Archiv

for

Mathematik og Naturvidenskab.

Udgivet

af

Sophus Lie, Worm Müller og **G. O. Sars.**

Tredie Bind.

Kristiania.

Forlagt af Alb. Cammermeyer.

1878.

DET MALLINGSKE BOGTRYKKERI.

Indholdsfortegnelse.

The plates (I–XX) of Sars, were issued as a supplement to this vol. and are bound in vol. IV.

Rettelse.

S. 68 L. 19 fra neden: at en stærkere Kogning destruerede
læs: at det var den stærkere Kogning, som destruerede.

DET NORDLIGE SVERIGES OG NORGES GEOLOGI.

MED ET GEOLOGISK PROFIL OVER DEN SKANDINAVISKE HALVØ FRA SALTDALEN TIL PITEÅ.

AF

KARL PETTERSEN.

I Løbet af det sidste Tiaar har der fra norsk Side været anstillet en Række af mere sammenhængende Detailundersøgelser til Belysning af det nordlige Norges geologiske Bygningsforholde. I de senere Aar har ligeledes Sveriges geologiske Undersøgelses-Bureau ladet opgaa anselige Landstrøg af det nordlige Sverige fra den Bottniske Bugt helt op til den norske Grændse. Idet de svenske og norske Undersøgelsesfelter her mødes, vil der nu maaske, ved at sammenstille det paa begge Sider saaledes vundne Udbytte, være Anledning til at vinde frem til et klarere Indblik i de her raadende geologiske Forholde i det Hele. Mer end et uløst Spørgsmaal stiller sig her frem. Og ikke mindst gjelder dette ligeoverfor en klarere Forstaaen af det nordlige Norges Geologi. Den smale Kystrand her frembyder i flere Retninger en overordentlig rig Afvexling i de geologiske Bygningsforholde. Større og mindre granitiske Partier, men navnlig dioritiske, gabbroartede og diabasiske Bjergarter bryder hyppig og ofte i enorme Felter frem mellem mægtige og udbredte Lagrækker af tildels i høi Grad metamorfoserede Skiferrækker. Forskjellige Forholde vidne her for, at Skiferdannelserne maa være at sondre i relativt ældre og yngre

Grupper med sine respektive Underafdelinger. De geologiske Bygningsforholde ere her imidlertid oftest i saa høj Grad indviklede, at det vil være forbundet med overordentlige Vanskeligheder i det hele og store at kunne gjennemføre en saadan videnskabelig berettiget Udsondring. Den underordnede Jura-Afdeling paa Andøen fraregnet, mangler her saavidt hidtil iagttaget ganske forsteningsførende Lag, der i saa Henseende kunne yde sikrere Fodfæste. De omhyggeligste Undersøgelser paa norsk Side vilde neppe kunne kaste fuldt Lys over Forholdene her, med mindre de støttedes til dermed sammenhængende Undersøgelser paa svensk Side. De geologiske Forholde her ere maaske i det hele mere gjennemsigtige end de paa den vestlige Side af Kjølen, men heller ikke disse ville rimeligvis kunne ventes fuldt udredede, med mindre de omvendt støttes til Undersøgelser over de tilgrændsende Strøg paa norsk Side.

Et Samarbejde mellem svenske og norske Geologer vil saaledes ikke alene i sig selv være ønskeligt, men antagelig ogsaa ligefremt nødvendigt.

Nedenstaaende Fremstilling ønskes opfattet som et Forsøg til et saadant Samarbejde.

I sidstforløbne August Maaned (1877) havde jeg Anledning til at overfare den skandinaviske Halvø efter Linjen fra Saltdalen over svensk Lappmark (Arjeploug og Arfvidsjaur) til Piteå ved den Bottniske Bugt. Idet jeg var knyttet som Deltager til et større Rejseselskab, for hvilket en bestemt Rute var sat, kunde jeg derunder naturligvis ikke anstille mere omfattende Undersøgelser af de over disse Strøg raadende geologiske Forholde. Det lykkedes mig dog ved en opmærksom Agtpaagivenhed under Rejsen, der over lange Strøg foretoges til Fods, og ved enkelte kortere og længere Sideexkursioner fra den afsluttede Rejsedags forskjellige Standkvarterer at følge de vexlende geologiske Forholde saaledes, at jeg har kunnet opkonstruere et sammenhængende Profil efter den saaledes fulgte Linje. Trods alle dets Mangler tror jeg dog det vil kunne være af nogen Interesse som Støttepunkt for senere fra svensk Side mere omfattende Undersøgelser inden svensk Lappmark.

Ved min Ankomst til Stockholm modtog jeg af Professor O. Torell et netop udkommet Skrift om de for offentlig Regning udførte geologiske Undersøgelser inden svensk Lappmark, — navnlig med Juckas Järfvis Malmfelter for Øje som Undersøgelsernes væsentlige Hovedformaal. Skriftet er ledsaget af et af Hr. David Hummel udarbejdet Oversigtskart over de hidtil undersøgte Strøg af Norrbottens län, — og derimellem ogsaa over det af mig befarede Strøg fra Rigsgrændsen ned mod Arfvidsjaur. Dette var allerede i 1872 bleven opgivet af «Den geologiska undersökningens» tjenstmänn, uden at dog saavidt vides noget tidligere herom er offentliggjort.

Dette Skrift ligesom ogsaa A. E. Tornebohms i 1871 udgivne Afhandling «Über die Geognosie der schwedischen Hochgebirge» [1]) har ydet mig væsentlige Bidrag til efterstaaende Fremstilling.

Til Belysning af Forholdene over de her overfarede Strøg skal først gives en kort Fremstilling over de geologiske Forholde, som de træde frem langs den omhandlede Linje. Paa Grundlag af disse skal derpaa gjøres et Forsøg paa at levere en Fremstilling af Bygningsforholdene i det hele og store over den skandinaviske Halvøs nordlige Del.

I Bunden af Saltdalen — paa den østlige Side tversovenfor Lerjordfald — og opover de laveste Partier af Dalvæggen fandtes rødlig Gneis. Strøgretningen N—S. med 30° østl. Fald. Derover Glimmerskifer med Indlejninger af krystallinisk kornig graalighvid Kalksten. I Kvartsbaand her fandtes Molybdænglans.

Junkerdalsuren — ved Solbergli — Glimmerskifer i Vex-

[1]) Bihang til »K. Svenska Vet. Ak. Handlingar« Stockholm 1873.

ling med kvartsitisk Skifer. Fald stejlt østlig. Ved Gaarden Junkerdal (i Bunden af Junkerdal omkring 600′ o. H.) hentedes følgende Profil opover Fjeldvæggen langs Dalens Nordside:

a) Granitisk Bergart.

b) Umiddelbart over Graniten mægtige Lagrækker af glindsende Skifer og Grafit-Skifer (med sort Streg). Strøgretning Ø—V. Fald 30° N.

c) Derover en lysere Bergart, antagelig kvartsitisk Glimmerskifer. Grændsen mellem (b) og (c) tegner sig som en ret skarpt begrændset Linje, der med Øjet kan følges efter lange Strækninger. Fjeldvæggene ere her stejle og temmelig utilgjængelige, saa det ikke lykkedes mig at naa op til denne Grændselinje. Den ligger antagelig i Højde af adskillig over 1000′ over Dalbunden.

Det granitiske Parti (a) træder paa det her omhandlede Sted frem mere underordnet men er dog utvivlsomt at opfatte som en fremspringende Del af et mægtigt granitisk Felt, som bryder frem langs Junkerdalens sydlige Side og herfra — for en væsentlig Del byggende fjeldpartiet mellem Junkersdal og den søndenfor liggende Løndal — skyder sig indover mod Rigsgrændsen.

Vejstien mellem Gaarden Junkersdal og Fjeldstuen Gradis paa norsk Side af Rigsgrændsen fører langs Dalens sydlige Afhæld over dette granitiske Felt. Langs hele den nordlige Side af Dalføret er den granitiske Undergrund dækket af flere tusinde Fods mægtige Lagrækker af de over Junkerdal omhandlede skiferdannelser b) og c).

Den granitiske Bergart er dels ren typisk rødlig Granit, dels gaar den ogsaa over til laget Granit (Gneis-Granit) og vexler hyppig med renere Gneisstrata. Skjønt i Regelen mere typisk præget end den ejendommelige Gneis-Granit, der saa udbredt bryder frem langs det nordlige Norges Kyststrøg, er den dog hyppig saaledes indvævet med gneisartede Strata, at Feltet i sin Helhed ingenlunde kan være at betegne som rent granitisk. I denne Henseende er Graniten her ganske at sammenstille med den, der bryder frem inden forskjellige granitiske Partier, som jeg havde Anledning til at undersøge lidt nærmere — i Kyststrøget fra Luleå ned mod Stockholm. Overalt vil man finde den renere granitiske Karakter stærkt vexlende med en mer eller mindre udpræget gneisartet Struktur. De paa geologiske Karter saa skarpt markerede Grændser mellem Granit og Gneis ere vel ogsaa i Virkeligheden i Regelen mere imaginære end reelle.

De høje Fjeldpartier langs den nordlige Side af Dalen ere byggede af de samme Skiferdannelser, der ere omhandlede ovenfor og hvis Lagrækker overalt viser en svagt heldende til svævende Lagstilling. Hvor Skiferafdelingen b) og Granit træder i Kontakt, ligger altid Skiferen over, uden at der nogetsteds er iagttaget Tegn til, at Graniten har gjennembrudt Skiferen eller indvirket forstyrrende paa Lagstillingen. Graniten maa saaledes i ethvert Tilfælde antagelig være ældre end Skiferen.

Højfjeldspartiet fra Fjeldstuen Gradis over Rigsgrændsen er bygget af de samme nys omhandlede Lagrækker af glindsende Skifer, grafitisk Skifer (med sort Streg) tildels i Vexling med kvartsitisk sandstenagtig Skifer. Disse Skiferdannelser ere petrografisk ganske ensartede med dem, der bygge Fjeldgrunden over Højfjeldet under Foden af Sulitelma-Toppene.[1]) Som nedenfor nærmere skal blive paavist, danner de her nævnte Afdelinger Led under en over det nordlige Skandinavien særdeles udbredt Bygningsgruppe. Granit danner antagelig som en Fortsættelse af det granitiske Parti langs Junkerdalen Skiferafdelingens umiddelbart Underliggende over det hele Strøg paa begge Sider af Rigsgrændsen. I ethvert Tilfælde fandtes den trædende frem i Bunden af forskjellige af de her liggende Højfjeldsskjæringer og skydende ind under Skiferen. Højfjelds-

---

[1]) Se Saltens Geologi, Archiv for Math. & Naturv., 1 Bind.

passets Kulminationspunkt i Strøget om Rigsgrændsen ligger her i en Højde af omkring 2200′ (690 m) o. H.

Ved Fjeldstuen Merkenis — paa svensk Side — bygges Fjeldgrunden fremdeles af den samme Skiferafdeling med glindsende Skifer i Vexling med sort Grafitskifer i horisontal til svævende Lagstilling. Grafitskiferen sees hyppig indfældt med Udsondringer og Nyrer af ren Kvarts.

Ved Ballasvik — ved Sædva-jaur i en Højde af omkring 1400′ (439 m) o. H. træder en smaaskjellet Glimmerskifer frem, der viser øst-vestlig Strøgretning med sydligt Fald. Grændseforholdene mellem denne Glimmerskifer og den glindsende Skiferafdeling lykkedes det ikke at faa udredet. Der skal saaledes fra det omhandlede Togt ikke kunne anføres noget, der mere direkte peger i Retning af, at man her har for sig enten en ny Afdeling eller et Led, der er at indordne under den glindsende Skifer-Gruppe. Paa Hummels ovennævnte Oversigtskart er det hele Strøg fra Rigsgrændsen ned mod Löfmok ved Hornafvans Øverende betegnet med den samme gule Farve og nogen Sondring her saaledes ikke gjort. Jeg tror dog at der er Grunde, der tale for, at man her i Virkeligheden har for sig forskjellige geologiske Grupper. I Henhold til, hvad jeg har haft Anledning til at iagttage, afsluttes den mildere Skiferafdeling i Nærheden af Ballasvik, mens derimod herfra et større Glimmerskiferfelt kan følges østover forbi Jæggvik ved Hornafvans østlige Ende. Her bygger den de temmelig høje Fjeldpartier mellem Hornafvan paa den ene Side og det søndenfor samme liggende Dalføre, der gjennemstrømmes af Laiselvens Vandsystem — fra Jæggvik over til Adolfstrøms gamle Hytte. Over hele dette Strøg viser Glimmerskiferen en regelmæssig øst-vestlig Strøgretning med temmelig stejlt sydligt Fald. Denne Lagstilling, der saa bestemt afviger fra den svævende Lagstilling inden den mildere Skiferafdeling, vidner i Forbindelse med de saa forskjelligartede petrografiske Forholde antagelig snarest for, at en Sondring her bør finde Sted. Spørgsmaalet bliver altsaa her, at bestemme det relative Aldersforhold. I Henhold til hvad ovenfor er fremholdt, skal jeg herom ikke kunne udtale mig med nogen Bestemthed. Paa Forhaand kunde der vel være Grund til at forudsætte, at Glimmerskiferafdelingen maatte være den ældste, baade fordi Glimmerskiferen er stærkest metamorfoseret og fordi den oprindelige Lagstilling her har været underkastet de stærkeste Forrykkelser. Ingen af disse Momenter ere imidlertid i og for sig i saa henseende at tildele nogen afgjørende Vægt og — som nedenfor nærmere skal fremholdes — pege de svenske geologiske Undersøgelser ogsaa i en anden Retning.

Henimod den østlige Ende af Sædva-jaur sees sorte og grønne Lerskifere — i petrografisk Henseende ganske analoge med den røde og grønlige tildels flammede Lerskifer — der optræder gjennem en længere Strækning langs Divielven, en Sideelv til Maalselven paa norsk Side. Skiferen viser et temmelig stejlt vestligt Fald. Den er ret hyppig gjennemsat af Kvartsaarer. En som det syntes mere ulaget Lerstensmasse forefandtes i løse Brudstykker, og maa utvivlsomt tilhøre Lerskiferafdelingen. En hermed ganske ensartet Lerstensdannelse optræder i fast Berg inden Dividalens Lerskifer.

Trods det, at der hverken her eller inden Dividalen er paavist Forsteninger, ere Forholdene paa begge Steder i enhver Henseende saa ensartede, at det antages med al Bestemthed at kunne udsiges, at Lerskiferafdelingen ved Sædva paa svensk Side og den langs Divielven paa norsk Side tilhøre én og samme geologiske Afdeling. Dette er et Forhold, som vil blive at tillægge en ikke ringe Betydning for Udredningen af de geologiske Bygningsforholde over Sveriges og Norges nordlige Del.

Ved Jæggvik er Lerskiferen igjen afløst af den samme smaaskjellede Glimmerskifer, der bygger Fjeldgrunden ved Ballesvik. Glimmerskiferen optræder her i et større sammenhængende Felt mellem Hornafvan og Laiselvens Vasdragssystem. Imellem disse rejser sig en Fjeldmur til en Højde af omkring

1200′ over Hornafvans Spejl. Dette Fjeldparti er bygget af Glimmerskifer. Den blottede Fjeldgrund træder hyppigt frem op efter Fjeldmurens højere liggende Afhældspartier ligesom ogsaa henover det egentlige Højplateau, og Skiferen viser overalt en regelmæssig øst-vestlig Strøgretning med temmelig stejlt sydligt Fald. Lagstillingen findes saaledes her ganske i Overensstemmelse med den, der aflæstes i Strøget om Ballasvik. Ogsaa den mægtige Pelje-Gaisi (Pelje-Kaisï), der fra Fjeldryggens brede Plateau som en isoleret Kegle rejser sig op til en Højde over Havfladen af 3360′, er efter al Sandsynlighed helt op til Top bygget af den samme Glimmerskifer.

Op over Højplateauet strax vestenfor Pelje-Gaisi fandtes Glimmerskiferen gjennemsat af enkelte Partier af en mørk temmelig finkornig Diabas med graalig hvid Plagioklas, porfyragtig indvoxet.

Den ovenomhandlede Lerskifer blev ikke truffet i mere umiddelbart Sammenstød med Glimmerskiferen. Jeg er saaledes ude af Stand til med Støtte af egne Observationer at kunne udtale mig med mere Bestemthed om Lerskiferens og Glimmerskiferfeltets relative Aldersforhold. I Hummels ovennævnte Oversigtskart er — som ovenfor fremholdt — det hele Felt fra Rigsgrændsen ned til Hornafvan betegnet med samme Farve og opført som en kvartsitisk Afleining med udpræget skifrig Struktur og liggende over og i Grændsepartierne tildels vexlende med Lerskifer. Lerskiferafdelingen danner her et smalere Baand mellem den kvartsitiske Afdeling og et vidtstrakt granitisk Felt, der her stikker ind under Lerskiferen. Glimmerskiferen om Jæggvik maa antagelig være at sammenstille med Kartets kvartsitiske Felt og Lerskiferen om Sædva at indordne under Kartets Lerskifersone. Efter Hummels Kart er Forholdet vel nærmest — om jeg ikke skulde have misforstaaet Fremstillingen i den til samme knyttede Afhandling — at opfatte saaledes, at Lerskiferen og Glimmerskiferen (Kvartsiten) danner Led inden én og samme Hovedgruppe, dog saa at Lerskiferen her indtager den laveste Plads inden den hele Afdeling. At saa ogsaa i Virkeligheden kan være Tilfældet, skal her ingenlunde kunne bestrides. For det Tilfælde denne Opfatning imidlertid ikke skulde støtte sig til saadanne Aflæsninger, der stiller det nævnte Forhold frem med fuld Bestemthed, vil jeg af flere Grunde paa Forhaand være mest tilbøjelig til at holde Glimmerskiferen og Lerskiferen ud fra hinanden som særskilte Grupper. Med Hensyn til det gjensidige Aldersforhold vilde jeg — naar jeg ikke havde haft svenske Forarbejder at støtte mig til — maaske helst have opstillet Glimmerskiferafdelingen som den ældste. I Henhold til de svenske Undersøgelser maa imidlertid Forholdet i saa Henseende utvivlsomt være omvendt. Da Forholdene paa norsk Side, som senere nærmere skal paavises, kan pege i samme Retning, vil jeg ogsaa i denne Afhandling ganske holde mig til denne Forudsætning.

Som før nævnt optræder en med Sædvas Lerskifer øjensynlig ganske ensartet Lerskiferdannelse langs Maalselvens Sideelv Divielv gjennem en Længde af et Par Mil. Den overlejes her af en Kvartsskifer, dels graalig med hyppig indsprængte rustbrune Pletter og Korn af Jernoxydhydrat dels mere sortagtig og i saa Tilfælde utvivlsomt noget bituminøs. Kvartskiferen overlejes igjen af Lerglimmerskifer og glindsende Skifer, der tildels kan indeslutte Lag af renere Lerskifer. Lerskiferen med kvartsiten danner her øjensynlig en sammenhørende Lagrække af en Mægtighed af et Par hundrede Fod, men ogsaa den overliggende mægtige Lagrække af Lerglimmerskifer m. m. maa utvivlsomt blive at gruppere sammen hermed som Afdelingens yngste Led.

Glimmerskiferen om Ballasvik afviger i petrografisk Henseende saa væsentlig fra den helleflintartede Kvartsit, der langs Divielven ligger over Lerskiferen, at der paa Forhaand kunde synes liden Grund til at sammenstille dem som ækvivalente Dannelser. Medens Dividalens Kvartsit optræder med en ringe Mægtighed og mere som et helt underordnet Led, optræder derimod Glimmerskiferen om Jæggvik i en betydelig Mægtighed og bygger et Felt af anseelig Udstrækning. Den findes her endvidere gjennemsat af diabasiske Bergarter, der synes nærmest at maatte paralleliseres med de gabbroartede og diabasiske Massiver, der paa norsk Side gjennemsætter Tromsø Glimmerskifergruppes Lagrækker. Under den ovennævnte Forudsætning, at Lerskiferen om Sædva danner Glimmerskiferens Underliggende og at Glimmerskiferafdelingen om Jæggvik er at parallelisere med Tromsø Glimmerskifergruppe vil man altsaa her have vundet et vigtigt Bidrag til nærmere at bestemme denne paa norsk Side saa udbredte Bygningsgruppes Aldersplads.

Fra Jæggvik østover stikker det faste Berg hyppig frem langs Hornafvan i Skiferstrata med noget afvexlende Lejning. Omkring $1^3/_4$ Mil østenfor Jæggvik fandtes Fjeldgrunden at dannes af Lerskifer, Lerglimmerskifer, grønlig kloritisk Skifer i Vexling med Haardskifer ligesom ogsaa af en med Dividalens Kvartsskifer ganske ensartet Dannelse. I Skiferen saaes hyppige Aarer af hvidlig Kalk (antagelig Magnesia-Kalk).

Omkring Södra-Rösnes (ved Hornafvan) afløses Skiferen af Granit og denne optræder nu herfra eneraadende gjennem milevide Strækninger østover helt ned mod den Bottniske Bugt, hvor den afløses af mere gneisartede Dannelser.

I petrografisk Henseende kan Graniten her være adskillig variabel. Ved Södra Rösnes er den nærmest at betegne som en Hornblende-Granit, idet Hornblende her indtager Glimmerens Plads. Ved Kasker dannes den af rødlig Orthoklas med Kvarts og mørk Magnesia-Glimmer. Forøvrigt er Fjeldgrunden her over vide Strækninger dækket af granitiske Rullestensblokke efter en Maalestok, hvortil jeg — enkelte mere indsnævrede Lokaliteter fraregnede — ikke har seet noget tilsvarende paa norsk Side. Fra Arfvidsjaur østover træffes mellem de granitiske Blokke ogsaa Rullestene af Diabas og Diorit. Flere af disse dioritiske Grønstene ligner i petrografisk Henseende ganske de dels finkornige dels mere grovkornige Afændringer af Diorit, der bryder frem mellem Kvænangens og Altens Skiferafdeling — en Gruppe, der vel nærmest er at parallelisere med Dividalens Skiferfelt.

Ved Store Granli stikker Gneislag frem i Vexling med Granit. Strøgretning N—S, Faldet stejlt vestlig.

I Nærheden af Store Granli afsluttes det vidstrakte Højfjeldsplateau, der er fulgt fra Sædva gjennem en Strækning af omkring 26 Mile og ligger i en Høide over Havfladen af omkring 1360′ — fra Arfvidsjaur dog med nogen Sænkning østover. Her begynder Højplateauet temmelig skarpt at sænke sig ned mod det lave og forholdsvis smale Kyststrøg om Piteå. Der har ikke været Anledning til at undersøge nærmere de geologiske Bygningsforholde over Piteå Lavland, men der er paa Forhaand al Grund til at forudsætte, at Berggrunden her som angivet paa Ritset dannes af Gneisstrata i Vexling med eller med hyppige Overgange til renere Granit, og at dette Gneisbelte stryger langs den Bottniske Bugt nordover forbi Luleå. Ved Mjølkutberget — strax i Nærheden af Luleå By — dannedes Berggrunden af rød og graa Gneis i Vexling med mørk Glimmergneis. Bergarten viste tildels udpræget Lagdeling og Strøgretning NV.—SØ. med stejlt til 60—70° sydvestligt Fald. Gneisen fandtes hyppig gjennemsat af rødlig Granit ofte enten i tilsyneladende Gangform med tildels skarp Begrændsning mod den mere gneisartede Grundmasse eller ogsaa i tykkere og smalere Baandmasser mellem Gneisstraterne, og i saa Tilfælde parallelløbende med disse. Forøvrigt fandtes Granit og Gneis saaledes knyttede til hinanden gjennem Overgange i Strukturforholdene, at de upaatvivlelig maa være at opfatte som Afændringer under et sammenhørende Hele.

Gneisafdelingen her er saaledes nærmest at opfatte som en Gneis-Granit. I Kvartsaarer i den Gneis-granitiske Bergart bemærkedes sort Turmalin.

Følges det omhandlede Profil fra øst mod vest, saa vil man altsaa først træffe paa:

a) den forholdsvis smale Gneisstrimmel, hvis stejltstillede Lagrækker ere at henføre til det saakaldte Grundfjeld (laurentisk);

b) et omkring 18 Mil bredt granitisk Felt;

c) Sædvas Lerskiferafdeling, liggende over Graniten men skydende ind under den følgende Gruppe (d).

Under denne Afdeling er indordnet de saavel paa svensk som paa norsk Side langs Profillinjen optrædende Lagrækker af glindsende Lerglimmerskifer, glindsende Grafitskifer og m.;

d) Glimmerskifer (tilhørende Tromsø Glimmerskifergruppe).

Som det vil sees af Profilritset stiger den skandinaviske Halvø fra den smale Strimmel Lavland langs den Bottniske Bugt med engang temmelig stærkt op til en Høide af ca. 1100′ (345 m). Herfra udbreder sig milevidt vestover et i Regelen skogbevoxet hist og her af lave Aasdrag gjennemsat Højplateau — med langsom Stigning op imod Storafvan. Denne Indsøs Vandspejl ligger i en Høide over Havfladen af ca. 1330′, og Søen danner den sydøstlige Afslutning af et anseligt sammenhængende Ferskvandssystem. Storafvan, Udjaur og Hornafvan ere hver for sig store Ferskvandssøer, der ligge i Rad efter hverandre, sammenknyttede ved korte transportable Strømme. Hornafvans Vandspejl ca. 30′ højere end Storafvans. Gjennem et stridere Strømløb, der fører gjennem et Par mindre Ferskvandssøer, er Hornafvan endvidere knyttet til den vestenfor liggende 2½ Mil lange men forholdsvis smale Sø Sædva, hvis Vandspejl ligger i en Høide over Havfladen af ca. 1420′ og 60′ højere end Hornafvan. Sædvas vestlige Ende ligger i en Afstand af omkring 3 Mil fra Rigsgrændsen mellem Norge og Sverige (eller fra Vandskillet mellem Vesterhavet og den Bottniske Bugt). Samlet har dette Vandsystem en Længde af noget over 20 Mil, og danner ikke alene paa Grund af denne sin anseelige Længde men endmere paa Grund af det anseelige Fladeindhold, det indtager, et af den skandinaviske Halvøs mere mærkelige Ferskvandssystemer.

Den monotone Karakter, hvorunder det skogbevoxte Højplatean i det hele træder frem fra dets Afslutning mod Lavlandet langs den Bottniske Bugt indtil henimod Storafvan, taber sig her mere. Om Storafvans østlige Botten rejser sig en Række af tildels pittoresk byggede granitiske Aasdrag og Kupper. De højeste Punkter af disse naa dog antagelig neppe mere end 5 à 600′ over Storafvans Spejl. Lignende Aasdrag og Koller skyder sig op paa forskjellige Steder langs Storafvan, Udjaur og Hornafvan undertiden mere i Nærheden af disses Bredder, oftest dog i betydelig Afstand, saa disse Vande i Regelen ere omgivne af vidstrakte bølgeformige Flader.

Først op imod den øvre Ende af Hornafvan og om Sædva begynder den egentlige Højfjeldskarakter at træde bestemtere frem — i Begyndelsen dog endnu noget sporadisk. Mellem Jæggvik ved Hornafvans vestlige Ende og den søndenfor rindende Laiselv, der kommer fra Nasafjeldene ved Rigsgrændsen, rejser sig en bred Murvold, hvis Ryg naar op til omkring 2500′ (784 m) o. H, eller 1100 à 1200′ højere end Hornafvans Spejl. Denne Ryg skyder vestover ind mod Højfjeldsmasserne op mod den norske Grændse, mens der fra sammes østlige Afslutning rejser sig den isolerede Fjeldtop Peljegaisi, der naar op til en Højde over Havfladen af 3360′ (1064 m). Vender man fra denne Højryg Blikket mod Vest og Nordvest, saa mødes det her af det høje isoleret liggende Rebnitsgaisi, der skyder op nordenfor Sædva — mellem dettes Vand og Rebnits-jaur — mens Synet mod Vest stænges af de høje Grændsefjelde, der her ofte skyde op i alpeformige Tinder snart snedækte snart stejle og nøgne.

Peljegaisi vil saaledes her være at opfatte som det egentlige Højfjelds sidste Afslutning mod Øst. Det ligger i en Afstand af omkring 25 Mil fra den Bottniske Bugt og 17 Mil fra Vesterhavet.

Den her leverede korte Fremstilling af de orografiske Forholde langs den opgaaede Profillinje vil antagelig give en ret klar Oversigt over de orografiske Bygningsforholde inden den nordlige Del af den skandinaviske Halvø — i Strøgene mellem den Bottniske Bugt og Vesterhavet. Der er antagelig Grund til at forudsætte, at disse over hele disse vidløftige Strøg ville i det væsentlige falde nogenlunde sammen.

Den skandinaviske Halvø vil i Henhold hertil over disse Strøg kunne sondres i følgende orografiske Hovedled:

1) Den i Regelen lave tildels af Aasdrag gjennemsatte Kyststrand langs den Bottniske Bugt.

2) Et skogbevoxet Højplateau med en Højde over Havfladen fra 900 à 1000 til op imod 1400′.

3) Det egentlige Højfjeld. Paa enkelte Steder kan Grændsen mellem Højfjeldet og det skogbevoxede Højplateau træde temmelig skarpt frem. Paa andre Steder — og dette er antagelig det hyppigst fremtrædende Forhold — er Overgangen mellem disse to Hovedafdelinger mere ubestemt, idet mere isoleret liggende Højfjeldspartier kan skyde op over Højplateauet som Forløbere for det egentlige mere sammenhængende Højfjeld. Dette breder sig ud vestover, og bygger ikke alene Grændsestrøgene mellem Norge og Sverige, men fortsætter helt ud til Halvøens Afslutning mod Vesterhavet.

I Sulitelma-Gruppen naar det sin største Højde med 6000′ (1882 m) o. H.

Til disse tre store Hovedafdelinger kunde endvidere blive at føje Skjærgaardsrækkerne saavel langs den Bottniske Bugt som langs den norske Kyst. Disse to sidstnævnte Led indtage imidlertid en forholdsvis højst underordnet Plads og kunne saaledes nærmest være at knytte som underordnede Led til de større Hovedafdelinger — den første saaledes til Lavlandet langs den Bottniske Bugt, og den anden til det store Højfjeld.

Efter vedlagte Profilrits vil Lavlandet have en Brede af mellem 2 à 3 Mil, det skogbevoxte Højplateau af omkring 20 Mil og Højfjeldet vil have omtrent lignende Brede. Den skandinaviske Halvøs Brede kan sættes til omkring 42 Mil.

Disse tre orografiske Bygningsled betegner ogsaa — Forholdet seet i det store — særskilte geologiske Afdelinger, og i saa Henseende er Halvøens orografiske Bygning i en stærkt fremtrædende Grad betinget af de geologiske Forholde.

Kystranden langs den Bottniske Bugt er saaledes bygget af en med Granit i stor Maalestok gjennemvævet Gneis, — Højplateauet i overvejende Grad af Granit med enkelte større og mindre indflettede Partier af forskjellige til det saakaldte Urberg henhørende Led, nemlig rød og graa Gneis, Helleflint, Glimmerskifer og Hornblendeskifer. Højfjeldet er derimod for største Delen bygget af ældre og yngre palæozoiske Gruppeafdelinger, paa enkelte Steder med en i Dagen fremtrædende Undergrund dels af Granit dels af laurentiske Strata.

Knyttes de her fremlagte Detailundersøgelser sammen med de paa svensk og norsk Side tidligere anstillede Iagttagelser, saa vil den nordligste Del af den skandinaviske Halvø fra den Bottniske Bugt over til Vesterhavet findes bygget af følgende (lagdelte) Hovedgrupper.

1) Grundfjeldet

bygger Fjeldgrunden efter Kyststrøget langs den Bottniske Bugt, og optræder endvidere i forskjellige større og mindre Partier mellem dette Kyststrøg og det egentlige Højfjeld. Af svenske Iagttagere sondres dette i følgende Hovedled nedenfra opad:

a) rød Gneis,

b) graa Gneis,

c) rød Helleflint,

d) Glimmerskifer med Kalksten,

e) Hornblendeskifer.

Paa norsk Side af Rigsgrændsen træder Partier, der ere at indordne under Grundfjeldet, kuns sparsomt frem. Grundfjeldets Gneis vil her oftest alene findes stikkende frem i Dagen i Bunden af de enkelte Højfjeldsindskjæringer. I Regelen vil Gneisafdelingen, om den forøvrigt skulde optræde i mere sammenhængende Felter, være dækket af mægtige Lagrækker af yngre Dannelser.

Et temmelig anseeligt Gneisfelt bygger Fjeldgrunden inden Saltens Fogderis Kyststrøg mod Vestfjorden — fra Bodø nordover mod Stegen. Hvorvidt denne Afdeling skal blive at indordne under det her saakaldte Grundfjeld eller under Tromsø Glimmerskifergruppe maa indtil videre lades uafgjort. Det samme maa vel ogsaa blive Tilfældet med Hensyn til Spørgsmaal om Aldersforholdet for den over Kyststrækningens Øgruppe saa udbredte Gneisafdeling med den dertil knyttede Gneisgranit.

Mens den røde og graa Gneis nærmest kan være at parallelisere med det nordamerikanske laurentiske System, ville Afdelingerne c), d) og e) maaske kunne sammenstilles med det «huroniske System».

Svenskernes røde Helleflint gjenfindes ikke — uden maaske højst underordnet — paa norsk Side. Derimod vil Afdelingen d) (Glimmerskifer med Kalksten) antagelig være at træffe ogsaa paa norsk Side. Langs Bunden af Sørdalen i Bardo sees saaledes stejltstaaende Lagrækker af en Glimmerskifer med hyppige Kalkstensindlejninger, medens Fjeldvæggene langs den østlige Dalside ere byggede af mildere Lerglimmerskifer og Glimmerskifer, der viser en svævende og bølgeformig Lagstilling. De stejltstaaende Glimmerskiferstrata efter Dalbunden maa her utvivlsomt danne Led af en Afdeling, der er ældre end Lerglimmerskiferen og den over samme liggende Glimmerskifer op over Dalvæggen, og maa saaledes ogsaa udsondres fra den yngre Tromsø Glimmerskifergruppe, hvorom nærmere nedenfor. Mulighed kan der ogsaa være for, at Partier af Afdelingen d) paa forskjellige Steder, hvor Forholdene kunne være mindre klare at aflæse, ere blevne slaaede sammen med Lagrækker tilhørende Tromsø Glimmerskifer-Gruppe eller fejlagtigen indordnede under denne Gruppe.

2) Dividals-Gruppen.

I sit fortjenstfulde Arbejde «Ueber die Geognosie der schwedischen Hochgebirge»[1]) fremhæver A. E. Törnebohm, at «Storsjøns siluriske Gebet strækker sig nordover til det nordostlige Jemteland, hvorfra en smal Forgrening af samme skyder sig over det nordvestlige Hjørne af Ångermannland indtil Vesterbottens Lappmark. Ligesom i Jemteland og Herjedalen følger ogsaa her de siluriske Strata imellem det af Granit og Gneis dannede Skoglandskab i Øst, og de af Kvartset og Skiferdannelser opbyggede Højfjeldspartier i Vest.»

Uagtet der indtil nu — efter nævnte Forfatter — ikke er paavist siluriske Forsteninger nordenfor Malgoma-Sjø, forekommer der ogsaa længer Nord gjennem Lappmark, om end sporadisk, mørke, hyppig bituminøse Lerskifere, som med stor Sandsynlighed ere at opfatte som en Fortsættelse af siluriske Strata. Imellem Steder, hvor saadanne ere paaviste, nævnes Wojmsjø og Windeln i Vesterbotten, Laisjaur, Saggat-jaur strax østenfor Quikkjokk ligesom ogsaa et Strøg i Nærheden af Jukkasjärfvi i Norbotten. Hertil bliver endvidere i Henhold til Hummels Oversigtskart, der stemmer med mine ovenomhandlede Iagttagelser, at føje en Strimmel efter den øvre Ende af Hornafvan og om den nedre Ende af Sædva og endvidere — ligeledes efter Hummels Oversigtskart — en Zone, der overskjær Torne-Træsk henimod dens vestre Ende og som er forfulgt paa begge Sider af Træsken, sydover gjennem flere Miles Længde. Nordover løber denne Zone saaledes, at dens Forbindelse med Dividalsfeltet maa ansees som utvivlsom. Med andre Ord: disse Strimler ere paaviste overalt inden de svenske Lappmarker, hvor geologiske Undersøgelser ere naaede frem op imod det egentlige

---

[1]) I Bihang til Kgl. Svenska Vet. Akad. Handlingar B. 1. 1873.

Højfjeld. De ligge her altid — Strimmelen ved Jukkasjärfvi fraregnet — udspændte efter Grændselinjen mellem det lavere skogbevoxte Plateau mod Øst og de herfra opstigende Højfjeldspartier mod Vest. Paa Forhaand kan der saaledes være al Grund til at forudsætte, at det gjennem nærmere Undersøgelser vil fremgaa, at disse afbrudte Strimler, der ligge paa det nærmeste udspændte efter én og samme fortløbende Hovedretning, ogsaa i Virkeligheden ere Dele af et eneste Hovedbælte.

Den ovennævnte Strimmel ved Torneå-Træsk er i Henhold til Hummel bygget af en grøn-graa fin Lerskifer, der tildels indeslutter Lejer af et Konglomerat, i Vexling med Kvartsitskifer. Afdelingens Mægtighed angives her til omkring 200′ (63 m).

Efter det i denne Afhandling omhandlede Profil fandtes strax østenfor Ballasvik henimod Sædvas østlige Ende Lagrækker, der utvivlsomt maa være at parallelisere med Skiferzonen ved Torne-Træsk. De dannedes her af sort og graagrøn Lerskifer med temmelig stejlt vestligt Fald. En som det syntes tæt ulaget Lersten fandtes her i løse Brudstykker. Omkring $1^3/_4$ Mil østenfor Jæggvik stak sort Lerskifer frem i Vexling med Haardskifer og kvartsitiske Lag indfældte med en grønlig kloritisk Substans. Derimod lykkedes det mig ikke her at træffe paa de til Afdelingen knyttede Konglomeratdannelser. Dette Bælte ligger her — som før nævnt — i Grændsestrøget mellem det skogbevoxte Plateau og det herfra opstigende Højfjeld og i en Højde over Havfladen af omkring 1400′ (439 m), Lerskiferen ligger som det syntes umiddelbart over den ældre nærmest til det laurentiske Urberg knyttede Granit.

Et andet Spørgsmaal bliver det at afgjøre, i hvilket Forhold de Lagrækker af glindsende Skifer, Grafit-Skifer m. m., — der fra Sædva vestover til Junkersdal fandtes at danne mægtige Lagrækker tildels liggende umiddelbart over Granit, — er at stille til Lerskiferafdelingen om Sædva. Heller ikke her har man at støtte sig til saadanne Aflæsninger, der ville egne sig til at kaste et klarere Lys herover. I saa Henseende skal imidlertid fremholdes:

Lerskiferafdelingens Lagrækker om Sædva viser ret regelmæssig et temmelig stærkt sydvestligt Fald, Dagstillingen er i saa Henseende paa det nærmeste i Overensstemmelse med den, der raader inden Glimmerskiferafdelingen over Jæggvik. Skiferafdelingen i Strøgene over Rigsgrændsen viser derimod en helt forherskende fra svævende til horizontal Lagstilling. Dette i Forbindelse med den noget afvigende petrografiske Karakter, der raader inden de omhandlede Led, kunde nok paa Forhaand snarest føre til en Forudsætning om, at disse to Skiferafdelinger maatte blive at udsondre fra hinanden. I saa Tilfælde maatte Skiferafdelingen over Grændsestrøgene blive at sætte ikke alene som yngre end Lerskiferafdelingen om Sædva men ogsaa som yngre end Glimmerskiferafdelingen om Jæggvik. Imidlertid vil den inden disse Afdelinger saa afvigende Lagstilling i og for sig i saa Henseende neppe kunne være at tillægge nogen afgjørende Vægt. Den stejle Lagstilling træder frem længst mod Øst i Grændsestrøget mod det her frembrydende granitiske Felt og over de yderste Fremspring af det her opskydende Højfjeld — den mere horizontale og følgelig ogsaa mere oprindelige Lagstilling først i milevid Afstaud herfra. Ligesaa stor Afvexling i Lagstilling inden Led, der bevisligen ere at henføre under samme Gruppe og selv inden en og samme Etage, vil ikke sjelden være at paavise inden det nordlige Norges Skiferafdelinger. De Kræfter, der have forrykket den oprindelige Lagstilling, kunne have virket inden et snævrere Omraade og saaledes ladet fjernere liggende Lagrækker — ældre som yngre — i saa Henseende uberørte. Da endvidere Skiferfeltet over Strøgene om Rigsgrændsen nærmest synes at maatte blive at parallelisere med Lagrækker, der paa det bestemteste ere at knytte til Dividalsfeltets yngste Afdeling — hvorom nærmere nedenfor — kan der være nogen Grund til foreløbig at opstille Lerskiferfeltet om Sædva og det vestenfor liggende Skiferfelt i Strøgene om Rigsgrændsen som Led under en og samme Hovedgruppe. I denne danner da Lerskiferen om Sædva det ældre Led.

En med Lerskiferafdelingen om Sædva øjensynlig ækvivalent Dannelse er som tidligere nævnt ogsaa paatruffet paa norsk Side paa forskjellige Steder, navnlig i de lavere Partier af flere af de dybest indskaarne Dalfører. Her ligger de saaledes ikke som paa svensk Side skydende fra et plateauformet Landskab ind under et derfra opstigende Højfjeld, men derimod stikkende efter Dalenes dybest liggende Brudlinjer. Som de orografiske Forholde træde frem langs den skandinaviske Halvøs Vestrand, kunne disse Dannelser følgelig ikke som paa svensk Side her blive at paavise som en milevidt fortsat sammenløbende Strimmel eller Zone. De stikke alene frem hist og her men dog hyppigt nok, og saaledes fordelte over store Strækninger, at der paa Forhaand nok kan være adskillig Grund til at forudsætte, at de danne de i Dagen fremspringende Dele af en vidt udbredt Formationsgruppe.

Disse Forholde skulle her nærmere søges belyste:

Dividal er en Fjelddal, der skyder ind fra Maalselvens Øverbygd i sydlig Retning gjennem en Længde af ca. 4 norske Mil, idet den gjennem en langsom Stigning gaar over i en 17 à 1800′ o. H. liggende Højfjeldsindsænkning ind imod Rigsgrændsen. Dividal udmunder i Maalselv i en Afstand af ca. 2 à 3 Mil fra den dybt indskaarne Balsfjord, men derimod i en Afstand af 5 Mil fra Maalselvens Udløb i Malangen. Fra Divielvens nedre Fos omkring 1 Mil ovenfor Elvens Udløb i Maalselven og opefter Dalen til forbi sammes øverst liggende Gaard Frihedsli gjennem en Strækning af opimod 2 Mil stikker der frem langs Dalbunden og de laveste Partier af Dalsiderne en ejendommelig Lerskiferdannelse, tildels af en mere lerstensagtig Karakter. Stenen er snart rødlig, snart grønlig og oftere smukt flammet, idet den røde og grønne Farve hyppig kan vexle i mer eller mindre regelmæssige Baandstriber, mens Stenen forøvrigt bevarer et ensartet Præg. Et Profil opover de lave Aasrækker langs Divielvens østlige Side viser Lagrækken nedenfra opad i følgende Orden:

1) Lerskifer med Lersten. Hvor Bergarten optræder mere bestemt skifrig er Faldet svagt nordligt. Mægtigheden af denne Afdeling omkring 200′ (63 m).

2) En graa ofte sortagtig Kvartsskiter. Den mørke Farve er at tilskrive en Indblanding af fint fordelt Kulstof. Stenen dannes af en tæt Kvarts og optræder med udpræget Skifrighed i Lag fra et Par Linjer til en Tommes Tykkelse. Stenen er stærkt spettet med rustbrune Pletter og Korn af Jernoxydhydrat.

Mægtigheden af denne Afdeling naar op til mellem 2 à 300′.

3) derover Lagrækker af Lerglimmerskifer, glindsende Skifer, — ofte saa stærkt kulstofholdige, at de vise sort Streg (Grafitskifer). Lerglimmerskifer eller den glindsende Skifer kan vexle med Kvartsskifer i tykke Bænke, ligesom ogsaa sort Haardskifer og kloritisk Skifer kan optræde heri som underordnede Lag. I denne Afdeling træffes ikke saa sjeldent ret mægtige Indlejninger af en ejendommelig tæt gulagtig brun Magnesia-Kalk. Lagstillingen er i det Hele temmelig svævende og nærmer sig oftest Horizontalplanet.

Mægtigheden af denne Afdeling kan naa op til ca. 1400′. Den breder sig ud over et forholdsvis ret anseligt Omraade over den 17 à 2000′ o. H. liggende vide Højfjeldsindsænkning op imod Rigsgrændsen. Denne Højfjeldsindsænkning fører fra Dividal sydover mod Alt-Vand og Lønnes-Javre, — hvilket sidste Vand i sin østlige Ende overskjæres af Rigsgrændsen strax i Nærheden af Torne-Træsk.

Ogsaa i denne Afdeling, der hyppig dækker en granitisk Undergrund, træffes paa sine Steder Lag af Dividalens røde Lerskifer.

Skjønt det er umiskjendeligt, at Følgerækken i det Hele og Store træder frem som her nævnt, saa er der i saa Henseende dog ogsaa paa den anden Side at paavise forskjellige Vexlinger, idet saaledes navnlig den tredie Afdeling kan indeslutte som underordnede Partier Skiferlag, der petrografisk seet nærmest kunne være at henregne til en dybere Afdeling. Dette i Forbindelse med den i det hele ensartede Lagstilling, der træder frem over samtlige tre Afdelinger, synes nærmest at pege hen paa, at disse rettest maa blive at sammenstille som Led under en og samme Hovedgruppe.

Lidt ovenfor Gaarden Frihedsli bryder frem en Granit, der bygger et anseligt Felt over Grændsestrøgene og fortsætter sydover paa begge Sider af Alt-Vand og Lein-Vand og ned mod Torne-Træsk paa svensk Side. Graniten overlejes langs Divielvens øvre Løb af de nys nævnte Lagrækker, idet den snart kan dækkes af Gruppens dybest liggende Led (1) snart af den øverste Afdeling No. 3. Hvor Graniten optræder i Kontakt med Skiferafdelingen, danner den altid det underliggende, uden at der saavidt iagttaget er at spore noget, der tyder hen paa, at den kan staa i et Gjennembrudsforhold til Skiferen.

Derimod optræder der ved Divielvens øvre Fos omtrent $^1/_2$ Mil ovenfor Frihedsli et Konglomerat, der her sees tildels i vertikale Bænke at vexle med Granit og forøvrigt ligger umiddelbart over denne. Dettes Grundmasse dannes af en sandstenagtig Forbindelse af smaa Kvarts- og Feltspathkorn, og i denne Grundmasse er indflettet talrige Kvartsbrudstykker, oftest afrundede tildels næsten kugleformige. De have i Regelen en Størrelse fra en til to Linjer, men enkelte af dem kunne endog naa op til et Gjennemsnit af 5 à 6 Tommer. Da Konglomeratet ikke indeslutter Brudstykker af Dividalsfeltets Skiferdannelser, maa det antagelig være ældre end dettes ovenomhandlede Led.

Paa forskjellige Steder langs Divielvens øvre Løb er endvidere paavist en ejendommelig Sandstensdannelse af en gulagtig til smudsig grøn Farve. Fra den af de gulgrønne Korn dannede Grundmasse stikker hist og her frem indtil et Par Linjer store afrundede gjennemsigtige Kvartskorn. Stenen er rigt indflettet med Punkter af udskilt Kaolin. I Dagen er den rødlig brun. Den synes ganske fri for indblandede Glimmerskjel. Denne Sandsten, — der paa Forhaand snarest kunde vække en Forestilling om, at den maatte tilhøre en af den sekundære Tids Formationer — er antagelig nært knyttet til Konglomeratet.[1]) At de heromhandlede Dannelser ganske ere at sammenstille med Lerskiferen ned mod Hornafvan og Sædva ligesom ogsaa med de Lagrækker af glindsende Skifer, der fra Sædva følges op over mod Rigsgrændsen og derfra videre ere forfulgte paa norsk Side ned til Junkersdal — maa i ethvert Tilfælde for Lerafdelingens Vedkommende sættes som utvivlsomt. Allerede ved første løselige Befaren af Lerskiferfeltet ved Sædva træder Ligheden i det enkelte som i det hele umiskjendeligen frem. Og dertil kommer endvidere, at de under denne Afdeling indordnede Led, der af de svenske Geologer ere paaviste om Torne-Træsk, derfra ere forfulgte over paa norsk Side i saa godtsom umiddelbar sammenhængende Forbindelse med Dividalfeltets øverstliggende Afdeling. — Paa svensk Side ligesom paa norsk Side danner Granit i Reglen Gruppens umiddelbare Undergrund, idet snart Konglomeratet med Sandstensdannelser, snart Lerskifer snart den glindsende Skiferafdeling ligger umiddelbart over Graniten.

Nordreisen-Elv gjennemskjær et anseligt Dalføre, der under langsom Stigning skyder ind i sydostlig Retning, indtil det taber sig i Vest-Finmarkens Fjeldplateau i Strøgene om Kautokeino. Ved Reisen-Fos — 6 à 7 Mil fra Elvemundingen — viser Fjeldvæggene opover langs begge Sider af Dalen følgende Profil:

a) underst Granit, der stikker frem ikke alene over Dalbunden men ogsaa opover de lavere liggende Afsatser af Fjeld-

---

[1]) Nærmere om Dividalsfeltet, se Tromsø Amts Geologi IV. D. K. N. Vid. S. Skrifter, 7de Bind, Trondhjem 1874.

skraaningerne, og her gjennembryder ældre krystalliniske Skifere, antagelig tilhørende I. d.

b) en mild brunlig til grønlig Lerskifer umiddelbart over Graniten i svagt heldende Lagstilling uden — saavidt iagttaget — at være gjennembrudt af denne. Mægtigheden overstiger her neppe et Par hundrede Fod.

c) Derover tæt helleflintartet Kvartsskifer — i conform Lagstilling med den underliggende Skifer. Denne Kvartsskifer er strax gjenkjendelig som petrografisk ganske ensartet med den før omhandlede Kvartsit, der overlejer og tildels optræder i Vexellejning med Dividalens Lerskifer. Den har samme Farve, er i Brudet ensartet med denne og som denne spættet med Pletter og Korn af Jernoxydhydrat. Ogsaa her kan Kvartsskiferen tildels findes i Vexling med Haardskifer.

d) Op over Højplateauet gaar Bergarten over til en sandstenagtig kvartsitisk Skifer med indblandede Glimmerskjæl, — dels hvide sølvglindsende dels brunligsorte. Følger man Højfjeldet i Retning ud mod Kysten, gaar disse kvartsitiske Skifere efterhaanden mer og mer over til renere Glimmerskifer.

At Lagrækkerne b) og c) ere ækvivalente med Dividalens Lerskifer og Kvartsskifer maa ansees som utvivlsomt. Derimod mangler her ganske Dividalsfeltets øverstliggende og saa mægtige Afdeling af Lerglimmerskifer, glindsende Skifer m. m.

Hvorvidt Afdelingen d) skal være at opstille som en Underafdeling under samme Hovedgruppe som b) og c), skal ikke kunne siges med mere Bestemthed. Den conforme Lagstilling, der raader gjennem disse tre paa hinanden følgende Afdelinger, synes nærmest at skulle tale til Gunst for en saadan Forudsætning. Forholdene paa svensk Side, hvor en lignende Kvartsitdannelse ofte vil findes knyttet til Lerskiferen paa lignende Maade som her, peger efter Hummel i samme Retning.

Langs den østlige Side af Kvænangen optræder Lagrækker af sort Lerskifer, Lerglimmerskifer med Grafitskifer. Lerglimmerskiferen, der indeslutter Lag af ren Kvarts, findes tildels i Vexling med Kvartsit. Her optræder ligeledes ofte mægtige Indlejninger af krystallinisk kornig Kalksten og Magnesia-Kalk. Kvænangenfeltets Lagrækker maa efter al Sandsynlighed blive at sammenstille med Divifeltets yngste Afdeling.

Den mægtige kvartsitiske Afdeling, der fra det indre af Kvænangen skyder henover til Alten paa den ene og op igjennem Kvænangsdal paa den anden Side, staar i samme Forhold til Kvænangens Skiferfelt som Kvartsiten ved Reisenfos til den der optrædende underliggende Lerskifer. Mens Kvartsiten ogsaa her — Forholdet seet i det Hele og Store — ligger over Ler- og Lerglimmerskiferen, synes den forøvrigt ogsaa saa nøje knyttet til Skiferafdelingen, at en fuldstændig Udsondring heller ikke godt lader sig gjennemføre.

Kvænangens Kvartsit er forøvrigt at indordne under Tellef Dahlls «Gaisa-System»,[1]) og skal efter ham ligge over Altens Skiferfelt med afvigende Lejning.

Altens Skiferfelt — Dahlls saakaldte Raipas-System — er ligeledes efter al Sandsynlighed at indordne under Dividalsfeltet. Dette optræder rigest udpræget om Bunden af Alten-Fjord, og er videre at forfølge over lange Strøg langs Fjordens Østside, mod Nord indtil Ripper — en liden Fjord, der i Nærheden af Hammerfest skjær sig ind i Porsangerhalvøen. Jeg skal her blot i Forbigaaende nævne dette, da disse Dannelser her med det første antagelig kunne ventes nærmere behandlede.

Ogsaa Øst-Finmarkens (Varangernessets) Lerskiferdannelser ere antagelig at indordne under Dividals-Gruppen.

Langs den østre Side af Sørdalen, der skjær sig ind i sydlig Retning fra Bardo i Fjeldpartiet mellem Dividal og Salangen træffes ligeledes mægtige Lagrækker af glindsende Skifer, Lerglimmerskifer med kloritisk Skifer. Her skyde de

---

[1]) Tellef Dahll. Finmarkens Geologi. Chr. V. S. Forh. 1868.

frem dels umiddelbart fra Dalbunden dels ogsaa liggende over en Granit, der bryder frem henimod Dalens indre Afslutning. Højere op overlejes denne Afdeling af en Glimmerskifer, der vil blive at indordne under efterfølgende Hovedled.

I den øvre Del af Salangsdal bygges Dalbunden af Granit. Opover Fjeldsiderne overlejes Graniten af en buklet glindsende Skifer, der indeslutter Lag af mørk grovkornig Kalksten og af kulstofholdige Skifere med sort Streg. Højere op gaar Bergarten over til Glimmerskifer, der bygger de egentlige Højfjeldspartier. Typisk Lerskifer er her ikke fundet stikkende frem i fast Berg. Derimod er i Elvelejet fundet Brudstykker af en med Dividalens Lerskifer ganske ensartet Sten, og under Forholde, hvorunder der var al Sandsynlighed for, at de maatte være udbrudte fra nærliggende Lag. Den glindsende Skiferafdeling maa saaledes antagelig være at henføre til Dividalsfeltet.

Manken danner et mægtigt helt udskaaret sammenhængende Fjeldparti (Kjededrag) af flere Miles Længde langs Maalselvens Nordside — nedenfor Divielvens Udmunding. Her optræder langs Maalselven mægtige Lagrækker af grønne Skifere, Haardskifer og glindsende Skifer dels umiddelbart fra selve Dalbunden dels liggende over gneisartede Strata og granitiske Partier, der paa enkelte Steder bryder frem. Forholdene, som de her træde frem, ere vistnok ikke klare nok til derpaa at bygge nogen sikrere Slutning. Der antages dog at være nogen Grund til at forudsætte, at disse Lagrækker tilhører Dividalfeltets øvre Afdeling. Mankens højest fremspringende Toppe ere derimod byggede af Glimmerskifer, kvartsitisk Skifer i Vexling med gneisartede Lag, — Lagrækker, der kunne være yngre end de grønne Skifere, og som i saa Tilfælde maa blive at indordne under efterfølgende Hovedgruppe.

Sydover i Strøget fra Ofoten vil man paa norsk Side ikke støde paa mere fremtrædende Afdelinger, der ere at indordne under Dividalsfeltet, forinden man naar ned mod Saltenfjord. Her vil man indover den saakaldte Vattenbygd og navnlig fra

Langvandet opunder Foden af Sulitelmas Højfjeldsgruppe støde paa mægtige Lagrækker af glindsende Skifer, kloritisk Skifer. Herfra ere disse antagelig at forfølge i Sammenhæng over Fjeldpartiet til de fornævnte Lagrækker ved Junkersdal.

Af hvad der her er fremstillet vil det fremgaa, at det saakaldte Dividalsfelt danner et stærkt fremtrædende Bygningsled inden Fastlandsstrøgene af Vest-Finmarken, Tromsø Amt og Saltens Fogderi. I Strøgene om Divielvens øvre Løb om Alt-Vand og Lein-Vand er Afdelingen fundet i saagodtsom umiddelbar Tilknytning til herhen hørende Dannelser om Torne-Træsk paa svensk Side. Fremdeles er Afdelingen fundet at strække sig i fortløbende Sammenhæng fra Hornafvan og Sædva paa svensk Side til Junkersdal paa norsk Side. Dividalsfeltet danner saaledes en over den nordlige Del af den skandinaviske Halvø vidt udbredt Formationsgruppe.

Lagstillingen inden Gruppens forskjellige Afdelinger er oftest svævende og nærmer sig hyppig Horisontalfladen. Over Feltets Grændsestrøg udad — saaledes inden Lerskiferbelterne paa svensk Side langs Foden af det opstigende Højfjeld ligesom ogsaa paa norsk Side ud imod Fjordbundene — er Lagstillingen i Regelen stejlere og ofte ogsaa præget med stærke Foldninger.

Vestover synes Gruppens Led mer og mer at kile sig ud og efterhaanden ganske at tabe sig.

Der er et Forhold, som maaske kan fortjene særlig at holdes frem. Medens Afdelingens ældste Led — Lerskiferen — paa svensk Side i Regelen først træder frem i en Højde over Havfladen af omkring 1350′ nemlig efter den Linje, efter hvilken Højfjeldet stiger op fra Skogplateauet, vil man derimod paa norsk Side finde Lerskiferen i langt lavere Niveau. I Dividalen sees den saaledes i en Højde af 4—600′ o. H., og ved Bunden af Altenfjord skyder Afdelingen ned endog under Havfladen. Paa den ene Side er der vistnok Mulighed for, at lavere liggende Partier paa svensk Side ere sporløst forsvundne under lange Tidsrums eroderende Værk. Forholdet vil dog ikke tilfulde kunne forklares herved. Det er nemlig øjensynligt, at Gruppens dybest liggende Led paa svensk Side er at søge i større Niveau over Havfladen end Tilfældet er paa norsk Side. *Den skandinaviske Halvøs Højderyg — hvad enten denne nu i sin Tid kan have ligget over eller under Havfladen — maa derfor maaske engang have været at søge langt længere mod Øst end Tilfældet nu er, og dengang nærmest efter eller noget østenfor den Linje, fra hvilken det nuværende Højfjeld paa svensk Side stiger op fra det skogbevoxte Plateau.*

Dividalsfeltet falder i det væsentlige sammen med den Afdeling jeg tidligere har betegnet under Navnet Golda-Gruppen.

Lerskiferafdelingen paa svensk Side er som tidligere nævnt af svenske Geologer bleven henført til Silurtiden. Om saa i Virkeligheden er Tilfældet vil vel ikke kunne besvares afgjørende, forinden det lykkes her at paavise forsteningsførende Lag. Det vilde i ethvert Tilfælde være et ret mærkeligt Forhold, om saa udbredte og saa mægtige Lagrækker fra Silurtiden — med sin i Regelen saa rigt udviklede Fauna — her skulde vise sig ganske forsteningsfri. At Lerskiferen er overlejet af flere tusinde Fods mægtige Lagrækker, dannet af i høj og i højeste Grad krystalliniske Bergarter, synes paa Forhaand heller ikke at skulle tale til Fordel for denne Forudsætning. Trods den petrografiske Lighed kunde der dog være Mulighed for, at Lappmarkens Lerskiferdannelser vare ældre end de siluriske Afdelinger i Jemteland.

Der er imidlertid al Grund til at antage, at den endelige Besvarelse af dette for det nordlige Sveriges og Norges Geologi saa betydningsfulde Spørgsmaal maa blive at hente fra svensk Side.

I Henhold til den her leverede Fremstilling dannes Dividals-Gruppen af følgende Underafdelinger i Rækken nedenfra opad.

a) Konglomerat med Sandsten,

b) Lerskifer med Lersten,
c) Kvartsskifer med Kvartsit,
d) Lerglimmerskifer, glindsende Skifer, kloritisk Skifer med enkelte underordnede Lag af renere Lerskifer ligesom ogsaa med Indlejninger af Magnesia-Kalksten.

Gruppens samlede Mægtighed kan naa op til 17 à 1800′ (omkring 550 m).

3. Tromsø Glimmerskifergruppe.

Det høje Fjeldparti, der stiger op om Jæggvik langs søndre Side af Hornafvans østlige Ende og her afsætter den 3360′ høje Peljegaisi, er som tidligere vist bygget af en kvartsrig Glimmerskifer, hvis Lagrækker over lange Strøg viser en regelmæssig øst-vestlig Strøgretning med sydligt Fald af 30 à 40°. Som Forholdet er fremstillet af de svenske Geologer (Törnebohm for Egnen om Storsjøns og Hummel for svensk Lappmarks Vedkommende) maa Lerskiferen antages at skyde ind under Glimmerskiferen. Ifald dette i Virkeligheden skulde være Tilfældet, saa vil dette tjene til at kaste Lys over forskjellige Forholde paa norsk Side, — over Forholde, der hidtil have staaet højst tvivlsomme og uklare. Paa Forhaand er der nemlig allerede al Rimelighed for at forudsætte, at Glimmerskiferfeltet om Jæggvik er at indordne under den store geologiske Gruppe, der optræder saa udbredt og i saa mægtige Lagrækker over store Dele af det nordlige Norge, at den med fuld Føje er at opstille som det mest fremtrædende Bygningsled her — nemlig den saakaldte Tromsø Glimmerskifer-Gruppe.

Paa forskjellige Steder, hvor Dividalsfeltet er paavist inden det nordlige Norge, dækkes Gruppens øverste Lagrækker op over Højfjeldet af tildels mægtige Lagrækker af Glimmerskifer, der i petrografisk Henseende ganske er at sammenstille med de forskjellige Afændringer af denne Bergart, der danner Hovedledet inden Tromsø Glimmerskifergruppe. Dette Forhold træder saaledes navnligen frem opefter Sørdalen i Bardo, Salangsdal og tildels ogsaa efter Reisenelvens Dalføre. Over Højfjeldsplateauerne, hvor Fjeldgrunden ofte kan findes overdækket over lange Strøg, og hvor den her nævnte Glimmerskiferafdeling kunde forudsættes at skulle støde sammen med Tromsø Glimmerskifergruppe, har det aldrig lykkets at hente sikrere Bidrag til at bestemme det indbyrdes Forhold i saa Henseende. Om man her havde en og samme eller to i Alder forskjellige Afdelinger kunde ikke afgjøres med fuld Sikkerhed. Er Forholdet mellem Lerskiferafdelingen og Glimmerskiferfeltet ved Hornaf-van saadant som fremholdt — og Forholdene paa norsk Side pege ligeledes stærkt i samme Retning — saa vil deraf fremgaa med afgjørende Bestemthed, at den over Dividalsfeltets Afdelinger liggende Glimmerskifer er at indordne under Tromsø Glimmerskifergruppe.

Keilhau, der navnlig undersøgte Strøgene om Altenfjord, medbringer ogsaa derfra det bestemte Resultat, at de krystalliniske Skifere over Højfjeldspartierne langs den vestlige Side af Altenfjord træder i et bestemt Overlejningsforhold til Altens Lerskiferfelt.

Som det vil fremgaa af mine tidligere offentliggjorte Afhandlinger om det nordlige Norges Geologi, dannes Tromsø Glimmerskifergruppe af mægtige Lagrækker af krystalliniske Skifere. Glimmerskifer — i petrografisk Henseende i forskjellige Afændringsformer — danner Gruppens stærkt fremtrædende Hovedled, men dertil er ogsaa knyttet Lerglimmerskifer, Grafit-Skifer, kvartsitisk Skifer, kloritisk Skifer, Hornblendeskifer og endvidere renere Gneislag. Gruppen indeslutter endvidere overordentlig hyppig Indlejninger af en oftest uren grovkornig krystallinisk Kalksten, der undertiden viser sig stærkt bituminøs og endog gaar over til en fuldkommen Stinkkalk. Grafit i smaa Korn sees i Regelen at være rigt indsprængt i den kornige Kalksten, — undertiden findes den deri i mere sammenhængende Aarer.

Indover Indlandets Højfjeldspartier er Lagstillingen oftest bølgeformig svævende til horisontal, ud mod Kyststrøgene bliver Faldet stejlere. Idet Strøgretningen oftest træder frem som nord-sydlig vil flere paa hinanden følgende mer eller mindre regelmæssige Foldninger være at paavise i Retningen fra Kysten indover mod Øst.

Tromsø Glimmerskifer-Gruppe kan opløses i to større Hovedafdelinger, nemlig

en understliggende kvartsitisk Afdeling,

og den overliggende Glimmerskiferafdeling, af hvilke den sidste danner Gruppens stærkt fremtrædende Hovedled.

Kvartsiten optræder navnlig i Strøgene om nedre Rosta-Vand i det øvre af Maalselven som et baade udbredt og mægtigt Bygningsled Den dannes her af en haard standstenagtig Kvartsit af smudsig graa Farve. Rostafjeldets mægtige Fjeldparti er fra Vandets Spejl op til en Højde af over 1000′ over samme bygget af horisontalt liggende Lagrækker af denne Bjergart. Likka Varre, der stiger op fra Rostadalen i Nærheden af Nedre-Rostavands øvre Ende til en Højde over Havfladen af mellem 4 à 5000′ over Havfladen er fra Fod til opimod Top igjennem en Højde af nær 4000′ bygget af den samme kvartsitiske Sten. Ogsaa her er Lagstillingen paa det nærmeste horisontal. Toppen er derimod bygget af Glimmerskifer med Kalkstensindlejninger.

Om Bunden af Salangen — fra Handelsstedet Sjøvej udover — dannes Fjeldgrunden langs Fjorden i de laveste Partier af Kvartsit tildels i Vexling med Hornblendeskifer, der dog optræder helt underordnet og navnlig mellem de dybest liggende Lag. Højere op afløses Kvartsiten af Glimmerskifer — ogsaa her ligesom ved Rostafjeldet under en coriordant Lagstilling. Salangens Kvartsit er at parallelisere med Rostakvartsiten — muligt at den dog ligesaasnart var at indordne under Grundfjeldet.

Kvænangens før omhandlede kvartsitiske Skifer er muligens ogsaa at parallelisere med Rostakvartsiten. I saa Tilfælde maa den altsaa blive at udskille fra Dividalsfeltet.[1])

Glimmerskifer danner forøvrigt — som allerede ovenfor fremholdt — Gruppens mest fremtrædende Led og træder ogsaa hyppigst frem fra de dybest liggende Partier, saa det i Regelen ikke lader sig afgjøre, hvorvidt den hviler paa en kvartsitisk Undergrund.

Sees hen til Forholdene ved Rosta-Vand, hvor Lagstillingen fra Fod op til Top gjennem en Højde af omkring 5000′ paa det nærmeste er horisontal, saa vil Gruppens samlede Mægtighed kunne gaa op til henimod 5000′ (1569 m).

Gruppens Lagrækker gjennembrydes navnlig over den nordlige Del af Tromsø Amt ligesom ogsaa over Vestfinmarken hyppig af gabbroartede og diabasiske Partier Foruden i talrige mindre og mere underordnede Forekomster bygge de ogsaa flere milevidt udspændte Felter, og danne derunder mægtige kjedeformige Fjelddrag.

Tromsø Glimmerskifer-Gruppe er antagelig at parallelisere med A. E. Törnebohms Sevegruppe. Ogsaa denne opløses i to Underafdelinger, nemlig: en dybere liggende kvartsitisk Etage og en øvre, bygget af krystalliniske Skifere.

Efter Törnebohm ligger altid de til Divifeltet indordnede Lagrækker mellem Urberget og Sevegruppen. Paa norsk Side kiler Dividalsgruppen sig i Regelen ud i Retning mod Vest, saa den ud imod de egentlige Kyststrøg ikke vil være at gjenfinde. Her er Glimmerskifer ofte umiddelbart knyttet til Kyststrækningens Gneis og til det her saa stærkt fremtrædende gneisgranitiske Felt. Der er forøvrigt som allerede ovenfor antydet meget, som synes at tyde hen paa, at Gneisen og Gneis-Graniten her rettest bør blive at indordne som Led under Glimmerskifergruppen.

---

[1]) Se Bemærkningen herom i Afsnittet »Dividalsfeltet».

4. Yngste Højfjelds-Gruppe.

Glimmerskiferen overlejes paa sine Steder af tildels mægtige Lagrækker af Lerglimmerskifer, glindsende Grafitskifer i hyppig Vexling med Lag af en temmelig finkornig mørk bituminøs Kalksten. Disse Lagrækker er paa norsk Side især fundet rigt udviklede i Højfjeldspartierne inden Grændsestrøgene mellem Salangen og Torne-Træskes Højfjeldsindsænkning, samt over de Fjeldpartier, der herfra skyde ned mod Harjangen i Ofoten.

Opover det omkring 3500′ høje Reuri — hvorpaa Grændserøs No. 268 — fandtes følgende Forholde:

I de dybest liggende Partier i de fra Stordalsskaret i en Højde af omkring 1600′ o. Havet opstigende Fjeldsider fandtes Glimmerskifer med røde Granater og derover Hornblendeskifer i svævende Lagstilling. Herfra opimod Top dannes Fjeldgrunden af midlere Skifer — glindsende Glmmerskifer, Lerglimmerskifer, glindsende Grafitskifer i hyppig Vexling med mørk temmelig stærkt bituminøs Kalksten tildels i mægtige Aflejninger. Den mildere Skifer gaar ofte over til eller vexler med Lag, i hvilke sorte Hornblendekrystaller ere kastede om i Grundmassen, der da kan gaa over til en gulhvid sandstensagtig Dannelse, rigt indsprængt med frisk brun Siderit.

Disse ejendommelige med Hornblendekrystaller indfældte Dannelser gjenfindes paa forskjellige vidt fra hinanden liggende Punkter over Indlandstrøgene mellem Salangen, Sørdalen i Bardo og Alt-Vandet og træder navnligen frem inden Højplateauets højest opstigende Toppe. Saaledes op over Top af det omkring 4000′ høje Eriksfjeld mellem Salangdal og Sørdal og forøvrigt ogsaa paa forskjellige Punkter inden Højfjeldspartierne om Alt-Vandet.

De omhandlede Lagrækker op over Reuri viser et Strøg, der mer eller mindre spiller i øst-vestlig Retning — i Regelen med et nordligt Fald af mellem 30 à 40° og undertiden endnu stejlere.

Mægtige Lagrækker af dermed ensartede Skiferdannelser optræder over de høje Fjeldpartier ned mod Harjangsdal i Ofoten og ligge ogsaa her over Glimmerskiferen.

Ogsaa inden Højfjeldspartiet mellem Salangsdal og Sørdal paa den ene og Torne-Træskes dybe Højfjeldsindsænkning paa den anden Side træffes mægtige Lagrækker af Skiferdannelser, der antagelig maa være at indordne her.

Paa svensk Side ere et større og flere mindre herhid hørende Partier paatrufne langs den sydlige Side af Torne-Træskes vestlige Del — altsaa ganske i Nærheden af og som det af Hummels Beskrivelse synes at fremgaa under ganske ensartede Forholde med de nys fra norsk Side omhandlede Afdelinger.

Hummel udtaler sig derom i sin før nævnte Indberetning saaledes:

«Ovenpaa denne Kvartsitskifer ser man ved Apiskoelven mægtige Skiferdannelser af helt ulige Udseende. De ere Glimmerskiferdannelser af mørkegrøn eller graa til sort Farve, stundom næsten virkelige Lerskifere, men optræde ogsaa i enkelte Lejer som Gneiser med mørkegrøn Glimmer eller Klorit. I de ældre Lag træffes Kalksten af blaagraa og hvid Farve samt sort glindsende Grafitskifer. Paa saadanne Bergarter vandrer man en længere Strækning mellem Torneå-Træsk og Porro Varre, hvor Kvartsiten igjen træder frem som en Følge af Lagenes forandrede Faldvinkel.»

Denne Gruppe, der muligens kan være at sammenstille med Törnebohms «Køligruppe», synes over det nordlige Skandinavien nærmest indskrænket til Højfjeldsstrøgene om Torne-Træsk. Den danner det yngste afsluttende Endeled inden den Række af Afdelinger, der her bygger de norsk-svenske Højfjeldspartier.

Med Hensyn til denne Gruppes Aldersforhold udtaler Hummel i sit ovennævnte Arbejde, efter at have fremholdt, at Lerskiferafdelingen med den overliggende Kvartsit (Glimmerskifer) efter al Sandsynlighed repræsenterer den oversiluriske Tid, sig videre saaledes:

«Ogsaa den øverst liggende Serie af fine Glimmerskifere har man visselig været fristet til at henføre til en yngre Formation paa Grund af den oftest skarpe Grændse mod den underliggende Kvartsit. Men herimod taler dog i nogen Mon den Omstændighed, at der i Glimmerskiferens lavere Afdeling optræder Lag af sorte Skifere med Grafit og Svovlkis samt blaagraa Kalksten, der vise stor Lighed med Overgangsformationens mere fremtrædende Bergarter.»

Til klarere Oversigt over de her omhandlede Strøgs geologiske Forholde hidsættes efterstaaende Schema. Med Hensyn til dette skal jeg dog her tilføje, at jeg herunder ikke har indtaget en tidligere omhandlet Bygningsgruppe, nemlig Balsfjordens Skiferfelt. Om dennes Plads vover jeg endnu ikke at udtale mig med mere Bestemthed, men forbeholder mig senere at komme tilbage til Behandlingen af dette Spørgsmaal.

Oversigt

over

Det nordlige Sveriges og Norges Geologi

	efter Pettersen	efter David Hummel	efter A. E. Törnebohm.	
	Lagdelte Grupper med sine Underafdelinger.			Massiver.
4.	**Yngste Højfjelds-Gruppe.** Glindsende Skifer, Grafit Skifer m. m.	**Kambriske og siluriske Dannelser.** f) grønne glindsende Skifere, e) Grafitskifer med siluriske Kalklag,	**Køligruppe.**	
3.	**Tromsø Glimmerskifer-Gruppe.** b) Glimmerskifer med Kalksten, a) Rostakvartsit.	d) Glimmerskifer.	**Seve-Gruppe.**	**Gabbro,** Diabas, Hypersthenit, Eukrit, Olivinsten — yngre end 3.
2.	**Dividals-Gruppen.** d) Lerglimmerskifer (glindsende Skifer), c) Kvartsskifer og Kvartsit, b) Lerskifer, a) Sandsten og Konglomerat.	c) Kvartsitskifer, b) Lerskifer, a) Sandsten og Konglomerat.	**Siluriske Dannelser.** **Kambrisk Kvartsit.**	**Grønsten** (Diorit) yngre end 2 d.
1.	**Grundfjeldet.** b) Ældre Glimmerskifer, a) Gneis.	**Urberget.** e) Hornblendeskifer, d) Glimmerskifer, c) Hälleflinta, b) Graa Gneis, a) Rød Gneis.		**Granit** (Laurentisk).

Jeg skylder sluttelig her at tilføje et Par Bemærkninger. Jeg har tidligere gjentagne Gange udhævet i mine offentliggjorte Afhandlinger om det nordlige Norges Geologi, at her forelaa forskjellige uløste Spargsmaale med Hensyn til de her optrædende Bygningsgruppers gjensidige Aldersforhold. Jeg har ved forskjellige Anledninger fremhævet, at fuld Sikkerhed vilde her ikke være at vinde, med mindre man udstrakte Undersøgelserne fra norsk Side ned over svensk Lappmark. E. A. Törnebohms ovennævnte Afhandling, hvori han i Henhold til de paa svensk Side gjorte Iagttagelser gjorde et Forsøg paa at sammenknytte disse med de norske Undersøgelser, læste jeg derfor i sin Tid med megen Interesse. Skjønt jeg allerede dengang i mer end én Henseende fandt mig tiltalt ved hans deri fremlagte Grupperings-Schema af Højfjeldspartiets geologiske Bygningsled, vovede jeg dog ikke ubetinget at slutte mig til hans Opfatning i saa Henseende, da Forholdene, som de kunde være eller vare aflæste paa norsk Side, ikke laa saaledes klart for en Dag. Min Sommerrejse gjennem svensk Lappmark har imidlertid tjent til i høj Grad at bestyrke en Forudsætning om, at Törnebohms Opstillen i sine væsentlige Hovedtræk er den rette. Idet jeg saaledes fremlægger dette lille Arbejde, vil jeg dog derunder have fremholdt, at der utvivlsomt fornødiges en nøjagtigere Revision, forinden de her opstillede Resultater endelig kunne fastslaaes. Naar et sammenhængende Profil fra det svenske Højfjelds østlige Afslutning over Højfjeldet og ned til norsk Side kan blive opgaaet efter en — eller et Par — dertil hensigtsmæssig valgt Linje, maa man utvivlsomt ved Hjelp af det foreliggende Undersøgelsesmateriale kunne vente Bygningsforholdene, fuldt udredede i sine store og væsentlige Træk. Hertil vil der udkræves en Sommers Arbejde — og det vilde for den skandinaviske Halvøs Geologi være af stor Betydning om dette ret snart kunde ske.

Ifald den her fremholdte Grupperingsmaade skal blive godkjendt gjennem senere nøjagtige Undersøgelser, vil deraf med Hensyn til Spørgsmaalet om Daldannelsen inden disse Egne formentlig fremgaa, at Erosionen i saa Henseende ofte maa have spillet en *højst væsentlig* Rolle.

Tromsø d. 19 Debr. 1877.

OVERSIGT OVER DE NORSKE SERPULA-ARTER.

AF

G. A. HANSEN.

Da der ikke findes let tilgjængelige Afbildninger af disse Dyrs Skaller og Laag, skal jeg meddele saadanne her, og det vil af dem ligesom af Undersøgelse af Dyrene selv fremgaa, at de af Philippi (Wiegmanns Archiv 1844) og af Mørch (Naturhist. Tidsskrift 3die Række, 1) opstillede Karakterer til Skilning af Slægterne og Arterne neppe slaa til, og at man vanskeligt efter dem vil kunne klassificere endog de faa Arter, vor Fauna har at opvise.

Paa Tab. 1 Fig. 1 og 4 sees to almindelige Varieteter af Skaller for *Serpula vermicularis.* Skallerne forekomme ellers i mange forskjellige Snoninger, og Tilvæxtstriber forekomme hyppigt meget tætstaaende ved Skallens fordre frie Ende, hvilken ogsaa ofte ikke bærer Spor af den trekantede Form, som den fastvoxede Del af Skallen har. Laaget (Fig. 2), der er tragtformigt, har omtrent 50 Tænder, er fint foldet saavel paa Ind- som Udsiden af Tragten. Denne Foldning er begrundet deri, at der fra Tragtens ydre Blad gaa trekantede Septa ind imod dens Bund og dele Rummet imellem Tragtens Vægge i lige mange Loculamenter som der findes Folder og Takker i Randen, idet Septa svarer til Furerne mellem Folderne (Fig. 3). Laagets indre Bygning er ellers den samme som Stilkens; dets

Chitinhud er ganske lidt tykkere end Stilkens, men dets Septa, der ere Forlængelser af Chistinhuden, ere noget tyndere. Hypodermlaget, der bestaar af meget høie Cylinderceller, fortsættes paa Septa, og ind i Loculamenterne; mellem disse gaar der Fortsættelser af det Bindevæv, som fylder Stilken og Laagtragten, dette Bindevæv bestaar af store stjerneformige Celler, der ligge i en homogen strukturløs Intercellulærmasse; i Stilkens Centrum gaar et Blodkar med arteriel Bygning, der sender Grene ud i Bindevævet. Muskler og Nervegrene ligge umiddelbart under Hypodermet, Musklerne række kun op til Tragtens Spids.

Branchiernes Antal er 26—30 paa hver Side, vel 1 Ctm. lange paa Dyr af $3^1/_2$—4 Ctm.s Længde og $1^1/_2$ Mm.s Bredde. Kraven er lav helrandet med et dybt Indsnit paa hver Side. Paa 1ste Led findes kun Kapillærbørster, ingen Hagebørster. Børsterne vende fortil og Bundtet sidder længre bagtil end paa de følgende Led. Børsterne ere to Slags (Fig. 8). Paa de følgende 6 Led af Forkroppen findes Kapillærbørster som Fig. 8 b; Børstebundterne vende ret bagtil, naar Dyret er udstrakt, men trykkes bagtil og nedad ind til Kroppen, naar Dyret er indtrukket i Skallen. Ved Siden af Haarbørsterne findes desuden de ventralt stillede lange Rader af Hagebørster (Fig. 9). Det er at mærke ved Hagebørsterne hos denne Art som hos de øvrige, at deres Tagger vende fortil og at Børsterne derfor formentlig tegnes rigtigst som i Fig. 9 ikke som vanligt med nedadvendende Tagger. Paa Bagkroppen beholde Hagebørsterne samme Form som paa Forkroppen, medens derimod Kapillærbørsterne optræde under en ganske forskjellig Form, idet de i Spidsen ere skjævt tragtformigt udvidede (Fig. 10 og 11) og Tragtens Rand besat med fine Tagger, svarende til en fin Stribning af det udvidede Parti. Paa Bagendens sidste 32—34 meget korte Led optræde sylformige Kapillærbørster; de i Spidsen tragtformigt udvidede Børster aftage lidt efter lidt i Antal, indtil de endelig ganske forsvinde omtrent ved det 15de Led bagfra (Fig. 5); de sidste 3—4 Led bære kun Hagebørster (Fig. 5).

Fig. 6 og 7 fremstille Skal og Laag af en Serpula, der i 3 Exemplarer fandtes mellem Exemplarer af Placostegus tridentatus fra Hardangerfjorden. Skallen er mere rund end sædvanligt hos Serpula vermicularis, men viser dog ved to Længdestriber en Antydning til den mere vanlige 3-kantede Form, og Aabningen er ligesom lidt indsnøret. Laaget har kun 20 og dertil meget tykkere Folder end hos den almindelige Serpula vermicularis, men har forresten fuldkommen den samme Bygning som hos denne. Dyret selv viser i alle Detaljer den fuldstændigste Overenstemmelse med Serp. verm. Efter Skallen og Laaget kunde man fristes til at opstille dette Dyr som egen Art eller ialfald som en Varietet af Serp. verm.; men Dyrenes fuldkomne Overensstemmelse forresten synes at forbyde dette, og vi skulle nedenfor se, at samme Dyr kan bygge meget forskjellige Skaller og være forsynet med meget forskjellige Laag.

Hydroides norvegica, Gunn.

Her skulde det synes, som havde man i Laagets karakteristiske Form (Tab. II, Fig. 3) en god Slægtskarakter. Nærmere beseet har dog dette Laag meget tilfælles med Serpulalaaget. Paa Længdesnit af Laaget vil man se (Fig. 4), at man, naar man tager den indre Tragt med dens taggede Randprocesser bort, har et fuldstændigt Serpulalaag tilbage. Den indre Tragt er kun en Udkrængning af Bunden i den ydre. Dyret forresten har den fuldstændigste Lighed med Serpula vermicularis, kun ere dets Branchier forholdsvis længere. I første Leds Børstebundt findes samme Sort Børster som i samme hos Serp. verm. (T. II, Fig. 5), Bagkroppens Kapillær- og Hagebørster svare fuldkommen til de samme hos Serp. verm. (Fig. 6, 7) og ogsaa hos Hydroid. norvegica findes lange, tynde, sylformige Haarbørster paa Bagenden fra det 15de til 18de Led bagfra og bagover.

Skallen er for det meste rund med Tverrynker, dels oprullet i Spiral eller anderledes krummet, dels helt udstrakt (Fig. 1); denne sidste Skalform har jeg fundet fritliggende i Ler uden at den var tilheftet nogen Gjenstand. Undertiden findes ogsaa Skaller med en teml. skarpt fremtrædende Længdekam (Fig. 2).

Medens Laagets Form tilsyneladende berettiger til at henføre dette Dyr til en anden Slægt end Serpula, er det dog af Laagets indre Bygning ligesom af Børsteformerne formentlig klart, at man derved fjerner det mere end tilbørligt fra dets nærmeste Slægtning.

Pomatocerus triqveter.

Vermilia porrecta..

I Fig. 8, 9 og 10, T. II er fremstillet Laaget af en Pomatocerus og i Fig. 11—13 et Vermilialaag i forskjellige Stillinger og efter disse saa forskjellige Laagformer ere de to Slægter opstillede. Stundom finder man og en tydelig Forskjel mellem Dyrenes Skaller (Fig. 14 og 15). Men undersøger man et større Antal Exemplarer, finder man snart, at de forskjellige Laagformer ingenlunde svarer til de 2 Skalformer; begge Laagformer findes i Skaller af samme Form. Gaar man nu videre, finder man, at Dyrene have en høi Krave, som dels er helrandet, dels takket, men ogsaa, at denne forkjellige Form af Kraven ikke staar i noget Forhold til de forskjellige Laag eller Skalformer. Og søger man end videre for dog at finde et holdbart Skelnemærke mellem de to Dyr, saa finder man kun, at de ogsaa i Børsternes Bygning ere fuldkommen ens, og dette hvad enten Dyrene ere tagne fra 50—60 Favnes Dybde, paa Stene i Stranden eller fra Tangen.

Der synes saaledes ingen Grund at være til at skille disse Dyr ad og det endog saa vidt, at man henfører dem til to forskjellige Slægter. Pomatocerus triqveter og Vermilia porrecta ere samme Dyr, der foruden som paavist i Skal og Laagform, ogsaa varierer overmaade meget i Farve, idet denne paa Branchierne kan skifte i alle Nuancer mellem rødt og blaat.

Placostegus tridentatus

kan derimod med god Ret opføres med et eget Slægtsnavn. Skallen udmærker sig som bekjendt ved sin klare gjennemskinnende Substants. Laaget (T. III, Fig. 1 og 2) er hornagtigt og spaltet i 2 Lameller, der indeslutte et fladtrykt Hulrum mellem sig. Stilkens og dennes tragtformige Endes indre Bygning er den samme som hos Serpula vermicularis. Paa Forkroppen findes kun 6 børstebærende Segmenter, idet første Segment er børsteløst. Derimod findes her en anden Eiendommelighed, en lang rød Stribe parallelt med de bagenfor liggende hagebørstebærende Tori (Fig. 3, a). Disse røde Striber maa rimeligvis opfattes som Rader af tæt sammenpakkede enkle Øine; de bestaa nemlig af stærkt rød pigmenterede cylindriske Hypodermceller, der i deres ydre Ender bære hver et aflangt stærkt lysbrydende Legeme ligesom en Lindse (Fig. 4). Kapillærbørsterne paa For og Bagkrop (Fig. 5 og 6) have ingen afvigende Form, hvorimod Hagebørsterne (Fig. 7) have en meget eiendommelig Form, idet den sædvanligt taggede Rand ikke engentlig er tagget, men kun fint tverstribet.

Ditrypa arietina.

Dette Dyr er vel karakteriseret ved sin Skal baade derved, at den aldrig er fastvoxet til nogen anden Gjenstand, men altid ligger frit i Evjen, og derved, at Mundingen er indsnævret (Fig. 11, T. III). Laaget ligner fuldkomment det hos Placostegus tridentatus i det Ydre (Fig. 7), men adskiller sig fra samme derved, at det ei er spaltet i 2 Lameller. Dyret har endvidere Lighed med Placostegus tridentatus deri, at der paa Forkroppen kun findes 6 børstebærende Segmenter, idet første Segment er uden Børster. Branchiernes Antal er 12 paa hver Side, og de ere besatte med en dobbelt Række Radioler. Kapillærbørsterne paa Forkroppen ere smalt bræmmede (T. III, Fig. 8), paa Bagkroppen mangle Kapillærbørster ganske, undtagen paa de sidste 10—15 korte Led, hvor der findes nogle ganske faa sylformige Børster (Fig. 10). Hagebørsterne ere meget fint tandede, med ca. 20 spidse Tagger, noget mindre paa Bagkroppen end paa Forkroppen (Fig. 9).

FORKLARING AF FIGURERNE

TIL

G. A. HANSENS AFHANDLING.

Tavle I Fig. 1. Rør af Serpula vermicularis.
— 2. Laaget af samme.
— 3. Længdesnit af Laaget.
— 4. Rør af Serpula vermicularis.
— 5. Dyrets Bagende.
— 6. Rør for en Serpula vermicularis fra Hardangerfjord.
— 7. Samme Dyrs Laag.
— 8. Kapillærbørste fra Forkroppen, *a* tilhører alene første Led, *b* og *b* ogsaa de følgende.
— 9. Hagebørste.
— 10. Bagkrops Kapillærbørste.
— 11. Samme seet lidt ovenfra Enden.

Tavle II. Fig. 1 & 2. Rør for Hydroides norvegica.
— 3. Samme Dyrs Laag.
— 4. Længdesnit af Laaget.
— 5. Kapillærbørste fra 1ste Led.
— 6. Kapillærbørste fra Bagkroppen.
— 7. Hagebørste.
— 8, 9 & 10. Laag af Pomatocerus triqveter.
— 11, 12 & 13. Laag af Vermilia porrecta.
— 14. Rør for samme.
— 15. Rør for Pomatocerus triqveter.

Tavle III Fig. 1. Laag af Placostegus tridentatus i Gjennemsnit.
— 2 Forstørret Gjennemsnit af samme Laag.
— 3. Dyrets Forende uden Branchier. Ved *a* den røde Stribe paa første Led.

Tavle III Fig. 4. Længdesnit af Forkroppens forreste Del, der viser den røde Stribe bestaaende af rødpigmenterede Hypodermceller, hver med et lindseformigt Legeme i den ydre Ende.

— 5. Kapillærbørste fra Forkroppen.

— 6. — fra Bagkroppen.

— 7. Hagebørste.

— 7. Laaget af Ditrypa arietina.

— 8. Kapillærbørste fra Forkroppen.

— 9. Hagebørste.

— 10. Kapillærbørste fra Bagenden.

— 11. Rør for Ditrypa arietina.

DRUESUKKERETS TITRERING I MENNESKEURIN OG DYRISKE VÆDSKER OVERHOVEDET.

AF

WORM MÜLLER OG I. HAGEN.

(MEDDELELSE FRA UNIVERSITETETS FYSIOLOGISKE INSTITUT.)

§ 1. Sukkerets Titrering i Menneskeurin.

Druesukkeret bestemmes sædvanligt kvantitativt ad kemisk Vej ved Hjælp af Fehlings Titrermethode, der som bekjendt grunder sig paa, at en vis Mængde Kobberoxyd i alkalisk Vædske, tilsat vinsurt Kali-Natron, ved Ophedning reduceres til Kobberoxydul af en bestemt Mængde Druesukker (5 Mol. Kobberoxyd af 1 Mol. Sukker). Sammenligner man de efter denne Methode fundne Værdier med dem, der erholdes ad fysikalsk Vej ved Cirkumpolarisationsapparatet, (Soleil-Ventzke's eller Wild's,) saa ere Differentserne for *vandige* Druesukkeropløsningers Vedkommende meget ringe. Saaledes har Pillitz[1]) i en vandig Opløsning af rent Druesukker fundet 5.37 pCt. ved Fehlings Methode og 5.2 pCt. ved Polarisation. I mange andre Forsøg, som ere udførte baade her og andetsteds, stemme Resultaterne end bedre.

Men i *Urinen* faar man efter mangfoldige Erfaringer sædvanligt en ikke ringe Uoverensstemmelse, der i Gjennemsnit

---

[1]) Zeitschr. f. anal. Chem. B. 10. 1871. S. 462.

turde beløbe sig til 0.3—0.4 pCt.; den Fehlingske Methode giver den større Sukkergehalt; Cirkumpolarisationen den mindre.

Allerede paa Grund af disse Uoverensstemmelser var det af ikke uvæsentlig Betydning ved Hjælp af en anden kemisk Bestemmelsesmethode at kontrollere Resultaterne for Urinens Vedkommende. En saadan er ogsaa ønskelig af andre Grunde. Man har indvendt mod Fehlings Methode, at Titrervædsken (Kobbervitriol opløst i Alkali ved Hjælp af vinsurt Kali-Natron) er lidet holdbar. Denne Indvending er ikke ubegrundet, men dog uden Betydning, naar man efter Prof. Schneider opbevarer Kobbervitriolopløsningen og den med Natronlud tilsatte Seignettesaltopløsning hver for sig og først blander dem umiddelbart før Analysen. Kobbervitriolopløsningen kan naturligvis ikke forandre sig, og den alkaliske Seignettesaltopløsning er meget mere holdbar end den Fehlingske Vædske.

Den største Ulempe er, at Fehlings Vædske sædvanligt ikke kan benyttes til at bestemme ringere Sukkermængder end 0.5 pCt. i Urinen, fordi man paa Grund af de for Urinen egne Forholde ikke kan vide, naar alt Kobberoxyd er reduceret. Almindeligvis udføres Endereaktionen paa den Maade, at man, saasnart Reduktionen af det afmaalte Kvantum Fehlings Vædske synes at være færdig, filtrerer og i Filtratet prøver paa Spor af Kobber ved Hjælp af Ferrocyankalium og Eddikesyre (eller fortyndet Saltsyre). Denne Reaktion slaar ialmindelighed til, naar den ufortyndede Urin indeholder 1 pCt. Sukker eller derover, imellem 1 og 0.5 pCt. lykkes den sædvanlig, men ikke altid, og under 0.5 pCt. meget sjelden. Under disse Omstændigheder kan nemlig Kobberoxydulet dels holdes opløst, dels være saa fint fordelt i Vædsken, at det gaar gjennem Filtret; Filtratet indeholder Kobberoxydul, og da man ikke har nogen Indikator, ved Hjælp af hvilken man ganske skarpt kan afgjøre, om der i samme ved Siden af Kobberoxydul ogsaa findes Spor af Kobberoxyd, bliver det sædvanlig umuligt at bestemme meget ringe Kvantiteter Sukker i Urinen ved Hjælp af Fehlings Methode.

Da det nu i mange Tilfælde just er vigtigt nøjagtig at angive smaa Sukkermængder i Urinen, og disse som bekjendt i denne Vædske heller ikke kan bestemmes ved Polarisation, saa var det ønskeligt at kunne frigjøre sig fra denne Ulempe. Til den Ende varierede vi først Endereaktionen ved Titreringen med Fehlings Vædske paa mange Maader, men uden Nytte. Vi vendte os derpaa til andre Prøvevædsker og bleve tilsidst staaende ved den paa *Liebigs* Foranledning af *Karl Knapp*[1]) angivne Methode; denne gav tilfredsstillende Resultater og fortjener derfor en nærmere Beskrivelse end den, der sædvanlig bliver samme tildel.

Hans Bestemmelsesmaade grunder sig paa, at en alkalisk Opløsning af (4 Dele) Cyankviksølv ved stærkere Ophedning med (1 Del vandfrit) Druesukker dekomponeres under Udskillelse af metallisk Kviksølv. Prøvevædsken beredes meget let ved at opløse 10 gr. rent,[2]) tørt Cyankviksølv i Vand, tilsætte 100 kcm. Natronlud af sp. V. 1.145 og fortynde Opløsningen til 1 Liter.

Ved Titreringen, som vi i det væsentlige have udført overenstemmende med Knapps Forskrifter, gaa vi frem paa følgende Maade: 10 eller 20 kcm. af Titrervædsken ophedes med 20—30 kcm. Vand i en Erlenmeyers Kogeflaske til Kogning. Man lader nu af en Byrette den med Vand fortyndede Urin[3]) flyde ned, indtil alt Kviksølv er udfældt. I Begyndelsen bliver Blandingen graaligt uklar, men naar der næsten er tilsat den tilstrækkelige Mængde af Sukkeropløsningen, klares Vædsken, den

---

[1]) Ann. Chem. Pharm. Bd. 154. 1870. S. 252.

[2]) Cyankviksølvet kan ialmindelighed erholdes i Handelen; det blev i Forvejen prøvet paa sin Renhed.

[3]) Urinen fortyndes ligesom ved Bestemmelsen efter Fehling med Vand til det 10-dobbelte eller, hvis man har Grund til at antage, at Sukkergehalten er meget ringe (under 0.5 pCt.) til det 5-dobbelte.

antager en *gulagtig* Farvetone, og Kviksølvet tilligemed Fnokker af udfældte Fosfater afsætter sig.

Nu gjælder det at paavise, om Vædsken endnu indeholder opløst Kviksølvforbindelse. Da det metalliske Kviksølv fuldstændig synker tilbunds, behøver man for at udføre Endereaktionen ikke at filtrere, (saaledes som Tilfældet er ved Anvendelsen af Fehlings Opløsning); man kan simpelt hen lade en Draabe af Vædsken stige op i et Kapillærrør og derpaa udblæse denne paa en Strimmel fint svensk Filtrerpapir. Med Hensyn til Reaktionen selv have vi med Pillitz[1]) fundet, at Svovlvandstof, især naar Saltsyre er tilstede, er en bedre og hurtigere Indikator for Spor af opløste Kviksølvforbindelser end Svovlammonium. Vi gjennemtrække derfor efter Pillitz's Forskrift den fugtige Flæk paa Papiret med Dampe af rygende Saltsyre og derpaa af Svovlvandstof, idet Flækken holdes over Mundingerne af de respektive Flasker. Ere de anvendte Reagenser muligst stærke, farves Flækken strax, næsten momentant, svagt brun eller gul, selv om der blot er minimale Spor af Kviksølv tilstede. Denne Reaktionen er 1) *sikker* og 2) *ømfindtlig.*

ad 1) Det kan hænde, at der opsuges suspenderede Kviksølvpartikler i Kapillærrøret, naar Vædsken er i stærk Kog, eller naar Kapillærrøret bringes ned mod Bunden af Karret; i saa Fald vil Draaben, som udblæses paa Papiret, give Kviksølvreaktion med Saltsyre og Svovlvandstof. Man maa derfor, før man udtager Prøven, moderere eller fjerne Flammen, saa at Vædsken kommer i Ro, samt blot dukke Haarrøret tæt under Vædskeblandingens Overflade.

ad 2) Tilsyneladende er Reaktionen lidet skarp; den fugtige Flæk kan ofte før Behandlingen være gulfarvet, især hvis Urinen indeholder meget Farvestof, og Spor af Kviksølv opløst i Vædsken giver kun en meget svag Farvning af Flækken efter Indvirkningen af Saltsyre og Svovlvandstof. Og dog er Reak-

[1]) l. c. S. 459.

tionen meget ømfindtlig, naar man strængt iagttager følgende Kauteler: a) Den anvendte Urinblanding bør, som sagt, sædvanlig ikke være stærkere end 10 pCt., (1 Del Urin til 9 Dele Vand); en mere koncentreret Blanding farver ofte Papiret saa meget, at Reaktionen kan svækkes.[1]) b) Den fugtige Flæks Farve *før* Behandlingen med Svovlvandstof og *efter* maa sammenlignes. Man betragter Flækken, efter at den er gjennemtrukket med Saltsyredamp, opmærksomt, *medens den holdes over Svovlvandstofflasken.* Man vil da iagttage en Farveforandring, idet Flækken bliver mere gul. Men denne Sammenligning er ikke ganske fin, da man ikke samtidig har for Øje den oprindelige og den forandrede Flæk, og man maa ikke berolige sig, om man ad denne Vej ikke længer iagttager Farveforandring. Er dette Tidspunkt indtraadt, bringer man Kapillærrøret atter ned i Vædsken, udblæser Draaben paa Papiret ved Siden af den med Saltsyre og Svovlvandstof behandlede Flæk og sammenligner dem med hinanden, idet man bøjer Strimmelen tilbage, saaledes at begge Flækkerne komme til at have en hvid Baggrund af det ombøjede Papir. Det kan ikke noksom fremhæves, at det Filtrerpapir, man anvender, maa have en ren *hvid* Farve og være *tyndt*, saa at den fugtige Flæk lader den hvide Baggrund skinne igjennem, naar Papiret ombøjes. Fint svensk Filtrerpapir er langt at foretrække for det tydske Papir, vi her have havt. Dette har ofte en mere smudsig Farve og er aldrig saa gjennemskinnende.

Iagttager man disse Forsigtighedsregler, der ere meget at anbefale, kan man efter nogen Øvelse ogsaa ved Aftenlys med største Skarphed titrere Sukkergehalten i Uriner, som ikke indeholde Blodfarvestof i betydelig Mængde.

Beregningen er yderlig simpel; til 1 Liter (1000 kcm.) af Titrervædsken, der indeholder 10 gr. Cyankviksølv, udfordres

---

[1]) Tildels af samme Grund er det, at vi fra Begyndelsen af til de 10 resp. 20 kcm. Cyankviksølvopløsning sætte 20—30 kcm. Vand.

2.5 gr. vandfrit Druesukker, altsaa anviser 10 kcm. 25 milligram og 20 kcm. 50 milligram Druesukker.

Der blev nu udført en Række Analyser af Uriner fra Barselkvinder og Diabetikere efter Knapps og Fehlings Methode. Af Knapps Vædske anvendtes 10 eller 20 kcm., fortyndet med 20—30 kcm. Vand; af Fehlings Vædske 5 eller (sædvanlig) 10 kcm., ligeledes tilsat 20—30 kcm. Vand. Saavel den Knappske som den Fehlingske Vædskes Styrke var prøvet ved Hjælp af nøjagtigt afvejede Mængder kemisk rent Druesukker (Smeltepunkt 146°) opløst i Vand, og til Overflod blev Kobbergehalten i Fehlings Vædske bestemt efter Roses Methode, (kfr. *Fresenius*, Anl. zur. quant. chem. Anal. 6te Auflage. 1875. Bd. I. S. 334).

For at gjøre Sammenligningen saa meget nøjagtigere, anvendtes der til Titreringen efter begge Methoder en og samme Urinblanding (1 Del Urin og 9 Dele Vand) i en og samme Byrette.

De Hovedspørgsmaal, som ved denne Sammenligning maatte foreligge, vare: *I) Ere de efter Knapps og Fehlings Methode fundne Værdier for Sukkergehalten i Urinen overensstemmende eller ikke? II) Kan man ved Hjælp af Knapps Methode bestemme Sukkergehalten, naar denne er saa ringe, at den ikke lader sig titrere efter Fehlings? III) Hvilken af disse Methoder er den hensigtsmæssigste?*

Ved Besvarelsen af disse Spørgsmaal toges kun Hensyn til albuminfrie Uriner, da man efter de almindelige Angivelser ikke uden videre kan bestemme Sukkergehalten i Uriner, der indeholde Albumen. Fandtes derfor i Urinen Æggehvide, blev denne før Titreringen fjernet (udfældt ved Kogning og Tilsætning af nogle Draaber fortyndet Eddikesyre samt frafiltreret).

For den overalt angivne Regel, at man *altid* bør fjerne Æggehviden, før man bestemmer Sukkergehalten, har det ikke lykkedes os at kunne finde et bestemt experimentelt Grundlag. Vi har forgjæves søgt efter specielle Data, som godtgjøre Nødvendigheden af denne Fremgangsmaade, naar Æggehviden er tilstede i ringe Mængde (0.2—0.3 pCt. eller derunder), hvad der sædvanlig er Tilfældet, naar Urinen hos Diabetikere eller hos Barselkvinder indeholder Æggehvide. Det laa derfor nær at besvare følgende Spørgsmaal: *IV) Kan man titrere Sukkermængden i Uriner, der indeholde 0.2 pCt. Æggehvide eller mindre, uden i Forvejen at fjerne denne? Har i saa Henseende Knapps eller Fehlings Methode særegne Fordele? Hvilken skadelig Indflydelse udøver Æggehviden overhovedet ved Titreringen?*

I.

Ere de efter Knapps og Fehlings Methode fundne Værdier for Sukkergehalten i Urinen overensstemmende eller ikke?

Efter det foregaaende har vi her kun at anstille Forsøg med Uriner af en saavidt stor Sukkergehalt, at der ikke gaar Spor af Kobberoxydul over i Filtratet. De af os udførte Forsøg ere sammenstillede i følgende Tabel:

Tabel 1.

	I. Diabetikere.	Sukkeret titreret efter		I. Diabetikere.	Sukkeret titreret efter	
		Fehling.	Knapp.		Fehling.	Knapp.
1	P. A.	0.57 pCt.	0.56 pCt.	H. H.	2.38 pCt.	2.27 pCt.
2	R. K.	0.78 —	0.76 —	M. O.	2.56 —	2.63 —
3	O. K.	1.11 —	1.25 —	M. O.	3.03 —	3.03 —
4	R. K.	1.23 —	1.12 —	M. O.	3.10 —	3.33 —
5	S. H.[1]	1.54 —	1.56 —	J. E.[1]	3.12 —	3.12 —
6	P. A.	1.65 —	1.61 —	M. O.	3.26 —	3.33 —
7	R. K.	1.85 —	1.85 —	J. E.[1]	3.90 —	3.77 —
8	E. J.	1.89 —	1.89 —	J. E.[1]	3.97 —	3.70 —
9	M. O.	1.89 —	1.92 —	H. H.	4.69 —	4.65 —
10	M. O.	2.07 —	2.13 —	II. Barselkvinder.		
11	S. H.[1]	2.08 —	2.27 —	M. A.[1]	0.63 —	0.68 —
12	P. A.	2.20 —	2.22 —	M. E.	0.69 —	0.73 —
13	J. E.[1]	2.26 —	2.27 —	B. A.	1.25 —	1.14 —
14	J. E.[1]	2.31 —	2.20 —			

[1]) Disse Uriner vare oprindelig æggehvideholdige, men Albuminet var før Titreringen fjernet paa den ovenfor angivne Maade.

Til Sammenligning hidsættes de tre af Pillitz[1]) anførte Bestemmelser

	Sukkeret titreret efter	
	Fehling.	Knapp.
Urin No. 1 . .	3.59 pCt.	3.68 pCt.
Urin No. 2 . .	3.67 —	3.47 —
Urin No. 3 . .	4.16 —	4.21 —

Overensstemmelsen mellem de erholdte Værdier er iøjnefaldende. Dette er saameget mere at fremhæve, som vi i det foregaaende have sammenstillet *alle* de af os udførte Forsøg uden at udelade et eneste. Det kan derfor kun bero paa en mindre rig Erfaring, naar den bekjendte Forfatter af «Handbuch der physiologisch- und pathologisch-chemischen Analyse», Hoppe-Seyler, i det 4de Oplag af denne Bog Pag. 342 om Knapps Methode siger: «Diese Methode lässt beim Harne bei Weitem nicht die Genauigkeit der Fehling'schen Bestimmung erreichen.» *Methoderne ere lige nöjagtige.*

Da Resultaterne ere saa overensstemmende, og de ringe Differentser ikke gaa i nogen bestemt Retning, kunne vi heraf formode, at de *Substantser* i Urinen, der foruden Sukkeret reducere den *Fehlingske* Vædske ved Kogning, *ogsaa* bevirke Udskillelse af Kviksølv i den *alkaliske Cyankviksølvopløsning.* Denne Formodning er for *Urinsyrens* Vedkommende bleven bekræftet ved Forsøg, som vi have anstillet; ligesom den ved Kogning udfælder Kobberoxydul af en alkalisk Kobberoxydopløsning, udskiller den ogsaa Kviksølv af Knapps Vædske.

Før vi gaar over til det følgende Spørgsmaal, er det ikke ganske unødvendigt atter at fremhæve, at vi ikke direkte have titreret Urinen, men først efter at den var bleven fortyndet med

[1]) l. c. S. 463.

9 Dele Vand. Hvorledes Resultaterne modificeres, naar man direkte titrerer ufortyndet Urin, dette Spørgsmaals Besvarelse ligger her udenfor vor Opgave.

II.

Kan man ved Hjælp af Knapps Methode bestemme Sukkergehalten, naar denne er saa ringe, at den ikke lader sig titrere efter Fehling?

Uriner, som indeholde en ringe Kvantitet Sukker (0.5—0.7 pCt. eller derunder), lade sig meget hyppigt ikke titrere efter Fehling.[1]) Den Fehlingske Opløsning bliver i saa Fald efter Tilsætning af en større eller mindre Mængde Urinblanding først noget uklar, senere hen grønlig og derpaa sædvanlig sherrybrun ved gjennemfaldende Lys med smudsig gulgrønlig Opalescents ved paafaldende Lys. Den sherrybrune Farve er sandsynligvis væsentlig betinget af opløst og den gulgrønlige Opalescents af suspenderet Kobberoxydul(hydrat). Disse fint suspenderede gulgrønlige Partikler sænke sig meget langsomt og kunne selv efter Timers Forløb ikke frafiltreres; Filtratet har det samme Udseende som Vædsken selv. Urinen maa altsaa indeholde Stoffe, der dels opløse Kobberoxydul, dels bevirke en Udskillelse af Kobberoxydulhydrat i saa fint fordelt Tilstand, at det gaar gjennem Filtret. Et enkelt saadant Stof (Kreatinin) er allerede, som det synes, paavist, dets Forhold til Sukkeropløsninger og Fehlings Vædske ialfald experimentelt undersøgt. I Tilstedeværelsen af dette og andre Stoffe (Farvestoffene) har Seegen og andre troet at kunne finde en Forklaring af hint Fænomen. *Mærkeligt* er det imidlertid, at disse Substantser først udfolde sin Virkning, naar Sukkergehalten synker *under en vis Grændse.* Man kan vise Overgangen i en og samme Urin, som man tilsætter forskjellige Mængder Sukker; over en vis Sukkergehalt faar man

[1]) Uriner, som indeholde en større Kvantitet end 0.5 pCt. og mindre end 1 pCt. Sukker, give som oftest, men ikke altid, et klart Filtrat efter Reduktionen af Fehlings Vædske.

efter Reduktionen af Fehlings Vædske et klart Filtrat, under samme er Filtratet uklart og giver Kobberreaktion.

1) En Diabetikers Urin tilsattes en afvejet Mængde Druesukker og fortyndedes med Vand til det 5-dobbelte; ved Hjælp af Fehlings Vædske viste Urinen sig nu at indeholde 0.8 pCt. Filtratet efter Reduktionen var frit for Kobber. Derpaa gjordes en 0.75 pCt.ig Blanding, som ogsaa efterat være fortyndet til det 5-dobbelte titreredes med Fehlings Vædske. Kobberoxydulet afsatte sig i Begyndelsen godt, men mod Titreringens Ende udskiltes det saa fint, at det trods dobbelt Filter ikke lod sig frafiltrere. Grændsen laa altsaa mellem 0.8 og 0.75 pCt. — 2) Normal Urin tilsattes afvejede Mængder rent Druesukker, saaledes at der erholdtes Blandinger med en Gehalt af resp. 0.9, 0.8 og 0.7 pCt. Sukker. Grændsen var i dette Tilfælde omtrent den samme, nemlig mellem 0.8 og 0.7 pCt.

Vi have forgjæves søgt at forrykke denne Grændse til Gunst for Titreringen dels ved at fortynde Urinen med end større Mængder Vand end sædvanligt og dels ved at modificere Alkaligehalten af Fehlings Vædske, dels ogsaa paa anden Maade.

Vi have derfor lang Tid staaet raadløse ligeoverfor Bestemmelsen af smaa Sukkermængder i Urinen, da Polarisationsmethoden her ikke kan give nøjagtige Resultater. Forskjellige Forsøg med andre Prøvevædsker, nemlig den af Schiff[1]) angivne Opløsning af vinsurt Kobberoxyd, alkalisk Vismuthoxydopløsning, tilsat vinsurt Kali, den af Kletzinsky[2]) og senere af Løwe[3]) angivne Glycerin-Kobberoxydopløsning, samt melkesurt Kobberoxyd i alkalisk Opløsning, slog ogsaa Fejl. Vi bleve derfor overraskede, da vi gjorde den Erfaring, at *Knapps Vædske med Lethed lader sig anvende til Sukkertitrering, selv om Urinens samlede Gehalt paa reducerende Substants blot svarer til 0.1 pCt. Sukker, eller endog derunder.* Naturligvis vil, hvor Sukkergehalten er saa liden, de øvrige reducerende Substantser, der findes i Urinen, for en væsentlig Del indgaa i den fundne Værdi. Vilde man derfor her nøjagtigt bestemme Sukker-

---

1) Ann. Chem. Pharm. Bd. 112. Pag. 368 ff.

2) Zeitschr. d. Gesells. d. Aerzte zu Wien. 10te Jhg. 1854. 1ster Bd. Pag. 116—117.

3) Zeitschr. f. anal. Chem. Bd. 9. 1870. Pag. 20.

mængden, maatte man anstille specielle Undersøgelser om, hvilken Del af den fundne Procentgehalt der tilkommer disse Stoffe. Saadanne Bestemmelser, hvortil der knytter sig flere Spørgsmaal af Interesse, laa imidlertid udenfor dette Arbejdes nærmeste Formaal.

Følgende Tabel indeholder de af os udførte Analyser; *Sukkeret var* i Forvejen *paavist kvalitativt ved en egen Modifikation af den Trommerske Prøve*, hvis Beskrivelse ikke hører herhen; denne modificerede Methodes Paalidelighed og Ømfindtlighed var faststillet ved en Række Forsøg. De til Analyserne anvendte Urinvædsker indeholdt dels 10, dels 20 pCt. af den oprindelige Urin.

Tabel 2.

	I. Diabetikere.	Sukkergehalt. (Knapp).		I. Diabetikere.	Sukkergehalt. (Knapp).		II. Barselkvinder.	Sukkergehalt. (Knapp).		II. Barselkvinder.	Sukkergehalt. (Knapp).
1	J. A.	0.12 pCt.	10	E. J.	0.43 pCt.	19	M. A.	0.087 pCt.	28	M. E.	0.69 pCt.
2	C. W.	0.12 —	11	O. K.	0.45 —	20	M. A.	0.14 —	29	M. E.	0.73 —
3	R. K.	0.17 —	12	R. K.	0.46 —	21	B. A.	0.17 —	30	M. A.	0.78 —
4	C. W.	0.20 —	13	C. W.	0.50 —	22	M. E.	0.21 —			
5	C. W.	0.25 —	14	O. K.	0.52 —	23	B. A.	0.32 —			
6	R. K.	0.30 —	15	P. A.	0.56 —	24	M. E.	0.33 —			
7	C. W.	0.30 —	16	C. W.	0.56 —	25	M. A.	0.42 —			
8	O. K.	0.36 —	17	R. K.	0.76 —	26	M. E.	0.56 —			
9	E. J.	0.42 —	18	J. A.	0.90 —	27	M. E.	0.57 —			

Alle disse Uriner lode sig *med stor Lethed titrere efter Knapp;* Kviksølvet udfældtes let, det omhylledes ganske af de fnokkede Fosfater og sank hurtigt tilbunds, saa at man erholdt en skarp Endereaktion ved Hjælp af den ovenstaaende klare Vædske. Saavel 10- som 20 pCt.ige Urinblandinger gave gode Resultater, men vi have dog fundet det mere fordelagtigt, hvor Urinen ikke var stærkt farvet, at anvende 20 pCt.ige.

Derimod lod disse Uriner sig *ikke titrere med Fehlings Vædske;* Filtratet var aldrig klart. Dette Fænomen, der har været alle fysiologiske og pathologiske Kemikere paafaldende, gav Anledning til følgende Spørgsmaal: a) *Hvorvidt influeres*

Titreringen af Urinens Fortynding med Vand og Vædskens Alkaligehalt? b) *Hvorledes forklares dette Fænomen?* c) *Forholde normale Uriner, der paa en eller anden Maade indeholde Sukker, og diabetiske sig i denne Henseende paa samme Maade eller ej?*

a) Som Tabellen viser, indeholdt den ufortyndede Urin sædvanligt mere end 0.2 pCt., hyppigt 0.4—0.5 pCt. og 5 Gange endog mere end 0.6 pCt. Vi have i Løbet af de to sidste Aar med Bistand af flere sagkyndige Kemikere, der have arbejdet i Institutet, udført mange hundrede Titreringer med Fehlings Vædske, iagttaget alle Kauteler, og *stadig* gjort den Erfaring, at Uriner, der indeholde 0.5 pCt. Sukker eller derunder, sædvanligt ikke lade sig titrere efter denne Methode. Dette Resultat turde være uventet; det synes fastslaaet, at stærk *Fortynding* af Urinen har en saa gunstig Indflydelse paa Titreringen, at Sukkergehalten i Uriner, der indeholde 0.2—0.5 pCt. Sukker, nøjagtigt kan bestemmes med Fehlings Vædske, naar de tilsættes en større Mængde Vand. Vi have i vore Forsøg altid fortyndet disse Uriner til det 5- eller 10-dobbelte, ja undertiden endog til det 15-dobbelte, men have desuagtet ikke kunnet frigjøre os for Kobberoxydul i Filtratet. Seegen[1]) har sat Grændsen til 0.1—0.2 pCt., saafremt Urinen tilstrækkelig fortyndes; han har imidlertid til Endereaktionen ikke benyttet sig af Filtratet, men indskrænket sig til at iagttage den ved Reduktionen frembragte *Affarvning* af Vædsken. Fortyndingen virker forsaavidt gunstigt, som Urinens normale Farve, der let dækker et svagt blaat Skimmer af uforandret Kobberoxyd, svækkes; denne gunstige Indflydelse neutraliseres imidlertid mere eller mindre derved, at det store Vædskekvantum i høj Grad afbleger den blaa Farve. Men paa denne Maade kan man kun undtagelsesvis erholde ganske paalidelige Bestemmelser. Vi sige undtagelsesvis; det kan nemlig af og til hænde, at man skarpt kan iagttage

[1]) Dr. J. Seegen. Der Diabetes mellitus. Zweite Auflage. Berlin 1875. S. 152.

Tidspunktet, naar det blaa Skjær, som antyder Spor af opløst Kobberoxyd, forsvinder, selv om Sukkergehalten i den ufortyndede Urin blot er 0.2—0.5 pCt. I ethvert Fald bliver dog denne Afgjørelse kun undtagelsesvis skarp. *Der maa en kemisk Undersøgelse af Filtratet til for at erholde exakte Resultater.* Det væsentlige er altsaa efter Reduktionen at erholde et klart kobberoxydulfrit Filtrat; efter Seegen og andre skal Fortynding af Urinen med Vand *ogsaa i denne Retning* virke gunstigt. Vi have ikke egentligt kunnet bestyrke Rigtigheden heraf. Tilsættes Urinen Vand, blive alle dens Bestanddele jevnt fortyndede, altsaa ikke blot de Stoffe, der forhindre Udfældningen af Kobberoxydul, men ogsaa Sukkeret selv. Det er ikke uden videre let at indse, hvorfor under saadanne Omstændigheder de af Urinens Bestanddele, der hindre Bundfældingen af Kobberoxydul, fortrinsvis skulde lammes i sin Virksomhed. Naar man titrerer Uriner direkte og derpaa efter at have fortyndet dem med Vand, vil man heller ikke i Regelen — ceteris paribus — finde nogen væsentlig Divergents med Hensyn til Filtratets Gehalt paa Kobberoxydul.[1]) Kun er Gehalten paa opløst Kobberoxydul større ved den ufortyndede Urin, derimod Mængden af det fint suspenderede Kobberoxydulhydrat, der gaar gjennem Filtret, større ved den fortyndede, rimeligvis væsentlig paa Grund af den alkaliske Vædskes ringere Koncentration. Seegen har ganske rigtigt opfattet denne Forskjels væsentlige Betydning ved den kvalitative Paavisning af Sukker med Fehlings Vædske. Naar Uriner, der indeholde smaa Kvantiteter Sukker, tilsættes den ufortyndede Fehlings Vædske, erholdes ofte blot en Farveforandring af Vædsken, men ingen

---

[1]) Tilsætning af Vand gjør den kvantitative Bestemmelse lettere og nøjagtigere, fordi Fortyndingen af den sukkerholdige Urin til det 5- eller 10-dobbelte bevirker en tilsvarende Formindskelse af Fejlen, og Urinens normale Farve svækkes, saa at man bedre kan iagttage, naar Vædskens blaa Skimmer ophører, og skarpere i Filtratet paavise Spor af Kobberoxyd. Kobberoxydulet synker ogsaa sædvanligt hurtigere tilbunds i den mere fortyndede Vædske, men denne Fordel har vi her i Institutet fundet af forholdsvis mindre Betydning.

Udskillelse af Kobberoxydul(hydrat) ved Ophedning; fortyndes derimod Fehlings Vædske stærkt med Vand, optræder der sædvanligt i Løbet af Ophedningen en karakteristisk Fældning gjennem hele Vædsken af fint fordelt gult Kobberoxydulhydrat. Men denne Forskjel er ikke af større Vigtighed for den kvantitative Bestemmelse, simpelt hen af den Grund, at det fint suspenderede Kobberoxydulhydrat ikke kan frafiltres; vi have under disse Omstændigheder ikke kunnet frigjøre os fra Kobberoxydul i Filtratet, selv ved Anvendelsen af tredobbelt Filter.

Claude Bernard meddeler, at naar man tilsætter en stor Mængde koncentreret Alkaliopløsning til Fehlings Vædske, vil under og efter Titreringen Kobberoxydulet holdes opløst. Claude Bernards Angivelser[1]) gjælder oprindeligen, som det synes, Sukkerbestemmelser i Blod, hvoraf Æggehviden er udfældt; men den har ogsaa sin Rigtighed baade for Urinens og for vandige Sukkeropløsningers Vedkommende, ialfald naar man nøjagtigt følger hans Forskrifter. 1 kcm. Fehlings Vædske blandedes med 20 kcm. Kaliopløsning af sp. V. 1.38 ved 16^0 C. (ca. 37 pCt. KOH), ophededes til Kogning og afspærredes fra Luften, efter at Kogningen en Stund havde vedvaret. Derpaa tilsattes draabevis i et Forsøg en til det 10-dobbelte fortyndet sukkerholdig Urin (Urinens Sukkergehalt 1 pCt.), og i et andet en 0.5 pCt.ig vandig Sukkeropløsning. Paa det Sted, hvor Draaben blandede sig med Fehlings Vædske, optraadte strax en stærkt gul Farvning, som imidlertid igjen forsvandt. Denne gule Farve skyldtes vel pludselig Udfældning af Kobberoxydul, som atter ligesaa hurtigt opløstes, uden at

[1]) Hans Fremgangsmaade er følgende: Til 1 kcm. Fehlings Vædske sættes 15—20 kcm. koncentreret Kaliopløsning. Kolben, hvori Blandingen befinder sig, tillukkes med en dobbelt gjennemboret Kork, i hvis ene Hul Spidsen af Byretten, der indeholder den sukkerholdige Vædske, slutter lufttæt; i det andet anbringes et retvinklet Glasrør, der paa sin frie Ende omsluttes af et kort Kautschukrør. Vædskeblandingen ophedes til Kogning, og saasnart Luften antages at være uddrevet af Kolben, fjernes Flammen, og Kautschukrøret tillukkes med en Klemhane; Kogningen vil i det luftfortyndede Rum fortsætte sig af sig selv. Man tilsætter nu af Byretten den sukkerholdige Vædske, indtil den blaa Farve er fuldstændig forsvundet. (*Cl. Bernard*, Leçons sur le diabète et la glycogenèse animale. Paris 1877. Side 199).

der indtraadte nogen permanent gul Farvning af Vædsken. Denne blev tilsidst simpelt hen affarvet, uden at Spor af udfældt Kobberoxydul var at bemærke. I Henhold hertil kunde man tænke sig Muligheden af, at en Formindskelse af den Fehlingske Vædskes Alkaligehalt skulde kunne bevirke en fuldstændigere Udskillelse af Kobberoxydul; vi have jo netop seet, at en stærkere Fortynding af den Fehling'ske Vædske, hvorved Koncentrationen af den alkaliske Opløsning aftager, forøger Mængden af det suspenderede Kobberoxydulhydrat i Forhold til det opløste. Claude Bernards Angivelse gjælder imidlertid kun for det Tilfælde, at Alkaligehalten i excessiv Grad er forøget; er Forøgelsen mindre, har den ingen paatagelig Virkning;[1]) paa den anden Side synes ikke selv betydelige Formindskelser af Alkaligehalten i den Grad at befordre Udskillelsen af Kobberoxydul, at man ved disse Uriner kan erholde et klart Filtrat.

Grændsen influeres altsaa ikke væsentlig ved Urinens Fortynding og heller ikke ved visse (temmelig betydelige) Variationer i Alkaligehalten.

---

[1]) Claude Bernard (l, c. Side 120) tilsætter altid til den Fehlingske Opløsning før Titreringen af Sukker i Urinen et Stykke kaustisk Kali, da i saa Fald Kobberoxydulet holdes opløst, og man kun behøver at tage Hensyn til Affarvningen. »Il y a une autre précaution dont je néglige jamais de recommander l'observation. C'est d'ajouter toujours de la potasse caustique à la liqueur cupro-sodique ou cupro-potassique avant de la faire agir. La réaction est plus nette et plus rapide. L'oxydule cuivrique reste même en dissolution au lieu de se précipiter, ce qui fait qu'on n'a à tenir compte que de la décoloration.« Bortseet fra, at Affarvningen aldrig afgiver et nøjagtigt Kriterium, maa det fremhæves, at den Mængde kaustisk Kali, der udfordres for at holde alt Kobberoxydul opløst, er enormt stor (og derfor *bestemt* bør angives). Anvendes en mindre, men forholdsvis betydelig, Mængde kaustisk Kali, har det efter vor Erfaring en skadelig Indflydelse, forsaavidt som Kobberoxydulet blot delvis udfældes og i større Mængde holdes opløst, saa at Filtratet hyppigere indeholder Kobberoxydul end ellers. Dette viser følgende Forsøg: 10 kcm. Fehlings Vædske tilsattes 6 Gr. Stangkali og titreredes med en til det 10-dobbelte fortyndet Urin af 0.68 pCt. Sukkergehalt. Kobberoxydulet, forsaavidt som det var udskilt, lod sig let frafiltrere, men Filtratet indeholdt, selv efter Tilsætning af et Overskud af den sukkerholdige Blanding, Kobberoxydul i Opløsning.

Efter at dette var fastslaaet, tænkte vi os Muligheden af, at Blysukker eller Blyeddike tilsat Urinen muligens kunde bevirke Udfældning af enkelte af de Substantser, som enten holde Kobberoxydul fint suspenderet eller i Opløsning. Det er ikke tilraadeligt at tilsætte større Mængder af disse Reagentser, da ringe Kvantiteter Sukker let delvis fastholdes af Bundfaldet. Tilsætter man mindre Mængder, f. Ex. til 90 kcm. Urin 10 kcm. af en 10 pCt.ig Blysukkeropløsning eller 10 kcm. Blyeddike af ca. 10 pCt. Blyoxydgehalt, vil den fra Blybundfaldet filtrerede Vædske, som før Titreringen maa befries for Bly, hvis den indeholder saadant, ikke vise mærkbart gunstigere Resultater ved Bestemmelsen med Fehlings Vædske end den oprindelige Urin.

b) Hvorfor er nu Filtratet klart og uden opløst Kobberoxydul, naar Sukkergehalten overskrider en vis Grændse, og hvorfor er det kobberoxydulholdigt, naar Sukkergehalten er mindre? Forklaringen kan i det Væsentlige kun være at søge i det *relative* Mængdeforhold mellem Sukkeret og de Substantser, der have den Evne at kunne opløse Kobberoxydul eller hindre dets Bundfældning. Er Sukkergehalten forholdsvis meget liden, ville disse Stoffe kunne udøve en dominerende Indflydelse; er derimod Sukkermængden større, maa deres Virkning træde tilbage, selv om den absolute Mængde er den samme. Man kan demonstrere disse Substantsers Betydning ved at fortynde normal Urin med Vand samt opløse i en vis Mængde af den saaledes fortyndede og den ufortyndede Urin det samme Kvantum Sukker; Procentgehalten bliver altsaa den samme. Indeholde de nu begge f. Ex. 0.2—0.3 pCt. Sukker, saa vil Sukkervædsken, hvor Opløsningsmidlet er med Vand fortyndet Urin, efter Reduktionen kunne levere et klart Filtrat, medens Filtratet i det andet Fald er uklart. Nøjagtigt den samme Forskjel erholdes ved Titrering af to diabetiske Uriner af lav Sukkergehalt, som adskille sig derved, at der i det ene Tilfælde er Polyuri tilstede, i det andet ikke. Sukkerets procentiske Mængde være i begge den samme, f. Ex.

0.2—0.3 pCt.; i det første Tilfælde (ved Polyuri) vil Filtratet efter Reduktionen enten være frit for Kobberoxydul eller ialfald indeholde mindre deraf end i det andet, aabenbart fordi de Udskillelsen hæmmende Bestanddele paa Grund af Urinens rige Vandgehalt ere i relativt (til Sukkeret) ringe Mængde tilstede. Disse sammenlignende Undersøgelser af normale og Diabetes-Uriner, som vi have havt rigelig Anledning til at anstille, godtgjøre, som det forekommer os, Rigtigheden af hin Forklaring. At denne neppe tør gjøre Krav paa at være udtømmende, saalænge hine Stoffe ikke ere nærmere kjendte og undersøgte, siger sig selv.

c) Man har troet, at Diabetikeres Urin lettere skulde lade sig titrere med Fehlings Vædske end Uriner, der paa anden Maade indeholde Sukker. De i Tabellen sammenstillede Analyser kunne *ikke* anføres som Støtte for denne Anskuelse. Sammenligner man Procentgehalten hos Barselkvinderne og Diabetikerne i ovenstaaende Tabel, (der vel at mærke blot indeholder Uriner, som ikke lod sig titrere med Fehlings Vædske paa den Maade, at man kunde erholde et klart Filtrat), saa er Overensstemmelsen ikke ringe. Hos begge indeholdt den ufortyndede Urin sædvanligt 0.3—0.5 pCt. I de 18 diabetiske Uriner oversteg Sukkermængden 2 Gange 0.6 pCt., (idet den beløb sig til resp. 0.76 og 0.90 pCt.), og hos de 12 Barselkvinder 3 Gange (resp. 0.69, 0.73 og 0.78 pCt.) Maximum af Procentgehalten i Diabetesuriner, som ikke lod sig titrere med Fehlings Vædske, var altsaa 0.90 pCt., og i Uriner fra Barselkvinder 0.78 pCt. Sammenstille vi paa den anden Side de mindste Procentmængder, som lod sig titrere efter Fehling, saa var den (sml. Tabel 1) for Diabetikernes Vedkommende 0.57 pCt., og for Barselkvindernes 0.69 pCt. Vistnok ere dette Arbejdes Forsøgsdata ikke mange, men vi kunne dog dels paa denne Basis og dels i Henhold til talrige sammenlignende Bestemmelser[1]) med Feh-

[1]) Disse ville finde sin Plads i et Arbejde om Sukkerets Bestemmelse i Urinen med Polarisationsapparatet.

lings Methode og Polarisationsapparatet udtale, at der i denne Henseende *ikke i Almindelighed er nogen gjennemgribende Forskjel* mellem sukkerholdige Uriner hos Diabetikere og Ikke-Diabetikere.

At Grændsen for Titreringen hyppigt ligger lavere ved diabetiske Uriner, er begrundet i *Polyurien*, som ogsaa *kan* være tilstede, selv om Sukkergehalten er liden. Lehmann, Winogradoff, Kühne og Hoppe-Seyler antage, at Hovedaarsagen er en anden, nemlig den at de Stoffe, der hindre Udfældningen af Kobberoxydul, i det overvejende Antal Tilfælde af Diabetes dannes eller udskilles i meget mindre Mængde end ellers. Lehmann[1]) siger derom: «Im eigentlichen Diabetes mellitus ist der Harn gerade frei von jenen Substanzen, welche die Reaction jenes Mittels (der Trommer'schen Probe) oder vielmehr unser Urtheil über dessen Reaction stören können . . .» Winogradoff (i sin Afhandling: «Beiträge zur Lehre vom Diabetes mellitus»[2]) udtaler: «Man sieht aus diesen Versuchen, dass 1) Kreatinin die Eigenschaft hat, das Kupferoxydul, welches bei der Trommer'schen Probe mit der zuckerhaltigen Flüssigkeit sich bildet, in Lösung zu erhalten; . . . . 3) dass alle diese Eigenschaften vollkommen identisch sind mit den Eigenschaften des bis jetzt noch unbekannten Stoffes, welcher im normalen Harn vorhanden ist, im diabetischen Harn hingegen entweder vollkommen fehlt, oder bloss in sehr geringer Menge sich vorfindet.» Kühne[3]) ytrer: «Im normalen Harne müssen . . . . Substanzen enthalten sein, die in den meisten Fällen von Diabetes fehlen,» og Hoppe-Seyler siger paa et Sted:[4]) «Diabetische Harne enthalten ausser Zucker nur wenig reducirende Stoffe und auch sehr wenig von denen, welche das Kupferoxydul in Lösung erhalten,» og paa et andet Sted:[5]) «Verschiedene organische

---

[1]) Lehrb. d. physiol. Chem. Bd. 1. 2te Auflage. Leipzig 1853. S. 264.
[2]) Virchows Archiv, Bd. 27. 1863. S. 552.
[3]) Lehrb. d. physiol. Chem. Leipzig 1868. S. 520—521.
[4]) l. c. S. 337. [5]) l. c. S. 124.

Stoffe verlangsamern oder verhindern die Abscheidung des bei dieser (der Trommer'schen) Reaction sich bildenden Kupferoxyduls; ziemlich reichlich finden sich solche Körper im normalen menschlichen Harne, in viel geringerer Menge im diabetischen Harne.» De hidtil gjorte Erfaringer bevise ingenlunde, at det dagligen udskilte Kvantum af disse Substantser er betydeligt formindsket i de fleste Tilfælde af Diabetes,[1]) og den Kjendsgjerning, som Kühne anfører til Støtte for sin Mening, har ingen Beviskraft. Kühne har fæstet sig ved den gamle Observation, at de diabetiske Uriner, som lettest give Udfældning af Kobberoxydul ved Trommers Prøve, har en bleg Farve, medens de, der vanskeligere lade sig titrere, have en mere normal Urinfarve.[2]) Men denne Forskjel kan simpelt hen forklares af Urinens større eller mindre Vandgehalt. Hvor Urinen har en bleg grøngul Farve, er der hyppigt Polyuri tilstede, selv om Sukkergehalten er meget liden; har Urinen derimod en mere mørk Farve, er dens Vandgehalt sædvanligt meget mindre. Skal man derfor støtte sig paa hin Observation, saa maa man ialfald kun benytte sig af Sammenligninger mellem blege og

---

[1]) Efter de Forsøg, der foreligge, synes Mængden af de Substantser, der hindre Udfældningen af Kobberoxydul, at variere ikke ubetydeligt baade hos Diabetikere og Ikke-Diabetikere; disse Forsøg, der ere udførte i det herværende Institut, tyde hen paa saa komplicerede Forholde, at vi først efter en lang Tids Erfaring og en Række Forarbejder tør drage sikre Slutninger. Ved de tidligere Angivelser om disse Substantsers absolute Formindskelse i diabetisk Urin har man ikke taget det fornødne Hensyn til den i 24 Timer udskilte Urinmængde og sammes procentiske Sukkergehalt.

[2]) Indrømmes skal det, at denne Forskjel i Urinens Farve tilsyneladende taler til Gunst for Kühnes Anskuelse, da jo Urinens Farvestoffe efter Seegen og andre skal hindre Udfældningen af Kobberoxydulet. Men vi vide jo ikke med nogensomhelst Sikkerhed, om det eller de Stoffe, der betinge den gulbrune Farve af Urinen hos de Diabetikere, hvor denne er mere mørkt farvet, høre til de Substantser, der fortrinsvis hindre Udfældningen. Efter Winogradoff synes Urinens Farve ikke at have større Indflydelse, han siger nemlig (l. c. S. 550): »Nicht selten geschieht es auch, dass der normale Harn sehr unbedeutend gefärbt ist, ohne dass er dabei seine übrige Eigenschaften einbüsst.«

mørke diabetiske Uriner af den *samme* Koncentration. Hvorledes Sagen da stiller sig, tør vi ikke paa Forhaand med Bestemthed afgjøre. Vi tro dog at turde udtale, at Udfældningen af Kobberoxydulet i saa Fald ikke viser paafaldende Afvigelser. Den ene af os har gjennem lang Tid methodisk observeret og behandlet Diabetikere, og vi have derved havt Anledning til at overbevise os om, at naar Sukkergehalten synker under en vis Grændse, og Polyurien ikke længere er tilstede, vil, hvad enten Urinen forbliver lyst grøngul eller, hvad der idetmindste ligesaa hyppigt turde være Tilfældet, antager en en mere normal gulbrun Farve, Filtratet efter Titreringen med Fehlings Vædske komme til at indeholde opløst eller fint suspenderet Kobberoxydul(hydrat).

Følgende Exempel viser tilstrækkeligen, at selv en meget lys diabetisk Urin, naar Urinmængden ikke i betydelig Grad er forøget, kan indeholde en forholdsvis stor Mængde Stoffe, der hindre Udfældning af Kobberoxydul.

En Urin fra en Patient, der led af en grav Diabetes, indeholdt 0.8 pCt. Sukker, (bestemt ved to forskjellige Polarisationsapparater og kontrolleret af 3 forskjellige Individer, som Maximum fandtes 0.9, som Minimum 0.7 pCt.) Den var af meget lys grøngul Farve. Urinkvantumet for 24 Timer 1800 kcm.; det varierede i den nærmest foregaaende og efterfølgende Tid mellem 1200 og 1900 kcm.; Polyuri var altsaa ikke egentligt tilstede. Denne Urin lod sig trods sin forholdsvis store Sukkergehalt ikke titrere med Fehlings Vædske; Filtratet indeholdt baade suspenderet og opløst Kobberoxydul; efter Affarvningen at dømme maatte Sukkergehalten antages = 1.0—1.1 pCt.

Af de Kjendsgjerninger, der foreligge, tør man for Tiden kun slutte, at Forskjellighederne i Udskillelsen af Kobberoxydulet hovedsageligt betinges af *den secernerede Urins større eller mindre Vandgehalt,* der som bekjendt begunstiges ved flydende Næringsmidler og ringere Hudsekretion, og derimod formindskes ved fast Næring og Forøgelse af Transpirationen. Seegen har ogsaa ligeoverfor Kühne betonet dette, men *han akcentuerer ikke Forskjellen mellem en naturligt* (oprindeligt stærkt vandholdig) *og en kunstigt fortyndet diabetisk Urin.*[1]) *I første Fald* (ved Polyuri) *rykkes Grændsen for Titreringen længere ned, fordi hine Substantser ere tilstede i mindre Mængde i Forhold til Sukkeret end i sædvanlig Urin af samme Sukkergehalt. I sidste Fald er Grændsen for Titreringen ikke væsentligt forskjellig før og efter Fortyndingen, fordi alle Stoffes Mængde er jevnt aftaget; det relative Forhold mellem Sukkeret og hine Substantser bliver altsaa det samme i den fortyndede som i den ufortyndede Urin.*

Vi have atter skarpt udhævet dette, da en Forvexling af disse to Fortyndingsmodi har frembragt en ikke ringe Konfusion.

III.

Hvilken af disse Methoder (Knapps eller Fehlings) er den hensigtsmæssigste?

Spørgsmaalet om, hvilken Methode der er den hensigtsmæssigste, er i Grunden allerede besvaret, forsaavidt som vi i det foregaaende have seet, at Knapps er 1) anvendelig i *alle*, Fehlings i et *begrændset*, om end større, Antal Tilfælde. Dette er den væsentligste og den uskatterlige Fordel; men den har ogsaa andre ikke ubetydelige Fortrin. 2) Prøvevædsken er *fuldstændigt holdbar*, selv om den staar i et varmt Værelse og udsat

[1]) Seegen siger (Der Diabetes mellitus, 2te Auflage, Side 152): »Und so wie man bei künstlichem Zuckerharn die Ausfällung des Kupferoxyduls dadurch bewirken kann, dass man den Harn mit Wasser verdünnt, kann man dies auch bei concentrirten diabetischen Harnen der milden Form durch die gleiche Manipulation bewirken.« Seegens Forsøg (cfr. l. c. S. 202) vise med Hensyn til den kvantitative Bestemmelse af smaa Sukkermængder i Urin (0.8 pCt. eller derunder), som os synes, egentlig kun, at naar en og samme Urin tilsættes forskjellige Kvantiteter Vand, og der nu opløses i hver af disse Blandinger den samme Mængde Sukker, saa at Procentgehalten bliver lige i dem alle, vil den med Vand mest fortyndede Urinblanding give den bedste og fuldstændigste Udskillelse af Kobberoxydul.

for Lysets Indvirkning, medens Fehlings Vædske, tilberedt paa sædvanlig Vis, i Tidens Løb let forandrer sig; der udskiller sig Kobberoxydul, og, om dette ikke er Tilfældet, hænder det hyppigt, at en Opløsning, der har været opbevaret i nogen Tid, ved Ophedning til Kogning dekomponeres, idet der udskilles sort Kobberoxyd eller undertiden ogsaa Kobberoxydul. Neubauer har med Rette udtrykkeligt gjort opmærksom paa Nødvendigheden af at iagttage bestemte Forsigtighedsregler ved Opbevarelsen,[1]) men heller ikke disse ere tilstrækkelige. — Denne Indvending mod Fehlings Vædske er imidlertid, som allerede i Indledningen antydet, ikke væsentlig, da man kan frigjøre sig for Ulempe i saa Henseende, naar man efter Schneiders Angivelse opbevarer Kobbervitriolopløsningen og den med Natronlud blandede vinsure Alkaliopløsning i to særskilte Flasker, og man derhos følger Seegens[2]) Raad at ophede Seignettesaltopløsningen til 100° for at hindre Skimmeldannelse; dog maa herved bemærkes, at denne Ophedning ikke bør foregaa *efter* Blandingen med Natronlud; isaafald synes der nemlig efter Tilsætning af Kobbervitriolopløsningen og Ophedning til Kogning lettere at udskilles sort Kobberoxyd end ellers.

Vi fremstille Fehlings Vædske paa følgende Maade: 34.64 gr. ren, krystalliseret Kobbervitriol opløses i Vand; Opløsningen fortyndes til 1 Liter og opbevares i et Apparat af den i Mohrs »Lehrbuch der chemisch-analytischen Titrirmethode, 4te Auflage, Braunschweig 1874«, Side 18, Fig. 26 afbildede Form. For at hindre Fordunstning af Vand indeholder det Rør, hvorigjennem Luften, der strømmer ind i Flasken, har at passere, som Spærrevædske noget Kobbervitriolopløsning. — 173 gr. Seignettessalt opløses i henved 350 kcm. Vand, og Opløsningen ophedes til Kogning. Efter at den er afkjølet, tilsættes 600 kcm. Natronlud af sp. V. 1.12, der ligeledes i Forvejen har været ophedet, og Blandingen fortyndes med udkogt

---

[1]) Neubauer u. Vogel, Anl. zur qualit. u. quantit. Anal. des Harns, 7te Auflage, Wiesbaden 1876, Side 206. »Soll die Kupferlösung sich lange Zeit halten, so ist es absolut nöthig, sie in kleine Gläser (40—80 Grm.) zu füllen, diese mit guten Stopfen zu schliessen, zu versiegeln, und im Keller aufzubewahren.«

[2]) *Seegen*, l. c. S. 145.

Vand til 1 Liter; den bevares i et Apparat af samme Konstruktion som ovenfor nævnt, og Røret, hvorigjennem Luften træder ind i Flasken, naar Vædsken udtømmes, indeholder som Spærrevædske noget Natronlud, der naturligvis, ligesom Kobbervitriolopløsningen i den anden Flaskes Rør, maa frembyde den mindst mulige Modstand for Luftens Passage.

Opløsningerne blandes først sammen i Kolben umiddelbart før Titreringen, og der anvendes lige Mængder (f. Ex. 10 kcm.) af begge. Ved Beregningen tages blot Hensyn til det afmaalte Kvantum Kobbervitriolopløsning; denne har samme Koncentration som den Fehling'ske Vædske; 1 kcm. af samme anviser altsaa 0.005 gr. vandfrit Druesukker.

Saaledes tilberedt og opbevaret er Vædsken stedse brugbar, selv om den staar i Lyset; dog foraarsager disse Præparationer altid nogen Tidsspilde. Knapps Vædske er ikke alene *ubetinget* holdbar, men den er 3) ogsaa lettere og *hurtigere at tilberede.* 4) En fjerde og meget væsentlig Fordel er den, at *Bestemmelsen selv er meget mindre omstændelig.*

a) Den er *hurtigere* at udføre, en Analyse med Knapps Vædske tager efter nogen Øvelse ofte ikke stort mere end den halve Tid af en Bestemmelse efter Fehling. Grunden dertil er den, at man *direkte i Vædsken selv* kan paavise, om Reduktionen er færdig; *Filtreringen gjør Bestemmelsen med Fehlings Vædske besværlig* og ofte langvarig, da man ikke sjelden maa undersøge flere Filtrater, og end mere forlænges den, hvis man efter at have forvisset sig om, at Filtratet er frit for Kobber, vil foretage Reaktion paa Sukker i samme. Dette er forøvrigt ikke nødvendigt, da det ved Hjælp af Eddikesyre og Ferrocyankalium med stor Skarphed[1]) lader sig afgjøre, naar Filtratet

[1]) Neubauer siger (l. c. S. 207): Hat sich durch die angeführten Reagentien kein unzersetztes Kupferoxyd mehr gefunden, so kann man dennoch einen Fehler begangen haben, indem man von dem Harn zuviel zusetzte, wodurch natürlich der Gehalt an Zucker kleiner ausfallen würde, als er wirklich ist. Man versetzt daher die dritte Probe des klaren fast farblosen Filtrats mit einigen Tropfen Kupferlösung und erhitzt zum schwachen Sieden. Auch selbst bei Spuren überschüssig zugesetzten Zuckers entsteht nach kurzer Zeit ein deutlich rother Schimmer, der sich namentlich schön und leicht bei auffallendem Lichte wahrnehmen lässt.» Vi tør med Sikkerhed sige, at dette ikke har sin Rigtighed for Urinens Vedkommende, hvor Sukker-

ikke længere indeholder Kobberoxyd. Filtreringen udhaler undertiden ogsaa Bestemmelsen af en anden Grund, som ligger i *Filtrerpapiret.* Dette kan nemlig indeholde reducerende Substantser. Det har hændt, at det Filtrerpapir, som det herværende kemiske Laboratorium og fysiologiske Institut har erholdt fra Tydskland, ved Behandling med varmt Vand, og end lettere, naar det er tilsat lidt Kali, afgiver en Substants, der af den Fehling'ske Opløsning ved Kogning udfælder Kobberoxydulhydrat eller en gul Kobberoxydulforbindelse. Naar man nu efter Reduktionen filtrerer gjennem dette Papir, vil Filtratet samtidigt komme til at give Kobber- og Sukkerreaktion. Vi har derfor altid før Brugen undersøgt vort Filtrerpapir og forkastet det, hvis det indeholdt saadanne Substantser.[1])

b) Neubauer gjør[2]) med Rette opmærksom paa det hensigtsmæssige i ved Titreringen blot at ophede Fehlings Vædske

---

mængden er 1.5 (ja endog 2 pCt.) til 1 pCt. eller derunder, og hvor man anvender en fortyndet Urinblanding (10 eller 20 pCt.) Man kan da, efter at Kobberreaktionen er fuldstændigt forsvunden fra Filtratet, ofte tilsætte et Overskud af mange (10, ja flere) kcm. af den sukkerholdige Urinblanding, uden at man ved Tilsætning af Fehlings Vædske til Filtratet faar Reduktion, selv efter Timers Henstand. Vi troede paa Grund heraf, at en stærkere Kogning destruerede Sukkeret i den alkaliske Vædske, og ophedede den forsigtigt, saa at Vædsken kun viste Antydning til Kogning, men Resultatet blev det samme. — Endvidere siger Neubauer (l. c. S. 208): «Bei grösseren Mengen überschüssig zugesetzten Zuckers zeigt das Filtrat eine gelbe Farbe.» Dette kan være et Kriterium, hvor man har med vandige Druesukkeropløsninger eller med meget lyst farvede (polyuriske) diabetiske Uriner at gjøre; men er Urinen nogenlunde stærkt farvet, vil Filtratet vise en gul Farve, selv om der ikke er tilsat det ringeste Overskud af den sukkerholdige Urin, ja selv om alt Kobberoxyd endnu ikke er reduceret.

Vi have anført dette for at spare andre for den Tidsspilde, som det har forvoldt os at kontrollere disse Angivelser. Alle disse Prøver paa Sukker i et klart Filtrat ere overflødige, da, som sagt, det Tidspunkt, da Kobberreaktionen ophører, kan angives med Skarphed.

[1]) Muligens er denne Ulempe meget sjelden, vi have ialfald ikke seet den anført nogetsteds. I den senere Tid anvende vi svensk Filtrerpapir; dette har altid vist sig frit for disse Substantser.

[2]) l. c. S. 206—207.

saavidt, at den *begynder at komme* i Kog. Dette er ogsaa at anbefale, naar man anvender Knapps Opløsning; Vædsken kommer lettere til Ro, saa at det udskilte hurtigere synker tilbunds. Ved Anvendelsen af Fehlings Vædske er mild Ophedning imidlertid ikke blot hensigtsmæssig, men endog saagodtsom nødvendig, ialfald maa det *udtrykkeligt* fremhæves, at man ikke maa koge for stærkt og vedholdende; stærk Kogning synes ikke sjeldent at begunstige Udskillelse af sort Kobberoxyd (som et til Glassets adhærerende Belæg), hvorved Bestemmelsen kan blive mindre nøjagtig. Men denne ubetydelige Forskjel vejer lidet eller intet til Fordel for Knapps Methode, og man kunde med en vis Ret paastaa, at Bestemmelsen ved Fehling i en anden Henseende er noget overlegen; det er en Regel for begge, at man maa fortynde saavel Prøvevædsken som den sukkerholdige Urin; Fortyndingen gjør i begge Fald Bestemmelsen baade mere bekvem og mere nøjagtig. Men denne Regel er ikke egentlig en conditio sine qua non ved Bestemmelsen med Fehlings Vædske; derimod taaler den *ingen* Undtagelse ved Titreringen efter Knapp. Vædsken bliver nemlig da saa stærkt farvet, at Endereaktionen ikke med nogensomhelst Sikkerhed kan iagttages. Forsaavidt skulde altsaa Fehlings Methode være lidt i Fordel, men denne er selvforstaaeligen af end mere underordnet Betydning. En *ganske anden Vægt i Favør af Knapps Methode har den Omstændighed, at det udskilte Kviksølv forbliver udfældt og ikke atter opløses.* Naar man anvender Fehlings Methode, maa man som bekjendt *umiddelbart efter* Titreringen undersøge Vædsken paa Kobberoxyd, da det udskilte Kobberoxydul under Luftens Adgang efterhaanden igjen oxyderes og opløses. Arbejder man derimod med Knapps Vædske, kan man efter Titreringen vente i al Ro og Mag, før man i samme udfører Endereaktionen; af det udskilte Kviksølv opløses igjen ikke engang Spor, selv efter Dages Forløb.

Fordelene ved Knapps Methode er altsaa: Vædsken er *let at tilberede*, den er *holdbar*, Titreringen sker *meget hurtigt*, Methoden er *anvendelig i alle Tilfælde.* Vistnok repræsenterer ved Bestemmelsen af smaa Sukkermængder Urinens øvrige reducerende Substantser en betydelig Del af den fundne Gehalt; dette er begrundet i Urinens Sammensætning og forringer ikke Methodens Værd.

I *Knapps Vædske har man efter vor Erfaring overhovedet et Middel til at bestemme de reducerende Substantsers samlede Mængde i Urinen, og man kan endog anføre dette som en yderligere og ikke uvæsentlig Fordel ved Samme.* Det er muligt, at man ad denne Vej kan komme til en exakt særskilt Bestemmelse af Sukkerets og de øvrige reducerende Substantsers Mænde i sukkerholdig Urin, ved nemlig først at bestemme Mængden af samtlige reducerende Substantser og dernæst paa en eller anden Maade fjerne Sukkeret (f. Ex. ved Gjæring) eller de øvrige reducerende Stoffe og saa bestemme de tilbageværende Substantsers Mængde. Rimeligt er det, at man her vil komme Maalet nærmere end ved Hjælp af de hidtil angivne Methoder for kvantitativt at bestemme minimale Sukkermængder; disse ere unøjagtige og bero tildels paa manglende Sagkundskab.

Fehlings Methode synes især for Begynderen at have en paatagelig Fordel, nemlig den fremtrædende Affarvning af den blaa Vædske og den markerede Afsætning af det røde Kobberoxydul, Knapps derimod giver en lidet iøjnefaldende Endereaktion. Denne Fordel er kun tilsyneladende. Iagttager man Forsigtighedsreglerne, er Endereaktionen ved Knapps Vædske baade skarp og ømfindtlig. Hermed være ingenlunde sagt, at den Fehlingske Methode for Urinens Vedkommende *ubetinget* er at forkaste, men den har her kun *sekundær* Betydning.[1]) Muligens kan den ogsaa have sine specielle Fordele, hvor Urinen indeholder meget Blodfarvestof; i saa Fald vil Endereaktionen efter Knapps Methode være meget mindre skarp end sædvanligt;

---

[1]) I det herværende fysiologiske Institut anvendes den af Begynderne for at kontrollere de med Knapps Vædske vundne Resultater.

men om her Fehlings virkeligt har en væsentlig Fordel, tør vi paa Grund af manglende Erfaring ikke afgjøre; ialfald vil det kun da være Tilfældet, naar man kan erholde et kobberoxydulfrit Filtrat. Men hidtil have vi ikke stødt paa saa stærkt farvede Uriner, at Titreringen med Knapps Vædske har frembudt nogen Vanskelighed af den Grund.

Til Slutning ville vi udtale den *Formodning, at det neppe er muligt for Titreringen af Sukkeret i Urinen at kunne erholde en hensigtsmæssigere Vædske end Knapps.* Da samtlige kemiske Methoder bero paa Sukkerets reducerende Evne, maatte en Mønstervædske have den Egenskab kun at reduceres af Sukker og ikke af de øvrige Stoffe. Vi havde engang tænkt os Muligheden af at kunne fremstille en saadan Opløsning, da vi troede, at samtlige øvrige Substantser uden Undtagelse havde en svagere Reduktionsevne, men dette forholder sig neppe saa for dem alle. Den ene af os har vist,[1]) at den *normale Urin kan indeholde Stoffe, der ialfald ligesaa let, om ikke lettere end svage Sukkeropløsninger, baade ved sædvanlig og ved højere Temperatur reducere Kobbersalte.* Da dette kan være Tilfældet, er der neppe Sandsynlighed for, at man vil komme Maalet nærmere end med Knapps Vædske,[2]) og vi have derfor opgivet hin Tanke.

---

[1]) En vandig Opløsning af eddikesurt Kobberoxyd kan reduceres af normal Urin efter 12 Timers Henstand ved sædvanlig Temperatur. En svagt eddikesur Opløsning af Kobberoxyd, tilsat normal Urin, reduceres efter 1—1½ Minuts Kogning, kfr. dette Archiv, Bind 2, (1877), Side 463—468.

[2]) Sachsses Vædske (en alkalisk Opløsning af Jodkviksølv-Jodkalium) er noget mere kompliceret, og Titreringen med samme (Endereaktionen bestemmes med alkalisk Tinoxydulopløsning), kan neppe frembyde særegne *væsentlige* Fordel fremfor Knapps (Liebigs) Methode; Sachsses Bestemmelsesmaade er overhovedet kun at betragte som en Modifikation af Knapps, forsaavidt som ogsaa den grunder sig paa Udfældning af Kviksølv. (Sachsse. Die Chemie und Physiologie der Farbstoffe, Kohlenhydrate und Proteinsubstanzen. Leipzig 1877).

IV.

Kan man titrere Sukkermængden i Uriner, der indeholde 0.2 pCt. Æggehvide eller mindre, uden i Forvejen at fjerne denne? Har i saa Henseende Knapps eller Fehlings Methode særegne Fordele? Hvilken Indflydelse har Æggehviden overhovedet ved Titreringen?

Det er en Angivelse, som gaar gjennem Lærebøgerne i den zookemiske Analyse, at Sukkeret ikke kan titreres i Uriner, der samtidigt indeholder Æggehvide, før denne er fjernet. Vi har imidlertid i Literaturen forgjæves søgt efter Data, der skulde begrunde den *ufravigelige* Nødvendighed af denne Fremgangsmaade.

Æggehvidens Nærværelse kan, efter hvad der foreligger, af flere Grunde tænkes at have en skadelig Indflydelse ved Titreringen af Urinens Sukkergehalt. For det første ved man, at Æggehvidestoffe med Kobber- og Kviksølvsalte kunne give metalholdige Bundfald.[1]) For det andet er det ikke umuligt, at Albuminaterne ved højere Temperatur kunne medvirke ved Reduktionen af Fehlings eller Kviksølvets Udfældning af Knapps Vædske, og for det tredie er det bekjendt, at Æggehvide hindrer Udfældningen af Kobberoxydul. Sikkert er det, at *større* Albuminkvantiteter gjør Titreringen af Sukkergehalten yderst besværlig, for ikke at sige umulig. Men Æggehvide findes efter mangfoldige Erfaringer meget sjelden i større Mængde i sukkerholdig Urin. Naar Diabetikere have Albuminuri, er Æggehvidegehalten i Regelen yderst liden; vi have ved vore lejlighedsvis udførte kvantitative Analyser af Æggehviden hos disse aldrig seet den overstige 0.2—0.21 pCt.; meget hyppigt er den saa ringe, at den unddrager sig den kvantitative Bestem-

[1]) At Æggehviden paa denne Maade kunde unddrage en Del af Metalsaltet i Titrervædsken fra Sukkerets Indvirkning, er dog lidet sandsynligt, da Æggehvidens Affinitet til disse Metaloxyder vistnok ikke er saa betydelig, at den formaar at hæmme Sukkerets Virkning paa samme.

melse. Det praktisk vigtige Spørgsmaal bliver derfor, *om man direkte kan titrere Sukkergehalten i Uriner, der indeholde mindre end 0.2 pCt. Æggehvide.* Dette Spørgsmaal er ikke ganske uden Betydning, hvor det gjælder raskt Arbejde; det er forbundet med Tidsspilde at fjerne Æggehviden, og man er derfor ofte fristet til at udsætte Analysen. En saadan Udsættelse er ikke tilraadelig ved albuminholdige Uriner, da efter vore Erfaringer Sukkergehalten hurtigere aftager i disse end i andre.

Vi have derfor anstillet en Række Analyser af albuminholdige Sukkeruriner fra Diabetikere og Barselkvinder. De indeholdt *aldrig mere end 0.2 pCt.* Æggehvide. Analyserne bleve udførte efter Knapps og Fehlings Methode, dels for Kontrollens Skyld, og dels fordi man kunde tænke sig Muligheden af, at Methoderne ogsaa her vilde vise en eller anden Forskjellighed. I Forsøgene, der ere sammenstillede i nedenstaaende Tabel, bestemtes Sukkergehalten først direkte og derpaa, efter at Æggehviden var fjærnet. Æggehviden udfældtes ved Kogning og Tilsætning af nogle Draaber tynd Eddikesyre (a), samt undertiden ogsaa ved Kogning med Eddikesyre og et lige Volum af en mættet Opløsning af svovlsurt Natron (b).

Tabel 3.

	Albumingehalt, bestemt efter (a).	Albumingehalt, bestemt efter (b).	Sukkergehalt, bestemt ved			
			Fehlings Vædske		Knapps Vædske	
			før Æggehvidens Fjernelse.	efter Æggehvidens Fjernelse.	før Æggehvidens Fjernelse.	efter Æggehvidens Fjernelse.
J. E.	0.138 pCt.	0.12 pCt.	3.98 pCt.	(a) 3.90 pCt. (b) 3.90 —	3.47 pCt.	(a) 3.77 pCt. (b) 3.80 —
J. E.	0.14 —	?	2.91 —	(a) 2.30 —	2.20 —	(a) 2.20 —
S. H.	0.155 —	?	2.08 —	(a) 2.08 —	2.17 —	(a) 2.27 —
S. H.	0.17 —	?	1.56 —	(a) 1.54 —	1.56 —	(a) 1.56 —
J. E.	0.175 —	0.165 —	4.35 —	(a) 3.97 — (b) 3.80 —	3.75 —	(a) 3.70 — (b) 3.70 —
S. H.	0.185 —	0.16 —	4.30 —	(a) 4.20 — (b) 4.20 —	4.00 —	(a) 4.00 — (b) 3.85 —
O. K.	0.2 —	?	0.68 —	0.73 —	0.69 —	0.66 —
J. A.	tydelige, men neppe bestembare Spor.		0.81 —		0.66 —	
M. O.	ubetydelige Spor.		2.50 —		2.40 —	
M. O.	Spor.		2.94 —		2.50 —	
M. O.	Spor.		3.08 —		2.84 —	
J. E.	sandsynligvis 0.15 pCt.		3.53 —		2.78 —	
S. H.	0.168 pCt.		2.50 —		2.40 —	
S. H.	0.168 —		2.75 —		2.70 —	

Resultaterne vise *ringe* Forskjelligheder før og efter Udfældningen af Æggehviden. Naar man ikke har god Tid, eller hvor det ikke gjælder absolut nøjagtige Resultater, kan det derfor fra et praktisk Standpunkt af ikke i Regelen ansees nødvendigt at udfælde Æggehviden, naar den er i ringere Mængde tilstede end 0,2 pCt. Men om end Bestemmelserne før og efter ere temmelig overensstemmende, er der dog *en vis Forskjel ved Udførelsen.* Titreringen af den albuminholdige Urin vanskeliggjøres nemlig noget, jo nærmere man kommer 0.2 pCt. Ved Anvendelsen af Fehlings Vædske indeholder da Filtratet mere Kobberoxydul end ellers,[1]) og det udfældte Kobberoxydul synes

[1]) Som bekjendt faar man, naar Filtratet indeholder Kobberoxydul, ved

at afsætte sig langsommere, saa at Titreringen bliver mindre nøjagtig og mere langvarig. Ved Anvendelsen af Knapps Vædske udhales ogsaa Titreringen. naar Æggehvidegehalten nærmer sig 0.2 pCt., fordi Kviksølvet vanskeligt afsætter sig, men Bestemmelsen bliver *her ikke* egentlig *mindre nøjagtig. Knapp's Vædske frembyder altsaa ogsaa her særegen Fordel.*

Vi fik den Overbevisning, at 0.2 pCt. er Grændsen, og bestyrkedes deri ved en Række Experimenter, som vi udførte med *stærkere æggehvideholdige* Uriner, der bleve blandede med Opløsninger af Druesukker i normal Urin; Blandingen indeholdt en saa stor Mængde Sukker, at den *i ethvert Fald* med Lethed vilde ladet sig titrere med Fehlings Vædske efter Albuminets Fjernelse.

En Urin, der indeholdt 1.751 pCt. Æggehvide, tilsattes Druesukker, saa at den kom til at indeholde 2 pCt. deraf. Ved i forskjellige Forhold at blande denne med en normal Urin, der ved Tilsætning af Sukker ligeledes var bragt op til en Gehalt af 2 pCt., erholdtes Urinblandinger af forskjellig Albumingehalt (resp. 1.751, 0.785, 0.393, 0.3, 0.2 og 0.175 pCt.), men samtlige indeholdende 2 pCt. Sukker. Det viste sig nu, at *alle* ufortyndede Uriner, selv den, der blot indeholdt 0.175 pCt.* Æggehvide, *ikke* lod sig titrere med *Fehlings* Vædske. De med Vand til det 10-dobbelte fortyndede Uriner forholdt sig derimod forskjelligt efter Æggehvidegehalten; var denne 0.393 pCt. eller derover, indeholdt Filtratet efter Reduktionen fremdeles suspenderet Kobberoxydul, skjønt i langt ringere Mængde end før Fortyndingen, (især var dette paatageligt ved 0.393 pCt. Æggehvide). Ved de Uriner, der indeholdt 0.3, resp. 0.2 pCt. Albumin, var efter Titreringens Ende Filtratet frit for suspenderet Kobberoxydulhydrat. Ved 0.175 pCt. Æggehvide var Filtratet frit baade for opløst og suspenderet Kobberoxydul, samme Resultat opnaaedes i dette Tilfælde ogsaa efter Fortyndingen til det 5-dobbelte; derimod gik ved en blot 4-dobbelt Fortynding Kobberoxydul over i Filtratet. *Mærkelig* var altsaa Indflydelsen af Fortyndingen paa Kobberoxydulets Udskillelse ved disse albuminholdige Uriner.

Tilsætning af Ferrocyankalium og Eddikesyre en lys violet Fældning, som man ved nogen Øvelse i Regelen kan adskille fra det brunrøde Bundfald, der opstaar, naar der er Kobberoxyd i Filtratet. Albuminstoffenes Tilstedeværelse (i den sure Vædske) syntes ikke at formindske denne Reaktions Ømfindtlighed.

Titreringen af de samme ufortyndede Uriner var her som overhovedet med *Knapps* Vædske ugjørlig; den til det *10-dobbelte fortyndede Urin* derimod lod sig mærkeligt nok *uanseet Æggehvidegehalten titrere med godt stemmende Resultater*; men det varede især ved de større Albuminmængder meget længe (endog Timer), før Kviksølvet afsatte sig, saaledes at der kunde erholdes en klar Vædske til Endereaktionen.

Af disse Forsøg fremgaar, at naar Æggehvidegehalten *overstiger 0.175 pCt., vil Filtratet efter Bestemmelsen med Fehlings Vædske indeholde Kobberoxydul,* selv om man anvender en 10 pCt.ig Urinblanding. Det viste sig endvidere, at ved en Æggehvidegehalt af *mere end 0.2 pCt.* er Titrering af Sukkeret med Fehlings Vædske *overhovedet umulig*, ikke alene fordi der gaar Kobberoxydul over i Filtratet, men ogsaa fordi det udskilte Kobberoxydul i den ligesom mere seige Vædske holdes saa suspenderet, at man ikke engang kan bedømme Affarvningen. Med *Knapps* Vædske bliver Titreringen, naar Æggehvidegehalten overstiger *0.175 pCt.*, betydeligt *udhalet,* og derfor er det ved en Æggehvidegalt af *mere end 0.2 pCt.* ogsaa her nødvendigt at fjerne Æggehviden, før man titrerer. Men med Knapps Vædske er Titreringen, selv om Æggehvidegehalten overstiger 0.2 pCt., dog *ikke egentligt umulig,* den er udførbar, men foraarsager stort Tidsspilde, fordi da Kviksølvet først efter meget lang Tids Henstand sænker sig saa fuldstændigt tilbunds, at man kan erholde en klar Vædske til Endereaktionen.

Æggehvidens skadelige Indflydelse paa Titreringen bestaar altsaa deri, at den besværliggjør Afsætningen af Kviksølvet og hindrer Udfældningen af Kobberoxydulet, idet dette dels holdes opløst, dels fint suspenderet. Andre ugunstige Virkninger af dens Tilstedeværelse har vi ikke kunnet bemærke.

Resultatet af disse Forsøg turde have en vis *almindelig* Interesse for Sukkerets Bestemmelse i dyriske Vædsker overhovedet. Man har ikke sjelden med Extrakter (af forskjellige Vævsdele) at gjøre, der blot indeholde Spor af Æggehvide, som ofte kun ad Omveje lader sig fjerne. Af vore Iagttagelser tør det formodes, at man i Regelen uden videre vil kunne titrere dem uden skrupuløst at fjerne disse Spor.

§ 2. Druesukkerets Titrering i dyriske Vædsker overhovedet.

Vi have i det foregaaende gjentagne Gange udhævet, at saavel Fehlings som Knapps Methode ikke egentligt angiver Urinens Sukkergehalt, men Mængden af samtlige reducerende Substantser.

Da det nu er Sukkeret, som man kvantitativt vil bestemme, maa det Spørgmaal træde i Forgrunden: *med hvilken Grad af Nøjagtighed angiver det i Urinen ved Titreringen fundne Kvantum Sukker det i samme virkeligt indeholdte?* Man kan, da der altid findes reducerende Substantser i Urinen (ved Siden af Sukkeret), med Bestemthed vide, at den paa denne Maade fundne Værdi er for stor; det gjælder nu at kjende Fejlens Størrelse. Til den Ende have vi søgt at erholde Kundskab om de øvrige reducerende Substantsers Mængde i Urinen. Af de hidtil udførte Undersøgelser synes det, som om den kan variere betydeligt. Af Forsøgstabellen No. 2 (Side 55) over Uriner af ringe Sukkergehalt fremgaar, at der maa gives saadanne, hvor Mængden af de reducerende Substantser ikke naar op til 0.1 pCt., (beregnet efter Sukkerets Reduktionsevne), i det ved No 19 (M. A.) den ved Titreringen fundne Mængde af samtlige reducerende Substantser kun beløb sig til 0.087 pCt. Men ofte er Kvantumet meget større. De Forsøg, vi hidtil have udført med normale Uriner, der ikke indeholdt Spor af Sukker, vise, at ca. 0.1 pCt. er et hyppigt Tal, og ligesaa 0.2 pCt.; men det kan endog undertiden naa op til 0.3, ja endog 0.37 pCt. Idet vi forbeholde os en nøjere Redegjørelse for Mængden af disse Substantser og dens Variationer, f. Ex. dens Afhængighed af animalsk og vegetabilsk Kost, ville vi her indskrænke os til at fremhæve, at endog 0.3 pCt. af den paa denne Maade fundne Sukkergehalt kan hidrøre fra andre reducerende Substantser. Denne Afvigelse er ikke ringe, men selv den vil i sin Almindelighed fra praktisk Standpunkt ikke have Betydning, hvor det gjælder Sukkermængder over 1 pCt.; ved ringere Sukkermængder derimod, især naar det fundne Kvantum viser sig at være under 0.5 pCt., er det ogsaa i Praxis af Vigtighed at erindre, at en ikke liden Del af den fundne Procentgehalt kan hidrøre fra andre Stoffe; Hovedsagen bliver da for Lægen at komme til fuld Vished om, at Sukker virkeligt er tilstede. Fra exakt videnskabeligt Standpunkt, hvor det gjælder et dybere Studium og nøjagtige Bestemmelser, er en saa stor Afvigelse i ethvert Fald af Betydning. Saaledes maa man have den for Øje, *hvor man vil sammenligne Bestemmelserne ved Titrering og ved Polarisationsmethoden; endvidere hvis man vil anstille Undersøgelser om, hvorvidt Diabetikere assimilere visse Kulhydrater, Rørsukker, Stivelse o. s. v.* Det har baade videnskabelig og praktisk Interesse at anstille Ernæringsforsøg i denne Retning med Diabetikere. Man beregner den Mængde Druesukker, der kan dannes af de indførte Kulhydrater, og man kan nu ved Titrering bestemme den Mængde Sukker, der findes i Urinen. Men man maa være forsigtig med at opstille et Regnestykke og drage bestemte Slutninger, og det af mange Grunde. Her har vi kun at udhæve, at *Mængden af de øvrige reducerende Substantser (især hvis Sukkergehalten er liden), ikke maa lades ud af Betragtning ved Bedømmelsen.*

Man opfordres overhovedet til Forsigtighed ved Angivelsen af Sukkergehalten i dyriske Vædsker paa Grundlag af Titreringer. Det var en Tid, da man især paa Basis af Brückes Undersøgelser troede, at normal Urin altid indeholder Sukker, og denne Anskuelse blev akcepteret af fremragende fysiologiske Kemikere, f. Ex. Prof. Kühne. Af Kühnes Fremstilling[1]) fremgaar, at han vel var sig bevidst, at visse Urinbestanddele reducere Kobberoxyd i alkalisk Opløsning (Urinsyre, Kreatinin, og

---

[1]) l. c. Side 516—523.

desuden ét Stof, der skulde findes blandt de ubekjeudte Extraktivstoffe). Men uagtet dette, angiver han en bestemt Sukkergehalt for den normale Urin; Side 577, l. c. siger han: «Die Menge des Zuckers im normalen Harne beträgt ungefähr 0,1 pCt., so dass also der Mensch im Tage mehr als 1 Grm. Zucker durch die Nieren ausscheiden kann.» Vi have ikke fundet nogen Angivelse hos Kühne om den Methode, ved Hjælp af hvilken han er kommen til dette Resultat, selvfølgeligen er det ikke opnaaet ved Polarisation eller Gjæring, og man kan kun tænke sig, at han har erholdt det ved omtrentlig Titrering med Fehlings Vædske (enten uden videre eller efter at Urinsyren var udfældt). Dette er efter al Sandsynlighed Tilfældet, thi titrerer man normal Urin, erholder man hyppigt en Gehalt paa reducerende Substants, der ligger nær 0.1 pCt. (beregnet som Sukker). *Nu* har dette Tal ikke længere nogen Betydning i Kühnes Forstand, siden vi vide, at normal Urin enten ikke indeholder Sukker eller ialfald en mindre Mængde end 0,01 pCt. (Seegen l. c. S. 230 og 239). Men det lærer os, at vi *ikke uden videre tør opføre de ved Titrering fundne Værdier i dyriske Vædsker som Sukkergehalt.* Cl. Bernard har bestemt Sukkermængden i det for Æggehvide befriede Blod fra forskjellige Karprovindser ved Titrering med Fehlings Vædske, ligesaa Pavy og Andre. De saaledes fundne Tal sammenstilles nu sædvanligt simpelthen som repræsenterende Sukker; dette er urigtigt; *de bør betegnes som Gehalt paa reducerende Substants, beregnet som Sukker. Dette er nødvendigt, saalænge man ikke engang med Sikkerhed ved, om Sukkeret virkeligt danner den overveiende Mængde.*

Den Ene af os har i Begyndelsen af Mai 1877 med Bistand af Hr. stud. kem. Schmelck tilberedet et alkoholisk Extrakt af forskjellige *Muskler* (psoas, iliacus internus, quadratus lumborum og de udvendige Abdominalmuskler) fra en Diabetiker. Alkoholen afdestilleredes, Residuet opløstes i Vand, affarvedes med Dyrkul og Kullene udvaskedes flere Gange. Det samlede Vædskekvantum koncentreredes og beløb sig til 200 kcm. Det blev nu titreret. Vi kjendte dengang endnu ikke specielt de væsentligste Fordele ved Knapps Methode og indskrænkede os til Bestemmelse med Fehlings

Vædske. Der indtraadte Reduktion, men Filtratet efter Titreringen indeholdt baade opløst og suspenderet Kobberoxydul(hydrat). Uagtet vi saaledes ikke erholdt nogen Endereaktion, maatte vi efter Affarvningen slutte, at det mindst indeholdt 0.69 pCt. Og dog viste Circumpolarisationsapparatet ingen Dreining eller Spor af Dreining tilvenstre; det lykkedes ikke at erholde en *karakteristisk* Sukkerreaktion med den her i Institutet anvendte Modifikation af den Trommerske Prøve, som slaar til i Urin, der indeholder 0.05 pCt. Sukker eller selv derunder. For nu at komme til Kundskab om, hvorvidt denne Vædske indeholdt Sukker, blev den inddampet forsigtigt og næsten til Tørhed, behandlet med kogende Alkohol af 90 pCt. i opstigende Kjøler. Alkoholen afdestilleredes, Residuet opløstes i Vand samt atter affarvet med Dyrkul. Den saaledes erholdte Vædske, der var meget mere koncentreret end den oprindelige, idet den kun beløb sig til 100 kcm., viste med Polarisationsapparatet ingen Dreining, gav ingen Sukkerreaktion med Trommers Prøve men blot Affarvning. — Paa lignende Maade tilberedtes et alkoholisk *Lunge* og *Hjerne*-Extrakt. Alkoholen afdestilleredes og Residuerne opløstes i Vand. *Lunge*extraktets Volum beløb sig nu til 100 kcm. og indeholdt ved Titrering med Fehlings Vædske 0,39 pCt. Men heller ikke her kunde Spor af Sukker paavises. Extraktet af *Hjernen* beløb sig efter Opløsningen i Vand og Affarvning med Dyrkul til 330 kcm. Reduktionen var her mindre tydelig end i de foregaaende Extrakter; Farven blev skidden grønlig ligesom ved Titrering af *svagt* reducerende normal Urin med Fehlings Opløsning og Spor af fint suspenderet gult Kobberoxydulhydrat kunde ikke tydeligen paavises i Vædsken. Derimod optraadte der i samme gule metalglindsende Blade af 3—5 Millimeters Længde og ca. ½ Millimeters Bredde, der sank tilbunds og antoges at være en Kobberoxydulforbindelse. Ved den omtrentlige Titrering med Fehlings Vædske ansloges Mængden af reducerende Substants at svare til 0.58 pCt. For nu at paavise Spor af Sukker, anvendtes alle Kauteler. Vædsken inddampedes til Tørhed, digereredes med 90 pCt. Alkohol, filtreredes, Filtratet opløstes i Vand, affarvedes med Dyrkul. Og dette gjentoges flere Gange. Den koncentrerede vandige Opløsning viste sig at være indifferent ved Polarisation; Fehlings Vædske affarvedes strax, men der opstod ingen for Sukker karakteristisk Fældning af Kobberoxydul(hydrat). — *Derimod* viste *Leverextraktets* reducerende Substants sig at være *Sukker.*

Vilde man nu have angivet den Mængde reducerende Substants, der fandtes i hine Extrakter, at være resp. 0.69 pCt., 0.39 pCt., 0.58 pCt. *Sukker,* vilde man have begaaet en stor Fejl, thi de indeholdt ikke et *paaviseligt* Spor deraf.

Man har stedse følt, at Bestemmelser ved Hjælp af Fehlings Vædske i Chylus, Lymfe, Blod o. s. v. ikke afgiver et adækvat Udtryk for Sukkergehalten, men har ikke altid stillet sig skarpt for Øje, *hvorfor*. Man har troet at finde en væsentlig Grund dertil i, at Titreringen i og for sig ikke nøjagtigt angiver Mængden af det dannede Kobberoxydul, saa at det bliver nødvendigt paa anden Maade at bestemme samme. Pavy[1]) (og i lignende Retning før ham Abeles) har søgt at forøge Bestemmelsens Nøjagtighed derved, at han kun ganske kort (1 Minut) koger den fra Æggehvide befriede dyriske Vædske med Fehlings Opløsning i ringe Overskud, derpaa gjennem Asbest eller Glasuld filtrerer det udskilte Kobberoxydul fra, oxyderer samme med Vandstofhyperoxyd og Salpetersyre og bestemmer Mængden af Kobber i den saaledes erholdte Opløsning af salpetersurt Kobberoxyd ved Udfældning med den galvaniske Strøm. Men denne tilsyneladende omhyggeligere Bestemmelsesmaade af Kobberet rammer ikke Hovedsagen. Den væsentlige Grund ligger *ikke* heri; *Sagens Kjerne er, at der ved Siden af Sukkeret sandsynligvis findes andre reducerende Substantser i disse Vædsker.* Vi kunne gjerne sige *sikkert*, da Urinen, dette vigtige Exkret, indeholder saadanne i større Mængder. Vi have jo paavist dem i de ovenfor anførte Extrakter, og det er bekjendt, at Blodserum under pathologiske Forholde, f. Ex. Gigt, kan indeholde paaviselige Mængder af Urater.

Vil man *væsentligen* forbedre Bestemmelsen af Sukkeret, maa man saavidt muligt søge at *isolere* og *særskilt bestemme* samme eller Mængden af de øvrige reducerende Substantser. Herpaa har allerede for lang Tid siden flere, navnlig C. G. Lehmann, været opmærksom. Saaledes siger Lehmann i sin Afhandling: «Einige vergleichende Analysen des Blutes der Pfort-

[1]) *F. W. Pavy*, Eine neue Methode um die Quantität des Zuckers im Blut zu bestimmen. Centralblatt für die medicinischen Wissenschaften 1877. No. 33. S. 596—597.

ader und der Lebervenen»[1]) Side 139: «Ich bemerke hier nur im Bezug auf die Zuckerbestimmung, dass ich aus dem alkoholischen Auszuge des Blutrückstands durch eine frischbereitete alkoholische Kalilösung den Zucker fällte, das Präcipitat in weinsäurehaltigen Wasser löste und entweder im Fresenius-Will'schen Apparate mit Hefe in Gährung versetzte oder mittelst der Fehling'schen Kupferprobe bestimmte.»

Naar man har stillet sig dette klart for Øje, vil det heller ikke blive tvivlsomt, at Modifikationer af Fehlings Methode, *ikke* kan tjene til *væsentlige* Forbedringer i Bestemmelsen af de *reducerende* Substantsers Mængde i disse Vædsker. Vi vide jo, at Urinen ikke blot indeholder Stoffe, der reducere Kobberoxyd, men ogsaa Substantser, der hindre Udfældningen af Kobberoxydul, saaledes at opløst eller fint fordelt Kobberoxydul(hydrat) gaar gjennem Filtret. Det er derfor ogsaa sandsynligt, at de for Æggehvide befriede dyriske Vædsker indeholde Substantser med lignende Egenskaber, og vi have seet, at hine Muskel-, Lunge- og Hjerne-Extrakter indeholdt en større Mængde af dem. Paa Grund heraf tør vi formode, at det paa Glasuldfiltret samlede Bundfald i Pavys Bestemmelse ikke indeholdt alt Kobberoxydul. At komme til Vished herom er efter Pavys Methode umuligt, da han anvender et Overskud af Fehlings Vædske, saa at Filtratet i ethvert Fald maa indeholde Kobber. Med andre Ord, denne Modifikation kan derfor fra fysiologisk Standpunkt i ingensomhelst Henseende tillægges nogen væsentlig Fordel.

Vil man bestemme de reducerende Substantser, tro vi paa Grundlag af vore Erfaringer fra Urinen at kunne udtale den Formening, at den *Knapp'ske Vædske* vil vise sig *hensigtsmæssig* til Bestemmelsen af disse *i dyriske Vædsker overhovedet.*

Men man maa altid erindre, at det ikke blot er Sukkeret,

---

[1]) *Lehmann.* Berichte über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschafft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Classe. 1850. S. 139. Cfr. ogsaa *Lehmann.* Lehrbuch der physiologischen Chemie. 2 Auflage. J. 1853. B. 1. S. 265 og S. 269.

som frembringer Reduktion ved Titreringen. Vi tro — derfor ikke paa en mere passende Maade at kunne slutte vor Afhandling end ved at fremhæve den Bemærkning, som indeholdes i den Rapport, der i sin Tid afgaves af Pelouze, Rayer og Dumas til Videnskabernes Akademi i Paris ianledning af Figuiers, Poggiales og Lecontes Undersøgelser over Blodets Sukkergehalt: «Les recherches sur ce sujet important n'ont pourtant pas tout sans doute, et nous dirons ici à ceux qui voudront s'en occuper, qu'on ne doit pas accorder une confiance trop complète à des réactions semblables à celles qu'on obtient avec la dissolution de tartrate de cuivre dans la potasse. Tous ces phénomènes de coloration, de réduction produits par des matières organiques, sont trompeurs et incertains. Lorsqu'on ne peut pas isoler le sucre en nature, il faut au moins s'assurer de sa présence ...» (Comt. rend. 1855, t. XL. no. 25; 18 juin).

PETITE CONTRIBUTION À LA THÉORIE DE LA SURFACE STEINERIENNE.

(PAR SOPHUS LIE).

La surface *Steinerienne* du quatrième ordre et de la troisième classe a été, comme on sait, l'objet des recherches de plusieurs géomètres *Kummer*, *Weierstrass*, *Clebsch*, *Cremona*, *Sturm*, *Schroeter*, *Laguerre* etc. Je me propose de donner une petite contribution à la théorie de cette surface remarquable en démontrant le théorème suivant

Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport aux coniques situées sur une surface Steinerienne est en général une autre surface Steinerienne. Si en particulier le plan touche la surface donnée, la surface engendrée sera une surface du second degré.[1])

J'emploie l'expression pôle d'un plan par rapport à une conique C pour désigner le pôle par rapport à C de la droite d'intersection entre le plan donné et le plan de la conique.

I.

J'établirai d'abord deux théorèmes auxiliaires, dont le premier se rapporte aux coniques inscrites à un triangle donné,

---

[1]) Je communiquais ce thèorème déjà en 1869 à l'Université de Christiania.

l'autre se rapporte aux coniques dans l'espace, qui touchent quatre plans fixes.

Les coniques inscrites au triangle de référence $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ sont représentées, comme on sait, par l'équation:

$$\alpha_1 \sqrt{x_1} + \alpha_2 \sqrt{x_2} + \alpha_3 \sqrt{x_3} = 0 \tag{1}$$

ou par l'équation équivalente

$$\Sigma\, \alpha_i^4 x_i^2 - 2 \Sigma\, \alpha_i^2 \alpha_k^2 x_i x_k = 0.$$

Le pôle de la droite

$$\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 = 0 \tag{2}$$

par rapport à une telle conique est déterminé par les équations

$$\xi_1 = \alpha_3^2 \gamma_2 + \alpha_2^2 \gamma_3$$
$$\xi_2 = \alpha_1^2 \gamma_3 + \alpha_3^2 \gamma_1$$
$$\xi_3 = \alpha_2^2 \gamma_1 + \alpha_1^2 \gamma_2.$$

Ces formules obtiennent une forme remarquable lorsqu'on exprime les quantités $\gamma_i\, \alpha_i$ par les coordonnées

$$x_1'\, x_2'\, x_3' \text{ et } x_1''\, x_2''\, x_3''$$

des points d'intersection entre la conique (1) et la droite (2). En effet les équations

$$\Sigma\, \gamma_i x_i' = 0, \quad \Sigma\, \gamma_i x_i'' = 0$$
$$\Sigma\, \alpha_i \sqrt{x_i'} = 0, \quad \Sigma\, \alpha_i \sqrt{x_i''} = 0$$

donnent

$$\frac{\gamma_1}{x_2' x_3'' - x_2'' x_3'} = \frac{\gamma_2}{x_3' x_1'' - x_3'' x_1'} = \frac{\gamma_3}{x_1' x_2'' - x_1'' x_2'}$$

et

$$\frac{\alpha_1}{\sqrt{x_2' x_3''} - \sqrt{x_2'' x_3'}} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{x_3' x_1''} - \sqrt{x_3'' x_1'}}$$
$$= \frac{\alpha_3}{\sqrt{x_1' x_2''} - \sqrt{x_1'' x_2'}}$$

et par substitution des quantités proportionnelles trouvées au lieu de α_i et γ_i

$$\xi_1 = \rho \sqrt{x_1' x_1''}, \quad \xi_2 = \rho \sqrt{x_2' x_2''}, \quad \xi_3 = \rho \sqrt{x_3' x_3''}$$

où

$$\tfrac{1}{2}\rho = \sqrt{x_1' x_1''}\,(x_3' x_2'' - x_2' x_3'') + \sqrt{x_2' x_2''}(x_1' x_3'' - x_3' x_1'') + \sqrt{x_3' x_3''}(x_2' x_1'' - x_1' x_2'').$$

En se rappelant maintenant que le facteur commun ρ peut être effacé dans les expressions des coordonnées homogènes $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$, on pourra énoncer le théorème suivant.

Théorème I. Si une conique, inscrite au triangle de référence $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ *rencontre une droite donnée dans les points* $x_1'\ x_2'\ x_3'$ *et* $x_1''\ x_2''\ x_3''$, *le pôle de la droite par rapport à la conique aura les coordonnées*

$$\xi_1 = \sqrt{x_1' x_1''}, \quad \xi_2 = \sqrt{x_2' x_2''}, \quad \xi_3 = \sqrt{x_3' x_3''}.$$

Maintenant c'est facile de démontrer l'autre théorème auxiliaire dont j'ai besoin.

Regardons une conique tangente aux quatre plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ $x_4 = 0$, une droite passante par deux points

$$x_1' \ldots x_4' \text{ et } x_1'' \ldots x_4''$$

de la conique, et le pôle correspondant $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\ \xi_4$. Faisons la perspective de cette figure dans le plan $x_4 = 0$, en choisissant le point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ comme lieu de l'oeil. On obtiendra par là dans le plan $x_4 = 0$ une conique tangente aux droites $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$, une droite passante par deux points $x_1'\ x_2'\ x_3'$ et $x_1''\ x_2''\ x_3''$ situés sur elle, et le pôle correspondant $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$. Donc en employant le théorème précédant on aura les formules

$$\xi_1 = \sqrt{x_1' x_1''}, \quad \xi_2 = \sqrt{x_2' x_2''}, \quad \xi_3 = \sqrt{x_3' x_3''},$$

auxquelles on peut ajouter, comme l'on trouve par un raisonnement analogue

$$\xi_4 = \sqrt{x_4' \, x_4''}.$$

Cela donne

Théorème II. Si une conique inscrite au tétraèdre de référence $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ $x_4 = 0$ *rencontre une droite dans les points* $x_1' \ldots x_4'$ *et* $x_1'' \ldots x_4''$, *les coordonnées* ξ_i *du pôle de la droite seront données par la formule*

$$\xi_i = \sqrt{x_i' \, x_i''}$$

II.

L'équation

$$(4) \qquad \alpha_1 \sqrt{x_1} + \alpha_2 \sqrt{x_2} + \alpha_3 \sqrt{x_3} + \alpha_4 \sqrt{x_4} = 0$$

représente comme on sait une surface Steinerienne rapportée à son tétraèdre fondamentale. On obtient toutes les coniques situées sur elle en la coupant par une autre telle surface

$$(5) \qquad \beta_1 \sqrt{x_1} + \beta_2 \sqrt{x_2} + \beta_3 \sqrt{x_3} + \beta_4 \sqrt{x_4} = 0,$$

$\beta_1 \, \beta_2 \, \beta_3 \, \beta_4$ désignant des paramètres variables. Il est de même évident qu'on trouve toutes les coniques cherchées en établissant entre les β une relation quelconque; car on obtient la même conique en substituant au lieu de $\beta_1 \ldots \beta_4$ les quantités

$$\beta_1 + \lambda \, \alpha_1 \; \ldots \; \beta_4 + \lambda \, \alpha_4$$

où λ a une valeur quelconque. Dans le suivant nous supposons quelquefois que les β soient liées par une relation linéaire

$$(5') \qquad \Sigma \, \omega_i \, \beta_i = 0;$$

mais pour simplifier les formules nous gardons toutes les β dans nos formules.

Cherchons maintenant le lieu des pôles d'un plan fixe

$$(6) \qquad \gamma_1 \, x_1 + \gamma_2 \, x_2 + \gamma_3 \, x_3 + \gamma_4 \, x_4 = 0$$

par rapport aux coniques de la surface (4). Remarquons à cet effet que ces coniques touchent les quatre plans $x_1 = 0$ $\ldots x_4 = 0$. Donc (Théorème 2) les formules

$$\xi_1 = \sqrt{x_1' \, x_1''} \ldots \quad \xi_4 = \sqrt{x_4' \, x_4''}, \tag{7}$$

où les x_i' et x_i'' désignent les points d'intersection entre une telle conique et le plan (6), déterminent le pôle correspondent. Il faut exprimer les quantités $\sqrt{x_i' \, x_i''}$ par les quantités données α_k, γ_k et par les quantités variables β_k. Pour cela nous éliminons x_3 et x_4 entre les équations (4) (5) et (6) ce qui donne une équation de la forme

$$A x_1 + B \sqrt{x_1} \sqrt{x_2} + C x_2 = 0,$$

laquelle nous regardons comme une équation du second degré par rapport à $\sqrt{x_1}$ et $\sqrt{x_2}$. De cette manière on trouvera

$$\sqrt{x_1' \, x_1''} = C, \qquad \sqrt{x_2' \, x_2''} = A$$

où

$$\begin{aligned} C = \gamma_2 (\alpha_3 \beta_4 - \alpha_4 \beta_3)^2 + \gamma_3 (\alpha_4 \beta_2 - \alpha_2 \beta_4)^2 \\ + \gamma_4 (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2)^2, \\ A = \gamma_1 (\alpha_3 \beta_4 - \alpha_4 \beta_3)^2 + \gamma_3 (\alpha_4 \beta_1 - \alpha_1 \beta_4)^2 \\ + \gamma_4 (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1)^2. \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue donne les valeurs de $\sqrt{x_3' \, x_3''}$ et $\sqrt{x_4' \, x_4''}$. Donc en substituant en (7) on trouvera les expressions cherchées de $\xi_1 \ldots \xi_4$, qui puissent être représentées par une formule unique

$$\xi_i = \Sigma_{k \mu \nu} \gamma_k (\alpha_\mu \beta_\nu - \alpha_\nu \beta_\mu)^2 = f_i(\beta),$$

en désignant par $\iota \, k \, \mu \, \nu$ successivement toutes les permutations possibles des nombres 1 2 3 4. Si l'on exprime ici β_4 linéairement par $\beta_1 \, \beta_2 \, \beta_3$ à l'aide de la relation (5'), on aura les coordonnées du pôle cherché exprimées comme fonctions homogènes du second degré des trois paramètres $\beta_1 \, \beta_2 \, \beta_3$. Mais après *Steiner* et *Weierstrass* un point variable dont les coordonnées sont des fonctions homogènes du second degré de trois paramètres, décrira en général une surface *Steinerienne*. Donc le lieu cherché sera, ou une surface *Steinerienne* générale, ou une dégéneration d'une telle surface.

Pour discuter le lieu de pôles complètement nous suivrons la méthode de *Clebsch.* (Crelle-Borchardts Journal 1867). Après lui il faut former l'expression

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = \varphi(\beta)$$

et chercher de telles valeurs des coefficiens λ, que $\varphi(\beta)$ devient un carré complet. Si l'on trouve quatre systèmes distinctes de valeurs qui satisfont à cette condition, la surface est une surface *Steinerienne* générale. La recherche des λ conduit à une équation du quatrième degré, que l'on pourrait former et résoudre. En suivant cette route on trouverait quatre racines différentes et par conséquent quatre systemes de valeurs différentes pour les λ. Mais une telle méthode serait assez laborieuse. J'ai trouvé par une méthode synthétique quatre systèmes de valeurs, qui satisfont à notre condition. J'indiquerai ces systèmes aussitôt, et en vérifiant qu'ils transforment la quantité φ dans un carré complet je démontre en même temps que la surface engendrée soit une surface *Steinerienne* générale.

Posons

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\alpha_1^2 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 - \frac{\gamma_1}{2}\Omega \\ \lambda_2 &= \frac{\gamma_2}{2}\Omega,\ \lambda_3 = \frac{\gamma_3}{2}\Omega,\ \lambda_4 = \frac{\gamma_4}{2}\Omega\end{aligned} \tag{8}$$

où

$$\Omega = \alpha_4^2 \gamma_2 \gamma_3 + \alpha_3^2 \gamma_2 \gamma_4 + \alpha_2^2 \gamma_3 \gamma_4, \tag{9}$$

on vérifiera par un calcul élémentaire, dont je supprime les details que $\Sigma \lambda_i f_i$ prend la forme

$$(\rho_1 \beta_1 + \rho_2 \beta_2 + \rho_3 \beta_3 + \rho_4 \beta_4)^2$$

où

$$\rho_1 = \alpha_4^2 \gamma_2 \gamma_3 + \alpha_3^2 \gamma_2 \gamma_4 + \alpha_2^2 \gamma_3 \gamma_4$$

$$\rho_2 = -\alpha_1 \alpha_2 \gamma_3 \gamma_4 \quad \rho_3 = -\alpha_1 \alpha_3 \gamma_3 \gamma_4, \quad \rho_4 = -\alpha_1 \alpha_4 \gamma_2 \gamma_3.$$

On connaît ainsi un système de valeurs pour les λ, qui transforment $\Sigma \lambda_i f_i$ dans un carré complet. On voit de plus, qu'on obtient des nouveaux systèmes, qui possèdent la même propriété, en permutant dans les formules (8) et (9) les indices 1, 2, 3, 4 d'une manière quelconque. Entre ces systèmes il y a quatre qui sont distinctes, supposé que les constantes γ ont des valeurs générales. Donc la surface engendrée sera une surface Steinerienne générale, lorsque le plan donné a une position générale par rapport à la surface donnée.

III.

Nous cherchons maintenant les modifications auxquelles notre théorème sera soumis pour des positions speciales du plan donné, en supposant toujours que la surface Steinerienne donnée soit générale.

En supposant que le plan donné ne soit pas tangent à la surface donnée, la courbe d'intersection entre la surface et le plan sera une courbe irréductible du quatrième ordre. Elle aura évidemment trois points doubles. Prenons un point p de cette courbe; il existe toujours une conique située sur la surface, qui est tangente au plan donné en p, et qui ne soit pas située dans ce plan. Or le pôle du plan par rapport à cette conique est précisément p; donc ce point appartiendra à la surface engendrée. Cela donne

Lorsque le plan donné ne soit pas tangent à la surface donnée, leur courbe d'intersection appartiendra à la surface engendrée

La surface engendrée contiendra ensuite dans le cas général une courbe du quatrième ordre à trois points doubles;[1]) par conséquent elle sera une surface Steinerienne générale.

---

[1]) La courbe d'intersection entre la surface donnée et le plan donné possède quatre tangentes doubles situées dans les quatre faces du tétraèdere fondamental de la surface donnée. Ensuite le tétraèdre fondamentale de la surface engendrée contient aussi quatre faces distinctes.

Quand le plan donné ne soit pas tangent à la surface donnée, la surface engendrée sera une surface Steinerienne générale.

Supposons maintenant que le plan donné soit tangent à la surface donnée, et soit A le point de contact. Dans ce cas la courbe d'intersection entre la surface donnée et le plan donné consistera de deux coniques qui se coupent en A, et en trois autres points. Maintenant on ne peut plus démontrer comme précédemment que la courbe d'intersection entre la surface donnée et le plan donné appartienne aussi à la surface engendrée.

Pour trouver la courbe d'intersection entre le plan donné et la surface engendrée nous chercherons les points dans l'espace, appartenant à la surface engendrée, qui sont infiniment voisins au plan donné. De tels points correspondent nécessairement à des coniques k situées en des plans tangens, infiniment voisins au plan donné. Or de tels plans passent par A, abstraction faite d'une quantité infinitésimale. La conique k est infiniment peu différent de l'une des deux coniques situées dans le plan donné. Donc la tangente en A à la conique k sera infiniment voisine à la tangente correspondante de la conique située dans le plan donné.

En poursuivant ces considérations on verra que l'intersection entre le plan donné et la surface engendrée consiste seulement de deux droites: les tangentes en A des deux coniques situées dans le plan donné. Ces deux droites sont en même temps les tangentes asymptotiques de la surface donnée dans le point A.

Dans le cas consideré la surface engendrée sera une surface du second ordre, qui touche le plan donné en A.

La surface gauche du troisième ordre et de la troisième classe est, comme on sait, une dégénération de la surface *Steinerienne.* Notre théorème s'applique encore à cette dégénération. La surface engendrée sera elle-même pour une position général du plan donné une surface gauche du troisieme ordre.

THEORIE DER TRANSFORMATIONS-GRUPPEN, III. BESTIMMUNG ALLER GRUPPEN EINER ZWEIFACH AUSGEDEHNTEN PUNKT-MANNIGFALTIGKEIT.

VON

SOPHUS LIE.

Die nachstehende Abhandlung schliesst sich als Fortzetzung an den beiden Abhandlungen,[1]) die ich im Bande I dieser Zeitschrift veröffentlicht habe. Die lange Verspätung wurde wesentlich dadurch veranlasst, dass ich die einfachen Resultate, die ich gefunden hatte, nicht durch eine entsprechend einfache Analyse beweisen könnte. Glücklicherweise ist es mir in der letzten Zeit gelungen, meine Untersuchungs-Methoden wesentlich zu verbessern, und dadurch eine grosse. Anzahl mühsamer, wenn auch principiel einfacher Rechnungen zu ersparen. Hierdurch gelingt es mir insbesondere in dieser Arbeit durch verhältnissmässig kurze Rechnungen, alle Gruppen von Punkt-Transformationen einer Ebene zu bestimmen.[2])

---

[1]) Ich behalte mich vor bei einer späteren Gelegenheit einige Entwickelungen meiner beiden früheren Arbeiten *näher zu discuttiren.*

[2]) Es ist mir gelungen, einerseits alle Gruppen einer dreifach ausgedehnten Punkt-Mannigfaltigkeit zu bestimmen, andererseits wenn ich nicht irre eine *tiefere Einsicht* in die allgemeine Theorie zu gewinnen. Hier sei auch erwähnt, dass ich diese Theorien u. A. mit Erfolg auf die allgemeine *Monge-Amperesshe* Gleichung angewandt habe.

Abschnitt III.

Allgemeine Entwickelungen.

In diesem Abschnitte gebe ich einige allgemeine Entwickelungen, welche die principielle Grundlage meiner weiteren Untersuchungen bilden.

§ 1.

Infinitesimale Transformationen erzeugen eine Gruppe, wenn sie gewisse Relationen erfüllen.

1. Die infinitesimalen Transformationen

$$A_k f = \Sigma_s X_{ks} \frac{df}{dx_s} \qquad (k = 1 \ldots r)$$

einer r-gliedrigen Gruppe sind nach meinen früheren Untersuchungen paarweise durch Relationen der Form

$$A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f)) = \Sigma\, c_{iks} A_s f$$

wo die c Constanten sind, verbunden. Andererseits habe ich auch gefunden, dass r unabhängige infinitesimale Transformationen, die paarweise solche Bedingungs-Gleichungen erfüllen, immer eine r-gliedrige Gruppe erzeugen. Auf diesen Satz, den ich früher nur unter gewissen beschränckenden Voraussetzungen bewiesen habe, werde ich hier näher eingehen.

Ich betrachte die infinitesimale Transformation

$$\lambda_1 A_1 f + \ldots + \lambda_r A_r f$$

mit den Parametern $\lambda_1 \ldots \lambda_r$, und die zugehörige eingliedrige Gruppe

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n\, \lambda_1 t \ldots \lambda_r t).$$

Alsdann bestimmen die Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n\, a_1 \ldots a_r)$$

mit den unbestimmten Parametern $a_1 \ldots a_r$ r-fach unendlich viele verschiedene Transformationen. Es handelt sich darum nachzuweisen, dass die Succession zweier solchen Transformationen mit einer einzigen Transformation derselben Schaar aequivalent ist.

2. Statt der Grössen x führen wir neue Variabeln $y_1 \dots y_n$ ein, die derart gewählt sind, dass

$$A_r y_1 = 0 \dots \quad A_r y_{n-1} = 0\,, \quad A_r y_n = 1$$

ist. Alsdann wird

$$A_r f = \frac{df}{dy_n}$$

$$A_i f = Y_{i1} \frac{df}{dy_1} + \dots + Y_{in} \frac{df}{dy_n}\,;$$

und die Relation

$$(A_r A_i) = \Sigma\, c_{is} A_s$$

löst sich in die folgenden auf

$$\frac{d Y_{ik}}{dy_n} = \Sigma_s\, c_{is}\, Y_{sk}\,. \tag{1}$$

Diese Relationen benutze ich zum Beweis einer Eigenschaft des Ausdrucks

$$\Sigma_i\, \rho_i\, Y_{ik}\,,$$

in dem ich die Grössen ρ_i als Funktionen von y_n betrachte. Es ist in der That möglich, wie ich jetzt zeigen werde, die ρ_i derart als Funktionen von y_n zu bestimmen, dass der Differential-Quotient

$$\frac{d}{dy_n}(\Sigma_i\, \rho_i\, Y_{ik})$$

gleich Null wird. Die Forderung:

$$\sum_i \rho_i \frac{d Y_{ik}}{dy_n} + \sum_i \frac{d\rho_i}{dy_n} Y_{ik} = 0$$

erhält nemlich wegen (1) die Form

$$\sum_i \rho_i \sum_s c_{is}\, Y_{sk} + \sum_i \frac{d\rho_i}{dy_n} Y_{ik} = 0$$

und wird daher erfüllt, indem wir die Grössen $\rho_1 \dots \rho_r$ vermöge des simultanen Systems

$$\frac{d\rho_s}{dy_n} + \sum_i c_{is}\,\rho_i = 0$$

als Funktionen von $y_n - y_n^0$ uud den Anfangs-Werthen ρ_k^0 bestimmen. Sind

$$\rho_i = \rho_i\,(y_n - y_n^0, \rho_1^0 \ldots \rho_r^0)$$

die zugehörigen Integral-Gleichungen, so bestehen also die Identitäten

$$\sum_i \rho_i^0\; Y_{ik}\,(y_n^0) = \sum_i \rho_i\,(y_n - y_n^0)\; Y_{ik}\,(y_n),$$

die wir jetzt verwerthen werden.

3. Ich betrachte die infinitesimale Transformation

$$\frac{df}{dy_n} + \lambda_1\,A_1 f + \ldots + \lambda_r\,A_r f,$$

und setze dabei voraus, dass die λ sehr kleine (infinitesimale) Grössen sind. Um die zugehörige eingliedrige Gruppe zu bestimmen, bilde ich das simultane System

$$\text{(2)} \qquad \frac{dy_k}{\sum \lambda_i\, Y_{ik}} = \ldots = \frac{dy_n}{1 + \sum \lambda_i\, Y_{in}} = \delta t\,;$$

alsdann sind bekanntlich die zugehörigen Integral-Gleichungen

$$\text{(3)} \qquad y_k = f_k\,(t\, y_1^0 \ldots y_n^0\, \lambda_1 \ldots \lambda_r)$$

die Definitions-Gleichungen der gesuchten eingliedrigen Gruppe. Es ist nun klar, dass die f_k gewisse Funktionen von den λ sind, und zwar können wir annehmen, dass sie nach den Potenzen der λ entwickelt sind. Für das Folgende ist es hinlänglich nur diejenigen Glieder dieser Reihen-Entwickelungen zu bestimmen, die die λ_k in der nullten und ersten Potenz enthalten.

Denkt man sich die Werthe $y_k = f_k$ in das simultane Systeme (2) eingeführt, so kann man die Integral-Gleichungen dieses Systems auch folgendermassen schreiben

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} y_k - y_k^0 &= \int dt \sum_i \lambda_i\, Y_{ik}\,, \\ y_n - y_n^0 &= t + \int dt \sum_i \lambda_i\, Y_{in}\,. \end{aligned}$$

Nun aber bestehen nach den Entwickelungen der vorangehenden Nummer Relationen der Form

$$\Sigma \lambda_i Y_{ik}(y_n) = \Sigma \varphi_i (\lambda_1 \ldots \lambda_r y_n - y_n^0) Y_{ik}(y_n^0),$$

wo die φ nur von den λ und der Grösse $y_n - y_n^0$ abhängen. Hierdurch kommt

$$y_k - y_k^0 = \int dt \sum_i \varphi_i (\lambda_1 \ldots, y_n - y_n^0) Y_{ik}(y_1 \ldots y_{n-1} y_n^0)$$

$$y_n - y_n^0 = t + \int dt \sum_i \varphi_i (\ldots\ldots\ldots) Y_{in}(\ldots\ldots\ldots).$$

Diese Gleichungen gelten, welche Werthe (endliche oder infinitesimale) die Grössen λ auch haben mögen. Nun aber berücksichtigen wir, dass die λ infinitesimale Grössen sind, und dass wir nur die ersten Glieder der betreffenden Reihen-Entwickelungen zu suchen haben. Die Grössen φ sind von der ersten Ordnung hinsichtlich der λ. Demzufolge sind die Integrale, in denen die φ eingehen, selbst von erster Ordnung hinsichtlich der λ. Ersetzen wir daher in φ_i und Y_{ik} die Grössen $y_n - y_n^0$ und y_k bezüglich durch t und y_k^0, so werden die Grössen unter dem Integral-Zeichen und ebenso die Integrale selbst nur um Grössen geändert, die von zweiter Ordnung hinsichtlich der λ sind. Das heisst, es ist

$$y_k = y_k^0 + \int_0^t dt \sum_i \varphi_i (\lambda_1 \ldots t) Y_{ik}(y_1^0 \ldots y_{n-1}^0 y_n^0) + \delta_2$$

$$y_n = y_n^0 + t + \int_0^t \ldots\ldots\ldots\ldots Y_{in}(\ldots\ldots\ldots) + \varepsilon_2$$

wo δ_2 und ε_2 von zweiter Ordnung hinsichtlich der λ sind. Und da die $Y_{ik}(y_1^0 \ldots y_n^0)$ von t unabhängig sind, können sie ausser des Integrals-Zeichens genommen werden:

$$y_k = y_k^0 + \sum_i Y_{ik}(y^0) \int dt \varphi_i (\lambda_1 \ldots t) + \delta_2$$

$$y_n = y_n^0 + t + \Sigma Y_{in}(y^0) \int dt \varphi_i (\lambda_1 \ldots t) + \varepsilon_2$$

und wenn wir setzen

$$\int_0^t dt\, \varphi_i(\lambda_1 \ldots \lambda_r t) = \psi_i(\lambda_1 \ldots t)$$

kommt endlich

$$(5) \qquad \begin{aligned} y_k &= y_k^0 + \sum_i \psi_i(\lambda_1 \ldots t)\, Y_{ik}(y^0), \\ y_n &= y_n^0 + t + \sum_i \psi_i(\lambda_1 \ldots t)\, Y_{in}(y^0). \end{aligned}$$

Hiermit sind die gesuchten Glieder unserer Reihen-Entwickelungen wirklich gefundeu.

Die durch die letzten Gleichungen definirte Transformation gehört der Schaar (3) an; wir werden zeigen, dass sie sich durch zwei successive Transformationen derselben Schaar ersetzen lässt. Man führe in der That zuerst aus die Transformation

$$\begin{aligned} y_k' &= y_k \\ y_n' &= y_n + t \end{aligned}$$

sodann die infinitesimale Transformation

$$\begin{aligned} y_k &= y_k^0 + \sum \delta t_i\, Y_{ik}(y_1^0 \ldots y_n^0) \\ y_n &= y_n^0 + \sum \delta t_i\, Y_{in}(y_1^0 \ldots y_n^0), \end{aligned}$$

welche beide der Schaar (3) angehören.

Diese Succession ist aequivalent mit der Transformation

$$\begin{aligned} y_k' &= y_k^0 + \sum \delta t_i\, Y_{ik}(y_1^0 \ldots y_n^0) \\ y_n' &= y_n^0 + t + \sum \delta t_i\, Y_{in}(y_1^0 \ldots y_n^0), \end{aligned}$$

also ist sie zugleich aequivalent mit der Transformation (5) vorausgesetzt dass die infinitesimalen Grössen ψ_i gleich den Infinitesimalen δt_i sind.

Wir kehren jetzt zu den ursprünglichen Variabeln x zurück. Wird das simultane System

$$\frac{dx_k}{\sum \mu_i X_{ik}} = \delta t$$

integrirt durch die Gleichungen

$$x_i' = \varphi_i(x_1 \ldots x_n\, \mu_1 t \ldots \mu_r t),$$

so ist die Transformations-Schaar

$$x_i' = \varphi_i(x_1 \ldots x_n\, a_1 \ldots a_r)$$

aequivalent mit der Schaar (3). Bemerke ich nun, dass in den früheren Entwickelungen die Transformation $A_r f$ sich durch eine beliebige Transformation der Form $\Sigma \nu_i A_i f$ ersetzen lässt, so kann ich den folgenden Satz aussprechen

Satz 1. *Die Succession einer beliebigen Transformation* $x_i' = \varphi_i(x_1 \ldots x_n\, a_1 \ldots a_r)$ *mit einer infinitesimalen Transformation derselben Schaar ist aequivalent mit einer Transformation* $x_i' = \varphi_i(x_1 \ldots x_n\, a_1 + \Delta a_1 \ldots a_r + \Delta a_r)$, *deren Parameter* $a_k + \Delta a_k$ *unendlich wenig von den Grössen* a_k *verschieden sind.*

3. Es ist nun leicht nachzuweisen, dass die Succession zweier beliebigen endlichen Transformationen unserer Schaar, die respective die Parameter a_k und b_k besitzen, mit einer einzigen Transformation der Schaar aequivalent ist. Nennen wir die Parameter dieser neuen Transformation c_k, so findet unsere Behauptung ihren Ausdruck in die Gleichung

$$f_i(f_1(x_1 \ldots b_k) f_2(b_k) \ldots a_1 \ldots a_r) = f_i(x_1 \ldots x_n\, c_1 \ldots c_r)$$

die wir kurzweg folgendermassen schreiben

$$a_k \mid b_k = c_k.$$

Wir setzen

$$b_k = \lambda_k b$$

und fassen dabei die λ_k als feste Grössen, b als eine Variable auf. Die einfach unendlich vielen Transformationen $\lambda_k b$ bilden bekanntlich eine eingliedrige Gruppe, (deren identische Transformation der Annahme $b = 0$ entspricht), was wir folgendermassen ausdrücken

$$\lambda_k b_0 \mid \lambda_k b_1 = \lambda_k (b_0 + b_1);$$

insbesondere ist

$$-\lambda_k \Delta b \mid \lambda_k (b + \Delta b) = \lambda_k b.$$

Diese Gleichung combiniren wir mit der früher (Satz I) gefundenen:

$$a_k \mid -\lambda_k \varDelta b = a_k + \varDelta a_k$$

wo der Zusammenhang zwischen den Grössen $\varDelta a_k$ und $\varDelta b$ durch ein gewisses simultanes System

$$(6) \qquad \varDelta a_k = f_k (a_1 \ldots a_r) \varDelta b$$

ausgedrückt wird. Hierdurch finden wir die Gleichung

$$a_k \mid \lambda_k b = a_k \mid -\lambda_k \varDelta b \mid \lambda_k (b + \varDelta b) = a_k + \varDelta a_k \mid \lambda_k (b + \varDelta b)$$

die wir folgendermassen schreiben

$$\frac{d}{db} [a_k \mid \lambda_k b] = 0,$$

indem wir nehmlich die a_k als Funktionen von b, bestimmt vermöge des simultanen Systems (6) betrachten. Sind

$$a_k = \psi_k (a_1{}^0 \ldots a_r{}^0 b)$$

die Integral-Gleichungen dieses Systems, und entsprechen dabei $a_k = a_k{}^0$ der Annahme $b = 0$, so kommt

$$a_k \mid \lambda_k b = Const. = a_k{}^0 \mid 0 = a_k{}^0 .$$

Hiermit ist nachgewiesen, dass die successive Ausführung der Transformationen a_k und $\lambda_k b$ mit der einzigen Transformation $a_k{}^0$ aequivalent ist. Hiermit ist das folgende Theorem erwiesen:

Theorem I. Sind r unabhängige infinitesimale Transformationen $A_1 f \ldots A_r f$ paarweise durch Relationen der Form

$$A_i (A_k (f)) - A_k (A_i (f)) = \sum_i c_{iks} A_s f$$

verbunden, so erzeugen sie eine r-gliedrige Gruppe.

§ 2.

Transponirte Transformationen.

4. Sind a_k und b_k Transformationen einer Gruppe, deren identische Transformation der Annahme $a_k = 0$ entspricht, so dass b_k und $-b_k$ inverse Transformationen bestimmen, so nenne ich die Transformation

$$b_k \,|\, a_k \,|\, - b_k\,,$$

die offenbar der gegebenen Gruppe angehört, eine transponirte Transformation.

Ich setze

$$a_k = \lambda_k\, a\,,$$

und fasse dabei die λ_k als feste Grössen, dagegen a als eine Variable auf, so dass die Transformationen $\lambda_k a$ eine eingliedrige Gruppe bestimmen. Führe ich nun successiv die beiden Transformationen

$$b_k \,|\, \lambda_k\, a_1 \,|\, - b_k \quad \text{und} \quad b_k \,|\, \lambda_k\, a_2 \,|\, - b_k$$

aus, so ist diese Succession offenbar aequivalent mit der Transformation

$$b_k \,|\, \lambda_k\,(a_1 + a_2) \,|\, - b_k\,,$$

so dass die Transformationen $b_k \,|\, \lambda_k\, a \,|\, - b_k$ eine eingliedrige Gruppe bilden. Also

Satz 2. Transponirt man die Transformationen $\lambda_k a$ einer eingliedrigen Gruppe vermöge der Transformation b_k, so bilden die hervorgehenden Transformationen $b_k \,|\, \lambda_k\, a \,|\, - b_k$ wiederum eine eingliedrige Gruppe.

Um die neue Gruppe zu finden, ist es hinreichend ihre infinitesimale Transformation zu bestimmen. Es stellt sich somit die Aufgabe, die Transformation

$$b_k \,|\, \lambda_k\, a \,|\, - b_k$$

zu finden, wenn a eine infinitesimale Grösse ist. Wir werden diese Aufgabe erledigen, indem wir zunächst zugleich voraussetzen, dass auch die Grössen b_k infinitesimal sind.

Seien

$$x_k' - x_k = \beta_k\, \delta t$$

die Gleichungen der infinitesimalen Transformation b_k, und seien

$$x_k' - x_k = \alpha_k\, \delta\tau$$

die Gleichungen der infinitesimalen Transformation $\lambda_k a$. Um nun die Tranformation $b_k \mid \lambda_k a \mid - b_k$ zu finden, bilden wir die Gleichungen.

$$x_k'' = x_k' + \beta_k' \delta t + \left(\Sigma \frac{d\beta_k'}{dx_i'} \beta_i' \right) \frac{\delta t^2}{2} + \dots$$

$$x_k' = x_k + \alpha_k \delta\tau + \left(\Sigma \frac{d\alpha_k}{dx_i} \alpha_i \right) \frac{\delta\tau^2}{2} + \dots$$

$$x_k = x_k^0 - \beta_k^0 \delta t + \left(\Sigma \frac{d\beta_k^0}{dx_i^0} \beta_i^0 \right) \frac{\delta t^2}{2} + \dots$$

woraus folgt

$$x_k'' = x_k^0 + (\beta_k' - \beta_k^0) \delta t + \alpha_k \delta\tau + 2 \left(\Sigma \frac{d\beta_k^0}{dx_i^0} \beta_i^0 \right) \frac{\delta t^2}{2}$$
$$+ \left(\Sigma \frac{d\alpha_k}{dx_i} \alpha_i \right) \frac{\delta\tau^2}{2} + \dots$$

Nun aber ist

$$\beta_k' - \beta_k^0 = \Sigma \frac{d\beta_k^0}{dx_i^0} (- \beta_i^0 \delta t + \alpha_i^0 \delta\tau) + \dots$$

also kommt

$$x_k'' = x_k^0 + \left\{ \alpha_k^0 + \delta t \left(\Sigma \alpha_i^0 \frac{d\beta_k^0}{dx_i^0} - \beta_i^0 \frac{d\alpha_k^0}{dx_i^0} \right) \right\} \delta\tau + \dots$$

womit die verlangte Bestimmnng ausgeführt ist. Dies giebt

Satz 3. Transponirt man eine infinitesimale Transformation Af vermöge einer infinitesimalen Transformation Bf, so erhält man die Transformation

$$Af + \delta t \left\{ A(B(f)) - B(A(f)) \right\}.$$

5. Seien jetzt $A_1 f \dots A_r f$, wo

$$(A_i A_k) = \Sigma c_{iks} A_s$$

die infinitesimalen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe G_r, die in einer $(r+1)$-gliedrigen Gruppe G_{r+1} enthalten ist, und lass uns dabei voraussetzen, das die $r+1$ infinitesimalen Transformationen $A_1 f \dots A_r f \, Bf$ dieser neuen Gruppe durch Relationen der Form

$$(A_i B) = \sum_s d_{is} A_s$$

verbunden sind. Transponire ich nun die allgemeine inf. Transformation

$$\sum \rho_i A_i f$$

der Gruppe G_r vermöge Bf, so hat die hervorgehende Transformation

$$Bf \| \sum_i \rho_i A_i f \| - Bf$$

oder ausgeführt

$$\sum_i \rho_i \{ A_i f + \delta t (A_i B) \} = \sum_i \rho_i \{ A_i f + \delta t \sum_s d_{is} A_s f \}$$

die Form

$$\sum (\rho_i + \varDelta \rho_i) A_i f \tag{7}$$

wo

$$\varDelta \rho_i = \varDelta t \sum_k d_{ki} \rho_k \tag{8}$$

Sei jetzt

$$x_i' = \varphi_i (x_1 \ldots x_n t)$$

die Gleichungen der eingliedrigen Gruppe, deren infinitesimale Transformation Bf ist. Ich bilde die Transformation

$$t \| \sum \rho_i A_i f \| - t,$$

die bekanntlich mit der folgenden aequivalent ist

$$t - \varDelta t \| \varDelta t \| \sum \rho_i A_i f \| - \varDelta t \| - (t - \varDelta t)$$

oder (7) mit

$$t - \varDelta t \| \sum (\rho_i + \varDelta \rho_i) A_i f \| - (t - \varDelta t).$$

Betrachten wir daher die Parameter ρ_i als Funktionen von t, bestimmt vermöge des simultanen Systems (8), so ist

$$\frac{d}{dt} \{ t \| \sum \rho_i A_i f \| - t \} = 0.$$

Sind $\rho_1^0 \ldots \rho_r^0$ diejenigen Werthe der Grössen ρ_i, die dem Werthe $t = 0$ entsprechen, so wird

$$t \| \sum \rho_i A_i f \| - t = \sum \rho_i^0 A_i f.$$

Bemerke ich nun, dass Bf eine *beliebige* infinitesimale Transformation der Gruppe G_{r+1} bezeichnet, und dass in Folge dessen unsere Transformation t eine beliebige endliche in G_{r+1} enthaltene Transformation bezeichnet, so erhalte ich den Satz.

Satz 4. *Transponirt man eine beliebige inf. Transformation $\Sigma\, \rho_i\, A_i f$ vermöge einer beliebigen Transformation der Gruppe G_{r+1}, so erhält man immer eine inf. Transformation der Form $\Sigma\, \sigma_i\, A_i f$.*

Lass mich jetzt voraussetzen, dass man eine beliebige endliche Transformation a der Gruppe G_r vermöge einer beliebigen in G_{r+1} enthaltene Transformation t transponirt. Ich behaupte, dass die hervorgehende Transformation der Gruppe G_r angehört. Zum Beweis betrachte ich t als eine bestimmte Transformation, dagegen a als Symbol aller Transformationen einer eingliedrigen Gruppe, deren identische Transformation $a = 0$ entspricht. Nun aber weiss ich (Satz 2), dass die Transformationen $t \,|\, a \,|\, - t$ wiederum eine eingliedrige Gruppe bilden. Um sie zu bestimmen genügt es ihre infinitesimale Transformation Cf zu bestimmen. Und da

$$Cf = t \,|\, \varDelta a \,|\, - t$$

ist, wo die infinitesimale Transformation $\varDelta a$ die Form $\Sigma\, \rho_i\, A_i f$ besitzt, so hat nach dem vorangehenden Satze auf Cf diese Form, und gehört somit der Gruppe G_r an. Demzufolge gehört auch die von Cf erzeugte eingliedrige Gruppe, das heisst die Transformationen

$$t \,|\, a \,|\, - t$$

der Gruppe G_r an. Dies giebt

Theorem II. Es seien $A_1 f \ldots A_r f$ die infinitesimalen Transformationen einer Gruppe G_r und $A_1 f \ldots A_r f\; Bf$ die inf. Transformationen einer Gruppe G_{r+1}, und dabei bestehen Relationen der Form

$$(A_i\, B) = \Sigma\, d_{is}\, A_s$$

wo B nicht rechts auftritt. Transponirt man sodann eine beliebige endliche Transformation der Gruppe G_r vermöge einer beliebigen Transformation der Gruppe G_{r+1}, so erhält man immer eine in G_r enthaltene Transformation.

§ 3.

Einige Sätze über lineare Gruppen.

Alle Transformationen der Form

$$x_i' = a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n$$

bilden bekanntlich eine Gruppe, die sogenannte *allgemeine lineare Gruppe.* Die identische Transformation derselben entspricht den Parameterwerthen

$$a_{ii} = 1, \ a_{ik} = 0.$$

Die infinitesimalen Transformationen derselben besitzen die Form

$$x_i' - x_i = \sum \varDelta a_{ik} x_k.$$

Jede in der allgemeinen linearen Gruppe enthaltene Untergruppe nennt man wiederum eine lineare Gruppe. Wir werden eine besonders einfache Classe linearer Gruppen, die in meinen Untersuchungen eine wichtige Rollen spielen, etwas näher betrachten.

6. Seien $A_1 f \dots A_r f$ inf. lineare Transformationen, die eine Gruppe G_r bilden, und lass mich dabei voraussetzen, dass alle $A_k f$ die Form

$$A_k f = \alpha (x_1 p_1 + \dots + x_q p_q) + \sum l_{q+i} p_{q+i}$$

besitzen, wobei die l lineare Funktionen der x sind. Ich setze ferner voraus, *dass*

$$c_1 x_1 + \dots + c_q x_q = \sum c x$$

der allgemeinste, in den x lineare Ausdruck bezeichnet, der die Gleichungen

$$A_k (\Sigma\, c\, x) = \alpha \,.\, \Sigma\, c\, x$$

befriedigt. Ist dann

$$Bf = \xi_1\, p_1 + \ldots + \xi_n\, p_n$$

eine weitere inf. lineare Transformation, die r Relationen der Form

$$(A_i\, B) = d_{i1}\, A_1 + \ldots + d_{ir}\, A_r$$

erfüllt, so behaupte ich, dass $\xi_1 \ldots \xi_q$ Funktionen von $x_1 \ldots x_q$ sind.

Die inf. linearen Transformationen $A_k f$ erzeugen nehmlich eine lineare Gruppe G_r, deren Transformationen nach den gemachten Voraussetzungen die Form

$$\begin{gathered} x_1' = M x_1 \ \ldots \quad x_q' = M x_q \\ x_{q+1}' = M_{q+1,1}\, x_1 \quad + \ldots + M_{q+1,n}\, x_n \end{gathered}$$

besitzen. Andererseits erzeugen die inf. Transformationen $A_k f$, Bf eine lineare Gruppe G_{r+1}, und sei

$$x_j = \Sigma\, N_{jg}\, x_g^0$$

die Gleichungen einer beliebigen Transformation, die G_{r+1} angehört. Vermöge dieser letzten Transformation transponire ich die voransteh nde Transformation der Gruppe G_r, und erhalte so die Transformation

$$\sum_g N_{1,g}\, x_g'' = M \,.\, \sum_g N_{1,g}\, x_g^0 \ \ldots \ \sum_g N_{q,g}\, x_g'' = M \,.\, \sum_g N_{q,g}\, x_g^0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Nach Theorem II soll diese Transformation der Gruppe G_r angehören. In Folge dessen müssen die Ausdrucke

$$\Sigma\, N_{1,g}\, x_g \ \ldots \ \Sigma\, N_{q,g}\, x_g$$

lineare Funktionen von $x_1 \ldots x_q$ sein, da nehmlich $c_1\, x_1 + \ldots + c_q\, x_q = \Sigma\, c\, x$ der allgemeinste Ausdruck ist, der alle Gleichungen

$$A_k (\Sigma\, c\, x) = \alpha \,.\, \Sigma\, c\, x$$

befriedigt.

Die Transformationen der Gruppe G_{r+1} besitzen somit die Form

$$x_{q-i} = N_{q-i,1} x_1 + \ldots\ldots + N_{q-i,q} x_q$$
$$x_{q+i} = Q_{q+i,1} x_1 + \ldots\ldots + Q_{q+i,n} x_n.$$

Insbesondere besitzt Bf die Form

$$\sum_i (\gamma_{q-i,1} x_1 + \ldots + \gamma_{q-i,q} x_q) p_{q-i} + \xi_{q+1} p_{q+1} + \ldots + \xi_n p_n,$$

womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Jetzt versuchen vir die Gleichung

$$B(c_1 x_1 + \ldots + c_q x_q) = \varepsilon (c_1 x_1 + \ldots + c_q x_q)$$

zu befriedigen. Dies ist offenbar immer möglich, und lass uns voraussetzen, dass wir q' von einander unabhängige Grössen $\Sigma c x$ finden, die diese Gleichung erfüllen, und welche dabei demselben Werthe von ε entsprechen. Sodann führen wir diese q' Grössen $x_1' \ldots x_{q'}'$ als neue Variabeln ein anstatt $x_1 \ldots x_{q'}$ und setzen ferner

$$x_{q'+i} = x'_{q'+i}.$$

Alsdann nehmen die $A_k f$ und Bf die Form an:

$$A_k f = \alpha (x_1' p_1' + \ldots + x_q' p_q') + l_{q+1} p'_{q+1} + \ldots$$
$$B f = \varepsilon (x_1' p_1' + \ldots + x_{q'}' p_{q'}') + \xi_{q'+1} p'_{q'+1} + \ldots$$

Dies giebt den Satz

Satz 5. *Sind* $A_1 f \ldots A_r f$, *wo*

$$A_k f = \alpha (x_1 p_1 + \ldots + x_q p_q) + l_{q+1} p_{q+1} + \ldots$$

inf. Transformationen einer linearen Gruppe G_r, *und ist* Bf *eine weitere inf. Transformation, welche Relationen der Form*

$$(A_i B) = d_{i1} A_1 + \ldots + d_{ir} A_r$$

erfüllt, so können die $A_k f$ *und* Bf *durch Einführung von zweckmässigen Variabeln die gemeinsame Form*

$$\alpha' (x_1' p_1' + \ldots + x_q' p_q') + \xi_{q'+1} p_{q'+1} + \ldots$$

erhalten.

7. Ich betrachte jetzt r infinitesimale Transformationen $A_1 f \ldots A_r f$, die Relationen der Form

$$(A_i A_{i+k}) = c_{i,i+k,1} A_1 + \ldots + c_{i,i+k,i+k-1} A_{i+k-1}$$

erfüllen. Folglich bilden A_1 und A_2 eine Gruppe G_2, ebenso bilden A_1, A_2 und A_3 eine Gruppe G_3 u. s. w. Ferner wird jede Gruppe G_ρ durch Transposition mit $A_{\rho+1}$ in sich selbst übergeführt. Ich werde zeigen, dass die r vorgelegten inf. Transformationen eine gemeinsame einfache Form erhalten können.

Zunächst kann $A_1 f$ durch zweckmässigen Wahl dei unabhängigen Variabeln die Form

$$\alpha(x_1 p_1 + \ldots + x_q p_q) + \xi_{q+1} p_{q+1} + \ldots$$

erhalten, und dabei kann ich annehmen, dass $c_1 x_1 + \ldots c_q x_q$ die allgemeinste lineare Grösse ist, die

$$A_1(\Sigma c x) = \alpha \, . \, \Sigma c x$$

giebt. Nach dem vorangehenden Satze ist es jetzt möglich die unabhängigen Variabeln derart zu wählen, dass

$$A_1 f = \alpha(x_1' p_1' + \ldots + x_{q'}' p_{q'}') + \xi_{q'+1} p_{q'+1} + \ldots$$

$$A_2 f = \beta(x_1' p_1' + \ldots + x_{q'}' p_{q'}') + \eta_{q'+1} p_{q'+1} + \ldots$$

wird. Dabei kann man offenbar voraussetzen, dass $c_1 x_1' + \ldots + c_{q'} x_{q'}$ die allgemeinste lineare Grösse ist, die

$$A_1(\Sigma c x') = \alpha \, . \, \Sigma c x', \quad A_2(\Sigma c x') = \beta \, . \, \Sigma c x'$$

giebt. Folglich kann man den vorangehenden Satz auf Neues anwenden. Es ergiebt sich, dass es möglich ist, die unabhängigen Variabeln derart zu wälen, dass $A_1 f$, $A_2 f$, und $A_3 f$ die gemeinsame Form

$$\alpha(x_1'' p_1'' + \ldots + x_{q''}'' p_{q''}'') + \xi_{q''+1} p_{q''+1} \ldots$$

erhalten u. s. w. Durch Fortsetzung dieser Betrachtungen erhält man den Satz.

Satz 6. Sind die inf. linearen Transformationen $A_1 f \ldots A_r f$ durch Relationen der Form

$$(A_i, A_{i+k}) = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_{i+k-1} A_{i+k-1}$$

verknüpft, wobei die Constanten λ mit den Zahlen i und k

variiren können, so ist es möglich die unabhängigen Variabeln derart zu wählen, dass die $A_k f$ *die gemeinsame Form*

$$\varepsilon (x_1 p_1 + \ldots + x_q p_q) + \xi_{q+1} p_{q+1} + \ldots$$

erhalten.

8. Wir behalten die Voraussetzungen der letzten Nummer, und werden zeigen, dass die $A_k f$ eine noch viel einfachere Form erhalten können.

Seien die $A_k f$ auf die gemeinsame Form

$$A_k f = \alpha (x_1 p_1 + \ldots + x_q p_q) + l_{q+1} p_{q+1} + \ldots$$

gebracht. In den $A_k f$ mache ich die Substitution

$$x_1 = 0, x_2 = 0 \ldots x_q = 0,$$

und nenne die so hervorgehenden Ausdrücke $B_k f$, so dass

$$B_k f = A_k f + x_1 \pi_1^k + \ldots + x_q \pi_q^k,$$

wo die π gewisse lineare Funktionen der p sind. Ich bilde den Ausdruck $(B_i B_k)$

$$\begin{aligned}(B_i B_k) &= (A_i A_k) + x_1 \psi_1 + \ldots + x_q \psi_q \\ &= \Sigma \lambda_s A_s + x_1 \psi_1 + \ldots + x_q \psi_q \\ &= \Sigma \lambda_s B_s + x_1 \chi_1 + \ldots + x_q \chi_q,\end{aligned}$$

wo die ψ und χ gewisse lineare Funktionen der p sind. Da nun aber die $B_i f$ gar nicht die Grössen $x_1 \ldots x_q$ enthalten, so müssen die χ gleich Null sein. Also ist

$$(B_i B_k) = \Sigma \lambda_s B_s,$$

so dass $B_1 f \ldots B_r f$ eine lineare Gruppe in $x_{q+1} \ldots x_n$ bilden, die mit der Gruppe $A_1 f \ldots A_r f$ gleichzusammengesetzt ist. Daher kann der vorangehende Satz auf die $B_k f$ angewandt werden, das heisst man kann setzen

$$B_k f = \beta_k (x_{q+1} p_{q+1} + \ldots + x_{q'+1} p_{q'+1}) + \xi_{q'+1} p_{q'+1} + \ldots$$

Und also kommt

$$\begin{aligned}A_k f = \alpha & (x_1 p_1 + \ldots + x_q p_q) \\ & + (\lambda_{11} x_1 + \ldots + \lambda_{1q} x_q + \beta_k x_{q+1}) p_{q+1} \\ & + (\lambda_{21} x_1 + \ldots + \lambda_{2q} x_q + \beta_k x_{q+2}) p_{q+2} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$+ (\lambda_{q'1}\, x_1 \quad + \ldots + \lambda_{q'q}\, x_q + \beta_k\, x_{q'})\, p_{q'}$$

$$+ \eta_{q'+1}\, p_{q'+1} + \ldots$$

Sodann führe man auf die $A_k f$ die Substitution

$$x_1 = 0 \ldots x_q = 0 \ldots x_{q'} = 0$$

aus, und nenne die hervorgehenden Ausdrücke $C_k f$. Man erkennt, dass die $C_k f$ eine Gruppe bilden, die mit derjenigen der $A_k f$ gleich-zusammengesetzt ist. Folglich kann Satz 6 auf die $C_k f$ angewandt werden u. s. w.

Bemerkt man nun, dass der Coefficient von p_1 nur x_1 enthält, dass der Coefficient von p_2 ausser x_2 höchstens nur x_1 enhält u. s. w., so erhält man das folgende Theorem.

Theorem III. Sind $A_1 f \ldots A_r f$ durch Relationen der Form

$$(A_i\, A_{i+k}) = \lambda_1\, A_1 \ldots + \lambda_{i+k-1}\, A_{i+k-1}$$

verknüpft, so erhalten die $A_k f$ durch Einführung von zweckmässigen unabhängigen Variabeln die gemeinsame Form:

$$\alpha\, x_1\, p_1 + (\beta_1\, x_1 + \beta_2\, x_2) p_2 + (\gamma_1\, x_1 + \gamma_2\, x_2 + \gamma_3\, x_3) p_3 +$$
$$\ldots\ldots + (\nu_1\, x_1 + \nu_2\, x_2 + \ldots\ldots + \nu_q\, x_q)\, p_q +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (\mu_1\, x_1 + \mu_2\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_{n-1}\, x_{n-1})\, p_{n-1}$$
$$+ (\rho_1\, x_1 + \rho_2\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \rho_n\, x_n)\, p_n.$$

Wurden die soeben geschriebenen Ausdrücke nicht nach den p, sondern nach den x geordnet, so würde der Coefficient von x_n nur p_n enthalten, der Coefficient von x_{n-1} enthielte nur p_n und p_{n-1}, der Coefficient von x_{n-2} enthielte nur p_n, p_{n-1} und p_{n-2} u s. w.

Ich betrachte jetzt das Werth-System

$$x_n = x_n{}^0 \quad x_{n-1} = 0\; x_{n-2} = 0 \ldots x_1 = 0$$

und führe auf dasselbe die Operation $A_k f$ aus, man findet

$$A_k\, x_n{}^{(0)} = \rho_n\, x_n{}^{(0)},\; A_k\, x_{n-1} = 0 \ldots A_k\, x_1 = 0,$$

welche Gleichungen sich folgendermassen schreiben lassen

$$A_k x_i^{(0)} = \rho_n x_i^{(0)} \; (i = 1, 2 \ldots n)$$

Ich betrachte sodann das Werth-System

$$x_n = x_n^{(1)} \; x_{n-1} = x_{n-1}^{(1)} \; x_{n-2} = 0 \ldots x_1 = 0$$

und finde

$$A_k x_n^{(1)} = \rho_n x_n^{(1)} + \rho_{n-1} x_{n-1}^{(1)}, \; A_k x_{n-1}^{(1)}$$
$$= \mu_{n-1} x_{n-1}^{(1)}, \; A_k x_{n-2}^{(1)} = 0 \ldots$$

oder, indem ich setze: $\rho_n x_n^{(1)} + \rho_{n-1} x_{n-1}^{(1)} = \mu_{n-1} x_n^{(1)} + a\, x_n^{(0)}$,

$$A_k x_i^{(1)} = \mu_{n-1} x_i^{(1)} + a\, x_i^{(0)}.$$

Ich betrachte sodann das Werth-System

$$x_n = x_n^{(2)}, \; x_{n-1} = x_{n-1}^{(2)}, \; x_{n-2} = x_{n-2}^{(2)}, \; x_{n-3} = 0 \ldots x_1 = 0$$

und finde durch Einführung zweier zweckmässigen Constanten, b_1 und b_0

$$A_k x_i^{(2)} = \lambda_{n-2} x_i^{(2)} + b_1 x_i^{(1)} + b_0 x_i^{(0)}$$

u. s. w. Vermöge dieser Betrachtungen giebt Theorem III das folgende Corallar.

Corallar. Sind $A_1 f \ldots A_r f$ durch Relationen der Form

$$(A_i A_{i+k}) = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_{i+k-1} A_{i+k-1}$$

verbunden, so giebt es jedenfalls ein Werth-System $x_i^{(0)}$, das $A_k x_i^{(0)} = a_k x_i^{(0)}$ giebt. Es giebt ferner ein von $x_i^{(0)}$ unabhängiges Werth-System $x_i^{(1)}$, das

$$A_k x_i^{(1)} = b_{k1} x_i^{(1)} + b_{k0} x_i^{(0)}$$

giebt. Es giebt ferner ein von $x_i^{(0)}$ und $x_i^{(1)}$ unabhängiges Werth-System $x_i^{(2)}$, das

$$A_k x_i^{(1)} = c_{k2} x_i^{(2)} + c_{k1} x_i^{(1)} + c_{k0} x_i^{(0)}$$

giebt u. s. w.

§ 4.

Sätze über beliebige Gruppen.

Aus den vorangehenden Sätzen über lineare Gruppen ist es nun leicht wichtige Sätze über beliebige Gruppen von Berührungs-Transformationen herzuleiten.

9. Seien $H_1\, H_2 \ldots H_r$ die inf. Transformationen einer Gruppe von Berührungs-Transformationen:

$$(H_i\, H_k) = \Sigma\, c_{iks}\, H_s.$$

Ich bilde die r Ausdrücke

$$A_k f = \sum_s \left(\sum_i \alpha_i\, c_{iks}\right) \frac{df}{d\alpha_s},$$

die bekanntlich (Bd. I pg. 191) durch die Relationen

$$A_i\,(A_k\,(f)) - A_k\,(A_i\,(f)) = \Sigma\, c_{iks}\, A_s f$$

verbunden sind.

Jetzt setze ich voraus, dass c_{iks} immer verschwindet, wenn $s > i$ *oder* $s > k$ ist. Folglich kann ich das Corallar des vorangehenden Paragraphs anwenden. Es giebt jedenfalls ein Werth-System $\alpha_i^{(0)}$, das

$$A_k\, \alpha_i^{(0)} = a_k\, \alpha_i^0$$

giebt. Ferner giebt es jedenfalls ein von α_i^0 unabhängiges Werth-System $\alpha_i^{(0)}$, das

$$A_k\, \alpha_i^{(1)} = b_{k1}\, \alpha_i^{(1)} + b_{k0}\, \alpha_i^{(0)}$$

giebt u. s. w.

Ich setze

$$\alpha_1^{(0)}\, H_1 + \alpha_2^{(0)}\, H_2 + \ldots + \alpha_r^{(0)}\, H_r = K_1$$

und bilde den Ausdruck

$$\begin{aligned}(H_k\, H_1) &= \sum_i \alpha_i^{(0)}\,(H_k\, H_i) \\ &= -\Sigma\, \alpha_i^{(0)} \sum_s c_{iks}\, H_s.\end{aligned}$$

Nun aber ist

$$\Sigma c_{iks} \alpha_i^{(0)} = A_k (\alpha_s^{(0)}) = a_k \alpha_s^{(0)}$$

also kommt

$$(H_k K_1) = - a_k \Sigma \alpha_s^{(0)} H_s = - a_k K_1 .$$

Setzt man andererseits

$$\alpha_1^{(1)} H_1 + \alpha_2^{(1)} H_2 + \ldots + \alpha_r^{(1)} H_r = K_2 ,$$

so findet man durch ganz analoge Betrachtungen, dass

$$(K_2 H_k) = b_{k1} K_1 + b_{k2} K_2$$

ist. Ferner, wenn man setzt

$$\alpha_1^{(2)} H_1 + \alpha_2^{(2)} H_2 + \ldots + \alpha_r^{(2)} H_r = K_3 ,$$

kommt

$$(K_3 H_k) = c_{k1} K_1 + c_{k2} K_2 + c_{k3} K_3$$

u. s. w. Dies giebt das folgende wichtige Theorem

Theorem IV. Sind $H_1 \ldots H_r$ die inf. Transformationen einer Gruppe und bestehen dabei Relationen der Form

$$(H_i H_{i+k}) = \lambda_1 H_1 + \ldots + \lambda_{i+k-1} H_{i+k-1} ,$$

so giebt es immer r unabhängige inf. Transformationen der Gruppe: $K_1 \ldots K_r$, deren Relationen die einfache Form

$$(K_i K_{i+k}) = \mu_1 K_1 + \ldots + \mu_i K_i$$

besitzen.

10. Seien $H_1 \ldots H_m \ldots H_r$ wie soeben die inf. Transformationen einer Gruppe, und es sei auch jetzt

$$(H_i H_{i+k}) = \lambda_1 H_1 + \ldots + \lambda_{i+k-1} H_{i+k-1} .$$

Ich setze dabei voraus, dass $(H_i H_j)$ sich jedesmal durch $H_1 \ldots H_m$ ausdrückt, wenn i nicht grösser als m ist; alsdann gilt eo ipso Theorem IV, *und zwar kann man dabei immer $K_1 \ldots K_m$ als lineare Funktionen von $H_1 \ldots H_m$ wählen.*

Um dies zu beweisen setze ich wie früher

$$(H_i H_k) = \Sigma c_{iks} H_s$$

und bilde die Ausdrücke

$$A_k f = \sum_s \left(\sum_i c_{iks}\, \alpha_i\right) \frac{df}{d\alpha_s}.$$

Ich bemerke, dass die Coefficienten der Grössen $\frac{df}{d\alpha_{m+1}} \cdots \frac{df}{d\alpha_r}$ nur $\alpha_{m+1} \ldots \alpha_r$ enthalten. Setze ich jetzt in den $A_k f$ $\alpha_{m+1} = 0 \ldots \alpha_r = 0$, und nenne die hervorgehenden Ausdrücke $B_1 f \ldots B_r f$, so erkennt man, dass die $B_k f$ eine lineare Gruppe bilden, die mit derjenigen der $A_k f$ gleichzusammengesetzt ist. Folglich giebt es ein Werth-System $\alpha_1^{(1)} \ldots \alpha_m^{(1)}$, das die Gleichungen

$$B_k\, \alpha_i^{(1)} = b_k\, \alpha_i^{(1)}$$

erfüllt; ferner giebt es ein von $\alpha_i^{(1)}$ unabhängiges Werth-System $\alpha_i^{(2)}$, das die Gleichungen

$$B_k\, \alpha_i^{(2)} = c_{k2}\, \alpha_i^{(2)} + c_{k1}\, \alpha_i^{(1)}$$

erfüllt u. s. w.

Setzt man nun

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} H_1 + \ldots + \alpha_m^{(1)} H_m &= K_1 \\ \alpha_1^{(2)} H_1 + \ldots + \alpha_m^{(2)} H_m &= K_2 \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \end{aligned}$$

so erkennt man wie bei dem Beweise des vorangehenden Theorems, dass

$$\begin{aligned} (K_1 H_k) &= b_k K_1 \\ (K_2 H_k) &= c_{k1} K_1 + c_{k2} K_2 \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \end{aligned}$$

Zusatz zu Theorem 4. Sind die inf. Transformationen $H_1 \ldots H_m \ldots H_r$ *der Bedingung unterworfen, dass jedes* $(H_{m-i}\, H_k)$ *sich linear durch* $H_1 \ldots H_m$ *ausdrückt, so können* $K_1 \ldots K_m$ *immer als lineare Funktionen von* $H_1 \ldots H_m$ *gewählt werden.*

11. Sei jetzt gegeben die Gruppe $H_1 H_2 \ldots H_m$ wo

$$(H_i\, H_{i+k}) = \lambda_1 H_1 + \ldots + \lambda_i H_i$$

ist, und lass mich voraussetzen, dass diese Gruppe in einer

r-gliedrigen Gruppe $H_1 \ldots H_m\, K_{m+1} \ldots K_r$ enthalten ist. Ich werde zeigen, dass die r-gliedrige Gruppe eine $(m+1)$-gliedrige Untergruppe enthält, die wiederum die vorgelegte m-gliedrige Gruppe umfasst.

Es sei

$$(H_i\, H_k) = \Sigma\, c_{iks}\, H_s\,,\ (H_i\, K_j) = \Sigma\, c_{ijs}\, H_s + \Sigma\, d_{ijs}\, K_s.$$

Ich bilde die Ausdrücke

$$A_k f = \sum_s \Big(\sum_i c_{kis}\, \alpha_i + \sum_j c_{kjs}\, \beta_j\Big) \frac{df}{d\alpha_s} + \sum_s \Big(\sum_j d_{kjs}\, \beta_j\Big) \frac{df}{d\beta_s}$$

wo

$$(A_g\, A_k) = \Sigma\, c_{gks}\, A_s.$$

Setze ich nun

$$B_k f = \sum_s \Big(\sum_j d_{kjs}\, \beta_j\Big) \frac{df}{d\beta_s},$$

so bilden die $B_k f$ eine lineare Gruppe, die mit derjenigen der $A_k f$ gleichzusammengesetzt ist. Daher giebt es jedenfalls ein Werth-System $\beta_{m+1}^{(1)} \ldots \beta_r^{(1)}$, das die Gleichungen

$$B_k\, \beta_j^{(1)} = b_k\, .\, \beta_j^{(1)}$$

erfüllt. Ich setze

$$\beta_{m+1}^{(1)}\, K_{m+1} + \ldots + \beta_r^{(1)}\, K_r = G$$

und bilde den Ausdruck

$$(G\, H_k) = \sum_j \beta_j^{(1)}\, (K_j\, H_k),$$

woraus

$$(G\, H_k) = -\sum_j \beta_j^{(1)} \Big(\sum_s c_{jks}\, H_s + \sum_s d_{jks}\, K_s\Big).$$

Nun aber ist

$$\sum_j \beta_j^{(1)}\, d_{jks} = -B_k\, \beta_s^{(1)} = -b_k\, \beta_s^{(1)},$$

also kommt

$$\begin{aligned}(G\, H_k) &= \sum_s \rho_s\, H_s + b_k \sum_s \beta_s^{(1)}\, K_s \\ &= \sum_s \rho_s\, H_s + b_k\, G.\end{aligned}$$

Hiermit ist nachgewiesen, dass $H_1 \dots H_r\, G$ eine $(r+1)$-gliedrige Gruppe bilden. Also

Theorem V. Sei $H_1 \dots H_m$ *eine Gruppe und sei* $(H_i\, H_{i+k}) = \lambda_1\, H_1 + \dots + \lambda_i\, H_i$. *Ist diese Gruppe in einer* $(m+\rho)$*-gliedrigen Gruppe enthalten, so giebt es immer eine* $(m+1)$*-gliedrige Gruppe, die die* m*-gliedrige Gruppe enthält, und dabei in der* $(m+\rho)$*-gliedrigen Gruppe enthalten ist.*

Dieses letzte Theorem, das in dieser Abhandlung nicht benutzt wird, wurde bei meiner ursprünglichen Bestimmung von allen Gruppen einer Ebene fast bei jedem Schritte angewandt.

§ 5.

Ein Fundamental-Satz über Gruppen von Punkt-Transformationen.

In meiner zweiten Abhandlung über Transformations-Gruppen stellte und erledigte ich die Frage, wenn zwei r-gliedrige Gruppen durch eine *Berührungs*-Transformation sich in einander überführen liessen. Es ist schwieriger zu entscheiden, ob zwei r-gliedrige Gruppen von *Punkt*-Transformationen sich in einander umwandeln lassen. Diese letzte Frage beabsichtige ich eingehend in diesem Paragraph zu behandeln. Dabei mu s ich bemerken, dass *diese Untersuchung nicht wesentlich in dieser Abhandlung verwerthet wird,* während sie allerdings an und für sich ein bedeutendes Interesse darbietet.

12. Seien vorgelegt zwei r-gliedrige Gruppen von Punkt-Transformationen zwischen je ν Variabeln

$$B_1 f \dots B_r f \quad (y_1 \dots y_\nu)$$

und

$$B_1' f \dots B_r' f \quad (y_1' \dots y_\nu').$$

Soll es möglich sein, diese Gruppen in einander durch eine

Punkt-Transformation überzuführen, so muss eine solche Umwandlung zunächst überhaupt durch *Berührungs*-Transformation möglich sein. Lass und daher voraussetzen, dass es eine Berührungs-Transformation (oder vielleicht mehrere solche) giebt, die die Gleichungen

$$B_1 f = B_1' f \ldots \quad B_r f = B_r' f$$

erfüllt. Ich werde untersuchen, ob es möglich ist, durch eine *Punkt*-Transformation dieselben Gleichungen $B_k f = B_k' f$ zu befriedigen.

Die Gleichungen

$$B_1 f = 0 \ldots . B_r f = 0$$

sind, aufgefasst als lineare partielle Differential-Gleichungen, im Allgemeinen nicht unabhängig. Lass mich voraussetzen, dass die n ersten Gleichungen

$$B_1 f = 0 \ldots . B_n f = 0$$

unabhängig sind, während die übrigen $B_{n+i} f = 0$ algebraische Consequenzen von ihnen sind, anders ausgesprochen, dass Identitäten der Form

$$B_{n+i} f = \varphi (y_1 \ldots y_\nu) B_1 f + \ldots + \varphi_n B_n f$$

bestehen. Können dann die Gleichungen $B_k f = B_k' f$ vermöge einer *Punkt*-Transformation erfüllt werden, *so müssen zunächst die n Gleichungen*

$$B_1' f = 0 \ldots B_n' f = 0$$

unabhängig sein; während die übrigen $B'_{n+i} f = 0$ *algebraische Consequenzen von ihnen sind.*

Es ist nun sehr merkwürdig, dass diese nothwendigen Forderungen zugleich hinreichend sind, so dass die betreffende Transformation möglich ist, wenn die genannten Forderungen erfüllt sind. Man kann sogar diesen Forderungen eine anscheinend noch einfachere Form geben, *indem es genügt zu wissen, dass die r-gliedrigen Gleichungs-Systeme* $B_k f = 0$ *gleichviele unabhängige Gleichungen enthalten.*

13. Lass uns also voraussetzen, einerseits dass die Gruppe $B_1 f \dots B_r f$ durch Berührungs-Transformation in die Gruppe $B_1' f \dots B_r' f$ sich überführen lässt, andererseits dass die Gleichungs-Systeme $B_k f = 0$ und $B_k' f = 0$ gleichviele und zwar n unabhängige Gleichungen enthalten.

Alsdann bilden diese Gleichungs-Systeme zwei vollständige Systeme mit je ν-n Lösungen, die bezüglich

$$x_{n+1} \dots x_\nu \text{ und } x_{n+1}' \dots x_\nu'$$

heissen mögen. Ich führe neue unabhängige Variabeln ein etwa

$$x_1 \dots x_n \; x_{n+1} \dots x_\nu$$
$$x_1' \dots x_n' \; x_{n+1}' \dots x_\nu';$$

hierdurch erhalten die $B_k f$ und $B_k' f$ wegen der Relationen $B_k x_{n+i} = 0$, $B_k' x_{n+i}' = 0$ die Form

$$B_k f = Y_{k1} p_1 + \dots + Y_{kn} p_n,$$
$$B_k' f = Y_{k1}' p_1' + \dots + Y_{kn}' p_n',$$

wo die Y Funktionen der ν Grössen x oder x' sind.

Ich zeige zunächst, dass es immer möglich ist, solche Constanten λ zu wählen, dass wenn ich setze

$$\lambda_{k1} B_1 f + \dots + \lambda_{kr} B_r f = A_k f,$$
$$\lambda_{k1} B_1' f + \dots + \lambda_{kr} B_r' f = A_k' f,$$
$$(k = 1, 2 \dots n)$$

dass dann sowohl die n Gleichungen

$$A_1 f = 0 \dots . A_n f = 0$$

wie die entsprechenden

$$A_1' f = 0 \dots . A_n' f = 0$$

unabhängig sind. Man fasse in der That die λ_{ki} als unbestimmte Parameter auf; alsdann sind die n Gleichungen $A_k f = 0$ unabhängig, wenn nicht zufälligerweise die λ durch gewisse nicht identische Relationen

$$\Omega(\lambda) = 0,$$

verknüpft sind. Dementsprechend sind die n Gleichungen $A_k' f = 0$ unabhängig, wenn nicht gewisse Relationen

$$\Omega'(\lambda) = 0$$

erfüllt sind. Wählt man daher, was immer möglich ist, die λ derart, dass sie weder die $\Omega = 0$ noch die $\Omega' = 0$ befriedigen, so sind sowohl die $A_k f = 0$, wie die $A_k' f = 0$ unabhängig.

14. Seien

$$A_1 f \ldots A_n f \ldots A_r f \quad (x_1 \ldots x_n \ldots x_\nu)$$
$$A_1' f \ldots A_n' f \ldots A_r' f \quad (x_1' \ldots x_n' \ldots x_\nu')$$

wo

$$A_k f = X_{k1} p_1 + \ldots + X_{kn} p_n$$
$$A_k' f = X_{k1}' p_1' + \ldots + X_{kn}' p_n'$$

unabhängige Transformationen unserer Gruppen, und dabei entsprechen sich $A_k f$ und $A_k' f$ durch die bekannte Berührungs-Transformation. Wegen der Form der $A_k f$ und $A_k' f$ bestehen Relationen der Form

$$\left.\begin{aligned} A_{n+k} f &= \varphi_{k1} A_1 f + \ldots + \varphi_{kn} A_n f \\ A_{n+k}' f &= \varphi_{k1}' A_1' f + \ldots + \varphi_{kn}' A_n' f \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

wo die φ_{ki} Funktionen von $x_1 \ldots x_\nu$ und ebenso die φ'_{ki} Funktionen von $x_1' \ldots x'_\nu$ sind. Nun ist vermöge unserer Berührungs-Transformation

$$A_i f = A_i' f,$$

daher kommt durch zweifache Anwendung der letztgeschriebenen Relationen

$$(\varphi_{k1} - \varphi'_{k1}) A_1 f + \ldots . + (\varphi_{kn} - \varphi_{kn}') A_n f = 0,$$

und da $A_1 f = 0 \ldots A_n f = 0$ unabhängige Gleichungen sind, müssen die Grössen $x_1 \ldots x_\nu$ und $x_1' \ldots x_\nu'$ vermöge der Berührungs-Transformation durch die Relationen

$$\varphi_{ki} = \varphi_{ki}'$$

verbunden sein. Giebt es nun ν Grössen φ_{ki}, die unabhängig sind, so definiren diese Relationen eine Punkt-Transformation, die eo ipso eben die bekannte Berührungs-Transformation ist. In diesem Falle ist also die Richtigkeit unserer Behauptung unmittelbar einleuchtend.

Im Allgemeinen giebt es jedoch nicht soviele wie ν Grössen φ_{ki}, die unabhängig sind, sondern nur etwa μ solche, die $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_\mu$ heissen mögen. Dabei ist es denkbar, dass gewisse Funktionen der φ:

$$\psi_\nu(\varphi_1 \ldots), \; \psi_{\nu-1} \ldots \psi_{\lambda+1}$$

sich als Funktionen von $x_{n+1} \ldots x_\nu$ ausdrücken lassen, und also Lösungen des vollständigen Systems $A_k f = 0$ sind:

$$A_k \psi = 0.$$

Da nun vermöge der bekannten Berührungs-Transformation

$$A_i f = A_i' f, \; \varphi_k = \varphi_k'$$

ist, und also zugleich

$$A_i \varphi_k = A_i' \varphi_k',$$

so folgt, dass auch die Grössen

$$\psi_\nu(\varphi'_1 \varphi'_2 \ldots) = \psi_\nu', \quad \psi_{\nu-1}' \ldots \psi_{\lambda+1}'$$

unabhängige Funktionen von $x_{n+1}' \ldots x_\nu'$ sind. Unsere Berührungs-Transformation giebt also jedenfalls $\nu - \lambda$ Relationen zwischen $x_{n+1} \ldots x_\nu$ und $x'_1 \ldots x'_{n+1}$ nehmlich

$$\psi_\nu = \psi_\nu' \ldots \psi_{\lambda+1} = \psi_{\lambda+1}'.$$

Ohnedies kennen wir $\mu + \lambda - \nu$ oder sage ich q Relationen, die vermöge unserer Berührungs-Transformation stattfinden, und wir können annehmen, dass

$$\varphi_1 = \varphi_1' \ldots \varphi_q = \varphi_q'$$

diese Relationen sind. Ich führe neue unabhängige Variabeln z ein, indem ich setze

$$z_{q-i} = \varphi_{q-i}, \; z_{q+1} = x_{q+1} \ldots z_\lambda = x_\lambda, \; z_{\lambda+i} = \psi_{\lambda+i},$$

$$z_{q-i}' = \varphi_{q-i}', \; z_{q+1}' = x_{q+1}' \ldots z_\lambda' = x_\lambda', \; z_{\lambda+i}' = \psi_{\lambda+i}'.$$

Hierdurch kommt

$$A_k f = A_k z_1 \frac{df}{dz_1} + \ldots\ldots + A_k z_n \frac{df}{dz_n}$$

$$A_k' f = A_k' z_1' \frac{df}{dz_1'} + \ldots,\ldots + A_k' z_n' \frac{df}{dz_n'}$$

Hier sind, behaupte ich, die Grössen $A_k z_{q\ i}$ Funktionen von $z_1 \ldots z_q z_{\lambda+1} \ldots z_\nu$; ferner sind die $A_k' z'_{q-i}$ dieselben Funktionen von $z_1' \ldots z_q' z'_{\lambda+1} \ldots z_\nu'$ Aus (1) folgt nehmlich

$$(A_s A_{n+k}) = \sum_{i=1}^{i\ n} \varphi_{ki} (A_s A_i) + \sum_{i=1}^{i\ n} A_s(\varphi_{ki}) \,.\, A_i f,$$

woraus, indem man berücksichtigt einerseits, dass die A eine Transformations-Gruppe bilden, andererseits dass die A_{n+k} gleich $\Sigma\, \varphi_{ki} A_i$ sind, folgt, dass Relationen der Form

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left\{A_s(\varphi_{ki}) - \Omega_{kis}(\varphi_1 \varphi_2 \ldots)\right\} A_i = 0$$

bestehen. Und da $A_1 f = 0 \ldots A_n f = 0$ unabhängige Gleichungen sind, folgt

$$A_s(\varphi_{ki}) = \Omega_{kis}(\varphi_1 \varphi_2 \ldots)$$

Eine analoge Ueberlegung giebt

$$A_s'(\varphi_{ki}') = \Omega_{kis}(\varphi_1' \varphi_2' \ldots).$$

Also können wir setzen, einerseits

$$A_k z_{q-i} = Z_{k,q-i}(z_1 \ldots z_q z_{\lambda+1} \ldots z_\nu)$$

andererseits

$$A_k' z'_{q-i} = Z_{k,q-i}(z_1 \ldots z_q' z'_{\lambda+1} \ldots) = Z'_{k,q-i}$$

so dass, die $A_k f$ und $A_k' f$ in den neuen Variabeln die folgende Form annehmen

$$A_k f = \Sigma\, Z_{k,q-i}(z_1 \ldots z_q \ldots z_{\lambda+1} \ldots z_\nu) \frac{df}{dz_{q-i}} + \Sigma\, Z_{q+i} \frac{df}{dz_{q+i}}$$

$$A_k' f = \Sigma\, Z_{k,q-i}(z_1' \ldots\ldots\ldots z_\nu') \frac{df}{dz'_{q-i}} + \Sigma\, Z_{q+i}' \frac{df}{dz'_{q+i}}$$

Ich setze

$$\Sigma Z_{q-i} \frac{df}{dz_{q-i}} = B f, \quad \Sigma Z_{q+i} \frac{df}{dz_{q+i}} = C f$$

$$\Sigma Z_{q-i}' \frac{df}{dz_{q-i}'} = B' f, \quad \Sigma Z_{q+i}' \frac{df}{dz_{q+i}'} = C' f$$

sodass

$$A_k f = B_k f + C_k f$$
$$A_k' f = B_k' f + C_k' f.$$

Es ist

$$(A_i A_k) = (B_i B_k) + (B_i C_k) + (C_i B_k) + (C_i C_k)$$
$$(A_i' A_k') = (B_i' B_k') + (B_i' C_k') + (C_i' B_k') + (C_i' C_k')$$

ferner ist

$$(A_i A_k) = \Sigma w_s (z_1 \ldots z_q z\lambda_{+1} \ldots z\nu) A_s;$$

diese Gleichung zerlegt sich, wie man leicht einsieht, in die beiden

$$(B_i B_k) = \Sigma w_s B_s \tag{2}$$

$$(B_i C_k) + (C_i B_k) + (C_i C_k) = \Sigma w_s C_s \tag{3}$$

Dementsprechend, wenn man setzt

$$w_s (z_1' \ldots z_q' z'\lambda_{+1} \ldots z\nu') = w_s'$$

kommt

$$(B_i' B_k') = \Sigma w_s' B_s' \tag{4}$$

$$(B_i' C_k') + (C_i' B_k') + (C_i' C_k') = \Sigma w_s' C_s'. \tag{5}$$

Diese Formeln werden uns im Folgenden zu Nutze kommen.

15. Ich setze

$$Z_{q+i}' (z_1 \ldots z_q z_{q+1}' \ldots z'\lambda\, z\lambda_{+1} \ldots z\nu) = V_{q+i}$$

und

$$\Sigma V_{q+i} \frac{df}{dz_{q+i}'} = Df,$$

und bilde sodann das n-gliedrige Gleichungs-System

$$B_k f + C_k f + D_k f = 0 = E_k f \; (k = 1 \ldots n)$$

in den Variabeln $z_1 \ldots z_q \ldots z\lambda \ldots z\nu\; z_{q+1}' \ldots z'\lambda$. Ich *be-*

haupte, dass die $E_k f = 0$ ein vollständiges System bilden. Es ist nehmlich

$$(E_i E_k) = (B_i B_k) + (B_i C_k) + (B_i D_k) \\ + (C_i B_k) + (C_i C_k) + (C_i D_k) \\ + (D_i B_k) + (D_i C_k) + (D_i D_k)$$

ferner ist wegen (2) (3) (4) (5)

$$(B_i B_k) = \Sigma w_s B_s$$
$$(B_i C_k) + (C_i B_k) + (C_i C_k) = \Sigma w_s C_s$$
$$(B_i D_k) + (D_i B_k) + (D_i D_k) = \Sigma w_s D_s$$
$$(C_i D_k) = 0$$
$$(D_i C_k) = 0$$

also kommt

$$(E_i E_k) = \Sigma w_s (B_s + C_s + D_s) \\ = \Sigma w_s E_s$$

womit wirklich nachgewiesen ist, dass die $E_k f = 0$ ein vollständiges System bilden. Sie haben ausser $z_{n+1} \ldots z_\nu \; z_{n+1}' \ldots z_\nu'$ noch $n - q$ Lösungen $\psi_1 \ldots \psi_{n-q}$. Und da die $E_k f = 0$ sich hinsichtlich

$$\frac{df}{dz_1} \cdots \frac{df}{dz_q} \cdots \frac{df}{dz_n}$$

auflösen lassen, indem die $A_k f = 0$ eine solche Auflösung gestatten, so sind die ψ unabhängig hinsichtlich zu $z_{q+1}' \ldots z_n'$. Daher geben die Gleichungen

$$\psi_i = a_i = \text{Const.}$$

durch Auflösung

$$z_{q+i}' = f_{q+i}(z_1 \ldots z_q \ldots z_n \ldots)$$
$$(q + i = q + 1 \ldots n)$$

Ich behaupte, dass diese Gleichungen zusammen mit

$$z'_{q-i} = z_{q-i}$$
$$z'_{n+i} = z_{n+i}$$

die $A_k' f$ in die $A_k f$ transformiren.

Es ist nehmlich

$$A_k f = \Sigma A_k z'_{q-i} \frac{df}{dz_{q-i}'} + \Sigma A_k z_{q+i}' \frac{df}{dz_{q+i}'}$$

ferner ist

$$A_k z_{q-i}' = Z_{q-i} (z_1 \ldots z_q z_{\lambda+1} \ldots z_\nu)$$
$$= Z_{q-i} (z_1' \ldots z_q' z'_{\lambda+1} \ldots z'_\nu) = Z'_{q-i}.$$

Es handelt sich darum die Coefficienten

$$A_k z_{q+i}' = Z_{k1} \frac{dz_{q+i}'}{dz_1} + \ldots + Z_{kn} \frac{dz_{q+i}'}{dz_n} \tag{6}$$

zu berechnen. Aus den Gleichungen

$$\frac{d\psi_k}{dz_1} dz_1 + \ldots + \frac{d\psi_k}{dz_{q+1}'} dz_{q+1}' + \ldots = 0$$

folgt

$$\frac{dz_{q+i}'}{dz_k} = - \frac{\begin{vmatrix} \psi_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \psi_{n-q} \\ z_k\, z_{q+1}' \ldots z_{q+i-1}'\, z_{q+i+1}' \ldots z_n' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \psi_1 \ldots\ldots \psi_{q-q} \\ z_{q+1}' \ldots\ldots z_n' \end{vmatrix}}. \tag{7}$$

Andererseits ist

$$Z_{k1} \frac{d\psi_i}{dz_1} + \ldots + Z_{kn} \frac{d\psi_i}{dz_n} + Z'_{k,q+1} \frac{d\psi_i}{dz'_{q+1}} + \ldots = 0,$$

also folgt, indem man i die Werthe $1 \ldots n - q$ giebt, und darnach die Grössen $Z_{k,q+2}' \ldots Z'_{k,n}$ eliminirt,

$$Z_{k1} \begin{vmatrix} \psi_1 \ldots\ldots\ldots \psi_{n-q} \\ z_1\, z_{q+2}' \ldots z_n' \end{vmatrix} + \ldots + Z'_{k,q+1} \begin{vmatrix} \psi_1 \ldots \psi_{n-q} \\ z'_{q+1} \ldots z_n' \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

Also folgt durch Berücksichtigung von (6) (7) (8)

$$A_k z_{q+1}' = Z_{k,q+1}'$$

und überhaupt

$$A_k z_{q+i}' = Z_{k,q+i}'$$

woraus durch Einsetzung

$$A_k f = \Sigma Z_{k,q-i}' \frac{df}{dz_{q-i}'} + \Sigma Z_{k,q+i}' \frac{df}{dz_{q+i}'}$$

oder

$$A_k f = A_k' f,$$

womit die verlangte Transformation geleistet ist. Also

Theorem VI. Sind $A_1 f \ldots A_i f$ und $A_1' f \ldots A_r' f$ zwei r-gliedrige Gruppen von Punkt-Transformationen, die durch Berührungs-Transformation in einander übergehen können, und enthalten dabei die Gleichungs-Systeme $A_k f = 0$ und $A_k' f = 0$ gleichviele unabhängige Gleichungen, so giebt es immer eine Punkt-Transformation, die die betreffende Ueberführung leistet.

Hier füge ich zwei wichtige Bemerkungen hinzu. Es wäre möglich gewesen von der Forderung $A_k f = A_k' f$ ausgehend durch eine *analytische* Methode die allgemeinste Transformation zu bestimmen, welche diese Forderung erfüllt. Ebenso kann man immer entschieden, ob gewisse vorgelegte Ausdrücke $A_k f$ (die keine Transformations-Gruppe bilden) sich in gewisse andere Ausdrücke $A_k' f$ überführen lassen; und wenn dies möglich ist, kann man die allgemeinste Transformation angeben, die eine solche Umwandlung leistet.

Abschnitt IV.

Alle Gruppen einer zweifach ausgedehnten Punkt-Mannigfaltigkeit.

Ich wende mich nun zur Bestimmung aller Gruppen einer zweifach ausgedehnten Punkt-Mannigfaltigkeit. Dabei bemerke ich schon hier, dass die Entwickelungen der *beiden ersten* Paragraphen sich ohne Schwierigkeit auf beliebig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten ausdehnen lassen.

§ 6.

Infinitesimale Transformationen von verschiedener Ordnung.

In den Gleichungen einer Transformations-Gruppe

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n\, a_1 \dots a_r)$$

sind die f_i synektische Funktionen innerhalb eines gewissen Bereiches von den betreffenden Argumenten. Die f_i können daher immer als Reihen-Entwickelungen betrachtet werden,

$$x_i = (x_1 \dots x_n\, a_1 \dots a_n \,\|\, x_1^0 \dots x_n^0\, a_1^0 \dots a_n^0).$$

Jede Gruppe, die wir betrachten, enthält eine identische Transformation, und wir können annehmen, dass die Parameter-Werthe a^0 eben die identische Transformation bestimmen. Geben wir nun den a_k Werthe, die von den a_k^0 sehr wenig verschieden sind, so erhalten wir eine Transformation, vermöge deren die x_i sehr kleine Incremente erhalten.

16. Sei jetzt $n = 2$

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ p_1 = p,\ p_2 = q.$$

Unsere infinitesimale Transformation hat die Form

$$\delta x = \delta t \left\{A_0 + A_1 x + B_1 y + A_2 x^2 + 2 B_2 xy + C_2 y^2 + \dots\right\}$$
$$\delta y = \delta t \left\{a_0 + a_1 x + b_1 y + a_2 x^2 + 2 b_2 xy + c_2 y^2 + \dots\right\}$$

indem x_0 und y_0 gleich Null angenommen sind. Sind A_0 und a_0 nicht beide Null, sage ich, dass unsere inf. Transformation von nullter Ordnung in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ ist. Verschwinden dagegen A_0 und a_0, während jedenfalls eine unter den Grössen $A_1\, B_1\, a_1\, b_1$ von Null verschieden ist, sage ich, dass die inf. Transformation von erster Ordnung ist u. s. w.

Ist $r > 2$, so enthält die Gruppe jedenfalls $r - 2$ unabhängige inf. Transformationen, die in der Umgebung von $x = 0$ $y = 0$ von der ersten Ordnung sind. Ist $r > 6$, so enthält die Gruppe jedenfalls $r - 6$ unabhängige inf. Transformationen, die in der Umgebung von $x = 0$ $y = 0$ von der zweiten Ordnung sind u. s. w. Die Form einer solchen Transformation ist

$$\delta x = (A_2\, x^2 + 2B_2\, xy + C_2\, y^2 + \ldots)\, \delta t$$
$$\delta y = (a_2\, x^2 + 2b_2\, xy + c_2\, y^2 + \ldots)\, \delta t$$

Ist $r > 12$ so enthält die Gruppe jedenfalls $r - 12$ inf. Transformationen, die in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ von der dritten Ordnung sind u. s. w. Die Form derselben ist

$$\delta x = \delta t \,\Sigma\, \alpha_i\, x^i\, y^{3-i} + \ldots$$
$$\delta y = \delta t \,\Sigma\, \beta_i\, x^i\, y^{3-i} + \ldots$$

oder nach unserer gewöhnlichen Bezeichnungsweise

$$H^{(3)} = p \,\Sigma\, \alpha_i\, x^i\, y^{3-i} + q \,\Sigma\, \beta_i\, x^i\, y^{3-i} + \ldots$$

Dementsprechend bezeichnen wir die inf. Transformationen, die in der Umgebung von $x = 0$ $y = 0$ von der s^{ten} Ordnung sind, mit

$$H^{(s)} = p \,\Sigma\, \alpha_i\, x^i\, y^{s-i} + q \,\Sigma\, \beta_i\, x^i\, y^{s-i} + \ldots$$

17. Wir ordnen die inf. Transformationen unserer Gruppe folgendermassen zusammen. Lass mich voraussetzen, dass es keine inf. Transformation giebt, deren Ordnung in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ grösser als s ist, während die Gruppe gewisse Transformationen von der s^{ten} Ordnung

$$H_1^{(s)}\ H_2^{(s)} \ldots$$

enthält. Es seien ferner

$$H_1^{(s-1)}\ H_2^{(s-1)} \ldots$$

die von den vorangehenden *unabhängigen* inf. Transformationen von der $(s - 1)^{ten}$ Ordnung. Ebenso seien

$$H_1^{(s-2)}\ H_2^{(s-2)} \ldots$$

die von den vorangehenden unabhängigen inf. Transformationen von der $(s - 2)^{ten}$ Ordnung u. s. w. Und seien endlich

$$H_1^{(0)}\ H_2^{(0)}$$

die inf. Transformationen von der nullten Ordnung.

Es ist leicht wichtige Beziehungen zwischen diesen inf.

Transformationen von vorn anzugeben. Dieselben beruhen auf den Satz.

Satz 7. *Sind H und K inf. Transformationen bezüglich von der Ordnung h und k in der Umgebung von $x = 0$ $y = 0$, so ist $(H\,K)$ jedenfalls von der Ordnung $h + k - 1$.*

Durch Bildung von $(H\,K)$ erhält man nehmlich einen Ausdruck, deren Glieder von der $(h + k - 1)^{\text{ten}}$ oder noch höheren Ordnung sind, womit der Beweis geführt ist.

Ich setze jetzt voraus, dass s grösser als 1 ist. Folglich ist jeder Ausdruck

$$(H_i^{(s)}\ H_k^{(s)})$$

jedenfalls von der Ordnung $2s - 1$, das heisst von höherer Ordnung als s. Nun aber enthält unsere Gruppe nach den gemachten Voraussetzungen keine inf. Transformation, deren Ordnung grösser als s ist. Also verschwinden sämmtliche Ausdrücke $(H_i^{(s)}\ H_k^{(s)})$ identisch. Anders ausgesprochen

Satz 8. *Ist s grösser als 1, so bilden die inf. Transformationen der s^{ten} Ordnung ein Involutions-System.*

Ist σ irgend eine Zahl, kleiner als s, so bilden die inf. Transformationen

$$\begin{array}{l} H_1^{(\sigma)}\ H_2^{(\sigma)} \ldots\ldots \\ H_1^{(\sigma+1)}\ H_2^{(\sigma+1)} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_1^{(s-1)}\ H_2^{(s-1)} \ldots\ldots \\ H_1^{(s)}\ H_2^{(s)} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

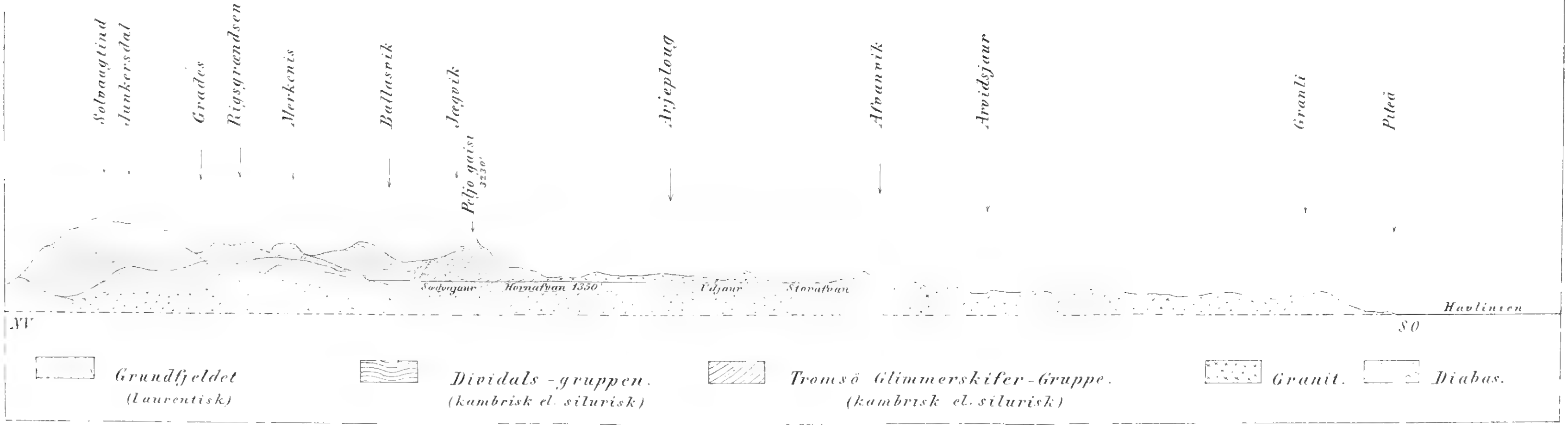
immer eine Gruppe. Denn sind K und G zwei beliebige unter diesen Transformationen, so ist der Ausdruck $(K\,G)$ jedenfalls von der Ordnung σ, und drückt sich also immer linear durch die aufgestellten Transformationen aus. Dies giebt:

Satz 9. *Alle inf. Transformationen einer Gruppe, deren Ordnung in der Umgebung von $x = x_0$ $y = y_0$ grösser als eine beliebig gegebene Zahl ist, bilden wiederum eine Gruppe.*

18. Lass mich voraussetzen, dass σ *grösser als 1* ist, und lass mich setzen

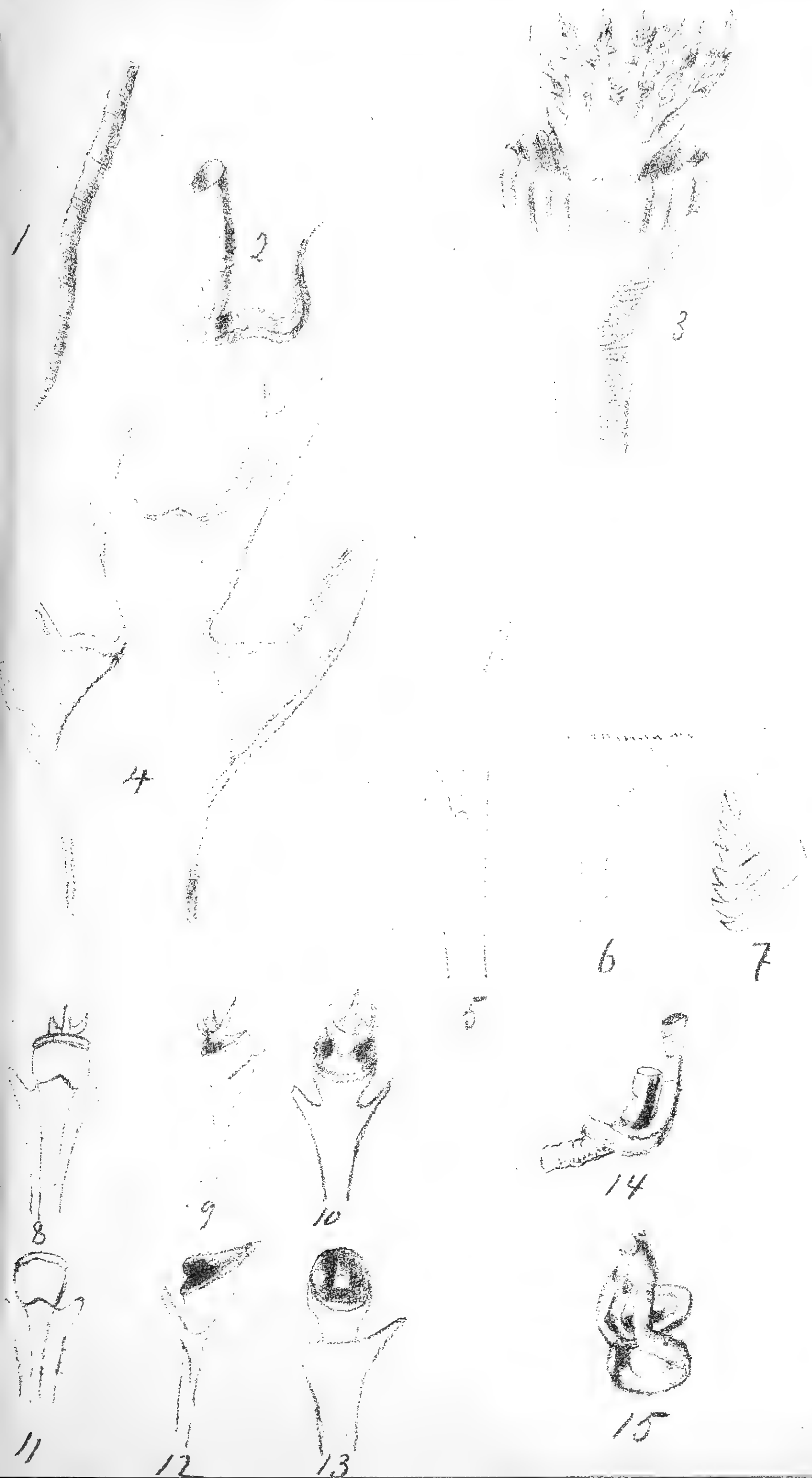
Geologisk Profil fra Saltdalen til Piteå

opgaaet 1877 ved Karl Pettersen.

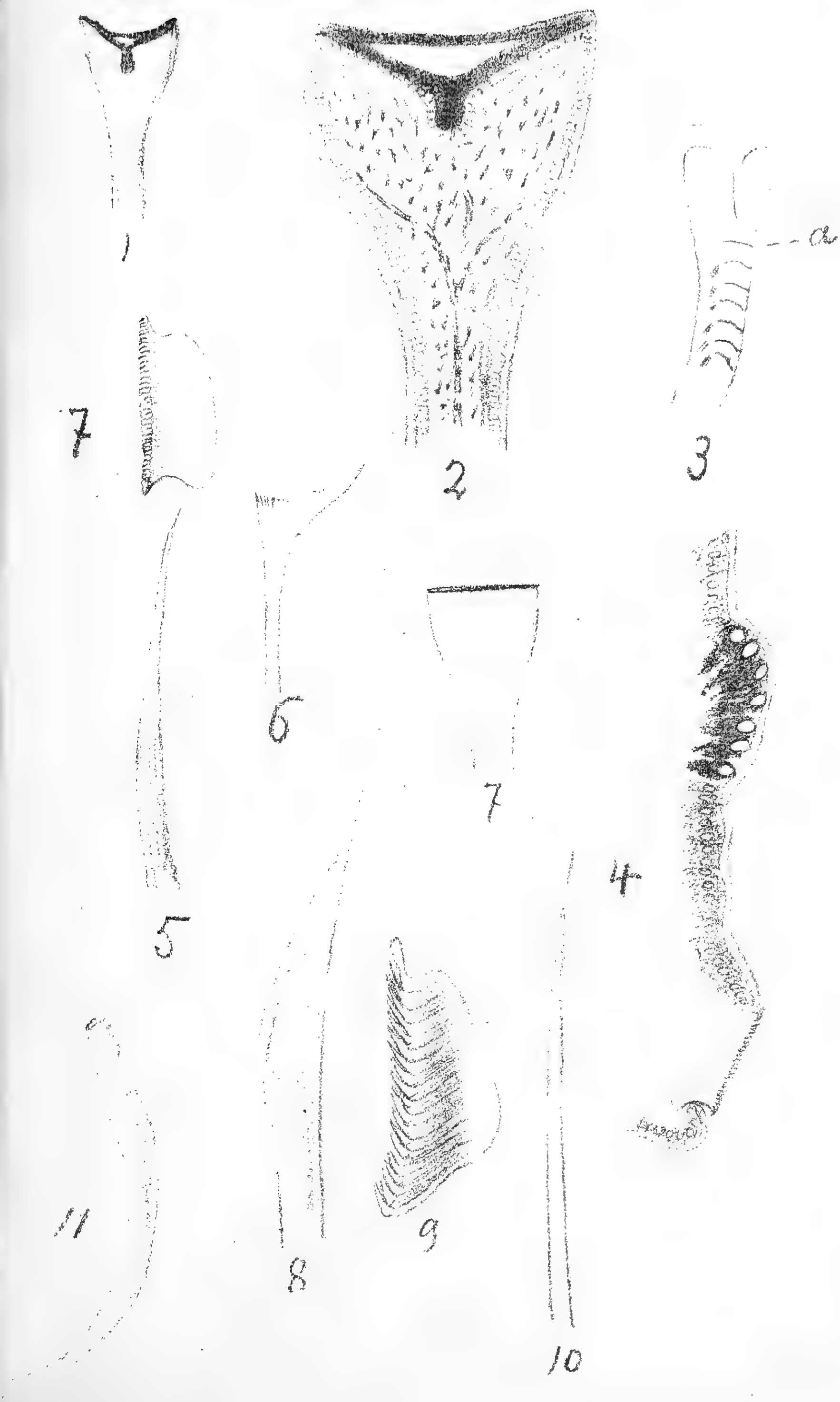


T. I

T II



T III



$$H_1^{(\sigma)} = K_1, H_2^{(\sigma)} = K_2 \dots H_a^{(\sigma)} = K_a$$
$$H_1^{(\sigma+1)} = K_{a+1}, H_2^{(\sigma+1)} = K_{a+2}, H_3^{(\sigma+1)} = K_{a+b}$$
$$H_1^{(\sigma+2)} = K_{a+b+1} \dots .$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$H_1^{(s)} = K_{a+b+c \dots} \qquad\qquad H_g^{(s)} = K_\rho .$$

Bildet man nun die Ausdrücke $(K_i K_{i+k})$, so findet man, dass sie sich immer folgendermassen ausdrücken

$$(K_i K_{i+k}) = \lambda_\rho K_\rho + \dots + \lambda_{i+1} K_{i+1} .$$

Lässt man dagegen $\sigma = 1$ sein, so bleibt dies nicht mehr richtig.

Wir werden voraussetzen, dass $\sigma = 1$ ist, und dass dabei die Gruppe *nur drei inf. Transformationen* von der ersten Ordnung enthält, *und zwar von der Form*

$$K_1 = xp + \dots$$
$$K_2 = yq + \dots$$
$$K_3 = xq + \dots$$

In diesem Falle bestehen, wie man unmittelbar verificirt, fortwährend Relationen der Form

$$(K_i K_{i+k}) = \lambda_\rho K_\rho + \dots + \lambda_{i+1} K_{i+1} .$$

In Folge dessen könnte man Theorem IV anwenden. Bemerkt, man dabei dass die $(H^{(i)} H^{(s)})$ jedenfalls von der s^{ten} Ordnung sind, so erhält man, indem man Zusatz zu Theorem IV zu Hülfe nimmt, den Satz

Satz 10. *Unter den gemachten Voraussetzungen enthält unsere Gruppe immer eine inf. Transformation von der s^{ten} Ordnung* $(H^{(s)}$, *die zu allen K_i in der Beziehung*

$$(H^{(s)} K_i) = k_i H^{(s)}$$

steht.

Enthielte die vorgelegte Gruppe nur zwei inf. Transformation erster Ordnung und zwar von der Form

$$K_1 = xp - yq + \ldots,$$
$$K_2 = \qquad xq + \ldots$$

so bliebe der eben aufgestellte Satz noch gültig.

§ 7.

Gruppen, bei denen keine Curven-Schaar invariant bleibt.

Um nicht zu weitlaüfig zu werden, erlaube ich mich in der folgenden Nummer das Räsonnement theilweise in geometrischer Terminologie zu führen.

19. Ich betrachte überhaupt alle Gruppen von Punkt-Transformationen, bei denen keine Curven-Schaar

$$\varphi(xy) = a$$

invariant bleibt. Analytisch ausgesprochen: Sind $A_1 f$, $A_2 f$ $\ldots A_r f$ die infinitesimalen Transformationen der Gruppe, so setze ich voraus, dass es keine Gleichung

$$Bf = \xi p + \eta q = 0$$

giebt, die zu den $A_k f$ in solcher Beziehung steht, dass r Gleichungen der Form

$$A_k(B(f)) - B(A_k(f)) = \varphi_k(xy) \, . \, Bf$$

bestehen.

Hieraus folgt nun zunächst, dass es unter den Gleichungen $A_k f = 0$ zwei giebt, die unabhängig sind. Beständen nehmlich Relationen der Form

$$A_k f = \psi_k(xy) \, . \, A_1 f,$$

so käme

$$A_k(A_1(f)) - A_1(A_k(f)) = -A_1(\psi_k) \, . \, A_1 f,$$

welche Gleichung mit unseren Voraussetzungen im Widerspruche stände. -- Geometrisch ausgesprochen heisst dies, dass eine Gruppe, bei der keine Curven-Schaar invariant bleibt, einen *beliebig* gewählen Punkt nicht nur nach einer Curve, sondern in der ganzen Ebene herumführen muss. Was allerdings evident ist.

Verlegt man nun Origo ($x = 0$ $y = 0$) nach einem arbiträren Punkt, so giebt es eo ipso zwei inf. Transformationen, die in der Umgebung von ($x = 0$ $y = 0$) von der nullten Ordnung sind. Seien

$$H_1^{(0)} = p + \dots$$
$$H_2^{(0} = q + \dots$$

diese beiden Transformationen.

Der Inbegriff aller inf. Transformationen, die in der Umgebung von $x = 0$ $y = 0$ von der ersten oder höheren Ordnung sind, lassen den Punkt $x = 0$ $y = 0$ seine Lage behalten. Dagegen vertauschen sie die durch diesen Punkt hindurchgehenden Richtungen unter sich. Hierbei ist zu bemerken, dass die inf. Transformationen von der zweiten und höheren Ordnung jene Richtungen invariant lassen. Es giebt ferner eine inf. Transformation erster Ordnung, welche ebenso diese Richtungen invariant lässt; dies ist nehmlich der Fall mit

$$xp + yq + \dots$$

Die besprochenen Richtungen bilden ein lineares Gebiet, das bei den inf. Transformationen erster Ordnung linear transformirt wird. Hierbei sind die folgenden Fälle denkbar. Das Gebiet wird nullgliedrig eingliedrig, zweigliedrig oder dreigliedrig transformirt. In den drei ersten Fällen giebt es eine durch den Punkt ($x = 0$ $y = 0$) hindurchgehende invariante Richtung. Und da Origo ein arbiträrer Punkt der Ebene ist, so existirt es in den drei ersten Fällen eine bei der Gruppe invariante Gleichung

$$\xi p + \eta q = 0$$

was unserer Voraussetzung widerspricht. Folglich muss das Giebt der durch Origo gehenden Richtungen *dreigliedrig* transformirt werden, was darauf hinsauskommt, dass die Gruppe jedenfalls *drei* inf. Transformationen erster Ordnung enthält. Giebt es nur drei, so darf die Transformation $xp + yq + \dots$

nicht in der Gruppe enthalten sein, und dann sind unsere drei inf. Transformationen von der Form

$$\begin{aligned} &xq + \dots \\ &xp - yq + \dots \\ &yp + \dots \end{aligned} \qquad \text{(A)}$$

Oder auch enthält unsere Gruppe *vier* inf. Transformationen erster Ordnung, die dann eo ipso die Form

$$\begin{aligned} &xq + \dots \\ &yq + \dots \\ &xp + \dots \\ &yp + \dots \end{aligned} \qquad \text{(B)}$$

besitzen. Aus dem Vorangehenden fliesst u. A. auch der Satz

Satz 11. *Lässt eine vorgelegte Gruppe keine Curven-Schaar* $\varphi(xy) = a$ *invariant, so enthält die Gruppe jedenfalls fünf inf. Transformationen. Unter denselben giebt es in der Umgebung eines beliebigen Punkts zwei die von nullter Ordnung sind, und entweder drei* (A) *oder vier* (B) *die von erster Ordnung sind.*

20. Lass uns voraussetzen, dass unsere Gruppe die Form besitzt

$$\begin{aligned} & p + \dots \\ & q + \dots \\ H_1^{(1)} &= yp + \dots \\ H_2^{(1)} &= xp - yq + \dots \\ H_3^{(1)} &= xq + \dots \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ H^{(s)} &= p \, \Sigma \, \alpha_i \, x^i \, y^{s-i} + q \, \Sigma \, \beta_i \, x^i \, y^{s-i} + \dots \end{aligned}$$

und sei s die grösste Ordnung einer inf. Transformation. Ich bemerke, dass die Transformationen

$$H_2^{(1)} \, H_3^{(1)} \, \dots\dots \, H^{(s)}$$

eine Gruppe bilden, auf die Satz 10 angewandt werden kann. In Folge dessen können wir annehmen, dass Relationen der Form

$$(H_2{}^{(1)}\, H^{(s)}) = \lambda\, H^{(s)}$$
$$(H_3{}^{(1)}\, H^{(s)}) = \rho\, H^{(s)}$$

bestehen. Die letzte giebt

$$\Sigma\,(s-i)\,\alpha_i\, x^{i+1}\, y^{s-i-1} = \rho\, \Sigma\, \alpha_i\, x^i\, y^{s-i}\,,$$

$$\Sigma\,(s-i)\,\beta_i\, x^{i+1}\, y^{s-i-1} - \Sigma\,\alpha_i\, x^i\, y^{s-i} = \rho\, \Sigma\, \beta_i\, x^i\, y^{s-i}\,.$$

Indem man nun die Jacobische Identität auf $H_2{}^{(1)}$ $H_3{}^{(1)}$ und $H^{(s)}$ anwendet, erkennt man leicht, dass

$$\rho = 0\,,\ \alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{s-1} = 0$$

so dass

$$\Sigma\, \alpha_i\, x^i\, y^{s-i} = \alpha_s\, x^s\,.$$

Also kommt

$$\Sigma\,(s-i)\,\beta_i\, x^{i+1}\, y^{s-i-1} - \alpha_s\, x^s = 0$$

woraus

$$\beta_0 = \beta_1 = \ldots = \beta_{s-2} = 0,\ \beta_{s-1} = \alpha_s\,,$$

und

$$H^{(s)} = \alpha_s\, x^s\, p + (\alpha_s\, x^{s-1}\, y + \beta_s\, x^s)\, q + \ldots$$

Um die Grössen α_s und β_s zu bestimmen, bilden wir die Gleichung

$$(xp - yq + \ldots,\ H^{(s)}) = \lambda\, H^{(s)}\,,$$

woraus

$$(s - 1 - \lambda)\,\alpha_s = 0$$
$$(s + 1 - \lambda)\,\beta_s = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass α_s und β_s nicht gleichzeitig von Null verschieden sein können.

Sei β_s verschieden von Null, und also $\alpha_s = 0$. Alsdann können wir setzen

$$H^{(s)} = x^s\, q + \ldots$$

Die inf. Transformation

$$(yp + \ldots,\ x^s\, q + \ldots)$$

oder ausgeführt

$$x^s\, p - s\, x^{s-1}\, y\, q + \ldots$$

gehört unserer Gruppe. Folglich lehrt Satz 8, dass der Ausdruck

$$(x^s q + \ldots, x^s p - s x^{s-1} y q + \ldots) = -2s x^{2s-1} q$$

identisch verschwindet; und dass also $s = 0$ ist. Da indess dies mit unseren Voraussetzungen im Widerspruche steht, so muss $\beta_s = 0$ sein.

Zurück steht somit nur die Hypothese

$$H^{(s)} = x^s p + x^{s-1} y q$$

Da unsere Gruppe eine Transformation $q + \ldots$ enthält, so enthält sich auch eine der Form

$$(q + \ldots, x^s p + x^{s-1} y q + \ldots) = x^{s-1} q \ldots$$

und zugleich die Transformation

$$(x^{s-1} q + \ldots, x^s p + x^{s-1} y q + \ldots)$$

oder ausgeführt

$$(2 - s) x^{2s-2} q$$

Wäre nun $s > 2$, und also zugleich $2s - 2 > s$, so enthielte unsere Gruppe eine inf. Transformation, deren Ordnung grösser als s wäre. Also muss die Zahl s, die auch nicht kleiner als 2 sein darf, eben gleich 2 sein.

Man verbinde nun die gefundene Transformation

$$x^2 p + x y q + \ldots$$

mit $p + \ldots$. Hierdurch ergiebt sich, dass unsere Gruppe auch eine Transformation der Form

$$2 x p + y q + \ldots$$

enthält, das heisst, dass sie *vier* inf. Transformationen erster Ordnung enthält, so dass *die Voraussetzungen dieser Nummer nie eintreten.*

Indem man die Voraussetzungen in Uebereinstimmung mit dem Vorangehenden umändert, ergiebt sich durch ein ganz identisches Räsonnement das folgende Theorem

Theorem VII. Enthält eine Gruppe, die keine

Curven-Schaar $\varphi = a$ invariant lässt, in der Umgebung eines beliebig gewählten Punkts inf. Transformationen, deren Ordnung s grösser als 1 ist, so muss s gleich 2 sein. Es giebt vier inf. Transformationen erster Ordnung.

21. Nach den vorangehenden Entwickelungen giebt es dreierlei Gruppen, die keine Curven-Schaar invariant lassen. Erstens fünfgliedrige Gruppen, zweitens sechsgliedrige Gruppen, drittens Gruppen mit mehr als sechs Glieder. Die beiden ersten Arten enthalten keine inf. Transformation, deren Ordung grösser als 1 ist. Wir werden zeigen, dass es nur *eine* Gruppe von jeder Art giebt.

Enthält eie Gruppe mehr als sechs Glieder, so muss sie nach den Entwickelungen der vorangehenden Nummer, indem wir zugleich berücksichtigen, dass

$$(yp + \ldots, x^2p + xyq + \ldots) = xyp + y^2q + \ldots$$

ist, jedenfalls die folgenden Transformationen enthalten:

$$\begin{aligned} K_1 &= p + \ldots \\ K_2 &= q + \ldots \\ K_3 &= xp + \ldots \\ K_4 &= xq + \ldots \\ K_5 &= yp + \ldots \\ K_6 &= yq + \ldots \\ K_7 &= x^2p + xyq + \ldots \\ K_8 &= xyp + y^2q + \ldots \end{aligned}$$

Es fragt sich, ob sie noch weitere inf. Transformationen, die dann nach Theorem VII von zweiter Ordnung sind,

$$K = \xi p + \eta q$$

enthalten kann. Um diese Frage zu entscheiden, beweisen wir zuerst den folgenden Satz, den wir auch später brauchen werden

Satz 12. *Liegen die Transformationen* $A_1 f\, A_2 f\, A_3 f$, *wo*

$$A_i f = \xi_i p + \eta_i q$$

paarweise in Involution, und sind dabei $A_1 f = 0$ *und* $A_2 f = 0$ *unabhängige Gleichungen, so ist* A_3 *gleich der Summe von* $A_1 f$ *und* $A_2 f$ *multiplicirt mit je einer Constante.*

Beweis. Durch Einführung passender unabhängigen Variabeln x' und y' kann man die $A_k f$ auf die folgende Form bringen

$$A_1 f = p', \quad A_2 f = q'$$
$$A_3 f = \xi' p' + \eta' q,$$

und dabei ist

$$\frac{d\xi'}{dx'} = \frac{d\xi'}{dy'} = 0, \quad \frac{d\eta'}{dx'} = \frac{d\eta'}{dy'} = 0,$$

so dass

$$A_3 f = Ap' + Bq'$$

wird, womit der Beweis geführt ist

Da nun K (Satz 8) sowohl mit K_7 wie mit K_8 in Involution liegen müsste, und also die Form

$$K = A\,K_7 + B\,K_8$$

besässe, so folgt, dass unsere Gruppe nicht mehr als 8 inf. Transformationen enthalten kann. Wir werden zeigen, dass sie in die allgemeine lineare umgewandelt werden kann.

Es ist von vorn möglich diejenigen Relationen anzugeben, die zwischen $K_3\; K_4\; K_5\; K_6$ und $K_7\; K_8$ bestehen. Es ist in der That

$$(K_6\, K_7) = 0, \quad (K_6\, K_8) = K_8$$
$$(K_5\, K_7) = K_8, \quad (K_5\, K_8) = 0$$

u. s. w.

Man führe neue unabhängige Variabeln $x'\; y'$ ein, und wähle dieselben derart, dass

$$x^2 p + xyq + \ldots = x'^2 p' + x'\, y'\, q'$$
$$xyp + y^2 q + \ldots = x'y'p' + y'^2 q'$$

wird. Ich setze sodann

$$yq + \ldots = y' q' + \xi' p' + \eta' q',$$

und es handelt sich darum ξ' und η' zu bestimmen. Die zwischen K_6 K_7 und K_8 bestehenden Relationen geben

$$(x'^2 p' + x' y' q', \; \xi' p' + \eta' q') = 0$$
$$(x' y' p' + y'^2 q', \quad \xi' p' + \eta' q') = 0,$$

und also lehrt Satz 12, dass

$$\xi' p' + \eta' q' = A\,(x'^2 p' + x' y' q') + B\,(x' y' p' + y'^2 q'),$$

so dass

$$K_6 = y' q' + A\,(x'^2 p' + x' y' q') + B\,(x' y' p' + y'^2 q')$$

wird, oder, da die Constanten A und B offenbar gleich Null gesetzt werden können, kommt

$$K_6 = y' q'.$$

In ganz aehnlicher Weise erkennt man, dass K_3 K_4 und K_5 in den neuen Variabeln bezüglich die Form erhalten

$$x' p', \; x' q', \; y' p'.$$

Zurück steht somit nur die Bestimmung von K_1 und K_2. Hierzu bemerken wir, dass

$$(K_1 \, K_7) = 2\,K_3 + K_6 + A\,K_7 + B\,K_8,$$
$$(K_1 \, K_8) = \quad K_5 + C\,K_7 + D\,K_8,$$

wo A, B, C, D gewisse Constanten sind. Wir setzen

$$K_1' = K_1 + \lambda_3\,K_3 + \lambda_4\,K_4 + \lambda_5\,K_5 + \lambda_6\,K_6$$

woraus

$$(K_1' \, K_7) = 2\,K_3 + K_6 + (A + \lambda_3)\,K_7 + (B + \lambda_5)\,K_8$$
$$(K_1' \, K_8) = \quad K_5 + (C + \lambda_4)\,K_7 + (D + \lambda_6)\,K_8.$$

Setzt man daher

$$\lambda_3 = -A, \; \lambda_4 = -C, \; \lambda_5 = -B, \; \lambda_6 = -D,$$

so kommt

$$(K_1' \, K_7) = 2\,K_3 + K_6,$$
$$(K_1' \, K_8) = K_5.$$

Jetzt setze man

$$K_1' = p' + \xi' p' + \eta' q',$$

alsdann kommt

$$(\xi' p' + \eta' q',\ x'^2 p' + x' y' q') = 0,$$
$$(\xi' p' + \eta' q',\ x' y' p' + y'^2 q') = 0,$$

so dass

$$\xi' p' + \eta' q' = 0$$

gesetzt werden kann. Folglich wird

$$K_1 = p'$$

In ganz analoger Weise ergiebt sich, dass

$$K_2 \quad q'$$

ist. Hiermit ist das folgende aüsserst merkwürdige Theorem erwiesen:

Theorem IX. Lässt eine gegebene Transformations-Gruppe keine Curven-Schaar $\varphi = a$ invariant, und besitzt sie dabei mehr als 6 Parameter, so enthält sie acht infinitesimale Transformationen. Dieselben erhalten durch zweckmässigen Wahl der unabhängigen Variabeln die Form

$$p, q, xp, yp, xq, yq$$
$$x^2 p + xyq, xyp + y^2 q$$

Die erzeugte achtgliedrige Gruppe hat wie man unmittelbar verificirt, die Form

$$x' = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma},$$

$$y' = \frac{Ax + By + C}{\alpha x + \beta y + \gamma},$$

das heisst man erhält die allgemeine lineare (gebrochene) Gruppe.

22. Die allgemeinste sechs-gliedrige Gruppe, die keine Curven-Schaar invariant lässt, besitzt nach dem Vorangehenden die Form

$$\begin{array}{ll} K_1 = p + \ldots & K_2 = q + \ldots \\ K_3 = xq + \ldots & K_4 = yp + \ldots \\ K_5 = yq + \ldots & K_5 = xp + \ldots \end{array}$$

Jetzt bilden K_3 K_4 K_5 K_6 (Satz 9) eine Gruppe, die durch zweckmässigen Wahl der Variabeln die Form

$$x' q', \; y' p', \; y' q', \; x' p'$$

annehmen kann. Zunächst kann man nehmlich die Gleichungen

$$\begin{aligned} xq + \ldots &= x' q' \\ xp - yq + \ldots &= x' p' - y' q' \end{aligned}$$

befriedigen. Setzt man sodann

$$yp + \ldots = \xi p' + \eta q',$$

findet man zur Bestimmung von ξ η die Gleichungen

$$x' \frac{d\xi}{dy'} = x',$$

$$x' \frac{d\eta}{dy'} - \xi = - y'$$

$$x' \frac{d\xi}{dx'} - y' \frac{d\xi}{dy'} - \xi = - 2\xi,$$

$$x' \frac{d\eta}{dx'} - y' \frac{d\eta}{dy'} + \eta = - 2\eta,$$

die in allgemeinster Weise befriedigt werden, indem man setzt

$$\xi = y' + \frac{A}{x'},$$

$$\eta = \frac{Ay'}{x'^2} + \frac{B}{x'^3},$$

woraus

$$yp + \ldots = \left(y' + \frac{A}{x'}\right) p' + \left(\frac{A y'}{x'^2} + \frac{B}{x'^3}\right) q'.$$

Um die Formeln zu vereinfachen, führen wir wieder neue Variabeln ein:

$$x'' = x'$$

$$y'' = y' + \frac{A}{x'},$$

wodurch

$$x' q' = x'' q''$$

$$x' p' - y' q' = x'' p'' - y'' q''$$

$$yp + \ldots = y'' p'' + \frac{D}{x''^3} q''.$$

Zur Bestimmung von der vierten Transformation

$$xp + yq + \ldots = \xi p'' + \eta q''$$

erhalten wir die folgenden Gleichungen

$$x'' \frac{d\xi}{dy''} = 0,$$

$$x'' \frac{d\eta}{dy''} - \xi = 0,$$

$$x'' \frac{d\xi}{dx''} - y'' \frac{d\xi}{dy''} - \xi = 0,$$

$$x'' \frac{d\eta}{dx''} - y'' \frac{d\eta}{dy''} + \eta = 0,$$

$$y'' \frac{d\xi}{dx''} + \frac{D}{x''^3} \frac{d\xi}{dy} - \eta = 0,$$

$$y'' \frac{d\eta}{dx''} + \frac{D}{x''^3} \frac{d\eta}{dy} - \frac{3D}{x''^4} \xi = 0,$$

welche zeigen, dass

$$xp + pq + \ldots = A\,(x'' p'' + y'' q'')$$

$$D = 0$$

ist. Folglich erhalten die vier vorgelegten Transformationen die Form

$$x'' q'', \; x'' p'' - y'' q'',$$
$$y'' p'', \; x'' p'' + y'' q''$$

wie behauptet wurde

Zur Bestimmung von

$$p + \ldots = Xp'' + Yq''$$

erhalten wir durch Anwendung der Operationen

$$xp + \ldots, \; yq + \ldots \; yp + \ldots$$

die folgende Gleichungen

$$x'' \frac{dX}{dx''} - X = -X + a_1 x'' + a_2 y'',$$

$$x'' \frac{dY}{dx''} = -Y + b_1 x'' + b_2 y'',$$

$$y'' \frac{dX}{dy''} = c_1 x'' + c_2 y'',$$

$$y'' \frac{dY}{dy''} - Y = d_1 x'' + d_2 y'',$$

$$y'' \frac{dX}{dx''} - Y = e_1 x'' + e_2 y'',$$

$$y'' \frac{dY}{dx''} = f_1 x'' + f_2 y''.$$

Die erste und dritte giebt durch Differentiation bezüglich hinsichtlich y'' und x''

$$x'' \frac{d^2 X}{dx'' \, dy''} = a_2,$$

$$y'' \frac{d^2 X}{dx'' \, dy''} = c_1,$$

woraus

$$X = Ax'' + By'' + C,$$

sodann giebt die fünfte Gleichung

$$Y = Dx'' + Ey''$$

Und da man

$$A = B = D = E = 0, \quad C = 1$$

setzen kann, folgt

$$p + \ldots = p''.$$

Um endlich die letzte Transformation $q + \ldots$ zu bestimmen, setzen wir

$$(p + \ldots, xq + \ldots) = (p'', x'' q''),$$

woraus

$$q + \ldots = q''$$

Also

Theorem X. Eine jede sechsgliedrige Gruppe, die keine Curven-Schaar $\varphi = a$ invariant lässt, kann durch zweckmässigen Wahl der unabhängigen Variabeln die Form

$$p, q, xp, xq, yp, yq$$

erhalten. Die endlichen Transformationen dieser Gruppe sind bestimmt durch die linearen Gleichungen

$$x' = Ax + By + F$$
$$y' = Cx + Dy + E.$$

23. Die allgemeinste fünfgliedrige Gruppe die keine Curven-Schaar invariant lässt, besitzt nach dem Vorangehenden die Form

$$\begin{array}{lll} p + \ldots & q + \ldots & xq + \ldots \\ yp + \ldots & xp - yq + \ldots & \end{array}$$

Durch Einführung zweckmässiger Variabeln kann man, indem man wie soeben verfährt erreichen, dass

$$xq + \ldots = x' q',$$

$$yp + \ldots = y' p' + \frac{D}{x'^3} q',$$

$$xp - yq + \ldots = x' p' - y' q' .$$

Zur Bestimmung von

$$q + \ldots = Xp + Yq$$

erhält man durch Anwendung der Operationen $xq + \ldots$ und $xp - yq + \ldots$ die folgenden Relationen

$$x' \frac{dX}{dy'} = \gamma' x' + \beta' y' ,$$

$$x' \frac{dY}{dy'} - X = \alpha' x' - \gamma' y' + \frac{\beta' D}{x'^3} ,$$

$$x' \frac{dX}{dx'} - y' \frac{dX}{dx'} - X = X + \gamma x' + \beta y' ,$$

$$x' \frac{dY}{dx'} - y' \frac{dY}{dy'} + Y = Y = \alpha x' - \gamma y' + \frac{\beta D}{x'^3} ,$$

oder indem man setzt

$$X' = X + \mu y' + \nu x' ,$$

$$Y' = Y + \lambda x' + \mu \frac{D}{x'^3} - \nu y' ,$$

und darnach über die Constanten λ, μ, ν passend verfügt, die einfacheren Gleichungen

$$x' \frac{dX'}{dy'} = \beta' y' ,$$

$$x' \frac{dY'}{dy'} - X' = \frac{\beta' D}{x'^3} ,$$

$$x' \frac{dX'}{dx'} - y' \frac{dX'}{dy'} = 2 X' + \beta y' + \gamma x'$$

$$x' \frac{dY'}{dx'} - y' \frac{dY'}{dy'} = \frac{\beta D}{x'^3} - \gamma y' ,$$

die in allgemeinster Weise befriedigt werden, indem man setzt

$$X' = 0, \quad Y' = K$$

woraus

$$q + \ldots = Kq'.$$

Nun ist

$$(q + \ldots, yp + \ldots) = (Kq', y'p' + \frac{D}{x'^3} q')$$

und also

$$p + \ldots = Kp'$$

ferner ist

$$(yp + \ldots, p + \ldots) = (y'p' + \frac{D}{x'^3}, q', Kp')$$

$$= \frac{3KD}{x'^4} q,$$

woraus folgt

$$KD = 0$$

oder, da K nicht verschwinden darf

$$D = 0.$$

In den Variabeln $x' y'$ nehmen also die fünf infinitesimalen Transformationen die Form

$$p, q, xq, xp - yq, yp.$$

Also

Theorem XI. Alle fünfgliedrigen Gruppen, die keine Curven-Schaar invariant lassen, können durch Einführung zweckmässiger Variabeln die Form

$$p, q, xq, xp - yq, yp$$

erhalten.

§ 8.

Gruppen, die eine Curven-Schaar invariant lassen.

Seien $A_1 f \ldots A_r f$ die infinitesimalen Transformationen einer Gruppe, welche die Curven-Schaar $\varphi = a$ invariant lässt, alsdann drückt sich jedes $A_k \varphi$ als Funktion von φ aus

$$A_k \varphi = \xi_k (\varphi).$$

Ich setze

$$\varphi = x$$

und folglich nehmen die $A_k f$ die Form

$$A_k f = \xi_k(x)\, p + \eta_k(xy)\, q.$$

Die Relationen

$$(A_i\, A_k) = \Sigma\, c_{iks}\, A_s$$

geben

$$\xi_i \frac{d\xi_k}{dx} - \xi_k \frac{d\xi_i}{dx} = \Sigma\, c_{iks}\, \xi_s,$$

oder wenn wir setzen

$$\xi_k(x)\, p = B_k f,$$

wo die $B_k f$ inf. Transformationen des Gebietes x sind:

$$(B_i\, B_k) = \Sigma\, c_{iks}\, B_s.$$

Folglich bilden die $B_k f$ eine Gruppe, die sich durch passenden Wahl der Grösse x bekanntlich in eine lineare Gruppe umwandeln lässt.

Es können nun vier Fälle eintreten jenachdem die $B_k f$ eine nullgliedrige, eingliedrige, zweigliedrige oder dreigliedrige Gruppe bilden. Und das Problem, alle Gruppen zu bestimmen, die eine Curven-Schaar invariant lassen, zerlegt sich somit in vier Probleme, nehmlich in der Bestimmung von den Gruppen, die den vier verschiedenen Möglichkeiten entsprechen. Es ist dabei leicht zu erkennen, dass diese vier Unter-Probleme in genauem Zusammenhange stehen. Nach dem Obenstehenden kann man nehmlich annehmen, dass die infinitesimalen Transformationen einer jeden hierher gehörigen Gruppe die Form

$$(A_0 + A_1\, x + A_2\, x^2)\, p + \eta\, q$$

besitzen. Giebt es nun mehr als drei etwa r inf. Transformationen in der Gruppe, so giebt es jedenfalls $r - 1$ Transformationen von der Form

$$(B_0 + B_1\, x)\, p + \eta\, q$$

deren Inbegriff eine Gruppe bilden. Ferner giebt es jedenfalls $r - 2$ Transformationen der Form

$$B \cdot p - \eta q,$$

deren Inbegriff eine Gruppe bilden. Endlich giebt es jedenfalls $r - 3$ Transformationen der Form

$$\eta q,$$

die wiederum eine Gruppe bilden.

Hiermit ist der folgende Weg gegeben zur Erledigung unseres allgemeinen Problems. Man bestimmt die allgemeinste r-gliedrige Gruppe, deren inf. Transformationen sämmtlich die Form ηq besitzen. Darnach bestimmt man in allgemeinster Weise eine inf. Transformation $p + \eta q$, die mit den r Transformationen der r-gliedrigen Gruppe eine $(r+1)$-gliedrige Gruppe bestimmen. Sodann sucht man die allgemeinste Transformation $xp + \eta q$, die mit den $r + 1$ Transformationen der letzten Gruppe eine $(r+2)$-gliedrige Gruppe bestimmen. Endlich sucht man die allgemeinste Transformation $x^2 p + \eta q$, die mit den $r + 2$ Transformationen der letzten Gruppe eine $(r+3)$-gliedrige Gruppe bestimmen.

Bestimmung aller Gruppen der Form $\eta_1 q \ \eta_2 q \ldots \eta_r q$.

Die Bestimmung aller Gruppen der Form $\eta_1 q, \ldots \eta_r q$ wird wesentlich vereinfacht durch die folgende Bemerkung. Man nehme einen beliebigen Punkt $x_0 \ y_0$ und betrachte die $r - 1$ infinitesimalen Transformationen der Gruppe, die in der Umgebung von $x_0 \ y_0$ von erster Ordnung sind. Dieselben erzeugen eine $(r-1)$-gliedrige Gruppe (Satz 9), der Inbegriff nehmlich aller Transformationen der vorgelegten Gruppe, die den Punkt $x_0 \ y_0$ invariant lassen. Dies giebt den Satz

Satz 13. Jede r-gliedrige Gruppe der Form $\eta_k q$ enthält $(r-1)$-gliedrige Untergruppe.

Hiermit ist der folgende Weg gegeben zur Erledigung unseres Problems. Man bestimmt zuerst die allgemeinste eingliedrige Gruppe $\eta_1 q$, sucht sodann in allgemeinster Weise eine inf. Transformation $\eta_2 q$ die mit $\eta_1 q$ eine Gruppe bildet, sucht sodann die allgemeinste Transformation $\eta_3 q$, die mit $\eta_1 q$, $\eta_2 q$ eine Gruppe bildet u. s. w.

Eine jede eingliedrige Gruppe ηq kann die Form $X_1 q$, wo X_1 eine beliebige Funktion von x bezeichnet, erhalten. Es giebt somit nur ein Typus der eingliedrigen Gruppen

$$\boxed{X_1 q}$$

Um jetzt die allgemeine zweigliedrige Gruppe

$$H_1 = \eta_1 q, \; H_2 = \eta_2 q$$

zu finden, bemerken wir, dass die zchwischen H_1 und H_2 bestehende Relation die eine der beiden Formen

$$(H_1 H_2) = 0 \text{ oder } (H_1 H_2) = H_1$$

annehmen kann. Setzt man $H_1 = X_1 q$ und $H_2 = \eta q$, so kommt im ersten Falle

$$X_1 \frac{d\eta}{dy} = 0, \; \eta = f(x) = X_2,$$

im zweiten Falle

$$\frac{d\eta}{dy} = 1, \; \eta = y + f(x)$$

oder, indem man $y + f(x)$ als neues y einführt

$$\eta = y.$$

Es giebt somit, zwei Typen der zweigliedrigen Gruppen:

$$\boxed{\begin{array}{c} X_1 q \\ X_2 q \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} X_1 q \\ yq \end{array}}$$

Ist $H_1 = X_1 q$, $H_2 = X_2 q$, $H_3 = \eta q$ eine dreigliedrige Gruppe, so bestehen Relationen der Form

$$(H_1 H_2) = a_1 H_1 + a_2 H_2 + a_3 H_3$$
$$(H_2 H_3) = b_1 H_1 + b_2 H_2 + b_3 H_3$$

Es giebt somit jedenfalls eine Transformation $H = A_1 H_1 + A_2 H_2$, die zu H_3 in solcher Beziehung steht, dass $(H H_3)$ sich durch

H_1 und H_2 ausdrückt, und offenbar können wir ohne Beschränckung annehmen, dass dies eben mit $(H_1\ H_3)$ der Fall ist, so dass wir $a_3 = 0$ setzen können. Wir finden also

$$X_1 \frac{d\eta}{dy} = a_1 X_1 + a_2 X_2$$

$$X_2 \frac{d\eta}{dy} = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 \eta;$$

wäre nun η keine Funktion von x allein, so müsste in der letzten Gleichung die rechte wie die linke Seite nur x enthalten und also $b_3 = 0$ sein. Hieraus lässt sich nun leicht herleiten, dass $\frac{d\eta}{dy}$ eine Constante ist. Denn unsere Formeln zeigen, dass jeder Ausdruck

$$(A_1 X_1 + A_2 X_2) \frac{d\eta}{dy}$$

sich als lineare Funktion von X_1 und X_2 ausdrücken lässt

$$(A_1 X_1 + A_2 X_2) \frac{d\eta}{dy} = B_1 X_1 + B_2 X_2 .$$

Ebenso ist

$$(B_1 X_1 + B_2 X_2) \frac{d\eta}{dy} = C_1 X_1 + C_2 X_2$$

woraus

$$(A_1 X_1 + A_2 X_2) \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^2 = C_1 X_1 + C_2 X_2,$$

und im Allgemeinen

$$(A_1 X_1 + A_2 X_2) \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^k = L_1 X_1 + L_2 X_2,$$

welche auch die ganze Zahl k ist. Insbesondere käme zwei Gleichungen der Form

$$\frac{d\eta}{dy} = M_1 + M_2 \frac{X_2}{X_1}$$

$$\left(\frac{d\eta}{dy}\right)^2 = N_1 + N_2 \frac{X_2}{X_1}$$

die mit Nothwendigkeit verlangen, dass $M_2 = N_2 = 0$ ist. Also kommt

$$\frac{d\eta}{dy} = K, \quad \eta = Ky + f(x),$$

woraus durch passenden Variabel-Aenderung folgt

$$\eta = y$$

so dass die Form der Gruppe wird

$$X_1 q, \; X_2 q, \; y q.$$

Wäre dagegen η eine Funktion von x, so besässe die Gruppe die Form

$$X_1 q \; X_2 q \; X_3 q.$$

Endlich müssen wir diejenigen dreigliedrigen Gruppen bestimmen, die die zweigliedrige Gruppe q, yq enthalten. Sei $q \; yq \; \eta q$ eine solche Gruppe, so dass

$$\frac{d\eta}{dy} = a_0 + 2a_1 y + a_2 \eta,$$

$$y \frac{d\eta}{dy} - \eta = b_0 + 2b_1 y + b_2 \eta.$$

Es ist nun leicht zu erkennen, dass $a_2 = 0$ ist. Um das zu beweisen, werde ich zuerst den folgenden Satz, der uns auch später nützlich sein wird, beweisen

Satz 14. *Sind $H_1 \; H_2 \ldots H_3$ infinitesimale Transformationen einer Gruppe und K irgend eine Transformation, und bestehen dabei Relationen der Form*

$$(H_1 \; H_2) = H_1, \; (H_1 \; K) = a_1 \; K + \Sigma \alpha_k H_k$$
$$(H_2 \; K) = a_2 \; K + \Sigma \beta_k H_k$$

so ist a_1 gleich Null. Zu bemerken ist, dass K und die H_k keine Gruppe bilden brauchen.

Zum Beweis bilden wir die Identität

$$((H_1 \; H_2) \; K) + ((H_2 \; K) \; H_1) + ((K \; H_1) \; H_2) = 0,$$

woraus

$$(H_1 \; K) + (a_2 \; K + \Sigma \beta_k H_k, H_1)$$
$$- (a_1 \; K + \Sigma \alpha_k H_k, H_2) = 0$$

und durch Entwickelung, indem man die sich aufhebenden Glieder weglässt, folgt eine Gleichung der Form

$$a_1 K + \Sigma \nu_k H_k = 0,$$

die identisch bestehen muss indem die H_k und K unabhängig sind. Hiermit ist der Beweis geführt.

Indem wir diesen Satz auf den vorliegenden Fall anwenden, erkennen wir, dass $a_2 = 0$ ist, und dass daher

$$\eta = a_0 y + a_1 y^2 + f(x)$$

oder da a_0 offenbar gleich Null gesetzt werden kann

$$\eta = a_1 y^2 + f(x).$$

Indem wir diesen Werth in die zweite Bedingungs-Gleichung einsetzen, kommt

$$a_1 y^2 - f(x) = b_0 + 2b_1 y + b_2 (a_1 y^2 + f(x))$$

woraus folgt, dass $b_0 = b_1 = 0$, und dass a_1 und $f(x)$ nicht gleichzeitig von Null verschieden sein können. Wir erhalten daher die beiden Fälle

$$\eta = y \quad und \quad \eta = f(x).$$

Indem wir dies mit dem Obenstehenden verbinden, erkennen wir, dass es nur drei Typen dreigliedriger Gruppen giebt:

$X_1 q$
$X_2 q$
$X_3 q$

$X_1 q$
$X_2 q$
yq

q
yq
$y^2 q$

Sei jetzt $q \; yq \; y^2 q \; \eta q$ irgend eine viergliedrige Gruppe. Nach dem vorangehenden Satze bestehen Relationen der Form

$$\frac{d\eta}{dy} = a_0 + 2a_1 y + 3a_2 y^2,$$

$$y\frac{d\eta}{dy} - \eta = b_0 + 2b_1 y + 3b_2 y^2 + b\eta,$$

$$y^2\frac{d\eta}{dy} - 2y\eta = c_0 + 2c_1 y + 3c_2 y^2 + c\eta.$$

Die erste zeigt, dass η die Form besitzt

$$\eta = a_0 y + a_1 y^2 + a_2 y^3 + f(x)$$

besitzt, oder da a_0 und a_1 ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden können

$$\eta = a_2 y^3 + f(x).$$

Die zweite Bedingungs-Gleichung, zeigt, dass η entweder die Form $\eta = y^3$ oder $\eta = f(x)$ besitzt. Da indess wegen der dritten Gleichung diese beiden Formen unmöglich sind, folgt dass *keine viergliedrige Gruppe die Form q, yq, y^2q, ηq besitzt.*

Es genügen jetzt zwei Ueberlegungen zur Bestimmung aller Gruppen der Form $\eta_k q$. Einerseits suche ich die allgemeine $(r+1)$-gliedrige Gruppe der Form

$$X_1 q \ X_2 q \ldots X_r q \ \eta q.$$

Indem wir ganz wie in dem Falle $r = 2$ verfahren, erkennen wir, dass wir annehmen können, dass Gleichungen der Form

$$X_1 \frac{d\eta}{dy} = \Sigma\, \alpha_i X_i$$

$$X_2 \frac{d\eta}{dy} = \Sigma\, \beta_i Y_i$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$X_{r-1} \frac{d\eta}{dy} = \Sigma\, \lambda_i X_i$$

$$X_r \frac{d\eta}{dy} = \Sigma\, \mu_i X_i + \mu\,\eta$$

bestehen. Die erste Gleichung zeigt, dass $\frac{d\eta}{dy}$ eine Funktion von x ist, und lass uns zunächst voraussetzen, dass sie von

Null verschieden ist. Alsdann muss in der letzten Gleichung $\mu = 0$ sein, indem sonst die rechte Seite dieser Gleichung die Grösse y enthielte, während die linke eine Funktion von x ist. Ist andererseits $\frac{d\eta}{dy} = 0$ so müssen alle μ_k insbesondere auch μ verschwinden, so dass μ unter allen Umständen gleich Null gesetzt werden kann.

Folglich bestehen, welche auch die Constanten A_i sind, Relationen der Form

$$(A_1 X_1 + \ldots + A_r X_r) \frac{d\eta}{dy} = B_1 X_1 + \ldots + B_r X_r.$$

Insbesondere ist

$$(B_1 X_1 + \ldots + B_r X_r) \frac{d\eta}{dy} = C_1 X_1 + \ldots + C_r X_r,$$

woraus

$$(A_1 X_1 + \ldots + A_r X_r) \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^2 = C_1 X_1 + \ldots + C_r X_r,$$

und im Allgemeinen

$$(A_1 X_1 + \ldots + A_r X_r) \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^k = L_1 X_1 + \ldots + L_r X_r.$$

In dieser Gleichung gebe ich k die Werthe $0\,1\,2 \ldots r$ und lasse dabei $A_1 \ldots A_r$ feste Grössen bezeichnen. Alsdann erhalte ich $r + 1$ Gleichungen, aus denen ich eine Gleichung der Form

$$\sum_i (A_i X_i) . \left\{ K_0 + K_1 \frac{d\eta}{dy} + \ldots + K_r \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^r \right\} = 0$$

erhalte; folglich wird

$$K_0 + K_1 \frac{d\eta}{dy} + \ldots + K_r \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^r = 0,$$

welche Gleichung zeigt, dass $\frac{d\eta}{dy}$ eine Constante ist, so dass man setzen kann

$$\eta = K y + f(x).$$

Ist hier K verschieden von Null, kann man durch Einführung von $Ky + f(x)$ als neues y erreichen, dass $\eta = y$ wird. Man erhält also nur die beiden Gruppen

$$X_1 q \ldots \quad X_r q \; X_{r+1} q$$
$$X_1 q \ldots \quad X_r q \; y q.$$

Andererseits habe ich die allgemeinste Gruppe der Form

$$X_1 q \ldots \quad X_r q, y q, \eta q \quad (r > 1)$$

zu bestimmen. Da

$$(X_k q\,,\; y q) = X_k q$$

ist, so bestehen (Satz 14) Relationen der Form

$$X_k \frac{d\eta}{dy} = \Sigma\, c_{ki}\, X_i + c_k\, y$$

und da r grösser als 1 ist, und es in Folge dessen jedenfalls zwei solche Gleichungen giebt, so kann y eliminirt werden, und darnach $\frac{d\eta}{dy}$ als *Funktion von* x bestimmt werden. Hieraus aber folgt, dass alle c_k gleich Null sind. Hiermit haben unsere Gleichungen dieselbe Form wie im vorangehenden Falle angenommen. Folglich ist $\frac{d\eta}{dy}$ eine Constante:

$$\eta = Ky + f(x)$$

und dabei kann K sogar ohne Beschränckung gleich Null gezetzt werden. Die hinzutretende Transformation hat daher die Form $f(x)\, q$.

Die gefundenen Resultate lassen sich folgendermassen zusammenfassen.

Eine jede Gruppe der Form $\eta_k\, q$ *gehört einer der drei folgenden Typen*

$$\begin{array}{|c|}\hline X_1 q \\ X_2 q \\ \\ \\ X_r q \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline X_1 q \\ X_2 q \\ \vdots \\ X_r q \\ y q \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline q \\ y q \\ y^2 q \\ \hline\end{array}$$

Gruppen, bei denen die Curven einer Schaar eingliedrig transformirt werden.

Ich werde jetzt alle Gruppen der Form

$$\eta_1 q \quad \eta_2 q \ldots \eta_r q \quad p + \eta q$$

bestimmen. Dabei weiss ich, dass die $\eta_k q$ eine Untergruppe bilden, die eine unter den drei soeben aufgestellten Formen besitzt. Zu bemerken ist ferner, dass jedes $(\eta_k q, p + \eta q)$ sich offenbar linear durch die $\eta_k q$ ausdrücken muss.

Ich suche zunächst alle Gruppen der Form $q, y q, y^2 q, p + \eta q$. Es bestehen Gleichungen der Form

$$d_y \eta = a_0 + 2a_1 y + 3a_2 y^2,$$

$$y\, d_y \eta - \eta = b_0 + 2b_1 y + 3b_2 y^2,$$

$$y^2 d_y \eta - 2y\eta = c_0 + 2c_1 y + 3c_2 y^2.$$

Die erste zeigt, dass

$$\eta = a_0 y + a_1 y^2 + a_2 y^3 + f(x),$$

oder da wir ohne Beschränckung $a_0 = a_1 = 0$ setzen können

$$\eta = a_2 y^3 + f(x);$$

die letzten Gleichungen zeigen, dass $a_2 = f(x) = 0$ ist, so dass $\eta = 0$ wird. Unsere Gruppe besitzt daher die Form

$$q, \; yq, \; y^2 q, \; p$$

Jetzt suchen wir alle Gruppen der Form

$$X_1 q \quad X_2 q \ldots X_r q, p + \eta q.$$

Ist $r = 0$, kann man die Variable y derart wählen, dass $\eta = 0$ wird, so dass die Gruppe die einzige Transformation p enthält.

Hat r einen beliebigen Werth, so kann man immer Theorem IV mit zugehörigem Zusatze anwenden. Man kan daher annehmen, dass Relationen der Form

$$\frac{dX_1}{dx} - X_1 \frac{d\eta}{dy} = a_1 X_1$$

$$\frac{dX_2}{dx} - X_2\frac{d\eta}{dy} = b_1 X_1 + b_2 X_2$$

$$\frac{dX_3}{dx} - X_3\frac{d\eta}{dy} = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\frac{dX_r}{dx} - X_r\frac{d\eta}{dy} = l_1 X_1 + \ldots\ldots + l_r X_r$$

bestehen. Man wähle, was immer möglich ist, die Variable y derart dass $X_1 = 1$ wird, sodann nimmt die erste Gleichung die Form

$$\frac{d\eta}{dy} = a$$

woraus

$$\eta = ay + f(x),$$

während die übrigen die gemeinsamme Form

$$(1) \qquad \frac{dX_k}{dx} = g_1 X_1 + \ldots + g_k X_k$$

annehmen. Ich setze

$$y' = y + \varphi(x),$$

woraus

$$\delta y' = \delta y + \varphi_x' \, \delta x,$$

also wird

$$p + \eta q = p + [a(y' - \varphi) + f + \varphi'].$$

Hier bestimmen wir $\varphi(x)$ derart, dass

$$\varphi' - a\varphi + f = 0$$

wird, woraus

$$p + \eta q = p + ay' q.$$

Die Gruppe erhält somit die Form

$$q, X_2 q, X_3 q, \ldots X_r q, \; p + ay q,$$

wobei die X_k durch die Gleichungen (1) bestimmt sind. Je nach den Werthen der Constanten g können mehrere Specialfälle eintreten, die wir indess nicht näher specialisiren brauchen.

Zurüch steht die Bestimmung aller Gruppen der Form

$$q\,X_2\,q\,\ldots\,X_r\,q,\,yq,\,p+\eta\,q.$$

Es ist

$$\frac{d\eta}{dy}=\Sigma\,\alpha_i\,X_i+2\alpha y,$$

woraus

$$\eta=y\,\Sigma\,\alpha_i\,X_i+\alpha y^2+f(x).$$

Nun aber kommt durch Anwendung der Operation yq

$$y\,\eta_y'-\eta=\Sigma\,\beta_i\,X_i+2\beta y,$$

woraus durch Eingesetzung hervorgeht, dass $\alpha=0$, $f(x)=0$ ist, so dass es kommt

$$\frac{d\eta}{dy}=\Sigma\,\alpha_i\,X_i.$$

Die übrigen Bedingungs-Gleichungen nehmen die Form

$$\frac{d\,X_k}{dx}-X_k\,\frac{d\eta}{dy}=g_1\,X_1+\ldots+g_r\,X_r+g\,y$$

wo g gleich Null sein muss, indem die rechte wie die linke Seite nur x enthalten darf. Durch Anwendung von Theorem IV mit Zusatze kann daher die Gruppe $X_k\,q$ eine solche Form,

$$X_1'\,q\,\ldots\,X_r'\,q$$

erhalten, dass

$$\frac{d\,X_k'}{dx}-X_k'\,\frac{d\eta}{dy}=k_1\,X'_1+\ldots+k_k\,X_k'.$$

Ferner kann man erreichen, dass $X_1'=1$ wird, sodass

$$\frac{d\eta}{dy}=K,\ \eta=Ky+f(x).$$

Hier kann K ohne Beschränckung gleich Null gesetzt werden, und durch Anwendung der Operation yq ergiebt sich, dass $f(x)=0$ ist. Indem wir dies mit dem früher gefundenen verbinden, erhalten wir den Satz.

Theorem. Eine jede Gruppe der Form $\eta_k q, p + \eta q$ *gehört einer unter den folgenden Typen*

$$\boxed{\begin{array}{r} q \\ y q \\ y^2 q \\ p \end{array}} \qquad \boxed{p} \qquad \boxed{\begin{array}{r} q \\ X_1 q \\ X_2 q \\ \\ X_r q \\ p + \varepsilon y q \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{r} q \\ X_1 q \\ \\ X_r q \\ y q \\ p \end{array}}$$

Die X sind Funktionen von x, die durch unmittelbar integrirbare Differential-Gleichungen bestimmt sind.

Gruppen, bei denen die Curven einer Schaar zweigliedrig transformirt werden.

Wir werden alle Gruppen der Form

$$\eta_1 q \ldots \eta_r q, p + \eta_0 q, xp + \eta q$$

bestimmen

A) Es giebt zwei Arten Gruppen der Form

$$p \quad xp + \eta q.$$

Es ist nehmlich jedenfalls

$$\frac{d\eta}{dx} = 0, \quad \eta = f(y)$$

Ist $f = 0$, so erhält man die Form p, xp. Ist f nicht Null, so kann man immer eine solche Funktion von y als neues y wählen, dass $f = 1$ wird. Man erhält also die beiden Formen

$$p \quad xp, \text{ und } p \quad xp + q$$

B) Zur Bestimmung aller Gruppen der Form

$$q, \; yq, \; y^2 q, p \quad xp + \eta q$$

erhält man die Gleichungen

$$\frac{d\eta}{dy} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2$$

$$y \frac{d\eta}{dy} - \eta = b_0 + b_1 y + b_1 y^2$$

$$y^2 \frac{d\eta}{dy} - 2y\eta = c_0 + c_1 y + c_2 y^2$$

welche zeigen dass $\eta = 0$ ist. Man erhält somit nur die Form

$$q, yq, y^2 q, p, xp$$

C) Um alle Gruppen der Form

$$X_1 q, X_2 q \ldots X_r q \;\; p + \varepsilon y q \;\; xp + \eta q$$

zu finden, anwenden wir Theorem IV mit zugehörigem Zusatze. Man kann immer annehmen, dass die $X_k q$ derart unter den infinitesimalen Transformationen der Form $\Sigma \lambda_l X_i q$ gewählt sind, dass Relationen der Form

$$(X_k q, \; p + \varepsilon y q) = a_{k1} X_1 + \ldots + a_{kk} X_k$$

$$(X_k q, xp + \eta q) = b_{k1} X_1 + \ldots + b_{kk} X_k$$

bestehen. Wir können ferner immer voraussetzen, dass $X_1 = 1$ ist. Alsdann kommt zunächst

$$\frac{d\eta}{dy} = K, \; \eta = Ky + f(x).$$

Folglich kommt

$$\frac{dX_k}{dx} = a_{k1} X_1 + \ldots + a_{kk} X_k$$

$$x \frac{dX_k}{dx} = b_{k1} X_1 + \ldots + b_{kk} X_k.$$

Indem wir daher erinnern, dass $X_1 = 1$ ist, ergiebt sich zunächst dass $X_2 = x$, darnach dass

$$X_3 = x^2, \; X_4 = x^3 \ldots X_r = x^{r-1}$$

gesetzt werden kann, so dass die Gruppe die Form annimmt

$$q \;\; xq \ldots x^r q \;\; p + \varepsilon y q \;\; xp + (Ky + f(x))\, q.$$

Es besteht dabei eine Relation der Form

$$(p + \varepsilon y q,\ xp + \eta q) = p + \varepsilon y q + \Sigma \nu_i x^i,$$

die sich in die beiden folgenden zerlegt

$$0 = \varepsilon,$$
$$\frac{df}{dx} = \nu_0 + \nu_1 x + \ldots + \nu_r x^r,$$

woraus folgt, dass $f = R x^{r+1}$ gesetzt werden kann. Wir werden nachweisen, dass R im Allgemeinen gleich Null gesetzt werden kann. Wir setzen

$$y' = y + L x^{r+1},\ x' = x,$$

woraus

$$\delta y' = \delta y + L(r+1) x^r \delta x,$$

also kommt

$$q = q' \quad xq = x' q' \ldots x^r q = x'^r q'$$
$$p = p' + L(r+1) x^r q'$$
$$xp + (Ky + R x^{r+1}) q = x' p' + (Ky' + R' x'^{r+1}) q'$$

wo

$$R' = R + L(r + 1 - K);$$

ist daher K verschieden von $r + 1$, so kann L derart gewählt werden, dass $R' = 0$ wird. Unsere Gruppe besitzt daher die eine unter den beiden Formen

q
xq
$x^r q$
p
$xp + Kyq$

q
xq
$x^r q$
p
$xp + [(r+1) y + R x^{r+1}] q$

D) Zurück steht die Bestimmung aller Gruppen der Form

$$q\ X_1 q \ldots X_r q,\ yq,\ p,\ xp + \eta q.$$

Es ist

$$\frac{d\eta}{dy} = \Sigma \nu_i X_i + 2\rho y,$$

$$\eta = \rho y^2 + y \Sigma \nu_i X_i + f(x);$$

durch Anwendung der Operation yq kommt

$$y \frac{d\eta}{dy} - \eta = \Sigma \lambda_i X_i + \lambda_0 y,$$

woraus durch Einsetzung folgt, dass $\rho = 0$, $f(x) = 0$ ist, so dass

$$\eta = y \Sigma \nu_i X_i$$

wird. In Folge dessen muss in den Relationen

$$(X_k q, xp + \eta q) = \Sigma \mu_i X_i q + \mu_0 y q$$

die Grösse μ_0 gleich Null sein. Also lehrt Theorem IV mit Zusatz, dass man annehmen kann, dass Relationen der Form

$$(X_k q, p) = a_{k1} X_1 + \ldots + a_{kk} X_k$$

$$(X_k q, xp + \eta q) = b_{k1} X_1 + \ldots + b_{kk} X_k$$

bestehen. Da $X_0 = 1$ angenommen ist, kommt zunächst

$$\frac{d X_k}{dx} = a_{k1} X_1 + \ldots + a_{kk} X_k$$

$$x \frac{d X_k}{dx} = b_{k1} X_1 + \ldots + b_{kk} X_k$$

und da $X_0 = 1$ ist, folgt wie früher

$$X_1 = x, \; X_2 = x^2 \ldots X_r = x^r.$$

Durch Anwendung von yq ergiebt sich dass η gleich Null gesetzt werden kann.

Indem wir unsere Resultate zusammenfassen, können wir den folgenden Satz aussprechen:

Theorem. Jede Gruppe, bei der die Curven einer Schaar zweigliedrig transformirt werden, gehört einer unter den folgenden Typen

$$\boxed{\begin{array}{c} p \\ xp \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} p \\ xp + q \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} q \\ yq \\ y^2 q \\ p \\ xp \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} q \\ xq \\ \\ x^r q \\ p \\ xp + Kyq \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} q \\ x\, q \\ \\ x^r q \\ p \\ xp + ((r+1)\, y + L\, x^{r+1})\, q \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} q \\ xq \\ \vdots \\ x^r q \\ yq \\ p \\ xp \end{array}}$$

Gruppen, bei der die Curven einer Schaar dreigliedrig transformirt werden.

Bei der Bestimmung aller Gruppen, welche die Curven einer Schaar dreigliedrig transformiren, giebt es nach dem Obenstehenden sechs Fälle, die besonders zu berücksichtigen sind.

1) Alle Gruppen der Form

$$p\,,\ xp\quad x^2 p + \eta q$$

sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{d\eta}{dx} = 0\,,\ \frac{d\eta}{dx} = \eta = 0.$$

2) Alle Gruppen der Form

$$p\quad xp + q\quad x^2 p + \eta q$$

sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{d\eta}{dx} = 2\,,\ x\frac{d\eta}{dx} + \frac{d\eta}{dy} = \eta\,,$$

$$\eta = 2x + B e^y$$

so dass die Gruppe wird

$$p, \ xp + q, \ x^2 p + (2x + Be^y)\, q$$

oder wenn man $y' = e^y$ als neues y einführt,

$$p \ \ xp + yq \ \ x^2 p + (2xy + By^2)\, q.$$

3) Alle Gruppen der Form

$$q, yq, y^2 q, p, xp, x^2 p + \eta q$$

sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{d\eta}{dy} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2,$$

$$y \frac{d\eta}{dy} - \eta = b_0 + b_1 y + b_2 y^2,$$

welche zeigen, dass η gleich Null ist.

4) Alle Gruppen der Form

$$q \ xq \ldots x^r q \ \ p \ xp + Kyq \ \ x^2 p + \eta q$$

befriedigen die Gleichungen

$$\frac{d\eta}{dy} = \Sigma \nu_i x^i,$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \Sigma \mu_i x^i + 2Ky,$$

woraus folgt

$$\eta = Ly + Mx^{r+1} + 2Kxy;$$

ferner ist

$$(xp + Kyq, x^2 p + \eta q) = x^2 p + \eta q + \Sigma \lambda_i x^i,$$

woraus folgt

$$(K - r) M = 0, \ L = 0.$$

Ferner ist

$$(x^r q, \ x^2 p + \eta q) = \Sigma \rho_i x^i,$$

woraus folgt dass

$$2K = r$$

ist, so dass die Gruppe wird, wenn $r > 0$

$$q \quad xq \ldots x^r q \quad p \quad 2xp + ryq \quad x^2 p + rxy\, q$$

dagegen wenn $r = 0$,

$$q \quad p \quad xp \quad x^2 p + Mxq,$$

wo M entweder gleich Null ist, oder auch gleich 1 gesetzt werden kann. In dem letzten Falle ist es zweckmässig e^y als neues y einzuführen; alsdann nimmt die Gruppe die *lineare* Form

$$yq \quad p \quad xp \quad x^2 p + xyq.$$

5) Zur Bestimmung aller Gruppen der Form

$$q \quad xq \ldots x^r q \quad p \quad xp + [(r+1)\, y + L\, x^{r+1}]\, q$$
$$x^2 p + \eta q$$

wo L von Null verschieden angenommen werden kann, haben wir zunächst die Gleichungen

$$\frac{d\eta}{dy} = \nu_0 + \nu_1 + \ldots + \nu_r x^r$$

$$\frac{d\eta}{dx} = 2\,(r+1)\, y + 2\, L\, x^{r+1} + \Sigma\, \mu_i\, x^i$$

woraus

$$\eta = 2\,(r+1)\, yx + \frac{2}{r+2} L x^{r+2} + M x^{r+1} + Ny.$$

Diesen Werth substituiren wir in die Bedingungs-Gleichung

$$(xp + \eta_0\, q,\, x^2 p + \eta q) = x^2 p + \eta q + \Sigma\, \lambda_i\, x^i\, q,$$

und finden dadurch mehrere Relationen, insbesondere ergiebt sich, dass $L = 0$ ist. Dies steht indess im Widerspruche mit unseren Voraussetzungen, so dass dieser Fall Nichts giebt.

6) Zurück steht nur die Bestimmung aller Gruppen der Form

$$q \quad xq \ldots x^r q \quad yq \quad p \quad xp \quad x^2 p + \eta q.$$

Man findet

$$\frac{d\eta}{dy} = \Sigma\, \alpha_i\, x^i + \alpha\, y,$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \Sigma\, \beta_i\, x^i + \beta y,$$

$$y\frac{d\eta}{dy} - \eta = \Sigma\, \gamma_i\, x^i + \gamma y,$$

woraus sich ergiebt, dass $\eta = Byx$. Durch Anwendung von der Operation $x^r q$ ergiebt sich dass $B = r$ ist. In dieser Weise erhält man die Gruppe

$$q \quad xq \ldots x^r q \quad yq \quad p \quad xp \quad x^2 p + rxyq.$$

Indem wir unsere Resultale zusammenfassen, erhalten wir das folgende Theorem.

Theorem. Jede Gruppe, bei der die Curven einer Schaar dreigliedrig transformirt werden, gehört einer unter den folgenden Typen

$$\boxed{\begin{array}{c} p \\ xp \\ x^2 p \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} p \\ xp + yq \\ x^2 p + (2xy + By^2)\, q \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} yq \\ p \\ xp \\ x^2 p + xyq \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} q \\ yq \\ y^2 q \\ p \\ xp \\ x^2 p \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} q \\ xq \\ \\ x^r q \\ p \\ 2xp + ryq \\ x^2 p + rxyq \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} q \\ xq \\ \\ x^r q \\ p \\ xp \\ yq \\ x^2 p + rxyq \end{array}}$$

Hiermit sind alle Gruppen von Punkt-Transformationen einer Ebene erschöpft. Zugefügt soll hier nur noch sein, dass alle Gruppen sich naturgemäss in die folgenden Classen zusammenfassen lassen

1) Gruppen, die keine Curven-Schaar invariant lassen.

Dieselben gehen durch zwekmässigen Coordinaten-Wahl in *lineare* Gruppen über.

2) Gruppen die zwei Curven-Schaaren invariant lassen. Dieselben lassen sich umwandeln in *conforme* Punkt-Transformationen, die Kreise in Kreise überführen. Hierher gehören insbesondere Gruppen, die einfach unendlich viele Curven-Schaaren invariant lassen. Als Typen dieser letzten Arten kann man die Translationen verbunden mit der Aehnlichkeits-Transformation betrachten.

3) Gruppen, die eine und nur eine Curven-Schaar invariant lassen. Die hierher gehörigen Gruppen scheinen bis jetzt wenig Beachtung gefunden zu haben.

Es lässt sich leicht entscheiden, welche Gruppen der beiden letzten Classen sich in lineare umwandeln lassen.

SÄTZE ÜBER MINIMALFLÄCHEN.

VON

SOPHUS LIE.

Die Aufgabe, durch eine gegebene Linie eine Minimalfläche zu legen, deren Normalen längs der Curve ebenfalls gegeben sind, wurde wenn ich nicht irre, zuerst allgemein erledigt von *Björling*.[1]) Sind $x\,y\,z$ die Coordinaten der Punkte der gegebenen Curve, ausgedrückt als Funktionen einer unabhängigen Variable t, sind ferner X, Y, Z die Cosinus der Winkel, welche die gegebene Normale in dem betreffenden Punkte mit den Coordinaten-Axen bildet, so wird, wenn man setzt

$$\begin{aligned} U &= x + i \int (Z dy - Y dz) \\ V &= y + i \int (X dz - Z dx) \qquad (1) \\ W &= z + i \int (Y dx - X dy) \end{aligned}$$

die gesuchte Minimalfläche (Man vergleiche *Schwarz* Crelle-Borchardt's Journal Bd. 80, p. 291), bestimmt durch die Gleichungen

$$x' = R\,U,\ y' = R\,V,\ z' = R\,W.$$

[1]) Später haben *Bonnet* und *Weierstrass* sich mit Erfolge mit demselben Probleme beschäftigt.

In 1872 stellte *Schwarz* die Aufgabe, die Minimalfläche zu bestimmen, die eine vorgelegte ebene Curve als geodätische Curve enthält. Nun ist allerdings dieses Problem nur ein specieller Fall des obenbesprochenen Problems, desen allmeine Lösung man kennt. Nicht destoweniger sind die von den Herren *Henneberg* und *Herzog* gegebenen Beantwortungen des speciellen Problems sehr bemerkenswerth. Insbesondere scheint mir der folgende von *Henneberg* entdeckte Satz sehr interessant:

Der Hennebergsche Satz: Enthält eine Minimalfläche eine ebene geodätische Curve, so ist die Fläche algebraisch, wenn die Curve die Evolute einer algebraischen Curve ist, sonst nicht.

Durch synthetische Betrachtungen ist es mir gelungen einige bemerkenswerthe Verallgemeinerungen des *Hennebergschen* Satzes zu finden. Ich erlaube mich diese Verallgemeinerungen hier kürzlich anzugeben. Im Uebrigen beabsichtige ich, bei einer späteren Gelegenheit diese und einige verwandte Gegenstände näher zu besprechen.

I.

Die Minimalfläche, die eine gegebene ebene Krümmungslinie enthält.

Zunächst bemerke ich, dass man in dem Hennebergschen Satze ohne weiter «*Krummungslinie*» statt «*geodätische Curve*» setzen kann.

Es sei in der That die gegebene ebene Krummungslinie gelegen in der xy-Ebene. Alsdann kann man in (1) nach einem bekannten Satze

$$Z = \gamma = \text{Const.}$$

setzen. Ferner ist

$$z = 0, \quad X dx + Y dy = 0.$$

Also kommt, wenn man die Bogenlänge der gegebenen Curve mit s bezeichnet

$$\frac{dx}{Y} = \frac{dy}{-X} = \frac{ds}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \frac{Y\,dx - X\,dy}{1-\gamma^2}.$$

Und durch Einsetzung in (1) folgt

$$U = x + i\gamma y$$
$$V = y - i\gamma x$$
$$W = i\sqrt{1-\gamma^2}\,.\,s.$$

Ist daher die gegebene Curve die Evolute einer algebraischen Curve und also s eine algebraische Funktion von x, so sind U, V, W algebraische Funktionen von x, so dass die erzeugte Minimalfläche wirklich algebraisch ist.

Verlangt man andererseits, dass die erzeugte Minimalfläche algebraisch sein soll, so muss zunächst die gegebene Curve algebraisch sein, das heisst, y ist eine algebraische Funktion von x. Es soll ferner möglich sein U, V, W als algebraische Funktionen einer Variable darzustellen. Und da U und V schon algebraische Funktionen von x sind, so muss auch W, und zugleich s algebraische Funktionen von x sein. Das heisst, die gegebene Curve muss die Evolute einer algebraischen Curve sein. Also

Satz I. Enthält eine Minimalfläche eine ebene Krümmungslinie, so ist die Fläche algebraisch, wenn die Curve die Evolute einer algebraischen Curve ist, sonst nicht.

Dieser Satz ist offenbar eine Verallgemeinerung des *Hennebergschen* Satzes. Denn eine ebene geodätische Curve ist eo ipso eine Krümmungslinie, während eine ebene Krümmungslinie im Allgemeinen keine geodätische Curve ist.

II.

Die Minimalfläche, die eine gegebene Cylinderfläche nach einer geodätischen Curve berührt.

Jetzt betrachte ich die Minimalfläche, die eine gegebene

Cylinderfläche nach einer geodätischen Curve berührt. Ich wähle die Cylinderaxe zur z-Axe. Aldann wird

$$Z = 0, \quad X dx + Y dy = 0$$

woraus, indem wir die Bogenlänge des orthogonalen Querschnitts mitt s bezeichnen

$$\frac{dx}{Y} = \frac{dy}{-X} = ds = Y dx - X dy .$$

Indem wir diese Werthe in (1) einführen und dabei berücksichtigen, dass

$$z = ks, \quad k = \text{Const.}$$

ist, erhalten wir die Gleichungen

$$U = x(1 - ki)$$
$$V = y(1 - ki)$$
$$W = (k + i)s .$$

Setzen wir nun insbesondere voraus, dass k nicht Null ist,[1]) so erkennen wir, dass die erzeugte Minimalfläche jedesmal algebraisch ist, wenn die Curve algebraisch ist. Also

Satz II. Berührt eine Minimalfläche eine Cylinderfläche nach einer geodätischen Curve, die nicht eben ist, so ist die Minimalfläche algebraisch gleichzeitig mit der Curve.

Auch dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des Hennebergschen Satzes. Dabei mache ich zwei Bemerkungen. 1) Jede Minimalfläche, die eine Cylinderfläche nach einer nicht ebenen geodätischen Curve berührt, kann durch Biegung in eine Minimalfläche mit einer ebenen geodätischen Curve übergehen. 2) Zwei beliebige Minimalflächen, die eine Cylinderfläche nach zwei geodätischen Curven berühren, kann durch Biegung verbunden mit einer Aehnlichkeits-Transformation in einander übergeführt werden.

---

[1]) War $k + i = 0$, und war also die gegebene geodätische Curve von der Länge Null, so reducirte die zugehörige Minimalfläche sich zu der betreffenden Curve, vorausgesetzt dass die Cylinderaxe nicht den Kugelkreis träfe.

III.

Die Minimalfläche, die die Evolute einer Raum-Curve nach dem Orte der Krümmungscentra berührt.

Der letzte Satz ist der specielle Fall eines Satzes, der sich auf beliebige Developpablen bezieht. Ich werde denselben *kürzlich* entwickeln.

Zuerst bemerke ich, dass *jede Minimalfläche*

$$\left.\begin{aligned} x &= A\,t + A_1\,\tau \\ y &= B\,t + B_1\,\tau \\ z &= C\,t + C_1\,\tau \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

wo A und A_1 conjugirte Funktionen bezeichnen, *durch die folgende Construktion erhalten werden kann.* Ich betrachte die beiden Minimalcurven[1]) (das heisst Curven von Länge Null[2])

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\,A\,t \\ y_1 &= 2\,B\,t \\ z_1 &= 2\,C\,t \end{aligned} \qquad (3)$$

und

$$\begin{aligned} x_2 &= 2\,A_1\,\tau \\ y_2 &= 2\,B_1\,\tau \\ z_2 &= 2\,C_1\,\tau. \end{aligned} \qquad (4)$$

Ich verbinde einen arbiträren Punkt $x_1\ y_1\ z_1$ mit einem arbiträren Punkte $x_2\ y_2\ z_2$ und suche den Mittelpunkt dieser beiden Punkte

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ y &= \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ z &= \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Der Ort dieser Mittelpunkte ist offenbar die vorgelegte Minimalfläche.

Dabei bemerke ich, dass die Tangentenebene der Fläche

[1]) Solche Curven sind, aufgefasst als Ebenengebilde, Minimalflächen.

[2]) Besonders *Darboux* hat sich eingehend mit Curven von Länge Null beschäftigt.

zwei Gerade enthält, die bezüglich mit den zugehörigen Tangenten der Curven (3) und (4) parallel sind. Construirt man daher die um diese beiden Curven umgeschriebene Developpable D, so berührt unsere Minimalfläche diese Developpable nach einer Curve S.

Jetzt construire ich die beiden Developpablen, deren Rückkehrkanten die Curven (3) und (4) sind. Diese Flächen schneiden sich nach einer Curve C, deren Evolute (Polarfläche) eben die Developpable D ist. Und ferner ist S der Ort der Krümmungscentra der Raumcurve C.

Umgekehrt könnte man eine beliebige (reelle) Raumcurve C wählen, sodann eine Developpable um diese Curve und den imaginären Kugelkreis umschreiben. Die Rückkehrkante würde dann im Allgemeinen eine *irreductible* Minimalcurve bilden. Die zugehörige Minimalfläche[1]) würde die Evolute der Raumcurve C nach dem Orte der Krümmungscentra berühren. Also

Satz. Die Minimalfläche, die die Evolute einer algebraischen Raumcurve nach dem Orte der Krümmungs-Mittelpunkte berührt, ist algebraisch.

Es ist nun denkbar, dass die vorgelegte Curve C mehrere Focalen besitzt. Alsdann steht die erzeugte Minimalfläche in demselben Verhaltnisse zu diesen Focalcurven wie zu C. Also

Berührt eine Minimalfläche die Evolute einer Raumcurve C nach dem Orte der Krümmungs-Mittelpunkte, so steht sie in demselben Verhältnisse zu den Evoluten aller Focalcurven von C.

Ich bemerke jetzt, dass die Gleichungen unserer Minimalfläche auch folgendermassen geschrieben werden können

$$x = (At + M) + (A\tau - M)$$
$$y = (Bt + N) + (B\tau - N)$$
$$z = (Ct + P) + (C\tau - P)$$

[1]) Diese Fläche ist somit im Allgemeinen einen Doppelfläche.

wobei $M\ N\ P$ arbiträre Constanten bezeichnen. In Folge dessen giebt es dreifach unendlich viele Curven-Paare (3) (4), welche dieselbe Minimalfläche erzeugen. Also

Jede algebraische Minimalfläche wird von dreifach unendlich vielen Evoluten algebraischer Raumcurven nach dem Orte der Krümmungs Mittelpunkte berührt.

Ist eine beliebige Minimalfläche vorgelegt, so ist es immer möglich diejenige Differential-Gleichung dritter Ordnung zu integriren, deren Integralcurven die besprochenen Berührungscurven sind.

Setzt man, indem man mit m und n zwei beliebige Zahlen bezeichnet,

$$\xi_1 = \frac{m+n}{m} A t$$

$$\eta_1 = \frac{m+n}{m} B t \qquad (5)$$

$$\zeta_1 = \frac{m+n}{m} C t$$

und

$$\xi_2 = \frac{m+n}{n} A_1 \tau$$

$$\eta_2 = \frac{m+n}{n} B_1 \tau \qquad (6)$$

$$\zeta_2 = \frac{m+n}{n} C_1 \tau$$

so bestimmen die Gleichungen

$$x = \frac{m\,\xi_1 + n\,\xi_2}{m+n}$$

$$y = \frac{m\,\eta_1 + n\,\eta_2}{m+n}$$

$$z = \frac{m\,\zeta_1 + n\,\zeta_2}{m+n}$$

wiederum dieselbe Minimalfläche wie die Gleichungen (2). Unserer Fläche berührt daher die um die Minimalcurven (5) und (6) umgeschriebene Developpable nach einer gewissen Curve. Wickelt man die Developpable in eine Ebene ab, so wird die Berührungscurve die schiefe Fusspunktcurve eines gewissen Punkts hinsichtlich derjenigen Curve, in die die Rückkehrkante übergegangen ist. Also

Jede Minimalfläche berührt fünffach unendlich viele Developpablen nach geodätischen Fusspunktcurven[1]) *der betreffenden Rückkehrkante.*

Ist insbesondere eine solche Developpable ein Kegel, so ist die Fusspunktcurve ein geodätischer Kreis.

Ich werde jetzt insbesondere solche algebraische Developpablen betrachten, deren Abwickelung in eine Ebene durch *algebraische* Operationen geleistet wird, anders ausgesprochen solche Developpablen, die zu zweifach unendlich vielen algebraischen Raumcurven Evolute ist. Auf einer solchen Developpablen liegen zwei Schaaren algebraischer Minimal-Curven. Daher zeigen die vorangehenden Entwickelungen, dass eine solche Developpable jedenfalls von dreifach unendlich vielen algebraischen Minimalflächen berührt wird.[2]) Ist insbesondere die betreffende Developpable ein Kegel oder eine Cylinderfläche, so erhält man jedoch nur zweifach unendlich viele eingeschriebene Minimalflächen.

---

[1]) Bei *Biegung* gehen diese Curven in die entsprechenden Curven der neuen Fläche über.

[2]) Kennt man zwei algebraische Minimalfläche, die in einer Developpable eingeschrieben sind, so findet man leicht unendlich viele solche Fläche, die in derselben Developpable eingeschrieben sind. Dies kann man anwenden auf die Doppeldeveloppable einer Minimalfläche, welche Developpable übrigens im Allgemeinen zerfällt.

IV.

Minimalflächen mit einer ebenen geodätischen Curve.

Jetzt werden wir uns auf Minimalflächen beschränchen, die eine ebene geodätische Curve E:

$$z = 0, f(xy) = 0$$

enthalten. Und lass uns mit *Henneberg* voraussetzen, dass E die Evolute einer reellen algebraischen Curve C:

$$z = 0, \varphi(xy) = 0$$

ist. Ich nenne die Ordnung und Classe der Evolute E bezüglich o_e und c_e. Ferner sei ε die Zahl der parallelen Tangenten, die zu der Curve C gezogen werden können.

Ich construire die Developpable, die um C und den Kugelkreis umgeschrieben ist. Die Rückkehrkante dieser Developpable[1]) ist eine Minimalcurve, deren Ordnung gleich $2\,o_e$, deren Rang gleich $2\,c_e$ ist. Die Multiplicität des Kugelkreises auf der Developpable ist gleich ε. In Folge dessen ist die Classe der erzeugten Minimalfläche (die nach unseren Voraussetzungen eine Doppelfläche ist) gleich $\varepsilon\,(2\,c_e - \varepsilon)$. Also

Enthält eine algebraische Minimalfläche eine reelle ebene geodätische Curve, deren Classe gleich c_e ist, so ist die Classe der Fläche gleich $\varepsilon\,(2\,c_e - \varepsilon)$. ε ist die Zahl der parallelen reellen Tangentenebenen der Fläche, ε ist zugleich die Zahl der parallelen Tangenten derjenigen Curve, deren Evolute die gegebene geodätische Curve ist.

Die Ordnung der erzeugten Minimalfläche bestimmt man nach den allgemeinen Regeln, die ich bei einer anderer Gelegenheit gegeben habe. Hier bemerke ich nur, dass diese Zahl nie grösser als

---

[1]) Wir beschränken uns hier auf den Fall, dass diese Developpable nicht zerfällt. Der zweite Fall liesse sich ganz ebenso erledigen. In diesem Falle ist die obenstehende Formel für die Classe der erzeugten Minimalfläche mit 2 zu dividiren

$$o_c\,(2\,o_c - 1)$$

ist.

Es sei jetzt die Curve C symmetrisch z B hinsichtlich der x-Axe. Alsdann ist auch die Evolute E symmetrisch hinsichtlich dieser Linie und folglich ist, wie *Herzog* und *Henneberg* bemerken, auch die Fläche symmetrisch hinsichtlich der zx-Ebene. Die gemachten Voraussetzungen führen jedoch weiter. Denn die Curve C besitzt eo ipso eine *ebene* Focalcurve, die in der zx-Ebene gelegen ist, und die Evolute dieser Focalcurve ist eine neue ebene geodätische Curve unserer Fläche.

Ist die ebene Curve C, die in der xy-Ebene gelegen ist, symmetrisch hinsichtlich der x-Axe, so hat unsere Curve bekanntlich eine ebene Focalcurve, die in der zx-Ebene liegt. Diejenige Minimalfläche, die C's Evolute als ebene geodätische Curve enthält, enthält zugleich die Evolute der Focal-Curve als geodätische Curve.

Ist die Curve C z. B. eine Ellipse, so giebt es bekanntlich zwei Symmetrieaxen, nnd zwei ebene Focalkegelschnitte, unter denen jedoch einer imaginär ist. Die Minimalfläche, die die Evolute einer Ellipse als geodätische Curve enthält, enthält also zugleich die Evoluten der beiden Focalkegelschnitte als geodätische Curven. (Man vergleiche *Herzog* und *Henneberg's* Arbeiten). Die betreffende Fläche ist nach unserer allgemeinen Formel von der 12ten Classe.[1])

Endlich werde ich voraussetzen, dass die Gleichung der Curve: $\varphi\,(xy) = 0$ zugleich die Form

$$\varphi\,(-x, \,-y) = 0$$

erhalten kann. In diesem Falle ist auch die Bonnet'sche Bie-

[1]) Bei einer anderen Gelegenheit werde ich einige Unübereinstimmungen zwischen Hr. *Hennebergs* und meinen Untersuchungen besprechen. In einem Punkte liegt der Irrthum bei mir, wie ich in einer Mittheilung zur Gesellschaft der W. in Christiania angegeben habe. In anderen Punkten, die allerdings in *Hennebergs werthvollen* Arbeit nur eine *untergeordnete* Wichtigkeit haben, scheint es mir, dass sich *Henneberg* geirrt hat.

gungsfläche im Allgemeinen eine Doppelfläche, und also ist ihre Classe gleich derjenigen der ursprünglichen Fläche.

Hier möge endlich explicite ausgesprochen sein, dass die Biegungsfläche einer Minimalfläche im Allgemeinen *dieselbe Classe* wie die ursprüngliche Fläche besitzt. Ist jedoch die eine unter diesen beiden Flächen eine Doppelfläche, so ist ihre Classe nur halb so gross wie die Classe der zweiten Fläche.

Können überhaupt zwei Minimalcurven in einander übergehen durch eine lineare Transformation, die den Kugelkreis invariant lässt, so besitzen die entsprechenden Minimalflächen im Allgemeinen dieselbe Classe. Ist jedoch die eine Fläche eine Doppelfläche, so ist ihre Classe nur halb so gross wie die Classe der zweiten Fläche. Eine interessante Anwendung findet diese Bemerkung auf die beiden Flächen, die die Evolute einer ebenen algebraischen Curve bez. als Krümmungslinie und als geodätische Curve enthalten.[1])

---

[1]) Enthält eine Minimalfläche eine Hauptangentencurve, deren Osculationsebenen constanten Winkel mit einer Gerade L bilden, so ist die Fläche algebraisch, wenn die orthogonale Projection der Curve nach L die Evolute einer algebraischen Curve ist, sonst nicht..

CIDARIA DILUTATA W. V.

AF

W. M. SCHØYEN.

Denne Geometer, der er udbredt over hele Nord- og Mellemeuropa med tilgrændsende Dele af Asien, men som, saavidt der kan skjønnes af Literaturen, ikke i noget andet Land i Europa ved sin Optræden synes at gjøre sig bemærket fremfor saa mangen anden ligesaa almindeligt forekommende Art, optræder af og til, og det efter hvad det lader til ikke saa sjelden, hos os paa vore Høifjelde og i de nordligere Dele af Landet i en saa overordentlig stor Mængde, at Larverne blive en sand Svøbe for Birkeskovene, hvilke de afløve aldeles over store Strækninger ad Gangen. Mærkelig nok synes man ikke i Udlandet at kjende noget til disse Larvers Forekomst paa Birk, som hos os er deres hovedsagelige Næringsplante. Af tydske Forfattere nævner saaledes Borkhausen som Larvens Næringsplanter: *Fagus*, *Alnus* og *Ulmus*, hvortil Wiener-Verzeichniss føier *Quercus* og Wilde *Salix*. Flere end disse Næringsplanter anføres ikke heller i Kaltenbachs «Pflanzenfeinde» 1874, (fraregnet den feilagtige Opgave p. 657, hvor en Forvexling sees at være skeet med *Acidalia dilutaria* Hb.), omendskjønt Dr. Wocke allerede i «Stett. Ent. Zeit.» 1864 havde omtalt Larvens Forekomst paa *Betula* paa Dovrefjeld. At den aldrig i Tydskland gjør sig bemærket paa nogen af de nævnte Træsorter, fremgaar noksom deraf, at den intet Sted findes omtalt i Forstliteraturen dersteds. Det synes saaledes klart, at denne Art først under vore nordlige Breddegrader og blandt vore Fjeldbirkeskove finder de gunstigste Betingelser for sin Formerelse og Udvikling, og at den derfor ogsaa her maa ansees for at have sit rette Hjem. Til Belysning heraf skal jeg tillade mig at anføre nogle Exempler paa disse Larvers Masseoptræden hos os.

Den første offentliggjorte Beretning om en saadan Foreteelse er, saavidt jeg ved, den af Hr. Forstmester Barth i «Norsk Skyttertidende» for 1863 afgivne (ogsaa optaget i «Svenska Jägarfb.s Nya Tidskr. for s. A.), hvor imidlertid den omhandlede Art betegnes som *Geometra brumata*, — en Feiltagelse, der er meget let forklarlig ved disse Arters temmelig betydelige Lighed baade som Larver og Sommerfugle, hvorved de let forvexles af Ikke-Entomologer.[1]) Hr. Barths Beretning (a. St.) lyder saaledes:

«Paa en Reise i nordre og mellem Gudbrandsdalen forrige Aars Sommer (1862) blev jeg under mit Ophold i Lessø imod Slutningen af Juli Maaned af Forstassistent Gløersen gjort bekjendt med, at Fjeldbirkeskoven sammesteds var bleven hærjet af en grøn Mark eller Larve af Spannernes *(Geometræ)* Familie, der i Begyndelsen af Juni Maaned viste sig paa Træerne i talløse Masser, som, efterat have indtil det sidste Blad opædt Birkeløvet over store Dele af de hærjede Strækninger, atter forsvandt efter omtrent en Maaneds Forløb. Da jeg ved min Ankomst den ovenanførte Tid selv fik Anledning til at tage de hærjede Strækninger i Øiesyn, havde Birkeskoven allerede paa enkelte Steder atter begyndt at skyde nye Blade og grøn-

[1]) Efter nærmere Konference med Hr. Barth angaaende denne Sag og yderligere erholdte Oplysninger nærer jeg ingensomhelst Tvivl om, at den omhandlede Art har været *C. dilutata* og ikke *G. brumata*, saameget mere som han ogsaa iagttog de selvsamme Larver paa Dovrefjeld (f. Ex. omkring Fokstuemyren), hvor Dr. Wocke netop samtidig fandt *C. dilutata's* Larver i Mængde overalt; *G. brumata* derimod er aldrig saavidt mig bekjendt iagttaget uden paa Sletlandet hos os, fornemmelig i Haver, Parkanlæg etc., men aldrig paa Fjeldene saaledes som de heromhandlede Larver.

nes, medens den paa andre Steder endnu stod ganske nøgen eller afbladet. Af Larverne fandtes efter megen Søgen kun en og anden, dels paa Træerne, dels nede paa Jorden, hvor Spannernes Larver ialmindelighed forpuppe sig. — — Den var en god halv Tomme lang, græsgrøn med lysere Underside og en gulhvid Stribe paa hver af Siderne.

«Fra Lessø reiste jeg derpaa til Vaage, i hvis høitliggende Skovtrakter (Langmarkens Alminding i Sjodalen) jeg paa forskjellige Steder i Birkeskoven, navnlig hvor den som Følge af Næverflækning eller anden Mishandling havde et tyndt og uvæxterligt Udseende, ligeledes saa, at de nævnte Larver havde været paafærde, om end, som det syntes, ikke paa meget nær i saadan Mængde som i Lessø. Endelig havde ogsaa i Sollien, det næste Sted som jeg besøgte, Fjeldbirkeskoven i sine til Høifjeldet nærmest grændsende Partier været saa stærkt hjemsøgt af de heromhandlede Larver, at den endnu midt i August Maaned, som det blev mig fortalt, paa enkelte Steder frembød det samme nøgne, afribbede Udseende, som jeg havde iagttaget i Lessø. Ved min Ankomst til Sollien i Begyndelsen af September bemærkede jeg mellem Træerne i den nævnte Region tætte Sværme af de smaa, graahvide Sommerfugle, hvortil Larverne nu havde forvandlet sig, og senere hen meldte Forstassistent Gløersen mig fra Lessø, at Birkeskovene og de tilgrændsende Furuskove i Slutningen af August og Begyndelsen af September opfyldtes med store Sværme af de nævnte Sommerfugle, der efter kort Tids Forløb forstørstedelen blev tilintetgjorte af Uveir.»

Senere har Hr. Barth velvilligen tilstillet mig følgende yderligere Meddelelser: «Ogsaa i 1863 bemærkedes Larverne, men i langt ringere Mængde, og i 1864 saa jeg ikke mere til dem. Ganske friske Ungskovspartier (her tales overalt kun om Fjeldbirkelierne — *Betula pubescens* eller *odorata*) var aldeles forskaanede for Larverne, hvorved jeg dog ikke mener, at de ikke enkeltvis kunde forekomme i samme, men uden at ytre nogensomhelst Indflydelse paa deres friske Udseende. Graden af de angrebne Partiers Afløvning stod idetheletaget i Forhold til den Grad af Affældighed og Uvæxterlighed, som de havde erholdt ved Barkflækning eller anden Mishandling (Løvhugst, Risbrud etc.). Store Strækninger af den mest affældige Skov døde ud med det samme og benyttedes af Forstbestyrelsen hele 10 Aar bagefter til Vedudvisning. De mindre affældige af de afløvede Partier skjød allerede samme Sommer nye Knopper og Blade, og alt efter Graden af deres Livskraft frisknede de enten aldeles til igjen eller gik ligeledes ud i de nærmest paafølgende Aar. Larven havde samme Aar ogsaa optraadt paa lignende Maade i Østerdalen, efter hvad man senhøstes fortalte mig. Larverne hang i Traade ned fra Grenene, da jeg saa dem i Slutningen af Juli. I Foldalen var sammenhængende Birkeskovstrækninger i over en halv Mils Længde aldeles graa af saadanne Træer, som Larverne paa en Gang havde dræbt.»

Samtidig med Dhrr. Gløersen og Barths ovennævnte Iagttagelser fandt ogsaa Dr. Wocke, som tilbragte Sommeren 1862 paa Dovrefjeld for at indsamle Lepidoptera, disse Larver i stor Mængde dersteds. Han udtaler sig herom saaledes (Stett. Ent. Zeit. 1864 p. 189): «*Cidaria dilutata* S. V. Larven var hyppig overalt paa Dovrefjeld, hvor der voxede Birk, men almindeligst i Drivdalen, hvor den paa sine Steder fuldstændig havde afløvet Birketræerne og i tusindvis bedækkede Marken, stillende sin Hunger paa alskens Planter, der ellers slet ikke falde i dens Smag; jeg saa den saagar spise paa Aconitum. — En hel Del Sommerfugle fik jeg udklækket dels under Tilbagereisen, dels først i Breslau, hvilke ikke afvige fra den tydske Bjergform.»

Ved St. Hanstid 1875 fandt jeg selv disse Larver paa Fjeldene i Næs i Hallingdal i en saadan Mængde, at hver eneste Birkebusk, fra de største til de mindste kun faa Tommer høie Planter, var aldeles bedækkede af dem, saaledes at de dryssede ned af Træerne og blev hængende paa Klæderne, naar man gik igjennem Birkekrattet, der naturligvis blev aldeles afløvet. Nede i selve Dalen saaes intet til dem.

Om et Par lignende Foreteelser, der ogsaa utvivlsomt maa tilskrives den heromhandlede Art, har jeg modtaget Underretning fra et Par af vore Forstmænd Hr. Forstmester Berbom har saaledes meddelt mig, at han «i Aaret 1864 i Saltdalen fandt Birkeskoven, navnlig den ældre og paa Grund af tidligere Næverflækning sygelige, næsten afløvet af en Geometer, der forekom i en saadan Mængde, at de hvidgraa Sommerfugle ordentlig føg som store Sneflokke omkring Træerne, naar man rystede disse eller kom dem nær. Et saadant Fænomen har ikke senere været iagttaget der; enkeltvis forekomme de vel, men hint Aar var enestaaende.» — Hr. Forstmester Norman har meddelt følgende: «Da jeg i 1852 gjorde en botanisk Reise til Alten, var Birketræerne saa tæt besatte med grønne Larver, at det hørtes, som om det smaaregnede i Skoven, derved at der uophørlig faldt Larver fra Birketræerne ned i Græsset. — ***Salices***, fornemmelig, hvis jeg erindrer ret, ***Salix nigricans***, staar i enkelte Aar ganske afløvet af Insektlarver, ialfald i Vestfinmarken, men dog ikke i den Udstrækning, at det faar nogen Betydning.»

Hvorvidt disse sidstnævnte Larver, der afløve *Salix*-Arterne, tilhøre den heromhandlede Art, ser jeg mig for Tiden ikke istand til at afgjøre, men da dennes Larver ogsaa skal leve paa *Salix*, er det ikke saa urimeligt, at det er Tilfældet. Paa Tromsøen har min Ven Konservator J. Sparre Schneider fundet Larverne hyppige i forrige Sommer paa Birk og fik deraf udklækket den heromhandlede Art.

Sluttelig bemærkes, at de her i Landet iagttagne Larver saavidt vides aldrig have været rød- eller brunflækkede, saaledes som Tilfældet undertiden skal være i Tydskland, men ensfarvet grønne med gulagtige Længdelinier paa Siderne og under lysere.

OM DE I FAST BERG UDGRAVEDE STRANDLINIER.

(MED 1 PLADE).

AF

KARL PETTERSEN.

Langs Norges Kyststrøg er der rig Anledning til at aflæse Vidnesbyrd om Forandringer gjennem Kvartærtiden i det gjensidige Niveauforhold mellem den faste Fjeldgrund og Havstanden. Som saadanne kunne mærkes de af løst Materiale opkastede og ofte trinvis paa hinanden følgende Terrassedannelser, og endvidere de i fast Berg indgravede «Strandlinier». Navnligen danne de sidste i flere Henseender en høist mærkelig Fremtoning. De have ogsaa for lang Tid siden tildraget sig Forskeres Opmærksomhed, og der er allerede om dem fremvoxet en liden Literatur — uden at dog Spørgsmaalets Løsning derved er naaet synderlig fremad. De ere saaledes omhandlede af Keilhau i Nyt Magazin for Naturv. 1 B. 2 og 3 Hefte, — af den franske Geolog Bravais i Comptes rendus X og XV — senere i forskjellige Afhandlinger af Sexe og Kjerulf, og senest af Mohn i «Bidrag til Kundskab til de gamle Strandlinier i Norge» i Nyt Magazin for Naturv. 22 Bd. 1 Hefte (1876). Det er navnlig i denne sidste Afhandling at der findes nedlagt et særdeles righoldigt Undersøgelses-Materiale, der vil kunne danne et godt Underlag for fremtidige Undersøgelser. Mohn efterspore de Forholdet langs et anseeligt Strøg af den norske Kyststrækning, og paaviste derunder, at det her træder frem langt mere almindeligt og tillige mere regelmæssigt end tidligere antaget. Af hans Fremstilling syntes det saaledes at fremgaa, at disse Strandlinier i Forhold til deres Optræden over den nuværende Havflade kunde grupperes i en Række paa hinanden følgende Trin, der over store Strøg optræde med en Regelmæssighed, der synes at skulle kunne give vigtige Bidrag til Belysning af Spørgsmaalet om den skandinaviske Halvøs Stigning gjennem Kvartærtiden. Saa righoldige Bidrag, der herom til Dato er fremlagt af de forskjellige Forskere og navnlig af Mohn, saa vil det dog paa den anden Side være aabenbart, at det hidtil indsamlede Undersøgelses-Materiale dog endnu er for indskrænket til, at der derpaa nu i saa Henseende kan være at bygge mere afgjørende Slutninger. Foruden en langt omhyggeligere Eftersporen af Fænomenets Fremtræden langs vort Lands udstrakte Kyststrøg vil dertil endvidere udfordres en mere udtømmende Behandling i Detaillen, og i saa Henseende navnlig en muligst nøiagtig Bestemmelse af de forskjellige Strandliniers absolute Høide over den nuværende Havstand. Men dernæst vil det vel vise sig nødvendigt at udstrække Undersøgelser i denne Retning udover Polarlandene, f. Ex. langs Spitsbergens Kystrand. Der kan paa Forhaand vel være nogen Grund til at forudsætte, at man der endnu vil kunne finde de Kræfter i Virksomhed, der i sin Tid have udgravet Strandfurerne langs den skandinaviske Halvøs Vestkyst.

At det vilde være af stor videnskabelig Betydning om en saadan systematisk anlagt Undersøgelse kunde blive fremmet, vil være indlysende. Der er vel imidlertid kuns ringe Udsigt til, at en saadan i en nær Fremtid vil kunne blive iværksat. Dertil vil udkræves forholdsvis ret betydelige Pengebeløb, der alene var at skaffe tilveie gjennem en særskilt Beslutning af Landets bevilgende Myndighed.

Indtil videre vil der saaledes antagelig alene kunne ventes yderligere Bidrag fra en og anden Lokalitet, hvor der har været Anledning til noget nærmere at anstille Undersøgelser i denne Retning.

Strandlinier,[1]) der ere horisontal udspændte vei- eller chausséartede Udskjæringer i det faste Berg, ere at udskille fra de af løst Materiale opbyggede Terrassedannelser. Strandlinierne ligesom Terrasserne findes overordentlig hyppig udspændte efter Fjordsiderne og langs Sundløbene, og kunne derunder følges gjennem kortere eller længere sammenhængende Løb. De af løst Materiale byggede Terrasser ere dog i Regelen forholdsvis korte. De træde oftest frem i flere paa hinanden følgende Trin, idet de dog derunder selv gjennem et kortere Strøg kunne variere i en temmelig fremtrædende Grad. Et og samme Trin, som man gjennem længere Strækning har kunnet følge med sin skarpt fremtrædende steile og jevnt høie Endeflade, deler sig paa sine Steder, saa det her kan træde frem som to mer eller mindre udprægede Trin. Terrasserne træder i det hele mere regelløst frem ikke alene med Hensyn til Trinenes Antal, men ogsaa med Hensyn til Høideforholdene over den nuværende Havstand. Alt synes at tyde hen paa, at Terrasserne ikke ere knyttede til mere bestemte Niveauer, men at de derimod kunde være at paavise i hvilkensomhelst Høide mellem Havstanden og det høiest liggende Trin. En langt større Regelmæssighed synes derimod at raade med Hensyn til de i fast Berg indskaarne Strandlinier. De findes saaledes — enkelte uvæsentlige Afbrydelser fraregnede — ofte skarpt at træde frem gjennem flere Miles sammenhængende Løb, idet de derunder bevare

---

[1]) Begrebsbetegnelsen «Strandlinier» er — som det nærmere vil fremgaa af eftørfølgende Fremstilling —, i og for sig her neppe noget fuldt adækvat Udtryk. Da det dog engang har vundet Hævd, vil det indtil videre vel være rettest endnu at holde paa det.

sin Høide uforandret over Havfladen. Langs begge Sider af et og samme Sundløb kan saadanne Strandlinier sees udspændte i samme Høide. Flere af disse i forskjellig Høide over Havfladen indskaarne Strandlinier gjenfindes i de samme Niveauer over store Omraader langs Norges Kyststrøg.

Terrasserne findes i Regelen idetmindste langs Sundløbene rigest udviklede i de lavere, Strandlinierne derimod mere i de forholdsvis høiere Niveauer. Strandlinien træder saaledes ofte frem som det øverste Trin i et Terrassesystem, hvis lavere Trin samtlige ere byggede af løst Materiale.

Medens begge de her omhandlede Dannelser ofte umiddelbart kunne være knyttede til hinanden og løbe over i hinanden, er det paa den anden Side dog aabenbart, at de i det væsentlige maa være at henføre til en noget forskjelligartet Oprindelse.

De af løst Materiale byggede terrasseformige Trin ville — som ovenfor antydet — antagelig kunne være at paavise i *hvilkensomhelst Høide* mellem den nuværende Havflade og det høieste Punkt, hvor der er paavist Vidnesbyrd om, at Havstanden i sin Tid gjennem Kvartærtiden kan have naaet.

Dannelsen af saadanne foregaar fremdeles efter stor Maalestok. De i fast Berg indgravede Strandlinier synes derimod mere knyttede til bestemte Højder. Medens Betingelser for Dannelsen af de første altid ville være tilstede langs Kyststrøgene, synes det derimod aabenbart, at de sidste maa være at tilskrive mere tilfældigt virkende Forholde.

Det er navnlig disse i fast Berg indskaarne Strandlinier, som her nærmere skulle søges omhandlede.

I Tromsø nærmeste Omegn langs efter de her optrædende Sundløb sees i en Høide over midlere Havstand af omkring 130′ (40.7 m.) en saadan Linie, der — saasnart man engang har faaet Øie paa den — allerede i stor Frastand tegner sig skarpt gjennem lange sammenhængende Løb. Langs Tromsø-Sundets østlige Side kan den saaledes følges fra Gaarden

Thomasjord ved Tromsdalens Udmunding nordover forbi Movik og Tunsnes og herfra — efter Mohn — videre hen til Ulfstinden gjennem en Længdestrækning af omkring 3 Mil. Tvende kortere i Høide med denne korresponderende Linier optræder over Tromsøens nordlige Del, — den ene over Gaardene Bredvik og Skattevollen langs Øens østlige Side mod Tromsøsundet, den anden langs Øens vestlige Side mod Sandnessund over Gaarden Sandnes og videre sydover mod Langnes-Gaardene. Tvers over Sandnes-Sund sees paa den store Ø Kvalø i samme Høide over Havfladen en skarpt markeret Linie at spænde sig igjennem et sammenhængende Løb fra Indbøiningen mod Kalfjordeid nordover forbi Gaardene Finland. Denne Linie er her fulgt gjennem en Længde af omkring 1/2 Mil.

Langs Kvaløens sydlige Side gjenfindes den samme Linie, idet den her kan følges fra Strømsbugten vestover mod Malangen og herfra videre langs denne Fjords østlige Side med en samlet Længde af omkring 2 à 3 Mil.

Langs den sydlige Del af Tromsesundet sees en lavere Strandlinie i en Høide mellem 60 à 70′ (18.8—21.9 m.) at spænde sig efter sammes østlige Side over Kalsletgaardene sydover mod Bergs-Gaardene gjennem en Længde af 1 Mil.

Samtlige disse Linier — med Undtagelse af den korte Stump langs Tromsøens vestlige Side mellem Sandnes- og Langnes-Gaardene — findes omtalte af Mohn i hans ovennævnte Afhandling. Idet jeg imidlertid har havt Anledning til skridtvis at opgaa samtlige her nævnte Linier efter lange sammenløbende Strækninger, skal jeg her søge nærmere at fremstille de her fremtrædende Forholde.

1. Strandlinien ved Mjelle (Fig. 1).

Det var i Forsommeren 1876 at jeg først kom til at fæste min Opmærksomhed nærmere ved disse Forholde under en Excursion til Gaarden Mjelle paa Sydsiden af den store udenfor Tromsø liggende Kval-Ø, for der at undersøge de terrasseformige Trin, som her ligger saa klart tilskue fra Seilleden. Over Strøgene her sees to, paa sine Steder tre paa hinanden følgende Trin. Mens de lavere liggende ere opbyggede af løst Materiale, fandtes det øverste indgravet i fast Berg og traadte her frem under i flere Henseender høist mærkelige Forholde.

Dette øverste Trin – den egentlige Strandlinie — ligger i en Høide over Havfladen af 130'[1] (40.7 m.), og danner en i det hele og store seet regelmæssig udgravet horizontal Veibane af en Brede, der kan variere fra 15—40 Skridt (30—80'), medens den efter Længden spænder sig milevidt frem i et horizontalt Løb og derunder regelmæssig følger Fjeldmassens Bugtninger og Afbøininger i Dagfladen. Naar man fra Furens Bundflade lader Blikket løbe hen til begge Sider efter dennes Længderetning, sees den som en bredere eller smalere Veibane at strække sig hen til begge Sider, saalangt Øiet kan naa, i samme Horizontal-Plan. Furen træder derunder frem som en saa regelmæssig Veibane, at der uvilkaarlig vækkes en Forestilling om et planmæssigt udført Anlæg. Saaledes udpræget optræder den i Regelen langs den hele Strækning fra Mjelle, hvor den afsluttes i Mjelle-Elvens høiest liggende af løst Materiale byggede Terrasseflade og vestover til Kvalnes-Gaardene, hvor den ligeledes afsluttes i en Terrasse-Flade, nemlig Kvalnesdalens vide Terrasse-Flade. Denne ligger ganske i samme Høide som den indgravede chausséartede Fure, saa begge Flader ganske løber over i hinanden. Mjelles Strandlinie er skridtvis fulgt gjennem hele denne Strækning efter en Længde af omkring ½ Mil og viser her overalt et ensartet Præg. Fra begge de her nævnte Endepunkter kan Strandlinien endvidere med Øiet følges paa den ene Side fra Mjelle-Elven østover til ind imod Strømsbugt, fra Kvalnes derimod vestover ud imod Engenes. Langs den opgaaede Del af Linien findes Bundfladen paa

[1]) Af Mohn ved Barometermaaling bestemt til 129' over Middelvandstand.

sine Steder dækket med Grønsvær, oftest træder derimod det faste Berg udækket frem. I sidste Tilfælde er den hyppig ujevn og smaahumpet, idet den granitiske Bergart, hvori Furen er indskaaret, her har lidt under Atmosfæriliernes langvarige Indvirkning. I det store bevarer dog Bundfladen sit jevnt horizontale Præg, hvilket navnlig klart træder frem, naar man fra et hvilketsomhest Punkt paa denne lader Øjet følge efter dens Længdeløb. Fjeldet stiger op fra Furens indre Linie i steile udadheldende Vægge, — der undertiden ere overdækkede, oftest dog nøgne. Den skraa steile Endeflade udad er enten dækket med Ras eller bygget af udækket granitisk Sten.

Imellem Mjelle og den vestenfor samme liggende Gaard Løkvik, danner Strandlinien den øverste Afsats af flere paa hinanden følgende terrasseformige Trin, af hvilke de lavere liggende, som ovenfor nævnt, altid ere opførte af løst Materiale. Udimod Kvalnes fører derimod en eneste steil nøgen Fjeldskraaning fra Søen op til Strandlinien.

Over de fra Strandliniens indre Kant opstigende Bergvægge lykkedes det ikke at opdage mere fremtrædende Spor efter en tidligere Glaciation.

Af de nedenfor Strandlinien liggende af løst Materiale byggede Terrasser er en, der ligger i en Høide af omkring 90′ (28.2 m.) o. H., at følge i længere sammenløbende Strækning, mens en lavere i omkring 60′ (18.8 m.) Høide optræder mere sparsomt og maaske nærmest kan være at opfatte som en sekundær eller underordnet Dannelse.

Kvaløens Sydside skyder fra Strømnes forbi Mjelle indtil Grebstad i øst-vestlig Retning, bøjer herfra ud mod Malangen i mere nord-vestlig Retning, idet den her danner Fjordens østlige Side. Strandlinien følger saaledes i det store den samme Hovedretning, men kan dog derunder paa forskjellige Lokaliteter bugte sig stærkere eller svagere efter Fjeldmassens ydre mere oprindelige Konturforholde. Bjerggrunden dannes af haarde gneisartede Skifere med hyppige Indblandinger af gneis-granitisk Sten og andre renere granitiske Afændringer.

Da Lagstillingen, hvor Bergarten optræder lagdelt, overalt er temmelig ensartet, vil det heraf fremgaa, at Strandliniens Indskjæring er ganske uafhængig af Lagstilling eller Foliation.

Strandlinier i høiere Niveauer er ikke iagttaget over Strøgene langs Kvaløens Sydside.

Til nærmere Belysning af Terrasse-Forekomsten ved Mjelle vedføies Profilritsene No. 1, *a* og *b*, der gjennemskjær Strandlinien paa to forskjellige Punkter. Det første gaar over det egentlige Mjelle, det andet er hentet længere Vest og optrukket mellem Gaardene Løkslet og Kvalnes.

2. Strandlinien langs den nordostlige Side af Kvalø (Fig. 2).

I Strækningen fra Finlandselvens Udmunding i Sandnes-Sund og indover mod Indbøiningen til det lave og smale Kvalfjordeide sees to horizontalt løbende Linier, hvoraf navnlig den øverste allerede i stor Afstand skarpt træder frem gjennem et anseeligt Længdeløb. Denne øvre Linie er skridtvis fulgt gjennem en Strækning af omkring ½ Mil. Den ligger i en Høide over Havfladen af henimod 130′ og ligesom den heri ganske korresponderer med Strandlinien over Mjelle, saa bærer den i det hele ogsaa et med den fuldkommen ensartet Præg. Veifladen ender indad i en steilt opstigende Fjeldvæg, hvis nedre Parti hyppig er dækket af Nedras af skarpkantede Blokke, medens det faste Berg bryder frem i det høiere liggende Parti ofte i næsten lodrette Vægge. Den efter Længderetningen fuldkommen horizontale Strandlinie ligger i et paa det nærmeste horizontalt Plan, der dog efter Breden viser et svag Held udad. Den saaledes dannede Veibane er oftest myrdækket. Breden af denne kan variere fra

30 à 40 til op imod 50 Skridt. Fra dens mer eller mindre skarpt fremtrædende ydre Kant føres der gjennem en noget stærk Heldning ned mod det lavere liggende Terrasse-Trin. Ogsaa denne lavere af løst Materiale byggede Terrasse kan følges gjennem længere Strækning, navnlig efter det omhandlede Midtparti i et sammenhængende Løb, men træder i sin Helhed ingenlunde saa skarpt frem som den ovenliggende Strandlinie.

Til Glaciation over Bergvæggene, der stige op langs den i fast Berg udskaarne Veibanes indre Linie, ses intet eller i ethvert Tilfælde ikke andet end høist utydelige Spor.

Veibanen er her indskaaret i gneis-granitisk Bergart. Dens Høide over Havfladen bestemtes ved Aneroid-Barometer til 129′ (40.5 m.).

3. Strandlinie langs Tromsøens nordvestlige Side. (Fig. 3).

Fra Gaarden Sandnæs, der ligger paa Tromsøen tversovenfor den nysnævnte Gaard Finland paa Kvalø, sees to terrasseformige Trin at spænde sig sydover mod Langnes-Gaardene. Det lavere liggende er i det hele kuns lidet udpræget, mens det høiere Trin derimod kan følges i et længere sammenhængende horizontalt Løb fra Sandnes-Gaardens Sommerfjøs sydover. Det danner en veilignende oftest myrdækket Flade, der løber frem under en steilt opstigende af Glimmerskifer bygget Bergvæg. Veibanen har en Brede, der varierer fra 30 til 60 Skridt, og som paa sine Steder kan udvide sig til det dobbelte heraf.

Veibanen ligger i en Højde over Havfladen, der falder sammen med Høiden af den, der er omhandlet under foregaaende Nummer.

4. Bredvikens Strandlinie — langs Tromsøens østlige Side. (Fig. 4).

I Strøget mellem Gaardene Bredvik og Stokkevolden langs Tromsøens nordlige Del afsluttes det fra Stranden langsomt skraanende Underland opad i en oftest myrdækket paa det nærmeste horizontal veilignende Flade, der spænder sig frem under en skarpt fremspringende af fast Berg dannet Væg.

Denne Strandlinies Høide over Havfladen ligger ganske i samme Niveau som Sandnes Linien.

Veibanen har en sammenhængende Længde af en knap Fjerding og afsluttes lidt nordenfor Stakkevolden, idet den her gaar i den saakaldte Ørnedals Terrasseflade, hvis Høide ligger i samme Niveau som Veibanens.

Veibanens Brede er noget variabel, men overstiger sjeldent nogle faa Favne. Ogsaa denne Veibane bevarer overalt den samme Høide over Havfladen.

Bergarten i den fra Veibanens indre Kant opstigende Bergvæg dannes af en Hornblendegneis, hvis Strøgretning er nord-sydlig, altsaa paa det nærmeste parallel med Liniens Længdeløb, mens Faldet er svagt indover. Skjønt Væggens Dagflade vistnok enkeltvis synes afglattet, er der dog i det hele ikke at paavise synderlige Tegn til tidligere Glaciation.

I Niveauet mellem denne antagelig i fast Berg indgravede Veibane og den nuværende Havstand, er her intetsteds efter det her omhandlede Strøg Tegn til lavere liggende af løst Materiale opførte Terrassedannelser.

Søndenfor Bredvik — efter et langt Mellemrum, hvor der ikke er at paavise Spor til nogen Strandlinie — træder der igjen frem et af Naturen dannet veilignende Plan, der idetmindste delvis ligger i samme Høide som Bredvikens Strandlinie. Denne fortsætter et godt Stykke sydover og ligger gjennem en længere Strækning netop i Tromsø Bys Grændseskjel og afsluttes mod Syd ved den saakaldte St. Hans Houg ovenom den ny Reberbane. I sin nordlige Del følger den Foden af en herfra temmelig steilt opstigende Bergaas, i sin sydlige Del ligger den derimod under en mægtig af løst Materiale bygget Vold, der reiser sig steilt op fra Veibanens indre Kant.

Denne Veibane bevarer vistnok i sin Helhed ikke et saa jevnt horizontalt Løb, som de tidligere omhandlede Strandlinier, og der kan saaledes vel være nogen Tvivl underkastet om den kan være at opføre i Klasse med disse.

Imellem denne Linie og Havlinien er der paa et Par Punkter inden Tromsø By's Territorium — saaledes over Hansjordnesset og under St. Hans Hougen — skarpt udprægede Brudstykker af en længere Terrasse, hvis sagte skraanende Overflade ligger i en Høide over Havfladen af 70′ (21.9 m.). Denne Terrasse er opbygget af løst Materiale.

5. Movikens Strandlinie. Fig. 5.

Langs Fastlandsstrækningen paa østre Side af Tromsesundet — tversovenfor Bredvik og Stakkevolden — sees allerede i stor Afstand en skarpt tegnet Linie at spænde sig nordover, saalangt Øiet kan naa. Den træder langt bestemtere frem end de nys nævnte Linier paa Tromsøen, og kan i saa Henseende næsten maale sig med Linierne over Kvaløen. Som fornævnt kan Linien fra Tromsedalens Munding følges nordover forbi Movik og Tunsnes indtil Ulfstinden. Denne Linie har jeg skridtvis fulgt i Strøget fra Tromsdalen til Movik. Underlandet stiger her i Regelen temmelig langsomt op fra Stranden. Efter Profilet fra Stranden opover møder man først paa flere Steder i en Høide af op imod 70′ en Terrassedannelse forinden man naar op til det andet Trin, — den i fast Berg indskaarne Strandlinie.

Denne Linie ligger i en Høide over Havfladen af omkring

130'[1]) og maa saaledes antages paa det nærmeste at ligge i samme Niveau som de tidligere omhandlede Strandlinier.

Veibanen har i Regelen en Brede af 20 Skridt, men er dog ofte variabel og viser undertiden en temmelig anseelig Brede. Over Moviken begrændses Veibanen indad af mere jevnt skraanende birkeklædte Fjeldsider og gaar længere Nord over i et Myrplateau, der skyder op mod Aasdraget, der fører over til Movik-Vand. Søndenfor Movik — mellem denne Gaard og Skjelnan — stiger den Veibanen indad begrændsende Endevæg frem dels som fast Berg, dels som Ras af sønderbrudte Klippestykker. Dette Ras er dog antagelig ikke tilført udenfra, men danner rimeligvis de gjenstaaende Rester af den oprindelige Bergvæg. Den sagte skraanende Flade, der fører nedover fra Veibanens ydre Grændselinie, er i høi Grad oversaaet med Rullesten. Fra Skjelnan sydover mod Krogelven bliver Veibanen ofte noget utydelig, saa man ikke altid har saa ganske let for at gjenfinde den, naar man stiger fra Stranden opover. I ethvert Tilfælde har det flere Gange hændt mig, at jeg saaledes har gaaet den forbi. Men ogsaa her kan den dog i Regelen med Bestemthed paavises, idet man aldrig vil være Uvished i saa Henseende, naar man efter Længderetningen følger den engang naaede Veibane. Ved Krogelven gaar Veibanen over i dette Elvefars øverst liggende Terrasse, der breder sig ud til begge Sider af Elven, og hvis sagte skraanende Overflade ligger i samme Høide som Movikens Strandlinie.

6. Ulfsfjordens Strandlinie. Fig. 6.

Ved Gaarden Ulfnesvik — ved Ulfsfjordens östre Side — stiger Landet fra Stranden opover i 3 paa hinanden følgende Trin, af hvilke det nederste ligger i en Høide af omkring 60'

---

[1]) Efter Barometermaaling skulde den vistnok ligge noget høiere — jeg tror dog foreløbig at burde holde paa det her opførte Tal.

(18,8 m.), det andet i en Høide af 130′ (40.7 m), det tredie derimod i en Høide af omkring 160′ (50.2 m.) eller 170′.

De to lavere Trin ere Terrassedannelser, det øverste en i fast Berg udgravet veilignende Bane.

Den laveste Terrasse kan følges gjennem temmelig lange Strøg, — dog med enkelte lokale Afbrydelser.

Den anden danner en oftest meget bred Afsats, er dels mere selvstændig udpræget, men gaar tildels ogsaa gjennem en langsom og jevnt stigende Skraaning successivt over i den tredie høiest liggende Afsats. Denne sidste kan følges fra Gaarden Bækkeby ud imod Jægervandet, indefter derimod liggende over Gaardene Ulfsnesvik, Ulfsnes og Holmen, og herfra syntes den videre at træde frem indover til Svendsby og maaske endnu længere.

I Regelen er denne Afsats stærkt og karakteristisk udpræget, og danner en horizontal løbende Flade med en Veibrede, der kan variere fra 16 til 32′ og tildels ogsaa naa derover, uden dog at komme op til det anseelige Maal, som de tidligere omhandlede Veibaner paa sine Steder kunde opvise. Veiplanet er tildels dækket med Myr eller Grønsvær, og danner da en jevn Flade. Hvor Veibanens Dagflade dannes af fast Berg, — hvilket her hyppig er Tilfældet — viser den sig oftest ujevn og smaahumpet. Paa sine Steder fandtes den stærkt gjennemsat af transversale Sprækker og Indskjæringer, saa Karakteren af en Veibane her kunde synes temmelig udvidsket, — i det hele og store traadte den dog altid frem som en udpræget Veibane. Paa mange Steder førte en temmelig brat Endevæg af fast Berg ned til den anden lavere liggende Afsats, paa andre Steder gik derimod — som ovenfor nævnt — Overgangen mellem disse gjennem en langsom Skraaning. Der kunde saaledes maaske ogsaa være nogen Grund til at opfatte ogsaa denne anden Afsats som en i fast Berg indskaaret Veifure, og i saa Tilfælde at stille den i Klasse med Strandlinierne over Kvalø og omkring Tromsøen, der paa det nærmeste maa ligge i samme Høide over Havfladen som denne.

Indad afsluttedes den øverstliggende Veiflade ved en steilt opstigende Bergvæg, bygget af milde glindsende til mat mørke Skifere med steilt vestligt Fald — altsaa mod Veifladen. Tegn til Glaciation var ikke at spore.

Over Ulfnesvik gik Strandlinien over i en bredere Myrflade, men herfra ud mod Jægervandet klemmer den sig igjen sammen som en smal udpræget Veibane ind under de steilt opstigende Fjeldvægge, og synes her efterhaanden at tabe sig. Antagelig vil den dog igjen findes at træde frem i Strøget nordom Jægervandet.

Fjeldskraaningerne over den her omhandlede Strandlinie bleve undersøgte opover til en Høide over Havfladen af henimod 1000′, uden at der dog her nogetsteds var at se Tegn til nogen høiere liggende Strandfure.

7. **Strandlinien over Kalslet-Gaardene.** (**Fig.** 7).

Over disse Gaarde, der ligge paa Fastlandet langs den sydlige Side af Tromsø-Sund, sees en horizontal Linie at spænde sig sydover til Bergsgaarden henimod Ramfjordens Udmunding. Den ligger i en Høide af henimod 70′ over Havet, — altsaa i samme Høide som den førnævnte Terrassedannelse inden den nordlige Del af Tromsø By. Fra Stranden skyder Underlandet sig langsomt op i en jevn Stigning imod en steilere fremspringende Bergvæg, hvis Fod betegner Strandliniens Løb. Denne Linie, der forøvrigt sees tydeligere i Frastand end paa selve Aastedet, skiller sig fra de tidligere i fast Berg omhandlede Strandlinier deri, at den ikke som disse danner en stærkere fremtrædende veilignende Bane, men derimod et mod den nuværende Havflade langsomt og temmelig jevnt faldende Skraaplan. Den er saaledes maaske ikke ganske at stille i Klasse med de før omhandlede Strandlinier men danner som et Slags Mellemled mellem disse og Terrasserne.

8. Ihlsvikens Strandlinie ved Trondhjem.

Denne Strandlinie ligger egentlig langt udenfor det Omraade, som her nærmest agtes omhandlet. Da jeg imidlertid i sidste Sommer (1877) havde Anledning til at overfare den, skal den her nævnes ved Siden af de andre.

Denne Linie har tidligere været beskrevet af Kjerulf, Sexe og senest af Mohn. Efter den sidstes Barometermaaling ligger den i en Høide over Havfladen af 512′ (160.6 m.) — efter Nivellement af Sexe i en Høide af 496′ (155.6 m.) over midlere Vandstand.

Den danner en horizontalt løbende Veibane, udgravet i fast Berg. Undergrunden, der hyppig stiger frem i Veibanen som fast Berg, dannes tildels af en granitisk Bergart, de fra Furens indre Linie opstigende Bergvægge derimod af grønne Skiferrækker. Veibanens Længde anslaaes af Sexe til $^1/_{10}$ Mil, Banens Brede naar oftest op til 30 à 40 Skridt.

Ogsaa denne bærer i det hele Karakteren af en ret udpræget Veibane, — om den end i saa Henseende ikke ganske er at stille ved Siden af Mjelle-Linien.

Af de her leverede Special-Beskrivelser fremgaar der saaledes:

1) at der er at paavise i det faste Berg indgravede Render, der spænde sig frem efter de fra Sundløbene opstigende Fjeldsider i horizontal Retning og saaledes kunne være at følge milevidt — enkelte kortere lokale Afbrydelser fraregnede — i sammenhængende Løb.

2) at disse Render hyppigst udvide sig efter Breden, saaledes at de danne udprægede veilignende Baner med en

Brede, der i Regelen naar op til 16 à 20 Skridt, men som derunder ogsaa kan variere adskilligt og undertiden endog gaa op til et Par hundrede Fod.

3) Efter Veibanen stikker ofte det faste Berg udækket frem.

4) Fra Veiplanets indre Langlinie skyder sig op en steil udad heldende oftest nøgen Bergvæg, der undertiden ogsaa kan dannes af stærkt splittede Klippe-Brudstykker.

5) Veibanen, der ogsaa efter Breden danner et paa det nærmeste horizontalt liggende Plan i det høieste med en ganske svag for Øiet tildels umærkelig Heldning udad, afsluttes udefter ved et mer eller mindre steilt udad faldende Skraaplan. Ogsaa i dette kan det faste Berg paa sine Steder findes stikkende frem, — i Regelen er det dog stærkt overdækket med løst Materiale.

6) Disse Veifurer spænde sig navnligen ud efter de nuværende Sundløb og i Regelen langs saadanne Strøg, *hvor der raader stærk Strømsætning.*

7) Paa enkelte Steder kunne de dog ogsaa være at paavise langs Siderne af nu indad lukkede Fjordløb. I saa Tilfælde dog alene — saavidt iagttaget — over saadanne Strøg, hvor der med Bestemthed kan forudsættes, at det nuværende Fjordløb i den Tidsperiode, da angjeldende Veifure laa i Havniveauet, dannede en Del af det da optrædende til begge Ender aabent Sundløb, hvor der ogsaa efter al Sandsynlighed dengang maa have raadet en stærk Strømsætning.

8) Disse Veifurer findes indgravede i de mest forskjellige Bergarter, fra den haardeste Granit til forholdsvis meget milde Skiferdannelser. Idet Veifurerne derunder følge Fjeldsiderne, der bøie sig efter Sundløbenes mange høist forskjellige Svingninger, følger heraf, at Veibanernes Dannelse i det væsentlige maa have været uafhængig af Bergarternes petrografiske Egenskaber og fremdeles helt

uafhængig af de inden samme raadende Struktur- og Lagdelings-Forholde.

8) Hvor Veifurerne overskjæres af større Elvefar eller Dalløb gaar Veibanen over i en Terrasse, hvis sagte skraanende Overflade ligger i samme Høide over Havfladen som Strandliniens Veiplan. Strandlinierne vil saaledes i Regelen findes knyttede til i samme Høide liggende Terrassedannelser. Men omvendt vil der ikke til hver Terrasseflade findes en tilsvarende Strandlinie. Strandlinjer betinger altsaa Terrassedannelser men ikke omvendt.

10) Saadanne Strandlinier er her — Ihlsvigens Linie sat ud af Betragtning — paavist i 3 forskjellige Niveauer nemlig i 70′, 130′ og 170′ o. H. (21.9—40.7 og 53.3 m.)[1] Hertil kommer endvidere flere andre Niveauer, der ere paaviste af Mohn.

11) Den anden af disse Strandlinier — nemlig den der ligger i en Høide over Havfladen af opimod 130′ — er her fulgt gjennem milevidt sammenhængende Løb. Ifølge Mohn træder den endvidere frem over vide Strøg af Tromsø Amt, over Vest-Finmarken og er fremdeles at gjenfinde over det sydlige Norges Kyststrøg saaledes inden Bergens Stift. Der kan saaledes maaske være nogen Grund til at forudsætte, at den ved nærmere Undersøgelse ogsaa skal kunne være at gjenfinde over de mellemliggende Kyststrøg, hvorpaa Opmærksomheden i saa Henseende hidtil ikke — saavidt vides har været rettet. I ethvert Tilfælde er denne Strandlinie paavist over saa store Strøg, at den vel i sin Optræden maa være at tillægge en helt anden Betydning end som en blot lokal Fremtoning. Det samme vil vel ogsaa kunne blive at gjøre

[1]) De her opførte Tal angive Høideforholdene ikke med absolut Nøiagtighed, men antages dog ikke væsentlig at skulle afvige fra det virkelige. Foruden ved Aneroidbarometer ere de tildels ogsaa bestemte ved Nivellement.

gjældende for de to andre Strandlinier, hvorvel de vistnok træder frem mindre hyppigt end den foregaaende.

12) De høiest liggende hidtil paaviste Strandlinier ere de ved Ihlsviken ved Trondhjem, hvoraf den nederste ligger i en Høide o. H. af 512', den øverste af 569' (efter Nivellement af Sexe i respektive 496' og 534').

Disse Linjers horizontale Løb i Forbindelse med den Omstændighed at de, hvor de overskjæres af større Elvefar, her i Regelen ville findes at falde sammen med den sagte skraanende Overflade af en til Elvefaret knyttet af løst Materiale bygget Terrassedannelse, gjør det utvivlsomt, at de maa være dannede omkring Havniveauet og i ethvert Tilfælde under høieste Havstand. Strandlinierne ligesaavel som Terrasserne ligge saaledes igjen som Mærker efter gamle Havstande.

Medens man i det væsentlige er paa det rene med Hensyn til Spørgsmaalet om Terrassedannelsen, der den Dag i Dag foregaar for vore Øine, vil det derimod være vanskeligere nærmere at bestemme de Forholde, hvorunder Strandlinierne med de til samme saa ofte tilknyttede Veibaner ere dannede.

At Havvandet her ikke kan have været det væsentlig virkende Agens, dette vil vel paa Forhaand være klart. Derimod har man mere fæstet sig ved Forudsætningen om, at Udgravningen her nærmest maa være at tilskrive Is. Herom skal der vel heller ikke kunne raade synderlig Tvivl. Men Spørgsmaalet er dermed ingenlunde afgjort. Her gjelder det nærmere at klargjøre under hvilke Forholde Is skal kunne virke saaledes udgravende, og derunder navnlig at paavise Steder, hvor Kræfter ere i Virksomhed i et lignende Arbeide. Saadanne ere imidlertid ikke paaviste og foreløbig er der vel ogsaa al Sandsynlighed for at man maa søge op til Polarlandene for nærmere at efterspore dette. Spørgsmaalet vil saaledes som allerede tidligere fremholdt neppe kunne blive at løse endeligen og paa en fuldt tilfredsstillende Maade gjennem Undersøgelser alene inden vort Land. Hvad man nu har at gjøre kan alene være ved Siden af de muligst nøiagtige Undersøgelser, som vore Kyststrøg i denne Retning kan give Anledning til, foreløbig at fremholde de forskjellige Forudsætninger, der kunne være at fæste sig ved, og søge disse nærmere veiede for om muligt deraf at uddrage Antydninger, der kunne tjene til Støtte for videre Undersøgelser.

Naar man fæster sig ved Isen som det herunder virkende Agens, saa vil man paa Forhaand let kunne ledes til en Forudsætning om, at de omhandlede Strandlinier ere at henføre til den egentlige Glacialtid. Ser man hen til den Høide over Havfladen, hvori flere af disse Furer træde frem, saa vil der ogsaa være al Sikkerhed for, at de høiere liggende af disse i Virkeligheden ere fra den Tid.

Men i saa Tilfælde er der dog liden Rimelighed for, at det kan have været de fra Høifjeldet nedglidende Isstrømme, der her har udført Udgravningsarbeidet.

Strandlinierne med sine brede Veibaner ere i Regelen udgravede i steilt udadheldende Fjeldsider. Naar Isstrømme glide nedad, saa vil Berggrunden her vistnok blive afskuret, anseelige Udgravninger maa her kunne finde Sted, men det endelige Resultat bliver dog i Regelen, at Fjeldsiderne fremdeles bevare sine oprindelige ydre Formforholde og træde frem som udadhældende Flader, paa det nærmeste kongruente med de oprindelige. Vistnok vil mer eller mindre horizontalt liggende veilignende Furer her kunne dannes, naar den nedglidende Is opfanges af mere oprindelige Indskjæringer eller Afsatser langs Fjeldsiderne. Saadanne vil Isen da yderligere kunne udgrave. Men disse stumpevise Flader ville blot have en fjern Lighed med Strandliniernes Veibaner, og man vil neppe udsætte sig for at sammenblande dem. Saaledes alene vil Isen i den heromhandlede Retning kunne arbeide — i ethvert Tilfælde over Havfladen. Men der er heller ikke saavidt der kan sees stor Sandsynlighed for, at Isen, der fra Høifjeldet skyder sig ned under Havfladen, skal kunne i dette Stykke arbeide anderledes under denne, naar ikke andre særlige Forholde her skulde træde til.

Men hertil kommer endvidere den Omstændighed, at Strandlinierne fortrinsvis ere at paavise langs de aabne Sundløb ud imod den egentlige Kyststrækning og derimod sjeldnere efter de længere indad liggende Fjordløb. Og i sidste Tilfælde da netop efter saadanne Fjorde, som i den Tid, da den til samme knyttede Strandlinie udgroves, dannede endel af et dengang til begge Sider aabent Sundløb. Skulde Strandlinierne være dannede af de fra Høifjeldet nedskydende Ismasser, saa maatte Forholdet vel have været det lige omvendte, — man maatte fortrinsvis have ventet at skulle finde dem trædende frem efter Fjordløbene, langs hvilke de mægtigste Ismasser i ethvert Tilfælde har skudt ned fra Høifjeldet.

Under Dannelsen af Strandlinierne maa der saaledes utvivlsomt have været i Virksomhed andre Kræfter end de fra Høifjeldet nedskydende Isstrømme.

Men dette fremgaar ogsaa paa det bestemteste deraf at flere af Strandlinierne ligge saa lavt, at de utvivlsomt maa være dannede i den postglaciale Tid. Ved Slutningen af den glaciale eller i Begyndelsen af den postglaciale Tid laa det nordlige Norge henimod 300′ (94.1 m.) lavere end nu. Samtlige de her inden Tromsø Omegn omhandlede Strandlinier ligge imidlertid betydelig lavere over den nuværende Havstand end det nysnævnte Tal, og de maa altsaa under den Forudsætning, at de ere udgravede enten ved eller under Havfladen, være at henføre til den postglaciale Tid — altsaa til den Tidsperiode, da i det høieste lokalt begrændsede Isstrømme fra Høifjeldet skjød sig ned til Havfladen. *Strandlinier ere saaledes udskaarne saavel gjennem den glaciale som den postglaciale Tid.*

Har Isen saaledes herunder været det væsentlig virkende

Agens, saa vil det være aabenbart, at den herunder har arbeidet under saadanne Forholde, der paa engang lade sig indordne saavel under den glaciale som under den postglaciale Tids Optræden. Thi Strandlinierne bære overalt — hvad enten de ligge i de høiere eller lavere Niveauer — et saa ganske ensartet Præg, at de utvivlsomt maa være at henføre til ganske ensartet virkende Kræfter.

Men saaledes vil man naturligen ledes til en Forudsætning om, at Strandliniernes Veifurer kunne være at tilskrive Kystisens skurende Evne. Under denne Form kan Is have optraadt langs disse Strøg ikke alene gjennem den glaciale men ogsaa gjennem forskjellige Afsnit af den postglaciale Tid. Som før vist ligge Strandlinierne i samme Høide som de sagte skraanende Overflader af aabne Terrassedannelser efter de Elvefar, der overskjære Strandlinierne. Strandliniernes Veiflade og Terrassefladen flyder her sammen til en og samme fortløbende Flade. Dalførernes aabne Terrasseflader maa være afsatte under Havfladen og vel ofte i Littoralbæltet, og *følgelig maa ogsaa Strandliniernes Veifurer være udgravede under den almindelige Havstand og i Regelen i Littoralbæltet.* Forholdsvis mægtige Ismasser kunne nemlig saaledes ved høit Vande være drevne ind imod Land, ved lavere Vandstand derimod, idet de delvis hæftede ved den faste Berggrund, under Strømsætningen have skudt sig skurende henover den.

Men under denne Forudsætning maa Strømsætningen være at tillægge en væsentlig Betydning.

At Forholdet kan være dette, synes yderligere at skulle støttes ved den før fremholdte Omstændighed, at Strandlinierne væsentlig synes knyttede til saadanne aabne Sundløb, hvor en stærk Strømsætning nu er raadende, og hvor der er al Grund til at forudsætte, at den har fundet Sted i ikke mindre men høist sandsynligt i end stærkere Maalestok i den Tidsperiode, da Strandlinierne udgroves. Fastlandsstrækningen og Øerne over det nordlige Norge ere nemlig stærkt indskaarne ved Fjordløb og lavt liggende Eidefar, der ikke alene i Begyndelsen men ogsaa langt ud i den postglaciale Tid have ligget under Havfladen. Ikke alene de nu sammenhængende større Ølande men ogsaa store Dele af Fastlandsstrækningen var saaledes udskilt i en Række af helt omflydte Øer ved talrige nu afstængte Sundløb. Stærke Strømsætninger maa efter al Sandsynlighed have fundet Sted efter disse.

Det er en videnskabelig Kjendsgjerning, at vort Land gjennem Kvartærtiden har været i Stigning. Selve Strandlinierne, der træde frem i forskjellige Niveauer, ere allerede i og for sig afgjørende Vidnesbyrd herfor. Et andet Spørgsmaal bliver det imidlertid i saa Henseende nærmere at bestemme de Forholde, under hvilke Stigningen er foregaaet, — om dette f. Ex. er skeet langsomt og jevnt eller stød- og rykvis med mellemliggende rolige Perioder.

Besvarelsen af dette Spørgsmaal vil i flere Henseender ogsaa kunne have Betydning for en nærmere Udredning af de Forholde, hvorunder Strandlinierne ere dannede. Disse Liniers Optræden i bestemtere Niveauer er saaledes bleven holdt frem som Støtte for den rykvise Stigning. Der kan ogsaa paa Forhaand være nogen Grund til at forudsætte, at Strandlinierne vilde have traadt frem under noget forskjellige Forholde, eftersom den faste Fjeldgrunds Stigning var foregaaet ad den ene eller ad den anden Vei.

Dette Spørgsmaal skal derfor her søges nærmere belyst, forinden man gaar ind paa Behandlingen af Strandliniernes Dannelse.

Af de forskjellige Forskere, der have behandlet disse Forholde, har Flerheden nærmest fæstet sig ved en Forudsætning om en noget uligeformig Stigning. Keilhau — der herom ellers udtalte sig megen Forsigtighed — antog, at de i forskjellig Høide liggende Kystlinier vidnede om, at Forandringerne i Niveauet have foregaaet i særdeles lange Tidsrum og afvexlet med rolige Epoker. Som det vil fremgaa af denne

Udtalelse, var vistnok Keilhau tilbøielig til at forudsætte, at de gamle Kystlinier særlig betegnede saadanne Niveauer, der i sin Tid har ligget omkring den almindelige Havstand gjennem en længere rolig (eller forholdsvis rolig) Periode. Om Keilhau saaledes holdt paa en noget variabel Stigning, var han dog vistnok langtfra at fæste sig ved en Forudsætning om en rykvis Stigning.

Den franske Geolog Bravais, der i Sluten af Treti-Aarene længere Tid opholdt sig inden det nordlige Norge, medbragte derfra som Resultat af sine Undersøgelser, at Fjeldgrunden i disse nordlige Strøg er steget rykvis (comme par saccades). Til samme Resultat kommer ogsaa Kjerulf senere gjennem sine fortjenstfulde Undersøgelser af de glaciale og postglaciale Skjælbanker ligesom ogsaa af Terrassedannelserne. Som Følge heraf er det ikke saa langt fra, at der senere endog er bleven gjort Forsøg paa at opstille det som en videnskabelig Kjendsgjerning, at den skandinaviske Halvø gjennem Kvartærtiden er steget gjennem Spring. Paa den anden Side er dog denne Forudsætning ogsaa fra andre Kanter mødt med mer eller mindre bestemt udtalt Tvivl. Navnlig har Professor Sexe i forskjellige Indlæg fremlagt vægtige Indvendinger mod sammes Berettigelse.

Forudsætningen om Landgrundens rykvise Stigning er — saavidt det kan sees — væsentlig knyttet til følgende her fremtrædende Forholde:

1) Strandlinierne (ligesom ogsaa Terrasserne) træde frem i forskjellige Niveauer, idet de derunder kunne forfølges over vidtstrakte Strøg som paa det nærmeste horizontale Linier.

2) Dalbunden stiger i Regelen ikke op efter et mer eller mindre jevnt Skraaplan fra det nuværende Havbryn, men som oftest gjennem flere Sæt, der bestemmes ved forskjellige paa hinanden følgende Terrassetrin.

3) Kyst-Skjælbanker ere ikke at paavise i hvilketsom-

helst Niveau mellem den nuværende Havstand og den ældste hidtil paaviste Havstandslinie, men derimod alene i enkelte mellemliggende Niveauer.

4) Terrassernes steile Endeflade, hvis vertikale Høide antages at angive Maalet for den rykvise Stigning.

At Strandlinierne spænde sig ud i samme Høide i Milelangt sammenhængende Løb, — at i Høide o. H. indbyrdes korresponderende Linier ere at paavise over vidt fra hinanden liggende Strøg efter det nordlige og sydlige Norges Kyststrøg vidner om at ensartede Stigningsforholde maa have raadet langs de egentlige Kyststrøg fra Nordkap sydover til Bergen. Med Hensyn til Stigningsforholdene i Retning fra Kysten indover Fastlandsstrøgene er derimod gjort gjeldende — saaledes af Bravais — at Stigningen er foregaaet efter en voxende Maalestok udenfra indad. I Strøget fra Hammerfest ind mod Bunden af Altenfjord har han saaledes paavist 2 Strandlinier — den ene liggende over den anden. Den øverste af disse ligger ved Hammerfest i en Høide o. H. af 28.6 m., ved Komagfjord omtrent midt imellem Hammerfest og Alten i en Høide af 51.8 m. og ved Bunden af Alten i en Høide af 67.4. Paa samme Maade skal ogsaa den lavere liggende Strandlinie vise en voxende Stigning fra Hammerfest indover. Imidlertid kan der vel i saa Henseende være al Grund til at forudsætte, at de to her nævnte Strandlinier ikke saaledes kunne være fulgte efter et sammenhængende Løb fra Kysten indover, at det af Bravais i saa Henseende opstillede Resultat uden videre skal kunne godkjendes som stemmende med det virkelige Forhold. Tvertimod er der for hver den, der er nogenlunde lokaliseret over disse Strøg, al Sandsynlighed for, at de opstillede Høidebestemmelser alene ere aflæste paa enkelte Punkter, og at de to nævnte Linier mere som tænkte end virkelige ere blevne optrukne mellem disse. Paa den ene Side er det antagelig sikkert, at disse Strandlinier ikke træde frem i et mere bestemt sammenhængende Løb langs hele dette milevide Strøg, der ogsaa hyppigt gjennemskjæres af kortere eller transversalt indskydende Smaafjorde. Landet er her i det store ikke fulgt af Bravais anderledes end til Baads, og de Observationer, der derunder kunne være tagne, ville neppe have været af den Art, at derpaa sikre Slutninger kunne bygges i den af Bravais angivne Retning. Der er saaledes ingen Sikkerhed for, at den øvre Linie ved Hammerfest danner en Afdeling af den øvre Linie ved Bunden af Alten. Her er der snarere Sandsynlighed for at forskjellige Strandlinier og Terrasser feilagtigen ere sammenknyttede til en. Mærkeligt er det i saa Henseende ogsaa, at Bravais's øvre Linie ved Hammerfest (28.6 m.) saa nært som det vel er muligt ved den Slags Maalinger falder sammen med den lavere Linie ved det indre af Fjorden, hvis Høide o. H. som ovenfor nævnt er ansat til 27.7 m. Paa Forhaand kunde der saaledes maaske være mest Rimelighed for, at den øvre Linie ved Hammerfest og den nedre ved Bunden af Alten danner Brudstykker af et og samme Liniesystem.

Men hertil kommer endvidere den Omstændighed, at Bravais's Slutning ingenlunde støttes ved at se hen til Forholdene over andre Strøg inden det nordlige Norge, hvor nærmere Undersøgelser herom have været anstillede. Afstanden mellem Hammerfest og Komagfjord er omkring 4 norske Mil, og den samme Afstand ligger mellem Komagfjord og Alten. Mellem Hammerfest og Komagfjord viser Bravais's øvre Linie en Stigning af 23.2 m. eller 5.8 m. pr. Mil. Mellem Komagfjord og Bunden af Alten er Stigningen 16.6 m. eller 4.2 m. pr. Mil. Med et Middeltal skulde Hammerfest-Alten Linien vise en Stigning af omkring 5 m. pr. Mil i Retning fra Kysten indover. Strandlinierne om Tromsø ere fra Kysten indover fulgte gjennem et Par Miles Længde. Skulde Forholdet her have været nogenlunde overensstemmende med det, der er opgivet for Hammerfest-Altenlinien, saa maatte Strandlinien ved Finland have ligget i et omkring 10 Meter høiere Niveau end Strandlinien længst ud mod Malangen — en Differentse, der er for stor til at den skulde være bleven ubemærket, om den i Virkeligheden havde været tilstede. Forholdet er her tvertimod det, at Linien overalt maa ligge paa det nærmeste i samme Høide. Det samme er ogsaa Tilfældet med Ulfsfjordlinien. Ogsaa her slynger Linien sig saa langt indover, at en Stigning efter den anførte Maalestok i Retning indover ikke skulde have kunnet undgaa Opmærksomheden.

Efter Mohn optræder Strandlinierne inden Tromsø Amt og Strøgene om Altenfjord i det væsentlige ganske ensartet og i tilsvarende Niveauer. Der er saaledes al Grund til at forudsætte, at der har raadet ensartet Stigning over begge disse Strøg. Inden Tromsø Amt har Stigningen utvivlsomt foregaaet med samme Intensitet ikke alene langs Kyststrøgene, men ogsaa i Retning fra Kysten indover Fastlandet, saalangt Iagttagelser i denne Retning ere naaede frem.

Hvad enten nu Stigningen er foregaaet langsomt eller rykvis, saa vil der — i ethvert Tilfælde indtil bestemte Data for det modsatte maatte foreligge — være al Grund til at drage den Slutning:

at *Landgrundens Stigning gjennem Kvartærtiden for det nordlige og vestlige Norges Vedkommende ikke alene i Retning fra Nord mod Syd, men ogsaa i Retning fra Vest til Øst (eller fra Kysten indover Fastlandet) overalt er foregaaet under ensartede Forholde, og at navnlig Stigningskræfterne derunder overalt maa have arbeidet med i det væsentlige samme Intensitet.*

Af det Forhold, at Strandlinierne synes knyttede til enkelte mere bestemte Niveauer, idet de derunder — Forholdet seet i det store — ligge trinvis over hinanden, er der draget den Slutning, at Landgrundens Stigning maa være foregaaet rykvis mellem lange mellemliggende Tidsrums Stilstand. Under saadanne Stilstandsperioder antages nemlig Strandlinierne med sine Veiflader at være udgravede, medens den vertikale

Høide mellem de paa hinanden følgende Linier skulde angive den enkelte Stignings rykvise Maal. Det vil imidlertid være aabenbart, at dette Forhold i og for sig ingenlunde i saa Henseende kan være afgjørende. Det er nemlig ikke sagt, at de nødvendige Betingelser for Strandliniers Dannelse til enhver Tid have været tilstede i passende Maal. Men da man endnu ikke er kommet til Enighed om, hvilke de Kræfter have været, som have dannet Strandlinierne og under hvilke Forholde disse maa have arbeidet for at hidføre saadanne Resultater, saa vil det i ethvert Tilfælde være noget fortidligt heraf at uddrage positive Slutninger i den omhandlede Retning.

Men selve Strandlinierne synes — naar Forholdet i saa Henseende betragtes noget nærmere — snarere at skulle vidne imod end til Fordel for en Forudsætning om Landgrundens rykvise Stigning. Det vilde visselig være et i høi Grad eiendommeligt Forhold, om saa vidtløftige Strøg, som den norske Kyst fra Nordkap til Bergen — altsaa gjennem en Længde af flere hundrede Mil — igjennem disse mange forskjellige paa hinanden følgende Ryk overalt dog skulde have steget i en saa fuldkommen ensartet Maalestok, som de horizontalt udspændte Strandlinier synes at vidne om. Man kunde maaske have ondt nok for at fæste sig ved en Fremstilling om en saa høist mærkelig Regelmæssighed i Stigningen, selv under en Forudsætning om Landgrundens langsomme Stigning — med en Forudsætning om en rykvis Stigning lader en saa paafaldende Regelmæssighed sig neppe forene. Naar man herunder ikke kan gaa ud fra, at det er Havstanden, som er sunket — en saadan Forudsætning vilde have stillet Strandlinierne horizontale Løb i et let forstaaeligt Lys — saa vil der her neppe være nogen anden Udvei end at afvise Forudsætningen om den rykvise Stigning.

Med Hensyn til det under 2) (cfr. S. 204) fremstillede Forhold, saa fremgaar vistnok deraf, at Indlandspartierne ere stegne, idet de i forskjellig Høide liggende Terrassefiader hver for sig kunne angive en tidligere Havstand. Men heller ikke dette Forhold vil i og for sig kunne besvare Spørgsmaalet om Stigningen er foregaaet langsomt og jevnt eller rykvis med mellemliggende Stilstandsperioder. Det maa i saa Henseende først blive at afgjøre under hvilke Forholde Terrassernes steile Endeflade kan dannes — om den er betinget af den rykvise Stigen eller om den ikke skulde kunne dannes og engang dannet ogsaa bevares under Landgrundens jevne Stigen.

Med Hensyn til 3) (cfr. S. 204-205) saa afgiver heller ikke dette nogetsombelst direkte Bevis for en rykvis Stigning. Ligesom der ingen Nødvendighed er for, at Betingelserne for Strandliniernes Dannelse til enhver Tid kan have været forhaanden, saa vil det heller ikke være fuldt berettiget uden videre at forudsætte, at Betingelserne for Dannelsen af Skjælbanker til enhver Tid gjennem Kvartærtiden skal have været tilstede.

Spørgsmalets endelige Afgjørelse vil nok nærmest komme til at bero paa den Vægt, der kan blive at tillægge den under Post 4 gjorte Forudsætning. Den er imidlertid en blot og bar Forudsætning og støtter sig ikke til saadanne Iagttagelser, der kunne kjedes sammen til et direkte Bevis. Tvertimod vil de Forholde, hvorunder Terrasserne træde frem, utvivlsomt snarest komme til at afføde Slutninger, der tyde hen paa, at den faste Fjeldgrund gjennem Kvartærtiden i det Hele og Store maa have steget langsomt og jevnt.

Her gjelder det først og fremst at holde sig for Øie, hvad der ovenfor nærmere er paavist, at Landgrundens Stigning over store Strøg er foregaaet efter en ensartet Maalestok — hvad enten Stigningen nu i og for sig er foregaaet paa den ene eller anden Vis. De milevidt udspændte horizontalt liggende Strandlinier afgive derfor det mest afgjørende Bevis. Skulde Terrassernes skraa Endeflade afgive Maalet for hver stødvis vertikal Stigning, saa maatte Terrasserne træde frem altid i korresponderende Høideniveauer, og i det hele og store med de samme Antal Trin. Dette er imidlertid ingenlunde Tilfældet. Trinenes Antal og deres respektive Høideniveauer kan variere overordentlig selv inden nærliggende Lokaliteter. Det samme er saaledes ogsaa Tilfældet med den vertikale Høide mellem Trinene. Sammenligner man saaledes Terrassedannelserne ved Mjelle, ved Ulfsnes med Terrassedannelserne ved Balsfjordens Bund (Fig. 7), saa vil dette træde klarere frem. Balsfjordterrassernes øverste Trins skraa og karakteristisk udprægede Endeflade har en vertikal Høide af omkring 66′ (20.7 m.), og skjær sig langt dybere ned end Ulfsfjordens Strandlinie, uden at vise Antydning til Trin i en med denne nogenlunde korresponderende Høide. Skulde Terrassens skraa Endeflade afgive Maalet for Fjeldgrundens rykvise Stigen, saa var det aabenbart, at Stigningen ind imod Bunden af Balsfjorden maatte være foregaaet efter en med den langs Ulfsfjorden høist afvigende Maalestok. Men lignende Forholde ere at paavise inden Lokaliteter, der ere langt nærmere knyttede til hinanden end de her nævnte. Under den her fremholdte Forudsætning maatte altsaa Stigningsforholdene over det nordlige Norge have ytret sig høist forskjelligt selv inden ganske nærliggende Lokaliteter — altsaa i lige Modsætning til hvad der tidligere er paavist, at Forholdet efter al Sandsynlighed maa have været. Men dernæst vil det ogsaa være indlysende at selve Strandlinierne under en saadan uligeformig Stigning ikke som Tilfældet er kunde have spændt sig ud milevidt i fuldkomment horizontalt Løb, men at de maatte have traadt frem enten som bugtede eller som mere eller mindre brudte Linier.

Der er imidlertid ogsaa andre Forholde at aflæse, der afgjørende vidner for en jevn og ensartet Stigning gjennem forholdsvis saa anseelige Tidsrum af Kvartærtiden, at der paa Forhaand vel kan være al Grund til at forudsætte, at Forholdet maa have været det samme ogsaa gjennem den hele Kvartærtid, i ethvert Tilfælde indtil mere direkte Vidnesbyrd maatte foreligge for at Stigningen under enkelte Tidsafsnit er foregaaet paa anden Vis. Og dette saa meget mere, som denne langsomme og jevne Stigning netop er at paavise inden saadanne Strøg og i Tidsperioder, i hvilke den stødvise Stigning skulde have fundet Sted.

Paa forskjellige Steder inden det nordlige Norge er der saaledes at paavise littorale Skjælbanker, der kunne følges i Sammenhæng fra Stranden opover til en Høide over Havfladen af 30′ (9.4 m.) — idet Landgrunden langsomt skraaner op fra Stranden til nævnte Høide. Saadanne Skjælbanker ere saaledes at paavise paa Tromsøen og inden selve Tromsø Bys Territorium. Her er det aabenbart, at Stigningen gjennem Kvartærtidens sidste Afsnit maa være foregaaet langsomt gjennem de lavest liggende 30′. De her omhandlede Lag ere helt og holdent byggede af Skjelrester, alene sparsomt indblandet med Sand og Smaasten, og ere gjennem hele denne Høide ganske ensartede. Den vertikale Afstand mellem høieste og laveste Vandstand er her for Tiden 8 à 9′ (2.5 à 2.8 m.). De nævnte Skjælbanker, der nærmest have været knyttede til den egentlige Littoral-Zona og ere opkastede i denne, ville saaledes under stationære Niveauforholde sjelden kunne naa en større Høide end høiest op imod 6′ (1.9 m.) — i Regelen vel neppe mer end 2 à 3′. Under Forudsætning af, at Landgrunden igjennem disse sidste 30′ var steget rykvis, maatte her udkræves et Antal af mindst 5 rykvise Spring, — noget der dog ikke godt lader sig bringe i Samklang med de inden disse Strøg i lavere Høide end 30′ o. H. liggende Terrassedannelser. Ifald disses skraa Endeflade skulde angive den rykvise Stignings Vertikale, saa vilde de i ethvert Tilfælde vidne om noget ganske andet.

Professor Kjerulf har i sit Skrift «om Skuringsmærker, glacial Formation og Terrasser»[1]) leveret en Fortegnelse fra

[1]) Univ. Program 1871.

det søndenfjeldske Norge over Beliggenheden af ældre Skjælbanker med glaciale Skjælrester. Imellem et Antal af 19 ligger

1	i en Høide	af	540′ o. H.	Diff.	
1	- - —	-	520′	20	
4	- - —	-	475′	45	
1	- - —	-	460′	15	
2	- - —	-	455′	5	
1	- - —	-	450′	5	
2	- - —	-	440′	10	
1	- - —	-	437′	3	(5)
1	- - —	-	410′	27	(25)
2	- - —	-	400′	10	
1	- - —	-	385′	15	
1	- - —	-	375′	10	
1	- - —	-	350′	25.	

Høidedifferentsen mellem disse i forskjellige Niveauer liggende Banker er saaledes

for 3	Trin	5′
— 3	—	10′
— 2	—	15′
— 1	—	20′
— 2	—	25′
— 1	—	45′.

Allerede som disse Tal træde frem synes det med Bestemthed at fremgaa, at Skjælbankerne her ingenlunde lader sig gruppere om bestemte Niveauer, selv om man tager Hensyn til, at Høidebestemmelserne kunne udkræve nogen Korrektion. Ligesom der i den opstillede Række i Regelen er saa liden Differentse, at Forudsætningen om en stødvis Stigning her alene vil kunne gjøres gjeldende inden temmelig snevre Grændser, saa vil der paa den anden Side ogsaa være al Grund til at forudsætte, at Springene mer og mer ville udvidskes med det voxende Antal af maalte Skjælbanker. De her omhandlede Banker omfatte antagelig en liden Del af dem, der ville være at paavise. Der kan saaledes vel være megen Sandsynlighed for, at Skjælbanker over de omhandlede Strøg ville være at paavise i hvilkensomhelst Høide mellem de opstillede Ydergrændser (350 og 540′ o. H.). Der synes saaledes ogsaa her paa Forhaand nærmest at være Grund til at drage den Slutning, at Landgrundens Stigning over store Dele af det sydlige Norge for de Niveauers Vedkommende, der ligge mellem 350′ og 540′ o. H., maa være foregaaet langsomt og nogenlunde jevnt.

M. Sars, der i Universitetsprogram for 1864 har omhandlet det østlige Norges glaciale Skjælbanker, liggende i forskjellige Niveauer fra 280′ til 470′ o. H. (84.7—147.5 m.), fremholder der, at disse Skjælbankers Beskaffenhed tydeligt vise, at Hævningen her ikke er skeet pludselig eller med et. Skjælbankerne, der ere sande Littoraldannelser eller dog afsatte paa meget grundt Vand navnlig i den øvre Del af Laminarie-Bæltet, vidne — efter hans Opfatning — om at Landgrundens Stigning fra 280 til 470′ er foregaaet efterhaanden dog med visse Mellemrum af Rolighed, der betegnes ved forskjellige over hinanden liggende Strandlinier.

I nævnte Afhandling gjør Sars ogsaa den samme Slutning gjeldende for den Del af Landgrunden, der ligger mellem den nuværende Havstand og 150′ (47 m.) o. H., til hvilken Høide der i det sydlige Norge er paavist postglaciale Skjælbanker. Imellem de glaciale Bankers nederste Grændse 270′ og de postglaciale Skjælbankers øverste Grændse 150′, er der et Mellemrum af omtrent 150′ (47 m.), hvori der hidtil ikke er bleven fundet Skjælbanker.» I Henhold hertil antager Sars, at der for dette Mellemrums Vedkommende foreløbig kan være nogen Grund til at drage den Slutning, at Landgrunden her er steget i et Sæt de nævnte 150′.

Fraværelsen af Skjælbanker over dette Mellemrum vil dog i og for sig vel neppe i saa Henseende være afgjørende

— hvad der ogsaa indrømmes af Sars. Der kunde dog ogsaa være nogen Grund til at forudsætte, at den stærke Sne- og Issmeltning under Glacialtidens Afslutningsperiode, der vel har vedvaret gjennem lange Tidsrum, ikke kan have ydet særdeles gunstige Betingelser for Dannelsen af Skjælbanker. Foreløbig vil det saaledes vel ogsaa for dette Mellemrums Vedkommende være rettest at holde paa en Forudsætning om jevne og langsomme Stigningsforholde.

I Henhold hertil synes der saaledes nærmest at være Grund til at drage følgende Slutning:

«*Igjennem Kvartærtiden har Norges faste Fjeldgrund steget langsomt og i det væsentlige nogenlunde jevnt.*»

Denne Slutning, der stiller sig i et bestemt Modsætningsforhold til Forudsætningen om en stødvis Stigning i den Form, hvorunder denne er bleven fremholdt, kan derimod godt lade sig forene med en Forudsætning om, at Stigningsintensiteten til forskjellige Tider dog kan have varieret og til sine Tider maaske ogsaa aftaget til 0.

Med det nysnævnte Slutningsresultat for Øie, skal nu her gjøres et Forsøg paa nærmere at redegjøre for de Forholde, under hvilke Strandlinierne med sine udskaarne Veiplaner kunne være dannede.

Som tidligere fremholdt, maa Strandlinierne antagelig være udgravede under Havlinien og i Regelen mellem høieste og laveste Havstand. I denne Forudsætning vil efterstaaende Fremstilling søge sit egentlige Udgangspunkt, idet man her foreløbig lader Spørgsmaalet uafgjort, hvorvidt Landgrunden er steget langsomt eller stødvis.

I Fig. 8 betegner *abc* det udskaarne Triangel-Snit, Linien *ab* et Tversnit af Strandliniens Veibrede, Linien *bc* den fra Veibanens indre Kant opstigende Bergvæg. Med Hensyn til Spørgsmaalet om det Punkt, hvor Udgravningen fra først af er paabegyndt, vil der antagelig alene være Grund til at fæste sig ved et af følgende to Tilfælde:

1. Den første Fure-Indskjæring er at søge i Veibanens ydre Punkt *a*,
2. eller i Snittets øverste Punkt *c*.

I det første Tilfælde maa Landgrunden gjennem hele det Tidsrum, der er medgaaet til Dannelsen af det udskaarne Triangel-Snit, have ligget i samme Niveau. Igjennem dette Tidsrum maa der saaledes have raadet fuldkommen Stilstand med Hensyn til den faste Fjeldgrunds Niveauforandringer. Under Udgravningsarbeidets gradvise Fremskriden bliver det udskaarne Triangel-Snit stadig større og større. Paa Fig. 8 er Forholdet i saa Henseende betegnet med Snittene *ab*, *c*, — $ab_{\prime\prime}$ $c_{\prime\prime}$ og saaledes videre indtil *abc*, der betegner Udgravningsarbeidets Enderesultat. Arbeidets videre Fremadskriden er først bleven standset ved Fjeldgrundens rykvise Stigen, idet den udgravede Veibane med engang er løftet op over Havfladen. Arbeidet til Udgravning af en ny lavere liggende Strandlinie vil nu kunne tage sin Begyndelse efter den Linie, der er rykket op til den gamle Strandlinies Niveau.

I det andet Tilfælde maa Udgravningen være foregaaet under Landgrundens langsomme Stigen saaledes som det nærmere vil fremgaa af Fig. 9, hvor Beliggenheden af den først udgravne Rand eller Fure er angivet ved Punktet *c*, der langsomt men dog stadig stiger, hvorved der altsaa fremkommer et stadigt voxende udskaaret Triangel-Tversnit i Fig. 9 betegnet med *a*, *b*, *c* og $a_{\prime\prime}$ $b_{\prime\prime}$ *c*. Tversnittets Grundlinie vil derunder altid komme til at ligge i Punktet *c*'s oprindelige Niveau. Strandliniernes Veibaner skjærer sig altid dybere og dybere ned i Fjeldgrunden i samme Maal som denne stiger, og vil saaledes trods dette komme til at indtage et i Forhold til Havlinien uforandret Forhold.

Det vil være forbundet med sine Vanskeligheder med Bestemthed at skulle vælge mellem de her nævnte to Tilfælde forsaavidt man her lader Spørgsmaalet om den Maade, hvorpaa Landgrunden er steget, foreløbig henstaa ubesvaret. Der er imidlertid en Omstændighed, som herunder kan synes at at være til Hinder for, at Udgravningen kan være foregaaet i Overensstemmelse med Tilfælde 1.

Som gjentagne Gange fremholdt maa de til Strandlinierne knyttede Veibaner være udgravede under Havstanden og antagelig høist nogle faa Fod under midlere Vandstand. Den fra Veibanens indre Kant opstigende Bergvæg — Linien *bc* Fig. 8 — kan naa op til en Høide af 30′ og vel ogsaa derover. Det udskaarne Triangel-Snits Langside, Linien *ac* Fig. 8, maa saaledes — under Forudsætning af, at Strandliniens første Indskjæring er paabegyndt efter Tilfælde 1 nede ved *a* — i sin øvre Del have været trukket saa langt tilbage, at Projektionen af denne ned til Havstandslinien maatte komme til at falde et godt Stykke indenfor Havfladen. Ifald Ismasser, der af Strømsætningen presses *langs Landet*, kunne forudsættes at skulle kunne udgrave saadaune Triangel-Snit, saa maatte dog den herunder dannede Bergvæg *bc* (Fig. 8) — hvis Udgraven i saa Tilfælde helt eller dog for største Del er foregaaet over Havfladen — have traadt frem enten som en indad skraanende eller høist vertikal stillet Væg, mens den derimod vel i saa Tilfælde ikke som Tilfældet i Virkeligheden her kan have traadt frem i udad heldende Stilling.[1]) Var Udgravningen derimod foregaaet under Havfladen, maatte den afskurede Bergvæg blive udadheldende.

I Henhold hertil antages Udgravningsarbeidet ikke at kunne forklares efter Tilfælde No. 1. Da fremdeles Strandlinierne maa være dannede i samme Niveau som Terrassernes sagte skraanende Overflade — i Regelen mellem høit og lavt Vande — synes der at være Grund til at drage den Slutning, at den første Fureindskjæring i intet Tilfælde kan have taget sin Begyndelse ved Punkt *a* Fig. 8.

---

[1]) Anderledes vil naturligvis Forholdet blive, naar Ismasser skrues transversalt ind imod Land. Men at de horizontalt udspændte Strandlinier ikke kunne være dannede ad denne Vei, er vel en aabenbar Sag.

Strandliniedannelsen maa derfor i det væsentlige antagelig være foregaaet paa den Maade, som er fremholdt i Tilfælde No. 2. Den fra Veibanens indre Kant opstigende Bergvæg *bc* Fig. 8 er i saa Tilfælde helt og holdent udgravet under Havfladen og dens udad heldende Stilling finder ogsaa saaledes sin naturlige Forklaring.

For om muligt at komme Sagen i saa Henseende nærmere paa Spor, foretog jeg i Sommer en Excursion ned til Salangen. Denne danner et henimod 2 Mil langt Fjordløb, der først skjær sig ind i vest-østlig Retning, men derpaa gjennem sin inderste Haldel bøier i sydlig Retning, indtil det indad afsluttes mod Lavangseidet. Der hvor Fjordløbet afbøier fra syd-nordlig til øst-vestlig Retning skyder der sig frem flere større og mindre Smaa-Øer eller Holmer — hvorimellem Storø, Finø, Lamø, Rovø og Furø, — saaledes at Fjordens indre Del her alene gjennem forskjellige korte og forholdsvis trange Sundløb staar i Forbindelse med den ytre Del. Den indre Del, der danner et anseeligt Bækken, er i Regelen hver Vinter indenfra udefter gjennem en Længde af omkring $^{1}/_{2}$ Mil tillagt med Is. Under Isbrydningen om Foraaret drives denne udad, og derunder sammenstues de anseelige Ismasser fra Fjordens indre forholdsvis vide Bækken i de trange Sundløb mellem Holmerne og presses her tildels med stor Voldsomhed udefter, idet de herunder skure mod Holmernes fremspringende Bergvægge, De lokale Forholde synes saaledes her at maatte kunne tilbyde ret gunstige Betingelser til nærmere Undersøgelser i den her omhandlede Retning. Den inderste Del af Kvænangen maaske fraregnet, vil der neppe inden det nordlige Norge være at paavise et hertil heldigere beliggende Sted.

Fra Handelsstedet Søveien — strax udenfor den egentlige Fjordbund — og udover (nordover) langs Fjordens Østside, stikker Lagrækker af Kvartskifer og Kvartsit i steile Styrtninger af 20 à 30′ Høide op fra Flodmaalets Havstandslinie.

Dagfladerne af disse saaledes fremspringende Bergvægge vise sig ofte ret stærkt glattede. Fra Foden af disse skyder en sagte skraanende med løse Stene dækket Bundflade udover. Ved høit Vande er denne dækket af Søen, ved lavt Vande ligger den tør. Se Fig. 10.

Fig. 11 er et Profil herfra hentet lidt længere udefter. Knausen *a* hæver sig op umiddelbart fra det høieste Flodmaal medens Søen under høit Vande stiger høit op ad Knausen (*b*) uden dog at overskylle den. Berg-Grundens Dagflade saavel i (*a*) som i (*b*) er stærkt glattet. Ved lavt Vande ligger derimod ogsaa (*b*) helt over Havfladen.

Om end i det hele mindre rent udprægede, saa synes Forholdene her i meget at ligne dem ved de gamle Strandlinier. Det veibanelignende Plan ligger mellem Niveauerne for den høieste og laveste Vandstand, medens den steilt opstigende Endevæg fra Veibanens indre Kant enten kan ligge helt over høieste Vandstand eller som i Fig. 11 delvis under.

Som det vil fremgaa af de her vedlagte Rits, stryger den kvartsitiske Bergart parallel med den nuværende Strandlinie, medens Faldet er indad, (altsaa fra samme).

Stor-Ø og Lam-Ø ere de af Holmerne, der i stærkest Grad ere udsatte for Indvirkningen af udskydende Fjordis, der navnlig her — som ovenfor nævnt — skal kunne presses frem med stor Voldsomhed. Storøens nøgne og stærkt skurede Vægge stige temmelig steilt op fra Havfladen, men afsluttes nedad ved en paa det nærmeste horizontal Bundflade, der ved høit Vande ligger under Havfladen, medens den ved lavt Vande ligger tør (Fig. 12). Ved Lamøen ere Forholdene nogenlunde ensartede hermed, men dog med den Forskjel, at den glattede Bergvæg stikker dybere ned under Havfladen, forinden den gaar over i en mere skraanende Bundflade. Paa andre Steder skyder dog ogsaa Berget under et Fald af 45 ^{0} og tildels ogsaa derover saa dybt ned under Havfladen, at der her neppe vil kunne blive Tale om, at den uddrivende Fjordis skulde have kunnet fremkalde dette.

At de her fremstillede Forholde idet mindste for en væsentlig Del maa være at tilskrive Fjordisens skurende Evne, idet denne under Isbrydningen presser sig frem langs Fjordens østlige Side og ud imellem Holmerne — derfor er der vel al Rimelighed. Der synes ogsaa, som nys nævnt, i meget at raade en paatagelig Overensstemmelse mellem de gamle høit over Havfladen liggende Strandlinier og de her omhandlede Forholde ind gjennem Salangen. Man har de samme horizontale veilignende Planer med de fra sammes indre Kant temmelig steilt opstigende Bergvægge. I Salangen træder vistnok Forholdet frem mere uregelmæssigt og afbrudt end Tilfældet er ved de gamle Strandlinier, hvor den regelmæssige Sammenløben, der som tidligere omhandlet er at følge gjennem lange Strækninger, er saa stærkt fremtrædende. Men man gjenfinder dog som det synes inden Salangen de samme Hovedtræk. Der kunde saaledes paa Forhaand maaske være nogen Grund til at forudsætte, at de gamle Strandlinier kunne være et Værk af lignende Kræfter som dem, der have virket til at fremkalde de omhandlede Forholde inden Salangen.

Det kunde derfor være værdt her at fæste Opmærksomheden lidt nærmere ved disse.

Har den uddrivende Is her været den vigtigste Faktor til Skuringen af de fra Havfladen opstigende Bergvægge, saa kan dette antagelig alene være foregaaet under Fjeldgrundens langsomme Stigning. Thi Drivisen vil antagelig aldrig kunne skrues saa høit op efter Bergvæggene, at den skulde have mægtet at udføre hele dette Arbeide under de nuværende Høideforholde.

Den horizontale eller svagt skraanende Flade under de glattede Bergvægge ligger oftest i nogenlunde samme Høide — nemlig mellem høit og lavt Vande. Hvor der var Anledning til nærmere at undersøge Fladens Undergrund, fandtes den vistnok oftest dækket med Slam, Ler o. s. v., men paa sine Steder fandtes dog ogsaa her den kvartsitiske Undergrund stikkende frem. Der kan saaledes være nogen Sandsynlighed for, at den faste Undergrund her alene er dækket af et tyndt Lag af løst Materiale — det vil sige den sagte skraanende Strandflade maa her antagelig være udskaaret i fast Berg altsaa dannet ved Erosion i Lighed med de gamle Strandlinier. Endvidere maa den antagelig altid have ligget i nogenlunde samme Niveau i Forhold til Havfladen som Tilfældet er nu. Stort høiere vil den naturligvis ikke kunne have ligget, i saa Tilfælde vilde den udskydende Fjordis ikke kunne have naaet til her at arbeide udgravende. Noget synderlig dybere vil Strandfladerne her heller ikke kunne have ligget under de klimatiske Forholde, hvorunder de maa være dannede. Disse maa antagelig paa det nærmeste have svaret til de nuværende. Strandfladedannelsen er her nemlig ikke afsluttet, men fremdeles i Virksomhed. Der er derfor al Grund til at forudsætte, at Mægtigheden af de uddrivende Ismasser her maa have været nogenlunde den samme gjennem hele det Tidsrum, hvori den omhandlede Stranddannelse er foregaaet.

At Forholdene her imidlertid, som ovenfor fremholdt, i saa Henseende ere lidet udprægede, kan være en ligefrem Følge af at Fjordisen i for ringe Maalestok og alene til en enkelt kort begrændset Tid af Aaret skyder udover og heller ikke kan virke inden noget videre Omraade.

Helt anderledes maatte Forholdet her i saa Henseende have stillet sig, naar man istedetfor en lukket Fjord havde for sig aabne Sundløb med stærk Strømsætning, og dertil da det skurende Materiale i rigeligt Maal.

I Henhold til den her leverede Fremstilling, synes Strandlinierne at pege hen mod den samme Slutning, — hvortil man ovenfor er naaet ad andre Veie — nemlig den, at Landets Stigning gjennem Kvartærtiden er foregaaet langsomt og derimod ikke stød- eller rykvis.

Ifald Strandliniedannelsen i Virkeligheden skal være foregaaet paa den her fremstillede Maade, vil det Spørgsmaal naturligvis stille sig frem, hvor det virkende Agens (Isen) er at søge. Af Høideforholdene fremgaar det med Bestemthed at flere af de gamle Strandlinier — saaledes de fleste i denne Afhandling omtalte — maa være dannede i den postglaciale Tid. Det nordlige Norges Kyststrøg og Sundløb ere imidlertid for Tiden ganske isfri, og alene de inderste Partier af dybere indskaarne Fjorde kunne gjennem de strængeste Vintermaaneder være belagte med Is. Under de nu raadende klimatiske Forholde mangler de nødvendige Betingelser for Dannelsen af Strandlinier saa godtsom ganske. Det vil saaledes være nødvendigt at forudsætte, at meteorologiske og klimatiske Forholde maa gjennem den postglaciale Tid have været underkastede forskjellige periodiske Vexlinger, idet Strandlinierne alene træder frem mere udprægede inden bestemte over hinanden liggende Niveauer. Igjennem den postglaciale Tid maa saaledes koldere Perioder gjentagne Gange have vexlet med mildere. Under de koldere Tidsafsnit kan Masser af Havis være drevne ind mod Kysten, og ved Strømsætningen være ført ind efter Sundløbene, medens omvendt ogsaa Ismasser fra lokale Gletschere, der da i større Maalestok end nu har skudt sig ned efter Fjeldindskjæringerne, ved Strømsætningen er ført udover. Under disse kolde Perioder ere da Strandlinierne udgravede. Den vertikale Afstand mellem hver to paa hinanden følgende Strandlinier fra den enes Veiplan til den nedenfor liggende Strandlinies Punkt (*c*) Fig. 8, betegner saaledes Maalet for Landgrundens Stigning gjennem hver enkelt af de mildere Perioder, — Høiden af den fra hver Strandlinies indre Kant opstigende Bergvæg *bc* Fig. 8 derimod Maalet for Opstigningen gjennem hver enkelt af de koldere Perioder.

Den af forskjellige Forskere ad anden Vei dragne Slutning om, at der gjennem den postglaciale Tid maa have raadet flere paa hinanden følgende periodiske Temperaturvexlinger over den nordlige Hemisphære synes saaledes ogsaa at skulle støttes ved at se hen til de her optrædende Strandlinier.

Resumé.

De gjennem denne Fremstilling vundne Resultater kunne sammenstilles under følgende Hovedposter.

1. Strandlinierne ere under Landgrundens langsomme Stigning udgravede ved Skuring af svømmende Kystis og Fjordis.
2. Strandlinierne ville derfor fortrinsvis være at søge paa saadanne Steder, hvor stærk Strømsætning har raadet under Dannelsestiden, — saaledes langs trangere Sundløb eller langs saadanne Fjorde, der gjennem omhandlede Tid have dannet Dele af dengang til begge Ender aabne Sundløb.
3. Udgravningen er paabegyndt under Havfladen — men i Regelen over laveste Vandstand. Efter hvert som Landgrunden og dermed den fra først af udgravede Fure hæves, skurer Isen sig i samme Maal dybere ned, saa Furens Bundflade trods dette gjennem den hele Dannelsestid dog paa det nærmeste kommer til at ligge i samme Niveau. Det herunder udskaarne Triangel-Snit faar saaledes stadig en større og større Høide, samtidig som den skurede Grundflade voxer i Brede paa Grund af den oprindelige Fjeldvægs udadheldende Dagflade.
4. Det udskaarne Triangel-Snits øverst liggende Toppunkt betegner det Punkt, hvorigjennem Strandliniens første Fure er trukket — i en Tid, da Punktet laa mellem høieste og laveste Vandstand. Bergvæggen, der skyder op

fra Veibanens indre Kant til det udskaarne Triangel-Snits øverste Toppunkt angiver Maalet for Landgrundens langsomme Stigning gjennem det Tidsrum, der er medgaaet til Udgravningen af angjeldende Strandliniesystem.

5. Strandlinierne synes at tyde hen paa, at den skandinaviske Halvøs Vestrand er steget langsomt — men ikke ryk- eller stødvis.
6. Af Strandlinierne ere de høiest liggende at henføre til den glaciale Tid, flere af de lavere liggende til den postglaciale Tid.
7. Da Kyststrøgene langs det nordlige Norge for Tiden — det inderste af enkelte Fjordbunde fraregnet — ere ganske isfri, vidner Strandliniernes Optræden om, at der over de omhandlede Strøg gjennem den postglaciale Tid maa have fundet Sted forskjellige periodiske Temperaturvexlinger. Mildere Perioder, der svare til de nuværende, maa have vexlet med koldere. Under disse sidste ere Masser af svømmende Is drevne langs Sundløbene og Strandlinierne ere Resultatet af disses skurende og udgravende Arbeide.

Tromsø d. 2 April 1878.

SÄTZE ÜBER MINIMALFLÄCHEN II. BESTIMMUNG ALLER ALGEBRAISCHEN MINIMAL-FLÄCHEN, DIE SICH IN EINEM ALGEBRAISCHEN KEGEL EINSCHREIBEN LASSEN.

VON

SOPHUS LIE.

Die Theorien meiner vorangehenden Note, verbunden mit der *Bonnetschen* Theorie der Biegung der Minimalflächen geben eine elegante Bestimmung aller *algebraischen* Minimalflächen, die sich in einem beliebig vorgelegten algebraischen Kegel einschreiben lassen. Dies werde ich jetzt zeigen, indem ich zuerst einen Satz, den ich früher synthetisch entwickelt habe, jetzt analytisch beweise.

I. Seien $x\ y\ z$ die Punktcoordinaten einer reellen algebraischen Curve. Die Coordinaten $x_1\ y_1\ z_1$ des Krümmungs-Mittelpunkts sind bekanntlich bestimmt durch

$$x_1 = x + \frac{x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

$$y_1 = y + \frac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

$$z_1 = z + \frac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

wo $x''\ y''\ z''$ die zweiten Differential-Quotienten hinsichtlich der Bogenlänge s bezeichnen. Construirt man nun in einem Krümmungs-Mittelpunkte die Normale zur Tangentenebene der Evolute, so erhält man eine Gerade deren Richtungscosinus bez. x' y' z' sind. Die Minimalfläche, die die Evolute nach dem Orte der Krümmungs-Mittelpunkte berührt, ist daher gegeben durch die bekannten Formeln

$$\xi = R\,U,\ \eta = R\,V,\ \zeta = R\,W,$$

wo

$$U = x_1 + i\int (z'\,dy_1 - y'\,dz_1)$$

$$V = y_1 + i\int (x'\,dz_1 - z'\,dx_1)$$

$$W = z_1 + i\int (y'\,dx_1 - x'\,dy_1).$$

Durch Ausführung findet man

$$U = x_1 + i\int\left(z'\,d\,\frac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} - y'\,d\,\frac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}\right)$$

oder indem man die Integration ausführt und die analogen Ausdrücke der Grössen V und W hinzufügt

$$U = x_1 + i\,\frac{z'\,y'' - y'\,z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

$$V = y_1 + i\,\frac{x'\,z'' - z'\,x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

$$W = z_1 + i\,\frac{y'\,x'' - x'\,y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

Hiermit ist nachgewiesen, dass die gesuchte Minimalfläche algebraisch ist. Also

Satz 1. *Die Minimalfläche, die die Evolute einer algebraischen Raumcurve nach dem Orte der Krümmungs-Mittelpunkte berührt, ist algebraisch.*

Es ist leicht zu verificiren, dass der Punkt, dessen Cartesische Coordinaten bez. U, V, W sind, auf der Evolute gelegen ist. Es besteht in der That, wie man durch Ausführung findet, die Identität

(1) $$(U - x_1)x' + (V - y_1)y' + (W - z_1)z' = 0.$$

Hier möge noch bemerkt werden, dass

$$(U - x_1)^2 + (V - y_1)^2 + (W - z_1)^2 = \frac{-1}{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

oder wenn man den Krümmungsradius der ursprünglichen Curve mit ρ bezeichnet

(2) $$\sqrt{(U - x_1)^2 + (V - y_1)^2 + (W - z_1)^2} = i\rho,$$

2. Jetzt suchen wir die *Bonnetsche* Biegungsfläche. Setzen wir

$$U = x_1 + ix_2; \quad V = y_1 + iy_2, \quad W = z_1 + iz_2$$

und nennen die Coordinaten der reellen Punkte der Biegungsfläche bez. $\xi\ \eta\ \zeta$, so ist nach *Bonnet*

$$\xi = R(ix_1 - x_2)$$

$$\eta = R(iy_1 - y_2)$$

$$\zeta = R(iz_1 - z_2).$$

Zu der Berührungscurve der ursprünglichen Minimalfläche mit der vorgelegten Evolute entspricht dabei auf der neuen Minimalfläche diejenige Curve K, deren reelle Punkte durch die Formeln

$$\xi = -x_2, \quad \eta = -y_2, \quad \zeta = -z_2$$

gegeben sind. Die Normale der Tangentenebene längs dieser Curve besitzt dabei bekanntlich die Richtungscosinus $x'\ y'\ z'$, das heisst dieselben Richtungscosinus wie die entsprechende Tangentenebene der ursprünglichen Fläche.

Wir werden zeigen, dass die Tangentenebenen der Biegungsfläche längs K einen Kegel bilden. Es ist nehmlich

$$x'\,dU + y'\,dV + z'\,dW = 0,$$

woraus folgt

$$x' dx_1 + y' dy_1 + z' dz_1 = 0$$

$$x' dx_2 + y' dy_2 + z' dz_2 = 0;$$

ferner ist (1)

$$x' x_2 + y' y_2 + z' z_2 = 0,$$

also kommt

$$\frac{x'}{\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ dy_2 & dz_2 \end{vmatrix}} = \frac{y'}{\begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ dz_2 & dx_2 \end{vmatrix}} = \frac{z'}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ dx_2 & dy_2 \end{vmatrix}},$$

welche Gleichungen zeigen, dass die Tangentenebenen der Biegungsfläche längs der Curve K sämmtlich durch Origo gehen.

Berücksichtigt man nun die Formel (2), so kann man den folgenden merkwürdigen Satz aussprechen:

Satz 2. Die Biegungsfläche berührt einem Kegel, dessen Tangentenebenen mit den Normalebenen der ursprünglichen Curve parallel sind. Für jeden Punkt der Berührungscurve ist der Distanz von Origo gleich dem entsprechenden Krümmungsradius der ursprünglichen Raumcurve.

Früher haben wir gefunden, dass die vorgelegte Minimalfläche ∞^3 Evoluten algebraischer Raumcurven nach dem Orte der Krümmungs-Mittelpunkte berührt. Zu den betreffenden Berührungscurven entsprechen dabei auf der Biegungsfläche die dreifach unendlich viele Curven, nach denen die letzte Fläche von ihren Tangentenkegeln berührt wird. Und da die Beziehung zwischen den beiden Minimalflächen eine gegenseitige ist, folgt dass auch die Berührungscurven der vorgelegten Fläche mit ihren Tangentenkegeln diejenigen Curven der Biegungsfläche liefern, nach denen diese Fläche von den Evoluten von Raumcurven nach dem Orte der Krümmungs-Mittelpunkte berührt wird.

3. Ist nun gegeben ein beliebiger algebraischer Kegel

$$f\left(\frac{x_2}{y_2}\,\frac{z_2}{y_2}\right) = 0,$$

so findet man folgendermassen vermöge des vorangehenden

Satzes *beliebig viele algebraische* Minimalflächen, die in diesem Kegel eingeschrieben sind. Ich setze

$$f\left(\frac{t}{u}\,\frac{v}{u}\right) = 0$$

und interpretire dabei mit *Plücker* $t\ u\ v$ als Coordinaten der allgemeinen Ebene

$$tx_2 + uy_2 + vz_2 - 1 = 0.$$

Sodann füge ich eine arbiträre algebraische Relation zwischen $t\ u\ v$

$$\varphi\,(t\,u\,v) = 0$$

hinzu. Alsdann bestimmen die beiden Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ die Osculationsebenen einer algebraischen Raumcurve, deren Normalebenen mit den Tangentenebenen des vorgelegten Kegels parallel sind. Sodann nehme ich auf jeder Erzeugende des Kegels einen Punkt p, dessen Distanz von Origo, das heisst von der Kegelspitze, gleich dem entsprechenden Krümmungsradius der Raumcurve ist. Der Inbegriff der Punkte p bilden eine Curve, und diejenige Minimalfläche die den vorgelegten Kegel nach dieser Curve berührt, ist nach dem Vorangehenden immer algebraisch. Also

Satz 3. *Es giebt unendlichfach unendlich viele algebraische Minimalflächen, die in einem beliebig vorgelegten algebraischen Kegel eingeschrieben sind. Um eine solche zu finden, nehme man eine beliebige algebraische Raumcurve, deren Binormalen mit den Erzeugenden unseres Kegels parallel sind, und bestimme auf jeder Erzeugende einen Punkt p, dessen Distanz von der Kegelspitze gleich dem entsprechenden Krümmungsradius der Raumcurve ist. Die Minimalfläche, die den Kegel längs der von den Punkten p erzeugten Curve berührt, ist algebraisch.*

4. Der letzte Satz erhält dadurch eine noch grössere Wichtigkeit, dass die angegebene Construktion sämmtliche algebraische Minimalflächen liefert, die in dem vorgelegten algebraischen Kegel eingeschrieben sind.

Seien in der That

$$\xi = x_2\,, \quad \eta = y_2\,, \quad \zeta = z_2$$

die Gleichungen der Berührungscurve einer beliebigen eingeschriebenen algebraischen Minimalfläche mit dem vorgelegten Kegel. Seien X, Y, Z wo

$$\frac{X}{\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ dy_2 & dz_2 \end{vmatrix}} = \frac{Y}{\begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ dz_2 & dx_2 \end{vmatrix}} = \frac{Z}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ dx_2 & dy_2 \end{vmatrix}}$$

die Richtungscosinus der Tangentenebene des Kegels. Setze ich dann

$$\left.\begin{aligned} dx_1 &= Z dy_2 - Y dz_2 \\ dy_1 &= X dz_2 - Z dx_2 \\ dz_1 &= Y dx_2 - X dy_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

und ferner

$$U = x_2 + i x_1\,, \quad V = y_2 + i y_1\,, \quad W = z_2 + i z_1$$

so bestimmen die Gleichungen

$$\xi = R\,U, \quad \eta = R\,V, \quad \zeta = R\,W$$

die gegebene Minimalfläche.

Es bestehen wie man leicht verificirt, die folgenden Formeln

$$\left.\begin{aligned} dx_2 &= -Z dy_1 + Y dz_1 \\ dy_2 &= -X dz_1 + Z dx_1 \\ dz_2 &= -Y dx_1 + X dy_1 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$X x_2 + Y y_2 + Z z_2 = 0 \tag{5}$$

$$X dx_2 + Y dy_2 + Z dz_2 = 0$$

$$x_2\, dX + y_2\, dY + z_2\, dZ = 0$$

$$X dx_1 + Y dy_1 + Z dz_1 = 0.$$

Wir führen drei neue Grössen $x\ y\ z$ ein, indem wir zetzen

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + Y z_2 - Z y_2 \\ y &= y_1 + Z x_2 - X z_2, \\ z &= z_1 + X y_2 - Y x_2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

woraus durch Berücksichtigung von (3) folgt

$$dx = z_2\, dY - y_2\, dZ$$
$$dy = x_2\, dZ - z_2\, dX$$
$$dz = y_2\, dX - x_2\, dY.$$

Man findet

$$x_2\, dx + y_2\, dy + z_2\, dz = 0$$

und indem man zugleich (5) berücksichtigt

$$\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ Y & Z \end{vmatrix} dx + \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ Z & X \end{vmatrix} dy + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ X & Y \end{vmatrix} dz = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen geben

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{ds}{1},$$

wo s die Bogenlänge der Raumcurve $x\ y\ z$ bezeichnet. Bezeichnen wir daher die Differential-Quotienten von $x\ y\ z$ hinsichtlich s mit $x'\ y'\ z'$, so kommt

$$X = x', \quad Y = y', \quad Z = z'.$$

Die voranstehenden Formeln erlauben die Grössen $x_1\ y_1\ z_1\ x_2\ y_2\ z_2$ durch $x\ y\ z\ x'\ y'\ z'\ x''\ y''\ z''$ auszudrücken. Ich setze

$$U_1 = x_1 + i\, x_2, \quad V_1 = y_1 + i\, y_2, \quad W_1 = z_1 + i\, z_2$$

und erhalte hierdurch, wie man leicht verificirt, die folgenden complexen Gleichungen

$$(7) \qquad (U_1 - x)^2 + (V_1 - y)^2 + (W_1 - z)^2 = 0$$

$$(8) \qquad (U_1 - x)\, x' + (V_1 - y)\, y' + (W_1 - z)\, z' = 0$$

$$x'\, d\, U_1 + y'\, d\, V_1 + z'\, d\, W_1 = 0.$$

Differentiirt man die nächstletzte und berücksichtigt dabei die letzte Gleichung findet mnn

$$(9) \qquad (U_1 - x)\, x'' + (V_1 - y)\, y'' + (W_1 - z)\, z'' - 1 = 0.$$

Jetzt geben die Gleichungen (7) (8) (9)

$$U_1 = x + \frac{x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i \frac{z' y'' - z'' y'}{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

$$V_1 = y + \frac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i \frac{x' z'' - z' x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

$$W_1 = z + \frac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i \frac{y' x'' - x'' y'}{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

oder indem man U_1 V_1 W_1 in ihre reelle und imaginäre Theile zerlegt:

$$x_1 = x + \frac{x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}, \quad x_2 = \pm \frac{z' y'' - y' z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

$$y_1 = y + \frac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}, \quad y_2 = \pm \frac{x' z'' - z' x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

$$z_1 = z + \frac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}, \quad z_2 = \pm \frac{y' x'' - x' y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

woraus endlich folgt

$$\sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2} + z_2^{\,2}} = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}.$$

Diese Formeln zeigen, dass die Anwendung der Operationen des vorangehenden Satzes auf diejenige algebraische Raumcurve, deren Coordinaten $x\,y\,z$ durch die Formeln (6) bestimmt sind, eben die vorgelegte algebraische Minimalfläche, liefert.

Satz 4. Die Operationen des vorangehenden Satzes liefern alle algebraische Minimalflächen, die in einem vorgelegten algebraischen Kegel eingeschrieben sind.

---

5. Die Theorien dieser Note sind einer merkwürdigen Verallgemeinerung fähig, die ich in der nachstehenden Note analytisch entwickeln werde. Hier erlaube ich mich kürzlich die synthetischen Betrachtungen anzugeben, die mich ursprünglich zu dieser Verallgemeinerung geführt haben. Man wird be-

merken, dass die nachstehenden Entwickelungen eine *Methode* bilden, vermöge deren überhaupt Sätze über Minimalflächen in andere Sätze über Minimalflächen sich umwandeln lassen.

Legendre hat bekanntlich durch Anwendung von Ebenen-Coordinaten der partiellen Differential-Gleichung der Minimalflächen eine *lineare* Form gegeben. Hieraus folgt, wie *Weierstrass* zuerst explicite bemerkt hat, dass die Auffindung zweier Minimalflächen unmittelbar die Construktion einer dritten Minimalfläche, oder wenn man will, die Construktion von einfach unendlich vielen Minimalflächen gestattet.

Eine solche Construktion wird durch den folgenden Satz, den ich vielleicht zuerst ausdrücklich aufgestellt habe, geliefert.

Gleitet eine Minimalfläche in Translations-Bewegung längs einer festen Minimalfläche, so beschreibt jeder mit der beweglichen Fläche fest verbundener Punkt wiederum eine Minimalfläche.

Diese Form der Construktion ist daher wichtig, weil sie unmittelbar eine allgemeine Categorie Berührungs-Transformationen liefert, die Minimalflächen in Minimalflächen umwandelt. Man führe in der That auf eine beliebige (algebraische) Minimalfläche und einen mit derselben fest verbundenen Punkt alle mögliche Translationen aus. Betrachtet man sodann gleichzeitige Lagen der Fläche und des Punkts als einander entsprechend, so lehrt der vorangehende Satz, dass die hiermit definirte *Berührungs-Transformation* wirklich eine jede Minimalfläche in eine Minimalfläche umwandelt.

Hieraus folgt insbesondere, was man übrigens unmittelbar aus der Form der partiellen Differential-Gleichung schliessen könnte, dass die *Punkte* des Raumes, aufgefasst als Ebenen-Gebilde *Minimalflächen* sind.

Man übersieht ferner unmittelbar, dass unsere Berührungs-Transformation jede Ebene in eine (parallele) Ebene umwandelt, und dass in Folge dessen jede developpable Fläche in eine parallele developpable Fläche übergeht.

Dies vorausgesetzt, nehme man einen beliebigen algebraischen Kegel und sämmtliche algebraische Minimalflächen, die in demselben eingeschrieben sind, führe sodann unsere Berührungs-Transformation aus. Hierbei geht der Kegel in eine Developpable über; die in dem Kegel eingeschriebenen algebraischen Minimalflächen liefern algebraische Minimalflächen, die in der Developpable eingeschrieben sind. Insbesondere geht die Kegelspitze aufgefasst als inf. Kugel, die in dem Kegel eingeschrieben ist, über in eine Minimalfläche, die in der Developpable eingeschrieben ist.

Sei andererseits eine algebraische Minimalfläche und eine um derselben umgeschriebene Developpable gegeben. Ich behaupte, dass es unendlich viele algebraische Minimalflächen giebt, die in dieser Developpable eingeschrieben sind. Zum Beweis führe ich eine Berührungs-Transformation der früher besprochenen Art aus, bei der die Minimalfläche in einen Punkt p übergeht; gleichzeitig wird die Developpable ein algebraischer Kegel, dessen Spitze in p liegt. In diesem Kegel lassen sich beliebig viele algebraische Minimalflächen einschreiben. Führt man daher die inverse Transformation aus, so erhält man unbeschränckt viele algebraische Minimalflächen, die in der vorgelegten Developpable eingeschrieben sind. Und man erkennt leicht, dass unsere Construktionen sämmtliche algebraische Minimalflächen liefert, die in der betreffenden Developpable eingeschrieben sind. Also

Satz 5. *Wählt man unter den Tangentenebenen einer algebraischen Minimalfläche nach einem arbiträren algebraischen Gesetze einfach unendlich viele, so lässt sich in der hiermit erhaltenen Developpable beliebig viele algebraische Minimalflächen einschreiben. Dieselben können sämmtlich angegeben werden.*[1])

[1]) Durch *Henneberg* wurde zuerst meine Aufmerksamkeit darauf gerichtet, dass algebraische Minimalflächen sich nur in solchen *Cylindern* einschreiben lassen, deren orthogonaler Querschnitt die Evolute einer algebraischen ebenen Curve ist. Es ist leicht alle algebraische Minimalflächen anzugeben, die in einer solchen Cylinderfläche eingeschrieben sind.

LAPPISCHE GRÄBER-SCHÄDEL.

VON

PROF. DR. JACOB HEIBERG,

DIREKTOR DER ANATOMISCHEN ANSTALT DER UNIVERSITÄT
ZU CHRISTIANIA.

Durch den in *Mortensnäs* am *Varangerfjord* in *Finmarkens* Amt früher ansässingen Kaufmann Herrn *Nordvie* hat die hiesige anatomische Anstalt eine kleinere Zahl *lappischer* Schädel und Skelettheile erworben, welche in heidnischen Begräbnissorten gefunden, unser Interesse anregen, da wir annehmen müssen, dass vor ein Paar Jahrhunderten *nur ein Stamm* der turanischen Race, die *Lappen* oder Finnen diese Gegend bewohnte. Erst am Anfang des vorigen Jahrhunderts zeigen sich Spuren des *zweiten*, jetzt in diesen Gegenden ansässigen turanischen Stammes, die *Quänen*, welche sowohl der Sprache nach als des äusseren Habitus wegen als aus dem Grossherzogthum Finland eingewandert betrachtet werden müssen.

In den Anschanungen über diese zwei Stämme herrscht selbst hier in Norwegen nicht wenig Verwirrung und Unsicherheit, was darin seinen wesentlichsten Grund haben möchte, dass die Norweger die *Lappen* gewöhnlich *Finnen* nennen, während unserere wissentschaftliche Untersuchungen dahin führen, die Quänen als *Finnen* anzusehen. In diesen nördlichen Theilen unseren Vaterlandes wohnen somit jetzt zwei

Stämme der turanischen Race, die sich zwar in sprachlicher Beziehung nicht weit von einander trennen, in sozialer Hinsicht aber ziemlich verschieden sind.

Drei und zwanzig *lappische* Schädel wurden untersucht, hiervon wurden mir einige aus dem hiesigen Museum für Alterthümer durch die Güte des Herrn Prof. *Rygh* und noch andere durch die Güte der Herrn *Nordvie* wohlwollend zur Disposition gestellt. Einige waren jedoch dermassen beschädigt, dass dieselben aus der Untersuchung mussten ausgeschlossen werden; ein sonst gut conservirter Schädel zeigte sich synostotisch und hydrocephalisch, ein zweiter ebenso gut erhaltener gehörte einem jungen Kinde an. Auf diese Weise blieben nur 14 als für eine genauere Beschreibung geeignete Schädel zurück; soweit man aber von den Resten der uebrigen beurtheilen konnte, so stimmen dieselben mit den hier beschriebenen in allen wesentlichen Punkten gut ueberein.

Dass ich jetzt die Messungen an die Oeffentlichkeit treten lasse, gründet sich erstens darin, dass schon Jahrzehnte verstrichen sind, ohne dass unsere Bemühungen lappische Schädel überhaupt zu erwerben mit Erfolg gekrönt worden und zweitens darin, dass unsere Hoffnungen in der nächsten Zukunft mehrere Gräber-Schädel zu erhalten, durch die Uebersiedelung unseren bisherigen Gewährsmannes des Herrn *Nordvie* nach Christiania stark herabgesetzt worden sind.

Durch die Bestrebungen unserer Regierung möchte die Zeit wohl nicht sehr fern sein, da das wesentlichste diagnostische Mittel die zwei Racen zn bestimmen, die lappische Sprache nähmlich in die norwegische aufgegen ist; desswegen scheint auch jeder Beitrag zur anthropologischen Beschreibung diesen Stammes erwünscht und die Resultate der Schädelmessungen werden das Ihrige beitragen.

Eins ist auffallend nähmlich die durchschnittliche Jugend der Schädel. Der wahrscheinlichste Grund wäre möglicherweise zu suchen in einer der mehreren Pockenepedemieen, welche mehrmals die Bevötkerung der dortigen Gegenden stark decimirt haben.[1])

Herr *A. G. Nordvie* schreibt: «Auf zwei in *Nässeby Sogn, Varanger, Finmarken* belegenen kleinen Inseln, *Ljaaholmen* und *Sandholmen* bemerkte ich *lappische* Gräber. Die genannten Inseln sind unbewohnt und keine Spur ist zu finden, dass dieselben früher sollten bewohnt gewesen sein. *Liljenskjold* erwähnt in seinem *Speculum boreale*, dass die Lappen dort selbst kleine einfache «Essbuden» (Madboder) hätten und viele Todten «ohne Ceremonieen begruben». Die Leichen sind in etwas verschiedener Weise beerdigt, nähmlich entweder in dem lappischen flachen, bootförmigen Schlitten (Kjärris) oder in einer mit einfachen hölzernen Nägeln zusammengefügten Kiste oder auch nur lose auf einige Bretter oder runde Stämme hingelegt. In einigen Fällen wurden ueberhaupt keine Spuren von Holz gefunden. Die Gräber zeichnen sich durch eine Einsenkung in den Geröllsteinen aus und sind ohngefähr 70 Cm. tief belegen.»

Wenn man von einer Beerdigung spricht, so ist dieses nicht in der gewöhnlichen europäischen Bedeutung zu nehmen, da es auf diesen Inseln kaum Erde oder Humus giebt. Man hat sich nähmlich in die grossen Ansammlungen von Geröllsteinen hineingearbeitet und dieselben sehr umsichtsvoll in ihre natürliche Lage wieder hergestellt, so dass ein ungeübter Beobachter mehrmals vorbeipassiren kann ohne an dem Geröll etwas besonderes zu bemerken. Der geübte Forscher aber will auf eine gewisse Steifheit der Anordnung der Gesteine und eine kleine Einsenkung aufmerksam werden. Herr *Nordvie* glaubt ferner dass zahlreiche Gräber von den Priestern früher geöffnet und die Skelette der heidnischen Lappen ohne weiteres nochmals in «eingeweihte» Erde auf den christlichen benachbarten Kirchhöfen begraben worden sind.

---

[1]) J. A. Fries. En Sommer i Finmarken, russisk Lapland og Nordkarelen. Christiania 1871. Pag. 9.

Erster Schädel (Privatbesitz des Herrn Nordvie) stammt aus *Sandholmen Varangerfjord* (oestliche Seite der Nordspitze Norwegens); gut conservirt, breit, stark von männlichem Habitus. Tnbb. pariett. wahrscheinlich pathologisch stark hervortretend. Nähte offen. Kein Schaltknocken; mehrere der Vorderzähne ausgefallen. Sämmtlige Alveolen offen.

Zweiter Schädel No. 172 anat. Sammlung, No. 2 *Nordvie*, stammt aus *Sandholmen, Varangerfjord* wurde aus einer mit hölzernen Nägeln zusammenfügten Kiste, welche fast zerfallen var, enthoben. Die Bretter sehr roh bearbeitet, ohngefähr 4 Cm. dick. Der Kopf lag gegen Westen.

Brauner, gut conservirter, an der Oberfläche etwas angenagter Schädel eines ohngefähr 40-jahrigen Mannes. Gesicht ziemlich gerade. Stirn zurückliegend. Starker Augenbrauenwulst und Muskelansätze. Alle Nähte offen. Hinter der Stirnnaht eine quer gehende seichte Vertiefung. Kein Schaltknochen. Viele Zähne persistiren, sind etwas abgeschiffen. Die Alveolenräume der uebrigen offen. Keine *Sutura incis.* Interorbitalabstand gross, 24 mm. Nasenöffnung oval. Unterkiefer dick und klobig. Fig. 1.

Dritter Schädel No. 173 anat. Sammlung. No. 6 *Nordvie* stammt aus *Sandholmen,* lag 70 Cm. tief mit zwei anderen (No. 175, No. 176) im einem Grabe zusammen. Spuren eines hölzernen Gestelles als Unterlage. Der Kopf gegen Westen. No. 176 gehört dem altesten ohngefähr 36-jährigen Individuum an.

Brauner, gut conservirter Schädel eines ohngefähr 18-jährigen Individuums. Geschlecht unsicher, am meisten männlich, Nähte offen, hinter der Kranznaht eine quergehende zwei Finger breite seichte Vertiefung. Zahne $\frac{2.1.2.2}{2.1.2.1}$ Fig. 2.

Vierter Schädel No. 176 der anat. Sammlung. No. 5 *Nordvie* lag in der Mitte zwischen dem vorigen und einem hier nicht beschriebenen Schädel (No. 175 anat. Samml.) eines Kindes, stammt ebenso aus *Sandholmen.*

Brauner, gut conservirter Schädel eines 36-jährigen Mannes. Hie und da eine *leichte Verschmelzung* der Kranz- und Pfeilnaht. In der rechten Lambdanaht ein grösserer Schaltknochen. Hinter der Kranznaht eine schwache, seichte quergehende *Vertiefung.* Zähne $\frac{2 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 2}{2 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 2}$ alle vorhanden. Unterkiefer klobig. Fig. 3.

Fünfter Schädel No. 177 der anat. Sammlung No. 1 *Nordvie* stammt aus *Sandholmen,* wurde in der Tiefe von ohngefähr 70 Cm. in einem Schlitten gefunden. Der Kopf lag gegen NW.

Brauner, ganz gut conservirter, starker, schwerer Schädel eines ca. 40-jährigen Mannes. Starke Muskelanzätze. Zähne $\frac{2 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3}{2 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3}$. Nähte offen. In den Lambdanaht mehrere Schaltknocken. Fig. 4.

Sechster Schädel No. 181 der anat. Sammlung stammt aus *Laxbubugten, Vadsø.*

Hoher Schädel eines ohngefähr 25-jährigen Mannes. Der Knochen weiss mit einem grünlichen Belage. Das Hinterhaupt stark nach hinten hervorspringend. Die Pfeil- und Lambdanaht theilweise verwachsen. Sämmtliche Alveolen offen. Vorderzähne fahlen, die persistirenden kaum abgeschliffen. Unterkiefer fehlt.

Siebenter Schädel No. 183 d. anat. Sammlung stammt aus *Sandholmen.* Weiser, an der Oberfläche corrodirter Schädel von männlichem Typus. Nähte offen; in der Lambdanaht ein Paar kleine Schaltknochen. Unterkiefer fehlt. Einige wenig abgeschliffene Mahlzähne vorhanden.

Achter Schädel No. 184 d. anat. Sammlung stammt aus *Paddeby, Varangerfjord.* Weiser gut conservirter Schädel. Die Kranznaht nach unten hin, sowohl als die *Sut, fronto-*

sphenoidea verknöchert. In der Lambdanacht kleine Schaltknochen.

Neunter Schädel (Privatbesitz des Herrn N*ordvie*). Weiblicher, recht gut conservirter Schädel, kleine Stirnhöhlen und Sitzenfortsätze. Spuren von Verknocherung rechts unten in der Kranznaht.

Zehnter Schädel (Privatbesitz des Herrn *Nordvie*) stammt aus *Klubvig.* Graciler, wohl conservirter Schädel mit wenig hervorspringendon Sitzenfortsätze und Sinn. frontt. Stark geschlängelte Nähte, in dem Lambdawinkel ein gleichseitig dreieckiger 50 × 85 mm. grosser Schaltknochen. Nur die hinteren Backzähne erhalten, die uebrigen Alveolen leer. Die Ränder der Pfeilnaht etwas kammförmig hervortretend.

Elfter Schädel (Privatbesitz des Herrn *Nordvie*) aus dem *Varangerfjord;* sehr gut conservirter Schädel mit weiblichem Habitus. Wenige Zähne vorhanden. Die Alveolen des dritten grossen Mahlzahnes geschlossen. In der rechten Lambdanaht ein kleiner Schaltknochen.

Zwölfter Schädel No. 182 d. anat. Sammlung stammt aus *Paddeby, Varangerfjord.* Grünlicher, defekter, breiter hoher Schädel. Nähte offen. In der rechten Lambdanaht ein kleiner Schaltknochen. Einige kaum abgeschliffene Backzähne vorhanden.

Dreizehnter Schädel No. 1909. der Universitäts-Sammlung für Alterthümer stammt aus einem aehnlichen Grabe.

Hoher, sehr gut conservirter, weisser Schädel einer ohngefähr 25-jährigen Frau. Nähte offen. Sinus frontalis schwach, nicht ganz unbedeutende Muskelansätze. Alle Alveolen offen. Die vorderen Zähne ausgefallen, die restirenden kaum abgeschliffen. Unterkiefer fehlt.

Vierzehnter Schädel No. 180 der anat. Sammlung stammt aus *Paddeby, Vadsø Sogn,* Finmarken.

Relativ hoher, trockener, weisser, mit einem grünlichen Belage versehener, kindlicher Schädel. Geschlecht anbestimmbad. Nähte offen, relativ stark geschängelt. Unterkiefer fehlt.

Lappische Gräber-Schädel. Das v. Iheringsche Messungsschema.

Schädel	No.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
Katalog	No.	No. 1	172	173	176	177	181	183	184	2	3	4	182	1909	180
Mann		♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂						?
Frau										♀	♀	♀	♀	♀	?
Alter	ca.	40	40	18	36	40	25	25	50	50	40	50	25	25	16
Capacität	1. Ct.	1650	1390	1400	1310	1400	1330	1400	1600	1350	1260	1250	—	1460	1200
Circumferenz	2. C	530	500	485	505	515	500	500	510	520	495	490	480	490	470
Länge	3 L	186	178	170	180	180	175	180	176	184	173	172	163	173	166
Breite	4. B	158	149	144	150	148	141	140	153	146	132	139	145	139	134
Geringste Breite	5. b	103	95	100	103	100	97	100	100	100	96	100	108	93	93
Höhe	6. H	147	135	129	134	144	141	138	151	136	134	136	131	137	130
Stirnbogen	7 Sb	130	122	115	120	120	120	120	130	130	120	120	115	120	120
Scheitelbogen	8. Schb	125	115	125	110	130	115	120	115	120	110	115	110	125	115
Hinterhauptsbogen	9. Hb	130	135	105	115	120	125	115	125	115	115	115	110	110	115
Gesammtbogen	10. Gb	385	350	345	345	370	350	355	360	365	345	345	335	355	340
Nasenlänge	11. NL	50	53	43	49	53	50	45	45	55	45	45	45	50	40
Oberkieferlänge	12 OL	70	65	59	66	71	67	60	60	70	65	60	60	62	50
Gesichtslänge	13. GL	120	107	100	111	122	—	—	—	105	110	100	—	—	—
Gesichtsbreite	14. GB	123	120	102	120	114	118	118	118	117	110	119	107	112	98
Jochbreite	15. JB	134	140	113	130	131	133	127	133	126	121	127	—	126	110
Hinterhauptslänge	16. HL	94	87	82	83	83	83	93	91	99	86	83	70	90	75
Profilwinkel	17. PW	80°	93°	100°	95°	93	88°	80°	87°	85	85°	85°	90°	88	87°
Längenbreitenindex	18. L: H	85	83	85	83	82	81	78	87	79	76	81	89	80	81
Längenhöhenindex	19. L: B	79	76	76	74	80	81	77	86	73	77	79	80	79	78
Breitenhöhenindex	20. B: H	93	76	89	88	97	100	91	99	92	101	98	90	98	97
Breitenbreitenindex	21. B: b	65	62	77	69	69	67	71	65	68	73	72	74	64	61
Lagenindex	22. LJ	VI	VI	VI	VI	VI	VI	VI	VI	VI	VI	VI	VII	VI	VI

OM SKANDINAVIENS VERTIKALE SVINGNINGER.

AF

S. A. SEXE.

Læren om Skandinaviens vertikale Svingninger lyder kortelig saaledes: 1) Da Skandinaviens ældste skiktede Formationer vare under Opførelse, laa Skandinavien under Havets Overflade. 2) Siden hævede Skandinavien sig til Veirs saaledes, at den forud for Istiden og indtil henimod dennes Slutning ragede høiere over Havet end nu. 3) Ved Udgangen af Istiden sank Skandinavien tilbage. 4) Efter Istiden steg Skandinavien igjen og naaede op til sin nuværende Høide. 5) Visse Dele af det sydlige Sverige have dog i de senere Aarhundreder atter været i Synkende.

Skandinavien har saaledes i Tidernes Løb været ikke saalidet foruroliget af de underjordiske Kræfter, og disse have drevet et ikke saalidet lunefuldt Spil med samme. Naar der ikke var saa bælgmørkt dernede mellem os og vore Antipoder, saa kunde vi vel ikke vide os saa ganske betryggede mod en Protest derindefra, mod at der træffes saadanne Forføininger over de underjordiske Kræfter. Skandinaviens geologiske Saga vilde i ethvert Fald blive enklere, og man vilde ikke have nødig, at gjøre en saa hyppig og saa forskjellig Brug af Kræfter, som man ikke kjender, naar man af ovenanførte Liste kunde udslette No. 2, No. 3 og No. 4, og sætte en eneste Reisning i Stedet.

Forfatteren af foreliggende Bemærkninger har tidligere[1]) taget til Orde mod ovenstaaende No. 2 og No. 3, og finder i det Følgende nærmere at burde udvikle, hvad han har at anmærke ved disse Svingninger.

Hvad Skandinaviens, under No. 2 anførte, høit hævede Beliggenhed, og den under No. 3 anførte Synkning angaar, saa grunder oven fremstillede Lære sig paa følgende Argumenter: A) At Skandinaviens glaciale Skuringsmærker lade sig forfølge ned under Havfladen. B) At Skandinavien, naar undtages Skaane, mangler de geologiske Formationer, som skrive sig fra det sekundære og tertiære Tidsafsnit, medens adskillige af disse Formationer optræde hist og her i Skandinaviens Nabolande. C) At Transporten til Udlandet af Skandinaviens Glacialdetritus, navnlig de erratiske Blokke, ikke lader sig forklare, medmindre Skandinavien var løftet høiere op af Havet, end nu, og at Østersøens, Kattegatets, Skagerakets og Nordsøens Bund laa tør.

Argumentet (A) lyder, nærmere udviklet, saaledes: En Isbræ kan ikke skure, ikke sætte Striber paa en Klippeflade, medmindre denne ligger paa det Tørre, eller dog saa godt som paa det Tørre. Men nu strække de glaciale Skuringsstriber sig ned under Havfladen: Altsaa var Havets Stand, dengang disse Striber bleve til, lavere, eller, hvad der kommer ud paa det samme, Landet laa høiere end nu. De i Skandinavien forekommende Banker med fossile Rester af litorale Saltvandsdyr kunde ikke fremstaa, førend Istidens Gletschere vare saavidt afsmeltede, at de ikke naaede Havet. De øverste Nedlag af bemeldte Art forekomme nu høit, i Norge paa sine Steder henved 600 Fod over Havet: Følgelig sank Skandinavien et godt Stykke ned i Havet igjen i den Tid, som forløb fra Arbeidet paa de ned i Havet stigende Skuringsstriber sluttede,

---

[1]) Mærker efter en Istid i Omegnen af Hardangerfjorden. Universitetsprogram 1866 pag. 17.

til de øverste Nedlag med fossile Levninger af litorale Saltvandsmuslinger paabegyndtes.

Hele denne Argumentation staar og falder med den Forudsætning, at en Isbræ ikke skurer en Klippeflade under Vand, hvad enten det nu skal komme deraf, at Isbræen taber Evnen til at skure, saasnart den naar ned i Vand, eller deraf, at den flyder saa let, at den kun rækker ned til et Dyb, der er for Intet at regne. Hvad der maa til, for at en Isbræ skal kunne skure, sætte Striber paa en Klippe, er: at Isbræen bevæger sig, at den under Bevægelsen udøver et Tryk paa Klippen, og at der mellem denne og Isen er Skuringsmateriale tilstede. Da nu Gletscherisen ikke taber sin Konsistents eller falder i Smulder, saasnart den kommer ned i Vand, hvilket de talrige Isberg, der drive omkring paa Havet i Hundreder af Mile fra deres Fødested, noksom godtgjøre, saa kunne selvfølgelig bemeldte Betingelser for Skuring ligesaavel finde Sted under Vand som paa det Tørre, indtil det bær ud paa et saa stort Dyb, at Opdriften bringer Isbræerne til at kalve. Og at dette Dyb kan være ganske anseeligt, lader sig slutte af hyppige Erfaringer, hvoriblandt følgende:

I September 1822 saa Couthouy[1]) et Isberg, som var strandet paa den østlige Rand af Newfoundlandsbanken paa 720—780 Fods Dyb — efter en Reise paa flere eller færre Hundreder af Mile, og for en større eller mindre Del i den varmere Aarstid, paa hvilken Vandring den oprindelige Iskolos naturligvis var blevet betydelig formindsket og havde tabt i Dybgaaende.

Under en Opdagelsesreise i det nordlige Polarhav traf John Ross i Bafinsbugten flere Isberg, som stode paa Grund paa et Dyb af 1574 Fod.

Paa sin Opdagelsesreise i det sydlige Polarhav traf James Ross 1841 nede mod Victorialand paa Isberg, som stode paa

[1]) The american journal of scand. art. Vol. 43. p. 155.

Grund paa et Dyb af 1560 Fod.[1]) Noget længere mod Syd traf han en lodret Isvæg, som strakte sig øst-vest uden Afbrydelse 450 engelske Mile, naaede en Høide af 180 Fod over Havfladen og en Dybde af 820 Fod under samme, liggende endnu i en Afstand af 680 Fod over Havbunden.

Naar disse Iskolosser, skjønt udsatte for Strøm og Storm, kunde i kortere eller længere Tid forblive staaende paa Grund, saa kan deres Berørelse med denne ikke have været løs og let. Den Tanke ligger saaledes nær, at de, idet de rendte sig fast, satte Skuringsstriber paa Grunden, forudsat at den bestod af Klippe, og at Skuringsmateriale var tilstede, i hvilket Fald der altsaa vilde være fremstaaet Skuringsstriber paa henholdsvis 720—780, 1574 og 1560 Fods Dyb.

Den yderste Rand af en i Havet nedstigende Isbræ stikker dybere, end det fra samme løsnede Isberg. Thi det er en bekjendt Sag, at Isberget under Kalvningen flyder op. Naar den yderste Del af en Isbræ dukker saa dybt i Havet, at den skal til at kalve, saa mangler vistnok det Tryk, som hører til, for at frembringe Striber paa den horizontale eller udadskraanende Bund; men denne Del af Isbræen kan ikke destomindre, idet den skydes frem af Trykket fra Land, skure Klipper, som ere stillede i Veien for den.

Der kan saaledes neppe være Tvivl om, at naar Nutidens Polarisbræer skyde sig ned i Havet, saa skure de dettes Bund til meget anseelige Dyb. Og da man vel ikke tænker sig Mægtigheden mindre hos Istidens skandinaviske Isbræer, saa maa man antage, at ogsaa disse have skuret Havbunden til et anseeligt Dyb, og saaledes øvet sin Indflydelse paa en bred undersøisk Zone rundt om Skandinavien, bredest, hvor Havbunden skraanede svagest udover fra Stranden, smalest der, hvor Bunden havde den stærkeste Hældning. Der kan altsaa ikke være noget i Veien, for at antage, at idetmindste

---

[1]) James Ross's Voyage to the southern seas. Vol. 1. pag. 228.

de Skuringsmærker, som findes *nedenfor* Skandinaviens øverste Banker med fossile Rester af litorale Saltvandsskjæl, bleve frembragte under Havfladen, med andre Ord: den Omstændighed, at Skuringsstriberne stryge ned under Havfladen, kan ikke tjene som Støtte for den Paastand, at Skandinavien stak mere op af Havet før og under Istiden, end ved Slutningen af samme, eller med atter andre Ord: at Grændselinien mellem Hav og Land før og under Istiden laa lavere, end vore øverste i Havet afsatte Banker med fossile Levninger af Strandskjæl.

Paa ovennævnte undersøiske Zone kan der under Isbræerne, som bestryge den, ganske som under Isbræer paa det Tørre, forefindes paa Flytning værende Detritusmasser. Men Zonen kan ikke være Tilholdssted for organiske Skabninger, dels fordi Isbræerne ligefrem udelukke disse derfra, dels fordi de vilde søndermale enhver Havets Indvaaner, som maatte have fundet Anledning til at fæste Bo dersteds. Hvor denne Zone hæves over Havfladen, *mens* den er bedækket med Isbræer, fremstaar en Landstrækning, hvor der ikke findes fossile Saltvandsdyr, eller med andre Ord: en Landstrækning, hvor der findes en undersøisk Formation uden undersøisk Karakter. Og man slutter: Denne Landstrækning laa i Glacialtiden paa det Tørre. Hvor derimod Zonen hævedes over Havfladen nogen Tid, *efter* at den blev befriet for Isdækket, fremstaar en Landstrækning, hvor en Formation med fossile Saltvandsdyr hviler paa en Formation uden saadanne Dyr, uden Attest om sin marine Oprindelse. Og man slutter: Denne Landstrækning laa paa det Tørre i Glacialtiden, saa sank den ned i Havet, og saa hævede den sig igjen.[1])

---

[1]) Man kan tænke sig to Maader, hvorpaa Isbræerne endelig drog sig tilbage mod Stranden, den Ene: Isbræerne bleve afbrudte, hvor de ophørte at naa Bunden, og deres yderste Rand hvilede paa Bunden, idet den blev trukket tilbage; den Anden: Isbræerne bleve afbrudte et Stykke udenfor det Sted, hvor de naaede Bunden, og deres yderste Rand nærmede sig Stranden, uden at deres ydre Del naaede Bunden.

Argumentet (B) tager sig, nærmere beseet, saaledes ud: I Skandinaviens Nabolande findes hist og her geologiske Formationer, hvis Dannelse fandt Sted dels i den sekundære, dels i den tertiære Tid, hvilken Sidste gik umiddelbar forud for Istiden. Disse Formationer ere af marinsk Oprindelse, hvilket beviser at de betræffende Landstrækninger i bemeldte Tid laa under Vand. I Skandinavien har man ikke fundet nogen af disse Formationer, undtagen i Skaane, og, kan man nu føie til, paa Andøen i det nordlige Norge, hvor der findes Stenkul: følgelig maa de skandinaviske Egne, hvor disse Formationer savnes, have ligget over Havfladen paa den Tid, da disse Formationer bleve til.

I Anledning af denne Maade at slutte paa, maa bringes i Erindring: Naar man paa et Sted har skaffet sig Rede paa Leddene i de marine Formationers Følgerække, og man undersøger, hvorledes det har sig med denne Række paa et andet Sted, saa hender det, at man paa det sidste Sted gjenfinder de samme Led; men det hender ogsaa, at man savner et eller flere af dem, uden at nogen saakaldte geologiske Ækvivalenter have indtaget deres Plads: Man slutter da ikke udenvidere, at Udeblivelsen skriver sig derfra, at de savnede Leds Underlag laa paa det Tørre. Udeblivelsen kan hidrøre fra andre Aarsager, f. Ex. fra en til Tiden og Stedet knyttet Mangel paa Stof til at danne Formationerne af.

Hvad angaar Dannelsen af de Formationer, som fremstaa ved Bundfældning i Havet, saa beror den paa den Afgift af

---

Paa den ene som paa den anden af disse Maader kan en Isbræ have trukket sig tilbage enten stadigt, eller med midlertidige Standsninger, eller oscillerende. Det kan neppe feile, at enhver af disse Tilbagetogsmaader havde sin eiendommelige Indflydelse paa Afleiningen af den Sand, Grus, Sten, som Isbræen førte ud i Søen; og der vilde muligvis være Spor at opdage deraf paa Zonen mellem Stranden og vore ældste Skjælbanker, hvis ikke den Detritus, som Isbræerne afsatte under deres Tilbagetog *til* Stranden, var blevet overdækket af den Detritus, som de rindende Vande afsatte under Isbræernes Tilbagetog *fra* Stranden.

Stenmateriale, som de rindende Vande tage med sig fra Landjorden og afsætte i Havet, samt paa Havstrømmenes Forføininger derover. Muligt ogsaa, at Havstrømmene denudere visse Steder paa Havbunden og overføre Materialet til andre Steder. Det bliver vel saaledes mindre rimeligt, at Dannelsen af Formationer paa Havets Bund foregaar ligeligt over større geografiske Fladeudstrækninger. Det er sandsynligere, at Omstændighederne ere særlig gunstige for samme paa somme Lokaliteter, mindre gunstige paa andre, medens de paa atter andre Punkter ere saa ugunstige, at ingen Dannelse af saadanne Formationer finder Sted. Særlig begunstigede i denne Henseende synes de undersøiske Egne at maatte være, som ligge udenfor Mundingerne af store Floder, der gjennemstrømme vidtløftige Landstrækninger, bestaaende af løse, letsmuldrende Bergarter — forudsat, at ikke Havstrømmene bortføre det nedførte Materiale. Mindre begunstigede maa de Undervandsegne være, som strække sig langs med Lande af mindre Udstrækning, med ubetydelige Vasdrag, og bestaaende af faste, sentforvittrelige Bergarter — medmindre Havstrømmene bøde herpaa ved Tilførsel af Bygningsmateriale. Hvorledes Havstrømmene forholdt sig i denne Henseende paa de forskjellige Steder i den sekundære og tertiære Tid, vil vel Ingen nu paatage sig at afgjøre. Men hvad angaar de Bergarter, hvoraf Skandinavien væsentligst bestaar, og som vel dengang havde de samme Egenskaber, som nu, saa kan man sige, at de vare lidet skikkede til at afgive den Mængde og det Slags Bygningsmateriale, som udfordredes til Opførelsen af sekundære og tertiære Formationer. Det synes saaledes, at der maa kunne være Rum for den Tanke, at der gives Landstrækninger, som i sin Tid stode under Vand, uden at tjene som Oplagssted for den Tids marine Formationer, og at en god Del af Skandinavien hører blandt disse Landstrækninger for den sekundære og tertiære Tids Vedkommende.

Men selv om det var en erkjendt Naturnødvendighed, at enhver Plet paa Jordens Overflade, som i et vist geologisk Tidsafsnit dannede et Stykke Havbund, var belagt med dette Afsnits marine Formationer, saa er det ikke dermed afgjort, at de Egne af Skandinavien, hvor man ikke har fundet Formationer fra den sekundære og tertiære Tid, paa samme Tid laa over Havets Overflade. Thi de Formationer, som i bemeldte Tidsafsnit maatte have afsat sig i de Egne af Skandinavien, der vare neddukkede i Havet, kunne jo senere være blevne tilintetgjorte og Materialet bortfeiet, hvilket maa siges at være en ganske rimelig Følge af den Medfart, som blev Skandinavien til Del i Glacialtiden. De sekundære og tertiære Formationer ere nemlig ikke bekjendte for sin Fasthed, sin store Modstandskraft mod Tilintetgjørelse, de laa udenpaa eller ovenpaa Skandinaviens fastere Bergarter, bleve saaledes først udsatte for Isbræernes Angreb, og maatte væk, førend Angrebet naaede deres Underliggende. Og naar Skandinavien blev saa haardt og saa vedholdende angrebet, at Brudstykkerne af Landets fastere Bergarter ligge udstrøede over de vestlige Naboøers Østkyst, over Holland, Danmark, den nordtydske Slette, Polen og det vestlige Rusland, selvfølgelig ogsaa over Bunden af Nordsøen, Skagerak, Kattegat og Østersøen, samt opdyngede i mægtige Masser i det skandinaviske Lavland: saa maa man betragte den stedfindende Mangel af bemeldte Formationer som noget, der falder af sig selv. Det er forresten ikke nogen afgjort Sag, at de ganske mangle overalt, hvor man ikke har fundet dem. Skandinavien har nemlig en stor Udstrækning, Landets østlige og sydlige Afhæng er bedækket med vidtstrakte Detritusmasser, og disse igjen bedækkede hverken med saa faa eller smaa Indsøer, medens paa dets vestlige og nordlige Afhæng Fjældsiderne ere bedækkede med store Stenurer og Dalbundene med dybe Detritusafleininger. Ingen kan vide, hvad der ligger eller ikke ligger hverken under eller i denne Bedækning, undtagen paa de Punkter, som have været Gjenstand for en omhyggelig og kyndig Undersøgelse. Der er muligens Ingen som antager, at der i Skandinavien gives udstrakte Partier af sekundære og tertiære Formationer; men saadanne Partier fornødiges ikke til at kuldkaste den Paastand, som man grunder paa disse Formationers Absents, enhver nok saa liden Plet utvivlsom pliocen, miocen, eocen, Kridt o. s. v. vilde være tilstrækkelig til at godtgjøre, at den Egn, hvori den fandtes, paa dens Dannelsestid laa under Havets Overflade. Det kan her bemærkes, at den Detritus, hvori man paa skandinavisk Grund helst skulde vente at træffe Spor af forsvundne sekundære og tertiære Formationer, maatte være den, som ligger dybest og er mindst tilgjængelig, medens den øverste eller yderst liggende og lettest tilgjængelige Detritus høist rimeligt kom paa sit Sted langt ude i Glacialtiden, længe efter at Isbræerne vare færdige med de Formationer, hvorpaa de først gjorde Angreb.

Argument (C) lyder, nærmere udviklet, saaledes: a) Paa det vidtløftige udenlandske Feldt, hvorover erratiske Blokke fra Skandinavien ligge udstrøede, savnes saagodtsom overalt fossile Saltvandsdyr fra Istiden. b) De erratiske Blokke fra Skandinaviens forskjellige Egne optræde ikke blandede om hinanden i Udlandet, men ordnede efter Hjemstederne, en Regelbundethed, som ikke rimer sig med en Transport paa svømmende Isberg, hvortil kommer, at Mængden af den fra Skandinavien til Udlandet førte Glacialdetritus gjør det tvivlsomt, om saadanne Transportmidler vare tilstrækkelige. I Henhold til (a) og (b) altsaa kan ikke Transporten af bemeldte Detritus være foregaaet til Vands. c) Paa Preussens Kyster forekomme fossile Insekter og Plantelevninger af høinordisk og høifjælds Karakter fra den miocene Tid, som efter O. Heers Formening ere komne til Stedet paa skandinaviske Floder, hvilket tyder paa, at Skandinavien i Miocentiden var landfast med det tydske Østersøland. d) Ligheden mellem Skotlands og Norges endnu levende Flora tyder paa at disse Lande for ikke saa længe siden hang sammen med hinanden. Altsaa maa Transporten af den skandinaviske Glacialdetritus være foregaaet til Lands paa Isbræer, som strakte sig fra det skandinaviske Høiland udover til Periferien af det Feldt, hvorpaa denne Detritus forekommer. Og for at muliggjøre denne Transport maatte Skandinavien rage meget høit op over Havfladen.

Med Hensyn til det negative Argument (a) bemærkes, at der til at borge for samme uden Tvivl hører en særdeles grundig Granskning af hele den udenlandske Del af det betræffende Feldt. Enkelte spredte Undersøgelser hist og her med negativt Resultat sige overmaade lidet, hvorimod selv saadanne Undersøgelser med positivt Resultat vilde sige særdeles meget.

Med Hensyn til (c) bemærkes, at Skandinavien maatte ligge meget lavt, naar ikke Floder skulde kunne vinde frem derfra til den nordtydske Slette. Missisippi f. Ex. udspringer fra en Høide af kun 1680 engelske Fod over Havet, tilbagelægger dog 2616 engelske Mile, førend den falder ud i den mexikanske Golf.

Angaaende alle disse Argumenter maa bemærkes, at forsaavidt de gaa ud paa at godtgjøre, at den omhandlede Gletscherbevægelse og Transport af Glacialdetritus gik for sig paa det Tørre, saa forudsætte de en ganske anden Tingenes Orden i Nordeuropa end den nuværende, hvilket er en betænkelig Sag, saalænge man ikke er mere fortrolig med de Kræfter, som fornye Jordens Skikkelse. Man maatte jo omskabe det nordlige Europa: udslette Østersøen, Kattegat, Skagerak og Nordsøen af Jordens Overflade. Og forsaavidt de samme Argumenter give Anslag paa et høit ophøiet Skandinavien som et Middel, ved Hjælp af hvilket Isbræer derfra kunne befordre sig selv og sin Detritus til Omkredsen af det Feldt, som er bestrøet med skandinaviske Vandreblokke, opstaar det Spørgsmaal: Hvilken Høide skal man saa tildele det skandinaviske Høiland?

Paa dette Spørgsmaal maa svares, at Høiden beror paa Afstanden mellem Bevægelsens Udgangspunkt og dens Slutningspunkt, samt paa det Sidstnævntes Høide over Havet. Jo større denne Afstand er, og jo høiere Endepunktet ligger, desto høiere maa Udgangspunktet ligge. Men lad Endepunktet være f. Ex. Dresden, som ligger under 51° 3′ 22″ N. B. og hvor der forekommer Glacialdetritus fra Skandinavien, og lad Udgangspunktet ligge ikke længere Nord end paa 61° 30′ N. B. og for Simpelheds Skyld i samme Meridian som Dresden: Hvor høit over Havet maatte da Udgangspunktet ligge, forudsat at Jorden ikke var afplattet ved Polerne, og at Dresden laa i Høide med Havfladen?

Man kunde maaske her for et Øieblik tænke paa et fra Bevægelsens Udgangspunkt gaaende Skraaplan, som tangerer Jordens Overflade ved Dresden: I saa Fald maatte Bevægelsens Udgangspunkt ligge i en Høide af 14,488 geografiske Mile over Havet. Og alligevel vilde den Komponent af Isens vertikale Tryk, som i Udgangspunktet virkede parallelt med dette Skraaplan, ikke andrage til fuldt 0,2 af det hele Tryk, hvortil kommer, at denne Komponent vilde aftage sydover og blive = 0 ved Dresden.

Tænker man sig, at den Bane, hvorpaa en Isbræ skulde kunne bevæge sig fra Udgangspunktet under 61° 30′ N. B. til Dresden, ikke netop er et Plan, men en Sort krum Flade, som overalt danner den samme Vinkel med Stedets Horizont, eller hvis normale Gjennemsnit efter Længden danner en logarithmitsk Spiral, og antager man med Elie de Beaumont af den Bane, hvorpaa Bevægelsen skal kunne gaa for sig, maa idetmindste have en Hældning af 3°, saa maatte Bevægelsens Udgangspunkt ligge i en Høide af 8,255 geografiske Mile over Havet, medens den Del af Isens Vægt eller vertikale Tryk, som virker parallelt med denne Bane udgjør ikke fuldt 0,0524, hvorimod den Del af samme, som virker lodret paa Banen, udgjør lidt over 0,998, naar Isens hele Vægt sættes = 1.

Sætter man Banens Hælding til 30′, saa maa Bevægelsens Udgangspunkt ligge i en Høide af 1,369 geografiske Mil = 32318 norske Fod over Havet, altsaa 3603 Fod høiere end Everest, den høieste Fjældtop, man kjender. Under en saadan Hældning virke 0,0087 af Isens Vægt parallelt med Banen, og 0,99996 af samme Vægt lodret paa Banen.

Slaar man Banens Hældning ned til 15′ eller 1/4 Grad, saa maatte Bevægelsens Udgangspunkt ligge i en Høide af 0,684 geografiske Mil = 16158 norske Fod over Havet, altsaa gode 4 Gange saa høit som Skandinaviens nuværende Høiplateau. Under en saadan Hældning virke 0,00436 af Isens Vægt parallelt med Banen, og 0,99999 af samme Vægt lodret paa Banen.

Af disse Exempler fremgaar for det Første, at det bær op i en eventyrlig Høide med Skandinavien, selv om man sætter Hældningen af Isbræernes Glidebane kun til 1/4 Grad, og for det Andet, at Banens Hældning bliver en mindre vigtig Sag. Thi Glidebaner, som have en Hældning af 1/2 Grad og derover kan man ikke bruge, fordi de føre op til urimelige Høider, og paa Baner med en Hældning af 1/2 Grad og derunder kan det ikke være den parallelt med Banen virkende Komponent af Isbræens vertikale Tryk, som sætter Isbræen i Bevægelse. Thi denne Komponent andrager, som bemærket,
ved 1/2 Grads Hældn. kun til 0,0087 af Isbræens vertikale Tryk,
ved 1/4 — — — - 0,00436 - — — —
Den bestemmer væsentlig kun Bevægelsens Retning, medens Bevægelsen hovedsagelig skriver sig fra den mod Banen lodret virkende Komponent, der voxer, idet Banens Hældning aftager. Dette vil med andre Ord sige, at den Gletscherbevægelsestheori, som kaldes Glidetheorien, og som man bevidst eller ubevidst hylder, idet man giver Anslag paa et høit ophøiet Skandinavien, maa opgives, og man maa tage sin Tilflugt til Tyndalls Tryktheorie, som er grundet paa Isens

Overgang til Vand under Tryk, samt paa den af Faraday opdagede Regelation.

Ved denne Theori, der er det værdifuldeste Bidrag, som jeg har seet, til Klargjørelse af Gletscherbevægelsen, er vistnok for saadanne Isbræers Vedkommende, der ikke have stor Mægtighed, at erindre for det Første, at naar Gletscherisen skulde være saa plastisk, saa medgjørlig, at en Isbræ af sin Tyngde lod sig trykke og lempe frem gjennem et ujævnt, bugtet, svagt hældende Løb, idet den snart udvidede sig, snart trak sig sammen efter Løbets Brede: saa maatte den ogsaa af sin Tyngde lade sig trykke og lempe til en saa tetsluttende Berørelse med Underlaget, at ikke en Draabe Vand, end sige store Elve, slap frem under Isbræen; for det Andet, at det vilde være vanskeligt at begribe, at Isbræerne bevæge sig saameget hurtigere paa den varmere Aarstid, naar Gletscherelvene ere store, end paa den koldere Aarstid, naar de ere smaa, dersom Bevægelsen beroede alene paa Isbræens Tyngde og Plasticitet. Thi Temperaturen i Gletscherne er — at slutte fra hvad jeg har iagttaget idetmindste — lig 0° hele Aaret rundt, undtagen i en tynd Skorpe ovenpaa, hvor Temperaturen om Vinteren er lavere, hvilket ikke synes at kunne foranledige, at Gletscherbevægelsen sagtner saa *betydeligt* af i den koldere Aarstid. Saaledes fandt Tyndall[1]) — for at nævne et Exempel — at den største Hurtighed, som Mer de glace paa et vist bestemt Sted opnaaede i December 1859, var 15³/₄ Tomme i 24 Timer, medens den største Hurtighed paa samme Sted om Sommeren var 30 Tommer i 24 Timer. Det ser ud til, bemærket iforbigaaende, at Gletscherelvene, eller overhovedet det Vand, som trænger sig ned igjennem Isbræerne fra oven, ind under dem fra Siderne, og frem under dem efter Længden, meget hyppig med en Temperatur en Smule over 0°, have et grundet Krav paa at erkjendes som en til Gletscherbevægelsen medvirkende Aarsag, uden hvilken

[1]) Glaciers of the Alps pag. 294.

Bevægelsen, navnlig paa svagt hældende Underlag, ikke vilde finde Sted. Men naar en Gletscher har en meget stor eller uhyre stor Mægtighed, saa kan man ved Hjælp af Tyndalls Tryktheorie forklare sig dens Bevægelse paa et endog næsten horizontalt Underlag. Thi med den uhyre Mægtighed følger et uhyre vertikalt Tryk, der avler en uhyre stærk Tendents hos Ismassen til at brede sig ud til Siderne, samt foranlediger en stærk Produktion af Vand, saa at Isbræen kan skride afsted, flydende, saa at sige, i sit eget Fedt, paa den Vei, hvor den møder mindst Modstand. Saa mægtig kan man tænke sig en Ismasse, at den bevæger sig ud til alle Sider paa et horizontalt Underlag, naar dens Mægtighed vedligeholdes ved Paalæg oventil. Men paa denne Maade bliver et høit ophøiet Skandinavien overflødigt, hvad enten man tænker sig, at den omhandlede Gletscherbevægelse og dermed forbundne Transport af Detritus gik for sig til Lands eller til Vands.

I Henhold til det saaledes Anførte skulde man vel af Læren om Skandinaviens mange vertikale Svingninger kunne udelade No. 2, No. 3 og No. 4 og sætte en eneste Reisning i Stedet. Det Eneste, som endnu skulde kunne opretholde den Tanke, at Skandinavien før og under Istiden var løftet høiere op af Havet, end ved samme Tids Slutning, maatte være den Omstændighed, at man hist og her i Udlandet træffer paa Vandreblokke fra Norden, som ligge høiere end de Steder, hvorfra man antager at de ere udsprungne. Men hertil maa bemærkes for det Første, et en Isbræ kan paa sin Vei medtage en Stenblok fra et lavere Sted og løfte den op paa et høiere Sted, som dog maatte ligge lavere end Isbræens Udspring. For det Andet, at om Skandinavien laa lavere, eller med andre Ord: om Grændselinien mellem Hav og Land laa høiere før og under Istiden, end ved samme Tids Slutning, saa kan Skandinavien ikkedestomindre dengang have raget ligesaa høit over Havet som senere. Thi Skandinavien har naturligvis i Tidsrummet fra Istidens Begyndelse indtil nu tabt betydeligt af sin Høide ved Denudation, hvorom den skandinaviske Detritus baade hjemme og ude bærer Vidne, der bestyrkes ved vore Høifjældes ruinagtige Tilstand. For det Tredie er det vel ligesaa rimeligt, at de Steder, hvor bemeldte Blokke forekomme, siden Istiden have hævet sig i Forhold til det skandinaviske Høiland, som at dette skulde have først hævet sig, og derpaa sænket sig i Forhold til dem.

Til foranstaaende Diskussion knytter sig uvilkaarligt det Spørgmaal: Gik Isstrømmene fra Skandinavien til Udlandet i Glacialtiden til Lands eller til Vands? For det sidste Alternativ taler: at man slap for at bringe Bunden i Østersøen, Kattegat, Skagerak og Nordsøen paa det Tørre, og at man kunde benytte disse Have som Transportredskaber for Isbræerne, og saaledes slaa noget af paa Fordringerne til disses Mægtighed. En Ismasse, hvis Vægt for en stor Del bæres af Vand, lader sig naturligvis lettere skyde frem, end en lignende Masse paa det Tørre, hvortil kommer, at Detritusen i Vand taber omtrent $^1/_3$ af sin Vægt og saaledes bliver lettere at haandtere. Man turde maaske saaledes kunne antage:

De skandinaviske Isbræer stege ned i Havbækkenet, og hvorvel en Isbræ ikke udvider sine Grændser uden paa Grund af en voxende Mægtighed, saa kan man dog maaske antage, at disse Isbræer i Førstningen kalvede i dette Bækken, fordi de ikke naaede dets Bund. De saaledes fremkomne Isberg befandt sig ikke under de samme Forholde, som de Isberg, der skydes ud i Polarhavene og gribes af Havstrømme, der bero paa en Kommunikation mellem Polarhavene og de tropiske Have. Det Skandinavien omgivende Hav stod jo ikke i Forbindelse med andre Have, undtagen i Nordvest og Nordøst. Isberg i dette Hav bleve saaledes ikke agiterede af andre Strømme, end de daglig skiftende, som følge med Ebbe og Flod. Den Motor, der drev disse Isberg til fremmede Kyster, kunde derfor kun være Vind. Men de undersøiske

Zoner, som droge sig langs med Naboøerne i Vest og Nabolandet i Syd, vare saa lidet dybtliggende, at Isbergene stode paa Grund, længe før naaede Land.

Men Isbræernes Mægtighed voxte, de skjøde sig ud i Havet, uden at sønderbrydes, fulgte dettes Bund, naaede idetmindste denne Bund, længe før de naaede Land paa Havbækkenets modsatte Side. Under Overfarten formindskedes ventelig deres Mægtighed i nogen Grad, hvorved det blev lettere at trykke dem ind imod og op paa Land i Vest og Syd, hvor Landet kun havde en svag Stigning.

De af Isbræerne bestrøgne undersøiske Zoner langs med Øerne i Vest og Landet i Syd kunde vel ikke tjene som Hjemsteder for nogen Saltvandsfauna, saamegetmindre som Vandet i et Bækken, der var saa optaget af Is, vel nærmest maatte være Ferskvand, især hvor det fra Landjorden modtog et betydeligt atmosfærisk Nedslag i flydende Tilstand, hvilket fornemmelig maatte være Tilfældet paa Sydsiden, hvor Floderne fra Tydslands nordlige Afhæng strømmede til, maaske for en Del stuedes op og dannede en Ferskvandssø omkring Isbræernes ydre Rand, fordi de ikke fandt tilstrækkelig Anledning til at trænge ind under Isbræerne. Maaske man heri kan se Grunden ikke blot til at Vandreblokkene fra de forskjellige Hjemsteder ikke ere blandede om hinanden i Udlandet, men ogsaa til at man ikke udenfor Skandinavien har fundet Saltvandsfossilier sammen med disse Blokke, især naar, som antageligt, Tilfældet var, at Landet hævede sig saaledes, at Isbræernes ydre Rand havde at passere et Stykke paa det Tørre, førend den naaede Havet paa sin endelige Tilbagetur til Skandinavien.

Til Imødegaaelse af mulige Tvivl, om de skandinaviske Isbræer kunne passere det omgivende Hav, uden at brydes i Stykker, fremhæves følgende Citat af voyage to the southern seas Vol. 1. pag. 228 by James Ross: «In those regions we have also witnessed the almost magical power of

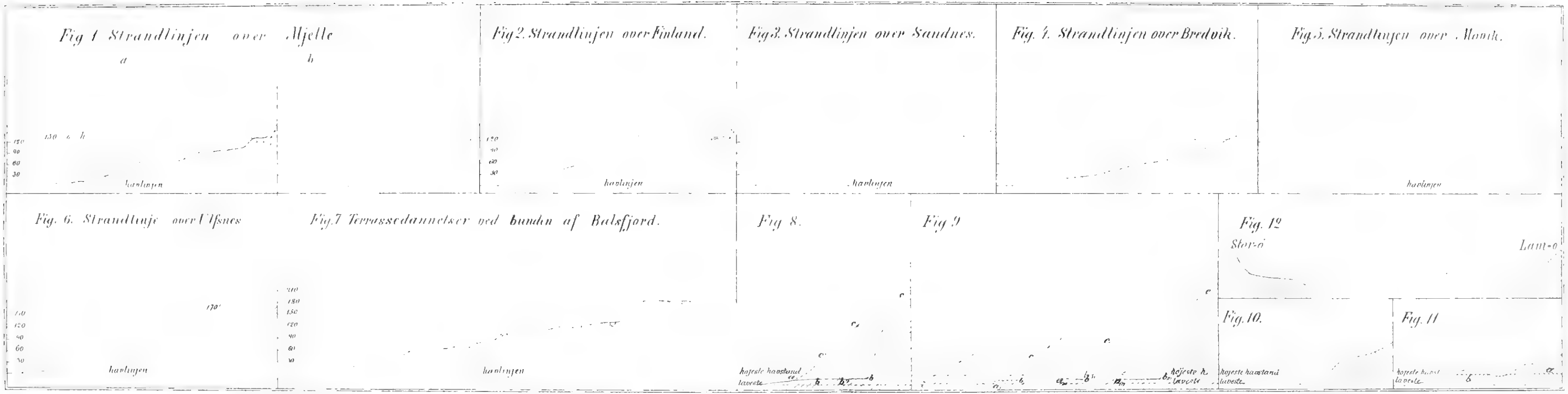


Fig 1. Strandlinjen over Mjelle.

Fig 2. Strandlinjen over Finland.

Fig 3. Strandlinjen over Sandnes.

Fig. 4. Strandlinjen over Bredvik.

Fig. 5. Strandlinjen over Movik.

Fig. 6. Strandlinje over Ulfsnes.

Fig. 7. Terrassedannelser ved bunden af Balsfjord.

Fig 8.

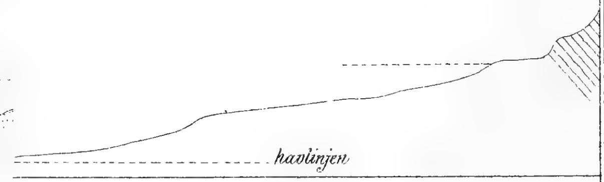
Fig 9.

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 5. Strandlinjen over Movik.



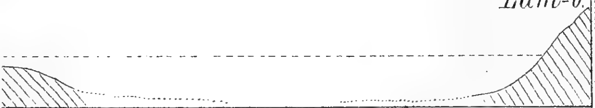
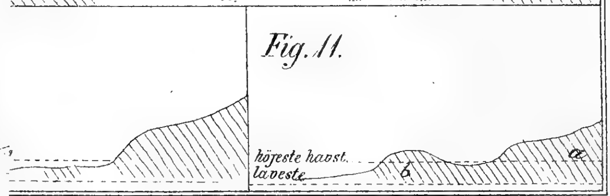
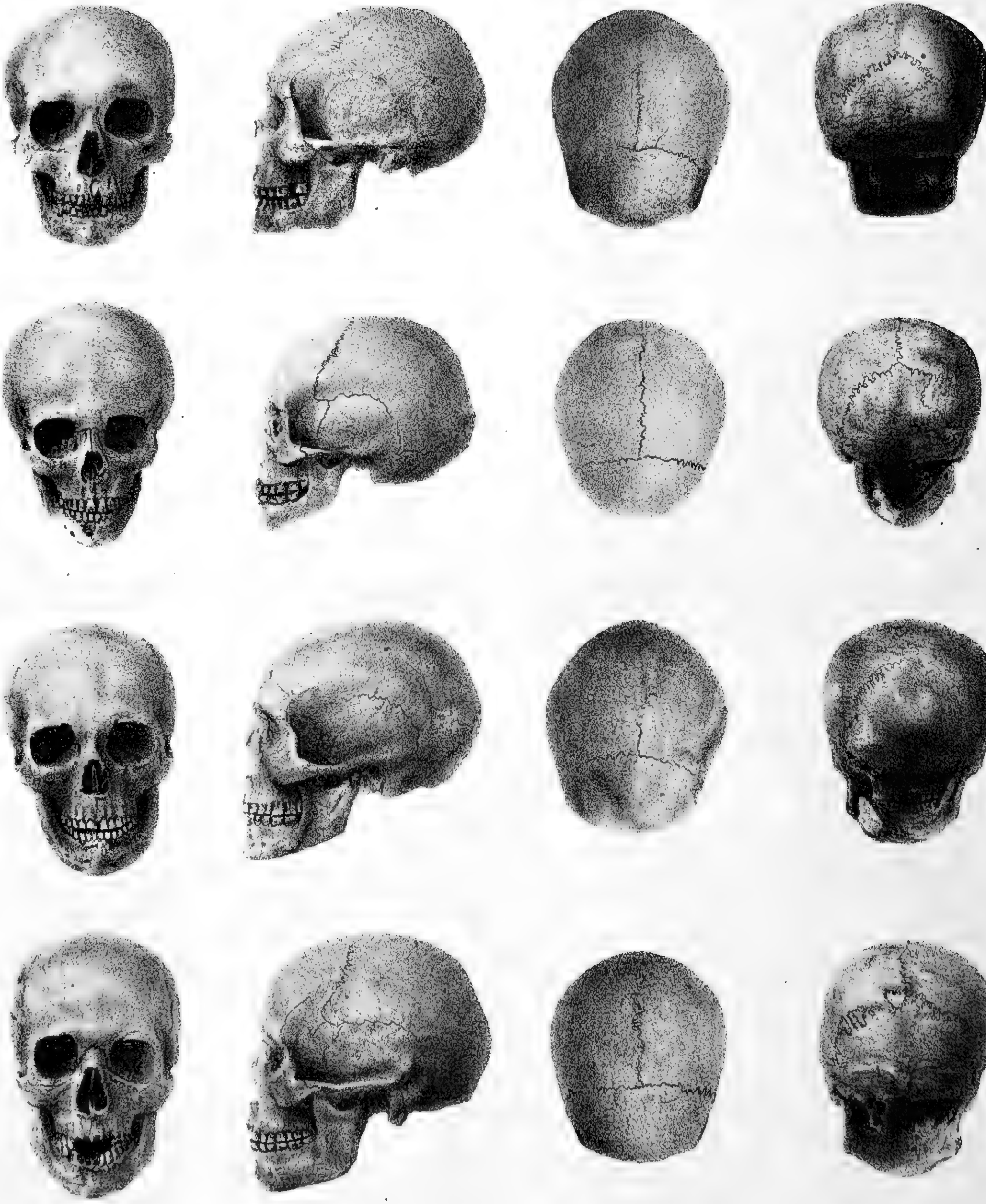


Fig. 11.





1.

2.

3.

4.

Archiv f. Math. & Naturv. B. III

the sea in breaking up landice or extensive floes of from twenty to thirty feet thick, which have in a few minutes after the swell reached them, been broken up into small fragments by the power of the waves.

But this extraordinary barrier of ice, of probably more than tousand feet in thicknes, crushes the undulations of the waves, and disregards their violence: it is a migthy and wonderful object, far beyond any thing we could have thought or conceived.»

Denne Barrier, fra hvis Underflade der var et godt Stykke ned til Havets Bund, laa, efter Opdagerens Formening hængende sammen med Victorialand, aaben for det sydlige Polarhav, medens Østersøen og Nordsøen paa Størstedelen af deres Omkreds vare omsluttede og beskyttede af Land, paa samme Tid som de — at slutte fra deres nuværende Dybder — vel ikke vare dybere, end at Isbræerne, som maa tænkes meget mægtige, fordetmeste naaede Bund.

Under Isbræernes Afsmeltning og Tilbagetog paa og fra det Skandinavien omgivende Hav brast de naturligvis i Stykker; men om disse Stykker gjælder det samme, som om de Isberg, der fremstod, da disse Isbræer begave sig ud paa Havet: de bleve staaende paa Grund, uden at naa Land, hvortil maa knyttes den Bemærkning, at de ikke naaede saa langt frem, som bemeldte Isberg, da Landene i Øst, Syd og Vest for det Skandinavien omgivende Hav i Løbet af Istiden antagelig havde hævet sig saa, at de Strækninger af Havbunden, som laa dem nærmest, vare komne paa det Tørre.

OM ZODIAKALLYSET.

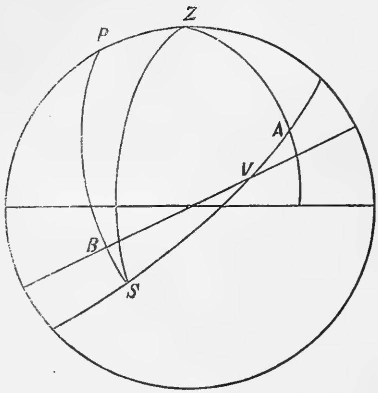
AF

H. GEELMUYDEN.

Zodiakallyset har som bekjendt Udseende af en fra Horizonten opstigende, oventil afsmalnende Lysstribe, som helder mod den Kant, hvor Solen staar om Middagen, altsaa paa den nordlige Halvkugle (udenfor Vendecirkelen) mod Syd. Paa en Tid af Aaret sees det bedst paa Vesthimmelen, naar der er hengaaet tilstrækkelig lang Tid efter Solens Nedgang til, at Himmelgrunden er bleven ganske mørk; paa en anden Aarstid viser det sig bedst i Øst før Solens Opgang. Skjønt det ofte kan have adskillig større Lysstyrke end Melkeveien, er det alligevel for den Iagttager, der ikke paa Forhaand er bekjendt med det, mindre iøinefaldende, dels fordi det aldrig kan naa mere end til en vis, af Stedet og Aarstiden afhængig Høide over Horizonten, dels fordi dets Lys er stærkest i Midten og aftager ganske gradvis udover mod Kanterne, saaledes at det flyder næsten umærkeligt hen i Himmelgrunden. Dette er vel den hovedsagelige Grund til, at der er forholdsvis faa, som have seet det, selv blandt Folk, som ere vel kjendt med Naturen i Almindelighed og med Himmelen i Særdeleshed.

For en Del kan dette imidlertid ogsaa komme af ufuldstændige eller feilagtige Oplysninger. Saaledes vil man i de fleste Bøger, hvor Fænomenet omhandles, faa den Besked, at det sees bedst ved Jevndøngstiderne, nemlig ved Vaarjevndøgn om Aftenen i Vest og ved Høstjevndøgn om Morgenen i Øst. Denne Oplysning, som egentlig ikke passer for noget Sted paa Jorden undtagen lidt indenfor Vendecirklerne, bliver mere og mere feilagtig, jo længer man kommer fra Ækvator, især hvis man forstaar den derhen, at Zodiakallyset sees lige godt paa to Tider, der ligge lige langt fra Jevndøgnstiden. Saaledes vil man f. Ex. en Maaned før Vaarjevndøgn kunne se det med betydelig Glands; en Maaned efter er det derimod paa vore Bredder næsten usynligt.

Alle Observationer vise, at Zodiakallyset altid holder sig omkring Ekliptiken. Selve Midtlinien falder rigtignok i Regelen ikke nøie sammen med Ekliptiken, men danner ofte en Vinkel paa nogle faa Grader dermed. Dette kan for en Del være begrundet i virkelige Forhold, men vil ogsaa, naar Zodiakallyset staar skraat, for en Del være en Følge af Luftens aftagende Gjennemsigtighed nedover mod Horizonten; om nemlig Axen, d. e. det midterste og lyseste Parti, med absolut gjennemsigtig Luft vilde vise sig at falde sammen med Ekliptiken, vil den dog i Virkeligheden, da de nedre Luftlag absorbere mere Lys end de øvre, vise sig noget løftet over samme; dette er ogsaa det, som i Almindelighed finder Sted. Under alle Omstændigheder maa Undersøgelsen af Zodiakallysets Stilling til Horizonten i alt væsentligt falde sammen med Undersøgelsen af Beliggenheden af et Punkt af Ekliptiken, som har en vis Elongation fra Solen paa den ene eller anden Side; Erfaring viser nemlig, at Toppens Vinkelafstand fra Solen vistnok ikke er ganske constant, men at Zodiakallyset dog følger Solen saavel i Dagens som i Aarets Løb. Endvidere maa, naar det skal være synligt i sin Helhed, Solen have naaet den Dybde under Horizonten, ved hvilken Dæmringen ophører; det er ogsaa klart, at det Øieblik, da dette finder Sted, under forøvrigt lige Omstændigheder vil være bedst til Iagttagelsen af Zodiakallyset, fordi de to Betingelser: mørk Himmel og størst mulig Høide over Horizonten, da fyldestgjøres.



Paa hosstaaende Tegning af Himmelkuglen er Z Zenit, P Nordpolen, altsaa de to Storcirkler, der tegne sig som to Diametre, Horizonten og Ækvator; endvidere er SV Ekliptiken, S Solens Plads, V Vaar-Jevndøgnspunktet og A det Punkt, som svarer til Zodiakallysets Top, altsaa Buen SA Spidsens Elongation $= e$. Er h Solens Høide, betragtet som negativ under Horizonten, saa er $ZS = 90° - h$; er fremdeles γ den Vinkel PSV, som Solens Declinationscirkel danner med Ekliptiken, k den parallaktiske Vinkel PSZ og x Punktet A's Høide over Horizonten, altsaa $ZA = 90° - x$, saa giver det sfæriske Triangel ZSA

$$\sin x = \cos(\gamma - k) \, . \cos h \, . \sin e + \sin h \, . \cos e \qquad (1)$$

hvor γ og k findes af de sfæriske Triangler VBS og PSZ, nemlig

$$\operatorname{cotg} \gamma = \cos \lambda \, . \operatorname{tg} \varepsilon \qquad (2)$$

$$\cos k = \frac{\sin \varphi - \sin h \sin \delta}{\cos h \cos \delta} \qquad (3)$$

naar λ er Solens Længde, δ dens Declination, ε Ekliptikens Skraahed (23° 27′) og φ Stedets Polhøide. γ kunde naturligvis ogsaa findes af Declinationen istedetfor af Længden, idet Trianglet VBS giver $\sin \gamma = \frac{\cos \varepsilon}{\cos \delta}$, men ovenstaaende Formel er bekvemmere ved Beregningen, saafremt man har en Almanak, som indeholder Solens Længde; dens Declination findes i den almindelige Søkalender.

Figuren gjelder for Vesthimmelen; for Morgen-Zodiakallyset i Øst bliver alting uforandret, undtagen at cotg γ skifter Fortegn, det vil sige, at man tager Supplementvinkelen til den Værdi af γ, som ovenstaaende Ligning giver.

Undersøgelsen af disse Formler viser, hvad man endnu lettere finder ved en umiddelbar geometrisk Betragtning, at Høiden x bliver størst, naar Ekliptiken danner den størst mulige Vinkel med Horizonten. Indenfor Vendecirklerne kan denne Vinkel stige til 90°, og den bedste Tid til Iagttagelsen al Zodiakallyset bliver altsaa de to Tider paa Aaret, da Ekliptiken staar lodret paa Horizonten i det Øieblik, Solen har Høiden (Dybden) h. Da isaafald Solens Verticalcirkel falder sammen med Ekliptiken, saa bliver $\gamma = k$, og Aarstiden kan altsaa findes ved i de to Ligninger

$$\cos k = \frac{\sin \varphi - \sin h \,.\, \sin \delta}{\cos h \,.\, \cos \delta} \quad \text{og} \quad \sin \gamma = \frac{\cos \varepsilon}{\cos \delta}$$

at sætte $\gamma = k$ og eliminere. Dette giver en kvadratisk Ligning for $\sin \delta$, hvoraf findes

$$\sin \delta = \sin h \,.\, \sin \varphi \pm \cos h \sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varphi} \qquad (4)$$

For alle Polhøider mindre end ε faaes altsaa to forskjellige Declinationer; da nu Solen har hver Declination to Gange om Aaret, saa faar man egentlig 4 Gange, hvor Ekliptiken staar lodret paa Horizonten, naar Solens Høide er h; men det sees let, at to af disse svare til Morgen-Zodiakallyset. Hvilke to maa man vælge for Aftenlyset, som her betragtes, sees af Lign. (2) og (3); er nemlig $\cos k$ positiv, altsaa $k = \gamma < 90°$, saa maa λ ligge mellem 270° og 90°, d. e. Declinationen δ svarer til en Dag mellem 21de December og 21de Juni; hvis derimod $\cos k$ er negativ, saa svarer δ til en Dag mellem 21de Juni og 21de December. Da Betingelsen for, at $\cos k$ skal være negativ, er $\sin \varphi < \sin h \,.\, \sin \delta$, saa sees let, at dette blot kan finde Sted i Nærheden af Ækvator.

Det kan bemærkes, at i Lign. (4) er δ den samme Funktion af φ, som φ er af δ.

Udenfor Vendecirklerne kan Ekliptiken ikke komme til at staa lodret mod Horizonten; den størst mulige Heldning finder der Sted, naar Jevndøgnspunkterne staa i Horizonten, navnlig saaledes, at Foraarspunktet staar i Vest; Heldningen er da lig Summen af Ekliptikskraaheden og Stedets Ækvatorhøide, altsaa lig $90° - \varphi + \varepsilon$. Betragtningen af en lignende Figur som den foregaaende, men hvor Punktet V falder i Horizonten, giver da den størst mulige Høide, som Zodiakallysets Top kan opnaa under Bredden φ, ved Hjælp af Ligningen

$$\sin x = \sin(\lambda + e)\cos(\varphi - \varepsilon),$$

hvor Solens Længde, altsaa Aarstiden, bestemmes ved Ligningen $\sin h = \sin\lambda \,.\, \cos(\varphi - \varepsilon)$, altsaa

$$\sin\lambda = \sin h \,.\, \sec(\varphi - \varepsilon). \qquad (5)$$

Til Anvendelsen af disse Formler kræves, at man kjender to Ting, nemlig Solens Dybde under Horizonten, naar det sidste Spor af Dagslys forsvinder, og Zodiakallysets Udstrækning fra Solen. Ifølge Kleins «Astronomische Encyclopädie» skal Solens Dybde under Horizonten, naar Dæmringen ophører, efter ældre Bestemmelser være 18°, men efter nyere Undersøgelser af Schmidt i Athen 15°,9. Det turde dog hænde, at der i denne Henseende er Forskjel for forskjellige Dele af Jorden, fordi Luften ikke overalt er lige ren og gjennemsigtig; ialfald har jeg i Christiania seet Dæmring i Nord den 22de April ved Midnat, da Solen var 17° 40′ under Horizonten, og denne Dæmring var stærk nok til at udviske Melkeveiens Grændser i Perseus og Kudsken i en Høide af 26°. Da dette imidlertid blot beror paa en enkelt Observation, skal jeg holde mig til Schmidts Resultat og sætte $h = -16°$. Angaaende det andet Punkt, Zodiakallysets Udstrækning fra Solen, er der større Usikkerhed, eller rettere sagt, den er mere foranderlig; men det er dog let at finde en Middelværdi mellem de ikke synderlig vide Grændser. Der foreligger rigtignok enkelte Beretninger fra sydligere Lande, om at Zodiakallyset undertiden skal have været seet hele Himmelen rundt (langs

Ekliptiken); men dette er en sjelden Undtagelse og vides ikke at have været seet paa vore Bredder, hvor Luften neppe nogensinde kan blive saa gjennemsigtig som f. Ex. i Middelhavslandene. Jeg vil derfor holde mig til Resultatet af Observationerne i Christiania; af 19 Iagttagelser, hovedsagelig fra de 3 sidste Aar, ved hvilke Spidsens Beliggenhed blandt Stjernerne findes antegnet, følger som Middelværdi for Aften-Zodiakallyset $e = 75°$; den største observerede Værdi er 93°, den mindste 56°, og Forskjellighederne kunne for en stor Del henføres til Luftens større eller mindre Gjennemsigtighed. Denne Middelværdi stemmer ogsaa temmelig nøie med Resultatet af Observationer fra andre Steder i Europa. Af Morgen-Zodiakallyset foreligger der af let forklarlige Grunde meget færre Observationer; disse give en noget mindre Elongation, hvad der muligens kan have sin Grund i, at Morgenluften i Regelen er mindre gjennemsigtig. Nogle Observationer fra de tropiske Lande give en større Elongation for det østlige end for det vestlige Zodiakallys. I det store taget er der rimeligvis ingen væsentlig Forskjel.

Den medfølgende Planche gjengiver grafisk Resultatet af Lign. (1) for hele Aaret og for 4 Polhøider nemlig Ækvator, den nordlige Vendecirkel, 45° og 60° N. B. Ordinaterne give Høiden over Horizonten af Aften-Zodiakallysets Top i det Øieblik, Solen er 16° under Horizonten, under Forudsætning af at Toppen ligger (med rundt Tal) 70° fra Solen. De derved fremkomne Curver vise flere Eiendommeligheder. Ækvatorkurven gjør, som man kan vente, 2 Slag i Aarets Løb, idet den viser to Maxima i Begyndelsen af Juni og i Begyndelsen af December, og to Minima i Begyndelsen af Marts og September. Tiden for Maximum og Minimum kan naturligvis blot nogenlunde sees af Figuren; den nøiagtige Dag findes af Lign. (4) som giver $\delta = \pm 22° 29'.5$, hvortil svarer (for Aften-Zodiakallyset) 4 Juni og 6 December, som altsaa er de fordelagtigste Dage til Iagttagelsen af Zodiakallyset paa Vesthimmelen under Ækvator. Det, som udenfor Vendecirklerne er Betingelsen for Zodiakallysets største Høide, nemlig at Jevndøgnspunkterne falde i Horizonten, giver under Ækvator netop den mindste Høide, fordi Ekliptiken da danner den mindst mulige Vinkel med Horizonten, 66° 33′. Lign. (5), som for $\varphi = 0$ gaar over til $\sin\lambda = \sin h \,.\, \sec\varepsilon$, giver den ene Tid, nemlig 3die Marts; den anden Tid, naar Vaar-Jevndøgnspunktet staar i Horizonten i Øst, findes af Lign. $\sin\lambda = -\sin h \,.\, \sec\varepsilon$, som giver 5te September.

Eftersom man fjerner sig fra Ækvator mod Nord rykke de to Maxima i December og Juni tættere og tættere sammen, idet det første indtræffer senere, det sidste tidligere, saaledes at de under Krebsens Vendecirkel falde sammen til eet den 4de Marts, altsaa meget nær den Tid, da der under Ækvator var et Minimum; Forskjellen bestaar blot deri, at Betingelsen for Minimum ved Ækvator var $\sin\delta = \sin h \,.\, \mathrm{tg}\,\varepsilon$ (da nemlig $\sin\delta = \sin\lambda \,.\, \sin\varepsilon$), medens Betingelsen for Maximum under Vendecirkelen ifølge Lign. (4) er $\sin\delta = \sin h \,.\, \sin\varphi = \sin h \,.\, \sin\varepsilon$. Det ene Minimum for Ækvator er altsaa forsvundet, det andet er rykket tilbage fra 5te Sept. til Slutningen af August. Curven for $\varphi = \varepsilon$ viser tillige, at Zodiakallysets Høide holder sig næsten aldeles uforandret fra Slutningen af Januar til Midten af April.

Nordenfor Vendecirkelen bliver der naturligvis fremdeles blot eet Maximum og eet Minimum, som begge rykke tilbage (d. e. indtræffe tidligere paa Aaret) eftersom man kommer nordover, det første dog kun langsomt; saaledes har det ved 45° N. B. endnu ikke rykket længere end fra 4de til 3die Marts. Samtidig bliver Forskjellen mellem Maximum og Minimum stadig større, hvoraf følger, at jo mere man fjerner sig fra Ækvator, desto mere gjelder det at have Opmærksomheden henvendt paa Maximumstiden. Saaledes viser Figuren, at man under 45° Bredde fra Midten af Februar til over Midten af Marts ser Zodiakallyset høiere end under Ækvator i det samme Tidsrum; derimod er Høiden omkring Minimumstiden (først i August) saa ringe, at det svage Lys fra Zodiakallysets Top neppe vil kunne trænge igjennem de tætte nedre Luftlag.

Den sidste Curve gjelder for 60° Bredde. Maximum, som her indtræffer 28de Februar, er endnu nogenlunde betydeligt (ca. 38° ved 70° Elongation). Derimod er der intet Minimum; Curven stiger nemlig op fra Horizonten den 7de Oktober og hæver sig siden temmelig raskt opover; men efter Maximumstiden 28de Februar daler den endnu hurtigere, indtil den pludselig stopper den 27de April i en Høide af mellem 11 og 12 Grader. Grunden hertil er naturligvis den, at fra den nævnte Datum begynder de lyse Nætter i den Forstand, at Solens Dybde under Horizonten selv ved Midnat er mindre end 16°. Et saadant Stoppepunkt vil Curven altid have fra en Parallelcirkel paa Jorden, hvis Ækvatorhøide = 23° 27′ + 16° = 39° 27′, altsaa fra 50° 33′ Bredde og nordover. Ved 60° Bredde er Zodiakallyset af denne Grund usynligt fra 27de April til 15de August; ved 70° Bredde fra 30te Marts til 12te September.

En af Ordinaterne, nemlig gjennem Vaarjevndøgn, er optrukket stærkere end de øvrige for tydeligt at vise, hvormeget bedre Zodiakallyset kan iagttages før end efter samme, ikke alene fordi Maximum overalt falder tidligere, men ogsaa fordi Curverne udenfor Vendecirklerne dale raskere paa den efterfølgende end de stige paa den forangaaende Side. Saaledes falder Stoppepunktet for 60° Bredde paa den 27de April eller 58 Dage efter Maximum; men den samme Høide 11°,5 var paa den opstigende Side naaet den 22de November, hvilket er 98 Dage før Maximum, altsaa hele 40 Dages Forskjel. Der er endnu en anden Grund til at Zodiakallyset bliver mindre fremtrædende efter Vaarjevndøgn, nemlig at det da begynder at flyde sammen med Melkeveien og dens Udløbere i Stjernebilledet Tyren. Paa den anden Side af Melkeveien kan det neppe følges paa vore Bredder. Forøvrigt kan man, som ovenfor nævnt, ikke altid vente at se Zodiakallyset, saasnart Spidsen ifølge Curven skulde ligge over Horizonten, fordi den øvre svagt lysende Del, hvis Grændser det ofte kan være vanskeligt nok at bestemme selv i større Høider over Horizonten, ikke formaar at skinne gjennem de nedre tætte Luftlag. Det tidligste, jeg har seet Zodiakallyset i Christiania (Bredde 59° 55′) er 26de December; det var da naturligvis temmelig skraat, men dog særdeles tydeligt, saa at det uden Tvivl vil kunne sees adskillige Dage tidligere paa en maaneskinsfri Aften med klar Horizont; det sidste er imidlertid en Sjeldenhed i Christiania paa denne Tid af Aaret, da der, selv om Himmelen forøvrigt er klar, gjerne vil lægge sig Taage i Horizonten.

Foruden de fire helt optrukne Høide-Curver indeholder Planchen en punkteret Curve, som angiver Maximumstiden for de forskjellige Polhøider ifølge Lign. (4) og (5); Tallene paa venstre Side betyde for denne ikke Høider over Horizonten, men Polhøider. Den viser, hvorledes de to Maximumstider indenfor Vendecirkelen stadig rykke sammen; for 15° Bredde findes de saaledes at indtræffe 15de Januar og 23de April. Udenfor Vendecirkelen stiger Linien næsten lodret op et langt Stykke, saa at Maximum, som ved Vendecirkelen indtræffer den 4de Marts, endnu ved 50° Bredde ikke er rykket længer tilbage end til 2den Marts. Først paa høiere Bredder indtræder en stærkere Krumning; ved 60° Bredde er, som før nævnt, Zodiakallysets Høide størst 28de Februar, ved 70° Bredde 25de Februar og ved selve Nordpolen 4de Februar.

Hele Planchen gjelder blot for Aften-Zodiakallyset. For Morgen-Zodiakallyset kan lignende Curver opkonstrueres efter Lign. (1), naar man tager Supplementvinkelen til den ved Lign. (2) bestemte Værdi af γ; men man kan ogsaa med tilstrækkelig Nøiagtighed opnaa det samme Resultat ved Hjelp af de allerede optrukne Curver i Forbindelse med den Regel, at paa en given Dag i Aaret, der ligger et vist Antal Dage før (efter) det ene Jevndøgn, bliver Morgen-Zodiakallysets Høide den samme som Aften-Zodiakallysets det samme Antal Dage efter (før) det andet Jevndøgn, naturligvis under Forudsætning af, at den østlige og vestlige Elongation fra Solen er ligestore. Vil man f. Ex. vide paa hvilken Dag Morgen-Zodiakallyset kommer høiest under 60° Bredde, saa tæller man hvor mange Dage Aftenlysets Maximumstid, 28de Februar, ligger *før Vaarjevndøgn*; da dette er 20, saa bliver den søgte Dag 20 Dage *efter Høstjevndøgn*, altsaa den 12te eller 13de Oktober. Vil man vide paa hvilke Dage Morgenlyset og Aftenlyset kan komme lige høit under hvilkensomhelst Polhøide, saa sees let, at det maa blive ved Solhverv. Istedetfor at tælle til modsatte Kanter fra de to *modsatte* Jevndøgn kunde man ogsaa tælle til modsatte Kanter fra det *samme* Solhverv. Da de fire Fjerdingaar ikke ere ganske lige lange, kan man paa denne Maade komme til at begaa en Feil af et Par Dage eller den dertil svarende Feil i Høiden, hvad der paa Grund af Sagens Natur i de fleste Tilfælde vil være uden synderlig Betydning; vil man imidlertid opnaa fuld Nøiagtighed for Morgenlyset ved Hjælp af Curverne for Aftenlyset, saa kan man ved Hjælp af en Søkalender finde en Dag paa hvilken Solens Declination er den samme som paa den givne Dag. Søger man f. Ex. Morgenlysets Høide under 45° Bredde den 1ste November, saa viser Søkalenderen, at den Declination, som Solen har 1ste Nov. (14° — 15° sydlig) har den ogsaa 9de Februar; altsaa er den søgte Høide den samme som Aftenlysets Høide 9de Februar, hvilket ifølge Curven er henved 47°. Ved at tælle Dagene fra nærmeste Jevndøgn kommer man i dette Tilfælde til samme Resultat.

For den sydlige Halvkugle bliver alt naturligvis som for den nordlige, blot at Aarstiderne ombyttes, det vil sige, for en hvilkensomhelst Dag bliver Omstændighederne ved Zodiakallyset de samme som for den tilsvarende nordlige Bredde paa Halvaarsdagen derfra.

Paa Grund af enkelte i den senere Tid fremsatte Theorier er det nødvendigt at anføre nogle Ord til Forsvar for den i det foregaaende anvendte Maade at betragte Zodiakallyset paa, nemlig som et Fænomen, der følger Solen i Aarets og Dagens Løb. Navnlig har en Italiener Hr. *Serpieri*, Bestyrer af det meteorologiske Observatorium i Urbino, i et Tidsskrift, som udgives af «Società degli spettroscopisti Italiani», leveret en meget udførlig Diskussion af en Række Zodiakallys-Observationer, udførte af en amerikansk Skibsprest *Jones* paa en Søreise i Aarene 1853—55, hovedsagelig i de tropiske Farvande; han kommer derved til det Resultat, at Zodiakallyset er et rent terrestrisk Fænomen, som han til Slutning sætter i Klasse med Nordlys, og det lader til at denne Maade at betragte Tingen paa har vundet Bifald hos flere italienske Videnskabsmænd. Der er imidlertid adskilligt at indvende mod den Maade, hvorpaa Forfatteren har draget sine Slutninger. Uden her at gjennemgaa den temmelig vidtløftige Afhandling i sin Helhed skal jeg blot fremhæve et Par Ting. Ved at sammenstille Observationerne af Spidsens Elongation fra Solen dels efter de forskjellige Tider af Aaret, dels for de forskjellige Timer af Natten, finder han, at Zodiakallysets Udstrækning har baade en aarlig og en daglig Periode. Den sidste, hvorpaa han især bygger sin Theori, viser sig paa den Maade, at Spidsen af Aftenlyset ofte i Nattens Løb skyder sig længer og længer bort fra Solen, mest i de første Par Timer efter Soldnedgang, senere svagere; ved det østlige Zodiakallys paa Morgenhimlen foregaar det omvendte, saaledes at Spidsen sænker sig blandt Stjernerne samtidigt med, at det hæver sig paa Grund af Himlens daglige Rotation. Spidsens Vandring i Nattens Løb har undertiden beløbet sig til 30° og derover. Da det nu er hævet over al Tvivl, at Luften, selv om der ikke findes en Sky paa Himlen, ingenlunde er lige gjennemsigtig bestandig, og at Luftens Gjennemsigtighed har meget at sige ved et saa delikat Foretagende, som Bestemmelsen af Zodiakallysets Grændser, saa maa man paa Forhaand vente, at dets Udstrækning varierer med Tiden, og ligeledes, at den gjennemsnitlig er forskjellig paa Steder med forskjelligt Klima. At en saadan Foranderlighed i Luftens Klarhed kan faa en periodisk Charakter baade i Løbet af Aaret og i Løbet af Dagen, er høist rimeligt, navnlig i de tropiske Egne med sin periodiske Regntid og andre regelmæssige meteorologiske Forhold. Hermed skal det ikke være sagt, at de af Serpieri paapegede Eiendommeligheder *maa* forklares paa denne Maade, men aldenstund der er en saa nærliggende Mulighed tilstede, gaar det ikke an at kaste det hele over paa ubekjendte indre Kræfter i Zodiakallyset og bygge en egen Theori derpaa, uden først nøie at have undersøgt, om den nævnte Mulighed ikke ogsaa er Virkelighed. Forfatteren har selvfølgelig ikke været blind for de Indvendinger, der kunde reises fra denne Kant, men han har neppe behandlet dem med den fornødne Omhu. Han anfører egentlig blot en Grund af nogen Betydning som Støtte for sin Mening, rigtignok i en anden Forbindelse, nemlig i Anledning af en Eiendommelighed, som han kalder *Pulsationer*, og som ifølge Jones's Iagttagelser skal bestaa deri, at Zodiakallysets Udstrækning og Lysstyrke stundom undergaar afvexlende Forøgelse og Formindskelse med nogle faa Minuters Mellemrum. Dette har kun sjelden vist sig om Morgenen, og om Aftenen hovedsagelig i Løbet af de første 2 Timer efter Solnedgang. Forfatteren nævner i den Anledning, at saafremt dette skulde have sin Grund i Vexlinger i Luftens Gjennemsighed, saa maatte noget lignende vise sig ved Melkeveien og de svageste Stjerner. Hvorvidt Jones samtidig har havt sin Opmærksomhed henvendt paa disse, oplyses ikke; men der er dog den væsentlige Forskjel mellem Zodiakallyset og Melkeveien, at det førstes henflydende Begrændsning gjør enhver Forandring i Luftens Klarhed mærkbar, nemlig paa dets Udstrækning, medens Melkeveien med sine forholdsvis skarpe Grændser kun undergaar Forandringer i Lysstyrken, noget der naturligvis er vanskeligere for Øiet at opfatte. Det samme gjelder om Stjernerne.

Den ovenfor nævnte Omstændighed, at Elongationens Forøgelse udover Aftenen var mest udpræget i de første to Timer efter Solens Nedgang, finder en simpel Forklaringsgrund deri, at Forfatteren ikke har taget behørigt Hensyn til Dæmringen. Jones begyndte i Regelen sine Observationer om Aftenen saasnart han kunde se Zodiakallyset, hvilket ofte var temmelig længe før Dæmringens fuldstændige Ophør, og at isaafald Toppen skyder sig frem blandt Stjernerne, saalænge til Himmelgrunden er bleven fuldstændig mørk, er en naturlig Ting; om Morgenen synes han i Regelen at have ophørt med Observationerne, saasnart Dæmringen viste sig. Nu har Serpieri grupperet Observationerne for hver halve Time, idet han begynder med 1 Time efter Solnedgang, forsaavidt Materialet strækker til; han har derved fundet, at Zodiakallysets Væxt fra 1 til $1^1/_2$ Time efter Solnedgang gjennemsnitlig er $8^\circ,_7$ og fra $1^1/_2$ til 2 Timer efter samme $6^\circ,_4$, tilsammen $15^\circ,_1$ i denne Time, altsaa netop svarende til den daglige Rotation, rigtignok langs Ekliptiken og ikke parallel med Ækvator. Dette har givet Forfatteren Indtrykkket af, at Zodiakallyset er, som han udtrykker sig, fæstet til Jorden. Dæmringens Indflydelse tror han sig fuldstændig fri for, idet han med Kämtz som Autoritet anfører, at i Chili varer Dæmringen $^1/_4$ Time. Heri har Kämtz uden Tvivl Ret, saafremt han sigter til den saakaldte borgerlige Dæmring, det vil sige den, ved hvis Ophør man ikke mere kan se at bestille noget inde i

Husene; men dette er noget ganske andet end den astronomiske Dæmring, ved hvis Ophør Himmelgrunden er fuldstændig mørk. Som tidligere anført maa Solen, for at dette skal finde Sted, være *mindst* 16° under Horizonten, og Dæmringen kan derfor aldrig noget Sted paa Jorden være kortere end 1 Time 4 Minuter. Serpieris Begyndelsestid, 1 Time efter Solnedgang, er derfor i alle Tilfælde for tidlig; i enkelte Tilfælde har Dæmringen varet indtil ½ Time efter Begyndelsen af de af ham benyttede Observationer. At ogsaa Pulsationerne for det meste have vist sig i denne samme Time (mellem 1 og 2 Timer efter Solnedgang) gjør dem lidt mistænkelige, dels fordi den nærmeste Tid efter Solens Nedgang maa antages at være gunstig for Forandringer i Luftens Tilstand i det hele taget og derfor ogsaa for Uregelmæsigheder i dens Klarhed, dels fordi saadanne Vexlinger maa give sig bedst tilkjende paa Zodiakallyset, saalænge det endnu ikke er udviklet i sin fulde Glands.

Hr. Serpieri opstiller paa denne Maade en Række af formentlige Love og ender med at anføre en Del Ligheder mellem Zodiakallyset og Nordlyset, deriblandt ogsaa deres Udseende. For os her nordpaa, som oftere have Anledning til at se Nordlys, vil Uligheden uden Tvivl være mere iøinefaldende. Pulsationerne, disse svage Vexlinger, som de efter Beskrivelsen maa være, og som kun de færreste Iagttagere have seet, skulle formodentlig repræsentere det urolige Element ved Zodiakallyset, som maa til, for at Sammenligningen kan finde Sted; men de danne i Sandhed kun en mat Pendant til Nordlysets Flammespil. En anden Ulighed er den, at Nordlyset, som alt andet, der staar i Forbindelse med Jordmagnetismen, er underkastet den bekjendte stærkt udprægede 11-aarige Periode — noget som man, mig bekjendt, ikke har fundet at være Tilfældet med Zodiakallyset. Som et Bevis paa den direkte Forbindelse mellem de to Fænomener anfører Serpieri følgende Citat af Beretningen om en Reise til Hudsonsbugten af De Mairan i forrige Aarhundrede: «I dette Land ser man, naar Solen staar op eller gaar ned, en stor Kegle af gulagtigt Lys, som hæver sig lodret over den; og neppe er denne forsvundet med den nedgaaede Sol, førend Nordlyset indtager dens Plads, slyngende tusinde lysende og farvede Straaler over Hemisfæren» o. s. v. Det er aabenbart, at hvad De Mairan her sigter til, ikke er Zodiakallyset, men den for os Nordboere velbekjendte gule eller undertiden hvide Stribe, som af og til kan sees over Solen omkring dens Opgang eller Nedgang, og som har samme Oprindelse som de almindelige Ringsystemer om Solen, nemlig Lysets Brydning eller Reflexion i de utallige fine Isnaale, som svæve i Luftens øvre Lag, ofte langt ud paa Sommeren. At De Mairans Beskrivelse ikke passer paa Zodiakallyset følger deraf, at dette paa saa nordlige Bredder aldrig kan komme til at staa lodret paa Horizonten; det maatte isaafald denne en Vinkel paa mellem 35° og 81° med Ekliptiken — noget som endnu aldrig har været observeret; heller ikke forsvinder Zodiakallyset med den nedgaaede Sol, men det begynder en rum Tid bagefter.

Naar alt kommer til alt, turde det vel endnu være det sikreste at holde sig til den ældre Mening, at Zodiakallyset er af kosmisk Natur. Den Anskuelse, at det blot er det Sollys, der reflekteres fra en talløs Skare af smaa Legemer, som bevæge sig i Rummet, er allerede fremsat for længe siden, men saavidt vides blot udtalt som en Formodning. Og dog foreligger der efter Schiaparellis skjønne Opdagelse af den nøie Forbindelse mellem disse smaa Legemer og Kometerne adskillige Data til Tankens videre Gjennemførelse. Hvilken umaadelig Mængde der maa findes af disse Meteoriter, fremgaar af det Antal som vor lille Jord opfanger som Stjerneskud i den fine Stribe af Rummet, som den gjennemfarer i Aarets Løb. Hvad allerede Kepler anførte om Kometerne, at de ere talrigere end Fiskene i Havet, gjelder i endnu langt høiere Grad om Meteoriterne. Men Mængden er endnu ikke nok;

Beskaffenheden af det Lys, som de tilsammen sende os, vil i væsentlig Grad være afhængig af deres *Fordeling* i Rummet. Og i denne Henseende giver Schiaparellis Opdagelse gode Vink. Han har paavist, at Meteoriterne ligesom Kometerne bevæge sig i langstrakte Keglesnit om Solen, i Modsætning til Planeternes næsten cirkelformige Ellipser. Men nu er som bekjendt ikke alle Kometbaner lige langstrakte; medens de fleste ere det i den Grad, at de for det meste beregnes som Parabler, er der et ringe Antal Kometer, som have saavidt runde Baner, at de kunne løbe rundt Solen paa nogle faa Aar. Det samme Forhold maa antages at finde Sted ved Meteoriterne. Der findes altsaa et stort Antal Meteoriter med næsten paraboliske Baner, og et meget mindre Antal med korte Omløbstider; de sidste maa fremdeles antages at have den samme Egenskab, som er eiendommelig for Kometerne med kort Omløbstid, nemlig at deres Baner danne smaa Heldningsvinkler med Jordbanens og de øvrige Planetbaners Planer. Dette er en nødvendig Følge af, at de samme Kræfter, nemlig Planeternes Perturbationer, have skaffet saavel Kometerne som Meteoriterne deres korte Omløbstider. Den Omstændighed, at Zodiakallyset strækker sig langs Dyrekredsen, synes at pege hen paa de Meteoriter, hvis Baners Inclinationer ere smaa, altsaa fortrinsvis paa Meteoriterne med kort Omløbstid.

Naar man nu fremdeles holder sig til Analogien med Kometbanerne, kunde det synes som Antallet af Kometer med kort Omløbstid er altfor lidet i Sammenligning med de øvrige, til at de kunne bevirke nogen synderlig overveiende Hyppighed i Nærheden af Ekliptiken. Medens man kjender mellem to og tre hundrede Kometer med næsten paraboliske Baner, har man til Dato ikke fundet flere end 10 med kortere Omløbstid end 15 Aar, deraf 9, hvis Omløbstid er under 8 Aar. Men nærmere beseet viser dette sig dog at være saa. Tænker man sig nemlig en Iagttager paa Solen, saa vil han i Tidens Løb se Kometerne jevnt fordelt paa hele Himmelen, saafremt Banerne ere jevnt fordelte i Rummet. Nu kan man, som allerede Schiaparelli har paavist, let beregne, hvorledes det i saa Fald maa forholde sig med Banernes Inclinationer. Tænker man sig nemlig Himmelkuglen jevnt besat med Kometbaners Poler, saa vil Antallet af Inclinationer mellem to Grændser i og i' være proportionalt med Størrelsen af den Zone, som indeslutter Polerne, altsaa med Zonens Høide eller med $\cos i - \cos i'$. Nu kan dette sammenlignes med Virkeligheden, saaledes som ved følgende Exempel. Fra 1850 til Udgangen af 1877 har man observeret 75 Kometer, som blot have vist sig een Gang og 1 (Tuttles), som har vist sig to Gange; de 9 med kort Omløbstid have passeret Perihel 47 Gange, noget man ved med Vished, uagtet de ikke have kunnet observeres alle Gange fra Jorden. Der har altsaa i disse 28 Aar været 124 Apparitioner af Kometer, som man ved om. Undersøges nu Inclinationerne af disses Baner, idet man særskilt behandler de sidstnævnte 47, der danne en Gruppe for sig, og de første 77, saa faaes det Resultat, som er sammenstillet i nedenstaaende Tabel, hvor 1ste Spalte indeholder Inclinationerne, fordelt i Zoner paa 10°, 2den Spalte Forholdstallene for Antallet af Inclinationer i hver Zone, naar Banerne ere jevnt fordelte, altsaa Differentserne mellem de to Cosinuser til Zonens Ydergrændser; 3die Spalte indeholder Anvendelsen heraf paa de 77 Kometbaner, altsaa Fordelingen af disses Inclinationer, ifald Banerne havde været jevnt fordelte; endelig giver 4de Spalte det virkelig stedfindende Antal Inclinationer i hver Zone for de 77, og 5te Spalte det samme for de 47; for de sidstes Vedkommende maa naturligvis hver Apparition tælles som en særskilt Bane, da det for nærværende Spørgsmaal kan være ligegyldigt, om den samme Komet kommer igjen f. Ex. 5 Gange, eller om der i samme Tid viser sig 5 forskjellige Kometer med den samme Heldning af Banen.

0° —10°	0.015	1.16	3	11	10.5
10—20	0.045	3.46	5	31	10.0
20—30	0.074	5.7	5	5	1.9
30—40	0.100	7.7	7	0	1.0
40—50	0.123	9.5	11	0	1.0
50—60	0.143	11.0	10	0	1.0
60—70	0.158	12.2	11	0	1.0
70—80	0.168	12.9	10	0	1.0
80—90	0.174	13.4	15	0	1.0
	1.000	77.0	77	47	

Sammenlignes nu for det første Spalterne 3 og 4, saa sees adskillig Overensstemmelse, hvoraf altsaa følger, at de 77 Baner ikke ere meget langt fra at være jevnt fordelt i Rummet,[1]) og at de 77 Kometer altsaa for en Iagttager paa Solen vilde have vist sig nogenlunde ligeligt fordelt paa hele Himmelen. Der er dog nogen Overvegt af de smaa Inclinationer, men dette tør ikke tages til Indtægt for en større Hyppighed af Kometer i Nærheden af Ekliptiken; thi Grunden til denne Overvegt er uden Tvivl for en stor Del at søge deri, at en Del Kometer slippe ubemærkede forbi, noget som fortrinsvis vil kunne finde Sted ved Kometer, hvis Baner have stor Heldning mod Ekliptiken. Men for det andet viser Spalte 5, at Kometerne med kort Omløbstid fremkalde en betydelig Overvegt omkring Ekliptiken. Benyttes den Fordeling, som de 77 Kometer vilde have med jevnt fordelte Baner, som Enhed for Tæthed paa Himmelkuglen, saa findes den virkelig stedfindende Tæthed i de forskjellige Zoner ved at dividere Tallene i Spalte 5 med Tallene i Spalte 3 og hele Veien lægge 1 til; paa denne Maade faaes Spalte 6, som viser, at der, netop paa Grund af disse korte Omløbstider, gjennemsnitlig viser sig mellem 10 og 11 Gange saa mange Kometer

[1]) En anden Maade at undersøge, hvorvidt Kometbanerne ere jevnt fordelte i Rummet, er at tage Middeltallet af alle Inclinationerne; for et stort Antal jevnt fordelte Baner vil nemlig, som let indsees, dette Middeltal blive lig den Bue, hvis Længde er lig Radien, altsaa 57°.3. Middeltallet af de 77 Inclinationer af Kometbanerne fra 1850 til 1877 er 55°.1.

i et Belte af 40° Bredde paa begge Sider af Ekliptiken, som paa den øvrige Del af Himmelen. Ved at benytte den virkelig stedfindende Fordeling af de 77 Inclinationer vilde man have faaet endnu noget større Overvegt omkring Ekliptiken, men af den ovennævnte Grund antages den theoretiske jevne Fordeling at komme Sandheden nærmere. Vistnok kan det antages, at der ogsaa af Kometer med kort Omløbstid findes flere endnu uopdagede, men da de, netop paa Grund af de smaa Inclinationer, ikke have saa let for at slippe ubemærket forbi, vil det dog være Tilfældet med forholdsvis færre af dem end af de øvrige. I alle Tilfælde ere Tallene i 6te Spalte for de smaa Inclinationer snarere for smaa end for store.

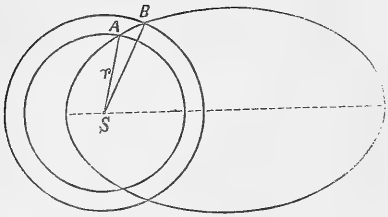
Efter dette synes det altsaa at være Umagen værdt at undersøge, hvorledes Meteoriterne med kort Omløbstid maa være fordelte, nu ikke mere omkring Ekliptiken (eller et nærliggende Fællesplan for hele Planetsystemet) men i forskjellige Afstande fra Solen, og dernæst, hvorledes det af dem reflekterede Sollys vil vise sig for os paa Jorden. Da vi ikke kjende Banerne for hver enkelt Meteorit paa samme Maade som for hver enkelt Komet, kan man heller ikke behandle dem paa samme Maade; men deres overordentlig store Mængde gjør det tilladeligt at tage dem *en bloc.*

Den Gruppe af Kometer, som frembringer det store Antal Apparitioner i Dyrekredsen, har en Eiendommelighed, som strax springer i Øinene. Følgende Oversigt over disse, ordnede efter Omløbstiden (T) giver deres største og mindste Afstand (Q og q) fra Solen, naar Jordens Afstand = 1.

	Q	q	T
Encke	4.09	0.33	3.29 Aar
Tempel No. 2 . .	4.63	1.34	5.16 —
De Vico	5.02	1.19	5.47 —
Brorsen	5.62	0.59	5.48 —
Winnecke	5.57	0.83	5.73 —
Tempel No. 1. . .	4.81	1.77	5.97 —
D'Arrest	5.73	1.28	6.57 —
Biela	6.19	0.86	6.69 —
Faye	5.92	1,68	7.41 —
Tuttle	10.48	1.03	13.81 —

Listen indeholder ogsaa den tiende Komet med kort Omløbstid, men denne skiller sig stærkt ud fra de ni første. Det mærkelige ved disse er deres store Overensstemmelse i Apheldistance; ogsaa Periheldistancerne ligge indenfor temmelig snevre Grændser, men dette kommer simpelthen deraf, at en Komet med synderlig større Periheldistance vanskelig kan blive synlig for Jorden. Derimod tyder Ligheden i Apheldistance paa et Fællesskab i Oprindelse, især fordi de gruppere sig om Jupiters Afstand fra Solen. Den samme Aarsag, nemlig de store Planeters og især Jupiters Perturbationer, maa selvfølgelig ogsaa have virket paa de spredte Meteoriter.

Man kan altsaa antage, at der findes en stor Mængde Meteoriter, hvis Aphelier gruppere sig om en vis Værdi Q. Derimod er der ingen Grund til at antage noget lignende om Periheldistancerne; da den Retning, hvori en Partikel stevner ind imod Solen, hvad enten den er paavirket af nogen Planets Tiltrækning eller ei, er rent tilfældig, saa maa tvertimod Perihelierne, naar der er et stort Antal Baner, antages at være jevnt fordelte lige fra Solens Overflade til saavidt betydelige Afstande, at de ophøre at være Perihelier. Under denne Forudsætning kan Meteoriternes Fordeling i forskjellige Afstande findes paa følgende Maade.



Tænker man sig om Solen en Kugleskal med Radius r og Tykkelse $\triangle r$, saa vil enhver Partikel hvis Periheldistance er mellem 0 og $r + \triangle r$, komme til at gjennemskjære denne. En Partikel med Apheldistance Q og Periheldistance q vil tilbringe en vis Del $\frac{1}{n}$ af sin Omløbstid indenfor Skallen, nemlig det dobbelte af Forholdet mellem Sectoren ASB og hele Ellipsen. Antages foreløbig Q at være constant, men q forskjellig for de forskjellige Baner, saa kunde man, ifald der var m Perihelier, beregne Middelværdien af Forholdstallet $\frac{1}{n}$ for allesammen, og ved at multiplicere dette med Antallet af Meteoriter, m, vilde man faa det Antal Meteoriter, som gjennemsnitlig befinder sig indenfor Skallen i et givet Øieblik; divideres med Skallens Kubikindhold, har man et Udtryk for Stoffets Tæthed i Afstanden r. Men under Forudsætning af at Perihelierne ere jevnt fordelte, kan Middelværdien af Tallet $\frac{1}{n}$ findes ved at multiplicere det for Periheldistancen q gjeldende Udtryk med dq og integrere mellem o og r, samt dividere det udkomne med r; da nu Antallet af Meteoriter, ifølge Forudsætningen, er proportionalt med r, saa kan man spare denne Division og istedet derfor multiplicere med en Constant. Divisionen med Skallens Kubikindhold for at finde Tætheden kan ogsaa udføres før Integrationen.

Er altsaa v den sande Anomali og $ASB = \triangle v$, a Ellipsens Halvaxe og e dens Excentricitet, saa er Ellipsens Fladeindhold $= \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$, og den Del af Omløbstiden, som Meteoriten tilbringer indenfor Skallen, er $\frac{1}{n} = \frac{r^2 \triangle v}{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}$. Divideres strax med Skallens Volum $4\pi r^2 \triangle r$, saa faaes $\frac{1}{4\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\triangle v}{\triangle r}$. Nærmer Skallens Tykkelse sig til o, saa kan Forholdet $\frac{\triangle v}{\triangle r}$ findes af Ellipsens Ligning, nemlig $\frac{dv}{dr} = \frac{a(1-e^2)}{r^2 e \sin v}$; udtrykkes tillige a og e ved Q og q, nemlig

$$a = \frac{Q+q}{2} \text{ og } e = \frac{Q-q}{Q+q},$$

saa faaes ved Indsætning og Reduction Udtrykket for Meteoriternes Tæthed

$$D = \frac{K}{r} \int_0^r \frac{dq}{(Q+q)\sqrt{(Q-r)(r-q)}}.$$

Nu er $\int \frac{dq}{(Q+q)\sqrt{r-q}} = \frac{1}{\sqrt{Q+r}} \log\text{nat} \frac{\sqrt{Q+r} - \sqrt{r-q}}{\sqrt{Q+r} + \sqrt{r-q}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{Q+r}} \log\text{nat} \frac{\sqrt{Q+r} - \sqrt{r-q}}{\sqrt{Q+q}}.$$

Indsættes her Grændserne og bemærkes, at

$$\log \frac{\sqrt{Q+r} - \sqrt{r}}{\sqrt{Q}} = \log \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{Q+r} + \sqrt{r}} = -\log \frac{\sqrt{Q+r} + \sqrt{r}}{\sqrt{Q}},$$

saa faaes

$$D = \frac{2K}{r\sqrt{Q^2 - r^2}} \log\text{nat} \left(\sqrt{\frac{r}{Q}} + \sqrt{1 + \frac{r}{Q}}\right) \ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Heraf kan altsaa Tætheden beregnes for forskjellige Afstande, naar Værdien af Q er given; man vil i saa Henseende rimeligvis komme Sandheden temmelig nær ved at sætte Q lig Middelværdien af Apheldistancerne for Kometerne med kort Omløbstid. Naturligvis bliver Formelen ubrugelig, naar r nærmer sig stærkt til Q, da den under Integrationen gjorte Forudsætning om en for alle Baner fælles Apheldistance kun er tilnærmet. Dette gjør imidlertid ikke stort til Sagen, som det vil sees af det følgende.

Imidlertid kan man ogsaa tage Hensyn til Apheldistancernes Forskjellighed, idet man, istedetfor at slaa dem sammen til en Middelværdi, kan antage dem jevnt fordelte mellem to Grændser Q_0 og Q. Tætheden i Afstanden r findes da ved at multiplicere Lign. I med dQ og integrere. Men D maa da udvikles i Række. Sættes $\frac{r}{Q} = x$, saa er

$$D = \frac{2K}{r^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \log \operatorname{nat} \left(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}\right).$$

Nu er $$\log \operatorname{nat} \left(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}\right) =$$

$$= \sqrt{x} \left\{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^2}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^3}{7} + \ldots\right\}$$

og $$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1.3}{2.4} x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^7 + \ldots$$

Multipliceres disse to Rækker med hinanden, faaes

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \log \operatorname{nat} \left(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}\right) =$$

$$= x^{\frac{3}{2}} - \alpha x^{\frac{5}{2}} + \beta x^{\frac{7}{2}} - \gamma x^{\frac{9}{2}} + \delta x^{\frac{11}{2}} - \varepsilon x^{\frac{13}{2}} + \ldots$$

hvor $$\alpha = \frac{1}{6} = 0.167$$

$$\beta = \frac{23}{40} = 0.575$$

$$\gamma = \frac{43}{336} = 0.128$$

$$\delta = \frac{2551}{5760} = 0.443$$

$$\varepsilon = \frac{2113}{19712} = 0.107.$$

Multipliceres nu med $dQ = -\frac{r\,dx}{x^2}$ og integreres, faaes

$$\int D\,.\,dQ = -\frac{4K}{r}\left\{x^{\frac{1}{2}} - \frac{\alpha}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{\beta}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{\gamma}{7}x^{\frac{7}{2}} + \ldots\ldots\right\}.$$

Her skal nu indsættes Grændserne $\frac{r}{Q}$ og $\frac{r}{Q_0}$. For Begyndelsesværdien Q_0 er det ikke saa vanskeligt at gjøre et rimeligt Valg, da den, om man skal dømme efter Kometerne, ikke kan være synderligt mindre end Jupiters Afstand; derimod kan der være nogen Tvivl for Ydergrændsen. Skulde man holde sig Analogien med Kometerne strengt efterrettelig, maatte man egentlig tage den mindste og største Værdi af Q efter Listen paa pag. 277. Imidlertid kan man nok ogsaa tænke sig, at der ved det uden Sammenligning langt større Antal Meteoriter ogsaa findes større Variation i Apheldistancerne, navnlig paa den Maade, at de ere fordelte betydelig længere udover. Som den anden Yderlighed i Modsætning til den constante Værdi af Q i Lign. I, vil jeg derfor her sætte $Q = \infty$. Kaldes Tætheden i dette Tilfælde D', saa bliver

$$D' = \frac{K'}{\sqrt{Q_0\,r}}\left\{1 - \frac{\alpha}{3}\frac{r}{Q_0} + \frac{\beta}{5}\left(\frac{r}{Q_0}\right)^2 - \frac{\gamma}{7}\left(\frac{r}{Q_0}\right)^3 + \ldots\ldots\right\}\ldots \quad \text{II.}$$

Til Sammenligning hidsættes ogsaa Værdien af D, naar den udvikles i Række, nemlig

$$D = \frac{2K}{Q\sqrt{Qr}}\left\{1 - \alpha\frac{r}{Q} + \beta\left(\frac{r}{Q}\right)^2 - \gamma\left(\frac{r}{Q}\right)^3 + \ldots\ldots\right\}.$$

Jeg har beregnet Tætheden saavel efter den ene som den anden Hypothese, idet jeg i den sidste Formel (eller Lign. I) har sat $Q = 5.8$, hvilket er Middelværdien af Apheldistancerne for de 10 Kometer med kort Omløbstid, idet jeg her ogsaa har taget Tuttles Komet med; Middeltallet af de 9 første vilde være 5.3; Forskjellen mellem disse to Værdier gjør ikke stort til Sagen. I Lign. II har jeg antaget de jevnt fordelte Apheldistancer at begynde omtrent med Jupiters Afstand og derfor med rundt Tal sat $Q_0 = 5$. Vælges tillige Constanterne K og K' saaledes, at Tætheden i Jordens Afstand benyttes som Enhed, saa bliver

$$D = \frac{1.0121}{\sqrt{r}} \left\{1 - a\,r + b\,r^2 - c\,r^3 + d\,r^4 - e\,r^5 + \ldots\right\}$$

$$D' = \frac{1.0066}{\sqrt{r}} \left\{1 - a'r + b'r^2 - c'r^3 + d'r^4 - e'r^5 + \ldots\right\}$$

hvor

$a = 0.028735$	$a' = 0.011111$
$b = 0.017093$	$b' = 0.004600$
$c = 0.000656$	$c' = 0.000146$
$d = 0.000391$	$d' = 0.000079$
$e = 0.000016$	$e' = 0.000003$

og hvor r altsaa er udtrykt i Jordbaneradier. For Værdier af r, der er større end 2 eller 3 beregnes D bekvemmere efter Lign. I, da de her medtagne Led i Rækken da ikke mere ere tilstrækkelige. Det bemærkes, at ved Solens Overflade er $r = 0.0046$.

r	D	D′	r	D	D′
0.005	14.3	14.2			
0.01	10.1	10.1	0.6	1.29	1.29
0.02	7.2	7.1	0.8	1.12	1.12
0.03	5.8	5.8	1.0	1.00	1.00
0.04	5.1	5.0			
0.05	4.5	4.5	1.5	0.82	0.81
			2.0	0.73	0.71
0.1	3.19	3.18	2.5	0.66	0.64
0.2	2.25	2.25	3.0	0.63	0.58
0.3	1.83	1.83	3.5	0.63	0.55
0.4	1.58	1.58	4.0	0.64	0.53

Heraf sees, at enten man benytter den ene eller den anden Hypothese om Apheliernes Fordeling, bliver Resultatet indtil Afstanden 2 saagodtsom det samme og fra 2 til 4 kun lidet forskjelligt; endvidere sees, at hele Veien er det første

Led i Rækkerne saa overveiende, at man indtil Afstanden 3 eller 4 kan anse Meteoriternes Tæthed for at være *omvendt proportional med Kvadratroden af Afstanden fra Solen.* Det maa her erindres, hvad tidligere er vist, at Tætheden ikke er den samme i alle Retninger; ovenstaaende Resultat gjelder for de Meteoriter, hvis Baner gruppere sig nærmest omkring Solsystemets Plan — om man vil benytte dette Navn for Middelplanet for alle de store Planeter.

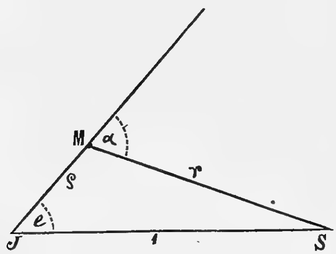
Det gjelder nu at finde, hvorledes denne Samling af Stof vil vise sig, seet fra Jorden. Tænker man sig en Kegle eller Pyramide med Spidsen i Øiet og med liden Aabning, saaledes at den dækker et Kvadratminut eller en anden liden Del af Himmelkuglen, og betragter man endvidere et Element af denne Kegle, afskaaret lodret paa Synslinien, i en Afstand ρ fra Jorden og med Tykkelsen $d\rho$, saa vil den Lysmængde, som Øiet modtager fra et saadant Element være afhængig 1) af Antallet af Partikler inden samme, og 2) af hver enkelt Partikels Lysstyrke. Antallet af Partikler er igjen afhængig af to Ting, nemlig Stoffets Tæthed paa dette Sted og Elementets Rumfang, hvilket sidste, saalænge Tykkelsen $d\rho$ er den samme, er proportionalt med Kvadratet af Afstanden fra Øiet. Kaldes altsaa den gjennemsnitlige Glands af hver enkelt Meteorit inden Elementet G og Stoffets Tæthed, som før, D, saa er Elementets Lysstyrke

$$d\,I = k\,.\,D\,.\,G\,\rho^2\,d\rho.$$

Glandsen G vil, saalænge der blot er Spørgsmaal om det reflekterede Sollys, blot være afhængig af een Ting, nemlig hvormeget af den belyste Side Meteoriten vender mod os, altsaa af Fasen; vistnok kan Reflexionsevnen være forskjellig, men da der her kun er Spørgsmaal om den gjennemsnitlige Værdi, kommer dette ikke i Betragtning. Det samme gjelder om Partiklernes Form; forsaavidt de engang have været udsatte for en hel eller delvis Smeltning, hvilket uden Tvivl er Tilfældet med mange af dem, have de af sig selv antaget

Kugleformen; men selv for de uregelmæssige kan man, ligeoverfor det, som her er Spørgsmaal om, antage Kuglen som en gjennemsnitlig Form, da en Meteorit med uregelmæssig Overflade i en Stilling vilde reflektere mere, i en anden mindre Lys, end om den havde været kugleformet. Man kan derfor uden Betænkning anvende den saakaldte *Lamberts Formel* for Lysstyrken af en solbelyst Kugle, hvilken grunder sig derpaa, at hvert Element af Kuglen modtager Lys i Forhold til dets apparente Størrelse, seet fra Solen, og udsender Lys i Forhold til dets apparente Størrelse, seet fra Jorden. Kaldes altsaa, som før, Afstanden fra Solen r, og Fasevinkelen α, saa er, paa en Constant nær,

$$G = \frac{\sin\alpha - \alpha\,.\cos\alpha}{r^2\,\rho^2}.$$



Dette kan altsaa indsættes i ovenstaaende Ligning tilligemed Værdien af D efter Lign. I eller II. Imidlertid vil man for de Afstande, som her kan blive Spørgsmaal om, kunne nøie sig med den ovenfor fundne Tilnærmelse, at Tætheden er omvendt proportional med Kvadratroden af Afstanden. Man faar da

$$dI = \frac{C}{\sqrt{r}}\cdot\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{r^2\,\rho^2}\,.\,\rho^2\,d\rho = \frac{C}{\sqrt{r}}\cdot\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{r^2}\,d\rho.$$

Nu sees af Figuren, hvor S er Solen, J Jorden og M Elementet af Meteoriter, at

$$r = \frac{\sin e}{\sin\alpha},\quad \rho = \frac{\sin(\alpha - e)}{\sin\alpha} = \cos e - \operatorname{cotg}\alpha\,.\sin e$$

altsaa $d\rho = \dfrac{\sin e}{\sin^2\alpha}\,.\,d\alpha$, naar α vælges til Variabel istedetfor ρ. Indsættes dette, faaes

$$dI = \frac{C}{\sin e \sqrt{\sin e}} \sqrt{\sin \alpha}\,(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)\, d\alpha .$$

Den samlede Lysmængde fra alle indenfor Keglen værende Partikler findes nu ved at integrere dette Udtryk fra $\rho = 0$ til $\rho = \infty$ eller ialfald til den Værdi af ρ, som svarer til den Afstand fra Solen, indenfor hvilken den benyttede Lov for Tætheden gjelder. Med α som Variabel skal man integrere fra $\alpha = e$ til $\alpha = 180^\circ$ eller ialfald til en derfra ikke meget forskjellig Værdi α_0.

Ved ubestemt Integration findes

$$\int \sqrt{\sin \alpha}\,(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)\, d\alpha =$$

$$= \int \sin^{\frac{3}{2}} \alpha\, d\alpha - \alpha \,.\, \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} \alpha + \frac{2}{3} \int \sin^{\frac{3}{2}} \alpha\, d\alpha$$

$$= -\frac{2}{3}\, \alpha \sin^{\frac{3}{2}} \alpha + \frac{5}{3} \int \sin^{\frac{3}{2}} \alpha\, d\alpha .$$

Fremdeles er $\int \sin^{\frac{3}{2}} \alpha\, d\alpha = \sqrt{\sin \alpha} \,.\, - \cos \alpha + \frac{1}{2} \int \frac{\cos^2 \alpha}{\sqrt{\sin \alpha}} d\alpha =$

$$= -\cos \alpha \sqrt{\sin \alpha} + \frac{1}{2} \int \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin \alpha}} - \frac{1}{2} \int \sin^{\frac{3}{2}} \alpha\, d\alpha =$$

$$= -\frac{2}{3} \cos \alpha \sqrt{\sin \alpha} + \frac{1}{3} \int \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin \alpha}} .$$

Altsaa er

$$\int dI = \frac{C}{\sin e \sqrt{\sin e}} \times$$

$$\times \left\{ -\frac{2}{3}\, \alpha \sin \alpha \sqrt{\sin \alpha} - \frac{10}{9} \cos \alpha \sqrt{\sin \alpha} + \frac{5}{9} \int \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin \alpha}} \right\} .$$

Indsættes her Grændserne α_0 og e, og er R den Afstand fra Solen, indenfor hvilken den her benyttede Lov for Tætheden gjelder, saa er $\sin \alpha_0 = \frac{\sin e}{R}$, og man faar, naar Constanten C foreløbig udelades,

$$I = \frac{2}{3}\left(e - \frac{\alpha_0}{R\sqrt{R}}\right) + \frac{10}{9 \sin e}\left(\cos e - \frac{\cos \alpha_0}{\sqrt{R}}\right) +$$

$$+ \frac{5}{9 \sin e \sqrt{\sin e}} \int_e^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin \alpha}}.$$

Det sidste Integral kan reduceres til et elliptisk Integral, som let findes ved Rækkeudvikling. Sættes nemlig $\sqrt{\sin \alpha} = x$, saa er $d\alpha = \frac{2x\,dx}{\cos \alpha} = \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$; sættes for Kortheds Skyld $\sqrt{\sin e} = \mathrm{a}$ og $\sqrt{\sin \alpha_0} = \mathrm{b}$, saa er

$$\int_{\mathrm{e}}^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin \alpha}} = 2 \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Ved Rækkeudvikling og ubestemt Integration findes

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = x + \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \cdot \frac{x^9}{9} + \ldots\,;$$

men ved Indsætningen af Grændserne maa man passe paa at skifte Fortegn foran Rodtegnet, naar α passerer gjennem 90°, da $\cos \alpha$ er negativ i 2den Kvadrant. Man har derfor, som let sees ved en geometrisk Betragtning:

Naar $e \leqq 90^\circ$

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = \int_{\mathrm{a}}^{1} - \int_{1}^{\mathrm{b}} = \int_{0}^{1} - \int_{0}^{\mathrm{a}} + \int_{\mathrm{b}}^{1} = 2\int_{0}^{1} - \int_{0}^{\mathrm{a}} - \int_{0}^{\mathrm{b}}$$

og naar $e \geqq 90^\circ$

$$-\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = \int_{\mathrm{b}}^{\mathrm{a}} = \int_{0}^{\mathrm{a}} - \int_{0}^{\mathrm{b}}.$$

Kaldes det complette elliptiske Integral med Modulus $\sqrt{-1}$ for K, saa er altsaa

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \cdot \frac{1}{9} + \ldots\,.$$

Beregningen deraf foregaar lettest ved de Hjælpemidler, som Theorien for de elliptiske Funktioner giver; man finder derved

$$K = 1.31103.$$

Man faar altsaa ved at indsætte Grændserne:

Naar $e \overline{\overline{<}} 90°$

$$I = \frac{2}{3}\left(e - \frac{\alpha_0}{R\sqrt{R}}\right) + \frac{10}{9 \sin e}\left(\cos e - \frac{\cos \alpha_0}{\sqrt{R}}\right) +$$

$$+ \frac{10}{9}\left\{\begin{array}{l} \frac{2K}{\sin e \sqrt{\sin e}} - \frac{1}{\sin e} - \frac{1}{2}\frac{\sin e}{5} - \ldots . \\ - \frac{1}{\sqrt{R} \cdot \sin e} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R\sqrt{R}} \cdot \frac{\sin \alpha_0}{5} - \ldots . \end{array}\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\left(e - \frac{\alpha_0}{R\sqrt{R}}\right) + \frac{10}{9}\left\{\frac{2K}{\sin e \sqrt{\sin e}} - \operatorname{tg}\frac{e}{2} - \frac{1}{R\sqrt{R}} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\alpha_0}{2}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{R^2\sqrt{R}}\right)\frac{\sin e}{5} - \ldots . .\right\}$$

og paa samme Maade, naar $e \overline{\overline{>}} 90°$

$$I = \frac{2}{3}\left(e - \frac{\alpha_0}{R\sqrt{R}}\right) + \frac{10}{9}\left\{\operatorname{cotg}\frac{e}{2} - \frac{1}{R\sqrt{R}} \operatorname{cotg}\frac{\alpha_0}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{R^2\sqrt{R}}\right)\frac{\sin e}{5} + \ldots . .\right\}.$$

Saalænge Elongationen e er liden eller nær 180°, bliver Rækken tilstrækkelig hurtigt convergerende til at kunne benyttes med Fordel; men for større Værdier af $\sin e$ staar man sig paa at beregne Værdien af det elliptiske Integral paa den sædvanlige Maade. Derimod er α_0, selv om man ikke vil sætte den lig 180°, dog i alle Tilfælde saa lidet forskjellig derfra, at Rækken for dens Vedkommende altid er stærkt convergerende. Kaldes det elliptiske Integral mellem 0 og $\sqrt{\sin e}$ for u, altsaa

$$u = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \sqrt{\sin e}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{\sin^2 e}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\sin^4 e}{9} + \ldots\right\}$$

saa er, naar Constanten C atter medtages:

Naar $e \leqq 90^\circ$

$$I = \frac{10}{9} C \left\{ \frac{3}{5} \left(e - \frac{\alpha_0}{R\sqrt{R}} \right) + \operatorname{cotg} e + \frac{2K - u}{\sin e \sqrt{\sin e}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{R\sqrt{R}} \left[\operatorname{cotg} \frac{\alpha_0}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha_0}{5} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \cdot \frac{\sin^3 \alpha_0}{9} + \ldots \right] \right\}$$

og naar $e \geqq 90^\circ$

$$I = \frac{10}{9} C \left\{ \frac{3}{5} \left(e - \frac{\alpha_0}{R\sqrt{R}} \right) + \operatorname{cotg} e + \frac{u}{\sin e \sqrt{\sin e}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{R\sqrt{R}} \left[\operatorname{cotg} \frac{\alpha_0}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha_0}{5} + \ldots\ldots \right] \right\}.$$

Forskjellen mellem de to Udtryk bestaar, som det sees, blot deri, at $2K - u$ i det første er ombyttet med u i det sidste.

For nu at kunne beregne Værdien af I for de forskjellige Elongationer maa man indsætte Værdien af R. For at holde mig det foregaaende efterretteligt har jeg sat $R = 4$, altsaa

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{4} \sin e.$$

Om man satte $R = \infty$, altsaa $\alpha_0 = 180^\circ$, vilde forøvrigt Resultatet ikke modificeres synderligt. Bestemmes tillige Constanten C saaledes, at Lysstyrken i 180° Elongation fra Solen vælges som Enhed, saa bliver

$$\frac{10}{9} C = \frac{40}{21\,\pi} = 0.6063.$$

Følgende Tabel viser den saaledes beregnede Lysstyrke af Himmelgrunden nærmest Dyrekredsen i forskjellige Elongationer fra Solen.

Elong.	I	Elong.	I
1°	689.4	80°	1.32
5	61.6	90	1.22
10	21.8	100	1.16
15	11.9	110	1.09
20	7.7	120	1.05
25	5.6	130	1.03
30	4.3	140	1.02
40	2.9	150	1.01
50	2.2	160	1.00
60	1.8	170	1.00
70	1.5	180	1.00

Som man ser, stemmer dette vel med hvad Observationen viser. Den forholdsvis særdeles store Lysstyrke i Solens umiddelbare Nærhed kommer vel ikke Zodiakallyset tilgode, da dette ikke kan sees i mindre Elongation fra Solen end 16° (eller endnu mere, naar Iagttageren er fjernt fra Ækvator); men der kan neppe være nogen Tvivl om, at Solens *Corona* skyldes dette Lys. Naar denne viser sig under en total Solformørkelse, oplyser den, som bekjendt, Atmosfæren stærkt nok til, at Himmelgrunden ikke bliver ganske mørk; man kan blot se de klareste Stjerner med blotte Øine, og der kan følgelig heller ikke være Tale om at se de ydre, mere lyssvage Partier, som danne det egentlige Zodiakallys. Forøvrigt er rimeligvis Coronaens Lysstyrke endnu noget større end ovenstaaende Beregning giver, da den stærke Hede, som Meteoritstoffet er udsat for i Solens umiddelbare Nærhed, nødvendigvis maa gjøre en Del deraf selvlysende. Coronaens eiendommelige stribede Structur skyldes rimeligvis de bekjendte repulsive Kræfter, hvis Tilværelse ogsaa mærkes paa Kometerne, naar de komme Solen tilstrækkelig nær.

Ved 15 til 20 Graders Elongation begynde de Tal, der vise Lysstyrken i de forskjellige Dele af det egentlige Zodiakallys; deres Rigtighed maatte kunne prøves ved fotometriske Maalinger. Skjønt saadanne, mig bekjendt, ikke ere foretagne, synes dog efter et løseligt Skjøn Tallene at stemme nogenlunde med Virkeligheden. I Almindelighed vil den Lysstyrke, som er betegnet med 1.2 eller 1.3, være den mindste, som endnu kan opfattes af Øiet, ialfald paa vore nordlige Bredder; fra 80° eller 90° Elongation vil da Zodiakallyset ikke mere kunne spores. Derimod kan man som bekjendt under gunstigere Himmelstrøg stundom følge det helt rundt.

At denne Theori ikke levner anden Plads for Pulsationer og lignende, end hvad der bevirkes af vor egen Atmosfære, kan neppe ansees som nogen Mangel. Derimod er der en anden Eiendommelighed ved Fænomenet, som vistnok kun sjelden har været iagttaget, men som dog muligens er af kosmisk Natur, nemlig det saakaldte *Anti-Zodiakallys* (Gegenschein), som har vist sig enten som en isoleret, noget langstrakt Lysplet i 180° Elongation fra Solen, eller som et svagt Maximum sammesteds, naar Zodiakallyset har kunnet spores helt rundt. Efter Beskrivelserne er det altid meget lyssvagt, saa at der skal et øvet Øie til at finde det. Ovenstaaende Tal give ikke noget Maximum i 180° Elongation, men tvertimod et Minimum, rigtignok yderst svagt fremtrædende, da der f. Ex. mellem 120° og 180° Elongation kun er meget liden Forskjel; for de sidste 30° holder Lysstyrken sig endog næsten aldeles constant.

Den Omstændighed, at den benyttede Lov for Tætheden kun gjelder indtil en vis Afstand, kan ikke forklare Tingen, da hvilkensomhelst Tæthed, som overhovedet er ens i ligestore Afstande fra Solen, ikke kan frembringe noget Maximum i 180° Elongation. Men som bekjendt gives der foruden de sporadiske Meteoriter, hvis Fordeling i Rummet er betragtet i det foregaaende, ogsaa en hel Del langstrakte Meteoritringe — gamle Kometbaner, hvor Stoffet i Tidens Løb er bleven tværet ud i betydelig Længde, stundom endog over hele Banen. At der maa være særdeles mange af disse Ringe, følger af det ikke ringe Antal, som skjærer ind paa Jordbanen og frembringer periodiske Stjerneskud. Men dersom en eller flere saadanne have sit Perihelium noget udenfor Jordbanen, helst om tillige Inclinationen er ringe, saa vil et Maximum af Lysstyrke kunne opstaa i 180° Elongation omkring den Tid, da Periheliet er i Opposition med Solen, saa meget mere som der i denne Del af Dyrekredsen kan siges at være frugtbar Jord for et Maximum, da det Minimum, som theoretisk talt skulde finde Sted i 180° Elongation ifølge det foregaaende, er saa lidet fremtrædende, at der kun skal et ringe Tillæg i Lysstyrke til for at give et Udslag. Saaledes vilde en Meteoritring, som var ganske usynlig, om den havde sit Perihelium udenfor Dyrekredsen, dog kunne bidrage sin Skjærv til at frembringe et Anti-Zodiakallys, ifald den, under forøvrigt ganske lige Omstændigheder, fik sit Perihelium forlagt i en passende Retning. Saafremt Sagen skulde forholde sig paa denne Maade, er der en Ting, som vilde være en nødvendig Følge deraf, nemlig at Anti-Zodiakallyset blot maa vise sig paa visse Tider af Aaret. De foreliggende Observationer ere endnu ikke tilstrækkelige til at afgjøre dette. *Brorsen*, Opdageren af dette Fænomen, har seet det i Marts, April og Begyndelsen af Mai, og i langt ringere Grad om Høsten i September, Oktober og November. *Schiaparelli* siger, at Iagttagelsen deraf er let, naar dets Centrum befinder sig i Løven eller Jomfruen (d. e. i Marts og April), at det sjeldnere sees i Vandmanden og Fiskene (d. e. i September og Oktober), men at det ikke havde lykkedes ham at erkjende det med Sikkerhed, naar dets Centrum var i de sydlige Himmeltegn eller traf sammen med Melkeveiens Forgreninger. Som man ser, stemme begge Iagttagere overens deri, at det viser sig paa to Tider af Aaret, og at det er mere fremtrædende den ene Gang end den anden. Hvorvidt dette er begrundet i Sagens Natur, eller blot er en Følge af ugunstigere Omstændigheder for Observationen i de øvrige Maaneder af Aaret (Melkeveiens Nærhed eller for liden Høide over Horizonten) maatte kunne afgjøres ved Observationer fra endnu sydligere Lande, hvor de sydlige Himmeltegn sees ligesaa godt som de nordlige. Hos *Jones*, den tidligere nævnte Iagttager fra de tropiske Egne, faar man ingen Oplysning, da han mærkelig nok ikke nævner det, uagtet han flere Gange har seet Zodiakallyset som et Bælte over hele Himmelen. Dette i Forbindelse med en Bemærkning af Schiaparelli, at det ikke sees saa godt naar Luften er muligst klar og rolig, som naar der findes Spor af Taage (quando vi è nell'aria un non so che di brumoso) viser, at Fænomenets egentlige Natur maa betragtes som tvivlsom, og at det endnu ikke er tilstrækkelig studeret ad Observationens Vei; navnlig vilde det være ønskeligt, at der i de tropiske Lande anstilledes Iagttagelser med dette specielt for Øie. Skulde man derved faa Bekræftelse paa Schiaparellis sidstnævnte Erfaring, ifølge hvilken det i Henseende til Luftens Gjennemsigtighed forholder sig ganske modsat af det almindelige Zodiakallys, maa man vel søge Forklaringen deraf paa andet Hold; navnlig kommer man derved til at tænke paa et Slags atmosfærisk Gjenskin — noget, der ogsaa synes at have foresvævet Opdageren, da han gav det Navnet «Gegenschein».

OM DRUESUKKERETS FORHOLD TIL KOBBEROXYD.

AF

WORM MÜLLER og I. HAGEN.

(MEDDELELSE FRA UNIVERSITETETS FYSIOLOGISKE INSTITUT.)

Druesukkeret kan indgaa Forbindelser med Alkalier, Jordalkalier og, som det synes, med enkelte tunge Metallers Oxyder, nemlig Blyoxyd og Kobberoxyd. Størst Interesse vil det af nærliggende Grunde maaske have at studere dets Forhold til Kobberoxyd resp. Kobberoxydhydrat, og hermed skulle vi i det Følgende beskjæftige os.

§ 1. Om den af Salkowski beskrevne Forbindelse af Druesukker med Kobberoxyd.

Salkowski[1]) har angivet, at det er lykkedes ham at fremstille et i Vand uopløseligt blaagrønt Legeme, der paa 1 mol Sukker skal indeholde 5 mol Kobberoxydhydrat. For at erholde denne Forbindelse sætter han til 1 mol Sukker i Opløsning 5 mol Kobbersulfat og 10 mol Natronhydrat; alt Sukker skal da fuldstændigt udfældes i Forbindelse med alt Kobberoxyd, saa at det neutrale Filtrat *blot* indeholder Natriumsulfat, efter følgende Schema:

$$C_6\,H_{12}\,O_6 + 5\,Cu\,SO_4 + 10\,Na\,OH$$
$$= [C_6\,H_{12}\,O_6 + 5\,Cu\,(O\,H)_2] + 5\,Na_2\,SO_4.$$

---

[1]) Pflügers Archiv Bd. 6 1872, S. 220.

For yderligere at godtgjøre Rigtigheden heraf har han paa den ene Side tilsat en forholdsvis større Mængde Sukker; Overskuddet kunde da paavises i Filtratet. Anvendte han paa den anden Side en større Mængde Kobbersulfat (og den dermed ækvivalente Mængde Natronhydrat), var Bundfaldet blandet med Oxydhydrat. Bundfaldet selv har han ikke direkte analyseret, fordi det let undergaar Dekomposition.

Denne Forbindelse har særligt Krav paa Interesse alene af den Grund, at den kvantitative Bestemmelse af Sukker ved Hjælp af alkalisk Kobberoxydopløsning grunder sig paa, at 1 mol Sukker nøiagtigt reducerer 5 mol Kobberoxyd til Oxydul, og det var derfor magtpaaliggende at overbevise os om Rigtigheden af denne Angivelse. Til den Ende har vi gjentaget Salkowskis Forsøg og ere herved paa det Bedste blevne understøttede af Hr. Polytekniker Tobiesen, der med sin rige Erfaring som Analytiker forener en særlig Interesse for fysiologisk-kemiske Undersøgelser.

Det anvendte Druesukker var fremstillet i Laboratoriet efter Schwarz's Methode; det smeltede nøiagtigt ved 146°, og dets Renhed var kontrolleret saavel ved Elementaranalyse som ved Cirkumpolarisationsapparatet. Ved hvert af Forsøgene anvendtes 0.9 gr Sukker, opløst i friskt udkogt, destilleret Vand; dertil sattes 6.235 gr Kobbervitriol, ligeledes opløst i friskt udkogt, destilleret Vand, samt 2.8065 gr KOH (= 50 kcm normal Kalilud) eller 2.002 gr $NaOH$ (= 25.66 kcm af en 7.8 %ig $NaOH$opløsning). Vædskerne vare stærkt afkjølede og blandedes i et Kar, der var omgivet med Is. Der dannedes et blaahvidt Bundfald, som bragtes paa et med Is omgivet Filter og udvadskedes med iskoldt Vand. For at paaskynde Filtreringen anvendtes Bunsens Sugepumpe.

Vi skulle nu anføre de specielle Forsøgsdata og nærmest betragte A. Filtrat og Vadskevand, da deres Undersøgelse alene er afgjørende ligeoverfor Spørgsmaalet om den af Salkowski opstillede Forbindelses Existents. Derpaa ville vi undersøge

B. Sammensætningen af Bundfaldene for at komme til Kundskab om, hvorvidt man med nogensomhelst Berettigelse tør antage, at samme indeholder en Forbindelse af Sukker med Kobberoxydhydrat.

A. Undersøgelse af Filtrat og Vadskevand.

Forsøg 1. En vandig Opløsning af 0.9 gr Sukker tilsattes 6.235 gr Kobbervitriol, ligeledes opløst i Vand, samt 50 kcm normal Kalilud. Det dannede Bundfald var blaahvidt, Filtratet farveløst, yderst svagt alkalisk; det indeholdt ikke Spor af Kobber, men svovlsurt Kali i rigelig Mængde og Sukker. Filtratets Mængde udgjorde 186 kcm og dets Sukkergehalt 0.050 %; det indeholdt altsaa 0.093 gr Sukker eller over 10 % af den anvendte Mængde. Bundfaldet blev nu udvadsket i 3—4 Dage med iskoldt Vand og Sukkergehalten i Vadskevandet bestemt. Det første Vadskevand, som vi ville kalde det andet Filtrat, beløb sig til 209 kcm og indeholdt 0.0423 gr Sukker.[1]) Under denne Udvadskning bemærkedes en tydelig Forandring af Bundfaldets Farve fra blaahvidt til grønt, især paa Overfladen. Det tredie Filtrat, 202 kcm, indeholdt 0.0293 gr Sukker og det fjerde Filtrat, 190 kcm, 0.0235 gr Sukker og endnu tydelige Spor af Svovlsyre; det femte derimod var frit herfor; det beløb sig til 217 kcm og indeholdt 0.0173 gr Sukker. Der lod sig altsaa fremdeles udvadske Sukker. Vi standsede nu med Udvadskningen, ikke fordi den var færdig, men fordi Bundfaldet lidt efter lidt i saa høi Grad forandrede sin Farve fra blaat til grønt, (Reduktion af Kobberoxydhydrat), at vi befrygtede en for vidt gaaende Dekomposition af samme.

Summeres de Sukkermængder, der var gaaet over i samtlige Filtrater, erholdes 0.2054 gr eller 22.8 % af det anvendte Kvantum. Vil man heraf beregne Molekularforholdet mellem den Mængde Sukker, der var bleven tilbage i Bundfaldet, og det i samme indeholdte Kobberoxyd, saa erholdes *1 mol Sukker paa 6.48 mol Kobberoxyd.*

Forsøg 2. 0.9 gr Druesukker opløstes i Vand, tilsattes 6.235 gr Kobbervitriol i vandig Opløsning samt 25.66 kcm af en 7.8 %ig $NaOH$-Opløsning. Filtratet, der var neutralt og farveløst, indeholdt ikke Spor af Kobber, men derimod Sukker. Filtrat 1, 222.5 kcm, indeholdt 0.0648 gr Sukker; Filtrat 2, (det første Vadskevand), 300 kcm, 0.0378 gr; Filtrat 3, 260 kcm, 0.0227 gr;[2]) Filtrat 4, 220 kcm, 0.0424 gr; Filtrat 5,

[1]) Hvor, som i dette Tilfælde, Sukkermængden i Filtratet var ringe, blev Vædsken før Titreringen koncentreret.

[2]) Bundfaldet paa Filtret omrørtes med en Glasstav, forinden Udvadskningen fortsattes.

400 kcm, 0.0518 gr; Filtrat 6, 320 kcm, 0.0205 gr. Derpaa blev Bundfaldet udrørt i koldt Vand og bragtes igjen paa Filtret; det indeholdt fremdeles Sukker, som lod sig udvadske, thi det 7de Filtrat indeholdt 0.048 gr Sukker. Summeres Sukkermængderne i samtlige Filtrater, erholdes 0.288 gr; *32* % af den anvendte Mængde lod sig altsaa udvadske. De i Bundfaldet tilbageblevne 0.612 gr forholder sig til den anvendte Mængde Kobberoxyd som *1 mol*: *7.35 mol.*

De følgende to Experimenter, hvori tilsattes først Alkali og derpaa Kobberopløsning, gave væsentlig de samme Resultater.

Forsøg 3. 0.9 gr Druesukker opløstes i Vand, tilsattes i Kulden først 50 kcm normal Kalilud og derpaa en vandig Opløsning af 6.235 gr Kobbervitriol. Bundfaldets Farve blaahvid, Filtratet farveløst, yderst svagt alkalisk; det indeholdt ikke Spor af Kobber, men derimod Sukker; en liden Prøve gav tydelig Reaktion med Fehlings Vædske. Filtrat 1, 117 kcm, indeholdt 0.0869 gr Sukker; Filtrat 2, 179 kcm, 0.0428 gr. 16 Timer vare nu forløbne siden Bundfældningen, og Bundfaldet selv var i dette Tilfælde endnu næsten uforandret; det begyndte dog hist og her at antage et *grønt* Skjær. Filtrat 3, 160 kcm, indeholdt 0.038 gr Sukker; Filtrat 4, 175 kcm, 0.0259 gr; Filtrat 5, 195 kcm, 0.0188 gr. Udvadskningen ophørte nu for at undgaa yderligere Dekomposition.

Summeres samtlige Filtraters Sukkermængde, erholdes 0.2124 gr = *23.6* % af det anvendte Kvantum. Molekularforholdet mellem Sukker og Kobber i Bundfaldet bliver i dette Tilfælde *1: 6.54.*

Forsøg 4. Til 0.9 gr i Vand opløst Druesukker sattes 25.66 kcm af en 7.8 %ig Natronhydratopløsning og derpaa 6.235 gr Kobbervitriol opløst i Vand. Filtratet var aldeles farveløst og neutralt, fuldstændigt frit for Kobber, men gav stærk Reaktion paa Sukker. Filtrat 1, 225 kcm, indeholdt 0.0778 gr Sukker; Filtrat 2, 400 kcm, 0.0433 gr; Filtrat 3, 260 kcm, 0.0265 gr, Filtrat 4, 250 kcm, 0.024 gr; Filtrat 5, 380 kcm, 0.0218 gr; Filtrat 6, 300 kcm, 0.0156 gr. Bundfaldet udrørtes nu i iskoldt Vand, hvorved extraheredes 0.022 gr Sukker. Den samlede Kvantitet Sukker i Filtrat og Vadskevand var saaledes 0.231 gr ɔ: *25.7* % af hele den anvendte Mængde. Forholdet mellem Sukker og Kobber i Bundfaldet efter Udvadskningen bliver altsaa *1 mol*: *6.73 mol.*

Af disse Forsøg fremgaar, at *5 mol* $Cu(OH)_2$ *ikke er istand til at tilbageholde 1 mol Sukker;* der lod sig altid paavise Sukker i Filtratet, selv om man i dagevis udvadskede med iskoldt Vand. Men paa den anden Side er det klart, at en *større Mængde af Sukkeret,* der foreløbig kan ansættes til henved $^3/_4$ mol, *haardnakket tilbageholdes af de bundfældte 5 mol Kobberoxydhydrat.* De af Forsøgene beregnede Tal for Molekularforholdet mellem Sukker og Kobberoxydhydrat i Bundfaldet variere nemlig mellem 1: 6.48 og 1 : 7.35.[1])

Man kunde her maaske indvende, at Kulsyren i den anvendte Alkalilud havde hindret en Del af Kobberoxydet, nemlig det, der maatte blive udfældt som kulsurt Salt, fra at træde i Forbindelse med Sukkeret, og at derfor en Del af dette maatte gaa over i Filtratet. Men denne Mængde vilde blot have været minimal, da Vædskerne kun indeholdt Spor af Kulsyre. For imidlertid ganske at fjerne denne Indvending, tilsatte vi i et Par særegne Forsøg til 1 mol Sukker 6 resp. 7 mol $CuSO_4$ og 12 resp. 14 mol KOH; der lod sig ogsaa da momentant paavise Sukker i Filtratet. Disse Forsøg berøve ogsaa den Antagelse sin Støtte, at Luftens Kulsyre lidt efter lidt skulde have virket dekomponerende paa Forbindelsen af Sukker med Kobberoxyd, og at det var det saaledes frigjorte Druesukker, som lod sig udvadske.

Hvorledes kan nu en saa dygtig Undersøger som Salkowski være kommen til det Resultat, at Bundfaldet er en Forbindelse af 1 mol Sukker med 5 mol Kobberoxydhydrat? Vi kunne kun søge Forklaringen deri, at han først har anstillet Forsøgene med diabetisk Urin; han begynder nemlig sin Opsats saaledes: [2]) «Wenn man bei Anstellung der *Trommer*'schen Probe mit diabetischem Harn im Zusatz des Kupfersulphat etwas unvorsichtig ist, so dass ein Niederschlag entsteht, der sich nicht wieder auflöst, so erhält man mitunter ein farbloses, schwach alkalisches, sowohl kupfer- wie zuckerfreies Filtrat. In anderen Fällen enthält dasselbe eine Spur Zucker, der grösste Theil jedoch bleibt

[1]) 1 : 6.48 og 1 : 6.54 (Forsøg 1 og 3) maa forøvrigt betragtes som mindre adækvate, da i begge disse Forsøg Udvadskningen maatte afbrydes, før den var færdig.

[2]) l. c. S. 220.

im Niederschlag und wird von demselben auch bei noch so langem Auswaschen hartnäckig zurückgehalten.» Det Filtrat, man herved faar, kan *tilsyneladende* være sukkerfrit, fordi man ved den sædvanlige Maade, hvorpaa den Trommer'ske Prøve anstilles i Urinen, ofte ikke engang med Sikkerhed kan paavise. $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{8}$ %.

Salkowski angiver endvidere, at Bundfaldet, der paa 1 mol Sukker skal indeholde 5 mol Kobberoxydhydrat, opløses i Natronlud samt reduceres ved Kogning, og tror sig nu istand til at forklare Processen og det kvantitative Forhold ved den Trommerske Prøve:[1]) «Die *Trommer*'sche Reaction verläuft somit in zwei Phasen: in der Bildung der oben angegebenen Verbindung und in Auflösung derselben in der überschüssigen Kalilauge, welche bald zersetzend einwirkt.» Den første Del heraf holder, som vi have seet, ikke Stik, hvorfor Salkowkis Beskrivelse af Forløbet ved Reaktionen, som er optaget i Neubauers[2]) og Hoppe-Seylers[3]) Lærebøger, ikke kan siges at være korrekt.

Ved de beskrevne Forsøg var altsaa Beviset leveret for, at hin Salkowskis Forbindelse ikke lader sig fremstille paa den af ham angivne Maade, og forsaavidt kunde man betragte Undersøgelsen som *færdig*. Men da det gjaldt at gjøre sig Rede for Sukkerets Forhold til Kobberoxydhydrat overhovedet, var det af Interesse nærmere at undersøge ogsaa *Bundfaldene*. Der var nemlig tilbageholdt i samme en større Mængde Sukker, og man kunde derfor antage, at dette stod i kemisk Forbindelse med Kobberoxydhydratet.

---

[1]) l. c. S. 221—222.

[2]) Anl. z. qualit. u. quantit. Analyse des Harns. 7te Aufl. Wiesbaden 1876. S. 82.

[3]) Handb. d. physiol. u. pathol.-chem. Anal. 4te Aufl. Berlin 1875. S. 122.

B. Undersøgelse af Bundfaldene.

Før vi gaa over til at beskrive denne Undersøgelse, er det nødvendigt at bemærke, at Bundfaldene trods den lave Temperatur tildels lidt efter lidt *dekomponeredes*, idet der udskiltes noget Kobberoxydul.

For at komme til Kundskab om, hvorvidt Bundfaldene indeholdt Sukker i kemisk Forbindelse med Kobberoxyd eller ikke, ansaa vi det for rigtigst at undersøge deres Sammensætning paa forskjellige Steder. Viste det sig nemlig i alle Forsøg, at de overalt havde ensartet Sammensætning, vilde Sandsynligheden tale for, at vi fortrinsvis havde med en kemisk Forbindelse at gjøre.

Vi skulle behandle Bundfaldene i den til Forsøgene svarende Orden.

Forsøg 1. Bundfaldet blev delt i *2 Dele;* den ene Del forblev *fugtig;* den anden *tørredes* paa følgende Maade ved almindelig Temperatur. Den anbragtes i en Klokke, gjennem hvilken der ved Hjælp af en Bunsens Pumpe sugedes en Luftstrøm, der iforveien havde passeret et Rør med koncentreret Svovlsyre og et andet med vandfri Fosforsyre; et tredie Rør indeholdt Bomuld for at tilbageholde muligens medrevne Partikler af Fosforsyren.

Det *fugtige* Bundfald blev atter delt i to Dele, der hver for sig opløstes i Saltsyre og fældtes med Svovlvandstof. Kobberet bestemtes derpaa efter Rose's Methode (sml. Fresenius, Quantit. Anal. 6te Aufl. 1875. I. S. 334) og Sukkeret i Filtratet ved Titrering med Fehlings Vædske, efter at alt Svovlvandstof var fjernet. I den ene Del var Molekularforholdet mellem Sukker og Kobberoxyd *1:9.3* og i den anden ligeledes *1:9.3*.

Det *tørre* Bundfald behandledes aldeles paa samme Maade; i den ene Del fandtes 1 mol Sukker paa 11.9 mol Kobberoxyd, og i den anden 1 : 5.8. Dette sidste Tal er større, end man skulde have formodet; thi efter Beregningen fra Filtratet skulde Forholdet have været som 1 : 6.48.[1])

Forsøg 2. I dette Forsøg skulde man i Bundfaldet have ventet at finde Forholdet 1 : 7.35, men istedet derfor fandtes paa et Sted 1 : 16.15 og paa et andet Sted 1 : 18.6.

---

[1]) Denne Forskjel kan kun hidrøre fra, at denne Del af Bundfaldet var lidet dekomponeret, og at Sukkeret i samme var ufuldstændigt udvadsket.

Forsøg 3. Paa et Sted i Bundfaldet fandtes Forholdet 1 mol Sukker: 7.8 mol Kobberoxyd, paa et andet Sted 1 : 10.77, og paa et tredie Sted 1 : 15.08. Man skulde have ventet 1 : 6.54.

Forsøg 4. Her fandtes resp. 1 : 15.3 og 1 : 10.3 istedetfor efter Beregningen fra Filtratet 1 : 6.73.

Af disse Forsøg fremgaar med en vis Sandsynlighed, at det Sukker, som medrives af Kobberoxydhydrat, *neppe kan staa i et bestemt Molekularforhold* til dette, da Bundfaldene i det Hele havde en vexlende Sammensætning paa de forskjellige Steder. Men heraf tør man dog *ikke* drage nogen afgjørende Slutning, da en større Mængde af Sukkeret viste sig at være *dekomponeret.* Denne Mængde blev faststillet i Forsøg 1, hvor saavel Kobber- som Sukkermængden i det hele Bundfald bestemtes; 26.9 % af den anvendte Sukkermængde var destrueret, kfr. følgende Data.

Anvendt var		0.9 gr Sukker
Der gjenfandtes:		
i Filtrat og Vadskevand .	0.2054 gr	
i den fugtige Del af Bundfaldet	0.1940 -	
i den tørrede Del af Bundfaldet	0.2589 -	
Tilsammen		0.6583 gr.
Der var altsaa destrueret		0.2417 gr.

eller 26.9 %.[1])

[1]) Derimod svarede den i Bundfaldet fundne Kobbermængde til den anvendte. Der fandtes nemlig i

det fugtige Bundfald	a) . . .	0.2289 gr Cu
	b) . . .	0.4098 - -
det tørre Bundfald	a) . . .	0.8720 - -
	b) . . .	0.1026 - -
	Tils.	1.6133 gr Cu.

Den anvendte Mængde Kobbervitriol indeholdt 1.585 gr Kobber.

Før vi heraf drog nogen ***bestemt*** Slutning angaaende Sukkerets Forhold til Kobberoxydhydrat, ansaa vi det imidlertid for nødvendigt at anstille et sidste Forsøg, hvori vi specielt gjorde os til Hovedopgave saavidt muligt at hindre Bundfaldets Dekomposition. Resultatet var ogsaa i dette Tilfælde ganske det samme.

Forsøg 5. Til den med Is afkjølede Sukkeropløsning (der indeholdt 0.225 gr Druesukker), sattes under Omrøring først Natronlud (6.41 kcm af en 7.8 %ig Opløsning) og derpaa Kobbervitriolopløsningen (= 1.55875 gr $CuSO_4 + 5\,H_2O$). Det derved dannede Bundfald havde en blaahvid Farve; Filtratet var aldeles farveløst, reagerede neutralt, var frit for Kobber, men gav tydelig Reaktion paa Druesukker og indeholdt svovlsurt Natron. Bundfaldet holdtes omgivet med Is og udvadskedes med iskoldt Vand, saa at dets Temperatur under Forsøget aldrig oversteg 7°, i Almindelighed var den blot 3—5° C.

A. *Filtratet.*

1ste Filtrat, 153 kcm, indeholdt 0.0243 gr Sukker. Udvadskningen fortsattes, indtil Vadskevandet ikke længere gav Reaktion paa Sukker eller Svovlsyre. Dette var Tilfældet efter Anvendelsen af 940 kcm Vadskevand. Det koncentreredes nu paa Vandbad til 185 kcm og titreredes med Fehlings Vædske. Det indeholdt 0.0318 gr Sukker. I det hele lod der sig saaledes af Bundfaldet udvadske 0.0561 gr eller *24.93* % af den anvendte Sukkermængde.

B. *Bundfaldet.*

Af det fugtige Bundfald, der paa enkelte Steder, især i Midten, var grøngult, toges 3 Prøver, og i hver af dem blev Sukkeret og Kobberet bestemt kvantitativt.

a) Den *første* Prøve toges af Bundfaldets *øverste* Del. Der erholdtes 0.1419 gr Cu_2S = 0.11331 gr Cu. Filtratet indeholdt 0.03136 gr Sukker. Molekularforholdet mellem Sukker og Kobberoxyd i denne Prøve var altsaa *1 : 10.26*.

b) Den *anden* Prøve toges i Midten af Bundfaldet. Den leverede 0.1146 gr Cu_2S = 0.0915 gr Cu, og indeholdt 0.02492 gr Sukker. Molekularforholdet var altsaa *1 Sukker : 10.42 Kobberoxyd.*

c) Den *tredie* Prøve udgjordes af Bundfaldets nederste Del. Den indeholdt 0.1024 gr Cu (= 0.1282 gr Cu_2S) og 0.0326 gr Sukker, saa at Molekularforholdet findes = *1 mol Sukker : 8.92 mol Kobberoxyd.*

d) Filtret med Resten af Bundfaldet behandledes med fortyndet Saltsyre, og i Opløsningen bestemtes Kobbermængden, der udgjorde 0.08248 gr (= 0.1033 gr Cu_2S) og Sukkeret, der fandtes = 0.01763 gr. Beregnes Molekularforholdet mellem Sukker og Kobberoxyd, saa sees, at det er *1 : 13.28*.

I det hele fandtes:

	Kobber	Sukker
a)	0.11331 gr . . .	0.03136 gr.
b)	0.09150 - . . .	0.02492 -
c)	0.10240 - . . .	0.03260 -
d)	0.08248 - . . .	0.01763 -
1ste Filtrat . . .	. . . . . .	0.02433 -
2det — . . .	. . . . . .	0.03179 -
Tils.	0.38969 gr Kobber og	0.16263 gr Sukker.
istedetfor	0.39625 - — -	0.225 - —

Medens alt Kobber gjenfandtes, var saaledes *27.72* % af Sukkeret destrueret.

Resultatet var altsaa det samme som tidligere. Efter dette Forsøg fandt vi os berettigede til at afgjøre det Spørgsmaal, om Bundfaldet blot er at betragte som en *mekanisk* Blanding eller som en *kemisk* Forbindelse.

Hvad der skulde tale for det sidste, er *ene og alene* Bundfaldets Farveforandring fra blaat til grønt (og gult), der er betinget af Kobberoxydets Reduktion. En saadan indtræder nemlig ikke, om en Druesukkeropløsning digereres selv med friskt udfældt Kobberoxydhydrat. Men man tør ikke heraf drage nogen bindende Slutning; Forholdene ere i vore Forsøg anderledes. Bringer man nemlig Kobberoxydhydrat ind i en Sukkeropløsning, kan ikke Berørelsen mellem begge Legemer blive saa inderlig, som naar Sukkeret rives med af det amorfe Oxydhydrat i det Øieblik, dette dannes. Den Blanding af de fineste Dele, som i dette Tilfælde erholdes, er saa intim, at en kemisk Vexelvirkning mellem Sukkeret og det fugtige Kobberoxydhydrat som Base og samtidigt surstofafgivende Middel kan tænkes at ville indtræde. I ethvert Fald taler dog denne Bundfaldets Dekomposition snarere *for* end *mod* den Anskuelse, at det er en kemisk Forbindelse.

Men der var *en Omstændighed,* som strax forekom os at være afgjørende til Gunst for den Betragtningsmaade, at Bundfaldet blot er en *mekanisk* Blanding.

Naar man efter flere Dages Udvadskning af Bundfaldet, saa at Vadskevandet blot indeholdt minimale Kvantiteter Sukker, suspenderede samme i iskoldt Vand (sml. Forsøg 2 og 4), saa tiltog Sukkermængden i Filtratet. Dette kan kun bero paa, at Sukkeret er mekanisk tilblandet, og viser, at det hører til de Stoffe, der forholdsvis let gaa med i Bundfald og fastholdes af disse. Dette finder ogsaa en Støtte i andre Erfaringer. Sukkeret i Opløsning tilbageholdes saaledes af Dyrkul, hvoraf det imidlertid lader sig fjerne ved længere Udvadskning, men, som det synes, selv da kun ufuldstændigt; og ved Tilsætning af Blyeddik til sukkerholdig Urin rives, som Brücke har vist, en Del af Sukkeret med i Bundfaldet. Paa den anden Side ved man, at Kobberoxydhydrat, idet det udfældes, ogsaa kan tilbageholde andre opløste Stoffe, nemlig Alkalier, der som bekjendt ved Udvadskning ikke let fuldstændigt kan fjernes. Som Exempel paa, med hvilken Seighed Bundfald kan holde paa mekanisk medrevne, i og for sig opløselige Stoffe, behøve vi blot at minde om, hvor vanskeligt det er at befri svovlsur Baryt for Alkalisalte.

Et andet og fuldstændigt afgjørende Bevis for, at Bundfaldet virkelig blot er en mekanisk Blanding, ligger deri, at selv om man til 1 mol Sukker sætter 10, ja 30 mol Kobbervitriol og 20 resp. 60 mol Kalihydrat, vil Filtratet endnu indeholde forholdsvis betydelige Mængder Sukker.

Dette sidste Resultat var os forøvrigt overraskende. Skjønt vor Undersøgelse førte til et negativt Resultat ligeoverfor Spørgsmaalet om Existentsen af en kemisk Forbindelse mellem Sukker og Kobberoxydhydrat i Bundfaldet, formodede vi dog, at ved Anvendelsen af større Kvantiteter Kobbersulfat og Alkali vilde smaa Sukkermængder fuldstændigt holdes tilbage af Bundfaldet. Hvis dette havde været Tilfældet, kunde det maaske ad denne Vei være lykkedes at paavise smaa Sukkermængder, f. Ex. i dyriske Vædsker. Man behøvede blot at frafiltrere Bundfaldet, opløse det i en Syre og nu paa forskjellige Maader paavise Sukkeret. Bundfaldets ringe Holdbarhed vilde, naar man udførte Operationen hurtigt og i Kulden, vistnok ikke volde nogen uovervindelig Vanskelighed; derimod er det Faktum, at selv et meget stort Overskud af Kobberoxydhydrat ikke formaar at rive *alt* Sukker med ved Udfældningen, nok for at vise, at Methoden er uanvendelig i dette Øiemed.

Slutning og Resumé. Druesukker, tilsat Opløsninger af Kobbervitriol og Alkali, de sidste i Ækvivalentforhold, rives med i det dannede Bundfald og kan tildels udvadskes af sammme. Bundfaldet indeholder ingen kemisk Forbindelse af Kobberoxydhydrat med Sukker, men dekomponeres dog tildels let i fugtig Tilstand.

Sukkeret tilbageholdes ikke fuldstændigt i Bundfaldet, selv om man anvender et stort Overskud af Kobbervitriol og Alkali.

§ 2. Om de af Hoppe-Seyler og Fileti angivne Forbindelser af Druesukker med Kobberoxyd.

Efter dette ville vi undersøge, om man overhovedet kjender nogen Forbindelse af Druesukker med Kobberoxyd.

Hoppe-Seyler siger:[1]) «Eine wässrige Lösung von Traubenzucker löst reichlich Aetzkalk auf, ebenso auch Kupferoxydhydrat. Die dunkelblaue Flüssigkeit, die man durch Auflösen von Kupferoxydhydrat in Traubenzuckerlösung erhält, ist jedoch sehr zersetzlich, schon nach kurzem Stehen scheidet sich ein gelbes oder rothes Pulver, Kupferoxydul, aus, während die Lösung sich entfärbt; hierbei wird der Zucker oxydirt, indem Ameisensäure, Oxymalonsäure, vielleicht auch Essigsäure und ein dem Dextrin ähnlicher Körper, entstehen,» og det samme gjentager han i 4de Oplag, 1875, Side 122. For at kontrollere dette have vi gjort følgende Forsøg:

---

[1]) Handb. d. physiol.- u. pathol.-chem. Anal. 3te Aufl. Berlin 1870. S. 108.

1) Til 75 kcm af en Druesukkeropløsning, der indeholdt 0.9 gr Sukker, sattes 25 kcm Vand og ca. 2.5 gr friskt udfældt Kobberoxydhydrat, fremstillet efter Löwes Methode ved at fælde en Opløsning af svovlsur Kobberoxydammoniak med Alkalilud (sml. Gmelins Handbuch der anorganischen Chemie. 6te Aufl. Bd. 3. Heidelberg 1875. S. 599 og Dinglers Polyt. Journ. 1858. Bd. 149, 270). Vædsken henstod i 24 Timer under stadig Omrøring paa et koldt Sted og holdtes afkjølet med Sne; da ingen Forandring efter denne Tids Forløb kunde iagttages, hensattes Vædsken i et Værelse med en Temperatur af + 5° C. og filtreredes efter 24 Timers Forløb. Filtratet var *aldeles farveløst og indeholdt ikke Spor af Kobber.* Kobberoxydhydratet, der var uforandret og ikke viste mindste Tegn til Reduktion, udvadskedes med noget Vand, der forenedes med Filtratet. Der var i det hele i Filtrat og Vadskevand 0.8275 gr Sukker. Bundfaldet suspenderedes derpaa i Vand, opløstes i Saltsyre og fældtes med Svovlvandstof. Det dannede Svovlkobber bragtes paa et Filter, Filtratet befriedes for Svovlvandstof og koncentreredes. Det gav tydelig Sukkerreaktion med Fehlings Vædske, men indeholdt saa lidet, at en kvantitativ Bestemmelse ikke lykkedes, uagtet der blot anvendtes 2 kcm Fehlings Vædske.

2) Til 48.1 kcm Druesukkeropløsning, der indeholdt 0.9 gr, sattes 20 kcm Vand og 2.91 gr lufttørt Kobberoxydhydrat. Efter at Vædsken i 2 Dage havde henstaaet ved 30° C., uden at noget Kobber opløstes, forhøiedes Temperaturen til 40° C., men Resultatet blev det samme. Kobberoxydhydratet frafiltredes og udvadskedes. Filtrat og Vadskevand indeholdt 0.822 gr. Sukker. Det paa Filtret tilbageblevne behandledes som i forrige Forsøg angivet; det indeholdt Sukker, men mindre end 0.025 gr.

3) Dette Forsøg var en Gjentagelse af det foregaaende alene med den Forskjel, at der her i Stedet for lufttørret anvendtes en tilsvarende Mængde fugtigt, friskt udfældt Kobberoxydhydrat. Resultatet var i alt væsentligt det samme; der opløstes ikke Spor af Kobberoxydhydrat. Filtratet og det dermed forenede Vadskevand indeholdt 0.8 gr Sukker; Kobberoxydet havde blot optaget Spor.

Disse Forsøg vise med Bestemthed, at *Druesukker ikke opløser Kobberoxydhydrat.*

I «Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft» Bd. 8, 1875, S. 441 meddeles i en Korrespondance fra Turin, at Fileti har fremstillet to saakaldte Kobberglykosater, af hvilke det ene skulde indeholde en til Formelen $C_6 H_6 Cu_3 O_6 + 2 H_2 O$ svarende Kobbermængde, og den anden 64.48 % Kobber, hvoraf Formelen $(C_6 H_7 O_6)_2 (Cu_2)_5$ udledes.

Under de af Fileti angivne Betingelser opstaar der ganske vist Kobberglykosater, men disse ere ikke Forbindelser af Sukker med Kobberoxyd alene; de indeholde ogsaa Kali. De ere altsaa *Dobbeltforbindelser,* og disse skulle vi omtale i den følgende Afhandling, hvori vi ville betragte Sukkerets Forhold til Kobberoxyd i alkalisk Opløsning.

OM FORBINDELSER AF DRUESUKKER MED KOBBEROXYD OG KALI.

AF

WORM MÜLLER og I. HAGEN.

(MEDDELELSE FRA UNIVERSITETETS FYSIOLOGISKE INSTITUT).

Saavidt vi have kunnet bringe i Erfaring, er der intetsteds i Literaturen beskrevet Dobbeltforbindelser af Druesukker med Kobberoxyd og Kali. Sandsynligheden af saadanne Forbindelsers Existents fremgaar af det vel bekjendte Faktum, at Druesukker med Lethed er i Stand til at opløse Kobberoxydhydrat i alkalisk Vædske.

Om den Mængde Kobberoxydhydrat, Sukker er istand til at opløse i alkalisk Vædske, foreligger ingen bestemte Angivelser. Efter Beskrivelsen i Lærebøgerne af den Trommer'ske Prøve skulde man formode, at Sukkeret opløser ligesaa mange mol Kobberoxydhydrat, som det kan reducere, med andre Ord, at 1 mol Sukker er istand til at opløse 5 mol Kobberoxydhydrat i alkalisk Vædske. Det anføres nemlig som Regel ved denne Prøve, at man efter at have gjort den sukkerholdige Vædske alkalisk skal tilsætte en fortyndet Opløsning af Kobbervitriol saa længe, som det dannede Bundfald igjen opløses, men ikke mere; yderligere Tilsætning af Kobbervitriol fraraades derimod, fordi det nu opstaaede permanente Bundfald af Kobberoxydhydrat ved Opheding ikke skal reduceres, men gaa over til vandfrit Kobberoxyd, hvis sorte Farve mere eller mindre skjuler Kobberoxydulets røde (gule) og saaledes kan maskere Reaktionen. I nogen Modsigelse hermed staar Reichardts Angivelse i hans Afhandling: «Einwirkung des Kupferoxydes auf Traubenzucker in kalischer Lösung:»[1]) «Hat man so viel Zucker zu Kupferoxyd und Kali gemischt, dass die klare Lösung erhalten wird, so ist ein sehr bedeutendes Uebermass von Traubenzucker vorhanden, gegenüber den atomistischen Verhältnissen; nimmt man genau 1 Aeq. Traubenzucker = $C^{12}\ H^{14}\ O^{14}$ und 10 Aeq. $Cu\ O$ in Form irgend eines leicht löslichen Kupfersalzes, so wird durch Zusatz von Kali selbst bis zum starken Vorwalten keine klare Lösung erzielt.» Denne Angivelse gjorde det tvivlsomt, om Sukker i alkalisk Vædske virkelig er istand til at opløse saa meget $Cu\,(OH)_2$, som det kan reducere. Senere hen synes, saavidt vi har kunnet bringe i Erfaring, den Mængde $Cu\,(OH)_2$, Sukker i alkalisk Vædske kan opløse, ikke at have været Gjenstand for nærmere Undersøgelse. Da man maa bringe dette Spørgsmaal paa det Rene, før man kan klargjøre sig Processen ved Trommers Prøve, fandt vi det nødvendigt at anstille methodiske Forsøgsrækker.

I. Om Druesukkerets Evne til at opløse Kobberoxydhydrat i alkalisk Vædske.

Vi have i den foregaaende Afhandling vist, at Druesukker ikke er istand til at opløse Spor af Kobberoxydhydrat, naar Vædsken ikke er alkalisk. Paa den anden Side var det urimeligt at antage, at minimale og store Kvantiteter Alkali skulde kunne have den samme opløsende Evne.

Den Kvantitet $Cu\,(OH)_2$, som Druesukker er istand til at opløse i alkalisk Vædske, maa staa i Forhold til Alkaligehalten; vor Opgave var derfor i en Række Forsøg systematisk at studere Opløselighedens Afhængighed af den i Vædsken indeholdte Mængde Alkali. Da vi gik ud fra den Forudsætning, at Alkaliets opløsende Evne hidrører derfra, at det indgaar i kemisk

[1]) Ann. Chem. Pharm. Bd. 127. 1863. S. 299.

Forbindelse med Sukker og Kobberoxydhydrat, fandt vi det nødvendigt at betjene os af samtlige Stoffe i Molekularforhold.

De vigtigste Forsøgsdata ere i Korthed følgende:

Der anvendtes:

1) en Druesukkeropløsning, hvoraf 6.4 kcm nøiagtigt reducerede 10 kcm af
2) en Kobberopløsning af samme Koncentration som Fehlings Vædske,[1])
3) en Kalioplosning, der nøiagtigt udfældte alt Kobberoxyd af sit lige Volum af Kobbervitrioloplosningen, saa at Filtratet var neutralt og fuldstændigt kobberfrit.

Sættes 6.4 kcm af Druesukkeropløsningen = 1 mol Sukker,
saa bliver 2 — - Kobbervitriol — = 1 - $Cu\,SO_4$
og 2 — - Kali — = 2 - *KOH*

Anm. Da 1 mol Kobbervitriol er ækvivalent med 2 mol Kali, medgik der selvfølgelig til Dannelsen af Kobberoxydhydrat netop ligesaa mange kcm Kali- som Kobbervitrioloplosning. Det var derfor kun de *overskydende* mol (kcm) af Kalioplosningen, der kunde bevirke Kobberoxydhydratets Oplosning i den sukkerholdige Vædske.

Forsøgene udførtes først paa den Maade, at 6.4 kcm af Sukkeropløsningen (= 1 mol Sukker) tilsattes Kali- og derpaa Kobbervitrioloplosningen. Vædskerne blandedes i store Reagentsglas, der saavel under Forsøgene som senere holdtes godt afkjølede, idet de stode i Kar, der indeholdt smeltende Is. Dette var saa meget mere nødvendigt, som det udfældte $Cu\,(OH)_2$ oftere behøver endog 1 Time, ja mere, for fuldstændigt at opløses, og der ved sædvanlig Temperatur under saa lang Tids Henstand let indtræder delvis Reduktion.

Vi ville inddele Forsøgene i to Grupper efter det Overskud af Alkali, der anvendtes.

Gruppe 1. Vædsken indeholdt et Overskud af 1—4 mol *KOH*.

a) *Overskud af 1 mol KOH.*

α) 1 mol Sukker og 3 mol *KOH* tilsattes 1 mol $Cu\,SO_4$; det udfældte

[1]) cfr. Archiv for Mathematik og Naturvidenskab 1878. Bd. 3. S. 66.

Kobberoxydhydrat opløstes igjen, saa at Vædsken efter 10 Minuters Tid var at betragte som klar.

β) 1 mol Sukker og 4 mol *KOH* tilsattes 1.5 mol $CuSO_4$; det udfældte Kobberoxydhydrat opløstes igjen næsten fuldstændigt efter nogen Henstand.

γ) 1 mol Sukker og 4.5 mol *KOH* tilsattes 1.75 mol $CuSO_4$; det udfældte Kobberoxydhydrat opløstes ikke fuldstændigt selv efter længere Tid.

b) *Overskud af 2—4 mol KOH.*

α) 1 mol Sukker og 5.5 Mol *KOH* tilsattes 1.75 mol $CuSO_4$; *Overskud af KOH altsaa 2 mol.* Det dannede Bundfald opløstes først efter et Par Timers Forløb og selv da ikke ganske fuldstændigt.

β) 1 mol Sukker og 6 mol *KOH* tilsattes 1.75 mol $CuSO_4$; *Overskud af KOH altsaa 2.5 mol.* Det dannede Bundfald af Kobberoxydhydrat opløstes efter et Par Timers Tid.

γ) 1 mol Sukker og 7 mol *KOH* tilsattes 2 mol $CuSO_4$; Overskud af *KOH* altsaa 3 mol. Det dannede Bundfald opløstes ikke selv efter Timer fuldstændigt.

δ) 1 mol Sukker og 8 mol *KOH* tilsattes 2 mol $CuSO_4$; Overskud af *KOH* altsaa 4 mol. Bundfaldet opløstes efter nogen Henstand. En større Mængde Kobberoxydhydrat kunde ikke holdes opløst ved Hjælp af 4 mol *KOH*; thi sattes til 1 mol Sukker og $8^1/_2$ mol *KOH* $2^1/_4$ mol $CuSO_4$, holdt Vædsken sig uklar.

Et mol Druesukker var altsaa istand til ved Hjælp af 1 mol KOH at opløse 1—$1^1/_2$ mol $Cu(OH)_2$; ved Hjælp af $2^1/_2$—3 mol KOH kunde $1^3/_4$ mol $Cu(OH)_2$ opløses, ved Hjælp af 4 mol KOH 2 mol $Cu(OH)_2$, men ikke mere.

Gruppe 2. Vædsken indeholdt et Overskud af 5—35 mol *KOH.*

α) 1 mol Sukker og 10 mol *KOH* tilsattes 2.5 mol $CuSO_4$; Overskud af *KOH* altsaa 5 mol; det dannede Bundfald opløstes med Lethed.

β) 1 mol Sukker og 10.5 mol *KOH* tilsattes 2.75 mol $CuSO_4$; Overskud af *KOH* altsaa 5 mol; det dannede Bundfald opløstes ikke fuldstændigt.

γ) 1 mol Sukker og 11.5 mol *KOH* tilsattes 2.75 mol $CuSO_4$; Overskud af *KOH* altsaa 6 mol. Der opstod et Bundfald, som efterhaanden næsten forsvandt. En større Mængde $Cu(OH)_2$ opløstes derimod ikke; thi tilsattes 1 mol Sukker, 12 mol *KOH* og 3 mol $CuSO_4$, forblev Vædsken uklar; det Samme var Tilfældet selv efter Anvendelsen af 2.85 mol $CuSO_4$.

δ) Det samme Resultat erholdtes ved et Overskud af 8, 9 og 10 mol *KOH* i Vædsken; *2.75 mol $Cu(OH)_2$ opløstes med Nød og neppe;* lettest skede Opløsningen, naar Mængden af *KOH* var 8 mol (ved Anvendelsen af 1 mol

Sukker, 13.5 mol *KOH* og 2.75 mol $Cu\,SO_4$); men en større Mængde $Cu\,(OH)_2$ end 2.75 mol kunde ikke holdes opløst.

ε) Ved større Alkaligehalt (Overskud af 12—35 mol *KOH*) syntes snarere Opløseligheden at af- end tiltage, idet da kun 2.5 mol $Cu\,(OH)_2$ kunde holdes opløst, kfr.:

1 mol Sukker, 18 mol *KOH* tilsattes 2.5 mol $Cu\,SO_4$. Bundfaldet opløstes efter nogen Henstand; tilsattes 2.75 mol $Cu\,SO_4$, forblev Vædsken uklar; det samme Resultat erholdtes ved Anvendelsen af 20, 30 og 40 mol *KOH*.

Et mol Druesukker var altsaa istand til ved Hjælp af 5 mol KOH at opløse $2^1/_2$ mol $Cu\,(OH)_2$; ved Hjælp af 6—10 mol KOH kunde $2^3/_4$ mol $Cu\,(OH)_2$ holdes opløst; $2^3/_4$ mol $Cu\,(OH)_2$ var Maximum; anvendtes et yderligere Overskud af KOH, kunde kun $2^1/_2$ mol $Cu\,(OH)_2$ holdes i Opløsning.

For Kontrollens Skyld fandt vi det hensigtsmæssigt at ***gjentage*** disse Forsøg ***med den Variation,*** at der til Sukkeropløsningen ***først sattes $Cu\,SO_4$*** og derpaa ***KOH.***

Resultaterne vare her ved ***ringere*** Overskud (1—4 mol) af Alkali ***saagodtsom identiske*** med de foregaaende, ved ***større*** Alkaligehalt derimod forsaavidt noget afvigende, som det i dette Tilfælde lykkedes at faa opløst 3 ($3^1/_2$) mol $Cu\,(OH)_2$.

Gruppe 1. *Vædsken indeholdt et Overskud af 1—4 mol KOH.*

a) *Overskud af 1 mol KOH.*

α) 1 mol Sukker og 1 mol $Cu\,SO_4$ tilsattes 3 mol *KOH*; Bundfaldet opløstes efterhaanden til en blakket Vædske, der først langsomt klaredes.

β) 1 mol Sukker og 1.5 mol $Cu\,SO_4$ gav med 4 mol *KOH* et Bundfald, der ikke ganske opløstes.

b) *Vædsken indeholdt et Overskud af 2—4 mol KOH.*

α) 1 mol Sukker og 1.75 mol $Cu\,SO_4$ tilsattes 6 mol *KOH*; *Overskud af KOH altsaa 2.5 mol.* Bundfaldet opløstes med Lethed; en større Mængde $Cu\,(OH)_2$ kunde derimod ikke opløses af 2.5 mol *KOH*.

β) 1 mol Sukker og 2 mol $Cu\,SO_4$ gav med 8 mol *KOH* — *Overskud af KOH altsaa 4 mol* — saagodtsom strax en klar Opløsning; yderligere Tilsætning af $Cu\,SO_4$ bevirkede, at Vædsken ikke blev ganske klar.

Gruppe 2. *Vædsken indeholdt et Overskud af 5—33 mol KOH.*

α) 1 mol Sukker og 2.5 mol $Cu\,SO_4$ tilsattes 10 mol *KOH*. Vædsken, *der altsaa indeholdt 5 mol KOH*, var efter en halv Times Forløb klar.

β) 1 mol Sukker og 2.75 mol $Cu\,SO_4$ tilsattes 12 mol KOH. Vædsken, *der altsaa indeholdt 6.5 mol KOH,* var klar efter en halv Times Forløb. Derimod var 6 mol KOH ikke istand til at opløse 3 mol $Cu\,(OH)_2$; thi tilsattes 1 mol Sukker og 3 mol $Cu\,SO_4$ 12 mol KOH, opløstes ikke Bundfaldet fuldstændigt.

γ) Indeholdt Vædsken 8—10—12 mol KOH, kunde indtil 3 mol $Cu\,(OH)_2$ opløses; lettest syntes Opløsningen at ske ved Tilstedeværelsen af 8 mol, kfr.

1) 1 mol Sukker, 3 mol $Cu\,SO_4$ og 14 mol KOH. Vædsken, der altsaa indeholdt 8 mol KOH, var efter nogen Tid klar.
2) 1 mol Sukker, 3 mol $Cu\,SO_4$ og 16 mol KOH. Vædsken, der altsaa indeholdt 10 mol KOH, blev paa det Nærmeste klar.
3) 1 mol Sukker, 3 mol $Cu\,SO_4$, 18 mol KOH. Vædsken, der altsaa indeholdt 12 mol KOH, viste en ganske svag Blakning.

δ) Indeholdt Vædsken 13—33 mol KOH, syntes indtil 3.5 mol $Cu\,(OH)_2$ at kunne opløses, men ikke mere, kfr.:

<table>
<tr><td>1 mol Sukker
3.5 — $Cu\,SO_4$
20 — KOH</td><td rowspan="3">Opløstes samtlige; dog var der et svagt Skimmer af et i Vædsken meget fint suspenderet Legeme; muligens hidrørte dette fra begyndende Reduktion, der ved større Alkaligehalt kan indtræde efter 1 Times Tid selv ved lavere Temperatur.</td><td>1 mol Sukker
4 — $Cu\,SO_4$
20 — KOH</td><td rowspan="3">Jevn Blakning; efter et Par Timer begyndende Reduktion igjennem hele Vædsken.</td></tr>
<tr><td>1 mol Sukker
3.5 — $Cu\,SO_4$
30 — KOH</td><td>1 mol Sukker
4 — $Cu\,SO_4$
30 — KOH</td></tr>
<tr><td>1 mol Sukker
3.5 — $Cu\,SO_4$
40 — KOH</td><td>1 mol Sukker
4 — $Cu\,SO_4$
40 — KOH</td></tr>
</table>

Yderligere Tilsætning af KOH (en Kaliopløsning af 23.65 % KOH) forøgede ikke Opløseligheden, men begunstigede Reduktionens Hurtighed.

Medens $2^3/_4$ mol $Cu\,(OH)_2$ var det Maximum, der kunde holdes opløst, naar KOH tilsattes først, kunde man altsaa opløse indtil 3 mol $Cu\,(OH)_2$ ved Hjælp af 8—10 mol KOH og $3^1/_2$ mol $Cu\,(OH)_2$ ved Hjælp af 13—33 mol KOH, naar $Cu\,SO_4$ tilsattes før KOH.

Resumé. Resultatet af denne Undersøgelse var kort udtrykt følgende:

1 mol Sukker var istand til ved Hjælp af 1 mol *KOH* at opløse 1 (— $1^1/_2$) mol $Cu\,(OH)_2$.

1 mol Sukker var istand til ved Hjælp af 4 mol *KOH* at opløse 2 mol $Cu\,(OH)_2$.

1 mol Sukker var istand til ved Hjælp af 5 mol *KOH* at opløse 2.5 mol $Cu\,(OH)_2$.

1 mol Sukker var istand til ved Hjælp af 6 mol *KOH* at opløse 2.75 mol $Cu\,(OH)_2$.

Tilsattes $Cu\,SO_4$ *før KOH*, kunde 1 mol Sukker ved Hjælp af 8—10 mol *KOH* opløse 3 mol $Cu\,(OH)_2$ og ved Hjælp af 13—33 mol *KOH* indtil 3.5 mol $Cu\,(OH)_2$. I modsat Fald var 2.5 mol $Cu\,(OH)_2$ det Maximum, der kunde opløses, naar man anvendte et yderligere Overskud af *KOH*.

II. Fremstilling af i Vand opløselige Forbindelser af Druesukker med Kobberoxyd og Kali.

Da det opløste Kobberoxydhydrat kun kan antages at være i kemisk Forbindelse med Sukker og Alkali, maa der i Henhold til de foregaaende Forsøg rimeligvis existere flere saadanne Forbindelser, der adskille sig fra hinanden ved sin Kobber- og Alkaligehalt.

Noget bestemt Indblik i deres Sammensætning har vi forøvrigt endnu ikke vundet; den Mængde Alkali, der kan indgaa i disse Forbindelser, lader sig nemlig ikke jugere af vore Forsøgsdata, fordi vi rimeligvis i de fleste Tilfælde har anvendt samme i saa stort Overskud, at kun den ringere Del af dette kan antages at have været i kemisk Forbindelse med Sukker og Kobber. Den Mængde *Kobber*, der kan indtræde i Forbindelserne, lader sig naturligvis bestemt angive; den svarer jo direkte til det opløste Kobberoxydhydrat, og man kunde derfor i saa Henseende uden videre af de foregaaende Forsøg slutte sig til Forbindelser, som indeholde 1, 2, 3 at *Cu* paa 1 mol Sukker, hvis det havde vist sig, at Mængden af det opløste $Cu\,(OH)_2$

blot stod i saa enkle Molekularforholde. Men dette synes ikke at være Tilfældet. Selv betydelige Variationer i Alkaligehalten forandrede nemlig ofte Mængden af det opløste $Cu(OH)_2$ ikke med et helt eller halvt mol, men endog med mindre Brøkdele, som $^1/_4$ mol.

Om vi derfor i det foregaaende end have gjort det sandsynligt, at der existerer opløselige Forbindelser af Druesukker med Kobberoxyd og Kali, stod dog den Hovedopgave tilbage at levere det ***stringente Bevis*** for deres Existents og komme til Kundskab om deres Sammensætning, med andre Ord, at fremstille og analysere disse Forbindelser.

Det første Resultat af vor foregaaende Undersøgelse var, at 1 mol Sukker er istand til ved Hjælp af 1 mol KOH at opløse 1 mol $Cu(OH)_2$. Det laa derfor nærmest at antage Muligheden af en Dobbeltforbindelse, der paa 1 mol Sukker indeholder 1 mol $Cu(OH)_2$ og 1 mol KOH.

En saadan Forbindelse har det nu lykkedes os at fremstille ved at benytte den Fremgangsmaade, som Fileti efter H. Schiff[1]) har anvendt for at erholde det af ham antagne Kobberglykosat (Forbindelse af Druesukker med Kobberoxydhydrat) ved Hjælp af Glykose, Kali og Kobbervitriol.

1 gr Druesukker (opl. i 80 kcm Vand) og 3 gr KOH (opl. i 12.7 kcm Vand) blandedes i et med Is omgivet Bægerglas og tilsattes lidt efter lidt en koncentreret Opløsning af Kobbervitriol. Der fremkom strax et lyseblaat Bundfald, som opløste sig ved Omrøring til en klar blaa Vædske; ved videre Tilsætning foregik Opløsningen vanskeligere og tilsidst forblev en Del af Bundfaldet uopløst. Vædsken filtreredes derpaa gjennem et godt afkjølet Glasuldfilter ned i en med Is omgiven Kolbe, der indeholdt ca. 200 kcm 90 %ig Alkohol. Idet den klare blaa Vædske dryppede ned i denne, udfældtes der et blaahvidt Legeme, som efterhaanden samlede sig til himmelblaa Fnokker, der sank til Bunds. Det saaledes erholdte ***Bundfald, hvoraf en Prøve viste sig opløselig i Vand,*** bragtes paa et med Is omgivet Sugefilter og udvadskedes med 90 %ig Alkohol, indtil Filtratets alkaliske Reaktion var saagodtsom forsvunden. Til Udvadskningen anvend-

---

[1]) Ber. d. Deutschen chem. Ges. Bd. 8. 1875. S. 441.

tes ligeledes ca. 200 kcm Alkohol. Uagtet der ved samtlige Operationer var sørget for god Afkjøling, kunde det dog ikke undgaaes, at en Del af Bundfaldet reduceredes. (Ogsaa i det svagt blaalige Filtrat foregik der Reduktion).

Bundfaldet paa Filtret tørredes i Løbet af Natten i Vakuum over konc. Svovlsyre; om Morgenen udtoges en Prøve til Analyse. Den opløstes i Saltsyre (under meget svag Opbrusning) og tilsattes Svovlvandstofvand i Overskud. Det udfældte Svovlkobber bestemtes efter Roses Methode. Der erholdtes 0.1274 gr $Cu_2 S = 0.1017$ gr Cu. Filtratet og Vadskevandet fra Kobberbundfaldet befriedes fra $H_2 S$ ved en kraftig Luftstrøm. Det samlede Vædskekvantum beløb sig til 294 kcm. Dets Gehalt paa Druesukker fandtes $= 0.2316$ *gr Sukker*. Molekularforholdet mellem Sukker og Kobber i Bundfaldet bliver saaledes ($0.2316 : 0.1017 = 180 : x$; $x = 79.04$ eller 1.24×63.4) 1 mol Sukker: 1.24 at Cu.

Da Bundfaldet foruden Dobbeltforbindelsen af Sukker med Kobberoxyd og Kali maatte indeholde svovlsurt Kali, saasom ogsaa dette fældes af Alkohol, maa der fra Bundfaldets samlede Kaliumgehalt fratrækkes den Mængde, der var bundet til Svovlsyren, for at finde den Mængde Kalium, der var indeholdt i Forbindelse med Sukker og Kobber. Det gjaldt derfor nærmest at bestemme Svovlsyren i Filtratet.

Til Bestemmelsen af Svovlsyre og Kalium anvendtes 227 kcm af Filtratet. Svovlsyren bestemtes paa sædvanlig Maade som $Ba SO_4$. Der fandtes 0.356 gr $Ba SO_4$, der svarer til 0.1221 gr SO_3. Det samlede Filtrat (= 294 kcm) indeholdt altsaa 0,15814 gr SO_3. Filtratet fra den svovlsure Baryt tilsattes NH_3 og $(NH_4)_2 CO_3$ under Opvarmning; Filtratet inddampedes forsigtigt til Tørhed i en Platindigel; den i Residuet indeholdte Salmiak forflygtigedes ved muligst lav Temperatur, og derpaa ophededes Resten til Glødning for at destruere den endnu tilbageværende organiske Substants. Det tilbageblevne, der bestod af KCl, veiede 0.3095 gr. Heraf beregnedes Kaliumgehalten til 0.16238 gr eller i det samlede Filtrat $\frac{294 \times 0.16238}{227} = 0.21031$ gr. Subtraheres herfra det som $K_2 SO_4$ indeholdte K, (= 0.15475 gr, beregnet af SO_3-Mængden), angiver Resten, 0.05556 gr, den Mængde Kalium, der var traadt i Forbindelse med Druesukker og Kobberoxyd. Forholdet mellem Sukker og Kalium bliver da 1 mol Sukker : 1.1 at K ($0.2316 : 05556 = 180 : x$, $x = 43.18$ eller 1.1×39.13).

Molekularforholdet mellem Sukker, Kobber og Kalium fandtes altsaa 1 mol Sukker : 1.24 at Cu : 1.1 K. Trods denne

Uoverensstemmelse kunne vi dog omtrent med fuld Sikkerhed sige, at *Bundfaldet bestod af 1 mol Sukker, 1 at Cu og 1 at K.* Sukkermængden maatte nemlig findes for liden, da endel af samme allerede var oxyderet paa Filtret. Afvigelsen mellem den fundne Kali- og Kobbermængde er vistnok ikke ganske ubetydelig, men rimeligvis er den for en Del foraarsaget derved, at Svovlsyremængden er fundet noget for stor, som det ikke sjelden er Tilfældet, naar den bestemmes i Form af svovlsur Baryt, saa at der er trukket for meget fra den samlede Kaligehalt; de fundne Tal nærmer sig dog saa meget til Enheden, at Analysen maa siges at have faststillet, at den erholdte Dobbeltforbindelse indeholder 1 at *Cu* og 1 at *K* paa 1 mol Sukker.

Da denne Forbindelse friskt udfældt var opløselig i Vand, og da der opstaar en klar blaa Vædske, naar man til 1 mol Sukker sætter 1 mol $Cu\,SO_4$ og 3—4 mol *KOH*, er det sandsynligt, at denne Vædske væsentlig er at betragte som en Opløsning af denne Dobbeltforbindelse (og $K_2\,SO_4$).

For Kontrollens Skyld fandt vi det hensigtmæssigt endnu engang at fremstille Forbindelsen, men med den Variation, at vi istedetfor $CuSO_4$ anvendte $Cu\,\overline{A}_2$. Hensigten hermed var forøvrigt tillige den at kunne overbevise os om det urigtige i den Angivelse af Fileti, at der ogsaa i dette Tilfælde skulde kunne opstaa en egen Forbindelse af Sukker med Kobber.

Paa Forhaand troede vi, at Resultatet maatte blive det samme, hvad enten der anvendtes eddikesurt eller svovlsurt Kobber, men det viste det sig imidlertid, at *Bundfaldet i dette Tilfælde havde en anden Sammensætning. Den fremstillede Forbindelse indeholdt nemlig paa 1 mol Sukker og 1 at K ikke 1, men 2 at Cu.* De specielle Forsøgsdata vare følgende:

De samme Mængder Druesukker og Kali som i foreg. Forsøg tilsattes eddikesurt Kobber i koncentreret Opløsning, indtil der fremkom et Bundfald, som ikke længere opløste sig. Filtratet opsamledes ogsaa her i en med Is omgiven Kolbe, der indeholdt ca. 200 kcm 90 %ig Alkohol; de himmelblaa Fnokker, der dannede sig, viste sig at være opløselige i Vand; de bragtes paa et med Is omgivet Sugefilter og udvadskedes med 90 %ig

Alkohol, indtil Filtratet var saagodtsom neutralt. Uagtet der sørgedes for god Afkjøling under samtlige Operationer, viste der sig dog Antydning til Dekomposition, men meget mindre end i forrige Tilfælde. En Del af det udvadskede Bundfald opløstes, efter at være tørret i Vakuum, i tynd HCl og fældtes med Svovlvandstof. Der erholdtes herved 0.3295 gr $Cu_2\,S$ $= 0.2631$ *gr* Cu. Det forenede Filtrat og Vadskevand, hvis samlede Volum beløb sig til 176 kcm, befriedes for $H_2\,S$ ved Hjælp af en stærk Luftstrøm og anvendtes til Bestemmelse af Sukker og Kalium. 9.6 kcm af Filtratet reducerede nøiagtigt 20 kcm af en til det 5-dobbelte fortyndet Fehlings Vædske, der anviste 0.02048 gr Sukker. Filtratets samlede Sukkergehalt altsaa *0.3755 gr*. Molekularforholdet mellem Sukker og Kobber bliver som 1 : 2 ($0.3755 : 0.2631 = 180 : x$; $x = 126.1$ eller næsten 2×63.4). For at bestemme K-Mængden inddampedes 150 kcm af Filtratet paa Vandbad, tilsattes $Pt\,Cl_4$ og (da det havde antaget Sirupskonsistents) 80 %ig Alkohol og bragtes paa et Filter. Efter Tørring ved 130° erholdtes 0.4401 gr $Pt\,K_2\,Cl_6$, der svarer til 0.07059 gr K. Kaliummængden i det hele Filtrat bliver saaledes $\frac{0.07059 \times 176}{150} = 0.082825$ *gr* og Molekularforholdet mellem Sukker og $K = 1 : 1$. ($0.3755 : 0.082825 = 180 : x$; $x = 39.7$).

En anden Prøve glødedes for at destruere Druesukkeret, og Residuet opløstes i HCl; Kobber og Kalium bestemtes derefter paa samme Maade som i Hovedprøven. Der fandtes 0.04 gr $Cu_2\,S = 0.03194$ *gr* Cu og 0.0683 gr $Pt\,K_2\,Cl_6 = 0.01096$ *gr* K; Molekularforholdet altsaa $2\,Cu : 1.11\,K$. Resultatet var her en Smule afvigende, men ogsaa i denne Analyse nærmer den fundne Mængde K sig saa meget 1 at., at vi maa antage dette i Forbindelsen.

Da denne Forbindelse friskt udfældt opløstes i Vand, antog vi, at der maatte erholdes en klar blaa Vædske ved til 1 mol Sukker at sætte 2 mol $Cu\,\overline{A}_2$ og 5 mol KOH. Dette var ogsaa Tilfældet. Som vi før have seet, kan en saadan Vædske derimod ikke erholdes, naar man til 1 mol Sukker sætter 2 mol $Cu\,SO_4$ og 5 mol KOH. Af hvilken Grund der ved Anvendelsen af $Cu\,\overline{A}_2$ opstod en Forbindelse med 2 at Cu, og hvorfor Sukker er istand til at opløse 2 mol $Cu\,(OH)_2$ ved Hjælp af 1 mol KOH, naar man anvender $Cu\,\overline{A}_2$ istedetfor $Cu\,SO_4$, vil vi lade uafgjort.

Resumé. Det lykkedes altsaa at fremstille to Dobbeltforbindelser af Druesukker med Kobberoxyd og Kali, hvoraf den ene

paa 1 mol Sukker indeholdt 1 at Cu og 1 at K, den anden paa 1 mol Sukker 2 at Cu og 1 at K.

Da disse Forsøg helst bør anstilles i Kulden, ville samtlige Details først kunne blive færdige i Løbet af Vinteren, og skulle vi da bestræbe os for at fremstille ogsaa andre Dobbeltforbindelser samt at komme til Kundskab om deres Konstitution.

De vundne Resultater vare imidlertid tilstrækkelige for vort nærmeste Formaal, nemlig 1) at undersøge, om det opløste $Cu(OH)_2$ virkelig indeholdes i kemisk Forbindelse med Sukker og Kali, og 2) at studere Forholdet mellem den Mængde Kobberoxydhydrat, som Sukker kan opløse i alkalisk Vædske, og den, det kan reducere.

Endvidere kunne vi ved Hjælp af disse Resultater delvis anskueliggjøre os, hvorfor $Cu(OH)_2$, naar det ved Tilsætning af $CuSO_4$ og Alkali i Ækvivalentforhold bundfældes i en sukkerholdig Vædske, river en paafaldende stor Mængde Druesukker med sig, som vanskeligt kan udvadskes, og hvorfor det saaledes erholdte Bundfald let dekomponeres. Medens det allerede iforveien udfældte $Cu(OH)_2$, naar det digereres med Sukkeropløsning, kun tilbageholder en ganske ringe Mængde, har vi i den foregaaende Afhandling ved Gjentagelsen af Salkowskis Forsøg seet, at det Bundfald, som erholdes, naar man til 1 mol Sukker sætter 5 mol $CuSO_4$ og 10 mol KOH, kan indeholde henved $^3/_4$ af den anvendte Mængde Sukker. Vi kunne kun *delvis* belyse dette paa Basis af vore Forsøg. Forskjellen er nemlig let at forstaa, naar Kali tilsættes først, men ikke i det modsatte Tilfælde. Naar man til 1 mol Sukker først sætter 10 mol Alkali og derpaa lidt efter lidt $CuSO_4$, saa vil $2^1/_2$ mol Kobberoxydhydrat kunne opløses, da der endnu er et Overskud af 5 mol Alkali i Vædsken. Tilsættes nu de øvrige $2^1/_2$ mol $CuSO_4$, saa vil Svovlsyren i disse efterhaanden forbinde sig med Alkali, neutralisere Vædsken og spalte Dobbeltforbindelsen af Sukker med Kobberoxyd og Alkali, saa at Sukker og Kobberoxydhydrat samtidigen frigjøres. De enkelte Sukkermolekuler vilde da ligesom omsluttes af de enkelte Molekuler Kobberoxydhydrat, saa at Sukkeret vanskeligt kan fjernes ved Udvadskning og paa Grund af den intime Berøring let virke reducerende.

Tilsættes derimod først $CuSO_4$, vil den paafølgende Tilsætning af KOH naturligvis ikke kunne bevirke Dannelsen af en saadan Dobbeltforbindelse, da der nu aldrig er Overskud af Kali, og man kan derfor ikke paa den ovenfor udviklede Maade begribe, hvorfor Bundfaldet ogsaa i dette Tilfælde tilbageholder ligesaa meget Sukker som i hint. Man maa derfor her ty til en anden Forklaring. Man kunde tænke sig Muligheden af, at Processen her gik for sig paa følgende Maade: I Vædsken findes opløst Sukker og $Cu\,SO_4$, der tilsættes Kali. Det kunde nu hænde, at dette i første Moment foreløbigt forbandt sig med Sukker til Sukkerkali, som derpaa dekomponeredes af Kobbervitriolen; der vilde da ogsaa i dette Tilfælde samtidigt findes Sukker og Kobberoxydhydrat in statu nascendi. Imidlertid er denne Forklaring naturligvis blot og bart en Hypothese, saa meget mere som man med omtrent ligesaa stor Berettigelse kan forestille sig, at Processen er en anden. Man kunde nemlig tænke sig, at Druesukker indgik kemiske Forbindelser med $Cu\,SO_4$ ligesom med $Na\,Cl$. Hvis nu disse fandt Sted i flere Molekularforhold, vilde man ogsaa ved Hjælp af denne Antagelse kunne klargjøre sig, hvorfor $Cu\,(OH)_2$, naar KOH tilsættes bagefter, river Sukkeret med sig. Ogsaa i dette Tilfælde vilde nemlig Kali kunne bevirke, at saavel $Cu\,(OH)_2$ som Sukker er tilstede in statu nascendi.

Det turde derfor have sin Interesse at undersøge, om saadanne Forbindelser existere, og det ogsaa af en anden Grund. Vi have nemlig hidindtil ikke gjort Rede for det Fænomen, at Sukker ved betydeligt Overskud af Alkali er istand til at opløse mere $Cu\,(OH)_2$, naar $Cu\,SO_4$ tilsættes før Alkali, end efter. Indgik nu Sukker kemiske Forbindelser med $Cu\,SO_4$, vilde det være i den mest intime og direkte Berørelse med det ved den paafølgende Tilsætning af KOH dannede $Cu\,(OH)_2$; at da en kemisk Forbindelse med større Kobbergehalt lettere kan opstaa, end naar KOH tilsættes først, turde være indlysende.

III. I Vand uopløselige Forbindelser af Druesukker med Kobberoxyd og Kali kunde ikke paavises.

Vi have hidtil antaget som givet, at det permanente Bundfald, der i den alkaliske Sukkervædske opstaar efter Anvendelsen af 3—5 mol $Cu\,SO_4$, er $Cu\,(OH)_2$. Men herfor foreligger hidtil intet bestemt Bevis. Man kunde tænke sig Muligheden af, at Bundfaldet foruden $Cu\,(OH)_2$ indeholdt en eller anden i Vand uopløselig Forbindelse af samme med Sukker og Kali. For at komme til Kundskab herom have vi i nogle

Forsøg filtreret disse Bundfald fra gjennem Asbestfiltre,[1]) omgivne af Is, og udvadsket dem i flere Dage med destilleret Vand.

Til 1 mol Sukker sattes 4 mol $Cu\,SO_4$ og 16 mol KOH; Overskuddet af Alkali altsaa 8 mol. Bundfaldet udvadskedes mange Gange i Løbet af 24 Timer, indtil Filtratet ikke længere reagerede alkalisk, og den blaa Farve var forsvunden. Udvadskningen fortsattes endnu i 36 Timer, og derpaa blev saavel Bundfaldet som det farveløse Filtrat undersøgt paa Sukker. Bundfaldet opløstes i høist fortyndet Saltsyre og deltes i to Dele. Den ene Del tilsattes Kali i Overskud, hvorved der erholdtes en ikke ganske klar blaa Vædske, der efter stærk Kogning blev affarvet under Udskillelse af sort Kobberoxyd. Da man ved Tilsætning af Kali erholdt en blaa Opløsning, maatte Bundfaldet have indeholdt en Substants, der i Lighed med Sukker hindrede Kobberoxydets Udfældning i alkalisk Vædske. Man kunde derfor formode, at dette var Sukker, og at det var det i Vædsken i ringe Mængde suspenderede $Cu\,(OH)_2$, som maskerede Reaktionen. For at komme til Kundskab herom behandledes den anden Prøve med en alkalisk Seignettesaltopløsning af samme Koncentration som den, der anvendes til Fehlings Vædske.[2]) Først efter længere Tids Ophedning viste der sig svag Antydning til Reduktion, idet der paa enkelte Steder af Glasset udskilte sig et tyndt, smudsigt rødligt Belæg. Reduktionen var saa svag, at man med Sikkerhed kunde paastaa, at Bundfaldet kun indeholdt minimale Spor af Sukker, og at Grunden til, at der erholdtes en blaa Vædske ved Tilsætning af Alkali, ikke kunde skyldes Tilstedeværelsen af dette Spor, men af en anden Substants, som vi ikke nærmere har undersøgt. Den opløselige Dobbeltforbindelse af Sukker med $Cu\,(OH)_2$ og KOH var altsaa omtrent fuldstændigt udvadsket. — Det farveløse alkalifri Vadskevand koncentreredes paa Vandbad, tilsattes et Par Draaber $Cu\,SO_4$-Opløsning og alkalisk Opløsning af Seignettesalt samt kogtes. Ingen Reduktion.

Det samme Forsøg gjentoges med 1 mol Sukker, 4 mol $Cu\,SO_4$ og 18 mol KOH. Bundfaldet udvadskedes i dette Tilfælde, efterat Filtratet ikke længere reagerede alkalisk, blot i 20 Timer. Resultatet var her omtrent det samme som i foregaaende Forsøg; ved Tilsætning af Kali i Overskud til den saltsure Opløsning af Bundfaldet erholdtes nemlig en blaa — i dette Tilfælde saagodtsom fuldstændig klar — Vædske, der ved Kognin

---

[1]) Papirfiltre ere her mindre tilraadelige, da et Overskud af Alkali ved længere Berørelse angriber Papiret, hvorved der kan dannes Substantser, som forstyrre Reaktionen.

[2]) kfr. Archiv for Mathem. og Naturvidensk. III B. S. 66.

udskilte sort Kobberoxyd; dog var Antydningen til Reduktion ved Anvendelse af alkalisk Seignettesaltopløsning noget tydeligere end i foregaaende Forsøg. Sukkermængden i Bundfaldet var i ethvert Fald minimal. Det farveløse Vadskevand gav et yderst svagt Spor af Reduktion efter Kogning og nogen Henstand.

I det følgende Forsøg anvendtes 1 mol Sukker, 5 mol $CuSO_4$ og 20 mol KOH. I dette Tilfælde varede Udvadskningen, efterat Filtratet var blevet farveløst, i 36 Timer. Bundfaldet indeholdt kun utydelige Spor af Sukker, maaske end mindre end i det nærmest foregaaende Forsøg. Derimod var Reduktionen i Vadskevandet noget tydeligere. Efter disse Forsøg maa man antage, at det permanente Bundfald ikke indeholder (i Vand uopløselige) Dobbeltforbindelser af Sukker, Kobberoxyd og Kali.

Man kunde mod de foregaaende Forsøg indvende, at Bundfaldet under den lange Udvadskning lidt efter lidt var dekomponeret. Herfor taler Tilstedeværelsen af hin Substants, der holdt $Cu(OH)_2$. opløst i den alkaliske Vædske; thi denne maa være dannet ved Dekomposition. Muligheden af, at Bundfaldet ved Siden af $Cu(OH)_2$ fra først af havde indeholdt en i Vand uopløselig Forbindelse af Druesukker med Kobberoxyd og Kali lader sig derfor ikke uden videre benægte. Denne Indvending taber imidlertid sin Vægt ved det følgende Forsøg, som klarligen viser, at *den væsentlige Grund til, at Bundfaldene indeholdt Spor af Sukker, var Udvadskningen* og ikke Dekompositionen. Forskjellen imellem dette og de forrige Forsøg var den, at der her anvendtes en langt mindre Mængde Vadskevand, idet Bundfaldet kun blev udvadsket en Gang, efterat Vadskevandet næsten var bleven farveløst. I dette Tilfælde fandtes en ikke *ringe* Mængde Sukker i Bundfaldet, uagtet Betingelserne for Dekomposition vare mindst ligesaa gunstige som i de foregaaende Forsøg, thi Bundfaldet forblev paa Filtret endog i noget længere Tid end i disse, nemlig over 72 Timer.

1 mol Sukker tilsattes 5 mol $CuSO_4$ og 18 mol KOH. Bundfaldet blev kun udvadsket i det Hele 3 Gange i Løbet af 72 Timer; efterat det var bleven opløst i HCl, tilsat alkalisk Seignettesaltopløsning og ophedet til Kogning, blev Vædsken grønligt uklar af fint suspenderet Kobberoxydulhydrat, der lidt efter lidt afsatte sig med gul Farve. Reduktionen viste

sig altsaa her meget mere udtalt, dog var ogsaa i dette Tilfælde en stor Mængde Kobber opløst i Vædsken. Det sidste Vadskevand tilsattes lidt fortyndet Saltsyre og koncentreredes paa Vandbad, det gav med Kali og nogle Draaber Kobbervitrioloplösning tydelig Reduktion; Bundfaldet var altsaa ikke fuldstændigt udvadsket.

Dette Forsøg godtgjør, som det synes, Usandsynligheden af den Antagelse, at den væsentlige Grund til, at man i de foregaaende Forsøg kun fandt Spor af Sukker i Bundfald og Vadskevand, skulde være den, at det i Bundfaldet indeholdte Sukker var dekomponeret.

Resumé. Det permanente Bundfald, som opstaar i en Sukkeropløsning, der indeholder Alkali i Overskud, ved Anvendelse af 4—5 mol $Cu\,SO_4$ *paa 1 mol Sukker, bestaar af* $Cu(OH)_2$ *og indeholder ingen (i Vand uopløselig) Dobbeltforbindelse af Sukker-Kobberoxyd-Kali.*

Efterskrift.

Under Gjennemlæsningen af Korrekturen ere vi blevne opmærksomme paa, at Claus i Kolbes Journ. f. prakt. Chem. N. F. Bd. 4. 1871. S. 96 har givet en foreløbig Notits om nogle Forsøg for at bestemme Kobberoxydets Opløselighed i alkaliske Druesukkeropløsninger, cfr. «Soweit meine noch nicht abgeschlossenen Untersuchungen reichen, vermag *ein Mol.* Zucker nicht weniger als 3 Mol. Kupferoxyd zu lösen — aber *für die Aufnahme eines jeden Mol. des letzteren* ist die Gegenwart *einer ganz bestimmten Menge freien Alkalis nothwendig,* eine Beobachtung, die so eigenthümlich ist, dass sie ein eingehenderes Studium geboten erscheinen lassen muss.» Nogen senere udførlig Meddelelse over denne Gjenstand fra Claus's Haand har vi ikke kunnet finde.

UNDERSLÆGTEN LANIUS MED SÆRLIGT HENSYN PAA DENS NORSKE ARTER.

AF

LEONHARD STEJNEGER.

Linné's Slægt *Lanius* er bleven delt i flere forskjellige, hvoraf nogle har vundet almen Borgerret, medens andre igjen er bleven snart forkastede, snart antagne.

Saaledes har man af de hos os forekommende *Laniinæ* gjort *excubitor* til Repræsentant for en, *collurio* for en anden Slægt eller Underslægt.

For begge disse Grupper er Navnet *Lanius* bragt i Anvendelse af forskjellige Forfattere, idet nogle har gjort *excubitor* til Type for Slægten *Lanius* i snævreste Betydning, og med Boje (1826) kaldt den anden Gruppe, hvortil *collurio* hører, *Enneoctonus* (Kaup gav i 1829 den samme Gruppe Navnet *Collurio*), medens Vigers (1831) valgte Benævnelsen *Lanius* for *collurio* med Samslægtninger og opstillede for *excubitor*-Gruppen Navnet *Collurio*, der i Betragtning af Kaups tidligere Anvendelse af samme for den anden Gruppe af senere Forfattere ombyttedes med Möhrings *Collyrio*.

De Forskere, som følger Vigers's Exempel, paaberaaber sig Linné, der i sin X Udgave (1758) (hvilken de — og vistnok med Rette — vælger til Udgangspunkt) skal have opstillet Arten *cristatus* som Type for Slægten *Lanius*, idet han opfører nævnte Art som Nr. 1, hvorfor denne fremfor alle andre bør føre Slægtnavnet, medens *excubitor*, som hører til en anden Slægt, altsaa maa tildeles en anden Benævnelse.

Sundevall har i sin Tentamen methodi avium disponendarum p. 18 in not. paapeget det uholdbare i denne Anskuelse.

Først og fremst paatrænger sig den Bemærkning, at Linné ikke kjendte typiske Arter i den Betydning, hvori vi tager Begrebet, dernæst at det Nummer, Arten har faaet, aldeles ikke har til Hensigt at angive dens større eller mindre Berettigelse til at bære Slægtsnavnet. At *cristatus* saaledes i Udgaven af 1758 staar nævnt først, har ingen Betydning, thi allerede i XII Udgave (1766) staar en anden Art som Nr. 1. Heraf fremgaar tydeligen, at Rækkefølgen er temmelig tilfældig. Men mest afgjørende tør dog den Betragtning være, at det ikke vil være muligt konsekvent at gjennemføre Antagelsen af Nr. 1 som Type, uden at vende op og ned paa den hele Nomenklatur og volde en grænsesløs Forvirring, da i saa Fald en stor Del velkjendte Navne maatte ombyttes. *Plectrophanes* maatte da vige Pladsen for *Emberiza*, fordi *nivalis* er nævnt først, *Dolichonyx* for *Fringilla*, da *oryzivora* er Nr. 1 og *coelebs* først Nr. 2; saaledes maatte Nattergalen fremtidigen kaldes *Motacilla luscinia*, Brushanen *Tringa pugnax*, den skarlagenrøde Ibis *Scolopax rubra*, Paafugltranen *Ardea pavonina*, Svanen *Anas cygnus*, osv. Af de anførte Exempler fremgaar tydeligt, at det ikke gaar an at anse den først opførte Art som fortrinsvis berettiget til Linné's Slægtnavn, Det er vel neppe Tvivl underkastet, at Slægtsnavnene *Aquila*, *Cygnus* og mange til dem er givne fuldstændigt i Linnés Aand, hvorom allerede hans Syst. nat. ed. I (4735) er et tydeligt Vidnesbyrd, uanseet den Kjendsgjerning, at deres Typer af Linné er opførte som Nr. 1 i Slægter med andre Navne.

Naar vi altsaa er kommet til det Resultat, at Rækkefølgen i «Systema naturalis» ingensomhelst Betydning har lige over for Spørgsmaalet, om hvilke Arter der ved Delingen af et linnéansk genus fortrinsvis skal bære det af Linné givne Slægtsnavn, har vi kun at følge den bekjendte Prioritetsregel, hvorefter Bojes *Enneoctonus* som det ældste maa beholdes for de korthalede *Lanii*. *Excubitor* og de med den beslægtede Arter vil altsaa, hvad enten man skiller dem ud som egen Slægt eller ei, komme til at føre Navnet *Lanius*.

Meget synes imidlertid at tale for Anbringelsen af de hos os forekommende Arter i to Underslægter. En nøiagtig Sammenstillen af begges afvigende Karakterer vil vise det begrundede i en subgenerisk Adskillelse.

Lanius	*Enneoctonus*
Næb stærkt.	Næb svagere.
Vingerne rundede; 1ste Haandsvingfjær halvt saa lang som den længste; 2den kortere end 5te.	Vingerne mindre runde, idet 1ste Haandsvingfjær kun er en Trediedel saa lang som den længste; 2den længere end 5te.
Halen lige lang som Vingen, stærkt kileformig.	Halen kortere end Vingen, tvær eller afrundet.

De to Underslægters Synonymi stiller sig efter det foregaaende saaledes:

Enneoctonus Boje.

< 1758 *Lanius* Linn. Syst. nat. X tom. I Pag. 93.
< 1826 *Enneoctonus* Boje, Isis 1826. 2 Pag. 973.
> 1829 *Collurio* Kaup, Entw. Eur. Thierw.
= 1867 *Enneoctornis* Layard, Bixds. S. Afr. Pag. 158 (fide Giebel).

Lanius Lin.

< 1758 *Lanius* Linn. Syst. nat. X tom. I. Pag. 93.

= 1831 *Collurio* Vigers, Proc. Zool. Soc. Lond. 1831. Pag. 42 (nec Kaup)[1]).

= 1855 *Collyrio* G. R. Gray, Catal. of Genera (fide Sundev. Tent. P. 18).

Nøgle til Underslægten Lanius.

a[1]) Dobbelt Vingeflæk.

b[1]) Yderste Par Styrfjær næsten rent hvide.

c[1]) Overgump graa, af Ryggens Farve.

1. *excubitor* Lin. 1758.

c[2]) Overgump hvid eller hvidagtig.

2. *homeyeri* Cab. 1873.

b[2]) 3 yderste Par Styrfjær rent hvide.

3. *sphenocercus* Cab. 1873.

a[2]) Enkelt Vingeflæk.

b[1]) Yderste Par Styrfjær sorte og hvide.

c[1]) Undertiden hvid, med eller uden mørke Bølgelinier.

d[1]) Det hvide paa Armsvingfjærenes Indfane skarpt afgrændset mod det sorte; Haleroden uden hvid Plet.

4. *bairdi* Stejneger 1878.

d[2]) Det hvide eller graa og det sorte paa Armsvingfjærenes Indfane ikke skarpt afgrænset; Haleroden med hvid Plet.

e[1]) Den hvide Flæk paa Haandsvingfjærene rækker næsten saa langt som Spidsen af 1ste Haandsvingfjær.

5. *excubitoroides* Sw. 1831.

e[2]) Den hvide Flæk paa Haandsvingfjærene rækker ikke saa langt som Spidsen af 1ste Haandsvingfjær.

f[1]) Ingen hvid Stribe over Øiet.

---

[1]) Giebel har i sin Thesaurus Ornithologiæ I p. 738 feilagtigen angivet Kaup's *Collurio* som sammenfaldende med Vigers's.

6. *ludovicianus* Lin. 1766.

f²) Over Øiet en hvid Stribe.

g¹) Under Øiet en hvid Plet.

7. *borealis* Vieiel. 1807.

g²) Ingen hvid Plet under Øiet.

8. *major* Tall. 1811.

c²) Undersiden lys vinrød.

9. *meridionalis* Temm. 1820.

c³) Undersiden askegraa.

10. *algeriensis* Less. 1839.

b²) Yderste Par Styrfjær rent hvide.

c¹) Næb sort.

d¹) Overgump graa.

11. *elegans* Sw. 1831.

d²) Overgump hvid.

12. *leucopygus* Hempr. & Ehr. 1828.

c²) Næb blegt, horngult.

13. *pallidirostris* Cass. 1851.

De graa Laniers geografiske Udbredning er ganske interessant. I den gamle Verden indtager de 3 Arter, der har dobbelt Vingeflæk, de mellemste Egne, medens der baade søndenfor og nordenfor forekommer Arter med kun enkelt Vingespeil. ***Lanius excubitor*** er den vestligste af de 3 Arter, ***homeyeri*** den mellemste, medens ***sphenocercus***, der er adskilligt afvigende, er den østligste Form.

De to sidste Arter blev først beskrevne af Prof. Dr. Jean Cabanis i Journal für Ornithologie 1873 pag. 75—76. ***L. sphenocercus***, der især skal udmærke sig ved sin lange stærkt kileformige Hale og den store Udbredelse af den hvide Farve paa samme, kjender jeg ikke af Autopsi. Derimod har jeg i min Samling et Exemplar af den anden Art, og da jeg intetsteds har seet en udførlig Beskrivelse af denne, tillader jeg mig her at meddele en saadan.

Lanius homeyeri Cab.

Syn: 1871 *Lanius major* Sharpe & Dresser, Birds of Eur. part. II sp. 4 p. 2 (nec Pallas).

1873 *Lanius homeyeri* Cab. Journ. f. Orn. 1873 p. 75.

1873 *Lanius leucopterus* Severzow (vide Journ. f. Orn. 1875 p. 179).

Hab. Syd-Ost-Europa; Mellem-Asien.

Coll. Stejneger Nr. 229. (♀ Syd-Rusland: Omegnen af Astrakan (?); April). 3die og 4de Haandsvingfjær lige lange og længst; 2den lige lang som 6te.

Oversiden lyst askeblaa, Overgumpen graaagtig hvid, og de øvrige Haledækfjær næsten rent hvide; Panden lysere end det øvrige Hoved; en temmelig bred hvid Streg fra Panden over Øinene. Fra Næbroden gaar et sort Baand gjennem Øiet til Bagøretrakten. Hele Undersiden, Aksillarfjærene indbefattet, rent hvid uden mørke Tverlinier. Vinger og Hale sorte med hvide Tegninger; det hvide paa Vingerne strækker sig længere hen mod Spidsen end hos *excubitor*, og Vingespeilet blir derved større; især er dette fremtrædende ved Armsvingfjærene, idet paa 1ste Armsvingfjær det hvide strækker sig længere end Spidsen af de længste store Haanddækfjær, medens hos *excubitor* det hvide sammesteds kun naar til Spidsen af de korteste, nærmest Armsvingfjærene liggende, store Haanddækfjær; herved frembringes hos *homeyeri* et sammenhængende hvidt Baand tværs over de sammenfoldede Vinger, medens det hvide hos *excubitor* ved sammenfoldede Vinger optræder som to adskilte hvide Pletter; det hvide paa Halen snarere mindre udbredt end hos de to Exemplarer af *excubitor*, som jeg har foran mig, og det uagtet det ene af disse synes at være en yngre ♂ med tydelige mørke Bølgelinier paa Undersiden. Undre Vingedækfjær hvide med Undtagelse af de undre store Haanddækfjær, der er blegt brunagtigt graa, adskilligt lysere end de samme Fjær hos *excubitor*. Næb og Ben sorte.

Næbbet lidt større og grovere end hos *excubitor:* (1) dets

Længde fra Pandeskillet i ret Linie til Overnæbbets Spids 17 mm, (2) langs Ryggen 19 mm; (3) fra Næseborene til Overnæbbets Spids 13 mm; (4) fra Mundvigen til samme 25½ mm; (5) til Undernæbbets Spids 24 mm; (6) fra Hagevinkelen til samme 13 mm; (7) Overnæbbets Høide ved Næseborenes Fremkant 6 mm; Vingerne 112 mm; Halen 107 mm.

Til Sammenligning hidsættes Maalene af ovennævnte to Exemplarer af *excubitor* i samme Rækkefølge.

	Næbbet							Vingerne	Halen	
	1	2	3	4	5	6	7			
homeyeri; Rusland . . .	17	19	13	25½	24	13	6	112	117	mm.
excubitor; Bergen . . .	15½	17½	12½	24	22½	12½	5	116	110	mm.
excubitor; Aachen . . .	16	19	12½	24	23	12	5	112	107	mm.

Arten er efter dette høist nærbeslægtet med *excubitor*, fra hvilken den kun kan skjelnes ved den lysere Overgump og det hvide Vingespeils større Udstrækning. Prof. Cabanis anfører desuden som Skjelnemærke, at ogsaa paa Halen det hvide har en større Udbredning end hos *excubitor*, men som det af Beskrivelsen vil sees, er dette ikke Tilfældet med mit Exemplar. I det hele synes Halens Farve hos de her omhandlede Arter at variere med Alderen.

I den nye Verden forekommer kun Arter med enkelt Vingeflæk. Da jeg i min Samling ikke har mere end et Exemplar af *Lanius borealis* og et af *ludovicianus*, har jeg ikke været istand til at fælde nogen Dom i Spørgsmaalet om *excubitoroides* og *ludovicianus* er distinkte Arter eller ei. Jeg har derfor fulgt Baird i Stedet for Dresser og Sharpe, da det i saadanne Tvivlsmaal er mindre farligt at dele en Art i to end at slaa to gode sammen til en. Endnu mindre kan jeg lige over for Prof. Bairds udførlige Beskrivelse og bestemte Paastand om Artens Berettigelse (Review of American Birds p. 444), være enig i at slaa hans *elegans* i Hartkorn med *excubitoroides* og *ludovicianus*, saaledes som Dresser og Sharpe vil (Proc. Zool. Soc. Lond. 1870 p. 595), førend der foreligger utvetydige Beviser for Artsidentiteten. Da det nu er godtgjort at Sykes's *lahtora* er Swainson's *elegans* og at dette Navn er ældre end hint, der altsaa synker ned til et blot Synonym under den gamle Verdens *elegans* Sw., tiltrænges et nyt Navn for den nordamerikanske Art, og foreslaar jeg derfor at kalde den for

Lanius bairdi.

Syn. 1840 *Lanius elegans* Nuttall. Man. I p. 287 (nec Swains.)

1858 *Collyrio elegans* Baird, Birds of N. Am. XXXV.

1864—66 *Collurio elegans* Baird, Rev. of N. Am. Birds p. 444.

Efter dette vil Synonymien stille sig saaledes for

Lanius elegans.

1831 *Lanius elegans* Swains., Faun. Bor. Am. II p. 122 (nec auct. americ.)

1832 *Lanius lahtôra*[1]) Sykes, Proc. Zool. Soc. Lond. 1832 p. 86.

1854 *Lanius orbitalis* Hempr. & Ehr. in Licht. Nomencl. Av. p. 12.

Det vil imidlertid være af Interesse med *Sikkerhed* at erfare, om Swainsons Typeexemplar er denne Art, eller om det — hvad der rigtignok ikke er sandsynligt skulde høre til *leucopygus* Hempr. & Ehr.

En ♂ ad af *L. elegans* samlet af W. N. Chill i Sultanpur i Hindostan $^{29}/_{1}$ 76 er i min Samling.

---

1) Ikke *lathora* som J. R. Gray skriver i sin «Handlist» (1869) I p. 391.

I sin «Zoographia Rosso-Asiatica» beskrev Pallas 1811 en graa *Lanius* med enkelt Vingespeil under Artsnavnet *major*. Frem igjennem Tiden blev den imidlertid slaaet sammen med *excubitor* indtil Cabanis i 1873 drog den frem af dens ufortjente Forglemmelse, idet han samtidigt for første Gang paaviste dens Forekomst i Europa.

Da Opmærksomheden først var henledet paa den, hørte man snart om Exemplarer nedlagte fleresteds i Tyskland, i Sverige og nylig i Østerrige. Jeg er saa heldig at kunne paavise dens ***Forekomst i Norge***, idet jeg har to Exemplarer af denne Art foran mig, et skudt her ved Bergen og et ved Tvedestrand (?) begge i 1877, og indføre den i den norske Fauna. Det første af de her nævnte Exemplarer opbevares paa Bergens Museum, det andet i den herværende Latinskoles Samling.

Den besynderlige Udbredelse, *Lanius excubitor* angaves at have her i Landet, idet denne centraleuropæiske Form skulde forekomme talrigere nordenfjelds end søndenfjelds ja endog ruge i Østfinmarken, havde allerede paa Forhaand indgivet mig Tro paa, at den nordenfjelds forekommende Varsler vilde vise sig at være *major*. Efterat jeg nu har erholdt Vished for denne Arts Forekomst i Landet, tør jeg med temmelig Bestemthed paastaa, at den nordenfjeldske Rugefugl vil vise sig hørende hid. Jeg skal derfor tillade mig specielt at bede Fuglekyndige i det Trondhjemske have sin Opmærksomhed rettet paa dette Punkt, og vilde jeg være i høieste Grad forbunden for Meddelelser i denne Retning.

Til Veiledning ved Bestemmelsen vedføier jeg en udførlig Beskrivelse af denne for Faunaen nye Art, og skal jeg til Slutning meddele en Sammenligning med *excubitor*.

Lanius major Pall.

Syn. 1811 *Lanius major* Pall. Zoogr. R. Asiat. I p. 401.
1853 *Lanius mollis* Eversen. Bull. Soc. Nat. Mosc. XXVI sec. part. p. 498 (fide Cabanis).

Syn. 1855 *Lanius borealis* Brehm. Vogelf. p. 82 (nec Vieill.)
Lanius excubitor auct. europ. (ex. gr. Gloger, Schlegel, Nilsson, Degland & Gerbe, Dresser & Sharpe etc.) part. (nec Linn.)

Berg. Mus. (♀ skudt ved Bergen 22 Oktober 1877 af Kjøbm. N. Schumann). 4de Haandsvingfjær længst, Nr. 3 = Nr. 4, 2den imellem 6te og 7de.

Hele Oversiden, Overgumpen indbefattet, rent askeblaa; Panden hvidagtig langs Næbranden; over Øiet en smal hvid Streg; de længste Skulderfjærs Spidser svagt smudsigt hvide. Undersiden hvid, Forbryst og Bryst med tydelige brungraa tværsløbende Bølgelinier i en indbyrdes Afstand af omtrent 3—4 mm; Aksillarfjærene graa. Fra Næbroden gjennem Øiet til bag Øretrakten et bredt sort Baand af intens Farve; over Øiet viser sig kun en fin sort Stribe, under samme er Baandet bredt, intetsteds afbrudt af hvidt. Vinger og Hale sorte med hvide Tegninger; Haandsvingfjærene ved Roden rent hvide, hvad der dog kun med Vanskelighed lader sig opdage paa Yderfanen af Nr. 1; herved opstaar en 10 mm lang hvid Plet paa paa de sammenlagte Vinger; Nr. 7—10 har ogsaa smale hvide Kanter i Spidsen; Armsvingfjærene rent sorte lige til Roden, men med hvide Spidser, der paa trediesidste er 5 mm paa det bredeste; paa Indfanen gaar, undtagen hos de to sidste, i den ydre Længdehalvdel den sorte Farve lidt efter lidt over i brunagtigt graat, der mod Roden blir lysere og skarpere begrænset. Første Par Halefjær har Indfanens Rodhalvdel (med Undtagelse af en liden hvid Plet ved Roden) saavelsom en smal Stribe i Udfanen langs Skaftet tilligemed dette selv i største Delen af dets Længde sort; paa de følgende Styrfjær aftager det hvide efterhaanden ind mod de midterste, saa at disse sidste kun har en ganske smal hvid Eg i Spidsen. Undre Vingedækfjær graa, de store undre Haanddækfjær mørkest. Næb og Ben sorte.

Næbbets Længde fra Pandeskillet i ret Linie til Overnæbbets Spids 17 mm, langs Næbryggen 19 mm; fra Næseborene til Overnæbbets Spids 13 mm; fra Mundvigerne til samme 24, til Undernæbbets Spids $22^1/_2$ mm; fra Hagevinkelen til samme 13 mm; Overnæbbets Høide ved Næseborenes Fremkant $5^1/_2$ mm; Vingerne 109 mm; Halen 108 mm; Tarsen 26 mm; Mellemtaa uden Klo 16 mm.

Berg. Latinsk. Saml. (Tvedestrand (?) 1877) 4de Haandsvingfjær længst, Nr. 3 næsten lig No. 4, længere end Nr. 5, 2den lig 6te.

Ligner ovenfor beskrevne Exemplar undtagen i følgende Punkter: Hele Undersiden er rent hvid uden mørke Bølgelinier; den hvide Vingeplet er et Par Millimeter længere; første Armsvingfjær har tæt ved Roden inde ved Skaftet en liden af Dækfjærene aldeles skjult hvid Plet i Udfanen; Armsvingfjærenes Rande i Spidsen kun ganske smalt kantede med brunagtigt graat; paa de fire yderste Par Styrfjær har det hvide en større Udbredelse baade i Spidsen og ved Roden end hos foregaaende, derimod er det mindre paa 5te Pars Spids, og mellemste Par mangler aldeles hvid Spids. Undernæbbet ved Roden blegt hornfarvet.

Næbbets Længde fra Pandeskillet i ret Linie til Overnæbbets Spids 16 mm; langs Næbryggen 18 mm; fra Næseborene til Overnæbbets Spids $12^1/_2$ mm; fra Mundvigerne til samme $24^1/_2$, til Undernæbbets Spids 23 mm; fra Hagevinkelen til samme 13 mm; Overnæbbets Høide ved Næseborenes Fremkant $5^1/_2$ mm; Vingerne 112 mm; Halen 113 mm; Tarsen 25 mm; Mellemtaa uden Klo 16 mm.

Det her beskrevne Individ er rimeligvis efter den rent hvide Underside at dømme en gammel ♂.

De ovenfor beskrevne Exemplarer har jeg sammenlignet med *Nr. 228 i min Samling.* Dette Specimen er fra Rusland og har ren hvid Underside uden Bølgelinier. Det stemmer saaledes i alt væsentligt med Latinskolens, kun er det hvide paa Halen af noget mindre Udstrækning; endelig — og det er det vigtigste — viser de 3 første Armsvingfjær svage Spor til hvide Pletter i Udfanen inde ved Roden.

Da vi altsaa her har med to Exemplarer med ren hvid Underside uden Bølgelinier, altsaa sandsynligvis gamle Hanner, at gjøre, og begge disse viser Spor til en skjult hvid Plet ved Roden af de første Armsvingfjær, medens det tredie Individ med bølgetegnet Underside aldeles mangler endog den ringeste Antydning til en saadan Plet, synes det at være urigtigt, naar Hr. V. v. Tschusi-Schmidhofen (Mitth. des Orn. Ver. in Wien 1878 p. 30) antager, at *major* i intet Tilfælde kan have Spor af hvidt ved Roden af Armsvingfjærene. Dette synes snarere at være individuel Variation underkastet. Sammesteds antyder v. Tschusi, at de gamle Individer af *major* har yderste Styrfjær næsten ganske hvid, og at jo yngre Fuglen er, desto mere sort findes paa første Par Styrfjær. Han antager imidlertid ligesom jeg den renhvide Underside for Tegn paa en gammel Fugl, men begge de ovenfor beskrevne har omtrent lige meget sort som hvidt paa titnævnte Fjær.

Som tidligere omtalt er *Lanius major* indtil 1873 blevet sammenblandet med andre Arter. Først og fornemmeligst med *Lanius excubitor*, med hvilken den imidlertid intet har at gjøre, og fra hvilken den let kan adskilles, dernæst ogsaa med den sydeuropæiske, nærstaaende *meridionalis* Temm. og den endnu nærmere beslægtede nordamerikanske *borealis* Vieill.

Begge disse Arter har nemlig enkelt Vingeflæk ligesom *major*. *L. meridionalis* lader sig dog meget let adskille ved den meget mørkere Overside, de graa Kropssider og den lyst vinrødt farvede Underside. Baade med denne Art og med den nærslægtede *L. algeriensis* Less., der har Undersiden omtrent af Ryggens Farve, har jeg havt Anledning til at sammenligne *major*, da jeg er saa heldig at besidde Exemplarer af begge Arter i min Samling. Den, som kan forvexle dem, har ikke seet dem ved Siden af hinanden.

Fra den nordamerikanske Art *L. borealis* Vieill, er *major* imidlertid vankeligere at skjelne. Et yngre Exemplar i Vinterdragt (*Coll. Stejneger Nr. 692*) fra Omegnen af New-York viser dog ikke ubetydelige Afvigelser. Oversidens graat er temmelig stærkt opblandet med brunt, Overgumpen kjendeligt lysere og renere farvet, Skulderfjærene gulagtigt anstrøgne. Det sorte Baand paa Hovedets Sider kun tydeligt paa og bag Øretrakten, medens Tøilerne, med Undtagelse af nogle faa men smaa mørktfarvede Fjær nærmest Øiet, er smudsigt hvide, ligesom der under Øiet findes en tydelig hvid Plet. Ogsaa de Næseborene dækkende Fjær er smudsigt hvide, ikke sorte som hos *major*, kun Vibrisserne har denne Farve. Undersiden er hvidlig med rødlig graat Anstrøg; paa Jugulum, Bryst og Kropssider brungraa Bølgelinier, der mangler paa Gula, Abdomen og Crissum. Vingespeilet er adskilligt mindre end hos de ovenfor beskrevne Exemplarer af *major;* 4de Haandsvingfjær længst, ubetydeligt længere end Nr. 3, der er længere end 5te; Nr. 2 mellem 6te og 7de. Næbbets Længde fra Pandeskillet i ret Linie til Overnæbbets Spids 17, langs Næbryggen 19 mm; fra Næseborene til Overnæbbets Spids 14 mm: fra Mundvigerne til samme 27, til Undernæbbets Spids $25^{1}/_{2}$ mm; fra Hagevinkelen til samme 13 mm; Overnæbbets Høide ved Næseborenes Fremkant $5^{1}/_{2}$ mm; Vingerne 112 mm; Halen 110 mm; Tarsen 24 mm; Melemtaa med Klo 15 mm.

Habitat. Pallas angiver *L. major's* geografiske Udbredning saaledes: «*In Rossia boreali, omnique Sibiriae frequens, circa Jeniseam et Lenam copiose occurrit,*» og i «Die Wirbelthiere Europa's» gjengiver Keyserling og Blasius dette med: «hyppig i det nordlige Rusland og Sibirien.» Før 1873 vidste man dog ikke om noget i Europa *nedlagt* Exemplar, i hvilket Aar Cabanis (Journ. f. Orn. 1873 P. 75) indfører den i den europæiske Ornis efter et Berlinermuseet tilhørende ved Volga nedlagt Exemplar. Et andet fra Rusland er, som ovenfor nævnt, i min Samling. I Journ. f. Orn. 1875 P. 232 omtales et i Brandenburg, i samme Blad 1876 P. 211 et i Staufen i Breisgau, sammesteds P. 222 et ved Bartelshagen i Vorpommern og i samme Blad 1877 P. 110 og P. 219 et paa Helgoland skudt Individ, ligesom Ber. über d. XXI Versammlung d. deutsch. Ornith. Gesellsch. zu Braunschweig 20—23 Mai 1875» P. 21 skal indeholde Beretning om en i Braunschweigs Omegn skudt Fugl af denne Art. Der kjendes altsaa fra Tyskland 5 Exemplarer. 2den December 1877 erholdt v. Tschusi-Schmidhofen en yngre Han ved Hallein i Salzburg (Mitth. d. Orn. Ver. Wien 1878 P. 30). Schalow omtaler (Journ. f. Orn. 1877 P. 200) et Exemplar, der angaves at være fra Omegnen af Mailand. Naar hertil føies de 2 Exemplarer, som Meves (Journ. f. Orn. 1875 P. 432) erholdt fra Stockholm og Vermland, og de 2, jeg i nærværende Opsats har beskrevet her fra Norge, er dermed opregnet de europæiske Exemplarer, om hvis Fangst noget er offentliggjort. Af Cabanis ansees Arten for en tilfældig Gjæst i Europa, men skulde min Formodning om dens stationære Forekomst som Rugefugle i det nordenfjeldske Norge stadfæste sig, vilde den blive at henføre til vor Verdensdels faste Beboere. Det skulde da rimeligvis vise sig, at Pallas's Angivelse «*in Rossia boreali frequens*» holder Stik, og at *Lanius major* er talrigere og mere udbredt i Europa end man hidtil har antaget. Jeg skal dog paa den anden Side ikke undlade at bemærke, at Hr. J. A. Palmén i Helsingfors i Brev har underrettet mig om, at den ikke forekommer i Finland, hvad man i saa Fald skulde ventet. I Øst-Asien antager Cabanis Artens sydlige Udbredning at begrænses af Altai- og Tangnu-Bjergene samt Amur.

Lanius excubitor Lin.

Syn. 1758 *Lanius excubitor* Lin. Syst. Nat. ed. X tom. 1 P. 94.

1816 *Lanius cinereus* Leach, Cat. M. and Birds. P. 19.

Syn. 1869 *Collyrio excubitor* Gray, Handl. of Birds I P. 390.

Da de svenske Beskrivelser, som sædvanligvis benyttes her i Landet, dels er ufuldstændige og tillader en Forvexling med *major* (Nilsson), dels lige til feilagtige (Holmgren), meddeler jeg nedenfor en udførligere Beskrivelse af et norsk Exemplar.

Berg. Mus. (Skudt ved Bergen d. 10 Oktbr. 1866 af Oberstløitn. Sommerfeldt). 3die Haandsvingfjær lige lang som 4de og længst; Nr. 2 lig 5te.

Hele Oversiden, Overgumpen indbefattet, rent askeblaa; Panden og en Streg over Øinene hvidagtige, Skulderfjærene ligesaa; fra Næbroden strækker sig et sort Baand gjennem og under Øiet over Øretrakten til bag denne. Hele Legemets Underside tilligemed Aksillarfjær og Hypokondrier rent hvide. Vinger og Hale sorte med hvide Tegninger; baade Haand- og Armsvingfjær er ved Roden hvide, men da denne Farve paa de første Armsvingfjær ikke strækker sig længere end Spidsen af de nærmeste store Haanddækfjær, opstaar ikke et sammenhængende hvidt Baand, men to adskilte store hvide Pletter, hvoraf den øverste i næsten sin hele Udstrækning ligger fremfor den underste; Armsvingfjærene i Spidsen kantede med hvidt, ligesom ogsaa deres store Dækfjær har hvidagtigt randede Spidser; 1ste Par Svingfjær rent hvide baade i Ind- og Udfane, ligesaa Skaftets Rod- og Spidstrediedel, medens dets midterste Parti er sort; 2det Par ligedan farvet, kun findes en større sort Plet paa Indfanens midtre Trediedel dog uden at naa Skaftet; paa 3die Par har det sorte udbredt sig, saa at Fjærenes Midtparti og største Del er sort baade i Ind- og Udfane, medens Roden og Spidsen i begge Faner er hvide; paa de følgende Fjær trænges det hvide, jo nærmere mellemste Par, desto længere hen mod Roden og Spidsen, saa at der paa dette kun findes en ganske liden Plet ved hver Ende; undre Vingedækfjær hvide, med Undtagelse af de store undre Haanddækfjær, der er brunagtigt graa. Næb mørkt brunfarvet, under ved Roden lysere; Ben sorte.

Angaaende Dimensionerne se Tabellen under *L. homeyeri.* Collett angiver Totallængden af 5 Exemplarer, maalte i frisk Tilstand, varierende mellem 250 og 265 mm (Nyt Mag. f. Naturv. 23 B. 1877 P. 114).

Sammenlignet med den i Mellemeuropa forekommende viser norske Exemplarer ingen væsentlig Forskjel.

Habitat. Medens man tidligere antog, at denne Art havde en temmelig vid Udbredelse, har de seneste Iagttagelser indskrænket dens Omraade til det mellemste Europa, idet den i Sydvesten af denne Verdensdel erstattes af *meridionalis*, i Sydøst af *homeyeri* og i Nord og Øst, som jeg tror, af *major*. Intetsteds forekommer den synderlig talrig, og dens Hyppighed aftager mod Grænserne af dens Omraade. Saaledes forekommer den kun sporadisk baade i Danmark og de sydlige Egne i Sverige og i Norge. Som oftere fremholdt tør Angivelserne om dens hyppigere Forekomst i Skandinaviens nordlige Egne[1]) rimeligvis gjælde *major.*

Til Slutning skal jeg give en Sammenligning af de væsentligste Karakterer, hvorved *Lanius major* lettest lader skjelne fra *excubitor.*

---

[1]) «Allmänn midt inne i Lappmarkerna,» Nilss. Sk. Fauna. Fogl. 3 ed. I P. 278; «hyppigst har den vist sig nordenfjelds, hvor den er truffet rugende paa flere Steder i Trondhjems Stift. . . . Mod Nord forekommer den endog i Østfinm., hvor den ruger i Tanaelvens Dalføre,» Collett, Norges Fugle, P. 12; «occurs most frequently in the alpine valleys between the Dovrefjeld and the Trondhjemsfjord,» Collett, Remarks etc. p. 12; «i Finmarken saa jeg denne Art paa flere Steder Sommeren 1876 ud til Elvenæs i Syd-Varanger,» Collett, Nyt Mag. f. Naturv. 23 B. 1877 P. 114.

Lanius excubitor Lin.	*Lanius major* Pall.
Haandsvingfjærene og Armsvingfjærene *ved Roden* hvide, hvorved opstaar to hvide Pletter paa de sammenlagte Vinger.	Haandsvingfjærene *ved Roden* hvide, Armsvingfjærene *ved Roden* sorte, hvorved opstaar kun en enkelt hvid Plet paa de sammenlagte Vinger.
Yderste Par Styrfjær rent hvide med Skaftets midtre Trediedel sort eller med en smal sort Stribe, der ikke naar Fjærkanten, paa begge Sider af Skaftets sortfarvede Del.	Yderste Par Styrfjær sorte, med Udfanen, Indfanens Spidshalvdel og en større eller mindre Flæk ved Roden af samme Høide.

Bergen 16de Juli 1878.

SÄTZE ÜBER MINIMALFLÄCHEN. III. UEBER DIE IN EINER ALGEBRAISCHEN DEVELOPPABLE EINGESCHRIEBENEN ALGEBRAISCHEN MINIMALFLÄCHEN.

VON

SOPHUS LIE.

In der vorangehenden Note fand ich durch synthetische Betrachtungen den merkwürdigen Satz, dass sich in eine *algebraische* Developpable, in die eine *algebraische* Minimalfläche eingeschrieben ist, *unendlichfach unendlich viele algebraische* Minimalflächen einschreiben lassen. Ich gab zugleich eine allerdings etwas complicirte Methode zur Bestimmung aller dieser Flächen.

In der nachstehenden Note gebe ich zunächst einen direkten analytischen Beweis des soeben besprochenen Satzes. Hieran schliesst sich eine elegante Construction der Berührungscurve der vorgelegten Developpable mit einer eingeschriebenen *algebraischen* Minimalfläche.

Indem ich hiermit die Ergebnisse meiner früheren Untersuchungen verbinde, erkenne ich, dass sich in die *Evolute einer algebraischen Raumcurve* immer unendlichfach unendlich viele algebraische Minimalflächen einschreiben lassen. Hiernach liegt die Vermuthung nah, dass jede um eine algebraische Minimalfläche umgeschriebene algebraische Developpable die Evolute einer algebraischen Raumcurve ist. Ich verificire indess an einem Beispiele, dass ein solcher Satz *nicht besteht.*

I.

Sei t ein Parameter, dessen verschiedene Werthe den verschiedenen Erzeugenden einer algebraischen Developpable zugeordnet sind. Seien X, Y, Z die Richtungscosinus der Normalen unserer Developpable. Da die zu den Punkten einer Erzeugende gehörigen Normalen parallel sind, so müssen X, Y, Z Funktionen von t allein sein.

Seien $\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$ die laufenden Punktcoordinaten der Berührungscurve unserer Developpable mit einer eingeschriebenen algebraischen Minimalfläche. Ebenso seien $\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2$ die laufenden Punktcoordinaten der Berührungscurve einer anderen eingeschriebenen Minimalfläche. Dabei sind sowohl $\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$ wie $\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2$ Funktionen von t.

Unsere Voraussetzung, dass die erste Minimalfläche die wir als *gegeben* betrachten, algebraisch ist, kommt darauf hinaus, dass die drei Integrale

$$\int (Z\,d\eta_1 - Y\,d\zeta_1)$$

$$\int (X\,d\zeta_1 - Z\,d\xi_1)$$

$$\int (Y\,d\xi_1 - X\,d\eta_1)$$

algebraische Funktionen von t sind. Und die Forderung, dass auch die zweite Minimalfläche, die wir als *unbekannt* betrachten, algebraisch sein soll, kommt darauf hinaus, dass auch die drei Integrale

$$\int (Z\,d\eta_2 - Y\,d\zeta_2)$$

$$\int (X\,d\zeta_2 - Z\,d\xi_2)$$

$$\int (Y\,d\xi_2 - X\,d\eta_2)$$

algebraische Funktionen von t sein sollen. Diese Forderung ist aber, wenn wir

$$\xi_2 - \xi_1 = x_2, \quad \eta_2 - \eta_1 = y_2, \quad \zeta_2 - \zeta_1 = z_2,$$

setzen und darnach $x_2\, y_2\, z_2$ als unbekannte Grössen anstatt $\xi_2\, \eta_2\, \zeta_2$ einführen, mit der Forderung aequivalent, dass die drei Integrale

$$\begin{aligned} &\int (Z\,dy_2 - Y\,dz_2) \\ &\int (X\,dz_2 - Z\,dx_2) \\ &\int (Y\,dx_2 - X\,dy_2) \end{aligned} \tag{1}$$

algebraische Funktionen von t sein sollen.

Es ist

$$X\,d\xi_1 + Y\,d\eta_1 + Z\,d\zeta_1 = 0,$$
$$X\,d\xi_2 + Y\,d\eta_2 + Z\,d\zeta_2 = 0,$$

woraus folgt

$$X\,dx_2 + Y\,dy_2 + Z\,dz_2 = 0.$$

Es ist ferner

$$X(\xi_2 - \xi_1) + Y(\eta_2 - \eta_1) + Z(\zeta_2 - \zeta_1) = 0,$$

indem $\xi_2 - \xi_1$, $\eta_2 - \eta_1$, $\zeta_2 - \zeta_1$ mit den Richtungscosinus der Erzeugenden proportional sind, und also kommt

$$X x_2 + Y y_2 + Z z_2 = 0.$$

Endlich sind die Richtungscosinus der Erzeugenden durch eine Relation

$$f\left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{\zeta_2 - \zeta_1}\ \frac{\eta_2 - \eta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}\right) = 0$$

verknüpft, und daher sind die Verhältnisse der Grössen $x_2\, y_2\, z_2$ durch die entsprechende Gleichung

$$f\left(\frac{x_2}{z_2}\ \frac{y_2}{z_2}\right) = 0$$

verbunden.

Unser Problem nimmt somit durch Einführung der Grössen $x_2\, y_2\, z_2$ als unbekannte Grössen die folgende Gestalt:

Man soll drei Grössen $x_2\, y_2\, z_2$, deren Verhältnisse durch eine vorgelegte algebraische Relation verbunden sind, in allgemeinster Weise als algebraische Funktionen einer Hülf-Variable bestimmen derart, dass die drei Integrale (1) in denen $X\; Y\; Z$ durch die Gleichungen

$$X x_2 + Y y_2 + Z z_2 = 0,$$
$$X dx_2 + Y dy_2 + Z dz_2 = 0,$$
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

bestimmt sind, algebraische Funktionen der Hülf-Variable werden.

Nach den Entwickelungen meiner letzten Note kann aber diese Aufgabe auch folgendermassen formulirt werden.

Vorgelegt ist ein algebraischer Kegel

$$f\left(\frac{x}{z}\,\frac{y}{z}\right) = 0.$$

Man soll in allgemeinster Weise eine auf dem Kegel gelegene Curve $x_2\, y_2\, z_2$ bestimmen, derart dass die Minimalfläche, die den Kegel nach dieser Curve berührt, algebraisch wird.

Und da diese letzte Aufgabe eben in meiner letzten Note erledigt wurde, so ist auch die in dieser Note gestellte Aufgabe als erledigt zu betrachten. Dies giebt durch eine einfache Ueberlegung den folgenden Satz:

Satz 1. *Ist eine algebraische Developpable und eine eingeschriebene algebraische Minimalfläche vorgelegt, so findet man folgendermassen beliebig viele eingeschriebene algebraische Minimalflächen. Man nimmt eine algebraische Raumcurve, deren Normalebenen mit den Tangentenebenen der Developpable parallel sind. Sodann bestimmt man auf jeder Erzeugende der Developpable einen Punkt p, dessen Distanz von dem Berührungspunkte der Erzeugende mit der gegebenen Minimalfläche* *gleich ist dem Krümmungsradius der Raumcurve in demjenigen Punkte, dessen Normalebene parallel mit der Tangentenebene längs der betreffenden Erzeugende ist. Diejenige Minimalfläche, die die Developpable in allen Punkten p berührt, ist algebraisch; und in dieser Weise werden alle derartigen Flächen erhalten.*

II.

In meiner ersten Note zeigte ich, dass die Minimalfläche, die die Evolute einer algebraischen Raumcurve nach dem Orte der Krümmungs-Mittelpunkte berührt, algebraisch ist. Hieraus ergiebt sich nach dem Vorangehenden der Satz:

Satz 2. *In der Evolute einer algebraischen Raumcurve können unendlichfach unendlich viele algebraische Minimalflächen eingeschrieben werden.*

Um eine solche zu finden benutzt man (vergl. Satz I) als Hülfcurve eine beliebige Raumcurve, deren Tangenten paarweise mit den Tangenten der vorgelegten Raumcurve parallel sind. Wählt man insbesondere als Hülfcurve eine Curve, die mit der vorgelegten *aehnlich* und gleichgestellt ist, so erhält man diejenigen in meiner ersten Note betrachteten Minimalflächen, die die Evolute nach geodätischen Fusspunktcurven der Rückkehrkante berühren.

Ist eine Developpable die Evolute einer algebraischen Raumcurve, so enthält sie bekanntlich zwei algebraische Minimalcurven. Enthält auf der anderen Seite eine reelle Developpable *eine* und in Folge dessen *zwei algebraische* Minimalcurven, so ist sie die Evolute einer algebraichen Raumcurve.

Daher kann der letzte Satz auch folgendermassen formulirt werden.

Satz 3. *Enthält eine reelle algebraische Developpable eine und in Folge dessen zwei algebraische Minimalcurven, so giebt es unendlichfach unendlich viele algebraische Minimalflächen, die in die Developpable eingeschrieben sind.*

Erinnert man, dass eine Minimalcurve, als Ebenengebilde aufgefasst, eine Minimalfläche ist, so erkennt man, dass der letzte Satz eine unmittelbare Consequenz vom Satze I ist.

III.

Die Entwickelungen der vorangehenden Nummer führen leicht auf die Vermuthung, dass jede um eine algebraische Minimalfläche umgeschriebene algebraische Developpable eine algebraische Minimalcurve[1]) enthält, und somit die Evolute einer algebraischen Raumcurve ist.[2]) Um zu entscheiden, ob diese Vermuthung richtig ist, werde ich die Minimalcurven einer um eine Minimalfläche umgeschriebene Developpable bestimmen.

Sei also vorgelegt eine algebraische Minimalfläche und eine umgeschriebene algebraische Developpable. Ich bezeichne mit $x\ y\ z$ die laufenden Punktcoordinaten der Berührungscurve, mit $x'\ y'\ z'$ die laufenden Punktcoordinaten der Developpable, mit $\lambda\ \mu\ \nu$ die Richtungscosinus einer Erzeugende der Developpable, mit $X\ Y\ Z$ die Richtungscosinus einer Ebene der Developpable, mit ρ den Distanz eines Punkt $x\,y\,z$ von einem auf der hindurchgehenden Erzeugende gelegenen Punkte $x'\ y'\ z'$, mit $d\varphi$ den Winkel zwischen zwei benachbarten Erzeugenden.

Das Bogenelement

$$dS' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$$

wird, wie man leicht findet, bestimmt durch die Gleichung

$$dS'^2 = [d\rho \pm (\lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz)]^2$$
$$+ \left[\rho\, d\varphi + \sqrt{dS^2 - (\lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz)^2}\right]^2,$$

wo

[1]) Die Schnittcurve einer Fläche mit der unendlich entfernten Ebene ist eine Minimalcurve. Von dieser evidenten Minimalcurve wird im Texte weggesehen.

[2]) *Henneberg* hat bekanntlich gefunden, dass die Evoluten der ebenen algebraischen Curven die einzigen *Cylinderflächen* liefern, in denen sich algebraische Minimalflächen einschreiben lassen.

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dS^2$$

gesetzt ist. Die auf unserer Developpable gelegenen Minimalcurven sind daher bestimmt durch die lineare Differential-Gleichung

$$d\rho \pm (\lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz) + i\rho\, d\varphi + i\sqrt{dS^2 - (\lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz)^2} = 0,$$

die wir jetzt durch Einführung von zweckmässigen unabhängigen Variabeln auf eine einfache bemerkenswerthe Form bringen werden.

Unsere Minimalfläche ist bestimmt durch die Differential-Gleichungen

$$dx = (1 - s^2)\, F'''(s)\, ds + (1 - \sigma^2)\, \Phi'''(\sigma)\, d\sigma,$$

$$dy = i(1 + s^2)\, F'''(s)\, ds + i(1 + \sigma^2)\, \Phi'''(\sigma)\, d\sigma,$$

$$dz = 2s\, F'''(s)\, ds + 2\sigma\, \Phi'''(\sigma)\, d\sigma;$$

ferner ist

$$X\, dx + Y\, dy + Z\, dz = 0,$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

daher findet man durch eine einfache Rechnung, dass

$$X = \frac{1 - s\sigma}{s - \sigma},$$

$$Y = i\,\frac{1 + s\sigma}{s - \sigma},$$

$$Z = \frac{s + \sigma}{s - \sigma}$$

ist, und dass in Folge dessen

$$s = \frac{Z + 1}{X - iY},$$

$$\sigma = \frac{Z - 1}{X - iY}$$

ist.

Längs der Berührungscurve sind s und σ verbunden durch eine Relation, die σ als Funktion von s bestimmt. Giebt man daher s einen bestimmten Werth, so erhält man einen bestimmten Punkt $x\ y\ z$ der Berührungscurve, und zugleich eine bestimmte hindurchgehende Erzeugende. Giebt man darnach ρ einen bestimmten Werth, so erhält man einen bestimmten Punkt der betreffenden Erzeugende. Man kann daher $x'\ y'\ z'$ als Funktionen von s und ρ auffassen, und da nach den Vorangehenden $x, y, z, \lambda, \mu, \nu, X, Y, Z, d\varphi$ Funktionen von s und ds sind, so können wir die Grössen s und ρ als unabhängige Variablen in die Differential-Gleichung der gesuchten Minimalcurven einführen.

Es ist

$$dX = \frac{-(1-\sigma^2)\,ds + (1-s^2)\,d\sigma}{(s-\sigma)^2},$$

$$dY = i\,\frac{-(1+\sigma^2)\,ds + (1+s^2)\,d\sigma}{(s-\sigma)^2},$$

$$dZ = \frac{-2\sigma\,ds + 2s\,d\sigma}{(s-\sigma)^2};$$

ferner ist

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0,$$

$$\lambda\,dX + \mu\,dY + \nu\,dZ = 0,$$

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

also kommt

$$\lambda = i\,\frac{(1-\sigma^2)\,ds + (1-s^2)\,d\sigma}{2(s-\sigma)\sqrt{ds\,d\sigma}}$$

$$\mu = \frac{-(1+\sigma^2)\,ds - (1+s^2)\,d\sigma}{2(s-\sigma)\sqrt{ds\,d\sigma}},$$

$$\nu = i\,\frac{2\sigma\,ds + 2s\,d\sigma}{2(s-\sigma)\sqrt{ds\,d\sigma}}.$$

Durch Einsetzung findet man

$$\lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz = -i\frac{(s-\sigma)(F'''\, ds^2 + \Phi'''\, d\sigma^2)}{\sqrt{ds\, d\sigma}},$$

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = -4(s-\sigma)^2 F'''\, \Phi'''\, ds\, d\sigma,$$

$$\sqrt{dS^2 - (\lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz)^2} = \pm\frac{(F'''\, ds^2 - \Phi'''\, d\sigma^2)(s-\sigma)}{\sqrt{ds\, d\sigma}}.$$

Endlich muss man auch die Grösse

$$d\varphi = \sqrt{(\mu\, d\lambda - \lambda\, d\mu)^2 + (\nu\, d\mu - \mu\, d\nu)^2 + (\lambda\, d\nu - \nu\, d\lambda)^2}$$

berechnen. Es ist

$$\frac{\mu\, d\lambda - \lambda\, d\mu}{Z} = \frac{\nu\, d\mu - \mu\, d\nu}{X} = \frac{\lambda\, d\nu - \nu\, d\lambda}{Y} = d\varphi$$

und

$$\mu\, d\lambda - \lambda\, d\mu = \frac{1}{i}\frac{s+\sigma}{(s-\sigma)^2}\left[-d(s+\sigma) + \frac{s-\sigma}{2}\frac{d\sigma}{ds}\, d\frac{ds}{d\sigma}\right]$$

also kommt

$$d\varphi = i\left[-\frac{d(s+\sigma)}{s-\sigma} + \frac{1}{2}\frac{d\sigma}{ds}\, d\frac{ds}{d\sigma}\right]$$

Durch Einsetzung der gefundenen Werthe nimmt die Differential-Gleichung der gesuchten Minimalcurven die Gestalt

$$d\rho \pm \frac{2i(s-\sigma)F'''}{\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}}}\, ds + \rho\left[\frac{d(s+\sigma)}{s-\sigma} + \frac{d\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}}}{\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}}}\right]$$

oder durch Multiplication mit $\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}}$:

$$d\left(\rho\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}}\right) + 2i(s-\sigma)\, F'''\, ds + \rho\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}}\cdot\frac{d(s+\sigma)}{s-\sigma} = 0,$$

und wenn man setzt

$$\rho\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}} = u,$$

kommt die einfache Gleichung

$$du + u\frac{d(s+\sigma)}{s-\sigma} + 2i\,F'''.(s-\sigma)\,ds = 0,$$

deren Integral ist

$$u = e^{\int\frac{d(s+\sigma)}{s-\sigma}}\left\{C + 2i\int(s-\sigma)\,F'''\,e^{\int\frac{d(s+\sigma)}{s-\sigma}}\,ds\right\}.$$

Diese Gleichung bestimmt die auf der Developpable gelegenen Minimalcurven der einen Schaar. Um die Minimalcurven der zweiten Schaar zu erhalten, braucht man nur $F'''(s)$ mit $\Phi'''(\sigma)$ und s mit σ zu vertauschen. Es ist auffallend, dass $F(s)$ nur in der Gleichung der ersten Schaar, $\Phi(\sigma)$ nur in der Gleichung der zweiten Schaar vorkommt.

Ich werde jetzt ein specielles Beispiel betrachten. Ich setze voraus, dass die Ebenen der umgeschriebenen Developpable constanten Winkel mit der z-Axe bilden; dass also

$$Z = \text{Const},$$

das heisst

$$\frac{s+\sigma}{s-\sigma} = \text{Const}$$

ist. Unsere Annahme kommt darauf hinaus, dass

$$\sigma = \lambda s$$

ist, wo λ eine Constante bezeichnet. Ich setze ferner

$$F(s) = \frac{-\frac{1}{6}}{s-a},\ \lambda = \tfrac{1}{2};$$

alsdann sind die Minimalcurven der einen Schaar bestimmt durch eine Gleichung von der Form

$$u = \frac{4ia}{s^3}\log(s-a) + A(s),$$

wo $A(s)$ eine *algebraische* Funktion von s und dem Parameter C bezeichnet.

In dem speciellen von uns betrachteten Falle enthält daher die betreffende Developpable keine im endlichen Raume gelegene algebraische Minimalcurve.

Hiermit ist, wenn ich nicht irre, der folgende Satz erwiesen:

Satz 4. Die Evoluten von algebraischen Raumcurven sind nicht die einzigen Developpablen, in denen sich unendlichfach unendlich viele algebraische Minimalflächen einschreiben lassen.

Indem ich schliesse erlaube ich mir die folgende Aufgabe zu stellen:

Problem. Wie entscheidet man, ob sich in eine vorgelegte algebraische Developpable algebraische Minimalflächen einschreiben lassen.

Hier möge endlich noch die beiden folgende Corollaren unserer früheren Sätze ausdrücklich ausgesprochen werden.

a) In eine algebraische Developpable, die eine *ebene* Krümmungslinie besitzt, lassen sich unendlichfach unendlich viele algebraische Minimalflächen einschreiben, wenn die besprochene Krümmungslinie die Evolute einer ebenen algebraischen Curve ist.

b) Enthält eine Cylinderfläche eine algebraische geodätische Curve, die nicht eben ist, so ist die Developpable dieser Curve um unendlich viele algebraische Minimalflächen umgeschrieben.

Ich nehme zwei Raumcurven, deren Tangenten parallel sind. Ich construire eine Minimalfläche, die in der Evolute der ersten Curve eingeschrieben ist, indem ich nach den früheren Regeln die zweite Curve als Hülfcurve benutze. Darnach construire ich eine zweite Minimalfläche, die in der Developpable der zweiten Curve eingeschrieben ist, indem ich dabei die erste Curve als Hülfcurve benutze. Die beiden Minimalflächen, die man in dieser Weise erhält, sind *Bonnetschen* Biegungsflächen.

Juni 1878.

ANATOMIE VON LEANIRA TETRAGONA.

VON

G. ARMAUER HANSEN.

Man kann bei diesem Thiere ganz gut 2 oder sogar 3 verschiedene Körpertheile unterscheiden, die theils durch den in jedem enthaltenen Abschnitt des Verdauungskanals theils durch die Anordnung der Muskulatur von einander geschieden sind. Oeffnet man das Thier von Rücken so findet man (T. 1, fig. 1) vom Mundsegment bis Ende des 8ten Segmentes die Rüsselröhre (Rr. in der Figur durch Dehnung etwas vorwärts gezogen); von hier bis zum 27ten Segmente liegt im eingezogenen Zustande der kräftige Rüssel (R). Das Hinterende des Rüssels ist in den Anfangstheil des Darmes eingestülpt. Am 21ten Segmente befindet sich aber ein kräftiges Dissepiment und hinter demselben fangen die Blindanhänge des Darms an, während der eingestülpte Darmtheil ohne Anhänge ist. Es scheint somit natürlicher die Grenze zwischen Vorder- und Hinterkörper nicht am hinteren Ende des Rüssels zu suchen, sondern am Dissepiment am 21ten Segmente. Auswendig hebt sich der Vorderkörper auch hervor, indem der Rüssel hindurchscheint und auch den Rücken des Thieres hier stärker hervorwölbt.

Die Muskulatur ist im Grossen in allen Segmenten gleich angeordnet; die Anordnung erleidet doch im Vorderkörper einige Modificationen. Man hat wie gewöhnlich bei den Anneliden zwei Längsmuskel am Rücken und zwei am Bauche, die kontinuirlich von Segment zu Segment hinziehen. In jedem Segmente giebt es auch jederseits ein Bündel radiärer Muskel (mr), die von der Scheide des Bauchstranges ausgehend hinter jedem Dissepiment fächerartig ausgebreitet zu den Seitenwänden des Körpers hinlaufen (T. IV, Fig. 1 mr). Die oberen Bündel befestigen sich an der Grenze zwischen je zwei Segmente dicht hinter dem Dissepimente an die Cuticula, die mittleren Bündel gehen in die Füsse hinein um sich an deren Wänden auszubreiten, während die unteren sich an der Basis des Fusses befestigen (mr). Die Radiärmuskeln entspringen im Hinterkörper dicht an einander in der Mittellinie mit breiter flächenförmiger Basis und decken daher fast vollständig den Bauchstrang um sich erst im weiteren Verlaufe über einander zu ordnen; im hinteren Theile des Vorderkörpers weichen die Ursprünge so weit aus einander (T I, Fig. 1 mr,), dass der Bauchstrang mit seiner Scheide ganz unbedeckt bleibt; in den 8 vorderen Segmenten aber rücken die Muskelursprünge wieder so nahe an einander, dass der Bauchstrang hier vollständiger gedeckt ist als im Hinterkörper (T. 1, Fig. 1, mr.) Die Längemuskeln des Rückens weichen ganz vorne aus einander in zwei Bündel, die den dorsalen Vorziehmuskel der Rüsselröhre zwischen sich aufnehmen, (T. 1, Fig. 1, mpd.) und befestigen sich mit dem grössten Theil ihrer Fasern am hinteren Kopfumfang, während andere Bündel in die Anhänge des Kopfes- und des Mundsegmentes hinauslaufen. Die Bauchmuskeln biegen zum grossen Theil in die unteren Vorziehmuskeln der Rüsselröhre um (T. II, Fig. 5 mp. v.) und befestigen sich sonst in flacher Ausbreitung am Mundsegment.

Die Perivisceralhöhle ist von einer im Alcohol zum geringsten Theil gerinnenden Flüssigkeit erfüllt, die nur wenige kleine, runde Körperchen enthält. Die Höhle streckt sich sowohl in die cirrenähnlichen Rückenanhänge, wie in die Füsse hinein. Vorne streckt sich das Coelom auch in die gemeinschaftliche Basis der Fühlercirren (T. II, Fig. 1, 3 F.) und in die Palpen (T. II, Fig. 1 & 3 Cl.) hinein sowie als ein schmaler Spalt aufwärts hinter dem Gehirn (T. II, Fig. 1 b., Cl.). Das Coelom ist überall von einer ziemlich derben Membran begrenzt, welche auch die Dissepimente bildet. Diese bilden im Hinterkörper wie es scheint vollständige Querwände (T. IV, Fig. 1), die oben den Darm an den dorsalen Längsmuskeln befestigen (dsp.), und unter dem Darm eine quere Wand bilden, in der oben ziemlich kräftige, unten nur vereinzelte aus 3 bis 5 Fibrillen zusammengesetzte Muskelbündel von der einen zur anderen Seitenwand des Körpers verlaufen. Im Vorderkörper gestalten sich die Verhältnisse anders. An der Umbiegestelle des vom Rüssel eingestülpten Darmanfanges befindet sich, wie schon erwähnt, ein sehr starkes Dissepiment, das die Grenze zwischen Vorder- und Hinterkörper bildet. Von derselben Umbiegestelle und von der Fläche des eingestülpten Darmtheiles gehen schmale Bindegewebsbündel, die Muskelfaser enthalten, vorwärts bis an das 12te Segment und befestigen sich an der Grenze zwischen je zwei Segmente (T. I, dsp,). Disse Bindegewebsbündel müssen als rudimentäre Dissepimente aufgefasst werden. Weitere rudimentäre Dissepimente findet man an der unteren Wand der Leibeshöhle als kleine Falten am vorderen Rande jedes transversellen Muskelbünbels (dsp. ,,). Im vordersten Theil sind diese rudimentären Dissepimente grösser (dsp. ,,,) und stehen an den Seiten in Verbindung mit grossen muskulösen Säcken (v. ?), die wahrscheinlich nichts anderes sind als Gefässerweiterungen. Endlich giebt es ein eigenes Rüsseldissepiment. Der Rüssel ist von einer losen bindegewebigen Scheide, Fortsetzung der Peritonäalbekleidung des Darmes, eingeschlossen, die vom Vorderende des Rüssels sich ablöst, die Rüsselröhre als ein Trichter umgiebt und mit seinem Rande an der Leibeswand ringsum befestigt ist (Rdp.).

Gefässe. Im Hinterkörper giebt es ein Rücken- und ein Bauchgefäss (T. IV. Fig. 1, vd. vv.) das erstere dicht an der oberen Darmwand hinlaufend, das letztere etwas über den Bauchstrang von den Dissepimenten, die es durchbohrt, in situ gehalten. Das Bauchgefäss schickt in jedem Dissepiment jederseits einen Ast aus und aufwärts ab, dessen weiterem Vorlaufe ich nicht habe folgen können. Wo der eigentliche Darm vorne aufhört, biegt das Rückengefäss rechts, das Bauchgefäss links ab, um den äusseren Rändern der Rückenmuskeln entlang vorwärts zu laufen (T. I, Fig. 1, vd. vv.). Am achten Dissepimente stossen die Gefässe an die oben erwähnten muskulösen Säcke, in welche sie wahrscheinlich einmünden. Wie die Gefässe sich weiter nach vorne verhalten, habe ich nicht ausfinden können, da dieselben sehr dünn sind, und farbloses Blut führen; ob das Rückengefäss an den Darm Aeste schickt, habe ich auch nicht entscheiden können.

Die das Coelom begrenzende Membran oder das Peritonäum ist eine dünne, fein gestrichelte Membran, in welcher überall Kerne liegen. Die Kerne sind zum Theil scheinbar nackt, zum Theil von mehr oder weniger Protoplasma umgeben. Das Protoplasma ist nur wenig scharf begrenzt, verliert sich in schwache Züge der Strichelung der Membran parallel (T. X, Fig. 8). An gewissen Stellen wird das Protoplasma mächtiger, erhebt sich über das Niveau der Membran und ist mit langen Flimmerhaaren besetzt (T. IV, Fig. 4). Dieses ist besonders der Fall in den cirrenähnlichen Rückenanhängen, in den Füssen, an den Dissepimenten in der Umgebung der inneren Oeffnungen der Segmentalorgane und an der Rüsselscheide und dem Rüsseldissepiment. Die Anordnung der Flimmerzellen entspricht an der Rüsselscheide der Anordnung der in derselben verlaufenden Muskelfaser; wo die Scheide sich ganz hinten vom Rüssel abhebt, liegen in derselben vier fächerförmig ausgebreitete Muskelbündel, die in ein Netz von ineinander geschlungenen jungen Muskelzellen übergehen (T. VII, Fig. 1), und entsprechend der Ausbreitung dieser Muskel ist die Membran mit Flimmerzellen besetzt. Ganz dasselbe Verhältniss findet man am Rüsseldissepiment, nur dass hier die Anordnung keine so regelmässige ist. An einigen Stellen haben die Zellen des Peritonäums eine epithelartige Anordnung, nehmlich auf der Adventitia des Bauchgefässes (T. 17, Fig. 10), und auf den Wänden der spaltförmigen Verlängerung des Coeloms hinter dem Gehirn. Die Muskelfibrillen, die im Peritonäum (in den Dissepimenten) verlaufen, sind wie in den Muskeln sonst flache Faser; ein Unterschied im Baue der Muskelfaser findet sich nur insofern, dass, je mächtiger die Muskel sind, desto breiter sind die Faser. Dieselben besitzen eine feine Strichelung, die meistens der Längsrichtung der Fasern parallel geht, nur ausnahmsweise eine schräge Richtung hat. Kerne in den Fasern zu entdecken, ist sehr schwer; man sieht zwar viele Kerne, wenn man einen Muskelbündel untersucht; ob aber dieselben den Muskelfasern oder dem überall zwischen demselben vorhandenen Bindegewebe gehören, ist es fast unmöglich zu unterscheiden; wahrscheinlich sind ein Theil der Kerne periferisch gelegene Muskelkerne, was man aus dem Baue junger Muskelfaser schliessen darf. An solchen sieht man nehmlich sehr gut, dass die faserige oder gestrichelte Muskelsubstanz an der einen Seite der Zelle gebildet wird. (T. VII, Fig. 2).

An der Innenfläche der Rückenmuskeln des Vorderkörpers sieht man mit der Loupe eine feine longitudinale Streifung und ausserdem bei jedem Segment einen dickeren, querlaufenden, weisslichen Streifen, der vom Gefässe auszugehen scheint. Nimmt man hier ein Stück des Peritonäums ab und untersucht bei stärkerer Vergrösserung, sieht man, wie in T, VII, Fig. 3 dargestellt, parallele Züge von längslaufenden, dunkeln Streifen und Querzüge, die Aeste in die Längszüge hineinschicken. Die grossen Querzüge können bis an das Gefäss verfolgt werden; sie theilen sich vielfach und enden zuletzt in ein Maschenwerk, demjenigen ähnlich, das oben von der Rüsselscheide beschrieben wurde. Diese Streifen bestehen ausschliesslich aus langen Zellen (T. VII, Fig. 4); das Gefäss ist von einer Scheide solcher Zellen eingeschlossen, und von dieser Scheide gehen in regelmässigen Abständen die gröberen Querzüge ab. Diese Zellen bin ich, wegen ihrer Aehnlichkeit mit den an der Rüsselscheide vorgefundenen jungen Muskelzellen geneigt, als solche anzusehen, die vielleicht dazu dienen, diesen Theil des Peritonäums, der bei Ein- und Ausstülpung des Rüssels starke Dehnungen und Verkürzungen erleiden muss, in Spannung zu erhalten. Nach vorne verdickt sich das Peritonäum an der Rückenfläche ganz bedeutend; erstens bildet es einen Sehnenring an der Stelle, wo der Rückenmuskel in die zwei Bäuche sich theilt, die den dorsalen Protractor der Rüsselröhre zwischen sich aufnehmen (T. I, Fig. 1 mpd.). Weiter nach vorne hinter dem Kopfe bildet es einen dicken Polster zwischen den an einander stossenden Rändern der beiden Rückenmuskeln und begrenzt nach hinten und unten die spaltförmige Verlängerung des Coeloms hinter dem Gehirn und geht schliesslich als ein mehrschichtiges Bindegewebe in die Palpen hinaus (T. II, Fig. 3 Pt.).

Der Verdauungskanal fängt vorne an mit der Rüsselröhre, ein weiter Schlauch, dessen Endtheil im eingezogenen Zustande in den Rüssel eingestülpt ist (T. II, Fig. 5). Am Vorderende ist dieselbe von einer mächtigen Schicht von Ringmuskeln umgeben, die nach hinten immer düuner wird, und hier von den Längsmuskeln auswendig gedeckt wird. Diese lösen sich am vorderen Drittheil ab und gehen als Protraktoren an die obere und untere Leibeswand (T. II, Fig. 5, mpd. mpv. & mpv.,). Diese Protractoren werden bei ausgestülptem Rüssel als Retractoren fungiren. Nach innen ist die Röhre von einer Fortsetzung der äusseren Chitinhaut bekleidet, unter welcher sich eine Lage von grünlich gefärbten Hypodermzellen befindet. Hinter der Röhre kommt der Rüssel, der im eingezogenen Zustande von den Seiten flachgedrückt ist mit einer oberen und unteren ziemlich scharfen Kante (T. VI, Fig. 4). Der ausgestülpte Rüssel aber ist von oben nach unten flachgedrückt und am vorderen Ende mit ca. 24 Papillen versehen (T. VI, Fig. 1

und 2), und zeigt hinter demselben eine Anschwellung von den Kiefern herrührend. Diese stehen im ausgestülpten Rüssel zwei oben und zwei unten dicht aneinander (T. VI. Fig. 2); im eingezogenen liegen sie weiter aus einander und an den Seitenwänden; ihre Form ist aus der Fig. 3 T. VI ersichtlich. Die Anordnung der Muskulatur des Rüssels sieht man an der Fig 7, T. VI, die einem Längenschnitte entnommen ist. Sie besteht aus Reihen von perpendikulär gegen die innere und äussere Fläche gerichteten kräftigen Muskelbändern (Fig. 7 a), die jede den ganzen Umfang des Rüssels einnehmen, und andererseits von circulären Bündeln (Fig. 7, b, b, b,) die zwischen jenen verlaufen. An der Mitte des Rüssels sind diese Circulärbündel von weniger Stärke, füllen nur die äussere Hälfte des Raumes zwischen zwei Radiärmuskelbündeln aus; die innere Hälfte dieses Raumes ist an Alcoholpräparaten leer, und wird im Leben wahrscheinlich von Flüssigkeit erfüllt sein. Gegen beide Enden des Rüssels nehmen die Circulärmuskeln an Mächtigkeit zu, so dass sie hier den ganzen Raum zwischen je zwei Radiärmuskelbündeln ausfüllen; am Vorderende ist die Anordnung der Muskelfaser dadurch complicirter, dass theils radiäre theils circuläre Bündel sich an den Kiefern befestigen. Die Muskulatur des Rüssels ist sowohl nach aussen wie nach innen von einer Fascie begrenzt (T. VI, Fig. 7 c, d). Die äussere Fascie besteht aus zwei Schichten, von denen die äussere longitudinal, die innere transversal gestrichelt ist und zwischen beiden sieht man hie und da bei glücklicher Färbung der Präparate anastomosirende verästelte Zellen (T. VII, Fig. 5). Die innere Fascie scheint vollständig homogen und structurlos zu sein. Die Innenfläche des Rüssels ist von einer derben Chitinhaut bekleidet, unter welcher eine grüngefärbte Matrix sich findet. An der Rüsselröhre gehen zwei seitliche Nervenstämme, die vom Schlundring entspringen, nach hinten zwischen Hypoderm und Mulkulatur eingelagert. Wo der Rüssel anfängt, theilt sich jeder der Nervenstämme in zwei Aeste, und am Rüssel laufen also 4 Nerven nach hinten. Die Nerven liegen auf der inneren Muskelfascie wie eingegraben im Hypoderm (T. VI, Fig. 4 & 7, n). Auf Längsschnitten des Rüssels sieht man im Hypoderm in regelmässigen Abständen Ansamlungen von Rundzellen (T. VI, Fig. 7, e), die an einigen Stellen an einen die Chitinhaut durchbohrenden Kanal reichen (Fig. 7 e). An Flächenpräparaten des Hypoderms sieht man diese Zellenanhäufungen in circulär angeordneten Reihen; und präparirt man endlich mit Nadeln einer der Nerven eine Strecke weit heraus, bekommt man den Nervenstamm mit seitlich abgehenden Zweigen frei und an diesen Zweigen hängen Theile von den Rundzellenanhäufungen fest. Eine von den Zellen in jedem Klumpen ist immer ziemlich gross (T. VI, Fig. 8). Wahrscheinlich stehen also diese Zellenklumpen mit Nervenästen im Zusammenhang; ob aber dieselben eigenthümliche Nervenendorgane oder Drüsen sind, das zu entscheiden habe ich nicht hinlänglich deutliche Bilder erhalten. Das übrige Hypoderm besteht aus einer streifigen Masse, die Streifen von ziemlich dicken, starren Fasern gebildet, die einerseits mit der Chitinhaut, andererseits mit der Muskelfascie fest verwachsen sind, und zwischen diesen Fasern ist ein körniges kernführendes Protoplasma eingelagert, in dem keine bestimmten Zellgränzen zu entdecken sind (T. VI, Fig. 5 & 6). Einen ähnlichen Bau des Hypoderms findet man auch an mehreren Stellen der äusseren Haut.

Der eingestülpte Theil des Darmes hat noch eine dünne Chitinhaut, die im eigentlichen Darm vollständig verschwindet. Der Darm liegt, wie aus dem Querschnitt (T. IV, Fig. 1) ersichtlich, im oberen Theile der Leibeshöhle und hat einen dreieckigen Querschnitt mit der Spitze nach oben und der Basis nach unten. Die Art der Befestigung des Darms mittelst der

Dissepimente ist schon früher erwähnt worden. In jedem Segment hat der Darm jederseits einen Anhang, der durch eine enge Oeffnung mit demselben kommunicirt; der Anhang ist ungetheilt und reicht mit seiner verjüngten Spitze in die Basis des cirrenförmigen Rückenanhanges hinein (T. IV, Fig. 1, ldm.). Der Darm ist am lebenden Thiere farblos, während die Anhänge eine starke grüne Farbe haben, die durch die Haut durchscheinend, dem Thiere ein eigenthümliches Aussehen verleiht. Der Darm ist aussen vom Peritonäum bekleidet und besitzt eine äussere longitudinale und eine innere circuläre Muskellage, beide aus nur einer Lage ziemlich dicht an einander liegenden Muskelfaser bestehend. Das Cylinderepithel des Darmes ist niedrig und farblos, das Epithel der Anhänge aber sehr hoch, die Zellen mit grossen Körnern und am inneren Enden mehr weniger vollständig von Fettkörnchen erfüllt, die in einigen Zellen farblos, in den meisten aber stark grün gefärbt sind (T. X, Fig. 7), welche Färbung die Vermuthung nahe legen, dass die Anhänge als Leber-Organe fungiren; daher ich sie auch als Leberdarm bezeichne.

Bevor ich die Geschlechtsorgane bespreche, werde ich die Entleerung der Geschlechtsprodukte erwähnen, wie ich dieselbe bei einem männlichen Thiere beobachtete. T. I, Fig. 2 giebt eine Skizze eines Theiles der Bauchfläche des Thieres während der Entleerung; a, a, a sind die Füsse. Dicht innerhalb der Basis eines Fusses kommt ein feiner Strahl vom Sperma hervor, der in die Richtung nach vorwärts ausgestossen wird und sogleich von einer kleinen Flimmerpapille, die interpedial sitzt, ertappt wird, von dieser gegen eine ähnliche auf der Unterfläche des nächstfolgenden Fusses geführt wird, von dieser wieder gegen die nächste interpediale Papille u. s. f. Dieses wiederholte sich durch einen längeren Zeitraum, indem die Spermastränge bald über diesen bald über jenen Fuss, bald auf der einen, bald auf der anderen Seite des Körpers hervorkamen, bis das Wasser ganz milchig geworden war. Die kleinen interpedialen und subpedaleu Papillen sind mir bekannt, nicht früher bemerkt worden, während die grösseren an den Seitenwänden des Körpers (T. IV, Fig. 1 pp.) von Malmgren erwähnt sind und von ihm als wahrscheinliche Oeffnungen für die Segmentalorgane angesehen worden sind. Hier sah ich doch keine Entleerung vom Sperma und mit den Segmentalorganen stehen die genannten Papillen in keiner Verbindung. Der cirrenähnliche Rückenanhang und die Höhlungen der Füsse waren vom Sperma erfüllt, der durch die Flimmerzellen des Peritonäums in fortwährender Bewegung gehalten wurde, aber hier fand keine Ausleerung statt; die Wimpern der Papillen schlugen bald von oben nach unten, bald in entgegengesetzter Richtung. Ehlers brschreibt bei Sigalion limicola (Borstenwürmer) das Segmentalorgan, das bei diesem Thiere an der Basis der Elytre nach aussen mündet; dergleichen habe ich bei Leanira tetragona nicht finden können; dagegen liegt hier das Segmentalorgan wie gewöhnlich bei den Anneliden am Boden der Leibeshöhle und mündet dicht innerhalb der Basis der Füsse nach aussen (T. IV, Fig. 1 Sg.). Im lebenden Thiere konnte ich dasselbe nicht auffinden, an konservirten Thieren aber habe ich es ziemlich leicht ausseciren können; es liegt mit der inneren Mündung am Dissepiment festgelöhtet, von den hinter dem Dissepiment hinlaufenden Radiärmuskeln bedeckt, und geht von hier schräg nach aussen und hinten um den äusseren Rand des Bauchmuskels nach unten. In dem Thiere, das Samen entleert hatte, fand ich das Organ in vielen Segmenten vom Sperma erfüllt. Segmentalorgane giebt es auch im Vorderkörper, wo die Geschlechtsorgane rudimentär sind, sie sind hier sogar etwas grösser und theilweise mit grüngefärbten Zellen versehen, während die Organe im Hinterkörper farblos sind. Es sind einfache Säcke (T. IV, Fig. 3), die Wand doppelschichtig, auswendig von sehr langen Spindelzellen gebildet, inwendig von Wimperzellen (T. IV, Fig. 5). In der Umgebung der inneren Oeffnung stehen am Dissepiment zahlreiche ähnliche Wimperzellen (T. IV, Fig. 3 & 4). Genau an den Segmentalorganen schliesst sich das Gewebe, das Eier und Saamen producirt; bei voller Entwicklung derselben liegen Eier und Saamen frei iu der Leibeshöhle. In einem weniger vorgeschrittenen Stadium findet man den Eier- oder Saamenstrang in jedem Segment mit Ausnahme der 25—30 vorderen so angeordnet wie in T. IV, Fig. 1 dargestellt; in einem noch früherem Stadium habe ich nur den am Segmentalorgan festhängenden und in den Fuss hinausreichenden Theil mit noch unreifen Geschlechtsprodukten gefunden. Im Vorderkörper findet man nur rudimentäre Zellstränge an den Segmentalorganen festsitzend, als Andeutungen der im Hinterkörper vollständig entwickelten Genitalstränge (T. 1, Fig. 1, g). In T. IV, Fig. 3 sieht man, wie der Eierstrang an das Segmentalorgan angeheftet ist, und in T. V, Fig. 1 das Ende des Saamenstranges bei stärkerer Vergrösserung; man sieht hier wie die äussere Bekleidung des Segmentalorgans kontinuirlich in den Genitalstrang übergeht. Eierstränge und Saamenstränge sind ganz gleich gebaut (T. IV, Fig. 2, T. V, Fig. 1), bestehen aus langen spindelförmigen Zellen, zwischen welchen die Eier und Spermazellen sich entwickeln; ob die Eier und Spermazellen Abkömmlinge der Spindelzellen oder eigener Zellen sind, habe ich nicht entscheiden können. Ursprünglich liegen die Eier und Spermazellen wie an den Figuren ersichtlich in Aussackungen des Stranges, die nichts anderes sind als modificirte sc. breit gewordene Spindelzellen; sie werden wahrscheinlich durch Bersten dieser Aussackungen frei. Der Zusammenhang der Genitalstränge mit den Segmentalorganen und der Bau derselben lässt vermuthen, dass dieselben, oder das die Geschlechtsprodukte producirende Gewebe aus den Segmentalorganen hinauswächst.

In jedem Fusstummel giebt es zwei Aciculä (T. IV, Fig. 1, T. V, Fig. 2). An der oberen Acicula hängt ein eigenthümliches drüsenartiges Organ (T. 5, Fig. 3), eine Gruppe von hellen Blasen, die sich bei stärkerer Vergrösserung von einer einzigen grossen Zelle ausgefüllt zeigen (T. 5, Fig. 4). Das Protoplasma der Zelle ist hell und durchsichtig und zeigt im Centrum eine verästelte Figur, als wäre hier der Inhalt geronnen; jede einzelne Blase hängt mit der bindegewebigen Scheide der Acicula zusammen. Näheres über die Anatomie oder die Function dieses Organs vermöge ich nicht anzugeben. Die Aciculä bieten sonst nichts bemerkenswerthes dar; sie besitzen, wie schon angeführt, jede eine eigene bindegewebige Scheide, in welcher viele Kerne liegen, und am inneren Ende der Acicula liegt eine grosse protoplasmareiche Zelle, die wohl die Bildungszelle der Acicula ist (T. V, Fig. 5). Auch die kleineren Borsten liegen jede in einer besonderen Scheide, die an jungen, noch nicht in's Freie gelangten Borsten mit einer Lage protoplasmareicher Zellen belegt ist (T. VI, Fig. 9).

Nervensystem.

Hüllen. Der Bauchstrang ist von einer starken Scheide umhüllt, die um jede der beiden Hälften derselben eine dicke, geschichtete Bindegewebslage bildet, die zahlreiche Septa in die Nervenstränge hineinsendet und nach aussen in ein grobmaschiges Netz übergeht (T. III, Fig. 1). Fängt man von der Chitinhaut an, so geht von derselben zwischen den körnigen Hypodermzellen starke, straffe, kernführende Faser oder vielmehr Membranen nach oben, die zwischen sich Hohlräume einschliessen; diese Membranen ordnen sich circulär um die Hälfte des Bauchstranges und bilden so die engere Scheide und ein starkes Septum, das von den Nervenanastomosen durchbrochen wird, zwischen denselben, während der übrige Raum zwischen den Bauchmuskeln von dem oben erwähnten schwammigen, grossmaschigen Bindegewebe ausgefüllt wird. An Durchschnitten bietet dieses Gewebe gewöhnlich ein Bild dar, als bestehe es nur aus anastomosirenden Bindegewebsfäden; an einigen Präparaten sieht man aber, dass es keine Fäden, sondern Membranen sind, die die Maschen begrenzen (T. III, Fig. 5). In der engeren Scheide sind mehrere Hohlräume oder Kanäle eingeschlossen, von denen besonders ein an der rechten Seite (in der Figur 1 das Präparat von hinten gesehen) durch seine Grösse sich auszeichnet; linkerseits findet sich als Andeutung eines ähnlichen Kanals streckenweise ein Spalt in der Scheide. Wie schon erwähnt gehen vom inneren Umfang der Scheide zahlreiche Septa in die Nervenstämme hinein, die die einzelnen Nervenfadenbündel begrenzen, und in diesen Septa finden sich auch an mehreren Stellen Kanäle (T. III, Fig. 1 & 2), die hie und da mit den ausserhalb im maschigen Gewebe liegenden Hohlräumen kommuniciren (T. III, Fig. 4). Die Kanäle sind theils leer, theils von einer klaren, zum Theil fein punktirten Masse ausgefüllt, die fast immer an einer Stelle von der Wand abgezogen ist (T. III, Fig. 2, a & b). Aus diesem Umstand wie aus dem, dass die Kanäle mit den Hohlräumen des umgebenden schwammigen Gewebes kommuniciren, geht es hervor, dass man hier nicht mit eigenthümlichen Nervenfasern zu thun hat, dass vielmehr die in den Kanälen eingeschlossene Masse eine geronnene Flüssigkeit ist, und glaube ich, dass das gesammte Komplex von Hohlräumen und Kanälen als ein Lymphgefässsystem aufzufassen ist. Es ist mir auch gelungen an erhärteten Thieren durch Einstiche die Kanäle stückenweise ganz rein zu injiciren. Nach vorwärts wird sowohl die weitere, lose als die engere, feste Scheide immer dünner, bis beide am Schlundringe auf eine einfache dünne Hülle reducirt sind; die Kanäle schwinden auch bis auf einen central in jeder Bauchstranghälfte liegenden, der auch im Schlundringe vorhanden ist und bis an die Basis des Gehirns verfolgt werden kann (T. III, Fig. 6, Sr.). Wie diese zwei Kanäle im Gehirn selbst sich verhalten, kann ich nicht genau sagen; es ist mir aber wahrscheinlich geworden, dass dieselben sich erstens aufwärts als zwei parallele Kanäle, ein in jeder Hemisfäre, fortsetzen, um im oberen Theile sich in zwei geräumige Lacunen zu erweitern, die die zwei Hemisfären des Gehirns umgeben. An allen

Schnitten des Gehirns sieht man eine feinkörnige Substants, die sich ganz entschieden von den Querschnitten der Nervenfaserbündel unterscheidet, unter anderen auch dadurch, dass sie sich gegen färbende Agentien anders als die Nervenfaser verhält, so z. B. in Purpurin einen leicht gelbröthlichen Farbton annimmt, während die Nervenelemente ungefärbt bleiben. In T. II, Fig. 1, aus einem Flachschnitte ziemlich weit nach unten geführt, sieht man neben der Mitte auf jeder Seite eine kleine feinkörnige Masse (l) und, die Hemisfären beiderseits umschliessend, die Masse H; sie besteht aus kleinen ovalen und runden Körnern, die alle färbenden Flüssigkeiten aufnehmen. Ich nenne diese Körneransamlung die Haube. In Fig. 2 ist die Hälfte eines höher oben geführten Flachschnittes dargestellt und man sieht hier zwei feinkörnige Massen (l), die seitwärts in die Haube hineingehen und hier von bedeutend grösserem Umfange sind. Auf dem Meridianschnitte (Fig. 4) und auf dem Sagittalschnitte durch die rechte Hemisfäre (Fig. 6) sieht man dieselbe Masse l von der Haube halb umschlossen. Die oben genannten Körner der Haube sehen aus wie granulirte Kerne von einem Minimum von Protoplasma umgeben, können aber dennoch als Lymphkörner aufgefasst werden. Sie liegen in einem von dünnen kernhaltigen Fäden gebildeten, nach innen unvollständigen Netzwerke; die Fäden des Netzwerkes inseriren sich an der Chitinhaut des Kopfes zwischen den Hypodermzellnn (T. II, Fig. 7). Nach dem hier Dargestellten stelle ich mir vor, dass der im Schlundring verlaufende Kanal in den zwei im T. II, Fig. 1 ersichtlichen zwei körnigen Massen l seine Fortsetzung findet und dass ferner diese Kanäle sich in zwei Cisternen fortsetzen, (T. II, Fig. 4, l, l) die entweder von den Lymphkörpern der Haube umschlossen oder von denselben erfüllt sind. Da nun das Gehirn sonst fast überall von einem maschigen Bindegewebe umgeben wird, das der das Bauchmark einhüllenden Scheide vollständig ähnlich gebaut ist, dann wird es wohl erlaubt sein auch dieses dem Lymphgefässsystem zuzurechnen und anzunehmen, dass die Hohlräume des Bindegewebes in irgend einer Weise mit den in den Hemisfären verlaufenden Gefässen oder mit den Cisternen in Zusammenhang stehen. Das ganze centrale Nervensystem wird also von Lymphe umflossen sein mit Ausnahme des Schlundringes, der nur einen central verlaufenden Kanal hat zur Verbindung der zwei Gefässysteme des Gehirns und des Bauchmarks. — Der Bauchstrang besteht aus zwei Hälften, die durch zahlreiche Anastomosen mit einander verbunden sind (T. 1, Fig. 1 B, T. III, Fig. 3) und von einer kontinuirlichen Anhäufung von Ganglienzellen begleitet werden. Die Ganglienzellen sind hier wie überall sonst im Körper roth gefärbt und darum scheint der Bauchstrang beim lebenden Thiere als ein rother Strang durch die Haut und ebenso ist der Kopflappen wegen des durchschimmernden Gehirns roth gefärbt. In jedem Segment geht ein starker Zweig ab dicht hinter der Segmentgrenze und hinter diesem Zweige noch 5—6 kleinere Zweige, die zahlreiche Anastomosen eingehen (T. III, Fig. 3). Diese Zweige in ihrem weiteren Verlaufe zu verfolgen ist mir nicht gelungen, nur von dem stärksten Zweige habe ich einem Aste zu der Elytra folgen können. Vor dem Abgange der beiden Zweige des Schlundringes legen sich die beiden Hälften des Bauchstranges dichter an einander und die Ganglienschicht wird zu gleicher Zeit mächtiger und die Ganglienzellen selbst durchschnittlich viel grösser als weiter nach hinten. Der Schlundring ist von einer Ganglienschicht umgeben und erst nach Abschicken von Aesten an die Rüsselröhre, die Tentakelcirren und die Palpen geht dieselbe in das Gehirn hinein (T. II, Fig. 3, 4, 6). Das Gehirn ist durch ein unvollständiges Septum in zwei Hälften getheilt, die durch quergehende Anastomosen in Verbindung stehen; es scheint sich die beiden Aeste des Schlundringes jederseits in vier Aeste zu theilen (T. II, Fig. 1, a, b, c, d), die aufwärts gehen und an mehreren Stellen sowohl quer wie schräg verlaufende Verbindungszweige der beiden Hemisfären abgeben. (T. II, Fig. 4). Ueberall ist das Gehirn von einer Ganglienschicht umgeben, doch nicht an den Stellen, wo die vermeintlichen Lymphecisternen mit der Haube im Zusammenhang stehen. Welche Faserzüge mit der Ganglienschicht in Verbindung stehen und in welcher Weise die Verbindung stattfindet kan ich nicht angeben. Von den Ganglienzellen zeichnet sich eine jederseits aus durch ihre bedeutende Grösse 0,1 mm. im Durchmesser. Sie liegt ziemlich isolirt nach unten und hinten (T. II, Fig. 1 & 6 gl,). Das Protoplasma dieser Zelle zeigt sich bei starker Vergrösserung deutlich concentrisch um den Kern geschichtet. (T. II, Fig. 8). Von den Verbindungen und der Bedeutung dieser auffallenden Zelle kann ich nichts angeben. Ueber das Gehirn setzt sich nach hinten die Basis des Tentakels fest (T. II, Fig. 4 & 5 T) und vom Gehirn geht nur ein Nerv ab, nehmlich zum Tentakel. Die beiden rudimentären Antennen erhalten keine Nerven und zu den übrigen Kopfanhängen gehen die Nerven vom Schlundringe ab. Der Nerv des ersten Fusses oder der Basis der Tentakelcirren (T. II, Fig. 1 & 3 E und F) verläuft der äusseren Wand entlang (T. II, Fig. 3 n), und theilt sich in 4 Aeste an die Tentakelcirren, in welchen dieselben central verlaufen. In den Palpen verläuft der Nerv (T. II, Fig. 3, n,,) bis zur Spitze an der Wand zwischen Hypoderm und Muskellage, während das Centrum von schwammigen Bindegewebe erfüllt ist, in dessen Mitte ein feiner Kanal läuft, der nach hinten mit dem Coclom in Verbindung steht (T. II, Fig. 3 P). Der Tentakelnerv verläuft central. Die Chitinhaut aller diesen Gebilden ist von feinen trichterförmigen Kanälchen durchbohrt, durch welche die Nervenenden wahrscheinlich in's Freie hinausgelangen. Ich habe vergeblich nach Drüsen gesucht, für welche die Kanälchen Ausführungsgänge sein konnten. Aehnliche feine Kanälchen finden sich in der Kopf- und Bauchcuticula, und da auch hier keine Drüsen zu entdecken sind, sind diese Kanälchen wahrscheinlich auch hier für Nervenenden bestimmt.

In der Haut sind die Nerven überhaupt sehr schwer zu entdecken; nur hie und da sieht man an Schnittpräparaten einen kleinen Nervenstumpf, während der Verlauf der feineren Aeste sich dem Blicke entzieht. In den Elytren dagegen kann man den Nervenverästelungen leicht nachgehen. Unter der Loupe sieht man in der Elytra einen Stern mit fünf oder sechs Strahlen, es ist diess der Eintrittspunkt der Nerven von rothen Ganglienzellen umgeben (T. VIII, Fig. 5 & 1). Von den sich verästelnden Zweigen wird ein ziemlich dichtes Netz gebildet, das hie und da rothe ganglionäre Anschwellungen besitzt (T. VIII, Fig. 2). Die Art der Nervenendigung scheint eine drei- oder vierfache zu sein. Am äusseren Rande trägt die Elytra eine Anzahl dünner Papillen oder Cilien, die an der Spitze mit steifen Tasthaaren versehen sind. Central in jeder Papille läuft ein Nervenfaden, der gegen die Spitze hier anschwillt und bis an die Tasthaaren verfolgt werden kann (T. IX, Fig. 1). In der nächsten Umgebung um den Eintritt der Nerven in die Elytra findet man in mässiger Anzahl Nervenfäden, die mit einer kernhaltigen Anschwellung und abgestumpftem Ende sich der oberen Fläche der Elytra dicht anlegen (T. VIII, Fig. 3 a) und in der ganzen Ausdehnung der Elytra kann man feinste Fäserchen mit eingelagerten Kernen anscheinend einfach zugespitzt der oberen Fläche anliegend finden (T. VIII, Fig. 3 b). Endlich findet man überall in der Elytra meistens vereinzelte, hie und da einige dichter zusammenliegende Zellen mit runden grossen Kernen und nur wenig Protoplasma, die sehr feine varicöse Ausläufer nach allen Richtungen strahlenförmig ausschicken. Diese Zellen stehen ganz unzweifelhaft mit Nervenfäden in Zusammenhang und müssen als eigenthümliche Endorgane der Nerven betrachtet werden (T. IX, Fig. 2). Von den Ausläufern der Zellen steigen feinste Fibrillen aufwärts gegen die Oberfläche der Elytra (T. VIII, Fig. 4). Es ist mir nicht gelungen die letzten Enden dieser Fibrillen oder der oben erwähnten anscheinend zugespitzten Fasern zu verfolgen um zu entscheiden, wo sie eigentlich enden. Die beiden Elytralamellen sind an ihrer Innenfläche mit grossen, äusserst dünnen Hypodermzellen bekleidet, die bisweilen nur an ihren oft zackigen Kernen und ihren fast immer deutlichen Grenzen zu erkennen sind; die Lamellen werden zusammengehalten durch eine grosse Zahl straffer drehrunder Faser, die als Auswüchse der Hypodermzellen aufgefasst werden müssen. Zwischen diesen Fasern steigen nun die Nervenfaser aufwärts (T. VIII, Fig. 3 & 4) und sind leicht von denselben zu unterscheiden theils durch ihre Dicke, theils durch die Aufnahme von färbenden Flüssigkeiten, und legen sich den Hypodermzellen so dicht an, dass sie im Protoplasma derselben zu endigen scheinen. In den Kernen enden sie jedenfalls nicht. Für die Endigung im Protoplasma der Zellen spricht auch das Verhältniss der Nervenenden in dem Bauchcirrus, der einen von Ganglienzellen roth gefärbten centralen Nervenstamm hat, von dem zahlreiche Aeste an die Wände laufen (T. X, Fig. 1), während das verdickte Ende sich an die der Spitze aufsitzenden dicken Tasthaaren pinselartig ausbreitet (T. X, Fig. 2). Die an die Wand gehenden Aeste sieht man ganz deutlich in das Protoplasma der Hypodermzellen sich einsenken (T. X, Fig. 3).

Erklärung der Figuren.

T. I.

Fig. 1. Vorderende des Thieres vom Rücken geöffnet; der Rüssel ist weggenommen. Rr. Rüsselröhre. m p d. Musculus protractor dorsalis, Rdsp Rüsseldissepiment. v? v? Gefässerweiterungen (?), Fortsetzungen des Rückengefässes (vd,) und des Bauchgefässes vv,, R. Vorderende des Rüssels, mr,, die radiären Muskeln der 8 vordersten Segmenten, mr, die radiären Muskeln der übrigen Segmente des Vorderkörpers; g rudimentärer Genitalstrang des Vorderkörpers; B. Bauch-

strang; dsp,, dsp, die unvollständigen Dissepimente, die vom eingestülpten Darmtheil ausgehen; dsp′ das grosse, starke Dissepiment, das die Grenze bildet zwischen Vorder- und Hinterkörper; ldm, Leberdarm; dsp Dissepiment, dsp,, rudimentäres Dissepiment am Boden der Leibeshöhle im Vorderkörper; dsp,,, ein ähnliches in den vordersten Segmenten.

Fig. 2. Skizze eines Theiles der Bauchfläche des Thieres während der Saamenentleerung. S. s der ausströmende Saamen; a, a, a 3 Füsse; b, b, b subpediale Flimmerpapillen; c, c interpediale Flimmerpapillen.

T. II.

Fig. 1. Flachschnitt des Kopfes. Sp unvollständiges Septum zwischen beiden Hemisfären des Gehirns. F, Erster Fuss oder gemeinschaftliche Basis der Fühlercirren; acd, dessen dorsale Acicula; acv dessen ventrale Acicula. Cl Coelom; Cl, spaltförmige Verlängerung des Coeloms hinter dem Gehirn, l, l vermeintliche Lymphgefässe. H. die Haube oder Lage von Lymphkörnern um die Hemisfären. gl, eine grosse Ganglienzelle, gl Ganglienschicht des Gehirns. Pt Peritonäum.

Fig. 2. Die eine Hälfte eines Flachschnittes des Gehirns höher oben geführt als der vorige. Die Buchstaben bezeichnen dasselbe wie in der vorangehenden Figur.

Fig. 3. Ein Flachschnitt gerade unter dem Gehirn geführt. F erster Fuss, P Palpen, tm, Tentakelmuskel, die von hier vor dem Gehirn aufwärts in die Tentakelbasis hinein gehen. Sr. Schlundring, n, Nerv von demselben zum ersten Fuss, n,, Nerv von demselben zu den Palpen. Die Buchstaben sonst wie früher.

Fig. 4. Meridianschnitt des Gehirns. T Tentakelbasis. Die übrigen Buchstaben wie früher.

Fig. 5. Sagittalschnitt des Vorderendes ungefähr in der Mitte.

mpd Musculus protractor dorsalis; mp v, mp v, Musculi protractores ventrales. R Rüssel. B Bauchstrang. Die übrigen Buchstaben wie früher.

Fig. 6. Sagittalschnitt durch die rechte Hemisfäre; Bezeichnungen wie früher.

Fig. 7. Lymphkörner aus der Haube zwischen den Fäden liegend, die zwischen den Hypodermzellen der Kopfhaut entspringen.

Fig. 8. Der Kern und ein Theil des Protoplasma eine der grossen Ganglienzellen.

T. III.

Fig. 1. Durchschnitt des Bauchstranges mit seinen Hüllen; mr Radiärmuskel; lmv ventraler Längsmuskel.

Fig. 2. Ein Theil eines Querschnittes des Bauchstranges, a ein kleiner Kanal in einem der Septen; b der Theil des grossen Kanals, wo der Inhalt von der Wand abgerückt ist.

Fig. 3. Ein Theil des Bauchstranges mit den von demselben abgehenden Zweigen; gl Ganglienschicht.

Fig. 4. Ein Kanal in einem Septum des Bauchstranges mit den Hohlräumen des umgebenden Bindegewebes kommunicirend.

Fig. 5. Ein Theil der losen Scheide; man sieht hier die Membranen, die die Hohlräume begrenzen.

T. IV.

Fig. 1. Die Hälfte eines Durchschnittes des Körpers vd vas dorsale, dsp, der Theil des Dissepimentes, der den Darm (dm) an den dorsalen Längsmuskel (lmd) bebefestigt; ldm Leberdarm; pp, pp, pp Flimmerpapillen an der Seitenwand des Körpers; ov, ov Ovarium; mr. Radiärmuskel; mr, die untersten Faser desselben;

Sg Segmentalorgan; lmv ventraler Längsmuskel; vv Vas ventrale.

Fig. 2. Ein Stück des Eierstranges mit sich entwickelnden Eiern.

Fig. 3. Segmentalorgan an dem Dissepiment gestützt. Die Punkte um der inneren Oeffnung sind die Wimperzellen auf dem Dissepiment, Rechts hängt der Eierstrang mit dem Segmentalorgan zusammen.

Fig. 4. Eine Wimperzelle des Dissepiments.

Fig. 5. Wand des Segmentalorgans.

T. V.

Fig. 1. Saamenstrang im Zusammenhang mit dem Segmentalorgan.

Fig. 2. Fussstummel mit den zwei Acicula.

Fig. 3. Das drüsenähnliche Organ an der oberen Acicula.

Fig. 4. Eine Zelle und Blase desselben Organs.

Fig. 5. Das innere Ende einer Acicula.

T. VI.

Fig. 1. Der ausgestreckte Rüssel.

Fig. 2. Derselbe von vorne gesehen.

Fig. 3. Ein isolirter Kiefer.

Fig. 4. Durchschnitt des eingezogenen Rüssels.

Fig. 5 & 6. Hypoderm des Rüssels.

Fig. 7. Aus einem Längsschnitte des Rüssels. a radiäre Muskelbündel; b circuläre Muskelbündel; c äussere Muskelfascie; d innere Muskelfascie; e, e Ansamlungen von Rundzellen im Hypoderm; e' eine solche, die an ein die Chitinhaut durchbohrendes Kanälchen stösst; n Nerv.

Fig. 8. Ein Stück eines Rüsselnerven mit abgehenden Zweigen und den denselben anhaftenden Zellenklumpen.

Fig. 9. Junge Borste des oberen Borstenbündels mit ihrer Matrix.

Fig. 10. Ein Stück des Bauchgefässes.

T. VII.

Fig. 1. Muskelbündel am hinteren Ende der Rüsselscheide in ein Netz von jungen Muskelfasern übergehend.

Fig. 2. Zwei Enden von älteren streifigen Muskelfasern und 4 junge Muskelzellen eben daher. An den jungen Zellen sieht man die seitliche Absonderung der streifigen Fasersubstanz.

Fig. 3. Ein Stück des Peritonäums der Rückenlängsmuskeln im Vorderkörper.

Fig. 4. Die Zusammensetzung der Streifen desselben aus langen spindelförmigen Zellen.

Fig. 5. Sternförmige Zellen aus der äusseren Muskelfascie des Rüssels.

T. VIII.

Fig. 1. Eintrittsstelle des Nerven in die Elytra; die Theilungsstelle des Nerven von rothen Ganglienzellen eingehüllt.

Fig. 2. Ein Theil des Nervennetzes in der Elytra.

Fig. 3. Zwei Arten von Nervenenden in der Elytra.

Fig. 4. Eine Nervenendzelle mit Ausläufern, die zur oberen Fläche der Elytra aufsteigen.

Fig. 5. Eine Elytra mit dem rothen Stern, vom Nerven gebildet.

T. IX.

Fig. 1. Eine Randpapille der Elytra mit dem Nervenfaden.

Fig. 2. Zwei Nervenzellen in Verbindung mit den Fäden des Nervennetzes.

T. X.

Fig. 1. Der Bauchcirrus mit dem central verlaufenden Nervenstamm.

Fig. 2. Das Ende des Nerven sich pinselartig an die Tasthaare ausbreitend.

Fig. 3. Zwei Aeste des Nerven in das Protoplasma der Hypodermzellen sich einsenkend.

Fig. 4. Eine subpediale Flimmerpapille.

Fig. 5. Durchsschnitt einer der Flimmerpapillen an der Seitenwand des Körpers.

Fig. 6. Durchschnitt des cirrenförmigen Rückenanhanges.

Fig. 7, Epithel des Leberdarmes; m, m Muskelfaser; pt Peritonäum.

Fig. 8. Stück eines Dissepimentes mit einem Bündel, Muskelfaser und zwei Zellen der Art, wie sie überall im Peritonäum vorkommen.

THEORIE DER TRANSFORMATIONS-GRUPPEN.

(ABHANDLUNG IV).

VON

SOPUS LIE.

Im ersten Abschnitte der nachstehenden Abhandlung beschäftige ich mich mit der allgemeinen Theorie der Transformations-Gruppen einer n-fach ausgedehnten Punkt-Mannigfaltigkeit. Ich zeige, dass die allgemeine lineare Gruppe und zwei Untergruppen derselben die einzigen Gruppen sind, die im Infinitesimalen vollständig *transitiv* sind.

In dem zweiten Abschnitte betrachte ich alle Gruppen von Berührungs-Transformationen einer Ebene. Ich zeige, dass es nur *drei* solche Gruppen giebt, die nicht in Gruppen von *Punkt*-Transformationen übergehen können. Diese drei Gruppen enthalten bez. 10, 7 und 6 Parameter. Als Typen derselben kann man die zehngliedrige Gruppe, deren Transformationen alle ∞^3 Kreise einer Ebene in Kreise umwandeln, zusammen mit einer siebengliedrigen, und einer sechsgliedrigen Untergruppe betrachten.

Abschnitt V.

Untersuchungen über die Transitivität der Transformationsgruppen im Infinitesimalen.

In 1873 fand ich, dass jede Transformationsgruppe einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit durch Einführung von zweckmässigen Variabeln in eine lineare Gruppe umgewandelt werden kann.

Dass der entsprechende Satz nicht für mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten besteht, folgt schon daraus, dass die allgemeine lineare Gruppe einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit eine bestimmte Anzahl, und zwar $n(n+2)$ Parameter enthält, während es möglich ist Transformationsgruppen dieser Mannigfaltigkeit mit beliebig vielen Parameter anzugeben.

Als ich indess in 1874 (Göttinger Nachrichten No. 22) alle Gruppen einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bestimmte, fand ich, dass alle hierher gehörigen Gruppen, die sich nicht in lineare überführen liessen, einen gemeinsamen Charakter besassen. Um mich möglichst klar auszudrücken, werde ich wie gewöhnlich unsere zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit $(x\,y)$ als eine Punkt-Mannigfaltigkeit, und zwar als eine Ebene mit den Cartesischen Coordinaten $x\,y$ auffassen. Bei den Transformationen einer Gruppe werden die Punkte der Ebene transformirt, das heisst, in neue Lagen übergeführt; dementsprechend werden auch die Curven unserer Ebene in neue Lagen übergeführt. Enthält die Gruppe z. B. m Parameter, so erhält eine arbiträr gewählte Curve im Allgemeinen durch successive Ausführung aller Transformationen der Gruppe ∞^m verschiedene Lagen. Es giebt indess, wie ich sogleich an bekannten Beispielen verificiren werde, gewisse ausgezeichnete Curven, die durch successive Ausführung aller Transformationen der Gruppe nicht ∞^m sondern nur eine geringere Anzahl verschiedene Lagen annehmen.

Man betrachte in der That z. B. die allgemeine lineare Gruppe der Ebene, die *acht* Parameter enthält. Vermöge der ∞^8 Transformationen dieser Gruppe erhält eine arbiträr gewählte Curve bekanntlich ∞^8 verschiedene Lagen. Nimmt man dagegen z. B. eine logarithmische Spirale, so stellt sich die Sache anders. Denn eine solche Curve wird durch einfach unendlich viele lineare Transformationen nur in sich selbst transformirt, und erhält daher durch successive Ausführung aller linearen Transformationen nur ∞^7 verschiedene Lagen. Nimmt man einen Kegelschnitt, so stellt sich die Sache noch einfacher, denn ein Kegelschnitt gestattet ∞^3 lineare Transformationen, und erhält daher durch Ausführung aller linearen Transformationen nur ∞^5 verschiedene Lagen. Endlich erinnern wir auch daran, dass eine Gerade ∞^6 lineare Transformationen gestattet, und dass sie daher durch Ausführung aller linearen Transformationen nur ∞^2 verschiedene Lagen annimmt.

Es giebt bekanntlich keine ebene Curve, die durch Ausführung aller linearen Transformationen nur ∞^1 Lagen annimmt. Denn es giebt keine Curve, die ∞^7 lineare Transformationen gestattet, indem die achtgliedrige lineare Gruppe der Ebene keine siebengliedrige Untergruppe enthält.

In der früher citirten Arbeit fand ich nun, dass es für die lineare Gruppe der Ebene charakteristisch ist, dass es keine Curve giebt, die durch alle Transformationen der Gruppe nur ∞^1 Lagen annimmt, anders ausgesprochen, ich fand, dass jede Gruppe, die sich nicht in eine lineare Gruppe umwandeln lässt, eine Schaar von ∞^1 Curven

$$\varphi\,(x\,y) = a = \text{Const.}$$

invariant lässt.

Es ist vortheilhaft, diesen gemeinsamen Charakter der nicht-linearen Gruppen in etwas anderer Weise aufzufassen. Lass mich überhaupt eine beliebige Gruppe mit m Parametern, die die Punkte einer Ebene transformirt, betrachten. Ich nehme einen Punkt p allgemeiner Lage und bemerke, dass es jedenfals $\infty^{m\;2}$ Transformationen der Grnppe giebt, die p invariant lassen. Der Inbegriff dieser Transformationen bilden eine Untergruppe, vermöge deren die ∞^1 durch p hindurchgehenden Linenelemente *linear* transformirt werden. Es sind nun vier Fälle möglich, indem die lineare Gruppe, die unsere Linienelemente unter sich vertauscht, 3, 2, 1, oder kein Parameter enthalten kann. In den drei letzten Fällen giebt es jedenfalls ein Linienelement, das invariant bleibt. Und folglich giebt es in diesen drei Fällen jedenfalls eine Curvenschaar

$$\varphi(x\,y) = a,$$

die bei der Gruppe invariant bleibt. Wenn dagegen die Linienelemente *drei*gliedrig transformirt werden, so giebt es keine einfach unendliche Curvenschaar, die bei der Gruppe invariant bleibt. In Folge dessen kann mein soeben besprochener Satz auch folgendermassen formulirt werden.

Transformiren diejenigen Transformationen einer Gruppe, die einen Punkt der Ebene invariant lassen, die hindurchgehenden ∞^1 *Linienelemente durch die allgemeine lineare Gruppe dieser einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, so kann die vorgelegte Gruppe durch Einführung von zweckmässigen Variabeln in die allgemeine lineare Gruppe der Ebene oder in eine Untergruppe derselben umgewandelt werden.*

Ich vermuthete schon in 1874, dass dieser Satz sich folgendermassen auf n Dimensionen verallgemeinern liesse.

Transformiren diejenigen Transformationen einer Gruppe, die einen Punkt der transformirten n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit invariant lassen, die hindurchgehenden ∞^{n-1} *Linienelemente durch die allgemeine lineare Gruppe dieser* $(n-1)$-*fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, so kann die vorgelegte Gruppe durch Einführung von zweckmässigen Coordinaten in eine lineare Gruppe der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit umgewandelt werden.*

In dem folgenden Abschnitte werde ich zeigen, dass dieser Satz allgemein gültig ist. Im Uebrigen beabsichtige ich, in späteren Arbeiten weitere Untersuchungen über die Transitivität der Transformationsgruppen im Infinitesimalen zu veröffentlichen.

§ 1.

Bestimmung der inf. Transformationen 1. O.

Die infinitesimalen Punkt-Transformationen der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit $x_1\ x_2 \dots x_n$ besitzen, wenn man

$$\frac{df}{dx_1} = p_1 \dots \frac{df}{dx_n} = p_n$$

setzt, die Form

$$\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \dots + \xi_n p_n,$$

wo die ξ_k Funktionen der x sind.

1. Wenn eine Transformationsgruppe der Mannigfaltigkeit $x_1\ x_2 \dots x_n$ in dem früher erklärten Sinne die grösstmögliche Transitivität im Infinitesimalen besitzt, so ist leicht zu erkennen, dass ein Punkt allgemeiner Lage vermöge einer Transformation der Gruppe in einen *beliebigen* benachbarten [1]) Punkt übergeführt werden kann. Denn gesetzt, dass jeder Punkt sich nur auf einer q-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit M_q bewegen könnte; alsdann enthielte die vorgelegte M_n ∞^{n-q} solche M_q, deren Inbegriff durch die Gruppe invariant sein müsste, was mit unseren Voraussetzungen in Widerspruche stände.

Bilde ich daher nach dem Vorgange meiner letzten Abhandlung über Transformationsgruppen (Bd. III, pg. 126 und fg.) in der Umgebung eines beliebigen Punktes p die in unserer Gruppe enthaltenen inf. Transformationen nullter, erster, zweiter . . . s^{ter} Ordnung, so erhalte ich *n unabhängige inf. Transformationen* nullter Ordnung, die die Form

$$p_1 + \dots,\ p_2 + \dots,\ \dots\ p_n + \dots$$

erhalten können, wobei die weggelassenen Glieder *infinitesimal* sind.

Die inf. Transformationen erster und höherer Ordnung

---

[1]) An dieser Stelle soll das Wort „*benachbart*“ nicht „*infinitesimal benachbart*“ heissen.

lassen p invariant, während dies mit keiner Transformation nullter Ordnung der Fall ist. Die Transformationen von zweiter und höherer Ordnung lassen zugleich die durch p gehenden Linienelemente invariant, was zugleich mit *einer* Transformation erster Ordnung nehmlich

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n + \ldots = \Sigma x_k p_k + \ldots$$

der Fall ist.[1]) Eine jede andere Transformation erster Ordnung

$$\Sigma_{ik} a_{ik} x_i p_k + \ldots$$

transformirt die durch p gehenden Linienelemente. Da nun die ∞^{n-1} Linienelemente durch die allgemeine lineare Gruppe mit n^2-1 Parametern transformirt werden sollen, so muss die vorglegte Gruppe G der M_n jedenfalls n^2-1 unabhängige inf. Transformationen erster Ordnung, die zugleich von der Transformation $\Sigma x_k p_k + \ldots$ unabhängig sind, enthalten. Auf der anderen Seite ist klar, dass G nicht mehr als n^2 inf. Transformationen erster Ordnung enthalten kann, indem die allgemeine Transformation erster Ordnung $\Sigma_{ik} a_{ik} x_i p_k + \ldots$ nur n^2 Parameter enthält.

2. Daher sind zwei Fälle denkbar. Entweder enthält G n^2 inf. Transformationen erster Ordnung, die man sämmtlich erhält wenn man in dem Ausdrucke

$$x_i p_k + \ldots$$

den Indices i und k successiv alle Werthe $1, 2 \ldots n$ giebt. Oder auch enthält G nur n^2-1 Transformationen erster Ordnung, unter denen keine die Form $\Sigma x_k p_k + \ldots$ besitzt, indem diese Transformation die durch Origo gehenden Richtungen invariant lässt. Für diesen letzten Fall werde ich die Form unserer n^2-1 Transformationen erster Ordnung bestimmen.

Es ist zunächst klar, dass G eine inf. Transformation der Form

[1]) Im Texte wird der Punkt p zu Origo gewählt.

$$H_1 = x_1 p_2 + \alpha \Sigma x_k p_k + \ldots \quad (\alpha = \text{Const.})$$

und zugleich eine Transformation der Form

$$H_2 = x_2 p_1 + \beta \Sigma x_k p_k + \ldots \quad (\beta = \text{Const.})$$

enthält; also enthält sie zugleich die Transformation $(H_1 \; H_2)$, die die Form

$$H_3 = x_1 p_1 - x_2 p_2 + \ldots$$

besitzt. Sie enthält ferner die Transformation $(H_3 \; H_1)$, deren Form ist

$$2 (x_1 p_2) + \ldots,$$

so dass α gleich Null ist. In entsprechender Weise ergiebt sich, dass G eine jede inf. Transformation der beiden Formen

$$\left.\begin{array}{r} x_i p_k + \ldots \\ x_i p_i - x_k p_k + \ldots \end{array}\right. \quad (i \gtrless k)$$

enthält. Hiermit sind $n(n-1) + n - 1 = n^2 - 1$ Transformationen erster Ordnung gefunden, die in G enthalten sind, und nach unserer Voraussetzung giebt es keine weitere Transformationen erster Ordnung.

§ 2.

Giebt es Transformationen, deren Ordnung grösser als 1 ist, so giebt es n^2 Transformationen erster Ordnung.

Lass mich nun voraussetzen, dass die Gruppe G nur $n^2 - 1$ inf. Transformationen erster Ordnung enthält, und lass mich versuchen die Transformationen höherer Ordnung zu bestimmen.

3. Setze ich

$$H_1{}^{1} = x_1 p_2 + \ldots, \; H_1^{(3)} = x_1 p_3 + \ldots, \; \ldots \; H_1^{(n)} = x_1 p_n + \ldots$$
$$H_1^{(n+1)} = x_1 p_1 - x_2 p_2 + \ldots, \; H_1^{(n+2)} = x_1 p_1 - x_3 p_3 \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; H_1^{(2n-1)} = x_1 p_1 - x_n p_n + \ldots,$$

und ist dabei s die höchste Ordnung einer in der Gruppe enthaltenen inf. Transformation, so erkennt man leicht (Vergl. meine dritte Abhandl. über Transformationsgruppen, Bd. 3, pg. 113, 114, 129), dass es eine inf. Transformation s^{ter} Ordnung etwa $H^{(s)}$ giebt, die $2n-2$ Relationen der Form

$$(H_1^{(2)}, H_s) = k_2\, H_s \ldots (H_1^{(2n-1)}\, H_s) = k_{2n-1}\, H_s$$

erfüllt. Ich bilde die Jacobische Identität

$$((H_1^{(2)} H_1^{(n+1)})\, H_s) + ((H_1^{(n+1)}\, H_s)\, H_1^{(2)}) + ((H_s H_1^{(2)})\, H_1^{(n+1)}) = 0;$$

hierdurch ergiebt sich, dass $k_2 = 0$ ist. In entsprechender Weise ergiebt sich, dass

$$k_2 = k_3 = \ldots = k_n = 0$$

ist. Setzt man nun

$$H_s = \xi_1\, p_1 + \xi_2\, p_2 + \ldots + \xi_n\, p_n + \ldots,$$

wo die ξ ganze homogene Funktionen s^{ter} Ordnung von $x_1\, x_2 \ldots x_n$ sind, so lösen die Gleichungen

$$(H_1^{(2)}\, H_s) = 0 \ldots (H_1^{(n)}\, H_s) = 0$$

sich in die folgenden auf:

$$x_1 \frac{d\xi_1}{dx_2} = 0,\; x_1 \frac{d\xi_2}{dx_2} - \xi_1 = 0, \ldots\; x_1 \frac{d\xi_n}{dx_2} = 0$$

$$x_1 \frac{d\xi_1}{dx_3} = 0,\; x_1 \frac{d\xi_2}{dx_3} \qquad = 0, \ldots\; x_1 \frac{d\xi_n}{dx_3} = 0$$

$$x_1 \frac{d\xi_1}{dx_n} = 0,\; x_1 \frac{d\xi_2}{dx_n} \qquad = 0, \ldots\; x_1 \frac{d\xi_n}{dx_n} - \xi_1 = 0.$$

Hier ergiebt sich nun zunächst, dass ξ_1 nur von x_1 abhängt, das ξ_2 nur von x_1 und x_2 abhängt, dass ξ_3 nur von x_1 und x_3 abhängt, u. s. w. Also ist

$$\xi_1 = A\, x_1^s + \ldots$$

wo die weggelassenen Glieder von $(s+1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind. Also kommt

$$x_1 \frac{d\xi_k}{dx_k} = \xi_1 = A x_1^s + \ldots$$

und durch Integration, indem man erinnert, dass ξ_k nur von x_1 und x_k abhängt,

$$\xi_k = A x_1^{s-1} x_k + B_k x_1^s + \ldots \quad (k > 1)$$

Hiermit haben wir gefunden, dass H_s die Form

$$H_s = A(x_1^s p_1 + x_1^{s-1} x_2 p_2 + \ldots + x_1^{s-1} x_n p_n)$$
$$+ B_2 x_1^s p_2 + B_3 x_1^s p_3 + \ldots + B_n x_1^s p_n + \ldots$$

besitzt.

Wir bilden die Gleichungen

$$(x_1 p_1 - x_k p_k + \ldots, H_s) = c_k H_s$$

oder ausgeführt

$$A(s-1)(x_1^s p_1 + x_1^{s-1} x_2 p_2 + \ldots + x_1^{s-1} x_n p_n)$$
$$+ B_2 s x_1^s p_2 + \ldots + B_k (s+1) x_1^s p_k + \ldots = c_k H_s.$$

Hieraus giebt sich, indem man k successiv die Werthe $2, 3 \ldots n$ giebt, dass nur eine einzige unter den Coefficienten $A, B_2\, B_3 \ldots B_n$ von Null verschieden ist. H_s besitzt daher entweder die Form

$$x_1^s p_k + \ldots \quad (k > 1)$$

oder die Form

$$x_1^s p_1 + x_1^{s-1} x_2 p_2 + \ldots + x_1^{s-1} x_n p_n + \ldots$$

Hat H_s die Form $x_1^s p_k + \ldots$, so enthält die Gruppe eine Transformation der Form

$$(x_1^s p_k + \ldots, x_k p_1 \ldots) = x_1^s p_1 - s x_1^{s-1} x_k p_k + \ldots$$

und zugleich die Transformation

$$(x_1^s p_1 - s x_1^{s-1} x_k p_k + \ldots, x_1^s p_k \ldots) = 2s\, x_1^{2s-1} p_k + \ldots$$

Nun aber ist $s > 1$, $2s - 1 > s$, und also führt unsere Hypothese zu der Unmögligkeit, dass die Gruppe eine inf. Transformation enthielte, deren Ordnung grösser als s wäre.

H_s besitzt somit die Form

$$x_1^s p_1 + x_1^{s-1} x_2 p_2 + \ldots + x_1^{s-1} x_n p_n + \ldots$$

Unsere Gruppe enthält eine Transformation der Form

$$p_2 + \ldots$$

und also zugleich die Transformation

$$(p_2 + \ldots, H_s) = x_1^{s-1} p_2 + \ldots$$

und endlich auch die Transformation

$$(x_1^{s-1} p_2 + \ldots, H_s) = (2 - s) x_1^{2s-2} p_2 + \ldots$$

Wäre nun $s > 2$, und also auch $2s - 2 > s$, so enthielte die Gruppe inf. Transformationen, deren Ordnung grösser als s wäre, was von vorn ausgeschlossen ist. Also ist $s = 2$, und

$$H_s = x_1^2 p_1 + x_1 x_2 p_2 + \ldots + x_1 x_n p_n + \ldots),$$

vorausgesetzt dass die Gruppe überhaupt inf. Transformationen, deren Ordnung grösser als 1 ist, enthält.

Die Gruppe enthält die Transformation $p_1 + \ldots$ und also zugleich die Transformation

$$(p_1 + \ldots, H_s) = 2x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n + \ldots;$$

Nun aber giebt es für jedes k eine in der Gruppe enthaltene Transformation der Form

$$x_1 p_1 - x_k p_k + \ldots;$$

daher schliessen wir, dass unsere Gruppe eine jede Transformation der Form

$$x_k p_k + \ldots$$

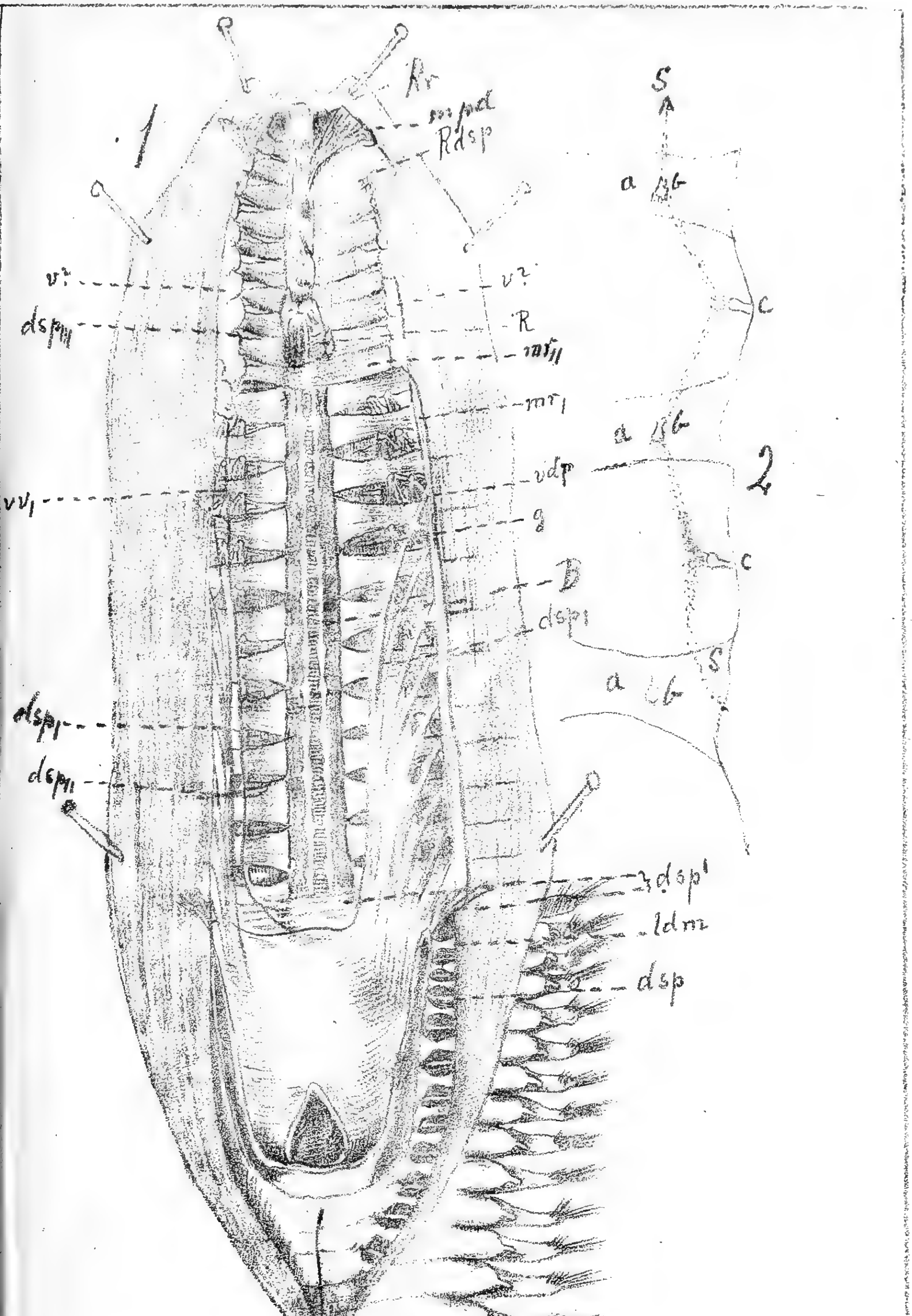
und also zugleich eine jede Transformation

$$x_i p_k + \ldots$$

enthält. Dies steht indess im Widerspruche mit unserer Annahme, dass die Gruppe nicht n^2 sondern nur n^2-1 Transformationen ersten Ordnung enthalten soll. Also schliessen wir dass $s = 1$ ist.

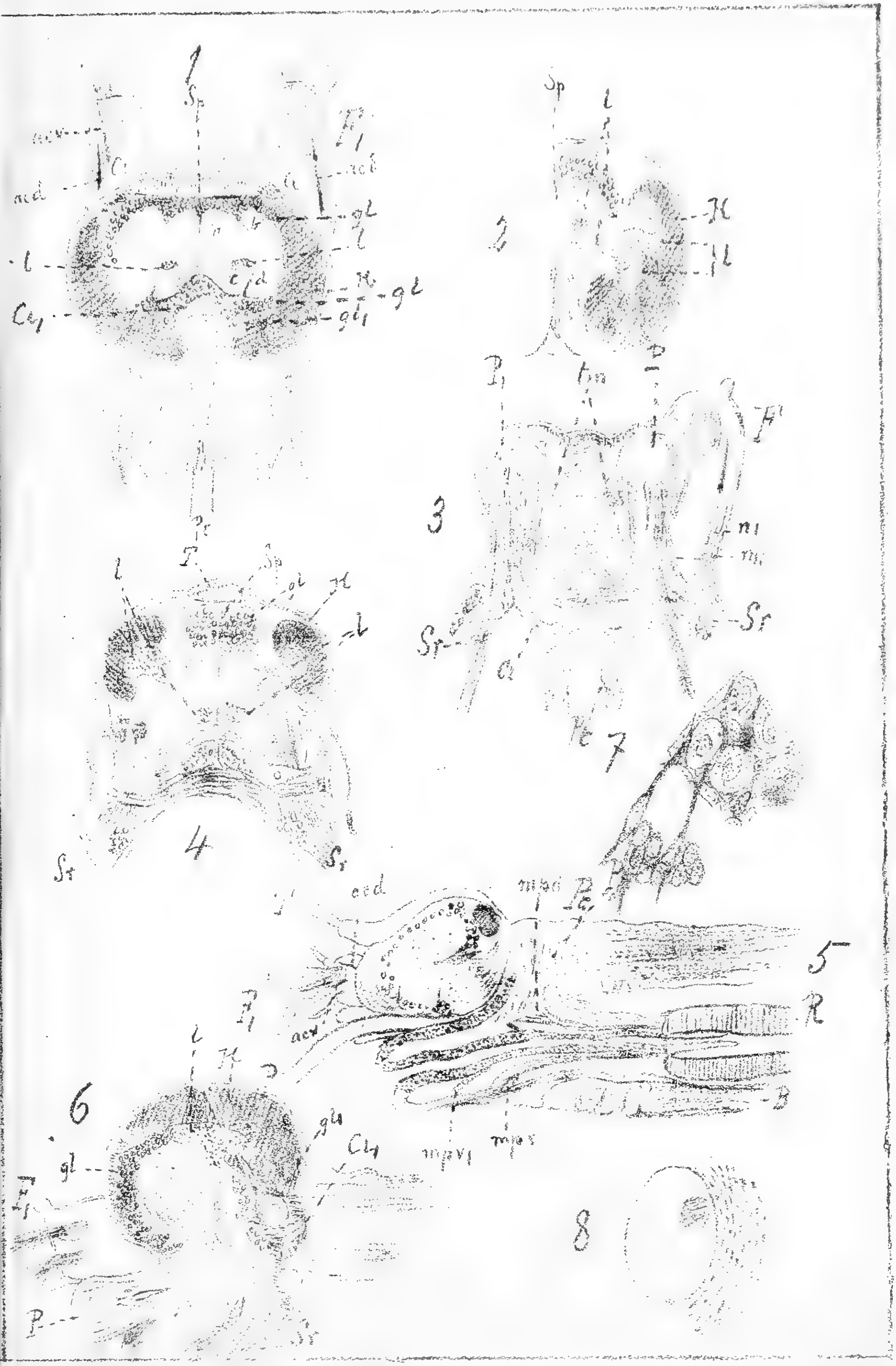
Satz 1. *Enthält unsere Gruppe nur n^2—1 inf. Transformationen erster Ordnung, so enthält sie keine Transformation, deren Ordnung grösser als 1 ist.*

II



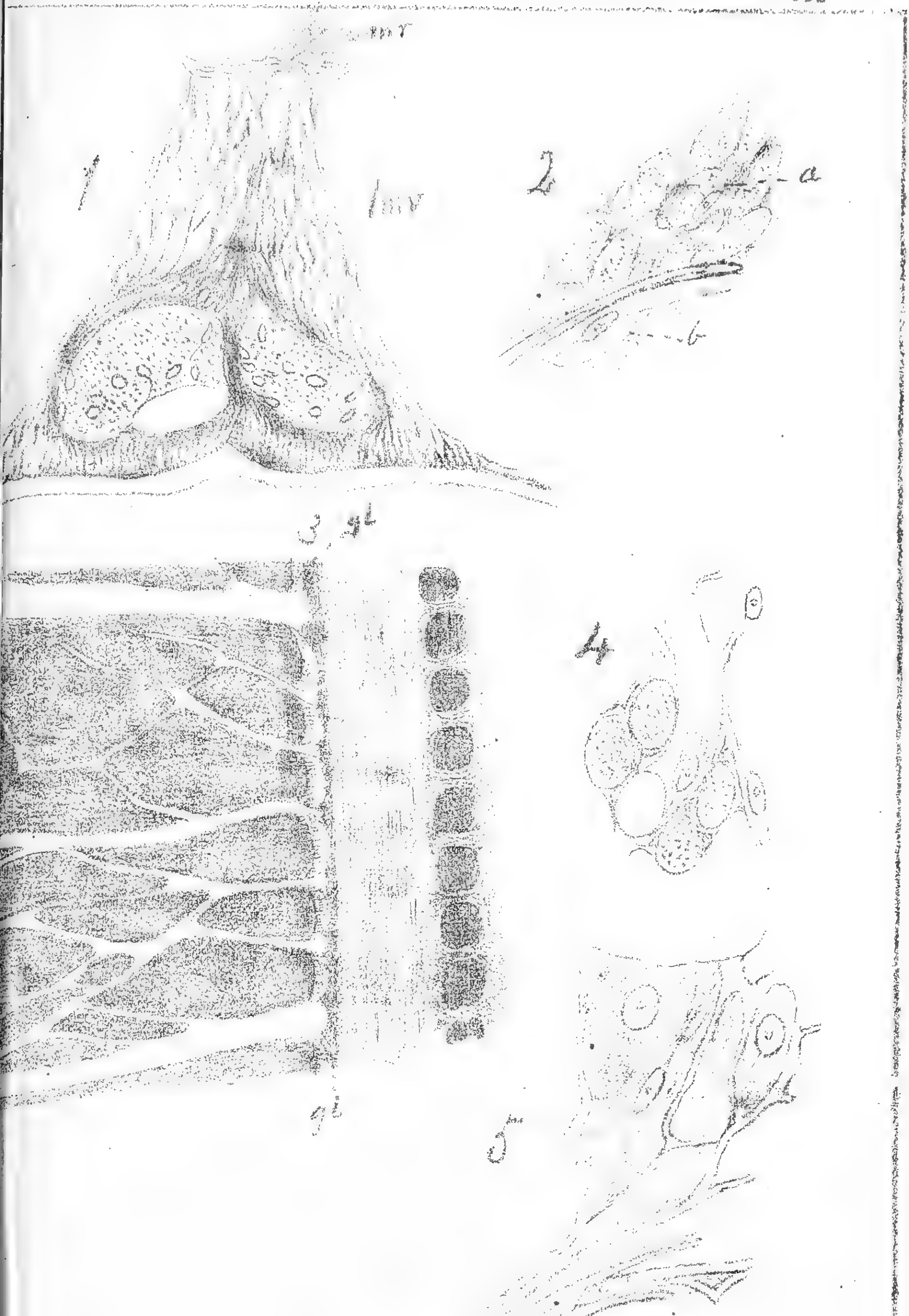
Hansen autogr.

T II



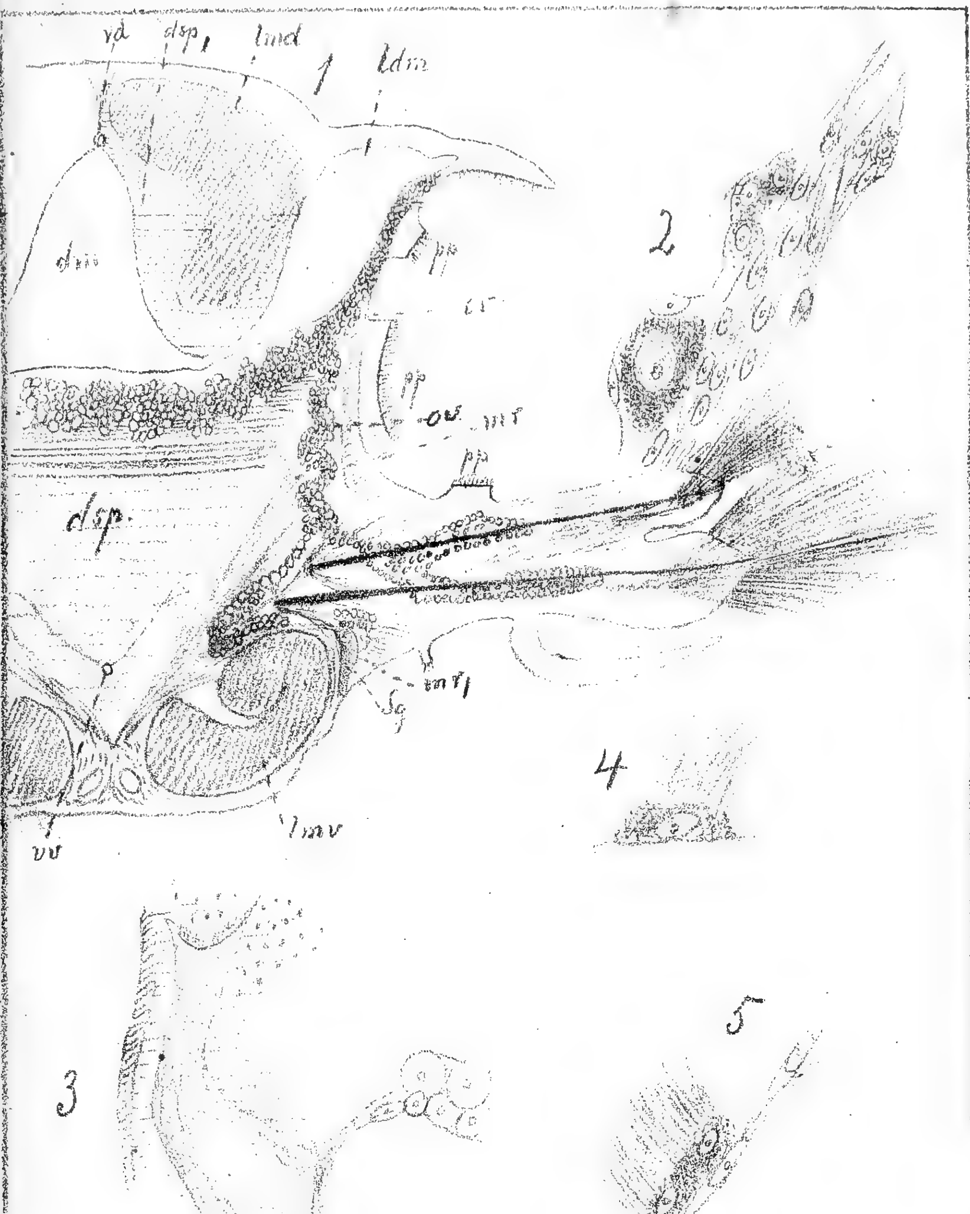
J. A. Hansen

T. III



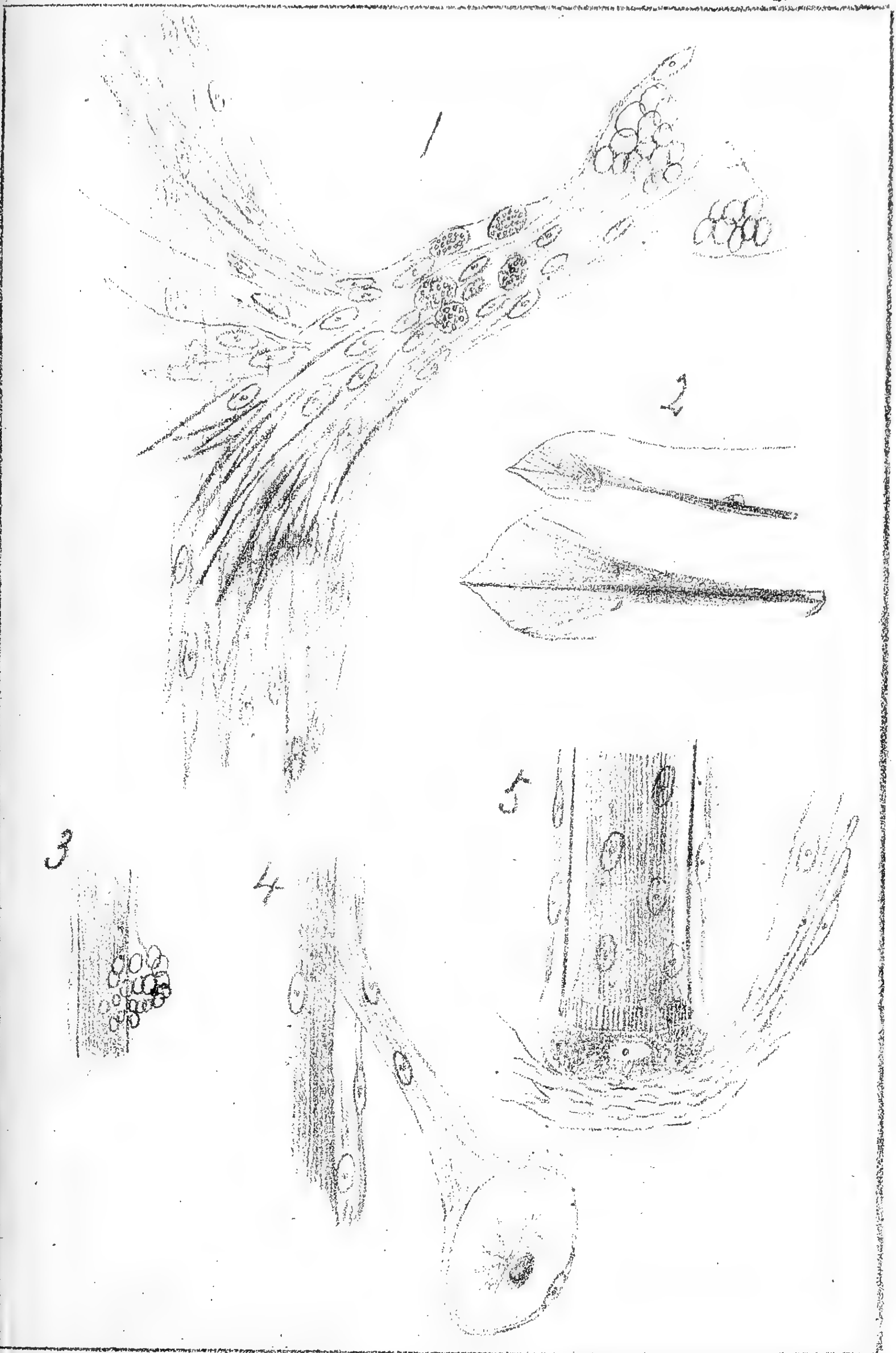
G. A. Hansen a. lithgr.

T IV

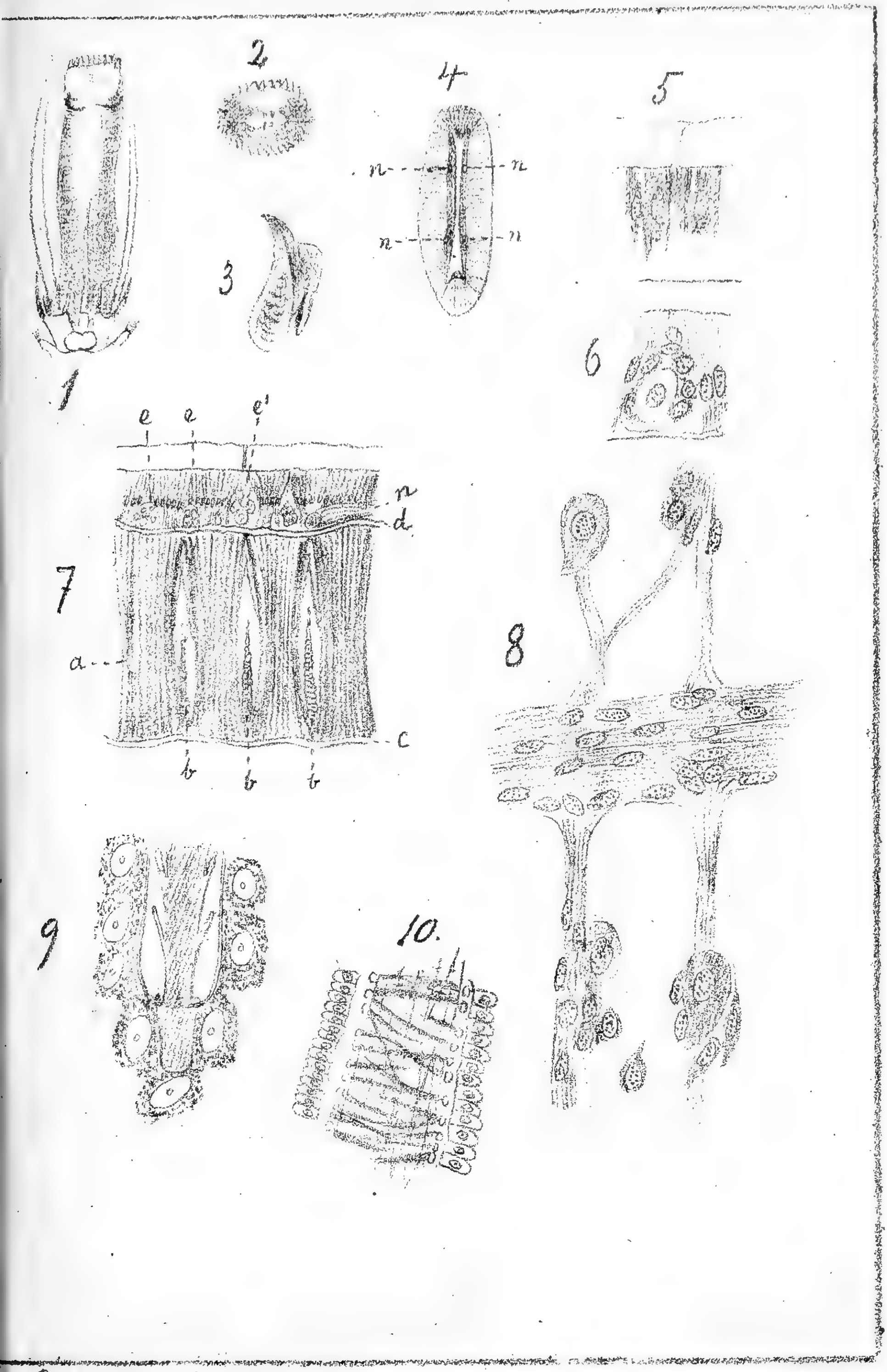


G. A. Hansen autogr.

T. V.

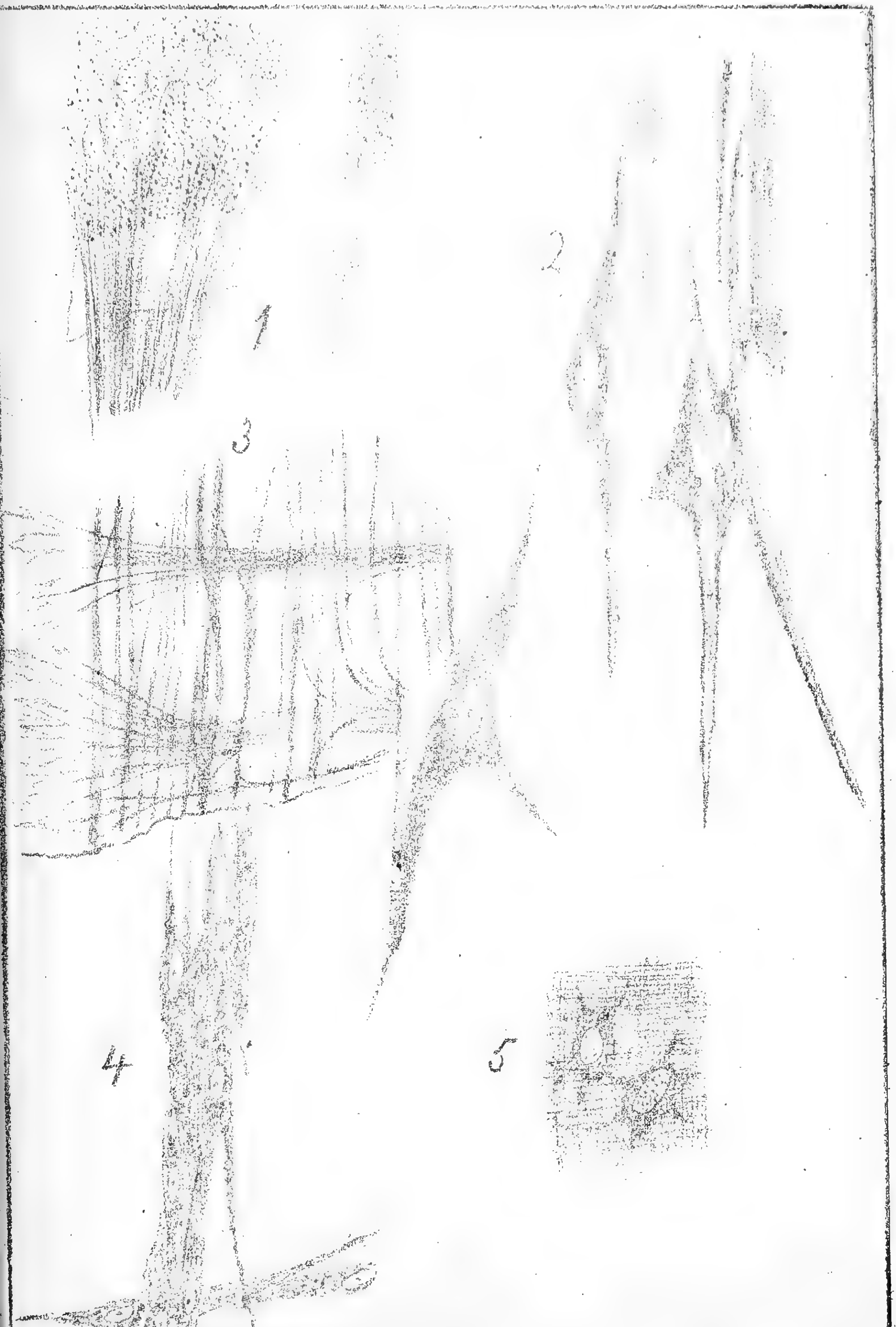


G. A. Hansen ad nat. gr.



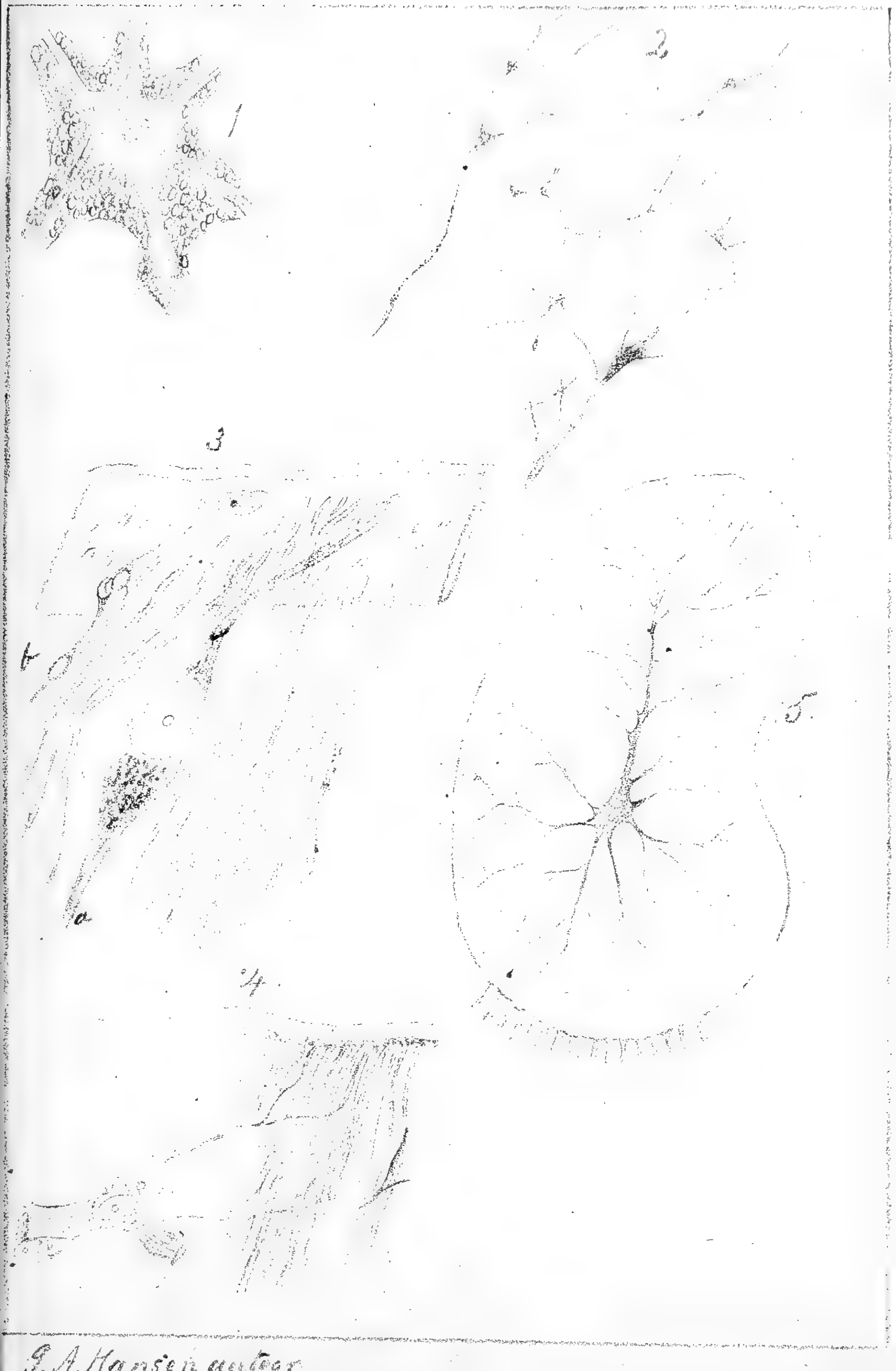
G. A. Hansen autogr.

T VII



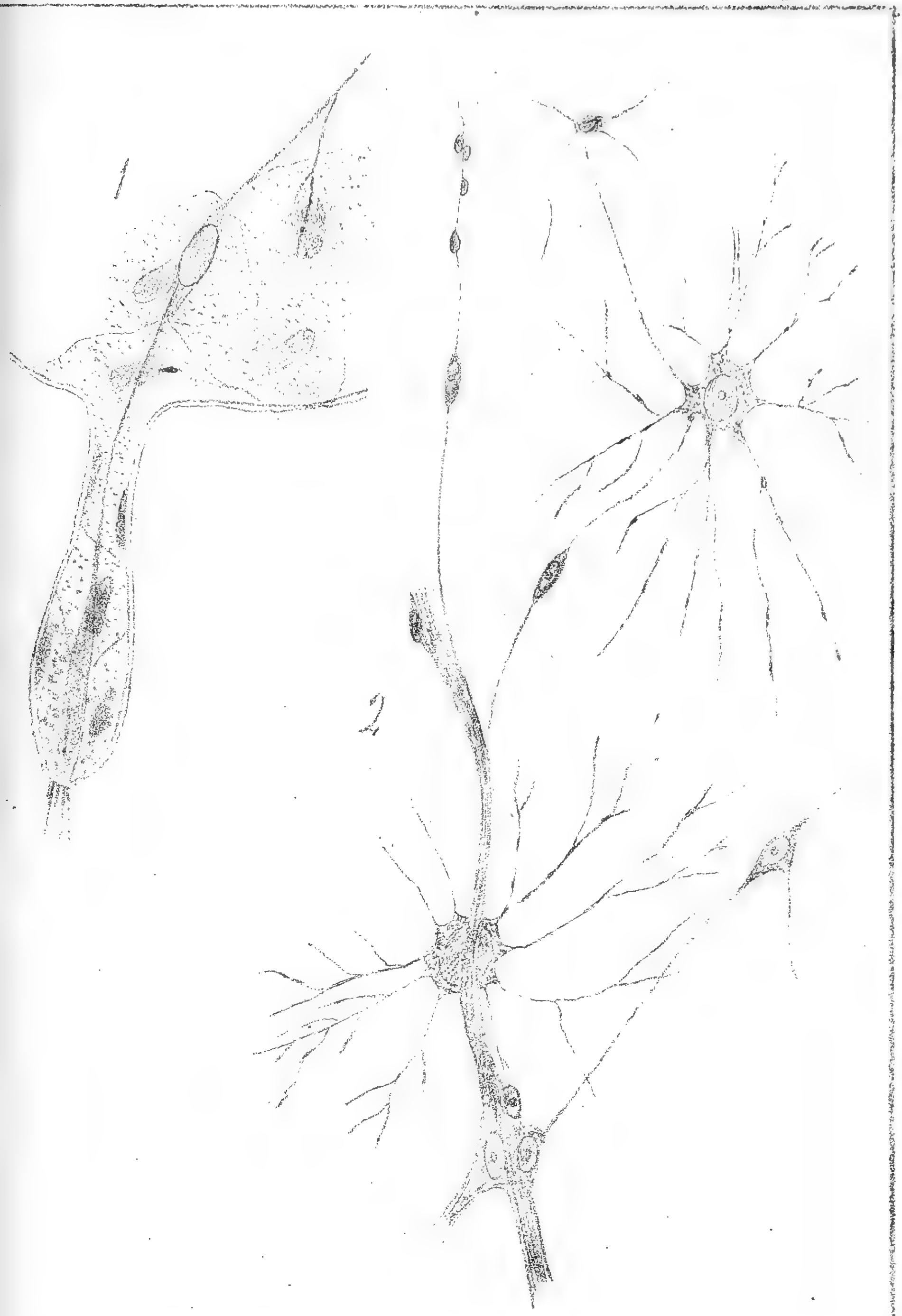
G. A. Hansen autogr.

T. VIII



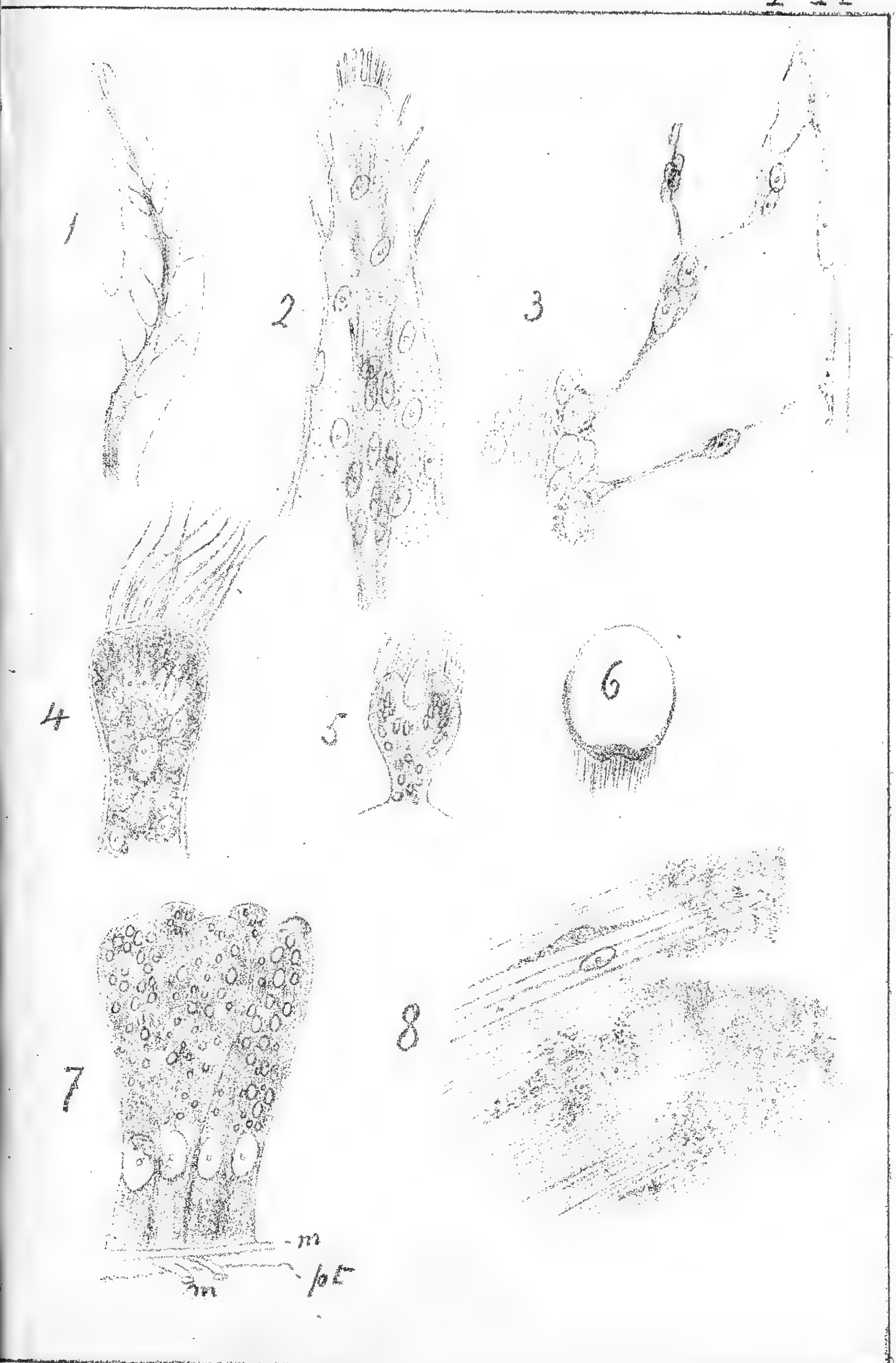
J. A. Hansen autogr.

T.IX



9. A. Hansen autogr.

IX



G. A. Hansen autogr.

§ 3.

Enthält die Gruppe n^2 Transformationen 1. O. und ausserdem einige von höherer Ordnung, so ist sie mit der allgemeinen linearen aehnlich.

Ich betrachte eine Gruppe mit n^2 inf. Transformationen erster Ordnung

$$x_i p_k + \ldots,$$

die zugleich Transformationen höherer Ordnung enthält. Ich werde zeigen, dass die grösste Ordnung gleich 2 ist; ich bestimme darnach alle Transformationen zweiter Ordnung, und zeige endlich, dass die Gruppe durch Einführung von zweckmässigen Coordinaten in die allgemeine lineare übergehen kann.

4. Indem ich ganz wie im vorangehenden Paragraph verfahre, erkenne ich, indem ich die Maximums-Ordnung mit s bezeichne, dass die Gruppe eine Transformation der Form

$$A(x_1{}^s p_1 + x_1{}^{s-1} x_2 p_2 + \ldots\ldots\ldots \quad + x_1{}^{s-1} x_n p_n)$$
$$+ B_2 x_1{}^s p_2 \quad + B_3 x_1{}^s p_3 + \ldots + B_n x_1{}^s p_n$$

enthält; dabei ergiebt sich, wie damals erstens, dass nur eine einzige unter den Coefficienten $A, B_2, B_3 \ldots B_n$ von Null verschieden ist, zweitens dass jede Form

$$x_1{}^s p_k \qquad (k > 1)$$

unmöglich ist, drittens dass $s = 2$ ist, sodass die betreffende Transformation die Form

$$K_1 = x_1{}^2 p_1 + x_1 x_2 p_2 + \ldots + x_1 x_n p_n + \ldots$$

besitzt.

Es ist dabei leicht weitere Transformationen zweiter Ordnung zu finden; dann es ist

$$(x_2 p_1 + \ldots, K_1) = K_2 = x_2 x_1 p_1 + x_2{}^2 p_2 \ + \ldots + x_2 x_n p_n + \ldots$$
$$(x_3 p_1 + \ldots, K_1) = K_3 = x_3 x_1 p_1 + x_3 x_2 p_2 + \ldots + x_3 x_n p_n + \ldots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(x_n p_1 + \ldots, K_1) = K_n = x_n x_1 p_1 + x_n x_2 p_2 + \ldots + x_n{}^2 p_n \ + \ldots$$

womit n unabhängige Transformationen zweiter Ordnung gefunden sind. Giebt es weitere Transformationen zweiter Ordnung

$$L = \Sigma\, a_{\mathrm{ikr}}\, x_{\mathrm{i}}\, x_{\mathrm{k}}\, p_{\mathrm{r}} + \ldots,$$

so muss bekanntlich

$$(K_1\, L) = 0,\ (K_2\, L) = 0 \ldots (K_{\mathrm{n}}\, L) = 0$$

sein, und also auch

$$(K_1\, L) = 0,\ \left(\frac{K_2}{K_1},\ L\right) = 0 \ldots \left(\frac{K_{\mathrm{n}}}{K_1},\ L\right) = 0$$

sein. Hieraus folgt, dass L eine Funktion von

$$K_1,\ \frac{x_2}{x_1},\ \frac{x_3}{x_1} \ldots \frac{x_{\mathrm{n}}}{x_1}$$

sein muss, dass also

$$L = \Omega\left(\frac{x_2}{x_1}\, \frac{x_3}{x_1} \ldots \frac{x_{\mathrm{n}}}{x_1}\right)(x_1{}^2 p_1 + \ldots + x_1\, x_{\mathrm{n}}\, p_{\mathrm{n}} + \ldots)$$

ist; also wird

$$\Omega = \frac{\Sigma\, a_{\mathrm{ik1}}\, x_{\mathrm{i}}\, x_{\mathrm{k}}}{x_1{}^2} = \frac{\Sigma\, a_{\mathrm{ik2}}\, x_{\mathrm{i}}\, x_{\mathrm{k}}}{x_1\, x_2} + \ldots + \frac{\Sigma\, a_{\mathrm{ikn}}\, x_{\mathrm{i}}\, x_{\mathrm{k}}}{x_1\, x_{\mathrm{n}}}$$

und also auch

$$\Omega = \frac{\Sigma\, \beta_{\mathrm{i}}\, x_{\mathrm{i}}}{x_1}$$

so dass

$$L = \Sigma\, \beta_{\mathrm{i}}\, K_{\mathrm{i}}$$

wird.

Hiermit ist nachgewiesen, dass die Gruppe keine weitere Transformationen zweiter Ordnung als $K_1\, K_2 \ldots K_{\mathrm{n}}$ enthält. Sie hat daher im Allen

$$n + n^2 + n = n\,(n + 2)$$

infinitesimale Transformationen, das heisst genau soviele wie die allgemeine lineare. Wir werden zeigen, dass sie in dieselbe übergeführt werden kann.

5. Ich setze

$$x_i p_i + \ldots\ldots\ldots \qquad = R_i$$

$$x_k (x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n + \ldots) = S_k$$

und bemerke zunächst, dass die $2n$ Transformationen R_i und S_k aufgefasst als Funktionen von $x_1 \ldots x_n p_1 \ldots p_n$ unabhängig sind, indem dies in der nächsten Umgebung von Origo der Fall ist. Ich bemerke ferner, dass Relationen der Form

$$(S_i\, S_k) = 0\ (R_i\, S_k) = 0,\ (R_i\, S_i) = S_i$$

$$(R_i\, R_k) = c_{ik1}\, S_1 + c_{ik2}\, S_2 + \ldots + c_{ikn}\, S_n$$

bestehen, so dass die R_i und S_k (Bd. I, pg. 184) eine $2n$-gliedrige Funktionengruppe bilden. Ich setze

$$R_i + \alpha_{i1}\, S_1 + \alpha_{i2}\, S_2 + \ldots + \alpha_{in}\, S_n = R_i{}^1$$

und führe darnach die $R_i{}^1$ als neue R_i ein. Dabei ist es möglich die Constanten α_{ij} derart zu wählen, dass alle Coefficienten c_{iki} und c_{ikk} verschwinden.

Sodann bilde ich die Jacobische Identität

$$((R_i\, R_k)\, R_s) + ((R_k\, R_s)\, R_i) + ((R_s\, R_i)\, R_k) = 0$$

woraus

$$\Sigma_\sigma\, [c_{ik\sigma}\, (S_\sigma\, R_s) + c_{ks\sigma}\, (S_\sigma\, R_i) + c_{si\sigma}\, (S_\sigma\, R_k)] = 0$$

und durch Einsetzung der Werthe der Grössen $(S_m\, R_n)$

$$- c_{iks}\, S_s - c_{ksi}\, S_i - c_{sik}\, S_k = 0.$$

Hieraus aber ergiebt sich, dass

$$c_{iks} = c_{ksi} = c_{sik} = 0$$

das heisst, dass alle $c_{\alpha\beta\gamma}$ gleich Null sind.

Hiermit haben die zwischen den $2n$ unabhängigen Funktionen R_i, S_k stattfindenden Relationen die Form

$$(R_i\, R_k) = 0,\ (R_i\, S_k) = 0,\ (R_i\, S_i) = S_i,\ (S_i\, S_k) = 0$$

erhalten, so dass die Funktionen-Gruppe $R_i\, S_k$ mit der Gruppe $R_i^0\, S_k^0$, wo

$$R_i^0 = x_i^0 p_i^0$$

$$S_k^0 = x_k^0 (x_1^0 p_1^0 + \ldots + x_n^0 p_n^0)$$

gleichzusammengesetzt ist.

Also schliessen wir (Math. Ann. Bd. 8, pg. 271, Satz 51), dass es eine Berührungs-Transformation giebt, vermöge deren

$$R_i = R_i^0, \quad S_k = S_k^0$$

ist. Diese $2n$ Gleichungen bestimmen überdies die betreffende Berührungs-Transformation vollständig.

Nun aber lehren die Entwickelungen meiner dritten Abhandlung über Transformationsgruppen (Bd. 3, pg. 125), indem ich zugleich berücksichtige, dass unter den $2n$ *linearen* partiellen Differential-Gleichungen

$$R_i^0 = 0, \quad S_k^0 = 0$$

$2n$ unabhängig sind, dass die Transformation

$$R_i = R_i^0, \quad S_k = S_k^0$$

eine *Punkt*-Transformation ist.

6. Es handelt sich darum, den Ausdruck einer jeden Transformation

$$T_{ik} = x_i p_k + \ldots$$

in den Variabeln $x^0 p^0$ aufzufinden. Ich setze

$$T_{ik} = x_i^0 p_k^0 + U_{ik}^0.$$

Alsdann nehmen die Relationen

$$(T_{ik} S_r) = 0 \qquad (r \lesseqgtr k)$$

$$(T_{ik} S_k) = S_i$$

die Form

$$(U_{ik}^0, S_r^0) = 0, \ (U_{ik}^0, S_k^0) = 0$$

an. Hieraus ergiebt sich, indem wir wie früher (no. 4) verfahren, dass

$$U_{ik}^0 = c_{ik1} S_1^0 + c_{ik2} S_2^0 + \ldots + c_{ikn} S_n^0,$$

ist, wobei die Constanten $c_{ik\sigma}$ ohne wesentliche Beschränckung gleich Null gesetzt werden können.

Es ist uns also gelungen vermöge einer Punkt-Transformation die $n(n+1)$ Gleichungen

$$x_i p_k + \dots = x_i^0 p_k^0$$
$$x_k \Sigma x_i p_i + \dots = x_k^0 \Sigma x_i^0 p_i^0$$

zu befriedigen.

Es steht zurück die Form der Transformationen

$$p_k + \dots = P_k$$

in den Variabeln $x^0 p^0$ zu bestimmen. Es ist

$$(P_1^0 S_1^0) = 2 T_{11}^0 + T_{22}^0 + \dots\dots + T_{nn}^0 + \Sigma \lambda_{1i} S_i^0$$
$$(P_1^0 S_2^0) = T_{22}^0 + \Sigma \lambda_{2i} S_i^0$$
$$(P_1^0 S_3^0) = T_{33}^0 + \Sigma \lambda_{3i} S_i^0$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$(P_1^0 S_n^0) = T_{nn}^0 + \Sigma \lambda_{ni} S_i^0.$$

Um diese Gleichungen zu vereinfachen, führen wir die Grösse

$$P_1^0 + \sum_{ik} \mu_{ik} T_{ik}^0$$

wo die μ_{ik} Constanten sind, als neue P_1^0 ein, und wählen die μ_{ik} derart, dass alle λ_{rs} verschwinden. Setzen wir sodann

$$P_1^0 = p_1^0 + V$$

so finden wir zur Bestimmung von V die n Gleichungen

$$(S_1 V) = 0, (S_2 V) = 0 \dots (S_n V) = 0,$$

woraus wie früher folgt, dass

$$V = \Sigma \nu_i S_i$$

ist, und dass daher

$$P_1^0 = p_1^0$$

gesetzt werden kann.

In dieser Weise ergiebt sich, dass jede Transformation nullter Ordnung $p_i + \ldots$ in den neuen Variabeln die Form p_i^0 besitzt. So dass die vorgelegte Gruppe mit der Gruppe

$$p_i^0, \; x_i^0 p_k^0, \; x_k^0 (x_1^0 p_1^0 + \ldots + x_n^0 p_n^0)$$

das heisst mit der allgemeinen linearen Gruppe aehnlich ist. Also

Theorem I. Enthält eine Gruppe, die im Infinitesimalen vollständig transitiv ist, inf. Transformationen, deren Ordnung grösser als 1 ist, so kann die Gruppe durch Einführung von zweckmässigen Variabeln in die allgemeine lineare übergeführt werden.

§ 4.

Enthält eine Gruppe n^2 inf. Transformationen 1. O., und keine höherer Ordnung, so ist sie mit einer linearen Gruppe aehnlich.

Nach dem Vorangehenden giebt es zweierlei Gruppen, die im Infinitesimalen vollständig transitiv sind, und welche dabei keine Transformation von zweiter oder höherer Ordnung enthalten. Wir werden successiv diese beiden Categorien betrachten.

7. Lass uns zunächst voraussetzen, dass die Gruppe $n^2 - 1$ inf. Transformationen 1. O. enthält. Dieselben besitzen die Form

$$T_{ik} = x_i p_k + \ldots \qquad i \gtrless k$$

$$R_k = x_1 p_1 - x_k p_k + \ldots$$

Ich betrachte die $2n-2$ Transformationen

$$T_{12} \; T_{13} \ldots T_{1n}$$

$$R_2 \;\; R_3 \ldots R_n$$

und bemerke, dass sie, aufgefasst als Funktionen von $x_k p_k$ unabhängig sind, und dabei eine $(2n-2)$-gliedrige Funktionen-Gruppe bilden.

Setze ich nun

$$T_{ik}^0 = x_i^0 p_k^0$$

$$R_k^0 = x_1^0 p_1^0 - x_k^0 p_k^0$$

so ist es zunächst möglich durch eine Berührungs-Transformation die Gleichungen

$$T_{1k} = T_{1k}^0, \quad R_k = R_k^0$$

zu befriedigen. Man erkennt ferner, indem man wie früher verfährt, dass die letzten Gleichungen insbesondere auch durch eine *Punkt*-Transformation erfüllt werden können. Es handelt sich darum die Form der Transformationen

$$x_i p_k + \ldots = T_{ik}$$

in den neuen Variabeln zu bestimmen. Es ist, wenn wir $k > 1$ annehmen,

$$(1) \qquad (T_{ik}, T_{1r}) = 0 \qquad (i \gtrless r)$$

$$(2) \qquad (T_{ik}, T_{1i}) = - T_{1k}$$

$$(3) \qquad (T_{ik}, R_j) = 0 \qquad (j \gtrless i) \; (j \gtrless k)$$

$$(4) \qquad (T_{ik}, R_i) = T_{ik}$$

$$(5) \qquad (T_{ik}, R_k) = - T_{ik}.$$

Diese Gleichungen genügen zur Bestimmung von

$$T_{ik} = \xi_{i1} p_1^0 + \ldots + \xi_{in} p_n^0$$

Setzen wir nehmlich z. B.

$$i = 2, \; k = 3$$

$$T_{23} = \xi_1 p_1^0 + \ldots + \xi_n p_n^0$$

so kommt zunächst (1) (2) [indem wir $x_k p_k$ statt $x_k^0 p_k^0$ schreiben]

$$x_1 \frac{d\xi_1}{dx_2} = 0,\ x_1 \frac{d\xi_2}{dx_2} - \xi_1 = 0,\ x_1 \frac{d\xi_3}{dx_2} = x_1,\quad x_1 \frac{d\xi_4}{dx_2} = 0 \ldots$$

$$x_1 \frac{d\xi_1}{dx_3} = 0,\ x_1 \frac{d\xi_2}{dx_3} \qquad = 0,\ x_1 \frac{d\xi_3}{dx_3} - \xi_1 = 0,\ x_1 \frac{d\xi_4}{dx_3} = 0 \ldots$$

$$x_1 \frac{d\xi_2}{dx_4} = 0,\ x_1 \frac{d\xi_2}{dx_3} \qquad = 0,\ x_1 \frac{d\xi_3}{dx_4} = 0,\quad x_1 \frac{d\xi_4}{dx_4} - \xi_1 = 0$$

. . . .

$$x_1 \frac{d\xi_1}{dx_n} = 0,\ x_1 \frac{d\xi_2}{dx_n} \qquad = 0,\ x_1 \frac{d\xi_3}{dx_n} = 0,\quad x_n \frac{d\xi_n}{dx_n} - \xi_1 = 0$$

woraus sich ergiebt, dass ξ_1 nur von x_1 abhängt, dass ξ_3 von $x_1\ x_2\ x_3$ abhängt; dass endlich die übrigen ξ_k nur von x_1 und x_k abhängen. Zur näheren Bestimmung von ξ_1 benutzen wir die Gleichungen (3) (4) (5), woraus

$$x_1 \frac{d\xi_1}{dx_1} - x_2 \frac{d\xi_1}{dx_2} - \xi_1 = -\xi_1$$

$$x_1 \frac{d\xi_1}{dx_1} - x_3 \frac{d\xi_1}{dx_3} - \xi_1 = \quad \xi_1$$

welche zeigen, dass $\xi_1 = 0$ ist; es folgt ferner, dass die übrigen ξ_k nicht von x_k abhängen. Zur Bestimmung von ξ_2 benutzen wir die Gleichungen

$$x_1 \frac{d\xi_2}{dx_1} - x_2 \frac{d\xi_2}{dx_2} + \xi_2 = -\xi_2$$

$$x_1 \frac{d\xi_2}{dx_1} - x_3 \frac{d\xi_2}{dx_3} \qquad = \quad \xi_2$$

welche zeigen, dass auch ξ_2 verschwindet. In entsprechender Weise ergiebt sich, dass alle ξ_k ausgenommen ξ_3 verschwinden. Zur Bestimmung von ξ_3 benutzen wir endlich die Gleichungen

$$x_1 \frac{d\xi_3}{dx_1} - x_2 \frac{d\xi_3}{dx_2} \qquad = -\xi_3$$

$$x_1 \frac{d\xi_3}{dx_1} - x_3 \frac{d\xi_3}{dx_3} + \xi_3 = \quad \xi_3$$

zusammen mit den früheren Gleichungen

$$\frac{d\xi_3}{dx_3} = 0, \ \frac{d\xi_3}{dx_2} = 1,$$

und finden somit, dass

$$\xi_3 = x_2$$

und in Folge dessen

$$T_{23} = \Sigma\, \xi_i\, p_i = x_2\, p_3$$

ist.

In ganz entsprechender Weise erkennt man, dass immer wenn $k > 1$

$$T_{ik} = x_i\, p_k$$

ist.

8. Wir müssen nun den Fall $k = 1$ betrachten. Lass uns z. B. versuchen, die neue Form der Transformation

$$T_{21} = \Sigma\, \xi_i\, p_i$$

zu bestimmen

Es ist

(6) $$(T_{12}\ T_{21}) = R_2$$

(7) $$(T_{1k}\ \ T_{21}) = -\ T_{2k}$$

(8) $$(R_2\ T_{21}) = -2\ T_{21}$$

(9) $$(R_k\ T_{21}) = -\ T_{21}$$

Die beiden ersten Gleichungen geben

$$x_1 \frac{d\xi_1}{dx_2} = x_1\, x_1 \frac{d\xi_2}{dx_2} - \xi_1 = -\ x_2, \ x_1 \frac{d\xi_k}{dx_2} = 0,$$

$$x_1 \frac{d\xi_1}{dx_3} = 0, \ x_1 \frac{d\xi_2}{dx_3} \qquad = 0, \qquad x_1 \frac{d\xi_3}{dx_3} - \xi_1 = -\ x_2, \ x_1 \frac{d\xi_i}{dx_3} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1 \frac{d\xi_1}{dx_n} = 0, \ x_1 \frac{d\xi_2}{dx_n} \qquad = 0, \qquad \ldots\ldots x_1 \frac{d\xi_n}{dx_n} - \xi_1 = -\ x_2$$

woraus folgt

$$\xi_1 = x_2 + f(x_1)$$

$$\xi_i = \frac{x_i}{x_1} f(x_1) + \varphi_i(x_1)$$

Die Gleichungen (8) (9) geben

$$x_1 \frac{d\xi_1}{dx_1} - x_2 \frac{d\xi_1}{dx_2} - \xi_1 = -2\xi_1$$

$$x_1 \frac{d\xi_1}{dx_1} - x_3 \frac{d\xi_1}{dx_3} - \xi_1 = -\xi_1$$

woraus

$$f = 0,\ \xi_1 = x_2,\ \frac{d\xi_k}{dx_k} = 0,$$

Sie geben ferner

$$x_1 \frac{d\xi_2}{dx_1} - x_2 \frac{d\xi_2}{dx_2} + \xi_2 = -2\xi_2$$

$$x_1 \frac{d\xi_2}{dx_1} - x_3 \frac{d\xi_2}{dx_3} = -\xi_2$$

woraus folgt

$$\xi_2 = 0.$$

Es ist ferner

$$x_1 \frac{d\xi_3}{dx_1} - x_2 \frac{d\xi_3}{dx_2} = -2\xi_3$$

$$x_1 \frac{d\xi_3}{dx_1} - x_4 \frac{d\xi_3}{dx_4} = -\xi_3$$

woraus folgt

$$\xi_3 = 0,$$

und ebenso im Allgemeinen

$$\xi_{1+k} = 0.$$

Also wird

$$T_{21} = x_2 p_1$$

und in entsprechender Weise ergiebt sich überhaupt

$$T_{k1} = x_k p_1$$

9. Jetzt steht nur zurück die Form der Transformationen

$$P_1\, P_2 \ldots P_n$$

zu finden. Es ist bekanntlich

$$(T_{j1}\, P_1) = \Sigma_{ik}\, c_{ik}\, T_{ik} + \Sigma\, d_k\, R_k$$

wo die Coefficienten, $c_{ik}\, d_k$ möglicherweise zugleich von j abhängen. Um diese Grössen näher zu bestimmen, bilde ich die Jacobische Identität

$$((T_{q1}\, P_q)\, T_{j1}) + ((P_q\, T_{j1})\, T_{q1}) + ((T_{j1}\, T_{q1})\, P_q) = 0$$

wo das letzte Glied wegfällt, indem $(T_{j1}\, T_{q1})$ gleich Null ist. Es bestehen Gleichungen der Form

$$(T_{q1}\, P_q) = -P_1 + \Sigma\,\Sigma\,\lambda_{ik}\, T_{ik} + \Sigma\,\mu_i\, R_i$$

$$((T_{q1}\, P_q)\, T_{j1}) = (T_{j1}\, P_1) + \Sigma\,\alpha_k\, T_{jk} + \Sigma\,\beta_i\, T_{i1} + d\, R_j$$

wobei zu bemerken ist, dass die letzte Gleichung keine Doppel-Summe enthält. Es ist ferner

$$(P_q\, T_{j1}) = \Sigma\,\Sigma\,\nu_{ik}\, T_{ik} + \Sigma\,\varphi_i\, R_i$$

$$((P_q\, T_{j1})\, T_{q1}) = \Sigma\,\gamma_k\, T_{qk} + \Sigma\,\delta_i\, T_{i1} + \varepsilon\, R_q.$$

Und also kommt durch Einsetzung eine Relation der Form

$$(T_{j1}\, P_1) = \Sigma\, a_k\, T_{jk} + \Sigma\, b_k\, T_{qk} + \Sigma\, c_i\, T_{i1} +$$
$$+ d\, R_j + e\, R_q.$$

Nun aber ist klar, dass der Index q der nicht links auftritt, auch nicht rechts in ausgezeichneter Weise auftreten kann, dass also

$$b_k = e = 0.$$

Also bestehen Relationen der Form

$$(T_{j1}\, P_1) = \sum_k a_{jk}\, T_{jk} + \sum_i c_{ji}\, T_{i1} + d_j\, R_j$$

Um dieselben zu vereinfachen, führen wir

$$P_1 + \Sigma\,\Sigma\,\lambda_{ik}\, T_{ik} + \mu_i\, R_i$$

als neues P_1 ein. Indem wir die λ_{ik} passend wählen, erreichen, wir dass alle c_{ji} und d_j verschwinden. Indem wir darnach die μ_i passend wählen, erreichen wir zugleich, dass

$$a_{j1} = 0$$

wird. Um weitere Vereinfachungen zu erreichen, bilden wir die Identität

$$((T_{j1}\, P_1)\, T_{q1}) + ((P_1\, T_{q1})\, T_{j1}) + ((T_{q1}\, T_{j1})\, P_1) = 0,$$

wo wiederum das letzte Glied wegfällt. Nun ist

$$((T_{j1}\, P_1)\, T_{q1}) = a_{jq}\, T_{j1}$$

$$((P_1\, T_{q1})\, T_{j1}) = -\, a_{qj}\, T_{q1}$$

also kommt

$$a_{jq}\, T_{j1} - a_{qj}\, T_{q1} = 0,$$

woraus folgt, dass

$$a_{jq} = 0 \quad (q > 1)$$

ist. Indem wir nun erinnern, dass auch a_{j1} gleich Null ist, erkennen wir, dass die $(T_{j1}\, P_1)$ sämmtlich verschwinden

$$(T_{j1}\, P_1) = 0.$$

Setzen wir nun

$$P_1 = \xi_1\, p_1 + \ldots + \xi_n\, p_n,$$

so erhalten wir zur Bestimmung der ξ_k die folgenden Relationen

$$x_j \frac{d\xi_1}{dx_1} = \xi_j, \quad \frac{d\xi_2}{dx_1} = 0 \ldots \frac{d\xi_n}{dx_1} = 0$$

woraus

$$P_1 = \xi_1\, p_1 + \frac{d\xi_1}{dx_1}(x_2\, p_2 + \ldots + x_n\, p_n)$$

Es ist, wenn wir i und k grösser als 1 annehmen,

$$(T_{ik},\, P_1) = x_i \frac{d\xi_1}{dx_k}\, p_1 + x_i \frac{d^2 \xi_1}{dx_k\, dx_1}(x_2\, p_2 + \ldots + x_n\, p_n)$$

und da dieser Ausdruck für jedes i grösser als 1 die Form

$$\Sigma\, \lambda_{ik}\, T_{ik} + \Sigma\, \mu_i\, R_i$$

besitzen soll, so ist

$$\frac{d\xi_1}{dx_k} = \alpha_k = \text{Const.}$$

und

$$\xi_1 = f(x_1)\, p_1 + \alpha_2\, x_1 + \ldots + \alpha_n\, x_n$$

wo alle α ohne Beschränckung gleich Null gesetzt werden können:

$$P_1 = f(x_1)\, p_1 + \frac{df}{dx_1}(x_2\, p_2 + \ldots + x_n\, p_n).$$

Zur näheren Bestimmung von $f(x_1)$ bilden wir die Gleichung

$$(R_2, P_1) = -P_1 + \Sigma\, \lambda_{ik}\, T_{ik} + \Sigma\, \mu_i\, R_i \tag{1}$$

woraus

$$x_1 \frac{df}{dx_1} - f = -f + \Sigma\, \gamma_i\, x_i$$

und

$$x_1 \frac{df}{dx_1} = A x_1$$

und durch Integration

$$f = A x_1 + B$$

$$P_1 = B p_1 + A(x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + \ldots + x_n\, p_n)$$

wo die Gleichung (1) zeigt, dass die Constante A gleich Null sein muss. Also können wir

$$P_1 = p_1$$

setzen, und dementsprechend ist überhaupt

$$P_k = p_k$$

Hiermit haben die inf. Transformationen unserer Gruppe die folgende Form genommen

$$p_k,\; x_i\, p_k,\; x_1\, p_1 - x_k\, p_k.$$

Und also ist die Gruppe mit einer Untergruppe der allgemeinen linearen aehnlich. Also

Theorem 2. Enthält eine Gruppe, die im Infinitesimalen vollständig transitiv ist, nur n^2-1 Transformationen 1. O., so ist sie mit einer linearen Gruppe aehnlich.

10. Jetzt betrachten wir Gruppen mit n^2 Transformationen 1. O. (und keine von höherer Ordnung)

$$x_i p_k + \dots = T_{ik}$$

wo jetzt i und k verschieden oder einander gleich sein können.

Ich betrachte die $2n - 1$ Transformationen

$$T_{12}\ T_{13} \dots T_{1n},$$

$$T_{11}\ T_{22} \dots T_{nn},$$

die eine $(2n-1)$-gliedrige Funktionengruppe bilden. Setze ich

$$x_i{}^0 p_k{}^0 = T_{ik}{}^0,$$

so ist zunächst klar, dass die $2n-1$ Gleichungen

$$T_{1k} = T_{1k}{}^0,\ T_{kk} = T_{kk}{}^0$$

durch eine *Berührungs*-Transformation erfüllt werden können. Man erkennt ferner in der gewöhnlichen Weise, dass diese Gleichungen insbesondere auch durch eine *Punkt*-Transformation befriedigt werden können.

Es handelt sich darum die Form der übrigen Transformationen

$$x_i p_k + \dots = T_{ik}$$

in den neuen Variabeln zu finden. Ich werde zunächst die Form von

$$T_{23} = \xi_1 p_1{}^0 + \dots + \xi_n p_n{}^0$$

bestimmen. Es ist

$$(T_{12}\ T_{23}) = T_{13}$$

$$(T_{1k}\ T_{23}) = 0$$

$$(T_{22}\ T_{23}) = T_{23}$$

$$(T_{33}\ T_{23}) = -T_{23}$$

$$(T_{kk}\ T_{23}) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich wie früher, dass

$$T_{23} = x_2{}^0 p_3{}^0$$

ist. Und in entsprechender Weise erkennt man, dass überhaupt

$$T_{i,1+k} = x_i^0 \, p_{1+k}^0 .$$

Zur Bestimmung der Grösse T_{21} bilden wir die Gleichungen

$$(T_{12} \, T_{21}) = T_{11} - T_{22}$$

$$(T_{1k} \, T_{21}) = - T_{2k}$$

$$(T_{11} \, T_{21}) = - T_{21}$$

$$(T_{22} \, T_{21}) = T_{21}$$

$$(T_{kk} \, T_{21}) = 0$$

aus denen wie früher folgt, dass

$$T_{21} = x_2^0 \, p_1^0$$

ist. Dementsprechend ist

$$T_{k1} = x_k^0 \, p_1^0 .$$

11. Es steht somit nur zurück, die Form der n Transformationen nullter Ordnung

$$P_1 \, P_2 \ldots P_n$$

zu bestimmen. Hierzu schlagen wir genau denselben Weg wie in der vorangehenden Nummer ein. Es ist

$$(T_{j1} \, P_1) = \Sigma \, \Sigma \, c_{ik} \, T_{ik} ,$$

wo die Indices i und k jetzt einander gleich oder verschieden sein können. Um die Coefficienten c_{ik} näher zu bestimmen, bilden wir die Jacobische Identität

$$((T_{q1} \, P_q) \, T_{j1}) + ((P_q \, T_{j1}) \, T_{q1}) + ((T_{j1} \, T_{q1}) \, P_q) = 0 \; (q > 1, j > 1)$$
$$(q \gtrless j)$$

wo das letzte Glied wie gewöhnlich wegfällt. Nun bestehen Gleichungen der Form

$$(T_{q1} \, P_q) = - P_1 + \Sigma \, \Sigma \, \lambda_{ik} \, T_{ik}$$

$$((T_{q1} \, P_q) \, T_{j1}) = (T_{j1} \, P_1) + \Sigma \, \alpha_k \, T_{jk} + \Sigma \, \beta_i \, T_{i1} + \gamma_j \, (T_{11} - T_{jj}),$$

wobei in der letzten Gleichung die Grössen T_{11} und T_{jj} nur in der Combination $T_{11} - T_{jj}$ auftreten. Dementsprechend findet man

$$(P_q T_{j1}) = \Sigma \Sigma \nu_{ik} T_{ik}$$

$$((P_q T_{j1}) T_{q1}) = \Sigma \gamma_k T_{qk} + \Sigma \delta_i T_{i1} + \varepsilon (T_{11} - T_{qq}).$$

Und also kommt durch Einsetzung eine Relation der Form

$$(T_{j1} P_1) = \Sigma a_k T_{jk} + \Sigma b_k T_{qk} + \Sigma c_i T_{i1}$$
$$+ d_j (T_{11} - T_{jj}) + e (T_{11} - T_{qq}),$$

wo wir wie früher erkennen, dass der Index q, der nicht links auftritt, auch nicht rechts in ausgezeichneter Weise auftreten darf, dass also $b_k = e = 0$ und

$$(T_{j1} P_1) = \Sigma a_{jk} T_{jk} + \Sigma c_i T_{i1} + d_j (T_{11} - T_{jj}).$$

Um diese Relationen zu vereinfachen, führen wir

$$P_1 + \Sigma \Sigma \lambda_{ik} T_{ik} + \Sigma \mu_r (T_{11} - T_{rr}) \quad (i \gtrless k)$$

als neues P_1 ein. Indem wir die λ_{ik} passend wählen, erreichen wir, dass alle c_i und d_j verschwinden; indem wir darnach μ_r passend wählen, erreichen wir, dass auch

$$a_{j1} = 0$$

wird. Um noch weitere Vereinfachungen zu erreichen, bilden wir die Identität

$$((T_{j1} P_1) T_{q1}) + ((P_1 T_{q1}] T_{j1}) + (T_{q1} T_{j1}) P_1) = 0,$$

wo das letzte Glied wegfällt. Es ist

$$((T_{j1} P_1) T_{q1}) = a_{jq} T_{j1}$$

$$((P_1 T_{q1}) T_{j1}) = - a_{qj} T_{q1}$$

also kommt

$$a_{jq} T_{j1} - a_{qj} T_{q1} = 0;$$

das heisst, es ist

$$a_{jq} = 0.$$

Erinnern wir nun zugleich, dass

$$a_{j1} = 0, \; c_{ji} = 0, \; d_j = 0$$

ist, so erkennen wir, dass die $(T_{j1} P_1)$ sämmtlich verschwinden

$$(T_{j1} P_1) = 0$$

Setzen wir nun

$$P_1 = \xi_1 p_1 + \ldots + \xi_n p_n,$$

so erhalten wir zur Bestimmung der ξ_k die folgenden Relationen

$$x_j \frac{d\xi_1}{dx_1} = \xi_k, \frac{d\xi_2}{dx_1} = 0 \ldots \frac{d\xi_n}{dx_1} = 0$$

woraus

$$P_1 = \xi_1 p_1 + \frac{d\xi_1}{dx_1}(x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n).$$

Nun ist, wenn wir i und k grösser als 1 annehmen

$$(T_{ik} P_1) = x_i \frac{d\xi_1}{dx_k} p_1 + x_i \frac{d\xi_1}{dx_1 \, dx_k}(x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n)$$

und da dieser Ausdruck für jedes i grösser als 1 die Form

$$\Sigma \lambda_{ik} T_{ik}$$

besitzt, so muss

$$\frac{d\xi_1}{dx_k} = \alpha_k = \text{Const.}$$

und

$$\xi_1 = f(x_1) + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

wo alle α_k ohne Beschränckung gleich Null gesetzt werden können:

$$P_1 = f(x_1) p_1 + \frac{df}{dx_1}(x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n).$$

Zur näheren Bestimmung von f bilden wir die Gleichung

$$(T_{11} P_1) = - P_1 + \Sigma \lambda_{ik} T_{ik},$$

woraus

$$x_1 \frac{df}{dx_1} - f = - f + \Sigma \gamma_i x_i$$

und

$$x_1 \frac{df}{dx_1} = A x_1,$$

und durch Integration

$$f = A x_1 + B,$$

$$P_1 = B p_1 + A(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n),$$

wo A ohne Beschränckung gleich Null und $B = 1$ gesetzt werden kann:

$$P_1 = p_1.$$

In entsprechender Weise erkennt man, dass überhaupt

$$P_k = p_k$$

gezetzt werden kann. Und also erhalten die inf. Transformationen unserer Gruppe in den neuen Variabeln die Form

$$p_k, \; x_i p_k,$$

so dass die Gruppe in eine lineare Gruppe umgewandelt worden ist.

Indem wir hiermit unsere frühere Ergebnisse vereinigen, können wir das folgende fundamentale Theorem aussprechen.

Theorem 3. *Ist eine Transformationsgruppe einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit im Infinitesimalen vollständig transitiv, so sind* d r e i *Fälle möglich, indem die Gruppe entweder $n(n+2)$ oder $n(n+1)$ oder $n(n+1) - 1$ Parameter enthalten kann. Im ersten Falle ist die Gruppe mit der allgemeinen linearen aehnlich; in den beiden letzten Fällen ist sie mit einer Untergruppe der allgemeinen linearen aehnlich.*[1])

[1]) Ist $n = 3$, so müssen die Entwickelungen der Nummer 9 und 11 modificirt werden. Hierüber mehr bei einer anderen Gelegenheit.

Abschnitt VI.

Bestimmung aller Gruppen von Berührungs-Transformationen einer Ebene.

In diesem Abschnitte bestimme ich alle Gruppen von *Berührungs*-Transformationen einer Ebene, welche nicht durch eine zweckmässige Berührungs-Transformation in Gruppen von *Punkt*-Transformationen umgewandelt werden können. Da ich nun im vierten Abschnitte alle Gruppen von *Punkt*-Transformationen einer Ebene bestimmt habe, so erhalte ich durch Vereinigung dieser Theorien eine vollständige Theorie der Transformationsgruppen einer Ebene.

§ 5.

Vorbereitende Untersuchungen.

12. Als Coordinaten eines Linienelements in der Ebene benutze ich wie gewöhlich die Grössen x, y, p. Dabei soll wie gewöhnlich die Gleichung

$$dy - p\,dx = 0$$

ausdrücken, dass die Elemente x, y, p und $x + dx$, $y + dy$, $p + dp$ *vereinigt* liegen. Dies vorausgesetzt, ist eine Berührungs-Transformation nach meiner Definition eine Transformation zwischen den Variabeln $x\ y\ p$, vermöge deren die Gleichung

$$dy - p\,dx = 0$$

invariant bleibt.

Ich interpretire $x\ y\ p$ als Punkt-Coordinaten eines dreifach ausgedehnten Raumes. Die Gleichung $dy - p\,dx = 0$ ordnet jedem Punkte dieses Raumes ∞^1 Fortschreitungs-Richtungen $dy\ dx\ dp$ zu; und zwar liegen diese Richtungen in einer *Ebene*, die dem betreffenden Punkte zngeordnet ist.

Eine Transformation [1]) zwischen $x\ y\ p$, die den Punkt

---

[1]) Die im Texte betrachteten Transformationen zwischen $x\ y\ p$ sollen immer *Berührungs*-Transformationen sein.

$x_0\ p_0\ y_0$ invariant lässt, transformirt die durch diesen Punkt hindurchgehenden Richtungen; insbesondere vertauscht sie die ∞^1 Richtungen, die $dy - p\,dx = 0$ erfüllen, unter sich.

Dies vorausgesetzt, werde ich eine Gruppe von Transformationen zwischen $x\,y\,p$ betrachten. Es giebt immer gewisse Transformationen, die einen arbiträr gewählten Punkt $x_0\ y_0\ p_0$ invariant lassen. Dieselben bilden eine Untergruppe; sie transformiren die durch $x_0\ y_0\ p_0$ gehenden Linienelemente, und zwar durch eine *lineare* Gruppe. Durch diese Gruppe werden die ∞^1 Linienelemente des Büschels $dy - p\,dx = 0$ unter sich vertauscht.

Es sind nun vier verschiedene Fälle denkbar, jenachdem die Linienelemente des Büschels $dy - p\,dx = 0$ nullgliedrig, eingliedrig, zweigliedrig oder dreigliedrig transformirt werden. In den drei ersten Fällen giebt es jedenfalls *eine* Gleichung der Form

$$\frac{df}{dx} + p\frac{df}{dy} + P\frac{df}{dp} = 0$$

(wo P eine gewisse Funktion von $x\ y\ p$ bezeichnet), die die Transformationen der Gruppe gestattet. Integrirt man das simultane System

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{p} = \frac{dp}{P}$$

durch die beiden Gleichungen

$$U = a = \text{Const.},$$

$$V = b = \text{Const.},$$

so ist der Inbegriff der ∞^2 Curven im Raume, die durch die beiden letzten Gleichungen dargestellt werden, invariant durch die Gruppe. Eliminirt man darnach p, so erhält man eine Gleichung

$$f(x\,y\,a\,b) = 0$$

die ∞^2 Curven in der Ebene darstellt. Der Inbegriff dieser Curven ist bei der Gruppe invariant. Es giebt nun eine ganz bestimmte Berührungs-Transformation, diejenige nehmlich, die durch die Gleichung

$$f(x\, y\, x_1\, y_1) = 0$$

definirt wird, die die ∞^2 Curven $f(x\, y\, a\, b) = 0$ in die Punkte der Ebene überführt. Vermöge dieser Berührungs-Transformation geht die vorgelegte Gruppe über in eine Gruppe, die sämmtliche Punkte der Ebene invariant lässt. Die neue Gruppe ist eine Gruppe von *Punkt*-Transformationen. Hiermit ist der folgende fundamentale Satz bewiesen

Satz 1. *Kann eine Gruppe von Berührungs-Transformationen nicht in eine Gruppe von Punkt-Transformationen übergeführt werden, so müssen diejenigen Transformationen der Gruppe, die ein arbiträr gewähltes Werth-System* $x\ y\ p$ *invariant lassen, die Fortschreitungs-Richtungen* $dx\ dy\ dp$ *des Büschels* $dy - p\,dx = 0$ *dreigliedrig transformiren.*

Hieraus folgt nun zunächst, dass jedes Werth-System $x\,y\,p$ durch eine Transformation der betreffenden Gruppe in jedes benachbartes übergeführt werden kann. Denn gesetzt, dass es ∞^1 zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten

$$\varphi\,(x\,y\,p) = a = \text{Const.}$$

gäbe, die bei den Transformationen der Gruppe invariant blieben. Alsdann bliebe diejenige Richtung $dx\ dy\ dp$, die die beiden Gleichungen

$$\frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{dy}\,dy + \frac{d\varphi}{dp}\,dp = 0$$

$$dy - p\,dx = 0$$

befriedigte, bei denjenigen Transformationen invariant, welche das betreffende Werth-System $x\ y\ p$ invariant liessen.

Unsere Gruppe enthält daher in der Umgebung eines beliebigen Werth-Systems $x\ y\ p$ drei inf. Transformationen nullter Ordnung. Sie enthält ferner nach dem Vorangehenden drei Transformationen erster Ordnung. Also enthält sie im Allen jedenfalls sechs inf. Transformationen. Dies giebt

Satz 2. *Eine Gruppe in der Ebene, die sich nicht in eine Gruppe von Punkt-Transformationen umwandeln lässt, enthält jedenfalls sechs Parameter.*

13. Durch Fortsetzung dieser Betrachtungen lässt sich nachweisen, dass jede Gruppe, die nicht in eine Gruppe von Punkt-Transformationen übergehen kann, eine Untergruppe mit jedenfalls fünf Parameter enthält, welche in eine Gruppe von Punkt-Transformationen umgewandelt werden kann. Hierzu ist es nothwendig zuerst einige Untersuchungen über lineare Gruppen vorauszuschicken

Wir stellen uns als Hülf-Problem die Aufgabe, alle lineare Gruppen einer Ebene zu finden, die einerseits eine Gerade invariant lassen, andererseits die Punkte dieser Gerade dreigliedrig transformiren.

Benutzen wir x und y als Cartesische Punkt-Coordinaten und setzen dabei, wie wir pflegen

$$\frac{df}{dx} = p, \quad \frac{df}{dy} = q,$$

so bestimmen die sechs inf. Transformationen

$$p, \; q, \; xq, \; yp, \; xp \; yq$$

die allgemeinste lineare Gruppe, die die unendlich entfernte Gerade invariant lässt. Bemerken wir nun, dass die drei Transformationen

$$p, \; q, \; xp + yq$$

die Punkte der unendlich entfernten Gerade invariant lassen, während die drei Transformationen

$$xq, \; yp, \; xp - yq$$

dieselben Punkte dreigliedrig transformiren, so kann unser Hülf-Problem auch folgendermassen formulirt werden.

„Find die allgemeinste Untergruppe von der sechsgliedrigen Gruppe $p\ q\ xq\ yp\ xp\ yq$, die drei Transformationen der Form

$$H_1 = \quad xq + A_1 p + B_1 q + C_1 (xp + yq),$$

$$H_2 = xp - yq + A_2 p + B_2 q + C_2 (xp + pq),$$

$$H_3 = \quad yp + A_3 p + B_3 q + C_3 (xp + yq),$$

enthält."

14. Lass mich zunächst die allgemeinste dreigliedrige Gruppe der Form $H_1\ H_2\ H_3$ bestimmen. Es ist

$$(H_1\ H_2) = -2xq + (A_1 + A_1 C_2 - A_2 C_1) p$$
$$+ (B_1 C_2 - B_2 C_1 - B_1 - A_2) q,$$
$$(H_2\ H_3) = -2yp + (A_2 C_3 - A_3 C_2 + B_2 - A_3) p$$
$$+ (B_2 C_3 - B_3 C_2 + B_3) q,$$
$$(H_1\ H_3) = xp - yq + (B_1 + A_1 C_3 - A_3 C_1) p$$
$$+ (B_1 C_3 - B_3 C_1 - A_3) q;$$

also erkennen wir zunächst, dass

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

ist, sodass die drei letzten Gleichungen sich folgendermassen vereinfachen

$$(H_1\ H_2) = -2xq + A_1 p - (B_1 + A_2) q = -2H_1,$$

$$(H_2\ H_3) = -2yp + (B_2 - A_3) p + B_3 q = -2H_3,$$

$$(H_1\ H_3) = xp - yq + B_1 p - A_3 q = H_2.$$

Man findet ferner zur Bestimmung der Coefficienten A, B, C die folgenden Relationen

$$A_1 = -2A_1, \quad -B_1 - A_2 = -2B_1,$$

$$B_2 - A_3 = -2A_3. \qquad B_3 = -2B_3,$$

$$B_1 = \quad A_2, \quad -A_3 = B_2,$$

woraus

$$A_1 = 0, \quad A_2 = B_1$$
$$B_2 = -A_3, B_3 = 0$$

und

$$H_1 = xq + B_1 q,$$
$$H_2 = xp - yq + B_1 p - A_3 q,$$
$$H_3 = yp + A_3 p,$$

oder

$$H_1 = (x + B_1) q,$$
$$H_2 = (x + B_1) p - (y + A_3) q,$$
$$H_3 = (y + A_3) p.$$

Führt man daher $x + B_1$ als neues x und $y + A_3$ als neues y ein, so erhält unsere Gruppe die Form xq, $xp - yq$, yp. Also

Satz 3. *Die Gruppe xq, $xp - yq$, yp ist die allgemeinste dreigliedrige lineare Gruppe der Ebene, die eine Gerade invariant lässt, und dabei die Punkte dieser Gerade dreigliedrig transformirt.*

15. Wir suchen jetzt die allgemeinste viergliedrige Gruppe der Form

$$H_1 = xq + A_1 p + B_1 q + C_1 (xp + yq),$$
$$H_2 = xp - yq + A_2 p + B_2 q + C_2 (xp + yq),$$
$$H_3 = yp + A_3 p + B_3 q + C_3 (xp + yq)$$
$$H_4 = \qquad A_4 p + B_4 q + C_4 (xp + yp).$$

Ist C_4 verschieden von Null, was wir zunächst voraussetzen werden, so kann

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0, \; C_4 = 1$$

gesetzt werden. Indem man darnach wie soeben die Ausdrücke $(H_1 H_2) (H_1 H_3) (H_2 H_3)$ bildet, erkennt man, dass auch die Coefficienten A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 gleich Null gesetzt werden können:

$$H_1 = xq$$
$$H_2 = xp - yq,$$
$$H_3 = yp,$$
$$H_4 = xp + yq + A_4 p + B_4 q.$$

Es ist

$$(H_1 H_4) = - A_4 q,$$
$$(H_3 H_4) = - B_4 p,$$

also muss sowohl A_4 wie B_4 gleich Null sein.

Ist andererseitz $C_4 = 0$, so erkennt man wiederum, indem man die Ausdrücke $(H_1 H_2)$ $(H_1 H_3)$ $(H_2 H_3)$ bildet, dass

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

sein müssen; man erkennt ferner, dass A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 gleich Null gesetzt werden können:

$$H_1 = xq$$
$$H_2 = xp - yq,$$
$$H_3 = yp,$$
$$H_4 = A_4 p + B_4 q.$$

Nun ist

$$(H_1 H_4) = - A_4 q,$$
$$(H_3 H_4) = - B_4 p,$$

sodass sowohl die Annahme $A_4 \lessgtr 0$ wie die Annahme $B_4 \lessgtr 0$ zu Contradictio führen. Und als muss C_4 von Null verschieden sein. Dies giebt

Satz 4. *Die Gruppe xq, xp, yq, yp ist die allgemeinste viergliedrige lineare Gruppe, die eine Gerade invariant lässt, und welche dabei ihre Punkte dreigliedrig transformirt*

16. Diese beiden Sätze genügen für das Folgende. Doch füge ich hier noch das Folgende hinzu. Eine jede fünfgliedrige lineare Gruppe, die die unendlich entfernte Gerade invariant lässt, und dabei ihre Punkte dreigliedrig transformirt, enthält drei Transformationen der Form

$$H_1 = xq + A_1 p + B_1 q + C_1 (xp + yq)$$
$$H_2 = xp - yq + A_2 p + B_1 q + C_2 (xp + yq)$$
$$H_3 = yp + A_3 p + B_3 q + C_3 (xp + yq),$$

und jedenfalls eine von der Form

$$Lp + Mq$$

Nun ist

$$(H_4 H_1) = L C_1 p + (L + M C_1) q.$$

Enthält daher unsere Gruppe nur *eine* Transformation der Form $Lp + Mq$, so muss

$$L C_1 = \rho L$$

$$L + M C_1 = \rho M,$$

woraus folgt, dass

$$L = 0$$

sein muss. In entsprechender Weise erkennt man durch Bildung des Ausdrucks $(H_4 H_3)$, indem man fortwährend annimmt, dass die Gruppe nur eine Transformation der Form $Lp + Mq$ enthält, dass $M = 0$ ist, womit wir indess auf Contradictio geführt sind. Also muss die Gruppe *zwei* Transformationen der Form $Lp + Mq$ enthalten, so dass sowohl p wie q der Gruppe angehört. Daher kann man

$$A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = A_3 = B_3 = 0$$

setzen. Indem man darnach die Ausdrücke $(H_1 H_2) (H_1 H_3) (H_2 H_3)$ bildet, erkennt man dass $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ ist. Also

Satz 5. *Die Gruppe xq, $xp - yq$, yp, p, q ist die einzige fünfgliedrige lineare Gruppe, die die unendlich entfernte Gerade invariant lässt, und welche dabei ihre Punkte dreigliedrig transformirt.*

Wir bemerken, dass sowohl die dreigliedrige Gruppe xq, $xp - yq$, yp, wie die viergliedrige Gruppe xq, xp, yq, yp Origo invariant lassen. Also

Satz 6. *Transformirt eine dreigliedrige oder viergliedrige lineare Gruppe der Ebene die Punkte einer invarianten Gerade dreigliedrig, so lässt die Gruppe zugleich einen ausser der Gerade gelegenen Punkt invariant.*

17. Wir wenden uns nun wieder zu Betrachtung einer

beliebigen Gruppe G in der Ebene, die nicht in eine Gruppe von *Punkt*-Transformationen umgewandelt werden kann. Wir interpretiren wie früher $x\ y\ p$ als Punkt-Coordinaten eines dreifach ausgedehnten Raumes. Diejenigen Transformationen, die ein arbiträr gewähltes Werthsystem x, y, p invariant lassen, transformiren die hindurchgehenden Richtungen $dx\,dy\,dp$ durch eine lineare Gruppe, die die Ebene des Büschels $dy - p\,dx = 0$ invariant lässt und dabei die Richtungen des Büschels dreigliedrig transformirt. Also zeigen die Entwickelungen der vorangehenden Nummer, dass die betreffende *lineare* Gruppe, wenn sie nicht mehr als 4 Parameter enthält, zugleich eine ausser der invarianten Ebene gelegene Richtung invariant lässt. Hat sie aber mehr als 4 Parameter, so enthält die vorgelegte Gruppe G jedenfalls 8 Parameter.

Hat daher G nur $8 - q$ Parameter, so existirt immer eine bei der Gruppe invariante Gleichung

$$X \frac{df}{dx} + Y \frac{df}{dy} + P \frac{df}{dp} = 0,$$

wo X, Y, P gewisse Funktionen von x, y, p sind. Ich integrire das simultane System

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dp}{P}$$

durch die beiden Gleichungen

$$f(x\,y\,p) = a = \text{Const.}$$

$$\varphi(x\,y\,p) = b = \text{Const.},$$

die ∞^2 Curven im Raume $(x\,y\,p)$ bestimmen. Diese Curven-Schaar bleibt eo ipso bei der Gruppe invariant. Hierbei werden die Curven der Schaar unter sich vertauscht und zwar vermöge einer Gruppe G die höchstens 7 Parameter enthält. Früher (Bd. 3, pg. 125) haben wir aber gesehen, dass jede $(7-r)$-gliedrige Gruppe einer *zweifach*-ausgedehnten Punkt-Mannigfaltigkeit eine $(7-r-1)$-gliedrige Untergruppe besitzt. Hieraus schliessen wir, dass die $(8-q)$-gliedrige Gruppe G eine $(8-q-1)$-gliedrige Untergruppe besitzt.

Also enthält die $(8-q)$-gliedrige Gruppe G jedenfalls eine fünfgliedrige Untergruppe, die bekanntlich (Satz 2) in eine Gruppe von Punkt-Transformationen umgewandelt werden kann.

Ist auf der anderen Seite eine Gruppe mit 8 oder mehreren etwa $8+q$ Parametern vorgelegt, so bilden diejenigen Transformationen derselben, die ein beliebig gewähltes Werth-System invariant lassen, eine Untergruppe mit höchstens $8+q-3$ Parameter. Durch fortgesetzte Anwendung dieser Operation erhält man jedenfalls zuletzt eine Gruppe mit mehr als 4 und weniger als 8 Parameter. Da nun aber eine solche Gruppe nach dem Vorangehenden immer eine fünfgliedrign Untergruppe enthält, so können wir den folgenden wichtigen Satz aussprechen

Satz 7. Kann eine Gruppe von Berührungs-Transformationen in der Ebene, nicht selbst in eine Gruppe von Punkt-Transformationen übergehen, so enthält sie jedenfalls eine Untergruppe mit $5+q$ *Parametern, die in eine Gruppe von Punkt-Transformationen übergehen kann.*

§ 6.

Bestimmung derjenigen Gruppen, die eine vorgelegte Gruppe umfassen.

18. Wenn man wünscht alle Gruppen von Berührungs-Transformationen einer Ebene zu bestimmen, kann man zwei Wege, einen direkten, und einen indirekten wählen.

Im ersten Falle wendet man eine Methode an, die mit der in dem vorangehenden Abschnitte benutzten genau verwandt ist. Man bestimmt zuerst die in der Gruppe enthaltenen Transformationen 1. O., wobei nach dem vorangehenden Paragraphen vier wesentlich verschiedene Fälle eintreten können. Darnach bestimmt man die Anzahl und Form der Transformationen höherer Ordnung. Endlich versucht man die hiermit gefundenen Typen auf bestimmte Normalformen zu bringen. Diese Methode, die theoretisch vollkommen ist, verlangt indess ausführliche Rechnungen, die ich bis jetzt nicht durchgeführt habe.

Bei der zweiten Methode, die mich in 1874 zur Erledigung des gestellten Problems führte, stützt man sich auf Satz 7. Man nimmt successiv alle Gruppen von *Punkt*-Transformationen, die 5 oder noch mehrere Parameter enthalten, und sucht die allgemeinste Gruppe von Berührungs-Transformationen, in der die betreffende Gruppe enthalten ist. Hiermit findet man successiv alle Gruppen von Berührungs-Transformationen in der Ebene.

Wünscht man alle Gruppen zu finden, die eine vorgelegte Gruppe G_r mit den Transformationen $H_1\, H_2 \ldots H_r$ umfassen, so kann man sich zunächst auf solche Gruppen G_{r+m}

$$H_1 \ldots H_r\, H_{r+1} \ldots H_{r+m}$$

beschräncken, die keine Untergruppe der Form

$$H_1 \ldots H_r\, H_{r+1} \ldots H_{r+a} \quad (a > 0,\ a < m)$$

enthalten. Darnach suchen wir die allgemeinste Gruppe G_{r+m+n}

$$H_1 \ldots H_r \ldots H_{r+m} \ldots H_{r+m+n}$$

die die Gruppe G_{r+m} umfasst, und welche dabei keine Untergruppe der Form

$$H_1 \ldots H_{r+m} \ldots H_{r+m+b} \quad (b > 0,\ b < n)$$

enthält u. s. w. Indem man in dieser Weise fortfährt, erhält man zuletzt alle Gruppen, die G_r umfassen, dabei selbstverständlicherweise vorausgesetzt, dass es eine begrenzte Zahl solcher Gruppen giebt.

Es handelt sich also darum zu zeigen, wie man, wenn eine Gruppe G_r vorgelegt ist, die allgemeinste Gruppe G_{r+m} findet, die G_r umfasst, und welche dabei keine Untergruppe G_{r+a} enthält, die ebenso G_r umfasst.

19. Sei $H_1 \dots H_q \dots H_r$ die vorgelegte Gruppe G_r, und lass mich voraussetzen, dass *die q ersten* Transformationen $H_1 \dots H_q$ eine Untergruppe bilden, und dabei durch Relationen der einfachen Form

$$(H_{i-k} H_i) = \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \dots \lambda_{i-k} H_{i-k}$$
$$i \leqq q$$

verknüpft sind. Sei

$$H_1 \dots H_q \dots H_r H_{r+1} \dots H_v$$

eine beliebige Gruppe, die G_r umfasst. Und sei überhaupt

$$(H_i H_k) = \sum_s c_{iks} H_s.$$

Bilde ich nun die Ausdrücke

$$A_k f = \sum_{s=1}^{s=v} \sum_{i=1}^{i=v} c_{kis} \alpha_i \frac{df}{d\alpha_s}$$

so ist bekanntlich

$$(A_g A_k) = \sum_s c_{gks} A_s f.$$

Ich setze

$$B_k f = \sum_{s=r+1}^{s=v} \sum_{i=1}^{i=v} c_{kis} \alpha_i \frac{df}{d\alpha_s} \quad (k = 1 \dots q)$$

und bemerke dabei, dass c_{kis} immer verschwindet, wenn

$$k < r+1, \; s > r, \; i < r+1;$$

also kommt

$$B_k f = \sum_{s=r+1}^{s=v} \sum_{i=r+1}^{i=v} c_{kis} \alpha_i \frac{df}{d\alpha_s}. \quad (k = 1 \dots q)$$

Nun ist klar, dass

$$(B_g B_k) = \sum c_{gks} B_s f$$

dass also

$$(B_{i-k} B_i) = c_{i-k, i, 1} B_1 + \dots + c_{i-k, i, i-k} B_{i-k},$$

vorausgesetzt dass i nicht grösser als q ist. Also schliessen wir (Bd. III, pg. 114), dass es jedenfalls ein Werth-System $\alpha^0_{r+1} \dots \alpha_s^0$ giebt, das $q(s-r)$ Gleichungen der Form

$$B_k \alpha^{(0)}_{r+j} = b_k \cdot \alpha^{(0)}_{r+j}$$

erfüllt.

Ich setze

$$\alpha^{(0)}_{r+1} H_{r+1} + \dots + \alpha_s^{(0)} H_s = K$$

und bilde den Ausdruck

$$(K H_k) = (\sum_j \alpha^0_{r+j} H_{r+j}, H_k) = \sum_j \alpha^0_{r+j} (H_{r+j} H_k),$$

woraus

$$(K H_k) = \sum_j \alpha^{(0)}_{r+j} \sum_s c_{r+j, k, s} H_s .$$

Nun aber ist, wenn wir $k < q+1$, $s > r$ annehmen

$$\sum_j c_{r+j, k, s} \alpha^{(0)}_{r+j} = - B_k \alpha_s^{(0)} = - b_k \alpha_s^0 .$$

Also kommt eine Relation der Form

$$(K H_k) = \mu_1 H_1 + \dots + \mu_r H_r - b_k \sum_{s=r+1}^{s=v} \alpha_s^{(0)} H_s$$

oder was auf dasselbe hinauskommt

$$(K H_k) = \mu_1 H_1 + \dots + \mu_r H_r - b_k K.$$

Man erhält q solche Gleichungen, indem man k successiv gleich $1, 2 \dots q$ setzt. Dieselben dienen zur Bestimmung von K. Ich spreche den gefundenen Satz folgendermassen aus

Satz 8. *Sei $H_1 \dots H_q \dots H_r$ eine vorgelegte Gruppe, deren q ersten Transformationen durch Relationen der Form*

$$(H_{i-k} H_i) = \lambda_1 H_1 + \dots + \lambda_{i-k} H_{i-k}$$
$$(i < q+1)$$

verknüpft sind. Wünscht man nun alle Gruppen zu finden, welche die r-gliedrige Gruppe umfassen, so bildet man q Gleichungen der Form

$$(H_i\, K) = c_{i1}\, H_1 + \ldots + c_{ir}\, H_r + c_i\, K$$
$$(i = 1, 2 \ldots q)$$

und bestimmt die allgemeinste Grösse K, die diese Gleichungen erfüllt. Giebt es überhaupt eine Gruppe, die die vorgelegte umfasst, so enthält sie eine von $H_1 \ldots H_r$ unabhängige Transformation der Form K.

Wir werden sehen, dass dieser Satz zur Bestimmung aller Gruppen von Berührungs-Transformationen einer Ebene genügt.

§ 7.

Gruppen von Berührungs-Transformationen, die eine lineare Untergruppe enthalten.

Ich werde nun successiv eine jede Gruppe von Punkt-Transformationen mit fünf oder mehreren Parametern betrachten und diejenigen Gruppen von Berührungs-Transformationen bestimmen, welche die betreffende Gruppe umfassen.

Ich benutze hierbei meine frühere Bestimmung von allen Gruppen von Punkt-Transformationen einer Ebene (Bd. III, pg. 125).

20. Lass mich zunächst die fünfgliedrige linare Gruppe

$$H_1 = q,$$
$$H_2 = p,$$
$$H_3 = xq,$$
$$H_4 = xp - yq,$$
$$H_5 = yp$$

betrachten. Dabei bemerke ich, dass die *vier* ersten Transformationen paarweise Relationen der Form

$$(H_{i-k}\, H_i) = \lambda_1\, H_1 + \ldots + \lambda_{i-k}\, H_{i-k}$$

befriedigen. Daher lehrt Satz 8, dass jede Gruppe von Berührungs-Transformationen, die unsere fünfgliedrige Gruppe umfasst, eine Transformation K enthält, die vier Relationen der Form

$$(1) \qquad (q, K) = \Sigma\, \alpha_k H_k + \alpha K,$$

$$(2) \qquad (p, H) = \Sigma\, \beta_k H_k + \beta K,$$

$$(3) \qquad (xq, K) = \Sigma\, \gamma_k H_k + \gamma K,$$

$$(4) \qquad (xp - yq, K) = \Sigma\, \delta_k H_k + \delta K$$

erfüllt. Ich behaupte, dass die Coefficienten α, β, γ gleich Null sind. Dies folgt aus einem allgemeinen Satze, den ich hier einschalten werde.

Satz 9. *Bestehen zwischen den Transformationen* $H_1 \ldots H_r\, K$ *Relationen der Form*

$$(H_1\, K) = \Sigma\, \alpha_k H_k + \alpha K,$$

$$(H_2\, K) = \Sigma\, \beta_k H_k + \beta K,$$

so besteht zugleich eine Relation der Form

$$((H_1\, H_2)\, K) = \Sigma\, c_k H_k$$

Beweis. Es ist

$$((H_1\, H_2)\, K) + ((H_2\, K)\, H_1) + ((K\, H_1)\, H_2) = 0,$$

woraus durch Einsetzung

$$-((H_1\, H_2)\, K) = (\Sigma\, \beta_k H_k + \beta K, H_1) - (\Sigma\, \alpha_k H_k + \alpha K, H_2)$$

und

$$-((H_1\, H_2)\, K) = \Sigma\, \beta_k (H_k\, H_1) - \beta (\Sigma\, \alpha_k H_k + \alpha K)$$
$$- \Sigma\, \alpha_k (H_k\, H_2) + \alpha (\Sigma\, \beta_k H_k + \beta K).$$

Da alle $(H_i\, H_k)$ sich linear durch die H_k ausdrücken, folgt, dass die rechte Seite sich durch die H_k ausdrückt, was zu beweisen war.

Dieser Satz wenden wir auf (1) (2) (3) an. Es ist

$$(q, xp - yq) = -q,$$

$$(p, xp - yq) = \quad p,$$

$$(xq, xp - yq) = -2\, xq$$

und also folgt, dass

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

ist. Es bestehen daher drei Relationen der Form

$$\frac{dK}{dy} = \xi_1 p + \eta_1 q, \tag{5}$$

$$\frac{dK}{dx} = \xi_2 p + \eta_2 q, \tag{6}$$

$$x\frac{dK}{dy} - q\frac{dK}{dp} = \xi_3 p + \eta_3 q, \tag{7}$$

wo die ξ_k und η_k nur von x und y abhängen. Die Gleichungen (5) und (6) zeigen, dass K die Form

$$K = \xi p + \eta q + \Omega(pq)$$

besitzt. Gleichung (7) zeigt, dass Ω eine Relation der Form

$$q\frac{d\Omega}{dp} = Ap + Bq$$

befriedigt, und also ist

$$\Omega = C\frac{p^2}{q} + Bp + W(q)$$

wo $W(q)$ homogen von erster Ordnung hinsichtlich q sein soll, so dass

$$W(q) = Dq$$

ist. Man kann daher ohne Beschränckung

$$\Omega = C\frac{p^2}{q},$$

$$K = C\frac{p^2}{q} + \xi p + \eta q$$

setzen. Wäre nun $C = 0$, so wäre K eine Punkt-Transformation, *was wir ausschliessen können.* Also kommt, indem wir C gleich 1 setzen

$$K = \frac{p^2}{q} + \xi p + \eta q$$

Der Ausdruck (yp, K) ist eine inf. Transformation, die der gesuchten Gruppe angehört. Es ist

$$(yp, K) = \frac{p^3}{q^2} + \xi_1 p + \eta_1 q = K_2$$

Ferner muss auch die Transformation (yp, K_2) die die Form

$$(yp, K_2) = 2\frac{p^4}{q^3} + \xi_2 p + \eta_2 q = K_3$$

besitzt, unserer Gruppe angehören.

Indem man in dieser Weise fortfährt, erkennt man, dass unsere Gruppe, welche auch die Zahl n sein mag, immer eine Transformation der Form

$$\frac{p^n}{q^{n-1}} + \xi p + \eta q$$

enthalten müsste. Dies ist indess unmöglich, und also erhalten wir den Satz:

Satz 10. *Ist die Gruppe p, q, xq, $xp - yq$, yp in einer Gruppe enthalten, so besitzt die neue Gruppe jedenfalls noch eine Punkt-Transformation.*

21. Ich betrachte jetzt die lineare Gruppe

$$\begin{aligned} H_1 &= q, \\ H_2 &= p, \\ H_3 &= xq, \\ H_4 &= xp - yq, \\ H_5 &= yp, \\ H_6 &= yq, \end{aligned}$$

und suche die allgemeinste Gruppe, die dieselbe umfasst. Ich erkenne wie soeben, dass die neue Gruppe eine Transformation K enthält, die vier Relationen der Form

$$\begin{aligned} (q, H) &= \Sigma\, \alpha_k H_k, \\ (p, H) &= \Sigma\, \beta_k H_k, \\ (xq, H) &= \Sigma\, \gamma_k H_k \end{aligned}$$

befriedigt. Hieraus schliessen wir wie früher, dass K die Form

$$K = A\frac{p^2}{q} + \xi p + \eta q$$

besitzen muss; und es ergiebt sich dabei, dass $A = 0$ ist, sodass K eine Punkt-Transformation wird. Also

Satz 11. *Eine jede Gruppe, die die sechsgliedrige Gruppe $q\ p\ xq\ xp\ yq\ yp$ umfasst, enthält jedenfalls noch eine Punkt-Transformation*

22. Endlich betrachten wir die allgemeine lineare Gruppe

$$\begin{aligned}
H_1 &= q,\\
H_2 &= p,\\
H_3 &= xq,\\
H_4 &= xp - yq,\\
H_5 &= yp.\\
H_6 &= yq,\\
H_7 &= x^2p + xyq\\
H_8 &= xyp + y^2q,
\end{aligned}$$

und suchen die allgemeinste Gruppe, die dieselbe umfasst. Indem man genau wie in den beiden vorangehenden Nummern verfährt, erkennt man, dass eine jede Gruppe, die die allgemeine lineare Gruppe umfasst, jedenfalls noch eine Punkt-Transformation enthalten müsste.

Früher (Bd. III, pg. 138 u. fg.) haben wir nun gesehen, 1) dass die allgemeine linnare Gruppe in keiner mehr umfassenden Gruppe von *Punkt*-Transformationen enthalten ist, 2) dass die allgemeine lineare Gruppe die einzige Gruppe von Punkt-Transformationen ist, die unsere sechsgliedrige lineare Gruppe umfasst, 3) dass die allgemeine lineare und unsere sechsgliedrige lineare Gruppe die einzige Gruppe von Punkt-Transformationen ist, die unsere fünfgliedrige lineare Gruppe umfasst. Also erhalten wir durch Vereinigung unserer früheren Ergebnisse den folgende Satz.

Satz 12. *Eine jede Gruppe, die eine Untergruppe von einer der folgenden Form*

1) $q, p, xq, xp - yq, yp$

2) q, p, xq, xp, yq, yp

3) $q, p, xq, xp, yq, yp, x^2p + xyq\ xyp + y^2q$

enthält, ist eine Gruppe von Punkt-Transformationen. Sie ist überdies eine lineare Gruppe, die selbst eine von der drei vorangehenden Formen besitzt.

§ 8.

Ueber Gruppen mit einer Untergruppe der Form q, yq, y^2q, p, xp.

23. Ich betrachte jetzt alle Gruppen, die eine Untergruppe der Form

$$H_1 = q,$$
$$H_2 = p,$$
$$H_3 = yq,$$
$$H_4 = xp,$$
$$H_5 = y^2q,$$

enthalten. Die Relationen

$$(H_1\,H_2) = 0, (H_1\,H_3) = H_1, (H_1\,H_4) = 0,$$
$$(H_2\,H_3) = 0, (H_2\,H_4) = H_2,$$
$$(H_3\,H_4) = 0$$

zeigen, dass die neue Gruppe jedenfalls eine Transformation K enthält, die vier Relationen der Form

(1) $$(H_1\,K) = \Sigma\,\alpha_k\,H_k,$$

(2) $$(H_2\,K) = \Sigma\,\beta_k\,H_k,$$

(3) $$(H_3\,K) = \Sigma\,\gamma_k\,H_k + \gamma\,K,$$

$$(H_4\, K) = \Sigma\, \delta_k\, H_k + \delta\, K, \tag{4}$$

erfüllt. Also ist (1) (2)

$$H = \Omega\,(pq) + \xi p + \eta q,$$

und dabei ist (3) (4) Ω bestimmt durch eine beliebige unter den Gleichungen

$$q\,\frac{d\Omega}{dq} = Ap + Bq + \alpha\,\Omega,$$

$$p\,\frac{d\Omega}{dp} = Cp + Dq + \beta\,\Omega,$$

wobei wir erinnern, dass Ω die Form

$$\Omega = q\;W\left(\frac{p}{q}\right) = q\;W(\pi)$$

besitzt. Hieraus ergiebt sich die Gleichung

$$\pi\,\frac{dW}{d\pi} = \beta\;W + C\pi + D,$$

deren Integral eine verschiedene Form besitzt, jenachdem β gleich Null oder verschieden von Null ist.

$$A\,.\;\beta \gtrless 0.$$

24. Ist β verschieden von Null, so ist

$$W = L\,\pi^\beta + M\pi + N,$$

woraus

$$\Omega = L\,\frac{p^\beta}{q^{\beta-1}} + Mp + Nq,$$

so dass K, die keine Punkt-Transformation sein darf, die Form besitzt

$$K = \frac{p^\beta}{q^{\beta-1}} + \xi\,p + \eta\,q,$$

wo β nicht gleich 1 sein darf, indem K sonst eine Punkt-Transformation wäre. Es ist nun leicht, weitere inf. Transformationen der neuen Gruppe zu finden.

Es ist

$$(y^2 q, K) = 2(\beta - 1)\, y\, \frac{p^\beta}{q^{\beta-1}} + \xi_1 p + \eta_1 q$$

womit jedenfalls eine neue *Berührungs*-Transformation

$$K_1 = y\, \frac{p^\beta}{q^{\beta-1}} + \xi_1 p + \eta_1 q$$

gefunden ist. Es ist ferner

$$(y^2 q, K_1) = (2\beta - 1)\, y^2\, \frac{p^\beta}{q^{\beta-1}} + \xi_2 p + \eta_2 q,$$

womit, wenn wir vorlaüfig

$$2\beta \gtrless 1$$

annehmen, eine dritte Berührungs-Transformation

$$K_2 = y^2\, \frac{p^\beta}{q^{\beta-1}} + \xi_3 p + \eta_3 q$$

gefunden ist. Ferner ist

$$(y^2 q, K_2) = 2\beta\, y^3\, \frac{p^\beta}{q^{\beta-1}} + \xi_4 p + \eta_4 q,$$

womit eine vierte Berührungs-Transformation der Gruppe gefunden ist. Nun aber können wir bei unseren Constructionen von neuen Gruppen *immer annehmen, dass die neue Gruppe höchstens drei Transformationen mehr als die vorgelegte enthält.* Daher brauchen wir nicht die Hypothese

$$\beta \gtrless 0, 2\beta - 1 \gtrless 0$$

weiter zu verfolgen.

Ist dagegen

$$2\beta - 1 = 0,$$

so besitzt $(y^2 q, K_1)$ die Form $\xi p + \eta q$. Dieser Fall verlangt daher eine specielle Discussion. Es ist in diesen Falle

$$K = \sqrt{pq} + \xi p + \eta q,$$

wo wegen (1) und (2)

$$\xi = \alpha x^2 + \beta y,$$

$$\eta = \gamma y^3 + \delta x$$

gesetzt werden könnnen. Nun ist

$$(xp, K) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{pq} + (\alpha x^2 - \beta y) + \delta x q,$$

welcher Ausdruck wegen (4) die Form

$$\Sigma\, \delta_k H_k + \delta K,$$

wo $\delta = -\frac{1}{2}$, besitzen soll. Also kommt

$$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0$$

und

$$K = \sqrt{pq}.$$

Es ist ferner

$$(y^2 q, K) = -y\sqrt{pq}.$$

Man verificirt nun leicht, dass die 7 Transformationen

$$q, p, yq, xp, y^2q, \sqrt{qp}, y\sqrt{pq}$$

eine siebengliedrige Gruppe bilden. Es fragt sich, ob diese Gruppe in eine Gruppe von Punkt-Transformationen übergeführt werden kann. Dies ist, wie ich an einem anderen Orte (§ 12) nachweisen werde, in der That nicht möglich. Hier beschräncke ich mich auf die Bemerkung, dass die Gleichungen

$$p = q',$$

$$q = \frac{p'^2}{q'},$$

$$y = \frac{xq'}{2p'},$$

$$x = y' + \frac{x'p'}{2q'}$$

eine Berührungs-Transformation, die unserer Gruppe die Form

$$q', p', y'q', x'p', x'q', x'^2 q' \frac{p_i'^2}{q'}$$

geben, bestimmen. Diese neue Form ist deswegen einfacher, weil sie eine *sechs*gliedrige Untergruppe von Punkt-Transformationen in Evidents treten lässt. Ich behalte mich, wie gesagt, vor, die gefundene siebengliedrige Gruppe später eingehend zu discuttiren.

$B.\quad \beta = 0.$

25. Sei jetzt $\beta = 0$. Alsdann ist

$$\pi \frac{dW}{d\pi} = C\pi + D$$

und

$$W = D \log \pi + C\pi + E,$$

$$\Omega = q \,.\, \log \frac{p}{q} + Cp + Eq,$$

so dass man setzen kann

$$K = q \,.\, \log \frac{p}{q} + \xi p + \eta q.$$

Es ist

$$(y^2 q, K) = -2yq \,.\, \log \frac{p}{q} + \xi_1 p_1 + \eta_1 q = K_1,$$

$$(y^2 y, K_1) = \quad 2y^2 q \,\log \frac{p}{q} + \xi_2 p + \eta_2 q = K_2,$$

Man findet ferner, dass $(K_1 K_2)$ die folgende Form besitz

$$-4y^2 q \left(\log \frac{p}{q}\right)^2 + (\xi p + \eta q) \log \frac{p}{q} + f(xy) \frac{q^2}{p} + \xi_3 p + \eta_3 q,$$

und also ist hiermit vier unabhängige neue Transformationen gefunden. Da wir indess immer voraussetzen dürfen, dass die neue Gruppe höchstens *drei* neue Transformationen enthält, so brauchen wir die Hypothese $\beta = 0$ nicht weiter zu verfolgen.

26. Wir fragen jetzt nach Gruppen von Berührungs-Transformationen, die eine Untergruppe der Form

$$q \; yq \; y^2q \; p \; xp \; x^2p$$

enthalten. Die nachstehende Discussion ist mit den Entwickelungen der vorangehenden Nummer fast identisch.

Es ist zunächst klar, dass die neue Gruppe eine Transformation K enthält, die vier Gleichungen der Form

$$(q, K) = \Sigma\, \alpha_k\, H_k, \tag{5}$$

$$(p, K) = \Sigma\, \beta_k\, H_k, \tag{6}$$

$$(yq, K) = \Sigma\, \gamma_k\, H_k + \gamma\, K, \tag{7}$$

$$(xp, K) = \Sigma\, \delta_k\, H_k + \delta\, K \tag{8}$$

erfüllt. Die beiden ersten zeigen, dass K die Form

$$K = \Omega\,(pq) + \xi p + \eta y$$

besitzt. Die beiden letzten geben zur Bestimmung von Ω, die bekanntlich gleich $q\, W\left(\frac{p}{q}\right) = q\, W(\pi)$ gesetzt werden darf, eine Relation der Form

$$\pi \frac{d\,W}{d\pi} = \beta\, W + C\pi + D.$$

Hier können wieder zwei wesentlich verschiedene Fälle eintreten, jenachdem β gleich Null oder von Null verschieden ist.

Ist β gleich Null, so muss wie in der vorangehenden Nummer

$$K = q \,.\, \log \frac{p}{q} + \xi p + \eta q$$

sein. Und daher findet man durch fortgesetzte Ausführung der Operation (y^2q, K) jedenfalls 4 inf. Berührungs-Transformationen, die nicht in der vorgelegten sechsgliedrigen Gruppe enthalten sind. Daher brauchen wir auch jetzt nicht die Annahme $\beta = 0$ weiter zu verfolgen.

Ist andererseits β von Null verschieden, so muss K die Form

$$\frac{p^\beta}{q^{\beta-1}} + \xi p + \eta q$$

besitzen. Und durch successive Ausführung der Operation $(y^2 q, K)$ erkennt man, dass β gleich $\frac{1}{2}$,

$$K = \sqrt{pq} + \xi p + \eta y$$

sein muss. Die Gleichungen (5) und (6) zeigen, dass

$$\xi = \alpha x^3 + \beta y$$

$$\eta = \gamma x + \delta y^3$$

gesetzt werden können. Nun ist

$$(xp, K) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{pq} + (2\alpha x^3 - \beta y) p + \gamma xq,$$

welcher Ausdruck wegen (8) die Form

$$\Sigma \delta_k H_k - \tfrac{1}{2} K$$

besitzen soll. Also ist

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0,$$

und

$$K = \sqrt{pq}.$$

Es ist

$$(\sqrt{pq}, y^2 q) = y\sqrt{pq} = K_1$$

$$(\sqrt{pq}, x^2 p) = x\sqrt{pq} = K_2$$

$$(y\sqrt{pq}, x^2 p) = xy\sqrt{pq} = K_3.$$

Hiermit sind vier neue Berührungs-Transformationen gefunden. Man verificirt leicht, dass sie zusammen mit den sechs vorgelegten inf. Transformationen eine zehngliedrige Gruppe bilden. Wir werden später nachweisen, dass diese zehngliedrige Gruppe

$$\boxed{\begin{array}{c} q \quad yq \quad y^2q \quad p \quad xp \quad x^2p \\ \sqrt{pq},\ y\sqrt{pq},\ x\sqrt{pq},\ xy\sqrt{pq} \end{array}}$$

nicht in eine Gruppe von *Punkt*-Transformationen umgewandelt werden kann. Wir bemerken übrigens, dass die neue Gruppe *vier* Transformationen mehr als die vorgelegte Gruppe enthält. Daher brauchen wir eigentlich nicht, die gefundene Gruppe weiter zu berücksichtigen, indem wir wissen können, dass wir dieselbe an einer anderen Stelle unserer Untersuchungen wiederfinden werden.

Doch ist es zweckmässig schon hier zu bemerken, dass die Berührungs-Transformation

$$p = q'$$

$$q = \frac{p'^2}{q'}$$

$$y = \frac{x'q'}{2p'}$$

$$x = y' + \frac{x'p'}{2q'}$$

unserer Gruppe die folgende Form giebt

$$\boxed{\begin{array}{c} q,\ xq,\ x^2q,\ p,\ yq \\ xp,\ x^2p + 2xyq \\ \dfrac{p^2}{q},\ 2yp + x\dfrac{p^2}{q} \\ 4y^2q + 4xyp + x^2\dfrac{p^2}{q} \end{array}}$$

Diese neue Form ist deswegen bemerkenswerth, weil sie eine *sieben*gliedrige Untergruppe von *Punkt*-Transformationen in Evidents treten lässt.

Die Untersuchungen dieses Paragraphs haben uns zwei Gruppen von Berührungs-Transformationen gegeben, die wie wir später nachweisen, nicht in Gruppen von *Punkt*-Transformationen umgewandelt werden können.

§ 9.

Die Untergruppe transformirt ∞^1 Curven nullgliedrig oder eingliedrig.

Ich betrachte in diesem Paragraph successiv alle Gruppen von *Punkt*-Transformationen, die die Curven einer Schaar nullgliedrig oder eingliedrig transformiren und suche jedesmal Gruppen von Berührungs-Transformationen, die die vorgelegte umfassen.

27. Enthält eine Gruppe von Berührungs-Transformationen eine Untergruppe von der Form

$$X_0\, q\; X_1\, q \ldots X_4\, q \ldots X_r\, q,$$

so hat sie jedenfalls eine inf. Transformation K, die r Relationen der Form

$$(X_i\, q, K) = \Sigma\, \alpha_{ik}\, X_k + \alpha_i\, K$$

erfüllt. Es ist dabei klar, dass man annehmen kann, dass jedenfalls r Grössen α_i z. B. $\alpha_0\, \alpha_1 \ldots \alpha_{r-1}$ gleich Null sind. Ausserden kann man ohne Beschränckung

$$X_0 = 1$$

setzen. Es bestehen daher Relationen der Form

$$(q\, K) = \frac{dK}{dy} = \Omega\,(x)\, q,$$

$$(Xq, K) = X\frac{dK}{dy} - q\, X'\, \frac{dK}{dp} = \Omega_1\,(x)\, q,$$

also kommt

$$\frac{dK}{dp} = \Omega_2\,(x),$$

woraus

$$K = \Omega_2\,(x)\, p + \Phi\,(x\, y\, q)$$

oder da K von erster Ordnung hinsichtlich p und q sein soll:

$$K = \Omega_2\,(x)\, p + W\,(x y)\, q,$$

womit nachgewiesen ist, dass K eine Punkt-Transformation ist

28. Enthält eine Gruppe von Berührungs-Transformationen eine Untergruppe von der Form

$$X_1 q \dots X_4 q \dots X_r q\, yq,$$

so giebt es, da

$$(X_k q, yq) = X_k q$$

ist, jedenfalls eine Berührungs-Transformation K, die r Relationen der Form

$$(X_i q, K) = \Sigma\, \alpha_{ik} X_k q = \Omega_i(x)\, q$$

erfüllt. Durch Ausführung kommt

$$X_i \frac{dK}{dy} - q X_i' \frac{dK}{dp} = \Omega_i(x)\, q$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, \dots r)$$

woraus hervorgeht, dass

$$\frac{dK}{dp} = \Phi(x)$$

und

$$K = \Phi(x)\, p + F(xy)\, q$$

ist. Also ist K eine Punkt-Transformation

29. Enthält eine Gruppe von Berührungs-Transformationen eine Untergruppe der Form

$$X_1 q \dots X_4 q \dots X_r q, p$$

so giebt es jedenfalls eine Transformation K, die vier Relationen der Form

$$(X_i q, K) = \Omega_i(x)\, q + \alpha_i p + \beta_i K$$

erfüllt. Daher giebt es jedenfalls zwei Relationen der Form

$$(X_k q, K) = \Omega_k(x)\, q$$

oder der aequivalenten Form

$$X_k \frac{dK}{dy} - q X'_k \frac{dK}{dp} = \Omega_k(x)\, q,$$

woraus folgt, dass

$$\frac{dK}{dp} = F(x),$$

$$K = F(x)\,p + f(xy)\,q$$

30. Sei endlich

$$X_1\,q, X_2\,q, X_3\,q \ldots X_r\,q, yq, p$$

die vorgelegte Gruppe. Es ist

$$(X_i\,q, yq) = X_i\,q$$

Daher enthält jede Gruppe von Berührungs-Transformationen, die unsere Gruppe umfasst, jedenfalls eine Transformation K, die drei Relationen der Form

$$(X_i\,q, K) = \Omega_i\,(x)\,q + \alpha_i\,yq + \beta_i\,p$$

befriedigt. Also muss auch jetzt

$$\frac{dK}{dp} = F(xy)$$

$$K = F(xy)\,p + f(xy)\,q$$

sein, sodass K eine Punkt-Transformation ist.

Hiermit ist der folgende Satz erhalten

Satz 13. *Enthält eine Gruppe von Berührungs-Transformationen eine* $(5 + q)$*-gliedrige Untergruppe von Punkt-Transformationen, die die Curven einer Schaar nullgliedrig oder eingliedrig transformiren, so enthält sie jedenfalls noch eine Punkt-Transformation ausser derjenigen der Untergruppe.*

§ 10.

Die Untergruppe transformirt ∞^1 Curven zweigliedrig.

Wir betrachten successiv alle Gruppen von Punkt-Transformationen, die ∞^1 Curven zweigliedrig transformiren und suchen Gruppen von Berührungs-Transformation, die die vorgelegte Gruppe umfassen.

31. Sei vorgelegt eine Gruppe der Form

$$q\ xq\ x^2q \dots x^rq, p,\ xp + Y(xy)\, q,$$

wo r grösser als 1 angenommen werden kann. Die neue Gruppe enthält jedenfalls eine Transformation K, die drei Relationen der Form

$$(q\, K) = \Sigma\, \alpha_k\, H_k \tag{1}$$

$$(p, K) = \Sigma\, \beta_k\, H_k \tag{2}$$

$$(xq, K) = \Sigma\, \gamma_k\, H_k$$

erfüllt. Die beiden ersten zeigen, dass

$$K = \Omega\,(pq) + \xi\, p + \eta\, q$$

ist. Die dritte giebt zur Bestimmung von Ω eine Gleichung der Form

$$q\,\frac{d\Omega}{dp} = Ap + Bq,$$

so dass

$$\Omega = \frac{p^2}{q},$$

$$K = \frac{p^2}{q} + \xi p + \eta q$$

gesetzt werden darf.

Man kann nun (Bd. III, pg. 159) jedenfalls

$$Y = Ly + Mx^{r+1}$$

setzen. Also zeigen die Gleichungen (1) und (2), dass

$$\xi = \alpha x^2 + \beta y,$$

$$\eta = \gamma x^{r+1} + 2\alpha\, Lxy + \frac{2\alpha\, M}{r+2}\, x^{r+2} + \varphi\, y$$

gesetzt werden kann. Es ist

$$(x^rq, K) = (-2r\, x^{r-1} + \beta\, x^r)\, p$$
$$+ [\varphi\, x^r + (2\alpha\, L - \alpha r)\, x^{r+1} - r\,\beta y\, x^{r-1}]\, q$$

und dieser Ausdruck soll sich linear durch die H_k ausdrücken. Also muss, da r grösser als 1 ist

$$\beta = 0$$

sein. Es besteht eine Relation der Form

$$\begin{aligned} &- 2r\, x^{r-1}\, p + [\varphi\, x^r + (2\,\alpha\, L - \alpha\, r)\, x^{r+1}]\, q \\ &= \Sigma\, A_k\, x^k\, q + Bp + C\,[xp + (Ly + M x^{r+1})\, q], \end{aligned}$$

woraus folgt

$$r - 1 = 1,\ r = 2$$

$$-2r = C = -2,$$

$$L = 0.$$

Wenn aber $L = 0$ ist; so kann bekanntlich (Bd. III, pg. 159) auch M gleich Null gesetzt werden.

Die vorgelegte Untergruppe besitzt somit die Form

$$q,\ xq,\ x^2q,\ p,\ xp$$

und die neue Transformation K ist

$$K = \frac{p^2}{q} + \alpha\, x^2 p + (\gamma\, x^3 + \varphi y)\, q\,.$$

Um die Coefficienten α, γ, φ zu bestimmen, bilden wir die Gleichung

$$(xp, K) = \Sigma\, \delta_k\, H_k + \delta\, K,$$

woraus durch Ausführung

$$-2\frac{p^2}{q} + \alpha\, x^2 p + 3\gamma\, x^3 q = \Sigma\, \delta_k\, H_k + d\, K,$$

also muss

$$\begin{aligned} \delta &= -2, \\ \alpha &= 0, \\ \gamma &= 0, \\ \varphi &= 0, \\ K &= \frac{p^2}{q} \end{aligned}$$

sein. Die hiermit gefundene Transformation K bildet, wie man leicht verificirt, wirklich eine sechsgliedrige Gruppe zusammen mit den 5 Transformationen der vorgelegten Gruppe. Also

Satz 14. *Eine jede Gruppe von Berührungs-Transformationen, die die Gruppe $q\ xq\ x^2q\ p\ xp$ umfasst, enthält zugleich die Transformation $\frac{p^2}{q}$, die mit der vorgelegten Gruppe eine sechsgliedrige Gruppe bildet.*

Ich werde später nachweisen, dass die gefundene sechsgliedrige Gruppe

$$\boxed{\begin{array}{c} q\ xq\ x^2q \\ p\ xp\ \frac{p^2}{q} \end{array}}$$

sich nicht in eine Gruppe von *Punkt*-Transformationen umwandeln lässt.

32. Ich betrachte jetzt alle Gruppen der Form

$$q\ xq \ldots x^r q\ yq\ p\ xp$$

und suche alle Gruppen von Berührungs-Transformationen, die eine solche Untergruppe enthalten. Dabei kann ich r grösser als Null annehmen.

Die gesuchte Gruppe enthält jedenfalls eine Transformation K, die 3 Relationen der Form

$$(q, K) = \Sigma\, \alpha_k\, H_k \tag{1}$$

$$(p, K) = \Sigma\, \beta_k\, H_k \tag{2}$$

$$(xq, K) = \Sigma\, \gamma_k\, H_k$$

erfüllt. Hieraus folgt, wie in der vorangehenden Nummer, dass K die Form

$$\frac{p^2}{q} + \xi p + \eta q$$

besitzt. Die beiden Gleichungen (1) (2) zeigen dass

$$\xi = \alpha x^2 + \beta y$$
$$\xi = \gamma x^{r+1} + \delta x y + \varepsilon y^2$$

gesetzt werden kann, sodass

$$K = \frac{p^2}{q} + (\alpha x^2 + \beta y) p + (\gamma x^{r+1} + \delta x y + \varepsilon y^2) q$$

wird. Es ist

$$(x^r q, K) = (-2r x^{r-1} + \beta x^r) p$$
$$+ (\delta x^{r+1} + 2 \varepsilon y x^r - r \alpha x^{r+1} - r \beta y x^{r-1})$$

und da

$$(x^r q, K) = \Sigma \delta_k H_k$$

ist, folgt

$$r \leqq 2,$$

sodass nur die beiden Fälle $r = 1$ und $r = 2$ eintreten können.

Ist $r = 2$, so ist

$$\beta = 0$$
$$\varepsilon = 0$$
$$\delta = 2\alpha$$

und

$$K = \frac{p^2}{q} + \alpha^2 p + (\gamma x^3 + 2 \alpha x y) q.$$

Um die zurückgebliebenen Coefficienten zu bestimmen, bilden wir die Gleichung

$$(xp, K) = \Sigma \varphi_k H_k + \varphi K$$

oder ausgeführt

$$-2 \frac{p^2}{q} + (\alpha x^2 - \beta y) p + [3 \gamma x^3 + 2 \alpha x y) q = \Sigma \varphi_k H_k + \varphi K$$

woraus folgt

$$\varphi = -2,$$
$$\alpha = 0,$$
$$\gamma = 0,$$

und

$$K = \frac{p^2}{q},$$

Hiermit haben wir eine siebengliedrige Gruppe

$$\boxed{\begin{matrix} q,\ xq,\ x^2q,\ yq \\ p,\ xp,\ \dfrac{p^2}{q} \end{matrix}}$$

gefunden. Wir zeigen später, dass dieselbe nicht in eine Gruppe von *Punkt*-Transformationen umgewandelt werden kann.

Sei jetzt $r = 1$. Alsdann lehrt die Gleichung

$$\begin{aligned}(x^r q, K) &= (-2 + \beta x)\, p + (\delta x^2 + 2\varepsilon xy - \alpha x^2 - \beta y)\, q \\ &= \Sigma\, \delta_k H_k,\end{aligned}$$

dass

$$\varepsilon = 0,\ \delta = \alpha,$$

und

$$K = \frac{p^2}{q} + (\alpha x^2 + \beta y)\, p + (\gamma x^2 + \alpha xy)\, q$$

ist. Wir bilden die Gleichung

$$\begin{aligned}(xp, K) &= -2\frac{p^2}{q} + (\alpha x^2 - \beta y)\, p + (2\gamma x^2 + \alpha xy)\, q \\ &= \Sigma\, \rho_k H_k + \rho K,\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\rho = -2,\ \alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$$

$$K = \frac{p^2}{q}.$$

Hiermit haben wir eine sechsgliedrige Gruppe von Berührungs-Transformationen gefunden:

$$\boxed{\begin{matrix} q,\ xq,\ yq \\ p,\ xp\ \dfrac{p^2}{q} \end{matrix}}$$

Wenn wir indess auf dieselbe die Berührungs-Transformation

$$q = q',$$
$$p = x' q'$$
$$x = -\frac{p'}{q},$$
$$y = y' + \frac{x'p'}{q'}$$

anwenden, so erhalten wir die Gruppe

$$q \; xq \; x^2 q \; p \; xp \; yq,$$

deren Transformationen sämmtlich *Punkt*-Transformationen sind.

§ 11.

Die Untergruppe transformirt ∞^1 Curven dreigliedrig.

In diesem Paragraph betrachten wir successiv alle Gruppen von *Punkt*-Transformationen, die die Curven einer Schaar $\varphi(xy) = a$ dreigliedrig transformiren, und suchen Gruppen von *Berührungs*-Transformationen, die eine solche Gruppe umfassen.

33. Sei

$$q \; xq \ldots x^r q, p, 2xp + r yq, x^2 p + r xyq \qquad (1)$$

wo r grösser als Null ist, die vorgelegte Gruppe von Punkt-Transformationen.

Ist $r = 1$, so ist die betreffende Gruppe

$$q, xq, p, 2xp + yq, x^2 p + xyq$$

linear; sie geht überdies durch die Berührungs-Transformation

$$q = q',$$
$$p = x' q',$$
$$x = -\frac{p'}{q'},$$
$$y = y' + \frac{x'p'}{q'}$$

über in die lineare Grupppe:

$$q\ p\ xq\ xp - yq\ yp,$$

die wir in Paragraph 7 behandelt haben. Daher können wir hier $r > 1$ annehmen.

Wenn eine Gruppe die Gruppe (1) umfasst, so enthält sie jedenfalls eine Transformation K, die die Gleichungen

$$(q, K) = \Sigma\, \alpha_k\, H_k, \tag{2}$$

$$(p, K) = \Sigma\, \beta_k\, H_k, \tag{3}$$

$$(xq, K) = \Sigma\, \gamma_k\, H_k,$$

befriedigt. Hieraus schliessen wir, wie in dem vorangehenden Paragraph, dass

$$K = \frac{p^2}{q} + \xi p + \eta q$$

gesetzt werden kann. Dabei zeigen die Gleichungen (2) und (3), dass

$$\xi = \alpha\, x^3 + \beta\, y,$$

$$\eta = \gamma\, x^{r+1} + \tfrac{3}{2}\, \alpha\, r\, x^2\, y + \delta\, y$$

gesetzt werden kann.

Ich bilde die Gleichung

$$(x^r q, K) = -2r\, x^{r-1}\, p + \beta\, x^r p + \left(\frac{\alpha r}{2}\, x^{r+2} + \delta x^r - r\beta\, x^{r-1}\, y\right) q$$

wo

$$(x^r q, K) = \Sigma\, \alpha_k\, H_k$$

ist. Also ist $\alpha = 0$.

Man sieht ferner, dass

$$r - 1 < 3,$$
$$r < 4$$

sein muss, so dass nur die beiden Fälle $r = 2$, und $r = 3$ zu untersuchen sind.

Ist $r = 2$, so wird

$$(x^2 q, K) = (-4x + \beta x^2)\, p + (\delta\, x^2 - 2\beta\, xy)\, q,$$

woraus zunächst folgt, dass $\beta = 0$. Es soll nun bestehen eine Relation der Form

$$-4\,xp + \delta\, x^2\, q = \Sigma\, \varphi_k\, H_k\,;$$

dies ist indess unmöglich, und daher giebt die Hypothese $r = 2$ keine Gruppe von Berührungs-Transformationen.

Ist endlich $r = 3$, so wird

$$(x^3 q, K) = 6\, x^2 p + \beta\, x^3 p + (\delta\, x^3 - 3\,\beta\, x^2\, y)\, q$$

woraus folgt dass $\beta = 0$ ist. Es besteht indess auch jetzt keine Relation der Form

$$-6\, x^2 p + \delta\, x^3\, q = \Sigma\, \alpha_k\, H_k\,,$$

und also giebt auch nicht die Annahme $r = 3$ Gruppen von Berührungs-Transformationen.

34. Lass uns endlich betrachten die Gruppe

$$q \;\; xq \ldots x^r q \;\; p \;\; xp \;\; yq \;\; x^2 p + r\, x\, y\, q,$$

wo r einen jeden Werth haben kann.

Den Fall $r = 0$ behandelten wir in Paragraph 8 Nummer 22; daher können wir hier $r > 0$ annehmen. Ist andererseits $r = 1$, so ist die betreffende Gruppe

$$q,\; xq,\; p,\; xp,\; yq,\; x^2 p + x\, y\, q$$

linear; sie geht überdies durch die Berührungs-Transformation

$$q = q',$$

$$p = x'\, q',$$

$$x = -\frac{p'}{q'},$$

$$y = y' + \frac{x' p'}{q'}$$

über in die lineare Gruppe

$$p \;\; q \;\; xq \;\; yq \;\; xp \;\; yp$$

die wir in § 7 erledigt haben.

Wir können daher $r > 1$ annehmen. Die neue Gruppe enthält jedenfalls eine Transformation K, bestimmt durch die Gleichungen

$$(q\,K) = \Sigma\, \alpha_k\, H_k \tag{1}$$

$$(p\,K) = \Sigma\, \beta_k\, H_k \tag{2}$$

$$(xq\,K) = \Sigma\, \gamma_k\, H_k \tag{3}$$

Also können wir setzen

$$K = \frac{p^2}{q} + \xi\, p + \eta\, q,$$

wo, wie die Gleichungen (1) und (2) zeigen,

$$\xi = 2\,\alpha\, x^3 + \beta y$$

$$\eta = \gamma\, x^{r+1} + \delta\, xy + 3\,\alpha\, x^2\, y + \varepsilon\, y^2$$

gesetzt werden kann.

Es ist

$$(yq, K) = \frac{p^2}{q} + \beta\, y\, p + (\varepsilon\, y^2 - \gamma\, x^{r+1})\, q,$$

und

$$(yq\,K) = K + \Sigma\, \mu_k\, H_k;$$

also ist

$$\alpha = 0,\ \gamma = 0,\ \delta = 0$$

und

$$K = \frac{p^2}{q} + \beta\, yp + \varepsilon\, y^2 q.$$

Ferner ist

$$(x^r q, K) = (-2r\, x^{r-1} + \beta\, x^r)\, p + (2\varepsilon\, x^r y - r\beta\, x^{r-1}\, y)\, q$$

und

$$(x^r q, K) = \Sigma\, \varphi_k\, H_k,$$

also ist

$$r - 1 < 3$$

$$r < 4,$$

sodass r gleich 3 oder gleich 2 ist.

Ist $r=3$, so kommt die unmögliche Gleichung

$$\Sigma \varphi_k H_k = (-6x^2 + \beta x^3)p + (2\varepsilon x^3 y - 3\beta x^2 y) q,$$

so dass r nicht gleich 3 sein kann.

Ist $r=2$, so wird

$$\Sigma \varphi_k H_k = (-4x + \beta x^2)p + (2\varepsilon x^2 y - 2\beta xy),$$

woraus folgt

$$\varepsilon = 0, \ \beta = 0$$

und

$$K = \frac{p^2}{q}$$

Es ist

$$\left(\frac{p^2}{q}, x^2 p + 2xyq\right) = 2\left(x\frac{p^2}{q} + 2yp\right) = 2K_1$$

und

$$\left(x\frac{p^2}{q} + 2yp, x^2 p + 2xyq\right) = x^2\frac{p^2}{q} + 4xyp + 4y^2 q = K_2$$

Die drei gefundenen inf. Transformationen K, K_1, K_2 bilden zusammen mit den sieben Transformationen der vorgelegten Gruppe, wie man leicht verificirt, die zehngliedrige Gruppe

$$\boxed{\begin{gathered} q, xq, x^2 q, p, xp, yq, x^2 p + 2xyq \\ \frac{p^2}{q}, x\frac{p^2}{q} + 2yp, x^2\frac{p^2}{q} + 4xyp + 4y^2 q \end{gathered}}$$

Es ist dies eben diejenige Gruppe von Berührungs-Transformationen, die wir schon in Paragraph 8 fanden.

§ 12.

Es giebt Gruppen von Berührungs-Transformationen, die sich nicht in Gruppen von Punkt-Transformationen umwandeln lassen.

Im Vorangehenden fanden wir nur *drei* Gruppen, eine sechsgliedrige, eine siebengliedrige und eine zehngliedrige, die wir nicht sogleich in Gruppen von *Punkt*-Transformationen umwandeln könnten. Wir werden zeigen, dass diese Gruppen sich wirklich nicht in Gruppen von Punkt-Transformationen umwandeln lassen.

35. Ich betrachte zunächst die sechsgliedrige Gruppe

$$q \quad xq \quad x^2 q \quad p \quad xp \quad \frac{p^2}{q}$$

und zeige, dass sie nicht in eine Gruppe von Punkt-Transformationen übergehen kann. Hieraus fliest dann als Corollar, dass unsere siebengliedrige und zehngliedrige Gruppe, welche beide die sechsgliedrige Gruppe als Untergruppe enthalten, sich auch nicht in Gruppen von Punkt-Transformationen umwandeln lassen.

Eine infinitesimale Transformation

$$H = q\,\Omega\left(x\,y\,\frac{p}{q}\right)$$

giebt den Grössen x, y, p, q bekanntlich Incremente δx, δy, δp, δq, deren Verhältnisse durch die Gleichungen

$$\frac{\delta x}{-\frac{dH}{dp}} = \frac{\delta y}{-\frac{dH}{dq}} = \frac{\delta p}{\frac{dH}{dx}} = \frac{\delta q}{\frac{dH}{dy}}$$

bestimmt sind. Ich führe die drei Grössen

$$x, y, -\frac{p}{q} = z$$

als neue Variablen ein. Setze ich sodann

$$H = q\,W(x\,y\,z),$$

so kommt

$$\frac{\delta x}{\frac{dW}{dz}} = \frac{\delta y}{-W + z\frac{dW}{dz}} = \frac{\delta z}{-\frac{dW}{dx} - z\frac{dW}{dy}}.$$

Dementsprechend kommt, wenn z. B. H gleich $x^2 q$ gesetzt wird

$$\frac{\delta x}{0} = \frac{\delta y}{-x^2} = \frac{\delta z}{-2x}$$

Setzt man daher

$$\frac{df}{dx} = p, \quad \frac{df}{dy} = q, \quad \frac{df}{dz} = r,$$

so nimmt die Transformation $x^2 q$ in den Variabeln x, y, z die Form

$$x^2 q + 2xr;$$

und also nimmt unsere sechsgliedrige Gruppe in den neuen Variabeln die Form

$$\boxed{\begin{array}{l} q,\ xq + r,\ x^2 q + 2xr \\ p,\ xp - zr,\ 2zp + z^2 q \end{array}} \qquad (1)$$

In der Umgebung von dem Werth-Systeme $x = 0, y = 0, z = 0$ enthält diese Gruppe drei Transformationen nullter Ordnung

$$q, p, r + xq$$

und drei Transformationen erster Ordnung

(2) $\quad 2xr + x^2 q,\ xp - zr,\ 2zp + z^2 q$

die durch Wegwerfung der Glieder zweiter Ordnung die folgende Form annehmen

(3) $\quad 2xr + \ldots,\ xp - zr,\ 2zp + \ldots$

Nun liegen die vom Punkte $z = x = y = 0$ ausgehenden Fortschreitungs-Richtungen dx, dy, dz des Büschels $dy - z\,dx = 0$ offenbar in der Ebene $z = 0$. Und andererseits werden die von Origo ausgehenden Geraden der Ebene $z = 0$ von den Transformationen (3) *drei*gliedrig transformirt. Also werden die durch Origo gehenden Fortschreitungs-Richtungen des

Büschels $dy - z\,dx = 0$ durch die Transformationen (2) *dreigliedrig* transformirt.

36. Hiermit ist nachgewiesen, dass es keine lineare partielle Differential-Gleichung der Form

$$\frac{df}{dx} + z\frac{df}{dy} + Z(x\,y\,z)\frac{df}{dz} = 0$$

giebt, die durch die Gruppe (1) invariant bleibt, und dass daher die Gruppe (1) nicht in eine Gruppe von *Punkt*-Transformationen übergeführt werden kann. Also

Satz 15. *Die sechsgliedrige Gruppe*

$$q \quad xq \quad x^2 q \quad p \quad xp \quad \frac{p^2}{q}$$

lässt sich nicht in eine Gruppe von Punkt-Transformationen umwandeln.

Hieraus folgt nun sogleich wie früher schon bemerkt die beiden Sätze

Sats 16. *Die siebengliedrige Gruppe*

$$q \quad xq \quad x^2 q \quad yq \quad p \quad xp \quad \frac{p^2}{q}$$

lässt sich nicht eine Gruppe von Punkt-Transformationen umwandeln.

Satz 17. *Die zehngliedrige Gruppe*

$$q \quad xq \quad x^2 q \quad p \quad xp \quad yq$$

$$x^2 p + 2x\,yq, \quad x\frac{p^2}{q} + 2yp$$

$$\frac{p^2}{q}, \quad x^2\frac{p^2}{q} + 4x\,yp + 4\,y^2 q$$

lässt sich nicht in eine Gruppe von Punkt-Transformationen umwandeln.

Unsere sechsgliedrige Gruppe enthält *fünf* inf. *Punkt*-Transformationen; und es ist unmittelbar einleuchtend, dass sie nicht durch Berührungs-Transformation in eine neue Gruppe mit mehr als 5 inf. Punkt-Transformationen übergehen kann; denn sonst wäre die neue Gruppe eine Gruppe von Punkt-Transformationen.

Unsere *sieben*gliedrige Gruppe enthält *sechs* inf. *Punkt*-Transformationen, und kann offenbar nicht durch Berührungs-Transformation in eine neue Gruppe mit mehr als sechs inf. *Punkt*-Transformationen übergeführt werden.

Unsere zehngliedrige Gruppe enthält nur sieben inf. Punkt-Transformationen. Es stellt sich daher die Frage, ob sie durch Berührungs-Transformation in eine Gruppe mit mehr als sieben inf. Punkt-Transformationen übergeführt werden kann. Die Beantwortung dieser Frage liegt implicite in unseren früheren Entwickelungen. Gäbe es nehmlich eine acht- oder neungliedrige Gruppe von Punkt-Transformationen die in einer mit unserer zehngliedrigen Gruppe aehnlichen Gruppe als Untergruppe enthalten wäre, so müsste diese acht- oder neun-gliedrige Gruppe eine unter denjenigen Formen besitzen, die wir in den Paragraphen 8—11 successiv betrachtet haben. Wir trafen aber keine acht- oder neun-gliedrige Gruppe von Punkt-Transformationen, die in einer zehngliedrige Gruppen von Berührungs-Transformationen enthalten wäre.

Zu bemerken ist auch, dass die Gruppe

$$q \quad xq \quad x^2 q \quad p \quad xp \quad yq \quad x^2 p + 2x yq$$

die einzige siebengliedrige Gruppe von Punkt-Transformatio- ist, die in einer mit unserer zehngliedrigen Gruppe aehnlichen Gruppe enthalten ist.

§ 13.

Bestimmung aller Gruppen von Berührungs-Transformationen.

Es stellt sich nun die Frage, welche weitere Gruppen von Berührungs-Transformationen es überhaupt giebt. Der

Weg zur Beantwortung dieser wichtigen Frage ist im Vorangehenden schon angegeben.

37. Wir fragen zunächst nach Gruppen von Berührungs-Transformationen, die die Gruppe

$$q, xq, x^2 q, p, xp, \frac{p^2}{q}$$

umfassen. Eine solche Gruppe enthält jedenfalls eine inf. Transformation K, bestimmt durch die Gleichungen

$$(q, K) = \Sigma \alpha_k H_k, \tag{1}$$

$$(p, K) = \Sigma \beta_k H_k, \tag{2}$$

$$(xq, K) = \Sigma \gamma_k H_k,$$

$$(x^2 q, K) = \Sigma \delta_k H_k.$$

Die beiden ersten zeigen, dass K die Form

$$K = \Omega(pq) + \alpha x \frac{p^2}{q} + \beta y \frac{p^2}{q} + \xi p + \eta q$$

besitzt. Es ist

$$(xq, K) = -q \frac{d\Omega}{dp} + \beta x \frac{p^2}{q} + \xi_1 p + \eta_1 q = \Sigma \gamma_k H_k,$$

woraus folgt $\beta = 0$ und

$$q \frac{d\Omega}{dp} = Ap + Bq + C\frac{p^2}{q},$$

sodass

$$\Omega = \gamma \frac{p^3}{q^2}$$

und

$$K = \alpha x \frac{p^2}{q} + \gamma \frac{p^3}{q^2} + \xi p + \eta q$$

gesetzt werden kann.

Es ist

$$(x^2 q, K) = x^2 \frac{dK}{dy} - 2xq \cdot \frac{dK}{dp} = \Sigma \delta_k H_k,$$

woraus

$$- 6 \gamma x \frac{p^2}{q} + \xi_1 p + \eta_1 q = \Sigma \delta_k H_k,$$

so dass

$$\gamma = 0$$

und

$$K = x \frac{p^2}{q} + \xi p + \eta q$$

sein muss. Dabei zeigen die Gleichungen (1) und (2), dass

$$\xi = \alpha x^2 + \beta y,$$
$$\eta = \gamma x^3 + \delta y$$

gesetzt werden kann. Zur Bestimmung der Constanten bilden wir wiederum den Ausdruck

$$(x^2 q, K) = (\beta - 4) x^2 p + (\delta x^2 - 2 \alpha x^3 - 2 \beta xy) q$$

der gleich $\Sigma \delta_k H_k$ sein soll. Da indess β nicht gleichzeitig gleich 5 und gleich Null sein kann, erhalten wir den folgenden Satz

Satz 18. *Ist die Gruppe* $q, xq, x^2 q, p, xp, \frac{p^2}{q}$ *enthalten als Untergruppe in einer Gruppe von Berührungs-Transformationen, so enthält dic neue Gruppe jedenfalls eine inf. Punkt-Transformation, die sich nicht in der vorgelegten Gruppe findet.*

38. Sodann fragen wir nach Gruppen von Berührungs-Transformationen, die die Gruppe

$$q, xq, x^2 q, yq, p, xp, \frac{p^2}{q}$$

als Untergruppe enthalten.

Die neue Gruppe enthält jedenfalls eine inf. Berührungs-Transformation K bestimmt durch die Gleichungen

$$(q, K) = \Sigma \alpha_k H_k, \qquad (5)$$
$$(p, K) = \Sigma \beta_k H_k, \qquad (6)$$
$$(xq, K) = \Sigma \gamma_k H_k,$$
$$(x^2 q, K) = \Sigma \delta_k H_k$$

Hieraus schliessen wir ganz wie in der vorangehenden Nummer, dass

$$K = x\frac{p^2}{q} + \xi p + \eta q$$

gesetzt werden kann. Dabei zeigen die Gleichungen (5) und (6), dass

$$\xi = \alpha x^2 + \beta y,$$

$$\eta = \gamma x^3 + \delta xy + \varphi y^2$$

sind. Es ist

$$(x^2 q, K) = x^2 (\beta p + \delta xq + 2\varphi y\, q) - 2xq\left(2x\frac{p}{q} + \alpha x^2 + \beta y\right)$$

oder

$$(x^2 q, K) = (\beta - 4)\, x^2 p + (\delta x^3 - 2\alpha x^3 + 2\varphi x^2 y - 2\beta xy)\, q$$

welcher Ausdruck die Form $\Sigma\, \delta_k H_k$ besitzen soll. Dies ist jedoch unmöglich, da β nicht gleichzeitig gleich 4 und gleich Null sein kann. Dies giebt

Satz 19. *Ist die Gruppe* $q, xq, x^2 q, yq, p, xp, \frac{p^2}{q}$ *Untergruppe einer Gruppe von Berührungs-Transformationen, so enthält die neue Gruppe jedenfalls* e i n e *inf. Punkt-Transformation, die sich nicht in der vorgelegten Gruppe findet.*

39. Es steht zurück alle Gruppen von Berührungs-Transformationen zu finden, die eine Untergruppe der Form

$$q,\ xq\ \ x^2 q\ \ yq\ \ p\ \ xp$$

$$x\frac{p^2}{q} + 2yp,\ x^2 p + 2xyq$$

$$\frac{p^2}{q},\ x^2\frac{p^2}{q} + 4xyp + 4y^2 q$$

enthalten.

Die neue Gruppe enthält jedenfalls eine inf. Transformation K bestimmt durch die Gleichungen

$$(q, K) = \Sigma \alpha_k H_k,$$

$$(q, K) = \Sigma \beta_k H_k,$$

$$(xq, K) = \Sigma \gamma_k H_k,$$

$$(x^2 q, K) = \Sigma \delta_k H_k.$$

Die beiden ersten Gleichungen zeigen, dass

$$K = \alpha x^3 \frac{p^2}{q} + \beta y \frac{p^2}{q} + \Omega (pq) + \xi p + \eta q$$

gesetzt werden kann. Die dritte Gleichung zeigt, dass

$$\Omega = \gamma \frac{p^3}{q^2}$$

ist.

Die beiden ersten Gleichungen geben zu Bestimmung von ξ und η Relationen der Form

$$\frac{d\xi}{dx} = 12 \alpha xy + m_1 + m_2 x + m_3 x^2,$$

$$\frac{d\xi}{dy} = n_1 + n_2 x + n_3 x^2,$$

$$\frac{d\eta}{dx} = g_1 + g_2 x + g_3 x^2 + g_4 y + 2m_3 xy + 12 \alpha y^2,$$

$$\frac{d\eta}{dy} h_1 + h_2 x + h_3 x^2 + h_4 y + 2n_3 xy.$$

Die Integrabilitäts-Bedingungen

$$12 \alpha x = n_2 + 2 n_3 x$$

$$g_4 + 2 m_3 x + 24 \alpha y = h_2 + 2 h_3 x + 2 n_3 y$$

zeigen, dass

$$n_3 = \alpha = 0, n_2 = 0$$

ist, und dass ξ und η die folgende Form besitzen

$$\xi = a x^3 + by$$

$$\eta = c x^3 + d xy + 3a x^2 y + e y^2.$$

Es ist

$$(xq, K) = x\frac{dK}{dy} - q\frac{dK}{dp} = \Sigma\, \gamma_k\, H_k,$$

also kommt

$$x\left[\beta\frac{p^2}{q} + bp + dxq + 3a\,x^2q + 2\,eyq\right]$$

$$-\,x\left[2\alpha\, x^3\frac{p}{q} + 2\beta y\frac{p}{q} + 3\gamma\frac{p^2}{q} + ax^3 + by\right] = \Sigma\,\gamma_k\, H_k,$$

woraus folgt, dass

$$\alpha = \beta = a = e = 0,$$

$$K = \gamma\frac{p^3}{p^2} + byp + (cx^3 + dxy)\,q.$$

Es ist

$$(x^2q, K) = x^2\frac{dK}{dy} - 2xq\frac{dK}{dp} = \Sigma\,\delta_k\, H_k$$

woraus

$$x^2\,(bp + dxq) - 2xq\,(3\gamma\frac{p^2}{q} + by) = \Sigma\,\delta_k\, H_k$$

sodass

$$\gamma = b = d = 0$$
$$K = c\,x^3q.$$

Hiermit ist nachgewiesen, dass eine Gruppe von Berührungs-Transformationen, die die vorgelegte zehngliedrige Gruppe umfasst, jedenfalls eine inf. Punkt-Transformation enthält, die sich nicht in der vorgelegten Gruppe findet. Früher haben wir aber gesehen, dass eine jede Gruppe von Berührungs-Transformationen, die eine $(8 + q)$ gliedrige Untergruppe von *Punkt*-Transformationen enthält, selbst eine Gruppe von Punkt-Transformationen sein muss. Also schliessen wir

Satz 20. *Die vorgelegte zehngliedrige Gruppe ist in keiner grösseren Gruppe enthalten.*

41. Hiermit sind unsere Untersuchungen über die Transformations-Gruppe der *Ebene* zum Abschluss gebracht. Wir zusammenfassen unsere Ergebnisse in dem folgenden Satze:

Theorem. Es giebt nur drei Gruppe von Berührungs-Transformationen in der Ebene, die sich nicht in Gruppen von Punkt-Transformationen umwandeln lassen. Als Typen dieser Gruppen kann man die folgenden wählen

$$\boxed{q \;\; xq \;\; x^2q \;\; p \;\; xp \;\; \frac{p^2}{q}}$$

$$\boxed{q \;\; xq \;\; x^2q \;\; p \;\; xp \;\; yq \;\; \frac{p^2}{q}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} q \;\; xq \;\; x^2q \;\; p \;\; xp \;\; yq \\ x^2p + 2xyq, \;\frac{p^2}{q} + 2yp \\ \frac{p^2}{q}, \; x^2\frac{p^2}{q} + 4xyp + 4y^2q \end{array}}$$

§ 14.

Discussion der gefundenen Gruppen.

Ich werde zeigen, dass unsere zehngliedrige Gruppe eine *dreifach* unendliche Curven-Schaar invariant lässt; man kann insbesondere erreichen, dass diese ∞^3 Curven alle Kreise der Ebene sind.

Ich behaupte, dass die ∞^3 Curven

$$y = A + Bx + Cx^2$$

durch eine jede Transformation der Gruppe unter sich vertauscht werden, und dass also ihr Inbegriff durch die Gruppe invariant bleibt.

Lass mich zunächst diejenige Curve bestimmen, in welche eine vorgelegte Curve

$$y = f(x)$$

vermöge einer inf. Transformation H übergeführt wird. Bezeichne ich mit x, y die Coordinaten eines Punkts der vorgelegten Curve, mit $x' y'$ die Coordinaten der neuen Lage dieses Punkts, so ist, wenn man von inf. Grössen zweiter Ordnung wegsieht,

$$y = y' + \varepsilon \frac{dH}{dq},$$

$$x = x' + \varepsilon \frac{dH}{dp},$$

wo ε eine infinitesimale Grösse bezeichnet.

Es ist ferner

$$-\frac{p}{q} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Setzen wir nun

$$H = q \cdot W\left(x\,y\,\frac{p}{q}\right) = q\; W(x\,y\,z)$$

so kommt

$$y = y' + \varepsilon\left(W - z\frac{dW}{dz}\right)$$

$$x = x' + \varepsilon\,\frac{dW}{dz},$$

und also hat die transformirte Curve die Gleichung

$$y' + \varepsilon\left(W - z\frac{dW}{dz}\right) = f(x') + \varepsilon\,\frac{df}{dx'}\,\frac{dW}{dz'},$$

wo überall statt z die Grösse $-f'(x')$ zu setzen ist. Also ist

$$y' = f(x') - \varepsilon\, W$$

die neue Curve

Lass uns z. B. annehmen, dass

$$H = \frac{p^2}{q} = q\,z^2$$

ist. Also geht die Curve $y = f(x)$ durch die Transformation $\frac{p^2}{q}$ über in die Curve

$$y = f(x') - \varepsilon f'^2$$

Wir werden jetzt successiv die zehn inf. Transformationen unserer Gruppe auf die ∞^3 Curven

$$y = A + Bx + Cx^2 = f(x)$$

ausführen und dadurch nachweisen, dass jede Curve jedesmal in eine Curve derselben Schaar übergeführt wird.

1) Lass uns zunächst die inf. Transformation q betrachten. In diesem Falle ist

$$W(x\,y\,z) = 1$$

und

$$y = f(x) - \varepsilon \,.\, 1 = A - \varepsilon + Bx + Cx^2$$

die Gleichung der transformirten Schaar, die somit mit der vorgelegten identisch ist.

2) Darnach betrachten wir die inf. Transformation xq. Alsdann ist

$$W(x\,y\,z) = x,$$

und

$$y = f(x) - \varepsilon\, x = A + (B - \varepsilon)\, x + Cx^2$$

die Gleichung der transformirten Schaar, die auch jetzt mit der vorgelegten identisch ist

3) Sei

$$H = x^2 q, \quad W = x^2;$$

alsdann ist

$$y = f(x) - \varepsilon\, x^2 = A + Bx + (C - \varepsilon)\, x^2$$

die transformirte Schaar, die mit der vorgelegten identisch ist.

4) Sei

$$H = p, \quad W = -z;$$

die transformirte Schaar

$$y = f(x) - \varepsilon f'(x)$$

oder ausgeführt

$$y = A - \varepsilon B + (B - 2\varepsilon C) x + Cx^2$$

ist mit der vorgelegten identisch.

5) Sei

$$H = xp, \quad W = -xz;$$

die transformirte Schaar

$$y = f(x) - \varepsilon x f'(x)$$
$$= A + (B - \varepsilon B) x + (C - 2\varepsilon C) x^2$$

ist mit der vorgelegten identisch.

6) Sei

$$H = yq, \quad W = y$$

die transformirte Schaar

$$(1 + \varepsilon) y = f(x) = A + Bx + Cx^2$$

ist mit der vorgelegten identisch.

7) Sei

$$H = \frac{p^2}{q}, \quad W = z^2;$$

die transformirte Shaar

$$y = f - \varepsilon f'^2$$
$$= A - \varepsilon B^2 + (B - 4\varepsilon BC) x + (C - 4\varepsilon C^2) x^2$$

ist mit der vorgelegten identisch.

8) Sei

$$H = x^2 p + 2xyq$$
$$W = x^2 z + 2xy;$$

die transformirte Schaar

$$y = f(x) - \varepsilon [-x^2 f'(x) + 2xy]$$
$$= A + (B - 2\varepsilon A) x + (C - \varepsilon B) x^2$$

ist mit der vorgelegten identisch.

9) Sei

$$H = x\frac{p^2}{q} + 2yp,$$

$$W = xz^2 + 2yz.$$

Die transformirte Schaar

$$y = f(x) - \varepsilon(xz^2 + 2yz)$$

oder

$$y = (A + 2\varepsilon AB) + x(B + \varepsilon B^2 + 4\varepsilon AC)$$
$$+ x^2(C + 2\varepsilon BC)$$

ist mit der vorgelegten identisch.

10) Sei endlich

$$H = x^2\frac{p^2}{q} + 4xyp + 4y^2q,$$

$$W = x^2z^2 + 4xyz + 4y^2.$$

Die transformirte Schaar

$$y = f(x) - \varepsilon(x^2z^2 + 4xyz + 4y^2)$$

erhält durch Ausführung die Gleichungsform

$$y = A - 4\varepsilon A^2 + (B - 4\varepsilon AB)x + (C - \varepsilon B^2)x^2$$

und ist somit mit der vorgelegten Schaar identisch.

Hiermit ist wirklich nachgewiesen, dass die Curven-Schaar $y = A + Bx + Cx^2$ durch die Transformationen unserer zehngliedrigen Gruppe invariant bleibt.

42. Man kann sich die Aufgabe stellen, überhaupt diejenigen Curven-Schaaren zu bestimmen, die durch eine vorgelegte Gruppe invariant bleiben. Bei einer anderen Gelegenheit werde ich auf diese Frage, die für die Theorie der Differential-Gleichungen von Wichtigkeit ist, die ich übrigens schon längst angeregt habe, näher eingehen. Hier beschräncke sich mich auf die folgenden Bemerkungen.

Dass die Gruppe

$$q \quad xq \quad x^2q \quad p \quad xp \quad \frac{p^2}{q}$$

keine *zweifach* unendliche Curven-Schaar invariant lässt, liegt schon darin, dass die Gruppe nicht in eine Gruppe von Punkt-Transformationen übergehen kann.

Lass mich versuchen, die allgemeinste dreifach unendliche Curvenschaar, die bei der sechsgliedrigen Gruppe invariant bleibt, zu bestimmen. Sei

$$y = f(x)$$

eine Curve der Schaar. Auf dieselbe führe ich die inf. Transformation

$$\lambda_0 q + \lambda_1 xq + \lambda_2 x^2 q + \lambda yq$$

aus. Hierdurch erhalte ich die benachbarte Curve

$$y = f(x) - \varepsilon(\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda y)$$

deren Gleichung ich folgendermassen schreibe

$$y = \frac{1}{1+\varepsilon\lambda} f(x) - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\lambda}(\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2)$$

oder indem ich

$$\varepsilon\lambda_0 = \mu_0 \ldots\ldots \varepsilon\lambda = \mu$$

setze:

$$y = \frac{1}{1+\mu} f(x) - \frac{1}{1+\mu}(\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2).$$

Es ist klar, dass die letzte Gleichung immer eine Curve der Schaar darstellt, welche Werthe auch die Parameter μ_k besitzen mögen. Nun aber enthält die letzte Gleichung *vier* Parameter, während die Curven-Schaar nur ∞^3 Curven enthalten soll. Daher schliessen wir dass es jedesmal unendlich viele Werth-System μ_k giebt, die *dieselbe* Curve darstellen.

Bezeichne ich mit μ_k und μ'_k zwei solche aequivalente Werth-Systeme so ist

$$\frac{1}{1+\mu} f(x) - \frac{1}{1+\mu}(\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2) =$$

$$\frac{1}{1+\mu'} f(x) - \frac{1}{1+\mu'}(\mu'_0 + \mu'_1 x + \mu'_2 x^2)$$

woraus mit Nothwendigkeit folgt, dass $f(x)$ die Form $A + Bx + Cx^2$ besitzt. Also

Satz 21. *Die Curven-Schaar*

$$y = A + Bx + Cx^2$$

ist die einzige dreifach unendliche Curven-Schaar, die bei der Gruppe $q\ xq\ x^2 q\ yq$ *invariant bleibt.*

Corollar. Die Curven-Schaar $y = A + Bx + Cx^2$ *ist zugleich die einzige dreifach unendliche Curven-Schaar, die möglicherweise invariant bleibt bei einer Gruppe, die eine invariante Untergruppe der Form* $q, xq, x^2 q\ yq$ *besitzt.*

43. Ich werde jetzt die allgemeinste *vierfach* unendliche Curven-Schaar bestimmen, die bei der Gruppe

$$q\ xq\ x^2 q\ yq\ p$$

invariant bleibt. Sei

$$y = f(x)$$

eine Curve der Schaar. Dieselbe geht durch die infinitesimale Transformation

$$\lambda_0 q + \lambda_1 xq + \lambda_2 x^2 q + \lambda_3 yq + \lambda_4 p$$

über in eine Curve mit der Gleichungsform

$$y = \alpha f(x) + \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \gamma f'(x)$$

Soll daher die Curven-Schaar nur ∞^4 Curven enthalten, so muss eine Relation der Form

$$\frac{df}{dx} = \rho f + \nu_0 + \nu_1 x + \nu_2 x^2$$

bestehen. Hiernach findet man $f(x)$ durch Integration dieser linearen Differential-Gleichung.

Durch Betrachtungen dieser Art *findet man leicht eine jede Curven-Schaar, die zu einer vorgelegten Transformations-Gruppe der Ebene in invarianter Beziehung steht.*

Und also ist es auch möglich eine jede Differential-Gleichung

$$f(x\,y\,y'\ldots y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

anzugeben, die eine vorgelegte Transformations-Gruppe gestattet.

Auf diese Bemerkung habe ich eine rationelle Behandlungsweise aller Gleichungen (1), die überhaupt eine Transformationsgruppe gestatten, begründet, wie ich bei einer anderen Gelegenheit ausführlicher zeigen werde. (Vergleiche Göttinger Nachrichten, 1874, Nr. 22).

Auf unsere zehngliedrige Gruppe führen wir die Berührungs-Transformation

$$\left\{\begin{aligned} q' &= p \\ p' &= \sqrt{pq} \\ x' &= 2y\sqrt{\frac{q}{p}} \\ y' &= x - y\frac{q}{p} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

aus. Hierdurch nimmt unsere Gruppe die Form

$$\boxed{\begin{array}{c} q\;\; yq\;\; y^2q\;\; p\;\; xp\;\; x^2p \\ \sqrt{pq},\, y\sqrt{pq},\, x\sqrt{pq},\, xy\sqrt{pq} \end{array}}$$

Die invariante Curven-Schaar[1]) $y' = A + Bx' + Cx'^2$ geht durch die Berührungs-Transformation (2) über in eine bei der neuen Gruppe invariante Curven-Schaar. Um dieselbe zu finden führen wir die Berührungs-Transformation (2) aus auf die beiden Gleichungen

$$y' = A + Bx' + Cx'^2$$

$$-\frac{p'}{q'} = B + 2Cx'^2$$

und eliminiren darnach zwischen den hervorgehenden Gleichungen

$$x - y\frac{q}{p} = A + B \, . \, 2y\sqrt{\frac{q}{p}} + C \, . \, 4y^2\frac{q}{p}$$

$$-\sqrt{\frac{q}{p}} = B + 2C \, . \, 2y\sqrt{\frac{q}{p}}$$

die Grösse $\frac{q}{p}$. Die hervorgehende Gleichung

$$4Cxy + x + (B^2 - 4AC)y - A = 0$$

definirt alle ∞^3 Kegelschnitte die die beiden Punkte

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = \infty \end{array}\right| \text{ und } \left|\begin{array}{l} x_2 = \infty \\ y_2 = 0 \end{array}\right.$$

gemein haben.

Verlegt man sodann durch eine homographische Transformation

$$x = x'' + iy''$$

$$y = x'' - iy''$$

die beiden gemeinsamen Punkte zu den beiden Kreispunkten, so gehen die ∞^3 Kegelschnitte über in die ∞^3 Kreise der Ebene. Also

---

[1]) Diese Curven-Schaar besteht aus allen ∞^3 Kegelschnitten, die ein gemeinsames Linien-Element enthalten.

Satz 22. *Als Typen derjenigen Gruppen, die sich nicht in Gruppen von Punkt-Transformation umwandeln lassen, kann man die zehngliedrige Gruppe, die alle Kreise in Kreise umwandelt zusammen mit einer siebengliedrigen und einer sechsgliedrigen Untergruppe derselben wählen.*[1])

Christiania, 15de October 1878.

---

[1]) In drei bald erscheinenden Abhandlungen gebe ich 1) eine neue Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven, 2) die Bestimmung aller Flächen, deren Haupttangenten-Curven jedesmal einem linearen Complexe angehören, 3) die Bestimmung aller Minimalflächen, die durch Translationsbewegung einer reellen oder imaginären Curve erzeugt sind. [Man erhält die allgemeinste Minimalfläche, deren geodätischen Curven eine conforme inf. Transformation gestatten, wenn man setzt: $F(s) = (C_1 + i\,C_2)\,s^{\mathrm{m}_1 + i\,\mathrm{m}_2}$. Diese Fläche ist eine Spiralfläche]. Die Bestimmung der geodätischen Curven einer Fläche, die auf eine Spiralfläche abgewickelt werden kann, verlangt nach meinen alten Theorien die Integration einer Gleichung 1. O. Für alle andere Flächen, deren geodätische Curven eine inf. Transformation gestatten, verlangt diese Bestimmung nur Quadratur.

NYE BIDRAG TIL KUNDSKABEN OM MIDDELHAVETS INVERTEBRATFAUNA.

AF

G. O. SARS.

II.

Middelhavets Cumaceer.

I dette Archivs 1ste Aargang har jeg under ovenstaaende Hovedtitel paabegyndt Publikationen af en Række af Afhandlinger, hvori jeg agter at nedlægge Resultaterne af de Undersögelser, jeg havde Anledning til at anstille over Middelhavets Fauna i Vinteren 1876. Min første Afhandling omhandlede en til de langhalede Krebse hørende Familie, *Mysidæ*, og jeg paaviste her, at Middelhavet slet ikke er saa fattigt paa disse elegante Smaakrebse, som man, efter hvad der tidligere var bekjendt, skulde formode. I den nu følgende Afhandling kommer jeg at behandle en anden meget eiendommelig Gruppe af Krebsdyr, om hvilke man har havt en endnu langt ufuldstændigere Kundskab, idet selv ikke en eneste Repræsentant hidtil har været paavist fra Middelhavet.

Cumaceerne, disse mærkværdige og isoleret staaende interessante Smaakrebse, vare længe alene kjendte fra de nordlige Have, indtil jeg i 1873 ved Prof. *Lovéns* Velvillighed saa mig istand til at paavise flere tildels eiendommelige Former ogsaa fra sydligere Have, deriblandt adskillige fra Vestindien, indsamlede af Dr. A. Goës.[1]) At Middelhavet ganske og aldeles skulde mangle Repræsentanter af denne Gruppe, ansaa jeg derfor paa Forhaand for lidet rimeligt, og under mit Ophold i Syden Vinteren 1876 havde jeg derfor ogsaa min Opmærksomhed specielt henvendt paa denne interessante Krebsdyrgruppe. Resultatet af disse Undersøgelser har, saalangtfra at skuffe mig, meget mere overtruffet mine dristigste Forventninger, idet det har lykkets mig at finde frem og nøiagtig undersøge ikke mindre end 23 vel udprægede Arter af Cumaceer. Flere af disse ere identiske med Former, tidligere observerede ved de Britiske Øer og tildels ogsaa ved Norges Kyster; en Del synes derimod, saavidt vor Kundskab for Tiden strækker sig, at være eiendommelige for Middelhavet. Da de britiske Former endnu kun ere meget ufuldstændigt kjendte og der af de norske Former hidtil kun er leveret korte latinske Diagnoser, skal jeg i det føgende udførligt beskrive og afbilde samtlige af mig i Middelhavet fundne Arter af denne Gruppe. De fleste af disse foreligge i talrige Exemplarer af begge Kjøn, og jeg har herved seet mig istand til, paa faa Undtagelser nær, at foretage af alle en omhyggelig anatomisk Undersøgelse samt nøiere paavise den mærkelige Forskjel, som de fuldt udviklede Hanner ialmindelighed vise fra Hunnerne, en Forskjel, der endog har givet Anledning til Opstillelse af flere nominelle Slægter.

Da de fleste tidligere bekjendte Typer ere repræsenterede i Middelhavet, har jeg i nærværende Afhandling for første Gang forsögt en høiere Inddeling af Cumaceerne, idet de forskjellige Slægter ere grupperede under særegne Familier, af hvilke en kortfattet Characteristik er vedføiet. Alene en af disse Familier, Fam: *Lampropidæ*, mangler hidtil Repræsentanter i Middelhavet. Jeg vedføier længere nedenfor til

[1]) G. O. Sars, Beskrivelse af syv nye Cumaceer fra Vestindien og det sydatlantiske Ocean. Kgl. Svenska Vetensk. Akad. Handl. Bd. 11.

lettere Oversigt en systematisk Fortegnelse over samtlige hidtil kjendte Cumaceslægter, indordnede under de repektive Familier.

Det mest udmærkende Træk ved Cumaceernes Organisation er ubestridelig det eiendommeligt udviklede *Gjelleapparat.* Med Hensyn til Tydningen af dette, saa maa jeg fremdeles fastholde min tidligere Opfatning, hvorefter det hovedsageligt sammensættes af den modificerede Vifte paa 1ste Par Kjævefødder. Den fortilløbende Streng med sit eiendommelige Ventilationsapparat synes derimod at være fremkommen ved en endnu videre gaaende Modifikation af Exognathen (Svømmegrenen). Dette bliver tydeligt ved en Sammenligning med det 1ste Kjævepar hos Schizopoderne (se min tidligere Afhandling: Middelhavets Mysider). Her finde vi alle Dele igjen. Viften har ogsaa her Formen af èn bagudrettet membranøs Plade af tildels en meget lignende Form som hos Cumaceerne. Derimod har Exognathen bibeholdt sin oprindelige Form som en leddet Svømmegren. Jeg har tidligere antaget, at Cumaceerne ingen adskilte Gjellehuler havde, men at den hele forreste, af Rygskjoldet omsluttede Del af Kropscaviteten tjente som en saadan. Efter fornyede Undersøgelser tror jeg dog at have bemærket, at en tynd Membran i Virkeligheden afgrændser Gjellehulerne til hver Side fra det mediane Parti af Kropscaviteten, der hovedsageligt indtages af den forreste Del af Ernæringskanalen med sine til hver Side knippevis ordnede Galdekar. Udvendigt paa Rygskjoldet er Branchialregionerne ialmindelighed ved 2 longitudinelle noget bøiede Linier, hvis Convexitet vender mod hinanden, afgrændsede fra den i Midten særdeles smale Regio gastero-hepatica. Hvad endelig Benævnelsen af Lemmerne hos Cumaceerne angaar, saa har jeg troet at burde fremdeles holde paa den Kröyerske Opfatning, hvorefter der adskilles som hos Decapoderne 3 Par Kjævefødder og 5 Par Fødder. 1ste Fodpar stemmer vistnok i sin Bygning meget nær overens med 3die Par Kjævefødder; men saavel ifölge sin Stilling som den stærke Udvikling, det sædvanligvis opnaar, skiller det sig dog aabenbart fra de egentlige Munddele og synes ganske saavel i morphologisk som physiologisk Henseende at svare til de saakaldte Fangarme hos Decapoderne. 2det Fodpar indtager i Form og tildels Function en intermediær Stilling mellem dette Par og de 3 fölgende Fodpar, der ere de egentlige Gang- eller vel snarere Gravefødder.

Hvad Cumaceernes systematiske Stilling angaar, saa har her som bekjendt to forskjellige Anskuelser gjort sig gjældende. Den ene af disse repræsenteres af *Krøyer*, der i Lighed med Goodsir og flere betragter dem som virkelige Decapoder, den anden af *A. Dohrn*, der væsentlig paa Grund af Udviklingen stiller dem nær ved Isopoderne. Jeg selv har tidligere nærmest bekjendt mig til Kröyers Opfatning og kan fremdeles ikke bekvemme mig til at regne dem til de saakaldte Edriopthalmia eller Arthrostaca, med hvilke de i Virkeligheden kun vise liden Overensstemmelse. For nærværende skulde jeg være helst tilbøjelig til at betragte dem som repræsenterende en egen større Afdeling af de høiere Krebsdyr (Malacostraca), midt imellem Thoracostraca og Arthrostraca, dannende et naturligt Bindeled mellem begge.

De min Afhandling vedføiede Plancher ere ogsaa dennegang udførte ved Hjælp af Autographi, en Methode, som jeg fremdeles med Hensyn til praktisk Anvendelighed maa sætte langt over alle lignende Methoder, Heliotypien iberegnet. Habitusfigurerne ere paa sædvanlig Vis udførte i Crayon-Maneer. Derimod har jeg fundet det mere bekvemt at anvende Pen og Tusch ved Udførelsen af Detailfigurerne. Ved samtlige Figurer er Camera lucida anvendt, og jeg tør saaledes indestaa for deres størst mulige Correcthed.

De af mig i den her omhandlede Retning nøiere undersøgte Punkter ved Middelhavet ere fölgende:

Paa Sydsiden af Middelhavet: *Goletta* (Tunis's Udhavn):
Paa Sicilien: *Siracusa* og *Messina*.
Paa Italiens Fastland: *Neapel* og *Spezia*.

Fra alle disse Lokaliteter har jeg Cumaceer, dels littorale, dels Dybvandsformer. De større Dybder nedenfor 50 F. kunde jeg desværre af Mangel paa dertil hensigtsmæssige Apparater ikke undersøge. Rimeligvis vil en nøiere Undersøgelse af disse endnu bringe mange nye Former for Lyset, og det er heller ikke rimeligt, at jeg under mit forholdsvis kortvarige Ophold i Syden skulde have faaet fat paa samtlige de paa grundere Vand forekommende Former. At derfor en fortsat Undersøgelse i denne Retning endnu vil give gode Resultater, kan jeg ikke betvivle.

Dispositio systematica generum Cumaceorum hucusqve cognitorum.

Fam. 1. Cumidæ.

Gen. 1. Cuma, Edw.
— 2. Stephanomma, G. O. Sars.
— 3. Cyclaspis, G. O. Sars.
— 4. Iphinoë, Sp. Bate.
— 5. Cumopsis, n.

Fam. 2. Vaunthompsondiiæ.

— 6. Vaunthompsonia, Sp. Bate.
?— 7. Leptocuma, G. O. Sars.

Fam. 3. Lampropidæ.

— 8. Lamprops, G. O. Sars.
— 9. Platyaspis, G. O. Sars.

Fam. 4. Leuconidæ.

Gen. 10. Leucon, Kröyer.
— 11. Eudorella, Norman.

Fam. 5. Diastylidæ

— 12. Diastylis, Say.
— 13. Leptostylis, G. O. Sars.

Fam. 6. Pseudocumidæ.

— 14. Pseudocoma, G. O. Sars.
— 15. Petalopus, G. O. Sars.

Fam. 7. Campylaspidæ.

— 16. Campylaspis, G. O. Sars.

Fam. 8. Cumellidæ

— 17. Cumella, G. O. Sars.
— 18. Nannastacus, Sp. Bate.

Genera incertæ sedis.

Gen. Strauchia, Czernikowski.
— Olbia, Marcussen.
— Chalarostylis, Norman.
— Spencebatea, Norman.

Genera spuria:

— Condylura, Lamk. = Diastylis, Say.
— Bodotria, Goodsir = Cuma, Edw. (mas adult).
— Alauna, Goodsir = Diastylis, Say.
— Eudora, Sp. Bate = Eudorella, Norm.
— Halia, Sp. Bate = Iphinoë, Sp. Bate.

Gen. Venilia, Sp. Bate | = Iphinoë, Sp. Bate (mas
— Cyrianassa, Sp. Bate | adult).
— Diops, Paulisson = Nannastacus, Sp. Bate.

Fam. 1. Cumidæ.

Corpus posticum ab antico haud distincte definitum, segmentis in femina gracillimis, subcylindricis, in mare crassioribus et epimeris distinctis præditis.

Antennæ superiores flagellis brevibus, altero minimo et rudimentari; inferiores in femina parvæ, biarticulatæ, in mare bene evolutæ, divisione postica partis basalis ex articulis 2 distinctis composita, flagello filiformi in articulos numerosos breves diviso.

Mandibulæ bene evolutæ, extremitate antica (incisiva) exserta et distincte dentata, processu molari magno et crasso, setis intermediis numerosis et arcte appressis.

Maxillæ posteriores palpo distincto bilobato instructæ.

Apparatus branchialis bene evolutus, branchiis foliiformibus dense seriatis, parte antica in fronte rostri sqvamulis 2 incrustatis et mobilibus prædita.

Maxillipedes 3tii paris magni, articulis ex parte dilatatis, ramo natatorio instructi.

Pedes solummodo 1mi paris natatorii; ceteri et in mare et in femina simplices ramis natatoriis carentes.

Pleopoda maris omnia bene evoluta et longe setifera, biramea, ramo altero bi- altero uniarticulato.

Telson nullum.

Foruden de nedenfor opförte Slægter hører herhen endnu den af mig for en vestindisk Form opstillede Slægt *Stephanomma.* Characteristisk for Familien er navnlig Mangelen af Svømmegrene paa de 4 bageste Fodpar hos begge Kjøn samt de hos Hannen paa samtlige Bagkropssegmenter udviklede Lemmer, hvilken sidste Character Familien dog deler med den næstfølgende Fam. *Vaunthompsoniidæ.*

Gen. 1. Cuma Edw.
(inclus: gen. Bodotria, Goodsir).

Integumenta durissima structura distincte sqvamosa.

Scutum dorsale supine plane non arcuatum, lateraliter plus minusve distincte carinatum, rostro brevissimo et obtuso, fere nullo.

Segmenta pedigera 4 modo pone scutum nuda apparent, 1^{mum} in femina permagnum.

Oculus bene evolutus lentibus pluribus ornatus.

Antennæ superiores breves, articulo basali magno et crasso, flagello longiore biarticulato, appendicibus olfactoriis 2 terminalibus, in mare ad basin aliis 2 instructo; inferiores feminæ minimæ, articulo basali setis 3 plumosis ornato, maris corporis longitudinem æqvantes.

Labium lobos terminales membranceos obtuse rotundatos et subtiliter ciliatos præbens.

Maxillipedes 3^{tii} paris magni, articulo basali extus ad apicem in processum laminarem setiferam excurrente, seqventibus sat dilatatis.

Pedes 1^{mi} paris haud elongati, articulo basali ad apicem seta una longa ornato, ceteris tenuibns fere nudis; 2^{di} paris 5-articulati; seqventes tenues et sparse pilosi.

Uropoda ramis brevibus sublinearibus exteriore biarticulato, interiore bi- vel uniarticulato, trunco in femina simplice, in mare intus setis et aculeis ornato.

Typen for denne Slægt er den af Montagu først beskrevne *Cancer Astacus scorpioïdes*, som senere blev gjenfunden af Milne Edwards ved Frankriges Vestkyst og af ham beskrevet som en ny Slægt og Art under Benævnelsen *Cuma Audouini*. Som det gjerne pleier at gaa i lignende Tilfælde, har den af Milne Edwards anvendte Slægtsbenævnelse *Cuma* senere været brugt paa en hel Del forskjelligartede Former; ja enkelte Autores har endog lige til den nyeste Tid fremdeles anvendt den for samtlige Cumaceer uden Undtagelse. I den Begrændsning, hvori denne Slægt her tages, indbefatter den kun 2 af de tidligere observerede Cumaceformer, nemlig *Cuma scorpioïdes* Mont. og den nedenfor nærmere omtalte *Cuma Edwardsii* Goodsir. Hertil kommer imidlertid nu 2 vel udprægede nye Arter fra Middelhavet, hvorved altsaa Tallet af Arter for Tiden beløber sig til 4.

Arterne af denne Slægt ere af en temmelig kort og undersætsig Kropsform og udmærkede ved det oventil horizontale eller noget indtrykte samt til Siderne mere eller mindre tydeligt kjølede Rygskjold, den rudimentære Beskaffenhed eller rettere fuldkomne Mangel af det hos andre Cumaceer tydelige 1ste frie Forkropssegment samt ved de usædvanlig haarde og tydeligt skjællede Integumenter. Hannerne ere som sædvanlig af slankere Kropsform end Hunnerne og desuden let kjendelige fra disse ved de stærkt forlængede traadformige nedre Antenner og ved de paa samtlige Bagkropssegmenter udviklede Lemmer. De have tidligere været generiskt skilte fra Hunnerne og henførte til Slægten *Bodotria*, Goodsir, hvilken Slægt altsaa maa stryges af Systemet. Slægten synes idethele at være sydlig i sin Udbredning. Kun en af Arterne, Cuma scorpioïdes, gaar nordlig til Norges sydvestlige Kyst og er her temmelig sjelden.[1])

---

[1]) Den af mig tidligere opstillede Art *Cuma pusilla* maa stryges, da jeg nu holder det af mig undersøgte Exemplar alene for et ganske ungt Individ af C. scorpioïdes.

1. Cuma Edwardsii, Goodsir.
(Tab. 1—3).

Cuma Edwardsii, Goodsir, Edinburgh new philosophical Journal 1843, Vol. XXXIV, pg. 123, pl. 2, fig. 1—13.

Cuma Audouini, Bell, Britisch stalk-eyed Crustacea, pg. 328.

Charact. spec:

Corpus feminæ sat abbreviatum, maris gracilius.

Scutum dorsale utrinqve carina horizontali sat elevata in femina per segmenta libera corporis antici continuata, in mare etiam in corpore postico distincta instructum, margine superiore omnino recto, rostro brevi lineæ dorsali continuo.

Segmenta pedigera dorsaliter leviter carinata.

Maxillipedum 2di paris articulus basalis extus aculeis 6 fortibus armatus.

Uropoda segmentis 2 ultimis junctis longitudine circiter æqvalia, ramis dimidia parte trunci longioribus, interiore distincte biarticulato, articulo 1mo intus in femina aculeis 4 armata.

Color pallide fulvus maculis fuscis hic et illic variegatus.

Longit. feminæ: 4.3 mm; maris: 5 mm.

Beskrivelse af Hunnen.

Kropsformen er (se Tab. 1, fig. 1 og 2) temmelig kort og undersætsig og Integumenterne særdeles haarde og stærke, Legemet derfor kun lidet gjennemsigtigt.

Farven er bleg gulagtig med nogle enkelte brunlige Pigmentansamlinger hist og her, saavel paa Rygskjoldet som paa den bageste Del af Forkroppen og paa Bagkroppens 4de Segment.

Forkroppen er især hos de ægbærende Hunner noget opsvulmet, næsten ægformig, men afsmalnes ganske successivt bagtil, hvor den uden nogen skarpt markeret Grændse gaar over i Bagkroppen. Den viser 3 tydelige Længdekjøle, en dorsal, der tildels ogsaa lader sig forfølge langs ad Bagkroppen, og paa hver Side en nogenlunde stærkt fremspringende lateral Kjøl, der løber temmelig horizontalt fra den forreste Ende af Rygskjoldet langs efter dettes Sider, noget nærmere den dorsale Flade, og fortsættes bagtil over de frie Forkropssegmenter, idet den der skiller disses Sidedele eller Epimerer fra den dorsale Del.

Rygskjoldet er temmelig stort, ikke ubetydeligt længere end de frie Forkropssegmenter tilsammen. Dets øvre Contour er ganske lige og horizontal, medens Sidedelene nedad danne en temmelig stærk Krumning. Rostrum er særdeles kort og stumpt, ovenfra seet næsten tvært afkuttet, og ligger i lige Flugt med Ryglinien. Under det danne de frie Sidekanter af Rygskjoldet paa hver Side et lidet vinkelformigt Indsnit, hvorfra de øvre Antenner rage frem. Som Følge af Rostrums Korthed ligger Pandeloben helt fortil. Som hos andre Cumaceer skilles denne fra den øvrige Del af Rygskjoldet ved en tydelig markeret bagtil i 2 divergerende Grene udgaaende Fissur.

Ved Enden af Pandeloben ligger det uparrede *Synsorgan* som en svagt fremspringende med mørkt Pigment fyldt Knude, paa hvis Overflade flere hvælvede Corneæ have sin Plads, ordnede saaledes, at en noget større central omgives krandsformigt af 8 andre.

Af frie *Forkropssegmenter* ere kun 4 tydeligt udviklede, idet det hos de fleste øvrige Cumaceer tydelige 1ste Segment, der bærer 1ste Fodpar, her ganske mangler eller ialfald er tilstede i en saa aldeles rudimentær Form, at det ganske kan sættes ud af Betragtning. Det umiddelbart bag Rygskjoldet følgende Segment svarer saaledes til 2det frie Forkropssegment hos andre Cumaceer. Det er meget stort, baade høiere og længere end nogen af de øvrige og har en tydeligt fremspringende dorsal Kjøl, der dog ikke danner nogen Fortsats saaledes som hos fölgende Art. Det følgende Segment er omtrent halvt saa langt og er temmelig fast forbundet med

med hint. Derimod ere de 2 sidste Segmenter oventil ved dybe Indsnøringer skilte fra hinanden.

Bagkroppen er særdeles tynd og spinkel og, naar Halevedhængene fraregnes omtrent af Forkroppens Længde. Den bestaar af 6 temmelig regelmæssigt cylindriske Segmenter, hvoraf det næstsidste er længst. Sidste Segment (se Tab. 3, fig. 5) danner bagtil i Midten et stumpvinklet Fremspring, der hvælver sig ud over Analaabningen, uden at der dog er nogen Del begrændset, der kunde gjælde for noget Rudiment af et midterste Halevedhæng.

De øvre Antenner (Tab. 2, fig. 1) bestaa af et 3leddet Skaft og 2 fra Enden af dette udgaaende rudimentære Svøber. Skaftets første Led er meget stort og tykt, omtrent af samme Længde som de 2 følgende Led tilsammen, og af en uregelmæssig, noget sammentrykt Form. De 2 følgende Led ere cylindriske og det sidste længst; ved Enden bærer ethvert af disse Led nogle af de eiendommelige saakaldte Hørebørster, særdeles tandre børsteformige Vedhæng, der vise en liden knudeformig basal Udvidning og i Enden ere forsynede med nogle lange divergerende Cilier (se fig. 2). Af Svøberne (ibid.) er den ene aldeles rudimentær, kun dannende en ubetydelig Tuberkel, der foruden 3 simple Børster bærer paa Spidsen en enkelt Hørebørste. Den anden Svøbe er omtrent halvt saa lang som Skaftets sidste Led og bestaar af 2 tydelige Led, hvoraf det sidste er kortest og bærer i Enden 2 stærkt udviklede mangeleddede Lugtevedhæng, foruden nogle simple Børster.

De nedre Antenner (Fig. 3, b b) ere neppe større end de øvre Antenners Basalled og bestaa af en uregelmæssigt formet noget bøiet Grunddel, der i sin forreste Kant bærer 3, ialmindelighed tilbageslaaede Fjærbørster, og et ganske lidet cylindriskt Endeled, fra hvis afkuttede Spids udgaa 4 divergerende Hørebørster.

Overlæben (Fig. 3, a) danner en liden afrundet, i Enden fint haaret Lap mellem Roden af de nedre Antenner.

Underlæben (Fig. 5) er temmelig stor og af membranøs Beskaffenhed, dybt tvekløftet, med enhver af Endeloberne jevnt afrundede og i Kanten fint cilierede. Den støttes af en tværgaaende Chitinliste ved Basis, hvorfra udgaa 2 noget buede Grene ud i Endeloberne.

Kindbakkerne (Fig. 4) ere meget haarde og sprøde, derfor vanskelige at faa udpræparerede hele. De bestaa hver af et kileformigt Corpus, der indad viser en dyb Indhuling, hvori de stærke Adductormuskler ere fæstede, og to divergerende Grene. Den ydre af disse, som gaar i Flugt med Corpus viser indad en noget tilskjærpet Kant, hvortil er fæstet en tæt Rad af bøiede tornformige Børster; Enden er stærkt uddragen og afsmalnende samt noget forskjellig paa høire og venstre Kindbakke. Paa høire er den enkelt og delt i 3 korte Tænder; paa venstre er den derimod dobbelt eller forsynet med en bevægelig ligeledes tandet fortilrettet Fortsats. Den anden Gren, den saakaldte Tyggeknude, udgaar fra Kindbakkens Corpus under en ret Vinkel indad og er af en tyk, cylindrisk Form, i Enden noget skraat afkuttet og her forsynet med talrige rækkevis ordnede Knuder og korte Torner.

1ste Par Kjæver (Fi . 6) bestaa hver af en tyk muskuløs Grunddel, hvorfra udgaa 3 Grene. 2 af disse ere rettede fortil og indad, medens den 3die retter sig lige bagud. Af de forreste Grene er den yderste størst og danner den umiddelbare Fortsættelse af Grunddelen; den er jevnt afsmalnende mod Enden, der er noget skraat afskaaret og bevæbnet med talrige i flere Rader staaende stærke Torner samt i den ydre Kant nær Spidsen med en kort cilieret Børste. Den indre Gren (b) (Palpen), der delvis dækkes af den anden, er mindre og smalere samt paa den tvert afskaarne Ende forsynet med 4 ejendommeligt formede tynde Torner. Den 3die Gren (c) (Viften) udspringer ved den ydre Side af Grunddelen og er, som ovenfor anført, modsat de 2 øvrige, rettet lige bagtil. Den er af en særdeles smal, lineær Form, dobbelt saa lang som de øvrige og bærer paa Enden 2 ulige lange baandformige med i forskjellige Retninger bøiede Sidehaar forsynede Børster. I det indre af denne Gren bemærkes en lang og smal, tydelig tværstribet Muskel, hvorved denne Gren bevæges.

2det Par Kjæver (Fig. 7) ere noget mindre end de 1ste Par og af mere membranøs Beskaffenhed. Vi kunne adskille paa dem de samme Dele som paa 1ste Par, men under et meget forandret Udseende. Grunddelen er af triangulær Form og gaar fortil over i en noget smalere, skjævt afskaaren og med lange krummede Børster besat Endedel (a) (den egentlige Kjævedel). Langs den indre, noget udbuede Kant af Grunddelen er fæstet en tæt Rad af cilierede Børster; fra den modsatte ydre Rand udgaar en særdeles tynd og gjennemsigtig Plade (c), der forestiller Viften Palpen endelig (b) danner et med den nedre Flade af Grunddelen bevægeligt forbundet Appendix, der igjen bestaar af 2 indbyrdes med hinanden bevægelige Lober, paa hvis skraat afskaarne Ende er fæstet en Rad af 6—8 noget krummede og i den ene Kant tæt saugtakkede Torner.

1ste Par Kjævefødder (Fig. 8, a og Fig. 9) danne en enkelt, noget sammentrykt og uregelmæssigt vreden Stamme, der er sammensat af 5 tydelige Led. Grundleddet er størst og gaar indad ud i en kort fortilrettet og i Enden afstumpet Fortsats eller Lap, hvortil er fæstet en Del korte tildels cilierede Torner; langs den indre Kant bemærkes desuden en Rad af længere cilierede Børster og helt fortil 2 eiendommelige hageformige Torner, der gribe ind mellem de tilsvarende paa den anden Kjævefod hvorved begge ligesom hægtes sammen. Af de øvrige Led er det 2det det største, pladeformigt og langs den indre tilskjærpede Kant bevæbnet med en Rad af bøiede Torner foruden en hel Del fine Haarbørster. Næstsidste Led gaar indad ud i en stump Fortsats, hvortil er fæstet 3—4 cilierede Børster. Sidste Led endelig er meget lidet og paa Enden forsynet med et Par korte tornformige Børster.

Gjelleapparatet (Fig. 8), som staar i Forbindelse med dette Kjævepar, hvis enormt udviklede Vifte det forestiller, er udviklet paa den for Cumaceerne characteristiske Maade. Det bestaar af en tynd, noget bøiet, eller næsten baadformig Plade (b), til hvis indre concave Flade de egentlige Gjeller (c) ere fæstede. Disse sidste have Formen af ovale Plader, der ere ordnede i en enkelt Rad langs efter en noget fremspringende Liste, hvor de staa tæt sammen, Side om Side ligesom Bladene i en Bog. Man tæller 10 saadanne Gjelleblade og desforuden en enkelt isoleret længere udadtil fæstet Gjelle. Den forreste Del af Gjelleapparatet fortsætter sig i en noget bugtet Streng (d), der lægger sig ind mellem den Duplicatur, som Rygskjoldets Sidedele danne nedad, og træder frit frem foran Rostrum fra hver Side som 2 bevægelige og tydeligt incrusterede Smaaplader (e), der dække for den Aabning, hvorigjennem det forbrugte Vand udstødes af Gjellecaviteterne.

2det Par Kjævefødder (Fig. 10), der ere fæstede tæt sammen i Midtlinien bag foregaaende Par, bestaa hver af en tynd i 5 tydelige Led afdelt Stamme. Basalledet er længere end alle de øvrige tilsammen og i den ydre Kant bevæbnet med 6 stærke Torner samt ved Enden i den indre Kant med en tæt cilieret Børste. De øvrige Led danne tilsammen en noget indadkrummet meget bevægelig Endedel; langs den indre Kant ere de forsynede med flere tildels cilierede Børster og næstsidste Led bærer desuden en fra den ydre Side udgaaende længere fortilrettet Fjærbørste. Sidste Led er ganske kort og forsynet i Enden med en Del simple Børster. Ved Basis af disse Kjævefødder er hos de fuldt udviklede Hunner fæstet et Par eiendommelige Plader, de saakaldte «laminæ vibratoriæ». De ere næsten halvcirkelformige og langs den bagre frie Rand forsynede med 12 udad successivt i Længde tiltagende kraftige Børster, der ligesom bestaa af 2 Afdelinger, idet den ydre Halvpart er tæt tværstribet. Hos ganske unge Individer ere Børsterne rudimentære og hos Hannerne mangler ethvert Spor af disse Plader.

3die Par Kjævefødder (Fig. 11) ere meget store og dække forstørstedelen alle de øvrige Munddele nedad. De bestaa af en tydelig 6-leddet Stamme og en til dennes Yderside ved Basis bevægeligt fæstet Svømmegren. Stammens 1ste Led eller Basalleddet er overordentlig stort, flere Gange saa stort som alle de øvrige Led tilsammen, sammentrykt fra Siden og stærkt, næsten vinkelformigt bøiet paa Midten, samt i den indre Kant nærmere Enden forsynet med en Rad af korte Fjærbørster. Udad fortsætter det sig i en næsten til Enden af 3die Led rækkende pladedannet Fortsats, til hvis indre noget buede Rand er fæstet flere, omkring 10, tynde bøiede Børster. I den bageste Del af dette Led sees de stærke mod Roden af Svømmegrenen convergerende Muskelbundter, der tjene til at bevæge denne Del. 2det Led er næsten cylindriskt, hvorimod saavel 3die som 4de ere temmelig stærkt udvidede og pladeformige. Sidste Led er ganske smalt, lineært og i Enden forsynet med en Del simple Børster. Svømmegrenen, der omtrent er af Stammens halve Længde, bestaar af en tykkere, noget sammentrykt Basaldel og en tynd 5-leddet Endedel. Af Endedelens 5 Led er det 1ste længere end alle de øvrige tilsammen; hvert Led bærer i Enden 2 lange tæt cilierede Svømmebørster.

1ste Fodpar (Fig. 12), der omtrent er af Rygskjoldets Længde, viser i sin Bygning stor Overensstemmelse med sidste Par Kjævefødder, og er ligesom dette ved Basis forsynet med en fuldkommen lignende Svømmegren. Basalleddet er ogsaa her meget stort og noget sammentrykt, men afsmalnes jevnt mod Enden uden at danne nogen saadan pladedannet Fortsats som paa hine. Ved Enden af Leddet staar en enkelt særdeles lang og tynd fortilrettet Fjærbørste. 2det og 3die

Led ere ganske korte; 4de derimod betydelig længere end hine tilsammen; 5te og 6te Led ere atter noget kortere og indbyrdes omtrent af ens Længde. Fra Enden af det overordentlig tynde sidste Led udgaa nogle tynde krummede Børster, hvoraf en især udmærker sig ved anselig Længde; forresten ere alle Led kun yderst sparsomt børstebesatte.

2det Fodpar (Tab. 3, fig. 1) er neppe mere end halvt saa langt som 1ste og af en ganske enkel Bygning. Det er fæstet helt bagtil ved Enden af 1ste frie Forkropssegment til en under Epimererne fremspringende Plade (se Tab. 1, fig. 1), og retter sig skraat fortil og udad. Det bestaar af 5 temmelig cylindriske Led. Basalleddet er ogsaa her betydelig større end de øvrige tilsammen, men af en meget smal lineær Form. 2det og 3die Led ere omtrent indbyrdes af samme Længde; det første har i den indre Kant en enkelt Børste, det andet ved Enden i den ydre Kant 2 korte Torner. 4de Led er ganske kort og børsteløst; 5te noget koniskt og ved Spidsen forsynet med 3 uligelange tornformige Børster samt i den ene Kant med 2 korte do.

De tre bagre Fodpar (Fig. 2—4) er alle af ens Bygning, men aftage successivt i Længde, idet Basalledet i samme Forhold bliver kortere. De ere meget spinkle og bestaa af 6 tydelige kun sparsomt børtebesatte Led. 2det Led er ganske kort, næsten ligesaa bredt som langt; de 3 følgende indbyrdes omtrent af ens Længde; sidste Led overordentlig lidet koniskt og forsynet i Enden med en enkelt kloformig Torn.

Brystposen (se Tab. 1, fig. 1) begrændses som hos andre Cumaceer af 8 tynde Plader, der udgaa fra Basis af sidste Par Kjævefödder og de 3 første Fodpar. Den er ofte stærkt fremspringende og giver Forkroppen en mere eller mindre fuldstændig ægdannet Skikkelse.

Halevedhængene (uropoda) (Tab. 3, fig. 5) ere omtrent af samme Længde som de 2 sidste Bagkropssegmenter tilsammen. De bestaa af en cylindrisk Stamme, til hvis Ende er bevægeligt indleddet 2 betydelig kortere lineære Grene. Begge disse ere tydeligt 2-leddede og omtrent af ens Længde, noget længere end den halve Stamme. Paa den indre Gren er 1ste Led betydelig større end sidste og ligesom dette i den indre Kant saugtakket samt desforuden bevæbnet med 4 cilierede Torner; fra Enden af sidste Led udgaa to lignende Torner af ulige Længde. Den ydre Gren har 1ste Led ganske kort, medens Endeleddet her danner Størsteparten af Grenen. Det har i den indre Kant 4 tynde Fjærbørster og i Enden 3 indad i Længde tiltagende Torner.

Beskrivelse af Hannen.

Kropsformen er (se Tab. 1, fig. 2 og 3), som sædvanlig hos de fuldt udviklede Cumacehanner, adskilligt slankere og mere langstrakt end hos Hunnerne, hvilket væsentlig kommer af Bagkroppens stærkere Udvikling.

Rygskjoldet viser saavel i Form som Skulptur den største Overensstemmelse med samme hos Hunnen, alene med den Forskjel, at det ved Enden af Pandeloben beliggende Synsorgan her er betydelig stærkere udviklet med særdeles tydelige og uhrglasformigt hvælvede Corneæ.

De frie Forkropssegmenter ere forholdsvis noget mindre udviklede end hos Hunnen, og ved stærkere Indsnøringer adskilte fra hinanden, hvorved deres dorsale Del synes mere fremspringende. Sidste Segment (Tab. 3, fig. 7) viser nedad et stumpt Fremspring, paa hvilket de 2 Aabninger for vasa deferentia findes; dets Epimerer ere langs den indre Side forsynede med en Rad af 6 indbøiede Fjærbørster.

Bagkropssegmenterne ere som anført betydelig stærkere udviklede end hos Hunnen. De ere tydeligt kjølede efter Midten, og den langs Forkroppen gaaende laterale Kjøl fortsætter sig ogsaa over samtlige Segmenter alene med Undtagelse af det sidste. De ere desuden forsynede med tydeligt udviklede lodrette Epimerer, der langs den indre Side ere forsynede med lignende indbøiede Fjærbørster som paa sidste Forkropssegment. Ovenfra seet (Tab. 1, fig. 3) aftager Bagkroppen successivt i Brede bagtil, og næstsidste Segment indknibes ved Midten pludseligt til kun den halve Brede. Langs hele Bugfladen af Bagkroppen dannes ved de nedad fremspringende Epimerer en temmelig dyb og bred Fure, hvorfra Bagkropslemmerne strækkes frem og hvori disse, naar de slaaes tilbage, næsten fuldstændig kunne skjules. Denne Fure fortsætter sig ogsaa paa sidste Segment lige til Analaabningen (se Tab. 3, fig. 10).

De øvre Antenner (Tab. 3, fig. 6 a) skille sig kun fra samme hos Hunnerne derved, at den længere Svøbe har ved Basis 2 Lugtevedhæng af fuldkommen samme Beskaffenhed som de, der ere fæstede ved Enden.

De nedre Antenner (sml. Tab. 1, fig. 2 og 3) ere som sædvanlig hos Cumacehannerne enormt udviklede, og af hele Legemets Længde. I Hviletilstand bæres de tæt trykkede ind mod Legemet, følgende Indersiden af Rygskjoldets nedre Kanter og samtlige Epimerer, saa at alene Spidsen af dem træder frem helt bagtil ved Enden af Bagkroppen. I dette Tilfælde ville de let kunne oversees, og Goodsir har hos den af ham observerede Cuma-Han, *Bodotria arenosa*, heller ikke bemærket dem. Men de kunne ogsaa ved dertil egnede Muskler bøies mere eller mindre ud fra Kroppen og endog rettes helt fortil. De bestaa (se Tab. 3, fig. 6 b) af en ved Basis knæformig bøiet Grunddel og en traadformig Endedel. Den inderste Del af Grunddelen, der retter sig lige udad, er sammensat af 3—4 utydeligt adskilte Led, og bærer paa den nedre Side 3 fortilrettede Fjærbørster. Den øvrige Del er ialmindelighed rettet lige bagud, og bestaar af 2, noget opsvulmede og med stærke Muskelbundter fyldte Led, hvoraf det sidste er størst. Langs ad den nedre Kant af begge disse Led og et Stykke ud over den ydre Flade er fæstet i tætte Tværrader et overordentlig stort Antal af lange tynde og gjennemsigtige, noget bøiede, børsteformige Vedhæng, der i sin Bygning nærmest synes at svare til de saakaldte Lugtevedhæng paa de øvre Antenners længere Svøbe. Endedelen er traadformig og sammensat af en stor Mængde korte Led, hvoraf ethvert i den nedre Kant bærer lignende, men betydelig kortere Lugtevedhæng som paa Grunddelen.

Munddelene og Føddererne vise nøiagtig samme Bygning som hos Hunnen.

Derimod er Bagkroppen forsynet med 5 Par vel udviklede Lemmer, der ganske savnes hos Hunnen. Disse Lemmer forestille kraftige *Svømmeredskaber* (pleopoda), ved Hjælp af hvilke Hannen formaar med stor Livlighed at bevæge sig om i Vandet. Hvert Par er fæstet tæt sammen i Midtlinien ved den bagre Del af Segmenternes Bugflade og bestaa (Fig. 8) af en noget fladtrykt lineær Grunddel, der paa sin Ende bærer 2 korte Grene. Grunddelen viser ved Basis et meget kort, men tydeligt begrændset Afsnit, der vil kunne betragtes som et særeget Basalled. Langs den indre Kant har den omtrent 6 lange Fjærbørster, og høiere oppe en Gruppe af eiendommelige i Enden hageformigt bøiede Torner, der gribe ind mellem de tilsvarende paa den anden Side og derved hægte de 2 Svømmevedhæng sammen, for at deres Bevægelser skal ske samtidigt. Grenene ere neppe halvt saa lange som Grunddelen og indbyrdes af forskjelligt Udseende. Den ydre bestaar af 2 tydeligt afsatte Led, hvoraf det sidste er pladeformigt, af elliptisk Form, og langs sin ydre Kant forsynet med talrige tæt sammenstillede Svømmebørster, der successivt tiltage i Længde bagtil. Den indre Gren er noget kortere end den ydre, og bestaar kun af et enkelt pladeformigt Led, der i Midten af den ydre Kant udsender en kort konisk Fortsats, hvortil er fæstet 2 divergerende Hørebørster (se Fig. 9). Langs hele den indre Rand, Spidsen og den bagre Halvpart af den ydre Rand er fæstet til særgne Afsatser, circa 20 mod Spidsen af Grenen i Længde tiltagende Svømmebørster. Det bageste

Par Bagkropslemmer er noget kortere end de øvrige; forresten er Bygningen hos alle nøiagtig den samme.

Halevedhængene (Tab. 3, fig. 10) udmærke sig fra samme hos Hunnerne ved forholdsvis større Længde og derved, at Stammen langs den indre Rand er forsynet med en dobbelt Rad af tornformige Børster, hvoraf de nederst fæstede er længst og i Kanterne kort cilierede. Den indre Grens 1ste Led har desuden et større Antal Torner, nemlig 7, medens deres Tal hos Hunnen kun er 4.

Skjøndt de af Goodsir leverede Beskrivelser og Afbildninger ere i mange Henseender mangelfulde, tror jeg dog med temmelig Sikkerhed i den af ham under Benævnelsen *Cuma Edwardsii* nærmere beskrevne Form at gjenkjende den her omhandlede Art. Den staar vistnok overordentlig nær den typiske Form, *Cuma scorpioïdes*, Mont. (= Cuma Audouini, Edw., Goodsir),[1]) men er dog, som en nøie Sammenligning af begge Former har vist, sikkert artsforskjellig, noget, som allerede Goodsir har bemærket. Foruden en noget forskjellig Størrelse og Farvetegning ere begge Arter let at kjende fra hinanden ved Halevedhængenes Bygning. Hos C. scorpioïdes er nemlig saavel hos Han som Hun Grenene forholdsvis betydelig kortere og den indre Gren kun bestaaende af et enkelt Led, medens denne Gren hos C. Edwardsii altid, saaledes som ogsaa er angivet paa Goodsir's Figur 13, bestaar af 2 tydeligt adskilte Led.

Jeg har taget denne Art paa 3 forskjellige Lokaliteter ved Middelhavet, nemlig ved Siracusa, Neapel og Spezia paa 5—10 F. D. Sandbund. Paa ingen af disse Steder var den imidlertid synderlig hyppig. Arten er forøvrigt kun kjendt fra de Britiske Øer (Firth of Forth).

---

[1]) Det maa bemærkes, at i det Uddrag af Goodsir's Afhandling, som er optaget i Bell's British stalk-eyed Crustacea, ere ved en Feiltagelse de Figurer, der høre til C. Edwardsii vedføiede Beskrivelsen af C. Audouini, og omvendt.

2. Cuma gibba, n.
(Tab. 4—5).

Charact. spec:

Corporis forma in femina brevis et obesa, in mare multo gracilior.

Integumenta distinctissime sqvamosa.

Scutum dorsale supine leviter impressum, utrinqve carina laterali in parte antica minus distincta postice per segmenta libera corporis antici continuata instructum, rostro brevi leviter resimo.

Segmenta libera corporis antici et 2 priora postici dorsaliter valde carinata processus magnos alæformes formantia; processus segmenti 1^{mi} in femina altissimus in cuspidem acutam antice curvatam excurrens, in mare multo humilior et ad lineam rectam truncatus.

Pedes et uropoda structura fere eadem ac in C. Edwardsii.

Color intense badius, extremitate antica scuti dorsalis macula tranversa fusca ornata.

Longit: fem: 3.7 ^{mm}. maris: 4.7 ^{mm}.

Beskrivelse af Hunnen.

Kropsformen er (se Tab. 4, fig. 1 og 2) forholdsvis endnu kortere og mere undersætsig end hos foregaaende Art, og Integumenterne af en meget grov skjællet Structur, der navnlig paa Rygskjoldet er meget iøinefaldende selv ved ringe Forstørrelse.

Farven er ensformig intens gulbrun, med en mørkere Skygning over den forreste Del af Rygskjoldet og nedad Siderne af Rostrum.

Rygskjoldet, der omtrent er af samme Længde som de følgende frie Forkropssegmenter tilsammen, er oventil omtrent i Midten noget indtrykt og viser til hver Side ligesom hos foregaaende Art en horizontal Kjøl, der dog her er noget mindre skarpt fremtrædende, navnlig i den forreste Del. Denne Kjøl fortsætter sig ogsaa hos nærværende Art henad den øvrige Del af Forkroppen, hvor den er meget tydeligt markeret. Det korte og stumpe Rostrum ligger ikke horizontalt, men er noget opadrettet; under det bemærkes i de frie Kanter af Rygskjoldet et temmelig dybt vinkelformigt Indsnit.

De frie Forkropssegmenter udmærke sig i høi Grad ved de høie, sammentrykte Fortsatser, hvori Rygkjølen gaar ud. Navnlig er den fra 1ste frie Segment udgaaende dorsale Fortsats overordentlig stor, dannende en høi, sammentrykt, i en noget foroverbøiet Spids endende Pukkel midt paa Forkroppen. Paa de følgende 3 Segmenter bliver Rygfortsatsen successivt lavere, men er dog ogsaa her tydelig bemærkelig.

Bagkroppen er noget kortere end Forkroppen, og af dens Segmenter vise de 2 forreste lignende sammentrykte Rygfortsatser som paa Forkropssegmenterne.

Kroppens forskjellige Vedhæng (se Tab. 5) vise idethele en saa stor Overensstemmelse med samme hos foregaaende Art, at det vil være tilstrækkeligt her alene at udpege nogle af de mere iøinefaldende Differentser.

De øvre Antenner (Fig. 1) ere forholdsvis noget kortere og har Basalledet længere end de 2 følgende Led tilsammen.

2det Par Kjævefødder (Fig. 4) har Basalledet ganske glat uden Spor af de stærke Torner, der hos foregaaende Art ere fæstede til den ydre Rand.

1ste Fodpar (Fig. 6) er forholdsvis kortere, med Endedelen neppe mere end halvt saa lang som Basalledet.

Ogsaa de *øvrige Fødder* (Fig. 7—10) ere forholdsvis kortere og kraftigere byggede og forsynede med længere Børster.

Halevedhængene (Fig. 11) have Stammen forholdsvis smalere og mere regelmæssig cylindrisk. Den indre Gren bestaar ogsaa her af 2 tydeligt afsatte Led; det første af disse bærer i den indre Kant kun 3 cilierede Torner.

Hannen (Tab. 4, fig. 4) er noget større og slankere end Hunnen. I sin almindelige Form ligner den meget Hannen af foregaaende Art, fra hvilken den dog let kjendes ved en noget kraftigere og mere undersætsig Kropsform, ved den grove Structur af Integumenterne, samt ved Formen af de frie Forkropssegmenters dorsale Fortsatser, der vistnok ere betydelig lavere end hos Hunnen, men dog mere udviklede end hos foregaaende Art; 1ste Segments Rygfortsats er ulig samme hos Hunnen i Enden næsten tvært afkuttet.

I Bygningen af *Antennerne* (Tab. 5, fig. 12- 13) og *Bagkroppens Svømmevedhæng* (Fig. 14) er ingen væsentlig Forskjel at notere fra samme hos Cuma Edwardsii.

Halevedhængene (Fig. 15) vise ligeledes en lignende Forskjel fra samme hos Hunnen, som allerede er omtalt for foregaaende Arts Vedkommende.

Nærværende characteristiske nye Art har jeg kun fundet paa en enkelt Lokalitet, nemlig i Golfen ved Goletta, hvor den ikke var ualmindelig paa ganske grundt Vand 2—5 F., Sandbund. Den er let kjendelig fra de øvrige Arter af Slægten ved de usædvanlig grovt skjællede Integumenter og ved den eiendommelige Udvikling af den dorsale Kjøl, navnlig hos Hunnen.

---

3. Cuma pulchella, n.

(Tab. 6).

Charact: spec: (Mas adultus).

Scutum dorsale magnum segmentis corporis antici junctis multo longius, supine medio leviter impressum, utrinqve carinis 2 angustis, superiore subrecta et horizontali, inferiore arcuata ornatum, rostro brevissimo et obtuso.

Segmenta libera corporis antici angusta, anterius lateraliter non carinatum dorso haud producto.

Uropoda segmenta 2 ultima juncta longitudine circiter æqvantia, trunco intus in parte dimidia anteriore leviter serrulato in posteriore serie duplice setarum ornato, ramis trunco dimidia parte brevioribus, interiore distincte biarticulato, articulo 1^{mo} intus aculeis 8 sat elongatis et arcte appressis armato, ultimo aculeis 3 terminato.

Color pallide flavescens, scuto dorsali punctis numerosis fuscis ornato.

Longit. maris: 3.2 ^{mm}.

Nærværende nye Art foreligger kun i et enkelt Exemplar, en fuldt udviklet Han, som dog viser sig tilstrækkelig forskjellig fra Hannerne af de 2 foregaaende Arter til med Sikkerhed at kunne skilles specifiskt fra disse.

Dyret er kun lidet over 3 mm langt og viser den for Hannerne af nærværende Slægt sædvanlige slanke Kropsform.

Farven er bleg gulagtig med talrige mørkere, brune Pigmentpletter, uregelmæssigt fordelte paa Forkroppen.

Rygskjoldet er meget stort, betydelig længere end de frie Forkropssegmenter tilsammen og tillige temmelig høit. Dorsallinien viser i Midten en svag Indbugtning og er forresten som sædvanlig horizontal. Paa hver Side af Rygskjoldet sees 2 tydelige Kjøle, hvoraf den øverste ligger nogenlunde horizontalt, medens den nederste er temmelig stærkt bueformigt bøiet; begge Kjøle bøie sig bagtil op mod Ryglinien, hvor de ende tæt sammen i kort Afstand fra Rygskjoldets bagre Rand. Rostrum er særdeles kort og stumpt, saa at Rygskjoldet ovenfra seet (Fig. 2) synes tvert afkuttet fortil; nedenunder det findes et meget lidet vinkelformigt Indsnit i Rygskjoldets frie Sidekanter.

Af de frie *Forkropssegmenter* er det 1ste som sædvanlig størst og næsten af samme Høide som Rygskjoldet bagtil; det er oventil let kjølet, medens dets Sider ere ganske glatte uden noget Spor af lateral Kjøl. De 3 øvrige Forkropssegmenter blive pludselig meget lavere, hvorved Dyret seet fra Siden (Fig. 1) synes stærkt indknebet i denne Region.

Bagkroppen er adskilligt længere end Forkroppen, og dens Segmenter temmelig kraftigt udviklede og tydeligt kjølede langs ad Ryggen.

I *Antennernes* og *Føddernes* Bygning synes ikke at findes nogen væsentlig Forskjel fra samme hos de 2 foregaaende Arter. Dog kunde disse Dele ikke paa det eneste foreliggende Exemplar isoleres og derved undersøges i Detaillerne.

Halevedhængene (Fig. 3) ere omtrent af samme Længde som de 2 sidste Bagkropssegmenter tilsammen. Stammen er ved Basis noget fortykket, og viser her i den indre Kant en fin Crenulering. I den bageste Halvpart er den indre Rand, som hos Hannerne af de øvrige Arter, forsynet med en dobbelt Rad af kort cilierede Børster Grenene ere neppe halvt saa lange som Stammen. Den ydre viser intet mærkeligt i sin Bygning; derimod skiller den indre sig kjendeligt fra samme hos de 2 foregaaende Arter. Den er som hos disse 2-leddet; men det 1ste Led er her forholdsvis bredere, næsten af elliptisk Form, og langs sin indre Rand bevæbnet med en tæt sammentrængt Rad af 8 kraftige, bagtil successivt i Længde tiltagende Torner; sidste Led er meget skarpt afsat fra 1ste og ender med 3 uligestore Torner.

Det beskrevne Exemplar, der tydelig nok ved Rygskjoldets eiendommelige Sculptur og Halevedhængenes Bygning viser sig at tilhøre en distinct nye Art, toges i Golfen ved Neapel paa 5—10 F. D., Sandbund.[1])

Gen. 2. Cyclaspis, G. O. Sars.

Integumenta duria, structura distincte areolata.

Scutum dorsale magnum et tumidum fere globosum, supine valde arcuatum, rostro brevi sed distincto, a latere viso acuminato.

Segmenta pedigera 4 solummodo pone scutum nuda apparent posteriora versus valde coarctata.

Corpus posticum perlongum antico multo longius, segmentis præsertim in femina angustissimis.

---

[1]) Efterat ovenstaaende Beskrivelse var nedskrevet, har jeg ganske nylig fra Marqvis de Folin i Bayonne erholdt tilsendt en Del Cumaceer, fangede sammesteds, og finder blandt dem ikke faa Exemplarer af denne Art, saavel Hanner som Hunner.

Oculus sive distinctus sive nullus.

Antennæ superiores in femina et mare similes, flagellis brevissimis; inferiores feminæ structura fere ut in Cuma, maris valde elongatæ corporis longitudinem excedentes.

Maxillipedes 3tii paris permagni, articulo basali extus ad apicem in processum validum lanceolatum excurrente, 3tio magno et lato.

Pedes 1mi paris sat elongati, articulo basali maxime dilatato, ceteris angustissimis; 2di paris minimi, 5-articulati; ceteri 6-articulati posteriora versus sensim decrescentes, pilis sparsis obsiti.

Uropoda robusta, trunco brevissimo, ramis illo multo longioribus, lanceolatis, exteriore biarticulato, interiore uniarticulato.

I Aaret 1864[1]) opstillede jeg denne Slægt for en ved Norges Kyster forekommende eiendommelige Dybvandsform, *C. longicaudata*, der vel i sin Bygning sluttede sig temmelig nær til den typiske Slægt, Cuma, men som dog forekom mig at skille sig saameget, at jeg ikke kunde lade den gaa ind under hin Slægt. Det var mig derfor af stor Interesse at finde en vel udpræget Art af samme Slægtstype i Middelhavet, hvorved Slægtscharactererne har kunnet noget nøiere præciseres end dette tidligere var mig muligt. Arterne af denne Slægt ere let kjendelige ved den usædvanlig slanke Kropsform og især den overordentlig stærkt forlængede og tynde Bagkrop, det næsten kugleformige Rygskjold og Halevedhængenes meget eiendommelige Bygning.

---

[1]) G. O. Sars, om den aberrante Krebsdyrgruppe Cumacea og dens nordiske Arter.

4. Cyclaspis cornigera, n.

(Tab. 7—9).

Charact. spec:

Corporis forma gracilis et elongata.

Integumenta imprimis feminæ ubiqve aculeis minutis scabra pilisqve brevibus hirsuta.

Scutum dorsale segmentis pedigeris junctis plus duplo longius, supine leviter arcuatum, postice obliqve truncatum, utrinqve in parte antica faciem ventralem propius spina valida cornu instar antice curvata armatum, rostro horizontali a latere viso acuto.

Segmenta pedigera scuto multo angustiora, epimeris distinctis lateraliter porrectis.

Corpus posticum in femina perangustum antico sesqvi longius, segmentis cylindricis, in mare multo magis evoluta, segmentis epimeris magnis præditis.

Oculus distinctus pigmento et corneis ornatus.

Antennæ superiores flagellis 2 brevissimis uniarticulatis, altero appendicibus 2 olfactoriis ornato.

Maxillipedes 3tii paris valde dilatati, articulo basali ceteris junctis vix longiore, processu exteriore permagno longitudinem fere articuli totius æqvante.

Pedes 1mi paris scuto vix longiores, articulo basali maxime dilatato et aculeis numerosis obtusis armato, extus ad apicem in processum laminarem excurrente.

Uropoda longitudinem segmenti penultimi circiter æqvantia, trunco perbrevi, ne dimidiam qvidem longitudinem ramorum asseqvente, in femina intus setis modo 3 ciliatis ornato, in mare vero dense hirsuto, ramis ambobus ad apicem in aculeum fortem excurrentibus, marginibus in femina setis paucis in mare numerosissimis instructis.

Color uniformiter fusco-fulvescens.

Longit. feminæ: 5 mm. maris: 6 mm.

Beskrivelse af Hunnen.

Kropsformen er (se Tab. 7) som hos den tidligere bekjendte Art ualmindelig slank, hvilket navnlig skyldes Bagkroppen, der næsten er en halv Gang til saa lang som Forkroppen og overordentlig tynd og spinkel.

Farven er ensformig gulbrun, uden bemærkelige mørkere Shatteringer.

Integumenterne vise en lignende haard og sprød Beskaffenhed som hos foregaaende Slægt, og ere overalt, men navnlig tydeligt paa Rygskjoldet besat med talrige korte Torner og enkeltvis staaende Haar, paa og mellem hvilke ialmindelighed klæber en hel Del Smuds, der meget vanskeligt lader sig fjerne.

Rygskjoldet er af meget betydelig Størrelse, mere end dobbelt saa langt som de frie Forkropssegmenter tilsammen, og temmelig stærkt opsvulmet, med Brede og Høide omtrent ligestore. Ryglinien viser bagtil en jevn bueformig Krumning, men er ved Basis af Pandeloben lidt indtrykt; de nedre Kanter ere paa Midten stærkt, næsten vinkelformigt bøiede, og de bagre Kanter, seede fra Siden, skraat afskaarne. Paa hver Side udgaar fra den forreste Del af Rygskjoldet, og noget nærmere Bugfladen en overordentlig stærk, hornlignende, i Enden fortilkrummet Fortsats, der navnlig naar Dyret sees ovenfra (Fig. 2) eller nedenfra, er meget iøinefaldende og har givet Anledning til Artsbenævnelsen. Rostrum er horizontalt og danner, seet fra Siden, et tydeligt spidsvinklet Fremspring foran Pandeloben; nedenfor det er paa hver Side en yderst liden Indbugtning, hvorfra de øvre Antenner rage frem.

Øiet er i Modsætning til den tidligere bekjendte Art tydeligt udviklet og knudeformigt fremspringende, med distinct Pigment og Corneæ.

Bag Rygskjoldet fremtræder ligesom hos foregaaende Slægt kun 4 tydelige *Forkropssegmenter*. Disse ere meget lavere end Rygskjoldet og de 2 bageste neppe bredere end Bagkroppen med hvilken de gaa i lige Flugt. Saavel paa det levende Dyr som paa Spiritusexemplarer er denne Del af Forkroppen stærkt opadkrummet, medens Bagkroppen igjen bøier sig nedad, hvorved fremkommer en eiendommelig ligesom knæformig Krumning af Kroppen paa dette Sted. Alle 4 Segmenter ere forsynede med tydelige afrundede og til Siderne udstaaende Epimerer.

Bagkroppens Segmenter ere som anført, af en ganske overordentlig Tyndhed og temmelig regelmæssigt cylindriske. Næstsidste Segment er som sædvanligt det længste; men det sidste er ikke meget kortere og viser i Midten over Analaabningen et temmelig stærkt afrundet Fremspring, som dog ikke er afsat fra Segmentet.

De øvre Antenner (Tab. 8, fig. 1) have Skaftets 1ste Led meget bredt, og af uregelmæssig kantet Form. Af de 2 følgende Led er det sidste længst og cylindriskt. Svøberne (se Fig. 2) ere begge rudimentære og uleddede. Fra den ene af dem udgaa 2 lange leddede Lugtevedhæng foruden en Del simple Børster; den anden bærer i Enden 3 vel udviklede Hørebørster (Fig. 3).

De nedre Antenner (Fig. 4), Over- og Underlæbe (Fig. 5 og 6), Kindbakkerne (Fig. 7) og Kjæverne (Fig. 8 og 9) vise ikke nogen skarpt udpræget Forskjel i sin Bygning fra samme her foregaaende Slægt.

1ste Par Kjævefødder (Fig. 10) have ligeledes et meget lignende Udseende, men synes noget mere undersætsige.

2det Par Kjævefødder (Fig. 11) ere som hos Sl. Cuma 5-leddede. Basalledet er temmelig bredt, pladedannet og omtrent af samme Længde som alle de øvrige tilsammen.

3die Par Kjævefødder (Fig. 12) ere stærkt udviklede, brede og pladedannede. Basalleddet, der omtrent indtager den halve Længde, viser paa Midten en stærk, næsten vinkelformig Krumning og er paa sin nedre Flade ru af talrige fremstaaende Knuder eller Torner; det fortsætter sig paa den ydre Side i en overordentlig stor laminær Fortsats af lancetdannet Form, til hvis indre Rand er fæstet 8—10 mod Spidsen i Længde tiltagende Fjærbørster. 2det og 3die Led, men især dette sidste ere usædvanlig store og brede; hvorimod de 2 følgende

Led ere forholdsvis smaa; sidste Led er af den sædvanlige smale lineære Form og bærer i Enden en Del simple tildels kloformige Børster. Forøvrigt bærer den indre Rand af samtlige Led flere korte Fjærbørster, og 2 lignende sees fæstede til det stærkt uddragne ydre Hjørne af 3die Led. Svømmegrenen er forholdsvis kun lidet udviklet og neppe halvt saa lang som den egentlige Kjævefod; dens Basalled er usædvanlig smalt lineært og neppe synderlig bredere end Endedelen, der bestaar af 5 Led.

1ste Fodpar (Fig. 13), der lige udstrakt omtrent er af Rygskjoldets Længde, udmærker sig strax ved den enorme Udvikling af Basalleddet, der paa Midten er overordentlig stærkt udvidet og paa den ydre, stærkt incrusterede Flade tæt besat med lignende korte Torner som paa Rygskjoldet og de øvrige Integumenter; i Enden gaar det ud i en triangulær pladeformig Fortsats, der delvis dækker det følgende Led. Dette ligesom de øvrige ere meget tynde og af cylindrisk Form. 4de og 5te ere længst og indbyrdes omtrent lige store. Sidste Led er særdeles smalt og bærer i Enden nogle tynde bøiede Børster. Svømmegrenen er af samme Udseende som paa 3die Par Kjævefødder, alene med den Forskjel, at den har et Led flere.

2det Fodpar (Fig. 14) er usædvanlig lidet og tyndt, samt temmelig stærkt fortil krummet. Det bestaar af 5 Led, hvoraf Basalledet er størst, omtrent saa langt som de 3 følgende Led tilsammen. Sidste Led, der er noget længere end det foregaaende, bærer paa Spidsen 3—4 uligestore stive Børster og en kortere do. i hver Kant.

3die Fodpar (Fig. 15) er adskilligt længere end 2det og af en meget spinkel Form. Det er 6-leddet med Basalleddet omtrent saa langt som alle de øvrige tilsammen. Sidste Led er overordentlig lidet og smalt, og kan derfor let oversees; det ender med en kloformig Torn. Fra Enden af næstsidste Led udgaar en stærk, noget bøiet Børste, og fra det foregaaende

2 lignende. Forresten er dette ligesom de øvrige Fodpar kun yderst sparsomt børstebesat.

4de og 5te Fodpar (Fig. 16) skille sig kun fra 3die derved, at de successivt blive kortere, idet Basalleddets Længde i samme Forhold aftager.

Halevedhængene (Fig. 17 og 18) vise et meget eiendommeligt og fra de fleste øvrige Cumaceer afvigende Udseende. De ere forholdsvis korte, omtrent at næstsidste Bagkropssegments Længde, og af temmelig kraftig Bygning. Stammen er ganske usædvanlig kort og tyk, og bærer i den indre Kant 3 Fjærbørster. Grenene ere mere end dobbelt saa lange og omtrent indbyrdes af ens Størrelse. De ere begge lancetdannede, og gaa i Enden ud i en stærk lige bagudrettet Torn, samt bæres ialmindelighed tæt trykkede ind mod hinanden, saaledes, at de skarpe Kanter vende opad og nedad. Den ydre Gren bestaar af 2 tydeligt afsatte Led, et kortere Basalled og et betydelig længere Endeled, der i den øvre Kant er sauggtakket, i den nedre nær Spidsen forsynet med en enkelt Fjærbørste og en bagudrettet noget bøiet Torn. Den indre Gren bestaar kun af et enkelt Led, og er langs sin indre Kant forsynet med en Rad af circa 8 Fjærbørster.

Beskrivelse af Hannen.

Den fuldt udviklede *Han* (Tab. 9, Fig. 1 og 2) er adskilligt større end Hunnen og let kjendelig fra samme ved sin endnu mere forlængede Kropsform og de kraftigere udviklede og med tydelige Epimerer forsynede Bagkropssegmenter.

Integumenterne vise kun Spor af de hos Hunnen saa tydeligt fremtrædende Smaatorner og ere ogsaa af en lysere Farve.

Øiet er betydelig større end hos Hunnen, og danner et stærkt, knudeformigt Fremspring ved Basis af Rostrum. Dets Corneæ ere store og uhrglasformigt hvælvede.

De øvre Antenner synes ikke at vise nogen Afvigelse fra samme hos Hunnen.

Derimod ere de *nedre Antenner* af ganske enorm Længde, og række selv et godt Stykke udenfor Spidsen af Halevedhængene.

Føddernes Bygning synes i ingen Henseende at afvige fra samme hos Hunnen.

Bagkroppen er som hos Hannerne af foregaaende Slægt forsynet med 5 Par vel udviklede *Svømmevedhæng* (pleopoda). Disses Bygning (se Fig. 3) stemme i alt væsentligt fuldkommen overens med samme hos Sl. Cuma, hvorfor en nøiere Beskrivelse af dem er unødvendig.

Halevedhængene (Fig. 4) vise i sin Form stor Lighed med samme hos Hunnen, men skille sig ved de talrige, tildels i flere Rader stillede Børster, hvormed saavel Stammen som Grenene ere udstyrede.

Nærværende interessante nye Art er let kjendelig fra den tidligere bekjendte Art C. longicaudata, ved de tornede Integumenter, den gulbrune Farve og det tydeligt udviklede Øie. Desuden skiller den sig strax ved de eiendommelige hornlignende laterale Fortsatser paa Rygskjoldet, hvortil intet Spor er at se hos den anden Art.

Jeg har kun taget den paa en eneste Lokalitet, nemlig ved Goletta paa 2—5 F. D. og her i kun 3 Expl., 2 Hunner og 1 fuldt udviklet Han. Nylig har jeg imidlertid fra *Marquis de Folin* erholdt sammen med andre Sager i tørret Tilstand et vel udpræget mandligt Individ af samme Art, fanget i Havnen ved Bayonne. De af mig observerede Individer vare ikke synderlig livlige i sine Bevægelser, og navnlig synes Hunnerne at tilbringe sin meste Tid ved Bunden mellem Mudret, hvorfra de kun sjeldent, og som det synes med temmelig Besvær, tage sig en kort Udflugt op i Vandet. Derimod synes Hannerne i Overensstemmelse med deres bedre Udrustning med Svømmeapparater at være raskere i sine Bevægelser.

Gen. 3. Iphinoë, Sp. Bate.

Syn: *Halia*, Sp. Bate (olim) (incl: gen: Cyrianassa (Venilia), Sp. Bate).

Corpus gracile, lateraliter plus minusve compressum, dorso carinato.

Integumenta tenuia et pellucida, structura eleganter reticulata.

Scutum dorsale in femina supine sæpius cristata, rostro prominente, sinu marginis antici magno et rotundato.

Segmenta pedigera 5 pone scutum nuda apparent, 1^{mum} brevissimum lateraliter epimeris 2^{di} plerumqve tectum.

Oculus distinctus, in mare imprimis bene evolutus.

Antennæ superiores in femina et mare similes, pedunculo elongato, flagellis brevissimis, altero appendice olfactoria singula magna instructo, altero minimo biarticulato; 2^{di} paris in femina ut vulgo parvæ, biarticulatæ, articulo basali setis 4 ciliatis ornato, in mare structura fere eadem ac in Cuma.

Labium lobos terminales ad apicem incurvatum fortiter dentatos præbens.

Apparatus branchialis magnus branchiis numerosis foliiformibus ornatus.

Maxillipedes 3^{tii} paris elongati, articulo basali extus in processum magnum setiferum excurrente, 3^{tio} expansionem laminarem plus minusve evolutam et setiferam præbente.

Pedes 1^{mi} paris tenues et elongati, fere nudi; 2^{di} paris 5-articulati; paria 3 posteriora qvam solito breviora 6-articulata.

Uropoda mediocria, trunco intus aculeato, ramis ambobus distincte biarticulatis, articulo terminali interioris elongato et angusto, lineari, intus dense aculeato.

Nærværende Slægt er først grundet af *Sp. Bate*, der fandt sig beføiet til at skille Goodsir's *Cuma trispinosa* generiskt fra de øvrige af ham beskrevne Arter. Det først foreslaaede Slægtsnavn, *Halia*, forandrede han senere til *Iphinoë*, da hint Navn allerede tidligere var anvendt i Zoologien. Vistnok ere de af Sp. Bate for denne Slægt opførte Characterer mindre præcise, tildels endog feilagtige; men det har dog vist sig, at Goodsir's Cuma trispinosa i Virkeligheden danner Typen for en vel udpræget Slægt af Cumidernes Familie.

Arterne af denne Slægt ere let kjendelige ved den slanke og mere eller mindre sammentrykte Kropsform, de tynde og gjennemsigtige Integumenter og det oventil mere eller mindre tydeligt kjølede Rygskjold med det stærkt fremspringende Rostrum. Fra de 2 foregaaende Slægter skille de sig desuden derved, at 5 frie Segmenter ere udviklede paa Forkroppen bag Rygskjoldet (Sp. Bate anfører urigtigt kun 3 saadanne) samt ved Halevedhængenes Bygning. Hannerne skille sig som sædvanlig fra Hunnerne ved endnu slankere Kropsform, ved de nedre Antenners stærke Udvikling samt ved de 5 Par vel udviklede Bagkropslemmer (pleopoda). Den af Sp. Bate opstillede Slægt *Cyrianassa* (Venilia, olim) er grundet paa disse, og hans Art *Cyrianassa gracilis* er, som jeg tilstrækkeligt har overbevist mig om, intet andet end den fuldt udviklede Han af Iphinoë trispinosa.

Typen for denne Slægt er som anført, Goodsir's Cuma trispinosa, som tidligere kun har været observeret ved de Britiske Øer. Jeg har i Middelhavet fundet 3 til denne Slægt hørende Arter, hvoraf jeg er tilbøielig til at holde den ene, Iphinoë serrata, Norm., alene for en udpræget Varietet af I. trispinosa; de 2 øvrige ere derimod vel adskilte nye Arter.

---

5. Ihpinoë gracilis, Sp. Bate.
(Tab. 10–14).

Cuma trispinosa, Goodsir, Edinburgh New. Phil. Journ. f. 1843. Vol. 34, pg. 126, tab. III, fig. 1—7.

Halia trispinosa, Sp. Bate, Ann. Nat. Hist. 2 Ser. Vol. 17, pg. 459, tab. XIV, fig. V.

Venilia gracilis, Sp. Bate, ibidem pg. 460, tab. XV, fig. VII (mas adultus).

Iphinoë trispinosa, Sp. Bate, Ann. Nat. Hist. 2 Ser. Vol. 18, pg. 187.

Cyrianassa gracilis, Sp. Bate, ibidem (mas adultus).

Iphithoë serrata, Norman, Report of the Brit. Assoc. for the Advancement of Science f. 1866, pg. 201.

Cuma trispinosa, A. Dohrn, Untersuchungen über Arthropoden, I. tab. III, fig. 2—15.

Iphinoë gracilis, Meinert, Crustacea Isopoda, Amphipoda et Decapoda Daniæ, pg. 186.

Charact. spec: (var. serrata).

Corporis forma gracillima et elongata

Scutum dorsale in femina supine distincte cristatum, crista sæpius in fere tota longitudine serrata vel spinis minutis subæqvalibus antice curvatis anterioribus 2 plerumqve intervallo longiore a ceteris disjunctis, armata, in mare vulgo inermi vel in parte modo postica serrata, rostro sat longo horizontali vel leviter resimo.

Antennæ superiores sat elongatæ, articulo ultimo pedunculi antecedente multo longiore et valde augusto, flagello majore uniarticulato appendice olfactoria breviuscula; inferiores in mare corporis longitudinem æqvantes.

Maxillipedum 3^{tii} paris articulus 3^{tius} extus expansionem magnam setis numerosis ciliatis obsitam præbens, ultimi 3 angustissimi.

Pedes 1^{mi} paris scuto dorsali longiores, articulo basali ceteris junctis breviore, seqventibus sensim attenuatis; 2^{di} paris valde setosi, articulo ultimo 2 antecedentibus junctis vix longiore.

Uropoda sat robusta, ramis trunco brevioribus, externo setis numerosis marginis interioris ornato, interno illo paulo breviore, articulo basali brevi, subovato, aculeo terminali permagno, ultimo illo fere duplo longiore præter aculeos marginis interioris setis 2 apicalibus instructo.

Color pallide fulvescens maculis irregularibus fuscis variegatus.
Longit. feminæ: usqve ad 12 mm; maris: $10^{1}/_{2}$ mm.

Beskrivelse af Hunnen.

Kropsformen er (se Tab. 10) ualmindelig slank og langstrakt, samt noget sammentrykt fra Siderne. Langs hele Rygsiden løber en tydelig Kjøl, der alene paa sidste Bagkropssegment er mindre distinct. Forkroppen, der omtrent er af samme Længde som Bagkroppen, naar Halevedhængene fraregnes, afsmalnes successivt bagtil, uden at vise nogen skarpt markeret Adskillelse fra Bagkroppen. Hos de ægbærende Hunner synes dog dens forreste Del, paa Grund af den nedad stærkt fremspringende Brystpose temmelig skarpt afsat fra den øvrige Del af Legemet (se Fig. 1).

Integumenterne ere temmelig tynde og bøielige, samt vise under Mikroskopet en elegant reticuleret Structur (se Tab. 11, Fig. 14).

Farven er bleg straagul med mere eller mindre stærkt fremtrædende brunligt Pigment, der er afsat i uregelmæssige større og mindre Flækker saavel paa Rygskjoldet som den øvrige Del af Legemet.

Rygskjoldet indtager omtrent Halvparten af Forkroppens Længde og er omtrent dobbelt saa langt som høit. Ryglinien er temmelig horizontal, eller kun yderst svagt bøiet, medens de nedre Kanter paa Midten danne en stærk, næsten vinkelformig Krumning. Fortil ende Sidekanterne med et triangulært, med nogle enkelte Saugtakker bevæbnet Fremspring, og mellem dette og Rostrum er der en temmelig dyb og jevnt udrandet Bugt, hvorfra de øvre Antenner rage frem. Selve Rostrum er temmelig langt, næsten horizontalt eller kun yderst svagt opadrettet og ender i Midten oventil med et spidsvinklet Hjørne (se ogsaa Tab. 11, Fig. 13). Oventil er Rygskjoldet tagformigt sammentrykt fra Siderne, og viser langs ad Ryggen en tydeligt markeret Crista, der ialmindelighed i Størsteparten af sin Længde er saugtakket eller bevæbnet med smaa fortilrettede Torner, alle omtrent af ens Størrelse. De 3 forreste af disse Torner ere gjerne ved et noget længere Mellemrum skilte fra de øvrige og fæstede til den mediane Lob af Rygskjoldet (Pandeloben). Tornerne naa ikke ganske til den bagre Rand, men ophøre i nogen Afstand fra samme, idet de her lidt efter lidt blive særdeles smaa. Saaledes er Forholdet hos de allerfleste af mig indsamlede Exemplarer. Men der synes dog i Bevæbningen af den dorsale Crista at kunne findes en Del Variation. Hos et Par af mine Exemplarer, som forøvrigt i ingen Henseende adskilte sig fra de øvrige, var (se Fig. 3) Rygkammens Torner alene indskrænket til et kort Parti, omtrent midt paa Rygskjoldet og kun 4—5 i Antal. Disse Exemplarer syntes saaledes at danne en fuldstændig Overgang til den ved de Britiske Øer forekommende Form, I. trispinosa, hos hvilken jeg ogsaa af og til har fundet nogen Variation i Tallet af Torner, nemlig fra 2 til 6.

Øiet, der som sædvanlig indtager den forreste Ende af Pandeloben, og paa det levende Dyr ved sit intensivt rødbrune Pigment er let bemærkeligt oventil ved Basis af Rostrum, ender fortil med 2 smaa jevnsides stillede Torner (se Tab. 11, Fig. 12).

Bag Rygskjoldet sees 5 tydeligt udviklede *Forkropssegmenter*. Det forreste af disse, der bærer det 1ste Fodpar, er dog meget kort og ialmindelighed kun tydeligt i den dorsale Del. 2det Segment er derimod meget stort, det største af alle, og har brede pladeformige Epimerer, der fortil lægge sig ud over 1ste Segment og ofte endog dækker en liden Del af selve Rygskjoldet. De 3 følgende Segmenter blive successivt mindre og ere ialmindelighed ved dybe Indsnøringer adskilte fra hinanden. Deres Epimerer ere noget udstaaende til Siderne og ende bagtil i en afrundet Lap.

Bagkroppen er særdeles tynd og spinkel, og dens Segmenter af temmelig regelmæssig cylindrisk Form, dog adskilte ved tydelige Indsnøringer. Næstsidste Segment er som sædvanlig det længste; men de foregaaende ere ikke meget kortere. Sidste Segment, som er det korteste af alle, danner i Midten et afrundet Fremspring, der hvælver sig over Analaabningen; derimod er her ligesaalidt som hos de i det foregaaende omtalte Cumaceer udviklet noget tydeligt afsat midterste Halevedhæng.

De øvre Antenner (Tab. 11, Fig. 1, a a) have et meget smalt og langstrakt Skaft. Basalleddet, der omtrent indtager $^1/_3$ af Skaftets Længde, er i begge Kanter tæt haaret. Af de 2 øvrige Led er det sidste overordentlig tyndt og forlænget, næsten koniskt og betydelig længere end det foregaaende Led. Svøberne (Fig. 2) ere særdeles korte og rudimentære. Den mindste af dem er 2-leddet og har paa Spidsen af sidste Led 2 divergerende Hørebørster samt en kort Torn. Den anden Svøbe bestaar af et enkelt cylindriskt Led, der i Enden, foruden nogle simple Børster, bærer et enkelt Lugtevedhæng, næsten af samme Tykkelse som selve Svøben, men kortere end Skaftets sidste Led. Ved stærk Forstørrelse viser dette Vedhæng sig forsynet i regelmæssig Afstand med tydeligt ophøiede Tværringe, der kun mod Enden blive mindre distincte.

De nedre Antenner (Fig. 1, b b, Fig. 3) bestaa ligesom hos de i det foregaaende omtalte Former af et tykt mod Enden noget bøiet Basalled, hvortil er fæstet et ganske lidet cylindriskt, med en Del fine Hørebørster forsynet Endeled.[1]) Til den nedre Side af Basalleddet er fæstet 4 omtrent ligestore, tæt haarede Børster, der staa i en regelmæssig Rad og ere bøiede fortil og indad.

---

[1]) Det af Sp. Bate anatomerede Individ har, som det tydeligt fremgaar af hans Beskrivelse og Figur af disse Antenner, været en ganske ung, eller endnu ikke udviklet Han, og den af ham fra disse Antenner hentede generiske Character, maa saaledes sløifes.

Overlæben (Fig. 1, c) danner som sædvanlig en liden afrundet, i Enden svagt indbugtet og cilieret bevægelig Lap.

Underlæben (Fig. 5) skiller sig fra samme hos de i det foregaaende omtalte Cumaceer derved, at Endeloberne ikke ere afrundede, men ende med et tydeligt noget indbøiet Hjørne, hvortil er fæstet 5 stærke, eiendommeligt formede Tænder (se Fig. 6).

Kindbakkerne (Fig. 4) vise en meget lignende Bygning som hos Sl. Cuma.

Det samme er ogsaa Tilfældet med *1ste Par Kjæver* (Fig. 7).

2det Par Kjæver (Fig. 8) udmærker sig hovedsageligt ved den stærke Udvikling af Palpen, hvis 2 Lober ere saa brede, at de næsten ganske dække den egentlige Kjævedel; til deres skraat afskaarne Ender er fæstet et særdeles betydeligt Antal i den ene Kant saugtakkede Torner. Den membranøse Vifte er derimod kun lidet udviklet og alene synlig som en smal klar Bræm langs den ydre Kant af Basaldelen.

Gjelleapparatet (Fig. 9) er stærkt udviklet og forsynet med talrige (henimod 30) tæt sammentrængte Gjelleblade Den forreste Del af Gjelleapparatet forholder sig omtrent som hos Slægten Cuma, idet det ender med en noget incrusteret skjælformig Lap, der lægger sig foran Rostrum og lukker for den Aabning, der fører ud fra Gjellehulen.

1ste Par Kjævefødder (Fig. 9 og 10) vise ikke nogen skarpt udpræget Forskjel i sin Bygning fra samme hos de i det foregaaende omtalte Slægter.

2det Par Kjævefødder (Fig. 11) har Basalleddet næsten dobbelt saa langt som alle de øvrige Led tilsammen og af en meget smal, næsten lineær Form. De ved Basis fæstede Hvirvleplader ere forsynede hver med 12 udad hurtigt i Længde tiltagende stive Børster, der sammen med de tilsvarende paa den anden Side danne en bred ind i Brystposen ragende Vifte.

3die Par Kjævefødder (Tab. 12, Fig. 1) udmærke sig ved den stærke Udvikling af den fra Basalledets ydre Hjørne udgaaende Fortsats, der er tungeformig og i den indre Kant forsynet med omkring 12 mod Spidsen i Længde tiltagende Fjærbørster, fremdeles ved 3die Leds Form, der udad danner en bred pladedannet Udvidning, hvortil er fæstet en tæt Rad af lange fortil krummede Fjærbørster. De 3 ydre Led ere særdeles smale og af cylindrisk Form. Den ved Basis fæstede Svømmegren er omtrent af Kjævefodens halve Længde og dens Endedel er sammensat af 8 Led.

1ste Fodpar (Fig. 2) er betydelig længere end Rygskjoldet og af en særdeles spinkel Form, samt næsten ganske nøgent. Basalleddet er kortere end de øvrige Led tilsammen, temmelig cylindriskt og kun ganske svagt bøiet. 2det Led er som sædvanligt det korteste, næsten ligesaa bredt som langt og i den ydre Kant ved Enden forsynet med en enkelt kort Fjærbørste; 3die Led er dobbelt saa langt og i Enden skraat afskaaret; 4de Led endnu noget længere; 5te Led omtrent af samme Længde, men meget tyndere og i den indre Kant forsynet med 2 tynde Børster; sidste Led endelig er overordentlig tyndt, lineært og ved Enden forsynet med 4 ulige lange krummede Børster. Svømmegrenen er noget længere end samme paa 3die Par Kjævefødder og har 1 Led flere.

2det Fodpar (Fig. 3) er neppe mere end $^1/_3$ saa langt som 1ste og uligt dette meget rigeligt forsynet med tildels cilierede Børster. Det er sammensat af 5 Led, hvoraf Basalleddet er størst, indtagende omtrent Halvparten af Fodens Længde. Ved Enden af 2det og 3die Led er udad fæstet en stærk fortilrettet Torn. Næstsidste Led er meget kort og nøgent. Sidste Led er omtrent af de de 2 foregaaendes Længde tilsammen, af lineær Form og bærer paa den skraat afskaarne Spids 4—5 uligestore Torner og i hver Kant 2 korte Børster.

De følgende Fodpar (Fig. 4—5) ere ligesom 2det Par tæt børstebesatte og af usædvanlig kort og undersætsig Form, forøvrigt af den sædvanlige Bygning.

Halevedhængene (Fig. 6) ere omtrent af de 2 sidste Bagkropssegmenters Længde og skille sig kjendeligt i sin Bygning fra samme hos Sl. Cuma. Stammen er cylindrisk og langs sin indre Kant bevæbnet med omkring 12 stærke Torner. Grenene ere noget kortere end Stammen og begge tydeligt 2-leddede. Den indre Gren har 1ste Led kort og tykt, næsten af oval Form, og langs sin indre Rand bevæbnet med 4—5 Torner, hvoraf den yderste udmærker sig ved sin betydelige Størrelse; dens sidste Led er næsten dobbelt saa langt, men meget smalere, af lineær Form og langs sin indre Rand forsynet med en tæt Rad af circa 14 mod Enden i Længde successivt tiltagende Torner; fra Spidsen udgaar desuden 2 uligestore cilierede Børster. Den ydre Gren er noget større end den indre og har Basalleddet ganske kort, hvorimod sidste Led er stærkt udviklet, noget afsmalnende mod Enden og langs den indre Kant og den skraat afskaarne Spids forsynet med et stort Antal cilierede Børster.

Beskrivelse af Hannen.

Legemet synes (se Tab. 13) endnu slankere end hos Hunnen, hvilket væsentligt har sin Grund i den ringere Udvikling af Forkroppen, der er overordentlig stærkt sammentrykt fra Siderne, saa at hele Legemet ovenfra seet (Fig. 2) næsten er af lineær Form. Derimod er Bagkroppen forholdsvis kraftigere bygget end hos Hunnen, og dens Segmenter forsynede med vel udviklede Epimerer.

Rygskjoldet skiller sig fra samme hos Hunnen ved forholdsvis kortere og mere horizontalt Rostrum, fremdeles derved, at det under samme hos Hunnen stærkt fremtrædende forreste Hjørne her en ganske stumpt. Ialmindelighed er Rygskjoldet oventil ganske glat uden Spor af den hos Hunnerne saa characteristiske tandede Crista. Men dette synes dog ikke at være fuldkommen constant; thi iblandt de ved Neapel indsamlede Exemplarer vare endog de allerfleste Hanner (Fig. 3) forsynede med en tydelig tandet Rygkam, som dog altid kun var indskrænket til den bageste Del af Rygskjoldet uden som hos Hunnen at fortsætte sig langs ad Pandeloben. At her ikke foreligger nogen specifisk Forskjel fra de paa andre Localiteter forefundne Exemplarer, har jeg ved en nøie Sammenligning af alle de øvrige Dele tilstrækkelig overbevist mig om.

Øiet er betydelig større og mere udviklet end hos Hunnen, og af dets Corneæ er navnlig den centrale stærkt, næsten halvkugleformigt fremspringende; ogsaa de 2 bageste ere af forholdsvis anselig Størrelse (se Tab. 14, Fig. 4).

De frie Forkropssegmenter ere forholdsvis adskilligt mindre udviklede end hos Hunnen; navnlig er dette Tilfældet med 2det Segment, der ikke er mærkeligt større end det følgende. 3die Segment udmærker sig ved en ganske eiendommelig Udvikling af dets Epimerer, der fortil danne en smal tungeformig Lap, som lægger sig udover det foregaaende.

De øvre Antenner (Tab. 14, Fig. 1, a a) skille sig i ingen Henseende fra samme hos Hunnen.

Derimod ere de *nedre Antenner* (ibid. b) udviklede paa den for Hannerne sædvanlige Maade og opnaa hele Legemets Længde. Paa Basaldelens indre Parti sees de ogsaa hos Hunnen forekommende 4 stærke Fjærbørster. Dens 2 ydre Led ere udviklede paa samme Maade som hos Sl. Cuma og forsynede med talrige Tværrader af fine børsteformige Vedhæng. Svøben er traadformig og sammensat af et stort Antal korte Led, som mod Spidsen af Svøben blive noget længere og tyndere, alle forsynede i den ene Kant med 2 Knipper af lignende, men meget kortere børsteformige Vedhæng (se Fig. 2 og 3).

I *Munddelenes* og *Føddernes* Bygning er ingen Forskjel at bemærke fra samme hos Hunnen.

Bagkroppens *Svømmevedhæng* ere ligesom hos Hannerne af Sl. Cuma tilstede i 5 vel udviklede Par, der i sin Bygning (se Fig 5) vise den største Overensstemmelse med samme hos de i det foregaaende omtalte Cumaceer.

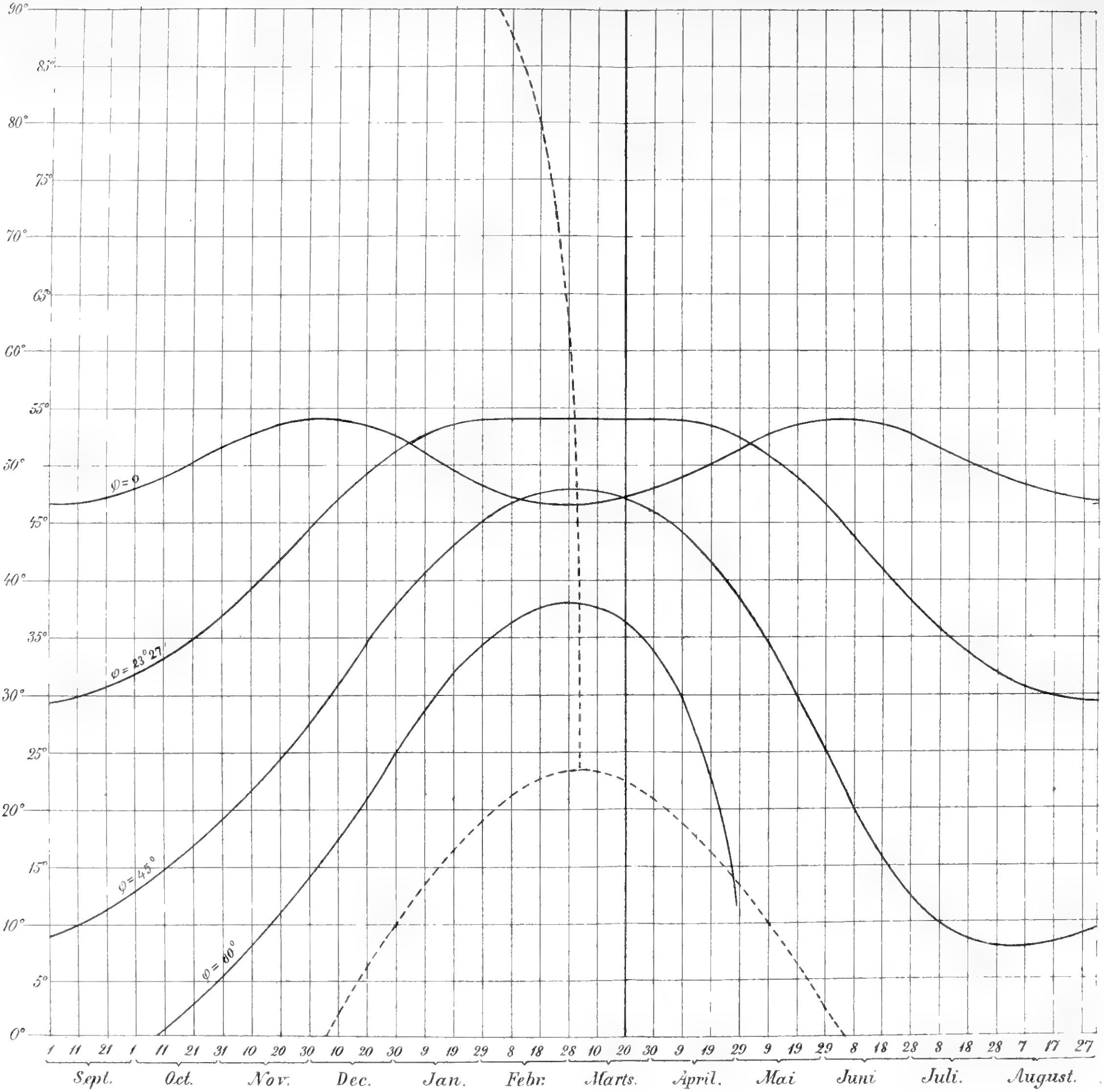
Halevedhængene (Fig. 7) skille sig kun lidet fra samme hos Hunnen. Den eneste Forskjel bestaar deri, at Stammen i den indre Kant har langt talrigere Torner, der ere stillede i flere (2—3) Rader, og at den indre Gren har i Spidsen 3 cilierede Børster.

Som allerede ovenfor bemærket, kan jeg ikke antage, at den her ombandlede Form er artsforskjellig fra den ved de Britiske Øer forekommende *Iphinoë trispinosa*, Goodsir. Ialfald har jeg ved en samvittighedsfuld anstillet Sammenligning med Exemplarer af denne sidste ikke kunnet finde frem en eneste anatomisk Character, der skulde kunne antyde nogen specifisk Forskjel, ligesom jeg allerede i det foregaaende har paavist, at den eneste distinctive Character, Antallet af Rygtorner, er underkastet en ikke ubetydelig Variation. Min Overbevisning er derfor den, at I. trispinosa Goodsir og I. serrata Norman alene ere Varieteter af en og samme Art, for hvilken den af Sp. Bate for Hannen anvendte Artsbenævnelse *gracilis* passende vil kunne bibeholdes.

Jeg har taget denne smukke Form, den anseligste af alle de i Middelhavet forekommende Cumaceer, meget almindelig ved Goletta paa nogle faa Favnes Dyb, Sandbund, fremdeles i stor Mængde og i usædvanlig vakre Exemplarer i Golfen ved Neapel, udenfor Villa reale, og i umiddelbar Nærhed af den her oprettede zoologiske Station; endelig i nogle faa Exemplarer ved Messina.

Det er et meget livligt Dyr, der er i uafladelig Bevægelse, bugtende og vridende sin lange Krop idelig mellem Sandet, hvori den forstaar at skjule sig med stor Behændighed. Nu og da tager den sig ogsaa ved Hjælp af sine Svømmeredska-

Zodiakallysets Höide over Horizonten i Vest
naar Spidsen er 70° fra Solen og denne 16° under Horizonten.



Archiv f. Math. & Naturv.

ber en Udflugt fra Bunden op mod Overfladen af det Kar, hvori man har den gaaende. Dog staa Hunnerne i denne sidste Henseende langt tilbage for Hannerne, der med Pilens Hurtighed bevæge sig gjennem Vandet, saa at man knapt kan følge dem med Øinene.

Arten er først observeret ved de Britiske Øer, hvor den er funden saavel paa den østlige Side (Goodsir) som paa den vestlige Side (Robertson). Norman har foruden den typiske Form ogsaa taget den her beskrevne Varietet, som han dog holder for artsforskjellig fra hin. Et enkelt ganske ungt Exemplar har jeg fundet frem blandt en Del Cumaceer mig tilsendte fra Marquis de Folin i Bayonne. Fremdeles forekommer den efter Meinert ved Danmark. Endelig har jeg en eneste Gang observeret den ved vor sydlige Kyst (Flekkerø), hvorfra jeg har et vel udpræget og fuldt udviklet mandligt Individ. Det fremgaar heraf, at denne Art har en temmelig vid geographisk Udbredning, nemlig fra Middelhavet langs Frankrigs Vestkyst, begge Sider af de Britiske Øer og Kysterne af Skagerak indtil Norges sydligste Del, hvor den synes at have naaet sin Nordgrændse.

---

6. Iphinoë tenella, n.
(Tab. 15 & 16).

Charact: spec:

Corpus gracillimum et elongatum.

Scutum dorsale et in femina et in mare distincte cristatum, crista in parte dimidia antica spinis arcte appressis anteriora versus sensim majoribus serrata, rostro mediocri, horizontali.

Antennæ superiores qvam in I. gracili breviores, articulo ultimo pedunculi antecedente parum longiore, flagello majore biarticulato appendice olfactoria valde elongata.

Maxillipedum 3tii paris articulus 3tius extus parum expansus setisqve modo 3—4 ornatus.

Pedes 1^{mi} paris gracillimi et elongati, articulo basali ceteris junctis breviore, 3 ultimis valde angustis; 2^{di} paris sparse pilosi, articulo ultimo elongato antecedentibus 2 junctis multo longiore

Uropoda qvam in I. gracili minus robusta, ramo externo setis modo 8 marginis interioris ornato, interno illo longitudine æqvali, articulo ultimo lineari in femina aculeis circiter 8 apicem versus valde crescentibus armato.

Longit. feminæ: 7 mm; maris: fere 8 mm.

Beskrivelse af Hunnen.

Denne lille, særdeles fint byggede Form staar særdeles nær foregaaende, men opnaar i fuldt udviklet Tilstand neppe synderlig mere end den halve Størrelse og skiller sig desuden, som af det følgende vil sees ved enkelte af de anatomiske Characterer bestemt fra denne.

Kropsformen er (se Tab. 15, Fig. 1 og 2) omtrent som hos foregaaende Art, men ialmindelighed endnu noget spædere.

Farven er ligeledes temmelig ens. Dog er det i større uregelmæssige Skjolde afsatte Pigment noget mørkere, og det hele Dyr derfor af en dunklere Farve.

Rygskjoldet, der er noget længere end de frie Forkropssegmenter tilsammen, har oventil ligesom hos den ovenfor beskrevne Varietet af I. gracilis en tydelig saugtakket Kam; men denne er her kun indskrænket til den forreste Halvpart, og Tænderne tiltage fortil successivt i Størrelse. Rostrum er noget kortere end hos foregaaende Art og mere horizontalt.

De frie Forkropssegmenter og Bagkroppen forholder sig paa det nærmeste som hos I. gracilis.

De øvre Antenner (Tab. 16, Fig. 1) har Skaftet noget mindre langstrakt, og navnlig er dets sidste Led kjendeligt kortere end hos foregaaende Art. Den større Svøbe (se Fig. 2) bestaar af 2 tydelige Led, og det fra samme udgaaende Lugtevedhæng er meget langt, næsten af hele Antennens Længde.

3die Par Kjævefødder (Fig. 3) skille sig fra samme hos foregaaende Art ved den langt ringere Udvikling af 3die Leds ydre pladedannede Udvidning, der her kun bærer 3—4 Fjærbørster.

1ste Fodpar (Fig. 4) vise et lignende Længdeforhold af de enkelte Led som hos foregaaende Art; men er forholdsvis af endnu spædere Bygning, og navnlig ere de 3 yderste Led overordentlig tynde og spinkle. Svømmegrenen har saavel her som paa 3die Par Kjævefødder færre Led i Endedelen.

2det Fodpar (Fig. 5) er forholdsvis noget længere end hos foregaaende Art og meget sparsommere børstebesat. Sidste Led er af en meget tynd lineær Form og betydelig længere end de 2 foregaaende tilsammen.

De følgende Fodpar (Fig. 6—7) vise vistnok en meget lignende Bygning som hos foregaaende Art, men ere noget spædere og mindre rigeligt forsynede med Børster.

Halevedhængene (Fig. 8) ere ligesom alle øvrige Kropsvedhæng af forholdsvis spinklere Form end hos foregaaende Art, forøvrigt af en meget lignende Bygning. Grenene ere indbyrdes omtrent af ens Længde, og den ydre bærer i Inderkanten kun 8 Børster. De langs den indre Grens sidste Led fæstede Torner ere ligeledes færre i Antal og tiltage hurtigere i Længde mod Spidsen. Den ved Enden af 1ste Led staaende Torn er vistnok ogsaa her større end de øvrige, men Forskjellen i denne Henseende er dog ikke saa paafaldende som hos I. gracilis.

Hannen (Tab. 15, Fig. 3) er noget større end Hunnen og overordentlig slankt bygget. *Rygskjoldet* har en fuldkommen lignende saugtakket Crista, der kun her er noget kortere og indeholder færre Tænder. *De nedre Antenner* ere som hos foregaaende Art stærkt udviklede og af hele Legemets Længde. *Halevedhængene* (Tab. 16, Fig. 9) ere betydelig stærkere forlængede end hos Hunnen, og Stammen har som hos Hannerne af foregaaende Art et stort Antal, i flere Rader stillede Torner. Ligeledes er Tornernes Tal paa den indre Gren betydelig større og til Spidsen af denne Gren er desuden fæstet 3 cilierede Børster.

Jeg har taget denne, i Udseende og Levevis med I. gracilis meget nær overensstemmende, men dog sikkert forskjellige Art ikke sjelden paa 4 forskjellige langt fra hverandre liggende Lokaliteter: ved Goletta, Siracusa, Neapel og Spezia. Ved Goletta og Neapel fandtes den i Selskab med foregaaende Art; ved Siracusa og Spezia var det derimod alene den her omhandlede Art som forekom, ikke I. gracilis.

7. Iphinoë inermis, n.
(Tab. 17 & 18).

Charact: spec:

Corporis forma qvam in speciebus ceteris magis robusta

Scutum dorsale supine leviter carinatum, nullum vero vestigium cristæ serratæ præbens, rostro breviusculo, horizontali.

Antennæ superiores mediocres, articulo ultimo pedunculi antecedente duplo fere longiore, flagello majore uniarticulato; inferiores maris qvam solito breviores dimidiam corporis longitudinem parum superantes.

Maxillipedes 3^{tii} paris fere ut in I. gracili, expansione articuli 3^{tii} tamen paulo minore.

Pedes 1^{mi} paris scuto dorsali parum longiores, articulo basali ceteris junctis longitudine æqvali; 2^{di} paris qvam solito minores, articulo ultimo brevi, subconico.

Uropoda iisdem I. gracilis sat similia; articulus vero ultimus rami interioris ad apicem in femina nudus in mare seta unica præditus.

Color læte fulvus, fusco et albido variegatus.

Longit: feminæ: 9^{mm}; maris: 8^{mm}.

Beskrivelse af Hunnen.

Kropsformen er (se Tab. 17, Fig. 1 og 2) adskilligt kraftigere og mere undersætsig end hos de 2 foregaaende Arter, og Forkroppen ialmindelighed høiere, samt oventil mere bueformigt bøiet.

Farven er smuk rødgul med brune og kridhvide Shatteringer især paa Forkroppen.

Rygskjoldet, der er noget længere end de frie Forkropssegmenter tilsammen, skiller sig strax fra samme hos de 2 foregaaende Arter ved den fuldstændige Mangel af nogen tandet Crista. Langs Rygsiden gaar blot ligesom paa det øvrige Legeme en lav Kjøl, men som intetsomhelt Spor viser af Tænder. Rostrum er forholdsvis kortere end hos de øvrige Arter, horizontalt og i Enden skraat afskaaret.

Af *de frie Forkropssegmenter* er det 2det særdeles stort, og dets Epimerer gaa fortil ud i en triangulær med fine Børster besat Lob, der ikke blot ganske dækker Sidedelene af 1ste Segment, men ogsaa skyver sig et Stykke udover Rygskjoldets bagre Del.

Bagkroppen viser den sædvanlige tynde og spinkle Form.

De øvre Antenner (Tab. 18, Fig. 1) have Skaftets sidste Led temmelig stærkt forlænget og næsten dobbelt saa langt som det foregaaende Led. Af Svøberne bestaar den største ligesom hos I. gracilis kun af et enkelt Led. Lugtevedhænget er omtrent af Antennens halve Længde.

3die Par Kjævefødder (Fig. 2) ligner i sin Bygning temmelig samme hos I. gracilis, og 3die Led viser en lignende, skjønt noget mindre pladeformig Udvidning besat med talrige Fjærbørster. Svømmegrenens Endedel er som hos foregaaende Art kun sammensat af 6 Led.

1ste Fodpar (Fig. 3) er adskilligt kortere end hos de 2 foregaaende Arter og skiller sig desuden derved, at Basalleddet er forholdsvis længere, nemlig omtrent som alle de øvrige tilsammen; endelig ere de 2 sidste Led forsynede med flere og længere Børster.

2det Fodpar (Fig. 4) er ganske usædvanlig kort, selv kortere end det følgende Par, og dets sidste Led er ganske lidet og koniskt tilløbende. Forresten viser det den sædvanlige Bygning og er temmelig rigeligt forsynet med tildels cilierede Børster.

De *tre bagre Fodpar* (Fig. 5—6) ligne i sin Bygning og rigelige Børstebesætning mest samme hos I. gracilis.

Halevedhængene (Fig. 7) stemme ogsaa temmelig nær overens med samme hos hin Art, og Grenenes Forhold til Stammen er omtrent ens hos begge Arter Derimod er saavel Tallet af Torner som Børster mindre. Ved Enden af den indre Gren mangle de 2 hos I. gracilis her fæstede cilierede Børster.

Hannen (Tab. 17, Fig. 3) er noget mindre end Hunnen og kjendes let fra Hannerne af de øvrige Arter ved sin kortere og mere undersætsige Kropsform.

Rygskjoldet er oventil ganske svagt hvælvet og ligesom hos Hunnerne ganske glat, uden Spor af Torner.

Øiet (Tab. 18, Fig. 8) er overordentlig stort og stærkt, næsten halvkugleformigt fremspringende, dets Corneæ særdeles store og tydelige.

De nedre Antenner (se Tab. 17, Fig. 3) ere betydelig kortere end hos Hannerne af de foregaaende Arter og række tilbagestrakte kun til 3die Bagkropssegment. Deres Bygning forresten er nøie overensstemmende med samme hos de øvrige Arter.

Halevedhængene (Tab. 18, Fig. 10) skille sig fra samme hos Hunnerne derved, at Tornene paa Stammen mod dennes Ende staa sammen i flere Rader og antage tildels Formen af tynde Børster. Den indre Gren har flere Torner og desuden ved Enden en enkelt cilieret Børste.

Nærværende smukke nye Art, der uagtet sin store Overensstemmelse i de anatomiske Detailler med de foregaaende Arter dog ved første Øiekast let kjendes fra disse, har jeg kun fundet paa en eneste Lokalitet, nemlig ved Goletta, hvor den forekom ikke ualmindelig paa nogle faa Favnes Dyb, fin Sandbund.

Gen. 4 **Cumopsis**, n.

Corpus minus gracile, cephalothorace in femina leviter dilatato, dorso minime carinato.

Integumenta tenuia structura sqvamosa.

Scutum dorsale supine vix arcuatum, rostro brevissimo et obtuso, fere nullo, incisura infra idem in femina minima, in mare nulla.

Oculus bene evolutus pigmento et corneis instructus.

Segmenta 5 pedigera pone scutum nuda apparent, 1^{mum} brevissimum in parte modo dorsali distinctum.

Corpus posticum in femina augustum, cylindricum, in mare robustius epimeris distinctis instructum. Segmentum ultimum medio plane non productum.

Antennæ superiores in femina et mare dissimiles, articulis pedunculi in femina sensim latitudine decrescentibus, in mare apicem versus dilatatis, flagellis valde inæqvalibus, altero majore biarticulato appendicibus 2 olfactoriis brevibus instructo, in mare ad basin dilatationem magnam appendicibus filiformibus numerosis undiqve radiantibus ornatam præbente, flagello altero minimo et rudimentari, tuberculiformi; inferiores feminæ pærvæ, biarticulatæ, maris bene evolutæ, corporis longitudinem æqvantes.

Labium lobis terminalibus incurvatis ad apicem spinis nonnullis tenuibus armatis.

Apparatus branchialis bene evolutus, branchiis foliiformibus.

Maxillipedes 3^{tii} paris sat robusti, articulo basali permagno et crasso extus ad apicem non producto.

Pedes 1^{mi} paris breviusculi, fere nudi; 2^{di} paris 5-articulati et ut 3^{tii} paris extus prope basin appendice parva uniarticulata setifera ornati.

Uropoda tenuissima et elongata, trunco perangusto intus in femina sparse in mare dense aculeato, ramis subæqvalibus, linearibus ambobus biarticulatis.

Denne nye Slægt skiller sig væsentlig fra de i det foregaaende omhandlede Slægter saavel ved den ydre Habitus som ved flere anatomiske Characterer, hvoraf kan fremhæves de øvre Antenners eiendommelige Udvikling hos Hannen, sidste Par Kjævefødders fuldstændige Mangel af den fra Basalleddets Ende hos hine udgaaende pladedannede Fortsats, fremdeles det til Basis af 2det og 3die Fodpar saavel hos Han som Hun fæstede lille børstebesatte Vedhæng, der aabenbart er at opfatte som et Rudiment af Svømmegren, og endelig Halevedhængenes eiendommelige Form. Typen for Slægten er den af Sp. Bate som *Cuma Edwardsii* Kröyer opførte Form, hvis Hanner senere af v. Beneden ere beskrevne som en ny Art af Slægten *Bodotria* under Benævnelsen *B. Goodsiri*. Foruden denne Art kan jeg nu tilføie en ny meget nærstaaende Art fra Middelhavet, *C. lævis*, saa at Slægten altsaa for Tiden repræsenteres af 2 distincte Arter.

---

8. Cumopsis Goodsiri, v. Bened.
(Tab. 19–21).

Cuma Edwardsii, Sp. Bate, Ann. Nat. Hist. 2 Ser. Vol. 17, pg. 457, Pl. XIV (nec Goodsir, nec Kröyer).

Bodotria Goodsiri, v. Beneden, Recherches sur la faune littoral de Belgique, Crustacea. pg. 76, pl. XIII (mas junior et adultus).

Cuma Goodsiri, A. Dohrn, Untersuchungen über Arthropoden I, pg. 3 (Note), Tab. II (evolutio embryonalis), Tab. III, fig. 16–17.

Charac: spec:

Scutum dorsale utrinqve plicis 2 obliqve arcuatis supine in plicam aliam medianam semiellipticam confluentibus ornatum.

Segmentum pedigerum 2^{dum} supine utrinqve in parte antica plicis 2 brevibus in semicirculum curvatis instructum.

Antennæ superiores feminæ breves, articulis pedunculi sensim et longitudine et latitudine decrescentibus.

Pedes 1^{mi} paris scuto vix longiores, articulo basali ceteris junctis longiore apicem versus sensim attenuato, penultimo antepenultimo paulo breviore, ramo natatorio sat magno 10-articulato.

Uropoda segmentis 3 ultimis junctis breviora, trunco in femina intus aculeis 4—5 brevissimis armato, ramo interiore ejusdem aculeis 6—7, qvorum 3 articulo ultimo affixi sunt instructo.

Corpus totum pigmento læte atro-purpureo in maculis irregularibus dispositis variegatum.

Longit. feminæ: 5mm; maris fere eadem.

(Fortsættes).

Berigtigelser til Stejnegers Afhandling Side 323—339.

S. 323:	L. 10 f. n.	(og fl. St.) staar	Vigers	læs: Vigors.
- 324:	- 7 f. n.	staar	4735	læs: 1735.
- 325:	- 4 f. n.	—	Bixds	læs: Birds.
- 326:	- 18 f. n.	—	Undertiden	læs: Undersiden.
- 327:	- 4 f. o.	—	Vieiel	læs: Vieill.
- —	- 6 f. o.	—	Tall	læs: Pall.
- 328:	- 12 f. o.	—	øvrige	læs: øvre.
- 331:	- 3 f. n.	—	Eversen	læs: Eversm.
- 336:	- 15 f. n.	—	Rugefugle	læs: Rugefugl.
- 337:	- 13 f. n.	—	Svingfjær	læs: Styrfjær.
- 339:	- 2 og 3 f. n.	(til høire) staar:	af samme Høide	læs: af samme, hvide.

Disse Trykfeil har indsneget sig, fordi Forf. ikke har havt Adgang til at læse Korrektur og denne paa Grund af tilfældige Omstændigheder ikke kunde besørges af en sagkyndig Zoolog.