
SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG:
CHRISTO ET ECCLESIÆ

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Achtzehnter Theil.

Mit zehn lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagshandlung

Th. Kunike.

1852.

1871, July 1.
Haven Fund.

Inhaltsverzeichniss des achtzehnten Theils.

Arithmetik.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
IV.	Die Differentiation unter dem Integralzeichen. Von Herrn Oskar Werner, Lehrer der Mathematik zu Dresden	I.	39
V.	Die Umformung der irrationalen gebrochenen Functionen in andere, welche einen rationalen Nenner haben. Von Herrn B. Sommer, zu Coblenz	I.	44
XI.	Untersuchung der biquadratischen Formen. Von Herrn Doctor F. Arndt, Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Stralsund . . .	I.	111
XIV.	Ueber die Ausgleichung der Beobachtungsfehler. Von dem Herrn Professor Dr. J. Dienger an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe .	II.	149
XV.	Die Auflösung algebraischer Gleichungen. Von Herrn August Weiler, Gymnasiallehramts-Candidaten (Darmstadt.)	II.	194

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XVIII.	Erweiterungen der Integralrechnung. Von dem Herausgeber	III.	241
XIX.	Ueber die independente Bestimmung der Coefficienten unendlicher Reihen und der Fakultätencoefficienten insbesondere. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch zu Dresden	III.	306
XX.	Combinatorische Darstellung der Näherungswerthe eines Kettenbruchs. Von Herrn F. Bartholomäi zu Jena	III.	328
XXV.	Zur Differenzenrechnung. Von Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der polytechnischen Schule zu Dresden	IV.	381
XXVI.	Ueber die Substitution neuer Variabelen in unbestimmte und bestimmte Integrale. Von Demselben	IV.	391
XXVIII.	Bemerkungen zu den Elementen der Arithmetik. Von dem Herrn Doctor R. Baltzer, Oberlehrer an der Kreuzschule zu Dresden	IV.	405
XXIX.	Bemerkung zur Theorie der Kettenbrüche. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch zu Dresden	IV.	416
XXX.	Ueber eine gewisse Klasse in der Trigonometrie und Astronomie häufig in Anwendung kommender unendlicher Reihen. Von dem Herausgeber	IV.	420
XXXIII.	Ueber eine Aufgabe in der Kreistheilung. Von dem Herrn Dr. F. Arndt, Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Stralsund	IV.	461

Geometrie.

II.	Die Krümmungstheorie der Kegelschnitte, elementar geometrisch begründet. Von Herrn Planck, Repetenten an der polytechnischen Schule zu Stuttgart	I.	31

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
X.	Problema. Invenire Rhombum maximum et minimum, qui in Ellipsin datam (axes $=a$, b, $a>b$) inscribi possit. Auctor Christianus Fr. Lindman, Lector Strengnesensis	I.	109
XII.	Synthetische Beweise der Sätze in Thl. XVI. Nr. XVIII. und Nr. XIX. des Archivs. Von Herrn Professor Pross zu Stuttgart	I.	119
XVI.	Einfache Berechnung der Zahl π. Von Herrn C. Hellwig, Lehrer der Mathematik zu Fürstenwalde	II.	234
XVII.	Leichte Bestimmung des Inhalts der dreiseitigen Pyramide aus drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten und den eingeschlossenen Winkeln. Von dem Herausgeber . . .	II.	239
XXI.	Der Pascal'sche Lehrsatz in seiner Anwendung auf die geometrische Analysis. Von Herrn Planck, Repetenten an der polytechnischen Schule zu Stuttgart	III.	335
XXIII.	Ueber die Converse des Satzes: Im gleichschenkligen Dreieck sind die die Basiswinkel nach gleichem Verhältniss theilenden Transversalen einander gleich. Von Herrn C. Schmidt, Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Stolp (jetzt Rector der höheren Bürgerschule zu Neustadt-Eberswalde)	III.	357
XXVII.	Die Beziehung der Ellipse auf ihre zwei gleichen conjugirten Durchmesser. Von Herrn Doctor Kösters zu Warendorf	IV.	400
XXXII.	Abriss eines Beweises für den sogenannten elften Euklidischen Grundsatz. Von dem Studirenden der Theologie Herrn H. Th. Hörlych aus Schleswig-Holstein zu Bonn	IV.	455

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.

Trigonometrie.

XXXV.	Einfacher Beweis der Formeln für $\sin(x \pm y)$ und $\cos(x \pm y)$. Von Herrn J. J. Åstrand, Privatlehrer der Mathematik zu Gothenburg in Schweden	IV.	479

M. s. auch Arithmetik Nr. XXX. Heft IV. S. 420.

Geodäsie.

VII.	Bestimmung der geographischen Breite und Länge aus geodätischen Messungen. Von dem Herrn Professor Dr. J. Dienger an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe	I.	80
XXXI.	Einfacher Beweis für die von Mascheroni gegebene Auflösung der Aufgabe: die Länge einer an ihren beiden Endpunkten unzugänglichen geraden Linie zu messen. Von Herrn Dr. J. R. Boyman zu Coblenz	IV.	452
XXXV.	Zum Winkelkreuz. Von dem Herausgeber	IV.	477

M. s. auch Arithmetik. Nr. XIV. Heft II. Seite 149.
Geometrie. Nr. XII. Heft I. Seite 119.

Mechanik.

I.	Aufgaben aus dem Attractionscalcul. Von dem Herausgeber	I.	1
VIII.	Ueber die Gleichungen der Bewegung, Anwendungen derselben. (Nach Jules Vieille in Liouville's Journal, Juillet 1849.) Von dem Hrn. Professor Dr. J. Dienger an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe	I.	91
XXII.	Wann liegt der Schwerpunkt eines ebenen Vierecks ausserhalb desselben? Eine Gelegenheits-		

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite
	frage, beantwortet von Herrn Dr. Wilhelm Matzka, Professor der Mathematik an der Universität zu Prag	III.	352

Optik.

III.	Direkter Beweis der Undulationstheorie des Lichts aus der Aberration der Fixsterne. Von Herrn Professor Dr. Riecke an der königl. württembergischen land- und forstwirthschaftlichen Akademie zu Hohenheim	I.	33
VI.	Ueber den Winkelspiegel. Von Herrn Doctor Julius Hartmann, Gymnasiallehrer zu Rinteln	I.	55

Astronomie.

XIII.	Ueber die Berechnung der Cometenbahnen. (Erste Fortsetzung der Abhandlung: Neue Methode zur Berechnung der Cometenbahnen. Archiv. Thl. XVII. Nr. IV.). Von dem Herausgeber	II.	121
XXX.	Ueber eine gewisse Klasse in der Trigonometrie und Astronomie häufig in Anwendung kommender unendlicher Reihen. Von dem Herausgeber	IV.	420

M. s. auch Arithmetik. Nr. XIV. Heft II. Seite 149.
Optik. Nr. III. Heft I. Seite 33.

Meteorologie.

XXIV.	Die 15 letzten Winter in Berlin, dargestellt und besprochen von Herrn Professor Dr. J. Ph. Wolfers in Berlin	IV.	361

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.

Chemie.

IX.	Auflösungen der Aufgabe, bei einem Gasgemenge von viererlei brennbaren Gasen die unbekannten Glieder y, Cx, Cy' und Cy zu bestimmen. Von Herrn Professor Zenneck zu Stuttgart	I.	102

Uebungsaufgaben für Schüler.

XXXIV.	Von dem Lehrer der Mathematik Herrn Werner zu Dresden	IV.	475
XXXV.	Zu beweisender Lehrsatz. Von Herrn J. J. Åstrand, Privatlehrer der Mathematik zu Gothenburg in Schweden	IV.	480

Literarische Berichte*).

LXIX.	. . . .	I.	881
LXX.	. . . .	II.	889
LXXI.	. . . .	III.	897
LXXII.	. . . .	IV.	909

*) Ich bemerke hiebei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Aufgaben aus dem Attractionscalcul.

Von

dem Herausgeber.

Unter den vielen interessanten Aufgaben, welche der Attractionscalcul*) darbietet, haben vorzüglich zwei, wegen ihrer grossen Wichtigkeit für die physische Astronomie und die Theorie der terrestrischen Schwere, die Mathematiker vielfach beschäftigt, nämlich die Aufgaben über die Bestimmung der Anziehung einer Kugel und der eines dreiaxigen elliptischen Sphäroids. Es scheint mir aber wünschenswerth, dass theils diese Aufgaben vermehrt, theils früher schon aufgelöste nach neuen Methoden behandelt werden. Ich will daher in einer Reihe von Abhandlungen, welche durch die vorliegende eröffnet wird, die Resultate meiner mehrjährigen gelegentlichen Beschäftigungen mit diesem Gegenstande vorlegen, in der Hoffnung, dass dadurch auch andere Mathematiker mehr als bisher zu dergleichen Untersuchungen und Mittheilungen veranlasst und angeregt werden. In der vorliegenden Abhandlung mache ich den Anfang mit einigen leichteren Aufgaben, die aber späteren Untersuchungen theilweise zur Grundlage dienen, und an die sich daher einige künftig noch zu veröffentlichende Abhandlungen zweckmässig anschliessen lassen werden. Unter den hier behandelten Aufgaben findet sich übrigens auch schon das für die physische Astronomie so wichtige Problem von der Anziehung einer Kugel, welches ich hier auf

---

*) Ich bediene mich dieser zweckmässigen, von Herrn Professor Dr. Schlömilch in seiner neuerlich erschienenen Schrift: „Der Attractionscalcul. Eine Monographie von Dr. O. Schlömilch u. s. w. Halle. 1851." eingeführten Benennung

eine von der bisherigen ganz verschiedene Weise aufgelöst habe, eine Auflösung, die sich wegen ihrer Anschaulichkeit vielleicht vorzugsweise für Anfänger empfehlen möchte, wenn ich auch gern zugebe, dass die bekannten allgemeinen Formeln, welche u. A. auch Herr Professor Schlömilch a. a. O. mittheilt, kürzer zum Zweck führen.

I.

Wirkung der Anziehung eines Punktes von der Masse μ auf einen Punkt von der Masse Eins.

In Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem seien $\mathfrak{x}$. $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Coordinaten des angezogenen Punktes von der Masse Eins; die Coordinaten des anziehenden Punktes von der Masse μ seien x, y, z; die Entfernung der beiden Punkte von einander sei r; so ist die Wirkung des Punktes (xyz) von der Masse μ auf den Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ von der Masse Eins, wenn wir wie gewöhnlich die Anziehung gerade der Masse und umgekehrt dem Quadrate der Entfernung von dem anziehenden Punkte proportional setzen:

$$\frac{\mu}{r^2},$$

und diese Kraft muss man sich als von dem Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ nach dem Punkte (xyz) hin wirkend vorstellen, weil der Punkt (xyz) auf den Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ anziehend, nicht abstossend, wirken soll. Legen wir nun durch den Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ drei den primitiven Coordinatenaxen parallele secundäre Coordinatenaxen, zerlegen die Kraft

$$\frac{\mu}{r^2}$$

nach diesen secundären Coordinatenaxen, und bezeichnen die entsprechenden Composanten durch X, Y, Z, die von der als von dem Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ aus nach dem Punkte (xyz) hin gehend gedachten geraden Linie r mit den positiven Theilen der drei secundären Coordinatenaxen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel aber durch φ, ψ, χ; so ist

$$X=\frac{\mu}{r^2}\cos\varphi, \quad Y=\frac{\mu}{r^2}\cos\psi, \quad Z=\frac{\mu}{r^2}\cos\chi.$$

Bezeichnen wir nun aber die Coordinaten des Punktes (xyz) in dem durch den Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ gelegten secundären Systeme durch

x', y', z'; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten bekanntlich:

$$x=\mathfrak{x}+x',\quad y=\mathfrak{y}+y',\quad z=\mathfrak{z}+z';$$

$$x'=x-\mathfrak{x},\quad y'=y-\mathfrak{y},\quad z'=z-\mathfrak{z}.$$

Nun ist aber allgemein

$$x'=r\cos\varphi,\quad y'=r\cos\psi,\quad z'=r\cos\chi;$$

also

$$x-\mathfrak{x}=r\cos\varphi,\quad y-\mathfrak{y}=r\cos\psi,\quad z-\mathfrak{z}=r\cos\chi;$$

oder

$$\cos\varphi=\frac{x-\mathfrak{x}}{r},\quad \cos\psi=\frac{y-\mathfrak{y}}{r},\quad \cos\chi=\frac{z-\mathfrak{z}}{r}.$$

Folglich ist nach dem Obigen:

$$X=\frac{\mu(x-\mathfrak{x})}{r^3},\quad Y=\frac{\mu(y-\mathfrak{y})}{r^3},\quad Z=\frac{\mu(z-\mathfrak{z})}{r^3}.$$

Bekanntlich ist aber nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$r=\{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2+(z-\mathfrak{z})^2\}^{\frac{1}{2}};$$

also

$$X=\frac{\mu(x-\mathfrak{x})}{\{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2+(z-\mathfrak{z})^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$Y=\frac{\mu(y-\mathfrak{y})}{\{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2+(z-\mathfrak{z})^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$Z=\frac{\mu(z-\mathfrak{z})}{\{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2+(z-\mathfrak{z})^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

II.

Wirkung der Anziehung einer geraden Linie auf einen Punkt von der Masse Eins.

Die Grösse und Lage der geraden Linie, deren Anziehung auf einen Punkt von der Masse Eins wir jetzt betrachten wollen, sei durch ihre beiden Endpunkte (abc) und $(a_1 b_1 c_1)$ bestimmt, so dass also

$$\frac{x-a}{a_1-a}=\frac{y-b}{b_1-b}=\frac{z-c}{c_1-c}$$

die Gleichungen dieser geraden Linie sind; ihre Länge wollen wir durch L bezeichnen.

Theilen wir nun die gerade Linie in n gleiche Theile, und setzen der Kürze wegen

$$\frac{L}{n}=\lambda,$$

so wie

$$\frac{a_1-a}{n}=i_a,\quad \frac{b_1-b}{n}=i_b,\quad \frac{c_1-c}{n}=i_c;$$

so sind die Coordinaten der beiden Endpunkte der geraden Linie und aller auf derselben liegenden Theilpunkte von dem Punkte (abc) an nach der Reihe:

$a,$	$b,$	$c;$
$a+i_a,$	$b+i_b,$	$c+i_c;$
$a+2i_a,$	$b+2i_b,$	$c+2i_c;$
$a+3i_a,$	$b+3i_b,$	$c+3i_c;$
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.
$a+ni_a=a_1,$	$b+ni_b=b_1,$	$c+ni_c=c_1.$

Bezeichnen wir die Coordinaten des angezogenen Punktes wie früher durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$; die den Coordinatenaxen parallelen Composanten der Anziehung durch X, Y, Z; die Dichtigkeit der anziehenden geraden Linie durch δ, ihre Masse also durch δL, so wie die Masse eines jeden der n gleichen Theile, in welche dieselbe getheilt worden, durch $\delta\lambda$, und setzen der Kürze wegen:

$$\varphi_{\mathfrak{x}}(x)=\frac{x-\mathfrak{x}}{\{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2+(z-\mathfrak{z})^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$\varphi_{\mathfrak{y}}(y)=\frac{y-\mathfrak{y}}{\{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2+(z-\mathfrak{z})^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$\varphi_{\mathfrak{z}}(z)=\frac{z-\mathfrak{z}}{\{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2+(z-\mathfrak{z})^2\}^{\frac{3}{2}}};$$

so sind nach I. die Composanten X, Y, Z offenbar die Gränzen, denen die Grössen

$$\delta\lambda\varphi_{\mathfrak{x}}(a)+\delta\lambda\varphi_{\mathfrak{x}}(a+i_a)+\delta\lambda\varphi_{\mathfrak{x}}(a+2i_a)+\ldots.+\delta\lambda\varphi_{\mathfrak{x}}(a+(n-1)i_a),$$

$$\delta\lambda\varphi_{\mathfrak{y}}(b)+\delta\lambda\varphi_{\mathfrak{y}}(b+i_b)+\delta\lambda\varphi_{\mathfrak{y}}(b+2i_b)+\ldots+\delta\lambda\varphi_{\mathfrak{y}}(b+(n-1)i_b),$$

$$\delta\lambda\varphi_{\mathfrak{z}}(c)+\delta\lambda\varphi_{\mathfrak{z}}(c+i_c)+\delta\lambda\varphi_{\mathfrak{z}}(c+2i_c)+\ldots+\delta\lambda\varphi_{\mathfrak{z}}(c+(n-1)i_c);$$

oder, weil

$$\delta\lambda=\frac{\delta L}{n}=\frac{\delta L}{a_1-a}i_a=\frac{\delta L}{b_1-b}i_b=\frac{\delta L}{c_1-c}i_c$$

ist, die Gränzen, denen die Grössen

$$\frac{\delta L}{a_1-a}i_a\{\varphi_{\mathfrak{x}}(a)+\varphi_{\mathfrak{x}}(a+i_a)+\varphi_{\mathfrak{x}}(a+2i_a)+\ldots.+\varphi_{\mathfrak{x}}(a+ni_a)\}$$
$$-\frac{\delta L}{a_1-a}i_a\varphi_{\mathfrak{x}}(a_1),$$

$$\frac{\delta L}{b_1-b}i_b\{\varphi_{\mathfrak{y}}(b)+\varphi_{\mathfrak{y}}(b+i_b)+\varphi_{\mathfrak{y}}(b+2i_b)+\ldots.+\varphi_{\mathfrak{y}}(b+ni_b)\}$$
$$-\frac{\delta L}{b_1-b}i_b\varphi_{\mathfrak{y}}(b_1),$$

$$\frac{\delta L}{c_1-c}i_c\{\varphi_{\mathfrak{z}}(c)+\varphi_{\mathfrak{z}}(c+i_c)+\varphi_{\mathfrak{z}}(c+2i_c)+\ldots.+\varphi_{\mathfrak{z}}(c+ni_c)\}$$
$$-\frac{\delta L}{c_1-c}i_c\varphi_{\mathfrak{z}}(c_1)$$

sich nähern, wenn n in's Unendliche wächst. Weil aber unter dieser Voraussetzung die Grössen

$$\frac{\delta L}{a_1-a}i_a\varphi_{\mathfrak{x}}(a_1),\quad \frac{\delta L}{b_1-b}i_b\varphi_{\mathfrak{y}}(b_1),\quad \frac{\delta L}{c_1-c}i_c\varphi_{\mathfrak{z}}(c_1)$$

sich sämmtlich der Null nähern, so ist nach dem bekannten Hauptsatze von den bestimmten Integralen:

$$X=\frac{\delta L}{a_1-a}\int_a^{a_1}\varphi_{\mathfrak{x}}(x)\partial x,$$

$$Y=\frac{\delta L}{b_1-b}\int_b^{b_1}\varphi_{\mathfrak{y}}(y)\partial y,$$

$$Z=\frac{\delta L}{c_1-c}\int_c^{c_1}\varphi_{\mathfrak{z}}(z)\partial z;$$

oder, wenn wir die Masse unserer geraden Linie, nämlich δL, durch μ bezeichnen:

$$X=\frac{\mu}{a_1-a}\int_a^{a_1}\varphi_{\mathfrak{x}}(x)\partial x,$$

$$Y=\frac{\mu}{b_1-b}\int_b^{b_1}\varphi_{\mathfrak{y}}(y)\partial y,$$

$$Z=\frac{\mu}{c_1-c}\int_c^{c_1}\varphi_{\mathfrak{z}}(z)\partial z.$$

Wir wollen nun das Integral

$$\int_a^{a_1}\varphi_{\mathfrak{x}}(x)\partial x$$

zu entwickeln suchen.

Weil

$$\varphi_{\mathfrak{x}}(x)=\frac{x-\mathfrak{x}}{\{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2+(z-\mathfrak{z})^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

ist, und

$$x=a+\frac{a_1-a}{a_1-a}(x-a),$$

$$y=b+\frac{b_1-b}{a_1-a}(x-a),$$

$$z=c+\frac{c_1-c}{a_1-a}(x-a)$$

gesetzt werden kann; so ist, wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{b_1-b}{a_1-a}=\beta,\qquad \frac{c_1-c}{a_1-a}=\gamma$$

und

$$a-\mathfrak{x}=\mathfrak{x}_1,\quad b-\mathfrak{y}=\mathfrak{y}_1,\quad c-\mathfrak{z}=\mathfrak{z}_1;$$
$$x-a=x_1,\quad y-b=y_1,\quad z-c=z_1$$

setzen:

$$\varphi_{\mathfrak{x}}(x)=\frac{\mathfrak{x}_1+x_1}{\{(\mathfrak{x}_1+x_1)^2+(\mathfrak{y}_1+\beta x_1)^2+(\mathfrak{z}_1+\gamma x_1)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Aber $\partial x=\partial x_1$, also

$$\varphi_{\mathfrak{x}}(x)\partial x=\frac{(\mathfrak{x}_1+x_1)\partial x_1}{\{(\mathfrak{x}_1+x_1)^2+(\mathfrak{y}_1+\beta x_1)^2+(\mathfrak{z}_1+\gamma x_1)^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

und folglich, weil für $x=a$, $x=a_1$ respective $x_1=0$, $x_1=a_1-a$ ist:

$$X=\frac{\mu}{a_1-a}\int_0^{a_1-a}\frac{(\mathfrak{x}_1+x_1)\partial x_1}{\{(\mathfrak{x}_1+x_1)^2+(\mathfrak{y}_1+\beta x_1)^2+(\mathfrak{z}_1+\gamma x_1)^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$f = \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{y}_1^2 + \mathfrak{z}_1^2,$$
$$g = \mathfrak{x}_1 + \beta\mathfrak{y}_1 + \gamma\mathfrak{z}_1,$$
$$h = 1 + \beta^2 + \gamma^2$$

setzen:

$$X = \frac{\mu}{a_1 - a}\int_0^{a_1 - a} \frac{(\mathfrak{x}_1 + x_1)\partial x_1}{(f + 2gx_1 + hx_1^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es ist aber, wie man leicht findet:

$$f + 2gx_1 + hx_1^2 = \frac{fh - g^2}{h}\left\{1 + \frac{(g + hx_1)^2}{fh - g^2}\right\}$$

und

$$fh - g^2 = (1 + \beta^2 + \gamma^2)(\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{y}_1^2 + \mathfrak{z}_1^2) - (\mathfrak{x}_1 + \beta\mathfrak{y}_1 + \gamma\mathfrak{z}_1)^2$$
$$= (\beta\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{y}_1)^2 + (\gamma\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{z}_1)^2 + (\beta\mathfrak{z}_1 - \gamma\mathfrak{y}_1)^2,$$

also $fh - g^2$, eben so wie f und h, eine positive Grösse. Daher ist es verstattet

$$\frac{g + hx_1}{\sqrt{fh - g^2}} = u$$

zu setzen, woraus

$$x_1 = \frac{u\sqrt{fh - g^2} - g}{h}, \quad \partial x_1 = \frac{\sqrt{fh - g^2}}{h}\partial u$$

und

$$\mathfrak{x}_1 + x_1 = \frac{u\sqrt{fh - g^2} - (g - h\mathfrak{x}_1)}{h},$$

$$f + 2gx_1 + hx_1^2 = \frac{fh - g^2}{h}(1 + u^2);$$

also, weil h und $fh - g^2$ positive Grössen sind:

$$(f + 2gx_1 + hx_1^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{(fh - g^2)\sqrt{fh - g^2}}{h\sqrt{h}}(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}$$

folgt. Nach gehöriger Substitution erhält man:

$$\frac{(\mathfrak{x}_1 + x_1)\partial x_1}{(f + 2gx_1 + hx_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u\sqrt{fh - g^2} - (g - h\mathfrak{x}_1)}{(fh - g^2)\sqrt{h}\,.\,(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}}\partial u,$$

also

$$\int \frac{(\mathfrak{x}_1 + x_1)\partial x_1}{(f + 2gx_1 + hx_1{}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{h(fh-g^2)}} \int \frac{u\partial u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{g - h\mathfrak{x}_1}{(fh-g^2)\sqrt{h}} \int \frac{\partial u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzen wir nun, ω zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ nehmend,

$$u = \operatorname{tang}\omega,$$

so ist

$$\partial u = \frac{\partial\omega}{\cos\omega^2}, \quad u\partial u = \frac{\sin\omega}{\cos\omega^3}\partial\omega, \quad 1+u^2 = \frac{1}{\cos\omega^2};$$

also, weil $\cos\omega$ positiv ist:

$$(1+u^2)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{\cos\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\cos\omega^3}.$$

Daher ist

$$\frac{u\partial u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = \sin\omega\partial\omega, \quad \frac{\partial u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = \cos\omega\partial\omega;$$

folglich

$$\int \frac{u\partial u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = -\cos\omega, \quad \int \frac{\partial u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = \sin\omega;$$

also nach dem Obigen

$$\int \frac{(\mathfrak{x}_1 + x_1)\partial x_1}{(f + 2gx_1 + hx_1{}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{\cos\omega}{\sqrt{h(fh-g^2)}} - \frac{(g - h\mathfrak{x}_1)\sin\omega}{(fh-g^2)\sqrt{h}}.$$

Weil aber

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}\omega^2}}, \quad \sin\omega = \frac{\operatorname{tang}\omega}{\sqrt{1+\operatorname{tang}\omega^2}};$$

d. i. nach dem Obigen

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \sin\omega = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

ist; so ist, wie man leicht findet:

$$\int \frac{(\mathfrak{x}_1+x_1)\partial x_1}{(f+2gx_1+hx_1^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{fh-g^2}+(g-h\mathfrak{x}_1)u}{(fh-g^2)\sqrt{h(1+u^2)}}.$$

Führt man nun für u seinen aus dem Obigen bekannten Werth ein, so erhält man:

$$\int \frac{(\mathfrak{x}_1+x_1)\partial x_1}{(f+2gx_1+hx_1^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{f-g\mathfrak{x}_1+(g-h\mathfrak{x}_1)x_1}{(fh-g^2)\sqrt{f+2gx_1+hx_1^2}},$$

und es ist folglich nach dem Obigen:

$$X = \frac{\mu}{(a_1-a)(fh-g^2)}\left\{\frac{f-g\mathfrak{x}_1}{\sqrt{f}} - \frac{f-g\mathfrak{x}_1+(a_1-a)(g-h\mathfrak{x}_1)}{\sqrt{f+2g(a_1-a)+h(a_1-a)^2}}\right\}.$$

Es ist nun

$$g = \frac{(a_1-a)\mathfrak{x}_1+(b_1-b)\mathfrak{y}_1+(c_1-c)\mathfrak{z}_1}{a_1-a},$$

$$h = \frac{(a_1-a)^2+(b_1-b)^2+(c_1-c)^2}{(a_1-a)^2};$$

also, wenn wir

$$F = \mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{y}_1^2+\mathfrak{z}_1^2,$$

$$G = (a_1-a)\mathfrak{x}_1+(b_1-b)\mathfrak{y}_1+(c_1-c)\mathfrak{z}_1,$$

$$H = (a_1-a)^2+(b_1-b)^2+(c_1-c)^2$$

setzen:

$$f = F,\quad g = \frac{G}{a_1-a},\quad h = \frac{H}{(a_1-a)^2}.$$

Führen wir F, G, H statt f, g, h in den obigen Ausdruck von X ein, so erhalten wir nach einigen leichten Verwandlungen:

$$X = \frac{\mu}{FH-G^2}\left\{\frac{F(a_1-a)-G\mathfrak{x}_1}{\sqrt{F}} - \frac{(F+G)(a_1-a)-(G+H)\mathfrak{x}_1}{\sqrt{(a_1-\mathfrak{x})^2+(b_1-\mathfrak{y})^2+(c_1-\mathfrak{z})^2}}\right\}.$$

Es ist aber, wenn wir der Kürze wegen

$$[\mathfrak{x}\mathfrak{y}] = (a-a_1)(b-\mathfrak{y})-(b-b_1)(a-\mathfrak{x}),$$

$$[\mathfrak{y}\mathfrak{z}] = (b-b_1)(c-\mathfrak{z})-(c-c_1)(b-\mathfrak{y}),$$

$$[\mathfrak{z}\mathfrak{x}] = (c-c_1)(a-\mathfrak{x})-(a-a_1)(c-\mathfrak{z});$$

oder

$$[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]=(ab_1-ba_1)-(a-a_1)\mathfrak{y}+(b-b_1)\mathfrak{x},$$
$$[\mathfrak{y}\mathfrak{z}]=(bc_1-cb_1)-(b-b_1)\mathfrak{z}+(c-c_1)\mathfrak{y},$$
$$[\mathfrak{z}\mathfrak{x}]=(ca_1-ac_1)-(c-c_1)\mathfrak{x}+(a-a_1)\mathfrak{z};$$

oder

$$[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]=-(a_1-\mathfrak{x})b-(\mathfrak{x}-a)b_1-(a-a_1)\mathfrak{y},$$
$$[\mathfrak{y}\mathfrak{z}]=-(b_1-\mathfrak{y})c-(\mathfrak{y}-b)c_1-(b-b_1)\mathfrak{z},$$
$$[\mathfrak{z}\mathfrak{x}]=-(c_1-\mathfrak{z})a-(\mathfrak{z}-c)a_1-(c-c_1)\mathfrak{x}$$

setzen:

$$FH-G^2=[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]^2+[\mathfrak{y}\mathfrak{z}]^2+[\mathfrak{z}\mathfrak{x}]^2,$$
$$F(a_1-a)-G\mathfrak{x}_1=-(b-\mathfrak{y})[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]+(c-\mathfrak{z})[\mathfrak{x}\mathfrak{z}],$$
$$(F+G)(a_1-a)-(G+H)\mathfrak{x}_1=-(b_1-\mathfrak{y})[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]+(c_1-\mathfrak{z})[\mathfrak{z}\mathfrak{x}];$$

also nach dem Obigen

$$X=\frac{\mu}{[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]^2+[\mathfrak{y}\mathfrak{z}]^2+[\mathfrak{z}\mathfrak{x}]^2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(b_1-\mathfrak{y})[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]-(c_1-\mathfrak{z})[\mathfrak{z}\mathfrak{x}]}{\sqrt{(a_1-\mathfrak{x})^2+(b_1-\mathfrak{y})^2+(c_1-\mathfrak{z})^2}}\\ -\dfrac{(b-\mathfrak{y})[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]-(c-\mathfrak{z})[\mathfrak{z}\mathfrak{x}]}{\sqrt{(a-\mathfrak{x})^2+(b-\mathfrak{y})^2+(c-\mathfrak{z})^2}}\end{array}\right\}.$$

Es ist aber auch:

$$\begin{aligned}(b_1-\mathfrak{y})[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]-(c_1-\mathfrak{z})[\mathfrak{z}\mathfrak{x}]=\;&(a-a_1)\{(a_1-\mathfrak{x})^2+(b_1-\mathfrak{y})^2+(c_1-\mathfrak{z})^2\}\\&-(a_1-\mathfrak{x})\{(a-a_1)(a_1-\mathfrak{x})+(b-b_1)(b_1-\mathfrak{y})+(c-c_1)(c_1-\mathfrak{z})\},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(b-\mathfrak{y})[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]-(c-\mathfrak{z})[\mathfrak{z}\mathfrak{x}]=&-(a_1-a)\{(a-\mathfrak{x})^2+(b-\mathfrak{y})^2+(c-\mathfrak{z})^2\}\\&+(a-\mathfrak{x})\{(a_1-a)(a-\mathfrak{x})+(b_1-b)(b-\mathfrak{y})+(c_1-c)(c-\mathfrak{z})\};\end{aligned}$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$P=(a-\mathfrak{x})^2+(b-\mathfrak{y})^2+(c-\mathfrak{z})^2,$$
$$P_1=(a_1-\mathfrak{x})^2+(b_1-\mathfrak{y})^2+(c_1-\mathfrak{z})^2;$$

ferner

$$Q=(a_1-a)(a-\mathfrak{x})+(b_1-b)(b-\mathfrak{y})+(c_1-c)(c-\mathfrak{z}),$$
$$Q_1=(a-a_1)(a_1-\mathfrak{x})+(b-b_1)(b_1-\mathfrak{y})+(c-c_1)(c_1-\mathfrak{z})$$

setzen, zugleich mit Verwechselung der Zeichen:

$$X=\frac{\mu}{[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]^2+[\mathfrak{y}\mathfrak{z}]^2+[\mathfrak{z}\mathfrak{x}]^2}\left\{\frac{(a_1-a)P-(a-\mathfrak{x})Q}{\sqrt{P}}+\frac{(a-a_1)P_1-(a_1-\mathfrak{x})Q_1}{\sqrt{P_1}}\right\},$$

$$Y=\frac{\mu}{[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]^2+[\mathfrak{y}\mathfrak{z}]^2+[\mathfrak{z}\mathfrak{x}]^2}\left\{\frac{(b_1-b)P-(b-\mathfrak{y})Q}{\sqrt{P}}+\frac{(b-b_1)P_1-(b_1-\mathfrak{y})Q_1}{\sqrt{P_1}}\right\},$$

$$Z=\frac{\mu}{[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]^2+[\mathfrak{y}\mathfrak{z}]^2+[\mathfrak{z}\mathfrak{x}]^2}\left\{\frac{(c_1-c)P-(c-\mathfrak{z})Q}{\sqrt{P}}+\frac{(c-c_1)P_1-(c_1-\mathfrak{z})Q_1}{\sqrt{P_1}}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen

$$[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]=-(a_1-\mathfrak{x})b-(\mathfrak{x}-a)b_1-(a-a_1)\mathfrak{y},$$

$$[\mathfrak{y}\mathfrak{z}]=-(b_1-\mathfrak{y})c-(\mathfrak{y}-b)c_1-(b-b_1)\mathfrak{z},$$

$$[\mathfrak{z}\mathfrak{x}]=-(c_1-\mathfrak{z})a-(\mathfrak{z}-c)a_1-(c-c_1)\mathfrak{x}$$

ist, so sind die absoluten Werthe von

$$[\mathfrak{x}\mathfrak{y}],\quad [\mathfrak{y}\mathfrak{z}],\quad [\mathfrak{z}\mathfrak{x}]$$

die doppelten Flächenräume der Projectionen des zwischen den Punkten (abc), $(a_1b_1c_1)$, $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ liegenden Dreiecks auf den Ebenen der

$$xy,\quad yz,\quad zx;$$

und bezeichnen wir also den Flächeninhalt des in Rede stehenden Dreiecks durch Δ, so ist nach einem bekannten Satze

$$[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]^2+[\mathfrak{y}\mathfrak{z}]^2+[\mathfrak{z}\mathfrak{x}]^2=4\Delta^2.$$

Bezeichnen wir die Entfernungen des Punktes $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ von den Punkten (abc) und $(a_1b_1c_1)$ respective durch R und R_1, so ist

$$R=\sqrt{(a-\mathfrak{x})^2+(b-\mathfrak{y})^2+(c-\mathfrak{z})^2}=\sqrt{P},$$

$$R_1=\sqrt{(a_1-\mathfrak{x})^2+(b_1-\mathfrak{y})^2+(c_1-\mathfrak{z})^2}=\sqrt{P_1};$$

also nach dem Obigen:

$$X=\frac{\mu}{4\Delta^2}\left\{(a_1-a)(R-R_1)-(a-\mathfrak{x})\frac{Q}{R}-(a_1-\mathfrak{x})\frac{Q_1}{R_1}\right\},$$

$$Y=\frac{\mu}{4\Delta^2}\left\{(b_1-b)(R-R_1)-(b-\mathfrak{y})\frac{Q}{R}-(b_1-\mathfrak{y})\frac{Q_1}{R_1}\right\},$$

$$Z=\frac{\mu}{4\Delta^2}\left\{(c_1-c)(R-R_1)-(c-\mathfrak{z})\frac{Q}{R}-(c_1-\mathfrak{z})\frac{Q_1}{R_1}\right\}.$$

Bezeichnen wir die an den Spitzen (abc) und $(a_1b_1c_1)$ liegenden Winkel des zwischen den Punkten (abc), $(a_1b_1c_1)$, $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ liegenden Dreiecks Δ respective durch ω und ω_1, so ist nach den Lehren der ebenen Trigonometrie:

$$\begin{aligned}2LR\cos\omega = \; & (a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(c-c_1)^2\\ & +(a-\mathfrak{x})^2+(b-\mathfrak{y})^2+(c-\mathfrak{z})^2\\ & -(a_1-\mathfrak{x})^2-(b_1-\mathfrak{y})^2-(c_1-\mathfrak{z})^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2LR_1\cos\omega_1 = \; & (a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(c-c_1)^2\\ & +(a_1-\mathfrak{x})^2+(b_1-\mathfrak{y})^2+(c_1-\mathfrak{z})^2\\ & -(a-\mathfrak{x})^2-(b-\mathfrak{y})^2-(c-\mathfrak{z})^2;\end{aligned}$$

also, wie man leicht findet:

$$LR\cos\omega = -(a_1-a)(a-\mathfrak{x})-(b_1-b)(b-\mathfrak{y})-(c_1-c)(c-\mathfrak{z}),$$

$$LR_2\cos\omega_1 = -(a-a_1)(a_1-\mathfrak{x})-(b-b_1)(b_1-\mathfrak{y})-(c-c_1)(c_1-\mathfrak{z});$$

d. i. nach dem Obigen

$$LR\cos\omega = -Q,\quad LR_1\cos\omega_1 = -Q_1;$$

folglich

$$X=\frac{\mu}{4\Delta^2}\{(a_1-a)(R-R_1)+(a-\mathfrak{x})L\cos\omega+(a_1-\mathfrak{x})L\cos\omega_1\},$$

$$Y=\frac{\mu}{4\Delta^2}\{(b_1-b)(R-R_1)+(b-\mathfrak{y})L\cos\omega+(b_1-\mathfrak{y})L\cos\omega_1\},$$

$$Z=\frac{\mu}{4\Delta^2}\{(c_1-c)(R-R_1)+(c-\mathfrak{z})L\cos\omega+(c_1-\mathfrak{z})L\cos\omega_1\}.$$

Weil

$$R:R_1=\sin\omega_1:\sin\omega,$$

$$R:L=\sin\omega_1:\sin(\omega+\omega_1),$$

$$R_1:L=\sin\omega:\sin(\omega+\omega_1)$$

ist, so kann man mit den obigen Ausdrücken noch verschiedene einfache Transformationen vornehmen, bei denen wir aber jetzt nicht verweilen wollen. Man kann auch

$$L=R\cos\omega+R_1\cos\omega_1$$

setzen.

Bezeichnen wir die Resultirende der drei Kräfte X, Y, Z durch $\mathfrak{X}$, und die auf gewöhnliche Weise genommenen Winkel, welche deren Richtung mit den drei Coordinatenaxen einschliesst, durch φ, ψ, χ; so ist

$$\mathfrak{X}\cos\varphi = X,\quad \mathfrak{X}\cos\psi = Y,\quad \mathfrak{X}\cos\chi = Z;$$

also

$$\mathfrak{X} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Wird ferner der an der Spitze $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ des Dreiecks Δ liegende Winkel dieses Dreiecks durch θ bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned} 2RR_1\cos\theta = {} & (a-\mathfrak{x})^2 + (b-\mathfrak{y})^2 + (c-\mathfrak{z})^2 \\ & + (a_1-\mathfrak{x})^2 + (b_1-\mathfrak{y})^2 + (c_1-\mathfrak{z})^2 \\ & - (a-a_1)^2 - (b-b_1)^2 - (c-c_1)^2, \end{aligned}$$

also, wie man leicht findet:

$$RR_1\cos\theta = (a-\mathfrak{x})(a_1-\mathfrak{x}) + (b-\mathfrak{y})(b_1-\mathfrak{y}) + (c-\mathfrak{z})(c_1-\mathfrak{z}).$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^2 = \frac{\mu^2L^2}{16\Delta^4} & \left\{ \begin{aligned} (R-R_1)^2 + R^2\cos\omega^2 + R_1{}^2\cos\omega_1{}^2 \\ - 2R(R-R_1)\cos\omega^2 \\ + 2R_1(R-R_1)\cos\omega_1{}^2 \\ + 2RR_1\cos\omega\cos\omega_1\cos\theta \end{aligned} \right\} \\ = \frac{\mu^2L^2}{16\Delta^4} & \left\{ \begin{aligned} R^2\sin\omega^2 + R_1{}^2\sin\omega_1{}^2 \\ - 2RR_1(1-\cos\omega^2-\cos\omega_1{}^2-\cos\omega\cos\omega_1\cos\theta) \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Weil aber

$$\cos\theta = -\cos(\omega + \omega_1)$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$1-\cos\omega^2-\cos\omega_1{}^2-\cos\omega\cos\omega_1\cos\theta = \sin\omega\sin\omega_1\cos\theta,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\mathfrak{X}^2 = \frac{\mu^2L^2}{16\Delta^4}(R^2\sin\omega^2 + R_1{}^2\sin\omega_1{}^2 - 2RR_1\sin\omega\sin\omega_1\cos\theta).$$

Bezeichnen wir nun die in Bezug auf L als Grundlinie genommene Höhe des Dreiecks Δ durch H, so ist

$$H = R\sin\omega = R_1\sin\omega_1;$$

also ist

$$\mathfrak{X}^2=\frac{\mu^2L^2H^2}{8\Delta^4}(1-\cos\theta),$$

oder, weil

$$2\sin\frac{1}{2}\theta^2=1-\cos\theta$$

ist:

$$\mathfrak{X}^2=\frac{\mu^2L^2H^2}{4\Delta^4}\sin\frac{1}{2}\theta^2,$$

und folglich

$$\mathfrak{X}=\frac{\mu LH}{2\Delta^2}\sin\frac{1}{2}\theta.$$

Aber $LH=2\Delta$, also

$$\mathfrak{X}=\frac{\mu}{\Delta}\sin\frac{1}{2}\theta.$$

Nehmen wir jetzt der Kürze wegen die Ebene des Dreiecks Δ als Ebene der xy, den Punkt (abc) als Anfang der (xyz), und die Linie L als den positiven Theil der Axe der x an; so ist im Obigen

$$a=0,\quad b=0,\quad c=0;$$

$$a_1=L,\quad b_1=0,\quad c_1=0;$$

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{x},\quad \mathfrak{y}=\mathfrak{y},\quad \mathfrak{z}=0$$

zu setzen, und es ist folglich

$$X=\frac{\mu L}{4\Delta^2}\{R-R_1-\mathfrak{x}\cos\omega+(L-\mathfrak{x})\cos\omega_1\},$$

$$Y=-\frac{\mu L}{4\Delta^2}\mathfrak{y}(\cos\omega+\cos\omega_1),$$

$$Z=0.$$

Es ist aber allgemein

$$\mathfrak{x}=R\cos\omega,$$

$$L-\mathfrak{x}=L-R\cos\omega=R_1\cos\omega_1,$$

folglich

$$X= \frac{\mu L}{4\Delta^2}(R\sin\omega^2 - R_1\sin\omega_1{}^2),$$

$$Y=-\frac{\mu L}{4\Delta^2}y(\cos\omega+\cos\omega_1),$$

$$Z=0.$$

Nimmt man nun die positiven y von der Seite L des Dreiecks Δ an nach der dieser Seite gegenüberstehenden Spitze desselben hin, so ist

$$H=y=R\sin\omega=R_1\sin\omega_1;$$

also

$$X= \frac{\mu LH}{4\Delta^2}(\sin\omega-\sin\omega_1),$$

$$Y=-\frac{\mu LH}{4\Delta^2}(\cos\omega+\cos\omega_1),$$

$$Z=0;$$

folglich, weil $LH=2\Delta$ ist:

$$X= \frac{\mu}{2\Delta}(\sin\omega-\sin\omega_1)=\frac{\mu}{\Delta}\ \text{in}\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega_1),$$

$$Y=-\frac{\mu}{2\Delta}(\cos\omega+\cos\omega_1)=-\frac{\mu}{\Delta}\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega_1),$$

$$Z=0.$$

Weil

$$R:R_1=\sin\omega_1:\sin\omega$$

und

$$L=R\cos\omega+R_1\cos\omega_1$$

ist, so ist auch:

$$X=-\frac{\mu}{2\Delta}\cdot\frac{R-R_1}{R_1}\sin\omega,$$

$$Y=-\frac{\mu}{2\Delta}\cdot\frac{L-(R-R_1)\cos\omega}{R_1},$$

$$Z=0;$$

oder

$$X=-\frac{\mu}{2\Delta}\cdot\frac{R-R_1}{R}\sin\omega_1,$$

$$Y=-\frac{\mu}{2\Delta}\cdot\frac{L+(R-R_1)\cos\omega_1}{R},$$

$$Z=0.$$

Weil nach dem Obigen

$$\cos\varphi=\frac{X}{\mathfrak{X}},\quad \cos\psi=\frac{Y}{\mathfrak{X}},\quad \cos\chi=\frac{Z}{\mathfrak{X}}$$

ist, so ist

$$\cos\varphi=\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)}{\sin\frac{1}{2}\theta},$$

$$\cos\psi=-\frac{\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)}{\sin\frac{1}{2}\theta},$$

$$\cos\chi=0.$$

Die Gleichung der Richtung der Resultirenden in der Ebene der xy ist:

$$y-\mathfrak{y}=\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}(x-\mathfrak{x}),$$

also

$$y-\mathfrak{y}=-(x-\mathfrak{x})\cot\frac{1}{2}(\omega-\omega_1);$$

oder

$$y-R\sin\omega=-(x-R\cos\omega)\cot\frac{1}{2}(\omega-\omega_1).$$

Bezeichnen wir die erste Coordinate des Durchschnittspunktes der Richtung der Resultirenden mit der Axe der x, d. i. mit der Linie L, durch p, so ist

$$-R\sin\omega=-(p-R\cos\omega)\cot\frac{1}{2}(\omega-\omega_1),$$

woraus leicht

$$p=R\frac{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)}$$

folgt. Also ist

$$L-p=R\cos\omega+R_1\cos\omega_1-R\frac{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)}$$

$$=R_1\left\{\cos\omega_1+\frac{\cos\omega\sin\omega_1}{\sin\omega}-\frac{\sin\omega_1\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)}{\sin\omega\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)}\right\}$$

$$=\frac{R_1}{\sin\omega}\left\{\sin(\omega+\omega_1)-\sin\omega_1\frac{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)}\right\}$$

$$=R_1\frac{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)}{\sin\omega}\left\{2\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)-\frac{\sin\omega_1}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)}\right\}$$

$$=R_1\frac{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)}{\sin\omega}\cdot\frac{2\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)-\sin\omega_1}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)}$$

also, weil

$$\sin\omega+\sin\omega_1=2\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)$$

ist:

$$L-p=R_1\frac{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)}.$$

Weil $\omega+\omega_1$, und noch mehr der absolute Werth von $\omega-\omega_1$, immer kleiner als 180° ist, so sind $\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)$ und $\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)$

stets positive Grössen. Also sind auch p und $L-p$ positive Grössen, und weil nun nach dem Vorhergehenden

$$p:L-p=R:R_1$$

ist, so erhellet aus einem bekannten geometrischen Satze, dass die Richtung der Resultirenden den der Seite L des Dreiecks Δ gegenüberstehenden Winkel θ halbirt.

Weil $\mu=\delta L$ ist, so kann man die Resultirende $\mathfrak{X}$ auch auf folgende Art ausdrücken:

$$\mathfrak{X}=\frac{\delta L}{\Delta}\sin\frac{1}{2}\theta.$$

Nun ist aber

$$\Delta=\frac{1}{2}RR_1\sin\theta=RR_1\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta,$$

also

$$\mathfrak{X}=\frac{\delta L}{RR_1\cos\frac{1}{2}\theta}.$$

Weil bekanntlich

$$\cos\frac{1}{2}\theta=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(R+R_1+L)(R+R_1-L)}{RR_1}}$$

ist, so ist

$$RR_1\cos\frac{1}{2}\theta=\frac{1}{2}\sqrt{RR_1(R+R_1+L)(R+R_1-L)},$$

folglich

$$\mathfrak{X}=\frac{2\delta L}{\sqrt{RR_1(R+R_1+L)(R+R_1-L)}},$$

Bezeichnet man die den Winkel θ im Dreieck Δ halbirende Linie durch u, so ist

$$R:u=\sin(\frac{1}{2}\theta+\omega):\sin\omega$$
$$=\sin\frac{1}{2}\theta\cot\omega+\cos\frac{1}{2}\theta:1,$$

woraus

$$\cot\omega = \frac{R - u\cos\frac{1}{2}\theta}{u\sin\frac{1}{2}\theta}$$

folgt. Ferner ist

$$R : R_1 = \sin(\theta + \omega) : \sin\omega$$
$$= \sin\theta\cot\omega + \cos\theta : 1,$$

woraus sich

$$\cot\omega = \frac{R - R_1\cos\theta}{R_1\sin\theta}$$

ergiebt. Also ist

$$\frac{R - u\cos\frac{1}{2}\theta}{u\sin\frac{1}{2}\theta} = \frac{R - R_1\cos\theta}{R_1\sin\theta},$$

woraus man leicht

$$2RR_1\cos\frac{1}{2}\theta = (R + R_1)u$$

findet. Also ist nach dem Obigen:

$$\mathfrak{X} = \frac{2\delta L}{(R + R_1)u}.$$

Den Fall, wenn der angezogene Punkt in der anziehenden geraden Linie liegt, muss man nun noch besonders betrachten.

Die gegebene anziehende gerade Linie sei $AB = L$, und der angezogene Punkt liege in deren Verlängerung, etwa über den Punkt B hinaus. Die Entfernung des angezogenen Punktes von dem Punkte B sei e. Theilt man die Linie $AB = L$ in n gleiche Theile und setzt

$$\frac{L}{n} = i,$$

so ist $\mathfrak{X}$ offenbar die Gränze, welcher die Grösse

$$\frac{\delta i}{e^2} + \frac{\delta i}{(e+i)^2} + \frac{\delta i}{(e+2i)^2} + \ldots + \frac{\delta i}{(e+(n-1)i)^2}$$

$$= \delta i \left\{ \frac{1}{e^2} + \frac{1}{(e+i)^2} + \frac{1}{(e+2i)^2} + \ldots + \frac{1}{(e+ni)^2} \right\} - \frac{\delta i}{(e+L)^2}$$

sich nähert, wenn n in's Unendliche wächst. Also ist nach der Theorie der bestimmten Integrale:

$$\mathfrak{X} = \delta \int_0^L \frac{\partial x}{(e+x)^2}.$$

Für $e + x = v$, $\partial x = \partial v$ ist

$$\int \frac{\partial x}{(e+x)^2} = \int \frac{\partial v}{v^2} = \int v^{-2} \partial v = -v^{-1} = -\frac{1}{v} = -\frac{1}{e+x},$$

also

$$\mathfrak{X} = \delta \left\{ \frac{1}{e} - \frac{1}{e+L} \right\} = \frac{\delta L}{e(e+L)} = \frac{\mu}{e(e+L)}.$$

Für $e = 0$, d. h. wenn der angezogene Punkt der Endpunkt B der Linie $AB = L$ selbst ist, wird $\mathfrak{X} = \infty$.

Wenn der angezogene Punkt in der Linie $AB = L$ selbst, d. h. zwischen ihren Endpunkten liegt, so wollen wir die beiden Theile dieser Linie, in welche dieselbe durch den angezogenen Punkt getheilt wird, durch λ und λ_1 bezeichnen. Nehmen wir dann die positive Richtung der Kräfte mit dem Theile λ als zusammenfallend an, so kann die gesammte Wirkung der Linie L auf den in Rede stehenden Punkt nach dem Vorhergehenden offenbar desto genauer, je kleiner ε ist, durch

$$\frac{\delta(\lambda-\varepsilon)}{\varepsilon\lambda} - \frac{\delta(\lambda_1-\varepsilon)}{\varepsilon\lambda_1},$$

d. h. durch

$$\frac{\delta}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\lambda} + \frac{\delta}{\lambda_1}$$

dargestellt werden, was augenscheinlich

$$\frac{\delta(\lambda-\lambda_1)}{\lambda\lambda_1}$$

giebt.

Ich erlaube mir bei dieser Gelegenheit eine allgemeine Bemerkung zu machen, deren weitere Prüfung mir angenehm sein wird. Man kommt nämlich bei Aufgaben des Attractionscalculs, überhaupt bei Untersuchungen, denen das Attractions- oder Gravitationsgesetz zum Grunde liegt, sehr häufig in gewissen besonderen Fällen auf das sogenannte Unendliche. Der Grund hiervon scheint mir aber in dem analytischen Ausdrucke des Attractionsgesetzes, oder, wenn man will, in diesem Gesetze selbst zu liegen. Denn drückt man, wenn im Allgemeinen μ die Masse und r die Entfernung bezeichnet, die Attraction durch $\frac{\mu}{r^2}$ aus, so ist wohl klar, dass dieser Ausdruck in das sogenannte Unendliche übergeht, wenn man r verschwinden lässt, und dass dies wohl auch auf jede Untersuchung, der das Attractionsgesetz zum Grunde liegt, von Einfluss sein muss, unterliegt gewiss keinem Zweifel. Man hat, wie es mir scheint, diese Bemerkung, über die ich mich übrigens jetzt nicht weiter verbreiten will, bisher bei Untersuchungen dieser Art nicht so beachtet, wie es hätte geschehen sollen. Ich möchte wohl wünschen, dass dies künftig mehr geschähe, und bin wenigstens der Meinung, dass bei Untersuchungen, denen das Attractionsgesetz zum Grunde liegt, mit Rücksicht auf das vorher Gesagte, wenigstens jedenfalls besondere Vorsicht zu empfehlen ist.

III.

Wirkung der Anziehung einer Kreisfläche auf einen Punkt von der Masse Eins, welcher in der auf der Kreisfläche in ihrem Mittelpunkte senkrecht stehenden geraden Linie liegt.

Man nehme die Ebene des gegebenen Kreises als die Ebene der xy eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz an, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt des gegebenen Kreises ist, dessen Halbmesser wir durch r bezeichnen wollen. Der Theil der Axe der z, in welchem der angezogene Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ liegt, werde als der positive Theil dieser Axe angenommen, so dass also $\mathfrak{z}$ eine positive Grösse ist. Dies vorausgesetzt, betrachte man zuvörderst überhaupt die Anziehung einer auf der Axe der x senkrecht stehenden Sehne des gegebenen Kreises auf den Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$. Bezeichnen wir die erste Coordinate des Durchschnittspunkts dieser Sehne mit der Axe der x durch x selbst, so ist für diese Sehne, mit Rücksicht auf II., offenbar:

$$a=x,\quad b=+\sqrt{r^2-x^2},\quad c=0;$$

$$a_1=x,\quad b_1=-\sqrt{r^2-x^2},\quad c_1=0;$$

$$\mathfrak{x}=0,\quad \mathfrak{y}=0,\qquad \mathfrak{z}=\mathfrak{z}.$$

Also ist

$$[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]=-2x\sqrt{r^2-x^2},$$

$$[\mathfrak{y}\mathfrak{z}]=-2\mathfrak{z}\sqrt{r^2-x^2},$$

$$[\mathfrak{z}\mathfrak{x}]=0;$$

folglich

$$[\mathfrak{x}\mathfrak{y}]^2+[\mathfrak{y}\mathfrak{z}]^2+[\mathfrak{z}\mathfrak{x}]^2=4(\mathfrak{z}^2+x^2)(r^2-x^2).$$

Ferner ist

$$P = x^2 + r^2 - x^2 + \mathfrak{z}^2 = r^2 + \mathfrak{z}^2,$$

$$P_1 = x^2 + r^2 - x^2 + \mathfrak{z}^2 = r^2 + \mathfrak{z}^2;$$

$$Q = -2\sqrt{r^2 - x^2}.\sqrt{r^2 - x^2} = -2(r^2 - x^2),$$

$$Q_1 = -2\sqrt{r^2 - x^2}.\sqrt{r^2 - x^2} = -2(r^2 - x^2);$$

also

$$P = P_1, \quad Q = Q_1.$$

Daher sind nach II. die Composanten der Anziehung unserer Sehne:

$$\frac{\mu}{4(\mathfrak{z}^2 + x^2)(r^2 - x^2)} \cdot \frac{4x(r^2 - x^2)}{\sqrt{r^2 + \mathfrak{z}^2}},$$

$$0,$$

$$\frac{\mu}{4(\mathfrak{z}^2 + x^2)(r^2 - x^2)} \cdot - \frac{4\mathfrak{z}(r^2 - x^2)}{\sqrt{r^2 + \mathfrak{z}^2}};$$

oder, weil

$$\mu = \delta L = 2\delta\sqrt{r^2 - x^2}$$

ist, wie man leicht findet:

$$\frac{2\delta}{\sqrt{r^2 + \mathfrak{z}^2}} \cdot \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{\mathfrak{z}^2 + x^2},$$

$$0,$$

$$-\frac{2\delta\mathfrak{z}}{\sqrt{r^2 + \mathfrak{z}^2}} \cdot \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{\mathfrak{z}^2 + x^2}.$$

Bezeichnen wir nun die Composanten der Anziehung, welche die ganze Kreisfläche auf den gegebenen Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ ausübt, durch X, Y, Z; so ist offenbar:

$$X = \frac{2\delta}{\sqrt{r^2 + \mathfrak{z}^2}} \int_{-r}^{+r} \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{\mathfrak{z}^2 + x^2} \partial x,$$

$$Y = 0,$$

$$Z = -\frac{2\delta\mathfrak{z}}{\sqrt{r^2 + \mathfrak{z}^2}} \int_{-r}^{+r} \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{\mathfrak{z}^2 + x^2} \partial x.$$

Weil nun aber offenbar

$$\int_{-r}^{+r} \frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{\mathfrak{z}^2+x^2}\partial x=0$$

ist, so ist

$$X=0,$$

$$Y=0,$$

$$Z=-\frac{2\delta\mathfrak{z}}{\sqrt{r^2+\mathfrak{z}^2}}\int_{-r}^{+r}\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{\mathfrak{z}^2+x^2}\partial x;$$

wo es nun auf die Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{\mathfrak{z}^2+x^2}\partial x$$

ankommt, die sich auf folgende Art bewerkstelligen lässt.

Es ist

$$\int\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{\mathfrak{z}^2+x^2}\partial x=\int\frac{r^2-x^2}{(\mathfrak{z}^2+x^2)\sqrt{r^2-x^2}}\partial x=\int\frac{r^2+\mathfrak{z}^2-(\mathfrak{z}^2+x^2)}{(\mathfrak{z}^2+x^2)\sqrt{r^2-x^2}}\partial x,$$

also

$$\int\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{\mathfrak{z}^2+x^2}\partial x=(r^2+\mathfrak{z}^2)\int\frac{\partial x}{(\mathfrak{z}^2+x^2)\sqrt{r^2-x^2}}-\int\frac{\partial x}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Setzt man nun

$$\frac{x}{\sqrt{\mathfrak{z}^2+x^2}}=u,\ \text{also}\ \frac{x^2}{\mathfrak{z}^2+x^2}=u^2;$$

so ist, da x und u gleiche Vorzeichen haben und bekanntlich $\mathfrak{z}$ positiv ist:

$$x=\frac{\mathfrak{z}u}{\sqrt{1-u^2}},$$

woraus sich leicht

$$\partial x=\frac{\mathfrak{z}\partial u}{(1-u^2)\sqrt{1-u^2}}$$

und

$$\mathfrak{z}^2+x^2=\frac{\mathfrak{z}^2}{1-u^2},\ \sqrt{r^2-x^2}=\frac{\sqrt{r^2-(r^2+\mathfrak{z}^2)u^2}}{\sqrt{1-u^2}}$$

ergiebt. Also ist

$$\frac{\partial x}{(\mathfrak{z}^2+x^2)\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{\partial u}{\mathfrak{z}\sqrt{r^2-(r^2+\mathfrak{z}^2)u^2}},$$

und folglich nach dem Obigen

$$\int\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{\mathfrak{z}^2+x^2}\partial x=\frac{r^2+\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{z}}\int\frac{\partial u}{\sqrt{r^2-(r^2+\mathfrak{z}^2)u^2}}-\int\frac{\partial x}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Setzt man nun

$$v=\frac{u}{r}\sqrt{r^2+\mathfrak{z}^2},\quad w=\frac{x}{r};$$

also

$$\partial u=\frac{r\partial v}{\sqrt{r^2+\mathfrak{z}^2}},\ \partial x=r\partial w;$$

so wird, weil nach dem Obigen

$$\int\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{\mathfrak{z}^2+x^2}\partial x=\frac{r^2+\mathfrak{z}^2}{r\mathfrak{z}}\int\frac{\partial u}{\sqrt{1-\frac{r^2+\mathfrak{z}^2}{r^2}u^2}}-\frac{1}{r}\int\frac{\partial w}{\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}}$$

ist:

$$\int\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{\mathfrak{z}^2+x^2}\partial x=\frac{\sqrt{r^2+\mathfrak{z}^2}}{\mathfrak{z}}\int\frac{\partial v}{\sqrt{1-v^2}}-\int\frac{\partial w}{\sqrt{1-w^2}}.$$

Nimmt man nun die Bogen zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, so ist

$$\int\frac{\partial v}{\sqrt{1-v^2}}=\operatorname{Arcsin}v=\operatorname{Arcsin}\frac{x\sqrt{r^2+\mathfrak{z}^2}}{r\sqrt{\mathfrak{z}^2+x^2}},$$

$$\int\frac{\partial w}{\sqrt{1-w^2}}=\operatorname{Arcsin}w=\operatorname{Arcsin}\frac{x}{r};$$

also

$$\int \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{\mathfrak{z}^2+x^2}\partial x = \frac{\sqrt{r^2+\mathfrak{z}^2}}{\mathfrak{z}}\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{x\sqrt{r^2+\mathfrak{z}^2}}{r\sqrt{\mathfrak{z}^2+x^2}} - \mathrm{Arc\,sin}\,\frac{x}{r},$$

und folglich

$$\int_{-r}^{+r} \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{\mathfrak{z}^2+x^2}\partial x = \left(\frac{\sqrt{r^2+\mathfrak{z}^2}}{\mathfrak{z}}-1\right)\pi.$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=-\frac{2\delta\mathfrak{z}}{\sqrt{r^2+\mathfrak{z}^2}}\left(\frac{\sqrt{r^2+\mathfrak{z}^2}}{\mathfrak{z}}-1\right)\pi;$$

oder

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=-2\delta\pi\left(1-\frac{\mathfrak{z}}{\sqrt{r^2+\mathfrak{z}^2}}\right);$$

oder auch, weil

$$\mu=\delta r^2\pi,\quad \delta=\frac{\mu}{r^2\pi}$$

ist:

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=-\frac{2\mu}{r^2}\left(1-\frac{\mathfrak{z}}{\sqrt{r^2+\mathfrak{z}^2}}\right).$$

Dass Z negativ herauskommt, entspricht ganz der Natur der Sache, weil man den Theil der Axe der z, in welchem der angezogene Punkt liegt, als den positiven Theil der in Rede stehenden Axe angenommen hat.

IV.

Wirkung der Anziehung einer Kugel auf einen Punkt von der Masse Eins.

Wir wollen zuerst die Anziehung betrachten, welche ein Kugelsegment auf einen Punkt ausübt, der ausserhalb des Kugelsegments in der geraden Linie liegt, die durch den Mittelpunkt der Kugel geht, und auf der Ebene des das Kugelsegment begränzenden Kugelkreises, den wir die Grundfläche des Kugelsegments nennen werden, senkrecht steht.

Den Anfang der Coordinaten legen wir in den Mittelpunkt der Kugel, und nehmen das von demselben auf die Grundfläche des Kugelsegments gefällte Perpendikel als Axe der x an, indem wir zugleich den Theil dieser Axe, welcher der Richtung von der Grundfläche des Kugelsegments nach dem angezogenen Punkte hin entspricht, als deren positiven Theil annehmen. Die gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernung des angezogenen Punktes von dem Mittelpunkte der Kugel sei e; die Entfernung der Grundfläche des Kugelsegments von dem Mittelpunkte der Kugel, welche gleichfalls positiv und negativ sein kann, sei ε.

Denken wir uns nun irgend einen auf der Axe der x senkrecht stehenden Schnitt des Kugelsegments, dessen gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernung von dem Mittelpunkte der Kugel durch x bezeichnet werden mag; so fällt nach III. die ganze Anziehung, welche der Schnitt auf den gegebenen Punkt ausübt, und daher offenbar auch die ganze Anziehung des Kugelsegments auf diesen Punkt, in die Axe der x, und die Wirkung der Anziehung des Schnitts auf den gegebenen Punkt ist nach III., wenn r den Halbmesser der Kugel bezeichnet, offenbar

$$-2\delta\pi\left\{1-\frac{e-x}{\sqrt{r^2-x^2+(e-x)^2}}\right\},$$

woraus sich, wenn wieder $\mathfrak{X}$ die Anziehung des Kugelsegments bezeichnet, auf der Stelle

$$\mathfrak{X}=-2\delta\pi\int_{-r}^{\varepsilon}\left\{1-\frac{e-x}{\sqrt{r^2-x^2+(e-x)^2}}\right\}\partial x$$

ergiebt, und es nun auf die Entwickelung des Integrals

$$\int\left\{1-\frac{e-x}{\sqrt{r^2-x^2+(e-x)^2}}\right\}\partial x$$

$$=x-\int\frac{e-x}{\sqrt{r^2-x^2+(e-x)^2}}\partial x,$$

also auf die Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{e-x}{\sqrt{r^2-x^2+(e-x)^2}}\partial x$$

ankommt. Setzen wir zu dem Ende $e-x=u$, $\partial x=-\partial u$; so ist

$$\frac{e-x}{\sqrt{r^2-x^2+(e-x)^2}}\partial x=\frac{e-x}{\sqrt{r^2-e^2+2e(e-x)}}\partial x=-\frac{u\partial u}{\sqrt{r^2-e^2+2eu}};$$

und wenn wir nun

$$r^2-e^2+2eu=v^2,\quad e\partial u=v\partial v$$

setzen, so wird

$$\frac{u\partial u}{\sqrt{r^2-e^2+2eu}}=\frac{(v^2-r^2+e^2)\partial v}{2e^2},$$

also

$$\int\frac{u\partial u}{\sqrt{r^2-e^2+2eu}}$$

$$=\frac{1}{2e^2}\left\{\frac{1}{3}v^3-(r^2-e^2)v\right\}$$

$$=\frac{1}{2e^2}\left\{\frac{1}{3}(r^2-e^2+2eu)-(r^2-e^2)\right\}\sqrt{r^2-e^2+2eu}$$

$$=-\frac{r^2-e^2-eu}{3e^2}\sqrt{r^2-e^2+2eu}$$

$$=-\frac{r^2-2e^2+ex}{3e^2}\sqrt{r^2+e^2-2ex}.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\int\left\{1-\frac{e-x}{\sqrt{r^2-x^2+(e-x)^2}}\right\}\partial x$$
$$=x-\frac{r^2-2e^2+ex}{3e^2}\sqrt{r^2+e^2-2ex},$$

und folglich

$$\int_{-r}^{\varepsilon}\left\{1-\frac{e-x}{\sqrt{r^2-x^2+(e-x)^2}}\right\}\partial x;$$

$$=\varepsilon+r+\frac{(e+r)(r^2-2e^2+er)}{3e^2}-\frac{(r^2-2e^2+e\varepsilon)\sqrt{e^2+r^2-2e\varepsilon}}{3e^2}$$

$$=\varepsilon+\frac{r^3-2e^3}{3e^2}-\frac{(r^2-2e^2+e\varepsilon)\sqrt{e^2+r^2-2e\varepsilon}}{3e^2},$$

also

$$\mathfrak{X} = -2\delta\pi \left\{ \varepsilon + \frac{r^3 - 2e^3}{3e^2} - \frac{(r^2 - 2e^2 + e\varepsilon)\sqrt{e^2 + r^2 - 2e\varepsilon}}{3e^2} \right\}.$$

Will man die Anziehung haben, welche das Kugelsegment auf den Mittelpunkt seiner Grundfläche ausübt, so muss man $e = \varepsilon$ setzen, was nach leichter Rechnung

$$\mathfrak{X} = -\frac{2\delta\pi}{3\varepsilon^2} \left\{ r^3 + \varepsilon^3 - (r^2 - \varepsilon^2)\sqrt{r^2 - \varepsilon^2} \right\}$$

oder

$$\mathfrak{X} = -\frac{2\delta(r+\varepsilon)\pi}{3\varepsilon^2} \left\{ r^2 - r\varepsilon + \varepsilon^2 - (r - \varepsilon)\sqrt{r^2 - \varepsilon^2} \right\}$$

giebt.

Will man die Anziehung haben, welche die ganze Kugel auf einen ausserhalb liegenden Punkt ausübt, so muss man in dem allgemeinen Ausdrucke von $\mathfrak{X}$, wo e die Entfernung des angezogenen Punktes von dem Mittelpunkte der Kugel bezeichnet, $\varepsilon = r$ setzen, was

$$\mathfrak{X} = -2\delta\pi \left[r + \frac{r^3 - 2e^3}{3e^2} - \frac{(r^2 - 2e^2 + er)(e - r)}{3e^2} \right],$$

folglich nach leichter Rechnung

$$\mathfrak{X} = -\frac{4\delta\pi r^3}{3e^2}$$

giebt. Der Inhalt der Kugel ist $\frac{4}{3}r^3\pi$, also, wenn wir ihre Masse durch μ bezeichnen,

$$\mu = \frac{4}{3}\delta r^3 \pi,$$

folglich nach dem Obigen

$$\mathfrak{X} = -\frac{\mu}{e^2}.$$

Da dieser Ausdruck von dem Halbmesser der Kugel ganz unabhängig ist, d. h. eigentlich seinen Werth gar nicht ändert, wie gross auch der Halbmesser sein mag, wenn nur, natürlich unter Voraussetzung derselben Entfernung e, die Masse μ ungeändert bleibt, so erhellet, dass die Kugel auf einen ausserhalb ihr liegenden Punkt ganz so wirkt, als wenn ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkte concentrirt wäre, und dass dies auch von einer von zwei concentrischen Kugelflächen begränzten Kugelschale gilt, ergiebt sich hieraus unmittelbar. Dies führt zu dem folgenden Satze:

Die Anziehung, welche eine von zwei concentrischen Kugelflächen begränzte Kugelschale auf einen ausserhalb ihr befindlichen Punkt ausübt, ist jederzeit ganz dieselbe, als wenn die gesammte Masse der Kugelschale in dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte der beiden begränzenden Kugelflächen concentrirt wäre.

Dieser Satz ist für die physische Astronomie oder Mechanik des Himmels wichtig, weil man nach demselben bei der Theorie der Bewegung der Planeten um die Sonne, insofern man deren Massen gegen die Sonnenmasse als unendlich klein betrachtet, die Masse der Sonne in dem Sonnenmittelpunkte concentrirt annehmen kann.

Wir wollen nun auch die Anziehung einer Kugel auf einen in ihrem Innern liegenden Punkt betrachten, dessen als positiv betrachtete Entfernung von dem Mittelpunkte der Kugel durch ε bezeichnet werden mag. Legen wir durch den angezogenen Punkt einen auf dem durch diesen Punkt gehenden Durchmesser der Kugel senkrecht stehenden Kugelkreis, so theilt dieser Kugelkreis die Kugel in zwei Segmente, und nach dem Obigen ist die als positiv betrachtete Anziehung des grösseren Kugelsegments offenbar

$$\frac{2\delta\pi}{3\varepsilon^2}\{r^3+\varepsilon^3-(r^2-\varepsilon^2)\sqrt{r^2-\varepsilon^2}\},$$

und die gleichfalls als positiv betrachtete Anziehung des kleineren Kugelsegments ist

$$\frac{2\delta\pi}{3\varepsilon^2}\{r^3-\varepsilon^3-(r^2-\varepsilon^2)\sqrt{r^2-\varepsilon^2}\},$$

wobei sich nach dem Obigen von selbst versteht, dass die Richtung der Anziehung in beiden Fällen mit dem durch den angezogenen Punkt gehenden Durchmesser der Kugel zusammenfällt. Also ist offenbar die Anziehung der ganzen Kugel:

$$\frac{2\delta\pi}{3\varepsilon^2}\{r^3+\varepsilon^3-(r^2-\varepsilon^2)\sqrt{r^2-\varepsilon^2}\}$$
$$-\frac{2\delta\pi}{3\varepsilon^2}\{r^3-\varepsilon^3-(r^2-\varepsilon^2)\sqrt{r^2-\varepsilon^2}\},$$

d. i., wie sich hieraus auf der Stelle ergiebt:

$$\frac{4}{3}\delta\varepsilon\pi.$$

Bezeichnet wieder μ die Masse der Kugel, so ist

$$\mu = \frac{4}{3}\delta r^3\pi, \quad \text{also} \quad \delta = \frac{3\mu}{4r^3\pi};$$

folglich nach dem Vorhergehenden die Anziehung

$$\frac{\mu\varepsilon}{r^3}.$$

Denken wir uns eine von zwei concentrischen Kugelflächen begränzte Kugelschale, und in deren Höhlung einen Punkt, so ist die Anziehung, welche die Kugelschale auf diesen Punkt ausübt, nach dem Obigen offenbar

$$\frac{4}{3}\delta\varepsilon\pi - \frac{4}{3}\delta\varepsilon\pi = 0,$$

und verschwindet also, was zu dem folgenden merkwürdigen Satze führt:

Die Anziehung, welche eine von zwei concentrischen Kugelflächen begränzte homogene Kugelschale, oder eine von zwei concentrischen Kugelflächen begränzte homogene Hohlkugel, auf einen innerhalb ihrer Höhlung befindlichen Punkt ausübt, verschwindet jederzeit, und wo sich also auch dieser Punkt innerhalb der Höhlung befinden mag, sind die auf ihn wirkenden Kräfte unter einander im Gleichgewichte, der Punkt befindet sich folglich überall innerhalb der Höhlung in Ruhe.

Hiermit will ich diesen Aufsatz schliessen, in der Hoffnung jedoch, bald wieder auf den Attractionscalcul zurückzukommen.

III.

Die Krümmungstheorie der Kegelschnitte, elementar geometrisch begründet.

Von

Herrn Planck,

Repetenten an der polytechnischen Schule zu Stuttgart.

Mittelst einiger Lehrsätze über Centralprojection lässt sich der folgende, die Krümmungstheorie der Kegelschnitte enthaltende Satz aufstellen. (Taf. I. Fig. 1.).

„Zwei Sehnen MP, MQ eines Kegelschnittes, die symmetrisch zu dessen Hauptaxen liegen, gehören einem Berührungskreis des Kegelschnittes im Punkte M an.“

Das Projectionscentrum C liege in der Ebene, die man durch den Mittelpunkt O des zu projicirenden Kreises senkrecht zur Spur der Kreisebene gelegt hat. Auf dem Schnitt der Kreisebene mit der durch C parallel zur Grundebene gelegten Ebene nehme man zwei Punkte A und A' in gleicher Entfernung von O, und ziehe an den Kreis die Tangenten AM, AN, $A'M'$, $A'N'$. Es werden alsdann, wie aus den Sätzen von der Polare folgt, die Geraden MN', $M'N$ sich in einem Punkt D der AA' schneiden, der zugleich auf dem zu AA' senkrechten Durchmesser liegt. Von A' aus ziehe man eine Sekante, die den Kreis in P und Q schneidet, so bilden die Geraden $N'A'$, $N'P$, $N'M'$, $N'Q$ ein System harmonischer Linien, folglich auch die Geraden MD, MP, MM', MQ, da $A'N'P = DMP$ u. s. w. Es projiciren sich nun $A'P$ und $A'M'$ als parallele Geraden, und symmetrisch gegen die Projection der Tangente AM. Die Sehnen MP, MQ aber projiciren sich, da die Projection von D in unendliche Entfernung fällt, als zwei Sehnen symmetrisch zur

Projection von MM'. Es werden folglich, wie der Winkel der Tangente AM mit MQ dem Peripheriewinkel MPQ gleich ist, so auch die Projectionen beider Winkel einander gleich sein, und hiernach ist die Tangente am Kegelschnitt auch Tangente an dem die beiden Sehnen enthaltenden Kreise, mithin ist dieser Kreis Berührungskreis.

Lässt man jetzt beide Sehnen sich um gleichviel drehen, bis die eine in die Tangente fällt, so geht der Berührungskreis in den Krümmungskreis über. Die Sehne MR, nach der dieser den Kegelschnitt schneidet, ist die Projection von $A'M$. Sie ist dem Durchmesser zugeordnet, der mit dem der Tangente zugeordneten symmetrisch liegt; construirt man den Punkt R des Kegelschnitts, so lassen sich mittelst dieses Punktes beliebig viele Sehnen, wie MP, MQ construiren, da RP und MQ sich immer auf demselben Durchmesser schneiden.

Aus den Gleichungen des Kegelschnittes und des Berührungskreises lässt sich der erwiesene Satz auf so einfache Weise ablesen, dass es uns wundern sollte, wenn er, da er doch immer interessant genug ist, nicht irgendwo ausgesprochen wäre. Verlegt man den Coordinatenursprung in den Punkt M, und bezieht den Kegelschnitt auf Axen parallel zu den Hauptaxen, so heisst seine Gleichung

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = 0 \qquad (\mathrm{I.})$$

Die Gleichung der Tangente im Ursprung heisst $Dx + Ey = 0$, folglich die Gleichung der Normale $Ex - Dy = 0$.

Die Gleichung des Kreises (wenn X, Y sein Mittelpunkt) heisst:

$$x^2 + y^2 - 2Xx - 2Yy = 0,$$

oder, da $EX - DY = 0$:

$$x^2 + y^2 - 2X\frac{Dx + Ey}{D} = 0. \qquad (\mathrm{II.})$$

Durch Verbindung von I. und II. aber erhält man eine Gleichung von der Form

$$y^2 = m^2x^2,$$

eine Gleichung, die zweien dem Kreis und dem Kegelschnitt gemeinschaftlichen, symmetrischen Sehnen zugehört.

Die obige Construction des Krümmungsmittelpunktes ist für die Scheitel der Kegelschnitte nicht brauchbar; da aber für diese der Krümmungshalbmesser gleich der Subnormale ist, so lassen sich die von dieser bekannten Eigenschaften benützen, wie z. B. dass bei der Hyperbel jeder Punkt dieselbe Subnormale hat mit dem zu derselben Abscisse gehörigen Punkt der Asymptote, u. dgl.

III.

Direkter Beweis der Undulationstheorie des Lichts aus der Aberration der Fixsterne.

Von

Herrn Professor Dr. Riecke

an der königl. württembergischen land- und forstwirthschaftlichen Akademie zu Hohenheim.

Die sogenannte Aberration der Fixsterne besteht im Wesentlichen darin, dass, wenn die Erde E (Taf. I. Fig. 2.) in ihrer Bahn um die Sonne sich in der Richtung von E nach A bewegt, ein Stern S dem Auge nicht in der Richtung ES, sondern in der Richtung ES' erscheint. Dabei beträgt der Abweichungswinkel SES', wenn derselbe seinen grössten Werth erreicht, nahezu 20 Sekunden und diese Abweichung findet immer auf der Seite gegen EA zu Statt.

Wollte man zur Erklärung dieser Erscheinung davon ausgehen, dass das Licht bei seinem Eintritt in die Erdatmosphäre neben seiner eigenen Bewegung an der Bewegung der Erde Theil nehmen müsse, so würde sich daraus zwar auch eine Abweichung von der Richtung ES ergeben, aber nach der entgegengesetzten Seite. Tritt nämlich das Licht bei B (Taf. I. Fig. 3.) in die Erdatmosphäre und stellt BD den Weg des Lichts in einer Sekunde, BC (parallel mit EA) die Geschwindigkeit des Erdkörpers vor, so müsste unter jener Voraussetzung das Licht seinen Weg in der Diagonale BF des Parallelogramms fortsetzen und, wenn es das Auge des Beobachters in E' erreichte, der Stern in der Richtung $E'S''$ erscheinen. Für den Fall, den ich hier allein betrachte, dass SE senkrecht auf EA steht, wäre dann

$$\text{tg.}\left\{\begin{matrix} SBS'' \\ DBF \end{matrix}\right. = \frac{DF}{BD} = \frac{BC}{BD} = \frac{\text{Geschwindigkeit der Erde}}{\text{Geschwindigkeit des Lichts}}$$

$$\text{beiläufig} = \frac{4{,}1}{41000} = 0{,}0001$$

und somit der Abweichungswinkel SBS'', wie bei der Aberration, nahezu $=21$ Sekunden.

Da die Beobachtung aber lehrt, dass die Abweichung bei der Aberration der Fixsterne nach der entgegengesetzten Seite Statt findet, so folgt daraus, dass die Voraussetzung, wonach das Licht beim Eintritt in die Atmosphäre an der Bewegung der Erde Theil nimmt, unrichtig ist. Man sieht sich somit, wie diess schon Fresnel bemerkt (vergl. Gehler's Wörterbuch, Artikel Licht S. 338.), zu der Annahme genöthiget, dass der den Weltraum erfüllende Aether, durch dessen Vibrationen die Lichtempfindung entsteht, im ruhenden Zustande verbleibt, während die Erde sich in ihm und durch ihn bewegt. Diese Annahme setzt freilich eine alle Vorstellung übersteigende Porosität des Erdkörpers und eine ebenso alle Vorstellung übersteigende Feinheit des Aethers voraus. Indessen erfordert, wie Arago bemerkt (vergl. Gehler's Wörterb. Art. Licht S. 339.), auch die Erklärung der astronomischen Strahlenbrechung die gleiche Annahme, und es stimmt solches zugleich mit der bekannten Thatsache überein, wonach fast alle Bewegungen der Himmelskörper genau so erfolgen, als ob sich dieselben im leeren Raume bewegten, ein Widerstand des Aethers also bei astronomischen Berechnungen in der Regel als nicht vorhanden angenommen werden darf.

Etwas befriedigender fällt die Erklärung der Aberration aus, wenn man, den Aether als ruhend annehmend, nur die Bewegung des Auges dabei in Betracht zieht. Ist nämlich die Axe des Auges AB (Taf. I. Fig. 4.) in dem Moment gegen den Stern S gerichtet, in welchem der Lichtstrahl SA in das Auge tritt, so wird dieser seine geradlinige Bewegung im Auge fortsetzen, während das Auge mit der Erde sich in der Richtung AC fortbewegt. Der Lichtstrahl trifft also die Netzhaut nicht in der Mitte B, sondern in dem Punkte B', wenn nämlich das Auge sich mit der Erde in derselben Zeit von A nach A' bewegt hat, in welcher das Licht von A nach B' gelangte. Das Auge erhält somit den Eindruck des Sternlichts in dem Punkte B' und versetzt dann den Ort des Sterns in die Verlängerung der Linie $B'A'$. Der Winkel $AB'A'$ oder $SB'S'$ ist hiernach der Abweichungswinkel, und zwar findet hier die Abweichung übereinstimmend mit der Beobachtung nach der Seite hin Statt, nach welcher die Erde sich bewegt. Auch ist hier für den Fall, dass SAC ein Rechter ist, wie früher,

$$\text{tg.}\,SBS' = \frac{AA'}{AB'} = \frac{\text{Geschwindigkeit der Erde}}{\text{Geschwindigkeit des Lichts}}.$$

Eine genauere Untersuchung zeigt indessen, dass auch diese Erklärung der Aberration mit den Thatsachen nicht ganz übereinstimmt, indem sich eine grössere Geschwindigkeit des Lichtes im Auge daraus ergeben würde, als nach andern unzweifelhaften Erfahrungen angenommen werden darf. Aus den Verfinsterungen der Jupiterstrabanten weiss man nämlich, dass das Licht im luftleeren Raum sich mit einer Geschwindigkeit von 41560 Meilen per Sekunde bewegt*). Diese Geschwindigkeit vermindert sich aber, so wie das Licht in ein dichteres Mittel tritt, in demselben Verhältniss, wie die Sinus der Brechungswinkel *AB*:*CD* (Taf. I. Fig. 5.), da in dem gleichen Verhältniss sich die Breite der Lichtwellen *AB*, *BE* vermindert. Da nun der Brechungsexponent beim Uebergang des Lichts aus dem leeren Raume in die Feuchtigkeiten des Auges (nahezu wie beim Wasser) $= 4:3$ angenommen werden darf (vergl. Gehler's Wörterbuch 1825. Bd. I. S. 552.), so muss die Geschwindigkeit, mit der sich das Licht im Auge bewegt,

$$= \frac{3}{4} \cdot 41560 = 31170 \text{ Meilen}$$

gesetzt werden. Berechnet man dagegen diese Geschwindigkeit durch Division des Weges, welchen die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne durchschnittlich in der Sekunde zurücklegt, mit der Tangente des Aberrationswinkels, so erhält man nach Struve**) eine Geschwindigkeit von 41519 Meilen per Sekunde. Diese Differenz von 10349 Meilen ist viel zu gross, um sie aus Beobachtungsfehlern erklären zu können, man muss vielmehr obige Erklärung der Aberration, wonach die daraus berechnete Lichtgeschwindigkeit die Geschwindigkeit desselben im Auge wäre, als unrichtig verwerfen.

Das Fehlerhafte in dieser Erklärung lag offenbar darin, dass die Art und Weise, wie die Grösse des Aberrationswinkels von den Astronomen gemessen wird, dabei nicht berücksichtigt worden ist. Zwar ist, wie bekannt, um die Grösse der Aberration zu bestimmen, eine grosse Zahl der verschiedensten Winkelmessungen erforderlich, aus welchen erst durch weitläufige Rechnungen der Aberrationswinkel abgeleitet wird, — indessen kann man doch für den gegenwärtigen Zweck die Sache einfach so darstellen, dass man zum Behuf der Winkelmessung dem Teleskop diejenige Richtung gibt, in welcher das Bild des Sterns mit dem Durchschnitt des Fadenkreuzes in der Röhre zusammenfällt. Dadurch wird die Sache vom Auge selbst und von der Geschwindigkeit des Lichts im Auge unabhängig, und es tritt nun bei der Erklärung der Aberration das Fernrohr mit seiner Röhre an die Stelle des Auges.

---

*) Nach Herschel. Vergl. Fischer's Naturlehre. 1840. Band 2. S. 329.

**) Gehler's Wörterb. 1845. Sachregister S. 353.

Es sei *AB* (Taf. I. Fig. 6.) die Röhre, *F* das Fadenkreuz und *FC* die Richtung, in welcher sich die Röhre zugleich mit der Erde bewegt. Wollte man nun die Axe des Rohrs in gerader Linie nach dem Sterne *S* richten, so sieht man leicht, dass kein Bild desselben im Fernrohr entstehen könnte. Der bei *A* in die Röhre eintretende Strahl *SA* bleibt nämlich in der geraden Linie *SA*, während das Rohr sich gegen *C* hin fortbewegt, so dass in dem Moment, wo der Strahl nach *F* gelangen würde, das Fadenkreuz bereits in *F'* sich befindet. Man muss also dem Rohr eine solche Neigung gegen *SA* geben, dass sich *FF'* zu *AF'* (Taf. I. Fig. 7.) verhält, wie die Geschwindigkeit des Rohrs zur Geschwindigkeit des Lichts. Bei dieser Stellung der Röhre wird der Strahl *SA*, während er seine geradlinige Bewegung fortsezt, immer in der Axe des Fernrohrs bleiben und so den Durchschnitt des Fadenkreuzes in *F'* treffen. Der Abweichungswinkel *SF'S'* wird aber auf gleiche Weise, wie oben, von dem Verhältniss der Lichtgeschwindigkeit zur Erdgeschwindigkeit abhängig sein.

Nach dieser Erklärung ist die Geschwindigkeit des Lichts, wie sie sich aus der Aberration berechnen lässt, seine Geschwindigkeit in der Luft, — während die aus den Verfinsterungen der Jupiterstrabanten berechnete Lichtgeschwindigkeit die im leeren Raume ist. Die Resultate beider Berechnungen stimmen auch mit hinreichender Genauigkeit überein, wenn man erwägt, dass das Licht in der Luft sich in demselben Verhältniss langsamer bewegt, in welchem der Sinus des Brechungswinkels in der Luft kleiner ist, als der Sinus des Brechungswinkels im leeren Raume. Da nämlich Struve die Geschwindigkeit aus der Aberration zu 41519 Meilen berechnet hat und der Brechungsexponent beim Uebergang des Lichts aus Luft (von mittlerer Dichtigkeit) in den leeren Raum $= 1{,}000294$ *) ist, so ergibt sich daraus die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume

$$= 1{,}000294 . 41519 = 41531 \text{ Meilen.}$$

Dieses Resultat ist nun zwar, da Herschel die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raum aus den Verfinsterungen der Jupitersmonde zu 41560 Meilen berechnet hat, immer noch um 29 Meilen zu klein. Aber diese Differenz liegt noch ganz innerhalb der beiderseitigen Fehlergränzen, welche Struve bei seiner Berechnung zu 22 Meilen angibt, und es dürfte also in dieser Differenz kein Grund liegen, die Richtigkeit obiger Erklärung in Zweifel zu ziehen.**)

---

*) Pouillet-Müllers Lehrbuch der Physik, 1845. Bd. 2. S. 390.

**) Nach neueren Untersuchungen (vergl. Fischer's Naturlehre Bd. 2. S. 331.) wäre freilich die Differenz der beiden Resultate über die Lichtgeschwindigkeit, wie sie sich aus den Beobachtungen der Jupitersmonde und der Aberration der Fixsterne ergibt, viel bedeutender, nämlich um $\frac{1}{200}$ kleiner, d. h. die Geschwindigkeit fände sich

Hieraus ergibt sich nun ein direkter Beweis für die Undulationstheorie des Lichts, gegenüber der Neuton'schen Emanationstheorie. Letztere muss nämlich, wie bekannt zur Erklärung der optischen Erscheinungen eine vermehrte Geschwindigkeit des Lichts im dichteren Mittel annehmen, während die Undulationstheorie gerade umgekehrt eine Verminderung der Geschwindigkeit dabei voraussetzt, indem nach dieser Theorie bei gleicher Zeitdauer die Breite der Lichtwellen in gleichem Verhältniss, wie der Sinus des Bewegungswinkels, abnimmt. Diess veranlasste schon Arago zu dem Wunsche, auf ähnliche Art, wie Wheatstone die Geschwindigkeit der Elektricitätsbewegung in den festen Körpern gemessen hat, auch die Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Mitteln messen zu können, um so auf dem Wege der Erfahrung einen direkten Beweis für die Richtigkeit der Undulationstheorie zu erhalten. Der von ihm vorgeschlagene Versuch*) ist aber, so viel bekannt wurde, bis jetzt nicht angestellt worden. Dagegen bietet nun eine Vergleichung der Geschwindigkeit, wie sie sich aus der Aberration der Fixsterne ergibt, mit der Geschwindigkeit, wie sie sich aus den Verfinsterungen der Jupiterstrabanten berechnet, ein solches Mittel zur Prüfung der Undulationstheorie dar. Nach obiger Erklärung der Aberration erhält man nämlich auf dem ersten Wege die Lichtgeschwindigkeit in der atmosphärischen Luft, auf dem anderen Wege dagegen die Lichtgeschwindigkeit im luftleeren Raume und es ist, wie es die Undulationstheorie voraussetzt, wirklich die erstere Geschwindigkeit geringer als die letztere. Auch ist das Verhältniss beider Geschwindigkeiten, wie oben gezeigt wurde, mit dem Brechungsexponenten beim Uebergange des Lichts aus dem leeren Raume in Luft wenigstens nicht im Widerspruch.

In den Lehrbüchern der Physik wird fast durchaus auf die Differenz in der Lichtgeschwindigkeit, wie sich dieselbe auf den angegebenen zwei Wegen berechnet, kein Werth gelegt; beide

---

aus der Aberration = 41519 Meilen,

aus den Jupitersmonden = 41727 Meilen.

Diese grosse Differenz dürfte dazu führen, bei der Erklärung der Aberration neben der Röhre auch das Objectivglas des Teleskops, mittelst dessen die Winkelmessung geschah, in Betracht zu ziehen. Der grosse Refraktor in Dorpat hat eine Brennweite von 13,5 Fuss = 162 Zoll. Nimmt man nun die Dicke des Objectivs = 1,37 Zoll, so durchläuft das Sternenlicht zuerst die Glasschicht von 1,37 Zoll mit einer Geschwindigkeit von $\frac{41727}{1,56} = 26748$ Meilen, sodann die Luftschicht in der Röhre von 162 Zoll mit einer Geschwindigkeit von $\frac{41727}{1,000294} = 41714$ Meilen. Diess gibt für die ganze Strecke von 163,37 Zoll eine mittlere Geschwindigkeit von 41519 Meilen, übereinstimmend mit obiger von Struve in Dorpat aus der Aberration gefundenen Lichtgeschwindigkeit.

*) Vergl. Poggendorfs Annalen Bd. 46. S. 28. und Gehler's Wörterbuch 1845. Sachregister S. 353.

Resultate werden vielmehr als übereinstimmend*) bezeichnet und der geringe Unterschied den nothwendigen Unvollkommenheiten der Beobachtungen und Messungen zur Last gelegt. Indessen ist es schon zum Voraus auffallend, dass von den verschiedensten Berechnern die aus der Aberration abgeleitete Geschwindigkeit immer kleiner, nie grösser gefunden worden ist, und aus den neuesten sorgfältigsten Berechnungen, bei welchen zugleich die Fehlergränze angegeben ist, zeigt sich, dass die Differenz jedenfalls bedeutender ist, um aus einer Ungenauigkeit der Rechnung sich erklären zu lassen. Dieser Unterschied ist also nicht zufällig, er ist vielmehr in dem Umstand wohl begründet, dass die Geschwindigkeit selbst in beiden Fällen eine andere ist.

Eine vollkommene Uebereinstimmung der Beobachtung mit den Voraussetzungen der Undulationstheorie hier nachzuweisen, ist allerdings schwierig, — denn setzt man die Geschwindigkeit des Lichts im Vakuum zu 41560 Meilen und den Brechungsexponenten für Luft selbst zu 1,0003, wonach die Geschwindigkeit des Lichts in der Luft = 41547 Meilen sein müsste, so beträgt der ganze Unterschied doch nur 13 Meilen, — also viel weniger als die Fehlergränzen bei der Rechnung. Zieht man aber andererseits in Erwägung, dass die Emissionstheorie eine um so viel grössere Geschwindigkeit in der atmosphärischen Luft voraussetzt, so muss man doch in dem Umstand, dass aus der Aberration jederzeit eine kleinere Geschwindigkeit des Lichts berechnet wird, einen vollen direkten Beweis für die Richtigkeit der Undulationstheorie anerkennen.

Endlich sei noch bemerkt, dass nach dieser Darstellung der Aberrationserscheinungen zwar aus der Gleichheit des Aberrationswinkels für alle Fixsterne gefolgert werden darf, dass das Licht aller Sterne in der atmosphärischen Luft gleiche Geschwindigkeit besitzt, — nicht aber, wie man schon folgern wollte, dass das Licht überall im Weltall, von welchem nahen oder fernen Sterne es auch komme, sich mit derselben Geschwindigkeit bewege. Letzteres darf zwar, unter der Voraussetzung luftleerer Räume, aus der thatsächlichen Gleichheit seiner Geschwindigkeit in der Luft mit Wahrscheinlichkeit angenommen werden, aber ein direkter Erfahrungsbeweis für diese Behauptung liegt in der Aberration der Fixsterne nicht.

*) Vergl. Reuschle, Kosmos. Bd. 1. S. 92.

IV.

Die Differentiation unter dem Integralzeichen.

Von

Herrn Oskar Werner,

Lehrer der Mathematik zu Dresden.

Wenn das Integral

$$\int_{Y}^{Y^1} f(x, y)\, dx,$$

dessen Grenzen von y abhängig sind, mit der Forderung gegeben ist, es nach y einmal zu differentiiren, so hat man dazu bereits die Formel

$$\frac{d}{dy}\int_{Y}^{Y^1} f(x, y)\, dx = \int_{Y}^{Y^1} \frac{df(x, y)}{dy} dx + \frac{dY^1}{dy} \cdot f(Y^1, y) - \frac{dY}{dy} f(Y, y)$$

gefunden. Der Umstand nun, dass man diese Differentiation nicht weiter getrieben hat und dass das Gesetz, unter welchem die höheren Differentialquotienten des obigen Integrales stehen, durch geringe Kunstgriffe auf einen einfachen independenten Ausdruck gebracht werden kann, hat mich zur Redaction der folgengenden kleinen Untersuchung bestimmt.

Vermittelst des Satzes

$$v \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d(uv)}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}$$

erweitern wir zunächst die obige Formel zu folgender:

$$1)\qquad \frac{d}{dy}\int_{Y}^{Y^1} f(x,y)\,dx = \int_{Y}^{Y^1} \frac{df(x,y)}{dy}\,dx$$

$$+\frac{d[Y^1 f(Y^1,y)]}{dy} - \frac{d[Yf(Y,y)]}{dy} - Y^1 \frac{df(Y^1,y)}{dy} + Y.\frac{df(Y,y)}{dy}.$$

Um den zweiten Differentialquotienten unseres Integrales zu erhalten, differentiiren wir die Gleichung 1) nach y, wodurch wir erhalten:

$$\frac{d^2}{dy^2}\int_{Y}^{Y^1} f(x,y)\,dx = \frac{d}{dy}\int_{Y}^{Y^1} \frac{df(x,y)}{dy}\,dx$$

$$+\frac{d^2[Y^1 f(Y^1,y)]}{dy^2} - \frac{d^2[Yf(Y,y)]}{dy^2} - \frac{d\left[Y^1 \frac{df(Y^1,y)}{dy}\right]}{dy}$$

$$+\frac{d\left[Y.\frac{df(Y,y)}{dy}\right]}{dy}.$$

Addiren wir hierzu die Gleichung

$$\frac{d}{dy}\int_{Y}^{Y^1} \frac{df(x,y)}{dy}\,dx = \int_{Y}^{Y^1} \frac{d^2 f(x,y)}{dy^2}\,dx$$

$$+\frac{d\left[Y^1 \frac{df(Y^1,y)}{dy}\right]}{dy} - \frac{d\left[Y\frac{df(Y,y)}{dy}\right]}{dy} - Y^1 \frac{d^2 f(Y^1,y)}{dy^2}$$

$$+ Y.\frac{d^2 f(Y,y)}{dy^2},$$

welche aus 1) hervorgeht, wenn wir $\frac{df(x,y)}{dy}$ anstatt $f(x, y)$ setzen, so erhalten wir

$$2)\qquad \frac{d^2}{dy^2}\int_{Y}^{Y^1} f(x,y)dx = \int_{Y}^{Y^1} \frac{d^2 f(x,y)}{dy^2}\,dx$$

$$+\frac{d^2[Y^1 f(Y^1,y)]}{dy^2} - \frac{d^2[Yf(Y,y)]}{dy^2} - Y^1.\frac{d^2(Y^1,y)}{dy^2} + Y.\frac{d^2 f(Y,y)}{dy^2}.$$

Eine weitere Differentiirung dieser Gleichung giebt uns:

$$\frac{d^3}{dy^3}\int_Y^{Y^1} f(x,y)\,dx = \frac{d}{dy}\int_Y^{Y^1}\frac{d^2f(x,y)}{dy^2}dx$$

$$+\frac{d^3[Y^1f(Y^1,y)]}{dy^3} - \frac{d^3[Yf(Y,y)]}{dy^3} - \frac{d\left[Y^1.\frac{d^2f(Y^1,y)}{dy^2}\right]}{dy}$$

$$\frac{d\left[Y.\frac{d^2f(Y,y)}{dy^2}\right]}{dy},$$

welche mit der aus 1) für $\frac{d^2f(x,y)}{dy^2}$ anstatt $f(x,y)$ sich ergebenden Gleichung

$$\frac{d}{dy}\int_Y^{Y^1}\frac{d^2f(x,y)}{dy}dx = \int_Y^{Y^1}\frac{d^3f(x,y)}{dy^3}dx$$

$$+\frac{d\left[Y^1.\frac{d^2f(Y^1,y)}{dy^2}\right]}{dy} - \frac{d\left[Y.\frac{d^2f(Y,y)}{dy^2}\right]}{dy} - Y^1.\frac{d^3f(Y^1,y)}{dy^3}$$

$$+Y.\frac{d^3f(Y,y)}{dy^3}$$

durch Addition verbunden sogleich zu der Formel

$$3)\quad \frac{d^3}{dy^3}\int_Y^{Y^1} f(x,y)dx = \int_Y^{Y^1}\frac{d^3f(x,y)}{dy^3}dx$$

$$+\frac{d^3[Y^1f(Y^1,y)]}{dy^3} - \frac{d^3[Yf(Y,y)]}{dy^3} - Y^1.\frac{d^3f(Y^1,y)}{dy^3}$$

$$+Y.\frac{d^3f(Y,y)}{dy^3}$$

führt.

Wie wir diesen einfachen Calcül weiter fortführen können, ist klar. Betrachten wir aber die Resultate unter 1), 2) und 3) einigermassen mit Aufmerksamkeit, so werden wir zur Vermuthung hingeleitet, dass der $n$te Differentialquotient des Integrales

$$\int_Y^{Y^1} f(x,y)\,dx$$

von folgender Form sein werde:

$$4)\qquad \frac{d^n}{dy^n}\int_Y^{Y^1} f(x,y)\,dx=\int_Y^{Y^1}\frac{d^n f(x,y)}{dy^n}\,dx$$

$$+\frac{d^n[Y^1 f(Y^1,y)]}{dy^n}-\frac{d^n[Y f(Y,y)]}{dy^n}-Y^1.\frac{d^n f(Y^1,y)}{dy^n}+Y.\frac{d^n f(Y,y)}{dy^n}.$$

Um die volle Gewissheit dieses vor der Hand noch hypothetischen Resultates zu haben, differentiiren wir dasselbe nach y, wodurch wir erhalten

$$\frac{d^{n+1}}{dy^{n+1}}\int_Y^{Y^1} f(x,y)\,dx=\frac{d}{dy}\int_Y^{Y^1}\frac{d^n f(x,y)}{dy^n}\,dx$$

$$+\frac{d^{n+1}[Y^1 f(Y^1,y)]}{dy^{n+1}}-\frac{d^{n+1}[Y f(Y,y)]}{dy^{n+1}}-\frac{d\left[Y^1.\frac{d^n f(Y^1,y)}{dy^n}\right]}{dy}$$

$$+\frac{d\left[Y.\frac{d^n f(Y,y)}{dy^n}\right]}{dy}.$$

Aus 1) leiten wir aber, wenn wir $f(x, y)$ durch $\frac{d^n f(x,y)}{dy^n}$ ersetzen, leicht die Gleichung

$$\frac{d}{dy}\int_Y^{Y^1}\frac{d^n f(x,y)}{dy^n}\,dx=\int_Y^{Y^1}\frac{d^{n+1} f(x,y)}{dy^{n+1}}\,dx$$

$$+\frac{d\left[Y^1.\frac{d^n f(Y^1,y)}{dy^n}\right]}{dy}-\frac{d\left[Y.\frac{d^n f(Y,y)}{dy^n}\right]}{dy}-Y^1.\frac{d^{n+1} f(Y^1,y)}{dy^{n+1}}$$

$$+Y.\frac{d^{n+1} f(Y,y)}{dy^{n+1}}.$$

ab, welche zu ihrer Vorgängerin addirt, auf die Formel

$$\frac{d^{n+1}}{dy^{n+1}}\int_Y^{Y^1} f(x,y)\,dx=\int_Y^{Y^1}\frac{d^{n+1} f(x,y)}{dy^{n+1}}\,dx$$

$$+\frac{d^{n+1}[Y^1 f(Y^1,y)]}{dy^{n+1}}-\frac{d^{n+1}[Y f(Y,y)]}{dy^{n+1}}-Y^1.\frac{d^{n+1} f(Y^1,y)}{dy^{n+1}}$$

$$+Y.\frac{d^{n+1} f(Y,y)}{dy^{n+1}}$$

führt. Dasselbe Resultat gewinnen wir auch, wenn wir in 4) $n+1$ für n setzen, wodurch das in 4) ausgesprochene Gesetz von jedem Zweifel frei ist.

In dem Falle $Y^1=a$, wo a eine Constante bezeichnet, folgt aus Gleichung 4):

5) $$\frac{d^n}{dy^n}\int_Y^a f(x,y)\,dx$$
$$=\int_Y^a \frac{d^n f(x,y)}{dy^n}dx - \frac{d^n[Yf(Y,y)]}{dy^n} + Y.\frac{d^n f(Y,y)}{dy^n},$$

und, wenn $Y=b$, aus derselben Gleichung:

6) $$\frac{d^n}{dy^n}\int_b^{Y^1} f(x,y)\,dx$$
$$=\int_b^{Y^1} \frac{d^n f(x,y)}{dy^n}dx + \frac{d^n[Y^1 f(Y^1,y)]}{dy^n} - Y^1.\frac{d^n f(Y^1,y)}{dy^n}.$$

Wenn endlich gleichzeitig $Y^1=a$ und $Y=b$ gesetzt wird, so erhalten wir aus 4) die bereits bekannte Formel:

7. $$\frac{d^n}{dy^n}\int_b^a f(x,y)\,dx = \int_b^a \frac{d^n f(x,y)}{dy^n}dx.$$

V.

Die Umformung der irrationalen gebrochenen Functionen in andere, welche einen rationalen Nenner haben.

Von

Herrn B. Sommer,
zu Coblenz.

---

1. Hat man die gebrochene Function $\frac{Z}{N}$, wo der Zähler Z ein ganz beliebiger irrationaler Ausdruck sein mag, dessen einzelne Glieder aber keine Separatnenner haben sollen, in welchen Wurzelwerthe vorkommen, so findet sich in jedem Lehrbuche der Arithmetik dargethan, wie man, sobald N die Form $r+a\sqrt{\alpha}$ oder $a\sqrt{\alpha}+b\sqrt{\beta}$ hat, eine Umformung von $\frac{Z}{N}$ bewerkstelligt, in welcher ein rationaler Nenner vorhanden ist. Man multiplicirt nämlich Zähler und Nenner der gegebenen Function resp. mit $r-a\sqrt{\alpha}$ oder $a\sqrt{\alpha}-b\sqrt{\beta}$.

2. Ist Z derselben Bedingung unterworfen, d. h. ist Z ein irrationaler ganzer Ausdruck, so lässt sich auch für die ausgedehnteren Formen von N, nämlich für $r+a\sqrt{\alpha}+b\sqrt{\beta}$ und selbst $r+a\sqrt{\alpha}+b\sqrt{\beta}+c\sqrt{\gamma}$ noch die verlangte Umformung ausführen; man geht dann nur successive zu Werke und schafft eine Wurzel nach der andern fort, indem man sich den gegebenen Nenner in zwei gleich- oder doch möglichst gleichgliedrige Ausdrücke zerlegt denkt, die man dann statt wie im Nenner N durch + zu verbinden, substractiv nimmt.

So gibt die Multiplication von

$$N = r + a\sqrt{\alpha} + b\sqrt{\beta}$$

mit dem Factor

$$F = (r + a\sqrt{\alpha}) - b\sqrt{\beta}$$

einen Werth, der nur noch eine Wurzel enthält, so wie für

$$N = r + a\sqrt{\alpha} + b\sqrt{\beta} + c\sqrt{\gamma}$$

mit

$$F = (r + a\sqrt{\alpha}) - (b\sqrt{\beta} + c\sqrt{\gamma}),$$

als Resultat einen Ausdruck liefert, der nur noch zwei Wurzeln hat.

In diesen Fällen kann man mithin durch fortgesetzte Multiplication zuletzt zu einer Umformung kommen, die gar keine Wurzel enthält.

Den Factor F als Differenz zweier möglichst gleichgliedrigen darzustellen, ist unerlässlich; hätten wir z. B. für

$$N = r + a\sqrt{\alpha} + b\sqrt{\beta} + c\sqrt{\gamma}$$

ihn nicht gleichgliedrig gemacht, sondern etwa

$$F = (r + a\sqrt{\alpha} + b\sqrt{\beta}) - c\sqrt{\gamma}$$

genommen, dann würde das Product $F.\ N$ auch wieder drei Wurzeln enthalten, die ganze Multiplication hätte dann mithin nicht das Geringste genützt.

3. Enthält nun aber N als Glieder vier Quadratwurzeln ausser dem rationalen Gliede r oder gar noch mehr als vier Quadratwurzeln, dann lässt sich das Verfahren, nach welchem man stets eine Wurzel weniger erhält, nicht mehr anwenden; denn man hat für

$$N = r + a\sqrt{\alpha} + b\sqrt{\beta} + c\sqrt{\gamma} + d\sqrt{\delta},$$

also

$$F = (r + a\sqrt{\alpha} + b\sqrt{\beta}) - (c\sqrt{\gamma} + d\sqrt{\delta}),$$

im Producte $F.N$ auch wieder vier Quadratwurzeln, indem deren drei in $(r + a\sqrt{\alpha} + b\sqrt{\beta})^2$ und noch eine in $(c\sqrt{\gamma} + d\sqrt{\delta})^2$ enthalten sind. (Wir nehmen nämlich r als von Null verschieden an, da wir den allgemeinen Fall betrachten wollen). — Ebenso lässt sich leicht zeigen, dass bei einem $2n$gliedrigen Ausdrucke die Multiplication mit der Differenz der beiden $n$gliedrigen Werthe multiplicirt (und dies ist noch der günstigste Fall) nur für $2n = 2$ und $2n = 4$ einen Werth gibt, der weniger als $2n - 1$ Wurzeln enthält, d. i. weniger Wurzeln als der gegebene $2n$gliedrige Ausdruck; —

ebenso dass bei einem $2n+1$ gliedrigen Ausdrucke die Multiplication mit der Differenz aus einem n- und einem $(n+1)$ gliedrigen nur für $2n+1=1$, oder 3 dies noch gibt. — Wir unterlassen es den Beweis hier weiter auszuführen, da derselbe sehr leicht ist, sobald man nur die Anzahl der Combinationen zur zweiten Klasse einführt.

4. Um nun einen Ausdruck von der Form:

$$N=r+a\sqrt{\alpha}+b\sqrt{\beta}+\ldots.l\sqrt{\lambda},$$

der n Quadratwurzeln enthalten mag, durch Multiplication mit einem noch unbekannten Factor F rational zu machen, wählen wir F von der Form:

$$\begin{aligned}F=\varrho &+(x_1\sqrt{\alpha}+x_2\sqrt{\beta}+\ldots..+x_n\sqrt{\lambda})\\ &+(y_1\sqrt{\alpha\beta}+y_2\sqrt{\alpha\gamma}+\ldots.)\\ &+(z_1\sqrt{\alpha\beta\gamma}+z_2\sqrt{\alpha\beta\delta}+\ldots.)\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+w\sqrt{\alpha\beta\gamma\ldots.\lambda},\end{aligned}$$

wo mithin die erste Reihe alle Combinationen der Wurzeln enthält, die in N vorkommen, zur ersten Klasse, jede mit einem noch unbestimmten Coefficienten multiplicirt, die zweite Reihe die Combinationen zur zweiten Klasse u. s. w. bis zur $n$ten Klasse. — Im Ganzen enthält daher der Factor F

$$1+n+\frac{n(n-1)}{1.2}+\ldots\ldots+1,$$

d. i. 2^n Glieder.

Bildet man nun das Product $F.N$, so werden hierin, wie man leicht erkennen wird, nur Wurzeln vorkommen können, die auch in F vorkommen. Macht man nun die Bedingung, dass alle Coefficienten dieser sämmtlichen Wurzeln verschwinden sollen, so erhalten wir hierdurch 2^n-1 Gleichungen, die, weil 2^n unbekannte Coefficienten vorhanden sind, noch einen derselben willkührlich anzunehmen gestatten; dies letztere werden wir wohl am geeignetsten dadurch benutzen, dass wir $\varrho=1$ annehmen. Der neue rationale Nenner wird nun für $\varrho=1$:

$$r+a\alpha x_1+b\beta x_2+c\gamma x_3+\ldots l\lambda x_n,$$

wo für die x ihre Werthe aus den 2^n-1 Gleichungen einzusetzen sind.

Die x Werthe sowohl wie diejenigen aller anderen unbekannt angenommenen Coefficienten können aber nicht Wurzelausdrücke enthalten, da sie sich ja sämmtlich aus Gleichungen vom ersten Grade herleiten, die Constanten aber, welche in diesen Gleichungen vorkommen, selbst keine anderen als rationale Grössen sind.

Beispiel. Für

$$N=3+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

ist

$$F=1+x_1\sqrt{2}+x_2\sqrt{3}+y\sqrt{2.3}.$$

also

$$F.N=(3+2x_1+6x_2)+(3x_1+1+6y)\sqrt{2}+(3x_2+2+2y)\sqrt{3}$$
$$+(3y+x_2+2x_1)\sqrt{6}.$$

Die Coefficienten x_1, x_2, y ergeben sich daher aus den drei Gleichungen:

$$3x_1+1+6y=0$$
$$3x_2+2+2y=0$$
$$3y+x_2+2x_1=0.$$

Die erste dieser Gleichungen, mit 2 multiplicirt, hierzu die 2te addirt und von dieser Summe die mit 3 multiplicirte dritte subtrahirt, gibt

$$y=-\frac{4}{5},$$

und daher aus der ersten und zweiten nun

$$x_1=\frac{19}{15}, \quad x_2=-\frac{2}{15},$$

so dass

$$F.N=3+2x_1+6x_2=3+\frac{38}{15}-\frac{12}{15}=\frac{71}{15}$$

wird.

5. Sind unter den Quadratwurzeln, die in N enthalten sind, auch solche, welche Combinationsformen von andern gleichfalls vorkommenden sind, so kann man diese bei der Aufstellung der Form von F als gar nicht vorhanden ansehen; so z. B. hat für

$$N=r+a\sqrt{\alpha}+b\sqrt{\beta}+c\sqrt{\alpha\beta}$$

der Factor die ganz ähnliche Form

$$1+x_1\sqrt{\alpha}+x_2\sqrt{\beta}+y\sqrt{\alpha\beta},$$

die er auch haben würde, wenn das Glied $c\sqrt{\alpha\beta}$ gar nicht in N vorkäme, oder wenn $c=0$, d. h. wenn

$$N = r + a\sqrt{\alpha} + b\sqrt{\beta}$$

wäre.

6. Enthält N nun aber nicht nur Quadratwurzeln, sondern auch höhere Wurzeln, so bleibt das Verfahren doch ganz dasselbe, nur wird die Form von F etwas ausgedehnter werden. Sei z. B.

$$N = r + a\sqrt[m]{\alpha} + b\sqrt[n]{\beta} + c\sqrt[p]{\gamma} + \ldots$$

Dann müssen wir in der Form von F bei der Combination der Wurzelwerthe $\sqrt[m]{\alpha}$, $\sqrt[n]{\beta}, \ldots$ auch stets diejenigen Ausdrücke berücksichtigen, die man aus jeder einzelnen Combinationsform erhält, wenn man an die Stelle von

$$\sqrt[m]{\alpha} \text{ setzt } \sqrt[m]{\alpha^2},\ \sqrt[m]{\alpha^3}, \ldots \sqrt[m]{\alpha^{m-1}};$$

ebenso statt

$$\sqrt[n]{\beta} \text{ setzt } \sqrt[n]{\beta^2},\ \sqrt[n]{\beta^3}, \ldots \sqrt[n]{\beta^{n-1}};$$

statt

$$\sqrt[p]{\gamma} \text{ setzt } \sqrt[p]{\gamma^2},\ \sqrt[p]{\gamma^3}, \ldots \sqrt[p]{\gamma^{p-1}};$$

. . . .

und zwar, wie sich von selbst versteht, ist jeder dieser Ausdrücke mit einem eigenen unbekannten Coefficienten zu multipliciren.

So sind mithin z. B. in der einen Form $\sqrt[m]{\alpha} . \sqrt[n]{\beta}$ die Formen enthalten:

$$\sqrt[m]{\alpha^2} . \sqrt[n]{\beta},\ \sqrt[m]{\alpha^3} . \sqrt[n]{\beta}, \ldots \sqrt[m]{\alpha^{m-1}} . \sqrt[n]{\beta};$$

$$\sqrt[m]{\alpha} . \sqrt[n]{\beta^2},\ \sqrt[m]{\alpha^2}\sqrt[n]{\beta^2},\ \sqrt[m]{\alpha^3} . \sqrt[n]{\beta^2}, \ldots \sqrt[m]{\alpha^{m-1}}\sqrt[n]{\beta^2};$$

. . . .

$$\sqrt[m]{\alpha} . \sqrt[n]{\beta^{n-1}},\ \sqrt[m]{\alpha^2} . \sqrt[n]{\beta^{n-1}},\ \sqrt[m]{\alpha^3} . \sqrt[n]{\beta^{n-1}}, \ldots \sqrt[m]{\alpha^{m-1}} . \sqrt[n]{\beta^{n-1}}.$$

Es wird hiernach der Factor F die Form erhalten:

$$F = 1 + \begin{cases} x'_1\sqrt[m]{\alpha} + x'_2\sqrt[m]{\alpha^2} + \ldots\ x'_{m-1}\sqrt[m]{\alpha^{m-1}} \\ + x''_1\sqrt[n]{\beta} + x''_2\sqrt[n]{\beta^2} + \ldots\ x''_{n-1}\sqrt[n]{\beta^{n-1}} \\ + \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$+\begin{cases} y'_1\sqrt[m]{\alpha}.\sqrt[n]{\beta}+y'_2\sqrt[m]{\alpha^2}.\sqrt[n]{\beta}+\ldots.\\ +y''_1\sqrt[m]{\alpha}.\sqrt[n]{\beta^2}+y''_2\sqrt[m]{\alpha^2}.\sqrt[n]{\beta^2}+\ldots \end{cases}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Anzahl der verschiedenen Wurzelwerthe in F plus dem einen rationalen Gliede, das wir schon der Einheit gleich gemacht haben, wird daher

$$\begin{aligned} &1+[(m-1)+(n-1)+(p-1)+\ldots..]\\ &+[(m-1)(n-1)+(m-1)(p-1)+\ldots.]\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+[(m-1)(n-1)(p-1)\ldots.]. \end{aligned}$$

Es ist aber dieser Werth nach der Algebra nichts anderes als:

$$[1+(m-1)][1+(n-1)][1+(p-1)]\ldots..,$$

d. i.

$$m.n.p\ldots.$$

Der Factor F enthält mithin $m.n.p\ldots.$ minus 1 unbekannte Coefficienten, die wir auf dieselbe Art, wie in Nr. 4., durch ebenso viele Gleichungen ermitteln.

Das Verfahren in Nr. 4. selbst ist nur ein besonderer Fall von dem eben behandelten für $m=n=p=\ldots$

Die Bemerkung in Nr. 5. lässt sich auch hier leicht übertragen; kommen hier z. B. Glieder vor wie $\sqrt[m]{\alpha}$, $\sqrt[m]{\alpha^2}$,.... und Combinationen mehrerer Elemente wie $\sqrt[m]{\alpha}.\sqrt[n]{\beta^2}$ etc., so beachten wir auch nur die Werthe $\sqrt[m]{\alpha}$, $\sqrt[n]{\beta}$ als Elemente, berücksichtigen aber wohl, dass für jedes Element auch seine stellvertretenden zu setzen sind.

Beispiel. Für

$$N=3-2\sqrt[3]{5}$$

wird

$$F=1+x_1\sqrt[3]{5}+x_2\sqrt[3]{5^2}$$

und $$NF=(3-2.5x_2)+(3x_1-2)\sqrt[3]{5}+(3x_2-2x_1)\sqrt[3]{5^2},$$

daher für

$$3x_1-2=0,\ 3x_2-2x_1=0,$$

oder

$$x_1=\frac{2}{3},\quad x_2=\frac{4}{9}$$

wird der neue Nenner werden: $3-\frac{10.4}{9}=-\frac{13}{9}$.

7. Sind nun im Nenner auch Glieder von der Form $\sqrt[m]{\alpha+\sqrt[n]{\beta}}$ vorhanden, was wir bis jetzt als nicht stattfindend angenommen, so lassen sich indessen auch diese wegschaffen, sobald wir nur dem F eine solche Form geben, dass wir unter seinen Elementen ausser $\sqrt[m]{\alpha+\sqrt[n]{\beta}}$ und dessen stellvertretenden Potenzen $\sqrt[m]{(\alpha+\sqrt[n]{\beta})^2}$, ... $\sqrt[m]{(\alpha+\sqrt[n]{\beta})^{m-1}}$ auch noch $\sqrt[n]{\beta}$ mit seinen Stellvertretern $\sqrt[n]{\beta^2}$,...$\sqrt[n]{\beta^{n-1}}$ aufnehmen.

Man sieht daher hieraus, dass z. B.

$$N=r+a\sqrt[m]{\alpha+\sqrt[n]{\beta}}+b\sqrt[n]{\beta}+c\sqrt[p]{\gamma}+d\sqrt{\beta^2}$$

ganz dieselbe Factorform hat wie der Nenner

$$r+a\sqrt[m]{\alpha+\sqrt[n]{\beta}}.$$

Man behandelt also hier $\sqrt[m]{\alpha+\sqrt[n]{\beta}}$ wie die Wurzel aus einem rationalen Werthe, nur dass man noch seine innerhalb stehende Wurzel berücksichtigt.

Analog zählt der Ausdruck

$$\sqrt[m]{\alpha+b\sqrt[n]{(\beta+c\sqrt[p]{\gamma})}}$$

für die drei Elemente:

$$\sqrt[m]{\alpha+b\sqrt[n]{(\beta+c\sqrt[p]{\gamma})}},\ \sqrt[n]{\beta+c\sqrt[p]{\gamma}},\ \sqrt[q]{\gamma}$$

jedes mit seinen Stellvertretern.

8. Kommen Wurzeln vor, in denen sich die innerhalb stehenden Wurzeln nicht stets bis zu Ende erstrecken, wie z. B. bei

$$\sqrt[m]{\alpha+b\sqrt[n]{\beta}+c\sqrt[p]{\gamma}},$$

so gilt dieser für die drei Elemente

$$\sqrt[m]{\alpha+b\sqrt[n]{\beta}+c\sqrt[p]{\gamma}},\ \sqrt[n]{\beta},\ \sqrt[p]{\gamma}$$

jedes mit den stellvertretenden Potenzen.

Man sieht hieraus und aus der vorigen Nummer, dass während

$$\sqrt[m]{\alpha+b\sqrt[n]{\beta+c\sqrt[p]{(\gamma+d\sqrt[q]{\delta})}}}$$

die Elemente vertritt:

$$\sqrt[m]{\alpha+b\sqrt[n]{\beta+c\sqrt[p]{\gamma+d\sqrt[q]{\delta}}}},\sqrt[n]{\beta+c\sqrt[p]{\gamma+d\sqrt[q]{\delta}}},\sqrt[p]{\gamma+d\sqrt[q]{\delta}},\sqrt[q]{\delta},$$

dagegen der Ausdruck:

$$\sqrt[m]{\alpha+b\sqrt[n]{\beta+c\sqrt[p]{\gamma}+d\sqrt[q]{\delta}}}$$

die Elemente bedingt:

$$\sqrt[m]{\alpha+b\sqrt[n]{\beta+c\sqrt[p]{\gamma}+d\sqrt[q]{\delta}}},\ \sqrt[n]{\beta+c\sqrt[p]{\gamma}},\ \sqrt[p]{\gamma},\ \sqrt[q]{\delta}.$$

Hiermit sind alle Fälle vorgesehen, die in irrationalen Ausdrücken vorkommen können. — Wenn nun auch die Ausführung in den meisten Fällen eine sehr complicirte ist, da man so viele, freilich nur lineare Gleichungen zu lösen hat, so ist es doch nicht ohne Interesse die Möglichkeit anheim gestellt zu haben, die Irrationalität gebrochener Functionen ganz allein auf den Zähler zu werfen, da ja bekanntlich bei Brüchen der Zähler viel biegsamer ist als der Nenner.

9. Das Verfahren, welches wir gezeigt haben, ist natürlich auch gültig, wenn man statt der Constanten $r, a, b, \ldots \alpha, \beta, \gamma$, Functionen irgend welcher Variablen hat. Um bequem zu rechnen, wird man sogar sich diese Functionen durch solche Buchstaben ersetzen, dann die unbekannten Coefficienten ganz auf die gezeigte Art bestimmen und erst dann wieder die gegebenen Functionen einführen. Will man auch hier wieder $\varrho=1$ annehmen oder will man es gleich dem kleinsten Vielfachen aller Nenner der ermittelten Coefficienten annehmen, um nämlich diese Coefficienten selbst als ganze und nicht als gebrochene rationale Functionen zu erhalten, das bleibt natürlich gleichgültig; am vortheilhaftesten dürfte es indessen auch hier sein den ϱ-Werth gleich 1 zu wählen.

Es folgt hieraus z. B. für

$$N=f+f'\sqrt{x-\alpha'}+f''\sqrt{x-\alpha''}+\ldots\ldots$$

und f und f' als rationale Function von x, sobald der Zähler auch nur solche Wurzeln oder deren Combinationen enthält, dass die complicirteste Wurzel im umgeformten Ausdrucke mit ihrem Coefficienten:

$$\frac{\varphi}{FN}\sqrt{(x-\alpha')(x-\alpha'')\ldots\ldots}$$

sein wird, wo φ und FN rationale Functionen sind. Vermittelst der Zerlegung in Partialbrüche, die wir auf den Coefficienten noch anwenden können, würden wir noch weitere Vereinfachungen vornehmen können; es hätte dies Bedeutung für die Integration gebrochener irrationaler Functionen, wenn es nur erst gelungen wäre das Integral von

$$\sqrt{(x-\alpha)(x-\alpha')\ldots\ldots}$$

in endlicher Form zu ermitteln, wenn man mehr als zwei Factoren unter dem Wurzelzeichen hat.

10. Es kann zuweilen geschehen, dass, wenn man die zweite Factorform von Nr. 4. oder diejenige von Nr. 6., bei welcher $\varrho=1$ ist, benutzt, man für die unbekannten Coefficienten Ausdrücke von der Form $\frac{1}{0}$ oder $\frac{0}{0}$ erhält. Geschieht dies nun auch, so deutet dies doch keineswegs dahin, dass ein Factor nicht existirt, sondern nur darauf, dass die angewandte schon reducirte Factorform (für $\varrho=1$) unter dieser reducirten Form nicht aufgestellt werden kann. Es ist nämlich die zweite Form von F in Nr. 4.

aus der ersten hervorgegangen, indem man ϱ herausnahm und schrieb

$$\varrho[1+\frac{x_1}{\varrho}\sqrt{\alpha}+\frac{x_2}{\varrho}\sqrt{\beta}+\ldots\ldots]$$

und hier nun den ϱ-Werth, als ganz rationalen, nicht mehr berücksichtiget. — Ein solches Herausnehmen von ϱ ist aber nicht zulässig, wenn ϱ selbst verschwindet, wenn also mit anderen Worten das ganz rationale Glied des Factors F gleich Null ist; dann müssen, wie man dies auch aus dem Ausdrucke

$$1+\frac{x_1}{\varrho}\sqrt{\alpha}+\frac{x_2}{\varrho}\sqrt{\beta}+\ldots..$$

schon ersieht, wenn man trotzdem die reducirte Form von F angewandt hat, sich die Coefficienten unter Formen wie $\frac{1}{0}$ oder $\frac{0}{0}$ ergeben, und zwar unter $\frac{1}{0}$, wenn sie nicht in Wirklichkeit in ihren correspondirenden Werthen in der ersten Form von F verschwinden, dagegen unter $\frac{0}{0}$, wenn ihre correspondirenden Werthe verschwinden.

Es gibt dies uns daher die Regel:

Nimmt bei der früher angegebenen Regel bei der Bestimmung des Factors einer also alle Coefficienten Bruchformen mit dem Nenner Null an, so hat man nur die Factorenform in der Art zu modificiren, dass man alle Coefficienten, die unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen, so wie auch das constante rationale Glied 1, weglässt, und nun die Rechnung mit einer kleineren Anzahl von unbekannten Coefficienten vorzunehmen. (Einen dieser Coefficienten kann man nun wieder der Einheit gleich annehmen).

Beispiel. Für

$$N=3-\sqrt{2}+\sqrt{7}$$

würde für

$$F=1+x_1\sqrt{2}+x_2\sqrt{7}+y\sqrt{14}$$

für x_1, x_2 und y die Form $\frac{1}{0}$ resultiren; wir wählen daher

$$F=\sqrt{2}+x\sqrt{7}+y\sqrt{14}.$$

Zur Bestimmung von x und y resultiren die drei Gleichungen:

$$3+7y=0,$$
$$3x-2y=0,$$
$$1+3y-x=0.$$

Die zweite von der ersten subtrahirt zeigt schon, weil sie die mit 3 multiplicirte dritte ist, dass diese drei Gleichungen in Wirklichkeit nur zwei unabhängige Gleichungen sind.

Wir finden

$$y=-\frac{3}{7} \text{ und } x-\frac{2}{7},$$

so dass also

$$F=\sqrt{2}-\frac{2}{7}\sqrt{7}-\frac{3}{7}\sqrt{14}$$

wird und

$$NF=-2-\frac{2}{7}.7=-4$$

ist.

Dies Verfahren findet auch seine Anwendung, wenn statt constanter Coefficienten Functionen verhanden sind, wie dies in der vorigen Nummer berührt wurde.

VI.

Ueber den Winkelspiegel.

Von
Herrn Doctor Julius Hartmann,
Gymnasiallehrer zu Rinteln.

Der Winkelspiegel wird von den Physikern als ein unwichtigeres Instrument gewöhnlich nicht sonderlich beachtet; daher sich in den meisten Compendien über denselben entweder nur kurze specielle Fälle berührende, oder gar unrichtige, — weil zu allgemein ausgedehnte, — Angaben finden.*) Deshalb erlaube

---

*) Z. B. Müller (Pouillet) 2te Auflage 1844. pag. 356.: „Betrüge der Winkel $\frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}$ des ganzen Umfanges, so hätte man 6, 8, 10 Bilder gesehen."

Gehler, Wörterbuch. Art. Kaleidoskop, von Brandes, 5. Band p. 815, enthält nur den Fall, wo φ in 360° aufgeht. Im Art. Spiegel v. Muncke, 8. Band. pag. 932, ist nur von parallelen Spiegeln die Rede.

Clemens. Königsberg 1839: „Ist der Neigungswinkel n^0, so ist die Anzahl der Bilder $\frac{360}{n} - 1$, wenn $\frac{360}{n}$ gerade ist. Ist $\frac{360}{n}$ ungerade, so entstehen $\frac{360}{n} - 1$ oder $\frac{360}{n}$ Bilder, jenachdem der Gegenstand gleich oder ungleich weit von dem Spiegel steht". Aber wieviel sieht man?

Koppe. Essen 1847: pag. 355. „Wenn φ in 360° nicht aufgeht, sondern zwischen n und $n+1$ mal darin enthalten ist, können n und $n+1$ Bilder erscheinen, was vom Ort des Gegenstandes abhängt. Wenn φ in 360 $n$mal aufgeht, so sieht man den Gegenstand n mal".

Muncke. 1830. p. 558.: „Zwischen einer Neigung von 180° bis 0° [?] liegt also eine der Grösse des Neigungswinkels umgekehrt proportionale Menge von Bildern." [??]

ich mir im Folgenden einige Bemerkungen darüber, namentlich um zu zeigen, dass in den meisten Fällen für einen bestimmten Neigungswinkel der Spiegel, je nach dem Standpunkte des Auges, drei verschiedene Anzahlen von Bildern gesehen werden.

Um die Erscheinungen zu sehen, kann man sich sehr leicht einen Winkelspiegel anfertigen. Man befestige die Spiegel*) — etwa in Form von Rechtecken von 2 und 4 bis 5 Zoll Seite geschnitten — auf Rechtecken von Pappe, die am obern und vordern Rande**) rahmenartig überstehen können; durch aufgeleimte Papierstreifen; und klebe, die Spiegel mit der spiegelnden Seite auf einander gelegt, über die Schnittlinie ein Stück Leinwand, das das Charnier bildet. Den einen Spiegel befestigt***) man nachher auf der Linie $M0^0$ eines eingetheilten Halbkreises, während der andere auf der Eintheilung herbewegt werden kann. Ein Pappstreifchen, rechtwinklig umgebogen, mit einem Schenkel an die Eintheilung sich anschliessend, und mit einem Index versehen, auf dem andern, aufrechtstehenden, eine Oeffnung senkrecht über dem Index tragend, dient, den Ort des Auges zu fixiren.

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die Spiegel von der Scheitellinie aus nach drei Seiten unbegrenzt seien. Die in praxi nöthige Beschränkung, kann, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, dadurch unschädlich gemacht werden, dass man nur das Auge nahe genug an die Scheitellinie und dem eingetheilten Kreise bringt.

§. 1.

Aus dem Reflexionsgesetz: „Der Ausfallswinkel ist dem Einfallwinkel gleich u. s. w." ergiebt sich bekanntlich:

(1) **Dass das Bild *hinter* einem ebenen Spiegel so weit liegt, als der Punkt *vor* ihm.** — Der Ort des Bildes zeigt sich als Spitze eines Kegels, dessen Basis die Pupille ist. — Hier soll der Einfachheit wegen bloss die Axe dieses Kegels, mit

---

Baumgartner. 8te Aufl. 1845. p. 550: „Deshalb geben solche Winkelspiegel auch nur $n-1$ Bilder". [??].

Eisenlohr. 4te Aufl. 44. p. 249: „Ist $m0n$ der $n$te Theil von 360°, so entstehen $n-1$ Bilder" [??].

Lauteschläger. Figurentafeln 1841. V. Fig. 8: „Es erscheinen die Bilder so oft (weniger ein) mal vervielfacht, als der Neigungswinkel in 360° enthalten ist" [??] u. s. w.

*) Am besten metallne. Gewöhnliche geben keine scharfe Scheitellinie auch doppelte Bilder; geschwärzte Glasspiegel zu wenig Licht.

**) Der hintere die Scheitellinie bildende und der untere Rand müssen ohne Rahmen sein.

***) Geschicht dies bloss etwa durch 2 aus der Linie $M0$ hervorragende Stecknadelspitzen, welche in die Papprahmen eindringen, so lässt sich der Spiegel abnehmen, aufklappen und bequem aufbewahren.

welcher der sehr schlanke Kegel ohne dies fast ganz zusammenfällt, in Betracht gezogen, d. h. das Auge als Punkt betrachtet werden.

(2) Auge und Gegenstand liegen immer *vor*, das Bild *hinter* der Spiegelebene.

§. 2.

Bilden zwei Spiegel *RM* und *AM* (Taf. II. Fig. 1.) einen Winkel ($=\varphi$) mit einander, so sind die vier Winkelräume zwischen ihnen und ihren Erweiterungen so unterschieden, dass

I.	(*RMA*)	vor	*RM* und	vor *AM*
II.	(*AMR'*)	vor	- -	hinter -
III.	(*RMA'*)	hinter	- -	vor -
IV.	(*R'MA'*)	hinter	- -	hinter - liegt.

(3) Auge und Gegenstand müssen daher immer im Raum I. (*RMA*) zwischen den Spiegeln selbst, die Bilder aber in II. III. und IV. liegen.

§. 3.

Ein Gegenstand (Punkt) *B* (Taf. II. Fig. 1. und 2.) zwischen *RM* und *AM* gibt, im Spiegel *RM* sich spiegelnd, hinter diesem ein Bild b_1. Dies vertritt gleichsam die Stelle eines neuen Gegenstandes und gibt, in *AM* sich spiegelnd, das Bild β_2 *) wobei

Bb_1 senkrecht zu *RM* steht und von *RM* halbirt wird
$\beta_2 b_1$ - - *AM* - - - *AM* -

§. 4.

Um den wirklichen Gang der Lichtstralen zu übersehen, ziehe man (Taf. II. Fig. 2.) vom Auge *O* nach dem letzten Bilde β_2 die Gerade $O\beta_2$, welche *AM* in 2_2 trifft. Von diesem Punkt muss der letzte Stral ins Auge gelangen. Ferner ziehe man von 2_2 nach dem vorhergehenden Bilde b_1 die 2_2b_1, welche *RM* in 2_1 trifft, und endlich 2_1B, so ist $B2_12_2O$ der Gang des zweimal reflectirten Strales. — Es ist leicht zu zeigen, dass dadurch Winkel $2_12_2M = O2_2A$ und $2_22_1M = B2_1R$ wird.

*) Die Bilder, die sich hinter *RM* gebildet haben, sind mit *b* (lateinisch), die durch Spiegelung in *AM* entstandenen aber mit *β* (griechisch) bezeichnet. Die angehängten Zahlen geben die Zahl der Reflexionen an.

§. 5.

Das Bild β_2 (Taf. II. Fig. 1. und 2.) kann nun wieder die Stelle eines Gegenstandes für RM vertreten und hinter diesem ein Bild b_3 geben, wenn wieder

$\beta_2 b_3$ senkrecht zu RM steht und von RM halbirt wird.

Der wahre Gang des dreimal reflectirten Strales ergibt sich wieder, wenn man (Taf. II. Fig. 2.)

Ob_3 zieht, welche RM in 3_3 trifft
$3_3\beta_2$ . . . . , ... AM in 3_2 -
3_2b_1 . . . . , ... RM in 3_1 - und
3_1B zieht.

Er ist $B3_1 3_2 3_3 O$.

Ebenso kann b_3 wieder als Gegenstand für den Spiegel AM gelten und hinter diesem ein Bild β_4 geben u. s. w. Der wahre Weg der Lichtstrahlen wäre $B4_1 4_2 4_3 4_4 O$. u. s. w.

§. 6.

Wie wir hier eine **erste** Folge von Bildern

$b_1\ \beta_2\ b_3\ \beta_4\ b_5 \ldots$

betrachteten, die dadurch entstand, dass wir abwechselnd

zuerst blos RM als vorhanden dachten, worin b_1
dann blos AM - - - - β_2
dann blos RM - - - - b_3

sich bildeten, erhalten wir noch eine **zweite** Folge von Bildern*), die dadurch entsteht, dass wir abwechselnd (Taf. II. Fig. 1.)

zuerst blos AM als vorhanden ansehen, worin β_I
dann blos RM - - - - b_{II}
dann blos AM - - - - β_{III}

sich bildet.

(4) **Die beiden Folgen unterscheiden sich blos durch den Anfangsspiegel.**

---

*) Die Bilder der ersten Folge sind mit **arabischen**, die der zweiten Folge mit **römischen** Zahlen versehen.

§. 7.

Alle entstehenden Bilder liegen im Umfang eines Kreises aus M vom Radius MB, indem (Taf. II. Fig. 1.)

$$MB \text{ und } Mb_1,\ Mb_1 \text{ und } M\beta_2,\ M\beta_2 = Mb_3 \quad \text{u. s. w.}$$

als Hypotenusen je zweier congruenter rechtwinkliger Dreiecke gleich sind. Ebenso ist

$$MB = M\beta_I,\quad M\beta_I = Mb_{II} \text{ u. s. w.}$$

§. 8.

Die in §. 5. angedeutete fortgehende Entstehung neuer Bilder ist nicht ohne Ende. Die Folge schliesst sich, sobald ein Bild in oder hinter die Ebene des Spiegels tritt, in der es sich zunächst spiegeln müsste.

Nun liegen die lateinischen Bilder, b, hinter RM, also im Raume III. oder IV. Die in III., welche zugleich vor AM liegen, geben hinter AM weitere Bilder. Nicht so aber die in MA' und die in dem Raume IV. liegenden. Die griechischen, hinter AM liegend, sind im Raume II. oder IV. In II. sind sie zugleich vor RM, pflanzen sich also weiter fort; nicht aber die in MR' und dem Raume IV. liegenden.

(6) **Das erste Bild einer Folge also, das in den Scheitelraum IV. der Spiegel (die Schenkel desselben mitgerechnet) geräth, ist das letzte (Schluss-) Bild dieser Folge.**

§. 9.

Dass aber von den aufeinanderfolgenden Bildern jeder Folge eines einmal in den Scheitelraum treten muss, sieht man leicht. Da die Verbindungslinien (Taf. II. Fig. 1.)

$$\begin{array}{llll} Bb_1 & \beta_2 b_3 & \beta_4 b_5 & \text{senkrecht zu } RM \\ & b_1\beta_2 & b_3\beta_4 & b_5\beta_6 \text{ senkrecht zu } AM \end{array}$$

stehen, so machen je zwei benachbarte dieser Linien denselben Winkel (Peripheriewinkel), den RM und AM machen, also φ.

(7) **Der Bogen zwischen je zwei alternirenden Bildern derselben Folge, wie**

$$b_1\ b_3,\ b_3\ b_5 \ldots\ldots,\ B\beta_2,\ \beta_2\ \beta_4 \ldots\ldots$$

ist also $=2\varphi$. Von den lateinischen Bildern $b_1\ b_3\ b_5$ z. B. muss daher eines einmal um weniger als 2φ von R' abstehen. — Ist dieser Abstand nun $=0$, $<\varphi$ oder $=\varphi$, so liegt das fragliche Bild selbst im Scheitelraume und ist Schlussbild; steht es aber weiter als φ, aber weniger als 2φ von R' ab, so liegt es um weniger als 1φ rechts von A' im Raume III; es entsteht dann noch das folgende (griechische) Bild, das aber dann um weniger als 1φ links von A', also im Scheitelraum liegt.

Ganz Gleiches gilt von den Bildern der zweiten Folge.

(8) Im Scheitelwinkelraum (die Schenkel mitgerechnet) gibt es daher immer zwei Bilder, von jeder Folge eines.

§. 10.

Ist der Gegenstand B von RM um den Bogen γ entfernt, von AM aber um $\gamma'=\varphi-\gamma$, so sind die Bogen für die erste Folge:

$$Rb_1=\gamma$$

$$A\beta_2=\varphi+\gamma$$

$$R\beta_3=2\varphi+\gamma$$

$$A\beta_4=3\varphi+\gamma$$

$$Rb_5=4\varphi+\gamma$$

$$A\beta_5=5\varphi+\gamma \qquad \text{u. s. w.;}$$

für die zweite aber:

$$A\beta_I=\gamma'$$

$$Rb_{II}=\varphi+\gamma'$$

$$A\beta_{III}=2\varphi+\gamma'$$

$$Rb_{IV}=3\varphi+\gamma'$$

$$A\beta_V=4\varphi+\gamma'$$

$$Bb_{VI}=5\varphi+\gamma' \qquad \text{u. s. w.}$$

§. 11.

Was von einem Punkt B gilt, gilt von allen im Bogen AR. Neben einander liegende Punkte werden sich auch neben einander liegend abbilden, da, wenn γ um $\Delta\gamma$ zunimmt, die Bogen des §. 10. um $\Delta\gamma$ zu- resp. abnehmen. Es werden sich also die ganze Reihe von R bis A (0^0 bis φ^0), der ganze Bogen, im Allgemeinen ebenso wiederholt abbilden, wie der Punkt B. Auch werden die Bilder aller Punkte der Stralen MR und MA in den Stralen von M nach den Bildern der Punkte R und A liegen, also

(9) **Fächer (Sectoren) mit der Eintheilung zwischen** R **und** $\mathit{\Delta}$ **entstehen.**

§. 12.

Betrachten wir der Einfachheit wegen neben B nur noch einen Punkt A im Bogen RA, so entstehen auf Taf. II. die Figuren 3. bis 8., Fig. 3. und 6. für die erste Folge, Fig. 4. und 7. für die zweite Folge. Man übersieht dabei sogleich, dass bei jeder der beiden Folgen

(10) **die beiden ersten Fächer (das 0te und 1ste, 0te und 1ste) und die beiden letzten an einanderstossen,** durch eine Spiegelebene resp. deren Erweiterung getrennt sind — dazwischen aber

(11) **abwechselnd allemal eines leer, das andere mit einer Bilderreihe** erfüllt ist (vergl. §. 10.), dass aber, wenn man beide zusammengehörige Folgen auf einander gelegt denkt (Taf. II. Fig. 5. und 8.), wie es der Wirklichkeit entspricht:

(12) **ein Fach, das bei der ersten Folge leer ist, bei der 2ten Folge eine Bilderreihe enthält und umgekehrt;**

(13) ferner dass die Ordnung der **griechischen** Bilder im Zeigergang *) bei erster Folge: $\varrho\alpha\beta\lambda$
zweiter Folge $\lambda\beta\alpha\varrho$

der **lateinischen** Bilder im Gegengang bei erster Folge $rabl$
zweiter Folge $lbar$

ist, also die

griechischen in der Ordnung (Taf. II. Fig. 5. und 8.)

$$\ldots (\varrho_4 \underset{0}{|} \varrho_{III})\, \alpha_{III} \beta_{III}\, (\lambda_{III} \underset{\varphi}{|} \lambda_2)\, \beta_2 \alpha_2\, (\varrho_2 \underset{0}{|} \varrho_I)\, \alpha_I \beta_I\, (\lambda_1 \underset{\varphi}{|} \mathit{\Delta}) \ldots$$

die lateinischen in der Ordnung

$$\ldots (R \underset{0}{|} r_1)\, a_1\, b_1\, (l_1 \underset{\varphi}{|} l_{II})\, b_{II}\, a_{II}\, (r_{II} \underset{0}{|} r_3)\, a_3\, b_3\, (l_3 \underset{\varphi}{|} l_{IV}) \ldots$$

folgen, wobei die eingeklammerten in einen Punkt zusammenfallen und die darunter stehende Gradzahl enthalten, und

---

*) **Zeigergang:** in demselben Sinne herumgezählt, wie die Zeiger einer Uhr umlaufen; **Gegengang** im umgekehrten Sinne.

(14) dass die geradstelligen Bilder

bei der ersten Folge im Raume II. und IV. (links) griechisch
- - zweiten - - - III. und IV. (rechts) lateinisch

die ungeradstelligen aber

bei der ersten Folge in III. und IV. (rechts) lateinisch
- - zweiten - - II. - IV. (links) griechisch

sind.

(15) (Ferner wird man bemerken, dass die geradstelligen Bilder *Eben*bilder, die ungeradstelligen *Gegen*bilder sind.)

§. 13.

Dabei aber bedarf die Gegend um den Scheitelwinkelraum noch einer näheren Betrachtung.

Wenn man $180^0 = g\varphi^0 + v^0$ nimmt, wo g eine ganze Zahl und $v \leqq \varphi$, nicht aber $=0$ sein soll, so hat man von A an im Gegengang und von R an im Zeigergang allemal g Fächer (Hauptfächer) (deren erstes allemal das mit 0 bezeichnete zwischen den Spiegeln ist) — die nicht bis an den Scheitelraum, noch weniger hineinragen.

Das dann folgende: „Endfach" reicht für $v=\varphi$ bis an, für $v<\varphi$ in den Scheitelraum hinein. Ist nun

g gerade (Taf. II. Fig. 3., 4. und 5., $\varphi=70^0$)*), so ist das letzte Hauptfach ungeradstellig (weil das erste mit 0 bezeichnet ist) das Endfach also geradstellig. Dies liegt also (14) für die

erste Folge hinter AMA', (auf der linken Seite von AMA'), ist griechisch und endigt mit $\lambda g\,(\varphi^0)$ (s. 14. und 13), welches v^0 links von A' liegt. — Für $v=\varphi$ stösst es bis an MR'; für $v<\varphi$ liegt MR' in diesem Fache. — Der Theil des Fachs, (Bogens), welcher nach links von MR' liegt, kann sich (als griechisch) noch einmal in MR spiegeln, gibt also darin noch ein lateininisches „Schlussfach" (ein ganzes für $v=\varphi$, ein Stück für $v<\varphi$), welches sich mit $r_{g+1}(0^0)$ endigt. Letzteres liegt v^0 rechts von R', also $\varphi-v=\varepsilon^0$ links von A'. — Für die

---

*) Zur leichteren Uebersicht sind die mit griechischen Bildern erfüllten Bogen stärker, als die lateinischen, die der ersten Folge angehörigen ganz ausgezogen, die der zweiten aber unterbrochen gezeichnet.

zweite Folge liegt das geradstellige Endfach hinter RMR' (auf der rechten Seite von RMR'), ist lateinisch und endigt mit r_g (0^0), welches ε^0 links von A' liegt. — MA' stösst für $v = \varphi$ gerade an dies Fach, für $v = \varphi$ liegt es in demselben. — Der Theil des Bogens, welcher noch rechts von MA' liegt, wird in diesem Spiegel MA ein griechisches Schlussfach geben, welches sich mit λ_{g+1} (φ^0) endigt. Dies liegt v^0 links von A'. Man hat also

(16) g gerade: erster Folge griechisches Endfach endigt mit λ_g, v^0 links von A'

- - lateinisches Schlussfach endigt mit r_{g+1}, ε^0 links von A'

zweiter Folge lateinisches Endfach endigt mit r_g, ε^0 links von A'

- - griechisches Schlussfach endigt mit λ_{g+1}, v^0 links von A'.

Durch ganz ähnliche Betrachtungen findet sich für

(17) g ungerade (Taf. II. Fig. 6.; 7., 8., $\varphi = 48^0$)

erster Folge latein. Endfach endigt mit l_g, ε^0 links von A'

- - griech. Schlussfach endigt mit ϱ_{g+1}, v^0 . . . . . .

zweiter Folge griech. Endfach endigt mit ϱ_g, v^0 . . . . .

- - latein. Schlussfach endigt mit l_{g+1}, ε^0 . . . . . .

so dass sich also für beide Fälle, (d. h. für jedes φ)

(18) erster Folge Endfach und zweiter Folge Schlussfach; ebenso zweiter Folge Endfach und erster Folge Schlussfach aneinander anschliessen.

(19) Dadurch enthält der Scheitelraum gerade zwei vollständige Bilderreihen von 0^0 bis φ^0; jede theilweise lateinisch und theilweise griechisch, aus dem Schlussfach und einem Stück seines Endfaches bestehend, um v, resp. um ε, gleichsam zusammengefaltet und auf einander gelegt.

Für g gerade griechisch $\uparrow v^0 (v+1) .. \varphi^0 | \varphi^0 .. (\varepsilon+1) \varepsilon^0 \uparrow$ griechisch
lateinisch $\uparrow v^0 \ldots\ldots\ldots 1 0^0 | 0^0 1 \ldots\ldots \varepsilon^0 \uparrow$ lateinisch.

Für g ungerade lateinisch $\uparrow \varepsilon^0 (\varepsilon+1) .. \varphi^0 | \varphi^0 (\varphi-1) \ldots v^0 \uparrow$ lateinisch
griechisch $\uparrow \varepsilon^0 \ldots\ldots 1 0^0 | 0^0 1 \ldots\ldots v^0 \uparrow$ griechisch.

(20) (Von M nach λ und nach ϱ (φ^0 und 0^0) entsteht auch allemal eine Fachlinie (Radius).

§. 14.

Will man jetzt bestimmen, wieviel Bilder (den ursprünglichen Gegenstand mitgerechnet) entstehen können, so braucht man nur nachzusehen, wie viel mal ein bestimmter Grad in den verschiedenen Fächern zusammen genommen vorkommt.

Zuerst sieht man sogleich, dass ein Hauptfach jeden Punkt zwischen 0 und φ enthält. Hauptfächer sind es aber $2g-1=h$. Im Scheitelraum kommt jeder Gradpunkt zweimal vor. — Für die beiden ausserhalb des Scheitelraumes liegenden Stücke der Endfächer aber muss man unterscheiden, ob $v \gtreqless \varepsilon$ ist*)

Ist $v=\varepsilon$ (wenn φ in 360^0 eine ungerade Anzahl von Malen aufgeht), so erhalten die beiden Endfachstücke zusammen gerade einmal die ganze Gradreihe von 0^0 bis φ^0.

Ist $v<\varepsilon$, so fehlt ihnen zusammen das Stück von v bis ε (Taf. II. Fig. 11., $\varphi=80^0$).

Ist $v>\varepsilon$, so enthalten sie zusammen eine ganze Gradreihe, und ausserdem noch die zwischen ε und v liegenden. (Taf. II. Fig. 9. und 10).

(21) Zählen wir nun zwei zusammenfallende gleichlautende Bilder nur einmal, so entstehen, wenn

1) $v<\varepsilon$ ist (φ in 360 zwischen einer geraden und die folgende ungerade Anzahl von Malen enthalten ist s. (Taf. II. Fig. 11.) von Punkten:

$$\left.\begin{array}{l}\text{zwischen } 0 \text{ und } v\\ \text{zwischen } \varepsilon \text{ und } \varphi\end{array}\right\} h+3 \text{ Bilder}$$

$$\text{oder: } \left.\begin{array}{r}\text{zwischen } 0^0 \text{ und } \frac{\varrho}{2}\\ \varphi-\frac{\varrho}{2} \text{ und } \varphi\end{array}\right\} n+2 \text{ Bilder}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{zwischen } v \text{ und } \varepsilon\\ \text{von } v \text{ und } \varepsilon \text{ selbst}\end{array}\right\} h+2 \text{ Bilder}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{zwischen } \frac{\varrho}{2} \text{ und } \varphi-\frac{\varrho}{2}\\ \text{von } \frac{\varrho}{2} \text{ und } \varphi-\frac{\varrho}{2}\end{array}\right\} n+1 \text{ Bilder}$$

$$\text{von } 0 \text{ und } \varphi \text{ selbst } \frac{h+3}{2} (=g+1) \text{ Bilder} \quad \text{von } 0 \text{ und } \varphi \quad \frac{n}{2}+1.$$

*) In der angehängten Tabelle sind für die verschiedenen φ der g, v und ε zur bequemen Uebersicht angegeben, ebenso noch die n und ϱ aus der Relation: $360=n\varphi+\varrho$, — wo für $n=2g$, $\varrho=2v$; für $n=2g+1$ aber $\varrho=2v-\varphi$ ist.

2) $v = \varepsilon$ ist, (φ in 360 eine ungerade Anzahl von Malen aufgeht) von Punkten

zwischen 0 und ε oder v / zwischen ε oder v und φ $\Big\}$ $h+3$ Bilder

oder zwischen 0 und $\frac{\varphi}{2}$ / zwischen $\frac{\varphi}{2}$ und φ $\Big\}$ $n+1$ Bilder

von v oder ε . . . . $h+2$ Bilder

von $\frac{\varphi}{2}$ . . . . n Bilder

von 0 und φ . . . . . $\frac{h+3}{2}$ Bilder

von 0 und φ . . . . $\frac{n+1}{2}$ Bilder;

3) $v > \varepsilon$ ist, (φ in 360 zwischen einer ungeraden und der folgenden geraden Anzahl von Malen enthalten ist) von Punkten

zwischen 0 und ε / zwischen v und φ $\Big\}$ $h+3$ Bilder

oder zwischen 0 und $\frac{\varphi-\varrho}{2}$ / zwischen $\frac{\varphi+\varrho}{2}$ und φ $\Big\}$ $n+1$ Bilder

zwischen ε und v $h+4$ Bilder

zwischen $\frac{\varphi-\varrho}{2}$ und $\frac{\varphi+\varrho}{2}$ $n+2$ Bilder

von ε und v $h+3$ Bilder

von $\frac{\varphi-\varrho}{2}$ und $\frac{\varphi+\varrho}{2}$ $n+1$ Bilder

von 0 und φ $\frac{h+3}{2}$ Bilder

von 0 und φ $\frac{n+1}{2}$ Bilder;

4) $v = \varphi$, $\varepsilon = 0$, (φ in 360 eine gerade Anzahl von Malen aufgeht) von Punkten

zwischen 0 und φ $h+3$ oder n Bilder

von 0 und φ $\frac{h+3}{2}$ oder $\frac{n}{2}$ Bilder.

§. 15.

Haben wir im Vorhergehenden gesehen, welche Bilder sich überhaupt bilden können, so kommt es doch eigentlich darauf an, welche von ihnen man von einer bestimmten Stelle aus (für einen bestimmten Ort des Auges) auf einmal übersieht. — Von den auf einander fallenden lateinischen und griechischen Bildern des Scheitelraumes wird das Auge allemal nur eines sehen, aber welche, bedarf noch der näheren Untersuchung.

Damit das Auge ein Bild sehen könne, muss die Grade vom fraglichen Bild nach dem Auge den Spiegel treffen, in welchem sich das Bild zuletzt gespiegelt hat; nach unseren Figuren sind deshalb die lateinischen Bilder nur sichtbar, wenn die Verbindungslinien derselben mit dem Auge den Spiegel MR; die griechischen nur, wenn sie den Spiegel MA treffen.

Denkt man sich durchs Auge und den Scheitelpunkt (eigentlich Scheitellinie) M eine Gerade (Ebene), welche den Bilderbogen des Scheitelwinkels in S trifft, so treffen alle Linien von Punkten auf der rechten Seite von S nach irgend welchen im Spiegelraum I. liegenden Punkten der gedachten Linie (Ebene) (als Orten des Auges) den Spiegel RM, von Punkten links von S den Spiegel AM.

(22) Wenn der Winkel α, den die gedachte Linie (Ebene) mit dem Spiegel RM macht, sich ändert, und das Auge sich in der Richtung von R nach A bewegt, so ändert sich auch der Ort S, mithin wechseln im Scheitelraum die sichtbaren Bilder.

Dagegen macht es keinen Unterschied, ob das Auge in jener Linie (Ebene) bei unverändertem α, sich bewegt, und dem Scheitel M näher oder ferner steht.

§. 16.

Sehen wir nun, welche Bogentheile sichtbar sind, so kommen zu den h ganzen Hauptfächern noch die mit dem Winkel α veränderlichen Stücke der beiden End- und Schlussfächer hinzu. Darüber hat man z. B. folgende Uebersicht:

(23) für g **gerade**; z. B. $\varphi=70^0$, $g=2$, $v=40^0$, $\varepsilon^0=30^0$ (Taf. II. Fig. 9.)

α*)	griechische Bilder. Endfach d. 1. F. (a)	griechische Bilder. Schlussfach d. 2. F. (b)	lateinische Bilder. Endfach d. 2. F. (c)	lateinische Bilder. Schlussfach d. 1. F. (d)
0	0 bis 40		0 bis 70	0 bis 40
10	0 — 50		0 — 70	0 — 30
20	0 — 60		0 — 70	0 — 20
$\varepsilon=30$	0 — 70	70 bis 70	0 — 70	0 — 10
$v=40$	0 — 70	60 — 70	0 — 70	0 — 0
50	0 — 70	50 — 70	10 — 70	
60	0 — 70	40 — 70	20 — 70	
$\varphi=70$	0 — 70	30 — 70	30 — 70	
	0 bis $[v+\alpha]$**)	$[\varepsilon+(\varphi-\alpha)]$*** bis φ	$[\varepsilon-(\varphi-\alpha)]$ bis φ	0 bis $(v-\alpha)$**)

*) Der dem Punkt M nächste Bogen im Scheitelwinkel enthält die Orte, wo S sich befindet, wenn das Auge in den gleichnamigen Punkten steht. — **Rechts** von den betreffenden Punkten (die also gewissermaassen die Orte des Auges repräsentiren) sind daher die **dünngezeichneten** (**lateinischen**), **links** die **starkgezeichneten** (**griechischen**) Bilder zu nehmen.

**) In den allgemeinen Ausdrücken die Differenzen nur herab bis 0°, die Summen nur hinauf bis φ^0.

***) Für $\alpha=\varphi$ hat man von ε bis φ
- $\alpha=\varphi-\delta$ hat man von $\varepsilon+\delta$ bis φ

also $\delta=\varphi-\alpha$ u. s. w.

(23) für g ungerade: z. B. $\varphi = 48^0$, $g = 3$, $\upsilon = 36^0$, $\varepsilon = 12^0$ (Taf. II. Fig. 10.)

	lateinische Bilder.		griechische Bilder.	
α	Endfach d. 1. F. (e)	Schlussfach d. 2. F. (f)	Endfach d. 2. F. (g)	Schlussfach d. 1. F. (h)
0	0 bis 48	12 bis 48	12 bis 48	
6	0 — 48	18 — 48	6 — 48	
$\varepsilon = 12$	0 — 48	24 — 48	0 — 48	0 bis 3
18	0 — 48	30 — 48	0 — 48	0 — 6
24	0 — 48	36 — 48	0 — 48	0 — 12
30	0 — 48	42 — 48	0 — 48	0 — 18
$\upsilon = 36$	0 — 48	48 — 48	0 — 48	0 — 24
24	0 — 42		0 — 48	0 — 30
$\varphi = 48$	0 — 36		0 — 48	0 — 36
	0 bis $[\upsilon + (\varphi - \alpha)]$	$[\varepsilon + \alpha]$ bis φ	$[\varepsilon - \alpha]$ bis φ	0 bis $[\upsilon - (\varphi - \alpha)]$

Wie man sieht, so beschränkt sich der Unterschied zwischen den Fällen, wo g gerade und ungerade ist, darauf, dass lateinische und griechische Bilder und $\varphi - \alpha$ und α ihre Rollen tauschen.

§. 19.

Solche Uebersichten für andere φ können wir leichter durch eine Art graphischer Darstellung, d. h. durch Figuren gewinnen, die dasselbe Gesetz befolgen, aber leichter zu construiren und abzulesen sind.

Zeichneten wir nämlich für jedes der 4 Fächer (die zwei End- und zwei Schlussfächer) je ein Quadrat von der Seite $=\varphi$, (Taf. II. Fig. 12. bis 15 und 16 bis 19)*) nähmen auf der Grundlinie gleichsam zu Abscissen die Winkel α, zu Ordinaten aber die für das fragliche α sichtbaren Bogenstücke (Orte der sichtbaren Gegenstände), so bekämen wir eine Reihe von Ordinaten für die auf einander folgenden Abscissen, die gezeichnet eine schraffirte Stelle des Quadrats geben. Fällt dann die Kreuzungslinie von α und einem Winkel γ (den der Gegenstand mit dem Spiegel *RM* macht), in eine schraffirte Stelle, so ist der Gegenstand sichtbar, sonst nicht. Legt man nun diese vier Quadrate auf einander, so erhält man Taf. II. Fig. 20. und 21. (für g gerade und g ungerade), die die Bilder in den vier Fächern zusammen repräsentirt.

(25) Es zeigen sich darin in 2 Ecken 1, in den beiden anderen 3, in der Mitte 2 schraffirte Stellen auf einander liegend.

Der Unterschied zwischen diesen zusammengesetzten Quadraten für g gerade und ungerade ist der, dass v und ε, nicht aber die Gradbezeichnung umgekehrt ist.

§. 20.

Mittels eines solchen Quadrats (natürlich mit Weglassung der nun unnöthigen Schraffirung) (Taf. II. Fig. 22.) beantworten sich dann sehr leicht die beiden Fragen:

1) Wenn das Auge [für $\varphi=70$ z. B.] in einem bestimmten Grade steht, z. B. 64^0 (von *RM* entfernt), in welchen Bogentheilen muss der Gegenstand stehen, wenn man in jenen vier Fächern 1, 2 oder 3 Bilder sehen will?

   Die Dreiecke a 64 40, so wie b 64′ 30′ sind gleichschenklig, daher

   $$64.a = 64.\ 40 = 24 \text{ Grade}$$
   $$b.64' = 64'30' = 34 \quad \text{-}$$

   Steht also der Gegenstand *R*

   zwischen 0^0 und 24^0 (von *RM*) so gibt es 1 Bild**)
   - 24^0 und 36^0 - - - - - - 2 Bilder
   - 36^0 und 70^0 - - - - - - - 3 Bilder.

2) Wenn der Gegenstand in einem bestimmten Grade steht z. B. $\gamma=13$, wo sieht das Auge 1.. 2... 3 Bilder?

---

*) Die Figuren entsprechen Nr. (23) und (24) nach den gleichlautenden Buchstaben, (a) (b) u. s. w.

**) S. Nr. (27) und (28).

Es ist

$$13\ m = 13\ 40'' = 27 \text{ Grade}$$
$$n\ 13' = 13'\ 30'' = 17 \text{ Grade}$$

also sieht das Auge

zwischen 0^0 und 27^0 (von *RM*), ... 3 Bilder

- 27^0 und 53^0 - - - - - 2 Bilder
- 53^0 und 70^0 - - - - - 1 Bild.

(26) Zu diesen 1, 2 oder 3 Bildern kommen nun allemal noch die h Bilder in den Hauptfächern (den Gegenstand B mitgezählt) hinzu, so dass man für alle sichtbaren Bilder $h+1$, $h+2$ oder $h+3$ zu nehmen hat.

Hiervon machen jedoch die Punkte 0^0 und φ^0 (als Gegenstand angesehen) eine Ausnahme. Wenn man diese Punkte an der Grenze der Haupt- und End-Fächer, (wo sie in (23) und (24) — bei den Quadraten mitberücksichtigt werden) nicht mitzählt, so kommt jeder derselben in den Hauptfächern nur $(g-1)$mal vor, weil immer je zwei zusammenfallen.

(27) Für die Gegenstände 0^0 und φ^0 hat man also statt h blos $g-1$ zu lesen.

Einer besonderen Beachtung bedürfen auch noch bei unsern Quadraten die Grenzfälle, wo die Kreuzungslinien in die Ecken oder Grenzlinien des äussern Quadrats oder inneren Rechtecks fallen. Man sieht nämlich bald (am leichsten an Taf. II. Fig. 9. und 10.)

(28) dass, wenn der Kreuzungspunkt fällt

1) in die Ecken, oder die obere und untere Grenzlinie des äussern Quadrats, man, wo 3 Bilder angegeben sind, nur 2 zu nehmen [weil von den Punkten 0 und φ zwei gleichlautende zusammenfallen];

2) in den Ecken des Rechtecks (resp. inneren Quadrats) immer 2 zu lesen; [weil für das Auge in 0 oder φ 2 Punkte v oder ε; für das Auge in ε oder v 2 Punkte 0 oder φ zusammenfallen]

3) in den Grenzlinien des Rechtecks resp. inneren Quadrats die grösste der zu beiden Seiten angegebenen Zahlen zu nehmen hat.

In praxi modificirt sich dies sogar noch weiter, weil die hier mitgezählten Bilder, welche dem Auge gerade in der Scheitellinie der Spiegel zu stehen scheinen, wegen Unvollkommenheit des Apparates nicht leicht wirklich zu sehen sind. Dann hat man also in den Grenzlinien und Ecken das Rechtecks z. B. immer die kleinste Zahl zu nehmen.

§. 21.

Den Uebergang dieser Verhältnisse bei fliessendem φ übersieht man aus der Tabelle, noch besser aber durch eine Reihe Quadrate (Taf. II. Fig. 23.)

Bei 180° hat man eine nach links oben gerichtete Diagonale. Bei abnehmendem φ kommen an den Enden derselben zwei Eckdreiecke zum Vorschein; die Diagonale verbreitert sich zu einem Rechtecke. — Die Eckdreiecke werden grösser, das Rechteck breiter, die früheren Dreiecke kleiner bis bei 120° das Rechteck zum Quadrate geworden. In demselben Sinne geht es fort, das Quadrat wird wieder zum Rechteck, dessen Längenrichtung aber jetzt nach rechts oben geht; bis bei 90 die früheren Dreiecke ganz verdrängt, das Rechteck zur Diagonale zusammengeschmolzen und die neuen Eckdreiecke den ganzen Raum eingenommen haben u. s. w.

§. 22.

Als Resultate kann man also zusammenstellen: Wenn φ in 360° n ganze Male mit oder ohne Rest enthalten ist und

(29) n ist $=2, 4, 6, 8 \ldots (=4z-2 \atop +0)$ und $\varrho=0$;

also

$$\varphi=180, 90, 60, 45 \text{ u. s. w.}$$

so sieht das Auge O an jedem Ort, vom Gegenstand B an jeglichem Ort, ausser in 0° und φ^0, nur eine Anzahl von Bildern, nämlich n, s. (27);

(30) n ist $=3, 5, 7, 9 \ldots (=4z \mp 1)$ und $\varrho=0$

$$\varphi=120^0, 72^0, 51\frac{3}{7}, 40\ldots \text{ und } v=\varepsilon$$

so sieht man

a) wenn das Auge der Mitte des Bogens näher ist, als der Gegenstand dem nächsten Spiegel, $n(=h+2)$ Bilder;

b) wenn aber umgekehrt der Gegenstand B dem nächsten Spiegel näher ist als das Auge O der Mitte des Bogens, falls

α) g ungerade, also

$$n=4z-1;\ \varphi=120,\ 51\frac{3}{7},\ 32\frac{8}{11}\ldots 24.$$

und

1) Auge und Gegenstand in derselben Hälfte des Bogens sich befinden $n-1$ $(=h+1)$ Bilder;

2) Auge und Gegenstand in entgegengesetzten Hälften der Bogen sind $n+1$ $(=h+3)$ Bilder;

β) g gerade, also

$$n=4z+1;\ \varphi=72^0, 40^0, 27\frac{9}{13}\ldots$$

und

1) Auge und Gegenstand in derselben Hälfte sind: $n+1(=h+3)$ Bilder**)

2) Auge und Gegenstand in der entgegengesetzten Hälfte $n-1(=h+1)$.

Als specieller Fall von a) hebt sich heraus:

Steht das Auge in der Mitte des Bogens, so sieht für jeden Ort des Gegenstandes und

Ist der Gegenstand in der Mitte des Bogens, so sieht das Auge an jedem Ort n Bilder.

(31) φ lässt in 360 einen Rest.

α) g ist ungerade, $n=4z{-2 \atop -1}$, φ zwischen 180° und 90°, 60° und 45°, 36° und 30°,

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \left.\begin{array}{l}\text{Auge}\\ \text{Gegenstand}\end{array}\right\}\text{zwischen } 0 \text{ u. } \varepsilon \\ \qquad\text{und } B \text{ näher an } 0^0 \\ \qquad\text{als } O \text{ an } \varepsilon^0 \\ 2)\ \left.\begin{array}{l}\text{Auge}\\ \text{Gegenstand}\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{zwischen } v\\ \text{und } \varphi\end{array} \\ \qquad\text{und } B \text{ näher an } \varphi^0 \\ \qquad\text{als } O \text{ an } v^0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} n-1=h+1 \\ \text{Bilder}\end{array}$$

---

*) Die erste Anzahl, wenn n gerade $=4z-2$; die zweite (die der ersten gleich ist) wenn n ungerade $=4z-1$ ist.

**) Um die grösste Anzahl von Bildern zu sehen, wird man also im Allgemeinen: für g gerade Auge und Gegenstand nur nahe genug an dasselbe Ende; — für g ungerade aber Auge und Gegenstand nur nahe genug an entgegengesetzte Enden des Bogens bringen dürfen.

3) Auge, Gegenstand } zwischen 0 u. v, ε u. φ und B gleich nahe oder näher an φ^0 als O an v^0 4) Auge, Gegenstand } zwischen ε u. φ, 0 u. v und B gleich nahe oder näher an 0^0 als O an ε^0	$n+2$ $n+1$ $=h+3$ Bilder
In den Gegensätzen dieser 4 Fällle, d. h. „wenn B ebenso weit oder weiter von 0^0 absteht etc.	$n+1$ n $=h+2$ Bilder

β) g gerade, $n=4z{+0 \atop +1}$, φ zwischen 90^0 und 60^0; 45^0 und 36^0; 30^0 und $25\frac{5^0}{7}$ ähnlich wie für g ungerade, nur ε und v verwechselt. (Vorige Seite**)

(32) Ueber die Grenzfälle s. §. 20. Nr. (27) und (28).

Uebrigens können (29) und (30). als specielle Fälle von (31) angesehen werden; in (30) ist $v=\varepsilon=\frac{\varphi}{2}$, in (29) $v=\varphi$, $\varepsilon=0$, in beiden $\varrho=0$.

Diese Resultate lassen sich jedenfalls anders, symmetrischer oder kürzer zusammenstellen, schwerlich aber wohl die einfache Uebersicht gewährend wie die Reihe der Quadrate Taf. II. Fig. 23.

§. 23.

Einiges Interesse bieten vielleicht noch die Winkel dar, unter denen der vom Gegenstand ausgehende Stral die Spiegel abwechselnd trifft, um endlich ans Auge zu gelangen.

Fällt ein Stral $B\delta_1$ (Taf. II. Fig. 24.) unter dem Anfangs-Winkel $B\delta_1 R=\delta_1$ ein, so der reflectirte $\delta_1\delta_2$ unter dem Winkel

$$\delta_1\delta_2 A=\delta_2=\delta_1+\varphi;$$

der hier reflectirte Stral $\delta_2\delta_3$ trifft den Spiegel RM wieder unter dem Winkel

$$\delta_2\delta_3 R=\delta_3=\delta_2+\varphi=\delta_1+2\varphi,$$

u. s. w. d. h.

(33) die Reflexionswinkel eines mehrmals gebrochenen Strales wachsen bei jeder neuen Reflexion um φ. — Ist der Winkel dadurch grösser als 90° geworden, so kann man auch statt seiner die Ergänzung zu 180° nehmen, — wobei nur Ein- und Ausfallsstral verwechselt wird, — dann nimmt von da an jeder Reflexionswinkel um φ ab. Vom letzten, End-Winkel, an gerechnet, aber auch allemal um φ zu. — So lange der Winkel unter 90° bleibt, nähert sich der Stral dem Scheitel M, wird er grösser, so entfernt er sich wieder.

Für die Winkelfolge desselben Strales hat man also nur nöthig den Anfangs- oder End-Winkel zu kennen.

§. 24.

Suchen wir die Endwinkel n_n. Zuerst für den Fall, dass Gegenstand und Auge gleichweit von M entfernt sind.

Da $b_n\,\beta_{n-1}$ (Taf. II. Fig. 25.) senkrecht zu RR' (resp. $\beta_n\,b_{n-1}$ senkrecht zu AA') steht, so ist der Endwinkel

34) $$n_n = 90^0 - Ob_n\beta_{n-1} = 90^0 - \frac{1}{2}\text{ Bogen } O\beta_{n-1}.$$

Die Werthe dieser Bogen stellen sich aber so dar: Sei der frühere Bogen $BR=\gamma$, $OR=\alpha$, so hat man, wenn zur Abkürzung gleich d für $\frac{\gamma-\alpha}{2}$ und s für $\frac{\gamma\ \alpha}{2}$ geschrieben wird, für die erste Folge:

(35)
$$\frac{1}{2}OB = +d\text{*)}$$
$$\frac{1}{2}Ob_1 = +s$$
$$\frac{1}{2}OB\beta_2 = \varphi + d$$
$$\frac{1}{2}Ob_3 = \varphi + s$$
$$\frac{1}{2}O\beta_4 = 2\varphi + d$$
$$\frac{1}{2}Ob_5 = 2\varphi + s$$

*) α ist, wenn wie in Taf. II. Fig. 2. B mit β_2, β_4 auf entgegengesetzter Seite von O liegt, negativ. Der Gleichförmigkeit in (36) wegen ist hier $\frac{1}{2}OB$ negativ stehen gelassen.

$$\frac{1}{2}O\beta_6 = 3\varphi + d$$

$$\frac{1}{2}Ob_7 = 3\varphi + s \quad \text{u. s. w.}$$

Somit werden die **Endwinkel**:

$$(36) \qquad 1_1 = O1_1R = 90 - (+d)$$

$$2_2 = O2_2A = 90 - (+s)$$

$$3_3 = O3_3R = 90 - (\varphi + d)$$

$$4_4 = O4_4A = 90 - (\varphi + s)$$

$$5_5 = O5_5R = 90 - (2\varphi + d)$$

$$6_6 = O6_6A = 90 - (2\varphi + s)$$

$$7_7 = O7_7R = 90 - (3\varphi + d)$$

$$8_8 = O8_8A = 90 - (3\varphi + s)$$

u. s. w.

Für die **zweite Folge** setze man

$$BA = \gamma' = \varphi - \gamma; \quad OA = \alpha' = \varphi - \alpha; \quad \left(\frac{\gamma' - \alpha'}{2}\right) = d', \left(\frac{\gamma' + \alpha'}{2}\right) = s',$$

(woraus, beiläufig bemerkt, $s' = \varphi - s$ und $d' = -d$ folgt); so werden die Bogen

$$(37) \qquad \frac{1}{2}OB = +d'$$

$$\frac{1}{2}O\beta_I = s'$$

$$\frac{1}{2}Ob_{II} = \varphi + d'$$

$$\frac{1}{2}O\beta_{III} = \varphi + s'$$

$$\frac{1}{2}Ob_{IV} = 2\varphi + d'$$

$$\frac{1}{2}O\beta_V = 2\varphi + s'$$

u. s. w.

und die Endwinkel

(38) $$I_I = OI_IA = 90 - (+d')$$
$$II_{II} = OII_{II}R = 90 - s'$$
$$III_{III} = OIII_{III}A = 90 - (\varphi + d')$$
$$IV_{IV} = OIV_{IV}R = 90 - (\varphi + s')$$
$$V_V = OV_VA = 90 - (2\varphi + d')$$
$$VI_{VI} = OVI_{VI}R = 90 - (2\varphi + s')$$

u. s. w.

§. 25.

Daraus ergeben sich auch leicht die End-Entfernungen*) des Mittelpunkts M vom Scheitel der Endwinkel

(39) Es ist nämlich (Taf. II. Fig. 25.)

$$Mn_n = \frac{MO \sin MOb_n}{\sin Mnb_n} = \frac{r \cos \frac{1}{2} Ob_n}{\sin n_n},$$

also z. B. namentlich (35 und 36):

(40) $$M1_1 = r.\frac{\cos s}{\cos d}, \qquad MI_I = r.\frac{\cos s'}{\cos d'},$$
$$M2_2 = r.\frac{\cos(\varphi + d)}{\cos s} \qquad MII_{II} = r.\frac{\cos(\varphi + d')}{\cos s'},$$
$$M3_3 = r.\frac{\cos(\varphi + s)}{\cos(\varphi + d)} \qquad MIII_{III} = r.\frac{\cos(\varphi + s')}{\cos(\varphi + d')},$$
$$M4_4 = r.\frac{\cos(2\varphi + d)}{\cos(\varphi + s)} \qquad MIV_{IV} = r.\frac{\cos(2\varphi + d')}{\cos(\varphi + s')},$$
$$M5_5 = r.\frac{\cos(2\varphi + s)}{\cos(2\varphi + d)} \qquad MV_V = r.\frac{\cos(2\varphi + s')}{\cos(2\varphi + d')},$$
$$M6_6 = r.\frac{\cos(3\varphi + d)}{\cos(2\varphi + s)} \qquad MVI_{VI} = r.\frac{\cos(3\varphi + d')}{\cos(2\varphi + s')}.$$

*) Eigentlich deren Projectionen auf die Ebene des eingetheilten Kreises.

§. 26.

Aus diesen Endentfernungen folgen weiter leicht die vorhergehenden Entfernungen der Mitte M von den Durchschnitten des hin und her geworfenen Strales mit den betreffenden Spiegeln: denn man hat z. B

$$(41)\quad Mn_{n-1} = \frac{Mn_n . \sin n_n}{\sin n_{n-1}} = \frac{r.\cos\frac{1}{2}Ob_n}{\sin n_{n-1}} = \frac{r.\cos\frac{1}{2}Ob_n}{\sin(n_n+\varphi)};$$

ebenso

$$Mn_{n-2} = \frac{r.\cos\frac{1}{2}Ob_n}{\sin(n_n+2\varphi)}$$

u. s. w., also namentlich z. B. (35), (36)

$$(42)\quad M6_6 = r.\cos(3\varphi+d)\sec(2\varphi+s)$$
$$M5_5 = r.\cos(2\varphi+s)\sec(2\varphi+d),$$
$$M6_5 = C\text{*)}\ \sec(\varphi+s)$$
$$M5_4 = C\ \sec(\varphi+d),$$
$$M6_4 = C\ \sec s$$
$$M5_3 = C\ \sec d$$
$$M6_3 = C\ \sec(\varphi-s)$$
$$M5_2 = C\ \sec(\varphi-d),$$
$$M6_2 = C\ \sec(2\varphi-s)$$
$$M5_1 = C\ \sec(2\varphi-d),$$
$$M6_1 = C\ \sec(3\varphi-s).$$

$$M4_4 = r\cos(2\varphi+d)\sec(\varphi+s)$$
$$M3_3 = r\cos(\varphi+s)\sec(\varphi+d),$$
$$4_3 = C''\ M\sec s$$
$$M3_2 = C'''\ \sec d,$$
$$M4_2 = C''\ \sec(\varphi-s)$$
$$M3_1 = C'''\ \sec(\varphi-d),$$
$$M4_1 = C''\ \sec(2\varphi-s).$$

*) Der in der ganzen Folge vorkommende Factor $r\cos(3\varphi+d) = C$ gesetzt. Aehnliches gilt auch für die anderen Folgen.

$M2_2 = r\cos(\varphi + d)\sec s \qquad M1_1 = r\cos s\sec d$

$M2_1 = \quad C^{IV} \quad \sec(\varphi - s).$

(43) Für die zweite Folge lauten die entsprechenden Längenwerthe ganz ebenso nur mit s' statt s und d' statt d.

(44) Diese Auftrittsentfernungen lassen sich, da sie sich wie eine Folge von Secanten verhalten, auch durch (Taf. II. Fig. 26.) darstellen.

§. 27.

Wenn endlich Auge und Gegenstand nicht gleich weit von M abstehen z. B. $MO' = R$, $MB = r$ ist, so hat man aus dem Dreieck $MO'b_n$ (Taf. II. Fig. 25) wegen

$$\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\mu-\nu) = \frac{R-r}{R+r}\mathrm{cotg}\frac{1}{2}Ob_n$$

und

$$\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\mu+\nu) = \mathrm{tg}\,(90 - \frac{1}{2}Ob_n)$$

den Anfangswinkel $n'_n = Q'n'_nR$

$$(45) \quad n'_n = \alpha + \nu = \alpha + (90 - \frac{1}{2}Ob_n) - \mathrm{arctg}\left[\frac{R-r}{R+r}\mathrm{cotg}\frac{1}{2}Ob_n\right],$$

was für $R = r$ in die früheren Formen übergeht.

Tabelle.

φ	v	ε	g	h	n	ρ	
180	0	180	1	1	2	0	
179	1	178	:	:	:	2	
178	2	176	:	:	:	4	
177	3	174	:	:	:	6	
176	4	172	:	:	:	8	
175	5	170	:	:	:	10	
.						.	
.						.	
170	10	160	:	:	:	20	
.						.	
.						.	
165	15	150	:	:	:	30	
						.	
160	20	140	:	:	:	40	
.							
155	25	130	:	:	:	50	$\rho=2v$
150	30	120	:	:	:	60	
145	35	110	:	:	:	70	
140	40	100	:	:	:	80	
135	45	90	:	:	:	90	
130	50	80	:	:	:	100	
125	55	70	:	:	:	110	
120	60	60	1	1	3	0	
115	65	50	:	:	:	15	
110	70	40	:	:	:	30	
105	75	30	:	:	:	45	
100	80	20	:	:	:	60	
95	85	10	:	:	:	75	$\rho=2v-\varphi$
94	86	8	:	:	:	78	
93	87	6	:	:	:	81	
92	88	4	:	:	:	84	
91	89	2	:	:	:	87	
90	90	0	1	1	:	90	
	0	90	2	3	4	0	
89	2	87	:	:	:	4	
88	4	84	:	:	:	8	
87	6	81	:	:	:	12	
86	8	78	:	:	:	16	
85	10	75	:	:	:	20	
.							
.							
80	20	60	:	:	:	40	$\rho=2v$
.							
.							
75	30	45	:	:	:	60	
74	32	42	:	:	:	64	
73	34	39	:	:	:	68	
72	36	36	2	3	5	0	
71	38	33	:	:	:	5	
70	40	30	:	:	:	10	
.							
.							
65	50	15	:	:	:	35	
64	52	12	:	:	:	40	$\rho=2v-\varphi$
63	54	9	:	:	:	45	
62	56	6	:	:	:	50	
61	58	3	:	:	:	55	
60	60	0	2	3	:	60	

φ	v	ε	g	h	n	ρ	
60	0	60	3	5	6	0	
59	3	56	:	:	:	6	
58	6	52	:	:	:	12	
56	12	44	:	:	:	24	$\rho=2v$
54	18	36	:	:	:	36	
53	21	32	:	:	:	42	
52	24	28	:	:	:	48	
$51\frac{3}{7}$	$25\frac{5}{7}$	$25\frac{5}{7}$	3	5	7	0	
51	27	24	:	:	:	3	
50	30	20	:	:	:	10	
48	36	12	:	:	:	24	$\rho=2v-\varphi$
47	39	8	:	:	:	31	
46	42	4	:	:	:	38	
45	45	0	3	5	:	45	
	0	45	4	7	8	0	
44	4	40	:	:	:	8	
43	8	35	:	:	:	16	
42	12	30	:	:	:	24	
41	16	25	:	:	:	32	
40	20	20	4	7	9	0	
39	24	15	:	:	:	9	
38	28	10	:	:	:	18	
37	32	5	:	:	:	27	
36	36	0	4	7	:	36	
	0	36	5	9	10	0	
35	5	30	:	:	:	10	
34	10	24	:	:	:	20	
33	15	18	:	:	:	30	
$32\frac{8}{11}$	$16\frac{4}{11}$	$16\frac{4}{11}$	5	9	11	0	
32	20	12	:	:	:	8	
31	25	6	:	:	:	19	
30	30	0	5	9	:	30	
	0	30	6	11	12	0	
29	6	23	:	:	:	12	
28	12	16	:	:	:	24	
$27\frac{9}{13}$	$13\frac{11}{13}$	$13\frac{11}{13}$	6	11	13	0	
27	18	9	:	:	:	9	
26	24	2	:	:	:	22	
$25\frac{5}{7}$	$25\frac{5}{7}$	0	6	11	:	$25\frac{5}{7}$	
	0	$25\frac{5}{7}$	7	13	14	0	
25	5	20	:	:	:	10	
24	12	12	7	13	15	0	
23	19	4	:	:	:	15	
$22\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	0	7	13	:	$22\frac{1}{2}$	
	0	$22\frac{1}{2}$	8	15	16	0	
22	4	16	:	:	:	8	
$21\frac{3}{17}$	$10\frac{10}{17}$	$10\frac{10}{17}$	8	15	17	0	
21	12	9	:	:	:	3	
20	20	0	8	15	:	20	
	0	20	9	17	18	0	
19	9	10	:	:	:	1	
$18\frac{18}{19}$	$9\frac{9}{19}$	$9\frac{9}{19}$	9	17	19	0	
18	18	0	:	:	:	18	

VII.

Bestimmung der geographischen Breite und Länge aus geodätischen Messungen.

Von
Herrn Professor Dr. J. Dienger
an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

---

§. 1.

Nehmen wir die Erde als ein Rotationsellipsoid an, in dem a der Halbmesser des Aequators, b die halbe Rotationsaxe, nehmen wir ferner die letztere zur Axe der x; die Axen der y und z in der Aequatorebene, so ist die Gleichung der Erdoberfläche (mathematisch gesprochen):

$$\frac{z^2+y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}-1=0. \qquad (1)$$

Die geodätische Linie auf dem Erdsphäroid ist aber eine kürzeste Linie, daher ist ihre Gleichung, neben (1):

$$z\frac{\partial y}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial x}=c\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}, \qquad (2)$$

worin c eine Konstante.

Heissen wir Breite eines Ortes auf der (mathematischen) Erdoberfläche den Winkel, den die Normale in diesem Punkte mit der Aequatorebene macht, so ist, wenn sie durch B bezeichnet wird:

$$\sin B = \frac{a^2 x}{\sqrt{b^4(y^2+z^2)+a^4x^2}},$$

wobei B von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ auf der nördlichen Erdhälfte, von 0 bis $-\frac{\pi}{2}$ auf der südlichen gezählt wird. Die Länge eines Ortes ist der Winkel, den die Ebene des durch ihn gehenden Meridians (d. h. die Ebene durch jenen Ort und die Erdaxe) mit der Ebene irgend eines bestimmten ersten Meridians macht. Wir zählen die Länge von 0 bis 360° von West gen Ost, wie wir auch die Richtung von der positiven Axe der z zur positiven Axe der y in derselben Weise zählen, und die Axe der z in die Ebene des ersten Meridians verlegen. Ist λ die Länge, so ist:

$$\sin\lambda = \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{y}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}},$$

$$\cos\lambda = \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{z}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}}.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$x = \frac{a(1-e^2)\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}, \qquad e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2};$$

also ist

$$y = a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}\cdot\sin\lambda = \frac{a\sin\lambda\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}},$$

$$z = a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}\cdot\cos\lambda = \frac{a\cos\lambda\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}.$$

Bestimmt man β so, dass

$$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{1-e^2}\cdot\operatorname{tg}B = \frac{b}{a}\operatorname{tg}B, \tag{3}$$

so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} x &= b\sin\beta, \\ y &= a\cos\beta\sin\lambda, \\ z &= a\cos\beta\cos\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Führt man nun die neuen Veränderlichen λ und β (die reduzirte Breite des Ortes) in die Formel (2) ein, so ist dieselbe:

$$\frac{a^2\cos^2\beta\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}}{\sqrt{b^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta+a^2\cos^2\beta\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\right)^2}}=c,$$

woraus man als Gleichung der geodätischen Linie zieht:

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\right)^2=\frac{c^2(b^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta)}{a^2\cos^2\beta\,(a^2\cos^2\beta-c^2)}. \qquad (5)$$

Die Länge dieser Linie zwischen zwei Punkten, denen die reduzirten Breiten β_1 und β_2 $(\beta_2>\beta_1)$ zugehören, ist also:

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)\partial\beta$$

$$=a\int_{\beta_1}^{\beta_2}\cos\beta\sqrt{\frac{b^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta}{a^2\cos^2\beta-c^2}}\,\partial\beta. \qquad (6)$$

Die Konstante c, die in diesen Formeln vorkommt, wird durch die anfängliche Richtung der geodätischen Linie bestimmt, welche Richtung bekanntlich bei dem uns vorliegenden Problem immer als bekannt angenommen werden darf.

Ist diese anfängliche Richtung die des Meridians, so ist anfänglich $\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}=0$, d. h. man hat $c=0$, und also ist die Gleichung (2):

$$z\frac{\partial y}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad y=c'z;$$

wo c' eine Konstante. In diesem Falle ist also die geodätische Linie eine ebene, und der Meridian selbst. Was die Länge anbelangt, so ist in diesem Falle aus (6) dieselbe:

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sqrt{b^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta}\,\partial\beta=a\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sqrt{1-e^2\cos^2\beta}\,\partial\beta$$

$$=a\int_{\frac{\pi}{2}-\beta_1}^{\frac{\pi}{2}-\beta}\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}\,\partial\beta$$

$$=a\left[E\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1,e\right)-E\left(\frac{\pi}{2}-\beta_2,e\right)\right], \qquad (7)$$

wenn allgemein

$$\int_0^{\varphi_1} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi = E(\varphi_1, k)$$

ist.

In jedem anderen Falle ist die geodätische Linie von doppelter Krümmung.

§. 2.

Sei $(x'y'z')$ der Anfangspunkt der geodätischen Linie (5), so sind die Gleichungen der durch diesen Punkt gehenden Meridiankurve:

$$yz' - zy' = 0, \quad \frac{y^2+z^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Sei nun α der Winkel, den die Meridiankurve und die geodätische Linie machen, so findet man leicht:

$$\sin^2\alpha = \frac{a^4 x'^2 \left[y' \frac{\partial z'}{\partial x'} - z' \frac{\partial y'}{\partial x'} \right]^2 + \left[b^2 (y'^2 + z'^2) \frac{\partial z'}{\partial x'} + a^2 x' z' \right]^2 + \left[b^2 (y'^2 + z'^2) \frac{\partial y'}{\partial x'} + a^2 x' y' \right]^2}{\left[1 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial x'} \right)^2 \right] \left[a^4 x'^2 z'^2 + a^4 y'^2 x'^2 + b^4 (y'^2 + z'^2) \right]} .$$

Führt man hier die Winkelkoordinaten (4) ein, so ergiebt sich:

$$\sin^2\alpha = \frac{a^2\cos^2\beta\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\right)^2}{b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta + a^2\cos^2\beta\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\right)^2};$$

also ist

$$a\cos\beta\sin\alpha = \frac{a^2\cos^2\beta\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}}{\sqrt{b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta + a^2\cos^2\beta\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\right)^2}}.$$

Vergleicht man dies mit dem Früheren, so ist:

$$a\cos\beta\sin\alpha = c. \qquad (8)$$

Ist also β die reduzirte Breite eines Punktes der Erdoberfläche, α der Winkel, den die durch ihn gehende geodätische Linie mit seinem Meridian macht, so ist die Grösse $\cos\beta\sin\alpha$ für alle in dieser geodätischen Linie liegenden Punkte konstant.

Kennt man also den Winkel α_1, den die geodätische Linie in ihrem Anfangspunkt mit dem durch jenen Punkt gehenden Meridian macht (ihr Azimuth) und ist β_1 die reduzirte Breite dieses Anfangspunktes, so ist

$$c = a\cos\beta_1\sin\alpha_1. \qquad (9)$$

§. 3.

Nachdem nun c bestimmt ist, bietet die Berechnung der Länge einer geodätischen Linie keine Schwierigkeit dar. Aus Formel (6) folgt nunmehr:

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sqrt{\frac{b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta}{\cos^2\beta - \cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1}}\cdot\cos\beta\partial\beta = s$$

$$= \int_{\beta_1}^{\beta_2}\sqrt{\frac{b^2 + a^2e^2\sin^2\beta}{1 - \cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1 - \sin^2\beta}}\cos\beta\partial\beta.$$

Sei nun

$$\sin\beta = \cos\varphi\sqrt{1 - \cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1},$$

was immer möglich ist, da $1-\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1 \begin{smallmatrix}>0\\<1\end{smallmatrix}$, so ist:

$$s=-\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\frac{b^2+a^2e^2(1-\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1)\cos^2\varphi}{(1-\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1)\sin^2\varphi}}.\sin\varphi\sqrt{1-\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1}\,\partial\varphi$$

$$=-\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{b^2+a^2e^2(1-\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1)-a^2e^2(1-\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1)\sin^2\varphi}\,\partial\varphi$$

$$=\sqrt{b^2+a^2e^2(1-\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1)}\int_{\varphi_2}^{\varphi_1}\sqrt{1-\frac{a^2e^2(1-\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1)}{b^2+a^2e^2(1-\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1)}\sin^2\varphi}\,\partial\varphi$$

worin φ_1, φ_2 bestimmt sind durch

$$\sin\beta_1=\cos\varphi_1.\sqrt{1-\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1},$$

$$\sin\beta_2=\cos\varphi_2.\sqrt{1-\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1}.$$

Nun ist

$$b^2+a^2e^2(1-\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1)=b^2+a^2e^2-a^2e^2\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1$$
$$=a^2(1-e^2\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1).$$

Bestimmt man also γ und γ_1 so, dass

$$\cos\gamma=\cos\beta_1\sin\alpha_1,\quad \cos\gamma_1=e\cos\beta_1\sin\alpha_1; \tag{10}$$

so ist

$$\sqrt{1-\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1}=\sin\gamma,\ \sqrt{b^2+a^2e^2(1-\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1)}=a\sin\gamma_1,$$

und φ_1, φ_2 sind bestimmt aus

$$\sin\beta_1'=\sin\gamma.\cos\varphi_1,\quad \sin\beta_2=\sin\gamma.\cos\varphi_2, \tag{11}$$

so dass endlich

$$s=a\sin\gamma_1\int_{\varphi_2}^{\varphi_1}\sqrt{1-\frac{e^2\sin^2\gamma}{\sin^2\gamma_1}\sin^2\varphi}\,\partial\varphi$$

$$=a\sin\gamma_1\left[E(\varphi_1,\frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1})-E(\varphi_2,\frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1})\right]. \tag{12}$$

Dadurch ist nun unsere Aufgabe gelöst. Hat man Tafeln der elliptischen Funktionen, so entnimmt man ihnen unmittelbar s.

Die Entwicklung der Näherungsformeln ist hier nicht unsere Aufgabe, auch ist dieselbe, nach den mitgetheilten genauen Formeln leicht. Man wird die Näherung nicht über die vierte Potenz von e treiben.

§. 4.

In der Regel liegt in der Geodäsie die Aufgabe nicht so, vielmehr kennt man die geographische Länge und Breite eines Ortes, den Winkel α_1, den die geodätische Linie von diesem Punkte aus an einen andern mit dem Meridian des ersten macht, so wie die der geodätischen Linie zwischen beiden, und soll daraus Länge und Breite des zweiten Ortes finden.

In Formel (12) dürfen also als bekannt angenommen werden s und φ_1 neben den jedenfalls bekannten Grössen e, γ, γ_1. Daraus ergiebt sich:

$$E\left(\varphi_2, \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1}\right) = E\left(\varphi_1, \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1}\right) - \frac{s}{a\sin\gamma_1}. \tag{13}$$

Tafeln der elliptischen Funktionen vorausgesetzt, entnimmt man ihnen den hieraus folgenden Werth des Argumentes φ_2, woraus nach (11) sich β_2 und dann nach (3) B_2 ergiebt.

Man sieht, wie höchst einfach die Sache sich gestaltet, wenn man Tafeln der elliptischen Funktionen besitzt, und wie wünschenswerth eben desshalb auch in diesem Betreff solche Tafeln sind.

Die Entwicklung der Näherungsformel für φ_2, wenn man die über die vierte hinausgehenden Potenzen von e vernachlässigt, unterliegt aus (13) keiner Schwierigkeit. Wir kommen vielleicht darauf später zurück und bemerken hier nur noch, dass man dazu des Lagrange'schen Umkehrungstheorems keineswegs bedarf, wie dies gewöhnlich geschieht, sondern mit dem Taylor'schen Satze vollkommen ausreicht.

§. 5.

Eine zweite Frage ist nun die nach der geographischen Länge (λ_2) des zweiten Ortes. Die Formel (5) giebt:

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\right)^2 = \frac{a^2\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1(b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta}{a^2\cos^2\beta(a^2\cos^2\beta - a^2\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1)} = \frac{\cos^2\gamma\,(b^2 + a^2e^2\sin^2\beta)}{a^2\cos^2\beta\,(\sin^2\gamma - \sin^2\beta)},$$

$$\lambda_2 = \pm \frac{\cos\gamma}{a}\int_{\beta_1}^{\beta_2} \sqrt{\frac{b^2 + a^2e^2\sin^2\beta}{\sin^2\gamma - \sin^2\beta}} \cdot \frac{\partial\beta}{\cos\beta} + \lambda_1, \tag{14}$$

worin das obere Zeichen gilt, wenn $\lambda_2 > \lambda_1$, das untere, wenn $\lambda_2 < \lambda_1$.

Setzt man wieder, wie in §. 3.:

$$\sin\beta = \sin\gamma\cos\varphi,$$

so ist das in (14) vorkommende Integral:

$$-\frac{\cos\gamma}{a}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{b^2 + a^2e^2\sin^2\gamma\cos^2\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{1 - \sin^2\gamma\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{\cos\gamma}{a}\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{b^2 + a^2e^2\sin^2\gamma - a^2e^2\sin^2\gamma\sin^2\varphi}{(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma\sin^2\varphi)\sqrt{b^2 + a^2e^2\sin^2\gamma - a^2e^2\sin^2\gamma\sin^2\varphi}}\,\partial\varphi.$$

Nun ist

$$b^2 + a^2e^2\sin^2\gamma = a^2\sin^2\gamma_1,$$

also ist obiges Integral:

$$\frac{\cos\gamma}{a\cos^2\gamma}.a\sin\gamma_1\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{1 - \frac{e^2\sin^2\gamma}{\sin^2\gamma_1}\sin^2\varphi}{(1 + \operatorname{tg}^2\gamma.\sin^2\varphi)\sqrt{1 - \frac{e^2\sin^2\gamma}{\sin^2\gamma_1}\sin^2\varphi}}\,\partial\varphi.$$

Bezeichnen wir allgemein

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \text{ durch } \Pi(\varphi, n, k), \tag{15}$$

so ist

$$\int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi\partial\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^{\varphi} \frac{(1 + n\sin^2\varphi)\partial\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{n}\int \frac{\partial\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{1}{n}F(\varphi, k) - \frac{1}{n}\Pi(\varphi, n, k).$$

Darnach ist obiges Integral:

$$\frac{\sin\gamma_1}{\cos\gamma}\Bigg[\Pi(\varphi_1,\ \mathrm{tg}^2\gamma,\ \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1}) - \frac{e^2\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma_1}F(\varphi_1,\ \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1})$$

$$+\frac{e^2\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma_1}\Pi(\varphi_1,\ \mathrm{tg}^2\gamma,\ \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1}) - \Pi(\varphi_2,\ \mathrm{tg}^2\gamma,\ \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1})$$

$$+\frac{e^2\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma_1}F(\varphi_2,\ \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1}) - \frac{e^2\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma_1}\Pi(\varphi_2,\ \mathrm{tg}^2\gamma,\ \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1})\Bigg].$$

Nun ist

$$1+\frac{e^2\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma_1} = \frac{\sin^2\gamma_1 + e^2\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma_1}$$

$$= \frac{1-e^2\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1 + e^2\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1}{\sin^2\gamma_1} = \frac{1}{\sin^2\gamma_1};$$

also ist endlich:

$$\lambda_2-\lambda_1 = \pm\frac{1}{\cos\gamma\sin\gamma_1}\Bigg[\Big\{\Pi(\varphi_1,\ \mathrm{tg}^2\gamma,\ \frac{e\sin}{\sin\gamma}) - \Pi(\varphi_2,\mathrm{tg}^2\gamma,\ \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1})\Big\}$$

$$+ e^2\cos^2\gamma\Big\{F(\varphi_2,\ \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1}) - F(\varphi_1,\ \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1})\Big\}\Bigg], \qquad (16)$$

womit nun unsere Aufgabe gelöst ist.

Die genauesten Werthe von a und b, die in diesen Formeln vorkommen, sind bekanntlich:

$$a = 3272077{,}14 \text{ Toisen},$$

$$b = 3261139{,}33 \text{ Toisen}.$$

Die Formel (13) setzt voraus, dass $\beta_2 > \beta_1$. Ist aber umgekehrt $\beta_2 < \beta_1$, so erhält man statt (12):

$$s = -a\sin\gamma_1\Big[E(\varphi_1,\ \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1}) - E(\varphi_2,\ \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1})\Big], \qquad (12'),$$

also statt (13:

$$E(\varphi_2,\ \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1}) = E(\varphi_1,\ \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1}) + \frac{s}{a\sin\gamma_1}, \qquad (13')$$

während die Formel (16) allgemein gilt, wenn man in ihr das Doppelzeichen so spezialisirt, wie es die Differenz $\lambda_2 - \lambda_1$ erheischt.

Die Formel (16) löst auch zugleich die Aufgabe, diejenigen Punkte auf der Erdoberfläche zu bestimmen, durch welche eine bestimmte geodätische Linie hindurchgeht. Diese Linie schneidet nämlich den mit dem Aequator parallelen Kreisschnitt, dessen reduzirte Breite β' ist, in einem Punkte, dessen Länge λ' bestimmt ist durch:

(17)

$$\lambda' - \lambda_1 = \pm \frac{1}{\cos\gamma \sin\gamma_1} \Bigg[\Big\{ \Pi(\varphi_1, \operatorname{tg}^2\gamma, \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1}) - \Pi(\varphi', \operatorname{tg}^2\gamma, \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1}) \Big\} + e^2\cos^2\gamma \Big\{ F(\varphi', \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1}) - F(\varphi_1, \frac{e\sin\gamma}{\sin\gamma_1}) \Big\} \Bigg],$$

worin φ' bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\sin\beta' = \sin\gamma \cos\varphi'.$$

VIII.

Ueber die Gleichungen der Bewegung. Anwendungen derselben.

(Nach Jules Vieille in Liouville's Journal, Juillet 1849.)

Von dem

Herrn Professor Dr. J. Dienger,

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

Sind $x, y, z, x', \ldots\ldots$ die $3n$ Koordinaten der n zusammengehörigen Punkte eines Systems in Bewegung, $X, Y, Z, \ldots.$ die auf dieselben wirkenden bewegenden Kräfte, so ist die Gleichung der Bewegung:

$$\Sigma\left[\left(X-m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\delta z\right]=0, \quad (1)$$

worin m die Masse des Punktes (x, y, z), δx, δy, δz gewisse Veränderungen der Koordinaten x, y, z sind und das Zeichen Σ sich auf alle Punkte erstreckt. (Poisson, Mechanik. §. 531).

Angenommen nun, es bestehen zwischen den $3n$ Koordinaten $x, y, z, x', \ldots.$ die i Gleichungen

$$L=0,\ M=0,\ N=0, \ldots..$$

so kann man mittelst dieser Gleichungen die Grössen $x, y, \ldots$ als Funktionen von $3n-i$ derselben oder anderer Veränderlichen ausdrücken, und wenn $\theta, \varphi, \psi, \ldots.$ diese $3n-i$ unabhängigen Veränderlichen, t die Zeit ist, so wird man allgemein setzen können:

$$x=f\,(t, \theta, \varphi, \psi, \ldots.)$$

u. s. w. Ist nun, zur Abkürzung,

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\theta',\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}=\varphi',\ \frac{\partial\psi}{\partial t}=\psi',\ldots,$$

so wird man also haben:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial t}&=\alpha+a\theta'+a_1\varphi'+\ldots, & \delta x&=a\delta\theta+a_1\delta\varphi+\ldots,\\
\frac{\partial y}{\partial t}&=\beta+b\theta'+b_1\varphi'+\ldots & \delta y&=b\delta\theta+b'\delta\varphi+\ldots,\\
\frac{\partial z}{\partial t}&=\gamma+c\theta'+c_1\varphi'+\ldots, & \delta z&=c\delta\theta+c_1\delta\varphi+\ldots,
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

worin α, β, γ die partiellen Differenzialquotienten von x, y, z in Bezug auf t bedeuten, während a, b, c, ... Funktionen von t, θ, φ, ... sind.

Da man hat

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\delta x+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\delta y+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\delta z$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\delta x+\frac{\partial y}{\partial t}\delta y+\frac{\partial z}{\partial t}\delta z\right)-\frac{1}{2}\delta\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right)$$

so wird die Gleichung (1) sein:

$$\Sigma m\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\delta x+\frac{\partial y}{\partial t}\delta y+\frac{\partial z}{\partial t}\delta z\right)-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right)\right]$$
$$-\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=0\qquad(3)$$

Man setze nun in diese Gleichung die Werthe aus (3), so muss man schliesslich die Koeffizienten von $\delta\theta$, $\delta\varphi$, ... Null setzen. Da aber diese Veränderlichen offenbar in derselben Weise in die Gleichung (3) eintreten, so wird es genügen, den Koeffizienten von $\delta\theta$ zu berechnen.

Man findet leicht:

$$\frac{\partial x}{\partial t}\delta x+\frac{\partial y}{\partial t}\delta y+\frac{\partial z}{\partial t}\delta z=(H+P\theta'+Q\varphi'+\ldots)\delta\theta+\ldots,$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z^2}{\partial t}\right)\right)=\frac{G}{2}+H\theta'+P\frac{\theta'^2}{2}+Q\theta'\varphi'\ldots;$$

wo

$$\begin{aligned}
\alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=G,\\
\alpha a+\beta b+\gamma c&=H,\\
a^2+b^2+c^2&=P,\\
\alpha a_1+\beta b_1+\gamma c_1&=Q,\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\delta x+\frac{\partial y}{\partial t}\delta y+\frac{\partial z}{\partial t}\delta z\right)=\delta\frac{\theta.\partial}{\partial t}(H+P\theta'+Q\varphi'+\ldots)$$
$$+(H+P\theta'+Q\varphi'+\ldots)\delta\theta'+\ldots.$$

$$\frac{1}{2}\delta\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \theta}+\theta'\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\theta'^2}{2}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\theta'\varphi'\frac{\partial Q}{\partial \theta}+\ldots\right)\delta\theta+(H+P\theta'+Q\varphi'+\ldots.)\delta\theta'+\ldots$$

Setzt man dies in (3), so verschwinden die mit $\delta\theta'$ behafteten Glieder und man hat als Koeffizienten von $\delta\theta$:

$$\Sigma m\left[\frac{\partial}{\partial t}(H+P\theta'+Q\varphi'+\ldots)-\left(\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \theta}+\theta'\frac{\partial H}{\partial \theta}+\ldots.\right)\right] \qquad (4)$$

Ist nun T die halbe Summe der lebendigen Kräfte des Systems, so ist

$$T=\frac{1}{2}\Sigma m\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right)=\Sigma m\left(\frac{G}{2}+H\theta'+P\frac{\theta'^2}{2}+\ldots.\right)$$

also wird (4) zu

$$\frac{\partial.\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right)}{\partial t}-\frac{\partial T}{\partial \theta}.$$

Was das Glied

$$\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)$$

anbelangt, so sei

$$\Sigma(X\partial x+Y\partial y+Z\partial z)=\partial V,$$

was in der Regel wird angenommen werden können, und man hat

$$\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=\delta V=\frac{\partial V}{\partial \theta}\partial\theta+\ldots..,$$

so dass der Koeffizient von $\delta\theta$ in (3) ist:

$$\frac{\partial.\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right)}{\partial t}-\frac{\partial T}{\partial \theta}-\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Man sieht hieraus, dass (3) sich in folgende $3n-i$ Gleichungen auflöst:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial.\left(\frac{\partial T}{\partial\theta'}\right)}{\partial t}-\frac{\partial T}{\partial\theta}-\frac{\partial V}{\partial\theta}=0\\ \frac{\partial.\left(\frac{\partial T}{\partial\varphi'}\right)}{\partial t}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}-\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0\\ \frac{\partial.\left(\frac{\partial T}{\partial\psi'}\right)}{\partial t}-\frac{\partial T}{\partial\psi}-\frac{\partial V}{\partial\psi}=0\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Wenn T die Zeit t nicht entwickelt enthält, so findet man aus diesen Gleichungen, wenn man sie bezüglich mit $\partial\theta$, $\partial\varphi$, $\partial\psi$, ... multiplizirt:

$$T-V=\text{Const.} \qquad (6)$$

bekanntlich das Prinzip der lebendigen Kräfte aussprechend.

Von diesen Sätzen sollen nun im Folgenden einige Anwendungen gemacht werden.

1. *Aufgabe.*

Man soll die Bewegung einer schweren geraden Linie bestimmen, die sich frei im Raume um einen festen Punkt in ihr drehen kann.

Sei (Taf. I. Fig. 8.) O (der feste Punkt) der Anfangspunkt der Koordinaten, die Axe der z vertikal im Sinne der Schwere, AB die Stange. Die Veränderlichen, die den Zustand der Bewegung bestimmen, sind nur zwei an der Zahl, nämlich der Winkel θ, den AB mit der Axe der z macht, und der Winkel $A'OX=\psi$, den ihre Horizontalprojektion mit der Axe der x macht.

Sei M die Masse der Stange (ihr Gewicht, dividirt durch die beschleunigende Kraft der Schwere), a die Entfernung ihres Schwerpunktes von O, r die Entfernung Om eines Punktes m von O, r' die Horizontalprojektion OP von r. Man hat offenbar

$$V=Mag.\cos\theta.$$

$$T=\frac{1}{2}\Sigma m\left(\frac{\partial r'^2+r'^2\partial\psi^2}{\partial t^2}+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\Sigma mr^2(\theta'^2+\sin^2\theta.\psi'^2)$$

$$=\frac{1}{2}(\theta'^2+\sin^2\theta.\psi'^2)M(a^2+K^2),$$

wenn MK^2 das Trägheitsmoment der Stange in Bezug auf eine Axe ist, die, senkrecht auf ihrer Richtung, durch ihren Schwerpunkt geht. (Poisson, Mechanik. §. 156.). Die Gleichung (6) giebt also

$$\theta'^2+\sin^2\theta.\psi'^2=C+\frac{2g}{a+\frac{K^2}{a}}\cos\theta. \qquad (7)$$

Setzt man eine der Geichungen (5) hinzu, so wird die Aufgabe gelöst sein. Da T und V die ψ nicht enthalten, so wähle man

$$\frac{\partial.\left(\frac{\partial T}{\partial\psi'}\right)}{\partial t}-\frac{\partial T}{\partial\psi}-\frac{\partial V}{\partial\psi}=0,$$

die giebt

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial T}{\partial\psi'}\right)}{\partial t}=0,$$

d. h.

$$\frac{\partial T}{\partial\psi'}=C,$$

$$\sin^2\theta.\psi'=C' \qquad (8)$$

Die Gleichungen (7) und (8) lösen die Aufgabe. Wäre die Stange ein blosser Punkt, dessen Entfernung von O gleich l wäre, so wäre $K=0$, $a=l$, d. h. die Stange bewegt sich wie ein einfaches Pendel von der Länge $l=a+\frac{K^2}{a}$.

Aus (7) und (8) folgt:

$$\frac{\partial t}{\partial\theta}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{(C+\frac{2g}{l}\cos\theta)\sin^2\theta-C'^2}},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{C'}{\sin\theta\sqrt{C+\frac{2g}{l}\cos\theta)\sin^2\theta-C'^2}},$$

welche Formeln auf elliptische Funktionen zurückgeführt werden können.

Um die Konstanten C und C' zu bestimmen, sei (Taf. I. Fig. 9.) α der Anfangswerth des Winkels θ, CD die Richtung des Stosses, welchen die Stange anfänglich erhalten, die man senkrecht auf AO annehmen darf. Die Stange wird anfänglich in der Ebene OCD anfangen zu drehen, welche Ebene man als die von zwei Hauptaxen der Stange in Bezug auf den Punkt O betrachten kann (Poisson, Mechanik § 380, 389). Ist ω die Winkelgeschwindigkeit im Anfang, μv die Intensität des Stosses, $f=OC$, so hat man (Poisson, Mechanik § 385):

$$\omega=\frac{\mu vf}{M(a^2+K^2)}.$$

Die Anfangsgeschwindigkeit v eines Punktes m der Stange ist $r\omega$. Ersetzt man also in der Gleichung (7) das erste Glied $\frac{v}{r^2}$ durch ω^2, so ist

$$\omega^2 = C + \frac{2g}{l}\cos\alpha, \tag{9}$$

wodurch C bestimmt ist. Nach (8) hat man

$$C' = \sin^2\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_0,$$

wo $\sin\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_0$ die Anfangsgeschwindigkeit der Horizontalprojektion des Punktes der Stange ist, dessen Entfernung von O gleich 1; ist ε der Winkel der Richtung CD mit einer Senkrechten auf der Ebene zOA, so ist also

$$\sin\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_0 = \omega\cos\varepsilon,\ C' = \omega\cos\varepsilon\sin\alpha. \tag{10}$$

Wir stellen nun die Frage, wie muss ω beschaffen sein, damit die Stange einen geraden Kegel um Oz beschreibe?

In diesem Falle ist beständig $\theta = \alpha$, also $\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0$ und somit

$$\sin^2\alpha\left(C + \frac{2g}{l}\cos\alpha\right) - C'^2 = 0.$$

Diese Gleichung drückt aber nur aus, dass $\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0$ ist für $\theta = \alpha$, d. h. im Anfange der Bewegung. Soll es allgemein statt haben, so muss man die Gleichung $\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0$ damit verbinden. Diese giebt

$$\frac{g}{\cos\alpha} = \frac{c'^2}{\sin^4\alpha}.$$

Diese zwei Gleichungen geben $\varepsilon = 0$, $\omega^2 = g\frac{\sin^2\alpha}{l\cos\alpha}$, d. h. der Stoss muss senkrecht auf der Vertikalebene sein, die durch die Stange geht. Aus der Gleichung (8) folgt, dass der Kegel mit gleichförmiger Geschwindigkeit $= \frac{\omega}{\sin^2\alpha}$ beschrieben wird. Ersetzt man ω durch seinen Werth, so ist dieselbe $\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}$.

Zur vollständigen Lösung der Aufgabe bleibt nun noch die Berechnung des Druckes auf O übrig. Zu dem Ende denken wir uns in O eine Kraft angebracht, die dem Drucke P direkt entgegen wirkt; alsdann können wir die Stange als frei betrachten. Sind X_1, Y_1, Z_1 die Komposanten von P; x_1, y_1, z_1, die Koordinaten des Schwerpunktes der Stange, so werden die verlornen Kräfte sein:

$$-M\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2},\; -M\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2},\; -M\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2}-g\right).$$

Da nun die verlornen Kräfte und der Druck sich im Gleichgewicht halten, so hat man (Poisson, Mechanik. §. 261.):

$$\left.\begin{aligned} X_1+M\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}&=0,\\ Y_1+M\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}&=0,\\ Z_1+M\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2}-g\right)&=0;\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots (11)$$

$$\begin{aligned} x_1&=a\sin\theta\cos\psi,\\ y_1&=a\sin\theta\sin\psi,\\ z_1&=a\cos\theta.\end{aligned}\qquad\ldots\ldots (11^*)$$

Die Gleichungen (11) bestimmen X_1, Y_1, Z_1, da θ und ψ als Funktionen von t bekannt sind. Für den Fall der Bewegung auf einem geraden Kegel ist $\psi=\frac{\omega t}{\sin\alpha}+\psi_0$, $\theta=\alpha$, wenn ψ_0 der anfängliche Werth von ψ ist. Man findet alsdann

$$P=M\sqrt{g^2+\frac{a^2\omega^4}{\sin^2\alpha}}=Mg\sqrt{1+\frac{a^2}{l^2}\operatorname{tg}^2\alpha},$$

nämlich

$$X_1=\frac{Ma\omega^2}{\sin\alpha}\cos\left(\frac{\omega t}{\sin\alpha}+\psi_0\right),\; Y_1=\frac{Ma\omega^2}{\sin\alpha}\sin\left(\frac{\omega t}{\sin\alpha}+\psi_0\right),\; Z_1=Mg.$$

2te Aufgabe.

Man soll die Bewegung eines biegsamen unausdehnbaren Fadens bestimmen, der an einem festen Punkte O (Taf. I. Fig. 10.) aufgehängt und mit zwei schweren Punkten m und m' beladen ist. Man setzt voraus, dass zu Anfang der Bewegung die zwei schweren Punkte von der Vertikalen entfernt worden sind, ohne dass sie aus einer durch O gehenden Vertikalebene heraus getreten wären, und dass sie sodann sich selbst überlassen wurden ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Die schwingende Bewegung eines jeden Punktes hat offenbar in der Vertikalebene yOx Statt, die durch die anfängliche Lage des Fadens geht. Sei $Om=a$, $mm'=b$, $mOy=\theta$, $m'my=\varphi$, wenn my' parallel der Vertikalen Oy.

Man hat für m:

$$x=a\sin\theta,$$
$$y=a\cos\theta;$$

für m':

$$x' = a\sin\theta + b\sin\varphi,$$
$$y' = a\cos\theta + b\cos\varphi;$$

also

$$V = (m + m')ga\cos\theta + m'gb\cos\varphi,$$
$$T = \frac{1}{2}[(m+m')a^2\theta'^2 + m'b^2\varphi'^2 + 2m'ab\cos(\varphi-\theta).\theta'\varphi'].$$

Also erhält man aus (5):

$$\left.\begin{aligned}&(m+m')a\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+m'b\cos(\varphi-\theta)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-m'b\sin(\varphi-\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\\ &\qquad -m'b\sin(\varphi-\theta)\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(m+m')g\sin\theta=0,\\ &b\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+a\cos(\varphi-\theta)\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-a\sin(\varphi-\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\\ &\qquad +a\sin(\varphi-\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+g\sin\varphi=0\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

Man könnte die Gleichung (6) in Anwendung bringen, die nur vom ersten Grade ist, allein obige Gleichungen entsprechen unserm Zwecke mehr.

Angenommen, die Schwankungen seien sehr klein, so wird man die Quadrate von θ, φ, $\frac{\partial\theta}{\partial t}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ und die Produkte dieser Veränderlichen vernachlässigen können, und findet dann:

$$\left.\begin{aligned}(m+m')a\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+m'b\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+(m+m')g\theta=0\\ b\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+a\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+g\varphi=0.\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Durch Verbindung beider findet man:

$$\left.\begin{aligned}ma\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+g(m+m')\theta-gm'\varphi=0\\ a\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+b\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+g\varphi=0\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Man findet als Integrale:

$$\left.\begin{aligned}\theta&=A_1\cos t\sqrt{r_1}+A_2\cos t\sqrt{r_2}+B_1\sin t\sqrt{r_1}+B_2\sin t\sqrt{r_2},\\ \varphi&=A_1\mu_1\cos t\sqrt{r_1}+A_2\mu_2\cos t\sqrt{r_2}+B_1\mu_1\sin t\sqrt{r_1}+B_2\mu_2\sin t\sqrt{r_2}\end{aligned}\right\}.$$

A_1, A_2, B_1, B_2 sind willkührliche Kontanten; r_1, r_2 sind reell und positiv; die Wurzeln der Gleichung

$$[(m+m')g-mar](g-br)-m'agr=0 \qquad (15)$$

μ_1, μ_2 sind die entsprechenden Werthe, die aus der Gleichung

$$\mu = \frac{ar}{g.br} \qquad (16)$$

folgen. Da für $t=0, \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$, so ist $B_1 = B_2 = 0$. Sind ferner α, β die Anfangswerthe von θ und φ, so ist

$$A_1 + A_2 = \alpha,\ A_1\mu_1 + A_2\mu_2 = \beta,$$

woraus A_1, A_2 folgen, so dass nun

$$\left.\begin{aligned}\theta &= A_1 \cos t\sqrt{r_1} + A_2 \cos t\sqrt{r_2},\\ \varphi &= A_1\mu_1 \cos t\sqrt{r_1} + A_2\mu_2 \cos t\sqrt{r_2}\end{aligned}\right\}. \qquad (17)$$

Man könnte die Frage aufwerfen, welche Bedingung erfüllt sein müsse, damit jeder Punkt wie ein einfaches Pendel schwingt, d. h. damit z. B. $A_2 = 0$. In diesem Falle ist $A_1 = \alpha$, $\mu_1 = \frac{\beta}{\alpha}$ also aus (16)

$$r_1 = \frac{\beta g}{a\alpha + bg},$$

und diess in (15) gesetzt, giebt als gesuchte Bedingung:

$$(m+m')a\alpha^2 + (m+m')(b-a)\alpha\beta - m'b\beta^2 = 0. \qquad (18)$$

Für $\alpha = \beta$ ist diese Gleichung unmöglich, da alsdann $mb = 0$ sein sollte. Sei z. B. $a = b$, so folgt aus (18)

$$\alpha = \beta\sqrt{\frac{m'}{m+m'}},\ \mu_1 = \sqrt{\frac{m+m'}{m'}},\ r_1 = \frac{g}{a\left(1+\sqrt{\frac{m'}{m+m'}}\right)}.$$

Im Allgemeinen, wenn die Bedingung (18) erfüllt ist, hat man

$$\theta = \alpha\cos t\sqrt{r_1},\ \varphi = \beta\cos t\sqrt{r_1},$$

so dass die Schwingungsdauer beider Punkte gleich ist.

3te Aufgabe.

Ein kreisrundes Rad (Taf. I. Fig. 11.) **hat an seinem Umfang einen ringförmigen Kanal, in dem sich eine kleine Kugel m befindet, deren Durchmesser gleich dem des Kanals; dieses Rad stützt sich in B auf die horizontale Ebene AOB und in seinem Mittelpunkt S auf die Vertikale SO, die mit der Ebene des Rades den Winkel $BSO = \alpha$ macht. Man lässt das Rad so auf der horizontalen Ebene rollen, dass B einen Kreis vom Halbmesser OB mit unveränderlicher Geschwindigkeit beschreibt. Der gerade Kegel, dessen Axe OS und dessen halber Winkel an der Spitze α ist, wird also nach und nach in allen seinen Erzeugungs-**

linien von der Ebene des Rades berührt. Man verlangt die Bewegung des Mittelpunkts der Kugel m, abgesehen von der Reibung.

Sei OS die Axe der z, und es gehe die Ebene der xz durch SA, in welcher Linie das Rad den Kegel im Anfange der Bewegung berühre. Sei SB die Berührungslinie am Ende der Zeit t, SC die Stellung der Ebene des Rades, die in diesem Augenblicke der anfängliche Radius SA einnimmt; $Sm=r$ sei der Halbmesser, der der Kugel zugehört, und

$$mSO=\varphi,\ PSx=\psi,$$

wenn PS die Horizontalprojektion von Sm ist.

Sei $CSm=\theta$ und es bedeute K die bekannte Geschwindigkeit, mit der der Winkel AOB beschrieben wurde, so ist $ACB=Kt$, und da arc. $AB=$ arc. BC, so ist

$$BSC=Kt.\sin\alpha,\ mSB=\theta-Kt\sin\alpha.$$

Bezeichnen wir also mSB durch ω, so ist

$$\omega=\theta-Kt\sin\alpha. \qquad (18).$$

Aus der körperlichen Ecke $SOmB$ ergiebt sich

$$\cos\varphi=\cos\alpha\cos\omega. \qquad (19)$$

Ist SB' die Horizontalprojektion von SB, so ist

$$\psi=PSB'+B'Sx=PSB'+BOA=PSB'+Kt;$$

aber PSB' ist in der genannten Ecke der Flächenwinkel an SO, also ist

$$\operatorname{tg} PSB'=\frac{\operatorname{tg}\omega}{\sin\alpha}$$

und endlich

$$\psi=Kt+\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{\operatorname{tg}\omega}{\sin\alpha}\right). \qquad (20)$$

Man bedarf also jetzt nur noch einer der Gleichungen (5), da es sich bloss um die Bestimmung von ω handelt. Man findet

$$V=mgr\cos\varphi=mgr\cos\alpha\cos\omega,$$

$$T=\frac{1}{2}m\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}mr^2\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\sin^2\varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right),$$

oder wenn man aus (19) und (20) substituirt:

$$T=\frac{1}{2}mr^2(\omega'^2+2\sin\alpha K\omega'+(1-\cos^2\alpha\cos^2\omega)K^2].$$

Wendet man nun die dritte der Gleichungen (5) an und integrirt, nachdem man mit $2\frac{\partial\omega}{\partial t}$ multiplicirt hat; so erhält man:

$$r\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - K^2 r\cos^2\alpha\cos^2\omega - 2g\cos\alpha\cos\omega + C = 0, \qquad (21)$$

woraus

$$t = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\pm\sqrt{r}\,\partial\omega}{\sqrt{2g\cos\alpha\cos\omega - K^2 r\cos^2\alpha\cos^2\omega - C}}. \qquad (22)$$

Sei, als besonderer Fall, im Anfange

$$\omega = 0,\ \frac{\partial\omega}{\partial t} = 0$$

oder, was dasselbe ist,

$$\theta = 0,\ \frac{\partial\theta}{\partial t} = K\sin\alpha,$$

was Statt haben wird, wenn die Kugel anfänglich in A ist, und wenn sie dort eine Geschwindigkeit erhält gleich der, mit der SA den Anfang des Rades durchläuft.

Alsdann giebt (21):

$$C = 2g\cos\alpha - K^2 r^2\cos^2\alpha$$

und (22)

$$t = \sqrt{r}\int\frac{\partial\omega}{\sqrt{(1-\cos\omega)\left[K^2 r\cos^2\alpha(1+\cos\omega) - 2g\cos\alpha\right]}}.$$

Setzt man hier $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega = u$, $K^2 r\cos^2\alpha - g\cos\alpha = a$, $g\cos\alpha = b$, so findet sich

$$t = \sqrt{r}\int\frac{\partial u}{u\sqrt{a - bu^2}} = \sqrt{\frac{r}{a}}\,l.\left(\frac{-\sqrt{a-bu^2}+\sqrt{a}}{u}\right),$$

also

$$c'e^{t\sqrt{\frac{a}{r}}} = \frac{-\sqrt{a - b\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\omega} + \sqrt{a}}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega}.$$

Setzt man hier, um c' zu bestimmen, $t=0$, $\omega=0$, so ist $c'=0$ und $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega$ ist also fortwährend Null. In diesem Falle also würde die Kugel die Horizontalebene nie verlassen und sie würde den Kreis um O mit der Geschwindigkeit $Kr\sin\alpha$ beschreiben.

In allgemeinen Falle wird t (22) durch die Quadraturen gefunden werden.

IX.

Auflösungen der Aufgabe, bei einem Gasgemenge von viererlei brennbaren Gasen die unbekannten Glieder y, Cx, Cy' und Cy zu bestimmen.

Von
Herrn Professor Zenneck
zu Stuttgart.

Es sei das Gasgemenge $= M$ bestehend dem Volumen nach aus
Wasserstoffgas $= y$,
Kohlenoxydgas $= Cx$,
Einfachkohlenwasserstoffgas $= Cy'$
und Doppeltkohlenwasserstoffgas $= Cy$;
so erhält man durch Detonation mit Sauerstoffgas $= O$ im Eudiometer:

1) Kohlensaures Gas aus Cx und aus dem Kohlenstoff der Cy' und Cy mit einem Theil von O;
2) Wassergas im Augenblick des Verbrennungsprocesses aus y und einem anderen Theil von O, das aber bei einer Temperatur unter 80° R. sich alsbald in liquides Wasser verwandelt;
3) einen Rückstand von dem zur Detonation hinreichend genommenen Sauertsoffgas $= O'$.

Nach Erhaltung dieser dreierlei Gase ($= K + W + O'$)*) im

---

*) $K =$ Volumen des kohlensauren Gases.
$W =$ Volumen des bei 80° R. bestehenden Wassergases.
$O' =$ Volumen des von der Detonation des M mit O zurückgebliebenen Sauerstoffgases.

Eudiometer durch diese Detonation als ein Volumen $= R^0$ kann man nun die Volumina der vier in M gegebenen unbekannten Grössen $(= y + Cx + Cy' + Cy)$ unter gewissen Bedingungen auf dreierlei Weise bestimmen und zwar:

A) Wenn 1) das Detonationsprodukt $(= R^0)$ im Eudiometer bei der Temperatur $= 80^0$ R. erhalten worden ist, so dass man R^0 mit dem Wassergas (W) messen kann; 2) das kohlensaure Gas (K) mit Aezlauge absorbirt und den Rückstand*) $(R^0 - K = W + O')$ misst; und 3) das Wassergas durch Erniedrigung der Temperatur verschwinden lässt, so dass nur der messbare Sauerstoffrest (O') übrig bleibt.

B) Wenn sich 1) $M + O$, das seinem Gewicht nach $= R^0$ ist, wägen lässt; 2) das nach Verschwindung von W entstehende rückständige Volumen $= R$ gemessen wird bei irgend einer Temperatur; 3) die Kohlensäure K absorbirt wird, so dass nur $O' = R'$ (letzter Rückstand) zurückbleibt.

C) Wenn man 1) das Doppeltkohlenwasserstoffgas Cy mit Chlorgas absorbirt, ehe man M detonirt hat; dann 2) den Rückstand $M' = y + Cx + Cy'$ mit O detonirt; 3) den Rückstand R nach seinem Volumen misst und 4) die Kohlensäure K absorbirt u. s. w. wie bei B).

I. Bestimmungen der vier unbekannten Gase nach dem Verfahren bei A).

Hat man eine Einrichtung, bei welcher der Eudiometer in kochendem Wasser steht, so dass das entstehende Wassergas nach der Detonation noch in seinem Gaszustand**), bis man gemessen hat, bleibt, so:

1) Detonirt man M mit O.
2) Misst den Rückstand***) R^0 nach seinem Volumen.
3) Lässt diesen Rückstand erkalten, so dass das Wassergas sich verdichtet und man dann einen zweiten Rückstand $= R$ erhält.
4) Misst dieses R unter Bemerkung seiner Temperatur.
5) Absorbirt hierauf in R die Kohlensäure K mit Aezkali, so dass nur noch $O' =$ 3tr Rückstand $= R'$ übrig bleibt, der gemessen wird, und der verbrauchte Sauerstoff $O'' = O - R'$ ist.

Vermöge dieser fünf Operationen und ihrer Produkte erhält man nun die vier Gleichungen †):

---

*) Da $R^0 = K + W + O'$ ist, so ist $R^0 - K = W + O'$.

**) Zur genauern Bestimmung des Gasvolumens muss in dem Wassergefäss ein Thermometer beobachtet werden können, dessen Stand mit dem Barometerstand zur Reduction des Gasvolumens auf sein Volumen bei 0° Th. und 28° Bar. zu dienen hat.

***) Oder vielmehr das veränderte Resultat der Detonation.

†) Denn zur Bildung ihrer Produkte mit O fordern von $O: y$ und Cx das Halbe, Cy' das Doppelte und Cy das Dreifache ihres Volumens;

$$M = y + Cx + Cy' + Cy = M,$$
$$O'' = \frac{y}{2} + \frac{Cx}{2} + 2Cy' + 3Cy = O - R',$$
$$K = \quad Cx + Cy' + 2Cy = R - R',$$
$$W = y \quad + 2Cy' + 2Cy = R^0 - (K + O') = R^0 - R;$$

und aus diesen durch Elimination und Substitution die vier zu bestimmenden Gasvolumina:

$$y = (2M + 4O'') - (4K + 3W) \text{ oder} = (2M + 4O) - (3R^0 + R),$$
$$Cx = (2K + W) - 2O'' \ldots \text{ oder} = (R^0 + R) - 2O,$$
$$Cy' = (5K + 5W) - (2M + 6O'') \text{ oder} = (5R^0 + R') - (2M + 6O),$$
$$Cy = (M + 4O'') - (3K + 3W) \text{ oder} = (M + 4O) - (R^0 + R');$$

wenn man sie nach den Grössen M und O, sowie nach den Rückständen R^0, R und R' bestimmen will, während Poggendorff bei seinen Formeln zur Auflösung dieser Aufgabe in seinen Annalen der Physik (Bd. XLVI. p. 622) zum Theil nur mit andern Zeichen*) die ersten Gleichungen aufgestellt hat. Da man aber (nach dem angegebenen Verfahren 2.) den Rückstand der Detonation R^0 nothwendig seinem Volumen nach messen**) muss, wie die nachherigen Rückstände R und R' (nach 3 — 5), so sind die zweiten Gleichungen, welche die nach diesen Rückständen bezeichneten Grössen enthalten, zu den Bestimmungen von y, Cx u. s. w. tauglicher.

Cx und Cy' geben mit O ein ihnen gleiches, Cy aber ein doppeltes Vol. kohlens. Gases; y liefert mit O ein ihm gleiches, Cy' und Cy aber das doppelte Vol. Wassergas ihres Volumens.

*) Poggendorff bezeichnet y mit a,
Cx - b,
Cy' - c,
u. Cy - d,
M mit m u. O'' - s und

giebt die Gleichungen:

$$a = 2m + 4s - 4K - 3W,$$
$$b = \quad -2s + 2K + W$$
$$c = -2m - 6s + 5K + 5W,$$
$$d = m + 4s - 3K - 3W.$$

**) Poggendorff sagt bei den zur Analyse erforderlichen Operationen nur, dass der Rückstand der Detonation zu messen sei, bei der sich der Wasserdampf bilde und wieder verdichte, so dass man das dadurch Verschwundene als Wasserdampf anzusehen habe, aber nicht, dass dieser Wasserdampf noch vor seinem Verschwinden mit den andern Gasen (K u. O') des Rückstands gemessen werden muss, noch, wie dieser Rückstand zu messen sei, dass dieses nehmlich entweder unmittelbar (bei der oben angegebenen Einrichtung des Endiometers) oder mittelbar (nach II. vermittelst Wägung) dem Volumen nach auszuführen sei.

II. Bestimmungen der vier unbekannten Grössen nach dem Verfahren bei B).

Durch die Detonation von M mit O entsteht zwar eine Veränderung der darin enthaltenen Gase nach dem Volumen*), aber nicht nach dem Gewicht, so lange das Wassergas sich noch nicht zu Wasser verdichtet und mit dem Sperrwasser vermischt hat; und unter dieser Bedingung ist daher dem Gewicht nach $M+O=K+O'+W=R^0$; wenn man daher $M+O$ wägt**), so erhält man damit auch das absolute Gewicht von $R^0=M+O$.

Wird nun (nach der Gewichtsbestimmung von $M+O$)

1) M mit O detonirt;
2) der Rückstand R nach dem Verschwinden des W bei irgend einer gegebenen Temperatur dem Volumen nach gemessen;
3) K mit Aezkali absorbirt und der Rückstand R' gemessen; so geben diese Messungen (2. u. 3.) die Volumina von K und O, und also, da man die spec. Gewichte dieser beiden Gase kennt, durch Multiplication ihrer erhaltenen Volumina mit ihrem specif. Gewichte auch ihre absoluten Gewichte. Zieht man nun von dem absol. Gewichte des $R^0=M+O$ die Summe der absol. Gewichte von K und O' ab; so ist der Rest dieser Subtraction $(M+O)-(K+O')=$ absol. Gewicht des W, dessen Volumen vermittelst Division seines abs. Gewichts***) durch sein specif. Gewicht (bei der gegebenen Temperatur) erhalten wird.
4) Indem man daher (nach 2—3) die Volumina von K, O' und W, die zusammen $=R^0$ sind, und die Volumina von R' und R, wie die von M und O bestimmt hat, so kann man, da $O''=O-R'$ ist (I. 5.), die vier unbekannten Grössen nach den obigen (I.) ersten oder zweiten Gleichungen bestimmen.

III. Bestimmungen der vier unbekannten Grössen nach dem Verfahren bei C).

Enthält das Gasgemenge unter seinen viererlei Gasen Doppeltkohlenwasserstoffgas, so lässt sich dieses bekanntlich durch Chlorgas, welches damit das sogenannte Chloröhl bildet, absorbiren, und da dieses Produkt sich nur bei erhöhter Tem-

---

*) Das Volumen vermindert sich durch die Detonation; denn wenn M vier solcher Gase von je gleichem Volumen enthält, so fordert es zur Detonation (nach I.) ein $O''=6$ Volumina und liefert mit diesem ein $W=5$ Vol. und ein $K=4$ Volumina, also zusammen 9 Vol., während $M+O''$ 10 Volumina betrugen.

**) Oder, da man das absol. Gewicht von O aus seinem Volumen und specif. Gewicht bestimmen kann, nur M allein (eine beliebige Portion davon) nach Gay-Lussac's Methode in einer tubulirten Glaskugel. (S. Herberger, Jahrb. IX. p. 239.)

***) Das specif. Gewicht des Wassergases (W) ist (die atmosph. L. $=1{,}0$ gesetzt) 0,6235 nach Gay-Lussac, oder: 1. rf. Ckz. Wassergas wägt $=0{,}2206$.. gr., oder 1000. Cbkcentim. desselben wägen $=0{,}80556$ Grammes. (S. m. physik. chemisches Hülfsbuch p. 23—25.)

peratur als Gas darstellt, so kann man jenes Gasglied entfernen, wenn man in das Gasgemenge $= M$ nach seiner Messung so lange Chlorgas einströmen lässt, als noch eine Verminderung des Volumens von M bemerkt wird, und wenn man nun das rückständige Gasgemenge $= M'$ gleichfalls gemessen hat, so ist das Gasglied Cy (Doppeltkohlenwasserstoffgas) $= M - M'$ und $M' = y + Cx + Cy'$, dessen drei Glieder sich vermittelst Detonation des M' mit einem 2—3fachen O und nach der Messung des Rückstandes $= R$ durch Absorption der Kohlensäure mit Aezkali, welche einen zweiten Rückstand $= R'$ liefert, ohne Berücksichtigung des entstehenden Wasserdampfes, durch folgende drei Gleichungen bestimmen lassen:

1) M' ist $= y + Cx + Cy'$;

2) $R \quad = M' + O - \frac{3y}{2} - \frac{Cx}{2} - 2Cy'$;

3) $R' \quad = M' + O - \frac{3y}{2} - \frac{3Cx}{2} - 3Cy'$, indem die Elimination und Substitution auf 1*) $y = M' - (R - R')$,

2*) $Cx = \frac{(M' + 3R) - (2O + R')}{3}$ und 3*) $Cy' = \frac{2O - (M' + 2R')}{3}$ führen.

Es sei z. B. $M = 110$, M' aber $= 100$ Vol. gefunden worden und also $Cy = 10$ Vol. Nun sei M' mit $O = 300$ Vol. detonirt, $R = 255$ Vol. und nach der Absorption des kohlens. Gases in R durch Aezlauge $R' = 175$ Vol. gefunden worden; so ist

1) $R - R' = 80$ Vol., also $y = 100 - 80 = 20$ Vol.

2) $\frac{M' + 3R}{3} = \frac{865}{3}$, $\frac{2O - R'}{3} = \frac{775}{3}$, also $Cx = 288{,}5 - 258{,}5 = 30$ Vol.

3) $\frac{2O - (M' + 2R')}{3} = \frac{600 - 450}{3} = \frac{150}{3}$, also $Cy' = \frac{150}{3} = 50$ Vol.

Würde man übrigens bei einem solchen Gemenge aus drei Gasgliedern **nur** wissen, dass es solche **brennbare** Gase enthalten kann, aber **nicht**, ob es nur 1, oder je 2 davon, oder alle 3 Arten enthalte, so hat man doch an den nächsten Detonations- und Absorptionsprodukten die nöthigen **Kennzeichen**, nach denen man finden kann, was für ein Fall von den sieben möglichen Fällen bei dem Gemenge statt findet; denn

1) Ist nach der Detonation **keine Kohlensäure** (K) zu absorbiren, so war in M' blos y vorhanden, und weder Cx, noch Cy'.

2) Beweist aber die Absorption (mit Aezlauge) das Dasein von Kohlensäure und zwar ein Volumen $K = M'$, so enthielt M' nur **kohlenhaltige Gase**, da diese allein ein dem Vo-

---

Beweise ad 2).

*) Der Detonationsverlust ist $= M' + O - R$.

a) Ist nun $K = M' = 2(R - O)$, so ist $\frac{M'}{2} = R - O$ und daher auch $-\frac{M'}{2}$

lumen von M' gleiches Volumen Kohlensäure als Rückstand liefern, und zwar:

a) Wenn $K = 2(R - O)$ ist, so ist $M' = Cx$.

b) Wenn $K = O - R$ ist, so ist $M' = Cy'$.

c) Wenn K weder $= 2(R - O)$, noch $= O - R$ ist, so ist $M' = Cx + Cy'$.

3) Oder zeigt der Absorptionsversuch, dass M' zwar Kohlensäure enthält, aber ein Volumen (K), das kleiner als M' ist, so beweist dieses, dass das Gemenge theils Wasserstoffgas (y), theils irgend ein oder beide kohlenhaltige Gase enthielt, da bei der Detonation y sowohl für sich, als aus seiner Verbindung mit C in Cy' mit seinem zugehörigen Sauerstoff (O) verschwindet.

a) Wenn nun $K < M'$, M' aber $= 2(O - R')$ ist, so ist $M' = y + Cx$, da man aus jener Gleichung eine für R' erhält, welche nur mit der Annahme von $M' = y + Cx$ stimmt.

b) Wenn $K < M'$, M' aber $= 2O + R' - 3R$ ist, so ist $M' = y + Cy'$, da man aus jener Gleichung eine andere für M' ableiten kann, deren Glieder nur mit der Annahme von $M' = y + Cy'$ übereinstimmen.

$= O - R$, also $M' - \frac{M'}{2} = \frac{M'}{2} = M' + O - R$, was nur bei $M' = Cx$ statt findet.

b) Ist $K = O - R = M'$, so ist auch $2M' = M' + O - R$, was nur bei $M' = Cy'$ statt findet.

c) Da bei $K = M'$ dieses $= Cx$, oder $= Cy'$ oder $= Cx + Cy'$ sein muss, so kann M', wenn es weder $= Cx$, noch $= Cy'$ ist, nur $= Cx + Cy'$ sein.

Beweise ad 3).

a) Wenn $M' = 2(O - R')$ ist, so ist $\frac{M'}{2} = O - R'$, also

$$R' = O - \frac{M'}{2}$$
$$= O + M' - \frac{3M'}{2}$$
$$= M' + O - \frac{3(y + Cx)}{2}.$$

b) Wenn hier $M' = 2O + R' - 3R$ ist, so ist $-M' = -2O - R' + 3R$, also $2M' - M' = 2M' - 2O - R' + 3R$, d. h. $M' = 2(M' - O + R) + R - R'$. Ist nun $M' = y + Cy'$, also $Cy' = M' - y$; so ist 1) da $R = M' + O - \frac{3y}{2} - 2Cy'$ ist (nach der obigen Bestimmung III.)

$$R = M' + O - \frac{3y}{2} - 2M' + \frac{4y}{2}$$
$$= -M' + O + \frac{y}{2},$$
$$y = 2(M' - O + R);$$

und 2) $Cy' = R - R'$, da die Differenz der Gleichungen von R und $R' = Cy'$ ist. In obiger Gleichung von M' stimmt also das Glied $2(M' - O + R)$ mit y und das Glied $R - R'$ mit Cy'.

c) Wenn $K < M'$, M' aber weder $= 2(O - R')$, noch $= 2O + R' - 3R$ ist, so ist $M' = y + Cx + Cy'$, weil unter der Bedingung, dass $K < M'$ ist, nur diese drei Fälle a), b) und c) stattfinden können, folglich wenn die von a) und b) nicht statt finden, c) statt finden muss.

Ausserdem geben die obigen Bestimmungen von $y = M' - (R - R')$, $Cx = \frac{(M' + 3R) - (2O + R')}{3}$ und $Cy' = \frac{2O - (M' + 2R')}{3}$ auch noch Kennzeichen vom Dasein oder Nichtdasein eines Gasgliedes in M' an die Hand; denn da jede dieser Gleichungen aus einem positiven und negativen Theil besteht, so fehlt in M' diejenige Grösse, deren Gleichung nach Uebersetzung der M', O, R und R' in ihre Zahlenwerthe $=$ Null wird, und diejenigen sind vorhanden, deren Bestimmung einen gewissen Werth angiebt; z. B. M' sei $= 100$ Vol., $O = 200$, $R = 140$, und $R' = 120$ gewesen, so ist $M' - (R - R') = 100 - 20 = 80$, also y vorhanden; $\frac{(M' - 3R) - (2O + R')}{3} = \frac{520 - 520}{3} = 0$, also Cx fehlend; und $\frac{2O - (M' + 2R')}{3} = \frac{400 - 340}{3} = 20$, also Cy' vorhanden.

Hat man etwa über Quecksilber experimentirt, und es zeigt sich auf demselben, oder an der Wandung des Eudiometers, kein Tropfen von Wasser, so enthielt M' kein y, noch Cy', sondern nur Cx, da dieses allein kein Wasser liefern kann; zeigt sich aber Wasser, wenn auch nur in noch so geringer Menge, so kann M' entweder y allein, oder Cy' allein, oder beide enthalten haben, worüber dann obige Kennzeichen (1. 2.) entscheiden.

X.

Problema.

Auctor
Christianus Fr. Lindman,
Lector Strengnesensis.

Invenire Rhombum maximum et minimum, qui in Ellipsin datam (axes$=a,\ b,\ a>b$) inscribi possit.

Quia latera opposita Rhombi inscripti sunt chordae inter se parallelae, diameter quidam Ellipsis utrumque in duas partes aequales dividat, necesse est. Cetera latera huic diametro parallela sunt (Eucl. I. 33), quamobrem a diametro conjugato in duas partes aequales dividuntur. Posito igitur diametro, qui sub angulo $=\alpha$ axin majorem secet, $=2a'$, diametro vero conjugato, cujus angulus in axin majorem sit$=\alpha'$, $=2b'$, et $\alpha'>\alpha$, aequatio Ellipsis

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2$$

transformatione coordinatarum ex formulis

$$y'=x\mathrm{Sin}\alpha+y\mathrm{Sin}\alpha', x'=x\mathrm{Cos}\alpha+y\mathrm{Cos}\alpha'$$

mutatur in

$$a'^2y^2+b'^2x^2=a'^2b'^2,$$

ubi est

$$\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\alpha'=-\frac{b^2}{a^2},\ a'^2=\frac{a^2b^2}{a^2\mathrm{Sin}^2\alpha+b^2\mathrm{Cos}^2\alpha},\ b'^2=\frac{a^2b^2}{a^2\mathrm{Sin}^2\alpha'+b^2\mathrm{Cos}^2\alpha'}\ (1).$$

Quum latera Rhombi quaesiti axibus parallela sint ab iisque aequaliter secentur, problema propositum in inveniendis quattuor Ellipsis punctis continetur, quorum omnes coordinatae valore absoluto inter se aquales sint. Qui valor facillime invenitur esse

$=\frac{a'b'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$, quamobrem latus Rhombi cujusdam inscripti est

$$=\frac{2a'b'}{\sqrt{a'^2+b'^2}} \text{ et area} = Y = \frac{4a'^2b'^2}{a'^2+b'^2}\mathrm{Sin}(\alpha'-\alpha), \; .\;.\;.\;. \; (2)$$

quia alter angulorum ejus est $=\alpha'-\alpha$. Si α habetur variabilis independens, invenimus ex aequ. $\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\alpha'=-\frac{b^2}{a^2}$:

$$\mathrm{Sin}^2\alpha'=\frac{b^4\mathrm{Cos}^2\alpha}{a^4\mathrm{Sin}^2\alpha+b^4\mathrm{Cos}^2\alpha},\; \mathrm{Cos}^2\alpha'=\frac{a^4\mathrm{Sin}^2\alpha}{a^4\mathrm{Sin}^2\alpha+b^4\mathrm{Cos}^2\alpha};$$

$$b'^2=\frac{a^4\mathrm{Sin}^2\alpha+b^4\mathrm{Cos}^2\alpha}{a^2\mathrm{Sin}^2\alpha+b^2\mathrm{Cos}^2\alpha};$$

$$\mathrm{Sin}(\alpha'-\alpha)=\frac{a^2\mathrm{Sin}^2\alpha+b^2\mathrm{Cos}^2\alpha}{\sqrt{a^4\mathrm{Sin}^2\alpha+b^4\mathrm{Cos}^2\alpha}};$$

qui valores cum valore ipsius a'^2 in (2) ducti suppeditant:

$$Y=\frac{4a^2b^2\sqrt{a^4\mathrm{Sin}^2\alpha+b^4\mathrm{Cos}^2\alpha}}{(a^2+b^2)(a^2\mathrm{Sin}^2\alpha+b^2\mathrm{Cos}^2\alpha)};$$

unde differentiatione obtinetur:

$$\frac{dY}{dx}=\frac{4a^2b^2(a^2-b^2)^2\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\alpha}{(a^2+b^2)(a^2\mathrm{Sin}^2\alpha+b^2\mathrm{Cos}^2\alpha)^2}\cdot\frac{b^2\mathrm{Cos}^2\alpha-a^2\mathrm{Sin}^2\alpha}{\sqrt{a^4\mathrm{Sin}^2\alpha+b^4\mathrm{Cos}^2\alpha}}$$

At vero quum fiat $\frac{dY}{d\alpha}=0$ et $\frac{d^2Y}{d\alpha^2}>0$ pro $\alpha=0$ et $\frac{dY}{d\alpha}=0$ et $\frac{d^2Y}{d\alpha^2}<0$ pro $\mathrm{tg}\alpha=\frac{b}{a}$, Rhombus pro hoc valore ipsius α maximus est, pro illo minimus. Rhombus maximus construitur conjungendis inter se punctis extremis axium principalium, sed Rhombus minimus, qui est quadratum, si puncta extrema diametrorum inter se aequalium conjunguntur.

XI.

Untersuchung der biquadratischen Formen.

Von

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Wenn von den beiden biquadratischen Formen

$$F = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4 = (a,b,c,d,e),$$

$$F' = a'X^4 + 4b'X^3Y + 6c'X^2Y^2 + 4d'XY^3 + e'Y^4 = (a',b',c',d',e')$$

die erste in die zweite durch die lineäre Substitution

$$x = \alpha X + \beta Y, \quad y = \gamma X + \delta Y,$$

oder, kurz, durch die Substitution α, β, γ, δ übergeht, so hängen die Coefficienten der zweiten Form von denen der ersten durch die Gleichungen [5] ab, in der Abhandlung: „Ein Satz über binäre Formen von beliebigem Grade und Anwendung desselben auf biquadratische Formen." (Th. XVII. pag. 409. ff.). Wir hatten die Gleichung

$$\Delta' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^{12}\Delta$$

gefunden, wo Δ eine rationale Function der Coefficienten der Form F ist, von welcher die Natur der letztern wesentlich abhängt. Für den Werth von Δ sind verschiedene Ausdrücke entwickelt worden, nämlich

$$(1)\quad \Delta = a^3e^3 - 64b^3d^3 - 18a^2c^2e^2 + 36b^2c^2d^2 - 27b^4e^2 + 108abcd^3 + 54a^2cd^2e - 54ac^3d^2 - 12a^2bde^2 - 6ab^2d^2e - 180abc^2de + 81ac^4e - 27a^2d^4 + 108b^3cde + 54ab^2ce^2 - 54b^2c^3e,$$

$$(2)\quad \Delta = 81fh_1k + 18fh_2k + 9gih_2 - h_2^3 - 27fi^2 - 27kg^2,$$

$$(3)\quad \Delta = 87fh_1k + 27fh_2k + 9h_1h_2^2 - h_2^3 - 27fi^2 - 27kg^2;$$

wo

$$(4)\left\{\begin{array}{lll} f = bb - ac, & g = bc - ad, & h_1 = cc - bd \\ & & h_2 = bd - ae \\ i = cd - be, & k = dd - ce, & h = 3h_1 + h_2 \end{array}\right.$$

ist, und auch

$$h_1h_2 + fk = gi.$$

Eine nothwendige Bedingung für die Aequivalenz von F und F' ist mithin $\Delta = \Delta'$. Bemerkt man aber, dass zur Bestimmung von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die Aequivalenz vorausgesetzt, sechs Fundamentalgleichungen gegeben sind, nämlich die schon angegebenen Gleichungen [5] und die Gleichung $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1$, so ist ersichtlich, dass zwischen den Coefficienten von F, F' mindestens **zwei** Relationen statt finden müssen, dass also ausser der Bedingung $\Delta = \Delta'$ noch eine zweite existiren muss. Diese ausfindig zu machen, ist Gegenstand der gegenwärtigen Arbeit. Wir können auf mehreren Wegen zum Ziel gelangen; ich betrete zuerst denjenigen Weg, der sich mir zuerst dargeboten hat, und werde sodann einen einfachern zeigen.

In der erwähnten Abhandlung habe ich eine Correspondante von F entdeckt, nämlich

$$\Phi = (6f, 3g, h, 3i, 6k),$$

welche die Eigenschaft besitzt, dass sie durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, mittelst welcher F in F' übergeht, sich in die Form

$$\Phi' = \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}(6f', 3g', h', 3i', 6k')$$

verwandelt, wo die accentuirten Buchstaben sich auf die Form F' beziehen. Bezeichnen wir also die Determinante von der Form

$$(6f, 3g, h, 3i, 6k) \text{ mit } \Delta_h,$$

die von

$$(6f', 3g', h', 3i', 6k') \text{ mit } \Delta_1',$$

so hat man, beachtend, dass die Determinante von φ' offenbar

$$=\frac{\Delta_1'}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^{12}}$$

ist,

$$\frac{\Delta_1'}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^{12}}=(\alpha\delta-\beta\gamma)^{12}\Delta_1,$$

oder

$$(5)\qquad \Delta_1'=(\alpha\delta-\beta\gamma)^{24}\Delta_1.$$

Wird nun diese Relation zwischen den Determinanten der Correspondanten von F und F' weiter entwickelt, so wird sich wiederum eine Relation zwischen den Coefficienten von F und F' ergeben, welche mit der Bedingung $\Delta'=(\alpha\delta-\beta\gamma)^{12}\Delta$ nicht identisch sein kann. Weitere Nachforschungen haben ergeben, dass es bei dieser Untersuchung nur auf die Verhältnisse $\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $\frac{\Delta_1'}{\Delta'}$ ankomme, und die letztern Quadratzahlen sein müssen. Um sich hievon direct zu überzeugen, berechnet man am einfachsten die Grösse Δ_1 nach (2), indem man die Grössen f, g, h_1, h_2, i, k durch andere ersetzt, welche aus $6f, 3g, h, 3i, 6k$ gerade so gebildet sind, wie f, g, h, i, k aus a, b, c, d, e. Herr Conducteur Wasmund hieselbst, ein gewandter, mit tüchtigen mathematischen Kenntnissen ausgerüsteter, Rechner, hat diese Berechnung ausgeführt; es gelang ihm durch mehrere Umformungen das Verhältniss $\frac{\Delta_1}{\Delta}$ wirklich auf die Form eines Quadrats zu bringen, wie ich behauptet hatte, und zugleich ergab sich ein bemerkenswerther Werth von Δ, wodurch die Bedingung $\Delta'=(\alpha\delta-\beta\gamma)^{12}\Delta$ sich in zwei einfachere Bedingungen auflösen liess. Da aber der Calcul sehr verwickelt und ermüdend ist, so dürfte es zweckmässig sein, nun eine einfache Methode zu zeigen, durch welche man die angedeuteten Resultate auf eine ganz einfache Weise erhalten kann.

Aus (3) folgt

$$\Delta-(3h_1-h_2)^3=-27(fi^2+kg^2-3fh_1k-fh_2k-h_1^2h_2+h_1^3);$$

und es findet sich, indem für f, g, h_1, etc. ihre Werthe substituirt werden,

$$fi^2+kg^2-3fh_1k-fh_2k-h_1^2h_2+h_1^3=(ad^2+eb^2+c^3-ace-2bcd)^2,$$

$$3h_1-h_2=3c^2-4bd+ae;$$

folglich, wenn man zur Abkürzung

$$(6)\ \begin{cases} \mho = 3c^2 - 4bd + ae, \quad \Omega = ad^2 + eb^2 + c^3 - ace - 2bcd \\ \text{setzt:} \\ \Delta = \Omega^3 - 27\Omega^2. \end{cases}$$

Berechnen wir nun die Werthe $\mho_1$, Ω_1, in welche $\mho$, Ω übergehen, wenn man die Form F durch ihre Correspondante

$$\varphi = (6f, 3g, h, 3i, 6k)$$

ersetzt. — Es ist also

$$\mho_1 = 3h^2 - 36(gi - fk) = 3(3h_1 - h_2)^2 = 3(3c^2 - 4bd + ae)^2,$$

folglich

$$(7) \qquad \mho_1 = 3\mho^2.$$

Ferner

$$\Omega_1 = -18ghi + 54fi^2 + 54kg^2 - 36fhk + h^3,$$

oder, wenn man $3h_1 + h_2$, $h_1h_2 + fk$ statt h, gi setzt,

$$\Omega_1 = 54fi^2 + 54kg^2 - 162fh_1k - 54fh_2k - 27h_1^2h_2 - 9h_1h_2^2 + h_2^3 + 27h_1^3$$
$$= -2\Delta + (3h_1 - h_2)^3;$$

folglich

$$(8) \qquad \Omega_1 = \mho^3 - 2\Delta = -\mho^3 + 54\Omega^2.$$

Nach (6) ist endlich

$$\Delta_1 = \mho_1^3 - 27\Omega_1^2,$$

woraus durch Substitution der Werthe von $\mho_1$, Ω_1 aus (7) und (8) folgt:

$$(9) \qquad \Delta_1 = (54\Omega)^2\Delta.$$

Bezeichnet man jetzt die Werthe, welche den Grössen $\mho$, Ω in Bezug auf die Form F' zukommen, mit $\mho'$, Ω', so ist ebenso

$$\Delta_1' = (54\Omega')^2\Delta';$$

es war aber

$$\frac{\Delta_1'}{\Delta_1} = (\alpha\delta - \beta\gamma)^{24}, \quad \frac{\Delta'}{\Delta} = (\alpha\delta - \beta\gamma)^{12};$$

folglich kommt

$$\Omega'^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^{12}\Omega^2,$$

oder

$$\Omega' = \pm(\alpha\delta - \beta\gamma)^6\Omega.$$

Vergleicht man ferner die Relationen

$$\Delta = \mho^3 - 27\Omega^2, \quad \Delta' = \mho'^3 - 27\Omega'^2,$$

und beachtet

$$\Omega'^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^{12}\Omega^2, \quad \Delta' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^{12}\Delta;$$

so folgt

$$\mho'^3 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^{12}\mho^3, \text{ oder } \mho' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^4\mho.$$

Da in dem Werth von Ω' noch das Zeichen unbestimmt ist, so entwickele man diese Grösse direct mit Hülfe der Fundamentalgleichungen [5] in der Abhandlung Thl. XVII. p. 409. ff. Um die Rechnung abzukürzen, braucht man nur die Glieder wirklich zu berechnen, welche in

$$\Omega = ad^2 + eb^2 + c^3 - ace - 2bcd$$

vorkommen, indem alles Uebrige sich aufheben muss. Man findet dann in Ω' das obere Vorzeichen. Auf ähnliche Art kann man sich von der Richtigkeit der Gleichung

$$\mho' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^4\mho$$

überzeugen, wenn man $3c'^2 - 4b'd' + a'e'$ berechnet. Das Resultat unserer bisherigen Betrachtungen ist also Folgendes:

Wenn die biquadratische Form

$$F = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$

in die biquadratische Form

$$F' = a'X^4 + 4b'X^3Y + 6c'X^2Y^2 + 4d'XY^3 + e'Y^4$$

durch die Substitution

$$x = \alpha X + \beta Y, \quad y = \gamma X + \delta Y$$

übergeht, so finden zwischen den Coefficienten beider Formen folgende Gleichungen statt:

$$\mho' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^4\mho,$$

$$\Omega' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^6\Omega;$$

wo

$$\mho = 3c^2 - 4bd + ae, \quad \mho' = 3c'^2 - 4b'd' + a'e',$$

$$\Omega = ad^2 + eb^2 + c^3 - ace - 2bcd, \quad \Omega' = a'd'^2 + e'b'^2 + c'^3 - a'c'e' - 2b'c'd'$$

ist; und wenn man

$$\Delta = \mho^3 - 27\Omega^2, \quad \Delta' = \mho'^3 - 27\Omega'^2$$

setzt, so folgt noch

$$\Delta' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^{12}\Delta.$$

Wenn also die beiden Formen aequivalent sind, so werden die drei Gleichungen $\mho' = \mho$, $\Omega' = \Omega$, $\Delta' = \Delta$ statt finden, aus deren beiden ersten die dritte folgt.

Hiermit ist der erste Anfang zu einer Theorie der biquadratischen Formen gemacht. Die weitere Untersuchung der Aequivalenz biquadratischer Formen gehört zu den schwierigsten, worüber nächstens ein Mehreres.

Beispiel.

$$F = x^4 + 12x^2y^2 + 12xy + 5y^4 = (1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 5);$$

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta = -5,\ -2,\ +3,\ +1,\quad \alpha\delta - \beta\gamma = +1;$$

$$F' = (2110,\ 808,\ 309,\ 118,\ 45)$$

$$\Omega = 7,\quad \Omega' = \left.\begin{array}{l} 29379640 - 29339550 \\ + 29378880 - 58922592 \\ + 29503629 \end{array}\right\} = 7.$$

$$\mho = 17,\quad \mho' = \left.\begin{array}{l} 286443 - 38137 \\ + 94950 \end{array}\right\} = 17.$$

Noch einfacher als bisher lassen sich die gefundenen Resultate entwickeln, wenn man die Function F als Product linearer Functionen darstellt. Zu dem Ende bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung

$$az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e = 0$$

mit T, T', T'', T''', und setzen

$$\begin{aligned} f(x,y) &= ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4 \\ &= a(x - Ty)(x - T'y)(x - T''y)(x - T'''y). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} &f(\alpha X + \beta Y,\ \gamma X + \delta Y) \\ &= f'(X,\ Y) = a'(X - TY)(X - T'Y)(X - T''Y)(X - T'''Y), \end{aligned}$$

wo

$$a' = a\alpha^4 + 4b\alpha^3\gamma + 6c\alpha^2\gamma^2 + 4d\alpha\gamma^3 + e\gamma^4 = f(\alpha,\ \gamma),$$

$$T=\frac{\delta\tau-\beta}{\alpha-\tau\gamma},\quad T'=\frac{\delta\tau'-\beta}{\alpha-\tau'\gamma},\quad T''=\frac{\delta\tau''-\beta}{\alpha-\tau''\gamma},\quad T'''=\frac{\delta\tau'''-\beta}{\alpha-\tau'''\gamma}$$

ist. Nun findet sich

$$T-T'=\frac{\tau-\tau'}{(\alpha-\tau\gamma)(\alpha-\tau'\gamma)}(\alpha\delta-\beta\gamma),\ \text{etc.},$$

$$(T-T')(T''-T''')=\frac{(\tau-\tau')(\tau''-\tau''')}{(\alpha-\tau\gamma)(\alpha-\tau'\gamma)(\alpha-\tau''\gamma)(\alpha-\tau'''\gamma)}(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$$
$$=\frac{f(\alpha,\gamma)}{a}(\alpha\delta-\beta\gamma)^2=\frac{a'}{a}(\alpha\delta-\beta\gamma)^2;$$

folglich hat man, wenn zur Abkürzung

$$(\tau-\tau')^2=p,\quad (\tau-\tau'')^2=q,\quad (\tau-\tau''')^2=r,\quad (\tau'-\tau'')^2=s,$$
$$(\tau'-\tau''')^2=t,\quad (\tau''-\tau''')^2=u,$$
$$(T-T')^2=p_1,\quad (T-T'')^2=q_1,\quad (T-T''')^2=r_1,\quad (T'-T'')^2=s_1,$$
$$(T'-T''')^2=t_1,\quad (T''-T''')^2=u_1$$

gesetzt wird:

$$(10)\qquad \begin{cases} a'^2p_1u_1=a^2pu(\alpha\delta-\beta\gamma)^4, \\ a'^2q_1t_1=a^2qt(\alpha\delta-\beta\gamma)^4, \\ a'^2r_1s_1=a^2rs(\alpha\delta-\beta\gamma)^4. \end{cases}$$

Da die Grössen

$$pu+qt+rs,\quad pu.qt+pu.rs+qt.rs,\quad pu.qt.rs$$

offenbar symmetrische Functionen der Wurzeln τ, τ', τ'', τ''' sind, so werden sie sich durch die Coefficienten der Gleichung

$$az^4+4bz^3+6cz^2+4dz+e=0$$

rational ausdrücken lassen. Um dies mit Leichtigkeit zu bewerkstelligen, benutzen wir die Tabellen zu „Meier Hirsch, Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. Berlin 1809. In diesen Tabellen findet man Werthe der Summenausdrücke $[\alpha\beta\gamma\delta.....\varkappa]$, auf welche sich jede symmetrische Function zurückführen lässt; ein solcher Ausdruck ist aber eine Summe von Gliedern, die man findet, wenn man alle Combinationen der Wurzeln der Gleichung zur $m$ten Klasse bildet, wo m die Zahl der Buchstaben α, β, γ, δ,... $\varkappa$, den in jeder Complexion vorkommenden Wurzeln die Exponenten α, β, γ, ... $\varkappa$ giebt, und die letztern auf alle möglichen Arten permutirt. Die den Tabellen zu Grunde liegende Gleichung ist

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \text{etc.}$$

so dass wir zuletzt

$$\frac{-4b}{a},\quad \frac{+6c}{a},\quad \frac{-4d}{a},\quad \frac{+e}{a}$$

statt A, B, C, D zu setzen haben.

Man findet

$$pu + qt + rs = 2[22] - 2[112] + 12[1111] = 2BB - 6AC + 24D,$$

folglich

$$(11) \ldots\ a^2(pu + qt + rs) = 24(3c^2 - 4bd + ae) = 24\mho.$$

Ferner kommt

$$p^2u^2 + q^2t^2 + r^2s^2$$
$$= 2[44] + 6[224] + 108[2222] - 4[134] + 32[1133] - 24[1223]$$
$$= 2B^4 - 12AB^2C + 18A^2C^2 + 48B^2D - 144ACD + 288D^2,$$

folglich

$$(12) \ldots\ a^4(p^2u^2 + q^2t^2 + r^2s^2) = 288(3c^2 - 4bd + ae)^2 = 288\mho^2.$$

Aus (11) und (12) folgt leicht:

$$(13) \ldots\ a^4(pu.qt + pu.rs + qt.rs) = 144(3c^2 - 4bd + ae)^2 = 144\mho^2.$$

Mit der Berechnung des Products $pu.qt.rs$ habe ich mich in der Abhandlung: „Ein Satz über binäre Formen etc.“ (Thl. XVII. Nr. XVII. Heft IV. S. 409.) ausführlich beschäftigt, und es fand sich

$$(14) \ldots\ a^6(pu.qt.rs) = 256\Delta.$$

Da nun nach (10)

$$a'^2(p_1u_1 + q_1t_1 + r_1s_1) = a^2(pu + qt + rs)(\alpha\delta - \beta\gamma)^4,$$
$$a'^6(p_1u_1.q_1t_1.r_1s_1) = a^6(pu.qt.rs)(\alpha\delta - \beta\gamma)^{12}$$

ist, so folgt nach (11) und (14),

$$\mho' = \mho(\alpha\delta - \beta\gamma)^4, \quad \Delta' = \Delta(\alpha\delta - \beta\gamma)^{12},$$

wie oben gefunden worden. — Hieraus folgt weiter, dass

$$z^3 - \frac{24\mho}{a^2}z^2 + \frac{144\mho^2}{a^4}z - \frac{256\Delta}{a^6} = 0$$

diejenige kubische Gleichung sein wird, deren Wurzeln pu, qt, rs sind, oder

$$y^3 - 24\mho y^2 + 144\mho^2 y - 256\Delta = 0$$

die Gleichung, deren Wurzeln a^2pu, a^2qt, a^2rs sind. Folglich lässt sich jede symmetrische Function der drei Combinationen pu, qt, rs durch die Grössen $\mho$ und Δ ausdrücken.

Die Natur einer biquadratischen Form hängt nun von den beiden Grössen $\mho$, Ω ab, welche wir die erste und zweite Determinante nennen können, während $\Delta = \mho^3 - 27\Omega^2$ eine aus beiden abgeleitete Determinante ist.

Stralsund, den 20 September 1851.

(Fortsetzung in einem der nächsten Hefte.)

XII.

Synthetische Beweise der Sätze in Thl. XVI. Nr. XVIII. und Nr. XIX. des Archivs.

Von

Herrn Professor Pross

zu Stuttgart.

XVIII. Man denke sich in Thl. XVI. Taf. IV. Fig. 3. an den Durchschnittspunkt der Geraden AM und BN den Buchstaben P gesetzt, so ist:

$$AC:AD = NP:AP, \text{ weil } \Delta ACD \backsim \Delta ANP$$
$$= MN:AB, \text{ weil } \Delta MNP \backsim \Delta ABP;$$

folglich $MN = \dfrac{AB.AC}{AD}$.

XIX. Man denke sich in Thl. XVI. Taf. IV. Fig. 5. die Geraden Db, Dc und Db', Dc' gezogen, so sind die Dreiecke bcD und $b'c'D$ ähnlich, weil die Winkel b und b' als Umfangswinkel auf der Sehne AD und die Winkel c und c', als Nebenwinkel der gleichen Umfangswinkel DcA und $Dc'A$, gleich sind; es verhalten sich also die Höhen dieser Dreiecke wie ihre Grundlinien bc und $b'c'$. (q. e. d.).

Anmerkung. Diese beiden wichtigen Sätze verdienten in die Lehrbücher der Geometrie aufgenommen zu werden und zwar der erste unter der Form:

„Wenn man in einem Dreieck ABC (Thl. XVI. Taf. „IV. Fig. 3.) beliebig eine Transversale AD zieht, so ver„hält sich die Transversale AD zu der einen ein„schliessenden Seite AC wie die andere einschlies„sende Seite AB zu einer Sehne MN des um das „Dreieck beschriebenen Kreises, welcher ein Umfangs„winkel entspricht, der dem Winkel ADC gleich ist, „unter welchem die Transversale die Gegenseite BC „schneidet."

Druckfehler.

Theil XVI. Taf. IV. Fig. 5. muss in der zweiten und dritten der drei Figuren, aus denen Fig. 5. besteht, an den zweiten (unteren) Durchschnittspunkt der beiden Kreise der Buchstabe D gesetzt werden.

XIII.

Ueber die Berechnung der Cometenbahnen.

(Erste Fortsetzung der Abhandlung: Neue Methode zur Berechnung der Cometenbahnen.*))

Von

dem Herausgeber.

Einleitung.

Der nächste Zweck meiner Abhandlung: Neue Methode zur Berechnung der Cometenbahnen, war allerdings, wie auch in dieser Abhandlung bemerkt worden ist, die Mittheilung einer völlig directen, d. h. hier, gar kein Probiren in Anspruch nehmenden Näherungsmethode zur Berechnung der Cometenbahnen. Diese Methode legt aber, wie aus der angeführten Abhandlung bekannt ist, vier Beobachtungen zu Grunde, da im Gegentheil das eigentliche sogenannte Cometenproblem, wie es in der Astronomie gewöhnlich aufgefasst wird, nur drei Beobachtungen in Anspruch nimmt, welche auch in der That hinreichen, um die Bahn eines Cometen in der parabolischen Hypothese vollständig bestimmen zu können. Mein Zweck bei der oben angeführten Abhandlung war nun aber auch zugleich, durch dieselbe, wenigstens dem grössten Theile nach, diejenigen Grundlagen zu gewinnen, welche zur Auflösung des eigentlichen Cometenproblems, nach seiner gewöhnlichen Auffassung in der Astronomie, erforderlich sind; und ich will nun in der vorliegenden Abhandlung, die der oben genannten Abhandlung zur Fortsetzung dienen soll, mich mit

---

*) Archiv der Mathematik und Physik. Thl. XVII. Nr IV.

der Auflösung des eigentlichen Cometenproblems beschäftigen, wobei ich zugleich, — mich übrigens durchaus nur auf das Nothwendigste beschränkend, — einige eigne Ansichten über die Lösung dieser so höchst wichtigen Aufgabe den Astronomen und Mathematikern zu geneigter Beachtung empfehlen möchte. Die in der früheren Abhandlung gebrauchten Bezeichnungen werde ich auch hier sämmtlich beibehalten, und werde Abänderungen, die in dieser Beziehung etwa getroffen werden sollten, sorgfältig anzeigen.

Bevor ich mich zu der Auflösung des Cometenproblems selbst wende, will ich vorläufig und ein für alle Mal darauf aufmerksam machen, was die in der früheren Abhandlung gebrauchten Symbole u_1, u_2, u_3 eigentlich bedeuten, weil, dies zu wissen und stets vor Augen zu haben, für das Folgende von Wichtigkeit ist. Nach §. 8. der früheren Abhandlung hat man die Gleichungen:

$$z_1 = -u_1 \sin\beta_1', \quad z_2 = -u_2 \sin\beta_2', \quad z_3 = -u_3 \sin\beta_3';$$

und da nun bekanntlich β_1', β_2', β_3' die geocentrischen Breiten des Cometen in den Momenten der ersten, zweiten und dritten Beobachtung bezeichnen, so erhellet auf der Stelle, dass u_1, u_2, u_3 die negativ genommenen Entfernungen des Cometen von der Erde zu den Zeiten der ersten, zweiten und dritten Beobachtung sind. Man könnte leicht die wirklichen Entfernungen des Cometen von der Erde in den drei Beobachtungen in die Rechnung einführen, was aber eine Erleichterung der Rechnung nicht herbeiführen würde, und daher von mir unterlassen werden soll, um mich desto leichter unmittelbar an die frühere Abhandlung anschliessen zu können, wodurch die vorliegende Abhandlung wesentlich abgekürzt werden wird.

Immer legen wir nun im Folgenden bloss drei Beobachtungen zum Grunde, aus denen wir die ganze Bahn zu bestimmen suchen. Dies vorausgesetzt, werde ich zuerst zeigen, wie das Cometenproblem ganz im Allgemeinen, ohne irgend eine Näherung zu Hülfe zu nehmen, aufzulösen ist, und dann die Näherungen angeben, welche man sich erlauben darf, und zu denen man in der That auch meistens seine Zuflucht genommen hat, um sich die Auflösung möglichst zu erleichtern. Dabei wird auch insbesondere von der Auflösung von Olbers die Rede sein, deren man sich jetzt in der Astronomie fast allgemein bei der Berechnung der Cometenbahnen bedient, indem ich wenigstens im Allgemeinen die Hauptmomente angeben werde, auf welche diese Auflösung zurückkommt, übrigens aber das Studium der in meiner früheren Abhandlung angeführten wichtigen Abhandlung von Olbers selbst dem eignen Fleisse des Lesers überlasse, da diese Auflösung, nebst den ihr durch Gauss zu Theil gewordenen wichtigen Vervollkommnungen, zu allgemein bekannt ist, als dass ich es zweckmässig finden könnte, über die bei derselben in Betracht kommenden Einzelnheiten mich hier schon jetzt weiter zu verbreiten.

I.

Um zuerst die allgemeine Auflösung des Cometenproblems, ohne eine nur näherungsweise richtige Voraussetzung irgend einer Art zu Hülfe zu nehmen, kennen zu lernen, so haben wir nach §. 2. der früheren Abhandlung zuvörderst die Gleichung

$$\mathfrak{A}_1 u_1 + \mathfrak{B}_1 u_2 + \mathfrak{C}_1 u_3 + \mathfrak{D}_1 u_1 u_2 + \mathfrak{E}_1 u_2 u_3 + \mathfrak{F}_1 u_3 u_1 + \mathfrak{G}_1 u_1 u_2 u_3 = 0,$$

wo die Coefficienten

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{D}_1,\ \mathfrak{E}_1,\ \mathfrak{F}_1,\ \mathfrak{G}_1$$

wenn man dieselben durch die geocentrischen Längen und Breiten

$$\alpha_1',\ \beta_1';\quad \alpha_2',\ \beta_2';\quad \alpha_3',\ \beta_3'$$

des Cometen in den Momenten der drei Beobachtungen ausdrückt, wie aus der früheren Abhandlung leicht geschlossen wird, wenn man nur bemerkt, dass in den Zeichen jener Abhandlung

$$\mathfrak{D}_1 = -\mathfrak{K}_1',\quad \mathfrak{E}_1 = -\mathfrak{K},\quad \mathfrak{F}_1 = -\mathfrak{L},\quad \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{Q}$$

ist, die folgenden Werthe haben:

$$\mathfrak{A}_1 = -R_2 R_3 \sin(L_2 - L_3) \sin\beta_1',$$

$$\mathfrak{B}_1 = -R_3 R_1 \sin(L_3 - L_1) \sin\beta_2',$$

$$\mathfrak{C}_1 = -R_1 R_2 \sin(L_1 - L_2) \sin\beta_3';$$

$$\mathfrak{D}_1 = R_3 \cos\beta_1' \cos\beta_2' \{\mathrm{tang}\beta_2' \sin(\alpha_1' - L_3) - \mathrm{tang}\beta_1' \sin(\alpha_2' - L_3)\};$$

$$\mathfrak{E}_1 = R_1 \cos\beta_2' \cos\beta_3' \{\mathrm{tang}\beta_3' \sin(\alpha_2' - L_1) - \mathrm{tang}\beta_2' \sin(\alpha_3' - L_1)\},$$

$$\mathfrak{F}_1 = R_2 \cos\beta_3' \cos\beta_1' \{\mathrm{tang}\beta_1' \sin(\alpha_3' - L_2) - \mathrm{tang}\beta_3' \sin(\alpha_1' - L_2)\};$$

$$\mathfrak{G}_1 = -\cos\beta_1' \cos\beta_2' \cos\beta_3' \left\{\begin{array}{l} \mathrm{tang}\beta_1' \sin(\alpha_2' - \alpha_3') \\ + \mathrm{tang}\beta_2' \sin(\alpha_3' - \alpha_1') \\ + \mathrm{tang}\beta_3' \sin(\alpha_1' - \alpha_2') \end{array}\right\}.$$

Ferner ist nach der früheren Abhandlung:

$$A_1 = -R_1 \cos(\alpha_1' - L_1) \cos\beta_1',$$

$$A_2 = -R_2 \cos(\alpha_2' - L_2) \cos\beta_2',$$

$$A_3 = -R_3 \cos(\alpha_3' - L_3) \cos\beta_3';$$

$B_1^2 = R_1^2\{1 - \cos(\alpha_1 - L_1)^2 \cos\beta_1'^2\}$,

$B_2^2 = R_2^2\{1 - \cos(\alpha_2' - L_2)^2 \cos\beta_2'^2\}$,

$B_3^2 = R_3^2\{1 - \cos(\alpha_3' - L_3)^2 \cos\beta_3'^2\}$

und

$$r_1 = \sqrt{(A_1 - u_1)^2 + B_1^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(A_2 - u_2)^2 + B_2^2},$$

$$r_3 = \sqrt{(A_3 - u_3)^2 + B_3^2};$$

so wie

$$x_1 = -R_1 \cos L_1 - u_1 \cos\alpha_1' \cos\beta_1',$$

$$y_1 = -R_1 \sin L_1 - u_1 \sin\alpha_1' \cos\beta_1',$$

$$z_1 = -u_1 \sin\beta_1';$$

$$x_2 = -R_2 \cos L_2 - u_2 \cos\alpha_2' \cos\beta_2',$$

$$y_2 = -R_2 \sin L_2 - u_2 \sin\alpha_2' \cos\beta_2',$$

$$z_2 = -u_2 \sin\beta_2';$$

$$x_3 = -R_3 \cos L_3 - u_3 \cos\alpha_3' \cos\beta_3',$$

$$y_3 = -R_3 \sin L_3 - u_3 \sin\alpha_3' \cos\beta_3',$$

$$z_3 = -u_3 \sin\beta_3'.$$

Bezeichnet man nun die Sehnen der Cometenbahn zwischen dem ersten und zweiten, und zwischen dem zweiten und dritten Cometenorte respective durch $s_{1,2}$ und $s_{2,3}$; so ist

$$s_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

$$s_{2,3} = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2};$$

oder, wenn man für die Coordinaten

$$x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_2,\ y_2,\ z_2;\quad x_3,\ y_3,\ z_3$$

ihre obigen Werthe einführt, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$\begin{aligned}s_{1,2}^2=R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos(L_1-L_2)\\ +2\{R_1\cos(\alpha_1'-L_1)-R_2\cos(\alpha_1'-L_2)\}\cos\beta_1'u_1\\ +2\{R_2\cos(\alpha_2'-L_2)-R_1\cos(\alpha_2'-L_1)\}\cos\beta_2'u_2\\ -2\{\sin\beta_1'\sin\beta_2'+\cos(\alpha_1'-\alpha_2')\cos\beta_1'\cos\beta_2'\}u_1u_2+u_1^2+u_2^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_{2,3}^2=R_2^2+R_3^2-2R_2R_3\cos(L_2-L_3)\\ +2\{R_2\cos(\alpha_2'-L_2)-R_3\cos(\alpha_2'-L_3)\}\cos\beta_2'u_2\\ +2\{R_3\cos(\alpha_3'-L_3)-R_2\cos(\alpha_3'-L_2)\}\cos\beta_3'u_3\\ -2\{\sin\beta_2'\sin\beta_3'+\cos(\alpha_2'-\alpha_3')\cos\beta_2'\cos\beta_3'\}u_2u_3+u_2^2+u_3^2.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun die Flächenräume der zwischen der Sonne, dem ersten und zweiten Cometenorte, und zwischen der Sonne, dem zweiten und dritten Cometenorte liegenden Sectoren der als eine Parabel betrachteten Cometenbahn durch $\mathfrak{S}_{1,2}$ und $\mathfrak{S}_{2,3}$, den Parameter der Cometenbahn aber durch p; so ist nach dem berühmten Lambert'schen Ausdrucke für den Flächeninhalt parabolischer Sectoren*):

$$\mathfrak{S}_{1,2}=\frac{1}{12}\sqrt{\frac{p}{2}}\cdot\{(r_1+r_2+s_{1,2})^{\frac{3}{2}}-(r_1+r_2-s_{1,2})^{\frac{3}{2}}\},$$

$$\mathfrak{S}_{2,3}=\frac{1}{12}\sqrt{\frac{p}{2}}\cdot\{(r_2+r_3+s_{2,3})^{\frac{3}{2}}-(r_2+r_3-s_{2,3})^{\frac{3}{2}}\}.$$

Nach dem dritten Kepler'schen Gesetze verhalten sich die Quadrate der siderischen Umlaufszeiten der Planeten wie die Würfel der halben grossen Axen ihrer elliptischen Bahnen. So lange man nun die Cometenbahnen als Parabeln betrachtet, kann natürlich von einer Umlaufszeit derselben um die Sonne nicht die Rede sein, und so lange verliert also auch das dritte Kepler'sche Gesetz seine Anwendung. Indess kann man doch dieses Gesetz mit einer gewissen Modification auch auf parabolische Bahnen anwenden, wie wir jetzt zeigen wollen. Bezeichnet nämlich T die Umlaufszeit eines Planeten und a die grosse Halbaxe seiner Bahn; so ist nach dem dritten Keplerschen Gesetze der Bruch

$$\frac{T^2}{a^3}\quad\text{oder}\quad\frac{T}{a^{\frac{3}{2}}}$$

für alle Planeten eine constante Grösse, die wir für den letzten der beiden vorstehenden Brüche durch $\varkappa$ bezeichnen, und daher

---

*) M. s. Archiv der Mathem. und Physik. Thl. XVI. Nr. XXXIX. Der Fall, wo man in der Lambert'schen Gleichung das untere Zeichen zu nehmen hätte, kann bei der Berechnung der Cometenbahnen, die immer nur nahe bei einander liegende Beobachtungen benutzen, nur kleine Theile der Cometenbahn in Betracht ziehen kann, nicht vorkommen.

$$T^2 = \varkappa^2 a^3$$

setzen wollen. Ist nun ferner $\mathfrak{S}$ ein in der Zeit t von dem Radius Vector des Planeten beschriebener Sector seiner Bahn, so ist für diesen Planeten nach dem zweiten Kepler'schen Gesetze der Bruch $\frac{\mathfrak{S}}{t}$ eine constante Grösse, die wir durch λ bezeichnen, und daher

$$\mathfrak{S} = \lambda t$$

setzen wollen, wobei wir nochmals besonders darauf hinweisen, dass λ nur für jeden einzelnen Planeten constant, für verschiedene Planeten veränderlich ist. Bezeichnen wir jetzt den Flächeninhalt der ganzen elliptischen Bahn des Planeten durch E, so ist nach der vorstehenden Gleichung

$$E = \lambda T, \quad \lambda = \frac{E}{T};$$

also

$$\mathfrak{S} = \frac{E}{T} t.$$

Weil aber, wenn b die kleine Halbaxe der Bahn bezeichnet, bekanntlich $E = ab\pi$ ist, so ist

$$\mathfrak{S} = \frac{ab\pi}{T} t,$$

und folglich, weil

$$T = \varkappa a^{\frac{3}{2}} = \varkappa a \sqrt{a}$$

ist:

$$\mathfrak{S} = \frac{b\pi}{\varkappa \sqrt{a}} t.$$

Bezeichnet nun p den Parameter der Bahn, so ist bekanntlich

$$\frac{2b^2}{a} = p, \qquad \frac{b}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{p}{2}};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\mathfrak{S} = \frac{\pi}{\varkappa} \sqrt{\frac{p}{2}} \,.\, t.$$

Diese Gleichung, welche bloss von dem Parameter abhängt, ist aber offenbar auch auf parabolische Bahnen anwendbar. Drückt man dieselbe nun auf folgende Art aus:

$$t=\frac{\varkappa}{\pi}\cdot\frac{\mathfrak{S}}{\sqrt{\frac{p}{2}}},$$

so ergeben sich aus dem Obigen in den Zeichen der früheren Abhandlung die beiden folgenden Gleichungen:

$$t_2-t_1=\tau_{1,2}=\frac{\varkappa}{\pi}\cdot\frac{\mathfrak{S}_{1,2}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}=\frac{\varkappa}{12\pi}\{(r_1+r_2+s_{1,2})^{\frac{3}{2}}-(r_1+r_2-s_{1,2})^{\frac{3}{2}}\},$$

$$t_3-t_2=\tau_{2,3}=\frac{\varkappa}{\pi}\cdot\frac{\mathfrak{S}_{2,3}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}=\frac{\varkappa}{12\pi}\{(r_2+r_3+s_{2,3})^{\frac{3}{2}}-(r_2+r_3-s_{2,3})^{\frac{3}{2}}\}.$$

Die Grösse $\frac{\varkappa}{12\pi}$ ist eine Constante, welche wir durch μ bezeichnen, also

$$\mu=\frac{\varkappa}{12\pi}$$

setzen wollen. Daher ist nach dem Vorhergehenden:

$$(r_1+r_2+s_{1,2})^{\frac{3}{2}}-(r_1+r_2-s_{1,2})^{\frac{3}{2}}=\frac{t_2-t_1}{\mu}=\frac{\tau_{1,2}}{\mu},$$

$$(r_2+r_3-s_{2,3})^{\frac{3}{2}}-(r_2+r_3-s_{2,3})^{\frac{3}{2}}=\frac{t_3-t_2}{\mu}=\frac{\tau_{2,3}}{\mu}.$$

Den Werth der Constanten

$$\varkappa=\frac{T}{a\sqrt{a}},$$

und daher auch den Werth der Constanten

$$\mu=\frac{\varkappa}{12\pi},$$

kennt man aber aus der Theorie der Planetenbewegung mit grosser Genauigkeit, so dass man also denselben im Obigen als eine bekannte Grösse betrachten kann; es ist nämlich, alle Zeiten in Tagen ausgedrückt angenommen:

$$\log\mu=0,9862673.$$

In den obigen Gleichungen ist nun offenbar die vollständige Auflösung des Cometenproblems in der parabolischen Hypothese enthalten. Um dies jedoch noch in etwas anderer Weise recht deutlich zu machen, wollen wir mit der Gleichung

$$\mathfrak{A}_1 u_1 + \mathfrak{B}_1 u_2 + \mathfrak{C}_1 u_3 + \mathfrak{D}_1 u_1 u_2 + \mathfrak{E}_1 u_2 u_3 + \mathfrak{F}_1 u_3 u_1 + \mathfrak{G}_1 u_1 u_2 u_3 = 0$$

noch eine kleine Veränderung vornehmen. Wir wollen nämlich

$$u_1 = v u_2, \quad u_3 = w u_2$$

setzen. Dann wird die vorstehende Gleichung:

$$\left.\begin{array}{r}\mathfrak{A}_1 v u_2 + \mathfrak{B}_1 u_2 + \mathfrak{C}_1 w u_2 + \mathfrak{D}_1 v u_2^2 + \mathfrak{E}_1 w u_2^2 + \mathfrak{F}_1 v w u_2^2 \\ + \mathfrak{G}_1 v w u_2^3\end{array}\right\} = 0,$$

und folglich, weil im vorliegenden Falle offenbar nicht $u_2 = 0$ sein kann:

$$\mathfrak{A}_1 v + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}_1 w + (\mathfrak{D}_1 v + \mathfrak{E}_1 w + \mathfrak{F}_1 v w) u_2 + \mathfrak{G}_1 v w u_2^2 = 0.$$

Wir wollen nun setzen, dass man durch irgend ein Verfahren zwei Näherungswerthe der Verhältnisszahlen v, w gefunden hätte, und nun deren Genauigkeit prüfen wollte; so würde man aus den durch die Beobachtungen und die astronomischen Tafeln gegebenen Grössen nach den obigen Formeln die Grössen

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{G}_1$$

berechnen, und dann durch Auflösung der Gleichung

$$\mathfrak{A}_1 v + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}_1 w + (\mathfrak{D}_1 v + \mathfrak{E}_1 w + \mathfrak{F}_1 v w) u_2 + \mathfrak{G}_1 v w u_2^2 = 0$$

die Grösse u_2, so wie mittelst der Formeln

$$u_1 = v u_2, \quad u_3 = w u_2$$

die Grössen u_1, u_2, u_3 finden. Hat man aber diese Grössen, so kann man mittelst der im Obigen gegebenen Formeln auch die Grössen

$$r_1, r_2, r_3 \text{ und } s_{1,2}, s_{2,3}$$

finden, und dann, indem man dieselben in die beiden Gleichungen

$$(r_1+r_2+s_{1,2})^{\frac{3}{2}} - (r_1+r_2-s_{1,2})^{\frac{3}{2}} = \frac{t_2-t_1}{\mu} = \frac{\tau_{1,2}}{\mu},$$

$$(r_2+r_3+s_{2,3})^{\frac{3}{2}} - (r_2+r_3-s_{2,3})^{\frac{3}{2}} = \frac{t_3-t_2}{\mu} = \frac{\tau_{2,3}}{\mu}$$

einführt, untersuchen, wie weit diese beiden Gleichungen erfüllt werden. Ergeben sich diese Gleichungen als genau erfüllt, so werden die zum Grunde gelegten Werthe von v, w die richtigen, und das Problem also aufgelöst sein, indem schon in der früheren Abhandlung gezeigt worden ist, wie die Lage der Bahn im Raume bestimmt werden kann, wenn die obigen Grössen sämmtlich bekannt sind; sollten sich die beiden in Rede stehenden Gleichungen noch nicht vollständig erfüllt ergeben, so würde man die Näherungswerthe der Grössen v, w, von denen man ausging, weiter corrigiren müssen, wovon nachher weiter die Rede sein wird. Man könnte auch von zwei Näherungswerthen von u_1, u_2 ausgehen, dann u_3 mittelst der Gleichung

$$\mathfrak{A}_1 u_1 + \mathfrak{B}_1 u_2 + \mathfrak{C}_1 u_3 + \mathfrak{D}_1 u_1 u_2 + \mathfrak{E}_1 u_2 u_3 + \mathfrak{F}_1 u_3 u_1 + \mathfrak{G}_1 u_1 u_2 u_3 = 0$$

berechnen, und hierauf ganz wie vorher verfahren. Uebrigens wird man aus dieser Darstellung mit vollständiger Deutlichkeit übersehen, dass durch das Obige das Cometenproblem zu einer bestimmten Aufgabe mit zwei unbekannten Grössen v, w oder u_1, u_2*) gemacht worden ist.

Ich will nun noch einmal die Formeln aus dem Obigen zusammenstellen, welche, wenn zwei Näherungswerthe der Grössen v, w gegeben sind, zur Berechnung der entsprechenden Beträge der Grössen

$$f(v,w) = (r_1 + r_2 + s_{1,2})^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_2 - s_{1,2})^{\frac{3}{2}} - \frac{\tau_{1,2}}{\mu},$$

$$\varphi(v,w) = (r_2 + r_3 + s_{2,3})^{\frac{3}{2}} - (r_2 + r_3 - s_{2,3})^{\frac{3}{2}} - \frac{\tau_{2,3}}{\mu}$$

angewandt werden müssen. Diese Formeln sind nach dem Obigen in der Ordnung, wie sie zur Anwendung kommen, die folgenden:

$$\mathfrak{A}_1 = - R_2 R_3 \sin(L_2 - L_3) \sin\beta_1',$$

$$\mathfrak{B}_1 = - R_3 R_1 \sin(L_3 - L_1) \sin\beta_2',$$

$$\mathfrak{C}_1 = - R_1 R_2 \sin(L_1 - L_2) \sin\beta_3';$$

$$\mathfrak{D}_1 = R_3 \cos\beta_1' \cos\beta_2' \{\operatorname{tang}\beta_2' \sin(\alpha_1' - L_3) - \operatorname{tang}\beta_1' \sin(\alpha_2' - L_3)\},$$

$$\mathfrak{E}_1 = R_1 \cos\beta_2' \cos\beta_3' \{\operatorname{tang}\beta_3' \sin(\alpha_2' - L_1) - \operatorname{tang}\beta_2' \sin(\alpha_3' - L_1)\},$$

$$\mathfrak{F}_1 = R_2 \cos\beta_3' \cos\beta_1' \{\operatorname{tang}\beta_1' \sin(\alpha_3' - L_2) - \operatorname{tang}\beta_3' \sin(\alpha_1' - L_2)\};$$

$$\mathfrak{G}_1 = - \cos\beta_1' \cos\beta_2' \cos\beta_3' \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang}\beta_1' \sin(\alpha_2' - \alpha_3') \\ + \operatorname{tang}\beta_2' \sin(\alpha_3' - \alpha_1') \\ + \operatorname{tang}\beta_3' \sin(\alpha_1' - \alpha_2') \end{array} \right\};$$

*) Natürlich könnte man auch u_1, u_3 oder u_2, u_3 zu unbekannte Grössen wählen.

$$A_1 = -R_1 \cos(\alpha_1' - L_1) \cos\beta_1',$$
$$A_2 = -R_2 \cos(\alpha_2' - L_2) \cos\beta_2',$$
$$A_3 = -R_3 \cos(\alpha_3' - L_3) \cos\beta_3';$$

$$B_1^2 = R_1^2 \{1 - \cos(\alpha_1' - L_1)^2 \cos\beta_1'^2\},$$
$$B_2^2 = R_2^2 \{1 - \cos(\alpha_2' - L_2)^2 \cos\beta_2'^2\},$$
$$B_3^2 = R_3^2 \{1 - \cos(\alpha_3' - L_3)^2 \cos\beta_3'^2\};$$

$$\mathfrak{A}_1 v + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}_1 w + (\mathfrak{D}_1 v + \mathfrak{E}_1 w + \mathfrak{F}_1 vw) u_2 + \mathfrak{G}_1 vw u_2^2 = 0;$$

$$r_1 = \sqrt{(A_1 - u_1)^2 + B_1^2},$$
$$r_2 = \sqrt{(A_2 - u_2)^2 + B_2^2},$$
$$r_3 = \sqrt{(A_3 - u_3)^2 + B_3^2};$$

$$\begin{aligned} s_{1,2}^2 = {} & R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos(L_1 - L_2) \\ & + 2\{R_1 \cos(\alpha_1' - L_1) - R_2 \cos(\alpha_1' - L_2)\} \cos\beta_1' u_1 \\ & + 2\{R_2 \cos(\alpha_2' - L_2) - R_1 \cos(\alpha_2' - L_1)\} \cos\beta_2' u_2 \\ & - 2\{\sin\beta_1' \sin\beta_2' + \cos(\alpha_1' - \alpha_2') \cos\beta_1' \cos\beta_2'\} u_1 u_2 + u_1^2 + u_2^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{2,3}^2 = {} & R_2^2 + R_3^2 - 2R_2 R_3 \cos(L_2 - L_3) \\ & + 2\{R_2 \cos(\alpha_2' - L_2) - R_3 \cos(\alpha_2' - L_3)\} \cos\beta_2' u_2 \\ & + 2\{R_3 \cos(\alpha_3' - L_3) - R_2 \cos(\alpha_3' - L_2)\} \cos\beta_3' u_3 \\ & - 2\{\sin\beta_2' \sin\beta_3' + \cos(\alpha_2' - \alpha_3') \cos\beta_2' \cos\beta_3'\} u_2 u_3 + u_2^2 + u_3^2; \end{aligned}$$

$$f(v,w) = (r_1 + r_2 + s_{1,2})^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_2 - s_{1,2})^{\frac{3}{2}} - \frac{\tau_{1,2}}{\mu},$$

$$\varphi(v,w) = (r_2 + r_3 + s_{2,3})^{\frac{3}{2}} - (r_2 + r_3 - s_{2,3})^{\frac{3}{2}} - \frac{\tau_{2,3}}{\mu} \ldots$$

Ein Uebelstand bei dieser Art der Auflösung ist es freilich, dass u_2 durch eine Gleichung des zweiten Grades bestimmt wird, weil sich eine allgemeine analytische Entscheidung, welchen der beiden Werthe von u_2 man zu nehmen hat, nicht geben lässt.

Ist es gelungen, die genauen Werthe von v, w zu finden, so berechnet man, um eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung zu haben, noch die Sehne $s_{1,3}$ zwischen dem ersten und dritten Cometenorte mittelst der Formel

$$s_{1,3}^2 = R_1^2 + R_3^2 - 2R_1R_3\cos(L_1-L_3)$$
$$+2\{R_1\cos(\alpha_1'-L_1) - R_3\cos(\alpha_1'-L_3)\}\cos\beta_1'u_1$$
$$+2\{R_3\cos(\alpha_3'-L_3) - R_1\cos(\alpha_3'-L_1)\}\cos\beta_3'u_3$$
$$-2\{\sin\beta_1'\sin\beta_3' + \cos(\alpha_1'-\alpha_3')\cos\beta_1'\cos\beta_3'\}u_1u_3 + u_1^2 + u_3^2.$$

und untersucht, ob die Gleichung

$$(r_1+r_3+s_{1,3})^{\frac{3}{2}} - (r_1+r_3-s_{1,3})^{\frac{3}{2}} = \frac{\tau_{1,2}+\tau_{2,3}}{\mu}$$

erfüllt ist.

Den Werth einer Grösse von der Form

$$(r+\varrho+s)^{\frac{3}{2}} - (r+\varrho-s)^{\frac{3}{2}}$$

kann man, wie es mir scheint, zweckmässig auf folgende Art berechnen. Es ist

$$(r+\varrho+s)^{\frac{3}{2}} - (r+\varrho-s)^{\frac{3}{2}} = (r+\varrho+s)^{\frac{3}{2}}\left\{1-\left(\frac{r+\varrho-s}{r+\varrho+s}\right)^{\frac{3}{2}}\right\};$$

und berechnet man nun den Hülfswinkel φ mittelst der Formel

$$\cos\varphi = \left(\frac{r+\varrho-s}{r+\varrho+s}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{r+\varrho-s}{r+\varrho+s}\right)^3},$$

was jederzeit möglich ist, so ist

$$(r+\varrho+s)^{\frac{3}{2}} - (r+\varrho-s)^{\frac{3}{2}} = (r+\varrho+s)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi^2,$$

wo sich Alles mit Hülfe der Logarithmen leicht berechnen lässt. Man könnte auch den Hülfswinkel ψ mittelst der Formel

$$\sin\psi = \left(\frac{r+\varrho-s}{r+\varrho+s}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{r+\varrho-s}{r+\varrho+s}\right)^3}$$

berechnen, und hätte dann

$$(r+\varrho+s)^{\frac{3}{2}} - (r+\varrho-s)^{\frac{3}{2}} = (r+\varrho+s)^{\frac{3}{2}}\cos\psi^2.$$

Ob man den ersten oder den zweiten Weg einzuschlagen hat, wird sich immer danach bestimmen, welcher der beiden Winkel φ und ψ mittelst der Tafeln am genauesten berechnet werden kann.

Zuvörderst ist nun die zweckmässigste Methode anzugeben, nach welcher man, wenn man schon zwei den Grössen v, w nahe kommende Werthe durch irgend ein Verfahren gefunden hat, sich nach und nach zu den genauen Werthen dieser Grössen erheben kann. Da man aber schon Näherungswerthe der Grössen v, w kennt, so kann man sich immer leicht drei Systeme

$$a,\ b;\quad a',\ b';\quad a'',\ b''$$

diesen Grössen nahe kommender Werthe bilden. Für diese drei Systeme berechne man nach der vorher gegebenen Anleitung die Grössen

$$A=f(a,b),\quad B=\varphi(a,b);$$

$$A'=f(a',b'),\quad B'=\varphi(a',b');$$

$$A''=f(a'',b''),\quad B''=\varphi(a'',b'').$$

Nach den Principien der Differentialrechnung ist aber, wenn die genauen Werthe der Grössen v, w durch diese Symbole selbst bezeichnet werden, näherungsweise:

$$f(v+\partial v,w+\partial w)=f(v,w)+\frac{\partial_v f(v,w)}{\partial v}\partial v+\frac{\partial_w f(v,w)}{\partial w}\partial w,$$

$$\varphi(v+\partial v,w+\partial w)=\varphi(v,w)+\frac{\partial_v\varphi(v,w)}{\partial v}\partial v+\frac{\partial_w\varphi(v,w)}{\partial w}\partial w;$$

folglich, weil nach dem Obigen

$$f(v,w)=0,\quad \varphi(v,w)=0$$

sein soll, wenn wir der Kürze wegen

$$\alpha=\frac{\partial_v f(v,w)}{\partial v},\qquad \beta=\frac{\partial_w f(v,w)}{\partial w};$$

$$\gamma=\frac{\partial_v\varphi(v,w)}{\partial v},\qquad \delta=\frac{\partial_w\varphi(v,w)}{\partial w}$$

setzen:

$$f(v+\partial v,w+\partial w)=\alpha\partial v+\beta\partial w,$$

$$\varphi(v+\partial v,w+\partial w)=\gamma\partial v+\delta\partial w.$$

Setzen wir nun successive

$$\partial v=a-v,\quad \partial w=b-w;$$

$$\partial v=a'-v,\quad \partial w=b'-w;$$

$$\partial v=a''-v,\quad \partial w=b''-w;$$

so erhalten wir aus dem Vorhergehenden die beiden folgenden Systeme von Gleichungen:

$$A=\alpha(a-v)+\beta(b-w),$$
$$A'=\alpha(a'-v)+\beta(b'-w),$$
$$A''=\alpha(a''-v)+\beta(b''-w)$$

und

$$B=\gamma(a-v)+\delta(b-w),$$
$$B'=\gamma(a'-v)+\delta(b'-w),$$
$$B''=\gamma(a''-v)+\delta(b''-w).$$

Aus diesen Gleichungen erhält man mittelst leichter Rechnung:

$$A'B''-A''B'=(\alpha\delta-\beta\gamma)\{(a'-v)(b''-w)-(a''-v)(b'-w)\},$$
$$A''B-AB''=(\alpha\delta-\beta\gamma)\{(a''-v)(b-w)-(a-v)(b''-w)\},$$
$$AB'-A'B=(\alpha\delta-\beta\gamma)\{(a-v)(b'-w)-(a'-v)(b-w)\}$$

oder

$$A'B''-A''B'=(\alpha\delta-\beta\gamma)\{a'b''-a''b'+(b'-b'')v-(a'-a'')w\},$$
$$A''B-AB''=(\alpha\delta-\beta\gamma)\{a''b-ab''+(b''-b)v-(a''-a)w\},$$
$$AB'-A'B=(\alpha\delta-\beta\gamma)\{ab'-a'b+(b-b')v-(a-a')w\}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit a, a', a'' und addirt sie dann zu einander, so erhält man:

$$a(A'B''-A''B')+a'(A''B-AB'')+a''(AB'-A'B)$$
$$=(\alpha\delta-\beta\gamma)\{a(b'-b'')+a'(b''-b)+a''(b-b')\}v$$

oder

$$a(A'B''-A''B')+a'(A''B-AB'')+a''(AB'-A'B)$$
$$=(\alpha\delta-\beta\gamma)\{(a-a')(b-b'')-(a-a'')(b-b')\}.$$

Multiplicirt man dagegen die drei obigen Gleichungen nach der Reihe mit b, b', b'' und addirt sie dann zu einander, so erhält man:

$$b(A'B''-A''B')+b'(A''B-AB'')+b''(AB'-A'B)$$
$$=-(\alpha\delta-\beta\gamma)\{b(a'-a'')+b'(a''-a)+b''(a-a')\}w$$

oder

$$b(A'B''-A''B')+b'(A''B-AB'')+b''(AB'-A'B)$$
$$=(\alpha\delta-\beta\gamma)\{(a-a')(b-b'')-(a-a'')(b-b')\}w.$$

Addirt man endlich die drei obigen Gleichungen unmittelbar, ohne vorher eine Veränderung mit denselben vorzunehmen, zu einander, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&(A'B''-A''B')+(A''B-AB'')+(AB'-A'B)\\
&=(A-A')(B-B'')-(A-A'')(B-B')\\
&=(\alpha\delta-\beta\gamma)\{(a'b''-a''b')+(a''b-ab'')+(ab'-a'b)\}\\
&=(\alpha\delta-\beta\gamma)\{(a-a')(b-b'')-(a-a'')(b-b')\}.
\end{aligned}$$

Hieraus, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, ergehen sich nun zur Bestimmung der gesuchten Grössen v, w die folgenden Formeln:

$$v=\frac{a(A'B''-A''B')+a'(A''B-AB'')+a''(AB'-A'B)}{(A-A')(B-B'')-(A-A'')(B-B')},$$

$$w=\frac{b(A'B''-A''B')+b'(A''B-AB'')+b''(AB'-A'B)}{(A-A')(B-B'')-(A-A'')(B-B')}$$

oder

$$v=a+\frac{(a'-a)(A''B-AB'')+(a''-a)(AB'-A'B)}{(A-A')(B-B'')-(A-A'')(B-B')},$$

$$w=b+\frac{(b'-b)(A''B-AB'')+(b''-b)(AB'-A'B)}{(A-A')(B-B'')-(A-A'')(B-B')}.$$

Weil der gemeinschaftliche Nenner der vorhergehenden Brüche

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)\{(a-a')(b-b'')-(a-a'')(b-b')\}$$

ist, so darf nicht

$$(a-a')(b-b'')-(a-a'')(b-b')=0,$$

d. h. nicht

$$\frac{a-a'}{b-b'}=\frac{a-a''}{b-b''}$$

sein, was bei der Annahme der drei Systeme

$$a,\ b;\quad a',\ b';\quad a'',\ b''$$

von Näherungswerthen der Grössen v, w wohl zu beachten, und daher immer zu vermeiden ist, dass die angenommenen Näherungs- oder hypothetischen Werthe die Gleichung

$$\frac{a-a'}{b-b'}=\frac{a-a''}{b-b''}$$

erfüllen oder derselben entsprechen.

Wie man sich dieser Methode zur successiven Annäherung zu bedienen hat, bedarf einer weiteren Erläuterung an diesem Orte nicht.

Ueberblickt man alles Obige nochmals, so wird man zugeben, dass die vorhergehende Methode zur Bestimmung einer Cometenbahn allen Ansprüchen vollkommen genügen würde, wenn man nur im Stande wäre, in allen Fällen erste Näherungswerthe der Grössen v, w mit Leichtigkeit zu finden. Wie man aber nach meiner Meinung sich am besten solche erste Näherungswerthe dieser Verhältnisszahlen verschafft, werde ich erst weiter unten auseinandersetzen. Die Grösse u_2 wird, wie schon erinnert worden ist, freilich durch eine quadratische Gleichung bestimmt, und hat also im Allgemeinen zwei Werthe. Hat man nun keine anderen Kriterien, mittelst welcher sich entscheiden lässt, welcher dieser beiden Werthe genommen werden muss, so wird sich freilich nur der Weg einschlagen lassen, dass man für jeden dieser beiden Werthe die Beträge der Functionen $f(v,w)$ und $\varphi(v,w)$ ermittelt, und untersucht, für welchen der beiden Werthe von u_2 die Gleichungen

$$f(v,w)=0, \quad \varphi(v,w)=0$$

mit der grössten Genauigkeit erfüllt sind.

Mehrere der obigen Formeln würden durch Einführung von Hülfswinkeln und andere Transformationen sich zur numerischen Rechnung vielleicht noch etwas bequemer einrichten lassen, wobei ich indess jetzt nicht verweilen will, da jedem nur einigermassen geübten Analytiker und numerischen Rechner dergleichen Abkürzungen sich immer leicht von selbst ergeben. Es kommt mir für jetzt hier besonders nur darauf an, die Methoden im Allgemeinen zu skizziren, und in möglichst deutlicher Darstellung dem Leser vor die Augen zu führen, indem ich die weitere Ausführung im Einzelnen späteren Aufsätzen vorbehalte.

II.

Man kann das Cometenproblem, welches im Vorhergehenden als eine Aufgabe mit zwei unbekannten Grössen sich darstellte, zu einer Aufgabe mit nur einer unbekannten Grösse machen, wenn man sich bei demselben eine nur näherungsweise richtige Voraussetzung gestattet, nämlich die Voraussetzung, dass in den Zeichen der früheren Abhandlung

$$\Delta_{1,2}:\Delta_{2,3}=\tau_{1,2}:\tau_{2,3}$$

sei, d. h. indem man annimmt, dass die Beobachtungen so nahe bei einander liegen, dass für die von dem Vector des Cometen zwischen der ersten und zweiten und zwischen der zweiten und dritten Beobachtung beschriebenen Sectoren ohne merklichen Fehler die in denselben liegenden geradlinigen Dreiecke, deren Spitzen die Sonne und die Oerter des Cometen in seiner Bahn sind, gesetzt werden können. Gestattet man sich nämlich diese Voraussetzung, so hat man in den Zeichen der früheren Abhandlung die Formeln:

$$u_2=-\frac{\Theta\sin\beta'_3+\tau_{2,3}K_2u_1}{\tau_{1,2}\mathfrak{K}_1+\tau_{2,3}\mathfrak{K}-\tau_{2,3}\Omega u_1},$$

$$u_3=-\frac{\Theta\sin\beta'_2-\tau_{2,3}Ku_1}{\tau_{1,2}K_1};$$

oder auch:

$$u_1=-\frac{\Theta\sin\beta'_3+(\tau_{1,2}\mathfrak{K}_1+\tau_{2,3}\mathfrak{K})u_2}{\tau_{2,3}(\mathfrak{L}-\Omega u_2)},$$

$$u_3=-\frac{\Theta\sin\beta'_1-(\tau_{1,2}\mathfrak{K}'_1+\tau_{2,3}\mathfrak{K}')u_2}{\tau_{1,2}(\mathfrak{L}-\Omega u_2)};$$

wo

$$\Theta=-R_2\{\tau_{1,2}R_3\sin(L_2-L_3)-\tau_{2,3}R_1\sin(L_1-L_2)\};$$

$$K=-R_2\cos\beta'_1\cos\beta'_2\{\tang\beta'_2\sin(\alpha'_1-L_2)-\tang\beta'_1\sin(\alpha'_2-L_2)\},$$

$$K_1=-R_2\cos\beta'_2\cos\beta'_3\{\tang\beta'_3\sin(\alpha'_2-L_2)-\tang\beta'_2\sin(\alpha'_3-L_2)\},$$

$$K_2=-R_3\cos\beta'_3\cos\beta'_1\{\tang\beta'_1\sin(\alpha'_3-L_2)-\tang\beta'_3\sin(\alpha'_1-L_2)\};$$

$$\mathfrak{K}=-R_1\cos\beta'_2\cos\beta'_3\{\tang\beta'_3\sin(\alpha'_2-L_1)-\tang\beta'_2\sin(\alpha'_3-L_1)\},$$

$$\mathfrak{K}_1=-R_3\cos\beta'_2\cos\beta'_3\{\tang\beta'_3\sin(\alpha'_2-L_3)-\tang\beta'_2\sin(\alpha'_3-L_3)\};$$

$$\mathfrak{K}'=-R_1\cos\beta'_1\cos\beta'_2\{\tang\beta'_2\sin(\alpha'_1-L_1)-\tang\beta'_1\sin(\alpha'_2-L_1)\},$$

$$\mathfrak{K}'_1=-R_3\cos\beta'_1\cos\beta'_2\{\tang\beta'_2\sin(\alpha'_1-L_3)-\tang\beta'_1\sin(\alpha'_2-L_3)\};$$

$$\mathfrak{L}=K_2;$$

$$\Omega=-\cos\beta'_1\cos\beta'_2\cos\beta'_3\left\{\begin{array}{l}\tang\beta'_1\sin(\alpha'_2-\alpha'_3)\\+\tang\beta'_2\sin(\alpha'_3-\alpha'_1)\\+\tang\beta'_3\sin(\alpha'_1-\alpha'_2)\end{array}\right\}$$

ist.

Nimmt man nun entweder u_1 oder u_3 als unbekannte Grösse*) an, und kennt schon einen Näherungswerth einer dieser Grössen, so kann man untersuchen, wie nahe dieser Werth der Wahrheit kommt, wenn man mittelst der obigen Formeln respective entweder u_2, u_3 oder u_1, u_2 bestimmt, wodurch man also in beiden Fällen zur Kenntniss von u_1, u_2, u_3 gelangt; dann die Grössen A_1, A_3 und B_1^2, B_3^2 mittelst der Formeln

$$A_1 = -R_1\cos(\alpha_1'-L_1)\cos\beta_1'$$

$$A_3 = -R_3\cos(\alpha_3'-L_3)\cos\beta_3';$$

$$B_1^2 = R_1^2\{1-\cos(\alpha_1'-L_1)^2\cos\beta_1'^2\},$$

$$B_3^2 = R_3^2\{1-\cos(\alpha_3'-L_3)^2\cos\beta_3'^2\}$$

bestimmt; und hierauf r_1, r_3, $s_{1,3}$ mittelst der Formeln

$$r_1 = \sqrt{(A_1-u_1)^2+B_1^2},$$

$$r_3 = \sqrt{(A_3-u_3)^2+B_3^2};$$

$$\begin{aligned} s_{1,3}^2 = \; & R_1^2+R_3^2-2R_1R_3\cos(L_1-L_3) \\ & +2\{R_1\cos(\alpha_1'-L_1)-R_3\cos(\alpha_1'-L_3)\}\cos\beta_1'u_1 \\ & +2\{R_3\cos(\alpha_3'-L_3)-R_1\cos(\alpha_3'-L_1)\}\cos\beta_3'u_3 \\ & -2\{\sin\beta_1'\sin\beta_3'+\cos(\alpha_1'-\alpha_3')\cos\beta_1'\cos\beta_3'\}u_1u_3+u_1^2+u_3^2 \end{aligned}$$

sucht. Dann kann man untersuchen, wie weit die Gleichung

$$(r_1+r_3+s_{1,3})^{\frac{3}{2}}-(r_1+r_3-s_{1,3})^{\frac{3}{2}}=\frac{\tau_{1,3}}{\mu}$$

erfüllt ist, und wird auch auf dem Wege der successiven Näherung mittelst der bekannten Methoden den genauen Werth von u_1 oder u_3, und dann auch mittelst der obigen Formeln die Werthe von u_2, u_3 oder u_1, u_2 zu ermitteln im Stande sein, also zur Kenntniss von u_1, u_2, u_3 gelangen können.

Berechnet man noch r_2, $s_{1,2}$, $s_{2,3}$ mittelst der aus dem Obigen bekannten Formeln, so kann man zur Probe der Rechnung auch noch untersuchen, wie weit die Gleichungen

$$(r_1+r_2+s_{1,2})^{\frac{3}{2}}-(r_1+r_2-s_{1,2})^{\frac{3}{2}}=\frac{\tau_{1,2}}{\mu},$$

$$(r_2+r_3+s_{2,3})^{\frac{3}{2}}-(r_2+r_3-s_{2,3})^{\frac{3}{2}}=\frac{\tau_{2,3}}{\mu}$$

erfüllt sind.

---

*) Natürlich könnte man sich auch leicht Formeln für u_2 als unbekannte Grössen entwickeln.

Bringt man diese Auflösung auf ihre einfachste Form und macht u_1 zur unbekannten Grösse, so ist dieselbe ganz in den folgenden Formeln enthalten:

$$K = -R_2\cos\beta_1'\cos\beta_2'\{\tang\beta_2'\sin(\alpha_1'-L_2)-\tang\beta_1'\sin(\alpha_2'-L_2)\},$$

$$K_1 = -R_2\cos\beta_2'\cos\beta_3'\{\tang\beta_3'\sin(\alpha_2'-L_2)-\tang\beta_2'\sin(\alpha_3'-L_2)\};$$

$$\Theta = -R_2\{\tau_{1,2}R_3\sin(L_2-L_3)-\tau_{2,3}R_1\sin(L_1-L_2)\};$$

$$u_3 = -\frac{\Theta\sin\beta_2'-\tau_{2,3}Ku_1}{\tau_{1,2}K_1};$$

$$A_1 = -R_1\cos(\alpha_1'-L_1)\cos\beta_1',$$

$$A_3 = -R_3\cos(\alpha_3'-L_3)\cos\beta_3';$$

$$B_1^2 = R_1^2\{1-\cos(\alpha_1'-L_1)^2\cos\beta_1'^2\} = R_1^2 - A_1^2,$$

$$B_3^2 = R_3^2\{1-\cos(\alpha_3'-L_3)^2\cos\beta_3'^2\} = R_3^2 - A_3^2;$$

$$r_1 = \sqrt{(A_1-u_1)^2+B_1^2},$$

$$r_3 = \sqrt{(A_3-u_3)^2+B_3^2};$$

$$\begin{aligned} s_{1,3}^2 = {} & R_1^2+R_3^2-2R_1R_3\cos(L_1-L_3) \\ & +2\{R_1\cos(\alpha_1'-L_1)-R_3\cos(\alpha_1'-L_3)\}\cos\beta_1'u_1 \\ & +2\{R_3\cos(\alpha_3'-L_3)-R_1\cos(\alpha_3'-L_1)\}\cos\beta_3'u_3 \\ & -2\{\sin\beta_1'\sin\beta_3'+\cos(\alpha_1'-\alpha_3')\cos\beta_1'\cos\beta_3'\}u_1u_3+u_1^2+u_3^2; \end{aligned}$$

$$(r_1+r_3+s_{1,3})^{\frac{3}{2}}-(r_1+r_3-s_{1,3})^{\frac{3}{2}} = \frac{\tau_{1,3}}{\mu}.$$

Bemerken will ich noch, dass, weil

$$\begin{aligned} s_{1,3}^2 &= (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2 \\ &= x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_3^2+y_3^2+z_3^2-2(x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3) \\ &= r_1^2+r_3^2-2(x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3) \end{aligned}$$

ist, das Quadrat der Sehne $s_{1,3}$, wie man leicht findet, auch auf folgenden Ausdruck gebracht werden kann:

$$\begin{aligned} s_{1,3}^2 = r_1^2+r_3^2 & -2R_1R_3\cos(L_1-L_3) \\ & -2R_3\cos(\alpha_1'-L_3)\cos\beta_1'u_1 \\ & -2R_1\cos(\alpha_3'-L_1)\cos\beta_3'u_3 \\ & -2\{\sin\beta_1'\sin\beta_3'+\cos(\alpha_1'-\alpha_3')\cos\beta_1'\cos\beta_3'\}u_1u_3. \end{aligned}$$

Dass ähnliche Ausdrücke auch für die Quadrate der Sehnen $s_{1,2}$ $s_{2,3}$ gelten und im Obigen statt der dortigen Ausdrücke in Anwendung gebracht werden können, versteht sich von selbst. Man kann dieselben überall statt der oben angegebenen Ausdrücke substituiren, wenn man es für zweckmässig halten sollte.

Die Frage bei dieser Auflösung bleibt nun zuletzt auf ähnliche Art wie in I. wieder die, wie für u_1 oder u_2, jenachdem man das eine oder das andere als unbekannte Grösse annimmt, erste Näherungswerthe gefunden werden können, worauf ich weiter unten zurückkommen werde.

III.

Noch etwas vereinfacht wird die vorhergehende Auflösung, wenn man sich, wie wohl zuerst Olbers gethan, und dadurch die Astronomie mit der Auflösung des Cometenproblems beschenkt hat, welche gegenwärtig fast allgemein bei der Berechnung der Cometenbahnen in Anwendung gebracht wird, noch eine zweite nur näherungsweise richtige Voraussetzung gestattet: wenn man nämlich die Zeiten $\tau_{1,2}$, $\tau_{2,3}$ als so klein voraussetzt, dass auch für die von dem Vector der Erde in diesen Zeiten beschriebenen Sectoren ohne merklichen Fehler die in denselben liegenden geradlinigen Dreiecke gesetzt werden können, deren Spitzen die Sonne und die Oerter der Erde in ihrer Bahn sind. Unter dieser Voraussetzung ist, wie aus der früheren Abhandlung (§. 6.) sich unmittelbar ergiebt,

$$\Theta = 0;$$

und die Auflösung unserer Aufgabe ist dann vollständig in den folgenden Formeln enthalten:

$$K = -R_2 \cos\beta_1' \cos\beta_2' \{\operatorname{tang}\beta_2' \sin(\alpha_1' - L_2) - \operatorname{tang}\beta_1' \sin(\alpha_2' - L_2)\},$$

$$K_1 = -R_2 \cos\beta_2' \cos\beta_3' \{\operatorname{tang}\beta_3' \sin(\alpha_2' - L_2) - \operatorname{tang}\beta_2' \sin(\alpha_3' - L_2)\};$$

oder noch kürzer, weil man im Folgenden bloss das Verhältniss der Grössen K und K_1 gebraucht:

$$\frac{K}{K_1} = \frac{\cos\beta_1'}{\cos\beta_3'} \cdot \frac{\operatorname{tang}\beta_2' \sin(\alpha_1' - L_2) - \operatorname{tang}\beta_1' \sin(\alpha_2' - L_2)}{\operatorname{tang}\beta_3' \sin(\alpha_2' - L_2) - \operatorname{tang}\beta_2' \sin(\alpha_3' - L_2)};$$

$$u_3 = \frac{\tau_{2,3}}{\tau_{1,2}} \cdot \frac{K}{K_1} u_1;$$

$$A_1 = -R_1 \cos(\alpha_1' - L_1) \cos\beta_1',$$

$$A_3 = -R_3 \cos(\alpha_3' - L_3) \cos\beta_3';$$

$$B_1^2 = R_1^2 - A_1^2,$$

$$B_3^2 = R_3^2 - A_3^2;$$

$$r_1 = \sqrt{(A_1 - u_1)^2 + B_1^2},$$

$$r_3 = \sqrt{(A_3 - u_3)^2 + B_3^2};$$

$$\begin{aligned} s_{1,3}^2 = r_1^2 + r_3^2 - 2R_1R_3\cos(L_1 - L_3) & \\ -2R_3\cos(\alpha_1' - L_3)\cos\beta_1' u_1 & \\ -2R_1\cos(\alpha_3' - L_1)\cos\beta_3' u_3 & \\ -2\{\sin\beta_1'\sin\beta_3' + \cos(\alpha_1' - \alpha_3')\cos\beta_1'\cos\beta_3'\} u_1 u_3; & \end{aligned}$$

$$(r_1 + r_3 + s_{1,3})^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_3 - s_{1,3})^{\frac{3}{2}} = \frac{\tau_{1,3}}{\mu}.$$

Noch wollen wir zu diesen Formeln bemerken, dass, weil nach dem Obigen $\Theta = 0$, und nach der früheren Abhandlung

$$\Theta = -R_2\{\tau_{1,2}R_3\sin(L_2 - L_3) - \tau_{2,3}R_1\sin(L_1 - L_2)\},$$

also

$$\tau_{1,2}R_3\sin(L_2 - L_3) - \tau_{2,3}R_1\sin(L_1 - L_2) = 0,$$

folglich

$$\frac{\tau_{2,3}}{\tau_{1,2}} = \frac{R_3}{R_1} \cdot \frac{\sin(L_2 - L_3)}{\sin(L_1 - L_2)}$$

ist, im Obigen auch

$$u_3 = \frac{K}{K_1} \cdot \frac{R_3}{R_1} \cdot \frac{\sin(L_2 - L_3)}{\sin(L_1 - L_2)} u_1$$

gesetzt werden kann. Weil nur näherungsweise $\Theta = 0$ ist, sind natürlich auch alle diese Ausdrücke nur näherungsweise richtig.

Die am Ende der in II. gegebenen Auflösung aufgeworfene Frage sieht natürlich auch bei der hier gegebenen Auflösung ihrer Beantwortung noch entgegen.

Die hier gegebene Auflösung ist in den Principien die Auflösung des Cometenproblems von Olbers. Meine obigen Formeln sind jedoch nicht mit den Formeln von Olbers identisch; namentlich bringt Olbers statt der wirklichen Entfernungen $-u_1$, $-u_3$ des Cometen von der Erde in der ersten und dritten Beobachtung die entsprechenden sogenannten curtirten Entfernungen desselben von der Erde in Anwendung, worunter man die auf die Ebene der Erdbahn projicirten wirklichen Entfernungen versteht.

Ich weiss indess nicht, ob ich darin geradezu einen besonderen Vortheil erkennen soll. Auch bin ich selbst noch zweifelhaft, ob ich der durch Einführung der zweiten näherungsweisen Voraussetzung allerdings bewirkten Abkürzung der Rechnung den grossen Werth beilegen soll, den Olbers und Andere derselben beizulegen scheinen, so dass ich es vielleicht nicht lieber vorziehen möchte, bloss bei der ersten näherungsweisen Voraussetzung, nämlich bei der in II. gegebenen Auflösung, stehen zu bleiben, da mir der Mehraufwand von Rechnung, den diese Auflösung erfordert, in der That nicht so sehr erheblich zu sein scheint, dass ich mich durch denselben geradezu bewogen fühlen sollte, die grössere Genauigkeit, welche die Auflösung in II. nothwendig gewähren muss, und wirklich auch gewährt, aufzugeben, worüber jedoch nur durch die aus vielfachen praktischen Anwendungen geschöpfte Erfahrung sicher entschieden werden kann.

IV.

Ich komme nun wieder auf die Auflösung in I. zurück. Man wird sich erinnern, dass wir dort dabei stehen blieben, dass wir zeigten, dass es nur darauf ankam, zwei erste Näherungswerthe der beiden unbekannten Grössen v, w zu kennen, wo bekanntlich

$$u_1 = vu_2, \quad u_3 = wu_2$$

war. Eine Methode nachzuweisen, wie solche erste Näherungswerthe der Verhältnisszahlen v, w gefunden werden können, sind wir damals noch schuldig geblieben, und wollen jetzt versuchen, diese Schuld abzutragen.

Bloss aus der Theorie solche erste Näherungswerthe von v, w zu entnehmen, scheint uns unmöglich. Man muss dazu nothwendig Beobachtungen zu Hülfe nehmen. Deshalb wollen wir jetzt annehmen, dass man ausser den drei zur Bestimmung der Bahn unbedingt erforderlichen Beobachtungen noch zwei Beobachtungen habe, von denen die eine zwischen der ersten und zweiten, die andere zwischen der zweiten und dritten jener drei unbedingt erforderlichen Beobachtungen liegt; diese beiden Beobachtungen wollen wir respective die erste und zweite Hülfsbeobachtung oder die erste und zweite intermediäre Beobachtung nennen. Solche intermediäre Beobachtungen sich zu verschaffen, wird bei dem Eifer, mit welchem jetzt jeder neue Comet beobachtet wird, gewiss niemals Schwierigkeit haben. Die beobachtete geocentrische Länge und Breite des Cometen in den Momenten der ersten und zweiten intermediären Beobachtung wollen wir respective durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$; die entsprechenden Längen der Sonne durch L, L′ bezeichnen; die Zwischenzeiten zwischen der ersten Hauptbeobachtung und der ersten Hülfsbeobachtung, zwischen der ersten Hülfsbeobachtung und der zweiten Hauptbeobachtung seien $\mathfrak{t}_{1,2}$, $\mathfrak{t}_{2,3}$; und die Zwischenzeiten zwischen der zweiten Hauptbeobachtung und der zweiten Hülfsbeobachtung, zwischen der zweiten Hülfsbeobachtung und der dritten Hauptbeobachtung seien $\mathfrak{t}'_{1,2}$, $\mathfrak{t}'_{2,3}$. Nehmen wir nun an, dass die drei Hauptbeobachtungen nur durch mässige Zwischenzeiten $\tau_{1,2}$, $\tau_{2,3}$ von einander getrennt sind, so wird man auf die beiden folgenden Systeme:

Erste Hauptbeobachtung, erste Hülfsbeobachtung, zweite Hauptbeobachtung;

Zweite Hauptbeobachtung, zweite Hülfsbeobachtung, dritte Hauptbeobachtung;

die beiden in III. gebrauchten nur näherungsweise richtigen Voraussetzungen anzuwenden berechtigt sein, und wird daher nach den aus III. bekannten Formeln, wenn wir der Kürze wegen

$$\mathfrak{k} = \frac{\cos\beta_2'}{\cos\beta_1'} \cdot \frac{\mathrm{tang}\, b \sin(\alpha_2' - L) - \mathrm{tang}\,\beta_2' \sin(\mathfrak{a} - L)}{\mathrm{tang}\,\beta_1' \sin(\mathfrak{a} - L) - \mathrm{tang}\, b \sin(\alpha_1' - L)},$$

$$\mathfrak{k}' = \frac{\cos\beta_2'}{\cos\beta_3'} \cdot \frac{\mathrm{tang}\, b' \sin(\alpha_2' - L') - \mathrm{tang}\,\beta_2' \sin(\mathfrak{a}' - L')}{\mathrm{tang}\,\beta_3' \sin(\mathfrak{a}' - L') - \mathrm{tang}\, b' \sin(\alpha_3' - L')}$$

setzen, die folgenden Gleichungen haben:

$$u_1 = \mathfrak{k}\frac{\mathfrak{t}_{1,2}}{\mathfrak{t}_{2,3}} u_2, \quad u_3 = \mathfrak{k}' \frac{\mathfrak{t}'_{2,3}}{\mathfrak{t}'_{1,2}} u_2.$$

Vergleichen wir nun diese Gleichungen mit den Gleichungen

$$u_1 = v u_2, \quad u_3 = w u_2;$$

so ergiebt sich, dass wir als erste Näherungswerthe

$$v = \mathfrak{k}\frac{\mathfrak{t}_{1,2}}{\mathfrak{t}_{2,3}}, \quad w = \mathfrak{k}' \frac{\mathfrak{t}'_{2,3}}{\mathfrak{t}'_{1,2}}$$

setzen können, und diese ersten Näherungswerthe werden, wenn die Beobachtungen nur zweckmässig gewählt sind, meistens schon der Wahrheit ziemlich nahe kommen. Wie man von diesen ersten Näherungswerthen weiter zu gehen hat, ist aus I. bekannt, und darüber hier nichts weiter zu sagen.

Mancher wird die Frage aufwerfen, ob es überhaupt einer guten Methode entspreche, dergleichen Hülfsbeobachtungen wie vorher in Anwendung zu bringen, d. h. im Allgemeinen mehr Beobachtungen zu benutzen als zur Auflösung des Problems unbedingt erforderlich sind. Diese Frage würde ich unbedingt mit

Nein! beantworten, wenn ich oder ein Anderer eine zweckmässige bloss der Theorie entnommene Methode zur Auffindung erster Näherungswerthe der obigen Verhältnisszahlen anzugeben im Stande wäre. So lange dies aber nicht möglich ist, muss ich bei der obigen Methode stehen bleiben. Auch hat man zu bedenken, dass ja jene beiden Hülfsbeobachtungen gar nicht bei der eigentlichen Auflösung des Problems gebraucht, sondern eben nur zur Ermittelung erster Näherungswerthe der gesuchten Grössen benutzt werden; ist man erst in den Besitz solcher ersten Näherungswerthe gekommen, so werden bei der ferneren Auflösung des Problems die beiden Hülfsbeobachtungen gar nicht in Anspruch genommen. Und um vorläufig nur erste Näherungswerthe zu finden, wird es doch wohl auch verstattet sein, sich vorläufig an nur näherungsweise richtige Voraussetzungen zu halten, wenn dann nur die fernere Auflösung sich bloss völlig streng richtiger Sätze und Formeln als Hülfsmittel bedient, wie in I. geschehen ist. Auch haben in der That die meisten Mathematiker, welche Auflösungen für das Cometenproblem gegeben haben, mehr als nur drei Beobachtungen benutzt, wobei ich u. A. nur an die namentlich in Frankreich sehr beliebte Auflösung von Laplace zu erinnern brauche. Olbers fordert freilich nicht mehr als drei Beobachtungen, aber er nimmt doch, wie wir gleich nachher sehen werden, auch zu einem Resultate der Beobachtung seine Zuflucht, was ja, vom rein theoretischen Standpunkte aus die Sache betrachtet, im Grunde doch wohl ganz dasselbe ist wie der oben eingeschlagene Weg. Freilich haben wir oben noch die Forderung gestellt, dass die Zwischenzeiten $\tau_{1,2}$, $\tau_{2,3}$ nicht zu gross sein sollen; das ist allerdings ein Mangel; da es aber vorläufig nur auf die Ermittelung erster Näherungswerthe ankommt, so werden dieselben schon eine ziemliche Grösse erreichen können; und dann wird man, wenn man die Auflösung I. mit den Auflösungen II., III. vergleicht, zuzugeben nicht abgeneigt sein, dass das Feld der Anwendung der Auflösung I. mindestens doppelt so gross ist als das Feld der Auflösungen II., III., namentlich der die meisten nur näherungsweise richtigen Voraussetzungen sich gestattenden Auflösung III., was jedenfalls der Auflösung I. auch einen Vorzug vor den beiden anderen Auflösungen sichern dürfte.

V.

Bei den Auflösungen II. und III. kam es, wie man sich noch erinnern wird, zuletzt noch darauf an, einen ersten Näherungswerth von u_1 zu finden. Dazu weiss ich nun keinen anderen Weg als den von Olbers angegebenen. Diesen Weg will ich jetzt hier aus einander setzen, jedoch vorläufig nur seinem allgemeinen Princip nach, ohne nur im Geringsten mir das Ansehen geben zu wollen, als hätte ich durch das Folgende die schöne Methode des genannten hochverdienten und von mir hochverehrten Mannes erschöpft, was ich vielmehr späteren Aufsätzen noch vorbehalte.

Die Summe r_1+r_3 der Entfernungen des Cometen von der Sonne in der ersten und dritten Beobachtung, sagt Olbers*), könne nicht kleiner als 1 sein, wenn die scheinbaren Entfernungen des Cometen von der Sonne nur grösser als 30° sind; und auf der anderen Seite habe die Erfahrung gelehrt, dass die uns sichtbaren Cometen, sehr wenige Ausnahmen abgerechnet, innerhalb der Marsbahn sind, deren grosse Halbaxe $1\frac{1}{2}$ ist, woraus sich ergebe, dass r_1+r_3 fast immer kleiner als 3 sein werde. Deshalb sei 2 immer ein genäherter Werth der Summe r_1+r_3. Führe man nun diesen ersten Näherungswerth von r_1+r_3 in die Gleichung

$$(r_1+r_3+s_{1,3})^{\frac{3}{2}}-(r_1+r_3-s_{1,3})^{\frac{3}{2}}=\frac{\tau_{1,3}}{\mu}$$

ein, so enthalte dieselbe nur die unbekannte Grösse $s_{1,3}$, für welche sich daher mittelst der vorhergehenden Gleichung ein erster Näherungswerth finden lasse. Habe man aber auf diese Weise einen ersten Näherungswerth von $s_{1,3}$ ermittelt, so lasse sich, wenn man die Auflösung II. anwendet, mittelst der beiden nach u_1 und u_3 aufzulösenden Gleichungen

$$u_3=-\frac{\Theta\sin\beta_2'-\tau_{2,3}Ku_1}{\tau_{1,2}K_1},$$

$$\begin{aligned}s_{1,3}^2= & R_1^2+R_3^2-2R_1R_3\cos(L_1-L_3)\\ & +2\{R_1\cos(\alpha_1'-L_1)-R_3\cos(\alpha_1'-L_3)\}\cos\beta_1'u_1\\ & +2\{R_3\cos(\alpha_3'-L_3)-R_1\cos(\alpha_3'-L_1)\}\cos\beta_3'u_3\\ & -2\{\sin\beta_1'\sin\beta_3'+\cos(\alpha_1'-\alpha_3')\cos\beta_1'\cos\beta_3'\}u_1u_3+u_1^2+u_3^2;\end{aligned}$$

wenn man die Auflösung III. anwendet, mittelst der beiden nach u_1 und u_3 aufzulösenden Gleichungen

$$u_3=\frac{\tau_{2,3}}{\tau_{1,2}}\cdot\frac{K}{K_1}u_1,$$

$$\begin{aligned}s_{1,3}^2= & R_1^2+R_3^2-2R_1R_3\cos(L_1-L_3)\\ & +2\{R_1\cos(\alpha_1'-L_1)-R_3\cos(\alpha_1'-L_3)\}\cos\beta_1'u_1\\ & +2\{R_3\cos(\alpha_3'-L_3)-R_1\cos(\alpha_3'-L_1)\}\cos\beta_3'u_3\\ & -2\{\sin\beta_1'\sin\beta_3'+\cos(\alpha_1'-\alpha_3')\cos\beta_1'\cos\beta_3'\}u_1u_3+u_1^2+u_3^2;\end{aligned}$$

der erste Näherungswerth von u_1, dessen man bedarf, finden.

Dies ist ihrem allgemeinen Princip nach die von Olbers im Astronomischen Jahrbuche. 1833. S. 251. angegebene Methode, auf deren weitere praktische Ausführung, so wie ihr dieselbe in meisterhafter Weise von ihrem Urheber gege-

*) Man vergl. weiterer Erläuterung wegen die Note auf S. 122. in Thl. XVII. des Archivs der Mathematik und Physik.

ben worden ist, ich mich jetzt nicht einlasse. In der älteren Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen zu berechnen. Weimar 1797. Neue Ausgabe 1847. geht Olbers von ganz willkührlichen Voraussetzungen für die eine unbekannte Grösse, auf welche das Problem von ihm zurückgebracht wird, aus, wie man aus den dort zur Erläuterung der Methode gerechneten Beispielen sehen kann.

Weil bei der vorhergehenden Methode die Bestimmung der Sehne $s_{1,3}$ aus der Gleichung

$$(r_1+r_3+s_{1,3})^{\frac{3}{2}}-(r_1+r_3-s_{1,3})^{\frac{3}{2}}=\frac{\tau_{1,3}}{\mu}$$

ein Hauptmoment bildet, so will ich jetzt noch zeigen, wie sich diese Gleichung nach meiner Meinung am besten auflösen lässt.

Weil r_1, r_3, $s_{1,3}$ die drei Seiten eines ebenen Dreiecks sind, so ist immer

$$s_{1,3}<r_1+r_3,$$

und man kann also

$$\sin\omega=\frac{s_{1,3}}{r_1+r_3}$$

setzen Dadurch wird die aufzulösende Gleichung

$$(r_1+r_3+s_{1,3})^{\frac{3}{2}}-(r_1+r_3-s_{1,3})^{\frac{3}{2}}=\frac{\tau_{1,3}}{\mu}$$

auf die folgende Form gebracht:

$$(1+\sin\omega)^{\frac{3}{2}}-(1-\sin\omega)^{\frac{3}{2}}=\frac{\tau_{1,3}}{\mu(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}}.$$

Weil aber, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$(\cos\tfrac{1}{2}\omega\pm\sin\tfrac{1}{2}\omega)^2=1\pm\sin\omega$$

ist, so kann man die obige Gleichung auch auf die Form

$$(\cos\tfrac{1}{2}\omega+\sin\tfrac{1}{2}\omega)^3-(\cos\tfrac{1}{2}\omega-\sin\tfrac{1}{2}\omega)^3=\frac{\tau_{1,3}}{\mu(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}},$$

oder, wenn man die beiden Cubi auf der linken Seite des Gleichheitszeichens entwickelt, auf die Form

$$6\cos\tfrac{1}{2}\omega^2\sin\tfrac{1}{2}\omega+2\sin\tfrac{1}{2}\omega^3=\frac{\tau_{1,3}}{\mu(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}}$$

bringen. Setzt man nun

$$\cos\frac{1}{2}\omega^2 = 1 - \sin\frac{1}{2}\omega^2,$$

so wird die vorstehende Gleichung:

$$6\sin\frac{1}{2}\omega - 4\sin\frac{1}{2}\omega^3 = \frac{\tau_{1,3}}{\mu(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{3}{4}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\sqrt{2}} = -\frac{\tau_{1,3}}{8\mu\sqrt{2}.(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}}.$$

Weil $s_{1,3} < r_1 + r_3$ ist, so ist

$$r_1 + r_3 + s_{1,3} < 2(r_1+r_3),$$

und folglich

$$(r_1+r_3+s_{1,3})^{\frac{3}{2}} < 2^{\frac{3}{2}}(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}.$$

Also ist um so mehr

$$(r_1+r_3+s_{1,3})^{\frac{3}{2}} - (r_1+r_3-s_{1,3})^{\frac{3}{2}} < 2^{\frac{3}{2}}(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}},$$

und daher, weil

$$(r_1+r_3+s_{1,3})^{\frac{3}{2}} - (r_1+r_3-s_{1,3})^{\frac{3}{2}} = \frac{\tau_{1,3}}{\mu}$$

ist:

$$\frac{\tau_{1,3}}{\mu} < 2^{\frac{3}{2}}(r_1+r_3^{\frac{3}{2}})$$

oder

$$\frac{\tau_{1,3}}{2\mu\sqrt{2}.(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}} < 1.$$

Daher ist man berechtigt

$$\sin\theta = \frac{\tau_{1,3}}{2\mu\sqrt{2}.(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}}$$

zu setzen, wodurch wir nach dem Obigen die Gleichung

$$\left(\frac{\text{in}\frac{1}{2}\omega}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{3}{4}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4}\sin\theta$$

oder die Gleichung

$$\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{3}{4}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\sin\theta = 0$$

erhalten. Nach einer bekannten goniometrischen Formel ist aber

$$\sin\frac{1}{3}\theta^3 - \frac{3}{4}\sin\frac{1}{3}\theta + \frac{1}{4}\sin\theta = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der vorhergehenden, so ergiebt sich:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\sqrt{2}} = \sin\frac{1}{3}\theta,\ \sin\frac{1}{2}\omega = \sin\frac{1}{3}\theta.\sqrt{2},$$

und man hat also zur Berechnung von $s_{1,3}$ nach dem Obigen die folgenden sehr bequemen Formeln:

$$\sin\theta = \frac{\tau_{1,3}}{2\mu\sqrt{2}.(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}},\ \sin\frac{1}{2}\omega = \sin\frac{1}{3}\theta.\sqrt{2},\ s_{1,3} = (r_1+r_3)\sin\omega.$$

Weil aber

$$\cos\frac{1}{2}\omega^2 = 1 - 2\sin\frac{1}{3}\theta^2 = \cos\frac{1}{3}\theta^2 - \sin\frac{1}{3}\theta^2 = \cos\frac{2}{3}\theta$$

ist, woraus sich

$$\sin\omega = 2\sin\frac{1}{2}\omega\cos\frac{1}{2}\omega = 2\sqrt{2}.\sin\frac{1}{3}\theta\sqrt{\cos\frac{2}{3}\theta}$$

ergiebt, so kann man die Formeln zur Berechnung von $s_{1,3}$ auch auf folgende Art darstellen:

$$\sin\theta = \frac{\tau_{1,3}}{2\mu\sqrt{2}.(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}},\quad s_{1,3} = 2\sqrt{2}.(r_1+r_3)\sin\frac{1}{3}\theta\sqrt{\cos\frac{2}{3}\theta}.$$

Dass die Gleichung

$$(r_1+r_3+s_{1,3})^{\frac{3}{2}} - (r_1+r_3-s_{1,3})^{\frac{3}{2}} = \frac{\tau_{1,3}}{\mu}$$

in Bezug auf $s_{1,3}$ als unbekannte Grösse immer nur e i n e reelle positive Wurzel, die kleiner als r_1+r_3 ist, haben kann, lässt sich leicht auf folgende Art zeigen. Sind nämlich überhaupt s und s zwei reelle positive Grössen, die unter sich ungleich und beide kleiner als r_1+r_3 sind; so ist, wenn wir s als die grössere dieser beiden Grössen annehmen:

$$(r_1+r_3+s)^{\frac{3}{2}} > (r_1+r_3+s)^{\frac{3}{2}};$$

$$(r_1+r_3-s)^{\frac{1}{2}} < (r_1+r_3-\mathfrak{s})^{\frac{1}{2}};$$

also

$$(r_1+r_3+s)^{\frac{3}{2}}-(r_1+r_3-s)^{\frac{3}{2}} > (r_1+r_3+\mathfrak{s})^{\frac{3}{2}}-(r_1+r_3-\mathfrak{s})^{\frac{3}{2}},$$

woraus unmittelbar erhellt, dass es nicht zwei reelle positive Werthe von $s_{1,3}$, die kleiner als r_1+r_3 sind, geben kann, für welche die Grösse

$$(r_1+r_3+s_{1,3})^{\frac{3}{2}}-(r_1+r_3-s_{1,3})^{\frac{3}{2}}$$

ein und denselben Werth erhält, wodurch die oben ausgesprochene Behauptung erwiesen ist.

Die eine reelle positive Wurzel der Gleichung

$$(r_1+r_3+s_{1,3})^{\frac{3}{2}}-(r_1+r_3-s_{1,3})^{\frac{3}{2}}=\frac{\tau_{1,3}}{\mu},$$

welche unter r_1+r_3 dieselbe nach dem Vorhergehenden nur haben kann, erhält man aber, wenn man in den Gleichungen

$$\sin\theta=\frac{\tau_{1,3}}{2\mu\sqrt{2}.(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}},\quad s_{1,3}=2\sqrt{2}.(r_1+r_3)\sin\frac{1}{3}\theta\sqrt{\cos\frac{2}{3}\theta}$$

den Winkel θ positiv und kleiner als 90^0 nimmt, was vermöge der ersten dieser beiden Gleichungen offenbar verstattet ist. Dann sind nämlich offenbar auch $\frac{1}{3}\theta$ und $\frac{2}{3}\theta$ positiv und kleiner als 90^0, und die Formel

$$s_{1,3}=2\sqrt{2}.(r_1+r_3)\sin\frac{1}{3}\theta\sqrt{\cos\frac{2}{3}\theta}$$

liefert also, die Quadratwurzeln positiv genommen, für $s_{1,3}$ einen reellen positiven Werth, welches der gesuchte ist.

Wie schon oben bemerkt worden ist, habe ich in dieser Abhandlung zunächst und hauptsächlich den Zweck vor Augen gehabt, die zweckmässigsten Auflösungen des Cometenproblems im Allgemeinen zu skizziren und in einer Generalübersicht dem Leser vor die Augen zu führen. Die hin und wieder noch nöthige Ausfeilung der betreffenden Formeln, um ihnen zur Anwendung bei numerischen Rechnungen eine möglichst bequeme Gestalt zu geben, werde ich, insofern sich die vorliegende und die frühere Abhandlung über das so wichtige und wegen seiner Schwierigkeit so höchst interessante Cometenproblem des Beifalls der geehrten Leser des Archivs einigermassen erfreuen sollten, vielleicht noch zum Gegenstande einiger späteren kürzeren Aufsätze machen, wo denn zur besseren Erläuterung auch vollständig ausgerechnete Beispiele nicht fehlen sollen, indem diese Beispiele mir zugleich eine passende Gelegenheit darbieten werden, zu zeigen, wie die sämmtlichen Elemente einer Bahn zu bestimmen sind, was freilich, wenigstens in Bezug auf die Neigung und die Länge des Knotens, schon aus der früheren Abhandlung mit hinreichender Deutlichkeit erhellet, und übrigens in seiner weiteren Ausführung keinem mit der wissenschaftlichen Astronomie gehörig vertrauten Leser unbekannt sein kann.

XIV.

Ueber die Ausgleichung der Beobachtungsfehler.

(Methode der kleinsten Quadrate.)

Von dem

Herrn Professor Dr. J. Dienger

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

Die Grundsätze, um die es sich in diesem Aufsatze handelt, sind allerdings schon seit geraumer Zeit festgestellt, so dass es sich jetzt mehr um die Methode der Darstellung und der Beweise handeln wird, als um jene selbst; trotzdem aber scheint es mir, dass gerade die Nachweisung eben jener Grundsätze sehr Vieles zu wünschen übrig lasse. Ich habe es desshalb im Folgenden versucht, eine folgerichtig durchgeführte, zusammenhängende Darstellung jener Grundsätze und der auf sie gebauten Lehren zu geben. Die Grundansicht, von der ich ausgegangen bin, ist die von Hagen, wie sie auch Wittstein in seiner Uebersetzung von Naviers Differential- und Integralrechnung befolgt hat. Dass bei einem schon mehrfach bearbeiteten Gegenstande die Lehrsätze nicht neu sind, versteht sich von selbst; es war auch nicht meine Absicht, dergleichen neue zu erfinden, sondern bloss die vorhandenen in mathematisch strenger Weise zu begründen. Die paar Sätze aus der Wahrscheinlichkeitslehre, die angewendet wurden, finden sich in jedem elementaren Lehrbuch dieses Zweiges der mathematischen Wissenschaften.

§. 1.

Alle unsere Beobachtungen sind mit Fehlern behaftet, und es ist uns gewissermassen unmöglich, diese Fehler durchaus zu vermeiden, zum mindesten haben wir kein Mittel, diess zu erkennen, so dass wir also jedenfalls auf Fehler rechnen müssen. Diese Fehler werden mehr oder weniger leicht begangen werden, je nachdem sie kleiner oder grösser sind. Je mehr ein solcher Fehler möglich ist, desto eher wird er begangen werden, desto eher wird man also darauf zählen können, dass er zum Vorschein komme; je grösser er ist, d. h. je weniger er, bei guten Beobachtungen, möglich ist, desto weniger wird man auf ihn zählen dürfen. Ueber eine gewisse Gränze hinaus wird es bei genauen Beobachtungen möglicher Weise keine Fehler mehr geben; eben so wird man auch annehmen dürfen, dass ein jeder Fehler positiv oder negativ vorkommen kann, d. h. dass man eben so leicht über den wahren Werth des durch Beobachtung Gesuchten fehlen könne, als unter denselben.

Man setzt natürlich voraus, dass die Beobachtungen selbst mit so viel Sorgfalt als möglich angestellt seien, so dass, um den wahren Werth k einer durch Beobachtung zu bestimmenden Grösse zu finden, man zu ihrem durch Beobachtung gefundenen Werthe k_1 nur noch eine sehr kleine Grösse k' hinzufügen muss. Diese Bedingung ist durchaus nothwendig; schlechte Beobachtungen können nicht durch die Methode zu guten gestempelt werden.

Jeder Fehler, der einer Beobachtung anhaftet, kann betrachtet werden als das Ergebniss einer grossen Anzahl sehr kleiner Fehler, durch deren Zusammentreffen er entsteht. Jede Beobachtung lässt sich nämlich offenbar zerlegt denken in eine sehr grosse Anzahl Operationen, deren jede mit Fehlern behaftet ist; die Summe aller dieser einzelnen Fehler ist nun der Beobachtungsfehler, der begangen wurde. Es wird daher erlaubt sein, im Allgemeinen jeden Beobachtungsfehler anzusehen, als entstanden durch Summirung einer unendlich grossen Anzahl unendlich kleiner gleicher Fehler, die wir Elementarfehler nennen wollen. Jeder dieser Elementarfehler kann positiv oder negativ sein. Diese Voraussetzung zugegeben, entwickelt sich nun die gesammte Theorie leicht.

§. 2.

Sei α der Elementarfehler und sei m die Anzahl der Elementarfehler, indem wir alle diese Elementarfehler gleich gross voraussetzen. Jeder dieser m Fehler kann positiv oder negativ sein. Aus der Lehre von den Verbindungen findet man für die Anzahl der möglichen Verbindungen:

wenn alle Elementarfehler positiv sind .... 1, und also der ganze Fehler $m\alpha$;

wenn $m-1$ Elementarfehler positiv sind, 1 negativ ist .... m, und also der ganze Fehler $(m-2)\alpha$;

wenn $m-2$ Elementarfehler positiv, 2 negativ sind ... $\frac{m(m-1)}{1.2}$, und also der ganze Fehler $(m-4)\alpha$;

wenn $m-3$ Elementarfehler positiv, 3 negativ sind ... $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$, und also der ganze Fehler $(m-6)\alpha$;

⋮

wenn alle negativ sind ...... 1, und also der ganze Fehler $-m\alpha$.

Es ist offenbar erlaubt, m als gerade Zahl anzusehen und also $m=2n$ zu setzen. Nun ist klar, dass ein Fehler in dem Maasse möglicher sein wird, als die Anzahl der Verbindungen, durch die er entstehen kann, grösser ist. Heissen wir also allgemein v den Beobachtungsfehler, x seine relative Möglichkeit, so hat man folgende Uebersicht:

$v=$	$x=$
0	$\frac{2n(2n-1)\ldots.(n+1)}{1.2\ldots\ldots n}$,
$\pm 2\alpha$	$\frac{2n(2n-1)\ldots.(n+2)}{1.2\ldots..(n-1)}$,
$\pm 4\alpha$	$\frac{2n(2n-1)\ldots..(n+3)}{1.2\ldots..(n-2)}$,
⋮	
$\pm 2n\alpha$	1.

Die Zähler der zweiten Reihe haben nur insofern eine Bedeutung, als sie die Verhältnisse der Möglichkeiten der betreffenden Beobachtungsfehler ausdrücken. Ein Gesammtfehler $\pm 2n\alpha$, im Verhältniss zum Fehler 0, wird also möglich sein im Verhältniss von 1 zu $\frac{2n(2n-1)\ldots.(n+1)}{1.2\ldots.n}$. Erinnert man sich, dass n unendlich gross ist, so ist dieses Verhältniss unendlich klein, also ist der Fehler $\pm 2n\alpha$, im Verhältniss zum Fehler 0, so viel als unmöglich. Ganz bestimmt wird man diess im Allgemeinen aber nur von einem unendlich grossen Fehler behaupten dürfen, so dass wir $2n\alpha$ als unendlich grosse Zahl ansehen müssen.

Sei nun s_0 die (absolute) Möglichkeit eines Fehlers 0, s die eines Fehlers $v=2r\alpha$, v' die eines Fehlers $(2r+2)\alpha$, so ist nach dem Obigen:

$$\frac{s}{s_0}=\frac{\frac{2n(2n-1)\ldots\ldots(n+r+1)}{1.2\ldots(n-r)}}{\frac{2n(2n-1)\ldots\ldots(n+1)}{1.2\ldots\ldots n}},\quad \frac{s'}{s_0}=\frac{\frac{2n(2n-1)\ldots\ldots(n+r+2)}{1.2\ldots\ldots(n-r-1)}}{\frac{2n(2n-1)\ldots\ldots(n+1)}{1.2\ldots\ldots n}}.$$

Sei nun

$$v'-v=\Delta v=2\alpha,\quad s'-s=\Delta s;$$

so ist

$$\frac{s'-s}{s_0}=\frac{\Delta s}{s_0}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{s'-s}{s_0}=\frac{s}{s_0}\left(\frac{n-r}{n+r+1}-1\right)=-\frac{s}{s_0}\cdot\frac{2r+1}{n+r+1}=\frac{\Delta s}{s_0},$$

$$v=2r\alpha=r\Delta v,\quad r=\frac{v}{\Delta v};$$

also

$$\frac{\Delta s}{s_0}=-\frac{s}{s_0}\cdot\frac{2v+\Delta v}{n\Delta v+v+\Delta v},\quad \frac{\Delta s}{s\Delta v}=-\frac{2v+\Delta v}{n\Delta v^2+v\Delta v+\Delta v^2}.$$

Nun ist Δv, so wie Δs, unendlich klein, $n\Delta v=2n\alpha$ unendlich gross, also $n\Delta v^2$ im Allgemeinen endlich und positiv, so dass wir seinen Werth $=\frac{1}{h^2}$ setzen wollen. Daraus folgt also:

$$\frac{1}{s}\frac{\partial s}{\partial v}=-2h^2v,\quad s=c.e^{-h^2v^2},$$

worin c eine willkührliche Konstante ist. Für $v=0$ ist $s=s_0$, also endlich:

$$s=s_0\,.\,e^{-h^2v^2}.\qquad (1)$$

Diess ist nun der Ausdruck der relativen Möglichkeit eines Fehlers v, in Bezug auf einen Fehler 0.

§. 3.

Suchen wir nun die **Wahrscheinlichkeit**, dass gerade ein **bestimmter Fehler** begangen worden sei. Es ist von vorn herein klar, dass, da eine unendliche Zahl von Fehlern **möglich** ist, die Wahrscheinlichkeit, dass gerade ein einziger bestimmter aus dieser Menge begangen worden, unendlich klein sein wird; dafür aber wird das Verhältniss der Wahrscheinlichkeiten zweier solcher bestimmter Fehler ein endliches und offenbar gleich sein dem Verhältniss ihrer relativen Möglichkeiten. Sei also w_0 die (unendlich kleine) Wahrscheinlichkeit, dass gerade der Fehler 0 begangen worden, so ist die Wahrscheinlichkeit w, dass gerade der Fehler v begangen wurde:

$$w = w_0 . e^{-h^2v^2}, \qquad (2)$$

worin also w die Wahrscheinlichkeit ist, dass v der Fehler der gemachten Beobachtung sei.

Nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist aber die Wahrscheinlichkeit, dass von einer gewissen Anzahl Ereignisse, von deren jedem man die Wahrscheinlichkeit kennt, irgend eines eintreffe, gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgend ein Beobachtungsfehler begangen worden sei, $\Sigma w_0 e^{-h^2v^2}$, worin das Zeichen Σ andeutet, dass man die Summe aller Grössen $w_0 e^{-h^2v^2}$ nehmen soll für alle möglichen Werthe von v. Nun ist aber gewiss, dass irgend ein Beobachtungsfehler begangen wurde. Daher hat man:

$$\Sigma w_0 e^{-h^2v^2} = 1. \qquad (3)$$

Daraus folgt:

$$w_0 = \frac{1}{\Sigma e^{-h^2v^2}} = \frac{\partial v}{\Sigma e^{-h^2v^2}\partial v} = \frac{\partial v}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2v^2}\partial v}.$$

Da aber bekanntlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2v^2}\partial v = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

so ist also

$$w_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\partial v,$$

und folglich:

$$w = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2v^2}\partial v. \qquad (4)$$

Diese Grösse drückt also die (theoretische) Wahrscheinlichkeit aus, dass v der Fehler sei, den man in der gemachten Beobachtung begangen habe.

Nach dem angeführten Satze der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgt daraus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der bei der gemachten Beobachtung begangene Fehler zwischen α und β ($\beta > \alpha$) liege, ist:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-h^2 v^2} \partial v. \qquad (5)$$

Diese Grösse (5) drückt somit auch die Wahrscheinlichkeit aus, dass der gemachte Beobachtungsfehler die Gränzen α und β nicht überschreite. Daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeit a priori, dass bei der gemachten Beobachtung kein Fehler vorkomme, dessen absoluter Werth α übersteige, ist:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-h^2 v^2} \partial v = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\alpha} e^{-h^2 v^2} \partial v, \quad \alpha > 0. \qquad (6).$$

§. 4.

Das Integral, das wir so eben gefunden haben, ist für unsere Untersuchungen sehr wichtig. Man hat Tafeln dafür, und namentlich hat Encke in dem Berliner astronomischen Jahrbuche von 1834 zwei solche gegeben. Setzt man in (6) $hv = t$, so wird jenes Integral zu $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} \partial t$, wofür nun Encke eine Tafel gegeben. Eine andere hat er für $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho z} e^{-t^2} \partial t$ gegeben, wo

$$\varrho = 0 \cdot 4769360 \qquad (§. 5.).$$

Man ersieht aus (6), dass, je grösser h^2 ist, desto unwahrscheinlicher grössere Beobachtungsfehler sind. Daraus folgt, dass von zwei Beobachtungsweisen, für welche h^2 verschieden ist, diejenige die bessere ist, für die h^2 grösser ist. Daher kommt es, dass man h für das Maass der Genauigkeit der Beobachtungsweise, der es zugehört, nimmt. Für verschiedene Beobachtungsarten wird also h^2 veränderlich sein, aber konstant für Beobachtungen, die nach derselben Weise gemacht werden.

§. 5.

Vermöge der in §. 4. erwähnten Tafeln wird es leicht sein, a priori über die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens bestimmter Beobachtungsfehler zu entscheiden. Z. B. für $vh = 1{\cdot}13$ giebt die eine Tafel:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1\cdot 13} e^{-t^2}\partial t = 0{\cdot}8899707,$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass der begangene Beobachtungs fehler, seinem absoluten Werthe nach, nicht über $\frac{1\cdot 13}{h}$ liege, ist 0·8899707. Offenbar kann man diess auch so erklären, dass man sagt, von 10000000 begangenen Beobachtungsfehlern liegen 8899707 zwischen $-\frac{1\cdot 13}{h}$ und $+\frac{1\cdot 13}{h}$.

Der Werth von vh, für den obiges Integral $\frac{1}{2}$ ist, ist von besonderer Wichtigkeit. Man findet, dass alsdann $vh = 0{\cdot}4769360$, welche Zahl wir im Folgenden mit ϱ bezeichnen wollen. Heissen wir ebenso r den Werth von v, den wir aus dieser Gleichung erhalten, so dass

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{rh} e^{-t^2}\partial t = 0{\cdot}5,$$

so haben wir

$$rh = \varrho, \qquad (7)$$

und r ist nun eine Grösse, so beschaffen, dass für den bestimmten Werth h es eben so viele Fehler geben wird, die zwischen $-r$ und $+r$ liegen, als ausserhalb dieser Gränzen. Man heisst desswegen r den **wahrscheinlichen Fehler** der Beobachtungsmethode, der das Mass der Genauigkeit h entspricht. Aus der Gleichung (7) folgt, dass je grösser letzteres ist, desto kleiner der wahrscheinliche Fehler sein wird und umgekehrt. Man könnte auch sagen, dass r der Fehler sei, für den die Wahrscheinlichkeit des Bestehens oder Nichtbestehens gleich gross ist. Kennt man r, so ist h leicht daraus bestimmt. Weiss man z. B., dass bei einer gewissen Beobachtungsmethode ein Fehler von 2″ eben so leicht möglich ist, als bei einer anderen ein solcher von 1″, so kann man $r = 2$, $r' = 1$ annehmen und findet $h : h' = 1 : 2$, d. h. die zweite Beobachtungsweise ist doppelt so genau als die erste.

§. 6.

Sei F eine Funktion gewisser Veränderlichen x, y, z, ..., gegeben durch die Gleichung:

$$F = ax + by + cz + \ldots\ldots, \qquad (8)$$

worin $a, b, c, \ldots\ldots$ Konstanten sind. Seien ferner $x, y, z, \ldots\ldots$ aus Beobachtungen zu bestimmen, und nehmen wir an, man wisse, dass für

$$\begin{aligned}
a &= a_1, \quad b = b_1, \quad c = c_1, \ldots\ldots, \text{ sei } F = M_1, \\
a &= a_2, \quad b = b_2, \quad c = c_2, \ldots\ldots, \quad ,, \quad F = M_2, \\
a &= a_3, \quad b = b_3, \quad c = c_3, \ldots\ldots, \quad ,, \quad F = M_3, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

wo

$$a_1, b_1, c_1, \ldots\ldots; \quad a_2, b_2, c_2, \ldots\ldots \quad \text{u. s. w.}$$

entweder Konstanten sind, die man zum Voraus kennt, oder die durch die nämlichen Beobachtungen bestimmt sind, durch welche $M_1, M_2, \ldots\ldots$ bestimmt wurden. Man wird somit haben:

$$\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1z + \ldots\ldots &= M_1, \\
a_2x + b_2y + c_2z + \ldots\ldots &= M_2, \\
a_3x + b_3y + c_3z + \ldots\ldots &= M_3, \qquad (9) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

wo es sich um die Bestimmung von $x, y, z \ldots\ldots$ handelt. Wenn die Werthe der Grössen $a, b, c, \ldots\ldots, M$ durchaus genau wären, so würden von den Gleichungen (9) so viele, als Unbekannte vorhanden sind, genügen zur Bestimmung dieser Unbekannten, und die etwa noch weiter vorhandenen Gleichungen müssten durch die Werthe dieser gefundenen Grössen erfüllt sein. Diese Voraussetzung ist aber unzulässig (§. 1.). Nun ist klar, dass wir, bei der Unvermeidlichkeit der Beobachtungsfehler, uns der Wahrheit immer mehr nähern müssen, je mehr genaue Beobachtungen man macht; desshalb wird man in unserm Falle mehr Gleichungen haben, als zur unmittelbaren Bestimmung von $x, y, z, \ldots$ gerade nothwendig sind, und es muss also eine Rechnungsweise gesucht werden, die jede Beobachtung nach dem ihr zukommenden Werthe mit in Anschlag bringt.

Wir haben so eben vorausgesetzt, dass die Gleichungen (9) aus einer einzigen Gleichung (8) entspringen. Diese Voraussetzung ist aber keineswegs unerlässlich; im Gegentheil ist es gleichgültig, woher die Gleichungen (9) stammen, und wir werden desshalb nur annehmen, dass man ein System (9) von Gleichungen (des ersten Grades) aufzulösen habe, in dem mehr Gleichungen als Unbekannte vorhanden sind.

Man kann z. B. allgemein annehmen, dass

$$F' = a'x + b'y + c'z + \ldots\ldots,$$

$$F'' = a''x + b''y + c''z + \ldots\ldots,$$

$$\vdots$$

und dass für

$$a' = a_1,\ b' = b_1,\ c' = c_1,\ \ldots\ldots : F' = M_1,$$

$$a'' = a_2,\ b'' = b_2,\ c'' = c_2,\ \ldots\ldots : F'' = M_2,$$

$$\vdots$$

und man erhält so die Gleichungen (9) weit allgemeiner.

Sei nun h_1 das Mass der Genauigkeit (§. 4.) für die Beobachtungsmethode, aus der die Grössen in der ersten Gleichung (9) erhalten worden; h_2 eben so für die zweite u. s. f.; sei weiter w'_0 die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers $=0$ für die erste Methode, w''_0 für die zweite u. s. f., so ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers $F' - M_1 = v_1$:

$$w'_0 e^{-h_1^2 v_1^2} \quad (\S.\ 3.),$$

für einen Fehler $F'' - M_2 = v_2$:

$$w''_0 e^{-h_2^2 v_2^2} \quad \text{u. s. f.}$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle diese Fehler zugleich bestehen:

$$w'_0 w''_0 w'''_0 \ldots\, e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + h_3^2 v_3^2 + \ldots\ldots)}.$$

Je nachdem man nun eine Annahme macht über die wahren Werthe der Unbekannten x, y, z, ..., werden die Werthe von F', F'', ..., also auch der Fehler v_1, v_2, ..., sich ändern. Jede solche Annahme kann demnach angesehen werden, als eine Ursache, deren Wirkung das Bestehen der bestimmten Fehler v_1, v_2, ... ist. Da, bei willkührlicher Annahme, x, y, z, ... alle möglichen (reellen) Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ haben können, so giebt es somit eine Unendlichkeit solcher Annahmen, und nun ist, nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte dieser möglichen Annahmen gerade die rechte sei, ein Bruch, dessen Zähler gleich ist der Wahrscheinlichkeit der Fehler unter der Annahme des Bestehens jener Werthe von x, y, z, ..., und dessen Nenner die Summe aller der ähnlichen Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Systeme von x, y, z, ... ist, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass gerade ein bestimmtes System der x, y, z, ... das rechte sei, ist:

$$\frac{w'_0 w''_0 w'''_0 \ldots\ldots e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + h_3^2 v_3^2 + \ldots\ldots)}}{\Sigma w'_0 w''_0 w'''_0 \ldots\ldots e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + h_3^2 v_3^2 + \ldots\ldots)}}$$
$$= \frac{e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + h_3^2 v_3^2 + \ldots\ldots)}}{\Sigma e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + h_3^2 v_3^2 + \ldots\ldots)}},$$

wo das Zeichen Σ eine ähnliche Bedeutung wie früher hat. Dieser Ausdruck ist auch gleich:

$$\frac{e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + h_3^2 v_3^2 + \ldots\ldots)} \partial x \partial y \partial z \ldots\ldots}{\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + h_3^2 v_3^2 + \ldots\ldots)} \partial x \partial y \partial z \ldots\ldots}$$
$$= k \partial x \partial y \partial z \ldots e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + h_3^2 v_3^2 + \ldots\ldots)}, \qquad (10)$$

worin k bestimmt ist durch die Gleichung

$$k \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + h_3^2 v_3^2 + \ldots\ldots)} \partial x \partial y \partial z \ldots\ldots = 1. \qquad (11)$$

Aus der unendlichen Anzahl aller möglichen Hypothesen über die wahren Werthe von x, y, z, ... wird man nun die auszuwählen haben, deren Wahrscheinlichkeit ein Maximum ist; d. h. man wird das System der x, y, z, ... auswählen, für das die Grösse:

$$e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + h_3^2 v_3^2 + \ldots\ldots)}$$

ein Maximum, folglich die Grösse

$$h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + h_3^2 v_3^2 + \ldots\ldots = \Omega \qquad (12)$$

ein Minimum ist. Hierin liegt der Grund der gebräuchlichen Benennung der **Methode der kleinsten Quadrate.**

Man wird also haben müssen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0, \quad \ldots\ldots, \qquad (13)$$

d. h.

$$\left.\begin{aligned}
h_1^2 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + h_2^2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + h_3^2 v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x} + \ldots &= 0,\\
h_1^2 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + h_2^2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + h_3^2 v_3 \frac{\partial v_3}{\partial y} + \ldots &= 0,\\
h_1^2 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} + h_2^2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} + h_3^2 v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} + \ldots &= 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

$$\vdots$$

Nun ist

$$v_1 = M_1 - F' = M_1 - (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots\ldots),$$

$$v_2 = M_2 - F'' = M_2 - (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots\ldots),$$

$$\vdots$$

also

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = -a_1,\quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = -b_1,\quad \frac{\partial v_1}{\partial z} = -c_1,\ \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = -a_2,\quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = -b_2,\quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = -c_2,\ \ldots\ldots$$

$$\vdots$$

Daher werden die Gleichungen (14):

$$\left.\begin{aligned}
&-h_1^2(M_1 - a_1 x - b_1 y - c_1 z - \ldots\ldots) a_1\\
&-h_2^2(M_2 - a_2 x - b_2 y - c_2 z - \ldots\ldots) a_2 - \ldots\ldots
\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}
&-h_1^2(M_1 - a_1 x - b_1 y - c_1 z - \ldots\ldots) b_1\\
&-h_2^2(M_2 - a_2 x - b_2 y - c_2 z - \ldots\ldots) b_2 - \ldots\ldots
\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\vdots$$

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}
h_1^2 a_1^2 + h_2^2 a_2^2 + h_3^2 a_3^2 + \ldots\ldots &= [h^2 a^2],\\
h_1^2 a_1 b_1 + h_2^2 a_2 b_2 + h_3^2 a_3 b_3 + \ldots\ldots &= [h^2 ab],\\
h_1^2 a_1 c_1 + h_2^2 a_2 c_2 + h_3^2 a_3 c_3 + \ldots\ldots &= [h^2 ac],
\end{aligned} \qquad (15)$$

$$\vdots$$

so erhält man die Gleichungen:

$$[h^2a^2]x + [h^2ab]y + [h^2ac]z + \ldots\ldots = [h^2Ma],$$
$$[h^2ab]x + [h^2b^2]y + [h^2bc]z + \ldots\ldots = [h^2Mb],$$
$$[h^2ac]x + [h^2bc]y + [h^2c^2]z + \ldots\ldots = [h^2Mc], \qquad (16)$$
$$\vdots$$

aus denen nun x, y, z, ... zu bestimmen sind. Für den besonderen (allerdings häufigen) Fall, dass $h_1 = h_2 = h_3 = \ldots\ldots$, werden die Gleichungen (16) zu:

$$[a^2]x + [ab]y + [ac]z + \ldots\ldots = [Ma],$$
$$[ab]x + [b^2]y + [bc]z + \ldots\ldots = [Mb],$$
$$[ac]x + [bc]y + [c^2]z + \ldots\ldots = [Mc], \qquad (17)$$
$$\vdots$$

Seien g_1, g_2, g_3, ... Zahlen, so bestimmt, dass

$$h_1^2 : h_2^2 : h_3^2 : \ldots\ldots = g_1 : g_2 : g_3 : \ldots\ldots$$

so werden die Gleichungen (16) zu:

$$[ga^2]x + [gab]y + [gac]z + \ldots\ldots = [Mag],$$
$$[gab]x + [gb^2]y + [gbc]z + \ldots\ldots = [Mbg],$$
$$[gac]x + [gbc]y + [gc^2]z + \ldots\ldots = [Mcg], \qquad (18)$$
$$\vdots$$

Sind g_1, g_2, ... ganze Zahlen, was man immer einrichten kann, so sieht man, dass das Gleichungssystem (18) auf das (17) zurückkommt, wenn man nur bei der Ableitung des Systems (17) aus den Grundgleichungen (9) jede dieser letztern so viel mal zählt, als die ihr entsprechende Zahl g angiebt. Daher rührt die Benennung: Gewicht einer Beobachtung, die man den Zahlen g beigelegt hat. Da die Gewichte blosse Verhältnisse sind, so ist es weit bequemer, dieselben statt der Genauigkeitsmasse einzuführen. Ist allgemein r der wahrscheinliche Fehler (§. 5.), der dem Genauigkeitsmass h entspricht, so ist:

$$g_1 : g_2 : g_3 : \ldots\ldots = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2} : \frac{1}{r_3^2} : \ldots\ldots \qquad (19)$$

§. 7.

Wir haben in §. 6. vorausgesetzt, dass die Grundgleichungen (9) die lineare Form haben. Jede andere Form kann aber auf diese zurückgeführt werden. Gesetzt es sei:

$$F' = \varphi'(x, y, z, \ldots\ldots, a, b, c \ldots\ldots),$$

$$F'' = \varphi''(x, y, z, \ldots\ldots, a, b, c \ldots\ldots),$$
$$\vdots$$

und man habe wieder für

$$a = a_1, \; b = b_1, \; c = c_1, \ldots\ldots, \; F' = M_1,$$

$$a = a_2, \; b = b_2, \; c = c_2, \ldots\ldots, \; F'' = M_2,$$
$$\vdots$$

so wähle man n der dadurch zu erhaltenden Gleichungen aus (wenn n die Anzahl der Uebekannten $x, y, z, \ldots\ldots$ ist) und berechne nun daraus Werthe von $x, y, z, \ldots\ldots$ Seien $x_0, y_0, z_0 \ldots\ldots$ diese Werthe, $x_0 + x'$, $y_0 + y'$, $z_0 + z'$, ... aber die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten, so werden $x', y', z', \ldots$ im Allgemeinen sehr kleine Grössen sein, deren die erste übersteigende Potenz vernachlässigt werden kann. Ist also F_1 der Werth von F' für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$; F_2 eben so der von F'' für diese Werthe, so ist:

$$F' = F_1 + x' \frac{\partial F_1}{\partial x_0} + y' \frac{\partial F_1}{\partial y_0} + z' \frac{\partial F_1}{\partial z_0} + \ldots\ldots,$$

$$F'' = F_2 + x' \frac{\partial F_2}{\partial x_0} + y' \frac{\partial F_2}{\partial y_0} + z' \frac{\partial F_2}{\partial z_0} + \ldots\ldots,$$
$$\vdots$$

Daraus folgt, dass man zur Bestimmung von $x', y', z', \ldots$ die Formeln des §. 6. hat, wenn man dort ändert:

$$M, \quad a, \quad b, \quad c, \ldots\ldots, \quad x, \; y, \; z, \ldots\ldots$$

bezüglich in:

$$M - F, \quad \frac{\partial F}{\partial x_0}, \frac{\partial F}{\partial y_0}, \frac{\partial F}{\partial z_0}, \ldots\ldots, \quad x', \; y', \; z', \ldots\ldots,$$

so dass man hat:

(21)

$$\left[g \frac{\partial F}{\partial x_0} \frac{\partial F}{\partial x_0}\right] x' + \left[g \frac{\partial F}{\partial x_0} \frac{\partial F}{\partial y_0}\right] y' + \left[g \frac{\partial F}{\partial x_0} \frac{\partial F}{\partial z_0}\right] z' + \ldots$$
$$= \left[(M - F) g \frac{\partial F}{\partial x_0}\right],$$

$$\left[g \frac{\partial F}{\partial x_0} \frac{\partial F}{\partial y_0}\right] x' + \left[g \frac{\partial F}{\partial y_0} \frac{\partial F}{\partial y_0}\right] y' + \left[g \frac{\partial F}{\partial y_0} \frac{\partial F}{\partial z_0}\right] z' + \ldots\ldots$$
$$= \left[(M - F) g \frac{\partial F}{\partial y_0}\right],$$

$$\left[g\frac{\partial F}{\partial x_0}\frac{\partial F}{\partial z_0}\right]x'+\left[g\frac{\partial F}{\partial y_0}\frac{\partial F}{\partial z_0}\right]y'+\left[g\frac{\partial F}{\partial z_0}\frac{\partial F}{\partial z_0}\right]z'+\ldots\ldots$$
$$=\left[(M-F)g\frac{\partial F}{\partial z_0}\right],$$
$$\vdots$$

worin

$$F_1=\varphi'(x_0,\, y_0,\, z_0,\ldots\ldots,\; a_1,\, b_1,\, c_1,\ldots\ldots),$$

$$F_2=\varphi''(x_0,\, y_0,\, z_0,\ldots\ldots,\; a_2,\, b_2,\, c_2,\ldots\ldots)\text{ u. s. w.}$$

ist, und wo ganz wohl $\varphi'=\varphi''\ldots.$ sein kann.

Sind noch Bedingungsgleichungen vorhanden, so ist die Behandlung wie bekannt.

§. 8.

Angenommen man habe für die Grössen N, N',..... die wahrscheinlichsten Werthe n, n',....., ganz unabhängig von einander gefunden, und seien r, r',.... die wahrscheinlichen Fehler dieser wahrscheinlichsten Werthe. Sei nun:

1) $V=\alpha N$, α eine Konstante, und man suche den wahrscheinlichsten Werth von V, so wie dessen wahrscheinlichen Fehler. Sei h so beschaffen, dass $hr=\varrho$ (§. 5.) und sei n_1 der wahre Werth von N, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers $N-n_1=v$, indem man N einen willkührlichen Werth beilegt: $w_0e^{-h^2v^2}$ (§. 3.). Also wird, nach dem in §. 6. aufgeführten Grundsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die Wahrscheinlichkeit dieser Annahme für N sein:

$$\frac{e^{-h^2v^2}\partial N}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2v^2}\partial N}=ke^{-h^2v^2}\partial N,\quad k\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2v^2}\partial N=1.$$

Diese Wahrscheinlichkeit muss ein Maximum sein, wenn man N seinen wahrscheinlichsten Werth n beilegt, d. h. man muss haben $v=N-n$ (also für n_1 den Werth n wählen), so dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein gewisser Werth N der rechte sei, ist $ke^{-h^2(N-n)^2}\partial N$. Was k anbelangt, so findet sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2(N-n)^2}\partial N=\frac{\sqrt{\pi}}{h},\quad\text{also}\quad k=\frac{h}{\sqrt{\pi}}h^2,$$

und somit die Wahrscheinlichkeit, dass der bestimmte Werth N der rechte sei:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(N-n)^2} \partial N.$$

Nun ist $V=\alpha N$, $N=\frac{V}{\alpha}$; also ist diese Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{h}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{h^2}{\alpha^2}(V-\alpha n)^2} \partial V,$$

was zugleich auch die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein bestimmter Werth V der wahre Werth dieser Grösse sei. Diese Wahrscheinlichkeit ist ein Maximum für $V=\alpha n$, also ist der wahrscheinlichste Werth von V gleich αn.

Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers v ist

$$w_0 e^{-h^2v^2} = w_0 e^{-h^2\left(\frac{V}{\alpha}-n\right)^2} = w_0 e^{-\frac{h^2}{\alpha^2}(V-\alpha n)^2} = \frac{h}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{h^2}{\alpha^2}(V-\alpha n)^2} \partial V,$$

wie man leicht nach §. 3. findet. Daher ist (§. 5.) der wahrscheinliche Fehler r_1 bestimmt durch $r_1 \frac{h}{\alpha} = \varrho$, d. h. man hat $r_1 = \alpha r$, so dass der wahrscheinliche Fehler von V ist αr, wenn αn der wahrscheinlichste Werth von V ist.

2) Sei nun $V=N+N'$, und man sucht eben so den wahrscheinlichsten Werth von V mit dem wahrscheinlichen Fehler dieser Bestimmung.

Seien h, h' bestimmt durch die Gleichungen $rh=\varrho$, $r'h'=\varrho$, so ist, wie oben, die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Werth N der wahre Werth dieser Grösse sei:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(N-n)^2};$$

eben so, dass N' der wahre Werth dieser zweiten Grösse sei:

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2(N'-n')^2} \partial N'.$$

Die Wahrscheinlichkeit also, dass diese zwei Werthe zugleich die wahren seien, ist

$$\frac{hh'}{\pi} e^{-h^2(N-n)^2-h'^2(N'-n')^2} \partial N \partial N'.$$

Da $N' = V - N$, so kann man also auch sagen, die Wahrscheinlichkeit, dass N und $V - N$ die wahren Werthe seien, sei

$$\frac{hh'}{\pi} e^{-h^2(N-n)^2 - h'^2(V-N-n')^2} \partial N \partial N'.$$

Diese Grösse drückt also auch die Wahrscheinlichkeit aus, dass zwei bestimmte Werthe N und V die wahren Werthe dieser Grössen zu gleicher Zeit seien.

Um die Wahrscheinlichkeit zu haben, dass der (bestimmte, aber willkührlich angenommene) Werth V der wahre sei, was auch immer N sei, muss man die Summe der Werthe obiger Grösse nehmen, indem man N alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ beilegt. Diese Summe ist

$$\frac{hh'}{\pi} \partial N' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2(N-n)^2 - h'^2(V-N-n')^2} \partial N,$$

und diese Grösse drückt also die Wahrscheinlichkeit aus, dass der bestimmte Werth V der wahre Werth sei, was auch N sei, d. h. also unabhängig von N. Nun ist aber:

$$h^2(N-n)^2 + h'^2(V-N-n')^2 = (h^2+h'^2)\left(N - \frac{h'^2 V + h^2 n - h'^2 n'}{h^2+h'^2}\right)^2 + \frac{h^2 h'^2}{h^2+h'^2}(V-n-n')^2;$$

also wird obige Grösse zu:

$$\frac{hh'}{\pi} \partial N' e^{-\frac{h^2 h'^2}{h^2+h'^2}(V-n-n')^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(h^2+h'^2)\left(N - \frac{h'^2 V + h^2 n - h'^2 n'}{h^2+h'^2}\right)^2} \partial N$$

$$= \frac{hh'}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{h^2+h'^2}} e^{-\frac{h^2 h'}{h^2+h'^2}(V-n-n')^2} \partial N'.$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist ein Maximum für $V = n + n'$ und somit ist der wahrscheinlichste Werth von V gleich $n + n'$.

Sei h_2 das Mass der Genauigkeit dieses Werthes, so wird man wie in Nro. 1. finden, dass die Wahrscheinlichkeit für einen beliebigen Werth von V ist

$$\frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2{}_2(V-n-n')^2} \partial V.$$

Nun haben wir aber gefunden, dass diese Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{hh'}{\sqrt{\pi}.\sqrt{h^2+h'^2}}e^{-\frac{h^2h'^2}{h^2+h'^2}(V-n-n')^2}\partial V,$$

also hat man

$$h_2=\frac{hh'}{\sqrt{h^2+h'^2}}.$$

Wenn r_2 der wahrscheinliche Fehler von $V=n+n'$ ist, so ist $r_2h_2=\varrho$, also

$$r_2=\frac{\varrho}{h_2}=\frac{\varrho\sqrt{h^2+h'^2}}{hh'}=\sqrt{\frac{\varrho^2}{h^2}+\frac{\varrho^2}{h'^2}}=\sqrt{r^2+r'^2}.$$

3) Sei

$$V=\alpha N+\beta N',$$

wo α und β Konstanten sind. Der wahrscheinlichste Werth von αN ist αn (Nro. 1.), von $\beta N'$:$\beta n'$; die wahrscheinlichen Fehler sind αr und $\beta r'$. Also ist (Nro. 2.) der wahrscheinlichste Werth von V: $\alpha n+\beta n'$, mit dem wahrscheinlichen Fehler

$$\sqrt{\alpha^2r^2+\beta^2r'^2}.$$

4) Sei

$$M=\alpha N+\beta N'+\gamma N''.$$

Die wahrscheinlichsten Werthe von αN, $\beta N'$, $\gamma N''$ sind: αn, $\beta n'$, $\gamma n''$ (Nro. 1.), mit den wahrscheinlichen Fehlern αr, $\beta r'$, $\gamma r''$. Also ist der wahrscheinlichste Werth von $\alpha N+\beta N'$: $\alpha n+\beta n'$ mit dem wahrscheinlichen Fehler

$$\sqrt{\alpha^2r^2+\beta^2r'^2}\quad\text{(Nro. 3.)},$$

also auch der wahrscheinlichste Werth von

$$V=(\alpha N+\beta N')+\gamma N''\quad\text{gleich}\quad\alpha n+\beta n'+\gamma n''$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler

$$\sqrt{(\sqrt{\alpha^2r^2+\beta^2r'^2})^2+\gamma^2r''^2}=\sqrt{\alpha^2r^2+\beta^2r'^2+\gamma^2r''^2}.$$

5) Fährt man so fort, so sieht man, dass der wahrscheinlichste Werth von

$$V=\alpha N+\beta N'+\gamma N''+\delta N'''+\ldots\ldots$$

ist

$$\alpha n + \beta n' + \gamma n'' + \delta n''' + \ldots..,$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler

$$\sqrt{\alpha^2 r^2 + \beta^2 r'^2 + \gamma^2 r''^2 + \delta^2 r'''^2 + \ldots..}$$

Wir haben hier V als lineare Funktion von N, N',...... angenommen. Im allgemeinen Falle, da also

$$V = f(N, N', N'', \ldots..),$$

wird man immer

$$N = n + \Delta N,\ N' = n' + \Delta N',\ N'' = n'' + \Delta N'', \ldots\ldots.$$

annehmen können, und dabei voraussetzen dürfen, dass ΔN, $\Delta N'$, ... sehr klein sind. Ist nun

$$V_1 = f(n, n', n'', \ldots\ldots),$$

so ist dann:

$$V - V_1 = \frac{\partial V_1}{\partial n} \Delta N + \frac{\partial V_1}{\partial n'} \Delta N' + \frac{\partial V_1}{\partial n''} \Delta N'' + \ldots.$$

Die wahrscheinlichsten Werthe von ΔN, $\Delta N'$,..... sind offenbar Null, also ist der wahrscheinlichste Werth von V gleich V_1 mit dem wahrscheinlichen Fehler

$$\sqrt{\left(\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)^2 r^2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial n'}\right)^2 r'^2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial n''}\right)^2 r''^2 + \ldots..}$$

§. 9.

Die bisher bewiesenen Lehrsätze liefern uns nun die Mittel, die wahrscheinlichen Fehler der durch die Gleichungen des §. 6. bestimmten Grössen x, y, z,....... anzugeben. Seien r_1, r_2,.... die wahrscheinlichen Fehler der Grössen M_1, M_2, ..., die durch die Beobachtung unmittelbar gegeben sind, und nehmen wir an, dass die Auflösung der Gleichungen (18) oder (16) des §. 6. gegeben habe:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 + \ldots., \\ y &= \beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 + \beta_3 M_3 + \ldots\ldots, \qquad (22) \\ z &= \gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2 + \gamma_3 M_3 + \ldots\ldots, \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

so hat man, nach dem allgemeinen Lehrsatze des §. 8., als wahrscheinlichen Fehler von

$$x:\sqrt{[\alpha^2 r^2]}, \text{ von } y:\sqrt{[\beta^2 r^2]}, \text{ von } z:\sqrt{[\gamma^2 z^2]} \text{ u. s. w.},$$

wo das Zeichen $[\alpha^2 r^2]$ eine Bedeutung hat, die in §. 6. erklärt wurde. Wenn man die Gewichte statt der wahrscheinlichen Fehler einführen wollte, so hätte man nach §. 6.:

$$r_1^2 : r_2^2 : r_3^2 : \ldots\ldots = \frac{1}{g_1} : \frac{1}{g_2} : \frac{1}{g_3} : \ldots\ldots,$$

und wenn R und G der wahrscheinliche Fehler und das Gewicht von x ist:

$$\frac{1}{R^2} : \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2} = G : g_1 : g_2 : \ldots\ldots, \qquad r^2 = \frac{m}{g}, R^2 = \frac{m}{G},$$

m konstant, also, da $R = \sqrt{[\alpha^2 r^2]}$:

$$G = \frac{1}{\left[\frac{\alpha^2}{g}\right]},$$

wo natürlich die Grössen g und G auf dieselbe Einheit des Gewichtes bezogen sind. Eben so ist, in Bezug auf dieselbe Einheit das Gewicht von

$$y : \frac{1}{\left[\frac{\beta^2}{g}\right]}, \text{ von } z : \frac{1}{\left[\frac{\gamma^2}{g}\right]}, \ldots\ldots$$

Gesetzt man habe eine lineare Funktion

$$Q = q_0 x + q_1 y + q_2 z + \ldots..$$

der Grössen x, y, z, ..., so ist also nach (22):

$$\begin{aligned} Q = &\ (q_0\alpha_1 + q_1\beta_1 + q_2\gamma_1 + \ldots..)M_1 \\ &+ (q_0\alpha_2 + q_1\beta_2 + q_2\gamma_2 + \ldots.)M_2 \\ &+ (q_0\alpha_3 + q_1\beta_3 + q_2\gamma_3 + \ldots..)M_3 \\ &+ \ldots\ldots, \end{aligned}$$

also nach dem allgemeinen Theorem des §. 8. der wahrscheinliche Fehler von Q:

$$\sqrt{\left[\begin{array}{l}(q_0\alpha_1+q_1\beta_1+q_2\gamma_1+\ldots\ldots)^2r_1^2+(q_0\alpha_2+q_1\beta_2+q_2\gamma_2+\ldots\ldots)^2r_2^2\\+(q_0\alpha_3+q_1\beta_3+q_2\gamma_3+\ldots.)^2r_3^2+\ldots..\end{array}\right]}$$

$$\left.\begin{array}{l}=\sqrt{\{q_0^2[\alpha^2r^2]+2q_0q_1[\alpha\beta r^2]+2q_0q_2[\alpha\gamma r^2]+\ldots.}\\ \qquad\qquad+q_1^2[\beta^2r^2]+2q_1q_2[\beta\gamma r^2]+\ldots.\\ \qquad\qquad\qquad\qquad+q_2^2[\gamma^2r^2]+\ldots..\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\end{array}\right\}\qquad(23)$$

Wenn alle Beobachtungen, durch die M_1, M_2,...... erhalten worden sind, von gleicher Genauigkeit wären, so wären die Grössen r_1, r_2,.... alle gleich, und wenn also r der wahrscheinliche Fehler dieser Beobachtungsmethode wäre, so hätte man für die wahrscheinlichen Fehler von x, y, z,....:

$$r\sqrt{[\alpha^2]},\quad r\sqrt{[\beta^2]},\quad r\sqrt{[\gamma^2]},\ \ldots..$$

und der wahrscheinliche Fehler von Q wäre:

$$\left.\begin{array}{l}r\sqrt{\{q_0^2[\alpha^2]+2q_0q_1[\alpha\beta]+2q_0q_2[\alpha\gamma]+\ldots..}\\ \qquad\qquad+q_1^2[\beta^2]+2q_1q_2[\beta\gamma]+\ldots..\\ \qquad\qquad\qquad\qquad+q_2^2[\gamma^2]+\ldots..\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\end{array}\right\}$$

Wir wollen nun ein paar besondere Fälle untersuchen.

1) Sei (§. 6)

$$F=x,$$

d. h. sei eine Grösse x unmittelbar durch Beobachtung zu bestimmen. Man hat also (§. 6.) alle $a=1$, $b=c=..=0$, also $[ga^2]=[g]$ und folglich

$$[g]x=[gM],\quad x=\frac{g_1M_1+g_2M_2+g_3M_3+\ldots.+g_mM_m}{g_1+g_2+g_3+\ldots..+g_m},$$

wenn m die Anzahl der Beobachtungen ist. Das Gewicht von x ist, da $\alpha=\frac{g}{[g]}$:

$$\frac{1}{\left[\frac{g}{[g]^2}\right]}=\frac{1}{\frac{g_1}{[g]^2}+\frac{g_2}{[g]^2}+\ldots+\frac{g_m}{[g]^2}}=g_1+g_2+\ldots.g_m.$$

Sind also Beobachtungen gleich gut, so kann man eine davon mit der Einheit des Gewichts in Rechnung bringen, also setzen

$$g_1=g_2=\ldots.=g_m=1,$$

und hat dann

$$x=\frac{M_1+M_2+\ldots+M_m}{m}$$

mit dem Gewicht m, oder dem wahrscheinlichen Fehler $\frac{r}{\sqrt{m}}$.

Diess ist die bekannte Regel des arithmetischen Mittels. Bei m gleich genauen Beobachtungen derselben Grösse ist also das arithmetische Mittel der wahrscheinlichste Werth dieser Grösse. Zugleich haben wir hierin eine weitere Bestätigung des in §. 6. Aufgeführten, dass ein Gewicht m, das einer Beobachtung (Bestimmung) zugelegt wird, bedeutet, die Beobachtung sei gleich m Beobachtungen zu rechnen, denen das Gewicht 1 beigelegt wird. Der wahrscheinliche Fehler ist aber nicht der $m$te Theil des wahrscheinlichen Fehlers jeder Beobachtung, sondern nur der $\sqrt{m}$te Theil.

2) Sei

$$F=ax,$$

so ist, wie so eben:

$$x=\frac{[gaM]}{[ga^2]}$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler:

$$\sqrt{\frac{(g_1a_1r_1)^2}{[ga^2]^2}+\frac{(g_2a_2r_2)^2}{[ga^2]^2}+\ldots\ldots}=\sqrt{\frac{[g^2a^2r^2]}{[ga^2]^2}}.$$

Für $g_1=g_2=\ldots.$ ist $r_1=r_2=..=r$, also der wahrscheinliche Fehler von x: $\frac{r}{\sqrt{[a^2]}}$.

3) Sei

$$F=ax+by,$$

so ergiebt sich:

$$x=\frac{[gb^2][Mga]-[abg][Mbg]}{[ga^2][gb^2]-[abg][abg]},$$

$$y=\frac{[a^2g][Mbg]-[abg][Mag]}{[a^2g][b^2g]-[abg][abg]}.$$

Also ist

$$\alpha_1=\frac{[gb^2]a_1g_1-[abg]b_1g_1}{[a^2g][b^2g]-[abg][abg]},\ \ldots,$$

$$\beta_1=\frac{[a^2g]b_1g_1-[abg]a_1g_1}{[a^2g][b^2g]-[abg][abg]},\ \ldots;$$

$$[\alpha^2r^2]=\frac{[gb^2]^2[a^2g^2r^2]-2[b^2g][abg][abg^2r^2]+[abg]^2[b^2g^2r^2]}{\{[a^2g][b^2g]-[abg][abg]\}^2},$$

$$[\beta^2r^2]=\frac{[ga^2]^2[b^2g^2r^2]-2[a^2g][abg][abg^2r^2]+[abg]^2[a^2g^2r^2]}{\{[a^2g][b^2g]-[abg][abg]\}^2}.$$

Für $r_1=r_2=\ldots=r$ ist:

$$[\alpha^2r^2]=\frac{[b^2]r^2}{[a^2][b^2]-[ab]^2},\quad [\beta^2r^2]=\frac{[a^2]r^2}{[a^2][b^2]-[ab]^2},$$

u. s. w.

Wir wollen eine Bemerkung über eine praktische Frage beifügen, da sie sich leicht durch das Gegebene lösen lässt. Angenommen man messe zwei Linien L und l mittelst desselben Maasses λ und habe bei jeder Niederlegung der Messstange λ einen wahrscheinlichen Fehler r zu fürchten. Sei $m=\frac{L}{\lambda}$, so ist also

$$L=\lambda+\lambda+\lambda+\ldots\ (m \text{ mal}),$$

also nach §. 8. der wahrscheinliche Fehler von L:

$$r\sqrt{m}=r\sqrt{\frac{L}{\lambda}},$$

eben so der wahrscheinliche Fehler von l: $r\sqrt{\frac{l}{\lambda}}$. Nehmen wir nun an, man habe bloss $l(l<L)$ gemessen, mit dem wahrscheinlichen Fehler $r\sqrt{\frac{l}{\lambda}}$, und man habe (etwa vermittelst eines geodätischen Dreiecks) L berechnet, und gefunden $L=pl$, so wird jetzt der wahrscheinliche Fehler von L sein (§. 8. Nro. 1.): $pr\sqrt{\frac{l}{\lambda}}$, während er im ersten Fall nur

$$r\sqrt{\frac{L}{\lambda}}=r\sqrt{\frac{l}{\lambda}}\cdot\sqrt{p}$$

war. Misst man also l nur einmal, so ist der wahrscheinliche Fehler dieser Messung $r\sqrt{\frac{l}{\lambda}}$, und also der jeder andern Linie, die aus der ersten geschlossen und $p$mal so gross gefunden wird, gleich $pr\sqrt{\frac{l}{\lambda}}$. Gesetzt nun, man habe l $p$mal gemessen und aus den Ergebnissen das arithmetische Mittel genommen, so ist der wahrscheinliche Fehler dieses Mittels $r\sqrt{\frac{l}{p\lambda}}$, also der grössern Linie L:

$$pr\sqrt{\frac{l}{p\lambda}}=r\sqrt{\frac{pl}{\lambda}}=r\sqrt{\frac{L}{\lambda}}.$$

Daraus ergiebt sich, dass, wenn man aus einer gemessenen Basis eines Dreiecksnetzes l eine $p$mal so grosse Seite schliessen will mit derselben Genauigkeit, als hätte man sie einmal gemessen, man die Basis $p$mal messen muss.

§. 10.

Man kann die wahrscheinlichen Fehler der Unbekannten x, y, z,...... einfacher bestimmen, als diess so eben geschehen ist, wie in folgender Weise erhellen wird.

Gesetzt man habe aus den Gleichungen (18) z. B. gefunden:

$$z=\frac{E[Mag]+F[Mbg]+G[Mcg]+....}{E[acg]+F[bcg]+G[c^2g]+....},$$

worin E, F, G,..... weder M noch c enthalten. Die Form, die dem Werthe von z gegeben wurde, ist keineswegs willkührlich, indem man weiss, dass, wenn P der allen Werthen der Uebekannten x, y, z... gemeinschaftliche Nenner ist, man den Zähler von z erhalten wird, wenn man überall c mit M vertauscht, und P kein M enthält. (Supplemente zu Klügels Wörterbuch, zweite Abthlg. S. 53. ff.).

Wäre $M=a$, so wäre in (18) offenbar $z=0$, d. h. man hat eben so:

$$\left.\begin{aligned}E[a^2g]+F[abg]+G[aeg]+....&=0,\\E[abg]+F[b^2g]+G[bcg]+....&=0,\\E[adg]+F[bdg]+G[cdg]+....&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

Ist also P der Nenner in dem Werthe von z, so ist der Koeffizient von:

$$M_1 \text{ gleich } \frac{E}{p}a_1g_1 + \frac{F}{p}b_1g_1 + \frac{G}{p}c_1g_1 + \ldots\ldots,$$

$$M_2 \quad ,, \quad \frac{E}{p}a_2g_2 + \frac{F}{p}b_2g_2 + \frac{G}{p}c_2g_2 + \ldots\ldots;$$

$$\vdots$$

also nach §. 9. der wahrscheinliche Fehler von z:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\sqrt{\{(Ea_1g_1 + Fb_1g_1 + Gc_1g_1 + \ldots..)^2 r_1^2} \\
&\quad \overline{+ (Ea_2g_2 + Fb_2g_2 + Gc_2g_2 + \ldots.)^2 r_2^2 + \ldots..\}} \\
= &\frac{1}{p}\sqrt{E\{E[a^2r^2g^2] + F[abg^2r^2] + G[acg^2r^2] + \ldots\ldots\}} \\
&\quad \overline{+ F\{E[abg^2r^2] + F[b^2g^2r^2] + G[bcg^2r^2] + \ldots\ldots\}} \\
&\quad \overline{+ G\{E[acg^2r^2] + F[bcg^2r^2] + G[c^2g^2r^2] + \ldots.\}} \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

Nun ist, wenn r der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 1 ist:

$$1 : g_1 = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r_1^2},$$

also

$$g_1r_1^2 = r^2, \quad g_1^2r_1^2 = g_1r^2, \ldots;$$

demnach obige Grösse:

$$\begin{aligned}
&\frac{r}{p}\sqrt{E\{E[ga^2] + F[gab] + G[gac] + \ldots.\}} \\
&\quad \overline{+ F\{E[gab] + F[gb^2] + G[gbc] + \ldots.\}} \\
&\quad \overline{+ \ldots\ldots}
\end{aligned}$$

d. h. wenn man die Gleichungen (23) beachtet, gleich $r\sqrt{\frac{G}{p}}$.

Man folgert daraus leicht, dass, wenn man aus (18) zieht:

$$\begin{aligned}
x &= A'[Mag] + A''[Mbg] + A'''[Mcg] + \ldots, \\
y &= B'[Mag] + B''[Mbg] + B'''[Mcg] + \ldots, \qquad (24) \\
z &= C'[Mag] + C''[Mbg] + C'''[Mcg] + \ldots. \\
&\vdots
\end{aligned}$$

und wenn r dieselbe Bedeutung hat, wie so eben, die wahrscheinlichen Fehler von x, y, z,.... sind:

$$r\sqrt{A'}, \quad r\sqrt{B''}, \quad r\sqrt{C'''}, \ldots\ldots \qquad (25)$$

Wären alle Beobachtungen gleich genau, so könnte man alle $g=1$ setzen und r wäre dann der wahrscheinliche Fehler einer solchen Beobachtung.

Will man die Gewichte von x, y, z,.... kennen, so seien dieselben G_1, G_2,...; also:

$$G_1 : 1 = \frac{1}{r^2 A'} : \frac{1}{r^2}, \quad G_1 = \frac{1}{A'};$$

eben so

$$G_2 = \frac{1}{B''}, \quad G_3 = \frac{1}{C'''}, \ldots;$$

d. h. die Gewichte von x, y, z,.... sind:

$$\frac{1}{A'}, \frac{1}{B''}, \frac{1}{C'''}, \ldots. \qquad (26)$$

In ganz ähnlicher Weise kann man den wahrscheinlichen Fehler einer linearen Funktion Q der Grössen x, y, z,... bestimmen. Man hat (23) für das Quadrat dieses wahrscheinlichen Fehlers erhalten:

$$\begin{aligned} q_0 \{ q_0 [\alpha^2 r^2] + q_1[\alpha\beta r^2] + q_2[\alpha\gamma r^2] + \ldots\ldots \} \\ + q_1 \{ q_0[\alpha\beta r^2] + q_1[\beta^2 r^2] + q_2[\beta\gamma r^2] + \ldots\ldots \} \\ + q_2 \{ q_0 [\alpha\gamma r^2] + q_1[\beta\gamma r^2] + q_2[\gamma^2 r^2] + \ldots\ldots \} \\ \vdots \end{aligned}$$

Haben also A',..... B',..... u. s. w. dieselbe Bedeutung wie so eben, so ist, wie diess aus §. 9. unmittelbar sich ergiebt:

$$[\alpha^2 r^2] = r^2 A', \quad [\beta^2 r^2] = r^2 B'', \quad [\gamma^2 r^2] = r^2 C''', \ldots\ldots,$$

wenn r obige Bedeutung hat. Um die Summen $[\alpha\beta r^2]$, $[\alpha\gamma r^2]$,.... zu erhalten, bemerke man, dass:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= A' a_1 g_1 + A'' b_1 g_1 + A''' c_1 g_1 + \ldots\ldots, \\ \beta_1 &= B' a_1 g_1 + B'' b_1 g_1 + B''' c_1 g_1 + \ldots\ldots, \\ \gamma_1 &= C' a_1 g_1 + C'' b_1 g_1 + C''' c_1 g_1 + \ldots\ldots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

also

$$
\begin{aligned}
[\alpha\beta r^2] = \; & (A'a_1+A''b_1+A'''c_1+\ldots)(B'a_1+B''b_1+B'''c_1+\ldots)g_1^2r_1^2 \\
& +(A'a_2+A''b_2+A'''c_2+\ldots)(B'a_2+B''b_2+B'''c_2+\ldots)g_2^2r_2^2 \\
& +\ldots\ldots \\
= \; & A'\{B'[a^2g^2r^2]+B''[abg^2r^2]+B'''[acg^2r^2]+\ldots\} \\
& +A''\{B'[abg^2r^2]+B''[b^2g^2r^2]+B'''[bcg^2r^2]+\ldots\} \\
& +A'''\{B'[acg^2r^2]+B''[bcg^2r^2]+B'''[c^2g^2r^2]+\ldots\} \\
& \quad\vdots \\
= \; & r^2A'\{B'[a^2g]+B''[abg]+B'''[acg]+\ldots\} \\
& +r^2A''\{B'[abg]+B''[b^2g]+B'''[bcg]+\ldots\} \\
& +r^2A'''\{B'[acg]+B''[bcg]+B'''[c^2g]+\ldots\} \\
& \quad\vdots \\
= \; & r^2A'',
\end{aligned}
$$

wenn man beachtet, dass nach (23):

$$
\begin{aligned}
& B'[a^2g]+B''[abg]+B'''[acg]+\ldots=0, \\
& B'[abg]+B''[b^2g]+B'''[bcg]+\ldots=1, \\
& B'[acg]+B''[bcg]+B'''[c^2g]+\ldots=0, \\
& \qquad\vdots
\end{aligned}
$$

Man hätte offenbar den Ausdruck für $[\alpha\beta r^2]$ auch so ordnen können:

$$
\begin{aligned}
& r^2B'\{A'[a^2g]+A''[abg]+A'''[acg]+\ldots\} \\
& +r^2B''\{A'[abg]+A''[b^2g]+A'''[bcg]+\ldots\} \\
& +r^2B'''\{A'[acg]+A''[bcg]+A'''[c^2g]+\ldots\} \\
& \qquad\vdots \\
& =r^2B',
\end{aligned}
$$

da

$$
\begin{aligned}
& A'[a^2g]+A''[abg]+A'''[acg]+\ldots=1, \\
& A'[abg]+A''[b^2g]+A'''[bcg]+\ldots=0, \\
& A'[acg]+A''[bcg]+A'''[c^2g]+\ldots=0, \\
& \qquad\vdots
\end{aligned}
$$

Demnach ist

$$[\alpha\beta r^2] = r^2A'' = r^2B' \text{ und auch } A'' = B'.$$

Ganz eben so:

$$[\alpha\gamma r^2] = r^2A''' = r^2C', \text{ also } A''' = C';$$
$$[\alpha\delta r^2] = r^2A^{IV} = r^2D', \quad „ \quad A^{IV} = D';$$
$$\vdots$$
$$[\beta\gamma r^2] = r^2B''' = r^2C'', \quad „ \quad B''' = C'';$$
$$\vdots$$

also endlich für das Quadrat des wahrscheinlichen Fehlers von

$$Q = q_0x + q_1y + q_2z + \ldots\ldots:$$

$$\begin{aligned} & q_0r^2(q_0A' + q_1A'' + q_2A''' + \ldots\ldots) \\ + & q_1r^2(q_0B' + q_1B'' + q_2B''' + \ldots\ldots) \\ + & q_2r^2(q_0C' + q_1C'' + q_2C''' + \ldots\ldots) \\ & \vdots \end{aligned}$$

Man kann diess auch noch in folgender Weise aussprechen:

Denken wir uns an die Stelle von $[Mag]$, $[Mbg]$, $[Mcg]$, ... in den Gleichungen (18) gesetzt q_0, q_1, q_2,....... und man habe alsdann x_1, y_1, z_1, ... für x, y, z,.... gefunden, so ist:

$$x_1 = A'q_0 + A''q_1 + A'''q_2 + \ldots\ldots,$$
$$y_1 = B'q_0 + B''q_1 + B'''q_2 + \ldots\ldots,$$
$$z_1 = C'q_0 + C''q_1 + C'''q_2 + \ldots\ldots,$$
$$\vdots$$

also ist der wahrscheinliche Fehler von Q:

$$r\sqrt{q_0x_1 + q_1y_1 + q_2z_1 + \ldots\ldots} \qquad (28)$$

Ist G das Gewicht von Q, so ist

$$G = \frac{1}{q_0x_1 + q_1y_1 + q_2z_1 + \ldots}. \qquad (29)$$

In allen unseren Formeln ist nun noch ein Element, r, das noch unbestimmt ist; es ist diess der wahrscheinliche Fehler für eine Beobachtung vom Gewichte 1. Natürlich zieht die Unbestimmtheit dieses Elements auch die der wahrscheinlichen Fehler von x, y, z,.... mit sich. Die Gewichte g_1, g_2,.. können als bekannt angenommen werden. Wäre z. B. M_1 bestimmt durch m_1 gleich gute Beobachtungen, M_2 durch m_2 solcher Beobachtungen u. s. w., so wäre $g_1 = m_1$, $g_2 = m_2$, ... (§. 9.). Uebrigens ist es in der Regel immer misslich, eine Schätzung des Gewichts vorzunehmen, so dass es vorzuziehen ist, Beobachtungen von gleicher Genauigkeit (also vom Gewichte 1) anzuwenden, so oft die Umstände diess erlauben. Eine Schätzung des Gewichts einzelner Beobachtungen gegen einander ist schon darum misslich, weil man sich gar zu gern dem Vorurtheile hingiebt, Beobachtungen als minder genau zu betrachten, deren Ergebniss bedeutend abweicht von den übrigen. Auch ist es bei geodätischen Beobachtungen z. B. fast unmöglich, den Einfluss der Witterung, Ermüdung u. s. w. in Rechnung zu bringen.

Der Werth r ist, wie man aus dem Obigen ersieht, nicht nöthig, wenn man sich bloss damit begnügen will, die Gewichte der gefundenen Grössen zu kennen (immer g_1, g_2,.... als bekannt angenommen). Will man aber die wahrscheinlichen Fehler kennen, deren Kenntniss nothwendig ist, um ein Urtheil fällen zu können über die Genauigkeit der erhaltenen Resultate, so muss r bestimmt werden. Diess geschieht nun aus den gegebenen Beobachtungen in folgender Weise.

§. 11.

Seien wieder h_1, h_2,.... die Genauigkeitsmaasse (§. 4.), die zu den Beobachtungen gehören, deren Gewichte g_1, g_2, ... sind; h das Genauigkeitsmaass für eine Beobachtung vom Gewicht 1, so ist (§. 6. und §. 5.):

$$h_1^2 = g_1 h^2, \quad h_2^2 = g_2 h^2, \; .....$$

Unter der Annahme, dass h einen bestimmten Werth habe, war die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Bestehens der Fehler v_1, v_2, ... (§. 6.):

$$w_0' w_0'' w_0''' \ldots e^{-(h^2 v^2)} = w_0' w_0'' w_0''' \ldots e^{-h^2 (g v^2)} = P;$$

also ist die Wahrscheinlichkeit, dass h der wahre Werth dieser Grösse sei, nach dem bereits mehrfach angeführten Grundsatze der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

$$\frac{P}{\Sigma P} = \frac{P \partial h}{\int_{-\infty}^{\infty} P \partial h} = k' P \partial h,$$

wenn $k' \int_{-\infty}^{\infty} P \partial h = 1$. Nun ist (§.3.):

$$w'_0 = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} \partial v_1, \quad w''_0 = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} \partial v_2, \quad w'''_0 = \frac{h_3}{\sqrt{\pi}} \partial v_3, \ldots\ldots$$

d. h.

$$w'_0 = \frac{h\sqrt{g_1}}{\sqrt{\pi}} \partial v_1, \quad w''_0 = \frac{h\sqrt{g_2}}{\sqrt{\pi}} \partial v_2, \quad w'''_0 = \frac{h\sqrt{g_3}}{\sqrt{\pi}} \partial v_3 \ldots$$

Daraus ergiebt sich leicht, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der angenommene Werth von h der wahre Werth dieser Grösse sei, ist:

$$k_1 h^m e^{-h^2 [gv^2]} \partial h,$$

wenn k_1 bestimmt ist aus der Gleichung

$$k_1 \int_{-\infty}^{\infty} h^m e^{-h^2 [gv^2]} \partial h = 1.$$

Man wird also nur denjenigen Werth von h wählen müssen, für den obige Grösse ein Maximum ist. Differenzirt man nach h, so ergiebt sich:

$$(mh^{m-1} - 2h^{m+1}[gv^2]) e^{-h^2 [gv^2]} = 0, \quad h^2 = \frac{m}{2[gv^2]}, \qquad (30)$$

worin m die Anzahl der Beobachtungen (vielmehr der Grundgleichungen (9)) bedeutet.

Man pflegt die Grösse $\sqrt{\frac{[gv^2]}{m}}$ den mittleren Fehler der Beobachtung vom Gewichte 1 zu nennen; bezeichnen wir ihn mit ε, so ist

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[gv^2]}{m}}, \quad h^2 = \frac{1}{2\varepsilon^2}, \quad r^2 = 2\varrho^2 \varepsilon^2,$$

$$r = \varepsilon \varrho \sqrt{2} = 0{\cdot}6744897 . \varepsilon . \qquad (31)$$

Wären die Beobachtungen von gleicher Genauigkeit, so wäre $g_1 = g_2 = \ldots = 1$, und r der wahrscheinliche Fehler einer der Beobachtungen. In diesem Falle ist:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[v^2]}{m}}, \quad h^2 = \frac{1}{2\varepsilon^2}, \quad r = 0{\cdot}6744897 . \varepsilon . \qquad (32)$$

§. 12.

Der Werth von h, den wir so eben gefunden, ist nur der wahrscheinlichste; ob er der wahre ist, können wir nicht entscheiden. Die Wahrscheinlichkeit für einen beliebigen Werth h war

$$k_1 h^m e^{-h^2(gv^2)}\partial h = \eta h^m e^{-h^2(gv^2)}, \quad \eta = k_1 \partial h.$$

Sei nun h_1 die durch die Formeln (31) bestimmte Grösse, nämlich $h_1 = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}}$; $h_1 + \Delta h$ ein Werth von h, so wird mithin die Wahrscheinlichkeit, dass $h_1 + \Delta h$ der wahre Werth von h sei, wenn Δh willkührlich, aber bestimmt ist, sein:

$$\eta(h_1 + \Delta h)^m e^{-(h_1 + \Delta h^2)(gv^2)}.$$

Die Grösse Δh wird man immer sehr klein annehmen dürfen, da der wahre Werth von h nicht viel verschieden sein kann von h_1; ferner ist $[gv^2] = \frac{m}{2h_1^2}$, also ist obige Grösse:

$$\eta(h_1 + \Delta h)^m e^{-\frac{m}{2}\left(1+\frac{\Delta h}{h_1}\right)^2} = \eta h_1^m e^{ml\left(1+\frac{\Delta h}{h_1}\right) - \frac{m}{2}\left(1+\frac{\Delta h}{h_1}\right)^2}$$

$$= \eta h_1^m e^{m\frac{\Delta h}{h_1} - \frac{m}{2} - m\frac{\Delta h}{h_1} - \frac{m}{2}\left(\frac{\Delta h}{h_1}\right)^2 - \frac{m}{2}\left(\frac{\Delta h}{h_1}\right)^2} = \eta h_1^m e^{-\frac{m}{2}} . e^{-m\left(\frac{\Delta h}{h_1}\right)^2}.$$

Was η anbelangt, so ist diese Grösse:

$$k_1 \partial(\Delta h) = \frac{\partial(\Delta h)}{\int_{-\infty} h_1^m e^{-\frac{m}{2}} . e^{-m\left(\frac{\Delta h}{h_1}\right)^2} \partial(\Delta h)} = \frac{\partial(\Delta h)}{h_1^m e^{-\frac{m}{2}} \frac{h_1\sqrt{\pi}}{\sqrt{m}}},$$

also die Wahrscheinlichkeit, dass Δh die wahre Verbesserung von h_1 ist:

$$\frac{\sqrt{m}}{h_1\sqrt{\pi}} . e^{-\frac{m}{h_1^2}(\Delta h)^2} \partial(\Delta h). \qquad (33)$$

Der Ausdruck (33) hat dieselbe Gestalt, wie (4) in §. 3.; und Δh drückt auch den Fehler aus, den man begeht, wenn man h_1 für den wahren Werth von h nimmt. An der Stelle von h in (4) ist in (33): $\sqrt{\frac{m}{h_1^2}}$; woraus nun wie in §. 4. folgt, dass der wahrscheinlichste Werth von Δh Null ist, und der wahrscheinliche

Fehler dieser Bestimmung: $R = \frac{\varrho h_1}{\sqrt{m}}$. Man kann also 1 gegen 1 wetten, dass der wahre Werth von h zwischen

$$h_1 + \frac{\varrho h_1}{\sqrt{m}} = h_1 \left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right)$$

und

$$h_1 - \frac{\varrho h_1}{\sqrt{m}} = h_1 \left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right), \quad \varrho = 0{\cdot}4769360$$

enthalten ist. Ist also r_1 der Werth von r, bestimmt durch die Formeln (31), so sind die Gränzen von r:

$$\frac{r_1}{1 \pm \frac{\varrho}{\sqrt{m}}} = r_1 \left(1 \mp \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right) = r_1 \left(1 \mp \frac{0{\cdot}4769360}{\sqrt{m}}\right),$$

wenn man die höhern Potenzen von $\frac{\varrho}{\sqrt{m}}$ vernachlässigt.

§. 13.

Um den mittlern Fehler ε (§. 11.) zu bestimmen, müssen wir die wahren Werthe der Fehler $v_1, v_2, \ldots$ kennen, d. h. die wahren Werthe der Grössen $x, y, z, \ldots$ Diese aber kennen wir vielleicht nicht, indem wir ja bloss die wahrscheinlichsten Werthe derselben gefunden haben. Wohl sind wir der Ueberzeugung, dass diese wahrscheinlichen Werthe von den wahren sehr wenig abweichen, aber gerade diese etwaige Abweichung zu bestimmen, fehlen uns die Mittel. Wir werden uns also abermals darauf beschränken müssen, die wahrscheinlichsten Werthe dieser Abweichungen zu untersuchen.

Seien also $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ die Verbesserungen, die den Werthen von $x, y, z, \ldots$, wie sie aus den Gleichungen des §. 6. folgen, und die wir mit $x_0, y_0, z_0, \ldots$ bezeichnen wollen, zuzusetzen sind. Alsdann ist

$$v = (x_0 + \Delta x)a + (y_0 + \Delta y)b + (z_0 + \Delta z)c + \ldots - M,$$

aus welcher Formel die Werthe von $v_1, v_2, \ldots$ erhalten werden, wenn man den $a, b, c, \ldots, M$ die Zeiger 1, 2, ... beisetzt. Demnach ist

$$\begin{aligned} gv^2 &= g(x_0 a + y_0 b + z_0 c + \ldots - M)^2 \\ &+ 2g(ax_0 + by_0 + cz_0 + \ldots - M)(a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z + \ldots) \\ &+ g(a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z + \ldots)^2. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
&[g(ax_0+by_0+cz_0+\ldots-M)(a\Delta x+b\Delta y+c\Delta z+\ldots)]\\
=\;&\Delta x(x_0[a^2g]+y_0[abg]+z_0[acg]+\ldots)\\
&+\Delta y(x_0[abg]+y_0[b^2g]+z_0[bcg]+\ldots)\\
&+\Delta z(x_0[acg]+y_0[bcg]+z_0[c^2g]+\ldots)\\
&\;\;\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =0,
\end{aligned}$$

wenn man beachtet, dass x_0, y_0, z_0, ... aus den Gleichungen (18) bestimmt sind. Demnach ist

$$[gv^2]=[gv_0^2]+[g(a\Delta x+b\Delta y+c\Delta z+\ldots)^2], \tag{34}$$

worin

$$[gv_0^2]=[g(ax_0+by_0+cz_0+\ldots-M)^2].$$

Der zweite Theil der zweiten Seite der Gleichung (34), den wir durch Ω bezeichnen wollen, kann in eine Summe zerlegt werden, die quadratische Theile enthält. Man habe z. B. nur die vier Korrektionen Δx, Δy, Δz, Δu, so ist

$$\begin{aligned}
\Omega=&(\Delta x)^2[a^2g]+2\Delta x\Delta y[abg]+\Delta y^2[b^2g]+2\Delta x\Delta z[acg]\\
&+2\Delta y\Delta z[bcg]+\Delta z^2[c^2g]+2\Delta x\Delta u[adg]+2\Delta y\Delta u[bdg]\\
&+2\Delta z\Delta u[cdg]+\Delta u^2[d^2g].
\end{aligned}$$

Setzen wir nun:

$$\Delta x[a^2g]+\Delta y[abg]+\Delta z[acg]+\Delta u[adg]=\varphi_1,$$

so ist

$$\begin{aligned}
\Omega-\frac{\varphi_1^2}{[a^2g]}=&A_1\Delta y^2+2A_2\Delta y\Delta z+2A_3\Delta y\Delta u+A_4\Delta z^2\\
&+A_5\Delta u^2+2A_6\Delta z\Delta u,
\end{aligned}$$

worin A_1, A_2, .. A_6 nicht von Δx, ... Δu abhängen. Sei eben so:

$$A_1\Delta y+A_2\Delta z+A_3\Delta u=\varphi_2,$$

so ist

$$\Omega-\frac{\varphi_1^2}{[a^2g]}-\frac{\varphi_2^2}{A_1}=B_1\Delta z^2+2B_2\Delta z\Delta u+B_3\Delta u^2,$$

für

$$B_1\Delta z+B_2\Delta u=\varphi_3:$$

$$\Omega - \frac{\varphi_1^2}{[a^2g]} - \frac{\varphi_2^2}{A_1} - \frac{\varphi_3^2}{B_1} = C_1 \Delta u^2,$$

und wenn

$$C_1 \Delta u = \varphi_4:$$

$$\Omega = \frac{\varphi_1^2}{[a^2g]} + \frac{\varphi_2^2}{A_1} + \frac{\varphi_3^2}{B_1} + \frac{\varphi_4^2}{C_1}.$$

Man sieht leicht, dass allgemein, welches auch die Anzahl der Grössen Δx, Δy, Δz,... sei, man setzen kann:

$$\Omega = k_1\varphi_1^2 + k_2\varphi_2^2 + k_3\varphi_3^2 + \ldots\ldots,$$

worin φ_1, φ_2,... lineare Funktionen von Δx, Δy, Δz... sind, und zwar φ_1 von allen, φ_2 von allen ausser der ersten, φ_3 von allen ausser den zwei ersten u. s. w. Da Ω immer positiv ist, was auch Δx, Δy, Δz,..... seien, und diese Umformung eine rein identische ist, so überzeugt man sich leicht, dass k_1, k_2,..... positive Grössen sein müssen.

Es handelt sich also um den wahrscheinlichsten Werth der Summe Ω, den man erhalten wird, wenn man für φ_1^2, φ_2^2, φ_3^2,.... ihre wahrscheinlichsten Werthe setzt. Um diese selbst aber zu finden, bedürfen wir noch einer weiteren Untersuchung.

§. 14.

Angenommen, die Wahrscheinlichkeit, dass ein willkührlicher, aber bestimmter Werth von x der wahre Werth dieser Grösse ist, sei $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \partial x$, worin ∂x die unendlich kleine (konstante) Zunahme von x ist. Suchen wir nun die wahrscheinlichsten Werthe von x und x^2. Zuerst sieht man, dass zwei Werthe von x, die gleich, aber von verschiedenen Zeichen sind, gleich wahrscheinlich sind. Daraus folgt ferner, wie in §. 5., dass von m Werthen von x ihrer

$$\frac{2m}{\sqrt{\pi}} \int_0^k e^{-t^2} \partial t$$

zwischen $-\frac{k}{h}$ und $+\frac{k}{h}$ enthalten sein werden; eben so, dass es

$$\frac{2m}{\sqrt{\pi}} \int_k^{k'} e^{-t^2} \partial t$$

geben werde, deren absoluter Werth zwischen $\frac{k}{h}$ und $\frac{k'}{h}$ liegt.

Man wird also folgende Uebersicht bilden können, die um so richtiger sein wird, je grösser m ist (wenn α unendlich klein):

Zahl der Werthe von x, deren absoluter Zahlenwerth zwischen 0 und $\frac{\alpha}{h}$:

$$\frac{2m}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha} e^{-t}\,\partial t = \frac{2m}{\sqrt{\pi}}\,e^{-0^2}\alpha;$$

Zahl der Werthe von x, deren absoluter Zahlenwerth zwischen $\frac{\alpha}{h}$ und $\frac{2\alpha}{h}$:

$$\frac{2m}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha}^{2\alpha} e^{-t^2}\partial t = \frac{2m}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\alpha^2}\alpha;$$

Zahl der Werthe von x, deren absoluter Zahlenwerth zwischen $\frac{2\alpha}{h}$ und $\frac{3\alpha}{h}$:

$$\frac{2m}{\sqrt{\pi}}\int_{2\alpha}^{3\alpha} e^{-t^2}\partial t = \frac{2m}{\sqrt{\pi}}\,e^{-(2\alpha)^2}\alpha;$$

$$\vdots$$

Was die Summe der Werthe jeder einzelnen dieser Abtheilungen anbelangt, so ist sie offenbar Null, da gleich viel und gleich grosse positive und negative Werthe darin sind; also ist die Summe aller m Werthe von x auch Null, folglich auch ihr arithmetisches Mittel, d. h. der wahrscheinlichste Werth von x (§. 9.) ist Null.

Nicht so verhält es sich mit x^2, da dieses immer positiv ist. Man hat nun wieder dieselben Abtheilungen, wie so eben; in der ersten Abtheilung ist x^2 immer 0, in der zweiten $\frac{\alpha^2}{h^2}$, in der dritten $\frac{(2\alpha)^2}{h^2}$, in der vierten $\frac{(3\alpha)^2}{h^2}$,... u. s. w. bis ∞ in der letzten. Also hat man:

Anzahl der Werthe von x^2 zwischen 0 und α^2:

$$\frac{2m}{\sqrt{\pi}}\,e^{-0^2}\alpha,\ \text{Summe derselben:}\ 0;$$

Anzahl der Werthe von x^2 zwischen $\frac{\alpha^2}{h^2}$ und $\frac{(2\alpha)^2}{h^2}$:

$$\frac{2m}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2}\alpha, \text{ Summe derselben: } \frac{2m}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha}{h}\right)^2 e^{-\alpha^2}\alpha;$$

Anzahl der Werthe von x^2 zwischen $\frac{(2\alpha)^2}{h^2}$ und $\frac{(3\alpha)^2}{h^2}$:

$$\frac{2m}{\sqrt{\pi}} e^{-(2\alpha)^2}\alpha, \text{ Summe derselben: } \frac{2m}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2\alpha}{h}\right)^2 e^{-(2\alpha)^2}\alpha;$$

Anzahl der Werthe von x^2 zwischen $\frac{(3\alpha)^2}{h^2}$ und $\frac{(4\alpha)^2}{h^2}$:

$$\frac{2m}{\sqrt{\pi}} e^{-(3\alpha)^2}\alpha, \text{ Summe derselben: } \frac{2m}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{3\alpha}{h}\right)^2 e^{-(3\alpha)^2}\alpha;$$

$$\vdots$$

Daraus folgt für die Gesammtsumme aller Werthe von x^2, wenn man dieselbe gleich durch m dividirt, also das arithmetische Mittel nimmt:

$$\frac{2\alpha}{h^2\sqrt{\pi}}\left[0.e^{-0^2}+(1\alpha)^2e^{-\alpha^2}+(2\alpha)^2e^{-(2\alpha)^2}+(3\alpha)^2e^{-(3\alpha)^2}+\ldots\right]$$

$$=\frac{2}{h^2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\partial x.$$

Nun ist

$$\int xe^{-x^2}\partial x = -\frac{1}{2}e^{-x^2},$$

also

$$\int x^2e^{-x^2}\partial x = -\frac{1}{2}xe^{-x^2}+\frac{1}{2}\int e^{-x^2}\partial x,$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\partial x=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x=\frac{1}{4}\sqrt{\pi};$$

also ist endlich der wahrscheinlichste Werth von x^2:

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{4h^2\sqrt{\pi}}=\frac{1}{2h^2}.$$

§. 15.

Wir haben in §. 6. gesehen, dass die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Bestehens der Fehler $v_1, v_2, \ldots$ (§. 11.) ist

$$ce^{-h^2(gv^2)},$$

worin c eine Konstante ist. Diese Fehler entsprechen den Werthen

$$x_0 + \Delta x, \quad y_0 + \Delta y, \quad z_0 + \Delta z, \ldots$$

Daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeit, die Werthe Δx, Δy, $\Delta z, \ldots$ seien die wahren Verbesserungen von $x_0, y_0, z_0, \ldots$ ist:

$$\frac{e^{-h^2(gv^2)}\partial\Delta x\partial\Delta y\partial\Delta z\ldots}{\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots e^{-h^2(gv^2)}\partial\Delta x\,\partial\Delta y\,\partial\Delta z\ldots} = ke^{-h^2\Omega}\partial\Delta x\partial\Delta y\partial\Delta z\ldots,$$

$$k\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots e^{-h^2\Omega}\partial\Delta x\partial\Delta y\partial\Delta z\ldots = 1.$$

Führt man für Ω den in §. 13. gegebenen Werth ein, so hat man das vielfache Integral zuerst umzuformen für die neuen Veränderlichen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ Da diese letzteren durch lineare Funktionen von Δx, Δy, $\Delta z, \ldots$ gegeben sind, so wird

$$\partial\Delta x\partial\Delta y\partial\Delta z\ldots = c\partial\varphi_1\partial\varphi_2\partial\varphi_3\ldots,$$

wo c eine Konstante ist. Daraus folgt, dass die fragliche Wahrscheinlichkeit ist:

(35)

$$\frac{e^{-h^2(k_1\varphi_1^2+k_2\varphi_2^2+k_3\varphi_3^2+\ldots)}\partial\varphi_1\partial\varphi_2\partial\varphi_3\ldots}{\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots e^{-h^2(k_1\varphi_1^2+k_2\varphi_2^2+k_3\varphi_3^2+\ldots)}\partial\varphi_1\partial\varphi_2\partial\varphi_3\ldots}$$

$$= k'e^{-h^2(k_1\varphi_1^2+k_2\varphi_2^2+k_3\varphi_3^2+\ldots)}\partial\varphi_1\partial\varphi_2\partial\varphi_3\ldots,$$

wo k' bestimmt ist durch

$$k'\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots e^{-h^2(k_1\varphi_1^2+k_2\varphi_2^2+k_3\varphi_3^2+\ldots)}\partial\varphi_1\partial\varphi_2\partial\varphi_3\ldots = 1. \qquad (36)$$

Die Grösse (35) drückt also die Wahrscheinlichkeit aus, dass willkührlich gewählte, aber bestimmte Werthe von φ_1, φ_2, φ_3, ... die wahren Werthe dieser Grössen seien. Will man die Wahrscheinlichkeit haben, dass der bestimmte Werth φ_1 der wahre Werth dieser Grösse sei, was auch φ_2, φ_3,.... seien, so muss man (35) integriren nach φ_2, φ_3... zwischen den Gränzen $-\infty$ und $+\infty$. Also ist diese Wahrscheinlichkeit:

$$k'e^{-h^2k_1\varphi_1^2}\partial\varphi_1\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\ldots\, e^{-h^2(k_2\varphi_2^2+k_3\varphi_3^2+\ldots)}\partial\varphi_2\partial\varphi_3\ldots.$$
$$=k'k''e^{-h^2k_1\varphi_1^2}\partial\varphi_1,$$

worin

$$k''=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\ldots\, e^{-h^2(k_2\varphi_2^2+k_3\varphi_3^2+\ldots\ldots)}\partial\varphi_2\partial\varphi_3\ldots$$

Integrirt man aber in der Gleichung (36) zuerst nach φ_2, φ_3, ... so ergiebt sich

$$k'k''\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2k_1\varphi_1^2}\partial\varphi_1=k'k''\,.\frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{k_1}}=1,$$

$$k'k''=\frac{h\sqrt{k_1}}{\sqrt{\pi}};$$

also ist endlich die Wahrscheinlichkeit von φ_1:

$$\frac{h\sqrt{k_1}}{\sqrt{\pi}}e^{-(h\sqrt{k_1})^2\varphi_1^2}\partial\varphi_1,$$

und mithin (§. 14.) der wahrscheinlichste Werth von φ_1^2: $\frac{1}{2h^2k_1}$. Eben so erhält man für die wahrscheinlichsten Werthe von φ_2^2, φ_3^2, ...:

$$\frac{1}{2h^2k_2},\quad \frac{1}{2h^2k_3},\ \ldots;$$

also endlich den wahrscheinlichsten Werth von Ω:

$$\frac{1}{2h^2}+\frac{1}{2h^2}+\frac{1}{2h^2}+\ldots=\frac{n}{2h^2},$$

wenn n die Anzahl der Grössen x, y, z, ... ist. Nun ist

$$\frac{1}{2h^2}=\varepsilon^2,\quad [gv^2]=m\varepsilon^2;$$

also hat man:

$$m\varepsilon^2 = [gv_0^2] + n\varepsilon^2, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{[gv_0^2]}{m-n}}; \qquad (37)$$

wodurch nun endlich definitiv der Werth des mittlern Fehlers bestimmt ist. $[gv_0^2]$ hat hier die in §. 13. festgestellte Bedeutung, m ist die Anzahl der Grundgleichungen (9) in §. 6., und n ist die Anzahl der durch die Formeln des §. 18. zu bestimmenden Grössen $x, y, z, \ldots\ldots$, insofern als diese Grössen wirklich von einander unabhängig sind, so dass, wenn z. B. zwischenden n Unbekannten $x, y, z, \ldots.$ noch r Bedingungsgleichungen beständen, also in Wahrseit nur $n-r$ Unbekannte vorhanden wären, auch $n-r$ an die Stelle von n in (37) träte.

§. 16.

Seien $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m$ die wahren Werthe unbekannter Grössen; $e_1, e_2, e_3, \ldots e_m$ ihre durch Beobachtungen gegebenen Werthe mit den Gewichten $g_1, g_2, \ldots g_m$, bezogen auf eine bestimmte Einheit. Angenommen ferner, die Grössen $w_1, w_2, \ldots w_m$ müssen den Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} F_1(w_1, w_2, \ldots..) = 0, \\ F_2(w_1, w_2, \ldots..) = 0, \\ \vdots \end{array}\right\} \qquad (38)$$

genügen, die zur Abkürzung mit $F_1, F_2, \ldots.$ bezeichnet werden mögen. Es ist keineswegs erforderlich und wird im Allgemeinen auch nicht der Fall sein, dass von den Gleichungen (38) jede alle Grössen w enthalte. Setzen wir endlich noch voraus, dass die Differenzen $w-e$ sehr klein seien, was man wohl immer annehmen dürfen wird, da wir annehmen, die Beobachtungen seien so genau als möglich, und sollen nun so **ausgeglichen** werden, dass die Bedingungsgleichungen (38) erfüllt sind.

Sei nun

$$w_1 = e_1 + x_1, \quad w_2 = e_2 + x_2, \ldots, \quad w_m = e_m + x_m;$$

so müssen diese Werthe den Gleichungen (38) genügen.

Bezeichnen wir nun die Grössen:

$$F_1, \ \frac{\partial F_1}{\partial w_1}, \ \frac{\partial F_1}{\partial w_2}, \ldots..$$

für $w=e$ durch n_1. a_1, a_2, ...;

$$F_2,\ \frac{\partial F_2}{\partial w_1},\ \frac{\partial F_2}{\partial w_2},\ldots\ldots$$

für $w=e$ durch n_2, b_1, b_2, ...;

$\vdots$

so erhält man aus (38) folgende lineare Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} n_1+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots=0, \\ n_2+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+\ldots=0, \\ n_3+c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\ldots=0, \\ \vdots \end{array}\right\} \qquad (39)$$

Da x_1, x_2, x_3, ...x_m die Fehler der Beobachtungen für die Grössen e, d. h. für die durch Beobachtung als wahrscheinlichste Werthe der Grössen w gefundenen Werthe sind, so folgt daraus, dass (§. 6.) die Summe $[gx^2]$ ein Minimum sein muss. Man hat also:

$$g_1x_1\partial x_1+g_2x_2\partial x_2+g_3x_3\partial x_3+\ldots+g_mx_m\partial x_m=0. \qquad (40)$$

Bestände nun keine Bedingungsgleichung zwischen den Grössen x_1, x_2,..., so folgt hieraus

$$x_1=x_2==\ldots=x_m=0,$$

wie begreiflich. Aber die Bedingungsgleichungen (39) geben:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\partial x_1+a_2\partial x_2+\ldots+a_m\partial x_m=0, \\ b_1\partial x_1+b_2\partial x_2+\ldots+b_m\partial x_m=0, \\ c_1\partial x_1+c_2\partial x_2+\ldots+c_m\partial x_m=0, \\ \vdots \end{array}\right\} \qquad (41)$$

(worin füglich manche der Koeffizienten Null sein können). Multipliziren wir nun die Gleichungen (41) mit noch unbestimmten Koeffizienten k_1, k_2,..., k_r, wo r die Anzahl der Bedingungsgleichungen (38) ist, und sind β_1, β_2, β_3.... die Werthe von

$$\frac{\partial F_r}{\partial w_1},\ \frac{\partial F_r}{\partial w_2},\ \frac{\partial F_r}{\partial w_3},\ldots \text{ für } w=e;$$

so wird man die so multiplizirten Gleichungen zu (40) addiren und dann den Koeffizienten von ∂x_1, ∂x_2,.....∂x_m Null setzen Dadurch erhält man

$$\left.\begin{array}{l} g_1x_1+a_1k_1+b_1k_2+\ldots.+\beta_1k_r=0, \\ g_2x_2+a_2k_1+b_2k_2+\ldots.+\beta_2k_r=0, \\ g_3x_3+a_3k_1+b_3k_2+\ldots.+\beta_3k_r=0, \\ \vdots \end{array}\right\} \quad (42)$$

Kennt man die Grössen k, so geben diese Gleichungen die Grössen x. Um die k zu bestimmen, wenden wir die Gleichungen (39) an. Man ziehe nämlich aus (42) die Werthe der Grössen x, und setze sie in (39), so erhält man, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{a_1^2}{g_1}+\frac{a_2^2}{g_2}+\ldots+\frac{a_m^2}{g_m}=\left[\frac{a^2}{g}\right],$$

$$\frac{a_1b_1}{g_1}+\frac{a_2b_2}{g_2}+\ldots+\frac{a_mb_m}{g_m}=\left[\frac{ab}{g}\right],$$

$$\vdots$$

folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{a^2}{g}\right]k_1+\left[\frac{ab}{g}\right]k_2+\left[\frac{ac}{g}\right]k_3+\ldots+\left[\frac{a\beta}{g}\right]k_r=n_1, \\ \left[\frac{ab}{g}\right]k_1+\left[\frac{b^2}{g}\right]k_2+\left[\frac{bc}{g}\right]k_3+\ldots+\left[\frac{b\beta}{g}\right]k_r=n_2, \\ \left[\frac{ac}{g}\right]k_1+\left[\frac{bc}{g}\right]k_2+\left[\frac{c^2}{g}\right]k_3+\ldots+\left[\frac{c\beta}{g}\right]k_r=n_3, \\ \vdots \\ \left[\frac{a\beta}{g}\right]k_1+\left[\frac{b\beta}{g}\right]k_2+\left[\frac{c\beta}{g}\right]k_3+\ldots+\left[\frac{\beta^2}{g}\right]k_r=n_r \end{array}\right\} \quad (43)$$

die nun zur Bestimmung der Grössen k gerade hinreichen. Aus (42) folgen dann die Werthe der Grössen x, also endlich die ausgeglichenen Werthe von w_1, w_2,....

Was die Summe $[gx^2]$ anbelangt, so ist sie sehr leicht zu bestimmen. Die Gleichungen (42) geben nämlich, wenn man die erste mit x_1, die zweite mit x_2,.... multiplizirt, sie addirt und die Gleichungen (39) beachtet:

$$[gx^2]=n_1k_1+n_2k_2+\ldots.+n_rk_r=[nk]. \quad (44)$$

§. 17.

Es ist klar, dass die uns im Augenblicke beschäftigende Aufgabe angesehen werden kann, als hätte man bloss $m-r$ Grössen aus m Beobachtungen zu bestimmen, weil vermöge der r Gleichungen (38) nur $m-r$ Grössen unabhängig bleiben. Daraus folgt (§. 15.), dass der mittlere Fehler ε einer Beobachtung vom Gewichte 1 ist:

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{[gx^2]}{r}}=\sqrt{\frac{[nk]}{r}}. \qquad (45)$$

Der wahrscheinliche Fehler R dieser nämlichen Beobachtung ist $\varepsilon\varrho\sqrt{2}$, also der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung vom Gewichte g: $\frac{R}{\sqrt{g}}$. (§. 9.).

Gesetzt nun, man solle eine Grösse u aus den Beobachtungen berechnen. Es ist klar, dass man zu derselben auf verschiedenen Wegen wird gelangen können, je nachdem man eine Verbindung der Werthe e_1, e_2,.... anwendet. Einer dieser Wege wird, da die Grössen e nicht genau sind, der vortheilhafteste von allen sein. Sei die Verbindung der **beobachteten** (noch nicht ausgeglichenen) Werthe e, welche die vortheilhafteste von allen ist, bezeichnet durch

$$u=\psi(e_1, e_2,....), \qquad (46)$$

während eine andere durch

$$u=\varphi(e_1, e_2,....) \qquad (47)$$

bezeichnet werden mag. Nun sind die wahrscheinlichen Fehler der Grössen e_1, e_2,..., (da ihre Gewichte g_1, g_2,.. sind) gleich

$$\frac{R}{\sqrt{g_1}}, \quad \frac{R}{\sqrt{g_2}},......;$$

also ist nach §. 8. der wahrscheinliche Fehler von u, wenn die Verbindung (46) angewendet wird:

$$R\sqrt{\left[\frac{L^2}{g}\right]}, \qquad (48)$$

wenn

$$L_1=\frac{\partial\psi}{\partial e_1}, \quad L_2=\frac{\partial\psi}{\partial e_2}, \ldots$$

Der wahrscheinliche Fehler von u, wenn (47) angewendet wird, ist

$$R\sqrt{\left[\frac{l^2}{g}\right]}, \qquad (49)$$

wenn

$$l_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial e_1}, \qquad l_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial e_2}, \ldots.$$

Nun ist klar, dass, wenn man statt der Grössen e die wahren Werthe w setzen würde, offenbar

$$\varphi(w_1, w_2, \ldots) = \psi(w_1, w_2, \ldots.) \qquad (50)$$

sein müsste, da es alsdann offenbar gleichgültig ist, auf welchem Wege u erhalten wird — immer muss dasselbe Resultat zum Vorschein kommen. Nicht so ist es freilich, wenn für die w bloss ihre durch Beobachtung gefundenen wahrscheinlichsten Werthe e gesetzt werden.

Aus der Gleichung (50) ergiebt sich aber, dass die Differenz

$$\psi(e_1, e_2, \ldots.) - \varphi(e_1, e_2, \ldots) \qquad (51)$$

verschwinden muss, wenn an die Stelle der e die w treten. Ueber die w selbst steht uns gar keine Entscheidung zu Gebot, wir müssen die $e+x$ (§. 16.) statt derselben annehmen, da diese letzteren Grössen ohnehin auch den Bedingungsgleichungen (38) (resp. (39)) genügen. Die Differenz (51) muss also verschwinden, wenn an die Stelle der e die $e+x$ treten. Diess ist der Fall, wenn diese Differenz die Form

$$\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots + \alpha_r F_r \qquad (52)$$

hat, worin $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ noch unbestimmte Koeffizienten sind, und in den Grössen F statt der w die e gesetzt sind. Die Werthe der Grössen F sind also sehr klein. Es ist klar, dass es noch unzählig viele Formen, ausser (52), geben wird, die derselben Bedingung genügen. Ist

$$\Psi(F_1, F_2, \ldots. F_r)$$

eine solche, und bemerkt man, dass die Werthe von $F_1, \ldots F_r$ sehr klein sind, so wird sich diese Grösse, nach dem Taylor'schen Satze, offenbar unter die lineare Form (52) stellen lassen, da sie verschwinden muss, wenn

$$F_1 = 0, \ldots, \quad F_r = 0.$$

Also ist die Form (52) allgemein. Daraus folgt nun, dass die vortheilhafteste Verbindung der Grössen e, um u zu erhalten, aus der bestimmten (47) erhalten wird unter der Form:

$$\psi(e_1, e_2, \ldots) = \varphi(e_1, e_2, \ldots) + \alpha_1 F_1(e_1, e_2, \ldots) + \alpha_2 F_2(e_1, e_2, \ldots) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_r F_r(e_1, e_2, \ldots). \qquad (53)$$

Daraus folgt, wenn die Grössen $a, b, c, \ldots$ dieselbe Bedeutung haben wie in §. 16.:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = l_1 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1 + \alpha_3 c_1 + \ldots + \alpha_r \beta_1, \\ L_2 = l_2 + \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 c_2 + \ldots + \alpha_r \beta_2, \\ \quad \vdots \end{array}\right\} \qquad (54)$$

Da aber (53) die vortheilhafteste Verbindung darstellt, so muss der ihr zugehörige wahrscheinliche Fehler (43) ein Minimum sein, d. h. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ sind so beschaffen, dass $\left[\frac{L^2}{g}\right]$ ein Minimum ist. Man hat also

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left[\frac{L^2}{g}\right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left[\frac{L^2}{g}\right] = 0, \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_r}\left[\frac{L^2}{g}\right] = 0;$$

d. h.

$$\frac{L_1}{g_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(L_1) + \frac{L_2}{g_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}(L_2) + \ldots + \frac{L_m}{g_m}\frac{\partial}{\partial \alpha_r}(L_m) = 0$$
$$\vdots$$

woraus, wenn man (54) beachtet, folgt:

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{al}{g}\right] + \left[\frac{a^2}{g}\right]\alpha_1 + \left[\frac{ab}{g}\right]\alpha_2 \;\ldots\; \left[\frac{a\beta}{g}\right]\alpha_r = 0, \\ \left[\frac{bl}{g}\right] + \left[\frac{ab}{g}\right]\alpha_1 + \left[\frac{b^2}{g}\right]\alpha_2 + \ldots + \left[\frac{b\beta}{g}\right]\alpha_r = 0, \\ \qquad \vdots \\ \left[\frac{\beta l}{g}\right] + \left[\frac{\beta a}{g}\right]\alpha_1 + \left[\frac{\beta b}{g}\right]\alpha_2 + \ldots + \left[\frac{\beta^2}{g}\right]\alpha_r = 0 \end{array}\right\} \qquad (55)$$

woraus nun die α bestimmt werden. Daraus erhält man die L vermittelst (54), und dann den wahrscheinlichen Fehler der vortheilhaftesten Verbindung der Grössen e vermittelst (48).

Wir haben bereits oben bemerkt, dass

$$\varphi(e_1, e_2, \ldots), \quad \psi(e_1, e_2, \ldots)$$

zusammenfallen müssen, wenn man statt e setzt $e + x$. Nun ist aber

$$\varphi(e_1+x_1, e_2+x_2,\ldots)=\varphi(e_1, e_2,\ldots)+l_1x_1+l_2x_2+\ldots,$$
$$\psi(e_1+x_1, e_2+x_2,\ldots)=\psi(e_1, e_2,\ldots)+L_1x_1+L_2x_2+\ldots;$$

also, da

$$\varphi(e_1+x_1, e_2+x_2,\ldots)=\psi(e_1+x_2, e_2+x_2,\ldots):$$

$$\begin{aligned}\psi(e_1, e_2,\ldots) &= \varphi(e_1, e_2,\ldots)+(l_1-L_1)x_1+(l_2-L_2)x_2+\ldots\\ &= \varphi(e_1, e_2,\ldots)-(a_1\alpha_1+b_1\alpha_2+c_1\alpha_3+\ldots+\beta_1\alpha_r)x_1\\ &\qquad -(a_2\alpha_1+b_2\alpha_2+c_2\alpha_3+\ldots+\beta_2\alpha_r)x_2\\ &\qquad \vdots\\ &= \varphi(e_1, e_2,\ldots)-\alpha_1(a_1x_1+a_2x_2+\ldots)\\ &\qquad -\alpha_2(b_1x_1+b_2x_2+\ldots)\\ &\qquad \vdots\\ &= \varphi(e_1, e_2,\ldots)+\alpha_1n_1+\alpha_2n_2+\alpha_3n_3+\ldots,\end{aligned} \tag{56}$$

wenn man die Gleichungen (39) beachtet. Es folgt diess übrigens auch unmittelbar aus (53), da

$$F_1(e_1, e_2,\ldots)=n_1, \text{ u. s. w.}$$

Hätte man statt der beobachteten Werthe e die ausgeglichenen $e+x$, die wir als die wahren anzunehmen gezwungen sind, angewendet, so wäre es ganz gleichgültig gewesen, welchen Weg man zur Bestimmung von u eingeschlagen hätte. Hätte man also den bestimmten (47) gewählt, so wäre

$$u=\varphi(e_1+x_1, e_2+x_2,\ldots)=\varphi(e_1, e_2,\ldots)+l_1x_1+l_2x_2+\ldots \tag{57}$$

Nun erhält man aus (42), wenn man die erste mit $\frac{l_1}{g_1}$, die zweite mit $\frac{l_2}{g_2}$,.... multiplizirt und addirt:

$$[lx]+\left[\frac{al}{g}\right]k_1+\left[g\right]k_2+\ldots\left[\frac{\beta l}{g}\right]k_r=0,$$

und wenn man hier aus (55) die Werthe von $\left[\frac{al}{g}\right]$, $\left[\frac{bl}{g}\right]$,..... einsetzt:

$$\begin{aligned}[lx]= &\left\{\left[\frac{a^2}{g}\right]k_1+\left[\frac{ab}{g}\right]k_2+\ldots+\left[\frac{a\beta}{g}\right]k_r\right\}\alpha_1\\ &\vdots\\ +&\left\{\left[\frac{a\beta}{g}\right]k_1+\left[\frac{b\beta}{g}\right]k_2+\ldots+\left[\frac{\beta^2}{g}\right]k_r\right\}\alpha_r.\end{aligned}$$

Daraus folgt nun, unter Beachtung der Gleichungen (43):

$$[Lx]=[an],$$

d. h. die Formel (57) giebt denselben Werth, wie (56). Nebenbei folgt daraus, dass $[Lx]=0$ ist, so dass die vortheilhafteste Verbindung der e so beschaffen ist, dass sie denselben Werth für u giebt, als wenn man statt der e die $e+x$ angewendet hätte.

Man schliesst aus diesen Entwickelungen, dass, wenn man eine Grösse u berechnen soll, und man dazu irgend einen Weg einschlägt, dieser gleichgültig ist, vorausgesetzt, dass man die ausgeglichenen Beobachtungen $e+x$ anwende. Das so erhaltene Resultat fällt zusammen mit dem, das man erhalten hätte, wenn man die vortheilhafteste Verbindung der beobachteten Grössen e angewendet hätte.

Der wahrscheinliche Fehler des so erhaltenen Resultats ist (48):

$$R\sqrt{\left[\frac{L^2}{g}\right]}.$$

Damit ist nun die Theorie der Ausgleichung der Beobachtungsfehler geschlossen.

Bemerkung des Herausgebers.

In diesem Aufsatze haben in den Potenz-Exponenten runde Klammern () gesetzt werden müssen, wo eigentlich eckige [] zu setzen gewesen wären, weil in der Druckerei solche eckige Klammern augenblicklich nicht in der erforderlichen Kleinheit vorhanden waren, und der Abdruck der obigen lehrreichen Abhandlung nicht aufgehalten werden sollte. Es wird aber dies, nachdem es hier besonders bemerkt worden ist, Undeutlichkeit hoffentlich nicht hervorbringen.

XV.

Die Auflösung algebraischer Gleichungen.

Von

Herrn August Weiler,

Gymnasiallehramts-Candidaten.

(Darmstadt.)

---

1. Wenn mehrere Grössen in einer Abhängigkeit zu einander stehen, nach welcher der einen bestimmte Werthe entsprechen, nachdem man jeder andern einen solchen beigelegt hat, und wenn es darauf ankommt, jene erstern Werthe herzuleiten, so muss vor Allem die zwischen den Grössen bestehende Abhängigkeit in algebraischer Form dargestellt sein. Nachdem sie in einer Gleichung ausgedrückt worden, worin die fragliche Grösse mit den andern durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzirung, Wurzelausziehen u. s. w. verbunden erscheint, stellt sich die Algebra die Aufgabe, einen Ausdruck zu bestimmen, welcher an die Stelle der Unbekannten eingesetzt, der Gleichung identisch genügt; oder dieselbe dergestalt umzuformen, dass die unbekannte Grösse unmittelbar als Zahl hervorgeht, indem sie in einfachster Gestalt ohne irgend eine Verbindung mit andern Grössen die eine Seite der Gleichung einnimmt, während auf der anderen Seite nur Gegebenes vorkommt. — Die Algebra umfasst hiernach ein ausserordentlich weites Feld. Allein man sieht sich genöthigt, dasselbe in verhältnissmässig enge Gränzen einzuschliessen, weil nur in deren Bereiche die erwähnte Absicht mit lohnendem Erfolge erreicht wird. Man betrachtet nämlich nur diejenigen Gleichungen, die aus mehren Gliedern bestehen, deren jedes durch eine ganzzahlige Potenz der Unbekannten gebildet ist. Doch auch diese Gleichungen können bis jetzt in ihrer Allgemeinheit noch nicht betrachtet werden; der Erfolg zieht die

Gränzen noch enger zusammen. Im Folgenden will ich versuchen, einen möglichst vollständigen Ueberblick über diese Untersuchungen zu geben, insoweit solche bei Benutzung der algebraischen, logarithmischen und trigonometrischen Funktionen zu einem Resultate führen. Zugleich will ich mich bemühen, dass aus der Aufeinanderfolge und Darstellungsweise des Gegenstandes erkannt werde, wie die benutzten Hülfsmittel nichts weiter aufdecken können, damit vorliegende Abhandlung den Eindruck eines in sich abgeschlossenen Ganzen in dem Leser zurücklasse.

2. Zuerst aber mag Einiges über die sogenannten imaginären Grössen vorausgeschickt werden. Es kann nicht geläugnet werden, dass aus der Abhängigkeit zwischen mehreren Grössen unter Umständen für die eine Grösse kein Werth hervorgeht, sobald man den anderen gewisse Werthe beigelegt hat. Wenn z. B. nach derjenigen Grösse gefragt wird, welche mit sich selbst multiplizirt werden muss, damit a entstehe, so sind wir gewiss, dass keine Grösse der Art gefunden wird, sobald man sich unter a einen negativen Werth denkt. Denn es giebt keine Zahl, deren Quadrat negativ ist. Wenn es nun aber gelingt, aus der Gleichung, welche eine solche Abhängigkeit vorstellt, die fragliche Grösse zu entwickeln, so gilt der gefundene Ausdruck auch unter den vorerwähnten Bedingungen. Dieser stellt dann aber, weil in der That kein wirklicher Werth möglich ist, etwas Unmögliches oder Imaginäres vor. Die Allgemeinheit der algebraischen Entwickelungen führt demnach nothwendig auf imaginäre Grössen, von welchen sich die bis dahin vorkommenden mittels des unmöglichen $\sqrt{-1}$ darstellen lassen.

Demnach könnte uns die algebraische Form eines solchen Werthes durchaus gleichgültig sein, wenn dieser stets nur in nackter Form verlangt würde, weil ein imaginärer Werth an und für sich keine Bedeutung hat. Allein gar oft wird ein solcher in weitere Rechnungen eingeführt, in deren Verlaufe das Imaginäre wieder ausfällt, so dass dem letzten Resultate eine wirkliche oder reelle Bedeutung zukommt, während einzelne Theile der Rechnung unter imaginärer Form erscheinen. Aus diesem Gesichtspunkte betrachtet sind die imaginären Ausdrücke nicht allein brauchbar, sondern sie sind der Allgemeinheit algebraischer Entwickelungen unentbehrlich, indem mit ihrer Hülfe verschiedene Resultate, welche in einem natürlichen Zusammenhange stehen, auf einem gemeinsamen Wege erhalten werden; während jedes einzelne dieser Resultate, wenn in der Rechnung das Imaginäre vermieden werden sollte, auf einem besonderen, oftmals mühseligeren Wege hergeholt werden müsste, zwischen denen keine andere Verbindung aufgefunden werden kann.

3. Wenn eine Gleichung eine reelle Abhängigkeit zwischen verschiedenen Grössen ausdrückt, obschon Imaginäres in derselben seine Stelle findet, so muss durch die gehörigen Reduktionen das Imaginäre wegfallen. Diese Reduktionen sind keinen Schwierigkeiten unterworfen, und man erkennt deshalb leicht, ob sich das Imaginäre in einem vorliegenden Ausdrucke aufhebt. Wenn $\sqrt{-1}$ als Faktor verschiedener Glieder erscheint, so wird man

es als gemeinsamen Faktor ausscheiden; und das Imaginäre wird nur dann verschwinden, wenn der Faktor von $\sqrt{-1}$ sich auf Null zurückführt.

$$x = a^2 + (b + c\sqrt{-1})(b - c\sqrt{-1}),$$

auf diese Weise verändert, wandelt sich um in

$$x = a^2 + b^2 - c^2.$$

Eben so geht

$$x = \log(a + b\sqrt{-1}) + \log(a - b\sqrt{-1})$$

oder

$$x = \log[(a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1})]$$

über in

$$x = \log(a^2 - b^2).$$

Wenn $\sqrt{-1}$ als Exponent mehrer Glieder eines Ausdrucks oder in sonst einer andern Zusammenstellung vorkommt, welche in ihrer vorliegenden Form nicht gestattet, den gemeinsamen Faktor $\sqrt{-1}$ auszuscheiden, so müsste man die betreffenden Funktionen in Reihen entwickeln, so dass $\sqrt{-1}$ nur als Faktor verschiedener Glieder dieser Reihen auftritt; und die Gleichung wird dann in der That eine reelle Abhängigkeit ausdrücken, wenn sich wie vorher die Gesammtheit der Coefficienten von $\sqrt{-1}$ auf Null zurückführt. Allein man wird ein weit vortheilhafteres Verfahren einschlagen, wenn man bemerkt, dass die nach dem Verschwinden von $\sqrt{-1}$ zurückbleibenden Reihen auf andere verwandte Funktionen zurückführen, für welche wir uns in der Algebra kürzerer Zeichen bedienen. Für die logarithmischen und trigonometrischen Funktionen lassen sich alle hierher gehörigen Reduktionen aus den nachfolgenden einfacheren herleiten.

Es ist

$$\varepsilon^{\gamma\sqrt{-1}} = 1 + \gamma\sqrt{-1} - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^3}{2.3}\sqrt{-1}$$
$$+ \frac{\gamma^4}{2.3.4} + \frac{\gamma^5}{2.3.4.5}\sqrt{-1} - \ldots\ldots$$
$$= 1 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma^4}{2.3.4} - \ldots + \left(\gamma - \frac{\gamma^3}{2.3} + \frac{\gamma^5}{2.3.4.5} - \ldots\right)\sqrt{-1}$$
$$= \cos\gamma + \sqrt{-1}\sin\gamma.$$

Man hat also die Beziehung

$$\varepsilon^{\gamma\sqrt{-1}}=\cos\gamma+\sqrt{-1}\sin\gamma, \quad \ldots\ldots \quad 1.$$

und durch Vertauschen von γ gegen $-\gamma$ eine andere

$$\varepsilon^{-\gamma\sqrt{-1}}=\cos\gamma-\sqrt{-1}\sin\gamma, \quad \ldots\ldots \quad 2.$$

welche beiden Gleichungen alle vorher erwähnten Reduktionen in sich einschliessen. So geht die Gleichung

$$\varepsilon^{az\sqrt{-1}}+\varepsilon^{-az\sqrt{-1}}=by$$

mit deren Hülfe über in

$$2\cos az=by,$$

da hier az die Stelle von γ vertritt.

Beide Beziehungen lassen sich in einer andern für den Gebrauch oft vortheilhafteren Form darstellen. Man hat nämlich:

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.\varepsilon^{\sqrt{-1}\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}}, \quad \ldots 1'.$$

$$\alpha-\beta\sqrt{-1}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.\varepsilon^{-\sqrt{-1}\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}}, \quad \ldots 2'.$$

welche mit den vorigen identisch sind. Denn setzt man

$$\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}=\gamma,$$

so ist

$$\frac{\beta}{\alpha}=\operatorname{tg}\gamma; \quad \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\cos\gamma, \text{ und } \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\sin\gamma.$$

Die Gleichung

$$(z+\sqrt{-1}y)^{\frac{1}{2\sqrt{-1}}}(z-\sqrt{-1}y)^{\frac{-1}{2\sqrt{-1}}}=az$$

z. B. geht wegen der letztern Beziehungen über in

$$\varepsilon^{\operatorname{arctg}\frac{y}{z}}=az,$$

oder

$$y=z\operatorname{tg}\log az.$$

Dies Resultat wird erhalten, wenn man α mit z, β mit y vertauscht, sodann in 1'. beiderseits den Exponenten $\frac{1}{2\sqrt{-1}}$, in 2'. den Exponenten $\frac{-1}{2\sqrt{-1}}$ giebt, und so beide Gleichungen mit einander multiplizirt.

4. Wenn die Unbekannte z in einer Gleichung auf dem ersten Grade vorkommt, wenn sich also die Gleichung auf die Form $z+a=0$ bringen lässt, so giebt sie der Unbekannten den Werth $z=-a$. Man nennt eine solche Gleichung eine Gleichung des ersten Grades. Allgemein spricht man von einer Gleichung des $n$ten Grades, wenn n die höchste Potenz, auf welche die Unbekannte z erhoben vorkommt, nachdem alle negativen Potenzen aus der Gleichung entfernt worden sind. Sie kann dargestellt werden unter der Form:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

Führen wir das Produkt

$$(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)\ldots = 0$$

aus, das aus n Faktoren bestehen soll, so erhalten wir die Gleichung

$$z^n - (\alpha+\beta+\gamma+..)z^{n-1} + (\alpha\beta+\alpha\gamma+..+\beta\gamma+\ldots)z^{n-2} + .. \pm \alpha\beta\gamma\ldots = 0,$$

in deren letztem Gliede das Zeichen $\pm$ gilt, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Die Vergleichung zeigt die Identität dieses Resultates mit der oben angeführten Gleichung des $n$ten Grades, wenn man folgende n Beziehungen bestehen lässt:

$$a_1 = -(\alpha+\beta+\gamma+..),$$

$$a_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \ldots + \beta\gamma + \ldots,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$a_n = \pm \alpha\beta\gamma\ldots.$$

Das Bestehen dieser n Beziehungen ist aber immer möglich, weil darin die n unbestimmten Grössen α, β, $\gamma\ldots$ vorkommen; und man kann demnach die allgemeinste Gleichung des $n$ten Grades als das Produkt von n Faktoren $z-\alpha$, $z-\beta\ldots$ ansehen. Die n Grössen α, β, $\gamma\ldots$ sind zugleich die gesuchten Werthe, welche der Gleichung genügen; denn vertauscht man z mit irgend einer unter ihnen, so geht einer jener Faktoren in Null über, und der durch die Multiplikation aller Faktoren entstehenden Gleichung wird identisch genügt. Eine Gleichung

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + .. + a_n = 0$$

giebt also n im Allgemeinen unter sich verschiedene Werthe z, welche man die n Wurzeln der Gleichung nennt, und welche bekannt sind, sobald man die Gleichung in das Produkt von n Faktoren aufgelöst hat.

Die eben geführte Betrachtungsweise giebt uns einen klaren Aufschluss über die Zahl der Wurzeln einer Gleichung, und über die Art des Vorkommens derselben. Sie gestattet uns ausserdem, mancherlei Schlüsse zu ziehen in Bezug auf die Beschaffenheit der Wurzeln. So z. B. schliessen wir, dass imaginäre Wurzeln nur paarweise vorkommen können, und zwar nur unter der Gestalt $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, sobald die Glieder a_1, a_2, a_3.... der entsprechenden Gleichung alle reell sind. Denn nur unter dieser Form der imaginären Wurzeln giebt das Produkt

$$(z-\alpha-\beta\sqrt{-1})\,(z-\alpha+\beta\sqrt{-1})$$

den verschiedenen Potenzen von z reelle Faktoren. Die Ausführung giebt nämlich

$$z^2-2\alpha z+\alpha^2-\beta^2.$$

Wenn alle Wurzeln einer Gleichung bekannt sind, so kann sie hiernach stets in das Produkt von n Faktoren des ersten und zweiten Grades in Bezug auch z aufgelöst werden, in denen kein imaginäres Glied vorkommt, indem man das Produkt je zweier sogenannten konjugirten Wurzelfaktoren

$$z-\alpha-\beta\sqrt{-1} \text{ und } z-\alpha+\beta\sqrt{-1}$$

ausführt.

Allein, um die Wurzelwerthe selbst zu erhalten, dazu erscheint uns diese Betrachtungsweise verhältnissmässig weniger brauchbar. Denn wollten wir in dieser Absicht die oben gegebenen n Beziehungen benutzen, und daraus eine andere herleiten, in der nur eine der Unbekannten α, β, γ,... vorkommt, so müsste man auf die Gleichung des $n$ten Grades zurückkommen, weil die Unbekannten symmetrisch vorkommen, und jede Beziehung, welche man als für die eine geltend herleitet, ebenso für die andere besteht Wir müssen vielmehr zu mancherlei Mitteln unsere Zuflucht nehmen, um möglichst einfach und bestimmt das Ziel zu erreichen.

5. Die nächsteinfache Gleichung ist

$$z^2+a_1z+a_2=0.$$

Vertauschen wir darin $z+\frac{a_1}{2}$ gegen y, so verwandelt sie sich in

$$y^2=\frac{a_1^2}{4}-a_2;$$

und indem wir beiderseits die Wurzel ausziehen, entsteht

$$y = \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

und daraus

$$z = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

Auf dieselbe Weise lösen wir die allgemeinere Gleichung

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \frac{n-1}{1.2} \frac{a_1^2}{n} z^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3} \frac{a_1^3}{n^2} z^{n-3} + .. + a_2 = 0.$$

Denn durch Vertauschen von $z + \frac{a_1}{n}$ gegen y verwandelt sich dieselbe in

$$y^n = \left(\frac{a_1}{n}\right)^n - a_2.$$

Um aber die n Wurzeln dieser Gleichung zu erhalten, bietet sich folgendermassen eine Beziehung dar. Vertauscht man in

$$\varepsilon^{\pm \gamma \sqrt{-1}} = \cos\gamma \pm \sqrt{-1} \sin\gamma$$

die Grösse γ mit $n\gamma$, so hat man

$$\varepsilon^{\pm n\gamma \sqrt{-1}} = \cos n\gamma \pm \sqrt{-1} \sin n\gamma.$$

Erhebt man in der erstern Gleichung beiderseits zur $n$ten Potenz, so entsteht eine andere Form:

$$\varepsilon^{\pm n\gamma \sqrt{-1}} = (\cos\gamma \pm \sqrt{-1} \sin\gamma)^n.$$

Man zieht daraus die erwähnte Beziehung

$$(\cos\gamma \pm \sqrt{-1} \sin\gamma)^n = \cos n\gamma \pm \sqrt{-1} \sin n\gamma.$$

Die obige Gleichung lässt sich aber auch anschreiben unter den Formen

$$y^n = \left(\left(\frac{a_1}{n}\right)^n - a_2\right)(\cos 2i\pi + \sqrt{-1} \sin 2i\pi)$$

und

$$y^n = \left(a_2 - \left(\frac{a_1}{n}\right)^n\right)(\cos(2i+1)\pi + \sqrt{-1}\sin(2i+1)\pi),$$

jenachdem $\left(\frac{a_1}{n}\right) - a_2$ positiv oder negativ ist, wenn wir uns unter i eine ganze Zahl denken. Daraus gehen nun unmittelbar die Wurzeln

$$y = \sqrt[n]{\left(\frac{a_1}{n}\right)^n - a_2}\left(\cos\frac{2i\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi}{n}\right)$$

oder

$$y = \sqrt[n]{a_2 - \left(\frac{a_1}{n}\right)^n}\left(\cos\frac{(2i+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2i+1)\pi}{n}\right)$$

hervor. Denn erhebt man in diesen Beziehungen beiderseits zur $n$ten Potenz, so kehren die vorigen Gleichungen zurück.

Statt i setzt man nach und nach die Zahlen 1, 2, 3...i ein, wodurch jedesmal ein anderer Wurzelwerth hervorgerufen wird. Lässt man den Zahlenwerth i noch weiter anwachsen, so kehren die Wurzelwerthe in der nämlichen Ordnung wieder, und dies jedesmal, so oft i um n Einheiten zugenommen hat.

Im Allgemeinen bedeutet $\sqrt[n]{\alpha^2}$ n verschiedene Werthe, nämlich die n Wurzeln der Gleichung $z^n = \alpha^2$. Allein in den obigen Ausdrücken wird diese Bedeutung überflüssig; wir denken uns darunter den einen positiven reellen Wurzelwerth.

Indem wir erwägen, dass

$$\cos\gamma = \cos(2\pi - \gamma), \quad \sin\gamma = -\sin(2\pi - \gamma),$$

lassen sich die beiden Wurzelausdrücke für y, weil unter den n verschiedenen vorkommenden Winkeln je zwei in der erwähnten Beziehung zu einander stehen, auch unter folgender Gestalt anschreiben:

$$y = \sqrt[n]{\left(\frac{a_1}{n}\right)^n - a_2}\left(\cos\frac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi}{n}\right)$$

und

$$y=\sqrt[n]{a_2-\left(\frac{a_1}{n}\right)^n}\left(\cos\frac{(2i+1)\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{(2i+1)\pi}{n}\right),$$

worin man statt i nach und nach die Werthe $1, 2, 3 \ldots \frac{n}{2}$ oder $1, 2, 3 \ldots \frac{n+1}{2}$ zu setzen hat, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Die Faktoren des zweiten Grades, in welche sich die Gleichung $y^n=a$ zerlegen lässt, sind demnach

$$z^2-2a^{\frac{1}{n}}z\cos\frac{2i\pi}{n}+a^{\frac{2}{n}}$$

oder

$$z^2-2(-a)^{\frac{1}{n}}z\cos\frac{(2i+1)\pi}{n}+(-a)^{\frac{2}{n}},$$

je nachdem a positive oder negative Bedeutung hat.

6. Die allgemeine Gleichung des dritten Grades

$$z^3+a_1z^2+a_2z+a_3=0$$

erhält nach dem vorhergehenden Verfahren nur unter der Bedingung

$$\left(\frac{a_1}{3}\right)^2-\frac{a_2}{3}=0$$

ihre Lösung. Die allgemeine Lösung macht ein anderes Verfahren nöthig. Man hat die Beziehung

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

Daher

$$\cos^3\alpha-\frac{3}{4}\cos=\alpha\frac{\cos 3\alpha}{4}.$$

Für die kubische Gleichung

$$z^3-\frac{3}{4}z=a$$

gilt daher

$$z=\cos\frac{1}{3}\operatorname{arc}\cos 4a$$

als Wurzelausdruck. Wenn man für $\arccos 4a$ ein γ gefunden, so ist $\arccos 4a$ auch gleich $2i\pi+\gamma$, worin i irgend eine ganze Zahl vorstellt, indem allen diesen Bogen der nämliche Cosinus entspricht. Es ist also

$$z=\cos\frac{2i\pi+\gamma}{3},$$

und die drei Wurzeln der Gleichung werden erhalten, wenn man statt i nach und nach die Werthe 1, 2, 3 setzt.

Der Auflösung der allgemeinen Gleichung

$$z^3+a_1z^2+a_2z+a_3=0$$

steht nun weiter kein Hinderniss im Wege. Denn wir führen diese auf die eben gelöste Form zurück, indem wir z gegen c_1y+c vertauschen. Wir erhalten dadurch

$$y^3+\frac{3c+a_1}{c_1}y^2+\frac{3c^2+a_1.2c+a_2}{c_1^2}y+\frac{c^3+a_1c^2+a_2c+a_3}{c_1^3}=0,$$

und die beiden Grössen c_1 und c bestimmen sich aus den Bedingungen

$$\frac{3c+a_1}{c_1}=0 \text{ und } \frac{3c^2+a_1.2c+a_2}{c_1^2}=-\frac{3}{4}.$$

Die erstere giebt

$$c=-\frac{a_1}{3},$$

und dann die andere

$$c_1=2\sqrt{\left(\frac{a_1}{3}\right)^2-\frac{a_2}{3}},$$

oder abkürzend

$$c_1=2\sqrt{\frac{b_1}{3}},$$

indem wir

$$\frac{a_1^2}{3}-a_2=b_1$$

setzen. Endlich folgt

$$a = -\frac{c^3 + a_1 c^2 + a_2 c + a_3}{c_1^{\,3}} = -\frac{2\left(\frac{a_1}{3}\right)^3 - a_2\frac{a_1}{3} + a_3}{2^3\sqrt{\left(\frac{b_1}{3}\right)^3}},$$

oder abkürzend

$$a = \frac{b}{2^3\sqrt{\left(\frac{b_1}{3}\right)^3}},$$

wenn

$$b = -2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + a_2\frac{a_1}{3} - a_3.$$

Für die Gleichung

$$z^3 + a_1 z + a_2 z + a_3 = 0$$

gilt demnach

$$y = \cos\frac{1}{3}\arccos\frac{b}{2\sqrt{\left(\frac{b_1}{3}\right)^3}},$$

oder, nachdem man einen Bogen

$$\gamma = \arccos\frac{b}{2\sqrt{\left(\frac{b_1}{3}\right)^3}}$$

gefunden hat,

$$z = -\frac{a_1}{3} + 2\sqrt{\frac{b_1}{3}}\cos\frac{2i\pi + \gamma}{3}.$$

Dieser Ausdruck erscheint unter imaginärer Gestalt, wenn $\sqrt{\frac{b_1}{3}}$ imaginär, wenn also

$$\left(\frac{a_1}{3}\right)^2 - \frac{a_2}{3} < 0,$$

oder auch, wenn

$$\frac{b}{2\sqrt{\left(\frac{b_1}{3}\right)^3}} > 1.$$

In beiden Fällen geben wir dem Imaginären die Form $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ durch die nämliche Umwandlung. Da nämlich

$$2\cos\frac{2i\pi+\gamma}{3}=2\cos\frac{2i\pi}{3}\cos\frac{\gamma}{3}-2\sin\frac{2i\pi}{3}\sin\frac{\gamma}{3}$$

$$=\cos\frac{2i\pi}{3}\left[(\cos\gamma+\sqrt{-1}\sin\gamma)^{\frac{1}{3}}+(\cos\gamma-\sqrt{-1}\sin\gamma)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$+\sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi}{3}\left[(\cos\gamma+\sqrt{-1}\sin\gamma)^{\frac{1}{3}}-(\cos\gamma-\sqrt{-1}\sin\gamma)^{\frac{1}{3}}\right],$$

da ferner

$$\cos\gamma=\frac{b}{2\sqrt{\left(\frac{b_1}{3}\right)^3}},$$

und

$$\sin\gamma=\sqrt{1-\frac{b^2}{4\left(\frac{b_1}{3}\right)^3}};$$

so geht der Ausdruck

$$z=-\frac{a_1}{3}+2\sqrt{\frac{b_1}{3}}\cos\frac{2i\pi+\gamma}{3}$$

über in

$$z=-\frac{a_1}{3}+\cos\frac{2i\pi}{3}\left[\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{3}\right)^3}}\right.$$
$$\left.+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{3}\right)^3}}\right]$$

$$+\sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi}{3}\left[\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{3}\right)^3}}\right.$$
$$\left.-\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{3}\right)^3}}\right],$$

woraus die drei Wurzeln der allgemeinen Gleichung hervorgehen, wenn man statt i nach und nach die Zahlen 1, 2, 3 einsetzt. Von den Wurzeln ist demnach in einem der oben genannten Fälle nur eine reell, nämlich diejenige, welche man für $i=3$ erhält. Sie ist

$$z=-\frac{a_1}{3}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{3}\right)^3}}$$
$$+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{3}\right)^3}}.$$

7. Um das nämliche Verfahren auf eine Gleichung des $n$ten Grades anwenden zu können, muss vor Allem die Reihe bekannt sein, welche $\cos ny$ durch Cosinus des einfachen Winkels y ausdrückt. Wegen

$$(\cos y\pm\sqrt{-1}\sin y)^n=\cos ny\pm\sqrt{-1}\sin ny$$

hat man

$$2\cos ny=(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)^n+(\cos y-\sqrt{-1}\sin y)^n$$
$$=u^n+v^n,$$

indem man abkürzend

$$u=\cos y+\sqrt{-1}\sin y$$

und

$$v=\cos y-\sqrt{-1}\sin y$$

setzt. Da nun

$$2\cos y=u+v,$$

so wird die in Frage gestellte Reihe bekannt sein, nachdem die Coefficienten a, b, c... der Reihe

$$(u+v)^n+a(u+v)^{n-2}+b(u+v)^{n-4}+\ldots+k(u+v)=u^n+v^n$$

so bestimmt worden, dass dieser identisch Genüge geschieht. Da nun wegen $uv=1$ das Glied

$$(u+v)^n=u^n+v^n+n(u^{n-2}+v^{n-2})+\frac{n(n-1)}{1.2}(u^{n-4}+v^{n-4})+\ldots..,$$

so ergeben sich nach und nach jene Coefficienten, wenn nach u^m+v^m geordnet worden, und die Reihe selbst ist:

$$(2\cos\gamma)^n - n(2\cos\gamma)^{n-2}$$
$$+ n\frac{n-3}{2}(2\cos\gamma)^{n-4} - n\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}(2\cos\gamma)^{n-6}$$
$$+ n\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4}(2\cos\gamma)^{n-8} + \ldots = 2\cos n\gamma.$$

Hiernach lösen wir die allgemeine Gleichung

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

wenn diese so beschaffen, dass sie durch Vertauschen von $z + \frac{a_1}{n}$ gegen y sich verwandelt in:

$$y^n - b_1 y^{n-2} + \frac{b_1^2}{n}\frac{n-3}{2} y^{n-4} - \frac{b_1^3}{n^2}\frac{(n-4)(n-5)}{2.3} y^{n-6} + \ldots - b = 0,$$

worin b_1 und b beliebige Grössen. Denn vertauscht man y mit $x\sqrt{\frac{b_1}{n}}$, so geht die Gleichung über in

$$x^n - nx^{n-2} + n\frac{n-3}{2}x^{n-4} - n\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}x^{n-6} + \ldots - \frac{b}{\sqrt{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}} = 0,$$

und man erhält daraus auf der Stelle:

$$x = 2\cos\frac{1}{n}\arccos\frac{b}{2\sqrt{\frac{b_1}{n}}},$$

oder, nachdem ein Bogen

$$\gamma = \arccos\frac{b}{2\sqrt{\frac{b_1}{n}}}$$

aufgefunden ist,

$$y = 2\sqrt{\frac{b_1}{n}}\cos\frac{2i\pi + \gamma}{n},$$

und endlich

$$z=-\frac{a_1}{n}+2\sqrt{\frac{b_1}{n}}\cos\frac{2i\pi+\gamma}{n}.$$

Dieser Wurzelausdruck erscheint unter imaginärer Gestalt, wenn $\sqrt{\frac{b_1}{n}}$ imaginär, wenn also b_1 negativ, oder auch wenn

$$\frac{b}{2\sqrt{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}>1.$$

In beiden Fällen bringen wir denselben durch die folgende Rechnung auf die Form $\alpha+\beta\sqrt{-1}$.

Man hat

$$2\cos\frac{2i\pi+\gamma}{n}=2\cos\frac{2i\pi}{n}\cos\frac{\gamma}{n}-2\sin\frac{2i\pi}{n}\sin\frac{\gamma}{n}$$
$$=\cos\frac{2i\pi}{n}\left[(\cos\gamma+\sqrt{-1}\sin\gamma)^{\frac{1}{n}}+(\cos\gamma-\sqrt{-1}\sin\gamma)^{\frac{1}{n}}\right]$$
$$+\sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi}{n}\left[(\cos\gamma+\sqrt{-1}\sin\gamma)^{\frac{1}{n}}-(\cos\gamma-\sqrt{-1}\sin\gamma)^{\frac{1}{n}}\right].$$

Da weiter

$$\cos\gamma=\frac{b}{2\sqrt{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}},$$

$$\sin\gamma=\sqrt{1-\frac{b^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}};$$

so verwandelt sich jener Ausdruck

$$z=-\frac{a_1}{n}+2\sqrt{\frac{b_1}{n}}\cos\frac{2i\pi+\gamma}{n}$$

in

$$z = -\frac{a_1}{n} + \cos\frac{2i\pi}{n}\left[\sqrt[n]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}\right.$$
$$\left.+\sqrt[n]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}\right]$$
$$+\sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi}{n}\left[\sqrt[n]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}\right.$$
$$\left.-\sqrt[n]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}\right],$$

worin man nach und nach statt i die Werthe $1, 2, 3 \ldots n$ zu setzen hat, damit alle Wurzelwerthe zum Vorschein kommen. Der erstere Wurzelausdruck giebt nur reelle Wurzeln; der andere nur imaginäre, mit Ausnahme der einzigen

$$z = -\frac{a_1}{n} + \sqrt[n]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}$$
$$+\sqrt[n]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}},$$

wenn n eine ungerade Zahl ist.

Die Formen dieser beiden Auflösungen möchten im ersten Augenblicke als sehr verschieden erscheinen. Die Aehnlichkeit zwischen den beiden Auflösungen ist aber augenfällig, wenn wir die Bedeutung einer Wurzelgrösse festhalten, und darnach

$$\sqrt[n]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}$$

unter der jener Bedeutung entsprechenderen Gestalt

$$\frac{1}{4}\log\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}\right.$$

darstellen, weil dann in beiden Auflösungen

$$\cos\frac{1}{n}\operatorname{arc}\cos \quad \text{und} \quad \varepsilon^{\frac{1}{n}\log}$$

sich einander entsprechen.

Der letztere Wurzelausdruck lässt sich nach und nach in andere Formen bringen, unter denen sich diejenigen durch Einfachheit auszeichnen, für welche n irgend eine Potenz von 2 ist. Diese Umwandlung kann nämlich im Allgemeinen ausgedrückt werden durch die Gleichung:

$$
\sqrt[m]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}+\sqrt[m]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}
=\sqrt{2\sqrt[m]{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}+\sqrt[\frac{m}{2}]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}+\sqrt[\frac{m}{2}]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}},
$$

deren zweiter Theil durch Quadriren des ersten Theils, und dann Wiederausziehen der zweiten Wurzel hervorgeht. Wenn darin vorerst $m=n$, und n eine Potenz von 2, so erhalten wir nach und nach

$$\sqrt[2]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{2}\right)^2}}+\sqrt[2]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{2}\right)^2}}$$
$$=\sqrt{2\frac{b_1}{2}+b},$$

$$\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{4}\right)^4}}+\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{4}\right)^4}}$$
$$=\sqrt{2\frac{b_1}{4}+\sqrt{2\left(\frac{b_1}{4}\right)^2+b}},$$

$$\sqrt[8]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{8}\right)^8}}+\sqrt[8]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{8}\right)^8}}$$
$$=\sqrt{2\frac{b_1}{8}+\sqrt{2\left(\frac{b_1}{8}\right)^2+\sqrt{2\left(\frac{b_1}{8}\right)^4+b}}},\ \text{u. s. w.}$$

8. Um die allgemeine Gleichung des vierten Grades

$$z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4=0$$

zu lösen, sehen wir sie als entstanden an durch die Multiplikation der Faktoren

$$(z^2-c_1z-c)(z^2-d_1z-d).$$

Wir betrachten demnach z^2 als die Unbekannte, für welche sich die beiden Werthe c_1z+c und d_1z+d ergeben müssen. Diese beiden Werthe sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$z^4+(a_1z-z')z^2+(z'+a_2)z^2+a_3z+a_4=0,$$

worin z' eine noch unbekannte Grösse vorstellt, weil nämlich das zweite Glied a_1z-z' die negative Summe, das dritte Glied

$$(z'+a_2)z^2+a_3z+a_4$$

das Produkt der Wurzeln c_1z+c und d_1z+d vorstellt.

Man erhält übrigens durch Auflösen

$$z^2+\frac{1}{2}(a_1z-z')=\pm\sqrt{\frac{1}{4}(a_1z-z')^2-(z'+a_2)z^2-a_3z-a_4},$$

und die Grösse z' bestimmt sich aus der Bedingung, dass die beiden Wurzeln z^2 die Gestalt c_1z+c und d_1z+d haben müssen, was zutrifft, wenn

$$(a_1z-z')^2-4(z'+a_2)z^2-4a_3z-4a_4$$

oder

$$(a_1^2-4z'-4a_2)z^2-2(a_1z'+2a_3)z+z'^2-4a_4\quad.$$

ein vollständiges Quadrat ist in Bezug auf z, oder wenn

$$(a_1^2-4z'-4a_2)(z'^2-4a_4)=(a_1z'+2a_3)^2.$$

Aus dieser Bedingung erhält man zur Bestimmung von z' die Gleichung

$$z'^3+a_2z'^2+(a_1a_3-4a_4)z'+a_1^2a_4-4a_2a_4+a_3^2=0.$$

Nachdem man ein z' bestimmt, und in die obige Gleichung eingesetzt hat, geht sie, weil dann

$$\pm\sqrt{\frac{1}{4}(a_1z-z')^2-(z'+a_2)z^2-a_3z-a_4}$$

$$=\pm\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2-z'-a_2}\,.\,z\mp\frac{\frac{a_1}{2}z'+a_3}{2\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2-z'-a_2}},$$

über in:

$$z^2+\left(\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2-z'-a_2}\right)z-\frac{z'}{2}\mp\frac{\frac{a_1}{2}z+a_3}{2\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2-z'-a_2}}=0,$$

oder, indem man abkürzend

$$\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2-z'-a_2}=b$$

setzt, in:

$$z^2+\left(\frac{a_1}{2}\pm b\right)z-\frac{z'}{2}\mp\frac{\frac{a_1}{2}z+a_3}{2b}=0.$$

Daraus aber erhalten wir die vier Wurzeln:

$$z=-\left(\frac{a_1}{4}+\frac{b}{2}\right)\pm\sqrt{\frac{a_1}{2}\left(\frac{a_1}{4}+\frac{b}{2}\right)+\frac{z'-a_2}{4}+\frac{\frac{a_1}{2}z'+a_3}{2b}},$$

$$z=-\left(\frac{a_1}{4}-\frac{b}{2}\right)\pm\sqrt{\frac{a_1}{2}\left(\frac{a_1}{4}-\frac{b}{2}\right)+\frac{z'-a_2}{4}-\frac{\frac{a_1}{2}z'+a_3}{2b}};$$

welche Ausdrücke keiner Veränderung mehr bedürfen, indem unter den drei Werthen z' in allen Fällen ein solcher vorkommt, welcher

$$\left(\frac{a_1}{2}\right)^2-z'-a_2$$

reell und positiv macht, so dass unter jenen äussern Wurzelzeichen keine imaginäre Grösse vorkommt. Wenn wir nämlich die Gleichung

$$z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4=0$$

durch Multiplikation der Faktoren z^2-c_1z-c und z^2-d_1z-d entstanden ansehen, so ist

$$a_1=-c_1-d_1,\quad a_2+z'=c_1d_1$$

und daher

$$\left(\frac{a_1}{2}\right)^2-z'-a_2=\frac{(c_1+d_1)^2}{4}-c_1d_1=\frac{(c_1-d_1)^2}{4}.$$

c_1 aber stellt die Summe zweier Wurzeln der Gleichung des vierten Grades vor, d_1 die Summe der beiden andern Wurzeln; und wie immer diese Wurzeln beschaffen sein mögen, so ist doch in allen Fällen wenigstens eine Zusammenstellung möglich, welche c_1 und d_1 von $\sqrt{-1}$ frei lässt. Die Wurzelgrösse

$$\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2-z'-a_2}$$

kann demnach in allen Fällen für reell gelten.

Dass die Grösse z' aus einer kubischen Gleichung hervorgehen müsse, dies konnte vorausgesehen werden. Denn eine Gleichung des vierten Grades lässt sich auf dreierlei Art in zwei quadratische Gleichungen zerlegen, indem die vier Wurzeln α, β, γ, δ nur auf ebenso viele Arten in Gruppen von je zwei vertheilt werden können. Diese drei Gruppen sind:

$$\alpha\beta,\quad \gamma\delta,$$
$$\alpha\gamma,\quad \beta\delta,$$
$$\alpha\delta,\quad \beta\gamma.$$

Aus dieser Betrachtungsweise geht hervor, dass die Zerlegung in zwei Faktoren für Gleichungen, welche den vierten Grad übersteigen, nicht mehr mit Hülfe einer Gleichung von geringerem Grade erlangt werden kann. Denn wollte man z. B. die Gleichung des sechsten Grades

$$z^6+a_1z^5+a_2z^4+a_3z^3+a_4z^2+a_5z+a_6=0$$

in die beiden Faktoren

$$z^3-c_2z^2-c_1z-c \quad \text{und} \quad z^3-d_2z^2-d_1z-d$$

zerlegen, so würden wir diese Gleichung anschreiben unter der Form:

$$z^6+(a_1z^2-z'z-z'')z^3+(z'+a_2)z^4+(z''+a_3)z^3+a_4z^2+a_5z+a_6=0;$$

wir würden also zwei unbekannte Grössen z' und z'' einführen, damit die Zulässigkeit der Wurzeln

$$z^3=c_2z^2+c_1z+c \quad \text{und} \quad z^3=d_2z^2+d_1z+d$$

entstehe. Allein wollten wir nun die beiden z' und z'' so bestimmen, dass in der That den beiden Wurzeln z^3 die verlangte Form zukommt, so würde man auf Gleichungen des zehnten Grades geführt, weil eine Gleichung des sechsten Grades auf zehnfache Weise in zwei Faktoren des dritten Grades zerlegt werden kann. Die Vertheilung der sechs Wurzeln α, $\beta \ldots \zeta$ in den beiden Faktoren würde in Folgendem sich darstellen:

$\alpha\beta\gamma$	$\delta\varepsilon\zeta$,	1.	$\alpha\gamma\varepsilon$	$\beta\delta\zeta$,	6.
$\alpha\beta\delta$	$\gamma\varepsilon\zeta$,	2.	$\alpha\gamma\zeta$	$\beta\delta\varepsilon$,	7.
$\alpha\beta\varepsilon$	$\gamma\delta\zeta$,	3.	$\alpha\delta\varepsilon$	$\beta\gamma\zeta$,	8.
$\alpha\beta\zeta$	$\gamma\delta\varepsilon$.	4.	$\alpha\delta\zeta$	$\beta\gamma\varepsilon$,	9.
$\alpha\gamma\delta$	$\beta\varepsilon\zeta$,	5.	$\alpha\varepsilon\zeta$	$\beta\gamma\delta$.	10.

9. Indem wir die bisherigen Auflösungsweisen mit einander verbinden, können die Bedingungen, unter welchen die Gleichung des $n$ten Grades mittels algebraischer, logarithmischer und trigonometrischer Funktionen auflösbar ist, noch etwas erweitert werden. Wir bestimmen nämlich die Wurzeln der Gleichungen

$$z^{2n}+a_1z^n+a_2=0,$$

$$z^{3n}+a_1z^{2n}+a_2z^n+a_3=0 \text{ u. s. w.};$$

denn, nachdem man die Wurzeln z^n dieser Gleichungen aufgefunden, bleibt im allgemeinsten Falle die Lösung einer Gleichung

$$z^n=\alpha+\beta\sqrt{-1}.$$

Diese Gleichung kann aber angeschrieben werden unter

$$z^n=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}(\cos(2i\pi+\gamma)+\sqrt{-1}\sin(2i\pi+\gamma)),$$

worin i irgend eine ganze Zahl vorstellt, und γ einen Bogen, dessen Cosinus gleich $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, und dessen Sinus gleich $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. Denn es ist

$$\cos(2i\pi+\gamma)=\cos\gamma$$

und

$$\sin(2i\pi+\gamma)=\sin\gamma.$$

Diese Form aber liefert ohne Weiteres die n Wurzelwerthe. Sie sind:

$$z=(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2n}}(\cos\frac{2i\pi+\gamma}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi+\gamma}{n});$$

denn erhebt man beiderseits zur $n$ten Potenz, so kehrt die letztere Gleichung zurück, weil

$$\left(\cos\frac{2i\pi+\gamma}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi+\gamma}{n}\right)^n$$

$$=\cos(2i\pi+\gamma)+\sqrt{-1}\sin(2i\pi+\gamma).$$

Die n Wurzelwerthe kommen zum Vorschein, wenn man statt i nach und nach die Werthe $1, 2, 3 \ldots n$ einsetzt.

10. Wir lösen endlich die Gleichungen

$$2\cos 2nx+a_1.2\cos nx+a_2=0,$$

$$2\cos 3nx+a_1.2\cos 2nx+a_2.2\cos nx+a_3=0, \text{ u. s. w.};$$

worin die folgenden Abkürzungen vorgenommen sind:

$$2\cos nx$$
$$=z^n-b_1z^{n-2}+\frac{b_1^2}{n}\,\frac{n-3}{2}\,z^{n-4}-\frac{b_1^3}{n^2}\,\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}\,z^{n-6}+\ldots,$$

$$2\cos 2nx$$
$$=z^{2n}-b_1z^{2n-2}+\frac{b_1^2}{2n}\,\frac{2n-3}{2}\,z^{2n-4}-\frac{b_1^3}{(2n)^2}\,\frac{(2n-4)(2n-5)}{2.3}\,z^{2n-6}+\ldots,$$

$$2\cos 3nx$$
$$=z^{3n}-b_1z^{3n-2}+\frac{b_1^2}{3n}\,\frac{3n-3}{2}\,z^{3n-4}-\frac{b_1^3}{(3n)^2}\,\frac{(3n-4)(3n-5)}{2.3}\,z^{3n-6}+\ldots$$

Denn diese Gleichungen vom Grade $2n$, $3n$ u. s. w. verwandeln sich wegen

$$\cos 2nx=2\cos^2 nx-1,$$

$$\cos 3nx=4\cos^3 nx-3\cos nx, \text{ u. s. w.}$$

bezüglich in die Gleichungen des zweiten, dritten u. s. w. Grades:

$$(2\cos nx)^2+a_1.2\cos nx+a_2-2=0,$$

$$(2\cos nx)^3+a_1(2\cos nx)^2+(a_2-3).2\cos nx+a_3-2a_1=0.$$

Nachdem aber die Wurzeln $2\cos nx$ der letztern Gleichungen bestimmt sind, bleibt, da jene im Allgemeinen die Form $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ haben, eine Gleichung

$$z^n-b_1z^{n-2}+\frac{b_1^2}{n}\,\frac{n-3}{2}\,z^{n-4}-\frac{b_1^3}{n^2}\,\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}\,z^{n-6}+\ldots$$
$$=\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

deren Lösung nach dem Früheren die Form

$$z=2\sqrt{\frac{b_1}{n}}\cos\left(2i\pi+\frac{1}{n}\arccos\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{2\sqrt{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}\right)$$

darbietet; und die weitere Aufgabe besteht darin, diesen Wurzelausdruck in allen Fällen unter die Form $A+B\sqrt{-1}$ zu bringen.

In dieser Absicht betrachten wir den Bogen, dessen Cosinus gleich

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{2\sqrt{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}$$

ist, als die Summe der Bogen γ und δ, und bestimmen beide Bogen so, dass die Gleichung

$$\cos(\gamma+\delta)=\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{2\sqrt{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}$$

durch das Bestehen der beiden Gleichungen

$$\cos\gamma\cos\delta=\frac{\alpha}{2\sqrt{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}$$

und

$$\sin\gamma\sin\delta=\frac{-\beta\sqrt{-1}}{2\sqrt{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}$$

befriedigt ist. Aus diesen erhält man aber die neuen:

$$\cos^2\gamma\cos^2\delta=\frac{\alpha^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ 1.$$

und

$$(1-\cos^2\gamma)\,(1-\cos^2\delta)=\frac{-\beta^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}, \quad \ldots\ldots\ldots\ 2.$$

und durch deren Subtrahiren eine dritte:

$$\cos^2\gamma+\cos^2\delta=\frac{\alpha^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}+\frac{\beta^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}+1, \quad \ldots\ldots\ 3.$$

welche in Verbindung mit der ersten unmittelbar die quadratische Gleichung

$$4\cos^4\gamma-\left[\frac{\alpha^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}+\frac{\beta^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}+1\right].4\cos^2\gamma+\frac{\alpha^2}{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}=0$$

zur Bestimmung von $2\cos^2\gamma$ und $2\cos^2\delta$ liefert. Diese Grössen sind:

$$2\cos^2\gamma = \frac{\alpha^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n} + \frac{\beta^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}$$

$$+1 - \sqrt{\left[\frac{\alpha^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n} + \frac{\beta^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n} + 1\right]^2 - \frac{\alpha^2}{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}},$$

$$2\cos^2\delta = \frac{\alpha^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n} + \frac{\beta^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}$$

$$+1 + \sqrt{\left[\frac{\alpha^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n} + \frac{\beta^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n} + 1\right]^2 - \frac{\alpha^2}{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}};$$

Daraus gehen wieder hervor:

$$-2\sin^2\gamma = \frac{\alpha^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n} + \frac{\beta^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}$$

$$-1 - \sqrt{\left[\frac{\alpha^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n} + \frac{\beta^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n} - 1\right]^2 + \frac{\beta^2}{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}},$$

$$-2\sin^2\delta = \frac{\alpha^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n} + \frac{\beta_2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}$$

$$-1 + \sqrt{\left[\frac{\alpha^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n} + \frac{\beta^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n} - 1\right]^2 + \frac{\beta^2}{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}};$$

weil nämlich die beiden Ausdrücke:

$$\left[\frac{\alpha^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n} + \frac{\beta^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n} + 1\right]^2 - \frac{\alpha^2}{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}$$

und

$$\left[\frac{\alpha^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}+\frac{\beta^2}{4\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}-1\right]^2+\frac{\beta^2}{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}$$

einander identisch sind.

Nachdem so die Bogen γ und δ näher bekannt geworden, sind dieselben einzuführen in den Wurzelausdruck

$$z=2\sqrt{\frac{b_1}{n}}\cdot\cos\frac{2i\pi+\gamma+\delta}{n}.$$

Eine genauere Betrachtung der obigen Ausdrücke lässt uns erkennen, dass für ein positives $\left(\frac{b_1}{n}\right)^n$ ebensowohl $\cos^2\gamma$ als $\sin^2\gamma$ unter allen Umständen positiv bleibt, dass also $\cos\gamma$ und $\sin\gamma$ reelle Bedeutung haben; dass aber $\sin^2\delta$ stets negativ, während $\cos^2\delta$ positiv ist, dass also $\cos\delta$ und $\sin\delta$ imaginäre Grössen vorstellen. Um dem Imaginären die gewünschte Form zu geben, setzen wir, wie schon früher:

$$2\cos\frac{\delta}{n}=(\cos\delta+\sqrt{-1}\sin\delta)^{\frac{1}{n}}+(\cos\delta-\sqrt{-1}\sin\delta)^{\frac{1}{n}},$$

$$2\sqrt{-1}\sin\frac{\delta}{n}=(\cos\delta+\sqrt{-1}\sin\delta)^{\frac{1}{n}}-(\cos\delta-\sqrt{-1}\sin\delta)^{\frac{1}{n}};$$

und erhalten somit aus

$$z=2\sqrt{\frac{b_1}{n}}\left[\cos\frac{2i\pi+\gamma}{n}\cos\frac{\delta}{n}-\sin\frac{2i\pi+\gamma}{n}\sin\frac{\delta}{n}\right]$$

den gesuchten Wurzelausdruck unter der Form

$$z=\cos\frac{2i\pi+\gamma}{n}\left[\sqrt[n]{\sqrt{\frac{A}{2}}+\sqrt{\frac{B}{2}}}+\sqrt[n]{\sqrt{\frac{A}{2}}-\sqrt{\frac{B}{2}}}\right]$$

$$+\sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi+\gamma}{n}\left[\sqrt[n]{\sqrt{\frac{A}{2}}+\sqrt{\frac{B}{2}}}-\sqrt[n]{\sqrt{\frac{A}{2}}-\sqrt{\frac{B}{2}}}\right],$$

worin die Bedeutungen von A und B hervorgehen aus den Beziehungen

$$A=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{b_1}{n}\right)^n$$
$$+\sqrt{\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{b_1}{n}\right)^n\right)^2-\alpha^2\left(\frac{b_1}{n}\right)^n},$$

$$B=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n$$
$$+\sqrt{\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n\right)^2+\beta^2\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}.$$

Wenn jedoch $\frac{b_1}{n}$ einen negativen Werth erhält, so erkennen wir, dass umgekehrt $\cos^2\delta$ und $\sin^2\delta$ beide positive Werthe, also zugleich reelle Bedeutung annehmen; dass aber $\sin^2\gamma$ negativ bleibt, während $\cos^2\gamma$ stets positiv. Weil demnach für ein negatives $\left(\frac{b_1}{n}\right)^n$ der Winkel γ eine imaginäre Bedeutung erhält, so setzen wir:

$$2\cos\frac{\gamma}{n}=(\cos\gamma+\sqrt{-1}\sin\gamma)^{\frac{1}{n}}+(\cos\gamma-\sqrt{-1}\sin\gamma)^{\frac{1}{n}}$$

und

$$2\sqrt{-1}\sin\frac{\gamma}{n}=(\cos\gamma+\sqrt{-1}\sin\gamma)^{\frac{1}{n}}-(\cos\gamma-\sqrt{-1}\sin\gamma)^{\frac{1}{n}};$$

und erhalten aus

$$z=2\sqrt{\frac{b_1}{n}}\left[\cos\frac{2i\pi+\delta}{n}\cos\frac{\gamma}{n}-\sin\frac{2i\pi+\delta}{n}\sin\frac{\gamma}{n}\right]$$

den gesuchten Wurzelausdruck unter der Form

$$z=\cos\frac{2i\pi+\delta}{n}\left[\sqrt[n]{\sqrt{\frac{A_1}{2}}+\sqrt{\frac{B_1}{2}}}+\sqrt[n]{\sqrt{\frac{A_1}{2}}-\sqrt{\frac{B_1}{2}}}\right]$$

$$+\sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi+\delta}{n}\left[\sqrt[n]{\sqrt{\frac{A_1}{2}}+\sqrt{\frac{B_1}{2}}}-\sqrt[n]{\sqrt{\frac{A_1}{2}}-\sqrt{\frac{B_1}{2}}}\right],$$

worin A_1 und B_1 die folgenden Bedeutungen haben:

$$A_1=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{b_1}{n}\right)^n$$
$$-\sqrt{\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{b_1}{n}\right)^n\right)^2-\alpha^2\left(\frac{b_1}{n}\right)^n},$$

$$B_1=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n$$
$$-\sqrt{\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n\right)^2+\beta^2\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}.$$

Wenn $\beta=0$, so geht der erstere Wurzelausdruck für ein positives $\left(\frac{b_1}{n}\right)^n$ wieder über in

$$z=2\sqrt{\frac{b_1}{n}}\cdot\cos\frac{2i\pi+\gamma}{n},$$

worin

$$\cos\gamma=\frac{\alpha}{2\sqrt{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}};$$

wenn

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2<\left(\frac{b_1}{n}\right)^n,$$

oder wenn

$$\frac{\alpha}{2\sqrt{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}<1.$$

Ist dagegen

$$\frac{\alpha}{2\sqrt{\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}>1,$$

so verwandelt sich der erstere Wurzelausdruck in

$$z = \cos\frac{2i\pi}{n}\left[\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}+\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}\right]$$
$$+\sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi}{n}\left[\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}-\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{b_1}{n}\right)^n}}\right].$$

Der zweite Wurzelausdruck für ein negatives $\left(\frac{b_1}{n}\right)^n$ aber geht für $\beta=0$ in allen Fällen in den letzteren über.

11. Dies mögte wohl Alles sein, was uns algebraische, logarithmische und trigonometrische Funktionen über die Auflösung algebraischer Gleichungen geben können. Eine allgemeine Lösung ist darnach nur für die Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades möglich; alle höhern Gleichungen aber bleiben ungelöst, wenn deren Glieder nicht besondere Bedingungen eingehen. Nun müssen aber, was die Auflösung der Gleichungen mit einer Unbekannten betrifft, noch die Untersuchungen angereiht werden, darüber, wie man den Grad einer Gleichung vermindert, wenn

eine Beziehung zwischen zwei oder mehreren Wurzeln derselben bekannt ist.

Vorerst haben wir dabei die Frage zu beantworten, wie sich eine Wurzel bestimmen lässt, welche den beiden Gleichungen

$$az^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

und

$$bz^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \ldots + b_m = 0$$

bezüglich vom $n$ten und $m$ten Grade gemeinsam ist.

Indem wir beachten, dass z in beiden Gleichungen als die nämliche Grösse angesehen werden kann, können wir durch Elimination der höchsten Potenzen von z zwei andere Gleichungen bilden, welche in Bezug auf das gemeinsame fragliche z von geringerem Grade sind.

Um dies deutlicher zu zeigen, nehmen wir beispielsweise $m = n + 2$ an, so dass die obigen Gleichungen dargestellt sind in:

$$az^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1.$$

und

$$bz^{n+2} + b_1 z^{n+1} + b_2 z^n + \ldots + b_{n+2} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2.$$

Wir multipliziren die erste mit bz^2, die andere mit a, durch Abziehen entsteht dann die Gleichung vom $(n+1)$ten Grade:

$$(a_1 b - ab_1) z^{n+1} + (a_2 b - ab_2) z^n + \ldots - ab_{n+2} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3.$$

Wenn jedoch a und b einen gemeinsamen Faktor haben, so dass $a = a'\mu$ und $b = b'\mu$, so multipliziren wir die obigen Gleichungen bezüglich nur mit $b'z^2$ und a', weil wir im andern Falle der neuen Gleichung des $(n+1)$ten Grades den gemeinsamen Faktor μ gäben.

Eine Gleichung vom $(n+1)$ten Grade erlangen wir auch durch Elimination von z^0. Diese wäre:

3.

$$-a_n b z^{n+1} - a_n b_1 z^n + (ab_{n+2} - a_n b_2) z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_{n+2} - a_n b_{n+1} = 0.$$

Durch Elimination von z^{n+1} aus 1. und 3. leiten wir aber eine Gleichung 4. her, in welcher n der höchste Exponent von z ist.

Wenn also zwei Gleichungen vom $n$ten und $m$ten Grade gegeben sind, so leiten wir auf dem bezeichneten Wege eine zweite Gleichung vom $n$ten Grade her, so dass nun vorliegen:

$$az^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

und

$$cz^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \ldots + c_n = 0.$$

Diese aber geben, indem man das einemal z^n, das anderemal z^0 eliminirt, ein anderes System Gleichungen vom $(n+1)$ten Grade:

$$(a_1 c - ac_1) z^{n-1} + (a_2 c - ac_2) z^{n-2} + \ldots\ldots + a_n c - ac_n = 0$$

und

$$(ac_n - a_n c) z^{n-1} + (a_1 c_n - a_n c_1) z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} c_n - a_n c_{n-1} = 0.$$

Man könnte auch, nachdem die eine Gleichung dieses Systems gewonnen, sogleich diese mit einer des vorhergehenden Systems zur Elimination von z^0 oder z^n verbinden, um die zweite Gleichung dieses Systems zu erhalten. Man wird das eine oder das andere Verfahren einschlagen, jenachdem eine kürzere Rechnung dieselben empfiehlt.

Es ist einleuchtend, dass man, so fortfahrend, endlich ein System von Gleichungen erhält, in welchen z nur auf dem ersten Grade vorkommt. Dasjenige z, welches gleichzeitig den ursprünglichen Gleichungen vom $n$ten oder $m$ten Grade genügt, genügt zugleich allen Gleichungen, welche aus diesen beiden hergeleitet worden sind. Es genügt daher auch den Gleichungen des letzten Systems vom ersten Grade. Da diese aber überhaupt nur eine Wurzel enthalten, so werden sie identisch sein, und jenes z ist durch dieselben bekannt. Wenn die ursprünglichen Gleichungen zwei Wurzeln gemeinsam enthalten, so werden diese identisch sein mit den Wurzeln desjenigen Systems, in welchem z auf dem zweiten Grade vorkommt; und dessen Gleichungen werden dann selbst identisch sein. Aehnliches gilt für eine grössere Anzahl gemeinsamer Wurzeln. Umgekehrt lehrt uns diese Untersuchung, dass in zwei Gleichungen von höherem Grade eine, zwei u. s. w. Wurzeln gemeinsam sind, wenn die Gleichungen des letzten, vorletzten u. s. w. Systems identisch sind.

Der Einfachheit halber nehmen wir ein Beispiel vor, in welchem die Coeffizienten von z durch Zahlen vertreten sind.

Die Gleichungen

$$z^5 - z^4 + 4z^3 - 4z^2 + 4z - 4 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ 1.$$

und

$$5z^4 - 4z^3 + 12z^2 - 8z + 4 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ 2.$$

geben durch Elimination von z^0 die Gleichung

$$z^4 + 4z^2 + 8z - 4 = 0 \quad \ldots\ldots\ 3.$$

und aus dem ersten Systeme 1. und 3. erhält man nach einander die beiden Systeme:

$$\left.\begin{aligned}3z^3-z^2+4z-2&=0\\ z^3+2z&=0\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}z^2+2&=0\\ z^2+2&=0\end{aligned}\right\}.$$

Die gemeinsamen Wurzeln sind demnach $z=\pm\sqrt{2}$.

Die Bestimmung einer oder mehrer Wurzeln, welche einer beliebigen Anzahl Gleichungen höheren Grades gemeinsam zukommen, ist hiernach keinen weitern Schwierigkeiten unterworfen. Man setzt nämlich an die Stelle zweier Gleichungen, am vortheilhaftesten der beiden Gleichungen des niedersten Grades, jene andere, welche deren gemeinsame Wurzeln enthält. Diese wieder in Verbindung gebracht mit einer dritten der vorliegenden Gleichungen lässt sich auf die nämliche Weise behandeln, und man vermindert so immer mehr die Anzahl der Gleichungen. Die gemeinsamen Wurzeln des letzten Gleichungenpaares kommen dann auch allen übrigen Gleichungen zu.

12. Wenn nun eine Beziehung bekannt ist, welche zwei oder mehrere Wurzeln einer Gleichung verbindet, so ist man stets im Stande eine zweite Gleichung herzuleiten, welche mit der ursprünglichen eine oder mehre Wurzeln gemein hat, die dann nach dem Vorhergehenden gefunden werden. Wir betrachten hier mehr beispielweise die einfachste Beziehung, durch welche zwei Grössen mit einander verglichen werden können. Wir nehmen an, dass zwei oder mehre Wurzeln der Gleichung

$$az^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots.+a_n=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

in dem Verhältnisse $1:b$ zu einander stehen.

Wenn α eine Wurzel dieser Gleichung, so ist hiernach auch $b\alpha$ eine Wurzel; und man hat zur Bestimmung desjenigen z, für welches eine andere Wurzel bz besteht, die zweite Gleichung

$$ab^nz^n+a_1b^{n-1}z^{n-1}+a_2b^{n-2}z^{n-2}+\ldots.+a_n=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2.$$

Wenn nun die erstere Gleichung p Wurzeln $z=\alpha$ und q Wurzeln $z=b\alpha$ enthält, so muss die andere q Wurzeln α enthalten; und beiden gemeinsam müssen p oder q Wurzeln $z=\alpha$ sein, jenachdem p oder q die kleinere Anzahl vorstellt. Man erhält diese durch die allmählige Bildung jener verschiedenen Systeme. Das nächste System wäre:

$$a(b^n-1)z^n+a_1(b^{n-1}-1)z^{n-1}+a_2(b^{n-2}-1)z^{n-2}+\ldots.$$
$$\ldots.+a_{n-1}(b-1)=0,$$

und

$$a_1(b-1)b^{n-1}z^{n-1}+a_2(b^2-1)b^{n-2}z^{n-2}+a_3(b^3-1)b^{n-3}z^{n-3}+\ldots..$$
$$\ldots.+a_n(b^n-1)=0.$$

Es sei z. B. bekannt, dass die Gleichung

$$z^4+z^3-z^2+5z+6=0$$

Wurzeln enthält, welche in dem Verhältnisse 1:2 zu einander stehen. Da nach dem Obigen $b=2$, so hat man:

$$\left.\begin{array}{r}15z^3+7z^2-3z+5=0\\ 4z^3-6z^2+35z+45=0\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{r}118z^2-537z-655=0\\ 131z^2+69z-62=0\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{r}z+1=0\\ z+1=0\end{array}\right\};$$

daher kommen die Wurzeln $z=-1$ und $z=-2$ vor.

Für die Gleichung

$$z^4+6z^3-29z^2+12z+12=0$$

sei $b=-3$ bekannt. Man findet dann die Systeme

$$\left.\begin{array}{r}60z^3-42z^2-58z-12=0\\ 54z^3-174z^2+84z+80=0\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{r}3z^2-3z-2=0\\ 3z^2-3z-2=0\end{array}\right\}.$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung

$$3z^2-3z-2=0$$

sind demnach mit -3 zu multipliziren, und man kennt die vier Wurzeln der obigen Gleichung.

13. Wenn b in -1 übergeht, so verdoppelt sich die Anzahl der in beiden Gleichungen eines Systems gemeinsamen Wurzeln. Denn wenn die Gleichung

$$az^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots.+a_n=0$$

p Wurzeln α, und q Wurzeln $-\alpha$ hat, so kommen der Gleichung

$$ab^nz^n+a_1b^{n-1}z^{n-1}+a_2b^{n-2}z^{n-2}+\ldots.+a_n=0$$

für $b=-1$, q Wurzeln α und p Wurzeln $-\alpha$ zu. Gemeinsam werden demnach sein p oder q Wurzeln α, je nachdem p oder q die kleinere Anzahl vorstellt, und eben so viele Wurzeln $-\alpha$.

Die Gleichung

$$4z^5 - 2z^4 + 2z^3 - z^2 - 12z + 6 = 0$$

z. B. giebt als erstes System die beiden identischen Gleichungen

$$2z^4 + z^2 - 6 = 0,$$

$$2z^4 + z^2 - 6 = 0.$$

Wenn alle positive Wurzeln einer Gleichung auch mit dem negativen Zeichen als Wurzeln vorkommen, wenn also die Gleichung nur gerade Potenzen von z enthält, so kann dieselbe nach dem eben eingeschlagenen Verfahren nicht mehr auf einen niederen Grad gebracht werden. Wenn man aber z^2 mit y vertauscht, so kommt der Grad der Gleichung auf die Hälfte herab. Auf diese Weise führt man die Gleichung

$$2z^4 + z^6 - 6 = 0$$

über in

$$2y^2 + y - 6 = 0.$$

Wenn $b=1$, wenn also gleiche Wurzeln vorhanden sind, so werden die Gleichungen des nächsten Systems in der Form:

$$a(b^n - 1)z^{n-1} + a_1(b^{n-1} - 1)z^{n-2} + a_2(b^{n-2} - 1)z^{n-3} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + a_{n-1}(b - 1) = 0,$$

$$a_1(b - 1)(bz)^{n-1} + a_2(b^2 - 1)(bz)^{n-2} + a_3(b^3 - 1)(bz)^{n-3} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + a_n(b^n - 1) = 0$$

unbrauchbar, weil durch Einsetzen von $b=1$ alle Glieder in Null übergehen. Wenn wir aber erwägen, dass

$$b^n - 1 = (b^{n-1} + b^{n-2} + b^{n-3} + \ldots. + 1)(b - 1),$$

so führen wir jene Gleichungen, nachdem man aus beiden den gemeinsamen Faktor $b-1$ gestrichen hat, über in die folgenden Formen:

$$naz^{n-1} + (n-1)a_1z^{n-2} + (n-2)a_2z^{n-3} + \ldots. + a_{n-1} = 0$$

und

$$a_1z^{n-1} + 2a_2z^{n-2} + 3a_3z^{n-3} + \ldots. + na_n = 0.$$

Um nun die obige Betrachtung über die Gemeinschaft der in diesen beiden Gleichungen vorkommenden Wurzeln auch hier in Anwendung bringen zu können, stellen wir uns vor, irgend ein

Verhältniss b zwischen zweien Wurzeln der vorliegenden Gleichung sei in die Einheit übergegangen; und wenn viele gleiche Wurzeln vorkommen, so stellen wir uns vor, jede einzelne dieser gleichen Wurzeln sei aus einem andern Verhältnisse zu irgend einer α unter ihnen in das Verhältniss der Einheit übergegangen. Wenn aber zwei Wurzeln α und β in einem Verhältnisse b zu einander stehen, so dass $\alpha b = \beta$, wenn zwischen den Wurzeln α und γ die Beziehung $\alpha b' = \gamma$ besteht, zwischen den Wurzeln α und δ die Beziehung $\alpha b'' = \delta$ u. s. w., so werden die Gleichungen eines Systems die Wurzel β oder γ oder δ gemeinsam haben, je nachdem man das Verhältniss b, b' oder b'' gelten lässt. Wenn nun aber die Verhältnisse b, b', b''... gleichzeitig in 1 übergehen, und man also wegen der Annahme $b = 1$ gleichzeitig die Verhältnisse b, b', b''... gelten lässt, so müssen die beiden Gleichungen eines der obigen Systeme gleichzeitig die ungleichen Wurzeln β, γ, δ..... in sich aufnehmen. Wenn demnach eine Gleichung m gleiche Wurzeln enthält, so kommen deren $m-1$ den Gleichungen

$$naz^{n-1} + (n-1)a_1 z^{n-2} + (n-2)a_2 z^{n-3} + \dots + a_{n-1} = 0,$$

$$a_1 z^{n-1} + 2a_2 z^{n-2} + 3a_3 z^{n-3} + \dots + na_n = 0$$

gemeinschaftlich zu.

Es sei z. B.

$$z^4 - 4z^3 + 16z - 16 = 0.$$

Man erhält daraus nach und nach die Systeme:

$$\left.\begin{array}{l} z^3 - 3z^2 + 4 = 0 \\ z^3 - 12z + 16 = 0 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} z^2 - 4z + 4 = 0 \\ z^2 - 4z + 4 = 0 \end{array}\right\}.$$

Da nun die Gleichung

$$z^2 - 4z + 4 = 0$$

die Wurzel $z = -2$ zweimal enthält, so kommt diese in der ursprünglichen dreimal vor.

14. Wenn unter den Wurzeln der Gleichung

$$az^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

solche vorkommen, welche bezüglich durch z und $\frac{b}{z}$ sich ausdrücken, worin b eine bekannte Grösse, so ergeben sich diese mittels einer zweiten Gleichung

$$a_n z^n + a_{n-1} b z^{n-1} + a_{n-2} b^2 z^{n-2} + \dots + a b^n = 0.$$

Kommen p Wurzeln α und q Wurzeln $\frac{b}{\alpha}$ vor, so kommen jenen zwei Gleichungen p oder q Wurzeln α gemeinsam zu, je nachdem p oder q die kleinere Anzahl, und man gelangt endlich zu einem System, welches nur diese Wurzeln enthält. Für den Fall $b=1$ aber sind gemeinsam p oder q Wurzeln α, und ebensoviele Wurzeln $\frac{1}{\alpha}$, so dass der Grad der Gleichung, aus welcher sich diese bestimmen, doppelt so gross ist als vorher. Dasselbe gilt für $b=-1$.

Für

$$z^5 + z^4 - 4z^3 + 12z^2 - 1 = 0$$

ist $b = -1$ gegeben, und man erhält hieraus und aus

$$z^5 - 12z^3 - 4z^2 - z + 1 = 0$$

die nächsten Systeme:

$$\left.\begin{array}{r} z^4 + 8z^3 + 16z^2 + z - 2 = 0 \\ 2z^4 + z^3 - 16z^2 + 8z - 1 = 0 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{r} 5z^3 + 16z^2 - 2z - 1 = 0 \\ z^3 - 2z^2 - 16z + 5 = 0 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{r} z^2 + 3z - 1 = 0 \\ z^2 + 3z - 1 = 0 \end{array}\right\}.$$

Die Wurzeln α und $-\frac{1}{\alpha}$ ergeben sich also aus

$$z^2 + 3z - 1 = 0.$$

Wenn zu jeder Wurzel α einer Gleichung auch eine Wurzel $\frac{1}{\alpha}$ gehört, wenn also die Gleichung ungeändert bleibt, indem man darin z mit $\frac{1}{z}$ vertauscht, so vermindern wir den Grad der Gleichung auf eine andere Weise. Sie erscheint unter der Form:

$$a z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a = 0,$$

und wenn n ungerade, so genügt offenbar als Wurzel $z = -1$. Durch Dividiren mittels $z+1$ bleibt also stets eine andere zurück, worin n gerade. Wenn zu jeder Wurzel α eine Wurzel $\frac{-1}{\alpha}$ gehört, so gilt die nämliche Bemerkung. Für ein ungerades n lässt sich dann aber der Faktor $z-1$ abscheiden, weil $z=1$ eine Wurzel ist, und es bleibt wiederum eine andere Gleichung, worin n gerade. Diese beiden Gleichungen, welche durch Division mittels $z-1$ und $z+1$ entstanden, können dargestellt werden unter den Formen:

$$a(z^n+1)+a_1z(z^{n-2}\pm1)+\dots\dots+a_{\frac{n}{2}-1}z^{\frac{n}{2}-1}(z^2\pm1)+a_{\frac{n}{2}}z^{\frac{n}{2}}=0,$$

wenn $n=4i$, und i eine ungerade Zahl, und unter den Formen:

$$a(z^n\pm1)+a_1z(z^{n-2}+1)+\dots+a_{\frac{n}{2}-1}z^{\frac{n}{2}-1}(z^2\pm1)+a_{\frac{n}{2}}z^{\frac{n}{2}}=0,$$

wenn $n=2i$. Da weiter je zwei Wurzeln dieser Gleichungen zum Produkte ±1 haben, deren Summe y aber unbekannt ist, so lassen sich dieselben in Faktoren von der Form

$$z^2-yz\pm1$$

zerlegen; und die Elimination von z mittels

$$z^2\pm1=yz$$

muss auf eine neue Gleichung führen, welche in Bezug auf y vom Grade $\frac{n}{2}$ ist. Die Elimination selbst führen wir am vortheilhaftesten aus mit Hülfe der beiden Beziehungen:

$$(z^{n-2}\pm1)(z^2\pm1)=z^n+1\pm(z^{n-4}+1)z^2$$

und

$$(z^{n-2}+1)(z^2\pm1)=z^n\pm1\pm(z^{n-4}\pm1)z^2,$$

von denen die erstere für $n=4i$, die andere für $n=2i$ Geltung hat. Wegen $z^2\pm1=yz$ entsteht dann nach und nach:

$$z^4+1=(y^2\mp2)z^2,$$

$$z^6\pm1=(y^3\mp3y)z^3,$$

$$z^8+1=(y^4\mp4y^2+2)z^4,$$

$$z^{10}\pm1=(y^5\mp5y^3+5y)z^5 \text{ u. s. w.}$$

So verwandelt sich die Gleichung

$$6z^4+35z^3+62z^2+35z+6=0$$

in die Gleichung des zweiten Grades

$$6(y^2-2)+35y+62=0,$$

oder in

$$6y^2+35y+50=0.$$

15. Zur Vervollständigung unserer Betrachtungen bleibt noch die Bestimmung von zwei und mehr Unbekannten aus eben so vielen Gleichungen eines höheren Grades. Die Aufgabe, zwei Unbekannte z und y, die unter einander gemengt in zwei Gleichungen von höherem Grade vorkommen, so zu bestimmen, dass sie beiden Gleichungen Genüge leisten, lässt sich zurückführen auf die Bestimmung einer Unbekannten aus einer Gleichung. Denn wenn wir die beiden Gleichungen vorstellen durch:

$$Az^n+A_1z^{n-1}+A_2z^{n-2}+\ldots.+A_n=0 \quad \ldots\ldots\ldots. \quad 1.$$

und

$$Bz^m+B_1z^{m-1}+B_2z^{m-2}+\ldots.+B_m=0, \quad \ldots\ldots. \quad 2.$$

worin A, $A_1 \ldots B$, $B_1 \ldots.$ verschiedene Potenzen der andern Unbekannten y enthalten, so können wir durch Elimination der verschiedenen Potenzen von z dieses System nach und nach in andere überführen, in welchen der Grad von z immer niederer ist. Wir gelangen endlich durch Elimination von z aus denjenigen zwei Gleichungen, in welchen dieses nur auf dem ersten Grade vorkommt, zu einem Verhalten, das frei ist von z, und welches alle diejenigen Werthe y als Wurzeln enthält, für welche es ein oder mehrere Werthe z giebt, die gleichzeitig mit einem jener y den beiden ursprünglichen Gleichungen genügen. Man könnte also nach und nach diese Wurzeln y in die Gleichungen 1. und 2. einsetzen, und dann diejenigen z bestimmen, welche diesen beiden so verwandelten Gleichungen gemeinsam sind. Allein so würden uns nur mancherlei Umwege ans Ziel bringen. Vortheilhafter werden wir nach folgendem Plane die zusammengehörigen Werthe y und z erhalten.

Wir scheiden vor Allem den gemeinsamen Faktor der Glieder A, $A_1 \ldots. B$, $B_1 \ldots.$ ab. Diejenigen y, welche denselben auf Null bringen, genügen beiden Gleichungen 1. und 2. unabhängig von einem bestimmten z. Die solchen y entsprechenden z bleiben demnach ganz willkührlich. Wenn nur die eine der Gleichungen 1. und 2. einen solchen Faktor hat, so giebt die andere, wenn man statt y nach und nach die jenen Faktor auf Null bringenden Werthe setzt, die entsprechenden z. Deren Anzahl kommt also dem höchsten Exponenten gleich, mit welchem z in der letztern behaftet vorkommt.

Hierauf leiten wir durch Elimination einer Potenz von z eine andere Gleichung ab, ganz so, wie dies geschehen muss, um nach und nach z zu eliminiren, scheiden aber den gemeinsamen Faktor, welcher nur y enthält, sogleich ab. Da dessen Wurzeln

y die letzte Gleichung identisch auf Null bringen, so schliessen wir, dass durch die nämlichen Werthe y die beiden Gleichungen 1. und 2. identisch sein müssen. Diese geben dann die gleichzeitig entsprechenden Werthe z. Auf diese Weise fahren wir fort, die durch Elimination der verschiedenen Potenzen zon z entstehenden Gleichungen von ihren Faktoren in y zu befreien, wobei dann die solchen y entsprechenden z immer aus denjenigen beiden Gleichungen hervorgehen, welche die letztere mit jenem Faktor von y behaftete Gleichung lieferten, indem diese durch Einsetzen des bezüglichen y beide identisch werden. Die letzte Beziehung endlich, in welcher kein z mehr vorkommt, giebt dann noch diejenigen Werthe y, welchen nur ein einziges z gleichzeitig entspricht, das man aus der Gleichung des letzten Systemes herleitet, worin z nur auf dem ersten Grade vorkommt.

1. Es seien

$$\left.\begin{array}{l} z^2-3yz+y^2+5=0 \\ 2z^2-y^2+1=0. \end{array}\right\} \ldots\ldots 1.$$

Daraus:

$$\left.\begin{array}{r} 2yz-y^2-3=0 \\ (y^2+3)z-(y^2-1)y=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots 2.$$

$$y^4-8y^2-9=0. \quad \ldots\ldots\ldots 3.$$

Aus 3. erhält man die Werthe y, und aus 2. dann die zuge hörigen z.

2. Es seien:

$$\left.\begin{array}{l} 2z^2-(4y-1)z-2y^2+y=0 \\ z^3+z^2-yz-y^2=0 \end{array}\right\}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1.$$

Daraus:

$$(4y+1)z^2-yz-2y^2=0. \quad \ldots\ldots\ldots 2.$$

$$\left.\begin{array}{l} (16y^2-2y-1)z+(8y^2-6y-1)y=0 \\ (8y^2-6y-1)z+(6y-1)y=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots 3.$$

$$y(4y^3-12y^2+3y+1)=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 4.$$

Die Gleichung 4. giebt die Werthe y und eine der Gleichungen 3. die zugehörigen z.

3. $$\left.\begin{array}{l} z^2+(y-3)z+y^2-3y+2=0 \\ z^2-2z+y^2-y=0 \end{array}\right\}. \quad \ldots\ldots\ldots 1.$$

Daraus:

$$(y-1)z-2y+2=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2.$$

Wegen des gemeinsamen Faktors $y-1$ genügt dieser Gleichung $y=1$, und man erhält das zugehörige z aus $z^2-2z=0$. Die Verbindung von $z-2=0$ mit 1 giebt $y^2-y=0$, woraus $y=0$, dem wieder $z=2$ entspricht.

4. $$z^2+2(y+1)z+y^2+2y=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1.$$

$$z^3-3(y-2)z^2+(3y^2-12y+8)z-y^3+6y^2-8y=0 \quad \ldots\ldots\ldots 2.$$

geben

$$(5y-4)z^2-2(y^2-7y+4)z+y^3-6y^2+8y=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3.$$

Aus den Gleichungen 1. und 3. erhalten wir dann

$$3y(y-1)z+y^3+3y^2-4y=0. \quad \ldots\ldots\ldots 4.$$

Deren gemeinsamer Faktor $y(y-1)$ giebt die Werthe $y=0$ und $y=1$, und die zugehörigen Werthe z ergeben sich dann bezüglich aus

$$z^2+2z=0 \quad \text{und} \quad z^2+4z+3=0.$$

Durch Abscheiden jenes Faktors bleibt aber als Gleichung 4.:

$$3z+y+4=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 4'.$$

Die Verbindung von 4'. und 1. giebt:

$$(5y+2)z+3y^2+6y=0. \quad \ldots\ldots\ldots 5.$$

Diese mit 4'. wieder:

$$y^2-y-2=0.$$

Die neuen Werthe $y=-1$ und $y=2$ finden ihre Werthe z aus 4.

XVI.

Einfache Berechnung der Zahl π.

Von

Herrn C. Hellwig,

Lehrer der Mathematik zu Fürstenwalde.

Man denke sich in und um einen Kreis mit dem Halbmesser R die regelmässigen Vielecke von n und $2n$ Seiten beschrieben. Die Seiten der eingeschriebenen Vielecke von n und $2n$ Seiten mögen bezüglich mit s_n und s_{2n}, die der umschriebenen entsprechend mit S_n und S_{2n}, und die Lothe vom Mittelpunkt des Kreises auf die Seiten s_n und s_{2n} ebenso mit r_n und r_{2n} bezeichnet werden. Wir wollen Formeln aufzustellen suchen, mittelst deren s_{2n}, S_n und S_{2n} aus s_n berechnet werden können; dadurch müssen wir zu Näherungswerthen von π gelangen, indem $\frac{n.s_n}{2R}$, oder $\frac{1}{2}n.s_n$ für $R=1$, um so mehr mit π übereinstimmt, je grösser n ist.

Aus den in der oben angedeuteten Figur vorhandenen rechtwinkligen Dreiecken entnimmt man leicht die folgenden Beziehungen:

$$(1) \qquad r_{2n}^2 = R^2 - \frac{1}{4}s_{2n}^2,$$

$$(2) \qquad s_{2n}^2 = (R-r_n)^2 + \frac{1}{4}s_n^2,$$

(3) $$\frac{1}{4}s_n^2 = R^2 - r_n^2.$$

Die Elimination von $\frac{1}{4}s_n^2$ aus (2) und (3) führt zu:

(4) $$\frac{1}{4}s_{2n}^2 = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R.r_n,$$

woraus man in Verbindung mit (1) erhält:

$$r_{2n}^2 = \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}R.r_n$$

oder

(5) $$r_{2n} = R.\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{r_n}{R}}.$$

Wegen Aehnlichkeit von Dreiecken der Figur hat man ferner die Proportionen:

(6) $$s_{2n} : \frac{1}{2}s_n = R : r_{2n}$$

und

(7) $$r_n : R = \frac{1}{2}s_n : \frac{1}{2}S_n.$$

Hieraus ergiebt sich:

(8) $$s_{2n} = \frac{s_n}{2r_{2n}} \cdot R,$$

so wie

(9) $$S_n = \frac{s_n}{r_n} \cdot R$$

und ebenso

(10) $$S_{2n} = \frac{s_{2n}}{r_{2n}}.R.$$

Für $R=1$ verwandeln sich die Werthe von r_{2n}, s_{2n}, S_n und S_{2n} in die folgenden:

(11) $$r_{2n} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}r_n},$$

$$(12)\qquad s_{2n}=\frac{s_n}{2\,r_{2n}},$$

$$(13)\qquad S_n=\frac{s_n}{r_n},$$

$$(14)\qquad S_{2n}=\frac{s_{2n}}{r_{2n}}.$$

Diese Formeln verwenden wir in der Weise zur Berechnung von π, dass wir von einem bestimmten Werthe von r_n und s_n ausgehen, daraus r_{2n}, s_{2n}, S_n, S_{2n} bestimmen und hieraus wiederum r_{4n}, s_{4n}, S_{4n} finden u. s. f. Nimmt man $n=6$, geht also vom regelmässigen eingeschriebenen Sechseck aus, so hat man bekanntlich $s_6=1$ und

$$r_6=\frac{1}{2}\sqrt{3}=0{,}8660254.$$

Mit Hülfe dieser Werthe gelangt man bei Anwendung siebenstelliger Logarithmen zu folgendem Schema für die Berechnung von π:

$\frac{1}{2}\,r_6=0{,}4330127$	$\log.1=1\quad -1$	
	$\log.r_6=0{,}9375306-1$	$\log.S_6=0{,}0624694$
$\frac{1}{2}=0{,}5$	$\log.r_{12}{}^2=1{,}9698875-2$	
	2)	
$r_{12}{}^2=0{,}9330127$	$\log.r_{12}=0{,}9849437-1$	
	$0{,}30103$	
	$0{,}2859737$	
$r_{12}=0{,}9659254$	$\log.s_{12}=0{,}7140263-1$	$\log.S_{12}=0{,}72900826-1$
2) $0{,}4829627$	$\log.r_{24}{}^2=1{,}9925370-2$	
$0{,}5$	2)	
$r_{24}{}^2=0{,}9829627$	$\log.r_{24}=0{,}9962685-1$	
	$0{,}30103$	
	$0{,}2972985$	
$r_{24}=0{,}9914447$		
2) $0{,}4957223$	$\log.s_{24}=0{,}4167278-1$	$\log.S_{24}=0{,}4204593-1$
$0{,}5$	$\log.r_{48}{}^2=1{,}9981382-2$	
$r_{48}{}^2=0{,}9957223$	2)	
	$\log.r_{48}=0{,}9990691-1$	
	$0{,}30103$	
$r_{48}=0{,}9978589$	$0{,}3000991$	
2) $0{,}4989295$	$\log.s_{48}=0{,}1166287-1$	$\log.S_{48}=0{,}1175596-1$
$0{,}5$	$\log.r_{96}{}^2=1{,}9995348-2$	
$r_{96}{}^2=0{,}9989295$,	2)	
	$\log.r_{96}=0{,}9997674-1$	
	$0{,}30103$	
$r_{96}=0{,}9994647$	$0{,}3007974$	
2) $0{,}4997323$	$\log.s_{96}=0{,}8158313-2$	$\log.S_{96}=0{,}8160639-2$
$0{,}5$		

$r_{192}^2=0,9997323$	$\log.r_{192}^2=1,9998838-2$	
	2)	
	$\log.r_{192}=0,9999419-1$	
$r_{192}=0,9998662$	0,30103	
2)	0,3009719	
0,4999331	$\log s_{192}=0,5148594-2$	$\log.S_{192}=0,5149175-2$
0,5		
$r_{384}^2=0,9999331$	$\log.r_{384}^2=1,9999709-2$	
	2)	
	$\log.r_{384}=0,9999854-1$	
	0,30103	
$r_{384}=0,9999664$	0,3010154	
2)		
0,4999832	$\log.s_{384}=0,2138440-2$	$\log.S_{384}=0,2138586-2$
0,5		
$r_{768}^2=0,9999832$	$\log.r_{768}^2=1,9999924-2$	
	2)	
	$\log.r_{768}=0,9999962-1$	
	0,30103	
$r_{768}=0,9999912$	0,3010262	
2)	$\log.s_{768}=0,9128178-3$	$\log.S_{768}=0,9128216-3$
0,4999956		
0,5	$\log.r_{1536}^2=1,9999982-2$	
$r_{1536}^2=0,9999956$	2)	
	$\log.r_{1536}=0,9999991-1$	
	0,30103	
$r_{1536}=0,999998$	0,3010291	
2)	$\log.s_{1536}=0,6117887$	$\log.S_{1536}=0,6117896-3$
0,499999		
0,5	$\log.r_{3072}^2=1,9999996-2$	
$r_{3072}^2=0,999999$	0,30103	
	0,3010298	
	$\log.s_{3072}=0,3107589$	$\log.S_{3072}=0,3107591-3$

Als Durchschnittswerth folgt aus dieser Berechnung:

$$\log.S=0,3107590-3.$$

Fügt man hierzu

$$\log.1536=3,1863912$$

so ergiebt sich

$$\log.\pi=0,4971502.$$

Diesem Logarithmus entspricht die Zahl 3,14159, welche in der That den Werth von π auf 5 Decimalstellen richtig angiebt.

Die mitgetheilte Berechnung scheint mir hauptsächlich zwei Vorzüge zu besitzen, nämlich dass sich einmal die meisten der darin vorkommenden Zahlen einfachen Grenzen immer mehr nähern, indem die Werthe von r^2 und r der Einheit und die Summe der Radienlogarithmen mit 0,30103 dem Logarithmus von 2 zustreben, oder doch wenigstens eine gegenseitige Annäherung zeigen, wie die Werthe von $\log s$ und $\log S$, und dass zweitens das Aufsuchen der vorkommenden Logarithmen, so wie der Zahlen zu denselben sehr bequem geschieht deshalb, weil man von $\log r_{24}$ an kein Blatt in den siebenstelligen Logarithmentafeln mehr umzuwenden braucht. Dabei ist der Mechanismus der Rechnung der einfachste, den es geben kann, und bietet keinerlei Schwierigkeiten dar, weshalb auch jeder mit den nothwendigen Vorkenntnissen ausgerüstete Schüler mit Leichtigkeit in den Gang der Rechnung sich hineinfinden wird.

XVII.

Miscellen.

Eine gelegentliche Veranlassung führte mich neulich einmal wieder auf die Bestimmung des Inhalts der dreiseitigen Pyramide aus drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten und den von denselben eingeschlossenen Winkeln. Wie leicht diese Aufgabe durch die sphärische Trigonometrie zu erledigen ist, weiss Jeder; es kam jedoch auf die Anwendung der blossen ebenen Trigonometrie an, und da die Auflösung, welche ich fand, mir sehr einfach scheint, die Aufgabe sich auch wohl zur Uebung für Schüler eignet, so will ich meine Auflösung hier mittheilen. Taf. IV. Fig. 1. wird für sich verständlich sein, und nur kurzer Andeutungen zu ihrer Erläuterung bedürfen.

Die gegebene Pyramide sei $ABCD=P$. Die Kanten $AD=a$, $BD=b$, $CD=c$ und die Winkel

$$\angle ADC=\alpha,\quad \angle BDC=\beta,\quad \angle ADB=\gamma$$

seien gegeben. CE sei auf der Ebene ADB, CF und FG seien auf AD und BD senkrecht, und EF, EG, DE seien gezogen. Man setze der Kürze wegen

$$\angle FDE=\varphi,\quad \angle GDE=\psi;$$

so ist

$$P=\frac{1}{3}\Delta ADB\,.\,CE=\frac{1}{6}\,ab.CE.\sin\gamma.$$

Ferner ist

$$EF = c\cos\alpha\,\mathrm{tang}\varphi, \quad EF = DE.\sin\varphi;$$

$$EG = c\cos\beta\,\mathrm{tang}\psi, \quad EG = DE.\sin\psi.$$

Also ist

$$\frac{EF}{EG} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \cdot \frac{\mathrm{tang}\varphi}{\mathrm{tang}\psi} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi},$$

woraus

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \cdot \frac{\cos\psi}{\cos\varphi} = 1,$$

also, weil $\psi = \gamma - \varphi$ ist:

$$1 = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \cdot \frac{\cos(\gamma - \varphi)}{\cos\varphi} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}(\cos\gamma + \sin\gamma\,\mathrm{tang}\varphi),$$

und hieraus

$$\mathrm{tang}\varphi = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\cos\alpha\sin\gamma}$$

folgt. Daher ist nach dem Obigen

$$EF = c\frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\gamma},$$

und weil nun hiernach

$$CE^2 = CF^2 - EF^2 = c^2 \left\{\sin\alpha^2 - \left(\frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)^2\right\}$$

ist, so ist, wie man sogleich findet:

$$CE = \frac{c}{\sin\gamma}\sqrt{1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

also nach dem Obigen

$$P = \frac{1}{6}abc\sqrt{1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

oder nach einer sehr bekannten Transformation der Grösse unter dem Wurzelzeichen:

$$P = \frac{1}{3}abc\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha - \beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)},$$

welches die bekannte Formel ist.

G.

XVIII.

Erweiterungen der Integral-rechnung.

Von
dem Herausgeber.

Einleitung.

In der Integralrechnung geht man bekanntlich von einer Anzahl von Integralen aus, welche unmittelbar aus der Differentialrechnung entnommen werden, und nichts Anderes sind als die Umkehrungen der in der letzteren Wissenschaft gewonnenen Differentialformeln, in der That aber die eigentliche Grundlage der gesammten Integralrechnung bilden. Hat man einmal diese Integralformeln aufgestellt, so besteht streng genommen die ganze übrige Integralrechnung, insofern sie die Auffindung der Integrale der entwickelt gegebenen Differentiale betrifft, in nichts Weiterem, als in der Zurückführung der übrigen zu entwickelnden Integrale auf jene unmittelbar aus der Differentialrechnung entnommenen Integrale durch geeignete Transformationen, Substitutionen u. s. w., und ein Integral kann jederzeit als gefunden betrachtet werden, wenn es sich auf jene Fundamental-Integrale zurückführen lässt, was freilich oft mit grossen Schwierigkeiten verbunden sein, und vielen Aufwand analytischen Scharfsinns erforden kann. Je mehr dergleichen Fundamental-Integrale man nun aus der Differentialrechnung entnehmen kann: eine desto breitere Grundlage wird der Integralrechnung geboten, und ein desto grösseres Feld der Aufsuchung geeigneter Mittel zur Reduction anderer Integrale auf die erwähnten Fundamental-Integrale wird dem mathematischen Scharfsinne eröffnet. Ich glaube daher, dass man diesen einfachen Weg, die Integralrechnung zu erweitern und zu vervollkommnen, zu früh verlassen hat, wenn auch allerdings manche Versuche, denselben zu betreten, gemacht worden sind, ohne dass man sich vielleicht stets klar bewusst gewesen ist, was man eigentlich wollte und eigentlich suchte.

Insbesondere hat, ohne anderer früherer Versuche jetzt weiter zu gedenken, Euler versucht, die Bögen der Ellipse, der Hyperbel und der Parabel in die Integralrechnung einzuführen; dieselben in ganz ähnlicher Weise, wie man schon lange vor ihm die Kreisbögen gebraucht hatte und bekanntlich auch jetzt noch gebraucht, zur Darstellung der Werthe gewisser Integrale zu benutzen, und auf diese als neue Fundamental-Integrale gewonnenen Integrale sodann andere Integrale durch analytische Transformationen und Substitutionen zurückzuführen. Die in vielen Beziehungen merkwürdige Abhandlung Euler's, welche ich hierbei im Sinne habe, findet sich in den Novis Commentariis Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae. Tom. X. pro anno 1764. Petropoli. 1766. pag. 1. und hat den Titel: De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipsis ac hyperbolae. Ich kann nicht unterlassen, die merkwürdigen Worte, mit denen Euler diese Abhandlung einleitet, hier anzuführen. Er sagt nämlich: „Egregia omnino sunt, quae acutissimi Geometrae Maclaurin et D'Alembert de reductione formularum integralium ad rectificationem Ellipsis et Hyperbolae sunt commentati; cum in iis non solum insignis vis ingenii spectetur, sed etiam haud exigua spes affulgeat, his rectificationibus in calculo aeque commode utendi, atque adhuc arcus circulares et logarithmos adhibere sumus soliti. Nullum enim est dubium, quin haec investigatio a summis Geometris tam felici successu suscepta latissime pateat, atque uberrimos fructus aliquando sit allatura; quamvis enim iam plurimum in hoc negotio sit praestitum, minime tamen totum argumentum quasi exhaustum est censendum. Nam postquam longe diversa methodo usus eo perveni, ut tam in Ellipsi quam in Hyperbola diversos arcus definire potuerim, quarum differentiam geometrice assignare liceat, de quo quidem laudati viri dubitasse videntur, hinc non levis accessio in tractatione huius argumenti expectari poterit. Imprimis autem hic idoneus signandi modus desiderari videtur, cuius ope arcus elliptici aeque commode in calculo exprimi queant, ac iam logarithmi et arcus circulares ad insigne Analyseos incrementum per idonea signa in calculum sunt introducti. Talia signa novam quandam calculi speciem suppeditabunt, cuius hic quasi prima elementa exponere constitui."

Seinen Zweck und den zur Erreichung desselben eingeschlagenen Weg noch weiter andeutend, geleitet von der Ansicht, dass man, eben so wie man bei der Einführung der Kreisbogen in die Integralrechnung dem Halbmesser des Kreises einen bestimmten constanten Werth, nämlich die Einheit, beilege, ein ähnliches Verfahren auch bei dem Gebrauche der Bögen der Kegelschnitte befolgen müsse, fährt dann Euler fort: „Quemadmodum autem omnes arcus circulares ad circulum, cuius radius unitati aequalis statuitur, referri solent, ita etiam pro omnibus sectionibus conicis, quas in calculum recipere volumus, mensuram quandam fixam unitate exprimendam assumi conveniet, quae ad omnes species aeque pertineat. Perspicuum autem est, hanc mensuram axi transverso tribui non posse, cum is in parabola necessario fiat infinitus, in hyperbola autem negativum valorem consequatur: aeque parum axis coniugatus ad hoc institutum est accommodatus, quippe qui in parabola quoque fit infinitus, et in hyperbola valorem adeo imaginarium adipiscitur. Relinquitur igitur parameter, cui, quominus perpetuo valor fixus tribui queat, nihil plane obstat, et quoniam pro circulo parameter abit in diametrum, huiusque semissis unitate exprimi solet, constanter in sequentibus parametrum binario indicabo, ut eius semissis unitate exprimatur."

Ich habe auch diese letzteren Worte Euler's hier angeführt, weil sich im Verfolg dieser Abhandlung zeigen wird, dass ich den in denselben ausgesprochenen Ansichten über die Annahme einer bestimmten Grösse als Einheit wenigstens nicht unbedingt beistimmen kann.

Es ist bekannt, dass Euler's so eben besprochene merkwürdige Abhandlung die hauptsächlichste und nächste Veranlassung zur Bearbeitung der Theorie der elliptischen Functionen gegeben hat; denn Legendre, der eigentliche Begründer derselben, sagt in seinem Traité des fonctions elliptiques. Tome I. Paris. 1825. 4. Avertissement. p. VI. VII.: Il ne sera pas inutile pour l'histoire de la Science, de faire remarquer ici que cette nouvelle branche d'analyse à laquelle l'Auteur a donné le nom de Théorie des fonctions elliptiques, est fondée en grande partie sur les bases établies dans le chap. V., concernant la forme la plus simple de ces fonctions et leur division en trois espèces; d'où est résulté un système de nomenclature et de notation, propre à représenter ces fonctions dans les usages ordinaires d'analyse, et à faciliter la recherche de leurs propriétés. Euler avait prévu qu'a l'aide d'une notation convenable, le calcul des arcs d'ellipse et autres transcendantes analogues, pourrait devenir d'un usage presque aussi général que celui des arcs de cercle et des logarithmes(*); mais si on excepte Landen, qui, par la découverte de son théorème, aurait pu s'ouvrir des routes nouvelles, personne ne s'est mis en devoir de réaliser la prédiction d'Euler, et on peut dire que l'Auteur de ce Traité est resté seul à s'en occuper, depuis l'an 1786 ou il a fait paraître ses premières recherches sur les arcs d'ellipse, jusqu'a l'époque actuelle. Cette espèce de délaissement a retardé sans doute les progrès de la Théorie des fonctions elliptiques; mais l'Auteur par des efforts renouvelés à de grands intervalles de temps, est parvenu enfin à compléter presque entièrement cette théorie, et à en rendre l'application facile par des tables fort étendues dont il a exécuté luimême tous les calculs."

*) Voici les paroles d'Euler (Novi Com. Petrop. tom. X. pag. 4.): „Imprimis autem hic idoneus signandi modus desiderari videtur, cuius ope arcus elliptici aeque commode in calculo exprimi queant ac iam logarithmi et arcus circulares, ad insigne analyseos incrementum, in calculum sunt introducti. Talia signa novam quamdam calculi speciem suppeditabunt."

Die grosse Ausbildung der Theorie der elliptischen Functionen, zu welcher dieselbe, ohne im Wesentlichen den ursprünglich von Legendre in seiner ältesten Schrift über diesen Gegenstand: Mémoire sur les transcendantes elliptiques, où l'on donne des méthodes faciles pour comparer et évaluer ces transcendantes, qui comprennent les arcs d'ellipse, et qui se recontrent frequemment dans les applications du calcul intégral. Lu à la ci-devant Académie des Sciences en avril 1792. Par Adrien-Marie Le Gendre. A Paris. L'an deuxième de la République. 4°. vorgezeichneten Weg zu verlassen, geführt worden ist, muss jeden Analytiker mit der grössten Bewunderung erfüllen; und es ist diese Theorie zugleich das schönste und lehrreichste Beispiel der Erforschung der Natur einer wichtigen analytischen Grössenform nach allen möglichen Seiten und Richtungen hin. Mit besonderer Bezugnahme auf die oben angeführten Worte Euler's hat sich mir aber schon öfters die Frage aufgedrängt, ob sich dem, was Euler, wie es scheint, eigentlich im Sinne hatte und beabsichtigte, namentlich auch in Bezug auf den „idoneus signandi modus, cuius ope arcus elliptici aeque commode in calculo exprimi queant, ac iam logarithmi et arcus circulares ad insigne Analyseos incrementum per idonea signa in calculum sunt introducti. Talia signa novam quandam calculi speciem suppeditabunt, cuius hic quasi prima elementa exponere constitui“ nicht vielleicht auf eine Weise entsprechen liesse, die bei möglichster Einfachheit dem Verfahren ganz analog wäre, welches man bei Einführung der Kreisbogen in die Integralrechnung befolgt. Wäre dies möglich, so würde man dadurch eine Reihe neuer Fundamental-Integrale erhalten, auf die man andere Integrale zurückzuführen suchen müsste. Wie ich diese Frage zunächst für die Ellipse zu beantworten und möglichst zu erledigen gesucht habe, werde ich in dieser Abhandlung zeigen, indem ich mir vorbehalte, späterhin auf die Hyperbel und die Parabel, ja auch noch auf andere Curven zurückzukommen. Die Hyperbel ist freilich eigentlich schon unter der Ellipse enthalten; indess scheint es mir im vorliegenden Falle besser und angemessener zu sein, so wie der Ellipse, auch der Hyperbel eine besondere Betrachtung zu widmen. Ich werde für jetzt aber nur hauptsächlich die Fundamental-Integrale entwickeln, welche sich mir bei dieser Untersuchung ergeben haben, und erst späterhin, wenn ich wenigstens auch die Hyperbel und die Parabel in ähnlicher Weise wie die Ellipse untersucht haben werde, die fernere Untersuchung der Integrale unternehmen, welche auf jene Fundamental-Integrale sich zurückführen lassen. Dann wird sich auch erst entscheiden lassen, in wie fern der Titel, welchen ich, ohne übrigens dadurch im Geringsten ein gewisses Aufsehen erregen zu wollen die Absicht zu haben, dieser Abhandlung gegeben habe, gerechtfertigt erscheint, d. h. in wie fern die in derselben entwickelten Integrale wirklich als Erweiterungen der Integralrechnung, deren dieselbe freilich noch sehr bedürftig ist, zu betrachten sind. Daher bitte ich auch schon jetzt um eine nachsichtige Aufnahme und Beurtheilung der vorliegenden Abhandlung, bis erst weiter fortgesetzte Untersuchungen einen sicheren Maassstab für die Beurtheilung des Werthes derselben abgeben werden.

Erste Abtheilung.

§. 1.

Wir wollen uns zwei beliebige conjugirte Halbmesser einer Ellipse denken, die wir als positiv betrachten und mit Rücksicht hierauf durch a_n, b_n bezeichnen; die Durchschnittspunkte dieser conjugirten Halbmesser mit der Ellipse seien respective A_n, B_n; und der von denselben eingeschlossene, 180° nicht übersteigende Winkel werde durch α_n bezeichnet. Sind nun, wenn wir a_n, b_n als die positiven Theile zweier Coordinatenaxen betrachten, in diesem seinen Anfang im Mittelpunkte O der Ellipse habenden Coordinatensysteme x_n, y_n die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Ellipse; so haben wir nach der Theorie dieses Kegelschnitts bekanntlich die Gleichung

$$1)\qquad \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^2 + \left(\frac{y_n}{b_n}\right)^2 = 1.$$

Denken wir uns nun aber einen Bogen der Ellipse, welcher, bei dem Punkte A_n als gemeinschaftlichen Anfangspunkt aller Ellipsenbogen anfangend, bei dem durch die Coordinaten x_n, y_n bestimmten Punkte $(x_n y_n)$ der Ellipse sich endigt, indem wir diesen Bogen immer als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem er von A_n an durch den 180° nicht übersteigenden Winkel A_nOB_n hindurch nach B_n hin, oder von A_n an durch den 180° übersteigenden Winkel A_nOB_n hindurch von B_n abwärts genommen worden ist, und bezeichnen mit Rücksicht hierauf diesen Bogen durch $\overset{a}{\omega}_n$; so können wir offenbar die Grössen $\frac{x_n}{a_n}$, $\frac{y_n}{b_n}$ jederzeit als Functionen dieses Bogens $\overset{a}{\omega}_n$ betrachten, und wollen dieselben daher unter dieser Voraussetzung respective durch $\overset{e}{\mathfrak{C}}_n\overset{a}{\omega}_n$, $\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n$ bezeichnen, also

$$2)\qquad \frac{x_n}{a_n} = \overset{e}{\mathfrak{C}}_n\overset{a}{\omega}_n,\quad \frac{y_n}{b_n} = \overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n$$

setzen. Der Buchstabe e ist in diese Symbole deshalb aufgenommen worden, um anzudeuten, dass dieselben der Ellipse angehören; dies könnte überflüssig scheinen, wird sich aber als nothwendig erweisen, wenn es späterhin darauf ankommen wird, die Ellipse, Hyperbel und Parabel von einander zu unterscheiden. In diesen Symbolen haben wir nun nach 1) die Gleichung:

$$3)\qquad (\overset{e}{\mathfrak{C}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2 + (\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2 = 1.$$

Nehmen wir den Punkt B_n als Anfangspunkt aller Ellipsenbogen an, und bezeichnen einen bei B_n anfangenden, bei dem durch die Coordinaten x_n, y_n bestimmten Punkte $(x_n y_n)$ der Ellipse sich endigenden Ellipsenbogen, indem wir denselben als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem er von dem Punkte B_n an durch den 180° nicht übersteigenden Winkel $B_n O A_n$ hindurch nach A_n hin, oder von B_n an durch den 180°. übersteigenden Winkel $B_n O A_n$ hindurch von A_n abwärts genommen worden ist, durch $\overset{b}{\omega}_n$; so ist in ganz ähnlicher Bezeichnung wie vorher offenbar

$$4)\qquad \frac{x_n}{a_n}=\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{b}{\omega}_n,\quad \frac{y_n}{b_n}=\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{b}{\omega}_n;$$

also nach 2):

$$5)\qquad \overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n=\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{b}{\omega}_n,\quad \overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n=\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{b}{\omega}_n;$$

folglich nach 3):

$$6)\qquad (\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{b}{\omega}_n)^2+(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{b}{\omega}_n)^2=1.$$

Ich will nun besonders die Gleichung 3) in's Auge fassen, und zuvörderst die Differentialquotienten der als Functionen von $\overset{a}{\omega}_n$ betrachteten Grössen $\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n$, $\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n$ in Bezug auf $\overset{a}{\omega}_n$ als unabhängige veränderliche Grösse entwickeln.

§. 2.

Weil nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2=1$$

ist, so ist

$$\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n.\partial\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n+\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n.\partial\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n=0.$$

Nach den Lehren der höheren Geometrie ist aber offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$\partial\overset{a}{\omega}_n{}^2=\partial x_n{}^2+\partial y_n{}^2+2\cos\alpha_n\partial x_n\partial y_n;$$

und weil nun nach dem Obigen

$$x_n = a_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n, \quad y_n = b_n \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n;$$

also

$$\partial x_n = a_n \partial \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n, \quad \partial y_n = b_n \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n$$

ist; so ist

$$\partial \overset{a}{\omega}_n{}^2 = a_n{}^2 (\partial \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 + b_n{}^2 (\partial \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 + 2 a_n b_n \cos\alpha_n \partial \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \partial \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n.$$

Nach dem Vorhergehenden ist ferner

$$\partial \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n = -\frac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n} \partial \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n;$$

also, wie man nach gehöriger Substitution leicht findet:

$$(\partial \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 = \frac{(\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 \partial \overset{a}{\omega}_n{}^2}{a_n{}^2 (\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 + b_n{}^2 (\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 - 2 a_n b_n \cos\alpha_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n}.$$

Folglich ist offenbar mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\partial \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n = \pm \frac{\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n \partial \overset{a}{\omega}_n}{\sqrt{a_n{}^2 (\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 + b_n{}^2 (\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 - 2 a_n b_n \cos\alpha_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n}},$$

$$\partial \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n = \mp \frac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \partial \overset{a}{\omega}_n}{\sqrt{a_n{}^2 (\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 + b_n{}^2 (\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 - 2 a_n b_n \cos\alpha_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n}};$$

wo sich nun frägt, wie in diesen Formeln die Zeichen zu nehmen sind. Mittelst einer sehr einfachen Betrachtung erhellet aber, dass immer

$$\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \quad \text{und} \quad \frac{\partial \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n}{\partial \overset{a}{\omega}_n}$$

gleiche Vorzeichen haben, woraus sich ergiebt, dass man in den obigen Formeln die unteren Zeichen nehmen, und daher

$$7)\quad \begin{cases} \partial\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n = -\dfrac{\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\partial\overset{a}{\omega}_n}{\sqrt{a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}}, \\[2ex] \partial\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n = \dfrac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\partial\overset{a}{\omega}_n}{\sqrt{a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}} \end{cases}$$

setzen muss.

Weil bekanntlich

$$(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2=1$$

ist, so ist

$$\begin{aligned} a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2 &= a_n^2-(a_n^2-b_n^2)(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2 \\ &= b_n^2+(a_n^2-b_n^2)(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2; \end{aligned}$$

also, wenn wir

$$8)\quad \begin{cases} e_n^2=\dfrac{a_n^2-b_n^2}{a_n^2}, \quad \varepsilon_n^2=\dfrac{a_n^2-b_n^2}{b_n^2}; \\[2ex] \dfrac{b_n}{a_n}=\sqrt{1-e_n^2}, \quad \dfrac{a_n}{b_n}=\sqrt{1+\varepsilon_n^2} \end{cases}$$

setzen:

$$\begin{aligned} a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2 &= a_n^2\{1-e_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2\} \\ &= b_n^2\{1+\varepsilon_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2\} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2 &= a_n^2-b_n^2\varepsilon_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2 \\ &= b_n^2+a_n^2e_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2. \end{aligned}$$

Folglich ist nach dem Obigen auch:

$$9)\quad \begin{cases} \partial\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n = -\dfrac{\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n\partial\overset{a}{\omega}_n}{a_n\sqrt{1-e_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2\cos\alpha_n\sqrt{1-e_n^2}\,.\,\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}}\,, \\[2ex] \partial\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n = \dfrac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\partial\overset{a}{\omega}_n}{b_n\sqrt{1+\varepsilon_n^2(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2\cos\alpha_n\sqrt{1+\varepsilon_n^2}\,.\,\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}}\,; \end{cases}$$

oder:

$$10)\quad \begin{cases} \partial\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n = -\dfrac{\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n\partial\overset{a}{\omega}_n}{b_n\sqrt{1+\varepsilon_n^2(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2\cos\alpha_n\sqrt{1+\varepsilon_n^2}\,.\,\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}}\,, \\[2ex] \partial\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n = \dfrac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\partial\overset{a}{\omega}_n}{a_n\sqrt{1-e_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2\cos\alpha_n\sqrt{1-e_n^2}\,.\,\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}}\,; \end{cases}$$

oder:

$$11)\quad \begin{cases} \partial\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n = -\dfrac{\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n\partial\overset{a}{\omega}_n}{\sqrt{b_n^2+a_n^2e_n^2(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}}\,, \\[2ex] \partial\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n = \dfrac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\partial\overset{a}{\omega}_n}{\sqrt{a_n^2-b_n^2\varepsilon_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}}\,; \end{cases}$$

oder:

$$12)\quad\begin{cases}\partial\overset{e}{\mathfrak{C}}_n\overset{a}{\omega}_n=-\dfrac{\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n\partial\overset{a}{\omega}_n}{\sqrt{a_n^2-b_n^2\varepsilon_n^2(\overset{e}{\mathfrak{C}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{C}}_a\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}}\,;\\[2ex]\partial\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n=\dfrac{\overset{e}{\mathfrak{C}}_n\overset{a}{\omega}_n\partial\overset{a}{\omega}_n}{\sqrt{b_n^2+a_n^2e_n^2(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{C}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}}\,.\end{cases}$$

§. 3.

Wir wollen nun

$$13)\qquad \overset{e}{T}_n\overset{a}{\omega}_n=\frac{\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{\mathfrak{C}}_n\overset{a}{\omega}_n},\qquad \overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n=\frac{\overset{e}{\mathfrak{C}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}$$

setzen, wo also

$$14)\qquad \overset{e}{T}_n\overset{a}{\omega}_n.\overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n=1$$

ist. Dann ist nach den Regeln der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial\overset{e}{T}_n\overset{a}{\omega}_n}{\partial\overset{a}{\omega}_n}=\frac{\overset{e}{\mathfrak{C}}_n\overset{a}{\omega}_n\dfrac{\partial\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}{\partial\overset{a}{\omega}_n}-\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n\dfrac{\partial\overset{e}{\mathfrak{C}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\partial\overset{a}{\omega}_n}}{(\overset{e}{\mathfrak{C}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2},$$

oder

$$\frac{\partial\overset{e}{T}_n\overset{a}{\omega}_n}{\partial\overset{a}{\omega}_n}=\frac{1}{\overset{e}{\mathfrak{C}}_n\overset{a}{\omega}_n}.\frac{\partial\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}{\partial\overset{a}{\omega}_n}-\frac{\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}{(\overset{e}{\mathfrak{C}}_n\overset{a}{\omega}_n)}.\frac{\partial\overset{e}{\mathfrak{C}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\partial\overset{a}{\omega}_n}.$$

Also ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\frac{\partial\overset{e}{\mathrm{T}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\partial\overset{a}{\omega}_n}=\frac{1}{\sqrt{a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}}$$

$$+\left(\frac{\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}},$$

d. i., weil

$$(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2=1$$

ist:

$$15)\qquad\frac{\partial\overset{e}{\mathrm{T}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\partial\overset{a}{\omega}_n}$$

$$=\frac{1}{(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\,\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}}$$

oder

$$16)\qquad\partial\overset{e}{\mathrm{T}}_n\overset{a}{\omega}_n$$

$$=\frac{1}{(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2}\cdot\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{\sqrt{a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\,\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\,\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}};$$

oder auch

$$17)\qquad\partial\overset{e}{\mathrm{T}}_n\overset{a}{\omega}_n$$

$$=\frac{1}{(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2}\cdot\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{a_n\sqrt{1-e_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2\cos\alpha_n\sqrt{1-e_n^2}\,.\,\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\,\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}}$$

$$=\frac{1}{(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2}\cdot\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{b_n\sqrt{1+\varepsilon_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2\cos\alpha_n\sqrt{1+\varepsilon_n^2}\,.\,\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\,\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}}.$$

Weil nach dem Obigen

$$\overset{e}{\mathrm{T}}_n\overset{a}{\omega}_n . \overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n = 1, \quad \overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n = (\overset{e}{\mathrm{T}}_n\overset{a}{\omega}_n)^{-1}$$

ist, so ist

$$\frac{\partial \overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\partial \overset{a}{\omega}_n} = -(\overset{e}{\mathrm{T}}_n\overset{a}{\omega}_n)^{-2} . \frac{\partial \overset{e}{\mathrm{T}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\partial \overset{a}{\omega}_n}$$

oder

$$\frac{\partial \overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\partial \overset{a}{\omega}_n} = -\frac{(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2}{(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2} . \frac{\partial \overset{e}{\mathrm{T}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\partial \overset{a}{\omega}_n};$$

also

$$18) \quad \frac{\partial \overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\partial \overset{a}{\omega}_n}$$

$$= -\frac{1}{(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2} . \frac{1}{\sqrt{a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2 + b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2 - 2a_nb_n\cos\alpha_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n \overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}}$$

oder

$$19) \quad \partial \overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n$$

$$= -\frac{1}{(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2} . \frac{\partial \overset{a}{\omega}_n}{\sqrt{a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2 + b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2 - 2a_nb_n\cos\alpha_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n \overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}};$$

oder auch

$$20) \quad \partial \overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n$$

$$= -\frac{1}{(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2} . \frac{\partial \overset{a}{\omega}_n}{a_n\sqrt{1 - e_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2 - 2\cos\alpha_n\sqrt{1-e_n^2} . \overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n \cdot \overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}}$$

$$= -\frac{1}{(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2} . \frac{\partial \overset{a}{\omega}_n}{b_n\sqrt{1 + \varepsilon_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2 - 2\cos\alpha_n\sqrt{1+\varepsilon_n^2} . \overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n \overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}}.$$

§. 4.

Setzt man

$$21)\qquad \overset{e}{S}\mathrm{v}_n\overset{a}{\omega}_n=1-\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n,\quad \overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{v}_n\overset{a}{\omega}_n=1-\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n;$$

so ist

$$22)\qquad \partial\overset{e}{S}\mathrm{v}_n\overset{a}{\omega}_n=-\partial\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n,\quad \partial\overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{v}_n\overset{a}{\omega}_n=-\partial\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n;$$

und diese Differentiale können daher aus §. 2. unmittelbar entnommen werden.

Setzt man

$$23)\qquad \overset{e}{S}\mathrm{c}_n\overset{a}{\omega}_n=\frac{1}{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n},\quad \overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{c}_n\overset{a}{\omega}_n=\frac{1}{\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n};$$

so ist

$$\overset{e}{S}\mathrm{c}_n\overset{a}{\omega}_n=(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^{-1},\quad \overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{c}_n\overset{a}{\omega}_n=(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^{-1};$$

also

$$\partial\overset{e}{S}\mathrm{c}_n\overset{a}{\omega}_n=-\frac{\partial\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}{(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2},\quad \partial\overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{c}_n\overset{a}{\omega}_n=-\frac{\partial\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}{(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2};$$

also nach §. 2.

Weil nach dem Obigen

$$\overset{e}{T}_n\overset{a}{\omega}_n\,.\,\overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n=1,\qquad \overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n=(\overset{e}{T}_n\overset{a}{\omega}_n)^{-1}$$

ist, so ist

$$\frac{\partial\overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\partial\overset{a}{\omega}_n}=-(\overset{e}{T}_n\overset{a}{\omega}_n)^{-2}.\frac{\partial\overset{e}{T}_n\overset{a}{\omega}_n}{\partial\overset{a}{\omega}_n}$$

oder

$$\frac{\partial\overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\partial\overset{a}{\omega}_n}=-\frac{(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2}{(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2}.\frac{\partial\overset{e}{T}_n\overset{a}{\omega}_n}{\partial\overset{a}{\omega}_n};$$

also

$$18)\qquad \frac{\partial\overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\partial\overset{a}{\omega}_n}$$

$$=-\frac{1}{(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2}.\frac{1}{\sqrt{a_n^2(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}}$$

oder

$$19)\qquad \partial\overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n$$

$$=-\frac{1}{(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2}.\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{\sqrt{a_n^2(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}};$$

oder auch

$$20)\qquad \partial\overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n$$

$$=-\frac{1}{(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2}.\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{a_n\sqrt{1-e_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2\cos\alpha_n\sqrt{1-e_n^2}\,.\,\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\cdot\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}}$$

$$=-\frac{1}{(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2}.\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{b_n\sqrt{1+\varepsilon_n^2(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2\cos\alpha_n\sqrt{1+\varepsilon_n^2}\,.\,\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}}.$$

§. 4.

Setzt man

$$21)\qquad \overset{e}{S}v_n\overset{a}{\omega}_n = 1 - \overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n, \quad \overset{e}{\mathfrak{S}}v_n\overset{a}{\omega}_n = 1 - \overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n;$$

so ist

$$22)\qquad \partial\overset{e}{S}v_n\overset{a}{\omega}_n = -\partial\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n, \quad \partial\overset{e}{\mathfrak{S}}v_n\overset{a}{\omega}_n = -\partial\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n;$$

und diese Differentiale können daher aus §. 2. unmittelbar entnommen werden.

Setzt man

$$23)\qquad \overset{e}{S}c_n\overset{a}{\omega}_n = \frac{1}{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}, \quad \overset{e}{\mathfrak{S}}c_n\overset{a}{\omega}_n = \frac{1}{\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n};$$

so ist

$$\overset{e}{S}c_n\overset{a}{\omega}_n = (\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^{-1}, \quad \overset{e}{\mathfrak{S}}c_n\overset{a}{\omega}_n = (\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^{-1};$$

also

$$\partial\overset{e}{S}c_n\overset{a}{\omega}_n = -\frac{\partial\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}{(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2}, \quad \partial\overset{e}{\mathfrak{S}}c_n\overset{a}{\omega}_n = -\frac{\partial\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}{(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2};$$

also nach §. 2.

$$24)\quad \left\{\begin{aligned}
\partial\overset{e}{S}c_n\overset{a}{\omega}_n &= \frac{\overset{e}{T}_n\overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}\cdot\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{\sqrt{a_n^2(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\,\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}},\\
-\partial\overset{e}{\mathfrak{S}}c_n\overset{a}{\omega}_n &= -\frac{\overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}\cdot\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{\sqrt{a_n^2(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\,\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}};
\end{aligned}\right.$$

oder

$$25)\quad \left\{\begin{aligned}
\partial\overset{e}{S}c_n\overset{a}{\omega}_n &= -\frac{\overset{e}{T}_n\overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}\cdot\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{a_n\sqrt{1-e_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2\cos\alpha_n\sqrt{1-e_n^2}\,.\,\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\,\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}},\\
\partial\overset{e}{\mathfrak{S}}c_n\overset{a}{\omega}_n &= -\frac{\overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}\cdot\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{a_n\sqrt{1-e_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2\cos\alpha_n\sqrt{1-e_n^2}\,.\,\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\,\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}};
\end{aligned}\right.$$

oder

$$
26)\quad \begin{cases}
\partial \overset{e}{S}c_n\overset{a}{\omega}_n = \dfrac{\overset{e}{T}_n\overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}\cdot\dfrac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{b_n\sqrt{1+\varepsilon_n^2(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-\cos\alpha_n\sqrt{1+\varepsilon_n^2}\,.\,\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\,\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}}, \\[2ex]
\partial \overset{e}{\mathfrak{S}}c_n\overset{a}{\omega}_n = -\dfrac{\overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}\cdot\dfrac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{b_n\sqrt{1+\varepsilon_n^2(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2\cos\alpha_n\sqrt{1+\varepsilon_n^2}\,.\,\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\,\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}}.
\end{cases}
$$

§. 5.

Bezeichnen wir die beiden Halbaxen der Ellipse durch a_0, b_0, den von denselben eingeschlossenen Winkel also durch α_0; so ist $\alpha_0 = 90^0$, $\cos\alpha_0 = 0$, und die im Vorhergehenden entwickelten Formeln vereinfachen sich daher in diesem Falle sehr.

Es ist:

27)

$$\partial \overset{e}{S}_0 \overset{a}{\omega}_0 = \frac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_0 \overset{a}{\omega}_0 \partial \overset{a}{\omega}_0}{\sqrt{a_0^2(\overset{e}{S}_0\overset{a}{\omega}_0)^2 + b_0^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}},$$

$$\partial \overset{e}{\mathfrak{S}}_0 \overset{a}{\omega}_0 = -\frac{\overset{e}{S}_0 \overset{a}{\omega}_0 \partial \overset{a}{\omega}_0}{\sqrt{a_0^2(\overset{e}{S}_0\overset{a}{\omega}_0)^2 + b_0^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}};$$

$$\partial \overset{e}{T}_0 \overset{a}{\omega}_0 = \frac{1}{(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0)^2} \cdot \frac{\partial \overset{a}{\omega}_0}{\sqrt{a_0^2(\overset{e}{S}_0\overset{a}{\omega}_0)^2 + b_0^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}},$$

$$\partial \overset{e}{\mathfrak{T}}_0 \overset{a}{\omega}_0 = -\frac{1}{(\overset{e}{S}_0\overset{a}{\omega}_0)^2} \cdot \frac{\partial \overset{a}{\omega}_0}{\sqrt{a_0^2(\overset{e}{S}_0\overset{a}{\omega}_0)^2 + b_0^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}};$$

$$\partial \overset{e}{S}v_0 \overset{a}{\omega}_0 = \frac{\overset{e}{S}_0 \overset{a}{\omega}_0 \partial \overset{a}{\omega}_0}{\sqrt{a_0^2(\overset{e}{S}_0\overset{a}{\omega}_0)^2 + b_0^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}},$$

$$\partial \overset{e}{\mathfrak{S}}v_0 \overset{a}{\omega}_0 = -\frac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_0 \overset{a}{\omega}_0 \partial \overset{a}{\omega}_0}{\sqrt{a_0^2(\overset{e}{S}_0\overset{a}{\omega}_0)^2 + b_0^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}};$$

$$\partial \overset{e}{S}c_0 \overset{a}{\omega}_0 = \frac{\overset{e}{T}_0\overset{a}{\omega}_0}{\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0} \cdot \frac{\partial \overset{a}{\omega}_0}{\sqrt{a_0^2(\overset{e}{S}_0\overset{a}{\omega}_0)^2 + b_0^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}},$$

$$\partial \overset{e}{\mathfrak{S}}c_0 \overset{a}{\omega}_0 = -\frac{\overset{e}{\mathfrak{T}}_0\overset{a}{\omega}_0}{\overset{e}{S}_0\overset{a}{\omega}_0} \cdot \frac{\partial \overset{a}{\omega}_0}{\sqrt{a_0^2(\overset{e}{S}_0\overset{a}{\omega}_0)^2 + b_0^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}};$$

oder

28)

$$\partial\overset{e}{S}_0\overset{a}{\omega}_0=\frac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0\partial\overset{a}{\omega}_0}{a_0\sqrt{1-e_0{}^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}},$$

$$\partial\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0=-\frac{\overset{e}{S}_0\overset{a}{\omega}_0\partial\overset{a}{\omega}_0}{a_0\sqrt{1-e_0{}^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}};$$

$$\partial\overset{e}{T}_0\overset{a}{\omega}_0=\frac{1}{(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}\cdot\frac{\partial\overset{a}{\omega}_0}{a_0\sqrt{1-e_0{}^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}},$$

$$\partial\overset{e}{\mathfrak{T}}_0\overset{a}{\omega}_0=-\frac{1}{(\overset{e}{S}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}\cdot\frac{\partial\overset{a}{\omega}_0}{a_0\sqrt{1-e_0{}^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}};$$

$$\partial\overset{e}{S}\mathrm{v}_0\overset{a}{\omega}_0=\frac{\overset{e}{S}_0\overset{a}{\omega}_0\partial\overset{a}{\omega}_0}{a_0\sqrt{1-e_0{}^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}},$$

$$\partial\overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{v}_0\overset{a}{\omega}_0=-\frac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0\partial\overset{a}{\omega}_0}{a_0\sqrt{1-e_0{}^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}};$$

$$\partial\overset{e}{S}\mathrm{c}_0\overset{a}{\omega}_0=\frac{\overset{e}{T}_0\overset{a}{\omega}_0}{\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0}\cdot\frac{\partial\overset{a}{\omega}_0}{a_0\sqrt{1-e_0{}^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}},$$

$$\partial\overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{c}_0\overset{a}{\omega}_0=-\frac{\overset{e}{\mathfrak{T}}_0\overset{a}{\omega}_0}{\overset{e}{S}_0\overset{a}{\omega}_0}\cdot\frac{\partial\overset{a}{\omega}_0}{a_0\sqrt{1-e_0{}^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}};$$

oder

29)

$$\partial\overset{e}{S}_0\overset{a}{\omega}_0=\frac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_0\overset{a}{\omega}_0\partial\overset{a}{\omega}_0}{b_0\sqrt{1+\varepsilon_0{}^2(\overset{e}{S}_0\overset{a}{\omega}_0)^2}},$$

$$\partial \overset{e}{\mathfrak{S}}_0 \overset{a}{\omega}_0 = -\frac{\overset{e}{S}_0 \overset{a}{\omega}_0 \partial \overset{a}{\omega}_0}{b_0 \sqrt{1 + \varepsilon_0^2 (\overset{e}{S}_0 \overset{a}{\omega}_0)^2}};$$

$$\partial \overset{e}{T}_0 \overset{a}{\omega}_0 = \frac{1}{(\overset{e}{\mathfrak{S}}_0 \overset{a}{\omega}_0)^2} \cdot \frac{\partial \overset{a}{\omega}_0}{b_0 \sqrt{1 + \varepsilon_0^2 (\overset{e}{S}_0 \overset{a}{\omega}_0)^2}},$$

$$\partial \overset{e}{\mathfrak{T}}_0 \overset{a}{\omega}_0 = -\frac{1}{(\overset{e}{S}_0 \overset{a}{\omega}_0)^2} \cdot \frac{\partial \overset{a}{\omega}_0}{b_0 \sqrt{1 + \varepsilon_0^2 (\overset{e}{S}_0 \overset{a}{\omega}_0)^2}};$$

$$\partial \overset{e}{S}v_0 \overset{a}{\omega}_0 = \frac{\overset{e}{S}_0 \overset{a}{\omega}_0 \partial \overset{a}{\omega}_0}{b_0 \sqrt{1 + \varepsilon_0^2 (\overset{e}{S}_0 \overset{a}{\omega}_0)^2}},$$

$$\partial \overset{e}{\mathfrak{S}}v_0 \overset{a}{\omega}_0 = -\frac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_0 \overset{a}{\omega}_0 \partial \overset{a}{\omega}_0}{b_0 \sqrt{1 + \varepsilon_0^2 (\overset{e}{S}_0 \overset{a}{\omega}_0)^2}};$$

$$\partial \overset{e}{S}c_0 \overset{a}{\omega}_0 = \frac{\overset{e}{T}_0 \overset{a}{\omega}_0}{\overset{e}{\mathfrak{S}}_0 \overset{a}{\omega}_0} \cdot \frac{\partial \overset{a}{\omega}_0}{b_0 \sqrt{1 + \varepsilon_0^2 (\overset{e}{S}_0 \overset{a}{\omega}_0)^2}},$$

$$\partial \overset{e}{\mathfrak{S}}c_0 \overset{a}{\omega}_0 = -\frac{\overset{e}{\mathfrak{T}}_0 \overset{a}{\omega}_0}{\overset{e}{S}_0 \overset{a}{\omega}_0} \cdot \frac{\partial \overset{a}{\omega}_0}{b_0 \sqrt{1 + \varepsilon_0^2 (\overset{e}{S}_0 \overset{a}{\omega}_0)^2}}.$$

Für den Kreis ist $a_0 = b_0$, also $e_0 = \varepsilon_0 = 0$, wodurch sich die obigen Formeln noch mehr vereinfachen, und auf die bekannten goniometrischen Differentiale zurückkommen.

§. 6.

Einen bei dem Punkte A_n anfangenden Bogen der Ellipse, dessen im Vorhergehenden durch das Symbol S_n bezeichnete

Function die Grösse x ist, d. h. den Werth x hat, wollen wir jetzt durch

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n(=x)$$

bezeichnen, so dass also

$$\overset{e}{\mathrm{S}}_n\{\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n(=x)\}=x,$$

oder, wenn wir

$$\overset{a}{\omega}_n=\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n(=x)$$

setzen,

$$\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n=x$$

ist; woraus nun auch von selbst die Bedeutung ähnlicher Symbole in Bezug auf die übrigen oben eingeführten Functionen der elliptischen Bogen erhellen wird, was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

§. 7.

Setzen wir daher

$$\overset{a}{\omega}_n=\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n(=x),$$

so ist

$$x=\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n,$$

und folglich nach 7):

$$\frac{\partial x}{\partial\overset{a}{\omega}_n}=\frac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\sqrt{a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}}$$

Nun ist aber nach den Lehren der Differentialrechnung

$$\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{\partial\overset{a}{\omega}_n}=\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\overset{a}{\omega}_n}=1,$$

also

$$\frac{\partial \overset{a}{\omega}_n}{\partial x} = 1 : \frac{\partial x}{\partial \overset{a}{\omega}_n},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n \overset{e}{\mathrm{S}}_n(=x)}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n} \cdot \sqrt{a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 + b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 - 2a_n b_n \cos\alpha_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{\mathrm{S}}_n \overset{a}{\omega}_n}.$$

Weil aber bekanntlich

$$(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 + (\overset{e}{\mathrm{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 = 1$$

ist, so ist

$$(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 = 1 - (\overset{e}{\mathrm{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 = 1 - x^2, \quad \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n = \pm\sqrt{1-x^2};$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem

$$\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n = \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \{\overset{e}{\mathrm{Arc}}_n \overset{e}{\mathrm{S}}_n (=x)\}$$

positiv oder negativ ist. Also ist, immer mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens:

$$30)\quad \partial \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n \overset{e}{\mathrm{S}}_n (=x)$$

$$= \pm \frac{\sqrt{b_n^2 + (a_n^2 - b_n^2)x^2 \mp 2a_n b_n \cos\alpha_n . x\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}} \partial x$$

oder

$$30^*)\quad \partial \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n \overset{e}{\mathrm{S}}_n (=x)$$

$$= \pm \frac{b_n \sqrt{1 + \varepsilon_n^2 x^2 \mp 2\cos\alpha_n \sqrt{1+\varepsilon_n^2} . x\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}} \partial x.$$

Folglich ist auch umgekehrt:

$$31)\qquad \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n(=x)$$

$$=\pm\int\frac{\sqrt{b_n^2+(a_n^2-b_n^2)x^2\mp 2a_nb_n\cos\alpha_n\,.\,x\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}\partial x$$

oder:

$$31^*)\qquad \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n(=x)$$

$$=\pm b_n\int\frac{\sqrt{1+\varepsilon_n^2x^2\mp 2\cos\alpha_n\sqrt{1+\varepsilon_n^2}\,.\,x\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}\partial x.$$

Setzt man $x=\sin\varphi$, und nimmt, was offenbar immer verstattet ist, φ so, dass $\cos\varphi$ positiv ist, so ist

$$\partial x=\cos\varphi\partial\varphi,\quad \sqrt{1-x^2}=\cos\varphi;$$

also

$$32)$$

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n(=\sin\varphi)=\pm\int\partial\varphi\sqrt{a_n^2\sin\varphi^2\mp 2a_nb_n\cos\alpha_n\sin\varphi\cos\varphi+b_n^2\cos\varphi^2}.$$

Setzt man $x=\cos\varphi$, und nimmt, was offenbar immer verstattet ist, φ so, dass $\sin\varphi$ positiv ist, so ist

$$\partial x=-\sin\varphi\partial\varphi,\quad \sqrt{1-x^2}=\sin\varphi;$$

also

$$33)$$

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n(=\cos\varphi)=\mp\int\partial\varphi\sqrt{a_n^2\cos\varphi^2\mp 2a_nb_n\cos\alpha_n\sin\varphi\cos\varphi+b_n^2\sin\varphi^2}.$$

§. 8.

Setzen wir ferner

$$\overset{a}{\omega}_n=\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n(=x),$$

so ist

$$x = \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n,$$

und folglich nach 7):

$$\frac{\partial x}{\partial \overset{a}{\omega}_n} = -\frac{\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n}{\sqrt{a_n^2(\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 + b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 - 2a_n b_n \cos\alpha_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n}}.$$

Nun ist aber nach den Lehren der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial \overset{a}{\omega}_n}{\partial \overset{a}{\omega}_n} = \frac{\partial \overset{a}{\omega}_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \overset{a}{\omega}_n} = 1,$$

also

$$\frac{\partial \overset{a}{\omega}_n}{\partial x} = 1 : \frac{\partial x}{\partial \overset{a}{\omega}_n},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n (= x)}{\partial x}$$

$$= -\frac{1}{\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n} \sqrt{a_n^2(\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 + b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 - 2a_n b_n \cos\alpha_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n}.$$

Weil aber bekanntlich

$$(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 + (\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 = 1$$

ist, so ist

$$(\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 = 1 - (\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 = 1 - x^2, \quad \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n = \pm\sqrt{1 - x^2};$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem

$$\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n = \overset{e}{S}_n \{\overset{e}{\mathrm{Arc}}_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n (= x)\}$$

positiv oder negativ ist. Also ist, immer mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens:

$$34)\qquad \partial\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n(=x)$$

$$=\mp\frac{\sqrt{a_n^2-(a_n^2-b_n^2)x^2\mp 2a_nb_n\cos\alpha_n.x\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}\partial x$$

oder

$$34^*)\qquad \partial\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n(=x)$$

$$=\mp\frac{a_n\sqrt{1-e_n^2x^2\mp 2\cos\alpha_n\sqrt{1-e_n^2}.x\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}\partial x.$$

Folglich ist auch umgekehrt:

$$35)\qquad \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n(=x)$$

$$=\mp\int\frac{\sqrt{a_n^2-(a_n^2-b_n^2)x^2\mp 2a_nb_n\cos\alpha_n.x\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}\partial x$$

oder:

$$35^*)\qquad \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n(=x)$$

$$=\mp a_n\int\frac{\sqrt{1-e_n^2x^2\mp\cos\alpha_n\sqrt{1-e_n^2}.x\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}\partial x.$$

Setzt man $x=\cos\varphi$, und nimmt, was offenbar immer verstattet ist, φ so, dass $\sin\varphi$ positiv ist, so ist

$$\partial x=-\sin\varphi\partial\varphi,\quad \sqrt{1-x^2}=\sin\varphi;$$

also

$$36)$$

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n(=\cos\varphi)=\pm\int\partial\varphi\sqrt{a_n^2\sin\varphi^2\mp 2a_nb_n\cos\alpha_n\sin\varphi\cos\varphi+b_n^2\cos\varphi^2}$$

Setzt man $x=\sin\varphi$, und nimmt, was offenbar immer verstattet ist, φ so, dass $\cos\varphi$ positiv ist, so ist

$$\partial x=\cos\varphi\partial\varphi,\quad \sqrt{1-x^2}=\cos\varphi;$$

also

37)

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n(=\sin\varphi)=\mp\int\partial\varphi\sqrt{a_n{}^2\cos\varphi^2\mp 2a_nb_n\cos\alpha_n\sin\varphi\cos\varphi+b_n{}^2\sin\varphi^2}.$$

§. 9

Wir wollen nun

$$\overset{a}{\omega}_n=\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n(=x)$$

setzen, so ist

$$x=\overset{e}{\mathrm{T}}_n\overset{a}{\omega}_n,$$

und folglich nach 15):

$$\frac{\partial x}{\partial\overset{a}{\omega}_n}=\frac{1}{(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\omega_n)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_n{}^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n{}^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}}.$$

Nun ist aber nach den Lehren der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{\partial\overset{a}{\omega}_n}=\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\overset{n}{\omega}_n}=1,$$

also

$$\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{\partial x}=1:\frac{\partial x}{\partial\overset{a}{\omega}_n},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\partial\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n(=x)}{\partial x}$$

$$=(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2\sqrt{a_n{}^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n{}^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}.$$

Weil aber

$$1=(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2=(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2\left\{1+\left(\frac{\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}\right)^2\right\},$$

also

$$1=(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2\{1+(\overset{e}{\mathrm{T}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2\}=(1+x^2)(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2$$

ist; so ist

$$(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2=\frac{1}{1+x^2},\quad \overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n=\pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Nun ist

$$\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n=\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n\overset{a}{\omega}_n=x\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n,$$

also

$$\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n=\pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander; folglich allgemein:

$$\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n=\frac{x}{1+x^2},$$

und daher

$$a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n$$
$$=\frac{b_n^2-2a_nb_nx\cos\alpha_n+a_n^2x^2}{1+x^2}.$$

Also ist nach dem Obigen:

38)

$$\partial\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n(=x)=\frac{\sqrt{b_n^2-2a_nb_nx\cos\alpha_n+a_n^2x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\partial x,$$

und folglich umgekehrt:

39)

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n(=x)=\int\frac{\sqrt{b_n^2-2a_nb_nx\cos\alpha_n+a_n^2x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\partial x.$$

Durch Construction kann man das Integral

$$\int\frac{\sqrt{b_n^2-2a_nb_nx\cos\alpha_n+a_n^2x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\partial x$$

auf folgende Art finden, wobei wir annehmen wollen, dass x positiv sei.

Mit den conjugirten Halbmessern $a_n=OA_n$, $b_n=OB_n$ (Taf. III. Fig. 1.) und dem Coordinatenwinkel $\alpha_n=A_nOB_n$ beschreibe man nach einer aus der Lehre von den Kegelschnitten allgemein bekannten Aufgabe, für die man schon mehrere elegante Auflösungen hat, eine Ellipse. Soll dann der elliptische Bogen A_nB einen Werth des obigen Integrals darstellen, so muss, wenn wir BC mit OB_n parallel ziehen,

$$x=\frac{BC}{OB_n}:\frac{OC}{OA_n}=\frac{OA_n}{OB_n}\cdot\frac{BC}{OC},$$

also

$$\frac{OA_n\,.\,BC}{OC}=x\,.\,OB_n$$

sein; d. h. es muss

$$OC:OA_n=BC:x.OB_n$$

sein. Ziehen wir nun durch A_n eine Berührende der Ellipse, welche bekanntlich mit OB_n parallel ist. und die Linie OB, welche, über B hinaus verlängert, die durch A_n gezogene Berührende der Ellipse in D schneidet; so ist

$$OC:OA_n=BC:A_nD,$$

also nach dem Obigen

$$A_nD=x\,.\,OB_n=b_nx.$$

Dies führt unmittelbar zu der folgenden Construction:

Durch den Punkt A_n ziehe man eine Berührende der beschriebenen Ellipse, welche mit OB_n parallel ist, schneide auf dieser Berührenden von dem Punkte A_n aus ein Stück

$$A_nD=x\,.\,OB_n$$

ab, und ziehe durch den Mittelpunkt O der Ellipse und den Punkt D die gerade Linie OD, welche die Ellipse in dem Punkte B schneidet; so ist der elliptische Bogen A_nB, und, wie leicht erhellet, überhaupt jeder bei A_n anfangende und bei B sich endigende Bogen der beschriebenen Ellipse ein Werth des Integrals

$$\int \frac{\sqrt{b_n^2 - 2a_n b_n x \cos\alpha_n + a_n^2 x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \partial x.$$

Diese Construction weiter zu verfolgen, ist jetzt nicht meine Absicht, und auch hier nicht nöthig, da Jeder sogleich selbst begreifen wird, worauf es bei derselben und bei anderen ähnlichen Constructionen ankommt.

Setzt man $x = \tang\varphi$, und nimmt, was offenbar immer verstattet ist, φ so, dass $\cos\varphi$ positiv ist, so ist

$$1+x^2 = \sec\varphi^2, \quad \sqrt{1+x^2} = \sec\varphi, \quad (1+x^2)\sqrt{1+x^2} = \sec\varphi^3;$$

ferner

$$\sqrt{b_n^2 - 2a_n b_n x \cos\alpha_n + a_n^2 x^2}$$

$$= \sec\varphi \sqrt{a_n^2 \sin\varphi^2 - 2a_n b_n \cos\alpha_n \sin\varphi\cos\varphi + b_n^2 \cos\varphi^2}$$

und

$$\partial x = \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2} = \sec\varphi^2 \partial\varphi.$$

Also ist

40)

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n \overset{e}{\mathrm{T}}_n(=\tang\varphi) = \int \partial\varphi \sqrt{a_n^2 \sin\varphi^2 - 2a_n b_n \cos\alpha_n \sin\varphi\cos\varphi + b_n^2 \cos\varphi^2}.$$

Setzen wir

$$\frac{a_n x - b_n \cos\alpha_n}{b_n \sin\alpha_n} = \tang\varphi,$$

und nehmen wieder, was offenbar verstattet ist, φ so, dass $\cos\varphi$ positiv ist, so ist

$$x = \frac{b_n}{a_n}(\cos\alpha_n + \sin\alpha_n \tang\varphi) = \frac{b_n}{a_n} \cdot \frac{\cos(\alpha_n - \varphi)}{\cos\varphi},$$

$$1 + x^2 = \frac{a_n^2 \cos\varphi^2 + b_n^2 \cos(\alpha_n - \varphi)^2}{a_n^2 \cos\varphi^2},$$

$$(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\{a_n^2 \cos\varphi^2 + b_n^2 \cos(\alpha_n - \varphi)^2\}^{\frac{3}{2}}}{a_n^3 \cos\varphi^3}$$

Ferner ist

$$b_n^2 - 2a_nb_nx\cos\alpha_n + a_n^2x^2 = (a_nx - b_n\cos\alpha_n)^2 + b_n^2\sin\alpha_n^2$$
$$= b_n^2\sin\alpha_n^2\sec\varphi^2,$$

also

$$\sqrt{b_n^2 - 2a_nb_nx\cos\alpha_n + a_n^2x^2} = b_n\sin\alpha_n\sec\varphi,$$

und

$$\partial x = \frac{b_n\sin\alpha_n}{a_n}\cdot\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2};$$

also

$$\partial x\sqrt{b_n^2 - 2a_nb_nx\cos\alpha_n + a_n^2x^2} = \frac{b_n^2\sin\alpha_n^2}{a_n}\cdot\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^3}.$$

Folglich ist

$$\frac{\sqrt{b_n^2 - 2a_nb_nx\cos\alpha_n + a_n^2x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,\partial x$$
$$= a_n^2b_n^2\sin\alpha_n^2\cdot\frac{\partial\varphi}{\{a_n^2\cos\varphi^2 + b_n^2\cos(\alpha_n-\varphi)^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

also nach dem Obigen

$$41)\qquad \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n\left\{ = \frac{b_n}{a_n}\cdot\frac{\cos(\alpha_n-\varphi)}{\cos\varphi}\right\}$$
$$= a_n^2b_n^2\sin\alpha_n^2\int\frac{\partial\varphi}{\{a_n^2\cos\varphi^2 + b_n^2\cos(\alpha_n-\varphi)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Für $\alpha_0 = 90^0$ sind, wie schon früher, a_0, b_0 die beiden Halbaxen der Ellipse; also unter dieser Voraussetzung:

$$42)$$
$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_0\overset{e}{\mathrm{T}}_0\left(= \frac{b_0}{a_0}\operatorname{tang}\varphi\right) = a_0^2b_0^2\int\frac{\partial\varphi}{(a_0^2\cos\varphi^2 + b_0^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

oder

43)

$$\overset{e}{\text{Arc}}_0\overset{e}{\mathrm{T}}_0\left(=\frac{b_0}{a_0}\operatorname{tang}\varphi\right)=a_0^2b_0^2\int\frac{\partial\varphi}{\{a_0^2-(a_0^2-b_0^2)\sin\varphi^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$=a_0^2b_0^2\int\frac{\partial\varphi}{\{b_0^2+(a_0^2-b_0^2)\cos\varphi^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{b_0^2}{a_0}\int\frac{\partial\varphi}{(1-e_0^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{a_0^2}{b_0}\int\frac{\partial\varphi}{(1+\varepsilon_0^2\cos\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es ist schon oben erinnert worden, dass es in dieser Abhandlung nicht meine Absicht ist, mich sehr viel mit Transformationen der gefundenen Fundamental-Integrale zu beschäftigen; deshalb hat man für jetzt die vorstehenden Transformationen nur als beiläufige Bemerkungen zu betrachten.

§. 10.

Wir setzen nun ferner

$$\overset{a}{\omega}_n=\overset{a}{\text{Arc}}_n\overset{e}{\mathfrak{T}}_n(=x),$$

so ist

$$x=\overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n,$$

und folglich nach 18):

$$\frac{\partial x}{\partial\overset{a}{\omega}_n}$$

$$=-\frac{1}{(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}}.$$

Nun ist aber nach den Lehren der Differentialrechnung

$$\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{\partial\overset{a}{\omega}_n}=\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\overset{a}{\omega}_n}=1,$$

also

$$\frac{\partial \overset{a}{\omega}_n}{\partial x} = 1 : \frac{\partial x}{\partial \overset{a}{\omega}_n},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n \overset{e}{\mathfrak{T}}_n (= x)}{\partial x}$$

$$= -(\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 \sqrt{a_n^2 (\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 + b_n^2 (\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 - 2a_n b_n \cos\alpha_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n}\,.$$

Weil aber

$$1 = (\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 + (\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 = (\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 \left\{1 + \left(\frac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n}\right)^2\right\},$$

also

$$1 = (\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 \{1 + (\overset{e}{\mathfrak{T}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2\} = (1 + x^2)(\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2$$

ist, so ist

$$(\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 = \frac{1}{1+x^2}, \quad \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n = \pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Nun ist

$$\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n = \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{\mathfrak{T}}_n \overset{a}{\omega}_n = x \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n,$$

also

$$\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n = \pm \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander; folglich allgemein

$$\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n = \frac{x}{1+x^2},$$

und daher

$$a_n^2 (\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 + b_n^2 (\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 - 2a_n b_n \cos\alpha_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n$$

$$= \frac{a_n^2 - 2a_n b_n x \cos\alpha_n + b_n^2 x^2}{1+x^2}\,.$$

Also ist nach dem Obigen:

44)

$$\partial \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n \overset{e}{\mathfrak{T}}_n (=x) = -\frac{\sqrt{a_n^2 - 2a_n b_n x \cos\alpha_n + b_n^2 x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,\partial x,$$

und folglich umgekehrt:

45)

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n \overset{e}{\mathfrak{T}}_n (=x) = -\int \frac{\sqrt{a_n^2 - 2a_n b_n x \cos\alpha_n + b_n^2 x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,\partial x.$$

Setzt man $x = \cot\varphi$, und nimmt, was offenbar immer verstattet ist, φ so, dass $\sin\varphi$ positiv ist, so ist

$$1+x^2 = \operatorname{cosec}\varphi^2, \quad \sqrt{1+x^2} = \operatorname{cosec}\varphi, \quad (1+x^2)\sqrt{1+x^2} = \operatorname{cosec}\varphi^3;$$

ferner

$$\sqrt{a_n^2 - 2a_n b_n x \cos\alpha_n + b_n^2 x^2}$$

$$= \operatorname{cosec}\varphi \sqrt{a_n^2 \sin\varphi^2 - 2a_n b_n \cos\alpha_n \sin\varphi\cos\varphi + b_n^2 \cos\varphi^2}$$

und

$$\partial x = -\frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^2}.$$

Also ist

46)

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n \overset{e}{\mathfrak{T}}_n (=x) = \int \partial\varphi \sqrt{a_n^2 \sin\varphi^2 - 2a_n b_n \cos\alpha_n \sin\varphi\cos\varphi + b_n^2 \cos\varphi^2}.$$

Setzen wir

$$\frac{b_n x - a_n \cos\alpha_n}{a_n \sin\alpha_n} = \cot\varphi,$$

und nehmen wieder, was offenbar verstattet ist, φ so, dass $\sin\varphi$ positiv ist, so ist

$$x = \frac{a_n}{b_n}(\cos\alpha_n + \sin\alpha_n \cot\varphi) = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{\sin(\alpha_n + \varphi)}{\sin\varphi},$$

$$1+x^2=\frac{b_n^2\sin\varphi^2+a_n^2\sin(\alpha_n+\varphi)^2}{b_n^2\sin\varphi^2},$$

$$(1+x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{\{b_n^2\sin\varphi^2+a_n^2\sin(\alpha_n+\varphi)^2\}^{\frac{3}{2}}}{b_n^3\sin\varphi^3}.$$

Ferner ist

$$a_n^2-2a_nb_nx\cos\alpha_n+b_n^2x^2=(b_nx-a_n\cos\alpha_n)^2+a_n^2\sin\alpha_n^2$$
$$=a_n^2\sin\alpha_n^2\operatorname{cosec}\varphi^2,$$

also

$$\sqrt{a_n^2-2a_nb_nx\cos\alpha_n+b_n^2x^2}=a_n\sin\alpha_n\operatorname{cosec}\varphi,$$

und

$$\partial x=-\frac{a_n\sin\alpha_n}{b_n}\cdot\frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^2};$$

also

$$\partial x\sqrt{a_n^2-2a_nb_nx\cos\alpha_n+b_n^2x^2}=-\frac{a_n^2\sin\alpha_n^2}{b_n}\cdot\frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^3}.$$

Folglich ist

$$\frac{\sqrt{a_n^2-2a_nb_nx\cos\alpha_n+b_n^2x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\partial x$$
$$=-a_n^2b_n^2\sin\alpha_n^2\cdot\frac{\partial\varphi}{\{b_n^2\sin\varphi^2+a_n^2\sin(\alpha_n+\varphi)^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

also nach dem Obigen

$$47)\qquad \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\mathfrak{T}_n\left\{=\frac{a_n}{b_n}\cdot\frac{\sin(\alpha_n+\varphi)}{\sin\varphi}\right\}$$
$$=a_n^2b_n^2\sin\alpha_n^2\int\frac{\partial\varphi}{\{b_n^2\sin\varphi^2+a_n^2\sin(\alpha_n+\varphi)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Für $\alpha_0=90^0$ sind, wie schon früher, a_0, b_0 die beiden Halbaxen der Ellipse; also unter dieser Voraussetzung:

48)

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_0\overset{e}{\mathfrak{T}}_0\left(=\frac{a_0}{b_0}\cot\varphi\right)=a_0{}^2b_0{}^2\int\frac{\partial\varphi}{(a_0{}^2\cos\varphi^2+b_0{}^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

oder

49)

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_0\overset{e}{\mathfrak{T}}_0\left(=\frac{a_0}{b_0}\cot\varphi\right)=a_0{}^2b_0{}^2\int\frac{\partial\varphi}{\{a_0{}^2-(a_0{}^2-b_0{}^2)\sin\varphi^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$=a_0{}^2b_0{}^2\int\frac{\partial\varphi}{\{b_0{}^2+(a_0{}^2-b_0{}^2)\cos\varphi^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{b_0{}^2}{a_0}\int\frac{\partial\varphi}{(1-e_0{}^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{a_0{}^2}{b_0}\int\frac{\partial\varphi}{(1+\varepsilon_0{}^2\cos\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

§. 11.

Setzen wir

$$\overset{a}{\omega}_n=\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{S}}\mathrm{c}_n(=x)$$

so ist

$$x=\overset{e}{\mathrm{S}}\mathrm{c}_n\overset{a}{\omega}_n,$$

also nach 24):

$$\frac{\partial x}{\partial\overset{a}{\omega}_n}=\frac{\overset{e}{\mathrm{T}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_n{}^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n{}^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}}.$$

Nun ist aber nach den Lehren der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{\partial\overset{a}{\omega}_n}=\frac{\partial\overset{a}{\omega}_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\overset{a}{\omega}_n}=1,$$

also

$$\frac{\partial \overset{a}{\omega}_n}{\partial x} = 1 : \frac{\partial x}{\partial \overset{a}{\omega}_n},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n \overset{e}{\mathrm{Sc}}_n (= x)}{\partial x}$$

$$= \frac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{\mathrm{T}}_n \overset{a}{\omega}_n} \sqrt{a_n^2 (\overset{e}{\mathrm{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 + b_n^2 (\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 - 2 a_n b_n \cos \alpha_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{\mathrm{S}}_n \overset{a}{\omega}_n}.$$

Weil aber

$$\overset{e}{\mathrm{Sc}}_n \overset{a}{\omega}_n = x = \frac{1}{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n} \text{ ist, so ist } \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n = \frac{1}{x}$$

und folglich

$$(\overset{e}{\mathrm{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 = 1 - (\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

Also ist

$$(\overset{e}{\mathrm{T}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 = \left(\frac{\overset{e}{\mathrm{S}}_n \overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n} \right)^2 = x^2 - 1,$$

folglich

$$\overset{e}{\mathrm{T}}_n \overset{a}{\omega}_n = \pm \sqrt{x^2 - 1},$$

wo man das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem

$$\overset{e}{\mathrm{T}}_n \overset{a}{\omega}_n = \overset{e}{\mathrm{T}}_n \{ \overset{e}{\mathrm{Arc}}_n \overset{e}{\mathrm{Sc}}_n (= x) \}$$

positiv oder negativ ist. Immer mit dieser Bestimmung wegen des Vorzeichens ist also

$$\frac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{\mathrm{T}}_n \overset{a}{\omega}_n} = \pm \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

und

$$\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n = \overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n\overset{a}{\omega}_n = \pm\frac{\sqrt{x^2-1}}{x},$$

also

$$a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2 + b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2 - 2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n$$
$$= \frac{b_n^2 + a_n^2(x^2-1) \mp 2a_nb_n\cos\alpha_n\sqrt{x^2-1}}{x^2}.$$

Folglich ist nach dem Obigen:

50) $\qquad \partial\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{S}}\mathrm{c}_n(=x)$

$$= \pm\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\sqrt{\frac{b_n^2 + a_n^2(x^2-1) \mp 2a_nb_n\cos\alpha_n\sqrt{x^2-1}}{x^2}}\,\partial x,$$

und umgekehrt:

51) $\qquad \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{S}}\mathrm{c}_n(=x)$

$$= \pm\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\sqrt{\frac{b_n^2 + a_n^2(x^2-1) \mp 2a_nb_n\cos\alpha_n\sqrt{x^2-1}}{x^2}}\,\partial x,$$

welche Formel wir jetzt der Kürze wegen nicht weiter umgestalten wollen.

§. 12.

Wir wollen nun ferner

$$\overset{a}{\omega}_n = \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{c}_n(=x)$$

setzen, so ist

$$x = \overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{c}_n\overset{a}{\omega}_n,$$

und folglich nach 24):

$$\frac{\partial x}{\partial \overset{a}{\omega}_n} = -\frac{\overset{e}{\mathfrak{T}}_n \overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n^2(\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 + b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 - 2a_n b_n \cos\alpha_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n}}.$$

Nun ist aber nach den Lehren der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial \overset{a}{\omega}_n}{\partial \overset{a}{\omega}_n} = \frac{\partial \overset{a}{\omega}_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \overset{a}{\omega}_n} = 1,$$

also

$$\frac{\partial \overset{a}{\omega}_n}{\partial x} = 1 : \frac{\partial x}{\partial \overset{a}{\omega}_n},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{A}}\mathrm{rc}_n \overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{c}_n (= x)}{\partial x}$$

$$= -\frac{\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{\mathfrak{T}}_n \overset{a}{\omega}_n} \sqrt{a_n^2(\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 + b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 - 2a_n b_n \cos\alpha_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n}.$$

Weil aber

$$\overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{c}_n \overset{a}{\omega}_n = x = \frac{1}{\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n} \text{ ist, so ist } \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n = \frac{1}{x}$$

und folglich

$$\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n = 1 - (\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

Also ist

$$(\overset{e}{\mathfrak{T}}_n \overset{a}{\omega}^n)^2 = \left(\frac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n}\right)^2 = x^2 - 1,$$

folglich

$$\overset{e}{\mathfrak{T}}_n \overset{a}{\omega}_n = \pm\sqrt{x^2 - 1},$$

wo man das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem

$$\overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n=\overset{e}{\mathfrak{T}}_n\{\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{c}_n(=x)\}$$

positiv oder negativ ist. Immer mit dieser Bestimmung wegen des Vorzeichens ist also

$$\frac{\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n}=\pm\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

und

$$\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n=\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n=\pm\frac{\sqrt{x^2-1}}{x},$$

also

$$a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n$$
$$=\frac{a_n^2+b_n^2(x^2-1)\mp 2a_nb_n\cos\alpha_n\sqrt{x^2-1}}{x^2}.$$

Folglich ist nach dem Obigen:

$$52)\qquad \partial\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{c}_n(=x)$$
$$=\mp\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\sqrt{\frac{a_n^2+b_n^2(x^2-1)\mp 2a_nb_n\cos\alpha_n\sqrt{x^2-1}}{x^2}}\,\partial x,$$

oder umgekehrt:

$$53)\qquad \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{c}_n(=x)$$
$$=\mp\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\sqrt{\frac{a_n^2+b_n^2(x^2-1)\mp 2a_nb_n\cos\alpha_n\sqrt{x^2-1}}{x^2}}\,\partial x.$$

§. 13.

Sei jetzt

$$\overset{a}{\omega}_n=\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{S}}\mathrm{v}_n(=x),$$

also

$$x = \overset{e}{\mathrm{Sv}}_n \overset{a}{\omega}_n,$$

so ist nach 22) und 7):

$$\frac{\partial x}{\partial \overset{a}{\omega}_n} = -\frac{\overset{e}{\mathrm{S}}_n \overset{a}{\omega}_n}{\sqrt{a_n{}^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 + b_n{}^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 - 2a_n b_n \cos\alpha_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{\mathrm{S}}_n \overset{a}{\omega}_n}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial \overset{a}{\omega}_n}{\partial \overset{a}{\omega}_n} = \frac{\partial \overset{a}{\omega}_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \overset{a}{\omega}_n} = 1,$$

also

$$\frac{\partial \overset{a}{\omega}_n}{\partial x} = 1 : \frac{\partial x}{\partial \overset{a}{\omega}_n},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n \overset{e}{\mathrm{Sv}}_n (=x)}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{\overset{e}{\mathrm{S}}_n \overset{a}{\omega}_n} \cdot \sqrt{a_n{}^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 + b_n{}^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 - 2a_n b_n \cos\alpha_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{\mathrm{S}}_n \overset{a}{\omega}_n}.$$

Weil aber

$$\overset{e}{\mathrm{Sv}}_n \overset{a}{\omega}_n = x = 1 - \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n, \quad \text{also} \quad \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n = 1 - x$$

ist; so ist

$$(\overset{e}{\mathrm{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 = 1 - (\overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n)^2 = 1 - (1-x)^2 = x(2-x),$$

und folglich

$$\overset{e}{\mathrm{S}}_n \overset{a}{\omega}_n = \pm\sqrt{x(2-x)},$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem

$$\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n=\overset{e}{S}_n\{\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{S}v_n(=x)\}$$

positiv oder negativ ist. Ferner ist

$$a_n^2(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n$$

$$=a_n^2x(2-x)+b_n^2(1-x)^2\mp 2a_nb_n\cos\alpha_n.(1-x)\sqrt{x(2-x)},$$

folglich

$$54)\qquad \partial\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{S}v_n(=x)$$

$$=\pm\frac{\sqrt{a_n^2x(2-x)+b_n^2(1-x)^2\mp 2a_{nn}b_n\cos\alpha_n.(1-x)\sqrt{x(2-x)}}}{\sqrt{x(2-x)}}\partial x,$$

oder umgekehrt:

$$55)\qquad \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{S}v_n(=x)$$

$$=\pm\int\frac{\sqrt{a_n^2x(2-x)+b_n^2(1-x)^2\mp 2a_nb_n\cos\alpha_n.(1-x)\sqrt{x(2-x)}}}{\sqrt{x(2-x)}}\partial x.$$

§. 14.

Sei endlich

$$\overset{a}{\omega}_n=\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}v_n(=x),$$

also

$$x=\overset{e}{\mathfrak{S}}v_n\overset{a}{\omega}_n,$$

so ist nach 22) und 7):

$$\frac{\partial x}{\partial\overset{a}{\omega}_n}=-\frac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}{\sqrt{a_n^2(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial \overset{a}{\omega}_n}{\partial \overset{a}{\omega}_n}=\frac{\partial \overset{a}{\omega}_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \overset{a}{\omega}_n}=1,$$

also

$$\frac{\partial \overset{a}{\omega}_n}{\partial x}=1:\frac{\partial x}{\partial \overset{a}{\omega}_n},$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n \overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{v}_n(=x)}{\partial x}$$

$$=-\frac{1}{\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}\sqrt{a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n}.$$

Weil aber

$$\overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{v}_n\overset{a}{\omega}_n=x=1-\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n,\quad\text{also}\quad \overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n=1-x$$

ist; so ist

$$(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2=1-(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2=1-(1-x)^2=x(2-x),$$

und folglich

$$\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n=\pm\sqrt{x(2-x)},$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem

$$\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n=\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\{\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{v}_n(=x)\}$$

positiv oder negativ ist. Ferner ist

$$a_n^2(\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2+b_n^2(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n)^2-2a_nb_n\cos\alpha_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n$$

$$=b_n^2x(2-x)+a_n^2(1-x)^2\mp 2a_nb_n\cos\alpha_n.(1-x)\sqrt{x(2-x)},$$

folglich

$$56)\qquad \partial \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n \overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{v}_n(=x)$$

$$=\mp\frac{\sqrt{b_n^2x(2-x)+a_n^2(1-x)^2\mp 2a_nb_n\cos\alpha_n.(1-x)\sqrt{x(2-x)}}}{\sqrt{x(2-x)}}\partial x,$$

oder umgekehrt:

$$57)\qquad \overset{a}{\mathrm{Arc}}_n \overset{e}{\mathfrak{S}}\mathrm{v}_n(=x)$$

$$=\mp\int\frac{\sqrt{b_n^2x(2-x)+a_n^2(1-x)^2\mp 2a_nb_n\cos\alpha_n.(1-x)\sqrt{x(2-x)}}}{\sqrt{x(2-x)}}\partial x.$$

Zweite Abtheilung.

§. 15.

Es ist schon im Obigen bemerkt worden, dass weitere Entwickelungen, Anwendungen und Umformungen der in der vorhergehenden Abtheilung gewonnenen Formeln jetzt nicht zu meinem Zwecke gehören. Dagegen würde aber das Vorhergehende sehr unvollständig sein, wenn es nicht möglich wäre, für die im Obigen eingeführten Functionen der elliptischen Bögen eine ähnliche Theorie zu entwickeln, wie dieselbe die Mathematik schon seit langer Zeit für die sogenannten goniometrischen Functionen der Kreisbögen besitzt. Freilich stehen der Entwickelung einer solchen Theorie für die aus dem Obigen bekannten Functionen der elliptischen Bögen mancherlei Hindernisse im Wege; indess halte ich dieselbe nicht für unmöglich, und will versuchen, in dieser zweiten Abtheilung der vorliegenden Abhandlung die Grundlagen zu entwickeln, auf denen nach meiner Ansicht diese Theorie aufgeführt werden muss. So weit auch das Feld neuer mathematischer Untersuchungen mir zu sein scheint, welches durch die im Folgenden entwickelten Fundamentalsätze, wobei ich mich absichtlich ganz elementarer Methoden bedient habe, eröffnet wird, so werde ich mich doch, meiner Absicht in dieser ganzen Abhandlung gemäss, für jetzt eben nur auf jene Fundamentalsätze beschränken, indem ich die weitere Entwickelung der Theorie, welcher dieselben zur Grundlage dienen sollen, späteren Abhandlungen vorbehalte, zugleich aber auch die geehrten Leser des Archivs ersuche, diesem Gegenstande ihre Aufmerksamkeit zu widmen. Wenn im Folgenden einiges ganz Bekannte über die Berührenden und die Durchmesser der Ellipse vorkommen wird, so bitte ich deshalb um Verzeihung; es ist theils der hier angewandten Methode der Entwickelung wegen, theils um den späteren Sätzen eine möglichst leichte Verständlichkeit zu sichern, mit aufgenommen worden.

§. 16.

Die Gleichung der Ellipse in Bezug auf das System ihrer beiden Axen ist bekanntlich:

$$1)\qquad \left(\frac{x_0}{a_0}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b_0}\right)^2=1.$$

Um nun die Gleichung der die Ellipse in dem in ihr liegenden gegebenen Punkte $(X_0 Y_0)$ Berührenden zu finden, nehme man in der Ellipse einen zweiten durch die Coordinaten $X_0+\Delta X_0$, $Y_0+\Delta Y_0$ bestimmten Punkt an, und denke sich durch die beiden durch die Coordinaten X_0, Y_0 und $X_0+\Delta X_0$, $Y_0+\Delta Y_0$ bestimmten Punkte eine gerade Linie gezogen, deren Gleichung nach den Lehren der analytischen Geometrie bekanntlich

$$y_0-Y_0=\frac{\Delta Y_0}{\Delta X_0}(x_0-X_0)$$

ist. Weil die durch die Coordinaten X_0, Y_0 und $X_0+\Delta X_0$, $Y_0+\Delta Y_0$ bestimmten Punkte beide in der Ellipse liegen, so haben wir nach 1) die Gleichungen

$$\left(\frac{X_0}{a_0}\right)^2+\left(\frac{Y_0}{b_0}\right)^2=1$$

und

$$\left(\frac{X_0+\Delta X_0}{a_0}\right)^2+\left(\frac{Y_0+\Delta Y_0}{b_0}\right)^2=1,$$

durch deren Subtraction sich die Gleichung

$$\frac{2X_0\Delta X_0+\Delta X_0{}^2}{a_0{}^2}+\frac{2Y_0\Delta Y_0+\Delta Y_0{}^2}{b_0{}^2}=0,$$

also die Gleichung

$$\frac{2Y_0\Delta Y_0+\Delta Y_0{}^2}{2X_0\Delta X_0+\Delta X_0{}^2}=-\frac{b_0{}^2}{a_0{}^2},$$

oder die Gleichung

$$\frac{2Y_0+\Delta Y_0}{2X_0+\Delta X_0}\cdot\frac{\Delta Y_0}{\Delta X_0}=-\frac{b_0^2}{a_0^2}$$

ergiebt. Hieraus folgt

$$\frac{\Delta Y_0}{\Delta X_0}=-\frac{b_0^2}{a_0^2}\cdot\frac{2X_0+\Delta X_0}{2Y_0+\Delta Y_0},$$

und die Gleichung der durch die beiden Punkte $(X_0 Y_0)$ und $(X_0+\Delta X_0,\ Y_0+\Delta Y_0)$ gehenden geraden Linie ist folglich nach dem Obigen:

$$y_0-Y_0=-\frac{b_0^2}{a_0^2}\cdot\frac{2X_0+\Delta X_0}{2Y_0+\Delta Y_0}(x_0-X_0).$$

Lässt man nun ΔX_0 sich der Null nähern, so wird auch ΔY_0 sich der Null nähern, und die beiden durch die Coordinaten X_0, Y_0 und $X_0+\Delta X_0$, $Y_0+\Delta Y_0$ bestimmten Punkte der Ellipse werden immer genauer und genauer mit einander zusammenfallen, die durch den Punkt $(X_0 Y_0)$ gehende Berührende der Ellipse wird aber offenbar als die Gränze zu betrachten sein, welcher die durch die Punkte $(X_0 Y_0)$ und $(X_0+\Delta X_0,\ Y_0+\Delta Y_0)$ gezogenen geraden Linien sich immer mehr und mehr nähern, wenn man ΔX_0 sich der Null nähern lässt. Also wird die gesuchte Gleichung der Berührenden der Ellipse in dem Punkte $(X_0 Y_0)$ die Gleichung sein, welcher als ihrer Gränzgleichung die Gleichung

$$y_0-Y_0=-\frac{b_0^2}{a_0^2}\cdot\frac{2X_0+\Delta X_0}{2Y_0+\Delta Y_0}(x_0-X_0)$$

sich nähert, wenn man sich ΔX_0 der Null nähern lässt. Da aber, wenn ΔX_0 sich der Null nähert, auch ΔY_0 sich der Null nähert, so ist die Gränzgleichung der vorstehenden Gleichung offenbar die Gleichung

$$2)\qquad y_0-Y_0=-\frac{b_0^2 X_0}{a_0^2 Y_0}(x_0-X_0),$$

und diese Gleichung ist also die gesuchte Gleichung der Berührenden der Ellipse in dem Punkte $(X_0 Y_0)$ derselben.

§. 17.

Durch den Punkt $(X_0 Y_0)$ der Ellipse ziehe man jetzt einen Durchmesser derselben, so ist der diesem Durchmesser conjugirte Durchmesser der Ellipse bekanntlich der durch den Punkt $(X_0 Y_0)$ gehenden Berührenden derselben parallel. Diese beiden conjugirten Durchmesser nehme man jetzt respective als die Axen der x_n, y_n eines schiefwinkligen Coordinatensystems der $x_n y_n$ an, welches seinen Anfang im Mittelpunkte der Ellipse hat, wie überhaupt alle hier zur Betrachtung kommenden Coordinatensysteme. Sind nun u, v in dem Systeme der beiden Axen der Ellipse, d. h. in dem rechtwinkligen Systeme der $x_0 y_0$, die Coordinaten des Fusspunktes der Coordinate y_n auf der Axe der x_n; so ist, wie sogleich erhellet:

$$x_n^2 = u^2 + v^2,$$

und, wenn x_0, y_0 in dem Systeme der beiden Axen demselben Punkte der Ellipse wie x_n, y_n in dem Systeme der beiden conjugirten Durchmesser entsprechen:

$$y_n^2 = (x_0 - u)^2 + (y_0 - v)^2.$$

Da aber in Bezug auf das System der beiden Axen, wenn wir jetzt x_0, y_0 als veränderliche oder laufende Coordinaten betrachten, die Gleichungen der beiden conjugirten Durchmesser offenbar

$$y_0 = \frac{Y_0}{X_0} x_0 \quad \text{und} \quad y_0 = -\frac{b_0{}^2 X_0}{a_0{}^2 Y_0} x_0$$

sind, wobei man den vorhergehenden Paragraphen zu vergleichen hat; so haben wir, wenn jetzt x_0, y_0 wieder ihre obige Bedeutung haben, offenbar die beiden Gleichungen

$$v = \frac{Y_0}{X_0} u \quad \text{und} \quad y_0 - v = -\frac{b_0{}^2 X_0}{a_0{}^2 Y_0}(x_0 - u).$$

Aus den Gleichungen

$$y_n^2 = (x_0 - u)^2 + (y_0 - v)^2, \quad y_0 - v = -\frac{b_0{}^2 X_0}{a_0{}^2 Y_0}(x_0 - u)$$

ergiebt sich

$$y_n^2 = \left\{1 + \frac{b_0{}^4 X_0{}^2}{a_0{}^4 Y_0{}^2}\right\}(x_0 - u)^2 = \frac{a_0{}^4 Y_0{}^2 + b_0{}^4 X_0{}^2}{a_0{}^4 Y_0{}^2}(x_0 - u)^2,$$

also

$$x_0 - u = \frac{a_0{}^2 Y_0 y_n}{\sqrt{a_0{}^4 Y_0{}^2 + b_0{}^4 X_0{}^2}},$$

wo wir uns die Quadratwurzel im Nenner positiv oder negativ genommen denken wollen. Verbindet man dies mit der Gleichung

$$y_0 - v = -\frac{b_0^2 X_0}{a_0^2 Y_0}(x_0 - u),$$

so erhält man

$$x_0 - u = \frac{a_0^2 Y_0 y_n}{\sqrt{a_0^4 Y_0^2 + b_0^4 X_0^2}}, \quad y_0 - v = -\frac{b_0^2 X_0 y_n}{\sqrt{a_0^4 Y_0^2 + b_0^4 X_0^2}};$$

wo man die Quadratwurzel in den Nennern sich positiv oder negativ genommen zu denken hat, dieselbe aber in beiden Formeln stets mit demselben Vorzeichen nehmen muss. Ferner folgt aus den beiden Gleichungen

$$x_n^2 = u^2 + v^2, \quad v = \frac{Y_0}{X_0} u$$

sogleich

$$x_n^2 = \left\{1 + \frac{Y_0^2}{X_0^2}\right\} u^2 = \frac{X_0^2 + Y_0^2}{X_0^2} u^2,$$

also

$$u = \frac{X_0 x_n}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}},$$

wo man sich die Quadratwurzel im Nenner positiv oder negativ genommen denken kann. Verbindet man dies mit der Gleichung

$$v = \frac{Y_0}{X_0} u,$$

so erhält man

$$u = \frac{X_0 x_n}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}}, \quad v = \frac{Y_0 x_n}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}};$$

wo man die Quadratwurzel in den Nennern sich positiv oder negativ genommen zu denken hat, dieselbe aber in beiden Formeln stets mit demselben Vorzeichen nehmen muss. Weil nun nach dem Obigen

$$x_0 = u + \frac{a_0^2 Y_0 y_n}{\sqrt{a_0^4 Y_0^2 + b_0^4 X_0^2}}, \quad y_0 = v - \frac{b_0^2 X_0 y_n}{\sqrt{a_0^4 Y_0^2 + b_0^4 X_0^2}}$$

ist, so ist

$$x_0 = \frac{X_0 x_n}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}} + \frac{a_0^2 Y_0 y_n}{\sqrt{a_0^4 Y_0^2 + b_0^4 X_0^2}},$$

$$y_0 = \frac{Y_0 x_n}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}} - \frac{b_0^2 X_0 y_n}{\sqrt{a_0^4 Y_0^2 + b_0^4 X_0^2}};$$

also

$$\frac{x_0}{a_0} = \frac{X_0}{a_0} \cdot \frac{x_n}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}} + \frac{a_0 Y_0 y_n}{\sqrt{a_0^4 Y_0^2 + b_0^4 X_0^2}},$$

$$\frac{y_0}{b_0} = \frac{Y_0}{b_0} \cdot \frac{x_n}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}} - \frac{b_0 X_0 y_n}{\sqrt{a_0^4 Y_0^2 + b_0^4 X_0^2}};$$

und folglich, wenn man quadrirt und addirt:

$$\left(\frac{x_0}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b_0}\right)^2$$

$$= \left\{\left(\frac{X_0}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{Y_0}{b_0}\right)^2\right\} \frac{x_n^2}{X_0^2 + Y_0^2} + \frac{(a_0^2 Y_0^2 + b_0^2 X_0^2) y_n^2}{a_0^4 Y_0^2 + b_0^4 X_0^2};$$

also, weil

$$\left(\frac{x_0}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b_0}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{X_0}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{Y_0}{b_0}\right)^2 = 1,$$

$$a_0^2 Y_0^2 + b_0^2 X_0^2 = a_0^2 b_0^2$$

ist:

$$\frac{x_n^2}{X_0^2 + Y_0^2} + \frac{y_n^2}{\dfrac{a_0^4 Y_0^2 + b_0^4 X_0^2}{a_0^2 b_0^2}} = 1.$$

Setzen wir nun, die Quadratwurzeln positiv nehmend,

3) $$a_n = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}, \quad b_n = \frac{1}{a_0 b_0} \sqrt{a_0^4 Y_0^2 + b_0^4 X_0^2};$$

so wird die vorstehende Gleichung:

4) $$\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^2 + \left(\frac{y_n}{b_n}\right)^2 = 1,$$

welches die Gleichung der Ellipse in Bezug auf die beiden conjugirten Durchmesser ist.

Für $y_n = 0$ ist $x_n = \pm a_n$, und für $x_n = 0$ ist $y_n = \pm b_n$, woraus man sieht, dass a_n, b_n die Hälften der beiden conjugirten Durchmesser sind, welche wir als Axen der x_n, y_n angenommen haben, so dass also die Gleichung der Ellipse in Bezug auf zwei beliebige conjugirte Durchmesser ganz von derselben Form wie die Gleichung in Bezug auf die beiden Axen ist.

Sind X_n, Y_n die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Ellipse in Bezug auf die beiden in Rede stehenden conjugirten Durchmesser als Coordinatenaxen, so findet man ganz auf dieselbe Art wie in dem vorhergehenden Paragraphen, dass in diesem Systeme

$$5)\qquad y_n - Y_n = -\frac{b_n^2 X_n}{a_n^2 Y_n}(x_n - X_n)$$

die Gleichung der durch den Punkt $(X_n Y_n)$ gehenden Berührenden der Ellipse ist.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieser Berührenden mit der Axe der x_n durch (x_n), (y_n); so ist, wie man mittelst der vorhergehenden Gleichung leicht findet:

$$(x_n) = \frac{a_n^2 Y_n^2 + b_n^2 X_n^2}{b_n^2 X_n}, \quad (y_n) = 0;$$

aber nach 4), weil der Punkt $(X_n Y_n)$ in der Ellipse liegt:

$$\left(\frac{X_n}{a_n}\right)^2 + \left(\frac{Y_n}{b_n}\right)^2 = 1, \qquad a_n^2 Y_n^2 + b_n^2 X_n^2 = a_n^2 b_n^2;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$6)\qquad (x_n) = \frac{a_n^2}{X_n}, \quad (y_n) = 0.$$

§. 18.

In Taf. III. Fig. 2. seien jetzt $OA_n = a_n$, $OB_n = b_n$ und $OA_{n+1} = a_{n+1}$, $OB_{n+1} = b_{n+1}$ zwei Systeme conjugirter Halbmesser der um den Mittelpunkt O beschriebenen Ellipse. Von den Punkten A_n und A_{n+1} in der Ellipse an seien, indem im Folgenden immer die oberen Zeichen dem Falle Fig. 2. a., die unteren Zeichen dem Falle Fig. 2. b. entsprechen, die elliptischen Bogen

$$A_nA_{n+1}=\overset{a}{\omega}_n,\quad \pm A_{n+1}A_{n+2}=\overset{a}{\omega}_{n+1}$$

abgeschnitten, wo dann

$$A_nA_{n+2}=\overset{a}{\omega}_n+\overset{a}{\omega}_{n+1}$$

ist. Durch A_{n+1} und A_{n+2} seien mit OB_n die Parallelen $A_{n+1}B$ und $A_{n+2}B'$, durch A_{n+2} sei mit OB_{n+1} die Parallele $A_{n+2}B''$ gezogen. Dann ist

$$\frac{OB}{a_n}=\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n,\quad \frac{A_{n+1}B}{b_n}=\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n;$$

$$\frac{OB''}{a_{n+1}}=\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1},\quad \pm\frac{A_{n+2}B''}{b_{n+1}}=\overset{e}{S}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1};$$

und

$$\frac{OB'}{a_n}=\overset{e}{\mathfrak{S}}_n(\overset{a}{\omega}_n+\overset{a}{\omega}_{n+1}),\quad \frac{A_{n+2}B'}{b_n}=\overset{e}{S}_n(\overset{a}{\omega}_n+\overset{a}{\omega}_{n+1}).$$

Zieht man nun noch durch B'' die Parallelen $B''C$ und $B''D$ respective mit OB_n und OA_n; so ist

$$OA_{n+1}:OB''=OB:OC=A_{n+1}B:B''C;$$

also nach dem Obigen

$$a_{n+1}:a_{n+1}\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}=a_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n:OC=b_n\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n:B''C,$$

woraus

$$OC=a_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1},\quad B''C=b_n\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}$$

folgt.

Bezeichnen wir nun die Coordinaten in dem Systeme der conjugirten Halbmesser a_n, b_n überhaupt durch x_n, y_n; die Coordinaten des Punktes A_{n+1} in diesem Systeme durch X_n, Y_n; so ist nach 5) die Gleichung der geraden Linie, in welcher der zu $OA_{n+1}=a_{n+1}$ conjugirte Halbmesser $OB_{n+1}=b_{n+1}$ liegt, in dem Systeme der x_ny_n:

$$y_n=-\frac{b_n^2X_n}{a_n^2Y_n}x_n.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Linie mit der Ellipse in dem Systeme der $x_n y_n$ der Kürze wegen durch x_n, y_n selbst; so hat man zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$y_n = -\frac{b_n{}^2 X_n}{a_n{}^2 Y_n} x_n, \quad \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^2 + \left(\frac{y_n}{b_n}\right)^2 = 1;$$

aus denen sich

$$\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^2 + \frac{b_n{}^2 X_n{}^2}{a_n{}^2 Y_n{}^2} \cdot \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^2 = \frac{a_n{}^2 Y_n{}^2 + b_n{}^2 X_n{}^2}{a_n{}^2 Y_n{}^2} \left(\frac{x}{a_n}\right)^2 = 1;$$

also, weil der Punkt $(X_n Y_n)$ in der Ellipse liegt, und folglich

$$\left(\frac{X_n}{a_n}\right)^2 + \left(\frac{Y_n}{b_n}\right)^2 = 1, \quad a_n{}^2 Y_n{}^2 + b_n{}^2 X_n{}^2 = a_n{}^2 b_n{}^2$$

ist:

$$\left(\frac{b_n x_n}{a_n Y_n}\right)^2 = 1, \quad \frac{b_n x_n}{a_n Y_n} = \pm 1, \quad x_n = \pm \frac{a_n}{b_n} Y_n$$

ergiebt. Verbindet man hiermit die Gleichung

$$y_n = -\frac{b_n{}^2 X_n}{a_n{}^2 Y_n} x_n,$$

so erhält man, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$x_n = \pm \frac{a_n}{b_n} Y_n, \quad y_n = \mp \frac{b_n}{a_n} X_n.$$

Hiernach ist offenbar, wenn wir $B_{n+1}E$ mit OB_n parallel ziehen:

$$OE = \frac{a_n}{b_n} \cdot A_{n+1}B, \quad B_{n+1}E = \frac{b_n}{a_n} \cdot OB;$$

also nach dem Obigen

$$OE = \frac{a_n}{b_n} \cdot b_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n, \quad B_{n+1}E = \frac{b_n}{a_n} \cdot a_n \overset{e}{\mathfrak{C}}_n \overset{a}{\omega}_n;$$

d. i.

$$A_nA_{n+1}=\overset{a}{\omega}_n,\quad \pm A_{n+1}A_{n+2}=\overset{a}{\omega}_{n+1}$$

abgeschnitten, wo dann

$$A_nA_{n+2}=\overset{a}{\omega}_n+\overset{a}{\omega}_{n+1}$$

ist. Durch A_{n+1} und A_{n+2} seien mit OB_n die Parallelen $A_{n+1}B$ und $A_{n+2}B'$, durch A_{n+2} sei mit OB_{n+1} die Parallele $A_{n+2}B''$ gezogen. Dann ist

$$\frac{OB}{a_n}=\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n,\quad \frac{A_{n+1}B}{b_n}=\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n;$$

$$\frac{OB''}{a_{n+1}}=\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1},\quad \pm\frac{A_{n+2}B''}{b_{n+1}}=\overset{e}{\mathrm{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1};$$

und

$$\frac{OB'}{a_n}=\overset{e}{\mathfrak{S}}_n(\overset{a}{\omega}_n+\overset{a}{\omega}_{n+1}),\quad \frac{A_{n+2}B'}{b_n}=\overset{e}{\mathrm{S}}_n(\overset{a}{\omega}_n+\overset{a}{\omega}_{n+1}).$$

Zieht man nun noch durch B'' die Parallelen $B''C$ und $B''D$ respective mit OB_n und OA_n; so ist

$$OA_{n+1}:OB''=OB:OC=A_{n+1}B:B''C;$$

also nach dem Obigen

$$a_{n+1}:a_{n+1}\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}=a_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n:OC=b_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n:B''C,$$

woraus

$$OC=a_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1},\quad B''C=b_n\overset{e}{\mathrm{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}$$

folgt.

Bezeichnen wir nun die Coordinaten in dem Systeme der conjugirten Halbmesser a_n, b_n überhaupt durch x_n, y_n; die Coordinaten des Punktes A_{n+1} in diesem Systeme durch X_n, Y_n; so ist nach 5) die Gleichung der geraden Linie, in welcher der zu $OA_{n+1}=a_{n+1}$ conjugirte Halbmesser $OB_{n+1}=b_{n+1}$ liegt, in dem Systeme der x_ny_n:

$$y_n=-\frac{b_n^2X_n}{a_n^2Y_n}x_n.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Linie mit der Ellipse in dem Systeme der $x_n y_n$ der Kürze wegen durch x_n, y_n selbst; so hat man zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$y_n = -\frac{b_n^2 X_n}{a_n^2 Y_n} x_n, \quad \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^2 + \left(\frac{y_n}{b_n}\right)^2 = 1;$$

aus denen sich

$$\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^2 + \frac{b_n^2 X_n^2}{a_n^2 Y_n^2} \cdot \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^2 = \frac{a_n^2 Y_n^2 + b_n^2 X_n^2}{a_n^2 Y_n^2} \left(\frac{x}{a_n}\right)^2 = 1;$$

also, weil der Punkt $(X_n Y_n)$ in der Ellipse liegt, und folglich

$$\left(\frac{X_n}{a_n}\right)^2 + \left(\frac{Y_n}{b_n}\right)^2 = 1, \quad a_n^2 Y_n^2 + b_n^2 X_n^2 = a_n^2 b_n^2$$

ist:

$$\left(\frac{b_n x_n}{a_n Y_n}\right)^2 = 1, \quad \frac{b_n x_n}{a_n Y_n} = \pm 1, \quad x_n = \pm \frac{a_n}{b_n} Y_n$$

ergiebt. Verbindet man hiermit die Gleichung

$$y_n = -\frac{b_n^2 X_n}{a_n^2 Y_n} x_n,$$

so erhält man, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$x_n = \pm \frac{a_n}{b_n} Y_n, \quad y_n = \mp \frac{b_n}{a_n} X_n.$$

Hiernach ist offenbar, wenn wir $B_{n+1}E$ mit OB_n parallel ziehen:

$$OE = \frac{a_n}{b_n} \cdot A_{n+1}B, \quad B_{n+1}E = \frac{b_n}{a_n} \cdot OB;$$

also nach dem Obigen

$$OE = \frac{a_n}{b_n} \cdot b_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n, \quad B_{n+1}E = \frac{b_n}{a_n} \cdot a_n \overset{e}{\mathfrak{C}}_n \overset{a}{\omega}_n;$$

d. i.

$$OE = a_n \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n, \quad B_{n+1}E = b_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n.$$

Nun ist

$$OB_{n+1} : OE : B_{n+1}E = A_{n+2}B'' : B''D : A_{n+2}D,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$b_{n+1} : a_n \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n : b_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n = \pm\, b_{n+1} \overset{e}{S}_{n+1} \overset{a}{\omega}_{n+1} : B''D : A_{n+2}D,$$

$$1 : a_n \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n : b_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n = \pm \overset{e}{S}_{n+1} \overset{a}{\omega}_{n+1} : B''D : A_{n+2}D;$$

folglich:

$$B''D = \pm\, a_n \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{S}_{n+1} \overset{a}{\omega}_{n+1}, \quad A_{n+2}D = \pm\, b_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{S}_{n+1} \overset{a}{\omega}_{n+1}.$$

Es ist aber

$$OB' = OC \mp B''D,$$

$$A_{n+2}B' = B''C \pm A_{n+2}D;$$

also nach dem Obigen:

$$a_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n (\overset{a}{\omega}_n + \overset{a}{\omega}_{n+1}) = a_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1} \overset{a}{\omega}_{n+1} - a_n \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{S}_{n+1} \overset{a}{\omega}_{n+1},$$

$$b_n \overset{e}{S}_n (\overset{a}{\omega}_n + \overset{a}{\omega}_{n+1}) = b_n \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1} \overset{a}{\omega}_{n+1} + b_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{S}_{n+1} \overset{a}{\omega}_{n+1};$$

folglich

$$7) \quad \begin{cases} \overset{e}{\mathfrak{S}}_n (\overset{a}{\omega}_n + \overset{a}{\omega}_{n+1}) = \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1} \overset{a}{\omega}_{n+1} - \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{S}_{n+1} \overset{a}{\omega}_{n+1}, \\ \overset{e}{S}_n (\overset{a}{\omega}_n + \overset{a}{\omega}_{n+1}) = \overset{e}{S}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1} \overset{a}{\omega}_{n+1} + \overset{e}{\mathfrak{S}}_n \overset{a}{\omega}_n \overset{e}{S}_{n+1} \overset{a}{\omega}_{n+1}. \end{cases}$$

Weil bekanntlich

$$\overset{e}{T}_n (\overset{a}{\omega}_n + \overset{a}{\omega}_{n+1}) = \frac{\overset{e}{S}_n (\overset{a}{\omega} + \overset{a}{\omega}_{n+1})}{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n (\overset{a}{\omega}_n + \overset{a}{\omega}_{n+1})},$$

$$\overset{e}{\mathfrak{T}}_n(\overset{n}{\omega}_n+\overset{a}{\omega}_{n+1})=\frac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n(\overset{a}{\omega}_n+\overset{a}{\omega}_{n+1})}{\overset{e}{S}_n(\overset{a}{\omega}_n+\overset{a}{\omega}_{n+1})}$$

ist; so ist nach 7)

$$\overset{e}{T}_n(\overset{a}{\omega}_n+\overset{a}{\omega}_{n+1})=\frac{\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}+\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}}{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}-\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}},$$

$$\overset{e}{\mathfrak{T}}_n(\overset{a}{\omega}_n+\overset{a}{\omega}_{n+1})=\frac{\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}-\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}}{\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}+\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}};$$

also, wenn man im Zähler und Nenner des ersten Bruchs mit

$$\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1},$$

im Zähler und Nenner des zweiten Bruchs mit

$$\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}$$

dividirt:

$$8)\quad\left\{\begin{aligned}\overset{e}{T}_n(\overset{a}{\omega}_n+\overset{a}{\omega}_{n+1})&=\frac{\overset{e}{T}_n\overset{a}{\omega}_n+\overset{e}{T}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}}{1-\overset{e}{T}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{T}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}},\\ \overset{e}{\mathfrak{T}}_n(\overset{a}{\omega}_n+\overset{a}{\omega}_{n+1})&=\frac{\overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathfrak{T}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}-1}{\overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n+\overset{e}{\mathfrak{T}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}}.\end{aligned}\right.$$

Die Formeln 7) und 8) sind diejenigen Formeln, auf welche nach meiner Meinung die Theorie der in dieser Abhandlung eingeführten Functionen der elliptischen Bogen gegründet werden müsste, was auch, nachdem nun bereits die obigen Grundlagen dieser Theorie gewonnen worden sind, einer wesentlichen Schwierigkeit nicht unterliegen dürfte, ohne dass für jetzt eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes meine Absicht ist.

§. 19.

Wir wollen nun zeigen, wie das Vorhergehende sich auf die Rectification der Ellipse anwenden lässt, bemerken aber, dass wir dabei verschiedene Wege hätten einschlagen können, den folgenden Weg jedoch deshalb gewählt haben, um uns so viel als möglich der Methode anzuschliessen, welche man bei der Rectification des Kreises in Anwendung zu bringen pflegt.

Der Kürze wegen nehmen wir im Folgenden die Grösse x positiv an. Lassen wir dann den durch

$$\overset{a}{\mathrm{A}}\mathrm{rc}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n(=x)$$

bezeichneten elliptischen Bogen den zwischen den Schenkeln des Winkels α_n liegenden elliptischen Bogen nicht übersteigen, so ist nach I. 39) offenbar

$$\overset{a}{\mathrm{A}}\mathrm{rc}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n(=x)=\int_0^x \frac{\sqrt{b_n^2-2a_nb_nx\cos\alpha_n+a_n^2x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,\partial x.$$

Wenn nun x kleiner als die Einheit ist, so ist nach dem Binomischen Lehrsatze

$$(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}=1-\frac{3}{2}x^2+\frac{3.5}{2.4}x^4-\frac{3.5.7}{2.4.6}x^6+\ldots.,$$

und folglich nach einem aus der Integralrechnung bekannten Satze, immer unter der Voraussetzung, dass x kleiner als die Einheit ist:

$$
\begin{aligned}
9)\ \overset{a}{\mathrm{A}}\mathrm{rc}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n(=x)= &\int_0^x \partial x\sqrt{b_n^2-2a_nb_nx\cos\alpha_n+a_n^2x^2}\\
&-\frac{3}{2}\int_0^x x^2\partial x\sqrt{b_n^2-2a_nb_nx\cos\alpha_n+a_n^2x^2}\\
&+\frac{3.5}{2.4}\int_0^x x^4\partial x\sqrt{b_n^2-2a_nb_nx\cos\alpha_n+a_n^2x^2}\\
&-\frac{3.5.7}{2.4.6}\int_0^x x^6\partial x\sqrt{b_n^2-2a_nb_nx\cos\alpha_n+a_n^2x^2}\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Es kommt also hierbei vorzüglich auf die Entwickelung des Integrals

$$\int x^k \partial x \sqrt{b_n^2 - 2a_n b_n x \cos\alpha_n + a_n^2 x^2}$$

an, die sich auf verschiedene Arten ausführen lässt. Hier wird es zu meinem Zwecke genügen, nur auf die folgende Methode hinzuweisen.

Man setze

$$10) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{a_n x - b_n \cos\alpha_n}{b_n \sin\alpha_n} = \frac{a_n}{b_n \sin\alpha_n} x - \cot\alpha_n,$$

oder, wenn noch

$$11) \qquad \cot\theta = \frac{a_n}{b_n \sin\alpha_n} x$$

gesetzt wird:

$$12) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \cot\theta - \cot\alpha_n = \frac{\sin(\alpha_n - \theta)}{\sin\alpha_n \sin\theta},$$

mittelst welcher Formeln sich φ leicht berechnen lässt. Dann ist

$$x = \frac{b_n \sin\alpha_n}{a_n} (\cot\alpha_n + \operatorname{tang}\varphi),$$

und folglich, wenn man nur, was offenbar immer verstattet ist, φ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ nimmt, wie man leicht findet:

$$13) \qquad x^k \partial x \sqrt{b_n^2 - 2a_n b_n x \cos\alpha_n + a_n^2 x^2}$$

$$= \frac{b_n^{k+2} \sin\alpha_n^{k+2}}{a_n^{k+1}} \cdot \frac{(\cot\alpha_n + \operatorname{tang}\varphi)^k}{\cos\varphi^3} \partial\varphi$$

$$= \frac{b_n^{k+2} \sin\alpha_n^2}{a_n^{k+1}} \cdot \frac{\sin(\alpha_n + \varphi)^k}{\cos\varphi^{k+3}} \partial\varphi.$$

Hierdurch ist das Integral

$$\int x^k \partial x \sqrt{b_n^2 - 2a_n b_n x \cos\alpha_n + a_n^2 x^2}$$

offenbar auf das Integral

$$\int \frac{\operatorname{tang}\varphi^\mu}{\cos\varphi^3} \partial\varphi$$

zurückgeführt, welches sich auf folgende Art entwickeln lässt.

Nach einer bekannten Reductionsformel ist:

$$\int\frac{\tang\varphi^\mu}{\cos\varphi^3}\partial\varphi=\int\frac{\sin\varphi^\mu}{\cos\varphi^{\mu+3}}\partial\varphi=\int\sin\varphi^\mu\cos\varphi^{-\mu-3}\partial\varphi$$

$$=\frac{\sin\varphi^{\mu-1}}{3\cos\varphi^{\mu+2}}-\frac{\mu-1}{3}\int\frac{\sin\varphi^{\mu-2}}{\cos\varphi^{\mu+3}}\partial\varphi$$

$$=\frac{\sin\varphi^{\mu-1}}{3\cos\varphi^{\mu+2}}-\frac{\mu-1}{3}\int\frac{\sin\varphi^{\mu-2}(\sin\varphi^2+\cos\varphi^2)}{\cos\varphi^{\mu+3}}\partial\varphi$$

$$=\frac{\sin\varphi^{\mu-1}}{3\cos\varphi^{\mu+2}}-\frac{\mu-1}{3}\int\frac{\sin\varphi^\mu}{\cos\varphi^{\mu+3}}\partial\varphi-\frac{\mu-1}{3}\int\frac{\sin\varphi^{\mu-2}}{\cos\varphi^{\mu+1}}\partial\varphi$$

$$=\frac{\tang\varphi^{\mu-1}}{3\cos\varphi^3}-\frac{\mu-1}{3}\int\frac{\tang\varphi^\mu}{\cos\varphi^3}\partial\varphi-\frac{\mu-1}{3}\int\frac{\tang\varphi^{\mu-2}}{\cos\varphi^3}\partial\varphi,$$

also

14)

$$\int\frac{\tang\varphi^\mu}{\cos\varphi^3}\partial\varphi=\frac{\tang\varphi^{\mu-1}}{(\mu+2)\cos\varphi^3}-\frac{\mu-1}{\mu+2}\int\frac{\tang\varphi^{\mu-2}}{\cos\varphi^3}\partial\varphi.$$

Aus dieser Relation ergiebt sich:

$$\int\frac{\tang\varphi}{\cos\varphi^3}\partial\varphi=\frac{\tang\varphi^0}{3\cos\varphi^3}=\frac{1}{3\cos\varphi^3},$$

$$\int\frac{\tang\varphi^2}{\cos\varphi^3}\partial\varphi=\frac{\tang\varphi^1}{4\cos\varphi^3}-\frac{1}{4}\int\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^3},$$

$$\int\frac{\tang\varphi^3}{\cos\varphi^3}\partial\varphi=\frac{\tang\varphi^2}{5\cos\varphi^3}-\frac{2}{5}\int\frac{\tang\varphi}{\cos\varphi^3}\partial\varphi,$$

$$\int\frac{\tang\varphi^4}{\cos\varphi^3}\partial\varphi=\frac{\tang\varphi^3}{6\cos\varphi^3}-\frac{3}{6}\int\frac{\tang\varphi^2}{\cos\varphi^3}\partial\varphi,$$

$$\int\frac{\tang\varphi^5}{\cos\varphi^3}\partial\varphi=\frac{\tang\varphi^4}{7\cos\varphi^3}-\frac{4}{7}\int\frac{\tang\varphi^3}{\cos\varphi^3}\partial\varphi,$$

u. s. w.

so dass es also jetzt bloss noch auf die Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^3}$$

ankommt. Es ist aber bekanntlich

$$\int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^3} = \frac{\sin\varphi}{2\cos\varphi^2} + \frac{1}{2}\int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi}$$

und

$$\int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{1}{2} \mathrm{l}. \{\mathrm{tang}(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\varphi)\}^2,$$

also

$$15)\qquad \int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^3} = \frac{\sin\varphi}{2\cos\varphi^2} - \frac{1}{4}\mathrm{l}. \{\mathrm{tang}(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\varphi)\}^2,$$

wodurch nun die obigen Integrale vollständig entwickelt sind, und daher

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_{n}\overset{e}{\mathrm{T}}_{n}(=x)$$

immer gefunden werden kann, wenn nur x kleiner als die Einheit ist, was hierbei immer vorausgesetzt wird.

Nach I. 43) ist auch, wenn wir

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_0\overset{e}{\mathrm{T}}_0(=\frac{b_0}{a_0}\mathrm{tang}\varphi),$$

unter der Voraussetzung, dass tangφ positiv ist, nicht grösser als den elliptischen Quadranten nehmen,

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_0\overset{e}{\mathrm{T}}_0(=\frac{b_0}{a_0}\mathrm{tang}\varphi) = \frac{b_0^2}{a_0}\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(1-e_0^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und weil nun $e_0^2\sin\varphi^2$ immer kleiner als die Einheit ist, so ist nach dem Binomischen Lehrsatze

$$(1-e_0^2\sin\varphi^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=1+\frac{3}{2}e_0^2\sin\varphi^2+\frac{3.5}{2.4}e_0^4\sin\varphi^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}e_0^6\sin\varphi^6+\ldots,$$

also nach einem bekannten Satze der Integralrechnung

$$16)\qquad \overset{a}{\mathrm{Arc}}_0\overset{e}{\mathrm{T}}_0\left(=\frac{b_0}{a_0}\tang\varphi\right)$$

$$=\frac{b_0^2}{a_0}\Big\{\varphi+\frac{3}{2}e_0^2\int_0^\varphi\sin\varphi^2\partial\varphi+\frac{3.5}{2.4}e_0^4\int_0^\varphi\sin\varphi^4\partial\varphi$$

$$+\frac{3.5.7}{2.4.6}e_0^6\int_0^\varphi\sin\varphi^6\partial\varphi+\ldots\Big\},$$

wo man zur Berechnung von

$$\int\sin\varphi^k\partial\varphi$$

die bekannte Reductionsformel hat:

$$17)\qquad \int\sin\varphi^k\partial\varphi=-\frac{\sin\varphi^{k-1}\cos\varphi}{k}+\frac{k-1}{k}\int\sin\varphi^{k-2}\partial\varphi.$$

Bezeichnen wir jetzt den zwischen den Schenkeln des Winkels α_n liegenden elliptischen Bogen durch E_n, so erhellet aus dem Obigen und aus den bekannten Eigenschaften der conjugirten Durchmesser der Ellipse sehr leicht die Richtigkeit der folgenden Zerlegung:

$$18)\qquad E_n=\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n(=1)+\overset{b}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n(=1);$$

und um also E_n zu berechnen, kommt es auf die Berechnung der beiden Bogen

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n(=1)\quad\text{und}\quad\overset{b}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n(=1)$$

an. Wir wollen bloss die Berechnung des ersten zeigen, welches hinreicht, da die Berechnung dieselbe bleibt, man mag den elliptischen Bogen von dem Endpunkte A_n des Halbmessers a_n oder von dem Endpunkte B_n des Halbmessers b_n anfangen lassen, wo bekanntlich das Erste bei dem durch

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n(=1)$$

bezeichneten Bogen, das Zweite bei dem durch

$$\overset{b}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n(=1)$$

bezeichneten Bogen der Fall ist.

Weil nun

$$1=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}$$

ist, so erhellet aus der ersten der beiden obigen Gleichungen 8) in §. 18. auf der Stelle die Richtigkeit der folgenden Zerlegungen:

19)

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n(=1)=\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n(=\tfrac{1}{2})+\overset{a}{\mathrm{Arc}}_{n+1}\overset{e}{\mathrm{T}}_{n+1}(=\tfrac{1}{3})$$

oder

20)

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n(=1)=\overset{a}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathrm{T}}_n(=\tfrac{1}{3})+\overset{a}{\mathrm{Arc}}_{n+1}\overset{e}{\mathrm{T}}_{n+1}(=\tfrac{1}{2}),$$

und die elliptischen Bogen auf den rechten Seiten der Gleichheitszeichen in diesen Gleichungen wird man nach 9) mittelst convergirender Reihen berechnen könnnen, wenn man nur a_{n+1}, b_{n+1}, α_{n+1} aus den gegebenen a_n, b_n, α_n und x berechnen kann, was daher im folgenden Paragraphen im Allgemeinen gezeigt werden soll.

§. 20.

In Taf. III. Fig. 3. sei

$$x=\frac{A_{n+1}B}{b_n}:\frac{OB}{a_n}=\frac{a_n}{b_n}\cdot\frac{A_{n+1}B}{OB},$$

also

$$\frac{A_{n+1}B}{b_n}=x\,\frac{OB}{a_n},\quad \frac{OB}{a_n}=\frac{1}{x}\cdot\frac{A_{n+1}B}{b_n};$$

und weil nach der Gleichung der Ellipse in Bezug auf ihre conjugirten Durchmesser bekanntlich

$$\left(\frac{OB}{a_n}\right)^2+\left(\frac{A_{n+1}B}{b_n}\right)^2=(1+x^2)\left(\frac{OB}{a_n}\right)^2=1$$

ist, so ist

$$\frac{OB}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad \frac{A_{n+1}B}{b_n}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

folglich

$$OB = \frac{a_n}{\sqrt{1+x^2}}, \quad A_{n+1}B = \frac{b_n x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Weil

$$OA_{n+1} = a_{n+1}, \quad OB_{n+1} = b_{n+1}$$

und

$$\angle A_n O B_n = \alpha_n$$

ist, so ist offenbar

$$a_{n+1}{}^2 = OB^2 + A_{n+1}B^2 + 2.OB.A_{n+1}B.\cos\alpha_n,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$a_{n+1}{}^2 = \frac{a_n{}^2 + 2a_n b_n x \cos\alpha_n + b_n{}^2 x^2}{1+x^2},$$

folglich

$$21) \qquad a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n{}^2 + 2a_n b_n x \cos\alpha_n + b_n{}^2 x^2}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Nach §. 18. ist:

$$OE = \frac{a_n}{b_n}.A_{n+1}B, \quad B_{n+1}E = \frac{b_n}{a_n}.OB;$$

also nach dem Obigen:

$$OE = \frac{a_n x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad B_{n+1}E = \frac{b_n}{\sqrt{1+x^2}};$$

und weil nun

$$b_{n+1}{}^2 = OE^2 + B_{n+1}E^2 - 2.OE.B_{n+1}E.\cos\alpha_n$$

ist, so ist

$$b_{n+1}{}^2 = \frac{b_n{}^2 - 2a_n b_n x \cos\alpha_n + a_n{}^2 x^2}{1+x^2},$$

also

$$22) \qquad b_{n+1} = \frac{\sqrt{b_n{}^2 - 2a_n b_n x \cos\alpha_n + a_n{}^2 x^2}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Aus 21) und 22) folgt auch sogleich die bekannte Gleichung

$$23) \qquad a_n^2 + b_n^2 = a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2.$$

Nach §. 18. ist die Gleichung der geraden Linie, in welcher der conjugirte Halbmesser OB_{n+1} liegt. in dem Systeme der conjugirten Halbmesser OA_n, OB_n:

$$y_n = -\frac{b_n^2.OB}{a_n^2.A_{n+1}B}x_n,$$

d. i., weil nach dem Obigen

$$\frac{OB}{A_{n+1}B} = \frac{a_n}{b_n x}$$

ist:

$$y_n = -\frac{b_n}{a_n x}x_n.$$

Bezeichnen wir also den Winkel A_nOB_{n+1} durch ω, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie bekanntlich

$$-\frac{b_n}{a_n x} = \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha_n - \omega)},$$

oder

$$\frac{\sin(\alpha_n - \omega)}{\sin\omega} = \sin\alpha_n\cot\omega - \cos\alpha_n = -\frac{a_n x}{b_n},$$

woraus

$$\cot\omega = \frac{b_n\cos\alpha_n - a_n x}{b_n\sin\alpha_n}, \quad \operatorname{tang}\omega = \frac{b_n\sin\alpha_n}{b_n\cos\alpha_n - a_n x}$$

folgt. Bezeichnen wir ferner den Winkel A_nOA_{n+1} durch $\overline{\omega}$, so ist

$$OB : A_{n+1}B = a_n : b_n x = \sin(\alpha_n - \overline{\omega}) : \sin\overline{\omega},$$

also

$$\frac{\sin(\alpha_n - \overline{\omega})}{\sin\overline{\omega}} = \sin\alpha_n\cot\overline{\omega} - \cos\alpha_n = \frac{a_n}{b_n x},$$

und folglich

$$\cot\overline{\omega} = \frac{a_n + b_n x\cos\alpha_n}{b_n x\sin\alpha_n}, \quad \operatorname{tang}\overline{\omega} = \frac{b_n x\sin\alpha_n}{a_n + b_n x\cos\alpha_n}.$$

Nun ist $\alpha_{n+1} = \omega - \overline{\omega}$, also

$$\tang\alpha_{n+1} = \frac{\tang\omega - \tang\overline{\omega}}{1 + \tang\omega\tang\overline{\omega}},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$24)\qquad \tang\alpha_{n+1} = \frac{(1+x^2)a_nb_n\sin\alpha_n}{a_nb_n\cos\alpha_n - (a_n^2 - b_n^2)x - a_nb_nx^2\cos\alpha_n}.$$

Man hat daher zur Berechnung von a_{n+1}, b_{n+1}, α_{n+1} aus den gegebenen a_n, b_n, α_n und x die folgenden Formeln:

$$25)\qquad \left\{\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{\sqrt{a_n^2 + 2a_nb_nx\cos\alpha_n + b_n^2x^2}}{\sqrt{1+x^2}},\\ b_{n+1} &= \frac{\sqrt{b_n^2 - 2a_nb_nx\cos\alpha_n + a_n^2x^2}}{\sqrt{1+x^2}},\\ \tang\alpha_{n+1} &= \frac{(1+x^2)a_nb_n\sin\alpha_n}{a_nb_n\cos\alpha_n - (a_n^2 - b_n^2)x - a_nb_nx^2\cos\alpha_n}.\end{aligned}\right.$$

Für $n=0$ ist $\alpha_0 = 90^0$, also

$$26)\qquad \left\{\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sqrt{a_0^2 + b_0^2x^2}}{\sqrt{1+x^2}},\\ b_1 &= \frac{\sqrt{b_0^2 + a_0^2x^2}}{\sqrt{1+x^2}},\\ \tang\alpha_1 &= -\frac{a_0b_0(1+x^2)}{(a_0^2 - b_0^2)x}.\end{aligned}\right.$$

Für $x = \frac{1}{2}$ ist z. B. in diesem Falle:

$$27)\qquad \left\{\begin{aligned} &a_1 = \sqrt{\frac{4a_0^2 + b_0^2}{5}},\quad b_1 = \sqrt{\frac{a_0^2 + 4b_0^2}{5}};\\ &\tang\alpha_1 = -\frac{5a_0b_0}{2(a_0^2 - b_0^2)} = -\frac{5}{2\left(\frac{a_0}{b_0} - \frac{b_0}{a_0}\right)}.\end{aligned}\right.$$

Für $x = \frac{1}{3}$ ist in demselben Falle:

$$28)\quad \begin{cases} a_1 = \sqrt{\dfrac{9a_0^2 + b_0^2}{10}}, \quad b_1 = \sqrt{\dfrac{a_0^2 + 9b_0^2}{10}}; \\ \operatorname{tang}\alpha_1 = -\dfrac{10a_0b_0}{3(a_0^2 - b_0^2)} = -\dfrac{10}{3\left(\dfrac{a_0}{b_0} - \dfrac{b_0}{a_0}\right)}. \end{cases}$$

In dem Falle, wenn $n = 0$ ist, kann das Integral

$$\int_0^x x^k \partial x \sqrt{b_n^2 - 2a_n b_n x \cos\alpha_n + a_n^2 x^2},$$

welches in diesem Falle in

$$\int_0^x x^k \partial x \sqrt{b_0^2 + a_0^2 x^2}$$

übergeht, auch auf folgende Art berechnet werden.

Nach einer bekannten Reductionsformel ist:

$$\int_0^x x^2 \partial x \sqrt{b_0^2 + a_0^2 x^2}$$

$$= \frac{x(b_0^2 + a_0^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{4a_0^2} - \frac{1b_0^2}{4a_0^2} \int_0^x \partial x \sqrt{b_0^2 + a_0^2 x^2},$$

$$\int_0^x x^4 \partial x \sqrt{b_0^2 + a_0^2 x^2}$$

$$= \frac{x^3(b_0^2 + a_0^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{6a_0^2} - \frac{3b_0^2}{6a_0^2} \int_0^x x^2 \partial x \sqrt{b_0^2 + a_0^2 x^2},$$

$$\int_0^x x^6 \partial x \sqrt{b_0^2 + a_0^2 x^2}$$

$$= \frac{x^5(b_0^2 + a_0^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{8a_0^2} - \frac{5b_0^2}{8a_0^2} \int_0^x x^4 \partial x \sqrt{b_0^2 + a_0^2 x^2},$$

$$\int_0^x x^8 \partial x \sqrt{b_0^2 + a_0^2 x^2}$$

$$= \frac{x^7(b_0^2 + a_0^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{10a_0^2} - \frac{7b_0^2}{10a_0^2} \int_0^x x^6 \partial x \sqrt{b_0^2 + a_0^2 x^2},$$

u. s. w.

Setzt man nun

$$b_0^2 + a_0^2x^2 = b_0^2(1 + \frac{a_0^2}{b_0^2}x^2) = b_0^2(1 + \mathrm{tang}u^2)$$
$$= b_0^2\sec u^2 = \frac{b_0^2}{\cos u^2},$$

wo

$$\mathrm{tang}u = \frac{a_0}{b_0}x$$

gesetzt worden ist, und u zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden soll, so ist

$$\frac{\partial u}{\cos u^2} = \frac{a_0}{b_0}\partial x, \quad \partial x = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{\partial u}{\cos u^2};$$

folglich

$$x^k\partial x\sqrt{b_0^2 + a_0^2x^2} = \frac{b_0^{k+2}}{a_0^{k+1}} \cdot \frac{\sin u^k}{\cos u^{k+3}}\partial u$$

und

$$x^k(b_0^2 + a_0^2x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{b_0^{k+3}}{a_0^k} \cdot \frac{\sin u^k}{\cos u^{k+3}}.$$

Setzen wir nun allgemein

$$29) \qquad [k]_x = \int_0^x x^k\partial x\sqrt{b_0^2 + a_0^2x^2},$$

so ist nach dem Obigen

$$30) \qquad [0]_x = \frac{b_0^2}{a_0}\left\{\frac{\sin u}{2\cos u^2} - \frac{1}{4}\mathrm{l.\,tang}\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}u\right)^2\right\},$$

$$[2]_x = \frac{b_0^4}{4a_0^3} \cdot \frac{\sin u}{\cos u^4} - \frac{1b_0^2}{4a_0^2}[0]_x,$$

$$[4]_x = \frac{b_0^6}{6a_0^5} \cdot \frac{\sin u^3}{\cos u^6} - \frac{3b_0^2}{6a_0^2}[2]_x,$$

$$[6]_x = \frac{b_0^8}{8a_0^7} \cdot \frac{\sin u^5}{\cos u^8} - \frac{5b_0^2}{8a_0^2}[4]_x,$$

$$[8]_x = \frac{b_0^{10}}{10a_0^9} \cdot \frac{\sin u^7}{\cos u^{10}} - \frac{7b_0^2}{10a_0^2}[6]_x,$$

u. s. w.

und nach 9) ist:

31)

$$\overset{a}{\mathrm{Arc}}_0\overset{e}{\mathrm{T}}_0(=x)=[0]_x-\frac{3}{2}[2]_x+\frac{3.5}{2.4}[4]_x-\frac{3.5.7}{2.4.6}[6]_x+\ldots$$

Dass die Grössen

$$[0]_x,\quad [2]_x,\quad [4]_x,\quad [6]_x,\ \ldots,$$

insofern x positiv ist, sämmtlich positiv sind, erhellet aus der Form des bestimmten Integrals

$$[k]_x=\int_0^x x^k\partial x\sqrt{b_0{}^2+a_0{}^2x^2}$$

auf der Stelle.

§. 21.

Es ist schon früher erinnert worden, dass es jetzt nicht meine Absicht ist, eine vollständige Theorie der im Obigen durch $\overset{e}{\mathrm{S}}_n$, $\overset{e}{\mathfrak{S}}_n$, $\overset{e}{\mathrm{T}}_n$, $\overset{e}{\mathfrak{T}}_n$, u. s. w. bezeichneten Functionen zu liefern, indem ich durch diese Abhandlung hauptsächlich nur zu weiteren Forschungen über diesen Gegenstand anregen wollte. Indess kann ich nicht unterlassen, zum Schluss noch Folgendes zu bemerken.

Wenn nämlich

$$OA_n,\quad OA_{n+1},\quad OA_{n+2},\ \ldots.\ OA_{n+m}$$

beliebige auf einander folgende Halbmesser der Ellipse, und wie gewöhnlich deren conjugirte Halbmesser

$$OB_n,\quad OB_{n+1},\quad OB_{n+2},\ \ldots.\ OB_{n+m}$$

sind, die respective durch

$$a_n,\quad a_{n+1},\quad a_{n+2},\quad a_{n+3},\ \ldots.\ a_{n+m}$$

und

$$b_n,\quad b_{n+1},\quad b_{n+2},\quad b_{n+3},\ \ldots.\ b_{n+m}$$

bezeichnet werden; so bezeichnen wir in ähnlicher Weise wie früher die elliptischen Bogen

$$A_nA_{n+1},\ A_{n+1}A_{n+2},\ A_{n+2}A_{n+3},\ \ldots.\ A_{n+m-1}A_{n+m}$$

respective durch

$$\overset{a}{\omega}_n,\quad \overset{a}{\omega}_{n+1},\quad \overset{a}{\omega}_{n+2},\quad \overset{a}{\omega}_{n+3},\ \ldots\ \overset{a}{\omega}_{n+m-1}.$$

Dann ist, wie man leicht durch Multiplication findet:

$$\begin{aligned}
&(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n \pm \overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n.\sqrt{-1})\,(\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1} \pm \overset{e}{S}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}.\sqrt{-1})\\
=\ &\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1} - \overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}\\
&\pm(\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1} + \overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n\overset{e}{S}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1})\sqrt{-1}),
\end{aligned}$$

also nach §. 18. 7):

$$\begin{aligned}
&(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n \pm \overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n.\sqrt{-1})(\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1} \pm \overset{e}{S}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}.\sqrt{-1})\\
&= \overset{e}{\mathfrak{S}}_n(\overset{a}{\omega}_n + \overset{a}{\omega}_{n+1}) \pm \overset{e}{S}_n(\overset{a}{\omega}_n + \overset{a}{\omega}_{n+1}).\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Setzt man nun diese Multiplication imaginärer Factoren weiter fort, so erhält man auf ganz ähnliche Art wie bei dem Beweise der nach **Moivre** benannten Formeln in der Goniometrie die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
32)\qquad &(\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n \pm \overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n.\sqrt{-1})\\
&\times(\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1} \pm \overset{e}{S}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}.\sqrt{-1})\\
&\times(\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+2}\overset{a}{\omega}_{n+2} \pm \overset{e}{S}_{n+2}\overset{a}{\omega}_{n+2}\ \sqrt{-1})\\
&\times(\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+3}\overset{a}{\omega}_{n+3} \pm \overset{e}{S}_{n+3}\overset{a}{\omega}_{n+3}.\sqrt{-1})\\
&\qquad\qquad\text{u. s. w.}\\
&\times(\overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+m-1}\overset{a}{\omega}_{n+m-1} \pm \overset{e}{S}_{n+m-1}\overset{a}{\omega}_{n+m-1}.\sqrt{-1})\\
= &\ \overset{e}{\mathfrak{S}}_n(\overset{a}{\omega}_n + \overset{a}{\omega}_{n+1} + \overset{a}{\omega}_{n+2} + \ldots + \overset{a}{\omega}_{n+m-1})\\
&\pm \overset{e}{S}_n(\overset{a}{\omega}_n + \overset{a}{\omega}_{n+1} + \overset{a}{\omega}_{n+2} + \ldots + \overset{a}{\omega}_{n+m-1}).\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Hätte man die elliptischen Bogen

$$\overset{a}{\omega}_n,\quad \overset{a}{\omega}_{n+1},\quad \overset{a}{\omega}_{n+2},\quad \overset{a}{\omega}_{n+3},\ \ldots\ \overset{a}{\omega}_{n+m-1}$$

so bestimmt, dass

$$\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n = \overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1} = \overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+2}\overset{a}{\omega}_{n+2} = \ldots = \overset{e}{\mathfrak{S}}_{n+m-1}\overset{a}{\omega}_{n+m-1}$$

wäre, was, wie sogleich erhellen wird, durch eine einfache geometrische Construction möglich ist, so würde wegen der Gleichung I. 3) auch

$$\overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n=\overset{e}{S}_{n+1}\overset{a}{\omega}_{n+1}=\overset{e}{S}_{n+2}\overset{a}{\omega}_{n+2}=\ldots=\overset{e}{S}_{n+m-1}\overset{a}{\omega}_{n+m-1}$$

sein, und die obige Gleichung 32) würde sich daher unter dieser Voraussetzung in die folgende verwandeln:

$$33)\qquad (\overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{a}{\omega}_n \pm \overset{e}{S}_n\overset{a}{\omega}_n.\sqrt{-1})^m$$

$$= \overset{e}{\mathfrak{S}}_n(\overset{a}{\omega}_n+\overset{a}{\omega}_{n+1}+\overset{a}{\omega}_{n+2}+\ldots+\overset{a}{\omega}_{n+m-1})$$

$$\pm\overset{e}{S}_n(\overset{a}{\omega}_n+\overset{a}{\omega}_{n+1}+\overset{a}{\omega}_{n+2}+\ldots+\overset{a}{\omega}_{n+m-1}).\sqrt{-1}.$$

Man könnte sich hier noch eine Menge anderer Fragen vorlegen, wie z. B. die Entwickelung der höheren Differentialquotienten von

$$\overset{e}{S}_n\overset{e}{\omega}_n,\quad \overset{e}{\mathfrak{S}}_n\overset{e}{\omega}_n,\quad \overset{e}{T}_n\overset{a}{\omega}_n,\quad \overset{e}{\mathfrak{T}}_n\overset{a}{\omega}_n,\ \text{u. s. w.}$$

in Bezug auf $\overset{a}{\omega}_n$ als unabhängige veränderliche Grösse mittelst der in der ersten Abtheilung gefundenen ersten Differentialquotienten dieser Functionen, wodurch dann zugleich mittelst des Maclaurin'schen Theorems die Entwickelung der obigen Functionen in nach Potenzen von $\overset{a}{\omega}_n$ fortschreitende Reihen gegeben sein würde, von denen die bekannten cyclometrischen Reihen besondere Fälle sein müssten, u. dergl. Aber alle diese Untersuchungen muss ich späteren Arbeiten aufbehalten, und würde mich für jetzt nur freuen, wenn ich durch das Obige vielleicht auch anderen Mathematikern Veranlassung geben sollte, diesem Gegenstande ihre Aufmerksamkeit zu widmen.

XIX.

Ueber die independente Bestimmung der Coefficienten unendlicher Reihen und der Facultätencoefficienten insbesondere.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
zu Dresden.

Einleitung.

Wenn man darauf ausgeht eine gegebene Funktion einer Variabelen in eine Potenzenreihe zu verwandeln, also eine Gleichung von der Form

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots$$

aufzustellen, so bieten sich zur Bestimmung der Coefficienten A_0, A_1, A_2 etc. zwei Wege dar. Man benutzt nämlich entweder irgend eine Eigenschaft der Funktion $F(x)$, gewöhnlich eine Beziehung zwischen ihr und einem ihrer Differentialquotienten, um zunächst eine Recursionsformel für jene Coefficienten zu erhalten, und sucht dann von dieser aus zu einer independenten Formel zu gelangen, oder man hält sich an das Theorem von Mac Laurin, demzufolge

$$A_k = \frac{F^{(k)}(0)}{1.2.3\ldots.k}$$

ist, und bestimmt nun A_k dadurch, dass man erst $F^{(k)}(x)$ entwickelt und hierin $x=0$ nimmt. Beide Methoden sind aber insofern mangelhaft, als sie oft genug in ein Labyrinth von Rechnung hineinführen, aus welchem die gesuchte independente Form der Reihencoefficienten nicht mehr herauszufinden ist, und als besten Beweis dafür wird man gewiss die bekannte Thatsache gelten lassen, dass es unzählige Reihenentwickelungen giebt, deren Coefficienten noch gar nicht independent bestimmt sind, obschon die Funktionen an sich unter die weniger complicirten gehören, wie z. B.

$$\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n, \quad \left[\frac{1}{1+l(1+x)}\right]^n, \quad \left[\frac{x}{l(1+x)}\right]^n, \text{ und dergl.}$$

Der Grund dieser Erscheinung liegt übrigens nicht tief; der Uebergang von einer Recursionformel zur independenten Formel ist nämlich einerlei mit der Integration einer Gleichung zwischen endlichen Differenzen, also mit einer Manipulation, die bekanntlich immer einige Umstände verursacht, wenn man nicht zu grösseren Mitteln, wie z. B. zu bestimmten Integralen, greifen will; versucht man dagegen die Ausführung der successiven Differenziation von $F(x)$, so geht man zwar einen sehr direkten, aber oft äusserst beschwerlichen Weg, weil begreiflicherweise $F^{(k)}(x)$ ein verwickelterer Ausdruck als das eigentlich gesuchte $F^{(k)}(0)$ sein muss, und es bekannt genug ist, dass selbst einfache Funktionen mitunter sehr verwickelte höhere Differenzialquotienten geben. Diese Schwierigkeit lässt sich offenbar dadurch vermeiden, dass man nicht auf die Entwickelung des allgemeinen Differenzialquotienten $F^{(k)}(x)$ ausgeht, sondern gleich von vorn herein den spezialisirten Differenzialquotienten $F^{(k)}(0)$ zu bekommen sucht; diess ist, da man in Beziehung auf Null nicht differenziren kann, nur möglich, indem man den fraglichen spezialisirten Differenzialquotienten auf die gleichfalls spezialisirten Differenzialquotienten anderer und zwar einfacherer Funktionen zurückführt, und dieses Verfahren fortsetzt, bis man auf so einfache Funktionen stösst, dass sich ihre spezialisirten Differenzialquotienten unmittelbar entwickeln lassen. Wie leicht dieser Gedanke in vielen Fällen ausführbar ist, mögen die nachfolgenden Untersuchungen zeigen, die einigen Reichthum an Reihenentwickelungen darbieten und zugleich für verschiedene wichtige Coefficienten (z. B. die Facultätencoefficienten nebst ihren Spezialwerthen — den Bernoulli'schen Zahlen — u. dergl.) die independente Bestimmung liefern.

§. 1.

Entwickelung von

$$\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)^n.$$

Denken wir uns unter $\varphi(x)$ eine Funktion, die für sich allein mittelst des Theoremes von Mac Laurin in eine Potenzenreihe verwandelbar sein würde, also von der Form

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots$$

ist, so hat man identisch

$$\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)^n=\frac{1}{(a_0)^n}\cdot\frac{1}{(1+\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}x^2+\ldots\ldots)^n}$$

und wenn nun a_0 nicht Null ist, die Funktion $\varphi(x)$ also für $x=0$ nicht verschwindet, so kann man den zweiten Faktor rechter Hand in eine Reihe verwandeln, die mit der Einheit anfängt und nach Potenzen von x fortschreitet. Da es sich mithin immer nur um eine Entwickelung von der Form

$$\frac{1}{(1+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\ldots.)^n}=1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots.$$

handelt, so dürfen wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit voraussetzen, dass sich in dem Ausdrucke $\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)^n$ die Funktion $\varphi(x)$ für $x=0$ auf $\varphi(0)=1$ reduzire.

Bezeichnen wir $\varphi(x)$ kurz mit y, so ist mittelst des Binomialtheoremes

$$\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)^n=\frac{1}{y^n}=\frac{1}{[1+(y-1)]^n}$$

$$=1+(-n)_1(y-1)+(-n)_2(y-1)^2+\ldots.+(-n)_k(y-1)^k$$

$$+(-n)_{k+1}(y-1)^{k+1}+(-n)_{k+2}(y-1)^{k+2}+\ldots..$$

und wenn man sich im zweiten Theile der Reihe für $y-1$ seinen Werth $\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots.$ gesetzt denkt, so erhält man ein Resultat von der Form

$$\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)^n=\frac{1}{y^n}$$

$$=1+(-n)_1(y-1)+(-n)_2(y-1)^2+\ldots.+(-n)_k(y-1)^k$$

$$+Lx^{k+1}+Mx^{k+2}+Nx^{k+3}+\ldots.,$$

wo es auf die Werthe der Coefficienten L, M, N etc. nicht weiter ankommt. Die vorstehende Gleichung differenziren wir $k$mal in Beziehung auf x und setzen dann $x=0$; es verschwinden dann die mit L, M, N etc. behafteten Glieder und bleibt

$$1)\qquad \left[D^k\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)^n\right]_{(0)}$$
$$=\left[D^k\{1+(-n)_1(y-1)+(-n)_2(y-1)^2+\ldots+(-n)_k(y-1)^k\}\right]_{(x=0)}.$$

Die eingeklammerte Reihe ist einer für unsere Zwecke wichtigen Transformation fähig, die darin besteht, dass wir die Potenzen von $y-1$ auflösen und alle entstehenden Glieder nach den Potenzen von $y=\varphi(x)$ ordnen. Man findet nun auf der Stelle

$$\begin{aligned}
&1+(-n)_1(y-1)+(-n)_2(y-1)^2+\ldots+(-n)_k(y-1)^k\\
=\;&1\\
&+(-n)_1[1_0 y-1_1]\\
&+(-n)_2[2_0 y^2-2_1 y+2_2]\\
&+(-n)_3[3_0 y^3-3_1 y^2+3_2 y-3_3]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+(-n)_k[k_0 y^k-k_1 y^{k-1}+k_2 y^{k-2}-\ldots+(-1)^k k_k]
\end{aligned}$$

und durch Vereinigung aller gleichartigen Glieder entsteht hieraus die neue Gleichung

$$2)\qquad \begin{aligned}1+(-n)_1(y-1)+(-n)_2(y-1)^2+\ldots+(-n)_k(y-1)^k\\ =S_0+S_1y+S_2y^2+\ldots+S_ky^k,\end{aligned}$$

worin irgend einer der mit S bezeichneten Coefficienten, etwa S_i, durch folgende Formel bestimmt wird:

$$\begin{aligned}S_i=(-n)_i i_0-(-n)_{i+1}(i+1)_1+(-n)_{i+2}(i+2)_2-\ldots\\ \ldots+(-1)^{k-i}(-n)_k(i+\overline{k-i})_{k-i}.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich bedeutend zusammenziehen, wenn man die bekannten Gleichungen beachtet:

$$(-n)_{i+1}=(-n)_i\frac{(-n)-i}{i+1},\qquad (i+1)_1=\frac{i+1}{1},$$

$$(-n)_{i+2}=(-n)_i\frac{(-n)-i}{i+1}\cdot\frac{(-n)-i-1}{i+2},\qquad (i+2)_2=\frac{(i+2)(i+1)}{1.2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Man erhält dann für S_i die neue Form:

$$S_i=(-n)_i\left[1+\frac{n+i}{1}+\frac{(n+i)(n+i+1)}{1.2}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(n+i)(n+i+1)\ldots(n+k-1)}{1.2\ldots(k-i)}\right];$$

und durch Summirung der eingeklammerten Reihe *)

$$S_i = (-n)_i \frac{(n+i+1)(n+i+2)\dots(n+k)}{1.2.3\dots(k-i)},$$

oder endlich, indem man durchgängig Binomialcoefficienten mit positivem Exponenten benutzt:

$$S_i = (-1)^i (n+i-1)_i (n+k)_{k-i}.$$

Die Formel 2) gestaltet sich nun bei umgekehrter Anordnung der Glieder rechter Hand wie folgt:

$$1 + (-n)_1(y-1) + (-n)_2(y-1)^2 + \dots + (-n)_k(y-1)^k$$
$$= (-1)^k [(n+k-1)_k(n+k)_0 y^k - (n+k-2)_{k-1}(n+k)_1 y^{k-1}$$
$$+ (n+k-3)_{k-2}(n+k)_2 y^{k-2} - \dots],$$

wobei die Reihe soweit fortzusetzen ist, bis sie von selbst abbricht.

Substituiren wir die obige Formel in die Gleichung 1), differenziren jedes einzelne Glied und setzen

$$3) \qquad [D^k y^h]_{(0)} = [D^k \varphi(x)^h]_{(0)} = Q_h,$$

so gelangen wir augenblicklich zu der Formel

---

*) Bezeichnet man mit A_r den Ausdruck

$$\frac{(a+1)(a+2)\dots(a+r)}{1.2.3\dots r},$$

so findet man sehr leicht die Beziehung

$$A_{r+1} - A_r = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+r)}{1.2.3\dots(r+1)}.$$

Für $r=0, 1, 2, \dots (q-1)$ und durch Addition aller so entstehenden Gleichungen ergiebt sich, indem man A_0 für 1 rechnet:

$$A_r - 1 = \frac{a}{1} + \frac{a(a+1)}{1.2} + \dots + \frac{a(a+1)\dots(a+q-1)}{1.2\dots q},$$

oder vermöge der Bedeutung von A_r:

$$1 + \frac{a}{1} + \frac{a(a+1)}{1.2} + \dots + \frac{a(a+1)\dots(a+q-1)}{1.2.3\dots q}$$
$$= \frac{(a+1)(a+2)\dots(a+q)}{1.2\dots q},$$

wovon im Texte für $a=n+i$ und $q=k-i$ Gebrauch gemacht worden ist.

$$4)\qquad \left[D^k \frac{1}{\varphi(x)^n}\right]_{(0)}$$
$$= (-1)^k [(n+k)_0 (n+k-1)_k Q_k - (n+k)_1 (n+k-2)_{k-1} Q_{k-1}$$
$$+ (n+k)_2 (n+k-3)_{k-2} Q_{k-2} - \ldots],$$

welche die Entwickelung von $\frac{1}{\varphi(x)^n}$ angiebt, sobald man die Differenzialquotienten von $\varphi(x)$, $\varphi(x)^2$ etc. oder wenigstens die für $x=0$ eintretenden Spezialwerthe derselben finden kann.

Ein passendes Beispiel hierzu bildet die Annahme

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(e^x + 1),$$

wo die Bedingung $\varphi(0)=1$ erfüllt ist. Setzt man nämlich

$$\left(\frac{2}{e^x+1}\right)^n = \overset{n}{V}_0 + \frac{\overset{n}{V}_1}{1} x + \frac{\overset{n}{V}_2}{1.2} x^2 + \ldots,$$

so ist

$$\overset{n}{V}_k = (-1)^k [(n+k)_0 (n+k-1)_k Q_k - (n+k)_1 (n+k-2)_{k-1} Q_{k-1}$$
$$+ (n+k)_2 (n+k-3)_{k-2} Q_{k-2} - \ldots]$$

und man hat zugleich

$$Q_k = \left[D^k \left(\frac{e^x+1}{2}\right)^k\right]_{(0)}$$
$$= \frac{1}{2^k}[h_0 h^k + h_1 (h-1)^k + h_2 (h-2)^k + \ldots].$$

Für $n=1$ gäbe diess eine independente Bestimmung der Bernoulli'schen Zahlen.

§. 2.

Entwickelung von

$$\left(\frac{x}{\psi(x)}\right)^n.$$

Wir setzen hier voraus, dass $\psi(x)$ eine mit x gleichzeitig verschwindende Funktion ist, welche ausserdem die Eigenschaft besitzt, dass $\frac{\psi(x)}{x}$ für $x=0$ in die Einheit übergeht, wie z. B. wenn $\psi(x)$ eine Reihe von der Form

$$x + a_2x^2 + a_3x^3 + \text{ etc.}$$

bildet. Wenden wir die Formeln des vorigen Paragraphen auf den Fall $\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{x}$ an, so ergiebt sich sogleich

$$1)\qquad \left[D^k\left(\frac{x}{\psi(x)}\right)^n\right]_{(0)}$$
$$= (-1)^k[(n+k)_0(n+k-1)_k Q_k - (n+k)_1(n+k-2)_{k-1}Q_{k-1} + (n+k)_2(n+k-3)_{k-2}Q_{k-2} - \ldots]$$

und darin ist Q_h durch die Formel bestimmt:

$$Q_h = \left[D^k\left(\frac{\psi(x)}{x}\right)^h\right]_{(0)}.$$

Man kann derselben eine andere Form geben, welche nur die Differenziation einer Potenz von $\psi(x)$ allein verlangt. Es ist nämlich identisch

$$x^h\left(\frac{\psi(x)}{x}\right)^h = \psi(x)^h,$$

mithin bei $(h+k)$ maliger Differenziation, indem man die bekannte Regel für die Differenziation der Producte anwendet,

$$(h+k)_0 x^h D^{h+k}\left(\frac{\psi(x)}{x}\right)^h + (h+k)_1 h x^{h-1} D^{h+k-1}\left(\frac{\psi(x)}{x}\right)^h + \ldots$$
$$\ldots + (h+k)_h h(h-1)\ldots 2.1.D^k\left(\frac{\psi(x)}{x}\right)^h$$
$$= D^{h+k}\psi(x)^h.$$

Für $x=0$ verschwinden linker Hand alle Glieder mit Ausnahme des letzten und es bleibt

$$(h+k)_h.1.2..h.\left[D^k\left(\frac{\psi(x)}{x}\right)^h\right]_{(0)} = [D^{h+k}\psi(x)^h]_{(0)}$$

oder endlich

$$\left[D^k\left(\frac{\psi(x)}{x}\right)^h\right]_{(0)} = \frac{[D^{h+k}\psi(x)^h]_{(0)}}{(k+1)(k+2)\ldots(k+h)}.$$

Der Werth von Q_h erhält demnach folgende Gestalt:

$$2)\qquad Q_h = \frac{[D^{h+k}\psi(x)^h]_{(0)}}{(k+1)(k+2)\ldots(k+h)}.$$

Nehmen wir beispielweis

$$\psi(x) = e^x - 1,$$

wodurch die für $\psi(x)$ angegebenen Bedingungen erfüllt sind, so ist nach Nro. 1) jeder Coefficient in der Entwickelung

$$3) \qquad \left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n$$
$$= \overset{n}{P}_0 - \frac{\overset{n}{P}_1}{1} x + \frac{\overset{n}{P}_2}{1.2} x^2 - \frac{\overset{n}{P}_3}{1.2.3} x^3 + \ldots..$$

augenblicklich bestimmbar, nämlich

$$4) \qquad \overset{n}{P}_k = (-1)^k \left[D^k \left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n \right]_{(0)}$$
$$= (n+k)_0 (n+k-1)_k Q_k - (n+k)_1 (n+k-2)_{k-1} Q_{k-1}$$
$$+ (n+k)_2 (n+k-3)_{k-2} Q_{k-2} - \ldots.$$

und darin gilt für Q_h die Formel

$$Q_h = \frac{[D^{h+k}(e^x-1)^h]_{(0)}}{(k+1)(k+2)\ldots(k+h)},$$

oder bei Ausführung der angedeuteten Differenziation

$$5) \qquad Q_h = \frac{h_0 h^{h+k} - h_1 (h-1)^{h+k} + h_2 (h-2)^{h+k} - \ldots}{(k+1)(k+2)\ldots.(k+h)}.$$

An die Formeln 4) und 5) knüpfen sich einige sehr bemerkenswerthe Folgerungen, die wir im nächsten Paragraphen aus einander setzen wollen.

§. 3.

Die Facultätencoefficienten und die Bernoulli'schen Zahlen.

Führen wir für die sogenannten Facultätencoefficienten die folgende Bezeichnung ein:

$$1) \qquad x(x+1)(x+2)(x+3)\ldots.(x+n-1)$$
$$= \overset{n}{C}_0 x^n + \overset{n}{C}_1 x^{n-1} + \overset{n}{C}_2 x^{n-2} + \ldots.. + \overset{n}{C}_{n-1} x,$$

so ist es sehr leicht eine Recursionsformel für dieselben zu entdecken. Indem man nämlich die Facultät des nächst höheren Grades

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)(x+n)$$

einerseits im Ganzen, andererseits als das Produkt aus $x+n$ und der früheren Facultät ansieht, hat man die Gleichung

$$\overset{n+1}{C_0}x^{n+1}+\overset{n+1}{C_1}x^n+\overset{n+1}{C_2}x^{n-1}+\dots+\overset{n+1}{C_n}x$$
$$=(x+n)[\overset{n}{C_0}x^n+\overset{n}{C_1}x^{n-1}+\dots+\overset{n}{C_{n-1}}x],$$

und aus dieser folgt durch Identificirung der beiderseits zu x^{n-k+1} gehörenden Coefficienten:

$$2)\qquad \overset{n+1}{C_k}=\overset{n}{C_k}+n\overset{n}{C_{k-1}}.$$

Um nun zu einer independenten Bestimmung von $\overset{n}{C_k}$ zu gelangen gehen wir folgenden Weg.

Bezeichnen wir die Bernoulli'schen Zahlen $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, etc. mit B_1, B_3, B_5 etc. so gilt bekanntlich für alle zwischen -2π und $+2\pi$ liegenden x die Gleichung

$$3)\qquad \frac{x}{e^x-1}=1-\frac{1}{2}x$$
$$+\frac{B_1}{1.2}x^2-\frac{B_3}{1.2.3.4}x^4+\frac{B_5}{1.2\dots6}x^6-\dots,$$

dieselbe, aus welcher Laplace eine independente Bestimmung von B_{k-1} (k gerade) herleitete, indem er die in der Formel

$$4)\qquad \left[D^k\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\right]_{(0)}=(-1)^{\frac{1}{2}k-1}B_{k-1}$$

postulirte $k$fache Integration mittelst eines sehr speziellen, nur eben auf die Funktion $x:(e^x-1)$ passenden Kunstgriffes ausführte. Denkt man sich beide Seiten der Gleichung 3) auf die $n$te Potenz erhoben, so ergiebt sich ein Resultat von der Form

$$5)\qquad \left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n=\overset{n}{A_0}-\overset{n}{A_1}x+\overset{n}{A_2}x^2-\overset{n}{A_3}x^3+\dots,$$

wo es nun auf die Bestimmung der mit A bezeichneten Coefficienten ankommen würde. Um für dieselben zunächst eine Recursionsformel zu erhalten, differenziren wir die Gleichung 5), wobei

$$D\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n = n\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{e^x-1}-\frac{xe^x}{(e^x-1)^2}\right]$$
$$= n\frac{x^{n-1}}{(e^x-1)^n}(1-x) - n\frac{x^n}{(e^x-1)^{n+1}}$$

zu setzen ist, und multipliziren darauf mit x; es wird so

$$n\left(\frac{x}{e^x-1}\right)(1-x) - n\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{n+1}$$
$$= -1\overset{n}{A}_1 x + 2\overset{n}{A}_2 x^2 - 3\overset{n}{A}_3 x^3 + 4\overset{n}{A}_4 x^4 - \dots .$$

Linker Hand kann man die Formel 5) zweimal benutzen, einmal geradezu, das andere Mal, indem man $n+1$ an die Stelle von n treten lässt; führt man diese kleine Rechnung aus und vergleicht nachher die Coefficicienten von x^k, so findet man die Recursionsformel:

$$6)\qquad n\overset{n+1}{A}_k = (n-k)\overset{n}{A}_k + n\overset{n}{A}_{k-1}.$$

Besondere Aufmerksamkeit verdienen die n ersten Coefficienten in Nro. 5), für welche

$$k = 0,\ 1,\ 2, \dots (n-1),$$

also überhaupt kleiner als n ist. Setzt man nämlich für diesen Fall

$$7)\qquad \overset{n}{A}_k = \frac{1}{(n-k)(n-k+1)(n-k+2)\dots(n-1)}\overset{n}{\mathfrak{A}}_k,$$

so verwandelt sich die Gleichung 6) in die folgende:

$$\overset{n+1}{\mathfrak{A}}_k = \overset{n}{\mathfrak{A}}_k + n\overset{n}{\mathfrak{A}}_{k-1},$$

aus deren Vergleichung mit Nr. 2) die Identität von $\overset{n}{\mathfrak{A}}_k$ und $\overset{n}{C}_k$ folgt. Man hat demnach die bemerkenswerthe für

$$2\pi > x > -2\pi$$

geltende Formel:

$$8)\qquad \left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n$$
$$= \overset{n}{C}_0 - \frac{\overset{n}{C}_1}{n-1}x + \frac{\overset{n}{C}_2}{(n-1)(n-2)}x^2 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}\overset{n}{C}_{n-1}}{(n-1)(n-2)\dots 2.1}x^{n-1}$$
$$+ (-1)^n[\overset{n}{A}_n x^n - \overset{n}{A}_{n+1}x^{n+1} + \overset{n}{A}_{n+2}x^{n+2} - \dots].$$

Will man eine independente Bestimmung sämmtlicher mit A bezeichneten Coefficienten, so ist nach Nro. 5) unmittelbar

$$\left[D^k\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n\right]_{(0)} = (-1)^k 1.2.3\ldots k.\overset{n}{A}_k,$$

wo sich linker Hand die Differenziation nach den Formeln 4) und 5) des vorigen Paragraphen ausführen lässt. Für $k<n$ giebt diess die independente Bestimmung der Facultätencoefficienten, denn man hat nach Nro. 7) und vermöge der Identität von $\overset{n}{\mathfrak{A}}_k$ und $\overset{n}{C}_k$:

$$\left[D^k\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n\right]_{(0)} = \frac{(-1)^k 1.2.3\ldots k}{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}\overset{n}{C}_k,$$

d. i. umgekehrt bei Benutzung der Symbole für die Binomialcoefficienten:

9) $$\overset{n}{C}_k = (n-1)_k(-1)^k\left[D^k\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^n\right]_{(0)},\ k<n.$$

Dagegen ist für $n=1$ und ein gerades $k>1$ nach Nro. 4):

10) $$B_{k-1} = (-1)^{\frac{1}{2}k-1}\left[D^k\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\right]_{(0)}.$$

Mittelst der Formeln 4) und 5) des vorigen Paragraphen erhält man nun aus Nro. 9) folgende independente Bestimmung der Facultätencoefficienten:

11) $$\overset{n}{C}{}^k = (n-1)_k[(n+k)_0(n+k-1)_k Q_k - (n+k)_1(n+k-2)_{k-1}Q_{k-1} + (n+k)_2(n+k-3)_{k-2}Q_{k-2} - \ldots],$$

worin Q_h nach der Formel bestimmt wird:

12) $$Q_h = \frac{h_0 h^{h+k} - h_1(h-1)^{h+k} + h_2(h-2)^{h+k} - \ldots}{(k+1)(k+2)\ldots(k+h)}.$$

Für $n=1$ und ein gerades k folgt daraus für die Bernoullischen Zahlen die Formel

13) $$B_{k-1} = (-1)^{\frac{1}{2}k-1}[(k+1)_0 Q_k - (k+1)_1 Q_{k-1} + (k+1)_2 Q_{k-2} - \ldots].$$

Wir geben im nächsten Paragraphen einige Reihenverwandlungen, bei denen die Facultätencoefficienten vorkommen.

§. 4.

Entwickelung von

$$[l(1+x)]^m \quad \text{und} \quad \left[\frac{x}{l(1+x)}\right]^n.$$

1. Denkt man sich beide Seiten der für $1>x>-1$ geltenden Gleichung

$$l(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots$$

auf die $m$te Potenz erhoben, so entsteht ein Resultat von der Form

$$1)\qquad [l(1+x)]^m=\overset{m}{A_0}x^m-\overset{m+1}{A_1}x^{m+1}+\overset{m+2}{A_2}x^{m+2}-\ldots,$$

worin noch die mit A bezeichneten Coefficienten zu bestimmen wären. Man gelangt zu diesem Zwecke, indem man die analoge Gleichung

$$[l(1+x)]^{m+1}=\overset{m+1}{A_0}x^{m+1}-\overset{m+2}{A_1}x^{m+2}+\overset{m+3}{A_2}x^{m+3}-\ldots$$

differenzirt und das Ergebniss mit $(1+x)$ multiplizirt; man findet hierdurch

$$(m+1)[l(1+x)]^m$$
$$=(1+x)[(m+1)\overset{m+1}{A_0}x^m-(m+2)\overset{m+2}{A_1}x^{m+1}+(m+3)\overset{m+3}{A_2}x^{m+2}-\ldots].$$

Indem man linker Hand die Gleichung 1) benutzt, rechts die angedeutete Multiplikation ausführt und nachher die Coefficienten vergleicht, erhält man die Recursionsformel

$$(m+k+1)\overset{m+k+1}{A_k}=(m+1)\overset{m+k}{A_k}+(m+k)\overset{m+k}{A_{k-1}},$$

welche mittelst der Substitution

$$\overset{m+k}{A_k}=\frac{1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}\overset{m+k}{\mathfrak{A}_k}$$

in die folgende übergeht:

$$2)\qquad \overset{m+k+1}{\mathfrak{A}_k}=\overset{m+k}{\mathfrak{A}_k}+(m+k)\overset{m+k}{\mathfrak{A}_{k-1}}.$$

Aus der Vergleichung derselben mit Nro. 2) des vorigen Paragraphen folgt augenblicklich

$$\overset{m+k}{\mathfrak{A}_k} = \overset{m+k}{C_k},$$

mithin

$$\overset{m+k}{A_k} = \frac{\overset{m+k}{C_k}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}.$$

Substituirt man diess in die Gleichung 1) und beachtet, dass $\overset{m}{A_0}=1$ sein muss, so hat man für $1>x>-1$ die Reihenentwickelung

$$3)\quad [\mathrm{l}(1+x)]^m = x^m - \frac{\overset{m+1}{C_1}}{m+1}x^{m+1} + \frac{\overset{m+2}{C_2}}{(m+1)(m+2)}x^{m+2} - \ldots$$

oder auch

$$4)\qquad \left[\frac{\mathrm{l}(1+x)}{x}\right]^m = 1 - \frac{\overset{m+1}{C_1}}{m+1}x + \frac{\overset{m+2}{C_2}}{(m+1)(m+2)}x^2 - \ldots.$$

Von diesen Gleichungen kann die erste dienen, um eine nach Potenzen von $\mathrm{l}(1+x)$ fortschreitende Reihe in eine andere umzusetzen, welche nur Potenzen von x enthält. Als Beispiel nehmen wir die Soldner'sche Formel für den Integrallogarithmus von $a+z$. Setzt man nämlich dem Taylor'schen Theoreme zufolge

$$5)\qquad \mathrm{li}(a+z) = \mathrm{li}(a) + \frac{1}{1}A_1z + \frac{1}{2}A_2z^2 + \frac{1}{3}A_3z^3 + \ldots.$$

so ist durch Differenziation

$$6)\qquad \frac{1}{\mathrm{l}(a+z)} = A_1 + A_2z + A_3z^2 + \ldots$$

Soldner bestimmt die Coefficienten A recursiv; will man eine independente Formel dafür gewinnen, so beachte man, dass der linker Hand stehende Ausdruck

$$= \frac{1}{\mathrm{l}a} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{\mathrm{l}\left(1+\frac{z}{a}\right)}{\mathrm{l}a}}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{l}a} - \frac{1}{(\mathrm{l}a)^2}\,\mathrm{l}\left(1+\frac{z}{a}\right) + \frac{1}{(\mathrm{l}a)^3}\left[\mathrm{l}\left(1+\frac{z}{a}\right)\right]^2 - \ldots.$$

ist, und benutze jetzt die Formel 3), indem man $x=\frac{z}{a}$ und $m=1$, 2, 3 etc. setzt. Ordnet man hierauf alle Glieder nach Potenzen von z und vergleicht die so entstehende Reihe mit der unter Nr. 6) vorkommenden, so findet man sehr leicht eine independente Formel für einen beliebigen Coefficienten A_k.

II. Aus der Gleichung 4) ergiebt sich durch $k$malige Differenziation und nachherige Nullificirung von x:

$$\left[D^k\left(\frac{l(1+x)}{x}\right)^m\right]_{(0)}=\frac{(-1)^k \overset{m+k}{C_k}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}1.2.3\ldots k,$$

oder kürzer ausgedrückt:

$$7)\qquad \left[D^k\left(\frac{l(1+x)}{x}\right)^m\right]_{(0)}=\frac{(-1)^k}{(m+k)_k}\overset{m+k}{C_k}.$$

Wenn es sich nun darum handelte den Ausdruck

$$\left(\frac{x}{l(1+x)}\right)^n$$

in eine Potenzenreihe zu verwandeln, so würde man setzen können:

$$8)\qquad \left(\frac{x}{l(1+x)}\right)^n=1+\frac{\overset{n}{A_1}}{1}x+\frac{\overset{n}{A_2}}{1.2}x^2+\frac{\overset{n}{A_3}}{1.2.3}x^3+\ldots,$$

und es ist

$$\overset{n}{A_k}=\left[D^k\left(\frac{x}{l(1+x)}\right)^n\right]_{(0)}.$$

Hier lässt sich das Theorem 4) in §. 1. anwenden, indem man

$$\varphi(x)=\frac{l(1+x)}{x}$$

nimmt; man hat dann

$$\overset{n}{A_k}=(-1)^k[(n+k)_0(n+k-1)_kQ_k-(n+k)_1(n+k-2)_{k-1}Q_{k-1}$$
$$+(n+k)_2(n+k-3)_{k-2}Q_{k-2}-\ldots],$$

wobei Q_h nach der Formel

$$Q_h=\left[D^k\left(\frac{l(1+x)}{x}\right)^h\right]_{(0)}$$

zu bestimmen sein würde. Vermöge der siebenten Formel ist nun

$$Q_h=\frac{(-1)^k}{(h+k)_k}\overset{h+k}{C_k},$$

mithin, wenn man diesen Werth in die Formel für $\overset{n}{A}_k$ einsetzt:

$$9)\qquad \overset{n}{A}_k = \frac{(n+k)_0(n+k-1)_k}{(2k)_k}\overset{2k}{C}_k - \frac{(n+k)_1(n+k-2)_{k-1}}{(2k-1)_k}\overset{2k-1}{C}_k + \frac{(n+k)_2(n+k-3)_{k-2}}{(2k-2)_k}\overset{2k-2}{C}_k - \ldots,$$

und diess ist insofern eine independente Bestimmung von A_k, als die Facultätencoefficienten nunmehr independent bestimmt sind. Die Bedingungen, unter welchen die Gleichung 8) richtig bleibt, bestimmen sich leicht aus der Bemerkung, dass zunächst

$$\left\{\frac{x}{l(1+x)}\right\}^n = \left[\frac{1}{1-\left\{1-\frac{l(1+x)}{x}\right\}}\right]^n$$

$$= 1 + \frac{n}{1}\left\{1-\frac{l(1+x)}{x}\right\} + \frac{n(n+1)}{1.2}\left\{1-\frac{l(1+x)}{x}\right\}^2 + \ldots$$

gesetzt werden kann, wenn nämlich die Determination

$$10)\qquad 1 > 1 - \frac{l(1+x)}{x} > -1 \text{ oder } 2 > \frac{l(1+x)}{x} > 0$$

erfüllt ist. Denkt man sich weiter in der obigen Reihe

$$1 - \frac{l(1+x)}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x^2 - \ldots$$

gesetzt, so muss die weitere Bedingung

$$11)\qquad 1 > x > -1$$

statt finden; nach Ausführung der angedeuteten Potenzirungen würde man nun die Reihe 8) wieder erhalten und es gilt letztere daher für alle x, welche den Bedingungen 10) und 11) gleichzeitig genügen; hieraus findet man leicht

$$12)\qquad 1 > x > -0{,}8.$$

III. Aus der Gleichung 8) lässt sich noch eine auf den Integrallogarithmus bezügliche Formel ableiten, die nicht ganz ohne Interesse ist. Für $n=1$ ist nämlich

$$13)\qquad \frac{x}{l(1+x)}=1+\frac{A_1}{1}x+\frac{A_2}{1.2}x^2+\frac{A_3}{1.2.3}x^3+\ldots.$$

$$1>x>-0{,}8$$

wobei die Coefficientenbestimmung durch die Formel

$$14)\qquad A_k=\frac{(k+1)_0}{(2k)_k}\overset{2k}{C_k}-\frac{(k+1)_1}{(2k-1)_k}\overset{2k-1}{C_k}+\frac{(k+1)_2}{(2k-2)_k}\overset{2k-2}{C_k}-\ldots$$

angegeben wird. Multiplizirt man die Gleichung 13) mit dx und integrirt, so folgt

$$15)\qquad \int\frac{x}{l(1+x)}dx$$

$$=x+\frac{A_1}{1.2}x^2+\frac{A_2}{1.2.3}x^3+\frac{A_3}{1.2.3.4}x^4+\ldots..$$

Um linker Hand die Integration auszuführen, setzen wir

$$l(1+x)=z,$$

mithin

$$x=e^z-1\quad\text{und}\quad dx=dz;$$

es wird dann

$$\int\frac{x}{l(1+x)}dx=\int\frac{e^z-1}{z}e^z dz$$

$$=\int\frac{e^{2z}}{z}dz-\int\frac{e^z}{z}dz$$

$$=\operatorname{li}(e^{2z})-\operatorname{li}(e^z)+\text{Const.};$$

mithin, wenn der Werth von e^z wieder eingesetzt wird:

$$16)\qquad \operatorname{li}[(1+x)^2]-\operatorname{li}[1+x]+\text{Const.}$$

$$=x+\frac{A_1}{1.2}x^2+\frac{A_2}{1.2.3}x^3+\frac{A_3}{1.2.3.4}x^4+\ldots$$

Um die Constante zu bestimmen, lassen wir x in Null übergehen und haben dann

$$17)\qquad \operatorname{Lim}\{\operatorname{li}[(1+x)^2]-\operatorname{li}[1+x]\}+\text{Const.}=0.$$

Der Gränzwerth auf der linken Seite bestimmt sich durch Anwendung der bekannten Formel

$$\mathrm{li}(u) = 0{,}5772156 + \mathrm{l}(\mathrm{l}u) + \frac{1}{1}\,\frac{\mathrm{l}u}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{(\mathrm{l}u)^2}{1.2} + \ldots;$$

man findet nämlich

$$\mathrm{li}[(1+x)^2] - \mathrm{li}[1+x] = \mathrm{l}[2\mathrm{l}(1+x)] - \mathrm{l}[\mathrm{l}(1+x)]$$
$$+ \frac{2-1}{1}\,\frac{\mathrm{l}(1+x)}{1} + \frac{2^2-1}{2}\,\frac{[\mathrm{l}(1+x)]^2}{1.2} + \frac{2^3-1}{3}\,\frac{[\mathrm{l}(1+x)]^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo die rechter Hand vorkommende Differenz kürzer durch l2 ausgedrückt werden kann. Für $x=0$ geht die rechte Seite in l2 über, und die Gleichung 17) wird demnach

$$\mathrm{l}2 + \text{Const.} = 0;$$

mit Nr. 16) verbunden giebt diess

$$18)\qquad \mathrm{li}[(1+x)^2] - \mathrm{li}[1+x]$$
$$= \mathrm{l}2 + \frac{x}{1} + \frac{A_1}{1.2}x^2 + \frac{A_2}{1.2.3}x^3 + \ldots,$$

wobei wie früher x zwischen 1 und $-0{,}8$ enthalten sein muss.

§. 5.

Die Facultätencoefficienten mit negativem Exponenten.

Versteht man nach Crelle's vortrefflicher Bezeichnung unter $(z, +1)^n$ die Facultät

$$z(z+1)\ldots(z+n-1),$$

so muss man bekanntlich, um nicht inconsequent zu werden, unter dem Symbole $(z, +1)^{-n}$ den Ausdruck

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)\ldots(z-n)}$$

begreifen*); dieser lässt sich offenbar in eine nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ fortschreitende Reihe verwandeln, sobald $z>n$ ist, und man wird daher entsprechend dem Früheren zu setzen haben:

$$1)\qquad \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)\ldots(z-n)}$$
$$=\overset{-n}{C_0}\frac{1}{z^n}+\overset{-n}{C_1}\frac{1}{z^{n+1}}+\overset{-n}{C_2}\frac{1}{z^{n+2}}+\ldots$$

oder für $z=\frac{1}{\beta}$, wo nun $\beta<\frac{1}{n}$ sein muss:

$$2)\qquad \frac{1}{(1-\beta)(1-2\beta)(1-3\beta)\ldots(1-n\beta)}$$
$$=\overset{-n}{C_0}+\overset{-n}{C_1}\beta+\overset{-n}{C_2}\beta^2+\overset{-n}{C_3}\beta^3+\ldots.$$

Diese Gleichung erhält eine zur Bestimmung der Coefficienten C brauchbarere Form, wenn man sich zunächst an folgende für ganze positive n und beliebige a geltende Gleichung erinnert:

$$\frac{1.2.3\ldots n}{a(a+1)(a+2)(a+3)..(a+n)}$$
$$=\frac{n_0}{a}-\frac{n_1}{a+1}+\frac{n_2}{a+2}-\frac{n_3}{a+3}+\ldots,$$

von welcher ich im 9ten Theile des Archivs S. 377. (von Formel 10. ab) einen elementaren Beweis gegeben habe. Für $a=-\frac{1}{\beta}$ geht die vorstehende Gleichung in die folgende über:

$$\frac{(-1)^n 1.2.3\ldots n.\beta^n}{(1-\beta)(1-2\beta)(1-3\beta)\ldots(1-n\beta)}$$
$$=n_0-n_1\frac{1}{1-\beta}+n_2\frac{1}{1-2\beta}+n_3\frac{1}{1-3\beta}-\ldots,$$

und wenn man die Gleichung 2) zu Hülfe nimmt:

*) Supplemente zum mathem. Wörterbuch; Artikel Facultät.

$$(-1)^n 1.2..n\,[\overset{-n}{C_0}\beta^n + \overset{-n}{C_1}\beta^{n+1} + \overset{-n}{C_2}\beta^{n+2} + ..]$$

$$= n_0 - n_1 \frac{1}{1-\beta} + n_2 \frac{1}{1-2\beta} + n_3 \frac{1}{1-3\beta} - \ldots.$$

Der Coefficient $\overset{-n}{C_k}$ ergiebt sich nun, indem man beiderseits $(n+k)$mal differenzirt und nachher $\beta=0$ setzt, nämlich man hat:

$$(-1)^n 1.2\ldots n.1.2\ldots(n+k)\overset{-n}{C_k}$$

$$= -n_1.1.2..(n+k).1^{n+k} + n_2.1.2..(n+k).2^{n+k} - \ldots$$

oder

$$3)\qquad \overset{-n}{C_k} = \frac{(-1)^n}{1.2\ldots.n}\,[-n_1 1^{n+k} + n_2 2^{n+k} - n_3 3^{n+k} + \ldots].$$

Bei umgekehrter Anordnung der eingeklammerten Reihe ist endlich

$$4)\qquad \overset{-n}{C_k} = \frac{n_0 n^{n+k} - n_1(n-1)^{n+k} + n_2(n-2)^{n+k} - \ldots}{1.2.3\ldots n},$$

wobei k nicht kleiner als n sein kann, wie aus Nro. 1) unmittelbar hervorgeht.

Die so eben entwickelte Formel weist unmittelbar auf den Zusammenhang zwischen den Facultätencoefficienten positiver und negativer Exponenten hin. Schreiben wir h für n, so ist nämlich durch Vergleichung mit der Formel 12) in §. 3.:

$$Q_k = \frac{1.2.3\ldots h}{(k+1)(k+2)\ldots(k+h)} \cdot \frac{h_0 h^{h+k} - h_1(h-1)^{h+k} + \ldots}{1.2\ldots h}.$$

$$= \frac{1.2\ldots h}{(k+h)(k+h-1)..(k+1)}\overset{-h}{C_k} = \frac{1}{(k+h)_h}\overset{-h}{C_k};$$

mithin nach Formel 11) in §. 3.:

5)

$$\overset{+n}{C}_k = (n-1)_k \Big[\frac{(n+k)_0 (n+k-1)_k}{(2k)_k} \overset{-k}{C}_k - \frac{(n+k)_1 (n+k-2)_{k-1}}{(2k-1)_{k-1}} \overset{-(k-1)}{C}_k + \frac{(n+k)_2 (n+k-3)_{k-2}}{(2k-2)_{k-2}} \overset{-(k-2)}{C}_k - \ldots\ldots \Big].$$

Aus den Facultätencoefficienten negativer Exponenten, die nach der Formel 4) unmittelbar bestimmt werden, lassen sich also mittelst der vorstehenden Relation die Facultätencoefficienten positiver Exponenten herleiten.

Wir geben schliesslich noch eine kleine von $n = -4$ bis $n = +9$ gehende Tabelle der Facultätencoefficienten, von welcher die Einrichtung unmittelbar klar sein wird:

$n =$	..... — IV	— III	— II	— I
$C_0 =$	1	1	1	1
$C_1 =$	10	6	3	1
$C_2 =$	65	25	7	1
$C_3 =$	350	90	15	1
$C_4 =$	1701	301	31	1
$C_5 =$	7770	966	63	1
$C_6 =$	35105	3025	127	1
$C_7 =$	149750	9330	255	1
$C_8 =$	627501	28501	511	1

+ I	+ II	+ III	+ IV	+ V	+ VI	+ VII	+ VIII	+ IX...
1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	3	6	10	15	21	28	36
		2	11	35	85	175	322	546
			6	50	225	735	1960	4536
				24	274	1624	6769	22449
					120	1764	13132	67284
						720	13068	105056
							5040	109584
								40320

XX.

Combinatorische Darstellung der Näherungswerthe eines Kettenbruchs.

Von
Herrn F. Bartholomäi
zu Jena.

I.

Wird ein Kettenbruch

$$B_6 = p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \cfrac{1}{p_3 + \cfrac{1}{p_4 + \cfrac{1}{p_5 + \cfrac{1}{p_6}}}}}$$

nach der gewöhnlichen Art in einen gemeinen Bruch verwandelt, so erhält man:

$$B_6 = \left\{\begin{array}{l} p_1p_2p_3p_4p_5p_6 + p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_6 \\ + p_1p_2p_5p_6 + p_1p_4p_5p_6 + p_3p_4p_5p_6 + p_1p_2 \\ + p_1p_4 + p_1p_6 + p_3p_4 + p_3p_6 + p_5p_6 + 1 \end{array}\right\}$$

$$: \left\{\begin{array}{l} p_2p_3p_4p_5p_6 + p_2p_3p_4 \\ + p_2p_3p_6 + p_2p_5p_6 + p_4p_5p_6 \\ + p_2 + p_4 + p_6 \end{array}\right\}.$$

Es ergiebt sich nun sogleich, dass der Zähler sowohl als der Nenner eine Summe von Produkten aus den Partialnennern ist, dass diese Produkte Combinationen aus den Partialnennern sind, und dass diese Combinationen nach einem bestimmten Gesetze gebildet werden müssen. Indem wir das Gesetz aus unserm Falle empirisch zu bestimmen suchen, bemerken wir, dass zur Bildung des Zählers sämmtliche Partialnenner, zur Bildung des Nenners nur die Partialnenner vom zweiten bis sechsten beitragen; wir bemerken ferner, dass der Zähler nur Combinationen der sechsten, vierten und zweiten Klasse, der Nenner nur Combinationen der fünften, dritten und ersten Klasse hat, und dass bei der Bildung der Combinationen beim Fortschreiten zur nächsten Complexion das nächstfolgende Element übergangen wird. Wir erhalten demnach Combinationen, in welchen eine Klasse — das Wort im weitesten Sinne, nämlich auch für die Klassen einer Klasse gebraucht — um die andere übersprungen wird. Nennen wir solche Combinationen alternirende, so erscheint der Zähler des reducirten Kettenbruchs als Inbegriff sämmtlicher alternirenden Combinationen vom ersten bis sechsten vermehrt um 1, der Nenner als Summe sämmtlicher Combinationen der Partialnenner vom zweiten bis sechsten. Bezeichnen wir also die alternirenden Combinationen der $m$ten Klasse aus den Partialnennern vom $r$ten bis zum $t$ten durch $\overset{m}{\underset{r.t}{C}}$, so ist

$$B_6 = \frac{\overset{6}{\underset{1.6}{C}} + \overset{4}{\underset{1.6}{C}} + \overset{2}{\underset{1.6}{C}} + 1}{\overset{5}{\underset{2.6}{C}} + \overset{3}{\underset{2.6}{C}} + \overset{1}{\underset{2.6}{C}}}.$$

Hier ist die Symmetrie des Baues im Zähler durch das letzte Glied gestört. Der Fortgang der Klassen führt uns darauf, $1 = \overset{0}{\underset{1.n}{C}}$ zu setzen. Dadurch wird

$$B_6 = \frac{\overset{6}{\underset{1.6}{C}} + \overset{4}{\underset{1.6}{C}} + \overset{2}{\underset{1.6}{C}} + \overset{0}{\underset{1.6}{C}}}{\overset{5}{\underset{2.6}{C}} + \overset{3}{\underset{2.6}{C}} + \overset{1}{\underset{2.6}{C}}}.$$

Wenn wir hiernach die allgemeine Formel aufstellen, so erhalten wir

$$B_{2n} = \frac{\overset{2n}{\underset{1.2n}{C}} + \overset{2n-2}{\underset{1.2n}{C}} + \overset{2n-4}{\underset{1.2n}{C}} + \ldots + \overset{2}{\underset{1.2n}{C}} + \overset{0}{\underset{1.2n}{C}}}{\overset{2n-1}{\underset{2.2n}{C}} + \overset{2n-3}{\underset{2.2n}{C}} + \overset{2n-5}{\underset{2.2n}{C}} + \ldots + \overset{3}{\underset{2.2n}{C}} + \overset{1}{\underset{2.2n}{C}}},$$

$$B_{2n+1} = \frac{\underset{1.(2n+1)}{\overset{2n+1}{C}} + \underset{1.(2n+1)}{\overset{2n-1}{C}} + \underset{1.(2n+1)}{\overset{2n-3}{C}} + \ldots + \underset{2.(2n+1)}{\overset{3}{C}} + \underset{1.(2n+1)}{\overset{1}{C}}}{\underset{2.(2n+1)}{\overset{2n}{C}} + \underset{2.(2n+1)}{\overset{2n-2}{C}} + \underset{2.(2n+1)}{\overset{2n-4}{C}} \ldots + \underset{2.(2n+1)}{\overset{2}{C}} + \underset{1.(2n+1)}{\overset{0}{C}}};$$

wobei $\overset{0}{C} = 1$ zu setzen ist. Diese Formeln lassen sich, da ihr Bildungssatz an sich klar ist, vereinfachen, wenn wir den Inbegriff sämmtlicher alternirenden Combinationen der Partialnenner vom $r$ten bis zum $t$ten durch $\underset{r.t}{C}$ bezeichnen. Denn dann erhält man

$$B_n = \frac{\underset{1.n}{C}}{\underset{2.n}{C}} \quad \ldots . \quad (1)$$

Es entsteht nun die Frage, ob diese empirisch gefundene Formel richtig ist.

II.

Aus dem Begriff der alternirenden Combinationen ergiebt sich, dass dieselben sowohl vom $r$ten bis zum $t$ten, als auch vom $t$ten bis zum $r$ten Gliede alterniren:

$$\underset{r.t}{C} = \underset{t.r}{C} \quad \ldots . \quad (2)$$

Die Fragen nun, welche uns hier in Bezug auf die alternirenden Combinationen angehen, sind:

1) wie aus den Combinationen der Elemente vom 2ten bis $n$ten die Combinationen aus den Elementen vom 1ten bis $n$ten oder allgemein, wie aus den Combinationen aus den Elementen vom $r$ten bis $t$ten die Combinationen vom $(r-1)$ten bis zum $t$ten abgeleitet werden können;

2) wie aus den Combinationen der Elemente vom 1ten bis $n$ten die Combinationen der Elemente vom 1ten bis zum $(n+1)$ten oder allgemein, wie aus den Combinationen vom $r$ten bis $t$ten Elemente die Combinationen vom $r$ten bis zum $(t+1)$ten Elemente gefunden werden können.

Die Elemente seien $e_1, e_2, e_3, e_4 \ldots e_n, e_{n+1}$ und die einzelnen Combinationen mögen als Produkte, der Complex derselben als Summe der Combinationen angesehen werden — was offenbar erlaubt ist, da das Produkt und die Summe immer wieder im allgemein combinatorischen Sinne genommen werden kann.

Nun wird offenbar $\underset{1.n}{C}$ aus $\underset{2.n}{C}$ erhalten, wenn allen Complexionen von $\underset{2.n}{C}$ das Element e_1 vorgesetzt wird und von den Complexionen von $\underset{2.n}{C}$ diejenigen beibehalten werden, welche nicht mit e_2 anfangen, d. h. es ist

$$\underset{1.n}{C} = e_1 . \underset{2.n}{C} + \underset{3.n}{C} \; .... \; (3)$$

Ebenso ist allgemein

$$\left.\begin{array}{l} \underset{(r-1).t}{C} = e_{r-1} . \underset{r.t}{C} + \underset{(r+1).t}{C} \\ \underset{r.t}{C} = e_r . \underset{(r+1).t}{C} + \underset{(r+2).t}{C} \end{array}\right\} \; ...... \; (4)$$

welche Formeln, wie leicht ersichtlich, nur dann richtig sind, wenn $\overset{0}{\underset{r.t}{C}} = 1$ gesetzt wird.

Hiermit und wegen des Satzes (2) ist zugleich die andere Frage erledigt. Es ist

$$\underset{1.n}{C} = \underset{1.(n-1)}{C} . e_n + \underset{1.(n-2)}{C} \; ...... \; (5)$$

$$\underset{r.t}{C} = \underset{r.(t-1)}{C} . e_t + \underset{r.(t-2)}{C} \; ...... \; (6)$$

Es sei nun

$$B_n = p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \cfrac{1}{p_3 + \cfrac{1}{p_4 + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{1}{p_{n-1} + \cfrac{1}{p_n}}}}}} \; .... \; (7),$$

$$B'_n = \frac{\underset{1.n}{C}}{\underset{2.n}{C}} \; ...., \; (8)$$

wobei sich C auf den Zeiger $p_1, p_2, p_3, p_4, ... p_n$ bezieht. Durch successive Anwendung des Satzes (3) erhalten wir:

$$\frac{\underset{1.n}{C}}{\underset{2.n}{C}} = \frac{p_1 . \underset{2.n}{C} + \underset{3.n}{C}}{\underset{2.n}{C}} = p_1 + \frac{\underset{3.n}{C}}{\underset{2.n}{C}},$$

$$\frac{\underset{2.n}{C}}{\underset{3.n}{C}} = 1 : \frac{\underset{3.n}{C}}{\underset{2.n}{C}} = 1 : \frac{\underset{3.n}{C}}{p_2 . \underset{3.n}{C} + \underset{4.n}{C}} = \cfrac{1}{p_2 + \cfrac{\underset{4.n}{C}}{\underset{3.n}{C}}},$$

$$\frac{\underset{3.n}{C}}{\underset{4.n}{C}} = 1 : \frac{\underset{4.n}{C}}{\underset{3.n}{C}} = 1 : \frac{\underset{4.n}{C}}{p_3 \cdot \underset{4.n}{C} + \underset{5.n}{C}} = \cfrac{1}{p_3 + \cfrac{\underset{5.n}{C}}{\underset{4.n}{C}}},$$

u. s. w.,

woraus folgt:

$$B'_n = p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \cfrac{1}{p_3 + \cfrac{1}{p_4 + \ldots\ldots}}} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

mithin ist $B'_n = B_n$ oder die Gleichung (1) ist richtig. Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man den Kettenbruch einrichtet.

III.

Unser Satz hat ein doppeltes Interesse. Einmal nämlich ist es sehr leicht, mit Hülfe der alternirenden Combinationen jeden Näherungswerth des Kettenbruchs unmittelbar zu finden; zweitens aber ist die combinatorische Auflösung unserer Aufgabe die ursprüngliche, d. h. unmittelbar aus der Natur der Verbindung der Partialnenner abgeleitete. Sie muss also auch die bekannte dependente Auflösung enthalten.

Sind B_{n-1}, B_n, B_{n+1} drei auf einander folgenden Näherungswerthe des Kettenbruchs, und setzen wir

$$B_{n-1} = \frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}},$$

$$B_n = \frac{Z_n}{N_n},$$

$$B_{n+1} = \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}};$$

so ist

$$Z_{n+1} = \underset{1.(n+1)}{C} = \underset{1.n}{C} . p_{n+1} + \underset{1.(n-1)}{C} = Z_n . p_{n+1} + Z_{n-1},$$

$$N_{n+1} = \underset{2.(n+1)}{C} = \underset{2.n}{C} . p_{n+1} + \underset{2.(n-1)}{C} = N_n . p_{n+1} + N_{n-1};$$

mithin

$$B_{n+1} = \frac{Z_n . p_{n+1} + Z_{n-1}}{N_n . p_{n+1} + N_{n-1}} \quad \ldots\ldots. \ (10).$$

IV.

Für die Benutzung unserer Formel zur wirklichen Berechnung der Näherungswerthe dürfte sich folgendes Schema empfehlen. Es sei z. B.

$$B_6 = 1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

Nenner	1	5	4	6	3	2
	1	2	3	4	5	6

C		P	Z	S	B_6
$\overset{6}{C}$ =	123456	1.5.4.6.3.2	720	1142	
	1234	1.5.4.6	120		
	1236	1.5.4.2	40		
$\overset{4}{C}$ =	1256	1.5.3.2	30		
	1456	1.6.3.2	36		
	3456	4.6.3.2	144		
	12	1.5	5		
	14	1.6	6		
$\overset{2}{C}$ =	16	1.2	2		
	34	4.6	24		
	36	4.2	8		
	56	3.2	6		
$\overset{2}{C}$ =	1	1	1		1142
$\overset{5}{C}$ =	23456	5.4.6.3.2	720	959	959
	234	5.4.6	120		
$\overset{3}{C}$ =	236	5.4.2	40		
	256	5.3.2	30		
	456	6.3.2	36		
	2	5	5		
$\overset{1}{C}$ =	4	6	6		
	6	2	2		

XXI.

Der Pascal'sche Lehrsatz in seiner Anwendung auf die geometrische Analysis.

Von

Herrn Planck,

Repetenten an der polytechnischen Schule zu Stuttgart.

I.

Der Pascal'sche Lehrsatz lässt folgende, seinen Beweis und sein Verständniss erleichternde, und zugleich für die geometrische Analysis sehr fruchtbare Fassung zu.

Lehrsatz. Wenn AB und $A'B'$ Projectionen einer und derselben Sehne eines Kreises auf eine und dieselbe Gerade von zwei Punkten C und C' des Kreises aus sind, so ist von jeder andern Sehne, von welcher in demselben Sinne AB eine Projection ist, auch $A'B'$ eine Projection.

Beweis. Zu der Geraden, auf die projicirt wird, und die wir den Grundschnitt nennen, ziehe man Parallelen durch die Endpunkte D, E einer Sehne des Kreises. Diese Parallelen treffen (Taf. IV. Fig. 2.) den Kreis in F, G, und FE, DG treffen den Grundschnitt in M und N. Ist nun AB eine Projection von DE vom Punkt C des Kreises aus, so sind, weil

$$ACB = DFE = BME = AND,$$

die Dreiecke ACB, BME, AND einander ähnlich, und man hat

1) $AN = \frac{AD \times AC}{AB}$, 2) $BM = \frac{BE \times BC}{AB}$.

Diese Ausdrücke behalten ihren Werth, folglich die Punkte M und N ihre Lage für jede andere Sehne, von welcher AB als Projection betrachtet werden kann. Somit ist das System der Sehnen, für welche AB gemeinschaftliche Projection ist, kein anderes, als das schon durch die Punkte M und N bestimmte System von Sehnen, oder es ist überhaupt jede Projection einer Sehne dieses Systems zugleich eine gemeinschaftliche Projection aller andern Sehnen des Systems.

Eine zweite Erzeugungsart für ein solches System von Sehnen ergibt sich, wenn man in Taf. IV. Fig. 2. noch AE und BD zieht, die den Kreis in H und J schneiden, und bedenkt, dass AB auch eine Projection von CH und CJ ist, dass somit diese Sehnen dem System der Sehne DE zugehören. In der Identität dieser zweiten Erzeugungsart mit der unmittelbar aus dem ausgesprochenen Satze folgenden liegt auch die Identität dieses Satzes mit dem Pascal'schen Lehrsatz.

Zugleich zeigt diese zweite Entstehungsweise eines Systems, wie man, wenn drei Sehnen gegeben sind, die Gerade, die ihnen als Grundschnitt zugehört, finden kann.

Als unmittelbarer Zusatz ergiebt sich noch, dass, wenn eine Sehne eines Systems durch den Pol des Grundschnittes geht, alle andern Sehnen des Systems durch diesen Pol gehen müssen, weil alsdann nach der Lehre von der Polare die Punkte M und N zusammenfallen.

Auch verdient bemerkt zu werden, dass im allgemeinen Falle, wenn ein Endpunkt der Projection einer Sehne gegeben ist, der andere Endpunkt eine doppelte Lage haben kann, während man für eine durch den Pol gehende Sehne nur einen zweiten Endpunkt der Projection erhält. Jede Projection einer durch den Pol gehenden Sehne kann als Projection der Sehne von zwei verschiedenen Punkten des Kreises aus betrachtet werden.

II.

Erste Hauptaufgabe. Die gemeinschaftliche Sehne zweier Systeme von Sehnen zu finden, deren jedes durch seinen Grundschnitt und eine der Projectionen gegeben ist.

Oder: Einem Kreis ein Viereck einzubeschreiben, dessen vier Seiten durch vier gegebene Punkte gehen sollen.

Auflösung. Man denke sich die gesuchte Sehne auf die beiden Grundschnitte so projicirt, dass der Schnittpunkt O derselben ein gemeinschaftlicher Endpunkt der Projectionen ist. Die beiden andern Endpunkte P und Q (Taf. V. Fig. 1.) werden sich dann bestimmen, da das System der gesuchten Sehne in Bezug auf beide Grundschnitte gegeben ist. Schneidet PQ den Kreis in R und S, OR und OS aber in T und U, so sind RU und ST zwei gemeinschaftliche Sehnen beider Systeme. Als besonderer Fall erscheint die Aufgabe: Die Sehne eines Systems zu finden, die durch einen gegebenen Punkt gehe. Nach I. ist nämlich jede Sehne, die durch den gegebenen Punkt geht, von gegebenem System in Bezug auf die Polare des Punktes. Eine Auflösung dieser Aufgabe unter der Form: Einem Kreis ein Dreieck einzubeschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen sollen, findet man z. B. in van Swinden.

Bei Auflösung der Aufgabe: die Sehne eines Systems zu finden, die einer gegebenen Geraden parallel sei, tritt an die Stelle der Polare der zu der gegebenen Geraden senkrechte Kreisdurchmesser, die Construction bleibt aber wesentlich dieselbe.

Uebrigens lassen sich die beiden letzten Aufgaben unabhängig von der Hauptaufgabe ziemlich einfach mittelst Benutzung der Punkte M und N lösen. Namentlich wird man die zum Grundschnitt parallele Sehne eines Systems dadurch erhalten, dass man von M oder N Tangenten an den Kreis, und durch deren Berührungspunkte Parallelen zum Grundschnitt zieht.

III.

Mittelst des Bisherigen ist man im Stande, wenn eine gegebene Sehne so projicirt werden soll, dass die Projection eine gegebene Bedingung erfülle, der gegebenen Sehne eine andere von demselben System zu substituiren, welche eine für die Lösung der jedesmaligen Aufgabe bequemere Lage hat.

Hieher gehören folgende Aufgaben:

1) Eine Sehne so zu projiciren, dass die Projection eine gegebene Grösse habe.

Auflösung. Man substituire der gegebenen Sehne die zum Grundschnitt parallele Sehne desselben Systems. Den Punkt des Kreises, von dem aus sich diese Sehne in der verlangten Weise projicirt, wird man erhalten, wenn man ein Stück gleich dem gegebenen auf dem Grundschnitt beliebig aufträgt, über dieser Grundlinie ein Dreieck construirt, dessen Seiten durch die Endpunkte der Sehne gehen, und durch die Spitze dieses Dreiecks eine Parallele zum Grundschnitt zieht.

Eine Lösung der Aufgabe für den Fall, dass es eine zum Grundschnitt parallele Sehne des Systems gar nicht gibt, (dieser Fall wird eintreten, wenn die beiden Endpunkte der gegebenen Sehne auf verschiedenen Seiten des Grundschnitts liegen) wird in IV. folgen.

2) **Eine Sehne so zu projiciren, dass die Projection durch einen gegebenen Punkt des Grundschnitts in gegebenem Verhältniss getheilt wird.**

Auflösung. Auch hier ist die bequemste Lage der Sehne diejenige, welche zum Grundschnitt parallel ist. Man wird diese Sehne in dem gegebenen Verhältniss theilen, den Theilungspunkt durch eine Gerade mit dem gegebenen Punkt des Grundschnittes verbinden, und vom Schnitt dieser Geraden und des Kreises aus die Sehne projiciren.

Eine zweite Auflösung namentlich für den Fall, dass es keine zum Grundschnitt parallele Sehne des Systems gibt, ist folgende:

Man substituire der gegebenen Sehne diejenige, welche durch den gegebenen Punkt des Grundschnittes geht. Es sei (Taf. V. Fig. 2.) DE diese Sehne, F der gegebene Punkt, AB die gesuchte Projection. Wählt man dann den Punkt G auf DE so, dass

$$DF:FG = AF:FB,$$

so ist BG parallel zu AC, und folglich

$$GBE = ACE,$$

demnach der Punkt B leicht zu bestimmen.

Wenn die Entfernung eines Endpunktes der Projection von einem Punkte des Grundschnittes zur Entfernung des andern Endpunktes von einem andern Punkte des Grundschnittes ein gegebenes Verhältniss haben soll, so hat man nur die Entfernung der beiden gegebenen Punkte in dem gegebenen Verhältniss zu theilen, um auf die bereits gelöste Aufgabe zurückzukommen. Sind die beiden Punkte des Grundschnitts diejenigen, in denen der Grundschnitt dem Kreis begegnet (Taf. V. Fig. 3.), so lässt sich die Aufgabe folgendermassen fassen:

Es soll eine Gerade gezogen werden, auf welcher vier gegebene, in einem Punkt sich schneidende und hier die Winkel α, β, γ bildende Gerade drei Stücke abschneiden, von welchen das mittlere eine gegebene Grösse habe, während die beiden andern in gegebenem Verhältniss zu einander stehen.

Von dieser Aufgabe, in etwas anderer Form gefasst, ist vor Kurzem in diesem Archiv eine Lösung gegeben worden.

Es käme nun die Aufgabe: eine Sehne so zu projiciren, dass das Rechteck aus den beiden Stücken, in welche die Projection durch einen gegebenen Punkt des Grundschnittes getheilt wird, eine gegebene Grösse habe. Von dieser Aufgabe sind wir mittelst des Bisherigen bloss folgenden besondern Fall zu lösen im Stande.

3) Eine Sehne so zu projiciren, dass die Projection mit einer zweiten gegebenen Sehne auf einem Kreise liege.

Auflösung. Man suche die Sehne vom System der ersten, welche durch den Schnittpunkt der zweiten und des Grundschnittes geht. Projicirt man die gefundene Sehne so, dass sie mit ihrer eigenen Projection auf einem Kreise liegt, so liegt diese Projection auch mit der zweiten der gegebenen Sehnen auf einem Kreise, und die Aufgabe ist gelöst. Der Punkt aber, von welchem aus alle Sehnen sich so projiciren, dass sie mit ihrer Projection auf einem Kreise liegen, ist der, in dem die Tangente parallel zum Grundschnitt ist.

IV.

Die in I. für AN und BM gefundenen Ausdrücke behalten ihren Werth nicht nur für jede andere Sehne des gegebenen Kreises, von welcher AB als Projection betrachtet werden kann, sondern sie behalten ihren Werth auch, wenn man AB als Projection einer Sehne eines anderen Kreises (von einem Punkte dieses Kreises aus) betrachtet, für welchen die Produkte $AD \times AC$, $BE \times BC$ ihren Werth beibehalten. Die geometrische Bedingung hiervon ist entweder, dass der zweite Kreis dem Grundschnitt in demselben Punkte begegnet, wie der erste, oder dass der Mittelpunkt des zweiten Kreises mit dem Mittelpunkt des ersten in einer zum Grundschnitt Senkrechten liegt, und die vom Fusspunkte dieser Senkrechten an die beiden Kreise gezogenen Tangenten der Grösse nach gleich sind.

Sonach erweitert sich unser Hauptsatz dahin, dass durch den gegebenen Kreis und den Grundschnitt ein System von Kreisen, und durch den Punkt M oder N in Bezug auf jeden dieser Kreise ein System von Sehnen bestimmt ist, deren jeder ein und dasselbe System von Projectionen zugehört.

Hiedurch ist man in den Stand gesetzt, in Fällen, wo sich in dem gegebenen Kreise keine die Lösung der Aufgabe wesentlich erleichternde Lage einer Sehne ermitteln lässt, auf einen anderen Kreis überzugehen, und sich dort die bequemste Lage der Sehne des Systems herauszusuchen. Dabei werden folgende zwei Hauptmittel zur Anwendung kommen. Man wird entweder 1) dem gegebenen Kreis denjenigen des Systems substituiren, der die in M oder N errichtete Senkrechte berührt, oder man wird, wenn diess nicht möglich ist, 2) dem gegebenen Kreis denjenigen des Systems substituiren, dessen Mittelpunkt im Grundschnitt liegt. Im erstern Falle lässt man an die Stelle der gegebenen Sehne des gegebenen Kreises den zum Grundschnitt parallelen Durchmesser des neuen Kreises treten, im zweiten Fall einen Durchmesser, dessen Lage gegen den Grundschnitt von der Lage des Punktes M (oder N) abhängt.

Als erstes Beispiel kann die Lösung der Aufgabe 1) in III. für den schon besprochenen Fall dienen. Man findet den dem System zugehörigen Durchmesser des neuen Kreises, wie Taf. V. Fig. 4. zeigt. Ist AB die gesuchte Projection des Durchmessers DE, und O' die Mitte von AB, so sieht man leicht, dass $OCO' = AOD$, dass somit das Dreieck OCO' gegeben ist.

Man wird bei dieser Gelegenheit bemerken, dass jede Projection des Durchmessers DE als Durchmesser eines Kreises betrachtet werden kann, der den Kreis O unter dem Winkel AOD schneidet. Ebenso kann die Projection des zum Grundschnitt parallelen Durchmessers eines Kreises als Durchmesser eines Kreises betrachtet werden, der den ersten berührt.

V.

Zweite Hauptaufgabe. Die gemeinschaftliche Projection für zwei gegebene Sehnen zweier Kreise zu finden.

Oder: Ein Viereck zu construiren, wenn gegeben eine Diagonale der Lage nach, die ihr gegenüberliegenden Winkel und vier Punkte, durch welche die vier Seiten gehen sollen.

Auflösung. Nach IV. wird die Aufgabe auf eine der drei folgenden sich zurückführen lassen. Es soll die gemeinschaftliche Projection gefunden werden

1) für die zum Grundschnitt parallelen Durchmesser zweier Kreise;

2) für den zum Grundschnitt parallelen Durchmesser eines Kreises, und einen Durchmesser eines zweiten Kreises, dessen Mittelpunkt im Grundschnitt liegt;

3) für zwei Durchmesser zweier Kreise, deren Mittelpunkt im Grundschnitt liegt.

Nach der Schlussbemerkung zu IV. aber lassen sich diese Aufgaben folgendermassen fassen:

1) Einen Kreis zu construiren, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden (dem Grundschnitt) liege, und der zwei gegebene Kreise berühre.

2) Einen Kreis zu construiren, der einen gegebenen Kreis berühre, einen zweiten unter gegebenem Winkel schneide, und dessen Mittelpunkt auf einem gegebenen Durchmesser des letztern Kreises liege.

3) Einen Kreis zu construiren, der zwei gegebene Kreise unter gegebenen Winkeln schneide, und dessen Mittelpunkt auf dem gemeinschaftlichen Durchmesser beider Kreise liege.

Die elementare Lösung von Aufgabe 1) wird als bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Aufgabe 2) wird man mit Leichtigkeit auf den Fall zurückführen, wo der gegebene Winkel ein rechter ist. Am meisten Schwierigkeit macht Aufgabe 3). Sie lässt sich auf die Form bringen: auf dem gemeinschaftlichen Durchmesser zweier Kreise einen Punkt zu bestimmen, so dass die Differenz der von ihm an die beiden Kreise gezogenen Tangenten eine gegebene Grösse habe. Sind (Taf. V. Fig. 5.) OP und $O'P'$ die Halbmesser der beiden Kreise, Q der gesuchte Punkt, so schneiden die mit den Halbmessern OQ und $O'Q$ beschriebenen Kreisbögen auf den in P und P' errichteten Scheiteltangenten zwei Stücke PR, $P'R'$ ab, gleich den von Q an die beiden Kreise gezogenen Tangenten. Macht man jetzt $PS=O'P'$, ST gleich der Differenz der Tangenten, so ist $OR+RT=OR+O'R'=OO'$. Man hat sonach über OT als Grundlinie ein Dreieck zu construiren, dessen Spitze auf der in P errichteten Scheiteltangente liegt und dessen beide andere Seiten zusammen gleich OO' sind, eine bekannte Aufgabe der Elementargeometrie.

Als besonderer Fall unserer Hauptaufgabe erscheint z. B. der folgende: Ein Viereck zu construiren, wenn gegeben eine Diagonale der Lage nach, mit den ihr gegenüberliegenden Winkeln und Ecken. Man kommt auf diese Aufgabe, wenn die beiden ursprünglich gegebenen Sehnen dem Grundschnitt parallel und der Grösse nach gleich sind.

Die Hauptbedeutung unserer Aufgabe wird sich im Folgenden zeigen.

VI.

Wir werden nun die ein System von Projectionen charakterisirende Bedingungsgleichung aufsuchen, und hierbei besonders den Fall berücksichtigen, wo man ein System von Kreisen hat, die den Grundschnitt schneiden.

Es sei (Taf. VI. Fig. 1.) DE die Sehne, welche projicirt wird, und im Uebrigen Alles, wie in I., so hat man

$$1)\quad AN=\frac{AD\times AC}{AB},\qquad 2)\quad BM=\frac{BE\times BC}{AB}.$$

Sind R und S die Punkte, in welchen der Grundschnitt dem Kreis begegnet, so ist

$$AD \times AC = AR \times AS, \quad BE \times BC = BR \times BS,$$

und man hat

$$3) \quad AN - BM = AB - MN = \frac{AR \times AS - BR \times BS}{AB},$$

oder

$$\begin{aligned} MN \times AB &= AR \times AB - AR \times AS + BR \times BS \\ &= (AR + BR)(AS - BS) - AR \times AS + BR \times BS \\ &= BR \times AS - AR \times BS. \end{aligned}$$

Setzt man $AR = \alpha$, $BR = \beta$, $BS = \gamma$, folglich $RS = \beta + \gamma$, so hat man

$$MN = \frac{\beta(\alpha+\beta+\gamma) - \alpha\gamma}{\alpha+\beta},$$

$$RS + MN = 2\frac{\beta(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha+\beta},$$

$$RS - MN = 2\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta};$$

woraus

$$4) \quad \frac{RS+MN}{RS-MN} = \frac{\beta(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\gamma} = \frac{AS}{BS} : \frac{AR}{BR}.$$

Für den Fall, dass die Punkte R und S zwischen M und N liegen, erhält man ebenso

$$\frac{MN+RS}{MN-RS} = \frac{AS}{BS} : \frac{AR}{BR}.$$

VII.

Die in VI. gefundene Bedingungsgleichung für ein System von Projectionen enthält nicht nur einen neuen Beweis für alle im Bisherigen aufgestellten Sätze, sondern sie gibt denselben auch erst ihre wahre Bedeutung. Es ist nemlich das durch die Gleichung

$$\frac{AS}{BS} : \frac{AR}{BR} = K$$

ausgesprochene Verhältniss kein anderes, als dasjenige, welches in der neueren Geometrie unter dem Namen eines anharmonischen Verhältnisses vorkommt, weil es für $K=1$ zu einem harmonischen Verhältnisse wird. Man wird hiedurch auf eine neue, vom Kreis unabhängige, rein lineäre Erzeugungsart eines Systems von Projectionen in dem bisher besprochenen Sinn hingewiesen. Dieselbe ist im folgenden Lehrsatz enthalten.

Wenn (Taf. VI. Fig. 2.) AB die Projection einer begrenzten Geraden DE, die verlängert den Grundschnitt in S trifft, von einem Punkte C einer Geraden aus ist, die den Grundschnitt in R trifft, so findet für jede Lage des Punktes C auf dieser Geraden die Gleichung Statt:

$$\frac{AS}{BS}:\frac{AR}{BR}=K.$$

Der Beweis soll hier ganz, wie in VI., geführt werden. Man ziehe durch D und E Parallelen zum Grundschnitt, die die Gerade CR in F und G treffen. FE, DG treffen den Grundschnitt in M und N. Dann ist, wie leicht zu sehen,

$$1)\quad AN=\frac{AR\times AS}{AB}, \qquad 2)\quad BM=\frac{BR\times BS}{AB}$$

und da nun Alles, wie in VI., ist, so wird man auch die dort gefundene Gleichung

$$\frac{AS}{BS}:\frac{AR}{BR}=\frac{RS+MN}{RS-MN}$$

wieder erhalten.

Man kann bei dieser Gelegenheit einen Lehrsatz der neueren Geometrie herleiten, den wir für unsern Beweis hätten benutzen können. Es ist, wie die Figur zeigt:

$$SN=\frac{DS\times EG}{DE}, \qquad SM=\frac{ES\times DF}{DE};$$

also

$$\frac{SN}{SM}=\frac{DS}{ES}\times\frac{EG}{DF}.$$

Schneidet CR die Gerade DE in Q, so ist

$$\frac{EG}{DF}=\frac{EQ}{DQ},$$

und folglich

$$\frac{SN}{SM}=\frac{DS}{ES}:\frac{DQ}{EQ}.$$

Nun ist, wie leicht zu sehen,

$$RN=SM,\quad SN=\frac{1}{2}(RS+MN),\quad SM=\frac{1}{2}(RS-MN)$$

und man erhält demnach die Gleichung

$$\frac{DS}{ES}:\frac{DQ}{EQ}=\frac{RS+MN}{RS-MN}=\frac{AS}{BS}:\frac{AR}{BR}.$$

Man vergleiche hierüber die Geometrie von Kunze.

VIII.

Da sich nach VII die Aufgabe, eine begrenzte Gerade von einer zweiten gegebenen Geraden aus auf den Grundschnitt so zu projiciren, dass die Projection eine gegebene Bedingung erfülle, auf die Aufgabe zurückführen lässt, eine Sehne eines Kreises von einem Punkt dieses Kreises aus in der verlangten Weise zu projiciren, so sind, wie man sieht, mit den bisher für den Kreis gelösten Aufgaben eben so viel analoge für den Fall gelöst, wo statt des Kreises und der Sehne eine unbegrenzte und eine begrenzte Gerade gegeben sind.

Besonders bemerkenswerth erscheint hier die Aufgabe, einem Dreieck ein Dreieck einzubeschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen sollen. In Taf. VI. Fig. 3., wo D, E, F die gegebenen Punkte sind, ist AB sowohl eine Projection von DE, als DF, und folglich mittelst der zweiten Hauptaufgabe zu bestimmen.

Es lässt sich aber sogar die allgemeine Aufgabe: Einem $n$eck ein $n$eck einzubeschreiben, dessen Seiten durch n gegebene Punkte gehen sollen, nach den aufgestellten Principien lösen. Da jedoch die Lösung praktisch nicht wohl brauchbar ist, so möge darüber folgende Andeutung genügen.

Wenn AB und BC zwei verschiedenen Systemen angehörende, den Endpunkt B aber gemein habende Projectionen sind, so wird, wie leicht einzusehen, zwischen den Punkten A und C eine Abhängigkeit derselben Art Statt finden, wie zwischen A und B oder B und C, d. h. auch AC wird einem bestimmten System von Projectionen angehören. Um dieses System geometrisch zu bestimmen, hätte man zunächst irgend drei Lagen von AC zu zeichnen, und dann die Aufgabe zu lösen, wenn drei Projectionen von einem System gegeben sind, das System von Kreisen, auf welches sie sich beziehen, zu finden. Die Lösung dieser Aufgabe enthält der Satz, dass, wenn AB und $A'B'$ Projectionen einer und derselben Sehne DE sind, $ADA' = BEB'$ ist.

Betrachtet man nun z. B. (Taf. VI. Fig. 4.) das Viereck, dessen Seiten durch die Punkte D, E, F, G gehen sollen, so gehört AC sowohl zu einem unmittelbar gegebenen System als Projection von DE, als auch zu einem mittelbar gegebenen System, weil AB und BC gegebenen Systemen zugehören. Demnach ist man wieder auf die zweite Hauptaufgabe zurückgeführt, und wird diess ebenso, wenn es sich um die allgemeine Aufgabe handelt.

IX.

Wir sind nun mit den Hauptanwendungen zu Ende, und gehen noch zu einigen besonderen über, zunächst für den Fall, wo die Punkte A, R, B, S harmonisch liegen, oder wo es sich um die Projection einer durch den Pol des Grundschnittes gehenden Sehne handelt.

Zunächst fällt in die Augen, dass mit den bisher gelösten Aufgaben eine Reihe von Aufgaben in Bezug auf die Construction eines Systems harmonischer Linien gelöst ist.

Eine Reihe neuer Anwendungen aber eröffnet sich durch folgenden

Lehrsatz:

Wenn man alle Projectionen einer durch den Pol des Grundschnitts gehenden Sehne von einem willkührlich angenommenen Punkt aus wieder projicirt auf eine Gerade, die parallel ist zur Verbindungslinie dieses Punktes und des Fusspunktes der vom Pol auf den Grundschnitt gefällten Senkrechten, so ist das Verhältniss der ersten Projection zur zweiten von constanter Grösse.

Beweis. Ist P der Fusspunkt der Senkrechten, folglich die Mitte von RS, so lässt sich die Gleichung

$$\frac{AS}{BS} : \frac{AR}{BR} = 1, \text{ oder } \frac{AS}{BS} = \frac{AR}{BR}$$

in der Form schreiben

$$\frac{AP+PR}{BP+PR} = \frac{AP-PR}{PR-BP} \quad \text{oder} \quad \frac{AP+PR}{AP-PR} = \frac{PR+BP}{PR-BP}.$$

Hieraus erhält man unmittelbar

$$\frac{AP}{PR} = \frac{PR}{BP} \quad \text{oder} \quad AP \times BP = PR^2.$$

Für den Fall, dass der Grundschnitt den Kreis nicht trifft, erhält man leicht auf directem Wege, indem man die durch den Pol parallel zum Grundschnitt gezogene Sehne projicirt:

$$AP \times BP = PT^2,$$

wo PT die von P an den Kreis gezogene Tangente ist.

Ist nun (Taf. VI. Fig. 5.) O der Punkt, von welchem aus die Projection AB projicirt wird, Q der Schnittpunkt der zu OP Parallelen und des Grundschnitts, ab die Projection von AB, und zieht man durch A eine Parallele zu OP, die den Projectionsstrahl Ob in C trifft, so ist

$$1)\quad AB = AC\frac{BP}{OP}, \qquad 2)\quad ab = AC\frac{Oa}{OA} = AC\frac{PQ}{AP}$$

und folglich

$$3)\quad \frac{AB}{ab} = \frac{AP \times BP}{OP \times PQ},$$

ein constanter Ausdruck, da das Product $AP \times BP$ constant ist

Für den Fall, dass der Punkt O selbst auf dem Kreise angenommen wird, und O' der zweite Schnittpunkt von OP mit dem Kreise ist, ist sowohl PR^2, als $PT^2 = OP \times O'P$, und die Gleichung 3) nimmt die Form an

$$4)\quad \frac{AB}{ab} = \frac{O'P}{PQ}.$$

Mit Hilfe dieses Satzes wird man folgende Aufgaben lösen:

I. Durch einen gegebenen Punkt zwei Gerade so zu legen, dass sie auf zwei gegebenen Geraden zwei Stücke von gegebener Grösse abschneiden.

II. Durch einen gegebenen Punkt zwei Gerade zu legen, die mit einander einen gegebenen Winkel machen und auf zwei gegebenen Geraden zwei Stücke von gegebenem Verhältniss abschneiden.

Man wird in beiden Aufgaben den gegebenen Punkt als den Punkt O unseres Lehrsatzes betrachten, die gegebenen Geraden aber als diejenigen, auf welche dort projicirt wird. Den Kreis wird man mittelst der Gleichung 4), die den Punkt O' gibt, construiren. Bei der ersten Aufgabe handelt es sich dann darum, durch den Pol eine Sehne zu legen, die sich von O aus in gegebener Grösse auf den Grundschnitt projicirt (Aufgabe 1) in III.). Bei der zweiten Aufgabe wird man, da die Projectionsstrahlen einen gegebenen Winkel mit einander machen sollen, durch den Pol eine Sehne von gegebener Grösse zu legen haben.

Eine direktere und hübschere Auflösung von Aufgabe I. enthält folgender Lehrsatz.

X.

Lehrsatz.

Wenn der Grundschnitt den Kreis im Punkte P berührt, und es werden von einem willkührlich angenommenen Punkt O aus alle Projectionen von einerlei System auf eine zu OP parallele Gerade projicirt, so ist diese zweite Projection von constanter Grösse.

Beweis. Die Gleichungen 1) und 2) in I. geben in diesem Fall

$$AN+BM=AB-2MP=\frac{AP^2+BP^2}{AB},$$

woraus, da $AB=AP+BP$,

$$MP=\frac{AP\times BP}{AB}.$$

Nun ist, wie in IX.,

$$ab=AB\frac{OP\times PQ}{AP\times BP},$$

und sonach hier

$$ab=\frac{OP\times PQ}{MP}.$$

Der Lehrsatz lässt eine andere Fassung zu, wenn O selbst auf dem Kreise liegt. Lässt man nemlich alsdann ab sich fortbewegen, so werden Oa und Ob lauter Sehnen von einerlei System aus dem Kreise ausschneiden

Durch Combination dieses Lehrsatzes mit früheren Aufgaben und Lehrsätzen lässt sich nun noch eine Reihe von Aufgaben lösen, die wir nicht namentlich aufzuführen brauchen.

Anhang.

Die im Vorhergehenden bewiesenen Hauptlehrsätze lassen sich in einen Lehrsatz zusammenfassen. Wenn man die

Sehne DE eines Kegelschnitts von der Peripherie des Kegelschnitts aus auf eine Gerade projicirt, die dem Kegelschnitt in den Punkten R und S begegnet, so ist die Abhängigkeit zwischen den Endpunkten A, B der Projection durch die Gleichung ausgedrückt:

$$\frac{AS}{BS}:\frac{AR}{BR}=K.$$

Um diesen Satz auf dem Wege der analytischen Geometrie möglichst einfach zu erhalten, nehmen wir zu Coordinatenaxen die Gerade RS und den der Sehne RS zugeordneten Durchmesser. Die Gleichung des Kegelschnitts wird sich dann in der Form anschreiben lassen:

$$x^2-\alpha^2=2py+qy^2.$$

Die Coordinaten der Endpunkte der gegebenen Sehne seien (a, b) und (a', b'), die Abscissen der Endpunkte der Projection aber x_0 und x_1. Um die zwischen x_0 und x_1 Statt findende Abhängigkeit zu erhalten, kann man die Bedingung anschreiben, dass die beiden projicirenden Geraden dem Kegelschnitt in einem und demselben Punkte begegnen. Die Gleichungen dieser Geraden heissen

$$(a-x_0)(y-b)=b(x-a), \quad \text{wobei} \quad a^2-\alpha^2=2pb+qb^2,$$

$$(a'-x_1)(y-b')=b'(x-a'), \quad \text{wobei} \quad a'^2-\alpha^2=2pb'+qb'^2.$$

Es seien (X, Y) und (X', Y') die Coordinaten für die zweiten Schnittpunkte dieser Geraden und des Kegelschnitts. Dann findet man durch eine einfache Rechnung:

$$X=\frac{2x_0(pb+\alpha^2)-a(x_0^2+\alpha^2)}{2pb+\alpha^2-2ax_0+x_0^2}, \qquad X'=\frac{2x_1(pb'+\alpha^2)-a'(x_1^2+\alpha^2)}{2pb'+\alpha^2-2a'x_1+x_1^2},$$

$$Y=\frac{b(x_0^2-\alpha^2)}{2pb+\alpha^2-2ax_0+x_0^2}, \qquad Y'=\frac{b'(x_1^2-\alpha^2)}{2pb'+\alpha^2-2a'x_1+x_1^2}.$$

Wir schreiben jetzt die beiden Gleichungen an $\frac{X}{Y}=\frac{X'}{Y'}$ und $Y=Y'$, und erhalten hieraus:

$$1) \qquad 2pbb'(x_0-x_1)(x_0x_1+\alpha^2)$$
$$+b(x_0^2-\alpha^2)(2\alpha^2x_1-a'(x_1^2+\alpha^2))-b'(x_1^2-\alpha^2)(2\alpha^2x_0-a(x_0^2+\alpha^2))=0,$$

$$2) \qquad 2pbb'(x_0-x_1)(x_0+x_1)$$
$$+b(x_0^2-\alpha^2)(x_1^2-2a'x_1+\alpha^2)-b'(x_1^2-\alpha^2)(x_0^2-2ax_0+\alpha^2)=0;$$

woraus durch Elimination von p:

$$b(x_0^2-\alpha^2)[(x_0+x_1)(2\alpha^2x_1-a'(x_1^2+\alpha^2))-(x_0x_1+\alpha^2)(x_1^2-2a'x_1+\alpha^2)]$$
$$-b'(x_1^2-\alpha^2)[(x_0+x_1)(2\alpha^2x_0-a(x_0^2+\alpha^2))$$
$$-(x_0x_1+\alpha^2)(x_0^2-2ax_0+\alpha^2)]=0.$$

Diese Gleichung reducirt gibt

3) $$(x_0^2-\alpha^2)(x_1^2-\alpha^2)[b[a'(x_0-x_1)+\alpha^2-x_0x_1] \\ -b'[a(x_1-x_0)+\alpha^2-x_0x_1]]=0,$$

und wenn man mit den unbrauchbaren Factoren wegdividirt, erhält man endlich

4) $$x_0x_1-\frac{ab'+a'b}{b-b'}(x_0-x_1)-\alpha^2=0,$$

eine Gleichung, deren geometrische Bedeutung leicht zu erkennen ist.

Zu bemerken ist noch, dass in der vorausgesetzten Gleichung des Kegelschnittes der Fall nicht enthalten ist, wo die Gerade, auf die man projicirt, parallel zu einer Asymptote ist. Die Bedingungsgleichung für die Projection wird aber in diesem Fall besonders einfach: namentlich ist bemerkenswerth, dass *die Projection der Sehne einer Hyperbel auf die Asymptote selbst von constanter Grösse ist.* Man kann diesen Satz leicht aus der in X. bewiesenen Eigenschaft des Kreises durch Centralprojection desselben herleiten.

Die Umkehrung unseres Hauptsatzes ist folgender, sehr leicht direkt zu beweisender Satz. *Der geometrische Ort eines Punktes, von dem aus eine begrenzte Gerade sich auf eine zweite Gerade so projicirt, dass die Projectionen ein gegebenes System von Projectionen in dem bisherigen Sinne bilden, ist ein Kegelschnitt, von dem die begrenzte Gerade eine Sehne wird.* Wird ein auf diese Weise gegebener Kegelschnitt von einer dritten Geraden in den Punkten r und s geschnitten, so gehört nach dem Hauptsatze jede Projection ab der gegebenen Sehne auf diese Gerade zu einem bestimmten System in Bezug auf die Punkte r, s. Diese Punkte wird man in jedem einzelnen Falle mittelst der zweiten Hauptaufgabe bestimmen können, und sucht man dann weiter eine Lage von ab, die einem unmittelbar gegebenen System von Projectionen zugehört, so hat man folgende wichtige Aufgabe gelöst:

Durch zwei gegebene Punkte zwei Gerade so zu legen, dass sie auf zwei gegebenen Geraden zwei Stücke abschneiden, welche gegebenen Systemen von Projectionen zugehören.

Ein besonderer Fall dieser Aufgabe ist z. B. der, wenn verlangt wird, dass die beiden gesuchten Stücke eine gegebene Grösse haben sollen.

Zum Schlusse möge hier noch folgende, mit den im Vorhergehenden behandelten Aufgaben verwandte Aufgabe einen Platz finden.

Man soll ein Viereck construiren, in dem sowohl die Seiten, als die Diagonalen gegebene Winkel mit einander machen.

Bei der Auflösung sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden.

I. Einer der Winkel des Vierecks ist ein überstumpfer, oder einspringender.

Es sei (Taf. VI. Fig. 6.) $ABED$ das gesuchte Viereck, dessen Seiten AD, BE sich in C, und dessen Diagonalen AE, BD sich in G schneiden. DE und AB schneiden sich in F. Das Dreieck ABD betrachte man als Parallelprojection eines zweiten Dreiecks, mit dem es die Grundlinie AB gemein hat, die drei Transversalen AG, BC, DF aber als die Projectionen der drei Höhen des letztern Dreiecks. Man wird dieses Dreieck zeichnen können, indem man durch C und G Parallelen zu DF zieht, die die Grundlinie in c und g treffen, und die Schnittpunkte der in c und g errichteten Senkrechten mit dem über AB beschriebenen Halbkreis construirt. Heissen diese Schnittpunkte C' und G', und schneiden AC', BG' sich in D', BC' und AG' in E', so ist das Dreieck ABD mit seinen Transversalen eine Parallelprojection des Dreiecks ABD' mit seinen Höhen, und demnach GG' parallel zu CC'. Die Aufgabe wird daher sein, das Viereck $ABGG'$ zu construiren, in welchem ausser der Seite AB die Winkel $AG'B$, AGB und die Richtung von GG' gegeben sind, und in dem überdiess $G'g$ zu Gg sich verhalten soll, wie $C'c$ zu Cc. Ein diesem Viereck ähnliches wird man bekommen, wenn man ein Viereck $A'B'CC'$ construirt, in welchem $A'C'B' = 1\,\mathfrak{R}.$, und $A'CB' = AGB$ ist. Folglich ist die Aufgabe keine andere, als die am Schluss zu V. erwähnte und mit der zweiten Hauptaufgabe gelöste, für welche man jedoch in diesem speciellen Falle noch eine einfachere Lösung erhält, wenn man sich für das durch die Gleichung

$$Ac \times cB = C'c^2$$

bestimmte System von Projectionen nach IX. einen durch den Punkt C gehenden Kreis verschafft, und dann eine Sehne vom System sucht, die sich von C aus unter dem Winkel AGB projicirt.

II. Die Winkel des Vierecks sind alle kleiner als zwei Rechte. Die Auflösung wird in diesem einfacher scheinenden Falle leider complicirter.

Es sei $ABED$ wieder das gesuchte Viereck (Taf. VII. Fig. 1.) und die Bezeichnungen, wie vorher, so wird man auch jetzt das Dreieck ABD als Parallelprojection eines Dreiecks ABD' betrachten, und DF als Projection der Höhe $D'F$, aber nicht mehr AG und BC als Projectionen der beiden andern Höhen. Dennoch bleibt die Construction im Wesentlichen dieselbe, wie im vorigen Fall. Wählt man nemlich den Punkt C' wieder so, dass

$$C'c^2 = Ac \times Bc,$$

so wird auch

$$G'g^2 = Ag \times Bg$$

werden, weil alsdann das Viereck $ABE'D'$ ein Kreisviereck ist

$$(BE'F = BC'c = BAD')$$

und somit

$$BG'g = BD'F = BAG'.$$

Es wird sich also das Viereck $ABG'G$ durch eine der vorigen ganz analoge Construction zeichnen lassen. Zu bemerken ist noch, dass die Aufgabe sich in folgender merkwürdigen Form fassen lässt. **Ein Parallelogramm zu construiren, dessen vier Ecken auf vier in einem Punkt sich schneidenden Geraden aufliegen, und dessen Seiten gegebene Winkel mit einander machen.**

Macht man nemlich (Taf. VII. Fig. 2) AF, AG parallel und gleich den Seiten CB, CD des Vierecks $ABCD$, so ist $FBDG$ ein Parallelogramm, weil FB gleich und parallel GD ist.

Interessant für die beschreibende Geometrie ist der Fall, wo dieses Parallelogramm ein Rechteck ist. Zieht man alsdann durch den Schnittpunkt der vier Geraden eine Gerade parallel zu einer der Seiten des Rechtecks, so wird man diese Gerade als Spur einer Ebene betrachten können, in der zwei Gerade liegen, von welchen das eine Paar der gegebenen, (das der Spur näher liegende), die Projection, und das andere die Umklappung in die Grundebene vorstellt. Man hat somit die Aufgabe gelöst: **Die Ebene zweier in der Grundebene sich schneidender Geraden zu finden, wenn gegeben ist 1) die Projection der Geraden und 2) ihre Umklappung.**

XXI.

Wann liegt der Schwerpunkt eines ebenen Viereckes ausserhalb desselben?

Eine Gelegenheitsfrage

beantwortet von

Dr. Wilhelm Matzka,

Prof. der Math. an der Prager Universität.

---

1. Sei in einem Viereck $ABCD$ (Taf. VII. Fig. 3.) eine innere (dasselbe zertheilende) Diagonale AC gezogen, und seien in den entstehenden Theildreiecken ABC, ACD die Schwerpunkte F, G dadurch bestimmt, dass man $EA = EC$, $EF = \frac{1}{3} EB$ und $EG = \frac{1}{3} ED$ machte. Dann ist bekanntlich die Strecke FG eine sogenannte Schwerlinie und wird durch den Schwerpunkt M des ganzen Viereckes zertheilt. Soll nun dieser Schwerpunkt ausser des Viereckes Fläche fallen, so muss diess schon mit einem Theile dieser Schwerlinie FG der Fall sein; was aber nur geschehen kann, wenn das Viereck an einem Grenzpunkte der zertheilenden Diagonale AC, etwa an C, einen eingehenden Winkel hat.

2. Man ziehe auch die äussere Diagonale BD, und verlängere bis zu ihr noch die innere Diagonale AC, welche sofort auch die Schwerlinie FG in H schneiden muss. Damit M im Aussenwinkel BCD liege, muss auch schon H darin liegen, folglich

$$EH \geqq EC$$

sein. So wie nun

$$EF=\frac{1}{3}EB,$$

ist auch

$$EH=\frac{1}{3}EJ=\frac{EC+CJ}{3};$$

daher soll sein

$$\frac{EC+CJ}{3}\geqq EC,$$

also

$$CJ\geqq 2EC \quad \text{d. i.} \quad CJ\geqq CA.$$

Der Schwerpunkt fällt demnach nur dann ausserhalb des Vierecks, wenn die Verlängerung seiner inneren Diagonale bis an die äussere mindestens so lang als die innere selbst ist.

3. Man bestimme nun auch die Schwerpunkte der Dreiecke ABD, CBD, deren Unterschied das Viereck $ABCD$ ist. Hiezu zieht man aus der Mitte O von BD die Transversalen OA, OC und macht

$$OP=\frac{1}{3}OA,\ OQ=\frac{1}{3}OC,$$

wonach P, Q die verlangten Schwerpunkte sind. Die durch sie gehende neue Schwerlinie PQ des Viereckes muss sofort die frühere Schwerlinie FG in dem verlangten Schwerpunkte M schneiden.

4. Nun ist $PQ \parallel AC$, folglich, so wie $OP=\frac{1}{3}OA$, auch $ON=\frac{1}{3}OJ$, daher $JN=\frac{2}{3}OJ$; ferner wegen $FG \parallel BD$ ist $HM \# JN$. Es ist jedoch unter der Voraussetzung, dass

$$BJ\leqq JD$$

sei, die

$$OJ=BO-BJ=\frac{1}{2}BD-BJ=\frac{BJ+JD}{2}-BJ=\frac{JD-JB}{2},$$

daher

$$HM = \frac{1}{3}(JD - JB).$$

Allein

$$\frac{1}{3}JD = HG \quad \text{und} \quad \frac{1}{3}JB = HF,$$

folglich

$$HM = HG - HF,$$

und endlich

$$GM = HF,$$

was eine höchst einfache Bestimmung des Schwerpunktes M auf der Schwerlinie FG darbietet.

5. Damit jetzt M in den Winkel JCD falle, muss

$$HM \leqq HL$$

werden. Allein

$$HL : JD = CH : CJ$$

und

$$CH = EH - EC,$$

ferner

$$EH = \frac{1}{3}EJ = \frac{1}{3}(CJ + CE) = \frac{1}{3}(CJ + \frac{1}{2}CA)$$
$$= \frac{1}{3}CJ + \frac{1}{6}CA$$

und

$$EC = \frac{1}{2}CA;$$

daher ist

$$CH = \frac{1}{3}(CJ - CA)$$

und somit

$$HL = \frac{JD}{CJ} \cdot \frac{CJ - CA}{3}.$$

Verbindet man dies mit dem oben gefundenen

$$HM = \frac{JD - JB}{3},$$

so erfolgt

$$HM : HL = \frac{JD - JB}{JD} : \frac{CJ - CA}{CJ}$$
$$= 1 - \frac{JB}{JD} : 1 - \frac{CA}{CJ}.$$

Soll nun

$$HM \leqq HL$$

ausfallen, so muss

$$\frac{JB}{JD} \geqq \frac{CA}{CJ}$$

sein; d. h. damit des Viereckes Schwerpunkt ausser selbes — in den Aussenwinkel seines eingehenden Winkels — falle, muss zwischen den Abschnitten *JB*, *JD* und *CA*, *CJ* seiner beiden Diagonalen die Bedindungsvergleichung bestehen:

$$\frac{JB}{JD} \geqq \frac{CA}{CJ}.$$

6. Diese Bedingung, von der sich leicht ersehen lässt, dass sie für die gestellte Forderung zureicht, lässt sich noch auf mancherlei brauchbarere Weisen ausdrücken. Z. B. wenn man die Punkte *A, C, J, B* feststellt, so kann man leicht JD' so construiren, dass

$$\frac{JB}{JD'} = \frac{CA}{CJ}$$

sei; etwa indem man $AA' \# JB$ macht und $A'C$ bis D' in der verlängerten *BJ* führt. Dann verwandelt sich obige Bedingung in die einfache

$$JD \leqq JD'.$$

Da ferner auch

$$JD \geqq JB$$

sein soll, so muss, wenn man $JB' = JB$ abträgt, die noch mangelnde Spitze *D* des Viereckes nothwendig auf und innerhalb der Strecke $B'D'$ gewählt werden.

7. Soll insbesondere der Schwerpunkt M in der Seite CD liegen, muss $HM = HL$ werden, also $JD = JD'$ oder

$$JD : JB = CJ : CA$$

sein, mithin D in D' liegen. — Damit er auf die verlängerte Diagonale CJ falle, muss $HM = 0$, also

$$JD = JB = JB'$$

sein, folglich D in B' liegen. — Soll er endlich auf die Spitze C fallen, muss auch noch $CH = 0$, folglich $CJ = CA$ sein; wie in Taf. VII. Fig. 4.

8. Eine andere bequeme Construction eines solchen Viereckes möchte wohl die folgende leicht erklärbare sein. Man wählt FG (Taf. VII. Fig. 5.), auf ihr den Punkt M und ausser ihr E. Auf den verlängerten EF, EG macht man $FB = 2EF$ und $GD = 2EG$; dann auf FG die $FH = GM$, und zieht die HE. — Führt man nun die DM bis sie HE in C' trifft, und schneidet man $EA' = EC'$ ab; so liegt des Viereckes $A'BC'D$ Schwerpunkt M in der Seite $C'D$. — Wählt man aber C zwischen E und C', und schneidet $EA = EC$ ab; so liegt der Schwerpunkt M des Viereckes $ABCD$ ausserhalb desselben. — Ist M die Mitte der FG, so fällt H auf ihn; daher wählt man C im Allgemeinen zwischen E und H, wonach des Viereckes Schwerpunkt auf seiner inneren Diagonale liegen wird. — Verlegt man jedoch insbesondere C nach H oder M selbst, so fällt er auf die Spitze des eingehenden Viereckswinkels. (Taf. VII. Fig. 4.).

XXIII.

Ueber die Converse des Satzes: Im gleichschenkligen Dreiecke sind die die Basiswinkel nach gleichem Verhältniss theilenden Transversalen einander gleich.

Von

Herrn C. Schmidt,

Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Stolpe.

Im Archiv Thl. XVI. S. 201. ff. finden sich zwei Beweise für den Satz: Sind die Transversalen, welche zwei Dreieckswinkel nach gleichem Verhältniss theilen, einander gleich, so ist das Dreieck gleichschenklig. Da dort auf eine „Aufforderung" in einem früheren Theile des Archivs hingewiesen ist, so will ich auch einen Beweis des angeführten Satzes mittheilen. Derselbe unterscheidet sich von jenen beiden dadurch, dass er nicht andere, der Schulgeometrie fremde Sätze vorausschickt.

Lehrsatz. Werden in einem Dreieck zwei Winkel durch Transversalen nach demselben Verhältniss getheilt und sind diese Transversalen einander gleich, so ist das Dreieck gleichschenklig.

In Bezug auf Taf. IV. Fig. 3. ist

$$\text{Hyp.}\quad \angle CBD = \frac{m}{n}\beta,\quad \angle BCE = \frac{m}{n}\gamma,\quad BD = CE,$$

worin $\frac{m}{n}$ einen echten Bruch darstellt.

Thes. $AB=AC$.

Beweis. Man trage $\angle\beta$ als $\angle BCF$ in C an BC, mache $CF=BE$ und ziehe BF. Nun ist

$$\triangle BCF \cong \triangle CBE,$$

und wegen der Voraussetzung $BD=BF$. Man verbinde D und F, so ist $\triangle BDF$ gleichschenklig und

$$\angle BDF=\angle BFD=\varepsilon.$$

Angenommen, β sei $>\gamma$, also $\beta=\gamma+\delta$, worin δ positiv.

Nach der gemachten Annahme drücken wir nun die Winkel CDF und CFD durch dieselben Stücke aus, um eine Vergleichung derselben möglich zu machen.

Im $\triangle CDB$ ist

$$\angle CDF=2R-\gamma-\frac{m}{n}\beta-\varepsilon,$$

also nach unserer Annahme

$$=2R-\gamma-\frac{m}{n}\gamma-\frac{m}{n}\delta-\varepsilon.$$

Im $\triangle CFB$ ist

$$\angle CFD=2R-\beta-\frac{m}{n}\gamma-\varepsilon,$$

also nach der nämlichen Annahme

$$=2R-\gamma-\delta-\frac{m}{n}\gamma-\varepsilon.$$

Durch Subtraction der zweiten Werthe finden wir den Unterschied der Winkel CDF und CFD, nämlich

$$\angle CDF-\angle CFD=\delta-\frac{m}{n}\delta.$$

Da δ positiv und $\frac{m}{n}$ ein echter Bruch ist, so ergiebt sich

$$\angle CDF>\angle CFD,$$

folglich in dem $\triangle CDF$ $CF > CD$, folglich in den beiden Dreiecken CBF und CBD, in denen zwei Seitenpaare gleich, das dritte aber ungleich:

$$\angle CBF > \angle CBD,$$

oder

$$\frac{m}{n}\gamma > \frac{m}{n}\beta,$$

also $\gamma > \beta$, was unserer Annahme $\beta > \gamma$ geradezu widerspricht. Ebenso wenig kann $\gamma > \beta$ angenommen werden, weil daraus folgen würde: $\beta > \gamma$. Es ist also $\beta = \gamma$, das Dreieck ABC also gleichschenklich.

Anmerkung 1. Der Satz gilt auch, wenn die Transversalen die Verlängerungen der Seiten treffen, wobei dann $\frac{m}{n}$ ein unechter Bruch wird. Der Beweis bleibt wesentlich derselbe.

Anmerkung 2. Den einfachsten Fall erhalten wir, wenn die Transversalen die Winkel halbiren. Im Beweise erscheint dann $\frac{1}{2}$ an der Stelle von $\frac{m}{n}$.

Berichtigungen zu der Abhandlung Thl. XVIII. Nr. XVIII. in diesem Hefte.

S. 263. Z. 8. Statt a^{n2} setze man a_n^2.

S. 264. Z. 4. v. u. Statt $\mathfrak{T}_n$ setze man $\overset{e}{\mathfrak{T}}_n$.

S. 271. Z. 6. v. u. Statt $\overset{e}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathfrak{T}}_n(=x)$ setze man besser $\overset{e}{\mathrm{Arc}}_n\overset{e}{\mathfrak{T}}_n(=\cot\varphi)$, obgleich vorher $x=\cot\varphi$ gesetzt worden.

Berichtigungen zu Theil XVII.

S. 324. Z. 13. und S. 324. Z. 15. so wie S. 325. Z. 7. setze man statt

$$\frac{a-r}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

überall

$$\frac{a-r}{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

S. 363. Z. 6. setze man $y_0\cos B$ für $x_0\cos B$.

Berichtigung zu Theil XVI.

S. 220. und S. 221. muss man ab und $a'b'$ überall in bc und $b'c'$ umändern, nämlich im zweiten Absatze auf S. 220. und in den beiden ersten Absätzen auf S. 221.

Oben in diesem Hefte (Thl. XIII. Heft III.) Seite 352. muss die Nummer des Aufsatzes nicht XXI. sondern XXII. sein.

XXIV.

Die 15 letzten Winter in Berlin,

dargestellt und besprochen

von

Herrn Professor Dr. J. Ph. Wolfers

in Berlin.

(Zu diesem Aufsatze gehören Taf. VIII. und Taf. IX.)

Bereits vor länger als 4 Jahren habe ich im zehnten Theile dieser Zeitschrift einen kleinen Aufsatz über strenge und gelinde Winter abdrucken lassen, seitdem aber mich ferner mit diesem Gegenstande beschäftigt. Damals lagen 11 Winter zur Untersuchung vor, jetzt ist deren Anzahl auf 15 gestiegen, aber auch ausserdem habe ich die Grundlagen dieser Untersuchungen gegen damals zu vervollkommnen gesucht. Während ich früher die Temperatur-Curven vom 15. November bis zum 15. März ausgedehnt hatte, erstrecken sie sich jetzt vom 1. Novbr. bis zum 31. März, in den Schaltjahren bis zum 30. März, so dass sie einen Zeitraum von 150 Tagen umfassen. Aus einem in dem erwähnten Aufsatze angegebenen Grunde hatte ich damals die Mittagstemperaturen eingezeichnet, während ich jetzt die mittlere Temperatur eines jeden Tages aufgetragen habe, so wie sie in den Beobachtungen der hiesigen Königlichen Sternwarte abgedruckt sind. Hierbei habe ich mir eine kleine Inconsequenz zu Schulden kommen lassen, welcher ich aber wegen Anlage dieser Beobachtungen nicht ausweichen konnte. Vom 1. November 1836 bis zum 31. December 1840 habe ich nämlich das Mittel aus drei zu passenden Stunden abgelesenen Thermometerständen, hingegen vom 1. Januar 1841 an das Mittel aus dem maximum und minimum an jedem Tage benutzt. Wesentliche Unterschiede werden aus dieser Incongruenz nicht hervorgehen.

Die hauptsächliche Erweiterung dieser Untersuchungen scheint mir aber im Folgenden zu bestehen. Früher hatte ich nur aus der Betrachtung der Formen der Curven Schlüsse zu ziehen versucht. Diess wird auch jetzt geschehen, indessen werde ich dabei die Zahlenwerthe, aus welchen jene Curven hervorgegangen sind, benutzen, um mittelst derselben fester zu begründen, ob ein einzelner vorliegender Winter zu den strengen oder den nicht strengen gezählt werden muss. Hierbei war nun zunächst zu überlegen, auf welche Weise diese Zahlen zu benutzen wären, da ich jetzt eben so wenig wie in meinem frühern Aufsatze die mittlere Temperatur des ganzen Winters als Grundlage annehmen, sondern wiederum die Menge der ununterbrochen stattgefundenen hohen oder niedrigen Temperatur im Auge behalten wollte. Es schien mir daher am angemessensten, die einzelnen Stücke der Curve zu quadriren, welche Arbeit nicht schwierig sein konnte und wodurch ich ein Resultat erhalten musste, welches, wenn auch weniger anschaulich, die Stelle der Curve vertreten konnte. Diese sogenannten Thermometercurven sind keine geometrische Curven, sondern gebrochene Linien, die Linie des Gefrierpunktes ist die Abscissenaxe, welche nach den Tagen in gleiche Intervalle getheilt ist, so dass man es bei dieser Quadrirung nur mit Trapezen von gleichen Höhen und einzelnen Dreiecken zu thun hat. Auf diese Weise sind die Zahlen ermittelt worden, welche dem Inhalt der durch die Curve und die Abscissenaxe begrenzten Flächen proportional sind, und welche ich in den folgenden Tabellen unter der Ueberschrift Summe der Temperatur aufgeführt habe. Die Bedeutung der algebraischen Zeichen ist von selbst klar, das jedem Flächeninhalt entsprechende Zeitintervall ist stets in Tagen hinzugefügt, so dass es leicht ist, die einem einzelnen Tage im Mittel entsprechende Temperaturmenge zu ermitteln. Hierbei habe ich es vermieden, Bruchtheile des Tages einzuführen, vielmehr nach dem Augenmaasse eine bestimmte Anzahl ganzer Tage angesetzt, wobei die in dieser Hinsicht begangenen Fehler ganz unbedeutend sind.

Wenn ich nun sogleich eine Zusammenstellung der auf diese Weise für die einzelnen Winter erhaltenen Resultate in ihrer Reihefolge gebe, worauf die weitern Untersuchungen begründet werden sollen, so möge man sich nicht darüber wundern, dass mitunter ganz unbedeutende Zahlen von einem oder einigen Zehntheilen aufgeführt sind. Diese waren einerseits von Wichtigkeit in Bezug auf die zu ziehenden Schlüsse, andererseits sind sie nach dem Verzeichniss der Beobachtungen nicht als zufällige unbedeutende Grössen anzusehen, sondern es finden um diese Zeit mehrere Ablesungen in diesem Sinne statt, deren mittleres Resultat nur in Folge von Ablesungen im entgegengesetzten Sinne so klein ausfällt. In dieser Bedeutung bitte ich es zu verstehen, wenn ich mich später des Ausdrucks eines entschiedenen Plus oder Minus bedienen werde. Ehe ich nun die Tabelle A. folgen lasse, deren Bedeutung nach den vorangehenden Bemerkungen klar ist, will ich noch erwähnen, dass ich der Kürze wegen jeden einzelnen Winter nach der Jahreszahl des in denselben fallenden Januars bezeichnet habe.

Tabelle A.

	1837				1838				1839			
	Summe der Temperatur				Summe der Temperatur				Summe der Temperatur			
	+	Tage	—	Tage	+	Tage	—	Tage	+	Tage	—	Tage
	58,5	22	0,8	1	129,7	40	1,5	2	88,8	18	38,9	11
	0,2	1	12,8	3	0,1	1	7,9	4	53,7	19	26,3	9
	113,8	26	47,8	9	8,5	3	10,0	3	0,2	1	1,5	2
	0,6	1	1,6	1	7,0	3	15,5	7	12,6	9	1,0	2
	8,4	6	4,6	3	0,0	1	283,2	36	7,6	5	8,8	3
	0,8	1	2,8	2	3,0	2	11,4	4	2,3	2	2,5	3
	16,0	10	47,7	14	2,0	1	50,9	10	0,1	1	30,4	12
	42,7	17	3,6	5	28,5	12	1,5	2	31,8	14	1,7	2
	0,1	1	4,3	4	54,3	19			11,0	8	7,3	5
	36,7	11	11,7	6					0,6	2	13,3	7
	9,4	5	0,0	1					1,9	2	0,5	1
									39,6	10	0,1	1
									0,2	1		
Summe	287,2	101	137,7	49	233,1	82	381,9	68	250,4	92	132,3	58

Tabelle A.

	1840				1841				1842			
	Summe der Temperatur				Summe der Temperatur				Summe der Temperatur			
	+	Tage	—	Tage	+	Tage	—	Tage	+	Tage	—	Tage
	97,7	21			145,2	30			75,1	18		
			0,2	1			0,2	1			0,8	1
	30,0	10			8,9	5			130,4	42		
			29,7	11			133,6	25			100,2	27
	1,5	2			0,2	1			0,2	1		
			26,1	6			37,7	12			0,5	1
	32,1	9			10,2	5			0,2	1		
			5,5	3			28,4	9			2,6	3
	0,8	1			0,4	1			1,5	1		
			86,8	13			119,8	19			15,9	7
	55,4	14			11,5	5			10,7	7		
			0,1	1			32,4	12			1,4	2
	44,9	17			128,7	25			42,2	14		
			16,8	6							1,1	1
	0,1	1							63,7	16		
			4,6	4							0,4	1
	0,1	1							21,9	7		
			2,2	2								
	2,5	2										
			0,6	1								
	10,0	5										
			1,6	2								
	11,0	6										
			0,5	1								
	3,7	5										
			2,5	3								
	3,2	2										
Summe	293,0	96	177,2	54	305,1	72	352,1	78	345,9	107	122,9	43

Tabelle A.

1843				1844				1845			
Summe der Temperatur				Summe der Temperatur				Summe der Temperatur			
+	Tage	—	Tage	+	Tage	—	Tage	+	Tage	—	Tage
13,5	4	20,4	7	174,9	40	0,6	2	114,4	28	84,8	18
15,5	5	1,0	1	65,0	22	0,1	1	2,3	2	35,9	10
2,6	3	10,7	5	8,7	4	41,8	9	1,9	3	0,2	2
20,7	12	0,7	2	3,6	3	8,0	5	8,7	7	16,0	15
0,4	1	2,0	2	9,4	8	8,5	7	1,7	2	257,9	55
50,5	19	7,5	5	0,6	2	11,3	5	15,4	8		
13,5	12	0,2	2	5,2	4	10,7	6				
0,6	1	12,6	6	1,0	1	5,1	3				
86,1	34	8,8	4	12,6	5	3,0	3				
34,5	14	0,1	1	10,5	8	0,5	1				
15,7	6	0,4	1	0,1	1	3,6	4				
6,8	3			21,5	7						
Summe 260,4	114	64,4	36	313,1	105	93,2	45	144,4	50	394,8	100

Tabelle A.

1846				1847				1848			
Summe der Temperatur				Summe der Temperatur				Summe der Temperatur			
+	Tage	—	Tage	+	Tage	—	Tage	+	Tage	—	Tage
166,6	42			40,8	16			162,6	44		
		6,5	3			0,7	1			290,2	51
2,2	2			44,2	13			3,2	2		
		0,5	1			59,5	20			2,6	3
27,2	15			4,4	3			25,0	9		
		15,0	5			143,9	33			0,5	1
7,8	5			9,8	7			55,5	16		
		0,2	1			35,2	13			0,6	2
0,4	1			22,4	9			111,0	22		
		5,7	4			11,4	6				
30,0	8			6,1	7						
		20,9	4			14,8	4				
20,5	9			94,7	18						
		4,3	3								
8,2	6										
		2,6	2								
214,2	39										
Summe 477,1	127	55,7	23	222,4	73	265,5	77	357,3	93	293,9	57

Tabelle A.

	1849 Summe der Temperatur				1850 Summe der Temperatur				1851 Summe der Temperatur			
	+	Tage	—	Tage	+	Tage	—	Tage	+	Tage	—	Tage
	180,9	48	150,6	27	100,0	19	0,1	1	78,5	15	2,2	3
	49,7	16	5,2	5	0,3	1	27,7	9	42,8	10	4,3	6
	130,7	37	1,2	2	0,0	1	64,5	13	14,6	6	1,0	2
	3,9	3	1,8	2	20,9	6	19,2	6	22,5	8	5,5	5
	3,0	3	0,8	1	0,5	1	162,3	28	5,9	4	0,7	1
	14,5	6			1,0	1	23,2	7	26,4	9	17,8	8
					160,9	41	12,4	5	12,4	8	10,6	5
					0,1	1	2,8	2	7,5	5	0,3	1
					1,5	2	9,8	6	6,3	5	2,6	2
									2,9	3	0,2	1
									21,6	8	2,4	2
									0,6	1	17,5	6
									1,8	1	4,8	5
									96,0	20		
Summe	382,7	113	159,6	37	285,2	73	322,0	77	339,8	103	69,9	47

Aus den Resultaten dieser Tabelle, welche ähnlich wie die Curven eine Uebersicht der Vertheilung der Temperatur über den ganzen Winter darbietet, ergibt sich die Reihenfolge der einzelnen Winter, welche wir vorläufig über die oben erwähnten 150 Tage ausdehnen.

Tabelle B.

Winter.	Ueberschuss der Temperat.	im Mittel für 1 Tag.
1846	+ 421,4	+2,81
1851	+ 269,9	+1,80
1849	+ 223,1	+1,49
1842	+ 223,0	+1,49
1844	+ 219,9	+1,47
1843	+ 196,0	+1,31
1837	+ 149,5	+1,00
1839	+ 118,1	+0,79
1840	+ 115,8	+0,77
1848	+ 63,4	+0,42
1850	— 36,8	—0,25
1847	— 43,1	—0,29
1841	— 47,0	—0,31
1838	— 148,8	—0,99
1845	— 250,4	—1,67

Wollte ich diese Discussion der vorhandenen und berechneten Beobachtungen beibehalten, und daraus Schlüsse ziehen, so würde man mir mit Recht einwerfen können, dass ich einen ganz willkührlichen Zeitraum als Dauer des Winters angenommen hätte. Auf der andern Seite erschien es mir, nach den graphisch und in Zahlen vorliegenden Resultaten, noch weniger als zweckmässig, mich auf die gewöhnlich zum Winter gezählten drei Monate December, Januar und Februar zu beschränken. Auf diese Weise wäre ich nämlich gezwungen gewesen, fast in allen Jahren einen bedeutenden Theil der Betrachtung zu entziehen; ich habe es daher vorgezogen, die Dauer jedes einzelnen Winters so zu verstehen, dass er sich vom ersten bis zum letzten entschiedenen Frosttage erstrecken soll. Natürlich wird auf diese Weise die Dauer der einzelnen Winter von einander verschieden, allein wir werden so eine feste Anschauung von ihrem wirklichen Verlauf gewinnen. Indem ich nun nach dem Verzeichniss der Beobachtungen diejenigen Frosttage hinzufüge, welche ausserhalb des 1. Novbr. und 31. März liegen, nämlich

1837 bis zum 10. April

1838 „ „ 1. „

1839 „ „ 3. „

1840 vom 29. October an

1850 bis zum 1. April,

erhalten wir folgende Zusammenstellung der einzelnen Winter:

Tabelle C.

Winter	Summe d. Temperat. +	Tage	—	Tage	Ueberschuss d. Temp.	Dauer in Tagen	im Mittel für 1 Tag
1843	240,1	107	64,4	36	+175,7	143	+1,23
1842	248,9	82	122,9	43	+126,0	125	+1,01
1851	165,3	68	69,9	47	+ 95,4	115	+0,83
1837	243,2	86	138,6	52	+104,6	138	+0,76
1840	293,6	99	177,7	56	+115,9	155	+0,75
1846	96,3	46	55,7	23	+ 40,6	69	+0,59
1849	187,3	59	159,6	37	+ 27,7	96	+0,29
1839	163,9	76	132,5	58	+ 31,4	134	+0,23
1844	116,7	58	93,2	45	+ 23,5	104	+0,23
1850	185,2	54	324,2	78	—139,0	132	—1,05
1847	86,9	39	265,5	77	—178,6	116	—1,54
1848	83,7	27	293,9	57	—210,2	84	—2,50
1838	49,1	42	382,1	69	—333,0	111	—3,00
1845	14,6	14	394,8	100	—380,2	114	—3,34
1841	31,2	17	352,1	78	—320,9	95	—3,38

Die Winter sind hier nach dem, einem einzelnen Tage im Mittel zukommenden, Ueberschuss der Temperatur geordnet. Ob diese Discussion die richtige sei, wage ich nicht zu behaupten, wohl aber dürfte sie sich der Wahrheit mehr nähern, als die vorhergehende, aus welcher Tabelle B. abgeleitet worden ist. Ehe ich nun über die einzelnen Winter Betrachtungen anstelle, erlaube ich mir, folgende Bemerkung voranzuschicken. Bei der noch immer geringen Anzahl der vorliegenden Winter halte ich es nicht für zweckmässig, aus den Zahlen der 6. oder 8. Rubrik in Tabelle C. die mittlern Werthe herzuleiten; sondern werde für jetzt unter einem strengen Winter einen solchen verstehen, in welchem die Werthe dieser Rubriken negativ sind, also der Frost überwiegend stattfindet, hingegen diejenigen Winter nicht strenge nennen, in welchen diese Zahlen positiv sind.

In der Tabelle B. erschien der Winter von 1848 als ein nicht strenger, wogegen ein Blick auf die Curve oder auf die Tabelle A. lehrt, dass er durchaus zu den strengen zu zählen sei, wie sich diess auch in der Tabelle C. zeigt.

Der in der Tabelle B. an der Spitze der nicht strengen stehenden Winter von 1846 nimmt in der Tabelle C. erst die 6te Stelle ein; diess rührt aber nur von seiner auffallend kurzen Dauer her, wie man aus der 7. Rubrik ersieht. Bestimmt man aus den

9 ersten Werthen dieser Rubrik die mittlere Dauer eines nicht strengen Winters, so findet man dieselbe gleich 120 Tagen; mithin ist der Winter von 1846 um 51 Tage kürzer. Fügt man zu dem hier aufgeführten Ueberschuss der Temperatur +40,6 den Werth, welcher nach Tabelle B. den fehlenden 51 Tagen zukommen würde; so würde man für 120 Tage den Ueberschuss +182,9, also im Mittel für 1 Tag +1,50 erhalten.

So wie in der Tabelle C. der eben besprochene Winter von 1846 sich wegen seiner auffallend kurzen Dauer nicht so gelinde darstellt, als er wirklich war; würde umgekehrt der Winter von 1849 als ein weit strengerer hervortreten, wenn die drei letzten unbedeutenden Frostperioden nicht eingetreten, also seine Dauer, nach der oben aufgestellten Erklärung, geringer gewesen wäre. Betrachtet man nämlich den Verlauf dieses Winters in der Tabelle A., so sieht man, dass die erste Kälteperiode ununterbrochen 27 Tage gewährt hat, und dass die Summe der dieser Periode entsprechenden negativen Temperatur 150,6 beträgt, eine zusammenhängende Menge, wie wir sie nur in den strengen Wintern finden. Ziehen wir einmal nur die beiden ersten Kälteperioden dieses Winters, nebst der zwischen ihnen liegenden Wärmeperiode in Betracht, so erhalten wir folgende, der Tabelle C. entsprechende Darstellung:

Winter	Summe d. Temperat. +	Tage	—	Tage	Ueberschuss der Temperat.	Dauer in Tagen	im Mittel für 1 Tag
1849	49,7	16	155,8	32	—106,1	48	—2,21

In diesem Sinne habe ich in meinem frühern Aufsatze unter strengen Wintern solche verstehen wollen, in denen eine Kälteperiode von längerer Dauer stattfände, ohne Rücksicht auf die absolute mittlere Temperatur des ganzen Winters. Wir werden unten sehen, dass diess in der Regel auch in strengen Wintern stattfinden wird, da es aber bis jetzt noch schwierig sein würde, das Maass einer Kälteperiode anzugeben, wonach ein Winter als ein strenger oder nicht strenger betrachtet werden müsste; so gehe ich von meiner damaligen Erklärung ab, und werde vielmehr, wie oben bereits geschehen, die ganze Summe der Temperatur in Betracht ziehen. Ehe ich diesen Gegenstand verlasse, will ich noch bemerken, dass der unmittelbar vorhergehende Winter von 1848 einen ganz ähnlichen Verlauf wie der oben besprochene, jedoch in grösserem Maassstabe gehabt hat. Wir finden nämlich die Kälte fast ganz in eine Periode von 51 Tagen vereint, und zwar beträgt deren Summe nach Tabelle A. 290,2. Auch an den beiden Curven nimmt man sogleich diese Aehnlichkeit wahr.

Wir haben oben aus den 9 nicht strengen Wintern die mittlere Dauer eines einzelnen gleich 120 Tagen gefunden, eben so erhalten wir aus den 6 letzten nach Tabelle C. die mittlere Dauer eines strengen Winters gleich 109 Tagen. So wohl unter den strengen, als unter allen 15 hier aufgeführten Wintern ist der von 1845 seinem Gange nach der auffallendste, weshalb ich hoffe, dass eine besondere Besprechung desselben Entschuldigung finden werde. Während in den 5 übrigen strengen Wintern der Januar stets sehr kalt war, fällt in diesem eine bedeutende Kälteperiode in den December, eine zweite weit beträchtlichere in den Februar und März, wogegen der Januar so gelinde war, wie man ihn sonst kaum in einem nicht strengen Winter findet. Dieser Winter ergibt ferner sowohl die grösste Summe der negativen Temperatur überhaupt, als auch den grössten Ueberschuss der negativen über die positive und er erscheint nur desshalb in der Tabelle C. nicht als der strengste, weil eben die Kälte in zwei weit von einander getrennte Perioden fiel und so seine Dauer eine grössere wurde. In meinem frühern Aufsatze bezeichnete ich, bloss nach der Ansicht der Curve, diesen Winter als eine, mittelst des gelinden Januars zusammenhängende, Verbindung zweier strengen Winter. Nimmt man diese Zerlegung des Winters in zwei Theile nach dem Princip vor, wonach die Tabelle C. gebildet worden ist, so erhält man folgende Darstellung dieser Theile, jener Tabelle entsprechend:

Winter	Summe d. Temperat.				Ueberschuss der Temperat.	Dauer in Tagen	im Mittel für 1 Tag
	+	Tage	—	Tage			
1845 I.	12,9	13	120,9	30	—108,0	43	—2,70
II.	1,7	2	273,9	70	—272,2	72	—3,64

Der erste Theil würde daher unter den strengen Wintern in Tabelle C. die vierte Stelle einnehmen, der zweite hingegen den strengsten Winter darstellen.

Nachdem wir nun die 15 Winter in der Tabelle C. nach ihrer Strenge in einer bestimmten Reihenfolge geordnet haben, wollen wir folgende zwei Fragen zu beantworten versuchen:

1. Unterscheiden sich die strengen Winter charakteristisch von den nicht strengen?

2. Sind diese Unterschiede bereits am ersten Theile der Curven, oder der den letztern in der Tabelle A. entsprechenden Zahlenwerthe zu erkennen?

Die erste Frage wird zum Theil schon durch die in der Tabelle C. enthaltenen Resultate bejahend beantwortet, ausserdem zeigt sich auch der bereits erwähnte Umstand, dass in den strengen Wintern die niedrige Temperatur mehr zusammengedrängt ist, also ohne Unterbrechung stattfindet, während in den nicht strengen Wintern in der Regel mehr einzelne Kälteperioden von kürzerer Dauer und geringerer Summe der negativen Temperatur vorkommen. Um diess durch Zahlen zu erläutern, führe ich für die einzelnen Winter die Zahl der Kälteperioden, die grösste derselben in Tagen und die der letztern entsprechende Summe der niedrigen Temperatur auf.

Tabelle D.

Winter	Anzahl der Kälteperioden	Dauer der grössten in Tagen	Summe der Temperatur
1843	11	7	— 20,4
1842	8	27	100,2
1851	13	8	17,8
1837	11	14	47,8
1840	13	13	86,8
1846	8	4	20,9
1849	5	27	150,6
1839	12	11	38.9
1844	11	9	41,8
im Mittel	10	13	— 58,4
1850	9	28	—162,3
1847	6	33	143,9
1848	4	51	290,2
1838	8	36	283,2
1845	5	55	257,9
1841	6	25	133,6
im Mittel	6	38	—211,9

Unter den ersten nicht strengen Wintern befinden sich die zwei von 1842 und 1849, deren Charakter weniger entschieden ist, da in beiden Perioden vorkommen, welche der Dauer und Intensität nach den strengen Wintern entsprechen. Wenn wir diese als Ausnahmefälle fortlassen wollten, so würden die erhaltenen Mittelzahlen noch verschiedener ausfallen; indessen mögen diese für jetzt so stehen bleiben, soweit die geringe Anzahl der vorliegenden Winter zur Ableitung eines bestimmten Resultats genügt, dürfte die erste Frage hiermit bejahend beantwortet sein.

Wir gehen nun zur zweiten Frage über, welche als die wichtigere anzusehen ist; denn wenn sie mit Entschiedenheit bejahend beantwortet werden kann, wird man im Stande sein, aus dem ersten Theile eines Winters auf seinen weitern Verlauf zu schliessen. Zur Beantwortung dieser Frage darf ich nun eine in meinem frühern Aufsatze aufgestellte Regel nur ein wenig modificiren, und sie lautet alsdann folgendermaassen:

In den nicht strengen Wintern pflegen auf die ersten Kälteperioden eine oder mehrere Wärmeperioden zu folgen, wobei die höhere Temperatur der Dauer und Summe nach überwiegend ist. In den strengen Wintern tritt auch nach der ersten Kälteperiode eine Krisis ein, während deren Dauer die Temperatur wesentlich und in der Regel über Null steigt; allein diese wärmeren Perioden sind von kurzer Dauer und die ihnen entsprechende Summe der höhern Temperatur ist gering, im Vergleich mit der Summe der, der vorhergehenden Kälteperiode entsprechenden, niedrigen Temperatur.

Wir wollen nun die einzelnen Curven und die Tabelle A. betrachten, um zu sehen, wie weit diese Regeln bei ihnen zutreffen; wir beginnen mit den nicht strengen Wintern.

Im Winter von 1843 trat der erste Frost am 5. Novbr. ein und es folgten

auf 7 Tage mit —20,4, 5 Tage mit +15,5
1 Tag „ 1,0, 3 „ „ 2,6
5 Tage „ 10,7, 12 „ „ 20,7.

Brechen wir hier am 7. December ab, so finden sich

13 Tage mit —32,1 gegen 20 Tage mit +38,8;

die letztere also der Grösse und Dauer nach überwiegend. Es möge hier sogleich der Winter von 1851 folgen, in welchem der erste Frost am 17. Novbr. eintrat und

auf 3 Tage mit —2,2, 10 Tage mit +42,8
„ 6 „ „ —4,3 6 „ „ +14,6

folgten. Brechen wir hier am 11. Decbr. ab, so kommen

gegen 9 Tage mit —6,5, 16 Tage mit +57,4.

Bereits einige Tage früher, am 7. Decbr., war ich veranlasst, mich über den Verlauf dieses Winters auszusprechen und ich erklärte, dass er dem von 1843 wahrscheinlich ähnlich und daher ein nicht strenger sein würde. Ein Blick auf die Tabelle C. zeigt, dass ich das Glück hatte, mich in meiner Vermuthung nicht zu täuschen.

Im Winter von 1842 trat der erste Frost am 18. November ein, und es folgten

auf 1 Tag mit — 0,8 42 Tage mit +130,4
dann 27 Tage mit —100,2;
gegen 28 Tage mit —101,0 kamen 42 Tage mit +130,4.

Da die letzte Periode am 28. Januar endet, so kann man mir einwerfen, dass ich erst nach dem Verlauf des grössten Theiles des Winters meine Vermuthung hätte aussprechen können. Hierauf erwidere ich, dass ein Schluss bereits nach der ersten kleinen aber entschiedenen Kälteperiode möglich, jedoch gewagt gewesen wäre, ich im Allgemeinen aber diesen Winter zu den Ausnahmen zähle, was auch in meinem frühern Aufsatze bereits der Fall war, und worüber ich oben schon einiges bemerkt habe.

Im Winter von 1837 trat der erste Frost am 23. November ein, und ohne dass hier die Zahlen der Tabelle A. zu Hülfe gerufen werden dürfen, zeigt ein Blick auf die Curve, dass bereits im ersten Drittheile des Decembers seine nicht strenge Beschaffenheit nach der hier aufgestellten Regel entschieden war.

In dem Winter von 1840 kamen die bereits am 28. und 31. October stattgefundenen, wenn auch nur eintägigen und geringen, doch entschiedenen Kälteperioden zu Statten, um die ebenfalls nur geringe eintägige Periode am 1. December zur Geltung zu bringen. Ganz entschieden zeigte sich die nicht strenge Natur dieses Winters in der 9tägigen Periode hoher Temperatur vom 22. bis zum 31. December.

In dem schon oben, seiner auffallenden Kürze wegen besprochenen Winter von 1846 trat die erste Kälte am 13. December ein, und es folgten

auf 3 Tage mit —6,5		2 Tage mit + 2,2
1 „ „ —0,5		15 „ „ +27,2,
also gegen 4 Tage mit —7,0		17 Tage mit +29,4.

Die letzte Periode endet am 3. Januar, indessen ersieht man aus der Curve, dass bereits am 25. Decbr. seine nicht strenge Beschaffenheit entschieden war.

Der Winter von 1849 gehört zu den Ausnahmen, ich habe oben bereits erwähnt, in wiefern er zu den strengen gezählt werden kann und werde später zeigen, dass er auch das charakteristische Merkmal eines solchen in seinem ersten Theile enthält.

In dem Winter von 1839 trat die erste Kälte am 19. November ein, und es folgten

auf 11 Tage mit —38,9   19 Tage mit +53,7;

am 18. December war daher entschieden, dass er ein nicht strenger sein werde.

In dem Winter von 1844 trat die erste Kälte am 11. December ein, und es folgten auf 2 Tage mit —0,6   22 Tage mit +65,0.

Da es gewagt gewesen sein würde, diese kurze Kälteperiode, und eben so die eintägige am 5. Januar gelten zu lassen; so trat der Entscheidungstag erst am 18. Januar ein, wo die grösste und zwar 9 tägige Kälteperiode dieses Winters bereits zu Ende ging.

Indem ich nun die zwei Winter von 1842 und 1849 aus den angegebenen Gründen zur Seite lasse, ergeben die 7 übrigen nicht strengen Winter folgende übersichtliche Momente:

Winter.	Erste Kälte.	Tag der Entscheidung.	Letzte Kälte.
1843	Novbr. 5	Decbr. 7	März 28
1851	„ 17	„ 11	„ 11
1837	„ 23	„ 3	April 10
1840	Octbr. 29	„ 31	März 28
1846	Decbr. 13	„ 25	Febr. 19
1839	Novbr. 10	„ 18	April 3
1844	Decbr. 11	Jan. 18	März 24

Wir haben nun die strengen Winter zu betrachten, und zwar trat im Winter 1850 die erste Kälte am 20. November ein; es folgten

auf 1 Tag mit — 0,1   1 Tag mit +0,1

„ 9 Tage „ —27,7   1 „ „ 00

gegen 10 Tage mit —27,8 kommen 2 Tage mit +0,1.

Am 2. December trug ich hiernach kein Bedenken, mich für die strenge Natur desselben auszusprechen.

Im Winter von 1847 trat die erste Kälte vom 17. November ein, es folgten

auf 1 Tag mit — 0,7   13 Tage mit +44,2

„ 20 Tage „ —59,5   3 „ „ + 4,4;

gegen 21 Tage mit —60,2   16 Tage mit +48,6.

Am 24. December war seine strenge Natur entschieden.

Im Winter von 1848 trat der erste Frost am 15. December ein, und es folgte sogleich eine Periode von 51 Tagen mit —290,2.

Die Krisis fand am 23. und 24. December statt, wo die Temperatur aber nur bis —2° stieg, wesshalb in diesem Falle die Curve allein darüber Auskunft geben konnte, dass man am 24. December den Winter als einen strengen anzusehen habe.

Im Winter von 1838 trat die erste Kälte am 11. December ein, und es folgten zunächst mehrere wechselnde Perioden, nämlich:

auf 2	Tage	mit	— 1,5	1	Tag	mit	+0,1
„ 4	„	„	7,9	3	„	„	8,5
„ 3	„	„	10,0	3	„	„	7,0

gegen 9 Tage mit —19,4 kommen 7 Tage mit +15,6,

und am 27. December konnte man die strenge Natur als entschieden ansehen.

Im Winter von 1845 trat die erste Kälte am 29. November ein und es folgten

auf 18 Tage mit —84,8 2 Tage mit +2,3.

Die letztern sah ich schon damals als die kritischen an, und nach ihrem Verlauf schloss ich am 20. December auf einen strengen Winter, der dann auch, wie oben besprochen, im Februar und März sich einstellte.

In dem Winter von 1841 trat die erste Kälte am 1. December ein, es folgten

auf 1 Tag mit — 0,2 5 Tage mit +8,9,

dann 25 Tage mit —133,6.

Während der letzten Kälteperiode fand die Krisis am 20. und 21. December statt, wo jedoch die Temperatur nur bis an —2° stieg, und am 22. December konnte man die strenge Natur als entschieden ansehen.

Die 6 strengen Winter ergeben nun folgende, der obigen entsprechende Uebersicht:

Winter.	Erste Kälte.	Tag der Entscheidung.	Letzte Kälte.
1850	Novbr. 20	Decbr. 2	April 1
1847	„ 17	„ 24	März 13
1848	Decbr. 15	„ 24	„ 9
1838	„ 11	„ 27	April 1
1845	Novbr. 29	„ 20	März 23
1841	Decbr. 1	„ 22	„ 6

In dem Winter von 1849 trat die erste Kälte am 20. Dcbr. ein, und es folgte eine Periode

von 27 Tagen mit —15°,6.

Am 23. und 24., so wie am 26. und 27. Decbr., stieg die Temperatur bis an und über —2°, und diese beiden Erscheinungen mussten als entscheidend für die strenge Natur dieses Winters gelten. In wie weit man diesen Winter wirklich als einen strengen betrachten kann, ist oben besprochen worden, wesshalb ich, um Wiederholungen zu vermeiden, abbreche und nur noch bemerke, dass die zwei Winter von 1842 und 1849 hier als Ausnahmen angesehen worden sind.

Ehe ich diesen Aufsatz schliesse, erlaube ich mir, noch einige kurze Bemerkungen zu machen. Sein Inhalt ist eine weitere Ausführung der in meinem frühern Aufsatze angestellten Betrachtungen, und jetzt wie damals betrachte ich sie als einen Versuch, die Erscheinungen auf eine neue und wo möglich fruchtbringende Weise zu deuten.

Ferner habe ich hervorzuheben, dass eben so, wie allein in Berlin angestellte Beobachtungen zu Grunde liegen, auch meine Schlüsse nur für Berlin gelten sollen. Für andere Orte müssten ähnliche Untersuchungen der dortigen Beobachtungen angestellt werden, um für sie Schlüsse zu ziehen, und sollte diess in Folge der Mittheilung meiner Untersuchungen geschehen; so würde es mir zur grossen Freude gereichen.

Nachtrag.

Der vorstehende Aufsatz war bereits vor dem Anfange des letzten Winters geschrieben, sein Abdruck ist aber bis jetzt verzögert worden; daher dürfte es nicht unangemessen sein, die Betrachtung dieses höchst interessanten Winters hier nachträglich folgen zu lassen. Die erste Kälte trat am 18. November ein und bis zum 6. December schien der Winter eher den Charakter eines strengen, als eines nicht strengen annehmen zu wollen, bis die vom 6. bis 16. December stattgefundene hohe Temperatur die Entscheidung für einen Winter der letzten Art herbeiführte. Die Zahlenangaben, der obigen Tafel A. entsprechend, sind die folgenden:

	1852			
	Summe der Temperatur			
	+	Tage	—	Tage
	43,2	16	15,2	9
	3,8	7	3,8	3
	44,9	10	0,4	2
	2,0	2	1,7	3
	2,5	3	3,6	4
	4,3	3	0,1	1
	71,0	24	0,1	1
	0,2	1	0,1	1
	51,2	21	5,3	7
	1,4	1	0,4	1
	0,1	1	12,8	6
	9,8	4	2,4	3
	26,0	12	0,1	1
	9,5	3		
Summe	269,9	108	46,0	42

Hiernach nimmt dieser Winter, wenn man die 150 Tage vom 1. November bis zum 30. März in Betracht zieht, in der Tafel B. die dritte Stelle ein, indem wir haben:

Winter.	Ueberschuss der Temperatur.	Im Mittel für 1 Tag.
1852	+ 223,9	+ 1,49.

Rechnen wir hingegen wie oben die Dauer des Winters vom ersten bis zum letzten entschiedenen Frosttage, so nimmt derselbe in der Tafel C. die oberste Stelle ein, indem wir nämlich haben:

Winter	Summe der Temperatur				Ueberschuss der Temperatur	Dauer in Tagen	im Mittel für 1 Tag
	+	Tage	—	Tage			
1852	217,2	89	46,0	42	+ 171,2	131	+ 1,31

Wir wollen hier bemerken, dass er unter allen 16 betrachteten Wintern die kleinste Summe der negativen Temperatur enthält, und da er für die Tafel D. die folgenden Werthe hat:

Winter	Anzahl der Kälteperioden	Dauer der grössten in Tagen	Summe der Temperatur
1852	13	9	— 15,2

so nimmt er auch in Bezug auf die Angabe der letzten Rubrik die oberste Stelle unter den nicht strengen Wintern ein.

Ueber seinen Charakter hatte ich mich am 20. December entschieden ausgesprochen nach folgenden Daten:

Auf	9	Tage	mit	— 15,2	folgten	7	Tage mit	+ 3,8
„	3	„	„	3,8	„	10	„ „	44,9
„	2	„	„	0,4	„	2	„ „	2,0

demnach kamen gegen 14 Tage mit — 19,4, 19 Tage mit + 50,7.

Vier Tage früher am 16. December hatte sich der Charakter des Winters auch schon entschieden herausgestellt, da ich aber erst am 20. die Beobachtungen eintrug, sprach ich mich auch erst an diesem Tage aus.

Zum Schluss folgen hier noch die, der obigen Zusammenstellung entsprechenden, Werthe dieses Winters:

Erste Kälte	Tag der Entscheidung	Letzte Kälte
Nov. 18.	Dec. 16.	März 27.

Berlin, April 9. 1852.

XXV.

Zur Differenzenrechnung.

Von

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der polytechnischen Schule zu Dresden.

Man hat sich längst schon mit dem Zusammenhange zwischen den Differenzen und den Differentialquotienten derselben Funktionen beschäftigt, namentlich die Fragen erörtert, ob sich nicht $\Delta^m f(x)$ durch $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ etc., oder umgekehrt $f^{(m)}(x)$ durch $f(x), \Delta f(x), \Delta^2 f(x)$ etc. ausdrücken liesse, aber man kennt, soviel ich weiss, keine Methode, mittelst welcher sich derartige Beziehungen rasch entdecken lassen; ich theile hier ein solches Verfahren mit, welches gleichförmig auf jede Art des Zusammenhanges zwischen Differentialquotienten oder Integralen einerseits, und Differenzen oder Aufstufungen andererseits passt, mithin allgemein genug ist. Um aber auch seine Schattenseite nicht zu verhehlen, will ich gleich bemerken, dass es die Gültigkeitsgränzen der entwickelten Formeln unmittelbar nicht angiebt, dass also z. B. die Convergenz der vorkommenden Reihen in jedem speziellen Falle a posteriori zu bestimmen sein würde.

Wenn $\varphi(u)$ eine beliebige Funktion von u, und x eine willkührliche Constante bezeichnet, so ist der Werth des bestimmten Integrales

$$\int_a^b e^{xu}\varphi(u)du$$

eine Funktion von x; setzen wir also

$$1) \qquad \int_a^b e^{xu}\varphi(u)du = f(x),$$

so folgt jetzt durch beiderseitige $n$malige Differenziation in Beziehung auf x:

$$2) \qquad \int_a^b u^n e^{xu}\varphi(u)du = f^{(n)}(x) = D^n f(x).$$

Andererseits hat man, Δx immer $=1$ gesetzt,

$$\int_a^b e^{(x+1)u}\varphi(u)du - \int_a^b e^{xu}\varphi(u)du = f(x+1) - f(x) = \Delta f(x),$$

d. i. bei Zusammenziehung der Integrale:

$$\int_a^b (e^u - 1)e^{xu}\varphi(u)du = \Delta f(x),$$

und wenn man dasselbe Verfahren des Differenzenbildens $n$mal wiederholt:

$$3) \qquad \int_a^b (e^u - 1)^n e^{xu}\varphi(u)du = \Delta^n f(x).$$

Aus der Vergleichung der Formeln 2) und 3) ergiebt sich nun folgende Bemerkung: Hat man irgend eine analytische Beziehung, in welcher einerseits u oder verschiedene Potenzen von u, andererseits $e^u - 1$ oder Potenzen dieses Ausdruckes vorkommen, findet also eine Gleichung von der Form

$$4) \qquad A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + A_3 u^3 + \ldots.$$
$$= B_0 + B_1(e^u - 1) + B_2(e^u - 1)^2 + \ldots.$$

statt, so braucht man beiderseits nur mit $e^{xu}\varphi(u)du$ zu multipliziren und zwischen den Gränzen $u=a$ und $u=b$ zu integriren, um sogleich ein Resultat von der Form

$$A_0 f(x) + A_1 Df(x) + A_2 D^2 f(x) + \ldots..$$
$$= B_0 f(x) + B_1 \Delta f(x) + B_2 \Delta^2 f(x) + \ldots.;$$

also eine Beziehung zwischen Differentialquotienten und Differenzen zu erhalten. Wir wollen diess an einigen Beispielen zeigen.

I. Entwickelung von $\Delta^m f(x)$.

Da sich e^u in eine Reihe von Potenzen entwickeln lässt, so muss dasselbe mit e^u-1 und $(e^u-1)^m$ der Fall sein; setzen wir, $1.2.3....k$ immer mit k' bezeichnend,

$$5)\qquad (e^u-1)^m=\frac{A_m}{m'}u^m+\frac{A_{m+1}}{(m+1)'}u^{m+1}+\frac{A_{m+2}}{(m+2)'}u^{m+2}+\ldots,$$

so ist nach dem Theoreme von Mac Laurin

$$A_k=[D^k(e^u-1)^m]_{(u=0)}$$

und wenn man den Binomischen Lehrsatz anwendet, so findet sich bei wirklicher Differenziation

$$6)\qquad A_k=m_0m^k-m_1(m-1)^k+m_2(m-2)^k-\ldots.,$$

womit die Coeffizienten A bestimmt sind. Aus der Gleichung 5) ergiebt sich jetzt durch Multiplikation mit $e^{xu}\varphi(u)du$ und Integration

$$7)\ \Delta^m f(x)=\frac{A_m}{m'}D^m f(x)+\frac{A_{m+1}}{(m+1)'}D^{m+1}f(x)+\frac{A_{m+2}}{(m+2)'}D^{m+2}f(x)+..$$

Damit ist die Aufgabe gelöst, irgend eine Differenz durch Differentialquotienten auszudrücken.

II. Entwickelung von $D^m f(x)$.

Dass eine Gleichung von der Form

$$8)\ u^m=\frac{B_m}{m'}(e^u-1)^m+\frac{B_{m+1}}{(m+1)'}(e^u-1)^{m+1}+\frac{B_{m+2}}{(m+2)'}(e^u-1)^{m+2}+..$$

bestehen müsse, erkennt man leicht mittelst der Substitution $e^u-1=v$ oder $u=l(1+v)$; denn es ist dann

$$[l(1+v)]^m=\frac{B_m}{m'}v^m+\frac{B_{m+1}}{(m+1)'}v^{m+1}+\frac{B_{m+2}}{(m+2)'}v^{m+2}+\ldots$$

nichts Anderes als das Resultat einer Potenzirung von der bekannten Gleichung

$$l(1+v)=v-\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{3}v^3-\frac{1}{4}v^4+\ldots.$$

Irgend ein Coeffizient B_k wäre

$$B_k = \{D^k[l(1+v)]^m\}_{(v=0)} = \{D^k(lx)^m\}_{(x=1)}.$$

Diese Differenziation lässt sich mittelst des Theoremes ausführen

$$9) \qquad D^n f(lx)$$
$$= \frac{1}{x^n}[\overset{n}{C_0} f^{(n)}(lx) - \overset{n}{C_1} f^{(n-1)}(lx) + \overset{n}{C_2} f^{(n-2)}(lx) - \ldots\ldots],$$

worin C die Fakultätencoefficienten von $(z, +1)^n$ bezeichnen, also aus der Gleichung

$$10) \qquad (z, +1)^n = z(z+1)(z+2)\ldots(z+n-1)$$
$$= \overset{n}{C_0} z^n + \overset{n}{C_1} z^{n-1} + \overset{n}{C_2} z^{n-2} + \ldots + \overset{n}{C}_{n-1} z$$

bestimmt werden können. Hiernach findet man für $u=k$, $f(y)=y^m$ unter der Rücksicht, dass $k \geqq m$ ist:

$$B_k = (-1)^{k-m} 1.2.3\ldots m. \overset{k}{C}_{k-m}.$$

Die Gleichung 8) lautet jetzt

$$u^m = \overset{m}{C_0}(e^u - 1)^m - \frac{\overset{m+1}{C_1}}{m+1}(e^u - 1)^{m+1} + \frac{\overset{m+2}{C_2}}{(m+1)(m+2)}(e^u - 1)^{m+2} - \ldots$$

und nach dem beschriebenen Verfahren folgt augenblicklich aus derselben

$$11) \qquad D^m f(x) = \overset{m}{C_0} \Delta^m f(x) - \frac{\overset{m+1}{C_1}}{m+1} \Delta^{m+1} f(x)$$
$$+ \frac{\overset{m+2}{C_2}}{(m+1)(m+2)} \Delta^{m+2} f(x) - \ldots$$

Diess ist die Umkehrung der Formel 7). Für $m=1$ hat man einfacher

$$12) \qquad Df(x) = \frac{1}{1}\Delta f(x) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(x) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(x) - \ldots;$$

für $m=2$ kann man dem Resultate die Form geben:

13) $$D^2f(x) = \frac{1}{1}\,\frac{\Delta^2 f(x)}{2} - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right)\frac{\Delta^3 f(x)}{3} + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{\Delta^4 f(x)}{4} - \ldots.$$

Diess Alles ist sehr bekannt, wenn auch auf anderem Wege und zwar von Laplace mittelst symbolischer Formeln bewiesen worden. Neu dagegen dürfte das Folgende sein.

III. Entwickelung von $\int_0^\infty e^{-t} f(x+t)\,dt$.

Setzen wir ähnlich wie früher

14) $$f(x) = \int_a^b e^{-xu}\varphi(u)\,du,$$

woraus die folgenden Formeln hervorgehen:

15) $$\int_a^b u^n e^{-xu}\varphi(u)\,du = (-1)^n D^n f(x),$$

16) $$\int_a^b (1-e^{-u})^n e^{-xu}\varphi(u)\,du = (-1)^n \Delta^n f(x);$$

so lässt sich nach Nro. 14) auch $f(x+t)$ durch ein Integral ausdrücken und es ist dann

$$\int_0^\infty e^{-t} f(x+t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\,dt \int_a^b e^{-(x+t)u}\varphi(u)\,du$$
$$= \int_a^b e^{-xu}\varphi(u)\,du \int_0^\infty e^{-(1+u)t}\,dt$$
$$= \int_a^b e^{-xu}\varphi(u)\,du\,\frac{1}{1+u}.$$

Man übersieht nun leicht, dass eine Reihenverwandlung von der Form

17) $$\frac{1}{1+u} = 1 + \frac{A_1}{1}(1-e^{-u}) + \frac{A_2}{2}(1-e^{-u})^2 + \ldots$$

möglich sein muss; denn für $1-e^{-u}=v$, also $u=-l(1-v)$ ergiebt sich

$$18)\qquad \frac{1}{1-l(1-v)}=1+\frac{A_1}{1'}v+\frac{A_2}{2'}v^2+\ldots..,$$

was offenbar ganz in der Ordnung ist. Mittelst der Gleichung 17) wird nun unter Benutzung der Formel (6)

$$19)\qquad \int_0^\infty e^{-t}f(x+t)\,dt=f(x)-\frac{A_1}{1'}\Delta f(x)+\frac{A_2}{2'}\Delta^2 f(x)-\ldots.$$

Um noch die Coeffizienten A zu bestimmen, setzen wir in Nro. 18) $v=-z$, und haben

$$\frac{1}{1-l(1+z)}=1-\frac{A_1}{1'}z+\frac{A_2}{2'}z^2-\ldots.,$$

folglich

$$A_k=(-1)^k\left[D^k\frac{1}{1-l(1+z)}\right]_{(z=0)}$$

$$=(-1)^k\left[D^k\frac{1}{1-lx}\right]_{(x=1)}.$$

Die Ausführung dieser Differenziation mittelst der Formel 9) giebt

$$A_k=(-1)^k[\overset{k}{C}_0k'-\overset{k}{C}_1(k-1)'+\overset{k}{C}_2(k-2)'-\ldots.].$$

Bezeichnen wir wie folgt

$$20)\qquad J_k=k'\overset{k}{C}_0-(k-1)'\overset{k}{C}_1+(k-2)'\overset{k}{C}_2-\ldots.,$$

so ist $A_k=(-1)^kJ_k$, und mithin geht die Formel 19) in die folgende über:

$$21)\qquad \int_0^\infty e^{-t}f(x+t)\,dt=f(x)+\frac{J_1}{1'}\Delta f(x)+\frac{J_2}{2'}\Delta^2 f(x)$$
$$+\frac{J_3}{3'}\Delta^3 f(x)+\ldots..$$

Will man Δx nicht $=1$, sondern $=h$ setzen, so findet man entsprechend

$$22)\qquad \int_0^\infty e^{-t}f(x+ht)\,dt=f(x)+\frac{J_1}{1'}\Delta f(x)+\frac{J_2}{2'}\Delta^2 f(x)$$
$$+\frac{J_3}{3'}\Delta^3 f(x)+\ldots.$$

Wählt man $f(x)$ so, dass sich die linker Hand postulirte Integration, sowie die rechts vorkommenden Differenzen, ausführen lässt, so gelangt man unmittelbar zu neuen Theoremen, wie z. B. für $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ u. dergl.

IV. Entwickelung von $\int_0^\infty f(x+t)\cos t dt$.

Zufolge der Formel 14) erhält man zunächst

$$\int_0^\infty f(x+t)\cos t dt = \int_0^\infty \cos t\, dt \int_a^b e^{-(x+t)u}\varphi(u)du$$

$$= \int_a^b e^{-xu}\varphi(u)\, du \int_0^\infty e^{-ut}\cos t dt$$

$$= \int_a^b e^{-xu}\varphi(u)du\, \frac{u}{1+u^2},$$

und wenn hier eine Reihenverwandlung von der Form

23) $$\frac{u}{1+u^2} = \frac{A_1}{1'}(1-e^{-u}) + \frac{A_2}{2'}(1-e^{-u})^2 + \ldots.$$

ausgeführt wird, so geht die vorige Gleichung in die folgende über:

24) $$\int_0^\infty f(x+t)\cos t dt = -\frac{A_1}{1'}\Delta f(x) + \frac{A_2}{2'}\Delta^2 f(x) - \ldots..$$

Um jene Reihenentwicklung näher zu untersuchen, setzen wir $1-e^{-u}=-z$; es ist dann

$$\frac{l(1+z)}{1+[l(1+z)]^2} = \frac{A_1}{1'}z - \frac{A_2}{2'}z^2 + \ldots.$$

und mithin bestimmen sich die Coeffizienten A nach der Formel

$$A_k = (-1)^{k-1}\left[D^k \frac{l(1+z)}{1+[l(1+z)]^2}\right]_{(z=0)}$$

$$= (-1)^{k-1}\left[D^k \frac{lx}{1+(lx)^2}\right]_{(x=1)}.$$

Nehmen wir in Formel 9)

$$f(y)=\frac{y}{1+y^2}$$

und beachten, dass in diesem Falle

$$f^{(m)}(y)=\frac{(-1)^m 1.2.3\ldots.m}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}}\cos\left[(m+1)\operatorname{Arctan}\frac{1}{y}\right]$$

wird, so findet sich bei umgekehrter Anordnung der Glieder:

$$25)\qquad A_k=1'\overset{k}{C}_{k-1}-3'\overset{k}{C}_{k-3}+5'\overset{k}{C}_{k-5}-\ldots..$$

Nimmt man in Formel 24) $\Delta x=h$, so ist allgemeiner

26)

$$\int_0^\infty f(x+ht)\cos t dt=-\frac{A_1}{1'}\Delta f(x)+\frac{A_2}{2'}\Delta^2 f(x)-\frac{A_3}{3'}\Delta^3 f(x)+\ldots..$$

Ein Beispiel hierzu bildet die Annahme

$$f(x)=e^{-x^2};$$

man erhält nämlich, wenn in den Differenzen schliesslich $x=0$ gesetzt wird:

$$\int_0^\infty e^{-h^2t^2}\cos t\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2h}e^{-\left(\frac{1}{2h}\right)^2}$$

$$=-\frac{A_1}{1'}(e^{-h^2}-1)+\frac{A_2}{2'}(e^{-4h^2}-2e^{-h^2}+1)$$

$$-\frac{A_3}{3'}(e^{-9h^2}-3e^{-4h^2}+3e^{-h^2}-1)+\ldots..$$

und hieraus ergiebt sich für $e^{-h^2}=q$, also $-h^2=lq$:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{l\left(\frac{1}{q}\right)}}e^{\frac{1}{4lq}}=\frac{A_1}{1'}(1-q)+\frac{A_2}{2'}(1-2q+q^4)$$

$$+\frac{A_3}{3'}(1-3q+3q^4-q^9)+\ldots,$$

worin, wie sich von selbst versteht, q ein positiver ächter Bruch sein muss.

V. Entwickelung von $\int_0^\infty f(x+t)\sin t\,dt$.

Unter Benutzung der Formel 14) findet sich

$$\int_0^\infty f(x+t)\sin t\,dt = \int_0^\infty \sin t\,dt \int_a^b e^{-(x+t)u}\varphi(u)\,du$$
$$= \int_a^b e^{-xu}\varphi(u)\,du \int_0^\infty e^{-ut}\sin t\,dt$$
$$= \int_a^b e^{-xu}\varphi(u)\,du \frac{1}{1+u^2}.$$

Setzen wir eine Reihenentwicklung von der Form

$$\frac{1}{1+u^2} = 1 + \frac{A_1}{1'}(1-e^{-u}) + \frac{A_2}{2'}(1-e^{-u})^2 + \ldots.$$

voraus, so geht die obige Gleichung in die folgende über:

$$27)\quad \int_0^\infty f(x+t)\sin t\,dt = f(x) - \frac{A_1}{1'}\Delta f(x) + \frac{A_2}{2'}\Delta^2 f(x) - \ldots.$$

Für $1-e^{-u} = -z$ nimmt jene Reihenentwickelung die nachstehende Form an:

$$\frac{1}{1+[l(1+z)]^2} = 1 - \frac{A_1}{1'}z + \frac{A_2}{2'}z^2 - \ldots..$$

und es ist mithin

$$A_k = (-1)^k \left[D^k \frac{1}{1+[l(1+z)]^2}\right]_{(z=0)}$$
$$= (-1)^k \left[D^k \frac{1}{1+(lx)^2}\right]_{(x=1)}.$$

Erinnert man sich, dass für

$$f(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

die bekannte Formel

$$f^{(m)}(y)=\frac{(-1)^m 1.2\ldots m}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}}\sin\left[(m+1)\operatorname{Arctan}\frac{1}{y}\right]$$

statt findet, so kann man jetzt das unter Nro. 9) verzeichnete Theorem in Anwendung bringen; bei umgekehrter Anordnung der Glieder findet sich

$$28)\qquad A_k=-2^{\prime}\overset{k}{C}_{k-2}+4^{\prime}\overset{k}{C}_{k-4}-6^{\prime}\overset{k}{C}_{k-6}+\ldots.$$

Den Coeffizienten A_1 giebt diese Formel nicht geradezu; man ersieht aber aus der Reihenentwickelung unmittelbar sehr leicht, dass $A_1=0$ ist.

Allgemeiner für $\Delta x=h$ hat man aus Nro. 27)

$$29)\qquad \int_0^\infty f(x+ht)\sin t dt=f(x)+\frac{A_2}{2^{\prime}}\Delta^2 f(x)-\frac{A_3}{3^{\prime}}\Delta^3 f(x)+\ldots,$$

wo nun $\Delta x=h$ ist. Auch hier kann man leicht zu allerhand Reihenentwickelungen gelangen, wenn man die Funktion f so wählt, dass sowohl die Integration linker Hand als die Differenzen rechter Hand vollständig ausführbar sind.

XXVI.

Ueber die Substitution neuer Variabelen in unbestimmte und bestimmte Integrale.

Von

Herrn Professor Dr. Oskar Schlömilch,

an der polytechnischen Schule zu Dresden.

Die meisten Transformationen unbestimmter Integrale geschehen bekanntlich dadurch, dass man an die Stelle der ursprünglich vorhandenen Variabelen eine neue Veränderliche einführt, welche mit der ersten durch eine Gleichung verbunden ist. Handelt es sich z. B. um das Integral

$$\int f[\varphi(x)]\,dx,$$

so kann man $\varphi(x)=y$ setzen, muss nunmehr die vorstehende Gleichung nach x auflösen, was ein Resultat von der Form $x=\psi(y)$, mithin $dx=\psi'(y)dy$ giebt, und hat jetzt

$$\int f[\varphi(x)]dx = \int f(y)\psi'(y)dy.$$

Findet sich nun auf irgend eine Weise der Werth des rechter Hand verzeichneten Integrales, er heisse etwa $F(y)$, so muss man schliesslich noch für y seinen Werth $\varphi(x)$ einsetzen, und gelangt so zu der Endformel

$$\int f[\varphi(x)]dx = F[\varphi(x)] + \text{Const.}$$

So allgemein bekannt dieses Verfahren ist, so scheint man doch einen Umstand dabei übersehen zu haben, der nicht ohne Wichtigkeit ist und namentlich bei bestimmten Integralen ganz besonders erwogen sein will; es kann nämlich vorkommen, dass die nach x aufzulösende Gleichung $x=\varphi(y)$ mehrere Wurzeln besitzt, wie es schon bei einer in Beziehung auf x quadratischen Gleichung der Fall sein würde, und es entsteht dann von selbst die Frage, welche von diesen verschiedenen Wurzeln für die weitere Rechnung zu nehmen ist. Handelt es sich z. B. um den Werth des Integrales

$$\int \frac{1}{\sqrt{2rx-x^2}}\,dx,$$

so kann man setzen

$$\sqrt{2rx-x^2}=y,$$

und hieraus folgen für x und dx die Doppelwerthe:

entweder

$$x=r+\sqrt{r^2-y^2}, \quad \text{mithin} \quad dx=-\frac{ydy}{\sqrt{r^2-y^2}};$$

oder

$$x=r-\sqrt{r^2-y^2} \qquad \text{„} \qquad dx=+\frac{ydy}{\sqrt{r^2-y^2}}.$$

Im ersten Falle geht das obige Integral in das folgende über:

$$\int \frac{1}{y}\cdot\left(-\frac{ydy}{\sqrt{r^2-y^2}}\right)=-\operatorname{Arcsin}\frac{y}{r}+\text{Const.}$$

und man hat dann

$$\int \frac{1}{\sqrt{2rx-x^2}}\,dx=-\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2rx-x^2}}{r}+\text{Const.}$$

Im zweiten Falle erhält man auf gleiche Weise

$$\int \frac{1}{\sqrt{2rx-x^2}}\,dx=+\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2rx-x^2}}{r}+\text{Const.}$$

Welche von beiden Formeln die richtige ist, entscheidet sich sehr leicht durch Differenziation, und man wird finden, dass jede der beiden gefundenen Formeln gebraucht werden kann, nämlich die erste, wenn man

$$\sqrt{r^2-2rx+x^2}=x-r$$

und die zweite, wenn man dieselbe Wurzel $=r-x$ setzt. In der Anwendung auf bestimmte Probleme wird man aber aus der Natur des Gegenstandes jederzeit wissen, ob jene Wurzel $=x-r$ oder $=r-x$ zu setzen ist, und dann bleibt auch keine Wahl mehr zwischen den beiden erhaltenen Integralformeln. So kann man in jedem Falle durch Differenziation einerseits und durch genaue Erörterung seines Problemes andererseits sich vollständig orientiren.

Ganz anders wird die Sache bei bestimmten Integralen; hier gehen die Substitutionen bekanntlich nie rückwärts (von y nach x) sondern immer nur vorwärts, indem man zugleich die Veränderungen anmerkt, welche die Integrationsgränzen erleiden, und eine Probe durch Differenziation ist am Ende gewöhnlich gar nicht ausführbar, weil man es in den meisten Fällen mit solchen Differenzialformeln zu thun hat, die sich unbestimmt nicht integriren lassen. Um die hier entstehende kleine Schwierigkeit an einem recht frappanten Beispiele zu zeigen, betrachte ich das Integral

$$\int_{-3r}^{+r} f(x^2+2rx)\,dx.$$

Setzt man $x^2+2rx=y$, so folgt

$$x=-r\pm\sqrt{r^2+y},$$

mithin

$$f(x^2+2rx)dx=\pm f(y)\frac{dy}{2\sqrt{r^2+y}};$$

ist ferner x gleich der unteren Integrationsgränze $-3r$ geworden, so hat y den Werth $9r^2-6r^2=3r^2$ erhalten, und ebenso entspricht der oberen Integrationsgränze $x=+r$ die obere Gränze

$$y=r^2+2r^2=3r^2;$$

man hätte demnach

$$\int_{-3r}^{+r} f(x^2+2rx)dx=\pm\frac{1}{2}\int_{3r^2}^{3r^2} f(y)\frac{dy}{\sqrt{r^2+y}}.$$

Der Werth eines zwischen gleichen Gränzen genommenen Integrales ist aber im Allgemeinen die Null, und so gelangt man zu dem offenbar widersinnigen Resultate, dass für jede beliebige Funktion f das fragliche Integral der Null gleich sei. — Um ein richtiges Ergebniss zu erhalten, muss man hier folgendermassen schliessen. Wenn x das Intervall $-3r$ bis $+r$ durchläuft, so ändert sich der Ausdruck $y=x^2+2rx$ in der Weise, dass er während des Intervalls $-3r$ bis $-r$ abnimmt, für $x=-r$ sein Minimum erreicht und darauf $x=-r$ bis $x=+r$ wächst; dabei wird

$$\begin{aligned} &\text{für } x=-3r \quad \text{„} \quad y=+3r^2, \\ &\text{„} \quad x=-r \quad \text{„} \quad y=-r^2, \\ &\text{„} \quad x=+r \quad \text{„} \quad y=+3r^2. \end{aligned}$$

Sieht man x als Abscisse, y als Ordinate an, so kommt jede zwischen $-r^2$ und $+3r^2$ liegende individuelle Ordinate zweimal vor, einmal als gehörig zu einer zwischen $-3r$ und $-r$ liegenden kleineren und dann entsprechend einer zwischen $-r$ und $+r$ enthaltenen grösseren Abscisse; eine Ausnahme hiervon macht nur die Ordinate $+r^2$, die blos einmal vorkommt. Zerlegen wir jetzt das Integral Nro. 1) in folgende Integrale:

$$2) \qquad \int_{-3r}^{-r} f(x^2+2rx)\,dx + \int_{-r}^{+r} f(x^2+2rx)\,dx,$$

so enthält das erste Integral alle vorhin als kleinere bezeichneten x, und das zweite Integral lediglich die grösseren x; hieraus folgt, dass, wenn in beiden Integralen $x^2+2rx=y$ gesetzt wird, umgekehrt für das erste Integral in Nro. 2) nur die kleinere Wurzel $x=r-\sqrt{r^2+y}$ und für das zweite nur die grössere Wurzel $x=r+\sqrt{r^2+y}$ zu gebrauchen ist. Nach dieser Bemerkung verwandelt sich die Gleichung 2) in die folgende:

$$\int_{+3r^2}^{-r^2} f(y)\left[-\frac{dy}{2\sqrt{r^2+y}}\right] + \int_{-r^2}^{+3r^2} f(y)\left[+\frac{dy}{2\sqrt{r^2+y}}\right].$$

Kehrt man im ersten Integrale die Integrationsgränzen um, giebt ihm also das entgegengesetzte Vorzeichen, so lassen sich nunmehr beide Integrale zu einem einzigen zusammenziehen, nämlich

$$3) \qquad \int_{-r^2}^{+3r^2} f(y)\frac{dy}{\sqrt{r^2+y}},$$

und dieses ist die richtige Transformation von Nro. 1).

Das so eben auseinandergesetzte Verfahren dient gleichförmig auch zur Umwandlung des allgemeinen Integrales

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(x)]\,dx;$$

man hat nämlich vorerst zu untersuchen, wieviel Maxima und Minima der Funktion $y=\varphi(x)$ zwischen die Integrationsgränzen α und β fallen; treten diese Maxima und Minima für $x=\mu_1$, $x=\mu_2$, etc. ein, so ordne man die Grössen μ_1, μ_2 etc. nach ihrer Grösse, so dass $\alpha<\mu_1<\mu_2\ldots<\beta$ ist. zerlege das gegebene Integral in eine Reihe anderer Integrale, welche die Integrationsgränzen $x=\alpha$ bis $x=\mu_1$, $x=\mu_1$ bis $x=\mu_2$ etc. umfassen, und substituire in den einzelnen Integralen diejenigen Umkehrungen der Funktion $y=\varphi(x)$, welche den zugehörigen Intervallen entsprechen. — Wir geben hierzu einige Beispiele von möglichst allgemeinen Formen.

I. Es sei zunächst das dem vorigen ziemlich ähnliche Integral

$$J=\int_{-r}^{\infty}f(x^2+2rx)dx,$$

zu transformiren, so hat man zunächst

$$J=\int_{-\infty}^{-r}f(x^2+2rx)dx+\int_{-r}^{\infty}f(x^2+2rx)dx$$

und vermöge derselben Substitutionen wie vorhin

$$J=-\frac{1}{2}\int_{+\infty}^{-r^2}f(y)\frac{dy}{\sqrt{r^2+y}}+\frac{1}{2}\int_{-r^2}^{+\infty}f(y)\frac{dy}{\sqrt{r^2+y}}$$

$$=\int_{-r^2}^{+\infty}f(y)\frac{dy}{\sqrt{r^2+y}}.$$

Setzt man noch $y=r^2z$, so erhält man durch Vergleichung der verschiedenen Formen des J

$$4)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}f(x^2+2rx)dx=r\int_{-1}^{\infty}\frac{f(r^2z)dz}{\sqrt{1+z}}.$$

Will man das Wurzelzeichen rechter Hand vermeiden, so kann man $z=u^2-1$ setzen, und hat dann

$$5)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}f(x^2+2rx)dx=2r\int_{0}^{\infty}f[r^2(u^2-1)]du.$$

Aus den gefundenen Gleichungen lassen sich leicht allgemeinere Formeln dadurch herleiten, dass man mehrmals in Beziehung auf die willkührliche Constante r differenzirt; da die Ausführung dieser Operation nach den von Herrn Dr. **Hoppe** und mir gleichzeitig bekannt gemachten Formeln nicht die mindeste Schwierigkeit hat; so kann ich sie füglich übergehen.

II. Das zu transformirende Integral sei

$$J=\int_0^\infty f(cx+\frac{a}{x})dx.$$

Da $y=cx+\frac{a}{x}$ für $x=\sqrt{\frac{a}{c}}$ sein Maximum $y=2\sqrt{ac}$ erreicht, so zerlegen wir wie folgt:

$$J=\int_0^{\sqrt{\frac{a}{c}}} f(cx+\frac{a}{x})dx+\int_{\sqrt{\frac{a}{c}}}^\infty f(cx+\frac{a}{x})\,dx.$$

Aus $y=cx+\frac{a}{x}$ ergeben sich umgekehrt für x die Werthe

$$x=\frac{y-\sqrt{y^2-4ac}}{2c} \text{ und } x=\frac{y+\sqrt{y^2-4ac}}{2c},$$

durch deren Substitution man erhält:

$$J=\frac{1}{2c}\int_\infty^{2\sqrt{ac}} f(y)\left[1-\frac{y}{\sqrt{y^2-4ac}}\right]dy$$
$$+\frac{1}{2c}\int_{2\sqrt{ac}}^\infty f(y)\left[1+\frac{y}{\sqrt{y^2-4ac}}\right]dy.$$

Kehrt man im ersten Integrale die Integrationsgränzen um und vereinigt dann beide Integrale, so wird einfacher

$$J=\frac{1}{c}\int_{2\sqrt{ac}}^\infty f(y)\,\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-4ac}}.$$

Eine noch bessere Gestalt erhält das Integral, wenn man

$$\sqrt{y^2-4ac}=z$$

setzt; es wird nämlich schliesslich

$$6)\qquad \int_0^\infty f(cx+\frac{a}{x})dx=\frac{1}{c}\int_0^\infty f(\sqrt{4ac+z^2})\,dz.$$

Diese Formel lässt sich wiederum durch mehrfache Differenziationen in Beziehung auf a oder c verallgemeinern, womit wir uns jetzt nicht aufhalten wollen.

Nimmt man in Nro. 6) z. B.

$$f(u)=F\left(\frac{1}{b+u}\right),$$

so ergiebt sich

$$7)\qquad \int_0^\infty F\left(\frac{x}{a+bx+cx^2}\right)dx=\frac{1}{c}\int_0^\infty F\left(\frac{1}{b+\sqrt{4ac+z^2}}\right)dz.$$

Eine andere Supposition wäre

$$f(u)=F(u^2-2ac);$$

sie giebt

$$8)\qquad \int_0^\infty F(c^2x^2+\frac{a^2}{x^2})dx=\frac{1}{c}\int_0^\infty F(2ac+x^2)dx,$$

was ich schon früher einmal bekannt gemacht habe.

III. Als drittes Beispiel diene das Integral

$$J=\int_0^{2\pi} f(\cos x+\tan\vartheta.\sin x)dx,$$

worin ϑ einen constanten Bogen des ersten Quadranten bezeichnen möge. Wollen wir

$$\cos x+\tan\vartheta.\sin x=y$$

setzen, so ist zunächst zu erinnern, dass die Gleichung

$$\frac{dy}{dx}=-\sin x+\tan\vartheta.\cos x=0,$$

d. h.

$$\tan x=\tan\vartheta$$

zwei Wurzeln besitzt, welche in das Integrationsintervall 0 bis 2π fallen; diese Wurzeln sind $x=\vartheta$ und $x=\pi+\vartheta$; die erste macht y zu einem Maximum nämlich $\sec\vartheta$, die zweite giebt das Minimum $-\sec\vartheta$. Wir zerlegen nun wie folgt:

$$J=\int_0^{\vartheta} f(\cos x+\tan\vartheta.\sin x)dx+\int_{\vartheta}^{\pi+\vartheta} f(\cos x+\tan\vartheta.\sin x)dx$$
$$+\int_{\pi+\vartheta}^{2\pi} f(\cos x+\tan\vartheta.\sin x)dx.$$

Aus der Gleichung

$$\cos x+\tan\vartheta.\sin x=y$$

fliesst weiter durch Multiplikation mit $\cos\vartheta$:

$$\cos(\vartheta-x)=y\cos\vartheta,$$

und wenn wir unter $\mathrm{Arccos}\,z$ denjenigen positiven spitzen Bogen verstehen, dessen Cosinus $=z$ ist, so sind die positiven Wurzeln der obigen Gleichung:

$$\begin{aligned}\vartheta-x&=\mathrm{Arccos}\,(y\cos\vartheta)\\&=2\pi-\mathrm{Arccos}(y\cos\vartheta)\\&=2\pi+\mathrm{Arccos}(y\cos\vartheta)\\&=4\pi-\mathrm{Arccos}(y\cos\vartheta)\\&\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

von welchen wir nur die drei ersten brauchen. Man erhält aus ihnen für dx die drei Werthe:

$$+\frac{dy.\cos\vartheta}{\sqrt{1-y^2\cos^2\vartheta}},\quad -\frac{dy.\cos\vartheta}{\sqrt{1-y^2\cos^2\vartheta}},\quad +\frac{dy.\cos\vartheta}{\sqrt{1-y^2\cos^2\vartheta}};$$

mittelst deren sich J folgendermassen gestaltet:

$$J=\int_{+1}^{+\sec\vartheta} f(y)\frac{dy.\cos\vartheta}{\sqrt{1-y^2\cos^2\vartheta}}-\int_{+\sec\vartheta}^{-\sec\vartheta} f(y)\frac{dy.\cos\vartheta}{\sqrt{1-y^2\cos^2\vartheta}}$$
$$+\int_{-\sec\vartheta}^{+1}(y)\frac{dy.\cos\vartheta}{\sqrt{1-y^2\cos^2\vartheta}}.$$

Da das letzte Integral von $-\sec\vartheta$ bis $+1$ und das erste von $+1$ bis $+\sec\vartheta$ geht, so können diese beiden Integrale in das eine

$$\int_{-\sec\vartheta}^{+\sec\vartheta} f(y)\frac{dy.\cos\vartheta}{\sqrt{1-y^2\cos^2\vartheta}}$$

zusammengezogen werden; dieses ist mit dem zweiten Integrale einerlei, wenn man in letzterem die Gränzen vertauscht; demnach wird sehr einfach

$$J=2\int_{-\sec\vartheta}^{+\sec\vartheta} f(y)\,\frac{dy.\cos\vartheta}{\sqrt{1-y^2\cos^2\vartheta}}.$$

Eine bessere Form erhält das Integral mittelst der weiteren Substitution $y\cos\vartheta=\cos z$, woraus $dy.\cos\vartheta=-\sin z dz$ folgt; es ist jetzt

$$J=-2\int_{\pi}^{0} f(\sec\vartheta.\cos z)dz.$$

Kehrt man die Integrationsgränzen um und vergleicht die beiden Formen des J, so hat man die Transformation

$$\int_0^{2\pi} f(\cos x+\tan\vartheta.\sin x)dx=2\int_0^{\pi} f(\sec\vartheta.\cos z)dz.$$

Wir setzen hier weiter $\tan\vartheta=\frac{\beta}{\alpha}$ und bezeichnen überhaupt $f\left(\frac{u}{\alpha}\right)$ mit $F(u)$; es wird so

9) $$\int_0^{2\pi} F(\alpha\cos x+\beta\sin x)dx=2\int_0^{\pi} F(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.\cos z)dz.$$

Auch diese durch eine gewisse Eleganz ausgezeichnete Formel liesse sich durch successive Differenziationen in Beziehung auf α oder β leicht verallgemeinern.

XXVII.

Die Beziehung der Ellipse auf ihre zwei gleichen conjugirten Durchmesser.

Von

Herrn Doctor Kösters

zu Warendorf.

Unter den verschiedenen metrischen Relationen zur Bestimmung eines Kegelschnittes gibt es auch eine, welche in sehr einfacher Weise die Ellipse und Hyperbel auf zwei gerade Linien bezieht. Sind nämlich zwei gerade Linien L und L_1, welche sich unter einem Winkel (2φ) schneiden, der Lage nach gegeben, so ist der Ort des Punktes, dessen Abstände α und β von den zwei gegebenen Geraden im Quadrate eine konstante Summe oder Differenz p^2 geben, nämlich:

$$\alpha^2 \pm \beta^2 = p^2,$$

eine Ellipse oder gleichseitige Hyperbel.

Betrachtet man nun den Fall, in dem

$$\alpha^2 + \beta^2 = p^2,$$

so ist der Ort eine Ellipse, für welche durch einfache Construction sich die einzelnen Punkte, so wie die Achsen nun leicht bestimmen lassen. Es ist:

der Halbmesser der gleichen conjugirten Durchmesser

$$r = \frac{p}{\sin 2\varphi},$$

die grosse Halbachse

$$a = \frac{p}{\sqrt{2}.\sin\varphi},$$

die kleine Halbachse

$$b = \frac{p}{\sqrt{2}.\cos\varphi},$$

die Excentrizität

$$e = \frac{p}{\sin 2\varphi} . \sqrt{2\cos 2\varphi},$$

der Parameter

$$2\varpi = \frac{2p}{\sqrt{2}.\cos\varphi} . \tang\varphi = 2b\tang\varphi,$$

die Leitstrahlen

$$m + n = \frac{p\sqrt{2}}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2}}{\sin\varphi}.$$

Dieser Beziehung der Ellipse als Ortslinie auf zwei feste Geraden entspricht folgende Betrachtung.

Eine Ellipse wird gebildet durch die Peripherie eines Kreises, indem sich alle auf einem Durchmesser senkrechte Sehnen in ihrem Fusspunkte um einen gleichen Winkel drehen.

Sind (Taf. X. Fig. 1.) AB und C_1D_1 zwei senkrechte Durchmesser des Kreises M, und dreht sich jede auf AB senkrechte Sehne, z. B. PE_1, wie MC_1, in ihrem Fusspunkte um den Winkel φ, so bilden die so verschobenen Punkte der Peripherie des Kreises in ihrer neuen Lage, z. B. E und C, die Ellipse.

Dieses lässt sich auch also nachweisen.

Die Coordinaten (x, y) des Punktes E für die Coordinatenachsen MA und MC sind gleich den Coordinaten (x_1, y_1) des Punktes E_1 des Kreises für die rechtwinkligen Coordinatenachsen MA und MC_1. Ist nun r der Radius des Kreises M, so ist seine Gleichung bezugs der Coordinatenachsen MA und MC_1:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2,$$

folglich die Gleichung der Ellipse bezugs der Coordinatenachsen MA und MC:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Fällt man nun von einem beliebigen Punkte (x, y) der Ellipse

Senkrechten α und β auf MA und MC, so ist, wenn der Winkel $AMC = 2\varphi$ gesetzt wird:

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2 \sin^2 2\varphi.$$

Dieses ist die Gleichung, von der wir ausgegangen, wenn man nur

$$r^2 \sin^2 2\varphi = p^2$$

setzt. Bei dieser Darstellung der Ellipse lassen sich leicht aus den Eigenschaften des Kreises entsprechende für die Ellipse ableiten, z. B.:

Jede zwei senkrechte Durchmesser des Kreises werden zwei conjugirte Durchmesser der Ellipse.

Wie im Kreise jede zu einem von zwei senkrechten Durchmessern parallele Sehne vom andern halbirt wird, so wird auch in der Ellipse jede zu einem von zwei conjugirten Durchmessern parallele Sehne vom andern halbirt.

Wie beim Kreise jede im Endpunkte eines von zwei senkrechten Durchmessern zum andern parallele Gerade Tangente des Kreises ist, so ist bei der Ellipse jede im Endpunkte eines von zwei conjugirten Durchmessern zum andern parallele Gerade Tangente der Ellipse.

Es gibt für jeden Winkel (ψ) der Drehung der Sehne eine bestimmte Ellipse über AB und CD, als den zwei gleichen conjugirten Durchmessern. Wächst der Winkel ψ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so geht die Ellipse alle Gestalten durch vom Kreise bis zur geraden Linie als Gränze, deren Länge $= 2r\sqrt{2}$.

Im zweiten Quadranten, d. h. wenn der Winkel ψ von $\frac{\pi}{2}$ bis π wächst, dehnt sich die Ellipse wieder bis zur Peripherie des Kreises.

Bei der Drehung der auf AB senkrechten Sehnen des Kreises (Grundkreises) beschreibt jeder Punkt seiner Peripherie einen Kreis, und ist in jeder Lage ein Punkt einer Ellipse; somit liegen also die entsprechenden Punkte sämmtlicher Ellipsen in bestimmten Kreisen. Die Scheitel jeder zwei conjugirten Durchmesser bewegen sich bei Aenderung des Winkels ψ in zwei Kreisen, welche sich in dem festen Durchmesser AB berühren, und für deren Radien ϱ und ϱ_1 man die Gleichung hat:

$$\varrho^2 + \varrho_1^2 = r^2.$$

Für die Scheitel der Achsen ist noch ausserdem

$$\varrho = \varrho_1 .$$

Ferner die Tangenten der entsprechenden Punkte sämmtlicher Ellipsen (aus dem Grundkreise M) drehen sich um einen festen Punkt in dem Durchmesser AB, und daher sind, wie die Ordinaten, auch die Subtangenten s der entsprechenden Punkte unter sich gleich und zwar ist:

$$s = \frac{y^2}{x} .$$

Wenn die zwei gleichen conjugirten Durchmesser der Lage nach und ausserdem p oder ein Punkt der Ellipse oder eine Tangente gegeben sind, so ist die Ellipse bestimmt und der Nachweis ihrer Eigenschaften, sowie die Constructionen, zeichnen sich hier durch Einfachheit aus.

Sind L und L_1 der Lage nach gegeben und ausserdem ein Punkt E der Ellipse, so findet man leicht den Grundkreis. Man ziehe die Ordinate EP, und $PE_1 (= PE)$ senkrecht auf AB, beschreibe dann aus M mit ME_1 einen Kreis, so ist dieser der Grundkreis der Ellipse. Zieht man ferner den Durchmesser MH_1 alsdann $H_1 O \perp AB$, und $OH (= OH_1)$ parallel zu DC, und dann MH, so sind MH und ME die Halbmesser zweier conjugirter Durchmesser. Durch die Verbindung der durch den Grundkreis bestimmten Scheitel der zwei gleichen conjugirten Durchmesser erhält man ein Rechteck, welches der Ort des Punktes ist, dessen Abstände α und β von den zwei conjugirten Durchmessern (Diagonalen) die constante Summe p geben, nämlich:

$$\alpha + \beta = p .$$

Ihrer Einfachheit wegen mögen die folgenden zwei Aufgaben gelöst werden.

1. Sind L und L_1 und ein Punkt E der Ellipse gegeben, in E eine Tangente an die Ellipse zu ziehen.

Man ziehe $EP \# L_1$ und $PE_1 (= PE)$ senkrecht auf L, ziehe ME_1, und $E_1 G \perp ME_1$, verbinde G mit E, so ist GE Tangente der Ellipse.

2. Sind L und L_1 und ausserdem eine Tangente Q der Ellipse gegeben, den Berührungspunkt in Q zu finden; oder: den Punkt in Q zu finden, für den die Summe der Quadrate der Entfernungen α und β von L und L_1, nämlich

$$\alpha^2 + \beta^2 ,$$

ein Minimum ist.

Man ziehe $MY_1 (= MY)$ senkrecht auf L, verbinde Y_1 mit G, fälle $ME_1 \perp GY_1$, und $E_1P \perp L$, ziehe PE parallel zu L_1, so ist E der verlangte Punkt.

Vergleicht man den Grundkreis der Ellipse noch mit den beiden über den zwei Achsen beschriebenen Kreisen, so ist jener der Ort des Punktes, der zu den beiden letzten Kreisen gleiche Potenz hat.

Anmerkung. Beschreibt man aus dem Halbirungspunkte der Centrallinie $(=2m)$ zweier Kreise, deren Radien R und r sind, einen dritten Kreis mit dem Radius

$$\varrho = \sqrt{\frac{R^2+r^2}{2} - m^2},$$

so ist dieser der Ort des Punktes, der zu den beiden ersten Kreisen gleiche Potenz hat.

XXVIII.

Bemerkungen zu den Elementen der Arithmetik.

Von dem

Herrn Doctor R. Baltzer,

Oberlehrer an der Kreuzschule zu Dresden.

---

1. Zu den Wurzeln.

Die Elementarlehre von den Wurzeln vereinfacht sich ein wenig, wenn man von der Wurzel aus einer Potenz ausgeht, ebenso wie man in der Lehre von den Quotienten besser die Division der Producte an die Spitze stellt. Die Gleichungen

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

erweist man durch Potenzirung mit n, und zwar die letztere zunächst unter der Voraussetzung, dass m durch n theilbar. Die Gleichungen

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}},$$

welche durch Potenzirung mit mn bewiesen werden, und aus denen (abgesehen von den Vorzeichen, als welche man die Wurzeln aus 1 betrachten kann)

$$\sqrt[mn]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^p}$$

folgt. so wie die Entwickelung von $\sqrt[n]{ab}$ und $\sqrt[n]{a:b}$, bestätigen dann, dass

$$a^{\frac{1}{n}},\quad a^{\frac{m}{n}}$$

adäquate Ausdrücke für $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{a^m}$ sind.

Was das Vorzeichen anlangt, so ist in übrigens sorgfältigen Darstellungen noch zu finden, dass dabei die Entstehung des Radicanden in Betracht komme, dass also

$$\sqrt{(a-b)^2} = a - b \text{ (nicht } b - a)$$

eindeutig, dagegen

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \pm (a - b)$$

zweideutig sei. Z. B. Heis Sammlung §. 48. Dagegen muss bemerkt werden, dass so lange der Radicandus denselben Werth hat, auch die Wurzel dieselbe ist, und zwar $n$deutig wie jede $n$te Wurzel. Nun ist über die Identität von $(a-b)^2$ und von $a^2 - 2ab + b^2$ ein Zweifel nicht möglich, folglich haben beide Formeln dieselbe Quadratwurzel, welche eben so gut negativ als positiv genommen werden kann. Dass überhaupt, wenn α eine positive Zahl und $\alpha^n = a$, man

$$\sqrt[n]{a} = \alpha \sqrt[n]{1}$$

zu setzen habe, wobei $\sqrt[n]{1}$ wie ein Vorzeichen erscheint, ist von der kritischen Schule hinreichend besprochen, und sollte auch von den elementaren Darstellungen nicht ganz mit Stillschweigen übergangen werden.

II. Zu den Logarithmen.

Der Mangel eines bequemen Ausdrucks für die Zahl, mit welcher k potenzirt die Zahl a giebt, ist oft genug beim Unterrichte empfunden worden, wie verschiedene Versuche anzeigen. Am gebräuchlichsten ist der Ausdruck „Logarithmus von a zur Basis k" und die Bezeichnung eine der folgenden:

$$\overset{k}{\log} a,\quad \underset{\smile}{\overset{k}{\log}} a,\quad \log_{(k)} a.$$

Nach der bei Functionen mit einem Parameter üblichen Schreibart könnte man das Zeichen

$$\log(k,\ a)$$

gebrauchen, welches jedoch mit den vorigen Zeichen die unbequeme Länge in Schrift und Rede zum Theil gemein hat, obgleich es dem Druck mehr zusagt. Der in J. H. T. Müller's Arithmetik S. 287. angenommene Ausdruck „Hochzahl von a durch k exponentiirt" ist zwar zur Bildung von Lehrsätzen nicht ungeschmeidig, allein die Bezeichnung dafür

$$\overset{a}{\underset{k}{=}}$$

wird schwerlich Eingang finden, weil sie den bereits feststehenden Zeichen $\log a$, la für den gemeinen und natürlichen Logarithmen von a sich nicht anschliesst.

Von jeder Bezeichnung verlangt man billig, dass sie nicht nur für Schrift und namentlich für Druck leicht ausführbar, sondern dass sie auch in der Rede leicht wiederzugeben d. h. lesbar sei. Diesen Forderungen entspricht die erste Bezeichnung, sobald man k nicht über log, sondern links oben an log stellt:

$${}^k\log a$$ *)

und „k-Logarithmus von a" ausspricht (etwa wie $n$te Wurzel aus a). Die Zeichen

$${}^{10}\log a,\quad \log.\text{vulg}.a,\quad \log a$$

sind als gleichgeltend zu geben, sowie

$${}^e\log a,\quad \log.\text{nat}.a,\quad \ln a,\quad la.$$

Dabei vermisse ich in den elementaren Lehrbüchern die Bemerkung, dass ${}^e\log a$, und nicht ${}^{10}\log a$, natürlich heisst, weil er allein eine unmittelbare Berechnung zulässt, während andere (künstliche) Logarithmen nur durch Probiren aus Wurzeln der Basis oder durch natürliche Logarithmen bestimmbar sind.

Ferner gehört auch in ein Elementarbuch die Anmerkung, dass die Logarithmen vieldeutig sind wie die Wurzeln, nur unendlichdeutig, dass wenn a eine positive Zahl und $k^\alpha = a$, vermöge der Formel für ${}^k\log ab$ man

$${}^k\log a = \alpha + {}^k\log 1,$$

$${}^k\log k = 1 + {}^k\log 1,$$

$${}^k\log(-a) = \alpha + {}^k\log(-1)$$

---

*) Diese Bezeichnung, die ich Hrn. Prof. Schlömilch mitgetheilt, ist von demselben bereits mit der Aufnahme in dessen neue Ausgabe der algebraischen Analysis (S. 8.) beehrt worden.

zu setzen habe, dass aber ${}^{k}\log 1$ einen andern reellen Werth als Null nicht zulässt, während ${}^{k}\log(-1)$ durchaus imaginär ist. Solche Aussichten ermuntern zu weiterem Studium.

Aus der Definition würde ich zunächst ableiten, dass

$$a^{{}^{k}\log b} = b^{{}^{k}\log a},$$

indem

$$a = k^{{}^{k}\log a}, \quad b = k^{{}^{k}\log b},$$

folglich jede der beiden Potenzen

$$= k^{{}^{k}\log a \, {}^{k}\log b}.$$

Ferner

$${}^{m}\log a = \frac{{}^{k}\log a}{{}^{k}\log m},$$

indem

$$m^{{}^{k}\log a : {}^{k}\log m} = k^{{}^{k}\log m ({}^{k}\log a : {}^{k}\log m)} = k^{{}^{k}\log a} = a.$$

Dann folgen die auf den Numerus bezüglichen Formeln für

$${}^{k}\log ab, \quad {}^{k}\log \frac{a}{b}, \quad {}^{k}\log a^{b},$$

denen noch beizugeben sind

$${}^{k}\log(a+b) = {}^{k}\log a + {}^{k}\log\left(1+\frac{b}{a}\right),$$

$${}^{k}\log(a-b) = {}^{k}\log a - {}^{k}\log \frac{1}{1-\frac{b}{a}} \; [a > b],$$

um zu dem Gebrauch der Gauss'schen Hülfstafeln anzuleiten, welche nach der neuen Einrichtung (wie sie bereits 1844 von J. H. T. Müller in den höchst zweckmässigen vierstelligen Tafeln gegeben worden) bei dem Argument $\log a - \log b$ die zur Erlangung von $\log(a+b)$ und $\log(a-b)$ nöthigen Correctionen

$$\log\left(1+\frac{b}{a}\right) \text{ und } \log \frac{1}{1-\frac{b}{a}}$$

darbieten. Vergl. die vortrefflichen Beispiele in Heis Sammlung. §. 59., welche übrigens noch die ältere Einrichtung berücksichtigen.

III. Zu den Verhältnissen und Proportionen.

1. Das Verhältniss einer Grösse A zu einer gleichartigen Grösse B ist — es ist fabelhaft, mit wie verschiedenen Wendungen verschiedene Schriftsteller fortfahren, denen man zum Theil nicht undeutlich ein gewisses Unbehagen bei diesem Definitionsgeschäft anmerkt. Ich will die Leser des Archivs nicht mit Anführungen behelligen, jeder findet in seiner Bibliothek Beispiele. Die Quälereien haben einen doppelten Ursprung; beim Vater Euklides darin, dass die Irrationalzahlen noch kein Bürgerrecht unter den Zahlen hatten, bei den Neueren darin, dass man angefangen hatte von arithmetischen Verhältnissen im Gegensatz zu geometrischen zu reden und dass man nun ein Abstractum aus zwei äusserst verschiedenartigen Begriffen bildete. Warum hörte man nicht auf Euler? In der Algebra. I. §. 380. steht geschrieben: „Ein arithmetisches Verhältniss ist nichts anders als die Differenz zwischen zwei Zahlen. Welches letztere Wort füglicher gebraucht wird, so dass das Wort Verhältniss nur allein bei den sogenannten geometrischen Verhältnissen beibehalten wird." Und §. 440.: „Das geometrische Verhältniss zwischen zwei Zahlen enthält die Antwort auf die Frage, wievielmal die eine Zahl grösser sei als die andere, und wird gefunden, wenn man die eine durch die andere dividirt, da dann der Quotient die Benennung des Verhältnisses anzeigt." Es ist also deutlich zu lesen, woran ausserhalb der Elementarbücher doch Niemand mehr zweifelt: das Verhältniss zweier Grössen ist eine Zahl. Euklides scheute sich freilich in diesen Satz einzustimmen, denn er konnte diese Zahl nicht in allen Fällen vollkommen angeben; wir können das auch nicht, haben uns aber mit der Begrenzung derselben begnügen gelernt. Schade, dass der tödtliche Streich, den Euler auf „das arithmetische Verhältniss" geführt, nicht auch dessen Genossen „die Benennung des geometrischen Verhältnisses" (Name, Anzeiger, Exponent) getroffen hat; denn alle Quälerei hat ein Ende, wenn man statt dieser Ausdrücke keinen andern als eben „Verhältniss" selbst braucht. (Wenn ich nicht irre, ist in französischen Büchern hier und da π als le rapport de la circonférence au diamètre bezeichnet). In der That sind die Differenz von zwei Grössen und ihr Verhältniss himmelweit verschieden, denn erstere ist eine Grösse, letzteres eine reine (abstracte) Zahl, so rein als ein Multiplicator nur sein kann. Aus zwei solchen Begriffen einen gemeinsamen höhern herauszupressen, ist undankbare Mühe.

2. Auf die Erklärung des Quotienten hat nach meiner Meinung in den Elementen 1) der Nachweis desselben für die verschiedenen Fälle durch Bildung der Brüche, 2) die Bedeutung desselben zu folgen. Die besseren Lehrbücher sagen, das Dividiren habe bei benannten Zahlen (Grössen) eine von zwei Bedeutungen, Messen oder Theilen. Auch abgesehen von Anwendungen kann gesagt werden: der Quotient bedeutet

entweder den sovielten **Theil** des Dividendus, als der Divisor angiebt;

oder das **Verhältniss** des Dividendus zum Divisor, d. h. die Zahl, welche angiebt, wievielmal der Divisor im Dividendus enthalten, oder das Wievielfache der Dividendus vom Divisor ist.

Wenn nun von zwei Grössen A und B die erste a solche Theile hat, deren die andere b hat, so ist

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b},$$

folglich

$$A = \frac{a}{b} B,$$

d. h. das Verhältniss von A zu B ist $\frac{a}{b}$, A verhält sich zu B wie $a:b$ u. s. w*).

3. Die Unklarheiten im Begriff „Verhältniss" zeigen sich nicht selten bei Definitionen der Mechanik und Physik. So steht **Pouillet-Müller Physik** I. §. 84. „Das Verhältniss zwischen Raum und Zeit heisst die **Geschwindigkeit** der gleichförmigen Bewegung." **Brettner Physik** §. 33. „Geschwindigkeit der Bewegung ist das Verhältniss des Raumes, den ein Körper durchläuft, zu der Zeit, die er dazu nöthig hat." **Lamé cours de physique** §. 21. „On donne le nom de vitesse au rapport de l'espace parcouru divisé par le temps employé" u. s. w. Gleichwohl zweifelt im Ernst Niemand daran, dass (ausser im Witz) vom Verhältniss ungleichartiger Grössen nicht gesprochen werden könne. Die Geschwindigkeit einer Bewegung ist gar nicht ein Verhältniss, sondern ein Theil der durchlaufenen Bahnstrecke, wie anderwärts oft genug richtig gesagt ist. Gleichartig mit Geschwindigkeit ist die **Beschleunigung** einer Bewegung, welche gewöhnlich mit dem unpassenden Namen beschleunigender Kraft belegt wird. Nur die **Geschwindigkeit** (des Wachsthums) **einer Function**, welche mit der Variablen gleichartig ist, kann ein Verhältniss genannt werden, nämlich das Verhältniss ihrer Aenderung zur zugehörigen Aenderung der Variablen, welches beim Verschwinden dieser Aenderungen sich ergiebt (Fluxion, Derivation, Differentialverhältniss). Ist die Function ungleichartig mit der Variablen, so kann unter ihrer Geschwindigkeit nur ein Theil von der Aenderung der Function verstanden werden, und die

*) Die hier entwickelten Ansichten habe ich einer kleinen Schrift: **Rechenbuch für den Standpunkt der Mittelschule. 1850.** zu Grunde gelegt.

Geschwindigkeit ist gleichartig mit der Function, wie die Bewegungs-Geschwindigkeit mit der durchlaufnen Bahnstrecke.

Dichtigkeit und specifisches Gewicht werden gewöhnlich relativ verstanden als die Verhältnisse von Masse und Gewicht eines Körpers zu Masse und Gewicht eines bestimmten Körpers von gleichem Volum. Beide sind dadurch von individuellen Masseinheiten frei und für einerlei Materie gleich, weil das Gewicht der Masse proportional. Man kann indessen Dichtigkeit und specifisches Gewicht eines Körpers auch als Masse und Gewicht seiner Volumeinheit darstellen. Dieselbe Bewandtniss hat es mit Wärmecapacität und specifischer Wärme und mit vielen anderen Begriffen, welche ursprünglich allerdings Verhältnisse sind, wie Atomgewicht, Luftfeuchtigkeit, Brechungsverhältniss, Empfindlichkeit einer Wage, Abplattung der Erde, Excentricität einer Ellipse, Wahrscheinlichkeit u. s. w., deren Definitionen in den Lehrbüchern zum Theil noch mehr Schärfung erhalten können.

4. Das, was man bisweilen „Masszahl einer Grösse“ nennt, ist nichts anderes als „das Verhältniss der Grösse zur Masseinheit“, wofür man abkürzend „Grösse“ sagt. Z. B. in der Regel „Das Parallelogramm ist das Product aus Grundlinie und Höhe“, steht Parallelogramm statt Verhältniss seiner Fläche zur Quadrateinheit, Grundlinie statt deren Verhältniss zur Längeneinheit u. s. w. In der Regel „Fläche und Umfang sphärischer Polarfiguren ergänzen sich zu 4“ steht Fläche statt Verhältniss derselben zum sphärischen Octanten, Umfang statt Verhältniss desselben zum Hauptkreisquadranten. Die Masszahlen der Grössen sind also bei richtigem Gebrauch des Wortes Verhältniss eine überflüssige Erfindung.

Das Reciproke einer Grösse d. h. das Verhältniss der Masseinheit zur Grösse kann die Kleinheit desselben genannt werden. In der That ist die Kleinheit einer verschwindenden Grösse $=\infty$, einer unendlichen Grösse $=0$. Die Kleinheit des Abstandes zweier Punkte heisst ihre „Nähe“ (Herschel on light, art. 247. spricht von der Brenn-Nähe einer Linse. Z. B. die Krümmung einer Curve ist der Kleinheit des Krümmungsradius oder der Nähe ihres Krümmungsmittelpunkts, die Massenanziehung dem Quadrat ihrer Nähe proportional u. s. w.

5. Die Bemerkungen, dass $A:B \gtreqless 1$, je nachdem $A \gtreqless B$ (die Ausdrücke „steigendes und fallendes Verhältniss“ sind aufzugeben); dass $A:C \gtreqless B:C$, je nachdem $A \gtreqless B$, und umgekehrt; dass $A:B$, wenn es weder eine ganze Zahl noch ein Bruch ist, doch zwischen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$ falle, für eine beliebige ganze Zahl n, so dass auch m eine ganze Zahl ist; — eröffnen die allgemeine Proportionenlehre, deren weitere Entfaltung vorzüglich auf dem Lehrsatz beruht:

Zwei Verhältnisse sind gleich, wenn sie dieselben Näherungswerthe haben ($\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$ für beliebiges n, und ein dazu gehöriges m).

Beweis. Es sei

$$\frac{m}{n}B < A < \frac{m+1}{n}B,$$

$$\frac{m}{n}D < C < \frac{m+1}{n}D;$$

so ist

$$A:B < \frac{m+1}{n}, \quad C:D > \frac{m}{n};$$

folglich

$$(A:B)-(C:D) < \frac{m+1}{n}-(C:D) < \frac{m+1}{n}-\frac{m}{n}.$$

Diese Differenz muss Null sein, denn von Null verschieden wäre sie nicht kleiner als $\frac{1}{n}$ bei beliebigem n. Also ist

$$A:B=C:D.$$

Diese Schlussweise führt auf allgemeine Sätze der Geometrie über das Verhältniss von Strecken, Flächen, Räumen, Winkeln, Krümmungen, wobei auf Incommensurabilität dieser Grössen Rücksicht zu nehmen ist.

6. Aus dem Lehrsatze folgt zunächst die **Zusammensetzung der Verhältnisse**

$$A:B=(A:C):(B:C).$$

Beweis. Es sei

$$\frac{m}{n}B < A < \frac{m+1}{n}B,$$

so ist

$$\frac{m}{n}(B:C) < A:C < \frac{m+1}{n}(B:C),$$

folglich u. s. w.

Nun ist

$$1:(B:C)=C:B,$$

also auch

$$A:B=(A:C)(C:B).$$

Wenn z. B.

$$A:C=P:Q, \quad C:B=R:S,$$

so ist

$$A:B=(P:Q)(R:S).$$

Von der Zahlengleichung $\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs}$ entlehnt man die kürzere Schreibart $PR:QS$ statt $(P:Q)(R:S)$, und erhält

$$A:B=AC:BC,$$

oder in dem gegebenen Beispiel

$$A:B=PR:QS.$$

An sich nämlich ist ein Grössenproduct bedeutungslos, weil der Multiplicator nur eine Zahl sein kann; wodurch nicht ausgeschlossen ist, dass in bestimmtem Sinne eine Grösse als Product von Grössen dargestellt werden kann. (Vergl. 4.).

7. Hierauf gründen sich die bekannten Eigenschaften der einfachen Proportion (Gleichung von zwei Verhältnissen)

$$A:B=C:D.$$

Schreibt man dafür

$$(A:B)(D:C)=1 \quad \text{oder} \quad AD:BC=1,$$

so ergiebt sich

$$AD=BC,$$

was mit dem Grössenproduct zugleich Bedeutung gewinnt. Andererseits folgt aus der gegebenen Gleichung

$$(A:B)(B:C)=(B:C)(C:D),$$

d. h. nach dem Obigen (6):

$$A:C=B:D.$$

Diese Proportion hat dann Sinn, wenn C gleichartig mit A oder eine Zahl ist; jedoch hört sie im zweiten Falle auf, eine Proportion im eigentlichen Wortsinne zu sein, da $A:C$ dann nicht mehr ein Verhältniss, sondern einen Theil von A bedeutet.

Die Gleichung

$$A = \frac{C}{D} B \text{ oder } \frac{BC}{D}$$

bedarf nach dem Begriffe des Verhältnisses keines Beweises, sondern ist Ergebniss der Definition. (Vergl. $\frac{a}{b} b = a$).

8. Nicht hinreichend scheint mir in den meisten Lehrbüchern, deren Proportionenlehre einen starken Beischmack von Scholastik hat, die vielfache Proportion gewürdigt. Welche Eleganz dieselbe dem Calcul zu verleihen im Stande ist, kann man besonders aus Möbius Werken ersehen.

Wenn nämlich $A:B = F:G$, $B:C = G:H$, so ist (6) $A:C = F:H$. Man vereinigt diese Proportionen in der Gleichung

$$A:B:C = F:G:H,$$

wofür auch (nach 7)

$$A:F = B:G = C:H$$

geschrieben werden könnte. Die Haupteigenschaften der vielfachen Proportion

$$A:B:C = F:G:H$$

sind folgende.

a. Es ist

$$AL:BL:CL = F:G:H.$$

b. Es ist

$$AL:BM:CN = FL:GM:HN.$$

c. Wenn noch $L:M:N = P:Q:R$, also auch

$$FL:GM:HN = FP:GQ:HR,$$

so ist

$$AL:BM:CN = FP:GQ:HR.$$

Daher insbesondere

$$A^2:B^2:C^2 = F^2:G^2:H^2 \text{ u. s. w.}$$

d. Es ist

$$Ax+By+Cz:Ap+Bq+Cr = Fx+Gy+Hz:Fp+Gq+Hr.$$

Dies ergiebt sich am einfachsten, wenn man Ax mit $F:A$, By mit $G:B$, u. s. w. multiplicirt.

Wenn also z. B. $F+G=H$, so ist $A+B=C$. Oder wenn $Ax+By+Cz=0$, so ist auch $Fx+Gy+Hz=0$. Und umgekehrt, wenn $AL+BM+CN=0$, so kann man

$$AL:BM:CN=-v:1:v-1,$$

$$A:B:C=-\frac{v}{L}:\frac{1}{M}:\frac{v-1}{N}$$

setzen, wobei $-v$ das durch die gegebene Gleichung unbestimmt gelassene Verhältniss $AL:BM$ bedeutet.

9. Während ich so eben meine Verehrung für die Proportion bei unbestimmten Gleichungen zu erkennen gegeben, kann ich nicht umhin meine Einstimmung mit denen zu versichern, welche in der sogenannten Regel de tri die Proportionen nicht leiden mögen. Wenn m Pfund a Thaler kosten, so schliesst man leicht genug, dass 1 Pfund $\frac{a}{m}$ Thaler und n Pfund $\frac{an}{m}$ Thaler kosten. Die altherkömmliche Regel de tri antwortet dagegen auf die vorgelegte Frage: n Pfund kosten x Thaler, bildet die Gleichung $x:a=n:m$ und löst dieselbe auf. Wenn eine so directe Methode wie die erste zum Ziele führt, so ist die indirecte algebraische Methode mindestens überflüssig. Dass aber die directe Methode fähig ist auch in den zusammengesetzten Fällen allen Ansprüchen zu genügen, kann von dem, der sie versucht hat, nicht in Zweifel gezogen werden. Den nähern Nachweis davon findet man z. B. in meinem oben erwähnten Rechenbuche.

XXIX.

Bemerkung zur Theorie der Kettenbrüche.

Von dem

Herrn Professor Dr. Schlömilch

zu Dresden.

Enthält ein Kettenbruch nur positive Glieder, so besitzen die Näherungsbrüche desselben die folgenden sehr bekannten Eigenschaften:

1) Jeder Näherungsbruch ungerader Ordnung ist grösser und jeder Näherungsbruch gerader Ordnung kleiner, als alle folgenden Näherungsbrüche;

2) die Näherungsbrüche ungerader Ordnung werden immer kleiner, und die gerader Ordnung immer grösser;

und es folgt hieraus, dass bei unendlichen Kettenbrüchen der obigen Art sowohl die Näherungsbrüche ungerader als die gerader Ordnung sich bestimmten Gränzen nähern müssen. Bezeichnen wir also den Näherungsbruch

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ldots + \cfrac{b_m}{a_m}}}$$

mit $\frac{p_m}{q_m}$, so finden die Gleichungen statt:

$$1)\qquad \operatorname{Lim}\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}=G_1 \quad \text{und} \quad \operatorname{Lim}\frac{p_{2n}}{q_{2n}}=G_2,$$

worin G_1 und G_2 ein paar endliche positive Zahlen bedeuten. Für $G_1=G_2$ heisst der unendliche Kettenbruch ein convergenter, für $G_1 \gtrless G_2$ ein divergenter, und man kann nur im ersten Falle sagen, dass der Kettenbruch einen bestimmten Werth habe, während er im zweiten Falle eine symbolische Darstellung zweier Grössen ist. Jedenfalls wäre es nun interessant, entschieden divergente Kettenbrüche kennen zu lernen, und zugleich die beiden Gränzen G_1 und G_2 a priori zu bestimmen. Man kann hierzu u. A. auf folgendem sehr einfachen Wege gelangen.

Nach einem bekannten Satze, dessen Beweis man in §. 80. der zweiten Auflage meiner algebraischen Analysis findet, gilt folgende Gleichung:

$$\frac{1}{t_0}-\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}-\ldots+\frac{(-1)^m}{t_m}$$

$$=\cfrac{1}{t_0+\cfrac{(t_0)^2}{t_1-t_0+\cfrac{(t_1)^2}{t_2-t_1+\cfrac{(t_2)^2}{t_3-t_2+\ldots+\cfrac{(t_{m-1})^2}{t_m+t_{m-1}}}}}},$$

in welcher t_0, t_1, t_2, etc. völlig beliebige Zahlen bedeuten; man leitet hieraus leicht die noch etwas bequemere Formel ab:

$$2)\qquad \frac{r_0}{u_0}-\frac{r_1}{u_1}+\frac{r_2}{u_2}-\ldots+(-1)\frac{r_m}{u_m}$$

$$=\cfrac{r_0}{u_0+\cfrac{r_1(u_0)^2}{r_0u_1-r_1u_0+\cfrac{r_0r_2(u_1)^2}{r_1u_2-r_2u_1+\cfrac{r_1r_3(u_2)^2}{r_2u_3-r_3u_2+\ldots+\cfrac{r_{m-2}r_m(u_{m-1})^2}{r_{m-1}u_m-r_mu_{m-1}}}}}}.$$

Da diese Formel für jedes m gilt, so kann man m auch ins Unendliche wachsen lassen, ohne irgend einen Irrthum besorgen zu müssen; denn bezeichnet man die Summe der m ersten Glieder der Reihe mit S_m und den $m$ten Näherungsbruch des Kettenbruches mit $\frac{p_m}{q_m}$, so ist nach No. 2) immer

$$3)\qquad S_m=\frac{p_m}{q_m},$$

und es findet also zwischen dem Kettenbruche und der Reihe eine fortwährende Uebereinstimmung statt, wie weit man auch gehen möge. Divergirt nun die Reihe, so muss auch der Kettenbruch divergiren, und hier ist besonders der Fall für unseren Zweck brauchbar, wo man die Reihenglieder

$$\frac{r_0}{u_0},\ \frac{r_1}{u_1},\ \frac{r_2}{u_2},\ \ldots\ldots$$

zwar fortwährend abnehmend wählt, ohne sie jedoch unendlich klein werden zu lassen, denn es gehört dann die Reihe in die Klasse derer, welche zwei verschiedene Summen besitzen, je nachdem man eine gerade oder ungerade Gliederzahl vereinigt. Diese beiden verschiedenen Summen der unendlichen Reihe sind dann die Gränzen G_1 und G_2.

So z. B. hat man nach No. 2)

$$4)\qquad \frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\ldots\ldots+(-1)^{m-1}\frac{m+1}{m}$$
$$=\cfrac{2}{1+\cfrac{3.1^3}{1+\cfrac{4.2^3}{1+\cfrac{5.3^3}{1+\ldots\ldots+\cfrac{(m+1)(m-1)^3}{1}}}}}$$

und hier lässt sich die links stehende Summe S_m auf folgende Weise schreiben:

$$S_m=(1+\frac{1}{1})-(1+\frac{1}{2})+(1+\frac{1}{3})-\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+(-1)^{m-1}(1+\frac{1}{m}),$$

woraus sich für ein ungerades m ergiebt:

$$S_{2n-1}=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots\ldots+\frac{1}{2n-1}\right),$$

mithin für unendlich wachsende n

$$\begin{aligned}\operatorname{Lim} S_{2n-1}&=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots\ldots\\&=1+l2\end{aligned}$$

und diess ist nach No. 3) zugleich der Gränzwerth von $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$ oder G_1. Dagegen hat man für ein gerades m:

$$S_{2n} = 0 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n},$$

$$\operatorname{Lim} S_{2n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \dots = l2$$

und diess ist zugleich $\operatorname{Lim}\frac{p_{2n}}{q_{2n}} = G_2$. Der unendliche Kettenbruch

$$\cfrac{2}{1+\cfrac{3.1^3}{1+\cfrac{4.2^3}{1+\cfrac{5.3^3}{1+\cfrac{6.4^3}{1+\text{etc.}}}}}}$$

divergirt also in der Weise, dass sich seine Näherungsbrüche ungerader Ordnung der Gränze $1+l2$ und die gerader Ordnung der Gränze $l2$ nähern.

Behält man nur den Theil des Kettenbruches bei, welcher nach einem und demselben Gesetze fortschreitet, so würde für den Kettenbruch

$$\cfrac{3.1^3}{1+\cfrac{4.2^3}{1+\cfrac{5.3^3}{1+\cfrac{6.4^3}{1+\text{etc.}}}}}$$

$G_1 = \frac{2}{l2} - 1$ und $G_2 = \frac{2}{1+l2} - 1$ sein.

Nach demselben Verfahren lassen sich unzählige Kettenbrüche obiger Art entwickeln (z. B. wenn man von der Reihe $\frac{2}{1} - \frac{4}{3} + \frac{6}{5} -$ etc. ausgeht); einen besondern wissenschaftlichen Werth hat dasselbe natürlich nicht, nur höchstens in so fern, als es immer wünschenswerth ist, von einer blos logischen Distinktion (entweder $G_1 = G_2$ oder $G_1 \gtrless G_2$) die empirische Realität nachzuweisen.

XXX.

Ueber eine gewisse Klasse in der Trigonometrie und Astronomie häufig in Anwendung kommender unendlicher Reihen.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

In der ebenen und sphärischen Trigonometrie und in der Astronomie wird häufiger Gebrauch gemacht von gewissen unendlichen Reihen, von denen Encke in den Astronomischen Nachrichten. Nr. 562. eine gute Zusammenstellung geliefert hat. Diese Reihen sind ursprünglich von Lagrange, Delambre und Legendre gefunden worden, worüber man ausser einer Abhandlung von Lagrange in den Mémoires de Berlin. 1776. vorzüglich die Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien, par J. B. J. Delambre. Paris. An VII. 4. p. 64. Observations sur quelques endroits du Mémoire du cit. Delambre. Par A. M. Legendre (im vorstehenden Werke) p. 3. und Exercices de calcul intégral par A. M. Legendre. T. II. Paris. 1817. 4. p. 238. nachsehen kann. Einige dieser Reihen sind als Fundamentalreihen zu betrachten, aus denen die übrigen durch geeignete Transformationen und Substitutionen mit Leichtigkeit abgeleitet werden können; und nur von diesen Fundamentalreihen soll im Folgenden die Rede sein, weil die Ableitung der übrigen Reihen aus denselben, wie gesagt, einer Schwierigkeit gar nicht unterliegt, und als hinreichend bekannt vorausgesetzt werden kann.

Was nun die Entwickelung jener Fundamentalreihen betrifft, so pflegt man sich dabei vorzugsweise vier verschiedener Methoden zu bedienen, nämlich entweder der Methode der unbestimmten Coefficienten, oder der bekannten imaginären Ausdrücke der Sinus und Cosinus durch die entsprechenden Bogen, oder des Taylor'schen, vielmehr Maclaurin'schen, Satzes, oder endlich der Integration, ja auch wohl der Differentiation gewisser unendlicher Reihen, deren Summen anderweitig schon bekannt sind. Die Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten ist bekanntlich immer sehr misslich, und giebt uns fast nie Aufschluss über die Convergenz oder Divergenz der betreffenden Reihen, weshalb sie auch von den, der neueren strengeren Begründung der Analysis huldigenden Mathematikern meistens gemieden, oder wenigstens nur mit grosser Vorsicht angewandt wird. Von der Anwendung der imaginären Ausdrücke der Sinus und Cosinus durch ihre Bogen gilt im Ganzen dasselbe wie vorher, und ausserdem scheint die Einmischung des Imaginären bei einem an sich so elementaren Gegenstande, der sonst gar nichts mit dem Imaginären zu thun hat, einer guten Methode nicht eben sehr zu entsprechen. Gegen die Anwendung der Integralrechnung ist an sich nichts zu erinnern, wenn man sich nur vorher von der Convergenz der unendlichen Reihen, welche man, nachdem man sie mit einem gewissen Differentiale multiplicirt hat, integrirt, gehörig versichert hat, ein Umstand, der freilich nur zu oft noch ganz unbeachtet gelassen wird, was jedenfalls sehr zu tadeln ist. Die Anwendung der Differentiation unendlicher Reihen ist im Allgemeinen verwerflich, da es jetzt wohl von gründlichen Analytikern allgemein anerkannt ist, dass die Differentiation unendlicher Reihen auch selbst dann, wenn dieselben convergent sind, keineswegs immer zu einem gültigen Resultate führt. Und somit bleibt also, wenn man sich nicht etwa noch anderer specieller Methoden bedienen will, über die ich mich aber jetzt hier nicht weiter verbreiten kann, nur noch die Anwendung des Taylor'schen oder vielmehr Maclaurin'schen Theorems übrig. Aber auch hierbei werden noch viele Verstösse gegen eine gute und strenge Methode gemacht, und viele Schriftsteller scheinen das Maclaurin'sche Theorem in der ihm hauptsächlich durch Cauchy gegebenen strengen Fassung noch gar nicht zu kennen, oder absichtlich zu ignoriren, oder in seiner Anwendung auf einzelne Fälle sich noch gar nicht versucht zu haben. Denn nur allein durch eine sorgfältige Discussion des sogenannten Restes der Maclaurin'schen Reihe, welcher Rest, möchte ich fast sagen, den eigentlichen Wendepunkt zwischen der älteren und neueren Reihen-Analysis bildet, wird es möglich, über die Gränzen der Gültigkeit eines mittelst der Anwendung des Maclaurin'schen Satzes gewonnenen Resultats ein sicheres Urtheil zu fällen, und wer bei dergleichen Untersuchungen die sorgfältige Betrachtung des Restes unterlässt oder gar für unnöthig hält, stellt sich bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis dadurch selbst ein Zeugniss analytischer Ignoranz aus. Freilich macht die Beurtheilung des Restes nicht selten besondere Schwierigkeiten, schon deshalb, weil sie die Kenntniss des allgemeinen Ausdrucks des $n$ten Differentialquotienten der zu entwickelnden Function voraussetzt, indem man bei der Anwendung des Maclaurin'schen Satzes in der älteren Weise sich mit der Kenntniss der speciellen Werthe der Differentialquotienten der zu entwickelnden Function begnügen durfte, welche dieselben erhalten, wenn man die unabhängige veränderliche Grösse verschwinden lässt. Aber eben deshalb, weil man die allgemeinen Werthe der Differentialquotienten kennen muss, ist die Anwendung des Maclaurin'schen Satzes in seiner neueren Form schon eine Quelle vieler interessanter allgemeiner Untersuchungen über die höheren Differentialquotienten geworden, welche wesentlich zur Erweiterung der Differentialrechnung beigetragen haben, so dass man auch schon deshalb in methodischer Rücksicht sich der genauen Untersuchung des Restes in keinem Falle entschlagen, ja derselben vielmehr sich eifrigst hingeben sollte, wo sie irgend sich als nothwendig darbietet. Endlich ist auch die Anzahl der Beispiele, welche man namentlich Anfängern in der Differentialrechnung für die Anwendung des Restes bei der Beurtheilung der Convergenz der betreffenden Reihen vorlegen kann, noch keineswegs sehr gross, und es kann daher auch aus diesem Grunde sorgfältigen Untersuchungen über die Anwendung des Restes der Maclaurin'schen Reihe ein wohlbegründeter Werth nicht abgesprochen werden.

Veranlassung zu diesen und ähnlichen Betrachtungen, so oft ich dieselben auch früher schon angestellt hatte, gab mir neuerlich wieder ein kürzlich erschienenes, wenn es auch namentlich in Rücksicht auf genetischen, der so überaus lehrreichen Geschichte der herrlichen Wissenschaft möglichst sich anschliessenden Entwickelungsgang, wenigstens für mich, Vieles zu wünschen übrig lässt, doch in mehreren Beziehungen, wie ich gern anzuerkennen bereit bin, verdienstliches astronomisches Lehrbuch, nämlich das Lehrbuch der sphärischen Astronomie von Dr. F. Brünnow. Berlin. 1851. 8., wo ich S. 19. —S. 25. die für die Astronomie sehr wichtigen Reihen, mit denen sich die vorliegende Abhandlung beschäftigen wird, nach Methoden entwickelt finde, die von den neueren Fortschritten der analytischen Wissenschaft auch nicht das Geringste ahnen, und wegen der Convergenz und Divergenz der betreffenden Reihen den Leser ganz in Ungewissheit lassen. Ja auf S. 25. dieses Buchs wird sogar in gegenwärtig als veraltet zu betrachtender Weise der Taylor'schen Reihe ihre völlig allgemeine Anwendbarkeit von Neuem vindicirt, wenn dieselbe nicht etwa, wie Lacroix, Francoeur und andere französische Mathematiker sich häufig auszudrücken beliebten, in gewissen ganz speciellen Fällen, über die aber von jenen Mathematikern nur wenig allgemein Genügendes beigebracht wurde, „en défaut“ sei, so wie sich denn z. B. in dem Cours complet de Mathématiques pures par Francoeur. Troisième édition. T. II. Paris. 1828. p. 287. noch ein eigner Abschnitt findet, welcher überschrieben ist: „Des cas où la Série de Taylor est en défaut“, der aber über alles Dasjenige, worauf es hier eigentlich ankommt, wahrlich so gut wie gar keinen Aufschluss giebt. Um die völlige Nichtigkeit der von dem Herrn Verfasser des obigen astronomischen Lehrbuchs auf S. 25. den Jüngern der Wissenschaft einzureden versuchten Behauptung über die, mit Ausnahme gewisser ganz bestimmter Fälle, völlig allgemeine Gültigkeit des Taylor'schen Satzes in's Licht zu setzen, braucht man, weiter abseits liegende Fälle für jetzt bei Seite lassend, nur an die allgemein bekannte Reihe

$$\operatorname{Arctang} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots\ldots$$

zu erinnern. Denn entwickelt man diese Reihe mittelst des Maclaurinschen Satzes in älterer Weise ohne gehörige Berücksichtigung des Restes, so hindert in der That nichts, die Reihe als ganz allgemein gültig anzunehmen, und dennoch zeigt eine sorgfältige Discussion des Restes derselben, dass sie nur von $x = -1$ bis $x = +1$ gültig ist. Solche allgemeine, auf keiner sicheren Basis ruhende, und vor dem Richterstuhle strenger Wissenschaftlichkeit jetzt nicht mehr Stich haltende Aussprüche, wie wir auf S. 25. des genannten Buchs finden, sind daher namentlich für mit den Fortschritten der Wissenschaft nur noch wenig vertraute Anfänger höchst gefährlich, und sollten deshalb, namentlich in für Anfänger bestimmten Büchern, sorgfältigst und gänzlich vermieden werden.

Die im Obigen mehr erwähnten, insbesondere für die Astronomie sehr wichtigen Reihen will ich nun im Folgenden mittelst des Maclaurin'schen Satzes in völliger Strenge, auf eine den neueren Ansprüchen der Wissenschaft gehörig genügende Weise zu entwickeln suchen, und beabsichtige dadurch zugleich einige namentlich für Anfänger in der Differentialrechnung lehrreiche Beispiele der strengen Anwendung des Restes der Maclaurin'schen Reihe zu liefern, ausserdem aber dem strengen Vortrage der Lehren der Astronomie einigermassen förderlich zu werden, indem ich die Bemerkung nicht unterdrücken kann, dass man sich in dieser herrlichen Wissenschaft bei den in derselben häufig vorkommenden Reihenentwickelungen immer noch gerade am Wenigsten mit den neueren strengeren Methoden zu befassen und dieselben zu kennen scheint. Bevor ich aber zu den in Rede stehenden Entwickelungen selbst übergehe, halte ich es in diesem Falle für nöthig, die verschiedenen Formen, unter denen man jetzt das Maclaurin'sche Theorem darzustellen pflegt, im Nachstehenden anzugeben, indem ich wegen der Beweise mir auf meinen **Leitfaden für den ersten Unterricht in der höhern Analysis. Leipzig. 1838.** zu verweisen erlaube. Man kann nämlich das Maclaurin'sche Theorem auf die folgenden verschiedenen Arten ausdrücken:

I. **Wenn die Functionen**

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x),\ \ldots\ f^{(n)}(x)$$

von $x=0$ bis $x=x$ sämmtlich stetig sind, und ϱ eine gewisse positive die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet; so ist immer

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(x)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1\ldots.(n-1)}f^{(n-1)}(0)$$
$$+\frac{x^n}{1\ldots.n}f^{(n)}(\varrho x).$$

II. Wenn die Function $f(x)$ nebst ihren sämmtlichen Differentialquotienten von $x=0$ bis $x=x$ stetig ist, und, indem ϱ eine gewisse positive die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet, die Grösse

$$\frac{x^n}{1\ldots.n}f^{(n)}(\varrho x)$$

sich, wenn n wächst, der Null immer mehr und mehr nähert, und derselbe beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug annimmt; so ist immer

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots\ldots$$

III. Wenn die Function $f(x)$ nebst ihren sämmtlichen Differentialquotienten von $x=0$ bis $x=x$ stetig ist, und, indem ϱ eine gewisse positive die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet, der absolute Werth von $f^{(n)}(\varrho x)$, wie weit man auch n wachsen lassen mag, doch niemals eine gewisse bestimmte endliche positive Grösse übersteigt; so ist immer

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots.$$

IV. Wenn die Function $f(x)$ nebst ihren sämmtlichen Differentialquotienten von $x=0$ bis $x=x$ stetig ist, und, indem ϱ eine gewisse positive die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet, die Grösse

$$\frac{(1-\varrho)^{n-1}x^n}{1\ldots.(n-1)}f^{(n)}(\varrho x)$$

sich, wenn n wächst, der Null immer mehr und mehr nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt; so ist immer

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots.$$

Welchen dieser vier Sätze man bei Entwickelungen der Functionen in Reihen am Zweckmässigsten in Anwendung zu bringen hat, muss in jedem einzelnen Falle besonders beurtheilt werden.

Hiernach wollen wir nun zu dem eigentlichen Gegenstande dieser Abhandlung übergehen, und bemerken nur noch, dass man die im Folgenden entwickelten Resultate wenigstens theilweise allerdings auch noch auf anderem Wege in völliger Strenge erhalten kann, wie aus unserer Abhandlung Thl. VIII. Nr. XXV. über das allgemeine Binomialtheorem zu ersehen ist; aber die Anwendung des Restes der Maclaurin'schen Reihe zu zeigen, indem besonders auch astronomischen Schriftstellern die Anwendung des Maclaurin'schen Satzes, wenigstens in älterer Weise, sehr geläufig zu sein, und in dieser Wissenschaft sich besonderen Beifalls zu erfreuen scheint, war mit ein Hauptzweck der vorliegenden Abhandlung, aus welchem Gesichtspunkte man daher dieselbe hauptsächlich zu beurtheilen haben, und dies zu thun gewiss auch gern geneigt sein wird.

§. 2.

Zuerst wollen wir uns die Aufgabe stellen, wenn

$$1)\quad \tan y = \frac{x \sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}$$

ist, den Bogen y in eine nach den mit positiven ganzen Exponenten behafteten Potenzen von x fortschreitende Reihe zu entwickeln, wollen jedoch bei der allgemeinen Entwickelung der Differentialquotienten des Bogens y nach der veränderlichen Grösse x die allgemeinere Gleichung

$$2)\quad \tan y = \frac{a + bx\sin\alpha}{a' + b'x\cos\alpha}$$

betrachten, von der die Gleichung 1) ein besonderer Fall ist.

Setzt man

$$3)\quad b\sin\alpha = r\sin\mu,\quad b'\cos\alpha = r\cos\mu;$$

so erhält man zur Bestimmung der Grössen r und μ die bekannten Gleichungen:

$$4)\quad r = \sqrt{b^2\sin\alpha^2 + b'^2\cos\alpha^2}$$

und

$$5)\quad \sin\mu = \frac{b}{r}\sin\alpha,\quad \cos\mu = \frac{b'}{r}\cos\alpha,\quad \tan\mu = \frac{b}{b'}\tan\alpha.$$

Hat man aber auf diese Weise r und μ bestimmt, so lässt sich die Gleichung 2) auf die Form

$$6)\quad \tang y = \frac{a + rx\sin\mu}{a' + rx\cos\mu}$$

bringen, unter welcher Form wir dieselbe nun nach x differentiiren wollen.

Zuerst erhält man nach den bekannten Regeln der Differentialrechnung auf der Stelle:

$$\frac{\partial \tang y}{\partial x} = \frac{r(a'\sin\mu - a\cos\mu)}{(a' + rx\cos\mu)^2}.$$

Bekanntlich ist aber

$$\frac{\partial \tang y}{\partial x} = \frac{\partial \tang y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \cos y^{-2} \frac{\partial y}{\partial x},$$

also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos y^2 \frac{\partial \tang y}{\partial x},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{r(a'\sin\mu - a\cos\mu)\cos y^2}{(a' + rx\cos\mu)^2}.$$

Aus der Gleichung 6) ergiebt sich aber

$$a'\sin y - a\cos y = rx(\sin\mu\cos y - \cos\mu\sin y),$$

d. i.

$$a'\sin y - a\cos y = rx\sin(\mu - y),$$

folglich

$$x = \frac{a'\sin y - a\cos y}{r\sin(\mu - y)},$$

und daher, wie man leicht findet:

$$a + rx\sin\mu = \frac{(a'\sin\mu - a\cos\mu)\sin y}{\sin(\mu - y)},$$

$$a' + rx\cos\mu = \frac{(a'\sin\mu - a\cos\mu)\cos y}{\sin(\mu - y)};$$

also

$$(a+rx\sin\mu)^2+(a'+rx\cos\mu)^2=\frac{(a'\sin\mu-a\cos\mu)^2}{\sin(\mu-y)^2}.$$

Nach 6) ist nun

$$\sec y^2=1+\tan y^2=\frac{(a+rx\sin\mu)^2+(a'+rx\cos\mu)^2}{(a'+rx\cos\mu)^2},$$

also wegen der unmittelbar vorhergehenden Gleichung:

$$\frac{\cos y^2}{(a'+rx\cos\mu)^2}=\frac{\sin(\mu-y)^2}{(a'\sin\mu-a\cos\mu)^2},$$

folglich nach dem Obigen:

$$7)\quad \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{r\sin(\mu-y)^2}{a'\sin\mu-a\cos\mu}.$$

Also ist

$$8)\quad (a'\sin\mu-a\cos\mu)\frac{\partial y}{\partial x}=r\sin(\mu-y)^2,$$

und folglich durch fernere Differentiation:

$$(a'\sin\mu-a\cos\mu)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-2r\sin(\mu-y)\cos(\mu-y)\frac{\partial y}{\partial x},$$

d. i., wenn man für den ersten Differentialquotienten von y seinen obigen Werth einführt:

$$(a'\sin\mu-a\cos\mu)^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-2r^2\sin(\mu-y)^3\cos(\mu-y),$$

oder

$$9)\quad (a'\sin\mu-a\cos\mu)^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-1.r^2\sin(\mu-y)^2\sin 2(\mu-y).$$

Differentiirt man nun wieder, so erhält man:

$$(a'\sin\mu-a\cos\mu)^2\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=\ 1.2r^2\sin(\mu-y)\cos(\mu-y)\sin 2(\mu-y)\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+1.2r^2\sin(\mu-y)^2\cos 2(\mu-y)\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$=1.2r^2\sin(\mu-y)\{\sin 2(\mu-y)\cos(\mu-y)+\cos 2(\mu-y)\sin(\mu-y)\}\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$=1.2r^2\sin(\mu-y)\sin 3(\mu-y)\frac{\partial y}{\partial x},$$

also, wenn man für den ersten Differentialquotienten von y seinen obigen Werth einführt:

$$10)\quad (a'\sin\mu - a\cos\mu)^3\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 1.2r^3\sin(\mu-y)^3\sin3(\mu-y).$$

Die fernere Differentiation giebt:

$$(a'\sin\mu - a\cos\mu)^3\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

$$= -1.2.3r^3\sin(\mu-y)^2\cos(\mu-y)\sin3(\mu-y)\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$-1.2.3r^3\sin(\mu-y)^3\cos3(\mu-y)\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$= -1.2.3r^3\sin(\mu-y)^2\{\sin3(\mu-y)\cos(\mu-y)+\cos3(\mu-y)\sin(\mu-y)\}\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$= -1.2.3r^3\sin(\mu-y)^2\sin4(\mu-y)\frac{\partial y}{\partial x},$$

und, wenn man nun für den ersten Differentialquotienten von y seinen obigen Werth einführt:

$$11)\quad (a'\sin\mu - a\cos\mu)^4\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -1.2.3r^4\sin(\mu-y)^4\sin4(\mu-y).$$

Eben so ergiebt sich weiter:

$$(a'\sin\mu - a\cos\mu)^4\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}$$

$$= 1.2.3.4r^4\sin(\mu-y)^3\cos(\mu-y)\sin4(\mu-y)\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$+1.2.3.4r^4\sin(\mu-y)^4\cos4(\mu-y)\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$= 1.2.3.4r^4\sin(\mu-y)^3\{\sin4(\mu-y)\cos(\mu-y)+\cos4(\mu-y)\sin(\mu-y)\}\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$= 1.2.3.4r^4\sin(\mu-y)^3\sin5(\mu-y)\frac{\partial y}{\partial x}.$$

und, wenn man wieder für den ersten Differentialquotienten seinen obigen Werth einführt:

$$12)\quad (a'\sin\mu - a\cos\mu)^5\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = 1.2.3.4r^5\sin(\mu-y)^5\sin5(\mu-y).$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel, und es ist also:

$$(a'\sin\mu-a\cos\mu)^1\frac{\partial y}{\partial x}= \quad r\sin(\mu-y)\sin 1(\mu-y),$$

$$(a'\sin\mu-a\cos\mu)^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-1.r^2\sin(\mu-y)^2\sin 2(\mu-y),$$

$$(a'\sin\mu-a\cos\mu)^3\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}= \quad 1.2r^3\sin(\mu-y)^3\sin 3(\mu-y),$$

$$(a'\sin\mu-a\cos\mu)^4\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=-1.2.3r^4\sin(\mu-y)^4\sin 4(\mu-y),$$

$$(a'\sin\mu-a\cos\mu)^5\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}= \quad 1.2.3.4r^5\sin(\mu-y)^5\sin 5(\mu-y),$$

$$(a'\sin\mu-a\cos\mu)^6\frac{\partial^6 y}{\partial x^6}=-1.2.3.4.5r^6\sin(\mu-y)^6\sin 6(\mu-y),$$

u. s. w.

Hieraus ergiebt sich, dass, wenn

$$13)\qquad y=f(x)$$

gesetzt wird,

$$14)\quad f'(x)=\frac{r\sin(\mu-y)\sin 1(\mu-y)}{(a'\sin\mu-a\cos\mu)^1},$$

und für jedes die Einheit übersteigende n

$$15)\quad f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}.\frac{1.2.3..(n-1)r^n\sin(\mu-y)^n\sin n(\mu-y)}{(a'\sin\mu-a\cos\mu)^n}$$

ist.

Von jetzt an wollen wir den durch die Gleichung 2) bestimmten Bogen y immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ nehmen.

Für $x=0$ ist nach 2)

$$\tang y=\frac{a}{a'},$$

also

$$y=\operatorname{Arctang}\frac{a}{a'},$$

und setzen wir nun, indem wir u zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ nehmen,

$$16)\quad u = \operatorname{Arctang}\frac{a}{a'},$$

so ist nach 14) und 15):

$$f'(0) = \frac{r\sin(\mu-u)\sin 1(\mu-u)}{(a'\sin\mu - a\cos\mu)^1},$$

und für jedes die Einheit übersteigende n:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}.\frac{1.2.3..(n-1)r^n\sin(\mu-u)^n\sin n(\mu-u)}{(a'\sin\mu - a\cos\mu)^n}.$$

Weil aber

$$\operatorname{tang}u = \frac{a}{a'},\qquad a = a'\operatorname{tang}u$$

ist, so ist

$$a'\sin\mu - a\cos\mu = a'\frac{\sin(\mu-u)}{\cos u};$$

also

$$f'(0) = \frac{r}{a'}\cos u\sin 1\,(\mu-u),$$

und für jedes die Einheit übersteigende n:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}.1.2.3..(n-1)\left(\frac{r}{a'}\cos u\right)^n\sin n(\mu-u).$$

Bezeichnen wir den Werth, welchen $y=f(x)$ erhält, wenn, indem ϱ wie gewöhnlich eine gewisse positive die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet, ϱx für x gesetzt wird, durch v; so ist nach dem Obigen

$$f^{(n)}(\varrho x) = (-1)^{n-1}.\frac{1.2.3....(n-1)r^n\sin(\mu-v)^n\sin n(\mu-v)}{(a'\sin\mu - a\cos\mu)^n}$$

oder

$$f^{(n)}(\varrho x) = (-1)^{n-1}.\frac{1.2.3..(n-1)r^n\cos u^n\sin(\mu-v)^n\sin n(\mu-v)}{a'^n\sin(\mu-u)^n}.$$

Folglich ist

$$\frac{x^n}{1.....n}f^{(n)}(\varrho x) = (-1)^{n-1}.\left\{\frac{rx\cos u\sin(\mu-v)}{a'\sin(\mu-u)}\right\}^n.\frac{\sin n(\mu-v)}{n},$$

und aus dem Satze §. 1. I. ergiebt sich daher, immer unter der Voraussetzung, dass

$$\tang y = \frac{a + bx\sin\alpha}{a' + b'x\cos\alpha}$$

ist, und der Bogen y, so wie auch der Bogen u, zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen wird, die Gleichung:

$$17)\quad y = u + \frac{r\cos u \sin 1(\mu - u)}{a'} \cdot \frac{x}{1}$$
$$- \frac{r^2 \cos u^2 \sin 2(\mu - u)}{a'^2} \cdot \frac{x^2}{2}$$
$$+ \frac{r^3 \cos u^3 \sin 3(\mu - u)}{a'^3} \cdot \frac{x^3}{3}$$
$$- \frac{r^4 \cos u^4 \sin 4(\mu - u)}{a'^4} \cdot \frac{x^4}{4}$$

u. s. w.

$$+ (-1)^{n-2} \cdot \frac{r^{n-1} \cos u^{n-1} \sin(n-1)(\mu - u)}{a'^{n-1}} \cdot \frac{x^{n-1}}{n-1}$$
$$+ (-1)^{n-1} \cdot \left\{\frac{rx\cos u \sin(\mu - v)}{a'\sin(\mu - u)}\right\}^n \cdot \frac{\sin n(\mu - v)}{n}.$$

Für

$$\tang y = \frac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}$$

ist

$$a = 0,\quad a' = 1;\quad b = 1,\quad b' = -1.$$

Also ist in diesem Falle

$$r = \sqrt{b^2 \sin\alpha^2 + b'^2 \cos\alpha^2} = 1.$$

Weil ferner

$$\sin\mu = \frac{b}{r}\sin\alpha = \sin\alpha,\quad \cos\mu = \frac{b'}{r}\cos\alpha = -\cos\alpha$$

ist, so ist offenbar

$$\mu = \pi - \alpha$$

zu setzen; und da

$$u = \operatorname{Arctang}\frac{a}{a'} = \operatorname{Arctang} 0$$

ist und zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss, so ist $u=0$. Also ist nach 17) in diesem Falle:

$$18)\quad y=\frac{x}{1}\sin 1\alpha+\frac{x^2}{2}\sin 2\alpha+\frac{x^3}{3}\sin 3\alpha+\frac{x^4}{4}\sin 4\alpha+\ldots$$

$$\ldots+\frac{x^{n-1}}{n-1}\sin(n-1)\alpha+\left\{\frac{x\sin(\alpha+v)}{\sin\alpha}\right\}^n\cdot\frac{\sin n(\alpha+v)}{n}.$$

Weil bekanntlich in dem vorliegenden Falle

$$\tang v=\frac{\varrho x\sin\alpha}{1-\varrho x\cos\alpha}$$

zu setzen ist, so ist

$$\tang\alpha+\tang v=\frac{\sin(\alpha+v)}{\cos\alpha\cos v}=\frac{\tang\alpha}{1-\varrho x\cos\alpha},$$

und folglich

$$\frac{x\sin(\alpha+v)}{\sin\alpha}=\frac{x\cos v}{1-\varrho x\cos\alpha}.$$

Nun ist nach dem Vorhergehenden

$$\cos v^2=\frac{1}{1+\tang v^2}=\frac{(1-\varrho x\cos\alpha)^2}{(\varrho x\sin\alpha)^2+(1-\varrho x\cos\alpha)^2};$$

nehmen wir aber fernerhin an, dass

$$-1<x<+1$$

ist, so ist die Grösse $1-\varrho x\cos\alpha$ offenbar positiv; $\cos v$ ist auch positiv, weil v nach dem Obigen zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt; also ist

$$\cos v=\frac{1-\varrho x\cos\alpha}{\sqrt{(\varrho x\sin\alpha)^2+(1-\varrho x\cos\alpha)^2}},$$

folglich

$$\frac{\cos v}{1-\varrho x\cos\alpha}=\frac{1}{\sqrt{(\varrho x\sin\alpha)^2+(1-\varrho x\cos\alpha)^2}},$$

und der Rest

$$\left\{\frac{x\sin(\alpha+v)}{\sin\alpha}\right\}^n\cdot\frac{\sin n(\alpha+v)}{n}$$

der Reihe 18) kann daher auf den folgenden Ausdruck gebracht werden:

$$\left\{\frac{x}{\sqrt{(\varrho x\sin\alpha)^2+(1-\varrho x\cos\alpha)^2}}\right\}^n\cdot\frac{\sin n(\alpha+v)}{n}.$$

Nach §. 1. IV. kann man aber diesen Rest, wie leicht aus dem Vorhergehenden erhellen wird, auch auf folgende Art ausdrücken:

$$\left\{\frac{(1-\varrho)x}{\sqrt{(\varrho x\sin\alpha)^2+(1-\varrho x\cos\alpha)^2}}\right\}^{n-1}\cdot\frac{x\sin n(\alpha+v)}{\sqrt{(\varrho x\sin\alpha)^2+(1-\varrho x\cos\alpha)^2}}.$$

Ist nun $x\cos\alpha$ negativ, so erhellet aus der Form

$$\left\{\frac{x}{\sqrt{(\varrho x\sin\alpha)^2+(1-\varrho x\cos\alpha)^2}}\right\}^n\cdot\frac{\sin n(\alpha+v)}{n}$$

des Restes auf der Stelle, dass derselbe unter den gemachten Voraussetzungen sich der Null bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn man n in's Unendliche wachsen lässt.

Ist dagegen $x\cos\alpha$ positiv, so ist

$$\varrho x\cos\alpha \overset{=}{<} \varrho,$$

also

$$1-\varrho x\cos\alpha \overset{=}{>} 1-\varrho;$$

und da nun offenbar

$$\sqrt{(\varrho x\sin\alpha)^2+(1-\varrho x\cos\alpha)^2} \overset{=}{>} 1-\varrho x\cos\alpha$$

ist, so ist

$$\sqrt{(\varrho x\sin\alpha)^2+(1-\varrho x\cos\alpha)^2} \overset{=}{>} 1-\varrho,$$

also, weil

$$-1<x\overset{=}{<}+1$$

ist, die Gösse

$$\sqrt{(\varrho x\sin\alpha)^2+(1-\varrho x\cos\alpha)^2}$$

grösser als der absolute Werth von $(1-\varrho)x$, wobei man zu beachten hat, dass die Grösse

$$\sqrt{(\varrho x\sin\alpha)^2+(1-\varrho x\cos\alpha)^2}$$

niemals verschwinden kann, weil, wenn dies der Fall wäre,

$$\varrho x \sin\alpha = 0, \quad \varrho x \cos\alpha = 1;$$

also

$$\varrho^2 x^2 (\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2) = \varrho^2 x^2 = 1$$

sein würde, was nicht möglich ist, weil der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist. Hieraus ergiebt sich, dass der absolute Werth von

$$\left\{\frac{(1-\varrho)x}{\sqrt{(\varrho x \sin\alpha)^2 + (1-\varrho x \cos\alpha)^2}}\right\}^{n-1}$$

sich der Null bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn man n in's Unendliche wachsen lässt. Weil aber

$$\sqrt{(\varrho x \sin\alpha)^2 + (1-\varrho x \cos\alpha)^2}$$

niemals verschwinden kann, so kann offenbar

$$\frac{x \sin n(\alpha + v)}{\sqrt{(\varrho x \sin\alpha)^2 + (1-\varrho x \cos\alpha)^2}}$$

nicht in's Unendliche wachsen, wenn n in's Unendliche wächst. Man kann auch leicht den kleinsten Werth, welchen die Grösse

$$(\varrho x \sin\alpha)^2 + (1-\varrho x \cos\alpha)^2 = 1 - 2\varrho x \cos\alpha + \varrho^2 x^2$$

überhaupt annehmen kann, bestimmen. Denn setzt man $\varrho x = w$ und

$$\begin{aligned} W &= 1 - 2\varrho x \cos\alpha + \varrho^2 x^2 \\ &= 1 - 2w\cos\alpha + w^2, \end{aligned}$$

so ist

$$\frac{\partial W}{\partial w} = 2(w - \cos\alpha)$$

und

$$\frac{\partial^2 W}{\partial w^2} = 2,$$

wo also der zweite Differentialquotient stets positiv ist. Soll der erste Differentialquotient verschwinden, so muss

$$w - \cos\alpha = 0, \quad w = \cos\alpha$$

sein, welchem Werthe von $w = \varrho x$ das Minimum

$$1 - 2\cos\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1 - \cos\alpha^2 = \sin\alpha^2$$

unserer Function

$$W=(\varrho x\sin\alpha)^2+(1-\varrho x\cos\alpha)^2$$

entspricht. Da der absolute Werth von $w=\varrho x$ unter den gemachten Voraussetzungen immer kleiner als die Einheit ist, so ist die Gleichung $w=\cos\alpha$ nur statthaft, wenn nicht $\cos\alpha=\pm 1$, also nicht $\sin\alpha=0$ ist, so dass also, wenigstens wenn nicht $\sin\alpha=0$ ist, der kleinste Werth des Nenners

$$\sqrt{(\varrho x\sin\alpha)^2+(1-\varrho x\cos\alpha)^2}$$

des Bruchs

$$\frac{x\sin n(\alpha+v)}{\sqrt{(\varrho x\sin\alpha)^2+(1-\varrho x\cos\alpha)^2}}$$

der nicht verschwindende absolute Werth von $\sin\alpha$ ist. Hieraus sieht man nun, wenigstens wenn man für's Erste den Fall $\sin\alpha=0$ ausschliesst, dass der Rest

$$\left\{\frac{(1-\varrho)x}{\sqrt{(\varrho x\sin\alpha)^2+(1-\varrho x\cos\alpha)^2}}\right\}^{n-1}\cdot\frac{x\sin n(\alpha+v)}{\sqrt{(\varrho x\sin\alpha)^2+(1-\varrho x\cos\alpha)^2}},$$

sich der Null bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn man n in's Unendliche wachsen lässt.

Wenn also

$$-1<x<+1$$

ist, und der Fall $\sin\alpha=0$ für's Erste ausgeschlossen wird, so nähert sich der Rest der Reihe 18) immer der Null bis zu jedem beliebigen Grade, wenn n in's Unendliche wächst. Daher ist in einer hinreichend bekannten Bezeichnung:

$$19)\quad y=\frac{x}{1}\sin 1\alpha+\frac{x^2}{2}\sin 2\alpha+\frac{x^3}{3}\sin 3\alpha+\frac{x^4}{4}\sin 4\alpha+\ldots\ldots$$
$$\{-1<x<+1\}.$$

Dass aber diese Gleichung auch für $\sin\alpha=0$ gilt, erhellet auf der Stelle, weil wegen der Gleichung

$$\tang y=\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}$$

der Bogen y verschwindet, wenn $\sin\alpha=0$ ist, ein Resultat, was sich für $\sin\alpha=0$ auch aus der Gleichung 19) ergiebt, da, wenn $\sin\alpha$ verschwindet, auch die Sinus der sämmtlichen Vielfachen von α verschwinden.

§. 3.

Wir wollen jetzt die beiden Gleichungen

$$20)\quad \begin{cases} x\sin\alpha = u\sin y, \\ 1-x\cos\alpha = u\cos y \end{cases}$$

in Bezug auf u und y als unbekannte Grössen, unter der Bedingung, dass u eine positive Grösse sein soll, durch Reihen aufzulösen suchen, wobei wir immer annehmen werden, dass

$$-1 < x < +1$$

sei.

Durch Division erhält man aus den beiden Gleichungen 20) auf der Stelle:

$$21)\quad \operatorname{tang} y = \frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha},$$

und wenn man diese Gleichungen quadrirt und dann zu einander addirt, so erhält man, beachtend, dass u positiv sein soll,

$$22)\quad u = \sqrt{(x\sin\alpha)^2 + (1-x\cos\alpha)^2}$$

oder

$$23)\quad u = \sqrt{1-2x\cos\alpha + x^2}.$$

Setzt man in der Gleichung 2) des vorhergehenden Paragraphen

$$a=0,\ b=1;\quad a'=1,\ b'=-1;$$

so ist nach 3) und 4)

$$r=1;\quad \sin\mu=\sin\alpha,\ \cos\mu=-\cos\alpha;$$

also $\mu=\pi-\alpha$, und daher wegen der Gleichung 21) nach 14) und 15):

$$24)\quad \sin\alpha\frac{\partial y}{\partial x} = \sin(\alpha+y)^2$$

und

$$25)\quad \sin\alpha^n\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = 1.2.3\ldots(n-1)\sin(\alpha+y)^n\sin n(\alpha+y).$$

Nun ist nach 20)

$$x=\frac{u\sin y}{\sin\alpha}=\frac{1-u\cos y}{\cos\alpha},$$

also, wie man hieraus leicht findet:

$$26)\quad u=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+y)},$$

wo wir immer annehmen können, dass y mittelst der Gleichungen

$$\sin y=\frac{x\sin\alpha}{u},\quad \cos y=\frac{1-x\cos\alpha}{u},\quad \tan y=\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha};$$

wo u den Werth 22) oder 23) hat, so bestimmt sei, dass u positiv ist, weil man in den folgenden Fällen:

$x\sin\alpha$ positiv, $1-x\cos\alpha$ positiv;

$x\sin\alpha$ positiv, $1-x\cos\alpha$ negativ;

$x\sin\alpha$ negativ, $1-x\cos\alpha$ positiv;

$x\sin\alpha$ negativ, $1-x\cos\alpha$ negativ

respective y nur so zu nehmen braucht, dass

$$0<y<\frac{1}{2}\pi,$$

$$\frac{1}{2}\pi<y<\pi,$$

$$0>y>-\frac{1}{2}\pi,$$

$$-\frac{1}{2}\pi>y>-\pi$$

ist.

Dies vorausgesetzt, ist nun

$$\frac{\partial lu}{\partial x}=\frac{\partial lu}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Aber nach 26)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\sin\alpha\sin(\alpha+y)^{-2}\cos(\alpha+y)\frac{\partial y}{\partial x},$$

d. i. nach 24)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\cos(\alpha+y),$$

und daher nach dem Vorhergehenden:

$$27)\quad \frac{\partial lu}{\partial x} = -\frac{\sin(\alpha+y)\cos(\alpha+y)}{\sin\alpha}$$

oder

$$28)\quad \sin\alpha\frac{\partial lu}{\partial x} = -\sin(\alpha+y)\cos(\alpha+y).$$

Hieraus ergiebt sich durch fernere Differentiation:

$$\sin\alpha\frac{\partial^2 lu}{\partial x^2} = \sin(\alpha+y)\sin(\alpha+y)\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$-\cos(\alpha+y)\cos(\alpha+y)\frac{\partial y}{\partial x},$$

d. i. nach 24):

$$\sin\alpha^2\frac{\partial^2 lu}{\partial x^2} = -\sin(\alpha+y)^2\{\cos(\alpha+y)\cos(\alpha+y)-\sin(\alpha+y)\sin(\alpha+y)\},$$

folglich

$$29)\quad \sin\alpha^2\frac{\partial^2 lu}{\partial x^2} = -1.\sin(\alpha+y)^2\cos2(\alpha+y).$$

Differentiirt man nun wieder, so erhält man:

$$\sin\alpha^2\frac{\partial^3 lu}{\partial x^3} = 1.2\sin(\alpha+y)^2\sin2(\alpha+y)\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$-1.2\sin(\alpha+y)\cos(\alpha+y)\cos2(\alpha+y)\frac{\partial y}{\partial x},$$

d. i. nach 24):

$$\sin\alpha^3\frac{\partial^3 lu}{\partial x^3} = -1.2\sin(\alpha+y)^3\{\cos(\alpha+y)\cos2(\alpha+y)-\sin(\alpha+y)\sin2(\alpha+y)\},$$

folglich

$$30)\quad \sin\alpha^3\frac{\partial^3 lu}{\partial x^3} = -1.2\sin(\alpha+y)^3\cos3(\alpha+y).$$

Die fernere Differentiation giebt:

$$\sin\alpha^3\frac{\partial^4 lu}{\partial x^4} = 1.2.3\sin(\alpha+y)^3\sin3(\alpha+y)\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$-1.2.3\sin(\alpha+y)^2\cos(\alpha+y)\cos3(\alpha+y)\frac{\partial y}{\partial x},$$

d. i. nach 24):

$$\sin\alpha^4 \frac{\partial^4 lu}{\partial x^4}$$
$$= -1.2.3\sin(\alpha+y)^4\{\cos(\alpha+y)\cos3(\alpha+y)-\sin(\alpha+y)\sin3(\alpha+y)\},$$

folglich

$$31)\quad \sin\alpha^4 \frac{\partial^4 lu}{\partial x^4} = -1.2.3\sin(\alpha+y)^4\cos4(\alpha+y).$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet hier schon mit völliger Deutlichkeit, und es ist also:

$$\sin\alpha \frac{\partial lu}{\partial x} = -\sin(\alpha+y)\cos(\alpha+y),$$

$$\sin\alpha^2 \frac{\partial^2 lu}{\partial x^2} = -1.\sin(\alpha+y)^2\cos2(\alpha+y),$$

$$\sin\alpha^3 \frac{\partial^3 lu}{\partial x^3} = -1.2\sin(\alpha+y)^3\cos3(\alpha+y),$$

$$\sin\alpha^4 \frac{\partial^4 lu}{\partial x^4} = -1.2.3\sin(\alpha+y)^4\cos4(\alpha+y),$$

u. s. w.

$$\sin\alpha^n \frac{\partial^n lu}{\partial x^n} = -1.2.3\ldots(n-1)\sin(\alpha+y)^n\cos n(\alpha+y),$$

u. s. w.

Für

$$32)\quad f(x) = lu$$

ist

$$33)\quad f'(x) = -\frac{\sin(\alpha+y)\cos(\alpha+y)}{\sin\alpha},$$

und für $n>1$:

$$34)\quad f^{(n)}(x) = -\frac{1.2.3..(n-1)\sin(\alpha+y)^n\cos n(\alpha+y)}{\sin\alpha^n}.$$

Für $x=0$ ist $1-x\cos\alpha=1$ und folglich positiv; also ist $y=0$ für $x=0$, und folglich

$$f(0)=0,\quad f'(0)=-\cos\alpha.$$

Für $n>1$ ist

$$f^{(n)}(0) = -1.2.3..(n-1)\cos n\alpha.$$

Bezeichnet man den Werth von $y = f(x)$, welchen diese Grösse erhält, wenn man ϱx für x setzt, durch v; so ist für $n > 1$:

$$f^{(n)}(\varrho x) = -\frac{1.2.3...(n-1)\sin(\alpha+v)^n \cos n(\alpha+v)}{\sin\alpha^n}.$$

Also ist nach §. 1. I.

35) $$lu = l\sqrt{(x\sin\alpha)^2 + (1-x\cos\alpha)^2} = l\sqrt{1-2x\cos\alpha + x^2}$$

$$= -\frac{x}{1}\cos 1\alpha - \frac{x^2}{2}\cos 2\alpha - \frac{x^3}{3}\cos 3\alpha - \frac{x^4}{4}\cos 4\alpha - \ldots.$$

$$-\frac{x^{n-1}}{n-1}\cos(n-1)\alpha - \left\{\frac{x\sin(\alpha+v)}{\sin\alpha}\right\}^n \cdot \frac{\cos n(\alpha+v)}{n}.$$

Dass aber für

$$-1 < x < +1$$

der Rest

$$\left\{\frac{x\sin(\alpha+v)}{\sin\alpha}\right\}^n \cdot \frac{\cos n(\alpha+v)}{n}$$

sich bis zu jedem beliebigen Grade der Null nähert, wenn n in's Unendliche wächst, kann auf ganz ähnliche Art gezeigt werden, wie in § 2. Dasselbe von dem dortigen Reste

$$\left\{\frac{x\sin(\alpha+v)}{\sin\alpha}\right\}^n \cdot \frac{\sin n(\alpha+v)}{n},$$

was wir daher hier nicht wiederholen wollen, und füglich dem Leser überlassen können.

Also ist

36) $$lu = l\sqrt{(x\sin\alpha)^2 + (1-x\cos\alpha)^2} = l\sqrt{1-2x\cos\alpha + x^2}$$

$$= -\frac{x}{1}\cos 1\alpha - \frac{x^2}{2}\cos 2\alpha - \frac{x^3}{3}\cos 3\alpha - \frac{x^4}{4}\cos 4\alpha - \ldots..$$

$$\{-1 < x < +1\}.$$

Weil nach dem Obigen

$$\tan g y = \frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}$$

ist, so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$37)\quad y=\frac{x}{1}\sin 1\alpha+\frac{x^2}{2}\sin 2\alpha+\frac{x^3}{3}\sin 3\alpha+\frac{x^4}{4}\sin 4\alpha+\ldots.$$

$$\{-1<x<+1\}$$

wodurch man jedoch nur den zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegenden Werth von y erhält, welcher der Gleichung

$$\operatorname{tang}x=\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}$$

genügt. Hieraus aber in allen Fällen den wahren Werth von y abzuleiten, welchem ein positiver Werth von u entspricht, hat nach den im Obigen für die Bestimmung von y gegebenen Regeln nicht die geringste Schwierigkeit, und bedarf hier keiner weiteren Erläuterung.

Auf diese Art sind nun die beiden Gleichungen

$$x\sin\alpha=u\sin y,$$

$$1-x\cos\alpha=u\cos y$$

für $-1<x<+1$ vollständig durch Reihen aufgelöst.

§. 4.

Hat man die Gleichung

$$38)\quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}y=x\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha,$$

so setze man

$$39)\quad \operatorname{tang}u=\frac{\frac{x\mp 1}{x\pm 1}\sin\alpha}{1-\frac{x\mp 1}{x\pm 1}\cos\alpha};$$

dann ist, weil

$$\operatorname{tang}(\frac{1}{2}\alpha+u)=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha+\operatorname{tang}u}{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tang}u}$$

ist, wie man leicht findet:

$$\tan g(\frac{1}{2}\alpha+u)=\frac{\tan g\frac{1}{2}\alpha+\frac{x\mp1}{x\pm1}(\sin\alpha-\cos\alpha\tan g\frac{1}{2}\alpha)}{1-\frac{x\mp1}{x\pm1}(\cos\alpha+\sin\alpha\tan g\frac{1}{2}\alpha)},$$

d. i.

$$\tan g(\frac{1}{2}\alpha+u)=\frac{1+\frac{x\mp1}{x\pm1}}{1-\frac{x\mp1}{x\pm1}}\tan g\frac{1}{2}\alpha,$$

also

$$\tan g(\frac{1}{2}\alpha+u)=\pm x\tan g\frac{1}{2}\alpha,$$

und folglich nach 38):

$$40)\quad \tan g\frac{1}{2}y=\pm\tan g(\frac{1}{2}\alpha+u).$$

Wie man sich dieser Formeln, in Verbindung mit §. 1., zur Entwickelung von y in nach den Potenzen von $\frac{x\mp1}{x\pm1}$ fortschreitende Reihen bedienen kann, will ich hier nicht weiter erläutern, da dieser Gegenstand aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie, und aus der Astronomie, bekannt genug ist.

Bemerken will ich indess noch, dass man, wenn überhaupt die Gleichung

$$41)\quad \tan g y=a+x\tan g\alpha$$

gegeben ist, allgemeine Ausdrücke der Differentialquotienten von y in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse leicht auf folgende Art finden kann.

Es ist nämlich

$$\frac{\partial\tan g y}{\partial x}=\tan g\alpha=\frac{\partial\tan g y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=\cos y^{-2}\frac{\partial y}{\partial x},$$

also

$$42)\quad \cot\alpha\frac{\partial y}{\partial x}=\cos y^{2}.$$

Folglich ist

$$\cot\alpha\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-2\cos y\sin y\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$=-2\tang\alpha\cos y^3\sin y$$
$$=-\tang\alpha\cos y^2\sin 2y,$$

also

$$43)\quad \cot\alpha^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-1.\cos y^2\sin 2y.$$

Hieraus ergiebt sich ferner:

$$\cot\alpha^2\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=-1.2\cos y^2\cos 2y\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+1.2\cos y\sin y\sin 2y\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$=-1.2\tang\alpha\cos y^3(\cos y\cos 2y-\sin y\sin 2y)$$
$$=-1.2\tang\alpha\cos y^3\cos 3y,$$

folglich

$$44)\quad \cot\alpha^3\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=-1.2\cos y^3\cos 3y.$$

Differentiirt man von Neuem, so erhält man:

$$\cot\alpha^3\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=\quad 1.2.3\cos y^3\sin 3y\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+1.2.3\cos y^2\sin y\cos 3y\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$=1.2.3\tang\alpha\cos y^4(\cos y\sin 3y+\sin y\cos 3y)$$
$$=1.2.3\tang\alpha\cos y^4\sin 4y,$$

folglich

$$45)\quad \cot\alpha^4\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=1.2.3\cos y^4\sin 4y.$$

Eben so ergiebt sich ferner:

$$\cot\alpha^4\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}=\quad 1.2.3.4\cos y^4\cos 4y\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$-1.2.3.4\cos y^3\sin y\sin 4y\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$=1.2.3.4\tang\alpha\cos y^5(\cos y\cos 4y-\sin y\sin 4y)$$
$$=1.2.3.4\tang\alpha\cos y^5\cos 5y,$$

also

$$46)\quad \cot\alpha^5 \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = 1.2.3.4\cos y^5 \cos 5y\,.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt nicht dem geringsten Zweifel, und es ist daher:

47)

$$\cot\alpha \frac{\partial y}{\partial x} = \cos y \cos y\,,$$

$$\cot\alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -1.\cos y^2 \sin 2y\,,$$

$$\cot\alpha^3 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -1.2\cos y^3 \cos 3y\,,$$

$$\cot\alpha^4 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 1.2.3\cos y^4 \sin 4y\,,$$

$$\cot\alpha^5 \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = 1.2.3.4\cos y^5 \cos 5y\,,$$

u. s. w.

$$\cot\alpha^{2n} \frac{\partial^{2n} y}{\partial x^{2n}} = (-1)^n.1.2.3\ldots(2n-1)\cos y^{2n} \sin 2ny\,,$$

$$\cot\alpha^{2n+1} \frac{\partial^{2n+1} y}{\partial x^{2n+1}} = (-1)^n.1.2.3\ldots.2n\cos y^{2n+1} \cos(2n+1)y\,,$$

u. s. w.

§. 5.

Sei jetzt

$$48)\quad \operatorname{tang} y = \operatorname{tang}\alpha + x\,,$$

so ist

$$\frac{\partial \operatorname{tang} y}{\partial x} = 1 = \frac{\partial \operatorname{tang} y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \cos y^{-2} \frac{\partial y}{\partial x}\,,$$

also

$$49)\quad \frac{\partial y}{\partial x} = \cos y \cos y\,.$$

Folglich ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -2\cos y \sin y \frac{\partial y}{\partial x} = -2\cos y^3 \sin y$$
$$= -1.\cos y^2 \sin 2y,$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -1.2\cos y^2 \cos 2y \frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+ 1.2\cos y \sin y \sin 2y \frac{\partial y}{\partial x}$$
$$= -1.2\cos y^3 (\cos y \cos 2y - \sin y \sin 2y)$$
$$= -1.2\cos y^3 \cos 3y,$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \quad 1.2.3\cos y^3 \sin 3y \frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+ 1.2.3\cos y^2 \sin y \cos 3y \frac{\partial y}{\partial x}$$
$$= 1.2.3\cos y^4 (\cos y \sin 3y + \sin y \cos 3y)$$
$$= 1.2.3\cos y^4 \sin 4y,$$

$$\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = \quad 1.2.3.4\cos y^4 \cos 4y \frac{\partial y}{\partial x}$$
$$- 1.2.3.4\cos y^3 \sin y \sin 4y \frac{\partial y}{\partial x}$$
$$= 1.2.3.4\cos y^5 (\cos y \cos 4y - \sin y \sin 4y)$$
$$= 1.2.3.4\cos y^5 \cos 5y,$$

u. s. w.

Setzen wir also

$$50) \quad y = f(x),$$

so ist

51)

$$f'(x) = \quad \cos y \cos y,$$
$$f''(x) = -1.\cos y^2 \sin 2y,$$
$$f'''(x) = -1.2\cos y^3 \cos 3y,$$
$$f^{IV}(x) = \quad 1.2.3\cos y^4 \sin 4y,$$
$$f^{V}(x) = \quad 1.2.3.4\cos y^5 \cos 5y,$$

u. s. w.

also

$$46)\quad \cot\alpha^5 \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = 1.2.3.4 \cos y^5 \cos 5y\,.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt nicht dem geringsten Zweifel, und es ist daher:

47)

$$\cot\alpha \frac{\partial y}{\partial x} = \cos y \cos y\,,$$

$$\cot\alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -1.\cos y^2 \sin 2y\,,$$

$$\cot\alpha^3 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -1.2 \cos y^3 \cos 3y\,,$$

$$\cot\alpha^4 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 1.2.3 \cos y^4 \sin 4y\,,$$

$$\cot\alpha^5 \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = 1.2.3.4 \cos y^5 \cos 5y\,,$$

u. s. w.

$$\cot\alpha^{2n} \frac{\partial^{2n} y}{\partial x^{2n}} = (-1)^n.1.2.3\ldots(2n-1) \cos y^{2n} \sin 2ny\,,$$

$$\cot\alpha^{2n+1} \frac{\partial^{2n+1} y}{\partial x^{2n+1}} = (-1)^n.1.2.3\ldots.2n \cos y^{2n+1} \cos(2n+1)y\,,$$

u. s. w.

§. 5.

Sei jetzt

$$48)\quad \operatorname{tang} y = \operatorname{tang}\alpha + x\,,$$

so ist

$$\frac{\partial \operatorname{tang} y}{\partial x} = 1 = \frac{\partial \operatorname{tang} y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \cos y^{-2} \frac{\partial y}{\partial x}\,,$$

also

$$49)\quad \frac{\partial y}{\partial x} = \cos y \cos y\,.$$

Folglich ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -2\cos y\sin y\frac{\partial y}{\partial x} = -2\cos y^3\sin y$$
$$= -1.\cos y^2\sin 2y,$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -1.2\cos y^2\cos 2y\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+1.2\cos y\sin y\sin 2y\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$= -1.2\cos y^3(\cos y\cos 2y - \sin y\sin 2y)$$
$$= -1.2\cos y^3\cos 3y,$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 1.2.3\cos y^3\sin 3y\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+1.2.3\cos y^2\sin y\cos 3y\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$=1.2.3\cos y^4(\cos y\sin 3y + \sin y\cos 3y)$$
$$=1.2.3\cos y^4\sin 4y,$$

$$\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = 1.2.3.4\cos y^4\cos 4y\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$-1.2.3.4\cos y^3\sin y\sin 4y\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$=1.2.3.4\cos y^5(\cos y\cos 4y - \sin y\sin 4y)$$
$$=1.2.3.4\cos y^5\cos 5y,$$

u. s. w.

Setzen wir also

$$50)\quad y = f(x),$$

so ist

51)

$$f'(x) = \cos y\cos y,$$
$$f''(x) = -1.\cos y^2\sin 2y,$$
$$f'''(x) = -1.2\cos y^3\cos 3y,$$
$$f^{IV}(x) = 1.2.3\cos y^4\sin 4y,$$
$$f^{V}(x) = 1.2.3.4\cos y^5\cos 5y,$$

u. s. w.

$$f^{(2n)}(x)=(-1)^n.1.2.3..(2n-1)\cos y^{2n}\sin 2ny,$$

$$f^{(2n+1)}(x)=(-1)^n.1.2.3\ldots 2n\cos y^{2n+1}\cos(2n+1)y,$$

u. s. w.

Für $x=0$ ist $y=\alpha$, und bezeichnen wir den Werth von y, welchen diese Grösse erhält, wenn man ϱx für x setzt, durch v, so ist

$$f^{(2n)}(\varrho x)=(-1)^n.1.2.3..(2n-1)\cos v^{2n}\sin 2nv,$$

$$f^{(2n+1)}(\varrho x)=(-1)^n.1.2.3..2n\cos v^{2n+1}\cos(2n+1)v;$$

also

$$\frac{x^{2n}}{1.2.3....2n}f^{(2n)}(\varrho x)=(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}\cos v^{2n}\sin 2nv,$$

$$\frac{x^{2n+1}}{1.2.3..(2n+1)}f^{(2n+1)}(\varrho x)=(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cos v^{2n+1}\cos(2n+1)v;$$

welche Grössen sich unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth von x nicht grösser als die Einheit ist, offenbar der Null bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn man n in's Unendliche wachsen lässt. Ist also der absolute Werth von x nicht grösser als die Einheit, so ist offenbar nach §. 1. II.:

$$52)\quad y=\alpha+\frac{x}{1}\cos\alpha\cos\alpha$$
$$-\frac{x^2}{2}\cos\alpha^2\sin 2\alpha$$
$$-\frac{x^3}{3}\cos\alpha^3\cos 3\alpha$$
$$+\frac{x^4}{4}\cos\alpha^4\sin 4\alpha$$
$$+\frac{x^5}{5}\cos\alpha^5\cos 5\alpha$$
$$-\ldots\ldots\ldots$$
$$-\ldots\ldots\ldots$$

Eine ähnliche Reihe kann man für

$$53)\quad \cot y=\cot\alpha+x$$

entwickeln, was wir dem Leser auszuführen überlassen. Stellt man aber die vorstehende Gleichung unter der Form

$$\tan g(\tfrac{1}{2}\pi-y)=\tan g(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)+x$$

dar, so ergiebt sich die gesuchte Reihe unmittelbar aus 52), indem man nämlich auf diese Weise, immer unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth von x nicht grösser als die Einheit ist, leicht erhält:

$$
\begin{aligned}
54)\quad y=\alpha-\frac{x}{1}&\sin\alpha\sin\alpha\\
&+\frac{x^2}{2}\sin\alpha^2\sin2\alpha\\
&-\frac{x^3}{3}\sin\alpha^3\sin3\alpha\\
&+\frac{x^4}{4}\sin\alpha^4\sin4\alpha\\
&-\frac{x^5}{5}\sin\alpha^5\sin5\alpha\\
&+\ldots\ldots\ldots\\
&-\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

§. 6.

Weil die Reihe

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5,\ \ldots..$$

für

$$-1<x<+1$$

bekanntlich convergirt, so convergirt unter derselben Voraussetzung für jedes ω auch die Reihe

$$1,\ x\cos\omega,\ x^2\cos2\omega,\ x^3\cos3\omega,\ \ldots\ldots$$

und hat daher eine gewisse Summe, welche wir durch $f(\omega)$ bezeichnen, also

$$f(\omega)=1+x\cos\omega+x^2\cos2\omega+x^3\cos3\omega+\ldots\ldots$$
$$\{-1<x<+1\}$$

setzen wollen. Daher ist nach einem bekannten Satze der Integralrechnung*), immer unter der Voraussetzung, dass

*) M. s. meine Elemente der Differential- und Integralrechnung. Thl. II. Leipzig. 1837. §. 8. Dieser Satz, welcher rücksichtlich seiner grossen wissenschaftlichen Bedeutung dem Taylor-

$$-1<x<+1$$

ist und ω einen beliebigen Bogen bezeichnet:

---

schen und Maclaurin'schen Satze an die Seite gesetzt werden muss, ist nämlich folgender:

Wenn die Grössen $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$ Functionen von x sind, und für zwei gewisse Gränzen a, b von x die Gleichung

$$s=u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots$$
$$\left\{a \begin{matrix}=\\=\\<\\<\end{matrix} x \begin{matrix}=\\<\\=\\<\end{matrix} b\right\}$$

stattfindet; so ist immer auch

$$\int_a^x s\partial x=\int_a^x u_0\partial x+\int_a^x u_1\partial x+\int_a^x u_2\partial x+\int_a^x u_3\partial x+\ldots$$
$$\left\{a \begin{matrix}=\\=\\<\\<\end{matrix} x \begin{matrix}=\\<\\=\\<\end{matrix} b\right\}$$

Rücksichtlich der Anwendung dieses Satzes oben im Texte hat man fest zu halten, dass die Gleichung

$$f(\omega)=1+x\cos\omega+x^2\cos 2\omega+x^3\cos 3\omega+\ldots,$$
$$\{-1<x<+1\}$$

wenn nur die Bedingung

$$-1<x<+1$$

erfüllt ist, für jedes ω gilt, so dass also auch nach unserem obigen Satze die Gleichung

$$\int_0^\omega f(\omega)\partial\omega=\int_0^\omega \partial\omega+x\int_0^\omega \cos\omega\partial\omega+x^2\int_0^\omega \cos 2\omega\partial\omega$$
$$+x^3\int_0^\omega \cos 3\omega\partial\omega+x^4\int_0^\omega \cos 4\omega\partial\omega$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

für jedes ω gilt, d. h. die Integration zwischen den Gränzen 0 und ω für jedes ω verstattet ist, wenn nur die Bedingung

$$-1<x<+1$$

erfüllt ist. Dass auch die in allen solchen Fällen nie bei Seite zu setzende Bedingung der Stetigkeit aller vorkommenden Grössen zwischen den betreffenden Gränzen erfüllt sein muss, versteht sich von selbst.

$$\int_0^\infty f(\omega)\partial\omega = \int_0^\infty \partial\omega + x\int_0^\infty \cos\omega\partial\omega + x^2\int_0^\infty \cos 2\omega\partial\omega$$
$$+ x^3\int_0^\infty \cos 3\omega\partial\omega + x^4\int_0^\infty \cos 4\omega\partial\omega$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d. i.

$$\int_0^\infty f(\omega)\partial\omega = \omega + \frac{1}{1}x\sin\omega + \frac{1}{2}x^2\sin 2\omega + \frac{1}{3}x^3\sin 3\omega + \ldots$$

Nach 19) ist aber, wenn wir

$$\operatorname{Arctang}\frac{x\sin\omega}{1-x\cos\omega}$$

zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ nehmen:

$$\operatorname{Arctang}\frac{x\sin\omega}{1-x\cos\omega} = \frac{1}{1}x\sin\omega + \frac{1}{2}x^2\sin 2\omega + \frac{1}{3}x^3\sin 3\omega + \ldots$$

Also ist nach dem Vorhergehenden:

$$\int_0^\infty f(\omega)\partial\omega = \omega + \operatorname{Arctang}\frac{x\sin\omega}{1-x\cos\omega}.$$

Differentiirt man nun auf beiden Seiten nach ω, so erhält man:

$$f(\omega) = 1 + \frac{\partial}{\partial\omega}\operatorname{Arctang}\frac{x\sin\omega}{1-x\cos\omega}.$$

Mittelst leichter Rechnung erhält man aber

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\operatorname{Arctang}\frac{x\sin\omega}{1-x\cos\omega} = \frac{x\cos\omega - x^2}{1-2x\cos\omega + x^2}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden, wie man leicht findet:

$$f(\omega) = \frac{1-x\cos\omega}{1-2x\cos\omega + x^2},$$

und weil nun

$$f(\omega) = 1 + x\cos\omega + x^2\cos 2\omega + x^3\cos 3\omega + \ldots\ldots$$
$$\{-1 < x < +1\}$$

ist, so ist

$$55)\quad \frac{1-x\cos\omega}{1-2x\cos\omega+x^2}$$
$$=1+x\cos\omega+x^2\cos2\omega+x^3\cos3\omega+\ldots\ldots$$
$$\{-1<x<+1\}.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung mit 2, und zieht dann auf beiden Seiten die Einheit ab, so erhält man:

$$56)\quad \frac{1-x^2}{1-2x\cos\omega+x^2}$$
$$=1+2x\cos\omega+2x^2\cos2\omega+2x^3\cos3\omega+\ldots..$$
$$\{-1<x<+1\}.$$

§. 7.

Weil die Reihe

$$x,\quad x^2,\quad x^3,\quad x^4,\quad x^5,\quad \ldots..$$

für

$$-1<x<+1$$

bekanntlich convergirt, so convergirt unter derselben Voraussetzung für jedes ω auch die Reihe

$$x\sin\omega,\quad x^2\sin2\omega,\quad x^3\sin3\omega,\quad x^4\sin4\omega,\ \ldots.$$

und hat daher eine gewisse Summe, die wir durch $f(\omega)$ bezeichnen, also

$$f(\omega)=x\sin\omega+x^2\sin2\omega+x^3\sin3\omega+x^4\sin4\omega+\ldots..$$
$$\{-1<x<+1\}$$

setzen wollen. Also ist nach dem im vorhergehenden Paragraphen angewandten Satze aus der Integralrechnung, immer unter der Voraussetzung, dass

$$-1<x<+1$$

ist und ω einen beliebigen Bogen bezeichnet:

$$\int_0^\omega f(\omega)\partial\omega = x\int_0^\omega \sin\omega\partial\omega + x^2\int_0^\omega \sin2\omega\partial\omega$$
$$+x^3\int_0^\omega \sin3\omega\partial\omega + x^4\int_0^\omega \sin4\omega\partial\omega$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

d. i.

$$\int_0^\omega f(\omega)\partial\omega$$

$$=-\frac{1}{1}x\cos\omega-\frac{1}{2}x^2\cos2\omega-\frac{1}{3}x^3\cos3\omega-\frac{1}{4}x^4\cos4\omega-\ldots..$$

$$+\frac{1}{1}x\quad+\frac{1}{2}x^2\quad+\frac{1}{3}x^3\quad+\frac{1}{4}x^4\quad+\ldots..$$

Nach 35) ist aber

$$\mathrm{l}\sqrt{1-2x\cos\omega+x^2}$$

$$=-\frac{1}{1}x\cos\omega-\frac{1}{2}x^2\cos2\omega-\frac{1}{3}x^3\cos3\omega-\frac{1}{4}x^4\cos4\omega-\ldots.,$$

und, wenn man $\omega=0$ setzt:

$$\mathrm{l}\sqrt{(1-x)^2}=\mathrm{l}(1-x)$$

$$=-\frac{1}{1}x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\ldots.$$

Also ist

$$\int_0^\omega f(\omega)\partial\omega=\mathrm{l}\sqrt{1-2x\cos\omega+x^2}-\mathrm{l}(1-x),$$

d. i.

$$\int_0^\omega f(\omega)\partial\omega=-\mathrm{l}\frac{1-x}{\sqrt{1-2x\cos\omega+x^2}},$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten nach ω differentiirt:

$$f(\omega)=-\frac{\partial}{\partial\omega}\mathrm{l}\frac{1-x}{\sqrt{1-2x\cos\omega+x^2}}.$$

Weil nun aber, wie man leicht findet:

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\mathrm{l}\frac{1-x}{\sqrt{1-2x\cos\omega+x^2}}=-\frac{x\sin\omega}{1-2x\cos\omega+x^2}$$

ist, so ist

$$\frac{x\sin\omega}{1-2x\cos\omega+x^2}=f(\omega),$$

also nach dem Obigen:

$$57)\quad \frac{x\sin\omega}{1-2x\cos\omega+x^2}$$
$$=x\sin\omega+x^2\sin2\omega+x^3\sin3\omega+x^4\sin4\omega+\ldots\ldots$$
$$\{-1<x<+1\}$$

oder

$$58)\quad (1-2x\cos\omega+x^2)^{-1}$$
$$=1+\frac{\sin2\omega}{\sin\omega}x^2+\frac{\sin3\omega}{\sin\omega}x^3+\frac{\sin4\omega}{\sin\omega}x^4+\ldots\ldots$$
$$\{-1<x<+1\}.$$

Dies möchten etwa die wichtigsten in der Trigonometrie und sphärischen Astronomie vorkommenden Reihen sein, die ich hier mit völliger Strenge zu entwickeln versucht habe, um zugleich ein Beispiel für die Anwendung des Maclaurin'schen Satzes in seiner neueren Gestalt zu geben.

XXXI.

Einfacher Beweis für die von Mascheroni gegebene Auflösung der Aufgabe: die Länge einer an ihren beiden Endpunkten unzugänglichen geraden Linie zu messen.

Von

Herrn Dr. J. R. Boyman

zu Coblenz.

Von dem vielfach bewährten mathematischen Lehrbuche des Herrn Herausgebers dieses Archivs ist so eben der ersten Abtheilung zweiter Theil (Lehrbuch der Mathematik für die mittlern Klassen höherer Lehranstalten von Joh. Aug. Grunert. II. Theil. Ebene Geometrie. Brandenburg. 1851.) in vierter Ausgabe erschienen, welche wiederum mit mehreren Zusätzen, namentlich über die Theorie der Transversalen und deren Anwendung, bereichert ist und vor andern ähnlichen Lehrbüchern sich dadurch wesentlich auszeichnet, dass in derselben auf das Praktische gebührend Rücksicht genommen und insbesondere der Gebrauch des Winkelkreuzes gelehrt worden ist.

Um die Anwendung dieses für die elementare Feldmesskunst ebenso brauchbaren, als in seiner Construction einfachen Instrumentes zu zeigen, ist in dem Anhange S. 254. des genannten Lehrbuches unter andern von der Aufgabe: „Die Länge einer an ihren beiden Endpunkten unzugänglichen geraden Linie zu messen" mit Hülfe des Winkelkreuzes eine elegante Auflösung gegeben. Herr Professor Grunert erwähnt zugleich, dass die gegebene Auflösung der Schrift: „Solutions peu connues de différens problèmes de Géométrie pratique, pour servir de supplément aux Traités connus de cette science; recueillies par F. J. Servois. A. Metz. An XII. p. 75." entlehnt sei und dass Servois selbst sage, dass diese Auflösung schon von Mascheroni in der Schrift: Problemi per gli Agrimensori con varie Soluzioni. Pavia 1793. Probl. III. Soluz. 13." gegeben worden sei; bemerkt aber, dass der für diese Auflösung beigefügte Beweis von ihm selbst herrühre.

Indem ich nachstehend die Auflösung der genannten Aufgabe mit denselben Worten des Herrn Professor Grunert folgen lasse, gebe ich einen andern Beweis, welcher, wenn auch keinen andern Vorzug, doch den der grössern Einfachheit und Kürze haben wird.

Auflösung. Wenn MN (Taf. X. Fig. 1.) die zu messende Linie ist, so suche man auf dem Terrain drei Punkte A, B, C von solcher Lage auf, dass die Winkel MAN, MBN, MCN, unter denen in diesen Punkten die zu messende Linie erscheint, dem Winkel des Winkelkreuzes und daher natürlich auch unter einander gleich sind. Dann messe man die Linien AB, AC, und suche mit dem Winkelkreuze in der Linie BC den Punkt D auf, welcher in der Linie BC eine solche Lage hat, dass der Winkel ADC gleichfalls dem Winkel des Winkelkreuzes, also auch den drei Winkeln MAN, MBN, MCN gleich ist. Misst man hierauf noch die Linie AD, so ist

$$MN = \frac{AB.AC}{AD}.$$

Beweis. Die Richtigkeit der vorstehenden Formel ergibt sich einfach durch folgende Betrachtung. Da die Winkel MAN, MBN, MCN einander gleich sind, so liegen die Punkte M, N, A, B, C auf einer Kreislinie; daher ist

$$\Delta MNF \sim \Delta BAF,$$

woraus folgt:

$$MN:AB = FM:BF \ldots\ldots 1)$$

Auch sind als Peripheriewinkel auf demselben Bogen die Winkel ACB, AMB einander gleich, und da nach der Construction auch die Winkel ADC, MBN gleich sind, so ist

$$\Delta ACD \sim \Delta FMB,$$

daher

$$AC:AD = FM:BF \ldots\ldots 2)$$

Aus der Verbindung von 1) und 2) erhält man nun:

$$MN:AB = AC:AD,$$

woraus unsere zu beweisende Formel sich sofort ergibt, nämlich:

$$MN = \frac{AB.AC}{AD}.$$

Dass Herr Doctor Boyman in Coblenz bei Abfassung des obigen Aufsatzes von den in Thl. XVIII. Heft I. abgedruckten Bemerkungen des Herrn Professor Pross in Stuttgart durchaus keine Kenntniss haben konnte, halte ich für meine Pflicht hier zu bezeugen. Dass ich aber Herrn Dr. Boyman für die obige Mittheilung zu besonderem Danke verpflichtet bin, und unbedingt anerkenne, dass der obige Beweis vor dem von mir a. a. O. gegebenen Beweise durch grössere Einfachheit sich auszeichnet, wird mir Jeder, der meine Sinnesart kennt, auch ohne meine Versicherung glauben.

Der Herausgeber.

XXXII.

Abriss eines Beweises für den sogenannten elften Euklidischen Grundsatz.

Von dem
Studirenden der Theologie Herrn H. Th. Hörlych
aus Schleswig-Holstein zu Bonn.

Alle diejenigen Erklärungen, Lehrsätze, Aufgaben u. s. w., die unabhängig sind von dem sogenannten 11. Axiom des Euklid und in den meisten Ausgaben der Planimetrie schon vor diesem dargestellt werden, setzen wir hier als vollkommen begründet voraus, indem es uns hier allein darauf ankommt, die Entbehrlichkeit dieses sogenannten Grundsatzes nachzuweisen, ohne uns auf die allgemeinere Frage einzulassen, ob Grundsätze überhaupt zulässig und unentbehrlich sind in der Mathematik.

Erster Satz.

In einem Dreieck ist die Summe der Winkel nicht $>2R$.

Beweis. In dem Dreieck ABC (Taf. X. Fig. 2.) sei

$$BC > AC > AB$$

und folglich

$$\angle BAC > \angle ABC > \angle ACB;$$

(da Construction und Beweis für die beiden andern möglichen Fälle, dass zwei oder drei Seiten und folglich auch zwei oder alle drei Winkel gleich sind, mit einer kleinen, sich aus der Sache selbst ergebenden Veränderung folgt). Dann soll gezeigt werden, dass

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA \leqq 2R$$

ist. Zu dem Ende halbire man AB in J, ziehe CJ, verlängere diese bis $DJ = CJ$ ist und ziehe DA, in dem so entstandenen $\triangle DAC$ halbire man AC in K, ziehe DK, verlängere diese bis $KE = DK$, ziehe AE. Im $\triangle DAE$ halbire man dann DA in L, ziehe LE, mache $LF = LE$ und ziehe FA u. s. w., indem man von den beiden fraglichen Seiten eines durch solche Construction entstandenen Dreiecks immer die nicht zuletzt entstandene Seite halbirt.

Aus der Construction folgt nun durch einen einfachen Schluss:

$$\triangle BJC \cong \triangle DAJ, \quad \triangle AEK \cong \triangle DKC, \quad \text{u. s. w.};$$

die Winkelsumme in $\triangle DAJ + \triangle AJC =$ der Winkelsumme in $\triangle BJC + \triangle AJC$, und $2R$ auf beiden Seiten abgezogen: Winkelsumme in $\triangle DAC =$ der in $\triangle ABC$, in $\triangle DAE$ $\triangle AEF$ u. s. w. Bezeichnen wir diese Winkelsumme im ersten Dreieck durch S, im zweiten durch S' u. s. w., so ist also $S = S' = S''$ u. s. w. Demgemäss sollen A, A', A'' u. s. w. den bei A liegenden Winkel der verschiedenen Dreiecke und Z, Z', Z'' u. s. w. die Summe der beiden übrigen bezeichnen. Es ist dann

$$A' = A + \angle ABC, \quad A'' = A' + \angle DCA \quad \text{u. s. w.}$$

$$A + Z = A' + Z' = A'' + Z'' \quad \text{u. s. w.} = S,$$

$$Z' = Z - \angle ABC, \quad Z'' = Z' - \angle DCA \quad \text{u. s. w.}$$

Nach der Annahme ist

$$\angle ABC > \angle ACB,$$

und aus der Construction folgt:

$$\angle DCA > \angle CDA \quad \text{u. s. w.};$$

$$Z > 2Z', \quad Z' > 2Z'', \quad Z'' > 2Z''' \quad \text{u. s. w.};$$

$$Z > 2Z' > 4Z'' > 8Z''' \quad \text{u. s. w.};$$

$$Z' < \frac{1}{2}Z, \quad Z'' < \frac{1}{4}Z, \quad Z''' < \frac{1}{8}Z, \quad Z^{IV} < \frac{1}{16}Z, \quad \text{u. s. w.}$$

Es ist hieraus klar, dass Z durch lange genug fortgesetzte Construction kleiner gemacht werden kann als jede bestimmt angegebene Winkelgrösse. Wäre nun S etwa um x grösser als $2R$, so setze man die Construction so lange fort, bis $x > Z^{(n)}$ ist; da nun $A^{(n)} + Z^{(n)} = S$ ist, so wäre

$$A^{(n)} + Z^{(n)} = 2R + x,$$

$$A^{(n)} = 2R + (x - Z^{(n)}),$$

$$A^{n} > 2R;$$

da doch A als Winkel eines Dreiecks immer $< 2R$ ist. Also ist S nicht $> 2R$, w. z. b. w.

Folgerungen.

1. Der Aussenwinkel ist nicht kleiner als die Summe der beiden inneren ihm gegenüberstehenden Winkel eines Dreiecks.

2. Zwei Winkel eines Dreieckes sind zusammen $< 2R$.

3. Die Summe der Winkel eines Viereckes ist nicht $> 4R$.

4. Zwei gerade Linien in einer Ebene, die von einer dritten so geschnitten werden, dass die Summe zweier innerer Winkel an einer Seite $= 2R$ ist, schneiden sich nach beiden Seiten hin verlängert nie.

Zweiter Satz.

Sind drei gerade Linien in einer Ebene gegeben, die sich nie schneiden, so schneidet die mittlere jede Linie, welche man sich gezogen denkt zwischen zwei beliebigen Punkten der beiden äussern.

Beweis. Wenn ich zwei gerade Linien AB und CD (Taf. X. Fig. 3.) habe, die sich nie schneiden, so ist klar, dass eine dritte EF, die keine von beiden schneidet, entweder zwischen diesen beiden liegen muss oder ausserhalb und zwar entweder nach der Seite von CD hin: dann ist CD die mittlere; oder nach der Seite von AB hin: dann ist AB die mittlere; auf jeden Fall also liegt unter drei sich nie schneidenden Geraden in einer Ebene, eine von ihnen zwischen den beiden andern; in unserm Falle sei EF die mittlere zwischen AB und CD. Von einem beliebigen Punkte L in AB ziehe man nach einem beliebigen Punkte K in CD eine Gerade KL, dann soll bewiesen werden, dass EF die KL schneidet.

Von einem beliebigen Punkte O in EF ziehe man nach den Punkten H in AB und G in CD gerade Linien, wo H und G allerdings beliebig angenommen sein sollen, aber so, dass sie auf derselben Seite von KL liegen wie O. Da nun OH ganz auf einer Seite von EF liegt, weil zwei Gerade sich nur einmal schneiden können, und ebenso OG, so folgt, weil H und G nach der Voraussetzung auf verschiedenen Seiten von EF liegen, dass auch die Linien OH und OG auf verschiedenen Seiten von EF liegen. Durch diese Construction erhalten wir also das geschlossene Fünfeck

OHLKG, in welchem, als in einem bestimmten endlichen Fünfeck, kein Punkt von *O* unendlich entfernt sein kann; verlängert man also *EF* nach der Seite von *LK* hin, so muss *EF*, weil jede Gerade sich bis ins Unendliche verlängern lässt, einmal eine Seite des Fünfecks schneiden; *OH* und *OG* kann *EF* nicht schneiden, denn die schneiden sich in *O*, *HL* und *GK* schneidet *EF* nach der Voraussetzung nicht, also schneidet *EF* die fünfte Seite *LK*, w. z. b. w.

Dritter Satz.

In einem Viereck, in welchem an der Grundlinie zwei rechte Winkel sind, die von der Grundlinie und zwei einander gleichen Seiten eingeschlossen werden, sind alle Winkel $=R$, also die Summe $=4R$.

Beweis. In dem Viereck $ABCD$ (Taf. X. Fig. 4.) sei AB als Grundlinie angenommen,

$$\angle DAB = \angle ABC = R \text{ und } AD = BC;$$

es folgt leicht, dass dann

$$\angle ADC = \angle DCB$$

ist; man soll beweisen, dass

$$\angle ADC = \angle DCB = R$$

ist. Da sie nun nach dem Vorigen nicht grösser als R sein können, so nehmen wir an, sie seien $< R$, etwa $= R - x$.

Man verlängere AB über B beliebig weit hinaus und schneide von B an auf der Verlängerung die Stücke $BE = EG = GJ$ u. s. w. $= AB$ ab; errichte durch E, G, J u. s. w. Perpendikel $EF = GH = JK$ u. s. w. $= AD = BC$, dann folgt leicht

$$DB \cong CE \cong FG \text{ u. s. w.}$$

Dann ergänze man den $\angle ADC$, der nach der Annahme $= R - x$ ist, zu einem Rechten durch die Linie DT, die man sich hinlänglich weit gezogen denke. Verlängert man DC über C, CF über F u. s. w. hinaus, so folgt leicht, dass DC von DF nach dieser Seite hin nicht geschnitten werden kann, weil DT die DC in D schneidet; aus der Beschaffenheit der Winkel bei C folgt, dass CF zwischen AB (wir denken uns alle Gerade bis ins Unendliche verlängert) und DC, FH zwischen AB und CF u. s. w. nach dieser Seite hin liegt. Da DT nun nicht DC nach dieser Seite hin schneidet, so schneidet es um so weniger CF, FH, HK, u. s. w. nach dieser Seite; der Kürze halber nennen wir die eben besprochene Seite rechts, die entgegengesetzte links. Verlängert man nun CF, FH, HK u. s. w. nach links über C, F, H u.s.w. so folgt aus unserer Annahme alsdann

$$\angle BCD + \angle BCF = \angle EFC + \angle EFH \text{ u. s. w. } = 2R - 2x;$$

daraus folgt, dass die Verlängerungen von CF, FH u. s. w. nach rechts und links um einen Winkel $=2x$ von DC und FH u. s. w. abweichen, diese also mit den Perpendikeln BC, EF u. s. w. einen Winkel $=R+x$ bilden, also nach keiner Seite hin AB schneiden, nach dem ersten Satze. Da die Linien CF, FH u. s. w. nun auch DT nach rechts nicht schneiden, so bleiben also nur die beiden Fälle möglich, erstens, dass CF, DT und AB, FH, DT und AB u. s. w. sich nie schneiden, oder zweitens CF und DT, FH und DT schneiden sich nach links hin. Im ersten Fall ist AB jedenfalls nach der Construction nicht die mittlere zwischen CF und DT, also ist entweder DT oder CF die mittlere. Ist DT die mittlere, so muss sie CB zwischen C und B schneiden nach dem zweiten Satze, dann läge aber DT zwischen AB und DC nach rechts hin, welches gegen die Construction ist. Wäre aber CF die mittlere, so müsste sie AD zwischen A und D schneiden, dann machte ihre Verlängerung mit BC einen Winkel, der kleiner als $R-x$ wäre, obgleich wir aus unserer Annahme und der Construction nachgewiesen haben, dass dieser $=R+x$ ist. Es bleibt demnach nur der zweite Fall übrig, dass CF nach links DT schneidet, und folglich FH, HK u. s. w. ebenso. Man verlängere demnach diese, bis sie DT beziehungsweise in P, Q, R u. s. w. schneiden, dann erhält man die Dreiecke DCP, PFQ, QHR u. s. w. Es wäre dann

$$\angle PDC = x, \quad \angle DCP = 2x;$$

aber

$$\angle PDC + \angle DCP + \angle CPD = \text{ oder } < 2R$$

nach dem ersten Satze, also $3x < 2R$; ferner im ΔFPQ, $\angle FPQ$ als Aussenwinkel vom $\Delta PDC =$ oder $> 3x$, $\angle PFQ = 2x$, also $5x < 2R$. So erhält man nach und nach $3x$, $5x$, $7x$, $9x$, $11x$ u. s. w. $< 2R$, also

$$x < \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \frac{2}{11}, \text{ u. s. w. } R,$$

woraus erhellet, dass $x <$ als jede noch so kleine bestimmt angegebene Grösse ist. x hat demnach gar keine Grösse, sondern ist gleich 0 und $R - x = R$, also

$$\angle ADC = \angle DCB = R,$$

w. z. b. w.

Anmerkung.

Wir haben in vorstehenden Sätzen der Kürze halber nur den Gang des Beweises im Allgemeinen gegeben und diesen so weit ausgeführt, dass wir hoffen konnten, der Kundige werde das Uebrige mit Sicherheit ergänzen können. Vermittelst des letzten Satzes nun in Verbindung mit dem ersten und dessen unmittelbaren Folgen schreitet man mit Leichtigkeit bis zum Beweise des sogenannten elften Axioms des Euklid vor.

Vermittelst Ergänzung zum Rechteck beweist man, dass die Summe der Winkel im rechtwinkligen Dreieck $=2R$ ist; durch Zerlegung in zwei rechtwinklige Dreiecke beweist man, dass die Summe in jedem Dreieck $=2R$ ist, und durch Zerlegung in zwei Dreiecke beweist man, dass in jedem Viereck die Summe der Winkel $=4R$ ist. Und hieraus wird jeder leicht die gleichmässige Annäherung um gleich viel, auf gleich grosse Entfernung solcher zwei Linien, wie unser sogenanntes Axiom dieselben voraussetzt, beweisen können, woraus wieder mit Nothwendigkeit folgt, dass sie sich entweder treffen oder schneiden müssen. Wir erlauben uns nur noch darauf aufmerksam zu machen, dass der eigentliche Knoten des Beweises, wenn wir so sagen dürfen, nach unserer Meinung nicht so sehr im dritten Satze liegt, obgleich dieser schwerer ist, als im zweiten, indem hier gerade das Schneiden zweier Linien unter bestimmten Bedingungen bewiesen wird, und alle Versuche, die Schwierigkeit dieses sogenannten Axioms zu lösen, immer und immer wieder daran scheitern, dass das Schneiden der zum Behuf der Lösung betrachteten Linien nicht streng nachzuweisen ist.

Nachschrift des Herausgebers.

Ich bin zwar kein Freund neuer Parallelentheorien, und habe schon mehrere mir zugesandte Versuche dieser Art nicht in das Archiv aufgenommen. Bei dem vorstehenden Aufsatze glaubte ich aber, da er mir manches Eigenthümliche zu enthalten scheint, um so mehr eine Ausnahme machen zu müssen, weil der Herr Verfasser mir schreibt, dass zwei competente Richter, Herr Professor Heine und Herr Doctor Beer in Bonn, sich günstig über denselben ausgesprochen haben. Eine Kritik von meiner Seite an diesem Orte ist unzulässig und unangemessen, und ich muss dieselbe daher ganz den Lesern überlassen, bitte aber dabei nicht zu vergessen, dass der sehr bescheidene Herr Verfasser seinen Aufsatz nur einen „Abriss“ eines Beweises des eilften Euklidischen Grundsatzes genannt hat.

XXXIII.

Ueber eine Aufgabe in der Kreistheilung.

Von
Herrn Doctor F. Arndt,
Lehrer an der Realschule zu Stralsund.

Gauss zeigt in der siebenten Section der Disq. Arithm., dass für jede positive ungerade Primzahl n das Polynom

$$4X = 4(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1)$$

sich auf die Form

$$YY - n(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} ZZ$$

bringen lässt, wo Y und Z ganze Funktionen von x vom $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{ten}}$ Grade sind. Die Kreistheilung selbst liefert nur eine derartige Zerlegung; wir wollen hier untersuchen, ob diese Zerlegung auf mehrere Arten gemacht werden kann?

Eisenstein sagt, dass die Beantwortung dieser Frage wichtig sei für den Beweis des Fermat'schen Satzes, von welchem Euler und Dirichlet specielle Fälle behandelt haben. (Crelle Journal. Band 27. p. 88.).

Die Kreistheilung geht bei dieser Zerlegung von den Werthen der beiden Perioden

$$p = \Sigma r^R, \quad p' = \Sigma r^N$$

aus, wo r eine beliebige Wurzel der Gleichung $X=0$ ist, das erste Summenzeichen sich über alle Werthe von R, welche quadratische Reste von n, das andere sich über alle Werthe von N, welche quadratische Nicht-Reste von n sind, erstreckt. Für

$$\frac{1}{2}(2-1)=m, \quad (-1)^m=\varepsilon$$

ist bekanntlich

$$p+p'=-1, \quad pp'=\frac{1}{4}(1-n\varepsilon).$$

Sind nun

$$X'=x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0,$$

$$X''=x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m=0$$

die Gleichungen, deren Wurzeln resp. die Glieder in p, p' sind, so dass also $X=X'X''$ sein muss, so lassen sich die Coefficienten a_λ, b_λ bekanntlich folgendermassen ausdrücken:

$$a_\lambda=\mathfrak{A}_\lambda+\mathfrak{B}_\lambda p+\mathfrak{C}_\lambda p',$$

$$b_\lambda=\mathfrak{A}_\lambda+\mathfrak{B}_\lambda p'+\mathfrak{C}_\lambda p;$$

wo $\mathfrak{A}_\lambda$, $\mathfrak{B}_\lambda$, $\mathfrak{C}_\lambda$ ganze Zahlen sind, und es kommt

$$X'+X''=2x^m+x^{m-1}+A_2x^{m-2}+A_3x^{m-3}+\ldots+A_m,$$

$$X'-X''=(x^{m-1}+B_2x^{m-2}+\ldots+B_m)(p'-p);$$

wo

$$A_\lambda=a_\lambda+b_\lambda=2\mathfrak{A}_\lambda-\mathfrak{B}_\lambda-\mathfrak{C}_\lambda,$$

$$B_\lambda=\frac{a_\lambda-b_\lambda}{p'-p}=\mathfrak{C}_\lambda-\mathfrak{B}_\lambda$$

ist. Nun ist

$$4X=4X'X''=(X'+X'')^2-(X'-X'')^2,$$

folglich

$$4X=YY-n\varepsilon ZZ,$$

wo

$$Y=2x^m+x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m,$$

$$Z=x^{m-1}+B_2x^{m-2}+\ldots+B_m$$

ist. Es sei nun umgekehrt

$$Y = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m,$$

$$Z = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_m,$$

$$4X = YY - n\varepsilon ZZ, \quad m = \frac{1}{2}(n-1), \quad \varepsilon = (-1)^m;$$

wo die Coefficienten in Y, Z ganze Zahlen sein sollen. Die Multiplication zeigt zunächst, dass

$$[1] \dots\dots \frac{1}{4}(A_0^2 - \varepsilon n B_0^2) = 1$$

ist. Es ergiebt sich ferner

$$X = \left(\frac{Y}{2} + \frac{Z}{2}\sqrt{\varepsilon n}\right)\left(\frac{Y}{2} - \frac{Z}{2}\sqrt{\varepsilon n}\right),$$

$$[2] \dots X = (x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m) \times (x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m),$$

wo

$$a_\lambda = \frac{A_\lambda + B_\lambda\sqrt{\varepsilon n}}{A_0 + B_0\sqrt{\varepsilon n}}, \qquad b_\lambda = \frac{A_\lambda - B_\lambda\sqrt{\varepsilon n}}{A_0 - B_0\sqrt{\varepsilon n}},$$

oder

$$[3] \begin{cases} a_\lambda = \frac{1}{4}(A_0 A_\lambda - \varepsilon n B_0 B_\lambda) + \frac{1}{4}(A_0 B_\lambda - B_0 A_\lambda)\sqrt{\varepsilon n} = f_\lambda + g_\lambda\sqrt{\varepsilon n}, \\ b_\lambda = \frac{1}{4}(A_0 A_\lambda - \varepsilon n B_0 B_\lambda) - \frac{1}{4}(A_0 B_\lambda - B_0 A_\lambda)\sqrt{\varepsilon n} = f_\lambda - g_\lambda\sqrt{\varepsilon n}; \end{cases}$$

$$[4] \quad A_\lambda = A_0 f_\lambda + \varepsilon n B_0 g_\lambda, \quad B_\lambda = A_0 g_\lambda + B_0 f_\lambda.$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = 0$$

sind nach [2] Wurzeln der Gleichung $X=0$, lassen sich also durch Potenzen einer beliebigen Wurzel r der Gleichung $X=0$ ausdrücken; man bezeichne diese Wurzeln mit r^{ξ_1}, $r^{\xi_2}, \dots r^{\xi_m}$ und auf ähnliche Weise bezeichne man die Wurzeln der Gleichung

$$x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m = 0$$

mit r^{η_1}, r^{η_2}, …… r^{η_m}, und setze

$$P = r^{\xi_1} + r^{\xi_2} + \dots + r^{\xi_m},$$

$$P' = r^{\eta_1} + r^{\eta_2} + \dots + r^{\eta_m};$$

ferner sei, wie oben,

$$p = r^{R_1} + r^{R_2} + \dots + r^{R_m},$$

$$p' = r^{N_1} + r^{N_2} + \dots + r^{N_m};$$

wo R_1, $R_2 \dots R_m$ die quadratischen Reste für den Modul n; N_1, N_2, ... N_m die Nichtreste bedeuten. Es ist also

$$P = -a_1 = -f_1 - g_1\sqrt{\varepsilon n}, \quad P' = -b_1 = -f_1 + g_1\sqrt{\varepsilon n},$$

$$P + P' = -2f_1 = -1, \quad f_1 = \frac{1}{2};$$

folglich

$$[5] \quad \begin{cases} P = -\frac{1}{2} - g_1\sqrt{\varepsilon n}, \\ P' = -\frac{1}{2} + g_1\sqrt{\varepsilon n}; \quad \text{und nach dem Obigen:} \\ p = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon n}, \\ p' = -\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon n}; \end{cases}$$

wo die Zeichen sich auf einander beziehen, aber unbestimmt sind. Hieraus folgt

$$P - P' = -2g_1\sqrt{\varepsilon n}, \quad p - p' = \pm\sqrt{\varepsilon n}, \quad P - P' = \mp 2g_1(p - p');$$

oder

$$[6] \; \dots\dots \; P - P' \pm 2g_1 p \mp 2g_1 p' = 0.$$

Setzen wir nun in den Ausdrücken von P, P', p, p', x statt r und bezeichnen die resultirenden Funktionen von x mit P_x, P_x', p_x, p'_x, so verschwindet die Funktion

$$\varphi_x = P_x - P'_x \pm 2g_1 p_x \mp 2g_1 p'_x$$

für $x = r$ ([6]), ist folglich durch $x - r$ theilbar, ebenso wie X, folglich muss das grösste gemeinschaftliche Maass von φ_x und X eine Funktion von x sein, die höchstens vom $(n-2)$ten Grade sein wird, da φ_x durch x theilbar ist, und X für $x = 0$ nicht verschwindet.

Dieses grösste gemeinschaftliche Maass hat nun nothwendig rationale Coefficienten, wie sich aus der gewöhnlichen Methode seiner Bestimmung ergiebt, folglich ist X durch eine algebraische Funktion von niederem Grade als X selbst mit rationalen Coefficienten theilbar; dies ist aber nicht möglich, ausser wenn φ_x

identisch der Null gleich ist. (Gauss Disq. Arith. Sect. VII. art. 341.). Da aber die nämliche Potenz von x nicht zugleich in p_x, p'_x als Glied vorkommt, so ist ersichtlich, dass φ_x nicht identisch $=0$ sein kann, wenn nicht $2g_1 = \pm 1$, oder $g_1 = \pm\frac{1}{2}$ ist; also ist

$$\text{entweder } P_x - P'_x + p_x - p'_x \text{ oder } P_x - P'_x - p_x + p'_x$$
$$\text{identisch } = 0.$$

Unter der ersten Voraussetzung müssen die Glieder von P'_x sämmtlich Glieder der Summe $P_x + p_x$ sein, aber P'_x hat mit P_x kein Glied gemein, wie leicht erhellt, folglich ist P'_x mit p_x, ebenso P_x mit p'_x identisch, also auch P' mit p, P mit p' identisch. In der andern Voraussetzung findet man auf ähnliche Art, dass P mit p, P' mit p' identisch ist, d. h. wenn man sich X in die Factoren

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m, \quad x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$$

so zerfällt denkt, dass die Coefficienten $a\lambda$, $b\lambda$ allgemein unter der Form

$$a\lambda = f\lambda + g\lambda\sqrt{\varepsilon n}, \quad b\lambda = f\lambda - \varepsilon\lambda\sqrt{\varepsilon n}$$

erscheinen, so ist nothwendig

$$X = (x - r^{B_1})(x - r^{B_2}) \dots\dots (x - r^{B_m}) \times (x - r^{N_1})(x - r^{N_2}) \dots (x - r^{N_m}),$$

d. h. man findet die durch die Kreistheilung selbst gegebenene Zerlegung von X.

Setzt man nun

$$a\lambda + b\lambda = \mathrm{A}\lambda, \quad \frac{a\lambda - b\lambda}{p' - p} = \mathrm{B}\lambda;$$

$$[7] \begin{cases} Y = 2x^m + x^{m-1} + \mathrm{A}_2 x^{m-2} + \dots + \mathrm{A}_m, \\ Z = x^{m-1} + \mathrm{B}_2 x^{m-2} + \dots\dots + \mathrm{B}_m; \end{cases}$$

so ist $4X = YY - \varepsilon_n ZZ$ die durch die Kreistheilung gefundene Zerlegung. Aber nach [3]

$$a\lambda + b\lambda = 2f\lambda, \quad a\lambda - b\lambda = 2g\lambda\sqrt{\varepsilon n}, \quad f\lambda = \frac{1}{2}\mathrm{A}\lambda,$$

$$g\lambda = \frac{1}{2}\,\frac{(p' - p)\mathrm{B}\lambda}{\sqrt{\varepsilon n}};$$

substituirt man diese Werthe von $f\lambda$, $g\lambda$ in [4], so erhält man, beachtend, dass $p'-p=\pm\sqrt{\varepsilon n}$ ist:

$$[8]\quad \begin{cases} A_\lambda=\frac{1}{2}A_0\mathrm{A}_\lambda\pm\frac{1}{2}\varepsilon nB_0\mathrm{B}_\lambda, \\ B_\lambda=\frac{1}{2}B_0\mathrm{A}_\lambda\pm\frac{1}{2}A_0\mathrm{B}_\lambda; \end{cases}$$

wo die Zeichen sich auf einander beziehen, und wo A_0, B_0 an die Gleichung

$$A_0^2-\varepsilon nB_0^2=4$$

gebunden sind.

Es lässt sich ferner zeigen, dass A_λ, B_λ in allen Fällen ganze Zahlen sind. In der That erhellt sogleich, dass A_0, B_0 beide gerade, oder beide ungerade sein müssen; sodann war

$$\mathrm{A}_\lambda=2\mathfrak{A}_\lambda-\mathfrak{B}_\lambda-\mathfrak{C}_\lambda,\quad \mathrm{B}_\lambda=\mathfrak{C}_\lambda-\mathfrak{B}_\lambda,$$

folglich

$$\mathrm{A}_\lambda+\mathrm{B}_\lambda=2(\mathfrak{A}_\lambda-\mathfrak{B}_\lambda),$$

also A_λ, B_λ ebenfalls zugleich gerade, oder zugleich ungerade. Hieraus folgt aber unmittelbar, dass die durch [8] bestimmten Werthe von A_λ, B_λ ganze Zahlen sind.

Umgekehrt soll erwiesen werden, dass

$$4X=Y'Y'-\varepsilon nZ'Z'$$

sein muss, wenn man

$$Y'=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots.+A_m,$$

$$Z'=B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots.+B_m,$$

$$A_0^2-\varepsilon nB_0^2=4$$

setzt, und die Coefficienten A_λ, B_λ nach [8] bestimmt. — In der That folgt aus [7] in Verbindung mit [8]:

$$[9]\quad \begin{cases} Y'=\frac{1}{2}A_0Y\pm\frac{1}{2}\varepsilon nB_0Z, \\ Z'=\frac{1}{2}B_0Y\pm\frac{1}{2}A_0Z; \end{cases}$$

und hiernach findet sich

$$Y'Y'-\varepsilon nZ'Z'=\frac{1}{4}(A_0^2-\varepsilon nB_0^2)(YY-\varepsilon nZZ)=4X.$$

Das Endresultat unserer bisherigen Untersuchung ist also folgendes:

Wenn

$$4X = YY - \varepsilon nZZ$$

die durch die Kreistheilung gegebene Zerlegung des Polynoms $4X$ ist, so findet man alle möglichen Zerlegungen dieses Polynoms, nämlich

$$4X = Y'Y' - \varepsilon nZ'Z',$$

vermittelst der Formeln [9], oder auch die Coefficienten A_λ, B_λ der allgemeinen Zerlegung und die Coefficienten A_λ, B_λ der besondern Zerlegung (welche die *Kreistheilung* giebt) mit Hülfe der Formeln [8], indem A_0, B_0 beliebige Werthe der Gleichung

$$A_0^2 - \varepsilon nB_0^2 = 4$$

bedeuten.

Die Gleichung

$$A_0^2 + nB_0^2 = 4$$

hat mit Ausnahme von $n=3$ nur die Wurzeln $A_0=2$, $B_0=0$ (offenbar genügt es, A_0, B_0 als positiv zu betrachten), folglich nach [9] $Y'=Y$, $Z'=\pm Z$, daher die Zerlegung in dem Falle $n\equiv 3$ (mod. 4.) nur auf eine Art möglich ist. — Für $n=3$ aber kann man $A_0=2$, $B_0=0$; $A_0=1$, $B_0=1$ setzen, und erhält nach [9]

$$Y' = \frac{1}{2}Y \mp \frac{1}{2}Z, \quad Z' = \frac{1}{2}Y \pm \frac{1}{2}Z;$$

die Kreistheilung giebt $Y=2x+1$, $Z=1$, folglich $Y'=x-1$, $Z'=x+1$, wie Herr Eisenstein richtig bemerkt, aber auch noch $Y'=x+2$, $Z'=x$.

In dem Falle $n\equiv 1$ (mod. 4.), wo $\varepsilon=1$, genügen der Gleichung

$$A_0^2 - nB_0^2 = 4$$

unendlich viele Systeme ganzer Zahlen, weshalb die in Rede stehende Zerlegung alsdann auf unendlich viele Arten möglich ist.

In Bezug auf die Zerlegung von $4X$ in $YY - \varepsilon nZZ$ mit Hülfe der Kreistheilung sind noch einige Bemerkungen übrig, um diesen Gegenstand vollständig zu erledigen.

I. Es sei

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

die Gleichung, deren Wurzeln $r^{R_1}, r^{R_2}, r^{R_3}, \ldots r^{R_m}$ sind, die Potenzsummen dieser Wurzeln bezeichne man mit $S.\omega$, $S.\omega^2$, $S.\omega^3$, etc. Es ist also $S.\omega = p$; ferner

$$S.\omega^\lambda = r^{\lambda R_1} + r^{\lambda R_2} + \ldots\ldots + r^{\lambda R_m},$$

folglich $S.\omega^\lambda = p$ oder $= p'$, jenachdem λ quadratischer Rest von n, oder Nichtrest von n, oder jenachdem Ind. λ (mod. n) gerade oder ungerade ist.

Mit Hilfe der Relationen

$$p + p' = -1, \quad pp' = \frac{1}{4}(1 - n\varepsilon), \quad pp = -p - \frac{1}{4}1 - n\varepsilon)$$

ist es nun sehr leicht, die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_m$ durch die Newton'schen Gleichungen zu berechnen. Bringt man $a\lambda$ auf die Form

$$a\lambda = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}p,$$

so folgt

$$b\lambda = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}p',$$

$$A\lambda = 2\mathfrak{A} - \mathfrak{B}, \quad B\lambda - \mathfrak{B},$$

wo $A\lambda$, $B\lambda$ die allgemeinen Coefficienten in den Polynomen Y und Z sind.

II. Man braucht diese Coefficienten nur bis zur Hälfte zu berechnen. Um dies nachzuweisen, werde ein allgemeiner Satz über die Perioden bewiesen, welchen Gauss bloss andeutet. (Disq. Arithm. art. 349.).

Es sei $n - 1 = ef$,

$$(f, \lambda) = [\lambda] + [\lambda g^e] + [\lambda g^{2e}] + \ldots + [\lambda g^{(f-1)e}],$$

wo g eine primitive Wurzel für den Modul n, das Zeichen $[\mu]$ die Potenz r^μ bedeutet; ferner sei

$$x^f + \alpha_1 x^{f-1} + \alpha_2 x^{f-2} + \ldots (-1)^f.1 = 0^{*})$$

---

*) Bedeutet P das Produkt der Wurzeln dieser Gleichung, so ist der letzte Coefficient

die Gleichung, deren Wurzeln die Glieder in (f, λ) sind.

Ist nun 1°. f gerade, so ist allgemein

$$\lambda g^{(\frac{1}{2}f+\vartheta)e} = \lambda g^{\frac{1}{2}(n-1)} g^{\vartheta e} \equiv -\lambda g^{\vartheta e} \text{ (mod. } n),$$

folglich kommt in der Periode (f, λ) jede Wurzel mit ihrer reciproken zugleich vor, also hat die vorhergehende Gleichung dieselben Wurzeln wie die folgende:

$$x^f + \alpha_{f-1} x^{f-1} + \ldots + \alpha_1 x + 1 = 0,$$

daher

$$\alpha_1 = \alpha_{f-1}, \quad \alpha_2 = \alpha_{f-2}, \text{ etc.}$$

oder die ersten Coefficienten sind den letzten in umgekehrter Ordnung gleich.

2°. Ist f ungerade, so sei

$$(9) \ldots\ldots x^f + \alpha_1 x^{f-1} + \ldots + \alpha_{f-1} x - 1 = 0$$

die Gleichung, deren Wurzeln die Glieder in (f, λ),

$$(9') \ldots\ldots x^f + \beta_1 x^{f-1} + \ldots + \beta_{f-1} x - 1 = 0$$

die Gleichung, deren Wurzeln die Glieder in $(f, -\lambda)$.

Die Wurzeln der Gleichung (9') sind die reciproken Werthe der Wurzeln der Gleichung (9), also werden (9) und die folgende Gleichung

$$x^f - \beta_{f-1} x^{f-1} - \ldots - \beta_1 x - 1 = 0$$

die nämlichen Werthe haben, folglich

$$\alpha_{f-1} = -\beta_1, \quad \alpha_{f-2} = -\beta_2, \text{ etc.}$$

Da man nun die Coefficienten β findet, wenn man in den Ausdrücken für die Coefficienten α, welche bekanntlich auf die Form

$$A + a(f, 1) + a_1(f, g) + \ldots + a_\varepsilon(f, g^{e-1})$$

gebracht werden können, überall $(f, -\mu)$ statt (f, μ) setzt, so findet man die letzten Coefficienten der Gleichung (9), wenn man in den Werthen der ersten Coefficienten die vorhergehende Substitution macht, und die Zeichen verändert.

$$\alpha_f = (-1)^f P, \quad P = r^{\frac{\lambda(1-g^{ef})}{1-g^e}} = r^{\psi n} = 1,$$

folglich $\alpha_f = (-1)^f$.

Wenden wir diese Bemerkungen an auf die obige Gleichung

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + a_m = 0,$$

so findet sich für ein gerades m:

$$a_\mu + b_\mu = a_{m-\mu} + b_{m-\mu},\ \frac{a_\mu - b_\mu}{p' - p} = \frac{a_{m-\mu} - b_{m-\mu}}{p' - p},$$

d. i.

$$[10]\quad A_\mu = A_{m-\mu},\quad B_\mu = B_{m-\mu};$$

woraus folgt, dass man nur die Coefficienten

$$A_2,\ A_3, \ldots\ldots A_{\frac{1}{2}m};\quad B_2,\ B_3, \ldots\ldots B_{\frac{1}{2}m}$$

zu berechnen braucht.

Für ein ungerades m erhält man

$$a_\mu = \mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{B}_\mu p + \mathfrak{C}_\mu p',\qquad a_{m-\mu} = -\mathfrak{A}_\mu - \mathfrak{B}_\mu p' - \mathfrak{C}_\mu p;$$

$$b_\mu = \mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{B}_\mu p' + \mathfrak{C}_\mu p,\qquad b_{m-\mu} = -\mathfrak{A}_\mu - \mathfrak{B}_\mu p - \mathfrak{C}_\mu p';$$

$$a_\mu + b_\mu = 2\mathfrak{A}_\mu - \mathfrak{B}_\mu - \mathfrak{C}_\mu,\qquad a_{m-\mu} + b_{m-\mu} = -2\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{B}_\mu + \mathfrak{C}_\mu;$$

$$\frac{a_\mu - b_\mu}{p' - p} = \mathfrak{C}_\mu - \mathfrak{B}_\mu,\ \frac{a_{m-\mu} - b_{m-\mu}}{p' - p} = \mathfrak{C}_\mu - \mathfrak{B}_\mu;$$

folglich

$$[11]\quad A_\mu = -A_{m-\mu},\quad B_\mu = B_{m-\mu};$$

woraus folgt, dass man nur die Coefficienten

$$A_2,\ A_3, \ldots\ldots A_{\frac{1}{2}(m-1)}\quad B_2,\ B_3 \ldots\ldots B_{\frac{1}{2}(m-1)}$$

zu berechnen braucht.

III. Der Coefficient a_λ ist $=(-1)^\lambda \alpha_\lambda$, wo α_λ die Summe aller Combinationen der Glieder in

$$p = r^{R_1} + r^{R_2} + \ldots\ldots + r^{R}$$

zur λten Klasse bedeutet; vollständig entwickelt gedacht enthält er also

$$m_\lambda = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-\lambda+1)}{1.2\ldots\ldots m}$$

Glieder; setzt man nun

$$a_\lambda = \mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{B}_\lambda p + \mathfrak{C}_\lambda p',$$

so muss

$$\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{B}_\lambda m + \mathfrak{C}_\lambda m = m_\lambda$$

sein, da die Aggregate p und p' je m Glieder enthalten; folglich

$$2\mathfrak{A}_\lambda + (n-1)(\mathfrak{B}_\lambda + \mathfrak{C}_\lambda) = 2m_\lambda, \quad 2\mathfrak{A}_\lambda - \mathfrak{B}_\lambda - \mathfrak{C}_\lambda = 2m_\lambda - n(\mathfrak{B}_\lambda + \mathfrak{C}_\lambda),$$

d. i.

$$A_\lambda \equiv (-1)^\lambda 2m_\lambda \ (\text{mod. } n),$$

wie Legendre zuerst bemerkt, aber, wie ich glaube, nicht streng nachgewiesen hat. (Théorie des Nombres. Tom. II. p. 194.). Wenn Legendre aber ferner behauptet, dass man, um die A_λ zu bestimmen, in der vorhergehenden Congruenz statt $2m_\lambda$ den kleinsten Rest dieser Zahl nach dem Modul n (unter $\frac{1}{2}n$ liegend) setzen müsse, so ist dies unrichtig. Es trifft diese Behauptung freilich zu bis $n=37$, aber für grössere Werthe von n verhält es sich anders, wie man aus der nachfolgenden Tabelle ersehen wird.

Man findet in dieser Tabelle die Coefficienten a_1, a_2, a_3 etc.; A_2, A_3, etc.; B_2, B_3 etc. von $n=31$ bis $n=79$ berechnet, wo der Zeiger nach II. die Zahl $\frac{1}{2}(m-1)$ oder $\frac{1}{2}m$ nicht zu übersteigen braucht. Die Coefficienten b_λ findet man sogleich aus den Coefficienten a_λ, in diesen p mit p' verwechselnd. Legendre's Tabelle reicht bis $n=29$.

Tabelle

der Coefficienten a_λ in der Gleichung

$$(x - r^{B_1})(x - r^{B_2}) \ldots\ldots (x - r^{B_m}) = 0$$

und der Coefficienten A_λ, B_λ der Polynome Y, Z in der Zerlegung

$$4X = YY - (-1)^m nZZ;$$

berechnet nach der Kreistheilung, von $n=31$ bis $n=79$.

$n=31$

a_1	A_2	B_2
$-p$		
$-p-4$	-7	1
$p-5$	-11	-1
$2p+2$	2	-2
4	8	0
$-p-2$	-3	1
$p-2$	-5	-1

$n=37$

a_1	A_2	B_2
$-p$		
5	10	0
$-2p-3$	-4	2
$p+8$	15	-1
$-3p-4$	-5	3
$p+9$	17	-1
$-2p-5$	-8	2
$p+6$	11	-1
$-2p-3$	-4	2

$n=41$

a_1	A_2	B_2
$-p$		
$-p+5$	11	1
$-2p+7$	16	2
$-4p+5$	14	4
$-3p+13$	29	3
$-4p+13$	30	4
$-6p+8$	22	6
$-4p+16$	36	4
$-4p+15$	34	4
$-6p+7$	20	6

$n=43$

a_1	A_2	B_2
$-p$		
-5	-10	0
$2p+4$	6	-2
$-2p+7$	16	2
$-2p-11$	-20	2
$4p$	-4	-4
$-p+13$	27	1
$-3p-9$	-15	3
$3p-2$	-7	-3
$-p+8$	17	1

$n=47$

a_1	A_2	B_2
$-p$		
$-p-6$	-11	1
$-p-8$	-17	1
$-3p-3$	-9	3
$4p+5$	6	-4
$3p+16$	29	-3
$-p+18$	37	1
$-4p+8$	20	4
$-4p-3$	-2	4
$-2p-9$	-16	2
$p-5$	-11	-1

$n=53$

a_1	A_2	B_2
$-p$		
7	14	0
$-2p-4$	-6	2
$2p+5$	8	-2
-7	-14	0
-2	-4	0
$p+10$	19	-1
$-4p-8$	-12	4
$2p+13$	24	-2
$-p-5$	-9	1
$-p-6$	-11	1
$3p+15$	27	-3
$-5p-15$	-25	5

$n=59$

a_1	A_2	B_2
$-p$		
-7	-14	0
$2p+5$	8	-2
$-3p+2$	7	3
$p-17$	-35	-1
$4p+13$	22	-4
$-4p+4$	12	4
$p-16$	-33	-1
$4p+11$	18	-4
$-3p+10$	23	3
$-p-15$	-29	1
$4p+9$	14	-4
$-4p+7$	18	4
$p-14$	-29	-1

$n=61$

a_1	A_2	B_2
$-p$		
8	16	0
$-3p-5$	-7	3
$2p+17$	32	-2
$-6p-13$	-20	6
$3p+33$	63	-3
$-9p-21$	-33	9
$6p+39$	72	-6
$-10p-32$	-54	10
$7p+48$	89	-7
$-12p-37$	-62	12
$10p+49$	88	-10
$-11p-50$	-89	11
$11p+53$	95	-11
$-13p-47$	-81	13

$n=67$

a_1	A_2	B_2
$-p$		
-8	-16	0
$3p+6$	9	-3
$-3p+15$	33	3
$-4p-24$	-44	4
$8p-5$	-18	-8
$-p+39$	79	1
$-9p-24$	-39	9
$8p-20$	-48	-8
$p+38$	75	-1
$-7p-21$	-35	7
$8p-3$	-14	-8
$-5p+32$	69	5
$-5p-47$	-89	5
$14p+12$	10	-14
$-8p+49$	106	8

$n=71$

a_1	A_2	B_2
$-p$		
$-p-9$	-17	1
$2p-12$	-26	-2
$5p$	-5	-5
$5p+18$	31	-5
$2p+30$	58	-2
$-2p+31$	64	2
$-6p+27$	60	6
$-11p+11$	33	11
$-13p-21$	-29	13
$-9p-49$	-89	9
$-2p-54$	-106	2
$3p-44$	-91	-3
$6p-32$	-70	-6
$8p-18$	-44	-8
$8p-4$	-16	-8
$7p+2$	-3	-7

$n=73$

a_1	A_2	B_2
$-p$		
$-p+9$	19	1
$-4p+12$	28	4
$-7p+27$	61	7
$-12p+47$	106	12
$-20p+69$	158	20
$-27p+112$	251	27
$-40p+141$	322	40
$-50p+196$	442	50
$-64p+240$	544	64
$-78p+287$	652	78
$-89p+347$	783	89
$-14p+382$	868	104
$-113p+435$	983	113
$-124p+463$	1050	124
$-131p+491$	1113	131
$-134p+515$	1164	134
$-138p+509$	1150	138

$n=79$

a_1	A_2	B_2
$-p$		
$-p+10$	-19	1
$3p+13$	-29	-3
$6p+15$	24	-6
$-p+34$	69	1
$-8p-2$	$+4$	8
-32	$+64$	0
$7p+13$	19	-7
$-5p+35$	75	5
$-11p-39$	-67	11
$9p-58$	-125	-9
$17p+49$	81	-17
$-8p+79$	166	8
$-18p-39$	-60	18
$7p-65$	-137	-7
$13p+50$	187	-13
$-14p+48$	110	14
$-14p-83$	-152	14
$18p-65$	-148	-18

XXXIV.

Uebungs-Aufgaben.

Von dem Lehrer der Mathematik Herrn **Werner** zu Dresden.

Folgendes ist zu beweisen:

1)
$$\frac{a^2-2ab.\cos 2\varphi+b^2}{\sqrt[2^{n-1}]{a}-2\sqrt[2^n]{ab}.\cos\frac{\varphi}{2^{n-1}}+\sqrt[2^{n-1}]{b}}$$

$$=(a+2\sqrt{ab}.\cos\varphi+b)(\sqrt{a}+2\sqrt[4]{ab}.\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{b}).....$$

$$......(\sqrt[2^{n-1}]{a}+2\sqrt[2^n]{ab}.\cos\frac{\varphi}{2^{n-1}}+\sqrt[2^{n+1}]{b}),$$

2)
$$\frac{\sqrt[2^n]{ab}.\sin\frac{\varphi}{2^{n-1}}}{2^n(\sqrt[2^{n-1}]{a}-2\sqrt[2^n]{ab}.\cos\frac{\varphi}{2^{n-1}}+\sqrt[2^{n-1}]{b})}-\frac{ab\sin 2\varphi}{a^2-2ab.\cos 2\varphi+b^2}$$

$$=\frac{\sqrt{ab}.\sin\varphi}{2(a+2\sqrt{ab}.\cos\varphi+b)}+\frac{\sqrt[4]{ab}.\sin\frac{\varphi}{2}}{2^2(\sqrt{a}+2\sqrt[4]{ab}.\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{b})}$$

$$+........+\frac{\sqrt[2^n]{ab}.\sin\frac{\varphi}{2^{n-1}}}{2^n(\sqrt[2^{n-1}]{a}+2\sqrt[2^n]{ab}.\cos\frac{\varphi}{2^{n-1}}+\sqrt[2^{n-1}]{b})},$$

woraus für $a=b=1$ die bekannten Formeln

$$3)\qquad \frac{\sin\varphi}{2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}}=\cos\frac{\varphi}{2}.\cos\frac{\varphi}{4}.\cos\frac{\varphi}{8}\ldots\ldots\cos\frac{\varphi}{2^n},$$

$$4)\qquad \frac{1}{2^n}\cot\frac{\varphi}{2^n}-\cot\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}+\frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2^n}$$

erhalten werden, welche, wenn man n ins Unbegränzte wachsen lässt, in die folgenden übergehen:

$$5)\qquad \frac{\sin\varphi}{\varphi}=\cos\frac{\varphi}{2}.\cos\frac{\varphi}{4}.\cos\frac{\varphi}{8}\ldots\ldots$$

$$6)\qquad \frac{1}{\varphi}-\cot\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}+\frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{8}+\ldots\ldots$$

Ferner ist zu beweisen, dass innerhalb der Grenzen der Convergenz

$$7)\qquad \frac{\pi}{2}.\frac{f(\mu x)}{\sin\mu\pi}=\frac{f(0)}{2\mu}+\frac{\mu f(x)}{1^2-\mu^2}-\frac{\mu f(2x)}{2^2-\mu^2}+\frac{\mu f(3x)}{3^2-\mu^2}-\ldots\ldots,$$

$$8)\qquad \frac{\pi}{2}\frac{f(\mu x)}{\sin\mu\pi}=\frac{f(x)}{1^2-\mu^2}-\frac{2f(2x)}{2^2-\mu^2}+\frac{3f(3x)}{3^2-\mu^2}-\ldots\ldots,$$

$$9)\qquad e^{\pi\int\frac{f(\mu x)}{\sin\mu\pi}\partial\mu}=C.\frac{\mu^{f(0)}.(2^2-\mu^2)^{f(2x)}.(4^2-\mu^2)^{f(4x)}\ldots\ldots}{(1^2-\mu^2)^{f(x)}.(3^2-\mu^2)^{f(3x)}.(5^2-\mu^2)^{f(5x)}\ldots\ldots},$$

$$10)\qquad e^{\pi\int\mu\frac{f(\mu x)}{\sin\mu\pi}\partial\mu}=C.\frac{(2^2-\mu^2)^{2f(2x)}.(4^2-\mu^2)^{4f(4x)}\ldots\ldots}{(1-\mu^2)^{f(x)}.(3^2-\mu^2)^{3f(3x)}\ldots\ldots};$$

wobei in den Formeln 7) und 9) $f(x)$ die Eigenschaft $f(-x)=f(x)$ und in den Formeln 8) und 10) $f(x)$ die Eigenschaft $f(-x)=-f(x)$ besitzen muss. Die erste Forderung erfüllt man, wenn $f(x)=\varphi(x)+\varphi(-x)$, und die zweite, wenn $f(x)=\varphi(x)-\varphi(-x)$ gesetzt wird.

XXXV.

Miscellen.

Zum Winkelkreuz.

Von dem Herausgeber.

Will man mit dem falschen Winkelkreuz, dessen Winkel α ist, den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC (Taf. X. Fig. 5.) bestimmen, so stelle man das Winkelkreuz in einer Seite BC des Dreiecks ABC so auf, dass die eine Visirlinie in die Richtung der Seite BC fällt, und die andere genau nach der Spitze A gerichtet ist. Ist dann D der Punkt der Seite BC, in welchem, um dies zu bewirken, das Winkelkreuz aufgestellt werden muss, so dass also etwa $\measuredangle ADC = \alpha$ ist, und bezeichnet Δ den Flächeninhalt des Dreiecks ABC; so ist

$$\Delta = \Delta ADC + \Delta ADB = \frac{1}{2} CD.AD.\sin\alpha + \frac{1}{2} BD.AD.\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}(BD + CD).AD.\sin\alpha = \frac{1}{2} BC.AD.\sin\alpha.$$

Misst man also $BC = a$ und $AD = d$, so ist

$$\Delta = \frac{1}{2} ad\sin\alpha,$$

nach welcher Formel sich Δ berechnen lässt, wenn man BC und AD gemessen hat und den Winkel α des Winkelkreuzes kennt.

Die Kenntniss dieses Winkels ist nun von ganz besonderer Wichtigkeit, und um zu derselben zu gelangen, scheint folgendes Verfahren das zweckmässigste zu sein. Man messe die drei Seiten

$$BC=a,\quad CA=b,\quad AB=c$$

des Dreiecks ABC mit aller nur möglichen Genauigkeit mit Maassstäben, und eben so die Linie $AD=d$, wobei es zugleich darauf ankommt, das Dreieck ABC auf einem völlig ebenen horizontalen Boden anzunehmen. Wird dann der Kürze wegen wie gewöhnlich

$$a+b+c=2s$$

gesetzt, so ist bekanntlich

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

also nach dem Obigen

$$\frac{1}{2}ad\sin\alpha=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

folglich

$$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{ad},$$

mittelst welcher Formel $\sin\alpha$ berechnet werden kann. Stellt man das Winkelkreuz in den drei Seiten des Dreiecks ABC auf und wiederholt das obige Verfahren, so kann man $\sin\alpha$ auf drei verschiedene Arten bestimmen, und nimmt dann zwischen den drei für $\sin\alpha$ gefundenen, jedenfalls immer einigermassen von einander verschiedenen Werthen auf gewöhnliche Weise das arithmetische Mittel, welches man als definitiven Werth von $\sin\alpha$ betrachtet; wenn nicht durch noch öfter wiederholte Bestimmungen dieses Sinus eine Aenderung des in Rede stehenden Werths bedingt wird. Hat man aber auf diese Weise $\sin\alpha$ so genau als möglich bestimmt, so kann man nun $\sin\alpha$ als einen constanten Factor betrachten, den wir durch 2μ bezeichnen wollen; dann hat man zur Berechnung des Flächeninhalts Δ in allen Fällen nach dem Obigen die Formel

$$\Delta=\mu ad.$$

Ist α wenig von 90^0 verschieden, so ist 2μ wenig von der Einheit verschieden, und setzen wir also $2\mu=1-2\varepsilon$, wo ε immer eine sehr kleine Grösse ist, so ist

$$\Delta=\frac{1}{2}ad-\varepsilon.ad,$$

wo $\varepsilon.ad$ die sehr kleine Correction ist, welche von $\frac{1}{2}ad$ abgezogen werden muss, um den richtigen Flächeninhalt Δ zu erhalten.

Natürlich kann man mittelst der Formel

$$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{ad}$$

auch den Winkel α selbst bestimmen; nur ist dabei immer eine besondere Bestimmung nöthig, ob α spitz oder stumpf ist, was durch den Sinus nicht unmittelbar entschieden wird; durch einfache praktische Verfahrungsarten, die wir hier nicht zu erläutern brauchen, wird man darüber immer leicht eine Entscheidung geben können.

G.

Herr J. J. Åstrand, Privatlehrer der Mathematik zu Gothenburg in Schweden, den die Leser des Archivs schon aus Thl. XII. S. 420. und Thl. XIII. S. 398. kennen, hat mir folgenden höchst einfachen Beweis der bekannten Formeln für $\sin(x\pm y)$ und $\cos(x\pm y)$ mitzutheilen die Güte gehabt.

In dem Dreiecke ABC (Taf. X. Fig. 6.) ziehe man BD senkrecht auf AC, CE senkrecht auf AB, EG senkrecht auf BD, EF senkrecht auf AC; so ist

$$\sin(A+B)=\sin C=\frac{BD}{BC}=\frac{BG+EF}{BC}$$

$$=\frac{EB.\sin A+EC.\cos A}{BC}$$

$$=\frac{BC.\cos B\sin A+BC.\sin B\cos A}{BC}$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B,$$

$$\cos(A+B) = \cos C = \frac{CD}{BC} = \frac{EG-CF}{BC}$$

$$= \frac{EB.\cos A - EC.\sin A}{BC}$$

$$= \frac{BC.\cos B \cos A - BC.\sin B \sin A}{BC}$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B,$$

woraus die Formeln für $\sin(A-B)$ und $\cos(A-B)$ leicht erhalten werden. C im Obigen bedeutet den Aussenwinkel des Dreiecks ABC bei dem Punkte C.

Ausserdem hat Herr J. J. Åstrand mir noch folgenden Satz mitzutheilen die Güte gehabt:

Wenn die Zahl D ein Divisor der Zahl $xy-1$ und der einen von den beiden Zahlen

$$ax^n + bx^{n-1} + \ldots + dx + e.$$

$$ey^n + dy^{n-1} + \ldots + by + a$$

ist, so ist D immer auch ein Divisor der anderen dieser beiden Zahlen.

G.

Druckfehler.

S. 401. Z. 16. setze man Taf. X. Fig. 1*. statt Taf. X. Fig. 1.

S. 441. Z. 5. setze man tang$y$ statt tang$x$.

LXIX.

Literarischer Bericht.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Die Lehren der vollständigen, reinen Mathematik für den Selbstunterricht zusammengestellt von V. Vieth. Zwei Theile. Wien. 1852. 8. 6 Thlr.

Der Herr Verfasser dieses sich über die gesammte sogenannte reine Mathematik bis zur Differential-, Integral- und Variationsrechnung verbreitenden Werks beginnt die Vorrede mit den Worten: „Ich habe mir die Aufgabe gestellt, einen aufmerksamen Leser in den Stand zu setzen, die reine Mathematik in ihrer vollständigen jetzigen Entwicklung richtig zu beurtheilen und zu verstehen.“ Leider müssen wir nun aber hierauf erwidern, dass der letztere Zweck durch das vorliegende Werk auch nicht im Entferntesten erreicht wird. Dasselbe steht auf einem ganz veralteten Standpunkte, und der Leser bekommt dadurch nicht im Geringsten einen nur einigermassen richtigen Begriff von dem gegenwärtigen Zustande der reinen Mathematik nach Methode, Form und Inhalt. Dasselbe enthält überhaupt nur die allergewöhnlichsten Dinge, vielfach nach Methoden dargestellt, die jetzt als abgethan und antiquirt betrachtet werden müssen; und was die häufig eingestreuten historischen Notizen und Einleitungen betrifft, so machen dieselben gleich auf den ersten Anblick den Eindruck, dass der Herr Verfasser wohl schwerlich bei dem Studium irgend einer Partie der reinen Mathematik bis zu den Quellen zurückgegangen ist, womit freilich die auf S. 6. sich findende Phrase: „Die eigentlich als Wissenschaft ausgebildete Mathematik kann also, da sie in einer besonderen Form besteht, und da diese Form nichts an sich Nothwendiges, sondern ein mehr oder weniger Zufälliges, durch geschichtliche Thatsachen Bedingtes ist, durchaus nur richtig erfasst und beurtheilt werden, wenn man den geschichtlichen Entwicklungsgang in Berücksichtigung zieht" — nicht in besonderem Einklange steht. Vor diesen historischen Expectorationen des Herrn Verfassers möchten wir auch namentlich Anfänger, denen das Buch vielleicht in die Hände fallen sollte, warnen, da dieselben mehrfacher Berichtigung zu bedürfen scheinen. Das hier ausgesprochene allgemeine Urtheil über dieses Buch zu beweisen, fehlt uns hier der Raum, wenigstens ist die Bedeutung dieses freilich sehr umfangreichen Werkes nicht gross genug, dass wir einem solchen Beweise einen grösseren Raum zu widmen uns veranlasst fühlen sollten; wir müssen unsere geehrten Leser daher bitten, ein Urtheil sich selbst zu bilden, und hoffen, dass dasselbe im Wesentlichen mit dem unsrigen übereinstimmen wird. Nicht selten nimmt der Herr Verfasser das Ansehen an, dass er die Mathematik von einem philosophischen Standpunkte aus anschaue. Dagegen haben wir, mit aller Achtung vor der Philosophie, an sich gar nichts einzuwenden, sind aber doch auch der Meinung, dass eine solche philosophische Anschauung oft nur sehr wenig dem entspricht, was man in der Mathematik *„Strenge"* nennt; wenigstens haben wir namentlich in neuerer Zeit schon öfters die Erfahrung gemacht, dass manche Schriftsteller ein blosses vages philosophisches Gerede an die Stelle wahrer mathematischer Strenge zu setzen trachten, und sich einbilden, dadurch das Wahre in der Mathematik erfasst zu haben. — Schliesslich zweifeln wir sehr, dass das vorliegende 6 Thlr. kostende Buch sich einer besonderen Verbreitung erfreuen werde.

Arithmetik.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von C. L. von Littrow, Director der Sternwarte, o. ö. Professor der Astronomie u. s. w. Vier und dreissigster Theil. Neuer Folge Vierzehnter Band. Wien. 1851. 4

Dieser Band der Annalen der k. k. Sternwarte zu Wien bringt in seiner ersten Abtheilung ein allen Freunden der Mathematik höchst werthvolles und zugleich höchst merkwürdiges Geschenk. Wir lassen den schon so vielfach verdienten Herausgeber, Herrn von Littrow, selbst reden: „Das erste Heft des vorliegenden Bandes enthält eine Arbeit von Herrn Zacharias Dase: eine Tafel der natürlichen Logarithmen in derselben Ausdehnung wie Vega's Tafel der Brigg'schen Logarithmen. Ich glaubte diese Tafel, da es, so viel mir bekannt, bisher keine solche giebt und dieselbe in gewissen Fällen von Nutzen ist, dann aber auch desshalb bekannt machen zu sollen, um von diesem bewunderungswürdigen Zifferrechner, dessen gleichen es nie gegeben und dem auch unsere Anstalt bereits grosse numerische Arbeiten verdankt, in der Wissenschaft ein Denkmal zu erhalten.“ Allerdings besitzen wir noch keine Tafel der natürlichen Logarithmen in solcher Vollständigkeit wie die vorliegende; und von welcher grossen Wichtigkeit dieselbe daher für die gesammte Mathematik, insbesondere aber für die Integralrechnung, so wie auch für viele Theile der Physik ist, braucht hier nicht näher aus einander gesetzt zu werden. Die Tafel reicht von 1 bis 105000, und hat ganz und gar die Einrichtung der Vega'schen Tafel der Brigg'schen Logarithmen, wodurch wir völlig überhoben werden, über dieselbe hier etwas Weiteres zu berichten. Herr Dase sagt in der Einleitung: „Diese Tafel wurde mit der grössten Sorgfalt gerechnet bis auf 10 Stellen, um auch hier die siebente Stelle korrekt zu haben. Die Korrektur habe ich selbst besorgt, den fertigen Abdruck nochmals durchgerechnet und dabei folgende 6 Druckfehler entdeckt „— (die nun angegeben werden, hier aber von keinem Interesse für die Leser sein können, weshalb wir auf das Buch selbst verweisen) —“ und glaube nach dieser Verbesserung die Tafel als vollkommen korrekt erklären zu können.“ — Dass Herr Dase sein bewunderungswürdiges Talent zur Berechnung dieser schönen Tafel angewandt hat, verdient die grösste Anerkennung; ganz besonderer Dank gebührt aber auch der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, da, so viel wir wissen, sie es ist, die, gewiss ganz in Uebereinstimmung mit der kaiserlich österreichischen Regierung, Herrn Dase die Mittel dargeboten hat, sein ungemeines Talent mit Ruhe der Förderung der Wissenschaft widmen zu können; und der verdiente Herr Herausgeber der Annalen der k. k. Sternwarte hat durch die Publication der Tafel in den Annalen seiner Sternwarte zur möglichst schnellen Verbreitung derselben, die auf dem Wege des gewöhnlichen Buchhandels in gleicher Weise wohl schwerlich zu erreichen gewesen sein möchte, jedenfalls wesentlich beigetragen, also auch dadurch sich gerechte Ansprüche auf den wärmsten Dank der Mathematiker erworben. Möge Herr Dase sein Talent noch zur Herstellung recht vieler solcher Arbeiten, wie sie die Mathematik noch vielfach bedarf (worauf wir vielleicht einmal späterhin zurückkommen) anwenden, und dabei fortwährende Unterstützung finden, ohne welche solche Arbeiten natürlich gar nicht auszuführen sind. So viel wir aus der Einleitung (S. III.) entnehmen, ist die Tafel auch in besonderen Abdrücken, die daher gewiss auch mit besonderem Titel versehen werden, zu haben, worauf wir die Mathematiker aufmerksam zu machen nicht unterlassen können, da gewiss Jeder sich gern so bald als möglich in den Besitz eines so wichtigen Werkes setzen wird.

Das zweite Heft dieses Bandes der Annalen ist astronomischen Inhalts, und liefert eine wichtige Vervollständigung der in unseren früheren Berichten angezeigten, nun vollendeten Piazzischen Storia Celeste, durch deren Herausgabe sich Herr von Littrow um die Astronomie insbesondere gleichfalls so sehr verdient gemacht hat, nämlich: *Hülfsmittel zur Reduction von Piazzi's Storia Celeste*, und zwar: I. Bestimmung der

Fädenintervalle an Piazzi's Mittagsrohre von *Dr. A. Kunes.* — II. Ermittelung der Refractions-Constanten für Palermo aus Piazzi's Beobachtungen, von *Carl Hornstein* (eine schöne, für die Theorie der Refraction mehrfach wichtige und allgemein interessante Arbeit, die wir zur Beachtung besonders empfehlen). — III. Tafel zur Reduction der von Piazzi in den Corsi beobachteten Sternorte auf mittlere für den Anfang des betreffenden Jahres. Nach den Tabulis Regiomontanis berechnet von *Carl Hornstein.* — IV. Die Länge von Palermo aus neun Sternbedeckungen berechnet von Dr. F. Schaub.

Verhandeling over de Methode der kleinste Quadraten. Eerste Afdeeling. Eerste Gedeelte. Door G. J. Verdam, Hoogleeraar aan de Universiteit te Leiden. Groningen. 1850. 4.

In diesem grossen und ausgezeichneten Werke, dessen erste Abtheilung von 214 eng gedruckten Quartseiten uns vorliegt, beabsichtigt Herr Professor Verdam eine ausführliche Darstellung der Methode der kleinsten Quadrate zu geben, und dieselbe ausführlich durch Anwendungen zu erläutern. Jedenfalls ist dieses Werk das grösste und ausführlichste über die in Rede stehende wichtige Rechnungsmethode, was wir bis jetzt besitzen, und muss der Beachtung aller derer, die der holländischen Sprache hinreichend mächtig sind und sich mit der Methode der kleinsten Quadrate und ihren Anwendungen vollständig bekannt machen wollen, dringend empfohlen werden. In der vorliegenden ersten Abtheilung hat der Herr Verf. ganz vorzüglich auch auf die Anwendung der genannten Methode bei der Berechnung geodätischer Messungen Rücksicht genommen, und ausserdem muss noch besonders hervorgehoben werden, dass dieses treffliche Werk sich nicht bloss auf die Methode der kleinsten Quadrate einschränkt, sondern eigentlich auch fast alle älteren und neueren Methoden in Betrachtung zieht, welche zur vortheilhaftesten und zweckmässigsten Berechnung der Resultate, die sich aus angestellten Beobachtungen ziehen lassen, in Vorschlag gebracht worden sind. Hier müssen wir uns leider darauf beschränken, den Hauptinhalt der vorliegenden ersten Abtheilung anzugeben, und werden nicht säumen, auch den Inhalt der Fortsetzung unseren Lesern mitzutheilen, sobald dieselbe erschienen und uns zugegangen sein wird. Der Hauptinhalt der ersten Abtheilung ist aber folgender:

Eerste Afdeeling. Verklaring van het doel, van het begrip, en van de beginseln der methode. Ontwikkeling der rekenwijzen, der voorschriften of der regels, welke de methode bevat of aan de hand geeft. Aanwijzing, door vorbeelden, van het gebruik dier vorschriften en regels, — enz.

Eerste Hoofdstuk. Beschouwingen tot inleiding. — Tweede Hoofdstuk. Over den regel, gegrond op het beginsel van de methode der kleinste quadraten, en dienende om de eindvergelijkingen, ter bepaling van waarschijnlijke waarden van onbekende elementen, te vormen uit eene reeks, van lineaire vergelijkingen, opgemaakt door middel der uitkomsten van gelijksoortige waarnemingen, aan welke een zelfde graad van nauwkeurigheid wordt toegekend. Toepassingen van dezen regel op gevallen, in welke slechts een element onbekend is; — voorbeelden hiertoe betrekkelijk, enz. — Derde Hoofdstuk. Algemeene oplossing der eindvergelijkingen, volgens den hoofdregel van de methode der kleinste quadraten gevormd. Bepaling van algemeene formulen of uitdrukkingen, door welke de som van de tweede magten der overblijvende feilen kan berekend worden. — Vierde Hoofdstuk. Ontbinding van eenige voorstellen, en ontwikkeling van berekeningen, tot toepassing der gronden, regels en formulen, in de voorgaande hoofdstukken bepaald, ontvouwd of afgeleid. — Vijfde Hoofdstuk. Over de rekenwijze, welke gevolgd moed worden, om den hoofdregel van de methode der kleinste quadraten te kunnen toepassen, indien de gegebene functiën niet algebraisch zijn, of ook niet lineair, ten opzigte van de te bepalen elementen. Voorbeelden tot opheldering, enz. — Zesde Hoofdstuk. Over de rekenwijze, bij het toepassen des hoofdregels van de methode der kleinste quadraten te volgen, bijaldien er voorwaarden bestaan of gesteld zijn, aan welke, met de getalwaarden van grootheden, die men zal bepalen, striktelijk moet worden voldaan. Regels van Gauss en van Hansen. Voorbeelden, enz.

Es würde uns zu grosser Freude gereichen, wenn es uns gelingen sollte, durch die vorhergehende kurze Anzeige die Aufmerksamkeit der Mathematiker, Astronomen, Geodäten und Physiker auf dieses Werk hinzulenken, welche dasselbe jedenfalls in hohem Grade verdient. Wir haben schon früher öfter einigemal auf die grosse Gediegenheit der Schriften holländischer Mathematiker hinzuweisen Gelegenheit genommen, und das vorliegende Werk giebt uns dazu eine neue höchst erfreuliche Veranlassung. Die Erlernung der holländischen Sprache ist namentlich für einen Deutschen im Ganzen so leicht, dass die geringe darauf verwandte Mühe jedenfalls den reichlichsten Ersatz in der vielfachen Belehrung findet, welche man aus Werken wie das obige schöpfen kann. Mögen sich daher die Mathematiker dasselbe nochmals recht vielmals empfohlen sein lassen!

Praktische Geometrie und praktische Mechanik.

Technisches Hilfs- und Handbuch für Gewerbtreibende. Von Dr. Julius Schadeberg. Zwei Theile. Zweite Auflage. Halle. (Ohne Jahreszahl). 8.

Dieses Werk enthält eine sehr grosse Menge Angaben, Tafeln und Regeln aus der Maass-, Münz- und Gewichtskunde, aus der Arithmetik, ebenen und körperlichen Geometrie, aus der Mechanik und auch aus der Physik, die zugleich in den die Geometrie und Mechanik betreffenden Partieen, wo es nöthig war, durch eingedruckte recht gute Holzschnitte erläutert sind. Das Werk scheint uns so vollständig zu sein, dass wir wirklich fast nichts anzugeben wüssten, was der Praktiker in demselben vergeblich suchen dürfte, wenn es auch vielleicht zweckmässig gewesen wäre, noch ein Paar Tabellen zur zusammengesetzten Zinsrechnung, der Rentenrechnung u. s. w. beizufügen. Gehörten dieselben auch freilich streng genommen nicht in dieses vorzugsweise für Gewerbtreibende bestimmte Werk, so würden sie doch auch manchem anderen Abnehmer desselben angenehm gewesen sein, und die Vollständigkeit noch erhöhet haben. Wir sind der Meinung, dass dieses Werk allen denen, welche in dem Falle sind, praktische Anwendungen der Mathematik zu machen, recht sehr empfohlen zu werden verdient; ja es hat uns besser gefallen als manche andere Werke dieser Art, die bekannter geworden und mehr Eingang gefunden zu haben scheinen als das vorliegende. Wenigstens ist uns selbst dieses Werk eben erst jetzt bekannt geworden, und wir wünschen daher durch diese Anzeige zu seiner weiteren Verbreitung, die es uns zu verdienen scheint, Einiges beizutragen.

Astronomie.

Die Anzeige des 34sten Theils der Annalen der k. k. Sternwarte in Wien s. o. unter der Rubrik „Arithmetik."

Eben so die Anzeige des Werkes von Herrn Professor Verdam über die Methode der kleinsten Quadrate.

Physik.

Over de Balans en het Wegen, door G. A. Venema, Arrondissements-Jjker te Winschoten. Te Groningen. 1848. 8,

Dieses schon im Jahre 1848 erschienene, 347 Seiten starke Werk des Herrn Arrondissements Jjker G. A. Venema ist leider erst jetzt zu unserer Kenntniss gelangt, jedenfalls aber einer nachträglichen Anzeige in unserm literarischen Berichte sehr werth. Unstreitig ist dasselbe das ausführlichste Werk über die verschiedenen Einrichtungen der Waage, über die Theorie derselben, über die verschiedenen Methoden des Wägens und über die Sicherheit, welche dieselben zu gewähren im Stande sind, wobei von der Methode der kleinsten Quadrate vielfach Gebrauch gemacht worden ist. Drei sehr schön und sauber ausgeführte Kupfertafeln dienen sehr zur Erläuterung der mit grosser Sorgfalt entwickelten Theorie der verschiedenen, die meiste Sicherheit beim Wägen gewährenden Einrichtungen der Waage. Wenn man bedenkt, dass, namentlich bei dem jetzigen Zustande der Chemie, die Waage das Hauptinstrument der Chemiker ist, dass die Waage aber auch in der Physik und in vielen anderen Naturwissenschaften allein das geeignete Hülfsmittel zu vielen feineren Untersuchungen ab giebt, wenn man endlich die grosse Bedeutung derselben für Handel und Wandel überlegt, so wird man leicht die Wichtigkeit eines solchen ausführlichen Werks wie das obige erkennen, wenn dasselbe namentlich mit so vieler Sorgfalt und so grosser Sachkenntniss verfasst ist, wie das uns vorliegende Werk des Herrn Venema, aus welchem vielfache Belehrung geschöpft zu haben, wir selbst mit besonderem Danke erkennen Wir machen daher alle Naturforscher und alle diejenigen, welche sich mit genauen Abwägungen zu beschäftigen haben, und mit den nöthigen mathematischen Vorkenntnissen, die übrigens die sogenannten Elemente nur wenig übersteigen, ausgerüstet sind, dringend auf das vorliegende, jedenfalls sehr ausgezeichnete Werk aufmerksam, und wünschen sehr, dass dasselbe in dem vorher näher bezeichneten Kreise so allgemein wie möglich bekannt werden möge, wobei wir als sich von selbst verstehend annehmen, dass dasselbe auch für jeden Mathematiker an sich, der Theorie wegen, des Interessanten sehr viel darbietet.

Ein „Aanhangsel" des Herrn F. J. Stamkart (Math. Mag. et Phil. Nat. Doctor, Lid van de 1e klasse van het Koniglijk Nederlandsch Istitut en Arrodissements Jjeker te Amsterdam), von welchem einige Schriften verwandten Inhalts im Liter. Ber. LV. 763. mit verdientem Lob angezeigt worden sind, enthält unter dem Titel: „Onderzoek of het steunpunt en de ophangpunten in eene regte lijn zijn gelegen. — Onderzoek naar de evenwijdigheid der punten. — Onderzoek naar de gelijkheid der armen, en nieuwe bepaling der hoeken γ door weging. — Jets over het doorbuigen van de evenaars van balansen (p. 326—347.), über alle hier genannte Gegenstände auch sehr viel Interessantes und Belehrendes

Möge diese kurze Anzeige dazu beitragen, das schöne Werk des Herrn Venema auch ausserhalb Holland in weiterem Kreise bekannt zu machen!

Sur le climat de la Belgique. Quatrième partie. Pressions et ondes atmosphériques. Par A. Quetelet. Bruxelles. 1851. 4.

Die ersten Theile dieses sowohl für das Klima Belgiens, als in allgemeiner meteorologischer Beziehung wichtigen Werkes des hochverdienten Herrn Vfs. sind früher von uns angezeigt worden. Möge namentlich auch dieser Theil die sorgfältigste Beachtung von Seiten der Meteorologen finden.

Bemerkung.

In Bezug auf die im Liter. Ber. Nr. LXVI. S. 856. über die Maclaurin'sche Reihe, welche in dem dort angezeigten Buche des Herrn Professor Franke dem berühmten englischen Mathematiker F. Stirling beigelegt wird, gemachten Bemerkungen ist nachzutragen, dass Cauchy in den Leçons sur le calcul différentiel. Paris. 1829. 4. p. 257. sagt: „M. Peacock a remarqué que le théorème, géneralement attribué au géomètre anglais Maclaurin, avait été donné, des 1717, par son compatriote Stirling, dans l'ouvrage intitulé: *Lineae tertii ordinis Newtonianae.*" Auf diese Bemerkung Cauchy's könnte sich vielleicht die von Herrn Professor Franke gebrauchte Benennung „Stirlings Reihe" gründen. Die von Peacock angeführte Schrift Stirlings können wir leider nicht einsehen; auffallend bleibt es aber immer, dass Stirling in der weit späteren Schrift: „Methodus differentialis etc. Londini. 1730." von der erwähnten Reihe einen bestimmten Gebrauch eigentlich gar nicht macht, wozu gerade diese Schrift wohl hätte Gelegenheit darbieten können. Cauchy selbst nennt übrigens die Reihe, obiger Bemerkung ungeachtet, in allen seinen Schriften stets „le théorème de Maclaurin" und wie wir glauben ganz mit Recht, da es uns nicht gut und immer etwas gewagt zu sein scheint, solche allgemein recipirte Bezeichnungen eines wichtigen wissenschaftlichen Objects mit einem Male zu ändern. Jedenfalls scheint es uns aber wünschenswerth, diesen historisch und literarisch wichtigen Gegenstand vollständig aufzuklären, wozu die Leser des Archivs, denen noch grössere literarische Hülfsmittel zu Gebote stehen als uns, aufzufordern, der nächste Zweck dieser Zeilen ist. G.

LXX.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Allgemeine Zahlenlehre nach streng wissenschaftlichen Principien bearbeitet, nebst einem Anhange, enthaltend die Elemente des numerischen Rechnens mit einer grossen Anzahl von Beispielen und Rechnungskunstgriffen, verfasst von Dr. F. A. H. Willing, Lehrer der Mathematik. Berlin. 1851. 8. 3 Thlr. 22½ Sgr.

Dieses grosse, weitläufige und allerdings vieles Eigenthümliche, namentlich eine grosse Anzahl von Rechnungsvortheilen enthaltende Werk ist nach dem Tode des Verfassers von dem Herrn Dr. G. Eisenstein herausgegeben worden, und muss wegen seiner Eigenthümlichkeit und Reichhaltigkeit namentlich in der angedeuteten Beziehung jedenfalls zur Beachtung empfohlen werden, ohne dass wir uns hier auf eine weitere Besprechung desselben einlassen können.

Die algebraische Analysis von Dr. Edmund Külp, Professor der Physik und höheren Mathematik an der höheren Gewerbeschule zu Darmstadt. Als freie Bearbeitung eines Theils der höheren Algebra des fünften Buchs von Francoeur's vollständigem Lehrcurs der reinen Mathematik. Darmstadt. 1851. 8. 1 Thlr.

Dieses in einer einfachen und sehr verständlichen Sprache geschriebene Buch schliesst sich, wie auch der Titel besagt, an das bekannte Werk von Francoeur, von welchem bekanntlich der Herr Verfasser eine gute Uebersetzung herausgegeben hat, an, und ist daher auch im Allgemeinen in dem Geiste dieses Werkes verfasst, wenn auch allerdings manchen neueren Theorien, wie z. B. der Convergenz und Divergenz der Reihen, der Convergenz und Divergenz der Producte mit unendlich vielen Factoren, u. dergl., Rechnung getragen worden ist. Jedoch ist im Allgemeinen der Geist, in welchem dieses Buch, das z. B. noch sehr vielfach von der Methode der unbestimmten Coefficienten Gebrauch macht, geschrieben ist, ein älterer, was auch der Herr Verfasser mit lobenswerther Offenheit und Bestimmtheit in der Vorrede dadurch erklärt, dass er sagt, dass ihm hauptsächlich Euler's Introductio in Analysin infinitorum als Leitstern gedient habe, weil ihm dessen Klarheit und Einfachheit am Meisten zusage; und welchem Mathematiker sollte denn auch dieses für seine Zeit unübertreffliche Werk nicht zusagen! wenn freilich die Strenge der neueren Mathematik jetzt andere Ansprüche macht und machen muss. Dabei hat aber, wie schon erinnert, der Herr Verfasser das Neuere keineswegs vollständig ignorirt, und es mag ja wohl ein solcher Mittelweg, wie der Herr Verfasser eingeschlagen hat, für Lehranstalten wie die, wie wir wissen, in vielen Beziehungen ausgezeichnete höhere Gewerbschule in Darmstadt, welcher der Herr Verfasser seine Kräfte mit Erfolg widmet, unter den jedesmal obwaltenden Verhältnissen zweckmässig sein, wenn nur nicht höhere wissenschaftliche Ansprüche gemacht werden, als die durch den jedesmaligen didaktischen Zweck gerechtfertigten, was hier in lobenswerther Weise durchaus nicht geschieht. Die allgemeine Theorie der Gleichungen (ebenso die Wahrscheinlichkeitsrechnung) hat der Herr Verfasser nicht aufgenommen, und verspricht darüber bald eine besondere Schrift herauszugeben. Diese Theorie ist ja auch für vorherrschend praktische Zwecke weniger wichtig; was solchen Zwecken besonders zu dienen geeignet ist, hat der Herr Verfasser in zweckmässiger Anordnung zusammengestellt, wobei u. A. auch das für die Anwendung in den Naturwissenschaften so wichtige Interpolationsproblem mit Recht nicht fehlt. Dem binomischen und polynomischen Lehrsatze, den Differenzenreihen und höheren arithmetischen Reihen, den imaginären Grössen, den Exponentialgrössen und Logarithmen, so wie auch den trigonometrischen Reihen, ist besondere Aufmerksamkeit gewidmet worden.

Drei Vorlesungen zur Einleitung in die Differential- und Integralrechnung. Gehalten zur Eröffnung der Wintervorlesungen 1850—1851 von Dr. Th. Wittstein. Hannover. 1851. 8. $7\frac{1}{2}$ Sgr.

Drei populär gehaltene recht ansprechende Vorlesungen über die Geschichte der Entwicklung der Differentialrechnung und das Wesen dieser Wissenschaft und der Integralrechnung im Allgemeinen.

Geometrie.

Die Geometrie des Euklid und das Wesen derselben, erläutert durch eine damit verbundene systematisch geordnete Sammlung von mehr als tausend geometrischen Aufgaben und die beigefügte Anleitung zu einer einfachen Auflösung derselben. Ein Handbuch der Geometrie für Alle, die eine gründliche Kenntniss dieser Wissenschaft in kurzer Zeit erwerben wollen. Von Dr. E. S. Unger, Professor. Zweite Auflage. Mit 550 eingedruckten Holzschnitten. Leipzig. 1851. 8. 2 Thlr. 15 Sgr.

Dieses Buch ist aus seiner ersten Auflage bekannt. Drei Beilagen sind in der neuen Ausgabe hinzugefügt worden: „die harmonischen Proportionalen und ihre Anwendung auf das vollkommene Viereck, auf die harmonischen Eigenschaften des Kreises und die Lehre von den Transversalen.“

Analytische Geometrie von Dr. L. A. Sohncke, ord. Prof. der Mathematik an der Univ. zu Halle. Mit zwölf Kupfertafeln. Halle. 1851. 8. 2 Thlr.

Der Inhalt dieses recht sehr zu empfehlenden Lehrbuchs der analytischen Geometrie ist folgender: I. Coordinaten. Gerade Linie. II. Kreis. III. Kegelschnitte. IV. Linien und Ebenen im Raum. V. Oberflächen der zweiten Ordnung. Randbemerkung (Kurze Andeutung über Curven und Flächen höherer Ordnung). — Excurs über Projection. — Excurs über Verwandtschaft der Figuren. — Das Buch enthält auch manche interessante eigenthümliche Bemerkungen, wie z. B. S. 74. über die elliptischen Functionen.

Astronomie.

Das Weltgebäude, die Erde und die Zeiten des Menschen auf der Erde von Dr. Gotthilf Heinrich von Schubert, Hofrath und Professor in München. Erlangen. 1852. 8. 2 Thlr. 24 Sgr.

Dieses Werk des verehrten Herrn Verfassers ist als eine gänzliche Umarbeitung seiner bekannten „Geschichte der Natur" zu betrachten, und ganz in der bekannten, jedes reine Gemüth ansprechenden Weise des Herrn Verfassers verfasst, überall bis zu der neuesten Zeit fortgeführt, und in ähnlicher Weise wie der „Kosmos" in verschiedenen Anhängen mit vielen literarischen Nachweisungen ausgestattet, welche die bekannte grosse Gelehrsamkeit des Herrn Verfassers von Neuem bekunden. Wir empfehlen deshalb das Werk den vielen Freunden der Muse des Herrn Verfassers zu sorgfältigster Beachtung, und sind überzeugt, dass Keiner ohne Dank für die vielfache aus dem Werke geschöpfte Belehrung von demselben scheiden wird.

Physik.

Der mechanische Theil der Naturlehre. Von H. C. Oersted. Mit 248 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Braunschweig. 1851. 8. 2 Thlr.

Die vorliegende Uebersetzung der mechanischen Naturlehre des berühmten dänischen Naturforschers ist von Herrn L. Meyn angefertigt worden, und in jeder Beziehung sehr zu empfehlen. Das Werk selbst ist mit grosser Deutlichkeit verfasst, in einer sehr ansprechenden Sprache geschrieben, und verschmähet keineswegs die Anwendung der Mathematik, ohne über die ersten Elemente der Arithmetik und Geometrie hinauszugehen, selbst mit fast gänzlicher Ausschliessung der Trigonometrie, so dass eigentlich nur die Begriffe der goniometrischen Functionen benutzt werden. Das Buch verdient daher alle Empfehlung und der Herr Uebersetzer Dank für dessen Uebertragung auf deutschen Boden. Die Holzschnitte sind sehr schön. Die Lehre von den sogenannten Imponderabilien enthält das Werk nicht, sondern nur den eigentlich mechanischen Theil der Physik.

Lehrgang der mechanischen Naturlehre für höhere Unterrichtsanstalten von Dr. G. Karsten, Professor der Physik an der Universität zu Kiel. Zweite Abtheilung. Mit 4 Kupfertafeln. Kiel. 1851. 8. 2 Thlr. 12 Sgr.

Der erste Theil dieses Werkes ist im Literar. Ber. Nr. LXI. S. 810. angezeigt worden. Der vorliegende zweite Theil enthält: Wärmelehre. Wellenlehre. Akustik. Optik. Eine dritte Abtheilung soll die „Literaturnachweisungen" enthalten. Die frühere theilweise Bestimmung des Werkes für den Unterricht an Marineschulen fällt nach der Aufhebung der Marineschule in Kiel jetzt weg.

Vermischte Schriften.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. Nr. 156—218.

(M. vergl. Literar. Ber. Nr. L. S. 691.).

Ueber diese stets vieles Bemerkenswerthe enthaltenden Mittheilungen ist zuletzt im Liter. Ber. Nr. L. S. 691. Nachricht gegeben worden. Wir liefern jetzt eine Anzeige des unsere Leser vorzugsweise interessirenden Inhalts der Nummern 156 bis 218, welche zufällig verspätet worden ist, aber immer des Interessanten noch genug darbieten wird.

R. Wolf, Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Nr 156—157.

Derselbe: Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. Nr 156—157.

C. Brunner, Sohn: Ueber den Einfluss des Magnetismus auf die Cohäsion der Flüssigkeiten. Nr. 156—157.

R. Wolf: Sonnenflecken-Beobachtungen in der ersten Hälfte des Jahres 1849. — Sternschnuppenbeobachtungen vom 8. bis 11. August 1849. — Note zur Methode der kleinsten Quadrate. Nr. 160—161.

Derselbe: Sternschnuppenbeobachtungen vom 11.—13. November 1849. Nr. 166.

H. Brändli: Ueber arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel. Nr. 166.

(Arithmetisch-geometrisches Mittel ist diejenige irrationale Grösse, der man sich immer mehr und mehr nähert, wenn man von zwei verschiedenen Zahlen p und q ausgehend, zuerst das arithmetische, dann das geometrische Mittel berechnet, und aus diesen zwei Gliedern wieder dieselben Mittelgrössen, bis sie zusammenfallen.

Hiezu bemerkt Herr Schläfli: Je nachdem $p>q$ oder $q>p$ hat das arithmetisch-geometrische Mittel den Werth

$$\frac{\sqrt{p^2-q^2}}{\log\left(\frac{p+\sqrt{p^2-q^2}}{p}\right)}$$

oder

$$\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{\operatorname{Arc\,cos}\frac{p}{q}}.$$

Das arithmetisch-geometrische Mittel ist bekanntlich von Gauss in die Analysis eingeführt. G.)

R. Wolf: Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Dritte Versuchsreihe. Nr. 166.

Derselbe: Sonnenflecken-Beobachtungen in der zweiten Hälfte des Jahres 1849. — Das Beobachtungsjahr 1849 (auf der Sternwarte in Bern.) Nr. 167—168.

Derselbe: Bestimmung der mittlern Kraft in Druck und Zug. Nr. 167—168.

G. Valentin: Einige Bemerkungen über den Winterschlaf des Stacheligels. Nr. 174—175.

(Herr Prof. Sacc in Neuchatel hat entdeckt, dass die in Winterschlaf verfallenen Murmelthiere an Körpergewicht zunehmen, bis die von Zeit zu Zeit durchgreifende Harnentleerung die Schwere des Thieres von Neuem herabsetzt. Herr Valentin hat dieses Gesetz auch beim Stacheligel vollständig bestätigt gefunden.)

R. Wolf: Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. Nr. 174—175.

Derselbe: Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Vierte Versuchsreihe. Nr. 176—177.

F. May von Rued: Die Himmelsnebel. Nr. 178.

R. Wolf: Einige Beobachtungen des Zodiakallichtes im Frühjahr 1850. — Beobachtungen von Nebensonnen am 27. Mai 1850. — Höhe der Sternwarte von Bern. Nr. 179.

Derselbe: Sonnenflecken-Beobachtungen in der ersten Hälfte des Jahres 1850. Nr. 180—181.

Derselbe: Ueber eine bibliographische Kuriosität. Nr. 180—181.

Derselbe: Der Juli-August-Sternschnuppenstrom von 1850. Nr. 182.

Derselbe: Länge der Sternwarte von Bern. — Verschiedene Bemerkungen. — Der November-Sternschnuppenschwarm von 1850. Nr. 183—184.

Derselbe: Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. Nr. 183—184.

H. Wydler: Die Knospenlage der Blätter in übersichtlicher Zusammenstellung mit einer Tafel. Nr. 185—187. (Lehrreich und interessant.)

M. Perty: Ueber den gefärbten Schnee des St. Gotthard, vom 16.—17. Febr. 1850. Nr. 188—192. (Sehr interessant.)

C. Brunner, Sohn: Aphoristische Bemerkungen über die Productionskraft der Natur. Nr. 188—192.

R. Wolf: Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Nachtrag zur vierten Versuchsreihe. Nr. 193—194.

Derselbe: Zusatz zu der Bestimmung der mittlern Kraft in Druck und Zug in Nr. 168. Nr. 193—194.

Derselbe: Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Fünfte Versuchsreihe. Nr. 197—199.

Derselbe: Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. (Ein verloren geglaubter Brief Lamberts an Johannes Gesner. S. Lamberts deutschen gelehrten Briefwechsel. Thl. II. S. 177.). Nr. 197—199.

Derselbe: Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. (Zwei interessante Briefe aus Cristoph Jezlers Correspondenz, die mehrere mathematische Bemerkungen enthalten.) Nr. 201—202.

C. Brunner: Beitrag zur Eudiometrie. (Eine neue eudiometrische Methode.). Nr. 201—202.

R. Wolf: Sonnenflecken-Beobachtungen in der zweiten Hälfte des Jahres 1850. Nr. 206—207.

Derselbe: Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. (Auszug aus Johann II Bernoulli's Reisejournal vom Jahre 1733. Mehrfach interessant.). Nr. 206—207.

L. R. von Fellenberg: Darstellung aschenfreier Filter. Nr. 208—209.

R. Wolf: Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. (Ein Brief Johann I Bernoulli an Gesner). Nr. 208—20 .

Derselbe: Ueber die Vertheilung der Fixsterne. (Eine interessante graphische Darstellung der Vertheilung der Fixsterne.) Nr. 210—211.

C. Fischer-Ooster: Noch Einiges über die Theorie der absoluten Wärme und die Formel für die Schneegränze (vergl. 123—126.). Nr. 210—211.

(Die Formel des Herrn C. Fischer-Ooster für die Schneegränze ist folgende:

Wenn S die Höhe der Schneegränze über dem Orte bezeichnet, von dem W die Summe der absoluten Wärme ausdrückt, und wenn h und h' der Werthe der Höhe, bei welcher das Thermometer um 1° fällt, sowohl unten als bei der Schneegränze in Toisen anzeigen, so ist

$$S = \frac{\sqrt{W} - 19}{3} \times \frac{h + h'}{2} \text{ in Toisen}$$

und

$$S = (\sqrt{W} - 19)(h + h') \text{ in Fussen,}$$

also

$$W = \left(\frac{S}{h + h'} + 19\right)^2;$$

wobei der Werth von h und h' veränderlich ist, und wo der von h', obgleich unbekannt, doch durch eine vorläufige Berechnung leicht gefunden werden kann, indem man ihn zu 85 Toisen in nördlichen und zu 100 Toisen in südlichen Ländern provisorisch annimmt und ihn dann definitiv aus der nachfolgenden kleinen Tabelle bestimmt, die Herr C. Fisher-Ooster nach Zachs Tabelle, wo nur die Barometerstände angegeben sind, berechnet hat.

Die Temperaturabnahme von 1° erfolgt nämlich in einer absoluten Höhe von circa:

890′	bei	81,4	Toisen	8244′	bei	93,0	Toisen
1822	„	82,8	„	9500	„	95,0	„
2784	„	84,3	„	10820	„	97,1	„
3780	„	86,0	„	12230	„	89,3	„
4820	„	87,7	„	13716	„	101,5	„
5900	„	89,4	„	15294	„	103,8	„
7044	„	91,2	„	16974	„	106,2	„)

R. Wolf: Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. (Sehr interessante Notizen über Anna Barbara Reinhart von Winterthur, welcher gelehrten Dame Daniel Bernoulli das Zeugniss gab, sie sei (Clairaut, Euler und einige wenige Andere ausgenommen) fast allen mit ihr lebenden Mathematikern vorzuziehen, und die Johannes Bernoulli selbst über die berühmte Chatelet setzte. Sie war geboren den

12. Juli 1730 und starb den 5. Januar 1796.). — Fernerer Beitrag zur Kenntniss alter Schweizer Kalender. Nr. 210—211.

Derselbe: Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. (Herr Wolf weiset in diesem interessanten Aufsatze nach, dass das schöne Princip, auf welches sich der Planimeter von Wetli (m. s. Liter. Ber. Nr. LVI. S. 774.), nämlich die Flächenmessung durch Umschreibung, gründet, schon im Jahre 1826 durch den damals in Bern befindlichen Thurgauer Johannes Oppikofer aufgefunden worden, und dass der Planimeter von Wetli im Wesentlichen durchaus nicht von dem Oppikofer'schen verschieden sei. Dieser Aufsatz enthält überhaupt mehrere sehr lehrreiche Bemerkungen über diese Planimeter, auf die wir die Leser, welche diese Instrumente näher kennen lernen wollen, besonders aufmerksam machen. Auch die beigefügte Zeichnung dient sehr zur besseren Erläuterung der Sache). Nr. 213—215.

Derselbe: Ueber eine am 10. August 1850 in Aachen und Bern gleichzeitig beobachtete Feuerkugel. Nr. 213—215.

Derselbe: Ueber das Sehen der Sterne bei Tage aus tiefen Schachten. — (Nach sorgfältigen Nachforschungen bestätigt Herr Wolf das, was über diesen öfters zur Sprache gebrachten Gegenstand A. v. Humboldt im Kosmos Thl. III. S. 71. sagt, nämlich, dass die ganze Sache illusorisch sei, vollkommen.). Nr. 213—215.

Derselbe: Sonnenflecken-Beobachtungen in der ersten Hälfte des Jahres 1851. — Beobachtungen des Zodiakallichts im Frühjahr 1851. — Beobachtung der (partialen) Sonnenfinsterniss am 28. Juli 1851. — Sternschnuppen-Beobachtungen im August 1851. Nr. 216—218.

Derselbe: Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. Nr. 216—218.

Ausser den obigen Aufsätzen enthalten diese Mittheilungen noch eine grössere Anzahl, oft recht interessanter Briefe älterer schweizerischer Gelehrten, hauptsächlich Mathematiker und Naturforscher, die sämmtlich Herr R. Wolf mitgetheilt hat.

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. Edited by W. Thomson, M. A., F. R. S. E. Vergl. Liter. Ber. Nr. LXV. S. 847.

Nr. XXVII. On Duplicate Surfaces of the Second Order. By John Y. Rutledge. — On the Conduction of Heat in Crystals. By G. G. Stokes. — On the Velocity of Sound in Liquid and Solid Bodies of Limited Dimensions, especially along Prismatic Masses of Liquid. By W. J. Macquorn Rankine. — On the Connexion of Involute and Evolute in Space. By Professor De Morgan. On a Mechanical Experiment connected with the Rotation of the Earth. By Henry Wilbraham. — On the Index Symbol of Homogeneous Functions. By R. Carmichael. — Mathematical Notes: I. Lettre to the Editor. By G. Boole. — II. Proposed Question in the Theory of Probabilities. By G. Boole. —III. Solutions of Some Elementary Problem in Geometry of Three Dimensions. By W. Walton. — IV. On the General Theory of Associatet Algebraical Forms. By J. J. Sylvester.

(The Next Number will be Published on the 1st of February.)

LXXI.

Literarischer Bericht.

Simon Lhuilier gehört unstreitig zu den ausgezeichnetsten Mathematikern der neueren Zeit, scheint aber (wenigstens jetzt) lange nicht so allgemein, wie er immer noch verdient, bekannt zu sein. Mein mir unvergesslicher Lehrer, Johann Friedrich Pfaff, stellte Lhuilier sehr hoch und empfahl das Studium seiner Schriften jüngern Mathematikern angelegentlichst. Ich selbst verdanke diesen Schriften sehr viel und greife noch jetzt öfters mit besonderem Wohlgefallen nach denselben. Dass Lhuilier ein sehr hohes Alter erreicht hatte, war mir bekannt; über seine näheren Lebens umstände ist aber wenig bekannt geworden. Desto mehr Freude machte mir eine von Herrn R. Wolf in Bern in einem der neuesten Stücke der „Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern", welche immer viel Lesenswerthes enthalten, gelieferte Lebensbeschreibung Lhuiliers; und da die genannten „Mittheilungen" wohl nicht in die Hände vieler Leser des Archivs kommen möchten, die Lebensbeschreibung eines so ausgezeichneten Mathematikers, wie Lhuilier war, aber allgemein von grossem Interesse sein muss, so erlaube ich mir diese Lebensbeschreibung auf den nachfolgenden Blättern den geehrten Lesern des Archivs mitzutheilen. Seines Lehrers Lesage, der, so viel ich weiss, nichts Mathematisches veröffentlicht hat, gedenkt Lhuilier in fast allen seinen Schriften mit der grössten Achtung und Dankbarkeit; die Leser werden diese Gefühle wärmsten Dankes auch im Folgenden ausgesprochen finden, und sich daran gewiss ebenso erfreuen wie ich.

G.

Simon Lhuilier.

Unter den schweizerischen Mathematikern neuerer Zeit nimmt der Genfer Simon Lhuilier unstreitig eine der ersten Stellen ein. Nicht nur hat er sich als elementarer Schriftsteller in den Gebieten der Algebra und Geometrie wohlverdienten Ruhm erworben, und als langjähriger Lehrer in seiner Vaterstadt schöne Resultate erzielt, — seine Arbeiten in der Polygonometrie, Polyedrometrie, Isoperimetrie, Differential- und Integralrechnung, etc. sichern ihm auch in der Geschichte der Wissenschaft eine ehrende Stelle, indem sie derselben theils neue Disciplinen zufügten, theils wichtige Theorien besser begründeten. In den Besitz des grössten Theiles von Lhuiliers handschriftlichem Nachlasse gekommen, halte ich es daher von nicht unbedeutendem Interesse, nach und nach Einzelnes aus demselben, was entweder historischen Werth hat oder noch jetzt zum Ausbaue der Wissenschaft dienen kann, weiteren Kreisen vorzulegen. Zur Einleitung mag folgende Notiz über Lhuilier und seine gedruckten Arbeiten dienen.

Simon-Antoine-Jean Lhuilier wurde am 24. April 1750 zu Genf geboren. Schon frühe zeigten sich seine Anlagen für die mathematischen Wissenschaften, und erlaubten ihm nicht auf die Ideen eines Anverwandten einzugehen, der ihm einen Theil seines Vermögens unter der Bedingung den geistlichen Stand zu ergreifen, vermachen wollte. Der vorzügliche mathematische Unterricht, welchen damals in Genf Louis Bertrand, der sich durch sein Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques als würdiger Schüler Eulers erwies, während langen Jahren ertheilte, war von grosser Wirkung auf den fleissigen Jüngling, — und umgekehrt war Bertrand, der Lhuilier auch nähern Umgang zu Theil werden liess, über dessen Fortschritte so erfreut, dass er ihn zum Voraus als seinen einstigen Nachfolger bezeichnete. Von noch grösserer Bedeutung für Lhuilier war es, dass er sich die Zuneigung des ihm verwandten berühmten Naturphilosophen George-Louis Lesage[1]) erwarb, der ihm sofort mit Rath und Unterricht beistand. In einem Bruchstücke eines grössern Briefes, das ich unter den erwähnten Manuscripten vorfand, erzählt Lhuilier Folgendes:

„Mes relations avec Mr. Lesage datent du mois de Juin 1766. J'avais le bonheur de sortir du collège à la tête de ma volée. Mr. Le Sage apprit le triomphe de son jeune parent. Poussé par la générosité de son caractère qui le portait à se rendre utile aux jeunes gens qui connaissaient tout au moins de l'application,

---

[1]) Notice de la vie et des écrits de George-Louis Lesage de Genève, par P. Prévost. Genève. 1805. 8.

il se rendit (pour la première fois) chez mon père pour faire ma connaissance. J'étais absent. Je fus envoyé chez lui. Il m'accueillit avec bonté, et me permit de venir le voir familièrement.

„Pendant le cours de mes études de belles-lettres, il m'aida de ses conseils, et il me fournit les moyens, par les livres qu'il me mit entre les mains, de joindre à ces études celle de l'Arithmetique comme préliminaire aux études mathématiques. Il trouva chez moi de l'application et de la facilité à acquérir la routine du calcul. Il m'admit aussi à une leçon particulière de Géométrie pratique. Enfin il me prit chez lui pendant trois ou quatre mois d'été qu'il passa à la campagne et ce fut là qu'il consacra une partie de son temps à m'initier à l'étude de l'Algèbre, qui me donna beaucoup plus de peine que ne paraissait annoncer la facilité avec laquelle j'avais appris l'Arithmétique. Je m'efforçais de compenser, bien faiblement, les soins qu'il me donnait en lui servant de copiste.

„De retour à la ville, il contribua à me placer comme précepteur chez Mr. Rilliet-Plantamour, où je suis resté à peu près deux ans. Pendant mes études philosophiques, il s'appliqua à m'aider de ses directions et de ses conseils. Il m'admit aux leçons de Physique qu'il donnait encore pendant une partie des années 1768 et 1769, et il poussa la complaisance jusqu'à revoir les extraits étendus que je faisais de son cours.

„Vous savez, Monsieur, combien il était réservé à donner des conseils sur les objets qui n'étaient pas immédiatement littéraires. Aussi n'a-t-il eu aucune part à ma retraite de l'état ecclésiastique auquel on me croyait destiné. Il approuva seulement la suspension de ma résolution pendant une année, que j'employai, toujours sous ses directions, à poursuivre les études philosophiques en même temps que je continuai d'assister aux leçons de Physique de Mr. de Saussure (dont j'aurais été privé pendant mes études publiques de philosophie). Pendant cette année il contribua beaucoup à me faire retirer un parti lucratif des connaissances qu'il m'avait données. Il m'adressa des disciples; le bonheur que j'avais d'être son élève inspirait de la confiance, et je fus chargé entr'autres par lui de donner des leçons préparatoires à ses cours sur les connaissances mathématiques qu'ils exigeaient et dont il m'avait donné le tableau. Je crus voir pendant cette année qu'il m'avait donné un état, capable de suffire à mes besoins et à ceux de ma mère; c'est la part indirecte qu'il a eue à ma retraite des études publiques.

„Pendant les années qui se sont écoulées dès-lors jusqu'a mon départ de Genève, il m'admit librement auprès de lui, même pendant les heures consacrées à ses travaux particuliers. Je lui parlais de mes occupations, et il m'aidait par ses directions et par ses secours littéraires qu'il me fournissait.

„Pendant ce temps, il a été quelquefois question de coopérer à la publication de ses ouvrages; je le désirais vivement et dans le début je concevais de l'espérance. Je ne tardai pas d'éprouver, ainsi que l'ont fait plusieurs de ses amis, combien cela serait difficile. Vous savez combien de fois il a varié sur ses plans de composition et sur les époques auxquelles il en commencerait la rédaction. Cette vacillation ne s'accordait pas avec mon impatience, et je dus être convaincu, quoiqu'avec bien du regret, que je ne pourrais pas contribuer à lui rendre un service par lequel seul je pouvais reconnaître en partie les obligations que je lui avais. Notre manière de vivre était d'ailleurs si différente qu'elle apportait un grand obstacle à cette communauté de travail; j'ai toujours été très matineux; ma journée était finie pour mes travaux particuliers lorsque la sienne n'était pas commencée, et le reste de la journée devait être consacré à mon état envisagé comme ressource pécuniaire.

„Arrivé à l'âge où un jeune homme sans fortune forme naturellement des projets pour se faire un sort, — fatigué d'un genre de vie pénible qui ne satisfaisait pas mon impatience: Je lui communiquai le désir que j'avais de trouver en dehors quelque place qui eut le double avantage d'être plus lucrative et moins pénible. Il s'en présenta une occasion en 1775. Il reçut de son ami Pfleiderer les programmes de la commission d'éducation, et il me les communiqua. Je lui fis connaître mon plan avant de l'envoyer. Il eut désiré que j'eusse écrit sur la Physique; mais je ne pouvais me persuader que ses principes de Physique générale dussent occuper dans l'enseignement demandé une place assez considérable pour que leur développement eut rendu probable le succès, et je n'avais pas assez cultivé les parties de la physique qui me paraissaient essentielles dans cet enseignement pour que pendant le peu de mois qui restaient encore jusqu'à la fin du concours, je pusse me flatter de faire sur la physique un travail qui me promit le succès. J'envoyai donc mon plan relatif aux Mathématiques, et dans le billet cacheté je m'inscrivais comme son disciple.

Eine kleine Arbeit

1) Lettre en réponse aux objections élevées contre la gravitation newtonienne [Journ. encyclop. Février 1773]

ausgenommen, debütirte Lhuilier mit dieser Preisschrift, die sich grösstentheils auf allgemeine Arithmetik bezogen zu haben scheint. Ein für ihn glücklicher Umstand war es, dass Christoph Friedrich Pfleiderer (1736—1821), der von 1763—1766 als Schüler und Mitarbeiter bei Lesage in Genf gewesen, und durch ihn 1766 nach Warschau an die vom Könige Stanislas August neu gestiftete Militair-Academie als Professor der Mathematik und Physik empfohlen worden war, in der zur Abfassung und Prüfung von Schulbüchern im Königreich Polen niedergesetzten Commission, welche jenen Preis ausschrieb, als eines der thätigsten und einflussreichsten Mitglieder sass. Pfleiderer fand nothwendig an der in Lesage's Geist geschriebenen Arbeit ein besonderes Wohlgefallen, — sie wurde gekrönt, erschien als

2) Arithmétique pour les Ecoles palatinales. Varsovie 1777. 8°

und gleichzeitig auch in polnischer Uebersetzung[2]). Der König von Polen liess den jungen Verfasser für seine Arbeit beglückwünschen, und der Fürst Czartorinski lud ihn ein nach Warschau zu kommen, um seinen Sohn, der in späterer Zeit das Haupt der emigrirten Polen werden sollte, zu unterrichten. Lhuilier folgte der Einladung, und die lange Reihe von Jahren, welche er in dem fürstlichen Hause zubrachte, bildete nicht nur die glücklichste Epoche seines Lebens, sondern war auch für die Wissenschaft von reicher Ausbeute. Zunächst erschien 1781 in den Berliner-Memoiren sein

3) Mémoire sur le minimum de cire des alvéoles des abeilles, et en particulier sur un minimum-minimorum relatif à cette matière,

in welchem er nach dem Urtheile von Professor Maurice diesen Gegenstand vollkommen erschöpfte[3]). Dann folgte sein grösseres Werk

4) De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum, geometrice considerata. Varsoviae. 1782. 4°.

über welches mehr als ein halbes Jahrhundert später der competenteste Richter in diesem Gebiete der Mathematik, Herr Professor Steiner in Berlin, noch folgendes Urtheil fällte[4]): „Alles, was „seine Vorgänger auf elementarem Wege über diesen Gegenstand „geleistet, von den uns überlieferten ersten Anfängen der Grie-„chen bis auf die Fortsetzungen und tiefere Begründung durch R. „Simson und Andere, hat Lhuilier mit grosser Umsicht zusam-„mengefasst, mit seltenem Scharfsinne verbessert, ergänzt und „beträchtlich erweitert. Leider scheint öfter sein Werk citirt, „als die darin herrschende Methode richtig verstanden, oder gehö-„rig gewürdigt und befolgt worden zu sein; denn alle seine Nach-„folger sind, soviel mir bekannt, mehr oder weniger von seiner „einfachen natürlichen Betrachtungsweise abgewichen; sie nah-„men zu andern künstlichen Hülfsmitteln Zuflucht, und beschränk-„ten sich überdies auf eine viel geringere Zahl von Aufgaben und „Sätzen. Dadurch verschwand aber auch immer mehr die schöne „Einfachheit der Beweise, der innige Zusammenhang der Sätze „nebst dem Bewusstsein der Gründe, durch welche derselbe be-„dingt wird.“ Zwei nach Petersburg gesandten Abhandlungen

5) Sur les pyramides isopérimètres [Nova Acta III],

---

[2]) Nach Montucla III. 263. wären auch von ihm verfasste Eléments de géométrie gekrönt und veröffentlicht worden. Ueberhaupt ist es mir nicht ganz klar geworden, was Alles in Lhuilier's Sendung nach Polen enthalten war.

[3]) Discours sur l'instruction publique par De la Rive. Genève 1840. 8°.

[4]) Denkschriften der Berliner Akademie 1836.

6) Théorème sur les centres de gravité [Nova Acta IV]

folgte seine, nach Beurtheilung von einer durch Lagrange präsidirten Comission, in Berlin gekrönte Preischrift

7) Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs qui a remporté le prix proposé par l'Académie royale des sciences et belles-lettres pour l'année 1786. Berlin. 4°.

in welcher er auf d'Alemberts geistreiche Idee der Grenzen basirte, auf welche man auch in der neuesten Zeit wieder allgemein zurückkommt. Nach Montucla[5]) hatte eigentlich die Berliner Academie die Entwicklung der Théorie de l'infini mathématique verlangt, — aber Lhuilier gerade die gebotene Gelegenheit benutzt, diese Theorie zu bekämpfen und ihr die der Limites zu substituiren. Dann erschienen wieder mehrere kleinere Arbeiten:

8) Examen du mémoire sur les poids et mesures, où l'on se propose le moyen d'avoir des étalons ou modèles de mesures et de poids qui soient réglés par des principes certains et invariables [Journ. encycl. Juillet 1785];

9) Théorème sur les solides plano-superficiels [Mém. de Berlin. A. 1786 et 1787];

10) Sur la décomposition en facteurs de la somme et de la différence de deux puissances à exposants quelconques de la base des logarithmes hyperboliques, dans le but de dégager cette décomposition de toute idée de l'infini [Mém. de Berlin. A. 1788 et 1789].

Am Ende seines Aufenthaltes in Polen fasste der unermüdliche Lhuilier, dessen Leistungen bereits die Academien in Berlin und Petersburg veranlasst hatten, ihn zum Correspondenten zu ernennen, den Plan zu seiner Polygonometrie. Voll von seinem Entwurfe kam er nach Tübingen zu seinem Freunde Pfleiderer, der schon 1781 als Professor der Mathematik und Physik in sein Vaterland zurückgekehrt war. Dieser machte ihn auf die betreffenden Arbeiten Lexell's aufmerksam, die eben in den Petersburger Memoiren erschienen waren. Lhuilier verglich sie aufmerksam mit seiner eigenen Arbeit, liess aber dennoch nach seiner Rückkehr nach Genf sofort die Schrift

11) Polygonométrie, ou de la mesure des figures rectilignes. Et Abrégé d'Isopérimétrie élémentaire. Genève 1789. 4°.

erscheinen, in der Einleitung das Resultat jener Vergleichung seinen Lesern in folgenden Worten mittheilend: „Je trouvai en „effet que Mr. Lexell avait exécuté le plan que je me proposais, et qu'en „particulier il avait trouvé les mêmes propositions fondamentales.

---

[5]) III. 262.

„Cependant je vis bientôt que mon procédé différait assez du sien, „soit par la forme des divisions et subdivisions, soit par la ma- „nière dont j'étais parvenu à ces propositions fondamentales, soit „par les constructions que je dévelloppais, soit par les réflexions „géométriques auxquelles j'étais amené, pour que le travail de „Mr. Lexell ne dût pas m'engager à supprimer le mien. La dé- „termination de la surface d'une figure rectiligne dans ses côtés „et ses angles, et les applications de la formule élégante par la- „quelle elle est exprimée, est une matière que je crois entièrement „neuve et qui m'est propre.“ Dass Lhuilier seine Arbeit nicht zu hoch über die Lexell's stellte, mag folgendes Urtheil Montucla's[6]) bezeugen: „Le cit. Lhuilier soumet à des règles sem- „blables à celle de la trigonométrie, le calcul des côtés et des „angles de tout polygone rectiligne; c'est un coin, pour ainsi dire. „du vaste et immense champ de la géométrie, où Euler et Lexell „avaient, à la vérité, fait quelques incursions, mais où le cit. „Lhuilier est entré profondément, et dont il a tiré une ample „moisson de vérités nouvelles et utiles.“ Lhuilier war übrigens, ohne es zu wissen, noch mehr mit Mascheroni als mit Lexell auf diesem Felde zusammengetroffen; doch auch Mascheroni anerkannte sein selbstständiges Verdienst, indem er in der Vorrede zu seinen Problemi per gli agrimensori[7]) sagt: „J'avais publié, en 1787, „parmi les additions au cours de mathématiques de Mr. Bossut, „un petit mémoire intitulé: Méthode pour la mesure des po- „lygones plans. Deux ans après, Mr. Lhuilier publia à Ge- „nève sa Polygonométrie. Je reconnus en la lisant, non seu- „lement que mon ouvrage renfermait tous ses problèmes, mais „que mes solutions analytiques m'avaient conduit aux mêmes for- „mules, et que nous avions suivi pas à pas la même carrière. „Un accord aussi parfait avec ce célèbre géomètre fut pour moi „d'un grand prix, et la preuve la plus complète que mon travail „pouvait être de quelque utilité. Au reste, l'ouvrage de Mr. Lhui- „lier ne fait pas seulement honneur à son érudition; il l'a enrichi „de démonstrations géométriques qui lui appartiennent, et de beau- „coup d'exemples d'un bon choix qui eclaircissent ses méthodes.“ Der isoperimetrische Anhang ist ein Auszug aus seiner oben besprochenen Relatio mutua.

Noch sollte Lhuilier kein ruhiger Aufenthalt in seinem Vaterlande vergönnt sein. Bald nach seiner Rückkehr nach Genf wurde seine Vaterstadt so sehr in die Stürme der französischen Revolution verwickelt, dass er es rathsam fand, für einige Jahre zu Pfleiderer nach Tübingen zurückzukehren. Er benutzte diese Zeit, in welcher ihn auch die Royal Society of London mit ihrem Diplome beehrte, zu einer ganz neuen Bearbeitung seiner Berliner Preisschrift, die dann unter dem Titel

12) Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris ad normam dissertationis ab Acad. Scient.

---

[6]) III. 263.

[7]) Französische Ausgabe. Paris 1803. 8°.

Reg. Prussica A. 1786 praemii honore decoratae elaborata. Tubingae 1795. 4°.

erschien, und seinen bereits erworbenen Ruhm durch ihre Klarheit und Strenge nicht wenig steigerte. Maurice glaubte jedoch[8]) seinem mit Montucla[9]) übereinstimmenden Lobe beifügen zu sollen: „Mais cette rigueur est accompagnée de longueurs qu'on „aurait pu éviter, et dépourvue de cette élégance d'exposition à „laquelle les ouvrages de Lagrange, surtout, ont accoutumé les „géomètres."

Lhuilier kehrte 1794 nach Genf zurück, und publicirte zwei kleine Schriften:

13) Examen du mode d'élection proposé à la convention nationale de France en février 1793 et adopté à Genève. Genève 1794. 8°.

14) Catéchisme d'Arithmétique destiné aux écoles primaires

deren letztere mir einzig durch Maurice[10]) bekannt geworden ist, welcher von ihr sagt: „Ce Catéchisme était une espèce de tour „de force d'un homme fort habile; mais sa forme, presque inu„sitée, en a fait peu à peu abandonner l'emploi."

Im Juli 1795, bald nachdem Lhuilier einen Ruf als Professor der höhern Mathematik an der Universität Leyden ausgeschlagen hatte, erhielt er die Professur der Mathematik an der Academie zu Genf, — wie es ihm Bertrand, der sich nun zur Ruhe setzte, längst prophezeit hatte. So sehr er sich's aber auch angelegen sein liess, den ihm übertragenen Unterricht auf's Beste zu geben, so wenig wurde dadurch seine literarische Thätigkeit gestört. Zunächst begrüsste er die Royal Society of London mit seiner

15) Manière élémentaire d'obtenir les suites par lesquelles s'expriment les quantités exponentielles et les fonctions trigonométriques des arcs circulaires [Philos. Transact. 1796];

dann die Berliner Academie theils mit seiner

16) Solution algébraique du problème suivant: A un cercle donné, inscrire un polygone dont les côtés passent par des points donnés [Mém. de Berlin 1796];

theils in Verbindung mit Pierre Prévost mit zwei Abhandlungen

---

8) In dem schon erwähnten Discours, pag. 6.

9) III. 262.

10) Discours, pag. 7.

17) Sur les probabilités [Mém. de Berlin 1796.]

18) Sur l'application du calcul des probabilités à la valeur du témoignage [Mém. de Berlin 1797.]

Zu Lhuilier's vorzüglichsten Werken gehört unstreitig die

19) Anleitung zur Elementar-Algebra. Zwei Theile. Tübingen 1799—1801. 8°.,

welche nach dem Verfasser eine neue Bearbeitung seiner zwanzig Jahre früher polnisch herausgegebenen Algebra sein, und dem Gange folgen soll, welchen Lesage beim Unterrichte Lhuilier's einschlug; sie wird mit Euler's Algebra die Mehrzahl von Werken dieser Art überdauern. Die in diesem Werke, in Vervollkommnung des Euler'schen Verfahrens, auf die für jeden Werth von m und n erwiesene Richtigkeit der Beziehung

$$\binom{m+n}{h}=\binom{m}{h}\binom{n}{0}+\binom{m}{h-1}\binom{n}{1}+\cdots+\binom{m}{0}\binom{n}{h}$$

basirte Ableitung des allgemeinen Binomischen Lehrsatzes[11]) verdient besondere Beachtung. — Am 1. April 1800 (11 germinal an 8) kamen seine

20) Théorèmes de polyhédrométrie [Mémoires présentés. Tom. I.]

vor der Pariser Academie zum Vortrage und fanden eine sehr günstige Aufnahme, da es Lhuilier nicht nur gelungen war, die vor ihm bekannten Eigenschaften der Polyeder zu verallgemeinern, sondern ihnen eine grosse Anzahl neuer Eigenschaften zuzufügen. Manche dieser Eigenschaften entwickelte bald darauf der berühmte Carnot in seiner Géométrie de position[12]), sich jedoch mit folgenden Worten verwahrend, Lhuilier's Arbeit benutzt zu haben: „Cette partie de mon ouvrage était à l'impres„sion, lorsque j'appris qu'il existait depuis longtemps, sur le „même sujet, un Mémoire manuscrit de Simon Lhuilier de „Genève. Ce Mémoire, déposé au secrétariat de l'Institut natio„nal, contient en effet le principe fondamental énoncé ci-dessus, „ainsi que diverses conséquences importantes que l'auteur en a „déduites avec sa sagacité ordinaire. Il est de la nature des vé„rités mathématiques d'être souvent découvertes à peu près en „même temps par différents moyens et par différentes personnes; „et je ne puis qu'être flatté de m'être rencontré avec le cit.

---

[11]) Siehe Satz 47—50 meines Taschenbuches für Mathematik und Physik.

[12]) Paris 1803. 4°, — während Lhuiliers Abhandlung erst 1805 zum Drucke kam.

„Lhuilier, justement célèbre par un grand nombre d'excellents „ouvrages." — Eine neue Bearbeitung von Lhuilier's Algebra erschien unter dem Titel

21) Eléments raisonnés d'Algèbre. 2 vol. Genève. 1804. 8°.

auf dem er sich unter Anderm als Mitglied der Göttinger Academie und als Professeur honoraire de Mathématiques sublimes à l'université de Leyde bezeichnet. Während dem Drucke dieses Werkes, am 20. October 1803, starb Lesage, so dass ihm Lhuilier noch in der Vorrede zu demselben ein kleines Monument errichten konnte, von dem folgender Theil hier aufgenommen werden mag: „Au moment où j'écris ces lignes, que j'arrose „de mes regrets et de mes larmes, les lettres viennent de perdre „le véritable auteur de l'ouvrage que je publie, G. L. Lesage, „mon parent et mon guide dans mes premières études. Il est le „fruit des leçons et des directions que j'ai eu le bonheur de re„cevoir de cet habile mathématicien, qui, à la profondeur et à „l'étendue des connaissances, joignait l'esprit le plus philosophi„que; qui a consacré sa longue vie à la recherche de la vérité et „à sonder les mystères de la nature; qui a mérité la reconnais„sance de ses compatriotes par les services littéraires qu'il a „rendu à un grand nombre d'entre eux; qui, par ses instructions, „par ses directions et par ses conseils, a contribué à entretenir „et à répandre dans notre patrie le goût des connaissances utiles „et la culture de la saine philosophie." — Das letzte grössere Werk unseres Lhuilier waren seine

22) Eléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique, appliquées à la recherche des lieux géometriques. Paris 1809. 4°.

welche er seinem frühern Schüler Czartorinski, damaligem kais. russischem Minister des öffentlichen Unterrichts, widmete. Sie enthalten eine Abhandlung über den Punkt der mittlern Entfernungen, eine freie Uebertragung von Simsons Wiederherstellung der ebenen Oerter des Apollonius, etc. etc., kurz ein ausserordentlich reiches Material für den durch den Titel angedeuteten Theil der Geometrie. — Bald nachher begann Gergonne seine verdienstliche Herausgabe der Annales de mathématiques pures et appliquées, und fand für die drei ersten Bände in Lhuilier einen seiner fleissigsten Arbeiter. Es würde zu weit führen, alle Probleme mitzutheilen, die Gergonne seinen Lesern vorlegte, und bei deren Lösung sich Lhuilier betheiligte; es mögen daher nur einige selbstständigere Arbeiten desselben hier aufgezählt werden, die in den Annales erschienen:

23) Analogie entre les triangles rectangles, rectilignes et sphériques [Vol. I.].

24) Recherche du plan de la plus grande projection orthogonale d'un système de surfaces données de grandeur sur des plans donnés de position dans l'espace [Vol. II.]

25) Détermination du centre des moyennes distances du triangle sphérique. [Vol. II.]

26) Lieu aux sections coniques [Vol. II.]

27) Eclaircissements sur le troisième et le sixième cas de la trigonométrie sphérique. [Vol. II.]

28) Solution d'un problème de combinaisons. [Vol. III.]

29) Démonstrations diverses du théorème d'Euler sur les polyèdres, et examen des divers cas d'exception auxquels ce théorème est assujetti. [Vol. III.]

30) Mémoire sur la possibilité et la construction des polyèdres réguliers. [Vol. III.]

31) Solution d'un problème de probabilité. [Vol. III.]

Warum Lhuilier mit dem Schlusse des 1812 erschienenen dritten Bandes plötzlich verstummte[18]), ist mir unbekannt geblieben, — immerhin hatte er seine litterarische Thätigkeit bis in ein hohes Alter bewahrt. Seine Lehrthätigkeit war noch ausdauernder, — erst 1823 im Alter von 73 Jahren verlangte er seine Entlassung; bis auf diese Zeit erfüllte er seine Pflichten mit so grosser Gewissenhaftigkeit, dass er sich sogar bei Gichtanfällen eher in sein Auditorium tragen liess, als seine Lectionen versäumte. Von seinen Schülern (zu denen auch Guizot längere Zeit gehörte) zeichneten sich manche in wissenschaftlichen Laufbahnen aus, — namentlich ist Sturm, schon seit vielen Jahren eine der Zierden der Pariser Academie, zu erwähnen, um den sich Lhuilier besondere Mühe gab.

Trotz so langer öffentlicher Thätigkeit, war es Lhuilier noch vergönnt, von einem Sohne und einer Tochter gepflegt, eine längere Reihe von Jahren in verdienter Ruhe zuzubringen. Nicht dass er darüber die Wissenschaften vergessen hätte; im Gegentheile zeigen seine Manuscripte wie ihn dieselben noch immer beschäftigten, wie namentlich seine frühern Arbeiten in der Polygonometrie und Polyedrometrie bis in seine letzten Tage fast beständig vor seiner Seele schwebten, — versuchte er ja noch sogar zu wiederholten Malen seine Gedanken weitern Kreisen vorzulegen:

32) Expressions de la capacité d'un polyèdre dans ses éléments extérieurs [Bibl. univers. 1828.]

33) Eléments de la doctrine générale des polygones et des polyèdres [8 S. in 4⁰ ohne Titel.]

---

[18]) Nach Mittheilung meines l. Freundes, Herrn Ingenieur Denzler in Zürich, der die Güte hatte, alle 20 Bände der Annalen für mich durchzusehen.

34) **Discussions générales des doctrines des polygones et des polyèdres, par le professeur Lhuilier, plus qu'octogénaire** [3 S. in 4° ohne Titel].

Doch verdunkelte sich natürlich nach und nach sein geistiges Auge, und in einzelnen Augenblicken trat der Unterschied zwischen vormals und jetzt trübe vor seine Seele, so dass er einmal mit zitternder Hand niederschrieb:

. . . . Je suis hors de saison.
On ne veut plus d'un être octogénaire.
Je suis voisin de perdre la raison,
Je suis un poids qui surcharge la terre.

Er schied von unserer Erde am 28. März 1840, in einem Alter von beinahe 90 Jahren. Ehre seinem Andenken!

Druckfehler.

In der Ueberschrift des Aufsatzes Nr. XXXIII. in diesem Hefte (Thl. XVIII. S. 357.) in einem Theile der Exemplare muss es statt „die Basiswinkel" heissen:

„die die Basiswinkel".

LXXII.

Literarischer Bericht.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Unter diese wissenschaftliche Rubrik gehört der Vollständigkeit seines Inhalts wegen auch das folgende:

Taschenbuch für Mathematik und Physik. Zum eignen Gebrauche entworfen von Rudolf Wolf. Bern. Haller'sche Buchdruckerei. 1852. Kleines Taschenbuchformat.

Wir glauben die Leser des Archivs auf dieses Taschenbuch für Mathematik und Physik aufmerksam machen zu müssen, weil es unter den meisten ähnlichen Büchern jedenfalls einen sehr ehrenvollen Platz einnimmt, und vor denselben sich in mehreren Beziehungen vortheilhaft auszeichnet. Die meisten Bücher dieser Art stellen nur Formeln zusammen, welche bei praktischen und technischen Anwendungen häufig vorkommen, und sind deshalb bei Weitem vorzugsweise nur auf den Gebrauch von Praktikern und Technikern berechnet. Dagegen hat das vorliegende Büchlein jedenfalls viel mehr den eigentlichen wissenschaftlichen Mathematiker und Physiker im Auge, und dient ihm als Erinnerungsbuch an die Lehrsätze, Formeln und Aufgaben, welche er bei seinen wissenschaftlichen Untersuchungen am Häufigsten und am Meisten braucht, weshalb es namentlich auch Lehrern der Mathematik und Physik an höheren Unterrichtsanstalten zur Beachtung empfohlen zu werden verdient, um so mehr, weil es sich, für diesen Gebrauch ganz zweckmässig, für jetzt nur auf die elementaren Theile der beiden auf dem Titel genannten Wissenschaften erstreckt. Es umfasst in dieser Weise, verhältnissmässig in gleicher Vollständigkeit, die Arithmetik und Algebra, ebene und körperliche Geometrie, die analytische Geometrie, die Kegelschnitte, Goniometrie, ebene und sphärische Trigonometrie, Polygonometrie, Statik und Mechanik fester und flüssiger Körper, Akustik, Optik, Wärmelehre, Magnetismus, Electricität und Galvanismus, Geodäsie, Projectionslehre (polare, perspectivische, orthogonale und Schatten-Projection), und in ziemlicher Vollständigkeit die Astronomie. Ausserdem sind folgende Tafeln beigegeben: Potenztafel, Logarithmentafel, trigonometrische Tafel, Sehnentafel, Tafel der Vielfachen von π, Interpolationstafel, Zeittafel, Ortstafel, Refractionstafel, Planeten- und Cometentafel, Sterntafel mit der Präcession. Den Beschluss macht eine historisch-literarische Tafel, in welcher die wichtigsten Entdeckungen und literarischen Erscheinungen auf dem Gebiete der Mathematik und Physik chronologisch verzeichnet sind. Das Ganze umfasst nur 152 Seiten und überschreitet also den Raum eines Taschenbuchs durchaus nicht. Wir wünschen, dass es dem Herrn Verfasser gefallen möge, auch für die höhere Mathematik ein ähnliches Büchlein zu liefern.

Arithmetik.

Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Differenzial- und Integralrechnung mit Verwandlung der Functionen von F. W. Hesselbarth, Dr. phil. Zweite verbesserte Auflage. Leipzig. Arnold. 1852. 4.

Indem wir diese Schrift aus ihrer ersten Auflage als hinreichend bekannt voraussetzen, wollen wir nur noch bemerken, dass wir in der That, auch bei dem besten Willen, nichts zu ihrer Empfehlung zu sagen wissen.

Transformation und Ausmitteiung bestimmter Integrale. Abhandlung, welche bei der Hochverordneten philosophischen Fakultät der Kaiserlichen Universität zu Dorpat zur Erlangung der Magisterwürde eingereicht hat und öffentlich vertheidigen wird Dr. Ph. P. Helmling. Mitau und Leipzig. Reyher. 1851. 4.

Eine sehr gute Gradualschrift, die zu allgemeiner Beachtung empfohlen und weiter, als es bei dergleichen Schriften gewöhnlich geschieht, verbreitet zu werden verdient. Es beschäftigt sich dieselbe mit der Entwickelung der Integrale, welche unter der allgemeinen Form

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}.f(x).\partial x$$

stehen, wobei ein Integral dieser Form der Herr Verf. als gefunden betrachtet, wenn es auf ein anderes von der Form

$$\int_0^a e^{-x^2}\partial x, \quad \text{oder} \int_a^\infty e^{-x^2}\partial x, \quad \text{oder} \int_0^a e^{+x^2}\partial x$$

zurückgeführt ist, und wenn überhaupt bei dem reducirten die mechanische Quadratur bequemer angewendet werden kann. Hauptsächlich ist vermittelst der sogenannten Methode der Variation der Constanten die Auswerthung bestimmter Integrale von der Integration vollständiger oder reducirter linearer Differentialgleichungen abhängig gemacht, und dadurch sind viele Integrale auf solche von einfacherer Form und anderen Gränzen zurückgeführt worden. Die Schrift enthält einen grossen Reichthum bemerkenswerther Formeln, und ist auch Anfängern in der Integralrechnung zur Uebung in dieser Wissenschaft recht sehr und mehr zu empfehlen, als viele unserer Sammlungen von Beispielen aus der Integralrechnung. In der Vorrede spricht der Herr Vf. dem Herrn Professor Minding seinen Dank für mehrfache ihm von demselben gewordene Belehrung aus, und bemerkt auch, dass das von ihm entwickelte Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}\partial x}{r^2+x^2}$$

schon früher von Herrn Collegienrath Clausen für den speziellen Fall $r=1$, $a=1$ entwickelt worden sei. Solche Inauguralschriften möchte man allen Universitäten, selbst manchen grossen und weit berühmteren, wünschen. Möge der Herr Verf. bald einen seinen Fähigkeiten entsprechenden Wirkungskreis finden!

Ueber die bestimmten Integrale von der Form

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{N},$$

in denen

$$N = l + l'\cos^2\varphi + l''\sin^2\varphi + 2m\cos\varphi\sin\varphi + 2m'\sin\varphi + 2m''\cos\varphi$$

ist. Von A. Wichert, Oberlehrer am Gymnasium zu Konitz. (Programm des Gymnasiums zu Konitz vom 1sten August 1851.). Konitz. 1851. 4.

Die Integration von $\int \frac{\partial\varphi}{N}$ giebt gleichzeitig die Integrale

$$\int \frac{\cos\varphi\partial\varphi}{N}, \int \frac{\sin\varphi\partial\varphi}{N}, \int \frac{\cos^2\varphi\partial\varphi}{N}, \int \frac{\sin^2\varphi\partial\varphi}{N},$$

$$\int \frac{\cos\varphi\sin\varphi\partial\varphi}{N};$$

mit deren Entwickelung zwischen den Gränzen 0 und 2π sich der Herr Verf. in dieser sehr lesenswerthen und einen guten Beitrag zur Integralrechnung liefernden Schulschrift, die einer weiteren Verbreitung, als dergleichen Schriften gewöhnlich finden, sehr werth ist, beschäftigt, für den Fall nämlich, dass N für keinen reellen Werth von φ verschwindet. Auch giebt der Herr Verf. die Mittel an, um allgemein

$$\int \frac{\cos i\varphi . \partial\varphi}{N^k}, \quad \int \frac{\sin i\varphi . \partial\varphi}{N^k}$$

zu finden, wenn i und k ganze positive Zahlen sind. Die Methode der Lösung ist eine dreifache, da jene Integrale einmal durch Transformation des Nenners N, dann durch Zerfällung desselben in Factoren und durch Reihenentwickelung gefunden werden können. Jede dieser Methoden wendet der Herr Vf. an, und weiset die Identität der Resultate nach. Die Transformation des Nenners in die Form

$$N = k + k'\sin^2\psi + k''\cos^2\psi$$

schickt der Herr Verf. nach C. G. J. Jacobi in Crelle's Journal. Bd. II. und VIII. voraus. Die Schrift legt von dem analytischen Scharfsinne des Herrn Verfassers ein sehr vortheilhaftes Zeugniss ab, und verdient jedenfalls recht sehr, von den Mathematikern allgemeiner beachtet zu werden. Auch vorgerückteren jungen Mathematikern wird sie eine sehr gute Uebung in der Integralrechnung gewähren. Mögen diese wenigen Worte ihr zu hinreichender Empfehlung dienen!

Geometrie.

1. Beiträge zu einer systematischen Entwickelung der Geometrie aus der Anschauung. Von C. R. Kosack, Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu

Nordhausen. (Programm des Gymnasiums zu Nordhausen von Ostern 1852). Nordhausen. 1852. 4.

Ob diese Beiträge, welche uns mehr einen philosophischen als streng mathematischen Standpunkt einzunehmen scheinen, gerade die streng wissenschaftliche Geometrie fördern werden, müssen wir dahin gestellt sein lassen. Vielleicht aber können Lehrer bei dem ersten, vorzüglich auf die Anschauung basirten geometrischen Unterrichte Gebrauch von denselben machen, und mögen sie daher in dieser Beziehung immerhin zur Beachtung empfohlen werden. Ein strenger euklidischer Geist hat uns nicht aus denselben entgegen gewehet; sich in diesem zu bewegen, war ja aber auch nicht die Absicht des Herrn Vfs., da er ausdrücklich die Entwickelung der Geometrie **aus der Anschauung** als seinen Zweck bezeichnet.

Die Gleichheit und Aehnlichkeit der Figuren und die Aehnlichkeit derselben. Ein Supplement der Elementargeometrie von Dr. Richard Baltzer, Oberlehrer an der Kreuzschule zu Dresden. Dresden. G. Schönfeld (C. A. Werner). 1852. 8.

Die von Möbius in die Geometrie eingeführte Lehre von den Verwandtschaften der Figuren ist bekanntlich als eine wesentliche Erweiterung dieser Wissenschaft zu betrachten. Bisher ist diese Lehre meistens nur von dem Standpunkte und mit Hülfe der analytischen Geometrie behandelt worden, und in die Lehrbücher der synthetischen Geometrie hat dieselbe noch keinen rechten Eingang gefunden, ist überhaupt noch nicht Gemeingut der sogenannten Elemente geworden, wohin sie doch offenbar gehört, da sie recht eigentlich in das Wesen der Geometrie eingreift, und gleich beim Eintritt in diese Wissenschaft dem Lehrlinge sich darbietet, da ja schon in der euklidischen Geometrie bekanntlich die Congruenz, die Gleichheit und die Aehnlichkeit der Figuren besonders scharf hervortretende Hauptabschnitte bilden. Der Herr Verf. der vorliegenden Schrift hat es nun unternommen, die Lehre von den Verwandtschaften der Figuren, von einem allgemeineren Standpunkte aus, bloss auf dem Wege der synthetischen oder sogenannten elementaren Geometrie zu behandeln, überhaupt diese Lehre in den Kreis der Elemente zu ziehen, und hat dabei mit den beiden Verwandtschaften der Gleichheit und Aehnlichkeit, und der Aehnlichkeit, den Anfang gemacht, wobei er sich keineswegs bloss auf ebene Figuren einschränkt, sondern auch die Gebilde des Raums überhaupt, insbesondere auch sphärische Figuren, in den Kreis seiner Betrachtungen zieht. Wir halten dieses Unternehmen für ein sehr verdienstliches, und wünschen sehr, dass die vorliegende Schrift, namentlich auch von den Lehrern der Mathematik, die wohl verdiente Beachtung finden und bei dem geometrischen Unterrichte benutzt werden möge. Alle Bemühungen, die Resultate aus höheren Gesichtspunkten unternommener Forschungen so viel als möglich in den Kreis der sogenannten Elemente zu ziehen, haben wir immer für sehr verdienstlich gehalten, und wünschen daher, dass der geehrte Herr Verfasser der vorliegenden Schrift seine Musse dergleichen Arbeiten auch fernerhin zuwenden möge, wodurch er gewiss um die Wissenschaft in methodischer Rücksicht sich wesentlich verdient machen wird. Wir sehen der Fortsetzung seiner Arbeiten auf diesem Felde mit Verlangen entgegen.

Ueber Parallel- und Gegentransversalen im geradlinigen Dreieck, vom Gymnasiallehrer Gandtner. Programm des Gymnasiums zu Greifswald von Ostern 1852. Greifswald. C. A. Koch's Verlagsh. (Th. Kunike). 1852. 4. Preis 9 Ngr.

Wenn von den Endpunkten B und C einer Seite BC eines ebenen Dreiecks ABC aus, man sich entweder auf der Seite BC selbst, oder auf deren Verlängerungen über B und C hinaus, beliebige aber gleiche Stücke BD und CE abgeschnitten denkt, etwa durch den Punkt D und die Spitze A des Dreiecks ABC die Ecktransversale AD, und durch den Punkt E mit derselben eine Parallele EF zieht: so nennt der Herr Verf. des vorliegenden Programms die Linie EF die zu der Ecktransversale AD gehörige Paralleltransversale; jenachdem der Punkt E, durch welchen EF gezogen ist, in der Seite AB selbst oder in deren Verlängerung nach der einen oder nach der anderen Seite hin liegt, heisst EF eine innere oder äussere Paralleltransversale. Was der Herr Verf. unter Gegentransversalen versteht, muss man S. 10. der vorliegenden Schrift selbst nachsehen, da dieser Begriff nur im Fortgange der Untersuchung selbst gewonnen werden kann, und sich daher hier in der Kürze und ohne Figur nicht wohl deutlich machen lässt. Von solchen Parallel- und Gegentransversalen hat der Herr Verf. in diesem Programm eine Reihe von Sätzen bewiesen, die dem grösseren Theile nach neu und recht bemerkenswerth sind, und von Neuem den Beweis liefern, wie reich an merkwürdigen geometrischen Beziehungen eine so einfache Figur wie das ebene Dreieck ist. Die sämmtlichen Sätze stehen in einem inneren Zusammenhange unter einander, und der Herr Verf. hat durch diesen Aufsatz zugleich seinen Schülern Stoff und Materialien zu geometrischen Uebungen darbieten wollen, indem er es für zweckmässig hält, den Schülern der obern Klassen von Zeit zu Zeit eine kurze geometrische Abhandlung, welche eine Reihe von Sätzen in systematischer Folge enthält, zum Privatstudium vorzulegen, worin wir ihm völlig beistimmen, und der Meinung sind, dass dergleichen Uebungen zur Kräftigung des mathematischen Geistes wenigstens eben so zweckmässig sind wie zur eignen Lösung den Schülern vorgelegte einzelne geometrische Aufgaben, indem man nach unserer Ueberzeugung und früheren langen Erfahrung in letzterer Beziehung ja nicht zu weit gehen darf, und sich immer auf nur leichtere, die Kräfte der Schüler in keiner Weise übersteigende Aufgaben beschränken muss, deren Lösung zugleich so viel als möglich nach einer bestimmten mathematischen Methode folgerecht mit Leichtigkeit ausgeführt werden kann, und nie dem verführerischen Glück zufälligen Findens anheim gestellt bleibt. So ungemein freigebig man früher mit dem Aufgeben einzelner geometrischer Probleme in den Schulen war, so scheinen doch in neuerer Zeit, so weit unsere Erfahrung und Kenntniss in diesen Dingen reichen, viele umsichtige Lehrer mit Recht davon theilweise zurückzukommen, und öfters Stoff zu geometrischen Uebungen in solchen Arbeiten zu suchen, wie der Herr Verf. in diesem Programm ihn in recht zweckmässiger Weise darbietet.

Die Behandlungsweise des Gegenstandes ist für den zu erreichen beabsichtigten Zweck mit Recht eine gemischte, theils geometrische, theils trigonometrische; und so einfach der Gegenstand auch an sich ist, so sind wir doch überzeugt, dass namentlich solche Leser des Archivs, welche für das immer bessere Gedeihen des mathematischen Unterrichts sich interessiren, von dieser empfehlenswerthen Schulschrift mit eben so vielem Vergnügen wie wir nähere Kenntniss nehmen werden; möge dieselbe daher deren Beachtung und gewiss erfolgreichen Benutzung beim Unterrichte bestens empfohlen sein.

Zusätze zu dem Florentiner Problem. Von M. W. Drobisch, Mitglied der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig. Weidmann. 1852. 8.

Das von Viviani den Geometern seiner Zeit vorgelegte sogenannte Florentiner Problem (Aenigma Florentinum) verlangte auf der Oberfläche einer Kugel eine Curve zu finden, die eine quadrirbare Fläche entweder einschliesst, oder deren Fläche, von einem angeblichen Theile der Kugelfläche hinweggenommen, einen quadrirbaren Rest übrig lässt. Statt der sphärischen Curve selbst kann man auch deren Projection auf die Ebene eines grössten Kreises suchen. Auf diesem Wege hat Euler gezeigt, dass es unendlich viele Lösungen des Problems giebt. Viviani selbst hatte den geometrischen Satz gefunden, dass ein über der Ebene eines grössten Kreises der Kugel errichteter Cylinder, der zur Basis einen über dem Halbmesser der Kugel als Durchmesser beschriebenen Kreis hat, die Kugelfläche in zwei Oeffnungen durchbricht, deren Fläche, von der sie umschliessenden Halbkugel hinweg genommen, einen Rest übrig lässt, welcher dem Quadrat des Kugeldurchmessers gleich, also quadrirbar ist. Theils andere geometrische Sätze, theils Erweiterungen der vorhergehenden, haben Montucla, Bossut und Nic. Fuss gefunden. Den Bemühungen dieser Mathematiker schliessen sich nun die Untersuchungen des Herrn Verfassers der vorliegenden Abhandlung auf würdige Weise an. Dabei ist es weniger seine Absicht, das Problem in so allgemeiner Weise, wie Euler that, zu fassen, als vielmehr, wie die drei vorher genannten Mathematiker, neue bemerkenswerthe specielle geometrische Beziehungen zu finden, was ihm auch in ausgezeichneter Weise gelungen ist, indem er seine Betrachtungen vorzüglich an die zwar sehr einfache, bisher aber unbeachtet gebliebene Bemerkung anschliesst, dass die sphärische Curve, welche die quadrirbare sphärische Fläche begränzt, auf die Ebenen von drei auf einander senkrecht stehenden grössten Kreisen der Kugel projicirt werden kann, und daher immer drei der Aufgabe genügende ebene Curven giebt; ist nun eine der letzteren gegeben, so sind es auch die beiden andern, und es führt daher jede Auflösung des Problems durch eine solche, von dem Herrn Verf. die quadrirende genannte, Curve immer zu zwei andern connexen Auflösungen durch quadrirende Curven, die in den bezeichneten beiden andern Ebenen liegen. Wir halten diese Abhandlung für einen sehr guten Beitrag zur höheren Geometrie, und wünschen sehr, dass sie namentlich auch von jungen Mathematikern zur Uebung in der Anwendung der höheren Analysis auf die Theorie der krummen Flächen fleissig benutzt werden möge, wozu sie vortreffliche Materialien enthält.

Tabulae curvarum quartae ordinis symmetricarum, asymptotis rectis et linea fundamentali recta praeditarum, quas delineavit et expositione illustravit Augustus Beer, Phil. Dr. Cum XXXV Tabulis. Bonnae, apud A. Marcum. 1852. 4. 2 Thlr.

Mit diesen 35 Tafeln hat der Herr Verf. den Mathematikern ein sehr angenehmes Geschenk gemacht. Die auf denselben gelieferten graphischen Darstellungen der auf dem Titel näher bezeichneten Curven des vierten Grades sind äusserst lehrreich und interessant, und bieten zu weiteren Betrachtungen mannigfaltigen Stoff dar. Je verwickelter diese Curven theilweise sind, und je schwieriger ihre Gestalten bloss aus ihren Gleichungen zu erkennen sind, desto lehrreicher sind diese Zeichnungen. Die den Tafeln vorangeschickte Einleitung enthält Alles, was zu deren Verständniss nöthig ist, und das Werk darf daher den Lesern des Archivs in jeder Beziehung zur Beachtung bestens empfohlen werden.

Astronomie.

Beobachtungen und Wahrnehmungen, welche bei der totalen Sonnenfinsterniss am 28. Juli 1851 gemacht worden sind. Von Dr. Busch, Director der Sternwarte zu Königsberg. Königsberg. Voigt. 1852. 8. 10 Sgr.

Dieser Abdruck eines in der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft in Königsberg am 12. November 1851 gehaltenen Vortrags enthält eine sehr gute, für jeden Gebildeten interessante Zusammenstellung aller an verschiedenen Orten und von verschiedenen Beobachtern bei der vorjährigen grossen Sonnenfinsterniss gemachten Beobachtungen von allgemeinem naturwissenschaftlichen Interesse, weshalb wir unsere Leser recht sehr auf dieses Schriftchen aufmerksam machen. Auf Mittheilungen aus demselben können wir hier natürlich nicht eingehen, wollen indess Folgendes zu bemerken nicht unterlassen. Bekanntlich ist die Hauptfrage, welche rücksichtlich der totalen Sonnenfinsternisse bei dem jetzigen Stande der Sache zu beantworten ist, folgende: „Gehören die Corona und die sogenannten Protuberanzen oder Prominenzen der *Sonne* oder dem *Monde* an?“ Ueber diese Frage spricht der geehrte Herr Verf. S. 25. sich folgendermassen aus: „Es findet zwischen den Protuberanzen und den Sonnenflecken ein unverkennbarer Zusammenhang statt, und sowohl die Protuberanzen, wie auch die Corona, gehören der *Sonne*, und *nicht dem Monde* an.“ Ganz in demselben Sinne haben diese Frage bis jetzt alle vorurtheilsfreien Beobachter, welche zugleich die hier im Weltraume uns sich zeigenden Erscheinungen in der unendlichen Grossartigkeit, in der sie in der Wirklichkeit — d. h. im Weltraume selbst — auftreten, aufzufassen im Stande sind, beantwortet, und nach den verschiedenen eingetretenen und sorgfältig beobachteten Umständen kann auch über die Beantwortung der in Rede stehenden Frage in obiger Weise in der That kein Zweifel mehr sein. Kann es auch hier natürlich nicht der Ort sein, dies näher zu begründen, — was auch in der That gar nicht nöthig ist, da Jeder, der die verschiedenen erschienenen Berichte sämmtlich mit Aufmerksamkeit und ohne Vorurtheil gelesen hat, ganz von selbst zu den obigen Schlüssen kommen muss, — so will ich doch die Leser bei dieser Gelegenheit namentlich auf einen Bericht eines sehr ausgezeichneten Beobachters, des Herrn Hofrath Otto v. Struve in Pulkowa, über die Beobachtung der vorjährigen grossen Sonnenfinsterniss zu Lomsa in Polen aufmerksam machen, welcher der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg am 8. Aug. v. J. vorgelegt worden ist, und sich im Bulletin de la Classe Phys.-Math. de l'Acad.

Imp. des sc. de St. Petersb. 1851. Nr. 217. findet, auch in Jahn's astronomischen Unterhaltungen. 1852. Nr. 19. und Nr. 20., leider jedoch nur im Auszuge, mitgetheilt worden ist. In diesem ausgezeichneten Berichte hat Herr Otto von Struve die obige Frage gleichfalls sorgfältig discutirt, und leitet aus seinen Beobachtungen mit völliger Bestimmtheit die beiden Folgerungen ab: „1) dass die Prominenzen oder Protuberanzen dem *Sonnenkörper* angehörige Theile sind, welche bei der Bewegung des Mondes vor der Sonnenscheibe auf der einen Seite allmälig hervortreten und auf der entgegengesetzten entsprechend verschwinden; 2) dass auch die Corona ein integrirender Theil des *Sonnenkörpers* und gewissermassen als eine die Photosphäre der Sonne umgebende Atmosphäre anzusehen ist." — Gut auch, dass die Beobachtungen aller vorurtheilsfreien Beobachter dies unwiderleglich herausgestellt haben!! Denn können die Astronomie und Physik noch irgend Hoffnung haben, über die eigentliche Natur unsers Centralkörpers näheren Aufschluss zu erhalten, so ist dieselbe nach unserer Ueberzeugung allein auf die künftige sorgfältige Beobachtung der bei totalen Sonnenfinsternissen vorkommenden Erscheinungen, und auf die umsichtige Discussion der bereits vorhandenen Beobachtungen gegründet, wobei man auch noch immer mehr, als bis jetzt schon geschehen, historische Nachforschungen anstellen sollte, ob ähnliche Erscheinungen nicht schon früher beobachtet und beschrieben worden sind.

Specimen academicum inaugurale de solutione problematis Keppleriani, auctor Combertus Petrus Burger, Roterodamensis. Lugduni-Batavorum, apud P. Engels. 1851. 4.

Wir haben schon früher öfters auf die Gründlichkeit und den grossen Umfang, durch welche sich die auf den holländischen Universitäten erscheinenden Dissertationen oft sehr vortheilhaft auszeichnen, hingewiesen. Dies ist auch bei der vorliegenden Inauguralschrift der Fall. Der Herr Vf. hat in derselben fast alle für das Kepler'sche Problem gegebenen Auflösungen zusammengestellt, beurtheilt und durch numerische Beispiele erläutert. Der meiste Raum ist mit Recht der von Bessel mit Hülfe der Fourier'schen Reihen gegebenen Auflösung gewidmet, deren Eigenthümlichkeit eben hauptsächlich in der Anwendung dieser wichtigen und merkwürdigen Reihen auf den speciellen Fall der Kepler'schen Aufgabe liegt, und die deshalb auch in unseren Supplementen zum mathematischen Wörterbuche. Thl. I. S. 200. Art. Bestimmtes Integral. von uns entwickelt worden ist. Vielleicht ist es für den geehrten Herrn Verf. nicht ohne Interesse, wenn wir ihn darauf aufmerksam zu machen uns erlauben, dass schon früher in Deutschland eine von ihm nicht gekannt zu sein scheinende Dissertation über das Kepler'sche Problem erschienen ist, die den Titel hat: Kepleri Problema celebre. Commentatio quam ampl. Ph. ord. cons. etc. publice defendet W. H. Detmoldt. Gottingae. 1798. 4. Dieselbe kann sich aber mit der ausgezeichneten Schrift des Herrn Verfs gar nicht messen, und derselbe würde für seinen Zweck in ihr nur wenig Ausbeute gefunden haben. Allen denen, welche sich mit der Kepler'schen Aufgabe und deren verschiedenen Auflösungen ausführlich bekannt machen wollen, empfehlen wir die vorliegende Schrift recht sehr zur Beachtung.

Index Lectionum in Lyceo Regio Hosiano Brunsbergensi per aestatem anni MDCCCLII a die XIX Aprilis instituendarum. Praemissa est Dr. Laur. Feldtii commentatio de Gaussii formula Paschali analytica. Adjectum est tabulae paschalis ab anno 1850 usque ad annum 2000 specimen. Brunsbergae. Heyne. 4°.

In diesem sehr verdienstlichen Programm hat Herr Professor Feldt in Braunsberg einen Beweis der Regel zur Berechnung des Osterfestes geliefert, die Gauss schon im Jahre 1800 im zweiten Bande S. 121. der Monatl. Correspondenz ohne Beweis mittheilte, und eine von ihm berechnete, von 1850 bis 2000 reichende, Ostertafel beigefügt, weshalb wir alle, welche an dieser Gaussischen Regel zur Berechnung des Osterfestes das derselben gebührende Interesse nehmen, auf diese lesenswerthe Schrift aufmerksam machen. Bemerken wollen wir nur noch, dass Gauss in der Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften. Thl. I. S. 158. eine Berichtigung seiner Regel bekannt gemacht hat, auf die er durch den verstorbenen Professor Dr. Tittel aus Erlau zuerst aufmerksam gemacht worden war. Diesen letzteren Gaussi'schen Aufsatz scheint der geehrte Herr Vf. des vorliegenden Programms nicht gekannt zu haben.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehl Seiner k. k. apost. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von Carl von Littrow, Director der Sternwarte u. s. w. Dritter Folge Erster Band. Wien. Gedruckt bei Sommer. 1851. 8.

Mit diesem Bande beginnt der verdienstvolle Director der Wiener Sternwarte, Herr C. von Littrow, die dritte Folge der Annalen des unter seiner Direction stehenden Instituts, wobei zugleich das Format verändert worden ist, indem die Annalen nicht mehr wie bisher in Quart, und noch früher in Folio, sondern von jetzt an, nach dem Vorgange anderer ähnlicher Werke, zweck- und zeitgemäss in Octav erscheinen, gedruckt auf sehr schönem starken Papier mit sehr scharfer und deutlicher Schrift. Aus unsern früheren Berichten über diese Annalen kennen die Leser unserer Zeitschrift das grosse Verdienst, welches Herr C.

von Littrow sich durch die nun vollendete Herausgabe der Piazzi'schen Beobachtungen erworben hat, und werden auch wissen, dass dieses Werk, indem es, z. B. von Herrn Professor Peters in Königsberg bei seinen bekannten schönen Arbeiten über die Fixsterne, als Grundlage verschiedener astronomischer Untersuchungen benutzt worden ist, der Wissenschaft schon manche schöne Frucht getragen hat. Durch die Herausgabe des vorliegenden ersten Bandes der dritten Folge der Annalen erwirbt sich Herr C. v. Littrow ein neues ähnliches Verdienst um die Wissenschaft, indem er in demselben die erste Hälfte eines von Herrn W. Oeltzen aus den bekannten Argelander'schen Zonen abgeleiteten Sterncatalogs unter dem folgenden Titel publicirt:

Argelanders Zonen-Beobachtungen vom 45. bis 80. Grade nördlicher Declination, in mittleren Positionen für 1842,0 nach gerader Aufsteigung geordnet von Wilhelm Oeltzen, Assistenten der Wiener Sternwarte. Erste Abtheilung (0^h bis $11^h.34^m$).

Ueber die Entstehung dieser Arbeit spricht sich Herr C. von Littrow in der Vorrede auf folgende Art aus: „der gegenwärtige Band der Annalen, in der vollständigen Reihe der XXXV., und der folgende, bereits unter der Presse befindliche, geben einen aus den ersten Argelander'schen Zonen abgeleiteten Sternkatalog, dessen Anfertigung sich Herr W. Oeltzen zur rühmlichen Aufgabe gestellt hat. Als Herr Oeltzen im Spätherbste 1850 in das Personal des hiesigen Observatoriums trat, hatte er bereits einige Monate sich mit diesem Gegenstande beschäftigt. Die höchst umsichtige Anlage des Ganzen bestimmte mich sofort, ihn zunächst zur Vollendung dieses Theils weiterer Untersuchungen, in denen er begriffen ist, zu ermuntern und ihm hierbei mit allen mir zu Gebote stehenden Mitteln um so mehr zu Hülfe zu kommen, als damit eine wichtige Vorbereitung für das schon früher von unserer Anstalt gefasste und eben angebahnte Vorhaben ergänzender Zonenbeobachtungen geliefert wird." — Wir haben diese Worte hier angeführt, weil aus denselben sich ergiebt, dass das Verdienst der wirklichen Anfertigung dieses Catalogs Herrn W. Oeltzen gebührt. Aber auch Herr C. von Littrow machte die Ausführung der Arbeit in verhältnissmässig so kurzer Zeit dadurch möglich, dass er Herrn Oeltzen der Theilnahme an den allgemeinen Geschäften der Sternwarte enthob, und durch die bekannte grosse Liberalität, mit welcher der k. k. österreichische Unterrichtsminister, Herr Leo Graf von Thun, Excellenz, alle wissenschaftlichen Unternehmungen unterstützt, wurde es möglich, Herrn W. Oeltzen für die mechanischen Ausführungen noch einen Hülfsarbeiter beizugeben, was ein neuer Beweis ist, wie sehr die k. k. österreichische Staatsregierung sich die Förderung der exacten Wissenschaften nach allen Seiten und Richtungen hin angelegen sein lässt. Ueber die Art der Berechnung, die Einrichtung und den Gebrauch des Catalogs enthält eine demselben vorangeschickte sehr deutlich verfasste Einleitung alles Erforderliche. Wir wünschen sehr, dass es dem verdienten Herrn Berechner und Herausgeber bald gelingen möge, das mathematische und astronomische Publicum mit dem zweiten Theile dieser verdienstlichen Arbeit zu beschenken, woran ja auch kein Zweifel sein kann, da derselbe laut der Vorrede schon unter der Presse ist. Schliesslich bemerken wir noch, dass es bei der Herausgabe dieses Sterncatalogs keineswegs die Absicht sein konnte, das treffliche Original, welches derselbe bearbeitet, gleichsam zu verdrängen, sondern nur dessen Benutzung zu erleichtern und übersichtlicher zu machen, was auch nach unserer Ueberzeugung durch denselben vollständig erreicht wird, da der Catalog in möglichst lebendigem Zusammenhange mit dem ursprünglichen Werke erhalten wurde, das man natürlich bei dem Gebrauche des Catalogs immer zugleich zur Hand haben wird. Wir müssen uns hier leider mit diesen kurzen Andeutungen begnügen, und wünschen schliesslich, dass das verdienstliche Werk recht bald in den Händen aller Astronomen befindlich sein und häufig benutzt werden möge, was jedenfalls zu schönen Resultaten führen wird. Den zweiten Theil werden wir nach seinem Erscheinen sogleich anzeigen.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien (S. Literar. Ber. Nr. LXV. S. 847.).

Jahrgang 1851. VI. Band. 1. Heft. S. 43. Pucher: Neue Methode photographische Bilder auf Glas zu verfertigen. — S. 53. Rochleder: Ueber eine bituminöse Substanz. — S. 58. Schrötter: Ueber das Aequivalent des Phosphors. — S. 88. Magnetische Declinationsbeobachtungen vom Bergamte am Dürrenberge. — S. 90. Boué: Drei Wasserhosen im Monat August 1838 auf dem See von Janina in Albanien.

Jahrgang 1851. VI. Band. 2. Heft. S 149. Burg: Ueber die vom Civil-Ingenieur Kohn angestellten Versuche, den Einfluss wiederholter Torsionen auf den Molecularzustand des Schmiedeisens auszumitteln. — S. 152. Spitzer: Ueber die geometrische Darstellung eines Systems höherer Zahlengleichungen. — S. 188. Militzer: Hilfstafeln der Reduction gemessener Gasvolumina auf die Temperatur 0^0 und den Luftdruck 760^{mm}. — S. 206. Doppler: Ueber die Anwendung der Syrene und des akustischen Flugrädchens zur Bestimmung des Spannungsgrades der Wasserdämpfe und der comprimirten Luft. — S. 214. Schrötter: Ueber die Bestimmung des Aequivalents des Selens. —

Jahrgang 1851. VI. Band. 3. Heft. S. 253. Stampfer: Comissionsbericht über die Einführung genauer Alkoholometer. — S. 265. Stampfer: Ueber Versuche, welche sich auf die Wirkung der Capillarität beziehen. — S. 286. Thomas: Beobachtungen über gewisse Erscheinungen, welche sich an den Krystall-Linsen verschiedener Thiere beobachten lassen. — S. 313. Molin: Falsità di un esperimento di Matteucci.

Jahrgang 1851. VI. Band. 4. Heft. S. 430. Santini: Ueber den Biela'schen Cometen. — S. 461. Gintl: Der transportable Telegraph für Eisenbahnzüge.

Jahrgang 1851. VI. Band. 5. Heft. S. 554. Brücke: Ueber eine von ihm erfundene und zusammengestellte Arbeitsloupe. — S. 555. Stampfer: Ueber einen in der Werkstätte des k. k. polytechnischen Instituts verfertigten Theodoliten für Markscheider, der sich auch vorzüglich zum Gebrauche auf wissenschaftlichen Reihen eignet. — S. 557. Natterer: Ueber Gasverdichtungsversuche. — S. 571. Pohl: Chemisch-physikalische Notizen. — S. 601. Mayer: Ueber das mechanische Aequivalent der Wärme.

Jahrgang 1851. VII. Band. 1. Heft. S. 3. Kunzek: Uebersichten der Jahres- und Monatsmittel aus den während eines Zeitraumes von 20 Jahren in Lemberg fortgeführten meteorologischen Beobachtungen. — S. 160. Doppler: Ueber Declinationsbeobachtungen aus älterer Zeit in Freiberg in Sachsen. — S. 162. Doppler: Ueber den Einfluss der Bewegung auf die Intensität der Töne.

Jahrgang 1851. VII. Band. 2. Heft. S. 228. Stampfer: Ueber die am 28. Juli (1851) bevorstehende Sonnenfinsterniss.

Jahrgang 1851. VII. Band. 3. Heft. S. 386. Freyer: Ausflug auf den Terglou zur Zeit der Sonnenfinsterniss am 28. Juli d. J. — S. 389. Haidinger: Das Interferenz-Schachbrettmuster und die Farbe der Polarisationsbüschel. — S. 407. Columbus: Die Sonnenfinsterniss am 28. Juli 1851. — S. 411. Singer: Bestimmungen der elektromotorischen Kraft einer galvanischen Kette. — S. 412. Fritsch: Ueber die Temperaturverhältnisse und die Menge des Niederschlages in Böhmen. — S. 449. Weisse: Meteorologische Beobachtungen. — S. 453. Boué: Ueber die wunderbaren donnerartigen Detonationen, welche die heurigen Gewitter und ungeheuren Regengüsse zwischen dem 20. und 26. September zu Vöslau mehrmals begleiteten. — S. 454. Brücke: Ueber Meyer's optischen Versuch. — S. 455. Spitzer: Zusätze zu seinen Arbeiten über höhere Gleichungen. — S. 471. Skuchersky: Die Theorie der Theilungspunkte als Beitrag zur Lehre von der freien Perspective.

Jahrgang 1851. VII. Band. 4. und 5. Heft. S. 563. Boué: Ueber die Nothwendigkeit die Erdbeben und vulcanischen Erscheinungen genauer als bis jetzt beobachten zu lassen. — S. 684. Stampfer: Ueber die kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter. — S. 756. Derselbe über denselben Gegenstand. — S. 776. Boué: Ueber das Erdbeben, welches Mittel-Albanien im October d. J. so schrecklich getroffen hat. — S. 801. Kreil: Bericht über die Broschüre: Instruction for taking meteorological observations at the principal foreign stations of the Royal Engineers.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. Nr. 219—230.

(M. vergl. Literar. Ber. Nr. LXX. S. 893.)

L. R. Fellenberg, Analyse des Mineralwassers von Blumenstein. Nr. 219. und 220.

R. Wolf, Simon Lhuilier. Erster Artikel. Nr. 221. bis 223.

C. Brunner, Chemische Notizen (Darstellung von reinem Silber aus Chlorsilber. — Ueber Fällung von metallischem Kupfer und Bereitung von Kupferoxyd). Nr. 225.

C. Brunner, Sohn, über die wichtigste Arbeit, welche wir in der Geologie der Alpen besitzen. Nr. 227. und 228.

R. Wolf, Sonnenflecken-Beobachtungen in der zweiten Hälfte des Jahres 1851. — Beobachtung der totalen Mondfinsterniss am 6. Januar 1852. — Beobachtungen über das Alpenglühen. Nr. 229. und 230.

Preisaufgaben der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien.

I.

Was sind Druck- und Wärme-Capacität bei Gasen, die sich ausserhalb der Nähe der Liquefaction befinden, für Functionen der Dichte und Temperatur?

Termin der Einsendung: 31. December 1852. Preis: 200 Ducaten.

(S. Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse. 1851. Band VI. Heft 5. S. 683.)

II.

Neue, möglichst genaue und umfassende Bestimmung der Planetenmassen, namentlich der wichtigeren Hauptplaneten.

Termin der Einsendung: 31. December 1853. Preis: 300 Ducaten.

(S. ebendas. S. 685.).

Fig: 2.

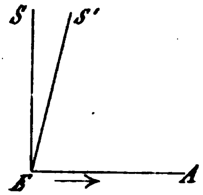
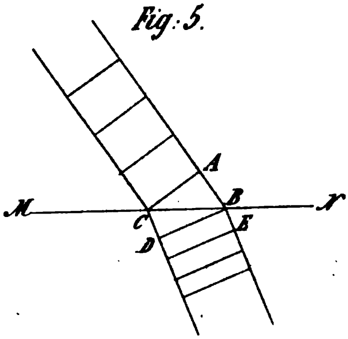


Fig: 5.



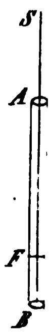
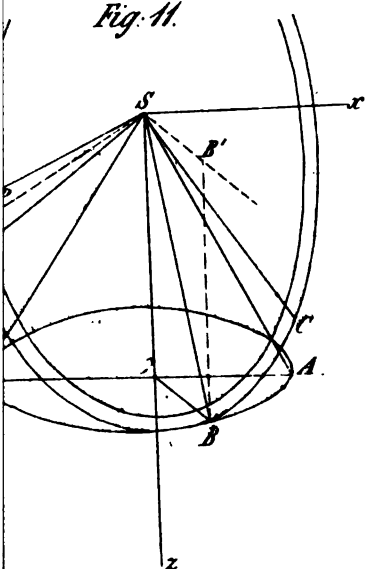
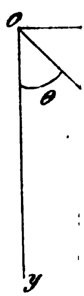


Fig: 11.





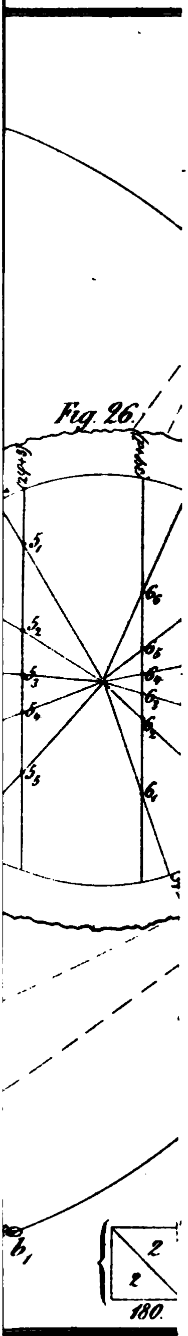
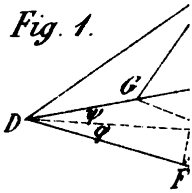


Fig. 26.

1.

$AD = a$
$BD = b$
$CD = c$

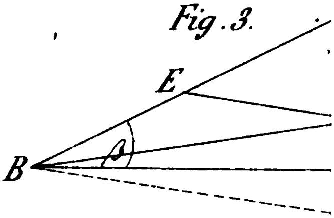
Fig. 1.



2 a.

B_{n+1}

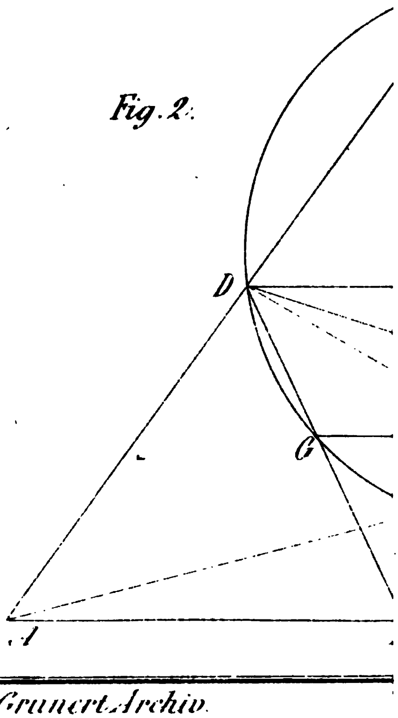
Fig. 3.



2. b.

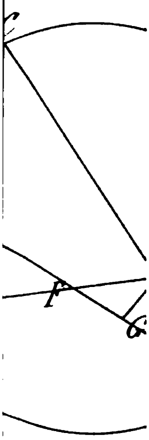
B_{n+1}

Fig. 2.



3.

B_{n+1}


C
F
G

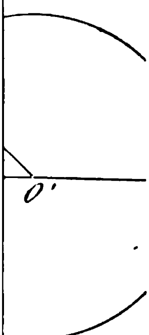
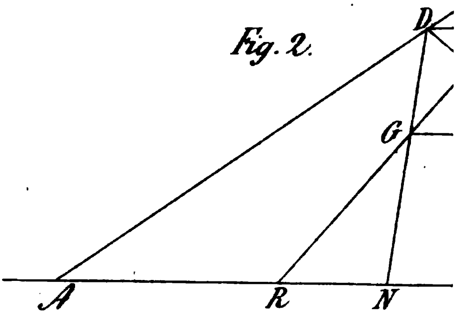
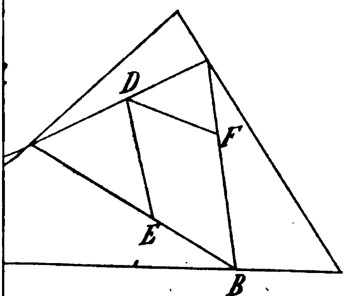

O'

Fig. 2.





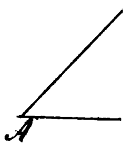
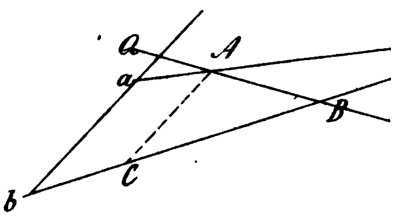


Fig. 5.



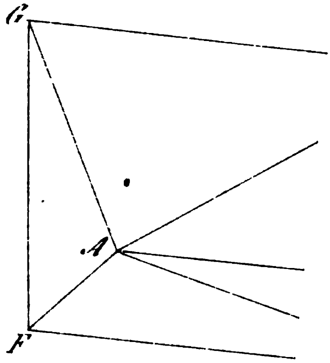
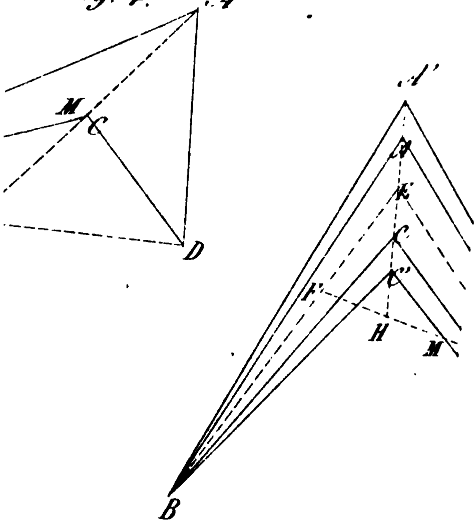
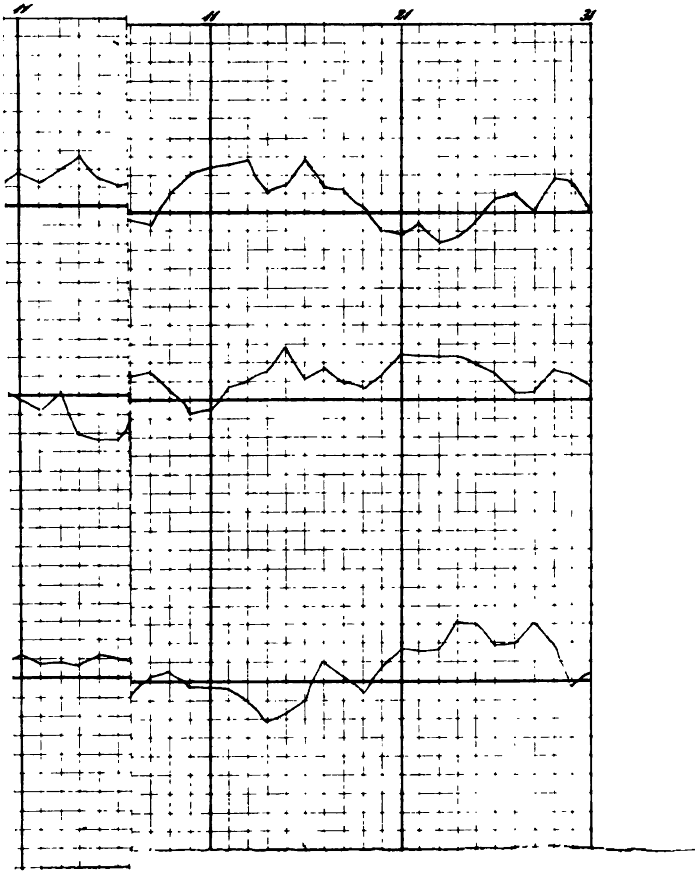


Fig. 4.



Taf. VIII.



Taf. IX.