lexell gegebenen analytisch-trigonometrischen Auflösungen derselben sind, namentlich den so sehr einfachen Constructionen von Giordano di Ottajano, Malfatti u. A. gegenüber. Die neuere analytische Geometrie hat allerdings auch bei dieser Aufgabe sehr Vieles geleistet, und hat dieselbe bekanntlich auf alle Kegelschnitte, ja auf beliebige in dieselben zu beschreibende Vielecke, deren Seiten sämmtlich durch gegebene Punkte gehen sollen, erweitert, worüber ich hier nichts weiter sagen will, weil diese neueren Untersuchungen bekannt genug sind. Neben den bekannten analytischen Auflösungen dürfte jedoch auch die folgende, an sich ziemlich einfache Auflösung der auf die Ellipse erweiterten Aufgabe einen Platz verdienen und den zweckmässigen Gebrauch der Anomalien bei der Auflösung von die Ellipse betreffenden Aufgaben zu zeigen geeignet sein.

Die Coordinaten der drei gegebenen Punkte, durch welche die Seiten des in die Ellipse zu beschreibenden Dreiecks gehen sollen, seien f, g; f_1, g_1; f_2, g_2. Die Anomalien der drei Spitzen oder Ecken des gesuchten Dreiecks seien u, u_1, u_2; so sind nach §. 2. die Gleichungen der Seiten desselben:

$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)+ay\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u-u_1),$$

$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)+ay\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2),$$

$$bx\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u)+ay\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u);$$

und sollen nun diese Seiten nach der Reihe durch die Punkte (fg), (f_1g_1), (f_2g_2) gehen, so haben wir zur Bestimmung der drei Anomalien u, u_1, u_2 die drei folgenden Gleichungen:

$$bf\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)+ag\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u-u_1),$$

$$bf_1\cos\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)+ag_1\sin\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_1-u_2),$$

$$bf_2\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u)+ag_2\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u)=ab\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u).$$

Die zweite und dritte dieser Gleichungen bringt man sehr leicht auf die Form:

$$\{bf_1\cos\tfrac{1}{2}u_1+ag_1\sin\tfrac{1}{2}u_1-ab\cos\tfrac{1}{2}u_1\}\cos\tfrac{1}{2}u_2$$
$$=\{bf_1\sin\tfrac{1}{2}u_1-ag_1\cos\tfrac{1}{2}u_1+ab\sin\tfrac{1}{2}u_1\}\sin\tfrac{1}{2}u_2,$$

$$\{bf_2\cos\tfrac{1}{2}u+ag_2\sin\tfrac{1}{2}u-ab\cos\tfrac{1}{2}u\}\cos\tfrac{1}{2}u_2$$
$$=\{bf_2\sin\tfrac{1}{2}u-ag_2\cos\tfrac{1}{2}u+ab\sin\tfrac{1}{2}u\}\sin\tfrac{1}{2}u_2;$$

woraus

$$\tan\tfrac{1}{2}u_2=\frac{bf_1\cos\tfrac{1}{2}u_1+ag_1\sin\tfrac{1}{2}u_1-ab\cos\tfrac{1}{2}u_1}{bf_1\sin\tfrac{1}{2}u_1-ag_1\cos\tfrac{1}{2}u_1+ab\sin\tfrac{1}{2}u_1},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}u_2=\frac{bf_2\cos\tfrac{1}{2}u+ag_2\sin\tfrac{1}{2}u-ab\cos\tfrac{1}{2}u}{bf_2\sin\tfrac{1}{2}u-ag_2\cos\tfrac{1}{2}u+ab\sin\tfrac{1}{2}u};$$

also die Gleichung

$$\frac{bf_1\cos\frac{1}{2}u_1+ag_1\sin\frac{1}{2}u_1-ab\cos\frac{1}{2}u_1}{bf_1\sin\frac{1}{2}u_1-ag_1\cos\frac{1}{2}u_1+ab\sin\frac{1}{2}u_1}$$

$$=\frac{bf_2\cos\frac{1}{2}u+ag_2\sin\frac{1}{2}u-ab\cos\frac{1}{2}u}{bf_2\sin\frac{1}{2}u-ag_2\cos\frac{1}{2}u+ab\sin\frac{1}{2}u}$$

folgt. Multiplicirt man diese Gleichung nun mit dem Producte der beiden Nenner der vorstehenden Brüche, so bringt man dieselbe nach einigen einfachen Reductionen und Verwandlungen sehr leicht auf die folgende Form:

$$0=(a^2g_1g_2+b^2f_1f_2-a^2b^2)\sin\tfrac{1}{2}(u-u_1)-ab(f_1g_2-g_1f_2)\cos\tfrac{1}{2}(u-u_1)$$
$$+ab^2(f_1-f_2)\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)-a^2b(g_1-g_2)\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)$$

oder.

$$0=(1-\frac{f_1}{a}\cdot\frac{f_2}{a}-\frac{g_1}{b}\cdot\frac{g_2}{b})\sin\tfrac{1}{2}(u-u_1)+\left(\frac{f_1}{a}\cdot\frac{g_2}{b}-\frac{f_2}{a}\cdot\frac{g_1}{b}\right)\cos\tfrac{1}{2}(u-u_1)$$
$$-\left(\frac{f_1}{a}-\frac{f_2}{a}\right)\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)+\left(\frac{g_1}{b}-\frac{g_2}{b}\right)\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1).$$

Führt man nun in diese Gleichung den aus der ersten der drei Fundamental-Gleichungen sich ergebenden Werth

$$\cos\tfrac{1}{2}(u-u_1)=\frac{f}{a}\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)+\frac{g}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)$$

ein, so erhält man;

$$(1-\frac{f_1}{a}\cdot\frac{f_2}{a}-\frac{g_1}{b}\cdot\frac{g_2}{b})\sin\tfrac{1}{2}(u-u_1)$$
$$=-\left\{\frac{f}{a}\left(\frac{f_1}{a}\cdot\frac{g_2}{b}-\frac{f_2}{a}\cdot\frac{g_1}{b}\right)+\left(\frac{g_1}{b}-\frac{g_2}{b}\right\}\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)\right.$$
$$-\left\{\frac{g}{b}\left(\frac{f_1}{a}\cdot\frac{g_2}{b}-\frac{f_2}{a}\cdot\frac{g_1}{b}\right)-\left(\frac{f_1}{a}-\frac{f_2}{a}\right)\right\}\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)$$

oder:

$$(1-\frac{f_1}{a}\cdot\frac{f_2}{a}-\frac{g_1}{b}\cdot\frac{g_2}{b})\sin\tfrac{1}{2}(u-u_1)$$
$$=\left\{(1-\frac{f}{a}\cdot\frac{f_1}{a})\frac{g_2}{b}-(1-\frac{f}{a}\cdot\frac{f_2}{a})\frac{g_1}{b}\right\}\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)$$
$$-\left\{(1-\frac{g}{b}\cdot\frac{g_1}{b})\frac{f_2}{a}-(1-\frac{g}{b}\cdot\frac{g_2}{b})\frac{f_1}{a}\right\}\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1),$$

und setzen wir der Kürze wegen:

$$\frac{F}{a}=\frac{(1-\frac{f}{a}\cdot\frac{f_1}{a})\frac{g_2}{b}-(1-\frac{f}{a}\cdot\frac{f_2}{a})\frac{g_1}{b}}{1-\frac{f_1}{a}\cdot\frac{f_2}{a}-\frac{g_1}{b}\cdot\frac{g_2}{b}},$$

$$\frac{G}{b}=-\frac{(1-\frac{g}{b}\cdot\frac{g_1}{b})\frac{f_2}{a}-(1-\frac{g}{b}\cdot\frac{g_2}{b})\frac{f_1}{a}}{1-\frac{f_1}{a}\cdot\frac{f_2}{a}-\frac{g_1}{b}\cdot\frac{g_2}{b}};$$

so haben wir die beiden folgenden Gleichungen:

$$\sin\tfrac{1}{2}(u-u_1)=\frac{F}{a}\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)+\frac{G}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1),$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(u-u_1)=\frac{f}{a}\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)+\frac{g}{b}\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1).$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich, wenn man quadrirt und dann addirt, die Gleichung:

$$1=\frac{F^2+f^2}{a^2}\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2+\frac{G^2+g^2}{b^2}\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)^2$$

$$+2\frac{FG+fg}{ab}\sin\tfrac{1}{2}(u+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u+u_1),$$

also:

$$1=\frac{F^2+f^2}{a^2}\cdot\frac{1+\cos(u+u_1)}{2}+\frac{G^2+g^2}{b^2}\cdot\frac{1-\cos(u+u_1)}{2}$$

$$+\frac{FG+fg}{ab}\sin(u+u_1),$$

oder:

$$1-\frac{F^2+f^2}{2a^2}-\frac{G^2+g^2}{2b^2}$$

$$=\left(\frac{F^2+f^2}{2a^2}-\frac{G^2+g^2}{2b^2}\right)\cos(u+u_1)+\frac{FG+fg}{ab}\sin(u+u_1).$$

Wie man mittelst dieser Gleichung $u+u_1$ bestimmen kann, ist bekannt genug und bedarf einer weiteren Erläuterung hier nicht. Hat man aber $u+u_1$ gefunden, so sind im Obigen, wie ebenfalls auf der Stelle erhellet, Formeln genug enthalten, mittelst welcher sich alle drei Anomalien der Ecken des gesuchten Dreiecks bestimmen lassen, wodurch dann dieses Dreieck selbst gefunden ist. Den theilweise sehr weitläufigen, oben erwähnten analytischen Auflösungen für den Fall des Kreises gegenüber, scheint mir die vorstehende Auflösung für den allgemeineren Fall der Ellipse wohl hinreichende Einfachheit zu besitzen, und dürfte wohl geeignet sein, den Gebrauch der Anomalien auch bei der Auflösung anderer Aufgaben zu empfehlen, was der hauptsächlichste Zweck des Obigen ist.

Nachträglich will ich noch bemerken, dass ich aus der obigen Gleichung zwischen $\cos(u+u_1)$ und $\sin(u+u_1)$ den folgenden Ausdruck für $\tang\frac{1}{2}(u+u_1)$ abgeleitet habe:

$$\tang\tfrac{1}{2}(u+u_1)=\frac{\frac{FG+fg}{ab}\pm\sqrt{\left(\frac{FG+fg}{ab}\right)^2-\left(1-\frac{F^2+f^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{G^2+g^2}{b^2}\right)}}{1-\frac{G^2+g^2}{b^2}}.$$

§. 12.

Diese leicht weiter auszudehnenden Untersuchungen über die Ellipse wollen wir mit den folgenden Betrachtungen über deren Quadratur beschliessen.

Wenn wir annehmen, dass der Halbmesser r der Ellipse von dem positiven Theile der Axe der x an nach dem positiven Theile der Axe der y hin den Winkel φ und den entsprechenden elliptischen Sector S beschrieben habe, so ist bekanntlich

$$S=\tfrac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2\partial\varphi.$$

Die dem Endpunkte des Halbmessers r in der in Rede stehenden Lage desselben entsprechenden Coordinaten und dessen Anomalie seien x, y und u, so ist

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi \quad\text{und}\quad x=a\cos u,\quad y=b\sin u;$$

also

$$r\cos\varphi=a\cos u,\quad r\sin\varphi=b\sin u;$$

woraus sich auf der Stelle

$$r^2=a^2\cos u^2+b^2\sin u^2$$

ergiebt. Ferner ist:

$$\cos\varphi\partial r - r\sin\varphi\partial\varphi = -a\sin u\partial u,$$

$$\sin\varphi\partial r + r\cos\varphi\partial\varphi = \quad b\cos u\partial u;$$

also, wenn man ∂r eliminirt:

$$r\partial\varphi = (a\sin u\sin\varphi + b\cos u\cos\varphi)\,\partial u,$$

woraus

$$\begin{aligned} r^2\partial\varphi &= (a\sin u.r\sin\varphi + b\cos u.r\cos\varphi)\partial u \\ &= (a\sin u.b\sin u + b\cos u.a\cos u)\partial u \\ &= ab(\sin u^2 + \cos u^2)\partial u, \end{aligned}$$

also

$$r^2\partial\varphi = ab\partial u$$

folgt. Daher ist

$$\int_0^\varphi r^2\partial\varphi = ab\int_0^u \partial u = abu,$$

folglich nach dem Obigen:

$$S = \tfrac{1}{2}abu,$$

welche Formel jedenfalls sehr bemerkenswerth ist.

Für eine andere Anomalie u_1, welcher der elliptische Sector S_1 entspricht, ist

$$S_1 = \tfrac{1}{2}abu_1,$$

also

$$S_1 - S = \tfrac{1}{2}ab(u_1 - u).$$

Das den Anomalien u und u_1 entsprechende elliptische Segment sei $\mathfrak{S}$, so ist offenbar, wobei Taf. XII. Fig. 2. zur Erläuterung dient, in völliger Allgemeinheit:

$$\mathfrak{S} = S_1 - S - \tfrac{1}{2}rr_1\sin(\varphi_1 - \varphi).$$

Aber

$$\begin{aligned} rr_1\sin(\varphi_1 - \varphi) &= r_1\sin\varphi_1.r\cos\varphi - r_1\cos\varphi_1.r\sin\varphi \\ &= b\sin u_1.a\cos u - a\cos u_1.b\sin u \\ &= ab(\sin u_1\cos u - \cos u_1\sin u) \\ &= ab\sin(u_1 - u), \end{aligned}$$

also

$$S = S_1 - S - \tfrac{1}{2}ab\sin(u_1 - u) = \tfrac{1}{2}ab\{u_1 - u - \sin(u_1 - u)\},$$

wobei immer $u_1 > u$ vorausgesetzt worden ist.

Ist Σ der elliptische Sector, welchen der von dem in dem positiven Theile der Axe der x, insofern $2a$ die Hauptaxe und als Axe der x angenommen worden ist, liegenden Brennpunkte der Ellipse ausgehende Vector von dem positiven Theile der Axe der x an bis zu dem Endpunkte des Halbmessers r beschrieben hat, so ist, wie sogleich in die Augen fallen wird, in völliger Allgemeinheit:

$$\Sigma = S - \tfrac{1}{2}er\sin\varphi = S - \tfrac{1}{2}eb\sin u,$$

wo e die Excentricität der Ellipse, d. h. die Entfernung des in Rede stehenden Brennpunkts von dem Mittelpunkte bezeichnet. Also ist nach dem Obigen:

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}abu - \tfrac{1}{2}eb\sin u = \tfrac{1}{2}b(au - e\sin u),$$

oder:

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}ab\left(u - \frac{e}{a}\sin u\right),$$

und folglich, weil

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = a\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

ist:

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}ab\left\{u - \sin u\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}\right\}.$$

II. Die Hyperbel.

§. 13.

Von den beiden in dem Mittelpunkte C (Taf. XII. Fig. 3.) der in der Figur durch vollständig ausgezogene Linien dargestellten Hyperbel sich schneidenden Axen $AA_1 = 2a$ und $BB_1 = 2b$ dieser Hyperbel sei AA_1 die Axe der x und BB_1 die Axe der y, und CA und CB seien die positiven Theile dieser Axen, so ist bekanntlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung der Hyperbel. Ueber der Axe $AA_1 = 2a$ beschreibe man die in der Figur durch punktirte Linien dargestellte gleichseitige Hyperbel als eine Hülfshyperbel, so wie wir früher bei der Ellipse den Hülfskreis beschrieben; und wenn nun P ein beliebiger, durch die Coordinaten x, y bestimmter Punkt der ersten Hyperbel ist, so sei P' der Durchschnittspunkt der, der Coordinate y entsprechenden Linie PQ, wenn man dieselbe nöthigenfalls gehörig verlängert, mit der über AA_1 als Axe beschriebenen gleichseitigen Hyperbel. Zieht man dann CP', so soll der von dieser Linie mit dem positiven Theile CA der Axe der x eingeschlossene Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile CA der Axe der x an nach dem positiven Theile CB der Axe der y hin von 0 bis 360° zählt, durch u bezeichnet werden. Die erste Coordinate des Punktes P' ist offenbar x, und die zweite Coordinate dieses Punktes wollen wir durch y' bezeichnen. Dann ist offenbar in völliger Allgemeinheit, wenn $CP' = r'$ gesetzt wird:

$$x = r' \cos u, \quad y' = r' \sin u.$$

Nun ist aber

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{a}\right)^2 = 1;$$

also

$$r'^2(\cos u^2 - \sin u^2) = r'^2 \cos 2u = a^2,$$

folglich

$$r' = \frac{a}{\sqrt{\cos 2u}},$$

wo r' nur dann reell ist, wenn $\cos 2u$ positiv ist. Folglich ist

$$x = \frac{a \cos u}{\sqrt{\cos 2u}},$$

und weil wegen der obigen Gleichungen

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{y'}{b}\right)^2 \text{ oder } y^2 = \frac{b^2}{a^2} y'^2,$$

also, da y und y' offenbar immer gleiche Vorzeichen haben, $y = \frac{b}{a} y'$ ist, so ist nach dem Obigen:

$$y = \frac{br'}{a} \sin u = \frac{b \sin u}{\sqrt{\cos 2u}}.$$

Durch den Winkel u, den wir auch hier die Anomalie des

Punktes (xy) nennen wollen, lassen sich also die Coordinaten x, y dieses Punktes auf folgende Art ausdrücken:

$$x=\frac{a\cos u}{\sqrt{\cos 2u}},\quad y=\frac{b\sin u}{\sqrt{\cos 2u}}.$$

Der Grund, dass diese Ausdrücke bei Weitem nicht so einfach sind wie die entsprechenden Ausdrücke bei der Ellipse, liegt im Wesentlichen in der geringeren Einfachheit der Gleichung

$$\cos u^2-\sin u^2=\cos 2u$$

im Verhältniss zu der Gleichung

$$\cos u^2+\sin u^2=1.$$

Die Anomalien gewähren daher bei der Hyperbel weniger Vortheile als bei der Ellipse, weshalb ich mich auch hier mit der ersteren Curve in geringerer Ausführlichkeit als mit der letzteren beschäftigen werde.

Man kann auch noch die folgenden, aus dem Obigen sich unmittelbar ergebenden Ausdrücke von x, y' merken:

$$x=\frac{a\cos u}{\sqrt{\cos 2u}},\quad y'=\frac{a\sin u}{\sqrt{\cos 2u}}.$$

Sollen die gefundenen Ausdrücke der Coordinaten reell sein, so muss $\cos 2u$ positiv sein. Theilen wir nun das Intervall 0 bis 2π in die sechs folgenden einzelnen Intervalle:

$$\begin{array}{lcl}
0 & \text{bis} & \frac{1}{4}\pi,\\[1ex]
\frac{1}{4}\pi & ,, & \frac{3}{4}\pi,\\[1ex]
\frac{3}{4}\pi & ,, & \frac{4}{4}\pi,\\[1ex]
\frac{4}{4}\pi & ,, & \frac{5}{4}\pi,\\[1ex]
\frac{5}{4}\pi & ,, & \frac{7}{4}\pi,\\[1ex]
\frac{7}{4}\pi & ,, & \frac{8}{4}\pi,
\end{array}$$

so liegt, wenn u in diesen Intervallen liegt, $2u$ beziehungsweise in den folgenden Intervallen:

0	bis	$\frac{1}{2}\pi$,	$\cos u$	positiv,
$\frac{1}{2}\pi$	„	$\frac{3}{2}\pi$,	„	negativ,
$\frac{3}{2}\pi$	„	$\frac{4}{2}\pi$,	„	positiv,
$\frac{4}{2}\pi$	„	$\frac{5}{2}\pi$,	„	positiv,
$\frac{5}{2}\pi$	„	$\frac{7}{2}\pi$,	„	negativ,
$\frac{7}{2}\pi$	„	$\frac{8}{2}\pi$,	„	positiv.

Also sind die obigen Ausdrücke der Coordinaten nur dann reell, wenn u in den folgenden Intervallen:

$$0 \text{ bis } \frac{1}{4}\pi,$$

$$\frac{3}{4}\pi \text{ „ } \frac{4}{4}\pi,$$

$$\frac{4}{4}\pi \text{ „ } \frac{5}{4}\pi,$$

$$\frac{7}{4}\pi \text{ „ } \frac{8}{4}\pi;$$

d. h. in den Intervallen:

$$0 \text{ bis } \frac{1}{4}\pi,$$

$$\frac{3}{4}\pi \text{ „ } \frac{5}{4}\pi,$$

$$\frac{7}{4}\pi \text{ „ } \frac{8}{4}\pi$$

liegt. In allen übrigen Fällen sind die obigen Ausdrücke der Coordinaten imaginär.

§. 14.

Zu der bisher betrachteten Hyperbel, deren Scheitel A, A_1 und deren Axen $AA_1 = 2a$ und $BB_1 = 2b$ waren, wollen wir jetzt, wie Taf. XII. Fig. 4. zeigt, eine zweite Hyperbel beschreiben, deren Scheitel B, B_1 und deren Axen $BB_1 = 2b$ und $AA_1 = 2a$ sind. Dann ist offenbar

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{x}{a}\right)^2=1$$

die Gleichung dieser zweiten Hyperbel, und die Gleichungen unserer beiden Hyperbeln sind daher

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=+1 \text{ und } \left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=-1,$$

weshalb wir im Folgenden diese beiden Hyperbeln respective die **positive Hyperbel** und die **negative Hyperbel** nennen wollen *).

§. 15.

Wir wollen jetzt die Gleichung der Geraden suchen, welche durch die beiden Punkte der Hyperbel **) geht, deren *Anomalien* u und u_1 sind.

Bezeichnen wir die gesuchte Gleichung durch

$$y=Ax+B,$$

so ist, weil nach §. 13. die Coordinaten der beiden gegebenen Punkte

$$\frac{a\cos u}{\sqrt{\cos 2u}},\quad \frac{b\sin u}{\sqrt{\cos 2u}} \text{ und } \frac{a\cos u_1}{\sqrt{\cos 2u_1}},\quad \frac{b\sin u_1}{\sqrt{\cos 2u_1}}$$

sind:

$$\frac{b\sin u}{\sqrt{\cos 2u}}=A\frac{a\cos u}{\sqrt{\cos 2u}}+B,$$

$$\frac{b\sin u_1}{\sqrt{\cos 2u_1}}=A\frac{a\cos u_1}{\sqrt{\cos 2u_1}}+B;$$

und die gesuchte Gleichung hat also eine der beiden folgenden Formen:

$$y-\frac{b\sin u}{\sqrt{\cos 2u}}=A(x-\frac{a\cos u}{\sqrt{\cos 2u}}),$$

$$y-\frac{b\sin u_1}{\sqrt{\cos 2u_1}}=A(x-a\frac{\cos u_1}{\sqrt{\cos 2u_1}}).$$

---

*) Wollte man eine ähnliche Construction auch bei der Ellipse machen, so würde offenbar die zweite Ellipse mit der ersten ganz coincidiren.

**) Ohne Beisatz verstehen wir immer die positive Hyperbel.

Leicht findet man aber aus den vorhergehenden Gleichungen:

$$A=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin u\sqrt{\cos 2u_1}-\sin u_1\sqrt{\cos 2u}}{\cos u\sqrt{\cos 2u_1}-\cos u_1\sqrt{\cos 2u}};$$

also ist die gesuchte Gleichung:

$$y-\frac{b\sin u}{\sqrt{\cos 2u}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin u\sqrt{\cos 2u_1}-\sin u_1\sqrt{\cos 2u}}{\cos u\sqrt{\cos 2u_1}-\cos u_1\sqrt{\cos 2u}}(x-\frac{a\cos u}{\sqrt{\cos 2u}})$$

oder:

$$y-\frac{b\sin u_1}{\sqrt{\cos 2u_1}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin u\sqrt{\cos 2u_1}-\sin u_1\sqrt{\cos 2u}}{\cos u\sqrt{\cos 2u_1}-\cos u_1\sqrt{\cos 2u}}(x-\frac{a\cos u_1}{\sqrt{\cos 2u_1}});$$

oder auch, wie man mittelst einiger leichten Transformationen findet:

$$\left.\begin{array}{l} b(\sin u\sqrt{\cos 2u_1}-\sin u_1\sqrt{\cos 2u})x \\ -a(\cos u\sqrt{\cos 2u_1}-\cos u_1\sqrt{\cos 2u})y \end{array}\right\}=ab\sin(u-u_1).$$

Auch ist:

$$\begin{aligned}(\sin u\sqrt{\cos 2u_1}-\sin u_1\sqrt{\cos 2u})(\sin u\sqrt{\cos 2u_1}+\sin u_1\sqrt{\cos 2u})\\ =\sin u^2\cos 2u_1-\sin u_1{}^2\cos 2u\\ =\sin u^2\cos u_1{}^2-\cos u^2\sin u_1{}^2\\ =\sin(u-u_1)\sin(u+u_1)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&(\cos u\sqrt{\cos 2u_1}-\cos u_1\sqrt{\cos 2u})(\sin u\sqrt{\cos 2u_1}+\sin u_1\sqrt{\cos 2u})\\ =\;&\sin u\cos u\cos 2u_1-\sin u_1\cos u_1\cos 2u-\sin(u-u_1)\sqrt{\cos 2u\cos 2u_1}\\ =\;&\sin u\cos u_1(\cos u\cos u_1+\sin u\sin u_1)\\ &-\cos u\sin u_1(\cos u\cos u_1+\sin u\sin u_1)-\sin(u-u_1)\sqrt{\cos 2u\cos 2u_1}\\ =\;&\sin(u-u_1)\{\cos(u-u_1)-\sqrt{\cos 2u\cos 2u_1}\};\end{aligned}$$

folglich nach dem Obigen:

$$A=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin(u+u_1)}{\cos(u-u_1)-\sqrt{\cos 2u\cos 2u_1}},$$

und daher die gesuchte Gleichung auch

$$y-\frac{b\sin u}{\sqrt{\cos 2u}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin(u+u_1)}{\cos(u-u_1)-\sqrt{\cos 2u\cos 2u_1}}(x-\frac{a\cos u}{\sqrt{\cos 2u}})$$

oder

$$y-\frac{b\sin u_1}{\sqrt{\cos 2u_1}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin(u+u_1)}{\cos(u-u_1)-\sqrt{\cos 2u\cos 2u_1}}\left(x-\frac{a\cos u_1}{\sqrt{\cos 2u_1}}\right).$$

Bezeichnet man die Entfernung der beiden durch die Anomalien u und u_1 bestimmten Punkte der Hyperbel von einander durch s, so ist

$$s^2=a^2\left(\frac{\cos u}{\sqrt{\cos 2u}}-\frac{\cos u_1}{\sqrt{\cos 2u_1}}\right)^2+b^2\left(\frac{\sin u}{\sqrt{\cos 2u}}-\frac{\sin u_1}{\sqrt{\cos 2u_1}}\right)^2$$

oder

$$s^2=\frac{a^2(\cos u\sqrt{\cos 2u_1}-\cos u_1\sqrt{\cos 2u})^2}{\cos 2u\cos 2u_1}$$
$$+\frac{b^2(\sin u\sqrt{\cos 2u_1}-\sin u_1\sqrt{\cos 2u})^2}{\cos 2u\cos 2u_1},$$

was sich noch auf verschiedene Arten umgestalten lassen würde.

§. 16.

Wir wollen nun die Gleichung der Berührenden der Hyperbel in dem durch die Anomalie u bestimmten Punkte derselben suchen.

Lassen wir die Anomalie u sich um $\varDelta u$ verändern, so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen die Gleichung der Geraden, welche durch die beiden durch die Anomalien u und $u+\varDelta u$ bestimmten Punkte der Hyperbel geht:

$$y-\frac{b\sin u}{\sqrt{\cos 2u}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin(2u+\varDelta u)}{\cos\varDelta u-\sqrt{\cos 2u\cos 2(u+\varDelta u)}}\left(x-\frac{a\cos u}{\sqrt{\cos 2u}}\right).$$

Diese Gleichung geht in die Gleichung der Berührenden in dem durch die Anomalie u bestimmten Punkte der Hyperbel über, wenn man $\varDelta u=0$ setzt, oder vielmehr $\varDelta u$ sich der Null nähern lässt, und zu der Gränzgleichung übergeht. Dadurch erhält man für die Gleichung der Berührenden die folgende Gleichung:

$$y-\frac{b\sin u}{\sqrt{\cos 2u}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin 2u}{1-\sqrt{\cos 2u^2}}\left(x-\frac{a\cos u}{\sqrt{\cos 2u}}\right).$$

Bekanntlich muss $\cos 2u$ positiv sein, weshalb $\sqrt{\cos 2u^2}=\cos 2u$ zu setzen ist, und daher vorstehende Gleichung in die folgende übergeht:

$$y-\frac{b\sin u}{\sqrt{\cos 2u}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin 2u}{1-\cos 2u}(x-\frac{a\cos u}{\sqrt{\cos 2u}}),$$

oder, wie man leicht findet, in die folgende Gleichung:

$$y-\frac{b\sin u}{\sqrt{\cos 2u}}=\frac{b}{a}\cot u(x-\frac{a\cos u}{\sqrt{\cos 2u}}).$$

Diese Gleichung bringt man aber auch leicht auf die folgende Form:

$$bx\cos u-ay\sin u=ab\sqrt{\cos 2u},$$

oder auf die Form:

$$\frac{x\cos u}{a\sqrt{\cos 2u}}-\frac{y\sin u}{b\sqrt{\cos 2u}}=1.$$

§. 17.

Durch den Mittelpunkt der Hyperbel und den durch die Anomalie u bestimmten Punkt derselben wollen wir jetzt eine Gerade, einen Durchmesser der Hyperbel, ziehen. Die Gleichung dieser Geraden sei

$$y=Ax,$$

so ist, weil

$$\frac{a\cos u}{\sqrt{\cos 2u}},\quad\frac{b\sin u}{\sqrt{\cos 2u}}$$

die Coordinaten des Punktes der Hyperbel sind, durch den die in Rede stehende Gerade gezogen worden ist:

$$\frac{b\sin u}{\sqrt{\cos 2u}}=A\frac{a\cos u}{\sqrt{\cos 2u}},$$

also $A=\frac{b}{a}\operatorname{tang}u$, und folglich

$$y=\frac{b}{a}x\operatorname{tang}u$$

die gesuchte Gleichung.

Sind nun überhaupt X, Y die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Hyperbel, so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2-\left(\frac{Y}{b}\right)^2=1,\quad Y=\frac{b}{a}X\operatorname{tang}u;$$

aus denen

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2(1-\operatorname{tang} u^2)=\left(\frac{X}{a}\right)^2\cdot\frac{\cos 2u}{\cos u^2}=1,$$

also mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$X=\pm\frac{a\cos u}{\sqrt{\cos 2u}},\quad Y=\pm\frac{b\sin u}{\sqrt{\cos 2u}}$$

folgt.

Die Gleichung der Geraden, welche die Hyperbel in dem durch die Anomalie u bestimmten Punkte berührt, ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$y-\frac{b\sin u}{\sqrt{\cos 2u}}=\frac{b}{a}\cot u\left(x-\frac{a\cos u}{\sqrt{\cos 2u}}\right),$$

und die Gleichung einer durch den Mittelpunkt der Hyperbel dieser Berührenden parallel gezogenen Geraden ist folglich:

$$y=\frac{b}{a}x\cot u.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Hyperbel durch X_1, Y_1, so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$\left(\frac{X_1}{a}\right)^2-\left(\frac{Y_1}{b}\right)^2=1,\quad Y_1=\frac{b}{a}X_1\cot u;$$

aus denen

$$\left(\frac{X_1}{a}\right)^2(1-\cot u^2)=\left(\frac{X_1}{a}\right)^2\cdot\frac{-\cos 2u}{\sin u^2}=1,$$

also mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$X_1=\pm\frac{a\sin u}{\sqrt{-\cos 2u}},\quad Y_1=\pm\frac{b\cos u}{\sqrt{-\cos 2u}}$$

folgt. Weil nun bekanntlich $\cos 2u$ positiv sein muss, so ist $-\cos 2u$ negativ, X_1 und Y_1 sind folglich imaginär, und die positive Hyperbel wird also von der durch die Gleichung

$$y=\frac{b}{a}x\cot u$$

charakterisirten Geraden nicht geschnitten. Wir wollen daher jetzt untersuchen, ob von dieser Geraden die negative Hyperbel geschnitten wird. Bezeichnen wir zu dem Ende die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der negativen Hyperbel durch X', Y', so haben wir zu deren Bestimmung nach §. 14. die Gleichungen:

$$\left(\frac{X'}{a}\right)^2 - \left(\frac{Y'}{b}\right)^2 = -1, \quad Y' = \frac{b}{a} X' \cot u;$$

aus denen

$$\left(\frac{X'}{a}\right)^2 (1 - \cot u^2) = \left(\frac{X'}{a}\right)^2 \cdot \frac{-\cos 2u}{\sin u^2} = -1,$$

also mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$X' = \pm \frac{a \sin u}{\sqrt{\cos 2u}}, \quad Y' = \pm \frac{b \cos u}{\sqrt{\cos 2u}}$$

folgt. Da diese Coordinaten reell sind, so wird von der durch die Gleichung

$$y = \frac{b}{a} x \cot u$$

charakterisirten geraden Linie die negative Hyperbel wirklich zwei Mal geschnitten.

§. 18.

Die beiden im vorhergehenden Paragraphen durch die Gleichungen

$$y = \frac{b}{a} x \operatorname{tang} u, \quad y = \frac{b}{a} x \cot u$$

im Allgemeinen charakterisirten Geraden, deren Durchschnittspunkte mit der positiven und negativen Hyperbel respective (XY) und $(X'Y')$ sind, heissen conjugirte Durchmesser der Hyperbel. Die bestimmten linearen Werthe dieser conjugirten Durchmesser sind die Entfernungen der beiden Punkte von einander, in denen von dem ersten Durchmesser die positive, von dem zweiten Durchmesser die negative Hyperbel geschnitten wird, und sollen respective durch $2A$ und $2B$ bezeichnet werden *).

---

*) Ich glaube, dass man bis jetzt bei der Theorie der Hyperbel die Betrachtung der negativen Hyperbel mit Unrecht unterlassen hat; nur durch deren Einführung erhalten die conjugirten Durchmesser der Hyperbel ihre wirkliche geometrische Bestimmung. Bei der Ellipse würde die negative Ellipse mit der positiven zusammenfallen, wie schon in der Note zu §. 14. bemerkt worden ist.

Offenbar ist

$$A^2 = X^2 + Y^2,$$

also, weil nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$X = \pm\frac{a\cos u}{\sqrt{\cos 2u}},\quad Y = \pm\frac{b\sin u}{\sqrt{\cos 2u}}$$

ist:

$$A^2 = \frac{a^2\cos u^2 + b^2\sin u^2}{\cos 2u},\quad A = \frac{\sqrt{a^2\cos u^2 + b^2\sin u^2}}{\sqrt{\cos 2u}}.$$

Auf ähnliche Art ist

$$B^2 = X'^2 + Y'^2,$$

also, weil nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$X' = \pm\frac{a\sin u}{\sqrt{\cos 2u}},\quad Y' = \pm\frac{b\cos u}{\sqrt{\cos 2u}}$$

ist:

$$B^2 = \frac{a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2}{\cos 2u},\quad B = \frac{\sqrt{a^2\sin u^2 + b^2\cos u^2}}{\sqrt{\cos 2u}}.$$

Aus den beiden vorhergehenden Ausdrücken von A^2 und B^2 ergiebt sich auf der Stelle:

$$A^2 - B^2 = \frac{a^2(\cos u^2 - \sin u^2) - b^2(\cos u^2 - \sin u^2)}{\cos 2u} = \frac{(a^2 - b^2)\cos 2u}{\cos 2u},$$

also

$$A^2 - B^2 = a^2 - b^2,$$

welches der bekannte wichtige und merkwürdige Satz von den conjugirten Durchmessern der Hyperbel ist, zu dem uns also die vorhergehenden Rechnungen auf sehr einfache Weise geführt haben.

Auch kann man noch die Relation

$$A^2 + B^2 = \frac{a^2 + b^2}{\cos 2u}$$

merken.

§. 19.

Wir wollen jetzt den, von den durch die Gleichungen

$$y = \frac{b}{a}x\tang u,\quad y = \frac{b}{a}x\cot u$$

charakterisirten conjugirten Durchmessern eingeschlossenen Winkel durch θ bezeichnen, so ist nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie:

$$\operatorname{tang}\theta^2=\left\{\frac{\frac{b}{a}(\cot u-\operatorname{tang}u)}{1+\frac{b^2}{a^2}\cot u\operatorname{tang}u}\right\}^2,$$

also, wie man leicht findet:

$$\operatorname{tang}\theta^2=\frac{a^2b^2\cos 2u^2}{(a^2+b^2)^2\sin u^2\cos u^2}=\frac{4a^2b^2\cos 2u^2}{(a^2+b^2)^2\sin 2u^2},$$

oder:

$$\operatorname{tang}\theta^2=\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\cot 2u^2.$$

Nun ist aber

$$\sin\theta^2=\frac{\operatorname{tang}\theta^2}{1+\operatorname{tang}\theta^2},$$

also, wie man leicht findet:

$$\sin\theta^2=\frac{4a^2b^2\cot 2u^2}{(a^2+b^2)^2+4a^2b^2\cot 2u^2},$$

oder

$$\sin\theta^2=\frac{4a^2b^2\cos 2u^2}{4a^2b^2\cos 2u^2+(a^2+b^2)^2\sin 2u^2}=\frac{4a^2b^2\cos 2u^2}{4a^2b^2+(a^2-b^2)^2\sin 2u^2}$$

folglich:

$$\sin\theta=\frac{2ab\cos 2u}{\sqrt{4a^2b^2+(a^2-b^2)^2\sin 2u^2}}.$$

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist aber:

$$\begin{aligned}A^2B^2&=\frac{(a^2\cos u^2+b^2\sin u^2)(a^2\sin u^2+b^2\cos u^2)}{\cos 2u^2}\\
&=\frac{(a^4+b^4)\sin u^2\cos u^2+a^2b^2(\sin u^4+\cos u^4)}{\cos 2u^2}\\
&=\frac{(a^4+b^4)\sin u^2\cos u^2+a^2b^2(\sin u^2+\cos u^2-2\sin u^2\cos u^2)}{\cos 2u^2}\\
&=\frac{a^2b^2+(a^2-b^2)^2\sin u^2\cos u^2}{\cos 2u^2}\\
&=\frac{4a^2b^2+(a^2-b^2)^2\sin 2u^2}{4\cos 2u^2},\end{aligned}$$

und daher nach dem Obigen:

$$A^2B^2\sin\theta^2 = a^2b^2, \text{ also } ab = AB\sin\theta.$$

Bezeichnen wir die beiden, von den auf der positiven Seite der Axe der x liegenden Theilen der durch die obigen Gleichungen charakterisirten conjugirten Durchmesser mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch ϖ und ϖ_1, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie bekanntlich:

$$\operatorname{tang}\varpi = \frac{b}{a}\operatorname{tang}u, \quad \operatorname{tang}\varpi_1 = \frac{b}{a}\cot u;$$

also

$$\operatorname{tang}\varpi\operatorname{tang}\varpi_1 = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}u\cot u = \frac{b^2}{a^2},$$

woraus sich unmittelbar die Gleichung

$$b^2 - a^2\operatorname{tang}\varpi\operatorname{tang}\varpi_1 = 0$$

ergiebt.

§. 20.

Wir wollen nun auch die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf das System der beiden durch die Gleichungen

$$y = \frac{b}{a}x\operatorname{tang}u, \quad y = \frac{b}{a}x\cot u$$

charakterisirten conjugirten Durchmesser als Axen der X und Y suchen. Zu dem Ende betrachte man eine beliebige der Axe der Y, d. h. dem durch die Gleichung

$$y = \frac{b}{a}x\cot u$$

charakterisirten Durchmesser parallele Sehne der Hyperbel, so ist, wenn

$$\frac{a\cos U}{\sqrt{\cos 2U}}, \quad \frac{b\sin U}{\sqrt{\cos 2U}}$$

die Coordinaten eines beliebigen der beiden Durchschnittspunkte dieser Sehne mit der Hyperbel sind, deren Gleichung offenbar:

$$y - \frac{b\sin U}{\sqrt{\cos 2U}} = \frac{b}{a}\cot u\left(x - \frac{a\cos U}{\sqrt{\cos 2U}}\right).$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieser Sehne mit der Axe der X, d. h. mit dem durch die Gleichung

$$y=\frac{b}{a}x\tang u$$

charakterisirten Durchmesser, durch x_1, y_1; so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$y_1=\frac{b}{a}x_1\tang u,$$

$$y_1-\frac{b\sin U}{\sqrt{\cos 2U}}=\frac{b}{a}\cot u(x_1-\frac{a\cos U}{\sqrt{\cos 2U}});$$

aus denen sich mittelst einer sehr einfachen und leichten Rechnung die Formeln

$$x_1=a\frac{\cos u\cos(u+U)}{\cos 2u\sqrt{\cos 2U}},\quad y_1=b\frac{\sin u\cos(u+U)}{\cos 2u\sqrt{\cos 2U}}$$

ergeben. Nun ist aber offenbar

$$X^2=x_1{}^2+y_1{}^2,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$X^2=\frac{(a^2\cos u^2+b^2\sin u^2)\cos(u+U)^2}{\cos 2u^2\cos 2U}.$$

Ferner ist offenbar

$$Y^2=(x_1-\frac{a\cos U}{\sqrt{\cos 2U}})^2+(y_1-\frac{b\sin U}{\sqrt{\cos 2U}})^2;$$

aber nach dem Vorhergehenden:

$$x_1-\frac{a\cos U}{\sqrt{\cos 2U}}=a\frac{\cos u\cos(u+U)-\cos 2u\cos U}{\cos 2u\sqrt{\cos 2U}},$$

$$y_1-\frac{b\sin U}{\sqrt{\cos 2U}}=b\frac{\sin u\cos(u+U)-\cos 2u\sin U}{\cos 2u\sqrt{\cos 2U}};$$

folglich, weil

$$\cos u\cos(u+U)-\cos 2u\cos U=\sin u\sin(u-U),$$

$$\sin u\cos(u+U)-\cos 2u\sin U=\cos u\sin(u-U)$$

ist:

$$x_1-\frac{a\cos U}{\sqrt{\cos 2U}}=a\frac{\sin u\sin(u-U)}{\cos 2u\sqrt{\cos 2U}},$$

$$y_1-\frac{b\sin U}{\sqrt{\cos 2U}}=b\frac{\cos u\sin(u-U)}{\cos 2u\sqrt{\cos 2U}};$$

also:

$$Y^2=\frac{(a^2\sin u^2+b^2\cos u^2)\sin(u-U)^2}{\cos 2u^2\cos 2U}.$$

Nach §. 18. ist aber

$$A^2=\frac{a^2\cos u^2+b^2\sin u^2}{\cos 2u},$$

$$B^2=\frac{a^2\sin u^2+b^2\cos u^2}{\cos 2u};$$

also ist:

$$X^2=A^2\frac{\cos(u+U)^2}{\cos 2u\cos 2U},\quad Y^2=B^2\frac{\sin(u-U)^2}{\cos 2u\cos 2U};$$

folglich:

$$\left(\frac{X}{A}\right)^2-\left(\frac{Y}{B}\right)^2=\frac{\cos(u+U)^2-\sin(u-U)^2}{\cos 2u\cos 2U}.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
&\cos(u+U)^2-\sin(u-U)^2\\
&=\cos u^2\cos U^2+\sin u^2\sin U^2-2\sin u\cos u\sin U\cos U\\
&-\sin u^2\cos U^2-\cos u^2\sin U^2+2\sin u\cos u\sin U\cos U\\
&=(\cos u^2-\sin u^2)\cos U^2-(\cos u^2-\sin u^2)\sin U^2\\
&=(\cos u^2-\sin u^2)(\cos U^2-\sin U^2)=\cos 2u\cos 2U,
\end{aligned}$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\left(\frac{X}{A}\right)^2-\left(\frac{Y}{B}\right)^2=1,$$

welches die bekannte Gleichung der Hyperbel in Bezug auf zwei ihrer conjugirten Durchmesser ist.

§. 21.

Durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der positiven und der negativen Hyperbel wollen wir jetzt eine beliebige Gerade legen, und wollen den 180° nicht übersteigenden Winkel, unter welchem der auf der positiven Seite der Axe der x liegende Theil dieser Geraden gegen den positiven Theil der Axe der x geneigt ist, durch φ bezeichnen; dann ist

$$y = x \operatorname{tang} \varphi$$

die Gleichung dieser Geraden.

Bezeichnen wir nun die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der positiven Hyperbel durch x, y selbst, so haben wir zur Bestimmung dieser Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$y = x \operatorname{tang} \varphi, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1;$$

aus denen man leicht mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$x = \pm \frac{ab \cos \varphi}{\sqrt{b^2 \cos \varphi^2 - a^2 \sin \varphi^2}},$$

$$y = \pm \frac{ab \sin \varphi}{\sqrt{b^2 \cos \varphi^2 - a^2 \sin \varphi^2}}$$

erhält. Diese Coordinaten sind nur so lange endlich und reell, so lange

$$b^2 \cos \varphi^2 - a^2 \sin \varphi^2 > 0, \quad \operatorname{tang} \varphi^2 < \frac{b^2}{a^2}$$

ist. Für

$$b^2 \cos \varphi^2 - a^2 \sin \varphi^2 = 0, \quad \operatorname{tang} \varphi^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

werden die obigen Coordinaten unendlich; für

$$b^2 \cos \varphi^2 - a^2 \sin \varphi^2 < 0, \quad \operatorname{tang} \varphi^2 > \frac{b^2}{a^2}$$

werden dieselben imaginär, und in keinem der beiden letzten Fälle wird also die positive Hyperbel von unserer geraden Linie geschnitten.

Bezeichnen wir durch x_1, y_1 die Coordinaten der Durchschnittspunkte unserer Geraden mit der negativen Hyperbel, so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$y_1 = x_1 \operatorname{tang} \varphi, \quad \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = -1;$$

aus denen man leicht mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$x_1=\pm\frac{ab\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin\varphi^2-b^2\cos\varphi^2}},$$
$$y_1=\pm\frac{ab\sin\varphi}{\sqrt{a^2\sin\varphi^2-b^2\cos\varphi^2}}$$

erhält. Diese Coordinaten sind nur so lange endlich und reell, so lange

$$b^2\cos\varphi^2-a^2\sin\varphi^2<0,\quad \operatorname{tang}\varphi^2>\frac{b^2}{a^2}$$

ist. Für

$$b^2\cos\varphi^2-a^2\sin\varphi^2=0,\quad \operatorname{tang}\varphi^2=\frac{b^2}{a^2}$$

werden die obigen Coordinaten unendlich; für

$$b^2\cos\varphi^2-a^2\sin\varphi^2>0,\quad \operatorname{tang}\varphi^2<\frac{b^2}{a^2}$$

werden dieselben imaginär, und in keinem der beiden letzten Fälle wird also die negative Hyperbel von unserer geraden Linie geschnitten.

Nehmen wir das Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich Folgendes:

Für

$$b^2\cos\varphi^2-a^2\sin\varphi^2>0,\quad \operatorname{tang}\varphi^2<\frac{b^2}{a^2}$$

wird von der durch die Gleichung

$$y=x\operatorname{tang}\varphi$$

charakterisirten Geraden die positive Hyperbel geschnitten, die negative Hyperbel nicht geschnitten.

Für

$$b^2\cos\varphi^2-a^2\sin\varphi^2=0,\quad \operatorname{tang}\varphi^2=\frac{b^2}{a^2}$$

wird von der durch die Gleichung

$$y=x\operatorname{tang}\varphi$$

charakterisirten Geraden weder die positive, noch die negative Hyperbel geschnitten.

Für

$$b^2\cos\varphi^2-a^2\sin\varphi^2<0,\quad \operatorname{tang}\varphi^2>\frac{b^2}{a^2}$$

wird von der durch die Gleichung

$$y = x \operatorname{tang} \varphi$$

charakterisirten Geraden die positive Hyperbel nicht geschnitten, die negative Hyperbel geschnitten.

Weil nun aus der Gleichung

$$\operatorname{tang} \varphi^2 = \frac{b^2}{a^2} \text{ sich } \operatorname{tang} \varphi = \pm \frac{b}{a}$$

ergiebt, so sieht man aus dem Vorhergehenden, dass durch die Gleichung

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

zwei durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der beiden Hyperbeln gehende gerade Linien charakterisirt werden, von denen weder die positive, noch die negative Hyperbel geschnitten wird; von jeder anderen durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der beiden Hyperbeln gehenden geraden Linie wird dagegen entweder die positive oder die negative Hyperbel geschnitten.

Um die Natur der beiden durch die Gleichung

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

charakterisirten Geraden etwas näher kennen zu lernen, wollen wir zuerst die beiden Hyperbeln etwas genauer untersuchen. Dass diese beiden Hyperbeln sich nicht schneiden können, ist klar, weil es sonst zwei den beiden Gleichungen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = +1, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = -1$$

zugleich genügende Werthe von x, y geben müsste, was offenbar nicht möglich ist. Nun wollen wir uns aber einmal eine beliebige positive *) Abscisse x denken, und die derselben entsprechenden positiven **) Ordinaten der positiven und negativen Hyperbel durch y und y' bezeichnen. Dann ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = +1, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = -1;$$

also durch Subtraction:

$$\left(\frac{y'}{b}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{y'^2 - y^2}{b^2} = \frac{(y'-y)(y'+y)}{b^2} = 2,$$

*) Was hier hinreicht.

**) Was hier gleichfalls genügt.

folglich

$$y'-y=\frac{2b^2}{y'+y}.$$

Weil nun wegen der Gleichungen

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},\quad y'=\frac{b}{a}\sqrt{x^2+a^2}$$

die Ordinaten y und y' offenbar in's Unendliche wachsen, wenn x in's Unendliche wächst, so nimmt der absolute Werth von $y'-y$ offenbar in's Unendliche ab, wenn x in's Unendliche wächst, und man sieht also hieraus, dass die Schenkel der positiven und negativen Hyperbel, wenn man sie verlängert, sich offenbar immer mehr und mehr nähern, und einander auch beliebig nahe kommen können, wenn man sie nur weit genug verlängert, ohne sich jedoch jemals zu schneiden.

Wegen der oben bewiesenen Eigenschaft der beiden durch die Gleichung

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

charakterisirten Geraden, dass dieselben nämlich weder die positive, noch die negative Hyperbel schneiden, müssen nun diese beiden Geraden offenbar zwischen den beiden Hyperbeln liegen, und werden denselben daher auch, wenn man sie verlängert, immer näher und näher kommen, und beliebig nahe kommen können, wenn man sie nur weit genug verlängert, ohne jedoch die eine oder die andere Hyperbel jemals zu schneiden Wegen dieser Eigenschaft werden die beiden durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der beiden Hyperbeln gehenden, durch die Gleichung

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

charakterisirten Geraden die Asymptoten der beiden Hyperbeln genannt.

§. 22.

Wir wollen nun die positive Hyperbel noch quadriren. Bezeichnen wir für $AQ=x$, $PQ=y$ (Taf. XII. Fig. 3.) den Flächeninhalt des hyperbolischen Stücks APQ durch F, so ist

$$F=\int_a^x y\partial x.$$

Weil nun

$$x=\frac{a\cos u}{\sqrt{\cos 2u}},\quad y=\frac{b\sin u}{\sqrt{\cos 2u}}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$\frac{\partial x}{a}=\frac{\sin 2u\cos u-\cos 2u\sin u}{\cos 2u\sqrt{\cos 2u}}\partial u,$$

also

$$\partial x=a\frac{\sin u}{\cos 2u\sqrt{\cos 2u}}\partial u,$$

und folglich:

$$y\partial x=ab\left(\frac{\sin u}{\cos 2u}\right)^2\partial u,$$

also nach dem Obigen offenbar:

$$F=ab\int_0^u\left(\frac{\sin u}{\cos 2u}\right)^2\partial u.$$

Weil

$$\left(\frac{\sin u}{\cos 2u}\right)^2=\frac{1-\cos 2u}{2\cos 2u^2}$$

ist, so ist, wenn $2u=v$ gesetzt wird:

$$\left(\frac{\sin u}{\cos 2u}\right)^2\partial u=\frac{1-\cos v}{4\cos v^2}\partial v=\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\cos v^2}-\frac{\partial v}{\cos v}\right),$$

also

$$\int\left(\frac{\sin u}{\cos 2u}\right)^2\partial u=\tfrac{1}{4}\left\{\int\frac{\partial v}{\cos v^2}-\int\frac{\partial v}{\cos v}\right\}.$$

Bekanntlich ist aber

$$\int\frac{\partial v}{\cos v^2}=\operatorname{tang} v,\quad \int\frac{\partial v}{\cos v}=l\cot(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}v);$$

also:

$$\int\left(\frac{\sin u}{\cos 2u}\right)^2\partial u=\tfrac{1}{4}\{\operatorname{tang} v-l\cot(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}v)\}=\tfrac{1}{4}\{\operatorname{tang} 2u-l\cot(\tfrac{1}{4}\pi-u)\},$$

und folglich auch:

$$\int_0^u\left(\frac{\sin u}{\cos 2u}\right)^2\partial u=\tfrac{1}{4}\{\operatorname{tang} 2u-l\cot(\tfrac{1}{4}\pi-u)\},$$

also nach dem Obigen:

$$F=\tfrac{1}{4}ab\{\operatorname{tang} 2u-l\cot(\tfrac{1}{4}\pi-u)\}.$$

XXX.

Untersuchung der Fehler, welche aus einer nicht centrischen Aufstellung des Messtisches oder eines Winkelmessers entstehen.

Von

Herrn Professor Dr. *J. Lemoch*
an der Universität zu Lemberg.

Dass viele Praktiker auf die genaue Aufstellung des Messtisches nicht viel halten, von der Lothgabel entweder gar keinen oder höchstens in dem Falle einen Gebrauch machen, wenn sie auf grosse Distanzen zu visiren haben, dürfte als eine bekannte Thatsache vorausgesetzt werden.

Diese unrichtige Ansicht ist selbst in einigen Lehrbüchern über praktische Geometrie ausgesprochen, und ihr Ursprung dürfte in der Annahme zu suchen sein, dass die 10 bis 12 Zoll, um welche die unrichtige Aufstellung ohne Beihülfe einer Lothgabel von der wahren differirt, nur in dem Aufnahmsmassstabe auf das Tischblatt übergehe, somit gar nicht merklich sei. Diese Worte bekommt man sehr häufig zur Antwort, wenn man einen solchen Praktiker auf die unrichtige Aufstellung aufmerksam macht.

Ich habe nun diesen an sich ganz unscheinbaren, aber für die Praxis höchst wichtigen Gegenstand (die Aufstellung des Messtisches nämlich) einer allseitigen Untersuchung unterworfen und manche Resultate erhalten, welche die ausübenden Geometer interessiren dürften.

§. 1.

Wenn der Mittelpunkt eines Limbus genau vertikal über den

Scheitel des zu messenden Winkels gestellt ist, so ist das Instrument centrisch, findet das Gegentheil statt, so ist dasselbe excentrisch aufgestellt.

Ist (Taf. XIII. Fig. 1.) C der Scheitel des zu messenden Winkels ACB, das Instrument dagegen in O aufgestellt, daher statt ACB der Winkel AOB gemessen worden; und werden beide für gleich gehalten, so begeht man einen Fehler, dessen Grösse und Einfluss der Inhalt nachfolgender Untersuchung ist, wobei wir vorerst den in der Figur angenommenen Standpunkt im Auge behalten und CO mit wenigen Ausnahmen klein annehmen.

Setzen wir $AC=a$, $BC=b$, $AOB=\beta$, $CO=E$, $AOC=\gamma$ als gegeben voraus, den gesuchten Winkel $ACB=\alpha$, den Fehler $=x$, so ist offenbar

$$\alpha-\beta=x. \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

Die Grösse E nennt man die Excentricität der Aufstellung, γ den Direktionswinkel und x die Reduktion auf das Centrum; γ wird stets von der Excentricität nach der rechten Seite (von O gegen C gesehen) bis zu dem linken Schenkel des gemessenen Winkels gerechnet.

Aus dem Dreiecke AOC findet man $\sin A = E\frac{\sin\gamma}{a}$; da aber dieser Winkel in den meisten Fällen sehr klein ist, so kann man mit hinreichender Schärfe $A=E\frac{\sin\gamma}{a}$ setzen.

In dem Dreiecke BOC ist aus dem eben angeführten Grunde $B=E\frac{\sin(\beta+\gamma)}{b}$. Wegen der Gleichheit der Winkel AMC und BMO ist $\alpha+A=\beta+B$, daher $\alpha-\beta=B-A$, somit der gesuchte Unterschied

$$x=\alpha-\beta=B-A. \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

Werden für A und B die oben gefundenen Werthe substituirt und x in Sekunden ausgedrückt, so ist

$$x''=\frac{E}{\sin 1''}\left\{\frac{\sin(\beta+\gamma)}{b}-\frac{\sin\gamma}{a}\right\}. \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar:

1) dass der Fehler Null werden kann, wenn entweder E oder $\frac{\sin(\beta+\gamma)}{b}-\frac{\sin\gamma}{a}$, somit $B-A$ Null wird, und dieser letztere Fall

tritt dann ein, wenn der Standpunkt O in der Peripherie des durch die Punkte A, B, C bestimmten Kreises liegt, dann sind A und B Peripheriewinkel auf der Sehne OC, somit einander gleich. Der Abstand E hat in diesem Falle auf die Grösse des Fehlers keinen Einfluss.

2) Der Fehler wird desto kleiner, je kleiner E oder je weiter die beiden anvisirten Signale sind, weil ein gleichzeitiges Wachsen der a und b eine Abnahme in A und B bei übrigens gleichen Umständen zur Folge hat. Bei hinreichend grossen a und b werden die Winkel nahe gleich Null, somit hat ihre Summe und ihr Unterschied Null zur Grenze.

Diese Abnahme findet desto rascher statt, je mehr die Werthe a und b einander gleich sind; denn unter der Annahme $a=b$ ist

$$x = \frac{E}{\sin 1''}\left\{\frac{\sin(\beta+\gamma)-\sin\gamma}{a}\right\},$$

daher, weil β und γ unveränderlich vorausgesetzt werden, der Zähler konstant, während nach dem Gesagten der Nenner wachsend gedacht wird; x wird somit schneller abnehmen als wenn auch im Zähler zunehmende Grössen als Faktoren vorkommen, was in dem Falle geschieht, als a von b verschieden gedacht und die Brüche in 3) auf einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht sind. Wir wollen das Gesagte durch einige Beispiele erläutern.

Erstes Beispiel. Es sei $a=500^0$, $b=10^0$, $E=\frac{1}{12}$ Klafter, $\beta=73^0\,29'$, $\gamma=30^0\,16'$; mit diesen Daten findet man:

$$x=27'\,32\cdot3''.$$

Diese Werthe von a und b sind wohl ungewöhnlich, aber nicht unmöglich, und können beim Messtische in dem Falle leicht eintreffen, wenn man im Punkte C steht, den Tisch nach A orientirt und B rayonirt hat; trägt man noch — wie es üblich ist — diese kurze Distanz auf den Rayon auf, so ist B um $27'\,32''$ fehlerhaft bestimmt. Ob dieser Fehler viel oder wenig beträgt, werden wir später untersuchen.

Lassen wir $x=10''$, β, γ, a und b die obigen Werthe bedeuten, so finden wir aus 3) $E=0\cdot04$ Zoll, d. h. der Limbus müsste bis auf 0·04 Zoll centrisch gestellt sein, wenn der Unterschied zwischen dem gemessenen und gesuchten Winkel nur $10''$ betragen sollte. Eine so genaue Einstellung ist kaum zu erreichen.

Wird $a=b=500$ Klafter angenommen, die Werthe der übrigen Grössen beibehalten, so ist $x=16''$.

Zweites Beispiel. Wenn beide Signale gleich weit entfernt sind, wie gross müsste diese Entfernung sein, damit bei den Werthen $E=\frac{1}{12}$, $\beta=73^\circ\,29'$, $\gamma=30^\circ\,16'$ der Fehler nur $30''$ betrage.

Mit diesen Daten findet man $a=267\cdot7$ Wiener Klafter; da nun der Messtisch mit Leichtigkeit bis auf 6 Zoll centrisch gestellt werden kann, so sieht man aus diesem Beispiele, dass eine Excentricität von 6 Zoll bei obiger Entfernung der Signale keinen merklichen Fehler verursacht. Bei der graphischen Triangulirung einer Quadratmeile oder überhaupt in solchen Fällen, wo man es mit grösseren Distanzen zu thun hat, kann man also verhältnissmässig eine grössere Excentricität zulassen, als bei der Detailaufnahme.

Drittes Beispiel. Ist $\beta=60^\circ$, $\gamma=90^\circ$, $a=800^\circ$, $b=400^\circ$, $E=4$ Klafter, so ist die Reduktion auf das Centrum $=-15'\,28''\,2$.

§. 2.

Wir haben bisher die Umstände erörtert, unter welchen der Fehler entweder Null oder doch sehr klein ausfällt, suchen wir nun die Fälle des Maximum auf.

Hinsichtlich der Grössen a und b wird x ein Grösstes, wenn eine derselben Null wird; da diess in der Praxis jedoch nicht vorkommen kann, so folgt nur so viel daraus, dass der Fehler desto grösser wird, je grösser der Unterschied in den Entfernungen der anvisirten Signale ist.

Zur Verminderung dieses Fehlers ergiebt sich hieraus für die Praxis die Regel, die Signale wo möglich der Art zu stellen, dass je drei ein gleichseitiges Dreieck bilden und von einem Standpunkte nur die Winkel zwischen den gleichweit entfernten Signalen zu messen.

Die Grösse x hängt ferner von den Winkeln β und γ ab; lassen wir nun E, a, b konstant sein und suchen wir das Maximum, insoferne es von β und γ abhängt, so finden wir:

$$\frac{dx}{d\beta}=\frac{E\cos(\beta+\gamma)}{b}=0,$$

somit $\cos(\beta+\gamma)=0$, daher ist $\beta+\gamma=90^\circ$ oder $\beta+\gamma=270^\circ$; ferner ist

$$\frac{dx}{d\gamma}=\frac{E}{\sin 1''}\left\{\frac{\cos(\beta+\gamma)}{b}-\frac{\cos\gamma}{a}\right\}=0, \quad \ldots \quad 4)$$

also

$$\frac{\cos(\beta+\gamma)}{b}-\frac{\cos\gamma}{a}=0,$$

und weil nach dem Vorhergehenden $\cos(\beta+\gamma)=0$ ist, so folgt auch $\cos\gamma=0$ und $\gamma=90^0$ oder $\gamma=270^0$.

Aus der Kombination der Werthe γ und β ergeben sich nur zwei unterschiedliche Fälle, bei welchen x ein Grösstes wird, nämlich $\gamma=90^0$ und $\beta=0$ oder $\gamma=90^0$ und $\beta=180^0$, also bei der Messung sehr spitzer oder sehr stumpfer Winkel.

Die Formel 3) geht über in

$$x''=\frac{E(a-b)}{ab\sin 1''} \text{ oder } x''=-\frac{E(a+b)}{ab\sin 1''}, \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

jenachdem $\beta=0$ oder $\beta=180^0$ angenommen worden ist.

Lassen wir hier $E=6$ Zoll, $a=400$, $b=50$ Klafter bedeuten, so folgt aus der ersten Gleichung $x=5'\ 1''$, aus der zweiten $x=-6'\ 26''\ 8$.

Wird aber in 3) $\beta=170^0$, $\gamma=90^0$ angenommen, die übrigen Angaben beibehalten, so findet man $x=-6'\ 21''\ 5$, also nur um $5''\ 3$ weniger. Wenn nun die beiden Signale gleich weit entfernt sind, so wird bei einer Entfernung von 1368·6 Klaftern eine excentrische Aufstellung von 6 Zoll nur einen Fehler von $10''$ verursachen, und da diess der ungünstigste Fall ist, so wird in jedem andern der Fehler weniger betragen.

Dass aber in der Praxis Fälle vorkommen, wo das eine oder das andere Maximum streng genommen eintreten kann, ist aus den Figuren 2. und 3. (Taf. XIII.) ersichtlich. Ist nämlich CD (Fig. 2.) die gemeinschaftliche Basis der Dreiecke CAD und CBD, hat man das Instrument dagegen in O gestellt, so kann es leicht geschehen, dass die Signale A und B mit O in einer geraden Linie liegen, daher $AOB=0$ wird; wäre aber das Instrument in C centrisch gestellt, so hätte man ACB gemessen.

Bei den obigen Angaben begeht man wegen der excentrischen Aufstellung von 6 Zoll einen Fehler von $5'$.

Beim Messtische kommt dieser Fall, dass mehrere Visuren nahe zusammenfallen, sehr häufig vor; da kann also das Maximum des Fehlers, wenn nämlich noch $\gamma=90^0$ wird, leicht eintreten. Wichtig für den Praktiker ist noch, auf den Winkel CDO aufmerksam zu machen. Nehmen wir $CD=80$ Klafter, $OC=6$ Zoll, $COD=90^0$, so ist $CDO=3'\ 34''\ 8$. Hat man also bei einer

Messung mit dem Messtische diesen, statt scharf über C, über O gestellt, und von O nach D orientirt, so ist die Orientirung bei diesen Umständen um 3′ 35″ fehlerhaft.

Daraus wird die sogenannte Schwenkung erklärlich; und dass dieser Fehler die nachtheiligsten Folgen nach sich zieht, ist jedem Praktiker bekannt. Man muss also bei der Aufstellung und Orientirung des Messtisches nicht allein auf die Arbeit auf demselben, sondern auch unter demselben genau nachsehen, und wie dieses Beispiel zeigt, kann eine Excentricität von 6 Zoll viel zu gross sein. Diess ist der schlagendste Beweis, wie nothwendig eine Lothgabel ist.

Das zweite Maximum kann ganz streng eintreten, wenn innerhalb eines Polygons ein Punkt angenommen und von diesem die Winkel gemessen werden, welche die Ecken desselben in dem angenommenen Punkte als Scheitel betrachtet bilden.

Ist C (Taf. XIII. Fig. 3) der gewählte Punkt, wurde aber das Instrument über O centrisch gestellt, so kann der Fall leicht eintreten, dass AOB eine gerade Linie, somit $\beta = 180^0$ ist; fällt noch die Excentricität senkrecht auf diese Linie, so ist unter diesen Umständen der Unterschied zwischen dem wahren und gemessenen Winkel schon bedeutend und beträgt, wenn $a = 400$, $b = 50$, $E = 6''$ angenommen wird, $-6' \, 26'' \, 8$.

Wenn man nun C und B auf irgend eine Art auf dem Messtische gut bestimmt, diesen sodann statt in C über O centrisch gestellt und nach B orientirt hätte, so ist die Orientirung um 5′ 43″ 8 fehlerhaft, so viel beträgt nämlich der Winkel CBO.

Wird der Standpunkt des Instrumentes in der Mitte der obigen 450 Klafter langen Linie, somit $a = b = 225$ angenommen, $E = 6$ Zoll, $\gamma = 90^0$, $\beta = 180^0$ beibehalten, so ist $x = 2' \, 32'' \, 8$, also bedeutend kleiner. Da nun bei jeder Messung der Winkel aus einem Punkte innerhalb des Polygons das Maximum des Fehlers eintreten kann, so sehen wir an diesem Beispiele, dass der Fehler verkleinert wird, so bald das Instrument von den Ecken gleich weit absteht, und da die Grösse γ in der Regel unbekannt ist, so ist es räthlich, das Winkelinstrument wo möglich von allen Ecken des Polygons gleich weit zu stellen.

Auch in dem Falle, als

$$\frac{\sin(\beta + \gamma)}{b} - \frac{\sin \gamma}{a} = 0,$$

also x Null wird, kann $\gamma \gtreqless 90^0$ werden, je nachdem der Mittelpunkt des um das Dreieck beschriebenen Kreises auf der rechten Seite des linken Schenkels, in diesem selbst oder auf der linken Seite desselben liegt; der Winkel γ wird ein rechter, wenn $b = a \cos\beta$ ist.

§. 3.

Untersuchen wir nun den Einfluss, welchen eine Aenderung des γ allein auf die Grösse x ausübt.

Der Winkel γ kann alle zwischen 0 und 360° liegenden Werthe haben und ist

1) Null, wenn der Standpunkt in der Verlängerung des Schenkels AC, also in CA' liegt (Taf. XIII. Fig. 1.).

2) Liegt er innerhalb des Winkels $A'CB$, so ist $\beta + \gamma < 180°$.

3) Kommt der Punkt O in den Schenkel BC selbst, so ist $\beta + \gamma = 180°$.

4) Zwischen ACB ist $\beta + \gamma > 180°$.

5) Ist der Standpunkt in der AC, so ist $\gamma = 180°$.

6) Innerhalb des Winkels $B'CA$ ist $\gamma + \beta > 180°$ aber $< 360°$.

7) Fällt der Standpunkt in die Verlängerung des Schenkels BC, so ist $\beta + \gamma = 360°$.

8) Innerhalb des Winkels $B'CA'$ ist $\gamma + \beta > 360°$.

Im ersten und fünften Falle ist γ an sich, im dritten und siebenten durch die Messung des Winkels β bestimmt, also nur in vier Fällen noch unbestimmt. In jedem dieser Standpunkte kann man, wenn E, γ, β, a und b bekannt sind, die Reduktion auf das Centrum aus 3) berechnen, sobald γ von der Excentricität nach der rechten Seite bis zu dem linken Schenkel jenes Winkels gerechnet wird, der eben zu messen ist.

Im vierten Standpunkte z. B. liegt der Winkel B auf der linken Seite des Schenkels BC, ist somit negativ, A bleibt positiv, daher aus 1) $x = -(B + A)$; aber in diesem Falle ist $\beta + \gamma > 180°$, γ kleiner als 180° (diesen Werth erhält es erst beim ferneren Wachsen), in der erwähnten Gleichung sind somit beide Glieder negativ zu nehmen, und sie giebt ein richtiges Resultat.

Wir wollen nun an einem Beispiele die Wirkung ersichtlich machen, welche eine Aenderung des γ allein hervorbringt. Man nehme den zu messenden Winkel $\alpha = 60°$, $E = \frac{1}{15}$, $\gamma = 80$, $b = 300$ Klafter an; im zweiten Falle $\gamma = 85°$, im sechsten $\gamma = 275°$, im vierten halbirt die Excentricität, im achten ihre Verlängerung den Winkel α; mit diesen Daten findet man die Reduktion auf das Centrum:

beim	ersten	Standpunkte	$+49''6$,
„	zweiten	„	$-3'\ 1''2$,
„	dritten	„	$-3'\ 6''1$,
„	vierten	„	$-2'\ 16''1$,
„	fünften	„	$-49''6$,
„	sechsten	„	$+3'\ 10''$,
„	siebenten	„	$+3'\ 6''1$,
„	achten	„	$+2'\ 16''1$.

Diese bedeutenden Unterschiede in den Resultaten veranlassen uns zu der Untersuchung, welcher Werth γ bei einem und demselben Winkel β die Reduktion zu einem Maximum macht.

Zu diesem Zwecke suchen wir aus 4) den Werth γ, und finden

$$\tang \gamma = \frac{a \cos \beta - b}{a \sin \beta}, \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

ein Ausdruck, der sehr leicht zu konstruiren ist.

Ist $\tang \gamma = 0$, so tritt das Maximum im ersten und fünften der oben angeführten Standpunkte ein; ist $\tang \gamma$ positiv, so wird x sowohl für γ, als auch $180^0 + \gamma$ sammt im zweiten und sechsten Standpunkte ein Grösstes; ist endlich $\tang \gamma$ negativ, so kann $\gamma > 90$ und auch $\gamma > 270^0$ sein; die Maxima hängen hier noch von den Werthen β ab und können nach Umständen beim zweiten, dritten, vierten, sechsten, siebenten und achten Standpunkte eintreten.

Lassen wir $\beta = 60^0$, $a = 80$, $b = 300$ Klafter bedeuten, so ist $\gamma = 104^0\ 55'\ 15''$, und die Reduktion auf das Centrum bei 6 Zoll Excentricität $-5'\ 56''\ 7$. Sind also die Schenkel eines auf dem Messtische gegebenen Winkels bedeutend ungleich, und sieht man, dass die Excentricität des im Scheitel dieses Winkels aufzustellenden Tisches in die Richtung des längeren Schenkels fällt, so machen uns die vorhergehenden Beispiele aufmerksam, die Aufstellung ja zu ändern, denn dann nähert sich die Reduktion ihrem Maximum; fällt jedoch die Excentricität in die Richtung des kürzeren Schenkels, und ist sie nicht über 6 Zoll, so kann die Stellung beibehalten werden.

Die Aufsuchung des Werthes β, welcher bei einem gegebenen γ die Reduktion zu einem Maximum macht, hat für die Praxis kein Interesse.

Bisher haben wir die Untersuchung bloss auf einen Winkel beschränkt, es bleibt noch der Einfluss nachzuweisen, welchen eine excentrische Aufstellung auf alle aus einem Standpunkte gemessenen Winkel ausübt.

Wir nehmen an, dass aus einem Standpunkte die in den nachstehenden Rubriken enthaltenen Winkel gemessen worden sind, dass die Excentricität 6 Zoll, der Direktionswinkel mit dem ersten rechts liegenden Schenkel $30^0\ 22'\ 35''$ betragen haben. Für die folgenden Winkel ist γ durch den eben gemessenen und den ersten Direktionswinkel bestimmt.

Länge des linken	Länge des rechten	Direktionswinkel γ	Der gemessene Winkel β	Reduktion auf das Centrum	Der richtige Winkel α
Schenkels in Klftrn.					
80	120	$30^0\ 22'\ 35''$	$59^0\ 37'\ 25''$	$+34''6$	$59^0\ 37'\ 59''6$
120	158	9 0 0	72 19 15	$-1'\ 50''2$	72 17 24·8
158	112	162 19 15	47 41 55	$-1'\ 49''8$	47 40 5″2
112	148	210 1 1	63 47 25	$-\ 39''1$	63 46 45·9
148	90	273 48 35	58 37 40	$+\ 27''5$	58 38 7·5
90	80	332 26 15	57 56 20	$+3'\ 17''0$	57 59 37·0

Nimmt man nun statt α den gemessenen Winkel in die Rechnung, so ist jeder mehr oder weniger fehlerhaft, und weil die Summe α als β 360^0 beträgt, so ist man gar nicht veranlasst, einen Fehler in der Messung zu vermuthen und geht mit dem Instrumente ganz beruhigt vom Standpunkte. Die auffallende Grösse der letzten Reduktion erklärt sich durch den Umstand, dass beide Schenkel ziemlich kurz und in der Gleichung 3) die Summe beider Glieder zu nehmen ist.

Auch dürfte zum Theil hier der Grund liegen, warum nicht immer alle Punkte, die unter denselben Umständen bestimmt worden sind, gleich gut stimmen.

§. 4.

Es bleibt noch die Frage zu beantworten, welchen Einfluss der, wegen der excentrischen Aufstellung begangene Fehler auf die diesem Winkel gegenüberliegende Seite oder überhaupt auf das Resultat der Messung hat. Dass der Einfluss zwar bedeutend, doch nicht so bedeutend ausfallen kann, als man nach der Grösse der Reduktionswinkel erwarten dürfte, folgt aus dem Vorhergehenden von selbst; denn sind die Schenkel des zu messenden Winkels lang, so ist der Fehler bei einer halbwegs aufmerksamen Aufstellung unbedeutend, und in dem Falle, wo eine kleine Excentricität schon einen bedeutenden Unterschied verursacht, ist wieder der eine Schenkel kurz; berechnet man also mit den zwei Seiten und dem unrichtigen Winkel die gegenüberliegende Seite, so wird das Resultat mit wenigen Ausnahmen von der Wahrheit wenig abweichen.

Diese Behauptung nachzuweisen sei in einem Dreiecke $AC=a$, $BC=b$; der richtige Winkel $ACB=\alpha$, daher

$$AB=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha};$$

wegen der nicht scharfen Aufstellung habe man durch die Messung $\alpha-x$ erhalten, so ist die berechnete Länge

$$\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\alpha-x)},$$

und wenn der Unterschied beider mit z bezeichnet wird:

$$z=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}-\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\alpha-x)}.$$

Da wir nur eine kleine Excentricität voraussetzen, so ist x und als Folge dessen auch z klein; wir können somit mit hinreichender Schärfe $\cos x=1$, $\sin x=x$ setzen; nach der Substitution und einer einfachen Reduktion, bei welcher die zweite Potenz von z vernachlässiget wurde, findet man

$$z=\frac{ab\sin\alpha x}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}},$$

und wenn x in Sekunden ausgedrückt wird:

$$z=\frac{ab\sin\alpha x''\sin 1''}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}} \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

Man sieht aus diesem Ausdrucke, dass z nicht bedeutend werden kann, den Fall ausgenommen, wenn das Instrument bei kurzen Distanzen sehr excentrisch gestellt wäre; doch diese Voraussetzung schliessen wir bei der ganzen Untersuchung aus.

Erstes Beispiel. Es sei $\alpha = 90^0$, $\gamma = 0$, $a = 230$, $b = 180$, $E = \frac{1}{12}$ Klafter, so findet man $x = 96''5$, $z = 0{\cdot}066$; die wahre Länge der dem Winkel α gegenüberliegenden Seite ist 292·06 Klftr.

Zweites Beispiel. Mit den Daten $a = 500$, $b = 10$, $E = \frac{1}{12}$ Klftr., $\beta = 73^0\,29'$ und $\gamma = 30^0\,16'$ haben wir §. 1. $x = 27'\,32''3$ gefunden, daher ist $\alpha = 73^0\,56'\,32''$ und $z = 0{\cdot}080$, die Länge der $AB = 497{\cdot}33$ Klafter.

Die Gleichung 7) wird in den Fällen, als die Reduktion auf das Centrum wegen β und γ ein Maximum erreicht, noch einfacher; denn ist $\beta = 0$ und $\gamma = 90^0$, so ist $\alpha = x$, und wenn $\beta = 180^0$, $\gamma = 90^0$ wird, ist $\alpha = 180^0 - x$; also in beiden Fällen $\sin\alpha = +\sin x$, dagegen $\cos\alpha = \pm\cos x$, jenachdem $\beta = 0$ oder $\beta = 180^0$ ist, und weil $\sin\alpha$ klein ist, so kann $\sin\alpha = x''\sin 1''$, $\cos\alpha = 1$ gesetzt werden; bei dieser Annahme geht die Gleichung 7) über in

$$z = \frac{ab(x''\sin 1'')^2}{a \mp b}.$$

Aus der Gleichung 5) folgt

$$\frac{ab}{a \mp b} = \pm \frac{E}{x''\sin 1''};$$

wird dieser Werth in die vorhergehende Gleichung substituirt, so ist:

$$z = Ex''\sin 1'', \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 8)$$

wobei bloss das Zeichen $+$ zu behalten ist, weil für $\beta = 180^0$ x an sich negativ ist.

Nach dieser Formel findet man für $\beta = 180^0$, $a = 400$, $b = 230$ Klafter, $E = \frac{1}{12}$ Klafter, $x = -1'\,57''7$, z hat erst in der fünften Dezimalstelle eine bedeutende Ziffer.

Wenn aber ein Punkt oder eine Linie aus einer Basis und den anliegenden Winkeln bestimmt wird, so kann sowohl in dem einen, als auch in dem andern Standpunkte wegen der excentrischen Aufstellung ein Fehler begangen werden und in diesem Falle ein bedeutender Unterschied in den Resultaten entstehen.

Nehmen wir in dem Vierecke (Taf. XIII. Fig. 4.) $AB = 80$ Klftr., die richtigen Winkel sind $CAD = 90^0$, $DAB = 30^0\,50'$, $ABC = 15^0\,30'$, $CBD = 89^0\,15'$; mit diesen Angaben findet man $AC = 30·963$, $AD = 110·540$, $BC = 99·488$, $BD = 58·587$, $CD = 114·694$ Klftr.

Dagegen habe sowohl in A als in B die excentrische Aufstellung 6″ betragen, in A sei der Winkel $\gamma = 105^0\ 58'\ 25''$, in $B = 133^0\ 41'\ 55''$, so sind die durch die Messung erhaltenen Winkel $CAD = 90^0\ 9'\ 37''$, $DAB = 30^0\ 51'\ 53''$, $ABC = 15^0\ 31'\ 7''$, $CBD = 89^0\ 20'\ 43''$. Die Resultate der Rechnung mit diesen Winkeln sind $AD = 110·769$, $AC = 31·158$, $BC = 99·796$, $BD = 58·793$, $CD = 115·142$. Wir sehen somit, dass hier durch eine kleine Excentricität die Länge der Linien bedeutend verfehlt wird.

Aber ausser der Länge kommt besonders beim Messtische die Lage einer Linie zu berücksichtigen; welchen Einfluss kann also eine excentrische Aufstellung von 6 Zoll auf die Lage der diesem Winkel gegenüber gelegenen Seite äussern? Zu dieser Untersuchung nehmen wir in Taf. XIII. Fig. 5. $CB = 50^0$, $CA = 400^0$, $CD = 80^0$, $CO = \frac{1}{12}$ Klafter, $\gamma = 94^0\ 52'$, $AOD = 20^0\ 15'$, $BOD = 28^0\ 15'$, CD als die Abscissenlinie, C als Anfangspunkt derselben an. Reducirt man die gemessenen Winkel auf das Centrum und berechnet die Coordinaten von A und B einmal mit den gemessenen, das andere Mal mit den richtigen Winkeln, so findet man:

im ersten Falle:		im zweiten Falle:	
Ordinate von B . . .	23·666	Ordinate von B . . .	23·718
Abscisse	44·044	Abscisse	44·016
Ordinate von A . . .	138·450	Ordinate von A . . .	138·130
Abscisse	375·280	Abscisse	375·400

Die Lage der Linie ist daher merklich unrichtig bestimmt, und zwar differirt der Winkel, welchen die Linie AB nach beiden Bestimmungen mit der Abscissenlinie macht, um 4 Minuten. Die excentrische Aufstellung hat daher auf die Bestimmung der Lage einer Linie einen eben so nachtheiligen Einfluss, als auf ihre Länge; diese ist im ersten Falle $350^0 695$, im zweiten $350^0 556$, somit auch merklich unrichtig.

§. 5.

Wird die Excentricität bedeutend gross, so bestimmt man ausser β noch γ und E und bringt die Reduktion in die Rechnung; es ist nun die Frage, welchen Einfluss hat eine fehlerhafte Bestimmung des Direktionswinkels auf das Resultat.

Es sei in einem gegebenen Standpunkte γ das wahre Maass des Winkels, man habe aber durch die Messung $\gamma+\Delta\gamma$ erhalten, somit um $\Delta\gamma$ gefehlt.

Wird nun $\gamma+\Delta\gamma$ in die Gleichung 3) substituirt und das Resultat mit x_1'' bezeichnet, so ist

$$x_1''=\frac{E}{\sin 1''}\left\{\frac{\sin(\beta+\gamma+\Delta\gamma)}{b}-\frac{\sin(\gamma+\Delta\gamma)}{a}\right\},$$

somit

$$x_1''=\frac{E}{\sin 1''}\left\{\frac{\sin(\beta+\gamma)\cos\Delta\gamma}{b}+\frac{\cos(\beta+\gamma)\sin\Delta\gamma}{b}-\frac{\sin\gamma\cos\Delta\gamma}{a}-\frac{\cos\gamma\sin\Delta\gamma}{a}\right\}.$$

Die Grösse $\Delta\gamma$ dürfte doch in jedem Falle so klein sein, dass wir $\sin\Delta\gamma=\Delta\gamma$, $\cos\Delta\gamma=1-\frac{1}{2}\Delta\gamma^2$ setzen können; bei dieser Annahme wird:

$$x_1''=\frac{E}{\sin 1''}\left\{\frac{\sin(\beta+\gamma)}{b}-\frac{\sin\gamma}{a}\right\}$$

$$+\frac{E\Delta\gamma}{\sin 1''}\left\{\frac{\cos(\beta+\gamma)}{b}-\frac{\cos\gamma}{a}\right\}-\frac{E\overline{\Delta\gamma}^2}{2\sin 1''}\left\{\frac{\sin(\beta+\gamma)}{b}-\frac{\sin\gamma}{a}\right\}.$$

In dieser Gleichung ist das erste Glied und der Faktor von $\frac{\overline{\Delta\gamma}^2}{2}$, im dritten Gliede die richtige Reduktion auf das Centrum, somit x'', wenn daher das erste Glied auf die andere Seite übertragen wird, so ist:

$$x_1''-x''=\frac{E\Delta\gamma}{\sin 1''}\left\{\frac{\cos(\beta+\gamma)}{b}-\frac{\cos\gamma}{a}\right\}-\frac{\overline{\Delta\gamma}^2 x''}{2}$$

Hier bedeutet $\Delta\gamma$ einen Bogen, wird dieser in Sekunden ausgedrückt mit $\Delta\gamma''$, der Fehler des Resultates $x_1''-x''$ mit y'' bezeichnet, so ist

$$y''=E\Delta\gamma''\left\{\frac{\cos(\beta+\gamma)}{b}-\frac{\cos\gamma}{a}\right\}-\frac{(\Delta\gamma''\sin 1'')^2}{2}x''. \qquad 9)$$

Da in dieser Gleichung der wahre Werth des γ, deshalb aber auch x'' unbekannt ist, so dient sie nur, den Fehler y unter bestimmten Annahmen zu schätzen, dabei kann in den meisten Fällen das letzte Glied vernachlässiget werden.

Die Gleichung 9) hat aber die merkwürdige Eigenschaft, dass bei den Werthen, welche x zu einem Maximum machen, gleichviel ob β und γ oder bloss γ allein veränderlich ist, das erste Glied

Null, somit y'' nur durch das zweite ganz unbedeutende Glied ausgedrückt, somit zu einem Maximum wird.

Als erstes Beispiel lassen wir $\beta = 60^0$, $a = 800$, $b = 4000$, $E = 4$ Klafter bedeuten, der richtige Werth des $\gamma = 20^0$, so ist $x = -12' \, 46''$. Wird aber angenommen, dass $\Delta\gamma$ um 2^0, also um 7200 Sekunden zu gross gemessen worden ist, so ist $y'' = 32'' \, 6$, somit im Verhältniss zu $\Delta\gamma$ unbedeutend.

Zweites Beispiel. Ist wieder $\beta = 60$, $a = 800$, $b = 4000$, $E = 4$ Klafter, $\gamma = 100^0 \, 53' \, 36''$, so ist $x = -15' \, 45''$ und $y = 0{\cdot}57$, so viel beträgt das zweite Glied der Gleichung 9), denn mit diesem Werthe γ wird x ein Maximum, y dagegen ein Minimum.

Der Umstand, dass ein Fehler in γ auf die Reduktion so geringen Einfluss hat, ist für die Praxis von Wichtigkeit, denn eine genaue Messung des γ ist in vielen Fällen schwierig, während E ziemlich leicht bestimmt werden kann.

Nach dieser Darstellung also hat selbst eine kleine Excentricität in jeder Hinsicht einen nachtheiligen Einfluss auf das Resultat der Messung, die fehlerhafte Orientirung des Messtisches jedoch, welche eine unausbleibliche Folge der excentrischen Aufstellung ist, halte ich für den grössten dieser Fehler.

Endlich wollen wir noch beifügen, dass die Reduktion auf das Centrum noch auf eine zweite Art bestimmt werden kann. Ist Taf. XIII. Fig. 6. ACB der zu messende Winkel, das Instrument dagegen in O gestellt, so ist wie bekannt $x = B - A$ die Reduktion. Fällt man von O auf die Schenkel AC und BC die Senkrechten Op und Oq, so ist

$$B = \frac{Oq}{OB}, \quad A = \frac{Op}{OB};$$

nun kann offenbar $OB = CB$, $OA = CA$ gesetzt werden; wird $Oq = c$, $Op = d$, $CA = a$, $CB = b$ gesetzt, und die Reduktion in Sekunden ausgedrückt mit x'' bezeichnet, so ist:

$$x'' = \frac{1}{\sin 1''} \left\{ \frac{c}{b} - \frac{d}{a} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 10)$$

In diesem Ausdrucke ist c, so auch d als positiv oder negativ zu betrachten, je nachdem die Senkrechte auf der rechten oder linken Seite des entsprechenden Schenkels liegt. Sind aber die Grössen c und d um Δc und Δd fehlerhaft bestimmt, so ist der Fehler in der Reduktion:

$$y'' = \frac{1}{\sin 1''} \left\{ \frac{\Delta c}{b} - \frac{\Delta d}{a} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 11)$$

XXXI.

Beitrag zur Theorie der umhüllten Curven.

Von
Herrn Doctor *Heilermann*
zu Trier.

---

§. 1.

Eines der wichtigsten Unterscheidungsmerkmale der alten und der neuern Geometrie besteht darin, dass jene nur den Punkt als Element benutzt, um alle räumlichen Gestalten zu erzeugen, dass aber diese sich der Geraden oder Ebene, jenachdem die geometrischen Gebilde in einer Ebene oder allgemein im Raume gedacht werden, in gleicher Weise bedient, wie des Punktes. Hiernach ist dann insbesondere eine Curve nicht bloss ein Ort für einen Punkt, sondern sie ist zugleich ein Ort für eine Gerade, welche die Curve in all ihren Lagen berührt, oder: eine Curve wird nicht bloss als von einem Punkte beschrieben betrachtet, sondern auch als von einer beweglichen Geraden umhüllt.

Für die gewöhnliche analytische Behandlung ist die Entwickelung der von Punkten beschriebenen Curven ungleich einfacher, als die der umhüllten; und ich glaube deshalb, dass die nachfolgenden Untersuchungen, in welchen ich auf elementar-analytischem Wege viele umhüllte Curven herleiten werde, theils wegen des Gegenstandes, theils wegen der Methode der Behandlung, von einigem Interesse sein werden.

Eine Gerade, welche eine Curve umhüllt, genügt in all ihren Lagen einer gewissen Bedingungsgleichung, welche eigentlich nichts als die Gleichung der umhüllten Curve in andern Zeichen ist;

wir wollen hier nun zunächst die Fälle betrachten, in welchen diese Bedingung sich bezieht auf die Abschnitte, welche durch die umhüllende Gerade auf zwei festen, sich schneidenden Geraden entstehen. Zwei solche Abschnitte bestimmen aber nicht bloss eine Gerade, sondern auch, wenn man sie als Coordinaten ansieht, einen Punkt, und jene Bedingungsgleichung stellt also zugleich eine Curve dar, für welche die festen Geraden die Coordinatenaxen und die von der umhüllenden Geraden auf denselben abgeschnittenen Stücke die laufenden Coordinaten sind. Diese Curve wollen wir im Folgenden die leitende Linie, und den Punkt, welcher durch eine Lage der beweglichen Geraden bestimmt wird, den zugehörigen leitenden Punkt nennen. Wenn also M ein Punkt einer leitenden Linie und $MP = x$ und $MQ = y$ seine Coordinaten sind, so suchen wir die Curve, welche von der Geraden PQ umhüllt wird.

§. 2.

Es sei (Taf. XIII. Fig. 7.) die leitende Linie eine Gerade

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

welche auf den Axen die Stücke $OA = a$ und $OB = b$ abscheidet.

Die zu den Punkten $M = (x, y)$ und $M_1 = (x_1, y_1)$ gehörigen Geraden PQ und P_1Q_1 sind

$$\frac{\xi}{x} + \frac{\eta}{y} = 1,$$

$$\frac{\xi}{x_1} + \frac{\eta}{y_1} = 1,$$

wenn wir mit ξ und η die laufenden Coordinaten der umhüllenden Geraden bezeichnen. Durch Auflösung dieser Gleichungen nach ξ und η erhält man:

$$\text{1)} \qquad \xi = \frac{y - y_1}{x_1 y - x y_1} \cdot x x_1 \quad \text{und} \quad \eta = \frac{x - x_1}{x y_1 - x_1 y} \cdot y y_1$$

als Coordinaten des Schnittpunktes der Geraden PQ und P_1Q_1. Weil die Coordinaten von M und M_1 der Gleichung der Leitenden genügen, so ist auch

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} = 1;$$

folglich

$$\frac{1}{a}=\frac{y-y_1}{x_1y-xy_1} \text{ und } \frac{1}{b}=\frac{x-x_1}{xy_1-x_1y};$$

und wenn die Werthe in 1) gesetzt werden, so entsteht

$$\xi=\frac{xx_1}{a} \text{ und } \eta=\frac{yy_1}{b}.$$

Lassen wir nun die Geraden PQ und P_1Q_1 zusammenfallen, d. h. setzen wir $x_1=x$ und $y_1=y$, so fällt auch ihr Schnittpunkt mit ihren Berührungspunkten zusammen, und es sind folglich die Coordinaten des Berührungspunktes, den wir mit p bezeichnen:

$$\xi=\frac{x^2}{a} \text{ und } \eta=\frac{y^2}{b}.$$

Hieraus folgt nun weiter:

$$\frac{x}{a}=\left(\frac{\xi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ und } \frac{y}{b}=\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

und schliesslich:

$$2)\qquad \left(\frac{\xi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\frac{1}{2}}=1$$

als Gleichung der umhüllten Curve. Diese ist bekanntlich eine Parabel, welche von den Axen OA und OB in den Punkten A und B berührt wird.

Für das Verhältniss $\frac{pP}{pQ}$ gibt es eine Reihe von andern Darstellungen, denn es ist, wie leicht zu sehen:

$$3)\qquad \frac{pP}{pQ}=\frac{x-\xi}{\xi}=\frac{\eta}{y-\eta}=\frac{a-x}{x}=\frac{y}{b-y}=\frac{y}{b}:\frac{x}{a}=\frac{\eta}{y}:\frac{\xi}{x}=\frac{MA}{MB},$$

und die letzte Darstellung insbesondere zeigt, dass die umhüllende PQ durch den Berührungspunkt p, und die Leitende AB durch den leitenden Punkt M nach demselben Verhältnisse getheilt werden.

Bezeichnen wir noch den Schnittpunkt dieser Linien mit q, so ist

$$4)\qquad \frac{qP}{pQ}=\frac{OB}{OA}\cdot\frac{PA}{QB}=\frac{y}{b}:\frac{x}{a}=\frac{MA}{MB}=\frac{pP}{pQ};$$

d. h. die umhüllende PQ wird durch ihren Berührungspunkt p und durch die Leitende AB harmonisch getheilt. Es sind also auch MQ, MP, Mp und Mq harmonische Strahlen, und weil Mq fest-liegt, MQ und MP immer zu OA und OB parallel bleiben, so bleibt auch Mp immer zu sich selbst parallel. Wenn dann $MA = MB$ wird, also $x=\frac{1}{2}a$, $y=\frac{1}{2}b$, $\xi=\frac{1}{2}x$ und $\eta=\frac{1}{2}y$, so ist Mp der Durchmesser der Parabel, welcher alle zu AB parallelen Sehnen halbirt, und geht zugleich durch O; da aber alle Durchmesser der Parabel parallel sind, so ist auch die Gerade Mp in jeder Lage ein Durchmesser und die von ihr halbirten Sehnen sind jedesmal der Geraden PQ parallel.

Die leitende Linie AB wird durch den Punkt q so getheilt, dass

5) $$\frac{Aq}{Bq}=\frac{OQ}{OP}\cdot\frac{AP}{BQ}=\left(\frac{MA}{MB}\right)^2 \text{ oder } Mq^2=Aq.Bq.$$

Wird die umhüllende Gerade PQ durch den Punkt $p_1=(\xi_1, \eta_1)$ nach dem constanten Verhältnisse $\frac{\alpha}{\beta}$ getheilt, so ist

$$\xi_1=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot x \text{ und } \eta_1=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot y,$$

also die von p_1 beschriebene Gerade

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\cdot\frac{\xi_1}{a}+\frac{\alpha+\beta}{\beta}\cdot\frac{\eta_1}{b}=1,$$

welche auf den Axen die Stücke

$$a_1=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot a \text{ und } b_1=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot b$$

abschneidet, so dass

6) $$\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}=1,$$

d. h. die vom Theilungspunkte p_1 beschriebene Gerade ist eine Lage der beweglichen Geraden PQ und deshalb auch eine Berührende der Parabel. Es wird folglich die Umhüllende PQ von einer festen Berührungslinie in allen ihren Lagen nach demselben Verhältnisse getheilt. Denken wir uns nun das Stück PQ innerlich und äusserlich nach allen möglichen Verhältnissen getheilt, so beschreiben die Theilpunkte eine Schaar Gerader, welche dieselbe Parabel umhüllen.

§. 3.

Es sei die leitende Linie die Parabel

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}}=1,$$

bezogen auf zwei feste Berührungslinien, als Coordinatenaxen.

Werden wieder, wie oben, die laufenden Coordinaten der Umhüllenden mit ξ und η bezeichnet, so erhalten wir für die Coordinaten des Schnittpunktes zweier Umhüllenden dieselben Ausdrücke wie unter 1). Dazu ergibt sich jetzt aus den Gleichungen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}}=1 \text{ und } \left(\frac{x_1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{y_1}{b}\right)^{\frac{1}{2}}=1:$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{y^{\frac{1}{2}}-y_1^{\frac{1}{2}}}{(x_1y)^{\frac{1}{2}}-(xy_1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{y-y_1}{x_1y-xy_1}\cdot\frac{(x_1y)^{\frac{1}{2}}+(xy_1)^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}+y_1^{\frac{1}{2}}}$$

und

$$\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{x-x_1}{xy_1-x_1y}\cdot\frac{(xy_1)^{\frac{1}{2}}+(x_1y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+x_1^{\frac{1}{2}}};$$

und wenn diese Gleichungen mit denen unter 1) verbunden werden, so entsteht:

$$\xi=\frac{y^{\frac{1}{2}}+y_1^{\frac{1}{2}}}{(x_1y)^{\frac{1}{2}}+(xy_1)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{xx_1}{a^{\frac{1}{2}}} \text{ und } \eta=\frac{x^{\frac{1}{2}}+x_1^{\frac{1}{2}}}{(xy_1)^{\frac{1}{2}}+(x_1y)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{yy_1}{b^{\frac{1}{2}}}.$$

Wenn wir auch hier die Umhüllenden, welche sich im Punkte $p=(\xi\eta)$ schneiden, zusammenfallen lassen, so erhalten wir den Berührungspunkt. Es sind also die Coordinaten des letztern

$$\xi=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \text{ und } \eta=\frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$$

und

$$7)\qquad \left(\frac{\xi}{a}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\frac{1}{3}}=1$$

die Gleichung der umhüllten Curve.

Wird durch den leitenden Punkt M eine Berührende UV (Taf. XIII. Fig. 8.) an die Parabel gelegt, so können wir für diese Lage des Punktes M die Gerade UV als Leitende ansehen, und folglich ist nach 3), 4) und 5)

$$8)\qquad \frac{Pp}{Qp}=\frac{Pq}{Qq}=\frac{UM}{VM}=\left(\frac{Uq}{Vq}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Es werde auch hier die umhüllende PQ durch den Punkt $p_1=(\xi_1\eta_1)$ nach dem constanten Verhältnisse $\frac{\alpha}{\beta}$ getheilt, so wird folglich

$$\xi_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot x \text{ und } \eta_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot y,$$

und der Punkt p_1 beschreibt die Parabel

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha} \cdot \frac{\xi_1}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \frac{\eta_1}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Zwei solche Parabeln

$$\left(\frac{\xi_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\eta_1}{b_1}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ und } \left(\frac{\xi_1}{a_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\eta_1}{b_2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

schneiden sich in Punkten, deren Coordinaten sind:

$$\xi_1^{\frac{1}{2}} = \frac{b_2^{\frac{1}{2}} - b_1^{\frac{1}{2}}}{(a_1 b_2)^{\frac{1}{2}} - (a_2 b_1)^{\frac{1}{2}}} \cdot (a_1 a_2)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_1 = \frac{a_2^{\frac{1}{2}} - a_1^{\frac{1}{2}}}{(a_2 b_1)^{\frac{1}{2}} - (a_1 b_2)^{\frac{1}{2}}} \cdot (b_1 b_2)^{\frac{1}{2}};$$

nun ist aber

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} = 1 \text{ und } \frac{a_2}{a} + \frac{b_2}{b} = 1,$$

folglich

$$\frac{1}{a} = \frac{b_2 - b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \text{ und } \frac{1}{b} = \frac{a_2 - a_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2};$$

und aus diesen in Verbindung mit den obigen Gleichungen ergibt sich:

$$\xi_1^{\frac{1}{2}} = \frac{(a_1 a_2)^{\frac{1}{2}}}{a} \cdot \frac{(a_1 b_2)^{\frac{1}{2}} + (a_2 b_1)^{\frac{1}{2}}}{b_2^{\frac{1}{2}} + b_1^{\frac{1}{2}}} \text{ und } \eta_1^{\frac{1}{2}} = \frac{(b_1 b_2)^{\frac{1}{2}}}{b} \cdot \frac{(a_2 b_1)^{\frac{1}{2}} + (a_1 b_2)^{\frac{1}{2}}}{a_2^{\frac{1}{2}} + a_1^{\frac{1}{2}}}.$$

Lassen wir nun die beiden Parabeln zusammenfallen, so erhalten wir den Punkt, in welchem sie von einer Curve, welche alle einhüllt, berührt werden. Die Coordinaten dieses Punktes sind also

$$\xi_1 = \frac{a_1^3}{a^2} \text{ und } \eta_1 = \frac{b_1^3}{b^2},$$

und weil

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} = 1,$$

so ist

$$\left(\frac{\xi_1}{a}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{\eta_1}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = 1$$

die Curve, welche alle jene Parabeln einhüllt, zugleich die von *PQ* umhüllte Curve 7).

§. 4.

Es sei die leitende Curve dargestellt durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m}{n}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=1.$$

Die beiden Geraden PQ und P_1Q_1, welche auf den Axen die Stücke x, y und x_1, y_1 abschneiden, schneiden sich auch hier in dem Punkte $(\xi\eta)$, dessen Coordinaten sind:

$$\xi=\frac{y-y_1}{x_1y-xy_1}\cdot xx_1 \quad \text{und} \quad \eta=\frac{x-x_1}{xy_1-x_1y}\cdot yy_1.$$

Weil x, y und x_1, y_1 Punkte der leitenden Curve darstellen, so ist auch:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}=\frac{y^{\frac{m}{n}}-y_1^{\frac{m}{n}}}{(x_1y)^{\frac{m}{n}}-(xy_1)^{\frac{m}{n}}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\frac{x^{\frac{m}{n}}-x_1^{\frac{m}{n}}}{(xy_1)^{\frac{m}{n}}-(x_1y)^{\frac{m}{n}}}.$$

Durch einige Umformungen erhält man hieraus:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}=\frac{y-y_1}{x_1y-xy_1}\cdot\frac{y^{m-1}+y^{m-2}y_1+y^{m-3}y_1^{2}+\ldots.}{(x_1y)^{m-1}+(x_1y)^{m-2}.(xy_1)+(x_1y)^{m-3}.(xy_1)^{2}+\ldots.}$$

$$\times\frac{(x_1^{m}y^{m})^{\frac{n-1}{n}}+(x_1^{m}y^{m})^{\frac{n-2}{n}}.(x^{m}y_1^{m})^{\frac{1}{n}}+(x_1^{m}y^{m})^{\frac{n-3}{n}}.(x^{m}y^{m})^{\frac{2}{n}}+\ldots.}{(y^{m})^{\frac{n-1}{n}}+(y^{m})^{\frac{n-2}{n}}.(y_1^{m})^{\frac{1}{n}}+(y^{m})^{\frac{n-3}{n}}.(y_1)^{\frac{2}{n}}+\ldots.}.$$

Wird der Werth von $\frac{y-y_1}{x_1y-xy_1}$ hieraus entnommen und in dem Ausdruck für ξ substituirt, und danach $x=x_1$ und $y=y_1$ gesetzt, so entsteht:

$$\xi=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-m}{n}}.x^{2}=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}.x^{\frac{m+n}{n}},$$

als Werth der Abscisse des Berührungspunktes der Umhüllenden *PQ*. Eben so erhält man:

$$\eta = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot y^{\frac{m+n}{n}},$$

als Werth der zugehörigen Ordinate. Aus beiden folgt dann zunächst:

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^{\frac{m}{m+n}} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m}{n}} \text{ und } \left(\frac{\eta}{b}\right)^{\frac{m}{m+n}} = \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{n}},$$

und weiter

$$8) \qquad \left(\frac{\xi}{a}\right)^{\frac{m}{m+n}} + \left(\frac{\eta}{b}\right)^{\frac{m}{m+n}} = 1,$$

als Gleichung der umhüllten Curve.

Wird die umhüllende Gerade PQ nach einem constanten Verhältnisse $\frac{\alpha}{\beta}$ durch den Punkt p_1 getheilt, so beschreibt dieser Punkt die Curve

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha} \cdot \frac{x}{a}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(\frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = 1;$$

durch Schlüsse, die den vorigen ähnlich sind, findet sich, dass die Schaar Curven, welche entsteht, wenn man dem Verhältnisse $\frac{\alpha}{\beta}$ alle möglichen Werthe beilegt, auch die Curve 8) umhüllen.

Wird durch den Punkt $M = (xy)$ an die leitende Curve eine Berührungslinie gelegt, welche die Axen in U und V und die Umhüllende PQ in q schneidet, so gelten auch hier, und zwar aus denselben Gründen, wie bei der Parabel, die Gleichungen:

$$\frac{Pp}{Qp} = \frac{Pq}{Qq} = \frac{UM}{VM} = \left(\frac{Uq}{Vq}\right)^{\frac{1}{2}};$$

ferner ist die Gleichung der Berührenden UV, was wir hier als bekannt annehmen,

$$\frac{x^{\frac{m-n}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot x_1 + \frac{y^{\frac{m-n}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} \cdot y_1 = 1,$$

und wenn wir diese als leitende Linie ansehen, so wird eine Parabel umhüllt, welche die Axen in den Punkten U und V berührt. Auch von diesen Parabeln lässt sich in ähnlicher Weise wie vorhin zeigen, dass sie die Curve 8) umhüllen.

§. 5.

Aus dem vorhin gewonnenen allgemeinen Resultate lassen sich nun auch die leitenden Curven erkennen, für welche die umhüllten eine einfache Form annehmen.

α) Wenn $m = -n$, also die Leitende

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$$

eine Hyperbel ist, bezogen auf zwei Coordinatenaxen, die zu den Asymptoten parallel sind und sich in einem Punkte der Hyperbel schneiden, so sind die Coordinaten des Berührungspunktes der umhüllenden Geraden PQ nach der Entwickelung des §. 4.:

$$9) \qquad \xi = \left(\frac{1}{a}\right)^{-1} . x^0 = a \quad \text{und} \quad \eta = \left(\frac{1}{b}\right)^{-1} . y^0 = b,$$

d. h. die Gerade PQ geht durch den festen Punkt (ab), und dieser ist, wie leicht zu sehen, der Mittelpunkt der leitenden Hyperbel.

Durch denselben Punkt gehen nun auch alle Hyperbeln von der Form

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{a}{x} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{b}{y} = 1,$$

und alle Parabeln, welche eine Tangente der ursprünglichen Hyperbel als Berührungssehne oder leitende Linie enthalten.

β) Für $m = n$ und $m = \frac{1}{2}n$ erhalten wir die unter a) und b) betrachteten Curven als leitende Linien.

γ) Damit die umhüllte Curve 8) ein Kegelschnitt sei von der Form:

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 = 1,$$

ist zu setzen $\frac{m}{m+n} = 2$, also $m = -2n$, d. h. die zugehörige leitende Curve ist

$$10) \qquad \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 = 1.$$

§. 6.

Besondere Beachtung verdient der Fall, in welchem die leitende Linie eine Ellipse oder Hyperbel ist, bezogen auf conjugirte Durchmesser als Coordinatenaxen. Es sei also

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Leitende, dann ist nach 8) die Umhüllte

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die Umhüllte mit der Leitenden die vier Scheitel gemeinsam hat, und im Uebrigen ganz innerhalb der Ellipse liegt. Bezeichnen wir die vier Scheitel, so wie sie auf einander folgen, mit A, B, A_1, B_1, und lassen den leitenden Punkt M den Bogen AB durchlaufen, so beschreibt die Gerade PQ durch ihre beiden Verlängerungen die Ebenen der Winkel AOB_1 und BOA_1; und das Stück Pp von veränderlicher Länge, wo wieder p den Berührungspunkt bezeichnet, beschreibt die ganze Fläche, welche von dem Bogen AB der Umhüllten und den Linien OA und OB begränzt wird; dieselbe Fläche wird aber auch ganz von dem Linienstücke Qp beschrieben. Wenn also der leitende Punkt M den ganzen Umfang der Ellipse durchläuft, so wird von der umhüllenden Geraden PQ die ganze Ebene der Ellipse zweimal und der von der Umhüllten begränzte Theil der Ebene viermal beschrieben. Hieraus geht hervor, dass durch einen Punkt vier oder drei oder zwei Berührungslinien an die Umhüllte gezogen werden können, jenachdem der Punkt innerhalb der Umhüllten oder in derselben oder ausserhalb liegt.

Wenn der Punkt p_1 die Umhüllende PQ nach dem constanten Verhältnisse $\frac{\alpha}{\beta}$ theilt, so beschreibt er die Curve

$$\text{11)} \qquad \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\cdot\frac{\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\cdot\frac{\eta}{b}\right)^2 = 1,$$

und die Schaar dieser Ellipsen umhüllt dieselbe Curve, wie PQ. Werden die laufenden Coordinaten der Geraden Mp_1 mit x_1, y_1 bezeichnet, so ist ihre Gleichung:

$$y_1 - y = \frac{y-\eta}{x-\xi}(x_1 - x),$$

oder, weil

$$\xi = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot x \text{ und } \eta = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot y,$$

so ist dieselbe

$$\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\frac{x_1}{x}+\frac{\beta}{\beta-\alpha}\cdot\frac{y_1}{y}=1 \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}\cdot\frac{x_1}{\xi}+\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\frac{y_1}{\eta}=1.$$

Die Stücke $OS=v$ und $OR=u$, welche durch diese Gerade auf den Axen abgeschnitten werden, sind

$$u=\frac{\alpha-\beta}{\alpha}.x=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}.\xi \text{ und } v=\frac{\beta-\alpha}{\beta}.y=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta^2}.\eta,$$

und können als Coordinaten eines Punktes aufgefasst werden, der dann der Gleichung

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\frac{u}{a}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\beta-\alpha}\cdot\frac{v}{b}\right)^2=1$$

genügt. Folglich umhüllt diese Gerade Mp_1 die Curve

12) $$\left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\frac{u}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\beta}{\beta-\alpha}\cdot\frac{v}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Die Abschnitte, welche durch die Berührungslinie des Punktes $p_1=(\xi\eta)$ auf den Axen abgeschnitten werden, seien mit u_1 und v_1 bezeichnet; dann ist

$$u_1=\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2\cdot\frac{a^2}{\xi} \text{ und } v_1=\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^2\cdot\frac{b^2}{\eta},$$

also ist

$$uu_1=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.a^2 \text{ und } vv_1=\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}.b^2,$$

und wird nun die Constante $a\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$ auf der x-Axe vom Anfangspunkte O aus nach beiden Seiten als OF und OF_1 abgetragen, so sind p_1F, p_1F_1, p_1M und die Berührungslinie des Punktes p_1 vier harmonische Geraden. Eben so ist es auf der anderen Axe; doch sind die Linienstücke auf dieser $\pm b\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}}$ imaginär, wenn sie auf jener real sind, und umgekehrt.

Diese Eigenschaft der Punkte F und F_1 auf den Coordinaten-Axen, mit den Durchschnittspunkten der Geraden Mp_1 und der Berührungslinie der Ellipse 11) ein System von vier Harmonischen zu bilden, erinnert an den bekannten Satz, wonach die Brennstrahlen eines Punktes mit der Berührungslinie und Normale vier harmonische Geraden sind. Die Uebereinstimmung wird noch grösser, wenn wir annehmen, dass die conjugirten Durchmesser $2a$ und $2b$ des ursprünglichen Kegelschnitts einander gleich sind, und die conjugirten Durchmesser der Ellipse 11)

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot a = a_1 \text{ und } \frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot b = b_1$$

setzen; denn nun ist die Ellipse dargestellt durch

$$\left(\frac{\xi}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b_1}\right)^2 = 1,$$

die Gerade Mp_1 durch

$$\frac{a_1^2}{a_1^2 - b_1^2}\cdot\frac{x_1}{\xi} + \frac{b_1^2}{b_1^2 - a_1^2}\cdot\frac{y_1}{\eta} = 1,$$

und die Entfernung der Punkte F und F_1 vom Mittelpunkte, welche mit dem Schnittpunkte dieser Geraden und dem der Berührungslinie des Punktes $p_1 = (\xi\eta)$ ein System von Harmonischen bilden, durch

$$OF = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} \text{ und } OF_1 = -\sqrt{a_1^2 - b_1^2}.$$

Wenn endlich der leitende Kegelschnitt ein Kreis (Taf. XIII. Fig. 9.)

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

so beschreibt der Punkt $p_1 = (\xi\eta)$ die Ellipse

$$13)\qquad \left(\frac{\xi}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b_1}\right)^2 = 1,$$

und es ist

$$a_1 = Qp_1 \text{ und } b_1 = Pp_1,$$

also

$$a_1 + b_1 = a.$$

Die Gerade PQ umhüllt die Curve

$$14)\qquad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

welche auch als Hypocycloide bekannt ist. Die Stücke u und v, welche die Gerade Mp_1 abschneidet, sind jetzt

$$u = \frac{a_1^2 - b_1^2}{a_1^2}\cdot\xi \text{ und } v = \frac{b_1^2 - a_1^2}{b_1^2}\cdot\eta,$$

sind also laufende Coordinaten für die Curve

$$\left(\frac{a_1 u}{a_1^2 - b_1^2}\right)^2 + \left(\frac{b_1 v}{b_1^2 - a_1^2}\right)^2 = 1,$$

welche eine Ellipse ist mit den Halbaxen

$$\frac{a_1^2-b_1^2}{a_1} \text{ und } \frac{b_1^2-a_1^2}{b_1}.$$

Die zu dieser Curve gehörige umhüllende Gerade Mp_1 behält die vorige Form und ist auf rechtwinklige Coordinaten bezogen; ihre Gleichung zeigt unmittelbar, dass sie die Normale der Ellipse 13) ist, und folglich die von ihr Umhüllte die Evolute dieser Curve, nämlich

$$15)\qquad \left(\frac{a_1 u}{a_1^2-b_1^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b_1 v}{b_1^2-a_1^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Aus den zu Anfang dieses Paragraphen mitgetheilten Betrachtungen folgt nun unmittelbar, dass von einem Punkte vier, drei oder zwei Normalen an eine Ellipse möglich sind, jenachdem der Punkt innerhalb der Evolute oder in derselben oder ausserhalb liegt.

Da die Gerade Mp_1 eine Normale und die Tangente, ihre zugeordnete Harmonische, auf derselben senkrecht steht, so halbiren sie die Winkel der Linien p_1F und p_1F_1, d. h. F und F_1 sind die Brennpunkte der Ellipse 13).

Auch die Länge des Linienstückes Mp_1 hat für die Ellipse 13) eine Bedeutung, denn es ist

$$Mp_1^2 = (y-\eta)^2 + (x-\xi)^2 = \frac{a_1^2}{b_1^2}\eta^2 + \frac{b_1^2}{a_1^2}\xi^2$$

und

$$Op_1^2 = \eta^2 + \xi^2,$$

also

$$Mp_1^2 + Op_1^2 = a_1^2\left(\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2}\right) + b_1^2\left(\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2}\right),$$

$$16)\qquad Mp_1^2 + Op_1^2 = a_1^2 + b_1^2.$$

Da nun $2.Op_1$ ein Durchmesser der Ellipse ist, und $4(a_1^2+b_1^2)$ gleich der Summe der Quadrate von je zwei conjugirten, nach einem bekannten Satze, so ist $2.Mp_1$ die Länge des zu $2.Op_1$ conjugirten Durchmessers.

Es lässt sich dieser Satz auch ausdehnen auf die Ellipsen, welche entstehen, wenn statt des Kreises eine Ellipse, welche auf die gleichen conjugirten Durchmesser bezogen ist, als leitende Curve gewählt wird, doch ist dann der Durchmesser $2.Op_1$ mit demjenigen zu vertauschen, welcher mit der Umhüllenden PQ des leitenden Punktes M parallel ist.

Wird durch den Punkt M eine Berührungslinie an den Kreis um O gelegt, welche die Axen in U und V schneidet, so gehört zu dieser Linie nach §. 2. eine Parabel, welche die Axen in U und V berührt, die zum leitenden Punkte M gehörige Umhüllende PQ ist eine Berührende jener Parabel, und zwar liegt nach §. 2. der Berührungspunkt p so, dass Mp die der Berührenden MU zugeordnete Harmonische ist, oder dass Mp auf PQ senkrecht steht; da nun Mp, wie wir früher gesehen haben, immer ein Durchmesser ist und auf der Umhüllenden senkrecht steht, so ist Mp die Axe und PQ Scheiteltangente der Parabel. Es ist also die Curve 14) zugleich der Ort des Scheitels der Parabel, welche umhüllt wird, wenn eine Berührende des Kreises die leitende Linie ist.

Ferner ist M der Brennpunkt dieser Parabel, wie leicht gezeigt werden kann, also die leitende Kreislinie selbst der Ort des Brennpunktes.

Dieselbe Entwickelung lässt sich auf die Hyperbel anwenden und führt zu ähnlichen Resultaten, die hier nicht mitgetheilt werden, um Wiederholungen zu vermeiden.

§. 7.

Die Aufgabe, welche im §. 4. gelöst wurde, lässt sich noch allgemeiner dadurch machen, dass man zu der leitenden Curve

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=1$$

als umhüllende Linie, wie es im Vorangehenden schon mehrmals geschehen ist, eine Curve nimmt von der Form:

$$\left(\frac{\xi}{x}\right)^m+\left(\frac{\eta}{y}\right)^m=1.$$

Wenn auch x_1 und y_1 zwei Werthe sind, welche der ersten Gleichung genügen, so entstehen zwei Systeme von Gleichungen:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\xi}{x}\right)^m+\left(\frac{\eta}{y}\right)^m=1,$$

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^n+\left(\frac{y_1}{b}\right)^n=1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\xi}{x_1}\right)^m+\left(\frac{\eta}{y_1}\right)^m=1.$$

Aus den letztern folgt:

$$\xi^m=\frac{y^m-y_1{}^m}{(x_1y)^m-(xy_1)^m}\cdot(xx_1)^m \quad \text{und} \quad \eta^m=\frac{x^m-x_1{}^m}{(xy_1)^m-(x_1y)^m}\cdot(yy_1)^m,$$

und aus den erstern:

$$\frac{1}{a^n} = \frac{y^n - y_1^n}{(x_1 y)^n - (x y_1)^n} \quad \text{und} \quad \frac{1}{b^n} = \frac{x^n - x_1^n}{(x y_1)^n - (x_1 y)^n}.$$

Alle vier Werthe werden unbestimmt $=\frac{0}{0}$, wenn man $x = x_1$ und $y = y_1$ setzt; aber man kann mit Hülfe der Werthe von $\frac{1}{a^n}$ und $\frac{1}{b^n}$ den Factor

$$\frac{y - y_1}{x_1 y - x y_1} \quad \text{und} \quad \frac{x - x_1}{x y_1 - x_1 y}$$

aus den Ausdrücken für ξ^m und η^m eliminiren und danach $x = x_1$ und $y = y_1$ setzen. Dadurch entsteht:

$$17) \qquad \xi^m = \frac{x^{m+n}}{a^n} \quad \text{und} \quad \eta^m = \frac{y^{m+n}}{b^n};$$

folglich ist

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^m = \left(\frac{x}{a}\right)^{m+n} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\eta}{b}\right)^m = \left(\frac{y}{b}\right)^{m+n}$$

oder

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n = \left(\frac{\xi}{a}\right)^{\frac{mn}{m+n}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{\eta}{b}\right)^{\frac{mn}{m+n}}.$$

Hiernach ist die umhüllte Curve

$$18) \qquad \left(\frac{\xi}{a}\right)^{\frac{mn}{m+n}} + \left(\frac{\eta}{b}\right)^{\frac{mn}{m+n}} = 1.$$

Es ist zu beachten, dass wegen des gebrochenen Exponenten die Glieder zwei reale Werthe haben, also die Curve aus einem System von vier Linien besteht, wenn der Nenner des Bruches $\frac{mn}{m+n}$ eine gerade Zahl ist. Wenn die Summe $m+n=0$ ist, so wird die Umhüllte nicht von der Gleichung 18), sondern durch 17) dargestellt; nach diesen ist

$$\xi = \sqrt[m]{a^m} \quad \text{und} \quad \eta = \sqrt[m]{b^m},$$

also

$$\xi = a \quad \text{und} \quad \eta = b, \quad \text{wenn } m \text{ ungerade ist},$$

und

$$\xi = \pm a \quad \text{und} \quad \eta = \pm b, \quad \text{wenn } m \text{ gerade ist;}$$

d. h. die Curven

$$\left(\frac{\xi}{x}\right)^m + \left(\frac{\eta}{y}\right)^m = 1,$$

in welchen ξ und η die laufenden Coordinaten für jede Curve darstellen und x, y der Gleichung

$$\left(\frac{a}{x}\right)^m + \left(\frac{b}{y}\right)^m = 1$$

genügen, geben alle durch einen Punkt (ab) oder durch vier Punkte $(\pm a \pm b)$, jenachdem m eine ungerade oder gerade Zahl ist.

Wenn $m=1$ und also $n=-1$, so geht hier der besondere Fall hervor, welcher oben unter 9) angegeben ist. Wenn umgekehrt $m=-1$, also $n=+1$, so gehen alle Hyperbeln

$$\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} = 1$$

durch den Punkt (ab), dessen Coordinaten a und b durch die Gerade

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

auf den Axen abgeschnitten werden, d. i. durch den leitenden Punkt dieser Geraden. Ausserdem geht aus diesen Gleichungen hervor, dass alle Hyperbeln noch durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen, ihre Asymptoten alle den Coordinatenaxen parallel sind und ihr Mittelpunkt die feste Gerade $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ beschreibt.

Setzen wir in 19) $m=1$, so stellt sie die in den früheren Paragraphen untersuchten Curven dar; setzen wir umgekehrt $n=1$, so zeigt sie, dass die Schaar der Curven, welche entsteht, wenn die leitende Gerade nach constanten Verhältnissen getheilt wird, nämlich

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha} \cdot \frac{\xi}{a}\right)^m + \left(\frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \frac{\eta}{b}\right)^m = 1,$$

die Curve

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^{\frac{m}{m+1}} + \left(\frac{\eta}{b}\right)^{\frac{m}{m+1}} = 1$$

umhüllt, wie wir es oben im §. 4. unter der Voraussetzung, dass m eine ganze oder gebrochene Zahl sei, besonders hergeleitet haben.

Wenn $\frac{m+n}{mn} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$, so berühren alle Curven

$$\left(\frac{\xi}{x}\right)^m + \left(\frac{\eta}{y}\right)^m = 1$$

die Gerade

$$\frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} = 1;$$

und statt dieser Geraden treten vier auf, wenn $m+n$ eine gerade Zahl ist. Ist z. B. $m=n=2$, so besteht die umhüllte Linie aus den vier Geraden

$$\pm\frac{\xi}{a} \pm \frac{\eta}{b} = 1,$$

welche ein Parallelogramm bilden, dessen Diagonalen die Durchmesser der Kegelschnitte sind.

§. 8.

Die allgemeine Aufgabe des vorigen Paragraphen werde so abgeändert, dass statt der Coordinaten x und y der leitenden Linie

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$$

die Abschnitte, welche durch die Berührungslinie desselben Punktes (xy) auf den Axen entstehen, in die umhüllende Curve gesetzt werden, so dass sie die Form

$$\left(\frac{x^{n-1}}{a^n}\cdot\xi\right)^m + \left(\frac{y^{n-1}}{b^n}\cdot\eta\right)^m = 1$$

annimmt, da bekanntlich $\frac{a^n}{x^{n-1}}$ und $\frac{b^n}{y^{n-1}}$ die erwähnten Abschnitte sind.

Wenn x_1 und y_1 ein zweites Paar zusammengehöriger Coordinaten der leitenden Curve sind, so ist

$$\left(\frac{x_1^{\,n-1}}{a^n}\cdot\xi\right)^m + \left(\frac{y_1^{\,n-1}}{b^n}\cdot\eta\right)^m = 1$$

die zugehörige Umhüllende, und zu den Schnittpunkten beider gehören die Coordinaten ξ und η, welche bestimmt werden durch die Gleichungen:

$$\xi^m = \frac{y^{m(n-1)} - y_1^{\,m(n-1)}}{(x_1 y)^{m(n-1)} - (x y_1)^{m(n-1)}}\cdot a^{mn}$$

und

$$\eta^m = \frac{x^{m(n-1)} - x_1^{\,m(n-1)}}{(x y_1)^{m(n-1)} - (x_1 y)^{m(n-1)}}\cdot b^{mn}.$$

Aus den zugehörigen Gleichungen der leitenden Curve folgt:

$$\frac{1}{a^n}=\frac{y^n-y_1{}^n}{(x_1y)^n-(xy_1)^n} \text{ und } \frac{1}{b^n}=\frac{x^n-x_1{}^n}{(xy_1)^n-(x_1y)^n},$$

und mit Hülfe dieser Werthe lässt sich aus den ersteren der Factor $\frac{y-y_1}{x_1y-xy_1}$ und $\frac{x-x_1}{xy_1-x_1y}$ eliminiren. Wird, nachdem dies geschehen, $x=x_1$ und $y=y_1$ gesetzt, so gehen die Coordinaten des Schnittpunktes beider Curven in die eines Punktes der umhüllten Curve über, und zwar findet man:

$$19)\quad \xi^m=a^{mn-n}.x^{-mn+m+n} \text{ und } \eta^m=b^{mn-n}.y^{-mn+m+n}.$$

Folglich ist:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n=\left(\frac{\xi}{a}\right)^{\frac{mn}{m+n-mn}} \text{ und } \left(\frac{y}{b}\right)^n=\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\frac{mn}{m+n-mn}},$$

also

$$20)\quad \left(\frac{\xi}{a}\right)^{\frac{mn}{m+n-mn}}+\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\frac{mn}{m+n-mn}}=1$$

die umhüllte Curve.

Im Allgemeinen ist über diese Curve dasselbe zu sagen, wie über die unter 18), sie steht aber ausserdem mit jener in einem innigen Zusammenhange. Wenn jene einen Punkt darstellt, durch welchen alle Curven gehen, d. h. wenn $m+n=0$, so ist diese eine Hyperbel, deren Mittelpunkt jener Punkt ist. Wenn $m+n=mn$, d. h. wenn jene eine oder ein System von festen Geraden ausdrückt, so reducirt sich diese auf einen oder ein System von festen Punkten. Wenn z. B. $m=n=2$, so ist nach 19)

$$\xi=\pm a \text{ und } \eta=\pm b,$$

d. h. alle Ellipsen von der Form

$$\left(\frac{x}{a^2}\cdot\xi\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\cdot\eta\right)^2=1,$$

in welchen die Grössen x und y der Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

genügen, gehen durch die Ecken des Parallelogramms, dessen Seiten die letztere Ellipse in den Endpunkten der conjugirten Durchmesser berühren.

In einigen Fällen, z. B. für $m=\frac{1}{2}$ oder $n=\frac{1}{2}$, fällt diese Gleichung mit der früheren zusammen, wie es oben im §. 4. angedeutet ist; im Allgemeinen tritt dieser Fall ein, wenn unter den früheren Exponenten m, n und denen der Curve 20), m_1 und n_1, der Zusammenhang statt findet, dass

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{n_1}-1=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}.$$

§. 9.

Wenn die leitende Curve eine Hyperbel, welche durch den Schnittpunkt der Coordinatenaxen geht, und diese den Asymptoten parallel sind, so geht, wie wir §. 5. fanden, die umhüllende Gerade in allen Lagen durch den Mittelpunkt der Hyperbel; wir wollen jetzt den Anfangspunkt der Coordinaten beliebig annehmen, ohne jedoch ihre Richtung zu ändern und die umhüllte Curve aufsuchen.

Es sei

$$(x-a)(y-b)=e^2$$

die leitende Linie. Die Gleichungen 1) bestimmen wieder den Schnittpunkt von PQ und P_1Q_1, und es ist nur nöthig, mit Hülfe der leitenden Linie die Factoren $\frac{x-x_1}{xy_1-x_1y}$ und $\frac{y-y_1}{x_1y-xy_1}$ zu eliminiren. Aus den Gleichungen

$$xy-ay-bx=e^2-ab,$$
$$x_1y_1-ay_1-bx_1=e^2-ab$$

geht zunächst hervor:

$$yy_1(x-x_1)-b(xy_1-x_1y)=-(e^2-ab)(y-y_1),$$
$$xx_1(y-y_1)+a(xy_1-x_1y)=-(e^2-ab)(x-x_1);$$

und daraus:

$$\frac{x-x_1}{xy_1-x_1y}=\frac{bxx_1+a(e^2-ab)}{xx_1yy_1-(e^2-ab)^2} \text{ und } \frac{y-y_1}{x_1y-xy_1}=\frac{ayy_1+b(e^2-ab)}{xx_1yy_1-(e^2-ab)^2}$$
$$=\frac{ay_1(x_1-a)+bx_1(x-a)}{xx_1yy_1-(e^2-ab)^2} \qquad =\frac{bx_1(y_1-b)+ay_1(y-b)}{xx_1yy_1-(e^2-ab)^2},$$

folglich ist:

$$\xi=\frac{bx_1(y_1-b)+ay_1(y-b)}{xx_1yy_1-(e^2-ab)^2}.xx_1 \text{ und } \eta=\frac{ay_1(x_1-a)+bx_1(x-a)}{xx_1yy_1-(e^2-ab)^2}.yy_1.$$

Wird nun noch $x=x_1$ und $y=y_1$ gesetzt, so erhält man die Coordinaten des Berührungspunktes:

$$\xi=\frac{(y-b)(bx+ay)x^2}{(xy+ab-e^2)(xy-ab+e^2)} \text{ und } \eta=\frac{(x-a)(bx+ay)y^2}{(xy+ab-e^2)(xy-ab+e^2)}$$

$$=\frac{(y-b).x^2}{xy-ab+e^2} \qquad\qquad =\frac{(x-a).y^2}{xy-ab+e^2}.$$

Hieraus folgt

$$\xi\eta=\frac{e^2x^2y^2}{(xy-ab+e^2)^2}.$$

Ferner ist

$$\xi-a=\frac{(x-a)(e^2-ab)}{xy-ab+e^2} \text{ und } \eta-b=\frac{(y-b)(e^2-ab)}{xy-ab+e^2},$$

also

$$(\xi-a)(\eta-b)=\frac{e^2(e^2-ab)^2}{(xy-ab+e^2)^2},$$

und durch Verbindung der Werthe von $\xi\eta$ und $(\xi-a)(\eta-b)$ folgt

21) $$[\xi\eta]^{\frac{1}{2}}+[(\xi-a)(\eta-b)]^{\frac{1}{2}}=e,$$

als Gleichung der umhüllten Curve.

Durch die Entwickelung dieser Gleichung entsteht

22) $$b^2\xi^2-2(2e^2-ab)\xi\eta+a^2\eta^2+2a(e^2-ab)\eta+2b(e^2-ab)\xi+(e^2-ab)^2=0;$$

setzt man in dieser Gleichung $\eta=0$, so erhält man eine quadratische Gleichung für ξ, welche zwei gleiche Wurzeln hat, also ist die x-Axe eine Berührungslinie des Kegelschnittes und eben so die y-Axe.

Aus den Coefficienten lässt sich leicht erkennen, dass der Kegelschnitt eine Ellipse, oder eine Hyperbel, oder nur einen Punkt darstellt, jenachdem die Differenz e^2-ab negativ, oder positiv oder Null ist; nun ist aber e^2-ab negativ, positiv oder Null, jenachdem der Anfangspunkt der Coordinaten innerhalb, oder ausserhalb oder in der Hyperbel $(x-a)(y-b)=e^2$ liegt.

§. 10.

Es sei die leitende Linie dargestellt durch

$$x^my^n=c,$$

wo m und n jede positive und negative ganze Zahl bedeuten kann; gebrochene Exponenten sollen ausgeschlossen sein, weil sie sogleich durch Potenzirung entfernt werden können.

Die umhüllende Gerade

$$\frac{\xi}{x}+\frac{\eta}{y}=1$$

berührt die gesuchte Curve in dem Punkte, dessen Coordinaten nach 1) die Grenzwerthe sind von

$$\xi=\frac{y-y_1}{\frac{y}{x}-\frac{y_1}{x_1}} \quad \text{und} \quad \eta=\frac{x-x_1}{\frac{x}{y}-\frac{x_1}{y_1}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{y}{x}=c^{-\frac{1}{m}}.y^{\frac{m+n}{m}} \quad \text{und} \quad \frac{y_1}{x_1}=c^{-\frac{1}{m}}.y_1^{\frac{m+n}{m}},$$

also

$$\xi=c^{\frac{1}{m}}.\frac{y-y_1}{y^{\frac{m+n}{m}}-y_1^{\frac{m+n}{m}}}=c^{\frac{1}{m}}.\frac{y^{m+n}-y_1^{m+n}}{y^{\frac{m+n}{m}}-y_1^{\frac{m+n}{m}}}.\frac{1}{y^{m+n-1}+y^{m+n-2}.y_1+y^{m+n-3}.y_1^2+\ldots}$$

$$=c^{\frac{1}{m}}.\frac{y^{\frac{m+n}{m}(m-1)}+y^{\frac{m+n}{m}(m-2)}.y_1^{\frac{m+n}{m}}+y^{\frac{m+n}{m}(m-3)}.y_1^{\frac{m+n}{m}.2}+\ldots.}{y^{m+n-1}+y^{m+n-2}.y_1+y^{m+n-3}.y_1^2+\ldots.}.$$

Wird hierin nun $y = y_1$ gesetzt, so entsteht:

$$\xi = c^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot y^{-\frac{n}{m}} = \frac{m}{m+n} \cdot \left(\frac{c}{y^n}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{m}{m+n} \cdot x;$$

und durch dieselben Schlüsse findet sich:

$$\eta = \frac{n}{m+n} \cdot y;$$

also ist die umhüllte Curve

$$23) \qquad \xi^m \eta^n = \frac{m^m \cdot n^n}{(m+n)^{m+n}} \cdot c.$$

Sie unterscheidet sich von der Leitenden nur durch die Constante, und ist zugleich diejenige, welche von dem Punkte beschrieben wird, der die umhüllende Gerade PQ nach dem Verhältnisse $\frac{m}{n}$ theilt.

Wenn nun insbesondere $m = n$ oder die leitende Curve eine Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten als Axen, so ist die Umhüllte eine Hyperbel mit denselben Asymptoten und mit einer Excentricität, welche die Hälfte der vorigen ist.

Wenn die leitende Curve die gewöhnliche Parabel, also $m = -1$ und $n = 2$, so ist die Umhüllte

$$\eta^2 = -4cx,$$

eine Parabel, welche den vierfachen Parameter der Leitenden hat und an der entgegengesetzten Seite der Scheiteltangente liegt.

Wir haben im §. I. gesehen, dass die umhüllende Gerade durch ihren Berührungspunkt und durch die Tangente des leitenden Punktes harmonisch getheilt wird; nun wird aber die Umhüllende der Curve 23) getheilt nach dem Verhältnisse $\frac{m}{n}$, also wird sie durch die Tangente der leitenden Curve nach demselben constanten Verhältnisse getheilt. Hierdurch ist ein einfaches Mittel gegeben, um durch einen Punkt einer Curve $x^m y^n = c$ eine berührende Gerade zu legen. Wenn insbesondere $m = n = 1$, so wird das zwischen den Axen (Asymptoten) liegende Stück durch den Berührungspunkt halbirt, und $m = -1$ und $n = 2$, so theilt der Berührungspunkt das Stück, welches zwischen der Abscissenaxe (Durchmesser) und der Axe der Ordinaten (Scheiteltangente) liegt, äusserlich nach dem Verhältnisse $\frac{1}{2}$.

Die Entwickelung und das Resultat dieses Paragraphen, nämlich die Gleichung 23), erleiden nur geringe Abänderungen, wenn statt der umhüllenden Geraden eine Curve von der Form

$$\left(\frac{\xi}{x}\right)^p + \left(\frac{\eta}{y}\right)^p = 1$$

genommen wird.

§. 11.

Es werden zwei Gerade, welche durch zwei feste Punkte in der Abscissenaxe gehen und der Ordinatenaxe parallel sind, durch eine bewegliche Gerade so geschnitten, dass die abgeschnittenen Stücke eine homogene Function zweiten Grades von constanter Grösse bilden; es soll die von der beweglichen Geraden umhüllte Curve bestimmt werden.

Die festen Geraden seien PQ und P_1Q_1 (Taf. XIII. Fig. 10.), die von denselben durch die Bewegliche QQ_1 abgeschnittenen Stücke mit z und z_1, die von den Axen OX und OY abgeschnittenen mit x und y, und die Stücke OP und OP_1 mit p und q bezeichnet. Die Gleichung der Geraden PQ ist nun

$$\frac{\xi}{x} + \frac{\eta}{y} = 1,$$

und die Bedingung, welcher sie genügt, sei

$$\alpha z^2 + 2\beta z z_1 + \gamma z_1^2 = 1.$$

Aus der Doppelgleichung

$$\frac{z}{x+p} = \frac{z_1}{x-q} = \frac{y}{x}$$

folgen die Werthe:

$$z = \frac{x+p}{x}.y \text{ und } z_1 = \frac{x-q}{x}.y,$$

welche verschiedene Zeichen annehmen, wenn der Punkt X zwischen P und P_1 liegt, und durch Einsetzung dieser Werthe in die Bedingungsgleichung entsteht:

$$(\alpha+2\beta+\gamma)x^2+2(\alpha p+\beta p-\beta q-\gamma q)x+\alpha p^2-2\beta pq+\gamma q^2 = \frac{x^2}{y^2},$$

und diese Gleichung lässt sich noch dadurch vereinfachen, dass man den Anfangspunkt der Coordinaten so bestimmt, dass

$$\alpha p + \beta p - \beta q - \gamma p = 0,$$

dass also

$$p = \frac{\beta + \gamma}{\alpha + 2\beta + \gamma} . l \text{ und } q = \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta + \gamma} . l ,$$

wo l die Entfernung der festen Punkte P und P_1 ist. Hiedurch wird ausserdem

$$\alpha p^2 - 2\beta pq + \gamma q^2 = - \frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\alpha + 2\beta + \gamma} . l^2 ,$$

und wenn nun noch zur Abkürzung gesetzt wird $\alpha + 2\beta + \gamma = \sigma$ und $\beta^2 - \alpha\gamma = \delta$, so ist die Bedingungsgleichung

$$\sigma x^2 - \frac{\delta}{\sigma} . l^2 = \frac{x^2}{y^2}$$

oder

24) $$\frac{\delta l^2}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{y^2} = 1 .$$

Sie ist zugleich die Gleichung der leitenden Curve für die umhüllende Gerade QQ_1 und kann leicht unter die Form

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = 1 ,$$

welche in §. 4. zu Grunde gelegt wurde, gebracht werden. Es ist nur zu setzen $m = -2$, $n = 1$,

$$\frac{\delta}{\sigma^2} . l^2 = a^2 \text{ und } \frac{1}{\sigma} = b^2 ;$$

es ist dann nach 8) die umhüllte Curve

25) $$\frac{\sigma^2}{\delta l^2} . \xi^2 + \sigma . \eta^2 = 1 ,$$

ein Kegelschnitt, von welchem OX und OY zwei conjugirte Durchmesser sind. Bezeichnen wir diese Durchmesser mit $2a$ und $2b$, so ist

$$a = \frac{b}{\sigma} \sqrt{\delta} \text{ und } b = \sqrt{\frac{1}{\sigma}} .$$

Es sind also beide Durchmesser imaginär, d. h. der Kegelschnitt selbst ist imaginär, wenn

$$\beta^2 - \alpha\gamma < 0 \text{ und } \alpha + 2\beta + \gamma < 0 ,$$

es sind beide real oder der Kegelschnitt ist eine Ellipse, wenn

$$\beta^2-\alpha\gamma>0 \text{ und } \alpha+2\beta+\gamma>0,$$

es ist einer real und der andere imaginär, oder die Umhüllte ist eine Hyperbel, wenn

$$\beta^2-\alpha\gamma>0 \text{ und } \alpha+2\beta+\gamma<0$$

oder

$$\beta^2-\alpha\gamma<0 \text{ und } \alpha+2\beta+\gamma>0.$$

Die Coefficienten der homogenen Function lassen sich durch die Durchmesser des Kegelschnittes und die Stücke p und q ausdrücken. Es ist nämlich zunächst

$$\beta+\gamma=\frac{p}{b^2l},\quad \alpha+\beta=\frac{q}{b^2l} \text{ und } \beta^2-\alpha\gamma=\frac{a^2}{b^4l^2},$$

und daraus folgt:

$$\alpha=\frac{q^2-a^2}{b^2l^2},\quad \gamma=\frac{p^2-a^2}{b^2l^2} \text{ und } \beta=\frac{pq+a^2}{b^2l^2},$$

so dass die Function zweiten Grades übergeht in:

26) $$(q^2-a^2)z^2+2(pq+a^2)zz_1+(p^2-a^2)z_1^2=b^2l^2.$$

Werden also durch zwei Punkte P und P_1, welche in demselben Durchmesser $2a$ eines Kegelschnittes auf verschiedenen Seiten des Mittelpunktes in den Entfernungen p und q liegen, Gerade parallel zum conjugirten Durchmesser $2b$ gezogen, so schneidet jede Tangente des Kegelschnittes auf den Geraden Stücke z und z_1 ab, die der Gleichung 26) genügen.

Diese lässt sich auch noch unter die folgenden Formen bringen:

$$(qz+pz_1)^2-a^2(z-z_1)^2=b^2l^2,$$

$$[(q+a)z+(p-a)z_1]\,[(q-a)z+(p+a)z_1]=b^2l^2.$$

Es ist bei diesen Darstellungen festzuhalten, dass p und q gleiches Vorzeichen haben, wenn P und P_1 auf verschiedenen Seiten des Mittelpunktes O, und verschiedenes, wenn sie auf derselben Seite liegen.

Die allgemeine Gleichung 26) nimmt in einigen Fällen eine besonders einfache Gestalt an.

α) Wenn $p=q=a$, so geht 26) über in:

27) $$zz_1=b^2,$$

d. h. jede Tangente schneidet auf zwei festen Tangenten, welche durch die Endpunkte des realen Durchmessers $2a$ einer Ellipse oder Hyperbel gezogen sind, Stücke ab, deren Product gleich ist dem Quadrate des halben conjugirten Durchmessers.

β) Wenn a imaginär und $p = q = \sqrt{-a^2}$, so ist nach 26):

28) $$z^2 + z_1{}^2 = 2b^2,$$

d. h. von den Geraden, welche durch die Endpunkte eines imaginären Durchmessers parallel zum conjugirten gezogen sind, schneidet jede Tangente Stücke ab, deren Quadratsumme gleich ist dem halben Quadrate des conjugirten Durchmessers.

§. 12.

Die bisherige Entwickelung ist nicht zulässig, wenn

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 0,$$

und es ist deshalb dieser Fall besonders zu untersuchen.

Unter der vorstehenden Voraussetzung ist die Bedingungsgleichung:

$$2[(\alpha+\beta)p - (\beta+\gamma)q]x + \alpha p^2 - 2\beta pq + \gamma q^2 = \frac{x^2}{y^2}$$

und geht durch Anwendung derselben Gleichung über in

$$(\alpha - \gamma)(p+q)x + (\alpha p + \gamma q)(p+q) = \frac{x^2}{y^2}.$$

Wird nun der Anfangspunkt O, d. h. p und q so bestimmt, dass

$$\alpha p + \gamma q = 0,$$

so ist die Gleichung der leitenden Curve

29) $$y^2 = \frac{1}{\alpha-\gamma} \cdot \frac{x}{l} = \frac{q}{\alpha l^2} \cdot x = -\frac{p}{\gamma l^2} \cdot x,$$

und nach §. 10. ist die zugehörige Umhüllte

30) $$\eta^2 = \frac{4p}{\gamma l^2} \cdot \xi$$

eine Parabel, von welcher PP_1 ein Durchmesser und OY die zugehörige Scheiteltangente ist. Wird der Parameter dieser Parabel

$$\frac{4p}{\gamma l^2} = k$$

gesetzt, so ist

$$\gamma=\frac{4p}{kl^2},\quad \alpha=-\frac{4q}{kl^2} \text{ und } \beta=\frac{2(q-p)}{kl^2},$$

also ist die zu Grunde gelegte Bedingung ausgedrückt durch

$$31)\qquad -qz^2+(q-p)zz_1+pz_1^2=\tfrac{1}{4}kl^2$$

oder

$$(pz_1+qz)(z-z_1)=\tfrac{1}{4}kl^2.$$

Werden also durch zwei Punkte P und P_1, welche auf demselben Durchmesser einer Parabel und in den Entfernungen p und q zu beiden Seiten des Scheitels liegen, zwei Gerade parallel zur zugehörigen Scheiteltangente gezogen, so schneidet jede Tangente von denselben Stücke ab, welche der Gleichung 31) genügen.

Wenn insbesondere $p=q=\frac{1}{2}l$, so ist

$$z^2-z_1^2=\tfrac{1}{2}kl.$$

Die Beschaffenheit des Kegelschnittes, welcher von QQ_1 umhüllt wird, ist ausser von der Summe der Coefficienten $\alpha+2\beta+\gamma=\sigma$ noch abhängig von der Grösse der Determinante der Function; und zwar folgt aus der Gleichung

$$a=\frac{b}{\sigma}\sqrt{\delta},$$

dass a real, imaginär oder null ist, jenachdem δ positiv oder negativ oder null ist, oder jenachdem die homogene Function aus zwei realen oder imaginären oder gleichen Factoren besteht.

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass in der Gleichung zweiten Grades, welcher die Abschnitte z und z_1 genügen, nur solche Glieder vorkommen, welche in Bezug auf diese Veränderlichen von der zweiten Dimension sind; es ist aber leicht einzusehen, dass die Glieder von der ersten Dimension, wenn solche darin enthalten gewesen wären, hätten durch Verlegung der Anfangspunkte P und P_1 entfernt werden können; so dass im Allgemeinen eine Gleichung zweiten Grades mit den Veränderlichen z und z_1 einen Kegelschnitt darstellt. Wir wollen jetzt auf die Untersuchung der allgemeinen Gleichung nicht eingehen, sondern mit Hülfe der vorstehenden Entwickelung eine der vorigen nahe verwandte Aufgabe über umhüllte Curven lösen.

§. 13.

Die von zwei festen Punkten P und P_1 auf eine bewegliche

Gerade gefällten Senkrechten PR und P_1R_1 bilden eine homogene Function zweiten Grades von constanter Grösse; es soll die von der Geraden umhüllte Curve bestimmt werden.

Die Senkrechten PR und P_1R_1 seien mit r und r_1 bezeichnet, und die Gleichung, welcher sie genügen, sei

$$\alpha r^2 + 2\beta r r_1 + \gamma r_1^2 = 1.$$

Werden in den Punkten P und P_1 Senkrechte auf PP_1 errichtet, nämlich PQ und P_1Q_1, welche die Gerade RR_1 in Q und Q_1 schneiden, und $PQ = z$, $P_1Q = z_1$ gesetzt, so ist

$$r = \frac{lz}{\sqrt{l^2 + (z - z_1)^2}} \text{ und } r_1 = \frac{lz_1}{\sqrt{l^2 + (z - z_1)^2}},$$

wo l wieder die Entfernung der festen Punkte P und P_1 bezeichnet. Durch die Einsetzung dieser Werthe in die obige Gleichung entsteht

$$32)\qquad \frac{\alpha l^2 - 1}{l^2} \cdot z^2 + 2\frac{\beta l^2 + 1}{l^2} \cdot zz_1 + \frac{\gamma l^2 - 1}{l^2} \cdot z_1^2 = 1,$$

welche mit der Bedingungsgleichung des §. 11. der Form nach übereinstimmt. Hieraus folgt schon, dass die umhüllte Curve ein Kegelschnitt, von welchem die Gerade PP_1 die eine Axe ist, da sie auf dem conjugirten Durchmesser, welcher zu PQ parallel ist, senkrecht steht.

Die Gleichung dieses Kegelschnittes ist nach 25):

$$\frac{\sigma_1^2}{\delta_1 l^2} \cdot \xi^2 + \sigma_1 \cdot \eta^2 = 1,$$

wo dann

$$\sigma_1 = \alpha + 2\beta + \gamma = \sigma,$$

$$\delta_1 = \frac{(\beta^2 - \alpha\gamma)l^2 + \alpha + 2\beta + \gamma}{l^2} = \delta + \frac{\sigma}{l^2},$$

und die Entfernungen des Mittelpunktes von P und P_1, nämlich $OP = p$ und $OP_1 = q$ bestimmt sind durch die Gleichungen

$$p = \frac{\beta + \gamma}{\alpha + 2\beta + \gamma} \cdot l \text{ und } q = \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta + \gamma} \cdot l.$$

Durch Einführung der Summe σ und der Determinante δ der gegebenen Function geht die Gleichung des Kegelschnittes über in:

$$33)\qquad \frac{\sigma^2}{\delta l^2 + \sigma} \cdot \xi^2 + \sigma \cdot \eta^2 = 1,$$

oder

$$\frac{\xi^2}{a_1^2}+\frac{\eta^2}{b_1^2}=1,$$

wenn wir die Halbaxen a_1 und b_1 bestimmen durch die Gleichungen

$$a_1=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\delta l^2+\sigma},\quad b_1=\sqrt{\frac{1}{\sigma}}.$$

Hieraus ergibt sich für die Excentricität $e_1=\sqrt{a_1^2-b_1^2}$ der Werth:

$$e_1=\frac{l}{\sigma}\sqrt{\delta}.$$

Durch die Elemente der Curve lassen sich nun umgekehrt die Coefficienten der Bedingungsgleichung ausdrücken, und zwar findet sich aus den Gleichungen

$$\sigma=\frac{1}{b_1^2},\quad \delta=\frac{e_1^2}{b_1^4 l^2},\quad \alpha+\beta=\frac{q}{b_1^2 l},\quad \beta+\gamma=\frac{p}{b_1^2 l},$$

dass

$$\alpha=\frac{q^2-e_1^2}{b_1^2 l^2},\quad \gamma=\frac{p^2-e_1^2}{b_1^2 l^2},\quad \beta=\frac{pq+e_1^2}{b_1^2 l^2}.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die gegebene Bedingungsgleichung entsteht:

$$34)\qquad (q^2-e_1^2)r^2+2(pq+e_1^2)rr_1+(p^2-e_1^2)r_1^2=b_1^2 l^2.$$

Werden auf verschiedenen Seiten des Mittelpunktes in der Axe $2a_1$ eines Kegelschnittes die Punkte P und P_1 in den Entfernungen p und q vom Mittelpunkte beliebig angenommen, so genügen die Entfernungen jeder Tangente des Kegelschnittes von den Punkten P und P_1, nämlich r und r_1, der Gleichung 34).

Durch eine einfache Umformung nimmt die vorstehende Gleichung folgende Form an:

$$(qr+pr_1)^2-e_1^2(r-r_1)^2=b_1^2 l^2,$$

$$[(q+e_1)r+(p-e_1)r_1][(q-e_1)r+(p+e_1)r_1]=b_1^2 l^2.$$

Wenn nun insbesondere $p=q=e_1$, d. h. wenn die Punkte P und P_1 die realen Brennpunkte des Kegelschnittes sind, so ist

$$35)\qquad rr_1=b_1^2,$$

d. h. das Product der von den realen Brennpunkten auf eine Tangente eines Kegelschnittes gefällten Senkrechten ist gleich dem Quadrate der Halbaxe, in welcher die imaginären Brennpunkte liegen.

Wenn dagegen $e_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}$ imaginär ist, und $p = q = \sqrt{-e_1^2}$, so geht die Gleichung 34) über in

$$36)\qquad r^2 + r_1^2 = 2b_1^2,$$

d. h. die Summe der Quadrate der von den imaginären Brennpunkten auf eine Tangente gefällten Senkrechten ist gleich dem halben Quadrate der Axe, in welcher die realen Brennpunkte liegen.

In allen diesen Gleichungen zeigt sich, dass die Senkrechten r und r_1 denselben Bedingungen genügen, wie die Abschnitte z und z_1, welche in der vorigen Aufgabe untersucht wurden, nur mit dem Unterschiede, dass statt der Halbaxe a hier die Excentricität e_1 vorkommt. Im Zusammenhange mit dieser Uebereinstimmung ist die Excentricität des Kegelschnittes 33), welche in dem Durchmesser $2a_1$ liegt, real oder imaginär oder null, jenachdem die gegebene Function zweiten Grades aus zwei realen oder imaginären oder gleichen Factoren besteht, oder jenachdem $\delta = \beta^2 - \alpha\gamma$ positiv oder negativ oder null ist.

§. 14.

Die erwähnte Uebereinstimmung bleibt auch dann noch bestehen, wenn die Coefficientensumme $\sigma = \alpha + 2\beta + \gamma = 0$ und in Folge dessen die Entwickelung des vorigen Paragraphen nicht anwendbar ist. Die umhüllte Curve ist nach §. 12.:

$$37)\qquad \eta^2 = \frac{4}{\gamma - \alpha} \cdot \frac{\xi}{l},$$

eine Parabel, deren Parameter

$$k = \frac{4}{(\gamma - \alpha) l}.$$

Dazu ist aber

$$\frac{\alpha l^2 - 1}{l^2} p + \frac{\gamma l^2 - 1}{l^2} q = 0,$$

folglich

$$\alpha p + \gamma q = \frac{1}{l}.$$

Nimmt man hinzu

$$\gamma - \alpha = \frac{4}{kl},$$

so findet man

$$\alpha=\frac{k-4q}{kl},\quad \gamma=\frac{k+4p}{kl},\quad \beta=-\frac{k+2p-2q}{kl},$$

und hierdurch geht die Function zweiten Grades über in:

$$[(4p+k)r_1+(4q-k)r](r-r_1)=-kl^2.$$

Verlegt man noch den Punkt, von welchem die Entfernungen p und q gerechnet werden, um $\frac{1}{4}k$, und setzt $p-\frac{1}{4}k$ statt p, so wie $q+\frac{1}{4}k$ statt q, so geht die Gleichung über in:

38) $$(pr_1+qr)(r-r_1)=-\tfrac{1}{4}kl^2;$$

und wenn insbesondere $p=q$, d. h. die Punkte P und P_1 in gleicher Entfernung vom Brennpunkte sich befinden, so ist

39) $$r_1^2-r^2=\tfrac{1}{4}kl.$$

Werden von zwei Punkten, welche in der Axe einer Parabel gleich weit vom Brennpunkte entfernt sind, Senkrechte auf eine Berührungslinie gefällt, so ist die Differenz der Quadrate dieser Senkrechten constant.

§. 15.

Die Auflösung der letzten Aufgaben über umhüllte Curven, §§. 11—14., führte dazu, die gegebene Function zweiten Grades in lineare Factoren zu zerlegen, oder wenn diese imaginär waren, dieselbe darzustellen als Summe zweier Quadrate. Eine einfache geometrische Betrachtung zeigt die geometrische Bedeutung dieser Umformungen.

Nach 26) besteht die quadratische Function aus den Factoren

$$(q+a)z+(p-a)z_1 \quad\text{und}\quad (q-a)z+(p+a)z_1;$$

es seien A und A_1 (Taf. XIII. Fig. 11.) die Scheitel der umhüllten Curve, also

$$q+a=AP_1,\quad p-a=AP;$$
$$q-a=A_1P_1,\quad p+a=A_1P.$$

Nun ist aber, wie leicht zu sehen:

$$AP_1.z+AP.z_1=(AP+AP_1).d=l.d,$$
$$A_1P_1.z+A_1P.z_1=(A_1P+A_1P_1).d_1=l.d_1,$$

wo der Kürze wegen noch $AD=d$ und $A_1D_1=d_1$ gesetzt ist. Das Product jener Factoren ist folglich $l^2.dd_1$, wie es oben als specieller Fall angegeben wurde. Die Zerlegung in Factoren führte also dazu, die Scheitel der umhüllten Ellipse in der Geraden PP_1 zu finden.

Ist aber a imaginär, also a^2 negativ, so setze man $-a^2$ statt a^2; dadurch geht die Gleichung 26) über in

$$(q^2+a^2)z^2+2(pq-a^2)zz_1+(p^2+a^2)z_1^2=b^2l^2$$

und lässt sich umformen in

$$[(q+a)z+(p-a)z_1]^2+[(q-a)z+(p+a)z_1]^2=2b^2l^2,$$

so dass nach dem Obigen durch jedes dieser Quadrate einer der Endpunkte des imaginären Durchmessers AA_1 bestimmt wird, und die Summe der Quadrate der Stücke AD und A_1D_1 gleich wird $2b^2l^2$, wie wir es oben als besonderen Fall gefunden haben.

Wenn zugleich durch A und A_1 Gerade parallel zu BB_1 und durch B und B_1 Gerade parallel zu AA_1 gezogen werden, und die Stücke $AD=d$, $A_1D_1=d_1$, welche auf jenen durch eine Gerade DD_1 abgeschnitten werden, der Bedingung

$$d^2+d_1^2=2b^2=2.OB^2$$

genügen, welche eine Eigenschaft der imaginären Scheitel A und A_1 ist, so lässt sich zeigen, dass die Stücke $BC=c$ und $B_1C_1=c_1$, welche auf verschiedenen Seiten des Durchmessers BB_1 liegen, der Gleichung

$$cc_1=a^2=OA^2$$

Genüge leisten, welche ein Merkmal der realen Scheitel B und B_1 ist.

Für die realen und imaginären Brennpunkte eines Kegelschnittes haben die Zerlegungen der Function 34) dieselbe Bedeutung, welche wir von der Function 26) für Scheitel nachgewiesen haben.

Schliesslich füge ich noch die Bemerkung hinzu, dass ich die vorstehenden Untersuchungen weniger wegen der Resultate mitgetheilt habe, da sie zum Theil schon von Andern durch Anwendung der Differenzialrechnung gefunden wurden, sondern vielmehr wegen der elementaren Entwickelung, weil Beispiele, wie die vorstehenden, mir besonders geeignet zu sein scheinen, den Anfänger mit der Methode der Gränzwerthe, auf welcher ihrer Entstehung und ihrem Wesen nach die Differenzialrechnung beruht, vertraut zu machen.

XXXII.

Ueber die Reduction der Monddistanzen, für nautische Lehranstalten.

Von
dem Herausgeber.

Das grosse Interesse, welches ich an der Verbesserung des nautischen Unterrichts und der nautischen Rechnungsmethoden nehme, hat mich vor Kurzem veranlasst, die meisten der bekannten Formeln zur Reduction der Monddistanzen einer sorgfältigen Prüfung zu unterwerfen. Das Resultat dieser Prüfung ist gewesen, dass nach meiner Meinung unter den bis jetzt bekannten Formeln der Formel, welche der berühmte Borda zuerst in seiner „Description et usage du cercle de réflexion avec différentes méthodes pour calculer les observations nautiques. Paris. 1787. 4. p. 50. p. 76.“ bekannt machte, immer noch der Vorzug gebührt, weshalb auch namentlich in der, besonders seit Gründung der Écoles d'Hydrographie durch den grossen Colbert, durch grosse Wissenschaftlichkeit so sehr ausgezeichneten französischen Marine diese Methode von Borda allein Anwendung zu finden scheint; wenigstens beschränkt sich z. B. Herr V. Caillet, bei kurzer Erwähnung der Methoden von Dunthorne, Burckhardt, Mendoza und Richard, die aber sämmtlich den Gebrauch besonderer Tafeln voraussetzen, in seinem trefflichen, durch strenge Wissenschaftlichkeit ausgezeichneten „Traité élémentaire de navigation, à l'usage des officiers de la marine militaire et de la marine du commerce. Tome I. Brest. 1848. T. II. Tables. Brest. 1846“ auf die Mittheilung der Borda'schen Methode; und Herr Levret ainé sagt in seinem „Cours complet de la marine marchande. Troisième Partie. Navigation. Paris. 1850. p. 165.“, nachdem er neben der Methode von Borda noch der Methode von Mendoza und der bei deren Anwendung erforderlichen Tafeln kurz Erwähnung gethan hat, sehr richtig: „On rend un mauvais service aux marins, en augmentant le bagage de tables dont ils doivent être munis: Telle est la raison qui nous fait accorder la préférence à la méthode de correction de Borda, puisqu'elle n'exige que l'emploi des tables nécessaires à tous les calculs, et dont par suite l'usage est toujours très-familier au navigateur.“ In deutschen Lehrbüchern der Schifffahrtskunde findet man jetzt häufig die Methoden von Bremiker und Witchell; aber diese Methoden, denen ich übrigens durchaus nicht allen Werth absprechen will, sind blosse Näherungsmethoden, ohne dabei nach meiner Meinung eine so grosse Abkürzung der Rechnung zu gestatten, dass man nicht lieber den Gebrauch ganz strenger Formeln vorziehen sollte; und überdies sollte man nach meiner Ueberzeugung sich überhaupt bei einer Formel, auf der, wie man mit voller Wahrheit sagen kann, das Leben und die Wohlfahrt, und die Sicherheit des Vermögens von Tausenden beruhet, nicht mit blossen Annäherungen, die, wie ein strenger Mathematiker nicht leugnen wird, namentlich in der Art, wie sie gewöhnlich gegeben werden, doch nie von einer gewissen Unsicherheit frei sind, begnügen, am allerwenigsten aber bei den, in ihrer in den Lehrbüchern meistens noch gewöhnlichen Weise, so unsichern Entwickelungen durch den Taylor'schen Lehrsatz, welche überhaupt die neuere Mathematik ohne strenge Restbetrachtungen gar nicht mehr, oder nur mit grossem Widerstreben, statuirt, beruhigen. Dies sind die Gründe, welche mich, wie ich glaube, in völliger Uebereinstimmung mit der französischen Marine, bestimmen, unter den bekannten Methoden und Formeln immer noch der Borda'schen den Vorzug einzuräumen und dieselbe zum Gebrauche auf der See vorzugsweise zu empfehlen. Indess hat die schon erwähnte Revision der bekannten Methoden — so weit die mir zu Gebote stehende, allerdings reichhaltige nautische Literatur reichte — mich zu einigen Betrachtungen über diesen, wegen seiner grossen praktischen Wichtigkeit schon so vielfach discutirten Gegenstand geführt, welche ich der Mittheilung an diesem Orte nicht ganz unwerth halte, indem ich eines Theils der Meinung bin, dass die Borda'sche Methode einiger zweckmässigen Abänderungen fähig ist, andern Theils aber auch ein Paar neue Methoden dem Urtheil Derer, welche sich für die Fortschritte der Nautik interessiren, unterwerfen möchte. Zu diesen Entwickelungen will ich jetzt übergehen.

Wenn wir die scheinbaren Höhen und die scheinbare Distanz der beiden Gestirne durch h, h_1 und Δ, ihre wahren, wegen Refraction, Parallaxe, Kimmung u. s. w. gehörig corrigirten Höhen und ihre wahre Distanz durch h', h_1' und $\varDelta'$ bezeichnen, so haben wir die bekannte Relation:

$$1)\qquad \frac{\cos\varDelta-\sin h\sin h_1}{\cos h\cos h_1}=\frac{\cos\varDelta'-\sin h'\sin h_1'}{\cos h'\cos h_1'},$$

welche allen diesen Untersuchungen zur Grundlage dient, indem es darauf ankommt, die wahre Distanz $\varDelta'$ aus den übrigen vorher genannten Grössen durch ein möglichst einfaches Rechnungsverfahren zu finden. Dass sich aus dieser Gleichung, wenn man dieselbe in Bezug auf $\cos\varDelta'$ als unbekannte Grösse auflöst, auf der Stelle ein Ausdruck für diese Grösse ergiebt, leuchtet ein; da aber dieser Ausdruck zur numerischen Rechnung zu weitläufig ist, so pflegt man ein anderes Verfahren einzuschlagen.

Bezeichnen wir nämlich den Winkel, welchen die beiden von den scheinbaren und wahren Zenithdistanzen der beiden Gestirne und deren scheinbarer und wahrer Distanz von einander gebildeten sphärischen Dreiecke mit einander gemeinschaftlich haben, durch A, so liefern uns die bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie, wenn wir der Kürze wegen

$$2)\qquad 2s=h+h_1+\varDelta$$

setzen, die folgenden Ausdrücke:

$$3)\qquad \begin{cases}\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\dfrac{\cos s\cos(s-\varDelta)}{\cos h\cos h_1}}, \\[2ex] \sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\dfrac{\sin(s-h)\sin(s-h_1)}{\cos h\cos h_1}}.\end{cases}$$

Nun ist aber ferner nach den Lehren der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos\varDelta'=\sin h'\sin h_1'+\cos h'\cos h_1'\cos A,$$

also, weil bekanntlich

$$2\sin\tfrac{1}{2}\varDelta'^2=1-\cos\varDelta',\quad 2\cos\tfrac{1}{2}\varDelta'^2=1+\cos\varDelta'$$

ist:

$$\begin{aligned}2\sin\tfrac{1}{2}\varDelta'^2&=1-\sin h'\sin h_1'-\cos h'\cos h_1'(1-2\sin\tfrac{1}{2}A^2)\\ &=1-\sin h'\sin h_1'-\cos h'\cos h_1'(2\cos\tfrac{1}{2}A^2-1)\\ &=1-\cos(h'-h_1')+2\cos h'\cos h_1'\sin\tfrac{1}{2}A^2\\ &=1+\cos(h'+h_1')-2\cos h'\cos h_1'\cos\tfrac{1}{2}A^2\\ &=2\{\sin\tfrac{1}{2}(h'-h_1')^2+\cos h'\cos h_1'\sin\tfrac{1}{2}A^2\}\\ &=2\{\cos\tfrac{1}{2}(h'+h_1')^2-\cos h'\cos h_1'\cos\tfrac{1}{2}A^2\},\end{aligned}$$

also:

$$4)\qquad \sin\tfrac{1}{2}\varDelta'^2=\sin\tfrac{1}{2}(h'-h_1')^2+\cos h'\cos h_1'\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$
$$=\cos\tfrac{1}{2}(h'+h_1')^2-\cos h'\cos h_1'\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2;$$

und

$$\begin{aligned}2\cos\tfrac{1}{2}\varDelta'^2&=1+\sin h'\sin h_1'+\cos h'\cos h_1'(1-2\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2)\\&=1+\sin h'\sin h_1'+\cos h'\cos h_1'(2\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2-1)\\&=1+\cos(h'-h_1')-2\cos h'\cos h_1'\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2\\&=1-\cos(h'+h_1')+2\cos h'\cos h_1'\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2\\&=2\{\cos\tfrac{1}{2}(h'-h_1')^2-\cos h'\cos h_1'\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2\}\\&=2\{\sin\tfrac{1}{2}(h'+h_1')^2+\cos h'\cos h_1'\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2\},\end{aligned}$$

also:

$$5)\qquad \cos\tfrac{1}{2}\varDelta'^2=\cos\tfrac{1}{2}(h'-h_1')^2-\cos h'\cos h_1'\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$
$$=\sin\tfrac{1}{2}(h'+h_1')^2+\cos h'\cos h_1'\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2.$$

Die vier Formeln 4) und 5) lassen sich nun auf folgende Art darstellen:

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}\varDelta'^2&=\sin\tfrac{1}{2}(h'-h_1')^2\left\{1+\frac{\cos h'\cos h_1'\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2}{\sin\tfrac{1}{2}(h'-h_1')^2}\right\}\\&=\cos\tfrac{1}{2}(h'+h_1')^2\left\{1-\frac{\cos h'\cos h_1'\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2}{\cos\tfrac{1}{2}(h'+h_1')^2}\right\},\\\cos\tfrac{1}{2}\varDelta'^2&=\cos\tfrac{1}{2}(h'-h_1')^2\left\{1-\frac{\cos h'\cos h_1'\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2}{\cos\tfrac{1}{2}(h'-h_1')^2}\right\}\\&=\sin\tfrac{1}{2}(h'+h_1')^2\left\{1+\frac{\cos h'\cos h_1'\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2}{\sin\tfrac{1}{2}(h'+h_1')^2}\right\};\end{aligned}$$

und durch Einführung von Hülfswinkeln kann man jetzt aus diesen Formeln eben so viele zur logarithmischen Berechnung von $\varDelta'$ bequeme Formeln ableiten.

Die Borda'sche Formel erhält man aus der zweiten der vier vorstehenden Gleichungen, wenn man

$$\sin\varphi=\sqrt{\frac{\cos h'\cos h_1'\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2}{\cos\tfrac{1}{2}(h'+h_1')^2}},$$

also nach 3)

$$\sin\varphi=\sqrt{\frac{\cos s\cos(s-\varDelta)\cos h'\cos h_1'}{\cos h\cos h_1\cos\tfrac{1}{2}(h'+h_1')^2}}$$

setzt, weil dann

$$\sin\tfrac{1}{2}\varDelta' = \cos\tfrac{1}{2}(h'+h_1')\cos\varphi$$

ist, so dass man also die beiden folgenden sehr bequemen Formeln zur Berechnung von $\varDelta'$ hat:

$$6)\quad \begin{cases} \sin\varphi = \sqrt{\dfrac{\cos s\cos(s-\varDelta)\cos h'\cos h_1'}{\cos h\cos h_1\cos\frac{1}{2}(h'+h_1')^2}}, \\ \sin\frac{1}{2}\varDelta' = \cos\frac{1}{2}(h'+h_1')\cos\varphi; \end{cases}$$

oder, was ich aber für kaum so zweckmässig halte, wie vorstehende Schreibart, wie **Borda** die Formeln schreibt:

$$7)\quad \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{1}{\cos\frac{1}{2}(h'+h_1')}\sqrt{\dfrac{\cos s\cos(s-\varDelta)\cos h'\cos h_1'}{\cos h\cos h_1}}, \\ \sin\frac{1}{2}\varDelta' = \cos\frac{1}{2}(h'+h_1')\cos\varphi. \end{cases}$$

Weil bei dieser Methode der Hülfswinkel φ mittelst seines Sinus gefunden wird, was bekanntlich durch die Tafeln nicht immer mit aller wünschenswerthen Schärfe möglich ist, so scheint es mir zweckmässig, die Methode so abzuändern, dass der Hülfswinkel durch seine Tangente erhalten wird, wobei bekanntlich rücksichtlich der Schärfe nie etwas zu wünschen übrig bleibt; dies ist z. B. möglich mittelst der Formel

$$\cos\tfrac{1}{2}\varDelta'^2 = \sin\tfrac{1}{2}(h'+h_1')^2\left\{1+\frac{\cos h'\cos h_1'\cos\frac{1}{2}\varDelta^2}{\sin\frac{1}{2}(h'+h_1')^2}\right\},$$

weil aus dieser Formel, wenn man

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{\frac{\cos h'\cos h_1'\cos\frac{1}{2}\varDelta^2}{\sin\frac{1}{2}(h'+h_1')^2}},$$

also nach 3)

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{\frac{\cos s\cos(s-\varDelta)\cos h'\cos h_1'}{\cos h\cos h_1\sin\frac{1}{2}(h'+h_1')^2}}$$

setzt, sogleich

$$\cos\tfrac{1}{2}\varDelta' = \frac{\sin\frac{1}{2}(h'+h_1')}{\cos\varphi}$$

folgt, und man daher zur Bestimmung der wahren Distanz die Formeln:

$$8)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\varphi = \sqrt{\dfrac{\cos s\cos(s-\varDelta)\cos h'\cos h_1'}{\cos h\cos h_1\sin\frac{1}{2}(h'+h_1')^2}}, \\ \cos\frac{1}{2}\varDelta' = \sin\frac{1}{2}(h'+h_1')\sec\varphi; \end{cases}$$

oder

$$9)\quad \begin{cases} \tang\varphi = \dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}(h'+h_1')}\sqrt{\dfrac{\cos s\cos(s-\varDelta)\cos h'\cos h_1'}{\cos h\cos h_1}}, \\ \cos\frac{1}{2}\varDelta' = \sin\frac{1}{2}(h'+h_1')\sec\varphi \end{cases}$$

hat.

Dass man aus den obigen Fundamental-Gleichungen noch andere solche zur logarithmischen Rechnung bequeme Formeln ableiten können würde, ist klar, was aber einer weiteren Erläuterung an diesem Orte nicht bedarf.

Bei dem Gebrauch aller dieser Formeln wird die wahre Distanz erhalten, indem man zuerst die halbe wahre Distanz berechnet, und dieselbe dann mit Zwei multiplicirt. Ist nun aber die berechnete halbe wahre Distanz mit einer kleinen Ungenauigkeit behaftet, die sich bei dem Gebrauche der Tafeln sehr selten ganz wird vermeiden lassen, so wird natürlich die daraus durch Verdoppelung abgeleitete ganze wahre Distanz mit einem doppelt so grossen Fehler behaftet sein. Aus diesem Grunde bin ich geneigt, Formeln, welche unmittelbar die ganze wahre Distanz ohne alle Zweideutigkeit liefern, den Vorzug einzuräumen, insofern dieselben eine eben so leichte numerische Rechnung wie die vorhergehenden Formeln für die halbe wahre Distanz gestatten. Solche Formeln kann man aus den obigen Fundamental-Gleichungen auf folgende Art ableiten.

Wenn man die beiden aus dem Obigen bekannten Gleichungen:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varDelta'^2 = \cos\tfrac{1}{2}(h'-h_1')^2 - \cos h'\cos h_1'\sin\tfrac{1}{2}A^2,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\varDelta'^2 = \sin\tfrac{1}{2}(h'-h_1')^2 + \cos h'\cos h_1'\sin\tfrac{1}{2}A^2;$$

und eben so die beiden aus dem Obigen bekannten Gleichungen:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varDelta'^2 = \sin\tfrac{1}{2}(h'+h_1')^2 + \cos h'\cos h_1'\cos\tfrac{1}{2}A^2,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\varDelta'^2 = \cos\tfrac{1}{2}(h'+h_1')^2 - \cos h'\cos h_1'\cos\tfrac{1}{2}A^2;$$

durch Subtraction mit einander verbindet, so erhält man nach bekannten goniometrischen Formeln:

$$\cos\varDelta' = \cos(h'-h_1') - 2\cos h'\cos h_1'\sin\tfrac{1}{2}A^2,$$

$$\cos\varDelta' = -\cos(h'+h_1') + 2\cos h'\cos h_1'\cos\tfrac{1}{2}A^2;$$

oder:

$$\cos\varDelta' = \cos(h'-h_1')\{1-\frac{2\cos h'\cos h_1'\sin\frac{1}{2}A^2}{\cos(h'-h_1')}\},$$

$$\cos\varDelta' = -\cos(h'+h_1')\{1-\frac{2\cos h'\cos h_1'\cos\frac{1}{2}A^2}{\cos(h'+h_1')}\}.$$

Dass die Grösse

$$\frac{2\cos h'\cos h_1'\sin\frac{1}{2}A^2}{\cos(h'-h_1')}$$

stets positiv ist, erhellet auf der Stelle; dieselbe kann aber kleiner oder grösser als die Einheit sein, was man, wenn man ihren Logarithmus berechnet, sogleich daran erkennt, ob dieser Logarithmus sich negativ oder positiv ergiebt. Ergiebt sich der Logarithmus negativ, so berechne man den Hülfswinkel φ mittelst der Formel

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{2\cos h'\cos h_1'\sin\frac{1}{2}A^2}{\cos(h'-h_1')}},$$

oder nach 3) mittelst der Formel

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{2\cos h'\cos h_1'\sin(s-h)\sin(s-h_1)}{\cos h\cos h_1\cos(h'-h_1')}},$$

wo dann nach dem Obigen

$$\cos\varDelta' = \cos(h'-h_1')\sin\varphi^2$$

ist; ergiebt sich dagegen der Logarithmus positiv, so berechne man φ mittelst der Formel

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\cos(h'-h_1')}{2\cos h'\cos h_1'\sin\frac{1}{2}A^2}},$$

oder nach 3) mittelst der Formel

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\cos h\cos h_1\cos(h'-h_1')}{2\cos h'\cos h_1'\sin(s-h)\sin(s-h_1)}},$$

wo dann nach dem Obigen

$$\cos\varDelta' = \cos(h'-h_1')(1-\frac{1}{\cos\varphi^2}) = -\cos(h'-h_1')\tang\varphi^2$$

ist.

Diese beiden Fälle lassen sich in die folgende einfache, praktisch sehr leicht anwendbare Regel, welche ich zu Rechnungen dieser Art hauptsächlich zu empfehlen mir erlauben möchte, zusammenfassen:

Man berechne den Winkel φ mittelst der Formel:

$$\log\cos\varphi = \pm\log\sqrt{\frac{2\cos h'\cos h_1'\sin(s-h)\sin(s-h_1)}{\cos h\cos h_1\cos(h'-h_1')}},$$

indem man in dieser Formel das Zeichen immer so nimmt, dass $\log\cos\varphi$ negativ wird; dann ist

$$\cos\Delta' = \cos(h'-h_1')\sin\varphi^2 \quad \text{oder} \quad \cos\Delta' = -\cos(h'-h_1')\tang\varphi^2,$$

jenachdem man in der Formel für $\log\cos\varphi$ das obere oder das untere Zeichen hat nehmen müssen.

Es erhellet übrigens sogleich, dass man, wenn man will, diese Regel auch auf folgenden Ausdruck bringen kann:

Man berechne den Winkel φ mittelst der Formel

$$\log\sin\varphi = \pm\log\sqrt{\frac{2\cos h'\cos h_1'\sin(s-h)\sin(s-h_1)}{\cos h\cos h_1\cos(h'-h_1')}},$$

indem man in dieser Formel das Zeichen immer so nimmt, dass $\log\sin\varphi$ negativ wird; dann ist

$$\cos\Delta' = \cos(h'-h_1')\cos\varphi^2 \quad \text{oder} \quad \cos\Delta' = -\cos(h'-h_1')\cot\varphi^2,$$

jenachdem man in der Formel für $\log\sin\varphi$ das obere oder untere Zeichen hat nehmen müssen.

Da Δ' nie 180° übersteigt, so kann bei der Anwendung dieser leichten Regeln offenbar nie eine Zweideutigkeit bleiben, wie man Δ' zu nehmen hat, ob nämlich diese Distanz kleiner oder grösser als 90° ist, und ich halte daher diese bis jetzt noch nicht bekannte Regel in der That für besonders bequem und genau, bin auch aus den oben angegebenen Gründen allerdings geneigt, sie der Borda'schen Formel vorzuziehen.

Die bekannte, von Mendoza gegebene Formel hat wohl hauptsächlich den Zweck, die Rechnung mit Logarithmen zu umgehen, und mit den sogenannten natürlichen Linien oder Functionen auszukommen, wobei man sich aber besonderer, ziemlich ausgedehnter Tafeln bedienen muss. Zu einer ähnlichen Formel kann man auf folgende Art gelangen.

Die Gleichung 1) bringt man sogleich auf die folgende Form:

$$\cos h\cos h_1\cos\Delta' - \cos h\cos h_1\sin h'\sin h_1'$$
$$= \cos h'\cos h_1'\cos\Delta - \sin h\sin h_1\cos h'\cos h_1'.$$

Nun ist aber nach einer bekannten goniometrischen Formel:

$$2\cos h\cos h_1 = \cos(h-h_1) + \cos(h+h_1),$$

also

$$4\cos h\cos h_1 \sin h' = 2\cos(h-h_1)\sin h' + 2\cos(h+h_1)\sin h'$$
$$= \sin(h-h_1+h') - \sin(h-h_1-h') + \sin(h+h_1+h') - \sin(h+h_1-h'),$$

und folglich

$$\begin{aligned}
&8\cos h\cos h_1 \sin h' \sin h_1{}' \\
= \;& 2\sin(h-h_1+h')\sin h_1{}' - 2\sin(h-h_1-h')\sin h_1{}' \\
&+ 2\sin(h+h_1+h')\sin h_1{}' - 2\sin(h+h_1-h')\sin h_1{}' \\
= \;& \cos(h-h_1+h'-h_1{}') - \cos(h-h_1+h'+h_1{}') \\
&- \cos(h-h_1-h'-h_1{}') + \cos(h-h_1-h'+h_1{}') \\
&+ \cos(h+h_1+h'-h_1{}') - \cos(h+h_1+h'+h_1{}') \\
&- \cos(h+h_1-h'-h_1{}') + \cos(h+h_1-h'+h_1{}'),
\end{aligned}$$

also, wenn man h, h_1 und h', $h_1{}'$ gegen einander vertauscht:

$$\begin{aligned}
&8\sin h\sin h_1 \cos h' \cos h_1{}' \\
= \;& \cos(h'-h_1{}'+h-h_1) - \cos(h'-h_1{}'+h+h_1) \\
&- \cos(h'-h_1{}'-h-h_1) + \cos(h'-h_1{}'-h+h_1) \\
&+ \cos(h'+h_1{}'+h-h_1) - \cos(h'+h_1{}'+h+h_1) \\
&- \cos(h'+h_1{}'-h-h_1) + \cos(h'+h_1{}'-h+h_1) \\
= \;& \cos(h-h_1+h'-h_1{}') - \cos(h+h_1+h'-h_1{}') \\
&- \cos(h+h_1-h'+h_1{}') + \cos(h-h_1-h'+h_1{}') \\
&+ \cos(h-h_1+h'+h_1{}') - \cos(h+h_1+h'+h_1{}') \\
&- \cos(h+h_1-h'-h_1{}') + \cos(h-h_1-h'-h_1{}'),
\end{aligned}$$

folglich, weil

$$8\cos h\cos h_1\cos\Delta' - 8\cos h\cos h_1 \sin h' \sin h_1{}'$$
$$= 8\cos h'\cos h_1{}'\cos\Delta - 8\sin h\sin h_1\cos h'\cos h_1{}'$$

ist, wenn man in diese Gleichung die obigen Ausdrücke einführt, aufhebt, was sich aufheben lässt, und zugleich die nöthigen Reductionen vornimmt:

$$\begin{aligned}4\cos h\cos h_1\cos\varDelta' = 4\cos h'\cos h_1'\cos\varDelta &+ \cos\{(h+h_1)+(h'-h_1')\}\\ &+\cos\{(h+h_1)-(h'-h_1')\}\\ &-\cos\{(h-h_1)+(h'+h_1')\}\\ &-\cos\{(h-h_1)-(h'+h_1')\}\\ = 4\cos h'\cos h_1'\cos\varDelta &+ \cos\{(h+h')+(h_1-h_1')\}\\ &+\cos\{(h-h')+(h_1+h_1')\}\\ &-\cos\{(h+h')-(h_1-h_1')\}\\ &-\cos\{(h-h')-(h_1+h_1')\}.\end{aligned}$$

Ferner ist

$$2\cos h\cos h_1\cos\varDelta' = \{\cos(h-h_1)+\cos(h+h_1)\}\cos\varDelta'$$

und

$$\begin{aligned}4\cos h'\cos h_1'\cos\varDelta &= 2\cos(h'-h_1')\cos\varDelta + 2\cos(h'+h_1')\cos\varDelta\\ &= \cos(h'-h_1'-\varDelta)+\cos(h'-h_1'+\varDelta)\\ &\quad+\cos(h'+h_1'-\varDelta)+\cos(h'+h_1'+\varDelta),\end{aligned}$$

folglich nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}2\{\cos(h-h_1)+\cos(h+h_1)\}\cos\varDelta' = &\quad\cos(h'-h_1'-\varDelta)\\ &+\cos(h'-h_1'+\varDelta)\\ &+\cos(h'+h_1'-\varDelta)\\ &+\cos(h'+h_1'+\varDelta)\\ &+\cos\{(h+h_1)+(h'-h_1')\}\\ &+\cos\{(h+h_1)-(h'-h_1')\}\\ &-\cos\{(h-h_1)+(h'+h_1')\}\\ &-\cos\{(h-h_1)-(h'+h_1')\}.\end{aligned}$$

Berechnet man also die Grössen:

$$\begin{aligned}M = &\quad\cos(h'-h_1'-\varDelta)\\ &+\cos(h'-h_1'+\varDelta)\\ &+\cos(h'+h_1'-\varDelta)\\ &+\cos(h'+h_1'+\varDelta)\\ &+\cos\{(h+h_1)+(h'-h_1')\}\\ &+\cos\{(h+h_1)-(h'-h_1')\}\\ &-\cos\{(h-h_1)+(h'+h_1')\}\\ &-\cos\{(h-h_1)-(h'+h_1')\}\end{aligned}$$

und

$$N = 2\{\cos(h-h_1)+\cos(h+h_1)\},$$

was durch blosse Addition und Subtraction natürlicher Cosinusse geschieht, so ist

$$\cos\Delta' = \frac{M}{N}.$$

Wenn man in der vorher gefundenen Formel

$$\begin{aligned}4\cos h\cos h_1\cos\Delta' = 4\cos h'\cos h_1'\cos\Delta &+ \cos\{(h+h')+(h_1-h_1')\}\\ &+\cos\{(h-h')+(h_1+h_1')\}\\ &-\cos\{(h+h')-(h_1-h_1')\}\\ &-\cos\{(h-h')-(h_1+h_1')\}\end{aligned}$$

die vier unter einander stehenden Cosinusse rechts vom Gleichheitszeichen nach den bekannten goniometrischen Formeln entwickelt, und aufhebt, was sich aufheben lässt, so erhält man die folgende Formel:

$$10)\quad \left\{\begin{aligned}\cos\Delta' = \frac{\cos h'\cos h_1'}{\cos h\cos h_1}\cos\Delta &- \frac{\sin(h-h')\sin(h_1+h_1')}{2\cos h\cos h_1}\\ &- \frac{\sin(h_1-h_1')\sin(h+h')}{2\cos h\cos h_1},\end{aligned}\right.$$

oder

$$11)\quad \left\{\begin{aligned}\cos\Delta' = \frac{2\cos h'\cos h_1'}{2\cos h\cos h_1}\cos\Delta &- \frac{\sin(h-h')\sin(h_1+h_1')}{2\cos h\cos h_1}\\ &- \frac{\sin(h_1-h_1')\sin(h+h')}{2\cos h\cos h_1},\end{aligned}\right.$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$12)\qquad \mathfrak{M} = 2\cos h\cos h_1$$

setzt:

$$13)\quad \left\{\begin{aligned}\cos\Delta' = \frac{2\cos h'\cos h_1'}{\mathfrak{M}}\cos\Delta &- \frac{\sin(h-h')\sin(h_1+h_1')}{\mathfrak{M}}\\ &- \frac{\sin(h_1-h_1')\sin(h+h')}{\mathfrak{M}},\end{aligned}\right.$$

oder, wenn man noch

$$14)\quad \left\{\begin{aligned}P = \frac{2\cos h'\cos h_1'}{\mathfrak{M}}\cos\Delta,\quad Q &= \frac{\sin(h-h')\sin(h_1+h_1')}{\mathfrak{M}},\\ R &= \frac{\sin(h_1-h_1')\sin(h+h')}{\mathfrak{M}}\end{aligned}\right.$$

setzt:

15) $$\cos\Delta' = P - Q - R.$$

Diese Formel, wenn dieselbe auch nicht ganz zur Behandlung mit Logarithmen eingerichtet ist, halte ich dessenungeachtet für vorzüglich bequem und möchte sie zum Gebrauche besonders empfehlen. Einige Mühe und Aufmerksamkeit erfordert bei dieser ganz genauen Formel eigentlich nur die Berechnung des ersten Gliedes

$$P = \frac{\cos h' \cos h_1'}{\cos h \cos h_1} \cos\Delta = \frac{2\cos h' \cos h_1'}{2\cos h \cos h_1} \cos\Delta;$$

denn weil die beiden andern Glieder

$$Q = \frac{\sin(h-h')\sin(h_1+h_1')}{2\cos h \cos h_1}, \quad R = \frac{\sin(h_1-h_1')\sin(h+h')}{2\cos h \cos h_1}$$

ihren absoluten Werthen nach immer sehr klein sind, und deshalb gewissermassen als blosse Correctionsglieder in Bezug auf das erste Glied zu betrachten sind, so ist ihre Berechnung ungemein leicht und eigentlich gar nicht in Anschlag zu bringen, wobei immer festzuhalten ist, dass die Formel durchaus keine blosse Näherungsformel, sondern eine ganz genaue Formel ist. Besonders bequem wird die Rechnung, wenn man neben der Tafel der trigonometrischen Logarithmen auch eine Tafel der natürlichen Linien oder Functionen besitzt*), die sich bekanntlich jetzt schon in vielen Sammlungen nautischer Tafeln vorfindet, so dass also diese Sammlung durch Hinzufügung der in Rede stehenden Tafel nicht mit einer ganz neuen Tafel vermehrt wird. Wollte man sich eine solche Vermehrung nicht gestatten, so könnten bei der Rechnung nach obiger Formel die sogenannten Additions- und Subtractions-Logarithmen gute Dienste leisten; aber auch ohne dieselben ist die Rechnung nach obiger Formel sehr leicht, und zugleich ist man bei deren Gebrauch Irrungen nicht leicht ausgesetzt. Das folgende, absichtlich mit siebenstelligen Logarithmen nach dieser Formel berechnete Beispiel wird hoffentlich die Leichtigkeit und Kürze der Rechnung zeigen.

$h = 20^0.36'.22''$	$h_1 = 25^0.\ 7'.\ 5''$	$\Delta = 103^0.19'.49$
$h' = 20\ .34\ .\ 2$	$h_1' = 25\ .56\ .\ 6$	
$h - h' = \quad 2\ .20$	$h_1 - h_1' = -\ 49\ .\ 1$	
$h + h' = 41\ .10\ .24$	$h_1 + h_1' = 51\ .\ 3\ .11$	

*) Was aber natürlich durchaus nicht unbedingt nöthig ist.

$$
\begin{array}{r}
0{,}3010300 \\
9{,}9712861 \\
\underline{9{,}9568574} \\
\log \mathfrak{A} = 0{,}2291735 \\
\mathrm{cd}\log \mathfrak{A} = 9{,}7708265
\end{array}
$$

$0{,}3010300$	$6{,}8317029$	$8{,}1540550_n$
$9{,}9713968$	$9{,}8908279$	$9{,}8184497$
$9{,}9539002$	$9{,}7708265$	$9{,}7708265$
$9{,}3627914_n$	$\log Q = 0{,}4933573 - 4$	$\log R = 0{,}7433312 - 3_n$
$9{,}7708265$		
$\log P = 0{,}3599449 - 1_n$	$P = -0{,}2290577$	
9303	$Q = 0{,}0003114$	
146	$-0{,}2293691$	
133	$R = -0{,}0055377$	
130	$\cos\Delta' = -0{,}2238314$	
	$\Delta' = 102^\circ.56'.3''$	

Rechnet man bloss mit fünfstelligen Logarithmen, so nimmt die Rechnung folgende Gestalt an und ist in dieser Form in ungemein kurzer Zeit zu erledigen:

$$
\begin{array}{r}
0{,}30103 \\
9{,}97129 \\
\underline{9{,}95686} \\
\log \mathfrak{A} = 0{,}22918 \\
\mathrm{cd}\log \mathfrak{A} = 9{,}77082
\end{array}
$$

$9{,}30103$	$6{,}83170$	$8{,}15406_n$
$9{,}97140$	$9{,}89083$	$9{,}81845$
$9{,}95390$	$9{,}77082$	$9{,}77082$
$9{,}36279_n$	$\log Q = 0{,}49335 - 4$	$\log R = 0{,}74333 - 3_n$
$9{,}77082$		
$\log P = 0{,}35994 - 1_n$	$P = -0{,}22906$	
	$Q = 0{,}00031$	
	$-0{,}22937$	
	$R = -0{,}00554$	
	$\cos\Delta' = -0{,}22383$	
	$\Delta' = 102^\circ.56'.2''$	

was sehr nahe mit dem Obigen übereinstimmt. Hätte ich mich bei beiden Rechnungen nicht mit ganzen Secunden begnügt und wirkliche genau berechnete fünfstellige Tafeln gebraucht, nicht bloss bei den siebenstelligen die Abkürzungen in üblicher Weise bis auf fünf Stellen vorgenommen, so würde wahrscheinlich noch eine völlige Uebereinstimmung in den ganzen Secunden Statt gefunden haben. Ich glaube mich daher wohl zu der Ansicht berechtigt halten zu dürfen, dass die obige ganz genaue Methode zu dem praktischen Gebrauche auf der See vorzüglich geeignet ist, und möchte sie deshalb dazu empfehlen. Auch das scheint mir für sie zu sprechen, dass man die betreffende Formel sehr leicht im Kopfe behalten kann, wovon man sich bei näherer Ansicht derselben sogleich überzeugen wird *). Die gewöhnlichen vorbereitenden Rechnungen, um aus den beobachteten Höhen die wahren abzuleiten, sind natürlich bei allen Methoden ganz dieselben und werden in jedem nautischen Lehrbuche ausführlich gelehrt, weshalb hier nichts weiter über dieselben zu sagen ist.

Dieses Exempel will ich nun auch noch nach der folgenden von mir oben gegebenen Regel berechnen:

Man berechne den Winkel φ mittelst der Formel

$$\log\cos\varphi = \pm \log\sqrt{\frac{2\cos h'\cos h_1'\sin(s-h)\sin(s-h_1)}{\cos h\cos h_1\cos(h'-h_1')}},$$

indem man in dieser Formel das Zeichen immer so nimmt, dass $\log\cos\varphi$ negativ wird; dann ist

$$\cos\Delta' = \cos(h'-h_1')\sin\varphi^2 \quad \text{oder} \quad \cos\Delta' = -\cos(h'-h_1')\tang\varphi^2,$$

jenachdem man in der Formel für $\log\cos\varphi$ hat das obere oder das untere Zeichen nehmen müssen.

Weshalb ich diese Regel, die ungefähr gerade eben so viel Rechnung erfordert wie die **Borda**'sche Regel, dieser letzteren vorziehe, habe ich oben angegeben.

$$\begin{aligned}
h &= 20^\circ.36'.22''\\
h_1 &= 25\ .\ 7\ .\ 5\\
\Delta &= 103\ .19\ .49\\
2s &= 149\ .\ 3\ .16\\
s &= 74\ .31\ .38\\
s-h &= 53\ .55\ .16\\
s-h_1 &= 49\ .24\ .33\\
h' &= 20\ .34\ .\ 2\\
h_1' &= 25\ .56\ .\ 6\\
h'-h_1' &= -5\ .22\ .\ 4
\end{aligned}$$

*) Eine praktische Rechnungsregel s. m. am Ende.

$$\begin{array}{rl}
\log 2 = & 0{,}3010300 \\
\log\cos h' = & 9{,}9713968 \\
\log\cos h_1' = & 9{,}9539002 \\
\log\sin(s-h) = & 9{,}9075225 \\
\log\sin(s-h_1) = & \underline{9{,}8804565} \\
 & 0{,}0143060 \\
 & \underline{0{,}9262348-1} \\
 & \underline{0{,}0880712} \\
2) & 0{,}0440356 \quad \text{(unteres Zeichen)} \\
\log\cos\varphi = & 9{,}9559644 \qquad \varphi = 25^0.22'.4'',4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log\cos h = & 9{,}9712861 \\
\log\cos h_1 = & 9{,}9568574 \\
\log\cos(h'-h_1') = & \underline{9{,}9980913} \\
 & 0{,}9262348-1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log\operatorname{tang}\varphi = & 9{,}6759142 \\
\log.\operatorname{tang}\varphi^2 = & 0{,}3518284-1 \\
\log\cos(h'-h_1') = & \underline{9{,}9980913} \\
\log\cos \varDelta' = & 9{,}3499197_n \qquad \varDelta' = 102^0.56'.2'',9
\end{array}$$

also bis auf ganze Sekunden wie oben: $\varDelta' = 102^0.56'.3''$.

Des grossen praktischen Interesses der Sache wegen will ich nun noch zeigen, wie sich unsere Aufgabe durch Construction und, gegründet auf diese Construction, bloss mittelst der ebenen Trigonometrie auflösen lässt.

Zu dem Ende sei C der Mittelpunkt der mit einem der Längeneinheit gleichen Halbmesser beschriebenen Sphäre, und S, S_1 und S', S_1' seien respective die scheinbaren und wahren Oerter der beiden beobachteten Gestirne, die Projectionen dieser scheinbaren und wahren Oerter auf dem Horizonte seien aber respective $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}', \mathfrak{S}_1'$; dann ist auf der Stelle klar, dass, indem wir die früher gebrauchten Bezeichnungen auch jetzt beibehalten,

$$S\mathfrak{S} = \sin h, \quad C\mathfrak{S} = \cos h; \quad S_1\mathfrak{S}_1 = \sin h_1, \quad C\mathfrak{S}_1 = \cos h_1;$$

$$S'\mathfrak{S}' = \sin h', \quad C\mathfrak{S}' = \cos h'; \quad S_1'\mathfrak{S}_1' = \sin h_1', \quad C\mathfrak{S}_1' = \cos h_1'$$

ist, so dass also, den Halbmesser der Sphäre natürlich als gegeben angesehen, indem man denselben einer willkührlichen Längeneinheit gleich setzt, die Linien $S\mathfrak{S}$, $C\mathfrak{S}$; $S_1\mathfrak{S}_1$, $C\mathfrak{S}_1$; $S'\mathfrak{S}'$, $C\mathfrak{S}'$; $S_1'\mathfrak{S}_1'$, $C\mathfrak{S}_1'$ bekannt sind, indem man dieselben entweder aus den bekannten Winkeln h, h_1; h', h_1' mittelst rechtwinkliger Dreiecke wirklich construirt oder aus den Tafeln der natürlichen Linien entnimmt und von einem verjüngten oder sogenannten tausendtheiligen Maassstabe abträgt, welche letztere Methode wir hier festhalten wollen, weil die erste Methode das Auftragen der

Winkel h, h_1; h', h_1' mittelst des Transporteurs erfordert, welches bekanntlich immer nur mit einer sehr beschränkten Genauigkeit möglich ist, selbst dann, wenn man sich eines Transporteurs bedient, der mit Hülfe eines Nonius etwa Minuten angiebt.

Auch ohne Figur wird nun sogleich die Richtigkeit der folgenden Construction erhellen. Aus der Linie SS_1, die man entweder mittelst der Formel $SS_1 = 2\sin\frac{1}{2}\varDelta$ berechnet und von dem tausendtheiligen Maassstabe abträgt oder durch Construction eines gleichschenkligen Dreiecks erhält, dessen gleiche Schenkel der angenommenen Längeneinheit gleich sind und dessen Winkel an der Spitze die gegebene wahre Distanz $\varDelta$ ist, als Hypotenuse, und dem absoluten Werthe der Differenz $SS - S_1S_1 = \sin h - \sin h_1$ als der einen Kathete, construire man ein rechtwinkliges Dreieck, so ist die andere Kathete dieses rechtwinkligen Dreiecks die Linie SS_1. Nun construire man das Dreieck SCS_1 aus den drei gegebenen Seiten $CS = \cos h$, $CS_1 = \cos h_1$ und SS_1, trage auf dessen den Winkel C einschliessende Seiten CS und CS_1 die gegebenen Linien $CS' = \cos h'$ und $CS_1' = \cos h_1'$ auf und verbinde die dadurch erhaltenen Punkte S' und S_1' durch die Linie $S'S_1'$ mit einander. Hierauf construire man aus der bekannten Linie $S'S_1'$ und dem gleichfalls bekannten absoluten Werthe der Differenz $S'S' - S_1'S_1' = \sin h' - \sin h_1'$ als den beiden Katheten ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Linie $S'S_1'$ ist. Mit dieser Linie als Grundlinie und zwei der angenommenen Längeneinheit gleichen Schenkeln construire man nun ein gleichschenkliges Dreieck, so ist der Winkel an der Spitze dieses gleichschenkligen Dreiecks die gesuchte wahre Distanz $\varDelta'$, die man aber auch besser mittelst der Formel $\sin\frac{1}{2}\varDelta' = \frac{1}{2}S'S_1'$ aus der vorher gefundenen Linie $S'S_1'$ berechnen kann.

Macht man den Versuch, diese Construction für das oben berechnete Beispiel wirklich auszuführen, so wird man sich auf der Stelle überzeugen, dass dadurch eine auch nur einigermassen erträgliche Genauigkeit gar nicht zu erreichen ist, hauptsächlich wegen der Kleinheit der verschiedenen zu construirenden Grössen. Ich will daher jetzt zeigen, wie diese bloss mit Hülfe der ebenen Trigonometrie gefundene Construction sich berechnen lässt, und wie man mittelst derselben, also ganz ohne sphärische Trigonometrie, auch zu der obigen Grundformel 1), aus welcher alle Auflösungen unseres Problems abgeleitet werden müssen, gelangen kann, was in der That auch der eigentliche Grund ist, welcher mich veranlasst hat, die obige Construction hier zu entwickeln. Der Kürze wegen werde ich im Folgenden die Sinus der scheinbaren und wahren Höhen durch s, s_1 und s', s_1', die

Cosinus dieser Höhen durch c, c_1 und c', c_1' bezeichnen, im Obigen also

$$\begin{aligned}
SS &= \sin h = s, & CS &= \cos h = c;\\
S_1S_1 &= \sin h_1 = s_1, & CS_1 &= \cos h_1 = c_1;\\
S'S' &= \sin h' = s', & CS' &= \cos h' = c';\\
S_1'S_1' &= \sin h_1' = s_1', & CS_1' &= \cos h_1' = c_1'
\end{aligned}$$

setzen; auch werde ich die beiden aus dem Obigen bekannten Linien SS_1 und $S'S_1'$ respective durch a und a' bezeichnen.

Dies vorausgesetzt, haben wir nach dem Obigen zuvörderst zur Berechnung von a die folgende Formel:

$$a = \sqrt{4\sin\tfrac{1}{2}\Delta^2 - (s - s_1)^2}.$$

Die beiden Dreiecke SCS_1 und $S'CS_1'$, deren Seiten $CS = c$, $CS_1 = c_1$, $SS_1 = a$ und $CS' = c'$, $CS_1' = c_1'$, $S'S_1' = a'$ sind, haben den Winkel bei C, welchen wir durch C selbst bezeichnen wollen, gemein; daher ist nach einer bekannten Formel der ebenen Trigonometrie:

$$\cos C = \frac{c^2 + c_1^2 - a^2}{2cc_1}, \quad \cos C = \frac{c'^2 + c_1'^2 - a'^2}{2c'c_1'};$$

woraus sich die Gleichung

$$\frac{c^2 + c_1^2 - a^2}{cc_1} = \frac{c'^2 + c_1'^2 - a'^2}{c'c_1'}$$

ergiebt, welche sogleich zu der Formel

$$a'^2 = c'^2 + c_1'^2 - \frac{c'c_1'}{cc_1}(c^2 + c_1^2 - a^2),$$

oder zu der Formel

$$a'^2 = \frac{c'c_1'}{cc_1}a^2 + \frac{cc_1(c'^2 + c_1'^2) - c'c_1'(c^2 + c_1^2)}{cc_1},$$

oder, wie man leicht findet, zu der Formel

$$a'^2 = \frac{c'c_1'}{cc_1}a^2 - \frac{(cc' - c_1c_1')(cc_1' - c_1c')}{cc_1}$$

führt. Setzen wir nun

$$c' = c + \Delta c, \quad c_1' = c_1 + \Delta c_1,$$

wo Δc und Δc_1 der Null sehr nahe kommende Grössen sind, so ist

$$cc_1' - c_1c' = c(c_1 + \varDelta c_1) - c_1(c + \varDelta c) = c\varDelta c_1 - c_1\varDelta c,$$

also

$$a'^2 = \frac{c'c_1'}{cc_1}a^2 - (cc' - c_1c_1')\frac{c\varDelta c_1 - c_1\varDelta c}{cc_1}$$

oder

$$a'^2 = \frac{c'c_1'}{cc_1}a^2 + (cc' - c_1c_1')\left(\frac{\varDelta c}{c} - \frac{\varDelta c_1}{c_1}\right),$$

folglich

$$a' = \sqrt{\frac{c'c_1'}{cc_1}a^2 + (cc' - c_1c_1')\left(\frac{\varDelta c}{c} - \frac{\varDelta c_1}{c_1}\right)},$$

mittelst welcher Formel sich a' berechnen lässt, wobei man zu bemerken hat, dass der absolute Werth der Grösse

$$(cc' - c_1c_1')\left(\frac{\varDelta c}{c} - \frac{\varDelta c_1}{c_1}\right)$$

immer sehr klein ist.

Endlich hat man nun die Formel

$$a'^2 = 4\sin\tfrac{1}{2}\varDelta'^2 - (s' - s_1')^2,$$

woraus

$$\sin\tfrac{1}{2}\varDelta' = \tfrac{1}{2}\sqrt{a'^2 + (s' - s_1')^2}$$

folgt.

Daher sind die Formeln zur Berechnung von $\varDelta'$ die folgenden:

$$16)\quad \left\{\begin{aligned} a &= \sqrt{4\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2 - (s - s_1)^2},\\ a' &= \sqrt{\frac{c'c_1'}{cc_1}a^2 + (cc' - c_1c_1')\left(\frac{\varDelta c}{c} - \frac{\varDelta c_1}{c_1}\right)},\\ \sin\tfrac{1}{2}\varDelta' &= \tfrac{1}{2}\sqrt{a'^2 + (s' - s_1')^2}; \end{aligned}\right.$$

und diese Formeln sind bloss durch Anwendung der ebenen Trigonometrie gewonnen worden.

Durch Einführung von ein Paar Hülfswinkeln u und v kann man diese Formeln zur logarithmischen Rechnung bequemer einrichten; sie erhalten dann die folgende nicht unelegante Form, wobei es übrigens natürlich nicht meine Absicht sein kann, diese Formeln zum wirklichen praktischen Gebrauche zu empfehlen, indem die hier von mir angestellten Betrachtungen eigentlich nur den Zweck haben, als lehrreiche mathematische Uebungen bei'm Unterrichte zu dienen:

$$17)\quad \begin{cases} \sin u = \dfrac{s-s_1}{2\sin\frac{1}{2}\varDelta}, \quad a = 2\sin\frac{1}{2}\varDelta\cos u = (s-s_1)\cot u; \\ a' = a\sqrt{\dfrac{c'c_1'}{cc_1}}\cdot\sqrt{1+\dfrac{cc_1}{aa}\left(\dfrac{c}{c_1'}-\dfrac{c_1}{c'}\right)\left(\dfrac{\varDelta c}{c}-\dfrac{\varDelta c_1}{c_1}\right)}; \\ \operatorname{tang} v = \dfrac{s'-s_1'}{a'}, \quad \sin\frac{1}{2}\varDelta' = \frac{1}{2}a'\sec v = \frac{1}{2}(s'-s_1')\operatorname{cosec} v. \end{cases}$$

Näherungsweise kann man auch setzen:

$$\sqrt{1+\frac{cc_1}{aa}\left(\frac{c}{c_1'}-\frac{c_1}{c'}\right)\left(\frac{\varDelta c}{c}-\frac{\varDelta c_1}{c_1}\right)} = 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{cc_1}{aa}\left(\frac{c}{c_1'}-\frac{c_1}{c'}\right)\left(\frac{\varDelta c}{c}-\frac{\varDelta c_1}{c_1}\right),$$

also:

$$a' = a\sqrt{\frac{c'c_1'}{cc_1}} + \frac{1}{2a}\left(\frac{c}{c_1'}-\frac{c_1}{c'}\right)\left(\frac{\varDelta c}{c}-\frac{\varDelta c_1}{c_1}\right)\sqrt{cc_1c'c_1'}.$$

Aus den vorhergehenden Formeln wollen wir nun noch die Grundformel 1) ableiten. Weil

$$a^2 = 4\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2 - (s-s_1)^2, \quad \cos C = \frac{c^2+c_1^2-a^2}{2cc_1}$$

ist, so ist

$$\cos C = \frac{c^2+c_1^2+(s-s_1)^2-4\sin\frac{1}{2}\varDelta^2}{2cc_1},$$

also, weil $s^2+c^2=1$, $s_1^2+c_1^2=1$ ist:

$$\cos C = \frac{1-2\sin\frac{1}{2}\varDelta^2-ss_1}{cc_1},$$

und folglich, weil bekanntlich $\cos\varDelta = 1-2\sin\frac{1}{2}\varDelta^2$ ist:

$$\cos C = \frac{\cos\varDelta - ss_1}{cc_1}.$$

Ganz auf ähnliche Art ist

$$a'^2 = 4\sin\tfrac{1}{2}\varDelta'^2-(s'-s_1')^2, \quad \cos C = \frac{c'^2+c_1'^2-a'^2}{2c'c_1'},$$

also ganz wie vorher:

$$\cos C = \frac{\cos\varDelta'-s's_1'}{c'c_1'}.$$

Daher ist

$$\frac{\cos\varDelta-ss_1}{cc_1} = \frac{\cos\varDelta'-s's_1'}{c'c_1'},$$

folglich, wenn man für s, c; s_1, c_1 und s', c'; s_1', c_1' ihre bekannten Werthe aus dem Obigen einführt:

$$\frac{\cos\varDelta-\sin h\sin h_1}{\cos h\cos h_1}=\frac{\cos\varDelta'-\sin h'\sin h_1'}{\cos h'\cos h_1'},$$

welches die zu beweisende Fundamental-Gleichung 1) ist.

Schlussbemerkung.

Die Formel

$$\cos\varDelta'=\frac{\cos h'\cos h_1'}{\cos h\cos h_1}\cos\varDelta-\frac{\sin(h-h')\sin(h_1+h_1')}{2\cos h\cos h_1}$$
$$-\frac{\sin(h_1-h_1')\sin(h+h')}{2\cos h\cos h_1}$$

kann man auch in die folgende leicht zu behaltende Regel fassen:

I. Mit dem Producte der Cosinus der scheinbaren Höhen dividire man in das Product der Cosinus der wahren Höhen und multiplicire den Quotienten mit dem Cosinus der scheinbaren Distanz.

II. Das Product des Sinus der Differenz jeder scheinbaren und der entsprechenden wahren Höhe, indem man die letztere von der ersteren abzieht, und des Sinus der Summe der anderen scheinbaren und entsprechenden wahren Höhe dividire man durch das doppelte Product der Cosinus der scheinbaren Höhen.

III. Die beiden durch II. erhaltenen Grössen subtrahire *) man von der durch I. erhaltenen Grösse, so ist die Differenz der Cosinus der wahren Distanz.

*) Natürlich mit dem gehörigen Zeichen oder algebraisch.

XXXIII.

Schreiben des Herrn Professor James P. Espy in Washington an Herrn Doctor J. G. Flügel, amerikanischen Consul in Leipzig *).

Washington, City, April 30., 1855.

Dear Sir!

The many kind expressions in your letters to me, J hope, in asking you to confer an other favor on me, and thus add one more to the many which J have already received at your hands, will be my sufficient apology.

You are probably aware, that Redfield, Reid, Piddington and Thom have all advocated the doctrine, that the great hurricanes of the East and West Indies are whirlwinds — and that J have examined many of the same storms which they say are whirlwinds, and find, as announced in my Philosophy of Storms, that they are all like the great storms of the United States, in this respect, that the wind in the borders of the storm blows in towards the centre.

Now J wish that the same storms, which have been examined both by these gentlemen and me, be examined again by as many of the savans of Europe as can be induced to undertake the task, either as a favor to you or to me, or for the sake of promoting the true interests of science.

J feel very grateful for the good opinion of my labors, which your numerous correspondents have so kindly expressed; and as

*) Ich erlaube mir alle Meteorologen und Nautiker auf den obigen höchst interessanten Brief des Herrn Professor James P. Espy in Washington besonders aufmerksam zu machen, und wünsche sehr, dass derselbe in einem recht weiten Kreise bekannt werden möge. G.

it is highly important, that the truth should be established and acknowledged on this subject, J respectfully ask you to solicit the attention of the most distinguished meteorologists among your correspondents to the subject. The storms, which J wish them to examine, and report upon, are: those of Redfield, Reid and Piddington, which are contained in my „Philosophy of Storms“ from page 188 to page 277. The data for the examination of these storms, are there copied from the authors themselves; and if the gentlemen, of whom you may ask this favor for me, can do no more than examine the charts in my work with the data there given, and testify as to the correctness of my deductions, in a review of the work, it will do much good to the cause of science, and in a practical point of view, it will be the means of saving many lives and many ships at sea.

Dr. Thom says, that the storms of the Indian Ocean, which he has examined, take place between the N. W. monsoon and the S. E. trade wind, having their northern side in the Monsoon and their southern side in the Trade; and if so, it is highly probable, that the inward motion of the wind will not be direct, but spiral, as he says it is. He acknowledges there is an upward motion in the central regions.

J find by calculation, that it would require 2.600000 tuns of coal to evaporate the water which fell on each square mile, on which 4 inch deep of rain fell, and Thom says from 8 to 10 inches fall on Mauritius in one of these hurricanes. Now the same quantity of latent caloric was received by the air in the region of the cloud as it would receive by burning all this amount of coal at the surface of the earth in the same time that the vapor was condensing: and the same velocity of up-moving current would be produced in the one case as in the other, nearly.

It is impossible to conceive of any means to produce this great condensation of vapor in so short a time, but the cooling process of expansion from the diminishing pressure of an upward motion, equal to about 130° Fahr., at the height of the top of the cloud, where, J find by my experiments, detailed in my Third Report on Meteorology to the Secretary of the Navy, the barometer would have fallen about 24 inches.

I remain

My Dear Sir

Your obliged friend

James P. Espy.

Hon.

J. G. Flügel

Leipzig.

XXXIV.

Miscellen.

Der sehr gründliche Aufsatz Nr. XXXI. in diesem Hefte von Herrn Professor Dr. Lemoch in Lemberg über die aus der excentrischen Aufstellung des Messtisches entstehenden Fehler, welchen der verehrte Herr Verfasser S. 437. mit den folgenden sehr zu beherzigenden Worten, die ich in ihrem ganzen Umfange unterschreibe, schliesst:

„Nach dieser Darstellung also hat selbst eine kleine Excentricität in jeder Hinsicht einen nachtheiligen Einfluss auf das Resultat der Messung, die fehlerhafte Orientirung des Messtisches jedoch, welche eine unausbleibliche Folge der excentrischen Aufstellung ist, halte ich für den grössten dieser Fehler“

veranlasst mich, den Praktikern von Neuem die Methode zu empfehlen, welche ich im Archiv Thl. XVI. Nr. III. S. 39. zur richtigen centrischen Aufstellung des Messtisches angegeben habe, weil ich diese Methode, welche nur eine centrische Drehung des Tischblattes, keine besondere künstliche Einrichtung desselben zur seitlichen Verschiebung u. dergl. voraussetzt, für so einfach, elegant und genau halte, dass sie, wenigstens für mich, nichts zu wünschen übrig lässt, wobei ich ausdrücklich noch hervorhebe, dass diese Methode immer die genaue Aufstellung des auf dem Tische bezeichneten Punktes über dem gegebenen Punkte auf dem Erdboden und die genaue Orientirung des Tisches **zugleich** giebt.

Der Herausgeber.

Druckfehler.

Theil XXIV. Heft I. S. 114. Z. 11. muss es statt $y^3+3ay^2+3a^2y=P$ heissen: $y^3+3by^2+3b^2y=P$.

Literarischer Bericht
XCIII.

Allgemeine Grössenlehre.

Ueber den Begriff des Stetigen und seine Beziehungen zum Calcul. Eine Rede, am 14. Novbr. 1853 in der öffentlichen Sitzung der Kön. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig gehalten von W. Drobisch.

Wir empfehlen die in dieser Rede in sehr würdiger Sprache angestellten allgemeinen Betrachtungen über einen sowohl für die Geometrie, als auch für die neuere strenge Darstellung der mathematischen Analysis so wichtigen Gegenstand der Beachtung unserer Leser recht sehr.

Arithmetik.

Anleitung zum Gebrauch des Rechenschiebers (Sliding-rule — Règle à Calcul). Bearbeitet von C. Hoffmann. Zweite Auflage. Berlin. Gärtner. 1854. 8.

Die Schrift des trefflichen, der Wissenschaft leider zu früh entrissenen **Schulz von Strasznicki** zu Wien über den englischen Rechenschieber ist in einer früheren Nummer des Literar. Ber. angezeigt worden. Neben derselben verdient die vorliegende Schrift wegen ihrer praktischen Deutlichkeit genannt zu werden.

Die Differential- und Integralrechnung und deren Anwendung auf die Geometrie in der Ebene, von Dr.

Edmund Külp, Professor der Physik und Mathematik an der höheren Gewerbschule zu Darmstadt. Abth. I. und II. Darmstadt. Leske. 1854. 8.

Dieses ziemlich ausführliche Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung schliesst in sehr lobenswerther und rühmlicher Weise sich ganz den neueren strengen Ansichten über die allein richtige Darstellung der genannten Wissenschaften an, und liefert den sehr erfreulichen Beweis, dass diese Ansichten auch in Deutschland immer mehr und mehr Boden gewinnen. Freilich ist leider in neuerer und neuester Zeit die deutsche mathematische Literatur noch mit einigen Werken über die Differential- und Integralrechnung verunziert worden, welche diese herrliche, in ihrer ganzen inneren Gliederung an sich so einfache, und, bei **wahrer** Kenntniss ihres Wesens, eine so reiche und so ungemein leichte Anwendung auf alle möglichen Gegenstände des Gebiets der Zahl und des Raums, und der Natur anwendbaren Wissenschaften noch in ein Gewand kleiden, das, wohin man nur den Blick wendet, nichts als Unklarheit, Unrichtigkeit, ja hin und wieder sogar wirklichen Unsinn, erkennen lässt, und rücksichtlich ihrer Verfasser die bedauerliche Ueberzeugung aufdrängt, dass dieselben, bei oft sehr grosser Anmaassung, doch noch nicht zu einer auch nur einigermaassen klaren Idee von dem Wesen und der Bedeutung der sogenannten höheren Analysis gelangt sind. Lässt man nun auch solche Leute, geleitet von dem alten Sprüchworte, dass man einen Mohren niemals weiss waschen kann, gern laufen: so kann und darf dies doch nicht hindern, in einer Zeitschrift, wie die vorliegende, Bücher von der vorher bezeichneten Art für im höchsten Grade verwerflich, *schädlich* und der mathematischen Literatur unwürdig zu erklären, und zwar namentlich **deshalb**, weil sie den Kopf des Anfängers, der unglücklicherweise in ihre Hände fällt, mit Dingen verwirren und verdüstern, die er doch einmal als miserabeln Plunder wieder in einen mit Spinnweben überzogenen Winkel werfen muss, um dann von Neuem anfangen zu lernen. Auffallend ist es nur, wie in Deutschland solche elende Machwerke immer noch Verleger finden können. Das ist in Frankreich ganz anders. Da sieht man jetzt durchgängig solche Darstellungsweisen als etwas Abgethanes, irgend eine Berechtigung auf Berücksichtigung nicht im Entferntesten noch beanspruchen Dürfendes an, und **alle** jetzt dort erscheinenden Werke sind mit der Strenge, Deutlichkeit und Durchsichtigkeit der neuen Darstellungsweise verfasst. **Wir können hier Anfänger nur vor solchen Büchern, wie die vorher im Allgemeinen bezeichneten, dringend warnen; die Reue wird bei Jedem, wer Sinn für wahre Mathematik besitzt, aber das Unglück hatte, in ihren Abgrund zu fallen,** kommen, wenn auch zuweilen vielleicht erst spät; sie wird aber dann um so bitterer sein! Je widerwärtiger uns gerade in neuester Zeit manche Erscheinungen auf dem Gebiete der höheren Analysis in der angedeuteten Weise entgegengetreten sind: desto mehr haben wir uns, wie schon gesagt, über das vorliegende Buch gefreu't. Glücklich sind die Schüler der höheren Gewerbschule in Darmstadt, wenn ihnen gleich vom Anfange an ein solcher Unterricht in der höheren Analysis zu Theil wird; und dass der Unterricht in dieser Weise ertheilt wird und ertheilt werden kann, liefert einen neuen Beweis von der Vortrefflichkeit dieser Lehranstalt, besonders mit Rücksicht auf die von derselben zunächst verfolgte praktische Tendenz.

Wir glauben hiermit im Allgemeinen genug über den Geist gesagt zu haben, in welchem das vorliegende empfehlenswerthe Buch verfasst ist, müssen nun aber auch noch die Vollständigkeit hervorheben, welche es in mehreren Partieen auszeichnet. Dass der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe mit gehöriger Berücksichtigung der Reste eine strenge Entwickelung zu Theil geworden ist, und dass diese Reste bei der Entwickelung der Functionen in Reihen, in der Lehre von den Maximis und Minimis, u. s. w. fortwährend Anwendung gefunden haben, versteht sich nach den obigen einleitenden Bemerkungen von selbst. Ausserdem haben aber auch die bekannten allgemeinen Sätze Cauchy's über die Reihenentwickelung gebührende Berücksichtigung gefunden, so wie in der Integralrechnung der Integral-Logarithmus, die Fourier'schen Reihen, die Gamma-Functionen, die Euler'schen Integrale, die elliptischen Functionen, und manches Andere, was man in Werken von gleichem Umfange nicht findet. Dass auch die Anwendung auf die Geometrie, wenn auch in beschränkterem Umfange, Beachtung gefunden hat, sagt schon der Titel.

Unter allen in neuester Zeit in nicht geringer Anzahl erschienenen Lehrbüchern der Differentialrechnung oder auch der Differential- und Integralrechnung können wir nur das vorliegende Werk zu weiterer Beachtung empfehlen, natürlich bei freudigster Anerkennung des Werthes mancher früher erschienener verdienstlicher Werke, die auch das Archiv nie mit Stillschweigen zu übergehen sich erlaubt hat, wie es bei Schriften von der oben näher bezeichneten Gattung — unter gelegentlicher allgemeiner Hinweisung auf dieselben, wie z. B. oben geschehen — zu thun für das Beste hält.

Geometrie.

Lehrbuch der elementaren Stereometrie und darstellenden Geometrie, zum Gebrauche beim Unterricht in Gewerbsschulen, Gymnasien u. s. w. von Dr. Adam Weiss, Professor der höheren Mathematik und Physik an der kgl. polytechnischen Schule zu Nürnberg. Ansbach. (Gummi). 1854. 8.

Dieses Lehrbuch der Stereometrie gehört zu den ausführlicheren Lehrbüchern dieser Wissenschaft und verdient deshalb zur Beachtung empfohlen zu werden. Besondere Sorgfalt hat der Herr Verfasser zunächst auf die Darstellung der Lehre von der Lage der Linien und Ebenen im Raume, welche ausführlicher als in vielen anderen Lehrbüchern und theilweise in eigenthümlicher Weise behandelt worden ist, verwandt. Eben so sorgfältig ist auch die Lehre von der Berechnung der Körper dargestellt, welche zugleich eine ziemliche Anzahl von Aufgaben enthält, und daher den Lehrern zweckmässigen und reichhaltigen Stoff zu Uebungsaufgaben darbieten wird. Der Obelisk ist dabei nicht unberücksichtigt geblieben, und auch über die Berechnung der Körperräume durch Näherung ist Einiges beigebracht, so wie auch die Berechnung des, z. B. in der Forstwissenschaft, praktisch mehrfach wichtigen Rotations-Paraboloides gelehrt worden ist. Aufgefallen ist es uns, dass das Euler'sche Theorem von den Polyedern und die daraus zu ziehenden schönen Folgerungen ganz fehlen. Dass der Herr Verfasser endlich auch die hauptsächlichsten Grundlehren der descriptiven Geometrie in sein Buch aufgenommen hat, verdient noch besondere Anerkennung.

Wir wiederholen, dass wir dieses Buch hauptsächlich wegen der vielen darin vorkommenden zweckmässigen stereometrischen Uebungsaufgaben und numerischen Beispiele, auch mancher sehr nützlicher praktischer Notizen wegen, Lehrern an höheren Lehranstalten, namentlich an Realschulen, zur Beachtung empfehlen.

Neue Zusätze zum Florentiner Problem. Von W. Drobisch, Professor an der Universität zu Leipzig. Aus den Berichten der Kön. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-physische Classe. 18. März 1854 besonders abgedruckt.

Die frühere Abhandlung des Herrn Verfassers über das Florentiner Problem ist mit gebührendem Lobe im Literar. Ber. Nro.

LXXII. S. 915. angezeigt. Ueber den Inhalt dieser neuen, jedenfalls in ganz gleicher Weise der Beachtung der Leser des Archivs zu empfehlenden Abhandlung, spricht sich der Herr Verf. S. 14. auf folgende Art aus: „Unser geehrter College, Herr d'Arrest, hat vor einiger Zeit die interessante Bemerkung veröffentlicht*), dass auch die gemeine oder Bernoulli'sche Lemniscata zu den ebenen Curven gehört, welche das Florentiner Problem lösen, und zwar insofern, als diese Linien eine stereographische Projection der sphärischen Schleifenlinie ist, welche, nach Viviani's Auflösung seines Problems, die ovalen Oeffnungen in der Kugelfläche, um die es sich handelt, begrenzt. Später hat Herr d'Arrest, was ich seiner Privatmittheilung verdanke, gefunden, dass auch die Cassini'sche Curve, von der bekanntlich die Lemniscata ein specieller Fall ist, sich als stereographische Projection einer sphärischen Curve, nämlich der durch die Gleichung $\cos\psi = m\cos\varphi$ gegebenen, wo φ und ψ rechtwinklige sphärische Coordinaten bedeuten, darstellen lässt. Diese Sätze haben mich veranlasst, nicht nur weiter zu untersuchen, auf welche ebene Curven die stereographischen Projectionen der sphärischen Curven $\sin\psi = m\cos\varphi$ und $\psi = m\varphi$, durch welche, nach Jacob Bernoulli, das Florentiner Problem gelöst wird, führen, sondern auch ihre orthographischen Projectionen allgemeiner zu erörtern als es in meiner früheren Abhandlung geschehen ist, und endlich noch die centralen Projectionen dieser Curven in Betrachtung zu ziehen. Dieselbe Untersuchung kann ohne Schwierigkeiten auch auf die Leibniz'sche Auflösung durch die sphärische Curve $\sin\psi = 1 - m\sin\varphi$ ausgedehnt werden; sie führt aber grösstentheils zu verwickelten Ergebnissen, die, da hier das Interesse hauptsächlich von der Einfachheit der Resultate abhängt, wohl übergangen werden durften."

Wir können den Lesern versichern, dass ihnen diese neuen Zusätze zum Florentiner Problem eine nicht weniger interessante und lehrreiche Lectüre gewähren werden wie die früheren, und erlauben uns, noch besonders auf die wegen der Beziehung zu den elliptischen Functionen der dritten Art besonders interessante Nummer 7 hinzuweisen, weil uns nicht bekannt ist, dass diese Functionen bis jetzt in ähnlicher Weise wie die der ersten und zweiten Art durch Curvenbogen dargestellt worden wären.

---

*) Mitgetheilt aus den astronomischen Nachrichten Nr. 875. im Archiv Thl. XXII. S. 225.

Theoretische Mechanik.

Theorie der Statik gegründet auf die Principien der Dynamik von Zernikow, Lehrer an der Königl. Provinzial-Gewerbeschule zu Erfurt. Erfurt. Villaret. 1854. 8.

Was diese kleine Schrift bezweckt, spricht ihr Titel mit hinreichender Deutlichkeit aus. Wir sind von je her der Meinung gewesen, dass die Lehren der Statik auch auf rein statischem Wege begründet werden müssen, namentlich bei dem ersten Unterrichte. Jede andere Darstellungsweise, wenn wir sie auch keineswegs für unmöglich, ja bei einer allgemeinen Darstellung der gesammten Mechanik im weitesten Umfange, — im Grossen und Ganzen — für recht förderlich halten, nimmt der Statik an *sich*, als eine selbstständige Wissenschaft betrachtet, ihren *schönen* synthetisch- oder analytisch-geometrischen Charakter, und beeinträchtigt die ungemeine Eleganz, die sich namentlich in dieser Wissenschaft, hauptsächlich auch in Bezug auf strenge und völlig erschöpfende systematische Darstellung, für welche keine andere mathematische Disciplin ein gleich lehrreiches Beispiel darbietet, erreichen lässt, sehr, weshalb wir die in dieser Schrift befolgte Methode am wenigsten zu dem Gebrauche bei'm ersten Unterrichte in der Statik empfehlen können.

Praktische Mechanik.

Theorie des Windstosses nebst Anwendung auf Windflügel und Schiffssegel. Von Zernikow, Lehrer an der Königl. Provinzial-Gewerbeschule zu Erfurt. Erfurt. Villaret. 1854.

Es genügt uns, die Existenz dieser Schrift anzuzeigen. Wichtig genug ist ihr Gegenstand für die praktische Mechanik im Allgemeinen, und in Verbindung mit der Theorie des Wasserstosses insbesondere für die Nautik, jedenfalls! Wer aber weiss, wie viele dergleichen Theorieen schon aufgestellt und wie grosse Mühe und Kosten namentlich in England, selbst von Privaten, schon aufgewandt worden sind, um diesen wichtigen Gegenstand einigermaassen zum Abschluss zu bringen, wird mit uns gewiss darin einverstanden sein, dass bei der jetzigen Lage der Sache über den grösseren oder geringeren Werth einer solchen Theorie nur die zahlreichsten und mannigfaltigsten Versuche entscheiden können. In rein theoretischer Beziehung scheint uns von neueren Schriftstellern das treffliche, jetzt aber freilich seltene Werk von Don George Juan: Examen maritime théorique et pratique. Traduit de l'Espagnol par Leveque. A Nantes. 1783. (Zwei Theile in Quart) nicht genug Beachtung zu finden, namentlich rücksichtlich der allgemeinen bei Aufstellung einer solchen Theorie zu befolgenden Methode.

Vermischte Schriften.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Bern. Nr. 310—323. (Vergl. Literar. Ber. Nr. LXXXVIII. S. 7.)

C. Brunner: über ein Mittel, auf chemischem Wege einen luftleeren Raum zu erzeugen. Nr. 310. und 311.

R. Wolf: XLVI. Sonnenflecken-Beobachtungen in der zweiten Hälfte des Jahres 1853.

R. Wolf: LVII. Meteorologische Beobachtungen im October, November und December 1853, nebst Uebersicht der meteorologischen Verhältnisse im Jahre 1853, und Untersuchung der Angaben eines Ozonometers. Nr. 312 und 313.

Wegen der mitgetheilten Ozonometer-Beobachtungen scheint dieser Aufsatz besonders interessant zu sein, da eine längere Reihe solcher Beobachtungen wohl noch nicht vorliegt, Herr R. Wolf aber durch die Güte der Herren Dr. Tscharner und Apotheker Müller über drei auf einander folgende Jahre (1851—1853) disponirt, die er zugleich mit seinen eigenen Beobachtungen vollständig in Tafeln mittheilt, und daraus beachtenswerthe Resultate zieht.

L. R. von Fellenberg, über ein eigenthümliches Fahlerz aus dem Einfischthale im Kanton Wallis. Nr. 317 und 318.

M. Hipp, über seine telegraphische Eisenbahn-Control-Uhr. Nr. 317 und 318. (Jedem, wer sich für galvanische Uhren interessirt, muss dieser Aufsatz zur Beachtung empfohlen werden.)

R. Wolf: XLVIII. Meteorologische Beobachtungen im Winter 1853 auf 1854.

R. Wolf, Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. Nr. 317 und 318. (Biographische Notizen über

Conrad Dasypodius, der jedem Mathematiker bekannt ist, ferner Isaak Habrecht, Johann Jacob Fäsi von Zürich, Josias Simmler, Burkard Leemann, Martin Planta und den in der Geschichte des Streits über die Erfindung der Differentialrechnung bekanntlich vielfach genannten genfer Mathematiker Nicolaus Fatio de Duiller. Von Leonhard Euler erzählt Herr R. Wolf S. 70. eine interessante Anecdote.).

R. Wolf, über die neuesten Veränderungen auf der Sternwarte zu Bern. Nr. 319 und 320.

Derselbe: L. Beobachtungen der Sternschnuppen im Winterhalbjahre 1853 und 1854.

S. 86 theilt Herr R. Wolf folgende Worte des trefflichen und mit Recht berühmten Mathematikers Johann Georg Tralles mit, deren Mittheilung an diesem Orte uns zu besonderer Freude gereicht, weil sie wohl gerade am Schluss dieses Jahres 1854 oder wenigstens in den ersten Tagen des nächsten Jahres in die Hände der meisten Leser des Archivs gelangen werden:

„7. Januar 1791. Wenn gleich die Zeit beständig ähnlich von einer Sekunde zur andern ebenso fortfliesst wie von einem Jahre zum andern, und desswegen der Jahreswechsel keiner andern Betrachtung fähig zu sein scheint, als der Wechsel eines Moments mit dem andern, so hat doch die menschliche Gesellschaft (deren Gang oft auf Resultaten einer praktischen Philosophie beruht, deren Wahrheit die Philosophen noch nicht gefunden haben) es anders betrachtet, und bemerkt vorzüglich die Zeit, wo die Periode von $365^t\ 5^{st}\ 48^m\ 48^s$ sich endet, und *eine neue* anfängt. Ohne mich darum zu kümmern, ob es philosophisch sei oder nicht, das neue Jahr zu feiern, folge ich der grössern Menschenzahl, deren Sache eben nicht Philosophie ist. Unter solchen Umständen stellt man nämlich fromme Betrachtungen an, wenn man gleich die ganze Zeit hindurch, über welche sie sich erstrecken, kein einziges Mal daran gedacht, viel weniger dazu thätig beigetragen hat, dass solche Betrachtungen zu unserer Zufriedenheit ausfallen möchten. Indessen ist Reue und Wille, dass es künftig besser gehen möge, das Resultat, das, wenn es gleich wenig Actives enthält, doch oft nur einen kleinen Stoss erwartet, um in Bewegung zu gerathen.“

R. Wolf: LI. Beobachtungen der Sonnenflecken in der ersten Hälfte des Jahres 1854. — LII. Meteorologische Beobachtungen im Frühling 1854. Nr. 323.

Literarischer Bericht
XCIV.

Mathematische Bibliographie.

Bibliotheca mathematica. Verzeichniss der Bücher über die gesammten Zweige der Mathematik, als: Arithmetik, höhere Analysis, construirende und analytische Geometrie, Mechanik, Astronomie und Geodäsie, welche in Deutschland und dem Auslande vom Jahre 1830 bis Mitte des Jahres 1854 erschienen sind. Herausgegeben von L. A. Sohncke, weil. Professor der Mathematik zu Halle. Leipzig. Engelmann. 1824. Preis 2 Thlr. 10 Ngr.

Diese Bibliotheca mathematica schliesst sich an J. Rogg's Handbuch der mathematischen Literatur. Tübingen. 1830. an, und scheint mit Vollständigkeit zweckmässige Einrichtung zu vereinigen.

Geschichte der Mathematik.

Die Geschichte der höheren Analysis. Von Dr. C. J. Gerhardt. Erste Abtheilung. Die Entdeckung der höheren Analysis. Halle. Schmidt. 1855. 8. 1 Thlr. 10 Sgr.

Herr Dr. Gerhardt erwirbt sich durch diese Schrift ein neues Verdienst um die Geschichte der Mathematik, indem er in derselben die erste, wirklich aus den irgend zugänglichen Quellen geschöpfte Geschichte der höheren Analysis liefert. Diese erste Abtheilung besteht aus den drei folgenden Haupttheilen: Der Grundbegriff der höheren Analysis bis auf Leibniz und Newton. — Die Entwickelung des Algorithmus der höhern Analysis durch Leibniz. — Die Entwickelung der Fluxionsrechnung durch Newton. — Hierzu kommen noch die folgenden Beilagen: I. Ueber die Entstehung und Ausbreitung des decadischen Zahlensystems. II. 26. October 1675. Analysis Tetragonistica ex Centrobarycis. III. 11. Novbr. 1673. Methodi tangentium inversae exempla. —

IV. Nov. 1676. Calculus tangentium differentialis. — V. 11. Julii 1677. Methode generale pour mener les touchantes des lignes Courbes sans calcul, et sans reduction des quantités irrationelles et rompues. — VI. Elementa calculi novi pro differentiis et summis, tangentibus et quadraturis, maximis et minimis, dimensionibus linearum, superficierum, solidorum, aliisque communem calculum transcendentibus. — Die Beilagen II. bis VI., sämmtlich handschriftliche Aufsätze von Leibniz, sind so abgedruckt, dass sie ein möglichst genaues Bild der Originale geben. — Den Verfassern gewisser neuer Lehrbücher der Differentialrechnung möchten wir folgende, uns ganz aus der Seele geschriebene Stelle der Vorrede zu diesem sehr verdienstlichen Buche zur Beherzigung entgegenhalten: „Dies Alles“ — nämlich viele oberflächliche, auf unsicherem Grunde ruhende, von dem wahren Geiste der grossen Erfinder sich ganz und gar entfernende, namentlich den Anfänger vollständig verwirrende Darstellungen der Differentialrechnung, wie sie leider selbst in neuester Zeit sich in einigen Lehrbüchern wieder breit zu machen gesucht haben — „wäre vermieden worden, wenn man die historische Entwickelung der höheren Analysis verfolgt hätte; man würde alsdann in den Untersuchungen der griechischen Geometer aus dem Bereich der höheren Geometrie den Grundbegriff gefunden und durch Zusammenfassen der einzelnen Fälle, in welchen derselbe erscheint, ihn so verallgemeinert haben, wie es die Begründung der höheren Analysis verlangt. Erst in neuerer Zeit haben theoretische Untersuchungen zu der Ueberzeugung geführt, dass eben dieser Begriff der Gränze das alleinige sichere Fundament für die gesammte höhere *Analysis* bildet; die Stimmen indess sind noch nicht zum Schweigen gebracht *), welche meinen, dieser Begriff sei zu dunkel und für diejenigen, welche das Studium der höheren Mathematik beginnen, zu schwierig **). Um auch diesen Vorwurf, den einzig haltbaren, der noch von den Gegnern der Gränzmethode erhoben wird, gründlich zu beseitigen, dürfte die geschichtliche Darstellung am rechten Orte sein, in der gezeigt wird, wie die höhere Analysis ent-

---

*) Wird aber schon geschehen, denn in der Mathematik, wie überall, giebt es nur eine Wahrheit, die sich doch am Ende vollständig Bahn bricht; das Archiv wird gewiss das Seinige wie bisher auch fernerhin redlich thun, den Zeitpunkt, wo jene Stimmen ganz zum Schweigen gebracht sein werden, möglichst bald herbeizuführen.

) Wir meinen: nur zu dunkel und zu schwierig für die mathematischen Köpfe **der Verfasser der im Obigen näher bezeichneten Lehrbücher der höheren Analysis, keineswegs für beim Unterrichte richtig und verständig geleitete Anfänger von gesundem Verstande.

standen, auf welche Quelle sie zurückgeführt werden kann und auf welche Weise sie sich nach und nach herangebildet hat." — Indem wir diese Ansichten über die Wichtigkeit der historischen Entwickelung der höheren Analysis ganz unterschreiben und vollständig zu der unsrigen machen, freuen wir uns ganz besonders, dass diese Geschichte der höheren Analysis ganz in dem in der oben angeführten Stelle sich aussprechenden strengen Geiste, bei der richtigsten und umsichtigsten Würdigung der Arbeiten der neueren strengen Analytiker über die höhere Analysis, verfasst ist, und empfehlen diese Schrift, die, wie schon hervorgehoben, ein wichtiger Beitrag zur Geschichte der Mathematik überhaupt ist, namentlich auch jüngeren Mathematikern zur sorgfältigsten Beachtung und zum sorgfältigsten Studium. Manchem, der das Unglück hatte, in den Abgrund solcher Lehrbücher, wie die oben bezeichneten, und in den Abgrund des Unterrichts ihrer Verfasser zu fallen, wird dann aus diesem vortrefflichen Buche ein Licht aufgehen und dessen sorgfältiges Studium ihn veranlassen, möglichst bald alles früher Erlernte zu vergessen, und den einzig richtigen Weg zu betreten, den schon die grossen Erfinder des höheren Calculs betraten, und der sie zu ihrer grossen Erfindung leitete. Wie überhaupt, versprechen wir uns namentlich auch in **dieser Beziehung** von dem vorliegenden trefflichen Buche einen grossen Nutzen und eine segensreiche Wirkung, weshalb wir auch dem Erscheinen des zweiten Theiles desselben mit Verlangen entgegen sehen.

Den Hohen vorgesetzten Behörden in Berlin und Hannover; ganz besonders aber der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Berlin, zollt die Wissenschaft mit dem Herrn Verfasser den wärmsten Dank, dass sie demselben die kräftigste und erfolgreichste Unterstützung bei seinem verdienstlichen Unternehmen zu Theil werden liessen.

Geometrie.

Geometrische Anschauungslehre für das Unter-Gymnasium. Von Dr. **Franz Mocnik**, k. k. Schulrathe. I. Abtheilung, mit 153 Holzschnitten. Zweite Auflage. Wien. Gerold. 1854. 8. 15 Sgr.

Dies ist keine geometrische Anschauungslehre im Sinne mancher deutscher Pädagogen, sondern ein, allerdings und mit vollstem Rechte mit ganz besonderer Rücksicht auf Anschaulichkeit verfasstes sehr deutliches Lehrbuch der ebenen Geometrie, welches überall bekundet, wie genau der Herr Verfasser das Bedürfniss und das Wesen des ersten eigentlichen geometrischen Unterrichts kennt, und deshalb auch eine grosse Anzahl sehr zweckmässiger, an die Knaben zu richtender Fragen enthält. Dass in einem zu solchem Zwecke verfassten Buche namentlich in den Fragen auf den praktischen Gebrauch der Geometrie Rücksicht genommen worden ist, können wir nur in jeder Beziehung billigen, und empfehlen daher dieses Büchlein zu weiterer Beachtung. Es kommen darin auch selbst manche interessante Dinge vor, die dem Herrn Verfasser eigenthümlich zu sein scheinen, z. B. die Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat auf S. 76., wo der Herr Verfasser eine von der gewöhnlichen abweichende Auflösung dieser Aufgabe giebt, die sich für den Unterricht sehr eignet. Uns wenigstens ist diese Auflösung bis jetzt unbekannt gewesen.

Axonometrische Projectionen der wichtigsten geometrischen Flächen. Vorlegeblätter für die beschreibende Geometrie, zugleich als Catalog einer Modellsammlung von Körpern, die nach den vorgenannten Projectionen ausgeführt worden sind. Von Ferdinand Engel. Mit IX. Figurentafeln. Vorwort von Dr. Joachimsthal, Professor der Universität Halle. Berlin. Müller. 4. 2 Thlr. 20 Ngr.

Diese sehr sauber ausgeführten Projectionen der wichtigsten Flächen sind allerdings ein geeignetes Mittel, um dem *Unterrichte* in der Theorie der Flächen eine grössere Anschaulichkeit zu geben, und verdienen deshalb empfohlen zu werden. Die dargestellten Flächen sind folgende: Fresnel's Wellenfläche für zweiaxige Krystalle. Das dreiaxige Ellipsoid mit zwei Kreisschnitten. Das Ellipsoid mit seinen Krümmungscurven. Das zweischalige Hyperboloid. Dieselbe Fläche mit ihren Krümmungscurven. Das einschalige Hyperboloid mit zwei Kreisschnitten. Dieselbe Fläche mit ihren Krümmungscurven. Das elliptische Paraboloid mit zwei Kreisschnitten. Dieselbe Fläche mit ihren Krümmungscurven. Hyperbolisches Paraboloid. Dieselbe Fläche mit ihren Krümmungscurven. Gerader elliptischer Kegel mit zwei Kreisschnitten. Dieselbe Fläche mit ihren Krümmungslinien. Gerader Kreiskegel mit seinem Scheitelkegel und drei Durchschnitten. Schiefer Kreiskegel mit vier Durchschnitten. Verbindung einer Kugel und eines geraden elliptischen Kegel. Ein Körper, begränzt von zwei Quadraten und vier windschiefen Ebenen. Ein Körper, begränzt von einem Quadrate und einer windschiefen Ebene. Parallelepipedon, durch eine windschiefe Ebene in zwei ungleiche Theile getheilt.

Gerade Schraubenfläche. Schiefe Schraubenfläche. Allgemeine Schraubenfläche. Abwickelbare Schraubenfläche. Dieselbe Fläche mit ihren Krümmungslinien. Viergängige Schraube nebst Mutter. Fünfgängige Schraube nebst Mutter. Windschiefe Fläche. Windschiefe Fläche; elliptischer Keil. Windschiefe Fläche; halber kreisförmiger Keil. Zwei abwickelbare Flächen. Schlangenförmiger Körper. Ringförmiger Körper. Sphärische Curve mit ihrer Polarcurve. Kugel mit vier grössten Kreisen. Kugeldreieck mit seinem symmetrischen und Polardreieck. Verbindung von fünf Würfeln.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Literar. Ber. Nr. XCI. S. 6.)

Jahrgang 1854. XII. Band. 5. Heft. S. 727. Rochleder: Ueber die Constitution der organischen Verbindungen, II. Abtheilung. — S. 738. Haidinger: Einige neuere Ansichten über die Natur der Polarisationsbüschel. — S. 771. Lieben: Ueber die Ursache des plötzlichen Erstarrens übersättigter Salzlösungen unter gewissen Umständen. — S. 783. Grailich: Beitrag zur Theorie der gemischten Farben. (Sehr beachtenswerth.) — S. 847. Kreil: Resultate der magnetischen Beobachtungen zu Prag. — S. 911. Oeltzen: Ergänzungen zur Histoire céleste française und einigen anderen Sterncatalogen. — S. 935. Lichtenfels: Ueber die Theorie der linearen algebraischen Gleichungen. — S. 1014. Spitzer: Ueber die Kriterien des Grössten und Kleinsten bei den Problemen der Variationsrechnung. (Zu sorgfältiger Beachtung sehr zu empfehlen.) — S. 1071. Santini: Osservazioni della II. Cometa dell' Anno 1854, apparsa verso la fine di Marzo, visibile ad occhio nudo, fatte nell' I. R. Osservatorio di Padova. — S. 1074. Haidinger: Pleochroismus einiger Augite und Amphibole. — S. 1085. Lieben: Zusatz zu dem Aufsatze: Ueber die Ursache des plötzlichen Erstarrens übersättigter Salzlösungen unter gewissen Umständen.

Jahrgang 1854. Band XIII. I. Heft. S. 3. Haidinger: Pleochroismus an mehreren einaxigen Krystallen in neuerer Zeit beobachtet. — S. 18. Fritsch: Ergänzung der Belege für eine seculäre Aenderung der Lufttemperatur, nachgewiesen aus vieljährigen, an mehreren Orten angestellten Beobachtungen. — S. 37. v. Littrow: Bemerkungen zu dem folgenden Aufsatze über die Proximitäten der Bahnen der Planeten und Kometen. — S. 38. Grunert: Ueber die Proximitäten der Bahnen der Planeten und Kometen. — S. 201. Grailich: Beitrag zur Theorie der gemischten Farben. Fortsetzung. (Sehr beachtenswerth.) — S. 306. Haidinger: Pleochroismus an einigen zweiaxigen Krystallen, in neuerer Zeit beobachtet. — S. 322. Petrina: Beiträge zur Physik. Fortsetzung.

Jahrgang 1854. Band XIII. 2. Heft. S. 357. Casini: Sulle proprietà delle funzioni algebriche conjugate (con una tavola). — S. 400. Petzval: Ueber die Fortschritte der Photographie in Wien. — S. 410. Grailich und Pekárek: Das Sklerometer, ein Apparat zur genaueren Messung der Härte der Krystalle. — S. 527. Pierre: Beiträge zur Theorie der Gaugain'schen Tangentenboussole. — S. 617. Oeltzen: Nachweis des Vorkommens von Sternen aus den Argelander'schen nördlichen Zonen in anderen Quellen.

Preisaufgabe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien.

Eine der fühlbarsten Lücken unserer gegenwärtigen astronomischen Kenntnisse ist der Mangel irgend umfassender Helligkeitsmessungen von Fixsternen. So sehr verdienstlich die bisherigen Leistungen dieser Art, besonders von Argelander, dann von Heis u. A. sind, so können dieselben doch, da sie lediglich auf Schätzungen mit freiem Auge beruhen, nur als Vorarbeiten betrachtet werden. So lang aber eigentlich photometrische Bestimmungen in grösserer Anzahl fehlen, ist z. B. weder an völlig genügende Sternkarten, noch an genauere Beobachtung der Lichtverhältnisse von sogenannten Veränderlichen zu denken. Da nun andererseits durch die Arbeiten von Steinheil, J. Herschel, Dawes etc. der Weg zu solchen Untersuchungen völlig angebahnt ist, so findet sich die Kaiserliche Akademie veranlasst, folgende Preisfrage auszuschreiben:

Es sind möglichst zahlreiche und möglichst genaue photometrische Bestimmungen von Fixsternen *in solcher* Anordnung und Ausdehnung zu liefern, dass der heutigen Sternkunde dadurch ein bedeutender Fortschritt erwächst.

Preis: Dreihundert Stück k. k. österreichische Münzducaten. Termin der Einsendung: 31. December 1856. Die Ertheilung des Preises erfolgt am 30. Mai 1857.

Preisaufgaben der physikalischen Gesellschaft zu Berlin.

Ein Freund der Naturwissenschaft hat der physikalischen Gesellschaft die Mittel verliehen, bei Gelegenheit der Feier ihres zehnjährigen Bestehens, folgende Preise auszuschreiben:

I. Zwei kleinere Preise von je Einhundert Thaler Gold sollen durch einen vom Vorstande der Gesellschaft gewählten Ausschuss

a) Der besten Arbeit aus dem Gebiete der mathematischen Physik, und

b) Der besten Arbeit aus dem Gebiete der Experimental-Physik

zuerkannt werden, welche im Jahr 1855 entweder als selbständige Schrift oder in dem entsprechenden Jahrgang einer Zeit- oder Gesellschaftsschrift gedruckt, bis zum 1. April des Jahres 1856 zur Bewerbung eingesandt sind.

Zu dieser Bewerbung werden, der Absicht des Gebers gemäss, vorzugsweise solche jüngere deutsche Physiker eingeladen, deren Arbeiten durch die Gewinnung eines dieser Preise in nützlicher Weise gefördert werden können.

Die motivirte Zuerkennung der Preise erfolgt öffentlich in der ersten Sitzung der Gesellschaft im Juli 1856.

II. Ein grösserer Preis von Zweihundert und Fünfzig Thaler Gold soll von einem wie oben gewählten Ausschusse derjenigen ungedruckten und ohne Angabe des Verfassers eingesandten Arbeit zuerkannt werden, welche am befriedigendsten nachstehende Aufgabe löst.

„Die schon früher von einzelnen Naturforschern ausgesprochene Ansicht, dass die Wärme nicht ein besonderer Stoff, sondern nur eine Bewegung der kleinsten Theilchen der sonst vorhandenen Stoffe sei, ist, nachdem sie lange wegen mancher ihr entgegenstehender Schwierigkeiten nicht hatte durchdringen können, in neuerer Zeit theils durch theoretische, theils durch experimentelle Untersuchungen soweit begründet, dass an ihrer Richtigkeit kaum noch zu zweifeln ist. Nach dieser Theorie lässt sich Wärme in mechanische Arbeit und umgekehrt Arbeit in Wärme verwandeln, und die Arbeitsgrösse, welche dabei einer Wärmeeinheit entspricht, und welche man das mechanische Aequivalent der Wärme genannt hat, ist jedenfalls eine der wichtigsten Constanten der ganzen Physik, indem sie nicht nur bei der Bestimmung der Arbeitsfähigkeit der durch Wärme getriebenen Maschinen eine unmittelbare praktische Anwendung findet, sondern auch in vielen anderen Untersuchungen eine bedeutende Rolle spielt. Der Werth dieser Grösse lässt sich durch theoretische Schlüsse aus dem Verhalten verschiedener Körper, besonders der Gase und Dämpfe, ableiten; indessen müssen bei jeder solchen Rechnung mehrere Beobachtungsdata zu Grunde gelegt werden, welche selbst zum Theil noch nicht mit der nöthigen Genauigkeit bekannt sind. Ausserdem ist von Herrn James Prescott Joule eine Reihe von experimentellen Untersuchungen zur unmittelbaren Bestimmung jener Grösse angestellt; aber so werthvoll diese Arbeiten auch unzweifelhaft sind, so liegt es doch in der Natur der Sache, dass bei so schwierigen Versuchen das Resultat immer noch mit einiger Unsicherheit behaftet bleibt, und nur durch vielfach wiederholte Bestimmung derselben Zahl unter möglichst veränderten Umständen kann allmälig der Grad von Genauigkeit und Sicherheit erreicht werden, welcher für diese Constante dringend zu wünschen ist. Demnach würde es für die Wissenschaft sehr nützlich sein, wenn mehrere Physiker sich diesem Gegenstande zuwendeten, und die physikalische Gesellschaft stellt daher, um auch ihrerseits eine Anregung hierzu zu geben, die Aufgabe:

„„das mechanische Aequivalent der Wärme experimentell zu bestimmen.““

Die Darstellung der Versuche muss eine klare Einsicht, nicht nur in die einzelnen Ergebnisse, sondern auch in die angewandten Versuchsweisen und Vorsichtsmassregeln gewähren, und daher von Abbildungen etwaiger neuer Vorrichtungen begleitet sein.

Die Bewerbungsschriften dürfen in deutscher, französischer, englischer oder lateinischer Sprache abgefasst sein. Bei den Zahlenangaben ist der leichteren Vergleichung halber das neufranzösische Mass- und Gewichtssystem und für Temperaturen die Centesimalscale anzuwenden. Schriften, welche auf störende Weise unleserlich geschrieben sind, können von der Bewerbung ausgeschlossen werden.

Die äusserste Frist für die Einsendung der Bewerbungsschriften ist der 14. Januar 1857. Jede derselben ist mit einem Wahlspruch zu versehen und dieser auf der Aussenseite des versiegelten Zettels, welcher den Namen des Verfassers enthält, zu wiederholen.

Die motivirte Zuerkennung des Preises erfolgt öffentlich in der ersten Sitzung der Gesellschaft im Juli 1857. Die zu den nicht gekrönten Abhandlungen gehörigen versiegelten Zettel werden bei derselben Gelegenheit uneröffnet verbrannt. Eine Theilung des Preises findet nicht statt. Die eingegangenen Handschriften sämmtlicher Abhandlungen werden zurückbehalten.

Der Verfasser der gekrönten Abhandlung ist verpflichtet, *dieselbe* binnen Jahresfrist unverändert, wenn auch nach seinem Belieben mit Zusätzen, in den Druck zu geben. Geldschwierigkeiten, die sich dabei einstellen sollten, wird die Gesellschaft nach Massgabe ihrer Mittel zu heben suchen.

Sowohl die Bewerbungsschriften um den grösseren Preis, als die zur Bewerbung um die beiden kleineren Preise bestimmten gedruckten Abhandlungen sind entweder dem Vorsitzenden der Gesellschaft, Prof. Du Bois-Reymond, Neuenburgerstr. 5., oder ihrem Schriftführer, Dr. Krönig, Bernburgerstr. 24., soweit es thunlich ist, postfrei einzusenden.

Sollte unter den Bewerbungsschriften um einen der drei Preise keine des betreffenden Preises würdig erachtet werden, so behält sich der Vorstand vor, über die Verwendung des *ausgesetzten* Preises im Einverständniss mit dem Geber das Weitere zu verfügen, nach Befinden denselben nochmals auszuschreiben.

Berlin, 14. Januar 1855.

Der zeitige Vorstand der physikalischen Gesellschaft.

E. du Bois-Reymond. A. Kroenig. W. Brix.
W. Beetz. R. Clausius. F. Vettin. D. Splitgerber.

Preisaufgabe der Pariser Akademie.

Trouver pour un exposant entier quelconque n les solutions en nombres entiers et inégaux de l'équation $x^n + y^n = z^n$, ou prouver qu'elle n'en a pas quand n est plus grand que 2. Valeur du prix: 3000 Francs. Limite du concours 1^er Avril 1856.

Literarischer Bericht
XCV.

Am 23sten Februar 1855, Morgens bald nach 1 Uhr,

starb

Carl Friedrich Gauss.

Er war am 30sten April 1777 zu Braunschweig geboren, seit 1807 Professor in Göttingen.

Sibi gratulentur Mortales tale tantumque exstitisse

Humani Generis Decus.

Geometrie.

Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. Von Dr. Eduard Heis, Prof. an der Königl. Akademie zu Münster, und Thomas Eschweiler, Director der höheren Bürgerschule zu Köln. Erster Theil. Planimetrie. Köln. (Du Mont-Schauberg.) 1855.

Dieses neue Lehrbuch der Geometrie für Schulen zeichnet sich durch die Einfachheit und Deutlichkeit seiner Darstellung sehr vortheilhaft aus. Ausser den Lehren der gewöhnlichen Elementar-Geometrie enthält es, in sehr verständiger Auswahl, von der sogenannten neueren Geometrie alles Dasjenige, was dem Zwecke der Schule entsprechen möchte, und scheint eben so wie wir dem Grundsatze zu huldigen, dass man mit diesen Dingen auf der Schule ja nicht zu weit gehen dürfe, weil ja die Schule, natürlich neben geometrischen Uebungen mancherlei Art, doch jedenfalls nur hauptsächlich Das lehren und zu dem vollkommensten geistigen Eigenthum der Schüler zu machen suchen muss, was zu dem Verständniss der folgenden Theile der Mathematik unbedingt erforderlich ist, und dabei vorausgesetzt wird. Wie sehr manche Schulen den letzteren Gesichtspunkt in neuerer Zeit aus den Augen gesetzt haben, indem sie — worin nach unserer Ansicht mit ein Hauptgrund der nachher namhaft gemachten Uebelstände liegt — ihre Schüler immer und immer wieder bloss mit Gott weiss was für höchst kunstreichen geometrischen Sätzen und Sätzchen bis zum vollkommensten Ueberdruss und der Erschlaffung ihrer geistigen Kraft quälten *), haben neuerlich sehr unangenehme, auf höheren praktischen Lehranstalten gemachte Erfahrungen bewiesen, wo den auf Gymnasien und Realschulen vorgebildeten Schülern die zum Verständniss der Vorträge über sphärische Trigonometrie, analytische Geometrie und Curvenlehre nöthigen Vorkenntnisse in hohem Grade mangelten. Noch weit eher, als wir von diesen Uebelständen Kenntniss erhielten, haben wir in dem Archiv auf dieselben schon so oft dringend hingewiesen und aufmerksam gemacht **), dass es ganz unnütz sein würde, darüber jetzt noch ein Wort zu verlieren. Aber verhehlen können wir bei dieser Gelegenheit nicht, wie sehr wir durch die auch bis auf den kleinsten Punkt unserer eigenen Ansicht vollkommen entsprechende neueste Verfügung ***) des Hohen Königl. Preussischen Unterrichts-Ministeriums erfreut worden sind, welche in der weisesten und väterlichsten Fürsorge für das künftige Wohl und das künftige Fortkommen der jungen Staatsbürger, befiehlt, dass dergleichen Uebelständen bei Ertheilung des mathematischen Unterrichts unverweilt auf alle mögliche Weise abgeholfen werden solle und müsse.

---

*) Verständigen und rücksichtlich ihrer pädagogischen Zweckmässigkeit wohl überlegten geometrischen Uebungen, die, ohne die übrigen eben so nöthigen und für die höhere und praktische Mathematik theilweise noch nöthigern Theile der Elementar-Mathematik zu vernachlässigen, unausgesetzt anzustellen sind, ihren wohlbegründeten, ausser aller Frage stehenden, grossen Werth absprechen zu wollen, wäre natürlich die grösste Thorheit.

**) Man sehe, um nur ein Beispiel aus neuerer Zeit anzuführen, Thl. XXIII. S. 208. oder auch Thl. XX. Literar. Ber. Nr. LXXVIII. S. 970.

***) So weit unsere Kenntniss reicht vom 20. December 1854. M. s. das Programm des Gymnasiums zu Anclam von Ostern 1855 S. 13. und das des Gymnasiums zu Stargard von Ostern 1855 S. 19.

Dass manche eigenthümliche Beweise und Darstellungsarten, auf die wir hier nicht einzeln hinweisen können, in diesem Buche nicht fehlen, versteht sich bei so kenntnissreichen und gewandten Verfassern von selbst; und da nun das Buch ausserdem auch noch eine ziemliche Anzahl zweckmässiger Uebungsaufgaben enthält, so darf dasselbe unseren Lesern gewiss recht sehr zur Beachtung empfohlen werden. Dem zweiten, die Stereometrie enthaltenden Theile sehen wir mit Verlangen entgegen.

Die Grundlehren der niederen Messkunde, leicht fasslich dargestellt von Dr. Leopold Königer. Frankfurt a. M. (Sauerländer.) 1855. 8.

Dieses Schriftchen enthält auf 80 Seiten die ganze ebene Geometrie, die Stereometrie und ebene Trigonometrie, ja selbst auch die Polygonometrie. Der Versuch, die nöthigsten und wichtigsten Lehren der Mathematik in möglichster Kürze und Einfachheit darzustellen, ist nicht neu. Jeder derartige Versuch erregt ein gewisses Interesse. Aber innere Wahrheit und Strenge wird immer auch die Hauptbedingung bleiben müssen, welcher ein solcher Versuch zu genügen hat. Die Hauptgrundlage, kann man sagen, bildet der auf S. 6. und 7. vorgetragene Satz: Parallele Linien zwischen parallelen Linien sind gleich. Liest man nun aber die Begründung dieses Satzes a. a. O., welche auf einer Art von Gränzenbetrachtung beruhet, so trauet man in der That seinen Augen kaum und frägt sich, wie der Herr Verfasser solche Dinge dem mathematischen Publikum auftischen kann. Diese Begründung ist in der That unter aller Kritik, und wir befinden uns wirklich in Verlegenheit, wenn wir, ohne hier nicht zulässige Weitläufigkeit, dem Herrn Verfasser alle in den betreffenden wenigen Zeilen enthaltenen Fehler nachweisen sollen. Weil wir aber doch als Kritiker etwas zur Widerlegung sagen müssen, so wollen wir nur Folgendes bemerken. Der Herr Verfasser will zeigen, dass $AB=A_1B_1$ ist *). Dies beweist er so. „Nimmt man den Abstand PA_1 unendlich gross an, so ist $\frac{AB-A_1B_1}{PA_1}$ eine unendlich kleine Grösse, die $=0$ zur Grenze hat. Da in diesem Falle die Linien CD und C_1D_1 offenbar einander parallel sind und aus $\frac{AB-A_1B_1}{PA_1}=0$ $AB=A_1B_1$ erhalten wird, so folgt der zu beweisende Satz.“ Wie in aller Welt aber kann der Herr Verfasser daraus, dass PA_1 unendlich gross ist, oder, wie er

*) M. s. seine Figur.

sagt, als unendlich gross angenommen werden soll, schliessen, dass $\frac{AB-A_1B_1}{PA_1}=0$ ist. Dieser Schluss würde doch nur dann gerechtfertigt sein, wenn man sich bestimmt versichert halten könnte, dass der Zähler $AB-A_1B_1$, auf dessen Bestimmung es hier ja eben ankommt, der ja hier eben erst bestimmt werden soll und an sich völlig unbekannt ist, eine endliche bestimmte Grösse wäre oder wenigstens eine solche niemals übersteigen könnte. Ueberhaupt daraus, dass der Nenner eines Bruchs sich dem Unendlichen nähert, schliessen wollen, dass der Bruch selbst, dessen Zähler man gar nicht kennt, auf dessen Bestimmung es eben erst ankommt, Null sein oder sich der Null näheren, und dass also nun der Zähler Null sein müsse, ist eine Schlussweise, welcher ein Epitheton ornans gebührt, das wir hier nicht aussprechen wollen. Es könnte ja auch der Bruch bei in's Unendliche wachsendem Nenner sehr wohl sich der Null nähern, ohne dass der Zähler sich der Null näherte oder Null wäre, wenn derselbe nämlich überhaupt nur eine endliche bestimmte Grösse wäre oder eine solche nie überstiege. Da der ganze Beweis nur ein Fehler ist, so ist dagegen, und eben so auch über den übrigen Inhalt des Büchleins, nichts weiter zu sagen.

Die Entfernungsörter geradliniger Dreiecke. II. Die äusseren Entfernungsörter. Eine geometrische Abhandlung von C. F. A. Jacobi, Professor in Pforta. Mit zwei Figurentafeln. Jena. Frommann. 1854. 4. 1 Thlr.

Diese Schrift ist eine Fortsetzung der in dem Aufsatze Archiv Theil XVII. Nr. XIV. S. 361. ausführlicher besprochenen Schrift, und ganz in derselben Weise wie jener erste Theil verfasst, so dass wir über die vorliegende zweite Abtheilung hier nichts weiter zu sagen brauchen.

Fünf merkwürdige unendliche Reihen für die Sinus und Cosinus vielfacher Bogen und für die Zahlen π und π^2, auf elementar-geometrischem Wege entwickelt. Nach den hinterlassenen Papieren des am 10. November 1853 zu Potsdam verstorbenen Oberstlieutenants Tzahn bearbeitet und zum Besten der hinterbliebenen hülfsbedürftigen Familie desselben herausgegeben und verlegt von Dr. J. W. H. Lehmann. Berlin. (In Commission bei F. Schneider.) 1855. 4.

Herr Doctor Lehmann in Potsdam hat durch die Herausgabe und Verlegung dieser Schrift sich ein dreifaches Verdienst erworben. Erstens dadurch, dass er die auf dem Titel erwähnten fünf merkwürdigen Reihen aus den Papieren des verstorbenen würdigen Oberstlieutenants Tzahn in Potsdam, welcher 20 Jahre lang, natürlich nicht im Sinne der gewöhnlichen Cirkel-Quadrirer, Forschungen über die Quadratur des Kreises anstellte, zum Frommen der Wissenschaft überhaupt veröffentlichte. Zweitens dadurch, dass er mehrere dieser Reihen mit elementar gehaltenen Beweisen, als Producte seines eigenen mathematischen Scharfsinns, versah, oder deren Beweise vervollständigte und ergänzte. Drittens dadurch, dass er diese Schrift in Selbstverlag übernahm, ihren Druck aus eigenen Mitteln bestritt und den ganzen Erlös aus ihrem Verkauf zur Unterstützung der von dem Oberstlieutenant Tzahn nachgelassenen würdigen Familie bestimmte, deren grosse Hülfsbedürftigkeit vorzüglich dadurch veranlasst worden ist, dass der Erblasser der von Herrn Dr. Lehmann herausgegebenen Papiere, beim Antritt seiner zweiten Ehe schon pensionirt und daher, zur Einkaufung seiner Gattin in die Wittwenkasse nicht unbedingt verpflichtet, diesen für die Subsistenz seiner Hinterbliebenen so nothwendigen Schritt unterliess, weil einestheils derselbe bei dem enormen Unterschiede zwischen seinem Alter und dem seiner Gattin mit ausserordentlichen Kosten verbunden war, und er anderntheils eine zuversichtliche Hoffnung sowohl auf körperliche Rüstigkeit, als auf das Gelingen seiner grossen Bemühung um die Quadratur des Kreises und auf eine allgemeine Anerkennung seines Verdienstes setzte. Wir wünschen sehr, dass die Leser des Archivs durch Ankaufung dieser Schrift den in jeder Beziehung höchst edlen Zweck, welchen Herr Doctor Lehmann durch deren Herausgabe zu erreichen wünscht und hofft, befördern helfen mögen, und geben denselben die Versicherung, dass ihnen die Schrift eine lehrreiche Lectüre gewähren wird. Herr Doctor Lehmann hat sich schon vielfache Verdienste, namentlich auch um die Methoden der annähernden Berechnung gewisser numerischer Werthe erworben, wie am Besten aus seiner ausgezeichneten Abhandlung über die Berechnung der Zahl π im 21sten Theile des Archivs Nr. XIII. S. 121. erhellet, die ihrer Vortrefflichkeit wegen auch neuerlich in den von den Herren Terquem und Gerono herausgegebenen Nouvelles Annales de Mathématiques in einem ausführlichen Auszuge übersetzt worden ist. Gleiche lehrreiche Bemerkungen über dergleichen Berechnungen werden die Leser auch in der vorliegenden Schrift in reichem Maasse finden, wodurch natürlich ihr Interesse und ihr Werth sehr erhöhet werden muss. Und da in derselben absichtlich Alles möglichst elementar gehalten, ja am Ende der Schrift in §. 32. der Wunsch ausgesprochen worden ist, dass ein Theil ihres Inhalts in den mathematischen Elementar Unterricht aufgenommen werden möge, so werden gewiss auch die Bibliotheken der Gymnasien und Realschulen nicht säumen, den edlen Zweck des Herrn Herausgebers durch Ankauf der Schrift befördern zu helfen. Dass dies in reichstem Maasse geschehen möge, ist wenigstens der innigste Wunsch des Herausgebers des Archivs und der Hauptzweck der obigen Zeilen.

Mechanik.

Die Experimental-Hydraulik. Eine Anleitung zur Ausführung hydraulischer Versuche im Kleinen, nebst Beschreibung der hierzu nöthigen Apparate und Entwickelung der wichtigsten Grundformeln der Hydraulik, so wie Vergleichung der durch diese Apparate gefundenen Versuchsresultate mit der Theorie und mit den Erfahrungen im Grossen. Bearbeitet von Julius Weisbach, Professor zu Freiberg. Mit 149 Holzschnitten. Freiberg. Engelhardt. 1855. 2 Thlr. 10 Ngr.

Obiger Titel dieses Buchs, das wir Praktikern zur Beachtung empfehlen, ist so ausführlich, dass wir über dessen Zweck und Inhalt hier nichts weiter zu sagen brauchen. Nur wollen wir uns zu bemerken erlauben, dass Herr Julius Weisbach jedenfalls sehr wohl daran gethan hat, sich in diesem neuesten Producte seines mathematischen Genie's lediglich auf dem Gebiete des Experiments zu halten, wobei wir ihm zugleich wohlmeinend zu rathen nicht unterlassen können, dies fernerhin immer zu thun, und sich besonders ja niemals wieder in das Bereich der Differential- und Integralrechnung und der höheren Mathematik überhaupt zu wagen, da die mathematische Analysis durch seine berühmten Grundlehren der höheren Analysis. Braunschweig. 1849. doch in der That schon zu sehr an ihrer Ehre gekränkt worden ist.

Astronomie.

Der Jahrgang 1855 des

Kalenders für alle Stände,

durch dessen Herausgabe Herr Professor v. Littrow in Wien sich ein anerkennungswerthes Verdienst erwirbt, enthält auch diesmal so werthvolle wissenschaftliche Zugaben, dass wir unsere

Leser ganz besonders auf denselben aufmerksam zu machen für unsere Pflicht halten, weil sie darin Zusammenstellungen finden werden, deren Kenntniss sie sich sonst nur aus grossen, ihnen gewiss theilweise wenig zugänglichen Werken würden verschaffen können, und die ausserdem noch das Verdienst besitzen, dass die betreffenden Gegenstände darin bis auf die neueste Zeit fortgeführt worden sind. Je weniger Dieser oder Jener dergleichen werthvolle und allgemein nützliche Dinge in einem solchen, mit einem so ausserordentlich geringen Kostenaufwande zu erwerbenden schätzbaren Buche suchen dürfte, desto mehr halten wir uns für verpflichtet, hier darauf besonders aufmerksam zu machen.

Zuerst giebt Herr v. Littrow ein Verzeichniss aller bisher berechneten Kometen, natürlich mit genauer Angabe der ihre Bahnen bestimmenden Elemente, ihrer Entdecker und Berechner. Zu Grunde liegt dabei, wie sich von selbst versteht, das Olbers-Galle'sche, bis zum zweiten Kometen von 1847 reichende Verzeichniss, welches 179 *) Nummern enthält; das Verzeichniss des Herrn v. Littrow reicht dagegen bis zu dem zweiten Kometen vom Jahre 1854 und enthält 199 Nummern. In einer Reihe von Bemerkungen sind alle besonderen Merkwürdigkeiten, welche die in dem Verzeichnisse enthaltenen Kometen dargeboten haben, mitgetheilt. Die Kometen, deren Rückkehr als genau constatirt betrachtet werden kann, sind durch zweckmässige Zeichen hervorgehoben.

Ferner theilt Herr v. Littrow aus der Connaissance des temps 1856 einen sehr interessanten Aufsatz: Ueber die Variationen des Ganges der Chronometer mit, der für alle Besitzer genauer Uhren sehr lehrreich ist. Herr Lieusson in Paris hat nämlich in neuester Zeit an einer grossen Anzahl von Chronometern Untersuchungen über die Unregelmässigkeiten ihres Ganges angestellt, sowohl bezüglich des Temperaturwechsels, als der Verdichtung des Oels. Aus diesen Untersuchungen ergab sich, dass der Gang eines Chronometers bei einer constanten Temperatur so variirt, wie die Ordinaten einer Geraden, und folglich jeden Tag durch $a+bx$ vorgestellt werden kann. Was den Einfluss der Variationen der Temperatur auf die täglichen Gänge betrifft, so stellte er sich in der eben betrachteten Curve durch die Distanzen heraus, welche die einzelnen parallelen Geraden trennten. Nach einigen Versuchen erkannte Lieusson, dass diese Distanzen variiren im Verhält-

---

*) Ich entnehme diese Nummer aus dem v. Littrow'schen Verzeichnisse selbst.

nisse des Quadrats der wirklichen Temperatur des Chronometers und einer bestimmten anderen, welcher das Maximum des täglichen Gangs entspricht, und zwar zeigte sich diese zweite Temperatur gleich dem Mittel aus den beiden, für welche die Uhr regulirt wurde *). Wir bedauern, dass uns der Raum verbietet, hier mehr aus diesem sehr interessanten Aufsatze mitzutheilen, verweisen aber die Leser, die sich für dergleichen Gegenstände interessiren, dringend auf denselben.

Ferner enthält der Kalender interessante Mittheilungen über W. Struve's neueste Untersuchungen über Fixsterne, und zuletzt giebt Herr v. Littrow ein höchst verdienstliches und sehr vollständiges Verzeichniss der Bahnnähen zwischen den periodischen Gestirnen des Sonnensystems, ganz nach seinen eigenen Bestimmungen, durch welche er sich bekanntlich ein besonderes Verdienst erworben hat, und welche hauptsächlich deshalb so verdienstlich sind, weil sie zuerst mit Hülfe der Lehre von den Maximis und Minimis auf ein ganz bestimmtes geometrisches Princip gegründet worden sind, wogegen alle früheren Bestimmungen nur auf ganz vagen Vorstellungsweisen beruheten und vor dem Richterstuhle der strengen Geometrie keineswegs bestehen konnten.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien Nach dem Befehle Seiner k. k. apost. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von Carl von Littrow. Dritte Folge. Vierter Band. Jahrgang 1854. Wien. 1855. 8. (S. Literar. Ber. Nr. LXXXIX. S. 9.)

Die Wiener Sternwarte ist gegenwärtig das astronomische Institut in Deutschland, welches seine Beobachtungen am regelmässigsten veröffentlicht, und der Herr Herausgeber erwirbt sich durch diese regelmässigen Publicationen jedenfalls ein grosses Verdienst um die Wissenschaft. Der vorliegende neueste Band enthält: I. Beobachtungen von Cometen am Refractor in den Jahren 1847 bis 1854, redigirt von Hornstein, Adjuncten der Sternwarte. II. Nachträge zu den Planeten- und Cometenbeobachtungen am Refractor in den Jahr-

*) Besseren Verständnisses wegen bemerken wir, dass man bei Regulirung der Compensationsvorrichtung die Uhr zwei bedeutend von einander verschiedenen Temperaturen auszusetzen pflegt und es dahin zu bringen sucht, dass sie bei beiden denselben Gang zeigt.

gängen 1853 und 1854 der Annalen. III. Beobachtungen am Meridiankreise vom 5. September 1838 bis Ende 1840.

Herr **Karl Mösta**, welcher jetzt der Sternwarte zu **Santiago de Chile** als Director vorsteht, hat uns kürzlich seine in der Schrift:

Informe sobre las observaciones hechas durante el eclipse solar de 30 de Noviembre de 1853, presentado al Sennor Ministro de instruccion publica por Cārlos Moesta. Santiago de Chile. 1854.

niedergelegten Beobachtungen der Sonnenfinsterniss vom 30. November 1853, zu deren Anstellung er sich nach **Pisco** in Peru begab, mitzutheilen die Güte gehabt. Wir empfehlen diese in astronomischer und physikalischer Rücksicht wichtige und interessante Schrift unsern Lesern sehr zur Beachtung. Nach einer Einleitung enthält dieselbe: „I. **Fenómenos de luz referentes a la atmósfera de sol i a la diafanitad de la atmósfera terrestre. II. Fenómenos meteorolójicos i algunas otras observaciones. III. Determinacion de la posicion jeográfica de varios lugares de Péru.**“ Eine sehr schöne illuminirte Zeichnung der Finsterniss bei ihrer Totalität mit der Corona und den bekannten Protuberanzen ist eine sehr werthvolle Zugabe.

Physik.

Der Foucault'sche Pendelversuch als directer Beweis von der Achsendrehung der Erde von Professor Delabar. Eine Abhandlung, die in der allgemeinen Versammlung der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft zu St. Gallen am 24. Juli 1854 vorgetragen wurde. Mit 4 Tafeln Abbildungen. St. Gallen. (Scheitlin & Zollikofer.) 1855. 8.

Unter den Schriften, welche den berühmten **Foucault**'schen Versuch zum Gegenstande haben und nicht gerade bis in die grössten Tiefen der Analysis und höheren Mechanik hinabzusteigen beabsichtigen, ist die vorliegende unbedingt eine der besten, ja sie hat unter allen derartigen Schriften uns eigentlich am Meisten angesprochen. Nach einer kurzen Einleitung handelt dieselbe mit ungemeiner Deutlichkeit **I. vom Prinzip und Beweis des Foucault'schen Pendelversuchs.** Zuerst erläutert der geehrte Herr Verfasser die Sache in eigenthümlicher, sehr sinnreicher

Weise bloss mit Hülfe der Elementar-Geometrie und der einfachsten Grundlehren der ebenen Trigonometrie, mit Rücksicht auf die betreffende Literatur, und giebt dann noch den die sphärische Trigonometrie und einige Kenntnisse der Differentialrechnung voraussetzenden Eschweiler'schen Beweis, den Herr Director Eschweiler in Köln auch den Lesern des Archivs in Thl. XIX. S. 51. dieser Zeitschrift mitzutheilen die Güte gehabt hat. Ferner handelt der Herr Verfasser in eben so deutlicher Weise II. von der Einrichtung der zum Foucault'schen Pendelversuch benöthigten Apparate und der Methode des hierbei befolgten Verfahrens. Die nöthigen Apparate sind mit grosser Sorgfalt beschrieben und alle Vorsichtsmassregeln, welche das Gelingen des Versuchs voraussetzt, sind sorgfältig namhaft gemacht worden. Endlich wird III. die wirkliche Ausführung des Foucault'schen Pendelversuchs in der Domkirche zu St. Gallen beschrieben, woraus hervorgeht, dass der vor der versammelten schweizerischen naturforschenden Gesellschaft, etwa vor 150 Personen, angestellte Versuch jedenfalls den gelungensten beigezählt werden darf.

Je mehr wir Gelegenheit gehabt haben, zu bemerken, wie wenig eine völlig deutliche theoretische Einsicht in die wahre Natur des Gegenstandes, um den es sich hier handelt, bis jetzt noch verbreitet ist, ja was für falsche Begriffe man über denselben sogar hin und wieder noch bei Leuten antrifft, die sich das Ansehen von Physikern geben möchten: desto mehr halten wir uns für verpflichtet, die vorliegende, sehr deutlich und mit feinem mathematischen Takte, — der hierbei freilich unerlässlicher wie bei irgend einem anderen physikalischen Gegenstande ist, und wo er sich nicht findet, auch kein wahres Verständniss der Sache erwarten lässt, — übrigens, etwa mit Ausnahme des Eschweiler'schen Beweises, in ganz elementarer Weise verfasste Schrift zur allgemeinsten und sorgfältigsten Beachtung dringend zu empfehlen. Ohne ein gewisses Maass mathematischer Kenntnisse kann die Sache freilich unmöglich zum Verständniss gebracht werden, und dergleichen Versuche vor einem ganz unmathematischen Publikum anstellen zu wollen, halten wir für pure Taschenspielerei, für eine eines wissenschaftlichen Mathematikers und Physikers völlig unwürdige Escamotage, worüber des Weiteren wegen des Herausgebers des Archivs eigene elementar-analytische Darstellung dieses wichtigen Gegenstandes im Archiv Thl. XX. Nr. V. S. 97. nachgesehen werden kann. Nur vor solche hochachtbare Versammlungen, wie die, welche Herr Professor Delabar zu seinem Auditorium wählte, und ähnliche, gehören dergleichen Versuche.

Von den Schriften, welche die Smithsonian Institution zu Washington unter dem allgemeinen Titel Smithsonian Contributions to Knowledge herausgiebt, und sich dadurch ein sehr grosses Verdienst um die Wissenschaften erwirbt, sind uns neuerlich die folgenden wichtigen, in Quart prachtvoll gedruckten Werke zugekommen, die wir der Aufmerksamkeit unserer Leser dringend empfehlen, ohne uns, wegen der Beschränktheit des Raumes, darauf einlassen zu können, deren Inhalt näher anzugeben, was auch unnöthig ist, da der Kundige denselben aus den blossen Titeln schon hinreichend erkennt, und schon daraus ersehen wird, ob dieselben für seine eigenen Arbeiten und Bestrebungen von Wichtigkeit sind und bei der Weiterführung derselben nicht entbehrt werden können:

Researches on electrical Rheometry. By A. Secchi, Professor of Astronomy and Director of the observatory in the Roman College (Rome), and late Professor of Physics and Astronomy in Georgetown College. (D. C.)

Observations on terrestrial Magnetism. By John Locke, M. D., M. A. P. S. Professor of Chemistry and Pharmacy in the medical College of Ohio.

Winds of the northern Hemisphere. By James H. Coffin, A. M., Professor of Mathematics and natural Philosophy in Lafayette College, Easton, Pensylvania. Mit sehr vielen trefflich ausgeführten Karten, natürlich, ausser für die Physik, auch sehr wichtig für die Nautik.

Vermischte Schriften.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Bern. Nr. 324—330. (Vergl. Liter. Ber. Nr. XCIII. S. 7.)

R. Wolf: Nachrichten von der Sternwarte zu Bern. LIII. Beobachtungen der Sternschnuppen im Sommerhalbjahre 1854. Nr. 324 und 325. — LIV. Meteorologische Beobachtungen im Sommer 1854. — Herr R. Wolf theilt auch mehrere interessante Briefe von Christ. Wolf an Bernh. Bilfinger mit, von denen der eine aus Halle, die andern aus Marburg, wo Christ. Wolf nach seiner Vertreibung aus Halle bekanntlich einige Zeit Professor war, bis er auf Friedrich des Grossen Ruf wieder nach Halle zurückkehrte, geschrieben sind.

B. Studer: Zur geologischen Karte der Schweiz. Nr. 326 und 327. — Auch in diesen Nummern theilt Herr R. Wolf einige

Briefe von Christ. Wolf an Bilfinger und von Voltaire an Bertrand, Sekretair der ökonomischen Gesellschaft zu Bern, zu deren Mitglied Voltaire erwählt worden war, mit.

R. Wolf: Nachrichten von der Sternwarte in Bern. Nr. 328 und 329. LV. Meteorologische Beobachtungen im Herbste 1854.

R. Wolf: Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. Nr. 328 und 329. XXXIII. Verschiedene Notizen und Anträge. Hierunter ist vorzüglich die folgende Notiz über den grossen Leonhard Euler interessant:

„Nach einer mir" — sagt Herr R. Wolf — „durch die Güte des Herrn Rathsherrn Peter Merian in Basel zugekommenen Notiz, war Peter Euler, Vater des berühmten Mathematikers Leonhard Euler, von 1703—1708 Pfarrer in St. Jakob bei Basel, und erhielt erst 1708 die Pfarre in Riehen, auf welcher er am 13. März 1745 starb. Es ist also die häufig vorkommende Angabe, es sei Leonhard Euler in Riehen geboren*), dahin zu berichtigen, dass er in Basel geboren wurde, aber seine Jugendjahre in Riehen verlebte."

Ueber den Erfinder der Guldin'schen Regel, den Jesuiten Paul Guldin von St. Gallen, giebt Herr R. Wolf nach Riccioli folgende biographische Notiz:

„Paulus Guldin Societ. Jesu, Sancto-Gallensis natus Anno 1577 die 12 Junii, et Habacuc vocatus, Frisinge ad fidem catholicam adductus, et Monachii Anno 1597 admissus pro Coadjutore temporali, Pauli nomen assumpsit, sed detecta in eo indole eximia ad Mathesin, Romam vocatus Philosoph. ac Matthem. *studuit*, docuit Graecii et Viennae Mathesim. Scripsit pro Kalendario Gregoriano contra Sethum Calvisium, ubi contra Scaligeri diatribam de Aequinoctiorum praecessione. Problema geographicum de discrepantia in numerandis diebus inter eos, qui navigant ad orbem novum, et qui ibi consistunt, Centrobaryca et alia: obiit Anno 1643." — Am bekanntesten ist Guldin's Werk: De centro gravitatis libri 4. Viennae 1635. Fol.

R. Wolf: Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. XXXIV. Verschiedene Notizen und Anträge.

Gütigst mitgetheilt hat uns Herr R. Wolf noch eine von ihm gehaltene: Gedächtnissrede auf Jacob Bernoulli zur zweiten Säcularfeier seiner Geburt. Bern 1855., auf die wir ihres sehr interessanten Inhalts wegen unsere Leser ganz besonders aufmerksam machen und auf die wir späterhin zurückzukommen hoffen.

---

*) Allerdings ist dies die gewöhnliche Angabe. G.

Literarischer Bericht

XCVI.

Trigonometrie.

Theoretisch-praktisches Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie mit zahlreichen Anwendungen derselben auf reine und praktische Geometrie, physische Astronomie, geographische Ortsbestimmung und höhere Geodäsie, so wie Untersuchungen über den Einfluss der Beobachtungsfehler und die Mittel, denselben zu vermindern. Von Dr. J. Dienger, Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe. Mit 81 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Stuttgart. Metzler. 1855. 8.

Dieses Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie leistet vollkommen, was sein Titel verspricht, und verdient namentlich allen denen, welche praktische Anwendungen von der Trigonometrie, insbesondere in der niederen und höheren Geodäsie zu machen beabsichtigen, recht sehr empfohlen zu werden. Dabei ist noch besonders hervorzuheben, dass der Herr Verfasser bei den Beweisen, namentlich auch der goniometrischen Formeln, vollständige Allgemeinheit zu erreichen gestrebt hat, was leider in der Trigonometrie so häufig vernachlässigt wird, und doch gerade in dieser Wissenschaft von so grosser Bedeutung ist, weil ja eben die Grundformeln derselben, eben so wie die Formeln der analytischen Geometrie, hauptsächlich mit die Bestimmung haben, den analytisch-geometrischen Untersuchungen und Entwickelungen vollkommene Allgemeinheit zu verleihen, und die Unterscheidung specieller Fälle unnöthig zu machen, welche letztere man der synthetischen Geometrie überlässt. Wird also der Nachweis der vollständigen Allgemeinheit der Formeln der Trigonometrie vernachlässigt, so verliert diese Wissenschaft einen grossen Theil ihres eigentlichen Wesens und genügt nicht ihrer Bestimmung, was der Herr Verfasser dieses Lehrbuchs überall sehr richtig gefühlt und sich deshalb mit Erfolg bestrebt hat, solcher Vernachlässigungen sich nicht schuldig zu machen. Die Berechnung der Tafeln ist in sehr zweckmässiger Weise nach Lionnet (m. s. Archiv. Thl. VI. S. 205.) gelehrt, wodurch der Herr Verfasser der wirklichen vollständigen Entwickelung der verschiedenen goniometrischen und cyclometrischen Reihen überhoben wurde, die in diesem augenscheinlich zunächst eine vorzugsweise praktische Richtung verfolgenden Buche nicht in seinem Plane lag. Fast sämmtliche Aufgaben sind durch vollständig ausgerechnete numerische Beispiele erläutert, die Praktikern gewiss eine sehr dankenswerthe Zugabe sein werden, und auf alle bei praktischen Anwendungen vorkommende Correctionen: Refraction, Depression des Meerhorizonts, u. s. w., ist Rücksicht genommen, so wie auch die Bestimmung des Einflusses der Beobachtungsfehler auf die Resultate für ebene und sphärische Dreiecke in zwei gesonderten Abschnitten, — diese Bestimmungen namentlich in einer dem Herrn Verfasser eigenthümlichen Entwickelungsweise, — die Interpolation, die Benutzung zehnstelliger Logarithmen, u. s. w., ausführliche Berücksichtigung gefunden haben. Dass der Legendre'sche Satz, die Berechnung der Dreiecknetze, — auch durch rechtwinklige und Polar-Coordinaten, — und Aehnliches gleichfalls vorkommt, versteht sich bei einem von einem so kenntnissreichen Verfasser bearbeiteten Handbuche wie das vorliegende von selbst. Selbst die Construction der Sonnenuhren, die Bestimmung der Tageslänge und der Dauer des längsten Tages, der Dämmerung u. s. w. fehlen nicht. Mit ganz besonderer Vorliebe, und zwar mit vollkommenem Rechte, hat der Herr Verfasser endlich auf S. 295. — S. 322. die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der geographischen Breite entwickelt. Die Leser werden sich von zehn verschiedenen Methoden genügende Kenntniss aus diesem Buche verschaffen können, wobei der Unterzeichnete sich nicht versagen kann, dem Herrn Verfasser besonders zu danken, dass er seine eigne Methode zur Breitenbestimmung bei geodätischen Operationen, die in der Schrift: „Versuch einer neuen Methode zur Bestimmung der Polhöhe oder geographischen Breite bei geodätischen Messungen von Johann August Grunert. Leipzig. 1844." von ihm zuerst bekannt gemacht, und namentlich auch mit sorgfältiger Berücksichtigung aller Fehlerquellen und der daraus sich ergebenden besten Methode der Anwendung, vollständig entwickelt wurde, zur Anwendung bei grossen geodätischen

Operationen vorzugsweise empfohlen hat, indem er S. 321. sagt: „für Geodäten, die in der Regel gute Theodoliten besitzen und ein Sternverzeichniss sich leicht verschaffen können, empfiehlt sich vorzugsweise VII.“ Die Methode Nr. VII. ist aber die von dem Unterzeichneten a. a. O. zuerst angegebene Methode: „Aus drei beobachteten gleichen Sternhöhen, die aber selbst ihrer Grösse nach gar nicht bekannt zu sein brauchen, und den gemessenen entsprechenden Azimuthaldifferenzen Polhöhe und Zeit zu bestimmen“, welche sich für den Geodäten hauptsächlich deshalb so sehr empfiehlt, weil er bei Anwendung derselben nur eines Azimuthal-Theodoliten bedarf*), die Refraction gar nicht in Betrachtung kommt, ein Barometer und Thermometer also nicht erforderlich ist, und weil endlich, was von besonderer Bedeutung ist, der Gebrauch einer Uhr gar nicht in Anspruch genommen wird, insofern es sich nämlich, wie dies bei geodätischen Operationen immer der Fall ist, zunächst nur um die Bestimmung der Breite, nicht auch der Zeit, handelt. Eine neue kurze Darstellung dieser Methode hat der Unterzeichnete auch im Archiv. Thl. XIX. Nr. XXXII. S. 457. gegeben, und hat, da ihm sehr viel daran liegt, dass dieselbe bei geodätischen Operationen praktisch wirklich häufig angewandt werde, diese Gelegenheit nicht unbenutzt lassen wollen, sie den Geodäten von Neuem in's Gedächtniss zurückzurufen, dankt auch dem Herrn Verfasser nochmals recht sehr, dass er dieselbe a. a. O. als die geeignetste zur Anwendung bei geodätischen Messungen in diesem gewiss eine weite Verbreitung unter Praktikern findenden Buche empfohlen hat, was ihrer von dem Unterzeichneten sehr gewünschten häufigen Anwendung gewiss sehr förderlich sein wird. Dass sie von einem eine Auswanderungsgesellschaft nach Chile begleitenden Geodäten, der sich von dem Unterzeichneten noch besondere Erläuterungen über die beste Art ihrer Anwendung erbat, bei den dort vorzunehmenden geodätischen Messungen durchgängig angewandt werden sollte und wahrscheinlich auch angewandt wird, ist schon im Archiv. a. a. O. bemerkt worden.

Der Herausgeber.

---

*) Am besten eignen sich freilich die jetzt sehr gewöhnlichen Theodoliten mit gebrochenem Fernrohr, weil diese sehr bequeme Beobachtungen bis zum Zenith gestatten, wobei der Höhenkreis nur von ganz untergeordneter Bedeutung oder eigentlich gar nicht vorhanden zu sein braucht, wenn man das Fernrohr nur in allen Höhen bis zum Zenith mittelst irgend einer Vorrichtung feststellen kann.

Aufforderung.

Als im Jahre 1851 die deutschen Naturforscher sich in Gotha versammelten, hatte sich dort auch eine mathematisch-astronomische Section gebildet, die durch 19 Mitglieder vertreten war, über deren Verhandlungen Herr Prof. Bretschneider in Gotha im Archiv. Thl. XIX. Literar. Ber. Nr. LXXIII. S. 930. — S. 936. einen interessanten Bericht zu liefern die Güte gehabt hat. Von den späteren Versammlungen sind, ungeachtet meiner Aufforderung a. a. O. S. 929., dergleichen Berichte mir nicht zugegangen, und es mögen daher bei denselben wohl nicht genug Vertreter der Astronomie und Mathematik gegenwärtig gewesen sein, um eigentliche mathematisch-astronomische Sectionen bilden zu können. In diesem Jahre versammeln sich die deutschen Naturforscher in Wien, und gewiss ist es sehr zu wünschen, dass sich gerade bei dieser Versammlung, die, woran gar nicht zu zweifeln ist, eine grosse Anzahl der bedeutendsten Männer aus allen Ländern auf einem Punkte zu einem gemeinschaftlichen Zwecke vereinigen wird, sich auch recht viele Mathematiker, Astronomen und mathematische Physiker einfinden möchten. Wenn nun der Unterzeichnete im Interesse der Sache seine weit verbreitete Zeitschrift benutzt, hier eine Aufforderung an alle seine vorher genannten geehrten Herren Collegen ergehen zu lassen, die diesjährige, in Wien stattfindende, gewiss sehr grossartige Naturforscher-Versammlung mit ihrer sehr wünschenswerthen Gegenwart zu beehren, so darf man ihm dies nicht als Zu- oder Aufdringlichkeit, oder gar als ein Bestreben, sich hervorzudrängen, auslegen, da er sich, indem er hier diese Aufforderung ergehen lässt, durchaus bewusst ist, nur im reinsten Dienste der Sache zu stehen, wenn er auch auf der anderen Seite keineswegs verhehlen kann und will, dass er mit dieser Aufforderung allerdings auch einem gewissen Eigennutze dient, indem er, lebhaft angezogen von der ungemeinen Grossartigkeit und Mannigfaltigkeit der Anstalten, welche die herrliche deutsche Kaiserstadt zur Förderung der mathematischen und Naturwissenschaften, — natürlich mit Einschluss der Astronomie, Meteorologie und Optik, — zunächst und vorzüglich in wissenschaftlicher, dann aber auch in ihren mechanischen und optischen Werkstätten in technischer Rücksicht besitzt, — angezogen ferner hauptsächlich durch die vielen dort lebenden trefflichen Mathematiker, Astronomen und Naturforscher aller Richtungen, die mit der grössten Humanität die grösste Wissenschaftlichkeit zu verbinden gewohnt sind, den ziemlich festen Entschluss gefasst hat, die diesjährige Naturforscher-Versammlung in Wien selbst zu besuchen, insofern ihm Gott Leben und Gesundheit schenkt und andere Umstände es gestatten. Ja, nochmals sei es gesagt, Eigennutz, recht grosser Eigennutz ist es also, wenn der Unterzeichnete alle seine verehrten Herren Collegen nochmals dringend aufzufordern sich erlaubt, die Versammlung der deutschen Naturforscher in Wien in diesem Jahre recht zahlreich mit ihrer Gegenwart zu beehren. Dass dann vielfache und mannigfaltige Anregung und Kräftigung, freudig, munter und rüstig auf dem Wege der Wissenschaft fortzuschreiten, nicht ausbleiben werden: davon ist der Unterzeichnete wenigstens in Bezug auf sich selbst in freudigster Erwartung vollkommen überzeugt.

Greifswald, den 22. Juni 1855. Der Herausgeber.

Fig. 1.

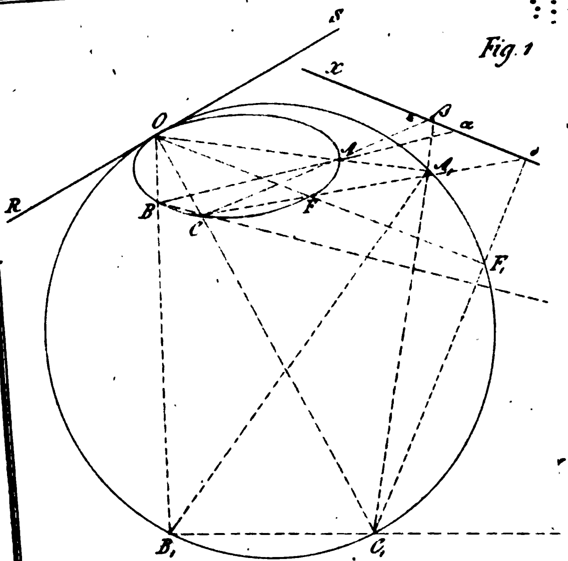


Fig. 6.

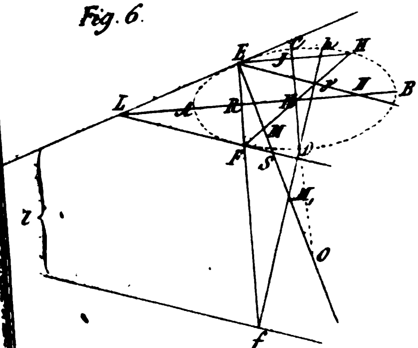


Fig. 11.

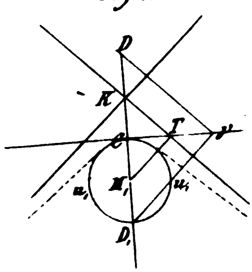


Fig. 10.