Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Dreizehnter Theil.

Mit sieben lithographirten Tafeln.

Greifswald.
C. A Koch's Separat-Conto.

1849.

Inhaltsverzeichniss des dreizehnten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Trigonometrie.

Geodäsie.

Mechanik.

Astronomie.

Physik.

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Theorie der Modular- (elliptischen) Funktionen.

(Fortsetzung des Aufsatzes Nr. XL. in Thl. XI. S. 395.)

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

---

§. 14.

Hat man zu integriren

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}=\int\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

so sind wieder folgende Fälle zu unterscheiden:

I. Die Gleichung

$$\varphi(x)=0$$

hat vier imaginäre Wurzeln. In diesem Falle setze man

$$\varphi(x)=(a+2bx+cx^2)(a'+2b'x+c'x^2),$$

worin a, b, c, a', b', c' reelle Grössen sind. Damit $\varphi(x)$ positiv sei, da $\sqrt{\varphi(x)}$ als reell vorausgesetzt werden muss, müssen die Grössen $a+2bx+cx^2$, $a'+2b'x+c'x^2$ von demselben Vorzeichen sein. Löst man die Gleichungen

$$a+2bx+cx^2=0,\ a'+2b'x+c'x^2=0;$$

so dürfen sie bloss imaginäre Werthe für x geben, d. h. es mus

$$b^2-ac<0,\ b'^2-a'c'<0;$$

oder, da b^2 und b'^2 positiv sind, es müssen a, c dasselbe Vorzeichen haben, eben so a', c', und zugleich muss

$$ac>b^2,\ a'c'>b'^2$$

sein. Zugleich ist

$$a+2bx+cx^2=\frac{(a+bx)^2+(ac-b^2)x^2}{a};$$

also müssen $a+2bx+cx^2$ und a, folglich auch c, dasselbe Vorzeichen haben, und eben so die Grössen $a'+2b'x+c'x^2$, a', c'. Da aber $a+2bx+cx^2$ und $a'+2b'x+c'x^2$ dasselbe Vorzeichen (positiv oder negativ) haben, so haben folglich auch a, c, a', c' dasselbe Vorzeichen; zugleich darf x immer nur so gewählt werden, dass die Grössen $a+2bx+cx^2$, $a'+2b'x+c'x^2$ immer innerhalb der Gräuzen der Integration dasselbe Vorzeichen haben, wie a, c, a', c'. Es ist leicht einzusehen, dass man diese letztern Grössen immer als positiv betrachten kann, da ja

$$(-a+2bx-cx^2)(-a'+2b'x-c'x^2)=(a-2bx+cx^2)(a'-2b'x+c'x^2),$$

und wir wollen also dies annehmen und die Gränzen der Integration darnach bestimmen. Setzen wir nun:

$$z^2=\frac{a+2bx+cx^2}{a'+2b'x+c'x^2},\quad z=\pm\sqrt{\frac{a+2bx+cx^2}{a'+2b'x+c'x^2}};$$

so findet sich

$$x=\frac{-(b-b'z^2)\pm\sqrt{Z}}{c-c'z^2},$$

worin:

$$Z=(b-b'z^2)^2-(a-a'z^2)(c-c'z^2).$$

Demnach

$$b+cx-(b'+c'x)z^2=\pm\sqrt{Z}.$$

Da aber

$$(a'+2b'x+c'x^2)z^2=a+2bx+cx^2,$$

so ergiebt sich:

$$(b'+c'x)z^2+(a'+2b'x+c'x^2)z\frac{\partial z}{\partial x}=b+cx,$$

$$b+cx-(b'+c'x)z^2=(a'+2b'x+c'x^2)z\frac{\partial z}{\partial x}=\pm\sqrt{Z}$$
$$=(a'+2b'x+c'x^2)\left(\pm\sqrt{\frac{a+2bx+cx^2}{a'+2b'x+c'x^2}}\right)\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$=\pm\sqrt{\varphi(x)}\frac{\partial z}{\partial x},$$

d. h.

$$\sqrt{\varphi(x)}.\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{Z}.$$

Nun ist

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}=\int\frac{\frac{\partial x}{\partial z}\partial z}{\sqrt{\varphi(x)}}=\int\frac{\partial z}{\sqrt{\varphi(x)}\,\frac{\partial z}{\partial x}}=\int\frac{\partial z}{\sqrt{Z}},$$

und da Z von der Form der in §. 13. betrachteten Ausdrücke ist, so kann unsere Aufgabe als gelöst angesehen werden.

II. Die Gleichung $\varphi(x)=0$ habe zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Die beiden reellen Wurzeln seien ungleich, n und n', und zwar sei $n>n'$; der reelle Faktor des zweiten Grades sei $a+2bx+cx^2$, worin also $ac>b^2$ sein muss. Zugleich sieht man, dass $a+2bx+cx^2$, a, c dasselbe Vorzeichen haben müssen, das man, wie oben, immer als positiv voraussetzen kann. Hierbei hat man wieder folgende Fälle zu unterscheiden:

II. 1. Die Integrationsgränzen seien so gewählt, dass x immer zwischen n' und n sei, zugleich sei

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

Null für $x=n'$. Alsdann muss

$$\varphi(x)=(x-n')(n-x)(a+2bx+cx^2)$$

sein, damit $\varphi(x)$ positiv sei. Setzt man

$$z^2=\frac{x-n'}{n-x},$$

so bildet sich das vorliegende Integral in ein anderes von der Form in §. 13. um.

II. 2. Es sei $x<n'$, das Integral aber wieder Null für $x=n'$. In diesem Falle muss

$$\varphi(x)=(n'-x)(n-x)(a+2bx+cx^2)$$

sein. Setzt man hier

$$z^2 = \frac{n' - x}{n - x},$$

so erhält man wieder eine Form des §. 13.

II. 3. Endlich sei $x > n$, und das Integral sei Null für $x = n$. Alsdann ist

$$\varphi(x) = (x - n')(x - n)(a + 2bx + cx^2),$$

und man setze

$$z^2 = \frac{x - n'}{x - n},$$

um die verlangte Umbildung zu erhalten.

III. Die Gleichung $\varphi(x) = 0$ habe vier reelle Wurzeln a, b, c, d, welche so beschaffen seien, dass $d > c > b > a$. Nun ist entweder

$$\varphi(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d),$$

oder

$$\varphi(x) = -(x - a)(x - b)(x - c)(x - d).$$

Im ersten Falle ist $\varphi(x)$ nur positiv, wenn x zwischen b und c oder ausserhalb der Gränzen von a und d liegt; im zweiten dagegen nur, wenn x zwischen a und b, oder c und d liegt.

III. 1. Sei

$$\varphi(x) = +(x - a)(x - b)(x - c)(x - d),$$

und zwar

α) die Integrationsgränzen so gewählt, dass x zwischen b und c liege, während das Integral Null sei für $x = b$. In diesem Falle setze man

$$z^2 = \frac{x - b}{c - x} \cdot \frac{a - b}{a - c}.$$

β) x ausserhalb der Gränzen a und d, und das Integral sei Null für $x = d$. Alsdann setze man

$$z^2 = \frac{x - d}{x - a} \cdot \frac{c - a}{d - c}.$$

III. 2. Es sei

$$\varphi(x) = -(x - a)(x - b)(x - c)(x - d).$$

α) x zwischen a und b, das Integral Null für $x = a$. Man setze

$$z^2=\frac{x-a}{b-x}\frac{d-a}{d-b}.$$

β) x zwischen c und d, das Integral Null für $x=c$. Man setze

$$z^2=\frac{x-c}{d-x}\cdot\frac{c-a}{d-a}.$$

§. 15.

Wie in §. 10. kann man leicht eine Reihe neuer Formeln ableiten, die nach Art des §. 13. angewandt werden können.

Setzt man nämlich

$$(f(v))^2=x,$$

worin $f(v)$ eine Modularfunktion von v ist, so ergiebt sich:

$$2fv.\frac{\partial f(v)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=1,\quad \text{also } v=\int\frac{\partial x}{2f(v)\frac{\partial f(v)}{\partial v}}.$$

Ist also z. B.

I. $f(v)=\mathrm{sn}(v)$, d. h. $(\mathrm{sn}\,v)^2=x$, so ist:

$$v=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\partial x}{\mathrm{sn}\,v.\mathrm{cn}\,v.\mathrm{dn}\,v}=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)(1-m^2x)}}.$$

II. $f(v)=\mathrm{cn}\,v$, d. h. $(\mathrm{cn}\,v)^2=x$, so ist:

$$v=\frac{1}{2}\int_x^1\frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)(m'^2+m^2x)}}.$$

III. $f(v)=\mathrm{tn}\,v$, d. h. $(\mathrm{tn}\,v)^2=x$, so ist:

$$v=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{x(1+x)(1+m'^2x)}}.$$

IV. $f(v)=\mathrm{ctn}\,v$, d. h. $(\mathrm{ctn}\,v)^2=x$, so ist:

$$v=\frac{1}{2}\int_x^\infty\frac{\partial x}{\sqrt{x(1+x)(m'^2+x)}}.$$

V. $f(v)=\mathrm{dn}\,v$, d. h. $(\mathrm{dn}\,v)^2=x$, so ist:

$$v=\frac{1}{2}\int_x^1 \frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)(x-m'^2)}}.$$

VI. $f(v)=\text{tang.}\left(\frac{1}{2}\text{am}\, v\right)$, d. h. $(\text{tang.}\frac{1}{2}\text{am} v)^2=x$, so ist:

$$v=\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{x+2(m'^2-m^2)x^2+x^3}}.$$

VII. $f(v)=\frac{1}{\text{sn}(M-v)}$, d. h. $\frac{1}{(\text{sn}(M-v))^2}=x$, so ist:

$$v=\frac{1}{2}\int_1 \frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)(m^2-x)}}.$$

VIII. $f(v)=\text{cn}(M-v)$, d. h. $(\text{cn}(M-v))^2=x$, so ist:

$$v=\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{m'^2 x+(m^2-m'^2)x^2-m^2x^3}}.$$

U. s. w.

§. 16.

Schreiten wir weiter zu Integralformeln, welche Modularfunktionen einschliessen. Die einfachsten sind folgende:

Man hat (§. 3.)

$$\frac{\partial.\text{am}\, v}{\partial v}=\text{dn}\, v,$$

also auch

$$\frac{\partial.\text{am}(a+v)}{\partial v}=\text{dn}(a+v),$$

folglich

$$\int_0^v \text{dn}(a+v)\,\partial v=\text{am}(a+v)-\text{am}\, a,$$

$$\int_0^v \text{dn}(a-v)\,\partial v=\text{am}\, a-\text{am}(a-v). \qquad \text{(I)}$$

Da

$$\text{am}\, v=\text{arc}(\sin=\text{sn}\, v)=\text{arc}(\cos=\text{cn}\, v) \text{ u. s. f.},$$

so kann man in diesen Formeln die zweiten Glieder auch noch anders ausdrücken, wozu übrigens die Formeln in §. 5. auch dienen.

Setzt man hier $M-a$ statt a, so ergiebt sich (§. 6.):

$$m'\int_0^v \frac{\partial v}{\mathrm{dn}(a+v)} = \mathrm{am}(M-a) - \mathrm{am}(M-(a+v))$$

$$= \mathrm{arc}\left(\sin = \frac{\mathrm{cn}\, a}{\mathrm{dn}\, a}\right) - \mathrm{arc}\left(\sin = \frac{\mathrm{cn}\,(a+v)}{\mathrm{dn}\,(a+v)}\right), \quad (2).$$

$$m'\int_0^v \frac{\partial v}{\mathrm{dn}\,(a-v)} = \mathrm{arc}\left(\sin = \frac{\mathrm{cn}(a-v)}{\mathrm{dn}\,(a-v)}\right) - \mathrm{arc}\left(\sin = \frac{\mathrm{cn}\, a}{\mathrm{dn}\, a}\right);$$

oder auch:

$$m'\int_0^v \frac{\partial v}{\mathrm{dn}(a+v)} = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{\mathrm{ctn}\, a}{m'}\right) - \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{\mathrm{ctn}\,(a+v)}{m'}\right),$$

$$m'\int_0 \frac{\partial v}{\mathrm{dn}\,(a-v)} = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{\mathrm{ctn}(a-v)}{m'}\right) - \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{\mathrm{ctn}(a)}{m'}\right).$$

Setzt man in (1) statt des Modulus m den Modulus m_1 (§. 12.) und zugleich ma, mv statt a und v, so findet sich:

$$m\int_0^v \mathrm{cn}(a+v)\partial v = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = m\,\frac{\mathrm{sn}(a+v)}{\mathrm{dn}\,(a+v)}\right) - \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = m\,\frac{\mathrm{sn}\, a}{\mathrm{dn}\, a}\right). \quad (3)$$

Vertauscht man in (3) die Moduln m und m', setzt ai, vi statt a, v, so findet sich (§. 11.):

$$(4)$$

$$m'\int_0^v \frac{\partial v}{\mathrm{cn}\,(a+v)} = \frac{1}{i}\left[\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{m' i\,\mathrm{sn}\,(a+v)}{\mathrm{dn}\,(a+v)}\right) - \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{m' i\,\mathrm{sn}\, a}{\mathrm{dn}\, a}\right)\right]$$

$$= \log.\sqrt{\left(\frac{\mathrm{dn}(a+v)+m'\mathrm{sn}(a+v)}{\mathrm{dn}(a+v)-m'\mathrm{sn}(a+v)} \cdot \frac{\mathrm{dn}\, a - m'\mathrm{sn}\, a}{\mathrm{dn}\, a + m'\,\mathrm{sn}\, a}\right)}.$$

Bekanntlich ist

$$\frac{\partial.\log\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}}{\partial t} = \frac{1}{1-t^2}, \quad \frac{\partial.\mathrm{sn}(M-u)}{\partial u} = -\frac{m'^2\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{dn}^2 u}.$$

Setzt man also $t = m\,\mathrm{sn}\,(M-(a+v))$, so erhält man:

$$C + \log\sqrt{\frac{1+m\,\mathrm{sn}(M-a-v)}{1-m\,\mathrm{sn}(M-a-v)}} = \int \frac{\partial t}{1-m^2\mathrm{sn}(M-a-v)^2}$$

$$= \int \frac{-mm'^2\mathrm{sn}\,(a+v)\,\partial v}{\mathrm{dn}^2(a+v)\,\mathrm{dn}\,(M-a-v)^2} = \int -m\,\mathrm{sn}\,(a+v)\partial v,$$

also

$$m\int_0^v \mathrm{sn}(a+v)\partial v=\log\sqrt{\left(\frac{\mathrm{dn}\,a+m\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a-m\,\mathrm{cn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{dn}(a+v)-m\,\mathrm{cn}(a+v)}{\mathrm{dn}(a+v)+m\,\mathrm{cn}(a+v)}\right)}. \tag{5}$$

Da t nicht $=1$ sein darf, so darf auch hier nicht $a=0$ sein.

Vertauscht man in (5) die Moduln m und m', setzt ai, vi statt a, v, so ergiebt sich (§. 11.):

$$m'\int_0^v \mathrm{tn}(a+v)\,\partial v=\log\sqrt{\left(\frac{\mathrm{dn}(a+v)+m}{\mathrm{dn}(a+v)-m'}\cdot\frac{\mathrm{dn}\,a-m'}{\mathrm{dn}\,a+m'}\right)}. \tag{6}$$

Macht man hier v negativ und setzt $M-a$ statt a, so erhält man (§. 6.):

$$\int_0^v \mathrm{ctn}(a+v)\partial v=\log\sqrt{\left(\frac{1+\mathrm{dn}\,a}{1-\mathrm{dn}\,a}\cdot\frac{1-\mathrm{dn}(a+v)}{1+\mathrm{dn}(a+v)}\right)}. \tag{7}$$

Vertauscht man hier m mit m', ai, vi gegen a, v, so erfolgt (§. 11.):

$$\int_0^v \frac{\partial v}{\mathrm{sn}(a+v)}=\log\sqrt{\left(\frac{\mathrm{cn}\,a+\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a-\mathrm{dn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{cn}(a+v)-\mathrm{dn}(a+v)}{\mathrm{cn}(a+v)+\mathrm{dn}(a+v)}\right)}. \tag{8}$$

Aus den gegebenen Formeln leiten sich eine Menge anderer durch Zusammensetzung ab. Beispielsweise mag eine einzige gebildet werden.

Da

$$\frac{\mathrm{sn}(a+v)+\mathrm{sn}(a-v)}{2}=\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{1-m^2\mathrm{sn}^2a\,\mathrm{sn}^2v},$$

so folgt aus (5):

$$m\int_0^v \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v\,\partial v}{1-m^2\mathrm{sn}\,a^2\mathrm{sn}\,v^2}=\log\sqrt{\left(\frac{\mathrm{dn}\,a+m\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a-m\,\mathrm{cn}\,a}\right)}$$
$$-\frac{1}{2}\log\sqrt{\left(\frac{\mathrm{dn}(a+v)+m\,\mathrm{cn}(a+v)}{\mathrm{dn}(a+v)-m\,\mathrm{cn}(a+v)}\cdot\frac{\mathrm{dn}(a-v)-m\,\mathrm{cn}(a-v)}{\mathrm{dn}(a-v)+m\,\mathrm{cn}(a+v)}\right)}.$$

§. 17.

Ehe wir weiter gehen, müssen wir der Legendre'schen Bezeichnungsweise kurz gedenken. Legendre bezeichnet nämlich die Grösse

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}} \text{ mit } F(\varphi),$$

so dass, nach unserer Bezeichnungsweise, da

$$\arg.(\mathrm{sn}=x)=\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}=\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}$$
$$=\arg.(\mathrm{sn}=\sin\varphi),$$
$$F(\varphi)=\arg.(\mathrm{sn}=\sin\varphi).$$

Das Legendre'sche $F(\varphi)$ ist also das in §. 8. zu φ verlangte v, und da Legendre theilweise Tafeln für $F(\varphi)$ berechnet hat, so ist also das dort Verlangte in gewisser Beziehung schon geschehen.

Es ist nicht schwer, die oben erhaltenen Resultate in die Legendre'sche Bezeichnungsweise überzutragen. Wir wählen als Beispiel das Resultat in §. 13.

Dort ist

$$v=\arg\left(\mathrm{cn}=\frac{a-bz^2}{a+bz^2}\right)=\arg(\mathrm{cn}=\cos\varphi)=F(\varphi),$$

wenn

$$\cos\varphi=\frac{a-bz^2}{a+bz^2}.$$

Bezeichnet man den Modulus mit m, und setzt also

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}=F(\varphi,m),$$

so ist demnach das dortige

$$y=\frac{F\left(\varphi,\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}\right)}{2\sqrt{ab}},\quad \cos\varphi=\frac{a-bz^2}{a+bz^2}.$$

Ist also

1) $\mathrm{sn}\,v=k$, so ist $v=\arg(\mathrm{sn}=k)=F(\varphi,m)$, $\sin\varphi=k$.
2) $\mathrm{cn}\,v=k$, „ „ $v=\arg(\mathrm{cn}=k)=F(\varphi,m)$, $\cos\varphi=k$,
3) $\mathrm{tn}\,v=k$, „ „ $v=\arg(\mathrm{tn}=k)=F(\varphi,m)$, $\mathrm{tang}\,\varphi=k$,
4) $\mathrm{ctn}\,v=k$, „ „ $v=\arg(\mathrm{ctn}=k)=F(\varphi,m)$, $\mathrm{cotg}\,\varphi=k$,
5) $\mathrm{dn}\,v=k$, „ „ $v=\arg(\mathrm{dn}=k)=F(\varphi,m)$, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{1-k^2}}{m}$.

Die oben gebrauchte Grösse M ist $F(\frac{\pi}{2}, m)$.

Die Formeln des §. 16. können auch durch cyklische Funktionen ausgedrückt werden. So ist, wenn $\varphi = \mathrm{am}.v$, $\alpha = \mathrm{am}.a$:

$$\mathrm{sn}(a+v) = \frac{\sin\alpha\cos\varphi\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}+\sin\varphi\cos\alpha\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}}{1-m^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi},$$

$$\frac{\mathrm{dn}(a+v)-m\,\mathrm{cn}(a+v)}{\mathrm{dn}(a+v)+m\,\mathrm{cn}(a+v)}=\frac{\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}-m\cos\alpha\cos\varphi+m\sin\alpha\sin\varphi\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}-m^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}+m\cos\alpha\cos\varphi-m\sin\alpha\sin\varphi\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}-m^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Also:

$$m\int_0^\varphi\frac{\sin\alpha\cos\varphi\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}+\cos\alpha\sin\varphi\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}}{1-m^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}=$$

$$\log\sqrt{\left(\frac{\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}+m\cos\alpha}{\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}-m\cos\alpha}\cdot\frac{\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}.\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}-m\cos\alpha\cos\varphi+m\sin\alpha\sin\varphi\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}-m^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}.\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}+m\cos\alpha\cos\varphi-m\sin\alpha\sin\varphi\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}-m^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi}\right)},$$

u. s. w.

§. 18.

Das Integral

$$\int_0^v \mathrm{dn}^2 v\, \partial v \qquad (1)$$

soll durch $E(v)$, oder, wenn man will, später auch durch $E(v,m)$ bezeichnet werden, so wie man überhaupt, zu grösserer Deutlichkeit, die Modularfunktionen durch

$$\mathrm{sn}(v,m),\ \mathrm{cn}(v,m),\ \mathrm{tn}(v,m),\ \mathrm{ctn}(v,m),\ \mathrm{dn}(v,m)$$

bezeichnen könnte. Die gebrauchte Bezeichnungsweise ist aber einfacher, und, so lange die Deutlichkeit nicht darunter leidet, mag sie beibehalten werden, so wie auch die Bezeichnung $E(v)$ gebraucht werden soll. Ist

$$\mathrm{am}\, v = \varphi,$$

so ist

$$\mathrm{dn}^2 v = 1 - m^2 \sin^2\varphi,\ \partial v = \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - m^2\sin^2\varphi}};$$

also ist dann

$$E(v) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - m^2\sin^2\varphi}\, \partial\varphi,\ \ \varphi = \mathrm{am}\, v\,.$$

Legendre bezeichnet dieses Integral durch $E(\varphi)$ oder $E(\varphi,m)$, so dass das hier gebrauchte $E(v)$ und das Legendre'sche $E(\varphi)$ ähnliche Bedeutung haben und für $\mathrm{am}\, v = \varphi$ zusammenfallen.

Eben so sei

$$\int_0^v \mathrm{dn}'^2 v\, \partial v = E'(v)\,.$$

Hiernach ist

$$E(-v) = -E(v),\ E(0) = 0. \qquad (2)$$

Da

$$\mathrm{sn}^2 v = \frac{1 - \mathrm{dn}^2 v}{m^2},\ \mathrm{cn}^2 v = -\frac{m'^2 + \mathrm{dn}^2 v}{m^2};\ (\S.\ 2.)$$

so ist

$$\int_0^v \mathrm{sn}^2 v\,\partial v = \frac{1}{m^2}(v - E(v))$$

$$\int_0^v \mathrm{cn}^2 v\,\partial v = \frac{1}{m^2}(-m'^2 v + E(v)). \tag{3}$$

Setzt man in (1) $M-v$ statt v, so erhält man (§. 6.)

$$\int_M^v \frac{m'^2}{\mathrm{dn}^2 v}\partial v = -E(M-v),$$

woraus leicht:

$$\int_0^v \frac{\partial v}{\mathrm{dn}^2 v} = \frac{E(M) - E(M-v)}{m'^2}. \tag{4}$$

Man findet leicht:

$$\frac{\partial.\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{\partial v} = \frac{m'^2}{\mathrm{cn}^2 v} + m^2 - m^2\mathrm{sn}^2 v,$$

woraus, wenn man integrirt, und die vorstehenden Formeln beachtet:

$$\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{dn}\,v = m'^2\int_0^v \frac{\partial v}{\mathrm{cn}^2 v} + m^2 v - v + E(v),$$

also.

$$\int_0^v \frac{\partial v}{\mathrm{cn}^2 v} = \frac{\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + m'^2 v - E(v)}{m'^2}. \tag{5}$$

Da

$$\mathrm{tn}^2 v = \frac{1}{\mathrm{cn}^2 v} - 1,$$

so erhält man

$$\int_0^v \mathrm{tn}^2 v\,\partial v = \frac{\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{dn}\,v - E(v)}{m'^2}. \tag{6}$$

§. 19.

Setzt man $a \pm v$ statt v, so erhält man leicht:

$$\int_0^v \mathrm{dn}^2(a+v)\partial v = E(a+v) - E(a),$$

$$\int_0^v \mathrm{dn}^2(a-v)\partial v = E(a) - E(a-v);$$

hieraus

$$\int_0^v [-\mathrm{dn}^2(a+v) + \mathrm{dn}^2(a-v)]\,\partial v = 2E(a) - E(a-v) - E(a+v).$$

Aus §. 5. folgt leicht:

$$\mathrm{dn}^2(a-v) - \mathrm{dn}^2(a+v) = (\mathrm{dn}(a-v) + \mathrm{dn}(a+v))(\mathrm{dn}(a-v) - \mathrm{dn}(a+v))$$

$$= \frac{4m^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \,\mathrm{sn}\, v \,\mathrm{cn}\, v \,\mathrm{dn}\, v}{(1 - m^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 v)^2}$$

$$= 2 \,\mathrm{ctn}\, a \,\mathrm{dn}\, a . \frac{\partial . \left(\frac{1}{1 - m^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 v}\right)}{\partial v},$$

also

$$\int_0^v (\mathrm{dn}^2(a-v) - \mathrm{dn}^2(a+v))\partial v = \frac{2 \,\mathrm{ctn}\, a \,\mathrm{dn}\, a}{1 - m^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 v} - 2 \,\mathrm{ctn}\, a \,\mathrm{dn}\, a$$

$$= \frac{2m^2 \mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \,\mathrm{sn}^2 v}{1 - m^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 v},$$

also endlich

$$2E(a) - E(a-v) - E(a+v) = \frac{2m^2 \mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \,\mathrm{sn}^2 v}{1 - m^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 v},$$

$$E(a+v) + E(a-v) = 2E(a) - \frac{2m^2 \mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \,\mathrm{sn}^2 v}{1 - m^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 v}.$$

Vertauscht man hier a und v, so ergiebt sich (2. des §. 17.):

$$E(a+v) - E(a-v) = 2E(v) - \frac{2m^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{cn}\, v \,\mathrm{sn}\, v \,\mathrm{dn}\, v}{1 - m^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 v}.$$

Durch Addition findet sich nun leicht:

$$E(a+v) = E(a) + E(v) - m^2 \mathrm{sn}\, a \,\mathrm{sn}\, v \,\mathrm{sn}(a+v). \qquad (1)$$

Setzt man hier $a = M - v$, so ist:

$$E(M) = E(M-v) + E(v) - m^2 \operatorname{sn}(M-v) \operatorname{sn} v$$
$$= E(M-v) + E(v) - m^2 \frac{\operatorname{cn} v \operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v},$$

woraus:

$$E(M-v) = E(M) - E(v) + m^2 \frac{\operatorname{cn} v \operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v}, \tag{2}$$

und

$$E(M+v) = E(M) + E(v) - m^2 \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v}, \tag{3}$$
$$E(M+v) + E(M-v) = 2E(M). \tag{4}$$

Setzt man in (4) $M-v$ statt v:

$$E(2M-v) + E(v) = 2E(M),$$
$$E(2M+v) = E(v) + 2E(M);$$

woraus leicht:

$$\left.\begin{aligned} E(2nM+v) &= E(v) + 2nE(M), \\ E(2nM-v) &= -E(v) + 2nE(M). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Setzt man hier $M+v$ statt v, so ergiebt sich, mit Berücksichtigung von (3):

$$\left.\begin{aligned} E((2n+1)M+v) &= E(v) + (2n+1)E(M) - \frac{m^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v}, \\ E((2n+1)M-v) &= -E(v) + (2n+1)E(M) + \frac{m^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Dadurch ist die Funktion $E(v)$, so lange v reell bleibt, bekannt, wenn sie es innerhalb der Gränzen 0 und M ist.

§. 20.

Setzt man in (1) des §. 18. vi statt v, so findet sich:

$$\int_0^v \operatorname{dn}^2(vi)\,\partial v = \frac{E(vi)}{i},$$

d. h.

$$\int_0^v \frac{\mathrm{dn}'^2 v}{\mathrm{cn}'^2 v}\partial v = \frac{E(vi)}{i} = \int_0^v \left(\frac{m^2}{\mathrm{cn}'^2 v} + m'^2\right)\partial v,$$

woraus, mit Beachtung der Formeln des §. 18.:

$$E(vi) = i[v - E'(v) + \mathrm{tn}' v \,\mathrm{dn}' v]. \tag{1}$$

Setzt man hier $v = 2nM'$, so erhält man, wenn man (5) des §. 18 beachtet:

$$E(2nM'i) = i[2nM - 2nE'(M')],$$

also, wenn man in (1) §. 19. $u = 2nM'i$ setzt und §. 11. beachtet:

$$E(a + 2nM'i) = E(a) + 2ni(M' - E'(M')). \tag{2}$$

Aehnliche Formeln lassen sich leicht weiter bilden.

Bezeichnet man, wie in §. 12., den Werth von $E(v)$ für den Modulus $\frac{1}{m}$ durch $E_1(v)$, so ist:

$$E_1(v) = \int_0^v \mathrm{dn}_1{}^2 v\,\partial v = \int_0^v \mathrm{cn}^2\left(\frac{v}{m}\right)\partial v,$$

$$E_1(mv) = \frac{E(v) - m'^2 v}{m},$$

$$E_1(v) = \frac{mE\left(\frac{v}{m}\right) - m'^2 v}{m^2}. \tag{3}$$

§. 21.

Zwischen den Grössen M, M', $E(M)$, $E'(M')$ besteht eine Gleichung, die nun aufgesucht werden soll.

Es ist, wie sich aus §. 18. und §. 3. ergiebt:

$$E(M) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m^2 \sin^2\varphi}\,\partial\varphi,$$

$$E'(M') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m'^2 \sin^2\varphi}\,\partial\varphi = E(M', m')$$

nach der in §. 18. noch erwähnten Bezeichnung. Ferner:

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - m^2\sin^2\varphi}}, \quad M' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - m'^2\sin^2\varphi}}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial M}{\partial m}=\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1-m^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}-\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}$$
$$=\frac{1}{m}\int_0^{M}\frac{\partial v}{\mathrm{dn}^2 v}-\frac{M}{m}=\frac{E(M)}{mm'^2}-\frac{M}{m},$$

also

$$E(M)=m'^2\left(M+m\frac{\partial M}{\partial m}\right). \qquad (1)$$

Ganz eben so findet sich durch Differenziation von $E(M)$:

$$M=E(M)-m\frac{\partial.E(M)}{\partial m}. \qquad (2)$$

Hieraus:

$$E'(M')=m^2\left(M'+m'\frac{\partial M'}{\partial m'}\right),$$
$$M'=E'(M')-m'\frac{\partial.E'(M')}{\partial m'}.$$

Da aber allgemein

$$\frac{\partial R}{\partial m'}=\frac{\partial R}{\partial m}\cdot\frac{\partial m}{\partial m'}=-\frac{\partial R}{\partial M}\cdot\frac{m'}{m},$$

so ist

$$\left.\begin{aligned}E'(M')&=m^2M'-mm'^2\frac{\partial M'}{\partial m},\\ M'&=E'(M')+\frac{m'^2}{m}\frac{\partial.E'(M')}{\partial m}.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Hieraus folgt:

$$M'\frac{\partial.E(M)}{\partial m}+E(M)\frac{\partial M'}{\partial m}+M\frac{\partial.E'(M')}{\partial m}+E'(M')\frac{\partial M}{\partial m}$$
$$=\frac{\partial.[M'E(M)+ME'(M')]}{\partial m}=MM'(m^2-m'^2)+M'E(M)-ME'(M').$$

Eben so:

$$M'\frac{\partial M}{\partial m}+M\frac{\partial M'}{\partial m}=\frac{\partial.(MM')}{\partial m}=MM'(m^2-m'^2)+M'E(M)-ME'(M'),$$

mithin:

$$\frac{\partial.[M'E(M)+ME'(M')]}{\partial m}-\frac{\partial.(MM')}{\partial m}=0,$$

$$M' E(M) + M E'(M') - M M' = \text{Const.}$$

Um die, bloss von m abhängende Konstante zu bestimme setzen wir $m=0$, $m'=1$; alsdann ist:

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad M' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi}, \quad E(M) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial\varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$E'(M') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, \partial\varphi = 1;$$

also

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi} = C, \quad C = \frac{\pi}{2};$$

d. h.

$$M' E(M) + M E'(M') - M M' = \frac{\pi}{2}, \tag{4}$$

oder nach Legendre'scher Bezeichnung:

$$\left.\begin{matrix} F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-m^2}\right) \cdot E\left(\frac{\pi}{2}, m\right) + F\left(\frac{\pi}{2}, m\right) . E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-m^2}\right) \\ - F\left(\frac{\pi}{2}, m\right) . F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-m^2}\right) \end{matrix}\right\} = \frac{\pi}{2},$$

welcher Satz der Legendre'sche Satz heisst.

§. 22.

Es bleibt, zur Vervollständigung der Theorie von $E(v)$, noch übrig, zu zeigen, wie $E(v)$ berechnet werden kann für v zwischen 0 und M.

Setzt man

$$\varphi = \text{am} . v,$$

so haben wir in §. 9. gesehen, wie zu jedem φ das zugehörige v gefunden werden kann.

Ganz wie dort findet man hier

$$E(v) = \varphi - \left(\frac{1}{2}\right)^2 f_1(\varphi) . m^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 f_2(\varphi) . m^4 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 f_3(\varphi) . m^6$$
$$+ \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 f_4(\varphi) . m^8 - \ldots\ldots$$

Da, durch Legendre's Berechnung in einiger Beziehung die Berechnung geschehen ist, so kennt man also einige Werthe von $E(v)$. Die Werthe von $E(v)$ wären in die nach §. 8. aufzustellenden Tafeln neben die von v zu setzen.

§. 23.

Den Werth des Integrals

$$\int_0^v \frac{\mathrm{sn}^2 v\,\partial v}{1-m^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 v}$$

bezeichnen wir durch $J(v,a)$, d. h. wir setzen:

$$\int_0^v \frac{\mathrm{sn}^2 v\partial v}{1-m^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 v} = J(v,a). \qquad (1)$$

Nun ist:

$$\frac{1}{\mathrm{dn} a}-\frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 v}{1-m^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 v}=\frac{\mathrm{cn}^2 v}{\mathrm{dn} a\,(1-m^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 v)},$$

also

$$\int_0^v \frac{\mathrm{cn}^2 v\,\partial v}{1-m^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 v}=v-\mathrm{dn}^2 a\,J(v,a). \qquad (2)$$

Ferner ist

$$1-\frac{\mathrm{dn}^2 v}{1-m^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 v}=\frac{m^2\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 v}{1-m^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 v},$$

also

$$\int_0^v \frac{\mathrm{dn}^2 v\,\partial v}{1-m^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 v}=v-m^2\,\mathrm{cn}^2 a\,.\,J(v,a). \qquad (3)$$

Aus (1) und (2):

$$\int_0^v \frac{\partial v}{1-m^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 v}=v+m^2\mathrm{sn}^2 a\,J(v,a). \qquad (4)$$

Ferner ist, wie man leicht findet:

$$\frac{m'^2\,\mathrm{sn}^2 v}{\mathrm{cn}^2 a\left(1-\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\right)^2\mathrm{sn}^2 v\right)}+\frac{\mathrm{dn}^2 v}{1-m^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 v}=\frac{\mathrm{dn}^2 v-m^2\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{cn}^2 v}{\mathrm{cn}^2 v-\mathrm{tn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 v}.$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathrm{cn}(a-v)}{\mathrm{cn}(a+v)}} = \log\sqrt{\left(\frac{1+\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{1-\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}\right)},$$

$$\frac{\partial.}{\partial v}\log\sqrt{\frac{\mathrm{cn}\,(a-v)}{\mathrm{cn}\,(a+v)}} = \frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,a\,(\mathrm{dn}^2 v - m^2\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{cn}^2 v)}{\mathrm{cn}^2 v - \mathrm{tn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 v};$$

demnach

$$\frac{m'^2}{\mathrm{cn}^2 a}\int_0^v \frac{\mathrm{sn}^2 v\,\partial v}{1-\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\right)^2\mathrm{sn}^2 v} + \int_0^v \frac{\mathrm{dn}^2 v\,\partial v}{1-m^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 v}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{dn} a\,\mathrm{tn} a}\log\sqrt{\frac{\mathrm{cn}\,(a-v)}{\mathrm{cn}\,(a+v)}},$$

und mit Beachtung von (3):

$$\int_0^v \frac{\mathrm{sn}^2 v\,\partial v}{1-\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\right)^2\mathrm{sn}^2 v}$$

$$= -\frac{\mathrm{cn}^2 a}{m'^2}v + \frac{m^2}{m'^2}\mathrm{cn}^4 a\,J(v,a) + \frac{\mathrm{cn}^3 a}{m'^2\,\mathrm{dn} a\,\mathrm{sn} a}\log\sqrt{\frac{\mathrm{cn}(a-v)}{\mathrm{cn}\,(a+v)}}. \quad (5)$$

Ferner ist:

$$\frac{\mathrm{dn}^2 v}{1-\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\right)^2\mathrm{sn}^2 v} - \frac{m'^2\,\mathrm{sn}^2 v}{\mathrm{cn}^2 a - \mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 v} = 1,$$

also

$$\int_0^v \frac{\mathrm{dn}^2 v\,\partial v}{1-\left(\frac{\mathrm{dn} a}{\mathrm{cn} a}\right)^2\mathrm{sn}^2 v} - \frac{m'^2}{\mathrm{cn}^2 a}\int_0^v \frac{\mathrm{sn}^2 v\,\partial v}{1-\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\right)^2\mathrm{sn}^2 v} = v,$$

d. h.

$$\int_0^v \frac{\mathrm{dn}^2 v\,\partial v}{1-\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\right)^2\mathrm{sn}^2 v}$$

$$= m^2\,\mathrm{cn}^2 a\,J(v,a) + \frac{1}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,a}\log\sqrt{\frac{\mathrm{cn}(a-v)}{\mathrm{cn}\,(a+v)}}. \quad (6)$$

Da

$$\mathrm{dn}^2 v + m^2\,\mathrm{sn}^2 v = 1,$$

so ist

$$\int_0^v \frac{\mathrm{dn}^2 v\,\partial v}{1-\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\right)^2 \mathrm{sn}^2 v} + m^2 \int_0^v \frac{\mathrm{sn}^2 v\,\partial v}{1-\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\right)^2 \mathrm{sn}^2 v}$$

$$= \int_0^v \frac{\partial v}{1-\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\right)^2 \mathrm{sn}^2 v},$$

woraus:

$$\int_0^v \frac{\partial v}{1-\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\right)^2 \mathrm{sn}^2 v}$$

$$= -\frac{m^2 \mathrm{cn}^2 a}{m'^2} v + \frac{m^2 \mathrm{cn}^2 a\, \mathrm{dn}^2 a}{m'^2} J(v,a) + \frac{\mathrm{dn}\,a}{m'^2 \mathrm{tn}\,a} \log \sqrt{\frac{\mathrm{cn}\,(a-v)}{\mathrm{cn}\,(a+v)}}. \quad (7)$$

Endlich aus (7) und (5):

$$\int_0^v \frac{\mathrm{cn}^2 v\,\partial v}{1-\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\right)^2 \mathrm{sn}^2 v} \qquad (8)$$

$$= \mathrm{cn}^2 a \,.\, v + m^2 \mathrm{cn}^2 a\, \mathrm{sn}^2 a\, J(v,a) + \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a} \log \sqrt{\frac{\mathrm{cn}\,(a-v)}{\mathrm{cn}\,(a+v)}}.$$

Setzt man in den Formeln (1) — (8) ai statt a, so ergiebt sich (§. 11.):

$$\int_0^v \frac{\mathrm{sn}^2 v\,\partial v}{1+m^2 \mathrm{tn}'^2 a\, \mathrm{dn}^2 v} = J(v,ai), \qquad (9)$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{cn}^2 v\,\partial v}{1+m^2 \mathrm{tn}'^2 a\, \mathrm{sn}^2 v} = v - \left(\frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{cn}'a}\right)^2 J(v,ai), \qquad (10)$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{dn}^2 v\,\partial v}{1+m^2 \mathrm{tn}'^2 a\, \mathrm{sn}^2 v} = v - \frac{m^2}{\mathrm{cn}'^2 a} J(v,ai), \qquad (11)$$

$$\int_0^v \frac{\partial v}{1+m^2 \mathrm{tn}'^2 a\, \mathrm{sn}^2 v} = v - m^2 \mathrm{tn}'^2 a J(v,ai), \qquad (12)$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{sn}^2 v\,\partial v}{1-\mathrm{dn}'^2 a\, \mathrm{sn}^2 v} \qquad (13)$$

$$= -\frac{v}{m^2 \mathrm{cn}'^2 a} + \frac{m^2 J(v,ai)}{m'^2 \mathrm{cn}'^4 a} + \frac{1}{m'^2 \mathrm{cn}'a\, \mathrm{sn}'a\, \mathrm{dn}'a} \mathrm{arc}(\mathrm{tang}{=}\mathrm{tn}'a\mathrm{dn}'a\mathrm{tn}v\mathrm{dn}v)$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{dn}^2 v\,\partial v}{1-\mathrm{dn}'^2 a\, \mathrm{sn}^2 v} \qquad (14)$$

$$= \frac{m^2}{\mathrm{cn}'^2 a} J(v,ai) + \frac{1}{\mathrm{tn}'a\, \mathrm{dn}'a} \mathrm{arc}(\mathrm{tang}{=}\mathrm{tn}'a\mathrm{dn}'a\mathrm{tn}v\,\mathrm{dn}v),$$

$$\int_0^v \frac{\partial v}{1-\mathrm{dn}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 v} \tag{15}$$

$$=-\frac{m^2 v}{m'^2\mathrm{cn}'^2 a}+\frac{m^2\mathrm{dn}'^2 a}{\mathrm{cn}'^4 a}J(v,ai)+\frac{\mathrm{dn}'a}{m'^2\mathrm{sn}'a\,\mathrm{cn}'a}\mathrm{arc}(\mathrm{tang}=\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a\,t$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{cn}^2 v\,\partial v}{1-\mathrm{dn}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 v} \tag{16}$$

$$=\frac{v}{\mathrm{cn}'^2 a}-\frac{m^2\mathrm{tn}'^2 a}{\mathrm{cn}'^2 a}J(v,ai)-\frac{\mathrm{tn}'a}{\mathrm{dn}'a}\mathrm{arc}(\mathrm{tang}=\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a\,\mathrm{tn}v\,\mathrm{dn}v).$$

Die hier betrachteten Integrale haben die Form:

$$\int_0^v \frac{\psi^2\partial v}{1+n\,\mathrm{sn}^2 v},$$

worin $\psi=\mathrm{sn}\,v$, $\mathrm{cn}\,v$, $\mathrm{dn}\,v$, 1 ist. Man bildet aus ihnen gewöhn lich vier Klassen und rechnet:

1) **zur ersten Klasse diejenigen, in denen n zwischen 0 und α enthalten ist, d. h. die Integrale (9), (10), (11), (12);**
2) **zur zweiten Klasse diejenigen, in denen n zwischen 0 und $-m$ enthalten ist, d. h. die Integrale (1), (2), (3), (4);**
3) **zur dritten Klasse diejenigen, in denen n zwischen $-m^2$ und $-$ enthalten ist, d. h. die Integrale (13), (14), (15), (16);**
4) **zur vierten Klasse diejenigen, in denen n zwischen -1 und $-\alpha$ enthalten ist, d. h. die Integrale (5), (6), (7), (8).**

Führt man den Modulus $\frac{1}{m}=m_1$ statt m ein, und bezeichnet durch $J_1(v,a)$ das, was $J(v,a)$ wird, so ist

$$J_1(v,a)=\int_0^v \frac{\mathrm{sn}_1^2 v\,\partial v}{1-m_1^2\,\mathrm{sn}_1^2 a\,\mathrm{sn}_1^2 v}=m^2\int_0^v \frac{\mathrm{sn}^2\left(\frac{v}{m}\right)\partial v}{1-m^2\mathrm{sn}^2\left(\frac{a}{m}\right)\mathrm{sn}^2\left(\frac{v}{m}\right)},$$

d. h.

$$J_1(mv,ma)=m^3 J(v,a)$$

oder

$$J_1(v,a)=m^3 J\left(\frac{v}{m},\frac{a}{m}\right),\quad J_1(v,ai)=m^3 J\left(\frac{v}{m},\frac{ai}{m}\right) \tag{17}$$

§. 24.

Zur Berechnung der Funktionen $J(v,a)$, $J(v,ai)$ dienen folgende Betrachtungen.

$$J(v,a)=\int_0^v \frac{\mathrm{sn}^2 v\, \partial v}{1-m^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 v},$$

oder wenn $\varphi = \mathrm{am}\, v$:

$$J(v,a)=\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}\,(1-m^2\,\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi)}.$$

Setzt man nun

$$\mathrm{tang}\,\varphi' = \mathrm{dn}\, a\,.\,\mathrm{tang}\,\varphi,$$

so ist

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial\varphi}=\frac{\mathrm{dn}\, a}{1-m^2\,\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi},\ \frac{\varphi'}{\mathrm{dn}\, a}=\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{1-m^2\,\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi}.$$

Nun ist

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}\,(1-m^2\,\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi)}=\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{1-m^2\,\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi}$$
$$+\frac{1}{2}m^2\int_0^\varphi \frac{\sin^4\varphi\,\partial\varphi}{1-m^2\,\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi}+\frac{1.3}{2.4}m^4\int_0^\varphi \frac{\sin^6\varphi\,\partial\varphi}{1-m^2\,\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi}+\ldots,$$

zugleich

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^{2r+2}\varphi\,\partial\varphi}{1-m^2\,\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi}$$
$$=\frac{1}{m^2\mathrm{sn}^2 a}\int_0^\varphi \frac{\sin^{2r}\varphi\,\partial\varphi}{1-m^2\,\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi}-\frac{1}{m^2\mathrm{sn}^2 a}\int_0^\varphi \sin^{2r}\varphi\,\partial\varphi.$$

Setzt man also

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^{2r}\varphi\,\partial\varphi}{1-m^2\,\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi}=\frac{\Psi_r(\varphi)}{m^{2r}\,\mathrm{sn}^{2r} a},$$

so ist (§. 9.)

$$\Psi_{r+1}(\varphi)=\Psi_r(\varphi)-m^{2r}\,\mathrm{sn}^{2r} a.\frac{1.3.5\ldots.(2r-1)}{2.4.6\ldots.2r}f_r(\varphi).$$

Also

$$\begin{aligned}
\Psi_1(\varphi) &= \frac{\varphi'}{\mathrm{dn}\, a} - \varphi, \\
\Psi_2(\varphi) &= \frac{\varphi'}{\mathrm{dn}\, a} - \varphi - \frac{1}{2} m^2 \mathrm{sn}^2 a\, f_1(\varphi), \\
\Psi_3(\varphi) &= \frac{\varphi'}{\mathrm{dn}\, a} - \varphi - \frac{1}{2} m^2 \mathrm{sn}^2 a f_1(\varphi) - \frac{1.3}{2.4} m^4 \mathrm{sn}^4 a f_2(\varphi), \qquad (1) \\
&\vdots \\
\Psi_r(\varphi) &= \frac{\varphi'}{\mathrm{dn}\, a} - \varphi - \frac{1}{2} m^2 \mathrm{sn}^2 a f_1(\varphi) - \frac{1.3}{2.4} m^4 \mathrm{sn}^4 a f_2 \varphi - \ldots \\
&\quad \ldots - \frac{1.3.5\ldots.(2r-3)}{2.4.6\ldots.(2r-2)} m^{2r-2} \mathrm{sn}^{2r-2} a\, f_{r-1}(\varphi);
\end{aligned}$$

worin

$$\varphi' = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = \mathrm{dn}\, a \operatorname{tang} \varphi).$$

Sodann ist

$$J(v,a) = \frac{1}{m^2}\left[\frac{\Psi_1(\varphi)}{\mathrm{sn}^2 a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Psi_2(\varphi)}{\mathrm{sn}^4 a} + \frac{1.3}{2.4} \frac{\Psi_3(\varphi)}{\mathrm{sn}^6 a} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{\Psi_4(\varphi)}{\mathrm{sn}^8 a} + \ldots\right]. \tag{2}$$

Setzt man *ai* statt *a*, so ergiebt sich:

$$J(v,ai) = \frac{1}{m^2}\left[-\frac{\Psi'_1(\varphi)}{\mathrm{tn}'^2 a} + \frac{1}{2} \frac{\Psi'_2(\varphi)}{\mathrm{tn}'^4 a} - \frac{1.3}{2.4} \frac{\Psi'_3(\varphi)}{\mathrm{tn}'^6 a} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{\Psi'_4(\varphi)}{\mathrm{tn}'^8 a} - \ldots\ldots\right], \tag{3}$$

während

$$\begin{aligned}
\Psi'_1(\varphi) &= \varphi' \cdot \frac{\mathrm{cn}' a}{\mathrm{dn}' a} - \varphi, \\
\Psi'_2(\varphi) &= \varphi' \cdot \frac{\mathrm{cn}' a}{\mathrm{dn}' a} - \varphi + \frac{1}{2} m^2 \mathrm{tn}'^2 a f_1(\varphi), \qquad (4) \\
&\vdots \\
\Psi'_r(\varphi) &= \varphi' \cdot \frac{\mathrm{cn}' a}{\mathrm{dn}' a} - \varphi + \frac{1}{2} m^2 \mathrm{tn}'^2 a\, f_1(\varphi) - \frac{1.3}{2.4} m^4 \mathrm{tn}'^4 a f_2(\varphi) + \ldots\ldots \\
&\quad \ldots + (-1)^r \frac{1.3.5\ldots(2r-3)}{2.4.6\ldots(2r-2)} m^{2r-2} \mathrm{tn}'^{2r-2} a f_{r-1}(\varphi), \\
\varphi' &= \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\mathrm{dn}' a}{\mathrm{cn}' a} \varphi\right).
\end{aligned}$$

§. 25.

Durch die Formeln des vor. Paragr. ist $J(v,a)$ bestimmt für v zwischen den Gränzen 0 und M zunächst. Für v über diese Gränzen hinaus, wird sich $J(v,a)$ durch folgende Formeln bestimmen.

Man setze

$$\int_0^v E(v)\,\partial v = T(v), \qquad (1)$$

so ist, da nach §. 18.:

$$E(a+v)+E(a-v)=2E(a)-\frac{2m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 v}{1-m^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 v},$$

auch

$$T(a+v)-T(a-v)=2vE(a)-2m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \,.\, J(v,a),$$

woraus

$$J(v,a)=\frac{2vE(a)+T(a-v)-T(a+v)}{2m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}. \qquad (2)$$

Demnach ist:

$$J(v+w,a)=\frac{2(v+w)E(a)+T(a-v-w)-T(a+v+w)}{2m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a},$$

$$J(v,a)=\frac{2vE(a)+T(a-v)-T(a+v)}{2m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a},$$

$$J(w,a)=\frac{2wE(a)+T(a-w)-T(a+w)}{2m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a};$$

woraus sich leicht ergiebt:

$$J(v+w,a)=J(v,a)+J(w,a)$$
$$+\frac{T(v+w-a)-T(v+w+a)-T(v-a)+T(v+a)-T(w-a)+T(w+a)}{2m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}$$

wenn man die Gleichung

$$T(-v)=T(v) \qquad (3)$$

beachtet.

Man wird aber aus den Formeln des §. 18. ohne Mühe folgende Formel ableiten:

$$E(v+w+a)$$
$$=E(v+a)+E(w+a)-E(a)-\frac{\partial.}{\partial a}\log(1+m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v \operatorname{sn} w \operatorname{sn}(v+w+a)),$$

woraus, wenn man integrirt:

$$T(v+w+a)$$
$$=T(v+a)+T(w+a)-T(a)-\log(1+m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v \operatorname{sn} w \operatorname{sn}(v+w+a)).$$

Setzt man hier $-a$ statt a, so erhält man:

$$T(v+w-a)$$
$$=T(v-a)+T(w-a)-T(a)-\log(1-m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v \operatorname{sn} w \operatorname{sn}(v+w-a));$$

zieht man beide Gleichungen von einander ab, so erhält man:

$$T(v+w-a)-T(v+w+a)-T(v-a)+T(v+a)-T(w-a)+T(w+a)$$
$$=\log\left(\frac{1+m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v \operatorname{sn} w \operatorname{sn}(v+w+a)}{1-m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v \operatorname{sn} w \operatorname{sn}(v+w-a)}\right).$$

Setzt man dies endlich in den obigen Werth von $J(v+w,a)$, so erhält man:

$$J(v+w,a) \tag{4}$$
$$=J(v,a)+J(w,a)+\frac{1}{2m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}\log\left(\frac{1+m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v \operatorname{sn} w \operatorname{sn}(v+w+a)}{1-m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v \operatorname{sn} w \operatorname{sn}(v+w-a)}\right).$$

Vermöge dieser Formel kann man nun auch die Werthe von $J(v,a)$ für $v>M$ berechnen, indem man nach und nach weiter gehen kann. Zugleich ist

$$J(-v,a)=-J(v,a). \qquad (5).$$

§. 26.

Von den so eben behandelten Integralen hängen eine Reihe anderer ab, die wir betrachten wollen.

Man hat

(1)

$$\int_0^v \frac{\operatorname{sn} v\,\partial v}{1-m \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v}-\int_0^v \frac{\operatorname{sn} v\,\partial v}{1+m \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v}=2\int_0^v \frac{m \operatorname{sn} a \operatorname{sn}^2 v\,\partial v}{1-m^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 v}$$
$$=2m \operatorname{sn} a\, J(v,a),$$

$$\int_0^v \frac{\operatorname{sn} v\,\partial v}{1-m \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v}+\int_0^v \frac{\operatorname{sn} v\,\partial v}{1+m \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v}=2\int_0^v \frac{\operatorname{sn} v\,\partial v}{1-m^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 v}.$$

Nun ist

$$\frac{\operatorname{sn}(a+v)-\operatorname{sn}(a-v)}{2}=\frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} v}{1-m^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 v} \text{ (§. 5.)}.$$

Daraus folgt (§. 16.):

$$\int_0^v \frac{\operatorname{sn} v \partial v}{1-m^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 v}$$

$$=\frac{1}{m \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \log \sqrt{\left(\frac{\operatorname{dn} a+m \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a-m \operatorname{cn} a} \cdot \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} v-m \operatorname{cn} a \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} v+m \operatorname{cn} a \operatorname{cn} v}\right)}.$$

Durch Addition und Subtraktion der Gleichungen (1) erhält man nun die Werthe von

$$\int_0^v \frac{\operatorname{sn} v \partial v}{1 \pm m \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v}.$$

Da

$$\frac{\operatorname{sn} v}{1+m \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v}=\frac{1}{m \operatorname{sn} a}-\frac{1}{m \operatorname{sn} a} \cdot \frac{1}{1+m \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v},$$

so ist

$$\int_0^v \frac{\partial v}{1+m \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v}=v-m \operatorname{sn} a \int_0^v \frac{\operatorname{sn} v \partial v}{1+m \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v}. \qquad (2)$$

In ganz derselben Weise erhält man die Werthe von

$$\int_0^v \frac{\operatorname{cn} v \partial v}{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} v \pm m \operatorname{cn} a \operatorname{cn} v}, \quad \int_0^v \frac{\operatorname{tn} v \partial v}{\operatorname{tn} a \pm \operatorname{tn} v}, \quad \int_0^v \frac{\partial v}{\operatorname{sn} a \pm \operatorname{sn} v},$$

$$\int_0^v \frac{\partial v}{\operatorname{cn} v \pm \operatorname{cn} a}, \quad \int_0^v \frac{\partial v}{\operatorname{dn} a \pm \operatorname{dn} v},$$

$$\int_0^v \frac{\operatorname{cn} v \pm \operatorname{cn}' a}{1 \pm \operatorname{cn}' a \operatorname{cn}' v} \partial v, \quad \int_0^v \frac{\operatorname{dn} v \operatorname{dn}' a \pm \operatorname{cn}' a}{\operatorname{dn}' a \pm \operatorname{cn}' a \operatorname{dn} v} \partial v, \quad \int_0^v \frac{\operatorname{cn} v \partial v}{1 \pm \operatorname{cn}' a \operatorname{cn} v},$$

$$\int_0^v \frac{\operatorname{dn} v \partial v}{\operatorname{dn} a \pm \operatorname{cn}' a \operatorname{dn} v}$$

u. s. f., deren Ableitung eine blosse Uebung ist.

§. 27.

Eine neue Reihe von Integralen erwächst aus den vorhergehenden, wenn man Modularfunktionen einführt, die sich auf einen Modulus μ beziehen, der zu m in einem bestimmten Verhältnisse steht. Im Folgenden wollen wir voraussetzen, das Argument u beziehe sich auf den Modulus μ, während das Argument v sich auf den Modulus m bezieht.

I. Sei

$$\mu = m\frac{\mathrm{cn}\, a}{\mathrm{dn}\, a},$$

worin a sich auf den Modulus m bezieht, und sei ferner

$$\mathrm{tn}\, u = \mathrm{dn} a\, \mathrm{tn}\, v, \quad \text{oder} \quad \mathrm{tn}(u,\mu) = \mathrm{dn}(a,m)\,\mathrm{tn}(v,m);$$

so ist

$$\mathrm{sn}\, u = \frac{\mathrm{dn}\, a\, \mathrm{dn}\, v}{\sqrt{1-m^2\mathrm{sn}^2 a\, \mathrm{sn}^2 v}}, \quad \mathrm{cn}\, u = \frac{\mathrm{cn} v}{\sqrt{1-m^2\mathrm{sn}^2 a \mathrm{sn}^2 v}}$$

u. s. f.

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\mathrm{dn}\, a}{\sqrt{1-m^2\mathrm{sn}^2 a \mathrm{sn}^2 v}},$$

$$u = \mathrm{dn}\, a \int_0^v \frac{\partial v}{\sqrt{1-m^2\mathrm{sn}^2 a \mathrm{sn}^2 v}}, \tag{1}$$

wodurch nun dieses Integral bestimmt ist.

II. Sei

$$\mu = m\varepsilon, \ \varepsilon \overset{=}{<} 1,$$

und sei zunächst

$$\mathrm{dn}\, u = \mathrm{dn} v \ \text{oder} \ \mathrm{dn}(u,\mu) = \mathrm{dn}(v,m),$$

so findet sich

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{m^2\varepsilon^2}{\mu^2}\cdot\frac{\mathrm{cn}\, v}{\sqrt{\varepsilon^2-\mathrm{sn}^2 v}} \quad u = \int_0^v \frac{\mathrm{cn}\, v\,\partial v}{\sqrt{\varepsilon^2-\mathrm{sn}^2 v}}. \tag{2}$$

Um also

$$\int_0^v \frac{\mathrm{cn} v \partial v}{\sqrt{\varepsilon^2-\mathrm{sn}^2 v}}$$

zu erhalten, bestimmt man u so, dass $\mathrm{dn}(u,m\varepsilon) = \mathrm{dn}(v,m)$.

Sei

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sn} v, \text{ oder } \operatorname{sn}(u, \mu) = \operatorname{sn} v;$$

so findet man leicht

$$u = \int_0^v \frac{\operatorname{dn} v \partial v}{\sqrt{1 - m^2 \varepsilon^2 \operatorname{sn}^2 v}}. \tag{3}$$

Sei

$$\operatorname{dn} u = \operatorname{dn} v, \text{ d. h. } \operatorname{dn}(u, \mu) = \operatorname{dn}(v, m);$$

so ist

$$\int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u \partial u}{1 + m^2 \varepsilon^2 b^2 \operatorname{sn}^2 u} = \int_0^v \frac{\operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn} v \partial v}{\varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon^2 - \operatorname{sn}^2 v}\,(1 + m^2 b^2 \operatorname{sn}^2 v)}. \tag{4}$$

Da man das erste Integral finden kann, so ist auch das zweite bestimmt.

Sei

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sn} v,$$

so ist ähnlich:

$$\int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u \partial u}{1 + \mu^2 b^2 \operatorname{sn}^2 u} = \int_0^v \frac{\operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn} v \partial v}{\sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{sn}^2 v}\,(1 + m^2 b^2 \operatorname{sn}^2 v)}. \tag{5}$$

III. Sei

$$\mu = m^n$$

und

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sn} v, \text{ d. h. } \operatorname{sn}(u, m^n) = \operatorname{sn}(v, m);$$

so ergiebt sich

$$u = \int_0^v \frac{\operatorname{dn} v \partial v}{\sqrt{1 - m^{2n} \operatorname{sn}^2 v}}. \tag{6}$$

Auf ähnliche Art können weitere Formeln gebildet werden.

IV. Es ist nicht schwer, die allgemeine Formel für diese Umbildungen anzugeben.

Sei nämlich

$$\mu = f(m),$$

und sei ferner $\psi(u, \mu)$ eine Modularfunktion von u, $\varphi(v, m)$ eine von m, die wir beide, der Kürze wegen, mit $\psi(\mu)$ und $\varphi(v)$ bezeichnen wollen. Setzt man nun

$$\psi(u)=\varphi(v),$$

so ist

$$\psi'(u)\frac{\partial u}{\partial v}=\varphi'(v).$$

Da $\psi'(u)$ ebenfalls Modularfunktionen enthält, so kann es dur Modularfunktionen von v ausgedrückt werden, und man kann al annehmen, dass $\psi'(u)=\lambda(v)$ ist. Daraus ergiebt sich nun:

$$u=\int\frac{\varphi'(v)}{\lambda(v)}\partial v+C, \tag{7}$$

welches die allgemeine Formel ist. Sei z. B.

$$f(m)=m^n,\ \ \psi(u)=\mathrm{sn}\,u,\ \ \varphi(v)=\mathrm{dn}(v),\ \text{ also }\ \mathrm{sn}\,u=\mathrm{dn}\,v;$$

so ist

$$\psi'(u)=\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u,\ \ \varphi'(v)=-m^2\mathrm{sn}v\,\mathrm{cn}v.$$

Nun folgt aber

$$\mathrm{cn}\,u=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2u}=\sqrt{1-\mathrm{dn}^2v}=m\,\mathrm{sn}\,v,$$
$$\mathrm{dn}\,u=\sqrt{1-\mu^2\mathrm{sn}^2u}=\sqrt{1-\mu^2\mathrm{dn}^2v}=\sqrt{\mu'^2+\mu^2m^2\mathrm{sn}^2v};$$

also

$$u=\int\frac{-m^2\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{cn}v\,\partial v}{m\,\mathrm{sn}v\sqrt{\mu'^2+\mu^2m^2\mathrm{sn}^2v}}+C.$$

Da für $u=L$, wenn L der zu m^n gehörige Modularquadrant ist, $\mathrm{sn}\,u=1$, also $\mathrm{dn}\,v=1$, d. h. $v=0$ ist, so hat man:

$$L-u=\int_0^v\frac{m\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{cn}\,v\,\partial v}{\mathrm{sn}\,v\sqrt{\mu'^2+\mu^2m^2\mathrm{sn}^2v}}=m\int_0^v\frac{\mathrm{cn}\,v\,\partial v}{\sqrt{1-m^{2n}+m^{2n+2}\mathrm{sn}^2v}}.$$

Stellte man sich, unter denselben Bedingungen, die Aufgabe, den Ausdruck

$$\int\frac{\mathrm{sn}^2u\,\partial u}{1-b^2\mathrm{sn}^2u}$$

zu transformiren, so erhielte man statt desselben:

$$\int\frac{\mathrm{dn}^2v}{1-b^2\,\mathrm{dn}^2v}\cdot\frac{-m^2\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{cn}v\,\partial v}{m\,\mathrm{sn}\,v.\sqrt{\mu'^2+\mu^2m^2\mathrm{sn}^2v}}$$
$$=-m\int\frac{\mathrm{cn}v\,\mathrm{dn}^2v\,\partial v}{(1-b^2\mathrm{dn}^2v)\sqrt{\mu'^2+\mu^2m^2\mathrm{sn}^2v}},$$

woraus denn:

$$\int_u^L \frac{\operatorname{sn}^2 u\,\partial u}{1-b^2\operatorname{sn}^2 u} = m\int_0^v \frac{\operatorname{cn} v\operatorname{dn}^2 v\,\partial v}{(1-b^2\operatorname{dn}^2 v)\sqrt{\mu'^2+\mu^2 m^2\operatorname{sn}^2 v}},$$

d. h.

$$\int_0^v \frac{\operatorname{cn} v\operatorname{dn}^2 v\,\partial v}{(1-b^2\operatorname{dn}^2 v)\sqrt{\mu'^2+\mu^2 m^2\operatorname{sn}^2 v}} = \frac{1}{m}\int_0^L \frac{\operatorname{sn}^2 u\,\partial u}{1-b^2\operatorname{sn}^2 u} - \frac{1}{m}\int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u\,\partial u}{1-b^2\operatorname{sn}^2 u},$$

in welcher Formel die Integrale rechter Hand nach §. 23. gefunden werden können.

§. 28.

Zum Schlusse mögen noch einige Reduktionsformeln aufgeführt werden, welche die Anwendung der obigen Formeln in vielen Fällen erleichtern.

Es bezeichne V eine Modularfunktion von v und man solle das Integral $\int V^n \partial v$ bestimmen. Wie man aus §. 10. ersieht, ist immer

$$\frac{\partial v}{\partial V} = \frac{1}{\sqrt{a+bV^2+cV^4}},$$

worin a, b, c bestimmte, konstante Werthe haben. Also ist

$$\int V^n\,\partial v = \int \frac{V^n\,\partial V}{\sqrt{a+bV^2+cV^4}}.$$

Man setze nun

$$y = V^{n-3}\sqrt{a+bV^2+cV^4},$$

so ist

$$\frac{\partial y}{\partial V} = \frac{(n-3)aV^{n-4}+(n-2)bV^{n-2}+(n-1)cV^n}{\sqrt{a+bV^2+cV^4}},$$

woraus

$$V^{n-3}\sqrt{a+bV^2+cV^4} \qquad (1)$$
$$=(n-3)a\int V^{n-4}\partial v + (n-2)b\int V^{n-2}\partial v + (n-1)c\int V^n\partial v,$$

welche Formel eine leichte Reduktion gewährt.

Ist nun n eine gerade Zahl, so kann man das Integral $\int V^n \partial_v$ durch die Formel (1) auf $\int \partial v = v$ und $\int V^2 \partial v$ zurückführen, von denen das letztere durch §. 18. bestimmt wird. Ist aber n ungerade, so wird das Integral $\int V^n \partial v$ auf $\int V \partial v$ und $\int V^3 \partial v$ zurückgebracht. Das erstere bestimmt man nach §. 16.; was das letztere anbelangt, so ist:

$$\frac{\partial^2 \operatorname{sn} v}{\partial v^2} = -(1+m^2)\operatorname{sn} v + 2m^2 \operatorname{sn}^3 v,$$

$$\frac{\partial^2 \operatorname{cn} v}{\partial v^2} = (-1+2m^2)\operatorname{cn} v - 2m^2 \operatorname{cn}^3 v,$$

$$\frac{\partial^2 \operatorname{tn} v}{\partial v^2} = (1+m'^2)\operatorname{tn} v + 2m'^2 \operatorname{tn}^3 v,$$

$$\frac{\partial^2 \operatorname{ctn} v}{\partial v^2} = (1+m'^2)\operatorname{ctn} v + 2\operatorname{ctn}^3 v,$$

$$\frac{\partial^2 \operatorname{dn} v}{\partial v^2} = (1+m'^2)\operatorname{dn} v - 2\operatorname{dn}^3 v;$$

also:

$$\begin{aligned}
2m^2 \int \operatorname{sn}^3 v\, \partial v &= (1+m^2) \int \operatorname{sn} v\, \partial v + \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v,\\
2m^2 \int \operatorname{cn}^3 v\, \partial v &= (2m^2-1) \int \operatorname{cn} v\, \partial v + \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v,\\
2m'^2 \int \operatorname{tn}^3 v\, \partial v &= -(1+m'^2) \int \operatorname{tn} v\, \partial v + \frac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{cn}^2 v},\\
2 \int \operatorname{ctn}^3 v\, \partial v &= -(1+m'^2) \int \operatorname{ctn} v\, \partial v - \frac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{sn}^2 v},\\
2 \int \operatorname{dn}^3 v\, \partial v &= (1+m'^2) \int \operatorname{dn} v\, \partial v + m^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v.
\end{aligned} \qquad (2)$$

Es ist leicht, die Formel (1) auf spezielle Fälle anzuwenden. Ist z. B. $V = \operatorname{sn} v$, so ist (§. 10):

$$a = 1,\ b = -(1+m^2),\ c = m^2, \text{ also da } \sqrt{a + bV^2 + cV^4} = \frac{\partial V}{\partial v} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v:$$

$$\operatorname{sn}^3 v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v$$
$$= (n-3)\int \operatorname{sn}^{n-4} v\, \partial v - (n-2)(1+m^2)\int \operatorname{sn}^{n-2} v\, \partial v + (n-1)m^2 \int \operatorname{sn}^n v\, \partial v.$$

In §. 14. haben wir gesehen, dass, wenn

$$\varphi(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4,$$

das Integral

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

auf die Form $\int G\partial v = Gv + H$, worin G und H Konstanten sind, zurückgeführt werden kann. Hat man nun einen Ausdruck

$$\int \frac{X\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

worin X eine rationale Funktion von x ist, so setze man in X den Werth von x, der

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}} \text{ auf } \int G\partial v$$

bringt, wodurch $\int \frac{X\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}$ die Form $\int W\partial v$ annehmen wird, worin W eine rationale Funktion von Modularfunktionen (V) von v bezeichnet. Durch Zerlegung wird man also immer auf Formen:

$$\int V^r \partial v\,, \quad \int \frac{\partial v}{(\alpha+\beta V)^r}, \quad \int \frac{\partial v}{(\alpha+\beta V^2)}$$

kommen. Man kann nämlich bemerken, dass die Substitution für x, welche $\int \frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}$ auf die Form $\int G\partial v$ bringt, immer die Form

$$x = \frac{a+bV}{c+dV} \text{ oder } x = \frac{a+b\,V^2}{c+d\,V^2}$$

hat. Die erste der obigen drei Formen haben wir so eben betrachtet. Was die zweite anbelangt, so ist

$$\int \frac{\partial v}{(\alpha+\beta V)^r} = \int \frac{\partial V}{(\alpha+\beta V)^r (a+bV^2+cV^4)^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzt man in dem Ausdruck $\frac{\sqrt{a+bV^2+cV^4}}{(\alpha+\beta V)^{r-1}}$, $\alpha+\beta V = \lambda$, differenzirt ihn in Bezug auf λ und bemerkt, dass

$$\frac{1}{\sqrt{a+bV^2+cV^4}} = \pm \frac{\partial v}{\partial V},$$

so erhält man

$$\pm\frac{\beta^3\sqrt{a+bV^2+cV^4}}{(\alpha+\beta V)^{r-1}}$$

$$=-(a\beta^4+b\alpha^2\beta^2+c\alpha^4)(r-1)\int\frac{\partial v}{(\alpha+\beta V)^r}+(2c\alpha^3+b\alpha\beta^2)(2r-3)\int\frac{\partial v}{(\alpha+\beta V)^{r-1}}$$

$$-(6c\alpha^2+b\beta^2)(r-2)\int\frac{\partial v}{(\alpha+\beta V)^{r-2}}+2\alpha c\,(2r-5)\int\frac{\partial v}{(\alpha+\beta V)^{r-3}}$$

$$-c(r-3)\int\frac{\partial v}{(\alpha+\beta V)^{r-4}}. \quad (3)$$

Ganz eben so, wenn $\alpha+\beta V^2 \doteq \lambda$ gesetzt wird, und unter derselben Bedeutung für das Doppelzeichen:

(4)

$$\pm\frac{\beta V\sqrt{a+bV^2+cV^4}}{(\alpha+\beta V^2)^{r-1}}=\left(\frac{\alpha^3 c}{\beta}-b\alpha^2+\alpha\beta a\right)(2r-2)\int\frac{\partial v}{(\alpha+\beta V^2)^r}$$

$$-\left(a\beta-2b\alpha+\frac{3c\alpha^2}{\beta}\right)(2r-3)\int\frac{\partial v}{(\alpha+\beta V^2)^{r-1}}$$

$$-\left(b-\frac{3c\alpha}{\beta}\right)(2r-4)\int\frac{\partial v}{(\alpha+\beta V^2)^{r-2}}-\frac{c}{\beta}(2r-5)\int\frac{\partial v}{(\alpha+\beta V^2)^{r-3}},$$

welche beide Formeln ein Integral auf eine Reihe anderer reduziren. Die obige Behauptung, dass

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

auf die Form $\int G\partial v$ durch eine Substitution

$$x=\frac{a+bV}{c+dV} \text{ oder } x=\frac{a+bV^2}{c+dV^2}$$

gebracht werde, bedarf nun noch einer kurzen Rechtfertigung.

In den §§. 13. 14. liegt dies nicht so ganz klar vor Augen, und doch muss es der Fall sein, wenn obige Reduktionsformeln sollen angewendet werden können. Wir wollen desswegen die Fälle des §. 14. nochmals kurz, auch in dieser Beziehung, betrachten, und nachweisen, dass durch eine derartige Substitution der Zweck erreicht wird. (Die Nummern beziehen sich auf die des §. 14).

I. Man setze

$$x=\frac{f+gh\,\mathrm{tn}v}{1+h\,\mathrm{tn}v}$$

und bestimme f, g, so, dass

$$a+bg+bf+cfg=0,\ a'+b'g+b'f+c'fg=0;$$

aus welchen Gleichungen f, g unzweideutig bestimmt werden kön nen. Ferner bestimme man h so, dass dann

$$h=\sqrt{\frac{a+2bf+cf^2}{a+2bg+cg^2}},$$

und der Modulus m sei so bestimmt, dass

$$m'^2=\frac{a'+2b'g+c'g^2}{a'+2b'f+c'f^2}h^2,$$

so findet man für das Integral:

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}=\int\frac{(g-f)h\partial v}{\sqrt{(a+2bf+cf^2)(a'+2b'f+c'f^2)}}.$$

II. Die angezeigten Substitutionen führen zu einer Formel in z, welche mit der (I) des §. 13. zusammentrifft. Es ist also dann zu setzen:

$$z^2=k\frac{1-\mathrm{cn}v}{1+\mathrm{cn}v}=\begin{cases}\dfrac{x-n'}{n-x}\\[2mm]\dfrac{n'-x}{n-x}\\[2mm]\dfrac{x-n'}{x-n}\end{cases}$$

woraus der Satz folgt.

III. Sämmtliche Fälle führen auf die Formel in II. §. 13., woraus nun ebenfalls der Satz erwiesen ist.

Die Formen

$$\int\frac{\partial v}{\alpha+\beta V},\quad\int\frac{\partial v}{\alpha+\beta V^2},$$

auf welche die Formeln (3) und (4) führen, gehören zu den in §. 26. und §. 23. betrachteten.

Damit schliessen wir die Uebersicht der Theorie der elliptischen Funktionen. Etwas Vollständiges zu geben, lag, wie schon früher gesagt wurde, nicht in unserer Absicht, doch glauben wir die Hauptmomente, die in der Anwendung auf die Integralrechnung wichtig sind, angedeutet zu haben. Es mag zum Schlusse nur noch bemerkt werden, dass die in §. 23. eingeführte Funktion $J(u,a)$ zur dritten Gattung der elliptischen Funktionen, nach Legendre's Benennung, gehört, und dieser sie mit Π als Funktionszeichen bezeichnet.

II.

Bemerkungen über Inhalt und Behandlungsweise der Differenzen- und Summenrechnung mit Rücksicht auf die Schrift „Theorie der Differenzen und Summen, ein Lehrbuch von Dr. O. Schlömilch, ausserord. Prof. a. d. Univ. Jena, Halle bei Schmidt 1848." 241 S. Pr. 2 fl. 24 kr.

Von dem

Herrn Hofrath L. Oettinger

zu Freiburg i. B.

---

§. 1.

Um den Gang unserer Bemerkungen nicht zu unterbrechen, und um den Leser in den Stand zu setzen, sich selbst ein Urtheil über die Brauchbarkeit des vorliegenden Lehrbuches zu bilden, soll Inhalt und Umfang desselben nach des Verf. eigener Angabe hier mitgetheilt und, wo es nöthig schien, in kurzen Zusätzen das Nähere der einzelnen Ausführungen angedeutet werden.

1. Theil. Differenzenrechnung. §. 1. Die Functionen u. ihre Differenzen (Begriff beider.) §. 2. Die Differenzen der einfachsten Functionen. §. 3. Zusammengesetzter Funct. (Summen, Producte und Quotienten). §. 4. Diff. höherer Ordnungen ($\Delta^n fx$ und Anwendung auf die besondern Fälle: b^x, x^m, $\operatorname{Sin} x$, $\operatorname{Cos} x$). §. 5. Umkehrung des im vorigen §. behandelten Problems. (Entwicklung von $f(x+h)$ nach den Unterschieden von fx). §. 6. Digression über das Theorem von Taylor (und das von Maclaurin.). §. 7. Die Interpolationsformel (mit Anwendungen). §. 8. Diff. der Funct. mehrerer Variabeln. (§. 3. und §. 8. gehört eigentlich zusammen). §. 9. Zusammenhang zwischen den Differenzen und höhern Differenzialquotienten einer Function. §. 10. Zwei Recursionsformeln für die Bernoulli'schen Zahlen. §. 11. Summirung einer Reihe von Differenzen. §. 12. Restbetrachtung. §. 13. Entwicklung von $h:(e^h-1)$. §. 14. Entwicklung von $\Gamma(x)$ (der Fakultät $1^{x-1|1}$ oder $(1,1)^{x-1}$). §. 15. Näherungsformeln für Factoriellen.

2. Theil. Summenrechnung. §. 1. Begriff und Bezeichnungsweise der Summenrechnung. §. 2. Summen der einfachsten Functionen ($x^{n|h}$, $\frac{1}{x^{n|h}}$, a^x, Sin$x$, Cos$x$). §. 3. Allgemeine Regeln für die endliche Integration zusammengesetzter Funct. (Summen, Producte). §. 4. Endliche Integration der rationalen ganzen algebraischen Functionen (x^m). §. 5. Gebrochener rationaler algebraischer Functionen. §. 6. Summirung von $x^m a^x$, x^m Cos$x$, x^m Sin$x$ (1te und 2te Potenz von x) §. 7. Integration von Cos$^m x$, Sin$^m x$ und ähnlicher Functionen. §. 8. Die vielfachen endlichen Integrale ($\Sigma^n a^x$, Σ^n Sin$x$, Σ^n Cos$x$). §. 9. Integration durch Potenzenreihen. §. 10. Durch goniometrische Reihen. §. 11. Durch halb convergente Reihen. §. 12. Beispiele zu den Theoremen des vorigen §. (Σx^m, $\Sigma\frac{1}{x}$, $\Sigma\frac{1}{x^m}$, $\Sigma\frac{k}{k^2+x^2}$). §. 13. Digression über die näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale. §. 14. Einfache Summirung durch Quadraturen. §. 15. Beispiele und Erweiterung des vorigen Theorems. §. 16. Reduction vielfacher Summen auf einfache bestimmte Integrale.

3. Theil. Differenzengleichungen. §. 1. Allgemeine Begriffe. §. 2. Integration der Differenzengleichungen ersten Grades erster Ordnung. §. 3. Diff. Gleich. 1ten Grades und beliebiger Ordnung. §. 4. und §. 5. Fortsetzung. § 6. Integration durch bestimmte Integrale. §. 7. Beispiele zur vorigen Methode. §. 8. Integration mit Hülfe unendlicher Reihen. §. 9. Diff. Gleich. mit zwei unabhängigen Variabeln. §. 10. Fortsetzung. §. 11. Diff. Gleich. mit mehreren unabhängigen Variabeln. Literarhistorisches.

Der Zweck des Verf. bei Bearbeitung dieser Schrift war, ein *Compendium* für akademische Vorträge und zugleich ein Lehrbuch zum Selbstunterrichte zu geben und dadurch mehr zur grössern Verbreitung dieser Wissenschaft, als zu ihrer Erweiterung beizutragen. Zur Durchführung seines Zweckes stand ihm reiches Material zu Gebot, das in den hierher gehörigen Werken und Zeitschriften enthalten ist. An Stoff zur Verarbeitung ist daher ein Arbeiter weniger arm als zweifelhaft über die Art, wie ein so reichhaltiger, in so vielen Schriften zerstreut liegender und aus den verschiedenen Zweigen der Mathematik herbei zu holender Stoff in eine Theorie verarbeitet werden soll, denn nicht nur und vor allem die Differenzen-Rechnung, sondern auch die Differenzial-, die Integralrechnung, die combinatorische Analysis, die Umformung der Functionen in Reihen etc. liefern in freigebigem Wetteifer ihre Gaben zur Bereicherung und Erweiterung des hier in Frage stehenden Zweiges der Mathematik.

Das Verdienstliche einer solchen Arbeit, worauf der Verf. in seinem Vorworte Anspruch macht, wird gewiss jeder Freund der Wissenschaft gerne anerkennen, und eine derartige Schrift wird freundlich begrüsst werden, da bis jetzt in Deutschland keine solche existirt, worin der Gedanke einer Verarbeitung des vorhandenen Materials durchzuführen versucht wurde, ob er gleich nicht alle dienstbare Zweige der Mathematik zu seinem Zwecke in Anspruch nahm, sondern eine Auswahl traf, und auch nicht alle vorhandenen Vorarbeiten (gerade in der Differenzen-Rechnung) benutzte, was er durch Verlassensein von literarischen Hülfsmitteln entschuldigt wissen will.

Die ersten Grundzüge zu einer Differenzen- und Summenrechnung sind im 2. Bande von Eulers Differenzialrechnung zu finden. Von Lacroix wurden sie später in seinem Traité d. calc. differ. et intégr. T. III. Chap. I—III. weiter ausgeführt. Sie führen die Aufschriften I. Calcul direct des différences (Differenzenrechnung). II. Calcul inverse des différences (darin behandelt Lacroix zweierlei: die Differenzen mit negativen Exponenten, die er mit Σ bezeichnet und die Summen, die er mit S bezeichnet, ohne jedoch einen Unterschied zwischen beiden festzustellen. Euler hat schon diese zwei Zeichen gebraucht). III. Intégration des équations aux differences (Differenzen-Gleichungen). Die gleiche Eintheilung hat der Verf. gewählt.

Dass von ihm nicht alle zu seiner Aufgabe gehörigen Betrachtungen und Untersuchungen beigezogen und mitgetheilt wurden, lässt sich begreifen. Es wäre für ein Lehrbuch zu weitführend, denn hierbei kann man nur sichtend und auswählend zu Werke gehn. Auch muss ohnedem jede Untersuchung, die in eine aufzustellende Theorie aufgenommen werden soll, dieser angepasst werden, was oft mit Schwierigkeiten, die mit dem Erfolge nicht im Einklange stehen, verbunden ist. Auch genügen geschichtliche Notizen über die Orte, wo die bezüglichen Untersuchungen nachzulesen sind. Bei Lösung seiner Aufgabe hat der Verf. die Differenzial- und Integralrechnung als dienstleistende Nebenzweige in Anspruch genommen. Eine Reihe von Untersuchungen, die mit dem in Frage stehenden Gegenstand genau zusammenhängen, und die in Crelle's Journal 11ter—16ter Band und 33ster Bd. enthalten sind, hat er nicht benutzt, worauf wir gelegentlich wieder zurückkommen werden.

Gesteht man nun, und diess ist Pflicht, einem Verf. das Recht zu, einen Gegenstand, den er bearbeiten will, einzugrenzen und die Art und Weise, wie er ihn bearbeiten will, festzustellen, so ist geboten, die gelieferte Arbeit nach dieser Eingrenzung zu beurtheilen. Ich kann nun nicht umhin sofort zu bemerken, dass d. Verf. seinen Gegenstand mit Gewandtheit und Eleganz behandelt, und kurz und klar entwickelt hat, was er geben wollte. Der Leser wird nicht bereuen, den Darstellungen des Verfs. gefolgt zu sein. Weniger übereinstimmend ist meine Ansicht mit der des Verf. über die Grundlage, worauf er den in Frage stehenden Zweig der Mathematik als Wissenschaft aufbauen zu müssen glaubte. Da ich gerne das Verdienst des Verf. in Beziehung auf die vorliegende Schrift anerkenne, so wird es auch wohl nicht missdeutet werden, wenn ich die Ansicht über die Art und Weise hier ausspreche, welche ich für die zweckmässigste in der Begründung einer Theorie der Differenzen- und Summen-Rechnung, zweier in innerm und deswegen nothwendigem Zusammenhang stehenden Doctrinen, halte, und diess in einigen Bemerkungen nachzuweisen suche. Ich thue diess in der Ueberzeugung, dass eine solche Besprechung nur die Sache selbst fördern und der Wissenschaft dienen kann. Der künftige Bearbeiter mag dann, wenn er diese Zeilen etwa liest, bemessen, was an der hier vorgetragenen Ansicht, gegenüber der von dem Verf. befolgten, sich bewahrheiten wird, was nicht.

§. 2.

Die Hauptaufgabe des hier besprochenen Zweiges der Mathenach ist die **Darstellung der Summenausdrücke für eine Reihe von Gliedern, die nach einem gemeinschaftlichen Gesetze fortschreiten**, oder **Integral-Rechnung für endliche Differenzen.**

In dieser Weise ist die Aufgabe vorerst nicht bestimmt, denn sie nimmt, wie schon oben bemerkt, alle Zweige der Mathematik, jedes für ihren Zweck verfügbare und diensame Mittel, jeden glücklichen Kunstgriff für ihre Lösung in Anspruch, und ist in dieser Unbestimmtheit auch nicht einer systematischen Behandlungsweise zugänglich, denn sie hängt von Aeusserlichkeiten und Zufälligkeiten ab. Letzteres wird sie erst dann, wenn man auf die einzelnen ihr dienenden Zweige der Mathematik selbst eindringt, und fragt: können Mittel beschafft werden, wodurch für die einfachen und zusammengesetzten Functionen der Analysis, welche sich in Reihen gruppiren lassen, sich Summenausdrücke nach allgemeinen Gesetzen auffinden lassen. Diese Mittel liefert die Rechnung **mit endlichen Differenzen** am vollständigsten, und zwar in der Weise, dass sich für sie ein in sich abgeschlossenes System aufstellen und durchführen lässt, wie sich im Folgenden zeigen wird. Ist nun auf diesem Wege eine feste Basis gewonnen und sind die Mittel der Differenzen-Rechnung erschöpft, dann ist es an der Reihe, sich nach andern Mitteln aus den übrigen Zweigen der Mathematik zur Ergänzung, Förderung und Erweiterung der vorhandenen umzusehen. Diese finden sich sofort weiter in der Differenzial- und Integralrechnung, beide aber nur in zweiter Linie, worauf dann noch weitere Hülfsmittel gesucht werden mögen.

Geht man nun auf den in der Summenrechnung zu verarbeitenden Stoff selbst näher ein, so gruppiren sich die Reihen in **zwei Hauptarten**: in solche, deren Glieder mit **einerlei Zeichen**, und solche, deren Glieder mit **abwechselnden Zeichen** verbunden sind.

Diese Unterscheidung kann aber in einer Theorie der Summenrechnung, wenn diese anders ihrer Aufgabe genügen will, nicht wohl ignorirt werden. Schon **Euler** hat in seiner Differenzialrechnung einige hierhergehörige Fälle der zweiten Art betrachtet, und **Lacroix** ist in dem oben angeführten **Werke** auch darauf zurückgekommen. In beiden Schriften liegen aber nur ungeordnete und zusammenhangslose Anfänge vor. Der Verf. ist hierauf gar nicht eingegangen. In einer Theorie genügt es nun, wie sich von selbst versteht, nicht an der Aufführung einiger Fälle, sondern an der Durchführung eines Princips, und an Auffindung der Mittel, welche diese sicher stellen. Ich habe in einer Reihe von Abhandlungen, die in **Crelle's Journal 11ter—16ter und im 33sten Bd.** erschienen sind, und die auch unter dem Titel „**Die Lehre von den aufsteigenden Functionen nebst einer auf sie gegründeten Summen-Rechnung**". **Berlin 1836**" als besondere Schrift ausgegeben wurden, gezeigt, dass beide Arten von Reihen ganz allgemeinen Gesetzen unterliegen, die unter einander in sehr engem Zusammenhange stehn, und sich eben so einfach als consequent einem durchgreifenden Systeme fügen. Von der ersten Hauptgruppe der Reihen (deren Glieder mit einerlei Zeichen versehen sind) war diess schon theilweise bekannt, denn die Vorarbeiten waren mannichfaltiger. Bei der zweiten Hauptgruppe fehlen diese Vorarbeiten. Nichts desto weniger ist ihre nähere Untersuchung lohnend, und führt auf Resultate, die denen an Interesse nicht nachstehen, welche bisher über die erste Hauptgruppe der Reihen aufgefunden wurden, und die dem Verf. gewiss manche neue Anhaltpunkte geboten haben würden, wenn er ihnen seine Aufmerksamkeit zugewendet hätte.

Der Zusammenhang, worin nun die genannten zwei Hauptarten von Reihen unter einander stehen, ist sehr einfach und folgender.

Der Begriff von der Differenz einer Function ist in der Gleichung

$$1.\quad \Delta fx = f(x+h) - fx$$

enthalten. Hiernach hat man den veränderlichen Theil der Function um eine bestimmte Zunahme wachsen zu lassen, und von der so veränderten Function die ursprüngliche Function abzuziehen. Die weitere Verfolgung dieses Begriffs führt auf eine Reihe, deren Glieder durch einerlei Zeichen mit einander verbunden sind:

$$2.\quad fx + f(x+h) + f(x+2h) + \ldots + f(x+mh).$$

Dem Begriffe der Differenz steht der der Zuzählung oder Aufstufung einer Function, wie ich ihn genannt habe, zur Seite. Er beruht darauf, dass man wie vorhin den veränderlichen Theil einer Function um eine bestimmte Zunahme wachsen lässt und zu der so veränderten Function die ursprüngliche zählt. Da für dieses Geschäft ein Zeichen gewählt werden musste, so habe ich nach Analogie von Δ den griechischen Buchstaben ζ gewählt. Hiernach ist

$$3.\quad \zeta fx = f(x+h) + fx.$$

Die weitere Verfolgung dieser Idee führt zu dem Begriffe von Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind und bestimmten Gesetzen folgen:

$$4.\quad fx - f(x+h) + f(x+2h) - \ldots\ldots \pm f(x+mh).$$

Es ist nun nicht zu leugnen, dass durch Aufnahme der hier angedeuteten Grundlage die Arbeit etwas ausgedehnter geworden wäre. Ich glaube aber, dass ein Zusatz von einigen §§. mehr hingereicht hätte, die erweiterte Theorie durchzuführen, denn es handelt sich hierbei nicht um Aufnahme grösserer und weitführender Untersuchungen, sondern um Begründung des Systems. In meiner Algebra habe ich es versucht, in dieser Weise die allgemeinen Grundzüge für eine auf den Differenzen und Aufstufungen beruhende Summenrechnung für beide Hauptgruppen der Reihen zu geben und die Ausführung, die sich allerdings nicht weiter als auf die einfachen Functionen erstreckte, füllt nicht zwei volle Bogen aus.

Dabei stehen die Methoden, welche die Verfolgung der oben vorgelegten Idee an die Hand gibt, den bisher bekannten weder an Allgemeinheit, noch an Leichtigkeit der Anwendung, noch an praktischer Brauchbarkeit nach, wie eine Vergleichung an die Hand giebt. Der Verf. hat nämlich nach dem Vorworte mit Recht vermieden „sehr weitläufige Untersuchungen" aufzunehmen, die entweder nur einen „geringen Grad von Allgemeinheit" besassen, oder zu so „unförmlichen Resultaten" führten, dass man ihre „praktische Brauchbarkeit" in Zweifel ziehen musste. Gerade in Einverständniss mit der Absicht des Verf. wäre es wünschenswerth gewesen, wenn er auf eine eben so einfache als klare, ebenso allgemeine als praktische Idee eingegangen wäre, denn die Resultate, worauf sie führt, überraschen durch ihre grosse Anwendbarkeit, und durch das Zwanglose, womit sie sich den strengen Forderungen eines Systems unterordnen, was wir leider in dem Gange, welchen der Verf. verfolgte, nicht hervorgehoben finden. Um diess zu zeigen, sehen wir uns veranlasst auf einige Einzelnheiten einzugehen.

§. 3.

Durch Wiederholung des in 1. und 2. des vorigen §. angedeuteten Geschäfts wird man auf die zweite, dritte, vierte **Differenz** oder **Aufstufung** etc. (Differenzen und Aufstufungen höherer Ordnung) geführt. Bezeichnet man der Kürze wegen die Glieder der ursprünglichen Reihe (Grundreihe) durch $X_0, X_1, X_2, \ldots X_m$, so dass $f(x+mh)=X_m$ bedeutet, so ergeben sich durch einen sehr einfachen Calcul folgende Gleichungen:

$$1.\quad \Delta^m X_0 = X_m - m X_{m-1} + (m)_2 X_{m-2} - \ldots (-)^m (m)_m X_0$$

(§. 24. Crelle's Journ. 12. Bd.)

$$2\quad \zeta^m X_0 = X_m + m X_{m-1} + (m)_2 X_{m-2} + \ldots (m)_m X_0$$ (§. 3. Cr. J. 11. Bd.)*)

worin $(m)_r = \dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1.2\quad 3\ldots\ldots r}$ bedeutet.

Eben so findet man für das umgekehrte Problem:

$$3.\quad X_m = X_0 + m\Delta X_0 + (m)_2 \Delta^2 X_0 + \ldots (m)_m \Delta^m X_0.$$

(§. 26. Cr. Jour. 12. Bd.)

$$4.\quad X_m = \zeta^m X - m\zeta^{m-1} X_0 + (m)_2 \zeta^{m-2} X_0 \ldots (-)^m X_0. \qquad (\text{§. 5.})$$

Es zeigt sich nun leicht, dass diese Gleichungen auch für ein **negatives** m gelten, und man erhält:

$$5.\quad \Delta^{-m} X_0 = X_m + m X_{-m-1} + [m]_2 X_{-m-2} + \ldots \qquad (\text{§. 25.})$$

$$6.\quad \zeta^{-m} X_0 = X_{-m} - m X_{-m-1} + [m]_2 X_{-m-2} \ldots \qquad (\text{§. 4.})$$

$$7.\quad X_{-m} = X_0 - m\Delta X_0 + [m]_2 \Delta^2 X_0 - [m]_3 \Delta^3 X_0 \ldots \qquad (\text{§. 26.})$$

---

*) Die Citationen sind hier nach §§. gegeben, damit sie nicht nur im Journ. v. Crelle, sondern auch in meiner Schrift „Lehre von den aufsteigenden Functionen" nachgesehen werden können.

$$8.\quad X_{-m} = \zeta^{-m}X_0 + m\zeta^{-m-1}X_0 + [m]_2\zeta^{-m-2}X_0 + \dots \qquad (\S.\ 5.)$$

worin $[m]_r = \frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+r-1)}{1\,.\,2\quad 3\,.\,.\,.\,.\,r}$ bedeutet. Von diesen Gleichungen, die sich so enge einander anschliessen, hat der Verf. nur 1. und 3. in §. 3. und §. 5. entwickelt. Den Zusammenhang, der zwischen den positiven und negativen höhern Unterschieden einer Function herrscht, hat er ausser Acht gelassen und damit eine reiche Quelle der Vergleichung und der Vervollständigung einer Theorie nicht benutzt. Auf S. 118. scheint er sogar diesen Zusammenhang und die allgemeinen Gesetze für die höhern Unterschiede in Abrede zu stellen.

Diese Gleichungen sind zwar vorerst nur formell, gelten aber von jeder einfachen Function ohne Unterschied. Um ihnen Inhalt zu geben, hat man die Gesetze des Unterschiedsnehmens und des Aufstufens auf die einzelnen Functionen anzuwenden. Diese sind bekanntlich x^p, a^x, $\lg x$, $x^{x|h}$, $\sin x$, $\cos x$..... Nicht alle lassen sich gleich leicht behandeln. Aber auch die weniger schmiegsamen lassen sich einem allgemein, für positive und negative m gültigen Gesetze unterwerfen. Wir weisen diess durch folgende Zusammenstellung nach.

$$9.\quad \Delta^m a^x = (a^h-1)^m a^x \qquad (\S.\ 32.)$$

$$10.\quad \Delta^m \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1-a^h}{a^h}\right)^m \frac{1}{a^x} \qquad (\S.\ 32.)$$

$$11.\quad \Delta^m x^{p|h} = p^{m|-1}(x+mh)^{p-m|h}h^m \qquad (\S.\ 30.)$$

$$12.\quad \Delta^m \frac{1}{x^{p|h}} = (-)^m \frac{p^{m|1}h^m}{x^{p+m|h}} \qquad (\S.\ 30.)$$

$$13.\quad \Delta^m \sin x = \sin\left(x + m\frac{\pi+h}{2}\right) \cdot 2^m\left(\sin\frac{1}{2}h\right)^m \qquad (\S.\ 33.)$$

$$14.\quad \Delta^m \cos x = \cos\left(x + m\frac{\pi+h}{2}\right) 2^m \left(\sin\frac{1}{2}h\right)^m \qquad (\S.\ 33.)$$

$$15.\quad \Delta^{-m} a^x = \frac{a^x}{(a^h-1)^m} = (a^h-1)^{-m}a^x \qquad (\S.\ 39.)$$

$$16.\quad \Delta^{-m}\frac{1}{a^x} = \frac{a^{mh}}{(1-a^h)^m}\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1-a^h}{a^h}\right)^{-m}\frac{1}{a^x} \qquad (\S.\ 39.)$$

$$17.\quad \Delta^{-m} x^{p|h} = \frac{p^{-m|-1}(x-mh)^{p+m|h}}{h^m} = \frac{(x-mh)^{p+m|h}}{(p+1)^{m|1}h^m} \qquad (\S.\ 38.)$$

$$18.\quad \Delta^{-m}\frac{1}{x^{p|h}} = (-)^{-m}\frac{p^{-m|1}h^{-m}}{x^{p-m|h}} = \frac{1}{(-)^m(p-1)^{m|-1}x^{p-m|h}}. \qquad (\S.\ 38.)$$

$$19.\quad \Delta^{-m}\operatorname{Sin}x = \frac{\operatorname{Sin}\left(x - m\frac{\pi+h}{2}\right)}{2^m(\operatorname{Sin}\frac{1}{2}h)^m}, \qquad (\S.\ 40.)$$

$$20.\quad \Delta^{-m}\operatorname{Cos}x = \frac{\operatorname{Cos}\left(x - m\frac{\pi+h}{2}\right)}{2^m(\operatorname{Sin}\frac{1}{2}h)^m}. \qquad (\S.\ 40.)$$

Die Identität der Darstellungen 9—14. für positive Unterschiede mit denen von 15—20 für negative Unterschiede derselben Functionen liegt so klar vor Augen, dass sie gar nicht bezweifelt werden kann. Für die positiven und negativen Aufstufungen der einfachen Functionen erhält man auf gleichem Wege:

$$21.\quad \zeta^m a^x = (1+a^h)^m a^x \qquad (\S.\ 10.)$$

$$22.\quad \zeta^m \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1+a^h}{a^h}\right)^m \cdot \frac{1}{a^x} \qquad (\S.\ 10.)$$

$$23.\quad \zeta^m \operatorname{Sin}x = 2^m \operatorname{Sin}\left(x + \frac{1}{2}mh\right)\left(\operatorname{Cos}\frac{1}{2}h\right)^m \qquad (\S.\ 11.)$$

$$24.\quad \zeta^m \operatorname{Cos}x = 2^m \operatorname{Cos}\left(x + \frac{1}{2}mh\right)(\operatorname{Cos}h)^m \qquad (\S.\ 12.)^{*)}$$

$$25.\quad \zeta^{-m} a^x = \frac{a^x}{(1+a^h)^m} = (1+a^h)^{-m} a^x \qquad (\S.\ 14.)$$

$$26.\quad \zeta^{-m} \frac{1}{a^x} = \left(\frac{a^h}{1+a^h}\right)^m \cdot \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1+a^h}{a^h}\right)^{-m} \cdot \frac{1}{a^x} \qquad (\S.\ 14.)$$

$$27.\quad \zeta^{-m}\operatorname{Sin}x = \frac{\operatorname{Sin}\left(x - \frac{mh}{2}\right)}{2^m(\operatorname{Cos}\frac{1}{2}h)^m} \qquad (\S.\ 15.)$$

$$28.\quad \zeta^{-m}\operatorname{Cos}x = \frac{\operatorname{Cos}\left(x - \frac{1}{2}mh\right)}{2^m(\operatorname{Cos}\frac{1}{2}h)^m} \qquad (\S.\ 16.)$$

---

*) Anm. In den oben angeführten §§. (§. 11, 12, 15 und 16 Crelle's Journ. 11. Bd.) sind durch ein Versehen auch die Formen

$$\zeta^m \operatorname{Sin}x = (-)^m 2^m \operatorname{Sin}\left(x + \frac{1}{2}mh\right)\left(\operatorname{Cos}\frac{1}{2}h\right)^m,$$

$$\zeta^m \operatorname{Cos}x = (-)^m 2^m \operatorname{Cos}\left(x + \frac{1}{2}mh\right)\left(\operatorname{Cos}\frac{1}{2}h\right)^m$$

als gültig angegeben worden. Diess ist nicht der Fall, was ich hier verbessernd bemerke. Das Gleiche gilt von den negativen Aufstufungen von $\operatorname{Sin}x$ und $\operatorname{Cos}x$.

Auch hier tritt die Identität der Gleichungen 21—24 mit 25—28 für positive und negative Aufstufungen klar hervor. Ja der Zusammenhang zwischen den höhern Unterschieden und den höhern Aufstufungen 9—20 und 21—28 ist nicht zu verkennen.

Die Darstellung für $\Delta^{\pm m} a^x$ und $\zeta^{\pm m} a^x$, $\Delta^{\pm m} \frac{1}{a^x}$ und $\zeta^{\pm m} \frac{1}{a^x}$ $\Delta^{\pm m}$ Sin$x$ und $\zeta^{\pm m}$ Sin$x$, $\Delta^{\pm m}$ Cos$x$ und $\zeta^{\pm m}$ Cos$x$ ergänzen sich gegenseitig im Systeme, und sollten aus diesem Grunde schon in einer Theorie nicht übergangen werden, abgesehen von der Anwendbarkeit und Brauchbarkeit, welche sie in der Summenrechnung zeigen. Die Gleichungen 13. und 14.; 15., 19. und 20. sind zwar von dem Verf. (S. 19. §. 4. u. S. 117. §. 8.) angegeben, auf den Zusammenhang aber, der zwischen ihnen herrscht (für die Theorie der Differenzen gewiss nicht unwichtig), ist nicht hingewiesen. Er ist sogar durch die Darstellungen, die auf der Seite 117. gegeben sind, verwischt. Zu dem hat sich in die dort mitgetheilten Darstellungen ein Versehen eingeschlichen. Die Formeln, die wir in der Bezeichnung des Verf. hier geben, sollen wohl heissen:

$$\Sigma^n \operatorname{Sin} x = \left(\frac{1}{2} \operatorname{Cosec} \frac{1}{2}h\right)^n \operatorname{Sin}\left(x - n\frac{\pi + h}{2}\right) \text{ und}$$

$$\Sigma^n \operatorname{Cos} x = \left(\frac{1}{2} \operatorname{Cosec} \frac{1}{2}h\right)^n \operatorname{Cos}\left(x - n\frac{\pi + h}{2}\right),$$

während sich dort vorfindet:

$$\Sigma^n \operatorname{Sin} x = \left(2 \operatorname{Cosec} \frac{1}{2}h\right)^n \operatorname{Sin}\left(x - n\frac{\pi + h}{2}\right),$$

$$\Sigma^n \operatorname{Cos} x = \left(2 \operatorname{Cosec} \frac{1}{2}h\right)^n \operatorname{Cos}\left(x - n\frac{\pi + h}{2}\right);$$

was mehrere mal vorkommt, während die Gleichungen, woraus diese Darstellungen abgeleitet sind, in §. 2. S. 90. richtig stehen.

§. 4.

Nicht so willig lassen sich die Functionen x^p und lg$x$ für die Differenzen und Aufstufungen und $x^{p|h}$ für die Aufstufungen behandeln. Um auch diese dem allgemeinen Gesetze zu unterwerfen, dient die Methode der Darstellung der Unterschiede und Aufstufungen durch Differenziale und Integrale.

Um diess nachzuweisen, sind allerdings einige andere Untersuchungen nöthig, die jedoch durchaus nicht weit ausgreifend sind. Die hierzu erforderlichen Gleichungen finden sich (§. 42. Crelles Journ. 12. Bd. §. 19. und 20. Cr. Journ. 33. Bd.) angegeben, und entwickelt. Sie sind

$$1.\quad \Delta^m X = \frac{\partial^m X . h^m}{(\partial x)^m} + \frac{SC'(1,2,\ldots m)^1}{m+1} \frac{\partial^{m+1} X . h^{m+1}}{(\partial x)^{m+1}}$$

$$+ \frac{SC'(1,2,\ldots m)^2}{(m+1)^{2|1}} \frac{\partial^{m+2} X h^{m+2}}{(\partial x)^{m+2}},$$

$$\vdots$$

oder

$$2.\quad \Delta^m X = (e^{\frac{h.\partial}{\partial x}} - 1)^m X,$$

$$3.\quad \zeta^m X = \left(1 + e^{\frac{h.\partial}{\partial x}}\right)^m X.$$

Alle drei Darstellungen sind allgemein und gelten für ein positives und negatives (ja sogar für ein gebrochenes pos. und neg.) m. Unter $SC'(1,2\ldots m)^r$ ist der Summenausdruck der Verbindungen mit Wiederholungen aus m Elementen zur $r$ten Classe verstanden, oder ein Fakultäten-Coefficient, wie ihn der Verf., den Begriff von einem speciellen Fall ableitend, nennt und womit er sich mehrfach (§. 10. S. 44. §. 16. S. 165.), jedoch immer nur im besondern Falle, beschäftigt. Die Darstellung dieser Summenausdrücke für die verschiedenen Classen ist sehr wichtig, denn sie sind in der Analysis sehr verbreitet, und haben für viele Entwicklungen (nicht allein für die Fakultäten) dieselbe Bedeutung, wie die Binomialcoefficienten für andere. Es lohnt sich daher wohl der Mühe sich mit ihnen zu beschäftigen, und die allgemeinen, für sie geltenden Bildungsgesetze zu ermitteln. Hat man sie gefunden, so ist man der Mühe, sie in jedem speciellen Fall wiederholt aufzusuchen, überhoben. Ihre Darstellung wird durch eine merkwürdige Beziehung, worin die Summenausdrücke der Verbindungen mit und ohne Wiederholungen zu einander stehen, und die ich (§. 8. 33. Bd. Crelle's Journ.) nachgewiesen habe, erleichtert. Ist nämlich der Ausdruck für $SC'(1,2,3,\ldots m)^r$, gefunden, so gilt derselbe unmittelbar für $SC(1,2,3,\ldots m-1)^r$ wenn $(-m)$ statt $(+m)$ in ihm gesetzt wird und umgekehrt. Die Bernoullischen Zahlen sind ein besonderer Fall dieser Summenausdrücke. Man findet sie, wenn $m=-1$ gesetzt wird. Benutzt man diese Bemerkungen und die im 33. Bd. Crelle's Journ. §. 19. und 20. gegebenen Entwicklungen, so erhält man aus 1. und 2.

$$4.\quad \Delta^m X = \frac{\partial^m X}{(\partial x)^m} h^m + \frac{m}{2} \frac{\partial^{m+1} X}{(\partial x)^{m+1}} h^{m+1} + \frac{3m+1}{1.2.3.4} m . \frac{\partial^{m+2} X}{(\partial x)^{m+2}} h^{m+2}$$

$$+ \frac{m(m+1)m}{2.1.2.3.4} \frac{\partial^{m+3} X}{(\partial x)^{m+3}} h^{m+3}$$

$$+ \frac{15m^3+30m^2+5m-2}{48.1^{6|1}} m \frac{\partial^{m+4} X}{(\partial x)^{m+4}} h^{m+4}$$

$$\vdots$$

$$5.\ \Delta^{-m}X=\frac{1}{h^m}\int^m X(\partial x)^m-\frac{m}{2h^{m-1}}\int^{m-1}X(\partial x)^{m-1}$$
$$+\frac{(3m-1)m}{1^{4|1}h^{m-2}}\int^{m-2}X(\partial x)^{m-2}$$
$$-\frac{m(m-1)m}{2.1^{4|1}h^{m-3}}\int^{m-3}X(\partial x)^{m-3}$$
$$+\frac{15m^3-30m^2+5m+2}{48.1^{5|1}h^{m-4}}m\int^{m-4}X(\partial x)^{m-4}$$
$$\vdots$$

Beide Darstellungen unterliegen offenbar einem und demselben Bildungsgesetze für $(+m)$ und $(-m)$, wenn man, wie sich leicht erweisen lässt, bemerkt, dass

$$6.\ \frac{\partial^{-r}X}{(\partial x)^{-r}}=\int^r X(\partial x)^r \text{ und } \int^{-r}X(\partial x)^{-r}=\frac{\partial^r X}{(\partial x)^r}.$$

Sie gelten sogar für gebrochene m. Der besondere Fall, wenn $m=1$ in 5. ist, wofür der Verf. seiner Wichtigkeit wegen zwei zurücklaufende Bildungsweisen mittheilt, gibt die bekannte Bernoullische Reihe, und es ist

$$7.\ \Delta^{-1}X=\Sigma X=(e^{\frac{h\partial}{\partial x}}-1)X$$
$$=\frac{1}{h}\int X\partial x-\frac{1}{2}X+\frac{1}{12}\frac{\partial X}{\partial x}h-\frac{1}{120}\frac{\partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3}h^3$$
$$+\frac{1}{252}\frac{\partial^5 X.h^5}{1.2.5(\partial x)^5}-\dots$$

So oft man nun die höhern Differenziale und Integrale einer Function darstellen kann, so oft kann man auch hiernach $\Delta^{+m}X$ und $\Delta^{-m}X$ geben. Für $X=x^{p|}$ (die noch fragliche Function) ergeben sie sich leicht. Für $X=\lg x$ sind die höhern Differenziale auch bekannt. Die höhern Integrale aber sind, so viel mir bekannt ist, nicht gegeben. Die nachstehenden Gleichungen werden die erforderlichen Dienste leisten und das Fehlende ergänzen. Es ist im Allgemeinen

$$8.\ \int^p \lg y(\partial y)^p=\frac{y^p}{1^{p|1}}\left(\lg y-\frac{SC(1,2,..p)^{p-1}}{1^{p|1}}\right),$$

$$9.\ \int^{p+1}\frac{(\partial y)^{p+1}}{y}=\frac{y^p}{1^{p|1}}\left(\lg y-\frac{SC(1,2,..p)^{p-1}}{1^{p|1}}\right);$$

worin $1^{p|1}=1.2.3...p$ und $SC(1,2,3,..p)^{p-1}$ die Summen der Verbindungen ohne Wiederholungen aus p Elementen zur $(p-1)$ten Classe sind.

Aus 3. erhält man mit diesen Mitteln ausgerüstet:

$$10.\ \zeta^m X=2^m X+m2^{m-1}h\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$+\left(m.2^{m-1}+m^{2|-1}.2^{m-2}\right)\frac{h^2\partial^2 X}{1.2(\partial x)^2}$$

$$+\left(m.2^{m-1}+3m^{2|-1}.2^{m-2}+m^{3|-1}2^{m-3}\right)\frac{h^3\partial^3 X}{1.2.3.(\partial x)^3}$$

$$+\left(m.2^{m-1}+7m^{2|-1}2^{m-2}+6m^{3|-1}2^{m-3}+m^{4|-1}2^{m-4}\right)\frac{h^4\partial^4 X}{1.2.3.4.(\partial x)^4}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Diese Darstellung gilt für jedes beliebige m und stellt die positiven und negativen Aufstufungen jeder beliebigen Function (also $\lg x$, x^p etc.) dar. Der besondere Fall, wenn $m=-1$, gibt eine bemerkenswerthe Reihe; sie ist

$$11.\quad \zeta^{-1}X=\frac{X}{2}-\frac{1}{4}\frac{h\partial X}{\partial x}+\frac{1}{8}\frac{h^3\partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3}-\frac{1}{4}\frac{h^5\partial^5 X}{1.2\ldots5.(\partial x)^5}$$
$$+\frac{17}{16}\frac{h^7\partial^7 X}{1.2\ldots7(\partial x)^7}-\ldots$$

und steht der Bernoullischen Reihe zur Seite, denn sie lehrt die Potenzenreihen mit abwechselnden Zeichen

$$1^p-2^p+3^p-4^p+\ldots\pm x^p$$

summiren, wie die Bernoullische Reihe die Potenzenreihen mit einerlei Zeichen summiren lehrt, und hat daher dieselbe praktische Bedeutung in einer Theorie der Summenrechnung wie die Bernoullische Reihe.

§. 5.

Die §§. 2—4. enthalten nach unserm Erachten in kurzem Umriss die Grundlage einer Rechnung mit endlichen Differenzen, und zwar vorerst für einfache Functionen. Hieran reiht sich sodann die Darstellung der positiven und negativen Unterschiede und Aufstufungen der zusammengesetzten Functionen, was wir nicht weiter verfolgen, sondern nur andeuten. Erst wenn diese Vorarbeiten vollendet sind, kann zu einer Summenrechnung mit einfachen und zusammengesetzten Functionen übergegangen werden. Ueberblickt man nun die hier mitgetheilten Resultate, so zeigt sich, dass die sogenannte Differenzen-Rechnung den grössten Theil des calcul direct et inverse aux différences bei Lacroix, und auch der Differenzen- und Summenrechnung des Verf.. umschliesst, und mit Recht umschliessen muss, denn das Zeichen Σ, welches Lacroix und der Verf. gebraucht, ist nichts anders als das Zeichen Δ mit einem negativen Exponenten. Da nun alle Gesetze für $\Delta^{+m}X$ und $\Delta^{-m}X$ unter einen Gesichtspunkt fallen, so können sie nicht von einander geschieden werden. Eine Trennung in zwei ihrer Natur nach geschiedene Abtheilungen, wie Lacroix und der Verf. vornimmt, steht daher mit einer Theorie dieser Gebilde nicht im Einklang. Dass sie aber einem und demselben Bildungsgesetze unterliegen, kann nach den hier gegebenen Mittheilungen nicht in Zweifel gezogen werden. Endlich liegt auch der Zusammenhang zwischen $\Delta^{+m}X$ und $\Delta^{-m}X$, $\zeta^{m}X$ und $\zeta^{-m}X$ so einfach zu Tage, dass alle Complicationen wegfallen, und dass also auch der Zweifel des Verf., ob überhaupt ein „allgemeines Bildungsgesetz" abgesehen werden kann (S. 118. §. 8.) nicht gegründet ist, da ein solches existirt.

§. 6.

Mit den bisher aufgefundenen Hülfsmitteln kann nun eine Summenrechnung ohne Schwierigkeit durchgeführt werden, worin die Trennung in zwei Hauptarten von Reihen, mit einerlei und abwechselnden Gliedern, sogleich hervortritt. Die Betrachtungen nun, welche derselben eine feste Unterlage geben, sind (§. 72. u. ff. u. §. 104. u. ff. Cr. Jour. 14. u. 15. Bd.) der Lehre v. d. aufst. Funct. niedergelegt. Bezeichnet man nun auf folgende Weise:

$$1.\quad X_0+X_1+X_2+X_3\ldots.+X_n=SX_n,$$

$$2.\quad X_0-X_1+X_2-X_3\ldots(-)^nX_n=S(-)^nX_n;$$

so erhält man durch eine elementare Erörterung folgende Grundgesetze für die Darstellung der Summen aller einfachen Functionen:

$$3.\quad SX_n=\Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-1}X_0,$$

$$4.\quad S(-)^nX_n=(-)^n\zeta^{-1}X_{n+1}+\zeta^{-1}X_0.$$

Die Auffindung des fraglichen Summen-Ausdrucks beruht daher auf der entwickelten Darstellung zweier Ausdrücke der ersten negativen Differenz oder Aufstufung einer Function. Da nun in §. 3. und §. 4. gezeigt wurde, wie sie für alle Fälle gefunden werden können, so kann auch die vorliegende Aufgabe (1.—4.) immer gelöst werden. Als Beispiel diene der weniger einfache Fall, wenn $X_0=x^p$ ist. Man erhält dann aus 7. §. 4. nach der Vorschrift von 3.:

$$\begin{aligned}5.\quad SX_n&=x^p+(x+h)^p+(x+2h)^p+\ldots..(x+nh)^p\\&=\frac{1}{(p+1)h}[(x+(n+1)h)^{p+1}-x^{p+1}]\\&-\frac{1}{2}[(x+(n+1)h)^p-x^p]\\&+\frac{p}{12}[(x+(n+1)h)^{p-1}-x^{p-1}]h\\&-\frac{p(p-1)(p-2)}{120.1.2.3}[(x+(n+1)h)^{p-3}-x^{p-3}]h^3\\&\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\end{aligned}$$

Aus 11. §. 4. erhält man nach 4. folgende zwei besondere Fälle, für ein gerades und ungerades n:

$$6.\quad x^p-(x+h)^p+(x+2h)^p\ldots.+(x+nh)^p=S(-)^nX_n$$

$$=\frac{1}{2}[x+(n+1)h)^p+x^p]$$

$$-\frac{p}{4}h[(x+(n+1)h)^{p-1}+x^{p-1}]$$

$$+\frac{p(p-1)(p-2)}{8.1.2.3}h^3[(x+(n+1)h)^{p-3}+x^{p-3}]$$

$$-\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{4.1.2.3.4.5}h^5[(x+(n+1)h)^{p-5}+x^{p-5}]$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

7. $x^p-(x+h)^p+(x+2h)^p\ldots-(x+nh)^p=S(-)^n X_n$

$$=-\frac{1}{2}[(x+(n+1)h)^p-x^p]$$

$$+\frac{p}{4}h[(x+(n+1)h)^{p-1}-x^{p-1}]$$

$$-\frac{p(p-1)(p-2)}{8.1.2.3}h^3[(x+(n+1)h)^{p-3}+x^{p-3}]$$

Die aus 5. sich ergebenden besondern Fälle sind bekannt. Die aus 6. und 7. sich ergebenden weniger. Wir stellen daher einige hier zusammen, damit man daraus die Anwendbarkeit der hier mitgetheilten Methode ermessen könne:

8. $1-2+3-4+\ldots\pm n=\frac{n+1}{2}$

$$=-\frac{n}{2},$$

$$1-2^2+3^2-4^2+\ldots\pm n^2=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{1.2}$$

$$=-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}=-\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$1-2^3+3^3-4^3+\ldots\pm n^3=\frac{n^3}{2}+\frac{3n^2}{4}-\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{n^3}{2}-\frac{3n}{4},$$

$$1-2^4+3^4-4^4+\ldots\pm n^4=\frac{n^4}{2}+n^3-\frac{n}{2}$$

$$=-\frac{n^4}{2}-n^3+\frac{n}{2},$$

$$1-2^5+3^5-4^5+\ldots\pm n^5=\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{4}-\frac{5n^2}{4}+\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{n^5}{2}-\frac{5n^4}{4}+\frac{5n^2}{4},$$

u. s. w. Die ersten Ausdrücke gelten für ein gerades n, also für eine ungerade Gliederanzahl, die zweiten für ein ungerades n, also für eine gerade. Das Fördernde dieser Methode macht sich besonders klar, wenn man die Art hiemit vergleicht, wie Euler Diff. Rechnung 2. Thl. §. 178. u. ff. und nach ihm Lacroix, Calc. diff. et int. T. III. p. 997. u. ff. diese Reihen behandelt haben, ohne aus den speciellen Fällen herauszutreten.

Die Gleichungen 3. und 4. zeigen den Zusammenhang zwischen S (Begriff der Summe) und Δ^{-1} oder ζ^{-1} (erste negative Differenz oder Zuzählung) und beweisen dadurch, dass beide nicht identisch sind, obgleich im einzelnen Falle beide zusammenfallen können. Häufig wird Δ^{-m} durch Σ^{m} bezeichnet, diess thut Laplace, der auch $\Delta^{-m} = \Sigma^{m}$ angibt, Lacroix und auch Euler. Die Bezeichnung des Begriffs von $\Delta^{-m}X$ durch $\Sigma^{m}X$ halte ich nicht für zweckmässig. Sie verwischt den Zusammenhang, der zwischen $\Delta^{m}X$ und $\Sigma^{m}X$ herrscht, beinahe ganz, während die Bezeichnung $\Delta^{-m}X$ ihn hervorhebt und die Theorie auf $\Delta^{-m}X$, nicht aber auf $\Sigma^{m}X$ führt. Zu dem hat Laplace (Théorie des probabilités) sich nur mit der Darstellung von Δ^{-m}, durchaus aber nicht mit Auffindung von Summenausdrücken (S) beschäftigt.

Der Verf. entwickelt S. 86. §. 1. der Summenrechnung den Begriff von Summe ganz richtig, verlässt ihn aber alsbald wieder, und kehrt zu dem gewöhnlichen Begriff der „willkührlichen Constante“ zurück, der ihn dann zu folgender Darstellung führt:

$$9.\quad fx = \Sigma\varphi(x) + C.$$

Wir halten diese Definition im Rückblick auf 3. und 4. nicht für zweckmässig, da ihr die nöthigende Kraft des innern Zusammenhangs fehlt. In dem Begriffe der Summe (3. und 4.) ist nichts Willkührliches. Die Ausdrücke ($\Delta^{-1}X_0$ und $\zeta^{-1}X_0$, gewöhnlich Constante genannt) sind eben so gut integrirende Theile des Summenausdrucks wie $\Delta^{-1}X_{n+1} = \Sigma X_{n+1}$ und $\zeta^{-1}X_{n+1}$, und daher weder überhaupt willkührlich, noch enthalten sie etwas Willkührliches. Sie sind durch und durch bestimmt, wie denn auch diese Bestimmtheit in der Consequenz der Theorie einer Wissenschaft liegen muss. Sogar für die Integral-Rechnung sind diese Bemerkungen von Belang, wo der Begriff der Constante (ins Besondere bei dem bestimmten Integrale) wieder hervortritt, wie denn überhaupt der Zusammenhang zwischen Differenzen- und Differenzialrechnung, Summenrechnung und Integralrechnung unbezweifelt vorausgesetzt werden darf.

§. 7.

Ist nun der Begriff des Summenausdruckes einer einfachen Function gegeben, so wird man durch Wiederholung auf Summen von den Summen, wiederholte Summen, von dem Verf. vielfache Summen genannt, geführt. Hier ist zweierlei zu bestimmen: a) wie die Summenausdrücke für sie gefunden werden, b) was unter ihnen zu denken sei?

Die Beantwortung dieser zwei Fragen führt zu folgenden Darstellungen, die in §. 73. und §. 90.; §. 91. meiner oben genannten Schrift entwickelt sind:

1. $S^2 X_n = (n+1) X_0 + n X_1 + (n-1) X_2 + \dots + X_n$

$$= \Delta^{-2} X_{n+2} - \frac{n+1}{1} \Delta^{-1} X_0 - \Delta^{-2} X_1,$$

$$S^3 X_n = [n+1]_2 X_0 + [n]_2 X_1 + [n-1]_2 X_2 \dots + X_n$$

$$= \Delta^{-3} X_{n+3} - [n+1]_2 \Delta^{-1} X_0 - [n+1]_1 \Delta^{-2} X_1 - \Delta^{-3} X_2,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$S^m X_n = [n+1]_{m-1} X_0 + [n]_{m-1} X_1 + [n-1]_{m-1} X_2 + \dots X_n$$

$$= \Delta^{-m} X_{m+n} - [n+1]_{m-1} \Delta^{-1} X_0 - [n+1]_{m-2} \Delta^{-2} X_1 - \dots - \Delta^{-m} X_{m-1}$$

u. 2. $S^m (-)^m X_n = \pm X_n - [2]_{m-1} X_{n-1} + [3]_{m-1} X_{n-2} - \dots \pm [n+1]_{m-1} X_0$

$$= \zeta^{-m} X_{n+m} \pm [n+1]_{m-1} \zeta^{-1} X_0 \pm [n+1]_{m-2} \zeta^{-2} X_1 \dots \pm \zeta^{-m} X_{m-1}$$

Die Form der sich aus §. 90. und §. 91. ergebenden Reihen mit ihren Summen-Ausdrücken ist

3. $X_0 + 2 X_1 + 3 X_2 + 4 X_3 \dots + (n+1) X_n$

$$= (n+1) \Delta^{-1} X_{n+1} - \Delta^{-2} X_{n+1} + \Delta^{-2} X_0,$$

$$X_0 + [2]_2 X_1 + [3]_2 X_2 + [4]_2 X_3 \dots [n+1]_2 X_n$$

$$= [n+1]_2 \Delta^{-1} X_{n+1} - [n+1]_1 \Delta^{-2} X_{n+1} + \Delta^{-3} X_{n+1} - \Delta^{-3} X_0.$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$X_0 + [2]_{m-1} X_1 + [3]_{m-1} X_2 + [4]_{m-1} X_3 \dots [n+1]_{m-1} X_n$$

$$= [n+1]_{m-1} \Delta^{-1} X_{n+1} - [n+1]_{m-2} \Delta^{-2} X_{n+1} \dots$$

$$\dots (-)^{m-1} \Delta^{-m} X_{n+1} \, (-)^m \Delta^{-m} X_0;$$

4. $X_0 - [2]_{m-1} X_1 + [3]_{m-1} X_2 - [4]_{m-1} X_3 \dots \pm [n+1]_{m-1} X_n$

$$= \pm [n+1]_{m-1} \zeta^{-1} X_{n+1} \pm [n+1]_{m-2} \zeta^{-2} X_{n+1} \dots \pm \zeta^{-m} X_{n+1} + \zeta^{-m} X_0.$$

Hierin ist $[q]_r = \frac{q(q+1)(q+2)..(q+r-1)}{1.2.3...r}$. Die in 1. und 2. angegebenen Summen-Ausdrücke enthalten so viele Constanten (wenn man diesen Ausdruck gebrauchen will) als die Wiederholung der Summenrechnung verlangt; die in 3. und 4. angegebenen nur eine Constante.

Der Verf. behandelt zwar §. 8. 2te Abth. S. 115. die vielfachen endlichen Integrale. Was sich aber der Leser darunter für einen Begriff zu bilden habe, geht nicht klar und deutlich hervor. Diese Unbestimmtheit möchte zum Theil darin ihren Grund haben, dass nicht zwischen SX_n (Summenausdruck) und $\Sigma X_n = \Delta^{-1} X_n$ (negativer Unterschied einer Function) gehörig unterschieden ist. Auf Seite 117. ist z. B. für $\Sigma^{(n)} a^x = \Delta^{-n} a^x$ (vergl. 15. §. 3.) folgende Gleichung angegeben:

$$5.\quad \Sigma^{(n)} a^x = \frac{a^x}{(a^h-1)^n} + C_0 + C_1 x + \ldots C_{n-1} x^{n-1},$$

dabei aber nicht erörtert, was unter $\Sigma^{(n)} a^x$ zu verstehen, noch wie die „willkührlichen Constanten" C_0, C_1, $C_2 \ldots C_{n-1}$ gefunden werden. Nach den hier gegebenen Mittheilungen ergibt sich aus 15. §. 3. und 1. dieses Paragraphen unverzüglich

$$6.\quad S^m a^x = [n+1]_{m-1} a^x + [n]_{m-1} a^{x+h} + [n-1]_{m-1} a^{x+2h} \ldots a^{x+nh}$$

$$= \frac{a^{x+(n+1)h} - a^{x+(m-1)h}}{(a^h-1)^m} - \frac{[n+1]_{m-1} a^x}{a^h-1} - \frac{[n+1]_{m-2} a^{x+h}}{(a^h-1)^2} \ldots$$

$$\ldots - \frac{(n+1) a^{x+(m-2)h}}{(a^h-1)^{m-1}}.$$

Auch Laplace spricht (Théorie anal. d. probab. Chap. I. Nro. II. bei Darstellung von $\Sigma^m = \Delta^{-m}$ der Functionen von „willkührlichen Constanten" die man bei der wiederholten Integration gewinnt, lässt aber ihren Begriff gleichfalls unerörtert. Welche Stelle soll aber ein unerörterter Begriff in einem Systeme einnehmen?

§. 8.

Die in dem Vorhergehenden niedergelegten Bemerkungen bilden meines Erachtens die Grundlage für die systematische Durchführung einer Theorie der Differenzen und Summen. Ist nach dieser Grundlage das hierher gehörige Material verarbeitet, dann reihen sich an sie, als ein organisches Ganze, die übrigen Mittel zur Summirung der Reihen (einfacher und zusammengesetzter), welche noch aus andern Zweigen der Mathematik beschafft werden können, sowie die Kritik der hiebei zu benutzenden Mittel, wie Convergenz der Reihen etc., welche der Verf. auch gegeben hat.

Ich bin nun weit entfernt, die hier gegebenen Andeutungen für etwas anderes als was sie sind, nämlich die subjective Ansicht eines Einzelnen, und daher weder für besser als die eines Andern, noch für die einzig richtige Auffassungsweise des hier einzuschlagenden Systems zu halten. Doch glaube ich, dass sie manches gute, zur Aussaat brauchbare Korn und manchen Vorzug vor der bisher befolgten Behandlungsweise enthalten. Sie führen wenigstens einen Zweig (Aufstufungen und Summen der Reihen mit abwechselnden Zeichen) in das System und überbieten die bisher angewendeten Methoden an Brauchbarkeit und in Erzeugung des Materials. Ich darf daher wohl die

Ueberzeugung aussprechen, dass der Verf. bei seiner Gewandtheit in Handhabung des Calculs, eine gehaltreichere Schrift dem Publicum übergeben hätte, wenn er von der hier angeregten, allgemeinern Ansicht in Durchführung der Differenzen- und Summenrechnung ausgegangen wäre, daran die weiteren Resultate geknüpft hatte, welche in der neuesten Zeit von anderen Schriftstellern eröffnet wurden, und dadurch zur Feststellung der Grundzüge einer Wissenschaft, ihrer Verbreitung und Erweiterung beigetragen hätte.

Die hier niedergelegten Bemerkungen sind keiner Nebenabsicht, sondern dem Wunsche entsprungen, nach Vermögen zur wissenschaftlichen Begründung des von dem Verf. behandelten Zweigs der Mathematik beizutragen. Ihr Zweck soll daher nicht ein leeres und unfruchtbares Negiren sein, sondern ein gemeinsames Aufbauen. Hiezu ist Austausch der Ansichten und vereinte Kraft nöthig, denn nur auf diesem Wege wird die Wissenschaft gefördert werden. Die vorliegende Schrift soll als Compendium für akademische Vorlesungen dienen. Vielleicht nimmt der Verf. hiebei gelegentlich die Veranlassung, das Gesagte zu beachten und zu prüfen, ob und was daran als richtig sich bewähre; es hat ja ohnedem grossen Reiz, bei wiederkehrenden Vorträgen einen und denselben Zweig der Wissenschaft von verschiedenen Seiten aus zu betrachten und zu beleuchten.

Unter die Verbesserungen sind noch nachträglich, ausser den in §. 3. angegebenen, aufzunehmen:

S. 19 Z. 12. v. o. $\Delta^5 \mathrm{Sin}\, x = +(2\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}h)^5 \mathrm{Cos}\,(x+\frac{5h}{2})$

statt $(2\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}h)^5 \mathrm{Sin}\,(x+\frac{5h}{2})$;

S. 178 Z. 13. v. o. $\frac{x+2h}{x}y$ statt $\frac{x+2h}{x}x$.

III.

De ellipsi minima dato quadrangulo circumscripta.

Quaesivit

Franciscus Seydewitz.

Perlegenti nuper, quae de problemate suprascripto Illustr. Angerus, gymnasii Gedanensis Professor, disseruit, in mentem mihi venit propositionis cuiusdam, in quam paullo antea incideram, quum de persimili re, scilicet de ellipsi maxima quadrilatero inscribendi quaererem, et qua iam tunc mihi videbatur ad eiusdem problematis solutionem via ab illa Euleriana plane diversa aperiri. Neque ea me spes fefellit; intellexi tamen, postquam proprius ad rem accessi, solutionem, quam inde obtinui, ad eas quidem figuras, quae ad universum quadrangulorum genus pertinent, accommodatissimam esse ac praesertim peculiari geometriae usui magis se applicare, quam illam, cuius Eulerus inventor fuit, paene totam in numerorum spinis versantem: in speciebus vero, ut in trapezio, in parallelogrammo et in quadrangulo decurtato sive triangulo, excepta una, ubi alterutra diagonalium per alteram bipartitur, omni plane usu carere. In his igitur ad alias methodos confugiendum erit, quas tamen, quum nihil difficultatis habeant, hic praetermittam.

§. 1.

Fingamus (Tab. I. Fig. 1.), esse rectas PQ, QR, RP tres polares harmonicas coniugatas, ad ellipsin $ABCD$ relatas; rectam MZ semidiametrum huius ellipseos per punctum R ductam et lineam PQ in puncto V secantem, atque MX esse semidiametum lineae PQ parallelam: primum apparet, puncta R et V duos polos esse harmonicos coniugatos rectae MZ, et ob eam caussam

$$MR.MV=MZ^2.$$

Deinde quum sit PQ polaris harmonica puncti R, eademque lineae MX parallela, erit MX semidiametro MZ coniugata, atque ideo puncta Y et y, ubi MX per lineam PR et per lineam Qy, rectae MZ parallelam, secatur, erunt duo poli harmonici coniugati lineae MX, itaque

$$MY.My=MX^2.$$

Jam vero, si angulos QRV, PRV, RMY (seu RVP), QPR et PRQ deinceps literis α, β, φ, γ, ψ designemus, aequationes prodeunt hae:

$$MY=MR.\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \text{ et } My=QV=RQ\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}=PQ\cdot\frac{\sin\alpha.\sin\gamma}{\sin\varphi.\sin\psi};$$

unde sequitur:

$$[MZ.MX.\sin\varphi]^2=[2\triangle ZMX]^2$$

$$=MR.MV.MY.My.\sin^2\varphi=MR^2.MV.PQ.\frac{\sin\alpha.\sin\beta.\sin\varphi}{\sin\psi};$$

vel si literis p, q, r rectae perpendiculares e centro M ad QR, PR, PQ demissae notentur:

$$[2\triangle ZMX]^2=\frac{PQ}{\sin\psi}.p.q.r,$$

quia $p=MR.\sin\alpha$, $q=MR.\sin\beta$ et $r=MV.\sin\varphi$ esse debent.

Quoniam duarum ellipsium areae ut triangula a binis semidiametris coniugatis earum constituta se habent: si tres polares harmonicas coniugatas PQ, QR, RP easdem simul ad diversas ellipses referamus, et literis p, p_1; q, q_1; r, r_1 aut, perinde ut supra, ternas rectas perpendiculares aut omnino ternas parallelas, e centris earum ad lineas QR, RP, PQ demissas designemus, ex aequatione modo inventa colligimus, areas illarum ellipsium quadratas esse sicut producta $p.q.r$ et $p_1.q_1.r_1$; id quod in hunc modum exprimere possumus:

Theorema 1.

Binarum ellipsium areae quadratae sunt inter se, ut ternorum segmentorum producta, quae, tribus rectis lineis utcunque datis parallela, inter centra ipsarum

et tres rectas polares harmonicas coniugatas, curvis ipsis communes, intercipiuntur.

Hinc autem, quoniam lineae PQ, QR, RP, quae intersectiones P, Q, R laterum oppositorum quadranguli completi $ABCD$ inter se iungunt, quoad omnes ellipses per puncta A, B, C, D transeuntes, polares tres harmonicae coniugatae sunt, sine ullo negotio efficitur:

Theorema 2.

Inter omnes ellipses, per eadem quattuor puncta transeuntes, eius area minima erit, e cuius centro si ad eas lineas, quae coraustorum*) quadranguli completi, per illa puncta constituti, intersectiones tres coniungunt, tria segmenta datis quibuslibet rectis parallela ducantur, istorum segmentorum productum omnium minimum existet.

Praeterea constat, quod etiam in tomo quarto „Archivi Grunertiani“ geometrice a me ostensum est:

Theorema 3.

Omnium sectionum conicarum, per eadem quattuor puncta transeuntium, centra in alius sectionis conicae peripheria sita esse, quae quadranguli completi, per illa puncta constituti, latera sex bifariam secet atque insuper coraustorum eius tres intersectiones contineat.

Duobus hisce theorematis posterioribus perspectis, cetera omnia per se patent. Primum enim aequatio eius sectionis conicae, quae omnium ellipsium quadrangulo dato circumscriptarum centra complectitur, quaerenda et, quo facilior theorematis secundi applicatio fiat, ita conformanda erit, ut segmenta, quae tria numero e singulis huius sectionis conicae punctis ad polares harmonicas coniugatas, illis ellipsibus communes, ducuntur, simul coordinatarum vices sustineant; deinde istius aequationis ope oportebit productum trium illorum segmentorum per haec ipsa segmenta variabilia exprimatur et differentiale eius $= 0$ ponatur; quo facto, assumptaque ad duas aequationes ita ortas tertia, quae inter tres cuiusque puncti coordinatas intercedit, conditiones centri ellipseos quaesitae apparebunt.

---

*) Haec vox, a lexicographis neglecta, apud Boëtium vel potius Julium Frontinum, quem ille sequitur, quadranguli latus basi oppositum, hic omnino latera eius opposita significat (Chasles Gesch. d. Geom., übersetzt v. Sohnke, p. 522.).

§. 2.

Ponamus igitur, esse A, B, C, D puncta quattuor data, per quae ellipsis minima ducatur: ante omnia moneo, haec puncta ita debere inter se collocata esse, ut nullum eorum intra triangulum a reliquis effectum cadat. Sint porro P, Q, R intersectiones conrastorum AB et CD, AC et BD, AD et BC quadranguli completi, quod per illa puncta constituitur; puncta J, G, L, E, F, H medietates istorum laterum, et P_1, Q_1, R_1 ea puncta, ubi lineae QR, PR, PQ a lineis PA, QA, RA secantur. Supponitur autem hic, A illud esse e quattuor punctis A, B, C, D, quod intra triangulum PQR se habet. Denique segmenta PP_1, QQ_1, RR_1; AP_1, AQ_1, AR_1 deinceps literulis p_1, q_1, r_1; π, $\varkappa$, ϱ designentur.

Consentaneum est, coordinatarum munus eis segmentis iniungere, quae rectis PP_1, QQ_1, RR_1 parallela ex quolibet puncto usque ad rectas QR, PR, PQ tendunt, istaque, literis p, q, r notanda, sensu aut positivo aut negativo accipere, prout punctum, quod definiunt, ex eadem parte linearum QP, PR, PQ atque anguli eis oppositi P, Q, R, aut ex parte contraria sumatur. Hoc autem pacto, notum est, inter cuiuslibet puncti coordinatas hanc aequationem existere:

$$\frac{p}{p_1}+\frac{q}{q_1}+\frac{r}{r_1}=1. \tag{1}$$

Et quoniam sectio conica, ellipsium illarum centra continens, per puncta P, Q et R meat, aequationi igitur eius binis coordinatis p et q, p et r vel q et $r=0$ positis satisfieri necesse est; praetereaque quum omnis sectio conica quinque punctis suis datis ab omni parte determinata sit, perspicuum est, aequationem istius sectionis sic debere comparatam esse:

$$pq+\mu.pr+\nu.qr=0;$$

ubi μ et ν quantitates duas denotant constantes, quarum valores e duorum adhuc curvae punctorum coordinatis eruendi sunt.

§. 3.

Coordinatae p et q omnis puncti, quod ad rectam infinitam RR_1 pertinet, legem sequuntur hanc:

$$\frac{p}{q}=\frac{AP_1}{AQ_1}=\frac{\pi}{\varkappa};$$

et si e puncto C ad rectam QR linea CP_{11}, lineae AP_1 parallela ducatur, punctorum Q, A, Q_1, C quattuor harmonicorum ratione habita, proportio haec evadit:

$$\frac{CP_{11}}{AP_1}=\frac{CQ}{AQ}=\frac{CQ_1}{AQ_1}, \quad \text{sive} \quad \frac{CP_{11}}{CQ_1}=\frac{\pi}{\varkappa}=\frac{p}{-q}.$$

Itaque linearum infinitarum

RA et RC aequationes

erunt:

$$\frac{p}{\pi}-\frac{q}{\varkappa}=0 \quad \text{et} \quad \frac{p}{\pi}+\frac{q}{\varkappa}=0; \qquad (1)$$

perindeque pro lineis

QA et QB aequations;

$$\frac{r}{\varrho}-\frac{p}{\pi}=0 \quad \text{et} \quad \frac{r}{\varrho}+\frac{p}{\pi}=0; \qquad (2)$$

et pro lineis

PA et PC aequationes:

$$\frac{q}{\varkappa}-\frac{r}{\varrho}=0 \quad \text{et} \quad \frac{q}{\varkappa}+\frac{r}{\varrho}=0 \qquad (3)$$

obtinentur.

Jam ad determinationem punctorum A, B, C et D venimus. Primi quidem iam supra statuimus coordinatas esse

$$p=\pi, \quad q=\varkappa, \quad r=\varrho,$$

quamobrem aequatio (1) ad istud punctum relata in hanc abit:

$$\frac{\pi}{p_1}+\frac{\varkappa}{q_1}+\frac{\varrho}{r_1}=1. \qquad (4)$$

Deinde, quum sit $DR:AR=DR_1:AR_1$, sive $DR_1-r_1:r_1-\varrho=DR_1:\varrho$, erit $DR_1=\frac{r_1\,\varrho}{2\varrho-r_1}$, quo valore pro r in aequationes linearum QB et PC transscripto, puncti D coordinatae prodeunt:

$$p=-\frac{r_1\,\pi}{2\varrho-r_1}; \quad q=-\frac{r_1\,\varkappa}{2\varrho-r_1}; \quad r=\frac{r_1\,\varrho}{2\varrho-r_1};$$

et quum sit $CQ_1:AQ_1=CQ:AQ$, sive

$$CQ_1:\varkappa=CQ_1+q_1:q_1-\varkappa,$$

ubi segmentum CQ_1 negative sumendum est et $q_1 > 2\varkappa$, efficitur $CQ_1 = -\frac{q_1 \varkappa}{q_1 - 2\varkappa}$, indeque, adhibitis linearum RC et PC aequationibus, coordinatae puncti C, nimirum:

$$p = \frac{q_1 \pi}{q_1 - 2\varkappa}; \quad q = -\frac{q_1 \varkappa}{q_1 - 2\varkappa}; \quad r = \frac{q_1 \varrho}{q_1 - 2\varkappa};$$

similique modo coordinatae puncti B:

$$p = -\frac{p_1 \pi}{p_1 - 2\pi}; \quad q = \frac{p_1 \varkappa}{p_1 - 2\pi}; \quad r = \frac{p_1 \varrho}{p_1 - 2\pi} \text{ gignuntur.}$$

Horum tandem valorum ope et adhibita aequatione (4) facili negotio iam linearum AD, BC, AC, BD, AB, CD medietates i. e. puncta F, H, L, E, J, G determinari possunt. Procul dubio enim erunt coordinatae

puncti F:

$$p = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{r_1 \pi}{2\varrho - r_1}\right) = -\pi \frac{r_1 - \varrho}{2\varrho - r_1};$$

$$q = \frac{1}{2}\left(\varkappa - \frac{r_1 \varkappa}{2\varrho - r_1}\right) = -\varkappa \frac{r_1 - \varrho}{2\varrho - r_1};$$

$$r = \frac{1}{2}\left(\varrho + \frac{r_1 \varrho}{2\varrho - r_1}\right) = \varrho \frac{\varrho}{2\varrho - r_1};$$

puncti H:

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{q_1 \pi}{q_1 - 2\varkappa} - \frac{p_1 \pi}{p_1 - 2\pi}\right) = -\pi \frac{q_1 \pi - p_1 \varkappa}{(p_1 - 2\pi)(q_1 - 2\varkappa)};$$

$$q = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1 \varkappa}{p_1 - 2\pi} - \frac{q_1 \varkappa}{q_1 - 2\varkappa}\right) = \varkappa \frac{q_1 \pi - p_1 \varkappa}{(p_1 - 2\pi)(q_1 - 2\varkappa)},$$

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1 \varrho}{p_1 - 2\pi} + \frac{q_1 \varrho}{q_1 - 2\varkappa}\right) = \varrho \frac{p_1 q_1 \varrho}{r_1 (p_1 - 2\pi)(q_1 - 2\varkappa)};$$

puncti L:

$$p = \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{q_1 \pi}{q_1 - 2\varkappa}\right) = \pi \frac{q_1 - \varkappa}{q_1 - 2\varkappa};$$

$$q = \frac{1}{2}\left(\varkappa - \frac{q_1 \varkappa}{q_1 - 2\varkappa}\right) = -\varkappa \frac{\varkappa}{q_1 - 2\varkappa};$$

$$r = \frac{1}{2}\left(\varrho + \frac{q_1 \varrho}{q_1 - 2\varkappa}\right) = \varrho \frac{q_1 - \varkappa}{q_1 - 2\varkappa};$$

puncti E:

$$p = -\frac{1}{2}\left(\frac{r_1\pi}{2\varrho - r_1} + \frac{p_1\pi}{p_1 - 2\pi}\right) = -\pi\frac{p_1\varrho - r_1\pi}{(p_1 - 2\pi)(2\varrho - r_1)};$$

$$q = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1\varkappa}{p_1 - 2\pi} - \frac{r_1\varkappa}{2\varrho - r_1}\right) = -\varkappa\frac{p_1 r_1\varkappa}{q_1(p_1 - 2\pi)(2\varrho - r_1)};$$

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1\varrho}{2\varrho - r_1} + \frac{p_1\varrho}{p_1 - 2\pi}\right) = \varrho\frac{p_1\varrho - r_1\pi}{(p_1 - 2\pi)(2\varrho - r_1)};$$

puncti J:

$$p = -\pi\frac{\pi}{p_1 - 2\pi};\ q = \varkappa\frac{p_1 - \pi}{p_1 - 2\pi};\ r = \varrho\frac{p_1 - \pi}{p_1 - 2\pi};$$

et puncti G:

$$p = -\pi\frac{q_1 r_1\pi}{p_1(q_1 - 2\varkappa)(2\varrho - r_1)};\ q = -\varkappa\frac{q_1\varrho - r_1\varkappa}{(q_1 - 2\varkappa)(2\varrho - r_1)};$$

$$r = \varrho\frac{q_1\varrho - r_1\varkappa}{(q_1 - 2\varkappa)(2\varrho - r_1)}.$$

§. 4.

Ex his posterioribus sex punctis iam ad computandas quantitates μ et ν duorum quorumlibet coordinatae sufficient. Ex. gr. si punctorum L et J coordinatarum valores in aequationem $pq + \mu.pr + \nu.qr = 0$ transscribuntur, praesto sunt aequationes:

$$\pi\varkappa^2 - \pi\varrho(q_1 - \varkappa).\mu + \varrho\varkappa^2.\nu = 0;$$

$$\text{et}\quad \varkappa\pi^2 + \varrho\pi^2.\mu - \varkappa\varrho(p_1 - \pi).\nu = 0;$$

e quibus

$$\mu = \frac{p_1\varkappa^2}{\varrho(p_1 q_1 - p_1\varkappa - q_1\pi)} = \frac{r_1\varkappa^2}{q_1\varrho^2};$$

$$\text{et}\quad \nu = \frac{q_1\pi^2}{\varrho(p_1 q_1 - p_1\varkappa - q_1\pi)} = \frac{r_1\pi^2}{p_1\varrho^2}$$

nanciscimur.

Hinc igitur compertum est, sectionis conicae, per centra omnium illarum ellipsium transeuntis, aequationem esse hanc quae sequitur:

$$pq.p_1 q_1.\varrho^2 + pr.p_1 r_1.\varkappa^2 + qr.q_1 r_1.\pi^2 = 0,$$

vel elegantius scriptam:

$$\frac{\pi^2}{pp_1}+\frac{\varkappa^2}{qq_1}+\frac{\varrho^2}{rr_1}=0. \qquad \text{(II)}$$

Ceterum eandem nos aequationem nactos fuisse, si pro punctis L et J bina quaepiam e quattuor reliquis cepissemus, facile ex eo comprobabitur, quod introductis in illam aequationem ceteris valoribus, quos in fine antecedentis §. invenimus, aequationis veritas haud perit.

§. 5.

Jam consideremus aequationes hasce tres:

$$pq_1r_1+qp_1r_1+rp_1q_1=p_1q_1r_1; \qquad \text{(I)}$$

$$qr.q_1r_1.\pi^2+pr.p_1r_1.\varkappa^2+pq.p_1q_1.\varrho^2=0; \qquad \text{(II)}$$

et

$$r^2(qq_1\pi^2+pp_1\varkappa^2)r_1+p_1q_1.\varrho^2.R=0; \qquad \text{(III)}$$

quae posterior ex antecedente nascitur, litera R productum $p.q.r$ designante.

Differentiemus unamquamque earum secundum quantitates variabiles p, q et r, et ut producti minimi R conditio in rationes inferatur, differentiale huius producti $=0$ ponamus. Quod si fit, aequationes differentiales prodeunt hae:

$$q_1r_1.\partial p+p_1r_1.\partial q+p_1q_1.\partial r=0; \qquad \text{(IV)}$$

(V)

$$p_1(qq_1\varrho^2+rr_1\varkappa^2).\partial p+q_1(rr_1\pi^2+pp_1\varrho^2).\partial q+r_1(pp_1\varkappa^2+qq_1\pi^2).\partial r=0;$$

$$p_1\varkappa^2.r.\partial p+q_1\pi^2.r.\partial q+2(pp_1\varkappa^2+qq_1\pi^2).\partial r=0; \qquad \text{(VI)}$$

ad quas nova accedit, si postrema ab antecedente subducitur, postquam factore r_1 affecta est, videlicet haec:

$$p_1q_1\varrho^2.q.\partial p+p_1q_1\varrho^2.p.\partial q-r_1(pp_1\varkappa^2+qq_1\pi^2).\partial r=0. \qquad \text{(VII)}$$

E duabus posterioribus inter se iunctis colliguntur differentialia.

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{(pp_1\varkappa^2+qq_1\pi^2)(2pp_1\varrho^2+rr_1\pi^2)}{p_1\varrho^2(qq_1\pi^2-pp_1\varkappa^2)r};$$

et

$$\frac{\partial q}{\partial r}=-\frac{(pp_1\varkappa^2+qq_1\pi^2)(2qq_1\varrho^2+rr_1\varkappa^2)}{q_1\varrho^2(qq_1\pi^2-pp_1\varkappa^2)r}.$$

Quorum valorum ope nunc si ipsa differentialia ex aequatione (IV.) expelluntur, ista aequatio hanc formam induet:

pa, qa, ra; pd, qd, ra; pa, qd, rc et pd, qa, rc ternas in quattuor punctis a, d, b, c concurrere.

§. 7.

E mutuo situ punctorum P, L, R, J, Q et G, F, E, quae cuncta in eadem sectione conica sunt, concludere licet, priora quinque ad unum eundemque, tria reliqua ad alterum curvae ramum pertinere, ipsamque igitur ex hyperbolarum genere esse. Nam ex illis nullum intra triangula per quattuor reliqua constituta cadit; at contra, quoties ex iisdem quinque punctis aut quattuor, aut tria, aut duo deinceps cum uno, vel duobus, vel tribus e posterioribus coniunxeris, nova quaeque haec quinque puncta sic disposita erunt, ut saltem unum eorum in aliquo triangulo per reliqua constituto includatur.

Istinc sequitur, chordam PG et rectam pd, quae illi parallela est, utrumque curvae ramum perscindere, ideoque illud punctum, ubi ramus PRQ a linea pd secatur, inter puncta p et d cadere; contra vero rectas PJ et $apab$ solum hunc posteriorem ramum secare, duarumque intersectionum alteram a dextra, alteram a laeva parte puncti p iacere. Ergo manifestum est, angulum apd, qui per asymptotas pa, in contrariam partem prolongatam, et pd formatur, totum i e. inde ab altero usque ad alterum crus, per aliquem rami PRQ arcum praesepiri, propptereaque hunc ipsum arcum atque eum hyperbolae Sr_1Pq_{11} ramum, qui in eodem angulo extenditur, quia infinitus est et punctum q_{11}, a curva PRQ inclusum, continet, in duobus se invicem punctis P et N perscindere.

Quodsi tandem totius hyperbolae Sr_1Pq_{11} cursum, quatenus ad asymptotam $apab$ inclinatur, inde a punctis q_{11} et P usque ad punctum eius infinite remotum atque istinc, ad alterum ramum traiecti, rursus usque ad punctum S, mente prosequimur, modo illam in P ab interiore ad exteriorem rami PQR partem transmigrantem, modo ab exteriore ad interiorem reversam videmus, id quod fieri non potest, nisi eundem ramum in novo puncto K perrumpat.

Ex his apparet, hyperbolas Sr_1Pq_{11} et $PRQGE$ revera sese invicem in tribus punctis P, N et K, et ob eam caussam etiam in quarto M penetrare; quod vero de una hyperbolarum Sr_1Pq_{11}, Sp_1Qr_{11} et Sq_1Rp_{11} demonstratum est, idem sine dubio de reliquis quoque valet. Atque igitur puncta illa, quae supra tribus istis hyperbolis cum hyperbola $PRQGE$ communia esse diximus, haud fictitia sunt sive imaginaria putanda, sed revera existunt. Plura autem illa quam tria numero non esse, ipsa figura docet. Nimirum duo, N et K, ad ramum PRQ, tertium vero, M, solum ad alterum curvae ramum GFE pertinent.

§. 8.

Etiamnunc superest, ut naturam sectionum conicarum, quae quadrangulo $ABCD$ circumscriptae centris M, N et K utuntur, investigemus. Ad parabolarum quidem genus eas non pertinere, certum est; nam illa centra loca finita obtinent; utrum autem ellipsibus an hyperbolis, et quaenam quibusnam, adnumerandae sint, hoc ex sequentibus diiudicari poterit:

Omnis puncti polaris harmonica, prout illud extra vel intra curvam se habet, ad ellipsin relata aut eam secat et inter centrum eius atque illud ipsum punctum migrat, aut extrinsecus et ab eadem centri parte atque illud punctum existit; ad hyperbolam vero relata aut curvam secat et e contraria centri parte atque polus suus iacet, aut non secat et inter centrum curvae et polum suum transit.

Quae quum ita sint, puncta N et K ellipsium centra, per A, B, C, D meantium, esse non possunt. Nam lineae QR, PR, PQ punctorum P, Q, R polares harmonicae sunt respectu omnium sectionum conicarum, quae per A, B, C, D transeunt; neque tamen QR aut inter puncta P et N, aut ab eadem parte centri N atque P se habet; eademque rectae PR et punctorum Q et K ratio est. Ex contrario autem neque centrum M ad hyperbolam potest referri; quia, hoc si fieret, recta QR, quum inter P et M intercedat, tota extra curvam caderet, ergo PR, externi puncti Q polaris harmonica, ultra Q' et M dimoveretur; id quod absurdum est. Persuasum igitur habemus, M ellipseos, N et K duarum hyperbolarum centra esse. Neque vero, quid istae quidem hic sibi velint, latere poterit, dum ad originem aequationis (II) regrediamur. Etenim quum expressio $MZ.MX.\sin\varphi$, quae §. 1. usuvenit, in hyperbola triangulum, ambabus asymptotis et tangenti cuilibet interiectum significet, perspicuum est, triangulum istud in duabus illis hyperbolis omnium minimum esse.

Fieri denique potest, ut hyperbolarum Sr_1Pq_{11}, Sp_1Qr_{11} Sq_1Rp_{11} aut una aut tres ad duarum rectarum systemata redigantur. Quod si enim aut

$$\frac{p_1}{q_1}=\pm\frac{\pi}{\varkappa},\ \text{aut}\ \frac{p_1}{r_1}=\pm\frac{\pi}{\varrho},\ \text{aut}\ \frac{q_1}{r_1}=\pm\frac{\varkappa}{\varrho}$$

eveniat, vel, quod eodem redit, si aut rectarum BC et AD, aut CA et BD, aut AB et CD una per alteram in partes aequales secetur, aequationes (IX) singulae in binas hasce simpliciores dissolvuntur:

$$3(p\varkappa\pm q\pi)=p_1\varkappa\ \text{ et }\ p\varkappa\mp q\pi=0;$$
$$3(p\varrho\pm r\pi)=p_1\varrho\ \text{ et }\ p\varrho\mp r\pi=0;$$
$$3(q\varrho\pm r\varkappa)=q_1\varrho\ \text{ et }\ q\varrho\mp r\varkappa=0.$$

Ex. gr. si ex illis sex conditionibus eam, quae sola ad figuram nostram quadrat, admittimus, videlicet ut $\frac{p_1}{q_1}=\frac{\pi}{\varkappa}$ evadat, sive ut recta BC per AD bifariam secetur, erit:

$$3(p\varkappa+q\pi)=p_1\varkappa \text{ et } p\varkappa-q\pi=0;$$

unde, assumptis aequationibus (I) et (II), centrorum N, K et M coordinatae efficiuntur hae:

puneti N:

$$p=\frac{1}{6}\cdot\frac{p_1}{\varrho}(\varrho+\sqrt{\varrho^2+2(r_1-\varrho)^2});$$

$$q=\frac{1}{6}\cdot\frac{q_1}{\varrho}(\varrho-\sqrt{\varrho^2+2(r_1-\varrho)^2});\ r=\frac{2}{3}r_1;$$

puncti K:

$$p=\frac{1}{6}\cdot\frac{p_1}{\varrho}(\varrho-\sqrt{\varrho^2+2(r_1-\varrho)^2});$$

$$q=\frac{1}{6}\cdot\frac{q_1}{\varrho}(\varrho+\sqrt{\varrho^2+2(r_1-\varrho)^2});\ r=\frac{2}{3}r_1;$$

et puncti M:

$$p=-\varkappa\frac{r_1-\varrho}{2\varrho-r_1};\ q=-\varkappa\frac{r_1-\varrho}{2\varrho-r_1};\ r=\varrho\frac{\varrho}{2\varrho-r}.$$

Sub illa igitur conditione centrum ellipseos quaesitae cum puncto F confunditur

§. 9.

Totius iam disquisitionis nostrae haec fere summa erit:

Theorema 4.

Si in quadrangulo completo per centrum gravitatis eius trianguli, quod coraustorum intersectionibus determinatur, tres rectae lateribus parallelae ducantur, primo: unicuique parallelogrammorum, quae sic oriuntur, hyperbola circumscribi poterit, cuius asymptotae coraustis, in ipsa curva concurrentibus, parallelae sint; deinde: tres istae hyperbolae praeter gravitatis centrum per nova tria eademque puncta transibunt, et ea quidem puncta simul in quarta hyperbola sita erunt, quae coraustorum quadranguli et medietates et intersectiones complectitur; denique, id quod gravissimum est: si quattuor puncta, quibus quadrangulum constituitur, ita disposita fuerint; ut nullum eorum intra triangulum a reliquis effectum cadat, unum e tribus illis punctis, quod intra ipsum quadrangulum est, centrum erit ellipseos, omnium, quae huic quadrangulo circumscribi possunt, minimae; et duo reliqua duarum hyperbolarum, eidem quadrangulo circumscriptarum, centra erunt, in quibus triangula, inter asymptotas et tangentes quaslibet interiecta, omnium minima et ob eam ipsam caussam inter se aequalia existent.

Theorema 5.

Quodsi in quadrangulo simplici una diagonalium per alteram bifariam secetur, inter omnes ellipses, ei quadrangulo circumscriptas, illa minima erit, cuius centrum medietatem diagonalis inaequaliter divisae obtinuerit.

§. 10.

Illust. Angerus problematis nostri inventionem ad resolutionem aequationis cubicae redegit atque ita ellipsin quaesitam per numeros irrationales sive per appropinquationem determinavit. Nostrae solutionis similis ratio est, tantum quod duarum hyperbolarum intersectione machinamur, quod ille duarum radicum cubicarum extractione efficit. Quanto autem facilior illa geometrica descriptio numerorum ista computatione evadat, praesertim si ab initio ellipsis non computari sed delineari iussa fuerit, facile ex eo perspicitur, quod ad inveniendam illam intersectionem perpaucis duntaxat punctis determinatis opus est. Nam quum is hyperbolae $Sq_1\ Rp_{11}$ ramus, qui punctum M continet, inter rectas AD et rd porrigatur oporteat, et quum eiusdem hyperbolae curvatura prope centrum M satis exigua sit, totum negotium in eo consistet, ut hyperbolae $PRQGE$ ea particula, quae inter F punctum et rectam rd interiacet, punctatim describatur, et praeterea duo puncta hyperbolae $Sq_1\ Rp_{11}$ sive $Sr_1\ Pq_{11}$. $Sp_1\ Qr_{11}$, quae in ea regione sunt, per rectam lineam coniungantur.

Annotatio.

Quum in comparatione problematum sibi invicem cognatorum multum saepe utilitatis insit, haud abs re puto, alterius quoque illius, de quo initio mentionem feci, problematis solutionem, quod sciam, adhuc incognitam proponere, cuius rationes vel e theoremate 1., quod supra demonstravimus, vel ex iis, quae Claris. Gauss in Zachii „Monatl. Corresp. August. 1810. p. 112 —121" de eodem problemate docuit, repetendae sunt:

Theorema.

Si in quadrilatero completo super tribus segmentis, quae trium diagonalium medietates coniungunt, totidem triangula aequilatera erigantur, circulus, qui per gravitatis centra istorum triangulorum transit, rectam medietates illas continentem in duobus punctis secat, quorum alterum ellipseos centrum est, inter omnes illi quadrilatero inscriptas maximae, alterum hyperbolae, eidem quadrilatero inscriptae, cuius inter asymptotas et tangentem quamlibet triangulum omnium maximum intercipitur.

IV.

Ueber das Rationalmachen von Nennern mit unbestimmt vielen irrationalen Gliedern.

Von dem

Herrn Doctor E. W. Grebe,

Gymnasiallehrer zu Cassel.

1.

Das Rationalmachen solcher Nenner, in welchen lauter irrationale Quadratwurzeln entweder allein oder in Gesellschaft mit einem rationalen Ausdrucke als Glieder vorkommen.

Man behandelt in den Elementen zum Zwecke des Rationalmachens gewöhnlich nur Nenner von den Formen $a \pm b\sqrt{B}$ und $a\sqrt{A} \pm b\sqrt{B}$, und wendet dabei den bekannten Satz von dem Producte der Summe und Differenz an. Die Bemerkung liegt dann nicht fern, dass man durch wiederholte Anwendung dieses Satzes auch Nenner bis zu den Formen $a+b\sqrt{B}+c\sqrt{C}+d\sqrt{D}$ und $a\sqrt{A}+b\sqrt{B}+c\sqrt{C}+d\sqrt{D}$ — es wird nicht nöthig erscheinen, hier und im Folgenden stets das doppelte Zeichen zwischen die einzelnen Glieder zu setzen — rational zu machen im Stande ist. Hat man nun aber schon die Form $a+b\sqrt{B}+c\sqrt{C}+d\sqrt{D}+e\sqrt{E}$, so erhält man, wenn nicht durch den speziellen Werth der gebrauchten Buchstaben eine Vereinfachung eintritt, im günstigsten Fall wieder einen Ausdruck von derselben Form und Gliederzahl, und man verzweifelt an dem Gelingen der Arbeit. Und doch zeigt eine genauere Betrachtung, dass das Rationalmachen auch bei dieser und jeder grössern Anzahl von Gliedern immer noch möglich ist.

Wir wollen jetzt annehmen, dass in dem Ausdrucke

$$a+b\sqrt{B}+c\sqrt{C}+d\sqrt{D}+e\sqrt{E}+f\sqrt{F}+\ldots\ldots$$

die gebrauchten grossen Buchstaben keinen quadratischen Factor mehr enthalten, und mit β, γ, δ, ε, ζ, ..., von denen dasselbe gelten soll, und ausserdem noch vorausgesetzt werden mag, dass keine zwei dieser Elemente einen gemeinschaftlichen Factor haben, entweder identisch oder durch Multiplication aus mehreren von ihnen zusammengesetzt seien. Es ist dann klar, dass der eben hingestellte Ausdruck ein besonderer Fall von einem andern sein muss, welcher, wenn wir uns z. B. auf drei Elemente beschränken, ausser dem rationalen Gliede noch Glieder mit $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\delta}$, $\sqrt{\beta\gamma}$, $\sqrt{\beta\delta}$, $\sqrt{\gamma\delta}$ und $\sqrt{\beta\gamma\delta}$ haben, im Allgemeinen aber als Radicanden sämmtliche Unionen, Binionen, Ternionen u. s. w. ohne Wiederholung bis zu dem Product sämmtlicher vorhandenen Elemente aufführen würde. Wir betrachten einen solchen Ausdruck wie den zuletzt gedachten etwas näher. Derselbe hat offenbar die Eigenschaft, dass wenn er mit einem oder mehreren anderen Ausdrücken, die sich von ihm nur durch den besonderen Werth des rationalen Gliedes und der Coefficienten der irrationalen Glieder unterscheiden, multiplicirt wird, immer wieder Ausdrücke von derselben Form und Gliederzahl zum Vorschein kommen. Die Anzahl der Glieder eines solchen Ausdrucks beträgt aber bei n Elementen

$$1+\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

oder, da dieses die Binomialcoefficienten der $n$ten Potenz sind, 2^n. Einen rational zu machenden Nenner mit lauter Quadratwurzeln können wir also immer, wenn wir in den Radicanden n Elemente unterschieden haben, durch Einführung der Null als rationales Glied oder als Coefficient eines oder mehrerer irrationaler zu einem 2^ngliederigen Ausdrucke vervollständigen, und es handelt sich mithin jetzt nur um das Rationalmachen dieses letzteren. Sondern wir ein Element, etwa β, von den $n-1$ übrigen

Elementen ab; so bedingen diese letzteren für sich nur einen 2^{n-1}gliederigen Ausdruck, welcher mit M bezeichnet werde. Das Element β kommt also in den 2^{n-1} übrigen Gliedern vor, und das Aggregat dieser lässt sich durch $N\sqrt{\beta}$, der ganze 2^ngliederige Ausdruck also durch $M+N\sqrt{\beta}$ darstellen. Erweitert man nun den gegebenen Bruch mit $M-N\sqrt{\beta}$, so erhält man als neuen Nenner $M^2-N^2\beta$, welcher offenbar nur 2^{n-1}gliederig sein kann. Ebenso wie man sich aus einem 2^ngliederigen Nenner einen 2^{n-1}gliederigen verschafft hat, gelangt man nun weiter von diesem zu einem 2^{n-2}gliederigen, und bei gehöriger Fortsetzung zuletzt von einem zweigliedrigen Nenner zu einem rationalen.

Beispiel. Es sei ein Bruch

$$\frac{42-2\sqrt{2}-40\sqrt{6}+20\sqrt{10}+6\sqrt{15}-10\sqrt{30}}{7\sqrt{2}-3\sqrt{5}-5\sqrt{6}+2\sqrt{10}+\sqrt{30}}$$

vorgelegt, der so umgeformt werden soll, dass sein Nenner rational wird. Da in dem vorgelegten Nenner nur die Zahlen 2, 3 und 5 als Elemente der Radicanden vorkommen, so würde derselbe bis auf acht Glieder vervollständigt

$$0+7\sqrt{2}+0\sqrt{3}-3\sqrt{5}-5\sqrt{6}+2\sqrt{10}+0\sqrt{15}+\sqrt{30}$$

lauten. Sondert man die Glieder, welche den Factor $\sqrt{5}$ haben, von den übrigen ab, so kann man den Nenner auch schreiben:

$$(7\sqrt{2}-5\sqrt{6})+(-3+2\sqrt{2}+\sqrt{6})\sqrt{5}.$$

Erweitert man nun den ganzen Bruch mit der dieser Summe entsprechenden Differenz und reducirt, so erhält man

$$\frac{892+639\sqrt{2}-540\sqrt{3}+1080\sqrt{5}-420\sqrt{6}-180\sqrt{10}-266\sqrt{15}-120\sqrt{30}}{133+60\sqrt{2}-180\sqrt{3}+30\sqrt{6}}.$$

Erweitert man abermals mit $(133+60\sqrt{2})+(180-30\sqrt{2})\sqrt{3}$, so kommt

$$\frac{195316+104307\sqrt{2}+155412\sqrt{15}-168720\sqrt{30}}{-77711+84360\sqrt{2}},$$

und wenn man diesen Bruch abermals mit $77711+84360\sqrt{2}$ erweitert; so entsteht ein Bruch mit rationalem Nenner, der sich dann leicht zu dem Endresultat

$$4+3\sqrt{2}-2\sqrt{15}$$

umwandeln lässt.

Es ist ersichtlich in dem Bisherigen zuerst gezeigt worden, dass zum Rationalmachen eines Nenners mit lauter Quadratwurzeln der Satz von dem Producte der Summe und Differenz allein schon hinreicht. Doch würde man auch hier durch ein Verfahren von allgemeiner Anwendbarkeit haben zum Ziel gelangen können, nämlich durch die Methode der unbestimmten Coefficienten. Hätte man für das gegebene Beispiel angenommen, der Werth des vorgelegten Bruchs sei

$$x_1+x_2\sqrt{2}+x_3\sqrt{3}+x_4\sqrt{5}+x_5\sqrt{6}+x_6\sqrt{10}+x_7\sqrt{15}+x_8\sqrt{30}$$

und hätte man nun diesen Ausdruck mit dem Nenner multiplicirt; so würde man wieder zu acht Gliedern gelangt sein, die man mit dem vorgelegten Zähler hätte vergleichen können. Es würde sich auch dann ergeben haben:

$$x_1=4;\ x_2=3;\ x_3=0;\ x_4=0;$$
$$x_5=0;\ x_6=0;\ x_7=-2;\ x_8=0.$$

2.

Unsere Aufgabe in ihrer Allgemeinheit mit der einzigen beschränkenden Bedingung, dass die Wurzelexponenten der vorkommenden irrationalen Glieder rational seien.

Sollen wir den Nenner eines Bruchs rational machen, dessen sämmtliche Glieder ausser einem etwa vorhandenen rationalen von der Form $p\sqrt[q]{R}$ sind, und gestatten wir nur rationale Werthe für den Wurzelexponenten q; so können wir durch bekannte Umformungen etwaige negative und gebrochene Wurzelexponenten beseitigen, und wir brauchen demnach unsere Betrachtungen nur auf ganze positive Wurzelexponenten zu erstrecken. Sind ferner die in demselben Nenner vorkommenden Wurzelexponenten alle oder doch zum Theil ungleich; so können wir wieder so umwandeln, dass ein überall gleicher Wurzelexponent entsteht, der dem kleinsten Dividuus der früheren Exponenten entspricht. Ist dieses alles geschehen, so sei unser Nenner

$$a+b\sqrt[m]{B}+c\sqrt[m]{C}+d\sqrt[m]{D}+e\sqrt[m]{E}+f\sqrt[m]{F}+\ldots\ldots$$

Legen wir auch hier den Buchstaben β, γ, δ, ε, ζ,.... eine ähnliche Bedeutung wie oben bei, nur mit dem Unterschiede, dass jetzt jeder der Buchstaben B, C, D, E, F,.... auch die Potenzen von β, γ, δ, ε, ζ,..... bis zur $(m-1)$ten Potenz einschliesslich als Factoren enthalten darf; so lässt sich auch hier wieder behaupten, der rational zu machende Nenner sei ein besonderer Werth eines allgemeinen Ausdrucks, der die Eigenschaft hat, mit andern Ausdrücken derselben Art multiplicirt jedesmal wieder nur

Ausdrücke von derselben Beschaffenheit und Gliederzahl hervorzubringen. Die fragliche Gliederzahl ist aber eben so gross, als die Zahl der Glieder in der Entwickelung des Products

$$(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{m-1})\,(1+\gamma+\gamma^2+\ldots+\gamma^{m-1})\,(\ldots)\,(\ldots) \text{ u. s. w.};$$

also für n Elemente $=m^n$. Die Regel für das Rationalmachen des gegebenen Nenners ist nun die, dass man sich den erforderlichen m^ngliederigen Ausdruck mit unbestimmten Coefficienten bilde, denselben mit dem Nenner multiplicire und das Product, welches ebenfalls m^ngliederig sein muss, mit dem Zähler oder einem Factor des letzteren, wozu man der Einfachheit wegen immer die Zahl 1 nehmen kann, vergleiche.

Beispiel. Man soll den Nenner des Bruchs

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$$

rational machen. Man setze den Werth dieses Bruchs gleich

$$x_1+x_2\sqrt[3]{2}+x_3\sqrt[3]{3}+x_4\sqrt[3]{4}+x_5\sqrt[3]{9}+x_6\sqrt[3]{6}+x_7\sqrt[3]{12}$$
$$+x_8\sqrt[3]{18}+x_9\sqrt[3]{36}.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ und setzt das Product gleich 1; so erhält man die neun Gleichungen

$$\begin{aligned}
x_1+2x_4+3x_5&=1,\\
x_2+x_1+3x_8&=0,\\
x_3+2x_7+x_1&=0,\\
x_4+x_2+3x_9&=0,\\
x_5+2x_9+x_3&=0,\\
x_6+x_3+x_2&=0,\\
x_7+x_6+x_4&=0,\\
x_8+x_5+x_6&=0,\\
x_9+x_8+x_7&=0;
\end{aligned}$$

aus welchen folgt:

$$x_1=-\frac{1}{3} \qquad x_4=+\frac{1}{6}$$

$$x_2=+\frac{1}{3} \qquad x_5=+\frac{1}{3}$$

$$x_3=0 \qquad x_6=-\frac{1}{3}$$

$$x_7 = +\frac{1}{6} \qquad x_9 = -\frac{1}{6}.$$
$$x_8 = 0$$

Der vorgelegte Bruch ist also an Werth gleich dem Ausdrucke

$$-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{2}+\frac{1}{6}\sqrt[3]{4}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{6}+\frac{1}{6}\sqrt[3]{12}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{36}$$

oder dem Bruche

$$\frac{-2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{36}}{6}.$$

V.

Betrachtung zweier besonderen Arten von Gleichungen und ihre Anwendung zur Herleitung der Hauptgleichungen der ebenen Trigonometrie.

Von

Herrn Dr. Wilhelm Matzka,

Professor der Mathematik zu Tarnow in Galizien.

1.

Es wäre wünschenswerth, dass die Lehrbücher der Algebra manche in der Anwendung häufiger vorkommende ausgezeichnete Arten von Gleichungen allgemein und umständlich erforschen möchten, damit die Ergebnisse in der Folge an den geeigneten Stellen sogleich vortheilhaft benutzt werden könnten. Wie ich dies meine, wird aus dem Folgenden völlig klar werden.

2.

A. Betrachtung gleichartiger Gleichungen.

Bekanntlich heisst ein algebraischer Ausdruck, der mehrere Grössen A, B, C,..., derselben Art enthält, **gleichartig** (homogen), wenn alle seine Glieder die nämliche **Abmessung** (Dimension), d. i. einerlei Summe der Exponenten der in je einem Gliede vorkommenden solchen Grössen, haben; und man nennt diesen **Ausdruck von der so vielten Abmessung**, als diese Summe angiebt. **Eine Gleichung ist gleichartig**, wenn ihre beiden Theile sowohl einzeln als auch unter sich gleichartig sind.

Lehrsatz. **Sind die in einer gleichartigen Gleichung vorkommenden Grössen A, B, C,... derselben Art proportional gewissen anderen a, b, c,.... der nemlichen oder einer anderen Art**, ist nemlich

$$A:B:C:...=a:b:c:...;$$

so ist es gestattet, jede der ersteren Grössen durch ihre proportionale aus der letzteren zu ersetzen.

Beweis. Seien **erstlich** wenigstens die Grössen der zweiten Art **Zahlen**, und sei der Quotient $A:a=Q$, so ist auch $B:b=Q$, $C:c=Q$,..., und Q ist eine Grösse der nämlichen Gattung wie A, B, C,... so wie auch $A=aQ$, $B=bQ$, $C=cQ$,... Ersetzt man nun in der ersten Gleichung die Grössen A, B, C,... durch die Producte aQ, bQ, cQ,..., und führt man die Rechnungen mit ihnen — je nachdem es angeht — wirklich oder nur combinatorisch (symbolisch) aus; so muss in beiden Theilen der Gleichung diejenige Potenz von Q als gemeinschaftlicher Factor aller Glieder heraustreten, als von welcher Abmessung sämmtliche Glieder, also auch beide Gleichungstheile sind. Danach fällt nun dieser gemeinsame Factor aus der Gleichung heraus, und an die Stellen der Grössen A, B, C,... sind die ihnen proportionirten Zahlen a, b, c,.... getreten. Wäre die Gleichung insbesondere von der **nullten Abmessung**, so würde dieser Factor schon aus jedem einzelnen Gliede herausfallen.

Da hiebei auch $A:Q=a$, $B:Q=b$, $C:Q=c$,... ist, so sind a, b, c, die Zahlwerthe (Werth- oder Masszahlen) der Grössen A, B, C,... in Bezug auf Q als Masseinheit dieser Grössengattung. Mithin ist es gestattet, in jeder gleichartigen Gleichung die vorkommenden Grössen durch ihre Werthzahlen zu ersetzen. Dann aber ist es — weil der Rückschritt, wenigstens bei combinatorischer Rechnung, unverwehrt bleibt — auch erlaubt, umgekehrt die Werthzahlen, in Bezug auf welche eine Gleichung gleichartig ist, durch die Grössen selbst, denen sie angehören, zu ersetzen.

Zweitens seien beide Arten der Grössen noch ungemessen, also z. B. Winkel, Strecken, Flächen- oder Körperräume, Zeiten, Gewichte u. dergl. selbst, noch nicht durch Zahlen vorgestellt. — Sind sie zugleich von einerlei Art, so darf man noch wie vorher jede der ersteren Art durch ihre proportionale aus der zweiten Art theilen, nur ist hier der Quotient Q eine Zahl, und es gilt daher wieder die vorige Schlussweise im Beweise. — Sind jedoch die Grössen von verschiedener Art, z. B. die einen Flächen, Zeiten,..., die anderen Winkel, Strecken,...; so ist jenes Theilen nicht mehr erlaubt. Seien dann α, β, γ,... die Zahlenwerthe der Grössen A, B, C,... in Bezug auf was immer für eine Masseinheit, die von jeder aus ihnen verschieden ist, so dass kein Zahlwerth $=1$ wird; so können diese durch jene ersetzt werden, und die Gleichung bleibt noch gleichartig. Weil aber $A:B:C:...=a:b:c:...$ vorausgesetzt ist, so muss such $\alpha:\beta:\gamma:...=a:b:c,...$ sein; folglich können α, β, γ,.... auch als zusammengehörige Zahlwerthe von a, b, c,... angesehen und daher, vermöge des Obigen, auch wieder durch diese Grössen ersetzt werden. Dann aber sind die ursprünglichen Grössen A, B, C,.... einer Gattung eigentlich durch die ihnen proportionalen a, b, c,... einer anderen Gattung ersetzt.

Da sonach alle möglichen Fälle erschöpft sind, so gilt der Satz ganz allgemein.

3.

AA. Benützung dieser Gleichungen zur Ableitung von Hauptgleichungen der geradlinigen Trigonometrie.

Sind a, b, c die Seiten eines geradlinigen Dreieckes und α, β, γ in derselben Ordnung ihre Gegenwinkel, so erweist man bekanntlich höchst einfach die beiden folgenden Sätze:

$$(1) \qquad \alpha+\beta+\gamma=180^\circ,$$

$$(2) \qquad \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Aus ihnen aber lassen sich vermöge des so eben erwiesenen Lehrsatzes nachstehende andere Hauptgleichungen sehr leicht ableiten.

1. Aus (1) folgt $\sin\alpha=\sin(\beta+\gamma)$ oder

$$(\odot) \qquad \sin\alpha=\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta.$$

Ersetzt man nun hierin die sin durch die ihnen vermöge (2) proportionalen Seiten, so erhält man

(3) $$a = b\cos\gamma + c\cos\beta,$$

bekanntlich die Grundgleichung der gesammten ebenen Trigonometrie.

II. Die Gleichung (⊙) giebt ferner

$$\sin\alpha = \sin\beta(\cos\gamma + \sin\gamma\cot\beta)$$

folglich, wenn man $\sin\alpha$, $\sin\beta$ durch ihre Proportionalen a, b ersetzt,

$$a = b\cos\gamma + b\sin\gamma.\cot\beta,$$

woraus man

(4) $$\cot\beta = \frac{a - b\cos\gamma}{b\sin\gamma}, \quad \tang\beta = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}$$

findet.

III. Erhebt man die Gleichung (⊙) zur zweiten Potenz und umstaltet diese in folgender leicht zu überschauenden Weise, so erhält man

$$\begin{aligned}\sin\alpha^2 &= \sin\beta^2\cos\gamma^2 + \sin\gamma^2\cos\beta^2 + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma\\ &= \sin\beta^2(1 - \sin\gamma^2) + \sin\gamma^2(1 - \sin\beta^2) + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma\\ &= \sin\beta^2 + \sin\gamma^2 + 2\sin\beta\sin\gamma(\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma)\\ &= \sin\beta^2 + \sin\gamma^2 + 2\sin\beta\sin\gamma\cos(\beta+\gamma),\end{aligned}$$

oder weil vermöge (1)

$$\cos(\beta+\gamma) = -\cos\alpha$$

ist,

$$\sin\alpha^2 = \sin\beta^2 + \sin\gamma^2 - 2\sin\beta\sin\gamma.\cos\alpha.$$

Setzt man abermals statt der sin die ihnen proportionirten Seiten, so erfolgt

(5) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

der bekannte erweiterte Pythagorische Lehrsatz.

IV. Allgemein gelten für jede zwei Winkel α und β die Gleichungen

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta);$$

daher ist auch

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Gehören nun diese Winkel einem geradlinigen Dreiecke an, und ersetzt man ihre Sinus durch ihre proportionalen Gegenseiten, so erhält man den bekannten Satz

$$(6)\qquad \frac{a+b}{a-b}=\frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Anmerkung. Aus denselben zwei Grundgleichungen (1) und (2) hat auch schon Cauchy in seinem Cours d'analyse, Paris, 1821. S. 436. 437., deutsch von Huzler, Königsberg. 1828., S. 308. — 310., so wie Herr Prof. Grunert im Archiv, II. Theil, 1842, 2. Heft. S. 215. — 218. die Haupt- und mehrere andere wichtige Gleichungen der geradlinigen Trigonometrie abgeleitet.

B. Betrachtung zweier und dreier erstgradiger Gleichungen mit drei Unbekannten.

4.

Das Folgende einleitend betrachten wir zuvörderst folgende zwei erstgradige, die drei Unbekannten x, y, z enthaltende Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} ax+by+cz&=0,\\ a'x+b'y+c'z&=0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können nicht die vollständigen, sondern (vermöge des Art. 2) nur proportionale Werthe der Unbekannten bestimmen, weil sie in Bezug auf diese gleichartig sind. Zur Ermittelung dieser Proportionalen eliminiren wir je eine der drei Unbekannten, indem wir die erstere Gleichung mit einem unbestimmten Multiplicator λ multipliciren, und im Unterschiede beider Gleichungen

$$(a'-\lambda a)x+(b'-\lambda b)y+(c'-\lambda c)z=0$$

den Factor der zu eliminirenden Unbekannten Null machen.

Setzen wir, x eliminirend, $a'=\lambda a$, so wird

$$\frac{y}{\lambda c - c'} = \frac{z}{b' - \lambda b},$$

daher, wenn wir die Nenner mit a multipliciren und λa durch a' ersetzen,

$$\frac{y}{ca' - c'a} = \frac{z}{ab' - a'b}.$$

Setzen wir, y eliminirend, $b' = \lambda b$, oder vertauschen wir in der letzten Gleichung y mit x, also b mit a; so erhalten wir

$$\frac{x}{b'c - bc'} = \frac{z}{a'b - ab'}.$$

Diese Ausdrücke gleich stellend finden wir zu den Gleichungen (1) die ihnen gleich geltenden Verhältnissgleichungen

$$(2) \qquad \frac{x}{bc' - b'c} = \frac{y}{ca' - c'a} = \frac{z}{ab' - a'b},$$

in denen die, den Unbekannten x, y, z proportionirten, Unterschiede aus den Coefficienten der Gleichungen (1) nach einem leicht überschaulichen Gesetze gebildet werden.

5.

Untersuchen wir als weitere Vorbereitung auch noch die folgenden drei erstgradigen Gleichungen eben der drei Unbekannten:

$$(3) \qquad \begin{aligned} ax + by + cz &= 0, \\ a'x + b'y + c'z &= 0, \\ a''x + b''y + c''z &= 0; \end{aligned}$$

so erhellt auch hier, dass aus gleichem Grunde wie vorher selbst diese drei Gleichungen blos proportionale Werthe der Unbekannten zu bestimmen geeignet sind, und auf zwei ihnen gleichgeltende Verhältnissgleichungen zurückgebracht werden können, zu denen jedoch für die dreimal drei Coefficienten eine Bedingungsgleichung hinzukommen muss.

Diese Bedingungsgleichung ergibt sich leicht, wenn man aus zwei Gleichungen, z. B. aus den beiden ersten mit den obigen (1) übereinkommenden, die Proportionalen (2) bestimmt, und diese in der dritten Gleichung substituirt; sie wird sonach

$$(4) \qquad ab'c'' - a''b'c + a'b''c - a'b''c' + a''bc' - a'bc'' = 0.$$

Weil jedes der drei aus den drei Gleichungen (3) sich ergebenden

Paare von Gleichungen drei Proportionalen zu den Unbekannten liefert, so würde man drei mal drei solche Proportionalen finden, von denen aber jede nur aus den Coefficienten je zweier Gleichungen gebildet wäre.

Um jedoch — wo möglich — Proportionalen zu finden, die aus den Coefficienten aller drei Gleichungen symmetrisch zusammengestellt werden, setzen wir

$$(4) \qquad Lx + My + Nz = u,$$

indem wir L, M, N später passlich zu wählen uns vorbehalten und eine neue Unbekannte u einführen.

Multipliciren wir sofort die Gleichungen (3) mit den unbestimmten Multiplicatoren λ, μ, ν, und ziehen die Producte von der Gleichung (4) ab, so finden wir,

$$\begin{aligned} u &= (L-\lambda a)x + (M-\lambda b)y + (N-\lambda c)z \\ &= (L-\mu a')x + (M-\mu b')y + (N-\mu c')z \\ &= (L-\nu a'')x + (M-\nu b'')y + (N-\nu c'')z. \end{aligned}$$

Wären nun die Multiplicatoren L, M, N und λ, μ, ν so bemessen, dass im ersten Ausdrucke von u nur x, im zweiten nur y und im dritten nur z bliebe, daher

$$(5) \qquad u = (L-\lambda a)x = (M-\mu b')y = (N-\nu c'')z$$

ausfiele; so müsste

$$(6) \qquad L = \mu a' = \nu a'', \quad M = \nu b'' = \lambda b, \quad N = \lambda c = \mu c'$$

sein. Dies kann jedoch nur geschehen, wenn

$$LMN : \lambda\mu\nu = a'b''c = a''bc'$$

ist, also die weitere Bedingungsgleichung

$$(7) \qquad a'b''c = a''bc'$$

besteht. Zugleich fände man

$$(8) \qquad \frac{L}{a'a''} = \frac{\mu}{a''} = \frac{\nu}{a'}, \quad \frac{M}{b''b} = \frac{\nu}{b} = \frac{\lambda}{b''}, \quad \frac{N}{cc'} = \frac{\lambda}{c'} = \frac{\mu}{c}.$$

Um aber, wie es die Gleichungen (3) erheischen, die sechs unbestimmten Coefficienten unter sich zu verknüpfen, setzen wir entweder $\frac{L}{a'a''}$ gleich einer der Zahlen b, c, denen in den beiden anderen Gleichungen ν und μ proportional sind;

oder $\frac{M}{b''b}$ gleich einer der Zahlen c', a', denen in den beiden anderen Gleichungen λ und ν proportional sind;

oder endlich $\frac{N}{cc'}$ gleich einer der Zahlen a'', b'', denen in den zwei übrigen Gleichungen μ und λ proportional sind.

Danach ergeben sich jene Coefficienten leicht, und sind nur noch in die Gleichungen (5) zu setzen, um die gewünschten Verhältnissgleichungen als Stellvertreter der vorgelegten Gleichungen (3) zu erhalten.

Beispiel. Setzen wir $\frac{L}{a'a''}=b$ so, wird

$$L=a'a''b,\ \mu=a''b,\ \nu=a'b;$$
$$M=a'b''b,\ \lambda=a'b'';$$
$$N=a'b''c=a''bc';$$

folglich sind die gesuchten Verhältnissgleichungen:

$$(9)\qquad (a''b-ab'')a'x=(a'b''-a''b')by=(c'a''-c''a')bz.$$

6.

Eine besondere Art der allgemeinen Gleichungen (3) ist diejenige, bei welcher der Bedingungsgleichung (7) dadurch entsprochen wird, dass

$$(10)\qquad b''=c'=A,\ c=a''=B,\ a'=b=C$$

ist. Hier übergehen die Gleichungen (8) in

$$(11)\qquad \frac{L}{BC}=\frac{M}{CA}=\frac{N}{AB}=\frac{\lambda}{A}=\frac{\mu}{B}=\frac{\nu}{C}.$$

Schreibt man nun die Gleichungen (3) mit Beachtung der Gleichheiten (10) und (11) ab, und lässt bei den Buchstaben b', c'' die jetzt entbehrlichen Striche weg, so erhält man folgende merkwürdige und in vielen Forschungen auftretende Art von Gleichungen*):

$$(12)\qquad \begin{aligned} ax+Cy+Bz&=0,\\ Cx+by+Az&=0,\\ Bx+Ay+cz&=0. \end{aligned}$$

Sie sind demnach vermöge (4) an die Bedingungsgleichung

---

*) Cauchy dürfte wohl der Erste sein, der sie so anordnet, z. B. in seinen Exercices de mathématiques, 1827. t. II. p. 87. bei den Trägheitsmomenten, 1828., t. III. p. 5., 10., 17., 83. bei den Flächen der 2. Ordnung.

(13) $$abc-aA^2-bB^2-cC^2+2ABC=0$$

gebunden und den Verhältnissgleichungen

(14) $$(BC-aA)x=(CA-bB)y=(AB-cC)z$$

gleichgeltend.

Diese Verhältnissgleichungen lassen sich noch wie folgt umgestalten. Setzt man für einen Augenblick

(15) $$BC-aA=\mathfrak{A},\ CA-bB=\mathfrak{B},\ AB-cC=\mathfrak{C};$$

wodurch sich die Gleichungen (14) auf

(16). $$\mathfrak{A}x=\mathfrak{B}y=\mathfrak{C}z$$

vereinfachen, so findet man durch Multiplication:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}\mathfrak{C}&=A^2BC-AbB^2-AcC^2+bcBC,\\ \mathfrak{C}\mathfrak{A}&=B^2CA-BcC^2-BaA^2+caCA,\\ \mathfrak{A}\mathfrak{B}&=C^2AB-CaA^2-CbB^2+abAB.\end{aligned}$$

Zieht man hiervon die der Reihe nach mit A, B, C multiplicirte Bedingungsgleichung (13) ab, so erhält man:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}\mathfrak{C}&=bc(BC-aA)-A^2(BC-aA)=\mathfrak{A}(bc-A^2),\\ \mathfrak{C}\mathfrak{A}&=ca(CA-bB)-B^2(CA-bB)=\mathfrak{B}(ca-B^2),\\ \mathfrak{A}\mathfrak{B}&=ab(AB-cC)-C^2(AB-cC)=\mathfrak{C}(ab-C^2).\end{aligned}$$

Setzt man noch für einen Augenblick

(17) $$bc-A^2=\alpha,\ ca-B^2=\beta,\ ab-C^2=\gamma;$$

so übergehen die letzten Gleichungen in

$$\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}=\alpha,\ \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}=\beta,\ \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}=\gamma;$$

welche paarweis multiplicirt

(18) $$\mathfrak{A}^2=\beta\gamma,\ \mathfrak{B}^2=\gamma\alpha,\ \mathfrak{C}^2=\alpha\beta$$

und sonach

(19) $$\alpha\mathfrak{A}^2=\beta\mathfrak{B}^2=\gamma\mathfrak{C}^2=\alpha\beta\gamma,$$

folglich

$$\mathfrak{A}\sqrt{\alpha}=\mathfrak{B}\sqrt{\beta}=\mathfrak{C}\sqrt{\gamma}=\sqrt{\alpha\beta\gamma}$$

geben; wofür man bequemer

$$\mathfrak{A}:\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=\mathfrak{B}:\frac{1}{\sqrt{\beta}}=\mathfrak{C}:\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$$

setzen kann.

In den Gleichungen (16) wird man demnach $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ durch ihre Proportionalen $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$, $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ ersetzen, und erhält sofort

$$\frac{x}{\sqrt{\alpha}}=\frac{y}{\sqrt{\beta}}=\frac{z}{\sqrt{\gamma}}$$

oder nach den Gleichungen (17)

$$(20)\qquad \frac{x}{\sqrt{bc-A^2}}=\frac{y}{\sqrt{ca-B^2}}=\frac{z}{\sqrt{ab-C^2}}$$

als die neue Form der Verhältnissgleichungen.

Führt man noch in den Gleichungen (18) und (19) an die Stelle der Hilfszahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; α, β, γ ihre Ausdrücke (15) und (17) ein, so ergeben sich

$$(21)\qquad \begin{aligned}(BC-aA)^2&=(ca-B^2)(ab-C^2),\\ (CA-bB)^2&=(ab-C^2)(bc-A^2),\\ (AB-cC)^2&=(bc-A^2)(ca-B^2)\end{aligned}$$

und

$$(22)$$
$$\begin{aligned}(bc-A^2)(BC-aA)^2&=(ca-B^2)(CA-bB)^2=(ab-C^2)(AB-cC)^2\\ &=(bc-A^2)(ca-B^2)(ab-C^2),\end{aligned}$$

als andere Gestalten der Bedingungsgleichung (13).

Diese Bedingungsgleichung gestattet noch eine andere merkwürdige Darstellung. Theilt man sie durch ABC, so wird sie

$$\begin{aligned}0&=\frac{abc}{ABC}-\frac{aA}{BC}-\frac{bB}{CA}-\frac{cC}{AB}+2\\ &=\left(1-\frac{aA}{BC}\right)+\left(1-\frac{bB}{CA}\right)+\left(1-\frac{cC}{AB}\right)-\left(1-\frac{abc}{ABC}\right);\end{aligned}$$

und man sieht sich aufgefordert, zur Abkürzung

$$1-\frac{aA}{BC}=\mathfrak{a},\quad 1-\frac{bB}{CA}=\mathfrak{b},\quad 1-\frac{cC}{AB}=\mathfrak{c}$$

zu setzen. Dadurch wird

$$\frac{aA}{BC}=1-\mathfrak{a},\quad \frac{bB}{CA}=1-\mathfrak{b},\quad \frac{cC}{AB}=1-\mathfrak{c}$$

und das Product dieser Ausdrücke

$$\frac{abc}{ABC}=(1-\mathfrak{a})(1-\mathfrak{b})1-\mathfrak{c})$$
$$=1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}+\mathfrak{bc}+\mathfrak{ca}+\mathfrak{ab}-\mathfrak{abc}.$$

Substituirt man oben, so wird

$$0=\mathfrak{bc}+\mathfrak{ca}+\mathfrak{ab}-\mathfrak{abc}$$

Theilt man diese Gleichung durch $\mathfrak{abc}$, so übergeht sie in

$$\frac{1}{\mathfrak{a}}+\frac{1}{\mathfrak{b}}+\frac{1}{\mathfrak{c}}=1$$

oder, wenn man die früheren Ausdrücke wieder herstellt, in

$$(23)\qquad \frac{1}{1-\frac{aA}{BC}}+\frac{1}{1-\frac{bB}{CA}}+\frac{1}{1-\frac{cC}{AB}}=1,$$

welches die gesuchte bemerkenswerthe Gestalt der Bedingungsgleichung (13) ist.

7.

Will man die eigenthümlich geformten Gleichungen (12) unmittelbar, ohne von einer allgemeineren Form zu ihnen herabzusteigen, in Behandlung nehmen, so dürfte der folgende Vorgang vor anderen den Vorzug verdienen.

Theilt man diese Gleichungen der Ordnung nach durch BC, CA, AB, so lassen sich ihnen folgende Formen ertheilen:

$$(24)\qquad \frac{aA}{BC}\cdot\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=0,$$
$$\frac{x}{A}+\frac{bB}{CA}\cdot\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=0,$$
$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{cC}{AB}\cdot\frac{z}{C}=0.$$

Diese Formen fordern aber sogleich zur Einführung nachstehender Abkürzungen auf:

$$(25)\qquad \frac{x}{A}=\xi,\ \frac{y}{B}=\eta,\ \frac{z}{C}=\zeta;$$

$$(26)\qquad \frac{aA}{BC}=\alpha,\ \frac{bB}{CA}=\beta,\ \frac{cC}{AB}=\gamma;$$

durch deren Einführung die letzten Gleichungen die höchst einfache Gestalt

$$(27)\qquad \begin{aligned} \alpha\xi+\eta+\zeta&=0,\\ \xi+\beta\eta+\zeta&=0,\\ \xi+\eta+\gamma\zeta&=0 \end{aligned}$$

annehmen, in der sie sogar nur noch drei Coefficienten anstatt der früheren sechs enthalten.

Setzt man noch für einen Augenblick

$$\xi+\eta+\zeta=\omega,$$

zieht hievon die Gleichungen (27) einzeln ab, und benutzt die Addition der Verhältnissglieder; so erhält man

$$\omega=(1-\alpha)\xi=(1-\beta)\eta=(1-\gamma)\zeta$$

$$=\frac{\xi}{\frac{1}{1-\alpha}}=\frac{\eta}{\frac{1}{1-\beta}}=\frac{\zeta}{\frac{1}{1-\gamma}}$$

$$=\frac{\xi+\eta+\zeta=\omega}{\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}+\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Mithin lassen sich die Gleichungen (27) durch die Verhältnissgleichungen

$$(28)\qquad (1-\alpha)\xi=(1-\beta)\eta=(1-\gamma)\zeta$$

ersetzen, und ihre Coefficienten sind an die Bedingungsgleichung

$$(29)\qquad \frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}+\frac{1}{1-\gamma}=1$$

gebunden, welche durch Beseitigung der Nenner die Form

$$(30)\qquad \alpha\beta\gamma-\alpha-\beta-\gamma+2=0$$

annimmt.

Aus eben jener Bedingungsgleichung findet man anderweitig

$$\frac{1}{1-\alpha}=1-\frac{1}{1-\beta}-\frac{1}{1-\gamma}=\frac{\beta\gamma-1}{(1-\beta)(1-\gamma)}$$

oder

$$(31)\qquad \begin{aligned} (1-\beta)(1-\gamma)&=(1-\alpha)(\beta\gamma-1), \text{ und nachgebildet}\\ (1-\gamma)(1-\alpha)&=(1-\beta)(\gamma\alpha-1),\\ (1-\alpha)(1-\beta)&=(1-\gamma)(\alpha\beta-1). \end{aligned}$$

Die Producte je zweier solcher Gleichungen liefern sofort

$$(32)\qquad \begin{aligned}(1-\alpha)^2&=(\alpha\beta-1)(\alpha\gamma-1),\\ (1-\beta)^2&=(\beta\gamma-1)(\beta\alpha-1),\\ (1-\gamma)^2&=(\gamma\alpha-1)(\gamma\beta-1).\end{aligned}$$

Multiplicirt man aber jede der Gleichungen (31) mit dem ersten Factor ihres zweiten Theiles, so findet man

$$(33)\qquad \begin{aligned}(1-\alpha)^2(\beta\gamma-1)&=(1-\beta)^2(\gamma\alpha-1)=(1-\gamma^2)(\alpha\beta-1)\\ &=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma),\end{aligned}$$

und hieraus

$$(34)\qquad (1-\alpha)\sqrt{\beta\gamma-1}=(1-\beta)\sqrt{\gamma\alpha-1}=(1-\gamma)\sqrt{\alpha\beta-1}.$$

Sofort können in den Gleichungen (28) die Factoren $1-\alpha$, $1-\beta$, $1-\gamma$ durch ihre Proportionalen

$$\frac{1}{\sqrt{\beta\gamma-1}},\quad \frac{1}{\sqrt{\gamma\alpha-1}},\quad \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta-1}}$$

ersetzt werden, wodurch jene Verhältnissgleichungen die Form

$$(35)\qquad \frac{\xi}{\sqrt{\beta\gamma-1}}=\frac{\eta}{\sqrt{\gamma\alpha-1}}=\frac{\zeta}{\sqrt{\alpha\beta-1}},$$

annehmen.

Stellt man nun endlich in den Gleichungen (28), (29), (30), (32), (33), (35) für ξ, η, ζ und α, β, γ ihre Ausdrücke aus (25) und (26) wieder her; so erhält man mittels ganz leichter Zurückleitungen die vorher in Art. 6. genannten Gleichungen (14), (23), (13), (21), (22), (20).

8.

BB. Verwendung dieser Gleichungen zur Aufstellung von Hauptgleichungen der ebenen Trigonometrie.

Bezeichnen a, b, c die Seiten und α, β, γ die ihnen gegenüber liegenden Winkel eines ebenen Dreieckes; so findet man dadurch, dass man die dasselbe begrenzende geschlossene, dreigliedrig gebrochene Linie $\overline{abc}$ der Reihe nach auf drei Axen projicirt, deren positive Richtungen denen der Seiten a, b, c selbst entgegengesetzt sind, geradezu die Gleichungen

$$(36)\qquad \begin{aligned} -a+b\cos\gamma+c\cos\beta&=0,\\ a\cos\gamma-b+c\cos\alpha&=0,\\ a\cos\beta+b\cos\alpha-c&=0. \end{aligned}$$

Hält man sie an die obigen Gleichungen (12), so hat man zu ersetzen

die dortigen $x, y, z;\ a,\ b,\ c;\ A,\ B,\ C;$
durch die hiesigen $a, b, c;\ -1,\ -1,\ -1;\ \cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma.$

Dadurch gewinnt man aus den Gleichungen (13), (21), (22) und (23) durch geringe Vereinfachung die folgenden einander gleich geltenden:

$$(37)\qquad \cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2-1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0;$$

$$(38)\qquad \begin{aligned} \cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma&=\sin\beta\sin\gamma,\\ \cos\beta+\cos\gamma\cos\alpha&=\sin\gamma\sin\alpha,\\ \cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta&=\sin\alpha\sin\beta; \end{aligned}$$

$$(38_0)\qquad \cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha+\cot\alpha\cot\beta=1;$$

welche, vornehmlich die (38), weil sämmtliche dieser Dreieckswinkel hohl sind, auf die bekannte Gleichung

$$(39)\qquad \alpha+\beta+\gamma=180^0$$

zurückführen.

Endlich geben die Gleichungen (14), verbunden mit (38), oder die Gleichungen (20) allein, die Proportionen

$$(40)\qquad \frac{x}{\sin\alpha}=\frac{y}{\sin\beta}=\frac{z}{\sin\gamma}.$$

Bemerkung. Wer demnach in einem Lehrbuche der reinen Mathematik in der Lehre von den Gleichungen die Gleichungen (12) erforschen würde, der könnte in der ebenen Trigonometrie, sobald er die Gleichung (36) erwiesen hätte, aus ihnen vermöge der Ergebnisse jener Forschungen die Gleichungen (39) und (40) sogleich in der hier gezeigten Weise folgern.

9.

Es dürfte vielleicht nicht unangemessen sein, hier noch zu zeigen, wie auch ohne solche Vorbereitung aus den Gleichungen (36) die beiden Hauptgleichungen (39) und (40) der geradlinigen Trigonometrie höchst leicht und zugleich abgeleitet werden können.*)

*) Ich habe diese Ableitung, ohne sie irgend wo anders gefunden

Eliminirt man aus den Gleichungen (36) eine Dreiecksseite, etwa die c, was am einfachsten geschieht, wenn man ihren Ausdruck aus der letzten Gleichung in die beiden ersten setzt; so erhält man

$$a \sin\beta^2 = b(\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma),$$
$$b \sin\alpha^2 = a(\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma).$$

Aus diesen Gleichungen leuchtet ein, dass der gemeinschaftliche Schlussfactor weder Null noch negativ werden kann, weil a, b als Dreiecksseiten, und $\sin\alpha$, $\sin\beta$ als von (hohlen) Dreieckswinkeln herstammend, positiv und von Null verschieden sind.

Multipliciren wir demnach diese Gleichungen erstlich wie sie über einander stehen, dann übers Kreuz, theilen dann durch die nie verschwindenden Factoren ab und $\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma$, und ziehen endlich aus den Producten die zweiten Wurzeln, die nur positiv ausfallen können; so erhalten wir

$$\sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma$$

und

$$a\sin\beta = b\sin\alpha.$$

Die erstere Gleichung gibt:

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= -(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\\ &= -\cos(\alpha+\beta),\end{aligned}$$

folglich, weil α, β, γ hohl sind,

$$(39) \qquad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ;$$

die andere aber

$$(40) \qquad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \text{ und nachgebildet noch } = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

---

zu haben, in §. 557. meiner Ueberarbeitung des 2. Bds. von Vega's Vorlesungen über d. Mathematik. Wien. 1. Aufl. 1835., 2. Aufl. 1848. gegeben. Unmittelbar davor in §. 556. zeigte ich nach J. J. Littrow's Elementen d. Algebra u. Geometrie. Wien 1827. S. 208. §. 1. die von Herrn Dr. Rädell im Archiv. 1. Thl. 4. H. 1841. S. 444. mitgetheilte Herleitung des erweiterten Pythagorischen Lehrsatzes ((5) in AA), die aber auch schon Carnot in seiner Géométrie de position. Paris. 1803. t. II. num. 251. gelehrt hat.

VI.

Zwei bemerkenswerth einfache Herleitungen der Hauptgleichungen der sphärischen Trigonometrie.

Von dem
Herrn Dr. Wilhelm Matzka,
Professor der Mathematik zu Tarnow in Galizien.

Bekanntlich gibt es mehrere (darunter eine sogar von Lagrange herrührende) Ableitungen der in der sphärischen Trigonometrie zwischen den Seiten und einem Winkel eines Kugeldreieckes bestehenden Grundgleichung, aus der alle übrigen Hauptgleichungen blos analytisch hergeleitet werden können. Jede derartige Ableitung wendet auf die, zweien geradlinigen Dreiecken gemeinsame Seite den erweiterten Pythagorischen Lehrsatz an. Eine solche Ableitung wird jedoch unbrauchbar, wenn entweder eine Seite oder ein Winkel des Dreieckes $= 90^{\circ}$ wird; auch unterlässt man gewöhnlich die Giltigkeit der Gleichung für alle möglichen Fälle nachzuweisen. Im Folgenden theile ich zwei Ableitungen dieser Grund- und Hauptgleichungen mit, welche der Beachtung der Geometer nicht unwürdig sein dürften. Die erste stellt jene Grundgleichung sogleich mit voller Allgemeingiltigkeit nach der bisher zu wenig beachteten und darum auch rücksichtlich ihrer unschätzbaren Vortheile gar nicht gekannten Lehre von der rechtwinkligen Projection auf, über welche ich — vielleicht in nicht ferner Zeit — eine ausführliche Abhandlung veröffentlichen zu können hoffe. Die zweite leitet sämmtliche Hauptgleichungen geometrisch und zwar aus einer einzigen Figur ab, wozu die Projectionslehre gleichfalls einen höchst schätzbaren Beitrag liefert.

A. Erste Herleitung.

1.

Grundgleichung. Sei (in Taf. I. Fig. 2.) ABC ein Kugeldreieck oder $OABC$ das ihm am Mittelpunkte O der Kugel entsprechende dreikantige Eck; danach seien $A=\alpha$, $B=\beta$, $C=\gamma$ seine Winkel und a, b, c deren Gegenseiten. Im Kugelmittelpunkte O stelle man auf den Halbmesser OA einer Spitze A des Kugeldreieckes oder auf die eine Kante OA des Eckes die senkrechte Ebene $\mathfrak{A}$ auf, projicire (winkelrecht) in diese die Halbmesser OB, OC der beiden anderen Dreiecksspitzen oder die zwei übrigen Kanten nach OB', OC'. Dann ist, wenn man etwa noch zur leichteren Einsicht die Seiten $AB=c$ und $AC=b$ zu Quadranten bis D und E verlängert, $BOB'=BD=AD-DB$ $=90^0-c$, $COC'=CE=AE-AC=90^0-b$, und $B'OC'=\alpha$.

Von einer der beiden letzteren Kanten, etwa von OB, projicire man ein beliebiges in O anfangendes Stück $OM=r$ (wofür man auch die Längeneinheit also $OM=1$ nehmen kann), mittelbar, und zwar benützend die Ebene $\mathfrak{A}$, auf die Projection OC' der anderen Kante OC, folglich seinen Endpunkt M nach N und P. Dann ist

$$ON=OM\cos BOB'=r\sin c,$$
$$NM=OM\sin BOB'=r\cos c;$$
$$OP=ON\cos B'OC'=r\sin c.\cos\alpha,$$
$$PN=ON\sin B'OC'=r\sin c.\sin\alpha.$$

Nun projicire man jene Strecke oder den Radiusvector OM in der ersten Kante OB einerseits, und die zwischen denselben Grenzpunkten O und M begriffene dreigliedrig gebrochene Linie $OPNM$ andererseits auf die zweite Kante OC selbst; so sind ihre algebraischen Projectionen einander gleich, und es haben hiebei

die Strecken:	OM,	OP,	PN,	NM
die Projectionswinkel:	$BOC=a$,	$COC'=90^0-b$,	90^0,	$COA=b$.

Mithin ist — ganz allgemein giltig —

$$r.\cos a=r\sin c\cos\alpha.\cos(90^0-b)+r\sin c\sin\alpha.\cos 90^0+r\cos c.\cos b$$

oder wenn man durch r theilt und sonst reducirt, sogleich

$$(1)\qquad \cos a=\cos\alpha.\sin b\sin c+\cos b\cos c,$$

die in **vollständiger Allgemeinheit** bestehende **Grundgleichung** zwischen den Seiten und einem Winkel eines Kugeldreiecks.

2.

I. **Erste Hauptgleichung.** Bildet man zur gefundenen Gleichung (1) eine gleichgestaltete durch Verwechselung von a und b, so wie von α mit β; so findet man

$$\cos b = \cos\beta . \sin c \sin a + \cos c \cos a.$$

Substituirt man diesen Ausdruck von $\cos b$ in (1), so wird

$$\cos a (1 - \cos c^2) = \cos a \sin c^2 = (\cos\alpha \sin b + \cos\beta \cos c \sin a) \sin c.$$

Weil keine Seite eines Kugeldreiecks 0 oder 180° sein kann, folglich $\sin c$ nie $= 0$ ist, so ist es gestattet durch ihn die letzte Gleichung zu dividiren; und sofort erfolgt

$$(2) \qquad \cos a \sin c = \cos\alpha \sin b + \cos\beta \cos c \sin a,$$

die zwischen den Seiten und zwei Winkeln bestehende Hauptgleichung.

II. **Eine Hilfsgleichung** zwischen allen sechs Stücken des Dreiecks. Vertauscht man in (2) a und c unter sich, und α mit γ, so erscheint

$$\cos c \sin a = \cos\gamma \sin b + \cos\beta \cos a \sin c.$$

Schreibt man nun diesen Ausdruck von $\cos c \sin a$ in (2), so übergeht diese in

$$\cos a \sin c (1 - \cos\beta^2) = \cos\alpha \sin b + \cos\beta \cos\gamma \sin b$$

oder in

$$(3) \qquad \cos a \sin c \sin\beta^2 = (\cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma) \sin b.$$

III. **Zweite und dritte Hauptgleichung.** Wenn man in (3) die β und γ so wie die b und c unter einander verwechselt, so verwandelt sie sich in

$$\cos a \sin b \sin\gamma^2 = (\cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma) \sin c.$$

Multiplicirt man diese zwei letzten Gleichungen mit einander, und zwar zuerst, so wie sie über einander stehen und dann kreuzweis, und zieht man aus den Producten die zweite Wurzel; so erhält man

$$\pm \cos a \sin\beta \sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma,$$
$$\pm \sin\beta \sin c = \sin\gamma \sin b.$$

In diesen Gleichungen können jedoch nur die oberen Vorzeichen gelten. In der ersten, weil für $\beta = \gamma = 90°$, wie man aus der

Lehre von den sphärischen Winkeln weiss, $a = \alpha$ sein muss; in der zweiten, weil nur solche Kugeldreiecke, in denen Seiten und Winkel zwischen 0 und 180° liegen, betrachtet zu werden pflegen. Danach wird die erstere Gleichung

$$(4) \qquad \cos\alpha = \cos a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta \cos\gamma,$$

die **zweite Hauptgleichung** zwischen den Winkeln und einer Seite;

die letztere Gleichung aber

$$\frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma},$$

oder durch Verwechselung von b mit a und β mit α vervollständigt:

$$(5) \qquad \frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma},$$

die **dritte Hauptgleichung** zwischen je zwei Seiten und ihren Gegenwinkeln *).

IV. Vierte Hauptgleichung. Setzt man in der ersten Hauptgleichung (2) für $\sin b$ seinen aus der dritten Hauptgleichung (5) erfolgenden Ausdruck

$$\sin b = \sin a \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

um b aus diesen zwei Gleichungen zu eliminiren; so ergibt sich

$$\cos a \sin c = \sin\beta \cot\alpha \sin a + \cos\beta \cos c \sin a,$$

daher wenn man durch den nie verschwindenden $\sin a$ theilt:

$$(6_0) \qquad \sin c \cot a = \sin\beta \cot\alpha + \cos c \cos\beta,$$

oder symmetrischer geordnet:

$$(6) \qquad \cos c \cos\beta = \sin c \cot a - \sin\beta \cot\alpha$$

als die **vierte Hauptgleichung** zwischen vier unmittelbar nach einander folgenden Dreiecksstücken α, c, β, a, von denen zwei, c und β, **Mittel- oder eingeschlossene Stücke**, die beiden anderen, a und α **Aussen- oder äussere Stücke** und zu einander **Gegenstücke** sind.

---

*) Diese gleichzeitige Ableitung der zweiten und dritten Hauptgleichung habe ich — vielleicht der Erste — in meiner Ueberarbeitung des zweiten Bandes von Vega's Vorles. über d. Mathem., Wien. 1. Aufl. 1835., 2. Aufl. 1848., in §. 567. u. 568. gegeben.

B. Zweite Herleitung.

3.

Grundgleichung und erste Hauptgleichung. Indem man die obigen Bezeichnungen beibehält und nur noch des Kugelhalbmessers Zahlenwerth wie üblich $=1$ setzt, projicire man (in Taf. I. Fig. 3.) eine Dreiecksspitze A mittels senkrechter Ebenen auf die Halbmesser oder Kanten OB, OC der zwei anderen Dreiecksspitzen B und C nach E und F, und dadurch zugleich mittels der als Durchschnitt dieser zwei projicirenden Ebenen sich ergebenden senkrechten Geraden AD auf die Ebene BOC jener zwei Kanten.

Danach ist

$$OE=\cos c,\quad EA=\sin c,\quad AED=\beta$$
$$ED=EA\cos AED=\sin c\cos\beta,\quad DA=EA\sin AED=\sin c\sin\beta$$
$$OF=\cos b,\quad FA=\sin b,\quad AFD=\gamma$$
$$FD=FA\cos AFD=\sin b\cos\gamma,\quad DA=FA\sin AFD=\sin b\sin\gamma.$$

Projicirt man nun den Umfang des (ebenen) Viereckes $OFDE$, in welchem $EOF=a$, $E=90^0=F$, also $EDF=180^0-a$ ist, auf die Seite OE (als Hauptaxe) und auf ihre Senkrechte (als Nebenaxe der Projection); so haben

die Vierecksseiten	OE,	OF,	FD,	DE
die Projectionswinkel	0,	a;	$a-90^0$,	-90^0;

und sonach erhält man für die Haupt- und Nebenprojection der Seite OE den Doppelausdruck

$$OE\,{\cos \atop \sin}\,0=OF\,{\cos \atop \sin}\,a+FD\,{\cos \atop \sin}(a-90^0)+DE\,{\cos \atop \sin}(-90^0).$$

Substituirt man den Seiten ihre obigen Ausdrücke, vereinzelt die Gleichungen, reducirt die goniometrischen Stammfunctionen und versetzt die Glieder in geeigneter Weise, so erhält man eines Theils

$$(1)\qquad \cos c=\cos\gamma\sin a\sin b+\cos a\cos b$$

die **Grundgleichung**, und anderen Theils

$$(2)\qquad \cos b\sin a=\cos\beta\sin c+\cos\gamma\cos a\sin b$$

die **erste Hauptgleichung**.

Anmerkung. Die Projection auf OF liefert ein Paar verwandte Gleichungen.

4.

I. **Dritte Hauptgleichung.** Setzt man die vorher für DA gefundenen zwei Ausdrücke einander gleich, so ist

$$\sin c \sin\beta = \sin b \sin\gamma,$$

also

$$\frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma},$$

oder durch Vertauschung von b mit a und β mit α vervollständigt:

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}, \tag{5}$$

welches die dritte Hauptgleichung ist.

II. **Zweite Hauptgleichung.** Projicirt man in den rechtwinkligen Dreiecken ADE, ADF die Spitze D des rechten Winkels mittels der Senkrechten DG, DH auf die Hypotenusen AE, AF, so sind bekanntlich die Winkel $ADG = AED = \beta$ und $ADH = AFD = \gamma$. Zugleich stehen diese projicirenden Senkrechten auch auf den beiden Seitenebenen AOB, AOC der Kante OA im dreikantigen Ecke $OABC$ senkrecht.

Denn weil die Ebene AED auf OB senkrecht steht, so ist sie auch auf der Ebene AOB senkrecht; und weil in der ersteren Ebene auf die Durchschnittslinie AE beider Ebenen die DG senkrecht gefällt ist, so muss diese auch auf der anderen Ebene AOB senkrecht stehen. Eben so erweist man, dass auch die DH auf der Ebene AOC senkrecht steht.

Der Winkel GDH der Normalen DG, DH der zwei Ebenen AOB, AOC ergänzt sich aber mit der Schmiege*) dieser

*) Mit Bezug auf den von Herrn R. Wolf und mir im Archiv. Theil 3., H. 4., S. 446. und Th. 6., H. 2., S. 120., Note †, ausgesprochenen Wunsch bemerke ich, dass ich für den s. g. „Winkel zweier Ebenen" eine ganz passende Benennung gefunden zu haben glaube. Ich schlage nemlich vor zu nennen: die Ablenkung (der Streckungen) zweier Ebenen oder genauer zweier Halbebenen (Ebenenhälften) an ihrer Durchschnittslinie von einander die Schmiege (franz. le biais) dieser Halbebenen; ihre Durchschnittslinie die Schneide oder Schärfe, die Halbebenen selbst aber die Wände oder Wangen der Schmiege. — Zur Rechtfertigung diene Folgendes: Nach Heinsius und Heyse ist „die Schmiege 1. bei den Werkleuten ein Winkel sowohl über als unter 90 Grad, welchen zwei Linien oder Flächen (Ebenen?) bilden (auch Schmiegung), 2. ein Werkzeug, welches in einem beweglichen Winkelmaasse besteht, das sich mittels einer Stellschraube öffnen und einschlagen lässt und zum Messen der gedachten Winkel von den Tisch-

zwei Ebenen zu 180°; was man leicht einsieht, wenn man seine auf diesen Ebenen und also auch auf ihrer Durchschnittskante OA senkrechte Ebene bis zum Durchschnitt mit ihnen erweitert. Mithin ist $GDH = 180^\circ - \alpha$.

Endlich ist der Winkel EDF, den wir oben $= 180^\circ - a$ fanden, gleich der Schmiege der zwei Ebenen AED und AFD, weil AD auf der Ebene BOC, also auch auf DE und DF senkrecht steht.

In dem an der Spitze D entstandenen dreikantigen Ecke $DAGH$ hat man demnach die Seiten $ADG = \beta$, $ADH = \gamma$ und $GDH = 180^\circ - \alpha$, und den Winkel an der Kante DA gleich $EFD = 180^\circ - a$. Wendet man daher auf dieses Eck oder auf ein ihm entsprechendes, auf einer um D als Mittelpunkt gelegten Kugelfläche gebildetes, Kugeldreieck die bereits gefundene Grundgleichung (1) an; so findet man

$$\cos(180 - \alpha) = \cos(180 - a) \sin\beta \sin\gamma + \cos\beta \cos\gamma,$$

folglich nach leichter Reduction

$$(4) \qquad \cos\alpha = \cos a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta \cos\gamma,$$

die zweite Hauptgleichung.

III. Vierte Hauptgleichung. Zieht man die Verbindungsgerade OD, so sind die Strecken DE, DF Katheten in zwei Paar rechtwinkligen Dreiecken, von denen das eine Paar ADE, ADF, die zweite Kathete AD, das andere Paar OED, OFD die Hypotenuse OD gemeinsam hat. Das erstere Dreieckspaar gibt

$$DE : DF = \frac{DE}{AD} : \frac{DF}{AD} = \operatorname{tang} DAE : \operatorname{tang} DAF$$
$$= \cot AED : \cot AFD = \cot\beta : \cot\gamma,$$

das letztere aber, wenn man für einen Augenblick $EOD = a'$, $FOD = a''$ setzt,

---

lern, Schlossern u. dergl. gebraucht wird (der Winkellappen, das Schrägmaass)." (Vergl. Karmarsch, Grundr. d. mechan. Technol. 2. Bd. S. 98.). Rollin (Nouv. Dict. de poche, Berlin 1822) übersetzt Schmiege mit le biais und umgekehrt dieses mit Schräge, Schiefe; biais gras, maigre, aigu stumpfer, scharfer, spitziger Winkel. Bei „schmiegen" sagt Heinsius: „die Werkleute schmiegen (machen genau anpassend) eine Wand, wenn sie dieselbe nach einem Winkel über oder unter 90° genau nach der Schmiege aufführen." Nach Kaltschmidt heisst die Kante (zweier Ebenen an einem ebenflächigen Körper) so viel als die Schärfe, die Schneide. Beide letzteren sind zugleich analog der Spitze beim Winkel. Als Analogon für Schenkel am Winkel passt bei der Schmiege am besten Wand, weil die Mauer- und andere so genannten Wände fast immer eben sind und vielfältig sich durchschneiden, auch noch Wange, insofern diese Körpertheile bei Thieren meist convergiren, auch manche Seitenebenen an Maschinenbestandtheilen so heissen.

$$DE:DF = \frac{DE}{OD} : \frac{DF}{OD} = \sin EOD : \sin FOD$$
$$= \sin a' : \sin a'',$$

folglich der Verein beider Verhältnissgleichheiten:

$$\cot\beta : \cot\gamma = \sin a' : \sin a''.$$

Es ist aber $a' + a'' = a$, also $a'' = a - a'$, und

$$\cot\gamma : \cot\beta = \sin(a - a') : \sin a'$$
$$= \sin a \cos a' - \cos a \sin a' : \sin a',$$

folglich wenn man theilt:

$$\operatorname{tang}\beta \cot\gamma = \sin a \cot a' - \cos a.$$

Es gibt endlich das an E rechtwinklige Dreieck OED

$$\cot a' = \frac{OE}{ED} = \frac{\cos c}{\sin c \cos\beta} = \frac{\cot c}{\cos\beta};$$

daher, wenn man substituirt und den Nenner $\cos\beta$ weg multiplicirt, erhält man

$$\sin\beta \cot\gamma = \sin a \cot c - \cos a \cos\beta$$

oder versetzt

(6) $$\cos a \cos\beta = \sin a \cot c - \sin\beta \cot\gamma,$$

die vierte Hauptgleichung.

VII.

Ueber die mittlere Entfernung des Ackers vom Hofe, in Bezug auf Anwendung.

Von dem

Feldmesser Herrn C. Wasmund

zu Stralsund.

In der vor Kurzem unter dem Titel: Ueber die mittlere Entfernung einer Figur von einem Punkte, oder über die sogenannte mittlere Entfernung des Ackers vom Hofe. Von J. A. Grunert. Greifswald. 1848*) erschienenen

---

*) Um Lesern, denen obige Schrift etwa noch nicht zu Händen gekommen sein sollte, wenigstens anzudeuten, worum es sich handelt, will ich den Begriff der mittlern Entfernung der Kürze wegen in der Sprache des vorigen Jahrhunderts hersetzen: Unter der mittlern Entfernung einer Linie, Fläche oder eines Körpers von einem Punkte wird verstanden das arithmetische Mittel aus den Entfernungen sämmtlicher Elemente derselben vom gedachten Punkte, oder hieraus hervorgehend und noch bequemer für die Anknüpfung der Rechnung: Die mittlere Entfernung ist die Summe der Entfernungsmomente sämmtlicher Elemente, dividirt durch die Summen sämmtlicher Elemente, unter Entfernungsmoment das Product des Elements in seine Entfernung verstanden.

Ist also $y = f_x$ die Gleichung einer ebenen Curve für rechtwinklige Coordinaten, so ist die mittlere Entfernung des Curvenstücks zu dem Abscisseninterval $a - \alpha$ vom Anfange der Coordinaten ab: $M = \dfrac{\int_\alpha^a \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\right)^2} \cdot \sqrt{x^2 + (f_x)^2}}{\int_\alpha^a \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\right)^2}}$, wo der Nenner natürlich das Curvenstück selbst ist. Für die gerade Linie ab, $\alpha\beta$, deren Gleichung also $y = f_x = \dfrac{b-\beta}{a-\alpha} x + \dfrac{a\beta - \alpha b}{a-\alpha}$ ist, giebt dies, weil hier $\dfrac{\partial f_x}{\partial x}$ constant ist, Schrift giebt der Herr Verfasser, nachdem zunächst der Begriff festgestellt worden ist, Formeln für die mittlere Entfernung eines Dreiecks von einem Punkte, und zeigt dann, wie sich hiernach die mittlere Entfernung jeder geradlinigen Figur durch ihre Zerlegung in Dreiecke finden lasse. Die Formeln sind jedoch etwas complicirt, und überhaupt hat man es in der Praxis auch mehr mit ganz gesetzlosen Curven zu thun. Ich suchte deshalb nach einem möglichst einfachen Verfahren für diese Fälle, wo man sich doch lediglich mit Näherungen behelfen muss, und kam dabei auf folgenden Satz:

Für den concentrischen Ring mit den Halbmessern r und ϱ, oder einen Ausschnitt desselben, ist vom Mittelpunkte abgerechnet die mittlere Entfernung $M=\frac{2}{3}\left(\frac{r^2+r\varrho+\varrho^2}{r+\varrho}\right)$, woraus für $\varrho=0$, für den Kreis oder Kreisausschnitt vom Halbmesser r, hervorgeht $M=\frac{2}{3}r$.

Hierauf lässt sich nun das nachstehende Verfahren gründen, welches mir für die Praxis genügend scheint. Soll die mittlere Entfernung der Fläche $aaa\ldots\ldots$ (Taf. I. Fig. 4), deren Inhalt $=F$, vom Punkte C ermittelt werden, so theile man die-

---

$$M=\frac{1}{a-\alpha}\int_\alpha^a \partial x\sqrt{x^2+(fx)^2},\text{ oder entwickelt:}$$

$$M=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a-\alpha)a+(b-\beta)b}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\sqrt{a^2+b^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(a-\alpha)\alpha+(b-\beta)\beta}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(a\beta-\alpha b)^2}{\sqrt{((a-\alpha)^2+(b-\beta)^2)^3}}.\log\frac{(a-\alpha)a+(b-\beta)b+\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}.\sqrt{a^2+b^2}}{(a-\alpha)\alpha+(b-\beta)\beta+\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}.\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

Sind ferner $z=F\varphi$ und $z=f\varphi$ die Polargleichungen zweier Curven, so ist die mittlere Entfernung des Flächenstücks zwischen beiden Curven für das Bogenintervall $a-\alpha$ vom Pole ab:
$$M=\frac{\int_\alpha^a \partial\varphi\int_{f\varphi}^{F\varphi} z^2\partial z}{\int_\alpha^a \partial\varphi\int_{f\varphi}^{F\varphi} z\partial z},$$
wo der Nenner das Flächenstück selbst ist.

Für den concentrischen Ringausschnitt mit den Halbmessern r und ϱ und dem Mittelpunktswinkel α, sind für den Mittelpunkt als Pol die Gleichungen der beiden Kreise $z=F\varphi=r$ und $z=f\varphi=\varrho$, daher dessen mittlere Entfernung vom Mittelpunkte ab:

$$M=\frac{\int_0^\alpha \partial\varphi\int_\varrho^r z^2\partial z}{\int_0^\alpha \partial\varphi\int_\varrho^r z\partial z}=\frac{2}{3}\left(\frac{r^3-\varrho^3}{r^2-\varrho^2}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{r^2+r\varrho+\varrho^2}{r+\varrho}\right),$$

welches der oben benutzte Satz ist. Dies möge zur Andeutung des Begriffs hier genügen.

selbe von C aus in concentrische Ringe 1, 2, 3, ... n, ermittele die Flächengrössen f_1, f_2, f_3, ... f_n, so wie nach obigem Satze auch die mittlern Entfernungen m_1, m_2, m_3, ... m_n dieser Ringe von C ab, dann ist der Gesammtfläche mittlere Entfernung: $M = \frac{m_1 f_1 + m_2 f_2 + m_3 f_3 \dots + m_n f_n}{F}$ (Grunert a. a. O. §. 17.). Liegt der Punkt C innerhalb der Fläche aaa....., so wird bei der Eintheilung auch noch ein voller Kreis, oder ein Kreisausschnitt vorkommen, was jedoch in der Berechnung keinen Unterschied macht.

Betreffend die weitere Anwendung der mittlern Entfernung, halte ich es noch für eine sehr schwer zu lösende Aufgabe, selbst unter Voraussetzung einer ganz speciellen Nutzungsart, die Funktion der Flächengrösse F, Bonität B und mittlere Entfernung M eines Grundstücks von einem Punkte zu ermitteln, welcher die Werthe mehrerer Grundstücke in Bezug auf diesen Punkt proportional zu nehmen sind. Namentlich würde man der Praxis sehr widersprechende Resultate erhalten, besonders für extreme Werthe von F, B und M, wollte man diese Funktion $= \frac{FB}{M}$ setzen. Wenn auch vielleicht der Zähler FB sollte bleiben können, so würde doch dann der Nenner ausser von M auch noch wieder von F und B abhängig sein müssen, wie dies auch schon zum Theil aus Herrn von Thünen's Bemerkungen über diesen Gegenstand in seinem isolirten Staate hervorgeht. Bei der Schwierigkeit, welche die Herstellung einer solchen stichhaltigen Funktion hat, wird die ökonomische Berücksichtigung der Entfernung bei der Werthbestimmung von Grundstücken wohl nur in der Art Statt finden können, dass man Grundstücke in verschiedenen Entfernungen veranschlagt, und dadurch eine Progression von Werthreductionsfactoren ermittelt für stufensweise wachsende Entfernungen. Hierbei wird dann aber die Kenntniss der mittlern Entfernung von erheblichem Nutzen sein.

Ganz natürlich wird man bei Betrachtungen obiger Art noch zu der Aufgabe geleitet, für den Acker den vortheilhaftesten Ort des Hofes zu ermitteln, rücksichtlich der Entfernung, d. h. für eine gegebene Fläche den Punkt zu bestimmen, von welchem ab die mittlere Entfernung derselben ein Minimum ist. Für ein Dreieck wird aber hierzu schon ein beträchlicher Rechnungsaufwand erfordert werden, so dass man bei wirklichen neuen Hofanlagen wohl auf eine mathematische Lösung wird verzichten, und sich damit trösten müssen, dass in den allermeisten Fällen doch auch noch andere Umstände als die Entfernung eine entschiedene Mitberücksichtigung verlangen.

Nachschrift des Herausgebers.

In meiner Schrift: Ueber die mittlere Entfernung einer Figur von einem Punkte oder über die sogenannte mittlere Entfernung des Ackers vom Hofe. Greifswald.

1848., auf welche sich die Bemerkungen in dem obigen Aufsatze beziehen, habe ich vorzugsweise die geometrische oder eigentlich überhaupt die theoretische Seite dieses Gegenstandes in's Auge gefasst, und habe versucht, mit völliger mathematischer Strenge, welche bei derartigen Untersuchungen leider nur zu häufig vernachlässigt wird, zu Resultaten zu gelangen, welche sich sowohl durch ihre Allgemeinheit, als auch durch ihre Eleganz auszeichnen und empfehlen, und glaube, dass auf diese beiden Prädicate insbesondere der Ausdruck S. 79. §. 11. Nr. 71., welchen ich als das in dieser Schrift gewonnene Hauptresultat betrachte, Anspruch machen zu dürfen vollkommen berechtigt ist. Wenn ich deshalb auch dergleichen elegante Ausdrücke nicht mit dem Namen „complicirt" belegen möchte, so bin ich doch mit dem geehrten Herrn Verfasser des obigen Aufsatzes darin vollkommen einverstanden, dass die Rechnung nach den in meiner Schrift entwickelten Ausdrücken ungeachtet ihrer Eleganz für die gewöhnliche Praxis in den meisten Fällen noch zu weitläufig ist, und habe daher auch schon in der im Literar. Ber. Nr. XLII. S. 602. gelieferten Anzeige der obigen Schrift die Leser des Archivs zur gefälligen Mitwirkung bei der weiteren Vereinfachung des fraglichen Gegenstandes, und dessen Gestaltung für den gewöhnlichen praktischen Gebrauch aufgefordert. Es kann mich demnach auch nur freuen, dazu in dem obigen Aufsatze, ungeachtet der grossen Einfachheit seines Inhalts, einen nach meiner Meinung recht zweckmässigen Anfang gemacht zu sehen, und hoffe, dass es dem geehrten Herrn Verfasser desselben nicht unangenehm sein werde, wenn ich mir erlaube, seinen Betrachtungen noch die folgenden Bemerkungen hinzuzufügen, indem ich ihn zugleich zu weiteren Untersuchungen, zu denen ihm vielleicht seine Praxis Gelegenheit darbieten dürfte, aufzufordern mir erlaube.

Der von dem Herrn Verfasser angegebenen Methode liegt hauptsächlich ein Ausdruck für die mittlere Entfernung eines zwischen zwei concentrischen Kreisen enthaltenen Rings von deren gemeinschaftlichem Mittelpunkte zum Grunde. Dieser Ausdruck, welchen der Herr Verfasser in einer Note durch die Integralrechnung ableitet, ist, wie ich jetzt zeigen werde, eine unmittelbare oder wenigstens leichte Folge aus den in meiner Schrift enthaltenen Ausdrücken, wenn er auch in dieser Schrift nicht selbst gegeben worden ist, was nicht nöthig war, weil ich keineswegs die Absicht hatte, in derselben den fraglichen Gegenstand ganz zu erschöpfen.

Wenn wir die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks durch a, seine beiden gleichen Schenkel durch b, seinen Inhalt durch Δ, die halbe Summe seiner Seiten durch s, und seine mittlere Entfernung von seiner Spitze durch M bezeichnen, so ist nach der Formel Nr. 79) auf S. 104. meiner Schrift, wenn wir in dieser Formel $b=c$ setzen:

$$M=\frac{1}{3}b-\frac{4\Delta^2}{3a^3}l\left(1-\frac{a}{s}\right).$$

Weil aber in diesem Falle

$$2s = a + 2b,\quad 1 - \frac{a}{s} = 1 - \frac{2a}{a+2b} = \frac{2b-a}{2b+a}$$

oder

$$1 - \frac{a}{s} = \frac{1 - \frac{a}{2b}}{1 + \frac{a}{2b}}$$

ist, so ist

$$M = \frac{1}{3}b - \frac{4\Delta^2}{3a^3}\, l\, \frac{1 - \frac{a}{2b}}{1 + \frac{a}{2b}}.$$

Nun ist ferner, wie man leicht findet:

$$\Delta^2 = \frac{1}{4}a^2\left(b^2 - \frac{1}{4}a^2\right),\quad \frac{4\Delta^2}{3a^3} = \frac{b^2 - \frac{1}{4}a^2}{3a};$$

also

$$M = \frac{1}{3}b - \frac{b^2 - \frac{1}{4}a^2}{3a}\, l\, \frac{1 - \frac{a}{2b}}{1 + \frac{a}{2b}}.$$

Denken wir uns jetzt in einen mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreis ein reguläres Vieleck von n Seiten beschrieben, und bezeichnen jede Seite desselben durch a, so ist für jedes der n gleichschenkligen, im Mittelpunkte des Kreises zusammenstossenden Dreiecke, in die sich dasselbe zerlegen lässt, in Bezug auf den Mittelpunkt des Kreises nach dem Vorhergehenden:

$$M = \frac{1}{3}r - \frac{r^2 - \frac{1}{4}a^2}{3a}\, l\, \frac{1 - \frac{a}{2r}}{1 + \frac{a}{2r}},$$

und folglich immer in Bezug auf den Mittelpunkt des Kreises für das ganze reguläre $n$eck nach S. 111. meiner Schrift:

$$M = n\frac{\Delta}{n\Delta}\left\{\frac{1}{3}r - \frac{r^2 - \frac{1}{4}a^2}{3a}\, l\, \frac{1 - \frac{a}{2r}}{1 + \frac{a}{2r}}\right\},$$

d. i. eben so wie vorher:

$$M=\frac{1}{3}r-\frac{r^2-\frac{1}{4}a^2}{3a}l\frac{1-\frac{a}{2r}}{1+\frac{a}{2r}}$$

oder

$$M=\frac{1}{3}r+\frac{r^2-\frac{1}{4}a^2}{3a}l\frac{1+\frac{a}{2r}}{1-\frac{a}{2r}}.$$

Also ist, da jedenfalls immer

$$-1<\frac{a}{2r}<+1$$

ist, nach einer sehr bekannten logarithmischen Reihe (m. s. u. A. meinen Leitfaden für den ersten Unterricht in der höhern Analysis. Leipzig. 1838. S. 64.):

$$M=\frac{1}{3}r+\frac{r^2-\frac{1}{4}a^2}{3a}\cdot 2\left\{\frac{a}{2r}+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2r}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{a}{2r}\right)^5+\ldots\right\},$$

d. i.

$$M=\frac{1}{3}r+\frac{2}{3}\left(r^2-\frac{1}{4}a^2\right)\left\{\frac{1}{2r}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2r}\left(\frac{a}{2r}\right)^2+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2r}\left(\frac{a}{2r}\right)^4+\ldots\right\};$$

und wenn man nun, um M für den Kreis selbst zu erhalten, n in's Unendliche wachsen, also a in's Unendliche abnehmen lässt, und in der vorhergehenden Gleichung zu den Gränzen übergeht, so ergiebt sich für den Kreis:

$$M=\frac{1}{3}r+\frac{2}{3}r^2.\frac{1}{2r},\ \text{d. i.}\ M=\frac{2}{3}r.$$

Für einen Kreisausschnitt, der $\frac{1}{k}$ des ganzen Kreises ist, sei jetzt M die mittlere Entfernung vom Mittelpunkte des Kreises, so ist nach S. 111. meiner Schrift offenbar

$$\frac{2}{3}r=k.\frac{1}{k}M,\ \text{also}\ M=\frac{2}{3}r;$$

wie für den ganzen Kreis, was sich auch von selbst versteht.

Endlich sei die mittlere Entfernung M eines ringförmigen Stücks wie $ABA'B'$ in Taf. I. Fig. 5. von dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte C der beiden Kreise, zwischen denen dieses ringförmige Stück enthalten ist, zu finden. Zu dem Ende seien r und r' respective die Halbmesser des grösseren und des kleineren Kreises; die Flächenräume der beiden Kreisausschnitte ACB und $A'CB'$ seien respective $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$, und $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ seien deren mittlere Entfernungen von C; so haben wir nach S. 111. meiner Schrift die Gleichung:

$$\mathfrak{M}=\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}\mathfrak{M}'+\frac{\mathfrak{S}-\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}M.$$

Aber bekanntlich, da die Sectoren $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ demselben Winkel am Mittelpunkte entsprechen:

$$\mathfrak{S}:\mathfrak{S}'=r^2:r'^2,\text{ also }\mathfrak{S}:\mathfrak{S}-\mathfrak{S}'=r^2:r^2-r'^2;$$

und nach dem Vorhergehenden:

$$\mathfrak{M}=\frac{2}{3}r,\quad \mathfrak{M}'=\frac{2}{3}r';$$

folglich nach dem Obigen

$$\frac{2}{3}r=\frac{r'^2}{r^2}\cdot\frac{2}{3}r'+\frac{r^2-r'^2}{r^2}M$$

oder

$$\frac{2}{3}r^3=\frac{2}{3}r'^3+(r^2-r'^2)M,$$

woraus

$$M=\frac{2}{3}\cdot\frac{r^3-r'^3}{r^2-r'^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{r^3-r'^3}{(r+r')(r-r')}=\frac{2}{3}\cdot\frac{r^2+rr'+r'^2}{r+r'}$$

folgt, ganz wie der Herr Verfasser des obigen Aufsatzes auf anderem Wege gefunden hat, wenn man nur in der dortigen Formel r' für ϱ setzt. Auch ist

$$M=\frac{2}{3}\left(r+\frac{r'^2}{r+r'}\right)=\frac{2}{3}\left(r'+\frac{r^2}{r+r'}\right).$$

Dass Ableitungen von Formeln, wie die obige, durch strenge Gränzenbetrachtungen aus anderen Formeln, zu den instructivsten Betrachtungen, namentlich für Anfänger, gehören, wenn sie auch von einer gewissen Weitläufigkeit zuweilen nicht ganz frei zu sprechen sind, dürfte wohl jetzt ziemlich allgemein anerkannt sein, und ich selbst bin der Meinung, dass Anfänger, welche in der Mathematik weiter zu gehen, und namentlich die Analysis in ihrem neuesten Zustande kennen zu lernen beabsichtigen, nicht häufig genug sich mit dergleichen Betrachtungen bekannt machen und dieselben selbst anzustellen versuchen können.

So wie im vorhergehenden Falle wird man auch fast in allen in der Praxis sich vielleicht darbietenden Fällen die erforderlichen Formeln aus den in meiner Schrift entwickelten Ausdrücken ohne Schwierigkeit abzuleiten im Stande sein.

Bei der wirklichen Anwendung der von dem Herrn Verfasser des obigen Aufsatzes vorgeschlagenen praktischen Methode wird man häufig in den Fall kommen, die Flächenräume ringförmiger Stücke wie $ABA'B'$ bestimmen zu müssen. Deshalb wird es vielleicht zweckmässig sein, auch darüber noch ein Paar Bemerkungen dem Obigen hinzuzufügen.

Bezeichnen wir den Flächeninhalt des ringförmigen Stücks $ABA'B'$ durch F, und einen den Winkel ACB oder $A'CB'$ am Mittelpunkte messenden Kreisbogen in einem mit der Einheit als Radius beschriebenen Kreise durch ω; so ist nach bekannten Sätzen

$$F=\frac{1}{2}(r^2-r'^2)\,\omega=\frac{1}{2}(r-r')(r+r')\,\omega.$$

Bezeichnen wir nun die Sehne des Bogens AB durch σ, so ist

$$\sigma=2r\sin\frac{1}{2}\omega,\quad \sin\frac{1}{2}\omega=\frac{\sigma}{2r};$$

folglich

$$\frac{1}{2}\omega=\operatorname{Arcsin}\frac{\sigma}{2r},\quad \omega=2\operatorname{Arcsin}\frac{\sigma}{2r}.$$

Weil aber, da jedenfalls

$$0<\frac{\sigma}{2r}<1$$

ist, nach einer bekannten Reihe (m. s. u. A. meine Elemente der Differential- und Integralrechnung. Zweiter Theil. Leipzig. 1837. S. 92.)

$$\operatorname{Arcsin}\frac{\sigma}{2r}=\frac{\sigma}{2r}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sigma}{2r}\right)^3+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{\sigma}{2r}\right)^5+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{\sigma}{2r}\right)^7+\ldots\ldots$$

ist, so ist nach dem Obigen

$$F=(r-r')(r+r')\left\{\begin{array}{l}\frac{\sigma}{2r}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sigma}{2r}\right)^3+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{\sigma}{2r}\right)^5\\ \qquad+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{\sigma}{2r}\right)^7+\ldots\end{array}\right\},$$

d. i.

$$F=\frac{(r-r')(r+r')\sigma}{2r}\left\{1+\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^2+\frac{3}{640}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^4+\frac{5}{7168}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^6+\ldots\right\},$$

oder

$$F=\frac{1}{2}\left(1-\frac{r'}{r}\right)\left(1+\frac{r'}{r}\right)r\sigma\left\{1+\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^2+\frac{3}{640}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^4+\frac{5}{7168}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^6+\ldots\right\}.$$

Von diesen Reihen wird man immer nur so viele Glieder beibehalten, als die bei der Rechnung beabsichtigte Genauigkeit erfordert.

Für das Product des ringförmigen Stücks $ABA'B'$ in seine mittlere Entfernung vom Mittelpunkte C hat man nach dem Vorhergehenden den Ausdruck

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{r^2+rr'+r'^2}{r+r'}\cdot(r-r')(r+r')\operatorname{Arcsin}\frac{\sigma}{2r},$$

d. i.

$$\frac{2}{3}(r-r')(r^2+rr'+r'^2)\operatorname{Arcsin}\frac{\sigma}{2r},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{(r-r')(r^2+rr'+r'^2)\sigma}{r}\left\{1+\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^2+\frac{3}{640}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^4+\ldots\ldots\right\};$$

oder auch

$$\frac{2}{3}r^2\sigma\left(1-\frac{r'}{r}\right)\left\{1+\frac{r'}{r}+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^2+\frac{3}{640}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^4+\ldots\ldots\right\}.$$

Diese Ausdrücke scheinen mir bei der Ausführung der durch die Anwendung der von dem Herrn Verfasser des obigen Aufsatzes angegebenen für die Praxis recht zweckmässigen Methode nöthig gemachten Rechnungen die meiste Bequemlichkeit darzubieten.

Rücksichtlich der in dem letzten Absatze des obigen Aufsatzes gemachten Bemerkung stimme ich dem Herrn Verfasser desselben vollkommen bei. Ueber das aber, was in dem vorletzten Absatze dieses Aufsatzes bemerkt worden ist, muss ich die Entscheidung den Landwirthen und Nationalökonomen anheim stellen, und bemerke nur noch, dass einige auf den in diesem Absatze angeregten Gegenstand bezügliche Bemerkungen schon von dem sehr einsichtsvollen Recensenten meiner Schrift in den Heidelberger Jahrbüchern. 1848. Nr. 29. S. 459., Herrn Doctor J. Dienger, früher in Sinsheim bei Heidelberg, jetzt Vorstand der höheren Bürgerschule zu Ettenheim, gemacht worden sind, worauf ich daher die für diesen, namentlich in der jetzigen bewegten Zeit bei der Beurtheilung des Werths der Grundstücke mit Berücksichtigung aller dabei in Betracht kommenden Elemente, wie Areal, Bonität, aufzuwendende Arbeitskraft u. dergl., gewiss der allgemeineren Beachtung in landwirthschaftlicher und überhaupt national-ökonomischer Rücksicht sehr werthen Gegenstand, sich etwa interessirenden Leser des Archivs zu verweisen mir erlaube. Die am Schluss und in der Vorrede meiner Schrift bloss ganz in der Kürze angegebenen Verhältnisse, über deren Richtigkeit oder Unrichtigkeit Untersuchungen ganz ausserhalb des Zweckes meiner zunächst lediglich eine geometrische Tendenz habenden Schrift lagen, sind in der That auch nur deshalb von mir hingestellt worden, um zu einer sorgfältigen Untersuchung dieses practisch sehr wichtigen Gegenstandes zu veranlassen; und vielleicht wird das Archiv bald eine Abhandlung über denselben bringen. Eine andere ganz eben so einsichtsvolle Recension meiner Schrift von Herrn Böttcher in Rudolstadt, die von allen denen, welche dieselbe bei ihren etwaigen theoretischen oder praktischen Arbeiten über den mehr erwähnten Gegenstand zu benutzen beabsichtigen, wegen verschiedener sehr zu beachtender theils allgemeiner, theils specieller Bemerkungen gleichfalls nicht unbeachtet gelassen werden darf, findet sich in einem der neuesten Hefte der Jahrbücher für Philologie und Pädagogik, das ich, — weil ich in diesem Augenblicke dazu nicht im Stande bin und diese Zeilen überhaupt nur aus dem Gedächtnisse schreibe, — seiner Nummer nach später noch gelegentlich angeben werde, und für jetzt nur dem geehrten Herrn Verfasser für seine höchst einsichtsvolle Beurtheilung verbindlichst zu danken, die hier sich dargebotene Gelegenheit nicht unbenutzt vorübergehen lassen will.

VIII.

Beitrag zur Theorie der quadratischen Formen.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

In den art. 213. und 214. der Disquisitiones arithmeticae findet man eine Lösung des Problems: „Zu beurtheilen, ob eine Form (F) von der Determinante D eine andere (f) von der Determinante Dee eigentlich einschliesst, oder nicht, und im ersten Falle alle eigentlichen Transformationen aus F in f zu berechnen.“

Nach der von Gauss hiezu angewandten Methode muss man vorerst alle die Formen (Ω) entwickeln, welche aus F durch die Transformation m, k, 0, n entstehen, so dass m jedweden positiven Theiler von e, k jedwede zwischen den Grenzen 0 und $m-1$ incl. eingeschlossene ganze Zahl, n den Quotienten $\frac{e}{m}$ bedeutet. Hierauf hat man mit allen Formen Ω, deren Anzahl offenbar der Summe aller Theiler von e gleichkommt, den Versuch anzustellen, ob sie mit f eigentlich aequivalent sind, oder nicht, und nur diejenigen unter ihnen, Ω', Ω'', Ω''', etc., welche es wirklich sind, in Betracht zu ziehen. In Bezug auf die erste derselben Ω', welche aus F durch die Substitution m', k', 0, n' entstanden sein mag, stelle p, q, r, s jedwede eigentliche Transformation aus Ω' in f dar; man wird mehrere eigentliche Transformationen aus F in f unter der Form $m'p+k'r$, $m'q+k's$, $n'r$, $n's$ erhalten, und wenn man mit den übrigen Formen Ω'', Ω''', etc. ebenso verfährt, so gelangt man zu den sämmtlichen eigentlichen Transformationen aus F in f.

Man wird nicht verkennen, dass das angedeutete Verfahren in der Ausübung sehr weitläufig, in den meisten Fällen so gut wie unausführbar ist, und dies hat mir Veranlassung gegeben, eine andere Auflösung des obigen Problems zu suchen, welche sich in practischer Beziehung durch Kürze, in theoretischer durch mehrere Bemerkungen, zu welchen sie Gelegenheit giebt, zu empfehlen scheint.

Die Form F von der Determinante D sei (A, B, C), die Form f von der Determinante Dee sei (a, b, c). Wir nehmen zuvörderst an, dass F in f durch die eigentliche Substition α, β, γ, δ übergehe, und sehen zu, was daraus folgt. Man hat folgende Gleichungen:

$$[1] \ldots A\alpha\alpha+2B\alpha\gamma+C\gamma\gamma=a,$$
$$[2] \ldots A\alpha\beta+B(\alpha\delta+\beta\gamma)+C\gamma\delta=b,$$
$$[3] \ldots A\beta\beta+2B\beta\delta+C\delta\delta=c,$$
$$[4] \ldots\ldots \alpha\delta-\beta\gamma=e \text{ (e positiv und >1).}$$

Die Zahlen α und γ können ein grösstes gemeinschaftliches Maass n haben, welches positiv genommen wird, so dass $\alpha=n\alpha^0$, $\gamma=n\gamma^0$, α^0 und γ^0 relative Primzahlen sind; nach [4] wird n ein Theiler von e sein, oder wenn $e=nm$ gesetzt wird, so ist m eine ganze Zahl, und die Gleichung [4] reducirt sich auf $\alpha^0\delta-\beta\gamma^0=m$. Bestimmt man nun zwei andere Zahlen β^0, δ^0 so, dass $\alpha^0\delta^0-\beta^0\gamma^0=1$ wird, (was auf unendlich viele Arten möglich), so muss bekanntlich $\beta=\beta^0m+k\alpha^0$, $\delta=\delta^0m+k\gamma^0$ sein, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet, und man kann zugleich β^0, δ^0 so nehmen, dass k zwischen den Grenzen 0 und $m-1$ incl. enthalten ist. Substituirt man nun die für α, β, γ, δ gefundenen Werthe in [1], [2], [3], so kommt

$$[5] \ldots \begin{cases} A\alpha^0\alpha^0+2B\alpha^0\gamma^0+C\gamma^0\gamma^0=\dfrac{a}{nn}, \\ A\alpha^0\beta^0+B(\alpha^0\delta^0+\beta^0\gamma^0)+C\gamma^0\delta^0=\dfrac{bn-ak}{mnn}, \\ A\beta^0\beta^0+2B\beta^0\delta^0+C\delta^0\delta^0=\dfrac{cnn-2bkn+akk}{mmnn}. \end{cases}$$

Hieraus sieht man, dass $\frac{a}{nn}$, $\frac{bn-ak}{mnn}$, $\frac{cnn-2bkn+akk}{mmnn}$ ganze Zahlen sind, welche wir resp. durch A', B', C' bezeichnen, und dass die Form $F..(A, B, C)$ in die Form $F'..(A', B', C')$ durch die Substitution α^0, β^0, γ^0, δ^0, für welche $\alpha^0\delta^0-\beta^0\gamma^0=1$ ist, übergeht, folglich mit derselben eigentlich aequivalent ist. Aus den Werthen von A' und B' folgt, dass n in b aufgeht, setzen wir $b=nb'$, so folgt

$$A'=\frac{a}{nn},\ B'=\frac{b'-A'k}{m},\ C'=\frac{c-2b'k+A'kk}{mm};$$

und da $B'^2-A'C'=B^2-AC=D$, so kann C' auch aus der Formel $C'=\frac{B'B'-D}{A'}$ bestimmt werden, falls A' nicht verschwindet.

Aus diesen Betrachtungen ziehen wir den ersten Schluss: Bestimmt man alle die Theiler von e, nämlich n, deren Quadrate die Zahl a messen, und welche folglich wegen der Gleichung $bb-ac=Dee$ in b aufgehen, und findet $\left(\frac{e}{n}=m,\ \frac{a}{nn}=A',\ \frac{b}{n}=b'\right.$ gesetzt) für keinen derselben eine Zahl k unter m, die $\frac{b'-A'k}{m}$, $\frac{c-2b'k+A'kk}{mm}$ zu ganzen Zahlen macht, so ist die Form f unter der Form F nicht enthalten. Findet man aber Werthe von n und k, für welche alle diese Bedingungen erfüllt sind, so ist zu untersuchen, ob eine oder mehrere der resultirenden Formen (A', B', C') mit F eigentlich aequivalent sind, oder nicht; ergiebt sich keine solche Form, so ist f unter F nicht enthalten; findet sich wirklich eine (F'), so wird f von F eigentlich eingeschlossen.

Denn bedeutet α^0, β^0, γ^0, δ^0 eine eigentliche Transformation aus F in F', so sind die Gleichungen [5] vorhanden, und man findet, dass die Gleichungen [1] bis [4] durch die Werthe $\alpha=n\alpha^0$, $\beta=m\beta^0+k\alpha^0$, $\gamma=n\gamma^0$, $\delta=m\delta^0+k\gamma^0$ befriedigt werden, weshalb $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eine eigentliche Transformation aus F in f sein wird.

Diese Resultate bahnen uns den Weg zur Auflösung des Problems: „Alle eigentlichen Transformationen der Form F in die Form f, welche unter jener eigentlich enthalten sein soll, zu finden."

Man stelle alle möglichen, im Vorhergehenden charakterisirten, Formen (A', B', C') auf, und ziehe diejenigen unter ihnen, welche mit F eigentlich-aequivalent sind, in Betracht; man bezeichne dieselben mit F', F'', F''', etc. Hierauf suche man alle eigentlichen Transformationen aus F in F', nämlich α^0, β^0, γ^0, δ^0; es entstehen auf diese Weise eben so viele eigentliche Transformationen aus F in f unter der Form $n\alpha^0$, $m\beta^0+k\alpha^0$, $n\gamma^0$, $m\delta^0+k\gamma^0$, und wenn man mit den übrigen Formen F'', F''', etc. ebenso verfährt, so wird man zu allen eigentlichen Transformationen aus F in f gelangen.

Die Richtigkeit dieser Auflösung erhellt aus dem Vorhergehenden. Man kann ferner zeigen, dass alle auf die obige Weise bestimmten Transformationen unter einander verschieden sind. Dass zwei verschiedene Transformationen aus F in dieselbe Form F' nicht dieselbe Transformation aus F in f hervorbringen können, wird man sogleich bemerken. Es seien also α^0, β^0, γ^0, δ^0; $\alpha^{0'}$, $\beta^{0'}$, $\gamma^{0'}$, $\delta^{0'}$ Transformationen aus F in die verschiedenen Formen F', F'', zu den Werthen n', m', k' gehörend, welche die nämlichen Werthe von α, β, γ, δ geben. Dann ist $n\alpha^0 = n'\alpha^{0'} \ldots (1)$, $m\beta^0 + k\alpha^0 = m'\beta^{0'} + k'\alpha^{0'} \ldots (2)$, $n\gamma^0 = n'\gamma^{0'} \ldots (3)$, $m\delta^0 + k\gamma^0 = m'\delta^{0'} + k'\gamma^{0'} \ldots (4)$, $mn = m'n' = e \ldots (5)$. Aus (1) und (3) folgt $nn'(\alpha^0\gamma^{0'} - \gamma^0\alpha^{0'}) = 0$, folglich, da wir annehmen, dass n, n' nicht verschwinden, $\alpha^0\gamma^{0'} - \gamma^0\alpha^{0'} = 0$, aber α^0 und γ^0, so wie $\alpha^{0'}$ und $\gamma^{0'}$ relative Primzahlen, folglich $\alpha = \alpha^{0'}$, $\gamma = \gamma^{0'}$, mithin auch $n = n'$, $m = m'$; daher nach (2) und (4): $m(\beta^0 - \beta^{0'}) = (k' - k)\alpha^0$, $m(\delta^0 - \delta^{0'}) = (k' - k)\gamma^0$, folglich sind $(k' - k)\alpha^0$, $(k' - k)\gamma^0$, mithin auch $(k' - k)\alpha^0\delta^0$, $(k' - k)\beta^0\gamma^0$, also die Differenz $(k' - k)(\alpha^0\delta^0 - \beta^0\gamma^0) = k' - k$ durch m theilbar, was wegen $k < m$, $k' < m$ unmöglich ist. Deshalb ist $k' = k$, $\beta^0 = \beta^{0'}$, $\delta^0 = \delta^{0'}$, und die Formen F', F'' werden somit identisch.

Die vorhergehende Methode mag nun an einem Beispiel erläutert werden, welches zugleich nach der Gaussischen Methode behandelt werden soll, um den Unterschied beider deutlicher hervortreten zu lassen.

Es sei $F \ldots (A, B, C) = (2, 7, 15)$, wo $D = 19$; $f \ldots (a, b, c) = (-9, 12, 60)$, wo $bb - ac = 19.6^2$, also $e = 6$. Die gemeinschaftlichen Theiler von e und a sind 1, 3 und beider Quadrate gehen in a auf. Für $n = 1$, $m = 6$ kommt $A' = -9$, $b' = 12$, die Bedingung $b' - A'k \equiv 0 \pmod{m}$ giebt $k = 0, 2, 4$; $B' = 2, 5, 8$ resp.; $C' = \dfrac{B'B' - D}{A'} = \dfrac{-15}{-9}, \dfrac{6}{-9}, -5$; also kommt nur die eine Form $(A', B', C') = (-9, 8, -5)$. Man findet, dass sie mit F eigentlich aequivalent ist, und daraus durch die eigentliche Substitution $+3, -2, -1, +1$ hervorgeht; daher sind nach den bekannten Formeln Disq. Arithm. art. 162. p. 181. sämmtliche Transf. aus F in (A', B', C') begriffen in $3t - 6u$, $-2t - u$, $-t - u$, $t + 3u$, wo t, u alle Werthe bedeuten, welche der Gleichung $t^2 - 19u^2 = 1$ genügen. Hieraus folgen die zu den Werthen $n = 1$, $k = 4$ gehörenden Transformationen

$$[T] \ldots \alpha, \beta, \gamma, \delta = 3t - 6u,\ -30u,\ -t - u,\ 2t + 14u.$$

Für $n = 3$, $m = 2$ kommt $A' = -1$, $b' = 4$, $-k \equiv 4 \pmod{2}$, $k = 0$, $B' = 2$, $C' = 15$. Die Form $(-1, 2, 15)$ ist mit F eigentlich aequivalent, $+4, -25, -3, +19$ eine eigentliche Substitution, folglich alle Substitutionen in $4t + 17u$, $-25t - 110u$, $-3t - 13u$, $19t + 83u$ enthalten, daher die folgenden Transformationen aus F in f:

$$[T'] \ldots \alpha, \beta, \gamma, \delta = 12t + 51u,\ -50t - 220u,\ -9t - 39u,\ 38t + 166u.$$

Nach der Gaussischen Methode hat man folgende 12 Formen Ω, welche aus F durch die Substitutionen 1, 0, 0, 6; 2, 0, 0, 3; 2, 1, 0, 3; 3, 0, 0, 2; 3, 1, 0, 2; 3, 2, 0, 2; 6, 0, 0, 1; 6, 1, 0, 1; 6, 2, 0, 1; 6, 3, 0, 1; 6, 4, 0, 1; 6, 5, 0, 1 hervorgehen:

(2, 42, 540) (8, 42, 135) (8, 46, 179) (18, 42, 60) (18, 48, 90) (18, 54, 124)
(72, 42, 15) (72, 54, 31) (72, 66, 51) (72, 78, 75) (72, 90, 103) (72, 102, 135) *)

Von diesen Formen sind, wie der Versuch zeigt, nur die folgenden vier, welche den Substitutionen 6, 0, 0, 1; 6, 2, 0, 1; 6, 3, 0, 1; 6, 5, 0, 1 entsprechen, mit f eigentlich aequivalent: (72, 42, 15) (72, 66, 51) (72, 78, 75) (72, 102, 135), und man findet die sämmtlichen eigentlichen Transf. aus diesen Formen in f resp.

$$124T-1081U,\ 195T-1700U,\ -131T+1142U,\ -206T+1796U;$$
$$3905T-18788U,\ 6141T-53536U,\ -3051T+26598U,$$
$$-4798T+41828U;$$
$$-T+U,\ T+24U,\ T+2U,\ -2T-28U;$$
$$16T-139U,\ 25T+120U,\ -9T+78U,\ -14T+124U;$$

wo T, U alle Werthe bedeuten, welche der Gleichung $T^2-76U^2=1$ Genüge leisten. Daraus resultiren endlich die folgenden vier Formeln, in denen alle eigentlichen Transformationen aus F in f begriffen sind:

$$[\tau]\ldots 744T-6486U,\ 1170T-10200U,\ -131T+1142U,$$
$$-206T+1796U;$$
$$[\tau']\ldots 17328T-60732U,\ 27250T-237560U,\ -3051T+26598U,$$
$$-4798T+41828U;$$
$$[\tau'']\ldots -3T+12U,\ 60U,\ T+2U,\ -2T-28U;$$
$$[\tau''']\ldots 51T-444U,\ 80T+1340U,\ -9T+78U,\ -14T+124U.$$

Wiewohl die erste Methode nur zwei allgemeine Formeln $[T]$, $[T']$ lieferte, während die zweite deren vier giebt, so giebt es doch keine in den letzten Formeln begriffenen Werthe, welche in den ersten nicht ebenfalls enthalten wären; es würde sich übrigens leicht zeigen lassen, dass die Formel $[T]$ die Formeln $[\tau]$ und $[\tau'']$, $[T']$ die Formeln $[\tau']$ und $[\tau''']$ zugleich umfasst. Dieser Nachweis darf dem Leser füglich überlassen werden.

Einige besondere Fälle, welche nicht selten vorkommen, verdienen noch besonders betrachtet zu werden.

1°. Es sei $a=0$, so dass $bb=Dee$, mithin D eine Quadratzahl hh ist, und $b=he$ gesetzt werden kann, wenn man das Zeichen von h so nimmt, dass es mit dem von b übereinkommt. Für diesen Fall ist nun $A'=0$, $B'=\frac{b}{mn}=h$, $C'=\frac{c-2b'k}{mm}$, folglich c durch m theilbar, oder $c=mc'$, mithin $C'=\frac{c'-2hk}{m}$ Die Con-

*) Wie man sich die Berechnung dieser Formen sehr erleichtern kann, wird der Erfahrene leicht finden.

gruenz $2hk \equiv c'$ (mod. m) ist nur lösbar, wenn $2h$ und m entweder relative Primzahlen sind, oder ihr grösstes gemeinschaftliches Maass ϑ die Zahl c' misst, und im letztern Falle lässt ϑ verschiedene Werthe von k unter m zu.

2°. Ist e gegen a prim, so hat n nur den einen Werth 1, und es kommt $A' = a$, $B' = \frac{b - ak}{e}$, $C = \frac{B'B' - D}{a}$. Die Congruenz $ak \equiv b$ (mod. e) ist immer lösbar, und lässt nur einen Werth von k unter e zu; für diesen Werth, der durch k^0 bezeichnet werde, ist also $B' = \frac{b - ak^0}{e}$ eine ganze Zahl. Ferner wird behauptet, dass c' ebenfalls eine ganze Zahl wird. Denn es ist $eB' \equiv b$ (mod. a); multiplicirt man diese Congruenz mit f, und bestimmt diese Zahl so, dass $ef \equiv 1$ (mod. a), so kommt $B' \equiv bf$, $B'B' - D \equiv b^2f^2 - D$ (mod. a). Da nun $bb - ac = Dee$, $b^2 \equiv Dee$, (mod. a) $b^2f^2 \equiv D(ef)^2 \equiv D$, so folgt $B'B' - D \equiv 0$ (mod. a), mithin $\frac{B'B' - D}{a}$ eine ganze Zahl. Dies führt zu dem allgemeinen

Theorem: Wenn e gegen a prim ist, und $f \ldots (a, b, c)$ eine Form von der Determinante Dee, so giebt es immer Formen $F \ldots (A, B, C)$ von der Determinante D, welche die Form f eigentlich einschliessen, aber sie sind alle der Form (a, B', C') eigentlich aequivalent, oder gehören in eine Klasse, indem $B' = \frac{b - ak}{e}$, k die Zahl unter e ist, welche $b - ak$ durch e theilbar macht*).

Beispiel. $F \ldots (A, B, C) = (3, 2, 5)$, $D = -11$; $f \ldots (a, b, c) = (44, 165, 1125)$, $bb - ac = -11 . 45^2$, also $e = 45$. Da e gegen a prim ist, so hat man $44k \equiv 165$ (mod. 45), $k = 15$, folglich A', B', C' resp. $= 44, -11, 3$. Die Form $(44, -11, 3)$ findet man mit F eigentlich aequivalent, und es giebt nur zwei eigentliche Transformationen, nämlich $-3, 1, -1, 0$; und $+3, -1, +1, 0$, daher auch nur zwei eigentliche Transformationen aus F in f, nämlich $-3, 0, -1, -15$; und $+3, 0, +1, +15$.

Die Zahl e hat die Theiler 1, 3, 5, 9, 15, 45; nach der Gaussischen Methode müsste man also $1 + 3 + 5 + 9 + 15 + 45 = 78$ Formen (Ω) aus der Form F durch die Substitutionen 1, 0, 0, 45; 3, 0, 0, 15; 3, 1, 0, 15 etc. herleiten, und jede derselben in Bezug auf ihre Aequivalenz mit f untersuchen — eine harte Probe für die Geduld des Rechners!

3°. Es sei a durch kein Quadrat theilbar, und ϑ das grösste gemeinschaftliche Maass zwischen a und e, $a = \vartheta a'$, $e = \vartheta e'$, so dass a' und e' relat. Primzahlen sein werden. Da nun $bb - ac = Dee$, so wird ϑ in bb aufgehen; aber ϑ ist durch kein Quadrat theilbar (da a keinen quadratischen Factor enthält), folglich geht ϑ in b auf, oder $b = \vartheta b'$. Daher kommt $\vartheta b'b' - a'c = D\vartheta e'e'$, $a'c$ durch ϑ theilbar; nun ist ϑ gegen a' prim (weil sonst $a = \vartheta a'$ einen quadratischen Factor enthielte), folglich c durch ϑ theilbar, oder $c = \vartheta c'$

*) Etwas Aehnliches gilt für den Fall, in welchem e gegen c prim ist.

und $b'b' - a'c' = De'e'$. Hieraus folgt, dass D quadratischer Rest von a' ist. Ist nun die Form f unter F enthalten, so dass sie daraus durch die Substitution α, β, γ, δ hervorgeht, folglich $A\alpha\alpha + 2B\alpha\gamma + C\gamma\gamma = a$ sein wird, wo α und γ relative Primzahlen sein müssen, indem a durch kein Quadrat theilbar, so ist $BB - AC = D$ quadratischer Rest von $a = \vartheta a'$ (Disquisitiones arithmeticae. Sect. V. art. 154), mithin auch Rest von ϑ. Daher das

Theorem: Es sei $f \ldots (a, b, c)$ eine Form von der Determinante Dee, a durch kein Quadrat theilbar, ϑ das grösste gemeinschaftliche Maass von a und e. Ist dann D ein Nichtrest von ϑ, so kann keine Form von der Determinante D die Form f einschliessen.

Es werde nun angenommen, dass D Rest von ϑ sei. Nach dem Vorhergehenden ist von selbst $a = \vartheta a'$, $e = \vartheta e'$, $b = \vartheta b'$, $c = \vartheta c'$ (a' und e' relat. Primzahlen). Die Congruenz $ak \equiv b$ (mod. e)*) welche mit $a'k \equiv b'$ (mod. e') zusammenfällt, ist immer lösbar, und lässt ϑ verschiedene Werthe von k unter e zu, nämlich k', $k' + e'$, $k' + 2e', \ldots k' + (\vartheta - 1)e'$, indem k' den positiven Werth von k unter e' bedeutet. Für jeden dieser Werthe ist $B' = \frac{b' - a'k}{e'}$ eine ganze Zahl. Man hat nun $e'B' \equiv b'$ (mod. a'), folglich, wenn man mit f multiplicirt, und $e'f \equiv 1$ (mod. a') macht, $B' \equiv b'f$, $B'B' - D \equiv b'^2 f^2 - D$ (mod. a'). Nun war $b'^2 \equiv De'^2$ (mod. a'), folglich $b'^2 f^2 \equiv D$, also $B'B' - D \equiv 0$ (mod. a') für jeden der obigen Werthe von k. Im Allgemeinen aber werden diese Werthe von k nicht sämmtlich geeignet sein, um $B'B' - D$ durch $\vartheta a'$ theilbar zu machen, und die dieser Bedingung wirklich genügenden Werthe ergeben sich durch folgendes Verfahren:

Da vorausgesetzt worden, dass D Rest von ϑ ist, so hat die Congruenz $zz \equiv D$ (mod. ϑ) mehrere verschiedene Wurzeln r, r', r'', etc. Sind diese Werthe sämmtlich bestimmt, so suche man z. B. in Bezug auf den ersten derselben den kleinsten positiven Werth von k, welcher der Congruenz $a'k \equiv b' - re'$ (mod. $\vartheta e'$) Genüge leistet**), und verfahre ebenso in Bezug auf die Werthe r', r'' etc., so werden die resultirenden Werthe von k alle möglichen sein, für welche $B' = \frac{b' - a'k}{e'}$, $C' = \frac{B'B' - D}{a}$ ganze Zahlen werden. Denn zuerst ist offenbar B' eine ganze Zahl, sodann kommt $e'B' \equiv re'$ (mod. $\vartheta e'$), oder $B' \equiv r$ (mod. ϑ), $B'^2 \equiv r^2 \equiv D$ (mod. ϑ); da nun $B'^2 - D$ auch durch a' theilbar ist (was vorher bewiesen), und ϑ gegen a' prim, so wird $B'^2 - D$ durch $\vartheta a'$ theilbar sein. Ist endlich k so beschaffen, dass B' und C' ganze Zahlen werden, so muss es der Congruenz $a'k \equiv b' - re'$ (mod. $\vartheta e'$) Genüge leisten, so dass r eine Wurzel der Congruenz $zz \equiv D$ (mod. ϑ) bedeutet, wie man leicht finden wird, folglich hat man auch alle geeigneten Werthe von k erhalten.

Dies Resultat ist in folgendem Theorem enthalten:

Es sei $f \ldots (a, b, c)$ eine Form von der Determinante

*) Da a durch kein Quadrat theilbar, so muss $n = 1$ sein.
**) $\vartheta e'$ ist nämlich prim gegen a'.

Dee, a durch kein Quadrat theilbar, ϑ das grösste gemeinschaftliche Maass zwischen a und e, welches folglich ebenfalls keinen quadratischen Factor enthalten wird. Ist nun D quadratischer Rest von ϑ, und man bezeichnet die verschiedenen Werthe von z, welche der Congruenz $zz \equiv D (\text{mod.}\,\vartheta)$ Genüge leisten, durch r, r', r'', etc., ihre Anzahl durch i, so existiren immer i Formen (a, B', C') von der Determinante D, welche so beschaffen sind, dass jede Form F von der nämlichen Determinante, welche f eigentlich einschliesst, einer (oder mehreren) derselben eigentlich aequivalent ist. Setzt man $a = \vartheta a'$, $e = \vartheta e'$, $b = \vartheta b'$, so werden $\frac{b' - a'k}{e'}$, $\frac{b' - a'k'}{e'}$, $\frac{b' - a'k''}{e'}$ etc. die sämmtlichen Werthe von B' sein, indem k, k', k'', etc. die kleinsten positiven Werthe bedeuten, welche den Congruenzen $a'k \equiv b' - re' (\text{mod.}\,\vartheta e')$, $a'k' \equiv b' - r'e'$ $(\text{mod.}\,\vartheta e')$, $a'k'' \equiv b' - r''e' (\text{mod.}\,\vartheta e')$ etc. Genüge leisten.

Beispiel. $(a, b, c) = (35, 10, 20)$, $bb - ac = -6.10^2$, $e = 10$, $D = -6$. Hier ist $\vartheta = 5$, $a' = 7$, $b' = 2$. $e' = 2$. Die Congruenz $zz \equiv -6 (\text{mod.}\,5)$ giebt r, $r' = 2, 3$; $7k \equiv -2$ (mod. 10) giebt $k = 4$; $7k' \equiv -4$ (mod. 10) giebt $k' = 8$; daher $B' = -13$, -27; $C' = 5$, 21. Alle Formen von der Determinante -6 also, welche die Form $(35, 10, 20)$ von der Det. -600 eigentlich einschliessen, sind mit einer der Formen $(35, -13, 5)$, $(35, -27, 21)$ eigentlich aequivalent, und da man diese unter einander eigentlich aequivalent findet, so werden alle jene Formen in eine Klasse gehören, deren Repräsentant $(3, -1, 4)$ ist, wie man leicht findet.

Aus dem Vorhergehenden ersieht man, dass es überhaupt immer eine endliche Anzahl von Formen der Determinante D giebt, deren einer wenigstens jede Form der nämlichen Determinante eigentlich aequivalent sein muss, wenn sie eine gegebene Form von der Determinante Dee eigentlich einschliesst, und man kann alle einschliessenden Formen in ebenso viele Klassen theilen, so viele verschiedene Klassen es giebt, welchen die sämmtlichen Formen (A', B', C'), die wir oben aufzustellen gelehrt haben, angehören.

Zum Schluss wird bemerkt, dass, wenn man den Fall, in welchem die Determinante $bb - ac$ verschwindet (wobei $BB - AC$ Null oder nicht Null sein kann), nach unserer Methode einer besondern Betrachtung unterwirft, man zu denselben Resultaten gelangt, welche Gauss im art. 215 der Disquisitiones arithmeticae entwickelt, und an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lassen.

IX.

Berechnung der Fehler der Horizontalwinkel bei geneigter Ebene des Messtisches oder des Horizontalkreises am Winkelmesser.

Von

Herrn Dr. Wilh. Matzka,

k. k. Professor der Mathematik und prakt. Geometrie an der ständ. techn. Lehranstalt zu Prag.

1.

Die Lehrer der praktischen Geometrie sind über die Grösse des Fehlers in den Horizontalwinkeln, welche eine vom Horizonte abweichende Stellung der Ebene des Messtisches oder des Horizontalkreises an einem Winkelmesser verursacht, nicht einig; was wohl zumeist nur daher rührt, dass sie zu wenig genäherte Auflösungen dieser Aufgabe aufstellten, die jedoch gerade bei jenen Höhenwinkeln der Visuren unrichtig wurden, welche bei dem Gebrauche des Messtisches oder Theodoliten am gewöhnlichsten vorkommen. Jene Ungewissheit und die eigenthümlichen analytischen Schwierigkeiten dieser Aufgabe, welche die Bestimmung des möglich **grössten Fehlers** mit sich führt, gaben ihr in meinen Augen einen besonderen Reiz, der mich antrieb, sie möglichst umständlich und scharf zu lösen.

2.

Die Ebene eines Messtisches oder Horizontalkreises, von denen jener die Winkel zeichnet, dieser sie misst, sei gegen die Horizontalebene unter einem gewissen Winkel ε geneigt; wesswegen sie diese in einer bestimmten Geraden CO (Taf. II. Fig. 1.)

schneidet. Eine Visur CM, mittels eines Diopters oder Fernrohrs, auf den Horizont selbst (winkelrecht) projicirt, fall in die eigentlich geforderte und richtige Gerade CP; während si auf die geneigte Messtischebene projicirt in die fast immer un richtige Gerade CQ zu liegen komme. Danach werden im Allgemeinen diese Projectionen mit jener fixen Horizontallinie CO un gleiche Winkel $OCP=\alpha$ und $OCQ=\alpha'$ machen, deren Unterschied

$$(1) \qquad \alpha'-\alpha=\Delta\alpha$$

der eigentlich gesuchte **Fehler im Horizontalwinkel** α ist.

Zur Bestimmung desselben legen wir um den Scheitel C de betrachteten Winkel eine Kugelfläche; diese werde von dem Horizonte in dem Kreisbogen OA, von der Messtischebene im Boge OB und von den die Visur CM projicirenden Ebenen in MP un MQ geschnitten. Danach ist $AOB=\varepsilon$, $OP=\alpha$, $OQ=\alpha'$ un der **Höhenwinkel** $MCP=MP$ sei $\pm k$.

Zieht man zur Hilfe noch den Kreisbogen OM, und setz $90^0-OM=k$, $90^0-MOA=\eta$; so gibt das an P rechtwinklig Kugeldreieck OPM

$$(2) \qquad \tang\eta=\sin\alpha\cot k$$

und

$$\tang\alpha=\cot k\sin\eta,$$

das bei Q rechtwinklige Kugeldreieck OQM aber

$$\tang\alpha'=\cot k\sin(\eta+\varepsilon).$$

Eliminirt man aber aus den beiden letzten Gleichungen de Hilfsbogen k durch Theilung, so findet man

$$(3) \qquad \frac{\tang\alpha'}{\tang\alpha}=\frac{\sin(\eta+\varepsilon)}{\sin\eta} \text{ oder } \tang\alpha'=\frac{\sin(\eta+\varepsilon)}{\sin\eta}\tang\alpha.$$

Man wird demnach aus α und k nach (2) zunächst den Hilfswinkel η, dann hieraus und aus ε nach (3) den unrichtigen Horizontalwinkel α' und endlich nach (1) seinen Fehler $\Delta\alpha$ berechnen; wobei man die Logarithmen vortheilhaft benutzen kann, weil ε immer nur sehr klein ist, also η und $\eta+\varepsilon$, daher auch α und α', in der goniometrischen Tafel nicht weit von einander abstehen.

Will man α' unmittelbar durch die Angaben (Daten) ε, α, k ausdrücken, so wird man aus (2) und (3) η eliminiren; wonach man findet

$$(4) \qquad \tang\alpha'=\cos\varepsilon\tang\alpha+\frac{\sin\varepsilon\tang k}{\cos\alpha}.$$

Diese Gleichung erhält man unmittelbar und einfacher, wenn man noch den grössten Kreis $ABA'B'$ der Pole K und L des Horizontes und der Messtischebene benützt. Denn da ist im

Kugeldreiecke KLM, wie leicht nachweisbar, $KL = AB = \varepsilon$, $MK = 90^\circ - h$, $MKL = A'O + OP = 90^\circ + \alpha$ und $KLM = OB - OQ = 90^\circ - \alpha'$; daher

$$\cos\varepsilon \cos(90^\circ + \alpha) = \sin\varepsilon \cot(90^\circ - h) - \sin(90^\circ + \alpha)\cot(90^\circ - \alpha'),$$

folglich wieder

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\alpha' = \cos\varepsilon \operatorname{tang}\alpha + \frac{\sin\varepsilon}{\cos\alpha}\operatorname{tang}h.$$

3.

Suchen wir noch den unmittelbaren Ausdruck von $\Delta\alpha$, so finden wir

$$\operatorname{tang}\Delta\alpha = \operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha' \operatorname{tg}\alpha},$$

daher nach der Substitution für $\operatorname{tg}\alpha'$, wenn wir abkürzend

$$(5) \qquad \sin\varepsilon \operatorname{tang}h - \operatorname{sinv}\varepsilon \sin\alpha = u$$

setzen,

$$(6) \qquad \operatorname{tang}\Delta\alpha = \frac{u\cos\alpha}{1 + u\sin\alpha}.$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man mit Leichtigkeit in Betreff der algebraischen Beziehungszeichen der vorkommenden Grössen Folgendes:

1. Wenn die Winkel α und h zugleich ihre Vorzeichen ändern, erfolgt dasselbe auch bei u, dagegen bleiben die Vorzeichen von $\cos\alpha$ und $u\sin\alpha$ ungeändert, mithin ändert sich das Vorzeichen des Fehlers $\Delta\alpha$.

2. Wenn der Winkel α in seinen Supplementswinkel $180^\circ - \alpha$ übergeht, bleiben $\sin\alpha$ und u ungeändert, aber $\cos\alpha$, daher auch $\Delta\alpha$, ändern ihr Vorzeichen.

Man wird demnach wie gewöhnlich den Neigungswinkel ε nur spitz und positiv, die Winkel α und h zwar auch nur spitzig, aber eben sowohl positiv als negativ voraussetzen.

4.

Da die Neigung ε der Messtischplatte nur immer sehr klein ist, so wird man leicht versucht, $\Delta\alpha$ in eine nach den Potenzen von ε aufsteigende Reihensumme zu entwickeln. Thut man dies, so findet man, wenn man den Gehren (d. i. den Winkel, dessen bestimmender Kreisbogen so lang wie sein Halbmesser ist) durch Γ bezeichnet, und zur Abkürzung tang$h = a$ setzt, zunächst

$$u = a\,\frac{\varepsilon}{\Gamma} - \frac{1}{2}\sin\alpha.\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^2 - \frac{1}{6}a\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^3 + \frac{1}{24}\sin\alpha.\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^4 + \frac{1}{120}a.\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^5 \ldots,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tang}\,\Delta\alpha = {} & \frac{\varepsilon}{\Gamma}a\cos\alpha - \left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^2\left(a^2+\frac{1}{2}\right)\sin\alpha\cos\alpha \\ & + \left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^3\left(a^2\sin\alpha^2 + \sin\alpha^2 - \frac{1}{6}\right)a\cos\alpha \\ & + \left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^4\left[-a^4\sin\alpha^2 + a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\sin\alpha^2\right) - \frac{1}{4}\sin\alpha^2 + \frac{1}{24}\right]\sin\alpha\cos\alpha \\ & + \left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^5\left[a^4\sin\alpha^4 - a^2\left(\frac{1}{2} - 2\sin\alpha^2\right) + \frac{3}{4}\sin\alpha^4 - \frac{1}{4}\sin\alpha^2 + \frac{1}{120}\right]a\cos\alpha \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und sofort

$$\begin{aligned}(7) \qquad \Delta\alpha = {} & \varepsilon.a\cos\alpha - \varepsilon.\frac{\varepsilon}{\Gamma}\left(a^2+\frac{1}{2}\right)\sin\alpha\cos\alpha \\ & + \varepsilon.\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^2\left[a^2.\frac{4\sin\alpha^2-1}{3} + \sin\alpha^2 - \frac{1}{6}\right]a\cos\alpha \\ & + \varepsilon.\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^3\left[a^4(1-2\sin\alpha^2) - a^2\left(2\sin\alpha^2 - \frac{5}{6}\right) - \frac{1}{4}\sin\alpha^2 + \frac{1}{24}\right]\sin\alpha\cos\alpha \\ & + \varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^4\left[a^4\frac{6\sin\alpha^4 - 2\sin\alpha^2 + 1}{5} + a^2\left(2\sin\alpha^4 - \frac{1}{2}\sin\alpha^2\right) - {} \right. \\ & \qquad \left. + \frac{3}{4}\sin\alpha^4 - \frac{1}{4}\sin\alpha^2 + \frac{1}{120}\right]a\cos\alpha \\ & + \ldots\ldots\end{aligned}$$

Ich habe diese Reihensumme in so viel Gliedern entwickelt, um ersichtlich zu machen, welchen namhaften Einfluss auf den Fehler $\Delta\alpha$ des Horizontalwinkels der Höhenwinkel h der Visur äussert, und wie unfügsam diese Glieder gestaltet sind, so dass man, selbst wenn man nur noch das zweite Glied ausrechnen wollte, weit mehr zu thun hätte als wenn man die ganz scharfe Rechnung nach den Gleichungen (2), (3) und (1) ausführen möchte.*)

---

*) Dieser Fall tritt auch bei manchen anderen Reihenentwickelungen und näherungsweisen Rechnungsformen der praktischen Geometrie ein. Zumeist sucht man dabei die Anwendung der Logarithmen oder goniometrischen Functionen zu umgehen, die (so wie die Decimalbrüche),

5.

In den geschriebenen Heften der Vorträge des Herrn Professors **Stampfer** über praktische Geometrie am polytechnischen Institute zu Wien, finde ich in zwei Exemplaren anstatt des zweigliedrigen Factors $a^2+\frac{1}{2}$ des zweiten Gliedes nur den eingliedrigen $\frac{1}{2}$. Dies rührt von einer unrichtig eingeleiteten Abkürzung her, indem er zwar richtig $\sin\Delta\alpha \doteq \Delta\alpha$, aber unrichtig $\cos\Delta\alpha \doteq 1$ setzt, also in der Grundanlage zwar die zweiten Potenzen von $\Delta\alpha$ und ε vernachlässigt, in dem Endergebnisse sie aber gleichwohl noch mit bestimmt.

Er macht ferner die Unterschiede zweier solcher Fehler $\Delta\alpha$, um den Fehler des Winkels zweier Visurprojectionen auf dem Messtische zu bestimmen. Allein weil hierbei sowohl zweierlei α als auch zweierlei h vorkommen, muss dieses Unterschiedes Ausdruck sehr complicirt ausfallen. Zudem kommt es doch hauptsächlich blos darauf an, den äussersten Betrag des Fehlers $\Delta\alpha$ zu erfahren. Desswegen ziehe ich es vor, zuerst zu erforschen, wie jedes einzelne der Rechnungselemente ε, h, α auf diesen Fehler $\Delta\alpha$ einwirkt, und dann, weil derselbe in Bezug auf sämmtliche Werthe von α ein Grösstes zulässt, dieses zu bestimmen.

Dabei bleibt aber noch zu erwägen, dass man den möglich grössten Fehler des Winkels zweier Visurprojectionen dem Doppelten dieses grössten Fehlers $\Delta\alpha$ gleich halten müsse, wenn der einen Visur derjenige Winkel α, für den dieses Grösste von $\Delta\alpha$ eintritt, der anderen Visur aber der Winkel $180-\alpha$ zugehört; was durch Nr. 2. in Art. 3. gerechtfertiget ist.

6.

I. Wächst der Neigungswinkel ε allein, so muss, weil mit α und h vermöge der Gleichung (2) auch η unverändert bleibt, in Gleichung (3) das fast immer positive Verhältniss $\sin(\eta+\varepsilon):\sin\eta$, daher auch das ihm gleiche $\tang(\alpha+\Delta\alpha):\tang\alpha$, desto mehr sich verändern, je mehr ε wächst; darum muss auch der absolute Betrag des Fehlers $\Delta\alpha$ um so mehr zunehmen. — Dasselbe zeigt Taf. II. Fig. 2. Denn bleibt α beständig, so bleibt P und PK an seiner Stelle; bleibt dann auch noch h beständig, so ist auch der Punkt M fest. Wächst nun $\varepsilon = AOB$, so wachsen auch die mit ihm gleichgradigen Bogen AB und KL, der Punkt L entfernt

---

trotz der Möglichkeit einer leicht verständlichen Darstellung, leider noch immer vielen Praktikern und Zifferrechnern mathematische Schreckbilder sind.

sich von K, also nimmt im Dreieck KLM der Winkel an L ab, daher auch der ihm gleichgradige Bogen BQ; folglich wächst der Bogen $OQ = \alpha' = \alpha + \Delta\alpha$, und sonach auch der Fehler $\Delta\alpha = OQ - OP$.

II. **Wächst der absolute Betrag des Höhenwinkels** h von 0 bis 90^0, so wächst in Gleichung (4) auch jener des Schlussgliedes und desto mehr ändert sich auch $\tang\alpha'$ und damit $\alpha' = \alpha + \Delta\alpha$, daher auch der Betrag des Fehlers $\Delta\alpha$ selbst. — Nach Taf. II. Fig. 2. muss, wenn $s = AOB$ beständig bleibt, mit OA auch OB, daher mit K auch L unverrückt an seiner Stelle bleiben. Bleibt sich nun auch $\alpha = OP$ gleich, so bleibt auch der Quadrant PK fest; daher wenn $h = PM$ wächst, muss M von P nach K hin sich bewegen, daher wird der Punkt Q von O sich entfernen, also $OQ = \alpha + \Delta\alpha$ wachsen und sofort auch der Fehler $\Delta\alpha = OQ - OP$ sich vergrössern. — Dies bestätigt endlich auch die Gleichung (6), wenn man ihr die Form

$$\tang\Delta\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha + \frac{1}{u}}$$

ertheilt, weil nach Gleichung (5) mit wachsendem h auch u wächst, folglich $\frac{1}{u}$ abnimmt, daher $\tang\Delta\alpha$ und $\Delta\alpha$ sich vergrössert.

III. **Wächst endlich der Horizontalwinkel** α **allein**, und zwar von -90^0 bis $+90^0$, so wird für diese beiden Grenzwerthe, $\cos\alpha = 0$, daher nach Gleichung (6) die $\tang\Delta\alpha$ also auch $\Delta\alpha = 0$. — Dies erhellet auch aus Taf. II. Fig. 2. Denn für $OP = -90^0 = OA'$ wird $OQ = OB' = -90^0$ und für $OP = +90^0 = OA$ wird $OQ = OB = +90^0$, daher jedesmal $OQ - OP = \Delta\alpha = 0$. — Für $\alpha = 0$ wird $\tang\,\Delta\alpha = u = \sin\varepsilon\tang h$. Mithin muss es zwischen $\alpha = -90^0$ und $\alpha = +90^0$ ein **Grösstes** von $\Delta\alpha$ geben. Mit der Aufsuchung dieses Grössten werden wir uns fortan beschäftigen, da es hinreicht, nur den grössten Fehler $\Delta\alpha$ zu kennen, dem man bei einer gewissen Neigung ε der Messtisch- oder Kreisebene ausgesetzt ist.

7.

Bestimmen wir nun, da mit $\Delta\alpha$ auch $\tang\Delta\alpha$ zugleich stetig wächst und abnimmt, von $\tang\Delta\alpha$ das nach α genommene Differentialverhältniss, und setzen es gleich Null; so erhalten wir gemäss den Gleichungen (6) und (5)

$$(1 + u\sin\alpha)\left(\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha} - u\sin\alpha\right) - u\cos\alpha\left(\sin\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha} + u\cos\alpha\right) = 0$$

oder reducirt

$$\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}-u(u+\sin\alpha)=0,$$

und nach der Gleichung (5)

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}=-(1-\cos\varepsilon)\cos\alpha=-\sin\mathrm{v}\,\varepsilon\cos\alpha,$$

daher

$$(8)\qquad u^2+u\sin\alpha+\sin\mathrm{v}\,\varepsilon\,.\cos\alpha^2=0.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit (5) gibt denjenigen Werth der Hilfszahl u und des Winkels α, für den der Fehler $\Delta\alpha$ am grössten ausfällt. Leichter ist es aus ihnen u zu bestimmen, indem man $\sin\alpha$ eliminirt, wodurch man erhält:

$$(9)\qquad u^2-3u\,\mathrm{tg}\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{tg}h=2\sin\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\mathrm{tg}\frac{\varepsilon^2}{2}-\mathrm{tg}h^2\right),$$

und, wenn man zur Abkürzung

$$(10)\qquad \frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin h}=n$$

setzt,

$$u=\frac{3\pm\sqrt{1+8n^2}}{2}\,\mathrm{tang}\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{tang}h\,.$$

Das richtige Vorzeichen der Wurzel findet man aus folgender Betrachtung. Nach Gleichung (5) ist

$$\sin\mathrm{v}\,\varepsilon.\sin\alpha-\sin\varepsilon\,\mathrm{tang}h+u=0,$$

daher, wenn man für u substituirt, nach einigen einfachen Reductionen

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\alpha\cot h-\cos\frac{\varepsilon}{2}+\frac{3\pm\sqrt{1+8n^2}}{4\cos\frac{1}{2}\varepsilon}=0.$$

Für $\lim\varepsilon=0$ erhält man nun auch $\lim n=0$ und

$$-1+\frac{3\pm1}{4}=0,$$

welche Gleichung aber lediglich bei dem oberen Vorzeichen bestehen kann. Mithin ist

$$(11)\qquad u=\frac{3+\sqrt{1+8n^2}}{2}\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tang}h\,.$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$(12)\qquad \frac{\sqrt{1+8n^2}+1}{2}=v,$$

so ist, weil ε also auch n von Null verschieden vorausgesetzt wird, $v>1$ und

$$(13)\qquad u=(v+1)\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tang}h\,.$$

Schreibt man nun diesen Ausdruck in dem aus der Gleichung (5) folgenden

$$(14)\qquad \sin\alpha=\frac{\sin\varepsilon\operatorname{tang}h-u}{\operatorname{sinv}\varepsilon},$$

so erfolgt

$$\sin\alpha=\frac{\sin\varepsilon-(v+1)\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}}{2\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}.\operatorname{tang}h$$

$$=\frac{2\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2-(v+1)}{\sin\varepsilon}.\operatorname{tang}h,$$

oder, weil $v>1>\cos\varepsilon$ ist,

$$(15)\qquad \sin\alpha=-\frac{v-\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}\operatorname{tang}h,$$

woraus erhellet, dass h und α jederzeit entgegengesetzte Beziehungszeichen haben.

8.

Ein anderer Ausdruck für $\sin\alpha$ ergibt sich folgendermassen. Es ist nach Gleichung (14)

$$\sin\alpha=\cot\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tang}h-\frac{u}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}=\cot\frac{1}{2}\varepsilon^2+1\right)$$

$$=-\frac{u}{2}-\cot\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{u}{2}\cot\frac{\varepsilon}{2}-\operatorname{tang}h\right),$$

daher, wenn man das letztere u nach (13) ausdrückt,

$$-\sin\alpha-\frac{u}{2}=\cot\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tang}h\left(\frac{v-1}{2}\right).$$

Setzt man demnach

$$(16)\qquad (v-1)\operatorname{tang}h\cot\frac{\varepsilon}{2}=(v-1)\frac{\operatorname{tang}h}{\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}}=t,$$

so ist

$$(17)\qquad -\sin\alpha=\frac{t+u}{2}.$$

Für t lässt sich noch ein anderer bemerkenswerther Ausdruck aufstellen. Es ist nach Gleichung (12)

$$(2v-1)^2=1+8n^2,$$

daher nach der Annahme (10)

$$v(v-1)=2\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}{\sin h^2},$$

folglich

$$v-1=\frac{2}{v}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}{\sin h^2},$$

und sofort

$$t=\frac{2}{v}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\cos\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin h\cos h}$$

oder

$$(18)\qquad t=\frac{2}{v}\cdot\frac{\sin\varepsilon}{\sin 2h}.$$

Dabei ist das Verhältniss

$$\frac{u}{t}=\frac{v+1}{v-1}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2=\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{2}{v-1}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2$$

$$=\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{v\sin h^2}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2}$$

$$= \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{\sin h(\sin h + \sqrt{\sin h^2 + 8\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2})}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Ist nun nicht allein ε — wie immer — sondern auch noch h sehr klein, so fällt dies Verhältniss $u:t$ offenbar so klein aus, dass man u in Vergleich gegen t vernachlässigen, folglich näherungsweise

$$(19) \qquad -\sin\alpha = -\frac{t}{2} = \frac{v-1}{2}\cdot\frac{\operatorname{tang} h}{\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{\sin\varepsilon}{v\sin 2h}$$

setzen darf.

9.

Hat man u und α zur Hilfe berechnet, so bestimmt man den gesuchten möglich grössten Fehler $\Delta\alpha$ selbst nach der Gleichung

$$(6) \qquad \operatorname{tang}\Delta\alpha = \frac{u\cos\alpha}{1+u\sin\alpha}$$

Nun ist u vermöge der Gleichung (5) von derselben Ordnung der Kleinheit wie ε, folglich $u\sin\alpha$ gewiss noch kleiner und sofort der $\log(1+u\sin\alpha)$ fast immer so klein, dass er ausser Acht gelassen werden darf. Besitzt man eine logarithmisch-goniometrische Tafel, in welcher die kleinsten Winkel von Secunde zu Secunde vorschreiten, so möchte die Berechnung von $\Delta\alpha$ wohl am einfachsten nach Gleichung (6) erfolgen.

Dividirt man im zweiten Theile von (6), so wird

$$(20) \qquad \operatorname{tang}\Delta\alpha = \underset{\mathrm{I}}{u\cos\alpha} - \underset{\mathrm{II}}{u\cos\alpha\,.\,u\sin\alpha} + \ldots$$
$$= u\cos\alpha - \mathrm{I}.\,u\sin\alpha + \ldots,$$

wo man nur höchst selten von dem berichtigenden zweiten Gliede Gebrauch machen wird.

Besitzt man jedoch keine wie oben beschriebene goniometrische Tafel, so ist es besser $\Delta\alpha$ selbst nach der Formel

$$\frac{\Delta\alpha}{r} = \operatorname{tang}\Delta\alpha - \frac{1}{3}\operatorname{tg}\Delta\alpha^3 + \frac{1}{5}\operatorname{tg}\Delta\alpha^5 - \ldots$$

zu entwickeln, wonach man erhält

$$(21) \qquad \Delta\alpha = \underset{\mathrm{I}}{r u\cos\alpha} - \underset{\mathrm{II}}{I.\,u\sin\alpha} + \ldots$$

Da wo der Winkel α zureichend klein ist, kann man die Gleichung (6) auch dadurch umgestalten, dass man $\cos\alpha = 1-2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$ setzt. Danach ergiebt sich

$$\operatorname{tang}\Delta\alpha = u - \frac{u + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha}{1+u\sin\alpha}\,.\,u\sin\alpha\,.$$

Ist nun das zweite Glied wegen der Kleinheit von α schon genügend klein, so kann man es vernachlässigen, folglich näherungsweise setzen

$$(22)\qquad \operatorname{tang}\Delta\alpha \doteq u = (v+1)\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tang}h$$

und

$$(23)\qquad \Delta\alpha \doteq \Gamma u = \Gamma(v+1)\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tang}h\,.$$

10.

Bevor wir in unserer Untersuchung weiter schreiten, betrachten wir gewisse ausgezeichnete Höhenwinkel h, auf die uns theils die Natur der Aufgabe, theils die Annahme (10) aufmerksam macht, nemlich $h=0$, $\frac{\varepsilon}{2}$ und 90^0.

I. Für $h=\pm 0$

wird n und $v=\infty$, aber $\operatorname{tang}h=\pm 0$, daher in (13) und (15) $v\operatorname{tang}h=\pm\infty.0$. Es ist jedoch gemäss (12) und (10)

$$v\operatorname{tang}h = \frac{\sqrt{\sin h^2 + 8\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2} + \sin h}{2\cos h}$$

und für $h=\pm 0$

$$=\pm\sqrt{2}.\sin\frac{1}{2}\varepsilon\,,$$

daher nach (13) und (15)

$$u = \pm\sin\frac{1}{2}\varepsilon\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon.\sqrt{2}\,,$$

$$(24)\qquad \sin\alpha = \mp\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin\varepsilon}\sqrt{2} = \mp\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{2}}.$$

Aus dem Letzteren findet man

$$\cos\alpha = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon}\cdot\sqrt{\frac{\cos\varepsilon}{2}},$$

$$(25)\qquad \tan\alpha = \mp\frac{1}{\sqrt{\cos\varepsilon}};$$

$$\cos 2\alpha = -\tan\frac{1}{2}\varepsilon^2,\quad \sin 2\alpha = \mp\frac{\sqrt{\cos\varepsilon}}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2};$$

$$\tan 2\alpha = \pm\frac{\sqrt{\cos\varepsilon}}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}.$$

Sofort ist

$$\tan\varDelta\alpha = \pm\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}{\sqrt{\cos\varepsilon}},$$

daher

$$\tan\varDelta\alpha\,.\,\tan 2\alpha = 1,$$

und also

$$\pm 2\alpha \pm \varDelta\alpha = \pm\alpha \pm \alpha' = 90^0.$$

Demnach dürfte zur Berechnung von $\varDelta\alpha$ am geeignetesten sein

$$\pm\sin\varDelta\alpha = \cos\pm 2\alpha = -\tan\frac{1}{2}\varepsilon^2$$

oder

$$(26)\qquad \sin\varDelta\alpha = \mp\tan\frac{1}{2}\varepsilon^2,$$

oder in eine Reihe entwickelt

$$(27)\qquad \mp\varDelta\alpha = \frac{\varepsilon^2}{4\Gamma} + \frac{\varepsilon^4}{4\Gamma^3} + \dots$$

Wegen der Kleinheit von ε ist in (24) und (25)

$\cos\frac{\varepsilon}{2} \doteq 1$, $\cos\varepsilon \doteq 1$, daher $\sin\alpha \doteq \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tang\alpha \doteq \pm 1$, und sofort höchst nahe $\alpha = \mp 45^0$. Wenn demnach $h = \pm 0$, folglich die Visur horizontal ist, so fällt sowohl für $\alpha = -45^0$ als für $\alpha = +45^0$, also an den Halbirungslinien der 4 horizontalen Quadranten, der Fehler $\Delta\alpha$ am grössten aus, und dieser ist sehr nahe der zweiten Potenz des Neigungswinkels der Messtischebene proportional.

Dies Ergebniss wird auch von der Gleichung (4) bestätigt, welche für $h = \pm 0$ in

$$\tang(\alpha' = \alpha + \Delta\alpha) = \cos\varepsilon \tang\alpha$$

übergeht, und zeigt, dass nicht nur für $\alpha = \pm 90^0$, sondern auch für $\alpha = \pm 0$ der Fehler $\Delta\alpha$ in Null übergehe, und dass demnach sowohl im positiven wie auch im negativen ersten Quadranten von α ein grösster Fehler $\Delta\alpha$ statt finde.

Bestimmt man dieses Grösste nach der letzten, auch aus einer leicht zu entwerfenden Figur unschwer ableitbaren Gleichung, indem man sie nach α differenzirt und $\frac{\partial\Delta\alpha}{\partial\alpha} = 0$ setzt; so findet man

$$\frac{1}{\cos\alpha'^2} = \frac{\cos\varepsilon}{\cos\alpha^2},$$

folglich, wenn man durch die ursprüngliche Gleichung dividirt,

$$\sin\alpha' \cos\alpha' = \sin\alpha \cos\alpha,$$

also

$$\sin 2\alpha' = \sin 2\alpha$$

und

$$\pm 2\alpha \pm 2\alpha' = 180^0,$$

oder wie oben

$$\pm\alpha \pm \alpha' = \pm 2\alpha \pm \Delta\alpha = 90^0.$$

Sonach ist

$$\frac{1}{\cos\alpha'^2} = \frac{1}{\sin\alpha^2} = \frac{\cos\varepsilon}{\cos\alpha^2} = \frac{1-\cos\varepsilon}{\sin\alpha^2 - \cos\alpha^2} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}{-\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}{\mp\sin\Delta\alpha}$$
$$= \frac{1+\cos\varepsilon}{\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2} = 2\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2,$$

folglich wie oben

$$\cos 2\alpha = -\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2 \text{ und } \sin \varDelta\alpha = \mp \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Umgekehrt findet man eben so leicht den Neigungswinkel ε, bei dem der Fehler $\varDelta\alpha$ eine bestimmte zugestandene Grenze nicht übersteigt. Dafür ist nach (26) oder (27)

$$(28) \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{\sin(\mp\varDelta\alpha)}, \quad \varepsilon \doteq 2\sqrt{\mp\varDelta\alpha \,.\, \Gamma},$$

wo $\mp\varDelta\alpha$ den absoluten Werth von $\varDelta\alpha$ vorstellt.

Bei der graphischen Triangulirung soll dieser Fehler nicht 30 Secunden betragen. Setzen wir demnach $\mp\varDelta\alpha = 30''$, so finden wir $\varepsilon = 1^\circ 22' 55'' \doteq 1\frac{3}{8}{}^{0}$ *). Also um $1\frac{3}{8}$ Grad darf der Messtisch oder ein Winkelmesser gegen den Horizont geneigt sein, bis der grösste Fehler der Horizontalwinkel, wenn die Objecte genau im Horizonte liegen, 30 Secunden beträgt. Da man nun einen so groben Fehler in der Neigung nie begehen wird, so dürfte dieses Ergebniss leicht Manchen zu dem Irrthume verleiten, überhaupt den Einfluss dieser Neigung auf die Richtigkeit der Messung gering zu schätzen; wir werden ihn jedoch bald eines Besseren belehren.

11.

II. Für $h = \frac{\varepsilon}{2}$

wird vermöge (10), (12), (13), (16), (18), (17)

$$n = 2, \quad v = 2, \quad u = 3\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2, \quad t = 1;$$

$$(29) \qquad -\sin\alpha = \frac{1+u}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2,$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{1}{3}u - \frac{2}{9}u^2 \ldots\ldots\right);$$

$$(30) \qquad \operatorname{tang}\varDelta\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(u + \frac{1}{6}u^2 + \frac{13}{36}u^3 + \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{3}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^4 + \frac{13}{4}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^6 + \ldots\ldots\right.$$

und

*) Herr Prof. Stampfer findet dafür 58′6 Minuten.

$$(31)\qquad \Delta\alpha = \frac{1}{2}\Gamma\sqrt{3}(u + \frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{9}u^3 + \ldots)$$
$$= \frac{3}{2}\Gamma\sqrt{3}\,(\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varepsilon^4 + \mathrm{tg}\frac{1}{2}\varepsilon^6 + \ldots)$$
$$= \frac{3}{8}\sqrt{3}\left[\frac{\varepsilon}{\Gamma}.\varepsilon + \frac{7}{24}\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^3.\varepsilon + \frac{23}{180}\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^5\varepsilon + \ldots\right].$$

Wegen der Kleinheit von ε ist $-\sin\alpha \doteq \frac{1}{2}$, also α sehr nahe $= -30^0$. Während also der Winkel h nur von 0 bis $\frac{\varepsilon}{2}$ aufsteigt, nimmt α von 15^0 bis 30^0 ab und der Fehler $\Delta\alpha$ wird $\frac{3}{2}\sqrt{3} = 2{\cdot}6$ mal so gross.

Umgekehrt findet man zur Fehlergrenze $\Delta\alpha$ die Neigung ε aus

$$(32)\qquad \mathrm{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2 \doteq \frac{2}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{tang}\,\Delta\alpha \quad \text{oder} \quad \varepsilon^2 \doteq \frac{8\Gamma}{3\sqrt{3}}.\Delta\alpha.^{*})$$

Soll z. B. der möglich grösste Fehler $\Delta\alpha = 30$ Secunden sein, so findet man $\varepsilon = 0^0 51' 26''$ und $h = \frac{\varepsilon}{2} = 0^0 25' 43''$.

III. Für $h = 90^0$ geben die Gleichungen (2), (3), (4), $\eta = 0$ und $\alpha' = 0$, also

$$\alpha + \Delta\alpha = 90^0 \text{ und } \Delta\alpha = 90^0 - \alpha;$$

was auch aus Taf. II. Fig. 2. einleuchtet, weil, wenn M nach K kommt, LMQ nach LKB, also Q nach B kommen und $OQ = \alpha' = OB = 90^0$ werden muss.

Je näher demnach h an 90^0 rückt, desto näher kommt $\Delta\alpha$ an $90^0 - \alpha$; woraus man ersieht, wie genau der Horizontalkreis wagrecht gestellt sein muss, wenn die Azimute von sehr hoch stehenden Gestirnen zu messen sind.

12.

Die in den Art. 7—9 behandelte verwickelte Bestimmung der Winkel α und $\Delta\alpha$ räth zuvörderst zu einem Versuche einer Reihenentwickelung nach den aufsteigenden Potenzen des stets nur kleinen — wohl nie einen Grad erreichenden — Neigungswinkels ε.

---

*) Ich meide hier und auch sonst gern das Wurzelzeichen, da man ja die Gleichung $x^m = a$ auch gleich also lesen kann: x ist die $m$te Wurzel aus a.

Hierbei fällt aber sogleich auf, dass bei der Entwickelung der $\sqrt{1+8n^2}$ zu unterscheiden komme, ob $8n^2 <=> 1$ sei, was offenbar von dem Höhenwinkel h abhängt, und wegen des Ausdruckes (10) von n erheischt, dass

$$\pm \sin h >=< \sin \frac{1}{2}\varepsilon . \sqrt{8}, \text{ oder nahe } \pm h >=< \varepsilon \sqrt{2},$$

also für $\varepsilon = 10'$; $20'$; $30'$; $40'$; $50'$; 1^0

dass $\pm h >=< 14'{\cdot}1$; $28'{\cdot}3$; $42'{\cdot}4$; $56'{\cdot}6$; $1^0 10'{\cdot}7$; $1^0 24'{\cdot}8$ sei.

I. Betrachten wir daher den ersten Fall, wo die Entwickelung von $(1+8n^2)^{\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von n oder ε aufsteigend gemäss dem binomischen Lehrsatze ausführbar; folglich

$$8n^2 \overset{<}{=} 1, \quad \pm \sin h \overset{>}{=} \sin \frac{1}{2}\varepsilon . \sqrt{8}$$

ist. Da ist

$$8n^2 = \frac{4}{\sin h^2}(1-\cos\varepsilon) = \frac{4}{\sin h^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^2 - \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^4 + \frac{1}{2.3\ldots6}\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^6 - \ldots\right],$$

$$v = 1 + \frac{1}{2\sin h^2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{\Gamma^2} - \frac{1}{4\sin h^2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{\sin h^2}\right)\frac{\varepsilon^4}{\Gamma^4} + \frac{1}{4\sin h^2}\left(\frac{1}{180} + \frac{1}{6\sin h^2} + \frac{1}{\sin h^4}\right)\frac{\varepsilon^6}{\Gamma^6} + \ldots,$$

$$\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{\Gamma} + \frac{1}{24} \cdot \frac{\varepsilon^3}{\Gamma^3} + \frac{1}{240} \cdot \frac{\varepsilon^5}{\Gamma^5} + \ldots;$$

und wenn man $\operatorname{tang} h = a$ setzt:

$$u = a\frac{\varepsilon}{\Gamma} + \left(\frac{a}{3} + \frac{1}{4a}\right)\frac{\varepsilon^3}{\Gamma^3} - \left(\frac{7}{60}a + \frac{1}{4a} + \frac{1}{8a^3}\right)\frac{\varepsilon^5}{\Gamma^5} \ldots,$$

(32)
$$-\sin\alpha = \left(a + \frac{1}{2a}\right)\frac{\varepsilon}{\Gamma} - \left(\frac{1}{6}a + \frac{11}{24a} + \frac{1}{4a^3}\right)\frac{\varepsilon^3}{\Gamma^3} + \left(\frac{31}{120}a + \frac{181}{240a} + \frac{3}{4a^3} + \frac{1}{4a^5}\right)\frac{\varepsilon^5}{\Gamma^5} \ldots,$$

$$\cos\alpha = 1 - \left(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8a^2}\right)\frac{\varepsilon^2}{\Gamma^2} + \left(\frac{a^2}{24} + \frac{5}{12} + \frac{43}{96a^2} + \frac{1}{8a^4}\right)\frac{\varepsilon^4}{\Gamma^4} \ldots,$$

$$x\cos\alpha = a\frac{\varepsilon}{\Gamma} - \left(\frac{a^3}{2} + \frac{a}{6} - \frac{1}{8a}\right)\frac{\varepsilon^3}{\Gamma^3}$$
$$+ \left(-\frac{a^3}{8} + \frac{a}{120} - \frac{1}{32a} - \frac{1}{32a^3}\right)\frac{\varepsilon^5}{\Gamma^5}\ldots\ldots$$

$$1 + x\sin\alpha = 1 - \left(a^2 + \frac{1}{2}\right)\frac{\varepsilon^2}{\Gamma^2} - \left(\frac{a^2}{6} - \frac{1}{24} - \frac{1}{8a^2}\right)\frac{\varepsilon^4}{\Gamma^4} - \ldots\ldots$$

$$\operatorname{tang}\Delta\alpha = a\frac{\varepsilon}{\Gamma} + \left(\frac{a^3}{2} + \frac{a}{3} + \frac{1}{8a}\right)\frac{\varepsilon^3}{\Gamma^3}$$
$$- \left(\frac{a^5}{2} + \frac{3a^3}{8} - \frac{a}{120} - \frac{1}{32a} + \frac{1}{32a^3}\right)\frac{\varepsilon^5}{\Gamma^5}\ldots\ldots,$$

(33)
$$\Delta\alpha = a\varepsilon + \left(\frac{a^3}{6} + \frac{a}{3} + \frac{1}{8a}\right)\frac{\varepsilon^3}{\Gamma^2}$$
$$- \left(\frac{4a^5}{5} + \frac{17a^3}{24} + \frac{7a}{60} - \frac{1}{32a} + \frac{1}{32a^3}\right)\frac{\varepsilon^5}{\Gamma^4}\ldots\ldots$$

Die für $\sin\alpha$ und $\Delta\alpha$ erhaltenen Reihenentwickelungen (32) und (33) hören jedoch in der Nähe der äussersten Werthe 0 und 90° des Höhenwinkels h auf anwendbar zu sein, weil dort $\frac{1}{a} = \cot h$, hier $a = \operatorname{tang} h$ sehr gross ausfällt.

1. **Für die von diesen Grenzen genügend abstehenden Mittelwerthe des Höhenwinkels h** kann man demnach diese Reihenentwickelungen geradezu verwenden, und erhält so

(34)
$$-\sin\alpha = (\operatorname{tang} h + \frac{1}{2}\cot h)\,\frac{\varepsilon}{\Gamma}$$
$$-\left(\frac{1}{6}\operatorname{tang} h + \frac{11}{24}\cot h + \frac{1}{4}\cot h^3\right)\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^3\ldots\ldots,$$

(35)
$$\Delta\alpha = \varepsilon\operatorname{tang} h + \left(\frac{1}{6}\operatorname{tg} h^3 + \frac{1}{3}\operatorname{tg} h + \frac{1}{8}\cot h\right)\frac{\varepsilon^3}{\Gamma^2}\ldots\ldots\ldots$$

In diesem Falle ist der Winkel α nahe $=0$, folglich tritt der grösste Fehler $\Delta\alpha$ da ein, wo die Projection der Visur nahe mit der Durchschnittslinie der Horizontal- und Messtischebene übereinfällt oder zu einer auf der Messtischplatte ziehbaren wagrechten Geraden nahe parallel läuft, also selbst nahe wagrecht ist.

Um die Grösse des 2ten Gliedes in $\Delta\alpha$ einiger Massen schätzen zu können, bemerken wir, dass selbes, wenn $\varepsilon = 1$Grad ist, für nahe $h = 21°23'$ und $h = 33°35'$ etwa 1Sec. betrage, und für $h = 27°21'$ seinen möglichst kleinsten Werth nahe $\frac{1}{2}$ Secunde erhalte, endlich bei gleichem Höhenwinkel der 3ten Potenz von ε proportional sei.

2. **Für die möglich kleinsten Höhenwinkel** h werden die mit den höchsten Potenzen von $\frac{1}{a}=\cot h$ behafteten Glieder in (32) und (33) die ausgiebigsten. Behält man nur sie bei, und setzt abkürzend $\frac{\varepsilon}{a\Gamma}=\frac{\varepsilon}{\Gamma}:\tang h=\frac{\varepsilon}{\Gamma}\cot h=k$; so erhält man

$$-\sin\alpha=\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}k^3+\frac{1}{4}k^5\ldots\ldots,$$

$$\varDelta\alpha=\frac{1}{8}k^2\varepsilon-\frac{1}{32}k^4\varepsilon\ldots\ldots;$$

ersieht aber auch zugleich, dass diese Reihen zu langsam convergiren.

3. **Bei den grössten Höhenwinkeln** h fallen in (32) und (33) die mit den höchsten Potenzen von $a=\tang h$ behafteten Glieder am grössten aus. Behält man nur sie bei und setzt zur Abkürzung $a\frac{\varepsilon}{\Gamma}=\frac{\varepsilon}{\Gamma}\tang h=g$; so findet man

$$-\sin\alpha=\tang h\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}-\frac{1}{6}\frac{\varepsilon^3}{\Gamma^3}+\frac{31}{120}\frac{\varepsilon^5}{\Gamma^5}\ldots\right)=g,$$

$$\varDelta\alpha=\Gamma\left(g+\frac{1}{6}g^3-\frac{4}{5}g^5\ldots\ldots\right);$$

ersieht aber auch, dass die letzte Reihe zu langsam convergirt.

13.

II. **Im zweiten Fall**, wo

$$8n^2>1,\quad \pm\sin h<\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{2}$$

ist, müsste man die $\sqrt{1+8n^2}$ nach den fallenden Potenzen von n entwickeln, ihr also zuvor die Form $2n\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{8n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ertheilen. Setzen wir abkürzend

$$\frac{1}{2n\sqrt{2}}=\frac{\sin h}{2\sqrt{2}.\sin\frac{1}{2}\varepsilon}=m,$$

so wird

$$v=\frac{\sqrt{1+m^2}+m}{2m},$$

$$u = \frac{\sqrt{1+m^2}+3m}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon\cos h}.\sqrt{2}.\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2\ .$$

$$-\sin\alpha = \frac{\sqrt{1+m^2}-m\left(1-4\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)}{\sqrt{2}.\cos\frac{1}{2}\varepsilon\cos h}.$$

Für $\lim h = 0$ wird $\lim m = 0$, also

$$-\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}.\cos\frac{1}{2}\varepsilon}\ \text{und}\ \alpha \doteq -45^0,$$

wie schon in Art. 10. gefunden wurde.

Die Entwickelung in Reihen kann, wie man leicht übersieht, auch hier keinen Vortheil darbieten.

14.

Wenn der Höhenwinkel h klein ist, kann man α am füglichsten nach den Gleichungen (10), (12), (13), (16) oder (18), und (17), bestimmen, dann aber $\varDelta\alpha$ nach (22) oder (23) berechnen.

Ist endlich der Höhenwinkel so klein, dass man $\sin h \doteq \frac{h}{r} \doteq \operatorname{tang} h$ setzen darf; so wird, weil man jedenfalls auch

$$\sin\frac{1}{2}\varepsilon \doteq \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{r} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon$$

zu setzen berechtiget ist, nach den erwähnten Gleichungen:

$$n \doteq \frac{\varepsilon}{2h},$$

$$(36)\qquad v \doteq \frac{\sqrt{2\varepsilon^2+h^2}+h}{2h},$$

$$(37)\qquad t \doteq \frac{\sqrt{2\varepsilon^2+h^2}-h}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{vh},$$

$$(38)\qquad u \doteq \frac{v+1}{2}\cdot\frac{\varepsilon h}{r^2} = \frac{v+1}{4n}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2.$$

Den Winkel α wird man entweder gemäss der Gleichung

$$(17) \qquad -\sin\alpha = \frac{t+u}{2}$$

oder, weil hier u in Vergleich gegen t vernachlässigt werden darf nach der Gleichung

$$(19) \qquad -\sin\alpha \doteq \frac{t}{2}$$

berechnen. Endlich wird man $\Delta\alpha$ nach der Gleichung

$$(21) \qquad \Delta\alpha \doteq \Gamma u \cos\alpha$$

bestimmen.

In den Ausdrücken (36) und (37) wird man anstatt ε und h einfacher nur ihre kleinsten Proportionalzahlen setzen.

Bleibt sich das Verhältniss $\frac{\varepsilon}{h}$ gleich, so bleiben v, t und nahe auch α gleich, u und $\Delta\alpha$ aber sind der ε^2 nahe proportionirt.

Beispiel. Sei $\varepsilon = 1^0 = 60'$, $h = 2^0$, also $n = \frac{1}{4}$, $\varepsilon : h = 1:2$; dann ist

$$v = \frac{\sqrt{6}+2}{4} = 1{\cdot}11237,$$

$$\log\frac{v+1}{4n} = 0{\cdot}32477$$

$$2\log\frac{\Gamma}{\varepsilon} = 3{\cdot}51625, \quad \Gamma \text{ in Gr.}$$

$$\log u = 0{\cdot}80852 - 4$$

$$\log\Gamma = 5{\cdot}31443, \quad \Gamma \text{ in Sec.}$$

$$\log\cos\alpha = 9{\cdot}98872$$

$$\log\Delta\alpha = 2{\cdot}11167$$

$$t \doteq \sqrt{6} - 2 = 0{\cdot}44949$$

$$u = 0{\cdot}00064$$

$$t + u = 0{\cdot}45013$$

$$-\sin\alpha = 0{\cdot}22506$$

$$-\alpha = 13^0 0'{\cdot}4$$

$$\Delta\alpha = 129''{\cdot}3$$

$$= 2'9''{\cdot}3$$

Bleibt $\varepsilon : h = 1:2$, so ist für $\varepsilon' = 30'$ und $h' = 1^0$

$$t' = t = 0{\cdot}44949$$

$$u' = \frac{1}{4}u = 0{\cdot}00016$$

$$t' + u' = 0{\cdot}44965$$

$$-\sin\alpha' = 0{\cdot}22482$$

$$-\alpha' = 12^0 59'{\cdot}5$$

$$\Delta\alpha' = \frac{1}{4}\Delta\alpha = 32''{\cdot}3.$$

15.

Dort wo keine der angegebenen Näherungsrechnungen hinreichend genau ist, oder wenn der Grad der Genauigkeit einer solchen Rechnung in einem bestimmten Falle ermittelt werden soll, wird es unumgänglich nothwendig, die umständliche aber genaue Berechnung von α und $\Delta\alpha$ nach Art. 7.—9. vorzunehmen. Um aber hiebei durchgängig die Logarithmen benützen zu können, wird man sich der Hilfswinkel bedienen.

Setzt man in den Gleichungen (10) und (12)

$$(39)\qquad n\sqrt{8}=\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin h}\sqrt{8}=\operatorname{tang}\varphi,$$

so ist

$$(40)\qquad v=\frac{\sec\varphi+1}{2}.$$

Dabei muss $\sec\varphi=\sqrt{1+8n^2}$ stets positiv ausfallen, folglich φ von -90^0 bis $+90^0$ gewählt werden.

Entweder, wenn man eine Secantentafel hat, berechnet man v ganz einfach aus (40), oder man benützt die folgende Darstellung:

$$v=\frac{1+\cos\varphi}{2\cos\varphi},$$

wonach man erhält

$$(41)\qquad v=\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi}.$$

Nach dem ersteren Ausdrucke ist die in u vorkommende Summe

$$v+1=\frac{1+3\cos\varphi}{2\cos\varphi}=3\,\frac{\cos\varphi+\frac{1}{3}}{2\cos\varphi},$$

daher, wenn man den Winkel λ so bestimmt, dass

$$\frac{1}{3}=\cos 2\lambda$$

ist, wonach jedenfalls $2\lambda=70^0 31' 43''\cdot 6$ und

$$(42)\qquad \lambda=35\ 15\ 51\cdot 8$$

ist; findet man

$$v+1=3\,\frac{\cos(\lambda+\frac{1}{2}\varphi)\cos(\lambda-\frac{1}{2}\varphi)}{\cos\varphi}\,.$$

Demgemäss verwandelt sich die Gleichung (13) in

$$(43)\qquad u=\frac{3}{\cos\varphi}\cos(\lambda+\tfrac{1}{2}\varphi)\cos(\lambda-\tfrac{1}{2}\varphi)\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tang}h\,.$$

Oder man setzt im ersten Ausdrucke von $v+1$

$$\frac{1}{3\sin\varphi}=\cot\psi\,,$$

also

$$(44)\qquad \operatorname{tang}\psi=3\sin\varphi\,;$$

dann wird

$$v+1=\frac{3\sin(\varphi+\psi)}{2\cos\varphi\,\sin\psi}$$

und

$$(45)\qquad u=\frac{3}{2}\,\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\varphi\sin\psi}\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tang}h\,.$$

Zur Bestimmung von α benützt man entweder die Gleichung (15), wenn man eine Tafel der Cosinus zu Gebote hat, oder man umwandelt diese Gleichung wie folgt. Es ist

$$-\sin\alpha=\frac{v-1+2\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}{2\sin\frac{1}{2}\varepsilon\cos\frac{1}{2}\varepsilon}\,.\operatorname{tang}h$$

$$=\left(\frac{v-1}{2}+\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\right)\frac{\operatorname{tang}h}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}\cdot\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

$$=\left(1+\frac{v-1}{2\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}\right)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varepsilon\operatorname{tang}h\,.$$

Nach (41) ist aber

$$v-1=\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi}\,,$$

folglich, wenn man

$$(46)\qquad \sin\frac{1}{2}\varepsilon:\sqrt{\frac{v-1}{2}}=\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\sqrt{2\cos\varphi}=\tang\omega$$

setzt, wonach ω immer positiv und spitz ausfällt,

$$(47)\qquad -\sin\alpha=\frac{1}{\sin\omega^2}\tang\frac{1}{2}\varepsilon\tang h.\text{*)}$$

16.

Um die Beträge des grössten Fehlers $\varDelta\alpha$ im Horizontalwinkel α einiger Massen in besonderen Fällen beurtheilen zu können, habe ich mir die Mühe genommen, folgenden Abriss einer Tafel zu berechnen, in welcher zu gewissen Neigungswinkeln ε des Messtisches und für gewisse Höhenwinkel h der Visur nicht allein jener grösste Fehler $\varDelta\alpha$, sondern auch derjenige Horizontalwinkel α, bei dem er statt findet, aufgeführt ist. Die Neigungswinkel ε wurden geflissentlich so aussergewöhnlich gross gewählt, weil man daraus für kleinere ε leicht $\varDelta\alpha$ angenähert danach berechnen kann, dass wenigstens von $h=25$ Min. an, bei einerlei h, die Fehler $\varDelta\alpha$ den Neigungswinkeln ε nahe proportional sind. Eine grössere Ausdehnung dieser Tafel muss ich jemand überlassen, dem mehr helfende Hände als mir zu Gebote stehen.

---

*) Wenn ω genug klein ausfällt, kann man mittels der logarithmisch-goniometrischen Tafel, ohne den Winkel ω selbst zu bestimmen, von $\log\tang\omega$ unmittelbar auf $\log\sin\omega$ übergehen. Denn für jede zwei Winkel ω und ω' ist

$$\tang\omega:\tang\omega'=\frac{\sin\omega}{\cos\omega}:\frac{\sin\omega'}{\cos\omega'}=(\sin\omega:\sin\omega')\frac{\cos\omega}{\cos\omega'},$$

daher

$$\log\tang\omega-\log\tang\omega'=\log\sin\omega-\log\sin\omega'+\log\frac{\cos\omega}{\cos\omega'}.$$

Sind nun die Winkel ω und ω' so klein, dass man sehr nahe $\cos\omega=\cos\omega'$ setzen darf, so ist hinreichend genau

$$\log\tang\omega-\log\tang\omega'=\log\sin\omega-\log\sin\omega'$$

und sofort

$$\log\sin\omega=\log\sin\omega'+(\log\operatorname{tg}\omega-\log\operatorname{tg}\omega').$$

Bezeichnet demnach ω' den Winkel, dessen logtang die untere Grenze von $\log\tang\omega$ in der goniometrischen Tafel ist, so hat man nur $\log\operatorname{tg}\omega'$ von dem gefundenen $\log\operatorname{tg}\omega$ abzuziehen, und den Unterschied zu dem in der Tafel auf derselben Zeile stehenden $\log\sin\omega'$ zu addiren, um sogleich den verlangten $\log\sin\omega$ zu haben.

Aus dieser Tafel ersieht man, wie der Winkel α, bei dem der grösste Fehler $\varDelta\alpha$ statt findet, für $h = 0^0$ noch ein wenig über 45^0 steht, und wie er schon, während h nur auf $\frac{\varepsilon}{2}$ aufsteigt, auf 30^0 herabsinkt, und bereits für $h = 5^0$ nur wenige Grade und bei $\varepsilon = 10'$ nicht mehr einen vollen Grad beträgt. Dagegen sieht man, dass $\varDelta\alpha$ bei einerlei ε, so wie h, in arithmetischer Progression aufsteigt.

Höhenwinkel $\pm h$	Des Messtisches Neigungswinkel ε											
	10′		20′		30′		40′		50′		1°	
	$\mp \alpha$	$\pm \Delta\alpha$	$\mp \alpha$	$\pm \Delta\alpha$	$\mp \alpha$	$\pm \Delta\alpha$	$\mp \alpha$	$\pm \Delta\alpha$	$\mp \alpha$	$\pm \Delta\alpha$	$\mp \alpha$	$\pm \Delta\alpha$
0°0′	45°0′0″·2	0″·4	45°0′0″·8	1″·7	45°0′1″·9	3″·9	45°0′3″·5	7″·0	45°0′5″·4	10″·9	45°0′7″·8	15″·7
5′	30 0 0	1·1	36 22 33	3·1	38 57 7	5·9	40 20 35	9·5	41 13′·0	14·1	41 48′·6	19·5
10′	21 28·′3	1·9	30 0 3·0	4·6	34 2·′7	8·0	36 22′·7	12·3	37 53·6	17·5	38 57·1	23·5
15′	16 18·4	2·7	25 10′·7	6·1	30 0·1	10·2	32 57·8	15·2	34 57·2	21·0	36 22·8	27·6
20′	12 59·3	3·6	21 18·3	7·7	26 38·6	12·5	30 0·2	18·1	32 20·3	24·6	34 2·9	31·9
25′	10 43·7	4·4	18 35·2	9·3	23 50·3	14·9	29 2·7	21·2	30 0·3	28·3	31 55·6	36·3
30′	9 6·6	5·3	16 18·5	11·0	21 28·4	17·3	25 10·8	24·3	27 55·6	32·2	30 0·4	40·8
1°	4 43·1	10·6	9 6·8	21·2	12 59·5	32·3	16 18·8	44·0	19 7·0	56·2	21 28·8	1′9″·2
5°	0 54·9	52·5	1 55·5	1′45″	2 53·3	2′37″	3 50·2	3′30″	4 46·6	4′23″	5 40·8	5′16″
20°	0 17·4	3′38″	0 34·7	7′17″	0 52·1	10′55″	1 9·5	14′34″	1 26·9	18′12″	1 44·3	21′50″

X.

Mit welcher Genauigkeit lassen sich die Länge eines kleinen Kreisbogens, sein Sinus und seine Tangente einander gleich stellen?

Untersucht von

Herrn Dr. Wilh. Matzka,

k. k. Professor der Mathematik und prakt. Geometrie an der ständ. techn. Lehranstalt zu Prag.

Diese für angenäherte goniometrische Rechnungen, vornehmlich in den verschiedenen Zweigen der praktischen Geometrie und Mechanik, höchst wichtige Frage habe ich noch nirgends aufgeworfen und beantwortet gefunden, wesshalb ich dies hier selbst thue.

Sei α eines Kreisbogens Gradmass, a seine Länge oder sein Zahlwerth, wenn sein Halbmesser die Längeneinheit ist; oder sei α eines Winkels Gradmass, und $a = \alpha : \Gamma$ sein analytischer Zahlwerth, wenn er nämlich durch die analytische Winkeleinheit, den Gehren Γ, ausgemessen wird. Dann ist bekanntlich

$$\sin\alpha = a - \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2...5} - ...,$$

$$\operatorname{tang}\alpha = a + \frac{2a^3}{1.2.3} + \frac{16a^5}{1.2...5} + ...$$

I. Soll nun a mit $\sin\alpha$ bis auf eine Decimaleinheit der $k$ten Ordnung, d. i. bis auf $\frac{1}{10^k}$, übereinstimmen, also

$$a - \sin\alpha = \frac{a^3}{6}\left(1 - \frac{a^2}{20} + ...\right) < \frac{1}{10^k}$$

sein; so kann mann, weil hiezu a jedenfalls schon klein sein muss, für eine erste Annäherung, wenn man die genäherten Werthe von α und a mit α' und $a' = \alpha' : \Gamma$ bezeichnet,

$$\frac{\alpha'^3}{6} < \frac{1}{10^k}$$

setzen. Dies gibt

$$\alpha' < \sqrt[3]{\frac{6}{10^k}},$$

also
$$\alpha' = \Gamma a' < \Gamma \sqrt[3]{\frac{6}{10^k}}.$$

Sei
$$k = 3m - n,$$

so ist
$$\alpha' < \frac{\Gamma}{10^m} \sqrt[3]{6.10^n},$$

also
$$\log \alpha' < \frac{1}{3}(n + \log 6) + \log \Gamma - m.$$

Nehmen wir α' und Γ in Minuten, so finden wir

für $n=0$, $\log \alpha' < 3{\cdot}79565 - m$, $\alpha' < 6246'{\cdot}7 : 10^m$,
- $n=1$, $\log \alpha' < 4{\cdot}12899 - m$, $\alpha' < 13458 : 10^m$,
- $n=2$, $\log \alpha' < 4{\cdot}46232 - m$, $\alpha' < 28995 : 10^m$.

Für eine schärfere Annäherung setzen wir nun oben in $\frac{a^2}{20}$ für a den genährten Werth a', und erhalten

$$\frac{a^3}{6}\left(1 - \frac{a'^2}{20} \ldots\right) \overline{\underline{<}} \frac{a'^3}{6},$$

daher

$$a \overline{\underline{<}} a'\left(1 - \frac{a'^2}{20} \ldots\right)^{-\frac{1}{3}},$$

$$a \overline{\underline{<}} a' + \frac{1}{60} a'^3 \ldots,$$

also
$$a < a' + \frac{1}{10^{k+1}}.$$

Wenn wir sonach mit Γ multipliciren, und Kürze halber des Näherungswerthes α' Correction durch $\Delta\alpha'$ bezeichnen, nämlich

$$\Delta \alpha' = \frac{\Gamma = 3437'{\cdot}7}{10^{k+1}}$$

setzen, so erhalten wir

$$\alpha < \alpha' + \Delta \alpha'.$$

Nimmt man nun für k die Zahlen 9 bis 2, so ergibt sich folgende Zusammenstellung:

k	m	n	α'	$\Delta\alpha'$	$\alpha \leqq$	$\frac{\alpha}{\Gamma} - \sin\alpha <$
9	3	0	6·25	0′	0° 6′·25	$1:10^9$
8	3	1	13·46	0	0 13·46	$1:10^8$
7	3	2	29·0	0	0 29·0	$1:10^7$
6	2	0	62·5	0	1 2·5	$1:10^6$
5	2	1	134·6	0	2 14·6	$1:10^5$
4	2	2	290·0	0	4 50·0	$1:10^4$
3	1	0	624·7	0′.3	10 24·7	$1:10^3$
2	1	1	1345·8	3.4	22°29′·2	$1:10^2$

II. Soll a mit $\operatorname{tang}\alpha$ bis auf eine Decimaleinheit der $k$ten Ordnung, d. i. bis auf $\frac{1}{10^k}$, übereinstimmen, also

$$\operatorname{tang}\alpha - a = \frac{a^3}{3}\left(1 + \frac{2}{5}a^2 + \ldots\right) < \frac{1}{10^k}$$

sein; so kann man wegen der Kleinheit von a für eine erste Annäherung, wenn man die obige Bezeichnung beibehält,

$$\frac{a'^3}{3} < \frac{1}{10^k}$$

setzen. Dies gibt

$$a' < \sqrt[3]{\frac{3}{10^k}},$$

also

$$\alpha' = \Gamma a' < \Gamma\sqrt[3]{\frac{3}{10^k}},$$

oder

$$\alpha' < \frac{\Gamma}{10^m}\sqrt[3]{3 \cdot 10^n},$$

folglich

$$\log\alpha' < \frac{1}{3}(n + \log 3) + \log\Gamma - m.$$

Nimmt man abermals Γ und α in Minuten, so findet man

für $n = 0$, $\log\alpha' < 3{\cdot}69531 - m$, $\alpha' < 4958' : 10^m$,
- $n = 1$, $\log\alpha' < 4{\cdot}02865 - m$, $\alpha' < 10682 : 10^m$,
- $n = 2$, $\log\alpha' < 4{\cdot}36198 - m$, $\alpha' < 23013 : 10^m$.

Für eine schärfere Annäherung setze man oben in $\frac{2}{5}a^2$ für a den genäherten Werth a'; danach erhält man

$$\frac{a^3}{3}\left(1+\frac{2}{5}a'^2+\dots\right)\overset{=}{<}\frac{a'^3}{3},$$

folglich

$$a\overset{=}{<}a'\left(1+\frac{2}{5}a'^2\dots\right)^{-\frac{1}{3}},$$

$$a\overset{=}{<}a'-\frac{2}{15}a'^3\dots,$$

also

$$a\overset{=}{<}a'-\frac{4}{10^{k+1}}.$$

Multiplicirt man mit Γ, und bezeichnet wieder des Näherungswerthes α' Verbesserung durch $\Delta\alpha'$, nemlich

$$\Delta\alpha'=\frac{4\Gamma=13751'}{10^{k+1}},$$

so erhält man

$$\alpha\overset{=}{<}\alpha'-\Delta\alpha'.$$

Setzt man abermals für k die Zahlen 9 bis 2, so ergibt sich folgende Zusammenstellung:

k	m	n	α'	$\Delta\alpha'$	$\alpha\overset{=}{<}$	$\operatorname{tang}\alpha-\frac{\alpha}{\Gamma}\overset{=}{<}$
9	3	0	5'·0	0	0° 5'·0	1:10⁹
8	3	1	10·7	0	0 10·7	1:10⁸
7	3	2	23·0	0	0 23·0	1:10⁷
6	2	0	49·6	0	0 49·6	1:10⁶
5	2	1	106·8	0	1 46·8	1:10⁵
4	2	2	230·0	0'.1	3 49·9	1:10⁴
3	1	0	495·8	1.4	8 14·4	1:10³
2	1	1	1068·2	13.8	17 34·4	1:10²

III. Damit $\sin\alpha$ mit $\operatorname{tang}\alpha$ bis auf eine Decimaleinheit der $k$ten Ordnung übereinstimme, also

$$\operatorname{tang}\alpha-\sin\alpha=\frac{a^3}{6}\left(1+\frac{3}{4}a^2+\dots\right)<\frac{1}{10^k}$$

sei; kann man für eine erste Annäherung, indem man die gebrauchte Bezeichnung beibehält, wieder

$$\frac{\alpha'^3}{6} < \frac{1}{10^k}$$

setzen, wie in I. Danach erhält man zu den drei Werthen von n auch wie in I. die obern Grenzen von α'.

Zu einer genaueren Annäherung erhält man dann durch den bekannten Vorgang

$$\frac{\alpha^3}{6}\left(1+\frac{3\alpha'^2}{4}+\ldots\right) \overset{=}{<} \frac{\alpha'^3}{6},$$

daher

$$\alpha \overset{=}{<} \alpha' - \frac{\alpha'^3}{4} \ldots,$$

oder

$$\alpha \overset{=}{<} \alpha' - \frac{15}{10^{k+1}}.$$

Wird nun mit Γ multiplicirt und des Näherungswerthes α' Verbesserung durch $\Delta\alpha'$ bezeichnet, nemlich

$$\Delta\alpha' = \frac{15\,\Gamma}{10^{k+1}} = \frac{51566'}{10^{k+1}}$$

gesetzt; so erhält man

$$\alpha \overset{=}{<} \alpha' - \Delta\alpha'.$$

Nimmt man wieder für k die Anzahlen 9 bis 2, so erhält man folgende Zusammenstellung:

k	m	n	α'	$\Delta\alpha'$	$\alpha \overset{=}{<}$	$\operatorname{tang}\alpha - \sin\alpha \overset{=}{<}$
9	3	0	6'·25	0	0° 6'·25	$1:10^9$
8	3	1	13'·46	0	0 13·46	$1:10^8$
7	3	2	29·0	0	0 29·0	$1:10^7$
6	2	0	62·5	0	1 2·5	$1:10^6$
5	2	1	134·6	0	2 14·6	$1:10^5$
4	2	2	290·0	0'.5	4 49·5	$1:10^4$
3	1	0	624·7	5·2	10 19·5	$1:10^3$
2	1	1	1345·8	51'·6	21 34·2	$1:10^2$

Die Interpretaion der in den zwei Schlussspalten dieser drei Täfelchen enthaltenen Ergebnisse ist so einfach, dass ich sie hier Kürze halber wohl weglassen darf.

XI.

Populäre Vorlesungen über wissenschaftliche Gegenstände von F. W. Bessel. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von H. C. Schumacher. Hamburg. Perthes, Besser & Mauke. 1848.

Von dem
Herrn Dr. P. Wolfers,
astronomischem Rechner an der Königlichen Sternwarte zu Berlin.

Der Herausgeber des vorliegenden Werkes hat hierdurch seinem unsterblichen Freunde das schönste Denkmal gesetzt, denn wenn es auch den Männern der Wissenschaft vollkommen bekannt ist, wie vielseitig und (was selten der Fall ist) gründlich zugleich die Wirksamkeit des grossen Astronomen gewesen; so erfahren durch das vorliegende Werk auch die zahlreichen Liebhaber der astronomischen und physikalischen Wissenschaften, wieviel diese dem verstorbenen Verfasser verdanken. Während derselbe in so vielen Zweigen der Wissenschaften erschöpfende Untersuchungen angestellt hat, wusste er doch sich noch Zeit abzumüssigen, diese eben so allgemein fasslichen, als gründlichen und eleganten Abhandlungen zu schreiben. Der aufmerksame Leser derselben kann nur bedauern, dass der Verfasser nicht, wie nach einer Andeutung des Herausgebers seine Absicht war, dazu gelangt ist, die vorliegenden Bruchstücke in ein Ganzes, eine populäre Astronomie, zu vereinigen; reichlichen Dank bleiben wir aber auch für diese Gabe schuldig. Das erwähnte Denkmal ist nur dadurch unvollständig, dass der Verfasser zu bescheiden gewesen ist, um in den einzelnen Abhandlungen überall anzugeben, was er selbst in den einzelnen dort besprochenen Gegenständen geleistet hat. Diese allgemeinen Bemerkungen enthalten bereits unser Urtheil über das Werk, wir glauben keine undankbare Arbeit zu unternehmen, wenn wir die einzelnen Abhandlungen vorzugsweise besprechen, und hierbei werden wir Gelegenheit finden, jenem Mangel theilweise abzuhelfen. Wir werden bei dieser Besprechung die Reihefolge des Buches nicht beobachten, sondern die Abhandlungen mehr nach der Verwandtschaft ihres Inhalts ordnen. Die erste Abhandlung hat die Ueberschrift:

Ueber den gegenwärtigen Standpunkt der Astronomie.

Dieselbe nimmt nur einen Raum von 33 Seiten ein, allein der Verfasser hat es verstanden, auf demselben mannichfache interessante Darstellungen niederzulegen. Um den gegenwärtigen Standpunkt der Astronomie klar zu machen, gibt der Verfasser eine kurze Uebersicht ihrer Geschichte aus dem vorigen Jahrhundert; er zeigt, wie wechselweise besonders seit Newton die Theorie und Praxis einander vorausgeeilt waren und wie eben das Vorauseilen des einen Zweiges die Veranlassung war, welche das Vorwärtsschreiten des andern herbeiführte. Wüsste man nicht ohnedem, dass der Verfasser auf der Höhe beider Zweige der Wissenschaft stand, so müsste man diese Ueberzeugung daraus abnehmen können, dass er die Leistungen der hervorragendsten neuern Astronomen mit wenigen Worten klar darzustellen verstanden hat. Als eigentliche Aufgabe der Astronomie gibt er bei dieser Gelegenheit an, dass sie Vorschriften ertheilen muss, nach welchen die Bewegungen der Himmelskörper, so wie sie uns von der Erde aus erscheinen, berechnet werden können. Zuerst wird Newton's Verdienst um die Theorie dargestellt, hierauf folgen Flamsteed's Verbesserungen der astronomischen Instrumente und Beobachtungsmethoden, in deren Folge die Theorie der Praxis vorauseilte. Die genauen Beobachtungen des letztern konnten desshalb nicht durch die Rechnung dargestellt werden, weil die Störungen nach Newton's allgemeiner Gravitation noch nicht berechnet waren. Hierzu bahnten Clairaut und Euler den Weg. Noch genauere Beobachtungen als Flamsteed stellt Bradley an, und diese benutzt Tobias Mayer zur Construction von Mondstafeln, mittelst deren man die Oerter des Mondes mit einer Genauigkeit voraus berechnen konnte, welche man früher nicht für möglich gehalten hatte. Jetzt konnte man durch Beobachtungen des Mondes die geographische Länge auf dem Meere finden. Durch Bradley war die Praxis vorausgeeilt, Lagrange und Laplace fördern die Theorie, die Mécanique céleste des letztern füllt eine grosse Lücke aus. Wie in den Wissenschaften überhaupt, lassen in der Astronomie insbesondere die Grössen sich nicht absolut genau bestimmen, die Grenzen ihrer Unsicherheit können nur verengert werden. Die Theorie muss daher zu jeder Zeit die zu beobachtenden Grössen so genau darstellen, dass der Unterschied zwischen Rechnung und Beobachtung den möglichen Fehler der letztern nicht übersteige. So spricht sich der Verfasser über die bisherigen Leistungen aus, er verlangt aber, dass künftig Theorie und Praxis unbekümmert um einander vorwärts geführt werden sollten.

Piazzi bearbeitete im Anfang dieses Jahrhunderts ein Verzeichniss von 7000 Fixsternen, ähnlich wie früher Tycho de

Brahe, Flamsteed, Bradley und Lalande, und entdeckte bei dieser Gelegenheit am 1. Januar 1801 die Ceres. Die leichteste Berechnung der Cometenbahnen hatte Olbers bereits 1797 gelehrt, die der Planetenbahnen mittelst weniger einander nahe liegender Beobachtungen fehlte noch; in Folge der Entdeckung der Ceres schuf diese der grosse Mathematiker Gauss. Weitere Entdeckungen von Planeten folgten schnell auf einander. Bradley's Beobachtungen wurden vom Verfasser scharf reducirt und in seinem Werke „Fundamenta astronomiae“ niedergelegt. Sie haben den Weg eröffnet, die scharfen Beobachtungen der letzten 100 Jahre so fruchtbringend als möglich zu benutzen. Durch die von Legendre und Gauss unabhängig von einander erfundene Methode der kleinsten Quadrate wird, nach des Verfassers Ausdruck, die frühere Kunst, aus Beobachtungen eines Wandelsterns eine sich ihnen anschliessende Bahn zu finden, in eine Regel verwandelt. Ausser den bisher erwähnten Namen von Astronomen und Mathematikern führt der Verfasser die Arbeiten der Mechaniker Bird, Ramsden, Troughton, Reichenbach und Repsold an und bedauert am Schluss, dass er die Arbeiten von Struve und Encke zu schildern verhindert sei. Bleiben trotz des angeführten mannichfachen Inhalts dieser Abhandlung Lücken übrig, so werden diese durch die Abhandlungen 11., 13. und 14. ausgefüllt. Ihre Ueberschriften sind:

Ueber die Verbindung der astronomischen Beobachtungen mit der Astronomie;

Astronomische Beobachtungen;

Oerter der Fixsterne an der Himmelskugel.

Wir bemerken sogleich, dass die zwei ersten Abhandlungen nicht nur verwandten Inhalts, sondern die eine wahrscheinlich eine Umarbeitung der andern ist; zum Theil kommen wörtlich gleichlautende Stellen in beiden vor. Wir betrachten zunächst die erstere (11.) und finden nach einer angestellten Unterscheidung zwischen der Astrologie und Astronomie das Wesen der letztern bestimmt angegeben, welches nämlich in einer Kenntniss der Bewegungen der Gestirne besteht. Die Beobachtungen benutzt der Verstand, um das Gebäude der Astronomie aufzuführen. Es werden allgemein geltende Regeln für die Bewegungen aller Wandelsterne aufgestellt, für einen einzelnen müssen besondere Zahlenwerthe, die 6 Elemente seiner Bahn bestimmt werden. Die Uebereinstimmung der mittelst der letztern berechneten Oerter mit den beobachteten bestätigt zugleich die Richtigkeit der allgemein aufgestellten Theorie, lässt sich hingegen die letztere durch keine Verbesserung der Elemente den Beobachtungen in einem besondern Falle anpassen; so ist diess ein Beweis für die Mangelhaftigkeit der Theorie. Die ersten astronomischen Theorien waren unrichtig, Kepler's Theorie war richtig und erschien auch so lange vollständig, bis neuere genauere Beobachtungen widersprachen. Newton entdeckte hierauf die allgemeine Anziehung der Himmelskörper und bahnte so den Weg zur Vervollständigung von Kepler's Theorie. Die so vervollständigte Theorie stimmte lange mit den Beobachtungen überein, erst jetzt (1840) erhebt der Widerspruch wieder seine Stimme und bringt nahe Entdeckungen in Aussicht. Diese Entdeckung ist, wie wir unten sehen werden, erst nach Bessel's Tode erfolgt und hat auf's Neue die vollständige Richtigkeit jener Theorie bestätigt.

In grösserer Ausführlichkeit als in der ersten Abhandlung erfahren wir hier, wie allmählig von der ältesten Zeit herab bis zur neusten die Beobachtungen vervollkommnet wurden, die Leistungen einzelner Astronomen werden klar dargelegt. Hervorragend sind hier die Namen: Ptolemäus und Almamon aus der ältern, Johann Müller Regiomontanus, Copernicus, Wilhelm IV. von Hessen, Tycho de Brahe, Flamsteed Bradley in der neuern Zeit, den letztern fügen wir einen, im Werke nicht erwähnten Namen, Bessel hinzu. Wie die Astronomen, werden die nach und nach eingeführten Instrumente erwähnt, es wird gezeigt, wie jedes die Genauigkeit der Beobachtungen zu erhöhen im Stande war. Wir erinnern an die Armillarsphäre, den Quadranten, Sextanten, die Pendeluhr, den Mauerquadranten, das Mittagsfernrohr, den Mittagskreis. Jedes dieser Instrumente bezeichnet eine Epoche in der Geschichte der beobachtenden Astronomie und in der neusten Zeit hat man gelernt, ihre Fehler zu bestimmen und durch Rechnung aus den Beobachtungen fortzuschaffen. Einige Momente mussten bestimmt werden, ehe man die genau angestellten Beobachtungen auf absolute Grössen zurückführen konnte; es sind diess die erst in der neuern Zeit bestimmte Strahlenbrechung, die Bestimmung des wirklichen Widderpunktes als Anfangspunktes der geraden Aufsteigungen u. s. w., kurz die Fundamente der Astronomie, welche Bessel aus Bradley's Beobachtungen, in Verbindung mit den in Königsberg angestellten, hergeleitet hat.

Nach dem Ausspruche von Laplace entspricht die Newton'sche Anziehung, wenn ihre Folgen mit der gehörigen Vollständigkeit entwickelt werden, vollkommen allen Beobachtungen der Planeten. Diese Aeusserung war aus den eigenen Arbeiten dieses grossen Meisters hervorgegangen. Delambre und Bouvard hatten in Folge seiner Aufforderung die in der Mécanique céleste dargestellte allgemeine Theorie auf die Planeten: Erde, Jupiter, Saturn und Uranus angewandt und Tafeln für diese berechnet, welche zwar die Beobachtungen weit besser als frühere darstellten, indessen noch immer Unterschiede von 10″ u. m. übrig liessen. Besonders auffallend zeigten sich diese Unterschiede bei dem 1781 von Herschel entdeckten Uranus, dessen bereits vor der Entdeckung angestellten, nachher aber erst aufgefundenen, so wie auch dessen neusten nach 1821 angestellten Beobachtungen die Tafeln durchaus nicht entsprachen. Wir ersehen aus dieser Abhandlung, dass Bessel bereits 1840 aussprach, diese Unterschiede würden zu einer neuen Entdeckung im Sonnensysteme, nämlich eines jenseit des Uranus befindlichen Planeten führen, dessen Bahn und Masse im voraus angegeben werden würde. Indem er selbst die dahin zielenden Arbeiten bereits begonnen hatte, ereilte ihn der Tod und kaum brauchen wir daran zu erinnern, dass kurz nachher Leverrier und Adams, unabhängig von einander, die prophetisch angekündigte Entdeckung buchstäblich zur Wahrheit geführt haben.

Die bisherigen Auszüge haben wir der 11. Abhandlung entnommen, die 13. enthält viele Mittheilungen, welche in jener bereits vorkommen, aber auch manche neue und interessante. Wir finden ausführlich angegeben und erläutert, wie Kepler seine Gesetze gefunden hat, Newton's Anziehungsgesetz wird hier erklärt. Durch Zahlen wird angegeben, wie die Beobachtungen Tycho's, Flamsteed's, Bradley's und die der neusten Zeit an Schärfe zugenommen haben und der Mittel erwähnt, durch welche diese Fortschritte herbei geführt worden sind. Wegen nothwendiger Kürze begnügen wir uns mit diesen Andeutungen, damit der Leser erfahre, dass er in jeder dieser beiden nahe verwandten Abhandlungen eigenthümliche und lehrreiche Mittheilungen finden wird. Ehe wir diesen Gegenstand verlassen, müssen wir aber noch bemerken, dass am Schluss dieser 13. Abhandlung diejenigen Untersuchungen angegeben werden, welche Bessel selbst nach eigenen Ideen angestellt hat, um die Fehler der anzuwendenden Instrumente zu bestimmen und ihren Einfluss auf die Resultate der Beobachtung fortzuschaffen.

Während die beiden eben besprochenen Abhandlungen vorzugsweise der Bewegung der Planeten gewidmet sind, beschäftigt sich die Abhandlung 14., wie auch ihre Ueberschrift andeutet, mit den Fixsternen. Der Verfasser bemerkt, was nicht in allen populären Schriften geschieht, dass die Fixsterne bei ihrer täglichen scheinbaren Bewegung keine Kreise beschreiben, eine Folge der Strahlenbrechung. Von dieser, ihren Ursachen und Wirkungen, wird eine deutliche Uebersicht gegeben, natürlich konnte hierbei nicht auf Rechnung eingegangen werden. Da man nur eine mangelhafte Kenntniss von dem Einfluss hat, welchen die Veränderungen in der Atmosphäre auf die Strahlenbrechung ausüben, diese also nur immer unsicher bekannt wird; so zeigt der Verfasser, wie man die zu beobachtenden Sterne auszuwählen habe, um diesen Einfluss zu vermindern. Tycho de Brahe hat zuerst durch Beobachtungen die Grösse der Strahlenbrechung zu bestimmen versucht, J. D. Cassini verband damit die Theorie, nach ihm vervollständigten diese Kenntniss Simpson durch Theorie, Bradley durch Beobachtungen und in der neusten Zeit haben Laplace, Kramp und Bessel dieselbe besonders bereichert.

Das älteste Verzeichniss von Fixsternen hat Hipparch 128 v. Chr. verfertigt, die Vergleichung desselben mit den 150 Jahre früher von Timocharis angestellten Beobachtungen führte zur Entdeckung der, Praecession genannten, Erscheinung. Der Einfluss derselben auf die Lage des Frühlingsnachtgleichpunktes wird hier erklärt. Es werden hierauf die spätern Sternverzeichnisse besprochen und gezeigt, wie sie unsere Kenntniss der einzelnen Sterne ihrer Lage nach erweiterten und wie die anzubringenden Correctionen vermehrt und verfeinert wurden. In der neuern Zeit war das Bedürfniss, die Oerter der Fixsterne zu kennen, grösser als früher, um mittelst derselben zu jeder Zeit den Ort eines beweglichen Gestirns bestimmen zu können. Bradley entdeckt die Nutation und Aberration und setzt so die Astronomen in den Stand, die Oerter der Fixsterne weit genauer als früher zu bestimmen. Die geraden Aufsteigungen, sowohl die absoluten als die relativen, werden mittelst der Fundamentalsterne bestimmt. Unter den Arbeiten, welche die Kenntniss der Fixsternörter erweitern sollten, macht Piazzi's Katalog Epoche. Durch Verbindung desselben mit den 45 Jahre früher von Bradley angestellten Beobachtungen bestimmt Bessel weit genauer die Praecession und die eigene Bewegung vieler einzelnen Sterne. Lalande liefert in der Histoire céleste 50000, Bessel selbst, von 1821—1823, 75000 Beobachtungen von Sternen, die letztern in der 30° breiten Aequatorealzone. Die vier Verzeichnisse von Bradley, Piazzi, Lalande und Bessel liefern die Grundlage zu der, auf des letztern Betrieb von der Berliner Akademie veranlassten, Herausgabe von Karten. Diese haben, wie Bessel voraus gesagt, nach seinem Tode die Entdeckung 6 neuer Planeten herbeigeführt. Diesen schönen Lohn seiner umfassenden Arbeiten zu erleben, war leider dem grossen Astronomen nicht vergönnt!

Wir gehen nun zur Besprechung der 7., ihrem Inhalte nach mit der vorhergehenden verwandten, Abhandlung über, deren Ueberschrift lautet:

Messung der Entfernung des 61. Sterns im Sternbilde des Schwans.

Der grössere Theil dieser Abhandlung dient dazu, zu zeigen, dass die versuchte Bestimmung der Entfernung eines Fixsterns manche Entdeckung herbeigeführt hat, im Vergleich mit welcher die endliche Lösung der Aufgabe unbedeutend ist. Nachdem Copernicus die jährliche Bewegung der Erde gezeigt hatte, mussten die zu verschiedenen Zeiten des Jahres beobachteten Fixsterne eine Ortsveränderung, die sogenannte Parallaxe ergeben, eine um so grössere, je kleiner die Entfernung des Sterns von der Erde war. Die damaligen Beobachtungen zeigten keine derartige Ortsveränderung, Copernicus nahm kühn eine zu grosse Entfernung der Fixsterne von der Erde, nach der damaligen Beobachtungsschärfe über 1146 Halbmesser der Erdbahn an, als dass sich eine Parallaxe von 3′ zeigen könne. Die Beobachtungen mussten zunächst verschärft werden, Tycho bestimmte die Oerter bereits bis auf 1′ genau. Seine gleich scharfen Beobachtungen der Planeten führten Kepler zur Entdeckung seiner berühmten Gesetze. Seine Beobachtungen des Polarsterns zeigten dem letztern, dass die Parallaxe dieses Sterns kleiner als 30″, seine Entfernung grösser als 6875 Halbmesser der Erdbahn sein müsse.

Picard und Azout brachten das Fernrohr an den Messinstrumenten an, Flamsteed und Römer vervollkommneten die letztern anderweitig. Des erstern mehr als 30jährige Beobachtungen waren sechsmal so genau als die Tychonischen und da sie keine Parallaxe der Fixsterne zeigten, mussten diese über 41250 Halbmesser der Erdbahn entfernt sein. Unterschiede in den Beobachtungen dieser Astronomen schrieb man fälschlich der Parallaxe zu, ihre wahre Ursache zu entdecken, waren die Beobachtungen noch nicht hinreichend scharf. Hook suchte diese zu verschärfen, eben so Molineux in Kew. Der letztere fing mit einem festgestellten Fernrohre von 24′ Brennweite am 3. Decemb. 1725. Beobachtungen des Sterns γ Draconis an, Bradley setzte dieselben fort und fand in der That Unterschiede im Orte, welche bis auf 40″ anstiegen. Diese Unterschiede entsprachen nicht einer Parallaxe, nach dreijährigem Studium erklärte Bradley sie durch die wichtige Entdeckung der Aberration des Lichtes. Hiermit hatte man einen directen Beweis für die von Copernicus aufgestellte eigene Bewegung der Erde. Bradley fand ferner aus seinen Beobachtungen eine andere, bereits von Newton angedeutete Veränderung, die Nutation, welche eine Periode von 19 Jahren hat und aus der Anziehung des Mondes auf die abgeplattete Erde hervorgeht. Die oben erwähnten Unterschiede in den Oertern der Fixsterne wurden jetzt vollständig erklärt, Bradley's Beobachtungen deuteten nichts an, was einer Parallaxe hätte zugeschrieben werden müssen, die Sterne mussten daher über 400000 Halbmesser der Erdbahn entfernt sein.

Herschel d. A. wollte die Parallaxe mittelst der optisch erscheinenden Doppelsterne bestimmen und entdeckte die physischen, d. h. die aus mehrern Fixsternen zusammengesetzten Systeme. Piazzi und Calandrelli glaubten, wie Bessel gezeigt hat, fälschlich, eine beträchtliche Parallaxe mehrerer Fixsterne 1. Grösse gefunden zu haben, Fehler in dem vielfach benutzten Instrumente des erstern waren die Ursachen dieser Täuschung. Brinkley glaubte am Athair eine Parallaxe von fast 3″ gefunden zu haben, allein Pond, welcher ihm widersprach, verengerte die Grenzen der Parallaxe für diesen Stern nebst Wega und Deneb bis auf einige Zehntel einer Secunde, eine von seinem Nachfolger Airy bestätigte Bestimmung.

So weit hatte man mittelst absoluter Ortsbestimmungen die Parallaxe, aber vergebens zu entdecken versucht, wesshalb Bessel es nothwendig fand, andere Wege einzuschlagen. Um die Fehlerursachen auszuschliessen und so die Genauigkeit zu vermehren, verfiel er darauf, einen Stern mit einem ihm sehr nahe stehenden mikrometrisch zu vergleichen. Struve hatte bereits 1835 – 1837 dergleichen Untersuchungen am Begleiter der Wega angestellt und aus denselben gefunden, dass die Parallaxe des letztern kleiner ist als die von Brinkley gefundene sein müsse.

Bessel wählte den Stern 61. im Schwan aus, theils weil dieser eine beträchtliche eigene Bewegung hat, also auch die Parallaxe muthmasslich gross sein konnte, theils weil er als Doppelstern sich genauer als ein einfacher beobachten liess, theils wegen seiner für Königsberg bequemen Stellung am Himmel. Er benutzte das damals grösste 11füssige Heliometer und verglich diesen Stern vom 16. August 1837 bis zum 2. October 1838 wiederholt mit zwei benachbarten Sternen. Die erhaltenen 183 Resultate entsprachen dem Einfluss einer Parallaxe, diese ergab sich $=0'',3136$ und die Entfernung des Sterns von der Sonne $=657700$ Halbmessern der Erdbahn, eine Strecke, welche das Licht in 10 Jahren zurücklegt. Dieser Stern legt demnach in einem Jahre einen Weg von 16 Halbmessern der Erdbahn zurück. Weil er ein Doppelstern ist, wird man künftig die Masse des Systems und jedes einzelnen Sterns bestimmen können. Das gefundene Resultat erweitert die Ausdehnung des sichtbaren Weltalls ungeheuer und hat für die Wissenschaft als besondern Nutzen die Schärfe der Beobachtungen dargestellt.

Während die bisher besprochenen Abhandlungen sich vorzugsweise mit den Planeten und Fixsternen beschäftigen, sind die 4. und 5. der Betrachtung der Kometen gewidmet. Ihre Titel sind:

Ueber den Halley'schen Kometen, und

Von den Erscheinungen, welche der Halley'sche Komet gezeigt hat.

Nach der erstern haben die Kometen schon sehr früh die Aufmerksamkeit der Menschen auf sich gezogen, allein Gegenstand der astronomischen Beobachtung wurden sie erst sehr spät. Müller Regiomontanus stellte zuerst i. J. 1472 derartige an. Durch die Erklärung der Keplerschen Gesetze mittelst Newton's allgemeiner Anziehung wurde Edmund Halley veranlasst, die vorhandenen 200jährigen Beobachtungen von Kometen zu berechnen. Jm Jahre 1705 machte er 24 Kometenbahnen bekannt, wobei jedoch die grosse Axe und somit die Umlaufszeit nicht angegeben war. Drei derselben, die vom 4. Sept. 1531., 26. Octbr. 1607. und 14. Sept. 1682. stimmten so auffallend in ihren Elementen unter einander überein, dass Halley auf den Gedanken verfiel, es sei ein und derselbe mehrmals erschienene Komet. Er berechnete hiernach seine elliptische Bahn und bestimmte seine Wiederkehr für das Jahr 1759 voraus. Diese Vorausbestimmung traf bekanntlich zu, daher die Benennung dieses ersten periodischen Kometen nach seinem ersten Berechner. Die drei Umlaufszeiten zwischen den vier Erscheinungen sind nicht einander gleich, betragen vielmehr respective: 76 J. 2 M., 74 J. 10½ M., 76 J. 6 M. Die Unterschiede entspringen aus den Störungen, welche die Planeten auf den elliptischen Lauf des Kometen um die Sonne ausüben. Newton hatte zwar die Bahn zur Berechnung dieser Störungen gebrochen, Halley sie aber noch nicht hergeleitet. Vor der Wiederkehr des Kometen im J. 1759 hatte Lalande nach Clairaut's Vorschriften die beiden Umläufe von 1607—1682 und von 1682—1759, mit Rücksicht auf die Störungen, neu berechnet. Den neusten Umlauf von 1759—1835 haben mehrere Astronomen, Damoiseau, Pontécoulant, Rosenberger und Lehmann vor der Wiederkehr berechnet und bekannt gemacht. Ihre Angaben wichen theils mehr, theils weniger von einander ab.

Während in der ersten dieser zwei Abhandlungen das Bisherige besprochen war, gibt der Verfasser in der zweiten zunächst darüber Auskunft, in wie fern der Komet in rein astronomischer Beziehung, d. h. in Betreff seiner Bewegung den im voraus angestellten Berechnungen entsprochen habe. Rosenberger's Elemente sind hiernach den Beobachtungen am nächsten gekommen. Es folgt eine Reihe von Beobachtungen in Betreff des äussern Ansehens des Kometen, namentlich der Bildung seines Schweifes, mehrere Figuren dienen zur Erläuterung und es werden diese Erscheinungen mit ähnlichen verglichen, welche frühere Kometen von 1744, 1769, 1807, 1811 und 1824 gezeigt haben. Der Verfasser hat zugleich Messungen angestellt und zwar so scharfe, als sie bei derartigen nicht genau begrenzten Himmelskörpern erlangt werden können. Er stellt eine Hypothese über die Entstehung der Schweife auf, erwähnt der fast ganz verschwindenden Kraft der Kometenmaterie, das Licht zu brechen, und spricht über das polarisirte Licht der Kometen selbst. Der grössere Theil dieser Abhandlung beschäftigt sich mit dem äussern Ansehen der Kometen, und bildet daher nicht mehr einen eigentlichen Gegenstand der Astronomie; noch mehr ist diess bei den nun zu besprechenden zwei Abhandlungen der Fall.

3. Ueber die physische Beschaffenheit der Himmelskörper.

15. Ueber den Mond.

Während der Verfasser in der erstern erwähnt, dass die Kraft unseres Auges, in Bezug auf die Erkenntniss der Himmelskörper, eng begrenzt sei, macht er zugleich auf anschauliche und fassliche Weise klar, wie auch für die durch das Fernrohr verstärkte Kraft eine nothwendige Grenze gesteckt ist. Hierauf zeigt er, was wir von dem uns nächsten Himmelskörper, dem Monde wissen, dass er Berge und Thäler hat und wie die Höhe der erstern gemessen worden ist. Die Arbeiten Schröters und Lohrmanns werden besprochen, die Karte des erstern stellt den Mond dar, wie er sich dem gehörig bewaffneten Auge zeigt, die des letztern, wie er wirklich ist. Die Mondberge werden, nach der Angabe des erstern, mit denen der Erde verglichen. Es wird durch Gründe dargethan, dass der Mond keine oder nur eine, im Vergleich mit der Erde höchst unbedeutende, Atmosphäre habe, so wie zugleich der Verfasser die Gründe widerlegt, welche man für das Dasein einer Mond-Atmosphäre aufgestellt hat. Der Mond hat demnach weder Luft, noch Wasser, noch Feuer und es können daher auf demselben keine lebenden Wesen, wie wir sie kennen, wohnen. Die Zeiten des Umlaufs und der Axendrehung des Mondes sind einander gleich, wesshalb wir stets nur die eine Seite des Mondes sehen, dasselbe ist wahrscheinlich bei den Trabanten der übrigen Planeten der Fall.

Hierauf bespricht der Verfasser die Sonne, deren leuchtende Hülle uns verhindert, ihren festen Körper selbst kennen zu lernen. Lücken in jener Hülle bilden die sogenannten Sonnenflecken. Manche Beobachter wollen auf den Himmelskörpern vieles wahrgenommen haben, was eine Aehnlichkeit zwischen ihnen und der Erde darthun sollte, der Verfasser hat keine Spur davon wahrgenommen und führt einige Beispiele an; dagegen hebt er die Aehnlichkeit, welche wahrscheinlich zwischen dem Mars und der Erde stattfindet, besonders hervor. Während man durch blosses Beschauen nur wenig von den Planeten erfahren kann, zeigt der Verfasser, wie man mittelst der Beobachtung ihrer Trabanten ihre Masse und, durch Verbindung derselben mit ihrer Grösse, ihre Dichtigkeit bestimmen kann.

Die Abhandlung „Ueber den Mond" verdankt ihre Entstehung dem Erscheinen der Karte von Beer und Mädler. Die ungleichförmige Bewegung des Mondes in seiner Bahn und seine gleichförmige Axendrehung werden besprochen, wie auch die Gründe, wesshalb beide von gleicher Dauer sind. Aus der Vereinigung beider Bewegungen entspringen scheinbare Schwankungen des Mondes, in Folge deren wir etwas mehr als seine halbe Oberfläche zu sehen bekommen. Der erste Meridian des Mondes wird erklärt und ausserdem gezeigt, warum nothwendig seine kugelförmige Oberfläche auf eine Ebene projicirt werden muss. Der Verfasser zeigt, was möglicherweise auf einer Karte vom Monde dargestellt werden kann und beweist ausführlicher als oben, dass man keine Atmosphäre auf demselben annehmen könne. Er gibt hierauf eine Uebersicht dessen, was diese Karte nebst dem sie begleitenden Werke über die Oberfläche des Mondes gelehrt haben, als die Höhen der Berge, die Bildungen der letztern, die Ringgebirge und Crater. Die beiden letztern hat man „als die Ueberreste von Aufblähungen anzu„sehen, welche die Oberfläche des Mondes im mehr oder weni„ger flüssigem Zustande erfahren hat." Eine fast wörtlich gleichlautende Erklärung vernahmen wir vor Jahren aus dem Munde des genialen Schinkel.

Ausser der Craterform gibt es auf dem Monde unsern Alpen ähnliche Gebirge, die Längenthäler fehlen aber durchaus. Einzelne Theile des Mondes haben verschiedene Lichtstärken, für die so genannten Rillen weiss der Verfasser keine Erklärung zu geben. Er schliesst diese Abhandlung mit der Erwähnung der grossen Steilheit und Rauhigkeit der Mondberge und ihrer Unveränderlichkeit.

Die nun zu besprechende Abhandlung, im Werke die zweite, hat den Titel: Ueber das, was uns die Astronomie von der Gestalt und dem Innern der Erde lehrt. Der Verf. erklärt zunächst diejenige Oberfläche der Erde, von welcher in astronomischer Beziehung allein die Rede sein kann und wonach man sich die Erde als mit einer stillstehenden Wassermenge bedeckt vorzustellen hat. Aus zwei Ursachen ist die Gestalt der Erde hervorgegangen, aus der allgemeinen Anziehung oder der Schwere und der Axendrehung. Wie aus beiden eine abgeplattete Gestalt hervorgehen musste, wird klar gemacht; Newton hat es zuerst bewiesen. Dieser fand, indem er die Erde überall gleich dicht annahm, die Abplattung $=\frac{1}{230}$, wogegen diese nur $=\frac{1}{576}$ sein würde, wenn in der Nähe des Mittelpunkts der Erde die Dichtigkeit ihren allergrössten Werth hätte. Diese Grenzwerthe konnte man durch Rechnung finden, die Beobachtung musste den wirklichen Werth der Abplattung ergeben und aus dieser kann man, mittelst obiger Zahlen, auf das wirkliche Verhältniss der Dichtigkeit im Innern der Erde schliessen.

Nach Clairaut sollte man die Zunahme der Schwere vom Aequator bis zu den Polen mittelst Pendelschwingungen bestimmen, aus dergleichen Versuchen an verschiedenen Punkten wurde eine Abplattung $=\frac{1}{288}$ hergeleitet. Diese erste Methode, die letztere durch Beobachtungen zu finden, bedarf astronomischer Zeitbestimmungen, um die Dauer der Schwingungen zu ermitteln. Die zweite Methode beruht auf astronomischen Beobachtungen des Mondes. Dieser wird, wie wir bereits erwähnt haben, anders durch eine kugelförmige Erde, als durch eine abgeplattete angezogen. Die unter der ersten Voraussetzung angestellte Berechnung seines Laufes kann nicht mit den Beobachtungen übereinstimmen. Laplace fand durch die bereits erwähnte Nutation eine Abplattung $=\frac{1}{305}$. Die dritte Methode besteht in einer wirklichen Messung auf der Erdoberfläche, einer so genannten Gradmessung. Diese wird beschrieben und es wird eine kurze Uebersicht der verschiedenen Gradmessungen gegeben. Die grosse französische unterwirft der Verfasser einer scharfen Kritik und zeigt, dass die erst nach der Aufstellung des Meters ausgeführten Gradmessungen die Länge des Erdquadranten genauer kennen gelehrt haben. Nach dem von Bessel hergeleiteten Resultate aller bisherigen Gradmessungen kann man keine regelmässige Figur der Erde angeben, welche sie alle zugleich erklärte. Die übrig bleibenden Unterschiede deuten Unregelmässigkeiten in der Figur der Oberfläche an, welche auf eine unregelmässige Vertheilung der Massen von verschiedener Dichtigkeit im Innern schliessen lassen. Jede einzelne Gradmessung ergibt die Krümmung eines Stückes der unregelmässig geformten Oberfläche, nicht aber, wie man früher erwartete, die Gestalt ihrer ganzen regelmässigen Oberfläche. Die von Bessel aus allen Gradmessungen hergeleitete mittlere Grundform der Erde hat eine Abplattung $=\frac{1}{298}$, von dieser mittlern Oberfläche weicht die wirkliche bald nach innen, bald nach aussen ab. Am Schluss der Abhandlung werden die Instrumente und Operationen bei einer Gradmessung beschrieben.

Die 8. Abhandlung hat die Ueberschrift: Ueber Mass und Gewicht im Allgemeinen und das Preussische Längenmaass im Besondern.

Es werden zunächst die bestimmten Masse verschiedener Länder besprochen und wir erfahren, wie schwierig ein gemeinschaftliches überall einzuführen sei. Drei Urmasse, ein Längenmass, ein Mass für flüssige Körper und Getreide und eines für Gewichte sind erforderlich, um ein Maasssystem festzusetzen, dieses muss bestimmt und unveränderlich sein. Jm J. 1734., als Bouguer und Condamine unter dem Aequator, Maupertuis aber unter dem Polarkreise eine Gradmessung ausführen sollten, wurden hierzu zwei Exemplare der Toise von Eisen angefertigt. Das eine derselben wurde später durch Schiffbruch beschädigt, das andere kam unversehrt zurück und wird die Toise de Perou genannt. Dieselbe stellt die Einheit des französischen Längenmasses bei 13° R. dar. In England hatte man bis 1758 ein aus den Zeiten der Elisabeth herrührendes Exemplar der dortigen, Yard genannten, Längeneinheit. Dasselbe bestand aus Messing und da man es im J. 1758 als unvollkommen erkannte, verfertigte Bird ein neues Urmass, den Standard Yard 1757. Dasselbe ward erst im J. 1824 für die gesetzmässige Längeneinheit erklärt, war aber, wie Baily im J. 1834 fand, zur Regulirung anderer Masse nicht geeignet, wesshalb sein Untergang beim Brande der Parlamentshäuser nicht zu beklagen ist.

Der Verfasser kritisirt hier, wie in der vorhergehenden Abhandlung, das der Erdmessung entnommene metrische System der Franzosen und spricht sich überhaupt gegen ein derartiges Natur- und Urmass aus. Aehnlich verhält es sich mit dem Naturmasse, welches der Länge des Secundenpendels zu entnehmen wäre. Den ersten Vorschlag hierzu hatte Huygens bereits in der Mitte des 17. Jahrhunderts gemacht. Damals wusste man noch nichts von der Verschiedenheit dieser Länge an verschiedenen Orten der Erde, eine Folge der Abplattung, die gefundene Länge hätte also nur für Einen Ort Gültigkeit gehabt. Wenn später Borda und Kater die Länge des Pendels bestimmt haben, so zeigt Bessel die Fehler dieser Bestimmungen nach, indem die mangelhafte Schärfe der Schneide und der Widerstand der Luft nicht berücksichtigt worden waren. Der Verfasser erklärt sich demnach gegen ein Urmass, welches zu einer von der Natur gegebenen Länge ein bestimmtes Verhältniss haben soll, weil man diese nie mit absoluter Genauigkeit bestimmen kann. Er verlangt aber, dass ein einzuführendes Mass

1) völlig unzweideutig gemacht werde,

2) durch jedes Erfolg verheissende Mittel erhalten werde,

3) dass Mittel ergriffen werden, möglichst vollkommene Copien mit möglichst grösster Leichtigkeit erhalten zu können.

Hierauf bespricht der Verfasser speciell seine Arbeiten in Betreff der Regulirung des preussischen Längenmasses im Jahre 1835. Bei der Erklärung desselben im J. 1816 waren einige Unbestimmtheiten übrig geblieben, statt des damaligen Urmasses ist ein neues angefertigt worden, welches gegen Abnutzung und Beschädigung gesichert ist, leicht übertragen werden kann und unverändert bleiben muss. Dasselbe verhält sich zum französischen wie 139,13 : 144, diese Zahlen sind das Resultat 48 einzelner Messungen, welche so gut mit einander übereinstimmen, dass der mittlere Fehler nur $\frac{1}{27000}$ Linie beträgt. Zur Vergleichung hat eine von Fortin verfertigte Copie der Toise de Perou gedient, welche Arago und Zahrtmann mit dem Original verglichen haben. Der Apparat, welcher zur Vergleichung von Copien mit dem von Baumann verfertigten preussischen Urmasse dient, so wie die Operation der Vergleichung wird beschrieben. Besonders schwierig war es hierbei, die erforderliche beständige Temperatur herzustellen. Die dänische Regierung hat bereits dasselbe Mass in ihrem Lande eingeführt.

Die 6. Abhandlung ist betitelt:

Ueber Flut und Ebbe.

Diese Erscheinung sah man vor Newton als ein Zeichen des Lebens der Erde an, die allgemeine Anziehung des letztern setzt uns in den Stand, Jahrhunderte lang vorauszubestimmen, wann an einem gegebenen Tage und bis zu welcher Höhe eine Flut eintreten muss. Newton's Naturlehre hat die Flut und Ebbe von allem Wunderbaren entkleidet und in den Kreis des Nothwendigen zurückgeführt. Die ganze Erscheinung wird, ihrer Dauer und ihrem Verlauf nach, beschrieben und Figuren dienen zur Erläuterung. Auf einer idealen, ganz mit Wasser bedeckten Erde würde der Verlauf ein anderer sein, als er auf der wirklichen Erde ist. Im erstern Falle würde jedes Viertel der Erde, welches Flut hat, etwa 100 Cubikmeilen Wasser mehr enthalten, als jedes Ebbe habende Viertel. Der grössere Theil der Strömung von Osten gegen Westen, welche das Meer hat, ist vermuthlich der Flut und Ebbe zuzuschreiben, der andere Theil muss Unterschieden der Temperatur zugeschrieben werden. Die einzelnen Continente verändern die Richtungen der Strömungen, aber umgekehrt lösen diese Theile der einzelnen Küsten ab und verändern so ihre Gestalt. Die Form der Küsten wirken auf die Zeit und Höhe der Flut ein, welche Einwirkung nicht mehr berechnet werden kann; hier muss die Beobachtung zu Hülfe gezogen werden. Der Erfahrung zufolge ist Höhe und Zeit der Flut vom Stande des Mondes gegen die Sonne und Erde, sowohl der Richtung als Entfernung nach, abhängig. Die Flut und Ebbe zeigt sich gar nicht oder nur unbedeutend in kleinen eingeschlossenen Meeren, vielmehr nur im Weltmeere, und die Franzosen und Engländer haben in diesem eigene Thürme zur Beobachtung dieser Erscheinung erbaut. Das von diesen gelieferte Material dient zum Beweise der aus Newton's Lehre der Schwere gezogenen Folgerungen. — Zur Erklärung der mechanischen Gesetze, welche die Flut und Ebbe befolgen, erklärt der Verfasser auf kurze Weise die Kräfte, ihre Richtungen, Zusammensetzung und erwähnt der Reibung. Mittelst dieser vorausgeschickten Erklärungen zeigt derselbe deutlich die Wirkung der Sonne und des Mondes auf die Erde und ihre flüssige Hülle, eben so erhält man eine deutliche Vorstellung von der geringen Einwirkung der mächtigen Sonne auf diese Erscheinung, im Vergleich mit der des weit kleinern Mondes, weil hierbei hauptsächlich der Unterschied der Entfernungen in Betracht kommt. Die Wirkung der Sonne beträgt nur $\frac{2}{5}$ von der des Mondes, beide erfolgen zugleich beim Neu- und Vollmonde und es entstehen so die grössten Fluten; bei den Mondvierteln trifft die Flut des einen Körpers mit der Ebbe des andern zusammen und daher ist hier die erstere am kleinsten. Besonders beim Monde ist auch sein Abstand von der Erde in Betracht zu ziehen. Die oben erwähnten Thürme liefern, gleich den Sternwarten, Materialien zur Berichtigung unserer Kenntniss vom Lauf und der Masse der Sonne und des Mondes. Nach Laplace's Bestimmungen befindet sich das Meer im Gleichgewicht, eine Ueberschwemmung des Festlandes ist daher nicht zu besorgen.

Die Ueberschrift der 12. Abhandlung „Gleichgewicht und Bewegung" erregte uns Zweifel, ob über diesen Gegenstand ein für Dilettanten deutlicher und unterhaltender Vortrag gehalten werden könne; der geniale Verfasser hat aber beide Schwierigkeiten überwunden. Er erklärt zunächst die Kraft, welche wir nur durch ihre Wirkung erkennen, so wie diese auch ihre Grösse bestimmt. Indem die Wirkung einer bestimmten Kraft als Einheit angenommen wird, kann man jede andere Kraft durch eine Zahl ausdrücken und so die Betrachtung der Kräfte zum Gegenstand der Mathematik machen. Bei dieser Gelegenheit schildert der Verfasser die Kraft der neuern Mathematik und zeigt den grossen, durch Decartes herbeigeführten, Fortschritt von der ältern zur neuern um so deutlicher, als er ein passendes Beispiel anführt und bespricht. Er deutet an, wie die Aufsuchung der, jeder Frage angemessenen, mathematischen Operation zur Entdeckung der Analyse des Unendlichen durch Newton und Leibnitz geführt hat und wie in der neusten Zeit ein besonderer Zweig der Mathematik, der mathematische Calcül entstanden ist. Nach diesen und mehrern andern nicht unmittelbar zur Sache gehörenden Betrachtungen kehrt der Verfasser zur Mechanik zurück und erklärt die Masse, die bewegende Kraft und das Gleichgewicht.

Archimedes ging vom Gleichgewicht der gleicharmigen Wage aus, Galilei und seine Nachfolger vom Parallelogramm der Kräfte, Johann Bernoulli fügte diesem den Grundsatz der virtuellen Geschwindigkeiten hinzu, dessen Wahrheit Lagrange auf einfache Weise bewiesen hat. Dieser Grundsatz hat den grössten Nutzen für die Vervollkommpung der Lehre vom Gleichgewicht — der Statik. Einige hervorragende Sätze dieser Lehre werden angeführt, namentlich der Schwerpunkt und die Figuren der Körper, z. B. die Figur der Erde und die Anziehung einer Kugel auf Punkte, welche inner- oder ausserhalb derselben liegen. Findet kein Gleichgewicht unter den auf einen Körper einwirkenden Kräften statt, so wird dieser, wenn er ruht, sich zu bewegen anfangen und wenn er sich bereits bewegt, seine Geschwindigkeit, oder Richtung oder beide zugleich ändern. Durch d'Alembert's Grundsatz, wonach die Kräfte, welche die verlorenen oder gewonnenen Bewegungen der einzelnen Massentheile irgend eines Systems zu erzeugen fähig sind, unter einander im Gleichgewicht stehen, werden die Aufgaben der Lehre von der Bewegung — der Dynamik — auf die Statik zurückgeführt. Speciell besprochen und durch interessante Beispiele erläutert wird das Gesetz der Bewegung des Schwerpunktes, das Gesetz der Winkelflächen und das Gesetz der lebendigen Kraft. Das letztere gibt dem Verfasser Gelegenheit, des perpetuum mobile zu erwähnen und die Fruchtlosigkeit, dasselbe zu suchen, aus einander zu setzen. Die Aufgabe der Mechanik ist erfüllt, wenn sie jede Frage hinsichtlich des Gleichgewichts und der Bewegung in eine bestimmte Forderung verwandelt hat, welche der mathematische Calcül erfüllen muss. So weit es diesem nach seinen neusten Fortschritten möglich ist, erfüllt er seine Aufgabe, die Mechanik aber hat die ihrige ganz erfüllt.

Die 10. Abhandlung ist überschrieben: Ueber Wahrscheinlichkeits-Rechnung. Es wird zunächst gezeigt, was man für gewiss oder für wahrscheinlich zu halten habe; im gemeinen Leben wird beides bisweilen mit einander verwechselt. Die ganze Theorie der Wahrscheinlichkeiten beruht auf dem sogenannten Zufalle; an einem Beispiele wird erläutert, welchen Sinn man mit diesem Worte verbindet. Man hat Mittel gesucht, die sogenannten Zufälle im Allgemeinen zu beurtheilen, Jacob Bernoulli brach in seinem 1713 herausgegebenen Werke „ars conjectandi“ die Bahn, Laplace hat in seinem grossen Werke die vielfältigen spätern Untersuchungen der Mathematiker vor Augen gelegt.

Ein Würfel dient dem Verfasser als Beispiel, um das Mass der Wahrscheinlichkeiten zu erläutern und zu zeigen, wie man aus der Beobachtung auf die Beschaffenheit der Ursache schliessen kann. Ein anderes Beispiel dient dazu zu zeigen, wie man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmt angeben und von dieser Angabe Anwendung machen kann. Mit der Anzahl der zu Grunde gelegten Beobachtungen nimmt das bestimmte Mass der Wahrscheinlichkeit an Richtigkeit zu und zuletzt wird der wahrscheinliche Fehler so klein, dass das herausgebrachte Verhältniss nicht mehr merklich von der Wahrheit abweicht. Dagegen wird durch Beispiele gezeigt, wie man fälschlich ein Ereigniss für wahrscheinlich halten konnte, weil die zu Grunde liegenden Beobachtungen nicht richtig angestellt waren.

Durch die astronomischen Beobachtungen erhält man nie den wahren, sondern nur den wahrscheinlichen Werth und diejenige Bestimmung desselben Gegenstandes ist die beste, deren wahrscheinlicher Fehler am kleinsten, deren Wahrscheinlichkeit also am grössten ist. Die Wahrscheinlichkeits-Rechnung hat gelehrt, mittelst beliebig vieler Beobachtungen eines Himmelskörpers seine beste Bahn zu bestimmen, vorher hing diess von der Geschicklichkeit des Rechners ab. Dieselbe Rechnung lehrt die Unsicherheit des gewonnenen Resultats kennen und diese dient theils dazu, unter verschiedenen Resultaten das beste auszuwählen, theils zu beurtheilen, wie weit man dem Resultate vertrauen dürfe. Die Anwendung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf die astronomischen Beobachtungen hat auch Angriffe erlitten, welche der Verfasser mit gewichtigen Gründen zurückweist, so wie er auch den Grund angibt, warum er diese Betrachtungen nicht auf andere Wissenschaften angewandt hat.

Die letzte Abhandlung, welche wir zu besprechen haben, ist die 9., ihr Titel ist: Ueber den Magnetismus der Erde.

Diese Abhandlung ist die einzige, deren Thatsachen ohne Beiträge des Verfassers sind, wie er selbst am Eingange erwähnt. Die Anziehungskraft und Polarität der magnetischen Körper, die magnetische Abweichung oder Declination und die Neigung oder Inclination, wie auch der magnetische Meridian werden erklärt. Die Declination hat Columbus, die Inclination Robert Norman entdeckt, beide sind Wirkungen der magnetischen Kraft der Erde. Beide Erscheinungen sind an verschiedenen Orten der Erde, sowohl während eines Tages als während grösserer Zeiträume, verschieden. Diese Verschiedenheit kann zur Auffindung der geographischen Länge auf dem Meere dienen, wesshalb Edmund Halley bereits 1700 eine Karte für die Abweichungen, Wilcke 1768 eine ähnliche für die Neigungen an den einzelnen Punkten auf dem Meere entwarf.

Zur Richtung der magnetischen Kraft kommt noch ihre Stärke oder Intensität, welche zuerst Humboldt an vielen Punkten der Erde bestimmt hat. Mehrere namentlich aufgeführte Reisenden haben später derartige Untersuchungen angestellt. Auch die Intensität hat an einzelnen Punkten der Erde verschiedene Werthe, welche man mittelst Karten anschaulich gemacht hat.

Nur in Bezug auf die Declination hat man bis jetzt die tägliche Veränderung des magnetischen Zustandes der Erde untersucht, dieselbe ist von 8 Uhr Morgens bis 1 Uhr Mittags am grössten im April, etwa 15′, am kleinsten im December. Diese Resultate verdankt die Wissenschaft Gauss, welcher einen eigenen Apparat zu diesem Behuf construirt hat. Ausser diesen regelmässigen Veränderungen treten andere plötzlich, und zwar an den verschiedensten Orten der Erde gleichzeitig, ein. Diese zu erforschen, hatte Humboldt bereits 1806 und 1807 gleichzeitige Beobachtungen an verschiedenen Orten veranlasst, die Zeitumstände brachten diese in's Stocken. Arago fand durch ähnliche Beobachtungen unter anderm einen Einfluss der Nordlichter auf die Magnetnadel und zwar einen gleichzeitigen in Paris und Casan. Humboldt rief von 1828—1830 auf's neue gleichzeitige Beobachtungen an 6 Orten ins Leben, allein an Genauigkeit wurden die bisherigen Beobachtungen bei weitem durch diejenigen übertroffen, welche von 1836 an Gauss an verschiedenen Orten mittelst des bereits erwähnten Apparates herbeiführte. Die Gleichzeitigkeit dieser Veränderungen ist nun durch unzählige Beobachtungen, welche an den verschiedensten Orten scharf angestellt worden sind, bestätigt.

Wie man sich die Wirksamkeit der magnetischen Kraft in einer Nadel zu denken, damit jedes Theilchen der letztern wieder einen besondern Magneten bilde und diese Kraft durch Kunst hervorgerufen werde, wird ausführlich besprochen. Wir erfahren, dass die magnetische Kraft wie die Schwere dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional sei; diess haben Coulomb, Hansteen und besonders vollständig Gauss durch Versuche dargethan. Hieraus folgt die Wirkung eines magnetischen Körpers und sein sogenannter freier Magnetismus. Diesen wird man schwerlich jemals auf geradem Wege durch Rechnung an jedem Punkte der Erde kennen lernen, die Erscheinungen, unterstützt durch das Gesetz, müssen uns dahin führen.

In der Astronomie suchte man, ehe man die Erklärung einer Erscheinung geben konnte, ihren Grund zu errathen. Copernicus, Kepler und Newton folgen auf einander, dieser erklärte die Bewegung der Himmelskörper. Eben so dachten sich Euler und Tobias Mayer, zur Erklärung der magnetischen Erscheinungen, einen in der Erde befindlichen Magneten. Hansteen nahm, nachdem die Erscheinungen vervielfältigt waren, deren zwei an. Gauss verlässt alle Annahmen und bestimmt die unzweideutigen Bedingungen, denen das Hervortreten der magnetischen Kraft auf der Oberfläche der Erde durch ihr Gesetz selbst unterworfen ist. Diese Erklärung oder, astronomisch zu sprechen, diese Elemente gelten nur für eine bestimmte Zeit, Gauss selbst hat sie mit 103 beobachteten Declinationen, 102 Inclinationen und 95 Intensitäten verglichen, Erman hat auf zwei Karten derartige Vergleichungen in Bezug auf Declination dargestellt. Am Schluss der Abhandlung werden die vielfachen Untersuchungen, welche Gauss in Gemeinschaft mit Wilhelm Weber über den Magnetismus angestellt hat, besprochen.

Hiermit ist meine Aufgabe, den Inhalt dieses Werkes in Auszügen anzudeuten, beendet; sollte diese Darstellung dazu dienen, dem trefflichen Werke manchen Leser zuzuwenden, so würde ich mich vollkommen belohnt fühlen. Die Erinnerung an den genialen Verfasser wird dadurch in jedem Leser erweckt und rege erhalten werden.

XII.

Démonstration des formules de Mr. Gauss dans la Trigonométrie sphérique.

Par

Monsieur F. Arndt,

Docteur en Philosophie à Stralsund.

On sait, que les relations entre les six parties d'un triangle sphérique, connues sous le nom de celles de Mr. Gauss, ont été déduites fréquemment des analogies de Néper; mais celles-ci résultant de celles-là par une simple division, il est, ce me semble, plus naturel, de démontrer les formules de Mr. Gauss sans avoir recours aux analogies de Néper. Il est vrai quelques auteurs ont donné des démonstrations directes de ces formules; mais toutes ces démonstrations n'étant pas assez courtes pour un objet si élémentaire, j'ai jugé utile de donner ici la mienne.

En désignant les trois côtés du triangle sphérique par a, b, c; les angles opposés resp. par A, B, C, la formule connue $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ donne

$$\cos a = \cos(b-c) - 2\sin b \sin c \sin\tfrac{1}{2}A^2,$$

$$\cos a = \cos(b+c) + 2\sin b \sin c \cos\tfrac{1}{2}A^2.$$

Ajoutez d'une part chaque membre de ces équations à l'unité, et le soustrayez d'autre de celle-ci, faisant usage des formules

$$2\cos\frac{1}{2}a^2 = 1 + \cos a,\quad 2\sin\frac{1}{2}a^2 = 1 - \cos a,$$

vous aurez

$$[1] \ldots \cos\frac{1}{2}a^2 = \cos\frac{1}{2}(b-c)^2 - \sin b \sin c \sin\frac{1}{2}A^2,$$

$$[2] \ldots \sin\frac{1}{2}a^2 = \sin\frac{1}{2}(b-c)^2 + \sin b \sin c \sin\frac{1}{2}A^2,$$

$$[3] \ldots \cos\frac{1}{2}a^2 = \cos\frac{1}{2}(b+c)^2 + \sin b \sin c \cos\frac{1}{2}A^2,$$

$$[4] \ldots \cos\frac{1}{2}a^2 = \sin\frac{1}{2}(b+c)^2 - \sin b \sin c \cos\frac{1}{2}A^2.$$

Au moyen de l'équation $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$, ou bien des équations précédentes, en changeant les quantités a, b, c, A en les suppléments $180^\circ - A$, $180^\circ - B$, $180^\circ - C$, $180^\circ - a$, on trouvera les quatre suivantes:

$$[1'] \ldots \sin\frac{1}{2}A^2 = \cos\frac{1}{2}(B-C)^2 - \sin B \sin C \cos\frac{1}{2}a^2,$$

$$[2'] \ldots \cos\frac{1}{2}A^2 = \sin\frac{1}{2}(B-C)^2 + \sin B \sin C \cos\frac{1}{2}a^2,$$

$$[3'] \ldots \sin\frac{1}{2}A^2 = \cos\frac{1}{2}(B+C)^2 + \sin B \sin C \sin\frac{1}{2}a^2,$$

$$[4'] \ldots \cos\frac{1}{2}A^2 = \sin\frac{1}{2}(B+C)^2 - \sin B \sin C \sin\frac{1}{2}a^2.$$

C'est par une simple combinaison de ces huit équations qu'on obtient les quatre formules de Mr. Gauss, savoir

la première:

$$\cos\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}(b-c) = \pm \cos\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}(B+C)$$

par $[1].\cos\frac{1}{2}A^2 - [4']\cos\frac{1}{2}a^2$,

la seconde:

$$\cos\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}(b-c) = \pm \sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}(B-C)$$

par $[2].\cos\frac{1}{2}A^2 - [2']\sin\frac{1}{2}a^2$,

la troisième:

$$\sin\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}(b+c) = \pm \cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}(B+C)$$

par $[3].\sin\frac{1}{2}A^2 - [3']\cos\frac{1}{2}a^2$, la quatrième:

$$\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b+c)=\pm\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(B-C)$$

$$\text{par}[4].\sin\frac{1}{2}A^2-[1']\sin\frac{1}{2}a^2.$$

En faisant le calcul prenez $\frac{1}{2}\sin A$ au lieu de $\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$, de même $\frac{1}{2}\sin a$ au lieu de $\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a$, remarquez ensuite qu'on a toujours l'équation $\sin b\sin c\sin A^2=\sin B\sin C\sin a^2$, qui résulte immédiatement par la multiplication de ces formules connues: $\sin a\sin B=\sin A\sin b$, $\sin a\sin C=\sin A\sin c$.

Quant aux doubles signes dans les équations ci-dessus, pour lever le doute, je fais remarquer qu'on suppose ici un triangle sphérique dont tous les côtés et les angles n'excèdent pas 180°.

Cela posé, d'abord il est clair qu'il faut prendre le signe supérieur dans la première et quatrième équation, tous les sinus et cosinus étant positifs; mais ce qui concerne les deux autres, pour démontrer que le signe $+$ a également lieu, voici une méthode pour y parvenir.

En substituant dans les équations $\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B$, $\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$, la valeur $\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$ à la place de $\cos a$ et faisant les réductions nécessaires, on obtiendra les équations suivantes:

$$\cos b\sin c=\sin b\cos c\cos A+\sin a\cos B,$$

$$\cos c\sin b=\sin c\cos b\cos A+\sin a\cos C;$$

desquelles on déduit $\sin(b\pm c)(1\mp\cos A)=\sin a(\cos C\pm\cos B)$, ou

$$1)\quad \sin(b+c)\sin\frac{1}{2}A^2=\sin a\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C),$$

$$2)\quad \sin(b-c)\cos\frac{1}{2}A^2=\sin a\sin\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}(B-C).$$

Maintenant la première équation de Gauss étant

$$\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(b-c)=\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B+C),$$

supposons qu'on prenne le signe inférieur dans la seconde, de manière qu'on ait

$$\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b-c)=-\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B-C),$$

la multiplication de ces deux équations donnerait

$$\sin(b-c)\cos\frac{1}{2}A^2 = -\sin a \sin\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}(B-C),$$

ce qui ne s'accorde pas avec la formule 2). De même s'il fallait prendre le signe inférieur dans la troisième équation, la multiplication de celle-ci par la quatrième donnerait

$$\sin(b+c)\sin\frac{1}{2}A^2 = -\sin a \cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C),$$

contre la formule 1).

Voilà donc généralement démontré qu'il faut prendre le signe supérieur dans toutes les quatre formules de Gauss, dès qu'on suppose qu'aucun côté et qu'aucun angle n'est plus grand que 180°.

Stralsund le 19. mai 1849.

XIII.

Ein Wort für die Romershausen'schen Messinstrumente den Herren Barfuss und Schneitler gegenüber.

Von dem

Herrn Dr. August Wiegand,

Oberlehrer an der Realschule zu Halle.

In den Schriften: „Handbuch der höhern und niedern Messkunde etc." von Dr. Barfuss, Weimar 1847. und „Die Instrumente und Werkzeuge der höhern und niederen Messkunst etc." von Schneitler, Leipzig 1848. sind auch die Romershausen'schen Messinstrumente theilweise einer Beurtheilung unterworfen worden, und zwar wird derselben in beiden

Schriften nur mit Geringschätzung und einer gewissen Wegwerfung gedacht. Keineswegs deshalb nun, weil ich in meiner Schrift. „Der geodätische Messapparat und sein Gebrauch" 2. Auflage. Halle. 1848. jene Instrumente als zweckmässig und vortheilhaft aufgeführt habe und durch die Urtheile genannter Herren meine Autorehre verletzt glaubte, sondern lediglich aus dem Grunde, weil ich die Romershausen'schen Instrumente durch längeren ununausgesetzten Gebrauch hinlänglich zu erproben Gelegenheit hatte, nehme ich Veranlassung gegen das unbegründete und übereilte Urtheil jener Herren das Wort zu ergreifen. Hören wir zunächst die Herren über das Spiegeldiopter. Der besseren Vergleichung wegen setze ich die Urtheile beider gleich neben einander:

Schneitler sagt S. 56.:	Barfuss sagt S. 159.:
„Die Idee zu diesem Instrumente ist sehr einfach und nicht neu, da im Grunde das Fallon-sche Spiegellineal, ein zu dem beschränkten Gebrauche viel zu theures Instrument, dasselbe ist.	Der Gedanke zu diesem Instrumente ist äusserst einfach und keineswegs neu, denn das Fallon'sche Spiegellineal ist im Grunde dasselbe Werkzeug.
Bei *a* und *b* (Fig. 55.) befinden sich Dioptern, von denen jedes durch zwei messingene Stifte gebildet wird, die eine schmale Spalte zwischen sich lassen. Die Spalte des Objectivdiopters *b* ist jedoch etwas breiter als die des Oculardiopters *a*, damit man noch deutlich genug einen Fluchtstab durch dieselbe sehen kann. Gegen die Visirlinie *ab* ist nun der ebne Spiegel *cd* unter 45° Neigung gestellt und wenn daher ein Strahl *mn* so darauf fällt, dass er mit der Visirlinie *ab* einen rechten Winkel macht, so wird er in der Richtung dieser Linie reflektirt und geht folglich durch das Okulardiopter *a*.	Bei *a* und *b* (Taf. V. Fig. 10.) befinden sich Diopteru, von denen jedes durch zwei messingene Stifte gebildet wird, die eine schmale Spalte zwischen sich lassen. Die Spalte des Objectivdiopters *b* ist jedoch etwas breiter als die des Okulardiopters *a*, damit man noch mit gehöriger Helligkeit einen Absteckestab durch dieselbe sehen kann. Gegen die Visirlinie *ab* ist nun der ebene Spiegel *cd* unter 45° Neigung gestellt und wenn daher ein Strahl *mn* so darauf fällt, dass er mit der Visirlinie *ab* einen rechten Winkel macht, so wird er in der Richtung dieser Linie reflektirt und geht folglich durch das Okulardioper *a*.
Hieraus ergiebt sich der Gebrauch des Instrumentes leicht. Die ganze Vorrichtung ist in einem viereckigen prismatischen Gehäuse von 4" Länge, das an der Seite entsprechende Ausschnitte hat und worin sich noch eine ähnliche zum Abstecken von Winkeln von 45° befindet.	Hieraus ergiebt sicht der Gebrauch des Instrumentes leicht etc. Die ganze Vorrichtung ist in einem viereckigen prismatischen Gehäuse von 4 Par. Zoll Länge angeordnet, worin zugleich sich noch eine ähnliche befindet, mit der man Winkel von 45° abstecken kann.

Ohne mich weiter auf eine Untersuchung einzulassen, ob Herr Schneitler von Herrn Barfuss oder ob beide von einem dritten wörtlich abgeschrieben haben, will ich nur so viel sagen, dass weder die Beschreibung noch die beigefügte Zeichnung die geringste Aehnlichkeit mit dem Romershausen'schen Spiegeldiopter haben, dass somit beide Herren das betreffende Instrument nicht einmal gesehen, geschweige denn geprüft haben und beide also urtheilen, wie der Blinde von der Farbe.

Das Romershausensche Spiegeldiopter*) hat mit dem Fallon'schen Spiegellineal nicht die geringste Aehnlichkeit — seine Diopter sind weder durch messingene Stifte gebildet, noch ist dasselbe in einem viereckigen Gehäuse eingeschlossen. Es hat dagegen die bequemere Form eines kleinen Taschenfernrohres, dessen Ocular zwei parallele Durchsichten enthält, welche mit einer auf das Objectivglas geätzten oder durch ein feines Haar gebildeten Richtungslinie correspondiren. Im Innern des Rohrs befinden sich zwei feine, für die Winkel von 90° und 45° unwandelbar rectificirte Metallspiegel. Diese Einrichtung gewährt vor allen anderen ähnlichen Instrumenten, wegen einfacher Brechung des Lichtstrahls. mehr Klarheit, Sicherheit und Leichtigkeit im Visiren aus freier Hand; sie gestattet die bei praktischen Messungen so überaus nützliche Construction des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks auf eine schnelle und leichte Weise und in Folge dessen nicht allein Horizontal-, sondern auch Höhenmessungen, sie macht die sofortige Bestimmung der Entfernung unzugänglicher Punkte bei coupirtem Terrain möglich und giebt die Factoren zur Flächenberechnung unmittelbar auf dem Felde.

Hieraus ergiebt sich nun von selbst, dass der von obigen Herren empfohlene, mir durch längeren Gebrauch übrigens ebenfalls vollkommen bekannte, alte Adamsche Winkelspiegel nicht die Hälfte der Leistungen des Romershausen'schen Spiegeldiopters für sich in Anspruch nehmen kann — abgesehen davon, dass seine doppelte Spiegelung und wandelbare Rektification wenig Klarheit und Sicherheit im Visiren gestattet. Hr. Barfuss hofft zwar die beim Spiegeldiopter angegebenen Vortheile auch auf den Winkelspiegel übertragen zu können und will zu dem Ende entweder zwei dergleichen Instrumente für die verschiedenen Winkelgrössen vorrichten oder vier Spiegel in einem Kasten anbringen. Letzteres möchte aber wohl schwer ausführbar sein und das complicirte Instrument sehr vertheuern, ohne dass es zugleich die Bequemlichkeit und Sicherheit des kleinen und billigen Spiegeldiopters erlangte.

Nicht besser wie mit den Beurtheilungen des Spiegeldiopters sieht es mit des Herrn Schneitler Urtheile über den Romershausen'schen Längenmesser (Diastimeter) aus, und ich glaube auch hier dreist behaupten zu können, dass der genannte Herr dieses Instrument ebenfalls nie gesehen, geschweige denn geprüft

*) Romershausens Spiegeldiopter und Längenmesser etc. Halle, 1845.

hat. Es liesse sich wenigstens dann gar nicht begreifen, wie derselbe jenes Instrument mit dem, nach ganz andern Grundsätzen und auf ganz verschiedene Weise construirten, uralten Pantometrum Paceccianum zusammenstellen kann. Wunderlicher Weise stützt er sich hierbei auf ein im Jahre 1819 von Schulz-Montanus abgegebenes Urtheil, wonach dieses unter allen Distanzmessern der zweckmässigste und brauchbarste sein soll, indem es auf 10000′ nur einen Fehler von $\frac{1}{3}$ der ganzen Länge zulasse. Er fügt mit einer gewissen vornehmen Verachtung noch hinzu: „Abermals ein Beweis, was von allen solchen geometrischen Wunderwerken, an die ein Newton, Tob. Mayer, Hadley, Ramsden etc. nie gedacht (?) bei Messungen, wo es auf mehr als ungefähre Weitenbestimmungen ankömmt, zu halten ist.

Hierzu nur ein paar Bemerkungen. Schulz-Montanus konnte natürlich das jetzige Diastimeter des Dr. R. nicht kennen und es ist deshalb lächerlich, wenn sich Herr Schneitler auf das Urtheil desselben beruft; noch auffallender ist es aber, wenn er Nichts anerkennen will, woran nicht schon jene älteren berühmten Mathematiker gedacht haben. Er verneint dadurch jeden möglichen Fortschritt und setzt sich mit sich selbst in Widerspruch, indem seine Schrift doch den jetzigen vervollkommneten Standpunkt sämmtlicher Messapparate darstellen soll. Er hätte daher diesen schwierigen für Civil-Militairmessung wichtigen Distanzmessungen eine besondere Aufmerksamkeit widmen und sich kein absprechendes Urtheil darüber erlauben sollen, ohne sich vorher persönlich mit den neueren Instrumenten dieser Art bekannt zu machen.

Die Messung mit dem Romershausen'schen Diastimeter giebt bei genauer und richtiger Behandlung in gehöriger Sehweite der unmittelbaren Kettenmessung nichts nach und übertrifft dieselbe an Genauigkeit bei coupirtem Terrain. Es gewährt diese Vortheile durch das ihm zu Grunde liegende eigenthümliche Prinzip, wornach es bei constanter Tangente des parallaktischen Winkels nur den Radius ändert und deshalb auch bei Messungen sehr kleiner Winkel nach meinen sorgfältigsten Prüfungen dem kostbarsten Theodoliten nichts nachgiebt. Eine längere Einübung erfordert dies Instrument allerdings; das kann aber doch wahrlich! kein Vorwurf für dasselbe sein, sonst wäre auch das Urtheil eines ungeübten Schützen gerechtfertigt, dass eine Büchse nichts tauge, weil er nichts damit treffe.

Herr Dr. Barfuss scheint vom Romershausen'schen Diastimeter gar nichts gehört zu haben, denn er erwähnt nur den praktisch völlig unbrauchbaren Reichenbach'schen Distanzmesser. Eben so wenig scheint ihm, sowie auch Herrn Schneitler, das nicht minder interessante und zur Messung grösserer Entfernungen bestimmte Militairfernrohr*) bekannt zu sein. Schon beim ersten Gebrauche dieses Instruments überraschte mich die Genauigkeit der damit erlangten Resultate so ungemein, dass mir

*) Romershausen's Militairfernrohr etc. Halle 1848.

die allgemeinste Anerkennung desselben unzweifelhaft schien und meine Vermuthung wurde auch bestätigt, zunächst durch das Urtheil des Königl. Preuss. Premierlieutenant Hellmuth*) sowie durch die zu meiner Kenntniss gekommenen Urtheile der vierten preussischen Artilleriebrigade und eines württembergischen Ingenieurofficiers**).

Ebenso unbekannt wie das vorige Instrument sind den Herren Schneitler und Barfuss das Romershausen'sche Spiegelniveau und das Reductionsniveau. Was das erstere betrifft, so habe ich damit ein Nivellement vom Geistthore in Halle längs der Magdeburger Chaussee und von da aus links seitwärts nach dem Bade Wittekind unternommen und dasselbe mit einem sehr genau gearbeiteten Nivellirinstrumente mit Fernrohr wiederholt. Ich habe mich da überzeugt, dass der Gebrauch von jenem diesem nicht nur nichts nachgiebt, sondern namentlich wegen bedeutenderer Abkürzung der Arbeit einen grossen Vortheil voraus hat. Seine vorzügliche Brauchbarkeit dürfte auch wohl aus der Thatsache hervorleuchten, dass die Nivellements der Prinz Wilhelms-Bahn vorzugsweise damit ausgeführt worden sind. Mit dem Reductionsniveau habe ich eigene Messungen zur Zeit noch nicht unternommen und enthalte mich deshalb jeden Urtheils, muss aber hinzufügen, dass ich es von den mit der Separation in der ungemein coupirten Wettiner und Löbejüner Gegend beschäftigt gewesenen Feldmessern habe ganz vorzüglich rühmen hören.

Möchten diese Mittheilungen die Folge haben, dass den Romershaushausen'schen Instrumenten die allseitige, verdiente Anerkennung zu Theil würde.

In Bezug auf das sonst so treffliche Werk des Herrn Schneitler können wir schliesslich den Wunsch nicht unterdrücken, dass der Herr Verfasser bei einer neuen Auflage auch den neueren Instrumenten eine gerechte und aus eigener Prüfung hervorgegangene Würdigung zu Theil werden und nicht nur dem Alten und Bekannten allein das Wort reden möge.

---

*) Die Distanz-Messungen der Artillerie u. s. w. mit Hülfe des Romershausen'schen Längenmessers. Von O. Hellmuth, Premier-Lieutenant im Preuss. 27. Inf.-Regiment.

**) So eben erfahre ich durch den hiesigen Mechanikus Herrn Julius Schmidt, dass in Folge zahlreicher Bestellungen, eine Menge Militair-Fernröhre nach Schleswig-Holstein abgehen.

XIV.

Vom Maximum und Minimum, dem eine oder zwei Gerade unterworfen sind, welche von 1 oder 2 gegebenen Punkten an einen gesuchten, in einer Curve gelegenen, Punkt gehen, Punkte und Curve in derselben Ebene gedacht.

Von

Herrn Brenner,

Lehrer zu Tuttlingen im Königreich Würtemberg.

Sind die Coordinaten der Curve durch x und y, und die des gegebenen Punktes durch a und b dargestellt, so ist für den ersten Fall fragliche Linie

$$u = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2},$$

und man hat als Bedingung des $M.M.$

$$\partial u_x = -\frac{(a-x) + (b-y)\partial y_x}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}} = 0,$$

woraus folgt

$$-\frac{1}{\partial y_x} = \frac{b-y}{a-x}.$$

$-\frac{1}{\partial y_x}$ ist die Tangente des Winkels, den die Normale der Curve mit der Abscissenaxe macht. Ebenso ist $\frac{b-y}{a-x}$ die Tangente des Winkels, den eine durch die Punkte (a, b) und (x, y) gehende Linie mit derselben Axe bildet, woraus folgt, dass die gesuchte Linie mit der Normale der Curve zusammenfällt.

Im zweiten Fall seien (Taf. II. Fig. 3.) die beiden Punkte A und B mit den Coordinaten a und b, a' und b', und die Curve CV, während OX die Abscissenaxe darstellt. Ist M der gesuchte Punkt, und ziehe ich AM und BM, so ist die Summe dieser beiden Geraden

$$u = \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2} + \sqrt{(a'-x)^2+(b'-y)^2}.$$

Die Bedingung des *M.M.* liefert nun die Gleichung

$$\partial u = -\frac{a-x+(b-y)\partial y_x}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}} - \frac{a'-x+(b'-y)\partial y_x}{\sqrt{(a'-x)^2+(b'-y)^2}} = 0,$$

woraus folgt

$$-\frac{1}{\partial y} = \frac{(b'-y)\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}+(b-y)\sqrt{(a'-x)^2+(b'-y)^2}}{(a'-x)\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}+(a-x)\sqrt{(a'-x)^2+(b'-y)^2}}.$$

Theilen wir nun den Winkel AMB durch LM in zwei gleiche Theile und untersuchen, ob nicht LM die Normale der Curve ist. In diesem Falle müsste identisch sein $\operatorname{tg}(LMN) = -\frac{1}{\partial y}$, indem wir MN parallel OX ziehen. Wir haben aber

$$\operatorname{tg}(2LMN) = \operatorname{tg}(BMN + AMN) = \frac{(b-y)(a'-x+)(b'-y)(a-x)}{(a-x)(a'-x)-(b-y)(b'-y)}.$$

Da man aber die Gleichung hat $\operatorname{tg} 2Z(1-\operatorname{tg} Z^2) = 2\operatorname{tg} Z$, so setze man in diese Gleichung $Z = LMN$ und für $\operatorname{tg} LMN$ und $\operatorname{tg} 2LMN$ obige Werthe, während $-\frac{1}{\partial y}$ durch dessen Werth in x, y, a, b, a' und b' ersetzt wird. Macht man noch zur Abkürzung

$$\begin{aligned} a-x &= A, \\ a'-x &= A', \\ b-x &= B, \\ b'-x &= B'; \end{aligned}$$

so kommt endlich

$$\frac{AB'+A'B}{AA'-BB'}\left[1-\left(\frac{B'\sqrt{A^2+B^2}+B\sqrt{A'^2+B'^2}}{A'\sqrt{A^2+B^2}+A\sqrt{A'^2+B'^2}}\right)^2\right] = 2.\frac{B'\sqrt{A^2+B^2}+B\sqrt{A'^2+B'^2}}{A'\sqrt{A^2+B^2}+A\sqrt{A'^2+B'^2}},$$

eine Gleichung, von deren Indentität man sich durch Reduction bald überzeugt. Es folgt hieraus, dass AM und BM mit der Normale gleiche Winkel machen; und zwar geht die Normale mitten zwischen A und B so hindurch, dass der eine Punkt auf der einen und der andere auf der andern Seite derselben gelassen wird, weil $2LMN = BMN + AMN$.

Will man nun die Aufgabe lösen:

Von einem gegebenen Punkt C an einen gesuchten in einer Curve gelegenen Punkt eine Gerade zu ziehen, die ein *M.M.* sei, so muss man in die Gleichung

$$\partial y_x(b-y) + a - x = 0$$

für y und ∂y_x die aus der Gleichung der Curve gezogenen Werthe substituiren und die Gleichung in Beziehung auf x auflösen. Oder kann man, auf Polarcoordinaten übergehend, statt der Gleichung

$$\partial y_x(b-y)+a-x=0$$

eine andere aufstellen.

Es sei (Taf. II. Fig. 4.) die Curve LM, der gegebene Punkt A, OB die Axe, RM der Radius-Vector r, Winkel $MRB=w$, AN die Normale, so dass M den gesuchten Punkt darstellt, so ist bekanntlich

$$\operatorname{tg} NMR=\frac{\partial r}{r},$$

$$\operatorname{tg} ANB=\operatorname{tg}(w-NMR)=\frac{\operatorname{tg} w-\frac{\partial r}{r}}{1+\operatorname{tg} w.\frac{\partial r}{r}};$$

demnach ist die Gleichung der Normale, die durch den Punkt A geht:

$$y'-b=\frac{\operatorname{tg} w-\frac{\partial r}{r}}{1+\operatorname{tg} w\frac{\partial r}{r}}(x'-a),$$ wo x' und y' die Coordinaten der Normale.

Man hat aber für M $y'=r\sin w$ und $x'=r\cos w$, folglich

$$1)\qquad r\sin w-b=\frac{\operatorname{tg} w-\frac{\partial r}{r}}{1+\operatorname{tg} w\frac{\partial r}{r}}(r\cos w-a),$$

welche noch mit der Gleichung der Curve zu verbinden ist, um r und w zu bestimmen.

Will man aber von zwei Punkten an einen in einer Curve gesuchten Punkt zwei Linien ziehen, deren Summe ein $M.M.$ sei, so ist

$$\operatorname{tg}(2MNB)\ (\text{Taf. II. Fig. 4})=\operatorname{tg}(2LMN)\ (\text{Taf. II. Fig. 3.}).$$
$$=\frac{(b-y)(a'-x)+(b'-y)(a-x)}{(a-x)(a'-x)-(b-y)(b'-y)},$$

während $$\operatorname{tg} MNB=\frac{\operatorname{tg} w-\frac{\partial r}{r}}{1+\operatorname{tg} w\frac{\partial r}{r}}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$\operatorname{tg} 2MNB(1-\operatorname{tg}^2 MNB)=2\operatorname{tg} MNB$, so hat man

$$2)\frac{(b-y)(a'-x)+(b'-y)(a-x)}{(a-x)(a'-x)-(b-y)(b'-y)}\left[1-\left(\frac{\operatorname{tg}w-\frac{\partial r}{r}}{1+\operatorname{tg}w\frac{\partial r}{r}}\right)^2\right]=2\frac{\operatorname{tg}w-\frac{\partial r}{r}}{1+\operatorname{tg}w\frac{\partial r}{r}},$$

wo nur noch x durch $r\cos w$ und y durch $r\sin w$ zu ersetzen ist. Zur Anwendung des Obigen gehen wir auf einige specielle Aufgaben über.

Aufgabe 1.

Von einem gegebenen Punkte soll in einen noch gesuchten Punkt eines Kegelschnittes eine Gerade gezogen werden, die ein *M.M.* ist.

Auflösung.

Die allgemeine Gleichung für diese Art von Curven ist

$$r=\frac{p}{1+e\cos w}, \text{ woraus}$$

$$\partial r=\frac{pe\sin w}{(1+e\cos w)^2} \text{ und}$$

$$\frac{\partial r}{r}=\frac{e\sin w}{1+e\cos w}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{\operatorname{tg}w-\frac{\partial r}{r}}{1+\operatorname{tg}w\frac{\partial r}{r}}=\frac{\sin w}{e+\cos w}, \text{ und dadurch wird nach 1)}$$

$$p\sin w-b(1+e\cos w)=\frac{\sin w}{e+\cos w}[p\cos w-a(1+e\cos w)].$$

Die weiteren Entwicklungen und Reductionen liefern

3) $$pe\sin w+(1+e\cos w)[a\sin w-b(e+\cos w)]=0.$$

Hat man einen Werth w' gefunden, der dieser Gleichung beinahe genügt, so ist der Correctionswerth

$$h=-\frac{pe\sin w'+(1+e\cos w')[a\sin w'-b(e+\cos w')]}{pe\cos w'+(1+e\cos w')[a\cos w'+b\sin w']-e\sin w'[a\sin w'-b(e+\cos w')]}.$$

Geht man aber auf ein anderes Coordinatensystem über, so dass die Axe durch den Punkt A selbst geht, so wird das neue b' gleich Null und jenes a geht über in $a'=\sqrt{a^2+b^2}$. Die Winkel aber werden von RA angezählt. Setzt man nun $ARM=v$ und $ARB=v'$, so ist $w=v+v'$ und $\operatorname{tg}v'=\frac{b}{a}$, während ist

$$r=\frac{p}{1+e\cos(v+v')}.$$

Hierauf wird

$$\frac{\operatorname{tg}v-\frac{\partial r}{r}}{1+\operatorname{tg}v\frac{\partial r}{r}}=\frac{\operatorname{tg}v+e\operatorname{tg}v\cos(v+v')-e\sin(v+v')}{1+e\cos(v+v')+e\operatorname{tg}v\sin(v+v')}.$$

Gleichung 1) gibt somit

$$p\sin v=\frac{\operatorname{tg}v+e\operatorname{tg}v\cos(v+v')-e\sin(v+v')}{1+e\cos(v+v')+e\operatorname{tg}v\sin(v+v')}[p\cos v-a'(1+e\cos(v+v'))],$$

welches nach allen Reductionen gibt

$$4)\qquad \frac{pe}{a'}\sin(v+v')+(\sin v-e\sin v')[1+e\cos(v+v')]=0.$$

Ist v'' ein Werth, der dieser Gleichung beinahe genügt, so hat man den Correctionswerth

$$k=-\frac{\frac{pe}{a'}\sin(v''+v')+(\sin v''-e\sin v')[1+e\cos(v''+v')]}{\frac{pe}{a'}\cos(v''+v')+\cos v''[1+e\cos(v''+v')]-e\sin(v''+v')(\sin v''-e\sin v')}.$$

Ist der gegebene Punkt nicht sehr weit von der Curve entfernt, so kann man für einen ersten Näherungswerth $\sin v=v$ und $\cos v=1$ setzen, weil v klein ist, und es entwickelt sich dann aus 4)

$$v=\frac{e\sin v'\left(1+e\cos v'-\frac{p}{a'}\right)}{e\cos v'\left(1+\frac{p}{a'}\right)+e+e^2\sin v'}.$$

Für einen Punkt, der in der grossen Axe der Curve selbst liegt, hat man $b=0$ und $v'=0$ und es ergibt sich sowohl aus 3) als auch aus 4)

$$\sin w\,(pe+a+ae\cos w)=0.$$

Diess liefert die vier Werthe

$$w=0,$$
$$w=180^\circ,$$

$\cos w=-\frac{p}{a}-\frac{1}{e}$, und wenn der Werth w' der letztern Gleichung entspricht,

$$w=360-w'.$$

Ist $\frac{p}{a}+\frac{1}{e}$ grösser als $+1$ oder -1, so gibt es nur zwei *M.M.* Punkte.

Um zu entscheiden, wie viele *M.M.* im Allgemeinen höchstens existiren, gehe man zur Bedingung $(a-x)+(b-y)\partial y_x=0$ zurück und verbinde sie zunächst mit der Gleichung für die Ellipse und Hyperbel $y^2=B^2\pm\frac{B^2x^2}{A^2}$, so wird man entwickeln

$$x^4-\frac{2A^2a}{A^2\pm B^2}x^3$$

$$+A^2.\left[\frac{A^2a^2\mp B^2b^2\pm(A^2\pm B^2)^2}{(A^2\pm B^2)^2}\right]x^2\mp\frac{2A^4a}{A^2\pm B^2}x\pm\frac{A^6a^2}{(A^2\pm B^2)^2}=0,$$

wodurch höchstens vier Werthe angezeigt werden. Für die Parabel aber ergibt sich bei Benützung ihrer Gleichung $y^2=2px$,

$$y^3+2py(p-a')-2p^2b=0;$$

wo a' die vom Scheitel an gerechnete Abscisse des Punktes A ist.

Will man aber die Gleichung 3) in Anwendung bringen, so muss man $e=1$ setzen und hat

$$p\sin w+(1+\cos w)[a\sin w-b(1+\cos w)]=0,$$

welches nach gehöriger Entwicklung gibt

$$\cos\frac{1}{2}w\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}w^3+\operatorname{tg}\frac{1}{2}w\left(\frac{2a+p}{p}\right)-\frac{2b}{p}\right]=0,$$

welches zuerst gibt $\frac{1}{2}w=90^0$ und $\frac{1}{2}w'=270^0$. Beide Werthe liefern $w=180^0$, wodurch ein unendlich entfernter, folglich gar kein Punkt angezeigt wird. Die andere Gleichung

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}w^3+\operatorname{tg}\frac{1}{2}w\left(\frac{2a+p}{p}\right)-\frac{2b}{p}=0$$

kann höchstens drei Werthe liefern, so wie es auch mit

$$y^3+2py(p-a')-2p^2b=0$$

der Fall ist. Demnach bietet die Parabel höchstens drei *M.M.* Punkte dar.

Für die Grenze, wo beide Gleichungen anfangen, zwei imaginäre Werthe zu liefern, hat man vermöge der Cardanischen Formel $b^2p-\left(\frac{2a+p}{3}\right)^3=0$, wenn man bedenkt, dass $a+a'=\frac{1}{2}p$.

Aufgabe 2.

Von zwei beliebig gelegenen Punkten an einen gesuchten in der Peripherie eines Kreises liegenden Punkt zwei Gerade zu ziehen, deren Summe ein *M.M.* sei.

Auflösung.

Es seien (Taf. II. Fig. 5.) von A und B an einen noch gesuchten Punkt D in der Peripherie eines um C beschriebenen Kreises zwei gerade Linien AD und BD zu ziehen, deren Summe ein *M.M.* sei. Bezeichne ich die Coordinaten von A mit a, b und die von B mit a', b', die fragliche Summe mit u, so wie die Coordinaten des Punktes D mit x, y, während alle Coordinaten von C aus gerechnet werden, wo CX die Abscissenaxe ist, so haben wir folgender Bedingung zu genügen:

$$\frac{a-x+(b-y)\partial y_x}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}+\frac{a'-x+(b'-y)\partial y_x}{\sqrt{(a'-x)^2+(b'-y)^2}}=0.$$

Die Gleichung des Kreises

$$r^2=x^2+y^2 \text{ liefert aber}$$

$$\partial y_x=-\frac{x}{y}, \text{ und diess substituirt, gibt}$$

$$\frac{y(a-x)-(b-y)x}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}+\frac{y(a'-x)-(b'-y)x}{\sqrt{(a'-x)^2+(b'-y)^2}}=0.$$

Nehmen wir nun für einen Augenblick an, CX habe die Lage, dass sie den Punkt des *M.M.* in der Peripherie gerade treffe, so hat man in diesem Falle $y=0$ und $x=r$, folglich

$$5) \qquad \frac{b}{\sqrt{(a-r)^2+b^2}}+\frac{b'}{\sqrt{(a'-r)^2+b'^2}}=0.$$

Es ist nun zweckmässiger, wenn wir uns an diese Bedingung halten, anstatt die Gleichung 2) zu benützen. Da die Wurzelgrössen, als absolute Werthe der Linien AD und BD, nur das positive Zeichen haben können, so sieht man zunächst, dass einer der Werthe b oder b' negativ sein muss, dass demnach der den *M.M.* Punkt treffende Halbmesser oder dessen Verlängerung stets zwischen A und B auf solche Weise hindurch gehen muss, dass der eine Punkt auf der einen und der andere auf der andern Seite desselben zu liegen kommt, wie auch diess oben schon bemerkt worden.

Obige Relation lässt sich noch einfacher ausdrücken, wenn man die eine Grösse auf die andere Seite der Gleichung bringt, quadrirt, reducirt und wieder die Wurzel auszieht. Es ergibt sich hiedurch

$$\frac{b}{a-r}=\pm\frac{b'}{a'-r}.$$

Um nun die Fälle auszuscheiden, in denen das positive oder negative Zeichen zu wählen ist, geben wir dieser Gleichung folgende Form:

$$b' = \pm b\frac{a'-r}{a-r}.$$

Haben die beiden Grössen $a'-r$ und $a-r$ das gleiche Zeichen, d. h. liegen A und B innerhalb oder beide ausserhalb des Kreises, so ist, unter der Voraussetzung, dass b positiv ist, das negative Zeichen zu nehmen, weil b' negativ sein muss, und dadurch wird wirklich 5) befriedigt.

Haben hingegen $a'-r$ und $a-r$ verschiedene Zeichen, welches der Fall ist, wenn der eine Punkt innerhalb, und der andere ausserhalb des Kreises liegt und der den $M.M.$ Punkt treffende Halbmesser selbst (nicht dessen rückwärts gehende Verlängerung) zwischen A und B hindurchgeht, so ist das positive Zeichen zu nehmen, damit b' negativ wird.

Auch diese Bedingung befriedigt die Gleichung 5). Denn setzt man $b' = b\frac{a'-r}{a-r}$, so gibt 5)

$$\frac{b}{\sqrt{(a-r)^2+b^2}} + \frac{b\left(\frac{a'-r}{a-r}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a'-r}{a-r}\right)^2[(a-r)^2+b^2]}}.$$

Der Nenner im letztern Posten stellt noch immer die absolute Grösse BD dar und damit sie wirklich positiv werde, hat man die negative Wurzel zu nehmen. Dann hat man aber

$$\frac{b}{\sqrt{(a-r)^2+b^2}} - \frac{b}{\sqrt{(a-r)^2+b^2}} = 0.$$

Wenn demnach beide Punkte in oder beide ausserhalb des Kreises liegen, so steht die einzige Bedingung fest

$$6) \qquad \frac{b}{a-r} + \frac{b'}{a'-r} = 0.$$

Liegt hingegen der eine Punkt in dem Kreise, der andere ausserhalb desselben, so hat man ausser der obigen auch noch folgende Bedingung zu untersuchen:

$$7) \qquad \frac{b}{a-r} - \frac{b'}{a'-r} = 0.$$

Um nun den $M.M.$ Punkt in der Peripherie des Kreises wirklich zu bestimmen, gehen wir wirklich vom ursprünglichen Coordinaten-System mit der Abscissen-Axe CX zu einem andern über, dessen Abscisse CX' durch den gesuchten Punkt D geht. Setzen wir den Winkel $X'CX = w$, so wie die secundären Abscissen des Punktes A gleich α, β und des Punktes B gleich α', β', so hat man für diesen Uebergang bekanntlich

$$\alpha = b \sin w + a \cos w,$$
$$\beta = b \cos w - a \sin w;$$
$$\alpha' = b' \sin w + a' \cos w,$$
$$\beta' = b' \cos w - a' \sin w.$$

Die Bedingung $\frac{\beta}{\alpha - r} + \frac{\beta'}{\alpha' - r} = 0$ liefert aber die Gleichung

$$\left.\begin{matrix} 2\sin w \cos w (aa' - bb') + (\sin w^2 - \cos w^2)(ab' + ba') \\ + r \cos w (b + b') - r \sin w (a + a') \end{matrix}\right\} = 0,$$

oder auch

$$8)\qquad \left.\begin{matrix} \sin 2w\,(aa' - bb') - \cos 2w (ab' + ba') \\ + r \cos w (b + b') - r \sin w (a + a') \end{matrix}\right\} = 0.$$

Die Bedingung $\frac{\beta}{\alpha - r} - \frac{\beta}{\alpha' - r} = 0$ aber gibt

$$r \sin w (a' - a) - r \cos w (b' - b) - (ba' - ab') = 0.$$

Bringt man diese Gleichung unter die Form

$$\sin w - \cos w \left(\frac{b' - b}{a' - a}\right) = \frac{ba' - ab'}{r(a' - a)}$$ und setzt

$\frac{b' - b}{a' - a} = \operatorname{tg} \mu$, so hat man hieraus

$$9)\qquad \sin (w - \mu) = \frac{ba' - ab'}{r(a' - a)} \cos \mu.$$

Diese Gleichung gibt zwei Werthe für w. Denn wenn der eine w' ist, so ist der andere $\pi - w' + 2\mu$. Die beiden hiedurch angezeigten Punkte sind aber nichts anders, als die Durchschnittspunkte der die Punkte A und B verbindenden Geraden mit dem Kreise. Denn substituire ich in die Gleichung

$$r \sin w (a' - a) - r \cos w (b' - b) - (ba' - ab') = 0$$

y statt $r \sin w$ und x statt $r \cos w$, so geht sie über in

$$y (a' - a) - x (b' - b) - (ba' - ab') = 0,$$

welches nichts anders ist, als die Gleichung für die Linie, die durch die Punkte (a, b) und (a', b') hindurchgeht. Uebrigens fragt sichs noch, ob beide Punkte *M.M.* Punkte sind.

Es lässt sich schon a priori einsehen, dass nur Ein Maximum und Ein Minimum existiren kann. Dennoch ist es interessant zu wissen, wie viele Werthe für w die Gleichung 8) liefert. Zu diesem Zwecke setzen wir in der der Gleichung 8) unmittelbar vorangehenden

$\sin w = \frac{y}{r}$ und $\cos w = \frac{x}{r}$, welches gibt

$$2xy(aa'-bb') + (y^2-x^2)(ab'+ba') + r^2x(b+b') - r^2y(a+a') = 0.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der des Kreises

$$x^2+y^2=r^2$$

und eliminirt eine der Unbekannten, um die andere zu bestimmen, so wird man hiedurch auf eine Gleichung des vierten Grades geführt, wodurch im Allgemeinen vier Punkte bestimmt werden.

Um die Bedeutung der beiden andern nicht zu den *M.M.* Punkten gehörigen Punkte zu erfahren, bedenken wir, dass es noch zwei Lagen des Radius, wie z. B. *CE* gibt, in denen *AE* und *EB* mit demselben zwei gleiche Winkel *AEC* und *BEF* machen. Nimmt man hier *CF* als Abscissenaxe an, so liegen beide Punkte *A* und *B* auf Einer Seite dieser Axe und man hat als Bedingung für die Gleichheit der Winkel

$$\frac{b}{r-a} = \frac{b'}{a'-r} \text{ oder } \frac{b}{r-a} + \frac{b'}{r-a'} = 0.$$

Da sich diese Bedingung von 6) in Nichts unterscheidet, so ist klar, wie bei der angegebenen Coordinaten-Verwandlung auch hier die Gleichung 8) zum Vorschein kommen muss. Demnach liefert 8) ausser den beiden *M.M.* Punkten auch noch zwei andere Punkte mit der Eigenschaft, dass die von *A* und *B* an sie gezogenen Geraden mit dem betreffenden Radius gleiche Winkel machen. In der That befriedigt auch obige Bedingung

$$b' = -b\,\frac{a'-r}{a-r},$$

wo $\frac{a'-r}{a-r}$ eine negative Grösse ist, die Gleichung 5) nicht. Denn diese gibt die Grösse

$$\frac{b}{\sqrt{(a-r)^2+b^2}} - \frac{b\left(\frac{a'-r}{a-r}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a'-r}{a-r}\right)^2\cdot[(a-r)^2+b^2]}}.$$

Allein aus dem angegebenen Grunde muss die Wurzel des zweiten Postens negativ genommen werden, und dann hat man eine Grösse, die nicht $=0$ ist, nemlich

$$\frac{2b}{\sqrt{(a-r)^2+b^2}}.$$

Wollten wir nun unsere *M.M.* Punkte auf algebraischem Wege erhalten, so könnte diess nur durch Auflösung einer Gleichung des vierten Grades geschehen, indem man dazu obige zwei Gleichungen in x und y benützte. Besser ist es, 8) näherungsweise aufzulösen. Ist w' ein Werth, der dieselbe beinahe befriedigt, so ist ein Näherungswerth

$$k = \frac{\sin 2w'(aa'-bb')-\cos 2w'(ab'+ba')+r\cos w'(b+b')-r\sin w'(a+a')}{2\cos 2w'(aa'-bb')+2\sin 2w'(ab'+ba')-r\sin w'(b+b')-r\cos w'(a+a')}$$

Die Gleichung 8) und deren Näherungswerth lassen sich vereinfachen, wenn man zu einem neuen Coordinatensystem übergeht, auf solche Weise, dass die neue Abscissenaxe den Winkel ACB halbirt. Denn gesetzt, es sei, für unsern jetzigen Zweck, CX'' diese Abscissenaxe, so ist $X''CX = \frac{1}{2}(ACX + BCX)$, folglich

$$\operatorname{tg} 2v = \frac{ba' + ab'}{aa' - bb'},$$

wenn man $X''CX = v$ setzt.

Setzt man nun die neuen Coordinaten gleich A, B und A', B'; so ist

$$A = b\sin v + a\cos v,$$
$$B = b\cos v - a\sin v;$$
$$A' = b'\sin v + a'\cos v,$$
$$B' = b'\cos v - a'\sin v.$$

Nun ist $AB' + BA' = 0$, und so bekommen wir statt 8) und deren Näherungswerth

10) $2\sin w(AA' - BB') + r(B + B') - r\operatorname{tg} w(A + A') = 0$ und

$$k = \cos w'^2 . \frac{2\sin w'(AA'-BB')+r(B+B')-r\operatorname{tg} w'(A+A')}{r(A+A')-2\cos w'^3(AA'-BB')},$$

wo aber w von der Axe CX'' an zu rechnen ist.

Ausser der Vereinfachung bietet die Gleichung 10) noch einen andern sehr bedeutenden Vortheil dar. Sind nemlich die beiden Punkte A und B so ziemlich gleich oder auch nur sehr weit vom Kreise entfernt, oder ist der Winkel ACB ziemlich klein, so wird der das $M.M.$ treffende Radius auch beinahe den Winkel ACB in zwei gleiche Theile theilen und für eine erste Annäherung kann man dann setzen

$$\sin w' = \operatorname{tg} w' = w', \text{ welches gibt}$$

$$w' = \frac{r(B+B')}{r(A+A')-2(AA'-BB')}.$$

Ist auf solche Weise der Winkel w bestimmt, so wird man haben

$$AD = \sqrt{a^2+b^2+r^2-2(a\cos w + b\sin w)},$$

$$BD = \sqrt{a'^2+b'^2+r^2-2(a'\cos w + b'\sin w)}.$$

Schliesslich bemerken wir noch, dass sich auf die Gleichung

$$2xy(aa'-bb')+(y^2-x^2)(ab'+ba')+r^2x(b+b')-r^2y(a+a')=0$$

eine Methode gründen liesse, vorliegende Aufgabe durch Construction, vermittelst eines Kegelschnittes, aufzulösen.

An diese Aufgabe schliesst sich von selbst die folgende an:

Aufgabe 3.

In einem Dreieck einen Punkt zu bestimmen, von dem aus drei Gerade in die Spitzen desselben gezogen, ein Minimum seien.

Auflösung.

Es sei (Taf. II. Fig. 6.) das Dreieck ABC und der gesuchte Punkt D, so wird $AD+DB+DC$ fragl. Minimum sein. Der Punkt D wird bestimmt sein, wenn ich auch nur zwei der letzten drei Linien kenne. Ich setze

$$AD=x,\quad BD=y,\quad CD=z;$$

so wie die Seiten des Dreiecks

$$BC=a,\quad AC=b,\quad AB=c.$$

Soll $x+y$ für einen beliebigen, aber bestimmten Werth von z, ein Minimum sein, so kann man sich mit z um C einen Kreisbogen gezogen denken, und dann muss, wie diess schon oben bewiesen worden, $\angle ADC=\angle BDC$ sein. Gleicherweise ist $\angle ADB=\angle BDC$, wenn $x+z$ bei beliebigem Werth von y ein Minimum sein soll. Hieraus ist klar, dass

$$ADC=ADB=BDC=120^0, \text{ wenn } x+y+z \text{ ein Min.}$$

Man hat daher

$$y^2+z^2-2yz\cos 120^0=a^2 \text{ oder}$$

$$11)\quad y^2+z^2+yz=a^2, \text{ und ebenso}$$

$$12)\quad x^2+z^2+xz=b^2,$$

$$13)\quad x^2+y^2+xy=c^2.$$

Die Summe dieser drei Gleichungen liefert

$$14)\qquad x^2+y^2+z^2+\frac{1}{2}(xy+xz+yz)=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

Nun ist der Inhalt des Dreiecks $ADB=\frac{1}{2}xy\sin 120^0$ oder

$$\Delta ADB=\frac{\sqrt{3}.xy}{4}. \text{ Gleicherweise ist}$$

$$\varDelta\, ADC = \frac{\sqrt{3}.xz}{4} \text{ und}$$

$$\varDelta\, BDC = \frac{\sqrt{3}.yz}{4}.$$

Die Summe aber gibt den Flächeninhalt i des ganzen Dreiecks, d. h.

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+xz+yz)=i, \text{ woraus}$$

$$\frac{3}{2}(xy+xz+yz)=2\sqrt{3}.i.$$

Addire ich diess zu 14) und ziehe die Wurzel aus, so kommt

$$x+y+z=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}.i}, \text{ welches ich } = q \text{ setze.}$$

Ziehe ich 11) von 12) ab, so habe ich

$$x-y=\frac{b^2-a^2}{q}, \text{ welches gibt:}$$

$$x^2+y^2-2xy=\left(\frac{b^2-a^2}{q}\right)^2, \text{ und diess von 13) abgezogen:}$$

$$xy=\frac{1}{3}\left[c^2-\left(\frac{b^2-a^2}{q}\right)^2\right].$$

Wird diese Gleichung aufs Neue mit $x-y=\frac{b^2-a^2}{q}$ verbunden, so entwickelt sich

$$15)\quad x=\frac{b^2-a^2}{2q}+\sqrt{\frac{1}{3}\left[c^2-\left(\frac{b^2-a^2}{2q}\right)^2\right]},$$

so wie durch Buchstabenverwechslung

$$16)\quad x=\frac{c^2-a^2}{2q}+\sqrt{\frac{1}{3}\left[b^2-\left(\frac{c^2-a^2}{2q}\right)^2\right]};$$

$$17)\quad y=\frac{c^2-b^2}{2q}+\sqrt{\frac{1}{3}\left[a^2-\left(\frac{c^2-b^2}{2q}\right)^2\right]},$$

$$18)\quad y=\frac{a^2-b^2}{2q}+\sqrt{\frac{1}{3}\left[c^2-\left(\frac{a^2-b^2}{2q}\right)^2\right]};$$

$$19)\quad z=\frac{a^2-c^2}{2q}+\sqrt{\frac{1}{3}\left[b^2-\left(\frac{a^2-c^2}{2q}\right)^2\right]},$$

20) $$z=\frac{b^2-c^2}{2q}+\sqrt{\frac{1}{3}\left[a^2-\left(\frac{b^2-c^2}{2q}\right)^2\right]}.$$

Die Wurzelzeichen ergaben sich durch folgende Betrachtung. Gesetzt, es sei a die grösste Seite des Dreiecks, b die mittlere, c die kleinste, so kann die Wurzel in 15), da wir nur positive Werthe für x, y und z annehmen dürfen, nur positiv sein. Die Wurzeln in 15) und 18) sind an sich gleich; allein sie müssen auch noch gleiche Vorzeichen, d. h. das positive, haben, weil man sonst nicht hätte $x-y=\frac{b^2-a^2}{q}$, wie sein muss. Dasselbe kann auch in Beziehung auf die übrigen Wurzeln gefolgert werden aus der Verbindung von 16) mit 19) und von 17) mit 20).

Von Interesse ist auch die Beantwortung der Frage, ob es nicht Fälle gebe, wo kein Minimum möglich sei? Diese Unmöglichkeit ergibt sich für imaginäre Werthe von x oder y oder z oder auch von q. Die Grössen unter den Wurzelzeichen können nicht negativ werden, bevor sie durch Null gehen. Es wird also z. B. x erst anfangen imaginär zu werden, wenn schon vorher geworden ist

$$c^2-\left(\frac{b^2-a^2}{2q}\right)^2=0.$$

Es ist aber klar, dass nicht der eine Werth 15) von x imaginär sein kann, wenn es nicht gleichzeitig der andere 16) auch ist. Es muss daher auch sein $b^2-\left(\frac{c^2-a^2}{2q}\right)^2=0$. Somit ist auch die Wurzel in 18)$=0$, folglich auch in 17) nemlich

$$a^2-\left(\frac{c^2-b^2}{2q}\right)^2=0.$$

Und so sind gleichzeitig alle Wurzeln in 15)—20) der Null gleich. Addirt man alle Gleichungen 15)—20), so hat man

$$2(x+y+z)=2q=0.$$

Setzen wir nun in q den Inhalt i gleich der bekannten Formel, so haben wir

$$a^2+b^2+c^2+\sqrt{3}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}=0.$$

Setzen wir die Wurzelgrösse auf die andere Seite des Gleichheitszeichens, quadriren und reduciren, so werden wir auf die Gleichung geführt

$$a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2=0.$$

Lösen wir diese Gleichung nach einander in Beziehung auf a^2, b^2 und c^2 auf, so kommt:

$$a^2=-\frac{3}{4}(b^2-c^2)^2,\quad b^2=-\frac{3}{4}(a^2-c^2)^2,\quad c^2=-\frac{3}{4}(b^2-a^2)^2;$$

welche Gleichungen nicht existiren können, wenn nicht ist

$$b^2-c^2=0,\ a^2-c^2=0,\ b^2-a^2=0; \text{ woraus folgt}$$

$$a=b=c=0 \text{ und ebenso } x=y=z=0.$$

Somit hat sich alles auf den Punkt zurückgezogen, woraus folgt, dass im Allgemeinen so lange ein Minimum existiren wird, so lange a, b und c noch Werthe haben, d. h. also für jedes Dreieck. Dennoch gibt es einen Fall, wo insofern kein Min. statt findet, als man keine négativen Werthe für x, y und z zulässt. Bevor jedoch einer dieser Werthe negativ wird, muss er durch Null gehen, und nehmen wir diess in Beziehung auf x an, so haben wir

$$\frac{b^2-a^2}{2q}+\sqrt{\frac{1}{3}\left[c^2-\left(\frac{b^2-a}{2q}\right)^2\right]}=0, \text{ woraus folgt}$$

$$c^2q^2=(b^2-a^2)^2.$$

Ersetzen wir q und i durch deren Werthe, so kommt

$$2(b^2-a^2)^2=c^2[a^2+b^2+c^2+\sqrt{3}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}].$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch den Werth

$$a^2=b^2+c^2+bc, \text{ und vergleichen wir diess mit}$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos BAC, \text{ so ist}$$

$$\cos BAC=-\frac{1}{2} \text{ und } BAC=120^\circ.$$

In der That, nimmt man an, dass die Dreiecksspitze A auf AD mehr und mehr zurückweicht, so bilden x, y und z doch stets zusammen das Minimum, bis in D das Dreieck ABC mit DBC zusammenfällt. Weicht A auf der Verlängerung von AD noch weiter zurück, so wird x negativ und $\angle\ BAC > 120^\circ$. Daraus folgt, dass für Dreiecke, die einen grösseren Winkel als 120° haben, kein Min. statt findet, in so fern negative Werthe von x, y und z ausgeschlossen sind.

XV.

Ueber die Aehnlichkeit der Curven und Körper.

Von

Herrn Brenner,

Lehrer zu Tuttlingen im Königreich Würtemberg.

A. Polygone oder gebrochene Linien sind ähnlich, wenn sie gleich viel Seiten und Winkel haben, wenn die in gleicher Reihenfolge liegenden Winkel einander gleich sind, und die gleiche Winkel einschliessenden Seiten nach derselben Reihenfolge einander proportional sind. Homolog heissen diejenigen Seiten oder Stücke, z. B. Diagonalen, die die Schenkel der gleichen Winkel sind. Homolog heissen ferner zwei Punkte, von denen aus man jedes Polygon in ähnliche Dreiecke zu theilen im Stande ist, wofern in jedes Eck ein Strahl gezogen wird. Demnach sind auch diejenigen Ecken der Polygone oder gebrochenen Linien homolog, die die Scheitel gleicher Winkel enthalten. Gerade Linien heissen homolog, welche die Verbindung zweier homologen Punkte vermitteln, und man schreibt ihnen eine homologe Lage zu, selbst wenn man sich dieselben unbegrenzt denkt. In letzterm Fall heissen sie auch homologe Axen, welche nichts anders sind, als eine ununterbrochene Reihenfolge homologer Punkte. Diejenigen Seiten homologer Axen nennt man ebenfalls homolog, auf denen die ähnlichen Theile der Polygone liegen. Zieht man von beliebigen homologen Punkten im Umfang des Polygons oder in der gebrochenen Linie auf homologe Axen senkrechte Linien, so sind nicht nur diese Senkrechten selbst homolog, sondern sie schneiden von jenen Axen auch homologe Stücke ab.

B. Man bezeichne die Seiten zweier ähnlichen n Ecke durch $s', s'', s''', s''''\ldots\ldots s^n$ und $S', S'', S''', S''''\ldots\ldots S^n$, wo die mit gleichen Stellenzeigern versehenen homolog sind, so hat man

$$\frac{S'}{s'} = \frac{S''}{s''},$$

$$\frac{S''}{s''} = \frac{S'''}{s'''},$$

$$\frac{S'''}{s'''} = \frac{S''''}{s''''},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{S^{n-1}}{s^{n-1}} = \frac{S^n}{s^n}.$$

Multiplicirt man je die 2 ersten, 3 ersten u. s. w. Gleichungen mit einander, so hat man

$$\frac{S'}{s'} = \frac{S''}{s''} = \frac{S'''}{s'''} = \frac{S''''}{s''''} \ldots = \frac{S^n}{s^n}.$$

Alle diese Verhältnisse $\frac{S'}{s'}, \frac{S''}{s''}, \ldots \frac{S^n}{s^n}$ haben demnach eine constante Grösse, die wir gleich c setzen, und dann haben wir

$$\frac{S'}{s'} = \frac{S''}{s''} \ldots = \frac{S^n}{s^n} = c.$$

Dasselbe constante Verhältsiss lässt sich für alle homologen Linien nachweisen, z. B. auch für die oben berührten Senkrechten und die durch dieselben von homologen Axen abgeschnittenen Stücke.

C. Da sich nun jede Curve als ein Polygon oder als eine gebrochene Linie von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten betrachten lässt, so gilt alles oben Gesagte auch von ähnlichen Curven. Die Curven aber sind in der Regel durch Gleichungen gegeben, und so lässt sich demnach die Frage stellen: **Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit zwei Curven ähnlich sind?**

Nehmen wir zwei beliebige ähnliche Curven an, legen ihre Coordinaten-Axen homolog, und stellen wir die Coordinaten der erstern durch x, y, die der letztern durch x', y', vor, so haben wir, wenn wir uns in diesen Curven zwei homologe durch (x, y) und (x', y') gegebene Punkte denken:

$$\frac{y'}{y} = c \text{ und eben so } \frac{x'}{x} = c.$$

Ist demnach die Gleichung der einen Curve $y = f(x)$, der andern $y' = \varphi(x')$; so ist

$$\frac{\varphi(x')}{f(x)} = c \text{ oder } \frac{\varphi(cx)}{f(x)} = c.$$

Diess ist die Bedingung der Aehnlichkeit, und man sieht, **dass** die beiden Funktionen f und φ dieselbe Form haben müssen.

Die Bedingungen aber, die die einzelnen Coefficienten der Veränderlichen x und x' zu erfüllen haben, finden sich, wenn man in $\varphi(x')$ die Veränderliche $x'=cx$ setzt, die Funktion $f(x)$ mit c multiplicirt und in der Gleichung

$$\varphi(cx)=cf(x)$$

die Coefficienten der gleichen Potenzen von x einander gleich setzt, x mag mit irgend welchen Vorzeichen versehen sein, oder nicht, z. B. mit trigonometrischen oder logarithmischen. Nur müssen die den Vorzeichen voranstehenden Coefficienten, wofern sie sich nicht unmittelbar vor x setzen, d. h wofern sie sich nicht unter das Vorzeichen bringen lassen, gleichfalls einander gleich gesetzt werden.

In Beziehung auf implicite Funktionen y von x, die durch eine Gleichung zwischen y und x gegeben sind, ist Folgendes zu bemerken, immer unter der Voraussetzung, dass von homologen Axen ausgegangen wird.

Obschon die Auflösung einer solchen Gleichung mehrere Funktionen y von x liefert, so stellt immerhin Eine Gleichung nur Eine Curve dar und die verschiedenen Werthe von y repräsentiren nur verschiedene Zweige der Curve. Sollen nun zwei Gleichungen durchaus gleich viele und lauter ähnliche Zweige liefern, so kann diess nicht anders sein, als wenn beide für y gleichviele und durchaus Funktionen von derselben Form (von x) darbieten, und diess findet nur statt, wenn auch beide Gleichungen durchaus dieselbe Form haben. Die Aehnlichkeitsbedingungen werden sich hierauf dadurch finden, dass man in die Gleichung zwischen x' und y' durchweg y' durch cy und x' durch cx ersetzt, und die Coefficienten der gleichen Potenzen von x und y einander gleich setzt, mit welchen sonstigen Vorzeichen x und y auch behaftet sein mögen.

Um für die vorgelegte Form der Gleichungen die möglichst kleine Anzahl von Bedingungen zu erhalten, wird man vorher jede Gleichung mit einer möglichst kleinen Anzahl von Coefficienten oder Constanten darstellen.

So lässt sich z. B. die Gleichung

$$ay^2+bx+cx^2=0 \text{ einfacher durch}$$
$$y^2+Ax+Bx^2=0 \text{ ausdrücken.}$$

Coefficienten vor logarithmischen und Wurzelgrössen lassen sich unter das Zeichen bringen.

So lässt sich

$a\log x^n$ darstellen durch $\log x^m$ (oder auch durch $A\log x$) und

$$a\sqrt{b+cx^2} \text{ durch } \sqrt{A+Bx^2}.$$

Da die Verhältnisszahl c unbestimmt ist, so kann man dieses c vermittelst einer der erhaltenen Gleichungen eliminiren, wodurch sich die Anzahl der Bedingungsgleichungen auf eine weniger reducirt. Dennoch ist es leicht, c zu bestimmen und dann wird c den linearen und c^2 den quadratisch vergrösserten Zustand der durch die Gleichung zwischen x' und y' dargestellten Curve bezeichnen.

1. Beispiel.

Man habe die Gleichungen

1) $y^2+ax+bx^2=0$ und

2) $y'^2+Ax'+Bx'^2=0$, so ist, $y'=cy$ und $x'=cx$ setzend, $c^2y^2+Acx+Bc^2x^2=0$, und mit c^2 dividirend:

$y^2+\frac{A}{c}x+Bx^2=0$. Die Vergleichung mit 1) gibt $a=\frac{A}{c}$, woraus $c=\frac{A}{a}$ und

$b=B$ als die einzige stattfindende Bedingung.

2. Beispiel.

Man habe

1) $y=a\sqrt{b+ex^2}$,

2) $y'=A\sqrt{B+Ex'^2}$, so ist, wenn $y'=cy$ und $x'=cx$

gesetzt wird, so wie die vor dem Wurzelzeichen stehenden Coefficienten unter dasselbe gebracht werden:

$$y=\sqrt{a^2b+a^2ex^2},$$

$$y=\sqrt{\frac{BA^2}{c^2}+A^2Ex^2};\text{ woraus}$$

$$a^2b=\frac{A^2B}{c^2},\text{ welches gibt } c=\frac{A}{a}\sqrt{\frac{B}{b}};\text{ und}$$

$$a^2e=A^2E.$$

3. Beispiel.

1) $y=a\sin bx+e\cos fx$ und

2) $y'=A\sin Bx'+E\cos Fx'$ geben

$$y = \frac{A}{c} \sin Bcx + \frac{E}{c} \cos Fcx \text{ und}$$

$$a = \frac{A}{c}, \text{ welches gibt } c = \frac{A}{a},$$

$$b = Bc,$$

$$e = \frac{E}{c},$$

$$f = Fc.$$

Die Eliminationen aber liefern:

$$b = \frac{BA}{a},$$

$$e = \frac{aE}{A},$$

$$f = \frac{AF}{a}.$$

4. Beispiel.

1) $y = a\sqrt{b + e\cos^2 fx}$,

2) $y' = A\sqrt{B + E\cos^2 Fx'}$ liefern

$$y = \sqrt{a^2 b + a^2 e \cos^2 fx},$$

$$y = \sqrt{\frac{A^2 B}{c^2} + \frac{E A^2}{c^2} \cos Fcx}; \text{ folglich}$$

$$a^2 b = \frac{A^2 B}{c^2}, \text{ woraus } c = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{B}{b}},$$

$$a^2 e = \frac{A^2 E}{c^2} \text{ oder } \frac{e}{b} = \frac{E}{B},$$

$$f = Fc \text{ oder } f = \frac{FA}{a}\sqrt{\frac{B}{b}}.$$

D. Hat man aber Polarcoordinaten, so nehme man die Axen mit homologer Lage und als Anfangspunkt homologe Punkte. Bei gleichen Winkeln v, die nach den homologen Seiten der Axen gezählt werden, sind die beiden Radii vectores r und r' selbst homolog, und so hat man $\frac{r'}{r} = c$, bei demselben v. Die Bedingungen der Aehnlichkeit werden sich daher einfach dadurch ergeben, dass man r' durch rc ersetzt, die beiden v aber einander gleich macht, und im Uebrigen ganz wie oben verfährt, während auch hier dieselben Bemerkungen in Beziehung auf die Vorzeichen von v und r' gelten. Dass hierin auch das Verfahren für implicite Funktionen eingeschlossen ist, wird kaum zu erinnern nöthig sein, eben so wenig als dass beide Gleichungen zwischen r und v, r' und v' durchaus dieselbe Form haben müssen.

Hat man z. B.

$$r=\frac{a}{b\sin ev+f\cos gv} \text{ und}$$

$$r'=\frac{A}{B\sin Ev+F\cos Gv},$$

so gehen diese zwei Gleichungen nach obigem Verfahren über in

$$r=\frac{\frac{a}{b}}{\sin ev+\frac{f}{b}\cos gv} \text{ und}$$

$$r=\frac{\frac{A}{Bc}}{\sin Ev+\frac{F}{B}\cos Gv}, \text{ woraus folgt}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{A}{Bc}, \text{ welches gibt}: c=\frac{A}{B}\cdot\frac{b}{a},$$

$$E=e,$$

$$\frac{F}{B}=\frac{f}{b} \text{ und}$$

$$G=g.$$

F. Aus dem Obigen folgt, dass sich desto mehr Bedingungen der Aehnlichkeit darstellen, je mehr die Gleichung constante Coefficienten hat.

Jede Curve aber lässt sich durch verschiedene Gleichungsformen darstellen, d. h. durch Gleichungen mit mehr oder weniger Constanten; und zwar bietet die allgemeinste Gleichung einer Curve die möglich grösste Anzahl von Constanten dar, während die einfachste Gleichung die möglich kleinste Anzahl derselben enthält. Geht man nemlich für eine vorgelegte allgemeinste Gleichung auf ein neues Coordinaten-System über, dessen Axen durch ξ und ν repräsentirt sein mögen, so hat man, wenn die Coordinaten des neuen Anfangspunktes a und b sind, so wie der Winkel, den die Axe der ξ mit der Axe der x macht, gleich v gesetzt wird,

$$x=a+\xi\cos v-\nu\sin v,$$

$$y=b+\xi\sin v+\nu\cos v.$$

Substituirt man nun diese Werthe für x und y in die allgemeinste Gleichung, so kann man über die drei beliebigen Grössen a, b und v auf solche Weise verfügen, dass im Allgemeinen drei Coefficienten auf Null gebracht werden. Daraus folgt

1) dass zwei Curven ähnlich sein können, wenn auch die Form ihrer Gleichungen nicht dieselbe ist, in welchem Falle ihre Axen keine homologe Lage haben;

2) dass nur dann die möglich kleinste Anzahl von Aehnlichkeitsbedingungen zum Vorschein kommt, wenn die Form der Gleichungen die einfachste ist.

Will man daher die Aehnlichkeit zweier Curven untersuchen, so versuche man, ihren Gleichungen durch Coordinaten-Verwandlung dieselbe Form zu geben, wobei zu bemerken, dass man natürlich keine Aehnlichkeit vermuthen darf, wenn die eine Gleichung transcendent ist, die andere aber nicht, oder wenn beide ungleich transcendent sind.

Will man aber die möglich kleinste Anzahl von Bedingungsgleichungen erhalten, so gebe man jeder Gleichung ihre einfachste Form und stelle die Bedingungen ganz nach oben angegebener Weise auf, oder noch besser, man nehme die Coordinaten-Verwandlung nur in Beziehung auf Eine Curve vor, stelle, wie oben, die Aehnlichkeitsbedingungen auf, wodurch, wenn wirklich Aehnlichkeit vorhanden ist, eine homologe Lage der Axen bezweckt wird, und eliminire zuletzt, aus den erhaltenen Gleichungen, nebst c, noch a, b und v.

So enthält z. B. die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte

$$y^2 + Ax^2 + Bxy + Cy + Dx + E = 0$$

fünf Constanten, woraus sich zunächst fünf Bedingungsgleichungen ergeben. Die Elimination von c, a, b und v reducirt sie aber auf Eine, woraus folgt, dass im Allgemeinen für die Kegelschnitte höchstens Eine Aehnlichkeitsbedingung existirt.

F. Interessant ist auch die Untersuchung der Frage: Welche bekannteren Curven sind unbedingt und welche nur bedingt ähnlich?

Um diese Frage zu beantworten, ist es unumgänglich nöthig, die einfachste Form der Gleichungen zu wählen.

1) Die Gleichung der geraden Linie ist

$$y=0, \quad y'=0 \text{ oder } cy=0;$$

woraus weder eine Bedingungsgleichung noch eine Bestimmung für c hervorgeht. In der That lässt sich die Gerade ganz beliebig als Curve oder gebrochene Gerade betrachten, wo zwei aneinander stossende Seiten einen Winkel von 180° mit einander machen. Setzt man $c=1$, so sind beide Gerade congruent.

2) Die Gleichung des Kreises ist

$$y^2 + x^2 = r^2, \quad y'^2 + x'^2 = R^2.$$

Aus der letztern ist

$$y^2+x^2=\frac{R^2}{c^2}, \text{ daher } r=\frac{R}{c} \text{ und } c=\frac{R}{r}.$$

Demnach sind alle Kreise unbedingt ähnlich, wie auch aus der Elementargeometrie bekannt.

3) Die Gleichung der Parabel ist

$$y^2=2px, \quad y'^2=2Px'; \quad \text{daher}$$

$$y^2=\frac{2P}{c}x, \quad p=\frac{P}{c} \text{ und } c=\frac{P}{p}.$$

Alle Parabeln sind unbedingt ähnlich.

4) Diess findet überhaupt für alle zweigliedrigen Curven statt. Denn habe ich

$$y^n+px^m=0, \quad y'^n+Px'^m=0;$$

so ist

$$y^n+Pc^{m-n}x^m=0 \text{ und } p=Pc^{m-n},$$

woraus

$$c=\sqrt[m-n]{\frac{p}{P}}.$$

5) Die Gleichung der gemeinen Cycloide ist

$$x=r\,\mathrm{arc}\,(\sin.\mathrm{vers}.=\frac{y}{r})-\sqrt{2ry-y^2},$$

$$x'=R\,\mathrm{arc}\,(\sin.\mathrm{vers}.=\frac{y'}{R})-\sqrt{2Ry'-y'^2};$$

wo r und R die Radii der Erzeugungskreise bedeuten. Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$x=\frac{R}{c}\,\mathrm{arc}\,(\sin.\mathrm{vers}.=\frac{cy}{R})-\sqrt{\frac{2R}{c}y-y^2}.$$

Diese Gleichung fällt mit der ersten zusammen, wenn man setzt

$$r=\frac{R}{c}, \text{ woraus } c=\frac{R}{r}.$$

Demnach sind alle gemeinen Cycloiden ähnlich.

6) Anders verhält es sich mit der Ellipse und Hyperbel. Ihre Gleichung in Polar-Coordinaten ist:

$$r=\frac{p}{1+e\cos v},\quad r'=\frac{P}{1+E\cos v};$$

woraus

$$r=\frac{\frac{P}{c}}{1+E\cos v},\quad p=\frac{P}{c},\ \text{oder}\ c=\frac{P}{p}\ \text{und}\ e=E.$$

Zwei Ellipsen oder Hyperbeln sind also nur dann ähnlich, wenn ihre Excentricitäten gleich sind.

Will man auf die Axen übergehen, so hat man

$$p=\pm a(1-e^2),\qquad P=\pm A(1-E^2);$$

$$e^2=1\mp\frac{b^2}{a^2},\qquad E^2=1\mp\frac{B^2}{A^2};$$

woraus man ableitet $A=ca$ und $B=cb$, und wenn man c eliminirt:

$$A:a=B:b.$$

G. Will man aber eine Curve construiren, die einer gegebenen ähnlich ist, so kann man sich entweder vorsetzen:

1) die neue Curve um ein gegebenes Vielfaches vergrössert oder verkleinert darzustellen. In diesem Fall muss man der Verhältnisszahl c den bestimmten Vergrösserungswerth zuweisen, die neue Gleichung in derselben Form, nur mit unbestimmten Coefficienten, hinschreiben, und diese letzteren vermittelst obiger Bedingungsgleichungen bestimmen. Oder

2) kann man sich vorsetzen, irgend einen oder vielleicht mehreren Coefficienten einer bestimmten Zahl, z. B. der Einheit gleich zu bringen, wo dann c erst einen dieser Bedingung entsprechneden Werth erhalten wird.

Habe ich z. B.

$$y=\frac{a}{\sqrt{b+e\,\mathrm{tg}fx^2}},$$

so setze ich

$$y'=\frac{A}{\sqrt{B+E\,\mathrm{tg}Fx'^2}}.$$

Aus 1) habe ich

$$y=\frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+\frac{e}{a^2}\mathrm{tg}fx^2}}$$

und aus 2):

$$y=\frac{1}{\sqrt{\frac{Bc^2}{A^2}+\frac{Ec^2}{A^2}\operatorname{tg} Fc^2x^2}},$$

welches liefert

$$f=Fc^2,\quad \frac{b}{a^2}=\frac{Bc^2}{A^2},\quad \frac{e}{a^2}=\frac{Ec^2}{A^2}.$$

Hier kann man nun entweder F oder B oder E; oder zugleich B und A, E und A, nicht aber B und E der Einheit gleich setzen. Setzt man $B=A=1$, so ist

$$c=\frac{\sqrt{b}}{a};\quad E=\frac{e}{b}\ \text{und}\ F=\frac{fa}{\sqrt{b}}.$$

H. Alles, was über die Aehnlichkeit der Curven in der Ebene gesagt worden ist, lässt sich mit Leichtigkeit auch auf die Aehnlichkeit der Flächen, der Körper und der Curven im Raume ausdehnen, nur ist zu bemerken, dass, wenn die Bemerkungen in E. auf den Raum übertragen werden, man nicht bloss über drei, sondern über sechs beliebige Constanten der Coordinaten-Verwandlung frei verfügen kann, woraus sich die Folgerung von selbst ergibt. Auch hier haben die homologen Coordinaten homologer Punkte das constante Verhältniss c. Habe ich z. B. zwei Curven des Raumes, die durch folgende Gleichungen dargestellt werden:

$$y=ax+bx^2,\quad z=ex+fx^2$$

und

$$y'=Ax'+Bx'^2,\quad z'=Ex'+Fx'^2;$$

so setze ich

$$y'=cy;\quad z'=cz\ \text{und}\ x'=cx$$

und habe dann

$$y=Ax+Bcx^2,\quad z=Ex+Fcx^2$$

und folglich

$$a=A;\ e=E;\ b=Bc\ \text{und}\ f=Fc.$$

I. Sind zwei Differentialgleichungen gegeben, und ich will untersuchen, ob sie ähnliche Curven liefern, so kann ich bei ungleicher Form nicht auf die Nichtexistenz der Aehnlichkeit schliessen, weil eine und dieselbe Urgleichung sehr verschiedene Differentiale von jeder Ordnung haben kann und demnach die Möglichkeit vorhanden ist, dass zwei verschiedene Differentialgleichungen dieselben Integrale aufweisen können.

Allein wenn zwei Differentialgleichungen von derselben Form (also nur mit verschiedenen Constanten) vorhanden sind, so ist gewiss, dass sie auch Integrale von gleicher Form liefern, welche für die Curven-Aehnlichkeit bloss noch die oben angegebenen Bedingungen in ihren Coefficienten zu erfüllen haben. Diese Aehnlichkeit oder Unähnlichkeit lässt sich jedoch schon aus den constanten Coefficienten der Differentialgleichungen selbst absehen, indem man setzt:

$$y'=cy;\ x'=cx;$$
$$\partial y'=c\partial y;\ \partial x'=c\partial x;$$
$$\partial^2 y'=c\partial^2 y;\ \partial^2 x'=c\partial^2 x;\ \text{(woraus noch folgt):}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial y'}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial x};\ \frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}=\frac{\partial^2 y}{c\partial x^2}\ \text{u. s. w., oder}$$
$$\partial y'_{x'}=\partial y_x;\ \partial^2 y'_{x'}=\frac{1}{c}\,\partial^2 y_x\ \text{u. s. w.}$$

und hierauf die Coefficienten derselben Differentiale oder derselben Potenzen der Veränderlichen mit einander vergleicht.

Hat man ferner nur Eine Differentialgleichung, so kann man vermittelst obiger Methode eine andere Differentialgleichung darstellen, welche eine der obigen Curve ähnliche Curve liefert. Hiebei schreibt man sich eine Differentialgleichung von derselben Form, nur mit unbestimmten constanten Coefficienten, hin, setzt $y'=cy$, $x'=cx$, $\partial y'_{x'}=\partial y_x$ u. s. w. und macht die betreffenden Coefficienten beider Gleichungen einander gleich. Man kann hiemit den Zweck verbinden, eine der Constanten einem bestimmten Werth z. B. der Einheit gleich zu machen. Hat man hierauf das Integral gefunden $y'=f(x')$, so ist

$$y=\frac{1}{c}f(cx).$$

XVI.

Note sur l'intégrale définie

$$\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,\mathrm{Cos}\,nx\,\partial x.$$

Par

Monsieur D. Bierens de Haan

Docteur ès sciences à Deventer.

---

1. On a fait plusieurs fois la remarque, que plus une intégrale définie contient de constantes, plus elle peut donner lieu généralement à d'autres intégrales définies, non-seulement en les spécialisant, mais surtout par l'application des théorèmes plus ou moins généraux de cette branche de l'analyse. Mon but est de traiter de cette manière l'intégrale mentionnée ci-dessus, qui en fournira plusieurs autres, à ce que je crois nouvelles.

Cette intégrale définie:

$$\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,\mathrm{Cos}\,nx\,\partial x=-\pi\frac{r^n}{n} \qquad (1)$$

$$\text{et}\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,\partial x=0 \qquad (2),$$

[où dans la première $n>0\ldots(\alpha)$ et partout $+1\geqq r\geqq-1\ldots(\beta)$]

bien connue, se trouve entre autres dans les Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale du Prof. Dr. O. Schlömilch, page 34. Nr. [10] et [11].

Commençons par la constante r, et différentions par rapport à elle, il vient

$$\int_0^\pi\frac{-2\,\mathrm{Cos}\,x+2r}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}\mathrm{Cos}\,nx\,\partial x=-\pi r^{n-1},\int_0^\pi\frac{-2\,\mathrm{Cos}\,x+2r}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}\partial x=0;$$

d'où, puisque $\int_0^\pi \mathrm{Cos}\,nx\partial x = 0 \ldots (a) \ldots, \int_0^\pi \partial x = \pi \ldots (b)$,

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,nx\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}\,x+r^2}$$

$$=\frac{1}{1-r^2}\int_0^\pi \frac{(1-2r\mathrm{Cos}\,x+r^2)-r(-2\mathrm{Cos}\,x+2r)}{1-2r\mathrm{Cos}\,x+r^2}\mathrm{Cos}\,nx\partial x$$

$$=\frac{1}{1-r^2}(-r)(-\pi r^{n-1}) = \frac{\pi r^n}{1-r^2}, \tag{3}$$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}\,x+r^2} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{2r-(-2\mathrm{Cos}\,x+2r)}{1-2r\mathrm{Cos}\,x+r^2}\mathrm{Cos}\,nx\partial x$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{2\pi r^n}{1-r^2}r-(-\pi r^{n-1})\right\} = \frac{\pi}{2}\frac{1+r^2}{1-r^2}r^{n-1}, \tag{4}$$

$$\int_0^\pi \frac{\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}\,x+r^2}$$

$$=\frac{1}{1-r^2}\int_0^\pi \frac{(1-2r\mathrm{Cos}\,x+r^2)-r(-2\mathrm{Cos}\,x+2r)}{1-2r\mathrm{Cos}\,x+r^2}\partial x = \frac{\pi}{1-r^2} \tag{5}$$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,x\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}\,x+r^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{2r-(-2\mathrm{Cos}\,x+2r)}{1-2r\mathrm{Cos}\,x+r^2}\partial x = \frac{1}{2}.2r.\frac{\pi}{1-r^2} = \frac{\pi r}{1-r^2}. \tag{6}$$

La formule $\mathrm{Cos}\,(n-1)x = \mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x + \mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x \ldots (c)$

donne par l'application à (3) et (4)

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}\,x+r^2} = \frac{\pi r^{n-1}}{1-r^2} - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1+r^2}{1-r^2}r^{n-1} = \frac{\pi}{2}r^{n-1}. \tag{7}$$

Les formules (3), (5) et (7) sont respectivement les mêmes que Prof. Schlömilch a trouvées l. c. formules [7], [22] et [12]. Cette coincidence résulte des propriétés des séries, dont il a fait usage pour parvenir à ces intégrales, d'être les unes les dérivées des autres par rapport à r, ou du moins, de pouvoir être transformées aisément pour ce but.

Il y a de plus à observer, que les intégrales (5) et (6) auraient été trouvées par la substitution de $n=0$ et $n=1$ dans l'intégrale (3), qui jouit ainsi de la condition $n \geqq 0 \ldots (\gamma)$.

2. Quant à l'intégration par rapport à r il convient de faire usage des formules suivantes:

$$\int\frac{\partial r}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}=\frac{2}{\sqrt{[4-(2\,\mathrm{Cos}\,x)^2]}}\,\mathrm{Arctg}\left\{r\,\frac{\sqrt{[4-(2\mathrm{Cos}\,x)^2]}}{2+(-2\mathrm{Cos}\,x)r}\right\}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{Sin}\,x}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\,\ldots.(\mathrm{d})$$

$$\int\frac{r\partial r}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}=\frac{1}{2}l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)+\frac{\mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Sin}\,x}\cdot\mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x},$$

$$\int\frac{r^{-1}\partial r}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}=-\frac{1}{2}\,l\,\frac{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}{r^2}+\frac{\mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Sin}\,x}\mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x};$$

dont la somme et la différence donnent

$$\int\frac{\partial r}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}\,\frac{1+r^2}{r}=lr+2\,\frac{\mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Sin}\,x}\cdot\mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\ldots.(\mathrm{e})$$

$$\int\frac{\partial r}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}\,\frac{1-r^2}{r}=lr-l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\ldots.(\mathrm{f})$$

En appliquant la formule (d) à (5) et (6), et (e) à (6) [puisque l'application de (e) à (5) coincide avec celle de (d) à (6), comme il est aisé de voir] on obtient à l'aide de la transportation des fonctions sous les signes d'intégration dans les intégrales doubles, qui en résultent,

$$\int_0^\pi\mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\,\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x}=\pi\int\frac{\partial r}{1-r^2}=\frac{\pi}{2}\,l\,\frac{1+r}{1-r}\ldots\qquad(8)$$

$$\int_0^\pi\mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\,\frac{\mathrm{Cos}\,x\partial x}{\mathrm{Sin}\,x}=\pi\int\frac{r\partial r}{1-r^2}=-\frac{\pi}{2}l(1-r^2)\qquad(9)$$

et

$$\int_0^\pi\left[lr+2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\cdot\frac{\mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Sin}\,x}\right]\mathrm{Cos}\,x\partial x=\pi\int\frac{1+r^2}{1-r^2}\,\partial r$$

$$=\pi\left(-r+l\,\frac{1+r}{1-r}\right),$$

qui donne à l'aide de (a)

$$\int_0^\pi\mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\,\frac{\mathrm{Cos}^2x\partial x}{\mathrm{Sin}\,x}=\frac{\pi}{2}\left(l\,\frac{1+r}{1-r}-r\right).\qquad(10)$$

La différence de (8) et (10) donne

$$\int_0^\pi\mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\,\mathrm{Sin}\,x\partial x=\frac{\pi r}{2}\cdot\qquad(11)$$

Les formules (d) et (e) donnent de cette manière pour l'intégrale (1)

$$\int_0^\pi\mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\,\mathrm{Sin}\,nx\partial x=\frac{\pi}{2}\int r^{n-1}\,\partial r=\frac{\pi}{2}\,\frac{r^n}{n}\qquad(12)$$

13*

$$\int_0^\pi \left[lr + 2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x} \cdot \frac{\mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Sin}\,x} \right] \mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x\partial x$$

$$= \frac{\pi}{2} \int r^{n-2}(1+r^2)\partial r = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r^{n-1}}{n-1} + \frac{r^{n+1}}{n+1}\right)$$

ou, puisque $\int_0^\pi \mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x\partial x = 0 \ldots.$ (g):

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\,\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x\partial x = \frac{\pi}{4}\left(\frac{r^{n+1}}{n+1} + \frac{r^{n-1}}{n-1}\right) \ldots. (13)$$

Au moyen de la formule $\mathrm{Sin}\,(n+1)x = \mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x + \mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x$ (h)

on a par les intégrales (12) et (13) à l'aide de la substitution de $n+1$ au lieu de n dans (12):

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\,\mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x\partial x = \frac{\pi}{2}\frac{r^{n-1}}{n+1} - \frac{\pi}{4}\left(\frac{r^{n+1}}{n+1} + \frac{r^{n-1}}{n-1}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{r^{n+1}}{n+1} - \frac{r_{n-1}}{n-1}\right). \qquad (14)$$

Enfin on obtient par l'application de la formule (f) aux intégrales (4) et (7) au moyen de la même méthode que ci-dessus

$$\int_0^\pi [lr - l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x + r^2)]\,\mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x\partial x = \frac{\pi}{2}\int (1+r^2)\,r^{n-2}\partial r$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{r^{n-1}}{n-1} + \frac{r^{n+1}}{n+1}\right),$$

$$\int_0^\pi [lr - l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x + r^2)]\,\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x\partial x = \frac{\pi}{2}\int (1-r^2)\,r^{n-2}\partial r$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{r^{n-1}}{n-1} - \frac{r^{n+1}}{n+1}\right),$$

d'où à cause de (g) et de $\int_0^\pi \mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x\partial x = 0 \ldots.$ (i

$$\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x + r^2)\,\mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x\partial x = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{r^{n+1}}{n+1} + \frac{r^{n-1}}{n-1}\right) \quad (15)$$

$$\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x + r^2)\,\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x\partial x = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r^{n+1}}{n+1} - \frac{r^{n-1}}{n-1}\right). \quad (16)$$

L'application de la formule (f) aux intégrales (3) et (5) reproduirait les intégrales (1) et (2). — L'intégrale (11) rentre dans (12) pour $n=1$.

Les deux dernières intégrales auraient pu être calculées au moyen de l'intégrale (1) à l'aide des formules connues

$$2\,\mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x = \mathrm{Cos}\,(n-1)\,x + \mathrm{Cos}\,(n+1)\,x \ldots (\mathrm{k})$$

$$\text{et}\quad 2\,\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Cos}\,(n-1)\,x - \mathrm{Cos}\,(n+1)\,x \ldots (\mathrm{l})$$

comme aussi les intégrales (4) et (7) au moyen de (3); de même on trouverait les intégrales (13) et (14) au moyen de (12) par les formules anologues

$$2\,\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x = \mathrm{Sin}\,(n+1)x + \mathrm{Sin}\,(n-1)x \ldots (\mathrm{m})$$

$$\text{et}\quad 2\,\mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Sin}\,(n+1)x - \mathrm{Sin}\,(n-1)\,x \ldots (\mathrm{n}).$$

De ces diverses intégrales les (8) et (10) se trouvent chez Prof. Schlömilch l. c. form. [31] et [14], la dernière pour une raison semblable à celle mentionnée pour nos intégrales (3), (5) et (7).

On a ici partout la condition $n > 0 \ldots (\alpha)$.

3. Passons à la constante n, et commençons par la différentiation par rapport à n. A cause de la conformité entre les valeurs des intégrales (1) et (12), on peut les combiner: on obtient alors:

$$-\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,\mathrm{Cos}\,nx\,\partial x$$

$$= +2\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\;\mathrm{Sin}\,nx\,\partial x = \pi r^n\,\frac{1}{n},$$

$$+\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,x\,\mathrm{Sin}\,nx\,\partial x$$

$$= +2\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\;x\,\mathrm{Cos}\,nx\,\partial x = \pi r^n\,\frac{nlr-1}{n^2},$$

$$+\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,x^2\,\mathrm{Cos}\,nx\,\partial x$$

$$= -2\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\;x^2\,\mathrm{Sin}\,nx\,\partial x = \pi r^n\,\frac{(nlr)^2-2(nlr-1)}{n^3},$$

$$-\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,x^3\,\mathrm{Sin}\,nx\,\partial x$$

$$= -2\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\;x^3\,\mathrm{Cos}\,nx\,\partial x = \pi r^n\,\frac{(nlr)^2(nlr-3)+2.3(nlr-1)}{n^4},$$

$$-\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,x^4\,\mathrm{Cos}\,nx\,\partial x$$

$$= +2\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\;x^4\,\mathrm{Sin}\,nx\,\partial x,$$

$$=\pi r^n \frac{(nlr)^4-4(nlr)^2(nlr-3)-2.3.4(nlr-1)}{n^5}$$

etc. etc. etc.

d'où se déduisent aisément les formules générales pour $p \geqq 0$ et entier (δ):

$$\int_0^\pi l(1-2r\operatorname{Cos}x+r^2)x^{2p}\operatorname{Cos}nx\partial x$$

$$=-2\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{r\operatorname{Sin}x}{1-r\operatorname{Cos}x}\,x^{2p}\operatorname{Sin}nx\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi r^n}{n^{2p+1}}\left\{\begin{array}{c}2.3....2p(1-nlr)+4.5....2p(3-nlr)(nlr)^2\\ +6.7....2p(5-nlr)(nlr)^4+.......\\ ....+2p(2p-1-nlr)(nlr)^{2p-2}+(nlr)^{2p}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi r^n\Gamma(2p+1)}{n^{2p+1}}\Big[(1-nlr)+\frac{3-nlr}{2.3}(nlr)^2+\frac{5-nlr}{2.3.4.5}(nlr)^4+....$$

$$...+\frac{(2p-1)-nlr}{\Gamma(2p)}(nlr)^{2p-2}+\frac{(nlr)^{2p}}{\Gamma(2p+1)}\Big],$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi r^n\Gamma(2p+1)}{n^{2p+1}}\Big[1-\frac{nlr}{1}+\frac{(nlr)^2}{1.2}-\frac{(nlr)^3}{2.3}$$

$$+\frac{(nlr)^4}{2.3.4}-\frac{(nlr)^5}{2.3.4.5}+......-\frac{(nlr)^{2p-1}}{\Gamma(2p)}+\frac{(nlr)^{2p}}{\Gamma(2p+1)}\Big]$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi r^n\Gamma(2p+1)}{n^{2p+1}}\sum_{a=0}^{a=2p}\frac{(-nlr)^a}{\Gamma(a+1)}, \qquad (17 \text{ et } 18)$$

$$\int_0^\pi l(1-2r\operatorname{Cos}x+r^2)x^{2p+1}\operatorname{Sin}nx\partial x$$

$$=+2\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{r\operatorname{Sin}x}{1-r\operatorname{Cos}x}\,x^{2p+1}\operatorname{Cos}nx\partial x$$

$$=\frac{(-1)^p\pi r^n}{n^{2p+2}}\left\{\begin{array}{c}2.3...(2p+1)(nlr-1)+4.5...(2p+1)(nlr-3)(nlr)^2\\ +6.7...(2p+1)(nlr-5)(nlr)^4+...\\ ...+(nlr-2p-1)(nlr)^{2p}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi r^n\Gamma(2p+2)}{n^{2p+2}}\sum_{a=0}^{a=2p+1}\frac{(-nlr)^a}{\Gamma(a+1)} \qquad (19 \text{ et } 20)$$

Il résulte de la conformité entre les valeurs des intégrales (13) et (15), (14) et (16) respectivement, qui dépend seulement de celle entre (1) et (12), qu'on ait en se servant des formules (k) à (n)

$$+2\int_0^\pi l(1-2r\operatorname{Cos}x+r^2)\operatorname{Cos}nx\operatorname{Cos}x\partial x$$

$$=-4\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\,\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x\partial x$$

$$=\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,\mathrm{Cos}\,(n-1)\,x\partial x$$

$$+\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,\mathrm{Cos}\,(n+1)\,x\partial x,$$

$$+2\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x\partial x$$

$$=+4\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\,\mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x\partial x$$

$$=\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,\mathrm{Cos}\,(n-1)\,x\partial x$$

$$-\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,\mathrm{Cos}\,(n+1)\,x\partial x.$$

Si donc on différentie les premiers membres de ces équations par rapport à n, le résultat pourra se déduire des formules (17) et (19) en y faisant successivement n égal à $n-1$ et à $n+1$; tandis que le nouveau facteur $\mathrm{Cos}\,x$ ou $\mathrm{Sin}\,x$, ne contenant pas de n, la forme des intégrales elles-mêmes sera celle des intégrales (17 et 18), (19 et 20) sauf le facteur $\mathrm{Cos}\,x$ ou $\mathrm{Sin}\,x$, qui s'y est introduit. Ainsi on aura, en faisant attention au changement de signe, introduit par la différentiation, après une reduction facile:

(21 et 22)

$$\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,x^{2p}\,\mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x\partial x$$

$$=-2\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\,x^{2p}\,\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi r^{n-1}\Gamma(2p+1)}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{(n-1)^{2p+1}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p}\dfrac{\{-(n-1)\,lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\\[2ex] +\dfrac{r^2}{(n+1)^{2p+1}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p}\dfrac{\{-(n+1)\,lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\},$$

(23 et 24)

$$\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,x^{2p+1}\,\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x\partial x$$

$$=2\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\,x^{2p+1}\,\mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi r^{n-1}\Gamma(2p+2)}{2}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(n-1)^{2p+2}}\sum_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(n-1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ +\frac{r^2}{(n+1)^{2p+2}}\sum_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(n+1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\}$$

(25 et 26)

$$\int_0^\pi l(1-2r\operatorname{Cos}x+r^2)x^{2p}\operatorname{Sin}nx\operatorname{Sin}x\partial x$$

$$=2\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{r\operatorname{Sin}x}{1-r\operatorname{Cos}x}x^{2p}\operatorname{Cos}nx\operatorname{Sin}x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi r^{n-1}\Gamma(2p+1)}{2}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(n-1)^{2p+1}}\sum_{a=0}^{a=2p}\frac{\{-(n-1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ -\frac{r^2}{(n+1)^{2p+1}}\sum_{a=0}^{a=2p}\frac{\{-(n+1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\}$$

(27 et 28)

$$\int_0 l(1-2r\operatorname{Cos}x+r^2)x^{2p+1}\operatorname{Cos}nx\operatorname{Sin}x\partial x$$

$$=-2\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{r\operatorname{Sin}x}{1-r\operatorname{Cos}x}x^{2p+1}\operatorname{Sin}nx\operatorname{Sin}x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p}\pi r^{n-1}\Gamma(2p+2)}{2}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(n-1)^{2p+2}}\sum_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(n-1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ -\frac{r^2}{(n+1)^{2p+2}}\sum_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(n+1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\}.$$

4. En différentiant les formules (3) et (4) par rapport à n, on obtient, en observant la conformité des valeurs de ces intégrales quant à cette constante:

$$-\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin}nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}x=\frac{2r}{1-r^2}\int_0^\pi\frac{\operatorname{Cos}nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}x\operatorname{Sin}x$$

$$=\frac{\pi}{1-r^2}r^n lr,$$

$$-\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos}nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}x^2=-\frac{2r}{1-r^2}\int_0^\pi\frac{\operatorname{Sin}nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}x^2\operatorname{Sin}x$$

$$=\frac{\pi}{1-r^2}r^n(lr)^2$$

$$+\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}nx\,\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}x+r^2}x^3 = -\frac{2r}{1-r^2}\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}nx\,\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}x+r^2}x^3\mathrm{Sin}x$$

$$= \frac{\pi}{1-r^2}r^n(lr)^3,$$

d'où l'on conclut généralement:

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}nx\,\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}x+r^2}x^{2p} = (-1)^p\frac{\pi}{1-r^2}r^n(lr)^{2p}, \tag{29}$$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}nx\,\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}x+r^2}x^{2p+1} = (-1)^{p+1}\frac{\pi}{1-r^2}r^n(lr)^{2p+1}, \tag{30}$$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}nx\,\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}x+r^2}x^{2p}\mathrm{Sin}x = (-1)^p\frac{\pi}{2}r^{n-1}(lr)^{2p}, \tag{31}$$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}nx\,\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}x+r^2}x^{2p+1}\mathrm{Sin}x = (-1)^p\frac{\pi}{2}r^{n-1}(lr)^{2p+1}. \tag{32}$$

Au contraire en multipliant de part et d'autre simplement par ∂n, et en intégrant par rapport à n, on trouve

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}nx\,\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}x+r^2}\frac{1}{x}$$

$$= -\frac{2r}{1-r^2}\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}nx\,\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}x+r^2}\frac{\mathrm{Sin}x}{x} = \frac{\pi}{1-r^2}\frac{r^n}{lr},$$

$$-\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}nx\,\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}x+r^2}\frac{1}{x^2}$$

$$= -\frac{2r}{1-r^2}\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}nx\,\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}x+r^2}\frac{\mathrm{Sin}x}{x^2} = \frac{\pi}{1-r^2}\frac{r^n}{(lr)^2},$$

$$-\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}nx\,\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}x+r^2}\frac{1}{x^3}$$

$$= +\frac{2r}{1-r^2}\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}nx\,\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}x+r^2}\frac{\mathrm{Sin}x}{x^3} = \frac{\pi}{1-r^2}\frac{r^n}{(lr)^3}.$$

Ainsi on a les formules générales:

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}nx\,\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}x+r^2}\frac{1}{x^{2p}} = (-1)^p\frac{\pi}{1-r^2}\frac{r^n}{(lr)^{2p}}, \tag{33}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin} nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}\,\frac{1}{x^{2p+1}}=(-1)^p\,\frac{\pi}{1-r^2}\,\frac{r^2}{(lr)^{2p+1}}, \tag{34}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin} nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}\,\frac{\operatorname{Sin}x}{x^{2p}}=(-1)^p\,\frac{\pi}{2}\,\frac{r^{n-1}}{(lr)^{2p}}, \tag{35}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos} nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}\,\frac{\operatorname{Sin}x}{x^{2p+1}}=(-1)^{p+1}\frac{\pi}{2}\,\frac{r^{n-1}}{(lr)^{2p}}. \tag{36}$$

On déduit des intégrales (4) et (7) la relation

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos} nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}\operatorname{Cos}x=\frac{1+r^2}{1-r^2}\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin} nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}\operatorname{Sin}x,$$

dont on conclut, puisque leur rapport est indépendant de n, que la différentiation et l'intégration par rapport à la constante n de cette intégrale (4) nous fourniront les suivantes:

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos} nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}\,x^{2p}\operatorname{Cos}x=(-1)^p\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1+r^2}{1-r^2}\,r^{n-1}(lr)^{2p}, \tag{37}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin} nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}\,x^{2p+1}\operatorname{Cos}x=(-1)^{p+1}\frac{\pi}{2}\,\frac{1+r^2}{1-r^2}\,r^{n-1}(lr)^{2p+1} \tag{38}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos} nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}\,\frac{\operatorname{Cos}x}{x^{2p}}=(-1)^p\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1+r^2}{1-r^2}\,\frac{r^{n-1}}{(lr)^{2p}} \tag{39}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin} nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}\,\frac{\operatorname{Cos}x}{x^{2p+1}}=(-1)^{p+1}\frac{\pi}{2}\,\frac{1+r^2}{1-r^2}\,\frac{r^{n-1}}{(lr)^{2p}} \tag{40}$$

De ces intégrales toutes sont soumises à la condition $n>0$ (α) exceptées les (29) et (30), qui jouissent de la condition $n \geqq 0$.... (γ) à cause de la formule (3) dont elles sont déduites. De même on a partout $p \geqq 0$ et entier (δ). De plus la condition $1 \geqq r \geqq -1$ (β) se change dans les intégrales (17) à (40) dans la suivante $1 \geqq r \geqq$ ....0 (ε), puisque les valeurs de toutes ces intégrales sont des fonctions (lr) et ainsi valent seulement pour des valeurs positives de r.

Les intégrales (17) à (40) se divisent naturellement en quatres groupes, savoir:

17, 19, 21, 23, 25 et 27
18, 20, 22, 24, 26 et 28

et

29, 32, 33, 36, 37 et 39
30, 31, 34, 35, 38 et 40

dont les deux derniers groupes surtout sont assez simples.

5. Après avoir vu de nouveau la fertilité de ces principaux théorèmes, la différentiation et l'intégration par rapport à une constante sous le signe d'intégration définie, passons à l'usage d'une propriété curieuse, dont jouissent les fonctions

$$l(1-2r\mathrm{Cos}x+r^2),\ (1-2r\mathrm{Cos}x+r^2)^{-1} \text{ et } \mathrm{Arctg}\frac{r\mathrm{Sin}x}{1-r\mathrm{Cos}x}$$

et qui nous servira, non-seulement à obtenir quelques nouvelles intégrales, mais aussi à réduire la limite de quelques unes de nos intégrales π à son double, moyennant quelque restriction à l'égard des constantes.

Prenons à ce but r successivement positif et négatif et faisons $r^2=\varrho \ldots\ldots (\zeta)$; de sorte qur pour cette nouvelle constante la condition (β) devienne

$$1 \geqq \varrho \geqq 0 \ldots\ldots (\eta).$$

On obtient alors

$$(\mathrm{o})$$

$$l(1-2r\mathrm{Cos}x+r^2)+l(1+2r\mathrm{Cos}x+r^2)=l[(1+r^2)^2-(2r\mathrm{Cos}x)^2]$$
$$=l[1+r^4-2r^2(2\mathrm{Cos}^2x-1)]=l(1-2r^2\mathrm{Cos}2x+r^4)=l(1-2\varrho\mathrm{Cos}2x+\varrho^2),$$

$$\frac{1}{1-2r\mathrm{Cos}x+r^2}+\frac{1}{1+2r\mathrm{Cos}x+r^2}=2\frac{1+r^2}{(1+r^2)^2-(2r\mathrm{Cos}x)^2}$$
$$=2\frac{1+\varrho}{1-2\varrho\mathrm{Cos}2x+\varrho^2}, \qquad (\mathrm{p})$$

$$\frac{1}{1-2r\mathrm{Cos}x+r^2}-\frac{1}{1+2r\mathrm{Cos}x+r^2}=\frac{4r\mathrm{Cos}x}{(1+r^2)^2-(2r\mathrm{Cos}x)^2}$$
$$=\frac{4r\mathrm{Cos}x}{1-2\varrho\mathrm{Cos}2x+\varrho^2}, \qquad (\mathrm{q})$$

$$\mathrm{Arctg}\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\mathrm{Cos}x}+\mathrm{Arctg}\frac{-r\,\mathrm{Sin}\,x}{1+r\,\mathrm{Cos}x}=\mathrm{Arctg}\frac{\frac{r\,\mathrm{Sin}x}{1-r\mathrm{Cos}x}-\frac{r\,\mathrm{Sin}x}{1+r\mathrm{Cos}x}}{1+\frac{r^2\mathrm{Sin}^2x}{1-r^2\mathrm{Cos}^2x}}$$

$$=\mathrm{Arctg}\frac{2r^2\mathrm{Sin}x\,\mathrm{Cos}x}{1-r^2(\mathrm{Cos}^2x-\mathrm{Sin}^2x)}=\mathrm{Arctg}\frac{\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x}{1-\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x}, \qquad (r)$$

$$\mathrm{Arctg}\frac{r\mathrm{Sin}x}{1-r\mathrm{Cos}x}-\mathrm{Arctg}\frac{-r\,\mathrm{Sin}\,x}{1+r\mathrm{Cos}x}=\mathrm{Arctg}\frac{\frac{r\mathrm{Sin}x}{1-r\mathrm{Cos}x}+\frac{r\mathrm{Sin}x}{1+r\,\mathrm{Cos}x}}{1-\frac{r^2\,\mathrm{Sin}^2x}{1-r^2\mathrm{Cos}^2\,x}}$$

$$=\mathrm{Arctg}\frac{2r\,\mathrm{Sin}x}{1-r^2} \qquad (s)$$

On voit de suite que ces transformations ne sont pas applicables aux intégrales (17) à (40), puisque leurs valeurs étant des fonctions de (lr), ne valent parsuite que pour r positif. Occupons-nous donc des intégrales (1) à (16) et premièrement quant au changement des intégrales elles même. Il faut observer, que partout, où dans les valeurs de ces intégrales r est élevé à une puissance, fonction de n, il faut distinguer les cas de n pair et impair ou égal à $2m$ et à $2m-1$.

(1) donne par (o), pour $n=2m-1$:

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\mathrm{Cos}2x+\varrho^2)\mathrm{Cos}(2m-1)x\partial x=0; \qquad (41)$$

(2) donne par (o):

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\mathrm{Cos}2x+\varrho^2)\partial x=0, \qquad (42)$$

qui, au fond, ne diffère pas de (2);

(3) donne par (p) pour $n=2m-1$:

$$\int_0^\pi\frac{\mathrm{Cos}\,(2m-1)\,x\,\partial x}{1-2\varrho\mathrm{Cos}2x+\varrho^2}=0; \qquad (43)$$

(3) donne par (9) et (4) par (p) pour $n=2m$:

$$\int_0^\pi\frac{\mathrm{Cos}2mx\,\mathrm{Cos}x\partial x}{1-2\varrho\,\mathrm{Cos}2x+\varrho^2}=0; \qquad (44)$$

(4) donne pour $n = 2m - 1$, par l'application successive de (p) et de (q):

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,(2m-1)x\,.\,\mathrm{Cos}\,x\,\partial x}{1-2\varrho\,\mathrm{Cos}2x+\varrho^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\varrho^m}{1-\varrho}, \qquad (45)$$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,(2m-1)x\,.\,\mathrm{Cos}^3 x\,\partial x}{1-2\varrho\,\mathrm{Cos}2x+\varrho^2}=0; \qquad (46)$$

d'où à cause de $2\mathrm{Cos}^2x - 1 = \mathrm{Cos}2x$ par (43):

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}(2m-1)x\,\mathrm{Cos}\,2x\,\partial x}{1-2\varrho\mathrm{Cos}2x+\varrho^2}=0; \qquad (47)$$

(5) donne par (9):

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}x\,\partial x}{1-2\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x+\varrho^2}=0; \qquad (48)$$

(7) donne par (p) pour $n = 2m$ et $n = 2m-1$, et par (9) pour $n = 2m - 1$, successivement:

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}2mx\,\mathrm{Sin}x\,\partial x}{1-2\varrho\mathrm{Cos}2x+\varrho^2}=0, \qquad (49)$$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}\,(2m-1)x\,\mathrm{Sin}x\partial x}{1-2\varrho\mathrm{Cos}\,2x+\varrho^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{\varrho^m}{1+\varrho}, \qquad (50)$$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}\,(2m-1)x\,\mathrm{Sin}x\,\mathrm{Cos}x\partial x}{1-2\varrho\,\mathrm{Cos}2x+\varrho^2}=0,$$

d'où

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}\,(2m-1)x\,\mathrm{Sin}2x\,\partial x}{1-2\,\varrho\mathrm{Cos}2x+\varrho^2}=0. \qquad (51)$$

L'application de la formule (r) à (8), (9) et (10) nous fournit les intégrales suivantes:

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{\varrho\mathrm{Sin}2x}{1-\varrho\,\mathrm{Cos}2x}\cdot\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x}=0, \qquad (52)$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{\varrho\mathrm{Sin}2x}{1-\varrho\mathrm{Cos}2x}\cdot\frac{\mathrm{Cos}\,x\partial x}{\mathrm{Sin}\,x}=-\pi\,l(1-\varrho), \qquad (53)$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{\varrho \operatorname{Sin} 2x}{1-\varrho \operatorname{Cos} 2x} \frac{\operatorname{Cos} x \partial x}{\operatorname{Sin} x} = 0. \tag{54}$$

De même (12) (13) et (14) donnent par (r) pour $n=2m$ et $n=2m-1$ succesivement:

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{\varrho \operatorname{Sin} 2x}{1-\varrho \operatorname{Cos} 2x} \operatorname{Sin} 2mx\partial x = \pi\frac{\varrho^m}{m}, \tag{55}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{\varrho \operatorname{Sin} 2x}{1-\varrho \operatorname{Cos} 2x} \operatorname{Sin}(2m-1)x\partial x = 0, \tag{56}$$

$$\int_0 \text{Arctg}\frac{\varrho \operatorname{Sin} 2x}{1-\varrho \operatorname{Cos} 2x} \operatorname{Sin} 2mx \operatorname{Cos} x\partial x = 0, \tag{57}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{\varrho \operatorname{Sin} 2x}{1-\varrho \operatorname{Cos} 2x} \operatorname{Sin}(2m-1)x \operatorname{Cos} x\partial x = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\varrho^{m-1}}{m-1}+\frac{\varrho^m}{m}\right) \tag{58}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{\varrho \operatorname{Sin} 2x}{1-\varrho \operatorname{Cos} 2x} \operatorname{Cos} 2mx \operatorname{Sin} x\partial x = 0, \tag{59}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{\varrho \operatorname{Sin} 2x}{1-\varrho \operatorname{Cos} 2x} \operatorname{Cos}(2m-1)x \operatorname{Sin} x\partial x = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{\varrho^{m-1}}{m-1}-\frac{\varrho^\pi}{m}\right) \tag{60}$$

Si l'on fait le même usage de (s) pour les intégrales (8), (9) et (10), et, en prenant successivement $n=2m$ et $n=2m-1$, de même pour les intégrales (12), (13) et (14), on obtient:

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{2r \operatorname{Sin} x}{1-r^2} \frac{\partial x}{\operatorname{Sin} x} = \pi l\frac{1+r}{1-r}, \tag{61}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{2r \operatorname{Sin} x}{1-r^2} \frac{\operatorname{Cos} x\partial x}{\operatorname{Sin} x} = 0, \tag{62}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{2r \operatorname{Sin} x}{1-r^2} \frac{\operatorname{Cos}^2 x\partial x}{\operatorname{Sin} x} = \pi\left(l\frac{1+r}{1-r}-r\right), \tag{63}$$

$$\int^\pi \text{Arctg}\frac{2r \operatorname{Sin} x}{1-r^2} \operatorname{Sin} 2mx\partial x = 0, \tag{64}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{2r \operatorname{Sin} x}{1-r^2} \operatorname{Sin}(2m-1)x\partial x = \pi\frac{r^{2m-1}}{2m-1} \tag{65}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{2r \operatorname{Sin} x}{1-r^2} \operatorname{Sin} 2mx \operatorname{Cos} x\partial x = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r^{2m+1}}{2m+1}+\frac{r^{2m-1}}{2m-1}\right) \tag{66}$$

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{2r\operatorname{Sin}x}{1-r^2}\operatorname{Sin}(2m-1)x\operatorname{Cos}x\,\partial x=0, \qquad (67)$$

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{2r\operatorname{Sin}x}{1-r^2}\operatorname{Cos}2mx\operatorname{Sin}x\,\partial x=\frac{\pi}{2}\left(\frac{r^{2m+1}}{2m+1}-\frac{r^{2m-1}}{2m-1}\right) \qquad (68)$$

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{2r\operatorname{Sin}x}{1-r^2}\operatorname{Cos}(2m-1)x\operatorname{Sin}x\,\partial x=0 \qquad (69)$$

L'application de la formule (o) aux intégrales (15) et (16) donne respectivement pour $n=2m$ et $n=2m-1$:

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2)\operatorname{Cos}2mx\operatorname{Cos}x\,\partial x=0, \qquad (70)$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2)\operatorname{Sin}2mx\operatorname{Sin}x\,\partial x=0; \qquad (71)$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2)\operatorname{Cos}(2m-1)x\operatorname{Cos}x\,\partial x=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{\varrho^{m-1}}{m-1}+\frac{\varrho^m}{m}\right) \qquad (72)$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2)\operatorname{Sin}(2m-1)x\operatorname{Sin}x\,\partial x=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{\varrho^{m-1}}{m-1}-\frac{\varrho^m}{m}\right). \qquad (73)$$

Dans toutes ces intégrales (41) à (73) on a $m>0$, exceptée l'intégrale (44), qui vaut encore pour $m\geqq 0$, comme le démontre l'intégrale (48).

Les intégrales (52) à (60) et (61) à (69)) forment deux nouveaux groupes diverses de celui, que composent les intégrales (8) à (14) en ce que les fonctions sous le signe Arctg y sont différentes.

6. Nous avons observé que ces mêmes transformations peuvent servir à changer les limites de quelques unes entre les intégrales (1) à (16); effectuons ce changement, en faisant partout $y=2x$ (θ), ce qui réduit les limites de x, 0 et π, pour y à 0 et 2π. Il est clair que ce changement ne peut avoir lieu que pour des valeurs paires de n ou égales à $2m$.
Alors (1) donne par (o)

$$\int_0^{2\pi} l(1-2\varrho\operatorname{Cos}y+\varrho^2)\operatorname{Cos}my\,\partial y=-2\pi\frac{\varrho^m}{m}, \qquad (74)$$

(3) par (p)

$$\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{Cos}my\,\partial y}{1-2\varrho\operatorname{Cos}y+\varrho^2}=\frac{2\pi\varrho^m}{1-\varrho^2} \qquad (75)$$

et (4) par (q)

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{Cos} 2mx \operatorname{Cos}^2 x\,\partial x}{1-2\varrho \operatorname{Cos} 2x+\varrho^2} = \pi\frac{1+r^2}{1-r^2}r^{2m-1}\frac{1}{4r} = \frac{\pi}{4}\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\varrho^{m-1},$$

d'où, puisque $\operatorname{Cos} 2x = 2\operatorname{Cos}^2 x = 1$, à l'aide de l'intégrale (74)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Cos} my \operatorname{Cos} y\,\partial y}{1-2\varrho \operatorname{Cos} y+\varrho^2} = \pi\frac{1+\varrho^2}{1-\varrho^2}\varrho^{m-1}. \tag{76}$$

Enfin l'intégrale (7) donne, par l'application de (q)

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{Sin} 2mx \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x\,\partial x}{1-2\varrho \operatorname{Cos} 2x+\varrho^2} = \pi r^{2m-1}\frac{1}{4r},$$

$$\text{d'où} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Sin} my \operatorname{Sin} y\,\partial y}{1-2\varrho \operatorname{Cos} y+\varrho^2} = \pi\varrho^{m-1}. \tag{77}$$

Les intégrales (42), (53) et (55), trouvées dans le Paragraphe précédent, nous offrent encore pour notre but actuel les suivantes:

$$\int_0^{2\pi} l(1-2\varrho \operatorname{Cos} y+\varrho^2)\,\partial y = 0, \tag{78}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Arctg}\frac{\varrho \operatorname{Sin} y}{1-\varrho \operatorname{Cos} y}\,\frac{1+\operatorname{Cos} y}{\operatorname{Sin} y}\,\partial y = -2\pi l(1-\varrho), \tag{79}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Arctg}\frac{\varrho \operatorname{Sin} y}{1-\varrho \operatorname{Cos} y}\operatorname{Sin} my\,\partial y = \pi\frac{\varrho^m}{m}. \tag{80}$$

L'intégrale (74) donne au moyen des formules (h) et (l).

$$\int_0^{2\pi} l(1-2\varrho \operatorname{Cos} y+\varrho^2)\operatorname{Cos} my \operatorname{Cos} y\,\partial y = -\pi\left(\frac{\varrho^{m-1}}{m-1}+\frac{\varrho^{m+1}}{m+1}\right) \tag{81}$$

$$\int_0^{2\pi} l(1-2\varrho \operatorname{Cos} y+\varrho^2)\operatorname{Sin} my \operatorname{Sin} y\,\partial y = -\pi\left(\frac{\varrho^{m-1}}{m-1}-\frac{\varrho^{m+1}}{m+1}\right). \tag{82}$$

De même l'integrale (81) nous fournit, á cause des formules (m) et (n):

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Arctg}\frac{\varrho \operatorname{Sin} y}{1-\operatorname{Cos} y}\operatorname{Sin} my \operatorname{Cos} y\,\partial y = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\varrho^{m+1}}{m+1}+\frac{\varrho^{m-1}}{m-1}\right) \tag{83}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Arctg}\frac{\varrho \operatorname{Sin} y}{1-\varrho \operatorname{Cos} y}\operatorname{Cos} my \operatorname{Sin} y\,\partial y = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\varrho^{m+1}}{m+1}-\frac{\varrho^{m-1}}{m-1}\right). \tag{84}$$

Il s'ensuit que la valeur de ces intégrales prises entre les limites 0 et 2π est précisément la double de la valeur des mêmes intégrales prises entre les limites 0 et π, savoir:

les intégrales (74), (75), (76), (77), (78), (80), (81), 82, (83) et (84) respectivement de (1), (3), (4), (7), (2), (12), (15), (16), (13) et (14).

Quant à l'intégrale (79) on vérifie cette même propriété en prenant la somme des intégrales (8) et (9).

Du reste cette propriété de ces intégrales dépend uniquement de ce qu'elle ait lieu pour les intégrales (1) et (74); car ce changement de limites n'altère aucunément l'équation (a), à l'aide de laquelle les autres intégrales (2), (3), (4), (7), et (12) à (16) sont dérivées de l'intégrale (1) comme nous l'avons montré au §. 1, sans autre restriction à l'égard de la valeur de r que la condition (β), qui comprend celle (η) comme cas particulier. Ainsi nous pouvons conclure, puisque pour ce même changement de limites la valeur de l'intégrale (6) est doublée aussi, que les intégrales restantes (5), (8), (9) et (10) devront jouir de la même propriété, de sorte que l'on doive avoir:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial y}{1-2\varrho \operatorname{Cos} y+\varrho^2}=\frac{2\pi}{1-\varrho^2}, \tag{85}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Arctg}\frac{\varrho \operatorname{Sin} y}{1-\varrho \operatorname{Cos} y}\,\frac{\partial y}{\operatorname{Sin} y}=\pi l\frac{1+\varrho}{1-\varrho}, \tag{86}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Arctg}\frac{\varrho \operatorname{Sin} y}{1-\varrho \operatorname{Cos} y}\,\frac{\operatorname{Cos} y\partial y}{\operatorname{Sin} y}=-\pi l(1-\varrho^2), \tag{87}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Arctg}\frac{\varrho \operatorname{Sin} y}{1-\varrho \operatorname{Cos} y}\,\frac{\operatorname{Cos}^2 y\partial y}{\operatorname{Sin} y}=\pi\left(l\frac{1+\varrho}{1-\varrho}-\varrho\right). \tag{88}$$

On a ainsi pour toutes ces fonctions la rélation

$$\int_0^{\pi} \varphi(x)\partial x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi(x)\partial x=\int_{\pi}^{2\pi}\varphi(x)\partial x. \tag{A}$$

7. **Plusieurs des intégrales définies, trouvées dans les §§. 5. et 6. sont susceptibles d'être assujéties aux méthodes, dont nous avons fait usage aux §§. 3. et 4., à l'égard de la constante n.**

Leur application sera bien facile ici, soit que les valeurs des intégrales à traiter soient zéro, soit, parceque au moyen de la formule évidemment vraie

$$\frac{\partial^i}{\partial a^i}\int_0^p F(a,x)\,\partial x=\left(\frac{\partial b}{\partial a}\right)^i\frac{\partial^i}{\partial b^i}\int_{\varrho}^p F(a,x)\,\partial x, \tag{B}$$

où a, b et p sont des constantes, on peut, en posant $b=m$,

$p=n$ et $a=2m$ ou $=2m-1$, suivant les cas divers, d'où toujours $\left(\frac{\partial b}{\partial a}\right)^i=\left(\frac{1}{2}\right)^i$, ramener aisément ces intégrales aux intégrales correspondantes qui se trouvent parmi celles (3), (4), (7) et (12) à (16), qui sont traitées successivement dans les §§. cités: opération facile, puisque le rapport des valeurs de ces intégrales respectivement correspondantes est l'unité, ou du moins une fonction indépendante de la constante n.

Dans le premier cas, où la valeur des intégrales est zéro, l'influence de la différentiation, comme de l'intégration par rapport à n, se présente du premier abord: dans le cas contraire, pour toutes les intégrales, qui se rapportent à un logarithme ou à un Arctangente, on ne pourra se servir que de la différentiation par rapport à cette constante n.

Commençons par les intégrales, où l'on trouve le signe logarithmique sous le signe d'intégration définie. Il est aisé de voir, que les intégrales (41), (70) et (91) donneront tant par la différentiation que par l'intégration par rapport à n:

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2)x^{\pm 2p}\operatorname{Cos}(2m-1)x\partial x=0, \tag{89}$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2)x^{\pm(2p+1)}\operatorname{Sin}(2m-1)x\partial x=0, \tag{90}$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2)x^{\pm 2p}\operatorname{Cos}2mx\operatorname{Cos}x\partial x=0, \tag{91}$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2)x^{\pm(2p+1)}\operatorname{Sin}2mx\operatorname{Cos}x\partial x=0, \tag{92}$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2)x^{\pm 2p}\operatorname{Sin}2mx\operatorname{Sin}x\partial x=0, \tag{93}$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2)x^{\pm(2p+1)}\operatorname{Cos}2mx\operatorname{Sin}x\partial x=0. \tag{94}$$

Quant aux intégrales (72) et (73) elles donneront à l'aide de l'équation de réduction (B) et des intégrales (17) à (20):

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2)x^{2p}\operatorname{Cos}(2m-1)x\operatorname{Cos}x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi\varrho^{m-1}\Gamma(2p+1)}{2^{2p+1}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(m-1)^{2p+1}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p}\frac{\{-(m-1)l\varrho\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ +\frac{\varrho}{m^{2p+1}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p}\frac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\} \tag{95}$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x+\varrho^2)x^{2p+1}\,\mathrm{Sin}\,(2m-1)x\,\mathrm{Cos}\,x\,\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi\varrho^{m-1}\Gamma(2p+2)}{2^{2p+2}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(m-1)^{2p+2}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(m-1)l\varrho\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ +\frac{\varrho}{m^{2p+2}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p+1}\frac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\}\quad(96)$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x+\varrho^2)x^{2p}\,\mathrm{Sin}\,(2m-1)x\,\mathrm{Sin}\,x\,\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi\varrho^{m-1}\Gamma(2p+1)}{2^{2p+1}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(m-1)^{2p+1}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p}\frac{\{-(m-1)l\varrho\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ -\frac{\varrho}{m^{2p+1}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p}\frac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\}\quad(97)$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x+\varrho^2)x^{2p+1}\,\mathrm{Cos}(2m-1)x\,\mathrm{Sin}\,x\,\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p}\pi\varrho^{m-1}\Gamma(2p+2)}{2^{2p+2}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(m-1)^{2p+2}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(m-1)l\varrho\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ -\frac{\varrho}{m^{2p+2}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p+1}\frac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\}\quad(98)$$

8. Passons maintenant aux deux groupes, où la fonction principale sous le signe d'intégration est un Arctg, et traitons en premier lieu le groupe des intégrales (55) à (60), dont celles (56), (67) et (59) donneront tout de suite:

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x}{1-\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x}\,x^{\pm 2p}\,\mathrm{Sin}\,(2m-1)x\,\partial x=0,\quad(99)$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x}{1-\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x}\,x^{\pm(2p+1)}\,\mathrm{Cos}\,(2m-1)x\,\partial x=0,\quad(100)$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x}{1-\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x}\,x^{\pm 2p}\,\mathrm{Sin}\,2mx\,\mathrm{Cos}\,x\,\partial x=0,\quad(101)$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x}{1-\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x}\,x^{\pm(2p+1)}\,\mathrm{Cos}\,2mx\,\mathrm{Cos}\,x\,\partial x=0,\quad(102)$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x}{1-\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x}\,x^{\pm 2p}\,\mathrm{Cos}\,2mx\,\mathrm{Sin}\,x\,\partial x=0,\quad(103)$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x}{1-\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x}\,x^{\pm(2p+1)}\,\mathrm{Sin}\,2mx\,\mathrm{Sin}\,x\,\partial x=0;\quad(104)$$

tandis que les intégrales (55), (58) et (60) fourniront au moyen du procédé du §. précédent et des mêmes formules (17) à (20):

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{\varrho \operatorname{Sin} 2x}{1-\varrho \operatorname{Cos} 2x} x^{2p} \operatorname{Sin} 2mx \partial x$$

$$= \frac{(-1)^p \pi \varrho^m \Gamma(2p+1)}{2^{2p} m^{2p+1}} \sum_{a=0}^{a=2p} \frac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)}, \tag{105}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{\varrho \operatorname{Sin} 2x}{1-\varrho \operatorname{Cos} 2x} x^{2p+1} \operatorname{Cos} 2mx \partial x$$

$$= \frac{(-1)^{p+1} \pi \varrho^m \Gamma(2p+2)}{2^{2p+1} m^{2p+2}} \sum_{a=0}^{a=2p+1} \frac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)}, \tag{106}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{\varrho \operatorname{Sin} 2x}{1-\varrho \operatorname{Cos} 2x} x^{2p} \operatorname{Sin}(2m-1)x \operatorname{Cos} x \partial x$$

$$= \frac{(-1)^p \pi \varrho^{m-1} \Gamma(2p+1)}{2^{2p+2}} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{(m-1)^{2p+1}} \sum\limits_{a=0}^{a=2p} \dfrac{\{-(m-1)l\varrho\}^a}{\Gamma(a+1)} \\ + \dfrac{\varrho}{m^{2p+1}} \sum\limits_{a=0}^{a=2p} \dfrac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)} \end{array} \right\}, \tag{107}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{\varrho \operatorname{Sin} 2x}{1-\varrho \operatorname{Cos} 2x} x^{2p+1} \operatorname{Cos}(2m-1)x \operatorname{Cos} x \partial x$$

$$= \frac{(-1)^p \pi \varrho^{m-1} \Gamma(2p+2)}{2^{2p+3}} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{(m-1)^{2p+2}} \sum\limits_{a=0}^{a=2p+1} \dfrac{\{-(m-1)l\varrho\}^a}{\Gamma(a+1)} \\ + \dfrac{\varrho}{m^{2p+2}} \sum\limits_{a=0}^{a=2p+1} \dfrac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)} \end{array} \right\}, \tag{108}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{\varrho \operatorname{Sin} 2x}{1-\varrho \operatorname{Cos} 2x} x^{2p} \operatorname{Cos}(2m-1)x \operatorname{Sin} x \partial x$$

$$= \frac{(-1)^{p+1} \pi \varrho^{m-1} \Gamma(2p+1)}{2^{2p+2}} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{(m-1)^{2p+1}} \sum\limits_{a=0}^{a=2p} \dfrac{\{-(m-1)l\varrho\}^a}{\Gamma(a+1)} \\ - \dfrac{\varrho}{m^{2p+1}} \sum\limits_{a=0}^{a=2p} \dfrac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)} \end{array} \right\}, \tag{109}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{\varrho \operatorname{Sin} 2x}{1-\varrho \operatorname{Cos} 2x} x^{2p+1} \operatorname{Sin}(2m-1)x \operatorname{Sin} x \partial x$$

$$= \frac{(-1)^{p+1} \pi \varrho^{m-1} \Gamma(2p+2)}{2^{2p+3}} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{(m-1)^{2p+2}} \sum\limits_{a=0}^{a=2p+1} \dfrac{\{-(m-1)l\varrho\}^a}{\Gamma(a+1)} \\ - \dfrac{\varrho}{m^{2p+2}} \sum\limits_{a=0}^{a=2p+1} \dfrac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)} \end{array} \right\} \tag{110}$$

Aprésent nous avons à traiter le groupe (64) à (69) dont les intégrales (64), (67) et (69) donnent de suite:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{2r \operatorname{Sin} x}{1-r^2} x^{\pm 2p} \operatorname{Sin} 2mx \partial x = 0, \tag{111}$$

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{2r\operatorname{Sin}x}{1-r^2}\, x^{\pm(2p+1)}\operatorname{Cos}2mx\partial x=0, \tag{112}$$

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{2r\operatorname{Sin}x}{1-r^2}\, x^{\pm 2p}\operatorname{Sin}(2m-1)x\operatorname{Cos}x\partial x=0, \tag{113}$$

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{2r\operatorname{Sin}x}{1-r^2}\, x^{\pm(2p+1)}\operatorname{Cos}(2m-1)x\operatorname{Cos}x\partial x=0, \tag{114}$$

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{2r\operatorname{Sin}x}{1-r^2}\, x^{\pm 2p}\operatorname{Cos}(2m-1)x\operatorname{Sin}x\partial x=0, \tag{115}$$

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{2r\operatorname{Sin}x}{1-r^2}\, x^{\pm(2p+1)}\operatorname{Sin}(2m-1)x\operatorname{Sin}x\partial x=0. \tag{116}$$

Au contraire les intégrales (65), (66) et (68) toujours à l'aide des mêmes formules, que ci-dessus, engendrent les suivantes:

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{2r\operatorname{Sin}x}{1-r^2}\, x^{2p}\operatorname{Sin}(2m-1)x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^p\pi r^{2m-1}\Gamma(2p+1)}{2^{2p}(2m-1)^{2p+1}}\sum_{a=0}^{a=2p}\frac{\{-(2m-1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}, \tag{117}$$

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{2r\operatorname{Sin}x}{1-r^2}\, x^{2p+1}\operatorname{Cos}(2m-1)x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^p\pi r^{2m-1}\Gamma(2p+2)}{2^{2p+1}(2m-1)^{2p+2}}\sum_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(2m-1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}, \tag{118}$$

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{2r\operatorname{Sin}x}{1-r^2}\, x^{2p}\operatorname{Sin}2mx\operatorname{Cos}x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^p\pi r^{2m-1}\Gamma(2p+1)}{2^{2p}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{(2m-1)^{2p+1}}\displaystyle\sum_{a=0}^{a=2p}\frac{\{-(2m-1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\\[2ex] +\dfrac{r^2}{(2m+1)^{2p+1}}\displaystyle\sum_{a=0}^{a=2p}\frac{\{-(2m+1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\}, \tag{119}$$

(120)

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{2r\operatorname{Sin}x}{1-r^2}\, x^{2p+1}\operatorname{Cos}2mx\operatorname{Cos}x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi r^{2m-1}\Gamma(2p+2)}{2^{2p+1}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{(2m-1)^{2p+2}}\displaystyle\sum_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(2m-1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\\[2ex] +\dfrac{r^2}{(2m+1)^{2p+2}}\displaystyle\sum_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(2m+1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\}$$

(121)

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{2r\operatorname{Sin}x}{1-r^2}x^{2p}\operatorname{Cos}2mx\operatorname{Sin}x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^p\pi r^{2m-1}\Gamma(2p+2)}{2^{2p}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(2m-1)^{2p+1}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p}\frac{\{-(2m-1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ -\frac{r^2}{(2m+1)^{2p+1}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p}\frac{\{-(2m+1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\},$$

(122)

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{2r\operatorname{Sin}x}{1-r^2}x^{2p+1}\operatorname{Sin}2mx\operatorname{Sin}x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^p\pi r^{2m-1}\Gamma(2p+2)}{2^{2p+1}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(2m-1)^{2p+2}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(2m-1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ -\frac{r^2}{(2m+1)^{2p+2}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(2m+1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\}.$$

9. Restent les intégrales, qui ont sous le signe d'intégration une fonction principale $(1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2)^{-1}$. Traitons les dans l'ordre suivant:

(43), (44), (45), (49), (50), (47) et (51).

On pourra appliquer à toutes et la différentiation et l'intégration par rapport à n sous le signe d'intégration définie, dont les resultats se présenteront ou d'eux-mêmes, ou comme des suites necessaires des résultats obtenus dans le §. 4. Ainsi l'on trouvera:

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos}(2m-1)x\partial x}{1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2}x^{\pm 2p}=0, \tag{123}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin}(2m-1)x\partial x}{1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2}x^{\pm(2p+1)}=0, \tag{124}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos}2mx\operatorname{Cos}x\partial x}{1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2}x^{\pm 2p}=0, \tag{125}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin}2mx\operatorname{Cos}x\partial x}{1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2}x^{\pm(2p+1)}=0, \tag{126}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos}(2m-1)x\operatorname{Cos}x\partial x}{1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2}x^{2p}=\frac{(-1)^p}{2^{2p+1}}\cdot\frac{\pi}{1-\varrho}\cdot\varrho^m(l\varrho)^{2p}, \tag{127}$$

(128)

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin}(2m-1)x\operatorname{Cos}x\partial x}{1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2}x^{2p+1}=\frac{(-1)^{p+1}}{2^{2p+2}}\cdot\frac{\pi}{1-\varrho}\cdot\varrho^m(l\varrho)^{2p+1},$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos}(2m-1)x \operatorname{Cos} x \partial x}{1-2\rho \operatorname{Cos} 2x+\rho^2} \frac{1}{x^{2p}} = (-1)^p . 2^{2p-1} \frac{\pi}{1-\rho} \cdot \frac{\rho^m}{(l\rho)^{2p}}, \qquad (129)$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin}(2m-1)x \operatorname{Cos} x \partial x}{1-2\rho \operatorname{Cos} 2x+\rho^2} \frac{1}{x^{2p+1}} = (-1)^p . 2^{2p} \frac{\pi}{1-\rho} \cdot \frac{\rho^m}{(l\rho)^{2p+1}}, \qquad (130)$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin} 2mx \operatorname{Sin} x \, \partial x}{1-2\rho \operatorname{Cos} 2x+\rho^2} x^{\pm 2p} = 0, \qquad (131)$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos} 2mx \operatorname{Sin} x \, \partial x}{1-2\rho \operatorname{Cos} 2x+\rho^2} x^{\pm(2p+1)} = 0, \qquad (132)$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin}(2m-1)x \operatorname{Sin} x \partial x}{1-2\rho \operatorname{Cos} 2x+\rho^2} x^{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p+1}} \cdot \frac{\pi}{1+\rho} \rho^m (l\rho)^{2p}, \qquad (133)$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos}(2m-1)x \operatorname{Sin} x \partial x}{1-2\rho \operatorname{Cos} 2x+\rho^2} x^{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2^{2p+2}} \cdot \frac{\pi}{1+\rho} \rho^m (l\rho)^{2p+1}, \qquad (134)$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin}(2m-1)x \operatorname{Sin} x \partial x}{1-2\rho \operatorname{Cos} 2x+\rho^2} \frac{1}{x^{2p}} = (-1)^p 2^{2p-1} \cdot \frac{\pi}{1+\rho} \cdot \frac{\rho^m}{(l\rho)^{2p}}, \qquad (135)$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos}(2m-1)x \operatorname{Sin} x \partial x}{1-2\rho \operatorname{Cos} 2x+\rho^2} \frac{1}{x^{2p+1}} = (-1)^{p+1} 2^{2p} \cdot \frac{\pi}{1+\rho} \cdot \frac{\rho^m}{(l\rho)^{2p+1}}, \qquad (136)$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos}(2m-1)x \operatorname{Cos} 2x \, \partial x}{1-2\rho \operatorname{Cos} 2x+\rho^2} x^{\pm 2p} = 0, \qquad (137)$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin}(2m-1)x \operatorname{Cos} 2x \, \partial x}{1-2\rho \operatorname{Cos} 2x+\rho^2} x^{\pm(2p+1)} = 0, \qquad (138)$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin}(2m-1)x \operatorname{Sin} 2x \, \partial x}{1-2\rho \operatorname{Cos} 2x+\rho^2} x^{\pm 2p} = 0, \qquad (139)$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos}(2m-1)x \operatorname{Sin} 2x \, \partial x}{1-2\rho \operatorname{Cos} 2x+\rho^2} x^{\pm(2p+1)} = 0. \qquad (140)$$

10. Enfin, les intégrales

(74), (81), (82), (80), (83), (84), (75), (76) et (77),

doubles de celles

(1), (15), (16), (12), (13), (14), (3), (4) et (7),

donneront de même, au moyen des méthodes des §§. 3. et 4., des intégrales doubles de celles, qui sont déduites des dernières. De cette manière les intégrales (17) à (40) prises entre les limites 0 et 2π

auront aussi une valeur double de celles prises entre les limites 0 et π, de sorte que pour toutes ces intégrales on a la rélation

$$\int_0^{\pi} \varphi(x)\partial x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\partial x = \int_{\pi}^{2\pi} \varphi(x)\partial x. \qquad \text{(A)}$$

Il n'est pas besoin de transcrire toutes ces intégrales ici, puisque ni leur forme ni leur valeur ne change proprement, pourvu que l'on mette partout $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}$ à la place de $\int_0^{\pi}$, et qu'on fasse attention à la condition actuelle $1 \geqq \varrho \geqq 0$.

11. On peut remarquer en dernier lieu, que dans les intégrales de la forme

$$\varkappa = \int_0^{\pi} \text{Arctg}\,\frac{r\,\text{Sin}\,x}{1 - r\,\text{Cos}\,x} f(x^t, \text{Cos}\,px, \text{Sin}\,qx)\partial x\,, \qquad \text{(C)}$$

$$\lambda = \int_0^{\pi} \text{Arctg}\,\frac{\varrho\,\text{Sin}\,2x}{1 - \varrho\,\text{Cos}\,2x} f(x^t, \text{Cos}\,px, \text{Sin}\,qx)\partial x\,, \qquad \text{(D)}$$

$$\mu = \int_0^{\pi} \text{Arctg}\,\frac{2r\,\text{Sin}\,x}{1 - r^2} f(x^t, \text{Cos}\,px, \text{Sin}\,qx)\partial x\,, \qquad \text{(E)}$$

$$\nu = \int_0^{\pi} \text{Arctg}\,\frac{\varrho\,\text{Sin}\,y}{1 - \varrho\,\text{Cos}\,y} f(y^t, \text{Cos}\,py, \text{Sin}\,qy)\partial y \qquad \text{(F)}$$

où appartiennent respectivement les groupes

(8) à (14), (18), (20), (22), (24), (26) et (28),
(52) à (60) et (99) à (110),
(61) à (69) et (111) à (122),
(80), (83), (84), (86), (87), (88)

et celles désignées au §. précédent, on peut faire usage des formules connues

$$\text{Arctg}\,\frac{1-\varphi}{1+\varphi} = \frac{\pi}{4} - \text{Arctg}\,\varphi, \qquad (t)$$

$$\text{Arctg}\,\frac{1}{\varphi} = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\,\varphi, \qquad (u)$$

$$\text{Arctg}\,\frac{1+\varphi}{1-\varphi} = \frac{\pi}{4} + \text{Arctg}\,\varphi. \qquad (v)$$

De cette manière on trouvera des nouveaux groupes au moyen des formules de réduction suivantes, où l'on a mis simplement f au lieu de $f(x^t, \mathrm{Cos}\,px, \mathrm{Sin}\,qx)$ ou de $f(y^t, \mathrm{Cos}\,py, \mathrm{Sin}\,py)$:

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{1-r\,\mathrm{Sin}\,x-r\,\mathrm{Cos}\,x}{1+r\,\mathrm{Sin}\,x-r\,\mathrm{Cos}\,x}f\partial x = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi f\partial x-\varkappa, \qquad \text{(G)}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}{r\,\mathrm{Sin}\,x}f\partial x = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi f\partial x-\varkappa, \qquad \text{(H)}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{1+r\,\mathrm{Sin}\,x-r\,\mathrm{Cos}\,x}{1-r\,\mathrm{Sin}\,x-r\,\mathrm{Cos}\,x}f\partial x = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi f\partial x+\varkappa, \qquad \text{(I)}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{1-\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x-\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x}{1+\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x-\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x}f\partial x = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi f\partial x-\lambda, \qquad \text{(K)}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{1-\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x}{\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x}f\partial x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f\partial x-\lambda, \qquad \text{(L)}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{1+\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x-\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x}{1-\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x-\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x}f\partial x = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi f\partial x+\lambda, \qquad \text{(M)}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{1-2r\,\mathrm{Sin}\,x-r^2}{1+2r\,\mathrm{Sin}\,x-r^2}f\partial x = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi f\partial x-\mu, \qquad \text{(N)}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{1-r^2}{2r\,\mathrm{Sin}\,x}f\partial x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f\partial x-\mu, \qquad \text{(O)}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{1+2r\,\mathrm{Sin}\,x-r^2}{1-2r\,\mathrm{Sin}\,x-r^2}f\partial x = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi f\partial x+\mu, \qquad \text{(P)}$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Arctg}\frac{1-\varrho\,\mathrm{Sin}\,y-\varrho\,\mathrm{Cos}\,y}{1+\varrho\,\mathrm{Sin}\,y-\varrho\,\mathrm{Cos}\,y}f\partial y = \frac{\pi}{4}\int_0^{2\pi} f\partial y-\nu, \qquad \text{(Q)}$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Arctg}\frac{1-\varrho\,\mathrm{Cos}\,y}{\varrho\,\mathrm{Sin}\,y}f\partial y = \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} f\partial y-\nu, \qquad \text{(R)}$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Arctg}\frac{1+\varrho\,\mathrm{Sin}\,y-\varrho\,\mathrm{Cos}\,y}{1-\varrho\,\mathrm{Sin}\,y-\varrho\,\mathrm{Cos}\,y}f\partial y = \frac{\pi}{4}\int_0^{2\pi} f\partial y+\nu; \qquad \text{(S)}$$

où toutes les intégrales $\int_0^\pi f\partial x$ et $\int_0^{2\pi} f\partial y$, que l'on trouve au second membre de ces équations, se reduisent aux suivantes:

$$\int_0^\pi \frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x} = \Big|_0^\pi l\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \infty \quad \text{(A')}, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\partial y}{\mathrm{Sin}\,y} = 0 \quad \text{(D')};$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{Cos}x\partial x}{\mathrm{Sin}\,x}=\Big|_0^{\pi} l\mathrm{Sin}x=0\;(\mathrm{B}'),\quad \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{Cos}y\partial y}{\mathrm{Sin}\,y}=0\quad(\mathrm{E}');$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{Cos}^2x\,\partial x}{\mathrm{Sin}x}=\Big|_0^{\pi}\mathrm{Cos}x+l\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\infty\,(\mathrm{C}'),\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{Cos}^2y\,\partial y}{\mathrm{Sin}y}=0\;(\mathrm{F}');$$

$$\int_0^{s\pi}x^t\,\mathrm{Sin}px\,\partial x=\frac{1}{p^{t+1}}\int_0^{ps\pi}z^t\,\mathrm{Sin}z\partial z,\qquad(\mathrm{G}')$$

$$\int_0^{s\pi}x^t\,\mathrm{Cos}px\partial x=\frac{1}{p^{t+1}}\int_0^{ps\pi}z^t\,\mathrm{Cos}z\,\partial z;\qquad(\mathrm{H}')$$

$\int_0^{s\pi}x^t\mathrm{Sin}px\,\mathrm{Cos}x\,\partial x$ (I$'$) et $\int_0^{s\pi}x^t\mathrm{Cos}\,px\,\mathrm{Sin}x\;\partial x$ (K$'$), qui se déduisent de (G$'$);

$\int_0^{s\pi}x^t\,\mathrm{Cos}px\mathrm{Cos}x\partial x$ (L$'$) et $\int_0^{s\pi}x^t\,\mathrm{Sin}px\,\mathrm{Sin}x\partial x$(M$'$), qui se déduisent de (H$'$).

Des formules (A$'$) à (F$'$) il suit, que les intégrales (8) et (10), (52) et (54), (61) et (63) donnent pour résultat l'infini positif pour les changements de la fonction sous le signe circulaire inverse donnés dans les formules (G) à (P). Lorsqu'au contraire on change les fonctions dans les intégrales (9), (53), et (62), prises entre les limites 0 et π, à l'aide des formules de réduction (G) à (P) leurs valeurs restent les mêmes, sauf le signe, qui change seulement pour les deux premières transformations, tandis qu'il reste le même pour la troisième. De même pour les intégrales (86) à (88), le changement de fonction au moyen des formules (Q) à (S), entre les limites 0 et 2π, n'a aucune influence sur la valeur propre, mais seulement sur le signe, qui ne reste le même, que pour la troisième transformation.

Les autres intégrales indiquées, au contraire, peuvent être transformées au moyen des formules de réduction (G) à (S) et des formules (G$'$) à (M$'$), sauf d'être exposées à la complication, que comportent les intégrales (G$'$) et (H$'$).

Or, cette complication s'en va complètement dans le cas, où l'on aurait $t=0$; car alors ces formules se réduisent aux suivantes:

$$\int_0^{\pi}\mathrm{Sin}\,2mx\,\partial x=-\frac{1}{2m}\Big|_0^{\pi}\mathrm{Cos}\,2mx\Big|=0,\qquad(\mathrm{G}_1)$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{Sin}(2m-1)x\partial x=-\frac{1}{2m-1}\Big|_0^{\pi}\mathrm{Cos}(2m-1)x\Big|=\frac{2}{2m-1},\qquad(\mathrm{G}_2)$$

$$\int_0^\pi \text{Cos}\,px\,\partial x = \frac{1}{p}\Big|_0^\pi \text{Sin}\,px = 0, \tag{H_1}$$

d'où par les équations (k), (l), (m) et (n):

$$\int_0^\pi \text{Sin}\,2mx\,\text{Cos}\,x\,\partial x = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2m+1} + \frac{2}{2m-1}\right) = \frac{4m}{4m^2-1}, \tag{I_1}$$

$$\int_0^\pi \text{Sin}(2m-1)x\,\text{Cos}\,x\,\partial x = 0, \tag{I_2}$$

$$\int_0^\pi \text{Cos}\,2mx\,\text{Sin}\,x\,\partial x = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2m+1} - \frac{2}{2m-1}\right) = \frac{-2}{4m^2-1}, \tag{K_1}$$

$$\int_0^\pi \text{Cos}(2m-1)x\,\text{Sin}\,x\,\partial x = 0, \tag{K_2}$$

$$\int_0^\pi \text{Cos}\,px\,\text{Cos}\,x\,\partial x = 0, \tag{L_1}$$

$$\int_0^\pi \text{Sin}\,px\,\text{Sin}\,x\,\partial x = 0; \tag{M_1}$$

et de même pour les limites 0 et 2π:

$$\int_0^{2\pi} \text{Sin}\,py\,\partial y = \frac{1}{p}\Big|_0^{2\pi} \text{Cos}\,py = 0, \tag{G_2}$$

d'où l'on obtient:

$$\int_0^{2\pi} \text{Sin}\,py\,\text{Cos}\,y\,\partial y = 0, \tag{I_3}$$

$$\int_0^{2\pi} \text{Cos}\,py\,\text{Sin}\,y\,\partial y = 0. \tag{K_3}$$

Ainsi les valeurs des intégrales (12) pour $n=2m$, (13) et (14) pour $n=2m-1$, (55), (58), (60), (64), (67) et (69) changent seulement de signe pour les deux premières transformations respectivement à l'aide des formules (G) et (H), (K) et (L), (M) et (O); elles restent tout-à-fait les mêmes pour les transformations respectives (I), (M) et (P). Au contraire les valeurs des intégrales (12) pour $n=2m-1$, (13) et (14) pour $n=2m$, (56), (57), (59), (65), (66) et (68) subiront, par ces transformation, les changements de signe, que comportent plusieurs des formules de réduction (G) à (P), comme on l'a vu précédemment, et seront en outre augmentées des termes (G_1) à (K_3) multipliés par $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{2}$ selon l'occasion. Quant aux intégrales (80), (83) et (84) on n'a pas besoin de faire aucune distinction entre les cas de $n=2m$ et $n=2m-1$, comme nous avons dû faire pour les intégrales (12) à (14); et par l'application des formules (Q) à (S) elles ne changeront point de valeur et seulement de signe par (Q) et (R).

Toutes ces intégrales resteront donc bien simples: ce n'est pas le cas pour les transformations analogues des intégrales (18), (20), (22), (24), (26), (28), (99) à (110), (111) à (122) et celles désignées dans le §. précédent, qui, outre la moindre simplicité, qu'elles comportent déjà, seront de plus compliquées par les intégrales (G') et (H'), qui s'y introduisent.

Nous ne transcriront point toutes ces intégrales, qui d'ailleurs se déduiront aisément au moyen des formules de ce §.

Remarque. On a eu partout ici les conditions

$$1 \geqq r \geqq -1 \text{ et } 1 \geqq \varrho \geqq 0.$$

Mais il est quelquefois aisé de trouver les valeurs des mêmes intégrales, dans le cas, où l'on aurait

$$\infty \geqq r' \geqq 1 \text{ ou } -1 \geqq r' \geqq -\infty;$$

on n'a qu'à poser $rr'=1$ et $\varrho\varrho'=1$, d'où ces conditions:

$$\infty \geqq r' \geqq 1 \text{ ou } -1 \geqq r' \geqq -\infty, \quad \infty \geqq \varrho' \geqq 1;$$

tandis que la forme des fonctions, pour r, comme pour ϱ:

$l(1-2r\operatorname{Cos}x+r^2)$	se change en	$l(1-2r'\operatorname{Cos}x+r'^2)-2lr'$
$(1-2r\operatorname{Cos}x+r^2)^{-1}$		$r'^2(1-2r'\operatorname{Cos}x+r'^2)^{-1}$,
$\operatorname{Arctg}\dfrac{2r\operatorname{Sin}x}{1-r^2}$		$-\operatorname{Arctg}\dfrac{2r'\operatorname{Sin}x}{1-r'^2}$,
$\operatorname{Arctg}\dfrac{1-r^2}{2r\operatorname{Sin}x}$		$-\operatorname{Arctg}\dfrac{1-r'^2}{2r'\operatorname{Sin}x}$;

de sorte que la forme des intégrales reste la même dans ces quatre cas, ce qui n'a pas lieu dans les autres fonctions.

N. B. Nous avons cru devoir réserver pour la fin une appréciation de la validité du procédé de differentiation et d'intégration par rapport à une constante sous le signe d'intégration définie, dont nous avons fait un si frequent usage. Pour pouvoir appliquer rigoureusement à une formule quelconque

$$\int_a^b f(p,x)\partial x = \varphi(p)$$

ces procédés, il faut qu'on ait (voyer entre autres les „Analytische Studien du Prof. Dr. O. Schlömilch. Abthl. I. Seite 9.)

$$\mathrm{Lim}\int_a^b \varepsilon\partial x = 0, \qquad \text{(Y)}$$

où

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2}\,\frac{\partial.\varphi(p+\lambda\delta,x)}{\partial p} \qquad \text{(Z)}$$

devient zéro, lorsque δ decroit jusqu'à zéro (on a $1 > \lambda > 0$).

Dans le cas, où $\varphi(p)$ ne contient pas de x, comme il arrive partout dans notre note, la condition (Y) devient $\mathrm{Lim}\,\varepsilon.\int_a^b \partial x = 0$ (Y') qui est satisfaite partout, puisque $\int_a^b \partial x$, pour $a=0$ et $b=\pi$ ou $=2\pi$, étant une constante π ou 2π, son produit avec ε qui est zéro, reste zéro lui-même.

XVII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Wenn man über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ausserhalb desselben Quadrate beschreibt, so sind die Mittelpunkte dieser drei Quadrate die Spitzen eines Dreiecks, dessen Flächeninhalt dem Flächeninhalte des Quadrats gleich ist, welches sich über der halben Summe der beiden Katheten des rechtwinkligen Dreiecks, über dessen Seiten die drei Quadrate beschrieben worden sind, beschreiben lässt.

Die Mittelpunkte der fünf Diagonalen eines Fünfecks und die Schwerpunkte der fünf von zwei Diagonalen und einer Seite des Fünfecks eingeschlossenen Dreiecke sind die Spitzen zweier einander ähnlichen, aber verkehrt liegenden Fünfecke.

XVIII.

Miscellen.

Von

Herrn Professor C. A. Bretschneider

in Gotha.

Es ist

$$0=1-(2m+1)_1\frac{n_1}{(2n)_1}2^1+(2m+1)_2\frac{n_2}{(2n)_2}2^2-(2m+1)_3\frac{n_3}{(2n)_3}2^3$$
$$+(2m+1)_4\frac{n_4}{(2n)_4}2^4-+\ldots,$$

$$(-1)^m\cdot\frac{n^m}{(2n)_{2m}}=1-(2m)_1\frac{n_1}{(2n)_1}2^1+(2m)_2\frac{n_2}{(2n)_2}2^2-(2m)_3\frac{n_3}{(2n)_3}2^3$$
$$+(2m)_4\frac{n_4}{(2n)_4}2^4-+\ldots;$$

oder wenn

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots.$$

gesetzt wird,

$$\left.\begin{array}{r}0=F(-2m-1,-n,-2n,2\\(-1)^m\dfrac{n_m}{(2n)_{2m}}=F(-2m,-n,-2n,2)\end{array}\right\}\begin{array}{l}n\text{ beliebig;}\\m\text{ positiv und ganz.}\end{array}$$

Druckfehler im 3ten Hefte des 12ten Theils.

Seite 281 Zeile 3 von oben ist zu lesen Halskreis statt Halbkreis.

„ 282 „ 1 von oben ist zu lesen qx statt ox.

„ 282 „ 15 von oben ist zu lesen $a_1\delta_1 = A_1\varDelta_1$ statt $a_1\delta_1 = A\varDelta$.

„ 283 „ 4 von unten lies $\frac{a^2n}{\sqrt{a^2n-b^2}}$ statt $\frac{a^2u}{\sqrt{a^2n-b^2}}$.

„ 284 „ 15 von unten ist zu lesen ιx statt ιk.

„ 284 „ 10 von unten ist zu lesen $o\iota = o\iota$ statt $ol = o\iota$.

„ 285 „ 1 von oben $\frac{bg'}{b\gamma'}$ statt $\frac{bg'}{b\gamma}$.

„ 288 „ 2 der Aufgabe 5 ist zu lesen RCN statt CRN.

„ 290 „ 2 von unten ist zu lesen $n^2y^2-(x+\frac{n^2.\mu^2.p}{2}-x)^2=$..
statt $n^2y^2-(x+\frac{n^2.\mu^2.p}{4}-x)^2=$....

„ 292 „ 17 und 18 von oben muss wenigstens wegfallen: „in Crelle's Journal", da der Bruder des Herrn Verfassers des Aufsatzes Nr. XX. seinen früher für das Crelle'sche Journal bestimmt gewesenen Aufsatz später zurückgenommen hat.

Druckfehler im 1sten Heft des 13ten Theils.

Seite 86 in den Gleichungen (40) statt x, y, z soll stehen a, b, c.

„ 94, in der Note, Zeile 1, statt „Winkellappen" soll stehen „Winkelfasser".

In dem Aufsatze XIV. sind leider wegen Undeutlichkeit des Manuscripts wahrscheinlich einige Druckfehler stehen geblieben. Ich bitte Herrn Doctor Bierens de Haan nach sorgfältiger Durchsicht des Aufsatzes mir die in demselben etwa stehen gebliebenen Fehler zur Anzeige im Archiv recht bald mitzutheilen. G.

XIX.

Ueber Normal-Curven und Normal-Flächen.

Von

Herrn Brenner,

Lehrer zu Tuttlingen im Königreich Würtemberg.

A. Gleitet eine Gerade a mit einem ihrer Endpunkte über eine ebene Curve auf solche Weise hin, dass sie derselben stets normal bleibt, so beschreibt der andere Endpunkt eine neue Curve, die wir Normalcurve heissen, während wir der Erzeugungs-Curve den Namen Urcurve beilegen. Die Gerade a heissen wir Erzeugungslinie und ihre beiden Endpunkte, beziehlich ihrer Lage in beiden Curven, correspondirende Punkte. Hieraus ist klar, dass jeder in a angenommene Punkt eine Normalcurve beschreibt.

Es sei (Taf. III. Fig. 1.) die Curve LM mit der Abscissenaxe AX, während deren Coordinaten durch x und y bezeichnet sein mögen. Ein beliebiger Punkt in derselben sei N, in welchem $BN = a$ normal steht, so bildet die Verlängerung NC die Normale, welche gleich ist $y\sqrt{1+\partial y_x^2}$. Ziehe ich BD und NE senkrecht auf AX, so wie ND parallel mit AX; so ist EC die Subnormale $= y\partial y_x$, und die Dreiecke BDN und NEC sind einander ähnlich. Bezeichne ich die Coordinaten des Punktes B mit x' und y', so hat man folgende zwei Proportionen:

$$y\sqrt{1+\partial y_x^2} : y = a : y'-y \quad \text{und} \quad y\sqrt{1+\partial y_x^2} : y\partial y_x = a : x'-x,$$

woraus sich ergibt:

$$1) \qquad (y'-y)\sqrt{1+\partial y_x^2} - a = 0$$

und

$$2) \qquad (x'-x)\sqrt{1+\partial y_x^2}+a\partial y_x=0.$$

Verbindet man hiermit noch die Gleichung der Urcurve

$$3) \qquad y=f(x)$$

und eliminirt aus allen dreien y und x, so restirt eine Gleichung zwischen x' und y', welches die Gleichung der Normalcurve ist.

Will ich auf die Normalcurve abermal eine Normalcurve bauen, und zwar mit der gleichen Erzeugungslinie a, jedoch rückwärts nach der Richtung BC genommen, und stelle ich deren Coordinaten mit x'' und y'' vor, so darf ich in den Gleichungen 1) und 2) dem a nur das entgegengesetzte Zeichen geben, x durch x', y durch y', x' durch x'' und y' durch y'' ersetzen. Verwechsle ich hierauf noch alle Zeichen, so habe ich

$$3) \qquad (y'-y'')\sqrt{1+\partial y'^2_{x'}}-a=0,$$

$$4) \qquad (x'-x'')\sqrt{1+\partial y'^2_{x'}}+a\partial y'_{x'}=0.$$

Eliminiren wir aus 1) und 2) ∂y_x, so kommt

$$(y'-y)^2+(x'-x)^2=a^2,$$

und nehmen wir hievon das Differential, indem wir einen neuen ganz beliebigen unabhängigen Veränderlichen annehmen, so kommt

$$5) \qquad (y'-y)(\partial y'-\partial y)+(x'-x)(\partial x'-\partial x)=0.$$

Eliminirt man jedoch aus 1) und 2) $\sqrt{1+\partial y_x^2}$, so folgt unter derselben Voraussetzung, aus der man 5) erhalten hat:

$$(y'-y)\partial y+(x'-x)\partial x=0$$

und durch Subtraction von 5)

$$(y'-y)\partial y'+(x'-x)\partial x'=0.$$

Die Division der beiden letztern gibt

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y'}{\partial x'} \text{ oder } \partial y_x=\partial y'_{x'},$$

und folglich auch

$$\sqrt{1+\partial y_x^2}=\sqrt{1+\partial y'^2_{x'}}.$$

Zieht man endlich noch 1) und 3), so wie 2) und 4) von einander ab, so kommt

$$y=y'' \text{ und } x=x''.$$

Hieraus folgt, dass die nach angegebener Weise auf die Normalcurve gebaute zweite Normalcurve mit der Urcurve zusammenfällt und dass demnach von einer Ur- und Normal-Curve jede als die Normalcurve der andern betrachtet werden kann. Auch fallen die Normalen und Krümmungshalbmesser beider für correspondirende Punkte zusammen.

Während man nun für die Urcurve hat:

$$\begin{aligned} \text{Tangente} &= y\sqrt{1+\partial x_y^2}, \\ \text{Subtangente} &= y\partial x_y, \\ \text{Normale} &= \sqrt{1+\partial y_x^2}, \\ \text{Subnormale} &= y\,\partial y_x; \end{aligned}$$

so ist für correspondirende Punkte der Normalcurve:

$$\begin{aligned} \text{Tangente} &= \partial x_y(a+y\sqrt{1+\partial y_x^2}), \\ \text{Subtangente} &= \partial x_y\left(y+\frac{a}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right), \\ \text{Normale} &= a+y\sqrt{1+\partial y_x^2}, \\ \text{Subnormale} &= \partial y_x\left(y+\frac{a}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right). \end{aligned}$$

Beide Curven haben dieselbe Abgewickelte, und der Krümmungshalbmesser der Normalcurve ist für correspondirende Punkte um a grösser, als der der Urcurve.

Als Beispiel für den Uebergang von einer Urcurve zur Normalcurve mögen die Kegelschnitte dienen. Ihre allgemeine Gleichung ist

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

Daraus ergibt sich:

$$\partial y_x = \frac{p+qx}{\sqrt{2px+qx^2}} \text{ und}$$

$$1+\partial y_x^2 = \frac{qx^2(1+q)+2px(1+q)+p^2}{2px+qx^2}.$$

Diess in 1) und 2) substituirt, gibt

$$(y'-\sqrt{2px+qx^2})\sqrt{\frac{qx^2(1+q)+2px(1+q)+p^2}{2px+qx^2}} = a$$

und

$$(x'-x)\sqrt{\frac{qx^2(1+q)+2px(1+q)+p^2}{2px+qx^2}}+a.\frac{p+qx}{\sqrt{2px+qx^2}}=0.$$

Die Elimination von x zwischen diesen beiden Gleichungen führt zu einer sehr combinirten Gleichung zwischen y' und x'.

Nehmen wir aber die Gleichung des Kreises $y^2+x^2=r^2$, so hat man:

$$\partial y'_x=-\frac{x}{y} \text{ und } 1+\partial y_x{}^2=\frac{r^2}{y^2}.$$

Dadurch gehen 1) und 2) über in:

$$\frac{r}{y}(y'-y)-a=0,\quad r(x'-x)-ax=0;$$

und diess gibt:

$$y=\frac{ry'}{a+r},\quad x=\frac{rx'}{a+r}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung:

$$y^2+x^2=r^2, \text{ so kommt } y'^2+x'^2=(a+r)^2.$$

Die Normalcurve des Kreises ist demnach wieder ein Kreis, folglich beide einander ähnlich. Diese Bemerkung führt zur folgenden Untersuchung:

B. Beschäftigen wir uns mit der Frage:

Welche Curven liefern Normalcurven, die ihnen ähnlich sind?

Zum Behuf dieser Untersuchung darf man nur in den Gleichungen 1) und 2) $y'=cy$ und $x'=cx$ setzen, so hat man:

$$(c-1)y\sqrt{1+\partial y_x{}^2}-a=0 \text{ und}$$

$$(c-1)x\sqrt{1+\partial y_x{}^2}+a\partial y_x=0.$$

Die Integrale dieser beiden Gleichungen, so wie die Elimination von ∂y_x aus beiden liefern nach einander:

$$y^2+x^2-\frac{2Cx}{c-1}=\frac{a^2-C^2}{(c-1)^2},$$

$$y^2+x^2-\frac{2C'y}{c-1}=\frac{a^2-C'^2}{(c-1)^2},$$

$$y^2+x^2=\frac{a^2}{(c-1)^2};$$

wo C und C' aus den Integrationen hervorgegangene Constanten sind.

Alle drei Gleichungen aber geben den Kreis.

Noch untersuchen wir, ob nicht die obigen zwei Differentialgleichungen durch singuläre Werthe befriedigt werden. Bekanntlich ergibt sich der einer Differentialgleichung zukommende singuläre Werth am Kürzesten dadurch, dass man deren allgemeines Integral in Beziehung auf die Constante differentiirt, und zwischen dem Integral und diesem Differential die Constante selbst eliminirt. Befriedigt der aus der Eliminationsgleichung gezogene Werth für y (oder x) die Differentialgleichung, hingegen das Integral nicht, so hat man einen singulären Werth. Auf solche Weise erhält man:

$$C = x(c-1) \text{ und } C' = y(c-1),$$

und ferner als wirkliche singuläre Werthe:

$$y = \pm \frac{a}{c-1} \text{ und } x = \pm \frac{a}{c-1},$$

wofern man das positive Zeichen für y und das negative für x nimmt. Beide Gleichungen zeigen aber die gerade Linie an. Daraus zieht man den Schluss, dass es, ausser dem Kreis und der geraden Linie, keine Curven gibt, denen ihre Normalcurven ähnlich wären.

C. Obschon die Gleichungen der Normalcurven meist von sehr combinirter Natur sind, so bietet deren Rectification und Quadratur dennoch keine grösseren Schwierigkeiten dar, als diejenigen der Urcurven.

Stellen wir uns zwei einander unendlich nahe liegende Krümmungshalbmesser in beiden Curven vor, welche paarweise einander decken, so ist der Krümmungshalbmesser der Urcurve gleich

$$\frac{\partial s^3}{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x},$$

und der correspondirende der Normalcurve

$$\frac{\partial s^3}{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x} + a;$$

wo s den Bogen der Urcurve bezeichnet. Stellen wir nun durch s' den correspondirenden Bogen der Normalcurve dar, so hat man:

$$\frac{\partial s^3}{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x} : \left(\frac{\partial s^3}{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x} + a \right) = \partial s : \partial s',$$

woraus sich ergibt:

$$a : \frac{\partial s^3}{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x} = \partial s' - \partial s : \partial s$$

und

$$\partial (s' - s) = a \frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial s^2}.$$

Nun aber ist $-\frac{\partial x}{\partial y}$ die Tangente des Winkels w, den die Normale mit der Abscissenaxe macht, d. h. $\operatorname{tg} w = -\frac{\partial x}{\partial y}$, woraus

$$\frac{\partial w}{\cos w^2} = -\frac{\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y}{\partial y^2}.$$

Da nun $\cos w^2 = \frac{\partial y^2}{\partial s^2}$, so ist

$$\partial w = \frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial s^2},$$

und so hat man

$$\partial(s'-s) = a\partial w \text{ und } s'-s = aw + C.$$

Sind die beiden Grenzen des Winkels w gleich w' und w'', so ist

$$1) \qquad s' = s + a(w'' - w').$$

Es ist aber $w'' - w'$ der von den äussersten Normalen eingeschlossene Winkel, und $a(w'' - w')$ ist der von diesem Winkel eingeschlossene Kreisbogen, beschrieben mit dem Radius a. Hieraus ergibt sich der Satz:

Man findet den Bogen einer Normalcurve, wenn man den entsprechenden Bogen der Urcurve um denjenigen Kreisbogen vermehrt, welcher mit dem Radius a in dem Winkel beschrieben wird, den die äussersten Normalen mit einander machen.

Es sei ferner (Taf. III. Fig. 2.) AB eine beliebige Curve, über welche in ihrem Mittelpunkt G eine Gerade CD normal dahingleitet, so sei der Flächenraum gesucht, den diese Gerade CD in ihrem Laufe beschreibt. Ist EF eine der CD unendlich nahe Lage, so ist $GH = ds$, und, weil $CEFD$ ein Paralleltrapez ist, indem die Punkte C und D Normalcurven beschreiben, auf denen CD gleichfalls normal ist,

$$\text{Flächengehalt } CDFE = ads,$$

wenn man $CD = a$ setzt. Diess gibt für den ganzen beschriebenen Flächenraum:

$$a(s'' - s'),$$

wofern s' und s'' die äussersten Grenzen der Curven bezeichnen.

So haben wir den andern Satz:

Gleitet eine Gerade mit ihrem Mittelpunkt normal über eine Curve hin, so beschreibt sie einen Flächenraum, welcher dem Produkt aus der Länge der Curve und der Geraden gleich ist.

Wenden wir diesen Satz auf den zwischen einer Urcurve und ihrer Normalcurve liegenden, ringförmigen Flächengehalt u' an, so werden wir eine in der Mitte liegende Normalcurve annehmen mit der Erzeugungslinie $\frac{a}{2}$. Ihr Bogen ist

$$s' = s + \frac{a}{2}(w'' - w'),$$

und folglich der gesuchte Flächeninhalt:

$$2) \qquad u' = as + \frac{a^2}{2}(w'' - w')$$

No. 1) und 2) lösen die Rectification und Quadratur für Grenzen, die in Beziehung auf die Urcurve gegeben sind, oder sich vermittelst der Gleichung der Urcurve bestimmen; denn w und s sind Funktionen von x (oder auch von y), dem die Werthe von w' und w'' und auch von s für bestimmte Grenzwerthe, die wir durch $(x)'$ und $(x)''$ (oder auch durch $(y)'$ und $(y)''$) bezeichnen, entsprechen. Allein denkt man sich die Grenzwerthe $(x')'$ und $(x')''$ (oder auch $(y')'$ und $(y')''$) der Normalcurve gegeben, so benützt man die Gleichung A. 2), nemlich $(x'-x)\sqrt{1+\partial y_x^2} + a\partial y_x = 0$, [oder auch die Gleichung A.1), neml. $(y'-y)\sqrt{1+\partial y_x^2} - a = 0$], welche Gleichungen in Verbindung mit denjenigen der Urcurve $(x)'$ und $(x)''$ [oder auch (y') und $(y)''$] in $(x')'$ und $(x')''$ [oder auch in $(y')'$ und $(y')''$] bestimmen wird, welche Werthe dann nur in die obigen 1) und 2) substituirt werden dürfen.

Will man jedoch den von der Normalcurve, der Abscissenaxe und den beiden Grenzordinaten $(y')'$ und $(y')''$ eingeschlossenen Flächenraum

$$u'' = ABLF \text{ (Taf. III. Fig. 3.)}$$

bestimmen, so wird man zuerst den Flächenraum $DCMG$ der Urcurve

$$u = \int y dx$$

berechnen, zwischen den oben bestimmten Grenzen, und hiezu u', so wie das Trapez $ABCD$ addiren und das Trapez $FLMG$ abziehen.

Man hat aber, wenn man die Subnormalen zu Hilfe nimmt,

$$ABCD = ABE - CDE = \frac{1}{2}(y')'\partial y_x\left[(y)' + \frac{a}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right] - \frac{1}{2}(y)'^2\partial y_x.$$

Ersetzt man aber y' durch den aus A. 1) gezogenen Werth, so kommt:

$$ABCD = \frac{a\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\left[(y)' + \frac{a}{2\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right].$$

Eben so ist

$$FLMG = \frac{a\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\left[(y)'' + \frac{a}{2\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right];$$

folglich ist

$$u'' = u + u' + \frac{a\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\left[(y)' + \frac{a}{2\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right]$$
$$- \frac{a\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\left[(y)'' + \frac{a}{2\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right],$$

wofern im letzten Posten die Grenze $(x)''$ [oder auch $(y)''$] und im uneinsletzten die Grenze $(x)'$ [oder auch $(y)''$] genommen wird.

D. Gleitet eine Gerade a mit einem ihrer Endpunkte nach allen möglichen Richtungen normal über eine Fläche hin, so beschreibt der andere Endpunkt eine Fläche, die wir **Normalfläche** heissen, während die erstere **Urfläche** heissen mag. Hieraus ist klar, dass auch jeder Punkt in jener Geraden eine Normalfläche beschreibt. Was man hier **Erzeugungslinie**, so wie **correspondirende Punkte** heisst, geht aus den Erklärungen in A. hervor.

Die Gleichungen der Normale einer Fläche sind;

$$x'' - x + \partial z_x(z'' - z) = 0$$

und

$$y'' - y + \partial z_y(z'' - z) = 0,$$

wenn x'', y'' und z'' die Coordinaten der Normale selbst bezeichnen. Der Punkt, in dem diese Normale die Coordinaten-Ebene (x,y) schneidet, findet sich, wenn man z'' = Null setzt, und dann folgt:

$$x'' = x + z\partial z_x, \quad y'' = y + z\partial z_y.$$

Nun aber ist die Länge der Normale [vom Punkte (xyz) der Urfläche an bis auf die Ebene (xy) gerechnet]

$$= (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + z^2$$

oder

$$\text{Normale} = z\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2},$$

demnach die correspondirende Länge der Normale der Normalfläche

$$= a + z\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}.$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten der Normalfläche mit x', y' und z', und stellen durch x'' und y'' die Coordinaten des Punktes dar, in welchem die Normale die Ebene (xy) schneidet, so haben wir

$$\begin{aligned} z\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}:(a+z\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}) &= (x-x''):(x'-x'') \\ &= (y-y''):(y'-y'') \\ &= z:z', \end{aligned}$$

woraus folgt

1) $$(x'-x)\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}+a\partial z_x=0,$$

2) $$(y'-y)\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}+a\partial z_y=0,$$

3) $$(z'-z)\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}-a=0.$$

Durch gegenseitige Division leitet man noch ab:

4) $$\frac{\partial z_x}{\partial z_y}=\frac{x'-x}{y'-y},$$

5) $$\partial z_x=-\frac{x'-x}{z'-z},$$

6) $$\partial z_y=-\frac{y'-y}{z'-z}.$$

Quadrirt man aber 1), 2) und 3) und addirt, so heben sich alle Partialdifferentiale weg, und man hat

7) $$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=a^2.$$

Von den Gleichungen 4), 5) und 6) ist jede die Folgerung der beiden andern. Will man daher die Gleichung der Normalfläche herstellen, so eliminire man aus 1), 2) und 3) und der Gleichung der Urcurve, oder aus dreien der 4) bis 7) und der Urcurve x, y und z.

Legt man durch die Erzeugungslinie a eine beliebige Ebene, so schneidet sie die Ur- und Normalfläche in zwei Curven, von denen die erstere als Ur- und die letztere als Normalcurve zu betrachten ist; und da jede dieser Curven als Normalcurve der andern angesehen werden kann, so folgt daraus, dass diese Tangential-Ebenen correspondirender Punkte parallel sind, und dass demnach von beiden Flächen jede die Normalfläche der andern ist.

Die Gleichungen der Normalflächen stellen sich in der Regel in sehr combinirter Form hin. Jedoch weisen die angegebenen Eliminationen von x, y und z für die Ebene, die Kugel, den gemeinen Cylinder und Kegel, beziehlich dieselbe Fläche nach. Die Ebenen können sowohl als bloss ähnliche, als auch als congruente Flächen betrachtet werden, während alle Kugeln ähnlich sind. Ferner sind zwar gemeine Cylinder nur dann ähnlich, wenn ihre Höhen ihren Durchmessern proportional sind; allein, da die Gleichung eines Cylinders dessen Höhe keine Beschränkung gibt, so müssen wir bei gegenwärtiger Betrachtung Ur- und Normalcylinder als ähnlich betrachten. Um aber das Verhalten des Normalkegels zum zugehörigen gemeinen Urkegel auszumitteln, stellen wir dessen einfachste Gleichung dar durch:

$$z^2 = A^2(x^2+y^2).$$

Hieraus hat man:

$$\partial z_x = A^2\frac{x}{z},\quad \partial z_y = A^2\frac{y}{z};$$

wodurch sich die Gleichungen 1), 2), 3) umwandeln in:

$$(x'-x)\sqrt{1+A^2}+\frac{aA^2x}{z}=0,$$

$$(y'-y)\sqrt{1+A^2}+\frac{aA^2y}{z}=0,$$

$$(z'-z)\sqrt{1+A^2}-a=0.$$

Aus der letztern ist

$$z=\frac{z'\sqrt{1+A^2}-a}{\sqrt{1+A^2}},$$

und wenn man z aus den zwei erstern eliminirt:

$$x=x'\left[\frac{z'\sqrt{1+A^2}-a}{z'\sqrt{1+A^2}-a(1+A^2)}\right],$$

$$y=y'\left[\frac{z'\sqrt{1+A^2}-a}{z'\sqrt{1+A^2}-a\,(1+A^2)}\right].$$

Setzt man diese drei Werthe in die Gleichung

$$z^2=A^2(x^2+y^2),$$

so kommt

$$z''^2=A^2(x'^2+y'^2),$$

wenn man setzt:

$$z'-a\sqrt{1+A^2}=z''.$$

Demnach ist der Normalkegel dem Urkegel congruent.

E. Wie bei den Normalcurven, deren Rectification und Quadratur vermittelst der Gleichungen ihrer Urcurven durchgeführt werden konnte, so lässt sich für die Normalflächen deren Quadratur und Cubatur mit Hilfe der Gleichungen ihrer Urfläche ermitteln.

Denkt man sich durch zwei einander schneidende und unendlich nahe liegende Normalen der Urfläche, und daher auch durch die denselben correspondirenden und mit ihnen zusammenfallenden Normalen der Normalfläche eine Ebene gelegt, so schneidet sie beide Flächen in zwei Curven. Von diesen Curven stellen wir das zwischen beiden Normalen liegende Element der Urcurve durch ds und das der Normalcurve durch ds', so wie die respectiven Krümmungshalbmesser durch r und r' dar, so hat man offenbar:

$$ds : ds' = r : r',$$

folglich:

$$ds' = ds\,\frac{r'}{r} = ds.\frac{a+r}{r},$$

weil $r' = a + r$.

Euler und Monge haben zuerst gezeigt, dass man von einem in einer Oberfläche gegebenen Punkte nicht nach beliebiger Richtung gehen kann, um zwei sich schneidende Normalen und folglich wirkliche Krümmungshalbmesser zu finden, dass es aber in der That zwei auf einander senkrechte Richtungen gibt, in denen solches im Allgemeinen der Fall ist, und zwar sind die beiden Krümmungshalbmesser ungleich und finden sich vermittelst der Gleichung:

$$\left.\begin{array}{c} (\partial^2 z_x \partial^2 z_y - \partial^2 z_{x,y}{}^2) r^2 \\ -[(1+\partial z_x{}^2)\,\partial^2 z_y - 2\partial z_x \partial z_y \partial^2 z_{x,y} + (1+\partial z_y{}^2)\,\partial^2 z_x]\, r \sqrt{1+\partial z_x{}^2+\partial z_y{}^2} \\ +(1+\partial z_x{}^2+\partial z_y{}^2)^2 \end{array}\right\} = 0.$$

Schlagen wir nun eine auf obige Richtung senkrechte Richtung ein, und bezeichnen die neuen Curvenelemente und Krümmungshalbmesser respective mit $d\sigma$, $d\sigma'$, ϱ und ϱ', so haben wir ebenfalls:

$$d\sigma' = d\sigma\frac{\varrho'}{\varrho} = d\sigma.\frac{a+\varrho}{\varrho}.$$

Diess gibt für das Flächen-Element der Normalfläche:

$$ds'\,d\sigma' = ds\,d\sigma\left(\frac{a+r}{r}\right)\left(\frac{a+\varrho}{\varrho}\right),$$

und für die Fläche selbst:

$$u' = \iint ds\,d\sigma + a\iint ds\,d\sigma\,\frac{r+\varrho+a}{r\varrho}.$$

Das erste Integral ist die quadrirte Urfläche, die sich bekanntlich vermittelst des Integrals

$$\iint dxdy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}$$

findet, und obschon $dsd\sigma$ nicht gleich ist

$$dxdy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2},$$

so ist dennoch

$$\iint dsd\sigma\,\frac{r+\varrho+a}{r\varrho}=\iint dxdy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}.\,\frac{r+\varrho+a}{r\varrho},$$

wofern beide Integrale zwischen denselben Grenzen genommen werden. Denn stellen wir uns in der Oberfläche einen Punkt vor, um welchen beide Elemente

$$dxdy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}\text{ und }dsd\sigma$$

genommen sind, und es sei

$$dsd\sigma=ndxdy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2},$$

so kann man sich für dieselbe Region die Funktion $\frac{r+\varrho+a}{r\varrho}$ dieselbe Grösse habend vorstellen, indem sie sich nur um unendlich kleine Zuwachse verändert, wenn man vom Element $dsd\sigma$ zum andern

$$dxdy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}$$

übergeht, so dass demnach auch

$$dsd\sigma.\,\frac{r+\varrho+a}{r\varrho}=n\,dxdy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}.\,\frac{r+\varrho+a}{r\varrho}.$$

Also hat man:

$$1)\qquad u'=\iint dxdy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}$$
$$+a\iint dxdy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}.\,\frac{r+\varrho+a}{r\varrho}.$$

Der zwischen der Ur- und Normalfläche liegende Körper bildet eine Schaale, und der zwischen den einander correspondirenden Flächenelementen $ds'd\sigma'$ und $dsd\sigma$ liegende Theil dieser Schaale einen abgestumpften Keil, dessen Höhe $=a$, und dessen die parallelogrammen Grundflächen einschliessenden Kanten ds', $d\sigma'$ und ds, $d\sigma$ sind.

Für diesen abgestumpften Keil findet sich aber der cubische Inhalt

$$dv' = \frac{1}{6}a[ds'(2d\sigma' + d\sigma) + ds(2d\sigma + d\sigma')].$$

Und setzt man hier wieder:

$$ds' = ds\frac{a+r}{r} \text{ und } d\sigma' = d\sigma\frac{a+\varrho}{\varrho}$$

und entwickelt, so kommt

$$v' = a\iint ds\,d\sigma + \frac{1}{6}a^2\iint ds\,d\sigma\,.\,\frac{3(r+\varrho)+2a}{r\varrho},$$

und aus denselben Gründen, wie oben bei der Quadratur:

$$2)\qquad v' = a\iint dx\,dy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}$$
$$+\frac{1}{6}a^2\iint dx\,dy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}\;\frac{3(r+\varrho)+2a}{r\varrho}.$$

In diesem Ausdrucke ist bemerkenswerth, dass das rechte Integral einen prismatischen Körper repräsentirt, dessen Grundfläche gleich der Urfläche und dessen Höhe gleich der Erzeugungslinie a ist.

Um r und ϱ durch ihre Funktionen in x und y zu ersetzen, hat man nicht nothwendig, die obige, r und ϱ liefernde Gleichung aufzulösen, indem sich unmittelbar aus derselben ergibt:

$$r+\varrho = \frac{(1+\partial z_x^2)\partial^2 z_y - 2\partial z_x\partial z_y\partial^2 z_{x,y} + (1+\partial z_y^2)\partial^2 z_x}{\partial^2 z_x\,\partial^2 z_y - \partial^2 z_{x,y}^2}\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2},$$

$$r\varrho = \frac{(1+\partial z_x^2+\partial z_y^2)^2}{\partial^2 z_x\partial^2 z_y - \partial^2 z_{x,y}^2}.$$

In 1) und 2) kann man in den meisten Fällen vortheilhaft je das zweite Integral in zwei zerlegen, nach der Zerlegung von

$$\frac{\varrho+r+a}{r\varrho} \text{ in } \frac{\varrho+r}{r\varrho}+\frac{a}{r\varrho}$$

und von

$$\frac{3(\varrho+r)+2a}{r\varrho} \text{ in } \frac{3(\varrho+r)}{r\varrho}+\frac{2a}{r\varrho}.$$

Für den Fall, dass $\partial^2 z_x\partial^2 z_y - \partial^2 z_{x,y}^2 = 0$ ist, ist einer der Krümmungshalbmesser unendlich. Der andere dagegen ist

$$r = \frac{(1+\partial z_x^2+\partial z_y^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\partial z_x^2)\partial^2 z_y - 2\partial z_x \partial z_y \partial^2 z_{x,y} + (1+\partial z_y^2)\partial^2 z_x},$$

wodurch die beiden Werthe für u' und v' übergehen in:

$$u' = \iint dxdy \sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2} + a\iint dxdy \sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}\cdot\frac{1}{r}$$

und

$$v' = a\iint dxdy \sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2} + \frac{1}{2}a^2\iint dxdy \sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}\cdot\frac{1}{r}.$$

Ist aber noch überdiess

$$(1+\partial z_x^2)\partial^2 z_y - 2\partial z_x \partial z_y \partial^2 z_{x,y} + (1+\partial z_y^2)\partial^2 z_x = 0,$$

so sind beide Krümmungshalbmesser unendlich gross, was z. B. bei der Ebene der Fall ist. In diesem Fall bleiben von u' und v' nur die ersten Integrale. Wählen wir als:

1. Beispiel.

Die Quadratur und Cubatur des gemeinen Normalkegels.

Die Gleichung desselben ist:

$$z^2 = A^2(x^2+y^2).$$

Da hier $\partial^2 z_x \partial^2 z_y - \partial^2 z_{x,y}{}^2 = 0$, so ist der eine Krümmungshalbmesser unendlich, der andere aber ist:

$$r = \frac{\sqrt{1+A^2}}{A}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Da man nun hat

$$1+\partial z_x^2+\partial z_y^2 = 1+A^2,$$

so ergibt sich:

$$u' = \sqrt{1+A^2}\iint dx\,dy + aA\iint \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Das erste Integral ist die Oberfläche des Urkegels und das letztere gibt, indem man zuerst in Beziehung auf y integrirt,

$$aA\iint \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = aA\int dx \log(y+\sqrt{x^2+y^2}),$$

welches noch zwischen den Grenzen

$$y=0 \text{ und } y=\sqrt{\frac{h^2}{A^2}-x^2}$$

zu nehmen ist, wofern h die Höhe des Kegels vorstellt. Diess gibt

$$aA\iint\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=aA\int dx\log\left[\sqrt{\frac{h^2}{A^2}-x^2}+\frac{h}{A}\right]-aA\int dx\log x$$

oder

$$=aA\int dx\log\left\{\frac{\sqrt{\frac{h^2}{A^2}-x^2}+\frac{h}{A}}{x}\right\}.$$

Nun setze man $x=\frac{h}{A}\sin X$, so ist

$$dx=\frac{h}{A}\cos X\,dX,$$

und unser Integral geht nach und nach über in:

$$ah\int dX\cos X\log\left(\frac{\cos X+1}{\sin X}\right)$$

$$=ah\sin X\log\left(\frac{1+\cos X}{\sin X}\right)-ah\int dX\sin X\partial\left[\log\left(\frac{1+\cos X}{\sin X}\right)\right]$$

$$=ah\sin X\log\left(\frac{1+\cos X}{\sin X}\right)+ahX.$$

Will man zuerst die halbe Oberfläche des Normalkegels, so nimmt man dieses Integral zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=0$, d. h. zwischen $X=0$ und $X=\pi$, und verdoppelt es zuletzt für die ganze Oberfläche. So findet sich:

$$2ah\pi.$$

Fügt man das erste Integral, oder die Oberfläche des Urkegels noch hinzu, so hat man:

$$u'=\pi\,(R\sqrt{R^2+h^2}+2ah),$$

wenn man den Halbmesser der Grundfläche $\frac{h}{A}=R$ setzt. Unter

Benützung der obigen Integrale ergibt sich ferner der cubische Inhalt (der Schaale)

$$v' = a\pi(R\sqrt{R^2+h^2}+ah).$$

Wir nehmen als:

2. Beispiel.

Die Quadratur und Cubatur des Normal-Umdrehungsparaboloides.

Die Gleichung der Urfläche ist:

$$z = \frac{1}{2}p(x^2+y^2).$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \partial z_x &= px, \\ \partial z_y &= py, \\ \partial^2 z_x &= \partial^2 z_y = p, \\ \partial^2 z_{x,y} &= 0; \end{aligned}$$

und diese Werthe liefern:

$$\frac{r+\varrho}{r\varrho} = p \cdot \frac{2+p^2(x^2+y^2)}{[1+p^2(x^2+y^2)]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{a}{r\varrho} = ap^2 \cdot \frac{1}{[1+p^2(x^2+y^2)]^2}.$$

Wir haben uns nun mit der Entwickelung folgender drei Integrale zu beschäftigen:

$$\iint dx dy \sqrt{1+p^2(x^2+y^2)},$$

$$\iint dx dy \cdot \frac{2+p^2(x^2+y^2)}{1+p^2(x^2+y^2)} \text{ oder } \iint dx dy + \iint \frac{dx\, dy}{1+p^2(x^2+y^2)},$$

$$\iint \frac{dx\, dy}{[1+p^2(x^2+y^2)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Hier können wir für x und y auf Polar-Coordinaten übergehen, und setzen wir den Radius-Vektor $=u$, so dass $u^2 = x^2+y^2$, und den Winkel, den derselbe mit der Abscissenaxe macht, $=v$, so stellt sich die Gleichung des Umdrehungsparaboloides einfacher dar durch $z = \frac{1}{2}pu^2$.

Da sich nun das Flächenelement $dxdy$ durch $ududv$ ersetzen lässt, so verwandeln sich obige Integrale in:

$$\iint ududv\sqrt{1+p^2u^2},$$

$$\iint ududv+\iint\frac{ududv}{1+p^2u^2},$$

$$\iint\frac{ududv}{(1+p^2u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Will man die Fläche oder den cubischen Inhalt des ganzen Paraboloides, so hat man die Integrale in Beziehung auf v zwischen den Grenzen $v=0$ und $v=2\pi$ zu nehmen, und hat:

$$2\pi\int udu\sqrt{1+p^2u^2},$$

$$2\pi\int udu+2\pi\int\frac{udu}{1+p^2u^2},$$

$$2\pi\int\frac{udu}{(1+p^2u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Integrationen vollziehen sich leicht, wenn man setzt:

$$1+p^2u^2=w^2.$$

Ist nun die Höhe des Paraboloides gleich h, so ist

$$z=h=\frac{1}{2}pu^2,$$

und demnach die Grenzen von u gleich 0 und gleich $\sqrt{\frac{2h}{p}}$. Auf diese Weise hat man:

$$\frac{2\pi}{3p^2}[(1+2ph)^{\frac{3}{2}}-1],$$

$$\frac{2\pi h}{p}+\frac{\pi}{p^2}\log(1+2ph),$$

$$\frac{2\pi}{p^2}\left[1-\frac{1}{\sqrt{1+2ph}}\right].$$

Um die Oberfläche zu haben, müssen wir das zweite Integral mit pa und das dritte mit p^2a^2 multipliciren und hierauf alle drei addiren. Diess gibt die

Oberfläche

$$= 2\pi \left\{ \frac{1}{3p^2}[(1+2ph)^{\frac{3}{2}}-1] + a(h+a) + \frac{a}{2p}\log(1+2ph) - \frac{a^2}{\sqrt{1+2ph}} \right\}.$$

Will man aber den cubischen Inhalt (der Schaale), so ist das erste Integral mit a, das zweite mit $\frac{1}{2}pa^2$ und das dritte mit $\frac{1}{3}p^2a^3$ zu multipliciren und hierauf alle drei zu addiren. So kommt

Cubischer Inhalt

$$= a\pi \left\{ \frac{2}{3p^2}[(1+2ph)^{\frac{3}{2}}-1)] + a(h+\frac{2}{3}a) + \frac{a}{2p}\log(1+2ph) - \frac{2}{3}\frac{a^2}{\sqrt{1+2ph}} \right\}.$$

E. Will man aber obige Integrale, statt zwischen Grenzen von x und y, zwischen bestimmten Grenzen von x' und y' nehmen, die wir durch $(x')'$, $(x')''$ und $(y')'$, $(y')''$ bezeichnen, so werden sich die Grenzen von x und y darnach bestimmen.

Setzen wir nun die Grenzen $(x')'$, $(x')''$ und $(y')'$, $(y')''$ nach einander beziehlich in die beiden Gleichungen

$$(x'-x)\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2} + a\partial z_x = 0,$$

$$(y'-y)\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2} + a\partial z_y = 0;$$

so stellen sich, mit Hilfe der Gleichung der Urcurve, selbst wenn $(y')'$ in Funktion von (x') und $(y')''$ in Funktion von $(x')''$ gegeben wären, vier Gleichungen zwischen y und x dar, und wir bezeichnen die daraus hervorgehenden Funktionen y von x mit

a) $y = f^1(x)$,
b) $y = f^2(x)$,
c) $y = f^3(x)$,
d) $y = f^4(x)$.

Sind (Taf. III. Fig. 4.) AX und AY die Coordinatenaxen der Ebene (xy), so sei die Curve BD durch die Gleichung a), EC durch b), BC durch c) und DE durch d) dargestellt und das Viereck $BDEC$ repräsentirt die Grenzen, zwischen denen die Integrale zu nehmen sind. Verbindet man die Gleichungen a) und c) mit einander, so bestimmt sich dadurch der Punkt B, dessen Abscisse wir durch x_1 bezeichnen. a) und d) bestimmen den Punkt D, dessen Abscisse wir $= x_2$ setzen. b) und c) bestimmen C, dessen Abscisse $= x_3$ und endlich bestimmen b) und d) den Punkt E, dessen Abscisse $= x_4$.

Es ist nun aber Viereck

e) $BDEC = BDx_1x_2 - CEx_3x_4 - BCx_1x_3 + DEx_2x_4$.

Nachdem nun eines der obigen Integrale in Beziehung auf y genommen worden ist, wird man es mit $y=0$ beginnen lassen und in dasselbe nach einander die Funktionen

$$y=f^1(x),\ y=f^2(x),\ y=f^3(x),\ y=f^4(x)$$

substituiren, hierauf in Beziehung auf x integriren, und

das 1ste	zwischen	den	Grenzen	x_1 und x_2,
das 2te	„	„	„	x_3 und x_4.
das 3te	„	„	„	x_1 und x_3 und
das 4te	„	„	„	x_2 und x_4

nehmen, und dieselben mit den im zweiten Theil der Gleichung e) enthaltenen Zeichen additiv zusammensetzen. Ist aber $x_2 < x_1$, so muss BDx_1x_2 negativ genommen werden. Gleicherweise ändert sich das Zeichen von CEx_3x_4, wenn $x_4 > x_3$.

Hiedurch bezweckt sich die Quadratur eines Stücks der Normalfläche, welches von parallelopipedalisch aneinandergereihten Ebenen, die mit den Coordinaten-Ebenen (zx) und (zy) parallel laufen, abgeschnitten wird.

Weit schwieriger ist hier die Cubatur auf solche Weise, dass dadurch ein Körper bestimmt werde, welcher prismatisch zwischen dem abgeschnittenen Stück der Normalfläche und der Ebene (xy) liege; denn obige Integrale geben noch immer einen Körpertheil, welcher normal zwischen den correspondirenden Stücken der Ur- und Normalfläche liegt.

Will man zu diesem Zwecke nicht unmittelbar die Gleichung der Normalfläche bestimmen und benützen, so handelt es sich darum, vier prismatische Körperstücke theils zu addiren, theils zu subtrahiren, deren Seitenflächen senkrecht auf der Ebene (xy) stehen und im Uebrigen theils von der Ebene (xy) und, dieser gegenüber, von einer durch den Fortgang der Erzeugungslinie a gebildeten krummen Oberfläche begrenzt werden. Das erste Geschäft ist, die Gleichung dieser letztern (oder vielmehr vier letztern) zu entwickeln.

Hiezu dienen die Gleichungen der Normale

$$x'' - x + \partial z_x (z'' - z) = 0$$

und

$$y'' - y + \partial z_y (z'' - z) = 0,$$

wo x'', y'' und z'' die Ordinatenwerthe der Normale bezeichnen, während beide Gleichungen noch überdiess x, y und z enthalten. z eliminirt sich vermittelst der gegebenen Gleichung der Urcurve. Hierauf wird man nach einander die oben bestimmten Funktionen

y ((a), b), c) und d)) statt y substituiren, und zwischen beiden das noch übrig bleibende x eliminiren. Die Eliminationsgleichung wird dann jedesmal die gesuchte Gleichung zwischen x'', y'' und z'' jener Oberflächen sein.

Die theilweise Coordinaten-Verwandlung im obigen zweiten Beispiel führt uns zur der Betrachtung im folgenden Aufsatze.

XX.

Ueber gemischte Coordinaten.

Von

Herrn Brenner,

Lehrer zu Tuttlingen im Königreich Würtemberg.

Es ist bei der Behandlung der Körper, so wie bei derjenigen der Flächen und Curven des Raumes, oft sehr zweckmässig, statt der reinen rechtwinkligen oder statt der reinen Polar-Coordinaten ein Gemisch derselben in Anwendung zu bringen. Diess kann geschehen, wenn man die Axe z unverändert lässt, dagegen statt x und y einen in der Ebene (xy) liegenden, bis an die Projektion eines betrachteten Punktes gezogenen Radius-Vektor, und den Winkel α nimmt, den derselbe mit der Axe x macht.

Die Formeln zur Cubatur und Quadratur der krummen Oberflächen, so wie zur Rectification der Curven des Raumes gestalten sich für gemischte Coordinaten wie folgt.

A. Cubatur.

Denkt man sich im Körper einen beliebigen Punkt, lässt dessen Radius-Vector um dr, den Winkel α um $d\alpha$ und z um dz

wachsen, so bestimmen die drei auf einander senkrecht stehenden Kanten dr, $rd\alpha$ und dz ein Parallelepipedum, dessen Inhalt $rdrdzd\alpha$ ist. Demnächst ist der cubische Inhalt V des Körpers

$$V=\iiint rdrdzd\alpha\,.$$

B. Quadratur der Oberfläche.

Es stelle (Taf. III. Fig. 5.) BCG einen mit der Ebene (xy) oder $(r\alpha)$ parallelen Durchschnitt dar, in der Entfernung z des letztern von $(r\alpha)$, und eben so C einen in obigem Durchschnitt fixirten Punkt. Auch sei AX' mit der ursprünglichen Axe der x parallel, so dass $\angle CAX'=\alpha$. Nun lasse man α um $d\alpha$ wachsen, so dass $BAC=d\alpha$. Dann wird $BE=dr$ sein, so genommen, dass z constant gedacht ist, wodurch $BE=\partial r_\alpha d\alpha$ wird. Hierauf denkt man sich z beliebig um dz wachsend und legt durch z und AC eine Ebene. Dieser Schnitt, so wie der mit $(r\alpha)$ parallele und von $(r\alpha)$ um $z+dz$ entfernte Schnitt werden sich in der krummen Oberfläche in einem Punkte schneiden, den wir D heissen. Ziehe ich nun von D ein Loth DD' auf AC, so stellt CD' das Wachsthum von r vor, so genommen, dass nur z variirt, dagegen α constant bleibt. Demnach ist

$$CD'=\partial r_z dz.$$

Das gesuchte Elementarparallelogramm hat nun als Seiten die Linien

$$BC=d\alpha\sqrt{r^2+\partial r_\alpha^2}$$

und

$$DC=dz\sqrt{1+\partial r_z^2}\,.$$

Der Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels ergibt sich aber nach der sphärischen Trigonometrie, wenn man $\cos BCD'$ mit $\cos DCD'$ multiplicirt. Demnach ist:

$$\cos DCB=\cos DCD'.\cos BCD'$$
$$=\frac{\partial r_z}{\sqrt{1+\partial r_z^2}}\cdot\frac{\partial r_\alpha}{\sqrt{r^2+\partial r_\alpha^2}},$$

folglich

$$\sin DCB=\frac{1}{\sqrt{1+\partial r_z^2}\sqrt{r^2+\partial r_\alpha^2}}\sqrt{r^2(1+\partial r_z^2)+\partial r_\alpha^2}\,.$$

Demnach das Elementarparallelogram selbst

$$=BC.DC.\sin DCB = d\alpha dz\sqrt{r^2(1+\partial r_z^2)+\partial r_\alpha^2}.$$

So findet sich also die krumme Oberfläche

$$F=\iint d\alpha dz\sqrt{r^2(1+\partial r_z^2)+\partial r_\alpha^2}.$$

C. Rectification der Linie des Raumes.

Hier findet sich nur Eine unabhängige Veränderliche, und wir nehmen α als solche an. Die Transversale des Parallelepipedums, dessen Kanten sind $rd\alpha$, $\partial r_\alpha d\alpha$ und $\partial z_\alpha d\alpha$, ist aber gleich

$$d\alpha\sqrt{r^2+\partial z_\alpha^2+\partial r_\alpha^2}.$$

Demnach findet sich der Bogen unserer Curve

$$s=\int d\alpha\sqrt{r^2+\partial z_\alpha^2+\partial r_\alpha^2}.$$

Als Anwendung hievon geben wir Folgendes:

a). Eine ebene Curve bewegt sich mit sich selbst parallel nach einer auf ihrer Ebene senkrechten Richtung, während sie noch überdiess um eine feste Axe rotirt, so dass der Rotationswinkel der Erhebung stets proportional ist und dass eben jene Axe auf genannter Ebene senkrecht steht. Es soll nun die Gleichung der von der Curve beschriebenen Oberfläche dargestellt werden. Es befinde sich in der Ebene (xy) (Taf. III. Fig. 6.) die Curve lb, für welche die Gleichung $y=f(x)$ gegeben ist. Hat sie sich nun auf angegebene Weise um z über (xy) erhoben, so stelle LB ihre Projektion auf (xy) vor, so wie EX und EY die Projektionen ihrer Coordinaten-Axen, die mit der Curve rotiren, während wir die Axe z in die Rotationsaxe verlegen. Nehme ich in LB den beliebigen Punkt C an, und ziehe das Loth CD, so ist CD die Ordinate und ED die Abscisse desjenigen Punktes, von welchem C die Projektion ist, und setze ich $ED=X$ und $CD=Y$, so findet zwischen X und Y dieselbe Gleichung statt, wie zwischen x und y, d. h. man hat

$$Y=f(X).$$

Den Drehungswinkel XEx setze ich $=\beta$, so ist bekanntlich:

$$X=y\sin\beta+x\cos\beta,$$
$$Y=y\cos\beta-x\sin\beta.$$

Allein da β dem z proportional ist, so setzen wir $\beta=Az$ und haben so die Gleichung:

$$y \cos(Az) - x \sin(Az) = f[y \sin(Az) + x \cos(Az)].$$

Setzen wir nun

$$y = r \sin\alpha$$

und

$$x = r \cos\alpha,$$

so nimmt diese Gleichung folgende Form an:

$$r \sin(\alpha - Az) = f[r \cos(\alpha - Az)].$$

1. Beispiel.

Setzen wir als Erzeugungslinie eine Gerade, die durch die Rotationsaxe geht, so ist, wenn sie Anfangs mit der Abscissenaxe selbst zusammenfällt, $y=0$, d. h. $Az=\alpha$ die gesuchte Gleichung der erzeugten Oberfläche, und es weist sich demnach r von z und α völlig unabhängig aus.

Wollen wir nun zuerst den von unserer Fläche begrenzten Körper cubiren, so haben wir

$$V = \frac{1}{2} r'^2 \iint dz d\alpha,$$

wo r zwischen den Grenzen $r=0$ und $r=r'$ genommen ist. Hierauf kommt

$$V = \frac{1}{2} r'^2 \int \alpha dz,$$

wo das Integral mit $\alpha=0$ beginnt. Die andere Grenze aber ist $\alpha=Az$, und so haben wir:

$$V = \frac{1}{2} r'^2 A \int z dz = \frac{1}{4} r'^2 z^2 A,$$

wo auch hier das Integral mit $z=0$ anfängt. Nimmt man eine volle Umdrehung, so ist $z=\frac{2\pi}{A}$, und man hat

$$V = \frac{r^2 \pi^2}{A} = \frac{1}{2} r^2 \pi z,$$

also gleich der Hälfte eines Cylinders, dessen Höhe $=z$ und Radius $=r$.

Für die Quadratur der Oberfläche ist die Formel

$$F=\iint d\alpha dz \sqrt{r^2(1+\partial r_z^2)+\partial r_\alpha^2}$$

unbrauchbar, weil für diesen Zweck nothwendig ist, dass α und z von einander unabhängig sind, während im vorliegenden Falle r völlig unabhängig ist, und zwischen z und α die Gleichung existirt $Az=\alpha$, eine Bemerkung, die sich in Beziehung auf die Cubatur nicht machen lässt, weil hier dz im Innern des Körpers ganz beliebig genommen ist und die Abhängigkeit $Az=\alpha$ erst nach der Integration in Beziehung auf α bei der einen Grenze zum Vorschein kommt. Es ist daher nöthig, die Abhängigkeit auf eine andere Veränderliche, etwa auf z zu werfen, so dass alsdann r und α als unabhängig erscheinen. Auf diese Weise haben wir

$$\partial r_z=\frac{1}{\partial z_r} \text{ und } \partial r_\alpha=\frac{1}{\partial \alpha_r}=\frac{1}{\partial \alpha_z \partial z_r}=\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_r}.$$

So hat man denn:

$$F=\iint d\alpha dr \sqrt{r^2(1+\partial z_r^2)+\partial z_\alpha^2}.$$

Nun aber ist $\partial z_r=0$ und $\partial z_\alpha=\frac{1}{A}$, folglich

$$F=\iint d\alpha dr \sqrt{r^2+\frac{1}{A^2}}.$$

Die Integrationen aber geben:

$$F=\frac{(\alpha-C)}{2A}[r\sqrt{1+A^2r^2}+\frac{1}{A}\log(rA+\sqrt{1+A^2r^2})]+C',$$

wo C und C' die beiden eingegangenen Constanten sind.

Für $r=0$ ist auch der Flächengehalt $=$Null, und soll er auch für $\alpha=0$ gleich Null sein, so hat man:

$$F=\frac{\alpha}{2A}[r\sqrt{1+A^2r^2}+\frac{1}{A}\log(rA+\sqrt{1+A^2r^2})],$$

wo für eine ganze Umdrehung α durch 2π zu ersetzen ist.

Verbinden wir mit der Gleichung $Az=\alpha$ noch $r=c$, wo c eine Constante vorstellt, so haben wir die Schraubenlinie. Wollen wir sie rectificiren, so ist

$$\partial z_\alpha=\frac{1}{A} \text{ und } \partial r_\alpha=0,$$

daher

$$s=\int d\alpha\sqrt{c^2+\frac{1}{A^2}}=\alpha\sqrt{c^2+\frac{1}{A^2}},$$

wenn s mit $\alpha=0$ anfangen soll. Eliminirt man A und c, so kommt

$$s=\sqrt{r^2\alpha^2+z^2}$$

und für eine ganze Umdrehung

$$s=\sqrt{4r^2\pi^2+z^2},$$

welches die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ist, das z, und den Umkreis des Cylinders vom Radius r zu Catheten hat.

2. Beispiel.

Setzen wir eine Gerade, die nicht durch die Rotationsaxe z geht, so können wir sie uns Anfangs mit x parallel in einer Entfernung $y=a$ denken. Alsdann ist

$$r=\frac{a}{\sin(\alpha-Az)}$$

die Gleichung der Oberfläche.

Die Cubatur gibt zuerst:

$$\begin{aligned} V&=\frac{1}{2}\iint r^2 dz\,d\alpha\\ &=\frac{a^2}{2}\iint\frac{dz\,d\alpha}{\sin(\alpha-Az)^2}\\ &=\frac{a^2}{2}\int dz\,[C-\cot(\alpha-Az)], \end{aligned}$$

wo C die eingegangene Constante, oder

$$=\frac{a^2}{2}\int dz\,[\cot(\alpha'-Az)-\cot(\alpha''-Az)],$$

wenn man dieses Integral zwischen den Grenzen $\alpha=\alpha'$ und $\alpha=\alpha''$ nimmt.

Nehmen wir nun das Integral in Beziehung auf z, so haben wir

$$V=\frac{a^2}{2A}\left\{\log\left[\frac{\sin(\alpha''-Az)}{\sin(\alpha'-Az)}\right]+\log C'\right\},$$

wo C' die Constante ist.

Soll der Cubikinhalt für $z=0$ verschwinden, so ist

$$\log C = -\log\frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha'}$$

und

$$V = \frac{a^2}{2A}\log\left[\frac{\sin\alpha'\sin(\alpha''-Az)}{\sin\alpha''\sin(\alpha'-Az)}\right].$$

Diess ist der cubische Inhalt eines Körpers, der einerseits von der krummen Oberfläche, anderseits aber von zwei parallelen um z von einander abstehenden Ebenen, so wie von zwei andern auf den letztern senkrecht stehenden und sich unter dem Winkel $\alpha''-\alpha'$ in der Rotationsaxe schneidenden Ebenen eingeschlossen ist.

Zur Quadratur der Oberfläche aber hat man, unter Anwendung der Formel

$$F = \iint d\alpha dz\,\sqrt{r^2(1+\partial r_z^2)+\partial r_\alpha^2},$$

aus

$$r = \frac{a}{\sin(\alpha-Az)},$$

$$\partial r_\alpha = -\frac{a\cos(\alpha-Az)}{\sin(\alpha-Az)^2}$$

und

$$\partial r_z = \frac{Aa\cos(\alpha-Az)}{\sin(\alpha-Az)^2}.$$

Substituirt man diese Werthe, so ergibt sich:

$$F = a\iint\frac{d\alpha dz}{\sin(\alpha-Az)^2}\sqrt{1+A^2a^2\operatorname{cotg}(\alpha-Az)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}a\int dz\operatorname{cotg}(\alpha-Az)\sqrt{1+A^2a^2\operatorname{cotg}(\alpha-Az)^2}$$

$$-\frac{1}{2A}\int dz\log\left[Aa\operatorname{cotg}(\alpha-Az)+\sqrt{1+A^2a^2\operatorname{cotg}(\alpha-Az)^2}\right]+C.$$

Sucht man diejenige Fläche, die von einem bestimmten Theil der Geraden erzeugt wird, der beim Anfang der Bewegung zwischen den Grenzen $\alpha=\alpha'$ und $\alpha=\alpha''$ enthalten ist, so ist obiges Integral zwischen den Grenzen $\alpha=\alpha'+Az$ und $\alpha=\alpha''+Az$ zu nehmen und dann kommt:

$$F=\frac{1}{2}az'\left[\cot\alpha'\sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha'^2}-\cot\alpha''\sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha''^2}\right]$$

$$\frac{z'}{2A}\left[\log\frac{Aa\cot\alpha'+\sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha'^2}}{Aa\cot\alpha''+\sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha''^2}}\right]$$

für die Grenzen $z=0$ und $z=z'$.

Wird nun durch eine geradlinige Figur, vermittelst oben beschriebener Bewegung, ein Körper erzeugt, so ist, wenn die Grundfläche (eben jene Figur) gleich G gesetzt wird, das Körperelement desselben

$$dV=Gdz,$$

folglich $V=Gz$, wenn das Integral mit $z=0$ beginnen soll.

Es folgt hieraus, dass man, um den cubischen Inhalt eines solchen Körpers zu bestimmen, nur die Grundfläche mit der Höhe multipliciren darf. Zur Bestimmung der Oberfläche jedoch dient obige Endformel für F. Nehmen wir als Erzeugungsfigur z. B. das gleichseitige Dreieck, dessen Seite $=g$, und lassen sich dasselbe um seinen Mittelpunkt drehen, so ist

$$a=\frac{g}{2\sqrt{3}}.$$

Nimmt man hierauf als erste Grenze an $\alpha'=\frac{\pi}{6}$, so ist die zweite $\alpha''=\frac{5\pi}{6}$, so dass

$$\cot g\alpha'=+\sqrt{3} \text{ und } \cot g\alpha''=-\sqrt{3}.$$

Hieraus ergibt sich für die ganze Oberfläche des erzeugten Körpers nach einigen Reduktionen:

$$F=\frac{3}{4}gz'\sqrt{4+g^2A^2}+\frac{3z'}{A}\left(\log\frac{Ag+\sqrt{4+A^2g^2}}{2}\right).$$

Substituiren wir aber dem gleichseitigen Dreieck ein Quadrat mit der Seite g, so ist $a=\frac{g}{2}$, und nimmt man $\alpha'=\frac{\pi}{4}$, so ist $\alpha''=\frac{3\pi}{4}$, $\cot\alpha'=1$ und $\cot\alpha''=-1$. Diess gibt:

$$F=gz'\sqrt{4+g^2A^2}+\frac{4z'}{A}\left(\log\frac{Ag+\sqrt{4+A^2g^2}}{2}\right).$$

Wollen wir aber eine Oberfläche quadriren, die durch die Be gung einer ebenen Curve erzeugt wird, so stellen wir uns selbe, wie diess bei der Differentialrechnung immer der Fall als aus unendlich vielen, unendlich kleinen geraden Linien stehend vor, so dass jedes $d\alpha'$ ein Stück derselben zwischen fasst, indem wir uns die Curve in der Ebene (xy) liegend stellen.

Die Formel

$$F = \frac{1}{2} az\left[\cot\alpha' \sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha'^2} - \cot\alpha'' \sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha''^2}\right.$$

$$\left. + \frac{z}{2A}\left(\log \frac{Aa\cot\alpha' + \sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha'^2}}{Aa\cot\alpha'' + \sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha''^2}}\right)\right]$$

wird demnach die Oberfläche eines unendlich schmalen (gew denen) Streifens der Oberfläche geben, wenn wir $\alpha'' - \alpha' =$ setzen, und a die Entfernung des betrachteten Elementes der Cu oder dessen Verlängerung vom Fusspunkte der Rotationsa darstellt.

Setzt man aber in obiger Gleichung $\alpha'' = \alpha' + d\alpha'$, wo $d\alpha'$ Wachsthum von α' vorstellt, so entwickelt sich als Differen der Oberfläche, wenn wir auch von α' den Apostrophen w lassen,

$$dF = za \frac{d\alpha}{\sin\alpha^2} \sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha^2}.$$

Will man hier integriren, so ist vorher noch der Veränderlich aus der Gleichung der Curve in Funktion von α herzustellen. ist aber für jede ebene Curve, deren Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten x und y gegeben ist,

$$a = \frac{x\partial y - y}{\sqrt{1+\partial y^2}}.$$

Nehmen wir als

3. Beispiel.

Einen Kreis, der sich nach oben angegebener Weise einen Punkt in seiner Peripherie bewegt, so ist dessen Gleichu

$$y^2 = 2Rx - x^2,$$

und hieraus

$$a = -x = -r\cos\alpha = -2R\cos\alpha^2,$$

und diess gibt:

$$dF = -2Rzd\alpha \cot\alpha^2 \sqrt{1+4R^2A^2\cos\alpha^4\cot\alpha^2}.$$

Nimmt man das Integral hievon zwischen den Grenzen $\alpha=0$ und $\alpha=\pi$, und verdoppelt es, so hat man die ganze Oberfläche.

Man könnte sich die Aufgabe stellen, Curven zu bestimmen, die das Integral der Oberfläche in endlicher Form liefern. Hiebei dürfte man nur a so bestimmen, dass der Ausdruck:

$$za\,\frac{d\alpha}{\sin\alpha^2}\sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha^2}$$

die verlangte Integrabilität besässe, wo dann

$$\frac{x\partial y-y}{\sqrt{1+\partial y^2}}=a$$

die Gleichung der gesuchten Curve darstellen würde. Setzt man z. B. $a=\cot\alpha$ oder $a=\operatorname{tg}\alpha$, so hat man

$$dF=-z\cot\alpha\, d(\cot\alpha)\sqrt{1+A^2\cot\alpha^4}\,.$$

oder

$$dF=-z\frac{d(\cot\alpha)}{\cot\alpha}\sqrt{1+A^2}$$

und

$$\frac{x\partial y-y}{\sqrt{1+\partial y^2}}=\frac{x}{y},$$

oder

$$\frac{x\partial y-y}{\sqrt{1+\partial y^2}}=\frac{y}{x}$$

sind die Differentialgleichungen der zugehörigen Erzeugungs Curven.

b) Gleich zweckmässig erweisen sich gemischte Coordinaten für die Anwendung auf Curven, welche auf gegebenen Oberflächen eine constante Neigung haben.

Man stelle sich irgend eine Curve des Raumes vor und lege eine beliebige mit (xy) oder $(r\alpha)$ parallele Ebene $Y'AX'$ (Taf. III. Fig.7.), welche die Curve im Punkte R schneidet, so ist AR gleich dem Radius-Vector r. Denken wir uns, von R aus genommen, ein Element ds der Curve, so sei M die Projektion des andern Endpunktes P auf die Ebene $Y'AX'$. Es ist alsdann PMR ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem der Winkel PRM die Neigung der Curve ist. Wir setzen $\operatorname{tg}PRM=A$.

Da nun $PM=dz$ und $RM=\sqrt{r^2d\alpha^2+dr^2}$, so ist

$$dz=A\sqrt{r^2d\alpha^2+dr^2}$$

oder

$$\partial z = A\sqrt{r^2\partial\alpha^2 + \partial r^2},$$

wo man sich nur Einen unabhängigen Veränderlichen, etwa zu denken hat, weil man es mit einer Curve zu thun hat.

Verbindet man mit dieser Gleichung, in welcher A, für c stante Neigung, unveränderlich ist, die Gleichung der krumn Oberfläche, so ist dadurch die gesuchte Curve völlig bestimm

1. Beispiel.

Es stehe ein gemeiner gerader Kegel mit seiner Grundflä auf der horizontalen Ebene $(r\alpha)$, so ist, wenn R gleich dem dius der Grundfläche und h gleich der Höhe, die Gleichung d selben

$$R(h-z) = hr,$$

womit sich noch verbindet

$$\partial z = A\sqrt{r^2\partial\alpha^2 + \partial r^2}.$$

Diess gibt $\partial z = -\frac{h\partial r}{R}$, und eliminirt man ∂z, so kommt

$$\frac{h^2\partial r^2}{R^2} = A^2(r^2\partial\alpha^2 + \partial r^2),$$

welches gibt

$$\frac{\partial r}{r} = -\frac{AR\partial\alpha}{\sqrt{h^2 - A^2R^2}},$$

wo das negative Zeichen genommen ist, weil r abnimmt, we α wächst. Die Integration liefert

$$\log r = -\frac{AR\alpha}{\sqrt{h^2 - A^2R^2}} + C.$$

Nimmt man an, dass für den Anfang, wo $r = R$, $\alpha = 0$, so $C = \log R$ und

$$\log\frac{r}{R} = -\frac{AR\alpha}{\sqrt{h^2 - A^2R^2}}$$

oder

$$r = Re^{-\frac{AR\alpha}{\sqrt{h^2 - A^2R^2}}},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen. Da r nur für $\alpha=\infty$ gleich Null werden kann, so erreicht die Curve die Spitze des Kegels nur nach einer unendlichen Anzahl von Gängen.

Die Rectification dieser Curve aber vermittelt sich durch die Gleichung

$$s=\int d\alpha \sqrt{r^2+\partial r_\alpha^2+\partial z_\alpha^2}.$$

Durch Elimination von r, ∂r_α und ∂z_α entwickelt man

$$s=\frac{Rh\sqrt{1+A^2}}{\sqrt{h^2-A^2R^2}}\int d\alpha\, e^{-\frac{AR\alpha}{\sqrt{h^2-A^2R^2}}}$$

$$=-\frac{h}{A}\sqrt{1+A^2}.\,e^{-\frac{AR\alpha}{\sqrt{h^2-A^2R^2}}}+C.$$

Nimmt man den Anfang des Bogens für $\alpha=0$, so ist

$$C=\frac{h}{A}\sqrt{1+A^2}$$

und

$$s=\frac{h}{A}\sqrt{1+A^2}\left(1-e^{-\frac{AR\alpha}{\sqrt{h^2-A^2R^2}}}\right).$$

Die ganze Curve ergibt sich für $\alpha=\infty$, und dann hat man

$$s=\frac{h}{A}\sqrt{1+A^2}.$$

2. Beispiel.

Substituiren wir dem Kegel ein Umdrehungsparaboloid, so ist dessen Gleichung

$$2p(h-z)=r^2,$$

welche verbunden mit

$$\partial z=A\sqrt{r^2\partial\alpha^2+\partial r^2}$$

die Gleichungen der Curve liefern.

Die erste gibt

$$\partial z=-\frac{r\partial r}{p},$$

folglich

$$\frac{r^2\partial r^2}{p^2}=A^2(r^2\partial\alpha^2+\partial r^2),$$

woraus man ableitet

$$Ap\partial\alpha=-\frac{\partial r}{r}\sqrt{r^2-p^2A^2}\,.$$

Die Integration bewerkstelligt sich bald, wenn man setzt

$$r^2-p^2A^2=\varrho^2,$$

und so kommt

$$Ap\alpha=-\sqrt{r^2-p^2A^2}+pA\,\frac{1}{\mathrm{tg}}\left(\frac{\sqrt{r^2-p^2A^2}}{pA}\right)+C.$$

Soll für $z=0$ auch $\alpha=0$ sein, so ist $r^2=2ph$ und

$$C=\sqrt{2ph-p^2A^2}-pA\,\frac{1}{\mathrm{tg}}\left(\frac{\sqrt{2ph-p^2A^2}}{pA}\right),$$

und

$$\begin{aligned}Ap\alpha=&\sqrt{2ph-p^2A^2}-\sqrt{r^2-p^2A^2}\\&-pA\left[\frac{1}{\mathrm{tg}}\left(\frac{\sqrt{2ph-p^2A^2}}{pA}\right)-\frac{1}{\mathrm{tg}}\left(\frac{\sqrt{r^2-p^2A^2}}{pA}\right)\right];\end{aligned}$$

eine Gleichung, welcher man vermittelst der Formel

$$\frac{1}{\mathrm{tg}}X-\frac{1}{\mathrm{tg}}Y=\frac{1}{\mathrm{tg}}\left(\frac{X-Y}{1+XY}\right)$$

und einiger Reduktionen folgende Form geben kann:

$$\begin{aligned}&\mathrm{tg}\left(\sqrt{2ph-p^2A^2}-\sqrt{r^2-p^2A^2}-Ap\alpha\right)\\&=\frac{pA(2ph-r^2)}{2ph\sqrt{r^2-p^2A^2}+r^2\sqrt{2ph-p^2A^2}},\end{aligned}$$

die in Verbindung mit

$$2p(h-z)=r^2$$

die Gleichungen der Curve darstellen.

Da r nicht $=$ Null werden kann, ohne dass obige Endgleichung etwas Imaginäres darbietet, so folgt daraus, dass die Curve den Scheitel gar nicht zu erreichen im Stande ist. Der kleinste Werth, den man r geben kann, ist $r=pA$, und diess gibt den grössten Werth für $z=h-\frac{1}{2}pA^2$.

Zum Zweck der Rectification hat man

$$ds = \sqrt{r^2 d\alpha^2 + dr^2 + dz^2}$$
$$= -\frac{\sqrt{1+A^2}}{pA} rdr,$$

folglich

$$s = -\frac{\sqrt{1+A^2}}{2pA} r^2 + C.$$

Will man s mit $z=0$, d. h. mit $r^2 = 2ph$ beginnen lassen, so kommt

$$s = \frac{\sqrt{1+A^2}}{2pA}(2ph - r^2),$$

und nimmt man für r den möglich kleinsten Werth pA, so ist

$$s = \frac{\sqrt{1+A^2}}{2A}(2h - pA^2).$$

3. Beispiel.

Wenden wir dieselbe Theorie auf ein Umdrehungs-Ellipsoid an, dessen grösster Kreisdurchschnitt mit der Horizontalebene zusammenfällt.

Wir haben für die Gleichung desselben, wenn a und b die beiden Halbaxen der erzeugenden Ellipse sind, $r^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} z^2$, womit sich verbindet

$$\partial z = A\sqrt{r^2 \partial\alpha^2 + \partial r^2}.$$

Hieraus leitet man ab:

$$Abd\alpha = -\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{r^2(a^2 + A^2 b^2) - A^2 b^4}{b^2 - r^2}}.$$

Setzt man

$$\frac{r^2(a^2 + A^2 b^2) - A^2 b^4}{b^2 - r^2} = x^2,$$

so arbeitet man sich leicht zum Integral hin:

$$\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}}\left[\sqrt{\frac{r^2(a^2+A^2b^2)-A^2b^4}{A^2b^2(b^2-r^2)}}\right] - \frac{\sqrt{a^2+A^2b^2}}{Ab}\frac{1}{\mathrm{tg}}\left[\sqrt{\frac{r^2(a^2+A^2b^2)-A^2b^4}{(a^2+A^2b^2)(b^2-r^2)}}\right] + C.$$

Lässt man den Winkel α beginnen mit $r=b$, so hat man

$$C = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{a^2+A^2b^2}}{Ab} - 1\right),$$

und wir können unserm Integral leicht die Form geben:

$$\alpha = \frac{\sqrt{a^2+A^2b^2}}{Ab}\frac{1}{\mathrm{tg}}\left[\sqrt{\frac{(a^2+A^2b^2)(b^2-r^2)}{r^2(a^2+A^2b^2)-A^2b^4}}\right] - \frac{1}{\mathrm{tg}}\left[\sqrt{\frac{A^2b^2(b^2-r^2)}{r^2(a^2+A^2b^2)-A^2b^4}}\right]$$

oder wenn wir $r^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}z^2$ setzen:

$$\alpha = \frac{\sqrt{a^2+A^2b^2}}{Ab}\frac{1}{\mathrm{tg}}\left[\sqrt{\frac{z^2(a^2+A^2b^2)}{a^4-z^2(a^2+A^2b^2)}}\right] - \frac{1}{\mathrm{tg}}\left[\frac{Abz}{\sqrt{a^4-z^2(a^2+A^2b^2)}}\right].$$

Auch hier erreicht die Curve den Scheitel nicht, indem sich dem z kein grösserer Werth geben lässt als $z = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+A^2b^2}}$ und dem r kein kleinerer als $r = \frac{Ab^2}{\sqrt{a^2+A^2b^2}}$.

Für die Rectification aber haben wir

$$ds = \sqrt{r^2d\alpha^2 + dr^2 + dz^2}$$

oder

$$ds = -\frac{a\sqrt{1+A^2}}{Ab}\cdot\frac{rdr}{\sqrt{b^2-r^2}},$$

dessen Integral ist:

$$s = \frac{a\sqrt{1+A^2}}{Ab}\sqrt{b^2-r^2} + C.$$

Lassen wir s mit $\alpha=0$ oder $r=b$ beginnen, so ist $C=0$, und es ist:

$$s = \frac{a\sqrt{1+A^2}}{Ab}\sqrt{b^2-r^2} = \frac{\sqrt{1+A^2}}{A}z.$$

Für die ganze Curve aber ist:

$$s = \frac{a^2}{A}\sqrt{\frac{1+A^2}{a^2+A^2b^2}}.$$

Für den besondern Fall, dass das Ellipsoid in eine Kugel übergeht, deren Radius $= R$, hat man $a = b = R$, und die beiden Gleichungen der Curve sind:

$$r^2 = R^2 - z^2$$

und

$$\alpha = \frac{\sqrt{1+A^2}}{A}\frac{1}{\text{tg}}\left[\sqrt{\frac{z^2(1+A^2)}{a^2-z^2(1+A^2)}}\right] - \frac{1}{\text{tg}}\left[\frac{Az}{\sqrt{a^2-z^2(1+A^2)}}\right],$$

während

$$s = \frac{\sqrt{1+A^2}}{A}z$$

bleibt. Für die ganze Curve aber, wo z nur bis auf $z = \frac{R}{\sqrt{1+A^2}}$ wachsen kann, ist

$$s = \frac{R}{A}.$$

XXI.

Ueber die Rotation eines Körpers der nur in Einem, mit der fixen Rotationsaxe unabänderlich verbundenen, aber ausserhalb derselben gelegenen Punkte, gehalten wird.

Von
Herrn Brenner,
Lehrer zu Tuttlingen im Königreich Würtemberg.

Es sei (Taf. III. Fig. 8.) die Rotationsaxe RT, der mit derselben unabänderlich verbundene Punkt G, so dass das Loth $GT=l$ constant ist, und im Punkte G werde ein um RT rotirender Körper gehalten. Wir wollen nun die Lage des Körpers bestimmen, so wie andere, hieher gehörige, Umstände entwickeln.

Ich nehme G als Coordinaten-Anfang, lasse die Axe der x, nemlich GX, mit dem Lothe GT zusammenfallen, ziehe die Axe der z, GZ, mit der Rotationsaxe RT parallel; dann wird die Axe der y in G senkrecht auf beiden stehen. — Hierauf denke ich mir im Körper auf der positiven Seite der Axe der y einen Atom A, von dem aus ich ein Loth AB auf die Ebene (zx) oder ZGX ziehe. Vom Punkte B ziehe ich noch die Lothe NBO und BM, so ist

$$BN=x,$$
$$AB=y,$$
$$BM=z.$$

Ferner ziehe ich noch durch den Körper die beliebige in der Ebene $ZGTR$ liegende Axe GH, auf dieselbe das Loth BC, hierauf die Lothe CF und CL, und verlängere MB nach D.

Hierauf setze ich:

$$AC = r,$$
$$GC = \varepsilon,$$
$$\angle ACB = w,$$
$$\angle CGL = \alpha;$$

so hat man:

$$BC = r\cos w,$$
$$AB = r\sin w,$$
$$CD = r\cos w \sin\alpha,$$
$$BD = r\cos w\cos\alpha,$$
$$GL = \varepsilon\cos\alpha,$$
$$CL = \varepsilon\sin\alpha;$$

und hieraus folgt für die Coordinaten des Atoms A:

$$x = \varepsilon\cos\alpha + r\cos w\sin\alpha,$$
$$y = r\sin w,$$
$$z = \varepsilon\sin\alpha - r\cos w\cos\alpha.$$

Durch die Rotation entsteht eine von der Rotationsaxe ab gehende Centrifugalkraft, und denken wir uns dieselbe jedem Atom eingeprägt, so können wir den Körper, wenn und wofern er eine gegen die Rotationsaxe unabänderliche Lage angenommen hat, als im Gleichgewicht befindlich betrachten, indem sich dessen von der Rotation abhängige Lage im Raume, wegen der constant vorausgesetzten Rotationsgeschwindigkeit, leicht angeben lässt.

Bezeichnen wir diese Geschwindigkeit mit s, so ist die Centrifugalkraft des Atoms A

$$= s^2 . AO \text{ nach der Richtung } OA.$$

Lassen wir r um dr, w um dw und ε um $d\varepsilon$ wachsen, so kann man, wenn die Dichtigkeit des Körpers mit ϱ bezeichnet wird, die Masse des Atoms ausdrücken durch

$$\varrho r dr d\varepsilon dw.$$

Es ist demnach die Grösse der Bewegung desselben nach der Richtung OA gleich

$$\varrho s^2 r dr d\varepsilon dw . AO.$$

Zerlegen wir diese Kraft in ihre Composanten nach den Axen x, y und z, so haben wir

die parallel mit x wirkende Kraft $= -\varrho s^2 r dr d\varepsilon dw . \cos AOB$

$$= -\varrho s^2 r dr d\varepsilon dw (E - \varepsilon\cos\alpha - r\sin\alpha\cos w),$$

die parallel mit y wirkende Kraft $= -\varrho \varepsilon r^2 dr d\varepsilon dw \sin w$,

„ „ „ z „ „ $=$ Null.

Dagegen wirkt parallel mit der Axe der z die Schwere g, folglich ist die mit z parallel laufende Grösse der Bewegung

$$= - g \varrho r dr d\varepsilon dw.$$

Endlich setzen wir noch den Druck, der in G auf den Körper ausgeübt wird, parallel mit x, y und z, gleich u, v und w, während die Coordinaten dieses Punktes alle gleich Null sind.

Somit gestalten sich die sechs Bedingungen des Gleichgewichts, wie folgt:

Für die den Coordinaten parallelen Kräfte:

$$1) \quad u - \varrho s^2 \iiint r dr d\varepsilon dw (E - \varepsilon \cos\alpha - r \sin\alpha \cos w) = 0,$$

$$2) \quad v - \varrho s^2 \iiint r^2 dr d\varepsilon dw \sin w = 0,$$

$$3) \quad w - g\varrho \iiint r dr d\varepsilon dw = 0.$$

Für die Momente:

$$4) \quad \varrho s^2 \iiint r^2 dr d\varepsilon dw \sin w (\varepsilon \cos\alpha + r \cos w \sin\alpha)$$
$$- \varrho s^2 \iiint r^2 dr d\varepsilon dw \sin w (E - \varepsilon \cos\alpha - r \sin\alpha \cos w) = 0,$$

$$5) \quad g\varrho \iiint r dr d\varepsilon dw (\varepsilon \cos\alpha + r \cos w \sin\alpha)$$
$$- \varrho s^2 \iiint r dr d\varepsilon dw (\varepsilon \sin\alpha - r \cos w \cos\alpha)(E - \varepsilon \cos\alpha - r \sin\alpha \cos w) = 0,$$

$$6) \quad g\varrho \iiint r^2 dr d\varepsilon dw \sin w$$
$$- \varrho s^2 \iiint r^2 dr d\varepsilon dw \sin w (\varepsilon \sin\alpha - r \cos w \cos\alpha) = 0.$$

Nehmen wir als einziges Beispiel eine cylindrische Stange, deren Axe mit GH zusammenfällt, so sind die Integrale, wenn die Länge der Stange $= l$ und der Halbmesser $= R$, in Beziehung auf ε zwischen den Grenzen $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = l$, in Beziehung auf r zwischen $r = 0$ und $r = R$, und in Beziehung auf w zwischen $w = 0$ und $w = 2\pi$ zu nehmen, so dass alle Integrationen, selbst in ihren Grenzen, von einander unabhängig sind.

Man hat aber, zwischen den Grenzen $w=0$ und $w=2\pi$:

$$\int dw \cos w = \sin w = 0,$$

$$\int dw \sin w = -\cos w = 0,$$

$$\int dw \sin w \cos w = -\frac{1}{4}\cos 2w = 0,$$

$$\int dw \cos w^2 = \frac{1}{4}\sin 2w + \frac{1}{2}w = \pi.$$

Man wird daher alle Differentiale, in welchen sinus und cosinus von w und deren Produkte zum Vorschein kommen, weglassen und nur $\cos w^2$ beibehalten. Mittelst dieser Bemerkung wird man bald haben:

7) $$u = \varrho s^2 R^2 \pi l \left(E - \frac{1}{2} l \cos\alpha\right),$$

$$v = 0,$$

8) $$w = g\varrho R^2 \pi l = \text{dem Gewicht der Stange.}$$

Die Gleichungen 4) und 6) aber werden identisch Null, während 5) liefert:

9) $$6gl\cos\alpha - 6Es^2 l\sin\alpha + s^2 \sin\alpha\cos\alpha(4l^2 - 3R^2) = 0,$$

welche zur Bestimmung von α dient.

Für den Fall, dass man nur eine materielle Linie im Auge hat, kann für 7) und 8) R nicht gleich Null sein, weil die Linie in diesem Falle die wirklich mathematische Linie wäre. Allein $\varrho R^2\pi$ ist gleich der Masse der Längeneinheit, die wir für die materielle Linie $= m$ setzen.

Hingegen muss in 9) wirklich $R=0$ sein, weil auch bei der materiellen Linie R gegen l verschwindet. So haben wir also für die materielle Linie, wenn wir deren Länge $= l'$ setzen:

10) $$u = ms^2 l'\left(E - \frac{1}{2} l' \cos\alpha\right),$$

11) $$w = mgl',$$

12) $$3g\cos\alpha - 3Es^2\sin\alpha + 2l' s^2 \sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Betrachten wir aber den Fall, wo es sich um einen auf einer steifen mathematischen Linie sitzenden Atom m handelt, so haben wir bloss nöthig, die zwei rechten Seiten von 10) und 11) in Beziehung auf l' zu differentiiren, und dl' mit m sich verschmelzen zu lassen; hingegen 12), welche bereits mit l'^2 weg-dividirt worden ist, wieder mit l'^2 zu multipliciren, und hiern ebenfalls in Beziehung auf l' zu differentiiren. Auf solche We haben wir, wenn die Länge der steifen Geraden $= l''$ ist:

$$13) \qquad u = ms^2(E - l''\cos\alpha),$$

$$14) \qquad w = mg,$$

$$15) \qquad g\cos\alpha - Es^2\sin\alpha + l''s^2\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Die aus u und w [13) und 14)] zusammengesetzte Resultan muss mit der Axe x den Winkel α machen. In der That, set man

$$\frac{w}{u} = \frac{g}{s^2(E - l''\cos\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha,$$

so entwickelt sich hieraus 15). Diese Bemerkung lässt sich w der für die cylindrische Stange, noch für die materielle Lin machen, denn dort würde jeder Atom für sich eine andere Gleic gewichts-Lage annehmen. Jeder Atom stört, wegen des feste Zusammenhanges, den andern, und die Gesammtwirkung ist, das die Axe GH eben den, durch 9) oder 12) bestimmten Winkel mit der Axe x macht. Diess zeigt sich, wenn man l oder l' etw um dl oder dl' wachsen lässt, und dabei zusieht, ob dadurch auc α einen Zuwachs erleidet. Differentiiren wir daher 9) und 12) i Beziehung auf α, l und l', so haben wir, wenn noch respectiv 9) und 12) selbst mit den entstandenen Differentialgleichunge verbunden wird:

$$d\alpha = dl\,\frac{s^2}{6l^2}\cdot\frac{\sin\alpha^2\cos\alpha^2(4l^2+3R^2)}{g\cos\alpha^3+Es^2\sin\alpha^3}$$

und

$$d\alpha = dl'\,\frac{2s^2}{3}\cdot\frac{\sin\alpha^2\cos\alpha^2}{g\cos\alpha^3+Es^2\sin\alpha^3}.$$

Diese Gleichungen liefern nur dann $d\alpha = 0$, wenn entwede $\sin\alpha = 0$ oder $\cos\alpha = 0$. Allein 9) und 12) können unmöglich diese Werthe geben, wenn nicht einer der Werthe g, l, E, s der Null gleich ist Es erleidet demnach α für jeden Werth α, den die Gleichunge 9) und 12) darbieten, einen Zuwachs, wofern l oder l' einen sol chen erfahren.

Sehen wir jetzt zu, unter welchen Bedingungen unsere dre Fälle gleiche Neigungswinkel α liefern. Dividiren wir 9) mit 6 und 12) mit 3, und vergleichen hierauf die entstandenen Gleichungen mit 15), so geben 9), 12) und 15) denselben Winkel α, wenn man hat:

$$16) \qquad l'' = \frac{4l^2 - 3R^2}{6l} = \frac{2}{3}l - \frac{1}{2}\frac{R^2}{l}$$

und

17) $$l''=\frac{2}{3}l'.$$

Da nun l'' sich kleiner ausweist als l und als l', so folgt daraus, dass sich sowohl in der Axe der cylindrischen Stange, als auch in der materiellen Linie ein Punkt befindet, der von der Wirkung der übrigen Atome des Systems keine Störung erleidet, und man könnte ihn, in Beziehung auf dieses System, den Rotations-Mittelpunkt nennen. Seine Entfernung vom Punkte G wird durch die Gleichungen 16) und 17) angegeben.

Stellen wir nun eine Untersuchung an über die Anzahl der Gleichgewichtslagen, so ist vorerst zu bemerken, dass man den Gleichungen 9), 12) und 15) folgende Form zu geben im Stande ist:

18) $$p-q\,\mathrm{tg}\alpha+\sin\alpha=0.$$

Da nun

$$\sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}\,\alpha^2}},$$

so entwickelt sich die Gleichung:

$$\mathrm{tg}\alpha^4-2\frac{p}{q}\mathrm{tg}\alpha^3+\left(\frac{p^2+q^2-1}{q^2}\right)\mathrm{tg}\,\alpha^2-2\frac{p}{q}\mathrm{tg}\alpha+\frac{p^2}{q^2}=0.$$

Diese Gleichung kann höchstens vier Werthe für $\mathrm{tg}\,\alpha$ liefern, und da jeder Werth von $\mathrm{tg}\alpha$ zwei Werthe für α darbietet, so scheinen sich acht Gleichgewichtslagen herauszustellen. Diese Verdopplung rührt jedoch von der Quadratur der Gleichung 18) her, und wenn man die vier Werthe für $\mathrm{tg}\alpha$ oder die acht Werthe für α aufgefunden hat, wird man sie jedesmal noch vermittelst der Gleichung 18) prüfen, wodurch sich vier als unbrauchbar zeigen werden. Jedoch gibt die Gleichung des vierten Grades für $\mathrm{tg}\alpha$ nicht unbedingt vier Werthe, sie kann auch weniger liefern, und wir könnten nun aus derselben die Bedingungen aufsuchen, unter denen nur drei, zwei und vielleicht auch nur eine oder gar keine Gleichgewichtslage existiren würde. — Alles dieses ergibt sich jedoch vollständiger und weit einfacher aus der unmittelbaren Betrachtung der Gleichung 18). Zu diesem Behufe setzen wir die vordere Seite dieser Gleichung $=u$ und unterscheiden aber die vier Fälle, in denen α einen Winkel im Umfang des ersten, zweiten, dritten und vierten Quadranten bezeichnet. Wir erhalten somit:

für den 1sten Quadranten $u=p-q\,\mathrm{tg}\alpha+\sin\alpha$,
„ „ 2ten „ $u=p+q\,\mathrm{tg}\alpha+\sin\alpha$,
„ „ 3ten „ $u=p-q\,\mathrm{tg}\alpha-\sin\alpha$,
„ „ 4ten „ $u=p+q\,\mathrm{tg}\alpha-\sin\alpha$.

Indem wir uns nun α von $\alpha=0$ bis $\alpha=2\pi$ wachsend denken, stellen wir u für jeden Quadranten in dessen Grenzen dar, un bezeichnen diese Grenzwerthe durch

$$u_0,\ u_{\frac{1}{2}\pi},\ u_\pi,\ u_{\frac{3}{2}\pi},\ u_{2\pi}.$$

Es ergibt sich nun für den ersten Quadranten:

$$u_0 = p,$$
$$u_{\frac{1}{2}\pi} = -\infty.$$

Es geht demnach u im ersten Quadranten durch Null und zwa nur einmal; denn sobald $q\,\mathrm{tg}\,\alpha$ grösser geworden ist als $p+$ sin wächst dasselbe fortwährend und sehr rasch bis auf ∞.

Für den zweiten Quadranten ist:

$$u_{\frac{1}{2}\pi} = \infty,$$
$$u_\pi = p.$$

Also geht u in diesem Quadranten nicht durch Null, weil es auch in Zwischenraum nie negativ wird.

Für den dritten Quadranten ist:

$$u_\pi = p,$$
$$u_{\frac{3}{2}\pi} = -\infty.$$

Demnach geht hier u durch Null, und zwar, wie im ersten Qua dranten, nur einmal.

Endlich ist für den vierten Quadranten:

$$u_{\frac{3}{2}\pi} = \infty,$$
$$u_{2\pi} = p.$$

Allein hier ist keine absolute Unmöglichkeit, dass im Zwischen raum u nicht negativ würde. Um diese Frage zu entscheiden, suchen wir (für den 4ten Quadranten) das Maximum und Mini mum von u auf. Wir haben:

$$\partial u_\alpha = \frac{q}{\cos\alpha^2} - \cos\alpha = 0,$$

woraus

$$\cos\alpha = q^{\frac{1}{3}}.$$

Soll ein Max. Min. stattfinden, so muss demnach nothwendig $q < 1$ sein. Setzt man aber den Werth $\cos\alpha = q^{\frac{1}{3}}$ in u, so folgt:

$$u = p - (1 - q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Ist nun die Grösse $p-(1-q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ positiv, so geht u nicht durch Null; ist es aber negativ, so liefert die Gleichung 18) zwei neue Werthe für α, aber auch nicht mehr als zwei, weil

$$p-(1-q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

nur Einen Werth haben kann. Ist aber

$$p-(1-q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}=0,$$

so zeigt diess nur Einen weitern Werth für α an. Fassen wir das Resultat der ganzen Untersuchung zusammen, so haben wir:

a) der erste Quadrant enthält unbedingt eine Gleichgewichtslage;
b) der zweite gar keine;
c) der dritte unbedingt eine;
d) der vierte eine, wenn $p^2=(1-q^{\frac{2}{3}})^3$ und zugleich $q<1$;
 „ „ zwei, wenn $p^2<(1-q^{\frac{2}{3}})^3$ „ „ $q<1$;
 „ „ keine, wenn $p^2>(1-q^{\frac{2}{3}})^3$, obschon auch wäre $q<1$;
 „ „ jedenfalls gar keine, wenn $q>1$.

Ersetzen wir p und q durch ihre Werthe, so verwandeln sich die Bedingungen

$$p^2<=>(1-q^{\frac{2}{3}})^3 \text{ und } q<>1$$

für die Gleichung

9) in $36g^2l^2<=>s^4[(4l^2-3R^2)^{\frac{2}{3}}-(6El)^{\frac{2}{3}}]$ und $6El<>4l^2-3R^2$;

12) in $9g^2<=>s^4[(2l')^{\frac{2}{3}}-(3E)^{\frac{2}{3}}]^3$ und $3E<>2l'$;

15) in $g^2<=>s^4[l''^{\frac{2}{3}}-E^{\frac{2}{3}}]^3$ und $E<>l''$.

Was die wirkliche Aufsuchung der Werthe von α betrifft, so dient die seitherige Betrachtung sehr zur Erleichterung, und es ist vortheilhafter, sich, statt der Gleichung des vierten Grades zwischen tgα, der Gleichung 18) zu bedienen. Da man weiss, in welchen Quadranten diese Werthe zu suchen sind, wird man bald einen α' haben, welcher der 18) beinahe genügt. Hierauf wird man denselben verbessern vermittelst des Werthes

$$h=\cos\alpha'^2\left(\frac{p-q\operatorname{tg}\alpha'+\sin\alpha'}{q-\cos\alpha'^3}\right).$$

Für die Aufsuchung der Werthe des vierten Quadranten ist es, wofern sie existiren und wofern

$$u=p-(1-q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

ziemlich klein ist, immer vortheilhaft, als ersten Näherungswerth $\cos\alpha'=q^{\frac{1}{3}}$ zu nehmen. Denkt man sich hierauf für α' einen Zuwachs h, so wird man nach dem Taylor'schen Lehrsatz die Gleichung

$$p-q\,\mathrm{tg}(\alpha'+h)+\sin(\alpha'+h)=0$$

nach Potenzen von h entwickeln, und zunächst erhalten:

$$p-q\,\mathrm{tg}\alpha'+\sin\alpha'+h\left(\cos\alpha'-\frac{q}{\cos\alpha'^2}\right)-\frac{h^2}{2}\left(\frac{2q}{\cos\alpha'^3}+1\right)\sin\alpha'=0,$$

wenn man sich mit der zweiten Potenz von h begnügen will. Hier ist aber der Coefficient von h gleich Null, und ersetzt man $\cos\alpha'^3$ durch q, so kommt

$$h=\pm\sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{p-q\,\mathrm{tg}\alpha'+\sin\alpha'}{\sin\alpha'}}.$$

Der eine dieser Werthe bietet die Correction für den einen und der andere für den anderen Werth von α' dar. Uebrigens ist man im Stande, die Aufgabe durch Construction, vermittelst eines Kreises und einer gleichseitigen Hyperbel, zu lösen.

Denken wir uns die Länge der cylindrischen Stange oder der materiellen Linie von Null an wachsend, so werden die Endpunkte aller dieser Längen, das System stets im Gleichgewicht gedacht, eine Curve darstellen. Das Gleiche wird der Fall sein, wenn wir statt obiger Endpunkte die Schwingungsmittelpunkte nehmen. Für den Schwingungsmittelpunkt gehen aber die Gleichungen 9) und 12) in 15) über und diese ist es, welche die von allen Schwingungsmittelpunkten beschriebene Curve darstellt, indem l'' als Radius-Vector angesehen wird. Gehen wir über auf rechtwinklige Coordinaten, so haben wir zu setzen:

$$\sin\alpha=\frac{y}{l''}\ \text{und}\ \cos\alpha=\frac{x}{l''}$$

und haben

$$gx-Es^2y+s^2xy=0.$$

Den Coordinaten-Anfang verlegen wir in einen andern Punkt, und setzen zu dem Ende:

$$x=a+x',$$
$$y=b+y';$$

wodurch wir erhalten:

$$(ga+s^2ab-bEs^2)+(g+s^2b)x+s^2(a-E)y+s^2xy=0.$$

Setzen wir $a=E$ und

$$b=-\frac{g}{s^2},$$

so wird

$$yx=\frac{Eg}{s^2},$$

welches eine gleichseitige Hyperbel anzeigt, deren rechtwinklige Coordinaten zugleich ihre Asymptoten sind; und zwar ist die eine Asymptote die Drehungsaxe RT, während die andere unterhalb und parallel mit GX um die Grösse $\frac{g}{s^2}$ liegt.

Will man daher diese Aufgabe durch Construction lösen, so wird man vorerst zwischen den angegebenen Asymptoten und vermittelst der Gleichung $yx=\frac{Eg}{s^2}$ eine Hyperbel construiren und hierauf von G aus als Mittelpunkt einen Kreis beschreiben mit dem Halbmesser

$$l''=\frac{4l^2-3R^2}{6l} \text{ oder } l''=\frac{2}{3}l'.$$

Die Punkte, in denen der Kreis die Hyperbel schneidet, werden die Gleichgewichtslagen angeben. — Daraus folgt wieder, dass es nie weniger als zwei, und nie mehr als vier Gleichgewichtslagen geben kann. Auch lassen sich hier noch leichter die übrigen obigen Folgerungen entwickeln.

Die Frage über das stabile und nicht stabile Gleichgewicht der verschiedenen Lagen entscheidet sich, wenn wir die Untersuchung nur für den Rotationsmittelpunkt anstellen. Ist nun dieser Mittelpunkt, den wir uns um einen sehr kleinen Winkel ξ aus dem Gleichgewicht gerückt denken, der Punkt C, so wirkt auf denselben nach der Richtung CL die Schwere g und nach der Richtung FC die Centrifugalkraft

$$s^2.FC=s^2(E-l''\cos\alpha).$$

Zerlegen wir beide Kräfte nach der Richtung CB, so haben wir für die auf C wirkende Kraft (nach dieser Richtung)

$$g\cos\alpha-s^2(E-l''\cos\alpha)\sin\alpha.$$

Folglich nach den Gesetzen der Dynamik:

$$l''d^2\xi+g\cos\alpha-s^2(E-l''\cos\alpha)\sin\alpha=0,$$

wo das Differential in Beziehung auf die Zeit t genommen ist. Ist nun α' der für das Gleichgewicht gefundene Winkel, so haben wir

$$\alpha'+\xi=\alpha.$$

Wir können daher die obige Gleichung nach Potenzen von ξ entwickeln, und wenn wir annehmen, dass ξ eine sehr kleine Grösse nie überschreitet, alle höhern Potenzen vernachlässigen. Auf solche Weise haben wir, bedenkend dass nach 15)

$$g\cos\alpha' - s^2(E - l''\cos\alpha')\sin\alpha' = 0,$$

$$l''d^2\xi + \xi[l''s^2(\cos\alpha'^2 - \sin\alpha'^2) - Es^2\cos\alpha' - g\sin\alpha'] = 0;$$

und, wenn wir vermittelst 15) $l''s^2$ eliminiren und

$$-\frac{g\cos\alpha'^3 + Es^2\sin\alpha'^3}{l''\sin\alpha'\cos\alpha'} = A$$

setzen,

$$d^2\xi + A\xi = 0,$$

wovon das Integral ist:

$$\xi = C\sin(t\sqrt{A}) + C_1\cos(t\sqrt{A}).$$

Da ξ der Voraussetzung gemäss sehr klein ist und bleibt, so müssen es auch C und C_1 sein. Diese Voraussetzung rechtfertigt sich nicht, und ξ kann zu einer bedeutenden Grösse anwachsen, d. h. das Gleichgewicht ist nicht stabil, wenn A eine negative Grösse repräsentirt, weil in diesem Falle die trigonometrischen Grössen in Exponentialgrössen übergehen.

Die Gleichung

$$A = -\frac{g\cos\alpha'^3 + Es^2\sin\alpha'^3}{l''\sin\alpha'\cos\alpha'}$$

zeigt aber für den ersten Quadranten eine negative Grösse, folglich ist hier keine Stabilität anzutreffen. Hingegen ist A für den dritten Quadranten positiv, woselbst also eine stabile Lage ist. Im vierten Quadranten aber hat man

$$A = \frac{g\cos\alpha'^3 - Es^2\sin\alpha'^3}{l''\sin\alpha'\cos\alpha'}.$$

Stabilität ist demnach vorhanden, wenn

$$\operatorname{tg}\alpha'^3 - \frac{g}{Es^2} < 0.$$

Verwandeln wir nun 15) in

$$\frac{g}{Es^2} + \operatorname{tg}\alpha' - \frac{l''}{E}\,\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha'^2}} = 0$$

und eliminiren aus dieser und aus

$$\operatorname{tg}\alpha'^3 - \frac{g}{Es^2} < 0$$

die $\operatorname{tg}\alpha'$, so führt uns diess auf

$$g^2 < s^4 (l^{\frac{2}{3}} - E^{\frac{2}{3}})^3,$$

und gerade diess ist die Bedingung, unter welcher für den vierten Quadranten zwei Gleichgewichtslagen existiren. Daraus folgt, dass beide dieser Lagen stabil sind.

Da nun die oben dargestellte Hyperbel ihre convexe Seite der Umdrehungsaxe zuwendet, so folgt daraus, dass sich die untern Theile der rotirenden Stange von ihrer eigenen Gleichgewichtslage so entfernt haben, dass sie von der Axe abgewendet sind. Da ferner z. B. im ersten Quadranten kein stabiles Gleichgewicht statt findet, so haben jene Theile das Bestreben, sich von der Axe noch mehr zu entfernen, woraus sich das eigenthümliche Gefühl erklärt, das die Kunstreiter in ihren Füssen haben, deren Muskeln von einer Kraft nach Aussen gezogen werden.

XXII.

Elementare Darstellung der wichtigsten Eigenschaften der gemeinen Cycloide.

(Rectification und Quadratur derselben).

Von

Herrn Professor Dr. Schulz-Strasznitzki

am k. k. polytechnischen Institut zu Wien.

Denken wir uns in Taf. III. Fig. 9. das regelmässige Zwölfeck $OABCDEF5432Q_1O$ auf der Geraden OQ_6 gewälzt, so dass die Punkte 2, 3, 4, 5, F nach und nach in die Lage $Q_2\,Q_3\,Q_4\,Q_5\,Q_6$ kommen. Betrachten wir während dieser Bewegung die aufeinanderfolgenden Oerter, die der Punkt O einnimmt, nemlich die Punkte $M_1M_2M_3M_4M_5$, verbinden wir diese Punkte durch die Geraden OM_1, M_1M_2, M_2M_3 u. s. w., denken wir uns zugleich ein zweites regelmässiges Zwölfeck congruent mit ersterm, nemlich OQ_1N_1J, denken wir uns dieses auf der Geraden $JN_5 \parallel OQ_6$ fortgewälzt, so wird bei dieser Bewegung der Punkt N_1 nach und nach in die Lagen $N_2N_3N_4N_5$ kommen; denken wir uns auch diese Punkte durch gerade Linien verbunden. Wenn wir uns statt dieser Zwölfecke zwei 24Ecke, 48Ecke, 96Ecke u. s. w. denken, so wird sowohl die gebrochene Linie $OM_1M_2M_3M_4M_5$ als die $ON_1N_2N_3N_4N_5$ sich immer mehr und mehr der Cycloide nähern. Bezeichnen wir nun die Seite des Zwölfecks durch s_1; die Sehne von $\frac{2}{12}$ des Kreises d. i. z. B. BQ durch s_2; die Sehne von $\frac{3}{12}$ des Kreises z. B. CO durch S_3 u. s. w.; so hat man:

$$M_1N_1 = 2s_1;\ ON = s_2;$$
$$M_2N_2 = 2s_2;\ M_1N_2 = s_1 + s_3;$$
$$M_3N_3 = 2s_3;\ M_2N_3 = s_2 + s_4.$$

$M_4N_4=2s_4$; $M_3N_4=s_3+s_5$;
$M_5N_5=2s_5$; $M_4N_5=s_4+s_6$.

Es sieht sich nun leicht ein, dass, je mehr Seiten das sich wälzende Vieleck hat, um so mehr nähern sich ON_1 und M_1N_1; M_1N_2 und M_2N_2; M_2N_3 und M_3N_3 u. s. w., woraus von selbst folgt, dass die Krümmungsmittelpunkte der oberen Cycloide eine verkehrt stehende untere Cycloide bilden, dass ferner die Krümmungshalbmesser der obern Tangenten der untern sind.

Es lässt sich ferner leicht zeigen, dass die Figur $OJN_5N_4N_3N_2N_1O$ mit $M_5Q_5OM_1M_2M_3M_4M_5$ und eben so $OQ_5N_5N_4N_3N_2N_1O$ mit $M_5EOM_1M_2M_3M_4M_5$-congruent ist.

Da nun $OQ_1=AO=s_1$, $Q_1N_1=AB=s_1$, $ON_1=BO=s_2$ ist; so folgt $\Delta OQ_1N_1 \cong \Delta ABO$;

$Q_1Q_2=BC$, $Q_2N_2=BO$; $Q_1N_2=CO$; $\Delta Q_1Q_2N_2 \cong \Delta BOC$;
$Q_2Q_3=CD$, $Q_3N_3=CO$; $Q_2N_3=DO$; $\Delta Q_2Q_3N_3 \cong \Delta COD$;
$Q_3Q_4=DE$, $Q_4N_4=DO$; $Q_3N_4=EO$; $\Delta Q_3Q_4N_4 \cong \Delta DOE$;
$Q_4Q_5=EF$, $Q_5N_5=EO$; $Q_4N_5=FO$; $\Delta Q_4Q_5N_5 \cong \Delta EOF$.

Die Addition der letzten Gleichungen giebt:

$OQ_5N_5N_4N_3N_2N_1O=OABCDEF=$ halbem Polygone.

Da nun diese Betrachtungen gelten, das Polygon mag noch so viele Seiten haben, so gelten sie auch für den Kreis. Wird also ON_5 eine Cycloide, so ist OQ_5N_5 gleich dem halben Erzeugungskreise, dann wird OQ_5 gleich dem halben Umfang des Erzeugungskreises, mit dem Q_5Q_6 unendlich klein wird, daher das Rechteck $OJQ_5N_5=2$fachem Erzeugungskreise, daher $OJN_5=\frac{3}{2}$ des Erzeugungskreises.

Wir haben ferner:

$$\begin{aligned}
ON_1 &= s_2 &&= s_2\\
N_1N_2 &= Q_1N_2-Q_1N_1 &&= s_3-s_1\\
N_2N_3 &= Q_2N_3-Q_2N_2 &&= s_4-s_2\\
N_3N_4 &= Q_3N_4-Q_3N_3 &&= s_5-s_3\\
N_4N_5 &= Q_4N_5-Q_4N_4 &&= s_6-s_4
\end{aligned}$$
; daher.

$$ON_1+N_1N_2+N_2N_3+N_3N_4+N_4N_5=s_6+s_5-s_1$$

d. h. die gebrochene Linie $ON_5=OF+OE-AO=$ Durchmesser des umschriebenen, mehr Durchmesser des eingeschriebenen Kreises, weniger einer Seite des Vielecks. Da nun diese Betrachtungen gelten, das Vieleck mag Seiten haben in was immer für einer Anzahl, so gilt das Vorhergehende auch für den Kreis.

Hier werden aber Durchmesser des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Kreises einander gleich, und die Seite verschwindend klein, daher die Länge von ON_5 oder die halbe Cycloide = doppeltem Durchmesser = 4fachem Halbmesser des Erzeugungskreises.

Ich glaube das Vorhergehende kann mit als Beweis dienen, dass so viele Wahrheiten der höhern Mathematik auf entsprechende Art einem grösseren Publikum zugänglich gemacht werden können. Die Anforderungen der Gegenwart an die Lehrer der Mathematik an technischen Anstalten geben derlei Untersuchungen einen Werth.

XXIII.

Ueber die Transformation rechtwinkliger Coordinaten im Raume.

Von
Herrn R. Wolf,
Lehrer der Mathematik zu Bern.

Bekanntlich ist die Transformation rechtwinkliger Coordinaten im Raume auf andere rechtwinklige Coordinaten desselben Anfangspunktes von vielfacher Anwendung, und die entsprechenden Formeln finden daher in jedem Werke über analytische Geometrie mit drei Dimensionen ihre Ableitung. Für denjenigen Fall, wo der Winkel der Ebenen XY und die Winkel der Axen X mit ihrer Knotenlinie in die Rechnung eingeführt werden sollen, werden dabei entweder die Beziehungen am Raumdreiecke zu Hülfe gerufen, oder dann wird das eine Coordinatensystem durch verschiedene aufeinander folgende Drehungen um die Axen nach und nach in das andere Coordinatensystem übergeführt. Die folgende Ableitung scheint mir beiden angeführten Weisen und namentlich der am häufigsten angewandten zweiten Ableitungsmethode ihrer grössern Uebersichtlichkeit wegen vorzuziehen. Aus Taf. IV. Fig. 1., welche wohl keiner weitern Erläuterung bedürfen wird, lassen sich unmittelbar die Beziehungen

$$x' = u\,\mathrm{Cos}\varphi + t\,\mathrm{Sin}\varphi, \qquad y' = u\,\mathrm{Sin}\varphi - t\,\mathrm{Cos}\varphi$$
$$z' = z\,\mathrm{Cos}\theta + s\,\mathrm{Sin}\,\theta, \qquad t = z\,\mathrm{Sin}\,\theta - s\,\mathrm{Cos}\theta$$
$$u = x\,\mathrm{Cos}\psi + y\,\mathrm{Sin}\psi, \qquad s = y\,\mathrm{Cos}\psi - x\,\mathrm{Sin}\psi$$

abschreiben, und aus diesen folgen durch Elimination von s, t, u sofort die verlangten Transformationsformeln:

$$x' = (\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\psi + \mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Sin}\psi\,\mathrm{Cos}\theta)\,x$$
$$+ (\mathrm{Sin}\psi\,\mathrm{Cos}\varphi - \mathrm{Cos}\psi\,\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\theta)\,y + \mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Sin}\varphi . z,$$
$$y' = (\mathrm{Cos}\psi\,\mathrm{Sin}\varphi - \mathrm{Sin}\psi\,\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\theta)\,x$$
$$+ (\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Sin}\psi + \mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\psi\,\mathrm{Cos}\theta)\,y - \mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\varphi . z,$$
$$z' = -\mathrm{Sin}\psi\,\mathrm{Sin}\theta . x + \mathrm{Cos}\psi\,\mathrm{Sin}\theta . y + \mathrm{Cos}\theta . z;$$

aus denen sich theils unmittelbar, theils durch Vergleichung mit den aus der Projectionslehre hervorgehenden, die neun Winkel der Axen enthaltenden Transformationsformeln, die bekannten Bedeutungen und Eigenschaften der neun Coeffizienten auf die leichteste Weise ergeben.

XXIV.

Ueber die Relation zwischen den neun Cosinus, durch welche die gegenseitige Lage zweier rechtwinkliger Coordinaten-Systeme bestimmt wird.

Von
Herrn L. Schläfli,
Privatdocenten der Mathematik zu Bern.

Wenn wir die Coordinaten eines beliebigen Punktes P in Beziehung auf das erste System mit x, y, z und in Beziehung auf das zweite mit x', y', z' bezeichnen und vorerst nur die Ebenen xy und $x'y'$, deren Durchschnitt oder die Knotenlinie und die Lage der positiven Hälften der Axen der x und x' in der Anschauung behalten, so sehen wir sogleich ein, dass die Lage des zweiten Systems gegen das erste durch drei Grössen vollständig bestimmt wird. Diese sind 1°. der Winkel zwischen der Axe der x und der Linie des aufsteigenden Knotens oder die Länge des aufsteigenden Knotens in der Ebene xy; 2°. die Neigung der Ebene $x'y'$ gegen die Ebene xy; 3°. der Winkel zwischen der Knotenlinie und der Axe der x'. Mittelst dieser drei Grössen können die Cosinus der neun Winkel, unter denen die Axen des zweiten Systems gegen diejenigen des ersten geneigt sind, trigonometrisch angegeben werden; und aus diesen trigonometrischen Ausdrücken ergeben sich sodann durch einfache Rechnung die bekannten 21 Relationen zwischen den neun Cosinus. Mein Freund, Herr Wolf, der bei seinem Verfahren der Transformation der Coordinaten diesen Weg eingeschlagen hat und ohne successiver Operationen zu bedürfen an einer einzigen Figur alle drei Transformationsformeln nachweist, hat mir nun durch Mittheilung seiner Methode Veranlassung gegeben, denselben Gegenstand auch von der rein analytischen Seite, wo er mit der Theorie der Elimination bei linearen Gleichungen im Zusammenhange steht, darzustellen.

Wenn nämlich die trigonometrische Behandlung den Vortheil gewährt, dass bei derselben gerade nur so viele Grössen gebraucht werden als die Natur des Gegenstandes erfordert, so thut sie dieses nur auf Kosten der Symmetrie, insofern es ihr nicht gelingt, drei unter sich unabhängige Grössen aufzufinden, durch welche die oft erwähnten neun Cosinus sich sämmtlich auf gleichmässige Weise ausdrücken liessen. Um diesen Uebelstand fühlbar zu machen, brauche ich nur darauf hinzuweisen, dass die Axen der z und z' anders als die übrigen Axen behandelt werden. Will man dagegen die Symmetrie nicht verlieren, so muss man es aufgeben, in den Formeln die drei unabhängigen Grössen explicite vor sich zu haben.

Ich setze folgende zwei Sätze als bekannt voraus:

1°. Wenn a, b, c die Cosinus der drei Winkel sind, welche irgend eine Gerade mit den drei Coordinatenaxen bildet, so ist

$$a^2+b^2+c^2=1.$$

2°. Wenn zwei Gerade mit den Coordinatenaxen resp. Winkel bilden, deren Cosinus a, b, c; a', b', c' sind, so ist der Cosinus des von beiden Geraden eingeschlossenen Winkels

$$=aa'+bb'+cc' \text{*)}.$$

Nun seien a, b, c die Cosinus der drei Winkel, welche die Axe der x' mit den Axen der x, y, z bildet, und ebenso seien die Richtungen der Axen der y', z' in Beziehung auf die Axen des ersten Systems durch die Cosinus a', b', c'; a'', b'', c'' bestimmt, so dass man durch Projection der aus den neuen Coordinaten x', y', z' zusammengesetzten gebrochenen Linie auf die drei ursprünglichen Coordinatenaxen die Transformationsformeln

$$\left.\begin{aligned} x&=ax'+a'y'+a''z' \\ y&=bx'+b'y'+b''z' \\ z&=cx'+c'y'+c''z' \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

erhält. Vermöge des ersten vorhin angeführten Satzes hat man dann die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=1, \\ a'^2+b'^2+c'^2&=1, \\ a''^2+b''^2+c''&=1; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

*) Von eben so häufiger Anwendung als diese beiden Sätze ist dieser dritte: Wenn x, y, z; x', y', z' die Projectionen zweier begränzten Geraden sind, so sind $yz'-y'z$, $zx'-z'x$, $xy'-x'y$ die Projectionen des von denselben gebildeten Parallelogramms auf die drei Coordinatenebenen.

und vermöge des zweiten, da die drei Axen der x', y', z' sich rechtwinklig schneiden sollen,

$$\left.\begin{aligned} a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0, \\ a''a + b''b + c''c &= 0, \\ aa' + bb' + cc' &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

also im Ganzen 6 Bedingungsgleichungen zwischen 9 Grössen. Wenn nun keine dieser 6 Gleichungen eine nothwendige Folge der übrigen ist, so bleiben nur drei unabhängige Grössen, und sechs von den neun Cosinus sind jeweilen durch die drei übrigen bestimmt.

Da das erste Coordinatensystem ebenso auf das zweite bezogen werden kann, wie dieses auf jenes, so ist klar, dass die angeführten 6 Bedingungsgleichungen noch die 6 folgenden zur nothwendigen Folge haben müssen:

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \text{ etc.} \qquad bc + b'c' + b''c'' = 0, \text{ etc.}$$

Es entsteht daher die Aufgabe, dieses, was geometrisch a priori eingesehen wird, noch analytisch nachzuweisen.

Wenn man die drei Gleichungen (1) der Reihe nach mit a, b, c multiplicirt und addirt, so ergiebt sich unter Berücksichtigung der Relationen (2) und (3)

$$x' = ax + by + cz, \text{ etc.}$$

Durch das gewöhnliche Eliminationsverfahren ergiebt sich

$$x = \frac{b'c'' - b''c'}{\Delta}x' + \frac{c'a'' - c''a'}{\Delta}y' + \frac{a'b'' - a''b'}{\Delta}z', \text{ etc.}$$

wo

$$\Delta = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c$$

die unter dem Namen der Determinante bekannte Function der neun Cosinus a, b, c, a' etc. ist, welche die Eigenschaft hat, durch jede Permutation zweier Buchstaben (oder auch zweier Accente) in ihren entgegengesetzten Werth überzugehen. Man hat also

$$\left.\begin{aligned} b'c'' - b''c' &= a\Delta, & c'a'' - c''a' &= b\Delta, & a'b'' - a''b' &= c\Delta, \\ b''c - bc'' &= a'\Delta, & c''a - ca'' &= b'\Delta, & a''b - ab'' &= c'\Delta, \\ bc' - b'c &= a''\Delta, & ca' - c'a &= b''\Delta, & ab' - a'b &= c''\Delta. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Quadrirt man die beiden Seiten jeder in der ersten Horizontalreihe enthaltenen Gleichung und addirt, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die identische Gleichung

$$(b'c''-b''c')^2+(c'a''-c''a')^2+(a'b''-a''b')^2$$
$$=(a'^2+b'^2+c'^2)(a''^2+b''^2+c''^2)-(a'a''+b'b''+c'c'')^2$$

vermöge der Relationen (2) und (3)

$$1=\Delta^2\,. \quad (5)$$

Also ist entweder $\Delta=1$ oder $\Delta=-1$. Nimmt man an, das zweite Coordinatensystem sei so beschaffen, dass, wenn die positiven Axen der x', y' mit den positiven Axen der x, y resp. zur Coincidenz gebracht werden, dann auch die positive Axe der z' mit der positiven Axe der z und nicht mit der negativen zusammenfalle, so dass gleichzeitig $a=b'=c''=1$ wird, während die sechs übrigen Cosinus verschwinden, so wird $\Delta=1$.

Wenn wir nun die in der ersten Verticalreihe (4) enthaltenen Gleichungen resp. mit a, a', a'' multipliciren und addiren, so bekommen wir: $\Delta=(a^2+a'^2+a''^2)\Delta$, also

$$a^2+a'^2+a''^2=1,\ \text{etc.} \qquad (6)$$

Multipliciren wir dagegen dieselben Gleichungen mit b, b', b'' und addiren, so ergiebt sich $0=(ab+a'b'+a''b'')\Delta$, also

$$ab+a'b'+a''b''=0,\ \text{etc.} \qquad (7)$$

Hiemit sind diese sechs neuen Relationen (6) und (7) als nothwendige Folge der ursprünglichen (2) und (3) nachgewiesen.

Merkwürdiger Weise kommen, unbeschadet der Symmetrie, drei unabhängige Grössen ungezwungen zum Vorschein, sobald man die Differentialien der neun Cosinus a, b, c, a', etc. betrachtet.

Die Gleichungen (6) und (7) differentiirt geben

$$a\,da+a'da'+a''da''=0,\ \text{etc.}$$

$$a\,db+a'db'+a''db''=-(b\,da+b'da'+b''da''),\ \text{etc.}$$

Man darf daher setzen

$$\left.\begin{aligned} p\,dt&=b\,dc+b'dc'+b''dc''=-(c\,db+c'db'+c''db'')\\ q\,dt&=c\,da+c'da'+c''da''=-(a\,dc+a'dc'+a''dc'')\\ r\,dt&=a\,db+a'db'+a''db''=-(b\,da+b'da'+b''da'')\end{aligned}\right\}\ (8)$$

wo dt das Zeitelement und p, q, r die drei neu eingeführten Unabhängigen bezeichnen. Aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} a\,da + a'da' + a''da'' &= 0, \\ b\,da + b'da' + b''da'' &= -r\,dt, \\ c\,da + c'da' + c''da'' &= q\,dt \end{aligned}$$

ergiebt sich durch Elimination

$$\left.\begin{aligned} &\frac{da}{dt} = cq - br, \quad \frac{da'}{dt} = c'q - b'r, \quad \frac{da''}{dt} = c''q - b''r, \\ \text{ebenso}\quad &\frac{db}{dt} = ar - cp, \text{ etc.} \\ &\frac{dc}{dt} = bp - aq, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Denkt man sich nun einen Punkt P, der seine Lage gegen das zweite Coordinatensystem nicht ändert, für den also x', y', z' constant bleiben, während dieses zweite Coordinatensystem selbst sich beliebig um seinen festen Ursprung herumdreht und dadurch seine Lage gegen das feststehende erste Coordinatensystem fortwährend verändert, und betrachtet dann die momentane Bewegung des Punktes P in Beziehung auf dieses erste Coordinatensystem, so geben die differentiirten Gleichungen (1), wenn darin für da, da' etc. obige Ausdrücke substituirt werden:

$$\frac{dx}{dt} = qz - ry, \quad \frac{dy}{dt} = rx - pz, \quad \frac{dz}{dt} = py - qx. \quad (10)$$

Diese Gleichungen zeigen 1°, dass die Gerade, deren Projectionen auf die festen Coordinatenaxen dx, dy, dz sind, d. h. das vom Punkte P durchlaufene Wegelement, auf den beiden Geraden, deren Projectionen auf dieselben festen Axen resp. pdt, qdt, rdt und x, y, z sind, senkrecht steht und zwar so, dass die Richtungen (pdt, qdt, rdt), (x, y, z), (dx, dy, dz) in der Ordnung der Axen x, y, z auf einander folgen; 2°. dass das genannte Wegelement an Grösse gleich ist dem Parallelogramm, welches die Geraden (pdt, qdt, rdt) und (x, y, z) zu Seiten hat.

Denken wir uns nun die von der Lage des Punktes P unabhängige Gerade (pdt, qdt, rdt) als vom Ursprung ausgehend und nehmen dieselbe als Grundlinie des Parallelogramms an, so ist dessen Höhe zugleich die Entfernung des Punktes P von der verlängerten Geraden (pdt, qdt, rdt). Folglich ist das vom Punkt P durchlaufene Wegelement 1°. senkrecht zu der durch P und die Gerade (pdt, qdt, rdt) gelegten Ebene; 2°. ist dasselbe an Grösse gleich dem Producte seiner Entfernung von der zuletzt genannten Geraden und einer von der Lage des Punktes P unabhängigen Grösse, der Grundlinie (pdt, qdt, rdt) jenes Parallelogramms. D. h. diese Grundlinie stellt ihrer Richtung nach die momentane Drehungsaxe und ihrer Grösse nach die momentane Drehung des zweiten Coordinatensystems dar. Die drei in obigen Differentialgleichungen auftretenden unabhängigen Grössen p, q, r zeigen also, als Projectionen einer vom Ursprung ausgehenden Geraden aufgefasst, die Richtung der momentanen Drehungsaxe an, während die zuletzt genannte Gerade selbst an Grösse der momentanen Winkelgeschwindigkeit gleich ist. In Betreff des Sinns dieser letztern ist zu merken, dass wenn p positiv ist und q, r verschwinden, so dass die momentane Drehungsaxe mit der positiven Axe der x zusammenfällt, dann die Drehung von der Axe der y gegen diejenige der z hin erfolgt, was aus den Gleichungen (10) zu ersehen ist.

(Man vergleiche die hier am Ende gegebene Darstellung mit derjenigen in Poissons Mechanik Nr. 406 und mit Littrows Astronomie III. S. 86—90.).

XXV.

Ueber die Bestimmung von $\Sigma^{(n)}\varphi(x)$ unter einer bestimmten Voraussetzung. Beweis des Satzes, dass

$$\Sigma(u_0+u_1+u_2+\ldots\text{ in inf.})=\Sigma u_0+\Sigma u_1+\ldots\text{ in inf.}$$

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

Sei $\varphi(x)$ eine Funktion von x so beschaffen, dass

$$\varphi(x+h)=\varphi(x), \tag{1}$$

entweder in Folge der Form der Funktion $\varphi(x)$, oder des besondern Werthes von h, so lässt sich die Grösse

$$\Sigma^{(n)}\varphi(x),$$

worin Σ das Zeichen der endlichen Integration ist, ausdrück wenn h die Differenz bedeutet.

Um diesen Ausdruck ableiten zu können, wollen wir zue an einige andere Sätze erinnern. Man findet nämlich

$$\Delta\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots.(x-a-rh)}{1.2.3\ldots.(r+1)h^{r+1}}$$

$$=\frac{(x+h-a)(x-a)\ldots.(x-a-\overline{r-1}h)}{1.2\ldots(r+1)h^{r+1}}-\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-}{1.2\ldots(r+1)h^{r+1}}$$

$$=\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots..(x-a-\overline{r-1}h)}{1.2\ldots\ldots rh^r},$$

also

$$\Sigma\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-\overline{r-1}h)}{1.2\ldots..rh^r}$$

$$=\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots..(x-a-rh)}{1.2\ldots..(r+1)h^{r+1}}. \qquad (2)$$

Unter Voraussetzung der Gleichung (1) ist:

$$\Delta\frac{x-a}{h}\varphi(x)=\frac{x+h-a}{h}\varphi(x+h)-\frac{x-a}{h}\varphi(x)$$

$$=\frac{x+h-a}{h}\varphi(x)-\frac{x-a}{h}\varphi(x)=\varphi(x),$$

also ist

$$\Sigma\varphi(x)=C_0+\frac{x-a}{h}\varphi(x), \qquad (3)$$

worin C_0 und a willkührlich sind. Hieraus kann man leicht we ter schliessen. Es ist nämlich, unter der Voraussetzung (1):

$$\Delta\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-rh)}{1.2\ldots\ldots(r+1)h^{r+1}}\varphi(x)$$

$$=\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-\overline{r-1}h)}{1.2\ldots\ldots rh^r},$$

also

$$\Sigma\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-\overline{r-1}h)}{1.2\ldots\ldots rh^r}\varphi(x)$$

$$=\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-rh)}{1.2\ldots\ldots(r+1)h^{r+1}}\varphi(x). \qquad (4)$$

Wendet man diesen Satz auf (3) an, so erhält man:

$$\Sigma^{(2)}\varphi(x)=C_1+C_0\Sigma 1+\Sigma\frac{x-a}{1h}\varphi x$$
$$=C_1+C_0\frac{x-a}{h}+\frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2h^2}\varphi(x).$$

Hieraus wieder:

$$\Sigma^{(3)}\varphi(x)=C_2+C_1\frac{x-a}{h}+C_0\frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2.h^2}$$
$$+\frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{1.2.3h^3}\varphi(x),$$

und allgemein:

$$\Sigma^{(m)}\varphi(x)=C_{m-1}+C_{m-2}\frac{x-a}{h}+C_{m-3}\frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2.h^2}+\ldots$$
$$\ldots+C_0\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-\overline{m-2}h)}{1.2\ldots\ldots(m-1)h^{m-1}}$$
$$+\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots.(x-a-\overline{m-1}h)}{1.2\ldots\ldots mh^m}\varphi(x). \quad (5)$$

Da a sowohl, als C_0, C_1, .. C_{m-1} willkührlich sind, so hat man offenbar:

$$\Sigma^{(m)}\varphi(x)=\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots.(x-a-\overline{m-1}h)}{1.2\ldots\ldots mh^m}\varphi(x)$$
$$+a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_{m-1}x^{m-1}, \quad (6)$$

worin a, a_0, a_1, ... a_{m-1} völlig willkührlich sind.

Eine Funktion, welche der Gleichung (1) genügt, ist z B.

$$\varphi(x)=\sin\frac{2\pi x}{h} \text{ oder } \cos\frac{2\pi x}{h},$$

oder allgemeiner

$$\varphi(x)=\psi(\sin\frac{2\pi x}{h}, \cos\frac{2\pi x}{h}).$$

Also ist

$$\Sigma^{(m)}\psi(\sin\frac{2\pi x}{h}, \cos\frac{2\pi x}{h})$$
$$=\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-\overline{m-1}h)}{1.2\ldots\ldots mh^m}\psi(\sin\frac{2\pi x}{h}, \cos\frac{2\pi x}{h})$$
$$+a_0+a_1x+\ldots+a_{m-1}x^{m-1}. \quad (7)$$

Eine Funktion, die der Gleichung (1) genügt, ist ferner

$$\varphi(x) = \sin x \text{ oder } \cos x,$$

allgemeiner

$$\varphi(x) = \psi(\sin x, \cos x),$$

für $h = 2r\pi$, worin r eine ganze Zahl ist. Demnach hat man, für die Differenz $2r\pi$:

$$\Sigma^{(m)}\sin(x) = \frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{m-1}h)}{1.2\ldots\ldots mh^m}\sin x$$
$$+ a_0 + a_1 x + \ldots\ldots\ldots + a_{m-1}x^{m-1}, \quad (8) \quad (h = 2r\pi)$$

u. s. f.

Für $e^h = 1$ ist ebenfalls e^x eine solche Funktion.

Mit Hülfe der vorstehenden Resultate kann man leicht einen wichtigen Satz beweisen. Ist nämlich die ins Unendliche fortlaufende Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_m x^m + \ldots\ldots = f(x) \qquad (9)$$

konvergent, so ist

$$\Sigma f(x) = \Sigma(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots) = a_0 \Sigma 1 + a_1 \Sigma x + a_2 \Sigma x^2 + \ldots\ldots \qquad (10)$$

Man braucht offenbar nur zu beweisen, dass die Gleichung

$$\Sigma(a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m) = a_0 \Sigma 1 + a_1 \Sigma x + \ldots\ldots + a_m \Sigma x^m, \qquad (11)$$

die für jedes endliche m gilt, auch für ein ins Unendliche wachsendes m gilt.

Es ist offenbar

$$(12)$$
$$\Sigma(a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + a_{m+2} x^{m+2} + \ldots\ldots)$$
$$= a_0 \Sigma 1 + a_1 \Sigma x + \ldots + a_m \Sigma x^m + \Sigma(a_{m+1} x^{m+1} + a_{m+2} x^{m+2} + \ldots \text{ in inf.}),$$

wie gross auch m sei. Kann man nun beweisen, dass, unter der Voraussetzung, die Reihe (9) sei konvergent,

$$\Sigma(a_{m+1} x^{m+1} + a_{m+2} x^{m+2} + \ldots \text{ in inf.})$$

sich der Null unbegränzt mit wachsendem m nähere, so ist der Satz bewiesen.

Nun ist, für ein grosses m, weil (1) konvergent ist,

$$a_{m+1} x^{m+1} + a_{m+2} x^{m+2} + \ldots \text{ in inf.} = \psi(x)$$

kleiner, als jede angebbare Grösse. Liegt nun $x + h$ innerhalb der Gränzen, zwischen denen die Reihe (9) konvergent ist, so wird offenbar

$$\psi(x+h)-\psi(x)=0$$

zu setzen sein. Nach Formel (6) erhält man aber unter dieser Voraussetzung:

$$\Sigma\psi(x)=\frac{x-a}{h}\psi(x), \qquad (13)$$

wenn man die willkührliche Konstante, die ohnehin in (12) zugefügt wird, weglässt. Da aber $\psi(x)$ unbegränzt sich der Null nähert, so folgt aus (13), dass

$$\Sigma\psi(x)=0 \qquad (14)$$

sei, d. h. dass unter Voraussetzung der Konvergenz der Reihe (9)

$$\Sigma(a_0+a_1x+\ldots\ldots \text{ in inf.})=a_0\Sigma 1+a_1\Sigma x+a_2\Sigma x^2+\ldots. \text{ in inf.} \quad (15)$$

Eben so beweist man folgenden allgemeinen Satz:

Sind u_0, u_1, u_2, ... Funktionen von x; ist ferner die unendliche Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

konvergent innerhalb gewisser Gränzen für x; liegen endlich x sowohl als $x+h$ innerhalb derselben Gränzen, so ist

$$\Sigma(u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots \text{ in inf.})=\Sigma u_0+\Sigma u_1+\Sigma u_2+\ldots.. \text{ in inf.} \quad (16)$$

Offenbar hat man, unter denselben Voraussetzungen:

$$\Sigma^{(n)}(u_0+u_1+u_2+\ldots \text{ in inf.})=\Sigma^{(n)}u_0+\Sigma^{(n)}u_1+\Sigma^{(n)}u_2+\ldots \text{ in inf.} \quad (17)$$

XXVI.

Ableitung einiger bestimmten Doppelintegrale.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

---

§. 1.

Hätte man in Theil XII. Nr. VI. §. 1. des Archivs folgende Koordinaten eingeführt:

$$x=ra^2\cos\alpha,\quad y=rb^2\sin\alpha\cos\beta,\quad z=rc^2\sin\alpha\sin\beta;$$

so wäre

$$r=\frac{1}{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)}}+\frac{h}{\sqrt{(a^4\cos^2\alpha+b^4\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^4\sin^2\alpha\sin^2\beta)}}.$$

Zugleich fände man für den Kubikinhalt:

$$\frac{8}{3}a^2b^2c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^3\partial\alpha\partial\beta\sin\alpha.$$

Entwickelt man dieses Resultat und vergleicht es mit dem dort gefundenen, so erhält man:

(1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{\left[\begin{array}{c}[a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta] \\ \times\,[a^4\cos^2\alpha+b^4\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^4\sin^2\alpha\sin^2\beta]^{\frac{1}{2}}\end{array}\right]}$$

$$=\frac{\pi}{2abc}\cdot\frac{F\left(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\right)}{\sqrt{a^2-c^2}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{\left[\begin{array}{c}[a^4\cos^2\alpha+b^4\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^4\sin^2\alpha\sin^2\beta] \\ \times\,[a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^4\alpha\sin^2\beta]^{\frac{1}{2}}\end{array}\right]}$$

$$=\frac{\pi}{2ab^2c}\cdot\frac{F\left(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}}\right)}{\sqrt{a^2-c^2}};$$

worin $\cos\varepsilon=\frac{c}{a}$.

Führt man dagegen folgende Koordinaten ein:

$$x=r\sin\alpha\sqrt{1-m^2\sin^2\beta},\quad y=r\cos\alpha\cos\beta,\quad z=r\sin\beta\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha},$$
$$m^2+n^2=1;$$

so ist:

$$r=\frac{abc}{\sqrt{[b^2c^2\sin^2\alpha(1-m^2\sin^2\beta)+a^2c^2\cos^2\alpha\cos^2\beta+a^2b^2\sin^2\beta(1-n^2\sin^2\alpha)]}}+h$$

und der Kubikinhalt:

$$\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^3(1-n^2\sin^2\alpha-m^2\sin^2\beta)}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\beta}}\,\partial\alpha\,\partial\beta.$$

Hieraus folgt durch Vergleichung:

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-n^2\sin^2\alpha-m^2\sin^2\beta)\,\partial\alpha\,\partial\beta}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\beta}[b^2c^2\sin^2\alpha(1-m^2\sin^2\beta)+a^2c^2\cos^2\alpha\cos^2\beta+a^2b^2\sin^2\beta(1-n^2\sin^2\alpha)]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\pi}{2a^2b^2c^2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-n^2\sin^2\alpha-m^2\sin^2\beta)\,\partial\alpha\,\partial\beta}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\beta}[b^2c^2\sin^2\alpha(1-m^2\sin^2\beta)+a^2c^2\cos^2\alpha\cos^2\beta+a^2b^2\sin^2\beta(1-n^2\sin^2\alpha)]}=\frac{\pi F(\varepsilon,\eta)}{2abc\sqrt{a^2-c^2}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-n^2\sin^2\alpha-m^2\sin^2\beta)\,\partial\alpha\,\partial\beta}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\beta}[b^2c^2\sin^2\alpha(1-m^2\sin^2\beta)+a^2c^2\cos^2\alpha\cos^2\beta+a^2b^2\sin^2\beta(1-n^2\sin^2\alpha)]^{\frac{1}{2}}}=\frac{\pi F(\varepsilon,\varkappa)}{2b\sqrt{a^2-c^2}},$$

$$\cos\varepsilon=\frac{c}{a},\quad \eta=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\quad \varkappa=\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}}.$$

Setzte man z. B. $n=0$, so wäre $m^2=1$ und man erhielte Formeln, von denen eine a. a. O. schon aufgezählt ist.

In derselben Weise erhält man durch die Substitution

$$x=ra\sin\alpha\sqrt{1-m^2\sin^2\beta},\quad y=rb\cos\alpha\cos\beta,\quad z=rc\sin\beta\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}:$$

(3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-n^2\sin^2\alpha-m^2\sin^2\beta)\,\partial\alpha\partial\beta}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\beta}\,[a^2\sin^2\alpha(1-m^2\sin^2\beta)+b^2\cos^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\beta(1-n^2\sin^2\alpha)]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\pi F(\varepsilon,\eta)}{2\sqrt{a^2-c^2}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-n^2\sin^2\alpha-m^2\sin^2\beta)\,\partial\alpha\partial\beta}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\beta}\,[a^2\sin^2\alpha(1-m^2\sin^2\beta)+b^2\cos^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\beta(1-n^2\sin^2\alpha)]}=\frac{\pi F(\varepsilon,\varkappa)}{2b\sqrt{a^2-c^2}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-n^2\sin^2\alpha-m^2\sin^2\beta)\,\partial\alpha\partial\beta}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\beta}\,[a^2\sin^2\alpha(1-m^2\sin^2\beta)+b^2\cos^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\beta(1-n^2\sin^2\alpha)]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\pi}{2abc}.$$

§. 2.

Setzt man in der Gleichung (1) a. a. O.

$$x=a\sin\alpha\sqrt{1-m^2\sin^2\beta},\quad y=b\cos\alpha\cos\beta,\quad z=c\sin\beta\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha};$$

so erhält man durch Vergleichung mit der Formel für den Oberflächeninhalt des Ellipsoids:

(4)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m^2\cos^2\beta + n^2\cos^2\alpha}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\beta}} \sqrt{b^2c^2\sin^2\alpha - b^2(m^2c^2+n^2a^2)\sin^2\alpha\sin^2\beta + a^2c^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + a^2b^2\sin^2\beta}\,\partial\alpha\,\partial\beta$$

$$= \frac{\pi c^2}{4} + \frac{\pi a^2 b}{4\sqrt{a^2-c^2}}\left[\frac{c^2}{a^2}F(\varepsilon,\varkappa) + \frac{a^2-c^2}{a^2}E(\varepsilon,\varkappa)\right],$$

worin $\varepsilon,\varkappa$ dieselbe Bedeutung, wie oben, haben.

Die Spezialisirungen $n=0$, $m=1$ oder $m=0$, $\varkappa=1$ geben bekannte Formeln.

§. 3.

Wir wollen das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi}{(a^2b^2\cos^2\varphi + a^2c^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + b^2c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)^n},$$

worin n eine ganze positive Zahl ist, zu bestimmen suchen.

Setzt man

$$a^2b^2\cos^2\varphi + a^2c^2\sin^2\varphi = \alpha^2,$$

$$a^2b^2\cos^2\varphi + b^2c^2\sin^2\varphi = \beta^2;$$

so ist das obige Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi}{(\alpha^2\cos^2\psi + \beta^2\sin^2\psi)^n}.$$

Zuerst bestimmen wir nun

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\psi}{(\alpha^2\cos^2\psi + \beta^2\sin^2\psi)^n} = B_n.$$

Man findet leicht, dass

$$2n.B_{n+1} = -\left(\frac{\partial B_n}{\alpha\partial\alpha} + \frac{B_n}{\beta\partial\beta}\right). \qquad (5)$$

Da aber bekanntlich

$$B_1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\alpha\beta},$$

so ergiebt sich aus der Formel (5):

$$B_2 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^3\beta} + \frac{1}{\alpha\beta^3}\right),$$

$$B_3 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2.4}\left(\frac{3}{\alpha^5\beta} + \frac{3}{\alpha\beta^5} + \frac{2}{\alpha^3\beta^3}\right),$$

$$B_4 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2.4.6}\left[\frac{15}{\alpha^7\beta} + \frac{15}{\alpha\beta^7} + \frac{9}{\alpha^3\beta^5} + \frac{9}{\alpha^5\beta^3}\right],$$

$$\vdots$$

Das allgemeine Gesetz scheint zu sein:

$$B_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2.4\ldots(2n-2)} \left[\frac{\overset{n}{a}_1}{\alpha^{2n-1}\beta} + \frac{\overset{n}{a}_3}{\alpha^{2n-3}\beta^3} + \ldots + \frac{\overset{n}{a}_{2n-1}}{\alpha\beta^{2n-1}} \right], \tag{6}$$

worin $\overset{n}{a}_1, \overset{n}{a}_3, \ldots\ldots \overset{n}{a}_{2n-1}$ gewisse noch zu bestimmende Koeffizienten sind.

Wendet man die Formel (5) an und setzt:

$$\begin{aligned}
\overset{n+1}{a}_1 &= (2n-1)\overset{n}{a}_1, \\
\overset{n+1}{a}_3 &= (2n-3)\overset{n}{a}_3 + \overset{n}{a}_1, \\
\overset{n+1}{a}_5 &= (2n-5)\overset{n}{a}_5 + 3\overset{n}{a}_3, \\
\overset{n+1}{a}_7 &= (2n-7)\overset{n}{a}_7 + 5\overset{n}{a}_5, \\
&\vdots \\
\overset{n+1}{a}_{2n+1} &= (2n-1)\overset{n}{a}_{2n-1};
\end{aligned} \tag{7}$$

so erhält man:

$$B_{n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2.4\ldots2n} \left[\frac{\overset{n+1}{a}_1}{\alpha^{2n+1}\beta} + \frac{\overset{n+1}{a}_3}{\alpha^{2n-1}\beta^3} + \ldots + \frac{\overset{n+1}{a}_{2n+1}}{\alpha\beta^{2n+1}} \right],$$

was die Richtigkeit der Formel (6) beweist.

Nun ist $\overset{1}{a}_1 = 1$, also aus (7):

$$\overset{n}{a}_1 = 1.3.5.7\ldots(2n-3).$$

Ferner ist:

$$\overset{2}{a}_3 = \overset{1}{a}_1 = 1,$$

woraus vermittelst der zweiten Gleichung (7):

$$\overset{n}{a}_3 = 1^2.3.5\ldots(2n-5).(n-1).$$

Fährt man so fort, so wird man auf das folgende Gesetz geführt:

$$\overset{n}{a}_{2m+1} = 1^2.3^2.5^2 \ldots\ldots (2m-1)^2.(2m+1)(2m+3)\ldots\ldots(2n-2m-3).\frac{(n-1)(n-2)\ldots.(n-m)}{1.2\ldots.m}. \tag{8}$$

Wirklich folgt daraus nach (7):

$$\overset{n+1}{a}_{2m+1} = (2n-2m-1)\overset{n}{a}_{2m+1} + (2m-1)\overset{n}{a}_{2m-1}$$

$$= 1^2.3^2.5^2 \ldots\ldots (2m-1)^2.(2m+1)(2m+3)\ldots\ldots(2n-2m-1).\frac{(n-1)(n-2)\ldots.(n-m)}{1.2\ldots.m}$$

$$+ (2m-1).1^2.3^2\ldots\ldots(2m-3)^2.(2m-1)(2m+1)\ldots(2n-2m-1).\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots\ldots(m-1)}$$

$$= 1^2.3^2.5^2\ldots\ldots(2m-1)^2.(2m+1)(2m+3)\ldots.(2n-2m-1)\left[(n-m)+m\right].\frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots.m}$$

$$= 1^2.3^2.5^2\ldots.(2m-1)^2.(2m+1)(2m+3)\ldots\ldots(2n-2m-1).\frac{n.(n-1)\ldots.(n+1-m)}{1.2\ldots.m},$$

was die Formel (8) beweist. Demnach ist:

$$B_n = \frac{\pi.1.3.5\ldots.(2n-3)}{2.2.4.6\ldots(2n-2)}\left[\frac{1}{\alpha^{2n-1}\beta} + \frac{n-1}{1}.\frac{1}{2n-3}.\frac{1}{\alpha^{2n-3}\beta^3} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}.\frac{1.3}{(2n-3)(2n-5)}.\frac{1}{\alpha^{2n-5}\beta^5}\right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}.\frac{1.3.5}{(2n-3)(2n-5)(2n-7)}.\frac{1}{\alpha^{2n-7}\beta^7} + \ldots\ldots + \frac{1}{\alpha\beta^{2n-1}}\right]. \tag{9}$$

Dadurch nun ist die Bestimmung des vorgelegten Integrals auf die Bestimmung von Integralen der Form

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\,\partial\varphi}{\alpha^{2m+1}\beta^{2r+1}} = L \qquad (10)$$

zurückgeführt.

Man setze:

$$\cos\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{tg}\psi,$$

so ist

$$\alpha^{2m+1} = \frac{(ac)^{2m+1}}{\cos^{2m+1}\psi}\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}\sin^2\psi\right)^{\frac{2m+1}{2}}, \quad \beta^{2r+1} = \frac{(bc)^{2r+1}}{\cos^{2r+1}\psi}.$$

Die Gränzen von ψ sind ε und 0, wo ε die obige Bedeutung hat; also wird das Integral (10), da

$$\partial\varphi = -\frac{p\partial\psi}{\sin\varphi\cos^2\psi}, \quad p^2 = \frac{c^2}{a^2-c^2}$$

ist:

$$L = \int_0^{\varepsilon} \frac{\partial\psi . p . \cos^{2r+1}\psi . \cos^{2m+1}\psi}{\cos^2\psi(bc)^{2r+1}(ac)^{2m+1}(1-\eta^2\sin^2\psi)^{\frac{2m+1}{2}}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}\,(ac)^{2m+1}(bc)^{2r+1}}\int_0^{\varepsilon}\frac{\cos^{2(r+m)}\psi\,\partial\psi}{(1-\eta^2\sin^2\psi)^{\frac{2m+1}{2}}}. \qquad (11)$$

Die Bestimmung des Integrales (10) ist somit auf die des Integrals

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\cos^{2n}\psi\,\partial\psi}{(1-\eta^2\sin^2\psi)^{\frac{2m+1}{2}}} \qquad (12)$$

zurückgeführt. Allein, wenn $1-\eta^2=\eta'^2$, so ist:

$$\cos^2\psi = \frac{1-\eta^2\sin^2\psi-\eta'^2}{\eta^2}, \quad \cos^{2n}\psi = \frac{(1-\eta^2\sin^2\psi-\eta'^2)^n}{\eta^{2n}}$$

$$= \frac{1}{\eta^{2n}}\Big[(1-\eta^2\sin^2\psi)^n - \frac{n}{1}\eta'^2.(1-\eta^2\sin^2\psi)^{n-1}$$

$$+ \frac{n.(n-1)}{1.2}\eta'^4(1-\eta^2\sin^2\psi)^{n-2} - \ldots\ldots (-1)^n.\eta'^{2n}\Big].$$

Dadurch wird:

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\cos^{2m}\psi\,\partial\psi}{(1-\eta^2\sin^2\psi)^{\frac{2m+1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\eta^{2m}}\Bigg[\int_0^{\varepsilon}\frac{(1-\eta^2\sin^2\psi)^m\,\partial\psi}{(1-\eta^2\sin^2\psi)^{\frac{2m+1}{2}}}-\frac{m}{1}\eta'^2\int_0^{\varepsilon}\frac{(1-\eta^2\sin^2\psi)^{m-1}\,\partial\psi}{(1-\eta^2\sin^2\psi)^{\frac{2m+1}{2}}}+\ldots$$

$$\ldots\ldots(-1)^m\eta'^{2m}\int_0^{\varepsilon}\frac{\partial\psi}{(1-\eta^2\sin^2\psi)^{\frac{2m+1}{2}}}\Bigg].$$

Die hier vorkommenden Integrale haben nun noch die Formen:

$$\int_0^{\varepsilon}(1-\eta^2\sin^2\psi)^{\frac{2p+1}{2}}\,\partial\psi=P_{2p+1},$$

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{\partial\psi}{(1-\eta^2\sin^2\psi)^{\frac{2q+1}{2}}}=Q_{2q+1}. \qquad (13)$$

Für diese Integrale bestehen aber folgende Rekursionsformeln:

(14)

$$(2p+1)P_{2p+1}=2p(1+\eta'^2)P_{2p-1}-(2p-1)\eta'^2P_{2p-3}$$
$$+\eta^2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\,(1-\eta^2\sin^2\varepsilon)^{\frac{2p-1}{2}},$$

$$(2q-1)\,Q_{2q+1}$$
$$=(2q-2)(1+\eta'^2)Q_{2q-1}-(2q-3)Q_{2q-3}-\frac{\eta^2\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{(1-\eta^2\sin^2\varepsilon)^{\frac{2q-1}{2}}};$$

während

(15)

$$P_1=E(\varepsilon,\eta),\quad P_3=\frac{4-2\eta^2}{3}E(\varepsilon,\eta)-\frac{\eta'^2}{3}F(\varepsilon,\eta)$$
$$+\frac{\eta^2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sqrt{1-\eta^2\sin^2\varepsilon}}{3},$$

$$Q_1=F(\varepsilon,\eta),\quad Q_3=\frac{E(\varepsilon,\eta)}{1-\eta^2}-\frac{\eta^2\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{\eta'^2(1-\eta^2\sin^2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}$$

ist. Vermöge (14) und (15) bestimmt man die Integrale (13), dadurch das Integral (11), und dadurch endlich das vorgelegte Integral.

Sei

$$(x^2+y^2+z^2)^{2n+4}=(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)^{2n+1}$$

die Gleichung einer Fläche, und man setze

$$x=\frac{r}{a}\sin\varphi\sin\psi,\quad y=\frac{r}{b}\sin\varphi\cos\psi,\quad z=\frac{r}{c}\cos\varphi;$$

so erhält man als Formel für den Kubikinhalt:

$$\frac{8(abc)^{2n+3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi}{[a^2b^2\cos^2\varphi+a^2c^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+b^2c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi]}$$

Setzte man aber

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\varphi\sin\psi;$$

so erhielte man für denselben Kubikinhalt:

$$\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{\frac{2n+1}{2}}\sin\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi$$

Also ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{\frac{2n+1}{2}}\sin\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi$$

$$=(abc)^{2n+3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi}{[a^2b^2\cos^2\varphi+a^2c^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+b^2c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi]}$$

wodurch das erste Integral ebenfalls bestimmt ist.

XXVII.

Ueber den Heber.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

In den Comptes rendus vom 25. Septbr. 1848 sagt Person, dass ein überall gleich dicker Heber, dessen vertikale Arme die Längen a, c und dessen horizontaler Arm die Länge b habe, und in dem man nur den längern Arm c mit Flüssigkeit gefüllt habe, dann fortfliesse, wenn man diese Flüssigkeit von selbst ausfliessen lasse, wenn

$$c > a + \frac{a+b}{1-\frac{a}{H}},$$

wenn H die Höhe der Flüssigkeit bedeutet, die dem atmosphärischen Drucke das Gleichgewicht hält. Zugleich will er dadurch die Formel Péclet's

$$c > 2a + b$$

entkräften. Trotzdem ist die letztere doch richtig und die erste falsch, wie man sogleich sehen wird.

Nehmen wir nämlich an, die Flüssigkeit fliesse aus der Röhre $CD(=c)$ (Taf. IV. Fig. 2.), so wird, da die in $AB+BC$ enthaltene Luft sich ausdehnt, die Flüssigkeit in AB steigen. Soll sie über B steigen, so muss vor Allem

$$H > a \quad \text{(1)}$$

sein. Diese Bedingung vorausgesetzt nun, wollen wir annehmen, die Flüssigkeit habe, bis CD leer sei, in ihrem Steigen die Röhren a, b nicht nur durchlaufen, sondern sei noch in CD bis zur Tiefe $CK = x$ gesunken, so dass also im Augenblick, als in D die letzte Schichte abfliesst, die gestiegene Flüssigkeit den Raum $a+b+x$ erfüllt. Suchen wir nun x zu bestimmen.

Die im Heber befindliche Luft, die ursprünglich den Raum $a+b$ einnahm, befindet sich im Raume $KD = c - x$; ihre Dichte ist also $\frac{a+b}{c-x}$ ihrer anfänglichen Dichte. Heisst δ der Querschnitt des Hebers, ε das Gewicht der Einheit der Flüssigkeit, P der Druck der atmosphärischen Luft auf den Querschnitt des Hebers, so ist

$$H\delta\varepsilon = P \qquad (2)$$

und die in KD befindliche Luft drückt nur mit der Kraft

$$\frac{a+b}{c-x} P = \frac{a+b}{c-x} H\delta\varepsilon .$$

Da D in dem betrachteten Augenblick durch die letzte abfliessende Schichte noch geschlossen ist, so wirkt auf die in $ABCK$ befindliche Masse einerseits der Druck

$$\frac{a+b}{c-x} H\delta\varepsilon - x\delta\varepsilon ,$$

anderseits der Druck $H\delta\varepsilon - a\delta\varepsilon$; demnach muss, für gleichförmige Bewegung,

$$H\delta\varepsilon - a\delta\varepsilon = \frac{a+b}{c-x} H\delta\varepsilon - x\delta\varepsilon ,$$

d. h.

$$H - a = \frac{(a+b)H}{c-x} - x$$

sein. Hieraus folgt:

$$x^2 + x(H-a-c) = -H(a+b-c) - ac ,$$

$$x = -\frac{H-a-c}{2} \pm \sqrt{-H(a+b+c) - ac + \frac{(H-a-c)^2}{4}} .$$

Soll nun der Heber fortfliessen, so muss

$$x > a ,$$

d. h.

$$\sqrt{-H(a+b-c) - ac + \frac{(H-a-c)^2}{4}} > a + \frac{H-a-c}{2}$$

$$> \frac{H+a-c}{2} ,$$

ı h.

$$-4H(a+b-c)-4ac+H^2-2aH+a^2-2Hc+2ac+c^2$$
$$>H^2+2aH+a^2-2Hc+c^2-2ac,$$

. h.

$$4Hc-8aH-4Hb>0,$$
$$c>2a+b \qquad (2)$$

h, was eben die Bedingung von Péclet ist.

XXVIII.

eber eine durch zerstreutes Licht bewirkte Interferenzerscheinung.

Von
Herrn L. Schläfli,
Privatdocenten der Mathematik zu Bern.

Die Erscheinung, von der ich reden will, ist nur eine Modi-ion eines schon von Newton angestellten Interferenzversuchs, Radicke in seinem Handbuch der Optik (Theil II., 1) also beschreibt:

„Lässt man durch eine in einem weissen Schirm befindliche e kreisförmige Oeffnung auf die Mitte eines sphärischen hoh-Glasspiegels, dessen erhabene Rückseite belegt ist, einen tbündel fallen, so erblickt man auf dem Schirm rings um die nung Farbenringe, wenn dieselbe im Mittelpunkte der Spie-rümmung liegt. Die Farben werden schwächer mit der Ent-ng des Schirms aus dieser Lage und verschwinden endlich l."

Der jüngere Herschel hat diesen Versuch aus der Interferenz an der Vorderseite des Spiegels zerstreuten und an der kseite zurückgeworfenen Lichts mit dem zuerst an der Rückseite zurückgeworfenen und dann an der Vorderseite zerstreuten Lichte erklärt; diese Erklärung wurde durch die Uebereinstimmung zwischen den berechneten Ringdurchmessern und den gemessenen bestätigt.

Eine ähnliche Erscheinung kann nun auch mit einem gewöhnlichen ebenen, mit Stanniol belegten Glassspiegel und ohne Schirm hervorgebracht werden, wenn man die zerstreuende Eigenschaft der Vorderseite des Spiegels durch Anhauchen oder Bestäuben erhöht. Der beim Newton'schen Versuch angewandte Schirm wird hier durch die Netzhaut des Auges ersetzt. Bringt man nämlich das Auge so zwischen den Spiegel und eine Lichtflamme, dass man die Bilder des Auges und der Flamme nahe bei einander sieht, so erblickt man auf dem Spiegel eine Menge concentrischer und farbiger Kreisbogen, die nur darum nicht vollständige Kreise sind, weil sie theilweise durch den Schatten des Kopfs verdeckt werden. Man braucht nur das Auge ein wenig zu heben oder zu senken, um zu bemerken, dass diese farbigen Kreisbogen die Gerade, welche die Bilder des Auges und der Flamme verbindet, senkrecht durchschneiden, und also ihren Mittelpunkt auf dieser Geraden haben müssen. Ist die Flamme viel weiter vom Spiegel entfernt als das Auge, so scheinen die farbigen Kreise das Bild des Auges selbst zum Mittelpunkt zu haben. Hält man die Flamme nahe neben das Auge, so sieht man parallele gerade Streifen, deren Richtung auf der Verbindungslinie der Bilder des Auges und der Flamme senkrecht steht. Hält man endlich die Flamme zwischen den Spiegel und das Auge, so krümmen sich die parallelen farbigen Streifen nach der entgegengesetzten Seite, und scheinen nun desto mehr das Bild der Flamme zu ihrem Mittelpunkt zu haben, je mehr die Entfernung des Auges vom Spiegel diejenige der Flamme übertrifft.

Benutzt man die Sonne als Lichtquelle, so haben die farbigen Ringe das Bild des Auges zum Mittelpunkt und werden desto grösser und breiter, je weiter man das Auge vom Spiegel entfernt. Ist diese Entfernung gross genug, so vermag der Schatten des Kopfs nicht mehr die Ringe zur Hälfte zu verdecken, und man sieht daher die äussersten Ringe als fast ganze Kreise. Um vom Sonnenbild nicht geblendet zu werden, kann man den Spiegel so stellen, dass der Schatten des Kopfs dasselbe verdeckt.

Obschon die folgende Erklärung durch keine Messung der Durchmesser der farbigen Ringe bestätigt wurde, so liegt doch im Allgemeinen in der so eben beschriebenen Erscheinungen nichts, was dieser Erklärung widerspräche.

Aus dem leuchtenden Punkt S werde auf die Vorderfläche des Planglases die Senkrechte SA gefällt, so ist, wenn n den Brechungsindex des Glases bezeichnet, und $TA = n . SA$ gemacht wird, T der Divergenzpunkt der ins Glas gebrochenen Strahlen. Nimmt man nun den Augenblick, in welchem das Licht von S ausgeht, als Anfangspunkt der Zeit, und die Zeit, welche das Licht braucht, um die Längeneinheit in der Luft zurückzulegen, als Einheit des Zeitmaasses an, so drückt $SA - n . TA$ die Zeit aus, zu welcher das im Glase sich bewegende Licht von jenem fingirten Punkte T ausgegangen sein möchte, wenn es stets in demselben durchsichtigen Medium geblieben wäre. Die verlängerte Senkrechte TA treffe die Hinterfläche des Glases in D, und man mache auf der entgegengesetzten Verlängerung $DQ = TD$, so ist Q der Divergenzpunkt der an der Hinterfläche des Glases zurückgeworfenen Strahlen, so lange sie sich noch innerhalb des Glases bewegen, und diese zurückgeworfenen Strahlen verhalten sich gerade so, wie wenn sie zur selben Zeit $SA - n \,.\, TA$ von Q ausgegangen wären, wie wir uns die einmal gebrochenen Strahlen von T ausgehend gedacht haben. Folglich wird

$$SA - n \,.\, TA + n \,.\, QM = SA + 2n \,.\, AD + n(QM - QA)$$

die Zeit bezeichnen, zu der das zurückgeworfene Licht in irgend einem nicht zu weit von A entfernten Punkte M der Vorderfläche anlangen wird, um von da aus durch Zerstreuung in die Luft überzugehen und ins Auge zu gelangen. Derselbe Punkt M wird aber auch von der Lichtquelle S selbst zur Zeit SM direkt erleuchtet werden, und das empfangene Licht ins Glas hinein zerstreuen. Man ziehe MC senkrecht auf die Hinterfläche des Glases und mache die Verlängerung $CN = MC$, so wird das zurückgeworfene Licht sich verhalten, als wenn es gleichzeitig von N ausgegangen wäre, wie das zerstreute einfallende von M. An der Vorderfläche angelangt, wird es in die Luft gebrochen werden und einen auf der Geraden MN liegenden Punkt P zum Divergenzpunkt haben, dessen Lage durch die Gleichung $MP = \frac{1}{n} \,.\, MN$ bestimmt ist; und die dem Punkt P entsprechende Zeit wird

$$SM + n \,.\, MN - PM$$

sein. Also ist der Zeitunterschied, um den wir den Punkt M später von Q aus erleuchtet uns denken müssen als das Licht von P ausgehen kann,

$$= -(SM - SA) + n(QM - QA) + PM.$$

Befindet sich nun das Auge O weder zu nahe am Spiegel, noch zu schief vor demselben, so erblickt es die beiden Punkte M und P, wenn das Glas dünn genug ist, in solcher Nähe, dass deren Bilder auf der Netzhaut sich interferiren. Wir dürfen auch desshalb die von M und P ins Auge gelangenden Strahlen als parallel ansehen, und wenn wir den Winkel, um welchen dieselben von der senkrechten Richtung abweichen, mit w bezeichnen, so ist der Weg von P aus ins Auge um $PM \,.\, \cos w$ länger als derjenige von M aus ebendahin. Demnach muss der Zeitunterschied, um den das Licht von M aus später ins Auge gelangt, als von P aus,

$$n(QM - QA) - (SM - SA) + PM(1 - \cos w)$$

betragen. Man errichte nun aus O die Senkrechte OB auf den Spiegel, setze $SA = a$, $OB = b$, $AM = p$, $BM = q$, $AD = d$ und betrachte p, q als kleine Grössen erster Ordnung in Beziehung auf a und b, so ist, wenn man die vierten Potenzen von p und q ausser Acht lässt,

$$SM-SA=\sqrt{a^2+p^2}-a=\frac{p^2}{2a},$$

$$QM-QA=\sqrt{(na+2d)^2+p^2}-(na+2d)=\frac{p^2}{2(na+2d)},$$

$$PM=\frac{2d}{n},\ 1-\cos\varphi=\frac{OM-OB}{OM}=\frac{1}{2}\frac{q^2}{b^2}.$$

Wird der obige Zeitunterschied mit t bezeichnet, so ergiebt sich hieraus

$$\frac{d}{n}\frac{q^2}{b^2}-\frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+\frac{2d}{n}}\right)=t,$$

oder

$$\frac{d}{n}\left(\frac{q^2}{b^2}-\frac{p^2}{a(a+\frac{2d}{n})}\right)=t,$$

oder endlich, wenn man die Dicke d im Vergleich mit a vernachlässigt,

$$\frac{q^2}{b^2}-\frac{p^2}{a^2}=\frac{nt}{d}.$$

Setzt man hier t constant, so hat man die Gleichung der Curve, welcher alle diejenigen Punkte M angehören, die dieselbe Interferenz hervorbringen. Für $t=0$ erhält man:

$$\frac{p}{a}=\frac{q}{b},$$

d. h. die von A und B nach M gehenden Fahrstrahlen haben zu einander dasselbe Verhältniss, wie die Abstände a und b der Flamme und des Auges vom Spiegel. Zufolge eines bekannten geometrischen Satzes liegt also der Punkt M auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt sich in der Verlängerung der Geraden AB befindet, und welcher diese Gerade AB innerhalb und ausserhalb im Verhältniss $a:b$ schneidet. Hieraus ist leicht zu ersehen, dass das Auge in der Richtung eines dieser beiden Durchschnittspunkte die Flamme erblickt, und dass der andere in der Geraden liegt, welche Auge und Flamme verbindet. Für ein beliebiges t nehme man AB als Abscissenaxe an, und drücke p^2 und q^2 durch die rechtwinkligen Coordinaten des Punkts M aus, so wird dieses auf rationale Weise geschehen, und man wird eine Gleichung zweiten Grades erhalten. Wenn aber eine solche Gleichung für einen gewissen Werth des constanten Gliedes einen Kreis darstellt, so wird sie für alle andern Werthe dieses constanten Gliedes lauter concentrische Kreise darstellen. Setzt man $AB = c$ und nimmt

$$\frac{a^2}{a^2-b^2}c, \quad \frac{b^2}{a^2-b^2}c$$

als Abscissen der Punkte A, B an, so wird die Gleichung der Curve

$$x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\left(\frac{nt}{d}+\frac{c^2}{a^2-b^2}\right).$$

Ist der leuchtende Punkt unendlich weit entfernt, so drückt $\frac{c}{a}$ die Tangente des Winkels α aus, um welchen die einfallenden Strahlen von der normalen Richtung abweichen, und dann wird die Gleichung der Curve

$$x^2+y^2=b^2\left(\frac{nt}{d}+\operatorname{tang}^2\alpha\right);$$

der Mittelpunkt fällt mit der Projection B des Auges zusammen.

Zum Schlusse will ich noch bemerken, dass es gar nicht nothwendig ist, dass das Planglas mit Stanniol belegt sei; jede schmutzige oder staubige oder schwach angelaufene Fensterscheibe zeigt daher die beschriebene Interferenzerscheinung, nur verzerrt, weil die Flächen des Fensterglases gewöhnlich nicht eben sind. Die Stanniolbelegung erhöht indessen die Intensität der Interferenzbilder.

Der helle Kreis, welchen man durch das Bild der Flamme gehen sieht, soll nach der vorigen Erklärung der erste sein, weil er dem Phasenunterschied Null entspricht; und die folgenden Ringe sollen von diesem an sowohl nach innen als nach aussen gezählt werden. Wirklich zeigt dieser Kreis fast keine Farbensäume, während die übrigen Kreise demselben ihre violette Seite zuwenden und die rothe von ihm abwenden. Die innern Kreise sind also gegen den gemeinschaftlichen Mittelpunkt hin roth gesäumt, die äussern dagegen nach aussen. Dieses stimmt ganz damit überein, dass die Wellenlängen für rothes Licht am grössten und für violettes am kleinsten sind.

XXIX.

Ueber eine geometrische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

Die Aufgabe, mit deren Auflösung auf analytischem Wege wir uns in diesem Aufsatze beschäftigen wollen, ist die folgende in Thl. I. S. 105. vorgelegte Aufgabe:

Es ist ein Kreis und in dessen Ebene sind zwei Punkte gegeben; man soll durch diese beiden gegebenen Punkte einen Kreis dergestalt beschreiben, dass seine beiden Durchschnittspunkte mit dem gegebenen Kreise, und der Mittelpunkt dieses letzteren Kreises in einer und derselben geraden Linie liegen.

Da der Mittelpunkt des gesuchten Kreises nothwendig in der geraden Linie liegen muss, welche auf der die beiden gegebenen Punkte mit einander verbindenden geraden Linie in deren Mittelpunkte senkrecht steht, so wird es am zweckmässigsten sein, diese gerade Linie als Axe der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy anzunehmen, dessen Axe der y wir zugleich der Einfachheit wegen durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises hindurch legen wollen. Bezeichnen wir dann die Coordinaten des Mittelpunkts des gegebenen Kreises durch 0, b und seinen Halbmesser durch r, wo natürlich b und r gegebene Grössen sind; so ist die Gleichung des gegebenen Kreises

$$1) \qquad x^2+(y-b)^2=r^2.$$

Bezeichnen wir ferner die Coordinaten des in der Axe der x liegenden Mittelpunkts des gesuchten Kreises durch p, 0 und seinen Halbmesser durch ϱ; so ist die Gleichung des gesuchten Kreises

$$2)\qquad (x-p)^2+y^2=\varrho^2.$$

Zuerst wird es nun darauf ankommen, die Coordinaten der beiden Durchschnittspunkte des gegebenen und des gesuchten Kreises zu bestimmen, welche man erhält, wenn man x, y aus den beiden Gleichungen

$$3)\qquad \begin{cases} x^2+(y-b)^2=r^2, \\ (x-p)^2+y^2=\varrho^2; \end{cases}$$

oder aus den beiden Gleichungen

$$4)\qquad \begin{cases} x^2+y^2-2by=r^2-b^2, \\ x^2+y^2-2px=\varrho^2-p^2 \end{cases}$$

mittelst gewöhnlicher algebraischer Elimination bestimmt. Zu dem Ende subtrahire man zuerst die zweite der beiden vorhergehenden Gleichungen von der ersten, so erhält man die Gleichung

$$5)\qquad 2px-2by=r^2-b^2-\varrho^2+p^2$$

oder

$$6)\qquad 2p(x-p)-2by=r^2-b^2-\varrho^2-p^2,$$

also

$$7)\qquad y=\frac{2p(x-p)-(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)}{2b}.$$

Führt man diesen Werth von y in die zweite der Gleichungen 3) ein, so wird dieselbe nach einer leichten Reduction

$$8)\qquad \begin{aligned} &4(b^2+p^2)(x-p)^2-4p(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)(x-p) \\ &=4b^2\varrho^2-(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)^2; \end{aligned}$$

oder, wie man durch Zerlegung der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in zwei Factoren auf bekannte Weise leicht findet,

$$9)\qquad \begin{aligned} &4(b^2+p^2)(x-p)^2-4p(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)(x-p) \\ &=\{r^2-p^2-(b-\varrho)^2\}\{p^2-r^2+(b+\varrho)^2\}; \end{aligned}$$

oder auch, wenn man das Product auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens gehörig entwickelt:

$$10)\qquad \begin{aligned} &4(b^2+p^2)(x-p)^2-4p(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)(x-p) \\ &=-(r^2-p^2)^2+2(r^2-p^2)(b^2+\varrho^2)-(b^2-\varrho^2)^2. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung 8) ergiebt sich:

$$(x-p)^2-\frac{p(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)}{b^2+p^2}(x-p)=\frac{4b^2\varrho^2-(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)^2}{4(b^2+p^2)},$$

also, wenn man diese Gleichung in Bezug auf $x-p$ als unbekannte Grösse wie eine gewöhnliche quadratische Gleichung auflöst:

$$\left\{x-p-\frac{p(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)}{2(b^2+p^2)}\right\}^2=\frac{b^2\{4\varrho^2(b^2+p^2)-(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)^2\}}{4(b^2+p^2)^2},$$

d. i.

$$\left\{x-p-\frac{p(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)}{2(b^2+p^2)}\right\}^2=\frac{b^2\{4\varrho^2(b^2+p^2)-[(r^2-\varrho^2)-(b^2+p^2)]^2\}}{4(b^2+p^2)^2}$$

also, wie man hieraus leicht findet:

$$\left\{x-p-\frac{p(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)}{2(b^2+p^2)}\right\}^2=\frac{b^2\{4r^2\varrho^2-(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2\}}{4(b^2+p^2)^2},$$

folglich

$$x-p=\frac{p(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)\pm b\sqrt{4r^2\varrho^2-(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2}}{2(b^2+p^2)}.$$

Führt man aber diesen Ausdruck von $x-p$ in den Ausdruck 7) von y ein, so erhält man nach leichter Rechnung

$$y=\frac{-b(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)\pm p\sqrt{4r^2\varrho^2-(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2}}{2(b^2+p^2)},$$

und für die Coordinaten x, y der Durchschnittspunkte der beiden Kreise hat man also die folgenden Formeln:

$$11)\quad \left\{\begin{aligned} x-p&=\frac{p(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)\pm b\sqrt{4r^2\varrho^2-(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2}}{2(b^2+p^2)},\\ y&=\frac{-b(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)\pm p\sqrt{4r^2\varrho^2-(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2}}{2(b^2+p^2)};\end{aligned}\right.$$

wo man auch noch bemerken kann, dass

$$12)\quad 4r^2\varrho^2-(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2=-\{b^2+p^2-(r-\varrho)^2\}\{b^2+p^2-(r+\varrho)^2\}$$

ist. Setzt man aber der Kürze wegen

$$13)\quad \left\{\begin{aligned} P&=\frac{r^2-b^2-\varrho^2-p^2}{2(b^2+p^2)},\\ Q&=\frac{\sqrt{4r^2\varrho^2-(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2}}{2(b^2+p^2)};\end{aligned}\right.$$

so ist

$$14) \quad \begin{cases} x-p = pP \pm bQ, \\ y = -bP \pm pQ; \end{cases}$$

wo natürlich die obern und untern Zeichen sich immer auf einander beziehen.

Bezeichnen wir nun aber den einen Durchschnittspunkt der beiden Kreise durch $(x'y')$, den andern durch $(x''y'')$, so ist

$$15) \quad \begin{cases} x'-p = pP + bQ, \\ y' = -bP + pQ; \end{cases}$$

und

$$16) \quad \begin{cases} x''-p = pP - bQ, \\ y'' = -bP - pQ; \end{cases}$$

oder

$$17) \quad \begin{cases} x' = p(1+P) + bQ, \\ y' = -bP + pQ; \end{cases}$$

und

$$18) \quad \begin{cases} x'' = p(1+P) - bQ, \\ y'' = -bP - pQ. \end{cases}$$

Die Gleichung der durch die Durchschnittspunkte der beiden Kreise der Lage nach bestimmten geraden Linie sei jetzt

$$y = Ax + B;$$

so haben wir, da in dieser geraden Linie nach den Bedingungen der Aufgabe auch der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, dessen Coordinaten nach dem Obigen 0, b sind, liegen soll, die Gleichungen

$$y' = Ax' + B,$$
$$y'' = Ax'' + B,$$
$$b = B;$$

also

$$y' = Ax' + b, \quad y'' = Ax'' + b;$$

der

$$y' - b = Ax', \quad y'' - b = Ax'';$$

folglich

$$\frac{y'-b}{x'} = \frac{y''-b}{x''},$$

und, wenn man in diese Gleichung die obigen Ausdrücke von x', y' und x'', y'' einführt:

$$19)\qquad \frac{b(1+P)-pQ}{p(1+P)+bQ}=\frac{b(1+P)+pQ}{p(1+P)-bQ},$$

welche Gleichung nach einigen leichten Reductionen sogleich zu der Gleichung

$$20)\qquad (b^2+p^2)(1+P)Q=0$$

führt, die also die Bedingungsgleichung ist, dass die beiden Durchschnittspunkte der beiden Kreise und der Mittelpunkt des gegebenen Kreises in einer und derselben geraden Linie liegen.

Diese Gleichung zerfällt in die drei Gleichungen:

$$21)\qquad b^2+p^2=0,\quad 1+P=0,\quad Q=0;$$

von denen aber die erste offenbar auf reelle Weise im Allgemeinen nicht zu erfüllen, und daher zu verwerfen ist, indem man zugleich übersieht, dass für $b^2+p^2=0$ die Ausdrücke 11) für die Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden Kreise unbestimmt werden würden. Daher behalten wir nur die beiden Gleichungen

$$22)\qquad 1+P=0,\quad Q=0;$$

welche nach 13) sogleich zu den beiden Gleichungen

$$23)\qquad \begin{cases} 2(b^2+p^2)+(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)=0, \\ 4r^2\varrho^2-(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2=0 \end{cases}$$

führen.

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des einen der beiden gegebenen Punkte durch α, β; so sind in Bezug auf das angenommene Coordinatensystem die Coordinaten des andern der beiden gegebenen Punkte offenbar durch α, $-\beta$ zu bezeichnen, und da nun der gesuchte Kreis durch die beiden gegebenen Punkte hindurch gehen soll, so erhalten wir nach 2) offenbar die Gleichung

$$24)\qquad (\alpha-p)^2+\beta^2=\varrho^2.$$

Verbinden wir nun mit dieser Gleichung die erste der beiden Gleichungen 23), nämlich die Gleichung

$$2(b^2+p^2)+(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)=0,$$

welche man sogleich auf die einfache Form

$$\varrho^2-p^2=b^2+r^2$$

bringt; so haben wir zur Bestimmung der beiden unbekannten Grössen p, ϱ die beiden Gleichungen

$$(\alpha-p)^2+\beta^2=\varrho^2,\quad \varrho^2-p^2=b^2+r^2;$$

d. i. die beiden Gleichungen

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha p=\varrho^2-p^2,\quad b^2+r^2=\varrho^2-p^2;$$

aus denen sich sogleich

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha p=b^2+r^2,$$

also

$$p=\frac{\alpha^2+\beta^2-b^2-r^2}{2\alpha}$$

ergiebt. Führt man diesen Werth von p in die Gleichung

$$\varrho^2=b^2+r^2+p^2$$

ein, so erhält man nach leichter Rechnung

$$\varrho=\pm\frac{\sqrt{4\alpha^2(b^2+r^2)+(\alpha^2+\beta^2-b^2-r^2)^2}}{2\alpha},$$

wo man das Vorzeichen stets so zu nehmen hat, dass ϱ positiv wird, wie es seiner Natur nach sein muss. Also haben wir zur Bestimmung von p und ϱ die beiden Ausdrücke:

25)
$$\begin{cases} p=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-b^2-r^2}{2\alpha}, \\ \varrho=\pm\dfrac{\sqrt{4\alpha^2(b^2+r^2)+(\alpha^2+\beta^2-b^2-r^2)^2}}{2\alpha}; \end{cases}$$

welche für p und ϱ offenbar stets reelle Werthe liefern; jedoch bildet der Fall $\alpha=0$ augenscheinlich einen Ausnahmefall. Wie das Vorzeichen in dem Ausdrucke von ϱ zu nehmen ist, ist schon vorher erwähnt worden. Uebrigens kann man ϱ auch auf folgende Art ausdrücken:

26)
$$\varrho=\pm\frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^2+(b^2+r^2)^2+2(\alpha^2-\beta^2)(b^2+r^2)}}{2\alpha}.$$

Verbinden wir ferner mit der Gleichung 24) die zweite der Gleichungen 23), so haben wir zur Bestimmung von p und ϱ die beiden Gleichungen

$$(\alpha-p)^2+\beta^2=\varrho^2,\quad 4r^2\varrho^2-(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2=0.$$

Aus der zweiten Gleichung ergiebt sich

$$(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2=4r^2\varrho^2,$$

also

$$b^2+p^2-r^2-\varrho^2=\pm 2r\varrho,$$

und folglich

$$b^2+p^2=(r\pm\varrho)^2.$$

Demnach haben wir jetzt die beiden Gleichungen

$$\alpha^2+\beta^2=\varrho^2-p^2+2\alpha p,$$
$$b^2-r^2=\varrho^2-p^2\pm 2r\varrho;$$

woraus durch Subtraction

$$\alpha^2+\beta^2-b^2+r^2=2\alpha p\mp 2r\varrho$$

oder

$$-\alpha^2+\beta^2-b^2+r^2=2\alpha(p-\alpha)\mp 2r\varrho,$$

folglich

27) $$\varrho=\pm\frac{2\alpha(p-\alpha)+(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)}{2r}$$

sich ergiebt. Also ist nach dem Obigen

$$(p-\alpha)^2+\beta^2=\frac{\{2\alpha(p-\alpha)+(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)\}^2}{4r^2},$$

woraus sich zur Bestimmung von $p-\alpha$ leicht die quadratische Gleichung

$$4(\alpha^2-r^2)(p-\alpha)^2+4\alpha(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)(p-\alpha)$$
$$=4\beta^2r^2-(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)^2,$$

oder die Gleichung

$$(p-\alpha)^2+\frac{\alpha(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)}{\alpha^2-r^2}(p-\alpha)=\frac{4\beta^2r^2-(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)^2}{4(\alpha^2-r^2)}$$

ergiebt. Löst man diese Gleichung auf, so erhält man

$$\left\{p-\alpha+\frac{\alpha(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)}{2(\alpha^2-r^2)}\right\}^2=\frac{4\beta^2r^2(\alpha^2-r^2)+r^2(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)^2}{4(\alpha^2-r^2)^2},$$

also

28) $$p-\alpha=\frac{-\alpha(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)\pm r\sqrt{4\beta^2(\alpha^2-r^2)+(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)^2}}{2(\alpha^2-r^2)},$$

oder, wie man leicht findet,

29)

$$p-\alpha=\frac{-\alpha(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)\pm r\sqrt{\{(\alpha^2-r^2)+(\beta-b)^2\}\{(\alpha^2-r^2)+(\beta+b)^2\}}}{2(\alpha^2-r^2)}.$$

Führt man diesen Ausdruck von $p-\alpha$ in die Formel 27) ein, so erhält man nach leichter Rechnung:

$$30)\quad \varrho=(\pm)\,\frac{-r(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)\pm\alpha\sqrt{4\beta^2(\alpha^2-r^2)+(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)^2}}{2(\alpha^2-r^2)}$$

oder

31)

$$\varrho=(\pm)\frac{-r(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)\pm\alpha\sqrt{\{(\alpha^2-r^2)+(\beta-b)^2\}\{(\alpha^2-r^2)+(\beta+b)^2\}}}{2(\alpha^2-r^2)},$$

wo das Vorzeichen in der Parenthese stets so zu nehmen ist, dass ϱ positiv wird, was es seiner Natur nach sein muss. Die Möglichkeit dieser Auflösung erfordert, dass die Grössen

$$(\alpha^2-r^2)+(\beta-b)^2 \text{ und } (\alpha^2-r^2)+(\beta+b)^2$$

gleiche Vorzeichen haben. Auch ist nach 28) und 29)

$$32)\quad p=\frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2-b^2-r^2)\pm r\sqrt{4\beta^2(\alpha^2-r^2)+(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)^2}}{2(\alpha^2-r^2)}$$

oder

33)

$$p=\frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2-b^2-r^2)\pm r\sqrt{\{(\alpha^2-r^2)+(\beta-b)^2\}\{(\alpha^2-r^2)+(\beta+b)^2\}}}{2(\alpha^2-r^2)}.$$

Der Fall $\alpha^2-r^2=0$, d. i. $\alpha=\pm r$, bildet einen Ausnahmefall.

Eine Construction unserer Aufgabe aus den vorhergehenden Formeln abzuleiten, überlasse ich den Lesern, indem dies jetzt nicht mein Zweck ist, und bemerke darüber in der Kürze nur Folgendes.

Zuvörderst erhellet auf der Stelle, dass es bloss darauf ankommt, p zu construiren, weil sich dann offenbar der gesuchte Kreis beschreiben lässt, da sein Mittelpunkt und zwei Punkte, durch welche er gehen soll, gegeben sind.

Der Ausdruck

$$p=\frac{\alpha^2+\beta^2-b^2-r^2}{2\alpha}$$

in 25) kann aber leicht construirt werden, indem man bloss

$$m^2=\alpha^2+\beta^2,\quad n^2=b^2+r^2$$

zu setzen, und die Grössen m und n mittelst des pythagoräischen Lehrsatzes zu construiren braucht. Dann ist

$$p=\frac{m^2-n^2}{2\alpha}=\frac{(m-n)(m+n)}{2\alpha},$$

also

$$2\alpha:m-n=m+n:p;$$

wo nun p mittelst der Aufgabe, zu drei gegebenen Linien die vierte Proportionallinie zu finden, leicht durch Construction erhalten werden kann.

Ferner wollen wir die beiden Werthe, welche der Ausdruck

$$p-\alpha=\frac{-\alpha(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)\pm r\sqrt{\{\alpha^2-r^2+(\beta-b)^2\}\{\alpha^2-r^2+(\beta+b)^2\}}}{2(\alpha^2-r^2)}$$

in 29) für p liefert, vorausgesetzt, dass diese Werthe reell sind, durch p' und p'' bezeichnen. Dann ist

$$p'-\alpha=\frac{-\alpha(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)+r\sqrt{\{\alpha^2-r^2+(\beta-b)^2\}\{\alpha^2-r^2+(\beta+b)^2\}}}{2(\alpha^2-r^2)},$$

$$p''-\alpha=\frac{-\alpha(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)-r\sqrt{\{\alpha^2-r^2+(\beta-b)^2\}\{\alpha^2-r^2+(\beta+b)^2\}}}{2(\alpha^2-r^2)};$$

also

$$(p'-\alpha)+(p''-\alpha)=-\alpha\,\frac{\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2}{\alpha^2-r^2},$$

$$(p'-\alpha)-(p''-\alpha)=r\,\frac{\sqrt{\{\alpha^2-r^2+(\beta-b)^2\}\{\alpha^2-r^2+(\beta+b)^2\}}}{\alpha^2-r^2};$$

d. i.

$$p'+p''=\alpha\,\frac{\alpha^2-r^2+\beta^2-b^2}{\alpha^2-r^2},$$

$$p'-p''=r\,\frac{\sqrt{\{\alpha^2-r^2+(\beta-b)^2\}\{\alpha^2-r^2+(\beta+b)^2\}}}{\alpha^2-r^2}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$p'+p''-\alpha=\alpha\,\frac{\beta^2-b^2}{\alpha^2-r^2}=\alpha\,\frac{(\beta-b)(\beta+b)}{(\alpha-r)(\alpha+r)}.$$

Setzt man nun

$$f=\alpha\frac{\beta-b}{\alpha-r},$$

i.

$$\alpha-r:\beta-b=\alpha:f,$$

ist

$$p'+p''-\alpha=f\frac{\beta+b}{\alpha+r},$$

lich

$$\alpha+r:\beta+b=f:p'+p''-\alpha,$$

man sieht, dass man $p'+p''-\alpha$ bloss mit Hülfe der Auf-
le, zu drei gegebenen geraden Linien die vierte Proportional-
le zu finden, construiren kann.

Die Grössen

$$\alpha^2-r^2+(\beta-b)^2 \quad\text{und}\quad \alpha^2-r^2+(\beta+b)^2$$

n man mit Hülfe des pythagoräischen Lehrsatzes leicht con-
iren. Setzen wir nun

$$\{\alpha^2-r^2+(\beta-b)^2\}\{\alpha^2-r^2+(\beta+b)^2\}=g^2h^2,$$

s verstattet ist, da das Product auf der linken Seite des Gleich-
itszeichens bekanntlich positiv sein muss, wenn die Auflösung
glich sein soll; so ist nach dem Obigen

$$p'-p''=r\frac{gh}{\alpha^2-r^2}=r\frac{gh}{(\alpha-r)(\alpha+r)}.$$

ird also

$$i=r\frac{g}{\alpha-r},$$

lich

$$\alpha-r:r=g:i$$

etzt, so ist

$$p'-p''=i\frac{h}{\alpha+r},$$

$$\alpha+r:h=i:p'-p'',$$

dass folglich auch $p'-p''$ ohne Schwierigkeit construirt wer-
kann.

Aus $p'+p''=\alpha$ und $p'-p''$ ergeben sich nun aber p' un
mittelst der Formeln:

$$p'=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}(p'+p''-\alpha)+\frac{1}{2}(p'-p''),$$

$$p''=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}(p'+p''-\alpha)-\frac{1}{2}(p'-p'')$$

und können also auch leicht durch Construction gefunden wei
so dass also jetzt die Aufgabe als aufgelöst zu betrachten i

Das Vorhergehende ist nur als Andeutung zur Auffin
einer zweckmässigen Auflösung unserer Aufgabe durch Cons
tion zu betrachten.

Uebrigens erhellet aus dem Obigen von selbst, dass e
Allgemeinen immer eine reelle Auflösung unserer Aufgabe g
aber auch drei solche Auflösungen geben kann.

Weitere Betrachtungen überlassen wir dem Leser, und
len nur noch bemerken, dass, wenn die beiden angegeb
Punkte in der Peripherie des gegebenen Kreises liegen, wo
nach dem Obigen

$$a^2+(\beta-b)^2=r^2$$

und offenbar $b=0$, folglich

$$a^2+\beta^2=r^2$$

ist, sowohl die Formeln 25) als auch die Formeln 33) und

$$p=0, \quad \varrho=r$$

liefern, welche Auflösung einem mit dem gegebenen Kreise
sammenfallenden Kreise entspricht, der in gewissem Sinne
als Auflösung unserer Aufgabe betrachtet werden kann.

XXX.

Theorie des Condensators.

Von

Herrn A. Weiss,

Lehrer der Mathematik, Physik und Chemie an der Königlichen Landwirthschaft- und Gewerbschule I. Klasse zu Fürth in Mittelfranken.

I. Zusammenstellung einiger nöthigen Sätze der Electricitätslehre.

1) Im Zustand des Gleichgewichts verbreitet sich die Electricität über die Oberflächen der Körper so, dass die Intensität einer Stelle von der Art und Grösse ihrer Krümmung abhängig ist. Hieraus folgt, dass im Allgemeinen die verschiedenen Stellen eines Körpers unzählig viele verschiedene Intensitäten auf der vollkommenen Kugelfläche jedoch dieselbe Intensität haben. Wenn wir nun doch in der Folge von Einer Intensität der an einem Körper haftenden Electricität sprechen, so verstehen wir darunter den Quotienten aus der Menge der am Körper haftenden Electricität dividirt durch die Oberfläche desselben. Es ist dieses gleichsam die mittlere Intensität, von der man sich dadurch einen Begriff machen kann, dass man sie sich auf eine Kugel von gleicher Fläche gebracht denkt.

2) Sobald sich irgend zwei Körper berühren, ändern sich die electrischen Zustände derselben. Hat der eine Körper die Fläche o_1 und die mittlere Intensität a_1, und der andere die Fläche o_2 und die mittlere Intensität a_2, und bezeichnet man die mittlere Intensität des ersten Körpers nach der Berührung durch x_1, die des zweiten durch x_2, so wird man immer setzen können:

$$x_1 = cx_2 \qquad (1).$$

Da die Gesammtmenge der Electricität durch die Berührung nicht geändert wird, so gilt ferner noch die Gleichung:

$$x_1 o_1 + x_2 o_2 = a_1 o_1 + a_2 o_2.$$

In letztere Gleichung den Werth von x_2 aus (1) gesetzt gibt

$$x_1 o_1 + c x_1 o_2 = a_1 o_1 + a_2 o_2;$$

hieraus folgt aber

$$x_1 = \frac{a_1 o_1 + a_2 o_2}{o_1 + c o_2}, \quad x_2 = c \frac{a_1 o_1 + a_2 o_2}{o_1 + c o_2}.$$

Die Zahl c ist $= \frac{x_2}{x_1}$ und drückt also das Verhältniss der mittleren Intensitäten derjenigen Electricitätsmengen aus, die sich in den beiden Körpern das Gleichgewicht halten; wir wollen sie in der Folge den Gleichgewichts-Coefficienten nennen. Gewöhnlich wird dieser vernachlässigt, oder $=1$ angenommen. Wann diess jedoch richtig ist, oder welchen Werth die Coefficienten in jedem speciellen Fall haben, muss zuvor auf anderm Wege entschieden worden sein. Im Allgemeinen hängt dieser Werth von der Gestalt der zwei Körper ab, welche mit einander in Verbindung stehen. Zu seiner Bestimmung müssen dieselben Mittel, wie zu der Bestimmung der mittleren Intensität bei einem einzigen Körper in Bewegung gesetzt werden.

3) Ist eine der beiden Oberflächen z. B. $o_1 = \infty$ und dessen Intensität $= a_1$, so ist, wie aus 2) hervorgeht,

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = c a_1;$$

d. h. die Intensität des unendlich grossen Körpers wird nicht geändert.

4) Hat einer der beiden Körper die Eigenschaft stets dieselbe Intensität a_1 beharrlich in sich zu erhalten, z. B. der erste, so ist $x_1 = a_1$ und $x_2 = c a_1$. Ein solcher Körper kann sonach in betrachteter Beziehung wie ein Körper von unendlich grosser Fläche angesehen werden. Wir sagen von einem solchen Körper er besitze constante Intensität.

5) Wenn man einen isolirten Leiter, gleichviel ob im electrisirten oder neutralen Zustande in die Nähe eines electrischen Körpers bringt, so, dass eine nicht leitende Schicht zwischen beiden liegt, so trennen sich in dem genäherten Leiter bestimmte Mengen von bisher neutralisirten Electricitäten und es begibt sich die der Quelle entgegengesetzte nach dem ihr zugewendeten und die mit der Quelle gleiche zu dem von ihr abgewendeten Theil; letztere ist frei, erstere hat kein Streben ihren Ort zu verlassen und heisst deshalb gebundene Electricität. Gleichzeitig wird aber auch ein gewisser Theil von der in der Quelle befindlichen freien Electricität ebenfalls gebunden.

6) Berührt ein dritter Körper einen von den zweien, welche vertheilend auf einander einwirken, so wird das nach 2) erhaltene die freien Electricitäten in den beiden sich berührenden Körpern angehende Resultat nicht geändert, indem nämlich die gebundenen Electricitäten so aufgefasst werden, dass die freien für sich im Gleichgewicht sind. Man kann nämlich die gebundene Electricität eines Körpers immer in dem Sinne nehmen, dass es die sei, deren Wirkung auf die übrige in demselben

Körper enthaltene und mit dem Namen der freien bezeichnete Electricität durch die Influenz des andern bindenden Körpers ganz und gar aufgehoben wird. Dann muss offenbar die freie Electricität im ersten Körper für sich und also ganz so im Gleichgewicht sein, als ob in diesem Körper keine gebundene Electricität vorhanden wäre. Die Rechtmässigkeit dieser Vorstellungsweise kann wenigstens da keinem Zweifel unterliegen, wo wie bei den Condensatorwirkungen die freie Electricität immer nur gleichsam ein verschwindend kleiner Theil der Gesammtelectricität ist.

7) Sind die zwei Körper, in welchen eine gegenseitige Bindung statt findet, ebene Platten von congruenten Grundflächen, und so gegeneinander gestellt, dass erstens die Grundflächen parallel sind, zweitens deren entsprechende Punkte sich jedesmal in einer auf ihnen senkrechten Geraden befinden, so hängt die Menge der gebundenen Electricitäten in jedem erstens von der Gestalt des andern Körpers und der in ihm enthaltenen Electricität, zweitens von der Dicke der nicht leitenden Schicht ab; bleibt die Gestalt der Körper und die Dicke der sie von einander trennenden Schicht constant, so ist die Menge der gebundenen Electricität in der einen Platte der Erfahrung zu Folge $= nap$, wenn ap die Menge der in der andern Platte befindlichen Electricität, p die Plattenfläche selbst bedeutet; da die gebundene Electricität die der bindenden entgegengesezte Qualität hat, so kann, wenn unter ap die Menge und Qualität der bindenden Electricität begriffen wird, mit $-nap$ die Menge und Qualität der gebundenen bezeichnet werden. Die Zahl n heisst Bindungsvermögen, sie ist stets ein positiver eigentlicher Bruch, welcher der Zahl 1 um so näher kömmt, je dünner die nicht leitende Schicht ist.

8) Ein Instrument, das aus zwei leitenden congruenten Platten besteht, deren Grundflächen möglichst eben und durch eine sehr dünne nicht leitende Schicht getrennt sind, und noch die Einrichtung besitzen, dass man sie isolirt trennen kann, heisst Condensator (Verdichter) und dient zur Nachweisung von Electricitäten, welche geringe Intensitäten besitzen. Ueber die Wirkung wird im Allgemeinen Folgendes bemerkt: Wenn man mit den Platten die Electricitätsquellen in Verbindung setzt, so wird die Platte Electricität aufnehmen und zwar so lange, bis die freie Electricität derselben der noch übrigen freien Electricität der Quelle das Gleichgewicht hält. Die in der Platte befindliche Electricität besteht aus einer gewissen Menge freier und einer gewissen Menge gebundener Electricität; werden später die Platten getrennt, so wird die vorher gebundene Electricität auch frei und es äussert sich nun alle in die Platte gegangene Electricität, welche bei einer wahrhaft condensatorischen Wirkung immer viel grösser ist, als die Electricität, die sich in ihnen angesammelt hätte, wenn dieselben bei sonst gleichen Umständen getrennt gewesen wären.

II. Nähere Betrachtung der Condensatorwirkung.

1) Ist die Oberfläche einer jeden von den beiden Platten eines Condensators $= p$, das zwischen den Platten herrschende Bindungsvermögen $= n$, und wird mit der einen Platte ein Körper von der Oberfläche o und der electrischen Intensität a, mit

der andern Platte ein Körper von der Oberfläche ω und der trischen Intensität α in Verbindung gebracht, so werden, dem der Condensator seine Wirkung vollendet hat, wenn u v die mittlern Intensitäten der in die eine und andere Co satorplatte gekommenen Gesammtelectricitäten bedeuten, up vp die Gesammtmengen der in diesen Platten enthaltenen tricitäten vorstellen. Bezeichnen b und β die mittleren Inte ten der nach dem Uebergange in den Oberflächen o u noch zurückgebliebenen Electricitäten, so geben ob und ω Mengen dieser Electricitäten zu erkennen, sowie nach I. 6) und $\beta\gamma p$ die in den beiden Condensatorplatten vorhandenen Electricitätsmengen, wenn c und γ die in I. 2) besproch Gleichgewichtscoefficienten zwischen der ersten oder zweiten densatorplatte und der Oberfläche o oder ω bezeichnen. In nächsten Paragraphen wird angegeben werden, wie sich die sen u und v, b und β bestimmen lassen.

2) Wenn, wie angenommen, in der einen Platte die sammtmenge up, in der andern die Gesammtmenge vp ist, ist nach I. 7) in der ersteren von der Menge up die M $-nvp$ und in der zweiten von der Menge vp die Menge gebunden, folglich ist in der einen nur noch die Menge (—nvp) frei und in der andern $vp-(-nup)$. Die freie El cität in der einen ist aber bcp, in der andern $\beta\gamma p$, folglich ben wir die Gleichungen:

$$up+nvp=bcp,$$
$$vp+nup=\beta\gamma p;$$

hieraus folgt

$$u=\frac{bc-n\beta\gamma}{1-n^2},\quad v=\frac{\beta\gamma-nbc}{1-n^2}.$$

3) Durch das Berühren der Platten mit den Körpern, durch das Nähern oder Trennen wird offenbar nichts an der M der auf ihnen und der auf den mit ihnen in Berührung steh Körpern sitzenden Electricität geändert. Die Gesammtmeng in Betracht kommenden Electricität war aber, da sich vor Berührung der Körper mit den Platten in letztern keine tät befand, in dem einen Theil ao, in dem andern $\alpha\omega$. Die nach der Berührung ist im ersten Theil $up+bo$ im ander $+\beta\omega$, also haben wir:

$$up+ob=ao,$$
$$vp+\omega\beta=\alpha\omega;$$

oder für u und v aus der vorigen Nummer ihre Werthe gesezt,

$$bcp-n\beta\gamma p+bo(1-n^2)=ao(1-n^2),$$
$$\beta\gamma p-nbcp+\beta\omega(1-n^2)=\alpha\omega(1-n^2).$$

Hieraus erhalten wir für b und β nachstehende Werthe:

$$b=\frac{ao(\gamma p+\omega(1-n^2))+n\alpha\gamma\omega p}{o\omega(1-n^2)+p(o\gamma+\omega c)+p^2c\gamma},\ \beta=\frac{n\alpha\omega(cp+o(1-n^2))+nacop}{o\omega(1-n^2)+p(o\gamma+\omega c)+p^2c\gamma}.$$

4) Setzt man diese Werthe in die für u und v in 2) enthaltene Gleichung, so haben wir:

$$u=\frac{aco(\gamma p+\omega)-n\alpha\gamma o\omega}{o\omega(1-n^2)+p(o\gamma+\omega c)+p^2c\gamma},\ v=\frac{\alpha\omega\gamma(cp+o)-naco\omega}{o\omega(1-n^2)+p(o\gamma+\omega c)+p^2c\gamma}$$

5) Aus den allgemeinen Formeln in 3) und 4) wollen wir nun einige specielle Fälle aufsuchen.

a) An der zweiten Platte sei kein Leiter.
Hier ist: $\alpha=\omega=0$.

$$b=\frac{ao}{o+cp},\quad \beta=\frac{naco}{\gamma(o+cp)};$$

$$u=\frac{aoc}{o+cp},\quad v=0.$$

Vorstehende Resultate lassen sich leicht aus I. 2) herleiten. Diese Formeln haben aber hier Gültigkeit, da nach I. 6) die gebundenen Electricitäten keinen Einfluss auf die Vertheilung der freien haben. Setzt man aber in I. 2) die unserm Falle entsprechenden Daten, als:

$$o_1=o,\ a_1=a,\ c=c;$$
$$o_2=p,\ a_2=0;$$

dann ist $x_1=b=\frac{ao}{o+cp}$ = freie Electricität des mit der einen Platte in Verbindung stehenden Körpers, und $x_2=cb=\frac{aoc}{o+cp}$ $=u=$ Ladung dieser Platte. Durch x_2 wird aber in der zweiten Platte $-nx_2=-\frac{naoc}{o+cp}$ gebunden, folglich bleibt, so lange die Platten nicht getrennt werden, $+\frac{naoc}{o+cp}=\beta\gamma$ frei, und hieraus $\beta=\frac{naoc}{(o+cp)\gamma}$, wie auch oben.

b) An der zweiten Platte ist ein Leiter von der Fläche ω und der Intensität 0, also $\omega=\omega$, $\alpha=0$;

$$b=\frac{ao(\gamma p+\omega(1-n^2))}{o\omega(1-n^2)+p(\gamma o+c\omega)+p^2c\gamma},\beta=\frac{nacop}{o\omega(1-n^2)+p(\gamma o+c\omega)+p^2c\gamma};$$

$$u=\frac{aoc(\gamma p+\omega)}{o\omega(1-n^2)+p(\gamma o+c\omega)+p^2c\gamma},v=\frac{-naco\omega}{o\omega(1-n^2)+p(\gamma o+c\omega)+p^2c\gamma};$$

c) Mit der zweiten Platte steht eine Quelle von constanter Intensität α in Verbindung; also $a=\alpha$, $\omega=\infty$;

$$b=\frac{oa(1-n^2)+n\alpha p\gamma}{o(1-n^2)+pc}, \quad \beta=\frac{\alpha(cp+o(1-n^2))}{o(1-n^2)+pc};$$

$$u=\frac{aoc-n\alpha o\gamma}{o(1-n^2)+pc}, \quad v=\frac{\alpha\gamma(cp+o)-naoc}{o(1-n^2)+pc}.$$

d) Mit der zweiten Platte steht eine Quelle von constanter Intensität $\alpha=0$ in Verbindung. $\alpha=0$, $\omega=\infty$; das wäre, wenn die zweite Platte mit der Erde in leitender Verbindung steht.

$$b=\frac{ao(1-n^2)}{o(1-n^2)+pc}, \quad \beta=0;$$

$$u=\frac{aoc}{o(1-n^2)+pc}, \quad v=\frac{-uonc}{o(1-n^2)+pc}.$$

e) Mit beiden Platten stehen Electricitätsquellen von constanter Intensität in Verbindung; $a=a$, $\alpha=\alpha$, $o=\omega=\infty$;

$$b=a, \quad \beta=\alpha;$$

$$u=\frac{ac-n\alpha\gamma}{1-n^2}, \quad v=\frac{\alpha\gamma-nac}{1-n^2}.$$

f) Die eine der constanten Intensität $\alpha=0$, also die eine Platte mit der Erde verbunden.

$$b=a, \quad \beta=0;$$

$$u=\frac{ac}{1-n^2}, \quad v=-\frac{nac}{1-n^2}.$$

6) Sehr leicht ist es sich auf andern Wegen von der Richtigkeit der Formeln zu überzeugen, wie es z. B. bei denen vom Falle a) geschah. Die Formeln e) und f) sind die in den Lehrbüchern allein aufgestellten. Wir bemerken schliesslich noch, dass pcb und $p\gamma\beta$ die in den Platten während ihres Beisammenseins vorhandenen freien Electricitätsmengen sind.

7) Wir wollen nun zur Berechnung von dem Falle übergehen, wo ein Condensator schon die Ladungen u und v hat und nach Entfernung der diese Ladungen bewirkenden Quellen neue Quellen mit den Platten verbunden werden.

Es sind die neuen Ladungen u' und v'. Die neuen Quellen haben die Flächen o' und ω' mit den Intensitäten a' und α'; ferner seien c' und γ' die Gleichgewichtscoefficienten, p und n und b' und β' haben mit dem Vorigen gleiche und ähnliche Bedeutung

Nach demselben Räsonnement, wie im II. 3) findet man:

$$u' = \frac{b'c' - n\beta'\gamma'}{1-n^2}, \quad v' = \frac{\beta'\gamma' - nb'c'}{1-n^2}.$$

Um b' und β' zu bestimmen, machen wir eine ähnliche Betrachtung wie in II. 3).

Es ist nämlich die jetzt in der einen Platte befindliche Electricitätsmenge $u'b$, und die noch im Körper vorhandene $o'b'$ offenbar so gross, als die vorher in der Platte und im Körper gewesene, also

$$u'p + o'b' = up + o'a', \text{ ebenso}$$

$$v'p + \omega'\beta' = vp + \omega'\alpha'.$$

Hieraus findet man aber:

$$b' = \frac{(\alpha'o' + up)(\gamma'p + \omega'(1-n^2)) + (\alpha'\omega' + vp)(np\gamma')}{o'\omega'(1-n^2) + p(o'\gamma' + \omega'c') + p^2c'\gamma'};$$

$$\beta' = \frac{(\alpha'\omega' + vp)(c'p + o'(1-n^2)) + (\alpha'o' + up)(npc')}{o'\omega'(1-n^2) + p(o'\gamma' + \omega'c') + p^2c'\gamma'};$$

und ferner:

$$u' = \frac{c'(\alpha'o' + up)(\gamma'p + \omega') - n(\alpha'\omega' - vp)\gamma'o'}{o'\omega'(1-n^2) + p(o'\gamma' + \omega'c') + p^2c'\gamma'},$$

$$v' = \frac{\gamma'(\alpha'\omega' + vp)(c'p + o') - n(\alpha'o' + up)c'\omega'}{o'\omega'(1-n^2) + p(o'\gamma' + \omega'c') + p^2c'\gamma'}.$$

8) Es ist leicht einzusehen, dass, wenn nun noch weitere Ladungen bewerkstelligt würden, die betreffenden Grössen auf gleiche Weise durch diese Recursions-Formeln gefunden würden.

So weitläufig diese Formeln ihrer grossen Allgemeinheit wegen auch erscheinen, so einfach werden sie in den meisten speciellen Fällen. Im folgenden Paragraphen wollen wir, als Beleg hiefür, die Wirkung des sogenannten doppelten Condensators von Cuthbertson, dessen nähere Einrichtung in Gilberts Annalen XIII. oder Gehlers physikalischem Wörterbuch II. beschrieben ist, berechnen.

10) Im Wesentlichen ist die Einrichtung folgende: Zwei Condensatoren mit den Plattenflächen p_1 und p_2 und den Bindungsvermögen n_1 und n_2 werden durch ihre einen Platten mit einer Quelle von der constanten Intensität a, durch ihre andern Platten mit der Erde verbunden. Die hieher gehörigen Gleichgewichts-Coefficienten sind c_1' und c_2'. Die zwei Condensatoren erhalten dadurch die Ladungen:

der erste: der zweite:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{c_1 a}{1-n_1^2}, \\ v_1 = \dfrac{-n_1 c_1 a}{1-n_1^2}. \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = \dfrac{c_2 a}{1-n_2^2}, \\ v_2 = \dfrac{-n_2 c_2 a}{1-n_2^2}. \end{cases}$$

Nun trennt man die Platten des ersten Condensators u bringt die eine von ihnen, welche die Ladung u_1 besitzt, mit Platte des zweiten, welche u_2 als Ladung hat, in Berühru während die andere Platte des zweiten Condensators mit der E verbunden bleibt. Der zweite Condensator erhält hiedurch Ladungen u'_2 und v'_2; c'_2 sei der zur Verbindung der zwei Pl ten gehörige Gleichgewichtscoefficient.

Die Werthe b'_2, β'_2, u'_2, v'_2 findet man aus den Formeln 7), wenn man dort die dem jetzigen Falle angemessenen Substi tionen macht, nämlich:

$$o'=p_1,\ a=u,\ c'=c'_2,\ u=u_2,\ p=p_2,\ n=n_2,\ \alpha'=0,\ \omega'=$$

$$b'_2=\frac{(u_1p_1+u_2p_2)(1-n_2^2)}{p_1(1-n_2^2)+p_2c'_2},\quad \beta'_2=0;$$

$$u'_2=\frac{c'_2(u_1p_1+u_2p_2)}{p_1(1-n_2^2)+p_2c'_2},\quad v'_2=\frac{-n_2c'_2(u_1p_1+u_2p_2)}{p_1(1-n_2^2)+p_2c'_2}.$$

11) In **Gehlers** physikalischem Wörterbuche steht ei Formel für den Fall, dass die Platten des ersten Condensators m m grösser sind, als die des zweiten; ferner, dass die Bindungsw mögen einander gleich, und die Gleichgewichts-Coefficienten vernachlässigen sind. Wir setzen also:

$$p_1=mp, p_2=p,\ c_1=c_2=c'_2=1,\ n_1=n_2=n.$$

Dann ist:

$$u_1=u_2=\frac{a}{1-n^2},\quad v_1=v_2=\frac{-na}{1-n^2};$$

$$u'_2=\frac{(m+1)u_1p}{(m(1-n^2)+1)p}=\frac{(m+1)a}{(1+m(1-n^2))(1-n^2)}.$$

In dem **Gehlerschen** Wörterbuche steht für u'_2 der Wert

$$\frac{ma}{(1-n^2)(2-n^2)}.$$

So lange m nicht gar gross wird, weichen die zwei Werth da $1-n^2$ gewöhnlich sehr klein ist, wenig von einander ab. S bald aber m gross wird, gehen sie aus einander. Nach unser Formel ist z. B. für $m=\infty$, u_2' ein Maximum $=\frac{a}{(1-n^2)^2}$, wä rend nach der andern Formel u'_2 durch ein in's Unbestimmte fortgehendes Steigen von m selbst über alle Gränzen steigt, welchem Resultate aber schon die Erfahrung widerspricht.

12) Die Formeln des §. 10. lassen sich leicht für den Fall, dass mehrere Condensatoren hinter einander in Wirksamkeit treten, ausdehnen. Es sind z. B. r Condensatoren gegeben;

$$n_1\ n_2\ n_3 \ldots . n_r,\quad p_1\ p_2\ p_3 \ldots . p_r,\quad c_1\ c_2\ c_3 \ldots . c_r,$$
$$c'_2\ c'_3\ c'_4 \ldots . c'_r$$

haben analoge Bedeutung mit den im §. 10. gebrauchten gleichen Buchstaben.

Die Condensatoren werden durch ihre einen Platten mit einer Quelle von constanter Intensität a, durch ihre anderen Platten mit der Erde in Verbindung gesetzt.

Dadurch laden sie sich und es ist:

Ladung des 1sten Condensators, des 2ten, u. s. f. des $r$ten.

$$u_1 = \frac{c_1 a}{1-n_1^2},\qquad u_2 = \frac{c_2 a}{1-n_2^2}, \ldots . \qquad u_r = \frac{c_r a}{1-n_r^2};$$

$$v_1 = \frac{-n c_1 a}{1-n_1^2};\qquad v_2 = \frac{n_2 c_2 a}{1-n_2^2}; \ldots . \qquad v_r = \frac{-n_r c_r a}{1-n_r^2}.$$

Nun trennt man die Platten des ersten Condensators, die mit der Ladung u_1 wird mit der Platte des zweiten Condensators, welche die Ladung u_2 besitzt, verbunden, wodurch diese Platte die Ladung u'_2 erhält. Hierauf wird auch der zweite Condensator getrennt, die Platte mit der Ladung u'_2 wird in Verbindung gesetzt mit der Platte des dritten Condensators, welcher die Ladung u_3 hat, wodurch leztere sich mit u'_3 ladet. So fährt man fort, bis man zuletzt zum $r$ten Condensator gelangt, dessen eine Platte dann die Ladung u'_r hat. Die Werthe u'_2, u'_3 und u'_r werden ganz sowie u'_2 in §. 10. gesucht und man findet u_1 und u'_2 wie dort; ferner

$$u'_3 = \frac{c'_3(u'_2 p_2 + u_3 p_3)}{p_2(1-n_3^2 + c'_3 p_3)},$$

u. s. f.; endlich

$$u'_r = \frac{c'_r(u'_{r-1} p_{r-1} + u_r p_r)}{p_{r-1}(1-n_r^2) + c'_r p_r}.$$

13) Sind die Bindungsvermögen aller Condensatoren $= n$ und die Gleichgewichts-Coefficienten $= 1$, haben ferner die Plattenflächen folgende Werthe:

$$p_1 = m^{r-1} p,$$
$$p_2 = m^{r-2} p,$$

$$p_3 = m^{r-3} p,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$p_r = p;$$

d. h. hat der folgende Condensator immer m mal kleinere Plattenflächen, als der vorhergehende, so ist:

$$u_1 = \frac{a}{1-n^2},$$

$$u'_2 = \frac{a(m+1)}{(1-n^2)(m(1-n^2)+1)},$$

$$u'_3 = \frac{a(m(m+1)+1+m(1-n^2))}{(1-n^2)(1+m(1-n^2))^2},$$

$$u'_4 = \frac{a(m(m(m+1)+(1+m(1-n^2)))+(1+m(1-n^2))^2)}{(1-n^2)(1+m(1-n^2))^3}$$

$$= a\frac{m^2(m+1)+m(1+m(1-n^2))+(1+m(1-n^2))^2}{(1-n^2)(1+m(1-n^2))^3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u'_r = a\frac{(m^{r-2}(m+1)+m^{r-3}(1+m(1-n^2))+m^{r-4}(1+m(1-n^2))^2+\dots(1+m(1-n^2))^{r-2}}{(1-n^2)(1+m(1-n^2))^{r-1}}$$

Wäre das n beinahe 1, so hätte man

$$u'_r = \frac{a(m^{r-1}+m^{r-2}+m^{r-3}\dots\dots+1)}{1-n^2} = \frac{a(m^r-1)}{(1-n^2)(m-1)}$$

als Ladung für den **kleinsten** und **letzten** Condensator.

III. Wirkung bei mehreren gleichzeitig in Thätigkeit gesetzten Condensatoren.

1) Ein Körper von der Oberfläche o und der Intensität a wird mit den einen Platten von r Condensatoren verbunden und ein zweiter Körper von der Oberfläche ω und der Intensität α mit den andern.

Die Oberflächen der Condensatorplatten sind:

$$p_1\ p_2\ p_3 \dots\dots p_r.$$

Die Bindungsvermögen:

$$n_1\ n_2\ n_3 \dots\dots n_r.$$

Die Gleichgewichtscoefficienten:

$$c_1\ \gamma_1\quad c_2\ \gamma_2\quad c_3\ \gamma_3 \dots\dots c_r\ \gamma_r.$$

In die Platten wird so lange Electricität gehen, bis die in jeder befindlichen freie Electricität und die noch übrige in den Körpern sich gegenseitig im Gleichgewicht halten. Haben die Körper am Ende noch die freien Electricitäten b und β, so sind:

$$\begin{cases} c_1\ b \\ \gamma_1\ \beta \end{cases} \quad \begin{cases} c_2\ b \\ \gamma_2\ \beta \end{cases} \quad \begin{cases} c_3\ b \\ \gamma_3\ \beta \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} c_r\ b \\ \gamma_r\ \beta \end{cases}$$

die freien Electricitäten in den Platten.

2) Sehr leicht ist es nun, die Richtigkeit nachstehender Gleichungen einzusehen:

$$u_r p_r + n_r v_r p_r = c_r b p_r,$$
$$v_r p_r + n_r u_r p_r = \gamma_r \beta p_r;$$

wo u_r und v_r die Ladungen der Platte des $r$ten Condensators bedeuten. Hieraus bestimmen sich u_r und v_r:

$$u_r = \frac{c_r b - n_r \gamma_r \beta}{1 - n_r^2}, \quad v_r = \frac{\gamma_r \beta - n_r c_r b}{1 - n_r^2}.$$

3) Eben so leicht springt die Richtigkeit folgender Gleichungen in die Augen:

$$S(u_r p_r) + bo = ao,$$
$$S(v_r p_r) + \beta\omega = \alpha\omega;$$

woraus mit Bezugnahme auf III. 2):

$$b = \frac{a o \left\{ S\left(\frac{p_r \gamma_r}{1-n_r^2}\right) + \varpi \right\} + \alpha \varpi \left\{ \left(\frac{n_r \gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right) \right\}}{o\varpi + \varpi S\left(\frac{c_r p_r}{1-n_r^2}\right) + o S\left(\frac{\gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right) + \left\{ S\left(\frac{c_r p_r}{1-n_r^2}\right) \right\} \left\{ S\left(\frac{\gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right) \right\} - \left\{ S\left(\frac{n_r c_r p_r}{1-n_r^2}\right) \right\} \left\{ S\left(\frac{n_r \gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right) \right\}},$$

$$\beta = \frac{\alpha \varpi \left\{ S\left(\frac{p_r c_r}{1-n_r^2}\right) + o \right\} + a o \left\{ S\left(\frac{n_r c_r p_r}{1-n_r^2}\right) \right\}}{o\varpi + \varpi S\left(\frac{c_r p_r}{1-n_r^2}\right) + o S\left(\frac{\gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right) + \left\{ S\left(\frac{c_r p_r}{1-n_r^2}\right) \right\} \left\{ S\left(\frac{\gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right) \right\} - \left\{ S\left(\frac{n_r c_r p_r}{1-n_r^2}\right) \right\} \left\{ S\left(\frac{n_r \gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right) \right\}}$$

4) Wenn man diese Werthe in die Gleichungen des §. 2. setzt, so ist u_r und v_r bestimmt.

5) Schliesslich wollen wir noch den Fall in Betracht ziehen, wo die r Condensatoren schon Ladungen besitzen und nun mit zwei neuen Quellen, wie vorhin, in Verbindung gesetzt werden.

Es sind:

$$\left.\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & \ldots\ldots\ldots\ldots & u_r \\ v_1 & v_2 & v_3 & \ldots\ldots\ldots\ldots & v_r \end{matrix}\right\}$$

die alten Ladungen;

$$c'_1\ \gamma'_1\quad c'_2\ \gamma'_2 \ldots\ldots\ldots\ldots c'_r\ \gamma'_r$$

die Gleichgewichtscoefficienten;

o' und ω' sind die Flächen, a' und α' die Intensitäten der neuen Quellen;

$$\left.\begin{matrix} u'_1 & u'_2 & u'_3 & \ldots\ldots\ldots\ldots & u'_r \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 & \ldots\ldots\ldots\ldots & v'_r \end{matrix}\right\}$$

sind die neuen Ladungen;

b' und β' die freien Electricitäten der Quellen nach den neuen Ladungen.

6) Nun ist ganz wie früher

$$u'_r p_r + n_r v'_r p_r = b' c'_r p_r,$$
$$v_r p_r + n_r u'_r p_r = \beta' \gamma'_r p_r;$$

hieraus:

$$u'_r = \frac{c'_r b' - n_r \beta' \gamma'_r}{1 - n_r^2}, \quad v'_r = \frac{\gamma'_r \beta' - n_r b' c'_r}{1 - n_r^2}.$$

7) Ebenso ist dem frühern analog:

$$S(u'_r p_r) + o' b' = o' a' + S(u_r p_r),$$
$$S(v'_r p_r) + \omega' \beta' = \omega' \alpha' + S(v_r p_r);$$

hieraus folgt:

$$b' = \frac{\left\{S(u_r p_r) + a' \alpha'\right\}\left\{S\left(\frac{\gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right) + \omega'\right\} + \left\{S(v_r p_r) + \alpha' \omega'\right\}\left\{S\left(\frac{n_r \gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right)\right\}}{\left\{S\left(\frac{c_r p_r}{1-n_r^2}\right) + o'\right\}\left\{S\left(\frac{\gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right) + \omega'\right\} - \left\{S\left(\frac{n_r \gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right)\right\}\left\{S\left(\frac{n_r c_r p_r}{1-n_r^2}\right)\right\}},$$

$$\beta' = \frac{\left\{S(v_r p_r) + \alpha' \omega'\right\}\left\{S\left(\frac{c'_r p_r}{1-n_r^2}\right) + o'\right\} + \left\{S(u_r p_r) + a' o'\right\}\left\{S\left(\frac{n_r c'_r p_r}{1-n_r^2}\right)\right\}}{\left\{S\left(\frac{c'_r p_r}{1-n_r^2}\right) + o'\right\}\left\{S\left(\frac{\gamma'_r p_r}{1-n_r^2}\right) + \omega'\right\} - \left\{S\left(\frac{n_r \gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right)\right\}\left\{S\left(\frac{n_r c' p_r}{1-n_r^2}\right)\right\}}.$$

Diese Werthe in die Gleichungen für u' und v' gesetzt, geben diese in lauter bekannten Grössen ausgedrückt.

8) Wir wollen nun noch ein Beispiel für die letzten Formeln machen. Es seien r Condensatoren durch die einen Platten mit einer constanten Quelle a in Verbindung, durch die andern Platten aber mit der Erde. Ferner wollen wir alle Gleichgewichtscoefficienten $=1$ setzen. Ebenso alle Bindungsvermögen $=n$. Der Annahme nach ist $o=\omega=\infty$, $a=a$, $\alpha=0$;

$$\text{somit } b=a,$$
$$\beta=0.$$

Nun ist:

$$u=\frac{a}{1-n^2}=u_1=u_2=\ldots\ldots\ldots u_r,$$

$$v=-\frac{na}{1-n^2}=v_1=v_2=\ldots\ldots v_r;$$

aus den Formeln 1) und 2) dieses Abschnitts.

Wir entfernen nun die Quelle und den $r$ten Condensator, trennen die Platten des letztern und setzen die Ladung u mit den Platten, welche dieselbe Ladung schon besitzen, als neue Quelle in Verbindung. Um nun die neuen Ladungen zu erhalten, setzen wir in den Formeln 6) und 7):

$$r=r-1,\ n_1=n_2=\ldots\ldots n_{r-1}=n,\ \text{ alle } c \text{ und } \gamma=1,\ o'=p_r,$$
$$a'=u,\ \omega=\infty,\ \alpha=0.$$

Dann ist aus 7):

$$b'=\frac{up_r+S(u_{r-1}p_{r-1})}{\frac{1}{1-n^2}S(p_{r-1})+p_r}=\frac{uS(p_r)}{\frac{1}{1-n^2}S(p_{r-1})+p_r},\ \beta'=0;$$

$$u'=\frac{uS(p_r)}{S(p_{r-1})+p_r(1-n^2)};$$

oder für u seinen Werth gesetzt, gibt endlich:

$$u'=\frac{aS(p_r)}{(1-n^2)\{S(p_{r-1})+p_r(1-n^2)\}}.$$

Hier ist wohl zu bemerken, dass u' die Ladung in den einen Platten aller nun noch in Wirksamkeit stehenden Condensatoren ist; da einer getrennt wurde, so sind ihrer nur noch $r-1$.

Wir entfernen nun den $(r-1)$ten Condensator und besti so wie vorhin, die Ladung des $r$ten, nun die Ladung di d. h. wir trennen die Platten des eben entfernten $(r-1)$ten densators, setzen die von ihnen, welche nicht mit der Erde bunden war, in Verbindung mit denjenigen Platten der übi $r-2$ Condensatoren, welche ebenfalls nicht mit der Erde ve den waren. Diese Platten erhalten dadurch eine wie die an die Ladung u'', und es ist:

$$u'' = \frac{u' S(p_{r-1})}{S(p_{r-1}) + (1-n^2)p_{r-1}}.$$

Entfernen wir nun den $(r-2)$ten Condensator und mache wie vorhin, so ist die Ladung der übrigen $r-3$ Condensatore

$$u''' = \frac{u'' S(p_{r-2})}{S(p_{r-2}) + (1-n^2)p_{r-2}};$$

Endlich entfernen wir den 2ten Condensator, so hat der noch die Ladung:

$$u^{(r-1)'} = \frac{u^{(r-2)'} S(p_2)}{p_1 + (1-n^2)\, p_2}.$$

Aus diesen Formeln für die u' erhalten wir endlich:

$$u^{(r-1)'} = \frac{\{p_1+p_2\}\{p_1+p_2+p_3\}\ldots\ldots\{p_1+p_2\ldots+p_r\}}{\{p_1+(1-n^2)p_2\}\{p_1+p_2+(1-n^2)p_3\}\ldots\{p_1+p_2\ldots p_{r-1}+p_r(1-n^2)\}} \cdot \frac{\ldots}{1-\ldots}$$

Setzen wir, wie oben im Abschnitt II. §. 13.:

$$p_r = m^{r-1}p,\; p_{r-1} = m^{r-2}p,\; p_{r-2} = m^{r-3}p, \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots p_2 = mp,\; p_1 = p;$$

so erhalten wir:

$$u^{(r-1)'} = \frac{\{1+m\}\{1+m+m^2\}\ldots\ldots\{1+m+\ldots\ldots m^{r-1}\}\ldots}{\{1-n^2\}\{1+m(1-n^2)\}\{1+m+m^2(1-n^2)\}\ldots\{1+m\ldots m^{r-2}+m^{r-1}(1-\ldots}$$

Die Art der Ladungen, wie wir sie jetzt haben, untersche sich von der im Abschnitt II. nur dadurch, dass bei den auf ander folgenden Ladungen hier immer mehrere Condensato gleichzeitig wirken, es ihrer aber immer weniger werden, bis letzt nur der kleinste allein noch geladen wird; im II. Abschnitt ging die Ladung auch zuletzt allein auf den kleinsten Condensator über, aber bei den auf einander folgenden Ladungen war stets nur ein Condensator thätig; die Resultate sind, wie wir sehen, verschieden; wenn jedoch die Condensatoren recht gut sind, also n beinahe $=1$, so ist:

$$u^{(r-1)} = \frac{(1+m\ldots+m^{r-1})\,a}{1-n^2}$$

$$= \frac{(1-m^r)\,a}{(1-m)\,(1-n^2)},$$

und wir erhalten demnach ganz dasselbe Resultat, welches bei gleicher Voraussetzung die Formeln in II. §. 13. gaben.

Zum Schlusse nehme ich Veranlassung dem verdienstvollen Autor „der galvanischen Kette" den innigsten Dank auszudrücken für das Schöne und Nützliche, welches zu erlernen er mir häufig Gelegenheit bot, theils als erfahrner und bewährter Lehrer in seinen Vorlesungen über Electricität, theils als wohlwollender und gefälliger Freund im nähern Umgang. Auch darf ich nicht verschweigen, dass mir sein Rath bei Abfassung dieses Aufsatzes (namentlich bei I. 6)) hülfreich zur Seite stand.

XXXI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

Die Stange AB in untenstehender Figur:

dreht sich um den Punkt E mit der Winkelgeschwindigkeit δ; längs ihr ist ein Körper (oder System von Körpern) ohne Reibung beweglich, dessen Schwerpunkt im Anfange der Bewegung in der Entfernung α von E ist (positiv nach B hin); am Ende der Zeit t wird der Schwerpunkt, wenn ausser der Fliehkraft keine andere Kraft wirkt, und die Geschwindigkeit im Anfange Null war, in der Entfernung

$$\frac{\alpha}{2}(e^{\delta t}+e^{-\delta t})$$

von E sein. Zugleich wird er, vermöge beider Bewegungen, eine Kurve beschreiben, deren Gleichung in Polarkoordinaten

$$r=\frac{\alpha}{2}(e^{\psi}+e^{-\psi})$$

ist, worin r die Entfernung eines Punktes der Kurve von E, ψ der Winkel dieses Radiusvektor mit EB ist, nach der Richtung der Bewegung hin gemessen.

Daraus folgt, dass, was auch die Winkelgeschwindigkeit und das Gleichgewicht des Körpers sei, wenn nur α dasselbe ist, immer dieselbe Kurve durchlaufen wird.

Die dem Werthe ψ_1 des Winkels ψ entsprechende Länge der Kurve, von $\psi = 0$ an gerechnet, ist

$$\alpha\sqrt{2}\left[\operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}-E\left(\varphi,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2}F\left(\varphi,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right],$$

worin

$$\cos\varphi=\sqrt{\frac{2}{e^{2\psi_1}+e^{-2\psi_1}}}=\frac{e^{\psi_1}\sqrt{2}}{\sqrt{e^{4\psi_1}+1}}.$$

Will man die Stellung des Körpers am Ende der Zeit t wissen, so sind die Werthe von r und ψ für diesen Augenblick:

$$r=\frac{\alpha}{2}(e^{\delta t}+e^{-\delta t}),\quad \psi=\delta t.$$

XXXII.

Miscellen.

Zur Abhandlung VII. in Theil XII. S. 93.

Von dem Herrn Doctor J. Dienger, Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

Man könnte gegen die dortige Beweisführung einen Einwand erheben. Es ist nämlich allerdings klar, und folgt aus der dortigen Formel (5) mit Nothwendigkeit, dass $\mathfrak{L}\left(\frac{n^n e^{-n}}{1.2..n}\right)$ nicht unendlich ist; zugleich ist $\mathfrak{L}\left(\frac{n^r e^{-n}}{1 \ldots . r}\right)=0$, so lange nicht $\mathfrak{L}\left(\frac{r}{n}\right)=1$, d. h. so lange nicht r um eine endliche Grösse von $n(=\infty)$ verschieden ist. Für diesen letztern Fall aber ist nicht bewiesen, dass $\mathfrak{L}\left(\frac{n^r e^{-n}}{1.2..r}\right)=0$ zu setzen sei. Es ist diess aber auch nicht nöthig. Sobald nämlich $\mathfrak{L}\left(\frac{r}{n}\right)=1$ gesetzt werden darf, wird die Formel (4) geben:

$$X=\mathfrak{L}\left(\frac{n^r e^{-n}}{1.2..r}\varphi(x)+\frac{n^{r+1}e^{-n}}{1.2..(r+1)}\varphi(x)+\ldots\ldots\right)$$

$$=\varphi(x).\mathfrak{L}\left(\frac{n^r e^{-n}}{1.2..r}+\frac{n^{r+1}e^{-n}}{1.2..(r+1)}+\frac{n^{r+2}e^{-n}}{1.2..(r+2)}+\ldots\right).$$

Aus (5) folgt, für $\varphi(x)=x$:

$$x=x.\mathfrak{L}\left(\frac{n^r e^{-n}}{1.2\ldots r}+\frac{n^{r+1}e^{-n}}{1.2..(r+1)}+\frac{n^{r+2}e^{-n}}{1.2..(r+2)}+\ldots\ldots\right).$$

d. h.

$$\mathfrak{L}\left(\frac{n^r e^{-n}}{1.2\ldots r}+\frac{n^{r+1}e^{-n}}{1.2..(r+1)}+\frac{n^{r+2}e^{-n}}{1.2..(r+2)}+\ldots\right)=1,$$

demnach

$$X=\varphi(x),$$

wie die Formel (8) besagt.

Ueber die Bedingungen der Konvergenz der Reihen (9) und (10) sehe man Cauchy's Vorlesungen über die Differenzialrechnung, Vorlesung 9.

Schreiben des Herrn Doctor Thomas Clausen, Observator an der Sternwarte zu Dorpat, an den Herausgeber.

Im XIIten Bande Ihres Archivs Nr. XXI. S. 293. findet sich von Professor Schlömilch ein Aufsatz, worin er beweist, dass die transcendente Function

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\dots=$$

weder durch reelle noch complexe Werthe von x den Werth $=-1$ erlangen könne. Es scheint mir als ob hierin ein Irrthum obwalten müsse, da es mir gelungen ist, zwei complexe Werthe von x zu finden, die dieser Gleichung Genüge leisten, nämlich: $x=-0{,}5794+0{,}6950i$ bis auf die vierte Decimalstelle genau, und $x=-2{,}51+0{,}63i$ bis auf die zweite Decimalstelle genau; $(i=\sqrt{-1})$. Es liesse sich durch weitläuftigere Rechnungen jede beliebige Genauigkeit erlangen, die jedoch für meinen Zweck, bloss das Vorhandensein dieser Wurzeln zu zeigen, ohne Nutzen sind.

Die Function $f(x)$ habe ich für den numerischen Calcul in eine schneller convergirende Reihe auf folgende Weise verwandelt:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}-\dots$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)-\dots$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+2)(x+3)}-\dots$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{2^2}\frac{1}{x(x+1)}$$

$$+\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right)-\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{(x+2)(x+3)}\right)$$

$$+\dots$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{2^2}\frac{1}{x(x+1)}$$

$$+\frac{1}{2^2}\frac{1.2}{x(x+1)(x+2)}-\frac{1}{2^2}\frac{1.2}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\dots$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{2^2}\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{2^3}\frac{1.2}{x(x+1)(x+2)}$$

$$+\frac{1.2}{2^3}\left(\frac{1}{x(x+1)(x+2)}-\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\right)-\dots$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{2^2}\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1.2}{x(x+1)(x+2)}$$

$$+\frac{1.2.3}{2^5}\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}-\frac{1.2.3}{2^3}\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}\cdots$$

Durch Wiederholung der Operation erhält man:

$$f(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{2^2}\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{2^3}\frac{1.2}{x(x+1)(x+2)}$$

$$+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}+\ldots\ldots$$

Das Gesetz, wonach die Reihe fortschreitet, ist augenfällig. Die Reihe selbst wird immer, gehörig verlängert, convergent, und man kann zugleich aus den letzten Gliedern, die man in Rechnung zieht, sehr leicht eine Grenze ableiten, die die Summe der übrigen vernachlässigten Glieder nicht übersteigen kann.

Druckfehler.

S. 320 in der letzten Zeile setze man II. 2) statt II. 3).

XXXIII.

Beweis des Satzes: ..d die Linien, welche aus zwei Drei..swinkeln auf die Gegenseiten ge..gen sind, und diese Dreieckswinkel ..gleichen Verhältnissen theilen, ein..der gleich, so ist das Dreieck gleich..enklig, und zwar sind die erwähn..ten Gegenseiten einander gleich.

Von
Herrn Theodor Lange,
Studirenden der Mathematik zu Berlin.

I.

Alle gerade Linien aus einem Punkte A, auf denen Punkte ..., welche von einem Punkte B den bestimmten Abstand r ..., sind Secanten aus A für den mit r als Halbmesser um ... Punkt B beschriebenen Kreis. Ebenso sind alle gerade Li... aus dem Punkte B, auf denen Punkte liegen, welche von ... Punkte A den bestimmten Abstand r haben, Secanten aus ... für den mit r als Halbmesser um den Punkt A gezeichneten .... Man stelle sich vor, eine Secante aus B für den Kreis A ... sich im Punkte B so, dass sie aus der Lage BA, als der ...ünglichen, sich nach einer Richtung bewege, bis sie in die ... jeder Secante gekommen ist, welche auf der Seite AB liegt, ... welcher hin die Drehung stattfindet; der bei dieser Drehung ...mende Winkel, welchen die Secante mit BA bildet, sei b. ... während der Drehung auf die Secante stets die Halbmesser ...gen, so wird ein jeder derselben mit AB Winkel bilden, ... denen der eine α mit dem Winkel b zunimmt, indessen der gleichliegende Winkel α' am andern Halbmesser, bei zunehmendem b, fortwährend abnimmt. Ferner bezeichne man den Winkel, den eine Secante aus A für den Kreis um B mit AB macht, durch a, und, der obigen Bezeichnung von α und α' gemäss, die Winkel, welche die auf die Secante gezogenen Halbmesser bilden, mit β und β'.

Da die Winkel a und β sich nicht ändern, dagegen α und b gleichzeitig zunehmen, so nimmt das Verhältniss $\frac{a}{\alpha}$ ab, indessen das Verhältniss $\frac{b}{\beta}$ zunimmt. Es kann also höchstens einmal $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$ werden, während die Secante in die Lage jeder Secante auf einer Seite von AB gekommen ist. Da nun aber, wenn $a=b$ ist, immer $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$ wird, so muss auch umgekehrt [illegible] immer, wenn $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$ ist, $a=b$ sein.

Nicht ganz so einfach ist der Schluss in Bezug auf die Verhältnisse $\frac{a}{\alpha'}$ und $\frac{b}{\beta'}$, weil beide gleichzeitig zunehmen. Die Gleichheit derselben findet statt, wenn $a\beta'=b\alpha'$ ist. Da $a\beta'$ eine unveränderliche Grösse ist, kommt es nur darauf an, zu [illegible], wie oft $\alpha'b$ einen bestimmten Werth erreichen kann, kurz die Natur des Productes $\alpha'b$ zu untersuchen, während b zunimmt. Man stelle sich vor, b wachse so, dass es immer um einen beständigen Winkel y zunehme; dabei wird der Winkel α' um die Winkel x abnehmen, welche entweder bei fortgesetzter Drehung immer kleiner werden $[AB<r]$, oder immer gleich bleiben $[AB=r]$, oder immer grösser werden $[AB>r]$. Das Product $\alpha'b$ ändert sich durch die Zunahme des Winkels b um y um die Differenz $\alpha'b-(\alpha'-x)(b+y)=x\,(b+y)-\alpha'y$. Das Vorzeichen dieser Differenz, welches dasselbe ist mit dem des Ausdrucks $\frac{x}{y}-\frac{\alpha'}{b+y}$, zeigt, ob das Product, während b zunimmt, auch zu- oder abnimmt. Der Ausdruck ist beim Beginn der Drehung negativ. Wenn, wie in Taf. IV. Fig. 3. und Fig. 4., x nicht kleiner und kleiner wird, wenn b zunimmt, so nimmt $\frac{x}{y}$ bei der Drehung nicht ab, indessen $\frac{\alpha'}{b+y}$ abnimmt. Die Differenz wird also mit negativen Werthen beginnen, sich der Null nähern, kann sie erreichen und mit positiven Zeichen zunehmen. Dasselbe lässt sich auch für Taf. IV. Fig. 5. zeigen, also, wenn die Abnahmen von α' bei zunehmendem b, abnehmen. Denn $\frac{x}{y}$ nimmt von Werthen, die kleiner als 2 sind, bis zu solchen ab, die grösser als Null sind, indessen $\frac{\alpha'}{b+y}$ von unendlich grossen Werthen bis Null abnimmt, und beide Verhältnisse in gleicher Weise sich ändern.

Da nun also obige Differenz $x(b+y)-\alpha' y$ mit negativen Werthen beginnt, sich der Null nähert, sie erreichen und mit positiven Werthen zunehmen kann, so nimmt das Product anfangs zu, bis zu einem grössten Werth, und kann von demselben wieder abnehmen. Es kann also höchstens zweimal $\alpha' b$ den bestimmten Werth $a\beta'$ erhalten, und zwar das eine Mal, wenn b grösser ist als φ (der dem grössten Werth des Productes $\alpha' b$ entsprechende Werth von b); und zum andern Male, wenn b kleiner ist als φ. Wenn $a=b$ ist, wird $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$; also ist, wenn $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ ist, entweder $a=b$ oder nicht; im ersteren Falle ist a und b gleichzeitig entweder kleiner, oder gleich, oder grösser als φ; oder a ist nicht gleich b, und dann ist auch a und b nicht gleichzeitig grösser, gleich oder kleiner als φ. Wenn also a und b gleichzeitig grösser oder gleich oder kleiner als φ ist, so ist

2) „wenn $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ ist, auch $a=b$."

Die Verhältnisse $\frac{a}{\alpha}$ und $\frac{b}{\beta'}$ können, da ersteres stets abnimmt, indessen letzteres zunimmt, höchstens einmal einander gleich werden. Ihre Gleichheit findet aber nur statt, wenn a nicht gleich b ist, es sei denn, dass $\beta=\beta'$ wäre, wo dann der Fall Nr. 1), stattfände. — Ebenso ist es mit der Gleichheit der Quotienten $\frac{a}{\alpha'}$ und $\frac{b}{\beta}$.

Es ist also in dem Bisherigen nachgewiesen, dass

1) wenn $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$ ist, immer $a=b$ ist;

2) wenn $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ ist, $a=b$ ist, wenn a und b gleichzeitig grösser oder gleich oder kleiner als φ ist;

3) wenn $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$ oder $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta}$, nur dann $a=b$ ist, wenn $\alpha=\alpha'$ oder $\beta=\beta'$ ist.

II.

Die Auffindung des Winkels φ, für den $\alpha' b$ seinen grössten Werth hat, ist mir nicht gelungen. Jedoch lässt sich zeigen, dass φ nicht kleiner sein kann, als der Werth von b, den b hat, wenn $b=\alpha'$ ist. Der Quotient $\frac{x}{y}$ ist nämlich, wenn $AB \geqq r$ ist, stets grösser als 1, und wenn $AB<r$ ist, so lange grösser als 1, als b kleiner als ein rechter Winkel ist, so dass also, wenn $\alpha'=b$ ist, immer $\frac{\alpha'}{b+y}<1$ und $\frac{x}{y}>1$ ist, mithin die Differenz

$\frac{x}{y} - \frac{\alpha'}{b+y}$ positiv, und deshalb das Product $\alpha' b$ im Abnehmen begriffen. Da nun der Winkel φ nicht grösser ist als PBA (der Winkel b, für den $\alpha' = b$ ist), so folgt erstens, dass, wenn a und b gleichzeitig grösser sind, als PBA, die Gleichung $\frac{a}{\alpha'} = \frac{b}{\beta'}$ die Gleichheit der Winkel a und b bedingt, zweitens, dass, wenn a und b gleichzeitig kleiner sind als PBA, die beiden Gleichungen nicht nothwendig zusammen auftreten, drittens, dass, wenn nur einer von den Winkeln a und b, grösser ist als PBA, z. B. b in Taf. IV. Fig. 5., man findet, wenn man BH zieht, $a \times ABH < a.\beta'$ und $a \times ABH > \alpha' b$, mithin $a\beta' > \alpha' b$ oder $\frac{a}{\alpha'} > \frac{b}{\beta'}$, so lange nämlich $\alpha' < a$ ist. — In Bezug auf diese drei Fälle, und in Rücksicht darauf, dass, wenn a und b gleichzeitig kleiner als PBA ist, sowohl $a < \alpha'$ als auch $b < \beta'$ ist, folgt: dass

3) „wenn $a > \alpha'$ und $b > \beta'$ ist, und $\frac{a}{\alpha'} = \frac{b}{\beta'}$, auch $a = b$ ist."

Wenn $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta'}$ wird, ist, wie schon gezeigt ist, a nicht gleich b, es sei denn, dass $\beta = \beta'$ wäre. — Wenn $a > b$ ist und zugleich $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta'}$ wäre, müsste auch $\alpha > \beta'$ sein, was aber nicht eintreten kann, so lange b kleiner als ein rechter Winkel ist. — Wenn $a < b$ ist, und zugleich $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta'}$ wäre, müsste $a - \alpha < b - \beta'$ oder $a + \beta' < b + \alpha$ sein. Der kleinste Werth für $a + \beta'$ findet statt, wenn a gleich einem Rechten geworden ist. Die stets zunehmende Summe $b + \alpha$, wird, bis b gleich einem Rechten geworden ist, immer kleiner sein, als der kleinste Werth von $a + \beta'$. Es kann daher, so lange b kleiner als ein Rechter ist, nicht $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta'}$ sein. — Desgleichen kann, so lange a kleiner als ein Rechter ist, auch $\frac{a}{\alpha'}$ nicht gleich $\frac{b}{\beta}$ sein. Wenn daher die Winkel

4) „a und b spitz sind, kann nie $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta'}$ oder $\frac{a}{\alpha'} = \frac{b}{\beta}$ sein."

Berücksichtigt man die vier Ergebnisse der bisherigen Untersuchung zugleich, so ergiebt sich: dass, wenn a und b spitze Winkel und beziehlich grösser als α' und β' sind, die Gleichheit der entsprechenden Verhältnisse zwischen irgend einem Paare der anstossenden Winkel in den Punkten A und B, die Gleichheit der Winkel a und b selbst bedinge; kurz dass, wenn eine der Gleichungen $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$, $\frac{a}{\alpha'} = \frac{b}{\beta'}$, $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta'}$ und $\frac{a}{\alpha'} = \frac{b}{\beta}$ stattfindet, die Winkel a und b gleich sind.

Da b und α in Bezug auf AB nur so lange dieselbe Lage wie a und β' haben, als b und α kleiner als rechte Winkel sind, und AB zugleich kleiner als r ist, so kann man anstatt der weiteren Bedingung, dass a und b kleiner als Rechter sein sollen, die engere aufstellen, dass b und α in Bezug auf AB dieselbe Lage haben sollen, wie a und β'. Jedenfalls hat nun aber b und α', und a und β' die gleiche Lage zu AB, wenn die Halbmesser, die den Winkeln α und β' entsprechen, in die Winkel a und b fallen; und mit dieser Bedingung ist zugleich auch die ausgesprochen, dass a kleiner als α', und b kleiner als β' ist.

Es ergiebt sich also folgender Satz:

Gehen aus zwei Punkten A und B einer geraden Linie zwei Strahlen unter den beliebigen Winkeln a und b aus, und fällt die aus jedem der Punkte auf diese Strahlen gezogene Gerade von der bestimmten Länge r in die Winkel, welche die Strahlen mit AB bilden, so bedingt die Gleichheit der Verhältnisse zwischen den Winkeln, welche einerseits die Strahlen, andrerseits die Halbmesser mit AB machen, die Gleichheit der Winkel a und b.

Liegt nun a und b so, dass sie Dreieckswinkel bilden, so erhält man den durch die Schwierigkeiten seines Beweises bekannten Satz: Ist in einem Dreieck aus jeder von zwei Ecken eine Linie von einer gegebenen Länge auf die Gegenseite gezogen, und theilen diese Linien den jedesmaligen Dreieckswinkel unter demselben Verhältniss, so ist das Dreieck ein gleichschenkliges.

Liegt nun a und b so, dass sie nicht Dreieckswinkel bilden, so erhält man folgenden mit dem obigen auf gleicher Linie stehenden Satz: Wird eine Gerade von zwei Strahlen geschnitten, und theilt die aus jedem Schnittpunkt auf den andern Strahl gezogene gerade Linie von der bestimmten Länge r die gleichliegenden- oder die Wechselwinkel in demselben Verhältniss, so sind die Strahlen parallel.

Nachschrift des Herausgebers.

In dem Schreiben, mit welchem der Herr Verfasser des vorstehenden Aufsatzes denselben mir zur Einrückung in's Archiv zu übersenden die Güte hatte, findet sich noch folgende Bemerkung, die ich glaube hier mittheilen zu müssen: „Wie der Herr Professor Steiner" — (durch den der Herr Verfasser auch auf die Schwierigkeit eines geometrischen Beweises des in dem vorstehenden Aufsatze behandelten Satzes aufmerksam gemacht wurde) — „mittheilte, sind jetzt von besagtem Satze nur zwei geometrische Beweise bekannt geworden; der eine findet sich im Journal für reine und angewandte Mathematik von Crelle und ist von Professor Steiner selbst, während ein anderer Beweis von einem Schüler der polytechnischen Schule zu Paris gegeben ist. Beide Beweise, von denen dem ersteren der Vorzug eingeräumt worden ist, sind von dem, wie ich ihn gebe, durchaus verschieden, da er dem Herrn Professor Steiner, dem ich denselben mittheilte, unbekannt war."

So weit der Herr Verfasser des vorstehenden Aufsatzes.

Zufällig sind mir die Schriften, in denen die beiden vorher angeführten geometrischen Beweise des Satzes sich finden sollen und mögen, in diesem Augenblicke nicht gleich zur Hand, und eine Vergleichung derselben mit dem von dem Herrn Verfasser gegebenen Beweise ist mir daher jetzt nicht möglich, wenn ich, was ich im Interesse der Sache nicht wünsche, die Mittheilung des obigen Aufsatzes im Archive nicht zu lange verschieben will. Jedenfalls möchte es aber gut sein, wenn die Leser des Archivs dem erwähnten Satze ihre Aufmerksamkeit schenkten und noch andere geometrische Beweise desselben zu finden suchten. Auch möchte ich den Herrn Verfasser des obigen Aufsatzes ergebenst ersuchen, gelegentlich einmal, aber so bald als möglich, den erwähnten von einem Schüler der polytechnischen Schule in Paris gefundenen geometrischen Beweis im Archive mitzutheilen, da mir selbst sowohl dieser Beweis selbst, als auch die Schrift, in welcher er sich findet, ganz unbekannt geblieben, oder von mir vielleicht übersehen worden ist, indem ich, offen gestanden, dem scheinbar so einfachen Satze bis jetzt die Aufmerksamkeit nicht geschenkt habe, welche er, da ein seiner eignen Einfachheit entsprechender einfacher Beweis nicht leicht zu führen ist, allerdings vollkommen zu verdienen scheint. Den Beweis des Herrn Professor Steiner kann jeder Leser des Archivs zwar leicht im Crelle'schen Journale nachsehen; indess ist es dem Zwecke des Archivs keineswegs entgegen, wenn es dem Herrn Studiosus T. Lange gefallen sollte — was ich recht sehr wünschen möchte — in Verbindung mit dem vorher erwähnten Beweise eines Schülers der polytechnischen Schule in Paris auch den Steiner'schen Beweis im Archive mitzutheilen, und überhaupt Alles zusammenzustellen, was ihm über den fraglichen Satz bis jetzt bekannt geworden ist, wodurch er so wie mich auch gewiss viele Leser des Archivs sich recht sehr verbinden würde. Einem mir gütigst mitgetheilten desfallsigen Aufsatze würde ich sehr gern sogleich eine Stelle im Archive einräumen.

Schliesslich will ich nun nur noch mittheilen, wie ich mir selbst den Satz im einfachsten Falle, wenn die beiden Winkel halbirt werden, mit Hülfe der Rechnung, der sich aber auch leicht die Form einer geometrischen Rechnung, um mich dieses Ausdrucks zu bedienen, wie sie die Alten anzustellen gewohnt waren, geben lassen würde, was für keinen Kenner der Geometrie der Griechen noch einer besonderen Erläuterung bedarf, da ja übrigens auch unsere algebraischen und trigonometrischen Symbole das Wesen der Sache an sich nicht ändern, sondern nur zur Abkürzung dienen und die Form etwas ändern, bewiesen habe.

Wenn in dem Dreiecke ABC (Taf. IV. Fig. 6.) der Winkel BAC durch die Linie $AD = \alpha$ halbirt ist, so hat man nach einem bekannten Satze der euklidischen Geometrie die Proportion

$$AC : AB = CD : BD$$

oder in bekannter Bezeichnung

$$b : c = a - BD : BD,$$

also

$$b . BD = ac - c . BD,$$

und hieraus sogleich

$$BD = \frac{ac}{b+c}, \quad CD = \frac{ab}{b+c}.$$

Nun ist ferner in dem Dreieck ACD

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC.CD.\cos C,$$

also

$$\alpha^2 = b^2 + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} - \frac{2ab^2}{b+c} \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

woraus nach leichter Rechnung und einer ganz einfachen algebraischen Transformation sich sogleich

$$\alpha^2 = \frac{bc\{(b+c)^2 - a^2\}}{(b+c)^2} = bc\left\{1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right\}$$

ergiebt.

Werden nun in dem Dreiecke ABC (Taf. IV. Fig. 7.) die Winkel ABC und ACB durch die Linien $BE = \beta$ und $CF = \gamma$ halbirt, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\beta^2 = ac\left\{1 - \left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right\},$$

$$\gamma^2 = ab\left\{1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right\}.$$

Nimmt man also, wie in dem mehr erwähnten Satze, an, dass die Linien $BE = \beta$ und $CF = \gamma$, welche die Winkel ABC und ACB halbiren, einander gleich seien, dass also $\beta = \gamma$, und folglich auch $\beta^2 = \gamma^2$ sei; so ist nach dem Vorhergehenden

$$ac\left\{1 - \left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right\} = ab\left\{1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right\},$$

also

$$c\left\{1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right\}=b\left\{1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right\},$$

und folglich

$$b-c=\frac{bc^2}{(a+b)^2}-\frac{cb^2}{(a+c)^2}=bc\frac{c(a+c)^2-b(a+b)^2}{(a+b)^2(a+c)^2};$$

oder

$$(b-c)(a+b)^2(a+c)^2=bc\{c(a+c)^2-b(a+b)^2\},$$

d. i., wie man leicht findet,

$$(b-c)(a+b)^2(a+c)^2=bc\{(c^3-b^3)+2a(c^2-b^2)+a^2(c-b)\}$$

oder

$$(b-c)(a+b)^2(a+c)^2=-bc\{(b^3-c^3)+2a(b^2-c^2)+a^2(b-c)\}.$$

Wäre nun nicht $b=c$, d. i. nicht $b-c=0$, so würde es verstattet sein, auf beiden Seiten der vorstehenden Gleichung mit $b-c$ zu dividiren, was nach leichter Ausführung der Rechnung zu der Gleichung

$$(a+b)^2(a+c)^2=-bc\{b^2+bc+c^2+2a(b+c)+a^2\},$$

oder zu der Gleichung

$$(a+b)^2(a+c)^2+bc\{b^2+bc+c^2+2a(b+c)+a^2\}=0$$

führt. Diese Gleichung ist aber, insofern natürlich a, b, c sämmtlich positiv sind und nicht verschwinden, was sich hier von selbst versteht, offenbar völlig ungereimt, weshalb es falsch ist, dass nicht $b-c=0$ wäre. Also ist $b-c=0$, d. h. unter der Voraussetzung, dass die Linien $BE=\beta$ und $CF=\gamma$, welche die Winkel ABC und ACB des Dreiecks ABC halbiren, einander gleich sind, ist immer $b=c$, nämlich $AC=AB$, welches der zu beweisende Satz ist.

Ich wiederhole, dass mir die Mittheilung geometrischer Beweise für den fraglichen Satz angenehm sein und mich zu Dank verpflichten wird. G.

XXXIV.

Ueber das Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische oder das Problem der drei Punkte.

Von
dem Herausgeber.

Am Eingange dieses Aufsatzes kann ich die vorläufige Bemerkung nicht unterdrücken, dass die in demselben angestellten Betrachtungen weniger für die Praxis des Rückwärtseinschneidens, als in theoretischer Beziehung einiges Interesse darbieten dürften, weil mich dieselben zu einigen, wie ich glaube, bemerkenswerthen geometrischen Sätzen geführt haben. Ich hätte leicht eine andere passendere Ueberschrift wählen können, habe aber die obige absichtlich beibehalten, weil mir Untersuchungen über das Rückwärtseinschneiden zu diesen Betrachtungen Veranlassung gegeben haben, und ich dem vorliegenden Aufsatze späterhin noch einige andere von ähnlicher Tendenz folgen zu lassen hoffe.

Wir wollen uns vier in gerader Linie liegende Punkte A, A', B, B' und einen fünften nicht in dieser geraden Linie liegenden Punkt C denken. Beschreiben wir dann durch die drei Punkte A, C, A' und durch die drei Punkte B, C, B', d. h. um die beiden Dreiecke ACA' und BCB', zwei Kreise, so werden sich diese beiden Kreise ausser in dem Punkte C noch in einem zweiten Punkte D schneiden, mit dessen näherer Bestimmung wir uns jetzt beschäftigen wollen.

Zu dem Ende nehmen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xy an, dessen Axe der x die gerade Linie sein soll, in welcher die vier Punkte A, A', B, B' nach der Voraussetzung liegen. In Bezug auf dieses Coordinatensystem seien die Coordinaten der Punkte

$$A,\ A',\ B,\ B',\ C$$

respective:

$$a,\ 0;\ a',\ 0;\ b,\ 0;\ b',\ 0;\ m,\ n.$$

Die Gleichungen der durch die Punkte A, C, A' und B, C, B' beschriebenen Kreise seien respective

$$1)\qquad (x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

und

$$2)\qquad (x-p')^2+(y-q')^2=r'^2,$$

wo die Bedeutung der Symbole p, q, r und p', q', r' aus der Theorie des Kreises bekannt ist.

Da der erste dieser beiden Kreise durch die drei Punkte A, A', C geht, so liefert die Gleichung 1) zur Bestimmung der Grössen p, q, r die folgenden Gleichungen:

$$3)\qquad \begin{cases}(a-p)^2+q^2=r^2,\\ (a'-p)^2+q^2=r^2,\\ (m-p)^2+(n-q)^2=r^2.\end{cases}$$

Aus den beiden ersten dieser drei Gleichungen folgt:

$$4)\qquad \begin{cases}a^2-2ap=r^2-p^2-q^2,\\ a'^2-2a'p=r^2-p^2-q^2;\end{cases}$$

also durch Subtraction

$$a^2-a'^2-2(a-a')p=(a-a')(a+a')-2(a-a')p=0,$$

folglich

$$a+a'-2p=0,$$

und hieraus

$$5)\qquad p=\frac{1}{2}(a+a'),$$

wovon die Richtigkeit auch aus bekannten Elementarsätzen auf der Stelle erhellet.

Aus der dritten der drei Gleichungen 3) folgt

$$m^2+n^2-2mp-2nq=r^2-p^2-q^2,$$

also nach 4)

$$6)\qquad m^2+n^2-2mp-2nq=a^2-2ap=a'^2-2a'p.$$

[Setz]t man in diese Gleichung den Werth von p aus 5) ein, so [erh]ält man:

$$m^2+n^2-m(a+a')-2mq$$
$$=a^2-a(a+a')=a'^2-a'(a+a')=-aa',$$

[fol]glich

$$2mq=m^2+n^2+aa'-m(a+a'),$$

[un]d hieraus

7) $$q=\frac{(m-a)(m-a')+n^2}{2n}=\frac{1}{2}n+\frac{(m-a)(m-a')}{2n}.$$

Endlich erhält man, wenn man in die erste oder zweite, oder [di]e dritte der Gleichungen 3) für p und q ihre vorher gefun[dene]n Werthe 5) und 7) einführt, für $4r^2$ die folgenden Ausdrücke:

$$4r^2=(a-a')^2+\left\{\frac{(m-a)(m-a')+n^2}{n}\right\}^2$$
$$=\{m-\frac{1}{2}(a+a')\}^2+\left\{\frac{(m-a)(m-a')-n^2}{n}\right\}^2,$$

[al]so

8) $$2r=\sqrt{(a-a')^2+\left\{\frac{(m-a)(m-a')+n^2}{n}\right\}^2}$$
$$=\sqrt{\{m-\frac{1}{2}(a+a')\}^2+\left\{\frac{(m-a)(m-a')-n^2}{n}\right\}^2}.$$

Stellen wir nun die gefundenen Werthe von p, q, r nochmals zusammen, so erhalten wir:

9) $$\begin{cases} p=\frac{1}{2}(a+a'), \\ q=\frac{(m-a)(m-a')+n^2}{2n}=\frac{1}{2}n+\frac{(m-a)(m-a')}{2n}, \\ r=\frac{1}{2}\sqrt{(a-a')^2+\left[\frac{(m-a)(m-a')+n^2}{n}\right]^2} \\ \quad=\frac{1}{2}\sqrt{\{m-\frac{1}{2}(a+a')\}^2+\left[\frac{(m-a)(m-a')-n^2}{n}\right]^2}; \end{cases}$$

und für p', q', r' ergeben sich ganz auf dieselbe Weise die folgenden Ausdrücke:

$$10)\quad\begin{cases} p'=\frac{1}{2}(b+b'), \\ q'=\frac{(m-b)(m-b')+n^2}{2n}=\frac{1}{2}n+\frac{(m-b)(m-b')}{2n}, \\ r'=\frac{1}{2}\sqrt{(b-b')^2+\left[\frac{(m-b)(m-b')+n^2}{n}\right]^2} \\ \quad =\frac{1}{2}\sqrt{\{m-\frac{1}{2}(b+b')\}^2+\left[\frac{(m-b)(m-b')-n^2}{n}\right]^2}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden Kreise überhaupt durch X, Y, so haben wir zu deren Bestimmung nach 1) und 2) die beiden folgenden Gleichungen:

$$11)\quad\begin{cases} (X-p)^2+(Y-q)^2=r^2, \\ (X-p')^2+(Y-q')^2=r'^2; \end{cases}$$

d. i.

$$12)\quad\begin{cases} X^2+Y^2-2pX-2qY=r^2-p^2-q^2, \\ X^2+Y^2-2p'X-2q'Y=r'^2-p'^2-q'^2; \end{cases}$$

aus denen sich durch Subtraction die Gleichung

$$13)\quad 2(p-p')X+2(q-q')Y=(r'^2-p'^2-q'^2)-(r^2-p^2-q^2)$$

ergiebt. Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$r^2-p^2-q^2=a^2-2ap=a^2-a(a+a')=-aa',$$
$$r'^2-p'^2-q'^2=b^2-2bp'=b^2-b(b+b')=-bb';$$

und wir haben daher nach 13) die Gleichung:

$$14)\quad 2(p-p')X+2(q-q')Y=aa'-bb',$$

oder, wie aus dieser Gleichung ferner leicht folgt, die Gleichung:

$$15)\quad\begin{aligned} &2(p-p')(X-p)+2(q-q')(Y-q) \\ &=aa'-bb'-2p(p-p')-2q(q-q'). \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$16)\quad Y-q=\frac{aa'-bb'-2p(p-p')-2q(q-q')-2(p-p')(X-p)}{2(q-q')},$$

und nach 11) haben wir daher zur Bestimmung von $X-p$ die folgende Gleichung des zweiten Grades:

$$17)\quad (X-p)^2$$
$$+\left[\frac{aa'-bb'-2p(p-p')-2q(q-q')-2(p-p')(X-p)}{2(q-q')}\right]^2=r^2,$$

welche nach gehöriger Entwickelung die Form

$$18)\quad (X-p)^2-\frac{(p-p')\{aa'-bb'-2p(p-p')-2q(q-q')\}}{(p-p')^2+(q-q')^2}(X-p)$$
$$=\frac{4(q-q')^2r^2-\{aa'-bb'-2p(p-p')-2q(q-q')\}^2}{4\{(p-p')^2+(q-q')^2\}}$$

erhält.

Setzen wir jetzt der Kürze wegen

$$19)\qquad P=(p-p')^2+(q-q')^2$$

und

$$20)\qquad Q=aa'-bb'-2p(p-p')-2q(q-q'),$$

so wird die Gleichung 18):

$$21)\qquad (X-p)^2-\frac{(p-p')Q}{P}(X-p)=\frac{4(q-q')^2r^2-Q^2}{4P},$$

und führt, auf gewöhnliche Weise aufgelöst, zu dem folgenden Ausdrucke von $X-p$:

$$22)\qquad X-p=\frac{(p-p')Q\pm(q-q')\sqrt{4r^2P-Q^2}}{2P}.$$

Weil ferner nach 16)

$$Y-q=\frac{Q-2(p-p')(X-p)}{2(q-q')}$$

ist, so erhält man durch Einführung des vorhergehenden Ausdrucks von $X-p$:

$$23)\qquad Y-q=\frac{(q-q')Q\mp(p-p')\sqrt{4r^2P-Q^2}}{2P},$$

und wir haben daher jetzt zur Bestimmung von X und Y die folgenden Formeln, in denen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen:

$$24)\qquad \begin{cases} X-p=\dfrac{(p-p')Q\pm(q-q')\sqrt{4r^2P-Q^2}}{2P}, \\ Y-q=\dfrac{(q-q')Q\mp(p-p')\sqrt{4r^2P-Q^2}}{2P}. \end{cases}$$

Um uns die Rechnung zu erleichtern, wollen wir jetzt, was offenbar verstattet ist, $m=0$ setzen, d. h. wir wollen den Durchschnittspunkt der geraden Linie, in welcher die Punkte A, A',

B, B' liegen, mit dem von dem Punkte C auf dieselbe gefällten Perpendikel als Anfang der Coordinaten annehmen. Dann ist nach 9):

$$25)\qquad p=\frac{1}{2}(a+a'),\; q=\frac{aa'+n^2}{2n};$$

und nach 10):

$$26)\qquad p'=\frac{1}{2}(b+b'),\; q'=\frac{bb'+n^2}{2n};$$

also nach 19) und 20):

$$4r^2P-Q^2$$

$$=4r^2\{(p-p')^2+(q-q')^2\}-\{aa'-bb'-2p(p-p')-2q(q-q')\}^2$$

$$=-(aa'-bb')^2+4(aa'-bb')p(p-p')$$
$$+4(aa'-bb')q(q-q')$$
$$-8pq(p-p')(q-q')$$
$$+4(r^2-p^2)(p-p')^2$$
$$+4(r^2-q^2)(q-q')^2$$

$$=-(aa'-bb')^2$$
$$+(aa'-bb')(a+a')\{(a+a')-(b+b')\}$$
$$+(aa'-bb')^2.\frac{aa'+n^2}{n^2}$$
$$-\frac{1}{2}(aa'-bb')(a+a')\{(a+a')-(b+b')\}.\frac{aa'+n^2}{n^2}$$
$$-\frac{1}{4}\left\{4aa'-\left(\frac{aa'+n^2}{n}\right)^2\right\}\{(a+a')-(b+b')\}^2$$
$$+\frac{1}{4}(a-a')^2.\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2$$

$$=\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2\{aa'+\frac{1}{4}(a-a')^2\}$$
$$+(aa'-bb')(a+a')\{(a+a')-(b+b')\}.\frac{n^2-aa'}{2n^2}$$
$$+\frac{a^2a'^2-2aa'n^2+n^4}{4n^2}\{(a+a')-(b+b')\}^2$$

$$=\left(\frac{a+a'}{2}\right)^2.\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2$$
$$+2\frac{a+a'}{2}.\frac{aa'-bb'}{n}\{(a+a')-(b+b')\}.\frac{n^2-aa'}{2n}$$
$$+\{(a+a')-(b+b')\}^2.\left(\frac{n^2-aa'}{2n}\right)^2$$

$$=\left[\frac{a+a'}{2}\cdot\frac{aa'-bb'}{n}+((a+a')-(b+b'))\cdot\frac{n^2-aa}{2n}\right]^2,$$

und folglich nach 24):

$$\left\{((a+a')-(b+b'))^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2\right\}\left\{X-\frac{1}{2}(a+a')\right\}$$

$$=\{(a+a')-(b+b')\}$$

$$\times\left\{aa'-bb'-\frac{1}{2}(a+a')((a+a')-(b+b'))-\frac{n^2+aa'}{n}\cdot\frac{aa'-bb'}{2n}\right\}$$

$$\pm\frac{aa'-bb'}{2n}\left\{(a+a')\frac{aa'-bb'}{n}+((a+a')-(b+b'))\cdot\frac{n^2-aa'}{n}\right\}$$

$$=\{(a+a')-(b+b')\}\left\{\begin{matrix}aa'-bb'-\frac{1}{2}(a+a')\{(a+a')-(b+b')\} \\ -\left(\frac{n^2+aa'}{n}\mp\frac{n^2-aa'}{n}\right)\frac{aa'-bb'}{2n}\end{matrix}\right\}$$

$$\pm\frac{1}{2}(a+a')\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2.$$

Nimmt man die untern Zeichen, so wird

$$\left\{((a+a')-(b+b'))^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2\right\}\left\{X-\frac{1}{2}(a+a')\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}(a+a')\left\{((a+a')-(b+b'))^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2\right\},$$

und folglich

$$X-\frac{1}{2}(a+a')=-\frac{1}{2}(a+a'),$$

also $X=0$, woraus man sieht, dass die untern Zeichen dem Durchschnittspunkte C der beiden Kreise entsprechen, und dass man also, wenn man die Coordinaten des Durchschnittspunkts D der beiden Kreise haben will im Vorhergehenden die obern Zeichen nehmen muss.

Dadurch erhält man:

$$\left\{((a+a')-(b+b'))^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2\right\}\left\{X-\frac{1}{2}(a+a')\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}(a+a')\left\{((a+a')-(b+b'))^2-\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2\right\}$$

$$+\frac{\{(a+a')-(b+b')\}(aa'-bb')(n^2-aa')}{n^2},$$

also

$$\{((a+a')-(b+b'))^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2\}X$$

$$=\frac{aa'-bb'}{n^2}\{(a+a')(aa'-bb')+((a+a')-(b+b'))(n^2-aa')\}$$

$$=\frac{aa'-bb'}{n^2}\{(a+a')(n^2-bb')-(b+b')(n^2-aa')\}$$

oder

$$\{((a+a')-(b+b'))^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2\}X$$

$$=(aa'-bb')\{(a+a')\left(1-\frac{bb'}{n^2}\right)-(b+b')\left(1-\frac{aa'}{n^2}\right)\},$$

und folglich

$$27)\quad X=\frac{(aa'-bb')\{(a+a')\left(1-\frac{bb'}{n^2}\right)-(b+b')\left(1-\frac{aa'}{n^2}\right)\}}{\{(a+a')-(b+b')\}^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2}.$$

Mittelst der zweiten der Gleichungen 24) könnte man auf ähnliche Weise den Werth von Y ermitteln. Man kann zu demselben aber auch auf folgende Art gelangen.

Man setze

$$X'-p=\frac{(p-p')Q+(q-q')\sqrt{4r^2P-Q^2}}{2P},$$

$$Y'-q=\frac{(q-q')Q-(p-p')\sqrt{4r^2P-Q^2}}{2P}$$

und

$$X''-p=\frac{(p-p')Q-(q-q')\sqrt{4r^2P-Q^2}}{2P},$$

$$Y''-q=\frac{(q-q')Q+(p-p')\sqrt{4r^2P-Q^2}}{2P};$$

so ist nach dem Obigen

$$y-Y'=\frac{Y'-Y''}{X'-X''}(x-X')$$

oder

$$y - Y'' = \frac{Y' - Y''}{X' - X''}(x - X'')$$

die Gleichung der Linie CD. Weil nun

$$X' - X'' = \frac{(q - q')\sqrt{4r^2P - Q^2}}{2P},$$

$$Y' - Y'' = -\frac{(p - p')\sqrt{4r^2P - Q^2}}{2P}$$

und immer entweder

$$X' = m,\ Y' = n \text{ oder } X'' = m,\ Y'' = n$$

ist, so ist

$$y - n = -\frac{p - p'}{q - q'}(x - m)$$

die Gleichung der Linie CD. Nach den allgemeinen Formeln 9) und 10) ist aber

$$p - p' = \frac{(a + a') - (b + b')}{2},$$

$$q - q' = \frac{(m - a)(m - a') - (m - b)(m - b')}{2n};$$

und die Gleichung der Linie CD ist folglich

28) $$y - n = -\frac{n\{(a + a') - (b + b')\}}{(m - a)(m - a') - (m - b)(m - b')}(x - m),$$

also für $m = 0$:

29) $$y - n = -\frac{n\{(a + a') - (b + b')\}}{aa' - bb'}x.$$

Weil nun der Punkt (XY) in dieser Linie liegt, so ist

29*) $$Y - n = -\frac{n\{(a + a') - (b + b')\}}{aa' - bb'}X,$$

d. i. nach 27):

$$Y-n=-\frac{n\{(a+a')-(b+b')\}\{(a+a')\left(1-\frac{bb'}{n^2}\right)-(b+b')\left(1-\frac{aa'}{n^2}\right)\}}{\{(a+a')-(b+b')\}^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2},$$

folglich, wie man hieraus leicht findet:

$$30)\quad Y=\frac{1}{n}\cdot\frac{(aa'-bb')^2-\{(a+a')-(b+b')\}\{aa'(b+b')-bb'(a+a')\}}{\{(a+a')-(b+b')\}^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2}.$$

Daher haben wir zur Bestimmung der Coordinaten X, Y des Punktes D jetzt die beiden folgenden Formeln:

$$31)\left\{\begin{aligned}X&=\frac{(aa'-bb')\{(a+a')\left(1-\frac{bb'}{n^2}\right)-(b+b')\left(1-\frac{aa'}{n^2}\right)\}}{\{(a+a')-(b+b')\}^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2},\\ Y&=\frac{1}{n}\cdot\frac{(aa'-bb')^2-\{(a+a')-(b+b')\}\{aa'(b+b')-bb'(a+a')\}}{\{(a+a')-(b+b')\}^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2}.\end{aligned}\right.$$

Will man aus diesen für $m=0$ geltenden Formeln die allgemeinen für jedes m geltenden Formeln ableiten, so braucht man in denselben, wie leicht mittelst der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten erhellen wird, bloss für

$$a,\ a',\ b,\ b',\ X$$

respective

$$a-m,\ a'-m,\ b-m,\ b'-m,\ X-m$$

zu setzen, was wir, als nicht der geringsten Schwierigkeit unterliegend, füglich dem Leser überlassen können.

Die allgemeine Gleichung der Linie CD war nach 28)

$$y-n=-\frac{n\{(a+a')-(b+b')\}}{(m-a)(m-a')-(m-b)(m-b')}(x-m).$$

Bezeichnen wir nun die erste Coordinate des Durchschnittspunkts dieser Linie mit der Axe der x, d. i. mit der geraden Linie, in welcher nach der Voraussetzung die vier Punkte A, A', B, B' liegen, durch $\mathfrak{X}$, so ist

$$\mathfrak{X}-m=\frac{(m-a)(m-a')-(m-b)(m-b')}{(a+a')-(b+b')},$$

und folglich

32) $$\mathfrak{X}=m+\frac{(m-a)(m-a')-(m-b)(m-b')}{(a+a')-(b+b')}$$

oder

33) $$\mathfrak{X}=m+\frac{(m-a)(m-a')-(m-b)(m-b')}{(a-b)+(a'-b')};$$

woraus sich aber nach gehöriger Entwickelung leicht

34) $$X=\frac{aa'-bb'}{(a+a')-(b+b')}$$

oder

35) $$X=\frac{aa'-bb'}{(a-b)+(a'-b')}$$

ergiebt.

Weil diese Ausdrücke von m und n ganz unabhängig sind, so sieht man, dass die gerade Linie, in welcher die vier unveränderlichen Punkte A, A', B, B' liegen, was auch der fünfte Punkt C für eine Lage haben mag, von der Linie CD immer in einem und demselben Punkte geschnitten wird, ein Resultat, welches sich auch leicht auf ganz elementare Weise aus den bekanntesten Sätzen vom Kreise ableiten lässt.

Wenn man aus der ersten der beiden für $m=0$ geltenden Gleichungen 31) die Grösse n^2 bestimmt, so erhält man:

$$n^2=-\frac{aa'-bb'}{(a+a')-(b+b')}\cdot\frac{aa'(b+b')-bb'(a+a')-(aa'-bb')X}{aa'-bb'-\{(a+a')-(b+b')\}X}.$$

Nach 29*) ist aber

$$n=\frac{(aa'-bb')Y}{aa'-bb'-\{(a+a')-(b+b')\}X},$$

welches, mit dem Vorhergehenden verglichen, zu der Gleichung

$$\frac{aa'(b+b')-bb'(a+a')-(aa'-bb')X}{(a+a')-(b+b')}$$

$$=-\frac{(aa'-bb')Y^2}{aa'-bb'-\{(a+a')-(b+b')\}X}$$

führt. Diese Gleichung bringt man aber nach gehöriger Entwickelung leicht auf die Form

$$36)\quad X^2+Y^2-\left.\begin{array}{l}\dfrac{(aa'-bb')^2+\{(a+a')-(b+b')\}\{aa'(b+b')-bb'(a+a')\}}{(aa'-bb')\{(a+a')-(b+b')\}}X \\ \qquad\qquad +\dfrac{aa'(b+b')-bb'(a+a')}{(a+a')-(b+b')}\end{array}\right\}=0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung

$$(X-P_1)^2+(Y-Q_1)^2=R_1^2,$$

d. i. mit der Gleichung

$$X^2+Y^2-2P_1X-2Q_1Y+P_1^2+Q_1^2-R_1^2=0,$$

so erhält man zur Bestimmung von P_1, Q_1, R_1 die drei folgenden Gleichungen:

$$P_1=\frac{(aa'-bb')^2+\{(a+a')-(b+b')\}\{aa'(b+b')-bb'(a+a')\}}{2(aa'-bb')\{(a+a')-(b+b')\}},$$

$$Q_1=0,$$

$$P_1^2+Q_1^2-R_1^2=\frac{aa'(b+b')-bb'(a+a')}{(a+a')-(b+b')};$$

aus denen sich leicht

$$37)\quad\left\{\begin{array}{l}P_1=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{aa'-bb'}{(a+a')-(b+b')}+\dfrac{aa'(b+b')-bb'(a+a')}{aa'-bb'}\right],\\ Q_1=0,\\ R_1^2=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{aa'-bb'}{(a+a')-(b+b')}-\dfrac{aa'(b+b')-bb'(a+a')}{aa'-bb'}\right]^2;\end{array}\right.$$

oder auch

$$38)\quad\left\{\begin{array}{l}P_1=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{aa'-bb'}{(a+a')-(b+b')}+\dfrac{aa'(b+b')-bb'(a+a')}{aa'-bb'}\right],\\ Q_1=0,\\ R_1=\pm\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{aa'-bb'}{(a+a')-(b+b')}-\dfrac{aa'(b+b')-bb'(a+a')}{aa'-bb'}\right];\end{array}\right.$$

wo man das Zeichen immer so zu nehmen hat, dass R_1 positiv wird, ergiebt.

Hieraus sieht man, dass die Gleichung 36) einem Kreise angehört, dessen Mittelpunkt in der geraden Linie liegt, in welcher die vier unveränderlichen Punkte A, A', B, B' liegen.

Setzt man in der Gleichung

$$(X-P_1)^2+(Y-Q_1)^2=R_1^2$$

die Grösse $Y=0$, so erhält man

$$X-P_1=\pm R_1, \text{ also } X=P_1\pm R_1;$$

und wenn man nun die aus dem Obigen bekannten Werthe von P_1 und R_1 einführt, so ergiebt sich mittelst leichter Rechnung, dass dem Werthe $Y=0$ immer die beiden folgenden Werthe von X entsprechen:

$$\frac{aa'-bb'}{(a+a')-(b+b')}, \quad \frac{aa'(b+b')-bb'(a+a')}{aa'-bb'};$$

so dass also der durch die Gleichung 36) charakterisirte Kreis immer durch den durch die Coordinaten

$$\frac{aa'-bb'}{(a+a')-(b+b')}, \; 0$$

bestimmten Punkt geht.

Hält man dies aber mit dem Obigen zusammen, so ergiebt sich der folgende bemerkenswerthe Satz, zu dessen Erläuterung man Taf. V. Fig. 1. zu vergleichen hat.

Lehrsatz.

Wenn vier Punkte A, A', B, B' in einer und derselben geraden Linie liegen und C ein fünfter nicht in dieser geraden Linie liegender Punkt ist, durch die Punkte A, C, A' und B, C, B' aber Kreise beschrieben werden, deren zweiter Durchschnittspunkt durch D bezeichnet wird; so schneiden für alle in einer und derselben auf der geraden Linie, in welcher die vier Punkte A, A', B, B' liegen, senkrecht stehenden Linie liegende Punkte C die entsprechenden Linien CD die gerade Linie, in welcher die vier unveränderlichen Punkte A, A', B, B' liegen, sämmtlich in einem und demselben Punkte E, und die den Punkten C entsprechenden Punkte D liegen sämmtlich auf einem durch den Punkt E gehenden Kreise, dessen Mittelpunkt in der geraden Linie liegt, in welcher die vier unveränderlichen Punkte A, A', B, B' liegen.

Wenn man nur einen der Punkte D durch Construction sucht, so kann man nach diesem Satze immer leicht sowohl den Punkt E, als auch den Kreis, in welchem die sämmtlichen Punkte D liegen, construiren.

Aus der Gleichung 34) erhält man leicht:

$$39)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}-a=\dfrac{(a-b)(b'-a)}{(a+a')-(b+b')}, \\ \mathfrak{X}-b=\dfrac{(a-b)(a'-b)}{(a+a')-(b+b')}; \end{cases}$$

also

$$40)\quad \mathfrak{X}-a:\mathfrak{X}-b=b'-a:a'-b;$$

ferner

$$41)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}-a'=\dfrac{(a'-b')(b-a')}{(a+a')-(b+b')}, \\ \mathfrak{X}-b'=\dfrac{(a'-b')(a-b')}{(a+a')-(b+b')}; \end{cases}$$

also

$$42)\quad \mathfrak{X}-a':\mathfrak{X}-b'=b-a':a-b'.$$

Bezeichnen wir jetzt der Kürze wegen den Durchschnittspunkt der Linien AB und CD durch O; so sind nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten offenbar

$$\mathfrak{X}-a \text{ und } \mathfrak{X}-b$$

die ersten Coordinaten des Punktes O in Bezug auf die Punkte

$$A \text{ und } B$$

als Anfangspunkte der Coordinaten, und

$$b'-a \text{ und } a'-b$$

sind die ersten Coordinaten der Punkte

$$B' \text{ und } A'$$

in Bezug auf die Punkte

$$A \text{ und } B$$

als Anfangspunkte der Coordinaten. Wenn nun die Coordinaten $b'-a$ und $a'-b$ ungleiche Vorzeichen haben, d. h. wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus nach entgegengesetzten Seiten hin liegen, so haben wegen der Proportion 40) auch die Coordinaten $\mathfrak{X}-a$ und $\mathfrak{X}-b$ ungleiche Vorzeichen, d. h. der Punkt O liegt zwischen den Punkten A und B. Wenn dagegen die Coordinaten $b'-a$ und $a'-b$ gleiche Vorzeichen haben, d. h. wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus nach denselben Seiten hin liegen, so haben wegen der Proportion 40) auch die Coordinaten $\mathfrak{X}-a$ und $\mathfrak{X}-b$ gleiche Vorzeichen, d. h. der Punkt O liegt nicht zwischen den Punkten A und B. In allen Fällen hat man aber nach 40) die Proportion

43) $$AO:BO=AB':BA'\text{*)},$$

aus welcher zugleich unmittelbar hervorgeht, dass in dem Falle wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus nach denselben Seiten hin liegen, jenachdem

$$AB'>BA' \text{ oder } AB'<BA'$$

ist, der Punkt O in der Verlängerung der Linie AB über den Punkt B hinaus, oder in der Verlängerung der Linie AB über den Punkt A hinaus liegt.

Nimmt man jetzt alles Vorhergehende zusammen, so ergeben sich zur Bestimmung der Lage des Punktes O in der Linie AB oder deren Verlängerungen, und dadurch auch zugleich der Lage der Linie CD die folgenden einfachen Regeln.

Wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus nach entgegengesetzten Seiten hin liegen, so liegt der Punkt O in der Linie AB, und seine Entfernungen AO und BO von den Punkten A und B verhalten sich wie die Linien AB' und BA' zu einander.

Wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus nach derselben Seite hin liegen und

$$AB'>BA'$$

ist, so liegt der Punkt O in der Verlängerung der Linie AB über den Punkt B hinaus, und seine Entfernungen AO und BO von den Punkten A und B verhalten sich wie die Linien AB' und BA' zu einander.

---

*) Dass sich diese Proportion auch leicht aus ganz bekannten Elementarsätzen vom Kreise ableiten lässt, wird ein Jeder sogleich übersehen. Es ist nämlich mit Rücksicht auf Taf. V. Fig. 2.

$$AO.A'O=CO.DO,$$
$$BO.B'O=CO.DO;$$

also

$$AO.A'O=BO.B'O,$$

und folglich

$$AO:BO=B'O:A'O,$$

also auch

$$AO:BO=B'O:A'O=AO-B'O:BO-A'O,$$

d. i.

$$AO:B'O=B'O:A'O=AB':BA'.$$

Wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus nach derselben Seite hin liegen und

$$AB' < BA'$$

ist, so liegt der Punkt O in der Verlängerung der Linie AB über den Punkt A hinaus, und seine Entfernungen AO und BO von den Punkten A und B verhalten sich wie die Linien AB' und BA' zu einander.

Wenn man die Proportionen 40) und 42) mit einander vergleicht, so fällt auf der Stelle in die Augen, dass man im Vorhergehenden die Punkte A, A' und B, B' gegen einander vertauschen, und daher die Regeln zur Bestimmung der Lage des Punktes O in der Linie AB oder deren Verlängerungen, und dadurch zugleich der Lage der Linie CD auch auf folgenden Ausdruck bringen kann.

Wenn die Punkte B und A respective von den Punkten A' und B' aus nach entgegengesetzten Seiten hin liegen, so liegt der Punkt O in der Linie $A'B'$, und seine Entfernungen $A'O$ und $B'O$ von den Punkten A' und B' verhalten sich wie die Linien $A'B$ und $B'A$ zu einander.

Wenn die Punkte B und A respective von den Punkten A' und B' aus nach derselben Seite hin liegen und

$$A'B > B'A'$$

ist, so liegt der Punkt O in der Verlängerung der Linie $A'B'$ über den Punkt B' hinaus, und seine Entfernungen $A'O$ und $B'O$ von den Punkten A' und B' verhalten sich wie die Linien $A'B$ und $B'A$ zu einander.

Wenn die Punkte B und A respective von den Punkten A' und B' aus nach derselben Seite hin liegen und

$$A'B < B'A$$

ist, so liegt der Punkt O in der Verlängerung der Linie $A'B'$ über den Punkt A' hinaus, und seine Entfernungen $A'O$ und $B'O$ von den Punkten A' und B' verhalten sich wie die Linien $A'B$ und $B'A$ zu einander.

In dem im Vorhergehenden noch nicht berücksichtigten Falle, wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus, oder, was dasselbe ist, die Punkte B und A respective von den Punkten A' und B' aus nach derselben Seite hin liegen, und

$$AB' = BA' \text{ oder } A'B = B'A$$

ist, muss nach dem Obigen offenbar

$$b' - a = a' - b \text{ oder } b - a' = a - b',$$

also

$$(a+a')-(b+b')=0$$

sein, und da nun

$$a+a'=b+b',$$

also auch

$$(a+a')^2=(b+b')^2,$$

d. i.

$$a^2+a'^2+2aa'=b^2+b'^2+2bb'$$

ist; so ist

$$\begin{aligned}2(aa'-bb')&=b^2+b'^2-a^2-a'^2=(b'^2-a^2)-(a'^2-b^2)\\&=(b'-a)(b'+a)-(a'-b)(a'+b),\end{aligned}$$

folglich nach dem Obigen

$$\begin{aligned}2(aa'-bb')&=(b'-a)(b'-a'+a-b)\\&=(a'-b)(b'-a'+a-b).\end{aligned}$$

Nach dem Obigen ist aber

$$b'-a'=a-b,$$

also

$$b'-a'+a-b=2(b'-a')=2(a-b),$$

woraus sich in Verbindung mit dem Vorhergehenden unmittelbar

$$aa'-bb'=(b'-a)(b'-a')=(a-b)(a'-b)$$

ergiebt. Weil nun nach 28)

$$y-n=-\frac{n\{(a+a')-(b+b')\}}{(m-a)(m-a')-(m-b)(m-b')}(x-m)$$

die Gleichung der Linie CD ist, so wird diese Gleichung im vorliegenden Falle

$$y-n=0 \text{ oder } y=n,$$

woraus man sieht, dass in demselben die Linie CD der Linie AB parallel ist, und also von einem Durchschnittspunkte O dieser beiden Linien im eigentlichen Sinne nicht die Rede sein kann

Ueberlegt man jetzt, dass in Taf. V. Fig. 2. sowohl die Winkel $AA'C$ und ADC, als auch die Winkel $BB'C$ und BDC einander gleich sind, so wird mittelst des im Vorhergehenden Bewiesenen leicht die Richtigkeit der folgenden Methode des Rückwärtseinschneidens mit dem Messtische erhellen, wobei ich die den drei auf dem Messtische gegebenen Punkten A, B, C entsprechenden Punkte auf dem Felde durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnen werde.

Man lege die Kippregel an BA und orientire den Tisch nach $\mathfrak{A}$, lege die Kippregel an C, visire nach $\mathfrak{C}$, und bestimme in dieser Lage der Kippregel deren Durchschnittspunkt A' mit der Linie AB.

Ferner lege man die Kippregel an AB und orientire den Tisch nach $\mathfrak{B}$, lege die Kippregel an C, visire nach $\mathfrak{C}$, und bestimme in dieser Lage der Kippregel deren Durchschnittspunkt B' mit der Linie AB.

Nun unterscheide man die vier folgenden Fälle:

1. Wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus nach entgegengesetzten Seiten hin liegen.

2. Wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus nach derselben Seite hin liegen und

$$AB' > BA'$$

ist.

3. Wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B nur nach derselben Seite hin liegen und

$$AB' < BA'$$

ist.

4. Wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus nach derselben Seite hin liegen und

$$AB' = BA'$$

ist.

Im ersten Falle bestimme man in der Linie AB den Punkt O so, dass sich seine Entfernungen AO und BO von den Punkten A und B eben so zu einander verhalten wie die Linien AB' und BA'.

Im zweiten Falle bestimme man in der Verlängerung der Linie AB über den Punkt B hinaus den Punkt O so, dass sich seine Entfernungen AO und BO von den Punkten A und B eben so zu einander verhalten wie die Linien AB' und BA'.

Im dritten Falle bestimme man in der Verlängerung der Linie AB über den Punkt A hinaus den Punkt O so, dass seine Entfernungen AO und BO von den Punkten A und B sich eben so zu einander verhalten wie die Linien AB' und BA'.

Im vierten Falle bestimme man den Punkt O so, dass die durch ihn und den Punkt C der Lage nach bestimmte gerade Linie der Linie AB parallel ist.

Auch kann man bei der Bestimmung der Lage des Punktes O aus den vier Punkten A, B, A', B' nach den vorhergehenden Regeln die Punkte A, A' und B, B' gegen einander vertauschen, d. h. in diesen Regeln überall B für A und A für B setzen.

Hat man aber auf diese Weise die Lage des Punktes O bestimmt, so lege man die Kippregel an die Linie OC und orientire den Tisch nach C, worauf derselbe *richtig* orientirt sein wird, und dann bekanntlich die Bestimmung der Lage des gesuchten Punkts D keiner weiteren Schwierigkeit unterliegt, was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

Bei der Bestimmung der Lage des Punktes O in den Linien AB oder $A'B'$, oder deren Verlängerungen über ihre Endpunkte hinaus, aus den Proportionen

$$AO : BO = AB' : BA'$$

oder

$$A'O : B'O = A'B : B'A,$$

könnte man sich allerdings der bekannten ganz einfachen strengen geometrischen Constructionen bedienen. In der Praxis wird man sich aber hierbei wohl meistens auf das Augenmaass verlassen müssen und nur durch successive Annäherung zur genauen Bestimmung des Punktes O und hiernach auch des Punktes D gelangen können.

Auch darf nicht unbemerkt bleiben, dass die obige Methode des Rückwärtseinschneidens, weil die Linie OC, wie wir vorher gesehen haben, der Linie AB in gewissen Fällen parallel werden kann, wenn die Linie OC sich dieser Lage nähert, für die praktische Anwendung so gut wie unbrauchbar werden kann.

Ich habe dieselbe hier jedoch nicht unterdrücken wollen, weil ich der Meinung bin, dass man dergleichen Methoden in der Praxis nicht genug haben kann, indem sich wohl schwerlich eine für alle möglichen Fälle gleich gut geeignete Methode zur Ausführung der so wichtigen Operation des Rückwärtseinschneidens auffinden lassen dürfte. Was in der Theorie manchmal ganz hübsch aussieht, taugt in speciellen Fällen öfters für die Praxis gar nichts.

Die vollständige Begründung der vorhergehenden Methode mit Hülfe blosser Elementarsätze der ebenen Geometrie aus der Lehre vom Kreise, welche sich ohne Schwierigkeit geben lassen würde, und oben in der Note schon angedeutet worden ist, glaube ich füglich dem Leser überlassen zu können. Ich habe mich im vorliegenden Falle ganz absichtlich der Lehren der analytischen Geometrie bedient, da dieselbe hier noch zu einigen andern, wie ich glaube, nicht ganz uninteressanten Resultaten führen.

XXXV.

Ueber Transversalen im Dreieck und den ihnen zugeordneten Punkt.

Von dem

Herrn Dr. J. R. Boyman,

Gymnasiallehrer zu Coblenz.

(Zu diesem Aufsatze gehört Tafel VI., welche man gleich vom Anfange an zu vergleichen hat.)

1.

Beschreibt man um irgend ein Dreieck ABC einen Kreis und zieht von einem beliebigen Punkte P der Peripherie nach den Dreiecksseiten unter gleichem, übrigens beliebigem Winkel in demselben Sinne drei gerade Linien Pp_1, Pp_2, Pp_3; so liegt jedes System der vier Punkte PCp_1p_2; PAp_2p_3; PBp_1p_3 auf einer neuen Kreislinie. Verbindet man nun zwei der Fusspunkte durch eine gerade Linie, z. B. p_1 mit p_3, so wie P mit den Ecken A, B, C: so ist $\angle PAC = \angle PBC = \angle PBp_1 = \angle Pp_3p_1$, also $\angle PAC = \angle Pp_3p_1$. Diese Winkel sind aber Peripheriewinkel des Kreises PAp_2p_3. Die Schenkel des erstern gehen durch die Endpunkte des Bogens Pp_2, und da der eine Schenkel des zweiten Winkels durch P geht, so muss der andere ebenfalls durch p_2 gehen: $p_1p_2p_3$ ist mithin eine gerade Linie. — Hier ist also auf ganz elementare Weise folgender bekannte Satz erwiesen:

„Wenn man von irgend einem Punkte auf der Peripherie „eines Kreises nach den drei Seiten eines einbeschriebenen Drei„ecks unter demselben beliebigen Winkel gerade Linien zieht, so „liegen die drei Fusspunkte in einer geraden Linie.“

2.

Trifft eine beliebige Gerade die Seiten eines Dreiecks ABC in den drei Punkten p_1, p_2, p_3 und man beschreibt durch irgend zwei Winkelpunkte und die auf den anstossenden Seiten liegenden Durchschnitte der geraden Linie, z. B. durch C, p_1, p_2 und A, p_2, p_3, zwei Kreise, und verbindet deren Durchschnitt P mit den Ecken des Dreiecks und den Punkten p_1, p_2, p_3: so ist offenbar $\angle Pp_1C = \angle Pp_2A = \angle Pp_3A$. Ueberdies ist $\angle p_1p_3B = \angle p_2PA$ und $\angle p_3p_1B = \angle CPp_2$, folglich $\angle ABC + \angle CPA = 2R$. Daher liegt der Punkt P auf der dem Dreieck ABC umschriebenen Kreislinie. Für eine andere schneidende Gerade wird der Punkt P im Allgemeinen ein anderer, liegt aber immer auf dem Umfang des dem gegebenen Dreieck umschriebenen Kreises. — Wir haben folglich den Satz:

„Legt man durch die Seite eines Dreiecks beliebig viele „Transversalen, so lässt sich für jede derselben immer ein Punkt „finden von der Eigenschaft, dass die von demselben nach den „drei Durchschnittspunkten gezogenen Geraden den Seiten des „Dreiecks unter demselben Winkel begegnen. Der Ort aller die„ser Punkte ist die dem Dreieck umschriebene Kreislinie.

3.

Zugleich ist der folgende Satz bewiesen:

„Beschreibt man um jedes der vier Dreiecke, welche die vier „Seiten eines vollständigen Vierecks unter sich bilden, einen „Kreis: so schneiden diese vier Kreise sich in Einem Punkte, „welcher überdies die Eigenschaft hat, dass die Geraden, welche „von ihm nach den drei auf derselben Seite liegenden Durch„schnitten gezogen werden, hier mit den drei andern Seiten „gleiche Winkel einschliessen.“

4.

Erklärung. Der Punkt, dessen Verbindungslinien mit den Durchschnitten einer durch ein Dreieck gelegten Transversale den Seiten desselben unter dem nämlichen Winkel begegnen, soll der der Transversale (nach diesem Winkel) zugeordnete Punkt, und dem entsprechend die Transversale die dem Punkte (nach diesem Winkel) zugeordnete Transversale genannt werden.

5.

Es ist leicht zu zeigen, dass jedes Paar der folgenden Dreiecke ähnlich ist, nämlich:

$$\Delta PBA \backsim \Delta Pp_1p_2, \ \Delta PCA \backsim \Delta Pp_1p_3, \ \Delta PCB \backsim \Delta Pp_2p_3.$$

Daher ist denn auch $\angle BPA = \angle p_1Pp_2$, $\angle CPA = \angle p_1Pp_3$, $\angle CPB = \angle p_2Pp_3$. Die Gleichheit dieser Winkel besteht, wie auch immer die Transversale ihre Lage ändern mag, wenn sie nur dem Punkt P zugeordnet bleibt. — Daher der Satz:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks beliebig viele „Transversalen, welche alle ein und demselben Punkte zugeord-„net sind, so werden ihre zwischen denselben zwei Seiten ent-„haltenen Segmente und die jedesmalige dritte Seite von jenem „Punkte aus unter demselben Winkel gesehen."

6.

Aus der Aehnlichkeit obiger Dreiecke ergeben sich folgende Proportionen:

$$BA : p_1p_2 = PB : Pp_1 = PA : Pp_2,$$

$$CA : p_1p_3 = PC : Pp_1 = PA : Pp_3,$$

$$CB : p_2p_3 = PC : Pp_2 = PB : Pp_3.$$

Hierin ist folgender Satz enthalten:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks eine beliebige „Transversale: so ist das Verhältniss aus irgend einer Dreiecks-„seite und dem von den beiden andern Seiten intercептirten Seg-„ment der Transversale dem Verhältniss aus den Entfernungen „des der Transversale zugeordneten Punktes von denjenigen End-„punkten dieser Seite und des Segmentes gleich, welche auf der-„selben anstossenden Dreiecksseite liegen."

Aus obiger Proportion folgt noch die Gleichung:

$$PA . Pp_1 = PB . Pp_2 = PC . Pp_3.$$

Dies gibt nachstehenden Satz:

„Die Produkte der Entfernungen des einer Transversale des „Dreiecks zugeordneten Punktes jedesmal von einer Ecke des „Dreiecks und dem Durchschnittspunkt der Transversale mit der „gegenüberstehenden Seite sind einander gleich."

7.

Auch ist jedes Paar der folgenden Dreiecke ähnlich:

$$PBp_1 \backsim \Delta PAp_2, \quad \Delta PCp_1 \backsim \Delta PAp_3, \quad \Delta PCp_2 \backsim \Delta PBp_3.$$

…s ergeben sich nun die Proportionen:

$$PB:PA = Pp_1:Pp_2 = Bp_1:Ap_2;$$

$$PA:PC = Pp_3:Pp_1 = Ap_3:Cp_1;$$

$$PC:PB = Pp_2:Pp_3 = Cp_2:Bp_3.$$

… ist folgender Satz enthalten:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks eine beliebige …nsversale: so sind die Entfernungen des derselben zugeord…ten Punktes von den Endpunkten irgend einer Dreiecksseite … die Entfernungen eben dieses Punktes (so wie auch der …ählten Endpunkte) von denjenigen Durchschnitten der Trans…ale, welche mit jenen Endpunkten auf derselben anstossen… Dreiecksseite liegen, verhältnissgleich."

8.

Aus den vorstehenden Proportionen ergibt sich die Gleichung:

$$Cp_1 \,.\, Ap_2 \,.\, Bp_3 = Bp_1 \,.\, Cp_2 \,.\, Ap_3.$$

…rin liegt nachstehender Satz:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks eine beliebige …nsversale: so ist das Produkt der von den drei Winkelpunk…aus abwechselnd genommenen Seitensegmente dem Produkte … drei anderen abwechselnden Seitensegmente gleich."

Dieser Satz war nach Brianchon und Poncelet schon … Alten bekannt (s. Plücker „Entwicklungen". Bd. II. …437.) und soll sich zuerst in der „Sphärik" des Menelaus …den.

Anmerkung. Der vorstehende Satz gilt auch umgekehrt, …: Sind die Punkte p_1, p_2, p_3 auf den Seiten des Dreiecks … ihren Verlängerungen so genommen, dass

$$Cp_1 \,.\, Ap_2 \,.\, Bp_3 = Bp_1 \,.\, Cp_2 \,.\, Ap_3,$$

…liegen diese Punkte in gerader Linie. Vergl. Adams „Lehre … den Transversalen" S. 6., und „Harmonische Ver…ltnisse" S. 88.

9.

Durch irgend drei sich schneidende Geraden AB, AC, seien drei neue Geraden $p_1p_2p_3$, $q_1q_2q_3$, $r_1r_2r_3$ gezogen, w in Bezug auf das durch die drei ersteren gebildete Dreie ein und demselben Punkt P zugeordnete Transversalen sin sich in den Punkten k_1, k_2, k_3 schneiden: alsdann erhä im Ganzen zwanzig Kreise, welche sich alle im Punkte P setzen, nämlich:

$$ABCP,$$

$$PAp_2p_3,\ PAq_2q_3,\ PAr_2r_3;$$

$$PBp_1p_3,\ PBq_1q_3,\ PBr_1r_3;$$

$$PCp_1p_2,\ PCq_1q_2,\ PCr_1r_2;\ -$$

$$Pk_1p_1q_1,\ Pk_1p_2q_2,\ Pk_1p_3q_3;$$

$$Pk_2p_1r_1,\ Pk_2p_2r_2,\ Pk_2p_3r_3;$$

$$Pk_3q_1r_1,\ Pk_3q_2r_2,\ Pk_3q_3r_3;$$

$$Pk_1k_2k_3.$$

Von diesen sechs Geraden sind also je drei dem Punkt P ordnete Transversalen in Bezug auf das durch die drei gebildete Dreieck. Daher hat man durch Vermittlung folgende Proportionen:

$$p_1p_2:p_2p_3=q_1q_2:q_2q_3=r_1r_2:r_2r_3,$$
$$p_1q_1:q_1r_1=p_2q_2:q_2r_2=p_3q_3:q_3r_3,$$
u. s. w.

Daher der Satz:

„Zieht man in einer Ebene sechs sich schneidende Ger „so dass drei derselben zu einem und demselben Punkt „nete Transversalen sind in Bezug auf das durch die drei „gen gebildete Dreieck: so sind die auf irgend drei derselben „genden Segmentenpaare, welche von den drei übrigen inter „tirt werden, verhältnissgleich.

10.

Liegen ausserdem irgend drei Punkte, in welchen diese se Geraden, zu Paaren verbunden, sich schneiden (z. B. q_3p_3 mit dem Punkte P in gerader Linie, so ist noch in d $\Delta\, k_1k_2k_3$:

$$\angle k_1 = \angle p_2 P p_3 = \angle CAB,$$

$$\angle k_3 = \angle q_2 P q_1 = \angle ACB;$$

also

$$\angle k_2 = \angle ABC.$$

Dies giebt nachstehenden Satz:

„Wählt man auf den drei Seiten eines Dreiecks irgend drei „in gerader Linie liegende Punkte, und legt durch dieselben „drei Transversalen, welche einem und demselben, mit jenen „dreien in der nämlichen geraden Linie sich befindenden Punkte „zugeordnet sind: so schneiden sich diese drei Transversalen unter „den Winkeln des gegebenen Dreiecks.“

11.

Man bestimme zu irgend zwei parallelen Transversalen p_1p_3, q_1q_3 eines Dreiecks ABC die zugeordneten Punkte P und Q, und verbinde diese mit den ihnen entsprechenden Durchschnittspunkten p_1, p_2, p_3 und q_1, q_2, q_3, so wie mit den Ecken des Dreiecks; alsdann ist:

$$\angle CPp_1 = \angle Cp_2p_1 \quad \text{und} \quad \angle CQq_1 = \angle Cq_2q_1;$$

da aber

$$\angle Cp_2p_1 = \angle Cq_2q_1,$$

so ist

$$\angle CPp_1 = \angle CQq_1;$$

eben so folgt

$$\angle CPp_2 = \angle CQq_2;$$

und auch

$$\angle CPp_3 = \angle CQq_3.$$

Daher hat man folgenden Satz:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks beliebig viele „parallele Transversalen, und verbindet die diesen zugeordneten „Punkte mit den auf einer und derselben Dreiecksseite ihnen „entsprechenden Durchschnittspunkten dieser Transversalen: so „gehen diese Verbindungslinien alle durch einen und denselben „Punkt, welcher auf der dem Dreiecke umschriebenen Kreislinie „liegt.“

12.

Solcher Punkte erhält man offenbar drei, nämlich A', B', C'. Man verbinde diese zu einem Dreieck $A'B'C'$. Da nun

$\angle p_1 C p_2 = \angle p_1 P p_2$, $\angle p_2 AB = \angle p_2 P p_3$, $\angle p_1 B p_3 = \angle A'PC$;

so ist:

$$AB = A'B',\ BC = B'C',\ AC = A'C.$$

Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind also einander congruent. Beide Dreiecke sind offenbar auch **symmetrisch** nach der Linie MN, welche zugleich Durchmesser des Kreises ist. Daher treffen sich auch die Verbindungslinien $A\pi_1$, $B\pi_2$, $C\pi_3$ in einem und demselben Punkte P', welcher dem Punkte P, so wie die Verbindungslinien $A\varphi_1$, $B\varphi_2$, $C\varphi_3$ in einem und demselben Punkte Q', welcher dem Punkte Q symmetrisch liegt.

Offenbar also, wenn man von dem Dreiecke $A'B'C'$ mit denselben Transversalen p_1p_3, q_1q_3 ausgegangen wäre, würde man auf das Dreieck ABC und die in Bezug auf dasselbe diesen Transversalen zugeordneten Punkte P und Q gekommen sein.

Transversalen in derselben Richtung mit p_1p_3 führen alle auf dasselbe Dreieck $A'B'C'$; Transversalen in einer andern Richtung geben ein anderes, aber immer dem Dreieck ABC congruentes und symmetrisches Dreieck.

13.

Durch die Seiten des Dreiecks ABC lege man die Transversale DH so, dass das zwischen zwei Seiten enthaltene Segment DH durch die dritte Seite so getheilt werde, dass $DL:LH=p:q$, und bestimme den derselben zugeordneten Punkt P und ziehe PA, PC, PL. Nach §. 6. ist alsdann:

$$AB:DL = PA:PL,$$

$$CB:LH = PC:PL,$$

woraus in Verbindung mit vorstehender Bedingungs-Proportion sich ergibt:

$$AB.PC:CB.PA = p:q.$$

Hierin liegt folgender Satz:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks eine Transver-
„sale so, dass das zwischen zwei Dreiecksseiten interceptirte
„Segment derselben durch die dritte Seite in dem Verhältniss
„$p:q$ getheilt wird, so bildet der dieser Transversale zugeordnete
„Punkt mit den Eckpunkten des Dreiecks ein Kreisviereck, in
„welchem die Produkte aus den gegenüberstehenden Seiten in
„dem gegebenen Verhältniss $p:q$ stehen.

Für den Fall, dass das Verhältniss $p:q=1$. sind die Produkte aus den gegenüberstehenden Seiten des Vierecks einander gleich.

14.

Es gibt offenbar unendlich viele Transversalen, welche durch dieselbe dritte Seite AC in dem Verhältniss $p:q$ getheilt werden. Da es aber auf dem Bogen AC nur Einen Punkt P geben kann, für welchen $AB.PC:CB.PA=p:q$ ist, so haben alle Transversalen, welche durch dieselbe dritte Seite in dem Verhältniss $p:q$ getheilt werden, immer einen und denselben zugeordneten Punkt, und es bestimmen alle diese Transversalen also auch nur ein einziges Viereck.— Aehnlich entspricht allen durch die Seite AB in dem Verhältniss $m:n$ getheilten Transversalen ein und derselbe zugeordnete Punkt Q, so wie den durch die Seite BC in dem Verhältniss $r:s$ getheilten Transversalen ein und derselbe zugeordnete Punkt R. Somit erhalten wir im Ganzen drei solcher Vierecke, nämlich $ABCP$, $BCAQ$, $CABR$. Für diese bestehen also die folgenden drei Proportionen:

$$AB.PC:CB.PA=p:q,$$

$$CB.QA:AC.QB=m:n,$$

$$AC.RB:AB.RC=r:s;$$

aus welchen sich durch Multiplikation und Aufhebung der gleichen Glieder nachstehende Proportion ergibt:

$$PC.RB.QA:PA.QB.RC=pmr:qns.$$

Daher hat man den Satz:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks drei Transversalen, welche einzeln (und zwar hinsichts der interceptirenden „Seitenpaare nach derselben Ordnung) in den Verhältnissen $p:q$, „$m:n$, $r:s$ getheilt werden, so bilden die drei diesen Transversalen zugeordneten Punkte mit den Eckpunkten des Dreiecks ein „Sechseck im Kreise, für welches die Produkte aus den drei abwechselnden Seiten in dem zusammengesetzten Verhältnisse „$pmr:qns$ stehen."

Für den Fall, dass $m:n=r:s=p:q$ erhält man

$$PC.RB.QA:PA.QB.RC=p^3:q^3.$$

Ist ausserdem noch $p:q=1$, so sind die Produkte aus den abwechselnden Seiten des Sechsecks einander gleich.

15.

In einem beliebigen Kreisviereck $ABCD$ ziehe man die beiden Diagonalen, und bestimme durch Fällung der Perpendikel aus den Winkelpunkten auf die Seiten und Diagonalen des Vierecks die diesen Winkelpunkten in Bezug auf das jedesmal gegenüberstehende Dreieck nach dem rechten Winkel zugeordneten Transversalen, nämlich $p_1p_2p_3$, $p_4p_5p_6$, $p_7p_8p_9$, $p_{10}p_{11}p_{12}$; alsdann ist nach §. 6. und weil $\triangle CAp_6 \backsim \triangle DBp_1$:

$$p_1p_3 : CA = Dp_1 : DC,$$

$$p_4p_6 : BD = Cp_6 : CD;$$

$$CA : Cp_6 = BD : Dp_1;$$

mithin

$$p_1p_3 = p_4p_6. \qquad 1)$$

Ferner hat man:

$$p_4p_6 : BD = Cp_4 : CB,$$

$$p_7p_9 : AC = Bp_9 : BC;$$

$$BD : Bp_9 = AC : Cp_4;$$

folglich

$$p_4p_6 = p_7p_9. \qquad 2)$$

Ebenso ist:

$$p_7p_9 : AC = Bp_7 : BA,$$

$$p_{10}p_{12} : DB = Ap_{12} : AB;$$

$$AC : Ap_{12} = DB : Bp_7;$$

daher auch

$$p_7p_9 = p_{10}p_{12}. \qquad 3)$$

Aus der Verbindung von 1), 2), 3) ergeben sich nun folgende Gleichheiten:

$$p_1p_3 = p_4p_6 = p_7p_9 = p_{10}p_{12}; \qquad \text{I.}$$

ebenso findet man:

$$p_1p_2 = p_5p_6 = p_7p_8 = p_{11}p_{12}; \qquad \text{II.}$$

und endlich auch:

$$p_2p_3 = p_4p_5 = p_8p_9 = p_{10}p_{11}. \qquad \text{III.}$$

Hierin liegt nachstehender Satz:

„Wenn man in einem Kreisviereck die beiden Diagonalen „zieht und zu jedem Winkelpunkte in Bezug auf das jedesmal „gegenüberstehende Dreieck die nach dem rechten Winkel zu„geordnete Transversale construirt: so sind sowohl diese vier

„Transversalen, welche zwischen je zwei anstossenden Vierecks-„seiten liegen, unter sich gleich, als auch jedesmal diejenigen „vier Segmente derselben, welche zwischen den Diagonalen und „je zwei gegenüberstehenden Seiten des Vierecks enthalten sind."

16.

Durchschneiden sich zwei gleiche Sehnen innerhalb oder ausserhalb des Kreises, so sind bekanntlich die Segmente der einen Sehne den Segmenten der andern beziehlich gleich. Solche gleiche Sehnen eines Kreises sind aber die Transversalen p_1p_3 und p_7p_9, p_4p_6 und $p_{10}p_{12}$. Wenn wir nun den Durchschnittspunkt von p_1p_3 und p_7p_9 mit O_1, den Durchschnittspunkt von p_4p_6 und $p_{10}p_{12}$ mit O_2 bezeichnen, so ist daher:

$$O_1p_1=O_1p_7,\ O_1p_3=O_1p_9,\ O_1p_2=O_1p_8;$$

$$O_2p_4=O_2p_{10},\ O_2p_6=O_2p_{12},\ O_2p_5=O_2p_{11}.$$

Indem wir hier in jeder Reihe multipliciren, ergibt sich:

$$O_1p_1.O_1p_2=O_1p_7.O_1p_8,\ O_1p_2.O_1p_3=O_1p_8.O_1p_9;$$

$$O_2p_4.O_2p_5=O_2p_{10}.O_2p_{11},\ O_2p_5.O_2p_6=O_2p_{11}.O_2p_{12}.$$

Demnach ist sowohl O_1 als O_2 der Durchschnittspunkt der Potenzlinien der Kreise M_1 und M_2, so wie der Kreise M_3 und M_4; beide Punkte sind also nur Einer, den wir in der Figur mit O bezeichnet haben.

Hierin liegt der Satz:

„Wenn man in einem Kreisviereck, in welchem die Diago-„nalen gezogen sind, zu jedem Winkelpunkt in Bezug auf das „gegenüberliegende Dreieck die nach dem rechten Winkel zuge-„ordneten Transversalen construirt: so durchschneiden sich diese „vier Transversalen in einem und demselben Punkte."

17.

Gleiche Sehnen derselben Kreise sind auch noch:

p_1p_2 und p_5p_6, p_2p_3 und $p_{10}p_{11}$, p_4p_5 und p_8p_9, p_7p_8 und $p_{11}p_{12}$.

Demnach hat man ferner:

$$Op_1=Op_6=Op_7=Op_{12};$$

$$Op_2=Op_5=Op_8=Op_{11};$$

$$Op_3=Op_4=Op_9=Op_{10}.$$

Dies giebt nachstehenden Satz:

„Fällt man aus den Winkelpunkten eines Kreisviereck
„welchem die Diagonalen gezogen sind, auf die Seiten des
„mal gegenüberliegenden Dreiecks die drei Perpendikel: s
„gen die zwölf Fusspunkte, zu vier zusammen geordnet, au
„Peripherien dreier concentrischer Kreise, deren Mittelpun
„gemeinschaftliche Durchschnitt der vier Transversalen ist, w
„durch je drei entsprechende Fusspunkte gelegt sind."

18.

Aus den vorhergehenden Gleichungen erhält man auch:

$$Op_1.Op_3 = Op_{11}.Op_{12};\quad Op_2.Op_3 = Op_4.Op_5;$$
$$Op_1.Op_3 = Op_{10}Op_{12};$$

mithin ist O der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der P
linien der Kreise M_1 und M_2; M_3 und M_4; M_5 und M_6.

Daher der Satz:

„Beschreibt man in einem Kreisviereck über je zwei g
„überstehende Seiten und über die beiden Diagonalen als D
„messer Kreise: so schneiden sich die Potenzlinien diese
„Kreisepaare in einem und demselben Punkte, dem Durchsch
„punkt der vier Transversalen, welche den einzelnen W
„punkten in Bezug auf das jedesmal gegenüberstehende D
„nach dem rechten Winkel zugeordnet sind."

XXXVI.

[Ent]wickelung der Gleichung der Lo[xo]drome auf dem durch Drehung der [P]arabel um ihre äussere Axe entstehenden Rotationsparaboloid.

Von dem
Herrn Dr. J. R. Boyman,
Gymnasiallehrer zu Coblenz.

Lässt man die Parabel um ihre äussere Axe, die Axe der Z, [si]ch drehen, so erhält man ein Rotationsparaboloid, welches dargestellt ist durch folgende Gleichung:

$$x^2+y^2=\frac{z^4}{p^2}. \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

[Aus] dieser Gleichung ergibt sich durch Differentiation:

$$xdx+ydy=\frac{2z^3dz}{p^2}, \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

[d]aher ist:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{p^2x}{2z^3}, \quad \frac{dz}{dy}=\frac{p^2y}{2z^3}.$$

[Setzt man d]en diese Werthe in die allgemeine Gleichung der Loxodro[me,] welche ist:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-\operatorname{tang}\gamma.\left[y+y\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+x\frac{dz}{dx}.\frac{dz}{dy}\right]}{y\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\operatorname{tang}\gamma.\left[x+x\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+y\frac{dz}{dx}.\frac{dz}{dy}\right]}$$

substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x\left(1+\frac{p^4x^2}{4z^6}+\frac{p^4y^2}{4z^6}\right)^{\frac{1}{2}}-\operatorname{tang}\gamma.\left(y+y\frac{p^4y^2}{4z^6}+x\frac{p^4xy}{4z^6}\right)}{y\left(1+\frac{p^4x^2}{4z^6}+\frac{p^4y^2}{4z^6}\right)^{\frac{1}{2}}+\operatorname{tang}\gamma.\left(x+x\frac{p^4x^2}{4z^6}+y\frac{p^4xy}{4z^6}\right)},$$

oder mit geringer Veränderung:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x\left(1+\frac{p^4(x^2+y^2)}{4z^6}\right)^{\frac{1}{2}}-\operatorname{tang}\gamma.\left(1+\frac{p^4(x^2+y^2)}{4z^6}\right)y}{y\left(1+\frac{p^4(x^2+y^2)}{4z^6}\right)^{\frac{1}{2}}+\operatorname{tang}\gamma.\left(1+\frac{p^4(x^2+y^2)}{4z^6}\right)x}.$$

Diese Gleichung geht durch Ausscheidung des gemeinsa Faktors $\left(1+\frac{p^4(x^2+y^2)}{4z^6}\right)^{\frac{1}{2}}$ und mit Rücksicht auf Gleichung in die nachstehende über:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x-\operatorname{tang}\gamma.\left(1+\frac{p^2}{4z^2}\right)^{\frac{1}{2}}y}{y+\operatorname{tang}\gamma.\left(1+\frac{p^2}{4z^2}\right)^{\frac{1}{2}}x},$$

welche folgendermassen sich darstellen lässt:

$$ydx-xdy=-\operatorname{tang}\gamma.\left(1+\frac{p^2}{4z^2}\right)^{\frac{1}{2}}.(xdx+ydy).$$

Substituirt man nun hierin auf der rechten Seite aus Gleich 2) den Werth in z, und dividirt Behufs der Integration auf den Seiten beziehlich durch $x^2+y^2=\frac{z^4}{p^2}$, so erhält man:

$$\int\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=-\operatorname{tang}\gamma.\int(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^2},$$

und für die Gleichungen in x und z, so wie in y und z, ind man $x^2+y^2=v^2=\text{const.}$ setzt:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{v^2-x^2}}=-\operatorname{tang}\gamma.\int(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^2},$$

$$\int\frac{-dy}{\sqrt{v^2-y^2}}=-\operatorname{tang}\gamma.\int(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^2}.$$

---

*) M. s. Archiv Theil VII. S. 337.

Nun ist aber:

$$\int -z^{-2}(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}\,dz$$

$$=\frac{(p^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2 z}-\frac{4z(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}}{p^2}-4\int(p^2+4z^2)^{-\frac{1}{2}}\,dz$$

$$=\frac{(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}}{z}-2\log\left(2z+(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}\right)+\text{Const.}$$

Daher erhält man, indem man die nach dem Anfange der Curve zu bestimmende Const. $=\operatorname{tang}\gamma.(2\log B-A)$ setzt, die Endgleichung:

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{x}{y}$$

$$=\operatorname{tang}\gamma.\left[\frac{(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}-Az}{z}-2\log\frac{2z+(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}}{B}\right],$$

die Gleichung der Wendelfläche dieses Rotationsparaboloids, welche in Verbindung mit der Gleichung des Rotationsparaboloids 1) die Paraboloidische Loxodrome bestimmt; ebenso:

$$\operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{v}$$

$$=\operatorname{tang}\gamma.\left[\frac{(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}-Az}{z}-2\log\frac{2z+(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}}{B}\right],$$

$$\operatorname{Arc\,cos}\frac{y}{v}$$

$$=\operatorname{tang}\gamma.\left[\frac{(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}-Az}{z}-2\log\frac{2z+(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}}{B}\right],$$

die Gleichungen der Projektionen dieser Paraboloidischen Loxodrome auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ, welche dieselbe ebenfalls vollständig bestimmen.

In anderer Form lauten diese Gleichungen, wenn man noch zur Abkürzung den Ausdruck in der Klammer mit P_1 bezeichnet, also:

$$x=y\operatorname{tang}(\operatorname{tang}\gamma.P_1),$$

$$x=v\sin(\operatorname{tang}\gamma.P_1),$$

$$y=v\cos(\operatorname{tang}\gamma.P_1).$$

XXXVII.

Ueber parallele Transversalen im Dreieck, welche von den Dreiecksseiten nach demselben Verhältniss geschnitten werden.

Von dem

Herrn Dr. J. R. Boyman,

Gymnasiallehrer zu Coblenz.

1.

Durch die Seiten eines Dreiecks ABC lege man drei unter sich parallele Transversalen, so dass in jedem Winkel eine ganze Transversale, ein grösserer und ein kleinerer Abschnitt liegt und die zwischen den Dreiecksseiten enthaltenen Segmente in demselben Verhältniss stehen, so dass also mit Bezug auf Taf. VII. Fig. 1.:

$$EJ:JK=HL:LD=GO:OF=m:n.$$

Alsdann hat man, indem man $m+n=s$ setzt, folgende Proportionen:

$$1)\quad \begin{cases} AF:AH=FG:\frac{m}{s}DH, \\ BE:BO=\frac{m}{s}EK:\frac{n}{s}FG, \\ CL:CJ=\frac{n}{s}DH:EK; \end{cases}$$

$$2)\qquad \begin{cases} AH : AJ = \frac{m}{s} DH : \frac{n}{s} EK, \\ BO : BD = \frac{n}{s} FG : DH, \\ CK : CG = EK : \frac{m}{s} FG; \end{cases}$$

$$3)\qquad \begin{cases} AL : AG = \frac{m}{s} DH : FG, \\ BF : BJ = \frac{n}{s} FG : \frac{m}{s} EK, \\ CE : CD = EK : \frac{n}{s} DH; \end{cases}$$

$$4)\qquad \begin{cases} AG : AK = FG : \frac{n}{s} EK, \\ BJ : BH = \frac{m}{s} EK : DH, \\ CD : CO = \frac{n}{s} DH : \frac{m}{s} FG. \end{cases}$$

Aus diesen vier Gruppen von Proportionen folgen nachstehende Gleichungen:

$$5)\qquad \begin{cases} AF.BE.CL = AH.BO.CK, \\ AH.BO.CK = AJ.BD.CG; \\ AL.BF.CE = AG.BJ.CD, \\ AG.BJ.CD = AK.BH.CO; \end{cases}$$

aus welchen sich ergibt:

$$6)\qquad AF.BE.CL = AH.BO.CK = AJ.BD.CG;$$

$$7)\qquad AL.BF.CE = AG.BJ.CD = AK.BH.CO.$$

Nun bestehen aber ferner in Bezug auf die Transversalen FG, DH, EK nach dem Satze des Menelaos die Gleichungen:

$$8)\qquad \begin{cases} AF.BO.CG = AG.BF.CO, \\ AH.BD.CL = AL.BH.CD, \\ AJ.BE.CK = AK.BJ.CE; \end{cases}$$

woraus durch Multiplikation sich ergibt:

$$9)\quad \left\{\begin{array}{l}(AF.BE.CL)\\ \times(AH.BO.CK)\\ \times(AJ.BD.CG)\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}(AL.BF.CE)\\ \times(AK.BH.CO)\\ \times(AG.BJ.CD).\end{array}\right\}.$$

Da nun in dieser Gleichung die in Klammern gestellten Produkte auf derselben Seite nach 6) und 7) einander gleich sind, so sind diese sechs Produkte alle einander gleich, so dass man hat:

$$10)\quad \begin{cases} AF.BE.CL = AL.BF.CE = \\ AH.BO.CK = AK.BH.CO = \\ AJ.BD.CG = AG.BJ.CD. \end{cases}$$

Man hat also den Satz:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks drei parallele „Transversalen, welche von den Dreiecksseiten in demselben Ver„hältniss getheilt werden, indem zugleich jeder Winkel eine ganze „Transversale, einen grösseren und einen kleineren Abschnitt „enthält: so liegen von den neun Durchschnittspunkten drei Mal „drei in gerader Linie, und geben die Verbindungslinien dersel„ben drei neue Transversalen, für welche die Produkte aus den „drei abwechselnden Segmenten der Dreiecksseiten alle einander „gleich sind.“

2.

Die erhaltenen Transversalen EF, GJ, KQ bilden unter sich ein neues Dreieck MNS, von dessen Seiten die parallelen Transversalen in demselben Verhältniss und auf dieselbe Weise, wie von den Seiten des Dreiecks ABC, geschnitten werden. Daher gilt für dieses Dreieck dasselbe, was für das Dreieck ABC gilt, dass nämlich die Produkte aus den abwechselnden Segmenten, in welche die Seiten desselben durch die Seiten des Dreiecks ABC getheilt werden, einander gleich sind, so dass sich ergibt:

$$11)\quad \begin{cases} MD.NE.SO = ME.NO.SD = \\ MF.NH.SJ = MJ.NF.SH = \\ ML.NK.SG = MG.NL.SK. \end{cases}$$

Demnach hat man folgenden Satz:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks drei parallele „Transversalen, welche von den Dreiecksseiten in demselben „Verhältniss getheilt werden, indem zugleich in jedem Winkel „eine ganze Transversale, ein grösserer und ein kleinerer Ab„schnitt liegt: so bilden die Verbindungslinien der drei Mal drei „in gerader Linie liegenden Punkte ein zweites Dreieck, welches „mit dem erstern die Beziehung hat, dass die Produkte aus den „abwechselnden Segmenten, welche auf den Seiten des einen „durch jede Seite des andern gebildet werden, in jedem Dreiecke „einander gleich sind.“

3.

Es bestehen auch folgende Proportionen

$$12)\quad \begin{cases} AH : AF = \frac{m}{s} DH : FG, \\ AH : AJ = \frac{m}{s} DH : \frac{n}{s} EK, \\ AJ : AF = \frac{n}{s} JK : FG; \\ BF : BH = \frac{n}{s} FG : DH, \\ BF : BJ = \frac{n}{s} FG : \frac{m}{s} JK, \\ BJ : BH = \frac{m}{s} EK : DH; \end{cases}$$

ner:

$$13)\quad \begin{cases} BE : BD = \frac{m}{s} EK : DH, \\ BE : BO = \frac{m}{s} EK : \frac{n}{s} FG, \\ BO : BD = \frac{n}{s} FG : DH; \\ CD : CE = \frac{n}{s} DH : EK, \\ CD : CO = \frac{n}{s} DH : \frac{m}{s} FG, \\ CO : CE = \frac{m}{s} FG : EK; \end{cases}$$

ndlich:

$$14)\quad \begin{cases} CG:CK = \frac{m}{s} FG : EK, \\ CG:CL = \frac{m}{s} FG : \frac{n}{s} DH, \\ CL:CK = \frac{n}{s} DH : EK; \\ AK:AG = \frac{n}{s} EK : FG, \\ AK:AL = \frac{n}{s} EK : \frac{m}{s} DH, \\ AL:AG = \frac{m}{s} DH : FG. \end{cases}$$

Aus diesen Gruppen ergibt sich durch Multiplication:

$$15)\quad \begin{cases} AH^2.BF.BJ : BH^2.AF.AJ = m^3 : s^3, \\ BF^2.AH.AJ : AF^2.BH.BJ = n^3 : s^3, \\ BJ^2.AF.AH : AJ^2.BF.BH = m^3 : n^3; \end{cases}$$

$$16)\quad \begin{cases} BE^2.CD.CO : CE^2.BD.BO = m^3 : s^3, \\ CD^2.BE.BO : BD^2.CE.CO = n^3 : s^3, \\ CO^2.BD.BE : BO^2.CD.CE = m^3 : n^3; \end{cases}$$

$$17)\quad \begin{cases} CG^2.AK.AL : AG^2.CK.CL = m^3 : s^3, \\ AK^2.CG.CL : CK^2.AG.AL = n^3 : s^3, \\ AL^2.CG.CK : CL^2.AG.AK = m^3 : n^3. \end{cases}$$

Multiplicirt man jetzt in diesen Nummern die dritten Proportionen mit einander und ausserdem noch das erste und zweite Glied beziehlich mit

$$AL.BJ.CO \times AJ.BO.CL$$
$$= AJ.BO.CL \times AL.BJ.CO,$$

so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} (AL^3.BJ^3.CO^3) \times \\ (AF.BO.CG) \times \\ (AH.BD.CL) \times \\ (AJ.BE.CK) \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l} (AJ^3.BO^3.CL^3) \times \\ (AG.BF.CO) \times \\ (AL.BH.CD) \times \\ (AK.BJ.CE) \end{array}\right\} = m^9 : n^9,$$

oder mit Rücksicht auf Nro. 8):

$$AL^3.BJ^3.CO^3 : AJ^3.BO^3.CL^3 = m^9 : n^9,$$

oder endlich:

18) $$AL.BJ.CO : AJ.BO.CL = m^3 : n^3.$$

Wir unterlassen es, die vorstehenden merkwürdigen Ausdrücke alle in Worten wiederzugeben, und beschränken uns auf den letzten.

In demselben liegt der Satz:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks drei parallele „Transversalen, welche von den Dreiecksseiten in demselben Ver„hältniss $(m:n)$ geschnitten werden, indem zugleich jeder Winkel „eine ganze Transversale, einen grössern und einen kleinern Ab„schnitt enthält: so werden die Dreiecksseiten durch die drei „nicht in gerader Linie liegenden Durchschnittspunkte so getheilt, „dass die Produkte aus den drei abwechselnden Segmenten der„selben sich verhalten, wie die Kuben der in gehöriger Ordnung „gewählten Verhältnissglieder.“

4.

Nehmen wir (Taf. VII. Fig. 2.) den speziellen Fall, dass die parallelen Transversalen einzeln durch die Seiten des Dreiecks halbirt werden, dass also $m = n$. Alsdann kann man zunächst die dritten Proportionen der Nummern 15), 16), 17) also aufstellen, wie folgt:

19) $$\begin{cases} AF.AH : BF.BH = AJ^2 : BJ^2, \\ BD.BE : CD.CE = BO^2 : CO^2, \\ CG.CK : AG.AK = CL^2 : AL^2. \end{cases}$$

In diesen Proportionen spricht sich folgender Satz aus:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks drei parallele „Transversalen, welche einzeln durch die Dreiecksseiten halbirt „werden: so bilden auf jeder Seite die drei Durchschnittspunkte „mit den beiden Ecken eine Involution von fünf Punkten, „und zwar ist jedesmal der Durchschnittspunkt, in welchem eine „Transversale halbirt ist, ein doppelter Punkt.

5.

Aus den beiden ersten Proportionen in den Nummern 15), 16), 17) erhalten wir unter derselben Voraussetzung folgende Gleichungen:

20) $$\begin{cases} BH^2.AF.AJ = 8AH^2.BF.BJ, \\ AF^2.BH.BJ = 8BF^2.AH.AJ; \end{cases}$$

$$21)\quad \begin{cases} CE^2.BD.BO=8BE^2.CD.CO, \\ BD^2.CE.CO=8CD^2.BE.BO; \end{cases}$$

$$22)\quad \begin{cases} AG^2.CK.CL=8CG^2.AK.AL, \\ CK^2.AG.AL=8AK^2.CG.CL. \end{cases}$$

Diese Gleichungen enthalten eine merkwürdige Beziehung hinsichts der Distanzen zwischen fünf in Involution stehenden Punkten.

Ferner erhalten wir unter obiger Voraussetzung aus Nr. 18) die Gleichung:

$$23)\quad AL.BJ.CO=AJ.BO.CL.$$

Auch ist in diesem Falle:

$$2AL:AK=DH:\frac{1}{2}EK,$$

$$BJ:BH=\frac{1}{2}EK:DH,$$

$$CO:CO=CO:CO;$$

woraus durch Multiplikation:

$$24)\quad 2AL.BJ.CO=AK.BH.CO.$$

Aus 23) und 24) ergibt sich nun der Satz:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks drei parallele „Transversalen, welche einzeln durch die Dreiecksseiten halbirt „werden: so liegen von den neun Durchschnittspunkten vier Mal „drei in gerader Linie, und geben die Verbindungslinien derselben vier neue Transversalen von der Eigenschaft, dass das Produkt aus den abwechselnden Segmenten, welche von der durch „die Halbirungspunkte gehenden Transversale auf den Seiten des „Dreiecks gebildet werden, gleich ist dem halben Produkte aus „den abwechselnden Segmenten, welche auf den Dreiecksseiten „durch eine der drei übrigen Transversalen bestimmt werden.“

6.

Diese drei letztern Transversalen bilden, wie schon erwähnt, ein neues Dreieck MNS, und da auch durch dessen Seiten die parallelen ursprünglichen Transversalen halbirt werden, so gilt für das Dreieck MNS dasselbe, was von dem Dreieck ABC gesagt ist. Jene drei Transversalen sind daher in den Durchschnitten mit sich und den Seiten des ursprünglichen Dreiecks ebenfalls nach einer Involution von fünf Punkten getheilt. Da demnach sowohl die Punkte J, A, H, F, B, als auch die Punkte J, M, D, G, S eine Involution bilden und $DH \# FG$

ist, so ist auch $AM \# DH \# FG \# BS$, und daher ebenfalls die Transversale JO, welche durch die Halbirungspunkte der parallelen ursprünglichen Transversalen geht, in den Punkten U, U, L, O, F nach einer Involution von fünf Punkten getheilt.

Noch ist zu bemerken, dass die Durchschnittspunkte von je zwei entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke ABC und MNS auf der Transversale JO, also in gerader Linie liegen; beide Dreiecke sind folglich collinear, und die Transversale JO ist ihre Collineations-Achse. Die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Ecken AM, CN, BS schneiden sich demnach in einem und demselben Punkte, dem Collineations-Centrum. Da dieser Punkt aber hier in unendlicher Entfernung liegt, so stehen beide Dreiecke zu einander in derjenigen besondern Beziehung, welche Möbius, nach dem Vorgange von Euler, in seinem trefflichen Barycentrischen Calcül Verwandtschaft der Affinität genannt hat.

XXXVIII.

Ueber die Theilung eines ebenen Dreiecks durch zwei sich innerhalb desselben schneidende gerade Linien in vier gleiche Flächenstücke.

Von dem
Herrn Dr. E. W. Grebe,
Gymnasiallehrer zu Cassel.

In der Sammlung geometrischer Aufgaben von Adams (Winterthur 1849) findet sich unter Nr. 87. auch die: „ein Dreieck durch zwei auf einander senkrechte Geraden in vier gleiche Theile zu theilen." Um eine Gleichung des achten Grades zu umgehen, glaubt sich Herr Adams Seite 308. seines Buches berechtigt, zwei Gleichungen, die in Beziehung auf dieselben Unbekannten vom zweiten Grade sind, als identisch zu betrachten, und g durch diese offenbare Uebereilung zu augenscheinlich fa Resultaten. Sowohl dieser Umstand, als der interessante (stand der Aufgabe an sich, hat mich veranlasst, dieselb neuem zu behandeln. Weil indessen die wichtigsten meine mein durch die Bedingung des rechtwinkeligen Durchsc nicht auffallend vereinfacht werden, so habe ich die Aufga gemeiner gestellt. Ob die Art, wie ich dieselbe durch Nä auflösend die Gleichung des achten Grades vermeide, den [illegible] der Leser dieses Archivs und insbesondere des Herrn A gewinnen werde, muss ich erwarten.

Die beiden Durchschnittslinien unseres Dreiecks endig vier Punkten des Umfangs. Wenigstens einer seiner Seiten, wir unsere Grundlinie CB (Taf. V. Fig. 3.) bestimmen w gehören mithin zwei dieser Endpunkte an. Bezeichnen wi mit a, CE mit x, BG mit y, EG mit z, W. CED m W. BGF mit ψ, den Durchschnittswinkel EHG mit ω, den Flä inhalt des Dreiecks ABC mit A; so erhalten wir den Ford gen unserer Aufgabe und einer bekannten trigonometrischen mel gemäss die Gleichungen:

$$[1]\quad A=\frac{\frac{1}{2}a^2}{\cot B+\cot C};\quad [2]\quad A=\frac{x^2}{\cot C+\cot\varphi};$$

$$[3]\quad A=\frac{y^2}{\cot B+\cot\psi};\quad [4]\quad A=\frac{2z^2}{\cot\varphi+\cot\psi}.$$

Aus den Verbindungen von [1] und [2], sowie von [1] u[illegible] folgt:

$$[5]\quad \cot\varphi=\frac{2x^2(\cot B+\cot C)}{a^2}-\cot C=\frac{x^2}{A}-\cot C;$$

$$[6]\quad \cot\psi=\frac{2y^2(\cot B+\cot C)}{a^2}-\cot B=\frac{y^2}{A}-\cot B;$$

endlich aus der Verbindung von [1] und [4], wenn man f cotφ und cotψ die Werthe in [5] und [6] substituirt und redu

$$[7]\quad 4z^2=2x^2+2y^2-a^2,$$

eine wegen ihrer Unabhängigkeit von allen Winkeln besond merkwürdige Formel.

Da nach der Trigonometrie

$$\cot\omega=\frac{1-\cot\varphi.\cot\psi}{\cot\varphi+\cot\psi},$$

mithin auch

$$1-(\cot\varphi+\cot\psi)\cot\omega=\cot\varphi.\cot\psi;$$

so ergibt sich durch Substitutionen aus [5] und [6] in diese letzte Gleichung, so wie durch Multiplication derselben mit A^2:

$$[8] \quad A^2 - 2Az\cot\omega = (x^2 - A\cot C)(y^2 - A\cot B).$$

Löst man nun die beiden Gleichungen [7] und [8] nach x^2 und y^2 auf; so erhält man nach einigen Vereinfachungen die Formeln:

$$[9] \quad x^2 = z^2 + A\cot C \pm 2\sqrt{z^4 + 2Az^2\cot\omega - A^2},$$

$$[10] \quad y^2 = z^2 + A\cot B \mp 2\sqrt{z^4 + 2Az^2\cot\omega - A^2};$$

in Folge welcher man nun auch statt [5] und [6] setzen kann:

$$[11] \quad \cot\varphi = \frac{z^2}{A} \pm \sqrt{\frac{z^4}{A^2} + \frac{2z^2\cot\omega}{A} - 1},$$

$$[12] \quad \cot\psi = \frac{z^2}{A} \mp \sqrt{\frac{z^4}{A^2} + \frac{2z^2\cot\omega}{A} - 1}.$$

Es ist einleuchtend, dass durch die Formeln [9], [10], [11] und [12] unsere Aufgabe vollständig gelöst sein würde, wenn die in diesen Formeln vorkommende Grösse z ermittelt wäre. Dieses ist nun aber, leider, nicht der Fall, und würde eben, wenn man die bereits gewonnenen Gleichungen mit der aus der Figur sich leicht ergebenden Fundamentalgleichung

$$[13] \quad z = x + y - a$$

verbinden wollte, zu einer Gleichung des achten Grades für z führen. Zum Glück ist jedoch der Werth von z in sehr enge Grenzen eingeschlossen; es fällt nämlich, wie sogleich gezeigt werden wird, z stets zwischen $\frac{2}{3}a$ und $\sqrt{\frac{1}{2}}.a$, z^2 also, welches in den Formeln vorkommt, zwischen $\frac{4}{9}a^2$ und $\frac{1}{2}a^2$, oder zwischen $\frac{16}{36}a^2$ und $\frac{18}{36}a^2$. Man kann daher ohne einen bedeutenden Fehler zu begehen — und dieses ist die Auflösungsmethode durch Näherung, welche ich vorschlage — in den Formeln [9] und [10] statt z^2 etwa $\frac{17}{36}a^2$ setzen, hiernach die Werthe von x und y berechnen, und sich dann durch die Formel [13] einen genaueren Werth von z verschaffen. Dieses Verfahren, nach Umständen mehrmals wiederholt, wird ohne Zweifel die Werthe für alle hier in Betracht kommenden Grössen mit jedem nur irgend gewünschten Grade von Genauigkeit liefern.

Um nun das eben über die Grenzen von z Gesagte zu erhärten, lösen wir die Gleichungen [7] und [13] nach x und y auf, wodurch wir, wenn wir noch festsetzen, dass x nicht kleiner als y sein solle, was ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun geschehen kann, erhalten:

$$[14]\quad \begin{cases} x=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{3z^2-2az}, \\ y=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{3z^2-2az}. \end{cases}$$

Der Wurzelausdruck in [14] wird nun aber für alle Werthe von z, welche kleiner als $\frac{2}{3}a$ sind, imaginär; $\frac{2}{3}a$ ist also die eine Grenze für z. Wächst es von da an, so wächst [14] zufolge auch x; dieses aber kann nie grösser werden als a. Man wird daher den grössten Werth von z erhalten, wenn man die Gleichung

$$a=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{3z^2-2az}$$

nach z auflöst. Thut man dieses, so erhält man $z=\sqrt{\frac{1}{2}}.a$, welcher Ausdruck mithin die andere Grenze für z ist.

Aus den von mir hingestellten allgemeinen Formeln, deren mehrere noch interessanter Umwandlungen fähig sind, wie z. B. [8], wenn man statt des Flächeninhalts und der Winkel B und C die Höhe des Dreiecks und die beiden Abschnitte der Grundlinie, welche dieselbe bildet, einführt, lassen sich ohne Schwierigkeit speciellere für besondere Arten von Dreiecken, so wie für besondere Durchschnittswinkel, namentlich einen rechten, ableiten. Solche Uebungen sind stets sehr genussreich. Ich begnüge mich hier damit, nur noch zwei Resultate derselben anzuführen. Erstens: ist das vorgelegte Dreieck gleichseitig und α ein Rechter, so lässt sich für z eine Gleichung des vierten Grades, nämlich

$$4z^4-16az^3+4a^2z^2+8a^3z-3a^4=0$$

aufstellen. Von den Wurzeln dieser Gleichung $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}.a$ und $(2\pm\sqrt{\frac{5}{2}})a$ ist aber nur die eine $z=+\sqrt{\frac{1}{2}}.a$ brauchbar. Zweitens: nimmt man den Durchschnittswinkel wieder als rechten an und setzt $z=\frac{2}{3}a$, wodurch sich $x=y=\frac{5}{6}a$ bestimmt; so findet man den Flächeninhalt des Dreiecks an keine andere Bedingung geknüpft, als dass der Abstand seiner Spitze von der Mitte der Grundlinie $=\frac{8}{9}a$ sei. Die Durchschnittslinien theilen hierbei beide Schenkel des Dreiecks in dem Verhältniss von 2 zu 3.

XXXIX.

Direktes Verfahren zum Rationalmachen der Gleichungen.

Von

Herrn H. Scheffler,

Baucondücteur bei den Herzoglich Braunschweigischen Eisenbahnen.

Im I. Hefte des diesjährigen Theiles des Archivs, Thl. XIII. Nr. IV., hat Hr. Dr. Grebe gezeigt, wie man einen jeden Bruch mit irrationalem Nenner so umformen kann, dass sein Nenner rational wird. Das diesem Verfahren zu Grunde liegende Princip leitet aber zu einer noch viel wichtigeren Anwendung, nämlich zu einer direkten Methode behuf Rationalmachung der Gleichungen. Hr. Dr. Grebe wird mir erlauben, seinen geistreichen Gedanken im Interesse der Wissenschaft zu diesem Zwecke hier weiter auszubeuten.

Jenes Prinzip beruht auf der Bemerkung, dass, wenn man aus den n Faktoren α, β, γ... mit $(m-1)$ maliger Wiederholung eines jeden Elementes die Kombinationen zu allen Klassen von der 1sten bis incl. zur $n(m-1)$ten bildet, und die hierdurch dargestellten Produkte, welche sich nebst der Zahl 1 auch durch die Entwickelung der Formel

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots\alpha^{m-1})(1+\beta+\beta^2+\ldots\beta^{m-1})(1+\gamma+\gamma^2+\ldots\gamma^{m-1})\ldots$$

ergeben, mit B, C, D... bezeichnet, eine Funktion von der Form

$$a+b\sqrt[m]{B}+c\sqrt[m]{C}+d\sqrt[m]{D}+\ldots,$$

deren Gliederzahl $=m^n$ ist, durch ein- oder mehrmalige Multiplikation mit einer ähnlichen Funktion, worin nur die Koeffizienten a, b, c, d.... andere Werthe haben, stets wieder eine ähnliche Funktion von derselben Gliederzahl und mit denselben Wurzelgrössen erzeugen muss, sobald man nur nach geschehener Multiplikation alle unter den Wurzelzeichen sich einstellenden Faktoren vom $m$ten Grade absondert und als rationale Koeffizienten vor diese Wurzelzeichen stellt, also z. B. $\sqrt[m]{e^m f} = e\sqrt[m]{f}$ schreibt.

Um von diesem Satze Gebrauch zu machen, würde es in jedem speziellen Falle (wo auch einige der Koeffizienten a, b, c.. gleich Null sein können) erforderlich sein:

1) dass man alle Wurzelgrössen, insofern sie nicht schon sämmtlich mit ein- und denselben positiven ganzen Exponenten gegeben sind, auf einerlei Wurzelbenennung m brächte, wobei m der kleinste gemeinschaftliche Dividend aller Wurzelexponenten werden würde;

2) dass man aus den hierdurch sich einstellenden Grössen B, C, D.... die einfacheren Faktoren α, β, γ.... bestimmte.

Aus der Grösse m^n, welche die Gliederzahl der so umgeformten und nöthigenfalls durch Glieder mit dem Koeffizienten Null vervollständigt gedachten Funktion ausdrückt, erkennt man aber, in welchem bedeutenden Maasse diese Gliederzahl sowohl mit dem Exponenten m, wie auch mit der Anzahl n der Faktoren α, β, γ.... wächst, und es erscheint daher zur Vermeidung einer überflüssigen Weitläufigkeit der Rechnung erforderlich, zuvörderst zu untersuchen, ob und wie weit sich diese Gliederzahl in jedem besondern Falle vermindern lasse.

Was zunächst die Umformung zu einerlei Wurzelexponenten anlangt, so kann man dieselbe zum grossen Vortheil der Rechnung sehr häufig unterlassen, **selbst wenn in ein und demselben Gliede mehrere Wurzelgrössen mit verschiedenen Exponenten mit einander multiplizirt wären,** wenn man also z. B. ein Glied von der Form $b\sqrt[m_1]{B_1}\sqrt[m_2]{B_2}\sqrt[m_3]{B_3}$ u. s. w. hätte. Denn angenommen, es kommen unter dem

Wurzelexponenten m_1 die Grössen B_1, C_1, D_1..... mit den n_1 einfacheren Faktoren α_1, β_1, γ_1....,
„ „ m_2 die Grössen B_2, C_2, D_2..... mit den n_2 einfacheren Faktoren α_2, β_2, γ_2....
„ „ m_3 die Grössen B_3, C_3, D_3..... mit den n_3 einfacheren Faktoren α_3, β_3, γ_3....

u. s. w. vor; so denke man sich alle Produkte, welche durch die Formel

$$\sqrt[m]{(\alpha_1^{r_1}\beta_1^{s_1}\gamma_1^{t_1}\ldots)}\sqrt[m_2]{(\alpha_2^{r_2}\beta_2^{s_2}\gamma_2^{t_2}\ldots)}\sqrt[m_3]{(\alpha_3^{r_3}\beta_3^{s_3}\gamma_3^{t_3}\ldots)}\ldots$$

dargestellt sind, indem man die Exponenten r_1, s_1, t_1..., r_2, s_2, t_2..

als von einander unabhängige Veränderliche ansieht, wovon nach und nach

ein jeder der Exponenten $r_1, s_1, t_1 \dots$ die Werthe $0, 1, 2 \dots m_1-1$
" " $r_2, s_2, t_2 \dots$ " $0, 1, 2 \dots m_2-1$
" " $r_3, s_3, t_3 \dots$ " $0, 1, 2 \dots m_3-1$

u. s. w. durchlaufen soll. Die Anzahl dieser Produkte, wovon das erste $=1$ ist, und welche wir mit $1, B', C', D' \dots$ bezeichnen wollen, wird $=m_1^{n_1} m_2^{n_2} m_3^{n_3} \dots$ sein. Von der Funktion

$$a'+b'B'+c'C'+d'D'+\dots$$

lässt sich nun die nämliche obige Behauptung aussagen, dass ihre Natur und Gliederzahl sich in Folge einer Multiplikation mit einem ähnlich gebildeten Ausdrucke, worin nur die Koeffizienten $a', b', c' \dots$ andere Werthe haben, nicht ändere.

Ist nun m der kleinste gemeinschaftliche Dividend von $m_1, m_2, m_3 \dots$ und ist ferner n die Anzahl der verschiedenen Faktoren unter allen obigen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \dots \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \dots \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \dots$, so würde, wenn man zuvor eine gleiche Wurzelbenennung hergestellt hätte, m^n die Anzahl der Glieder des gleichbedeutenden Ausdruckes

$$a+b\sqrt[m]{B}+c\sqrt[m]{C}+d\sqrt[m]{D}+\dots$$

sein. In den meisten Fällen wird aber

$$m_1^{n_1} m_2^{n_2} m_3^{n_3} \dots < m^n$$

sein. Mit Bestimmtheit ereignet sich dies:

1) wenn sämmtliche Faktoren $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \dots \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \dots \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \dots$ von einander verschieden sind, indem alsdann nothwendig $n=n_1+n_2+n_3+\dots$ wird, während m mindestens so gross ist, als der grösste der Exponenten $m_1, m_2, m_3 \dots$

2) wenn je zwei der Wurzelexponenten $m_1, m_2, m_3 \dots$ relative Primzahlen gegen einander sind, indem alsdann $m=m_1 m_2 m_3 \dots$ ist, während n mindestens so gross ist, als die grösste der Zahlen $n_1, n_2, n_3 \dots$.

In einem jeden dieser beiden Fälle wird man die Wurzelgrössen nicht auf einerlei Benennung bringen. Wie gross der dadurch zu erreichende Vortheil ist, mag das Beispiel lehren, wo man zwei Quadrat- und zwei Kubikwurzeln hat, worin die Radikanden α_1, β_1 und α_2, β_2 sämmtlich verschieden seien. Hier erhält man ohne Zurückführung auf einerlei Wurzelbenennung $m_1^{n_1} m_2^{n_2} = 2^2.3^2=36$ Glieder; wenn man dagegen erst gleiche Wurzelbenennungen herstellt, was den 6ten Grad erfordert, $m^n=6^4=1296$ Glieder.

Nur in seltenen Fällen, wo unter den genannten Faktoren viel gleiche und unter den Wurzelexponenten viel solche vorkommen, welche ein gemeinschaftliches Maass besitzen, wird umgekehrt

$$m^n < m_1^{n_1} m_2^{n_2} m_3^{n_3} \ldots$$

werden können. Man braucht aber alsdann immer noch nicht alle Wurzelexponenten gleich zu machen, sondern vielleicht nur diejenigen, unter deren Wurzelzeichen sich die grösste Menge der einander gleichen Faktoren befindet, was man in jedem besonderen Falle leicht ermessen wird.

Was ferner die Bestimmung der Faktoren α, β, γ... aus den unter ein- und demselben Wurzelzeichen, vom Grade m stehenden Grössen B, C, D... betrifft, so wird man im ungünstigsten Falle, wo je zwei der letzteren Grössen relativ prim sind, diese Grössen selbst für α, β, γ... anzunehmen haben. Wenn jedoch mehrere von B, C, D..., ein gemeinschaftliches Maass haben, wird man dieselben in die einfacheren Faktoren α, β, γ... so zu zerlegen suchen, dass die Anzahl der Letzteren niemals die der Ersteren übersteigt, weil sonst mit dieser Zerlegung ein offenbarer Nachtheil für die Rechnung verbunden sein würde, wobei indessen für den Fall, dass die Anzahl von α, β, γ... genau gleich der von B, C, D... wäre, ein Gewinn noch darin bestände, dass α, β, γ.... kleinere Zahlen, resp. einfachere Buchstabenausdrücke sind, als B, C, D...

Um nun zugleich die möglich wenigsten und daneben die möglich kleinsten Faktoren α, β, γ... zu erhalten, aus denen sich die Grössen B, C, D.... zusammensetzen lassen, hat man ein Verfahren einzuschlagen, welches sich am besten an einem Beispiele erläutern lässt. Man zerlege eine jede der Grössen B, C, D... in ihre Primfaktoren, und erhalte dafür, indem man solche Primfaktoren mit a, b, c... bezeichnet, folgende Ausdrücke:

$$ade \quad bde \quad c \quad def \quad de \quad ddef \quad deff. \quad addee \quad c \quad dgh.$$

Aus der Reihe dieser Grössen streicht man zuvörderst die einander gleichen Grössen, mit Ausnahme einer einzigen, also hier die Grösse c, ferner alle diejenigen, welche Produkte aus zwei oder mehr der übrigen Grössen oder aus deren Potenzen darstellen, also hier die Grösse $addee$, welche $= ade \times de$ ist. Hierdurch bleiben

$$ade \quad bde \quad c \quad def \quad de \quad ddef \quad deff \quad dgh.$$

Jetzt sondert man aus beliebig vielen dieser Grössen ein darin enthaltenes gemeinschaftliches Maass, z. B. de ab, schreibt dasselbe wie eine neu hinzukommende Grösse mit in die neue Reihe, deren übrige Glieder die Quotienten von de in die betreffenden früheren Glieder und daneben vollständig die übrigen Glieder enthalten, von denen de als gemeinschaftliches Maass nicht abgesondert ist. Dies giebt

$$de \quad a \quad b \quad c \quad f \quad 1 \quad df \quad ff \quad dgh.$$

In dieser Reihe streicht man die Zahl 1 überall da, wo sie vorkommt, und ausserdem diejenigen Glieder, wie ff, welche bloss aus Produkten oder Potenzen der übrigen Glieder bestehen. Wenn sich auf diese Weise nicht wenigstens Ein Glied aus der neuen Reihe streichen lässt, ist die vorgenommene Operation **unvortheilhaft**, weil sich alsdann dadurch die Anzahl der Glieder um 1 **vermehren** wird. Im vorstehenden Falle bleibt

$$de \; a \; b \; c \; f \; df \; dgh.$$

Sondert man jetzt den gemeinschaftlichen Faktor d ab und streicht eines der beiden übrig bleibenden f, so erhält man

$$d \; e \; a \; b \; c \; f \; gh.$$

Jetzt, wo entweder je zwei Glieder dieser Reihe relative Primzahlen geworden sind, oder wo eine fernere Absonderung gemeinschaftlicher Faktoren die Gliederzahl nur vermehren würde, bricht man die Operation ab, und nimmt die erhaltenen Grössen für $\alpha, \beta, \gamma \ldots$

Hätte man z. B. in Zahlen für $B, C, D \ldots$

$$2 \; 6 \; 4 \; 7 \; 15 \; 10,$$

so würde man nach Streichung der 4 durch Absonderung des mehreren Gliedern gemeinschaftlichen Faktors 2 erhalten:

$$2 \; 1 \; 3 \; 7 \; 15 \; 5,$$

worin jetzt 1 und 15 zu streichen ist, wodurch man für $\alpha, \beta, \gamma \ldots$

$$2 \; 3 \; 7 \; 5$$

erhält.

Hätte man für $B, C, \ldots$ die beiden Zahlen 6, 10; so würde man dieselben für $\alpha, \beta \ldots$ nehmen müssen, da eine Absonderung des Faktors 2 zwar kleinere Werthe, aber einen mehr, ergeben würde, nämlich 2, 3, 5, was der Rechnung nur zum Nachtheile gereichen würde.

In dieser Weise bestimmt man $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots$ aus $B_1, C_1, D_1 \ldots$ ferner $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \ldots$ aus $B_2, C_2, D_2 \ldots$ u. s. w., und nachdem dies geschehen, untersucht man in der vorhin beschriebenen Weise, ob es noch rathsam sei, alle oder einige der Wurzelgrössen mit verschiedenen Exponenten auf einerlei Wurzelbenennung zu bringen, oder nicht.

Diese Vorbereitung ist sowohl von Wichtigkeit, wenn man bloss den Nenner eines Bruches, als auch wenn man eine ganze Gleichung rational machen will. Angenommen, eine solche Gleichung, worin bereits alle Wurzelgrössen in die Zähler geschafft sind, was jederzeit leicht geschehen kann, sei

$$a' + b'B' + c'C' + d'D' + \ldots = 0.$$

Da diese Gleichung, wie man weiter unten sehen wird, me mals potenzirt werden muss; so würde man sich, selbst w ihre Gliederzahl in der gegebenen Form noch unvollständig s sollte, auf das Erscheinen aller vorhin genannten Glieder von Zahl $m_1^{n_1} \cdot m_2^{n_2} \cdot m_3^{n_3} \cdot \ldots$ gefasst machen müssen, insofern man Gleichung bei diesen Potenzirungen in der vorstehenden annul ten Form beibehalten wollte. Diese Gliederzahl kann, obgle sie meistens sehr viel kleiner ist, als m^n, doch häufig noch s gross ausfallen. Es gereicht daher zur bedeutenden Abkürz der Rechnung, wenn man die Wurzelgrössen B', C', D'... beiden Seiten der Gleichung so vertheilt:

1) dass kein Wurzelexponent gleichzeitig auf beiden Sei erscheint,

2) dass die Summe aller Glieder der vollständig gedach Funktionen, auf beiden Seiten der Gleichung die klei mögliche sei.

Durch diese Trennung der Glieder entstehe, wenn man vorläufig auch das rationale Glied getheilt denkt, die Gleich

$$a'+b'B'+c'C'+d'D'+\ldots = a''+b''B''+c''C''+d''D''+\ldots$$

Bezeichnet man diejenigen der Grössen $m_1^{n_1}$, $m_2^{n_2}$, $m_3^{n_3}$, welche sich auf die linke Seite dieser Gleichung beziehen, mit p_2, p_3..., und diejenigen, welche sich auf die rechte bezi mit q_1, q_2, q_3....; so wird die Anzahl aller Glieder bei einer so weit fortgesetzten Potenzirung dieser Gleichung niemals Werth

$$(p_1p_2p_3\ldots)+(q_1q_2q_3\ldots)$$

übersteigen können, welcher noch bedeutend kleiner ist, als

$$(p_1p_2p_3\ldots)(q_1q_2q_3\ldots)=m_1^{n_1} \cdot m_2^{n_2} \cdot m_3^{n_3}\ldots$$

Damit aber jener erstere Werth ein Minimum werde, ordne m alle Grössen p_1, p_2, p_3...q_1, q_2, q_3..., wovon auch mehrere e ander gleich sein können, nach ihrem Werthe, so dass die grö die erste und die kleinste die letzte ist. Wenn nun diese Re so beginnt: p_1, q_1, q_2, p_2..., so schreibt man die erste Grö p_1 links, die zweite q_1 rechts und die dritte q_2 wieder rec wodurch man links p_1 und rechts das Produkt q_1q_2 erhält. W mehr als diese drei Grössen vorhanden sind, so verfährt man den übrigen in der Weise, dass man jede nächstfolgende auf d jenige Seite setzt, wo sich eben das kleinere Produkt befind Wären einmal die Produkte auf beiden Seiten gleich, so wär es gleichgültig sein, welchem von beiden man die nächste Grö zufügen wollte.

Hätte man z. B. für $m_1^{n_1}$, $m_2^{n_2}$,... resp. die Werthe $2^4=1$ $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $6^1=6$; so würde die geordnete Rei dieser Zahlen

$$\underset{25}{\underline{1}}\quad \underset{16}{\underline{2}}\quad \underset{16}{\underline{3}}\quad \underset{9}{\underline{4}}\quad \underset{6}{\underline{5}}$$

sein, welche folgendermaassen zu trennen wäre:

$$\overset{1}{25}.\overset{4}{9}.\overset{5}{6} \qquad \overset{2}{16}.\overset{3}{16},$$

so dass alle Wurzelgrössen vom 5ten, 8ten und 6ten Grade auf die linke und die vom 2ten und 4ten Grade auf die rechte Seite zu stehen kämen.

Wären ausser der vorstehenden noch Wurzelgrössen vom 7ten Grade mit 2 einfachen Radikanden vorhanden, so dass zu jener Reihe noch die Zahl $7^2=49$ käme, so würde man wie folgt zu trennen haben:

$$\overset{1}{49}.\overset{4}{16}.\overset{6}{6} \qquad \overset{2}{25}.\overset{3}{16}.\overset{5}{9},$$

so dass nun die Wurzelgrössen vom 7ten, 4ten und 6ten Grade links und die vom 5ten, 2ten und 3ten Grade rechts ihren Platz fänden.

Wenn die Trennung nach dieser Regel dadurch unmöglich wird, dass mehrere Wurzelgrössen von verschiedenen Graden mit einander multiplizirt in der gegebenen Gleichung vorkommen, so hat man gleich von vorn herein die durch Multiplikation verknüpften Wurzelgrössen wie untrennbare zu behandeln, indem man das betreffende Produkt der darauf bezüglichen Grössen $m_1^{n_1}$, $m_2^{n_2}$.... z. B. $m_1^{n_1} m_2^{n_2}$ wie eine einzige Zahl ansieht.

Wären z. B. in dem letzteren Beispiele die Wurzeln vom 3ten und 6ten Grade durch Multiplikation an einander gefesselt, so hätte man statt der beiden einzelnen Zahlen 3^2 und 6^1 die einzige $3^2.6^1=9.6=54$, also die Reihe

$$\overset{1}{54} \quad \overset{2}{49} \quad \overset{3}{16} \quad \overset{4}{16} \ldots,$$

woraus sich folgende Trennung:

$$\overset{1}{54}.\overset{4}{16} \qquad \overset{2}{49}.\overset{3}{16}$$

ergeben würde. Hiernach müssten nun die Wurzeln vom 3ten, 6ten und 4ten Grade auf die linke und die vom 7ten und 2ten Grade auf die rechte Seite geschafft werden.

Das rationale Glied ist im Vorstehenden nur wegen der Symmetrie der Formeln getrennt. Man wird dasselbe ungetrennt auf diejenige Seite schreiben, wo sich die kleinste Menge Glieder der unvollständigen Gleichung vorfinden.

Berücksichtigt man den Einfluss dieses rationalen Gliedes auf die Anzahl der Glieder, welche sich durch mehrmalige Potenzirung der in vorstehender Weise getrennten Gleichung ergeben können, so leuchtet ein, dass ausser einem rationalen Gliede höchstens $(p_1 p_2 p_3 \ldots) + (q_1 q_2 q_3 \ldots) - 2$ Glieder mit verschiedenen irrationalen Faktoren entstehen können. Diese Anzahl wollen mit r bezeichnen.

Erhebt man nun die in Rede stehende Gleichung zum 1s 2ten, 3ten, 4ten ...$(r+1)$sten Grade, so erhält man zwischen ebengenannten r Irrationalgrössen $(r+1)$ Gleichungen, welche Beziehung zu jenen Grössen sämmtlich vom ersten Gr sind. Eliminirt man hierauf zwischen diesen Gleich gen sämmtliche Irrationalgrössen, so bleibt die suchte rationale Gleichung zurück.

Die Anzahl r der Irrationalen nach der obigen Bestimm ist die grösste, welche sich in dem komplizirtesten Falle nur stellen kann. Man wird aber darauf bedacht sein, aus der sonderen Form der gegebenen Gleichung jeden möglichen V theil zu ziehen, welcher die in der Regel sehr umständli Rechnung abkürzen, und namentlich die Menge der zu eliminir den Irrationalen vermindern kann. Zu diesem Ende wird m wenn es thunlich ist, nach jeder einzelnen Potenzirung gle jede sich als zweckmässig erweisende Elimination einiger Irrat nalen vornehmen, oder das rationale Glied bald auf die lin bald auf die rechte Seite stellen, oder auch einige Potenzen g überspringen, oder statt eine neue Potenz zu bilden, zwei vorhergehenden Gleichungen mit einander multipliziren, und lich nach Herstellung jeder neuen Gleichung prüfen, ob man für alle bis dahin aufgetretenen Irrationalen schon Gleichung genug besitze.

Wäre z. B. die Gleichung

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt[3]{z}-1=0$$

rational zu machen; so würde man, wenn man die Wurzelgröss immer zusammen auf einer Seite stehen lassen und zugleich ei und dieselbe Wurzelbenennung herstellen wollte, da hier

$$m_1,\ n_1,\ m_2,\ n_2 \text{ resp.} = 2,\ 2,\ 3,\ 1$$

ist und bei gleicher Wurzelbenennung m, n resp. $=6$, 3 werd würde, $6^3-1=215$ verschiedene Irrationalen zu gewärtigen hab womit sich durchaus nicht rechnen lässt.

Wollte man ohne die gleiche Wurzelbenennung herzustell alle Wurzelgrössen stets auf einer Seite behalten, so würde sich auf $2^2.3^1-1=11$ Irrationalen gefasst machen müssen, ebenfalls noch eine mühsame Rechnung ergeben würde.

Trennt man dagegen die Wurzelgrössen, indem man die zweiten Grade allein auf der linken Seite stehen lässt, und Kubikwurzel mit dem rationalen Gliede auf die rechte Se schafft; so können links nur $2^2-1=3$ und rechts nur $3^1-1=$ im Ganzen also nur 5 Irrationalen auftreten, zu deren Eliminati man die ersten 6 Potenzen zu bilden hätte. Dies gibt, wenn man der Kürze wegen

$$\sqrt{x}=X,\ \sqrt{y}=Y,\ \sqrt{z}=Z$$

setzt, folgende 6 Gleichungen:

1) $X+Y=1+Z,$

2) $x+y+2XY=1+2Z+Z^2,$

3) $(x+3y)X+(y+3x)Y=1+z+3Z+3Z^2,$

4) $x^2+6xy+y^2+(4x+4y)XY=1+4z+(4+z)Z+6Z^2,$

5) $(x^2+10xy+5y^2)X+(y^2+10xy+5x^2)Y$
$$=1+10z+(5+5z)Z+(10+z)Z^2,$$

6) $x^3+15x^2y+15xy^2+y^3+(6x^2+20xy+6y^2)XY$
$$=1+20z+z^2+(6+15z)Z+(15+6z)Z^2;$$

zwischen welchen die 5 Irrationalen X, Y, XY, Z, Z^2 zu eliminiren sind.

Obgleich durch die letzte Trennung der Wurzelgrössen die Anzahl der Irrationalen bedeutend beschränkt ist, so würde die an sich leichte Elimination derselben aus den vorstehenden 6 Gleichungen doch noch zu einer umständlichen und zeitraubenden Arbeit führen, bei welcher sich Rechnenfehler nur zu leicht einschleichen. Man würde daher im vorliegenden Falle noch einfacher folgendermaassen verfahren:

Man transponirt in der Gleichung 2) alle rationalen Glieder auf die rechte Seite und quadrirt die entstehende Gleichung. Hierdurch müssen alle aus X und Y gebildeten Irrationalen ein für alle Mal verschwinden, und man erhält:

$$4xy=(1-x-y)^2+4z+[4(1-x-y)+z]Z+2(3-x-y)Z^2,$$

oder

$$4xy-(1-x-y)^2-4z=[4(1-x-y)+z]Z+2(3-x-y)Z^2.$$

Man hat es jetzt nur noch mit den 2 Irrationalen Z und Z^2 zu thun, welche man mit geringeren Umständen aus der 1sten, 2ten und 3ten Potenz der letzten Gleichung würde eliminiren können. Man findet jedoch, dass zu diesem Zwecke schon die 1ste und 3te Potenz genügt. Denn da diese 3te Potenz in die Form

$$\begin{aligned}&[4xy-(1-x-y)^2-4z]^3\\ &=[4(1-x-y)+z]^3z+8(3-x-y)^3z^3\\ &+6[4(1-x-y)+z](3-x-y)z\{[4(1-x-y)+z]Z+2(3-x-y)Z^2\}\end{aligned}$$

gebracht werden kann; so lassen sich aus dieser und der vorhergehenden Gleichung die beiden Grössen Z und Z^2 auf ein Mal eliminiren. Dies gibt die gesuchte rationale Gleichung:

$$\begin{aligned}&[4xy-(1-x-y)^2-4z]^3\\ &=[4(1-x-y)+z]^3z+8(3-x-y)^3z^3\\ &+6[4xy-(1-x-y)^2-4z][4(1-x-y)+z](3-x-y)z.\end{aligned}$$

XL.

Methode um die Länge eines Kreisbogens annähernd durch Construction einer Geraden zu finden.

Von

Herrn J. J. Åstrand,

Privatlehrer der Mathematik zu Gothenburg in Schweden.

Der Umstand, dass das Problem, einen gegebenen Kreisbogen auf geometrische Art annähernd zu rektifiziren, nicht in einem einzigen der mir bekannten geometrischen Lehrbücher und Aufgaben-Sammlungen zu finden ist, ungeachtet dieses Problem im praktischen Leben vorkommen kann und somit nicht ohne Nutzen ist, veranlasste mich folgende Auflösung herzuleiten.

Da, nach der analytischen Trigonometrie:

$$x\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{n}\right)=\frac{3x}{2}-\frac{x^3}{4n^2}+\frac{x^5}{48n^4}-\ldots..$$

und

$$\frac{3n}{2}\sin\frac{x}{n}=\frac{3x}{2}-\frac{x^3}{4n^2}+\frac{x^5}{80n^4}-\dots$$

so ist:

$$x\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{n}\right)-\frac{x^5}{120n^4}=\frac{3n}{2}\sin\frac{x}{n}$$

sehr nahe, oder

$$x=\frac{\frac{3n}{2}\sin\frac{x}{n}}{1+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{n}-\frac{x^4}{120n^4}}=\frac{\frac{3n}{2}\sin\frac{x}{n}}{1+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{n}}+\frac{x^4}{80n^3}\cdot\frac{\sin\frac{x}{n}}{1+\cos\frac{x}{n}},$$

ebenfalls sehr nahe.

Wenn man in diesem Werthe des Kreisbogens x den zweiten Term $\frac{x^4}{80n^3}\cdot\frac{\sin\frac{x}{n}}{1+\cos\frac{x}{n}}$, seiner Unbedeutendheit wegen, weglässt und den Radius einsetzt, so hat man, annähernd, folgende Analogie:

$$\text{Rad}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{n}:n\sin\frac{x}{n}=\frac{3}{2}\text{Rad}:x,$$

welche, construirt, die gesuchte Gerade giebt.

Aus der Form des weggelassenen Termes erhellt, dass, je grösser n angenommen wird, desto genauer man die Länge des Kreisbogens x erhält, so dass, wie gross dieser auch ist, n jederzeit von solcher Grösse gewählt werden kann, dass die gewünschte Genauigkeit erlangt wird; doch immer, wegen der Möglichkeit und Theilung des Kreisbogens, $n=2^m$, wenn m eine ganze Zahl bedeutet.

Setzt man $n=2$, so wird:

$$\text{Rad}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}:2\sin\frac{x}{2}=\frac{3}{2}\text{Rad}:x,$$

oder

$$\text{Rad}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}:\text{chord}\,x=\frac{3}{2}\text{Rad}:x,$$

welche Analogie auf folgende Weise leicht construirt wird:

Ist in Taf. V. Fig. 4. AB der gegebene Kreisbogen, so sucht man seinen Mittelpunkt C und zieht den Radius CE senkrecht gegen die Chorde AB; CD wird halbirt in F und DE in G; DC wird verlängert bis H, so dass $FH = CE$; durch G zieht man JK parallel mit AB. Dann verbindet man H mit A und B und verlängert HA und HB bis J und K, so ist JK beinahe gleich dem Kreisbogen AB.

Anmerk. Der Fehler in der gefundenen Bogenlänge beträgt, wenn z. B.:

$x=25^0$ und $n=2$, weniger als 0,0000062 oder $<1\frac{1}{2}''$,
$x=45^0$ „ $n=4$, „ 0,0000082 „ $<1\frac{3}{4}''$.

XLI.

Ueber die Ausdrücke, welche für Wurzeln höherer Grade mit $(B+A\sqrt{\alpha})\ (B-A\sqrt{\alpha})$ analog sind.

Von dem

Herrn Dr. E. W. Grebe,

Gymnasiallehrer zu Cassel.

Die ausgebreitete Wichtigkeit des Satzes von dem Producte der Summe und Differenz zur Beseitigung irrationaler Quadratwurzeln ist hinreichend bekannt, und veranlasst leicht die Frage nach der näheren Beschaffenheit der Formeln, welche für höhere Wurzeln ähnliche Dienste leisten. Da sich dasjenige, was wir in Beziehung auf eine Wurzel sagen werden, leicht auf andere übertragen und die allgemeine Gesetzlichkeit genügend erkennen n wird; so beginnen wir mit der Erörterung von Ausdrücken s bestimmten Grades. Fragen wir dem gemäss nach einem or, der mit

$$E+D\sqrt[5]{\alpha}+C\sqrt[5]{\alpha^2}+B\sqrt[5]{\alpha^3}+A\sqrt[5]{\alpha^4}$$

nden ein rationales Product liefert; so leuchtet ein, dass s wir denselben

$$1+x\sqrt[5]{\alpha}+y\sqrt[5]{\alpha^2}+z\sqrt[5]{\alpha^3}+v\sqrt[5]{\alpha^4}$$

, die Unbekannten x, y, z und v sich werden bestimmen . Durch Ausführung der Multiplication erhalten wir nämlich

$$\begin{array}{lllll}
E & +\,D\sqrt[5]{\alpha} & +\,C\sqrt[5]{\alpha^2} & +\,B\sqrt[5]{\alpha^3} & +\,A\sqrt[5]{\alpha^4}\\
+A\alpha x & +\,Ex\sqrt[5]{\alpha} & +\,Dx\sqrt[5]{\alpha^2} & +\,Cx\sqrt[5]{\alpha^3} & +\,Bx\sqrt[5]{\alpha^4}\\
+B\alpha y & +\,A\alpha y\sqrt[5]{\alpha} & +\,Ey\sqrt[5]{\alpha^2} & +\,Dy\sqrt[5]{\alpha^3} & +\,Cy\sqrt[5]{\alpha^4}\\
+C\alpha z & +\,B\alpha z\sqrt[5]{\alpha} & +\,A\alpha z\sqrt[5]{\alpha^2} & +\,Ez\sqrt[5]{\alpha^3} & +\,Dz\sqrt[5]{\alpha^4}\\
+D\alpha v & +\,C\alpha v\sqrt[5]{\alpha} & +\,B\alpha v\sqrt[5]{\alpha^2} & +\,A\alpha v\sqrt[5]{\alpha^3} & +\,Ev\sqrt[5]{\alpha^4}.
\end{array}$$

Befriedigen wir nun, was ohne Schwierigkeit möglich ist, die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A+Bx+Cy+Dz+Ev&=0,\\
B+Cx+Dy+Ez+A\alpha v&=0,\\
C+Dx+Ey+A\alpha z+B\alpha v&=0,\\
D+Ex+A\alpha y+B\alpha z+C\alpha v&=0;
\end{aligned}$$

ist das Verlangte geschehen. Aus der Lehre von den Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten weiss n, dass die Werthe von x, y, z und v sämmtlich Quotienten gemeinschaftlichem Nenner sind, und dass sowohl dieser Nenner als die einzelnen Zähler Aggregate sind, deren einzelne Glieder keine anderen Factoren haben als A, B, C, D, E und α. überzeugen uns leicht, dass wir die Factoren α auch erst am Schlusse der Rechnung in der erforderlichen Anzahl beifügen, mithin dieselben bis dahin zur Erleichterung des Rechnens rgehen können. Zu dem Ende denken wir uns in dem Ausdrucke

$$E+D\sqrt[5]{\alpha}+C\sqrt[5]{\alpha^2}+B\sqrt[5]{\alpha^3}+A\sqrt[5]{\alpha^4}$$

alle Glieder als von derselben Dimension, und zwar von der fünften, indem wir $\sqrt[5]{\alpha}$ als die Dimensionseinheit wählen. Von den Buchstaben A, B, C, D und E hat alsdann ein jeder eine seiner Stelle im Alphabet entsprechende Dimension. Ebenso denken wir uns bei

$$1+x\sqrt[5]{\alpha}+y\sqrt[5]{\alpha^2}+z\sqrt[5]{\alpha^3}+v\sqrt[5]{\alpha^4}$$

alle Glieder von der nullten Dimension, wodurch die Unbekannten x, y, z und v der Reihe nach die Dimensionswerthe -1, -2, -3 und -4 erhalten. Jedes Glied des Zählers sowohl als des Nenners in den Ausdrücken, die für x, y u. s. w. gefunden werden, muss alsdann den Factor α so oft erhalten, als ihm die Dimension fünf, die diesem Factor zukommt, noch fehlt, wenn man es mit den übrigen Gliedern, die mit ihm von gleich hoher Dimension sein müssen, vergleicht. Zugleich muss die Dimension des Nenners die des Zählers bei dem Ausdrucke für x um 1, bei dem für y um 2 u. s. w. übertreffen. Hiernach haben wir nun bloss die Gleichungen

$$A+Bx+Cy+Dz+Ev=0,$$
$$B+Cx+Dy+Ez+Av=0,$$
$$C+Dx+Ey+Az+Bv=0,$$
$$D+Ex+Ay+Bz+Cv=0$$

aufzulösen: und stellen wir diese, um die allgemeinen Auflösungsformeln desto besser anwenden zu können, durch

$$a_1+b_1x+c_1y+d_1z+e_1v=0,$$
$$a_2+b_2x+c_2y+d_2z+e_2v=0,$$
$$a_3+b_3x+c_3y+d_3z+e_3v=0,$$
$$a_4+b_4x+c_4y+d_4z+e_4v=0$$

dar; so entsteht die Tabelle, deren einfaches Gesetz sogleich in die Augen springt:

$$A=a_1=e_2=d_3=c_4,$$
$$B=b_1=a_2=e_3=d_4,$$
$$C=c_1=b_2=a_3=e_4,$$
$$D=d_1=c_2=b_3=a_4,$$
$$E=e_1=d_2=c_3=b_4.$$

Da x, y, z und v einen gemeinschaftlichen Nenner haben müssen, den wir N nennen wollen; so kann man auch, um alle Brüche zu vermeiden,

$$N + Nx\sqrt[5]{\alpha} + Ny\sqrt[5]{\alpha^2} + Nz\sqrt[5]{\alpha^3} + Nv\sqrt[5]{\alpha}$$

als den Ausdruck annehmen, mit welchem man

$$E + D\sqrt[5]{\alpha} + C\sqrt[5]{\alpha^2} + B\sqrt[5]{\alpha^3} + A\sqrt[5]{\alpha^4}$$

zu multipliciren hat, um ein rationales Product zu gewinnen. Der Werth von N ergibt sich nach der Methode der positiven und negativen Permutationen durch nachstehende Rechnung:

$+ b_1c_2d_3e_4$	$BDAC$	$+ d_1b_2c_3e_4$	$DCEC$
$- b_1c_2e_3d_4$	$BDBB$	$- d_1b_2e_3c_4$	$DCBA$
$- b_1d_2c_3e_4$	$BEEC$	$- d_1c_2b_3e_4$	$DDDC$
$+ b_1d_2e_3c_4$	$BEBA$	$+ d_1c_2e_3b_4$	$DDBE$
$+ b_1e_2c_3d_4$	$BAEB$	$+ d_1e_2b_3c_4$	$DADA$
$- b_1e_2d_3c_4$	$BAAA$	$- d_1e_2c_3b_4$	$DAEE$
$- c_1b_2d_3e_4$	$CCAC$	$- e_1b_2c_3d_4$	$ECEB$
$+ c_1b_2e_3d_4$	$CCBB$	$+ e_1b_2d_3c_4$	$ECAA$
$+ c_1d_2b_3e_4$	$CEDC$	$+ e_1c_2b_3d_4$	$EDDB$
$- c_1d_2e_3b_4$	$CEBE$	$- e_1c_2d_3b_4$	$EDAE$
$- c_1e_2b_3d_4$	$CADB$	$- e_1d_2b_3c_4$	$EEDA$
$+ c_1e_2d_3b_4$	$CAAE$	$+ e_1d_2c_3b_4$	$EEEE$;

und es ist mithin

$$N = E^4 - 3E^2DA - 3E^2CB + 2ED^2B + 2EDC^2 + 2ECA^2 + 2EB^2A$$
$$- D^3C - C^3A - B^3D - A^3B + D^2A^2 + C^2B^2 - DCBA.$$

Erwägen wir, dass unser rationales Product auch eben so gut durch die Multiplication der Factoren

$$A\alpha + E\sqrt[5]{\alpha} + D\sqrt[5]{\alpha^2} + C\sqrt[5]{\alpha^3} + B\sqrt[5]{\alpha^4}$$

und

$$Nx + Ny\sqrt[5]{\alpha} + Nz\sqrt[5]{\alpha^2} + Nv\sqrt[5]{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha}N\sqrt[5]{\alpha^4}$$

entstehen konnte, und dass es uns dermalen auf die Factoren α noch nicht ankommt; so werden wir durch einfache Verschiebung der Buchstaben aus dem Werth von N sofort den Werth von Nx ableiten können. Wir erhalten

$$Nx = A^4 - 3A^2EB - 3A^2DC + 2AE^2C + 2AED^2 + 2ADB^2 + 2$$
$$- E^3D - D^3B - C^3E - B^3C + E^2B^2 + D^2C^2 - EDCB.$$

Ganz auf dieselbe Weise ergibt sich:

$$Ny = B^4 - 3B^2AC - 3B^2ED + 2BA^2D + 2BAE^2 + 2BEC^2 + 2$$
$$- A^3E - E^3C - D^3A - C^3D + A^2C^2 + E^2D^2 - AEDC,$$

$$Nz = C^4 - 3C^2BD - 3C^2AE + 2CB^2E + 2CBA^2 + 2CAD^2 +$$
$$- B^3A - A^3D - E^3B - D^3E + B^2D^2 + A^2E^2 - BAED,$$

$$Nv = D^4 - 3D^2CE - 3D^2BA + 2DC^2A + 2DCB^2 + 2DBE^2 + 2$$
$$- C^3B - B^3E - A^3C - E^3A + C^2E^2 + B^2A^2 - CBAE.$$

Der Werth von N und die aus diesem abgeleiteten W
von Nx, Ny, Nz und Nv stehen nun freilich noch nicht a
so fern fest, dass die Möglichkeit ausgeschlossen wäre, a
Glieder solcher Werthe mit entgegengesetztem Vorzeich
nehmen. Für N kann man ein für alle Mal die Anordnu
Vorzeichen festsetzen, nach welcher das Glied E^4 posit
es fragt sich alsdann nur, ob die dem E^4 in den übrigen
then entsprechenden Glieder A^4, B^4, C^4 und D^4 auch alle g
zeitig positiv sein müssen. Um diese Frage zu beantwort
denken wir, dass wir den Zähler von x, d. h. Nx auch
telbar dadurch hätten berechnen können, dass wir in der
Tabelle von Permutationen statt eines jeden b ein a gesetz
dann alle Glieder mit entgegengesetztem Vorzeichen ge
hätten. Da nun A^4 nur aus der Permutation $a_1 e_2 d_3 c_4$ e
kann, diese aber, so lange sie noch $b_1 e_2 d_3 c_4$ lautete, di
ungerade Anzahl von Variationen enthaltend, negativ wa
also nach verändertem Zeichen positiv werden muss; so i
und mithin auch B^4, C^4 und D^4 positiv. Man übersieht
dass ähnliche Umstände sich bei jeder Wurzel von unge
Grade einstellen müssen, dass aber bei Wurzeln von ge
Grade die Sache anders ist. Vergleichen wir nämlich die b
Permutationen $qp \ldots dcb$ und $bqp \ldots dc$, so stellt sich so
heraus, dass dieselben von ungleichen Vorzeichen sein m
wenn die Zahl der Elemente eine gerade ist, und von gl
Vorzeichen, wenn die Zahl der Elemente eine ungerade ist.
her werden wir z. B. bei einer Wurzel des sechsten Grades,
wir das vorkommende F^5 positiv setzen, A^5 negativ, B^5 p
C^5 negativ, D^5 positiv und E^5 negativ nehmen müssen.

Ermitteln wir die Werthe von N auch für andere W
als die fünfte und fügen den jedesmaligen Grad der Wurzel
N als Index bei; so ergibt sich die nachfolgende Zusamme
lung der Ausdrücke von N_2 bis N_6:

$$N_2 = B,$$
$$N_3 = C^2 - AB,$$
$$N_4 = D^3 - DB^2 - 2DCA + C^2B + BA^2,$$

$$N_5 = E^4 - 3E^2DA - 3E^2CB + 2ED^2B + 2EDC^2 + 2ECA^2 + 2EB^2A$$
$$- D^3C - C^3A - B^3D - A^3B + D^2A^2 + C^2B^2 - DCBA,$$

$$N_6 = F^5 - 4F^3EA - 4F^3DB - 2F^3C^2 + 3F^2E^2B + 3F^2DA^2 + 6F^2EDC$$
$$+ 6F^2CBA + F^2D^3 + F^2B^3 - 2FE^3C - 2FA^3C - 3FE^2D^2$$
$$+ 3FE^2A^2 + 3FD^2B^2 - 3FB^2A^2 - 6FD^2CA - 6FECB^2$$
$$+ FEDCB - FDC^2B + FC^4 + DE^4 - BD^4 - DB^4 + BA^4$$
$$+ D^3C^2 + B^3C^2 - 2A^3DE - 2E^3AB + 2B^3AE - 2C^3AB - 2C^3DE$$
$$+ 2D^3AE + 3A^2C^2D + 3E^2C^2B.$$

Bei jedem folgenden Grad der Wurzel werden diese Ausdrücke beziehlicher Weise umfangreicher, so dass es gerathen scheint, mit N_6 zu schliessen. Ueber den innern Bau der Ausdrücke, dieselben sowohl einzeln als in ihrem gegenseitigen Verhältniss betrachtet, könnte ich noch mehrere Bemerkungen beifügen; jedoch ist die Ausbeute dessen, was sich mir bis jetzt in dieser Beziehung ergeben hat, im Ganzen noch so gering, dass es mir besser scheint, alles hierauf Bezügliche vorerst noch zu unterdrücken. Ich gebe daher zum Schluss nur noch eine Probe über das Hinzufügen der bisher ausgelassenen Factoren α:

$$N_4 = D^3 - DB^2\alpha - 2DCA\alpha + C^2B\alpha + BA^2\alpha^2,$$

$$N_4x = -A^3\alpha^2 + AC^2\alpha + 2ADB\alpha - D^2C - CB^2\alpha,$$

$$N_4y = B^3\alpha - BD^2 - 2BAC\alpha + A^2D\alpha + DC^2,$$

$$N_4z = -C^3 + CA^2\alpha + 2CBD - B^2A\alpha - AD^2.$$

XLII.

Findung der Hauptaxen aus zwei c jugirten Durchmessern.

Vom
Herrn M. H. Meyer,
Lehrer an der mechanischen Baugewerkenschule zu Freibe

Die Darstellung der Ellipsen erfolgt entweder durch Be mung einzelner Punkte oder mit Hilfe von Kreisbögen. Be man die Menge kleiner Fehler, die beim Bestimmen eine sen Anzahl einzelner Punkte unvermeidlich sind, so wird die tere Methode, man möge nun Krümmungskreise oder eine annähernde Construction benutzen, gewiss schönere und richt Ellipsen geben. Allein fast alle Verfahren der letztern Art s voraus, dass die Hauptaxen bekannt seien; kann man durch conjugirte Axen Krümmungskreise angeben, so sind Endpunkte der Hauptaxen doch von wesentlichem Einflusse, man wird, wenn diese nicht gegeben sind, selbst wenn ma einzelne Punkte bestimmt und durch diese Krümmungskreise keine so genauen und schönen Ellipsen erhalten. Sind die H axen auf leichte Weise zu finden, so ist es immer am genau und einfachsten, diese erst zu bestimmen und dann mit derselben die Ellipsen zu vollenden. Alle bis jetzt beka Constructionen, um aus zwei conjugirten Durchmessern die H axen zu finden, sind aber mehr oder weniger complicirt, un dürfte daher folgendes einfache Verfahren, namentlich für descriptive Geometrie, wo in den meisten Fällen conjugirte D messer weit leichter als die Hauptaxen erhalten werden, von ganz unbedeutendem Vortheile sein. AB und CD (Taf. VII. Fig seien die gegebenen zusammengehörigen Durchmesser. Um Grösse der grossen und kleinen Axe zu bestimmen, errichte auf AB die Normale ME, mache dieselbe $= AM$ und ziehe und ED. $\frac{CE+ED}{2}$ wird dann die halbe grosse, $\frac{ED-CE}{2}$ die halbe kleine Axe sein; trägt man daher EC von E aus auf ED auf, so ist $\frac{DF}{2}=DG=GF$ die halbe kleine und GE die halbe grosse Axe.

Die Lage der grossen Axe wird durch die Verbindungslinie des Mittelpunktes M mit dem Halbirungspunkte G angegeben. Weichen die zusammen gehörigen Durchmesser nur wenig von den Hauptaxen ab, so wird die Entfernung MG klein und daher die Lage durch diese Punkte nicht mehr hinlänglich genau bestimmt. Besser nimmt man dann die Verbindungslinie der Punkte F und C, welche der grossen Axe parallel geht, (da $\frac{KG}{DG}=\frac{CM}{MD}=1$), als Richtungslinie für die grosse Axe an.

Die Richtigkeit dieser Construction ergiebt sich folgend:

Bezeichnen a und b die halbe grosse und kleine Axe der Ellipse, und l, l_1 die beiden conjugirten Halbmesser AM, MD, welche den Winkel $AMD=z$ einschliessen, so ist:

$$\left.\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\}=\frac{\sqrt{l^2+l^2_1+2ll_1\sin z}\pm\sqrt{l^2+l^2_1-2ll_1\sin z}}{2},$$

und, wird für z $90^0-\alpha$ substituirt:

$$\left.\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\}=\frac{\sqrt{l^2+l^2_1+2ll_1\cos\alpha}\pm\sqrt{l^2+l^2_1-2ll_1\cos\alpha}}{2},$$

d. i. da der Complementwinkel $\alpha=EMC$:

$$\left.\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\}=\frac{ED\pm CE}{2}.$$

Der Winkel γ, den die grosse Axe mit dem einen der conjugirten Durchmesser, l, einschliesst, muss sein:

$$\sin\gamma^2=\frac{b^2(a^2-l^2)}{l^2(a^2-b^2)}.$$

Es ist aber $\sin.\overline{AMG}^2=\frac{b^2(a^2-l^2)}{l^2(a^2-b^2)}$, folglich HJ die Lage der grossen Axe. Dass $\sin.\overline{AMG}^2=\frac{b^2(a^2-l^2)}{l^2(a^2-b^2)}$ ist, folgt aus dem Dreieck DEM, wo $DM=l_1$, $ME=l$, $EG=a$, $GD=b$ und Winkel $AMD=z$ ist; denn es ist $\text{tg}.AMG=\text{tg}(z-GMD)$, oder, wenn GMD durch λ bezeichnet wird,

$$=\operatorname{tg}(z-\lambda)=\frac{\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}\lambda}{1+\operatorname{tg}z.\operatorname{tg}\lambda},$$

d. i., da

$$\operatorname{tg}\lambda=\frac{b.\sin.GDM}{l_1-b.\cos.GDM}=\frac{b\sin\varrho}{l_1-b\cos\varrho}$$

ist,

$$\operatorname{tg}.AMG=\frac{\operatorname{tg}z-\dfrac{b.\sin\varrho}{l_1-b\cos\varrho}}{1+\operatorname{tg}z.\dfrac{b\sin\varrho}{l_1-b\cos\varrho}}=\frac{\operatorname{tg}z(l_1-b\cos\varrho)-b\sin\varrho}{l_1-b\cos\varrho+\operatorname{tg}z.b\sin\varrho},$$

und werden für $\sin\varrho$ und $\cos\varrho$ die gleichen Werthe

$$\sin\varrho=\frac{l.\cos z}{a+b}$$

und

$$\cos\varrho=\sqrt{1-\left(\frac{l.\cos z}{a+b}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab-l^2\cos z^2}}{a+b}$$

$$=\frac{\sqrt{l^2+l_1^2+2ll_1\sin z-l^2\cos z^2}}{a+b}$$

$$=\frac{l\sin z+l_1}{a+b}$$

substituirt,

$$\operatorname{tg}.AMG=\frac{\dfrac{\operatorname{tg}z(al_1-bl\sin z)}{a+b}-\dfrac{b.l\cos z}{a+b}}{\dfrac{al_1-bl\sin z}{a+b}+\dfrac{\operatorname{tg}z.bl\cos z}{a+b}}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}z\,(al_1-bl\sin z)-bl\cos z}{al_1},$$

$$\operatorname{tg}.AMG = \frac{\sin z \,.\, al_1 - bl\sin z^2 - bl\cos z^2}{al_1\cos z}$$

$$= \frac{\sin z . al_1 - bl}{al_1 \cos z} = \frac{\frac{ab}{ll_1}\,.\, al_1 - bl}{\frac{al_1\sqrt{\overline{ll_1}^2 - \overline{ab}^2}}{ll_1}}$$

$$= \frac{a^2 b - bl^2}{a\sqrt{\overline{ll}^2_1 - \overline{ab}^2}},$$

$$\operatorname{tg}.\overline{AMG}^2 = \frac{b^2(a^2 - l^2)^2}{a^2(l^2(a^2 + b^2 - l^2) - a^2b^2)}$$

$$= \frac{b^2(a^2 - l^2)^2}{a^2(a^2l^2 + b^2l^2 - l^4 - a^2b^2)}$$

$$= \frac{b^2(a^2 - l^2)}{a^2(l^2 - b^2)},$$

$$\sin.\overline{AMG}^2 = \frac{b^2(a^2 - l^2)}{l^2(a^2 - b^2)}.$$

XLIII.

Mémoire sur la théorie des formes quadratiques.

Par
Monsieur F. Arndt,
Docteur en Philosophie à Stralsund.

Le problème dont nous allons nous occuper dans ce mémoire est celui qu'on trouve dans l'article 236. des „Disquisitiones Arithmeticae", savoir: „Etant donné deux formes quadratiques, dont les déterminantes sont ~~en raison~~ de nombres carrés, on se propose de trouver une troisième forme composée par celles-ci."

La solution de ce problème, le plus important dans la théorie de la composition des formes, donnée par M. Gauss, est aussi ingenieuse que difficile, parceque l'auteur a supprimé tout-à-fait l'analyse, par laquelle il y est parvenu et qui exige des considérations très délicates. Les recherches que je fis dans cette vue me firent trouver une solution fondée sur des considérations très simples, qui sera peut-être agréable à ceux qui aiment la théorie des nombres.

Je commence par résoudre le problème suivant, sur le quel nous aurons à nous appuyer dans la suite.

„Les six nombres P, Q, R, S, T, U étant donnés, on se propose de trouver huit autres nombres p, p', p'', p'''; q, q', q'', q''' tels qu'ils satisfont aux équations suivantes $pq'-qp'=P$, $pq''-qp''=Q$, $pq'''-qp'''=R$, $p'q''-q'p''=S$, $p'q'''-q'p'''=T$, $p''q'''-q''p'''=U$, que nous désignérons par Ω."

Il y a plusieurs cas à distinguer.

1°. Lorsque les trois nombres P, Q, R ne s'évanouissent simultanément, il suit des trois premières équations Ω, que les nombres p, q ne peuvent être nuls tous deux, et qu'il en existe par conséquent un plus grand diviseur commun λ qui mesure les nombres P, Q, R simultanément. Maintenant si nous désignons par φ, ψ des valeurs tellement choisies qu'elles satisfont à l'équation $p\varphi - q\psi = \lambda$, toutes les valeurs des nombres p', q'; p'', q''; p''', q''', satisfaisantes aux trois premières équations Ω, seront comprises dans les formules suivantes:

$$\begin{array}{l|l} q' = \varphi \dfrac{P}{\lambda} + f \dfrac{q}{\lambda} & p' = \psi \dfrac{P}{\lambda} + f \dfrac{p}{\lambda}, \\ q'' = \varphi \dfrac{Q}{\lambda} + f' \dfrac{q}{\lambda} & p'' = \psi \dfrac{Q}{\lambda} + f' \dfrac{p}{\lambda}, \\ q''' = \varphi \dfrac{R}{\lambda} + f'' \dfrac{q}{\lambda} & p''' = \psi \dfrac{R}{\lambda} + f'' \dfrac{p}{\lambda}; \end{array}$$

f, f', f'' représentant des nombres entiers quelconques. Ces valeurs étant substituées dans les trois dernières équations Ω, celles-ci seront remplacées par les suivantes:

$$S = f \frac{Q}{\lambda} - f' \frac{P}{\lambda}, \quad T = -f'' \frac{P}{\lambda} + f \frac{R}{\lambda}, \quad U = f' \frac{R}{\lambda} - f'' \frac{Q}{\lambda};$$

desquelles il est évident que les nombres S, T, U sont divisibles par le plus grand diviseur commun de $\frac{P}{\lambda}$, $\frac{Q}{\lambda}$, $\frac{R}{\lambda}$, que nous désignerons par μ. Ce nombre μ sera donc facteur des six nombres P, Q, R, S, T, U, par conséquent de leur plus grand diviseur commun k. De plus si nous désignons le plus grand diviseur commun des trois nombres P, Q, R par e, nous aurons $e = \lambda\mu$. Imaginez vous maintenant qu'on ait déterminé les nombres $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ de sorte que $\mathfrak{p}P + \mathfrak{q}Q + \mathfrak{r}R = e$, ce qui peut se faire d'une infinité de manières, vous aurez à l'aide des valeurs de S, T, U, que nous venons d'établir,

$$\mu f = \mathfrak{q}S + \mathfrak{r}T + \omega \frac{P}{\lambda},$$

$$\mu f' = \mathfrak{r}U - \mathfrak{p}S + \omega \frac{Q}{\lambda},$$

$$\mu f'' = -\mathfrak{p}T - \mathfrak{q}U + \omega \frac{R}{\lambda};$$

ω étant égal à $\mathfrak{p}f + \mathfrak{q}f' + \mathfrak{r}f''$. Substituez enfin ces valeurs de f, f', f'' dans les expressions de p', q'; p'', q''; p''', q''', vous aurez

$$\begin{array}{l|l} eq' = P(\mu\varphi + \omega\frac{q}{\lambda}) + \mathfrak{q}qS + \mathfrak{r}qT & ep' = P(\mu\psi + \omega\frac{p}{\lambda}) + \mathfrak{q}pS + \mathfrak{r}pT, \\ eq'' = Q(\mu\varphi + \omega\frac{q}{\lambda}) + \mathfrak{r}qU - \mathfrak{p}qS & ep'' = Q(\mu\psi + \omega\frac{p}{\lambda}) + \mathfrak{r}pU - \mathfrak{p}pS, \\ eq''' = R(\mu\varphi + \omega\frac{q}{\lambda}) - \mathfrak{p}qT - \mathfrak{q}qU & ep''' = R(\mu\psi + \omega\frac{p}{\lambda}) - \mathfrak{p}pT - \mathfrak{q}pU; \end{array}$$

où il importe de remarquer, que les nombres $\mu\varphi + \omega\frac{q}{\lambda}$, $\mu\psi + \omega\frac{p}{\lambda}$ satisfont à l'équation $px - qy = e$. Remarquons en dernier lieu que les équations Ω ne peuvent être vérifiées, à moins que l'équation $PU + RS - QT = 0$ ne soit remplie.

C'est par cette analyse qu'on est conduit à la

Solution. Soit e le plus grand diviseur commun des nombres P, Q, R, k celui des nombres P, Q, R, S, T, U, μ diviseur quelconque de k. Cela posé, le nombre e sera divisible par k, en conséquence par μ, d'où $\frac{e}{\mu}$ sera un entier, que nous désignons par λ. Maintenant si l'on prend des nombres p, q, dont λ est le plus grand diviseur commun, qu'on détermine cinq nombres $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, φ, ψ de sorte qu'on a $\mathfrak{p}P + \mathfrak{q}Q + \mathfrak{r}R = e$, $p\varphi - q\psi = e$, et qu'on fasse

$$\begin{array}{l|l} eq' = \varphi P + \mathfrak{q}qS + \mathfrak{r}qT & ep' = \psi P + \mathfrak{q}pS + \mathfrak{r}pT, \\ eq'' = \varphi Q + \mathfrak{r}qU - \mathfrak{p}qS & ep'' = \psi Q + \mathfrak{r}pU - \mathfrak{p}pS, \\ eq''' = \varphi R - \mathfrak{p}qT - \mathfrak{q}qU & ep''' = \psi R - \mathfrak{p}pT - \mathfrak{q}pU, \end{array}$$

les nombres p, p', p'', p'''; q, q', q'', q''' seront entiers et vérifieront les équations Ω, pourvu que l'équation $PU + RS - QT = 0$ ait lieu.

Démonstration. I. Les nombres p, q sont entiers par l'hypothèse; les nombres p', p'', p'''; q', q'', q''' déterminés à l'aide des équations ci-dessus, le seront aussi, parceque les nombres P, Q, R sont divisibles par e, les nombres p, q par λ, enfin les nombres S, T, U par k, dès-lors par μ.

II. En substituant les valeurs des q', q'', q'''; p', p'', p''' dans les expressions $pq' - qp'$, $pq'' - qp''$, $pq''' - qp'''$, etc., en ayant égard aux équations $\mathfrak{p}P + \mathfrak{q}Q + \mathfrak{r}R = e$, $p\varphi - q\psi = e$, $PU + RS - QT = 0$, on verra, que les équations Ω sont vérifiés.

2°. Passons au cas où les nombres P, Q, R sont nuls. Alors des équations $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ on déduira aisément celles-ci: $qS = 0$, $qT = 0$, $qU = 0$; $pS = 0$, $pT = 0$, $pU = 0$; donc en supposant que les nombres S, T ne s'évanouissent simultanément, il faut avoir $q = 0$, $p = 0$. Maintenant si l'on détermine les nombres φ, ψ de sorte qu'ils satisfont à l'équation $p'\varphi-q'\psi=\lambda$, λ étant le plus grand diviseur commun des nombres p', q', pour satisfaire aux équations $p'q''-q'p''=S$, $p'q'''-q'p'''=T$, on fera

$$q''=\varphi\frac{S}{\lambda}+f\frac{q'}{\lambda} \qquad p''=\psi\frac{S}{\lambda}+f\frac{p'}{\lambda},$$
$$q'''=\varphi\frac{T}{\lambda}+f'\frac{q'}{\lambda} \qquad p'''=\psi\frac{T}{\lambda}+f'\frac{p'}{\lambda};$$

f, f' désignant des entiers quelconques. Ces valeurs étant substituées dans la dernière équation $p''q'''-q''p'''=U$, celle-ci sera remplacée par la suivante $f\frac{T}{\lambda}-f'\frac{S}{\lambda}=U$, de laquelle il est évident que U est divisible par le plus grand diviseur commun de $\frac{S}{\lambda}$, $\frac{T}{\lambda}$, que nous désignons par μ. Ce nombre μ sera donc facteur des trois nombres S, T, U, en conséquence de leur plus grand diviseur commun k. Nous aurons en outre $e=\lambda\mu$, e étant le plus grand diviseur commun des deux nombres S, T. Imaginez vous maintenant qu'on ait déterminé les nombres s, t de sorte que $sS+tT=e$, vous aurez

$$\mu f=\ \ tU+\omega\frac{S}{\lambda},$$
$$\mu f'=-sU+\omega\frac{T}{\lambda};$$

ω étant égal à $sf+tf'$. De là

$$eq''=S(\mu\varphi+\omega\frac{q'}{\lambda})+tq'U \qquad ep''=S(\mu\psi+\omega\frac{p'}{\lambda})+tp'U,$$
$$eq'''=T(\mu\varphi+\omega\frac{q'}{\lambda})-sq'U \qquad ep'''=T(\mu\psi+\omega\frac{p'}{\lambda})-sp'U;$$

où il importe de remarquer que les nombres $\mu\varphi+\omega\frac{q'}{\lambda}$, $\mu\psi+\omega\frac{p'}{\lambda}$ satisfont à l'équation $p'x-q'y=e$. Ainsi nous sommes parvenus à cette

Solution. Supposé que les nombres P, Q, R soient nuls, mais S, T ne s'évanouissent tous deux, soit e le plus grand diviseur commun de S, T, k celui de S, T, U, μ diviseur quelconque de k. Cela étant, e sera divisible par k, en concéquence par μ, d'où $\frac{e}{\mu}$ sera un entier que nous désignons par λ. Prenez deux nombres p', q', dont λ est le plus grand diviseur commun, faites en sorte que s, t, φ, ψ satisfassent aux équations $sS+tT=e$, $p'\varphi-q'\psi=t$, et posez

$$\begin{array}{l|l} q=0 & p=0, \\ eq''=\varphi S+tq'U & ep''=\psi S+tp'U, \\ eq'''=\varphi T-sq'U & ep'''=\psi T-sp'U: \end{array}$$

les nombres q, q', q'', etc. seront entiers et vérifieront les équations Ω.

La démonstration est tout-à-fait semblable à la précédente.

3°. Lorsque les cinq nombres P, Q, R, S, T sont nuls, mais U n'est pas nul, on aura non seulement $q=0$, $p=0$, comme dans le num. 2°, mais aussi $q'=0$, $p'=0$*). Supposé donc $p=0$, $q=0$, $p'=0$, $q'=0$, les cinq premières équations Ω ont lieu et il ne reste de satisfaire qu'à la dernière $p''q'''-q''p'''=U$. C'est ce qui s'effectue en prenant deux nombres p'', q'', dont λ est le plus grand diviseur commun, et faisant

$$q'''=\varphi\frac{U}{\lambda}+f\frac{q''}{\lambda},\quad p'''=\psi\frac{U}{\lambda}+f\frac{p''}{\lambda},$$

λ étant diviseur quelconque de U; φ, ψ des racines quelconques de l'équation $p''\varphi-q''\psi=\lambda$, f un nombre arbitraire.

4°. Enfin le cas où les six nombres P, Q, R, S, T, U s'évanouissent, est si simple qu'il ne faut pas s'y arrêter long-temps.

Nous allons maintenant appliquer ces résultats au problème mentionné ci-dessus.

Soient $f\ldots(a, b, c)$, $f'\ldots(a', b', c')$ les formes données, dont les déterminantes sont en raison de nombres carrés et de même signe, soit en outre m le plus grand diviseur commun de a, $2b$, c; m' celui de a', $2b'$, c'; D celui de $dm'm'$, $d'mm$ et de même signe que d, d'. Cela posé, les racines $\sqrt{\frac{d}{D}}$, $\sqrt{\frac{d'}{D}}$ seront des nombres rationels, positifs ou négatifs, que nous disignerons par n, n'; mn', $m'n$ des nombres entiers, premiers entre eux; enfin an', $a'n$, $b'n+bn'$, $b'n-bn'$, $c'n$, cn' des nombres entiers, que nous nommons P, Q, R, S, T, U. C'est ce qu'on trouve démontré dans l'article 236. des „Disq. Arithm.“ Je dis de plus que les nombres P, Q, R, S, T, U seront premiers entre eux. En effet, en faisant $\mathfrak{A}a+2\mathfrak{B}b+\mathfrak{C}c=m$, $\mathfrak{A}'a'+2\mathfrak{B}'b'+\mathfrak{C}'c'=m'$ (Disq. Arithm. art. 40.), il vient $\mathfrak{A}P+\mathfrak{B}(R-S)+\mathfrak{C}U=mn'$,

*) Des équations $p'q''-q'p''=0$, $p'q'''-q'p'''=0$ on tire $q'U=0$, $p'U=0$.

$\mathfrak{A}'Q+\mathfrak{B}'(R+S)+\mathfrak{C}'T=m'n$; d'où l'on voit que les nombres P, Q, R, S, T, U n'ont d'autre facteur commun, que tel qui mesure simultanément les nombres mn', $m'n$, supposés premiers entre eux.

Maintenant en s'imaginant que la forme cherchée $F...(A, B, C)$ est transformable dans le produit ff' au moyen de la substitution p, p', p'', p'''; q, q', q'', q''', d'après les principes établis par M. Gauss il ne s'agit que de déterminer ces huit nombres de telle sorte qu'ils satisfont aux équations $pq'-qp'=P$, $pq''-qp''=Q$, $pq'''-qp'''=R$, $p'q''-q'p''=S$, $p'q'''-q'p'''=T$, $p''q'''-q''p'''=U$, et qu'ils rendent entières les valeurs de A, B, C, déterminées à l'aide des équations $Ann'=q'q''-qq'''$, $2Bnn'=p'q'''+q'p'''-p'q''-q'p''$, $C\kappa n'=p'p''-pp'''$.

Or d'après ce que nous avons trouvé plus haut, pour satisfaire à la première condition, on a

1°. Lorsque les nombres P, Q, R ne sont pas nuls simultanément:

$$\begin{array}{l|l} \lambda q'=\varphi P+\mathfrak{q}qS+\mathfrak{r}qT & \lambda p'=\psi P+\mathfrak{q}pS+\mathfrak{r}pT, \\ \lambda q''=\varphi Q+\mathfrak{r}qU-\mathfrak{p}qS & \lambda p''=\psi Q+\mathfrak{r}pU-\mathfrak{p}pS, \\ \lambda q'''=\varphi R-\mathfrak{p}qT-\mathfrak{q}qU & \lambda p'''=\psi R-\mathfrak{p}pS-\mathfrak{q}pU; \end{array}$$

où λ est le plus grand diviseur commun des nombres P, Q, R; p et q deux nombres quelconques dont λ est le plus grand diviseur commun, $\mathfrak{p}P+\mathfrak{q}Q+\mathfrak{r}R=\lambda$, $p\varphi-q\psi=\lambda$. Je fais remarquer que l'équation $PU+RS-QT=0$ a lieu, car on a $an'.cn'+(b'n+bn')(b'n-bn')-a'n.c'n=(b'b'-a'c')nn-(bb-ac)n'n'=d'nn-dn'n'=0$.

Je dis maintenant que les nombres p, p', p'', p'''; q, q', q'', q''', ainsi déterminés, rendent entières les valeurs

$$\frac{q'q''-qq'''}{nn'},\quad \frac{pq'''+qp'''-p'q''-q'p''}{2nn'},\quad \frac{p'p''-pp'''}{nn'}.$$

Pour faire voir cela je développe les quantités $\lambda\lambda(q'q''-qq''')=\lambda q'.\lambda q''-\lambda q.\lambda q'''$, $\lambda\lambda(pq'''+qp'''-p'q''-q'p'')=\lambda p.\lambda q'''+\lambda q.\lambda p'''-\lambda p'.\lambda q''-\lambda q'.\lambda p''$, $\lambda\lambda(p'p''-pp''')=\lambda p'.\lambda p''-\lambda p.\lambda p'''$, en mettant pour les produits $\lambda q'$, $\lambda q''$, $\lambda q'''$; $\lambda p'$, $\lambda p''$, $\lambda p'''$ leurs valeurs, et prenant $q(\mathfrak{p}P+\mathfrak{q}Q+\mathfrak{r}R)$, $p(\mathfrak{p}P+\mathfrak{q}Q+\mathfrak{r}R)$ au lieu de λq, λp. Alors on aura

$$\begin{aligned} &\lambda\lambda(q'q''-qq''') \\ &=\varphi\varphi PQ-\mathfrak{p}\varphi qP(R+S)-\mathfrak{q}\varphi qQ(R-S)-\mathfrak{r}\varphi q(RR-PU-QT) \\ &\quad+\mathfrak{p}\mathfrak{p}qqPT+\mathfrak{q}\mathfrak{q}qqQU+\mathfrak{r}\mathfrak{r}qqTU \\ &\quad+\mathfrak{p}\mathfrak{r}qqT(R-S)+\mathfrak{q}\mathfrak{r}qqU(R+S)+\mathfrak{p}\mathfrak{q}qq(PU+RT-SS), \end{aligned}$$

$$\lambda\lambda(pq''' + qp''' - p'q'' - q'p'')$$
$$= -2\varphi\psi PQ + \mathfrak{p}(p\varphi + q\psi)P(R+S) + \mathfrak{q}(p\varphi+q\psi)Q(R-S)$$
$$+ \mathfrak{r}(p\varphi+q\psi)(RR - PU - QT)$$
$$-2\mathfrak{p}\mathfrak{p}pqPT - 2\mathfrak{q}\mathfrak{q}pqQU - 2\mathfrak{r}\mathfrak{r}pqTU$$
$$-2\mathfrak{p}\mathfrak{r}pqT(R-S) - 2\mathfrak{q}\mathfrak{r}pqU(R+S) - 2\mathfrak{p}\mathfrak{q}pq(PU+QT-SS).$$

La valeur de $\lambda\lambda(p'p'' - pp''')$ est entièrement semblable à celle de $\lambda\lambda(q'q'' - qq''')$, de laquelle elle sort en mettant ψ, p à la place de φ, q.

En substituant pour P, Q, R, S, T, U leurs valeurs, on verra que tous les termes de la première expression contiennent le facteur nn', et ceux de la seconde le facteur $2nn'$, attendu que

$$RR - PU - QT = 2bb'nn' + dn'n' + d'nn,$$
$$PU + QT - SS = 2bb'nn' - dn'n' - d'nn,$$
$$\frac{dn'n'}{nn'} = \frac{d'nn}{nn'} = \sqrt{dd'},$$

où la quantité $\sqrt{dd'}$ est un nombre entier, que nous désignons par Δ. De là il vient

$$[1] \quad \ldots\ldots \frac{\lambda\lambda}{nn'}(q'q'' - qq''')$$
$$= \varphi\varphi aa' - 2ab'\mathfrak{p}\varphi q - 2ba'\mathfrak{q}\varphi q - 2(bb'+\Delta)\mathfrak{r}\varphi q$$
$$+ ac'\mathfrak{p}\mathfrak{p}qq + ca'\mathfrak{q}\mathfrak{q}qq + cc'\mathfrak{r}\mathfrak{r}qq + 2bc'\mathfrak{p}\mathfrak{r}qq$$
$$+ 2cb'\mathfrak{q}\mathfrak{r}qq + 2(bb' - \Delta)\mathfrak{p}\mathfrak{q}qq,$$

$$[2] \quad \ldots\ldots \frac{\lambda\lambda}{2nn'}(pq''' + qp''' - p'q'' - q'p'')$$
$$= -\varphi\psi aa' + ab'\mathfrak{p}(p\varphi+q\psi) + ba'\mathfrak{q}(p\varphi+q\psi) + (bb'+\Delta)\mathfrak{r}(p\varphi+q\psi)$$
$$- ac'\mathfrak{p}\mathfrak{p}pq - ca'\mathfrak{q}\mathfrak{q}pq - cc'\mathfrak{r}\mathfrak{r}pq - 2bc'\mathfrak{p}\mathfrak{r}pq$$
$$- 2cb'\mathfrak{q}\mathfrak{r}pq - 2(bb' - \Delta)\mathfrak{p}\mathfrak{q}pq,$$

$$[3] \quad \ldots\ldots \frac{\lambda\lambda}{nn'}(p'p'' - pp''')$$
$$= \psi\psi aa' - 2ab'\mathfrak{p}\psi p - 2ba'\mathfrak{q}\psi p - 2(bb'+\Delta)\mathfrak{r}\psi p$$
$$+ ac'\mathfrak{p}\mathfrak{p}pp + ca'\mathfrak{q}\mathfrak{q}pp + cc'\mathfrak{r}\mathfrak{r}pp + 2bc'\mathfrak{p}\mathfrak{r}pp$$
$$+ 2cb'\mathfrak{q}\mathfrak{r}pp + 2(bb' - \Delta)\mathfrak{p}\mathfrak{q}pp.$$

Nous démontrerons actuellement que aa' est divisible par $\lambda\lambda$, ab', ba', $bb'+\Delta$ par λ.

En effet il résulte des congruences

$an' \equiv 0$ (mod. λ), $a'n \equiv 0$ (mod. λ), $b'n + bn' \equiv 0$ (mod. λ)

$ab'n' \equiv 0$, $ab'n \equiv 0$, d'où $ab'.mn' \equiv 0$, $ab'.m'n \equiv 0$ (mod. λ); or, le plus grand diviseur commun des produits $ab'.mn'$, $ab'.m'n$, c'est à dire ab', sera divisible par λ de même que chacun de ces produits.

D'une manière semblable on démontre que ba' est divisible par λ.

En troisième lieu on a

$$n(bb' + \Delta) = bb'n + \Delta n' = b(b'n + bn') - acn',$$
$$n(bb' + \Delta') = bb'n + \Delta'n = b'(b'n + bn') - a'c'n;$$

par suite $(bb' + \Delta).mn' \equiv 0$, $(bb' + \Delta).m'n \equiv 0$ (mod. λ), d'où comme précédemment $bb' + \Delta \equiv 0$ (mod. λ).

On a enfin $aa'.mn' \equiv 0$, $aa'.m'n \equiv 0$ (mod. λ), d'où $aa' \equiv 0$. (mod. λ). Maintenant d'après ce qu'on vient de démontrer, il suit

$$\left.\begin{array}{l} aa'.an' \equiv 0 \\ aa'.a'n \equiv 0 \\ aa'.(b'n + bn') = ab'.a'n + ba'.an' \equiv 0 \\ aa'.(b'n - bn') = ab'.a'n - ba'.an' \equiv 0 \\ aa'.c'n = ab'(b'n + bn') - an'(bb' + \Delta) \equiv 0 \\ aa'.cn' = ba'(b'n + bn') - a'n(bb' + \Delta) \equiv 0 \end{array}\right\} \text{(mod. } \lambda\lambda\text{)}$$

donc le plus grand diviseur commun des produits à gauche, c'est à dire aa', sera divisible par $\lambda\lambda$ de même que chacun de ces produits.

En réunissant ces résultats on voit que le premier membre dans chacune des équations [1], [2], [3] est divisible par $\lambda\lambda$, ce qu'il s'agissait de démonter.

2°. Si les nombres P, Q, R s'évanouissent, où $an' = 0$, $a'n = 0$, $b'n + bn' = 0$, il vient $a = 0$, $a' = 0$, les quantités n, n' n'étant pas nulles*). De plus le nombre S ne s'évanouira pas, d'ailleurs on aurait $b = 0$, $b' = 0$, par conséquent $\Delta = bb - ac = 0$, $\Delta' = b'b' - a'c' = 0$, contre l'hypothèse. Donc, en désignant par λ le plus grand diviseur commun de S, T; par p', q' deux nombres quelconques, dont λ est le plus grand diviseur commun, faisant ensuite $sS + tT = \lambda$, $p'\varphi - q'\psi = \lambda$, il faut avoir

$$\begin{array}{l|l} q = 0 & p = 0 \\ \lambda q'' = \varphi S + tq'U & \lambda p'' = \psi S + tp'U \\ \lambda q''' = \varphi T - sq'U & \lambda p''' = \psi T - sp'U. \end{array}$$

*) Si on avait $n = 0$, $n' = 0$, il résulterait en conséquence des équations $\Delta = Dnn$, $\Delta' = Dn'n'$, $\Delta = 0$, $\Delta' = 0$; or, ce cas est exclu.

Les nombres p, p', p'' etc. étant ainsi déterminés, on démontre par une méthode entièrement semblable à celle que nous avons employée dans le premier cas, que les nombres

$$\frac{q'q''-qq'''}{nn'},\quad \frac{pq'''+qp'''-p'q''-q'p''}{2nn'},\quad \frac{p'p''-pp'''}{nn'}$$

sont entiers. En effet i [illegible]

$$\frac{\lambda\lambda}{nn'}(q'q''-qq''')$$

$$= [illegible] - 2bc't\varphi q' + 2b'csq'q' + cc'ttq'q',$$

$$\frac{\lambda\lambda}{nn'}(pq'''+qp'''-p'q''-q'p'')$$

$$= [illegible]\ \psi) + bc't(p'\varphi+q'\psi) - 2b'cstp'q' - cc'ttp'q',$$

$$\frac{\lambda\lambda}{nn'}(p'p''-pp''')$$

$$[illegible]\ s\psi p' - 2bc't\psi p' + 2b'cstp'p' + cc'ttp'p',$$

[illegible] qu'il ne reste qu'à démontrer que les nombres $2bb'$, [illegible] le facteur λ. Il suit des congruences $bn'-b'n\equiv 0$, [illegible] λ), $bc'.mn'\equiv 0$, $bc'.m'n\equiv 0$ (mod. λ), d'où $bc'\equiv 0$ En outre $2bn'\equiv 0$, $2b'n\equiv 0$, par conséquent $2bb'.mn'\equiv 0$ [illegible]0, donc $2bb'\equiv 0$ (mod. λ).

XLIV.

[Ge]ometrische Näherungsmethode zur Rektifikation und Quadratur des Kreises.

Von

Herrn H. Scheffler,

[Co]nducteur bei den Herzoglich Braunschweigischen Eisenbahnen.

[E]ine bequeme geometrische Konstruktion, welche näherungs-[wei]se die Länge des Kreisumfanges und den Flächeninhalt des [Kre]ises liefert, ist zuweilen eben so erwünscht, als eine auf die [Bere]chnung dieser Grössen, namentlich der Zahl π, abzielende [Form]el. In wissenschaftlicher Beziehung ist aber eine solche [Kon]struktion von noch grösserem Interesse, besonders wenn die-[se]lbe jeden Grad von Annäherung gestattet. Ich glaube, dass [die] nachstehende Methode zu den einfachsten gehört, welche [ge]funden werden können.

1.) Rektifikation des Kreises.

Wenn AB (Taf. VII. Fig. 4.) der mit dem Halbmesser OA [be]schriebene Kreis ist; so werde AM perpendikular auf dem [Hal]bmesser AB errichtet. Man halbire durch AC den Winkel [M]B, durch AD den Winkel MAC, durch AE den Winkel [MA]D, durch AF den Winkel MAE u. s. f., ziehe darauf in B [auf] AB das Perpendikel BC bis zum Durchschnitte C mit AC, [dan]n in C auf AC das Perpendikel CD bis zum Durchschnitte [D] mit AD, dann in D auf AD das Perpendikel DE bis zum [Du]rchschnitte E mit AE u. s. f.

Jetzt sind AB, AC, AD, AE, AF..... Linien, welche der Länge des Halbkreises, also dem Werthe von π, wenn der Halbmesser OA gleich der Längeneinheit ist, bis zu jedem beliebigen Grade von Approximation näher kommen. Die Annäherung geht übrigens mit raschen Schritten vor sich, und es sind nur wenig Winkelhalbirungen erforderlich, um mit ziemlicher Genauigkeit den Punkt M in der Linie AM zu erkennen, welcher streng genommen erst nach unendlich vielmal wiederholter Operation erreicht werden würde, um in der Linie AM die wahre Länge des Halbkreises darzustellen.

Der Beweis zu diesem Verfahren kann ganz elementar geführt werden. Man braucht nur die Linien CB, DC, ED, FE... bis zu ihren Durchschnitten B, B_1, B_2, B_3... mit der Linie AB zu verlängern, und um diese Durchschnittspunkte sich Kreise resp. mit den Halbmessern BA, B_1A, B_2A, B_3A.... beschrieben zu denken. Der Kreis

vom Halbmesser $OA = 1.\overline{OA}$ enthält alsdann die beiden Punkte A und B,

vom Halbmesser $BA = 2.\overline{OA}$ „ „ „ „ „ A und C,

vom Halbmesser $B_1A = 4.\overline{OA}$ „ „ „ „ „ A und D,

vom Halbmesser $B_2A = 8.\overline{OA}$ „ „ „ „ „ A und E,

vom Halbmesser $B_3A = 16.\overline{OA}$ „ „ „ „ „ A und F

u. s. w.,

so dass AB, AC, AD, AE, AF.... Sehnen sind, denen in diesen Kreisen die Zentrumswinkel π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{16}$.... entsprechen, deren zugehörige Peripheriestücke genau gleich der Länge des Halbkreises AB sind. Es sind also bei der obigen Methode nur die betreffenden Sehnen für die zugehörigen Bögen gesetzt, was der Wahrheit um so näher kommen muss, je grösser der Halbmesser des betreffenden Kreises, je flacher also der zu einer solchen Sehne gehörige Bogen geworden ist.

Durch diese Konstruktion, welche ich bereits in einer Schrift über die imaginären Zahlen mitgetheilt habe, hier aber noch etwas weiter auszudehnen beabsichtige, findet sich auch auf ganz einfachem elementaren Wege die bekannte Formel

$$\pi = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cos\frac{\pi}{2^4}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}},$$

welche bequem dazu dienen kann, den Grad der Annäherung der obigen Werthe von AB, AC, AD... zu ermitteln. Man hat hier nämlich, wenn man den Halbmesser $OA = 1$ setzt,

$AB=2,$

$$AC=\frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2} \qquad =3{,}82813,$$

$$AD=\frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}} \qquad =3{,}06147,$$

$$AE=\frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}} \qquad =3{,}12145,$$

$$AF=\frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}} \qquad =3{,}13655,$$

$$AG=\frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{64}} \qquad =3{,}14033,$$

$$AH=\frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{64}\cos\frac{\pi}{128}}=3{,}14128.$$

Da $\pi=3{,}14159\ldots$ ist; so folgt, dass schon bei vier Winkelhalbirungen der Näherungswerth AF nur um $\frac{1}{500}$ zu klein ist.

Man kann sich übrigens auch durch einfache Zeichnung ein Urtheil über den Grad der Genauigkeit eines jeden solchen Näherungswerthes AF verschaffen. AF, wie jeder andere der vorstehenden Näherungswerthe, ist nämlich zu klein. Verlängert man aber die Linie EF bis zum Durchschnitte N mit AM, so ist AN zu gross; denn man hat

$$AN=\frac{AF}{\cos\frac{\pi}{32}}=\frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\cdot\cos\frac{\pi}{32}}$$

und da

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi}{32}}>\frac{1}{\cos\frac{\pi}{64}\cos\frac{\pi}{128}\ldots\cos\frac{\pi}{2^n}}$$

ist; so ergibt sich nach dem vorstehenden Ausdrucke für π $AN>\pi$.

Der Werth von π liegt also zwischen AM und AN, kann also bald zwischen ungemein enge Gränzen eingeschlossen werden.

Die vorstehende Methode hat vor vielen anderen noch
Vorzug, dass sie sich mit derselben Leichtigkeit auf die Rek
kation jedes beliebigen Kreisbogens, derselbe mag kle
oder grösser sein, als der Halbkreis, in Anwendung bringen lä

Wäre in Taf. VII. Fig. 5. der Bogen AB zu rektifiziren; so zieht
den Halbmesser OA, ferner die Sehne AB und legt AM
pendikular auf OA. Darauf halbirt man durch AC den Wi
MAB, dann durch AD den Winkel MAB, dann durch AE
Winkel MAC, dann durch AE den Winkel MAD, dann d
AF den Winkel MAE u. s. f. (Wäre ein Bogen wie AB
welcher grösser ist als der Halbkreis, zu rektifiziren; so w
man ebenso durch AC erst den Winkel MAB' zu halbiren ha
u. s. f.) Errichtet man nun in B auf AB das Perpendikel
dann in C auf AC das Perpendikel CD, dann in D auf AD
Perpendikel DE, dann in E auf AE das Perpendikel EF u. s
so sind die geraden Linien AB, AC, AD, AE, AF u. s. f. die gesuc
Näherungswerthe für den Bogen AB. Die vollständige Rek
kation würde nach unendlich vielmal wiederholter Operation
in AM fallende Linie ergeben, deren Endpunkt M sich mit
derjenigen Genauigkeit bestimmen lässt, die überhaupt bei
Konstruktion von Kurven mittelst einzelner Punkte erreichbar
besonders wenn man unterhalb der Linie AM eine der obigen s
metrische Figur entwirft, wodurch der Punkt M zwischen z
immer näher zusammenrückende Punkte F zu liegen kommt.

Der Beweis ist dem früheren durchaus ähnlich.

Wenn der Halbmesser OA gleich der Längeneinheit gen
men und der Bogen $AB = \alpha$ gesetzt wird; so ist die

$$\text{Sehne } AB = 2\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\text{„} \quad AC = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{4}},$$

$$\text{„} \quad AD = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}},$$

$$\text{„} \quad AE = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cos\frac{\alpha}{16}},$$

u. s. f.

und es findet sich für den Bogen $AB = \alpha$ die Formel

$$\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2^2}\cos\frac{\alpha}{2^3}\cos\frac{\alpha}{2^4}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}}$$

Auch hier sind die Näherungswerthe, wie z. B. AF, sämmtlich zu klein. Verlängert man aber EF bis zum Durchschnitte N mit AM; so ist AN zu gross, und man erkennt, zwischen welche enge Grenzen man bald den wahren Werth des fraglichen Kreisbogens einschliessen kann.

2. Quadratur des Kreises.

Da in Taf. VII. Fig. 4. AM gleich der Länge des Halbkreises und in Taf. VII. Fig. 5. AB gleich der Länge des Bogens AB ist; so muss, wenn man die Linie OM zieht, das Dreieck AOM in Taf. VII. Fig. 4. gleich der Fläche des Halbkreises und in Taf. VII. Fig. 5. gleich der Fläche des Kreisausschnittes AOB sein.

Uebertragt man nun irgend Eine der Näherungslinien AB, AC, AD... auf AM, sodass z. B. $AM = AD$ gemacht wird; so stellt das Dreieck AOM einen Näherungswerth resp. für den Halbkreis in Taf. VII. Fig. 4. oder für den Kreisausschnitt in Taf. VII. Fig. 5. mit demselben Grade von Genauigkeit dar, welchen die Länge AD als Näherungswerth für den Bogen AB besitzt.

Auch die Dreiecke AOC, AOD, AOE, AOF... würden Näherungswerthe für die genannte Fläche sein. Dieselben entfernen sich jedoch etwas weiter von der Wahrheit, als die eben beschriebenen.

Legt man in Taf. VII. Fig. 5. durch B die Linie Bm parallel zu OA und zieht mO; so findet man, da nun das Dreieck AOm $=$ dem Dreiecke AOB ist, in dem Dreiecke mOM unmittelbar einen Näherungswerth für den Kreisabschnitt AB.

Sind c, d, e, f... die Durchschnitte der Linie Bm resp. mit den Linien AC, AD, AE, AF...; so können auch die Dreiecke cOC, dOD, eOE, fOF... als Näherungswerthe für den fraglichen Kreisabschnitt angesehen werden, welche jedoch nicht ganz so genau sind, als der Werth des Dreiecks mOM, worin AM resp. $= AC$, AD, AE, AF... gedacht wird.

Durch den Punkt m wird die Länge AM des Kreisbogens AB in zwei Stücke von folgender Beschaffenheit zerlegt:

dem Stücke Am, als Kreisbogen, entspricht ein Kreisausschnitt, welcher dem Dreiecke AOB gleich ist;

dem Stücke mM, als Kreisbogen, entspricht ein Kreisausschnitt, welcher dem Kreisabschnitte AB gleich ist.

XLV.

Ueber die Bewegung eines galvanischen Drahtes unter dem Einfluss des Erdmagnetismus. — Reduktion einiger Integrale auf elliptische Funktionen.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

---

§. 1.

Vom Punkte P (Taf. V. Fig. 5.) herunter hängt ein Draht PQ, der von einem galvanischen Strom durchlaufen wird. Dieser Draht ist um P beweglich, kann aber um O, das senkrecht unter P liegt, bloss einen Kreis vom Halbmesser r beschreiben. Im Punkte S (unter dem Kreis) wirkt auf ihn ein magnetischer Südpol (Nordpol der Erde); welches ist seine Bewegung in dem Kegel, dessen Axe $OP = h$ ist?

(Wie die Bewegung möglich sein kann, kann man aus der daneben stehenden Figur ersehen, wo das Ende des Drahtes, das durch Kork gesteckt ist, auf Quecksilber schwimmt).

Man wähle die Axen Ox, Oy in der Ebene des Kreises, so dass S in der Ebene xz liegt; die positive Seite der z sei nach oben gerichtet. Sei die Länge $OS = k$, und δ der Winkel, den OS mit der Axe der z macht; alsdann sind die Koordinaten von S: $k\sin\delta$, 0, $k\cos\delta$. Am Ende der Zeit t befinde sich der Draht in PQ und sei der Winkel $xOQ = \alpha$, so sind die Koordinaten von Q: $r\cos\alpha$, $r\sin\alpha$, 0. Sei D ein Punkt in PQ, $QD = s$, $PQ = l$, ∂s das Element von l, dessen Mitte D ist; endlich γ der Winkel PQO, so dass $\operatorname{tg}\gamma = \frac{h}{r}$ ist.

Man lege nun zuerst eine Ebene durch S, P, Q, so ist die Gleichung derselben:

$$\begin{aligned} &-rk\sin\delta\sin\alpha(Z+h) \\ &+[r\cos\alpha(h+k\cos\delta)-hk\sin\delta]\,Y-r\sin\alpha(h+k\cos\delta)\,X=0. \qquad (1) \end{aligned}$$

Die Kraft, welche S auf das Element ∂s ausübt, wirkt nur in D nach der Senkrechten auf dieser Ebene.

Die Gleichungen der Linie PQ sind:

$$\left.\begin{aligned} X-r\cos\alpha &= -\frac{r\cos\alpha}{h}Z, \\ Y-r\sin\alpha &= -\frac{r\sin\alpha}{h}Z. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Fällt man von S auf diese Länge eine Senkrechte, so ist deren Länge:

$$\frac{1}{l}\sqrt{[r\cos\alpha(h+k\cos\delta)-hk\sin\delta]^2+r^2\sin^2\alpha(h+k\cos\delta)^2+r^2k^2\sin^2\delta\sin^2\alpha}.$$

Heisst also ω der Winkel der Linien DQ und SD, so ist

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{[r\cos\alpha(h+k\cos\delta)-hk\sin\delta]^2+r^2\sin^2\alpha(h+k\cos\delta)^2+r^2k^2\sin^2\delta\sin^2\alpha}}{l\sqrt{(s.\sin\gamma+k\cos\delta)^2+(r\cos\alpha-s.\cos\gamma\cos\alpha-k\sin\delta)^2+(r\sin\alpha-s.\cos\gamma\sin\alpha)^2}}. \qquad (3)$$

Ist ϱ eine Konstante und setzt man die Kraft in der Einheit des Abstandes und bei senkrechter Einwirkung $=k^2\varrho$, so ist die in D auf ∂s wirkende Kraft:

$$\frac{|k^2\varrho\partial s|}{l}\cdot\frac{\sin\omega}{SD^2}=\frac{k^2\varrho\partial s}{l}\cdot\frac{\sqrt{(r\cos\alpha(h+k\cos\delta)-hk\sin\delta)^2+r^2\sin^2\alpha(h+k\cos\delta)^2+r^2k^2\sin^2\delta\sin^2\alpha}}{[(s.\sin\gamma+k\cos\delta)^2+(r\cos\alpha-s.\cos\gamma\cos\alpha-k\sin\delta)^2+(r\sin\alpha-s.\cos\gamma\sin\alpha)^2]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (4)$$

Die Gleichung einer Ebene durch O, P, Q ist:

$$-\cos\alpha . Y + \sin\alpha . X = 0. \qquad (5)$$

Ist ε der Winkel dieser Ebene und (1), so ist:

$$\cos\varepsilon \qquad (6)$$

$$= \frac{hk\sin\delta\cos\alpha - r(h + k\cos\delta)}{\sqrt{[r\cos\alpha(h+k\cos\delta) - hk\sin\delta]^2 + r^2\sin^2\alpha(h+k\cos\delta)^2 + r^2k^2\sin^2\delta\sin^2\alpha}}.$$

Man zerlege nun die in D wirkende Kraft in zwei andere, wovon die eine senkrecht auf der Ebene (5) steht, die andere in dieser Ebene liegt; alsdann überzeugt man sich leicht, dass die letztere Kraft keinerlei Einfluss auf die Umdrehung des Drahtes um PQ ausübt. Die erste Kraft ergiebt sich aus der Multiplikation von (6) und (4); d. h. sie ist:

$$\frac{k^2\varrho\partial s}{l} \cdot \frac{hk\sin\delta\cos\alpha - r(h + k\cos\delta)}{\left[\begin{array}{c}(s.\sin\gamma + k\cos\delta)^2 + (r\cos\alpha - s.\cos\gamma\cos\alpha - k\sin\delta)^2 \\ + (r.\sin\alpha - s.\cos\gamma\sin\alpha)^2\end{array}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Da die Entfernung des Punktes D von OP gleich $r - s.\cos\gamma$ ist, so ist das Moment der Drehung:

$$\pm\frac{k^2\varrho\partial s}{l} \cdot \frac{[hk\sin\delta\cos\alpha - r(h+k\cos\delta)]\,(r - s.\cos\gamma)}{\left[\begin{array}{c}(s.\sin\gamma + k\cos\delta)^2 + (r\cos\alpha - s.\cos\gamma\cos\alpha - k\sin\delta)^2 \\ + (r\sin\alpha - s.\cos\gamma\sin\alpha)^2\end{array}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Ist S ein magnetischer Erdpol, so ist k unendlich gross, und dieses Moment wird:

$$\pm\frac{\varrho\partial s}{l}(h\sin\delta\cos\alpha - r\cos\delta)(r - s.\cos\gamma);$$

dehnt man es auf die ganze Drahtlänge aus, so erhält man:

$$\pm\frac{\varrho l^2}{l}\cos\gamma(\sin\gamma\sin\delta\cos\alpha - \cos\gamma\cos\delta).$$

Für $\gamma = 0$ ist diese Grösse negativ, wenn man das obere Zeichen wählt; da aber die Kraft rechtläufig (in der Richtung der Zeiger einer Uhr) zu drehen strebt, so ist das Moment:

$$\frac{\varrho l^2}{2}\cos\gamma(\cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta\cos\alpha).$$

Bezeichnet μ eine Konstante, die sich auf den Widerstand, den das Quecksilber der Bewegung leistet, bezieht, und setzt man diesen Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional, so ist die Gleichung der Bewegung:

$$p\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}+\mu r^2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2=\frac{\rho l^2}{2}\cos\gamma(\cos\gamma\cos\delta-\sin\gamma\sin\delta\cos\alpha),\qquad(7)$$

wenn p das Trägheitsmoment des Drahtes in Bezug auf OP ist. Man setze hier $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2=y$, so ergiebt sich:

$$\frac{p}{2}\frac{\partial y}{\partial\alpha}+\mu r^2.y=\frac{\rho l^2}{2}\cos\gamma(\cos\gamma\cos\delta-\sin\gamma\sin\delta\cos\alpha).$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$y=C.e^{-\frac{2\mu r^2}{p}\alpha}\qquad(8)$$

$$+\frac{\rho l^2}{2\mu r^2}\cos^2\gamma\cos\delta-\frac{\rho l^2}{2\mu r^2}\sin\gamma\cos\gamma\sin\delta\frac{\cos\alpha+\frac{p}{2\mu r^2}\sin\alpha}{1+\frac{p^2}{4\mu^2r^4}}=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2.$$

Ist $\frac{\partial\alpha}{\partial t}=0$ für $\alpha=0$, so ist C leicht zu bestimmen. Da aber, namentlich wenn $\frac{2\mu r^2}{p}$ ziemlich gross ist, $e^{-\frac{2\mu r^2}{p}\alpha}$ bald unmerklich sein wird, so kann man nach kurzer Zeit setzen:

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2=\frac{\rho l^2}{2\mu r^2}\cos^2\gamma\cos\delta-\frac{\rho l^2}{2\mu r^2}\frac{\cos\alpha+\frac{p}{2\mu r^2}\sin\alpha}{1+\frac{p^2}{4\mu^2r^4}}\sin\gamma\cos\gamma\sin\delta.\ (9)$$

Ist λ das Gewicht des Drahtes, so ist ungefähr

$$p=\lambda\int_0^l(r-s.\cos\gamma)^2\partial s=\frac{\lambda l r^2}{3},$$

also $\frac{p}{2\mu r^2}=\frac{\lambda l}{6\mu}$. Kann man nun λ im Verhältniss zu 6μ vernachlässigen, so ergiebt sich, für einige Zeit nach Anfang der Bewegung:

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2=\frac{\rho}{2\mu}(\cos\delta-\operatorname{tg}\gamma\sin\delta\cos\alpha),\qquad(10)$$

durch welche Gleichung die Winkelgeschwindigkeit für jedes α bestimmt wird. Hieraus folgt:

$$\sqrt{\frac{\varrho\cos\delta}{2\mu}}\,.\,\partial t = \frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{tg}\gamma.\mathrm{tg}\delta.\cos\alpha}},$$

$$\sqrt{\frac{\varrho\cos\delta}{2\mu}}\,.\,t = \int_0^\alpha \frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\delta\cos\alpha}}, \qquad (11)$$

wenn man die Zeit (nachdem die Bewegung schon gedauert), von $\alpha=0$ an zu zählen anfängt. Da immer $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 > 0$, so folgt aus (10), dass

I. wenn $\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta \leqq 1$, α von 0 bis 2π gehen kann;

II. „ $\mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\delta > 1$, α nur von β bis $2\pi-\beta$ gehen kann, wo $\cos\beta = \frac{1}{\mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\delta}$ ist.

Nur im ersten Falle hat eine vollständige Rotation statt, während im zweiten Falle ein Hin- und Herschwanken vor sich geht. Im ersten Falle ist $\delta < OPQ$, d. h. die Neigung des Drahtes gegen die Senkrechte ist grösser als die Neigung der Richtung der erdmagnetischen Kraft gegen dieselbe. Im ersten Falle giebt (11), wie wir sogleich zeigen wollen:

$$\sqrt{\left(\frac{\varrho\cos\delta}{2\mu}\right)}\,.\,t \qquad (12)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta}}\left\{F\left[\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta}{1+\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta}}\right] - F\left(\frac{\pi-\alpha}{2},\sqrt{\frac{2\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta}{1+\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta}}\right)\right\}$$

und für die Dauer einer ganzen Umdrehung ist die Zeit:

$$\sqrt{\left(\frac{2\mu}{\varrho}\right)}\cdot\frac{4}{\sqrt{\cos\delta+\mathrm{tg}\gamma\sin\delta}}\,F\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta}{1+\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta}}\right). \qquad (13)$$

Das Qudrat dieser Grösse, unter sonst gleichen Umständen, ist also der Stärke des Erdmagnetismus proportional. Für $\gamma=0$ wird (13);

$$2\pi.\sqrt{\left(\frac{2\mu}{\varrho}\right)}. \qquad (14)$$

Im zweiten Fall ist die Dauer eines Hingangs:

$$\sqrt{\left(\frac{2\mu}{\varrho\cos\delta}\right)}\cdot\int_\beta^{2\pi-\beta}\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta\cos\alpha}} \qquad (15)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\mu}{\varrho\cos\delta}\right)}\cdot\int_{-(\pi+\beta)}^{\pi-\beta}\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta\cos\alpha}},$$

welche Grösse man leicht durch elliptische Funktionen ausd
kann.

Nachdem wir diese Aufgabe gelöst haben, wollen wir
so eben angeführten Integrationsformeln beweisen, und dab
legenheit nehmen, einige ähnliche beizufügen.

§. 2.

Seien a und b positiv, wie in Allem, was folgt, und zu
nächst $a > b$, so ist

$$\int_0^\alpha \frac{\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}} = 2\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(a-b\cos 2\varphi)^{\frac{1}{2}}} = 2\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(a+b-2b\cos^2 \ldots}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a+b}}\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\left(1-\frac{2b}{a+b}\cos^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a+b}}\int_\psi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\psi}{\left(1-\frac{2b}{a+b}\sin^2\psi\right)^{\frac{1}{2}}},$$

wenn zunächst $\alpha=2\varphi$, $\psi=\frac{\pi}{2}-\varphi$ oder $\psi=\frac{\pi-\alpha}{2}$. Hieraus folg

$$\int_0^\alpha \frac{\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a+b}}\left[F\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right)-F\left(\frac{\pi-\alpha}{2},\sqrt{\frac{ab}{a+b}}\right)\right]. \quad (1)$$

Aus (1) ergiebt sich nun:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a+b}}\left[F\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right)-F\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right)\right]. \quad (2)$$

Unter denselben Bedingungen, wie so eben, ist:

$$\int_0^\alpha \frac{\cos\alpha\,\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}} = 2\int_0^\varphi \frac{\cos 2\varphi\,\partial\varphi}{(a+b-2b\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}}\int_0^\varphi \frac{(1-2\sin^2\varphi)\,\partial\varphi}{\left(1-\frac{2b}{a+b}\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}}\int_\psi^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-2\cos^2\psi)\partial\psi}{\left(1-\frac{2b}{a+b}\sin^2\psi\right)^{\frac{3}{2}}},$$

d. h.

(3)

$$\int_0^\alpha \frac{\cos\alpha\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}}\Big[F\Big(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big) - F\Big(\frac{\pi-\alpha}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big) - \frac{a+b}{b}\Big\{E\Big(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big) - E\Big(\frac{\pi-\alpha}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big)\Big\}$$
$$+\frac{a-b}{b}\Big\{F\Big(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big) - F\Big(\frac{\pi-\alpha}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big)\Big\}\Big]$$
$$= \frac{2}{b\sqrt{a+b}}\Big[a\Big\{F\Big(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big) - F\Big(\frac{\pi-\alpha}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big)\Big\} - (a+b)\Big\{E\Big(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big) - E\Big(\frac{\pi-\alpha}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big)\Big\}\Big].$$

Sei nun b willkührlich, so ist:

$$\int_0^\alpha \frac{\partial\alpha}{(a+b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}} = 2\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(a+b\cos 2\varphi)^{\frac{1}{2}}} = 2\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(a+b-2b\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a+b}}\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\left(1-\frac{2b}{a+b}\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

d. h.

$$\int_0^\alpha \frac{\partial\alpha}{(a+b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}} F\left(\frac{\alpha}{2}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right). \tag{4}$$

Eben so findet man:

$$\int_0^\alpha \frac{\cos\alpha\,\partial\alpha}{(a+b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2}{b\sqrt{a+b}}\left[(a+b)\,E\left(\frac{\alpha}{2}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right) - aF\left(\frac{\alpha}{2}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right)\right]. \tag{5}$$

Unter den Bedingungen von (1) folgt hieraus:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\alpha}{(a+b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{a+b}} F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right). \tag{6}$$

Eben so:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha\,\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{4}{b\sqrt{a+b}}\left[aF\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right) - (a+b)\,E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right)\right]. \tag{7}$$

$$\frac{\partial\alpha}{(a+b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{\sqrt{a+b}}F\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right)\Big], \qquad (8)$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\alpha\,\partial\alpha}{(a+b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}} \qquad (9) \qquad b<a.$$

$$\frac{4}{\sqrt{a+b}}\Big[(a+b)E\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right)-aF\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right)\Big].$$

die Integrale

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\alpha}{(a\pm b\cos\alpha)^{\frac{n}{2}}},\quad \int_0^{2\pi}\frac{\cos\alpha\,\partial\alpha}{(a\pm b\cos\alpha)^{\frac{n}{2}}},\quad b<a$$

f die obigen zurückführen lassen, so können sie ebenfalls
nt werden. So ist z. B.

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\alpha}{(a+b\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\sqrt{a+b}}{a^2-b^2}E\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right).$$

XLVI.

Ueber Sternpolygone und Sternpolyeder, nach Poinsot.

(Frei aus den Nouvelles Annales von Terquem. Février et Avril 1849.)

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

---

1. Es seien die Zahlen 1, 2, 3,..... n in der natürlichen Ordnung auf den Umfang eines Kreises geschrieben; man gehe nun vom Punkte 1 zum Punkte p, von da zu $p+p-1$, von da zu $p+2(p-1)$ u. s. f., so soll zunächst bestimmt werden, wie viele Punkte man zu durchlaufen habe, bis man zu 1 zurückkehrt, und wie viele Male man den Umfang des Kreises durchlaufen hat.

Gesetzt man gehe durch $x+1$ Punkte, den ersten mit eingerechnet, und durchlaufe dabei y mal den Umfang des Kreises, so ist

$$p+x(p-1)=ny+1, \text{ oder } (p-1)(x+1)=ny, \qquad (1)$$

wie man leicht einsehen wird. Sei nun m der grösste gemeinschaftliche Theiler zwischen n und $p-1$, zugleich

$$\frac{p-1}{m}=a,\ \frac{n}{m}=b; \qquad (2)$$

so ist auch

$$a(x+1)=by. \qquad (3)$$

Es ist klar, dass es sich nur um die kleinsten Zahlen x und y handeln kann, welche diese Gleichung befriedigen, da es klar ist, dass, wenn α und β die kleinsten Werthe von y und $x+1$

sind, 2α, 2β ebenfalls der Gleichung (3) genügen u. s. f. Zugleich ist klar, dass die Werthe

$$x=b-1,\ y=a \qquad (4)$$

der Gleichung (3) genügen. Aber ich behaupte, dass y nicht $<a$ sein kann; denn aus (3) folgt

$$x+1=\frac{b.y}{a},$$

und da $y<a$, b aber theilerfremd zu a ist, so könnte by kein Vielfaches von a sein. Ebenso kann nicht $x+1<b$ sein. Die Werthe (4) sind also die kleinsten, welche der Gleichung (3) genügen, d. h. man durchläuft b Punkte, den ersten eingerechnet, bis man zu ihm zurückkehrt, und beschreibt dabei $a$mal den Umfang des Kreises.

Sind $p-1$ und n theilerfremd, so ist $m=1$, also $a=p-1$, $b=n$; d. h. in diesem Falle durchläuft man alle n Punkte, ehe man zum ersten zurückkehrt und bewegt sich dabei $(p-1)$mal durch den Umfang des Kreises.

Im allgemeinen Falle trifft man nach einander auf folgende Punkte:

$$1,\ p,\ 2p-1,\ 3p-2,\ 4p-3,\ \ldots\ldots\ldots,\ (b-1)p-(b-2),\ 1;$$

in dem besondern:

$$1,\ p,\ 2p-1,\ 3p-2,\ 4p-3,\ \ldots\ldots\ (n-1)p-(n-2),\ 1.$$

Denkt man sich im letzteren Falle, der Punkt 1 bewege sich durch alle diese Punkte, so ist also seine letzte Stelle, ehe er auf seine ursprüngliche Lage zurückkehrt:

$$(n-1)p-(n-2)=np-n-p+2=(p-1)n+2-p.$$

Dieser Punkt ist also der Punkt $n+2-p$, was übrigens natürlich ist, da er vom Punkte $n+1$ (d. h. 1) um $p-1$ zurückliegt.

Daraus folgt auch, dass man dieselben Punkte durchlaufen wird, wenn man von 1 zu $n+2-p$ geht und sodann immer um $p-1$ weiter, also die Punkte von p zu p nimmt; nur wird man da die entgegengesetzte Richtung einschlagen.

2. Theilt man also den Kreisumfang in n gleiche Theile, bezeichnet die Theilpunkte mit 1, 2, ...n, und verbindet, wenn $p-1$ zu n theilerfremd ist, den Punkt 1 mit p, diesen mit $2p-1$, den letztern mit $3p-2$ u. s. f., so wird man, nachdem man $(p-1)$mal den Kreisumfang durchlaufen hat, ein geschlossenes Vieleck von n Seiten erhalten, welches lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel hat.

Sind die Theile des Kreisumfangs nicht gleich gewesen, so sind auch die Seiten und Winkel des Vielecks nicht gleich.

Wenn $p=2$ ist, so erhält man die gewöhnlichen Vielecke; für $p>2$ aber die **Sternpolygone**. Diese sind **regelmässig**, wenn die Theile des Kreisumfangs gleich waren.

Es giebt demgemäss so viele Vielecke von n Seiten, beschrieben in einer oder der entgegengesetzten Richtung, als es Zahlen, kleiner als n, giebt, die mit n theilerfremd sind, und also eigentlich bloss die Hälfte dieser Anzahl, wenn man nur die Vielecke, die nach einer Richtung beschrieben werden, aufzählt, indem die andern mit diesen zusammenfallen. Ob man nämlich von 1 zu p, oder von 1 zu $n+2-p$ geht, erhält man dasselbe Vieleck. Ist aber $p-1$ zu n theilerfremd, so ist es auch $(n+2-p)-1$ $=n-(p-1)$, und dies ist zugleich $<n$, so dass diese zwei Vielecke nur für eines zu rechnen sind, wenn sie gleich in entgegengesetzter Richtung beschrieben sind.

Da die Anzahl aller zu n theilerfremden Zahlen gerade ist, so kann man immer die Hälfte dieser Anzahl bestimmen.

Das Vieleck von n Seiten, das man erhält, wenn man von 1 zu p geht ($p-1$ Abtheilungen des Kreisumfangs überspringt), heisse von der Ordnung $p-1$. Also

n		Anzahl der Vielecke.					
‖							
3	.....	1,					
4	.....	1,					
5	.....	2,	näml. von	1 zu 2, u. 1 zu 3;	also	1te u. 2te	Ordnung.
6	.....	1,					
7	.....	3,	„ „	1 „ 2, 1 zu 3, 1 zu 4,		1„, 2„, 3„,	„
8	.....	2,	„ „	1 „ 2, 1 „ 4,		1„, 3„,	„
9	.....	3,	„ „	1 „ 2, 1 „ 3, 1 „ 5		1„, 2„, 4„,	„
10	.....	2,	„ „	1 „ 2, 1 „ 4,		1„, 3„,	„

Unter **Winkel** eines solchen Vielecks verstehen wir den Winkel, welchen zwei auf einander folgende Seiten desselben bilden; es ist der Winkel, welcher den Mittelpunkt enthält.

3. Die Summe der Winkel eines Vielecks von n Seiten und der $(p-1)$ten Ordnung ist $\pi[n-2(p-1)]$, vorausgesetzt, dass $p-1$ theilerfremd zu n ist.

Denken wir uns nämlich vom Mittelpunkte des Kreises (allgemein von einem Punkte im Innern des Vielecks) gerade Linien auf die Ecken des Vielecks gezogen, so erhält man n Dreiecke, deren Winkelsumme $n\pi$ ist. Davon gehen die Winkel am Mittelpunkte ab, wenn man bloss die Winkel des Vielecks berechnen will. Da aber der Kreisumfang $(p-1)$ mal durchlaufen ist, so ist die Summe der Winkel am Mittelpunkte $2(p-1)\pi$; also bleibt für die Summe der Winkel im Vieleck $\pi[n-2(p-1)]$.

Wenn $p=2$, so ist diese Summe $\pi(n-2)$, wie bekannt. Wenn $n=2(p-1)+1=2p-1$, so ist die Summe aller Winkel des

Vielecks $=\pi$. Ist also $n=2q+1$, und man geht von 1 zu $q+1$, so erhält man ein Vieleck, in dem alle Winkel zusammen zwei rechte betragen. Wenn $n=2(p-1)+2=2p$, so ist die Summe der Winkel $=2\pi$. Ist also $n=2q$ und man geht von 1 zu q, so erhält man ein Vieleck, in dem die Winkel zusammen vier rechte ausmachen.

Ist das Vieleck regelmässig, so ist jeder Winkel

$$=\frac{\pi}{n}[n-2(p-1)]=\pi-2\pi\left(\frac{p-1}{n}\right).$$

Es wurde bis jetzt vorausgesetzt, dass die n Punkte auf einem Kreisumfang liegen; aber es ist einleuchtend, dass die angeführten Sätze ebenfalls bestehen, wenn dieselben beliebig auf einer Ebene vertheilt sind. Nur kann in diesem Falle es sich ereignen, dass einspringende Winkel vorkommen.

4. Da der Punkt 1, wenn man denselben sich bewegend denkt, den Kreisumfang $(p-1)$mal durchläuft, so kann eine Gerade von demselben $2(p-1)$mal getroffen werden; demnach kann eine Gerade die Seiten eines Vielecks von n Seiten und der $(p-1)$ten Ordnung (immer $p-1$ theilerfremd zu n) in $2(p-1)$ Punkten treffen.

5. Die Zahl $\frac{q(q+1)}{2}$ ist theilerfremd mit $2q+1$. Denn sei r der grösste gemeinschaftliche Theiler und

$$\frac{q(q+1)}{2r}=n,\ \frac{2q+1}{r}=m,$$

wo also n und m theilerfremd sind und jedenfalls m nicht $=2$ ist, so sind auch $2n$ und m theilerfremd. Da aber

$$q(q+1)=2nr,\ 2q+1=mr;$$

so hatten also auch $q(q+1)$ und $2q+1$ denselben grössten gemeinschaftlichen Theiler r. Da aber q und $q+1$ keinen gemeinschaftlichen Theiler, ausser 1, haben, eben so aber auch nicht q und $2q+1$, so wie $q+1$ und $2q+1$, da sonst immer auch $2q+1-q=q+1$, $2q+1-(q+1)=q$ denselben Theiler hätten, so folgt daraus, dass $r=1$ sein muss, was die Behauptung beweist.

6. Wenn r zu $2q+1$ theilerfremd ist, so geben die $2q+1$ ersten Glieder der arithmetischen Reihe, deren erstes Glied r, und deren Unterschied $\frac{q(q+1)}{2}$ ist, wenn man sie mit $2q+1$ dividirt, die Reste $1, 2, \ldots (2q+1)$ in beliebiger Ordnung, und der $(2q+2)$te Rest ist r, wo natürlich $r<2q+1$ angenommen ist.

Damit nämlich der Rest r wieder erscheine, muss für x und y ganze Zahlen:

$$r+\frac{xq(q+1)}{2}=(2q+1)y+r,$$

$$x.\frac{q(q+1)}{2}=(2q+1)y$$

sein, woraus wie in 1. folgt, dass die kleinsten Werthe von x und y $2q+1$ und $\frac{q(q+1)}{2}$ sind, d. h. r erscheint nicht wieder als Rest, als beim $(2q+2)$ten Gliede. So lange ferner $x<2q+1$ ist, sind alle Reste verschieden. Denn seien k und k' kleiner als $2q+1$, so müsste für $k>k'$:

$$\left.\begin{aligned} r+\frac{kq(q+1)}{2}&=(2q+1)n+s\\ r+\frac{k'q(q+1)}{2}&=(2q+1)m+s\end{aligned}\right|\text{ also } (k-k')\frac{q(q+1)}{2}=(n-m)(2q+1),$$

d. h., da $\frac{q(q+1)}{2}$ zu $2q+1$ theilerfremd ist, es müsste $k-k'$ durch $2q+1$ theilbar sein, was unmöglich ist. Es giebt somit $2q+1$ verschiedene Reste, die demnach die Zahlen $1, 2, \ldots 2q+1$, unter denen auch r vorkommt, wenn auch in beliebiger Ordnung, umfassen.

7. Es seien $2q+1$ Punkte im Raume angenommen und die Aufgabe gestellt, in einem einzigen Zuge die $q(2q+1)$ Geraden zu beschreiben, die zwischen diesen Punkten möglich sind, ohne dieselbe Gerade zweimal zu beschreiben.

Man bilde die Reihen:

$$2,\quad 4,\quad 7,\quad 11,\ldots\ldots\ldots,\ \frac{q(q+1)}{2}+1;$$

$$2+\frac{q(q+1)}{2},\quad 4+\frac{q(q+1)}{2},\quad 7+\frac{q(q+1)}{2},\quad 11+\frac{q(q+1)}{2},\ \ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{q(q+1)}{2}+1+\frac{q(q+1)}{2};$$

$$2+2.\frac{q(q+1)}{2},\quad 4+2.\frac{q(q+1)}{2},\quad 7+2.\frac{q(q+1)}{2},\ \ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{q(q+1)}{2}+1+2.\frac{q(q+1)}{2};$$

$$\vdots$$

$$2+2q.\frac{q(q+1)}{2},\quad 4+2q.\frac{q(q+1)}{2},\quad 7+2q.\frac{q(q+1)}{2},\ \ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{q(q+1)}{2}+1+2q.\frac{q(q+1)}{2}.$$

Jede dieser $2q+1$ Reihen enthält q Glieder; die erste wird gefunden, wenn man in dem Ausdrucke $\frac{n(n+1)}{2}+1$ für n setzt: $1, 2, 3, \ldots q$; die zweite ergiebt sich aus der ersten, indem man $\frac{q(q+1)}{2}$ zu den Gliedern der ersten Reihe hinzuzählt, u. s. f. Man durchlaufe nun, vom Punkte 1 ausgehend, alle Punkte, die durch die erste Reihe bezeichnet sind; von dem letzten dieser Reihe, der durch $\frac{q(q+1)}{2}+1$ bezeichnet ist, gehe man zum ersten der zweiten Reihe und durchlaufe eben so die Punkte der zweiten Reihe; von diesen gehe man zu denen der dritten Reihe über u. s. f., so erhält man $q(2q+1)$ Linien, die alle von einander verschieden sind.

Betrachtet man die q Vertikalreihen, so folgt nach 6. leicht, dass in jeder die Punkte $1, 2, \ldots (2q+1)$ vorkommen, so dass jeder Punkt q mal vorkommt, wie dies nothwendig ist. Wenn ferner n, $n' < q$, k, k' nicht $> 2q$, so kann man je zwei auf einander folgende Punkte, die durch eine Linie verbunden werden, durch

$$\frac{n(n+1)}{2}+1+k\frac{q(q+1)}{2} \text{ und } \frac{(n+1)(n+2)}{2}+1+k\frac{q(q+1)}{2},$$

$$\frac{n'(n'+1)}{2}+1+k'\frac{q(q+1)}{2} \text{ und } \frac{(n'+1)(n'+2)}{2}+1+k'\frac{q(q+1)}{2}$$

bezeichnen. Sind nun m, m' ganze Zahlen, so werden keine zwei der $q(2q+1)$ Linien dieselben sein, wenn nicht zugleich

$$\begin{cases} \frac{n(n+1)}{2}+1+k\frac{q(q+1)}{2}=\frac{n'(n'+1)}{2}+1+k'\frac{q(q+1)}{2}+m(2q+1), \\ \frac{(n+1)(n+2)}{2}+1+k\frac{q(q+1)}{2}=\frac{(n'+1)(n'+2)}{2}+1+k'\frac{q(q+1)}{2}+m'(2q+1) \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} \frac{n(n+1)}{2}+1+k\frac{q(q+1)}{2}=\frac{(n'+1)(n'+2)}{2}+1+k'\frac{q(q+1)}{2}+m(2q+1), \\ \frac{(n+1)(n+2)}{2}+1+k\frac{q(q+1)}{2}=\frac{n'(n'+1)}{2}+1+k'\frac{q(q+1)}{2}+m'(2q+1) \end{cases}$$

sein kann. Aus den ersten zwei Gleichungen folgt durch Subtraktion:

$$n+1=n'+1=(m'-m)(2q+1),$$

d. i.

$$n - n' = (m' - m)(2q + 1).$$

Da nun nicht zugleich $n = n'$, $k = k'$ sein darf, so ist diese Gleichung unmöglich, indem n und $n' < q$ sind. Sie wäre nur möglich für $n = n'$, also $m = m'$, woraus aber $k = k'$ folgen würde, was unstatthaft ist, da sonst die oben angegebenen Punkte statt zweier Paare nur ein einziges sein würden.

Aus den andern zwei Gleichungen würde eben so folgen:

$$n+1 = -(n'+1) + (m'-m)(2q+1),$$

$$n+n'+2 = (m'-m)(2q+1).$$

Da aber n und n' kleiner als q, so ist $n+n'+2 < 2q+1$, so dass diese Gleichung ebenfalls unmöglich ist. Woraus denn die Behauptung folgt.

Würde man die $(2q+2)$te Reihe bilden, so würden die Punkte derselben mit denen der ersten Reihe zusammenfallen u. s. f. Der letzte Punkt der $(2q+1)$ten Reihe fällt mit dem ersten zusammen.

Man kann also ohne Verdoppelung einen Faden über die Seiten und Diagonalen eines Vielecks von ungerader Seitenanzahl, so wie über die Kanten und Diagonalen eines Polyeders von ungerader Eckenzahl wickeln.

8. Wenn die Anzahl der Punkte gerade ist, so ist die Aufgabe unmöglich. Denn seien $1, 2, \ldots 2q$ die Punkte, so müsste man, wenn die Aufgabe möglich wäre, in einer Linie fort alle $q(2q-1)$ Verbindungen zu zwei schreiben können, so dass die Anfangszahl jeder Verbindung die Endzahl der vorangehenden wäre, und zugleich am Anfang und Ende der Linie dieselbe Zahl stünde. Ein jeder Punkt, z. B. 1, würde also eine gerade Anzahl mal vorkommen, d. h. es würden von jedem Punkte eine gerade Anzahl Linien ausgehen, was falsch ist.

So ist es z. B. unmöglich, durch einen einzigen Zug die vier Seiten und die zwei Diagonalen eines Vierecks zu beschreiben.

9. Man habe ein ebenes Vieleck von n Seiten und der Ordnung $p-1$; man nehme einen Punkt O ausserhalb der Ebene dieses Vielecks an und lege durch ihn und jede Seite des Vielecks Ebenen, so erhält man in O eine körperliche Ecke von n Seiten und der Ordnung $p-1$. Eine Gerade kann seine Seiten also in $2(p-1)$ Punkten schneiden (4.). Denkt man sich um O eine Kugel, so bilden die Durchschnitte der genannten Ebenen mit der Kugelfläche ein Kugelvieleck von n Seiten und der Ordnung $p-1$. Im Folgenden sollen jedoch bloss Kugelvielecke der ersten Ordnung betrachtet werden.

10. Man habe ein regelmässiges Kugelvieleck von n Seiten, von dem jeder Winkel $= a$ Rechte ist, so ist, wenn f solcher Vielecke g mal den Flächeninhalt der Kugel bedecken, offenbar

$$f(na - 2n + 4) = 8g.$$

Wir wollen nun annehmen, diese f Vielecke wären so gelegt, dass sie einerseits g mal die Kugel bedecken, anderseits jeweils q Winkel in einem Punkte zusammengelegt sind und dort, durch die den Seiten entsprechenden Sehnen, eine körperliche Ecke der Ordnung $p-1$ bilden. Für diesen Fall ist offenbar (1.):

$$qa=4(p-1);$$

so dass also zu gleicher Zeit folgende Gleichungen bestehen müssen:

$$f(na-2n+4)=8g, \quad qa=4(p-1),$$

worin f, n, g, q, p ganze, positive Zahlen; $p-1$ theilerfremd zu q ist, und n und q nicht unter 3 sind.

Sei nun zunächst

$$g=1, \quad p=2$$

und

α) $n=3$, $q=3$, so ist $a=\frac{4}{3}$, $f=4$, d. h. man hat das regelmässige Tetraeder;

β) $n=3$, $q=4$, so ist $a=1$, $f=8$, d. h. man hat das regelmässige Oktaeder;

γ) $n=3$, $q=5$, so ist $a=\frac{4}{5}$, $f=20$, d. h. man hat das regelmässige Ikosaeder.

Für $n=3$, kann nicht $q \overset{=}{>} 6$ sein.

δ) $n=4$, $q=3$, so ist $a=\frac{4}{3}$, $f=6$, d. h. man hat das regelmässige Hexaeder;

ε) $n=5$, $q=3$, so ist $a=\frac{4}{3}$, $f=12$, d. h. man hat das regelmässige Dodekaeder.

Höher als $n=5$ kann man nicht mehr gehen.

$$p=3.$$

Das Fünfeck bietet zuerst ein Vieleck der 2ten Ordnung dar (2.). Sei also $q=5$ und

$$\alpha)\ n=3, \text{ also } a=\frac{8}{5},\ f=\frac{20g}{7},$$

woraus in den kleinsten Zahlen:

$$g=7, \quad f=20.$$

Wenn dieser Körper also besteht, so hat er 20 dreieckige Seitenflächen und bedeckt die Kugel 7mal. Man bildet ihn vermittelst des regelmässigen Ikosaeders. Von jeder Ecke des letztern gehen sechs Diagonalen aus, von denen fünf gleich sind und die Kanten einer fünfflächen körperlichen Ecke der zweiten Ordnung bilden. Die zwölf derartigen Ecken bilden 20 gleichseitige Dreiecke, gleich geneigt auf einander, so dass dadurch der Stern-Ikosaeder hervorgebracht wird.

β) $n=5$, also $a=\frac{8}{5}$ und $f=4g$. Da die körperlichen Ecken von der zweiten Ordnung sind, so ist $g \geqq 2$. Sei also $g=3$, und daher $f=12$, so erhält man einen Körper, der ebenfalls besteht. Man erhält ihn aus dem regelmässigen Ikosaeder. Von jeder Ecke des letztern gehen 5 Kanten aus, deren Enden ein regelmässiges Fünfeck bilden. Die zwölf Fünfecke machen den Stern-Dodekaeder aus.

11. Wenn man in dem letzten Körper, der die Kugel 3mal bedeckt, die Seiten der Flächen zu je zwei verlängert, bis sie sich treffen, so erhält man 12 regelmässige Fünfecke der zweiten Ordnung, die sich zu 3 um 20 Ecken vereinigen und einen neuen Stern-Dodekaeder bilden, der von Fünfecken der zweiten Ordnung gebildet ist. Er hat 20 dreifache Ecken, 30 Kanten, und bedeckt die Kugel 5mal, während die körperliche Ecke von der 4ten Ordnung ist.

Verlängert man eben so im gewöhnlichen regelmässigen Dodekaeder die Seiten der 12 Fünfecke, so erhält man einen neuen Stern-Dodekaeder, gebildet von Fünfecken der zweiten Ordnung. Diese vereinigen sich zu fünf an jeder Ecke und die Oberfläche des Polyeders bedeckt die Kugel nur zweimal.

Diese vier Körper sind die einzigen regelmässigen Sternpolyeder, deren Bestand nachgewiesen ist.

XLVII.

Miscellen.

…er den Inhalt einer gewissen Art von Körpern, …vielleicht bei der näherungsweisen Bestimmung der Schiffsräume von Nutzen sein können.

Von dem Herausgeber.

…n Taf. VII. Fig. 6. sei $ABCDEF$ ein Körper von folgender …chaffenheit. Die eine begränzende Ebene $ABCD$ desselben …ein Trapezium mit den parallelen Seiten AB und CD, welche …der ihre Mittelpunkte G und H mit einander verbindenden …den Linie GH senkrecht stehen. Die beiden auf der Ebene …CD, und also nach dem Vorhergehenden auch auf der Linie …senkrecht stehenden begränzenden Ebenen AEB und CFD …ers Körpers seien Parabelsegmente, deren Axen die auf den …en AB und CD in deren Mittelpunkten G und H, und also …h auf der Ebene $ABCD$ und der Linie GH senkrecht stehen- …Linien EG und FH sind. Die Scheitel dieser Parabelseg- …nte sind E und F. Endlich sei die unsern Körper begränzende …mme Fläche $ABCDEF$ so beschaffen, dass jeder auf GH …krecht stehende Queerschnitt des Körpers ein Parabelsegment …dessen Axe in der auf der Ebene $ABCD$ senkrecht stehen- …Ebene $EFGH$, und dessen Scheitel in der die Scheitel E …F der Parabelsegmente AEB und CFD mit einander verbin-…den geraden Linie EF liegt.

Um das Volumen V dieses Körpers zu bestimmen, setze …n der Kürze wegen $AB=x_1$, $CD=x_2$; $EG=y_1$, $FH=y_2$; …l bezeichne die Abstände der Punkte G und H von einem in der Linie GH oder deren Verlängerungen beliebig angenommenen Punkte respective durch u_1 und u_2, wobei wir jedoch annehmen wollen, dass u_1 kleiner als u_2 sei, was offenbar immer verstattet sein wird. Bezeichnen wir indess zuerst die Linien AB und EG überhaupt respective durch x und y, und den Abstand des Punktes G von dem in der Linie GH oder deren Verlängerungen angenommenen Punkte überhaupt durch u, so ist das Parabelsegment $AEB=\frac{2}{3}xy$; sind aber ferner $\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}au+\frac{1}{2}b$ oder $x=au+b$ und $y=\alpha u+\beta$ die Gleichungen der Linien AC oder BD und EF, so ist das Parabelsegment

$$AEB=\frac{2}{3}(au+b)(\alpha u+\beta),$$

und folglich offenbar der gesuchte körperliche Inhalt

$$V=\frac{2}{3}\int_{u_1}^{u_2}(au+b)(\alpha u+\beta)\partial u,$$

oder

$$V=\frac{2}{3}\int_{u_1}^{u_2}\{a\alpha u^2+(a\beta+\alpha b)u+b\beta\}\partial u,$$

d. i.

$$V=\frac{2}{3}\{\frac{1}{3}a\alpha(u_2^3-u_1^3)+\frac{1}{2}(a\beta+\alpha b)(u_2^2-u_1^2)+b\beta(u_2-u_1)\}$$

oder

$$V=\frac{2}{3}(u_2-u_1)\{\frac{1}{3}a\alpha(u_2^2+u_2u_1+u_1^2)+\frac{1}{2}(a\beta+\alpha b)(u_2+u_1)+b\beta\}.$$

Es ist aber

$$x_1=au_1+b,\quad y_1=\alpha u_1+\beta;$$
$$x_2=au_2+b,\quad y_2=\alpha u_2+\beta;$$

also

$$a=\frac{x_2-x_1}{u_2-u_1},\quad b=\frac{x_1u_2-x_2u_1}{u_2-u_1};$$

$$\alpha=\frac{y_2-y_1}{u_2-u_1},\quad \beta=\frac{y_1u_2-y_2u_1}{u_2-u_1};$$

folglich, wie man leicht findet:

$$V=\frac{2}{3(u_2-u_1)}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}(x_2-x_1)(y_2-y_1)(u_2^2+u_2u_1+u_1^2)\\+\frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_1u_2-y_2u_1)+(y_2-y_1)(x_1u_2-x_2u_1)](u_2+u_1)\\+(x_1u_2-x_2u_1)(y_1u_2-y_2u_1)\end{array}\right\}.$$

Nach gehöriger Entwickelung der eingeklammerten Grösse findet man leicht, dass in derselben die Grössen x_1y_1 und x_2y_2 beide in $\frac{1}{3}(u_2-u_1)^2$, die Grössen x_1y_2 und x_2y_1 beide in $\frac{1}{6}(u_2-u_1)^2$ multiplicirt sind; also ist

$$V=\frac{2}{9}(u_2-u_1)\{x_1y_1+x_2y_2+\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_1)\},$$

oder

$$V=\frac{1}{9}(u_2-u_1)\{2(x_1y_1+x_2y_2)+x_1y_2+x_2y_1\};$$

oder, wenn wir $u_2-u_1=w$ setzen:

$$V=\frac{1}{9}w\{2(x_1y_1+x_2y_2)+x_1y_2+x_2y_1\},$$

oder

$$V=\frac{1}{9}w\{x_1(2y_1+y_2)+x_2(2y_2+y_1)\},$$

oder

$$V=\frac{1}{9}w\{y_1(2x_1+x_2)+y_2(2x_2+x_1)\}.$$

In Bezug auf die Figur ist

$$V=\frac{1}{9}GH.\{AB.(2EG+FH)+CD.(2FH+EG)\}$$

oder

$$V=\frac{1}{9}GH.\{EG.(2AB+CD)+FH.(2CD+AB)\}.$$

Dass die Linien GH, AB, CD, EG, FH bei Körpern wie der vorliegende immer sehr leicht gemessen werden können, sieht man sogleich ein, und auch die Rechnung nach den obigen Formeln bietet keine Schwierigkeit dar, weshalb man also Formeln wohl zur näherungsweisen Berechnung der Schiffs in der Praxis sollte gebrauchen können, wenn man nur die Q schnitte des Schiffs mit hinreichender Annäherung als Parab mente betrachten kann, was übrigens schon öfter in Vors gebracht worden ist.

Zerlegt man ein Schiff in mehrere solche Körper wie der her betrachtete von der gemeinschaftlichen oder gleichen Hö so ist in leicht durch sich selbst verständlicher Bezeich wenn n die Anzahl der Theile ist:

$$V=\frac{1}{9}w\left\{\begin{array}{l} x_1(2y_1+y_2)+x_2(2y_2+y_1)\\ +x_2(2y_2+y_3)+x_3(2y_3+y_2)\\ +x_3(2y_3+y_4)+x_4(2y_4+y_3)\\ +x_4(2y_4+y_5)+x_5(2y_5+y_4)\\ \qquad\text{u. s. w.}\\ +x_n(2y_n+y_{n+1})+x_{n+1}(2y_{n+1}+y_n)\end{array}\right\};$$

oder, wenn L die ganze Länge des Schiffs bezeichnet:

$$V=\frac{L}{9n}\left\{\begin{array}{l} x_1(2y_1+y_2)\\ +x_2(4y_2+y_1+y_3)\\ +x_3(4y_3+y_2+y_4)\\ +x_4(4y_4+y_3+y_5)\\ \qquad\text{u. s. w.}\\ +x_n(4y_n+y_{n-1}+y_{n+1})\\ +x_{n+1}(2y_{n+1}+y_n)\end{array}\right\};$$

oder

$$V=$$

$$\frac{L}{9n}\left\{\begin{array}{l} 2(x_1y_1+2x_2y_2+2x_3y_3+\ldots+2x_ny_n+x_{n+1}y_{n+1})\\ +x_1y_2+x_2(y_1+y_3)+x_3(y_2+y_4)+\ldots+x_n(y_{n-1}+y_{n+1})+x_{n+1}y_n\end{array}\right.$$

Für $n=2$ ist z. B.

$$V=\frac{L}{18}\{2(x_1y_1+2x_2y_2+x_3y_3)+x_1y_2+x_2(y_1+y_3)+x_3y_2\}$$

oder

$$V=\frac{L}{18}\{x_1(2y_1+y_2)+x_2(4y_2+y_1+y_3)+x_3(2y_3+y_2)\}.$$

Diesen Gegenstand noch weiter auszuführen, ist jetzt nicht ne Absicht.

reiben des Herrn Franz Dietzel, Lehrer an der iglichen Baugewerkenschule zu Zittau, an den Herausgeber.

Ich erlaube mir Ihnen eine, in den letzten Tagen von mir dene Formel für die Bestimmung des Kubikinhaltes der abzten Pyramide mitzutheilen. Dieselbe ist zwar für die Wisschaft nicht von Bedeutung, für den elementaren Unterricht die Praxis aber nicht ganz ohne Wichtigkeit. Wenigstens en mir das Letztere einige Baumeister, denen ich sie mittheilte, ichert.

Bezeichnet man (Taf. VII. Fig. 7.) den Flächeninhalt der un- Grundfläche ABC.... der abgekürzten Pyramide ABC.... mit len der obern $abcd$... mit f, den Abstand beider mit h, sowie Abstand der obern Grundfläche abc... von der fingirten Spitze it h'; seien ferner ab und AB zwei beliebige, aber in der- in Seitenfläche liegende Seiten der Grundflächen und werde it l, AB mit L bezeichnet; so ist

$$Sa:SA=l:L=h':h+h'$$

r

$$l:L-l=h':h,$$

aus folgt

$$1)\quad h'=\frac{h.l}{L-l};$$

er ist

$$f:F=l^2:L^2,$$

lich

$$2)\quad f=\frac{l^2}{L^2}F,$$

$$3)\quad F=\frac{L^2}{l^2}f.$$

n ist der Inhalt J der abgekürzten Pyramide gleich der ganzen ramide, weniger dem abgeschnittenen Stück, also

$$J = \frac{1}{3} \cdot F(h+h') - \frac{1}{3} f h' = \frac{1}{3} \{ Fh + h'(F-f) \}$$

und wenn man 1) substituirt:

$$\text{I.} \quad J = \frac{1}{3} h \left(\frac{FL - fl}{L - l} \right),$$

oder wenn man 2) und 3) substituirt:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{II.} & J = \frac{1}{3} hf \left\{ 1 + \frac{L}{l} + \frac{L^2}{l^2} \right\} \\ \text{III.} & J = \frac{1}{3} hF \left[1 + \frac{l}{L} + \frac{l^2}{L^2} \right] \end{array}\right\}$$

Zus. Wird $l = L$, werden also beide Grundflächen einander gleich, so erhält man ein Prisma, u. s. w.

Die Formel I. wird man anwenden, wenn beide Grundflächen F und f leicht zu bestimmen sind; II., wenn die untere Grundfläche nicht, sondern nur eine Seite L derselben, und III., wenn die obere Grundfläche nicht leicht zu bestimmen, sondern nur eine Seite l derselben.

Es liessen sich daraus noch Folgerungen ziehen, z. B. für das Verfahren, welches man bei schief abgeschnittenen Pyramiden einzuschlagen hat, wo man nur durch den tiefsten Punkt eine Parallele zur Grundfläche zu ziehen hat u. s. w., was ich aber, um nicht weitläufig zu werden, nicht weiter ausführen will.

Zittau d. 12. Febr. 1849.

XLIX.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Sammlung von Integraltafeln zum Gebrauch für den Unterricht an der Königl. Allgemeinen Bauschule und dem Königl. Gewerbe-Institut. Im Auftrage des Ministeriums für Handel, Gewerbe und öffentliche Arbeiten bearbeitet von F. Minding, Doctor der Philosophie und Professor der Mathematik an der Universität zu Dorpat. Berlin 1849. kl. 4. 1 Thlr. 5 Sgr.

Wir beeilen uns das Erscheinen eines Werkes anzuzeigen, durch welches einem wahren Bedürfnisse sowohl bei dem Unterrichte in der Integralrechnung und der höheren Mathematik überhaupt, als auch bei den vielfachen Anwendungen, welche sich von derselben machen lassen, abgeholfen wird. Es ist bekannt, dass schon Leibniz vielfach auf die grosse Wichtigkeit analytischer Tafeln hingewiesen hat; für keinen Theil der Analysis sind solche Tafeln aber wichtiger als für die Integralrechnung. Die ersten Integraltafeln lieferte der um das Studium der Mathematik vielfach verdiente Meyer Hirsch im Jahre 1810, und man kann wohl sagen, dass diese Tafeln den Hauptinhalt der damals die Integralrechnung in ihrer Gesammtheit repräsentirenden Werke von Euler und Lacroix darstellten, und deshalb allen billigen Ansprüchen entsprachen, da sie jedenfalls auch für den praktischen Gebrauch im Ganzen zweckmässig eingerichtet waren. Diese Tafeln von Meyer Hirsch sind nun aber sehr lange vergriffen und im Buchhandel nicht mehr zu haben, was wohl jeder Lehrer der höheren Analysis und mancher Praktiker schon oft unangenehm empfunden hat. Wir erinnern uns schon einigemal Ankündigungen neuer Integraltafeln gelesen zu haben; aber kein solches projectirtes Unternehmen scheint zur Ausführung gekommen zu sein, was namentlich rücksichtlich der Tafeln zu bedauern ist, die, so viel uns noch erinnerlich ist — da uns in diesem Augenblicke nicht die nöthige Zeit zu genauern literarischen Nachsuchungen zu Gebote steht — vor einigen Jahren der sehr verdiente und geschickte Herr Professor Moth in Linz in den Astronomischen Nachrichten ankündigte, da diese Ankündigung zu sehr schönen Hoffnungen berechtigte. Als eine neue Ausgabe der völlig vergriffenen Tafeln von Meyer Hirsch ist nun das vorliegende, wohl auch in demselben, nur an einen andern Besitzer übergegangenen Verlage erschienene Werk in gewisser Rücksicht zu betrachten, wenn auch die Gerechtigkeit gegen den jetzigen Herrn Verfasser erfordert, gleich hier zu bemerken, dass sein Werk eigentlich eine ganz selbstständige Arbeit ist, und in vielen Punkten, die wir nun etwas näher bezeichnen wollen, von seinem Vorgänger wesentlich abweicht.

Zuerst billigen wir es ganz, dass der Herr Verfasser die Methoden und Formeln zur Zerlegung der gebrochenen Functionen in Partialbrüche, mit denen Meyer Hirsch seine Tafeln beginnt, ganz weggelassen hat, weil diese jedenfalls nur in die Lehrbücher der Integralrechnung gehören, und aus denselben erlernt werden müssen. Nicht ganz einerlei Meinung können wir mit dem Herrn Verfasser darin sein, dass auch die Reductionsformeln, von denen in der Integralrechnung so häufiger Gebrauch gemacht wird, und für welche Meyer Hirsch daher auch eine ziemlich vollständige Tafel geliefert hat, ganz weggelassen worden sind; denn wenn allerdings diese Formeln eigentlich zu den Integrationsmethoden, und deshalb streng genommen in eine Sammlung von Integralformeln nicht gehören, so ist es jedoch jedenfalls sehr angenehm, sie in den ältern Tafeln von Meyer Hirsch ihres häufigen Gebrauchs wegen an einem Orte beisammen zu finden. Indess können auch in diesem Punkte die Lehrbücher, welche die Reductionsformeln nothwendig enthalten müssen, leicht zur Ergänzung der Tafeln dienen, und wir wünschen daher aus unserer vorhergehenden Bemerkung keineswegs einen bestimmten Tadel der vorliegenden neuen, gewiss sehr verdienstlichen Tafeln entnommen zu sehen, da dem Herrn Verfasser, wohl auch der auf dem Titel angegebene specielle Zweck derselben gewisse Schranken vorzeichnete. Rücksichtlich der anderen Abweichungen von den älteren Tafeln von Meyer Hirsch wollen wir nun den jetzigen Herrn Herausgeber selbst reden lassen:

„Bei Ausarbeitung dieser neuen Tafeln ist der im Unterrichte bewährte, auf stufenweisen Fortschritt vom Einfacheren zum Zusammengesetzteren gegründete Plan der früheren Tafeln im Ganzen beibehalten worden, jedoch mit wesentlichen Abänderungen, nämlich:

1. Das den Tafeln zu Grunde liegende System von allgemeinen Formeln ist in seinen einzelnen Gliedern mehr entwickelt und in das Ganze verwebt worden, indem theils jeder Tafel die ihr entsprechende allgemeine Formel, nach Umständen in mehrern

Gestalten, vorangestellt ist, theils die mehrere Tafeln zugleich umfassenden Formeln an den gehörigen Orten eingeschaltet sind.

2. Die Zurückweisungen von einer Tafel auf die andere sind auf ein geringeres Maass beschränkt worden, um überall, so lange nicht allzu grosse Weitläufigkeit entstand, vollständig ausgerechnete Formeln vorzulegen.

3. Integrale, welche durch sehr nahe liegende Substitutionen in andere einfachere übergehen, sind unter der einfacheren Form aufzusuchen. Dies gilt namentlich von den Formen $\int\frac{x^{m-1}\partial x}{a+bx^n}$, $\int\frac{x^{m-1}\partial x}{a+bx^n+cx^{2n}}$ in der ersten Abtheilung, welche man nur dann unmittelbar in den Tafeln findet, wenn m und n keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so dass z. B. $\int\frac{x\partial x}{a+bx^4}$ in der Form $\frac{1}{2}\int\frac{\partial y}{a+by^2}$, $\int\frac{\partial x}{x(a+bx^4)}$ in der Form $\frac{1}{4}\int\frac{\partial y}{y(a+by)}$ u. s. w. gefunden wird. Durch diese Unterscheidung werden viele störende Wiederholungen vermieden.

4. Mehrere Tafeln über bestimmte Integrale und andere wichtige, erst in neuester Zeit entstandene oder verbreitete, analytische Entwicklungen sind in der vierten und fünften Abtheilung hinzugefügt worden. Hier konnten auch die Beweise der Formeln nicht, wie in den andern Abtheilungen — wo sie nämlich durch Differentiation der Integrale sich von selbst ergeben — übergangen werden; doch sind sie möglichst kurz gefasst worden, um die tabellarische Form, so weit es anging, auch hier zu bewahren.

An verschiedenen Stellen sind die den trigonometrischen nachgebildeten hyperbolischen Functionen gebraucht worden, nämlich der hyperbolische Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens von x, bezeichnet durch $\mathfrak{Sin}\,x$, $\mathfrak{Cos}\,x$, $\mathfrak{Tang}\,x$, $\mathfrak{Cotang}\,x$. Man hat bekanntlich

$$\mathfrak{Cos}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \mathfrak{Sin}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ \mathfrak{Tang}\,x=\frac{\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Cos}\,x},$$

$$\mathfrak{Cotang}\,x=\frac{\mathfrak{Cos}\,x}{\mathfrak{Sin}\,x}.$$

Ferner $\mathfrak{Arcus}\,(\mathfrak{Sin}=x)$ oder $\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Sin}\,x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$

$$=\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{x^2+1}},\ \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Cos}\,x=\log(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$=\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{x^2-1}},\ \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\,x=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}=\int_0^x\frac{\partial x}{1-x^2}.$$

$$\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Cotang}\,x=\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}=\int_x^\infty\frac{\partial x}{x^2-1}.$$

Die sonstigen Bezeichnungen sind die allgemein üblichen.

In allen diesen Punkten sind wir mit dem Herrn Herausgeber vollkommen einverstanden, und glauben auch, dass er bei der Mittheilung verschiedener neuer Entdeckungen und Entwicklungen, durch welche die Integralrechnung in neuester Zeit allerdings sehr erweitert und bereichert worden ist, meistens das für den vorliegenden Zweck richtige Maass getroffen hat, wie z. B. in der fünften und letzten Abtheilung bei den Elliptischen Functionen, wo er sich seiner eigenen Angabe nach hauptsächlich an Legendre: Traité des fonctions elliptiques. Tome I. Paris, 1825. gehalten hat, wenn freilich auch die Tafel den gegenwärtigen Zustand dieser wichtigen Lehre nicht vollständig darstellt, was aber auch nicht möglich gewesen sein würde, ohne dem Buche einen ganz ungebührlichen Umfang geben zu müssen, weshalb wir, wie schon erinnert, rücksichtlich des hier mit Umsicht inne gehaltenen Maasses ganz mit dem Herrn Vf. übereinstimmen. Dasselbe gilt von den Gammafunctionen, dem Integrallogarithmus, den Euler'schen Integralen und anderen keinem, wer mit den neueren Fortschritten der Integralrechnung vollständig vertraut ist, unbekannten bestimmten Integralen, wobei wir jedoch im Interesse der Wissenschaft an sich den Wunsch nicht unterdrücken können, dass es einmal dem Herrn Vf. oder einem andern mit den neueren Fortschritten der Integralrechnung vollständig vertrauten Gelehrten gefallen möchte, ein zweckmässig geordnetes vollständiges Verzeichniss aller bis jetzt gefundenen bestimmten Integrale, also mit anderen Worten eine besondere Tafel der bestimmten Integrale zu liefern, mit einer kurzen Nachweisung der Quellen, wo sich dieselben entwickelt finden; so viele Schwierigkeiten eine solche Arbeit auf der einen Seite haben dürfte, so nützlich würde sie auf der andern sein. In der vorliegenden Tafel scheint uns indess, ohne dieselbe rücksichtlich ihres Zweckes ungebührlich ausdehnen zu müssen, auch für die bestimmten Integrale hinreichend gesorgt zu sein.

Zum Schlusse wollen wir nun bloss noch bemerken, dass wir allerdings in einer Beziehung noch eine Vervollständigung der vorliegenden Tafeln gewünscht hätten, die denselben auch ohne zu grosse räumliche Ausdehnung derselben leicht hätte gegeben werden können, und nach unserer Meinung auch namentlich dem auf dem Titel angegebenen speciellen Zwecke dieser Tafeln sehr förderlich gewesen sein würde. Man weiss nämlich, wie ungemein wichtig für alle Anwendungen der Integralrechnung die Methoden zur näherungsweisen Ermittelung bestimmter Integrale sind. Fassen wir z. B. nur einen für Deutschland gerade gegenwärtig überaus wichtigen Gegenstand, die Schiffsbaukunst und das Schiffsmanoeuvre, in's Auge, so finden die genannten Methoden z. B. bei der Bestimmung des cubischen Inhalts der Schiffe, der Schiffsaichung, der Bestimmung des Wasserpasses, bei der Ermittelung des Schwerpunkts, der so höchst wichtigen Stabilität der Schiffe, ihrer Trägheitsmomente Behufs des Schwankens und Stampfens der Schiffe (roulis et tangages), selbst auch des Widerstandes u. s. w. die wichtigste Anwendung, und überhaupt in keinen Theil der Schiffsbaukunst ist eine gehörig wissenschaftlich begründete Einsicht möglich, ohne eine vollständige Kenntniss der zur Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale erforderlichen Methoden zu besitzen. Wenn sich nun auch freilch von diesen Methoden gewissermassen dasselbe sagen lässt, was oben von den Methoden zur Zerlegung der gebrochenen Functionen in einfache Brüche und von den Reductionsformeln gesagt worden ist, so hätten wir doch gewünscht, dass wegen ihrer so überaus grossen Wichtigkeit für alle Anwendungen der Integralrechnung:

1. den Formeln und numerischen Coefficienten von Cotes (Aestimatio errorum in mixta mathesi etc. auctore Rogero Cotes. Lemgoviae. 1768. 8. p. 86. in der besonderen Abhandlung: De methodo differentiali Newtoniana.);

2. den mit diesen Cotesischen Formeln in naher Beziehung stehenden, nach unserer Meinung eben so wichtigen Correctionsformeln und numerischen Coefficienten von Stirling (Methodus differentialis: sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. Londini. 1739. pag. 146.);

und endlich

3. den berühmten Formeln und numerischen Coefficienten von Gauss (Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi in den Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. III. Gottingae. 1816. pag. 39.), welche als eine höchst wichtige Erweiterung der Cotesischen Formeln zu betrachten sind;

eine besondere Tafel gewidmet, und die Art der Anwendung dieser Formeln kurz erklärt und etwa durch ein Paar Beispiele erläutert worden wäre, wodurch gewiss der sehr zu wünschenden Einführung dieser Formeln in die verschiedenen Zweige der Praxis wesentlicher Vorschub geleistet worden wäre; auch würde eine kurze Hindeutung auf die, als ganz specielle Fälle der obigen Formeln zu betrachtenden Formeln von Simpson oder Chapman, die schon in der Praxis allgemein Eingang gefunden haben, ohne zu vielen Raum in Anspruch zu nehmen, zu geben leicht möglich gewesen sein. Vielleicht entschliesst sich der Herr Verfasser, seine Tafel durch eine kleine, in gleichem Format gedruckte Tafel aller dieser Formeln noch zu vervollständigen, die dann jeder Besitzer des vorliegenden Buchs demselben leicht noch anbinden lassen kann.

Wir schliessen mit der bestimmten Hoffnung, dass das vorliegende Buch, welches einem wesentlichen Bedürfnisse auf zweckmässige Weise abhilft, viele Käufer und eine weite Verbreitung, die es in der That auch vollkommen verdient, finden wird. Der Druck und überhaupt die äussere Ausstattung ist sehr schön, und die Zahl der S. V. und S. VI. angezeigten Druckfehler ist mit Rücksicht auf die Schwierigkeit des Drucks nicht gross.

Programm des Herzoglichen Realgymnasiums zu Gotha, herausgegeben Ostern 1849. Inhalt: *Elementare Entwicklung der Gaussischen Methode, die Werthe begrenzter Integrale durch Näherung zu finden. Vom Professor Bretschneider.*

Der Herr Verfasser hat in dieser ausgezeichneten, eine weitere Bekanntwerdung sehr verdienenden Schulschrift eine elementare Entwickelung der berühmten Gaussischen Methode, die Werthe begrenzter Integrale zu finden (Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi in den Comm. Soc. Reg. Gott. recent. Vol. III. 1816. p. 39.) gegeben, und sich dadurch um die weitere Verbreitung dieser auch für die Praxis sehr wichtigen Methode, welche die Cotesischen Formeln unter sich begreift, ein sehr wesentliches Verdienst erworben, weil das Studium der Gaussischen Abhandlung wegen der vielen darin angewandten analytischen Kunstgriffe, die meistens ziemlich versteckt liegen, mit manchen Schwierigkeiten verknüpft ist. Auch hat der Herr Verfasser in dieser Abhandlung einen Beweis a priori gegeben, dass die Endpunkte der Abscissen von den Grenzen paarweis gleichweit entfernt sind, welcher sich in der Gaussischen Abhandlung nicht findet, und ist auch in der allgemeinen Bestimmung der Coefficienten der transformirten Gleichung Nr. 15. S. 9. seiner Schrift weiter gegangen als die Abhandlung von Gauss. Wir wünschen daher dieser sehr verdienstlichen Schrift, welche der Herr Verfasser vielleicht künftig noch einmal weiter ausarbeiten wird, eine möglichst weite Verbreitung, und namentlich auch eine Berücksichtigung von Seiten der Praktiker, die bei der näherungsweisen Bestimmung der Werthe bestimmter Integrale diese allgemeine Methode, und die in derselben liegenden speciellen Methoden häufiger als bisher anwenden sollten.

Geometrie.

In dem Programm der Realschule im Waisenhause zu Halle hat Herr Dr. A. Wiegand S. 42. — S. 48. die wichtigsten der in Prima gegebenen geometrischen und trigonometrischen Aufgaben mitgetheilt, welches jedenfalls eine sehr nachahmungswerthe Einrichtung ist, weil dadurch die verschiedenen Lehranstalten sich gegenseitig besser kennen lernen, und man auf diese Weise nach und nach eine sehr werthvolle Sammlung mathematischer Uebungsaufgaben erhalten muss, die sich zugleich dadurch besonders empfiehlt, dass die in derselben enthaltenen Aufgaben sämmtlich in der Praxis sich als Bildungsmittel wirklich bewährt haben. Dem Herrn Dr. Wiegand werden daher mit uns sich gewiss auch noch andere Lehrer für diese öfter zu wiederholenden Mittheilungen verpflichtet fühlen.

Astronomie.

Storia celeste del R. Osservatorio di Palermo dal 1792 al 1813. Parte seconda 1803 — 1813. Tomo settimo 1805 — 1806. Vienna 1848. 4. Auch unter dem Titel: Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von C. L. von Littrow, Director der Sternwarte und ö. Professor der Astronomie an der k. k. Universität zu Wien u. s. w. und F. Schaub, Adjunct der Sternwarte. 30ster Theil. Neuer Folge 10r Band. Enthaltend Piazzi's Beobachtungen in den Jahren 1805 und 1806. Wien. 1848. 4. (M. vergl. Literar. Ber. Nr. XLIV. S. 626.)

Wir freuen uns sehr, auch in der jetzigen, den Wissenschaften weniger günstigen Zeit wieder eine Fortsetzung dieses mühsamen, aber für die Wissenschaft wichtigen Werks anzeigen zu können, und wünschen dem trefflichen Herrn Herausgeber von Herzen, dass es ihm gelingen möge, dasselbe bald glücklich zu Ende zu führen, wofür ihm der Dank aller Astronomen nicht entgehen wird.

Physik.

Jahresbericht über die Fortschritte der reinen, pharmaceutischen und technischen Chemie, Mineralogie und Geologie. Unter Mitwirkung von H. Buff, E. Dieffenbach, C. Ettling, F. Knapp, H. Will, F. Zamminer herausgegeben von Justus Liebig und Hermann Kopp. Für 1847 und 1848. Erstes Heft. Giessen. 1849. 8. 1 Thlr.

Wenn auch dieser Jahresbericht, wie es seinem Titel nach scheint, hauptsächlich die Chemie in's Auge fassen dürfte, so verbreitet er sich doch auch, wie schon das vorliegende erste Heft deutlich zeigt, sehr ausführlich über die Fortschritte der Physik in dem auf dem Titel angegebenen Zeitraume, und derselbe darf daher in diesem Literarischen Berichte nicht unerwähnt bleiben. Ja wir können selbst sagen, dass er uns von allen derartigen Büchern, die uns bis jetzt zu Gesicht gekommen sind, so viel Verdienstliches dieselben auch übrigens haben mögen, insbesondere auch seiner grossen Vollständigkeit, und der Umsicht halber, mit welcher er augenfällig gearbeitet ist, am besten gefallen hat, weshalb wir ihn allen Lesern des Archivs ganz besonders empfehlen. Von unserm wissenschaftlichen Standpunkte aus geschieht dies auch hauptsächlich noch deshalb, weil er viel mehr als irgend ein anderes Buch dieser Art die mathematische Seite der Physik mit grosser Umsicht berücksichtigt, und die Resultate der mathematischen Untersuchungen oder der mit Hülfe des Calculs geführten Experimentaluntersuchungen so weit mittheilt, dass man eine deutliche Einsicht in deren eigentlichen Zweck erhält, und, wenn man es Behufs irgend einer vorhabenden Untersuchung für nöthig finden sollte, immer leicht zu den ursprünglichen Quellen zurückzugehen im Stande ist. Wir sprechen es daher mit voller Zuversicht aus, dass wir diesen Jahresbericht namentlich für jeden mathematischen Physiker für ein unentbehrliches Hülfsmittel, und bei Weitem für das zweckmässigste Buch dieser Art halten, was bis jetzt existirt; dies hier zu bemerken, war um so mehr nöthig, weil der Titel des Buchs leicht gerade zu der entgegengesetzten Ansicht — dass nämlich die mathematische Seite der Physik wenig Beachtung in demselben gefunden habe — verleiten könnte. Die mathematische Physik wird und muss es den geehrten und verdienten Herren Herausgebern ganz besonders Dank wissen, dass sie sich ihrer so sorgfältig, und bei Weitem mehr als alle bisherigen Herausgeber ähnlicher Bücher, angenommen haben. Wir sehen daher auch den folgenden Heften, für welche z. B. noch der grösste Theil der mathematischen Optik zurück ist, mit grossem Verlangen entgegen, und wünschen sehr, dass dieselben recht bald erscheinen mögen. Um unser vorhergehendes Urtheil zu bestätigen, wollen wir namentlich für Leser im Auslande, denen das Buch nicht selbst sogleich durch den Buchhandel in die Hände kommt, den Inhalt des vorliegenden Hefts vollständig angeben: „Molecularwirkungen. Abhängigkeit der Cohäsion der Flüssigkeiten und der Capillaritätshöhe von der Temperatur. Veränderung der Form der Oberfläche von Flüssigkeiten durch andere. Capillarsenkung des Quecksilbers. Endosmose. — Atomlehre. Krystallisation. Krystallographie. Beziehungen zwischen Zusammensetzung und Krystallform; Isomorphismus, Dimorphismus. Specifisches Gewicht; Bestimmung desselben bei festen Körpern, Flüssigkeiten und Gasen. Beziehungen zwischen Zusammensetzung und spec. Gewicht. — Spec. Volum. — Wärmelehre. Wärmequellen; Wärmeentwickelung bei chemischen Verbindungen. Mechanisches Aequivalent der Wärme. Ausdehnung durch die Wärme. Specifische Wärme; Schmelzen, latente Schmelzwärme. Sieden; latente Dampfwärme. Beziehungen zwischen chemischer Zusammensetzung und Siedepunkt. Spannkraft der Dämpfe; Thaubildung; hygrometrische Apparate. Wärmeleitung. Wärmestrahlung. — Bewegungslehre. Ueber Kräfte im Allgemeinen. Gleichgewicht starrer Körper, Elasticität und Festigkeit. Gleichgewicht tropfbarer Flüssigkeiten; Zusammendrückbarkeit derselben. Gleichgewicht gasförmiger Flüssigkeiten; Zusammendrückbarkeit derselben. Allgemeine Bewegungslehre. Bewegung starrer Körper. Bewegung tropfbar flüssiger Körper. Bewegung gasförmiger Körper. Dynamik der Erde. Theorie der Maschinen. Apparate. — Akustik. Schallgeschwindigkeit. Tonschwingungen von Stäben und Saiten. Töne durch den electrischen Strom veranlasst. Physiologische Akustik. Apparate. — Optik. Lichtquellen. Theorie des Lichtes. Gradlinige Fortpflanzung des Lichtes; Aberration, Interferenz, Beugung. Zurückwerfung des Lichtes; Polarisation. New'tonsche Farbenringe. Irisken. Einfache Brechung des Lichtes. Farbenzerstreuung. Natürliche Farben. Doppelte Brechung; Polarisation durch doppelte Brechung. Optik der Atmosphäre. Optische Apparate. Physiologische Optik, Bau und optische Eigenschaften des Auges. Gesichtsfehler. Theorie des Sehens. Subjective Farben. Optische Täuschungen. Chemische Wirkungen des Lichtes. Chemische Wirkungen der verschiedenen Farbenstrahlen. —

Wir wünschen schliesslich nochmals recht sehr, dass dieses verdienstliche Unternehmen einen ungehinderten und schnellen Fortgang haben möge, und empfehlen es namentlich auch allen denen, welchen keine grössere Bibliothek zu Gebote steht, folglich insbesondere auch Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten jeder Art.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Literar. Ber. Nr. XLVIII. S. 676.).

Fünftes Heft. S. 6. Haidinger: Ueber die Ursachen der Erscheinung der Polarisationsbüschel. — S. 53. Koller: Nachricht über das am 18. October in Kremsmünster gesehene Nordlicht. — S. 55. Kreil: Bestimmung einiger Längenunterschiede mittelst des elektrischen Telegraphen. — S. 69. Burg: Ueber die am 27. Juli l. J. auf der Kaiser Ferdinands-Nordbahn Statt gefundene Explosion der Locomotive „Jason". — S. 103. Schönbichlers Multiplicationsregister. — S. 133. Reslhuber: Beobachtungen während der Nordlichter am 18. October und 17. November 1843 auf der Sternwarte zu Kremsmünster.

Jahrgang 1849. Jänner-Heft. S. 8. Schrötter: Ueber Wagen des Mechanikers Kusche. Eine Wage dieses Künstlers, welche nur 34. Fl. C.-M. kostet, zeigt bei einer Belastung von Einem Pfund auf jeder Schale noch fünf Milligramme deutlich an. — S. 16. Gintl: Antrag zur Hilfeleistung bei der Einrichtung der meteorologischen Observatorien. — S. 28. Baumgartner: Vorschlag zur Veranlassung einer Telegraphenlinie zwischen Klosterneuburg und Wien. — S. 29. Kreil: Entwurf eines meteorologischen Beobachtungssystems für die österreichische Monarchie. III Abschnitt.

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. Edited by W. Thomson, M. A. F. R. S. E., Vergl. Literar. Bericht Nr. XLVIII. S. 675.

No. XX. Mathematical Note. Continued. — On Symbolical Geometry. Continued. By Sir William Rowan Hamilton. — On the Triple Tangent Planes of Surfaces of the Third Order. By Arthur Cayley. — On the Order of certain Systems of Algebraical Equations. By Arthur Cayley. — On a Point in the Solution of Linear Differential Equations. By Augustus De Morgan. — On the Relation between Different Curves and Cones connected with a Series of Confocal Ellipsoids. By John Y. Rutledge. — On the Focal Generation of Surfaces on the Second Order. By the Rev. Wm. A. Willock. — Exercices in Quaternions. By Sir William Rowan Hamilton. — On the Equilibrium of a Floating Body. By Richard Townsend. — On the Cone Circumscribing a Surface of the m^{th} Order. By the Rew. George Salmon. — On Geodesic Lines traced on an Surface of the Second Degree. By Andrew S. Hart. — On Attractions, and on Clairaut's Theorem. By G. G. Stokes. — No. XXI. will be published on the 1st of November, 1849.

L.

Literarischer Bericht.

(Die interessanten Mittheilungen aus Johann Bernoulli's eignen Aufzeichnungen über sein Leben haben in dieser Nummer des Literarischen Berichts so viel Raum eingenommen, dass verschiedene erschienene, zum Theil wichtige Schriften haben für's Erste noch zurückgelegt werden müssen; in der nächsten Nummer des Liter. Berichts werden aber alle diese Schriften angezeigt worden).

Arithmetik.

Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von Navier, Mitglied der Akademie, Professor an der polytechnischen Schule zu Paris etc. Mit Zusätzen von Liouville. Deutsch herausgegeben, und mit einer Abhandlung der Methode der kleinsten Quadrate begleitet von Dr. Theodor Wittstein. Zweiter Band. Hannover. 1849. 8. 1⅚ Thlr.

Wir freuen uns, das Erscheinen des zweiten Theils dieser vorzüglichen Uebersetzung des Résumé des leçons d'Analyse données à l'école polytechnique par M. Navier. Paris. 1840. 1841. anzeigen zu können, welchem ganz dasselbe zur Empfehlung dient, was im Liter. Ber. Nr. XLII. S. 600. von dem ersten Theile gesagt worden ist. Die Zusätze haben folgende Ueberschriften: I. der Rest der Taylor'schen und der Maclaurinschen Reihe. II. Brüche, welche unter die Form $\frac{\infty}{\infty}$ fallen. III. Die Euler'schen Integrale. IV. Angenäherte Berechnung des Produkts $1.2.3.4....x$, wenn x sehr gross ist. V. Anwendung der Theorie der doppelten Integrale auf den Beweis eines Lehrsatzes der Algebra. (Es ist dies nämlich der berühmte dritte Beweis des Fundamentaltheorems der Theorie der algebraischen Gleichungen von Gauss in den Comm. soc. scientiar. Gottingensis recentior. Tom. III.). VI. Integration einer gewissen Gattung von Differentialgleichungen. Endlich: Die Methode der kleinsten Quadrate von dem Herrn Uebersetzer, bei deren Darstellung, was hauptsächlich die theoretischen Grundlagen betrifft, der Herr Uebersetzer sich vorzugsweise an die Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Hagen. 1837. gehalten hat, wobei aber doch die ganze Arbeit als eine eigenthümliche Arbeit des Herrn Uebersetzers zu betrachten ist. Die Darstellung dieser für die praktische Anwendung so wichtigen Lehre ist sehr deutlich, und verleiht dem Buche, welches vorzüglich bestimmt ist, um auf einer praktischen Lehranstalt als Grundlage für die Vorlesungen gebraucht zu werden, ausser seinen sonstigen Vorzügen noch einen besonderen Werth. Ueberhaupt hat der mit den neueren Fortschritten der Analysis und ihrer strengeren Begründung, die leider immer noch manche aus einer nicht vollständigen Kenntniss, oft aber auch aus völliger Unkenntniss der Sache hervorgegangene Widersprüche von Leuten, die den alten Schlendrian lieben, erfahren muss, vollständig vertraute Herr Uebersetzer Alles geleistet, was man von einer solchen Arbeit billigerweise verlangen kann; und diese Uebersetzung wird daher auch das Ihrige zu der sehr zu wünschenden immer allgemeinern Verbreitung der neuern Behandlungsweise der Analysis jedenfalls beitragen.

Lehr- und Handbuch der Algebra, verfasst für den Unterricht an der k. k. Ingenieurs-Akademie in Wien, gleichzeitig für das Selbststudium eingerichtet. Von Dr. Alexander Morgante. Wien 1849. 8. 1 Thlr. 15 Sgr.

Ein deutliches Lehrbuch mit recht vielen zweckmässigen Uebungsaufgaben, das seinem Zwecke wohl entsprechen wird.

Physik.

Physikalisches Lexicon. Encyklopädie der Physik und ihrer Hülfswissenschaften: der Technologie, Chemie, Meteorologie, Geographie, Geologie, Astronomie, Physiologie etc. nach dem Grade ihrer Verwandtschaft mit der Physik. Zweite Auflage. Von Oswald Marbach. Erste Lieferung. Leipzig 1849. 8.

Wir dürfen dieses Werk als aus seiner ersten Auflage hinreichend bekannt voraussetzen, und begnügen uns daher zu bemerken, dass diese neue Auflage mehr als eine solche, nämlich als eine völlige Umarbeitung der ersten Auflage zu betrachten ist, wobei der Herr Verfasser das Werk einem streng wissenschaftlichen Standpunkte noch näher als in der ersten Auflage zu führen beabsichtigt, und daher in dem Vorworte den Namen eines „populären Werks" — diesen Ausdruck in der meistens gewöhnlichen Bedeutung genommen — zurückweist. So viel sich nach der ersten Lieferung urtheilen lässt, scheint die Bearbeitung der einzelnen Artikel, wenn auch in Rücksicht auf Ausführlichkeit etwas ungleich, für alle diejenigen, denen das grosse Gehler'sche Wörterbuch entweder, namentlich rücksichtlich der Anwendung der Mathematik, zu weit geht, oder zu theuer ist, ganz zweckmässig zu sein, worüber sich jedoch erst sicherer urtheilen lassen wird, wenn eine grössere Anzahl von Lieferungen vorliegt.

Die periodischen Sternschnuppen und die Resultate ihrer Erscheinungen, abgeleitet aus den während der letzten 10 Jahre zu Aachen angestellten Beobachtungen, von E. Heis, Oberlehrer der Mathematik, Physik und Chemie an der kombinirten höheren Bürger- und Provinzial-Gewerbschule zu Aachen. Cöln 1849. 4. 10 Sgr.

Eine sehr lesenswerthe Schrift, welche ausser ihrem auf dem Titel angegebenen Hauptinhalte auch lehrreiche Betrachtungen über Sternschnuppen im Allgemeinen, namentlich über die periodischen, und eine ziemlich ausführliche und sehr deutliche Darstellung der von dem Herrn Verfasser befolgten Methode zur Beobachtung der Sternschnuppen, Aufsuchung ihrer Richtung und ihres Ausgangspunktes, und zur Bestimmung der wahren Bahn der Sternschnuppen aus correspondirenden Beobachtungen enthält. Insbesondere in letzterer Beziehung, abgesehen von den aus den in Aachen angestellten Beobachtungen und Rechnungen gewonnenen Resultaten, die am Ende übersichtlich zusammengestellt worden sind, verdient die Schrift allen denen, die sich selbst mit Beobachtungen der Sternschnuppen zu beschäftigen gedenken, zur Beachtung recht sehr empfohlen zu werden.

Vermischte Schriften.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. Nr. 131. bis Nr. 155. (Vom 15. Juli 1848. bis 31. März 1849.)

(M. vergl. Literar. Ber. Nr. XLVIII.).

L. Schläfli, Ueber eine durch zerstreutes Licht bewirkte Interferenzerscheinung (Nr. 131. und 132.).

Derselbe, Ueber die einfachste Art, die Differentialgleichungen erster Ordnung, durch welche die Störungen der elliptischen Elemente einer Planetenbahn bestimmt sind, auszudrücken. (Nr. 131. und 132.).

M. Perty, Ueber die Entwicklung einiger Infusorien. (Nr. 133. und 134.).

R. Wolf, Nachrichten von der Sternwarte in Bern. (Neue Gestaltung der Sternwarte). (Nr. 135.).

Derselbe, Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz.

Dieser sehr werthvolle Aufsatz enthält Bruchstücke aus einer Lebensbeschreibung Johann I Bernoulli's, die Johann Bernoulli selbst aufgesetzt hat. Diesen Lebensabriss theilen wir im Folgenden vollständig mit, da er jedenfalls für die Geschichte der Mathematik von Wichtigkeit ist. Sollte Herr R. Wolf noch mehrere dergleichen Bruchstücke auffinden, so würde er durch deren Mittheilung die Mathematiker sich gewiss in hohem Grade verbinden.

Erinnerungen an Johann I Bernoulli aus Basel.

Von Herrn R. Wolf in Bern.

Bereits sind 100 Jahre seit dem Tode Johann I Bernoulli verflossen; aber noch immer lebt der Name dieses Mannes, den seine Zeitgenossen als ihren Archimedes verehrten, der während mehr als 50 Jahren die Hauptstütze mathematischer Bildung und Forschung war, — der Euler, Varignon, Daniel Bernoulli, Hospital, Haller, Maupertuis, König, Kramer, Joh. Gessner etc. zu Schülern hatte, im Andenken jedes Gebildeten, dem die Mathematik und ihre Anwendungen nicht völlig fremd sind, fort, und die Veröffentlichung folgender Bruchstücke einer von Johann I Bernoulli selbst planirten Lebensbeschreibung, welche ich unlängst aus Basel erhalten konnte, darf sich somit wohl einigen Beifall versprechen:

> „Je naquis à Bâle le 27. Juillet v. St. 1667, étant le „10me enfant de mon père Nicolas Bernoulli et de ma mère „Marguérite Schönauer, qui se sont donné tout le soin de „me bien élever, tant dans la réligion que dans les bonnes „moeurs. Si je n'en ai pas bien profité, ce n'est pas leur „faute mais la mienne."

Nachdem er die öffentlichen Schulen seiner Vaterstadt besucht hatte, wurde er nach Neuenburg geschickt, um den Handel und die französische Sprache zu erlernen:

> „Mais Dieu, qui m'avait destiné à un autre genre de „vie, me fit retourner dans la patrie au bout d'un an pour y „continuer les études des belles lettres et des sciences. L'an „1685 je fus créé *Magister* ou docteur en philosophie, après „avoir reçu un an et demi auparavant le degré de Bachelier; „ce fut pendant ce temps qu'à l'imitation et l'inclination de „feu mon frère Jaques Bernoulli, je commençai à m'appliquer

„à l'étude des mathematiques: le plaisir singulier que je sentais dans cette belle et divine science m'y fit faire des progrès avec une rapidité incroyable. Car en moins de deux „ans non seulement je m'étais rendu familier presque touts „les anciens auteurs qui ont écrit sur les mathématiques, mais „aussi les modernes, comme la géométrie de Descartes et son „algèbre avec ses commentaires. Après ces commencemens, „par un hazard imprévu nous tombâmes conjointement mon „frère et moi sur un petit écrit de Mr. Leibnitz inséré dans „les actes de Leipzic de 1684, où en 5 ou 6 pages seulement il donne une idée fort légère du *calcul différentiel*, „ce qui était une énigme plutôt qu'une explication; mais c'en „était assez pour nous, pour en approfondir en peu de jours „tout le secret, témoin quantité de pièces que nous publiâmes ensuite sur le sujet des infiniment petits. Après cette „heureuse découverte, je fus le premier, qui songeait à inventer quelque méthode pour remonter des quantités infiniment petites aux finies dont celles-là sont les élémens ou „les différences. Je donnai à cette méthode le nom de *calcul intégral*, n'en ayant point trouvé alors de plus convenable. Je voyais bien, qu'il était impossible de trouver une „telle méthode qui fut absolument générale, je ne laissai pourtant pas de réduire ce calcul à des règles générales pour „certaines circonstances. Quand je les communiquais à mon „frère il eut d'abord de la peine a les admettre, mais après y „avoir réfléchi plus mûrement il y prit du gout et s'en servit „utilement pour résoudre quelques problèmes. Pour l'y animer „d'avantage je lui proposai plusieurs problèmes physico-mécaniques, entre autre celui de la chainette, qui est de déterminer la propriété de la courbure d'une chaîne lâche suspendue par les deux bouts; mais comme il ne put y réussir, „pendant que je l'avais résolu pleinement, je l'engageai à proposer aux géomètres ce problème dans les Actes de Leipzic, où aprés un temps considérable il ne parut que trois „solutions (conformes au fond entre elles) savoir celle de Mr. „Leibnits, celle de Mr. Huguens et la mienne; voir les actes „de Leipzic de 1691.“ —

Gegen Ende 1690 ging er nach Genf, wo er sich etwa 8 Monate aufhielt und unter Andern Christoph Fatio, einem ältern Bruder des ihm später in dem Leibnitz-Newton'schen Wettkampfe gegenüberstehenden Niklaus Fatio, Unterricht in den neuen Rechnungsmethoden gab.

„Vers le commencement de l'automne 1691 je quittai „Genève pour aller en France; après avoir passé par Lyon „et quelques autres villes considérables j'arrivai à Paris; le „séjour de cette capitale devint bien plus long que je ne m'étais proposé, ce que je dois attribuer non seulement aux „agrémens avec lesquels on y passe son temps; mais surtout à la multitude de connaissances que j'eus occassion de „faire avec les plus illustres savants de cette grande ville. „La première chose que je fis pour cela ce fut de m'adresser „au *P. Mallebranche* chez les P. P. de l'oratoire, qui ayant „appris mon nom me reçut avec un accueil des plus tendres.

„Par son moyen je me fis bientôt connaitre des personnes les „plus distingués dans les sciences. Car m'ayant marqué qu'à „un certain jour de la semaine il y avait chez lui assemblée „de gens savants en toute sorte de sciences, et me priant „d'y venir aussi autant de fois qu'il me plairait, je ne man„quai pas de profiter de cette invitation. La première fois „que j'y fus, j'eus le bonheur d'y trouver Mr. le Mq. de „*l'Hospital*, qui passait alors pour un des premiers mathéma„ciens du royaume. Mais comme en ce temps-là toute la ma„thématique en France se bornait à l'astronomie, la géomé„trie et l'algèbre ordinaire, tellement qu'à peine on avait oui „parler de nos nouveaux calculs, on peut bien s'imaginer, „que dans la première conversation avec Mr. de l'Hopital il „fut étrangement surpris de voir la facilité avec laquelle je „resolvais sur le champ, comme en jouant, certains problè„mes qu'il m'avait proposé et qu'il avouait être insoluble pour „l'algèbre commune. Après deux ou trois entretiens que nous „eumes ensuite chez le P. Mallebranche je le mis totalement „dans le goût de nos nouvelles méthodes; il ne fallait que lui „en ouvrir la route et le mettre au fait, afin de savoir les „règles pour pouvoir s'en servir lui-même: Il vint donc chez „moi me prendre dans son carrosse, pour aller chez lui, où „je commençai à lui expliquer les principes du calcul différen„tiel; mais non content de mes leçons données de vive voix, „craignant, disait-il de les oublier, il me pria de les lui com„muniquer par écrit. Je me prêtai par complaisance à son „désir, ne prévoyant pas le dessein qu'il aurait de les pu„blier un jour.*) Ainsi je lui apportai tous les deux jours „une leçon écrite de ma main en latin, sur une feuille de 4 „pages in 4° chacune. J'avais cependant la prévoyance de „les faire copier par un ami qui logeait avec moi, avant de „porter les originaux à Mr. le M. de l'Hopital. L'été sui„vant il partit avec Madame son épouse pour se rendre dans „une des ses seigneuries nommé Ougues près de Blois; il „me pressa de lui tenir compagnie ce que je fis quoique avec „quelque répugnance. Les 3 ou 4 mois que nous y séjour„names, furent employés à le fortifier dans l'usage des nou„veaux calculs pour résoudre toutes sortes de problèmes „physico-mathèmatiques. Ce fut là où je lui enseignai une „troisième espèce de calcul *exponentiel* ou *parcourant*, qui

*) Die hier berührte Schrift ist die bekannte Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes, welche zuerst 1696 ohne den Namen des Verfassers, dann 1715 unter dem Namen von Hospital erschien. Hospital anerkennt nun zwar in der Vorrede, dass er den Bernoulli's viel schulde, indem er sagt: „Au reste je reconnais devoir beaucoup aux lumières de Mss. Bernoulli, surtout à celle du jeune présentement professeur à Groningue. Je me suis servi sans façon de leurs découvertes et de celles de Mr. Leibnitz. C'est pourquoi je consens qu'ils en revendiquent tout ce qu'il leur plaira, me contentant de ce qu'ils voudront bien me laisser." Dagegen schweigt er von dem Verhältnisse, in dem er gerade in Beziehung auf den Gehalt seines Buches zu Johann I Bernoulli als Schüler zum Lehrer stand, gänzlich, und diess lässt sich nicht entschuldigen, und musste Bernoulli kränken.

„traite des quantités, dans les exposants desquelles entrent „des indéterminées ou des variables; j'avais appelé *parcou-* „*rants* les équations qui contenaient ces sortes de quantités, „parcequ'elles parcourent pour ainsi dire toutes les dimen- „sions possibles. J'ai publié les principes de ce dernier cal- „cul dans les actes de Leipzic 1692. Pendant que nous étions „à Ougues, nous reçumes une visite du *P. Charles Reyneau,* „prêtre de l'oratoire et professeur des mathématiques à An- „gers; je m'aperçus d'abord qu'il vint exprès pour se procu- „rer par mon aide quelque ouverture à pénétrer dans nos nou- „veaux calculs, car le bruit s'en était déjà assez repandu „pour en avoir oui parler. Comme je ne suis point mysté- „rieux, je lui communiquai autant qu'il était possible pour le „peu de temps que ce père resta avec nous (peut-être plus „que Mr. de l'Hopital ne voulait). Enfin Reyneau crût avoir „assez appris de moi pour en parler en maître comme il fit „dans la seconde partie d'un gros livre sous le titre d'*Ana-* „*lyse démontrée* publié l'an 1708. Il est vrai que dans la „preface il parle honorablement de mon frére et de moi; mais „seulement en passant, comme s'il ne m'avait jamais vu ni „connu. Lorsqu'il donne des solutions qui sont de moi et „qu'il ne comprenait pas bien, ils les estropiait misérable- „ment en voulant les débiter pour les siennes; en un mot il „a fait voir par ses paralogismes, qu'il a voulu voler plus „haut que ses ailes ne le portaient. — Nous retournâmes à „Paris; j'y fis de nouvelles connaisances en fréquentant assi- „dument les savants académiciens, et en particulier ceux qui „demeuraient dans l'observatoire, Mr. *Cassini* et Mr. *De la* „*Hire*, trés habiles astronomes et observateurs; celui avec „qui je fis la plus étroite liaison c'était Mr. *Varignon* très „bon géomètre et analyste, qui m'honora ensuite d'un com- „merce de lettres jusqu'à à sa mort, témoin une infinité de „lettres, où il me marquait souvent combien il m'était rede- „vable de ce qu'il avait appris de moi dans la sublime géo- „métrie, dont il me faisait de très sincères aveux."

Nach dem Wunsche der Seinigen kehrte Bernoulli im November 1692 nach Basel zurück, graduirte in der Medicin und nahm 1695, nachdem er mehrere andere Berufungen ausgeschlagen hatte, die mathematische Professur in Gröningen an. Dort lehrte und schrieb er mit immer wachsendem Rufe, bis er 1705, als eben Utrecht und Leyden alles anwandten um ihn von Gröningen wegzuziehen, sich zu einem Besuche in Basel entschloss. Auf der Reise traf ihn die Nachricht von dem Tode seines Bruders Jakob, und als er in Basel anlangte, wurde er auf die ehrenvollste Weise dazu bestimmt, dessen Nachfolger zu werden.

„Tout le sénat académique vint en corps se présenter „devant moi pour m'offrir la chaire de mathématiques vacante „par le décès de mon frère, contre la pratique ordinaire qui „est ici en usage et qui veut que les prétendants à des char- „ges de professeurs soutiennent publiquement des thèses à „disputer. Mais ce qui acheva de me déterminer en faveur de „notre université le dit sénat académique intercéda auprès du „conseil souverain pour le disposer à augmenter l'appointe-

„ment ordinaire ce qui fut accordé sans hésitation par une „addition personnelle, dont j'aurais à jouir pendant que je „serais professeur de mathématiques. Cette gracieuse dé-„marche plus que l'utile m'ayant fait abandonner le penchant „pour Utrecht et Leyde, je le fis savoir par une lettre à Mr. „Burmann. Mon inauguration se fit le 17 novembre 1705 par „un discours *De Fatis Novae Analyseos et Geometriae subli-„mioris*, où il y eut un grand concours de monde. Dans la „suite j'ai continué mes leçons publiques et privées avec un „bon succès, ce que je fais encore. J'ai attiré des étrangers „des différents pays de l'Europe non seulement de jeunes „étudiants, mais des personnes de distinction, même des pro-„fesseurs, des docteurs, des académiciens, qui étaient venu „de loin, de Suède, d'Angletterre, de France, d'Italie, de „Suisse et du fond de l'Allemagne, chacun souhaitant de pro-„fiter de mes lumières pour se perfectionner dans les subli-„mes analyses; je ne sache aucun qui ne soit reparti de Bâle „très content de mes leçons."

Spätere Berufungen nach Leyden, Padua etc. ablehnend, lebte Bernoulli mit fast ungeschwächter Geistes- und Körperkraft sofort ruhig in Basel seiner Lieblingswissenschaft bis ins hohe Alter. Der 1 Januar 1748 war sein Todestag. Bernoullis Selbsturtheil über seine wissenschaftliche Thätigkeit mag zum Schlusse nachfolgen:

„Pour en revenir maintenant à mes travaux: comme j'a-„vais dès mon bas âge une violente inclination pour les Ma-„thématiques et pour toutes les sciences qui en ont besoin, „mon étude favorite était toujours de les perfectionner et de „faire de nouvelles découvertes. Avec cet esprit d'inventer „j'ai produit au jour quantité de pièces et de petits traités sur „toutes sortes de matière qui dans le temps de leur pro-„duction étaient tout autant d'originaux: comme on imprime „actuellement chez Michel-Bousquet à Lausanne touts mes „ouvrages ensemble avec grand nombre d'anecdotes qui n'ont „pas encore vu le jour, je n'en dis plus rien afin d'en laisser „juger au public. Cette assiduité d'écrire m'a procuré la con-„naissance de plusieurs savants du premier ordre, qui m'ont „bien voulu honorer de leur correspondence. Ceux avec qui „j'ai cemmercé le plus familièrement jusqu'à la fin de leurs „jours, c'étaient Mr. le Mq. de *l'Hospital*, Mr. *Leibnitz*, Mr. „*Varignon*, Mr. de *Montmort*, Mr. le chevalier *Renau*, Mr. „de *Tschirnhaus*, Mr. *Hermann*, Mss. les frères *Scheuchzer*, „Mr. *Michelotti* et plusieurs autres, dont les noms ne me „reviennent pas. Ce sont principalement Mr. de l'Hospital, „Varignon, de Montmort, Michelotti qui voulurent bien me „consulter comme leur oracle quand ils avaient des difficultés „sur la sublime géométrie; aussi le premier de ces Messieurs „donna rarement quelque chose au public, qu'il ne fut passé „auparavant par mes mains, témoin grand nombre de ses „lettres écrites à moi. Quant aux autres qui sont encore en „vie et connus dans le monde *savant*, qui m'ont bien voulu „honorer de leurs lettres, je n'en nommerais que quelques-„uns, savoir le fameux Mr. *Wolf*, Mr. de *Moivre*, Mr. *Bur-*

„*net*, fils de Mr. l'Evêque de Salisbury, Mr. *Craige*, Mr. „*Cheynès*, Mr. de *Fontenelle*, Mr. de *Mairan*, Mr. de *Mau*„*pertuis*, Mr. *Clairaut*, Mr. *Poleni*, Mr. de *Crousaz*, Mr. *Cra*„*mer*, Mr. *Euler*, Mr. *Bulffinguer*, etc. Quelques-uns de „ces Messieurs sont encore jusqu'àprésent en correspondence „avec moi. Si Mr. *Newton* eut vécu plus longtemps, je ne „doute pas qu'il n'eut voulu lier avec moi une correspondence „formelle. Lorsque en Angleterre on s'avisa de déclarer la „guerre contre Mr. Leibnitz au sujet de l'honneur de la pre„mière invention du calcul nouveau des infiniment petits, j'y „fus enveloppé malgré moi, on me pressa de prendre parti; „après la mort de Mr. Leibnitz on s'en prit a moi seul; une „nuée d'Antagonistes anglais me tombèrent sur le corps; il „me fallait soutenir les attaques de Mss. *Keil*, *Taylor*, *Pem*„*berton*, *Robins* et d'autres; enfin *moi seul comme le fameux* „*Coclès*, *je soutenais sur le pont toute l'armée anglaise*. C'est „Mr. de Fontenelle, qui en parlant de moi fait cette plaisante „comparaison; v. l'hist de l'Acad. de 1719, pag. 90. — Une „autre querelle, non point nationale, mais générale me fut „suscitée sur les forces vives des corps, à l'occassion de mon „discours sur le mouvement, où je prends la défense de la „*force vive*, qu'on pourrait nommer plus proprement le „*pouvoir* d'un corps qui est en mouvement, pour la distin„guer de la *force morte* qu'il peut imprimer succes„sivement à des obstacles égaux jusqu'à son entière extinction, „par où j'ai démontré que le nombre de ces obstacles sur„montés est toujours proportionné au quarré de la vitesse „acquisse et non pas à la simple vitesse. La plupart des „plus grands géomètres, surtout ceux à qui j'ai eu l'occassion „d'expliquer de vive voix mes pensées, sont devenus autant „de Prosélytes en adoptant la doctrine des forces vives. Ce „serait en vain de vouloir convertir les autres qui s'obstin„rent à les reconnaître par divers raisons: Quelques-uns le „font par un pur aveuglement, puisqu'ils n'ont point d'idée de „ce qu'on doit entendre par les forces vives, en le confon„dant éternellement avec les forces mortes. Je compte dans „ce nombre Mr. l'Abbé Deidier, qui donna dans cette année „1741 une brochure, où il prétend refuter les forces vives; „mais il y raisonne comme un aveugle sur les couleurs. Quel„ques autres remplis de préjugés aiment mieux persévérer „dans l'erreur populaire que de se donner la peine d'appro„fondir, ou seulement d'examiner le point de la controverse. „Il y en a encore qui seraient peut-être en état de pénétrer „jusq'au fond de la verité, mais qui s'étant déclaré trop tôt „publiquement par précipitation pour l'erreur invétéré, s'ima„ginent qu'il y va de leur réputation de chanter la palinodie. „Enfin nous savons que quelques-uns particulièrement en „Angleterre, préoccupés de passions contre tout ce qui vient „des pays étrangers, haïssent mortellement les forces vives „par cela seul que Mr. Leibnitz (leur antagoniste declaré et „condamné) les a le premier produites sur la scène. Nous „savons pourtant aussi qu'il y a en Angleterre des partisans „cachés de la nouvelle doctrine, mais qui n'aiment pas trop „lever la tête, sous peine d'Ostracisme. On ne doute pas

„que Mr. Newton lui-même ne l'eut embrassée, si dans la „vigeur de son âge, il avait eu occassion de réfléchir mûrement sur l'état de la question: mais on s'appercoit nullement „qu'il y ait jamais pensé, quoiqu'on trouve quelques propositions dans les principes de la philosophie qui conduisent „immédiatement à reconnaître la nature des forces vives, „comme p. e. la prop. 39 du premier livre qui prouve si clairement qu'elles sont en raison doublée des vitesses du corps „successivements acquises, qu'il n'en faudrait plus d'autres „démonstrations pour ceux qui ne veulent pas *nodum in scirpo* „*quaerere* suivant le proverbe. — J'ai eu outre cela de temps „en temps certains petits démèles particuliers dont je me „crois être toujours tiré avec honneur. Tel était celui qui „durait pendant quelque temps entre Mr. le chevalier *Renau* „très poli adversaire et moi sur un point de la manoeuvre „des vaisseaux. Un autre que j'avais avec Mr. *Jurin* sur un „principe hydraulique. Encore un autre avec Mr. *Brook-Taylor* sur une formule différentielle de Mr. Cotes à intégrer „que celui-là avait proposé en défi à tous les mathématiciens „non Anglais. Item avec Mr. *Keil*, violent agresseur, sur „différentes matières, prétendant entre autres que je ne devais „pas publier les fautes qui j'avais découvertes dans les ouvrages de Mr. Newton. De plus un anonyme Anglais, avec lequel j'eus de longues contestations sur les courbes trajectoires réciproques; mais l'ayant enfin réduit au silence j'ai su „que mon inconnu était Mr. *Pemberton*, éditeur de la troisième édition des principes de Newton avec plusieurs changemens ou plutôt falsifications. J'eus aussi à soutenir les „insultes de Mr. le C. *Ricatti* italien, sur la figure des orbites planétaires. Enfin Mr. *Herman* lui même, quoique mon „compatriote, se crut en droit de me harceler quelque fois, „et le plus souvent pendant qu'il était professeur à Francfort „sur l'Oder, mais il reconnut son tort avant que de mourir."

R. Wolf, Nachrichten von der Sternwarte in Bern (Sternschnuppen-Beobachtungen vom 8. bis 11. August 1848. — Der Mercur-Durchgang und der November-Sternschnuppenstrom). (Nr. 138. und 139.

Derselbe, Bestimmung mittlerer Längen und Gewichte (von 80 Schülern der Realschule in Bern). (Nr. 138. und 139.).

K. v. Erlach, Meteorologische Notizen aus Meyringen. (Nr. 140 und. 141.).

C. Brunner, Sohn, Bemerkungen zu vorstehenden Mittheilungen. (Nr. 140. und 141.).

R. Wolf, Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. (Nr. 142. und 143.).

Derselbe, Nachrichten von der Sternwarte in Bern. (Sonnenfleckenbeobachtungen im Jahre 1848. — Verschiedene Beobachtungen im Jahre 1848.). (Nr. 144. und 145.).

M. Perty, Ueber vertikale Verbreitung mikroskopischer Lebensformen. (Nr. 146. — 149.).

(Ein sehr lesenswerther, interessanter Aufsatz).

Lud. Eman. Schärer, Lichenum Europaeorum Genera ex utraque methodo, artificiali et naturali, digerit. (Nr. 150. — 151.).

In diesen Nummern theilt Herr R. Wolf auch folgenden interessanten Brief von Fontana an Kästner über Lambert mit:

„Pavia. 11. Nov. 1773. Je viens de recevoir les ouvages allemands de Mr. Lambert. C'est un grand génie, on ne peut pas le nier; mais il se traîne, il s'appésentit un peu trop sur les matières qu'il traite; il rebute quelquefois par sa prolixité; il semble ignorer cet art plus rare encore que les talents, cet art le plus difficile de tous les arts, — l'art d'effacer. Ne lui déplaise pas la parallèle, je l'appelle le Dryden des géomètres, duquel a bien dit Pope:

The copious Dryden wanted, or forgot
The last, and greatest art, the art of blot.

Mais quoi qu'il soit de cela, il a tant de vertus que j'ai presqu'oublié les défauts, et où est l'homme qu'en soit exempt? Optimus ille est qui minimis urgitur."

B. Studer, Ueber den Bohrversuch auf Steinsalz oberhalb Windlisbach. (Nr. 152. — 155.).

L. R. v. Fellenberg, Analyse der Schwefelquellen des Gurnigelbades. (Nr. 152. — 155.).

C. Brunner, Ueber das gediegene Gold von S. Francisco in Californien. (Nr. 152. — 155.).

Ausserdem hat Herr R. Wolf seine werthvollen Auszüge aus den Briefen an A. v. Haller in mehreren Aufsätzen wieder fleissig fortgesetzt; welche ungeheure Correspondenz muss dieser Heros geführt haben!

Mögen die obigen Auszüge von Neuem auf den in vielen Beziehungen wichtigen und interessanten Inhalt der Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern, denen wir einen ununterbrochenen und schnellen Fortgang sehr wünschen, die Leser des Archivs aufmerksam zu machen geeignet sein, welches der Hauptzweck ist, den wir durch dieselben zu erreichen suchen.

Bitte.

Die Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien hat auf den Antrag ihres berühmten Präsidenten, des Freiherrn v. Hammer-Purgstall, in der Sitzung vom 13. Mai 1848 einstimmig den Beschluss gefasst, sich aller Titulaturen oder sogenannten Prädicate bei ihrer Correspondenz völlig zu entschlagen. Auch dem Herausgeber des Archivs sind die Hoch-, Hochwohl-, Wohl-, Hochedel- uud wie die Gebornen alle heissen, ganz besonders aber auch die Hochwürden, Hochehrwürden, Ehrwürden u. s. w. von jeher ein Greuel gewesen, und derselbe glaubt, dass es jetzt an der Zeit sei, unter vielen andern auch diesen schrecklich langen Zopf dem edlen deutschen Volke endlich einmal ganz abzuschneiden. Daher ergeht an alle Correspondenten des Herausgebers in Sachen des Archivs, so wie überhaupt an alle diejenigen, welche mit ihm Briefe zu wechseln irgend Gelegenheit haben und diese Zeilen zufällig zu Gesicht bekommen, die ergebenste Bitte, ihn fernerhin mit diesen nichts sagenden und völlig absurden Floskeln gefälligst gänzlich zu verschonen, wobei es sich von selbst versteht, dass der Herausgeber Gleiches mit Gleichem jederzeit und überall vergelten wird. Nur wenn möglichst vielseitig solche gegenseitige Contracte geschlossen werden, wird es möglich, dergleichen lange Zöpfe wie den betreffenden nach und nach etwas zu kürzen, bis endlich nur ein letzter Stumpf, der immer noch einzelnen leicht zu errathenden Leuten zur besondern Zierde gereichen wird, übrig bleibt. G.

LI.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Die allgemeine Umkehrung gegebener Functionen. Eine Monographie von Dr. Oskar Schlömilch, Professor an der Universität Jena. Halle. 1849. 8.

Diejenigen unter den deutschen Mathematikern, welche noch eine vollständige Kenntniss der im Sinne Hindenburg's und seiner Schüler und Freunde bearbeiteteten combinatorischen Analysis besitzen, — gross wird ihre Anzahl schwerlich sein, und in Frankreich und England hat dieselbe nie den geringsten Eingang gefunden —, werden sich noch erinnern, dass einer der wichtigsten Angelpunkte, um die sich alle diese Untersuchungen drehten, das sogenannte Reversionsproblem war; ja man kann sagen, dass die Combinatoriker die vollständige Auflösung dieses Problems (in ihrem Sinne) als den Gipfelpunkt aller ihrer Bemühungen, als das eigentliche non plus ultra, was sie durch dieselben zu erreichen hofften und hoffen durften, betrachteten, indem ja durch die Auflösung dieses Problems natürlich auch die allgemeine analytische Auflösung der Gleichungen (im Sinne der Combinatorik) gegeben war. Wer, wie der unterzeichnete Herausgeber dieses Archivs, der in J. F. Pfaff*) hauptsächlich seinen Lehrer verehrt, recht eigentlich in der combinatorischen Analysis aufgewachsen ist, blickt jetzt mit einem gewissen wehmüthigen Gefühl auf die Zeit jener Studien zurück, indem man sich sagen muss, dass man von allen den schönen Sachen, die man damals lernte, doch niemals einen rechten Gebrauch hat machen können, ja dass man fast alles damals mit einem wahrlich nicht geringen Aufwande von Zeit und Mühe und grossem Eifer Erlernte, ich

*) Auch Thibaut's Vorlesungen über die allgemeine Arithmetik oder sogenannte Analysis des Endlichen, die der Herausgeber des Archivs ebenfalls gehört hat, waren eigentlich nur combinatorischer Natur.

will nicht gerade sagen, hat wieder vergessen, aber doch hat auf die Seite werfen müssen, um in gewisser Rücksicht wieder von vorn anzufangen. Um indess auch nicht undankbar zu sein, muss man bekennen, dass in jenen Beschäftigungen doch jedenfalls ein sehr bedeutendes bildendes Element lag, und dass auch die meistens sehr grosse analytische Eleganz der erhaltenen Resultate denselben einen ganz eigenthümlichen Reitz verlieh, wodurch man, nachdem man eine Stufe erstiegen hatte, immer wieder neue Kraft gewann, den nicht selten dornenvollen Pfad weiter zu verfolgen.

Zu den schönsten Sätzen der Analysis gehört nach meiner Ueberzeugung unstreitig die berühmte sogenannte Localformel zur Reversion der Reihen, mit welcher H. A. Rothe, der zuletzt Professor in Erlangen war und seine verdienstvolle literarische Laufbahn mit der, jetzt auch wohl nur von sehr wenigen — aber gewiss mit Unrecht — [illegible] Theorie der combinatorischen Integrale. Nürnberg. 1820. geendigt hat, in der mit eigenthümlicher Eleganz verfassten Schrift: Formulae de serierum reversione demonstratio universalis signis localibus combinatorio-analyticorum vicariis exhibita. Lips. 1793. die Analysis bereichert hat. Aber ich möchte wohl wissen, ob diese ganz allgemeine Formel zu Reihenumkehrungen öfters wirklich angewandt worden ist? Und ausserdem lassen alle diese Untersuchungen ein Element ganz unberücksichtigt, welches dem erhaltenen Resultate nur erst wahre Berechtigung zur wirklichen Anwendung verleihet, und von der neueren Analysis daher auch nie ausser Acht gelassen wird, nämlich — was ich kaum wohl erst noch zu sagen brauche — die Convergenz oder Divergenz der erhaltenen Reihe. Ob aber hierüber Kriterien, die für die Anwendung hinreichende Einfachheit besitzen, überhaupt aufgestellt werden können, muss ich völlig dahingestellt sein lassen, da weder hinreichende eigene noch fremde Untersuchungen mir in dieser Beziehung bis jetzt zur Seite stehen. So viel aber dürfte gewiss sein, dass alle jene älteren Untersuchungen über die Umkehrung der Reihen, ungeachtet ihrer in gewisser Rücksicht ganz unbestreitbaren sehr grossen analytischen Schönheit und Eleganz, in den mathematischen Raritätenkasten, oder auf den mathematischen Nipptisch zu verweisen sind, so lange der fragliche Punkt nicht eine einigermaassen genügende Erledigung gefunden hat*).

Alle jene älteren Untersuchungen über die Reversion der Reihen legen nun die gewöhnliche Reihenform

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

zum Grunde. Diesen älteren, bisher überhaupt allein eingeschlagenen Weg, hat aber der Herr Vf. der vorliegenden Schrift, wahrscheinlich veranlasst durch den oben angestellten ähnliche Betrachtungen, ganz verlassen, und seinen Untersuchungen über die

*) Dirksen's Organon der gesammten transcendenten Analysis. Thl. I. Berlin. 1845. wäre ein Werk, in dessen weiterer Fortführung man wohl die fragliche Erledigung zu finden hoffen dürfte.

Umkehrung der Reihen, oder, wie er es mit Recht nennt, über die Umkehrung der Functionen, d. h. über die Bestimmung der Function $y = \varphi(x)$ aus der als gegeben angesehenen Function $x = \psi(y)$, die Reihenform

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{c} + A_2 \cos \frac{2\pi x}{c} + A_3 \cos \frac{3\pi x}{c} + \ldots,$$

wo c eine beliebige positive von Null verschiedene Grösse bezeichnet und die Coefficienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ mittelst der Formel

$$A_n = \frac{2}{c} \int_0^c \varphi(x) \cos \frac{n\pi x}{c} \partial x$$

bestimmt werden, zum Grunde gelegt. Die besonderen Vortheile, welche diese Reihenform darbietet, kennt Jeder, wer mit den neueren Fortschritten der Analysis gehörig bekannt ist; so dass, dieselben hier noch besonders aufzuzählen, unnütze Weitläufigkeit sein würde; und der Gedanke des Herrn Vfs., diese Reihenform bei dem Reversionsproblem in Anwendung zu bringen, ist daher jedenfalls ein sehr glücklicher zu nennen. Auch glauben wir, ohne uns hier auf eine nähere Angabe der gewonnenen Resultate einlassen zu können, dass der Herr Verf. innerhalb der sich selbst gesteckten Gränzen Alles geleistet hat, was sich bei dem gegenwärtigen Zustande der neueren Analysis leisten lässt, sowie denn, wie die früheren, auch diese Schrift des Herrn Vfs. ganz im Geiste dieser neueren Analysis verfasst ist, und ihrer Wichtigkeit und ihres grossen wissenschaftlichen Interesses wegen zur sorgfältigsten und allgemeinsten Beachtung dringend empfohlen zu werden in jeder Beziehung verdient, auch ohne Zweifel überhaupt als eine wichtige neuere Erscheinung auf dem Gebiete der mathematischen Literatur bezeichnet werden muss. Dabei können wir aber zum Schluss doch immer nicht den Wunsch unterdrücken, dass es gelingen möge, die von den älteren Combinatorikern gewonnenen Resultate und Sätze über die Umkehrung der Reihen auf irgend eine Weise zur wirklichen Anwendung fruchtbar zu machen, indem man bei ihnen, an die älteren eleganten Untersuchungen sich möglichst anschliessend, noch alle diejenigen Forderungen zu befriedigen sucht, welche die neuere Analysis dem Charakter ihrer eigenthümlichen Strenge nach an jede in ihr Gebiet fallende Untersuchung nothwendig stellen muss, wenn dieselbe auf wahren wissenschaftlichen Werth soll Anspruch machen dürfen.

Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen von Carl Friedrich Gauss. Göttingen. 1849. 4. 15 Sgr.

Gauss hat bekanntlich seine literarische Laufbahn mit einem Beweise des Fundamentalsatzes der Theorie der algebraischen Gleichungen begonnen, den er in der Inaugural-Dissertation: *Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse, quam pro obtinendis summis in Philosophia honoribus inclito Philosophorum ordini Academiae Juliae Caro-*

linae exhibuit C. F. Gauss. Helmst. 1799. veröffentlicht, und nachher noch mit zwei andern in den Schriften der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften bekannt gemachten Beweisen vermehrt hat. Jedenfalls ist es nicht ohne Absicht geschehen, dass Gauss in dem gegenwärtigen Jahre 1849, dem Jahre seines Doctorjubiläums, jene für die Wissenschaft höchst wichtige Jugendarbeit wieder vorgenommen, und in einer neuen in vielen Beziehungen sehr vereinfachten Bearbeitung den Mathematikern vorgelegt hat. Wäre der Herausgeber des Archivs nicht leider im verwichenen Sommer von dem härtesten Schlage des Schicksals, welcher ihn in diesem Leben überhaupt treffen konnte, durch den Verlust seiner ältesten, ihm über Alles theuren, auch geistig sehr nahe stehenden Tochter, in deren einundzwanzigstem Lebensjahre, getroffen worden, durch welches harte, noch schwer auf ihm lastende Geschick, mit dem eine vorhergegangene Badereise zur Wiederherstellung der Gesundheit der Verstorbenen in enger Verbindung stand, er länger als ein Vierteljahr allen anderen Ereignissen völlig entfremdet wurde, und so nur erst jetzt bei Gelegenheit der vorliegenden Schrift auf das in die erwähnte traurigste Zeit seines Lebens gefallene Doctorjubiläum des grössten Mathemathematikers unsers Jahrhunderts aufmerksam gemacht und hingewiesen wurde, so würde gewiss auch das Archiv nicht versäumt haben, alle seine Leser auf dieses höchst erfreuliche Ereigniss, an dem jeder Mathematiker den lebhaftesten und innigsten Antheil nehmen muss, aufmerksam zu machen, und sich bei demselben in irgend einer geeignet scheinenden Weise auch selbstredend zu betheiligen. Sollten aber dem hochverehrten Manne diese Zeilen jetzt noch zu Gesicht kommen, so möge er sich versichert halten, dass der Herausgeber des Archivs jederzeit von der innigsten Freude bewegt worden ist, wenn er von ihm befreundeten nahen Verwandten des Gefeierten die öfters wiederholte Versicherung erhalten hat, wie sehr derselbe auch noch in seinem hohen Alter durch Kräftigkeit und Gesundheit des Körpers von der Vorsehung beglückt werde: denn die fortwährende Kräftigkeit und Rüstigkeit des Geistes „bedarf keines Beweises“ nach den immer wieder neu vorliegenden Proben. Möge der Himmel ihm zum Heile der Wissenschaft und aller durch die Bande des Blutes mit ihm verbundenen Personen noch viele Jahre schenken! in welchem Wunsche mit dem Herausgeber gewiss alle Leser des Archivs, welche auf die in Rede stehende am 16. Julius d. J. unter lebhafter Theilnahme von nah und fern stattgehabte Feier noch nachträglich hinzuweisen, diese wenigen theilnehmenden Worte vorzugsweise bestimmt sind, übereinstimmen werden.

Die von Gauss gegebenen drei Beweise des algebraischen Fundamentalsatzes beruhen alle auf verschiedenen Grundlagen, aber darin kommen sie, sowie auch die von Cauchy gegebenen Beweise, alle überein, dass zunächst nur das Vorhandensein Eines Factors der betreffenden Function nachgewiesen wird. Der Strenge des Beweises thut dies allerdings keinen Eintrag: denn es ist klar, dass wenn von der vorgegebenen Function dieser eine Factor abgelöset wird, eine ähnliche Function von niederer Ordnung zurückbleibt, auf welche der Lehrsatz aufs Neue angewandt werden kann; und dass durch Wiederholung des Verfahrens zuletzt eine vollständige Zerlegung der ursprünglichen Function in Factoren der bezeichneten Art hervorgehen wird. Indessen gewinnt ohne Zweifel jede Beweisführung eine höhere Vollendung, wenn nachgewiesen wird, dass sie geeignet ist, das Vorhandensein der sämmtlichen Factoren unmittelbar anschaulich zu machen. Dass der erste Beweis in diesem Falle ist, ist in der gedachten Dissertation (Art. 23.) angedeutet, ohne es dort weiter auszuführen: dies zu ergänzen, ist die vorliegende neue Abhandlung bestimmt, zugleich aber sollen die Hauptmomente des ganzen Beweises in einer neuen, eine vergrösserte Klarheit darbietenden Gestalt wiederholt werden. Was dabei die äussere Einkleidung des Lehrsatzes selbst betrifft, so war die 1799 gebrauchte, dass die Function $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots$ sich in reelle Factoren erster oder zweiter Ordnung zerlegen lässt, damals deshalb gewählt, weil alle Einmischung imaginärer Grössen vermieden werden sollte. Gegenwärtig, wo der Begriff der complexen Grössen Jedermann geläufig ist, schien es angemessener, jene Form fahren zu lassen, und den Satz so auszusprechen, dass jene Function sich in n einfache Factoren zerlegen lasse, wo dann die constanten Theile dieser Factoren nicht eben reelle Grössen zu sein brauchen, sondern für dieselben auch jede complexen Werthe zulässig sein müssen. Bei dieser Einkleidung gewinnt selbst der Satz noch an Allgemeinheit, weil dann die Beschränkung auf reelle Werthe auch bei den Coefficienten A, B, u. s. w. nicht vorausgesetzt zu werden braucht, vielmehr jedwede Werthe für dieselben zulässig bleiben.

Die zweite Abtheilung der vorliegenden Schrift ist den algebraischen Gleichungen mit drei Gliedern ($x^{m+n} \pm ex^m \pm f = 0$) gewidmet. Diese haben das Eigenthümliche, dass von den zur numerischen Auflösung der Gleichungen bestimmten Methoden einige bei jenen einer Geschwindigkeit und Eleganz fähig werden, von der ihre Anwendung auf Gleichungen von weniger einfacher Gestalt sehr weit entfernt bleibt. Dies gilt namentlich von der Auflösung durch unendliche Reihen, und von der indirecten Methode. Es scheint daher die Entwicklung dieser Methoden für die Gleichungen von jener Form um so mehr eine besondere Ausführung zu verdienen, da das Vorkommen solcher Gleichungen in der That ein sehr häufiges ist.

Die Auflösung durch unendliche Reihen hat jedoch der Verf. von seinem gegenwärtigen Zwecke gänzlich ausgeschlossen, und nur bemerkt, dass für jede Wurzel einer solchen Gleichung, sei sie reell oder imaginär, eine convergente und nach einem leicht erkennbaren Gesetze fortschreitende Reihe gefunden werden kann. So schön aber auch diese Auflösungsart in allgemein theoretischer Beziehung ist, so wird man doch, wo es auf wirkliche praktische Anwendung ankommt, den indirecten Methoden in allen den Fällen den Vorzug geben, wo jene Convergenz nicht eine sehr schnelle ist.

Diese indirecten Methoden nun sind der Gegenstand der zweiten Abtheilung. Es handelt sich hier von zwei Methoden, denn das Verfahren, welches zur Bestimmung der imaginären Wurzeln erfordert wird, ist ganz verschieden von dem für die reellen Wurzeln anzuwendenden. Von dem letzteren hat der Vf. schon bei andern Gelegenheiten ein Paar Proben an besonderen Fällen gegeben, und dabei zugleich die allgemeine Anwendbarkeit des Verfahrens angedeutet. Obgleich diese Generalisirung durchaus keine Schwierigkeit hat, so hat der Vf. doch geglaubt, dass man gern die gebrauchsfertigen Vorschriften zusammengestellt sehen würde, zumal weil die Anzahl der dabei zu unterscheidenden und einzeln zu behandelnden Fälle nicht unbeträchtlich ist.

Die Auffindung der imaginären Wurzeln auf indirectem Wege ist (insofern nicht schon einigermassen angenäherte Werthe anderswoher bekannt sind) deswegen viel schwieriger, als die der reellen, weil jene aus einem unendlichen Gebiete von Dimensionen herausgesucht werden müssen, diese nur aus einem unendlichen von Einer Dimension. Diese Schwierigkeit lässt sich bei Gleichungen von drei Gliedern durch einen einfachen sehr nahe liegenden, aber wie es scheint, sonst bisher noch nicht benutzten Kunstgriff umgehen. Auch für diese Aufgabe sind die zur Auflösung erforderlichen Vorschriften vollständig und in gebrauchsfertiger Gestalt mitgetheilt. G.

Théorie générale des calculs par approximation par J. J. Guilloud. Paris, 1849.

Geometrie.

Das Malfattische Problem. Beweis der Steiner'schen Auflösung. Von A. Quidde, Oberlehrer. (Programm des Gymnasiums zu Herford von Michaelis 1849.) Herford. 1849. 4.

Der von Adams in dem im Litterar. Ber. Nr. XXX. S. 451. angezeigten Schrift gegebene Beweis der Steiner'schen Construction befriedigte den Herrn Vf. des vorliegenden lesenswerthen Programms insofern nicht, als dieselbe nicht rein planimetrisch ist, sondern auf eine Gleichung des zweiten Grades sich stützt. Er giebt daher in der vorliegenden Schrift einen rein geometrischen Beweis der gedachten eleganten Construction, welchen wir der Beachtung der Leser des Archivs recht sehr empfehlen. Ausserdem sind noch verschiedene elegante analytische Betrachtungen beigefügt, die das Interesse der Leser ebenfalls recht sehr in Anspruch zu nehmen geeignet sind, weshalb wir auf diese Schulschrift wiederholt aufmerksam machen, ohne dadurch Herrn Adams Beweis der mehr erwähnten Construction irgend in Schatten stellen zu wollen, der in analytischer Rücksicht ebenfalls sehr bemerkenswerth ist, wie wir auch schon a. a. O. des Literar. Ber. gebührend hervorgehoben haben.

Geodäsie.

Die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie. Ausgeführt von der trigonometrischen Abtheilung des Generalstabes von I. I. Baeyer. Berlin. 1849. 4. 6 Thlr.

Es genügt hier, das Erscheinen dieses für die Geographie und Topographie Preussens sehr wichtigen Werkes anzuzeigen, da eine besondere Beurtheilung oder auszugsweise Mittheilung des Inhalts bei einem Werke, welches wie das vorliegende hauptsächlich nur die Resultate einer grossen geodätischen Messung enthält, natürlich unstatthaft ist. Uebrigens enthält aber auch das Werk eine kurze Darstellung der befolgten Beobachtungs- und Rechnungsmethode, welche für jeden Geodäten namentlich in praktischer Rücksicht sehr lehrreich sein wird und daher zur Beachtung hier empfohlen werden muss.

Mechanik.

Leonhard Euler's Mechanik oder analytische Darstellung der Wissenschaft von der Bewegung mit Anmerkungen und Erläuterungen herausgegeben von Dr. J. Ph. Wolfers. Zweiter Theil. Greifswald. 1850. 8. 2⅚ Thlr.

Wir freuen uns sehr, das Erscheinen des zweiten Theils dieser ausgezeichneten Uebersetzung von Euler's Mechanik jetzt anzeigen zu können, von welcher alles dasjenige, was im Literar. Ber. Nr. XXXVIII. S. 551. bei der Anzeige des ersten Theils zur Empfehlung dieses Unterernehmens gesagt worden ist, in ganz gleichem Maasse gilt. Da das Urtheil, welches Gauss über diese Uebersetzung gefällt hat, uns freundschaftlich mitgetheilt worden ist, zugleich mit der Autorisation zur Veröffentlichung desselben, so nehmen wir keinen Anstand, dasselbe nachstehend den Lesern des Archivs nicht vorzuenthalten. Ganz übereinstimmend mit unserem eigenen Urtheil über den ersten Theil sagt nämlich der genannte grosse Mathematiker:

„Da das Studium der Eulerschen Schriften stets die beste Schule für mathematische Ausbildung, und auch selbst da, wo die spätere Zeit wesentliche Vervollkommnungen gebracht hat, doch jedem Mathematiker unerlässlich bleiben wird, so können alle Bemühungen, solche Schriften leichter zugänglich zu machen, nur dankbar anerkannt werden. Es ist daher ein erfreuliches Zusammentreffen mit Ihrer (des Uebersetzers) Arbeit, dass die Petersburger Akademie die kleinern, in akademischen Denkschriften zerstreuten Abhandlungen zu sammeln beschlossen und schon zwei Bände Commentationes Arithmeticae neuerlich veröffentlicht hat."

Die Anmerkungen und Erläuterungen des Herrn Uebersetzers sind in diesem Theile noch reichlicher wie im ersten Theile, und werden Ungeübteren das Studium des Werks sehr erleichtern. Mit der freudigsten Anerkennung des Verdienstes, welches der Herr Uebersetzer sich durch die vollständige Uebertragung der Mechanica sive motus scientia analytice exposita in's Deutsche bereits erworben hat, können wir nicht den Wunsch unterdrücken, dass es demselben gefallen möge, das deutsche mathematische Publicum nun auch recht bald mit einer ebenso gelungenen Uebersetzung der in streng wissenschaftlicher Rücksicht jedenfalls noch weit wichtigeren Theoria motus corporum rigidorum. Rostock und Greifswald. 1789. 4. zu beschenken.

Nautik.

Traité élémentaire de navigation à l'usage des officiers de la marine militaire et de la marine du commerce, par V. Caillet, examinateur de la marine etc. Tome I. Texte. Brest 1848. Tome II. Tables. Brest 1846. 5 Thlr. 25 Sgr.

Dieses Werk enthält eine sehr wissenschaftlich gehaltene, für seinen Zweck hinreichend vollständige Darstellung der nautischen Astronomie und Schifffahrtskunde überhaupt, nebst den dazu gehörenden Tafeln, und darf von Lehrern der Schifffahrtskunde nicht unbeachtet gelassen werden. Die auf der See gebräuchlichen Instrumente sind ziemlich ausführlich beschrieben, und ihr Gebrauch und ihre Berichtigung ist gelehrt. Alle Aufgaben sind durch vollständig ausgerechnete Beispiele hinreichend erläutert. Neue Methoden, die besonders hervorgehoben zu werden verdienten, haben wir jedoch in diesem Werke nicht gefunden, ausser etwa die auf Seite 193. mitgetheilte Auflösung der Aufgabe: „Aus den beobachteten Höhen zweier Sterne und der Zwischenzeit der Beobachtungen Zeit und Polhöhe zu bestimmen" von dem Vater des Verfassers, und die approximative Auflösung desselben Problems von dem Marineofficier Pagel, die aber wohl der bekannten, auf der See bisher am meisten angewandten, ebenfalls nur approximativen Methode von Douwes (der Vf. schreibt falsch Dowes) nachstehen dürfte. Dass der Verf. die vollständige Kenntniss der Geometrie und der beiden Trigonometrien voraussetzt, ohne in seinem Werke selbst, wie diess oft in Schifffahrtslehrbüchern geschieht, einen Abriss dieser Wissenschaften zu liefern, ist ganz recht und dem wissenschaftlichen Standpunkte seines Werkes, welches wir nochmals allen denen, die sich für diese Studien interessiren, empfehlen, völlig angemessen.

Nautischer Almanach für das Jahr 1850. Herausgegeben von G. F. Ursin. Kopenhagen. 1848. 8. 15. Sgr.

Dieser auf sehr gutes Papier mit deutlichen und scharfen Lettern gedruckte nautische Almanach ist uns jetzt erst bekannt geworden; ob schon frühere Jahrgänge von demselben existinen, ist uns nicht mehr mit Bestimmtheit erinnerlich. Um so mehr halten wir es für unsere Pflicht, auf denselben aufmerksam zu machen, weil er einen nach unserer Ansicht sehr guten für den Seefahrer völlig hinreichenden Auszug aus dem „Nautical Almanach and astronomical Ephemeris" liefert, und für den Greenwicher Meridian berechnet ist. Eine deutliche Anweisung zu seinem Gebrauch ist der eigentlichen Ephemeride vorangestellt, und derselbe ist daher gewiss den Seeleuten in jeder Beziehung recht sehr zu empfehlen.

Allgemeines nautisches Wörterbuch mit Sacherklärungen. Deutsch, Englisch, Französisch, Spanisch, Portugiesisch, Italienisch, Schwedisch, Dänisch, Holländisch. Von Dr. Eduard Bobrik. Leipzig. 1850. 8. 4 Thlr.

Dictionnaire de marine, par de Bonnefous et Paris. 1848.

Histoire générale de la marine, par Van Tenac. 1848.

Nouvelle Architecture navale, par A. Mairière. 1848.

Guide pour la construction de bateaux à vapeur, par Mazaudier et Lombard. 1848.

Perfectionnements dans la navigation à vapeur. Exposition d'un nouveau mode de navigation, par A. Seguier, de la Morinière et Durand. 1848.

Navigation rapide. Notice sur un bateau roulant, par J. B. Bonniot. 1848.

Almanach du marin et de la France maritime pour 1850, publié avec l'approbation et sous le patronage du ministre de la marine. Treizième année. Paris. 1849.

Physik.

Lehrbuch der Physik für Schule und Haus. Von Dr. Heinrich Belze (Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Cottbus). Berlin. 1850. 28 Sgr.

Dieses mit grosser Deutlichkeit in einer ansprechenden Sprache verfasste Lehrbuch der Physik können wir aus Ueberzeugung allen denjenigen empfehlen, die bei nur sehr geringen mathematischen Vorkenntnissen und ohne zu grossen Zeitaufwand sich eine gründliche Einsicht in die Hauptlehren der Physik verschaffen wollen, und glauben, dass der Herr Vf. in diesem keinen grossen Umfang habenden Werke ganz die richtige Mitte zwischen einem völlig populären und einem streng wissenschaftlichen Werke, sowohl rücksichtlich des Vortrags als auch rücksichtlich des aufgenommenen Materials, getroffen hat. Das

Buch wird daher auch ganz zweckmässig beim physikal[ischen]
Unterrichte auf höheren Lehranstalten, selbst in den obersten [Klas-]
sen, zum Grunde gelegt werden können, indem es einem ge[schick-]
ten Lehrer leicht sein wird, verschiedene Partieen mit [Hülfe]
der Lehren der Elementarmathematik, namentlich der Trig[ono-]
metrie und Algebra, weiter auszuführen, worüber sich dann [die]
Schüler als Ergänzung des zum Grunde gelegten Lehrbuchs [eigene]
Hefte ausarbeiten müssen, was vielfache Gelegenheit zu z[weck-]
mässigen mathematischen Uebungen darbieten wird. Dass [der]
Herr Verf. in einem Buche dieser Tendenz auch dem sogenan[nten]
thierischen Magnetismus und den Reichenbach'schen Untersu[chun-]
gen über denselben in einem „Polarismus" überschrie[benen]
besonderen Kapitel einige Aufmerksamkeit geschenkt hat, ka[nn]
gebilligt werden. Da schon früher ein anderer competenter [Beur-]
theiler, Herr Director Klöden in Berlin, seine mit un[serm]
obigen Urtheil ganz übereinstimmende Ansicht über dieses [Buch]
auf einem wahrscheinlich von dem Verleger dem Buche beig[eleg-]
ten besonderen Blatte öffentlich ausgesprochen hat, so hal[ten wir]
es für zweckmässig und der zu wünschenden weiteren Verbre[itung]
des Buches für förderlich, wenn wir diese Beurtheilung des [Herrn]
Director Klöden, mit der wir, wie gesagt, im Wesentlichen [über-]
einstimmen, nachstehend abdrucken lassen:

„Das beifolgend zurückgehende Manuscript, betitelt: Lehrb[uch]
der Physik für Schule und Haus von Dr. Heinrich B[...]
erscheint mir als eine recht wackere Arbeit, die einer we[iteren]
Verbreitung durch den Druck wohl werth ist. Sie empfie[hlt sich]
durch eine logische übersichtliche Anordnung, durch eine lich[tvolle,]
sehr deutliche und fassliche Ausdrucksweise und Darstellung, [ohne]
doch der Wissenschaft etwas zu vergeben, oder eine Sch[einer-]
klärung an die Stelle der wahren zu setzen, und durch ein[e ge-]
wisse Vollständigkeit, soweit diese von einer, im edleren [Sinne]
populär gehaltenen Schrift zu verlangen ist. Was der eigen[tlichen]
Wissenschaft anheim fällt, ist mit Recht weggelassen, da es [dem]
Herrn Verfasser darauf ankam, nur das zu geben, was der Sc[hule]
und dem Leben angehört, weshalb er auch zur Verständniss [sei-]
nes Buches nur ein sehr geringes Maass von mathematisc[hem]
Wissen fordert, und die nothwendigsten Sätze der Geometrie [an-]
hangsweise giebt. Obgleich das Buch vorzugsweise für das Se[lbst-]
studium geschrieben ist, so wird es doch in Gymnasien und [Bür-]
gerschulen auch recht wohl dem Unterricht zum Grunde ge[legt]
werden können, indem es keinem Lehrer schwer werden [wird,]
die nach dem Bedürfnisse und dem Standpunkte seiner [Schüler]
etwa erforderlichen mathematischen Entwickelungen und Fo[rmeln]
geeigneten Ortes ergänzend hinzuzufügen, wozu oft schon [die]
blosse Umwandlung des wörtlichen Ausdrucks in den figür[lichen]
mathematischen hinreicht. Mit den Ergebnissen der neuesten [phy-]
sikalischen Forschungen ist der Herr Verfasser wohl vert[raut,]
und er hat sie, so weit es der Zweck und die Bestimmung [des]
Buches verlangten, aufgenommen und meistens sehr gut und [[illegible]]
lungen dargestellt. Aus allem dem ergiebt sich, dass das Buch [ein]
lehrreiches und zweckmässiges ist. Klöden."

Viele, denen andere populäre physikalische Werke mit [illegible]
zu umfangreich sind, werden gewiss in dem vorliegenden Bu[che]

ihre Wünsche befriedigt finden, wenn sie nur einer wissenschaftlichen Darstellung zu folgen im Stande sind, und vor einer sich hin und wieder findenden ganz einfachen mathematischen Betrachtung nicht gleich zurückschrecken, was aber in jetziger Zeit überhaupt gar nicht mehr der Fall sein sollte.

Répertoire d'Optique moderne ou Analyse complète des travaux modernes relatifs aux phénomènes de la lumière; par M. l'Abbé Moigno. Deuxième Partie. Paris. 1848. 8.

Dies ist der zweite Theil des im Litterar. Ber. Nr. XXXIV. S. 504 angezeigten Werkes, in welchem es der Hr. Verf. nicht mehr mit dem mathematischen Theile der neueren Optik zu thun hat, sondern hauptsächlich nur mit rein physikalischen Dingen; weshalb wir seine Darstellung in diesem Theile genügender und befriedigender finden als im ersten Theile, und selbst glauben, dass man schwerlich anderswo die neueren optischen Entdeckungen so vollständig wie hier beisammen finden wird. Der Hauptinhalt, mit dessen Angabe, ohne sehr ins Einzelne eingehen zu können, wir uns hier begnügen müssen, ist folgender:

Section V. Solution de quelques difficultés. Explication de certains faits mysterieux (Hier auch vom Zodiakallicht, Sternschnuppen, Nordlicht u. s. w., also auch von Dingen, die zur meteorologischen Optik gehören.) — Section VI. Des couleurs en elles-mêmes et dans les corps. — Section VII. Des couleurs accidentelles ou subjectives. De la persistance des images. Du contraste. De l'irradiation. Du Daltonisme ou des imperfections innées dans la sensation des couleurs. — Section VIII. De la lumière considérée dans son action sur des appareils autres que l'oeil, sur des substances différentes de la rétine. De la nature plus intime du spectre solaire: des divers rayons calorifiques, chimiques et phosphorogéniques. De la photographie. De l'action de la lumière sur les plantes. (Hier auch von Moser's Entdeckung.)

Grundsätze der Meteorologie in näherer Beziehung auf Deutschlands Klima von Dr. G. Schübler. Neu bearbeitet von Dr. G. A. Jahn, Director der astronomischen Gesellschaft in Leipzig, u. s. w. Leipzig. 1849. 8. 1 Thlr. 15 Sgr.

Schübler's Grundsätze der Meteorologie erschienen zuerst im Jahre 1831 als integrirender Theil der „allgemeinen Encyklopädie der gesammten Land- und Hauswirthschaft der Deutschen“, und haben sich wegen ihrer sehr gemeinverständlichen Darstellung und ihres praktischen Gehalts mit Recht grossen Beifall, namentlich unter den wissenschaftlich gebildeten Landwirthen erworben. Wie sehr seit jener Zeit durch Gründung landwirthschaftlicher Akademieen und höherer landwirthschaftlicher Lehranstalten, so wie gewöhnlicher Ackerbauschulen, durch das Entstehen einer ungemein grossen Menge landwirthschaftlicher Vereine und durch landwirthschaftliche Schriften die wissenschaftliche Bearbeitung der Landwirthschaft gefördert worden ist, weiss Jeder, der an diesem wichtigsten aller Gewerbe der menschlichen

Gesellschaft einiges Interesse nimmt. Wir halten daher die streng wissenschaftlichere Bearbeitung, welche Schübler's Grundsätzen der Meteorologie in dem vorliegenden Buche durch Doctor G. A. Jahn in Leipzig zu Theil geworden ist, in jeder Beziehung für sehr zeitgemäss, und sind der Meinung, dass der Bearbeiter das Werk dem gegenwärtigen Zustande der Meteorologie und den Bedürfnissen wissenschaftlich gebildeter Landwirthe, für welche das Buch ursprünglich bestimmt war, nach dem heutigen Zustande der Landwirthschaft mit einem sehr richtigen Takte angepasst, und auch den ursprünglich durchaus praktischen Charakter desselben in dieser neuen Bearbeitung nirgends verloren hat, indem er z. B., um nur eins hervorzuheben, auch eine reiche Sammlung sogenannter Wetterregeln und Wetterzeichen beigebracht hat, wozu ihm die ebenfalls recht sehr zu empfehlende Leichtfassliche Darstellung der Meteorologie von Kunzek, Wien. 1847., (Literar. Ber. Nr. XL. S. 582) namentlich in Bezug auf die optischen Lufterscheinungen noch einige gute Beiträge hätten liefern können. Wir wünschen dem nützlichen Buche des Herrn Jahn seines sehr lehrreichen Inhalts und seiner leicht verständlichen Darstellung wegen eine recht weite Verbreitung unter allen denen, welche sich für die Erscheinungen im Luftkreise entweder aus Neigung oder aus Beruf interessiren. Die Ausstattung, auch der Kupfertafeln, ist in jeder Beziehung vorzüglich.

Magnetische und geographische Ortsbestimmungen im österreichischen Kaiserstaate, ausgeführt von Carl Kreil, Director der k. k. Sternwarte zu Prag, u. s. w. und Carl Fritsch, k. k. Conceptspracticanten u. s. w. Erster Jahrgang. 1846. Oesterreich ob der Enns, Tyrol und Vorarlberg, Lombardei. Prag 1848. 4. 2 Thlr. 20. Sgr.

Mit der liberalsten Unterstützung von Seiten seiner Regierung ist Herr Kreil beschäftigt, ein magnetisches und zugleich geographisches Netz über den ganzen österreichischen Kaiserstaat zu legen, wobei derselbe in vier Districte getheilt worden ist, nämlich:

1. Der westliche Alpen-District, der die Provinzen Oesterreich ob der Enns, Salzburg, Tyrol, Vorarlberg und die Lombardei begreift.

2. Der östliche Alpendistrict mit den Provinzen Oesterreich unter der Enns, Steyermark, Illyrien, das venetianische Königreich und Dalmatien.

3. Der Donaudistrict, nämlich das mittlere und südliche Ungarn, Slavonien, Kroatien und die Militärgränze.

4. Der Karpathendistrict, nämlich das südliche Ungarn, Gallizien und Siebenbürgen.

Mit dem ersten Districte ist Herr Kreil für's Erste fertig, und theilt die Resultate seiner an 43 Punkten gemachten magnetischen und geographischen Bestimmungen in diesem wichtigen

Werke mit. Sehr zu wünschen ist, dass die neueren politischen Ereignisse der Fortsetzung des begonnenen wichtigen Unternehmens und der weiteren Mittheilung der gewonnenen Ergebnisse nicht hindernd in den Weg treten.

Einleitung in die Krystallographie und in die krystallographische Kenntniss der wichtigeren Substanzen. Von Dr. Hermann Kopp, Prof. der Physik und Chemie zu Giessen. Mit einem Atlas von 21 Kupfertafeln und 7 lithographirten Tafeln, Netze zu Krystallmodellen enthaltend. Braunschweig. 1849. 8. 3 Thlr. 20 Sgr.

Der Herr Vf. dieses auch namentlich rücksichtlich der Figurentafeln trefflich ausgestatteten Werks hat in demselben Berechnungen durch die sphärische Trigonometrie oder analytische Geometrie gänzlich vermieden, und sich bloss geometrischer Constructionen oder graphischer Methoden bedient, was wir ganz zweckmässig finden, namentlich für solche, welche weiter gehende mathematische Kenntnisse nicht besitzen. Jedoch können wir gerade in dieser Beziehung nicht den Wunsch unterdrücken, dass es einmal einem mit den Methoden der descriptiven Geometrie und der Perspective vollständig vertrauten Mathematiker gefallen möchte, eine auf die Methoden der in Rede stehenden Wissenschaften gegründete vollständige Anweisung zur Zeichnung der Krystalle sowohl im Grundriss aus gemessenen Winkeln und Kanten, als auch zur perspectivischen Darstellung derselben zu bearbeiten, die wir sehr gern in dem Archive abgedruckt zu sehen wünschen würden. Herrn Kopp's übrigens recht sehr zu empfehlendes Buch leistet in dieser Beziehung Einiges, aber nach unserer Meinung vom mathematischen Standpunkte aus nicht Hinreichendes, wenn auch für die Leser, für welche das Buch vorzugsweise bestimmt zu sein scheint, genug. Wir wiederholen aber, dass wir das Buch für den Kreis von Lesern, den es sich selbst ausgewählt zu haben scheint, sehr geeignet und empfehlenswerth finden.

(Der Herausgeber des Archivs möchte sich bei dieser Gelegenheit erlauben, eine von ihm früher in seinen Beiträgen zur reinen und angewandten Mathematik. Thl. I. Brandenburg. 1838. S. 149. Nr. VIII. veröffentlichte Abhandlung: Zur Krystallographie und analytischen Geometrie. Erster Beitrag, in Erinnerung zu bringen, da dieselbe nicht sehr bekannt geworden zu sein scheint, die darin entwickelten Formeln aber eine sehr allgemeine und ausgedehnte Anwendung bei krystallographischen Bestimmungen wohl gestatten möchten. Eine recht deutliche und vollständige Anweisung zur graphischen Darstellung der Krystalle sowohl im Grundriss als auch perspectivisch mittelst der Methoden der descriptiven Geometrie und Perspective hält aber auch er für sehr wünschenswerth und wird Arbeiten dieser Art gern in's Archiv aufnehmen. — G.)

Mémoires de Physique mécanique, par Guillaume Wertheim. Paris. 1848. 8. 3 Thlr.

Inhalt: Mémoire sur l'élasticité et sur la cohésion des métaux. — Mémoire sur l'élasticité et sur la cohésion des alliages. —

Mémoire sur l'influence du courant galvanique et de l'électromagnétisme sur l'élasticité des metaux. — Mémoire sur les sons produits par le courant électrique. — Note sur l'elasticité et sur la cohésion des différentes espèces de verre; par M. M. E. Chevandrier et G. Wertheim. — Mémoire sur l'équilibre des corps solides homogènes. — Mémoire sur la vitesse du son dans les liquides. — Mémoire sur les propriétés mécaniques du bois; par M. M. E. Chevandrier et G. Wertheim. — Mémoire sur l'élasticité et sur la cohésion des principaux tissus du corps humain.

Vermischte Schriften.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Tome XV. IIme Partie 1848. Tome XVI. Ire Partie, 1849. (Vergl. Literar. Ber. Nr. XLVII. S. 660).

Tome XV. IIme Partie. p. 16. Des proportions du corps humain, par A. Quetelet. Deuxième article (Voir le 1er articel T. XV. Ire partie. p. 580): Proportions de l'homme chez les Égyptiens. Proportions chez les Romains. Proportions des Indous. — p. 27. De l'ébullition des liquides et de leur adhérence aux vases qui les contiennent, comme cause de certains phénomènes, par M. Louyet. — p. 40. Sixième et septième mémoire sur l'induction; par M. Élie Wartmann. — p. 118. Sur une anomalie apparente dans les réactions électriques, par M. J. G. Crahay. — p. 282. Sur une méthode donnée dans les Mémoires de l'Académie Royale de Belgique, pour déterminer la collimation d'une lunette méridienne; par Ed. Mailly. — p. 294. Procédé d'extraction du nickel et du cobalt, suivi dans une fabrique de Birmingham, par M. Louyet. — p. 365. Table des forces élastiques de la vapeur d'eau, pour les températures croissant par centième de degré; depuis 93° jusqu'à 101° de l'échelle centésimale; par M. J. G. Crahay. — p. 378. Note sur un phénomène d'acoustique, par M. Ch. Montigny. — p. 381. Le transport mécanique de la matière pondérable est-il toujours dirigé du pôle positif au pôle négatif? Par M. Maas. — p. 471. Sur les corrections de la lunette méridienne, notes par M. M. le capitaine Liagre et Ed. Mailly. — p. 476. Sur une méthode propre à faire trouver la collimation d'une lunette méridienne au moyen des observations astronomiques; par M. le capitaine Liagre. — p. 501. Sur la réduction d'une intégrale multiple; par M. Schaar (Die bekannten Integrale von Dirichlet) — p. 506. Sur le développement de la fonction $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$, suivant les puissances de z; par M. Schaar. — p. 508. Résolution d'un problème du calcul des probabilités; par M. Meyer, (Une urne renferme m boules composées de α blanches, β noires, etc. λ bleues, de ν couleurs diverses; quelle et la probabilité pour qu'en tirant k boules au hasard, on puisse arranger celles-ci en a, b, c, etc

k, l groupes respectivement de n, p, q,...t, u boules, sous la condition: 1° que les boules d'un même groupe soient d'une même couleur, différente néanmoins d'un groupe à l'autre; 2° que les couleurs des boules de chacune des complexions a, b,...l diffèrent de celles des complexions qui les précèdent. On donne en outre, comme condition de possibilité, les rélations

$$m=\alpha+\beta+...+\lambda,$$
$$\nu=a+b+c+...+k+l,$$
$$k=an+bp+cq+...+kt+lu.$$

Tome XVI. Ire Partie. p. 8. Sur les variations brusques de température et de pression atmosphérique, observés du 10 au 13 Janvier (1849), à Louvain par M. Crahay, et à Bruxelles par M. Quetelet. — p. 9. Recherches nouvelles sur le veritable poids atomique du carbone; par M. J. S. Stas. — p. 167. Examen critique du système de la fluidité électrique, par M. Maas. — p. 313. Sur l'application du télégraphe électrique à l'astronomie, par M. Bache, directeur de la triangulation des côtes des Etats-Unis. — p. 317. Sur les variations de température et de pression atmosphérique et sur quelques phénomènes météorologiques observés pendant les mois de janvier et de février 1848; par A. Quetelet. — p. 329. Observations géodésiques et magnétiques faites dans les États autrichiens, pendant les années 1847 et 1848; par M. Kreil, astronome de Prag. — p. 334. Note sur quelques intégrales definies, par M. Meyer. Herr Meyer hat in diesem Aufsatze die folgenden Formeln bewiesen, in denen $[q,p]$ die Anzahl der Combinationen für q Elemente der $p$ten Klasse bezeichnet:

$$a(a^2+m^2)^{n-1}=a^{2n-1}\cos\left(2n.\operatorname{arctang}\frac{m}{a}\right)$$
$$+[2n-1.1]a^{2n-2}m\sin\left(2n.\operatorname{arctang}\frac{m}{a}\right)$$
$$-[2n-1.2]a^{2n-3}m^2\cos\left(2n.\operatorname{arctang}\frac{m}{a}\right)$$
$$-\quad \text{u. s. w.}$$
$$+(-1)^{n-1}m^{2n-1}\sin\left(2n.\operatorname{arctang}\frac{m}{a}\right),$$

$$a(a^2+m^2)^{\frac{1}{2}(2n-1)}=a^{2n}\cos\left((2n+1)\operatorname{arctang}\frac{m}{a}\right)$$
$$+[2n,1]a^{2n-1}m\sin\left((2n+1)\operatorname{arctang}\frac{m}{a}\right)$$
$$-[2n.2]a^{2n-2}m^2\cos\left((2n+1)\operatorname{arctang}\frac{m}{a}\right)$$
$$-\quad \text{u. s. w.}$$
$$+(-1)^n m^{2n}\cos\left((2n+1)\operatorname{arctang}\frac{m}{a}\right),$$

$$
\begin{aligned}
n(a^2+m^2)^{n-1} = {} & a^{2n-1}\sin\left(2n\,.\,\mathrm{arctang}\,\frac{m}{a}\right) \\
& -[2n-1.1]\,a^{2n-2}m\cos\left(2n\,.\,\mathrm{arctang}\,\frac{m}{a}\right) \\
& -[2n-1.2]\,a^{2n-3}m^2\sin\left(2n\,.\,\mathrm{arctang}\,\frac{m}{a}\right) \\
& + \quad \text{u. s. w.} \\
& +(-1)^n m^{2n-1}\cos\left(2n\,.\,\mathrm{arctang}\,\frac{m}{a}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m(a^2+m^2)^{\frac{1}{2}(2n-1)} = {} & a^{2n}\sin\left((2n+1)\,\mathrm{arctang}\,\frac{m}{a}\right) \\
& -[2n.1]\,a^{2n-1}m\cos\left((2n+1)\,\mathrm{arctang}\,\frac{m}{a}\right) \\
& -[2n.2]\,a^{2n-2}m^2\sin\left((2n+1)\,\mathrm{arctang}\,\frac{m}{a}\right) \\
& + \quad \text{u. s. w.} \\
& +(-1)^n m^{2n}\sin\left((2n+1)\,\mathrm{arctang}\,\frac{m}{a}\right).
\end{aligned}
$$

— p. 338. Sur les fractions continues périodiques, par M. Lefrançois. — p. 424. Note sur une nouvelle application curieuse de la persistance des impressions de la rétine, par M. J. Plateau. — p. 428. Note sur la préparation de l'oxyde de cobalt pur et sur l'aluminate de cobalt, par M. P. Louyet. — p. 580. Sur les propriétes dont jouissent les produits infinis qui expriment les racines des nombres entiers, par M. Schaar. — p. 588. Deuxième note sur de nouvelles applications curieuses de la persistance des impressions de la rétine, p. M. Plateau. — p. 613. Expériences comparatives sur la force et la constance du courant produit par différentes piles voltaiques, connues sous le nom de Batteries a courant constant, par P. Louyet. —

Ausser diesen grösseren Aufsätzen enthalten auch diese beiden Bände wieder viele interessante kleinere astronomische und meterorologische Notizen, hauptsächlich von Herrn Quetelet.

Preisaufgabe der Königl. Soc. der Wissenschaften zu Kopenhagen. Eine vollständigere Untersuchung als bis jetzt vom mathematischen Standpunkte aus geschehen ist, der Lehre von dem Widerstande einer Flüssigkeit gegen einen in derselben sich bewegenden festen Körper. Termin Ende August 1851.

LII.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Cours d'Algèbre supérieure, professé à la Faculté des sciences de Paris; par M. J.—A. Serret. Paris. 8° 1849, avec Planche. 7. Fr. 50 C.

Dieses uns leider noch nicht zu Gesicht gekommene Buch wird aber in französischen Zeitschriften sehr gerühmt, und verdient daher den Lesern des Archivs empfohlen zu werden. Die meisten Erscheinungen auf dem Felde der mathematischen Literatur in Frankreich beschränken sich gegenwärtig auf neue Ausgaben älterer Werke von Monge, Lagrange, Laplace, Lacroix, u. s. w.; desto erfreulicher ist es, hier wieder einmal einem grösseren, der allgemeinen Beachtung sehr werthen Originalwerke von einem auch durch andere eigenthümliche Arbeiten schon längst rühmlich bekannten Verfasser zu begegnen.

Aufsuchung der reellen und imaginären Wurzeln einer Zahlengleichung höheren Grades von Simon Spitzer. Mit einem Vorworte von Dr. L. C. Schulz v. Strassnitzki. Aus den naturwissenschaftlichen Abhandlungen, gesammelt und durch Subscription herausgegeben von W. Haidinger. III. Band. 2. Abth. S. 109. Wien 1849. 4°. 1. Thlr.

Herr Prof. Schulz von Strassnitzki hat in der im Literarischen Ber. Nr. VI. S. 90. angezeigten ausgezeichneten Schrift Horner's Methode zur Auflösung der numerischen Gleichungen sehr deutlich erläutert, damals aber sich auf die reellen Wurzeln der Gleichungen beschränkt. In der vorliegenden Abhandlung, welche eigentlich aus zwei Theilen besteht, wird dagegen die genannte Methode auch auf die imaginären Wurzeln der Gleichungen erweitert. In der ersten Abtheilung giebt Herr Prof. Schulz von Strassnitzki ein Mittel an, um den Ort der imaginären Wurzeln zu finden, oder dieselben zu trennen, weshalb auch der erste Abschnitt Trennung der imaginären Wurzeln überschrieben ist. Die in der zweiten Abtheilung gelehrte Aufsuchung der imaginären Wurzeln gehört dagegen ganz Herrn Spitzer an, welcher sich bei der Division der imaginären Coefficienten durch einen einfachen Kunstgriff half. Wir empfehlen diese Schrift, ebenso wie die frühere des Herrn Professor Schulz von Strassnitzki der Aufmerksamkeit der Kenner recht sehr, und sind der Meinung, dass wir jetzt in den beiden Schriften der Herren Schulz von Strassnitzki und Spitzer zusammen eine sehr vollständige und genügende Anleitung zur Auflösung der numerischen Gleichungen, sowohl rücksichtlich der reellen, als auch rücksichtlich der imaginären Wurzeln besitzen, die zugleich einen sehr grossen Reichthum vollständig ausgerechneter Beispiele enthält, welche natürlich bei dem vorliegenden Gegenstande von besonderer Wichtigkeit und um so verdienstlicher sind, weil die genaue und sorgfältige Ausrechnung derselben nothwendig einen grossen Zeitaufwand in Anspruch nehmen musste.

Sammlung mathematischer Tafeln. Als neue völlig umgearbeitete Auflage von Georgs Freiherrn von Vega grösseren logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, herausgegeben von Dr. J. A. Hülsse. Stereotyp-Ausgabe. Zweiter Abdruck. Vermehrt mit den Zech'schen Tafeln für Addition und Subtraction der Logarithmen. Leipzig. 1849. 8. 3 Thlr. 15 Sgr.

Der erste Adruck dieses sowohl seinem Inhalte als seiner äusseren, dem deutschen Buchhandel und der deutschen Typographie wahrhaft Ehre machenden Ausstattung nach ausgezeichneten Werks ist im Literar. Ber. Nr. I. S. 4 angezeigt worden. Die Einrichtung der Tafeln I—XI ist ganz unverändert geblieben und aus unserer früheren Anzeige hinreichend bekannt, wobei wir jedoch auch jetzt nicht den Wunsch unterdrücken können, dass es dem Herausgeber gefallen haben möchte, in der trigonometrischen Tafel wie bei Callet und in mehreren englischen Tafeln die Winkel von 10 zu 10 Secunden fortschreiten zu lassen, was bei den meisten Rechnungen doch eine sehr grosse Erleichterung gewährt, und die Sicherheit der Rechnung wesentlich fördert, wenn auch auf der andern Seite nicht zu leugnen ist, dass man namentlich bei manchen astronomischen Rechnungen in neuerer Zeit den Gebrauch kleinerer, selbst nur bis auf eine geringere Anzahl von Decimalstellen berechneter Tafeln mit Recht empfohlen hat; solche kleinere Tafeln besitzen wir aber schon eine grosse Anzahl, indem im Gegentheil eine grössere von 10 zu 10 Secunden fortschreitende Tafel, deren die französische und englische Literatur mehrere sehr treffliche besitzt, in einer neuen, auch äusserlich schön ausgestatteten Ausgabe uns wohl noch ganz fehlt, weshalb Herr Hülsse sich gewiss ein besonderes Verdienst erworben haben würde, wenn er seiner Tafel die erwähnte Ausdehnung gegeben hätte oder späterhin noch zu geben sich gefallen liesse. Dann würde freilich das Buch bis auf zwei Bände angewachsen sein, was wir aber für ganz zweckmässig gehalten haben würden, wenn die logarithmischen und trigonometrischen Tafeln in den ersten, alle übrigen Tafeln in den zweiten Band gebracht worden wären, welche beide Bände dann auch hätten einzeln verkäuflich sein müssen, damit ein Jeder sich nach seinen Bedürfnissen bloss in den Besitz des einen oder des andern Bandes hätte setzen können, indem jedenfalls die logarithmisch-trigonometrische Tafel auch bei Weitem am meisten gebraucht wird, die übrigen Tafeln dagegen nur in einzelnen Fällen Anwendung finden, und bloss zum Nachschlagen mehr vereinzelter Resultate dienen. Die Tafel XII., welche die sogenannten Gaussischen oder Additions- und Subtractions-Logarithmen enthält, hat in dem neuen Abdruck eine ganz veränderte, und in der That sehr vervollkommnete und erweiterte Einrichtung erhalten. Dieselbe ist von Herrn Zech in Tübingen berechnet, und sehr zweckmässig ist es, dass diese Tafel auch einzeln unter dem besonderen Titel:

Tafeln der Additions- und Subtractions Logarithmen für sieben Stellen berechnet von J. Zech. Aus der Vega-Hülsse'schen Sammlung besonders abgedruckt. Leipzig. 1849. 8. 1. Thlr. 15. Sgr.

abgedruckt worden und abgesondert von den übrigen Tafeln verkäuflich ist. Die Einrichtung dieser Tafel scheint uns zweckmässig zu sein, und sie hat jedenfalls Vorzüge vor den bisherigen Tafeln dieser Art, namentlich auch vor der Matthiesen'chen Tafel, welche bisher die vollständigste war.

Wir wünschen dem verdienstlichen Werke recht weite Verbreitung und eifrigen Gebrauch.

Geometrie.

Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche auf öffentlichen Schulen und für Individuen, die sich dem Forstfache, der Mess- und Baukunst widmen, so wie zum Selbstunterricht für jeden Liebhaber dieser Wissenschaft. Enthaltend die theoretische Geometrie, die geradlinige Trigonometrie und Polygonometrie, nebst den Anfangsgründen der Differenzial- und Integral-Rechnung. Verfasst von Georg Winkler, Edlen v. Brückenbrand. Vierte Auflage. Wien. 1849. 8. 2 Thlr.

Dieses ganz elementare, überall besonders für den praktischen Gebrauch berechnete Lehrbuch der Geometrie u. s. w., welches auch Einiges aus der Differenzial- und Integralrechnung, besonders mit Rücksicht auf die allereinfachsten Anwendungen dieser Wissenschaften enthält, ist aus seinen früheren Auflagen hinreichend bekannt, kann aber Praktikern, namentlich Forstleuten, die nur das für ihren praktischen Beruf Allernothwendigste kennen lernen wollen, ohne in irgend einer Beziehung eine höhere mathematische Ausbildung zu erstreben, seiner grossen Deutlichkeit und einfachen Darstellung wegen allerdings wohl empfohlen werden.

Elemente der analytischen Geometrie im Raume am schiefwinkligen Coordinatensysteme von Dr. G. S. Ohm, Rector der polytechnischen Schule in Nürnberg, Professor der Physik und Mathematik an der gleichen Anstalt. Nürnberg. 1849. 4°. 4. Thlr.

Das vorliegende Werk bildet den ersten Band eines aus mehreren Bänden bestehenden Werks, welches der Herr Vf. unter folgendem Titel herauszugeben beabsichtigt:

Beiträge zur Molecular-Physik von Dr G. S. Ohm. Nürnberg. 1849. 4°.

Der bis jetzt erschienene erste Band ist aber durchaus rein mathematischen Inhalts und bildet ein für sich bestehendes Ganzes. Um es kurz zu sagen, so enthält dieser Band ein sehr vollständiges System der analytischen Geometrie für das allgemeine schiefwinklige Coordinatensystem. Wie wichtig die Ausführung der analytischen Geometrie in dieser vollständigen Allgemeinheit für die allgemeine Molecular-Physik ist, sieht Jeder sogleich ein, wer mit diesen Gegenständen nur einigermassen bekannt ist, und Niemand mehr kann rücksichtlich dieser grossen Wichtigkeit mit dem Herrn Vf. ganz einerlei Ansicht sein, wie der Herausgeber des Archivs, der selbst früher schon einige Versuche von ganz ähnlicher Tendenz gemacht hat, wie z. B. in der Abhandlung: Zur Krystallographie und analytischen Geometrie. Erster Beitrag (Beiträge zur reinen und angewandten Mathematik. Thl. I. Brandenburg. 1838. 4°. S. 149. Nr. VIII.) und in seinen Elementen der analytischen Geometrie. Thl. I. Leipzig, wo die Theorie der geraden Linie in der Ebene und im Raume und die Theorie der Ebene sich auch ganz allgemein für jedes beliebige schiefwinklige Coordinatensystem durchgeführt findet. Er hat sich daher ungemein gefreu't über die in dem vorliegenden grossen, wichtigen und schönen Werke gewonnene grosse Menge merkwürdiger Resultate und die in demselben durchgehends sich kund gebende grosse Eleganz der analytischen Entwickelung und Darstellung. Dieses Werk ist daher die erste vollständige analytische Geometrie in grösster Allgemeinheit, d. h. für jedes beliebige schiefwinklige Coordinatensystem, und jedenfalls eine der bedeutendsten neuern Erscheinungen auf dem Gebiete der mathematischen Literatur, welche von allen Mathematikern und Naturforschern sorgfältigst beachtet zu werden sehr verdient, und auch jüngeren Mathematikern, die bereits einen Cursus über analytische Geometrie gehört haben, Behufs ihrer weiteren Ausbildung, sehr zum sorgfältigen Studium empfohlen werden muss. Die Ueberschriften der einzelnen Abschnitte sind folgende: I. Darstellung der Punkte und Richtungen im beliebigen Coordinatensysteme. (Projectionssysteme, Coordinatensysteme. Doppelsysteme. Besondere Lagen der Richtungen oder Punkte. Besondere Coordinatensysteme. Projectionen durch Coordinaten. Verstellung der Coordinatensysteme. Centralcoordinaten. Reduction der Projectionszahlen.) II. Von der Ebene und Geraden im beliebigen Coordinatensysteme. III. Die Curve und Fläche im beliebigen Coordinatensysteme (Ebene Curven. Krumme Flächen. Doppelt gekrümmte Curven.). IV. Von den verschiedenen Gestalten der Gleichungen, in denen die krummen Linien oder Flächen der zweiten Ordnung an verschiedenen Coordinatensystemen sich darstellen lassen. (Ebene Curven der zweiten Ordnung. Krumme Flächen der zweiten Ordnung. Einfachste Gleichungen der Flächen zweiter Ordnung.)

Wir wünschen sehr, dass dem von uns hochgeachteten Herrn Vf. recht bald die nöthige Musse zur Herausgabe des zweiten Bandes seines ausgezeichneten und an neuen Resultaten reichen Werkes zu Theil werden möge, welcher die analytische Mechanik einer gleich allgemeinen Behandlung wie im vorliegenden Bande die analytische Geometrie unterwerfen wird. Der dritte Band wird den eigentlichen Untersuchungen über verschiedene Gegenstände der Molecular-Physik gewidmet seid.

Es gewährt eine grosse Freude, namentlich in jetziger Zeit, ein mit so grossem Fleisse und so grosser Kraft und Mühe ausgearbeitetes Werk wie das hier besprochene vor sich liegen zu sehen, zu dessen Vollendung wenigstens in einem, und zwar sehr wichtigen Theile, wir dem Herrn Vf. von Herzen Glück wünschen.

G.

Quelques Théorèmes généraux d'un grand usage dans les hautes Mathématiques; par M. Breton (de Champ). Paris 1849. 4°. (Extrait du Journal de Mathématiques. T. XIII. 1848.)

Mehrere Mathematiker haben sich in neuerer Zeit mit den Theoremen von Stewart beschäftigt, die sich, 64 an der Zahl, in der seltenen Schrift: Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics by Mattew Stewart*). Edinburgh. 1746. beschäftigt, da Stewart nur fünf dieser Theoreme bewiesen hat, und sich unter denselben auch einige falsche oder einer Einschränkung bedürfende befinden. Diesen Theoremen von Stewart ist auch die vorliegende, aus Liouville's Journal de Mathématiques. T. XIII. besonders abgedruckte Abhandlung gewidmet, und es ist zu wünschen, dass auch deutsche Mathematiker diesen Sätzen von Stewart ihre Aufmerksamkeit schenken, und dieselben einer gründlichen Untersuchung unterwerfen möchten. Das Archiv würde dergleichen Untersuchungen, welche die mehr erwähnten Sätze gewiss sehr verdienen, gern aufnehmen. Die Abhandlung des Herrn Breton de Champ hat zunächst nur den Zweck, die Falschheit der drei Fundamentalsätze Stewarts nachzuweisen, und zu zeigen, dass dieselben nur in den in ihren Corollaren ausgesprochenen besonderen Fällen richtig sind. Uns scheint eine weitere Untersuchung auch nach der vorliegenden Arbeit noch ganz zeitgemäss zu sein.

---

*) Stewart war 1717 zu Rothsay in Schottland geboren, und starb zu Edinburg den 23. Januar 1785.

Trigonometrie.

Elements de Trigonométrie rectiligne et sphérique par M. Lisle et M. Gerono. Seconde édition. Paris 1848. 3 Fr. 50

Praktische Geometrie.

Lehrbuch der praktischen Geometrie. Verf. von Dr. Ignaz Lemoch, Prof. zu Lemberg. Erster Ba Enthaltend: Messung der Linien, Theorie, Beschr bung, Rectification und Gebrauch der Winkelinst mente. Mit 5 Kupfertafeln. — Zweiter Band. Ent tend: Die Landesvermessung. Theorie des Höh messens. Nivelliren. Mit 5 Kupfertafeln. Wien. 18 — 2 Thlr. 20 Sgr.

Ein recht deutlich verfasstes Lehrbuch, in dem sich na lich auch die Beschreibung mancher weniger bekannter klei Instrumente befindet, von denen man öfters zweckmässige An dungen machen können wird.

Mechanik.

Lehrbuch der Mechanik. Von Dr. J. P. Broch. Er Abtheilung. Mechanik der festen Körper. Berlin u Christiania. 1849. 8. 1 Thlr. 20 Sgr.

Dieses neue Lehrbuch der analytischen Mechanik enth selben bis jetzt vorliegenden ersten Abtheilung auf einem ver nissmässig nur kleinen Raume eine sich durch Eigenthüml keit auszeichnende Darstellung der Hauptlehren der Mech fester Körper, und verdient zur Beachtung recht sehr empf zu werden, da es auch viele mit besonderer analytischer Ele durchgeführte Beispiele für die allgemeinen Lehren und An dungen derselben, namentlich bei'm Schwerpunkte, den Trägh momenten, u. s. w. enthält. Leider müssen wir uns ausser die allgemeinen Empfehlung des verdienstlichen Werkes, bei de noch besonders hervorzuheben ist, dass es von einem jünge sehr ausgezeichneten norwegischen Mathematiker in sehr fliess der deutscher Sprache verfasst worden ist, und das um so v dienstlicher ist, weil die deutsche mathematische Literatur sehr wenige Werke über analytische Mechanik besitzt, begnüg den Inhalt desselben im Nachstehenden vollständig anzugeb

Erster Abschnitt. Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung. Cap. I. Wirkungsweise und Maass der Kräfte. Cap. II. Zusammensetzung und Zerlegung der auf einen Punkt wirkenden Kräfte. Cap. III. Statik. Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems mit einander verbundener Punkte, deren Verbindungen durch von der Zeit unabhängige Gleichungen zwischen ihren Coordinaten ausgedrückt werden können. Cap. IV. Anwendungen. *a)* Gleichgewicht eines Punktes. *b)* Gleichgewicht eines festen Körpers. *c)* Gleichgewicht biegsamer Systeme. (Hier auch von den Kettenbrücken). Cap. V. Reduction der Kräfte. Cap. VI. Centralpunkt, Centrallinie und Centralebene der Kräfte. Cap. VII. Anwendung der Theorie des Mittelpunktes paralleler Kräfte auf schwere Körper. Cap. VIII. Anwendung der Theorie der Centrallinie auf schwere magnetische Körper. Cap. IX. Dynamik. Gesetze der Bewegung eines Systems mit einander verbundener Punkte, deren Verbindungen durch von der Zeit unabhängige Gleichungen ausgedrückt werden können. Cap. X. Gesetze der Bewegung eines festen Körpers. *a)* Bewegung des Schwerpunkts eines freien festen Körpers oder eines materiellen Punktes. *b)* Trägheitsmomente und Hauptaxen der Körper. *c)* Gesetze der relativen Bewegung eines festen Körpers in Bezug auf seinen Schwerpunkt. — Man sieht hieraus, wie viel Lehrreiches in diesem besonders auch, wie schon erinnert worden, durch Originalität der Darstellung sich auszeichnenden Buche, dessen Fortsetzung wir mit Verlangen entgegen sehen, enthalten ist. Besonders auch für die Anwendung in der mathematischen Physik ist dieses Buch von Wichtigkeit; weniger scheint auf die Anwendung in der physischen Astronomie oder Mechanik des Himmels bei Abfassung desselben Rücksicht genommen zu sein.

Praktische Mchanik.

Theorie der Dampfmaschinen vom Grafen F. M. G. von Pambour. Aus dem Französischen übersetzt und mit Anmerkungen und einem Anhange begleitet von Dr. A. L. Crelle. Berlin. 1849. 4. 6 Thlr.

Durch Uebersetzung dieses wichtigen Werkes, welches im Original 50 Francs, also in Deutschland 16 bis 17 Thaler kostet, hat sich der Herr Uebersetzer jedenfalls ein grosses Verdienst, namentlich um die Besitzer seines Baujournals, in dem die hier als besonderes Werk vorliegende Uebersetzung zuerst erschienen ist, erworben. Aber auch wer das Baujournal nicht besitzt, erhält die Uebersetzung nun zu dem höchst mässigen Preise von 6 Thlr. Die Berichtigungen, Anmerkungen und Zusätze, welche der Uebersetzung der Herr Uebersetzer beigefügt hat, verleihen derselben noch einen besondern Vorzug vor dem Originale, und empfehlen wir daher diese Uebersetzung allen denen, welche sich für das Dampfmaschinenwesen interessiren, angelegentlichst.

Rapport et Mémoire sur le nouveau Système d'écluse à flotteur de M. D. Girard; par M. Poncelet. Paris. 1845. 4°. 6 Fr.

Astronomie.

Das so eben erschienene

Ergänzungsheft zu den astronomischen Nachrichten. Vom Herausgeber der astronomischen Nachrichten. Altona. 1849. 4. 3 Thlr 10 Sgr.

enthält unter vielen anderen werthvollen Aufsätzen einen Aufsatz, auf den wir der grossen Wichtigkeit des Gegenstandes und des allgemeinen Interesses wegen, welches derselbe nothwendig in Anspruch nehmen muss, die Leser des Archivs besonders aufmerksam machen müssen. Dies ist der Aufsatz:

Beitrag zur Geschichte der Neptuns-Entdeckung von *Bernhard von Lindenau*. S. 1—31.

In diesem Aufsatze wird mit ungemeiner Klarheit und der grössten Sachkenntniss die Geschichte der Neptuns-Entdeckung von ihren ersten Anfängen an erzählt, und mit grosser Deutlichkeit der Weg vollständig nachgewiesen, welcher zu derselben führte und consequenter Weise nothwendig führen musste, insbesondere auch u. A. erwähnt, dass Bessel während seiner Anwesenheit in England, bei einer Unterredung mit Herschel (12. Juli. 1842.) auf den Grund eigner Untersuchungen versicherte, dass die Gesammtheit der Uranusbeobachtungen durch die Störungen der ältern Planeten allein nicht dargestellt werden könnten und Herschel's vermuthete Einwirkung eines annoch unbekannten Planeten bejahend mit dem Hinzufügen erwiderte: „dass er diese Untersuchung noch nicht vorgenommen habe, allein vorzunehmen gedenke" auch unterm 12. November 1842. an Herschel schrieb: „en souvenir de notre conversation de Collingwood je vous annonce, que je n'oublie pas Uranus."*) Ausser der allgemeinen Erzählung der Entdeckung des Neptun sind aber auch in diesem höchst lehrreichen Aufsatze die Ansprüche, welche Frankreich (Leverrier**)), England (Adams) und Deutschland (Galle) an dieser Entdeckung zu machen haben, mit der grössten Umsicht und tiefsten Sachkenntniss gewürdigt, so dass wir den hochverehrten Vf. dieses Aufsatzes nur bewundern können, wie es ihm möglich gewesen ist, in seinem hohen Alter, und nachdem er eine lange Reihe von Jahren durch die wichtigsten

*) M. vergl. Archiv. Thl. XIII. Heft 2. S. 146.

**) Dass in mathematischer Rücksicht hauptsächlich die Umkehrung des Störungsproblems, die wohl Leverrier allein gebühren dürfte, oder wenigstens von ihm zuerst versucht worden ist, von Wichtigkeit ist, wird mit Recht besonders hervorgehoben.

Staatsämter dem Studium der Astronomie wohl grösstentheils entfremdet gewesen ist, und zu demselben nur erst seit wenigen Jahren wieder die nöthige Ruhe gefunden hat, alle neueren Arbeiten auf dem Felde dieser Wissenschaft in einer solchen Ausdehnung und mit einer so tiefen Erfassung zu verfolgen. Wir machen deshalb nochmals die Leser des Archivs, die sich für die genannte wichtige Entdeckung interessiren — und wer sollte dies nicht! — auf die vorliegende Abhandlung dringend aufmerksam; denn nirgends werden sie sich eine so gründliche Kenntniss und so richtige Einsicht in die Lage der Sache verschaffen können wie hier.

Physik.

Repertorium der Physik, Eine Zusammenstellung der neueren Fortschritte dieser Wissenschaft. Band VIII. Enthält: Galvanismus, von W. Beetz. — Akustik; von A. Seebeck. — Mit zwei Figurentafeln. Berlin. 1849. 8. 3 Thlr.

A Treatise on Heat. Part I. The Thermometer; Dilatation: Change of State; and Laws of Vapeurs. By the Rev. Robert V. Dixon, A. M., Fellow and Tutor of Trinity College, Dublin, and Erasmus Smith's Professor of Natural and Experimental Philosophy. (So eben erst erschienen. Price 12s. 6d.)

Études sur l'Aérostation, par M. Edmond Marey-Monge. Paris. 1847. 8º. 10 Fr.

Vermischte Schriften.

Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig liegen uns besonders abgedruckt vor:

A. Seebeck: Ueber die Querschwingungen gespannter und nicht gespannter elastischer Stäbe. Leipzig. 1849. 10 Sgr.

C. F. Naumann: Ueber die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis corneus. Leipzig. 1849. 10 Sgr.

P. A. Hansen: I. Allgemeine Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. II. Ueber die Entwickelung der Grösse

$$(1-2\alpha H+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

nach den Potenzen von α. Leipzig. 1849. 12 Sgr.

A. F. Möbius: Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. Leipzig. 1849. 24 Sgr.

Das erste Heft der Sitzungsberichte von 1849 enthält:

W. Weber: Bemerkungen zu Neumanns Theorie inducirter Ströme.

Lehmann: Ueber einige quantitative Verhältnisse, die den Verdauungsprocess betreffen.

Fechner: Ueber die mathematische Behandlung organischer Gestalten und Processe. (Ein sehr lehrreicher und lesenswerther Aufsatz, den wir solchen, welche in der angegebenen Richtung die Mathematik anwenden wollen, sehr zur Beachtung empfehlen. Der Herr Vf. redet, wie sich von einem solchen Manne erwarten liess, im Allgemeinen der Mathematik sehr das Wort. Auf S. 57. findet sich in einer Note die folgende interessante Bemerkung, die wir den Lesern des Archivs vollständig mittheilen:

„Da vielleicht Jemand Veranlassung nehmen könnte, die Eier ausführlicheren Untersuchungen in Beziehung auf ihre Gestalt zu unterwerfen, so theile ich die von Steiner aufgefundene Formel nach seinen mir mündlich gegebenen Notizen gelegentlich mit. Seien u und v die Radii vectores einer Ellipse, c eine constante Grösse, so ist die Gleichung der Ellipse bekanntlich $u+v=c$; die der Eicurve aber ist $u+mv=c$, wo m auch eine Constante ist. Die Eicurve unterscheidet sich also bloss darin von der Ellipse, dass statt der Summe der beiden Radii vectores die Summe des einen und eines bestimmten Verhältnisstheiles vom andern eine constante Grösse ist. Jenachdem m und c und der Abstand der Brennpunkte verschieden gewählt werden, entstehen verschiedene Eicurven, und nach diesen verschiedenen constanten Werthen würden sich dann möglicherweise die Vogeleier unter verschiedene Klassen stellen. Steiner sagte mir, dass er durch Tatonnement die Coincidenz eines Eies (wenn ich nicht irre, Truthahneies) mit einer unter diese Formel gehörigen Curve (wie ich mich zu erinnern glaube, für den Werth $m=2$) bewährt habe. Umfassendere und methodisch angestellte Versuche würden aber sehr erwünscht sein. Transformirt man die obige Gleichung für rechtwinklige Coordinaten, so stellt sich der vierte Grad der Gleichung leicht heraus."

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. Edited by W. Thomson, M. A. F. R. S. E. Vergl. Literar. Bericht. Nr. XLIX. S. 688.

No. XXI. On Attractions, and on Clairaut's Theorem. By G. G. Stokes. Continued. — Notes on Hydrodynamics. VI. — On Waves. By G. G. Stokes. — On the Problem to Determine in Magnitude, Position, and Figure, the Surface of the Second Order with passes trough Nine given Points. By Richard Townsend. — On the Triple Tangent Planes to a Surface of the Third Order. By the Rev. George Salmon. — On the Symbolical Value of the Integral $\int x^{-1}\partial x$. By the Rev. William Center. — Singular Application of Geometry of Three Dimensions to a Plane Problem. By G. W. Hearn. — Note on the Motion of Rotation of a Solid of Revolution. By Arthur Cayley. — On a Systeme of Equations connected with Malfatti's Problem, and on another Algebraical System. By Arthur Cayley. (Diese Abhandlung berücksichtigt Herrn C. Adams Schrift: Das Malfatti'sche Problem neu gelöst von C. Adams. Winterthur. 1846. 4. M. s. Literar. Ber. Nr. XXX. S. 451.) — On the Mathematical Theory of Electricity in Equilibrium. V. Effects of Electrical Influence on Internal Spherical, and on Plane, Conducting Surfaces. By William Thomson. — Mathematical Notes: On the different Published Demonstrations of Pascal's Hexagramme. By Thomas Weddle. — Comparison of Expressions for Circular and Elliptic Functions in Continued Fractions. By C. J. Malmsten. — Sur l'Intégration des Equations Différentielles Linéaires. Par C. J. Malmstén.

(No. XXII. will be published on the 1st of February, 1850.)

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Literar. Ber. Nr. XLIX. S. 687.).

Jahrgang 1849. Februar-Heft. S. 57. Hauer, Bericht über die von den Regierungen verschiedener Staaten unternommenen Arbeiten zur geologischen Durchforschung des Landes (England). — S. 98. Fortsetzung des vorhergehenden Berichts, Russland und Frankreich betreffend. Wenn auch weniger in den Kreis unserer Zeitschrift gehörend, führen wir die beiden vorhergehenden Berichte ihres allgemein interessanten Inhalts wegen hier doch an. — S. 155. Ettingshausen, Beitrag zum Beweise des Lehrsatzes vom Parallelogramme der Kräfte. — Wir halten diesen Beitrag zu den Beweisen des Satzes vom Parallelogramme der Kräfte für so bemerkenswerth, dass wir das Wesentliche daraus den Lesern des Archivs im Folgenden mittheilen wollen.

Professor v. Ettingshausen überreicht nachstehenden Beitrag zum Beweise des Lehrsatzes vom Parallelogramme der Kräfte:

Die Zusammenstellung der Materialien zu einem Lehrvortrage der analytischen Mechanik lenkte meine Aufmerksamkeit kürzlich wieder auf die Beweisführung für den Lehrsatz vom Parallelogramme der Kräfte. Offenbar verdienen strenge und directe Beweise vor solchen den Vorzug, worin willkührliche Voraussetzungen oder fremdartige Hilfsmittel angewendet werden. Darum halte ich es, wenigstens in einem streng wissenschaftlichen Lehrgebäude, nicht für angemessen, die Zusammensetzung der Kräfte auf die Zusammensetzung der Bewegungen zu gründen, denn dieser Vorgang nöthiget zu einer Annahme, deren man auf dem rein statischen Felde nicht bedarf. Eben so haben in meinen Augen die Beweise einen geringeren Werth, in welchen die Zusammensetzung der an einem gemeinschaftlichen Angriffspunkte angebrachten Kräfte aus ihrer Wirkungsweise an einem Hebel oder an einem Systeme unveränderlich mit einander verbundener Punkte, auf die man die ursprünglich gegebenen Kräfte versetzen kann, erschlossen wird, weil die Resultirende zweier auf einen Punct wirkender

Kräfte schon gegeben ist, wenn auch nur dieser einzige F existirt; daher die Vorstellung anderer mit ihm verknüpfter P durchaus nicht von der Natur der Sache geboten erscheint.

Wir besitzen mehrere, durch die scharfsinnigsten Wend sich auszeichnende Beweise für den Satz vom Kräftenpara gramm, gegen welche die so eben ausgesprochenen Vor nicht geltend gemacht werden können, welche Beweise dah genügend scharf betrachtet werden müssen. Meines Erac führen diejenigen am kürzesten zum Ziele, welche mi Zusammensetzung zweier unter einem rechten Winke einen Punkt wirkender Kräfte beginnen. Die Grösse der R tirenden ergibt sich sogleich durch eine höchst einfache vor langer Zeit von Lambert erdachte Betrachtung, deren auch Laplace in der *Mécanique céleste* bedient. Zur Nac sung der Richtung der Resultirenden aber betraten die zwe nannten grossen Mathematiker gänzlich verschiedene Wege, dabei nimmt der Erstgenannte bloss die Elemente der Mat tik in Anspruch, während der Andere den höheren Calc braucht. Ich habe in meinen Anfangsgründen der Physik ve dem Lambert'schen Beweise durch eine eigenthümliche kleidung eine noch grössere Einfachheit zu geben; mittel von mir gewählten Construction lässt sich aber, wenn die Zu nahme des höhern Calculs gestattet ist, eine Deduction zu S bringen, die mir besonders geeignet scheint in einen Le der Mechanik aufgenommen zu werden, dem der Vortrag der ferenzial- und Integralrechnung vorangeht. Diese Deduction ich nun auseinander setzen.

Es handelt sich hier, wie gesagt, bloss um die Angabe Richtung der Resultirenden zweier unter einem rechten W auf einen Punkt wirkender Kräfte.

Da bei gleichmässiger Vervielfältigung der Kräfte die sultirende sich ohne Aenderung ihrer Richtung in demselben M vervielfältigt, so wird die Lage der Geraden, längs welcher Resultirende wirkt, lediglich durch das Verhältniss der Kräfte stimmt. Sind also P, Q die Grössen der beiden Kräfte und zeichnet α den Winkel, den die Richtung ihrer Resultirenden mit der Richtung von P bildet, so ist α eine gewisse Fun des Quotienten $\frac{Q}{P}$ und man kann daher

$$\alpha = f\left(\frac{Q}{P}\right)$$

setzen.

Man denke sich an dem gegebenen Angriffspunkte, senkre gegen die Richtung von R und nach der Seite hin, auf welc die Richtung von Q liegt, irgend eine neue Kraft S angebra und bezeichne den Winkel zwischen der Richtung der Resulti den U der zwei Kräfte R und S und der Richtung von R mit so ist auch

$$\beta=f\left(\frac{S}{R}\right)$$

Die Kraft S kann als die Resultirende zweier Kräfte betrachtet werden, wovon die eine Q' nach der Richtung von Q und die zweite P' der Richtung von P gerade entgegengesetzt wirkt. Nach Obigem erscheint U als die Resultirende von P, Q und S, mithin auch als die Resultirende der auf den vorhandenen Angriffspunkt unter einem rechten Winkel wirkenden Kräfte $P-P'$ und $Q+Q'$, und es macht die Richtung dieser Resultirenden mit der Richtung der ersten Kraft den Winkel $\alpha+\beta$: demnach besteht die Gleichung

$$\alpha+\beta=f\left(\frac{Q+Q'}{P-P'}\right).$$

Die Richtungen der Kräfte S, Q', P' bilden genau dieselben Winkel wie die Richtungen von R, P, Q, mithin stehen erstere Kräfte in denselben Verhältnissen wie letztere, d. h. es ist

$$P':Q=Q':P=S:R$$

woraus

$$P'=\frac{QS}{R} \text{ und } Q'=\frac{PS}{R}$$

folgt. Dies gibt

$$\frac{Q+Q'}{P-P'}=\frac{Q+\frac{PS}{R}}{P-\frac{QS}{R}}=\frac{\frac{Q}{P}+\frac{S}{R}}{1-\frac{Q}{P}\cdot\frac{S}{R}}.$$

Es sei nun zur Abkürzung $\frac{Q}{P}=x$ und $\frac{S}{R}=y$, so wird nach obigen Gleichungen

$$\alpha=f(x),\ \beta=f(y) \text{ und } \alpha+\beta=f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),$$

mithin

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Diese Gleichung führt zur Kenntniss der Form der Function f. Zu diesem Zwecke differenzire man die Gleichung, indem man einmal die eine, das zweite Mal die andere der beiden von einander unabhängigen Grössen x, y als veränderlich behandelt; man erhält, $\frac{df(x)}{dx}=f'(x)$ gesetzt,

$$f'(x)=f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\cdot\frac{1+y^2}{(1-xy)^2},$$

$$f'(y)=f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\cdot\frac{1+x^2}{(1-xy)^2}.$$

Hiernach ist

$$(1+x^2)f'(x)=(1+y^2)f'(y).$$

Da zwischen x und y kein Zusammenhang obwaltet, so kann diese Gleichung nicht bestehen, wofern nicht jede Seite derselben sich auf eine und dieselbe beständige Grösse reducirt. Es sei A diese Constante, so ist

$$(1+x^2)f'(x)=A$$

oder

$$f'(x)=\frac{A}{1+x^2},$$

mithin

$$f(x)=\int\frac{Adx}{1+x^2}=A.\text{arc. tang.}\,x+\text{Const.}$$

Denkt man sich die Kraft Q hinweggenommen, so fällt R mit P zusammen und α geht in 0 über. Für $x=0$ hat man also $f(x)=0$, daher verschwindet die durch die Integration eingeführte Constante und es bleibt

$$f(x)=A.\text{arc. tang.}\,x.$$

Lässt man aber $P=0$ sein, wodurch R mit Q zusammenfällt, so wird $\alpha=\frac{\pi}{2}$, mithin geht bei der hier gemachten Annahme $x=\infty$ die Function $f(x)$ in $\frac{\pi}{2}$ über. Diess gibt

$$\frac{\pi}{2}=A.\text{arc. tang.}\,\infty=A.\frac{\pi}{2},$$

woraus $A=1$ folgt. Hiedurch erhält man endlich

$$f(x)=\text{arc. tang.}\,x,$$

$$\text{d. i. } \alpha=\text{arc. tang.}\,\frac{Q}{P} \text{ oder tang.}\,\alpha=\frac{Q}{P},$$

welches Resultat auf die mit der Darstellung des Kräftenparallelogrammes verknüpfte Construction der Richtung der Resultirenden der vorhandenen Kräfte führt.

Bei dieser Deduction ist, wie man sieht, zur Bestimmung der Richtung der Resultirenden der gegebenen Kräfte die Kenntniss der Grösse dieser Resultirenden nicht erforderlich. Es ist also gleichgiltig, ob der Vortrag mit der Bestimmung der Grösse oder der Richtung der Resultirenden beginnt.

Jahrgang 1849. März-Heft. S. 159. Stampfer: Ueber den Gebrauch der Nivellir-Instrumente aus der Werkstätte des k. k. polytechnischen Instituts auf wissenschaftlichen Reisen. — S. 179. Schrötter: Commissionsbericht (d. H. Baumgartner, Ettingshausen, Kunzek, Stampfer und Schrötter) über die in der österr. Monarchie von Seite der k. Akademie zu veranlassenden meteorologischen Beobachtungen. — S. 208. Stampfer's Methode der Visirung der Fässer vom k. k. Ministerium für Handel etc. der Akademie zur Begutachtung zugewiesen. — S. 221. Stampfer: Vorschlag eines Barometers, welches den mittlere Barometerstand für beliebige Zeitperioden angibt.

Jahrgang 1849. April-Heft. S. 227. Stampfer: Darstellung einer möglichst brauchbaren geometrischen Visirmethode für Fässer. — S. 247. Boguslawski: Schreiben an die Akademie (die vorläufige angenäherte Parallaxenbestimmung der Sonne betreffend). — S. 249. Doppler: Ueber eine bisher noch unbenützte Quelle magnetischer Declinationsbeobachtungen. — S. 261. Columbus: Magnetisches Observatorium zu Linz und Kirchschlag. — S. 267. Pierre: Ueber das Spannkraft-Maximum der Dämpfe in der Luft. — S. 273. Prechtl: Ueber sein Werk: „Untersuchung über den Flug der Vögel." — S. 276. Prettner: Meteorologische Beobachtungen zu Klagenfurt. — S. 276. Steinheil: Ueber seine neueren Arbeiten zur Erzielung genauer Normalgewichte. Ueber das Centrifugal-Wurfgeschoss.

Jahrgang 1849. Mai-Heft. S. 291. Stampfer: Ueber die in Preussen übliche Visir-Methode für Fässer. — S. 295. Baumgartner: Ueber die Leitkraft der Erde für Electricität. — S. 312. v. Ettingshausen: Bericht über Peche's Abhandlung über Integration irrationaler Differentialformeln. — S. 322. Doppler: Ueber ein Mittel die Brechung der Schallstrahlen experimentell nachzuweisen und numerisch zu bestimmen. — S. 347. Kreil: Abhandlung über den Einfluss der Alpen auf die Aeusserungen der magnetischen Erdkraft.

Auszug aus den Sitzungs-Protokollen des Naturwissenschaftlichen Vereins in Halle. (Erstes Jahr vom Juni 1848 — Juni 1849.) Mit einer lithogr. Tafel. Halle.

Diese Sitzungsberichte einer naturwissenschaftlichen Privatgesellschaft, welche neben der älteren naturforschenden Gesellschaft in Halle sich gebildet hat, geben ein sehr erfreuliches Bild von dem Wirken dieser Gesellschaft und verdienen allgemein beachtet zu werden. Es ist in diesen Berichten ausser vielen interessanten kleineren Notizen auf S. 1—S. 14. und S. 15—S. 21. auch eine grössere Abhandlung des Lehrers Herrn Hellwig über die Gesetze der Blattstellung abgedruckt, welche auch in mathematischer Rücksicht vieles Interessante darbietet, und Jedem empfohlen werden kann, wer sich in möglichster Kürze eine genügende Kenntniss

der in diesen Abhandlung besprochenen mathematischen G
der Blattstellung, eine Lehre, zu der bekanntlich C. Schi
A. Braun, C. F. Naumann u. A. den Grund gelegt habe
schaffen will.

The American Journal of Science and Arts.
ducted by Professors B. Silliman and B. Sillima
and James D. Dana. Second Series. Vol. VI. Nove
1848. New Heaven. 8.

III. On the Orbits of the Asteroids; by B. A. Gould.
Objections to the Theories severally of Franklin, Dufay a
père, with an Effect to Explain Electrical Phenomena by
cal or Undulatory Polarization; by Prof. Robert Hare. –
On a New empirical Formula for ascertaining the Tension
por of Water at any Temperature; by J. H. Alexand
XXII. Results of Analytical Researches in the Neptunian'
of Uranus; by Enoch F. Burr. — XXIX. (Fortsetzung v
XIX.). — XXX. Considerations on the Divisibility of Mag
by J. H. Alexander.

Die übrigen Abhandlungen sind grösstentheils chem
und geologischen Inhalts und gehören daher nicht in de
des Archivs.

Institut national de France.

Grand prix de Mathématiques a décerner en 1850.

Les travaux récents de plusieurs géomètres ayant
l'attention sur le dernier théorème de Fermat, et avancé n
ment la question, même pour le cas général, l'Académie p
de lever les dernières difficultés qui restent sur ce sujet
met donc au concours pour le grand prix de Mathématiq
décerner en 1850, le problème suivant:

Trouver pour un exposant entier *quelconque*
solutions en nombres entiers et inégaux de l'équ
$x^n + y^n = z^n$, ou prouver qu'elle n'en a pas.

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur d
mille francs. Les Mémoires devront être arrivés au Secr
de l'Académie avant le 1er octobre 1850. Ce terme est
gueur. Les noms des auteurs seront contenus dans un
cacheté, qui ne sera ouvert que si la pièce est couronnée.

Taf. I.

Fig: 2.

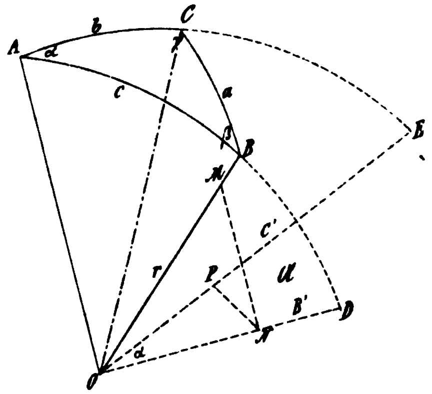


Fig: 3.

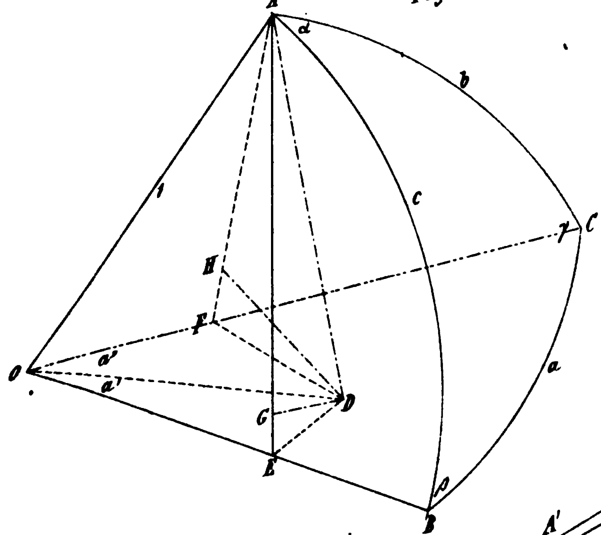


Fig: 5.

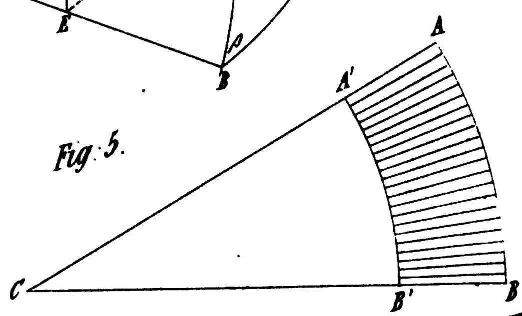


Fig: 2.

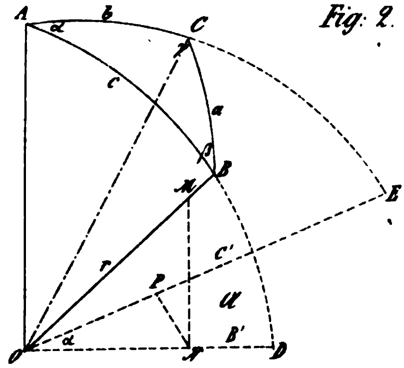


Fig: 3.

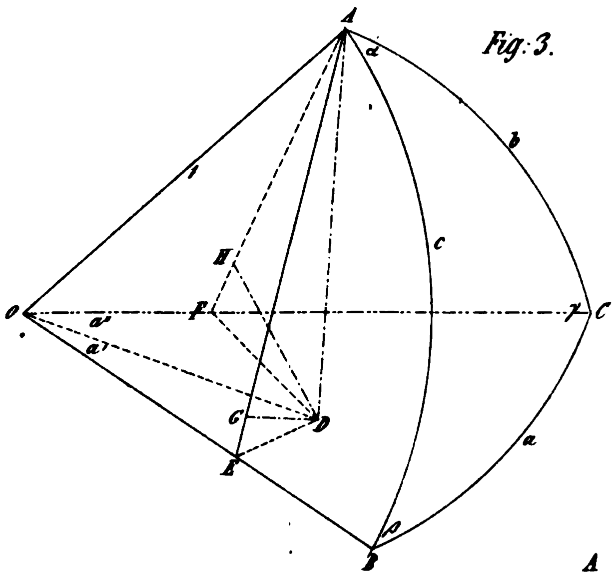
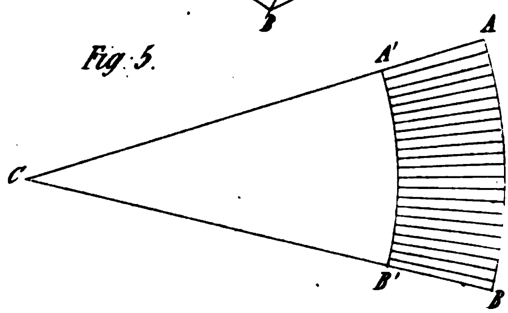
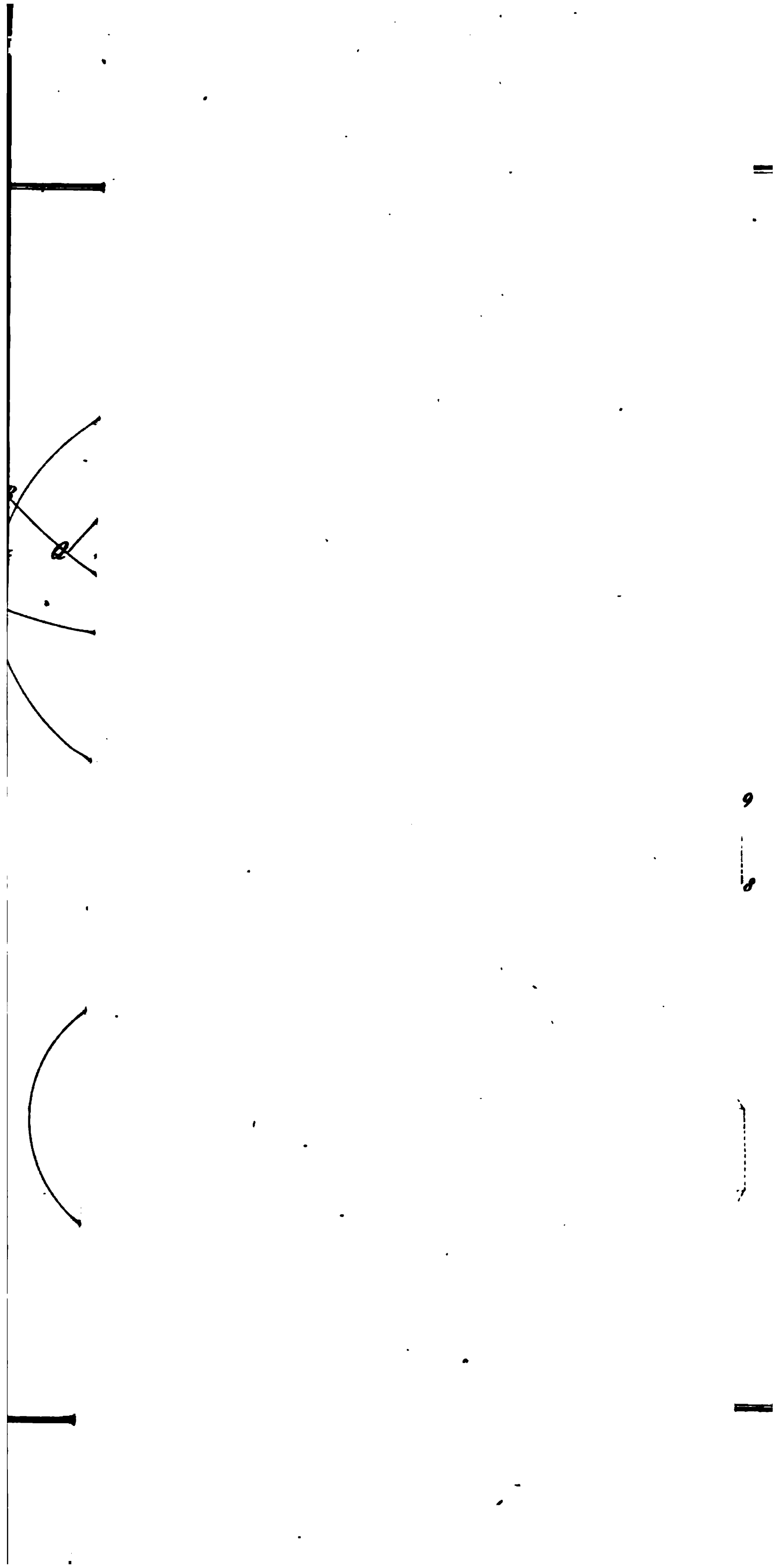


Fig: 5.





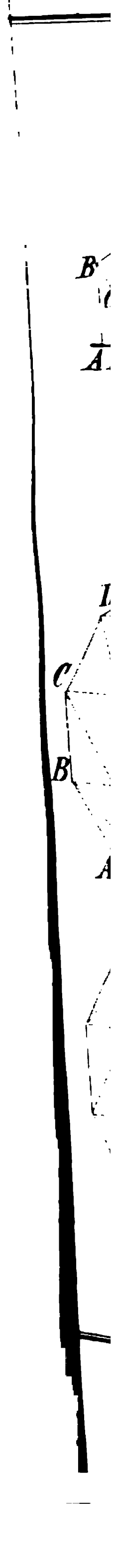

B
A
C
B

Fig. 3.

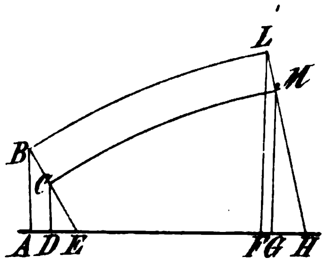


Fig. 4.

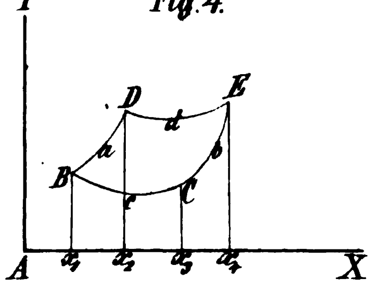
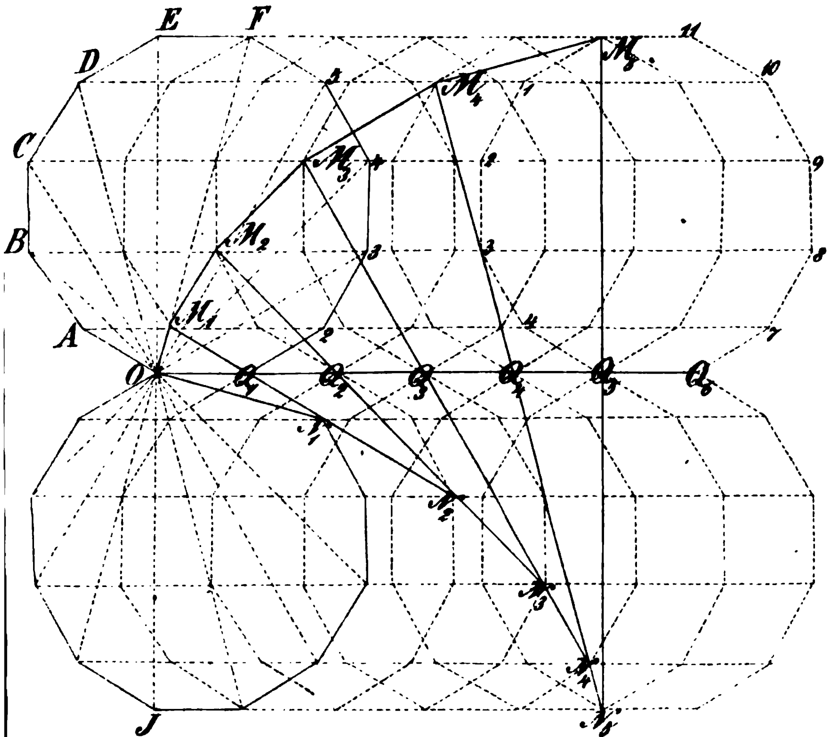
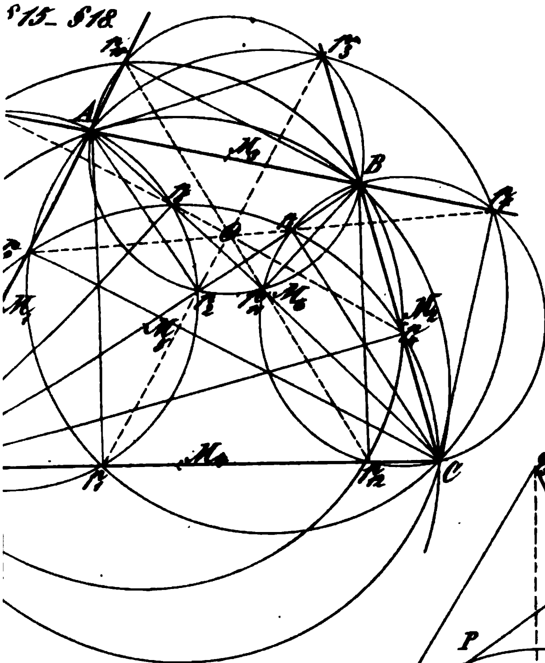


Fig. 9.

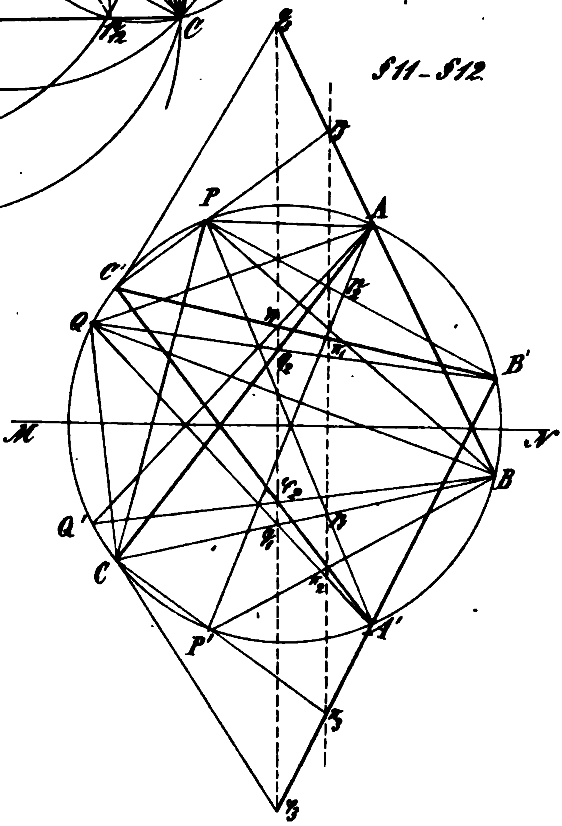


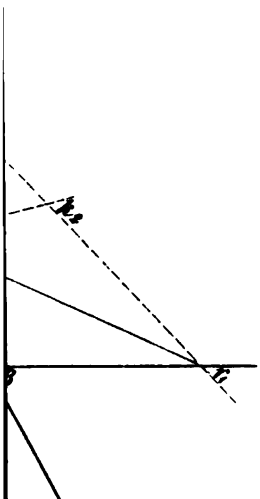
Zu der Abhandlung № XXXV über Transversalen im Dreieck und den ihnen zugeordneten Punkten von H. Dr. Bogman.

§15 – §18



§11 – §12





Archiv

der

[Ma]thematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Vierzehnter Theil.

Mit acht lithographirten Tafeln.

Greifswald.
C. A. Koch's Separat-Conto.

1850.

Inhaltsverzeichniss des vierzehnten Theils.

I. Arithmetik.

Geometrie.

Mechanik.

Astronomie.

Nautik.

Physik.

Uebungs-Aufgaben für Schüler.

Literarische Berichte*).

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Ueber die nautische Aufgabe: den gemessenen Höhen zweier ne, deren Rectascensionen und linationen bekannt sind, und der schenzeit der beiden Beobachtunen die Polhöhe und die Zeit zu bestimmen.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

e der wichtigsten Methoden, zur See die Polhöhe, oder ite, und die Zeit zu bestimmen, bietet wegen der Allgeit ihrer Anwendung und der Leichtigkeit der anzustellen obachtungen jedenfalls die Aufgabe dar:

den gemessenen Höhen zweier Sterne, deren censionen und Declinationen bekannt sind, und ischenzeit der beiden Beobachtungen die Pold die Zeit zu bestimmen;

auch für diese Aufgabe theils directe und völlig genaue, directe und bloss annähernde Auflösungen in ziemlich Anzahl schon gegeben worden sind.

rünglich wurde jedoch diese Aufgabe nicht in der obigen en Gestalt, sondern in der folgenden viel eingeschränkstalt zur Breiten- und Zeitbestimmung auf der See in g gebracht:

Aus zwei gemessenen Höhen eines Sterns, dessen Position auf der Sphäre bekannt ist, insbesondere aus zwei gemessenen Sonnenhöhen, und der Zwischenzeit der beiden Beobachtungen die Polhöhe und die Zeit zu bestimmen.

Wer diese wichtige Methode, die Breite und die Zeit zur See zu bestimmen, zuerst in Vorschlag gebracht hat, habe ich mit völliger Bestimmtheit nicht ermitteln können, und muss mich daher begnügen, was zwei geachtete astronomische und nautische Schriftsteller hierüber sagen, im Nachstehenden anzuführen:

In der Sammlung astronomischer Abhandlungen, Beobachtungen und Nachrichten, herausgegeben von J. E. Bode. Erster Supplement-Band zu dessen astronomischen Jahrbüchern. Berlin. 1793. S. 42. sagt v. Zach in einer Note zu einer von Peter Nieuwland unter dem Titel: Ueber die Methode des Herrn Douwes, aus zweien ausser dem Mittagskreis beobachteten Sonnenhöhen die Breite eines Ortes zu finden, veröffentlichten sehr guten Abhandlung über unser Problem über dasselbe Folgendes: „Peter Nonius oder Nunnez und Robert Hues, ein Magus des Earl of Northumberland und Thomas Harriot's vertrautester Freund, haben meines Wissens diese Aufgabe zuerst vorgetragen: ersterer in seinem Werke De Crepusculis*), letzterer in seinem Tractat De Globis et eorum usu. Lugduni. 8vo. Von einem gewissen John Chilmead Mr. of A. of. Christ-Church in Oxon. wurde 1659 eine von Joh. Jsac. Pontanus mit Anmerkungen versehene, aber verstümmelte Ausgabe in's Englische übersetzt, unter dem Titel: A learned Treatise of Globes: both coelestiall and terrestriall: with their several uses, written first in latine by Mr. Robert Hues: and by him so published etc. Lond. 8vo. Daselbst stehet die Aufgabe auf der 188sten Seite Cap. VI. und wird vermittelst des Globus aufgelöst."

Dagegen spricht sich Don Josef de Mendoza y Rios in der Abhandlung: Recherches sur les Principaux Problèmes de l'Astronomie Nautique (Philosophical Transactions. 1797. Part. I. p. 45.) auf folgende Art über den ersten Erfinder unserer Aufgabe in ihrer obigen eingeschränkteren Gestalt aus: „Le celébre Pierre Nunnez (ou Nonius) s'occupa beaucoup des moyens de déterminer la latitude, et après avoir démontré la fausseté des règles publiées par Pierre Appian (Cosmographia) et Jacob Ziegler (Commentarium in secundum librum Naturalis Historiae Plinii) il donne différens problèmes de son invention, et entre eux celui qu'on résout par deux hauteurs et l'arc d'horizon compris par les verticaux de l'autre (De Arte atque Ratione Navigandi. 1573.

*) Nach anderen Angaben soll sich eine Auflösung mit Hülfe des Globus von Peter Nonius in dessen Buche: De Observ. Regul. et Jnstrum. Geometr. Lib. II. Cap. XIV. befinden.

— De Observ. Regul. et Instrum. Geometr. etc.) Je n'ai pas pu éclaircir celui qui le premier substitua au lieu du dernier élément l'arc de l'équateur compris entre les horaires, ou bien l'intervalle de tems entre les observations; mais on trouve cette solution énoncé comme une chose connue quoique peu utile dans le traité De Globis et eorum Usu par Robert Hues. (Je n'ai jamais vu la première édition de ce livre; celles que je connois, outre les traductions en Anglois et en François, sont une cum Annott. J. Jsaaci Pontani. Amst. 1617. et une autre Oxon. 1663.). Le procédé mentionné par Hues exige l'usage des globes."

Nach diesen Zeugnissen scheint also in der That der vorher erwähnte Robert Hues der erste Erfinder unserer Aufgabe in ihrer eingeschränkteren Gestalt zu sein, obgleich zu wünschen wäre, dass in den Schriften des Nonius selbst, deren Einsicht mir leider nicht zu Gebote steht, genaue Nachforschungen angestellt würden, mit welcher Aufgabe derselbe sich eigentlich beschäftigt hat, wozu ich daher Leser, denen reichere literarische Hülfsquellen als mir, namentlich in der älteren astronomischen und nautischen Literatur, zugänglich sind, aufzufordern mir erlauben möchte, zugleich mit der Bitte, dieselben im Archiv der Mathematik und Physik mitzutheilen.

In der oben gleich im Eingange angegebenen sehr erweiterten Form ist aber das Problem zuerst behandelt worden von Gauss in dem Programm: Methodum peculiarem elevationem poli determinandi explicat simulque praelectiones suas proximo semestri habendas indicat D. Carolus Fridericus Gauss, Astronomiae P. P. O. Gottingae. 1808., von welchem ein ziemlich ausführlicher Auszug sich auch in der Monatlichen Correspondenz. 1809. Februar. S. 134. befindet.

Es ist nun keineswegs meine Absicht, alle bekannten theils völlig genauen, theils nur annähernden Auflösungen unserer Aufgabe in ihrer eingeschränkteren oder erweiterten Gestalt von Douwes, Gauss, Mollweide, Littrow, Hazewinkel, Lobatto, Caillet (Vater), Pagel und Andern in diesem Aufsatze zusammenzustellen, indem man darüber in den meisten Lehrbüchern der Schifffahrtskunde, namentlich in dem Handbuche der Schifffahrtskunde von C. Rümcker. Vierte Auflage. Hamburg. 1844. S. 141. ff. S. 193. ff., in dem nur erst ganz neuerlich erschienenen, wegen seiner streng wissenschaftlichen Abfassung und Darstellung sehr zu empfehlenden Traité élémentaire de Navigation. Par V. Caillet, Examinateur de la Marine. Cours de l'école navale. — 1re année d'études. T. I. Texte. Brest. 1848. p. 191. T. II. Tables. Brest. 1846., auch in dem Handbuche der praktischen Seefahrtskunde von Dr. Eduard Bobrik. Band II. Zürich und Hamburg. 1846. S. 1477. sehr genügende Auskunft findet. Vielmehr ist es meine Absicht, in diesem Aufsatze ein Paar neue analytische Auflösungen zu geben, vorzüglich aber auch eine, wie ich glaube, sehr einfache und elegante

Construction unserer Aufgabe auf analytischem Wege zu entwickeln, die ich wenigstens in theoretischer Rücksicht, namentlich auch weil sie ganz allgemein für die Aufgabe in ihrer erweiterten Gestalt gilt, für sehr bemerkenswerth und interessant halte. Das Weitere über diese Construction, namentlich auch was das Historische und Literarische betrifft, wird späterhin vorkommen.

§. 2.

Die bekannten Rectascensionen und Declinationen der beiden beobachteten Sterne wollen wir durch α, α' und δ, δ', die beiden gemessenen, wegen der Strahlenbrechung und, wo es nöthig ist, auch wegen der Parallaxe auf bekannte Weise gehörig verbesserten Höhen derselben durch h, h' bezeichnen; ferner seien t, t' die gleichzeitig beobachteten in Stunden ausgedrückten Zeiten der Uhr, und ω, ω' seien die entsprechenden Stundenwinkel. Nehmen wir nun zuerst an, dass die Uhr genau nach Sternzeit gehe, bei der Sonne nach mittlerer Sonnenzeit, so ist, wie durch eine einfache Betrachtung, wenn man nur gehörig erwägt, wie in der Astronomie die Stundenwinkel und geraden Aufsteigungen genommen zu werden pflegen, sogleich erhellen wird:

$$\omega = 15t - \alpha \text{ oder } \omega = 15t - \alpha + 360^0,$$

jenachdem

$$15t - \alpha \overline{\geq} 0 \text{ oder } 15t - \alpha < 0,$$

d. h. jenachdem $15t-\alpha$ positiv oder negativ ist; und ganz eben so

$$\omega' = 15t' - \alpha' \text{ oder } \omega' = 15t' - \alpha' + 360^0,$$

jenachdem

$$15t' - \alpha' \overline{\geq} 0 \text{ oder } 15t' - \alpha' < 0,$$

d. h. jenachdem $15t'-\alpha'$ positiv oder negativ ist. Die Rectascensionen α, α' müssen hierbei, da t, t' in Stunden ausgedrückt angenommen worden sind, in Graden ausgedrückt sein, und die Stundenwinkel ω, ω' sind dann natürlich auch in Graden ausgedrückt. Folglich ist entweder

$$\omega - \omega' = 15(t-t') - (\alpha-\alpha'),$$

oder

$$\omega - \omega' = 15(t-t') - (\alpha-\alpha') - 360^0,$$

oder

$$\omega - \omega' = 15(t-t') - (\alpha-\alpha') + 360^0;$$

und setzen wir also allgemein

$$1)\quad \theta = 15(t-t') - (\alpha - \alpha'),$$

wo die Grösse θ aus den beobachteten Zeiten der Uhr und den bekannten Rectascensionen der beiden beobachteten Sterne immer leicht berechnet werden kann, und daher eine bekannte Grösse ist; so ist

$$2)\quad \omega - \omega' = \theta + \lambda . 360^{\circ},$$

wo

$$\lambda = 0, \text{ oder } \lambda = -1, \text{ oder } \lambda = +1$$

ist. Also ist, wie leicht mittelst der bekannten goniometrischen Formeln erhellet, in völliger Allgemeinheit:

$$3)\quad \cos(\omega - \omega') = \cos\theta,\ \sin(\omega - \omega') = \sin\theta.$$

Bisher ist der Einfachheit wegen angenommen worden, dass die bei den Beobachtungen gebrauchte Uhr genau nach Sternzeit gehe, wofür bei der Sonne immer mittlere Sonnenzeit zu setzen ist. Weil aber vermöge der Gleichung 1) die Grösse θ, um deren Bestimmung es sich hier zunächst handelt, bloss von der Differenz $t - t'$ der beiden beobachteten Zeiten abhängt, so ist klar, dass es hier gar nicht auf den sogenannten Stand, sondern nur auf den sogenannten täglichen Gang der Uhr ankommt; und geht also die Uhr nicht genau nach Sternzeit, so muss man wenigstens ihren täglichen Gang aus anderweitigen Beobachtungen genau kennen, um danach die erforderlichen Correctionen vornehmen zu können. Unter dem täglichen Gange einer Uhr versteht man aber bekanntlich das Zeitintervall, welches die Uhr in einem Tage mehr oder weniger als 24 Stunden weist, indem man zugleich dieses Zeitintervall im ersten Falle, wenn nämlich die Uhr in einem Tage mehr als 24 Stunden weiset, d. h. voreilet oder accelerirt, als positiv, im zweiten Falle dagegen, wenn nämlich die Uhr in einem Tage weniger als 24 Stunden weiset, d. h. nachbleibt oder retardirt, als negativ betrachtet. Bezeichnen wir also mit Rücksicht hierauf den aus anderweitigen Beobachtungen genau bekannten täglichen Gang der bei unseren jetzigen Beobachtungen gebrauchten Uhr gegen Sternzeit oder bei der Sonne gegen mittlere Sonnenzeit durch G, das dem aus den beobachteten Zeiten t, t' abgeleiteten Zeitintervalle $t - t'$ entsprechende, in wirklicher Sternzeit oder bei der Sonne in wirklicher mittlerer Sonnenzeit ausgedrückte wahre Zeitintervall aber durch $\tau - \tau'$; so haben wir offenbar die Proportion

$$24 : \tau - \tau' = 24 + G : t - t',$$

wobei immer alle Zeiten in Stunden ausgedrückt angenommen werden, und es ist also nach dieser Proportion:

$$4)\quad \tau-\tau'=\frac{24}{24+G}(t-t')=\frac{t-t'}{1+\frac{G}{24}},$$

oder, unter der Voraussetzung, dass die Uhr nahe berichtigt und also $\frac{G}{24}$ ein sehr kleiner Bruch ist:

$$5)\quad \tau-\tau'=\left\{1-\frac{G}{24}+\left(\frac{G}{24}\right)^2-\left(\frac{G}{24}\right)^3+\ldots\right\}(t-t'),$$

also näherungsweise:

$$6)\quad \tau-\tau'=\left(1-\frac{G}{24}\right)(t-t').$$

Geht demnach die bei den Beobachtungen gebrauchte Uhr nicht genau nach Sternzeit oder mittlerer Sonnenzeit, ist aber, wie hier vorausgesetzt werden muss, der tägliche Gang aus anderweitigen Beobachtungen genau bekannt, so muss man mittelst der obigen Formeln $\tau-\tau'$ berechnen, und dieses $\tau-\tau'$ statt $t-t'$ in den Ausdruck 1) von θ einführen, wodurch sich

$$7)\quad \theta=15(\tau-\tau')-(\alpha-\alpha');$$

oder völlig entwickelt

$$8)\quad \theta=\frac{15.24}{24+G}(t-t')-(\alpha-\alpha')=\frac{15(t-t')}{1+\frac{G}{24}}-(\alpha-\alpha');$$

oder, wenn $\frac{G}{24}$ ein sehr kleiner Bruch ist,

$$9)\quad \theta=15\left\{1-\frac{G}{24}+\left(\frac{G}{24}\right)^2-\left(\frac{G}{24}\right)^3+\ldots\right\}(t-t')-(\alpha-\alpha'),$$

oder näherungsweise

$$10)\quad \theta=15\left(1-\frac{G}{24}\right)(t-t')-(\alpha-\alpha')$$

ergiebt.

Nachdem man die Grösse θ nach der vorhergehenden Anleitung genau berechnet hat, kann man nun zu der Auflösung unserer Aufgabe selbst schreiten, wie jetzt in den folgenden Paragraphen gezeigt werden soll.

§. 3.

Bezeichnen wir die Polhöhe des Beobachtungsorts, deren Bestimmung der nächste und hauptsächlichste Zweck unserer Aufgabe ist, durch φ, so haben wir nach den Lehren der sphärischen Astronomie bekanntlich die beiden folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$11)\quad \begin{cases} \sin h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\omega \cos\delta \cos\varphi, \\ \sin h' = \sin\delta' \sin\varphi + \cos\omega' \cos\delta' \cos\varphi; \end{cases}$$

und nehmen wir also zu diesen beiden Gleichungen noch die aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannte Gleichung

$$12)\quad \omega - \omega' = \theta + \lambda . 360^0,$$

wo $\lambda = 0, -1, +1$; oder statt derselben eine der beiden ganz allgemein gültigen Gleichungen

$$13)\quad \cos(\omega-\omega') = \cos\theta,\ \sin(\omega-\omega') = \sin\theta;$$

so haben wir offenbar zwischen den drei unbekannten Grössen φ, ω, ω', drei ausser diesen unbekannten Grössen nur bekannte Grössen enthaltende Gleichungen, mittelst welcher sich also die drei in Rede stehenden unbekannten Grössen bestimmen lassen müssen, weshalb es jetzt bloss auf die Auflösung dieser drei Gleichungen ankommen wird, was auf verschiedene Arten möglich ist, von denen wir einige in den folgenden Paragraphen kennen lernen werden.

§. 4.

Zuerst wollen wir auf völlig directe Weise die Polhöhe φ unmittelbar aus den durch die Beobachtungen gegebenen Stücken zu bestimmen suchen.

Weil nach der ersten der beiden Gleichungen 13)

$$\cos\theta = \cos\omega \cos\omega' + \sin\omega \sin\omega'$$

und nach den Gleichungen 11)

$$\cos\omega = \frac{\sin h - \sin\delta \sin\varphi}{\cos\delta \cos\varphi},\quad \cos\omega' = \frac{\sin h' - \sin\delta' \sin\varphi}{\cos\delta' \cos\varphi}$$

ist; so erhält man zur Bestimmung von φ unmittelbar die bloss noch diese unbekannte Grösse enthaltende Gleichung

$$\cos\theta = \frac{\sin h - \sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi} \cdot \frac{\sin h' - \sin\delta'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi}$$

$$\pm\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\sin h-\sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi}\right)^2\right\}},$$

oder, wie man leicht findet:

$$\cos\delta\cos\delta'\cos\theta\cos\varphi^2-(\sin h-\sin\delta\sin\varphi)(\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi)=$$
$$\pm\sqrt{\{\cos\delta^2\cos\varphi^2-(\sin h-\sin\delta\sin\varphi)^2\}\{\cos\delta'^2\cos\varphi^2-(\sin h'-\sin\delta'\sin}$$

Wenn man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung qua aufhebt, was sich aufheben lässt, dann dieselbe durch c dividirt, was wenigstens unter der Voraussetzung, dass $\varphi = 90^0$ ist, jedenfalls verstattet ist, so erhält man nach ei ganz leichten Transformationen zur Bestimmung von φ Gleichung:

$$14)\quad 0 = \cos\delta^2\cos\delta'^2\sin\theta^2\cos\varphi^2$$
$$-\cos\delta^2(\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi)^2$$
$$-\cos\delta'^2(\sin h-\sin\delta\sin\varphi)^2$$
$$+2\cos\delta\cos\delta'\cos\theta(\sin h-\sin\delta\sin\varphi)(\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi)$$

oder nach gehöriger Entwickelung, wenn man zugleich c durch $\sin\varphi^2$ ausdrückt:

$$15)\quad 0 = \cos\delta^2\sin h'^2$$
$$+\cos\delta'^2\sin h^2$$
$$-\cos\delta^2\cos\delta'^2\sin\theta^2$$
$$-2\cos\delta\cos\delta'\sin h\sin h'\cos\theta$$
$$-2\left\{\begin{array}{l}\cos\delta^2\sin\delta'\sin h'\\+\cos\delta'^2\sin\delta\sin h\\-\sin\delta\cos\delta\cos\delta'\sin h'\cos\theta\\-\sin\delta'\cos\delta\cos\delta'\sin h\cos\theta\end{array}\right\}\sin\varphi$$
$$+\left\{\begin{array}{l}\cos\delta^2\sin\delta'^2\\+\cos\delta'^2\sin\delta^2\\+\cos\delta^2\cos\delta'^2\sin\theta^2\\-2\sin\delta\cos\delta\sin\delta'\cos\delta'\cos\theta\end{array}\right\}\sin\varphi^2.$$

Das von $\sin\varphi$ unabhängige Glied dieser Gleichung ist:

$$
\begin{aligned}
&-\cos\delta^2\cos\delta'^2\\
&+\sin h^2\cos\delta'^2\\
&+\cos\delta^2\sin h'^2\\
&-\sin h^2\sin h'^2\\
&+\sin h^2\sin h'^2\\
&-2\sin h\sin h'\cos\delta\cos\delta'\cos\theta\\
&+\cos\delta^2\cos\delta'^2\cos\theta^2\\
=&-(\cos\delta^2-\sin h^2)(\cos\delta'^2-\sin h'^2)\\
&+(\sin h\sin h'-\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2.
\end{aligned}
$$

Der Coefficient von $-2\sin\varphi$ ist:

$$
\begin{aligned}
&\cos\delta\sin h'(\cos\delta\sin\delta'-\sin\delta\cos\delta'\cos\theta)\\
+&\cos\delta'\sin h(\sin\delta\cos\delta'-\cos\delta\sin\delta'\cos\theta).
\end{aligned}
$$

Der Coefficient von $\sin\varphi^2$ ist endlich:

$$
\begin{aligned}
&\sin\delta^2\sin\delta'^2\\
&+\cos\delta^2\sin\delta'^2\\
&+\sin\delta^2\cos\delta'^2\\
&+\cos\delta^2\cos\delta'^2\\
&-\sin\delta^2\sin\delta'^2\\
&-2\sin\delta\cos\delta\sin\delta'\cos\delta'\cos\theta\\
&-\cos\delta^2\cos\delta'^2\cos\theta^2\\
=&\ (\sin\delta^2+\cos\delta^2)(\sin\delta'^2+\cos\delta'^2)\\
&-(\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2\\
=&\ 1-(\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2.
\end{aligned}
$$

Folglich ist unsere obige quadratische Gleichung:

$$
\begin{aligned}
16)\quad 0=&-(\cos\delta^2-\sin h^2)(\cos\delta'^2-\sin h'^2)\\
&+(\sin h\sin h'-\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2\\
&-2\left\{\begin{array}{l}\cos\delta\sin h'(\cos\delta\sin\delta'-\sin\delta\cos\delta'\cos\theta)\\+\cos\delta'\sin h(\sin\delta\cos\delta'-\cos\delta\sin\delta'\cos\theta)\end{array}\right\}\sin\varphi\\
&+\{1-(\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2\}\sin\varphi^2.
\end{aligned}
$$

Nimmt man mit dieser Gleichung die gewöhnliche Verwandlung der quadratischen Gleichungen vor, so wird dieselbe:

$$\left\{\sin\varphi - \frac{\cos\delta\sin h'(\cos\delta\sin\delta' - \sin\delta\cos\delta'\cos\theta) + \cos\delta'\sin h(\sin\delta\cos\delta' - \cos\delta\sin\delta'\cos\theta)}{1-(\sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2}\right\}^2$$

$$= \frac{(\cos\delta^2 - \sin h^2)(\cos\delta'^2 - \sin h'^2) - (\sin h\sin h' - \cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2}{1-(\sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2}$$

$$+ \left\{\frac{\cos\delta\sin h'(\cos\delta\sin\delta' - \sin\delta\cos\delta'\cos\theta) + \cos\delta'\sin h(\sin\delta\cos\delta' - \cos\delta\sin\delta'\cos\theta)}{1-(\sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2}\right\}^2.$$

Der Zähler des Bruchs, in welchen sich die beiden Gl... auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in dieser Gleich... zusammenziehen lassen, ist:

$$\begin{aligned}
&(\cos\delta^2 - \sin h^2)(\cos\delta'^2 - \sin h'^2)\\
&- (\sin h\sin h' - \cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2\\
&- (\cos\delta^2 - \sin h^2)(\cos\delta'^2 - \sin h'^2)(\sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2\\
&+ (\sin h\sin h' - \cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2(\sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2\\
&+ \cos\delta^2\sin h'^2(\cos\delta\sin\delta' - \sin\delta\cos\delta'\cos\theta)^2\\
&+ \cos\delta'^2\sin h^2(\sin\delta\cos\delta' - \cos\delta\sin\delta'\cos\theta)^2\\
&+ 2\cos\delta\cos\delta'\sin h\sin h'(\cos\delta\sin\delta' - \sin\delta\cos\delta'\cos\theta)\\
&\qquad\times(\sin\delta\cos\delta' - \cos\delta\sin\delta'\cos\theta).
\end{aligned}$$

Entwickelt man nun in diesem Zähler das Glied, we... $\sin h$ und $\sin h'$ gar nicht enthält, ferner jedes der Glieder, w...

$$\sin h^2,\ \sin h'^2,\ \sin h\sin h',\ \sin h^2\sin h'^2$$

enthalten, für sich, so findet man mittelst einiger leichten go... metrischen Transformationen, deren Ausführung füglich dem Le... überlassen bleiben kann, dass sich dieser Zähler auf die For...

$$\cos\delta^2\cos\delta'^2\sin\theta^2\left\{\begin{array}{l}1-(\sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2 - \sin h^2 - \sin h'^2\\ \quad + 2\sin h\sin h'(\sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos\theta)\end{array}\right.$$

bringen lässt.

Also ist nach dem Obigen

$$\begin{aligned}
17)\quad &\{1-(\sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2\}\sin\varphi\\
&= \cos\delta\sin h'(\cos\delta\sin\delta' - \sin\delta\cos\delta'\cos\theta)\\
&\quad + \cos\delta'\sin h(\sin\delta\cos\delta' - \cos\delta\sin\delta'\cos\theta)\\
&\pm\cos\delta\cos\delta'\sin\theta\sqrt{\begin{array}{l}1-(\sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2 - \sin h^2 - \sin h'^2\\ + 2\sin h\sin h'(\sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos\theta)\end{array}}
\end{aligned}$$

wodurch $\sin\varphi$ vollständig entwickelt durch die unmittelbar durch die Beobachtungen gegebenen Grössen ausgedrückt ist.

Zugleich sieht man hieraus, dass $\sin\varphi$, und folglich auch φ, welches übrigens immer positiv und nicht grösser als 90^0 ist, im Allgemeinen zwei Werthe hat, und dass also bei der Anwendung dieser Methode zur Bestimmung der Polhöhe im Allgemeinen eine vorläufige genäherte Kenntniss derselben erforderlich ist.

Um den vorher für $\sin\varphi$ gefundenen Ausdruck zur logarithmischen Rechnung bequemer einzurichten, wollen wir, was bekanntlich immer verstattet ist:

$$\begin{aligned}\sin\xi &= \cos\delta\sin\delta' - \sin\delta\cos\delta'\cos\theta\\ &= \sin\delta'(\cos\delta - \sin\delta\cot\delta'\cos\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\xi' &= \sin\delta\cos\delta' - \cos\delta\sin\delta'\cos\theta\\ &= \sin\delta(\cos\delta' - \sin\delta'\cot\delta\cos\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin i &= \sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos\theta\\ &= \sin\delta(\sin\delta' + \cos\delta'\cot\delta\cos\theta)\\ &= \sin\delta'(\sin\delta + \cos\delta\cot\delta'\cos\theta)\end{aligned}$$

setzen; und setzen wir dann ferner

$$18)\quad \cot\chi = \cot\delta\cos\theta,\quad \cot\chi' = \cot\delta'\cos\theta;$$

so ist

$$19)\quad \begin{cases} \sin\xi = \dfrac{\sin\delta'\sin(\chi'-\delta)}{\sin\chi'},\quad \sin\xi' = \dfrac{\sin\delta\sin(\chi-\delta')}{\sin\chi};\\[2mm] \sin i = \dfrac{\sin\delta\cos(\chi-\delta')}{\sin\chi} = \dfrac{\sin\delta'\cos(\chi'-\delta)}{\sin\chi'};\end{cases}$$

oder auch

$$20)\quad \begin{cases} \sin\xi = \dfrac{\sin\delta'\sin(\chi'-\delta)}{\sin\chi'},\quad \sin\xi' = \dfrac{\sin\delta\sin(\chi-\delta')}{\sin\chi};\\[2mm] \sin i = \sin\xi\cot(\chi'-\delta) = \sin\xi'\cot(\chi-\delta');\end{cases}$$

mittelst welcher Formeln die Hülfswinkel χ, χ', ξ, ξ', i ohne alle Schwierigkeit berechnet werden können. Zu bemerken hat man jedoch, dass man, was aus dem Vorhergehenden und dem Nachfolgenden sogleich erhellet, gar nicht nöthig hat, die Winkel ξ, ξ' selbst zu kennen, indem man bloss $\sin\xi$, $\sin\xi'$ zu berechnen und die Winkel ξ, ξ' selbst gar nicht aufzusuchen braucht, was natürlich die Rechnung erleichtert.

Führt man aber die Hülfswinkel ξ, ξ', i in die Gleichung 17) ein, so wird dieselbe:

$$21)\qquad \cos i^2 \sin\varphi$$
$$= \cos\delta \sin h' \sin\xi + \cos\delta' \sin h \sin\xi'$$
$$\pm \cos\delta \cos\delta' \sin\theta \sqrt{1 - \sin h^2 - \sin h'^2 - \sin i^2 + 2 \sin h \sin h' \sin i}.$$

Nach einem bekannten goniometrischen Satze ist aber für jedes α, β, γ:

$$1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$= 4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma),$$

also

$$1 - \sin h^2 - \sin h'^2 - \sin i^2 + 2\sin h \sin h' \sin i$$
$$= 1 - \cos(90^0 - h)^2 - \cos(90^0 - h')^2 - \cos(90^0 - i)^2$$
$$+ 2\cos(90^0 - h)\cos(90^0 - h')\cos(90^0 - i)$$
$$= 4\sin\frac{1}{2}(270^0 - h - h' - i)$$
$$\times \sin\frac{1}{2}(90^0 + h - h' - i)$$
$$\times \sin\frac{1}{2}(90^0 - h + h' - i)$$
$$\times \sin\frac{1}{2}(90^0 - h - h' + i)$$
$$= 4\sin\{45^0 + \frac{1}{2}(h + h' + i)\}$$
$$\times \sin\{45^0 + \frac{1}{2}(h - h' - i)\}$$
$$\times \sin\{45^0 - \frac{1}{2}(h - h' + i)\}$$
$$\times \sin\{45^0 - \frac{1}{2}(h + h' - i)\}.$$

Setzen wir aber

$$22)\quad 2s = 90^0 + h + h' + i,$$

so ist

$$90^0 + (h + h' + i) = 2s,$$
$$90^0 + (h - h' - i) = 2(s - h' - i),$$
$$90^0 - (h - h' + i) = 2(s - h - i),$$
$$90^0 - (h + h' - i) = 2(s - h - h');$$

also

$$1-\sin h^2-\sin h'^2-\sin i^2+2\sin h\sin h'\sin i$$
$$=4\sin s\sin(s-h-h')\sin(s-h-i)\sin(s-h'-i),$$

und folglich nach 21):

$$23)\quad \cos i^2\sin\varphi$$
$$=\cos\delta\sin h'\sin\xi+\cos\delta'\sin h\sin\xi'$$
$$\pm 2\cos\delta\cos\delta'\sin\theta\sqrt{\sin s\sin(s-h-h')\sin(s-h-i)\sin(s-h'-i)}.$$

Es werden freilich im Obigen fast alle Winkel durch ihre Sinus bestimmt, was bekanntlich nicht immer mit der erforderlichen Genauigkeit möglich ist. Sollte aber die Bestimmung des beliebigen Winkels η mittelst einer der beiden Gleichungen

$$\sin\eta=A \text{ oder } \cos\eta=A$$

nicht mit der erforderlichen Schärfe möglich sein, so brauchte man bloss den Hülfswinkel ζ mittelst der Formel

$$\tang\zeta=A$$

zu berechnen, was immer mit der erforderlichen Schärfe möglich ist, und hätte dann

$$\frac{1-\sin\eta}{1+\sin\eta}=\frac{1-\cos(90^0-\eta)}{1+\cos(90^0-\eta)}=\frac{1-\tang\zeta}{1+\tang\zeta},$$

$$\tang(45^0-\tfrac{1}{2}\eta)^2=\tang(45^0-\zeta),\quad \tang(45^0-\tfrac{1}{2}\eta)=\sqrt{\tang(45^0-\zeta)};$$

oder

$$\frac{1-\cos\eta}{1+\cos\eta}=\frac{1-\tang\zeta}{1+\tang\zeta},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}\eta^2=\tang(45^0-\zeta),\quad \tang\tfrac{1}{2}\eta=\sqrt{\tang(45^0-\zeta)};$$

durch welche Methode immer eine völlig genaue Berechnung des Winkels η möglich gemacht wird.

§. 5.

Wenn man einen und denselben Stern zwei Mal beobachtet hat, so ist, wenn dieser Stern ein Fixstern ist oder wenigstens ohne merklichen Fehler als ein Fixstern betrachtet werden kann, im Obigen $\alpha=\alpha'$, $\delta=\delta'$ zu setzen, also nach 1) in diesem Falle

$$24)\quad \theta = 15(t-t'),$$

oder, wenn der Gang der Uhr nicht genau berichtigt ist, nach 8), 9), 10):

$$25)\quad \theta = \frac{15.24}{24+G}(t-t') = \frac{15(t-t')}{1+\frac{G}{24}},$$

oder, wenn $\frac{G}{24}$ ein sehr kleiner Bruch ist:

$$26)\quad \theta = 15\left\{1-\frac{G}{24}+\left(\frac{G}{24}\right)^2-\left(\frac{G}{24}\right)^3+\ldots\right\}(t-t'),$$

oder näherungsweise:

$$27)\quad \theta = 15\left(1-\frac{G}{24}\right)(t-t'),$$

so dass man also in diesem Falle die Rectascension des beobachteten Sterns gar nicht zu kennen braucht.

Ferner hat man nach 17) zur Bestimmung von $\sin\varphi$ die folgende Gleichung:

$$28)\quad \{1-(\sin\delta^2+\cos\delta^2\cos\theta)^2\}\sin\varphi$$
$$=2\sin\delta\cos\delta^2\sin\tfrac{1}{2}\theta^2(\sin h+\sin h')$$
$$\pm\cos\delta^2\sin\theta\sqrt{\begin{array}{l}1-(\sin\delta^2+\cos\delta^2\cos\theta)^2-\sin h^2-\sin h'^2\\ +2\sin h\sin h'(\sin\delta^2+\cos\delta^2\cos\theta)\end{array}}.$$

Setzt man nun ähnlich wie vorher

$$\sin i = \sin\delta^2+\cos\delta^2\cos\theta,$$

so ist

$$1-\sin i = 2\sin(45^\circ-\tfrac{1}{2}i)^2 = 2\cos\delta^2\sin\tfrac{1}{2}\theta^2,$$

also

$$\sin(45^\circ-\tfrac{1}{2}i)^2 = \cos\delta^2\sin\tfrac{1}{2}\theta^2,$$

und man wird daher den Hülfswinkel i immer aus der Gleichung

$$29)\quad \sin(45^\circ-\tfrac{1}{2}i) = \cos\delta\sin\tfrac{1}{2}\theta$$

zu bestimmen haben, was nie der geringsten Schwierigkeit unterliegt. Wird ferner eben so wie im vorhergehenden Paragraphen auch jetzt wieder

$$30)\quad 2s = 90^0 + h + h' + i$$

gesetzt, so ist

$$31)\quad \cos i^2 \sin\varphi$$
$$= 4\sin\delta\cos\delta^2\sin\frac{1}{2}\theta^2\sin\frac{1}{2}(h+h')\cos\frac{1}{2}(h-h')$$
$$\pm 2\cos\delta^2\sin\theta\sqrt{\sin s\sin(s-h-h')\sin(s-h-i)\sin(s-h'-i)}.$$

Weil aber

$$\cos i = \sin(90^0 - i) = 2\sin(45^0 - \frac{1}{2}i)\cos(45^0 - \frac{1}{2}i),$$

also nach 29)

$$\cos i^2 = 4\cos\delta^2\sin\frac{1}{2}\theta^2\cos(45^0 - \frac{1}{2}i)^2$$

ist, so ist auch

$$32)\quad \cos(45^0 - \frac{1}{2}i)^2\sin\varphi$$
$$= \sin\delta\sin\frac{1}{2}(h+h')\cos\frac{1}{2}(h-h')$$
$$\pm\cot\frac{1}{2}\theta\sqrt{\sin s\sin(s-h-h')\sin(s-h-i)\sin(s-h'-i)},$$

Setzt man, was immer verstattet ist:

$$33)\quad \begin{cases} \sin u = \sin\delta\sin\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}(h+h')\cos\frac{1}{2}(h-h'), \\ \sin v = \cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{\sin s\sin(s-h-h')\sin(s-h-i)\sin(s-h'-i)}, \end{cases}$$

so ist

$$\sin\frac{1}{2}\theta\cos(45^0 - \frac{1}{2}i)^2\sin\varphi = \sin u \pm \sin v,$$

also

$$34)\quad \sin\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}(u\pm v)\cos\frac{1}{2}(u\mp v)}{\sin\frac{1}{2}\theta\cos(45^0 - \frac{1}{2}i)^2}:$$

§. 6.

Wenn man die Polhöhe φ gefunden hat, so erhält man die Stundenwinkel ω, ω' mittelst der aus 11) fliessenden Formeln:

$$35)\quad \begin{cases} \cos\omega = \dfrac{\sin h - \sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi}, \\ \cos\omega' = \dfrac{\sin h' - \sin\delta'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi}. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich aber:

$$2\sin\frac{1}{2}\omega^2 = 1 - \cos\omega = \frac{\cos(\delta-\varphi) - \sin h}{\cos\delta\cos\varphi},$$

$$2\sin\frac{1}{2}\omega'^2 = 1 - \cos\omega' = \frac{\cos(\delta'-\varphi) - \sin h'}{\cos\delta'\cos\varphi};$$

also nach einer bekannten Zerlegung:

$$\sin\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{\sin\{45^0 - \frac{1}{2}(\delta+h-\varphi)\}\cos\{45^0 - \frac{1}{2}(\delta-h-\varphi)\}}{\cos\delta\cos\varphi},$$

$$\sin\frac{1}{2}\omega'^2 = \frac{\sin\{45^0 - \frac{1}{2}(\delta'+h'-\varphi)\}\cos\{45^0 - \frac{1}{2}(\delta'-h'-\varphi)\}}{\cos\delta'\cos\varphi};$$

folglich, weil $\frac{1}{2}\omega$ und $\frac{1}{2}\omega'$ immer zwischen 0 und 180° liegen:

$$36)\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}\omega = \sqrt{\dfrac{\sin\{45^0 - \frac{1}{2}(\delta+h-\varphi)\}\cos\{45^0 - \frac{1}{2}(\delta-h-\varphi)\}}{\cos\delta\cos\varphi}}, \\ \sin\frac{1}{2}\omega' = \sqrt{\dfrac{\sin\{45^0 - \frac{1}{2}(\delta'+h'-\varphi)\}\cos\{45^0 - \frac{1}{2}(\delta'-h'-\varphi)\}}{\cos\delta'\cos\varphi}}. \end{cases}$$

Auch ist

$$2\cos\frac{1}{2}\omega^2 = 1 + \cos\omega = \frac{\cos(\delta+\varphi) + \sin h}{\cos\delta\cos\varphi},$$

$$2\cos\frac{1}{2}\omega'^2 = 1 + \cos\omega' = \frac{\cos(\delta'+\varphi) + \sin h}{\cos\delta'\cos\varphi};$$

also nach einer bekannten Zerlegung:

$$\cos\frac{1}{2}\omega^2=\frac{\sin\{45^0-\frac{1}{2}(\delta-h+\varphi)\}\cos\{45^0-\frac{1}{2}(\delta+h+\varphi)\}}{\cos\delta\cos\varphi},$$

$$\cos\frac{1}{2}\omega'^2=\frac{\sin\{45^0-\frac{1}{2}(\delta'-h'+\varphi)\}\cos\{45^0-\frac{1}{2}(\delta'+h'+\varphi)\}}{\cos\delta'\cos\varphi};$$

folglich

$$37)\quad\left\{\begin{array}{l}\cos\frac{1}{2}\omega=\pm\sqrt{\dfrac{\sin\{45^0-\frac{1}{2}(\delta-h+\varphi)\}\cos\{45^0-\frac{1}{2}(\delta+h+\varphi)\}}{\cos\delta\cos\varphi}},\\[2ex] \cos\frac{1}{2}\omega'=\pm\sqrt{\dfrac{\sin\{45^0-\frac{1}{2}(\delta'-h'+\varphi)\}\cos\{45^0-\frac{1}{2}(\delta'+h'+\varphi)\}}{\cos\delta'\cos\varphi}};\end{array}\right.$$

wenn man die obern oder untern Zeichen nimmt, jenachdem ω, ω' zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 360° liegen, d. h. jenachdem die Sterne auf der westlichen oder östlichen Seite des Meridians beobachtet worden sind, was also aus den besonderen Umständen der Beobachtungen in jedem einzelnen Falle entschieden werden muss, wozu man bei wirklichen Anwendungen gewiss auch immer hinreichende Data haben wird.

Dass man, wenn man die Stundenwinkel kennt, auch den Stand der Uhr bestimmen kann, weiss Jeder aus den Elementen der Astronomie, so dass dies hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

§. 7.

Bevor wir zu einer anderen Auflösung unserer Aufgabe übergehen, wollen wir zuerst die Umstände untersuchen, unter denen die Beobachtungen am vortheilhaftesten, d. h. mit der meisten Aussicht auf hinreichende Genauigkeit und Schärfe der aus denselben abzuleitenden Resultate, angestellt werden.

Die Grundlage für die Auflösung unserer Aufgabe bilden die drei Gleichungen:

$$\omega-\omega'=\theta+\lambda.360^0,$$

$$\sin h=\sin\delta\sin\varphi+\cos\delta\cos\omega\cos\varphi,$$

$$\sin h'=\sin\delta'\sin\varphi+\cos\delta'\cos\omega'\cos\varphi;$$

wobei alle Grössen als völlig fehlerfrei angenommen werden. Nebmen wir aber die Rectascensionen und Declinationen als fehlerfrei an, wozu wir bei der grossen Genauigkeit unserer jetzigen Sternverzeichnisse und astronomischen Tafeln wohl berechtigt sind, und bezeichnen die Fehler von h, h', θ, ω, ω', φ respective durch ∂h, $\partial h'$, $\partial\theta$, $\partial\omega$, $\partial\omega'$, $\partial\varphi$; so sind die richtigen Gleichungen:

$$(\omega+\partial\omega)-(\omega'+\partial\omega')=\theta+\partial\theta+\lambda.360^0,$$

$$\sin(h+\partial h)=\sin\delta\sin(\varphi+\partial\varphi)+\cos\delta\cos(\omega+\partial\omega)\cos(\varphi+\partial\varphi),$$

$$\sin(h'+\partial h')=\sin\delta'\sin(\varphi+\partial\varphi)+\cos\delta'\cos(\omega'+\partial\omega')\cos(\varphi+\partial\varphi);$$

aus denen, in Verbindung mit den drei obigen Gleichungen, nach den Regeln der Differentialrechnung sich die drei folgenden Gleichungen ergeben:

$$\partial\omega-\partial\omega'=\partial\theta,$$

$$\cos h\,\partial h=(\sin\delta\cos\varphi-\cos\delta\cos\omega\sin\varphi)\partial\varphi-\cos\delta\sin\omega\cos\varphi\partial\omega,$$

$$\cos h'\partial h'=(\sin\delta'\cos\varphi-\cos\delta'\cos\omega'\sin\varphi)\partial\varphi-\cos\delta'\sin\omega'\cos\varphi\partial\omega'.$$

Aus diesen drei Gleichungen erhält man durch Elimination von $\partial\omega$ und $\partial\omega'$ die Gleichung:

$$\theta=\frac{(\sin\delta\cos\varphi-\cos\delta\cos\omega\sin\varphi)\partial\varphi-\cos h\partial h}{\cos\delta\sin\omega\cos\varphi}$$
$$-\frac{(\sin\delta'\cos\varphi-\cos\delta'\cos\omega'\sin\varphi)\partial\varphi-\cos h'\partial h'}{\cos\delta'\sin\omega'\cos\varphi}.$$

Bezeichnen wir nun die Azimuthe der beiden beobachteten Sterne oder des einen zwei Mal beobachteten Sterns, indem wir dieselben von Süden an durch Westen hindurch von 0 bis 360° zählen, durch ϖ, ϖ'; so haben wir nach bekannten Formeln der sphärischen Astronomie (Archiv. Thl. VIII. S. 90.) die folgenden Gleichungen:

$$\sin\delta\cos\varphi-\cos\delta\cos\omega\sin\varphi=-\cos h\cos\varpi,$$
$$\sin\delta'\cos\varphi-\cos\delta'\cos\omega'\sin\varphi=-\cos h'\cos\varpi'$$

und

$$\cos\delta\sin\omega=\cos h\sin\varpi,$$
$$\cos\delta'\sin\omega'=\cos h'\sin\varpi';$$

also ist nach dem Obigen

$$\partial\theta=-\frac{\cos\varpi\partial\varphi+\partial h}{\sin\varpi\cos\varphi}+\frac{\cos\varpi'\partial\varphi+\partial h'}{\sin\varpi'\cos\varphi}$$

oder

$$\sin\overline{\omega}\sin\overline{\omega}'\cos\varphi\,\partial\theta=\sin(\overline{\omega}-\overline{\omega}')\,\partial\varphi-\sin\overline{\omega}'\,\partial h+\sin\overline{\omega}\,\partial h',$$

also

$$38)\quad \partial\varphi=\frac{\sin\overline{\omega}'}{\sin(\overline{\omega}-\overline{\omega}')}\,\partial h-\frac{\sin\overline{\omega}}{\sin(\overline{\omega}-\overline{\omega}')}\,\partial h'+\frac{\sin\overline{\omega}\sin\overline{\omega}'}{\sin(\overline{\omega}-\overline{\omega}')}\cos\varphi\,\partial\theta$$

Ferner ist nach dem Obigen, wie man leicht findet:

$$\partial h=-\cos\overline{\omega}\,\partial\varphi-\sin\overline{\omega}\cos\varphi\,\partial\omega,$$

$$\partial h'=-\cos\overline{\omega}'\,\partial\varphi-\sin\overline{\omega}'\cos\varphi\,\partial\omega'$$

oder

$$\partial h+\cos\overline{\omega}\,\partial\varphi=-\sin\overline{\omega}\cos\varphi\,\partial\omega,$$

$$\partial h'+\cos\overline{\omega}'\,\partial\varphi=-\sin\overline{\omega}'\cos\varphi\,\partial\omega';$$

folglich, wenn man den obigen Werth von $\partial\varphi$ einführt:

$$\frac{\cos\overline{\omega}'}{\sin(\overline{\omega}-\overline{\omega}')}\,\partial h-\frac{\cos\overline{\omega}}{\sin(\overline{\omega}-\overline{\omega}')}\,\partial h'+\frac{\cos\overline{\omega}\sin\overline{\omega}'}{\sin(\overline{\omega}-\overline{\omega}')}\cos\varphi\,\partial\theta=-\cos\varphi\,\partial\omega,$$

$$\frac{\cos\overline{\omega}'}{\sin(\overline{\omega}-\overline{\omega}')}\,\partial h-\frac{\cos\overline{\omega}}{\sin(\overline{\omega}-\overline{\omega}')}\,\partial h'+\frac{\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}'}{\sin(\overline{\omega}-\overline{\omega}')}\cos\varphi\,\partial\theta=-\cos\varphi\,\partial\omega';$$

also

39)

$$\left\{\begin{aligned}\partial\omega&=-\frac{\cos\overline{\omega}'}{\sin(\overline{\omega}-\overline{\omega}')\cos\varphi}\,\partial h+\frac{\cos\overline{\omega}}{\sin(\overline{\omega}-\overline{\omega}')\cos\varphi}\,\partial h'-\frac{\cos\overline{\omega}\sin\overline{\omega}'}{\sin(\overline{\omega}-\overline{\omega}')}\,\partial\theta,\\ \partial\omega'&=-\frac{\cos\overline{\omega}'}{\sin(\overline{\omega}-\overline{\omega}')\cos\varphi}\,\partial h+\frac{\cos\overline{\omega}}{\sin(\overline{\omega}-\overline{\omega}')\cos\varphi}\,\partial h'-\frac{\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}'}{\sin(\overline{\omega}-\overline{\omega}')}\,\partial\theta.\end{aligned}\right.$$

Aus den Formeln 38) und 39), namentlich aber zunächst aus der Formel 38) in Betreff der Polhöhe, sieht man, dass man die Beobachtungen jederzeit so anstellen muss, dass nicht nahe $\sin(\overline{\omega}-\overline{\omega}')=0$, sondern dass vielmehr möglichst nahe $\sin(\overline{\omega}-\overline{\omega}')=\pm1$ ist, d. h. dass der absolute Werth der Differenz der Azimuthe der beiden beobachteten Sterne oder des einen zwei Mal beobachteten Sterns möglichst nahe 90° oder 270° ist. Dies vorausgesetzt, erhellet zugleich ferner aus den Gleichungen 39) in Betreff der Stundenwinkel, dass auf dieselben die Fehler in den gemessenen Höhen einen desto geringeren Einfluss ausüben, je näher $\cos\varphi=1$, d. h. je kleiner die Polhöhe ist; unter einer sehr grossen Polhöhe, wo nahe $\cos\varphi=0$ ist, kann der Einfluss der Fehler in den gemessenen Höhen auf die Stundenwinkel sehr bedeutend werden.

Ueberhaupt hat man sich also die praktische Regel zu merken, welche als eine Hauptregel für die erfolgreiche Anwendung unserer Aufgabe zur Bestimmung der Polhöhe oder der Breite zu betrachten ist, dass man bei den Beobachtungen die Umstände mit aller nur möglichen Sorgfalt so wählen muss, dass der absolute Werth der Azimuthe der beiden beobachteten Sterne oder des einen zwei Mal beobachteten Sterns möglichst nahe 90° oder 270° beträgt.

§. 8.

Wir wollen jetzt unsere Aufgabe auf eine andere Art wie vorher aufzulösen suchen, und setzen zu dem Ende

$$40)\quad \Theta=\omega-\omega',\quad \Omega=\omega+\omega';$$

indem wir zugleich bemerken, dass Θ vermöge der Gleichungen 1) und 2) eine bekannte Grösse ist, und daher die beiden Stundenwinkel ω, ω' gefunden sein werden, wenn man Ω zu finden im Stande ist.

Setzen wir nun ferner

$$41)\quad \begin{cases} h+\delta=2u, & h-\delta=2v; \\ h'+\delta'=2u', & h'-\delta'=2v'; \end{cases}$$

so ist

$$h=u+v,\quad \delta=u-v;$$
$$h'=u'+v',\quad \delta'=u'-v';$$

und folglich, weil bekanntlich

$$\cos\omega=\frac{\sin h-\sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi},$$

$$\cos\omega'=\frac{\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi}$$

ist:

$$\cos\omega=\frac{\sin(u+v)-\sin(u-v)\sin\varphi}{\cos(u-v)\cos\varphi},$$

$$\cos\omega'=\frac{\sin(u'+v')-\sin(u'-v')\sin\varphi}{\cos(u'-v')\cos\varphi}$$

oder

$$\cos\omega=\frac{\sin u\cos v(1-\sin\varphi)+\cos u\sin v(1+\sin\varphi)}{\cos(u-v)\cos\varphi},$$

$$\cos\omega' = \frac{\sin u'\cos v'(1-\sin\varphi)+\cos u'\sin v'(1+\sin\varphi)}{\cos(u'-v')\cos\varphi}.$$

tzen wir nun

$$42)\quad x=\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi},$$

ist

$$43)\quad \sin\varphi=\frac{1-x}{1+x}$$

l

$$\cos\varphi^2=1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2=\frac{4x}{(1+x)^2},$$

, weil offenbar x, $1+x$ und, da φ nicht grösser als 90° ist, φ positiv sind:

$$44)\quad \cos\varphi=\frac{2\sqrt{x}}{1+x};$$

h ist

$$1+\sin\varphi=\frac{2}{1+x},\quad \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}=\sqrt{x}.$$

h dem Obigen ist

$$\cos\omega=\frac{\sin u\cos v\,\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}+\cos u\sin v}{\cos(u-v)\,\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}},$$

$$\cos\omega'=\frac{\sin u'\cos v'\,\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}+\cos u'\sin v'}{\cos(u'-v')\,\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}};$$

o

$$\cos\omega=\frac{x\sin u\cos v+\cos u\sin v}{\cos(u-v).\sqrt{x}},$$

$$\cos\omega'=\frac{x\sin u'\cos v'+\cos u'\sin v'}{\cos(u'-v').\sqrt{x}}$$

r

$$\cos\omega.\sqrt{x}=\frac{x\sin u\cos v+\cos u\sin v}{\cos(u-v)},$$

$$\cos\omega'.\sqrt{x}=\frac{x\sin u'\cos v'+\cos u'\sin v'}{\cos(u'-v')}.$$

Folglich ist

$$(\cos\omega+\cos\omega')\sqrt{x}=2\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega').\sqrt{x}$$

$$=\left[\frac{\sin u\cos v}{\cos(u-v)}+\frac{\sin u'\cos v'}{\cos(u'-v')}\right]x+\frac{\cos u\sin v}{\cos(u-v)}+\frac{\cos u'\sin v'}{\cos(u'-v')},$$

$$(\cos\omega-\cos\omega')\sqrt{x}=-2\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega')\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega').\sqrt{x}$$

$$=\left[\frac{\sin u\cos v}{\cos(u-v)}-\frac{\sin u'\cos v'}{\cos(u'-v')}\right]x+\frac{\cos u\sin v}{\cos(u-v)}-\frac{\cos u'\sin v'}{\cos(u'-v')};$$

oder, wenn wir

$$45)\quad\begin{cases}M=\dfrac{\sin u\cos v}{\cos(u-v)},\; M'=\dfrac{\sin u'\cos v'}{\cos(u'-v')};\\[2ex] N=\dfrac{\cos u\sin v}{\cos(u-v)},\; N'=\dfrac{\cos u'\sin v'}{\cos(u'-v')}\end{cases}$$

setzen:

$$2\cos\frac{1}{2}\Theta\cos\frac{1}{2}\Omega.\sqrt{x}=(M+M')x+N+N',$$

$$-2\sin\frac{1}{2}\Theta\sin\frac{1}{2}\Omega.\sqrt{x}=(M-M')x+N-N'$$

oder

$$2\cos\frac{1}{2}\Omega.\sqrt{x}=\frac{M+M'}{\cos\frac{1}{2}\Theta}x+\frac{N+N'}{\cos\frac{1}{2}\Theta},$$

$$-2\sin\frac{1}{2}\Omega.\sqrt{x}=\frac{M-M'}{\sin\frac{1}{2}\Theta}x+\frac{N-N'}{\sin\frac{1}{2}\Theta};$$

d. i., wenn wir der Kürze wegen

$$
46)\quad \begin{cases} M_1 = \dfrac{M+M'}{\cos\frac{1}{2}\Theta}, & M_1' = \dfrac{M-M'}{\sin\frac{1}{2}\Theta}; \\[2ex] N_1 = \dfrac{N+N'}{\cos\frac{1}{2}\Theta}, & N_1' = \dfrac{N-N'}{\sin\frac{1}{2}\Theta} \end{cases}
$$

setzen:

$$
47)\quad \begin{cases} 2\cos\frac{1}{2}\Omega.\sqrt{x} = M_1 x + N_1, \\[1ex] -2\sin\frac{1}{2}\Omega.\sqrt{x} = M_1' x + N_1'; \end{cases}
$$

aus welchen zwei Gleichungen die beiden unbekannten Grössen x und Ω bestimmt werden müssen.

Quadrirt man, um Ω zu eliminiren, die beiden Gleichungen 47), und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung

$$4x = (M^2 + M_1'^2)x^2 + 2(M_1 N_1 + M_1' N_1')x + N_1^2 + N_1'^2$$

oder

$$48)\quad (M^2 + M_1'^2)x^2 + 2(M_1 N_1 + M_1' N_1' - 2)x + N_1^2 + N_1'^2 = 0,$$

und löst man nun diese quadratische Gleichung auf gewöhnliche Weise auf, so ergiebt sich:

$$49)\quad x=\frac{-(M_1N_1+M_1'N_1'-2)\pm\sqrt{(M_1N_1+M_1'N_1'-2)^2-(M_1^2+M_1'^2)(N_1^2+N_1'^2)}}{M_1^2+M_1'^2}$$

oder, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$50)\quad x=\frac{-(M_1N_1+M_1'N_1'-2)\pm\sqrt{-(M_1N_1'-M_1'N_1)^2-4(M_1N_1+M_1'N_1'-1)}}{M_1^2+M_1'^2}.$$

Hat man x gefunden, so kennt man auch φ, weil man … 43) und 44) die Formeln

$$51)\quad \sin\varphi=\frac{1-x}{1+x},\quad \cos\varphi=\frac{2\sqrt{x}}{1+x},\quad \operatorname{tang}\varphi=\frac{1-x}{2\sqrt{x}}$$

hat.

Bestimmt man $\sqrt{x}$ aus den beiden Gleichungen 47), so … hält man

$$52)\quad \sqrt{x}=\frac{M_1'N_1-M_1N_1'}{2(M_1'\cos\frac{1}{2}\Omega+M_1\sin\frac{1}{2}\Omega)},$$

und bestimmt man x aus denselben Gleichungen, so ergiebt sich

$$53)\quad x=-\frac{N_1\sin\frac{1}{2}\Omega+N_1'\cos\frac{1}{2}\Omega}{M_1\sin\frac{1}{2}\Omega+M_1'\cos\frac{1}{2}\Omega}.$$

Also hat man zur Bestimmung von Ω die Gleichung:

$$(M_1N_1'-M_1'N_1)^2$$
$$=-4\,(M_1\sin\tfrac{1}{2}\Omega+M_1'\cos\tfrac{1}{2}\Omega)(N_1\sin\tfrac{1}{2}\Omega+N_1'\cos\tfrac{1}{2}\Omega),$$

oder

$$(M_1N_1'-M_1'N_1)^2\,(\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2+\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2)$$
$$=-4(M_1\sin\tfrac{1}{2}\Omega+M_1'\cos\tfrac{1}{2}\Omega)(N_1\sin\tfrac{1}{2}\Omega+N_1'\cos\tfrac{1}{2}\Omega),$$

also

$$(M_1N_1'-M_1'N_1)^2(1+\tang\tfrac{1}{2}\Omega^2)$$
$$=-(M_1'+M_1\tang\tfrac{1}{2}\Omega)(N_1'+N_1\tang\tfrac{1}{2}\Omega),$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung die Gleichung:

$$\begin{aligned}54)\quad 0=\;&\{4M_1N_1+(M_1N_1'-M_1'N_1)^2\}\tang\tfrac{1}{2}\Omega^2\\&+4(M_1N_1'+M_1'N_1)\tang\tfrac{1}{2}\Omega\\&+4M_1'N_1'+(M_1N_1'-M_1'N_1)^2,\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}55)\quad \tang\tfrac{1}{2}\Omega^2+\frac{4(M_1N_1'+M_1'N_1)}{4M_1N_1+(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}\tang\tfrac{1}{2}\Omega\\=-\frac{4M_1'N_1'+(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{4M_1N_1+(M_1N_1'-M_1'N_1)^2},\end{aligned}$$

mittelst welcher Gleichung $\tang\frac{1}{2}\Omega$ bestimmt werden muss.

Löst man aber diese Gleichung auf gewöhnliche Weise auf, so erhält man nach einigen leichten Transformationen:

$$56)\quad \tang \frac{1}{2}\Omega = \frac{-2(M_1N_1' + M_1'N_1) \pm (M_1N_1' - M_1'N_1)\sqrt{-(M_1N_1' - M_1'N_1)^2 - 4(M_1N_1 + M_1'N_1' - 1)}}{4M_1N_1 + (M_1N_1' - M_1'N_1)^2}$$

Für die wirkliche Anwendung ist diese völlig directe Auflösung nicht geeignet. Jedoch kann man auf folgende Art zu Formeln gelangen, die für die logarithmische Rechnung sehr bequem sind.

Wir haben vorher die Gleichung

$$(M_1N_1'-M_1'N_1)^2$$
$$=-4(M_1\sin\frac{1}{2}\Omega+M_1'\cos\frac{1}{2}\Omega)(N_1\sin\frac{1}{2}\Omega+N_1'\cos\frac{1}{2}\Omega)$$

gehabt, die sich auf die Form

$$(\cos\frac{1}{2}\Omega+\frac{M_1}{M_1'}\sin\frac{1}{2}\Omega)(\cos\frac{1}{2}\Omega+\frac{N_1}{N_1'}\sin\frac{1}{2}\Omega)$$
$$=-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{4M_1'N_1'}$$

bringen lässt. Setzen wir nun

$$57)\quad \operatorname{tang}P=\frac{M_1}{M_1'},\ \operatorname{tang}Q=\frac{N_1}{N_1'};$$

so wird die vorhergehende Gleichung:

$$\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)$$
$$=-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{4M_1'N_1'}\cos P\cos Q=-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{4M_1N_1}\sin P\sin Q$$

d. i. nach einer bekannten goniometrischen Formel:

$$\cos(P-Q)+\cos(P+Q-\Omega)$$
$$=-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{2M_1'N_1'}\cos P\cos Q=-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{2M_1N_1}\sin P\sin Q,$$

und folglich

$$\cos(P+Q-\Omega)=-\cos(P-Q)-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{2M_1'N_1'}\cos P\cos Q$$
$$=-\cos(P-Q)-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{2M_1N_1}\sin P\sin Q,$$

oder

$$\cos(P+Q-\Omega)=-\cos(P-Q)-\frac{1}{2}M_1'N_1'\left(\frac{M_1}{M_1'}-\frac{N_1}{N_1'}\right)^2\cos P\cos Q$$
$$=-\cos(P-Q)-\frac{1}{2}M_1N_1\left(\frac{M_1'}{M_1}-\frac{N_1'}{N_1}\right)^2\sin P\sin Q,$$

d. i. nach dem Obigen

$$\cos(P+Q-\Omega)=-\cos(P-Q)-\frac{1}{2}M_1'N_1'(\tang P-\tang Q)^2\cos P\cos Q$$

$$=-\cos(P-Q)-\frac{1}{2}M_1N_1(\cot P-\cot Q)^2\sin P\sin Q$$

oder

$$58)\quad \cos(P+Q-\Omega)=-\cos(P-Q)-M_1'N_1'\frac{\sin(P-Q)^2}{2\cos P\cos Q}$$

$$=-\cos(P-Q)-M_1N_1\frac{\sin(P-Q)^2}{2\sin P\sin Q},$$

mittelst welcher Formeln Ω leicht berechnet werden kann.

Nach 53) ist

$$x=-\frac{N_1}{M_1}\cdot\frac{1+\frac{N_1'}{N_1}\cot\frac{1}{2}\Omega}{1+\frac{M_1'}{M_1}\cot\frac{1}{2}\Omega}$$

$$=-\frac{N_1'}{M_1'}\cdot\frac{1+\frac{N_1}{N_1'}\tang\frac{1}{2}\Omega}{1+\frac{M_1}{M_1'}\tang\frac{1}{2}\Omega},$$

also

$$x=-\frac{N_1}{M_1}\cdot\frac{1+\cot Q\cot\frac{1}{2}\Omega}{1+\cot P\cot\frac{1}{2}\Omega}$$

$$=-\frac{N_1'}{M_1'}\cdot\frac{1+\tang Q\tang\frac{1}{2}\Omega}{1+\tang P\tang\frac{1}{2}\Omega},$$

d. i.

$$59)\quad x=-\frac{N_1}{M_1}\cdot\frac{\sin P\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)}{\sin Q\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)}$$

$$=-\frac{N_1'}{M_1'}\cdot\frac{\cos P\cos(Q+\frac{1}{2}\Omega)}{\cos Q\cos(P+\frac{1}{2}\Omega)}.$$

Nach 52) ist

$$\sqrt{x}=\frac{N_1}{2\cos\frac{1}{2}\Omega}\cdot\frac{1-\frac{M_1}{M_1'}\cdot\frac{N_1'}{N_1}}{1+\frac{M_1}{M_1'}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega}$$

$$=\frac{N_1'}{2\sin\frac{1}{2}\Omega}\cdot\frac{\frac{M_1'}{M_1}\cdot\frac{N_1}{N_1'}-1}{\frac{M_1'}{M_1}\cot\frac{1}{2}\Omega+1},$$

also

$$\sqrt{x}=\frac{N_1}{2\cos\frac{1}{2}\Omega}\cdot\frac{1-\operatorname{tang}P\cot Q}{1+\operatorname{tang}P\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega}$$

$$=\frac{N_1'}{2\sin\frac{1}{2}\Omega}\cdot\frac{\cot P\operatorname{tang}Q-1}{\cot P\cot\frac{1}{2}\Omega+1},$$

d. i.

$$60)\quad \sqrt{x}=-\frac{N_1}{2\sin Q}\cdot\frac{\sin(P-Q)}{\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)}$$

$$=-\frac{N_1'}{2\cos Q}\cdot\frac{\sin(P-Q)}{\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)}.$$

Auch ist

$$\frac{1-x}{1+x}=\frac{(M_1+N_1)\sin\frac{1}{2}\Omega+(M_1'+N_1')\cos\frac{1}{2}\Omega}{(M_1-N_1)\sin\frac{1}{2}\Omega+(M_1'-N_1')\cos\frac{1}{2}\Omega}$$

$$=\frac{M_1(\sin\frac{1}{2}\Omega+\cot P\cos\frac{1}{2}\Omega)+N_1(\sin\frac{1}{2}\Omega+\cot Q\cos\frac{1}{2}\Omega)}{M_1(\sin\frac{1}{2}\Omega+\cot P\cos\frac{1}{2}\Omega)-N_1(\sin\frac{1}{2}\Omega+\cot Q\cos\frac{1}{2}\Omega)},$$

d. i.

$$61)\quad \sin\varphi=\frac{M_1\sin Q\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)+N_1\sin P\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)}{M_1\sin Q\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)-N_1\sin P\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)},$$

und setzt man also

$$62)\quad \tang R = -\frac{N_1 \sin P \cos(Q - \frac{1}{2}\Omega)}{M_1 \sin Q \cos(P - \frac{1}{2}\Omega)},$$

so ist

$$63)\quad \sin\varphi = \tang(45^0 - R),$$

also

$$\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi} = \frac{1-\tang(45^0-R)}{1+\tang(45^0-R)},$$

d. i.

$$\tang(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)^2 = \tang R,$$

und folglich

$$64)\quad \tang(45^0 - \frac{1}{2}\varphi) = \sqrt{\tang R},$$

oder nach dem Obigen,

$$65)\quad \tang(45^0 - \frac{1}{2}\varphi) = \sqrt{-\frac{N_1 \sin P \cos(Q - \frac{1}{2}\Omega)}{M_1 \sin Q \cos(P - \frac{1}{2}\Omega)}},$$

auch

$$66)\quad \tang(45^0 - \frac{1}{2}\varphi) = \sqrt{-\frac{N_1' \cos P \cos(Q - \frac{1}{2}\Omega)}{M_1' \cos Q \cos(P - \frac{1}{2}\Omega)}}.$$

Wenn man Ω mittelst einer der beiden Formeln 58) nämlich mittelst einer der beiden Formeln

$$\cos(P+Q-\Omega) = -\cos(P-Q) - M_1'N_1' \frac{\sin(P-Q)^2}{2\cos P \cos Q}$$
$$= -\cos(P-Q) - M_1 N_1 \frac{\sin(P-Q)^2}{2\sin P \sin Q}$$

berechnet, so hat man noch Folgendes zu bemerken:

Bezeichnen wir den kleinsten positiven Bogen, dessen Cosinus

$$-\cos(P-Q) - M_1'N_1' \frac{\sin(P-Q)^2}{2\cos P \cos Q}$$

oder

$$-\cos(P-Q)-M_1N_1\frac{\sin(P-Q)^2}{2\sin P\sin Q}$$

ist, durch U, so ist, wenn k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, bekanntlich

$$P+Q-\Omega=2k\pi\pm U,$$

also

$$\Omega=P+Q\mp U-2k\pi.$$

Weil nun aber

$$\Omega=\omega+\omega'$$

ist, so ist

$$0<\Omega<4\pi,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$0<P+Q\mp U-2k\pi<4\pi,$$

folglich

$$-(P+Q\mp U)<-2k\pi<4\pi-(P+Q\mp U),$$

und hieraus

$$\frac{P+Q\mp U}{2\pi}-2<k<\frac{P+Q\mp U}{2\pi}.$$

Aus

$$\frac{P+Q-U}{2\pi}-2<k<\frac{P+Q-U}{2\pi}$$

ergeben sich zwei um die Einheit verschiedene Werthe von k, welche wir durch λ, $\lambda+1$ bezeichnen wollen; und eben so ergeben sich aus

$$\frac{P+Q+U}{2\pi}-2<k<\frac{P+Q+U}{2\pi}$$

zwei um die Einheit verschiedene Werthe von k, welche wir durch μ, $\mu+1$ bezeichnen wollen. Also haben wir nach dem Obigen für Ω die folgenden vier Werthe:

$$\Omega=\begin{cases}P+Q-U-2\lambda\pi\\ P+Q-U-2(\lambda+1)\pi\end{cases}$$

und

$$\Omega = \begin{cases} P + Q + U - 2\mu\pi \\ P + Q + U - 2(\mu+1)\pi. \end{cases}$$

Diesem entsprechend ist:

$$P - \frac{1}{2}\Omega = \begin{cases} \frac{1}{2}(P - Q + U) + \lambda\pi \\ \frac{1}{2}(P - Q + U) + (\lambda+1)\pi \end{cases}$$

und

$$P - \frac{1}{2}\Omega = \begin{cases} \frac{1}{2}(P - Q - U) + \mu\pi \\ \frac{1}{2}(P - Q - U) + (\mu+1)\pi; \end{cases}$$

ferner

$$Q - \frac{1}{2}\Omega = \begin{cases} \frac{1}{2}(Q - P + U) + \lambda\pi \\ \frac{1}{2}(Q - P + U) + (\lambda+1)\pi \end{cases}$$

und

$$Q - \frac{1}{2}\Omega = \begin{cases} \frac{1}{2}(Q - P - U) + \mu\pi \\ \frac{1}{2}(Q - P - U) + (\mu+1)\pi; \end{cases}$$

folglich

$$\cos(P - \frac{1}{2}\Omega) = \begin{cases} (-1)^{\lambda}.\cos\frac{1}{2}(P - Q + U) \\ (-1)^{\lambda+1}.\cos\frac{1}{2}(P - Q + U) \end{cases}$$

und

$$\cos(P - \frac{1}{2}\Omega) = \begin{cases} (-1)^{\mu}.\cos\frac{1}{2}(P - Q - U) \\ (-1)^{\mu+1}.\cos\frac{1}{2}(P - Q - U); \end{cases}$$

ferner

$$\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)=\begin{cases}(-1)^{\lambda}.\cos\frac{1}{2}(Q-P+U)\\(-1)^{\lambda+1}.\cos\frac{1}{2}(Q-P+U)\end{cases}$$

und

$$\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)=\begin{cases}(-1)^{\mu}.\cos\frac{1}{2}(Q-P-U)\\(-1)^{\mu+1}.\cos\frac{1}{2}(Q-P-U).\end{cases}$$

Folglich ist nach 60)

$$\sqrt{x}=\begin{cases}-(-1)^{\lambda}.\dfrac{N_1}{2\sin Q}\cdot\dfrac{\sin(P-Q)}{\cos\frac{1}{2}(P-Q+U)}\\-(-1)^{\lambda+1}.\dfrac{N_1}{2\sin Q}\cdot\dfrac{\sin(P-Q)}{\sin\frac{1}{2}(P-Q+U)}\end{cases}$$

und

$$\sqrt{x}=\begin{cases}-(-1)^{\mu}.\dfrac{N_1}{2\sin Q}\cdot\dfrac{\sin(P-Q)}{\cos\frac{1}{2}(P-Q-U)}\\-(-1)^{\mu+1}.\dfrac{N_1}{2\sin Q}\cdot\dfrac{\sin(P-Q)}{\cos\frac{1}{2}(P-Q-U)}\end{cases}.$$

Sowohl die beiden ersten, als auch die beiden letzten Werthe von $\sqrt{x}$ haben entgegengesetzte Vorzeichen. Nun ist aber im Obigen $\sqrt{x}$ immer als positiv betrachtet worden, und man hat daher hierin offenbar ein sicheres Kriterium, ob man $k=\lambda$ oder $k=\lambda+1$, und ob man $k=\mu$ oder $k=\mu+1$, d. h. ob man

$$\Omega=P+Q-U-2\lambda\pi$$

oder

$$\Omega=P+Q-U-2(\lambda+1)\pi,$$

und ob man

$$\Omega=P+Q+U-2\mu\pi$$

oder

$$\Omega=P+Q+U-2(\mu+1)\pi$$

setzen soll, so dass man also für Ω immer nur zwei Werthe erhält, wie es die Natur der Aufgabe erfordert. Als einfache Regel hat man sich zu merken, dass man von den vier Werthen, welche Ω nach dem Obigen haben kann, jederzeit die beiden zu nehmen hat, welche für

$$\sqrt{x}=-\frac{N_1}{2\sin Q}\cdot\frac{\sin(P-Q)}{\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)}$$
$$=-\frac{N_1'}{2\cos Q}\cdot\frac{\sin(P-Q)}{\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)}$$

positive Werthe liefern.

Nach dem Vorhergehenden ist, wie man leicht findet, immer

$$\frac{\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)}{\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)}=\frac{\cos\frac{1}{2}(Q-P+U)}{\cos\frac{1}{2}(P-Q+U)}$$

oder

$$\frac{\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)}{\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)}=\frac{\cos\frac{1}{2}(Q-P-U)}{\cos\frac{1}{2}(P-Q-U)},$$

also

$$\frac{\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)}{\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)}=\frac{\cos\frac{1}{2}(Q-P\pm U)}{\cos\frac{1}{2}(P-Q\pm U)},$$

und folglich nach 66):

$$67)\quad \tang(45^0-\frac{1}{2}\varphi)=\sqrt{-\frac{N_1'\cos P\cos\frac{1}{2}(Q-P\pm U)}{M_1'\cos Q\cos\frac{1}{2}(P-Q\pm U)}}$$

oder nach 65):

$$68)\quad \tang(45^0-\frac{1}{2}\varphi)=\sqrt{-\frac{N_1\sin P\cos\frac{1}{2}(Q-P\pm U)}{M_1\sin Q\cos\frac{1}{2}(P-Q\pm U)}},$$

wo, wie wir wissen, U den kleinsten positiven Bogen bezeichnet, welcher der Gleichung

$$69)\quad \cos U = -\cos(P-Q) - M_1'N_1'\frac{\sin(P-Q)^2}{2\cos P\cos Q}$$
$$= -\cos(P-Q) - M_1N_1\frac{\sin(P-Q)^2}{2\sin P\sin Q}$$

genügt. Bei der Bestimmung von φ mittelst der Gleichung 67) oder 68) kann keine Zweideutigkeit bleiben, da offenbar

$$0 < 45^0 - \frac{1}{2}\varphi < 90^0,$$

d. h. $45^0 - \frac{1}{2}\varphi$ immer im ersten Quadranten zu nehmen ist.

§. 9.

Annähernde oder indirecte Auflösungen unserer Aufgabe lassen sich mehrere finden; auf der See wird jedoch meistens die Methode von Douwes gebraucht, weshalb es sich der Mühe verlohnen wird, diese Methode hier, jedoch in verallgemeinerter Gestalt, weil das Verfahren von Douwes nur für das Problem in seiner einfacheren Gestalt gilt, ausführlich zu entwickeln, was um so nöthiger sein dürfte, weil die gewöhnlichen Entwickelungen dieser Methode, wie es mir scheint, keine ganz deutliche Einsicht in das eigentliche Wesen derselben gewähren.

Wir wollen daher jetzt annehmen, dass φ, ω, ω' nur Näherungswerthe der Polhöhe und der beiden Stundenwinkel seien, und wollen die genauen Werthe dieser Elemente durch $\varphi + \Delta\varphi$, $\omega + \Delta\omega$, $\omega' + \Delta\omega'$ bezeichnen. Dann haben wir nach 11) die beiden Gleichungen:

$$70)\quad \begin{cases} \cos(\omega+\Delta\omega) = \dfrac{\sin h - \sin\delta\sin(\varphi+\Delta\varphi)}{\cos\delta\cos(\varphi+\Delta\varphi)}, \\ \cos(\omega'+\Delta\omega') = \dfrac{\sin h' - \sin\delta'\sin(\varphi+\Delta\varphi)}{\cos\delta'\cos(\varphi+\Delta\varphi)}; \end{cases}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$71)\quad (\varphi) = \varphi + \Delta\varphi,\ (\omega) = \omega + \Delta\omega,\ (\omega') = \omega' + \Delta\omega'$$

setzen, die beiden Gleichungen:

$$72)\quad \begin{cases} \cos(\omega) = \dfrac{\sin h - \sin\delta\sin(\varphi)}{\cos\delta\cos(\varphi)}, \\ \cos(\omega') = \dfrac{\sin h' - \sin\delta'\sin(\varphi)}{\cos\delta'\cos(\varphi)}. \end{cases}$$

Entwickeln wir nun die Grössen auf den rechten Seiten dieser Gleichungen nach den Potenzen von $\varDelta\varphi$ und bleiben bei den ersten Potenzen von $\varDelta\varphi$ stehen, so erhalten wir zuerst:

$$\cos(\omega)=\frac{\sin h-\sin\delta\sin\varphi-\sin\delta\cos\varphi\varDelta\varphi}{\cos\delta\cos\varphi-\cos\delta\sin\varphi\varDelta\varphi},$$

$$\cos(\omega')=\frac{\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi-\sin\delta'\cos\varphi\varDelta\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi-\cos\delta'\sin\varphi\varDelta\varphi};$$

also ferner

$$\cos(\omega)=$$
$$\frac{(\sin h-\sin\delta\sin\varphi-\sin\delta\cos\varphi\varDelta\varphi)(\cos\delta\cos\varphi+\cos\delta\sin\varphi\varDelta\varphi)}{(\cos\delta\cos\varphi-\cos\delta\sin\varphi\varDelta\varphi)(\cos\delta\cos\varphi+\cos\delta\sin\varphi\varDelta\varphi)},$$

$$\cos(\omega')=$$
$$\frac{(\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi-\sin\delta'\cos\varphi\varDelta\varphi)(\cos\delta'\cos\varphi+\cos\delta'\sin\varphi\varDelta\varphi)}{(\cos\delta'\cos\varphi-\cos\delta'\sin\varphi\varDelta\varphi)(\cos\delta'\cos\varphi+\cos\delta'\sin\varphi\varDelta\varphi)};$$

d. i., wenn wir immer bei den ersten Potenzen von $\varDelta\varphi$ stehen bleiben:

$$\cos(\omega)=\frac{\sin h-\sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi}$$
$$-\frac{\sin\delta\cos\varphi^2-\sin\varphi(\sin h-\sin\delta\sin\varphi)}{\cos\delta\cos\varphi^2}\varDelta\varphi,$$

$$\cos(\omega')=\frac{\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi}$$
$$-\frac{\sin\delta'\cos\varphi^2-\sin\varphi(\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi)}{\cos\delta'\cos\varphi^2}\varDelta\varphi;$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt:

$$73)\quad\begin{cases}\cos(\omega)=\dfrac{\sin h-\sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi}-\dfrac{\sin\delta-\sin h\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi^2}\varDelta\varphi,\\[2ex]\cos(\omega')=\dfrac{\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi}-\dfrac{\sin\delta'-\sin h'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi^2}\varDelta\varphi.\end{cases}$$

Hieraus erhält man ferner leicht:

$$\cos(\omega)-\cos(\omega')=-2\sin\tfrac{1}{2}\{(\omega)-(\omega')\}\sin\tfrac{1}{2}\{(\omega)+(\omega')\}$$
$$=\frac{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}{\cos\delta\cos\delta'\cos\varphi}$$
$$-\frac{\sin(\delta-\delta')-(\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{\cos\delta\cos\delta'\cos\varphi^2}\varDelta\varphi,$$

$$\cos(\omega)+\cos(\omega')=2\cos\frac{1}{2}\{(\omega)-(\omega')\}\cos\frac{1}{2}\{(\omega)+(\omega')\}$$

$$=\frac{\sin h\cos\delta'+\sin h'\cos\delta-\sin(\delta+\delta')\sin\varphi}{\cos\delta\cos\delta'\cos\varphi}$$

$$-\frac{\sin(\delta+\delta')-(\sin h\cos\delta'+\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{\cos\delta\cos\delta'\cos\varphi^2}\Delta\varphi.$$

Nach 40) ist aber

$$(\omega)-(\omega')=\Theta,$$

wo Θ nach den Gleichungen 1) und 2) eine bekannte Grösse ist; also werden die beiden vorhergehenden Gleichungen:

$$\sin\frac{1}{2}\{(\omega)+(\omega')\}=-\frac{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi}$$

$$+\frac{\sin(\delta-\delta')-(\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi^2}\Delta\varphi,$$

$$\sin\frac{1}{2}\{(\omega)+(\omega')\}=\frac{\sin h\cos\delta'+\sin h'\cos\delta-\sin(\delta+\delta')\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\cos\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi}$$

$$-\frac{\sin(\delta+\delta')-(\sin h\cos\delta'+\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\cos\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi^2}\Delta\varphi;$$

oder, wenn man die Grössen auf den linken Seiten der Gleichheitszeichen nach Potenzen von $\Delta\omega+\Delta\omega'$ entwickelt, und bei den ersten Potenzen dieser Grösse stehen bleibt:

$$\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega')+\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega').(\Delta\omega+\Delta\omega')$$

$$=-\frac{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi}$$

$$+\frac{\sin(\delta-\delta')-(\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi^2}\Delta\varphi,$$

$$\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega').\ \Delta\omega+\Delta\omega')$$

$$=\frac{\sin h\cos\delta'+\sin h'\cos\delta-\sin(\delta+\delta')\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\cos\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi}$$

$$-\frac{\sin(\delta+\delta')-(\sin h\cos\delta'+\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\cos\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi^2}\Delta\varphi.$$

Legt man nun der Rechnung einen bekannten Näherungswerth der Polhöhe zum Grunde, den wir wie bisher durch φ bezeichnen wollen, und bestimmt die Näherungswerthe ω, ω' der beiden Stundenwinkel mittelst der beiden Gleichungen:

$$74)\quad\begin{cases}\omega-\omega'=\Theta,\\ \sin\frac{1}{2}(\omega+\omega')=-\dfrac{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi};\end{cases}$$

so ist, weil die richtige Gleichung

$$(\omega)-(\omega')=(\omega+\Delta\omega)-(\omega'+\Delta\omega')=\omega-\omega'+\Delta\omega-\Delta\omega'=\Theta$$

ist,

$$\Delta\omega-\Delta\omega'=0,\ \Delta\omega=\Delta\omega';$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$75)\quad \Delta\omega=\Delta\omega'=\frac{\sin(\delta-\delta')-(\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\sin\frac{1}{2}\Theta.\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')\cos\varphi^2}\Delta\varphi$$

Man könnte mit demselben Grade der Genauigkeit auch ω, ω' mittelst der Gleichungen

$$76)\quad\begin{cases}\omega-\omega'=\Theta,\\ \cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')=\dfrac{\sin h\cos\delta'+\sin h'\cos\delta-\sin(\delta+\delta')\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\cos\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi}\end{cases}$$

bestimmen, und hätte dann nach dem Vorhergehenden:

$$77)\quad \Delta\omega=\Delta\omega'=\frac{\sin(\delta+\delta')-(\sin h\cos\delta'+\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\cos\frac{1}{2}\Theta\ \sin\frac{1}{2}(\omega+\omega')\cos\varphi^2}\Delta\varphi.$$

Die erste Methode ist jedoch in dem Falle, wenn $\delta=\delta'$ ist, ihrer grösseren Einfachheit wegen vorzuziehen, weil in diesem Falle das Glied $\sin(\delta-\delta')$ verschwindet, und wird daher im Folgenden vorzugsweise in's Auge gefasst werden. Bei der zweiten Methode verschwindet nämlich in dem in Rede stehenden Falle das Glied $\sin(\delta+\delta')$ nicht, weshalb dieselbe in diesem Falle nicht so einfache und zur Rechnung bequeme Ausdrücke wie die erste Methode liefert, was sich weiter unten deutlich zeigen wird. In dem allgemeinen Falle, wenn nicht $\delta=\delta'$ ist, würde keiner der beiden Methoden ein besonderer Vorzug vor der anderen zukommen.

Ferner ist nach 72)

$$1-\cos(\omega)=2\sin\frac{1}{2}(\omega)^2=\frac{\cos\{\delta-(\varphi)\}-\sin h}{\cos\delta\cos(\varphi)},$$

$$1-\cos(\omega')=2\sin\frac{1}{2}(\omega')^2=\frac{\cos\{\delta'-(\varphi)\}-\sin h'}{\cos\delta'\cos(\varphi)}$$

und

$$1+\cos(\omega)=2\cos\frac{1}{2}(\omega)^2=\frac{\cos\{\delta+(\varphi)\}+\sin h}{\cos\delta\cos(\varphi)},$$

$$1+\cos(\omega')=2\cos\frac{1}{2}(\omega')^2=\frac{\cos\{\delta'+(\varphi)\}+\sin h'}{\cos\delta'\cos(\varphi)};$$

also

$$\cos\{\delta-(\varphi)\}=\sin h+2\cos\delta\cos(\varphi)\sin\frac{1}{2}(\omega)^2,$$

$$\cos\{\delta'-(\varphi)\}=\sin h'+2\cos\delta'\cos(\varphi)\sin\frac{1}{2}(\omega')^2$$

und

$$\cos\{\delta+(\varphi)\}=-\sin h+2\cos\delta\cos(\varphi)\cos\frac{1}{2}(\omega)^2,$$

$$\cos\{\delta'+(\varphi)\}=-\sin h'+2\cos\delta'\cos(\varphi)\cos\frac{1}{2}(\omega')^2;$$

von welchen vier Gleichungen wir aber jetzt der Kürze wegen nur die erste etwas weiter betrachten wollen.

Entwickeln wir nämlich die rechte Seite der ersten dieser vier Gleichungen nach Potenzen von $\Delta\omega$ und $\Delta\varphi$, und bleiben bei den die ersten Potenzen von $\Delta\omega$ und $\Delta\varphi$ enthaltenden Gliedern stehen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\cos\{\delta-(\varphi)\}= & \sin h+2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2\\ & +\cos\delta\cos\varphi\sin\omega\Delta\omega-2\cos\delta\sin\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2\Delta\varphi,\end{aligned}$$

und wenn wir nun für $\Delta\omega$ seinen Werth aus 75) einführen, so ergiebt sich:

$$78)\quad \cos\{\delta-(\varphi)\}=\sin h+2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

$$-2\cos\delta\sin\frac{1}{2}\omega\left\{\sin\varphi\sin\frac{1}{2}\omega-\cos\frac{1}{2}\omega\frac{\sin(\delta-\delta')-(\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')\cos\varphi}\right\}\Delta\varphi.$$

Weil aber nach 74)

$$2\cos\delta\cos\delta'\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi=-\frac{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}{\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega')}$$

ist, so wird vorstehende Gleichung:

$$79)\quad \cos\{\delta-(\varphi)\}=\sin h+2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

$$-2\cos\delta\sin\frac{1}{2}\omega\left\{\sin\varphi\sin\frac{1}{2}\omega+\cos\frac{1}{2}\omega\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega+\omega')\frac{\sin(\delta-\delta')-(\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}\right\}\Delta\varphi,$$

oder auch, wie man mittelst einiger Transformationen leicht findet:

$$80)\quad \cos\{\delta-(\varphi)\}=\sin h+2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

$$-2\cos\delta\sin\frac{1}{2}\omega\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin(\delta-\delta')\sin\frac{1}{2}\omega\cos\varphi^2}{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}\\[2ex] +\dfrac{\sin(\delta-\delta')-(\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}\cdot\dfrac{\sin\frac{1}{2}\omega'}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}\end{array}\right\}\Delta\varphi.$$

Weil aber

$$\cos\{\delta-(\varphi)\}=\cos(\delta-\varphi)+\sin(\delta-\varphi)\Delta\varphi$$

ist, so ist auch

$$81)\quad \cos(\delta-\varphi)-\sin h-2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

$$=-2\cos\delta\sin\frac{1}{2}\omega\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin(\delta-\varphi)}{2\cos\delta\sin\frac{1}{2}\omega}\\[2ex] +\dfrac{\sin(\delta-\delta')\sin\frac{1}{2}\omega\cos\varphi^2}{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}\\[2ex] +\dfrac{\sin(\delta-\delta')-(\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}\cdot\dfrac{\sin\frac{1}{2}\omega'}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}\end{array}\right\}\Delta\varphi.$$

Auch ist nach 79), wie man mittelst einiger einfachen Transformationen leicht findet:

$$82)\quad \cos(\delta-\varphi)-\sin h-2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\,\omega^2$$

$$=-\left\{\begin{array}{l}\sin\delta\cos\varphi-\cos\delta\sin\varphi\cos\omega\\ +\cos\delta\sin\omega\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\,(\omega+\omega')\,\dfrac{\sin(\delta-\delta')-(\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}\end{array}\right\}\Delta\varphi.$$

Für $\delta=\delta'$, d. h. wenn man einen und denselben Stern Mal beobachtet hat, werden alle obigen Formeln ungemein einfacher.

Die Formeln 74), aus denen ω, ω' bestimmt werden mi werden in diesem Falle:

$$83)\quad \left\{\begin{array}{l}\omega-\omega'=\Theta,\\ \sin\frac{1}{2}\,(\omega+\omega')=\dfrac{\sin h'-\sin h}{2\cos\delta\sin\frac{1}{2}\,\Theta\cos\varphi};\end{array}\right.$$

oder

$$84)\quad \begin{cases} \omega - \omega' = \Theta, \\ \sin\frac{1}{2}(\omega + \omega') = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(h'-h)\cos\frac{1}{2}(h'+h)}{\cos\delta\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi}. \end{cases}$$

Die Formel 80) wird:

$$85)\quad \cos\{\delta-(\varphi)\}$$

$$=\sin h + 2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2 + 2\cos\delta\sin\varphi\frac{\sin\frac{1}{2}\omega\sin\frac{1}{2}\omega'}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}\Delta\varphi,$$

und die Gleichung 81) wird:

$$86)\quad \cos(\delta-\varphi)-\sin h-2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

$$=-\left\{\sin(\delta-\varphi)-2\cos\delta\sin\varphi\frac{\sin\frac{1}{2}\omega\sin\frac{1}{2}\omega'}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}\right\}\Delta\varphi;$$

oder, wie man hieraus leicht findet:

$$87)\quad \cos(\delta-\varphi)-\sin h-2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

$$=\frac{\sin(\delta+\varphi)\sin\frac{1}{2}\omega\sin\frac{1}{2}\omega'-\sin(\delta-\varphi)\cos\frac{1}{2}\omega\cos\frac{1}{2}\omega'}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}\Delta\varphi;$$

oder auch

$$88)\quad \cos(\delta-\varphi)-\sin h-2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

$$=\frac{\cos\delta\sin\varphi\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')-\sin\delta\cos\varphi\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}\Delta\varphi;$$

oder

$$89)\quad \cos(\delta-\varphi)-\sin h-2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

$$=-\left\{\sin\delta\cos\varphi-\cos\delta\sin\varphi\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}\right\}\Delta\varphi.$$

Also ist:

$$90)\quad \Delta\varphi=-\frac{\cos(\delta-\varphi)-\sin h-2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2}{\sin(\delta-\varphi)-2\cos\delta\sin\varphi\,\dfrac{\sin\frac{1}{2}\omega\sin\frac{1}{2}\omega'}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}}$$

$$=\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')\,\frac{\cos(\delta-\varphi)-\sin h-2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2}{\sin(\delta+\varphi)\sin\frac{1}{2}\omega\sin\frac{1}{2}\omega'-\sin(\delta-\varphi)\cos\frac{1}{2}\omega\cos\frac{1}{2}\omega'}$$

$$=\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')\,\frac{\cos(\delta-\varphi)-\sin h-2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2}{\cos\delta\sin\varphi\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')-\sin\delta\cos\varphi\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}$$

$$=-\frac{\cos(\delta-\varphi)-\sin h-2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2}{\sin\delta\cos\varphi-\cos\delta\sin\varphi\,\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}}.$$

Endlich ist nach 75):

$$91)\quad \Delta\omega=\Delta\omega'=\frac{(\sin h'-\sin h)\sin\varphi}{2\cos\delta\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')\cos\varphi^2}\Delta\varphi$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(h'-h)\cos\frac{1}{2}(h'+h)\sin\varphi}{\cos\delta\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')\cos\varphi^2}\Delta\varphi,$$

oder nach 84):

$$92)\quad \Delta\omega=\Delta\omega'=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega+\omega')\operatorname{tang}\varphi\,\Delta\varphi.$$

Wie man sich nun der vorhergehenden Formeln zur Auflösung unserer Aufgabe zu bedienen hat, wollen wir jetzt bloss in dem Falle zeigen, wenn $\delta=\delta'$ ist, weil daraus dann von selbst hervorgehen wird, wie man sich in dem allgemeineren Falle, wenn nicht $\delta = \delta'$ ist, zu verhalten hat.

Mit einem genäherten Werthe φ der Polhöhe berechnet man mittelst der Formeln 83) oder 84) die genäherten Werthe ω, ω' der Stundenwinkel; dann sucht man die Verbesserung $\Delta\varphi$ der Polhöhe mittelst der Formeln 90), und hierauf die Verbesserungen $\Delta\omega = \Delta\omega'$ der Stundenwinkel mittelst der Formel 92), und findet auf diese Weise die zweiten Näherungswerthe $\varphi + \Delta\varphi$, $\omega + \Delta\omega$, $\omega' + \Delta\omega'$ der Polhöhe und der Stundenwinkel. Dass man dann ganz auf dieselbe Weise von diesen zweiten Näherungswerthen zu dritten Näherungswerthen u. s. w. übergehen kann, versteht sich von selbst und bedarf hier keiner weiteren Erläuterung.

So wie so eben gezeigt worden ist, welches nach meiner Meinung das allein wirklich richtige Verfahren sein dürfte, verfährt man aber bei der Methode von Douwes nicht, sondern auf folgende Art.

Dabei hat man zuerst und vor allen Dingen als eine Hauptbedingung bei dieser Methode, durch deren Erfüllung derselben allein ein einigermassen glücklicher Erfolg gesichert werden kann, zu merken, dass die eine Höhe des beobachteten Sterns, etwa die oben durch h bezeichnete Höhe desselben, so nahe wie irgend möglich bei dem Durchgange dieses Sterns durch den Meridian genommen werden muss, wobei es sich dann nach §. 7. ferner ganz von selbst versteht, dass die andere oben durch h' bezeichnete Höhe so nahe wie möglich bei einem Azimuth des Sterns von 90^0 oder 270^0 genommen werden muss, welche Regeln man bei der Anwendung der Methode von Douwes hauptsächlich beobachten und in keinem Falle aus den Augen verlieren darf.

Dies vorausgesetzt, berechnet man nun aus der genäherten Polhöhe φ zuerst die genäherten Stundenwinkel ω, ω' mittelst der Formeln

$$\omega - \omega' = \Theta,$$

$$\sin\frac{1}{2}(\omega + \omega') = \frac{\sin h' - \sin h}{2\cos\delta \sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi}$$

oder

$$\omega - \omega' = \Theta,$$

$$\sin\frac{1}{2}(\omega + \omega') = \frac{\sin\frac{1}{2}(h' - h)\cos\frac{1}{2}(h' + h)}{\cos\delta\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi};$$

oder auch, was ganz dasselbe ist, mittelst der Formeln

$$\omega'-\omega=\Theta,$$

$$\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega)=\frac{\sin\frac{1}{2}(h-h')\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi},$$

wo nur Θ jetzt in einer etwas andern Bedeutung wie vorhe[...] nommen worden ist, was aber ganz verstattet ist, wie sog[...] erhellen wird.

Weil man nun, was nie zu vergessen ist, annimmt, das eine Höhe h des Sterns sehr nahe bei dem Durchgange [...] Sterns durch den Meridian genommen worden ist, so ist in [...] Formel 85), nämlich in der Formel

$$\cos\{\delta-(\varphi)\}$$

$$=\sin h+2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2+2\cos\delta\sin\varphi\frac{\sin\frac{1}{2}\omega\sin\frac{1}{2}\omega'}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}\Delta\varphi,$$

da $\sin\frac{1}{2}\omega$ der Null sehr nahe kommt, und, wenn man die [...] Höhe h' sehr nahe bei einem Azimuth von 90° oder 270° [...] men hat, $\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')$ immer, wie leicht erhellet, eine vo[...] merklich verschiedene Grösse sein wird, der absolute Wer[...] Gliedes

$$2\cos\delta\sin\varphi\frac{\sin\frac{1}{2}\omega\sin\frac{1}{2}\omega'}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}\Delta\varphi$$

jederzeit sehr klein, so dass man dieses Glied in der [...] Formel vernachlässigen, und ohne merklichen Fehler

$$\cos\{\delta-(\varphi)\}=\sin h+2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

setzen, mittelst dieser Formel also unmittelbar den zweite[...] herungswerth $(\varphi)=\varphi+\Delta\varphi$ der Polhöhe berechnen kann. Ha[...] aber auf diese Weise $\Delta\varphi$ gefunden, so kann mann ferner [...] wozu übrigens Douwes, der sein Hauptaugenmerk auf di[...] stimmung der Polhöhe oder der Breite richtet, eine bes[...] Anleitung nicht ertheilt, die Correctionen $\Delta\omega=\Delta\omega'$ der St[...] winkel sehr leicht mittelst der Formel

$$\Delta\omega=\Delta\omega'=\tan\frac{1}{2}(\omega+\omega')\tan\varphi\,\Delta\varphi$$

:hnen. Wie nöthig es, wenn die Methode von Douwes einen
ermassen glücklichen Erfolg versprechen soll, ist, dass die
n Höhen h, h' nach der oben gegebenen Anweisung genom-
werden, wird aus der obigen Darstellung mit hinreichender
lichkeit hervorgehen.

)ouwes hat seine Methode zuerst in dem ersten Bande der Ab-
. der Gesellsch. d. Wissenschaften zu Harlem*) bekannt gemacht,
ie ist auf der See allgemein in Gebrauch und findet sich in
Lehrbüchern der Schifffahrtskunde, weshalb wohl auch zu-
n das ganze Problem die Aufgabe von Douwes genannt
obgleich, wie in §. 1. gezeigt worden ist, keineswegs Dou-
der erste Erfinder der Aufgabe ist, sondern nur zuerst eine
n praktischen Gebrauch zweckmässige Auflösung derselben
en hat. Hauptsächlich bekannt scheint aber die Methode
Douwes zuerst durch den Beweis geworden zu sein, wel-
für dieselbe Pemberton in einer in den Philosophical
sactions. Vol. LI. Part II. 1760. p. 910. unter dem
Some Considerations on a late Treatise intitu-
A new Set of Logarithmic Solar Tables etc. intended
more commodious Method of finding the Lati-
at Sea, by Two Observations of the Sun; *by
mberton, M. D. R. S. Lond. et R. A. Berol. S.* erschie-
Abhandlung gegeben hat.

ouwes hat die Anwendung seiner Methode durch Tafeln
itert, die man z. B. in den Tables requisite to be
with the nautical ephemeris for finding the lati-
and longitude at sea. II edition. p. 58.—p. 80., wor-
h mich hier beziehen will, findet.**) Um die Einrichtung
en Gebrauch dieser Tafeln einigermassen zu erläutern, stelle
lie obigen Formeln, indem man sich nur erinnert, dass im
den $\omega-\omega'$ immer den Werth Θ hat, unter der Form

$$2\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega)=\sec\delta\sec\varphi(\sin h-\sin h')\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(\omega'-\omega),$$

$$\cos\{\delta-(\varphi)\}=\sin h+\frac{2\sin\frac{1}{2}\omega^2}{\sec\delta\sec\varphi};$$

nter der Form

M. s. die Uebersetzung von Kästner. Theil I. Altenburg.
S. 87.

) Man findet diese oder ähnliche Tafeln aber auch in den mei-
chifffahrtslehrbüchern, z. B. in dem schon in §. 1. angeführten
von Bobrik. Thl. III. Taf. LXI. und in andern bekannten
n dieser Art.

$$\log.2\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega)$$

$$=(\log\sec\delta+\log\sec\varphi)+\log(\sin h-\sin h')+\log\mathrm{cosec}\frac{1}{2}(\omega'-\omega),$$

$$\cos\{\delta-(\varphi)\}=\sin h+\frac{2\sin\frac{1}{2}\omega^2}{\sec\delta\sec\varphi}$$

dar. Die Summe $\log\sec\delta+\log\sec\varphi$ heisst Log. ratio, $\log\mathrm{cosec}\frac{1}{2}(\omega'-\omega)$ heisst Log. half elapsed time, $\log.2\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega)$ wird Log. middle time genannt, und $\log.2\sin\frac{1}{2}\omega^2$ heisst Log. rising. Für die in Zeit ausgedrückten Stundenwinkel enthalten die Tafeln von Douwes eine Tafel für Log. half elapsed time von 0^u bis $5^u.50^m$, eine Tafel für Log. middle time ebenfalls von 0^u bis $5^u.50^m$, und eine Tafel für Log. rising für 8 Stunden von 10 zu 10 Secunden. Der Halbmesser ist 100000. Die Argumente der Tafeln sind respective $\frac{1}{2}(\omega'-\omega)$, $\frac{1}{2}(\omega'+\omega)$, ω in Zeit. Man berechne nun mittelst der gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln Log. ratio, ziehe den natürlichen $\sin h'$ von dem natürlichen $\sin h$ ab und schlage $\log(\sin h-\sin h')$ in der Logarithmentafel auf, nehme Log. half elapsed time aus den Tafeln von Douwes, und addire die auf diese Weise erhaltenen Zahlen zusammen, so ist nach dem Obigen die Summe Log. middle time. Mit diesem Log. middle time gehe man in die betreffende Tafel von Douwes ein, und nehme aus derselben $\frac{1}{2}(\omega'+\omega)$, worauf es, da man auch $\frac{1}{2}(\omega'-\omega)$ kennt, leicht ist, ω zu berechnen. Hierauf nehme man aus der betreffenden Tafel von Douwes den entsprechenden Log. rising, ziehe davon Log. ratio ab, und schlage zu dem durch diese Differenz dargestellten Logarithmus in der Logarithmentafel die zugehörige Zahl auf, welche man hierauf zu dem natürlichen $\sin h$ addirt, welches den natürlichen $\cos\{\delta-(\varphi)\}$ giebt, woraus man dann leicht $\delta-(\varphi)$, und hieraus den gesuchten zweiten Näherungswerth (φ) der Polhöhe berechnen kann. Es war hier nur meine Absicht, die Einrichtung und den Gebrauch der Tafeln von Douwes, die man in den meisten nautischen Tafeln in grösserer oder geringerer Ausführlichkeit findet, im Allgemeinen kennen zu lehren, indem ich wegen des Näheren auf die Tafeln selbst zu verweisen mich begnügen muss, da ausführlichere Auseinandersetzungen an diesem Orte zu weit führen würden.

§. 10.

Auch auf folgende Art kann man unsere Aufgabe näherungsweise auflösen.

Bekanntlich haben wir die drei folgenden Gleichungen:

$$(\omega+\Delta\omega)-(\omega'+\Delta\omega')=\Theta,$$

$$\cos(\omega+\Delta\omega)=\frac{\sin h-\sin\delta\sin(\varphi+\Delta\varphi)}{\cos\delta\cos(\varphi+\Delta\varphi)},$$

$$\cos(\omega'+\Delta\omega')=\frac{\sin h'-\sin\delta'\sin(\varphi+\Delta\varphi)}{\cos\delta'\cos(\varphi+\Delta\varphi)};$$

also, wie man leicht mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes findet, indem man bei Gliedern, die $\Delta\varphi$, $\Delta\omega$, $\Delta\omega'$ nur in der ersten Potenz enthalten, stehen bleibt:

$$\Delta\omega-\Delta\omega'=\Theta-\omega+\omega',$$

$$\cos\omega-\sin\omega\Delta\omega=\frac{\sin h-\sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi}-\frac{\sin\delta-\sin h\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi^2}\Delta\varphi,$$

$$\cos\omega'-\sin\omega'\Delta\omega'=\frac{\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi}-\frac{\sin\delta'-\sin h'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi^2}\Delta\varphi.$$

Bestimmt man nun ω, ω' mittelst der Formeln:

$$93)\quad \cos\omega=\frac{\sin h-\sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi},\quad \cos\omega'=\frac{\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi};$$

oder mittelst der Formeln:

$$94)\left\{\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}\omega&=\sqrt{\frac{\sin\{45^0-\frac{1}{2}(\delta+h-\varphi)\}\cos\{45^0-\frac{1}{2}(\delta-h-\varphi)\}}{\cos\delta\cos\varphi}},\\ \sin\tfrac{1}{2}\omega'&=\sqrt{\frac{\sin\{45^0-\frac{1}{2}(\delta'+h'-\varphi)\}\cos\{45^0-\frac{1}{2}(\delta'-h'-\varphi)\}}{\cos\delta'\cos\varphi}},\end{aligned}\right.$$

so ist

$$95)\quad \begin{cases} \Delta\omega = \dfrac{\sin\delta - \sin h \sin\varphi}{\cos\delta \sin\omega \cos\varphi^2}\Delta\varphi, \\[2ex] \Delta\omega' = \dfrac{\sin\delta' - \sin h' \sin\varphi}{\cos\delta' \sin\omega' \cos\varphi^2}\Delta\varphi. \end{cases}$$

Weil nun nach 93)

$$\sin h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\omega \cos\varphi,$$

$$\sin h' = \sin\delta' \sin\varphi + \cos\delta' \cos\omega' \cos\varphi$$

ist, so ist

$$\sin\delta - \sin h \sin\varphi = \cos\varphi(\sin\delta \cos\varphi - \cos\delta \cos\omega \sin\varphi),$$
$$\sin\delta' - \sin h' \sin\varphi = \cos\varphi(\sin\delta' \cos\varphi - \cos\delta' \cos\omega' \sin\varphi);$$

also nach 95):

$$96)\quad \begin{cases} \Delta\omega = (\operatorname{tang}\delta \operatorname{cosec}\omega - \cot\omega \operatorname{tang}\varphi)\Delta\varphi, \\ \Delta\omega' = (\operatorname{tang}\delta' \operatorname{cosec}\omega' - \cot\omega' \operatorname{tang}\varphi)\Delta\varphi. \end{cases}$$

Führt man aber diese Werthe von $\Delta\omega$, $\Delta\omega'$ in die Gleichung

$$\Delta\omega - \Delta\omega' = \Theta - \omega + \omega'$$

ein, so erhält man:

$$97)\quad \Delta\varphi = \frac{\Theta - \omega + \omega'}{(\operatorname{tang}\delta \operatorname{cosec}\omega - \cot\omega \operatorname{tang}\varphi) - (\operatorname{tang}\delta' \operatorname{cosec}\omega' - \cot\omega' \operatorname{tang}\varphi)}.$$

Wenn man also für einen genäherten Werth φ der Polhöhe mittelst der Formeln 94) die genäherten Werthe ω, ω' der Stundenwinkel berechnet hat, so berechne man die Hülfsgrössen G, G' mittelst der Formeln:

$$98)\quad \begin{cases} G = \operatorname{tang}\delta \operatorname{cosec}\omega - \cot\omega \operatorname{tang}\varphi, \\ G' = \operatorname{tang}\delta' \operatorname{cosec}\omega' - \cot\omega' \operatorname{tang}\varphi; \end{cases}$$

dann ist

$$99)\quad \begin{cases} \Delta\varphi = \dfrac{\Theta - \omega + \omega'}{G - G'}, \\ \Delta\omega = G\Delta\varphi, \\ \Delta\omega' = G'\Delta\varphi; \end{cases}$$

oder

$$100)\quad \begin{cases} \Delta\varphi = \dfrac{\Theta-\omega+\omega'}{G-G'}, \\ \Delta\omega = G\,\dfrac{\Theta-\omega+\omega'}{G-G'}, \\ \Delta\omega' = G'\,\dfrac{\Theta-\omega+\omega'}{G-G'}. \end{cases}$$

Nach 97) ist auch

$$101)\quad \Delta\varphi = \frac{\Theta-\omega+\omega'}{\operatorname{tang}\delta\operatorname{cosec}\omega - \operatorname{tang}\delta'\operatorname{cosec}\omega' - (\cot\omega - \cot\omega')\operatorname{tang}\varphi},$$

oder

$$102)\quad \Delta\varphi = \frac{(\Theta-\omega+\omega')\sin\omega\sin\omega'}{\operatorname{tang}\delta\sin\omega' - \operatorname{tang}\delta'\sin\omega + \sin(\omega-\omega')\operatorname{tang}\varphi}.$$

Für $\delta = \delta'$ ist

$$103)\quad \Delta\varphi = \frac{(\Theta-\omega+\omega')\sin\omega\sin\omega'}{\sin(\omega-\omega')\operatorname{tang}\varphi - (\sin\omega - \sin\omega')\operatorname{tang}\delta}$$

oder

$$104)\quad \Delta\varphi = \frac{(\Theta-\omega+\omega')\sin\omega\sin\omega'}{2\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega')\,\{\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')\operatorname{tang}\varphi - \cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')\operatorname{tang}\delta\}}.$$

Die Formeln 98) und 99) oder 100) scheinen mir aber die bequemsten zu sein.

§. 11.

Wir wollen uns jetzt zwei in einem gewissen Punkte O sich schneidende gerade Linien MN, $M'N'$ denken. Die Theile OM, OM' dieser Linien wollen wir als ihre positiven Theile, die Theile ON, ON' derselben als ihre negativen Theile annehmen, so dass alle von O aus auf OM, OM' abgeschnittenen Linien als positiv, dagegen alle von O aus auf ON, ON' abgeschnittenen Linien als negativ betrachtet werden. Den mit OM von OM' eingeschlossenen, von OM an nach einer gewissen Seite hin von 0 bis 360° gezählten Winkel bezeichnen wir durch α, und nehmen auf jeder der beiden Linien MN und $M'N'$ zwei beliebige Punkte A, B und A', B' an, deren nach dem Vorhergehenden gehörig als positiv oder negativ betrachtete Abstände von dem Punkte O respective durch a, b und a', b' bezeichnet werden sollen. Nun wollen wir über den Linien AB und $A'B'$ als Durchmessern zwei Kreise beschreiben, und uns die Aufgabe stellen, aus den als gegeben betrachteten Grössen α und a, b; a', b' die Durchschnittspunkte dieser beiden Kreise zu bestimmen.

Zu dem Ende bezeichnen wir die Halbmesser dieser beiden Kreise durch r, r', und nehmen OM, für O als Anfang der Coordinaten, als den positiven Theil der Axe der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy, und den positiven Theil der Axe der y so an, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, nach derselben Seite hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegt, wenn man von der Linie OM an den Winkel α durchläuft. Dann sind offenbar $a, 0$; $b, 0$ die Coordinaten der Punkte A, B, und, wie mittelst einer einfachen Betrachtung sogleich erhellen wird, in völliger Allgemeinheit $a'\cos\alpha$, $a'\sin\alpha$; $b'\cos\alpha$, $b'\sin\alpha$ die Coordinaten der Punkte A', B'. Weil nun nach den Lehren der analytischen Geometrie $\frac{1}{2}(a+b)$, 0 und $\frac{1}{2}(a'+b')\cos\alpha$, $\frac{1}{2}(a'+b')\sin\alpha$ die Coordinaten der Mittelpunkte der beiden Kreise sind, so sind

$$105)\quad \begin{cases} \{x-\frac{1}{2}(a+b)\}^2+y^2=r^2, \\ \{x-\frac{1}{2}(a'+b')\cos\alpha\}^2+\{y-\frac{1}{2}(a'+b')\sin\alpha\}^2=r'^2 \end{cases}$$

die Gleichungen dieser beiden Kreise. Für $x=a$, $y=0$ und für $x=a'\cos\alpha$, $y=a'\sin\alpha$ erhält man aus der ersten und zweiten Gleichung respective:

$$r^2=\{a-\frac{1}{2}(a+b)\}^2,$$

$$r'^2=\{a'-\frac{1}{2}(a'+b')\}^2\cos\alpha^2+\{a'-\frac{1}{2}(a'+b')\}^2\sin\alpha^2;$$

d. i.

$$106)\quad r^2=\frac{1}{4}(a-b)^2,\ r'^2=\frac{1}{4}(a'-b')^2;$$

und die Gleichungen der beiden Kreise sind also:

$$107)\quad \begin{cases} \{x-\frac{1}{2}(a+b)\}^2+y^2=\frac{1}{4}(a-b)^2, \\ \{x-\frac{1}{2}(a'+b')\cos\alpha\}^2+\{y-\frac{1}{2}(a'+b')\sin\alpha\}^2=\frac{1}{4}(a'-b')^2. \end{cases}$$

lus diesen beiden Gleichungen muss man mittelst algebraischer nation x, y bestimmen, um die Coordinaten der Durchttspunkte der beiden Kreise zu erhalten.

a dem Ende bringe man die beiden Gleichungen zuerst auf orm:

$$
)\quad \begin{cases} x^2+y^2-(a+b)x=-ab, \\ x^2+y^2-(a'+b')(x\cos\alpha+y\sin\alpha)=-a'b'; \end{cases}
$$

rhält man durch Subtraction:

$$
9)\quad \{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}x-(a'+b')y\sin\alpha=ab-a'b',
$$

$$
110)\quad y=-\frac{ab-a'b'-\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}x}{(a'+b')\sin\alpha}.
$$

an diesen Werth von y in die erste der beiden Gleichun) ein, so erhält man nach einigen leichten Reductionen stimmung von x die folgende Gleichung des zweiten :

111)

$$
)(a'^2+b'^2+2ab)-2(a'+b')(ab-a'b')\cos\alpha-(a+b)(a'+b')^2\cos\alpha^2}{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2}x
$$

$$
=-\frac{a^2b^2+a'^2b'^2+ab(a'^2+b'^2)-ab(a'+b')^2\cos\alpha^2}{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2}.
$$

a nun diese quadratische Gleichung auf gewöhnliche Art erhält man nach einigen zwar etwas weitläufigen, sonst ineswegs schwierigen Transformationen, wenn der Kürze

$$
\begin{aligned}
= & \ (a+b)(a'^2+b'^2+2ab) \\
& -2(a'+b')(ab-a'b')\cos\alpha \\
& -(a+b)(a'+b')^2\cos\alpha^2, \\
= & \ (a-b)^2(a'-b')^2-4(ab+a'b')^2 \\
& +4(a+b)(a'+b')(ab+a'b')\cos\alpha \\
& +2\{2(a^2b^2+a'^2b'^2)-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\}\cos\alpha^2 \\
& -4(a+b)(a'+b')(ab+a'b')\cos\alpha^3 \\
& +(a+b)^2(a'+b')^2\cos\alpha^4 \\
= & \ (a+b)^2+(a'+b')^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha
\end{aligned}
$$

wird:

$$113)\quad x = \frac{F \pm (a'+b')\sqrt{G}}{2H}.$$

Führt man aber in die Grössen F und G für $\cos\alpha^2$ und $\cos\alpha^4$ die gleich geltenden Ausdrücke $1-\sin\alpha^2$ und $1-2\sin\alpha^2+\sin\alpha^4$ ein, so erhält man nach einigen leichten Transformationen, wenn der Kürze wegen

$$\begin{aligned}114)\quad G' &= -4\{(ab+a'b')^2+ab(a'^2+b'^2)+a'b'(a^2+b^2)\}\\ &\quad +4(a+b)(a'+b')(ab+a'b')\cos\alpha\\ &\quad +(a+b)^2(a'+b')^2\sin\alpha^2\\ &= -4\{(ab-a'b')^2+ab(a'+b')^2+a'b'(a+b)^2\}\\ &\quad +4(a+b)(a'+b')(ab+a'b')\cos\alpha\\ &\quad +(a+b)^2(a'+b')^2\sin\alpha^2\\ &= -4\{(ab+a'b')^2+(aa'+bb')(ab'+a'b)\}\\ &\quad +4(a+b)(a'+b')(ab+a'b')\cos\alpha\\ &\quad +(a+b)^2(a'+b')^2\sin\alpha^2\end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$115)\quad \begin{cases} F = 2(ab-a'b')\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}+(a+b)(a'+b')^2\sin\alpha^2,\\ G = G'\sin\alpha^2,\\ H = (a+b)^2+(a'+b')^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha;\end{cases}$$

also nach 113):

$$116)\quad x = \frac{F \pm (a'+b')\sin\alpha\sqrt{G'}}{2H}.$$

Weil aber, wie man leicht findet,

$$-4(aa'+bb')(ab'+a'b)+(a+b)^2(a'+b')^2 = (a-b)^2(a'-b')^2$$

ist, so kann man die Grösse G' offenbar auch auf folgende Art ausdrücken:

$$117)\quad G' = (a-b)^2(a'-b')^2-\{2(ab+a'b')-(a+b)(a'+b')\cos\alpha\}^2,$$

und behalten wir diesen Ausdruck von G' in den folgenden Formeln bei, so wird, wie man leicht findet:

$$118)\quad x = \frac{2(ab-a'b')\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}+(a'+b')\sin\alpha\{(a+b)(a'+b')\sin\alpha \pm \sqrt{G'}\}}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}}.$$

Führt man endlich diesen Ausdruck von x in den aus dem Obigen bekannten Ausdruck

$$y = -\frac{ab-a'b'-\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}x}{(a'+b')\sin\alpha}$$

ein, so erhält man für die Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden Kreise die folgenden Ausdrücke, in denen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen:

$$119)\quad x = \frac{2(ab-a'b')\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}+(a'+b')\sin\alpha\{(a+b)(a'+b')\sin\alpha\pm\sqrt{G'}\}}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}},$$

$$y = -\frac{2(ab-a'b')(a'+b')\sin\alpha-\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}\{(a+b)(a'+b')\sin\alpha\pm\sqrt{G'}\}}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}};$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$120)\quad K = (a+b)(a'+b')\sin\alpha\pm\sqrt{G'}$$

setzen:

$$121)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{2(ab-a'b')\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}+K(a'+b')\sin\alpha}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}},\\ y &= \frac{2(ab-a'b')(a'+b')\sin\alpha-K\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}}.\end{aligned}\right.$$

Bezeichnen wir die Entfernungen der Durchschnittspunkte der beiden Kreise von dem Punkte O überhaupt durch R, so ist

$$R = \sqrt{x^2+y^2},$$

also, wie man mittelst des Obigen leicht findet:

$$122)\quad R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4(ab-a'b')^2+\{(a+b)(a'+b')\sin\alpha\pm\sqrt{G'}\}^2}{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2}}$$

oder

$$123)\quad R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4(ab-a'b')^2+K^2}{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2}}.$$

Entwickelt man aber das Quadrat

$$\{(a+b)(a'+b')\sin\alpha\pm\sqrt{G'}\}^2$$

gehörig, so erhält man auch, wenn der Kürze wegen

$$124)\quad L=(aa'-bb')^2+(ab'-ba')^2$$
$$+2(a+b)(a'+b')(ab+a'b')\cos\alpha$$
$$-(a+b)^2(a'+b')^2\cos\alpha^2$$
$$=(aa'-bb')^2+(ab'-ba')^2+(ab+a'b')^2$$
$$-\{ab+a'b'-(a+b)(a'+b')\cos\alpha\}^2$$
$$=(aa'-bb')^2+(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)$$
$$-\{ab+a'b'-(a+b)(a'+b')\cos\alpha\}^2$$
$$=(ab'-ba')^2+(a^2+b'^2)(a'^2+b^2)$$
$$-\{ab+a'b'-(a+b)(a'+b')\cos\alpha\}^2$$

gesetzt wird:

$$125)\quad R=\sqrt{\frac{L\pm(a+b)(a'+b')\sin\alpha\sqrt{G'}}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}}}.$$

Wenn wir die Linie OM', für O als Anfang der Coordinaten, als den positiven Theil der Axe der x' eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $x'y'$, und den positiven Theil der Axe der y' so annehmen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x' durch den rechten Winkel $(x'y')$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y' zu gelangen, nach derselben Seite hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen; so ist bekanntlich nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten in völliger Allgemeinheit:

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,$$
$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha;$$

also

$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,$$
$$y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.$$

Lässt man nun, so wie vorher x, y, auch x', y' den Durchschnittspunkten der beiden Kreise entsprechen, so erhält man mittelst der beiden vorhergehenden Formeln und mittelst 121) leicht:

$$126)\quad \begin{cases} x'=-\dfrac{2(ab-a'b')\{a'+b'-(a+b)\cos\alpha\}-K(a+b)\sin\alpha}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}}, \\[2ex] y'=-\dfrac{2(ab-a'b')(a+b)\sin\alpha+K\{a'+b'-(a+b)\cos\alpha\}}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}}. \end{cases}$$

Setzen wir

$$127)\quad \begin{cases} F=2(ab-a'b')\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}+(a+b)(a'+b')^2\sin\alpha^2, \\ F'=2(a'b'-ab)\{a'+b'-(a+b)\cos\alpha\}+(a'+b')(a+b)^2\sin\alpha^2; \end{cases}$$

so ist

$$128)\quad \begin{cases} x=\dfrac{F\pm(a'+b')\sin\alpha\sqrt{G'}}{2H}, \\ x'=\dfrac{F'\pm(a+b)\sin\alpha\sqrt{G'}}{2H}; \end{cases}$$

und setzen wir:

$$129)\quad \begin{cases} \mathfrak{F}=(a'+b')\{a^2+b^2+2a'b'-(a+b)(a'+b')\cos\alpha\}\sin\alpha, \\ \mathfrak{F}'=-(a+b)\{a'^2+b'^2+2ab-(a'+b')(a+b)\cos\alpha\}\sin\alpha; \end{cases}$$

so ist

$$130)\quad \begin{cases} y=\dfrac{\mathfrak{F}\pm\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}\sqrt{G'}}{2H}, \\ y'=\dfrac{\mathfrak{F}'\mp\{a'+b'-(a+b)\cos\alpha\}\sqrt{G'}}{2H}. \end{cases}$$

§. 12.

Mit Rücksicht auf §. 8. wollen wir nun im vorhergehenden Paragraphen, unter der Voraussetzung, dass Θ positiv sei, was anzunehmen offenbar immer verstattet sein wird,

$$\alpha=\Theta$$

und

$$a=\tang\frac{1}{2}\{(90^\circ-\delta)+(90^\circ-h)\}=\cot\frac{1}{2}(h+\delta),$$

$$b=\tang\frac{1}{2}\{(90^\circ-\delta)-(90^\circ-h)\}=\tang\frac{1}{2}(h-\delta);$$

so wie

$$a'=\tang\frac{1}{2}\{90^\circ-\delta')+(90^\circ-h')\}=\cot\frac{1}{2}(h'+\delta'),$$

$$b' = \tang \frac{1}{2}\{(90^0 - \delta') - (90^0 - h')\} = \tang \frac{1}{2}(h' - \delta')$$

setzen; so ist nach §. 8.

$$a = \cot u,\ b = \tang v;\quad a' = \cot u',\ b = \tang v'.$$

Folglich ist

$$M = \frac{\sin u \cos v}{\cos u \cos v + \sin u \sin v} = \frac{1}{\cot u + \tang v} = \frac{1}{a+b},$$

$$N = \frac{\cos u \sin v}{\cos u \cos v + \sin u \sin v} = \frac{1}{\tang u + \cot v} = \frac{ab}{a+b};$$

und

$$M' = \frac{\sin u' \cos v'}{\cos u' \cos v' + \sin u' \sin v'} = \frac{1}{\cot u' + \tang v'} = \frac{1}{a'+b'},$$

$$N' = \frac{\cos u' \sin v'}{\cos u' \cos v' + \sin u' \sin v'} = \frac{1}{\tang u' + \cot v'} = \frac{a'b'}{a'+b'}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$M \pm M' = \frac{1}{a+b} \pm \frac{1}{a'+b'} = \frac{(a'+b') \pm (a+b)}{(a+b)(a'+b')},$$

$$N \pm N' = \frac{ab}{a+b} \pm \frac{a'b'}{a'+b'} = \frac{ab(a'+b') \pm a'b'(a+b)}{(a+b)(a'+b')};$$

folglich

$$M_1 = \frac{(a'+b') + (a+b)}{(a+b)(a'+b')\cos\frac{1}{2}\alpha},$$

$$N_1 = \frac{ab(a'+b') + a'b'(a+b)}{(a+b)(a'+b')\cos\frac{1}{2}\alpha};$$

$$M_1' = \frac{(a'+b') - (a+b)}{(a+b)(a'+b')\sin\frac{1}{2}\alpha},$$

$$N_1' = \frac{ab(a'+b') - a'b'(a+b)}{(a+b)(a'+b')\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

Also ist

$$M_1^2+M_1'^2$$

$$=\frac{\{(a'+b')+(a+b)\}^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2+\{(a'+b')-(a+b)\}^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2}{(a+b)^2(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2},$$

d. i., wie man leicht findet:

$$M_1^2+M_1'^2=\frac{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2}{(a+b)^2(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2},$$

und folglich nach 115):

$$M_1^2+M_1'^2=\frac{H}{(a+b)^2(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Ferner ist

$$M_1N_1 + M_1'N_1' = \frac{\{(a'+b') + (a+b)\}\{ab(a'+b') + a'b'(a+b)\}\sin\frac{1}{2}\alpha^2 + \{(a'+b')-(a+b)\}\{ab(a'+b')-a'b'(a+b)\}\cos\frac{1}{2}\alpha^2}{(a+b)^2(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2},$$

also, wie man mittelst leichter Rechnung findet, wenn man

$$\cos\alpha = \cos\frac{1}{2}\alpha^2 - \sin\frac{1}{2}\alpha^2$$

setzt:

$$M_1N_1 + M_1'N_1' = \frac{ab(a'+b')^2 + a'b'(a+b)^2 - (ab+a'b')(a+b)(a'+b')\cos\alpha}{(a+b)^2(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2},$$

und hieraus ferner:

$$-(M_1N_1 + M_1'N_1' - 2) = \frac{(aa'-bb')^2 + (ab'-ba')^2 + 2(a+b)(a'+b')(ab+a'b')\cos\alpha - (a+b)^2(a'+b')^2\cos\alpha^2}{2(a+b)^2(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2},$$

d. i. nach 124):

$$-(M_1N_1+M_1'N_1'-2)=\frac{L}{2(a+b)^2(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2}$$

Eben so leicht findet man

$$M_1N_1'-M_1'N_1=\frac{2(ab-a'b')}{(a+b)(a'+b')\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha},$$

und endlich

$$(M_1N_1'-M_1'N_1)^2+4(M_1N_1+M_1'N_1'-)$$
$$=\frac{4(ab+a'b')^2-(a-b)^2(a'-b')^2-4(a+b)(a'+b')(ab+a'b')\cos\alpha+(a+b)^2(a'+b')^2\cos\alpha^2}{(a+b)(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2},$$

oder, wenn man $1-\sin\alpha^2$ für $\cos\alpha^2$ setzt:

$$(M_1N_1'-M_1'N_1)^2+4(M_1N_1+M_1'N_1'-\ )$$
$$=\frac{4(ab+a'b')^2+4ab(a'^2+b'^2)+4a'b'(a^2+b^2)-4(a+b)(a'+b')(ab+a'b')\cos\alpha-(a+b)^2(a'+b')^2\sin\alpha^2}{(a+b)^2(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2},$$

d. i. nach 114):

$$(M_1N_1'-M_1'N_1)^2+4(M_1N_1+M_1'N_1'-1)$$
$$=-\frac{G'}{(a+b)^2(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Führt man nun die vorhergehenden Ausdrücke von

$$M_1^2+M_1'^2,\quad -(M_1N_1+M_1'N_1'-2),$$
$$(M_1N_1'-M_1'N_1)^2+4(M_1N_1+M_1'N_1'-1)$$

in den Ausdruck 50) der in §. 8. durch x bezeichneten Grösse so erhält man nach einer ganz leichten Transformation:

$$x=\frac{L\pm(a+b)(a'+b')\sin\alpha\sqrt{G'}}{2H}$$

oder

$$x=\frac{L\pm(a+b)(a'+b')\sin\alpha\sqrt{G'}}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}},$$

also nach 125)

$$x=R^2.$$

Weil aber nach 42)

$$x=\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}=\frac{1-\cos(90^0-\varphi)}{1+\cos(90^0-\varphi)}=\mathrm{tang}(45^0-\tfrac{1}{2}\varphi)^2=\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(90^0-$$

ist, so ist

$$\mathrm{tang}(45^0-\tfrac{1}{2}\varphi)=\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(90^0-\varphi)=R$$

wo R bekanntlich zwei Werthe hat.

Vergleicht man nun dies mit dem vorhergehenden Par phen, so ergiebt sich unmittelbar die folgende nach meiner nung sehr merkwürdige Bestimmung der Polhöhe durch Construc

Durch einen beliebigen Punkt O ziehe man zwei Linien und $M'N'$ so, dass mit dem Theile OM von MN, welchen als den positiven Theil von MN annimmt, der Theil OM' $M'N'$, welchen man als den positiven Theil von $M'N'$ anni den im Vorhergehenden durch Θ bezeichneten Winkel einschlie wobei wir, was offenbar immer verstattet ist, annehmen wo dass Θ positiv sei. Hierauf trage man mit Hülfe einer T der natürlichen Tangenten nach einem gewissen Maassstabe O aus auf MN die Tangenten der Hälften von $(90^0-\delta)+(90^0-$ und $(90^0-\delta)-(90^0-h)$, auf $M'N'$ die Tangenten der Häl von $(90^0-\delta')+(90^0-h')$ und $(90^0-\delta')-(90^0-h')$ auf, indem man diese Tangenten, jenachdem sie positiv oder negativ sind, von O aus auf den positiven oder negativen Theilen der Linien MN und $M'N'$ abschneidet. Sind dann A, B die Endpunkte der auf der Linie MN von O aus abgeschnittenen Stücke, und A', B' die Endpunkte der auf der Linie $M'N'$ von O aus abgeschnittenen Stücke; so beschreibe man über den Linien AB und $A'B'$ als Durchmessern zwei Kreise, und messe die Entfernungen der beiden Durchschnittspunkte dieser Kreise von dem Punkte O nach demselben Maassstabe, nach welchem man die Tangenten auf die Linien MN und $M'N'$ aufgetragen hat; diese Entfernungen sind die Tangenten der halben Complemente der beiden Werthe der Polhöhe, d. h. der halben Ergänzungen der beiden Werthe der Polhöhe zu 90^0, und wenn man also in der Tafel der natürlichen Tangenten zu diesen Tangenten die entsprechenden Winkel aufsucht, so erhält man die halben Complemente der Polhöhe, aus denen man dann auch die Polhöhe oder Breite leicht selbst berechnen kann.

In der in §. 9. angeführten Abhandlung von Pemberton wird die obige bemerkenswerthe Construction auf p. 921. ganz ohne Beweis mitgetheilt, aber eingeschränkt auf den Fall, wenn ein und derselbe Stern zwei Mal beobachtet worden ist. Die Erfindung derselben wird Collins zugeschrieben, und, indem auf dessen Mariner's Plain Scale new planed. Book III. p. 35. verwiesen wird, bemerkt, dass sie mittelst der Principien der stereographischen Projection gefunden worden sei. Die von mir im Obigen gegebene analytische Darstellung zeigt zugleich, dass diese nach meiner Meinung sehr bemerkenswerthe Construction durchaus nicht auf den Fall, wenn ein und derselbe Stern zwei Mal beobachtet worden ist, eingeschränkt ist, sondern ganz allgemein auch in dem Falle, wenn zwei beliebige Sterne beobachtet worden sind, welcher unserem Probleme jedenfalls einen sehr grossen Theil seines Werthes verleihet, gilt. Es scheint mir wünschenswerth zu sein, dass für diese so verallgemeinerte Construction auch ein geometrischer Beweis gegeben werde, etwa mit Hülfe der stereographischen Projection, die nach dem, was vorher bemerkt worden ist, Collins, dessen oben angeführte Schrift ich nicht habe zu sehen bekommen können, angewandt haben soll.

Nach 47) haben wir nun die beiden Gleichungen:

$$2\cos\frac{1}{2}\Omega.\sqrt{x}=M_1x+N_1,$$

$$-2\sin\frac{1}{2}\Omega.\sqrt{x}=M_1'x+N_1';$$

also

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega=-\frac{M_1'x+N_1'}{M_1x+N_1},$$

und folglich nach dem Obigen, wie man leicht findet:

$$\tang\frac{1}{2}\Omega=-\cot\frac{1}{2}\Theta\,\frac{\{(a'+b')-(a+b)\}x+ab(a'+b')-a'b'(a+b)}{\{(a'+b')+(a+b)\}x+ab(a'+b')+a'b'(a+b)},$$

oder

$$\tang\frac{1}{2}\Omega=-\cot\frac{1}{2}\Theta\,\frac{(a'+b')(ab+x)-(a+b)(a'b'+x)}{(a'+b')(ab+x)+(a+b)(a'b'+x)},$$

oder

$$\tang\frac{1}{2}\Omega=-\cot\frac{1}{2}\Theta\,\frac{\dfrac{ab+x}{a+b}-\dfrac{a'b'+x}{a'+b'}}{\dfrac{ab+x}{a+b}+\dfrac{a'b'+x}{a'+b'}},$$

oder

$$\tang\frac{1}{2}\Omega=-\cot\frac{1}{2}\Theta\,\frac{1-\dfrac{(a+b)(a'b'+x)}{(a'+b')(ab+x)}}{1+\dfrac{(a+b)(a'b'+x)}{(a'+b')(ab+x)}},$$

und setzte man also

$$\tang\Phi=\frac{(a+b)(a'b'+x)}{(a'+b')(ab+x)},$$

so wäre

$$\tang\frac{1}{2}\Omega=-\cot\frac{1}{2}\Theta\tang(45^0-\Phi).$$

Weil nun aber nach dem Obigen

$$x=\frac{L\pm(a+b)(a'+b')\sin\alpha\sqrt{G'}}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}}$$

ist, so findet man mittelst leichter Rechnung:

$$ab+x=(a+b)\frac{F\pm(a'+b')\sin\alpha\sqrt{G'}}{2H},$$

$$a'b'+x=(a'+b')\frac{F'\pm(a+b)\sin\alpha\sqrt{G'}}{2H};$$

also

$$\frac{ab+x}{a+b}=\frac{F\pm(a'+b')\sin\alpha\sqrt{G'}}{2H},$$

$$\frac{a'b'+x}{a'+b'}=\frac{F'\pm(a+b)\sin\alpha\sqrt{G'}}{2H}.$$

Bezeichnen wir jetzt also die Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden Kreise in den beiden im vorhergehenden Paragraphen angenommenen Coordinatensystemen durch X, Y und X', Y'; so ist nach 128):

$$\frac{ab+x}{a+b}=X,\ \frac{a'b'+x}{a'+b'}=X';$$

folglich nach dem Obigen

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega=-\frac{X-X'}{X+X'}\cot\frac{1}{2}\Theta,$$

und hieraus, weil

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\Omega\pm\Theta)=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega\pm\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Theta}{1\mp\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Theta}$$

ist, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\Omega+\Theta)=\frac{X'-X\cos\Theta}{X\sin\Theta}=-\cot\Theta+\frac{X'}{X}\operatorname{cosec}\Theta,$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\Omega-\Theta)=-\frac{X-X'\cos\Theta}{X'\sin\Theta}=\cot\Theta-\frac{X}{X'}\operatorname{cosec}\Theta;$$

also, weil

$$\Omega+\Theta=(\omega+\omega')+(\omega-\omega')=2\omega,$$

$$\Omega-\Theta=(\omega+\omega')-(\omega-\omega')=2\omega'$$

ist:

$$\operatorname{tang}\omega=\frac{X'-X\cos\Theta}{X\sin\Theta}=-\cot\Theta+\frac{X'}{X}\operatorname{cosec}\Theta,$$

$$\operatorname{tang}\omega'=-\frac{X-X'\cos\Theta}{X'\sin\Theta}=\cot\Theta-\frac{X}{X'}\operatorname{cosec}\Theta;$$

oder

$$\operatorname{tang}(90^0-\omega)=\frac{X\sin\Theta}{X'-X\cos\Theta},$$

$$\operatorname{tang}(\omega'-90^0)=\frac{X'\sin\Theta}{X-X'\cos\Theta}.$$

Die Grössen X, X' sind die mit ihren gehörigen Zeichen genommenen Entfernungen der Fusspunkte der von den Durchschnittspunkten der beiden Kreise auf die Linien MN und $M'N'$

gefällten Perpendikel von dem Punkte O, und können also immer leicht construirt und mit einem Maassstabe gemessen werden. Hat man aber diese Entfernungen auf die angegebene Weise aus der Zeichnung entnommen, so kann man Ω sehr leicht mittelst der Formel

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega=-\frac{X-X'}{X+X'}\cot\frac{1}{2}\Theta$$

berechnen. Uebrigens aber erhellet auch aus den Formeln

$$\operatorname{tang}(90^0-\omega)=\frac{X\sin\Theta}{X'-X\cos\Theta},$$

$$\operatorname{tang}(\omega'-90^0)=\frac{X'\sin\Theta}{X-X'\cos\Theta},$$

dass man die Winkel $90^0-\omega$ und $\omega'-90^0$ selbst sehr leicht durch Construction finden kann, wenn man die Fusspunkte der in Rede stehenden Perpendikel, für jeden der beiden Durchschnittspunkte der beiden Kreise einzeln genommen, durch gerade Linien mit einander verbindet, und die Winkel betrachtet, welche diese geraden Linien mit den beiden geraden Linien MN und $M'N'$ einschliessen. So elegant diese Construction auch ist, so scheint es doch nicht nöthig zu sein, hier rücksichtlich derselben noch weiter in's Einzelne einzugehen und sie noch weiter zu erläutern, weil auch selbst in der Praxis, wenn man überhaupt von dieser Construction praktischen Gebrauch machen will, die gar keine Schwierigkeit darbietende Rechnung nach der Formel

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega=-\frac{X-X'}{X+X'}\cot\frac{1}{2}\Theta,$$

wenn man nun erst X und X' durch Messung mit einem Maassstabe aus der Zeichnung entnommen hat, am meisten zu empfehlen sein dürfte.

§. 13.

Um die Anwendung der im Vorhergehenden entwickelten Methoden zur Auflösung unserer Aufgabe zu erläutern, wollen wir jetzt das folgende Beispiel berechnen.

Zu Göttingen ward

1809. Mai 17.

beobachtet:

α Bootis: $t=16^u.\ 8^m.25^s$, $h=50^0.\ 3'.38'',70$;

α Aquilae: $t'=16.\ 37.\ 49$, $h'=33.\ 33.\ 0,00$;

die Höhe h ward auf der Westseite, die Höhe h' auf der Ostseite des Meridians genommen. Als Rectascensionen und Declinationen der beobachteten Sterne wollen wir annehmen:

$$\alpha = 211^\circ.44'.54'',88;\quad \delta = 20^\circ.10'.56'',02$$
$$\alpha' = 295.\ 22.\ 17,50;\quad \delta' = 8.\ 22.\ 35,45.$$

Es ist also in diesem Falle:

$t = 16^h.\ 8^m.\ 25^s$	$\alpha = 211^\circ.44'.54'',88$
$t' = 16.\ 37.\ 49$	$\alpha' = 295.\ 22.\ 17,50$
$t - t' = -\ 29.\ 24$	$\alpha - \alpha' = -\ 83.\ 37.\ 22,62$
$15(t - t') = -\ 7.\ 21.\ 0$	$15(t - t') = -\ 7.\ 21.\ 0,00$
	$\theta = 76.\ 16.\ 22,62$

Um dieses Beispiel nach der in §. 4. entwickelten Methode zu berechnen, haben wir die folgenden Formeln:

$$\cot\chi = \cot\delta\cos\theta,\ \cot\chi' = \cot\delta'\cos\theta;$$

$$\sin\xi = \frac{\sin\delta'\sin(\chi'-\delta)}{\sin\chi'},\quad \sin\xi' = \frac{\sin\delta\sin(\chi-\delta')}{\sin\chi};$$

$$\sin i = \sin\xi\cot(\chi'-\delta) = \sin\xi'\cot(\chi-\delta');$$

$$\sin\varphi = \frac{\cos\delta\sin h'\sin\xi}{\cos i^2} + \frac{\cos\delta'\sin h\sin\xi'}{\cos i^2}$$

$$\pm\frac{2\cos\delta\cos\delta'\sin\theta}{\cos i^2}\sqrt{\sin s\sin(s-h-h')\sin(s-h-i)\sin(s-h'-i)},$$

für

$$2s = 90^\circ + h + h' + i.$$

Es ist nun:

$\log\cos\theta = 9,3752918$	$\log\cos\theta = 9,3752918$
$\log\cot\delta = 10,4346525$	$\log\cot\delta' = 10,8319497$
$\log\cot\chi = 9,8099443$	$\log\cot\chi' = 10,2072415$
$\chi = 57^\circ.\ 9'.17'',52$	$\chi' = 31^\circ.49'\ 14'',12$
$\delta' = 8.\ 22.\ 35,45$	$\delta = 20.\ 10.\ 56,02$
$\chi - \delta' = 48.\ 46.\ 42,07$	$\chi' - \delta = 11.\ 38.\ 18,10$
$\log\sin\delta' = 9,1633924$	$\log\sin\delta = 9,5378280$
$\log\sin(\chi'-\delta) = 9,3047784$	$\log\sin(\chi-\delta') = 9,8763137$
$18,4681708$	$19,4141417$
$\log\sin\chi' = 9,7220258$	$\log\sin\chi = 9,9243515$
$\log\sin\xi = 8,7461450$	$\log\sin\xi' = 9,4897902$
$\log\cot(\chi'-\delta) = 10,6861996$	$\log\cot(\chi-\delta') = 9,9425544$
$\log\sin i = 9,4323446$	$\log\sin i = 9,4323446$

$$i = 15^\circ.42'.2'',15$$

$$\begin{array}{ll}
\log\cos\delta = 9{,}9724805 & \log\cos\delta' = 9{,}9953421 \\
\log\sin h' = 9{,}7424616 & \log\sin h = 9{,}8846399 \\
\log\sin\xi = \underline{8{,}7461450} & \log\sin\xi' = \underline{9{,}4897902} \\
\quad 0{,}4610871-2 & \quad 0{,}3697722-1 \\
\log.\cos i^2 = \underline{0{,}9669718-1} & \log.\cos i^2 = \underline{0{,}9669718-1} \\
\quad 0{,}4941153-2 & \quad 0{,}4028004-1 \\
\text{Num.} = 0{,}0311972 & \text{Num.} = 0{,}2528136
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
h = & 50^\circ.\ 3'.\ 38'',70 \\
h' = & 33.\ 33.\ \ 0{,}00 \\
i = & \underline{15.\ 42.\ \ 2{,}15} \\
& 99.\ 18.\ 40{,}85 \\
& \underline{90.\ \ 0.\ \ 0{,}00} \\
2s = & 189.\ 18.\ 40{,}85 \\
s = & 94.\ 39.\ 20{,}42 \\
\\
s = & 94.\ 39.\ 20{,}42 \\
h = & \underline{50.\ \ 3.\ 38{,}70} \\
s-h = & 44.\ 35.\ 41{,}72 \\
h' = & \underline{33.\ 33.\ \ 0{,}00} \\
s-h-h' = & 11.\ \ 2.\ 41{,}72 \\
\\
s = & 94.\ 39.\ 20{,}42 \\
h = & \underline{50.\ \ 3.\ 38{,}70} \\
s-h = & 44.\ 35.\ 41{,}72 \\
i = & \underline{15.\ 42.\ \ 2{,}15} \\
s-h-i = & 28.\ 53.\ 39{,}57 \\
\\
s = & 94.\ 39.\ 20{,}42 \\
h' = & \underline{33.\ 33.\ \ 0{,}00} \\
s-h' = & 61.\ \ 6.\ 20{,}42 \\
i = & \underline{15.\ 42.\ \ 2{,}15} \\
s-h'-i = & 45.\ 24.\ 18{,}27
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log\sin s = & 9{,}9985646 \\
\log\sin(s-h-h') = & 9{,}2823469 \\
\log\sin(s-h-i) = & 9{,}6841230 \\
\log\sin(s-h'-i) = & \underline{9{,}8525338} \\
& 0{,}8175683-2 \\
2) & \overline{0{,}4087842}-1 \\
\log 2 = & 0{,}3010300 \\
\log\cos\delta = & 9{,}9724805 \\
\log\cos\delta' = & 9{,}9953421 \\
\log\sin\theta = & \underline{9{,}9874147} \\
& 0{,}6650515-1
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 0{,}6650616-1 \\
\log.\cos i^2 = & \underline{0{,}9669718-1} \\
 & 0{,}6980797-1 \\
\text{Num.} = & 0{,}4989761
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
0{,}0311972 & 0{,}0311972 \\
\underline{0{,}2528136} & \underline{0{,}2528136} \\
0{,}2840108 & 0{,}2840108 \\
\underline{0{,}4989761} & \underline{0{,}4989761} \\
0{,}7829869 & -\,0{,}2149653
\end{array}
$$

Da $\sin\varphi$ nothwendig positiv sein muss, so gilt bloss der erste Werth, und es ist folglich

$$\sin\varphi = 0{,}7829869.$$

Also ist, wenn man die Tafeln der natürlichen Linien nicht gebrauchen will,

$$\log\sin\varphi = 9{,}8937545$$

folglich

$$\varphi = 51^0.\ 32'.\ 5'',56.$$

Die Berechnung der Stundenwinkel nach den Formeln in §. 6. unterlassen wir, weil dieselbe eigentlich nur auf eine gewöhnliche Auflösung eines sphärischen Dreiecks hinauskommt, und daher an diesem Orte eine besondere Erläuternug durch ein Beispiel nicht bedarf. Im folgenden Paragraphen werden wir aber auf diese Berechnung der Stundenwinkel zurückkommen.

§. 14.

Das vorhergehende Beispiel wollen wir nun auch nach der in §. 8. entwickelten Methode berechnen.

Zur Berechnung der Polhöhe φ haben wir die folgenden Formeln:

$$\Theta = \omega - \omega' = \theta + \lambda . 360^0,$$

wo $\lambda = 0$, oder $\lambda = -1$, oder $\lambda = +1$ ist. Ferner:

$$2u = h + \delta,\ 2v = h - \delta;$$

$$2u' = h' + \delta',\ 2v' = h' - \delta';$$

$$M = \frac{\sin u \cos v}{\cos(u-v)},\quad M' = \frac{\sin u' \cos v'}{\cos(u'-v')};$$

$$N = \frac{\cos u \sin v}{\cos(u-v)},\quad N' = \frac{\cos u' \sin v'}{\cos(u'-v')};$$

$$M_1 = \frac{M + M'}{\cos\frac{1}{2}\Theta}, \quad M_1' = \frac{M - M'}{\sin\frac{1}{2}\Theta};$$

$$N_1 = \frac{N + N'}{\cos\frac{1}{2}\Theta}, \quad N_1' = \frac{N - N'}{\sin\frac{1}{2}\Theta};$$

$$\tang P = \frac{M_1}{M_1'}, \quad \tang Q = \frac{N_1}{N_1'};$$

$$\cos U = -\cos(P - Q) - M_1 N_1 \frac{\sin(P-Q)^2}{2\sin P \sin Q}$$

$$= -\cos(P - Q) - M_1' N_1' \frac{\sin(P-Q)^2}{2\cos P \cos Q},$$

wo U den kleinsten positiven Bogen bezeichnet, welcher diesen Gleichungen genügt; endlich:

$$\tang(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = \sqrt{-\frac{N_1 \sin P \cos\frac{1}{2}(Q - P \pm U)}{M_1 \sin Q \cos\frac{1}{2}(P - Q \pm U)}}$$

$$= \sqrt{-\frac{N_1' \cos P \cos\frac{1}{2}(Q - P \pm U)}{M_1' \cos Q \cos\frac{1}{2}(P - Q \pm U)}}$$

Bequemer für die numerische Rechnung stellt man aber diese Formeln auf folgende Art dar:

$$\Theta = \omega - \omega' = \theta + \lambda . 360^0,$$

wo $\lambda = 0$, oder $\lambda = -1$, oder $\lambda = +1$ ist. Ferner:

$$M = \frac{\sin u \cos v}{\cos(u - v)}, \quad M' = \frac{\sin u' \cos v'}{\cos(u' - v')};$$

$$N = \frac{\cos u \sin v}{\cos(u - v)}, \quad N' = \frac{\cos u' \sin v'}{\cos(u' - v')};$$

$$\tang P = \frac{M + M'}{M - M'} \tang\frac{1}{2}\Theta,$$

$$\tang Q = \frac{N + N'}{N - N'} \tang\frac{1}{2}\Theta;$$

$$\cos U = -\cos(P-Q) - \frac{(M+M')(N+N')\sin(P-Q)^2}{2\cos\frac{1}{2}\Theta^2\sin P\sin Q}$$

$$= -\cos(P-Q) - \frac{(M-M')(N-N')\sin(P-Q)^2}{2\sin\frac{1}{2}\Theta^2\cos P\cos Q},$$

wo U den kleinsten positiven Bogen bezeichnet, welcher diesen Gleichungen genügt; endlich:

$$\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = \sqrt{-\frac{(N+N')\sin P\cos\frac{1}{2}(Q-P\pm U)}{(M+M')\sin Q\cos\frac{1}{2}(P-Q\pm U)}}$$

$$= \sqrt{-\frac{(N-N')\cos P\cos\frac{1}{2}(Q-P\pm U)}{(M-M')\cos Q\cos\frac{1}{2}(P-Q\pm U)}}.$$

Weil die Höhe h auf der Westseite, die Höhe h' auf der Ostseite des Meridians genommen wurde, so ist

$$0 < \omega < 180^0,\ 180^0 < \omega' < 360^0$$

und folglich

$$\Theta = \omega - \omega' = \theta + \lambda . 360^0$$

negativ. Daher kann offenbar nur $\lambda = -1$ gesetzt werden, und es ist also

$$\begin{aligned}\Theta &= 76^0.\ 16'.\ 22'',62 - 360^0\\ &= -\ 283^0.\ 43'.\ 37'',83\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}\Theta = -\ 141^0.\ 51'.\ 48'',69$$

$$\begin{array}{rrrr}
h = & 60^0. & 3'. & 38'',70\\
\delta = & 20. & 10. & 56,02\\
\hline
2u = & 70. & 14. & 34,72\\
u = & 35. & 7. & 17.36\\
v = & 14. & 56. & 21,34\\
\hline
u - v = & 20. & 10. & 56,02
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr}
h = & 60^0. & 3'. & 38'',70\\
\delta = & 20. & 10. & 56,02\\
\hline
2v = & 29. & 52. & 42,68\\
v = & 14. & 56. & 21,34
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
h' = & 33^0. & 33'. & 0'',00\\
\delta' = & 8. & 22. & 35,45\\
\hline
2u' = & 41. & 55. & 35,45
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr}
h' = & 33^0. & 33'. & 0'',00\\
\delta' = & 8. & 22. & 35,45\\
\hline
2v' = & 25. & 10. & 24,55
\end{array}$$

$u' = 20^\circ.\ 57'.\ 47'',72$	$v' = 12^\circ.\ 35'.\ 12'',27$
$v' = 12.\ 35.\ 12,27$	
$u' - v' = 8.\ 22.\ 35,45$	

$\log \sin u = 9,7599035$	$\log \sin u' = 9,5536029$
$\log \cos v = 9,9850669$	$\log \cos v' = 9,9894352$
$9,7449704$	$9,5430381$
$\log \cos (u - v) = 9,9724805$	$\log \cos (u' - v') = 9,9953421$
$\log M = 0,7724899 - 1$	$\log M' = 0,5476960 - 1$
$M = 0,5922293$	$M' = 0,3529360$

$\log \cos u = 9,9127183$	$\log \cos u' = 9,9702585$
$\log \sin v = 9,4112743$	$\log \sin v' = 9,3382919$
$9,3239926$	$9,3085504$
$\log \cos (u - v) = 9,9724805$	$\log \cos (u' - v') = 9,9953421$
$\log N = 0,3515121 - 1$	$\log N' = 0,3132083 - 1$
$N = 0,2246529$	$N' = 0,2056877$

$M = 0,5922293$	$N = 0,2246529$
$M' = 0,3529360$	$N' = 0,2056877$
$M + M' = 0,9451653$	$N + N' = 0,4303406$
$M - M' = 0,2392933$	$N - N' = 0,0189652$

$\log (M + M') = 0,9755077 - 1$	$\log (N + N') = 0,6338123 - 1$
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\Theta = 9,8949408$	$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\Theta = 9,8949408$
$9,8704485$	$9,5287531$
$\log (M - M') = 0,3789306 - 1$	$\log (N - N') = 0,2779574 - 2$
$\log \operatorname{tang} P = 10,4915179$	$\log \operatorname{tang} Q = 11,2507957$
$P = 72^\circ.\ 7'.\ 38'',36$	$Q = 86^\circ.\ 47'.\ 14'',25$
	$P = 72.\ 7.\ 38,36$
	$Q - P = 14.\ 39.\ 35,89$
	$P - Q = -14.\ 39.\ 35,89$

$\log (M + M') = 0,9755077 - 1$	$\log 2 = 0,3010300$
$\log (N + N') = 0,6338123 - 1$	$\log \sin P = 0,9785187 - 1$
$\log.\ \sin (P - Q)^2 = 0,8065226 - 2$	$\log \sin Q = 0,9993169 - 1$
$0,4158426 - 2$	$\log.\cos \frac{1}{2}\Theta^2 = 0,7914438 - 1$
$0,0703094$	$0,0703094$
$0,3455332 - 2$	

og$(M-M')=0,3780306-1$ $\qquad$ $\log 2=0,3010300$

og$(N-N')=0,2779574-2$ $\qquad$ $\log\cos P=0,4870008-1$

in$(P-Q)^2=0,8065226-2$ $\qquad$ $\log\cos Q=0,7485210-2$

$\overline{0,4634106-4}$ $\qquad$ $\log\sin\frac{1}{2}\Theta^2=0,5813256-1$

$0,1178774-2$

$\overline{0,3455332-2}$ ganz wie oben $\overline{0,1178774-2}$

Num. $=$ $0,0221581$

$(P-Q)=$ $0,9674448$

$\cos U=-\overline{0,9896029}$

$U=171^\circ.\ 43'.\ 50'',41$

$Q-P=\ 14^\circ.\ 39'.\ 35'',89$

$U=\ 171.\ 43.\ 50,41$

$Q-P+U=\ \overline{186.\ 23.\ 26,30}$

$Q-P-U=-157\ \ 4.\ 14,52$

$(Q-P+U)=\ 93.\ 11.\ 43,15$

$(Q-P-U)=-\ 78.\ 32.\ 7,26$

$(P-Q+U)=\ 78.\ 32.\ 7,26$

$(P-Q-U)=-\ 93.\ 11.\ 43,15$

$\log(N+N')=0,6338123-1$ $\qquad$ $\log(M+M')=0,9755077-1$

$\log\sin P=0,9785187-1$ $\qquad$ $\log\sin Q=0,9993169-1$

s$\frac{1}{2}(Q-P+U)=0,7461665-2_n$ $\log\cos\frac{1}{2}(P-Q+U)=0,2983362-1$

$\overline{0,3584975-2}$ $\qquad$ $\overline{0,2731608-1}$

$0,2731608-1$

$\overline{0,0853367-1}$

ng$(45^\circ-\frac{1}{2}\varphi)=9,54266835$

$\log(N-N')=0,2779574-2$ $\qquad$ $\log(M-M')=0,3780306-1$

$\log\cos P=0,4870008-1$ $\qquad$ $\log\cos Q=0,7485210-2$

s$\frac{1}{2}(Q-P+U)=0,7461665-2_n$ $\log\cos\frac{1}{2}(P-Q+U)=0,2983362-1$

$\overline{0,5111247-4}$ $\qquad$ $\overline{0,4257878-3}$

$0,4257878-3$

$\overline{0,0853369-1}$

ng$(45^\circ-\frac{1}{2}\varphi)=9,54266845$

Nehmen wir das Mittel zwischen den beiden vorher erhaltenen Werthen von $\log\tang(45^\circ-\frac{1}{2}\varphi)$, so werden wir

$$\log\tang(45^\circ-\tfrac{1}{2}\varphi)=9{,}5426684$$

setzen, woraus sich ergiebt:

$$45^\circ-\tfrac{1}{2}\varphi=19^\circ.\ 13'.\ 57'',16$$

$$\tfrac{1}{2}\varphi=25.\ 46.\ 2{,}84$$

$$\varphi=51.\ 32.\ 5{,}68$$

Ferner ist, wenn wir jetzt bloss bis auf Minuten gehen:

$$\log(N+N')=0{,}6338123-1 \qquad \log(M+M')=0{,}9755877-1$$

$$\log\sin P=0{,}9785187-1 \qquad \log\sin Q=0{,}9993169-1$$

$$\log\cos\tfrac{1}{2}(Q-P-U)=0{,}2983362-1 \qquad \log\cos\tfrac{1}{2}(P-Q-U)=0{,}7461665-2$$

$$\overline{0{,}9106672-2} \qquad \overline{0{,}7289911-2}$$

$$\underline{0{,}7289911-2}$$

$$0{,}1816761$$

$$\log\tang(45^\circ-\tfrac{1}{2}\varphi)=10{,}0908380$$

$$45^\circ-\tfrac{1}{2}\varphi=51^\circ.\ 12'$$

so dass sich also hieraus ein negativer Werth von φ ergeben würde, der natürlich unzulässig ist, und daher bloss

$$\varphi=51^\circ.\ 32'.\ 5'',68$$

gesetzt werden kann.

Die geringe Abweichung dieses Werthes der Polhöhe von dem im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Werthe dieses Elements rührt von den Fehlern her, welche bei dem Gebrauche der Tafeln übrig bleiben. Setzte man

$$\log\tang(45^\circ-\tfrac{1}{2}\varphi)=9{,}5426685,$$

wozu man eigentlich dieselbe Berechtigung hat, wie zu dem vorher angenommenen Werthe dieses Logarithmus, so würde man erhalten:

$$45^\circ-\tfrac{1}{2}\varphi=19^\circ.\ 13'.\ 57'',18$$

$$\frac{1}{2}\varphi = 25 \;.\; 46 \;.\; 2{,}82$$

$$\varphi = 51 \;.\; 32 \;.\; 5{,}64$$

Kürzt man diesen Werth und den im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Werth von φ bis auf die erste Decimalstelle ab, so erhält man beide Mal übereinstimmend

$$\varphi = 51^{\circ}.32'.5'',6.$$

Wir führen dies hier nur an, um zu zeigen, dass es bei etwas weitläufigeren Rechnungen immer schwer hält, sich vor den bei dem Gebrauche der Tafeln noch übrig bleibenden kleinen Fehlern völlig sicher zu stellen, und bemerken auch noch, dass wir aus diesem Grunde bei der in diesem Paragraphen geführten Rechnung ausser den gewöhnlichen Logarithmentafeln auch die Tafeln der natürlichen Linien von Sherwin (Correcteste Ausgabe von 1742) benutzt haben, welche vortreffliche Sammlung von Tafeln wir eigentlich allen übrigen Tafeln vorziehen, wenn auch freilich zu wünschen wäre, dass auch die Tafel der natürlichen Linien noch die Differenzen für eine Secunde enthielte, was leider nicht der Fall ist, aber allerdings auch ein grösseres, d. h. breiteres Format der Tafeln erfordert haben würde.

Was nun die beiden Stundenwinkel ω, ω' betrifft, so haben wir zuvörderst nach dem Obigen

$$\Theta = \omega - \omega' = -283^{\circ}.\; 43'.\; 37'',38.$$

Für $\Omega = \omega + \omega'$ haben wir nach §. 8. die folgenden Ausdrücke:

$$\Omega = P + Q - U - 2\lambda\pi$$

oder

$$\Omega = P + Q - U - 2(\lambda + 1)\pi,$$

und

$$\Omega = P + Q + U - 2\mu\pi$$

oder

$$\Omega = P + Q + U - 2(\mu + 1)\pi,$$

indem man diejenigen zwei dieser vier Werthe von Ω nimmt, welche für

$$\sqrt{x} = -\frac{N_1}{2\sin Q} \cdot \frac{\sin(P - Q)}{\cos(P - \frac{1}{2}\Omega)}$$

$$=-\frac{N_1'}{2\cos Q}\cdot\frac{\sin(P-Q)}{\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)}$$

positive Werthe liefern. λ, $\lambda+1$ sind die beiden aus

$$\frac{P+Q-U}{2\pi}-2<k<\frac{P+Q-U}{2\pi}$$

sich ergebenden Werthe der ganzen Zahl k, und μ, $\mu+1$ sind die beiden aus

$$\frac{P+Q+U}{2\pi}-2<k<\frac{P+Q+U}{2\pi}$$

sich ergebenden Werthe der ganzen Zahl k. Es ist nun

$$\begin{aligned} P &= 72^\circ.\ 7'.\ 38'',36 \\ Q &= 86\ .\ 47\ .\ 14,25 \\ P+Q &= 158\ .\ 54\ .\ 52,61 \\ U &= 171\ .\ 43\ .\ 50,41 \\ P+Q+U &= 330\ .\ 38\ .\ 43,02 \\ P+Q-U &= -\ 12\ .\ 48\ .\ 57,80 \end{aligned}$$

Näherungsweise hat man zur Bestimmung von λ, $\lambda+1$:

$$-2\frac{1}{30}<k<-\frac{1}{30},$$

also

$$\lambda=-2,\ \lambda+1=-1;$$

und zur Bestimmung von μ, $\mu+1$ hat man näherungsweise:

$$-1\frac{1}{12}<k<\frac{11}{12},$$

also

$$\mu=-1,\ \mu+1=0.$$

Also erhält man für Ω die vier folgenden Werthe:

$$\Omega=\begin{cases} 707^\circ.\ 11'.\ 2'',20 \\ 347\ .\ 11\ .\ 2,20 \\ 690\ .\ 38\ .\ 43,02 \\ 330\ .\ 38\ .\ 43,02 \end{cases}$$

Weil nun aber $N+N'$ positiv, $\cos\frac{1}{2}\Theta$ negativ, also N_1 negativ ist, weil ferner $\sin(P-Q)$ negativ und $\sin Q$ positiv ist, so ist

$$-\frac{N_1}{2\sin Q}\sin(P-Q)$$

negativ, und weil nun, wie leicht erhellet, $\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)$ respective

positiv,
negativ,
positiv,
negativ

ist, so ist $\sqrt{x}$ respective

negativ
positiv
negativ
positiv.

Also kann bloss

$$\Omega=\begin{cases}347^0.\ 11'.\ 2''.20\\ 330\ .\ 38.\ 43{,}02\end{cases}$$

gesetzt werden. Aus

$$\begin{aligned}\Omega&=\omega+\omega'=\ 347^0.\ 11'.\ 2'',20\\ \Theta&=\omega-\omega'=-283\ .\ 43\ .\ 37{,}38\end{aligned}$$

erhält man aber:

$$\begin{aligned}\omega&=31^0.43'.\ 42'',41\\ \omega'&=315.27.19{,}79\end{aligned}$$

und aus

$$\begin{aligned}\Omega&=\omega+\omega'=\ 330^0.\ 38'.\ 43'',02\\ \Theta&=\omega-\omega'=-283\ .\ 43\ .\ 37{,}38\end{aligned}$$

ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\omega&=\ 23^0.\ 27'.\ 32'',82\\ \omega'&=307\ .\ 11\ .\ 10{,}20\end{aligned}$$

Berechnet man nun hieraus die Correctionen des Standes der Uhr, so erhält man für die ersten Werthe von ω, ω':

$$\begin{array}{rl}
\omega = & 31^{0}.\ 43'.\ 42'',41 \\
\alpha = & 211\ .\ 44\ .\ 54,88 \\
\omega + \alpha = & \overline{243\ .\ 28\ .\ 37,29} \\
3) & \overline{81\ .\ \ 9\ .\ 32,43} \\
5) & \overline{16^{u}.\ 13^{m}.\ 54^{s},49} \\
 & 16\ .\ \ 8\ .\ 25,00 \\
 & \overline{\quad\quad 5\ .\ 29,49}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\alpha' = & 295^{0}.\ 22'.\ 17'',50 \\
360^{0} - \omega' = & 44\ .\ 32\ .\ 40,21 \\
\alpha' - (360^{0} - \omega') = & \overline{250\ .\ 49\ .\ 37,29} \\
3) & \overline{83\ .\ 36\ .\ 32,43} \\
5) & \overline{16^{u}.\ 43^{m}.\ 18^{s},49} \\
 & 16\ .\ 37\ .\ 49,00 \\
 & \overline{\quad\quad 5\ .\ 29,49}
\end{array}$$

Die Uhr ging also hiernach $5^{m}.\ 29^{s},49$ zu langsam.

Für die zweiten Werthe von ω, ω' hat man:

$$\begin{array}{rl}
\omega = & 23^{0}.\ 27'.\ 32'',82 \\
\alpha = & 211\ .\ 44\ .\ 54,88 \\
\omega + \alpha = & \overline{235\ .\ 12\ .\ 27,70} \\
5) & \overline{47\ .\ \ 2\ .\ 29,54} \\
3) & \overline{15^{u}.40^{m}.\ 49^{s},85} \\
 & 16\ .\ \ 8\ .\ 25,00 \\
 & \overline{\quad\quad 27\ .\ 35,15}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\alpha' = & 295^{0}.\ 22'.\ 17'',50 \\
360^{0} - \omega' = & 52\ .\ 48.\ 49,80 \\
\alpha' - (360^{0} - \omega') = & \overline{242.\ 33.\ 27,70} \\
5) & \overline{48\ .\ 30.\ 41,54} \\
3) & \overline{16^{u}.\ 10^{m}.\ 13^{s},85} \\
 & 16\ .\ 37\ .\ 49,00 \\
 & \overline{\quad\quad 27\ .\ 35,15}
\end{array}$$

Hiernach wäre also die Uhr $27^{m}.35^{s},15$ zu geschwind gegangen.

Für die ersten Werthe von ω, ω' war folglich:

Verspätung der Uhr $= 5^{m}.\ 29^{s},49$.

Für die zweiten Werthe von ω, ω' war dagegen:

Voreilung der Uhr $= 27^{m}.\ 35^{s},15$.

Insofern man also zu der Annahme berechtigt ist, dass die Uhr so weit berichtigt war, dass sie einen so grossen Fehler wie den letzteren, d. h. eine so grosse Abweichung von der wahren Sternzeit wie die letztere nicht haben konnte, wird man für ω, ω' die beiden ersten Werthe nehmen, d. h. man wird

$$\omega = 31^0.\ 43'.\ 42'',41$$
$$\omega' = 315\ .\ 27\ .\ 19,79$$

setzen müssen. Dass rücksichtlich ihres täglichen oder vierundzwanzigstündigen Gangs die Uhr genau berichtigt sei, und in dieser Beziehung ein Uhrfehler nicht Statt finde, ist im Vorhergehenden der Kürze wegen angenommen worden.

Wir haben das obige Beispiel so vollständig gerechnet, um die Anwendung der im Obigen entwickelten analytischen Kriterien mit möglichster Deutlichkeit zu erläutern; in der Praxis wird man sich öfters kürzer zu helfen im Stande sein. Es kam uns hier darauf an, durch strenge theoretische Entwickelungen die eigentliche Natur des Problems in recht helles Licht zu setzen, wodurch nach unserer Meinung auch der Praxis wesentlich genützt wird.

§. 15.

Wir wollen nun auch die in §. 4. für den Fall, wenn ein und dasselbe Gestirn zwei Mal beobachtet worden ist, gegebene Auflösung durch ein Beispiel erläutern.

Unter der Voraussetzung, dass die Uhr rücksichtlich ihres täglichen Gangs genau berichtigt ist, sind die Formeln zur Bestimmung der Polhöhe, welches Element wir der Kürze wegen jetzt allein in's Auge fassen wollen, die folgenden:

$$\theta = 15(t-t'),$$

$$\sin(45^0 - \frac{1}{2}i) = \cos\delta \sin\frac{1}{2}\theta,$$

$$\sin u = \sin\delta \sin\frac{1}{2}\theta \sin\frac{1}{2}(h+h')\cos\frac{1}{2}(h-h'),$$

$$\sin v = \cos\frac{1}{2}\theta \sqrt{\sin s \sin(s-h-h')\sin(s-h-i)\sin(s-h'-i)},$$

$$\sin\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}(u \pm v)\cos\frac{1}{2}(u \mp v)}{\sin\frac{1}{2}\theta\cos(45^0 - \frac{1}{2}i)^2};$$

wo

$$2s = 90^{\circ} + h + h' + i$$

ist.

Das beobachtete Gestirn war die Sonne. Nach allen nöthigen, hier keiner Erläuterung bedürfenden Correctionen waren die beiden genommenen Sonnenhöhen:

$$h = 36^{\circ}.\ 41'.\ 11'',8$$
$$h' = 26\ .\ 33\ .\ 21\ ,0$$

und die entsprechenden Uhrzeiten:

$$t = 23^{h}.37^{m}.4^{s},0$$
$$t' = 21\ .\ 1\ .\ 19,2$$

Also war der Zeitunterschied:

$$2^{h}.\ 35^{m}.\ 44^{s},8.$$

Die Uhr blieb aber in 24 Stunden um $15^{s},69$ zurück. Dies macht auf

1 Stunde, 1 Minute, 1 Secunde

respective

$$0^{s},6946;\ 0^{s},0108;\ 0^{s},0002;$$

also auf $2^{h}.\ 35^{m}.\ 44^{s},8$:

$$1^{s},30 + 0^{s},38 + 0^{s},01 = 1^{s},69 = 1^{s},7.$$

Daher ist

$$t - t' = 2^{h}.35^{m}.44^{s},8 + 1^{s},7 = 2^{h}.35^{m}.46^{s},5$$

und folglich

$$\theta = 15(t - t') = 38^{\circ}.\ 56'.\ 37'',5$$
$$\frac{1}{2}\theta = 19\ .\ 28\ .\ 18,7$$

zu setzen.

Die Declination der Sonne war

$$\delta = -2^{\circ}.\ 14'.\ 9'',0;$$

also ist

$$\log\cos\delta = 9{,}9996693$$

$$\log\sin\frac{1}{2}\theta = 9{,}5228925$$

$$\log\sin(45^{0}-\frac{1}{2}i) = 9{,}5225618$$

$$45^{0}-\frac{1}{2}i = 19^{0}.27'.23'',2$$

$$\frac{1}{2}i = 25\,.32\,.36,8$$

$$i = 51\,.\;5.13,6$$

Es ist also

$$\begin{aligned}
h &= 36^{0}.41'.11'',8\\
h' &= 26\,.33\,.21\,,0\\
i &= 51.\;\;5\,.13\,,6\\
h+h' &= 63.\,14.32\,,8\\
h-h' &= 10\,.\;\;7.50,8\\
2s &= 204\,.19\,.46,4\\
s &= 102.\;\;9\,.53,2\\
s-h-h' &= 38.55.20,4\\
s-h-i &= 14.23.27,8\\
s-h'-i &= 24.31.18,6
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(h+h') = 31^{0}.\;37'.\;16'',4$$

$$\frac{1}{2}(h-h') = 5\,.\;\;3\,.\;55,4$$

Folglich ist:

$$\log\sin\delta = 8{,}5912065_{n}$$

$$\log\sin\frac{1}{2}\theta = 9{,}5228925$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(h+h') = 9{,}7195810$$

$$\log\cos\frac{1}{2}(h-h') = 9{,}9983006$$

$$\log\sin u = 7{,}8319806_{n}$$

$$u = -0^{0}.\,23'.\,20'',9$$

und ferner:

$$\log\sin s = 9{,}9991370$$
$$\log\sin(s-h-h') = 9{,}7981438$$
$$\log\sin(s-h-i) = 9{,}3953939$$
$$\log\sin(s-h'-i) = 9{,}6180899$$
$$\overline{0{,}8017646-2}$$
$$2)\overline{0{,}4008823-1}$$

$$\log\cos\frac{1}{2}\theta = 9{,}9744220$$
$$\log\sin v = \overline{9{,}3753043}$$
$$v = 13^{0}.\,43'.\,38'',8$$

Es ist also

$$\begin{aligned} u &= -\ 0^{0}.\ 23'.\ 20'',9 \\ v &= +13\ .\ 43\ .\ 38,8 \\ u+v &= +13\ .\ 20\ .\ 17,9 \\ u-v &= -14\ .\ 6\ .\ 59,7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2}(u+v) &= +\ 6^{0}.\,40'.\,8'',9 \\ \frac{1}{2}(u-v) &= -7\ .\ 3\ .\ 29,8 \end{aligned}$$

und in der Formel

$$\sin\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}(u\pm v)\cos\frac{1}{2}(u\mp v)}{\sin\frac{1}{2}\theta\cos(45^{0}-\frac{1}{2}i)^{2}}$$

liefern folglich die unteren Zeichen offenbar einen negativen Werth von $\sin\varphi$, der hier unzulässig ist, weshalb man also die oberen Zeichen nehmen, d. h.

$$\sin\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}(u+v)\cos\frac{1}{2}(u-v)}{\sin\frac{1}{2}\theta\cos(45^{0}-\frac{1}{2}i)^{2}}$$

setzen muss. Demzufolge ist nun:

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \log\sin\frac{1}{2}(u+v) &= 9{,}0649659 \\ \log\cos\frac{1}{2}(u-v) &= 9{,}9966962 \\ & \overline{19{,}3626921} \\ & 9{,}4718191 \\ \log\sin\varphi &= \overline{9{,}8908730} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log\sin\frac{1}{2}\theta &= 9{,}5228925 \\ \log.\cos(45^{0}-\frac{1}{2}i)^{2} &= 0{,}9489266-1 \\ & \overline{9{,}4718191} \\ \\ \varphi &= 51^{0}.\ 3'.\ 37'',5 \end{aligned}$$

Dieses Beispiel ist aus Bohnenberger's Anleitung zur graphischen Ortsbestimmung. Göttingen 1795. 279. entlehnt, und dort nach der Methode von Douwes beet. Bohnenberger findet am Ende φ = 51°. 0'. 50", 3, dieselbe Angabe findet sich auch in Littrow's theoretier und praktischer Astronomie. Theil I. Wien. 1821. 188., wo dieses Beispiel gleichfalls zur Erläuterung der Mele von Douwes benutzt wird, aber ohne es vollständig ausechnen, indem das Resultat wohl nur aus Bohnenberger's em Buche entnommen ist. Dieses Resultat ist aber falsch, der Fehler kommt daher, weil Bohnenberger am Ende der nung (S. 282.) eine ganz andere Sonnen-Declination in Anlung bringt wie am Anfange (S. 280. und S. 281.), nämlich .16'.56",0 statt −2°.14'.9",0. Hätte er am Ende, wie es erorlich war, dieselbe Sonnen-Declination wie am Anfange in endung gebracht, so würde er in seinen Zeichen gefunden n:

$$H = 36^{0}.\ 42'.\ 13'',7\ ^{*})$$

$$\text{Abweichung der}\ \odot = -2\ .\ 14\ .\ 9\ ,0$$

$$\text{Aeq. Höhe} = \overline{38\ .\ 56\ .\ 22\ ,7}$$

$$\text{Breite} = 51\ .\ 3\ .\ 37\ ,3$$

nahe mit dem vorher nach unserer Methode erhaltenen Rete übereinstimmend. Die von Bohnenberger zum Grunde te genäherte Breite war 51°. 10'. 50". Streng genommen man, wenn man die Näherungsmethode von Douwes anet, nie unterlassen, diese Methode wenigstens zwei Mal r einander in Anwendung zu bringen, um sich von der nahen reinstimmung der beiden erhaltenen Näherungswerthe zu vern. Thut man aber dies, so wird die Anwendung dieser ungsmethode immer weitläufig ausfallen, insofern man sie durch den Gebrauch besonderer Tafeln abkürzt. Ich habe r die vorhergehende ganz genaue Methode in der Anwen sehr bequem gefunden, und ziehe sie für meinen eigenen auch jeder, streng genommen, immer mindestens zwei Mal in endung zu bringenden Näherungsmethode vor.

---

*) Uebrigens ist aber hier bei Bohnenberger a. a. O. noch ein er Rechnungsfehler, da zu

$$\sin H = 9{,}7764776$$

, wie Bohnenberger angiebt,

$$H = 36^{0}.\ 42'.\ 13'',7$$

rn

$$H = 36^{0}.\ 42'.\ 17'',2$$

rt. Ich führe dies hier an, weil Bohnenberger's bekanntes Buch r noch häufig von angehenden Beobachtern gebraucht wird, und meiner gleich nachher folgenden Berechnung des vorhergehenden piels nach der Methode von Douwes wegen.

Will man das vorhergehende Beispiel nach der Näherungsmethode von Douwes rechnen, so muss man mittelst einer genäherten Polhöhe φ zuerst die genäherten Stundenwinkel ω, ω' mittelst der Formeln

$$\omega' - \omega = \Theta,$$

$$\sin\frac{1}{2}(\omega' + \omega) = \frac{\sin\frac{1}{2}(h-h')\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi},$$

wo h die in der Nähe des Meridians genommene Höhe bezeichnen soll, suchen. Dann findet man den zweiten genäherten Werth (φ) der Polhöhe mittelst der Formel

$$\cos\{\delta-(\varphi)\} = \sin h + 2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2,$$

wo man aber, wenn man sich bloss der gewöhnlichen trigonometrischen Logarithmentafeln bedient, am besten noch einen Hülfswinkel ψ mittelst der Formel

$$\sin\psi = 2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

berechnet, und dann (φ) mittelst der Formel

$$\cos\{\delta-(\varphi)\} = 2\sin\frac{1}{2}(h+\psi)\cos\frac{1}{2}(h-\psi)$$

oder

$$\cos\{\delta-(\varphi)\} = 2\sin\frac{1}{2}(\psi+h)\cos\frac{1}{2}(\psi-h)$$

findet.

Im obigen Beispiele war nun

$$h = 36^{\circ}.\ 41'.\ 11'',8 \qquad t = 23^{u}.\ 37^{m}.\ 4^{s},0$$
$$h' = 26\ .\ 33\ .\ 21,0 \qquad t' = 21\ .\ 1\ .\ 19,2$$
$$\delta = -2^{\circ}.\ 14'.\ 9'',0$$

Auch weiss man, was vorher zu bemerken nicht nöthig war, dass die beiden Sonnenhöhen auf einer und derselben Seite des Meridians genommen wurden. Mit Rücksicht hierauf findet man nun für die oben angegebene Verspätung der Uhr ganz wie vorher

$$\Theta = \omega' - \omega = 38^{\circ}.\ 56'.\ 37'',5.$$
$$\frac{1}{2}\Theta = 19\ .\ 28\ .\ 18,7$$

genäherte Breite nehmen wir

$$\varphi = 51^{\circ}.\ 10'.\ 50''$$

und führen dann mit hier zweckmässiger Anwendung der de-schen Ergänzungen die Rechnung auf folgende Art:

$h = 36^{\circ}.41'.11'',8$

$h' = 26.\ 33.\ 21,0$

$\overline{h' = 63.\ 14.\ 32,8}$

$h' = 10.\ 7.\ 50,8$

$$\frac{1}{2}(h+h') = 31^{\circ}.\ 37'.\ 16'',4$$

$$\frac{1}{2}(h-h') = 5.\ 3.\ 55,4$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(h-h') = 8,9459242$$

$$\log\cos\frac{1}{2}(h+h') = 9,9302013$$

$$cd\log\cos\delta = 0,0003307$$

$$cd\log\sin\frac{1}{2}\Theta = 0,4771075$$

$$cd\log\cos\varphi = \underline{0,2028237}$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega) = 9,5563874$$

$$\frac{1}{2}(\omega'+\omega) = 21^{\circ}.6'.16'',3$$

$$\frac{1}{2}(\omega'-\omega) = \underline{19.\ 28.\ 18,7}$$

$$\omega = 1.37.57,6$$

$$\frac{1}{2}\omega = 0.48.58,8$$

$$\log 2 = 0,3010300$$

$$\log\cos\delta = 9,9996693$$

$$\log\cos\varphi = 9,7971763$$

$$\log.\sin\frac{1}{2}\omega^{2} = \underline{16,3074598}$$

$$\log\sin\psi = 6,4053354$$

$$\psi = 0^\circ.\ 0'.\ 52'',6$$
$$h+\psi = 36\ .42.\ \ 4,4$$
$$h-\psi = 36\ .40.\ 19,2$$

$$\tfrac{1}{2}(h+\psi) = 18\ .21.\ \ 2,2$$
$$\tfrac{1}{2}(h-\psi) = 18\ .20.\ \ 9,6$$

$$\log 2 = 0,3010300$$
$$\log\sin\tfrac{1}{2}(h+\psi) = 9,4980775$$
$$\log\cos\tfrac{1}{2}(h-\psi) = 9,9773705$$
$$\log\cos\{\delta-(\varphi)\} = 9,7764780$$

$$\delta-(\varphi) = -53^\circ.\ 17'.\ 42'',6$$

$$(\varphi) = \begin{cases} +53^\circ.\ 17'.\ 42'',6 \\ -\ \ 2\ .\ 14\ .\ \ 9,0 \end{cases}$$

$$= 51^\circ.\ 3'\ .\ 33'',6$$

Da diese Polhöhe von der angenommenen Polhöhe um mehrere Minuten abweicht, so würde es immerhin nöthig sein, die vorhergehende Rechnung nochmals für die genäherte Polhöhe $\varphi = 51^\circ.\ 3'.\ 33'',6$ zu wiederholen, und einen dritten Näherungswerth der Polhöhe zu suchen, denn nur auf diese Weise wird man den erreichten Grad der Näherung prüfen können. Auch weicht die jetzt gefundene genäherte Polhöhe von der durch die oben geführte genaue Rechnung gefundenen wahren Polhöhe immer noch nahe um 4″ ab, so dass also eine solche nochmalige Wiederholung der Näherungsrechnung in der That auch keineswegs überflüssig sein würde, was wir jedoch hier füglich unterlassen können, da es uns hier lediglich um die Erläuterung der allgemeinen Methode durch Beispiele zu thun ist.*) Ist aber eine

*) Weil ich jedoch die betreffende Rechnung, bei welcher

$$\varphi = 51^\circ.\ 3'.\ 33'',6$$

gesetzt wird, ausgeführt habe, so will ich dieselbe zum Ueberfluss noch hersetzen.

iederholung der Näherungsrechnung nöthig, so scheint es immer zuziehen zu sein, die Rechnung gleich ganz genau nach der Vorhergehenden entwickelten und durch ein Beispiel erläuter- Methode zu führen.

$$\log\sin\frac{1}{2}(h-h') = 8{,}9459242$$
$$\log\cos\frac{1}{2}(h+h') = 9{,}9302013$$
$$cd\log\cos\delta = 0{,}0003307$$
$$cd\log\sin\frac{1}{2}\theta = 0{,}4771075$$
$$cd\log\cos\varphi = \underline{0{,}2016842}$$
$$\log\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega) = 9{,}5552479$$

$$\frac{1}{2}(\omega'+\omega) = 21^{\circ}.\ 2'.\ 47'',7$$
$$\frac{1}{2}(\omega'-\omega) = 19\ .\ 28\ .\ 18\ ,7$$
$$\omega = \overline{\ 1\ .\ 34\ .\ 29\ ,0}$$
$$\frac{1}{2}\omega = 0\ .\ 47\ .\ 14\ ,5$$

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log\cos\delta = 9{,}9996693$$
$$\log\cos\varphi = 9{,}7983158$$
$$\log.\sin\frac{1}{2}\omega^2 = 16{,}2760740$$
$$\log\sin\psi = \overline{6{,}3750891}$$

$$\psi = 0^{\circ}.\ 0'.49'',0$$
$$h+\psi = 36\ .\ 42\ .\ 0\ ,8$$
$$h-\psi = 36\ .\ 40\ .\ 22\ ,8$$
$$\frac{1}{2}(h+\psi) = 18\ .\ 21\ .\ 0\ ,4$$
$$\frac{1}{2}(h-\psi) = 18\ .\ 20\ .\ 11\ ,8$$

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log\sin\frac{1}{2}(h+\psi) = 9{,}4980660$$
$$\log\cos\frac{1}{2}(h-\psi) = 9{,}9773692$$
$$\log\cos\{\delta-(\varphi)\} = \overline{9{,}7764652}$$

$$\delta-(\varphi) = -53^{\circ}.\ 17'.\ 47'',1$$

§. 16.

Auf das in §. 13. und §. 14. berechnete Beispiel wollen wir nun auch die in §. 12. gelehrte Construction anwenden, wobei ich bemerke, dass ich mich bei der Ausführung dieser Construction zu dem Auftragen der Winkel und Linien eines mit einem Nonius, der Minuten angiebt, versehenen Boussolen-Transporteurs und eines sogenannten tausendtheiligen Maassstabes, welcher letztere, nicht sehr sauber auf Messing aufgetragen, keine sehr grosse Genauigkeit gewährte, bedient habe.

Damit Θ positiv werde, setzen wir jetzt:

$$t = 16^{u}.\ 37^{m}.\ 49^{s}, \qquad h = 33^{0}.\ 33'.\ 0'',00;$$

$$t' = 16\ .\ 8\ .\ 25, \qquad h' = 50\ .\ 3\ .\ 38,70;$$

und

$$\alpha = 295^{0}.\ 22'.17'',50, \qquad \delta = 8^{0}.\ 22'.\ 35'',45;$$

$$\alpha' = 211\ .\ 44\ .54,88, \qquad \delta' = 20\ .\ 10\ .\ 56,02;$$

so ist

$$\theta = 15(t-t') - (\alpha - \alpha') = -76^{0}.\ 16'.\ 22'',62.$$

$$(\varphi) = \begin{cases} +53^{0}.\ 17'.\ 47'',1 \\ -\ 2\ .\ 14\ .\ \ 9,0 \end{cases}$$

$$= \quad 51^{0}.\ 3'.\ 38'',1$$

Dieser Werth der Polhöhe weicht von der angenommenen genäherten Polhöhe

$$51^{0}.\ 3'.\ 33'',6$$

nur bloss noch um wenige Secunden ab. Der oben gefundene genaue Werth der Polhöhe ist

$$51^{0}.\ 3'.\ 37'',5$$

wogegen der vorher gefundene Näherungswerth nur noch um 0'',6 zu gross ist. Streng genommen würde man die Näherung nun immer noch einmal wiederholen müssen, da man noch zu keiner vollständigen Uebereinstimmung mit dem zum Grunde gelegten Näherungswerthe gelangt ist, woraus sich, wenigstens nach meiner Meinung, ergiebt, dass die obige genaue Methode der Näherungsmethode in den meisten Fällen vorzuziehen ist, wenn man die Näherung bis zu einer völligen Uebereinstimmung zweier auf einander folgenden Näherungswerthe treiben will, was doch natürlich eigentlich die Strenge und Schärfe der Rechnung erfordert.

il die Höhe h auf der Ostseite, die Höhe h' auf der Westseite Meridians genommen worden ist, so ist

$$180^\circ < \omega < 360^\circ,\ 0 < \omega' < 180^\circ$$

in der Formel

$$\Theta = \omega - \omega' = \theta + \lambda.360^\circ,$$

nur $\lambda = 0$, -1, $+1$ sein kann, ist also offenbar $\lambda = +1$ zu en, welches giebt:

$$\Theta = 360^\circ - 76^\circ.16'.22'',62 = 283^\circ.43'.37'',38.$$

ist

$$\begin{array}{rl} \delta = & 8^\circ.\ 22'.\ 35'',45 \\ 90^\circ - \delta = & 81.\ 37.\ 24,55 \\ 90^\circ - h = & 56.\ 27.\ 0,00 \\ \hline & 138.\ 4.\ 24,55 = (90^\circ - \delta) + (90^\circ - h), \\ & 25.\ 10.\ 24,55 = (90^\circ - \delta) - (90^\circ - h); \\ & 69.\ 2.\ 12,27 = \frac{1}{2}\{(90^\circ - \delta) + (90^\circ - h)\}, \\ & 12.\ 35.\ 12,27 = \frac{1}{2}\{(90^\circ - \delta) - (90^\circ - h)\}. \end{array} \qquad \begin{array}{rl} h = & 33^\circ.\ 33'.\ 0'',00 \\ 90^\circ - h = & 56.\ 27.\ 0,00 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \delta' = & 20.\ 10.\ 56,02 \\ 90^\circ - \delta' = & 69.\ 49.\ 3,98 \\ 90^\circ - h' = & 39.\ 56.\ 21,30 \\ \hline & 109.\ 45.\ 25,28 = (90^\circ - \delta') + (90^\circ - h'), \\ & 29.\ 52.\ 42,68 = (90^\circ - \delta') - (90^\circ - h'); \\ & 54.\ 52.\ 42,64 = \frac{1}{2}\{(90^\circ - \delta') + (90^\circ - h')\}, \\ & 14.\ 56.\ 21,34 = \frac{1}{2}\{(90^\circ - \delta') - (90^\circ - h')\}. \end{array} \qquad \begin{array}{rl} h' = & 50^\circ.\ 3'.\ 38,70 \\ 90^\circ - h' = & 39.\ 56.\ 21,30 \end{array}$$

auf Minuten abgekürzt ist:

$$\Theta = \omega - \omega' = 283^\circ.\ 44'$$

$$\frac{1}{2}\{(90^\circ - \delta) + (90^\circ - h)\} = 69^\circ.\ 2',$$

$$\frac{1}{2}\{(90^\circ - \delta) - (90^\circ - h)\} = 12\ .35;$$

$$\frac{1}{2}\{(90^0-\delta')+(90^0-h')\}=54.53,$$

$$\frac{1}{2}\{(90^0-\delta')-(90^0-h')\}=14.56;$$

also

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\{(90^0-\delta)+(90^0-h)\}=2{,}610$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\{(90^0-\delta)-(90^0-h)\}=0{,}223$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\{(90^0-\delta')+(90^0-h')\}=1{,}422$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\{(90^0-\delta')-(90^0-h')\}=0{,}267$$

Die Construction auf Taf. I. ist mittelst der obigen numerischen Werthe ganz nach der in §. 12. gegebenen Anleitung ausgeführt worden, und die betreffende Figur bedarf, als völlig durch sich selbst verständlich, keiner weiteren Erläuterung. Der Radius, für welchen die Tangenten aufgetragen worden sind, ist ein preussischer Decimalzoll. Die Durchschnittspunkte der beiden Kreise sind C und D, und ihre Entfernungen von dem Punkte O, auf dem Maassstabe gemessen, finden sich:

$$OC=0{,}350 \text{ und } OD=1{,}240$$

welchen Linien als Tangenten die Winkel

$$19^0.\ 17' \text{ und } 51^0.\ 7'$$

entsprechen. Die erste Entfernung giebt also

$$\frac{1}{2}(90^0-\varphi)=45^0-\frac{1}{2}\varphi=19^0.17',$$

und die zweite Entfernung giebt

$$\frac{1}{2}(90^0-\varphi)=45^0-\frac{1}{2}\varphi=51^0.7'.$$

Da sich aus dieser letzteren Gleichung ein hier nicht zulässiger negativer Werth von φ ergiebt, so kann bloss

$$45^0 - \frac{1}{2}\varphi = 19^0.\ 17'$$

sein. In §. 13. ist gefunden

$$\varphi = 51^0.\ 32'$$

also

$$90^0 - \varphi = 38^0.\ 28',\quad 45^0 - \frac{1}{2}\varphi = 19^0.14'.$$

Die Construction giebt

$$\varphi = 51^0.\ 26',$$

die genaue Rechnung

$$\varphi = 51^0.\ 32',$$

Ich glaube aber, dass man bei Anwendung noch grösserer Sorgfalt bei Ausführung der Construction eine noch bessere Uebereinstimmung zwischen Construction und Rechnung hätte erreichen können.

Für den Punkt C, welcher der wahren Polhöhe entspricht, ist

$$X = +\,OE = 0{,}250;\quad X' = +\,OE' = 0{,}300;$$

also

$$X - X' = -0{,}05;\quad X + X' = 0{,}55;$$

folglich nach §. 12.

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega+\omega') = \frac{\overline{-0{,}05}}{0{,}55}\cot\frac{1}{2}\Theta = \frac{1}{11}\cot\frac{1}{2}\Theta,$$

wo nach dem Obigen

$$\frac{1}{2}\Theta = 141^0.\ 51'.\ 48'',69 = 141^0.52'.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\log\cot\frac{1}{2}\Theta &= 10{,}1051082_n\\ \log 11 &= \underline{\ 1{,}0413927\ }\\ \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega &= \ 9{,}0637155_n\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\Omega = 173^{\circ}.\ 23'.$$

Also ist

$$\theta = \frac{1}{2}(\omega - \omega') = 141^{\circ}.\ 52'$$

$$\frac{1}{2}\Omega = \frac{1}{2}(\omega + \omega') = 173\ .\ 23$$

$$\omega = 315\ .\ 15$$

$$\omega' = 31\ .\ 31$$

was nicht viel von dem, was wir in §. 14. gefunden haben, abweicht, wenn man nur nicht unbeachtet lässt, dass, was ω, ω' in §. 14. war, jetzt natürlich respective ω', ω ist.

Ich halte die vorhergehende Construction, namentlich in der Erweiterung, welche ich ihr für das Problem in seiner allgemeinsten Gestalt gegeben habe, und da sich auch aus ihr, wie ich gezeigt habe, leicht die Stundenwinkel herleiten lassen, für in theoretischer Rücksicht sehr bemerkenswerth, glaube aber auch, dass sich wegen ihrer leichten Ausführbarkeit wohl auch manche zweckmässige Anwendung in der Praxis von ihr machen lassen dürfte. Es würde sich selbst leicht ein besonderes Instrument angeben lassen, durch dessen Anwendung die Ausführung dieser Construction noch mehr erleichtert werden würde.

Vielleicht findet sich der eine oder andere Leser veranlasst, über ein solches Instrument weiter nachzudenken und das Ergebniss mitzutheilen.

II.

Ueber die Bedingung, unter welcher $a^x > x$ ist.

Von dem
Herrn Professor Dr. Hessel
an der Universität zu Marburg.

Lehrsatz.

Wenn e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems ist und es ist a positiv, so ist, wenn

$$a > \sqrt[e]{e}\ ^{*)}$$

ist, auch

$$a^x > x,$$

gleichviel welchen Werth man der Zahl x giebt.

Beweis. Es ist $a^x > x$, wenn $x.la > lx$ ist, d. h. wenn

$$la > \frac{lx}{x}$$

ist.

Da aber diese Ungleichung für jeden Werth von x gelten soll, so muss sie insbesondere auch für jene Werthe von x gelten, welche die grössten Werthe von $\frac{lx}{x}$ liefern.

---

*) $\sqrt[e]{e} = 1,444568 \ldots$ weil $e = 2,7182818 \ldots$

Um diese zu finden sei

$$la = y = \frac{lx}{x}.$$

Es ist dann

$$dy = \frac{1-lx}{x^2}.dx \text{ und } d^2y = \frac{-3x+2xlx}{x^4}(dx)^2.$$

Setzt man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-lx}{x^2} = 0,$$

so ersieht man sogleich, dass, wenn $1-lx=0$ ist, auch l
also $x=e$ ist, dass daher dann $la = \frac{1}{e}$, also $a=\sqrt{e}$ ist, und
weil für $x=e$ auch

$$\frac{d^2y}{(dx)^2} = -\frac{1}{e^3}$$

eine negative Grösse ist, der gefundene Werth von $\frac{lx}{x} = \frac{1}{e}$
Maximum von $\frac{lx}{x}$ sein müsse.

Um aber zu untersuchen, ob für positive Werthe von x
anderen (vielleicht grösseren) Maxima von $\frac{lx}{x}$ mehr vorkomme
sei

$$1) \quad x = e + \xi, \text{ also } y = \frac{l(e+\xi)}{e+\xi}.$$

Es ist dann

$$dy = \frac{1-l(e+\xi)}{(e+\xi)^2}\,d\xi,$$

und dieser Werth ist für jeden positiven Werth von ξ, der
schen $\xi=e$ bis $\xi=\infty$ liegt, sicher stets negativ, weil $l(e+\xi)$
also >1 ist.

Es hat also beim Wachsen von x zwischen $x=e$ bis x
d. h. beim Wachsen von ξ zwischen $\xi=0$ bis $\xi=\infty$, die G
y stets ein negatives Differential, ein negatives Wachsthum,
y nimmt hierbei stets ab, erreicht also keinen Werth mehr,
$\overset{=}{>} \frac{1}{e}$ ist.

2) Ist andererseits

$$x=e-\xi, \text{ also } y=\frac{l(e-\xi)}{e-\xi},$$

wobei $\xi \overline{\overline{>}} 0$ und $\overline{\overline{<}} e$, also $x \overline{\overline{<}} e$ und $\overline{\overline{>}} 0$ ist, so ist

$$dy=\frac{-1+l(e-\xi)}{(e-\xi)^2}.d\xi,$$

und da, für $\xi \overline{\overline{<}} e$ und $\overline{\overline{>}} 0$, auch $l(e-\xi) \overline{\overline{<}} le$, also <1 ist, so ist auch hier, beim Wachsen von ξ zwischen $\xi=0$ bis $\xi=e$, d. h. beim Abnehmen von x zwischen $x=e$ bis $x=0$, der Werth von dy stets negativ, also y stets abnehmend, so dass y zwischen $x=e$ und $x=0$ keinen Werth mehr erreicht, der $\overline{\overline{>}} \frac{1}{e}$ wäre. Es ist also zwischen $x=0$ bis $x=\infty$ der Werth von $y=\frac{lx}{x}$, welcher zu $x=e$ gehört, d. h. der Werth

$$\frac{lx}{x}=\frac{le}{e}=\frac{1}{e}$$

der grösste Werth von $\frac{lx}{x}$, und es existirt zwischen diesen Grenzen kein anderes Maximum von $\frac{lx}{x}$.

Es muss also, wenn für jeden positiven Werth von x stets $a^x > x$ sein soll, $la > \frac{1}{e}$, also $a > \sqrt[e]{e}$ sein.

Was nun negative Werthe von x betrifft, so ist, wenn a nur positiv ist, ohnehin, falls $x=-v$ gesetzt wird, stets

$$a^{-v}=\frac{1}{a^v}$$

eine positive Grösse, mithin stets

$$a^{-v}>-v.$$

Auch ist ohnehin $a^0=1$ also $a^0>0$.

Es ist also für $a>\sqrt[e]{e}$, für jeden Werth von x, stets $a^x>x$.

Anmerkung. Die wichtigsten zusammen gehörigen Werthe von x und von $y = \frac{lx}{x}$ sind folgende:

$x=0$	$x=1$	$x=e$	$x=e^{\frac{3}{2}}=3,9943\ldots$	$x=\infty$
$y=-\infty$	$y=0$	$y=\frac{1}{e}$	$y=\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}=0,37553\ldots$	$y=0$
		Maximum von y.	$\frac{d^2y}{(dx)^2}$ geht, beim Wachsen von x, aus $-$ in $+$ über.	

Sonstige interessante Werthe sind:

$$x = e^n \qquad x = e^{-n} = \frac{1}{e^n},$$

$$y = \frac{n}{e^n} \qquad y = -ne^n.$$

III.

Ueber drei Hauptarten von Logarithmensystemen.

Von dem

Herrn Professor Dr. Hessel

an der Universität zu Marburg.

Aus dem im vorhergehenden Aufsatze bewiesenen Satze (Siehe Seite 93.)

„Wenn $a > \sqrt[e]{e}$*), so ist für jeden Werth von x stets „$a^x > x$."

ergiebt sich als interessante Folgerung eine merkwürdige Eintheilung der Arten von Logarithmensystemen.

Man ersieht nämlich sofort:

1) dass es Logarithmensysteme giebt, in denen jede Zahl (Z) grösser als ihr Logarithme (log.art.Z) ist. Es sind diess alle jene Logarithmensysteme, deren Grundzahl $a > \sqrt[e]{e}$ ist; für diese ist also bei jeder beliebigen Zahl Z stets

$$Z > \log.\mathrm{art}.Z;$$

dass demgemäss insbesondere:

1, 1) im natürlichen Logarithmensysteme, wo $a = e = 2,71828\ldots$

$$\text{also } a > \sqrt[e]{e}$$
$$> 1,444568\ldots\ldots$$

ist, auch $Z > lZ$ sein muss;

---

*) $e = 2,7182818\ldots$ und $\sqrt[e]{e} = 1,444568\ldots$.

dass ebenso

1,2) im Briggischen Logarithmensysteme, wo

$$a = 10 > \sqrt[e]{e}$$

ist, auch $Z > \log Z$ sein muss;

2) dass es ein Logarithmensystem giebt, in welchem die Grundzahl $a = \sqrt[e]{e}$ ist, welches die merkwürdige Eigenschaft besitzt, dass in ihm ein Logarithme existirt, welcher der zugehörigen Zahl gleich ist, nämlich der $\operatorname{Log} e$, dass aber jeder andere Logarithme darin kleiner ist als die dazu gehörige Zahl.

2,1) Ist nämlich

$$a = \sqrt[e]{e} = e^{\frac{1}{e}},$$

so ist

$$a^e = \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e = e^{e\left(\frac{1}{e}\right)} = e^1 = e,$$

also

$$\operatorname{log\,art} e = e.$$

2,2) Ist ferner $Z = a^{x.e} = e^{x.e.\left(\frac{1}{e}\right)} = e^x$, und es ist $x \gtrless 1$ und nicht $= 1$, so ist $x.e < e^x$, also $\operatorname{log.art.} Z < Z$; denn wäre $x.e \overset{=}{>} e^x$, so müsste $e \overset{=}{>} \frac{e^x}{x}$ sein. Da nun aber für

$$y = \frac{e^x}{x}$$

auch

$$dy = \frac{x d.e^x - e^x dx}{x^2}$$

$$= \frac{e^x}{x^2}(x-1).dx$$

ist, und demgemäss für $x - 1 = 0$, also für $x = 1$, auch y ein Minimum (nämlich $y = e$) wird (indem für jedes x, das > 1 ist, beim Wachsen von x der Werth von y wächst, bis, bei $x = +\infty$, auch $y = \frac{e^\infty}{\infty} = \infty$ wird, und auch für jedes x, das positiv und < 1 ist, beim Abnehmen von x, der Werth von y wächst, bis, bei $x = +\frac{1}{\infty}$, auch $y = \frac{e^{\frac{1}{\infty}}}{\left(\frac{1}{\infty}\right)} = \infty$ wird), so folgt, dass für jedes positive x, das $>$ oder <1 ist, bei $a=\sqrt[e]{e}$, auch stets

$$\left.\begin{array}{l} a^{x.e}>xe \\ \text{Zahl}>\text{log.art.} \end{array}\right\} \text{ oder } e^x>e.x \text{ sein muss.}$$

Da nun ohnehin, für einen negativen Werth von x, $a^{x.e}>x.e$ ist, so ist bei $a=\sqrt[e]{e}$ jeder von $+e$ verschiedene Logarithmus kleiner als die dazu gehörige Zahl:

$$\text{log.art}.e=e,$$

$$\text{log.art}.(e\pm Z)<(e\pm Z).$$

3) dass es Logarithmensysteme giebt, in welchen auch Logarithmen existiren, die grösser sind als die dazu gehörigen Zahlen (neben einem der $=$ der betreffenden Zahl und neben anderen die $<$ als die betreffenden Zahlen sind). Es sind diess die Logarithmensysteme, deren Grundzahl $a<\sqrt[e]{e}$ ist.

Ist nämlich $a=e^{\frac{1}{ne}}$, also $<e^{\frac{1}{e}}$, so ist $a^{ne}=e$, also

$$\begin{aligned} \text{log.art}.e&=n.e \\ &>e. \end{aligned}$$

Es ist aber zugleich ferner, falls $Z=a^{nex}=e^x$ ist, auch

$$\left.\begin{array}{r} nex>e^x \\ \text{d. h. log.art}.Z>Z \end{array}\right\}, \text{ wenn } ne>\frac{e^x}{x},$$

$$>\left(\frac{e^{x-1}}{x}\right).e;$$

d. h. wenn

$$n>\frac{e^{x-1}}{x}$$

ist.

Ist nun z. B. für $x=4$ gefunden:

$$n=\frac{e^3}{4}=\frac{1}{4}e^3,$$

so ist, wenn

$$a=e^{\left(\frac{1}{\frac{1}{4}e^3.e}\right)}=e^{\frac{4}{e^4}}=\sqrt[e^4]{e^4}$$

ist,

für $x=4$, auch $\log.e^x = nex$,

$$\log.e^4 = \frac{1}{4}\,e^3.e.4 = e^4,$$

so dass $\log Z = Z$;

b) $\left.\begin{array}{l}\text{für } x < 4 \\ \text{z. B. } x=3\end{array}\right\}$, auch $\log.e^3 = \frac{1}{4}\,e^3.e.3$

$$= \frac{3}{4}\,e^4 = \frac{3}{4}\,e \cdot e^3 > e,$$

so dass $\log Z > Z$;

c) $\left.\begin{array}{l}\text{für } x > 4 \\ \text{z. B. } x=5\end{array}\right\}$, auch $\log e.^5 = \frac{1}{4}\,e^3.e.5$

$$= \frac{5}{4}.e^4 = \left(\frac{5}{4e}\right)e^5 < e^5;$$

so dass $\log Z < Z$.

Anmerkung. Was das Logarithmensystem anbelangt, dessen Grundzahl $\left.\begin{array}{l} a = \sqrt[e]{e} \\ = 1{,}444568 \end{array}\right\}$ ist, in welchem $Z = a^{x.e} = e^x$ ist, so ist bei ihm $\log.\mathrm{art}.Z = e.lZ$, d. h. man erhält den $\log.\mathrm{art}.Z$, wenn man den natürlichen Logarithmen von Z mit der Grundzahl e des natürlichen Logarithmensystems multiplicirt.

Auch folgt aus

$$Z = 10^y = e^x = a^{ex},$$

dass

$$x = y.\,l10,$$

und dass

$$e.x = (e.l10).y,$$

dass also

$$\left\{\begin{array}{l}\log.\mathrm{art}. \\ a = \sqrt[e]{e}\end{array}\right\} Z = (e.l10).\log.\mathrm{brigg}.Z.$$

IV.

Zur elementaren Quadratur des Kreises.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Bezeichnen wir mit E_n die Fläche des dem Kreise eingeschriebenen regulären nEcks und entsprechend mit U_n die Fläche des umschriebenen regelmässigen Vielecks von n Seiten, so finden zwischen den vier Grössen E_n, U_n, E_{2n}, U_{2n} bekanntlich folgende Beziehungen statt:

1) $$E_{2n} = \sqrt{E_n . U_n},$$

2) $$U_{2n} = \frac{2.E_{2n} . U_n}{E_{2n} + U_n};$$

mittelst deren man aus E_n und U_n zunächst E_{2n} und darauf U_n zu berechnen pflegt. So einfach diese Formeln an sich sind, so ist doch die Benutzung derselben zur näherungsweisen Berechnung der Ludolph'schen Zahl etwas mühsam, da man, bei $n=4$ anfangend, bis zum 32768Eck gehen muss, um 7 Dezimalstellen von π zu erhalten; dieser Umstand hat bereits Herrn Prof. Kunze zur Reproduktion der Gregory'schen Näherungsformeln veranlasst, welche schon beim 256Eck dieselbe Genauigkeit darbieten wie auf jenem Wege das 32768Eck, und es können die Freunde einer synthetischen Betrachtungsweise die genannte Darstellung gewiss als Muster derartiger Ableitungen betrachten. Um aber auch den Verehrern heuristischer Methoden zu genügen, gebe ich hier ein Seitenstück zu jener Darstellung, dem man wenigstens die Kürze nicht absprechen wird.

Um zunächst bequemere Formeln zu haben, führe ich
reziproken Werthe von E_n und U_n ein und setze:

$$3)\qquad \frac{1}{E_n}=\overset{*}{E}_n,\quad \frac{1}{U_n}=\overset{*}{U}_n,$$

wodurch die Formeln 1) und 2) in die folgenden übergehen:

$$4)\qquad \overset{*}{E}_{2n}=\sqrt{(\overset{*}{E}_n.\overset{*}{U}_n)},$$

$$5)\qquad U_{2n}=\frac{1}{2}\left(\overset{*}{E}_{2n}+\overset{*}{U}_n\right).$$

Nach einem bekannten Satze der Arithmetik darf man fü
geometrische Mittel zweier Zahlen a und $a+d$ das grössere
metische Mittel nehmen, wenn der dabei entstehende Fehl
cher weniger als $\frac{d^2}{8a}$ beträgt, den verlangten Grad von Ge
keit nicht beeinträchtigt*). Benutzen wir diess von irgen
Stelle $\overset{*}{U}_a=a$, $\overset{*}{E}_a=a+d$ an, so finden wir der Reihe na

---

*) Es ist nämlich identisch

$$\sqrt{a(a+d)}=\sqrt{(a+\tfrac{1}{2}d)^2-\tfrac{1}{4}d^2},$$

und folglich, durch Weglassung von $\frac{1}{4}d^2$,

$$\sqrt{a(a+d)}<a+\tfrac{1}{2}d.$$

Sei ferner f der Fehler, welcher begangen wird, wenn m
$\sqrt{a(a+d)}$ das zu grosse $a+\frac{1}{2}d$ setzt, so hat man

$$\sqrt{a(a+d)}=a+\tfrac{1}{2}d-f$$

oder

$$f+\sqrt{a(a+d)}=a+\tfrac{1}{2}d,$$

und daraus ergiebt sich durch beiderseitige Quadrirung

$$2f\sqrt{a(a+d)}+f^2=\tfrac{1}{4}d^2,$$

oder, wenn man linker Hand a für $a+d$ setzt und f^2 weglässt, w
die linke Seite zu klein wird,

$$2fa<\tfrac{1}{4}d^2.$$

Hieraus folgt der im Texte benutzte Satz, dass f weniger als
trägt.

$$\overset{*}{E}_{s}=a+d,$$

$$\overset{*}{U}_{s}=a,$$

$$\overset{*}{E}_{2s}=a+\frac{1}{2}d,$$

$$\overset{*}{U}_{2s}=a+\frac{1}{4}d,$$

$$\overset{*}{E}_{4s}=a+\frac{1}{4}d+\frac{1}{8}d,$$

$$\overset{*}{U}_{4s}=a+\frac{1}{4}d+\frac{1}{16}d,$$

$$\overset{*}{E}_{8s}=a+\frac{1}{4}d+\frac{1}{16}d+\frac{1}{32}d,$$

$$\overset{*}{U}_{8s}=a+\frac{1}{4}d+\frac{1}{16}d+\frac{1}{64}d$$

u. s. w.

)as Gesetz, nach welchem sich diese Ausdrücke bilden, ist : zu übersehen; die Werthe von $\overset{*}{U}$ enthalten immer eine etrische Progression des Exponenten $\frac{1}{4}$ als Faktor von d, die zugehörigen Werthe von $\overset{*}{E}$ differiren nur darin von jenen, ihr letztes Glied das Doppelte von dem letzten Gliede des trägt. Die gemeinschaftliche Gränze, gegen welche die $\overset{*}{E}$ $\overset{*}{U}$ convergiren, ist $\frac{1}{\pi}$, wenn wir den Radius des Kreises setzen; so ergiebt sich denn die Formel

$$\frac{1}{\pi}=a+\frac{1}{4}d+\frac{1}{16}d+\frac{1}{64}d+\frac{1}{256}d+\ldots..$$

$$=a+\frac{1}{3}d=\overset{*}{U}_{s}+\frac{1}{3}\left(\overset{*}{E}_{s}-\overset{*}{U}_{s}\right)=\frac{1}{3}\left(\overset{*}{E}_{s}+2\overset{*}{U}_{s}\right),$$

wenn man für $\overset{*}{E}_{s}$ und $\overset{*}{U}_{s}$ ihre Werthe setzt, so findet man r die nicht übele Näherungsformel

$$\pi=\frac{3E_{s}U_{s}}{2E_{s}+U_{s}}.$$

dabei begangene Fehler beträgt weniger als $\frac{d^2}{8a}$, d. h weniger als

$$\frac{(\overset{*}{E}_s - \overset{*}{U}_s)^2}{8\overset{*}{U}_s} = \frac{(U_s - E_s)^2}{8E_s^2 . U_s}.$$

Um diese Fehlerbestimmung etwas bequemer zu machen, be- ken wir, dass für $s > 3$ auch $E_s > E_3$, d. h. $E_s > \frac{3}{4}\sqrt{3}$ und denfalls $U_s > 3$ ist; demnach haben wir

$$8E_s^2 . U_s > 8 . \frac{27}{16} \cdot 3 > 40,$$

und folglich beträgt der beim Gebrauche der Formel 6) begang Fehler weniger als $\frac{1}{40}(U_s - E_s)^2$. Hiernach ist es sehr leicht Ludolph'sche Zahl schon aus Vielecken von geringer Seite mit vieler Genauigkeit zu berechnen; man hat z. B. für $s=$

$$U_{256} - E_{256} = 0{,}0004731 < \frac{5}{10^4},$$

mithin ist in diesem Falle der Fehler kleiner als

$$\frac{1}{40} \cdot \frac{25}{10^8} = \frac{6{,}25}{10^9},$$

woraus zu ersehen ist, dass man aus E_{256} und U_{256}, wenn tere auf eine hinreichende Stellenzahl berechnet sind, acht tige Dezimalstellen für π erhalten kann. Diese flüchtigen A tungen mögen die Brauchbarkeit der Formel 6) zur Genüge weisen.

V.

nerkung über die Convergenz der Reihen.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

ıfolge eines Theoremes von Raabe convergirt oder diver-
ı unendliche Reihe

$$1)\qquad u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots.$$

iem der Gränzwerth von

$$2)\qquad n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\qquad (n=\infty)$$

oder weniger als die Einheit beträgt. Man kann diesem
noch eine etwas andere Form geben, welche in vielen Fäl-
quem sein wird. Setzen wir nämlich

$$3)\qquad u_n=e^{t_n},$$

vergirt oder divergirt die Reihe, jenachdem

$$\mathrm{Lim}\{n(e^{t_n-t_{n+1}}-1)\}$$

r oder kleiner als die Einheit ausfällt. Nun ist aber
ch

$$n(e^{t_n-t_{n+1}}-1)=\frac{e^{t_n-t_{n+1}}-1}{t_n-t_{n+1}}\cdot n(t_n-t_{n+1}),$$

und folglich der Gränzwerth hiervon gleich

$$\left[\mathrm{Lim}\,\frac{e^{t_n-t_{n+1}}-1}{t_n-t_{n+1}}\right]\cdot\left[\mathrm{Lim}\{n(t_n-t_{n+1})\}\right].$$

Nach dem bekannten Satze, dass für unendlich abnehmende δ

$$\mathrm{Lim}\,\frac{e^{\delta}-1}{\delta}=1$$

ist, lässt sich der Gränzwerth des ersten Faktors bestimmen, indem man $\delta=t_n-t_{n+1}$ nimmt und voraussetzt, dass die Differenz t_n-t_{n+1} unendlich abnehme. Die Entscheidung der Convergenz oder Divergenz hängt jetzt nur noch von dem zweiten Faktor $\mathrm{Lim}\{n(t_n-t_{n+1})\}$ ab, und diess giebt den Satz:

Die unendliche Reihe

$$e^{t_0}+e^{t_1}+e^{t_2}+e^{t_3}+\ldots..$$

convergirt oder divergirt, jenachdem der Gränzwerth von $n(t_n-t_{n+1})$ grösser oder kleiner als die Einheit wird, vorausgesetzt, dass die Differenz t_n-t_{n+1} sich der Gränze Null nähert.

Setzt man aus der Gleichung 3) rückwärts für t_n seinen Werth $l(u_n)$, so führt der vorige Satz auf den folgenden:

Die unendliche Reihe

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots$$

convergirt oder divergirt, jenachdem der Gränzwerth von

$$nl\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$$

mehr oder weniger als die Einheit beträgt.

Vorausgesetzt wird hierbei allerdings, dass $t_n-t_{n+1}=l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ sich der Gränze Null, folglich $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ der Gränze 1 nähere, aber es liegt darin keine Beschränkung. Man weiss nämlich, dass die Reihe u_0+u_1+ etc. convergirt oder divergirt, jenachdem $\mathrm{Lim}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}$ kleiner oder grösser als die Einheit ist, und man wird das obige Criterium doch nur in dem Falle anwenden, wo $\mathrm{Lim}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ ist und man sich deswegen nach einem anderen Kennzeichen umsehen muss. Mit anderen Worten, die obige Regel tritt erst da in Kraft, wo die gewöhnliche Regel versagt.

Wenden wir diess z. B. auf die Reihe

$$\frac{1}{1^\mu}+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\ldots\ldots$$

, wo $u_n = \frac{1}{n^\mu}$, so folgt auf der Stelle

$$\mathrm{Lim}\left\{nl\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)\right\}=\mathrm{Lim}\{n\mu l(1+\frac{1}{n})\}=\mu,$$

d folglich convergirt die Reihe für $\mu > 1$, wie bekannt ist.

VI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

I.

Man soll die folgenden der Geometrie der Lage angehörigen genschaften des Dreiecks und Vierecks beweisen und die verge des Princips der Reciprocität ihnen entsprechenden Correе aufstellen.

1) Von einem Dreiecke abc sind die 3 Seiten ab, bc, ca rlängert, bis sie eine willkührlich ausserhalb gezogene Gerade in den Punkten p, q, r schneiden. In jedem der Punktesteme (a, b, p), (b, c, q), (c, a, r) construirt man den jedesmaen vierten harmonischen Punkt, welcher zwischen die zwei mer zuerst genannten Punkte fällt; heissen c', b', a' die so entundenen drei neuen Punkte, so schneiden sich die Geraden aa', ', cc' in einem Punkte.

2) Die vier Seiten ab, bc, cd, da eines Vierecks sind verlängert, bis sie eine willkührlich ausserhalb gezogene Gerade uv in p, q, r, s schneiden. Construirt man wie vorhin die zugehörigen vierten harmonischen Punkte a', b', c', d' zu den Punktesystemen (a, b, p), (b, c, q), etc.: so bestimmen dieselben ein Viereck, dessen Gegenseiten $a'b'$, $c'd'$ und $b'c'$, $d'a'$ sich in zwei Punkten f und g der willkührlichen Geraden uv schneiden; zugleich liegt f mit a und c, g mit b und d in einer Geraden.

3) Sei wieder $abcd$ ein Viereck, h der Durchschnitt von ab und cd, k der von bc und da; verlängert man die drei Diagonalen ac, bd, hk des so entstandenen vollständigen Vierecks bis sie eine willkührlich ausserhalb gezogene Gerade uv in p, q, r schneiden, und construirt in den Punktesystemen (a, c, p), (b, d, q), (h, k, r) den jedesmaligen vierten harmonischen Punkt, welcher zwischen die zwei immer zuerst genannten Punkte fällt, so liegen die entstandenen drei neuen Punkte in einer Geraden.

Welche schon bekannten Sätze folgen hieraus, wenn man die willkührliche Gerade uv unendlich weit wegrücken lässt?

II.

1) Man soll einen gegebenen Kegel mittelst einer Ebene so durchschneiden, dass die ihrer Fläche nach grösste Parabel dabei zum Vorschein kommt.

2) Einen gegebenen Kegel mittelst einer Ebene so zu durchschneiden, dass der Rotationskörper, welcher entsteht, wenn man die als Parabel vorausgesetzte Schnittfigur sich um ihre Achse drehen lässt, den grössten cubischen Inhalt bekommt.

III.

Arithmetisches Theorem.

Sei N eine beliebige ganze Zahl und in ihre Primfaktoren zerfällt, so dass man setzen kann:

$$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots ;$$

seien ferner P_1, P_2, ... P_n die relativen Primzahlen zu N, welche kleiner als N selbst sind ($P_1 = 1$, ... $P_n = N - 1$), so gilt für die Summe ihrer $m$ten Potenzen die Formel

$$
\begin{aligned}
&P_1^m + P_2^m + P_3^m + \ldots + P_\varphi^m \\
&= \frac{1}{m+1} N^{m+1} \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots \\
&\quad + \frac{1}{2} m_1 B_1 N^{m-1} (1-a)(1-b)(1-c)\ldots \\
&\quad - \frac{1}{4} m_3 B_3 N^{m-3} (1-a^3)(1-b^3)(1-c^3)\ldots \\
&\quad + \frac{1}{6} m_5 B_5 N^{m-5} (1-a^5)(1-b^5)(1-c^5)\ldots \\
&\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Hier bedeuten m_1, m_2, ... die Binomialkoeffizienten des ganzen Exponenten m, B_1, B_2..... die Bernoulli'schen Zahlen der Reihe nach.

IV.

Lehrsatz.

Wenn $y=f(x)$ die auf rechtwinklige Coordinaten bezogene Gleichung einer ebenen Curve bezeichnet, welche sich ins Unendliche hinaus erstreckt und immer mehr von der Abscissenachse entfernt $[f(\infty)=\infty]$, so ist

$$\eta = \sqrt{[f(h+\xi)]^2 - k^2}$$

die Gleichung einer asymptotischen Curve zur ersten; h und k bedeuten hier willkührliche Constanten. Für $y=\frac{b}{a}x$ z. B. wird

$$\eta = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(h+\xi)^2 - k^2}$$

und diess ist die Gleichung der Hyperbel als asymptotischer Curve. [Der Begriff der Asymptote ist hier verallgemeinert und als relativer genommen; zwei Curven $y=\varphi(x)$ und $y'=\psi(x)$ heissen asymptotische, wenn $y-y'$ für unendlich wachsende x gegen die Gränze Null convergirt.]

V.

Man soll die nachstehenden Formeln ableiten, welche zur Berechnung der Ludolph'schen Zahl sehr bequem sind:

$$\pi=\frac{24}{10}\left\{1+\frac{2}{3}\frac{1}{10}+\frac{2.4}{3.5}\frac{1}{10^2}+\ldots\ldots\right\}$$
$$+\frac{56}{100}\left\{1+\frac{2}{3}\frac{2}{100}+\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2}{100}\right)^2+\ldots\ldots\right\}$$

ferner

$$\pi=\frac{28}{10}\left\{1+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right)+\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2}{100}\right)^2+\ldots\ldots\right\}$$
$$+\frac{30336}{100000}\left\{1+\frac{2}{3}\left(\frac{144}{100000}\right)+\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2+\ldots\right.$$

Aufgaben*)

von Herrn O. Bermann, Kandidaten des höheren Lehramts zu Coblenz.

1) Die Spitze eines eine Kugel vom Radius r umhüllenden Kegels hat die Entfernung d vom Mittelpunkte derselben. Wie gross ist der Kubikinhalt des ausserhalb der Kugel liegenden Theiles des Kegels?

Resultat: $\frac{1}{3}\pi\frac{r^2}{d}(d-r)^2$.

2) Ein Planet vom Radius r hat die Entfernung d von der Sonne, deren Radius wir mit R bezeichnen wollen. Wie gross ist der Inhalt des ausserhalb des Planeten liegenden Theiles des Kernschattenkegels?

Resultat: $\frac{1}{3}\frac{\pi r^3}{d}\frac{(d-R+r)^2}{R-r}$.

3) Eine Kugel vom Radius r passt in einen geraden abgestumpften Kegel. Der Radius des Berührungskreises ist ϱ. Kubikinhalt und Mantel des Kegels zu bestimmen.

Resultat: $\frac{1}{3}\pi\frac{r^3}{\varrho^2}(4r^2-\varrho^2)$,

$4\frac{\pi r^4}{\varrho^2}$.

---

*) Der Einsender glaubt in den drei folgenden Aufgaben Das, was sie sein wollen, aufgestellt zu haben.

VII.

Miscellen.

Ueber ein Integral in Euler's Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum.

Von Herrn Doctor J. P. Wolfers zu Berlin.

In §. 723., Pag. 292. von Eulers theoria motus corporum solidorum seu rigidorum wird als Integral des Differentials

$$d\lambda = \frac{-dl(C-D\cos l)}{\sin l\sqrt{1-C^2+2CD\cos l-(1+D^2)\cos l^2}}$$

folgender Werth angegeben:

$$\lambda = E + \text{arc.sin.}\left(\frac{-D+C\cos l}{\sin l}\right),$$

wo E eine Constante ist. Dieses Integral scheint nicht richtig zu sein, wie man auch durch Differentiation sehen kann, indem man daraus nach einiger Umformung

$$d\lambda = \frac{-dl(C-D\cos l)}{\sin l.\sqrt{1-(1+C^2)\cos l^2+2CD\cos l-D^2}}$$

erhält. Um nun das oben gegebene Differential, welches man auch so schreiben kann:

$$d\lambda = \frac{-dl(C-D\cos l)}{\sin l.\sqrt{\sin l^2-(C-D\cos l)^2}}$$

zu integriren, bin ich folgendermassen zu Werke gegangen. Setzt man

$$C-D\cos l = L(D-C\cos l),$$

wo L eine neue Veränderliche ist, so erhält man hieraus:

$$\cos l = \frac{C-DL}{D-CL},\ \sin l^2 = \frac{(D^2-C^2)(1-L^2)}{(D-CL)^2},\ \sin l\, dl = \frac{(D^2-C^2)dL}{(D-CL)^2}$$

und

$$C-D\cos l=\frac{(D^2-C^2)L}{D-CL};$$

und wenn man diese Werthe in das gegebene Differential substituirt, nach einiger Umformung:

$$d\lambda=-\frac{LdL\sqrt{D^2-C^2}}{(1-L^2)\sqrt{1-(1+D^2-C^2)L^2}}.$$

Um nun ferner die Integration zu vereinfachen, setze man

$$L^2=x \text{ und } D^2-C^2=\alpha^2,$$

wodurch

$$d\lambda=-\frac{\frac{1}{2}\alpha dx}{(1-x)\sqrt{1-(1+\alpha^2)x}}$$

wird. Endlich setze man

$\sqrt{1-(1+\alpha^2)x}=z$, woraus $x=\frac{1-z^2}{1+\alpha^2}$ und $dx=\frac{-2zdz}{1+\alpha^2}$ folgt, und wir erhalten

$$d\lambda=\frac{\alpha dz}{\alpha^2+z^2},$$

also

$$\lambda=E+\text{arc}.\text{tg}.\left(\frac{z}{\alpha}\right).$$

Nun muss man noch von z nach und nach zu den ursprünglichen Veränderlichen zurückgehen, und es wird demnach

$$\frac{z}{\alpha}=\frac{\sqrt{1-(1+D^2-C^2)L^2}}{\sqrt{D^2-C^2}}=\frac{\sqrt{1-(1+D^2-C^2)\frac{(C-D\cos l)^2}{(D-C\cos l)^2}}}{\sqrt{D^2-C^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\sin l^2-(C-D\cos l)^2}}{D-C\cos l}=\frac{\sqrt{1-C^2+2CD\cos l-(1+D^2)\cos l^2}}{D-C\cos l};$$

also

$$\lambda=E+\text{arc.tg.}\left(\frac{\sqrt{1-C^2+2CD\cos l-(1+D^2)\cos l^2}}{D-C\cos l}\right),$$

wo E eine Constante ist. Durch Differentiation kann man sich a posteriori leicht überzeugen, dass dieses Integral dem gegebenen Differentiale entspricht.

VIII.

Untersuchung über die Form eines Wurzelausdruckes der Gleichung des $n$ten Grades.

Von

Herrn L. Mossburger,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

---

§. 1.

Es sei allgemein:

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0 \ldots. \quad (1)$$

die Gleichung des $n$ten Grades, worin $a_1, a_2, \ldots.. a_n$ bekannte Coefficienten sind. Im Allgemeinen soll zwischen diesen Coefficienten keinerlei Beziehung stattfinden.

Nehmen wir zuerst den speciellen Fall an, dass alle Wurzeln der Gleichung (1) einander gleich seien, so ist, wenn x' eine solche Wurzel bezeichnet:

$$x' = -\frac{a_1}{n}.$$

Auch lässt sich in diesem Falle die Gleichung (1) unter nachstehender Form darstellen:

$$F(x) = \left(x + \frac{a_1}{n}\right)^n$$

$$= x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0 \ldots..(2)$$

Differentiiren wir die Gleichung (2) $(n-1)$mal nach einander, so erhalten wir:

$$F'(x)=n\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^{n-1}$$

$$=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\ldots\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1}=0, \quad (3)$$

$$F''(x)=n(n-1)\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^{n-2}$$

$$=n(n-1)x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\ldots\ldots\ldots+2.1\,a_{n-2}=0\ldots\ldots \quad (4)$$

$$F'''(x)=n(n-1)(n-2)\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^{n-3}$$

$$=n(n-1)(n-2)x^{n-3}+(n-1)(n-2)(n-3)a_1x^{n-4}\ldots\ldots+3.2.1\,a_{n-3}=0 \quad (5)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\left.\begin{array}{l} F^{(n-3)}(x)=n(n-1)\ldots\ldots5.4\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^3=n(n-1)\ldots\ldots5.4x^3 \\ +(n-1)(n-2)\ldots\ldots4.3a_1x^2+(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots3.2a_2x \\ +(n-3)(n-4)\ldots\ldots2.1a_3=0 \end{array}\right\}\ldots(6)$$

$$\left.\begin{array}{l} F^{(n-2)}(x)=n(n-1)\ldots\ldots4.3\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^2=n(n-1)\ldots\ldots4.3x^2 \\ +(n-1)(n-2)\ldots\ldots3.2a_1x+\ldots+(n-2)(n-3)\ldots\ldots2.1.a_2=0 \end{array}\right\}\ldots(7)$$

$$\left.\begin{array}{l} F^{(n-1)}(x)=n(n-1)\ldots\ldots3.2\left(x+\frac{a_1}{n}\right)=n(n-1)\ldots\ldots3.2\,x \\ +(n-1)(n-2)\ldots\ldots2.1.\,a_1=0 \end{array}\right\}\ldots(8)$$

Da in den Gleichungen (1), (2), (3), ... (8) die Ausdrücke

$$\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^n, n\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^{n-1}, n(n-1)\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^{n-2}, \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n(n-1)\ldots\ldots3.2\left(x+\frac{a_1}{n}\right)$$

für $x=-\frac{a_1}{n}$ zu Null werden, so müssen auch die respective diesen Ausdrücken gleichgeltenden Ausdrücke:

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

$$nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1},$$

$$n(n-1)x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\ldots\ldots\ldots+3.2.a_{n-3}x+2.1.a_{n-2}.$$

$$\vdots$$

$$n(n-1)\ldots\ldots3.2.x+(n-1)(n-2)\ldots\ldots2.1\,a_1$$

für $x = -\frac{a_1}{n}$ zu Null werden. Durch die auf einander folgende Substitution von $-\frac{a_1}{n}$ statt x in Nr. (7), (6), ... (2), (1) erhält man, wenn der Kürze wegen die Resultate dieser Substitutionen durch $F\left(-\frac{a_1}{n}\right)$, $F'\left(-\frac{a_1}{n}\right)$, $F''\left(-\frac{a_1}{n}\right)$, u. s. w. bezeichnet werden:

$$F\left(-\frac{a_1}{n}\right)=0, F'\left(-\frac{a_1}{n}\right)=0, F''\left(-\frac{a_1}{n}\right)=0, \ldots F^{(n-2)}\left(-\frac{a_1}{n}\right)=0 \ldots (9)$$

Nehmen wir nun wieder an, die Gleichung (1) habe lauter ungleiche Wurzeln, und es sei x' eine solche Wurzel, so wird:

$$x' = -\frac{a_1}{n} + \varphi_1 \{a_1, a_2, a_3, \ldots . a_n\} \; \ldots \ldots . \; (10)$$

sein. Die in der Klammer eingeschlossenen Coefficienten werden in verschiedenen Potenzen und Verbindungen mit einander vorkommen, und diese Verbindungen und Coefficienten-Potenzen werden wiederum in verschiedenen Wurzelzeichen eingeschachtelt sein.

Es sind aber nachstehende Eigenschaften des im Funktionszeichen φ_1 enthaltenen Ausdrucks (10) auch ohne weitere Beweisführung als gültig vorauszusetzen:

1) Muss sich der unter dem Funktionszeichen φ_1 begriffene allgemeine Ausdruck in Nr. (10) auf alle möglichen speciellen Fälle anwenden und reduciren lassen, wenn er für den allgemeinsten Fall (nämlich für den, wo alle Wurzeln ungleich sind) gültig sein soll. Daraus folgt

2) dass sich auch der in Nr. (10) gegebene Ausdruck auf denjenigen Fall zurückführen lassen muss, in welchem alle Wurzeln als gleich angenommen werden; in diesem Falle reducirt sich aber die Wurzel der Gleichung (1) auf $x' = -\frac{a_1}{n}$; mithin muss bei der Voraussetzung gleicher Wurzeln die Funktion $\varphi_1 \{a_1, a_2, a_3, \ldots . a_n\}$ verschwinden. Nun finden aber für diesen Fall nur die Bedingungsgleichungen (9) statt, und keine mehr, und keine weniger; würde nun der Ausdruck $\varphi_1 \{a_1, a_2, a_3, \ldots . a_n\}$ dadurch zu Null, dass andere Coefficienten-Funktionen als die in Nr. (9) oder wenigstens solche, in welchen die in Nr (9) nicht als Faktoren enthalten wären, nebst jenen in Nr. (9) zu Null würden, oder einige von denen in (9) vorkommenden sich nicht auf Null reduciren liessen, so entstünden im ersten Falle zwischen den Coefficienten $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots a_n$ Gleichungen, die der Voraussetzung gleicher Wurzeln nicht genügen würden, weil nur die in (9) aufgestellten dieser Voraussetzung genügen; im andern Falle würden einige der Beziehungsgleichungen mangeln, die in (9) als nothwendige Bedingung gleicher Wurzeln dargestellt sind. Aus diesem allem geht hervor, dass die in (9) enthaltenen Funktionen alle in dem Ausdruck (10),

der unter dem Funktionszeichen begriffen ist, vorkommen müssen, widrigenfalls der allgemeine Ausdruck einer Wurzel von einer Gleichung des $n$ten Grades mit n verschiedenen Wurzeln, nicht auf den speciellen Fall von n gleichen Wurzeln reducirt werden könnte, dass also die Wurzel x' der Gleichung (1) unter der Form:

$$x' = -\frac{a_1}{n} + \varphi_1 \left\{ F\left(-\frac{a_1}{n}\right), F'\left(-\frac{a_1}{n}\right), F''\left(-\frac{a_1}{n}\right), \ldots F^{(n-2)}\left(-\frac{a_1}{n}\right) \right\} \quad (11)$$

begriffen sein muss.

Um einige Anwendungen von dem eben bewiesenen Satze als Erläuterung zu geben, so sei:

$$\text{I. } F(x) = x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

die gegebene Gleichung. Hier ist

$$F'(x) = 2x + a_1 = 0.$$

Dies giebt $x = -\frac{a_1}{n}$; dieser Werth von x in der gegebenen Gleichung substituirt, giebt:

$$F\left(-\frac{a_1}{2}\right) = \frac{a_1^2}{4} - a_2.$$

Es ist aber in diesem Beispiele $n=2$, also $n-2=0$, also $F^{(n-2)}\left(-\frac{a_1}{n}\right) = F\left(-\frac{a_1}{2}\right)$; folglich hat nach Nr. (11) der Wurzelwerth x' die Form:

$$x' = -\frac{a_1}{2} + \varphi_1 \left\{ F\left(-\frac{a_1}{2}\right) \right\} \quad \text{oder } x' = -\frac{a_1}{2} + \varphi_1 \left\{ \frac{a_1^2}{4} - a_2 \right\},$$

welche mit der wahren Wurzel $x' = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$ übereinstimmt.

$$\text{II. } F(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0. \quad \ldots\ldots (a)$$

$$\text{Hier ist } F'(x) = 3x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0, \quad \ldots\ldots (b)$$

$$F''(x) = 6x + 2a_1 = 0. \quad \ldots\ldots (c)$$

Aus der letzten Gleichung erhalten wir $x = -\frac{a_1}{3}$; dieser Werth von x in (a) und (b) substituirt, giebt:

$$F'\left(-\frac{a_1}{3}\right) = \frac{a_1^2}{3} - a_2 = 0, \; F\left(-\frac{a_1}{3}\right) = \frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} + a_3 = 0.$$

Nun ist, wenn man in Nr. (11) $n=3$ setzt, $n-2=1$, $n-3=0$; folglich ist:

$$x'=-\frac{a_1}{3}+\varphi_1\left\{F\left(-\frac{a_1}{3}\right),F'\left(-\frac{a_1}{3}\right)\right\} \text{ oder}$$

$$x'=-\frac{a_1}{3}+\varphi_1\left\{\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right),\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)\right\};$$

aber die wahre Wurzel der Gleichung (a) ist

$$x'=-\frac{a_1}{3}+\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)+\sqrt{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3}}{2}}$$

$$+\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)-\sqrt{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3}}{2}}.$$

Aus der Vergleichung dieser Ausdrücke zieht man die Uebereinstimmung der darin enthaltenen Funktionen.

§. 2.

Sind in der Gleichung:

$$F(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0\ldots(1)$$

$n-1$ gleiche Wurzeln, und ist α eine der gleichen Wurzeln, hingegen α_1 diejenige, welche mit den übrigen Wurzeln nicht gleich ist, so wird die Gleichung (1) unter dieser Voraussetzung zu:

$$F(x)=(x+\alpha)^{n-1}(x+\alpha_1)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0\ldots(2)$$

Differentiiren wir diese Gleichung $(n-2)$mal nach einander, so erhalten wir:

$$F'(x)=(n-1)(x+\alpha)^{n-2}.(x+\alpha_1)+(x+\alpha)^{n-1}$$
$$=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1}=0\ldots(3)$$

$$F''(x)=(n-1)(n-2)(x+\alpha)^{n-3}.(x+\alpha_1)+2(n-1)(x+\alpha)^{n-2},$$
$$=n(n-1)x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\ldots+2.1a_{n-2}=0\ldots(4)$$

$$F'''(x)=(n-1)(n-2)(n-3)(x+\alpha)^{n-4}(x+\alpha_1)+3(n-1)(n-2)(x+\alpha)^{n-3}$$
$$=n(n-1)(n-2)x^{n-3}+(n-1)(n-2)(n-3)a_1x^{n-4}+\ldots+3.2.1a_{n-3}=0\ldots(5)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$F^{(n-2)}(x)=(n-1)(n-2)\ldots4.3(x+\alpha)^2(x+\alpha_1)$$
$$+(n-3)(n-1)(n-2)(n-3)\ldots4(x+\alpha)^3$$

$$\left.\begin{array}{l} = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 4.x^3 + (n-1)(n-2)\ldots\ldots 3a_1 x^2 \\ + (n-2)(n-3)\ldots\ldots 2a_2 x + (n-3)(n-4)\ldots\ldots 2.1 a_3 = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} F^{(n-2)}(x) = (n-1)(n-2)..3.2(x+\alpha)(x+\alpha_1) + (n-2)(n-1)(n-2)..4.3(x+\alpha)^2 \\ = n(n-1)\ldots\ldots 4.3.x^2 + (n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2a_1 x \\ + (n-2)(n-3)\ldots\ldots 2.1.a_2 = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (7)$$

Da in den Gleichungen (2), (3).....(7) die auf der linken Seite der Gleichheitszeichen befindlichen Theile für $x = -\alpha$ zu Null werden, weil alle Glieder den Faktor $x + \alpha = 0$ haben, so müssen auch die auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens befindlichen Theile zu Null werden. Der Werth von α bestimmt sich aber aus der Gleichung (7), welche sich auf

$$F^{(n-2)}(x) = n(n-1)x^2 + 2(n-1)a_1 x + 2.1.a_2 = 0 \ldots\ldots (8)$$

reducirt.

Bezeichnet man die Wurzeln dieser Gleichung mit α' und α'', so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha' = -\dfrac{a_1}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{a_1^2}{n} - \dfrac{2a_2}{n-1}}, \\ x = \alpha'' = -\dfrac{a_1}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{a_1^2}{n} - \dfrac{2a_2}{n-1}}. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (9)$$

Einer dieser Werthe von x muss die Gleichungen (2), (3).....(7) befriedigen, weil, wie wir so eben gesehen haben, jede derselben eine Wurzel $x = -\alpha$ hat, und einer dieser beiden Werthe gleich $-\alpha$ sein muss. Wir nehmen nun an, α' sei der Werth, der diese Eigenschaft besitzt, also gleich $-\alpha$ ist, so erhalten wir aus (2) (3).....(7) durch Substitution folgende Bedingungsgleichungen:

$$F(\alpha') = 0, F'(\alpha') = 0, F''(\alpha') = 0, \ldots\ldots F^{(n-3)}(\alpha') = 0 \ldots\ldots (10)$$

Wäre aber $\alpha'' = -\alpha$, so hätten wir eben so:

$$F(\alpha'') = 0, F'(\alpha'') = 0, F''(\alpha'') = 0, \ldots\ldots F^{(n-3)}(\alpha'') = 0 \ldots\ldots (11)$$

Die Gleichungen (10) und (11) können nicht gleichzeitig stattfinden, weil nur eine der beiden Grössen α' und α'' gleich $-\alpha$ sein kann; finden daher die in (10) statt, so sind die in (11) ungültig, und umgekehrt.

Nehmen wir nun wieder wie in §. 1. an, es seien lauter ungleiche Wurzeln in der Gleichung (1) vorhanden, und bezeichnen mit x' eine solche Wurzel, so werden wir beweisen, dass der Ausdruck für die Wurzel x' folgende Form hat:

$$x' = -\frac{a_1}{n} + \varphi_3 \left\{ \begin{array}{l} F\left(-\frac{a_1}{n}\right), F'\left(-\frac{a_1}{n}\right), F''\left(-\frac{a_1}{n}\right), \ldots F^{(n-3)}\left(-\frac{a_1}{n}\right) \\ \pm \Big[f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}, f_2\{F'(\alpha').F'(\alpha'')\}, \ldots \\ \qquad \ldots f_{n-2}\{F^{(n-3)}(\alpha').\ F^{(n-3)}(\alpha'')\}\Big] \end{array} \right\} \quad (12)$$

In diesem Ausdrucke bezeichnen $\varphi, f_1, f_2, f_3, \ldots f_{n-2}$ einstweilen zum Theil noch unbestimmte Funktionen.

Schliessen wir wieder wie in §. 1., so muss sich der Ausdruck (12) auf alle speciellen Fälle reduciren und anpassen lassen, wenn er für den allgemeinsten Fall tauglich sein soll, also sowohl auf denjenigen, in welchem $n-1$, als auch auf jenen, in welchem n gleiche Wurzeln vorkommen. Im letzten Falle muss er sich auf $x' = -\frac{a_1}{n}$ reduciren; dieses kann aber nach §. 1. nur statt finden, wenn

$$f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}, f_2\{F'(\alpha').F'(\alpha'')\}, \ldots f_{n-2}\{F^{(n-3)}(\alpha').F^{(n-3)}(\alpha'')\}$$

selbst Funktionen von $F\left(-\frac{a_1}{n}\right)$, $F'\left(-\frac{a_1}{n}\right)$, $\ldots F^{(n-3)}\left(-\frac{a_1}{n}\right)$. sind; im ersten Falle muss aber entweder den Gleichungen (10), oder aber jenen in (11) genügt werden; da aber specielle Fälle eintreten können, wo $\alpha' = -\alpha$ ist, so wie auch wieder andere, wo $\alpha'' = -\alpha$ ist, so muss der allgemeine Ausdruck in (12) so beschaffen sein, dass er sich sowohl auf den einen als auf den andern dieser Fälle anpassen lässt; dies kann aber nur dann geschehen, wenn $F(\alpha')$ und $F(\alpha'')$; $F'(\alpha')$ und $F'(\alpha'')$; $F''(\alpha')$ und $F''(\alpha'')$; u. s. w. in einer solchen Verbindung vorkommen, dass dadurch sowohl für $\alpha' = -\alpha$, als für $\alpha'' = -\alpha$, beziehlich den Gleichungen (10) oder (11) genügt wird. Diese Verbindungen können aber, wie leicht ersichtlich ist, keine anderen sein, als $F(\alpha').F(\alpha'')$, $F'(\alpha').F'(\alpha'')$, $F''(\alpha').F''(\alpha'')$, u. s. w. Würde nun eine einzige Funktion dieser Produkte in dem Ausdrucke (12) nicht vorkommen, oder andere Funktionen als solche dieser Produkte vorhanden sein, so würden bei der Voraussetzung von $n-1$ gleichen Wurzeln (und zwar sowohl für $\alpha' = -\alpha$, oder für $\alpha'' = -\alpha$) zwischen den constanten Coefficienten der Gleichung (1) Bedingungsgleichungen entstehen, die für $\alpha' = -\alpha$ den Gleichungen (10) und für $\alpha'' = -\alpha$ den Gleichungen (11) widersprechen würden. Weil endlich bei $n-1$ gleichen Wurzeln der Ausdruck im Funktionszeichen φ_3 der Gleichung (12) nicht Null werden darf, und dennoch die Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\} = 0, f_2\{F'(\alpha').F'(\alpha'')\} = 0, f_3\{F''(\alpha').F''(\alpha'')\} = 0, \\ \qquad \ldots\ldots f_{n-2}\{F^{(n-3)}(\alpha').F^{(n-3)}(\alpha'')\} = 0 \end{array} \right\} \ldots (13)$$

wie wir so eben gezeigt haben, für $n-1$ gleiche Wurzeln stattfinden müssen, so müssen diese Produktenfunktionen, die in dem

Ausdrucke (12) durch eine besondere Klammer eingefasst sind, das Zeichen (+) oder (—) (oder mit beiden nach einander, weil die Gr... für das Vorhandensein von jedem dieselben sind) mit den andern v... kommenden Funktionen verbunden sein; und nicht durch Multi... kation, oder durch Division; denn wäre diese eingeklammer... Summe von Produktenfunktionen durch Multiplikation mit den ... dern vorkommenden Funktionen verbunden, so würde im Fall ... $n-1$ gleichen Wurzeln, wegen der Gleichungen in No. (13), ... Ausdruck im Funktionszeichen φ_2 der Gleichung (12) versch... den, was offenbar nicht sein darf; wäre aber jene Produkt... summe in (12) mit den andern dort verkommenden Funkti... durch Division verbunden, so würde der Ausdruck im Funkti... zeichen φ_2 im Fall $n-1$ gleicher Wurzeln, wegen No. (13), ... endlich gross, was ebenfalls im Allgemeinen nicht sein ka... mithin kann diese Verbindung nur mittelst der Zeichen (+) ... (—) stattfinden. Dass übrigens diese andern Funktionen, ... welchen jene Summe der Produktenfunktionen, wie so eben ... wiesen wurde, durch (+) oder (—) verbunden sein müssen, ... anderen als $F\left(-\frac{a_1}{n}\right)$, $F'\left(-\frac{a_1}{n}\right)$, $F''\left(-\frac{a_1}{n}\right)$, ... $F^{(n-3)}\left(-\right.$ ... sein dürfen, wurde schon zu Anfang dieses Paragraphen erwie... auch folgt dies unmittelbar aus dem Beweise in §. 1. Aus di... allem geht hervor, dass die in der Gleichung (12) aufges... Wurzelform einer Gleichung des $n$ten Grades den Anforder... und Bedingungen von n und $n-1$ gleichen Wurzeln durc... Genüge leistet.

Wir wollen dieses in einem Beispiel zeigen.

Es sei wieder die Gleichung

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \dots\dots\dots\dots$$

gegeben, so haben wir wie in §. 1.

$$F'(x)=3x^2+2a_1x+a_2=0 \dots\dots\dots$$

Die Wurzeln α' und α'' dieser Gleichung sind:

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha'=-\frac{a_1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{a_1^2}{3}-a_2}, \\ x=\alpha''=-\frac{a_1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{a_1^2}{3}-a_2} \end{array}\right\} \dots\dots$$

Werden diese Werthe nach einander in (a) eingeführt, so e... man:

$$F(\alpha')=-\left[\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)+\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

$$F(\alpha'')=-\left[\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)-\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

folglich ist:

$$F(\alpha').F(\alpha'')=\left[\left(\frac{a_1 a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3\right]$$

$$\text{und } F\left(-\frac{a_1}{3}\right)=\frac{a_1 a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3.$$

Setzt man aber in No. (12) $n=3$, und wendet beide Zeichen $(+)$ und $(-)$ an, so kommt:

$$x'=-\frac{a_1}{3}+\varphi_2\left\{F\left(-\frac{a_1}{3}\right)+f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}\right\}$$
$$+\varphi_2\left\{F\left(-\frac{a_1}{3}\right)-f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}\right\}$$

oder

$$x'=-\frac{a_1}{3}+\varphi_2\left\{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)+f_1\left\{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3\right\}\right.$$
$$\left.+\varphi_2\left\{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)-f_1\left\{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3\right\}\right\}.$$

Diese Form, verglichen mit der wahren Wurzel der Gleichung (a), welche am Ende des §. 1. beigefügt ist, lässt leicht die Uebereinstimmung beider erkennen, wie übrigens die Funktionszeichen φ_2 und f_1, so wie die im Nenner vorkommende Zahl 2, bestimmt werden, werden wir gegen das Ende dieser Untersuchung noch sehen.

§. 3.

Wir haben in §. 2. die Beschaffenheit einer Funktion zu bestimmen angefangen, welche dieselbe haben muss, wenn sie dazu dienen soll, einen Wurzelausdruck einer Gleichung des $n$ten Grades mit lauter ungleichen Wurzeln darzustellen. Bis jetzt sind von dieser Funktion noch keine weiteren Postulate verlangt werden, als dass sie sowohl jedem der einzelnen Fälle von n, und von $n-1$ gleichen Wurzeln insbesodere, als auch beiden zugleich Genüge leiste. Das Gesetz der Bildung der Wurzelzeichen, die in diesen Funktionen vorkommen, wird einstweilen ganz unberücksichtigt gelassen. Wir gehen daher, abgesehen von diesem Bildungsgesetze, zur Bestimmung der Erfordernisse über, wo $n-2$ gleiche Wurzeln in einer Gleichung des $n$ten Grades vorkommen, und untersuchen den Einfluss der sich ergebenden Resultate auf die Beschaffenheit der Funktion, welche den Wurzelausdruck der Gleichung des $n$ten Grades mit n ungleichen Wurzeln darstellt. Zu diesem Zweck nehmen wir an, es seien $-\alpha_2$ und $-\alpha_3$ diejenigen zwei Wurzeln, welche weder unter sich, noch mit irgend einer der übrigen Wurzeln gleich sind, $-\alpha$ bezeichne eine der $n-2$ übrigen gleichen Wurzeln der Gleichung:

$$F(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (1)$$

Zufolge der obigen Annahme geht diese Gleichung über in:

$$\begin{aligned}F(x)&=(x+\alpha)^{n-2}(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)\\&=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0\ldots\ldots(2)\end{aligned}$$

Differentiiren wir diese Gleichung $(n-3)$mal nach einander, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}F'(x)&=(n-2)(x+\alpha)^{n-3}\{x^2+(\alpha_2+\alpha_3)x+\alpha_2\alpha_3\}+(x+\alpha)^{n-2}\{2x+\alpha_2+\alpha_3\}\\&=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\ldots\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1}=0\end{aligned}\right\}(3)$$

$$\left.\begin{aligned}F''(x)&=(n-2)(n-3)(x+\alpha)^{n-4}\{x^2+(\alpha_2+\alpha_3)x+\alpha_2\alpha_3\}\\&\qquad+2(n-2)\{2x+\alpha_2+\alpha_3\}(x+\alpha)^{n-3}+2(x+\alpha)^{n-2}\\&=n(n-1)x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+(n-2)(n-3)a_2x^{n-4}+\ldots\\&\qquad\ldots+3.2a_{n-3}x+2.1a_{n-2}=0\end{aligned}\right\}(4)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\left.\begin{aligned}F^{(n-5)}(x)&=C_1(x+\alpha)^3+C_2(x+\alpha)^4+C_3(x+\alpha)^5\\&=n(n-1)\ldots.6.x^5+(n-1)(n-2)\ldots\ldots5.a_1x^4+(n-2)(n-3)\ldots\ldots.4.a_2x^3\\&+(n-3)(n-4)\ldots..3.a_3x^2+(n-4)(n-5)\ldots\ldots2a_4x+(n-5)(n-6)\ldots.2.1a_5=0\end{aligned}\right\}(5)$$

$$\left.\begin{aligned}F^{(n-4)}(x)&=B_1(x+\alpha)^2+B_2(x+\alpha)^3+B_3(x+\alpha)^4\\&=n(n-1)\ldots\ldots5x^4+(n-1)(n-2)\ldots\ldots..4a_1x^3\\&+(n-2)(n-3)\ldots\ldots3a_2x^2+(n-3)(n-4)\ldots\ldots2a_3x\\&+(n-4)(n-5)\ldots\ldots..2.1.a_4=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(6)$$

$$\left.\begin{aligned}F^{(n-3)}(x)&=A_1(x+\alpha)+A_2(x+\alpha)^2+A_3(x+\alpha)^3\\&=n(n-1)\ldots.4x^3+(n-1)(n-2)\ldots\ldots.3a_1x^2\\&+(n-2)(n-3)\ldots..2a_2x+(n-3)(n-4)\ldots\ldots..2a_3=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(7)$$

In den drei letzten Gleichungen bezeichnen A_1, A_2, A_3, B_1, u. s. w. die Coefficienten der Potenzen von $x+\alpha$, deren nähere Werthbestimmung übrigens unnöthig ist.

Auch in diesen Gleichungen wird der auf der linken Seite des Gleichheitszeichens befindliche Theil für $x=-\alpha$ zu Null, weil alle Glieder desselben $x+\alpha=0$ zum Faktor haben, mithin müssen auch die auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens befindlichen Theile zu Null werden, wenn $x=-\alpha$ wird. Man kann daher für den Fall, dass $n-2$ gleiche Wurzeln in der Gleichung (1) vorhanden sind, und wenn β', β'', β''' die Wurzeln der Gleichung No. (7), also von der Gleichung

$$n(n-1)(n-2)x^3+3(n-1)(n-2)a_1x^2+3.2.(n-2)a_2x+3.2.1.a_3=0\ldots\ldots(8)$$

sind, wie in §. 2. schliessen, dass einer der drei Werthe β', β'', β''', welche x aus dieser Gleichung erhält, wenn man ihn in die Gleichungen (2), (3),...(6) statt x einführt, diese befriedigen muss, weil, wie wir so eben gesehen haben, jede dieser Gleichungen eine Wurzel $x=-\alpha$ hat; nehmen wir nun an, es sei $\beta'=-\alpha$, so erhalten wir aus (2), (3),...(6) folgende Bedingungsgleichungen:

$$F(\beta')=0, F'(\beta')=0, F''(\beta')=0, \ldots\ldots F^{(n-4)}(\beta')=0 \ldots\ldots (9),$$

Wäre aber $\beta''=-\alpha$, oder $\beta'''=-\alpha$, so würden wir die Bedingungsgleichungen:

$$F(\beta'')=0, F'(\beta'')=0, F''(\beta'')=0, \ldots\ldots F^{(n-4)}(\beta'')=0 \ldots (10)$$

$$F(\beta''')=0, F'(\beta''')=0, F''(\beta''')=0, \ldots\ldots F^{(n-4)}(\beta''')=0 \ldots (11)$$

erhalten; jedoch müssen wir wohl bemerken, dass die Gleichungssysteme (9), (10), (11) nicht gleichzeitig bestehen, sondern, wenn die Gleichungen von einem dieser Systeme stattfinden, so bestehen die in den beiden übrigen Systemen nicht.

Nehmen wir jetzt wieder an, es seien nur ungleiche Wurzeln in der Gleichung (1) vorhanden, und es bezeichne x' eine solche Wurzel, so wird der Werth von x', wie wir sogleich beweisen werden, folgende Form haben:

(12)

$$x'=-\frac{a_1}{n}+\varphi_{n-3}\left\{\begin{array}{l} F\left(-\frac{a_1}{n}\right), F'\left(-\frac{a_1}{n}\right), F''\left(-\frac{a_1}{n}\right), \ldots F^{(n-4)}\left(-\frac{a_1}{n}\right) \\ \pm[f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}, f_2\{F'(\alpha').F'(\alpha'')\}, \ldots f_{n-3}\{F^{(n-4)}(\alpha').F^{(n-4)}(\alpha'')\}] \\ \pm[\mathfrak{f}_1\{F(\beta').F(\beta'').F(\beta''')\}, \mathfrak{f}_2\{F'(\beta').F'(\beta'').F'(\beta''')\}, \ldots \\ \qquad \ldots\ldots \mathfrak{f}_{n-3}\{F^{(n-4)}(\beta').F^{(n-4)}(\beta'')F^{(n-4)}(\beta''')\}] \end{array}\right\}$$

In diesem Ausdrucke bezeichnen $\varphi_3, f_1, f_2 \ldots\ldots \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots\ldots$ Funktionen, deren nähere Bestimmung sich aus dem weitern Verlauf der Untersuchung ergeben wird.

Dass in dem Ausdrucke, der in dem Funktionszeichen φ_3 enthalten ist, die Funktionenverbindung

$$F\left(-\frac{a_1}{n}\right), F'\left(-\frac{a_1}{n}\right), \ldots F^{(n-4)}\left(-\frac{a_1}{n}\right)$$

$$\pm[f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}, f_2\{F'(\alpha').F'(\alpha'')\}, \ldots\ldots f_{n-3}\{F^{(n-4)}(\alpha').\ F^{(n-4)}(\alpha'')\}]$$

vorkommen muss, ist in §. 1. und §. 2. ausführlich bewiesen worden; dass aber mit dieser noch die Funktionenverbindung

$$\left[\begin{array}{l}\mathfrak{f}_1\{F(\beta').F(\beta'').F(\beta''')\},\mathfrak{f}_2\{F'(\beta').F'(\beta'').F'(\beta''')\},\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\mathfrak{f}_{n-3}\{F^{(n-4)}(\beta').F^{(n-4)}(\beta'').F^{(n-4)}(\beta''')\}\end{array}\right]$$

mittelst des Zeichens (+) und (—) in Verbindung gebracht werden muss, geht daraus hervor, dass der allgemeine Ausdruck der Wurzel der Gleichung (1), wenn sie nur ungleiche Wurzeln hat, sich auf den Fall zurückführen lassen muss, wo $n-2$ gleiche Wurzeln in der Gleichung (1) vorhanden sind; dieser Fall hat aber eine der Gleichungsgruppen (9), (10) oder (11) zur Folge; da nun aber sowohl $\beta'=-\alpha$, oder auch $\beta''=-\alpha$, oder endlich $\beta'''=-\alpha$ sein kann, so können wir wie in §. 2. schliessen, dass in diesem Falle die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r}\mathfrak{f}_1\{F(\beta').F(\beta'')F(\beta''')\}=0\\ \mathfrak{f}_2\{F'(\beta').F'(\beta'').F'(\beta''')\}=0\\ \mathfrak{f}_{n-3}\{F^{(n-4)}(\beta').F^{(n-4)}(\beta'').F^{(n-4)}(\beta''')\}=0\end{array}\right\}\ldots\ldots(13)$$

nicht nur richtig sind, sondern eine nothwendige Folge der Annahme von $n-2$ gleichen Wurzeln in der Gleichung (1) sein müssen, und dass diese Produktenfunktionen in dem Ausdrucke (12) vorkommen müssen, wenn jener allgemeine Wurzelausdruck sich auf den speciellen Fall von $n-2$ gleichen Wurzeln anwenden lassen soll; dass diese Produktenfunktionen mit den vorhergehenden durch die Zeichen (+) und (—) verbunden sein müssen, wird ganz auf gleiche Art wie in §. 2. bewiesen, woraus die Richtigkeit der Form des Ausdrucks in Nr. (12) hervorgeht.

Sind γ', γ'', γ''', γ^{iv} die Wurzeln der Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}F^{(n-4)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)x^4+4(n-1)(n-2)(n-3)a_1x^3\\ \quad+4.3.(n-2)(n-3)a_2x^2+4.3.2(n-3)a_3x+4.3.2.1.a_4=0\end{array}\right\}\ldots(14)$$

so können wir ganz auf gleiche Art, wie in §. 1., §. 2., §. 3. zeigen, dass die nachstehende Wurzelform einer Gleichung des $n$ten Grades die Bedingungen von $n, n-1, n-2$ und $n-3$ gleichen Wurzeln enthält, und sich daher auf jeden dieser speciellen Fälle anwenden lässt; α' α''; β', β'', β''' haben hierin ihre früheren Bedeutungen:

(15).

$$x'=-\frac{a_1}{n}+\varphi_4\left\{\begin{array}{l}F\left(-\frac{a_1}{n}\right),F'\left(-\frac{a_1}{n}\right),F''\left(-\frac{a_1}{n}\right),\ldots\ldots F^{(n-5)}\left(-\frac{a_1}{n}\right)\\ \pm[f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\},f_2\{F'(\alpha').F'(\alpha'')\},\ldots.f_{n-4}\{F^{(n-5)}(\alpha').F^{(n-5)}(\alpha'')\}]\\ \pm[\mathfrak{f}_1\{F(\beta').F(\beta'').F(\beta''')\},\mathfrak{f}_2\{F'(\beta').F'(\beta'').F'(\beta''')\},\ldots\ldots\\ \qquad\qquad\ldots\ldots\mathfrak{f}_{n-4}\{F^{(n-5)}(\beta').F^{(n-5)}(\beta'').F^{(n-5)}(\beta''')\}]\\ \pm\left[\begin{array}{l}\mathfrak{F}_1\{F(\gamma').F(\gamma'').F(\gamma''')F(\gamma^{\mathrm{iv}})\},\mathfrak{F}_2\{F'(\gamma').F'(\gamma'').F'(\gamma''').F'(\gamma^{\mathrm{iv}})\},\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\mathfrak{F}_{n-4}\{F^{(n-5)}(\gamma').F^{(n-5)}(\gamma'').F^{(n-5)}(\gamma''').F^{(n-5)}(\gamma^{\mathrm{iv}})\}\end{array}\right]\end{array}\right.$$

§. 4.

Gehen wir endlich zu demjenigen Falle über, wo in der Gleichung

$$F(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0 \ldots\ldots (1)$$

nur zwei gleiche Wurzeln vorkommen, und nehmen $-\alpha$ wieder als eine der zwei gleichen Wurzeln an, die übrigen seien: $-\alpha_1$, $-\alpha_2$, $-\alpha_3$, ... $-\alpha_{n-2}$. Dadurch geht die Gleichung (1) in folgende über:

$$F(x)=(x+\alpha)^2f(x)$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (2)$$

worin der Kürze wegen:

$$f(x)=(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)\ldots\ldots\ldots(x+\alpha_{n-2}) \ldots (3)$$

gesetzt wurde.

Durch Differentiiren finden wir:

$$(4) \quad \left.\begin{aligned} &F'(x)=2(x+\alpha)f(x)+(x+\alpha)^2f'(x)\\ &=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\ldots\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1}=0\end{aligned}\right\}$$

In dieser Gleichung müssen beide Theile für $x=-\alpha$ verschwinden. Sind daher $\nu', \nu'', \nu''', \ldots\ldots \nu^{(n-1)}$ die Wurzeln der Gleichung

$$(5)$$

$$F'(x)=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\ldots\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1}=0$$

so muss eine dieser Wurzeln $=-\alpha$ sein; es sei daher $\nu'=-\alpha$, so muss, wenn man ν' statt x in die Gleichung (1) oder (2) einführt, sie auf Null reducirt werden, d. h. es muss

$$F(\nu')=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

sein; es können aber Fälle eintreten, wo entweder $\nu''=-\alpha$, oder $\nu'''=-\alpha$ u. s. w. sein kann; in diesen Fällen müsste dann, wie in §. 3., respective:

$$F(\nu'')=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$F(\nu''')=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$F(\nu^{(n-1)})=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

sein; der allgemeine Ausdruck muss sich aber nicht nur auch auf den von zwei gleichen Wurzeln der Gleichung (1) reduciren und anpassen lassen, sondern es müssen selbst diese speciellen Fälle alle in ihm enthalten sein, d. h. für jede der Wurzeln v'', v''', ..., $v^{(n-1)}$, es mag eine beliebige von ihnen $=-\alpha$ sein, so muss aus ihm die entsprechende der Gleichungen (6) (7)...(9) deducirt werden können; da aber diese Gleichungen nicht gleichzeitig statt finden, sondern im Gegentheil, wenn eine, z. B. Gleichung (7), statt findet, die übrigen alle nicht statt finden, wird diesen Forderungen nur dann entsprochen werden können, wenn in dem allgemeinen Ausdrucke für die Wurzel x' der Gleichung (1) das Produkt

$$F(v').F(v'').F(v''')\ldots\ldots F(v^{(n-1)})$$

oder eine Funktion dieses Products vorkommt. Dieses Product oder eine Funktion desselben muss mit den vorhergehenden Funktionstheilen im Wurzelausdrucke durch die Zeichen (+) und verbunden sein, was ganz eben so wie in §. 2. bewiesen wird.

§. 5

Theils aus den im vorigen Paragraphen angegebenen Gründen, theils aus dem sichtbaren Bildungsgesetze, das sich in den gefundenen Wurzelausdrücken des §. 1., §. 2., §. 3., §. 4. offenbar ausspricht, endlich theils auch aus dem allen diesen Entwicklungen zu Grunde liegenden Grundsatz, nämlich: dass sich der Ausdruck eines Wurzelwerths einer Gleichung des n Grades mit n verschiedenen Wurzeln, auf alle speciellen Fälle von n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, ...3, 2 gleichen Wurzeln zurückführen lassen muss, d. h. dass jener allgemeine Ausdruck so beschaffen sein muss, dass die einzelnen Relationen zwischen den Coefficienten der Gleichung (1), durch welche diese speciellen Fälle charakterisirt werden, so zu sagen implicite in jenem allgemeinen Ausdruck vorhanden sind, oder doch wenigstens aus ihm deducirt werden können, glauben wir berechtigt zu sein, dem Wurzelwerth, welcher allen diesen speciellen Fällen von n, $n-1$, $n-2$, ...3, 2 gleichen Wurzeln genügt, welcher also der wahre Ausdruck für eine Wurzel der Gleichung N. ist, wenn n verschiedene Wurzeln in derselben vorhanden sind, folgende Form geben zu können, wenn wir auf den Zeichenwechsel die gehörige Rücksicht nehmen:

$$x' = -\frac{a_1}{n} + \varphi_{n-1}\left\{\begin{array}{l} F\left(-\frac{a_1}{n}\right) + f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\} + f_1\{F(\beta').F(\beta'').F(\beta''') \\ + \mathfrak{F}_1\{F(\gamma').F(\gamma'').F(\gamma''').F(\gamma^{IV})\} + \ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \chi\{F(v').F(v'').F(v''')\ \ldots\ldots\ldots\ F(v^{(n-1)})\} \end{array}\right.$$

$$+\varphi_{n-1}\left\{\begin{array}{l}F\left(-\frac{a_1}{n}\right)-f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}+f_1\{F(\beta').F(\beta'').F(\beta''')\}\\ +\vartheta_1\{F(\gamma').F(\gamma'').F(\gamma''').F(\gamma^{IV})\}+\ldots\ldots\ldots\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\chi\{F(\nu').F(\nu'').F(\nu''')\ \ldots\ldots\ F(\nu^{(n-1)})\}\end{array}\right\}$$

$$+\varphi_{n-1}\left\{\begin{array}{l}F\left(-\frac{a_1}{n}\right)+f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}-f_1\{F(\beta').F(\beta'').F(\beta''')\}\\ +\vartheta_1\{F(\gamma').F(\gamma'').F(\gamma''').F(\gamma^{IV})\}+\ldots\ldots\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\chi\{F(\nu')F.(\nu'')F.(\nu''')\ \ldots\ldots\ F(\nu^{(n-1)})\}\end{array}\right\}$$

+ u. s. w.

ie Reihenfolge der Glieder bricht ab, wenn der Zeichen-
el erschöpft ist. Die Buchstaben α', α'', β', β'', β''', γ'......
sem Ausdrucke haben die frühere Bedeutung. Hingegen sind
F_1,.......χ Funktionszeichen, die nur durch Wurzelzeichen
stellt werden können. Man sieht aus der Betrachtung dieses
ucks für eine Wurzel der Gleichung des $n$ten Grades, dass
lben noch eine Bestimmung der Wurzelzeichen, nebst ihrer
igen Verbindung fehlt. Die Bestimmung derselben, so wie
iger Zahlen-Coefficienten wollen wir im folgenden Paragra-
en an einigen Gleichungen versuchen.

§. 6.

) Es sei die Gleichung

$$x^2+a_1x+a_2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

en. Für diesen Fall erhalten wir nach dem resultirenden Aus-
e in §. 5., weil $n=2$ ist,

$$x'=-\frac{a_1}{2}+\varphi_1\left\{F\left(-\frac{a_1}{2}\right)\right\}=-\frac{a_1}{2}+\varphi_1\left\{\frac{a_1^2}{4}-a_2\right\}.$$

n wir diesen Werth von x' in die Gleichung (a) statt x, so
ten wir:

$$-\left(\frac{a_1^2}{4}-a_2\right)+\left[\varphi\left\{\frac{a_1^2}{4}-a_2\right\}\right]^2=0,$$

$$\text{woraus } \varphi_1 \left\{\frac{a_1^2}{4} - a_2\right\} = \pm\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} \text{ ist:}$$

mithin bezeichnet hier das Funktionszeichen φ_1 die Quadratwurzel, folglich ist

$$x' = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$

2) Es sei die gegebene Gleichung:

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Es ist also nach dem Ausdrucke in §. 5., weil $n = 3$,

$$x' = -\frac{a_1}{3} + \varphi_2\left\{F\left(-\frac{a_1}{3}\right) + f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}\right\}$$
$$+ \varphi_2\left\{F\left(-\frac{a_1}{3}\right) - f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}\right\},$$

oder wenn wir die bereits in §. 2. gefundenen Werthe von $F\left(-\frac{a_1}{3}\right)$ und von $F(\alpha').F(\alpha'')$ gebrauchen, so ist:

(b)

$$x' = -\frac{a_1}{3} + \varphi_2\left\{\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right) + f_1\left\{\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right)^2 - \frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3} - a_2\right)^3\right\}\right\}$$
$$+ \varphi_2\left\{\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right) - f_1\left\{\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right)^2 - \frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3} - a_2\right)^3\right\}\right\}$$

Da diese Wurzelform alle möglichen speciellen Fälle unter sich begreifen muss, also auch die mit zwei, und drei gleichen Wurzeln, so wie auch jene, wo einzelne Coefficienten, a_1, a_2 oder a_3, zu Null werden, so nehmen wir zuerst an, es sei $x = -u'$ eine der drei ungleichen Wurzeln der Gleichung (a), so werden die beiden andern $x = -u''$ und $x = -u'''$ durch eine Gleichung von der Form:

$$x^2 + Ax + B = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

bestimmt, wo der Kürze wegen

$$A = a_1 - u', \; B = a_2 - u'(a_1 - u') \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

gesetzt wurde; aus dieser Gleichung erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} x = -u'' &= -\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4B}, \\ x = -u''' &= -\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4B}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Nehmen wir jetzt an, es seien in der Gleichung (a) zwei Wurzeln gleich, so folgt aus (e), dass

$$\frac{1}{2}\sqrt{A^2-4B}=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (f)$$

sein muss. Aus (b) folgt aber nach §. 2., dass für zwei gleiche Wurzeln

$$f_1\left\{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3\right\}=0 \;\ldots\ldots\; (g)$$

sein muss; die Bedingungen (f) und (g) müssen nothwendig identisch sein, daher muss auch

$$\frac{1}{2}\sqrt{A^2-4B}=f_1\left\{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3\right\}$$

sein. Es wurde aber in §. 2. bewiesen, dass im Funktionszeichen f_1 kein anderer Ausdruck der Coefficienten a_1, a_2 und a_3, als

$$\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3$$

enthalten sein kann, mithin muss auch A^2-4B mit diesem Ausdruck identisch sein, daher muss sich das Symbol f_1 durch $\frac{1}{2}\sqrt{}$ darstellen lassen, oder es muss

$$f_1\left\{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3}$$

sein. Es wird daher der Ausdruck (b) zu:

$$(h)$$

$$\begin{aligned}=-\frac{a_1}{3}&+\varphi_2\left\{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3}\right\}\\ &+\varphi_2\left\{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3}\right\}\end{aligned}$$

Wir erhalten endlich aus (a), wenn wir in jener Gleichung $a_1=a_2=0$ setzen:

$$x' = \sqrt[3]{-a_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

Aus (*h*) erhalten wir unter der gleichen Voraussetzung

$$x' = \varphi_2 \left\{ -a_3 + \frac{a_3}{2} \right\} + \varphi_2' \left\{ -a_3 - \frac{a_3}{2} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (k)$$

Die Summe dieser Ausdrücke in den Funktionszeichen φ_2 kann aber nur auf $\sqrt[3]{-a_3}$ zurückgeführt werden, wenn das erste in φ_2 enthaltene Glied $\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right)$ in (*h*) noch mit einem jetzt noch unbekannten Zahlen-Coefficienten n vervielfacht ist, indem weder dieses Glied, noch der übrige im Wurzelzeichen enthaltene Ausdruck eine andere Aenderung erleiden darf; setzen wir also in (*h*) $n\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right)$ statt des ersten Glieds $\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right)$, so wird jenes für $a_1 = a_2 = 0$ zu $-n a_3$; man erhält also aus (*h* statt des Ausdrucks (*k*) folgenden:

$$x' = \varphi_2 \left\{ -n a_3 + \frac{a_3}{2} \right\} + \varphi_2 \left\{ -n a_3 - \frac{a_3}{2} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (l)$$

Aus der Vergleichung von (*i*) und (*l*) folgt, dass entweder:

$$-n a_3 + \frac{a_3}{2} = 0$$

oder

$$-n a_3 - \frac{a_3}{2} = 0$$

sein muss; lässt man die letztere dieser Gleichungen gelten, so folgt $n = -\frac{1}{2}$; dieser Werth in der ersteren substituirt, gibt $+\frac{3a_3}{2}$, welcher Werth unbrauchbar ist; setzt man aber $-n a_3 + \frac{a_3}{2} = 0$, so kommt $n = +\frac{1}{2}$; dadurch wird aber $-n a_3 - \frac{a_3}{2}$ zu $-a_3$, mithin ist $x' = \varphi_2\{-a_3\}$. Hieraus, und aus (*i*) folgt:

$$\sqrt[3]{-a_3} = \varphi_2\{-a_3\}$$

woraus hervorgeht, dass das Symbol φ_2 die dritte Wurzel vorstellen muss. Es wird also der Ausdruck (*b*), wenn man das erste Glied in φ_2 mit $\frac{1}{2}$ multiplicirt:

$$\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)+\sqrt{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3}}{2}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)-\sqrt{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3}}{2}}.$$

s versteht sich von selbst, dass niemand einen so langen zur Auflösung einer Gleichung des 3ten Grades einschlagen allein es handelte sich auch hier gar nicht darum, eine neue ung der Gleichung des 3ten Grades zu geben, sondern, , theils die Anwendung des in §. 6. gefundenen Ausdrucks chen, theils auch um einen allgemeinen Weg angeben zu, n, das Unbestimmte in jenem Ausdruck angebbar zu machen. endlich nicht zu leugnen, dass sich mit dem höhern Grad Gleichung die Schwierigkeiten dieser Bestimmungen ver-n; allein es ist doch die Möglichkeit vorhanden, gerade esem Wege zu einem allgemeinen Wurzelbildungsgesetz zu ;en, (welches allein noch fehlt), was auf dem Wege der nation, wie ich fest überzeugt bin, und was erst ein neulich enenes Werk, in welchem die Gleichungen des 5ten und Gtades gelöst sein sollten, aber es halt nicht sind, neuer-erwiesen hat, niemals geschehen wird.

IX.

Ueber Paul Halcken's Darstellung der gewöhnlichen Auflösung der cubischen Gleichungen durch die cardanische Formel.

Von
dem Herausgeber.

Paul Halcken, Arithmeticus zu Buxtehude und Mitglied der Societät der Kunst-Rechner, oder vielmehr der im Jahre 1690 gestifteten, die Kunst-Rechnung lieb- und übenden Societät zu Hamburg, aus welcher späterhin die jetzt noch dort blühende Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften hervorging, in dieser die Kunst-Rechnung lieb- und übenden Societät der Haltende genannt, und nicht zu verwechseln mit seinem Bruder Johann Halcke, Ihro Königl. Maj. zu Dännemark und Norwegen bestelltem Mathematicus und Arithmeticus zu Utersen, in der die Kunst-Rechnung lieb- und übenden Societät der Harrende genannt, hat in seinem viele schöne Problemata und andere sinnreiche Dinge enthaltenden Buche: Deliciae Mathematicae, oder Mathematisches Sinnen-Confect, bestehend in Fünfhundert vier und siebentzig auserlesenen, zum Theil gar Kunstreichen Algebrai-, Geometri- und Astronomischen Auffgaben, mit vielen künstlichen Solutionen und Reguln gezieret, insonderheit einer curieusen Erfindung der Logarithmorum, von der Quadratura Circuli, nach der unendlichen Näherung, und andern Sinnreichen-Sachen mehr u. s. w. Allen Liebhabern der Mathematischen Wissenschafften, insonderheit der Edlen Rechen-Kunst, zur wohlgemeinten Gemüths-Ergetzung auffgetragen von Paul Halcken, Arithmet. in Burtehude, in der Societaet der Kunstrechner dem Haltenden. Zu bekom-

bei Johann Hinrich Wolgemuht, Schreib- und Rechen-
ter an der Schulen zu St. Nicolai und bei jeden Zunfft-
vandten der Kunstliebenden Societaet in Hamburg.
iburg. 1719. 8. — die cardanische Formel nach einem von
gegenwärtig in den Lehrbüchern der Algebra gewöhnlichen
hiedenen Verfahren durch eine blosse Substitution entwi-
, welches nach meiner Meinung noch jetzt gekannt und bei'm
richte angewandt zu werden verdient, weshalb ich dasselbe
esem Aufsatze mit verschiedenen von mir selbst hinzugetha-
Bemerkungen den Lesern des Archivs mittheilen will, da es
noch wenig bekannt ist.

Venn a und b positive Grössen bezeichnen, so kann eine
hrem zweiten Gliede auf bekannte Weise befrei'te cubische
hung nur unter einer der vier folgenden Formen auftreten:

$$x^3+3ax-2b=0,$$
$$x^3-3ax-2b=0,$$
$$x^3+3ax+2b=0,$$
$$x^3-3ax+2b=0.$$

aber die dritte und vierte Gleichung durch die Substitution
y in

$$-y^3-3ay+2b=0,$$
$$-y^3+3ay+2b=0;$$

$$y^3+3ay-2b=0,$$
$$y^3-3ay-2b=0$$

hen; so ist klar, dass wir als specifisch verschiedene For-
loss die beiden Gleichungen

$$x^3+3ax-2b=0,$$
$$x^3-3ax-2b=0$$

rachten brauchen, wie auch Paul Halcken thut, wobei
u bemerken ist, dass die Coefficienten $3a$ und $2b$ statt der
gewöhnlichen a und b bloss der Vereinfachung der später-
lgenden Formeln wegen gleich von vorn herein eingeführt
n sind.

etrachten wir nun zuerst die Form

$$x^3+3ax-2b=0,$$

hren, indem wir

$$x=\frac{u^2-a}{u}$$

setzen, eine neue unbekannte Grösse u ein, so erhalten wir:

$$\frac{u^6-3au^4+3a^2u^2-a^3}{u^3}+\frac{3au^2-3a^2}{u}-2b=0,$$

also, wenn wir auf beiden Seiten dieser Gleichung mit u^3 multipliciren und aufheben, was sich aufheben lässt:

$$u^6-2bu^3-a^3=0,$$

welche Gleichung wie eine quadratische Gleichung aufgelöst werden kann. Die Auflösung giebt

$$u^3=b\pm\sqrt{b^2+a^3};$$

also

$$u=\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{b^2+a^3})},$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$x=u-\frac{a}{u}$$

ist:

$$x=\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{b^2+a^3})}-\frac{a}{\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{b^2+a^3})}},$$

also, wenn man Zähler und Nenner des letzten Bruchs mit

$$\sqrt[3]{(b\mp\sqrt{b^2+a^3})}$$

multiplicirt:

$$x=\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{b^2+a^3})}+\sqrt[3]{(b\mp\sqrt{b^2+a^3})},$$

wo es nun genügt, bloss

$$x=\sqrt[3]{(b+\sqrt{b^2+a^3})}+\sqrt[3]{(b-\sqrt{b^2+a^3})}$$

zu setzen. Mittelst dieser Formel lässt sich in diesem Falle immer eine reelle Wurzel der gegebenen cubischen Gleichung berechnen; und wie man dann ferner die beiden anderen Wurzeln findet, ist bekannt.

Wenn ferner die Gleichung

$$x^3-3ax-2b=0$$

eben ist, so setzen wir

$$x=\frac{u^2+a}{u},$$

erhalten dadurch die Gleichung

$$\frac{u^6+3au^4+3a^2u^2+a^3}{u^3}-\frac{3au^2+3a^2}{u}-2b=0,$$

, wenn wir auf beiden Seiten mit u^3 multipliciren und aufhe-
, was sich aufheben lässt:

$$u^6-2bu^3+a^3=0.$$

en wir diese Gleichung wie eine quadratische Gleichung auf,
ergiebt sich

$$u^3=b\pm\sqrt{b^2-a^3},$$

$$u=\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{b^2-a^3})},$$

folglich, weil nach dem Obigen

$$x=u+\frac{a}{u}$$

$$x=\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{b^2-a^3})}+\frac{a}{\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{b^2-a^3})}},$$

r, wenn man Zähler und Nenner des letzten Bruchs mit

$$\sqrt[3]{(b\mp\sqrt{b^2-a^3})}$$

tiplicirt:

$$x=\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{b^2-a^3})}+\sqrt[3]{(b\mp\sqrt{b^2-a^3})},$$

es nun wieder genügt, bloss

$$x=\sqrt[3]{(b+\sqrt{b^2-a^3})}+\sqrt[3]{(b-\sqrt{b^2-a^3})}$$

setzen.

Wenn $b^2-a^3 \geqq 0$ ist, so kann man auch in diesem Falle immer
e reelle Wurzel der gegebenen cubischen Gleichung berechnen,
d wie man dann ferner die beiden andern Wurzeln findet, ist
annt.

Wenn aber $b^2-a^3<0$ ist, so erscheint die Wurzel

$$x=\sqrt[3]{(b+\sqrt{b^2-a^3})}+\sqrt[3]{(b-\sqrt{b^2-a^3})}$$

unserer cubischen Gleichung unter einer imaginären Form, und doch lässt sich auf folgende Art leicht zeigen, dass gerade in diesem Falle alle drei Wurzeln der Gleichung nothwendig reell sein müssen. Da nämlich jede cubische Gleichung als eine Gleichung eines ungeraden Grades nothwendig mindestens eine reelle Wurzel haben muss, so wollen wir diese reelle Wurzel unserer cubischen Gleichung durch ω bezeichnen, so dass also

$$\omega^3-3a\omega-2b=0,$$

und folglich

$$x^3-3ax-2b=x^3-\omega^3-3a(x-\omega)$$

oder

$$x^3-3ax-2b=(x-\omega)(x^2+\omega x+\omega^2-3a)$$

ist. Daher sind die beiden andern Wurzeln unserer cubischen Gleichung mittelst der quadratischen Gleichung

$$x^2+\omega x+\omega^2-3a=0$$

zu bestimmen. Die Auflösung dieser Gleichung giebt

$$x=-\frac{1}{2}\omega\pm\sqrt{3(a-\frac{1}{4}\omega^2)}.$$

Weil nun wegen der Gleichung

$$\omega^3-3a\omega-2b=0$$

offenbar

$$\omega^2=3a+\frac{2b}{\omega},\quad \frac{1}{4}\omega^2=\frac{3}{4}a+\frac{b}{2\omega}$$

und folglich

$$a-\frac{1}{4}\omega^2=\frac{1}{4}a-\frac{b}{2\omega}$$

ist, so ist, wenn ω negativ ist, offenbar $a-\frac{1}{4}\omega^2$ nicht negativ, und die drei Wurzeln der gegebenen cubischen Gleichung sind daher in diesem Falle augenscheinlich sämmtlich reell. Wäre aber, wenn ω positiv ist, $a-\frac{1}{4}\omega^2$ negativ oder $\frac{1}{4}\omega^2>a$, so wäre $\omega^2>4a$ oder $\omega>2\sqrt{a}$. Weil nun nach der Voraussetzung

i^3, $b < a\sqrt{a}$ ist, so ist $2b < 2a\sqrt{a}$ oder $2b < a.2\sqrt{a}$, folglich dem Vorhergehenden um so mehr $2b < a\omega$. Nun ist aber dem Obigen bekanntlich

$$a - \frac{1}{4}\omega^2 = \frac{1}{4}a - \frac{b}{2\omega};$$

weil wir angenommen haben, dass $a - \frac{1}{4}\omega^2$ negativ sei, $\frac{1}{4}a$, d. i. $2b > a\omega$, was dem vorhergehenden $2b < a\omega$ widricht. Daher kann auch in diesem Falle $a - \frac{1}{4}\omega^2$ nicht nesein, und es sind folglich auch jetzt alle drei Wurzeln der enen cubischen Gleichung reell, wie behauptet wurde.

i diesem Falle, wo alle drei Wurzeln der gegebenen cubi-Gleichung nothwendig reell sein müssen, die durch die el

$$x = \sqrt[3]{(b + \sqrt{b^2 - a^3})} + \sqrt[3]{(b - \sqrt{b^2 - a^3})}$$

ene Wurzel derselben aber unter einer imaginären Form t, sucht nun Paul Halcken die Wurzel

$$\sqrt[3]{(b \pm \sqrt{b^2 - a^3})}$$

$$\sqrt[3]{(b \pm \sqrt{a^3 - b^2} . \sqrt{-1})}$$

h auszuziehen; sein auf einem gewissen Probiren beruhend gewiss in allen Beziehungen höchst eingeschränktes und elhaftes Verfahren lässt sich aber aus den Beispielen, auf e er es anwendet, nicht mit hinreichender Deutlichkeit und mmtheit entnehmen, und kann daher hier nicht wiedergegeerden, was auch bei der jedenfalls grossen Mangelhaftigdesselben nichts nützen würde, da man jetzt weiss, dass dergleichen Kubikwurzeln auf eine sehr leichte und elegante e mit Hülfe der goniometrischen Functionen und der in volliger Berechnung schon vorliegenden Tafeln derselben berechassen, was auf die elementarste Weise vielleicht auf folgende ezeigt werden kann.

etzen wir

$$\sqrt[3]{(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})} = v \pm w\sqrt{-1},$$

t

$$\alpha \pm \beta\sqrt{-1} = v^3 \pm 3v^2w\sqrt{-1} - 3vw^2 \mp w^3\sqrt{-1}$$
$$= v^3 - 3vw^2 \pm (3v^2w - w^3)\sqrt{-1},$$

also

$$v^3-3vw^2=\alpha,\ 3v^2w-w^3=\beta.$$

Quadrirt man nun auf beiden Seiten, so wird

$$\alpha^2=v^6-6v^4w^2+9v^2w^4$$

$$\beta^2=\qquad 9v^4w^2-6v^2w^4+w^6,$$

also, wenn man addirt:

$$\alpha^2+\beta^2=v^6+3v^4w^2+3v^2w^4+w^6,$$

d. i.

$$\alpha^2+\beta^2=(v^2+w^2)^3,$$

oder

$$v^2+w^2=\sqrt[3]{\alpha^2+\beta^2},$$

und folglich

$$\left(\frac{v}{\sqrt[3]{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2+\left(\frac{w}{\sqrt[3]{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2=1.$$

Daher ist man berechtigt

$$\frac{v}{\sqrt[3]{\alpha^2+\beta^2}}=\sin\varphi,\ \frac{w}{\sqrt[3]{\alpha^2+\beta^2}}=\cos\varphi$$

oder

$$v=\sin\varphi.\sqrt[3]{\alpha^2+\beta^2},\ w=\cos\varphi.\sqrt[3]{\alpha^2+\beta^2}$$

zu setzen, was in die Gleichungen

$$v^3-3vw^2=\alpha,\ 3v^2w-w^3=\beta$$

gesetzt, giebt:

$$\sin\varphi^3\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-3\sin\varphi\cos\varphi^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\alpha,$$

$$3\sin\varphi^2\cos\varphi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\cos\varphi^3\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\beta$$

oder

$$\sin\varphi^3-3\sin\varphi\cos\varphi^2=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$\cos\varphi^3 - 3\cos\varphi\sin\varphi^2 = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Bekanntlich ist aber, was durch die elementarsten goniometrischen Formeln sogleich zu beweisen ist:

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi\cos\varphi^2 - \sin\varphi^3,$$

$$\cos 3\varphi = \cos\varphi^3 - 3\cos\varphi\sin\varphi^2;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\sin 3\varphi = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad \cos 3\varphi = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

und folglich auch

$$\tang 3\varphi = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Mittelst dieser Formeln kann 3φ, also auch φ berechnet werden; hat man aber φ, so hat man auch

$$v = \sin\varphi . \sqrt[6]{\alpha^2+\beta^2},\quad w = \cos\varphi . \sqrt[6]{\alpha^2+\beta^2}$$

und demnach auch

$$\sqrt[3]{(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})} = v \pm w\sqrt{-1}.$$

In Rücksicht auf unsere obige cubische Gleichung ist

$$\alpha = b,\quad \beta = \sqrt{a^3-b^2};$$

folglich

$$\alpha^2+\beta^2 = a^3,$$

und daher

$$\sin 3\varphi = -\frac{b}{a\sqrt{a}},\quad \cos 3\varphi = -\frac{\sqrt{a^3-b^2}}{a\sqrt{a}}$$

so wie

$$\tang 3\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^3-b^2}}.$$

Ferner ist

$$v = \sin\varphi . \sqrt{a},\quad w = \cos\varphi . \sqrt{a};$$

also

$$\sqrt[3]{(b \pm \sqrt{b^2 - a^3})} = \sqrt{a}\,.\,(\sin\varphi \pm \cos\varphi \sqrt{-1}),$$

folglich nach dem Obigen

$$x = 2\sqrt{a}\,.\,\sin\varphi\,.$$

Die weitere Discussion dieser Formeln unterlassen wir füg[lich] hier, da dieselbe allgemein bekannt ist.

Hält man die Einführung der goniometrischen Functionen [in] der Algebra zu fremdartig, so kann man den vorhergehenden F[all] der cubischen Gleichungen, den man bekanntlich den irre[du]ciblen Fall zu nennen pflegt, auch auf folgende Art behand[eln].

Aus der Form der Gleichung

$$x^3 - 3ax - 2b = 0$$

erhellet nach einem bekannten leicht ganz elementar zu bewei[sen]den Satze von den Gleichungen (Supplemente zum mat[he]matischen Wörterbuche. Thl. II. Art. Gleichung. S.3[..]) dass dieselbe jederzeit eine, aber auch nur eine reelle po[sitive] Wurzel hat, die wir von nun an durch x selbst bezeichnen w[ollen].

Weil

$$x^3 - 3ax - 2b = 0$$

ist, so ist

$$x^2 = 3a + \frac{2b}{x},$$

oder

$$x = \sqrt{3a + \frac{2b}{x}},$$

also

$$x = \sqrt{3a + \cfrac{2b}{\sqrt{3a + \cfrac{2b}{\sqrt{3a + \cfrac{2b}{\sqrt{3a + }}}}}}}$$

$$+ \frac{2b}{\sqrt{3a + \frac{2b}{x}}},$$

und bezeichnen wir nun die Brüche oder Grössen

$$\sqrt{3a},\ \sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a}}},\ \sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a}}}}},\ \sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a}}}}}}},\ \ldots\ldots$$

der Reihe nach durch

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ldots;$$

so lässt sich zuerst durch ganz leichte Schlüsse, über die wir hier füglich hinweggehen können, zeigen, dass

$$x_1 < x < x_2,$$

$$x_2 > x > x_3,$$

$$x_3 < x < x_4,$$

$$x_4 > x > x_5,$$

$$x_5 < x < x_6,$$

u. s. w.

ist, so dass also jede zwei einander benachbarte Glieder der Reihe

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ldots$$

zwei, x zwischen sich fassende Gränzen sind, und es kommt jetzt nur darauf an, zu untersuchen, ob diese Gränzen einander bis zu jedem beliebigen Grade nahe kommen können, weil sie nur unter dieser Bedingung ein sicher zum Zweck führendes Mittel, x mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit annähernd zu berechnen, an die Hand geben können.

Es ist aber augenscheinlich in völliger Allgemeinheit

$$x_{n+1}=\sqrt{3a+\frac{2b}{x_n}},\quad x_n=\sqrt{3a+\frac{2b}{x_{n-1}}}$$

oder

$$x_{n+1}^2=3a+\frac{2b}{x_n},\quad x_n^2=3a+\frac{2b}{x_{n-1}};$$

also

$$x_{n+1}^2-x_n^2=2b\left(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}\right),$$

d. i.

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = (x_{n-1} - x_n) \cdot \frac{2b}{x_{n-1}x_n},$$

folglich nach einem bekannten arithmetischen Satze:

$$x_{n+1} - x_n = (x_{n-1} - x_n) \cdot \frac{2b}{x_{n-1}x_n(x_n + x_{n+1})}.$$

Das Product

$$x_{n-1}x_n(x_n + x_{n+1})$$

ist aber offenbar immer grösser als

$$\sqrt{3a} \cdot \sqrt{3a} \cdot 2\sqrt{3a},$$

d. i. grösser als $6\sqrt{3}.a\sqrt{a}$, folglich

$$\frac{2b}{x_{n-1}x_n(x_n + x_{n+1})} < \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{a\sqrt{a}};$$

und folglich, weil im irreduciblen Falle, den wir jetzt hier allein im Auge haben,

$$b^2 < a^3, \quad b < a\sqrt{a}, \quad \frac{b}{a\sqrt{a}} < 1$$

ist, jedenfalls

$$\frac{2b}{x_{n-1}x_n(x_n + x_{n+1})} < \frac{1}{3\sqrt{3}},$$

also nach dem Obigen, immer bloss in Rücksicht auf die absoluten Werthe der Differenzen $x_{n+1} - x_n$ und $x_{n-1} - x_n$:

$$x_{n+1} - x_n < \frac{x_{n-1} - x_n}{3\sqrt{3}}.$$

Es ist also hiernach

$$x_2 - x_3 < \frac{x_2 - x_1}{3\sqrt{3}},$$

$$x_4 - x_3 < \frac{x_2 - x_3}{3\sqrt{3}},$$

$$x_4 - x_5 < \frac{x_4 - x_3}{3\sqrt{3}},$$

$$x_6 - x_5 < \frac{x_4 - x_5}{3\sqrt{3}},$$

$$x_6 - x_7 < \frac{x_6 - x_5}{3\sqrt{3}},$$

$$x_8 - x_7 < \frac{x_6 - x_7}{3\sqrt{3}},$$

$$x_8 - x_9 < \frac{x_8 - x_7}{3\sqrt{3}},$$

u. s. w.

wie hieraus sogleich erhellet:

$$x_2 - x_3 < \frac{x_2 - x_1}{3\sqrt{3}},$$

$$x_4 - x_3 < \frac{x_2 - x_1}{(3\sqrt{3})^2},$$

$$x_4 - x_5 < \frac{x_2 - x_1}{(3\sqrt{3})^3},$$

$$x_6 - x_5 < \frac{x_2 - x_1}{(3\sqrt{3})^4},$$

$$x_6 - x_7 < \frac{x_2 - x_1}{(3\sqrt{3})^5},$$

$$x_8 - x_7 < \frac{x_2 - x_1}{(3\sqrt{3})^6},$$

$$x_8 - x_9 < \frac{x_2 - x_1}{(3\sqrt{3})^7};$$

u. s. w.

eil nun die Potenzen

$$3\sqrt{3},\ (3\sqrt{3})^2,\ (3\sqrt{3})^3,\ (3\sqrt{3})^4,\ (3\sqrt{3})^5,\ \ldots\ldots$$

nendliche wachsen, so ist klar, dass die Differenzen

$$x_2 - x_1,\ x_2 - x_3,\ x_4 - x_3,\ x_4 - x_5,\ x_6 - x_5,\ \ldots\ldots$$

Jnendliche abnehmen, wenn man nur die Reihe derselben genug fortsetzt.

lieraus sieht man nun, dass mittelst des Ausdrucks

$$x=\sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a+}}}}}}}}}\quad \text{u. s. w.}$$

die eine reelle positive Wurzel, welche die cubische Gleichung

$$x^3-3ax-2b=0$$

jederzeit nothwendig hat, im irreductiblen Falle immer durch Annäherung mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit berechnet werden kann, und da die Potenzen

$$3\sqrt{3},\ (3\sqrt{3})^2,\ (3\sqrt{3})^3,\ (3\sqrt{3})^4,\ (3\sqrt{3})^5,\ \ldots\ldots$$

nämlich

$$3\sqrt{3}=3\sqrt{3},$$
$$(3\sqrt{3})^2=27,$$
$$(3\sqrt{3})^3=81\sqrt{3},$$
$$(3\sqrt{3})^4=729,$$
$$(3\sqrt{3})^5=2187\sqrt{3},$$
$$(3\sqrt{3})^6=19683,$$
$$(3\sqrt{3})^7=59049\sqrt{3},$$
$$(3\sqrt{3})^8=531441,$$
u. s. w.

schnell wachsen, so scheint auch die Annäherung ziemlich rasch fortzuschreiten; aber die successive Ausziehung der Quadratwurzeln wird immer Schwierigkeit machen, namentlich wenn man sich bei diesem Geschäft nicht der Logarithmen bedienen wollte, und die goniometrische äusserst leichte und elegante Auflösung wird daher immer in der Praxis bei Weitem vorzuziehen sein.

Wie man, wenn man die eine Wurzel der cubischen Gleichung kennt, die beiden anderen finden kann, ist bekannt.

Die Zurückführung der cubischen Gleichungen durch die Substitutionen

$$x=\frac{u^2-a}{u}\quad\text{oder}\quad x=\frac{u^2+a}{u}$$

auf eine quadratische oder wenigstens auf eine Gleichung, die sich wie eine Gleichung des zweiten Grades auflösen lässt, ist, el ich finden kann, ganz Paul Halcken's Eigenthum und Obigem von demselben entlehnt worden; das Uebrige ist Zuvon meiner Seite.

Zum Schluss will ich der Ergötzlichkeit wegen nun noch anen, wie der genannte alte Arithmeticus in seinem Grimme den fatalen Casus irreducibilis, aber doch auch mit einer issen Freude, dass er, wie er wenigstens zu meinen scheint, der Beseitigung desselben einen Schritt vorwärts gethan hat, über diesen Fall der Auflösung der cubischen Gleichungen pricht. S. 63. seines oben erwähnten Mathematischen ıen-Confects sagt er nämlich:

„Bißhieher ist gelehret worden, wie man die Cubischen Aequationes ihrer richtigen Demonstration aus wahrem Grunde solviren soll, dieses das mühsamste und wichtigste ist, die Cubic-Wurtzeln aus den niis zu extrahiren Es ist aber eine deutliche Regul davon gegeben, un solche Extraction leicht und bald verrichten kann. Bei der zweyten ritten Regul wird man angemercket haben: Wann daselbst der Cubus em dritten Theil der Zahl $3a$ grösser ist, als das Quadrat von der der ledigen Zahl, daß alßdann Binomia imperfecta kommen, daran rdische Theil als $\sqrt{-a}$ gantz ungeschickt und absurd sich erzeiget, en auch die Zahl-Künstler mit selbigen nicht gerne wollen zu schaffen gleich wie ein Zimmerman ein unartig knastrig stück Holtz vermeidet."

er berühmte Cardanus hat, um solchen wiederspenstigen Kumpen em Wege zu gehen, im 25 Cap. seines X-Buchs 16 particular-Regesetzet, von welchen er auch handelt im 2 Cap. seines Buchs De la Aliza, allein es wird dadurch die Sache nicht gehoben; Dann wan ach solchen Regeln algebraisch procediret, so kommt man wieder olche ungeschickte Binomia, bleibt also der Karren im Koht stecken, en ist hier kein besser Mittel, als daß man das Werck, wie es die liche Solution giebet, vollführe, wie den nach unser Extractions solche ungeschickte Binomia sich gantz schicklich und wohl tractiren wie solches aus den angeführten Exempeln genugsam erscheinet."*)

*) Uns aber doch nicht recht klar geworden ist.

X.

Zur Theorie der Reihen.

Von dem

Herrn Dr. O. Schlömilch,

Professor der höheren Mathematik und Mechanik an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Mehr im Gefühle als im Besitze des wirklichen Nachweises haben die Verfechter einer strengeren Behandlung der unendlichen Reihen die Behauptung ausgesprochen, dass man bei dem sorglosen Rechnen mit jenen Formen, wie es z. B. Ohm förmlich sanktionirt hat, zu jedem beliebigen noch so absurden Resultate gelangen könne; im Gegensatze hierzu wollten Ohm und sein Anhang geltend machen, dass solche Absurditäten, wie man sie thatsächlich aufweisen konnte, nur von einer widerrechtlichen Spezialisirung der Buchstabengrössen herrührten, mit anderen Worten, es wurde uns verboten, in Gleichungen wie

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots\ldots$$

das x für eine allgemein gedachte Zahl anzusehen; x sollte nur der „Träger der Operationen", ein allgemeines analytisches Symbol oder, Gott weiss welcher, grosse oder kleine Unbekannte sein. Ich will mich an dieser Stelle nicht auf die, allerdings nicht schwierige Erörterung einlassen, ob eine Gleichung, wie die vorhin genannte, nur einen Sinn hat, wenn x keine Zahl sein soll, ja ob es überhaupt möglich und denkbar ist, mit etwas Anderem als Zahlen, gleichgültig ob dieses Andere allgemeiner oder spezieller als eine Zahl ist, rechnen zu wollen; diese Untersuchung gedenke ich einer noch zu schreibenden Philosophie der Mathematik aufzubewahren, dagegen will ich nachweisen, dass man in

That durch die Ohm'sche Leichtfertigkeit Alles herausbringen ı, namentlich den Satz, dass $f(\mu+v)=f(\mu-u)$, wobei μ, u, ıd die Funktion f willkührlich sind. Ich bemerke dabei ausklich, dass ich die Rechnung allgemein halte und keine Spesirungen vornehme, die etwa den Träger der Operationen zur degradiren könnten, dass ich also eine Betrachtung anstelle, jeder Ohmianer für richtig anerkennen muss.

Zufolge des Taylor'schen Satzes ist immer

$$\varphi(\alpha+h)=\varphi(\alpha)+\frac{h}{1}\varphi'(\alpha)+\frac{h^2}{2}\varphi''(\alpha)+\ldots,$$

für $h=x-\alpha$:

$$\varphi(x)=\varphi(\alpha)+\frac{\varphi'(\alpha)}{1}(x-\alpha)+\frac{\varphi''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2+\ldots,$$

r nach Ohms Bezeichnung geschrieben werden möge:

$$\varphi_x-\varphi_\alpha=\frac{\varphi'\alpha}{1}(x-\alpha)+\frac{\varphi''\alpha}{2}(x-\alpha)^2+\ldots$$

Coefficienten von $x-\alpha$, $(x-\alpha)^2$ etc. wollen wir zur Abkürmit a_1, a_2 etc. bezeichnen, also

$$\varphi_x-\varphi_\alpha=a_1(x-\alpha)+a_2(x-\alpha)^2+a_3(x-\alpha)^3+\ldots\ldots$$

ı. Dabei ist es übrigens für die nachfolgenden Operationen ganz gültig, ob man sich die Reihe als convergent oder divergent t. — Erhebt man beide Seiten der Gleichung 1) aufs Quaso erhält man eine neue Gleichung von der Form

$$(\varphi_x-\varphi_\alpha)^2=b_2(x-\alpha)^2+b_3(x-\alpha)^3+b_4(x-\alpha)^4+\ldots\ldots$$

b_2, b_3, etc. wiederum gewisse constante Coefficienten bezeichnen, deren Werthe es uns nicht weiter ankommt. Ebenso leicht e man durch Erhebung auf die dritte, vierte Potenz etc. zu hungen von nachstehenden Formen gelangen:

$$(\varphi_x-\varphi_\alpha)^3=c_3(x-\alpha)^3+c_4(x-\alpha)^4+c_5(x-\alpha)^5+\ldots\ldots$$

$$(\varphi_x-\varphi_\alpha)^4=d_4(x-\alpha)^4+d_5(x-\alpha)^5+d_6(x-\alpha)^6+\ldots\ldots$$

etc. etc.

multiplizire jetzt die Gleichungen 1), 2), 3), 4), etc. mit den der Hand noch unbestimmten Coefficienten A_1, A_2, A_3 etc., st durch Addition

$$A_1(\varphi_x-\varphi_\alpha)+A_2(\varphi_x-\varphi_\alpha)^2+A_3(\varphi_x-\varphi_\alpha)^3+\ldots\ldots$$

$$= A_1 \{ a_1 (x-\alpha) + a_2 (x-\alpha)^2 + a_3 (x-\alpha)^3 + \ldots \}$$
$$+ A_2 \{ b_2 (x-\alpha)^2 + b_3 (x-\alpha)^3 + b_4 (x-\alpha)^4 + \ldots \}$$
$$+ A_3 \{ c_3 (x-\alpha)^3 + c_4 (x-\alpha)^4 + c_5 (x-\alpha)^5 + \ldots \}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder bei gehöriger Ordnung nach den Potenzen von $x-\alpha$:

$$5) \quad A_1 (\varphi_x - \varphi_\alpha) + A_2 (\varphi_x - \varphi_\alpha)^2 + A_3 (\varphi_x - \varphi_\alpha)^3 + \ldots$$
$$= A_1 a_1 (x-\alpha)$$
$$+ \{ A_1 a_2 + A_2 b_2 \} (x-\alpha)^2$$
$$+ \{ A_1 a_3 + A_2 b_3 + A_3 c_3 \} (x-\alpha)^3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Andererseits hat man zufolge des Taylor'schen Satzes für jede Funktion f:

$$6) \quad f_x - f_\alpha = \frac{f'_\alpha}{1'} (x-\alpha) + \frac{f''_\alpha}{2'} (x-\alpha)^2 + \frac{f'''_\alpha}{3'} (x-\alpha)^3 + \ldots$$

Diese Gleichung halten wir mit der vorigen zusammen, indem wir

$$A_1 a_1 = \frac{f'_\alpha}{1'},$$
$$A_1 a_2 + A_2 b_2 = \frac{f''_\alpha}{2'},$$
$$A_1 a_3 + A_2 b_3 + A_3 c_3 = \frac{f'''_\alpha}{3'}$$

etc.

setzen und aus diesen Gleichungen die vorher unbestimmten Coefficienten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ bestimmen. Diese Bestimmung ist jederzeit möglich, weil die obigen Gleichungen in Beziehung auf A_1, A_2, $A_3 \ldots$ nur vom ersten Grade sind; man findet aus der ersten Gleichung A_1, aus der zweiten A_2, aus der dritten A_3 u. s. f. Somit wird nun die rechte Seite der Gleichung 5) mit der rechten Seite von Nro. 6) identisch und wir haben daher

$$A_1 (\varphi_x - \varphi_\alpha) + A_2 (\varphi_x - \varphi_\alpha)^2 + A_3 (\varphi_x - \varphi_\alpha)^3 + \ldots$$
$$= f_x - f_\alpha,$$

oder endlich

$$7) \quad f_x = f_\alpha + A_1 (\varphi_x - \varphi_\alpha) + A_2 (\varphi_x - \varphi_\alpha)^2 + A_3 (\varphi_x - \varphi_\alpha)^3 + \ldots,$$

d. h. also in Worten: jede Funktion f_x kann in eine Reihe verwandelt werden, welche nach Potenzen von $\varphi_x - \varphi_\alpha$ fortschreitet, wobei φ_x eine beliebige Funktion und α eine beliebige Grösse bezeichnet.

Man wird mir gewiss zugestehen, dass bei dieser Rechnung nicht die geringste Spezialisirung vorgenommen worden ist, und gleichwohl enthält der obige Satz, in dieser Allgemeinheit ausgesprochen, alle möglichen Absurditäten in sich. — Da nämlich die Funktion φ_x beliebig ist, so kann sie auch beliebige Maxima und Minima bekommen; gesetzt nun, ein solches Maximum oder Minimum trete ein für $x=\mu$*), so nimmt die Funktion φ_x über $x=\mu$ hinaus wieder einen Theil der Werthe an, die sie früher hatte, und es giebt eine unendliche Menge zusammengehöriger Grössen u und v der Art, dass $\varphi_{\mu-u}=\varphi_{\mu+v}$ ist. (Sehr leicht sieht man diess geometrisch, wenn man die Curve construirt, deren Gleichung $y=\varphi_x$ ist; man braucht nur parallel zur Abscissenachse eine Gerade zu ziehen, welche die Curve zweimal schneidet, dann sind $\mu-u$ und $\mu+v$ die Abscissen der Durchschnittspunkte). Setzen wir nun in der Gleichung 7) erst $x=\mu-u$, dann $x=\mu+v$, so ist zugleich

$$f_{\mu-u}=f_a+A_1(\varphi_{\mu-u}-\varphi_a)+A_2(\varphi_{\mu-u}-\varphi_a)^2+\ldots\ldots,$$

$$f_{\mu+v}=f_a+A_1(\varphi_{\mu+v}-\varphi_a)+A_2(\varphi_{\mu+v}-\varphi_a)^2+\ldots\ldots;$$

und da $\varphi_{\mu-u}=\varphi_{\mu+v}$, so folgt auf der Stelle

$$8)\qquad f_{\mu-u}=f_{\mu+v}.$$

Bedenkt man nun, dass erstens μ, u und v Grössen sind, welche nur in Beziehung auf φ_x Bedeutung haben, dass zweitens sehr leicht eine Funktion φ_x zu finden wäre, welche für willkührlich angenommene μ, u, v, die Bedingung $\varphi_{\mu-u}=\varphi_{\mu+v}$ erfüllte**) und dass endlich drittens f_x in gar keinem Zusammenhange mit φ_x steht, also völlig willkührlich genommen werden darf, so erhellt auf der Stelle, dass die Gleichung 8) reiner Unsinn ist, womit sich die Gleichheit jeder zwei beliebigen Grössen beweisen liesse. Vielleicht sind ein paar Beispiele hierzu nicht überflüssig. Man setze erstlich

$$\varphi_x=\frac{x}{k^2+x^2},\quad a=0;$$

so ist nach Nro. 7) bei gehörig bestimmten Coefficienten:

$$9)\qquad f_x=f_0+A_1\left(\frac{x}{k^2+x^2}\right)+A_2\left(\frac{x}{k^2+x^2}\right)^2+A_3\left(\frac{x}{k^2+x^2}\right)^3+\ldots\ldots$$

---

*) Dieses μ braucht keine Zahl im Ohm'schen Sinne zu sein; z. B. für $\varphi_x=\frac{x}{k^2+x^2}$ wird $\mu=\pm k$, und das ist eben so allgemein wie x und k selber.

**) Man braucht nur rechts und links von der Abscisse μ beliebige Strecken u und v, u' und v', u'' und v'' etc. abzuschneiden und den Abscissen $\mu-u$ und $\mu+v$, $\mu-u'$ und $\mu+v'$ etc. jedesmal gleich grosse, sonst aber beliebige Ordinaten zu geben, so erhält man soviel Punkte der Curve $y=\varphi_x$ als man will.

Die Bestimmung der Coefficienten wäre hier sehr leicht; denn entwickelt man die linke Seite nach dem Theoreme von Mac-Laurin und rechter Hand jedes einzelne Glied nach dem Binomischen Satze, indem man

$$\left(\frac{x}{k^2+x^2}\right)^n = \frac{x^n}{k^{2n}}\left(1+\frac{x^2}{k^2}\right)^{-n}$$

setzt, so findet man leicht durch beiderseitige Vergleichung:

$$A_1 = k^2 f'_0,$$

$$A_2 = \frac{k^4}{2} f''_0,$$

$$A_3 = k^4 f'_0 + \frac{k^6}{6} f'''_0,$$

$$A_4 = k^6 f''_0 + \frac{k^8}{24} f^{\mathrm{IV}}_0,$$

u. s. w.

und es müsste nun die Gleichung 9) richtig sein, wofern x nicht zur Zahl spezialisirt wird. Nimmt man einmal $x = u$ und das andere Mal $x = \frac{k^2}{u}$, so bleibt die rechte Seite in beiden Fällen dieselbe, und man hat folglich

$$f(u) = f\left(\frac{k^2}{u}\right),$$

was schwerlich jemand glauben wird.

Für ein zweites Beispiel nehmen wir

$$\varphi_x = \sin x; \quad \alpha = 0;$$

so muss nach Nro. 7) sein:

$$10) \qquad f_x = f_0 + A_1 \sin x + A_2 \sin^2 x + A_3 \sin^3 x + \ldots,$$

und man findet durch beiderseitige Entwickelung und Vergleichung:

$$A_1 = f'_0,$$

$$A_2 = \frac{1}{2} f''_0,$$

$$A_3 = \frac{1}{6} f'_0 + \frac{1}{6} f'''_0,$$

u. s. w.

Setzt man aber erst $x=\frac{\pi}{2}-u$ und dann $x=\frac{\pi}{2}+u$, so wird die rechte Seite der Gleichung 10) nicht geändert, und mithin folgt

$$f\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+u\right).$$

Doch genug von diesen Absurditäten, deren Zahl sich sehr leicht beliebig vermehren liesse. Vielleicht ist es den Lesern angenehmer, wenn ich den Fehler aufdecke, welcher den obigen Rechnungen zu Grunde liegt.

Stellen wir die Gleichungen 1), 2), 3) etc. so dar, dass die Reihen rechter Hand endliche sind, so müssen wir die Reste derselben berücksichtigen; nennen wir letztere $\overset{\text{I}}{R}_n$, $\overset{\text{II}}{R}_n$, $\overset{\text{III}}{R}_n$ etc. so ist richtig:

$$\varphi_x-\varphi_\alpha=a_1(x-\alpha)+a_2(x-\alpha)^2+a_3(x-\alpha)^3+\ldots$$
$$\ldots+a_n(x-\alpha)^n+\overset{\text{I}}{R}_n,$$
$$(\varphi_x-\varphi_\alpha)^2=b_2(x-\alpha)^2+b_3(x-\alpha)^3+b_4(x-\alpha)^4+\ldots$$
$$\ldots+b_n(x-\alpha)^n+\overset{\text{II}}{R}_n,$$
$$(\varphi_x-\varphi_\alpha)^3=c_3(x-\alpha)^3+c_4(x-\alpha)^4+c_5(x-\alpha)^5+\ldots$$
$$\ldots+c_n(x-\alpha)^n+\overset{\text{III}}{R}_n$$

u. s. f.

und die letzte dieser Gleichungen sei

$$(\varphi_x-\varphi_\alpha)^n=k_n(x-\alpha)^n+\overset{n}{R}_n.$$

Addiren wir diese Gleichungen nach Multiplikation mit den unbestimmten Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_n$, so ist, wenn zur Abkürzung

$$A_1\overset{\text{I}}{R}_n+A_2\overset{\text{II}}{R}_n+\ldots+A_n\overset{n}{R}_n=S_n$$

gesetzt wird:

$$A_1(\varphi_x-\varphi_\alpha)+A_2(\varphi_x-\varphi_\alpha)^2+A_3(\varphi_x-\varphi_\alpha)^3+\ldots$$
$$\ldots+A_n(\varphi_x-\varphi_\alpha)^n$$
$$\begin{aligned}=\;&A_1a_1(x-\alpha)\\+&\{A_1a_2+A_2b_2\}(x-\alpha)^2\\+&\{A_1a_3+A_2b_3+A_3c_3\}(x-\alpha)^3\\+&\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$+\{A_1 a_n + A_2 b_n + \ldots + A_n k_n\}(x-\alpha)^n$$
$$+ S_n$$

und hier lassen sich allerdings die Coeffizienten A_1, A_2, ... A_n ebenso bestimmen wie früher; man erhält dann

$$A_1(\varphi_x - \varphi_\alpha) + A_2(\varphi_x - \varphi_\alpha)^2 + A_3(\varphi_x - \varphi_\alpha)^3 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + A_n(\varphi_x - \varphi_\alpha)^n$$
$$= \frac{f'\alpha}{1'}(x-\alpha) + \frac{f''\alpha}{2'}(x-\alpha)^2 + \frac{f'''\alpha}{3'}(x-\alpha)^3 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{f^{(n)}\alpha}{n'}(x-\alpha)^n + S_n.$$

Nennen wir ϱ_n den Rest der Taylor'schen Reihe, so dass also

$$f_x = f_\alpha + \frac{x-\alpha}{1'} f'\alpha + \frac{(x-\alpha)^2}{2'} f''\alpha + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{(x-\alpha)^n}{n'} f^{(n)}\alpha + \varrho_n$$

ist, so können wir statt der vorhergehenden Gleichung schreiben:

$$A_1(\varphi_x - \varphi_\alpha) + A_2(\varphi_x - \varphi_\alpha)^2 + A_3(\varphi_x - \varphi_\alpha)^3 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + A_n(\varphi_x - \varphi_\alpha)^n$$
$$= f_x - f_\alpha - \varrho_n + S_n,$$

oder endlich

$$f_x - (\varrho_n - S_n) = f_0 + A_1(\varphi_x - \varphi_\alpha) + A_2(\varphi_x - \varphi_\alpha)^2 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + A_n(\varphi_x - \varphi_\alpha)^n.$$

Soll nun diese unbezweifelt richtige Gleichung in die Formel 7) übergehen, so muss für unendlich wachsende n

$$\operatorname{Lim}(\varrho_n - S_n) = 0$$

sein, und hierzu gehört, weil ϱ_n nur von f, S_n aber auch von φ abhängt, und sich folglich ϱ_n und S_n nicht aufheben können, dass gleichzeitig

$$\operatorname{Lim}\varrho_n = 0, \quad \operatorname{Lim} S_n = 0$$

sei. Diess ist aber nur möglich, wenn die Reihen

$$f_x = f_\alpha + \frac{x-\alpha}{1} f'\alpha + \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} f''\alpha + \ldots\ldots,$$

$$\varphi_x = \varphi_\alpha + \frac{x-\alpha}{1} \varphi'\alpha + \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} \varphi''\alpha + \ldots\ldots$$

ergiren, weil im Gegenfalle ϱ_n und $\overset{\prime}{R}_n$ (mithin auch $\overset{\prime\prime}{R}_n$, $\overset{\prime\prime\prime}{R}_n$
sich nicht der Gränze Null nähern würden. Obschon nun die
vergenz der ebengenannten Reihen nothwendig erfordert
, so ist sie doch noch nicht hinreichend; denn wenn auch

$$\text{Lim}\,\varrho_n=0 \text{ und } \text{Lim}\,\overset{\prime}{R}_n=\text{Lim}\,\overset{\prime\prime}{R}_n\ldots=0$$

so folgt daraus schlechterdings nicht, dass für unendlich
sende n

$$\text{Lim}\; S_n=\text{Lim}\,[A_1\overset{\prime}{R}_n+A_2\overset{\prime\prime}{R}_n+\ldots+A_n\overset{n}{R}_n]=0$$

müsse; es wird zwar jeder einzelne Summand immer kleiner,
ehr n wächst, dagegen wird aber auch die Anzahl der Sum-
len immer grösser, und es kann folglich der Gränzwerth sehr
l eine endliche und sogar sehr grosse Zahl sein. Wer das
amte Integral kennt, wird wissen, dass jene gesuchte Limes
er That nichts Anderes als ein derartiges Integral ist. Hier-
geht klar genug hervor, dass ausser der Convergenz der für
nd φ_x benutzten Reihen, noch anderweite Bedingungen zu
len sind, wenn die Gleichung 7) Bestand haben soll. Auch
steriori erhellt diess leicht; so z. B. convergiren die Reihen
^{x} und $\sin x$ immer; setzt man aber

$$e^x=1+A_1\sin x+A_2\sin^2 x+A_3\sin^3 x+\ldots,$$

us folgt

$$A_1=1,\quad A_2=\frac{1}{2},\quad A_3=\frac{7}{6},\quad A_4=\frac{5}{24},\quad \text{etc.}$$

ilt die obige Entwickelung doch nur von $x=0$ bis $x=\frac{\pi}{2}$, ob-
n die Reihe rechter Hand immer convergirt. — Welcher Art
e noch zu erfüllenden Bedingungen sind (damit Lim $S_n=0$
le), gedenke ich bei einer anderen Gelegenheit zu zeigen;
kam es mir nur auf den Nachweis an, dass Ohm in einem
ltigen Irrthume befangen ist, wenn er die Reihentheorie auf
ere Prinzipien gestützt zu haben glaubt und wenn er sich in
Meinung gefällt, es hätten Abel und ähnliche Meister aus
em „Geist der Analysis" die wahre Reihenbehandlung lernen
ien; allerdings findet sich Mancherlei in diesem Ohm'schen
ke, nur leider nichts weniger als Geist.

XI.

Ueber die elementare Cubatur der Flächen zweiten Grades.

Von dem

Herrn Dr. O. Schlömilch,

Professor der höhern Mathematik und Mechanik an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Die eben so einfachen als eleganten Betrachtungen, welche mein verehrter Vorgänger an dem hiesigen polytechnischen Institute, Herr Prof. Franke, im 12. Bande des Archivs mitgetheilt hat, veranlassten mich zu einer flüchtigen Untersuchung über die Cubatur der Flächen zweiten Grades überhaupt, namentlich um zu entscheiden, ob sich nicht von beliebigen in den Richtungen der Achsen genommenen Abschnitten oder Kappen derselben eine elementare Volumenbestimmung geben liesse. Der Erfolg dieser Betrachtung war ein so guter, dass er vielleicht allgemeiner Mittheilung nicht unwerth ist, wobei ich übrigens die Bemerkung nicht unterdrücken kann, dass es mich sehr wundern sollte, wenn nicht schon irgendwo das nachstehende sehr naheliegende Verfahren benutzt worden wäre; doch habe ich in allen mir zu Gebote stehenden Werken nichts darüber gefunden.

Bekanntlich sind zwei Volumina gleich, wenn beide, in gleichen Höhen mit Ebenen durchschnitten, überall Durchschnitte von gleichen Flächen geben, was man kurz so ausdrücken könnte: Volumina sind gleich, wenn die correspondirenden Querschnitte derselben gleiche Flächen besitzen. Wenn ich nicht irre, ist dieser Satz von Cavalleri als Axiom aufgestellt*) und später vielfach (z. B. zur Cubatur der Kugel) benutzt worden; es kostet aber wenig Mühe, denselben mittelst der Exhaustionsmethode zu beweisen, und zwar kommt der Beweis in der Hauptsache darauf

---

*) Dies ist ganz richtig; jedoch dürfte wohl bemerkt zu werden verdienen, dass zuerst Segner dieses Princip in allen seinen Elementar-Lehrbüchern der gesammten Stereometrie als Grundprincip zum Grunde gelegt und in den Elementar-Unterricht eingeführt hat. M. s. z. B. Elementa Geometriae. §. 194. §. 258. G.

s, zu zeigen, dass, wenn $f_1, f_2, \ldots f_n$ die parallelen Quer ttflächen des Volumens V sind, und $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Entıgen dieser Flächen von einander bedeuten, die Gleichung findet

$$V = \mathrm{Lim}\{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n\},$$

sich das Zeichen Lim auf das unendliche Wachsthum von die unendliche Abnahme der x bezieht. — Eine Folge des Satzes ist noch das Theorem: Stehen die correspondin Querschnittflächen zweier Volumina in einem constanten ltnisse, so findet zwischen den betreffenden Körperräumen lbe Verhältniss statt.

Das Ellipsoid. (Taf. II. Fig. 1.).

eben wir der bekannten Gleichung des Ellipsoides

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

orm

$$\left(\frac{x}{a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{b\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}}\right)^2 = 1,$$

rakterisirt diese Gleichung denjenigen Schnitt des Ellip-, welcher durch den Endpunkt des z parallel zu AOB gererden kann. Statt nämlich eine Gleichung zwischen den oordinaten $OM = x$, $MN = y$, $NP = z$ aufzustellen, kann ach eine Gleichung zwischen nur zweien derselben $O'M' = x$ und $M'P = MN = y$ verlangen, indem man sich durch en Schnitt gelegt denkt. Diese Gleichung zwischen $O'M'$ $l'P$ ist aber die Gleichung der Schnittcurve UPV. Letzildet in unserem Falle eine Ellipse mit den Halbachsen

$$O'U = a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}, \quad O'V = b\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}$$

aher ist die Fläche des Schnittes:

$$O'U.O'V.\pi = \frac{ab}{c^2}(\sqrt{c^2-z^2})^2\pi.$$

n wir uns eine Kugel mit dem Halbmesser c beschrieben ihren in der Entfernung z einen Schnitt, so ist die Fläche Schnittes

$$(\sqrt{c^2-z^2})^2\pi$$

und es verhält sich demnach jener Schnitt des Ellipsoides zu diesem cirkularen Schnitte der Kugel wie $\frac{ab}{c^2}:1$; dasselbe Verhältniss findet also auch zwischen den entsprechenden Körpern statt. Lassen wir nun z das Intervall $z=0$ bis $z=h$ durchlaufen, so erhalten wir einerseits eine ellipsoidische, andererseits eine sphärische Zone, beide von der Höhe h. Das Volumen der Kugelzone ist bekanntlich $(c^2h-\frac{1}{3}h^3)\pi$, und folglich das der ellipsoidischen Zone

$$\frac{ab}{c^2}(c^2-\frac{1}{3}h^2)h\pi.$$

Für $h=c$ ergiebt sich hieraus der cubische Inhalt der oberen Hälfte des Ellipsoides $=\frac{2}{3}abc\pi$, und folglich $\frac{4}{3}abc\pi$ für das ganze Ellipsoid. Will man das Volumen einer Zone, deren Basis nicht durch den Mittelpunkt geht, so braucht man nur einmal $h=h_1$ dann $h=h_2$ zu setzen und zu subtrahiren, man erhält so das Volumen einer beliebigen Zone, deren Begränzungsebenen senkrecht auf $OC=c$ stehen. Ebenso leicht ist es ähnliche Formeln für solche Zonen zu entdecken, deren Begränzungsebenen auf $OB=b$ oder $OA=a$ senkrecht stehen; es würde hierzu eine blosse Buchstabenvertauschung hinreichen.

Das einfache Hyperboloid. (Taf. II. Fig. 2.).

Die Gleichung dieser Fläche ist bekanntlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

oder

$$\left(\frac{x}{a\sqrt{1+\left(\frac{z}{c}\right)^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{b\sqrt{1+\left(\frac{z}{c}\right)^2}}\right)^2=1,$$

und mithin der Schnitt durch den Endpunkt von z eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a\sqrt{1+\left(\frac{z}{c}\right)^2},\quad b\sqrt{1+\left(\frac{z}{c}\right)^2}.$$

Die Schnittfläche hat demnach die Grösse

$$ab(1+\frac{z^2}{c^2})\pi.$$

Denken wir uns ferner denjenigen Cylinder construirt, welcher das Hyperboloid in der Kehlellipse berührt, so besteht das gesuchte Volumen aus dem Cylindervolumen plus dem Raume eines ringförmigen Körpers. Der Querschnitt des letzteren wird erhalten, wenn man vom Querschnitt des Hyperboloides den Querschnitt des Cylinders, d. h. die Fläche $OA.OB.\pi = ab\pi$, subtrahirt; der Querschnitt des ringförmigen Körpers ist also

$$\frac{ab}{c^2} z^2 \pi.$$

Construiren wir einen Kegel, dessen Achse mit der Seite einen Winkel von 45^0 macht, so ist der Querschnitt desselben in der Entfernung z vom Scheitel ein Kreis mit dem Halbmesser z, und folglich die Schnittfläche $= z^2 . \pi$. Die Schnittfläche des ringförmigen Körpers verhält sich also zur Schnittfläche dieses Kegels wie $\frac{ab}{c^2} : 1$, und dasselbe muss von den Körpern gelten, welche entstehen, wenn man z das Intervall $z = 0$ bis $z = h$ durchlaufen lässt, d. h. der ringförmige Körper ist das Produkt aus $\frac{ab}{c^2}$ und einem Kegelvolumen, welches h zur Höhe und h zum Basishalbmesser hat. Dieses Produkt wäre demnach

$$\frac{ab}{c^2} \cdot \frac{1}{3} h^3 \pi,$$

und wenn man den Kehlcylinder von der Höhe h damit vereinigt, so ergiebt sich

$$abh\pi + \frac{ab}{c^2} \frac{1}{3} h^3 \pi,$$

oder

$$ab\left(1 + \frac{1}{3} \frac{h^2}{c^2}\right) h\pi$$

als Volumen der hyperboloidischen Zone, welche die Kehlellipse zur Basis und h zur Höhe hat. Giebt man h zwei verschiedene Werthe und subtrahirt, so kann man den Inhalt jeder Zone finden, deren Begränzungsebenen der Kehlellipse parallel laufen. Für $h = c$ wird das Volumen der obigen Zone $= \frac{4}{3} abc\pi$, also gleich dem ganzen Ellipsoide, welches man aus den Halbachsen a, b, c construiren könnte und welches das Hyperboloid in der Kehlellipse berühren würde; diess ist der Satz des Herrn Professor Franke.

Das getheilte Hyperboloid. (Taf. II. Fig. 3.).

Geben wir der Gleichung dieser Fläche, nämlich

$$-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

die Form

$$\left(\frac{x}{a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-1}}\right)^2+\left(\frac{y}{b\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-1}}\right)^2=1,$$

so zeigt sich, dass der Schnitt, durch den Punkt xyz gelegt, eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-1},\quad b\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-1}$$

darstellt, und dass mithin die Fläche des Schnittes gleich

$$ab\left\{\frac{z^2}{c^2}-1\right\}\pi$$

sein muss. Denken wir uns einen elliptischen Cylinder mit den Halbachsen a und b hinzu, so würde der Durchschnitt desselben in der Höhe z die Fläche $ab\pi$ besitzen; demnach bilden das Hyperboloid und dieser Cylinder zusammen einen Körper, welcher in der Höhe z die Schnittfläche

$$ab\left\{\frac{z^2}{c^2}-1\right\}\pi+ab\pi=\frac{ab}{c^2}z^2\pi$$

besitzt. Construiren wir wie vorhin einen Kegel, dessen Achse und Seite einen halben rechten Winkel einschliessen, so zeigt dieser, in der Höhe z geschnitten, die Schnittfläche $z^2\pi$, und folglich verhält sich jene Schnittfläche zu dieser wie $\frac{ab}{c^2}:1$. Lassen wir z das Intervall $z=c$ bis $z=h$ durchlaufen, so entstehen jetzt zwei Körper; der erste besteht aus einer hyperboloidischen Kappe und einem elliptischen Cylinder, deren gemeinschaftliche Höhe $h-c$ ist; der zweite ist ein abgestumpfter Kegel von derselben Höhe und sein Inhalt

$$\frac{1}{3}h^3\pi-\frac{1}{3}c^3\pi.$$

Multipliziren wir diess mit $\frac{ab}{c^2}$, so erhalten wir die Kappe plus dem elliptischen Cylinder; subtrahiren wir endlich den letzteren, welcher den Inhalt $ab(h-c)\pi$ besitzt, so kommt der Ausdruck

$$ab\left(\frac{1}{3}\frac{h^3}{c^2}-h+\frac{2}{3}c\right)\pi$$

zum Vorschein, welcher den Inhalt der hyperboloidischen Kappe von der Höhe $h-c$ angiebt. Nehmen wir $h=2c$, so findet sich $\frac{4}{3}abc\pi$, d. h. die hyperboloidische Kappe von der Höhe c hat gleiches Volumen mit dem ganzen Ellipsoide, welches aus den Halbachsen a, b, c construirt werden kann und das getheilte Hyperboloid in seinen beiden Scheiteln berühren würde. — Diess ist das Analogon zu dem für das einfache Hyperboloid geltenden Satze.

Das elliptische Paraboloid. (Taf. II. Fig. 4.).

Die Gleichung desselben ist bekanntlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\frac{z}{c},$$

oder

$$\left(\frac{x}{a\sqrt{\frac{z}{c}}}\right)^2+\left(\frac{y}{b\sqrt{\frac{z}{c}}}\right)^2=1,$$

und mithin der Schnitt durch den Endpunkt von z eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a\sqrt{\frac{z}{c}} \text{ und } b\sqrt{\frac{z}{c}}.$$

Die Schnittfläche wird demnach durch

$$\frac{ab}{c}z\pi$$

ausgedrückt. Construiren wir ein Prisma, welches die Höhe h, die Breite h und die Tiefe $\frac{ab}{c}\pi$ besitzt, so ist der Querschnitt desselben in der Entfernung z ebenfalls $=\frac{ab}{c}z\pi$, und wenn wir also z das Intervall $z=0$ bis $z=h$ durchlaufen lassen, so hat die entstehende Kappe des elliptischen Paraboloides denselben Inhalt wie dieses Prisma, nämlich

$$\frac{1}{2}\,\frac{ab}{c}\,h^2\pi.$$

Für $h=c$ giebt diese Formel drei Achttheil des aus den drei Halbachsen a, b, c construirten Ellipsoides. Giebt man h zwei Werthe und subtrahirt, so lasst sich die Cubatur jeder Zone ausführen, deren Begränzungsebenen der Ebene xy parallel laufen.

Das hyperbolische Paraboloid. (Taf. II. Fig. 5.).

Die Gleichung dieser Fläche ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=\frac{z}{c}.$$

Ein Schnitt parallel zur Ebene xy würde eine Hyperbel sein und diess hilft uns nichts, weil die Quadratur dieser Curve nicht elementar ausführbar ist. Legen wir aber parallel zur Ebene yz einen Schnitt in der Entfernung $OM=x$, so ist die Schnittfigur eine Parabel, deren Scheitel in V liegt. Nehmen wir $z=0$, so geht y in MU über und es ist daher

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{MU}{b}\right)^2=0,$$

oder

$$MU=\frac{bx}{a}.$$

Nehmen wir dagegen in der Gleichung unserer Fläche $y=0$, so geht z in MV über und es wird

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2=\frac{MV}{c} \text{ oder } MV=\frac{cx^2}{a^2}.$$

Nach dem Archimedischen Satze ist die parabolische Schnittfläche $MUV=\frac{2}{3}MU.MV=\frac{2}{3}\,\frac{bc}{a^3}\,x^3$. Diess lässt sich nicht gut mit einer anderweit bekannten Schnittfläche vergleichen und man muss desshalb einen anderen Weg einschlagen. Denken wir uns dem x den Spielraum $x=0$ bis $x=h$ angewiesen, theilen h in n gleiche Theile, deren einer $\delta=\frac{h}{n}$ heissen möge, und setzen der Reihe nach $x=\delta$, 2δ, 3δ,... $n\delta$, so bedeutet die Summe

$$\frac{2}{3}\frac{bc}{a^3}\delta^3.\delta+\frac{2}{3}\frac{bc}{a^3}(2\delta)^3.\delta+\frac{2}{3}\frac{bc}{a^3}(3\delta)^3.\delta+\dots+\frac{2}{3}\frac{bc}{a^3}(n\delta)^3.\delta$$

$$=\frac{2}{3}\frac{bc}{a^3}\delta^4[1^3+2^3+3^3+\dots+n^3]$$

trisch eine Summe von Cylindern, welche die gleiche Höhe en und deren Grundflächen die in den Entfernungen $x=\delta$, $n\delta$ geführten Schnitte des hyperbolischen Paraboloides sind. bekannten Prinzipien ist der Gränzwerth dieser Summe Anderes als das Volumen desjenigen Abschnitts unseres yperbolischen Paraboloide begränzten Körpers, welcher zwi- 0 und einem in der Entfernung $x=h$ parallel zu yz ge- Schnitte enthalten ist. Wegen

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

man jetzt das Volumen des Abschnittes gleich

$$\text{Lim}\,\frac{1}{6}\frac{bc}{a^3}(n\delta)^2(n\delta+\delta)^2=\text{Lim}\,\frac{1}{6}\frac{bc}{a^3}h^2(h+\delta)^2,$$

$$=\frac{1}{6}\frac{bc}{a^3}h^4.$$

man speziell $h=a$, so wird der Abschnitt $=\frac{1}{6}$ von dem , b, c construirten Parallelepipede. Giebt man h zwei e und subtrahirt, so bekommt man den Inhalt einer halben welche von zwei zu yz parallelen Ebenen, von der Ebene r Ebene xz und der Fläche begränzt wird. Die ganze ober- y liegende Zone erhält man nachher durch Verdoppelung rhin Gefundenen.

XII.

Ueber die Bestimmung des Inhalts der dreiseitigen Pyramide.*)

Von dem

Herrn Professor Dr. Hessel

an der Universität zu Marburg.

---

§. 1. *Hülfssatz.* Für ganze Werthe der Zahlen a und x lässt sich auf sehr elementare Art beweisen, dass für jeden Werth von x, wenn $a \overset{=}{>} 2$ ist, auch $a^x > x$ sein muss.

Beweis. 1) Weil $a \overset{=}{>} 2$, so ist $a^1 > 1$ und $a^2 \overset{=}{>} 2.2$, also $a^2 > 2$.

2) Ist aber für irgend einen bestimmten Werth von

---

*) Der Umstand, dass bei der Lehre von der Bestimmung des Inhalts der dreiseitigen Pyramide der Beweis des Satzes, der die Gleichheit zweier dreiseitiger Pyramiden bei Gleichheit der Grundflächen und Höhen ausspricht, eigentlich der höhern Mathematik angehört, hat mich, wie schon eine früher von mir in dieser Zeitschrift niedergelegte Arbeit beweist, öfters zu Versuchen veranlasst, diesen Uebelstand zu beseitigen. Einer dieser Versuche hat mich zu einer Reihe von Untersuchungen geführt, von denen ich hier einige mittheile.

Obgleich die hier vorgetragene Auflösung dieser stereometrischen Aufgabe die Exhaustionsmethode nicht vermeidet, so scheint sie mir doch, besonders in Verbindung mit den folgenden Arbeiten (über welche man unter andern Salomons Grundriss der höhern Analysis Seite 318 und 319, Beispiele 4, 5 und 6 vergleichen möge), der Veröffentlichung nicht unwerth zu sein."

$x \overline{>} 2$ ist, in irgend einer Art nachgewiesen, dass $a^{x-1} > x-1$,
o ist auch $a^x > x$.
in ist $a^{x-1} > x-1$

und $a \overline{>} 2$

ist $a.a^{x-1} > 2(x-1)$

$> x+(x-2)$, mithin, da $x-2 \overline{>} 0$ sein soll,

$a^x > x$.

nun $a^1 > 1$, also $a^{2-1} > 2-1$, so ist $a^2 > 2$;
ber $a^2 > 2$, so ist $a^{3-1} > 3-1$; also $a^3 > 3$; u. s. w.

ch ist $a^0 = 1$, also $a^0 > 0$, und $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ positiv, also $> -x$.

nmerkung 1. Die Beschränkung, dass a und x ganze ahlen sein sollen, kann man weglassen, wenn man den Beeis weiter ausdehnen will. Auch lässt sich in ähnlicher Art beeisen, dass, wenn $a \overline{>} \frac{3}{2}$ ist, auch $a^x > x$ sein müsse.
nmerkung 2. Wie die Untersuchung in der Abhandl. Nr. II. eigt, so gilt die Regel: weil $a^x > x$ ist, wenn $a > \sqrt[x]{x}$ ist, so nuss, wenn a grösser ist als der grösste Werth, den $\sqrt[x]{x}$ haben kann (d. h. $> \sqrt[e]{e}$), auch $a^x > x$ sein.
er genügt obiger Satz für ganze a und x.

l. *Lehrsatz.* Bezeichnet man ein dreiseitiges a und eine dreiseitige Pyramide, welche eine und das Verhältniss cA: cB: cD der Längen der diese Ecke zusammenlaufenden Kantenlinien n haben,

das Prisma durch P,

die Pyramide durch p,

lls cA in einer solchen Gestalt die Länge $cA = \alpha$ hat:

das Prisma durch $P(\alpha)$,

die Pyramide durch $p(\alpha)$;

$$p(\alpha) = 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2p\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

weis. Ist $clmi$ (Taf. II. Fig. 6.) eine dreiseitige Pyramide, die Ecke c und die Seiten cl, cm, ci hat, deren Ver- $= cA : cB : cD$ sein möge, so wird, wenn man diese n a, b, d halbirt und durch die Halbirungspunkte b und d ne $gbdk$ so legt, dass ihr die Kante cl parallel ist, so- als dk mit cl parallel sein; auch ist dann lm und li in

g und k halbirt. Legt man nun durch agk eine Ebene, so ist diese, weil $ag \# cm$ und $ak \# ci$ ist, der Ebene cmi parallel, also die Ecke $\begin{pmatrix} l \\ k^{a}g \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} l \\ i^{c}m \end{pmatrix}$ und $\left.\begin{matrix} al:ag:ak \\ = ca:cb:cd \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} = \frac{1}{2}cA:\frac{1}{2}cB:\frac{1}{2}cD \\ = cA:cB:cD \end{matrix}\right\}$.

Ist also $cl=\alpha$, so ist

$$\text{Pyramide } clmi = p(\alpha),$$

$$\text{Pyramide } algk = p\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\text{Prisma } cabdkg = P\left(\frac{\alpha}{2}\right);$$

auch ist gk und bd mit mi parallel.

Legt man nun durch bg die Ebene $bgh \# cli$, so ist

$$\text{Pyram.}\, bgmh \cong algk, \text{ also } = p\left(\frac{\alpha}{2}\right);$$

auch ist:

$$\text{Prisma } bghdki = cabdkg = P\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

indem jedes dieser beiden Prismen halb so gross ist als ein Parallelepiped, das die Ecke c und die in dieser Ecke zusammenlaufenden Kanten $\frac{1}{2}cA$ (in der Richtung cl), $\frac{1}{2}cB$ (in der Richtung cm) und $\frac{1}{2}cD$ (in der Richtung ci) hat.

Es ist also

$$\begin{pmatrix}\text{Pyramide}\\ clmi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Prisma}\\ cabdkg\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Prisma}\\ bghdki\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Pyramide}\\ algk\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Pyramide}\\ bgmh\end{pmatrix},$$

also

$$p(\alpha) = 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2p\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

§. 5. **Folgesatz I.** Da $p\left(\frac{\alpha}{2}\right) < P\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ist (indem, wenn man durch abd eine Ebene legen würde, die Pyramide $cabd = p\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ein Theil des Prismas $cabdkg$ ist, das $= P\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ist), so folgt, dass, wenn

$$p(\alpha) = 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2p\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

auch

$$p(\alpha) > 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

und

$$p(\alpha) < 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$> 4P\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

sein muss, dass also, da $P\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{8}P(\alpha)$ ist (indem $P(\alpha)$ sich in $8P\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ zerlegen lässt),

$$1)\ p(\alpha) > \frac{1}{4}\, P(\alpha)$$

und

$$2)\ p(\alpha) < \frac{1}{2} P(\alpha)$$

ist.

§. 6. **Folgesatz II.** Ist

$$p(\alpha) = 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2p\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

also

$$p\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2P\left(\frac{\alpha}{4}\right) + 2p\left(\frac{\alpha}{4}\right)$$

u. s. w.

so folgt durch Substitution

$$p(\alpha) = 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2p\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2.2P\left(\frac{\alpha}{4}\right) + 2.2p\left(\frac{\alpha}{4}\right)$$

$$= 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2^2P\left(\frac{\alpha}{4}\right) + 2^3P\left(\frac{\alpha}{8}\right) + 2^3p\left(\frac{\alpha}{8}\right)$$

u. s. w.

$$p(\alpha) = 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2^2P\left(\frac{\alpha}{4}\right) + 2^3P\left(\frac{\alpha}{8}\right) + \ldots + 2^nP\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) + 2^np\left(\frac{\alpha}{2^n}\right).$$

Weil aber jedes der hier in diesem Ausdrucke vorkommenden Prismen $=\frac{1}{8}$ des nächst grösseren ist, so ist

$$p(\alpha)=2.\frac{1}{8}P(\alpha)+2^2.\frac{1}{8^2}.P(\alpha)+2^3.\frac{1}{8^3}P(\alpha)\ldots+2^n.\frac{1}{8^n}P(\alpha)+2^n.p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

$$=P(\alpha)\left[\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]+2^n.p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right).$$

Da aber ferner die Summe der geometrischen Reihe

$$\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-1}=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3}$$

ist, so ist

$$p(\alpha)=\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3}\right)P(\alpha)+2^n p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right),$$

also

$$p(\alpha)=\frac{1}{3}P(\alpha)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n P(\alpha)+2^n p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

$$=\frac{1}{3}P(\alpha)-\frac{1}{3}2^n\left(\frac{1}{8}\right)^n P(\alpha)+2^n p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

$$=\frac{1}{3}P(\alpha)-2^n\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8^n}P(\alpha)-p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right).$$

Da nun aber $\frac{1}{8^n}P(\alpha)=P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$ ist, so hat man den merkwürdigen Satz:

$$p(\alpha)=\frac{1}{3}P(\alpha)-2^n\left[\frac{1}{3}P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)-p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right].$$

§. 7. Folgesatz III. Da nun der Satz

$$p(\alpha)=\frac{1}{3}P(\alpha)-2^n\left[\frac{1}{3}P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)-p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right]$$

für jeden denkbaren Werth von n gilt, aber $p(\alpha)$ so wohl als $\frac{1}{3}P(\alpha)$ gegebene constante Grössen sind, so muss auch $2^n\left[\frac{1}{3}P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)-p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right]$ einen constanten, von dem Wachsen von n unabhängigen Werth haben, welcher w heissen möge.

1) Ist nun dieser constante Werth $w=0$, so ist

$$p(\alpha)=\frac{1}{3}P(\alpha).$$

2) Wäre dagegen dieser constante Werth w nicht $=0$, so müsste er entweder
bei jedem Werth von n positiv, also >0, oder
bei jedem Werth von n negativ, also <0 sein,

und man könnte also für jeden Werth von n

$$\text{entweder } w=+\frac{1}{m}P(\alpha) \text{ und constant,}$$

$$\text{oder } w=-\frac{1}{m}P(\alpha) \text{ und constant}$$

setzen, wo m irgend eine constante positive ganze, oder gebrochene, rationale oder irrationale Zahl bedeuten kann, zu welcher M die nächst grössere, positive ganze, also rationale Zahl sein möge.

2,1) Wäre nun für jeden Werth von n

$$w=+\frac{1}{m}P(\alpha),$$

also

$$2^n\left[\frac{1}{3}P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)-p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right]=\frac{1}{m}P(\alpha),$$

so müsste, da, wie oben bewiesen wurde,

$$p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)>\frac{1}{4}P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

ist, auch

$$2^n\left[\frac{1}{3}P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)-\frac{1}{4}P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right]>\frac{1}{m}P(\alpha),$$

also

$$2^n\left[\frac{1}{12}P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right]>\frac{1}{m}P(\alpha),$$

mithin

$$2^n\left[\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{8^n}P(\alpha)\right]>\frac{1}{m}P(\alpha),$$

sonach

$$\frac{1}{12.4^n}>\frac{1}{m},$$

folglich

$$12.4^n < m$$

sein, und zwar für jeden Werth von n, also auch für $n=$
Da nun aber $4 > 2$, also für jeden denkbaren Werth von M

$$4^M > M$$

ist, mithin um so mehr noch

$$12.4^M > M$$

ist, folglich, da $m < M$ ist, um so mehr noch

$$12.4^M > m$$

ist, so kann w nicht positiv sein.

2,2) Wäre umgekehrt für jeden Werth von n

$$w = -\frac{1}{m} P(\alpha),$$

also

$$2^n \left[\frac{1}{3} P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right] = -\frac{1}{m} P(\alpha),$$

so müsste, da

$$p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) < \frac{1}{2} P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

ist, auch

$$2^n \left[\frac{1}{3} P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - \frac{1}{2} P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right] < -\frac{1}{m} P(\alpha),$$

also

$$-2^n \left[\frac{1}{6} P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right] < -\frac{1}{m} P(\alpha),$$

oder

$$2^n . \frac{1}{6} \cdot P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) > \frac{1}{m} P(\alpha),$$

d. h.

$$2^n . \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8^n} P(\alpha) > \frac{1}{m} P(\alpha),$$

also

$$2^n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8^n} > \frac{1}{m},$$

mithin

$$\frac{1}{6 \cdot 4^n} > \frac{1}{m},$$

folglich

$$6.4^n > m$$

sein, und zwar für jeden Werth von n, also auch für $n = M$; da aber $4^M > M$, also $6.4^M > M$, folglich $6.4^M > m$ ist, so ist dies nicht möglich. Es kann also w auch nicht negativ sein. Kann aber die constante Grösse w nicht positiv und auch nicht negativ sein, so ist sie $= 0$, folglich

$$p(\alpha) = \frac{1}{3} P(\alpha);$$

d. h. die dreiseitige Pyramide $= \frac{1}{3}$ des dreiseitigen Prismas, das mit ihr auf derselben Grundfläche steht und dieselbe Höhe hat*).

XIII.

Ueber das merkwürdige Beispiel einer zum Theil punctirt gebildeten Curve, das der Gleichung entspricht: $y = \sqrt[x]{x}$.

Von dem

Herrn Professor Dr. Hessel

an der Universität zu Marburg.

Beim Zeichnen von Polyedern pflegt man häufig die Linien des Hintergrundes (gleich als ob das Polyeder durchsichtig wäre)

*) Weil nämlich dreiseitige Prismen von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen gleich gross sind.

mit darzustellen, und man stellt sie dann gewöhnlich, um sie von denen des Vordergrundes augenfällig zu unterscheiden, als sogenannte punctirte Linien ...... dar, deren jede als blosse Reihe von Punkten eine unterbrochene Linie bildet, während die Linien des Vordergrundes als ununterbrochene d. h. gezogene Linien dargestellt werden.

Fälle, in denen durch Gleichungen Linien (Curven) bestimmt werden, die ihrer Wesenheit nach als punctirt gebildete Linien betrachtet werden können, scheinen mir bisher in den Compendien zu wenig hervorgehoben zu sein. Ich erlaube mir daher in Folgendem meine Arbeit über das, auch aus andern Gründen nicht uninteressante, Beispiel eines solchen Falles, welches die Gleichung $y=\sqrt[x]{x}$ darbietet, mitzutheilen.

§. 1. Um etwaige grösste oder kleinste Werthe von $y=\sqrt[x]{x}$ zu bestimmen, hat man nach den bekannten Regeln:

$$y=x^{\frac{1}{x}},$$

$$ly=\frac{1}{x}.lx,$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{1}{x^2}(1-lx).dx,$$

$$dy=y\left(\frac{1-lx}{x^2}\right).dx$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}.(1-lx).dx....(\mathrm{I});$$

also

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}.(1-lx)....(\mathrm{II}).$$

Setzt man $1-lx=0$, so ist $lx=1$, also $x=e=2,718....$ und

$$y=\sqrt[x]{x}=\sqrt[e]{e}$$

$$=(2,7182818...)^{\frac{1}{2,7182818....}}$$

$$=1,444668....\{ly=\frac{1}{e}=0,3678796\}.$$

Es ist ferner

$$d^2y=(dx).\left[x^{\frac{1}{x}}.d\left(\frac{1-lx}{x^2}\right)+\left(\frac{1-lx}{x^2}\right).d.x^{\frac{1}{x}}\right]$$

$lx)[x^{\frac{1}{x}}(x^2\left(\frac{-dx}{x}\right)-(1-lx).2xdx).\frac{1}{x^4}+\left(\frac{1-lx}{x^2}\right).\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^3}(1-lx).dx]$

$dx)^2.\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^4}[-3x+2xlx+(1-lx)^2]$,

ist also

$$\frac{d^2y}{(dx)^2}=\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^4}[-3x+2xlx+(1-lx)^2];$$

s giebt für $x=e$ den Werth

$$\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^4}[-3e+2e.le+(1-le)^2],$$

r, da $le=1$ ist, den Werth

$$\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^4}[-e]=-\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^3};$$

da dieser, wenn $y=e^{\frac{1}{e}}$ positiv ist, negativ ist, so ist der für $x=e$ gelene Werth $y=\sqrt[e]{e}$ ein Maximum der Werthe von y.

§ 2. Da, wenn wir $\frac{dy}{dx}=+\infty$, oder $=-\infty$ setzen wollten, zu Werthen von x gelangen würden, wie $x=0$, $x=+\infty$, $x=-\infty$, welchen Werthe von y, wie $y=\sqrt[0]{0}$, $y=\sqrt[+\infty]{+\infty}$, $y=\sqrt[-\infty]{-\infty}$ erst näher bestimmt werden müssen, gehören; so schlagen wir enden Weg ein.

§. 3. Nähert sich ein x, das $>e$, also $>2,7\ldots$ ist, durch ähliges Wachsen dem Werthe $x=\infty$, so wird das dazugeige y kleiner und nähert sich dem Werthe 1. Denn wenn $=\frac{lx}{x}$ kleiner wird, so wird auch y kleiner; nun wird aber $\frac{lx}{x}$, n $x=e+z$ ist, beim Wachsen von x um $dx=dz$, verändert $d\left(\frac{l(e+z)}{e+z}\right)$, d. h. um

$$+\frac{1-l(e+z)}{(e+z)^2}.dz=-\frac{l(e+z)-1}{(e+z)^2}.dz,$$

o vermindert, da wirklich $l(e+z)>\frac{le}{1}$ ist, der positiv genomne Werth von z möge noch so sehr gross genommen werden, s also auch dann noch der Fall ist, wenn er sich dem Werthe nähert.

Es wird also auch y, für $x=e$ bis $x=\infty$, stets abnehmen, von $y=1,444568\ldots$ bis zu $y\sqrt[\infty]{\infty}$. — Der Werth $y=\sqrt[\infty]{\infty}$ kann aber nicht kleiner als 1 sein, denn wäre $y<1$ und >0, also ein ächter Bruch, so könnte nicht

> aus $y=\sqrt[\infty]{\infty}$ folgen, dass $y^{\infty}=\infty$ ist, was doch durch Erheben beider Seiten dieser Gleichung zur Potenz ∞ folgt,

sondern es würde $y^{\infty}<y$ *), also um so mehr noch $y^{\infty}<1$ sein.

Setzen wir aber $y=1+\delta$, wo δ ein unendlich kleiner Bruch $=\frac{1}{\infty}$ ist, so wird sicher $y^{\infty}=(1+\delta)^{\infty}=\infty$, also ist $y=\sqrt[\infty]{\infty}$ $=1+\delta=1+\frac{1}{\infty}$; da aber $\frac{1}{\infty}$ gegen 1 verschwindet, so ist $y=\sqrt[\infty]{\infty}=1$ zu setzen.

§. 4. Gehen wir umgekehrt von $x=e$ allmählig zu kleineren Werthen von x über, und zwar zuerst zu den Werthen $x<e\ldots>1$, so wird dabei auch $y=\sqrt[x]{x}$ stets kleiner. Denn ist $x=e-z$ und $z<e$, so ist $y=\sqrt[e-z]{e-z}$

$$dly=d\,\frac{l(e-z)}{e-z}=-\left(\frac{1-l(e-z)}{(e-z)^2}\right)dz$$

stets negativ, indem $e-z>1$, also $l(e-z)>l1$, d. h. >0, aber $<le$ d. h. <1, also $1-l(e-z)$ positiv ist, während auch $(e-z)^2$ positiv ist. Es wird also innerhalb der angegebenen Grenzen auch ly stets kleiner, daher auch y stets kleiner, bis endlich, bei $x=1$, auch $y=\sqrt[1]{1}=1$ wird.

§. 5. Die nächsten nun folgenden Werthe von x sind ächte Brüche, die immer kleiner werden, so dass dabei $x<1$ und >0 ist; und man sieht leicht, dass z. B.

$$\sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4};\ \sqrt[\frac{1}{3}]{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27};\ \sqrt[\frac{1}{10}]{\frac{1}{10}}=\left(\frac{1}{10}\right)^{10}=\frac{1}{10000000000}$$

und dass allgemein $\sqrt[\frac{1}{z}]{\frac{1}{z}}=\left(\frac{1}{z}\right)^z=\frac{1}{z^z}$ ist, und dass dieser Werth mit dem Wachsen von $z>1$ abnehmen muss, und dass endlich

$$\sqrt[\frac{1}{\infty}]{\frac{1}{\infty}}=\left(\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}=\frac{1}{\infty^{\infty}},$$

also $\sqrt[0]{0}=0$ sein muss.

Es ist also für $x=0$ auch $y=\sqrt[x]{x}=\sqrt[0]{0}=0$.

---

*) Weil $\left(\frac{1}{N}\right)^p$, wenn $N>1$ und $p>1$ ist, stets $<\frac{1}{N}$ ist.

§. 6. Ehe wir zu den negativen Werthen von x übergehen, wollen wir hier noch bemerken, dass wir in der bisherigen Untersuchung bloss auf die positiven Werthe von y Rücksicht genommen haben, dass es aber auch negative Werthe von y giebt, die zu positiven Werthen von x gehören, von denen wir aber, so wie von der Berücksichtigung der negativen Werthe von x, vorerst noch ferner absehen wollen.

Denken wir, unter dieser Voraussetzung, die Curve, in welcher die freien Enden der $+y$ liegen, die zu $x=0$ bis $x=\infty$ gehören, für ein rechtwinkliges Coordinatensystem construirt und untersuchen wir dieselbe noch weiter, so ergiebt sich das in den folgenden Paragraphen Entwickelte.

§. 7. Fragen wir zuerst, ob für das Verhältniss $\frac{dy}{dx}$, welches die Tangente der Neigung des Elementes der Curve gegen die Abcissenaxe angiebt, etwaige Maxima vorkommen, so haben wir, da

$$\frac{d^2y}{(dx)^2}=\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^4}[-x-(1-lx)2x+(1-lx)^2]$$

ist, falls dieser Differentialquotient $=0$ gesetzt wird, die Gleichung:

$$-x-(1-lx)2x+(1-lx)^2=0,$$

oder, da $1=le$, so, dass $lx-1=lx-le=l\left(\frac{x}{e}\right)$, die bequemere Gleichung:

$$\left(l\left(\frac{x}{e}\right)\right)^2+2xl\left(\frac{x}{e}\right)-x=0,$$

so, dass, wenn $l\left(\frac{x}{e}\right)=-x\pm\sqrt{x+x^2}$ ist, ein solches Maximum statt haben kann. Berücksichtigen wir aber, dass, wenn $x<e$ ist, der Bruch $\frac{x}{e}<1$, also $l\left(\frac{x}{e}\right)$ eine negative Zahl ist, folglich $=-p$ gesetzt werden kann, und dass, wenn $x>e$ ist, auch $\frac{x}{e}>1$, also $l\left(\frac{x}{e}\right)>0$, folglich positiv ist, und $=+P$ gesetzt werden kann; dass aber andererseits die Zahl $+\sqrt{x+x^2}>x$ ist, gleichviel welchen positiven Werth x hat, dass mithin

$$+\sqrt{x+x^2}-x$$

stets positiv ist, also $=+T$ gesetzt werden kann, während

$$-(\sqrt{x+x^2}+x)$$

stets negativ ist, also $=-t$ gesetzt werden kann; so ist ersichtlich, dass

$$\text{für } x<e, \text{ nur } l\left(\frac{x}{e}\right)=-(\sqrt{x+x^2}+x)=-t,$$

$$\text{für } x>e, \text{ nur } l\left(\frac{x}{e}\right)=+(\sqrt{x+x^2}-x)=+T$$

möglich ist.

I) Da nun für $x<e$, beim Wachsen der Zahl x, von $x=0$ bis $x=e$, auch $l\left(\frac{x}{e}\right)$ wächst von $-\infty$ bis 0, also p abnimmt von $p=\infty$ bis $p=0$, während beim Wachsen von $x=0$ bis $x=e$ die Zahl $t=\sqrt{x+x^2}+x$ wächst von $t=0$ bis

$$t=\sqrt{e+e^2}+e=0{,}4609232,$$

so folgt, dass zwischen $x=0$ bis $x=e$ sicher ein, aber auch nur ein einziger Fall vorkommt, wo $p=t$ ist, wo also

$$l\left(\frac{x}{e}\right)=-(x+\sqrt{x+x})^2.$$

wird, d. h. wo $\frac{dy}{dx}$ ein Maximum werden kann.

Auch findet man leicht, dass zwischen

$$x=\frac{1}{2} \text{ und } x=1,$$

$$\text{genauer } x=\frac{1}{2} \text{ und } x=\frac{6}{10}$$

$$\text{„} \quad x=0{,}58 \text{ und } x=0{,}6$$

$$\text{„} \quad x=0{,}58 \text{ und } x=0{,}59$$

der Werth $\frac{d^2y}{(dx)^2}$ aus $+$, durch 0, in $-$ übergeht.

Es ist dabei, weil

$$ly=\frac{1}{x}lx,$$

und

$$l\left(\frac{x}{e}\right)=-(x+\sqrt{x+x^2}),$$

also $lx=1-(x+\sqrt{x+x^2})$ ist, auch

$$ly=\frac{1-(x+\sqrt{x+x^2})}{x}=\frac{1-(0{,}58\ldots+\sqrt{0{,}58\ldots+0{,}58\ldots^2})}{0{,}58\ldots}$$

$$=-0{,}93$$

folglich

$$y = e^{ly}$$

$$= e^{\frac{1-(x+\sqrt{x+x^2}}{x}}$$

$$= e^{-0,93} \text{ ohngefähr}$$

$$= 0,394\ldots$$

II) Was nun das fernere Wachsen der Zahl x von $x=e$ bis $x=\infty$ anlangt, so ist zu bemerken, dass

1) Die Zahl $T=\sqrt{x+x^2}-x$ dabei gleichfalls stets wächst, von $T=\sqrt{e+e^2}-e=0,4609232$ bis $T=\sqrt{\infty+\infty^2}-\infty<\frac{1}{2}$.

1,1) Es ist nämlich T stets wachsend, weil dT stets positiv, d. h. >0 ist; denn wollte man annehmen, es gäbe einen Werth $dT \leqq 0$, so müsste für denselben

$$dT = \left(\frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}}-1\right)dx \leqq 0,$$

mithin, da dx nicht 0 sein soll,

$$1+2x \leqq 2\sqrt{x+x^2},$$

also

$$1+4x+4x^2 \leqq 4x+4x^2,$$

d. h.

$$1 \leqq 0$$

sein, was nicht möglich ist.

1,2) Es ist aber ferner T stets $<\frac{1}{2}$; denn wäre

$$T=\sqrt{x+x^2}-x=A \Big\} \begin{array}{l}\text{wo } A \text{ stets positiv ist,}\\ \text{weil } T \text{ positiv sein muss,}\end{array}$$

also

$$\sqrt{x+x^2}=A+x,$$

so wäre

$$x+x^2=A^2+2Ax+x^2,$$

oder

$$x(2A-1)=-A^2,$$

also

$$x=-\frac{A^2}{2A-1};$$

da nun aber x positiv sein soll, so muss $2A-1$ negativ, also

$$2A-1<0,$$

$$2A<1,$$

$$A<\frac{1}{2};$$

also T stets $<\frac{1}{2}$ sein.

Es ist aber ferner zu beachten, dass

2) bei dem Wachsen der Zahl x, von $x=e$ bis $x=\infty$, auch die Zahl $P=l\left(\frac{x}{e}\right)$ stets wächst, von $P=l\left(\frac{e}{e}\right)=0$ bis $P=\infty$, dass also nothwendig wenigstens einmal P so gross wird, um dem betreffenden Werth von T gleich zu sein.

Gesetzt diess sei der Fall bei dem Werthe $x=B$, und zwar, wenn mehrere solche Fälle vorkommen, so sei $x=B$ innerhalb der Grenzen $x=e$ bis $x=\infty$ der kleinste solche Werth von x, der die betreffende Gleichheit herbeiführt.

Um nun zu untersuchen, ob noch ein zweiter u. s. w. solcher Fall, z. B. für $x=B+x$, vorkommt, kann man in folgender Weise verfahren:

Es ist allgemein

$$dP=\frac{1}{x}\cdot dx,$$

$$dT=\left(\frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}}-1\right)dx$$

$$=\frac{1+2x-2\sqrt{x+x^2}}{2\sqrt{x+x^2}}dx,$$

mithin da

$$2x<2\sqrt{x+x^2},$$

folglich

$$1+2x-2\sqrt{x+x^2}<1$$

ist, auch

$$dT < \frac{1}{2\sqrt{x+x^2}}\,dx.$$

Da aber ferner $\sqrt{x+x^2} > x$, also um so mehr noch $2\sqrt{x+x^2} > x$, also $\frac{1}{2\sqrt{x+x^2}} < \frac{1}{x}$, also um so mehr noch $dT < \frac{1}{x}dx$ ist, so folgt, dass allgemein (für jeden unserer Werthe von x) stets $dT < dP$ ist.

Es ist also auch für $x > B$ noch immer $dT < dP$. Daraus folgt aber, dass die Summe der zu $x=B$ bis $x=B+x_1$ gehörigen auf einander folgenden Werthe von dT kleiner ist als die Summe von eben so vielen dazu gehörigen Werthen von dP, dass also beim ferneren Wachsen von P und T die Zahl P kein zweites Mal gleich der Zahl T werden kann, dass also auch für $x > e$ nur **ein** bestimmter Werth von x der Gleichung

$$l\left(\frac{x}{e}\right) = +\sqrt{x+x^2} - x$$

Genüge leistet.

Auch findet man leicht, dass

zwischen	$x=4$	und $x=5$
genauer zwischen	$x=4$	und $x=4,5$
„ „	$x=4,3$	und $x=4,5$
„ „	$x=4,3$	und $x=4,4$
„ „	$x=4,35$	und $x=4,4$
„ „	$x=4,36$	und $x=4,4$

und endlich zwischen $x=4,36$ und $x=4,37$ die Zahl $\frac{d^2y}{(dx)^2}$ aus $+$ durch 0 in — übergeht.

Ist aber $x=4,36...$ und

$$l\left(\frac{x}{e}\right) = -x + \sqrt{x+x^2},$$

also

$$lx = 1 - x + \sqrt{x+x^2}$$

und

$$ly = \frac{1}{x}\cdot lx = \frac{1-x+\sqrt{x+x^2}}{x},$$

so ist

$$y = e^{\frac{1-x+\sqrt{x+x^2}}{x}} = e^{\frac{1,47}{4,36}} = e^{(0,33...)} = 1,39...$$

§. 8. Es finden also für $x=0,85...$ und für $x=4,36...$ die Maxima der Steilheit des Curvenelementes statt, bei welchen die Curve eine Wendung macht, d. h. aus positiver Convexität in negative, oder umgekehrt, übergeht, indem (bei constantem dx) bekanntlich die allgemeine Formel für den Krümmungsradius

$$R=-\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{(dx)^2}\right)}$$

den zweiten Differentialquotienten $\left(\frac{d^2y}{(dx)^2}\right)$ als Nenner hat, also aus + in − übergeht, wenn dieser Nenner aus − in + übergeht.

§. 9. Es ist also die Curve gegen die Abscissenaxe x zu

zwischen $x=0$ und $x=0,58...$ convex,
zwischen $x=0,58$ und $x=4,36...$ concav,
zwischen $x=4,36...$ und $x=\infty$ convex;
bei $x=0$ ist $y=0$,
bei $x>0$ bis $x<e$ wächst y beim Wachsen von x,
bei $x=e$ erreicht y das Maximum $\sqrt[e]{e}$ seiner Grösse,
bei $x>e$ und $<\infty$ nimmt y ab beim Wachsen von x,
bei $x=\infty$ wird $y=1$.

§. 10. Substituiren wir überhaupt in die bekannten allgemeinen Ausdrücke

für das Element der Curve $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$,

für die Tangente derselben $\text{Tg.}s=\frac{y\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}{dy}$,

für die Subtangente $\text{Subt.}s=\frac{y\,dx}{dy}$,

für die Normale $\text{Norm.}s=\frac{y\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}{dx}$,

für die Subnormale $\text{Subn.}s=\frac{y\,dy}{dx}$,

für den Krümmungsradius $R=-\frac{(\sqrt{(dx)^2+(dy)^2})^3}{dx.d^2y}$

die betreffenden Werthe von y und dy und d^2y, so erhalten wir nach gehöriger Vereinfachung:

$$ds=\left(\frac{dx}{x^2}\right)\sqrt{x^4+[(1-lx)\sqrt[x]{x}]^2};$$

$$\text{Tg.}\, s = \frac{\sqrt{x^4+[(1-lx)\sqrt[x]{x}]^2}}{1-lx},$$

$$\text{Subt.}\, s = \frac{x^2}{1-lx},$$

$$\text{Norm.}\, s = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}\sqrt{x^4+[(1-lx)\sqrt[x]{x}]^2},$$

$$\text{Subn.}\, s = (\sqrt[x]{x})^2.\frac{1-lx}{x^2},$$

$$R = -\frac{\left(\sqrt{x^4+[(1-lx)\sqrt[x]{x}]^2}\right)^3}{x^2.\sqrt[x]{x}[-x-(1-lx).2x+(1-lx)^2]};$$

wir ersehen, dass in jedem dieser Ausdrücke die Grösse lx eine wichtige Rolle spielt.

Da aber die Grösse $1-lx$ einfache Formen annimmt, wenn ine Potenz von e mit einfachen ganzen oder gebrochenen Exenten z. B. $x=e^0$, e^1, e^2 etc. $e^{\frac{1}{2}}$, $e^{\frac{1}{3}}$... e^{-1}, e^{-2},... $\mp e^n$ wird, dann $lx = l.e^n = nle = n$, also $1-lx = 1-n$ wird, während ei zugleich die in mehreren dieser Formeln vorkommende Grösse

$$y = \sqrt[x]{x} = (e^n)^{\frac{1}{e^n}} = e^{\left(\frac{n}{e^n}\right)} = \sqrt[e^n]{e^n}$$

e^{-n} wird, so wird in diesem Falle jede der betreffenden For- einfacher.

§. 11. Der wichtigste Fall ist der, wobei $n=0$, also $lx=0$ $x=1$ ist. Es ist dann

$$\text{Tg.}\, s = \sqrt{2},\ \text{Subt.}\, s = 1,\ \text{Subn.}\, s = 1;$$
$$R = +\sqrt{2} \quad = \quad \text{Norm.}\, s = \sqrt{2}.$$

§. 12. Gehen wir jetzt zur Berücksichtigung der negativen rthe von y und auch der negativen Werthe von x über, so imt es zunächst wesentlich darauf an, ob x als eine gerade r als eine ungerade Zahl auftritt.

§. 13. Ist nämlich x eine gerade ganze Zahl, oder ein rader Bruch (d. h. ein Bruch, der, wenn er durch Aufheben cher Factoren im Zähler und Nenner auf die einfachste Form racht ist, einen geraden Zähler und einen ungeraden Nen- hat), oder ist x eine gerade Irrationalzahl (d. h. eine tionalzahl, die das Doppelte ist von einer anderen Irrational- l) z. B. $\pm 2\pi$, wo π also ganz oder gebrochen oder irrationa- n kann, so ist

$$y=\sqrt[x]{x}=\sqrt[2\pi]{2\pi}=\pm\sqrt{\sqrt[\pi]{2\pi}},$$

so dass, wenn $\sqrt[\pi]{2\pi}$ möglich und positiv ist, sicher y zwei Werthe hat, einen positiven und einen negativen möglichen Werth.

Was insbesondere den Begriff Irrationalzahl betrifft, so ist eine Irrationalzahl nichts weiter, als „eine Zahlengrösse, „deren Verhältniss zur Einheit nur durch unendlich grosse Zahlen „genau ausgedrückt gedacht werden kann. Z. B.

$$\pi : 1 = 3{,}14159\ldots : 1{,}00000\ldots$$
$$= 314159\ldots : 100000\ldots$$

Auch ist z. B. von den beiden Irrationalzahlen 0,13113111311113... und 0,26226222622226... die letztere sicher im Vergleich zur ersteren, in unserem Sinne, gerad. Die Irrationalzahl ist uns also ein Bruch mit unendlich grossem Zähler und unendlich grossem Nenner, und es kann bei ihr, sowohl beim Zähler als beim Nenner, gefragt werden, ob er gerad oder ungerad ist, gleich wie diess bei einem gewöhnlichen Bruche gefragt werden kann.

§. 14. Würde man hierbei, wie wir es oben stillschweigend gethan haben, annehmen, dass alle Zahlen x (also auch alle gebrochenen und alle Irrationalwerthe x), wenn sie in Bruchform als $\frac{\xi}{u}$ ausgedrückt werden, einen und denselben (constanten), unendlich grossen Nenner u haben*), so würde dieser ausdrücken, wie viele dx in der Einheit enthalten sind, und der Zähler ξ würde angeben, wie viele dx in dem betreffenden Werthe von x enthalten sind. Die Zahl u müsste aber dabei entweder nur eine ungerade, oder nur eine gerade Zahl sein, und es würde z. B. angemessen sein, (damit die Einheit und jede andere ganze ungerade Zahl ihre Bedeutung als ungerade Zahl nicht verliere) die Zahl u als ungerad zu denken. Es käme dann nur auf die Frage an, ob ξ gerad oder ungerad ist, um zu entscheiden, ob $y=\sqrt[\frac{\xi}{u}]{\frac{\xi}{u}}$ $=\sqrt[\xi]{\left(\frac{\xi}{u}\right)^u}$ zwei oder nur einen, oder, falls $\frac{\xi}{u}$ negativ und ξ gerade ist, gar keinen möglichen Werth hat.

Man hat nämlich bei constantem ungeraden Werthe u

1) wenn $x=+\frac{\xi}{u}$, also $y=\left(\frac{\xi}{u}\right)^{\frac{u}{\xi}}=\sqrt[\xi]{\left(\frac{\xi}{u}\right)^u}$ ist:

*) Dass also jeder mögliche Werth von x durch $\frac{\xi}{u}$ mit constantem unendlich grossen u erreichbar sei.

1,1) bei ungeraden Werthen von ξ, bloss positive Werthe von $y=\sqrt[\xi]{\left(\frac{\xi}{u}\right)^u}$;

1,2) bei geraden Werthen von ξ, sowohl positive als negative Werthe von $y=\pm\sqrt[\xi]{\left(\frac{\xi}{u}\right)^u}$;

2) wenn $x=-\frac{\xi}{u}$, wobei $y=\left(-\frac{\xi}{u}\right)^{-\frac{u}{\xi}}=\sqrt[\xi]{\left(-\frac{\xi}{u}\right)^{-u}}$, also $=\sqrt[\xi]{\left(-\frac{u}{\xi}\right)^u}$;

also, da u ungerade ist, so dass $y=\sqrt[\xi]{-\left(\frac{u}{\xi}\right)^u}$ ist,

2,1) bei ungeraden Werthen von ξ, bloss negative Werthe von y, indem $y=-\sqrt[\xi]{\left(\frac{u}{\xi}\right)^u}$ ist;

2,2) bei geraden Werthen von ξ keinen möglichen Werth von y, indem dann $y=\pm\sqrt[\xi]{-\left(\frac{u}{\xi}\right)^u}$ unmöglich ist.

§. 15. Berücksichtigt man aber, dass für eine Irrationalzahl x recht wohl ihr Verhältniss zur Einheit durch einen Bruch $\frac{\xi}{u}$ (mit unendlich grossem Zähler und unendlich grossem Nenner) dargestellt gedacht werden kann, ohne dass darum auch für verschiedene irrationale Werthe von x die Nenner u der Brüche wie $\frac{\xi}{u}$ dieselben sein müssen, berücksichtigt man weiter, dass x bei seinem stetigen Wachsen sicher auch Werthe erreicht, die als Brüche mit geradem Nenner (bei ungeradem Zähler) auszudrücken sind, indem z. B. $x=\frac{3}{2}$, oder $x=\frac{5}{8}$ u. s. w., durch $x=\frac{\xi}{u}$ mit ungeradem Nenner u, sei u auch noch so gross, nie absolut genau ausgedrückt gedacht werden kann, so sieht man leicht ein, dass man hier nicht nur ξ, sondern auch u als veränderlich denken muss. Es versteht sich dabei von selbst, dass der Bruch $\frac{\xi}{u}$ (durch Aufheben der gemeinschaftlichen Factoren im Zähler und Nenner) auf die einfachste Form gebracht anzunehmen ist, (weil sonst ein und derselbe Werth von x in unendlich vielen verschiedenen geraden und ungeraden Formen in Betracht käme); dass also in dem Bruche $\frac{\xi}{u}$ Zähler und Nenner nie gleichzeitig (d. h. für einen und denselben Werth von x) gerad sein können.

Wird dies vorausgesetzt, so sind nur folgende Fälle mögl

1) x ist positiv, also $x=+\frac{\xi}{u}$; dann ist

$$y=\left(+\frac{\xi}{u}\right)^{+\frac{u}{\xi}}, \text{ also } y=\sqrt[\xi]{\left(+\frac{\xi}{u}\right)^u}=\sqrt[\xi]{\left(\frac{\xi}{u}\right)^u};$$

1,1) ξ ist gerad, also u ungerad, dann ist

$$y=\pm\sqrt[\xi]{\left(\frac{\xi}{u}\right)^u},$$

d. h. es giebt für ein gerades ξ sowohl einen negative einen positiven Werth von y.

1,2) ξ ist ungerad; es mag dann u gerad oder ungerad sei hat doch y nur den einen möglichen Werth

$$y=+\sqrt[\xi]{\left(\frac{\xi}{u}\right)^u}.$$

2) x ist negativ, also $x=-\frac{\xi}{u}$, also

$$y=\left(-\frac{\xi}{u}\right)^{-\frac{u}{\xi}}=\sqrt[\xi]{\left(-\frac{\xi}{u}\right)^{-u}}$$

$$=\sqrt[\xi]{\left(-\frac{u}{\xi}\right)^u}=\left(-\frac{u}{\xi}\right)^{\frac{u}{\xi}}=\left(-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Ist nun dabei

2,1) ξ gerad, also u ungerad, so ist $\left(-\frac{u}{\xi}\right)^u=-\left(\frac{u}{\xi}\right)^u$, a gativ, mithin y unmöglich.

Ist dagegen

2,2) ξ ungerad und es ist

2,21) auch u ungerad, so ist

$$\left(-\frac{u}{\xi}\right)^u=-\left(\frac{u}{\xi}\right)^u,$$

also

$$y=-\sqrt[\xi]{\left(\frac{u}{\xi}\right)^u}=-\left(\frac{u}{\xi}\right)^{\frac{u}{\xi}}.$$

also ein negativer (aber kein positiver) Werth vorhanden;

2,22) u gerad, so ist

$$\left(-\frac{u}{\xi}\right)^u = +\left(\frac{u}{\xi}\right)^u,$$

also

$$y = +\sqrt[\xi]{\left(\frac{u}{\xi}\right)^u} = +\left(\frac{u}{\xi}\right)^{\frac{u}{\xi}},$$

folglich ein positiver, aber kein negativer Werth von y vorhanden.

§. 16. Es giebt also, wenn x positiv, also $= + q$ ist,
I) in dem Quadranten $(+X+Y)$ zu jedem Werthe von $x = + q$ dazu gehörigen Werth $y = + \sqrt[q]{q}$, und die Gesammtheit der die Gleichung $y = + \sqrt[q]{q}$ bestimmten Punkte bildet, wenn x stetig wachsend denkt, eine ununterbrochene Linie, einen gegenen Curvenschenkel, den wir bereits oben beschrieben n;
II) in dem Quadranten $(+X-Y)$ nur zu jedem geraden Werth $+q$ einen dazu gehörigen Werth $y = - \sqrt[q]{q}$, und die Gesammtheit der durch die Gleichung $y = -\sqrt[q]{q}$ bestimmten Punkte t, weil nur die geraden Werthe von q berücksichtigt werden, unterbrochene Linie, einen punktirt gebildet zu denken- Curvenschenkel, der (als ununterbrochen gedacht) dem in Quadranten $(+X+Y)$ liegenden gegenbildlich gleich ist. Es n aber in ihm diejenigen bildenden Punkte, welche zu unlen Werthen von q gehören.

§. 17. Setzen wir jetzt x negativ, also $x = -q = -\frac{\xi}{u}$, mit- $= \sqrt[-q]{-q}$, so giebt es
III) in dem Quadranten $(-X-Y)$ nur zu jedem solchen Werthe $q = \frac{\xi}{u}$, bei dem sowohl u als ξ ungerad ist, einen dazugehö-, möglichen Werth von y, nämlich:

$$y = -\left(\frac{u}{\xi}\right)^{\frac{u}{\xi}} = -\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt[q]{q}} \text{ (siehe §. 15. Nr. 2,21);}$$

IV) in dem Quadranten $(-X+Y)$ aber nur zu jedem solchen the von $q = \frac{\xi}{u}$, bei dem ξ ungerad, u aber gerad ist, einen gehörigen möglichen Werth von y, nämlich:

$$y=+\left(\frac{u}{\xi}\right)^{\frac{u}{\xi}}=+\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=+\frac{1}{\sqrt[q]{q}} \text{ (siehe §. 15. Nr. 2,22).}$$

§. 18. Da wir oben gesehen haben, dass zu ungeraden Werthen von $+x$ nur positive Werthe von $\sqrt[x]{x}$ gehören, und dass, wenn x die Werthe hat:

$$x=\left\{\left(\frac{1}{\infty}\right);\left(>\frac{1}{\infty}\text{ und }<1\right);(=1);(>1\text{ und }<e);\right.$$
$$[=e];(>e\text{ und }<\infty);(=\infty)$$

auch $\sqrt[x]{x}$ die dazu gehörigen Werthe hat:

$$\sqrt[x]{x}=\left\{\left(+\frac{1}{\infty}\right);\left(>\frac{1}{\infty}\text{ und }<1\right);(=1);(>1\text{ und }<\sqrt[e]{e});\right.$$
$$=[\sqrt[e]{e}];(<\sqrt[e]{e}\text{ und }>1);(=1)$$

und da das, was von einem ungeraden x und dem dazu gehörigen Werthe $\sqrt[x]{x}$ gilt, auch von dem ungeraden Werthe von q und dem dazu gehörigen Werthe von $\sqrt[q]{q}$ gelten muss, so folgt, dass, wenn q die Werthe hat:

$$q=\left(\frac{1}{\infty}\right);\left(>\frac{1}{\infty}\text{ und }<1\right);(=1);(>1\text{ und }<e);$$
$$[=e];(>e\text{ und }<\infty);(=\infty)$$

auch die Grösse $\frac{1}{\sqrt[q]{q}}$ die Werthe haben muss:

$$\frac{1}{\sqrt[q]{q}}=(+\infty);(<\infty\text{ und }>1);(=1);\left(<1\text{ und }>\frac{1}{\sqrt[e]{e}}\right);$$
$$\left[=\frac{1}{\sqrt[e]{e}}\right];\left(>\frac{1}{\sqrt[e]{e}}\text{ und }<1\right);(=1).$$

§. 19. Wollten wir daher in dem Quadranten $(-X-Y)$ für Werthe der in $(-X)$ zu nehmenden Abscisse q, die zwischen $q=0$ und $q=\infty$ liegen, jene ununterbrochen gedachte Curve construiren, für welche bei jedem solchen Werthe von q ein $y=-\frac{1}{\sqrt[q]{q}}$ in Betracht kommt, das also die Grösse $\frac{1}{\sqrt[q]{q}}$ hat und in der Richtung $(-Y)$ liegt, so würden wir die eben angegebenen Hauptwerthe von y und von $\frac{1}{\sqrt[q]{q}}$ benutzen können.

Um aber die in dieser Curve vorkommenden Wendepunkte
estimmen, hätte man zu berücksichtigen, dass

$$y=+\frac{1-lq}{q^2\sqrt[q]{q}}\,dq \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{(dq)^2}=\frac{-[q+2q(1-lq)+(1-lq)^2]}{q^4\sqrt[q]{q}}$$

und dass aus der Gleichung

$$(lq-1)^2-2q(lq-1)+q=0,$$

aus der Gleichung

$$\left(l\left(\frac{q}{e}\right)\right)^2-2q.l\left(\frac{q}{e}\right)+q=0,$$

Werth von $l\left(\frac{q}{e}\right)$ gefunden wird als

$$l\left(\frac{q}{e}\right)=+q\pm\sqrt{-q+q^2}.$$

was im Wesentlichen dasselbe ist, dass, wenn diese Glei-
g gelten soll,

$$lq=+(q+1)\pm\sqrt{-q+q^2}$$

muss.

Daraus würde sich sogleich ergeben, dass für Werthe von
>0 und <1 sind, diese Gleichung nicht möglich ist (zu un-
ichen Werthen von lq führt), dass also zwischen $q=0$ und
für diese Curve kein Wendepunkt existirt.

Daraus würde ferner sogleich ersichtlich sein, dass, wenn
l, also $\sqrt{-q+q^2}$ möglich ist, nur der Werth

$$lq=+(q+1)-\sqrt{-q+q^2}$$

chbar sein kann, indem ohnehin $q>lq$ ist (weil $e^{lq}>lq$, da
$\sqrt{e}$ ist), also um so mehr noch

$$(q+1)+\sqrt{-q+q^2}>lq$$

Daraus würde folgen, dass zwischen $q=1$ und $q=\infty$ nur ein
depunkt vorkommt, und dass für ihn

$$lq=+(q+1)-\sqrt{-q+q^2}$$

muss, und man würde leicht finden,

dass zwischen $q=4$ und $q=5$ \
genauer zwischen $q=4,5$ und $q=5$ \
„ „ $q=4,6$ und $q=5$ \
„ „ $q=4,6$ und $q=4,7$ \
u. s. w.

die Grösse $(q+1)-\sqrt{-q+q^2}$ aus + in — übergeht,

so dass der gesuchte Wendepunkt zu einem Werthe von q gehört, der zwischen $q=4,6$ und $q=4,7$ liegt, und dass dabei

$$y=-\frac{1}{\sqrt[q]{q}}=-\frac{1}{\sqrt[4,6..]{4,6..}}=-0,718$$

ist.

In dieser Curve liegen natürlich auch alle jene Punkte, die durch die Gleichung $y=\sqrt[x]{x}$ für den Fall bestimmt werden, in welchem $x=-q$ und $q=\frac{\xi}{u}$ so beschaffen ist, dass sowohl ξ als u ungerad ist.

§. 20. Das Bild der ununterbrochen gedachten Curve, welches in dem Quadranten $(-X+Y)$ so construirt werden könnte, dass in $(-X)$ die Abscisse $=q$ (abgesehen von der Richtung, also vom Vorzeichen) >0 und in der Richtung $(+Y)$ die Ordinate y genommen würde, wenn zu jedem Werthe von q ein $y=+\frac{1}{\sqrt[q]{q}}$ gehörte, bedarf als ein blosses Gegenbild der im vorigen Paragraphen erwähnten Curve, wo $y=-\frac{1}{\sqrt[q]{q}}$ war, keiner weitern Erläuterung.

Da es alle Punkte umfasst, die durch die Gleichung $y=+\frac{1}{\sqrt[q]{q}}$ in der angedeuteten Weise bestimmt werden, so umfasst es auch alle jene Punkte, welche durch die Gleichung $y=\sqrt[x]{x}$ für den Fall bestimmt werden, in welchem $x=-q=-\frac{\xi}{u}$ so beschaffen ist, dass ξ ungerad, u dagegen gerad ist.

§. 21. Die Curve $y=\sqrt[x]{x}$ hat also

I) in dem Quadranten $(+X+Y)$ einen gezogenen Schenkel, in welchem kein bildender Punkt fehlt;

II) in dem Quadranten $(+X-Y)$ einen punktirt gebildeten Schenkel, in welchem die zu ungeraden Werthen von $x=\frac{\xi}{u}$, also zu ungeraden Werthen von ξ, gehörigen bildenden Punkte fehlen;

| in dem Quadranten $(-X-Y)$ einen punktirt gebildeten nkel, in welchem diejenigen bildenden Punkte der Curve fehlen,

welche bei $x=-\frac{\xi}{u}$ zu geraden Werthen von ξ gehören, sowie jene, welche zu geraden Werthen von u gehören;

in dem Quadranten $(-X+Y)$ einen punktirt gebildeten ıkel, in welchem diejenigen bildenden Punkte der (ununter-

en gedachten) Curve fehlen, welche bei $x=-\frac{\xi}{u}$

zu geraden Werthen von ξ gehören, sowie jene, welche zu ungeraden Werthen von u gehören.

. 22. Die Zeichnung auf Taf. III. soll dienen, die Curve $y=\sqrt[x]{x}$ rsinnlichen. Die Unterbrechungen einer Linie durch oooo ine unendliche Erstreckung andeuten.

. 23. Merkwürdig sind die verschiedenen Ursachen des ıns bildender Punkte in den, den verschiedenen Quadranten ıörigen Schenkeln der Curve.

n ersten Quadranten $(+X+Y)$ fehlt kein bildender Punkt.

m zweiten Quadranten $(+X-Y)$ fehlen die zu ungeraden hen von x gehörigen bildenden Punkte, weil die ungerade Vurzel aus einer positiven Grösse x keinen Werth von der $-\sqrt[x]{x}$ hat.

m dritten Quadranten $(-X-Y)$ fehlen

die zu geraden Werthen von x gehörigen bildenden Punkte der Curve, weil die gerade $-x$te Wurzel aus $-x$, d. h. $\sqrt[-x]{-x}$, unmöglich ist;

die zu geraden Werthen von $-\frac{1}{x}$ gehörigen bildenden Punkte der Curve, weil bei geradem Werthe von $-\frac{1}{x}$ ein Werth $-\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ für $\sqrt[-x]{-x}$ nicht existirt.

m vierten Quadranten $(-X+Y)$ fehlen

die zu geraden Werthen von x gehörigen bildenden Punkte der Curve, weil für gerade Werthe von $-x$ die Grösse $\sqrt[-x]{-x}$ unmöglich ist;

die zu ungeraden Werthen von $-\frac{1}{x}$ gehörigen bildenden Punkte der Curve, weil, bei ungeraden Werthen von $-\frac{1}{x}$, ein Werth $+\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ für $\sqrt[-x]{-x}$ nicht existirt.

XIV.

Ueber eine gnomonische Aufgabe.*)

Von

Herrn Dr. Benjamin Witzschel,

Lehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften am Gymnasium zu Zwickau im K. Sachsen.

Auf einer Horizontalebene stehen in drei Punkten A, B, C, von deren gegenseitigen Entfernungen nur eine, z. B. AB, bekannt ist, drei vertikale Stäbe $A'A$, $B'B$, $C'C$ von gegebener Länge. An welchem Orte der Erde und an welchem Tage des Jahres wird es sich zutragen, dass das Schattenende des Stabes $A'A$ durch den Fusspunkt B und C des zweiten und dritten Stabes, das Schattenende des Stabes $B'B$ durch den Fusspunkt C und A des dritten und ersten Stabes, und das Schattenende des dritten Stabes $C'C$ durch den Fusspunkt A des ersten und somit auch durch den Fusspunkt B des zweiten Stabes geht?

I. Auflösung.

Der Einfachheit wegen stelle man sich vor, dass die Sonne innerhalb 24 Stunden sich um die Erde in einem Kreise der

---

*) Zu dieser schon ziemlich alten aber gewiss nicht uninteressantes Aufgabe hat Schooten in den Zusätzen zur Geometrie des Cartesius eine numerische, für den jetzigen Stand der Wissenschaft weitschweifige Lösung beigebracht. Die am genannten Orte gegebene Fassung der Aufgabe ist folgende: Tempore verno erectis alicubi terrarum ad perpendiculum tribus baculis in plano horizontali in punctis A, B, C, quorum is qui in A sit 6 pedum, qui in B 18 pedum et qui in C 8 pedum, existente linea AB 33 pedum: contigit quodam die extremitatem umbrae baculi A transire per puncta B et C, baculi autem B per puncta A et C et baculi C per punctum A, unde fit, ut etiam per punctum B sit transitura. Quaeritur jam, quo terrae loco atque anni die haec evenerint?

Himmelskugel bewege. Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt in der Himmelsaxe und entfernt sich von dem Mittelpunkte der Kugel um den Sinus der Deklination δ der Sonne. Der Radius desselben Kreises ist dem Cosinus der Deklination δ gleich zu setzen. Es werden demnach die Richtungen eines innerhalb 24 Stunden durch ein und denselben Punkt A' gehenden Sonnenstrahles eine Kegelfläche zweiter Ordnung beschreiben, als deren Leitlinie der von der Sonne scheinbar beschriebene Kreis angesehen werden kann, deren Scheitelwinkel dem doppelten Complement $(\pi - 2\delta)$ der Deklination gleich kommt, und deren Axe wegen des Parallelismus aller an verschiedenen Orten zu gleicher Zeit einfallenden Sonnenstrahlen der Erd- oder Himmelsaxe parallel sein muss. Ob der Punkt A' nach seiner materiellen Beschaffenheit die Sonnenstrahlen ungebrochen hindurchlässt, oder dieselben ganz unterbricht, bleibt sich hierbei ganz gleich, indem im letztern Falle die erwähnte Kegelfläche von ihrem Mittelpunkte aus zur einen Hälfte als von Sonnenstrahlen, zur andern als von Schattenstrahlen erzeugt gedacht werden kann. Der Kürze wegen wird in der Folge die eine Hälfte der Sonnenkegel, die andere der Schattenkegel genannt werden, wenn sich die Nothwendigkeit, beide Hälften von einander zu unterscheiden, herausstellen sollte. Das Schattenende einer von A' auf die Horizontalebene gefällten Vertikale $A'A$, die als einer der in der Aufgabe erwähnten Stäbe angesehen werden kann, muss nun in der Durchschnittslinie der gedachten Kegelfläche mit der Horizontalebene liegen. Es ist ferner leicht einzusehen, dass diese Vertikale $A'A$ oder der Stab mit der Axe der Kegelfläche einen Winkel bildet, der dem Complement zur Polhöhe φ desjenigen Orts, in welchem der Stab eingesteckt ist, gleich kommt. Die Gleichung der erwähnten Kegelfläche ist bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem

$$x'^2 + y^2 = z'^2 \cot \delta^2,$$

wobei δ wieder die Deklination der Sonne bedeutet, und die Axe der z' mit der des Kegels, sowie der Coordinatenanfang mit dem Mittelpunkt desselben zusammenfällt. Hinsichtlich der beiden andern Coordinatenaxen soll noch bestimmt werden, dass die Ebene der $x'z'$ in der Meridianebene des Ortes liegen soll. Verbände man mit dieser Gleichung die der Horizontalebene, so würde man die Gleichungen der Projectionen des Kegelschnitts, welchen das Schattenende des Stabes innerhalb 24 Stunden beschreibt, und um dessen Bestimmung es sich handelt, erhalten. Dieser Weg würde aber zu schon jetzt ersichtlichen Weitläufigkeiten und Verwicklungen führen, die auf folgende Weise vermieden werden können. Man drehe das Axensystem um die Axe der y, so dass die neue z Axe mit dem Stabe $A'A$ zusammenfällt, also der Drehungswinkel dem Complement der Polhöhe φ gleich ist. Vermittels der dazu gehörigen Transformationsformeln:

$$x' = x \sin \varphi - z \cos \varphi,$$
$$z' = z \sin \varphi + x \cos \varphi$$

geht obige Gleichung der Kegelfläche über in

$$x^2(\sin\varphi^2 - \cos\delta^2) + y^2 \sin\delta^2 - 2xz \sin\varphi \cos\varphi + z^2(\sin\delta^2 - \sin\varphi^2) = 0.$$

Da nach diesem neuen Axensystem die Horizontalebene zur Axe der z normal, oder der xy-Ebene parallel ist, so hat man für dieselbe die einfache Gleichung

$$z = b,$$

wenn b die Entfernung der Ebene vom Coordinatenanfang, d. h. die Länge des Stabes bezeichnet. Durch einfache Substitution von b für z in der Gleichung der Kegelfläche erhält man die Gleichung des durch die Horizontalebene mit der Kegelfläche gebildeten Kegelschnitts:

$$x^2(\sin\varphi^2 - \cos\delta^2) + y^2 \sin\delta^2 - 2bx \sin\varphi \cos\varphi + b^2(\sin\delta^2 - \sin\varphi^2) = 0,$$

oder

$$Mx^2 + Ny^2 - 2Pbx + Qb^2 = 0; \ldots\ldots\ldots \quad (\odot)$$

wobei

$$M = \sin\varphi^2 - \cos\delta^2 = -\frac{\cos 2\varphi + \cos 2\delta}{2},$$

$$N = \sin\delta^2,$$

$$P = \sin\varphi \cos\varphi \quad = \quad \frac{\sin 2\varphi}{2},$$

$$Q = \sin\delta^2 - \sin\varphi^2 = \frac{\cos 2\varphi - \cos 2\delta}{2}$$

gesetzt worden ist. Es ist also ($\odot$) die Gleichung des vom Schattenende des Stabes $= b$ beschriebenen Kegelschnitts, wenn die Polhöhe des Ortes, wo dies geschieht, $= \varphi$ und die Deklination der Sonne zur Zeit, während der es vor sich geht, $= \delta$ angenommen, der Coordinatenanfang in den Fusspunkt des Stabes und die Axe der x in die Mittagslinie gelegt wird. Sind nun b_1, b_2, b_3 die Längen der Stäbe $A'A$, $B'B$, $C'C$; d_1, d_2, d_3 die Entfernungen AB, BC, CA der Fusspunkte A, B, C dieser Stäbe, von denen der Aufgabe gemäss nur eine, z. B. $AB = d_1$, als bekannt vorauszusetzen ist; liegt ferner der Coordinatenanfang im Fusspunkte A des ersten Stabes, und sind die Coordinaten der Fusspunkte B und C des zweiten und dritten Stabes resp. α_2, β_2 und α_3, β_3, wobei die α auf die Axe der x und die β auf die der y sich beziehen: so sind die Gleichungen der von den Schattenenden der Stäbe $A'A$, $B'B$, $C'C$ beschriebenen, und auf ein und dasselbe Coordinatensystem bezogenen Kegelschnitte:

$$Mx^2 + Ny^2 - 2Pb_1 x + Qb_1^2 = 0 \ldots. \quad (\mathrm{I})$$

$$M(x - \alpha_2)^2 + N(y - \beta_2)^2 - 2Pb_2(x - \alpha_2) + Qb_2^2 = 0 \ldots. \quad (\mathrm{II})$$

$$M(x - \alpha_3)^2 + N(y - \beta_3)^2 - 2Pb_3(x - \alpha_3) + Qb_3^2 = 0 \ldots. \quad (\mathrm{III})$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe sollen
die Fusspunkte des zweiten und dritten Stabes in der vom
tten des ersten beschriebenen Linie liegen, d. h.

$$M\alpha_2^2+N\beta_2^2-2Pb_1\alpha_2+Qb_1^2=0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$M\alpha_3^2+N\beta_3^2-2Pb_1\alpha_3+Qb_1^2=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

die Schattenlinie des zweiten und dritten Stabes durch den
punkt des ersten gehen, d. h.

$$M\alpha_2^2+N\beta_2^2+2Pb_2\alpha_2+Qb_2^2=0 \quad \ldots\ldots (3)$$

$$M\alpha_3^2+N\beta_3^2+2Pb_3\alpha_3+Qb_3^2=0 \quad \ldots\ldots (4)$$

endlich die Schattenlinie des zweiten Stabes durch den Fuss-
t des dritten gehen, sowie die Entfernung des ersten und
en Srabes $=d_1$ sein, also

$$M(\alpha_3-\alpha_2)^2+N(\beta_3-\beta_2)^2-2Pb_2(\alpha_3-\alpha_2)+Qb_2^2=0 \ldots. (5)$$

$$\alpha_2^2+\beta_2^2=d_1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Die in diesen 6 Gleichungen enthaltenen 6 Unbekannten α_2,
, β_3, φ und δ können auf folgende Weise bestimmt werden.
Durch Subtraktion der Gl. (1) und (2) von resp. (3) und (4)
t man

$$2P(b_1+b_2)\alpha_2=Q(b_1^2-b_2^2);\quad \alpha_2=\frac{Q}{2P}(b_1-b_2) \ldots. (7)$$

$$2P(b_1+b_3)\alpha_3=Q(b_1^2-b_3^2);\quad \alpha_3=\frac{Q}{2P}(b_1-b_3) \ldots\ldots (8)$$

ch

$$\alpha_3-\alpha_2=\frac{Q}{2P}(b_2-b_3).$$

Der Werth von $\alpha_2-\alpha_3$, im dritten Gliede von (5) eingesetzt,

$$M(\alpha_3-\alpha_2)^2+N(\alpha_3-\alpha_2)^2-Qb_2(b_2-b_3)+Qb_2^2=0,$$

$$M(\alpha_3-\alpha_2)^2+N(\alpha_3-\alpha_2)^2+Qb_2b_3=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)'$$

Addirt man zur letztern Gleichung $-Qb_3^2+Qb_3^2=0$ und be-
ichtigt, dass man $(\alpha_2-\alpha_3)^2$ für $(\alpha_3-\alpha_2)^2$ setzen kann, so er-
man

$$M(\alpha_2-\alpha_3)^2+N(\beta_2-\beta_3)^2-Qb_3(b_3-b_2)+Qb_3^2=0,$$

da

$$b_3-b_2=\frac{2P}{Q}(\alpha_2-\alpha_3):$$

$$M(\alpha_2-\alpha_3)^2+N(\beta_2-\beta_3)^2-2Pb_1(\alpha_2-\alpha_3)+Qb_1^2=0 \ldots\ldots (9)$$

woraus, mit Vergleichung von (III), hervorgeht „dass auch das Schattenende des dritten Stabes durch den Fusspunkt des zweiten gehen muss."

Man führe ferner in den Gleichungen (3) und (4) die unter (7) und (8) enthaltenen Werthe von α_2 und α_3 ein, so ist

$$M\alpha_2^2+N\beta_2^2+Qb_1b_2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)^b$$
$$M\alpha_3^2+N\beta_3^2+Qb_1b_3=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)^b$$

Die Summe beider Gleichungen von (5)^b abgezogen, giebt

$$2M\alpha_2\alpha_3+2N\beta_2\beta_3+Q(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)=0$$

oder, wenn man $2N\beta_2\beta_3$ transponirt und hierauf die Gleichung quadrirt,

$$4N^2\beta_2^2\beta_3^2$$
$$=4M^2\alpha_2^2\alpha_3^2+4MQ\alpha_2\alpha_3(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)+Q^2(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)^2.$$

Versetzt man ebenfalls in den Gleichungen (3)^b und (4)^b resp. $N\beta_2^2$ und $N\beta_3^2$ auf die andere Seite, multiplicirt dann beide Gleichungen mit einander und vervierfacht das Produkt, so erhält man

$$4N^2\beta_2^2\beta_3^2=4M^2\alpha_2^2\alpha_3^2+4MQ(\alpha_2^2b_3b_1+\alpha_3^2b_1b_2)+4Q^2b_1^2b_2b_3.$$

Zieht man beide zuletzt gefundenen Gleichungen von einander ab, und dividirt den Rest durch Q, so hat man

$$4M\alpha_2\alpha_3(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)+Q(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)^2$$
$$=4M(\alpha_2^2b_3b_1+\alpha_3^2b_1b_2)+Qb_1^2b_2b_3.$$

Nun ist

$$\alpha_2\alpha_3(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)$$
$$=\frac{Q^2}{4P^2}\{b_1^2(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)-(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)^2\},$$
$$\alpha_2^2b_3b_1+\alpha_3^2b_1b_2$$
$$=\frac{Q^2}{4P^2}\{b_1^2(b_1b_2+b_3b_1)+b_1b_2^2b_3+b_1b_2b_3^2-4b_1^2b_2b_3\}.$$

Diese Werthe substituirt geben, nachdem man das Resultat durch Q abermals dividirt und mit P^2 multiplicirt hat,

$$MQb_1^2(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)-(MQ-P^2)(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)^2$$
$$=MQ(b_1^2(b_1b_2+b_3b_1)+b_1b_2^2b_3+b_1b_2b_3^2)-4(MQ-P^2)b_1^2b_2b_3$$

$$MQb_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3)$$
$$Q-P^2)\{b_1^2b_2^2+b_2^2b_3^2+b_3^2b_1^2-2b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3)\}=0;$$
$$MQp+(MQ-P^2)(q-2p)=0;$$

nan der Kürze wegen

$$b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3)=p,$$
$$b_1^2b_2^2+b_2^2b_3^2+b_3^2b_1^2=q$$

Führt man statt der abgekürzten Bezeichnungen M, P, Q
ch die doppelten Bogen von φ und δ ausgedrückten Kreis-
sen wieder ein, setzt also

$$\frac{\sin 2\varphi^2-\sin 2\delta^2}{4} \text{ statt } MQ,$$
$$-\frac{\sin 2\delta^2}{4} \quad \text{,,} \quad MQ-P^2;$$

ilt man

$$\sin 2\varphi^2=\frac{q-p}{p}\sin 2\delta^2.$$

usdrucke des Faktors

$$\frac{q-p}{p}=\frac{b_1^2b_2^2+b_2^2b_3^2+b_3^2b_1^2-b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3)}{b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3)}$$

noch einige andere Formen gegeben werden, als:

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{b_1b_2b_3}{b_1+b_2+b_3}\left(\dfrac{1}{b_1^2}+\dfrac{1}{b_2^2}+\dfrac{1}{b_3^2}\right)-1,\\[2ex]
\dfrac{\dfrac{1}{b_1^2}+\dfrac{1}{b_2^2}+\dfrac{1}{b_3^2}}{\dfrac{1}{b_1b_2}+\dfrac{1}{b_2b_3}+\dfrac{1}{b_3b_1}}-1,\\[2ex]
\dfrac{b_1^2(b_2-b_3)^2+b_2^2(b_3-b_1)^2+b_3^2(b_1-b_2)^2}{2b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3)},\\[2ex]
\dfrac{\left(\dfrac{1}{b_1}-\dfrac{1}{b_2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b_2}-\dfrac{1}{b_3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b_3}-\dfrac{1}{b_1}\right)^2}{2\left(\dfrac{1}{b_1b_2}+\dfrac{1}{b_2b_3}+\dfrac{1}{b_3b_1}\right)};
\end{array}\right\}\text{(T)}$$

von denen die beiden ersten zur Vereinfachung der numerischen Berechnung dienen dürften, die beiden letzten insbesondere aber beweisen, dass der Werth von $\frac{q-p}{p}$ stets positiv sein muss. Es soll daher auch in der Folge dieser Faktor durch C^2 bezeichnet werden, um dadurch zugleich den stets positiven Werth desselben anzudeuten. Somit hat man als die erste einfache Beziehung zwischen φ und δ die Gleichung

$$\sin 2\varphi^2 = C^2 \sin 2\delta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Werden in der Gleichung (6) die aus (7) und $(3)^b$ gezogenen Werthe von α_2 und β_2 eingesetzt, so hat man

$$d_1{}^2 = \alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 = \frac{Q^2(N-M)}{4P^2N}(b-b_2)^2 - \frac{Q}{N} b_1 b_2,$$

oder, nachdem man eingerichtet, für M, N, P, Q die durch die einfachen Winkel φ und δ ausgedrückten goniometrischen Funktionen gesetzt und die Gleichung durch den gemeinschaftlichen Faktor $\cos\varphi^2$ dividirt hat,

$$(b_1+b_2)^2 \sin\varphi^4 - 2(b_1{}^2 + b_2{}^2 + 2d_1{}^2)\sin\varphi^2 \sin\delta^2 + (b_1-b_2)^2 \sin\delta^4 = 0,$$

$$\sin\varphi^4 - 2\frac{(b_1{}^2 + d_1{}^2 + b_2{}^2 + d_1{}^2)}{(b_1+b_2)} \sin\varphi^2 \sin\delta^2 + \frac{(b_1-b_2)^2}{(b_1+b_2)^2} \sin\delta^4 = 0.$$

Setzt man

$$\frac{\sqrt{b_1{}^2 + d_1{}^2}}{b_1+b_2} = A, \quad \frac{\sqrt{b_2{}^2 + d_1{}^2}}{b_1+b_2} = B$$

und bemerkt, dass

$$\frac{2(b_1{}^2 + d_1{}^2 + b_2{}^2 + d_2{}^2)}{(b_1+b_2)^2} = (A+B)^2 + (A-B)^2,$$

$$\frac{(b_1-b_2)^2}{(b_1+b_2)^2} = (A+B)^2(A-B)^2;$$

so erhält man aus obiger Gleichung

$$(\sin\varphi^2 - (A+B)^2\sin\delta^2)(\sin\varphi^2 - (A-B)^2\sin\delta^2) = 0,$$

$$\text{oder } \sin\varphi^2 = (A \pm B)^2 \sin\delta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

als die zweite einfache Relation zwischen φ und δ. Hierbei ist noch zu untersuchen, ob beide der unter (11) enthaltenen Werthe für $\sin\varphi^2$ zulässig sind, und welcher Ausdruck im entgegengesetzten Falle für die weitere Berechnung zu benutzen ist. Zu dem Ende möge erst die Entwickelung der aus $(3)^b$ und $(4)^b$ gezogenen Ausdrücke für β_2 und β_3 vorgenommen werden. Man hat nämlich

$$\beta_2^2 = -\frac{M\alpha_2^2 + Qb_1b_2}{N} = -\frac{1}{4}\frac{Q}{N}\left(\frac{MQ}{P^2}(b_1-b_2)^2 + 4b_1b_2\right),$$

$$\beta_3^2 = -\frac{M\alpha_3 + Qb_1b_3}{N} = -\frac{1}{4}\frac{Q}{N}\left(\frac{MQ}{P^2}(b_1-b_3)^2 + 4b_1b_3\right).$$

Nun ist

$$\frac{QM}{P^2} = 1 - \frac{\sin 2\delta^2}{\sin 2\varphi^2} = \frac{q-2p}{q-p},$$

daher

$$\frac{MQ}{P^2}(b_1-b_2)^2 + 4b_1b_2 = \frac{(b_1+b_2)^2 q - 2(b_1^2+b_2^2)p}{q-p},$$

$$\frac{MQ}{P^2}(b_1-b_3)^2 + 4b_1b_3 = \frac{(b_1+b_3)q - 2(b_1^2+b_3^2)p}{q-p}.$$

Führt man statt q und p die oben angegebenen Werthe ein, so findet sich nach einer leichten Rechnung, dass die Zähler vorstehender Ausdrücke vollständige Quadrate sind, so dass

$$\beta_2 = \pm\frac{b_1^2(b_2-b_3) - b_2^2(b_3-b_1)}{(q-p)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{-Q}{N}},$$

$$\beta_3 = \pm\frac{b_1^2(b_2-b_3) - b_3^2(b_1-b_2)}{(q-p)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{-Q}{N}}.$$

Da $(A+B)^2 > 1$ und $(A-B)^2 < 1$ ist, wovon man sich leicht überzeugen kann, so ist

$$\sqrt{\frac{-Q}{N}} = \sqrt{(A\pm B)^2 - 1}$$

reell oder imaginär, je nachdem man das obere oder untere Zeichen zur Geltung bringt, und daher die Gleichung

$$\sin\varphi^2 = (A-B)^2 \sin\delta^2,$$

insofern dieselbe imaginäre Werthe für die Ordinaten β_2, β_3 bedingt, nicht weiter in Betracht zu ziehen, so lange man alle mit dem Faktor $\sqrt{-1}$ behafteten Formen als unbrauchbar ansieht.*)

*) Bekanntlich schenkt man jetzt den imaginären und complexen Grössen mehr Aufmerksamkeit, und hat insbesondere die geometrische Bedeutung und Construktion derselben dadurch gewonnen, dass man $\sqrt{-1}$ als mittlere Proportionale von 1 und -1 anzusehen und bei den einzelnen Fällen auf eine Verallgemeinerung des Problems hinzudeuten pflegt. (vergl. u. a. eine Mittheilung Drobisch's in den Berichten d. K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig II. B. 5. Heft). Auch hier hat der Faktor $(A-B)^2$ seine Bedeutung, wenn man die Aufgabe erwei-

Durch Verbindung von (10) mit

$$\sin\varphi^2 = (A+B)^2 \sin\delta^2$$

erhält man endlich

$$\sin\delta^2 = \frac{(A+B)^2 - C^2}{(A+B)^4 - C^2},$$

$$\sin\varphi^2 = \frac{(A+B)^2 - C^2}{(A+B)^4 - C^2}(A+B)^2.$$

Hiermit kann man die Aufgabe als gelöst ansehen. Der T... nämlich, nach welchem in derselben gefragt wird, lässt sich d...

$$\sin\lambda = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta}$$

bestimmen, wenn ε die Schiefe der Ekliptik und λ den Bo... bedeutet, welchen die Sonne vom $\left\{\begin{matrix}\text{Frühlings-}\\ \text{Herbst-}\end{matrix}\right\}$ Nachtgleich... punkte an $\left\{\begin{matrix}\text{beschrieben hat}\\ \text{beschreiben wird}\end{matrix}\right\}$.

Ist z. B. $b_1 = 6'$, $b_2 = 18'$, $b_3 = 8'$ und $d_1 = 33'$, so ist

$$C^2 = \frac{\frac{b_1 b_2}{b_3} + \frac{b_2 b_3}{b_1} + \frac{b_3 b_1}{b_2}}{b_1 + b_2 + b_3} - 1 = \frac{\frac{27}{2} + 24 + \frac{8}{3}}{32} - 1 = \frac{49}{192}$$

$$\log . C^2 = 9.40690 = \log\frac{49}{192}$$

$$\log(A+B) = 0.47185 = \log\left(\frac{\sqrt{125} + \sqrt{157}}{8}\right)$$

$$\log\sin\delta = 9.52247 = \log\sin 19^0 27' \text{ circ.}$$

$$\log\sin\varphi = 9.99432 = \log\sin 80^0 45' \text{ circ.}$$

$$\log\sin\lambda = 9.92248 = \log\sin 56^0 46\tfrac{1}{2}'$$

$$\left.\begin{matrix}\log\lambda = 9.99604\\ +\log 365{,}21 = 2.56254\\ -\log 2\pi = 0.79818\end{matrix}\right\} = 1.76040 = \log 57{,}6.$$

Es werden demnach am 57 und 58 Tage $\left\{\begin{matrix}\text{nach}\\ \text{vor}\end{matrix}\right\}$ Frühlings-... fang, oder $\left\{\begin{matrix}\text{vor}\\ \text{nach}\end{matrix}\right\}$ Herbst-Anfang auf der $\left\{\begin{matrix}\text{nördlichen}\\ \text{südlichen}\end{matrix}\right\}$ Halbkugel ... ter einer Polhöhe von 80^0 45′ die Stäbe von angegebener Lä...

---

tert, und als Construktionsebene nicht die Horizontalebene, sondern ... auf derselben senkrecht stehende Meridianebene annimmt. Für de... Fall erhält man $\cos\varphi^2 = (A-B)^2 \cos\delta^2$. Eine weitere Betrachtung ... Verhältnisse würden zu weit führen.

eingesteckt werden müssen, wenn die erwartete Erscheinung beobachtet werden soll.

II.

Eine kurze Diskussion der in vorstehender Auflösung vorgekommenen Gleichungen u. s. w. dürfte geeignet sein, das Interesse an der Aufgabe noch etwas zu erhöhen.

Wenn man zuerst fragt, von welcher Art die von dem Schattenende eines Stabes beschriebene Curve ist, oder da dieselbe, wie schon erwähnt, ein Kegelschnitt ist, welche Linie zweiter Ordnung durch die Gleichung

$$Mx^2 + Ny^2 - 2Pbx + Qb^2 = 0 \; \ldots\ldots\ldots \; (\odot)$$

bezeichnet wird, so hat man nach den allgemein bekannten analytischen Kennzeichen die Frage dahin zu beantworten, dass die Curve

$$\text{eine} \begin{matrix}\text{Ellipse}\\ \text{Parabel}\\ \text{Hyperbel}\end{matrix} \Bigg\} \text{ ist, wenn } MN \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} 0 \text{ oder } \sin\varphi^2 \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} \cos\delta^2,$$

d. h. die Ellipse und Parabel kann nur innerhalb der Polarzirkel, ausserhalb derselben kann nur die Hyperbel beschrieben werden. (Unter den Polen und unter dem Aequator zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche geht die Ellipse in den Kreis und die Hyperbel in die gerade Linie über.). Nach (12) ist

$$\sin\varphi^2 = \frac{(A+B)^2 - C^2}{(A+B)^4 - C^2}(A+B)^2,$$

$$\cos\delta^2 = \frac{(A+B)^2 - 1}{(A+B)^4 - C^2}(A+B)^2 \; .$$

Da ferner $(A+B)^2 > 1$, so muss auch, wenn $\cos\delta$ reell sein soll, $(A+B)^4 > C^2$, und für jedes reelle φ auch $(A+B)^2 > C^2$ sein, demnach wird

$$\sin\varphi^2 \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} \cos\delta^2, \text{ wenn } C^2 \begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix} 1 \text{ ist, oder der Kegelschnitt ist}$$

$$\text{eine} \left\{\begin{matrix}\text{Ellipse}\\ \text{Parabel}\\ \text{Hyperbel}\end{matrix}\right\} \text{ wenn } C^2 \begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix} 1 \text{ ist.}$$

Es fällt aber je nach Verhältniss der Grösse der Stäbe der Werth von

$$C^2 = \frac{\frac{b_1 b_2}{b_3} + \frac{b_2 b_3}{b_1} + \frac{b_3 b_1}{b_2}}{b_1 + b_2 + b_3} - 1$$

zwischen die Grenzen 0 und ∞, woraus ohne Weiteres hervorzugehen scheint, dass je nach der Wahl der Stäbe die Schattenenden derselben unter den in der Aufgabe gestellten Bedingungen bald Ellipsen und Parabeln, bald Hyperbeln beschreiben können. Dennoch lassen sich, wie weiter unten gezeigt werden soll, hinsichtlich der Möglichkeit, dass auch ausserhalb der Polarkreise die in der Aufgabe geforderte Erscheinung eintreten könne, einige Zweifel erheben. Zuvor jedoch mögen die weiteren Bedingungen erörtert werden, unter denen die Schattenlinien als Kreise, Parabeln u. s. w. hervorgehen.

1) Ist $\varphi=\frac{\pi}{2}$, so ergiebt sich aus (10)

$$C^2=\frac{b_1^2(b_2-b_3)^2+b_2^2(b_3-b_1)^2+b_3^2(b_1-b_2)^2}{2b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3)}=0,$$

folglich $b_1=b_2=b_3$, und nach (12) $\sin\delta=\frac{1}{A+B}=\frac{b}{\sqrt{b^2+d^2}}$, $\operatorname{tg}\delta=\frac{b}{d}$, wie im Voraus zu erwarten war. Ebenso ist leicht einzusehen, dass die von den Schattenenden beschriebenen Linien unter einander gleiche Kreise sind, deren Radius $=b\cot\delta=d$ ist.

2) Setzt man $\sin\varphi^2=\cos\delta^2$ oder $C^2=1$, so ist

$$b_1^2b_2^2+b_2^2b_3^2+b_3^2b_1^2=2b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3),$$

oder

$$\frac{1}{b_1}=\left[\frac{1}{\sqrt{b_2}}\pm\frac{1}{\sqrt{b_3}}\right]^2,\ \frac{1}{b_2}=\left[\frac{1}{\sqrt{b_3}}\pm\frac{1}{\sqrt{b_1}}\right]^2,$$
$$\frac{1}{b_3}=\left[\frac{1}{\sqrt{b_1}}\pm\frac{1}{\sqrt{b_2}}\right]^2.$$

Es ist demnach einer der drei Stäbe nicht bloss der Lage, sondern auch der Grösse nach durch die übrigen bestimmt. Für $C^2=1$ folgt ferner aus (12)

$$\sin\delta^2=\frac{1}{(A+B)^2+1},\quad \cot\delta=A+B;$$
$$\sin\varphi^2=\frac{(A+B)^2}{(A+B)^2+1},\ \operatorname{tg}\varphi=A+B.$$

Die Gleichung (☉), insofern dieselbe die einer Parabel sein soll, geht für $M=0$, $N=\cos\varphi^2$, $P=\cos\varphi\sin\varphi$, $Q=\cos\varphi^2-\sin\varphi^2$ über in

$$y^2\cos\varphi^2-2bx\sin\varphi\cos\varphi+b^2(\cos\varphi^2-\sin\varphi^2)=0$$

oder, wenn man den Coordinatenanfang in den Scheitel der Parabel setzt:

$$y^2 = 2bx\,\mathrm{tg}\varphi$$

Es ist demnach $b\,\mathrm{tg}\varphi = b(A+B)$ der Parameter der vom Schattenende des Stabes b beschriebenen Parabel.

Ist z. B. $b_1 = 6'$, $b_2 = 18'$, $d_1 = 33'$ und nach der Relation $\frac{1}{\sqrt{b_3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \pm \frac{1}{\sqrt{18}}$, $b_3 = \begin{Bmatrix} 2,412\ldots \\ 33,587\ldots \end{Bmatrix}$, so ist

$$\log(A+B) = 10,47185 = \log\,\mathrm{tg}\,71^\circ 21' 20''\ (\varphi).$$
$$= \log\cot 18^\circ 38' 40''\ (\delta)$$

Oder sei $b_1 = 9'$, $b_2 = \frac{81'}{16}$, $b_3 = \frac{81'}{49}$, $d_1 = 20'$; so erhält man

$$\log(A+B) = 10,51300 = \log\,\mathrm{tg}\,72^\circ 56' 20''\ (\varphi)$$
$$= \log\cot 17^\circ 3' 40''\ (\delta)$$

3) Für $Ca \gtrless 1$ sind, wie erwähnt, die fraglichen Curven $\begin{Bmatrix}\text{Hyperbeln}\\ \text{Ellipsen}\end{Bmatrix}$, und aus dem Obigen geht auch hervor, dass die Bedingungen der Aufgabe für den Fall, dass die Curven Ellipsen sind, nichts Unmögliches enthalten. Ein Gleiches gilt bezüglich des Falles, dass Hyperbeln entstehen, in so fern, als aus der oben gegebenen Lösung hervorgeht, dass sich drei ähnliche Hyperbeln unter den durch Nr. (1) bis (6) ausgedrückten Bedingungen schneiden können. Allein hier kömmt noch die besondere Frage in Betracht, welche Zweige der Hyperbeln zum Durchschnitt kommen. Da nämlich die der ganzen Entwickelung zum Grunde gelegte Kegelfläche, wie schon Anfangs erwähnt worden ist, von ihrem Mittelpunkte aus einestheils von Sonnenstrahlen, anderntheils von Schattenstrahlen gebildet wird, so wird der im Lichtkegel liegende Theil der aus dem Durchschnitt mit der Horizontalebene hervorgehenden Hyperbel als eine imaginäre Schattencurve anzusehen sein. Wenn nun der Fall eintreten könnte, dass der reelle Theil einer der drei Hyperbeln mit dem einen oder beiden imaginären Theilen der übrigen Hyperbeln in zweien der Punkte A, B, C zum Durchschnitt käme, so würde für diesen Fall die Aufgabe, wenigstens als gnomonische betrachtet, unmöglich zu lösen sein. Es fragt sich nun, ob und unter welchen Bedingungen dieser Fall eintreten kann. Für diese Erörterung mögen durch $\pm H_1$, $\pm H_2$, $\pm H_3$ resp. die Zweige der drei durch die Stäbe b_1, b_2, b_3 erzeugten Hyperbeln, welche im $\begin{Bmatrix}\text{Schatten-}\\ \text{Sonnen-}\end{Bmatrix}$ Kegel liegen, bezeichnet werden. Unbeschadet der Allgemeinheit der Discussion kann man ferner annehmen, dass b_1 der kleinste der gegebenen Stäbe, oder $b_1 < b_2$ und $b_1 < b_3$ sei. Da $Q = \sin\delta^2 - \sin\varphi^2$ negativ sein muss, so folgt, dass

$$\alpha_2 = \frac{Q}{2p}(b_1 - b_2),\quad \alpha_3 = \frac{Q}{2p}(b_1 - b_3)$$

positive Grössen sind. Werden ferner durch x_1, x_2, x_3 die Abscissen der Scheitelpunkte der drei von den Schattenenden der

Stäbe b_1, b_2, b_3 beschriebenen Hyperbeln bezeichnet, so hat nach den Gleichungen (I), (II), (III)

$$Mx_1^2 - 2Pb_1 x_1 + Qb_1^2 = 0,$$
$$M(x_2 - \alpha_2)^2 - 2Pb_2(x_2 - \alpha_2) + Qb_2^2 = 0,$$
$$M(x_3 - \alpha_3)^2 - 2Pb_3(x_3 - \alpha_3) + Qb_3^2 = 0;$$

und hieraus

$$x_1 = \frac{b_1 P \pm b_1 \sqrt{P^2 - MQ}}{M}$$
$$= \frac{b_1 MQ + b_1(P \pm \sqrt{P^2 - MQ})^2}{2PM}$$
$$= \frac{b_1(\sin 2\varphi^2 - \sin 2\delta^2) + b_1(\sin 2\varphi \pm \sin 2\delta)^2}{4\sin 2\varphi(\sin\varphi^2 - \cos\delta^2)},$$

$$x_2 = \frac{b_1 MQ + b_2(P^2 \pm \sqrt{P^2 - MQ})^2}{2PM}$$
$$= \frac{b_1(\sin 2\varphi^2 - \sin 2\delta^2) + b_2(\sin 2\varphi \pm \sin 2\delta)^2}{4\sin 2\varphi(\sin\varphi^2 - \cos\delta^2)},$$

$$x_3 = \frac{b_1 MQ + b_3(P^2 \pm \sqrt{P^2 - MQ})^2}{2PM}$$
$$= \frac{b_1(\sin 2\varphi^2 - \sin 2\delta^2) + b_3(\sin 2\varphi \pm \sin 2\delta)^2}{4\sin\varphi 2(\sin\varphi^2 - \cos\delta^2)}.$$

Da $\sin 2\varphi^2 > \sin 2\delta^2$, weil $C^2 > 1$, dagegen $\sin\varphi^2 < \cos\delta^2$, schon oben einmal bemerkt worden ist, mithin

$$x_1 < 0,$$
$$x_2 < 0 < \alpha_2,$$
$$x_3 < 0 < \alpha_3;$$

so ist hieraus abzunehmen, dass, mögen in den Gleichungen x_1, x_2, x_3 von den Doppelzeichen ($\pm$) (die übrigens den Z… $\mp H_1$, $\mp H_2$, $\mp H_3$ entsprechen) die oberen oder unteren … men werden, nur die nach ein und derselben Richtung der … scissenaxe zu liegenden Zweige der drei gedachten Hyp… sich zu zweien resp. in den Punkten A, B, C schneiden … Denn gesetzt, dass $-H_2$ oder $-H_3$ mit den Zweigen $+H_1$ … $+H_2$ in den Punkten C oder A zum Durchschnitt kämen, so …

$$x_2 > \alpha_2 > 0,$$
$$x_3 > \alpha_3 > 0$$

sein, was dem Obigen widerspricht. Hiermit ist jedes Bed… bezüglich des Falles, dass die beschriebenen Schatten… Hyperbeln sind, gehoben. Ist z. B.

$b_1 = 2455,25'$, $b_2 = 1000'$, $b_3 = 21898$, $d_1 = 1000$:

ist

$\log. C^2 = 0,25169$; $\log(A+B) = 0,29274$

$\log\sin\delta = 9,59983 = \log\sin 23^0 27'$ circ. (Zeit d. Solstit.)

$\log\sin\varphi = 9,89257 = \log\sin 51^0 20' 15''$ circ. (Polhöhe v. Leipzig).

Im Folgenden mögen noch einige bemerkenswerthe Verhältnisse, che mit der Aufgabe in einigem Zusammenhange stehen, Platz en.

Verlegt man den Coordinatenanfang für jeden der drei von Schattenenden beschriebenen Kegelschnitte in den Mittelpunkt selben, so erhält man aus (I), (II), (III) folgende Gleichungen:

$$\frac{M^2x^2}{(P^2-MQ)b_1^2}+\frac{MNy^2}{(P^2-MQ)b_1^2}=1 \quad \ldots\ldots \quad (I)^b$$

oder $$\frac{(\sin\varphi^2-\cos\delta^2)^2}{\sin\delta^2\cos\delta^2}\frac{x^2}{b_1^2}+\frac{\sin\varphi^2-\cos\delta^2}{\cos\delta^2}\frac{y}{b_1^2}=1$$

$$\frac{M^2x^2}{(P^2-MQ)b_2^2}+\frac{MNy^2}{(P^2-MQ)b_2^2}=1 \quad \ldots\ldots \quad (II)^b$$

oder $$\frac{(\sin\varphi^2-\cos\delta^2)^2}{\sin\delta^2\cos\delta^2}\frac{x^2}{b_2^2}+\frac{\sin\varphi^2-\cos\delta^2}{\cos\delta^2}\frac{y^2}{b_2^2}=1$$

$$\frac{M^2x^2}{(P^2-MQ)b_3^2}+\frac{MNy^2}{(P^2-MQ)b_3^2}=1 \quad \ldots\ldots \quad (III)^b$$

oder $$\frac{(\sin\varphi^2-\cos\delta^2)^2}{\sin\delta^2\cos\delta^2}\frac{x^2}{b_3^2}+\frac{\sin\varphi^2-\cos\delta^2}{\cos\delta^2}\frac{y^2}{b_3^2}=1.$$

Es sind also

$$mb_1,\ mb_2,\ mb_3$$

grossen Halbaxen,

$$nb_1,\ nb_2,\ nb_3$$

kleinen Halbaxen der Ellipsen oder die halben Nebenaxen Hyperbeln, wobei absolut und reell genommen

$$m=\frac{\sin\delta\cos\delta}{\sin\varphi^2-\cos\delta^2}=\frac{\sqrt{(A+B)^2-C^2}.\sqrt{(A+B)^2-1}}{(A+B)(1-C^2)},$$

$$n=\frac{\cos\delta}{\sqrt{\sin\varphi^2-\cos\delta^2}}=\frac{\sqrt{(A+B)^2-C^2}}{(A+B)\sqrt{1-C^2}}$$

l $\frac{n^2}{m}b_1=b_1\cot\delta$, $\frac{n^2}{m}b_2=b_2\cot\delta$, $\frac{n^2}{m}b_3=b_3\cot\delta$ die Parameter der gelschnitte, gleichwie oben unter 2. für die Parabeln, und wie erhaupt zu erwarten war.

Bezeichnet man ferner mit γ_1, γ_2, γ_3 die Entfernungen der Punkte A, B, C von dem Mittelpunkte resp. des ersten, zweiten, dritten Kegelschnitts, so hat man

$$\gamma_1 = \frac{P}{M}\, b_1,\ \gamma_2 = \frac{P}{M}\, b_2,\ \gamma_3 = \frac{P}{M} b_3$$

und, wenn diese Ausdrücke durch die entsprechenden grossen Halbaxen dividirt werden:

$$\frac{\gamma_1}{m b_1} = \frac{\gamma_2}{m b_2} = \frac{\gamma_3}{m b_3} = \frac{P}{\sqrt{P^2 - MQ}} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\delta\cos\delta} = C.$$

Verbindet man also die grosse Halbaxe und die Länge γ unter einem rechten Winkel und zieht die Hypotenuse, so ist C die trigonometrische Tangente des der Seite γ gegenüberstehenden Winkels.

Hinsichtlich der Bestimmung der Lage des Punktes C, oder der Grösse von $BC = d_2$ und $CA = d_3$ hat man zwar

$$d_2^2 = (\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\beta_2 - \beta_3)^2,\ d_3 = \alpha_3^2 + \beta_3^2;$$

wodurch man mit Hülfe von $(3)^b$, $(4)^b$ und $(5)^b$ d_2 und d_3 als Funktionen von b_1, b_2, b_3 und d_1 bestimmen kann: doch dürfte folgender Weg kürzer zum Ziele führen. Es muss nämlich $\sin\delta^2$ und $\sin\varphi^2$ doch immer denselben Werth behalten, wenn man d_2 oder d_3 statt d_1 als gegeben annimmt. Setzt man daher

$$\frac{\sqrt{b_1^2 + d_1^2}}{b_1 + b_2} + \frac{\sqrt{b_2^2 + d_1^2}}{b_1 + b_2} \text{ wie oben } = A + B,$$

ebenso

$$\frac{\sqrt{b_2^2 + d_2^2}}{b_2 + b_3} + \frac{\sqrt{b_3^2 + d_2^2}}{b_2 + b_3} = A' + B'$$

und

$$\frac{\sqrt{b_3^2 + d_3^2}}{b_3 + b_1} + \frac{\sqrt{b_1^2 + d_3^2}}{b_3 + b_1} = A'' + B'';$$

so muss

$$\frac{(A+B)^2 - C^2}{(A+B)^4 - C^2} = \frac{(A'+B')^2 - C^2}{(A'+B')^4 - C^2} = \frac{(A''+B'')^2 - C^2}{(A''+B'')^4 - C^2} = \sin\delta^2,$$

oder

$$A + B = A' + B' = A'' + B'' = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}$$

sein. Nimmt man nun d_1 als gegebene Länge, also $A+B$ als bekannte Grösse an, so hat man zur Bestimmung von d_2 und d_3:

$$+B=\frac{\sqrt{b_2^2+d_2^2}+\sqrt{b_3^2+d_2^2}}{b_2+b}=\frac{\sqrt{b_3^2+d_3^2}+\sqrt{b_1^2+d_3^2}}{b_3+b_1}$$

hieraus

$$d_2^2=\frac{(A+B)^2-1}{4(A+B)^2}\{(b_2+b_3)^2(A+B)^2-(b_2-b_3)^2\},$$

$$d_3^2=\frac{(A+B)^2-1}{4(A+B)^2}\{(b_3+b_1)^2(A+B)^2-(b_3-b_1)^2\}.$$

uf ähnliche Weise gebildete identische Gleichung

$$d_1=\frac{(A+B)^2-1}{4(A+B)^2}\{(b_1+b_2)^2(A+B)-(b_1-b_2)^2\}$$

ist sich nach Einführung von $\frac{\sqrt{d_1^2+b_1^2}+\sqrt{d_1^2+b_2^2}}{b_1+b_2}$ statt B, wie natürlich, auf $d_1=d_1$.

Die betrachtete Aufgabe bietet noch mehrere interessante ältnisse, welche bei einer weiteren Untersuchung derselben Theil sich von selbst ergeben. Ich begnüge mich nur noch e derselben kurz anzuführen. So ist für den Inhalt Δ des ecks ABC

$$\Delta=\frac{(A+B)^2-1}{4(A+B)^2}\sqrt{(A+B)^2-C^2}\sqrt{b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3)}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{(\sin\varphi^2-\sin\delta^2)^{\frac{1}{2}}}{\sin\delta\sin 2\delta}\sqrt{b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3)}.$$

Ferner hat die durch die Spitzen der drei Stäbe $A'A$, $B'B$, $C'C$ te Ebene $A'B'C'$ die Eigenschaft, dass sie stets normal auf Meridianebene steht. Dieses merkwürdige Lagenverhältniss zugleich zur Bestimmung der Lage des Dreiecks ABC in Horizontalebene.

XV.

Ueber die Wirkung linearer elect... scher Ringe auf die magnetische Flüssigkeit.

Von dem

Herrn Doctor Haedenkamp,

Oberlehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Ham...

Der electrische Strom übt auf ein magnetisches Element ... Wirkung aus, die dem Quadrate der Entfernung umgekehrt ... portional ist, aber die Richtung der Kraft liegt nicht in der ... wirkenden Kräfte verbindenden geraden Linie, sondern sie ... senkrecht auf der durch die Richtung des electrischen Str... und den angezogenen oder abgestossenen magnetischen P... gelegten Ebene; überdies ist diese Kraft noch proportional ... Sinus des Winkels, den die Richtung des Stromes mit der ... dem magnetischen Punkte nach dem Stromelemente gezo... Linie bildet. Nennt man daher die Entfernung eines Stro... ments ∂s von einem magnetischen Elemente r, die Intensitäten ... Stromes und des magnetischen Elements i und μ, und den W... kel, den r mit der Richtung des Stromelements ∂s macht, ψ, ... wird die Grösse der Kraft, mit welcher sich die Elemente an... hen oder abstossen, durch $\frac{i\mu\sin\psi}{r^2}$ ausgedrückt.

Ich werde im Folgenden die Wirkungen untersuchen, ... Kreis- und elliptische Ringe, durch die electrische Ströme ge... auf ein in der Ebene der Ringe gelegenes magnetisches T... chen ausüben, wobei die Querdimensionen der Ringe vernach... sigt werden sollen.

Ich bemerke auch noch, dass man bei Beobachtungen selbst ... das magnetische Element eine Magnetnadel von geringer L...

ituiren könne. Zuerst nehmen wir an, dass der wirkende ein Kreis sei und das magnetische Theilchen ausserhalb 's Kreises liege. Sei in Taf. IV. Fig. 1. C das etische Element von der Intensität μ, welches von dem e $EGHE$, durch den der electrische Strom geht, angezooder abgestossen wird. Der Halbmesser dieses Kreises sei e Entfernung $AC=a$, die Entfernung eines Stromelements ? von dem Punkte C oder $AC=r$, der Winkel, den das selement mit r macht, $=90-\psi$. Die Kraft, womit das selement in B auf C wirkt, wird nun ausgedrückt durch

$$\frac{i\mu\partial s\cos\psi}{r^2}.$$

Richtung dieser Kraft ist auf der Ebene des Kreises senk-. Nennen wir die Kraft, womit irgend ein Bogen dieses es den magnetischen Punkt C anzieht oder abstösst, R, so so

$$R=i\mu\int\frac{\partial s\cos\psi}{r^2}.$$

wollen nun zuerst die Variabeln unter dem Integralzeichen i den Winkel $AEB=\varphi$ ausdrücken. Es ist

$$r^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi',$$

wenn

$$k^2=\frac{4ab}{(a+b)^2} \text{ und } 1-k^2\sin^2\varphi=\Delta^2(k,\varphi)$$

tzt wird, erhält man

$$r=(a+b)\Delta(k,\varphi);$$

r, da $r\cos\psi=a\cos\varphi'-b$, wird

$$\cos\psi=\frac{a+b}{2b}\cdot\frac{k'-\Delta^2(k,\varphi)}{\Delta(k,\varphi)};$$

n

$$k'=\sqrt{1-k^2}=\frac{a-b}{a+b}.$$

un $\partial s=-2b\partial\varphi$ ist, so erhält man für die Kraft des Stromes las magnetische Element:

$$R=\frac{i\mu}{a+b}\cdot\int\frac{(\Delta^2(k,\varphi)-k')\partial\varphi}{\Delta^3(k,\varphi)}.$$

Dieses Integral ist ein elliptisches; wenn man die gewöhnliche Bezeichnung desselben beibehält, so wird, da

$$k'^2 \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3(k,\varphi)} = E(k,\varphi) - \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta(k,\varphi)}:$$

$$R = \frac{i\mu}{a+b}\left(F(k,\varphi) - \frac{E(k,\varphi)}{k'} + \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{k'\Delta(k,\varphi)}\right).$$

Dieser Ausdruck stellt die Wirkung des Bogens *FGB* dar. Für die Wirkung des ganzen Ringes erhält man, da dann die Integrale von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ genommen werden müssen:

$$R = \frac{2\mu i}{a+b}\left(F(k,\frac{\pi}{2}) - \frac{E(k,\frac{\pi}{2})}{k'}\right).$$

Man kann diese elliptischen Integrale auch noch leicht durch eine andere Variabele ausdrücken. Drückt man nämlich φ und φ' durch den Winkel ψ aus, so wird, wie man leicht aus der Figur entnehmen kann,

$$a\sin\varphi' = b\sin\psi, \quad r\cos\psi = a\cos\varphi' - b.$$

Hieraus ergibt sich leicht, wenn $\frac{b}{a} = \lambda$,

$$\Delta\varphi' = 1 - 2\lambda\cos\varphi' + \lambda^2 \text{ und } \Delta^2(\lambda,\psi) = 1 - \lambda^2\sin^2\psi$$

gesetzt wird:

$$r = a\Delta\varphi' = a(1+\lambda)\Delta\varphi = \frac{a(1-\lambda)}{\Delta(\lambda,\psi) + \lambda\cos\psi},$$

$$\sin\psi = \frac{(1+k')\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(k,\varphi)}, \quad \cos\psi = \frac{k'\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\Delta(k,\varphi)},$$

$$\Delta(k,\varphi) = \frac{1-\lambda}{\Delta(\lambda,\psi) + \lambda\cos\psi}, \quad \frac{\partial\psi}{\Delta(\lambda,\psi)} = \frac{(1+k')\partial\varphi}{\Delta(k,\varphi)}.$$

Durch diese Transformation wird

$$R = i\mu \int \frac{\partial s\cos\psi}{r^2} = \frac{i\mu}{a\lambda^2}\left(E(\lambda,\psi) - \lambda'^2 F(\lambda,\psi) + \lambda\sin\psi\right).$$

Nimmt man dieses Integral von $\psi = 0$ bis $\psi = \psi$, so erhält man in dem vorhergehenden Ausdrucke die Wirkung des Bogens *EB*. Für die Wirkung des ganzen Ringes ist

$$R = \frac{2i\mu}{a\lambda^2}\left(E(\lambda,\frac{\pi}{2}) - \lambda'^2 F(\lambda,\frac{\pi}{2})\right).$$

Die hier gemachte Transformation des elliptischen Integrals mit dem Argumente φ und dem Modul k in ein anderes mit dem Argumente ψ und dem Modul λ ist die Landensche Substitution, die sich hier unmittelbar durch eine einfache geometrische Betrachtung darbietet. Legen wir jetzt durch C einen Kreis und suchen die Wirkung des hindurchgehenden electrischen Stromes auf ein innerhalb des Ringes befindliches magnetisches Theilchen, z. B. in B. Für die Kraft, womit in diesem Falle der electrische Strom auf das magnetische Theilchen wirkt, findet man, wie aus der Figur leicht ersichtlich ist, den Ausdruck:

$$a\int\frac{\partial\varphi'\cos BCA}{r^2}=a\int\frac{\partial\varphi'\cos(\psi-\varphi')}{r^2},$$

den wir durch $R_,$ bezeichnen wollen. Mit Hülfe des obigen Ausdrucks für ψ findet man leicht:

$$R_, = \frac{i\mu}{a\lambda'^2}(E(\lambda,\psi)+\lambda\sin\psi).$$

Dieser Ausdruck stellt die Anziehung des Bogens CK auf B dar. Man kann auch das vorhergehende elliptische Integral durch φ ausdrücken, und man erhält leicht:

$$R_,=i\mu\int\frac{k'+\Delta^2(k,\varphi)}{a(1+\lambda)\Delta^3(k,\varphi)}\partial\varphi=\frac{i\mu}{a(1+\lambda)}\left(F(k,\varphi)+\frac{E(k,\varphi)}{k'}-\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{k'\Delta\varphi}\right).$$

Dies ist der Ausdruck für die Anziehung des Bogens LK. Für den ganzen Ring erhält man

$$R_,=\frac{2i\mu\left(F(k,\frac{\pi}{2})+\frac{E(k,\frac{\pi}{2})}{k'}\right)}{a(1+\lambda)},$$

oder auch

$$R_,=\frac{4i\mu}{a\lambda'^2}\cdot E\left(\lambda,\frac{\pi}{2}\right).$$

Setzt man $b=0$, so wird

$$R_{,,}=\frac{2i\mu\pi}{a},$$

welcher Ausdruck bekanntlich die Wirkung des Ringes der Tangentenboussole auf die im Mittelpunkte des Ringes befindliche Magnetnadel darstellt.

Es ist leicht die gefundenen Resultate durch Beobachtungen zu prüfen. Es liege der Ring in der Ebene des magnetischen

Meridians, die Abweichungen der Magnetnadel in A und B unter der Einwirkung des Stroms seien u' und u; die Grösse des Erdmagnetismus in der horizontalen Richtung T. Es ist dann bekanntlich

$$R_, = \mu T \operatorname{tg} u, \quad R_{,,} = \mu T \operatorname{tg} u'$$

und daher:

$$\operatorname{tg} u = \frac{2E(\lambda, \frac{\pi}{2})}{\lambda'^2 \pi} \operatorname{tg} u'.$$

Wir wollen jetzt die Wirkung eines elliptischen Ringes auf ein magnetisches Element bestimmen. Zuerst liege dieses Element innerhalb des Ringes. Seien in Taf. IV. Fig. 2. x, y die Coordinaten eines Punktes P des Ringes, α, β die des magnetischen Elements S, die halben Axen des Ringes seien a und b. Es sei auch hier wie oben in dem Ausdrucke für die Grösse der Wirkung

$$R = i\mu \int \frac{\partial s \sin\psi}{r^2},$$

r die Entfernung PS, ψ der Winkel, den r mit dem Bogenelemente ∂s macht. Nennt man l das auf die Tangente in P vom Mittelpunkte der Ellipse aus gefällte Loth: dann sind die Cosinusse der Winkel, die dieses Loth mit den Axen der Ellipse macht: $\frac{x}{a^2} l$, $\frac{y}{b^2} l$; ferner sind die Cosinusse der Winkel, die die vom Mittelpunkte der Ellipse nach S gezogene Linie mit denselben Axen bildet: $\frac{\alpha - x}{r}$, $\frac{\beta - y}{r}$; daher ist

$$\sin\psi = \left(\frac{x(\alpha - x)}{a^2} + \frac{y(\beta - y)}{b^2}\right) \frac{l}{r}$$
$$= \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right) \frac{l}{r},$$
$$r^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2;$$

also ist

$$R = i\mu \int \frac{l \partial s \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)}{[(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man

$$x = a \cos\varphi', \quad y = b \sin\varphi';$$

so wird

$$\partial s = ab\partial\varphi',$$

$$R = i\mu\, ab \int \frac{\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)\partial\varphi'}{[(\alpha - a\cos\varphi')^2 + (\beta - b\sin\varphi')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

iesen Ausdruck auf eine einfachere Form zu bringen, setze

$$\frac{\alpha - x}{r} = \cos\psi,\quad \frac{\beta - y}{r} = \sin\psi$$

etze die Werthe für x und y in die Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

hält man zur Bestimmung von r die in Beziehung zu r qua-
che Gleichung

$$r^2 K - 2rM - L = 0;$$

$$K = \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2},$$

$$M = \frac{\alpha\cos\psi}{a^2} + \frac{\beta\sin\psi}{b^2},$$

$$L = 1 - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}.$$

ieser Gleichung wird:

$$r = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + LK}}{K} = \frac{-L}{M \mp \sqrt{M^2 + LK}},$$

uch, wenn

$$^2(M^2 + LK) = (b^2 - \beta^2)\cos^2\psi + (a^2 - \alpha^2)\sin^2\psi + 2\alpha\beta\sin\psi\cos\psi$$

$M_,^2$ bezeichnet wird:

$$r = \frac{-L}{M + \frac{M_,}{ab}}.$$

un dies Integral durch ψ auszudrücken, bemerke ich, dass

$$\frac{\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1}{r^2}=\frac{M}{r^2}-\frac{L}{r^2}$$

und

$$\frac{\partial\varphi'}{r}=-\frac{\partial\psi}{M_{\prime}}.$$

Es wird daher

$$R=i\mu\int\left(\frac{L}{r^2}-\frac{M}{r}\right)\frac{\partial\psi}{M_{\prime}}$$

$$=\frac{i\mu}{L}\int\left[2M^2+\frac{M_{\prime}^2}{a^2b^2}\pm\frac{MM_{\prime}}{ab}\right]\frac{\partial\psi}{M_{\prime}}.$$

Für die Wirkung des ganzen Ringes muss dies Integral von bis $\psi=2\pi$ genommen werden, und in diesem Falle versch der Term $\int\frac{MM_{\prime}\partial\psi}{M_{\prime}}$. Es wird daher

$$R=\frac{i\mu}{L}\int_0^{2\pi}\left(2M^2+\frac{M_{\prime}^2}{a^2b^2}\right)\frac{\partial\psi}{M_{\prime}}.$$

Man kann verschiedene Wege einschlagen, diesen Ausdr eine einfachere Form zu bringen. Der folgende Weg sche einfachsten zum Ziele zu führen. Um aber die Constanten bei der Transformation vorkommen, leichter geometrisch d zu können, lege ich zuvörderst durch den Punkt S eine E und Hyperbel, die dem anziehenden oder abstossenden e schen Ringe confokal sind. Die halben Axen desselben a_1, b_1 und a_2, b_2. Die Wurzeln λ und λ_1 der Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{a^2-\lambda}+\frac{\beta^2}{b^2-\lambda}=1$$

bestimmen diese Axen. Es ist nemlich:

$$a_1^2=a^2-\lambda,\quad b_1^2=b^2-\lambda;\quad a_2^2=a^2-\lambda_1,\quad b_2^2=b^2-\lambda_1.$$

Ich bemerke noch, dass $\lambda<b$ und $\lambda_1\gtrless{b \atop a}$.

Aus der vorhergehenden Gleichung folgt noch:

$$\lambda\lambda_1=a^2b^2L,\quad \lambda+\lambda_1=a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2.$$

Legt man in S an die beiden confokalen Curven Tangente sind die vom Mittelpunkte aus gefällten Lothe, die wir d und p_1 bezeichnen:

$$p^2=\frac{1}{\frac{\alpha^2}{a_1^4}+\frac{\beta^2}{b_1^4}}=\frac{a_1^2b_1^2}{\lambda_1-\lambda},$$

$$p_1^2=\frac{1}{\frac{\alpha^2}{a_2^4}+\frac{\beta^2}{b_2^4}}=\frac{a_2^2b_2^2}{\lambda-\lambda_1}.$$

Ferner ist noch:

$$\alpha=\frac{a_1\,a_2}{\sqrt{a^2-b^2}},\qquad \beta=\frac{b_1\,b_2}{\sqrt{b^2-a^2}}.$$

Die Cosinusse der Winkel, die das Loth p mit den Axen a und b macht, wenn diese durch ξ und η bezeichnet werden, sind

$$\xi=\frac{\alpha p}{a_1^2},\quad \eta=\frac{\beta p}{b_1^2}.$$

Um jetzt die Ausdrücke für M und M_r auf einfachere Form zu bringen, setze man $\psi=\varphi+\nu$ und bestimme ν so, dass das Glied $\alpha\beta\sin\psi\cos\psi$ in M_r verschwindet, wodurch man die Bedingung

$$\operatorname{tang}2\nu=\left(\frac{2\alpha\beta}{b^2-a^2+\alpha^2-\beta^2}\right)\text{ oder }\sin2\nu=\frac{2\alpha\beta}{\lambda_1-\lambda}$$

erhält. Dadurch wird

$$M_r^2=\frac{a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2}{2}+\frac{\alpha\beta\cos2\nu}{\sin2\nu}=\frac{\lambda+\lambda_1}{2}+\frac{\alpha\beta\sin2\varphi}{\sin2\nu};$$

hieraus:

$$M_r^2=\frac{\lambda+\lambda_1+(\lambda_1-\lambda)\cos2\varphi}{2}=\lambda_1\cos^2\varphi+\lambda\sin^2\varphi,$$

oder

$$M_r^2=\lambda_1\left(1-\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\sin^2\varphi\right)=\lambda_1\Delta^2(k,\varphi);$$

wenn $\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}=k^2$ gesetzt wird.

Ich bemerke noch, dass $\cos\nu=\xi$, $\sin\nu=\eta$ und φ der Winkel ist, den r mit dem Lothe p macht. Durch diese Substitution wird endlich für die Wirkung des Ringes, da

$$a^2b^2M=p\lambda_1\cos\varphi-p_1\lambda\sin\varphi:$$

$$R=\frac{i\mu}{\sqrt{\lambda_1}}\left[\frac{ab}{\lambda}\int_0^{2\pi}\Delta(k,\varphi)\partial\varphi+\frac{2p^2\lambda_1}{ab\lambda}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi\partial\varphi}{\Delta}+\frac{2p_1^2\lambda}{ab\lambda_1}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\varphi\partial\varphi}{\Delta}\right].$$

Die Integrale

$$\int \frac{\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{\Delta} \text{ und } \int \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\Delta}$$

sind, wie bekannt, elliptische Integrale erster und zweiter Gattung.

Liegt das magnetische Element im Mittelpunkte der Ellipse, so ist

$$R = \frac{i\mu\, ab}{\lambda\sqrt{\lambda_1}} \int_0^{2\pi} \Delta\partial\varphi = \frac{4i\mu}{b} E(k, \frac{\pi}{2}).$$

Wir wollen jetzt die Anziehung auf ein magnetisches Theilchen suchen, welches ausserhalb des elliptischen Ringes gelegen ist. Es sei das magnetische Theilchen (Taf. IV. Fig. 2.) in S' mit S in derselben confokalen Hyperbel gelegen und der anziehende elliptische Ring derjenige, dessen Halbachsen wir oben durch a_1 und b_1 bezeichnet haben. Die Coordinaten des Stromelements in P' seien x', y'; die Coordinaten des magnetischen Theilchen in S': α', β'. Für die Wirkung $R_,$ irgend eines Bogens haben wir auch hier, wie oben:

$$R_, = i\mu \int \frac{l\partial s\left(\frac{\alpha' x'}{a_1^2} + \frac{\beta' y'}{b_1^2} - 1\right)}{r_,^3};$$

worin ∂s das Element des Ringes, l das Loth auf die Richtung von ∂s, und $r_,$ die Entfernung $S'P'$ bedeutet. Wenn man nun annimmt, dass P' mit P auf derselben confokalen Hyperbel liegt, so habe ich im 3. Bande S. 397. dieses Archivs gezeigt, dass

$$\frac{\alpha'}{a} = \frac{\alpha}{a_1}, \quad \frac{\beta'}{b} = \frac{\beta}{b_1};$$

$$\frac{x'}{a_1} = \frac{x}{a}, \quad \frac{y'}{b_1} = \frac{y}{b}$$

und $r = r_,$.

Hierdurch wird nun

$$l\partial s = a_1 b_1 \partial\varphi'$$

und

$$R_, = i\mu a_1 b_1 \int \frac{\left(\frac{\alpha x}{a_1^2} + \frac{\beta y}{b_1^2} - 1\right)\partial\varphi'}{r^3}.$$

Da nun

$$\frac{\partial\varphi'}{r} = -\frac{d\psi}{M_,}$$

$$\frac{\beta y}{b_1^2}-1=-\left(\frac{\alpha(\alpha-x)}{a_1^2}+\frac{\beta(\beta-y)}{b_1^2}\right)=-r\left(\frac{\alpha\cos\psi}{a_1^2}+\frac{\beta\sin\psi}{b_1^2}\right),$$

rd, wenn weider $\psi=\varphi+\nu$ gesetzt wird,

$$\frac{\alpha x}{a_1^2}+\frac{\beta y}{b_1^2}-1=-\frac{r\cos\varphi}{p}$$

$$R_,=\frac{i\mu a_1 b_1}{p}\int\frac{\cos\varphi\partial\varphi}{rM_,}=\frac{i\mu a_1 b_1}{Lp}\int\frac{M\mp\frac{M_1}{ab}}{M_1}\cos\varphi\partial\varphi.$$

ür die Wirkung des ganzen Ringes fällt der algebraische Theil tegrals weg, und daher wird endlich

$$R_,=\frac{4i\mu a_1 b_1}{\lambda\sqrt{\lambda_1}}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi\partial\varphi}{\Delta(k,\varphi)}$$
$$=\frac{4i\mu a_1 b_1}{\lambda k^2\sqrt{\lambda_1}}\left(E(k,\frac{\pi}{2})-k_,^2F(k,\frac{\pi}{2})\right).$$

n kann die hier gefundenen Formeln leicht durch die gewöhn- Tangentenboussole, deren Ring in Form einer Ellipse gebe- t, prüfen.

XVI.

Theorie der losen Rolle.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

Sei $CM = CN$ (Taf. V. Fig. 1.) der Halbmesser (r) der losen Rolle; P das Gewicht der Rolle sammt dem daran hängenden Gewichte; A, B die Endpunkte des Seiles, dessen Länge $= s$ sei; M, N die Berührungspunkte des Seils mit der Rolle, so muss, wenn die gezeichnete Lage die des Gleichgewichts sein soll, Q, Q' die Spannungen der Seilstücke AM und BN sind, Gleichgewicht sein zwischen P, Q, Q' und zwar dauerndes. Die Kraft P wird in ihrer Richtung durch C gehen; verlegt man daher dorthin alle Kräfte, so erhält man drei Kräfte: P, Q, Q' in C, und zwei Kräftepaare, Q (Hebelarm r), Q' (Hebelarm r); also muss zunächst

$$Qr = Q'r,$$

d. h.

$$Q = Q' \qquad (1)$$

sein, d. h. die Seilstücke AM und BN sind gleich gespannt.

Sollen ferner die Kräfte P, Q, Q' in C im Gleichgewicht sein, so muss die Richtung von P den Winkel der Richtungen von Q und Q' halbiren, was offenbar darauf herauskommt, dass die Tangenten AM, BN an die Rolle sich in einem Punkte D schneiden müssen, der auf der Vertikalen CP liegt. Ist also BG horizontal und man verlängert PC, so ist CH senkrecht auf BG und, wie man leicht sieht, nun:

Winkel $MDC = CDN$, $MCD = NCD$, $MD = ND$, $BH = HG$. Eben so findet man leicht, wenn $BAD = \mu$, $ABD = \lambda$, $ABG = \varepsilon$,

$$DCN = \lambda + \varepsilon, \quad DCM = \mu - \varepsilon;$$

also

$$\lambda + \varepsilon = \mu - \varepsilon,$$

d. h.

$$\lambda = \mu - 2\varepsilon. \qquad (2)$$

Zugleich ist $DM = DN = r\,\mathrm{tg}(\mu - \varepsilon)$. In dem Dreieck ADB ist, wenn $AB = k$,

$$AD = \frac{k \sin\lambda}{\sin(\mu + \lambda)} = \frac{k \sin(\mu - 2\varepsilon)}{\sin 2(\mu - \varepsilon)},$$

$$BD = \frac{k \sin\mu}{\sin(\mu + \lambda)} = \frac{k \sin\mu}{\sin 2(\mu - \varepsilon)};$$

also

$$AM = \frac{k \sin(\mu - 2\varepsilon)}{\sin 2(\mu - \varepsilon)} - r\,\mathrm{tg}(\mu - \varepsilon), \quad BN = \frac{k \sin\mu}{\sin 2(\mu - \varepsilon)} - r\,\mathrm{tg}(\mu - \varepsilon).$$

Zur Bestimmung des Winkels μ, also auch λ, bemerke man, dass $AM + BN +$ Bogen $MN = a$ sein muss. Ist nun μ sowohl als ε analytisch, d. h. in Theilen des Halbmessers 1 ausgedrückt (gemessen durch die Länge des zugehörigen Bogens, dessen Halbmesser 1 ist), so giebt diese Bedingung, da $MCN = \lambda + \mu = 2\mu - 2\varepsilon$ ist:

$$\frac{k[\sin\mu + \sin(\mu - 2\varepsilon)]}{\sin 2(\mu - \varepsilon)} - 2r\,\mathrm{tg}(\mu - \varepsilon) + 2r(\mu - \varepsilon) = a,$$

oder auch:

$$\frac{k \cos\varepsilon - 2r \sin(\mu - \varepsilon)}{\cos(\mu - \varepsilon)} + 2r(\mu - \varepsilon) = a. \qquad (3)$$

Vermittelst dieser Entwicklungen ist es nun leicht, die Gleichgewichtslage der losen Rolle zu bestimmen. Man ziehe nämlich AB, sodann durch B eine Horizontale; bestimme den Winkel μ durch die Gleichung (3) und ziehe AD so, dass $BAD = \mu$; verlängere DA rückwärts, bis sie die Horizontale in G trifft, halbire BG und ziehe HC senkrecht auf BG in der Mitte H von BG, so liegt der Mittelpunkt der Rolle auf dieser Linie, vorausgesetzt, dass ausser der Schwere keine andern Kräfte auf die Rolle wirken. Wären noch andere Kräfte vorhanden, so würde übrigens die ganze Entwicklung gelten, wenn nur BG senkrecht auf der Richtung der Mittelkraft wäre.

Den Punkt C selbst findet man, wenn man in irgend ei[illegible] Punkte S der Linie AD die SF senkrecht auf AD zieht, SF[illegible] macht und durch F eine Parallele mit AD zieht. Der Du[illegible] schnittspunkt dieser Linie mit HC giebt die Lage des P[illegible] C an.

Uebrigens ist auch

$$AC=\sqrt{r^2+AM^2}$$

$$=\sqrt{\frac{k^2\sin^2(\mu-2\varepsilon)}{\sin^2 2(\mu-\varepsilon)}-\frac{2rk\sin(\mu-2\varepsilon).\sin(\mu-\varepsilon)}{\sin 2(\mu-\varepsilon)}+\frac{r^2}{\cos^2(\mu-\varepsilon)}},$$

$$BC=\sqrt{r^2+BN^2}$$

$$=\sqrt{\frac{k^2\sin^2\mu}{\sin^2 2(\mu-\varepsilon)}-\frac{2rk\sin\mu.\sin(\mu-\varepsilon)}{\sin 2(\mu-\varepsilon)}+\frac{r^2}{\cos^2(\mu-\varepsilon)}},$$

wodurch die Lage von C ebenfalls bestimmt ist.

Was die Grösse der Kräfte Q betrifft, so ist bekanntl[illegible]

$$Q=\frac{Pr}{MN}=\frac{P}{2\sin(\mu-\varepsilon)}. \tag{5}$$

In dem besondern Falle, da

$$k\cos\varepsilon=2r, \tag{6}$$

sind die Seile AM und BN parallel; alsdann also ist der [illegible] D nicht vorhanden und die vorstehenden Entwicklungnn [illegible] nicht. In diesem besondern Falle findet man aber leicht,

$$Q=\frac{P}{\varepsilon},\quad BN=AM+k\sin\varepsilon, \tag{7}$$

$$AM+BN+r\pi=a;$$

also

$$AM=\frac{a-r\pi-k\sin\varepsilon}{2}=\frac{a-r\pi}{2}-r\,\mathrm{tg}\,\varepsilon$$

ist, während C in der Mitte der Linie MN ist.

$$\mu=90+\varepsilon,\quad \lambda=90-\varepsilon.$$

Da das Gleichgewicht dauernd sein soll, so nimmt i[illegible] Fällen die Rolle die möglichst tiefste Stellung an.

Aus der Gleichung (3) folgt, dass so lange

$$k\cos\varepsilon>2r,$$

was wir im Obigen vorausgesetzt, auch

$$\mu-\varepsilon<\frac{\pi}{2}, \quad \mu<\frac{\pi}{2}+\varepsilon$$

denn $BG>MN$, d. h.

$$k\cos\varepsilon>2r\sin(\mu-\varepsilon),$$

$$k\cos\varepsilon-2r\sin(\mu-\varepsilon)>0;$$

ist aber $2r(\mu-\varepsilon)<a$, also muss

$$\frac{k\cos\varepsilon-2r\sin(\mu-\varepsilon)}{\cos(\mu-\varepsilon)}>0,$$

$$\cos(\mu-\varepsilon)>0 \text{ oder } \mu-\varepsilon<\frac{\pi}{2}$$

Für den Fall, dass

$$k\cos\varepsilon<2r,$$

n dieselben Formeln, wie oben; nur ist hier

$$\mu-\varepsilon>\frac{\pi}{2}.$$

Man sieht also aus den vorstehenden Entwicklungen, dass für eine
mmte Last P und bestimmte Endpunkte des Seils, Q mit von
. h. von der Seillänge abhängt, und sich mit ihr verändert.
man in der Gleichung (3) $\mu-\varepsilon=\omega$, so ergiebt sich

$$\frac{\partial\omega}{\partial a}=\frac{\cos^2\omega}{\sin\omega(k\cos\varepsilon-2r\sin\omega)}.$$

nn diese Grösse für $k\cos\varepsilon>2r$ positiv, für $k\cos\varepsilon<2r$ nega-
it, so folgt daraus, dass im ersten Falle μ mit a wächst und
nmt, und im zweiten Falle das Gegentheil statt hat.

Die Entfernung HC des Mittelpunkts von der Horizontalen
t sich:

$$HC=\frac{k\sin\mu-2r}{\cos(\mu-\varepsilon)};$$

wächst also mit wachsendem a und nimmt ab mit abnehmen-
a. Zugleich ist

$$BH = \frac{k\sin\mu}{2\sin(\mu-\varepsilon)}.$$

So lange $\mu < \frac{\pi}{2}$, ist immer

$$\sin\mu > \sin(\mu-\varepsilon), \text{ also } BH > \frac{k}{2};$$

für

$$\mu = \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ ist } BH = \frac{k}{2};$$

auch sieht man, dass BH zunimmt, wenn μ abnimmt und umgekehrt.

Legt man also ein Koordinatensystem so, dass B (der höhere der Endpunkte) der Anfangspunkt, BG die Richtung der positiven Axe der x, eine Senkrechte in B auf BG, nach unten gerichtet, die Axe der y, so sind die Koordinaten x, y von C:

$$x = \frac{k}{2}\,\frac{\sin\mu}{\sin(\mu-\varepsilon)}, \quad y = \frac{k\sin\mu}{\cos(\mu-\varepsilon)} - \frac{2r}{\cos(\mu-\varepsilon)}.$$

Eliminirt man μ zwischen diesen zwei Gleichungen, so erhält man die Gleichung der Kurve, welche der Punkt C beschreibt.

XVII.

Ueber die kürzeste Entfernung zweier Punkte auf der Oberfläche einer Kugel.

(Nach Thomas, aus den Nouv. Annales. Juillet 1849.)

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

Es ist bekanntlich der Bogen eines grössten Kreises die kürzeste Linie auf der Kugeloberfläche zwischen zwei Punkten. Der nachfolgende Beweis dieses Satzes scheint strenge zu sein, da z. B. der Legendre'sche Beweis schon voraussetzt, dass es eine einzige kürzeste Linie gebe, was nicht der Fall ist, wenn man die Endpunkte eines Durchmessers verbindet, da alsdann unendlich viele gleich kurze Linien möglich sind. Der eigentliche Beweis kommt darauf hinaus, zu zeigen, dass ein Bogen eines grössten Kreises zwischen zwei Punkten kleiner ist, als jede andere Linie zwischen denselben Punkten, die man auf der Kugeloberfläche ziehen kann.

Seien in Taf. V. Fig. 2. A, B die zwei Punkte, AMB der Bogen des grössten Kreises zwischen ihnen. Sei AJB eine andere Linie auf der Kugel, und man will beweisen, dass

$$AMB < AJB.$$

Seien C, D, E Punkte auf AJB; man ziehe die Bögen grösster Kreise AC, CD, DE, EB, AD, AE; so ist

$$\begin{aligned} AMB &< AE + BE \\ AE &< AD + DE \\ AD &< AC + CD \\ \hline \text{also}\quad AMB &< BE + DE + CD + AC. \end{aligned}$$

Dieser Satz gilt, wie viele Punkte C, D.. man auch auf AJB annehme; er gilt also auch noch, wenn man unendlich viele annimmt, so dass sie unendlich nahe bei einander liegen.

Thut man diess aber, so ist die Summe aller Bögen $BE + ED + \ldots$ gleich zu setzen der Linie AJB; denn die Summe der Bögen $BE + ED + \ldots$ wird gleich sein der Summe der Sehnen $BE + ED + \ldots$, und diese gleich der Linie AJB. Man kann diess auch so ausdrücken:

Sei S die Summe der Bögen $BE + ED + \ldots$, R die Summe der Sehnen $BE + ED + \ldots$, so wird der Unterschied $S - R$ immer kleiner, je grösser die Anzahl der Bögen wird. Ist also

$$S - R = \alpha,$$

so wird α der Null sich unendlich nähern, wenn die Anzahl der Bögen ins Unendliche wächst. Ganz dasselbe wird mit β der Fall sein, wenn

$$AJB - R = \beta.$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt, dass

$$AJB - S = \beta - \alpha,$$

d. h. $AJB - S$ wird sich der Null mit wachsender Anzahl nähern. Da aber immer

$$AMB < S,$$

so ist auch

$$AMB < AJB.$$

XVIII.

Eine Aufgabe über ein Maximum.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

Die folgende Aufgabe über ein Maximum, die Herr Professor Decrue an der Académie in Genf im Schuljahre $18^{40}/_{41}$ seinen Schülern, zu denen ich damals auch gehörte, stellte, habe ich noch nirgends veröffentlicht gesehen, halte sie jedoch der Veröffentlichung werth, indem ich zugleich die Auflösung beifüge. Sie lautet:

Es stellen AH und BJ (Taf. V. Fig. 3.) zwei Häuser vor, welche durch eine Strasse von der Breite AB getrennt sind. Man will den Balken DE zur Thüre BC hineinbringen; da aber die Strasse enge ist, so sieht man sich genöthigt, ihn an AG aufzurichten und dann D (das Ende) an der Wand AG herabgleiten zu lassen. Wenn man nun die Breite AB, die Höhe BC und die Länge des Balkens DE kennt, so entsteht die Frage, ob man den letztern zur Thüre hineinbringen kann?

Es ist klar, dass der Balken nicht wird in das Haus gebracht werden können, wenn es sich ereignete, dass, indem er sich an die Wand AD lehnt und in das Haus BJ hineinreicht, er zugleich die Thüre am obern Ende C berührt. Damit er somit in das Haus hinein gebracht werden kann, muss keine Stellung möglich sein von der genannten Art. Man hat also als Bedingung der Möglichkeit des Hineinbringens die, dass das Maximum der Erhebung des Balkens unter der Thüre kleiner sei als die Höhe BC, oder allerhöchstens gleich BC.

Sei nun

$$AB=a,\ DE=l,\ BC=h,\ BE=x,\ BR=y;$$

so ist

$$BE : ER = EA : ED, \text{ d. h. } x : ER = x + a : l;$$

also

$$ER = \frac{lx}{x+a}, \quad BR = \sqrt{RE^2 - BE^2} = y = \frac{x}{x+a}\sqrt{l^2 - (x+a)^2}.$$

Da nun das Maximum von $y \stackrel{=}{<} h$, so muss man zunächst dieses Maximum suchen. Es ist aber

$$\frac{\partial y}{\partial x} =$$

$$(x+a)^{-2}(l^2-(a+x)^2)^{-\frac{1}{2}}\{(x+a)(l^2-(x+a)^2)-x(l^2-(x+a)^2)-x(x+a)^2\}.$$

Setzt man dieses gleich Null, so ist

$$(x+a)\{l^2-(x+a)^2\}-x(l^2-(a+x)^2)-x(x+a)^2=0,$$

d. h.

$$a(l^2-(a+x)^2)-x(a+x)^2=0,$$

$$al^2=(a+x)^3, \quad x=-a+\sqrt[3]{al^2}.$$

Der entsprechende Werth von y ist:

$$l\left(1-\sqrt[3]{\frac{a^2}{l^2}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Damit also der Balken in das Haus hineingehe, muss immer

$$l\left(1-\sqrt[3]{\frac{a^2}{l^2}}\right)^{\frac{3}{2}} \stackrel{=}{<} h,$$

d. h.

$$1-\sqrt[3]{\frac{a^2}{l^2}} \stackrel{=}{<} \sqrt[3]{\frac{h^2}{l^2}}$$

oder

$$\sqrt[3]{\frac{h^2}{l^2}}+\sqrt[3]{\frac{a^2}{l^2}} \stackrel{=}{>} 1 \text{ oder } \sqrt[3]{h^2}+\sqrt[3]{a^2} \stackrel{=}{>} \sqrt[3]{l^2}$$

sein.

XIX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

lem Herrn Doctor J. Dienger, Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

1) $$\int_0^\infty \frac{\sin at.\partial t}{e^{2\pi t}-1} = \frac{a-e^a+1}{2a(e^a-1)}+\frac{1}{4}.$$

2) Ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

Gleichung einer Ellipse, (α, β) ein Punkt in der Ebene der se, und man bezeichnet die Grösse

$$\int_0^a \sqrt{(x-\alpha)^2+\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-\beta\right)^2}.\partial x \text{ durch } \varphi(\alpha, \beta),$$

st die mittlere Entfernung des Punktes (α, β) von der se:

$$\frac{1}{4a}[\varphi(\alpha,\beta)+\varphi(\alpha,-\beta)+\varphi(-\alpha,\beta)+\varphi(-\alpha,-\beta)].$$

Für den Fall, dass $\beta=0$, erhält man als mittlere Entfer , wenn $a>\alpha$:

$$\frac{(a^2-b^2-a\alpha)(a-\alpha)+a(a^2-b^2+a\alpha)(a+\alpha)}{2(a^2-b^2)}$$

$$+\frac{ab^2\sqrt{a^2-b^2}}{2(a^2-b^2)^2}(a^2-b^2-\alpha^2)\log\left\{\frac{a^2-b^2-2a\alpha+(a-\alpha)\sqrt{a^2-b^2}}{-a\alpha+\sqrt{b^2+\alpha^2}\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{a^2-b^2+2a\alpha+(a+\alpha)\sqrt{a^2-b^2}}{a\alpha+\sqrt{b^2+\alpha^2}\sqrt{a^2-b^2}}\right\}$$

3) Der Körper A habe zwei geradlinige Bewegungen nach AB und AE (Taf. V. Fig. 4.), beide so, dass, wenn D und C die Orte am Ende der ersten Sekunde, B, E am Ende der Zeit t wären,

$$AB = AD.\varphi(t), \quad AE = AC.\varphi(t),$$

worin $\varphi(t)$ irgend eine Funktion von t ist. Für diesen Fall bewegt er sich auf der Diagonale des Parallelogramms $ADGC$ über AD und AC und zwar so, dass, wenn G, F die Orte am Ende der ersten Sekunde und der Zeit t sind, auch

$$AF = AG.\varphi(t).$$

Von dem Herrn Doctor E. W. Grebe, Gymnasiallehrer zu Cassel.

Werden über den drei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks gleichseitige Dreiecke beschrieben, so sind bekanntlich die Dreiecke über den beiden Catheten zusammen genommen so gross als das Dreieck über der Hypotenuse. Geradlinige Figuren aber, welche an Flächenraum gleich sind, lassen sich auch immer in Stücke zerschneiden, welche beziehungsweise congruent sind. Solche Zerschneidungen, an den genannten Dreiecken vorgenommen, sind hier in den Figuren Taf. V. Fig. 5., Fig. 6., Fig. 7. bereits ausgeführt, und es wird neben Feststellung der Construction der Beweis für die Richtigkeit verlangt. Taf. V. Fig. 5. repräsentirt die Fälle, in welchen die Differenz der beiden spitzen Winkel des rechtwinkeligen Dreiecks $< 30^0$; Taf. V. Fig. 6. den Fall, in welchem sie $= 30^0$; und Taf. V. Fig. 7. die Fälle, wo dieselbe $> 30^0$ ist. In jeder Figur sind die entsprechenden Flächenstücke mit derselben Zahl bezeichnet.

Druckfehler.

Auf S. 113. und S. 129. unten links setze man „Theil XIV." statt „Theil XVI."

XX.

Ueber die näherungsweise Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale.

Von
dem Herausgeber.

§. 1.

Bei allen Anwendungen der Mathematik kommt man häufig in den Fall, die Werthe bestimmter Integrale näherungsweise ermitteln zu müssen, wofür ich als ein sehr in die Augen fallendes Beispiel nur die Schiffsbaukunst anführen will, indem man bei der Bestimmung der Schiffsräume, der Schwerpunkte, der Stabilität und der Trägheitsmomente (letzterer namentlich wegen des Schlingerns und Stampfens der Schiffe), der Bestimmung des Widerstandes, welchen die Schiffe bei der Bewegung im Wasser erleiden, u. s. w. immer auf die näherungsweise Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale hingewiesen ist. Ich halte es daher für zweckmässig, diejenigen Methoden, welche man nach meiner Meinung in der Praxis am vortheilhaftesten in Anwendung zu bringen hat, in der vorliegenden Abhandlung mit möglichster Deutlichkeit und in möglichst elementarer Weise zu entwickeln, ohne dabei eine völlig erschöpfende und ganz allgemeine Darstellung dieses höchst wichtigen Gegenstandes zu erstreben, indem ich, wie gesagt, mein Augenmerk für jetzt hauptsächlich auf die praktische Anwendung gerichtet habe, für welche es nach meiner Meinung weder nothwendig noch zweckmässig sein dürfte, die Darstellung bis zu vollständiger Allgemeinheit zu erheben. Wenn auch die vorliegende Abhandlung nothwendig manches Bekannte enthalten muss, so dürfte doch auch manches Neue in derselben vorkommen, indem z. B. das Princip der nach meiner Meinung namentlich auch praktisch sehr wichtigen Correctionsformeln von **Stirling** noch nicht so klar wie hier aufgedeckt worden sein möchte, indem ich mich bemüht habe, einen ganz allgemeinen Beweis dieser wichtigen Formeln zu geben. Auf einige specielle Anwendungen werde ich vielleicht späterhin zurückkommen.

§. 2.

Wir wollen also annehmen, dass y eine beliebige Function der unabhängigen veränderlichen Grösse x sei, und dass der Werth des bestimmten Integrals

$$\int_a^b y\partial x,$$

wo a und b bekanntlich die sogenannten Gränzen der Integration, a die untere und b die obere Gränze, sind, durch Annäherung bestimmt werden solle. Hierbei können nun zwei Fälle eintreten, jenachdem nämlich die Art der Abhängigkeit der Function y von der unabhängigen veränderlichen Grösse x vollständig bekannt oder unbekannt ist; und der letztere dieser beiden Fälle ist derjenige, welcher z.B. in der Schiffsbaukunst am Häufigsten, eigentlich nur allein, vorkommt. Mag nun aber der eine oder der andere dieser beiden Fälle vorliegen, so wollen wir doch immer annehmen, dass eine Reihe zusammenstimmender oder einander entsprechender Werthe von x und y bekannt oder gegeben sei. Dass wir zu dieser Annahme stets berechtigt sind, und nur die Art und Weise verschieden ist, wie man in den beiden in Rede stehenden Fällen zu den, gewissen bestimmten Werthen der unabhängigen veränderlichen Grösse x, welche natürlich stets im Allgemeinen der ganz willkührlichen Annahme anheim gestellt bleiben, entsprechenden Werthen der Function y dieser veränderlichen Grösse gelangt, wird sogleich erhellen, und kann auf folgende Art leicht deutlich gemacht werden. Wenn nämlich zuerst die Art der Abhängigkeit der Function y von der veränderlichen Grösse x vollständig bekannt, d. h. y eine gegebene Function von x ist, so ist dadurch natürlich sogleich von selbst die Möglichkeit geboten, die den willkührlich angenommenen Werthen von x, welche man der ganzen Rechnung zum Grunde zu legen beabsichtigt, entsprechenden Werthe der Function y vermittelst der durch die Form dieser, ihrer Abhängigkeit von x nach, vollständig bekannten Function unmittelbar und ganz von selbst vorgeschriebenen Rechnungsoperationen zu berechnen. Wenn dagegen die Form der von x abhängigen Function y nicht bekannt ist, so werden doch, um das schon vorher gebrauchte Beispiel der Schiffsbaukunst beizubehalten, x und y jedenfalls immer die allgemeinen analytischen Symbole zweier an dem Schiffskörper selbst sich vorfindenden, in einer gewissen Abhängigkeit von einander stehenden Grössen sein, die einer genauen Messung mit dazu geeigneten Instrumenten oder Apparaten unterzogen werden können; man wird also an dem Schiffskörper t einige Werthe der an demselben sich findenden und durch lben unmittelbar dargelegten, im Allgemeinen durch das ol x bezeichneten Grösse genau messen, ferner die an dem körper sich ebenfalls vorfindenden, und durch denselben telbar dargelegten, den angenommenen Werthen von x rechenden oder davon abhängenden und durch dieselbestimmten Werthe der im Allgemeinen durch y bezeichne-Grösse gehörig aufsuchen und gleichfalls einer genauen Mes-unterwerfen; und wird sich also auf diese Weise auch in vorliegenden Falle, welcher in der That, wie schon bemerkt n ist, derjenige ist, welcher z.B. in der Schiffsbaukunst vorzugs-und eigentlich nur allein vorkommt, in den Besitz einer zusammenstimmender oder einander entsprechender Werthe x und y zu setzen im Stande sein.

§. 3.

achdem hierdurch gezeigt worden ist, dass die beiden oben bezeichneten Fälle im Wesentlichen durchaus nicht von der verschieden sind, dürfen wir uns also immer berechtigt , eine Reihe zusammenstimmender oder einander entspre-er Werthe der unabhängigen veränderlichen Grösse x und Function y als bekannt anzunehmen, und können unter die-oraussetzung nun das Princip, welches der approximativen ationsmethode, deren Entwickelung den Gegenstand dieser ndlung ausmachen wird, im Allgemeinen zum Grunde liegt, auf de Art aussprechen, wenn auch weitere Ergänzungen und erungen desselben im Laufe unserer Untersuchung selbst mehrere vorkommen werden.

em Obigen zufolge wollen wir annehmen, dass den n gege-Werthen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots a_n$$

nabhängigen veränderlichen Grösse x die gleichfalls gegebe-Werthe

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots A_n$$

unction y dieser veränderlichen Grösse entsprechen. Ferner n wir grösserer Deutlichkeit oder vielmehr Anschaulichkeit n uns die n gegebenen Werthe der unabhängigen veränder-Grösse x als eben so viele Abscissen, und die n gegebe-Werthe der Function y als die diesen Abscissen entsprechen-Ordinaten der Punkte einer Curve denken, deren Natur, wir den Buchstaben f wie gewöhnlich als ein allgemeines tionszeichen gebrauchen, im Allgemeinen durch die Gleichung

$$y=f(x)$$

drückt oder charakterisirt wird. Nach dieser Vorstellungs-sind uns also n Punkte der durch die vorstehende Gleichung charakterisirten Curve gegeben, und wenn wir nun durch diese n gegebenen Punkte eine im Allgemeinen durch die Gleichung

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_{m-1} x^{m-1}$$

charakterisirte parabolische Curve des $(m-1)$sten Grades hindurch legen, so werden wir uns zu der Annahme berechtigt halten dürfen, dass diese parabolische Curve im Allgemeinen sich desto enger oder inniger an die durch die Gleichung $y = f(x)$ charakterisirte Curve anschliessen, oder, was augenscheinlich dasselbe ist, dass durch die Function

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_{m-1} x^{m-1}$$

die Function $y = f(x)$ desto genauer dargestellt werden wird, je mehr Punkte die beiden Curven mit einander gemein haben, d. h. nach dem Obigen, je mehr einander entsprechende Werthe von x und y als gegeben angenommen oder zum Grunde gelegt worden sind. Da es nun aber hierbei natürlich darauf ankommt, die Gleichung

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_{m-1} x^{m-1}$$

der durch die n gegebenen Punkte, deren Coordinaten nach dem Obigen

$$a_1,\ A_1;\ a_2,\ A_2;\ a_3,\ A_3;\ldots;\ a_n,\ A_n$$

sind, welche in der durch die Gleichung $y = f(x)$ charakterisirten Curve liegen, hindurch gehenden parabolischen Curve genau kennen zu lernen; so handelt es sich, eben weil diese parabolische Curve durch die n gegebenen Punkte gehen soll, offenbar darum, die Coefficienten

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ldots \alpha_{m-1}$$

in der allgemeinen Gleichung

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_{m-1} x^{m-1}$$

der parabolischen Curve so zu bestimmen, dass den n Gleichungen

$$A_1 = \alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_1^2 + \alpha_3 a_1^3 + \ldots + \alpha_{m-1} a_1^{m-1},$$

$$A_2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_2^2 + \alpha_3 a_2^3 + \ldots + \alpha_{m-1} a_2^{m-1},$$

$$A_3 = \alpha_0 + \alpha_1 a_3 + \alpha_2 a_3^2 + \alpha_3 a_3^3 + \ldots + \alpha_{m-1} a_3^{m-1},$$

u. s. w.

$$A_n = \alpha_0 + \alpha_1 a_n + \alpha_2 a_n^2 + \alpha_3 a_n^3 + \ldots + \alpha_{m-1} a_n^{m-1};$$

welche in Bezug auf die unbekannten Grössen

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ldots \alpha_{m-1}\ .$$

stlich vom ersten Grade sind, genügt wird. Hieraus sieht
dass es, wenn diese Bestimmung mit völliger Bestimmtheit
ich sein soll, keineswegs der freien Willkühr anheim gestellt
t, wie gross man die den Grad der gesuchten parabolischen
bestimmende Grösse m annehmen will, indem man offenbar,
man immer gerade eben so viele Gleichungen wie zu be-
nende unbekannte Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ erhalte, nur
setzen kann, wodurch man die n Gleichungen des ersten
es

$$A_1 = \alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_1^2 + \alpha_3 a_1^3 + \ldots + \alpha_{n-1} a_1^{n-1},$$
$$A_2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_2^2 + \alpha_3 a_2^3 + \ldots + \alpha_{n-1} a_2^{n-1},$$
$$A_3 = \alpha_0 + \alpha_1 a_3 + \alpha_2 a_3^2 + \alpha_3 a_3^3 + \ldots + \alpha_{n-1} a_3^{n-1},$$
u. s. w.
$$A_n = \alpha_0 + \alpha_1 a_n + \alpha_2 a_n^2 + \alpha_3 a_n^3 + \ldots + \alpha_{n-1} a_n^{n-1}.$$

en n unbekannten Grössen

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{n-1}$$

, welche letzteren sich also mittelst dieser n Gleichungen
ersten Grades im Allgemeinen immer ohne Zweideutigkeit
nmen lassen.

lat man nun aber die Coefficienten

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{n-1}$$

iese Weise bestimmt, so wird im Allgemeinen, wenigstens
n Intervalle, welches die zum Grunde gelegten Werthe der
ängigen veränderlichen Grösse x umfassen, mit desto grös-
Genauigkeit, je mehr Werthe von x in diesem Intervalle
denselben entsprechende Werthe von y zum Grunde gelegt
n sind, oder je mehr Punkte in diesem Intervalle die durch
leichung $y = f(x)$ charakterisirte Curve und die durch die
ung

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$$

kterisirte parabolische Curve des $(n-1)$sten Grades mit ein-
gemein haben,

$$y = f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$$

st, oder die Function $y = f(x)$ durch die ganze rationale
raische Function des $(n-1)$sten Grades

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$$

stellt werden können.

Nimmt man nun die zum Grunde gelegten Werthe von x in dem Intervalle von $x=a$ bis $x=b$, so wird innerhalb dieses Intervalls mit desto grösserer Genauigkeit, je mehr Werthe von x und denselben entsprechende Werthe von y man zum Grunde gelegt hat,

$$y=f(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\ldots+\alpha_{n-1} x^{n-1},$$

also auch

$$y\partial x=f(x)\partial x=(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\ldots+\alpha_{n-1} x^{n-1})\partial x,$$

und folglich offenbar auch

$$\int_a^b y\partial x=\int_a^b f(x)\,\partial x$$

$$=\int_a^b (\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\ldots+\alpha_{n-1} x^{n-1})\partial x,$$

d. i.

$$\int_a^b y\partial x=\int_a^b f(x)\,\partial x$$

$$=\alpha_0\int_a^b \partial x+\alpha_1\int_a^b x\partial x+\alpha_2\int_a^b x^2\partial x+\ldots+\alpha_{n-1}\int_a^b x^{n-1}\,\partial x,$$

also

$$\int_a^b y\partial x=\int_a^b f(x)\,\partial x$$

$$=\alpha_0(b-a)+\frac{1}{2}\alpha_1(b^2-a^2)+\frac{1}{3}\alpha_2(b^3-a^3)+\ldots+\frac{1}{n}\alpha_{n-1}(b^n-a^n)$$

gesetzt werden können, und hierdurch folglich der gesuchte Werth des bestimmten Integrals

$$\int_a^b y\partial x=\int_a^b f(x)\partial x$$

näherungsweise gefunden sein, im Allgemeinen immer mit desto grösserer Genauigkeit, je mehr Werthe von x in dem durch die Integrationsgränzen bestimmten Intervalle und denselben entsprechende Werthe von y bei der Bestimmung der Coefficienten α_0, α_1, α_2, α_3, ... α_{n-1} zum Grunde gelegt worden sind, oder von einem je höheren Grade die durch die Gleichung

$$y=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\ldots+\alpha_{n-1} x^{n-1}$$

akterisirte parabolische Curve ist, welche man in dem ...
e stehenden Intervalle mit der durch die Gleichung $y=f(x)$
akterisirten Curve in Uebereinstimmung gebracht hat.

Dies ist im Allgemeinen das Princip der Näherungsmethode zur
ittelung der Werthe bestimmter Integrale, welche wir nun
er entwickeln wollen, indem wir jedoch vorläufig bemerken,
wir bei dieser Entwickelung nicht ganz den im Vorhergehen-
angegebenen Weg, welcher sich übrigens allerdings auch
chlagen liesse, verfolgen werden, weil eine etwas andere Ent-
elungsweise, wie wir sogleich sehen werden, in mancher
sicht leichter und schneller zum Zwecke führt. Hier kam es
für jetzt nur darauf an, den Geist der Methode den Lesern
Allgemeinen mit möglichster Deutlichkeit vor die Augen zu
n, und dazu schien uns der im Vorhergehenden eingeschla-
Weg der geeignetste zu sein.

§. 4.

Es mag jetzt wieder

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots a_n$$

Reihe von n gegebenen Werthen der unabhängigen veränder-
n Grösse x, und

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ldots A_n$$

Reihe der diesen Werthen von x entsprechenden, gleichfalls
benen n Werthe der Function y der veränderlichen Grösse
n. Unter dieser Voraussetzung wollen wir uns nun die Auf-
stellen, die Function y so zu bestimmen, dass sie die Form
ganzen rationalen algebraischen Function des $(n-1)$sten
es von x habe und, wenn man für x die Werthe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots a_n$$

einführt, respective die Werthe

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ldots A_n$$

te. Um diese Aufgabe aber mit Leichtigkeit aufzulösen, wol-
wir die Function y nicht in der gewöhnlichen Form der gan-
rationalen algebraischen Functionen des $(n-1)$sten Grades
hmen, wie dies im vorhergehenden Paragraphen geschehen
sondern wir wollen, nach einem schon von dem scharfsinni-
englischen Mathematiker Jacob Stirling in seiner selbst
immer noch wichtigen Methodus differentialis: sive
ctatus de summatione et interpolatione serierum
nitarum. Londini. 1730. 4°. p. 139. Prop. XXIX. be-
en sinnreichen Verfahren, die ganze rationale algebraische

Function y des $(n-1)$sten Grades uns unter der Form

$$\begin{aligned}
y = \; & \mathfrak{A}_1 \\
& + \mathfrak{A}_2 (x-a_1) \\
& + \mathfrak{A}_3 (x-a_1)(x-a_2) \\
& + \mathfrak{A}_4 (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \\
& \quad \text{u. s. w.} \\
& + \mathfrak{A}_n (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \ldots (x-a_{n-1}),
\end{aligned}$$

wo die Symbole

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_4, \ldots \mathfrak{A}_n$$

gewisse von x unabhängige Coefficienten bezeichnen, dargestellt denken, wobei zugleich auf der Stelle in die Augen fällt, dass, wenn man die Function y unter dieser Form den Bedingungen der Aufgabe gemäss darzustellen im Stande ist, daraus dann immer auch leicht die gewöhnliche Form der ganzen rationalen algebraischen Functionen des $(n-1)$sten Grades abgeleitet werden kann.

Zur Bestimmung der n von x unabhängigen Coefficienten

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_4, \ldots \mathfrak{A}_n$$

liefern uns aber die Bedingungen der Aufgabe unmittelbar die folgenden Gleichungen:

$$A_1 = \mathfrak{A}_1$$
$$A_2 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2(a_2 - a_1),$$
$$A_3 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2(a_3 - a_1) + \mathfrak{A}_3(a_3 - a_1)(a_3 - a_2),$$
$$A_4 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2(a_4 - a_1) + \mathfrak{A}_3(a_4 - a_1)(a_4 - a_2) + \mathfrak{A}_4(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3),$$
u. s. w.
$$A_n = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2(a_n - a_1) + \mathfrak{A}_3(a_n - a_1)(a_n - a_2) + \mathfrak{A}_4(a_n - a_1)(a_n - a_2)(a_n - a_3) + \ldots + \mathfrak{A}_n(a_n - a_1)(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1});$$

und es ist klar, dass mittelst dieser n Gleichungen, welche in Beziehung auf

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_4, \ldots \mathfrak{A}_n$$

sämmtlich vom ersten Grade sind, diese Coefficienten nach und nach, oder, wie man zu sagen pflegt, recurrirend ohne Schwierigkeit bestimmt werden können.

Wir wollen nun aber einen independenten Ausdruck des allgemeinen Coefficienten $\mathfrak{A}_k$ suchen, zu dessen Bestimmung wir nach dem Vorhergehenden die Gleichungen

$$A_1 = \mathfrak{A}_1,$$
$$A_2 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2(a_2 - a_1),$$
$$A_3 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2(a_3 - a_1) + \mathfrak{A}_3(a_3 - a_1)(a_3 - a_2),$$
$$A_4 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2(a_4 - a_1) + \mathfrak{A}_3(a_4 - a_1)(a_4 - a_2) + \mathfrak{A}_4(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3),$$
u. s. w.
$$A_k = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2(a_k - a_1) + \mathfrak{A}_3(a_k - a_1)(a_k - a_2) + \mathfrak{A}_4(a_k - a_1)(a_k - a_2)(a_k - a_3) + \ldots + \mathfrak{A}_k(a_k - a_1)(a_k - a_2)\ldots(a_k - a_{k-1})$$

haben.

Multipliciren wir diese Gleichungen nach der Reihe mit den Brüchen

$$\frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)\ldots(a_1-a_k)},$$

$$\frac{1}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\ldots(a_2-a_k)},$$

$$\frac{1}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\ldots(a_3-a_k)},$$

$$\frac{1}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\ldots(a_4-a_k)},$$

u. s. w.

$$\frac{1}{(a_k-a_1)(a_k-a_2)(a_k-a_3)(a_k-a_4)\ldots(a_k-a_{k-1})}$$

und addiren die dadurch nach einigen ganz leichten Reductionen entstehenden Gleichungen zu einander, so erhalten wir zwischen den Coefficienten

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_4, \ldots \mathfrak{A}_k$$

die folgende Gleichung:

$$\frac{A_1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)\ldots(a_1-a_k)}$$

$$+\frac{A_2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\ldots(a_2-a_k)}$$

$$+\frac{A_3}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\ldots(a_3-a_k)}$$

$$+\frac{A_4}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\ldots(a_4-a_k)}$$

u. s. w.

$$+\frac{A_k}{(a_k-a_1)(a_k-a_2)(a_k-a_3)(a_k-a_4)\ldots(a_k-a_{k-1})}$$

$$
= \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)\ldots(a_1-a_k)} \\
+\dfrac{1}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\ldots(a_2-a_k)} \\
+\dfrac{1}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\ldots(a_3-a_k)} \\
+\dfrac{1}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\ldots(a_4-a_k)} \\
\qquad\qquad \text{u. s. w.} \\
+\dfrac{1}{(a_k-a_1)(a_k-a_2)(a_k-a_3)(a_k-a_4)\ldots(a_k-a_{k-1})}
\end{array}
\right\} \mathfrak{A}_1
$$

$$
+ \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\ldots(a_2-a_k)} \\
+\dfrac{1}{(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\ldots(a_3-a_k)} \\
+\dfrac{1}{(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\ldots(a_4-a_k)} \\
\qquad\qquad \text{u. s. w.} \\
+\dfrac{1}{(a_k-a_2)(a_k-a_3)(a_k-a_4)\ldots(a_k-a_{k-1})}
\end{array}
\right\} \mathfrak{A}_2
$$

$$
+ \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{(a_3-a_4)(a_3-a_5)\ldots(a_3-a_k)} \\
+\dfrac{1}{(a_4-a_3)(a_4-a_5)\ldots(a_4-a_k)} \\
\qquad\qquad \text{u. s. w.} \\
+\dfrac{1}{(a_k-a_3)(a_k-a_4)\ldots(a_k-a_{k-1})}
\end{array}
\right\} \mathfrak{A}_3
$$

$$
+ \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{(a_4-a_5)\ldots(a_4-a_k)} \\
\qquad\quad \text{u. s. w.} \\
+\dfrac{1}{(a_k-a_4)\ldots(a_k-a_{k-1})}
\end{array}
\right\} \mathfrak{A}_4
$$

u. s. w. | u. s. w.

$$
+ \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{a_{k-1}-a_k} \\
+\dfrac{1}{a_k-a_{k-1}}
\end{array}
\right\} \mathfrak{A}_{k-1}
$$

$$
+ \mathfrak{A}_k .
$$

Wenn man nun nach einer aus den Anfangsgründen der Integralrechnung allgemein bekannten Methode (m. s. z. B. meinen Leitfaden für den ersten Unterricht in der höhern Analysis. Leipzig. 1838. S. 150. §. 14.) die gebrochene rationale algebraische Function

$$\frac{1}{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_\mu)}$$

in sogenannte einfache oder Partialbrüche mit den Nennern

$$u-\alpha_1,\ u-\alpha_2,\ u-\alpha_3,\ u-\alpha_4,\ u-\alpha_5,\ldots u-\alpha_\mu$$

zerlegt, so erhält man nach der erwähnten Methode als Zähler dieser Brüche unmittelbar die folgenden Grössen:

$$\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_\mu)},$$

$$\frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_\mu)},$$

$$\frac{1}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_\mu)},$$

$$\frac{1}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_\mu)},$$

u. s. w.

$$\frac{1}{(\alpha_\mu-\alpha_1)(\alpha_\mu-\alpha_2)(\alpha_\mu-\alpha_3)(\alpha_\mu-\alpha_4)\ldots(\alpha_\mu-\alpha_{\mu-1})};$$

und es ist folglich

$$\frac{1}{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_\mu)}$$

$$=\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_\mu)(u-\alpha_1)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_\mu)(u-\alpha_2)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_\mu)(u-\alpha_3)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_\mu)(u-\alpha_4)}$$

u. s. w.

$$+\frac{1}{(\alpha_\mu-\alpha_1)(\alpha_\mu-\alpha_2)(\alpha_\mu-\alpha_3)(\alpha_\mu-\alpha_4)..(\alpha_\mu-\alpha_{\mu-1})(u-\alpha_\mu)},$$

also, wie man hieraus sogleich schliesst:

$$0=\frac{1}{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_\mu)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_1-u)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_\mu)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_2-u)(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_\mu)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_3-u)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_\mu)}$$

u. s. w.

$$+\frac{1}{(\alpha_\mu-u)(\alpha_\mu-\alpha_1)(\alpha_\mu-\alpha_2)(\alpha_\mu-\alpha_3)(\alpha_\mu-\alpha_4)..(\alpha_\mu-\alpha_{\mu-1})},$$

oder, wenn man grösserer Symmetrie wegen statt des Symbols u das Symbol α in diese Gleichung einführt:

$$0=\frac{1}{(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)(\alpha-\alpha_3)(\alpha-\alpha_4)\ldots(\alpha-\alpha_\mu)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_1-\alpha)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)..(\alpha_1-\alpha_\mu)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_2-\alpha)(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)..(\alpha_2-\alpha_\mu)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_3-\alpha)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)..(\alpha_3-\alpha_\mu)}$$

u. s. w.

$$+\frac{1}{(\alpha_\mu-\alpha)(\alpha_\mu-\alpha_1)(\alpha_\mu-\alpha_2)(\alpha_\mu-\alpha_3)\ldots(\alpha_\mu-\alpha_{\mu-1})}.$$

Wendet man den in dieser allgemeinen Gleichung ausgesprochenen Satz auf die zwischen den Coefficienten

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_4,\ldots\mathfrak{A}_k$$

gefundene Gleichung an, so fällt auf der Stelle in die Augen, dass die Grössen, in welche in dieser Gleichung die Coefficienten

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_4, \ldots \mathfrak{A}_{k-1}$$

multiplicirt sind, sämmtlich verschwinden, so dass sich also aus dieser Gleichung für den allgemeinen Coefficienten $\mathfrak{A}_k$ der folgende ganz independente Ausdruck ergiebt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_k = & \frac{A_1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)\ldots(a_1-a_k)} \\
& + \frac{A_2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\ldots(a_2-a_k)} \\
& + \frac{A_3}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\ldots(a_3-a_k)} \\
& + \frac{A_4}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\ldots(a_4-a_k)} \\
& \qquad\qquad \text{u. s. w.} \\
& + \frac{A_k}{(a_k-a_1)(a_k-a_2)(a_k-a_3)(a_k-a_4)\ldots(a_k-a_{k-1})}.
\end{aligned}$$

Der Werth von $\mathfrak{A}_1$ kann aus dieser allgemeinen Formel nicht abgeleitet werden; aus dem Obigen ergiebt sich aber ganz von selbst, dass immer

$$\mathfrak{A}_1 = A_1$$

ist.

Führt man die hieraus sich ergebenden ganz independenten Ausdrücke von

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_4, \ldots \mathfrak{A}_n$$

in die oben zum Grunde gelegte Gleichung

$$\begin{aligned}
y = & \ \mathfrak{A}_1 \\
& + \mathfrak{A}_2 (x-a_1) \\
& + \mathfrak{A}_3 (x-a_1)(x-a_2) \\
& + \mathfrak{A}_4 (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \\
& \qquad \text{u. s. w.} \\
& + \mathfrak{A}_n (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1})
\end{aligned}$$

ein, so erhält man auch einen vollständig entwickelten, ganz independenten Ausdruck für die gesuchte ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades y von x.

§. 5.

Man kann aber, wie wir jetzt zeigen wollen, die ganze ratio- algebraische Function des $(n-1)$sten Grades y von x noch einen von dem aus dem Vorhergehenden sich ergebenden ver- edenen, viel einfacheren Ausdruck bringen. Um jedoch nicht eitläufig zu werden, wollen wir diesen Ausdruck nur für $n=5$ ickeln, werden aber die Rechnung so führen, dass die All- einheit der Methode aus derselben ganz von selbst erhellet.

Für $n=5$ ist nämlich

$$\begin{aligned}y= &\mathfrak{A}_1\\ &+\mathfrak{A}_2(x-a_1)\\ &+\mathfrak{A}_3(x-a_1)(x-a_2)\\ &+\mathfrak{A}_4(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\\ &+\mathfrak{A}_5(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4),\end{aligned}$$

folglich, wenn man für

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_4,\ \mathfrak{A}_5$$

us dem vorhergehenden Paragraphen sich ergebenden Aus- e dieser Coefficienten einführt:

$$\begin{aligned}= &A_1\\ &+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A_1}{a_1-a_2}\\ +\dfrac{A_2}{a_2-a_1}\end{array}\right\}(x-a_1)\\ &+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A_1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}\\ +\dfrac{A_2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}\\ +\dfrac{A_3}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}\end{array}\right\}(x-a_1)(x-a_2)\end{aligned}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A_1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}\\+\dfrac{A_2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}\\+\dfrac{A_3}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)}\\+\dfrac{A_4}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}\end{array}\right\}(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A_1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)}\\+\dfrac{A_2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)}\\+\dfrac{A_3}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)}\\+\dfrac{A_4}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)}\\+\dfrac{A_5}{(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)}\end{array}\right\}(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4).$$

Ordnet man nun diesen Ausdruck nach

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5;$$

so ist A_1 in die folgende Grösse multiplicirt:

$$1+\frac{x-a_1}{a_1-a_2}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}$$
$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)}$$

$$=\frac{x-a_2}{a_1-a_2}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}$$
$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)}$$

$$=\frac{(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}$$
$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)}$$

$$= \frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}$$

$$+ \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)}$$

$$= \frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)}.$$

Ferner ist A_2 in die folgende Grösse multiplicirt:

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_1} + \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)} + \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}$$

$$+ \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)}$$

$$= \frac{(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)} + \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}$$

$$+ \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)}$$

$$= \frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}$$

$$+ \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)}$$

$$= \frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)}.$$

Auf ähnliche Art ist A_3 in die folgende Grösse multiplicirt:

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)} + \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)}$$

$$+ \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)}$$

$$= \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)}$$

$$+ \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)}$$

$$= \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)(x-a_5)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)}.$$

Eben so ist A_4 in die folgende Grösse multiplicirt:

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)}$$

$$=\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_5)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)}.$$

Endlich ist A_5 in die Grösse

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)}$$

multiplicirt.

Also ist

$$\begin{aligned}
y= & \frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)}A_1 \\
& +\frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)}A_2 \\
& +\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)(x-a_5)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)}A_3 \\
& +\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_5)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)}A_4 \\
& +\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)}A_5.
\end{aligned}$$

Dass diese Rechnung in jedem andern Falle auf ganz ähnliche Art ausgeführt werden kann, erhellet auf der Stelle, und es ist daher allgemein für jedes n:

$$\begin{aligned}
y= & \frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)\ldots(a_1-a_n)}A_1 \\
& +\frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\ldots(a_2-a_n)}A_2 \\
& +\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)(x-a_5)\ldots(x-a_n)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\ldots(a_3-a_n)}A_3 \\
& +\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_5)\ldots(x-a_n)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\ldots(a_4-a_n)}A_4
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\dots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)(a_n-a_3)(a_n-a_4)\dots(a_n-a_{n-1})}A_n.$$

ebrigens fällt auch auf der Stelle in die Augen, dass diese rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades den ungen unserer Aufgabe vollständig genügt, indem dieselbe ir, wenn man für x die Werthe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\dots a_n$$

respective die Werthe

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\dots A_n$$

wie gefordert wurde. Die obige Betrachtung aber zeigt, n zu dieser merkwürdigen Formel, welche man nach ihrem r, dem berühmten Lagrange, die Lagrange'sche Inlationsformel zu nennen pflegt, nicht durch Zufall, sonittelst einer methodischen analytischen Entwickelung gelann.

ss es überhaupt nicht zwei verschiedene, die Bedingungen r Aufgabe erfüllende ganze rationale algebraische Functios $(n-1)$sten Grades geben kann, und daher die obigen r Form nach verschiedenen Functionen die einzigen sind, unsere Aufgabe auflösen, lässt sich leicht auf folgende igen. Gäbe es nämlich zwei die Bedingungen unserer Aufvollständig erfüllende ganze rationale algebraische Functios $(n-1)$sten Grades y und Y, so würden diese Functionen, nan für x die n Werthe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\dots a_n,$$

natürlich unter einander sämmtlich ungleich angenommen, setzte, beide die gleichen Werthe

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\dots A_n$$

n, und die Differenz $y-Y$ würde also verschwinden, wenn ir x nach und nach die n sämmtlich unter einander unglei-Verthe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\dots a_n$$

Daher würde nach einem bekannten Satze der Theorie nzen rationalen algebraischen Functionen oder der Theorie eichungen die Differenz $y-Y$, welche offenbar im Allgeeine ganze rationale algebraische Function von einem den ten nicht übersteigenden Grade ist, durch das Product

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n),$$

welches offenbar eine ganze rationale algebraische Functio
nten Grades ist, ohne Rest theilbar sein, was jedenfalls
Ungereimtheit ist, die nur dadurch beseitigt werden kann,
man sich zu der Annahme bequemt, dass die Differenz
der Null identisch gleich, oder dass für jedes x die Functi
y und Y einander gleich, d. h. dass diese beiden Functi
überhaupt gar nicht von einander verschieden, und daher i
That beide nur eine und dieselbe Function sind, was eben
oben von uns ausgesprochene Behauptung war, deren Richti
also hierdurch vollständig bewiesen ist.

§. 6.

Um den Werth des bestimmten Integrals

$$\int_a^b y\partial x$$

näherungsweise zu ermitteln, wollen wir das Intervall od
Differenz $b-a$, die der Kürze wegen durch ω bezeichnet
den mag, in $n-1$ gleiche Theile eintheilen, und wollen im
hergehenden, indem wir nicht ausser Acht lassen, dass di
her durch

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots a_n$$

bezeichneten Grössen innerhalb des in Rede stehenden Inte
liegen müssen,

$$a_1 = a \qquad\qquad = a,$$

$$a_2 = a + 1\frac{b-a}{n-1} = a + 1\,\frac{\omega}{n-1},$$

$$a_3 = a + 2\frac{b-a}{n-1} = a + 2\,\frac{\omega}{n-1},$$

$$a_4 = a + 3\frac{b-a}{n-1} = a + 3\,\frac{\omega}{n-1},$$

u. s. w.

$$a_n = a + (n-1)\frac{b-a}{n-1} = a + (n-1)\frac{\omega}{n-1};$$

wenn der Kürze wegen noch $\bar{\omega}$ für $\frac{\omega}{n-1}$ geschrieben wird,

$$a_1 = a,$$

$$a_2 = a + 1\bar{\omega},$$

$$a_3 = a + 2\bar{\omega},$$

$$a_4 = a + 3\bar{\omega},$$

u. s. w.

$$a_n = a + (n-1)\bar{\omega}$$

in allgemeines Glied von y ist nach dem vorhergehenden raphen:

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{\mu-1})(x-a_{\mu+1})\ldots(x-a_n)}{(a_\mu-a_1)(a_\mu-a_2)\ldots(a_\mu-a_{\mu-1})(a_\mu-a_{\mu+1})\ldots(a_\mu-a_n)}A_\mu.$$

lenner dieses allgemeinen Gliedes ist unter der so eben ge- en Voraussetzung rücksichtlich der Grössen a_1, a_2, a_3, a_4, offenbar:

$$(\mu-1)\bar{\omega}.(\mu-2)\bar{\omega}\ldots 1\bar{\omega}.-1\bar{\omega}.-2\bar{\omega}\ldots-(n-\mu)\bar{\omega}$$

$$=(-1)^{n-\mu}.1.2.3\ldots(\mu-1).1.2.3\ldots(n-\mu).\bar{\omega}^{n-1};$$

ähler aber ist, wenn

$$u = x - a$$

t wird:

$$u(u-1\bar{\omega})(u-2\bar{\omega})\ldots(u-(\mu-2)\bar{\omega})(u-\mu\bar{\omega})\ldots(u-(n-1)\bar{\omega}).$$

ist das obige allgemeine Glied von y:

$$^{n-\mu}.\frac{u(u-1\bar{\omega})(u-2\bar{\omega})\ldots(u-(\mu-2)\bar{\omega})(u-\mu\bar{\omega})\ldots(u-(n-1)\bar{\omega})}{1.2.3\ldots(\mu-1).1.2.3\ldots(n-\mu)\bar{\omega}^{n-1}}A_\mu.$$

Veil nun $\partial x = \partial u$ und für $x=a$, $x=b$ respective $u=0$, $-a=\omega$ ist, so ist, wenn wir der Kürze wegen

$$K_\mu = \frac{(-1)^{n-\mu}}{1.2.3\ldots(\mu-1).1.2.3\ldots(n-\mu)}$$

$$(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)..((n-1)v-(n-1))$$

$$=\frac{(n-1)w+(n-1)}{2}.\frac{(n-1)w+(n-3)}{2}.\frac{(n-1)w+(n-5)}{2}..\frac{(n-1)w+2}{2}.\frac{(n-1)}{2}$$

$$\times\frac{(n-1)w-(n-1)}{2}.\frac{(n-1)w-(n-3)}{2}.\frac{(n-1)w-(n-5)}{2}..\frac{(n-1)w-2}{2}$$

$$=\frac{1}{2^n}((n-1)^2w^2-(n-1)^2)((n-1)^2w^2-(n-3)^2)..((n-1)^2w^2-2^2)(n-1)$$

Setzen wir folglich der Kürze wegen, jenachdem n gerade oder ungerade ist:

$$W_\mu=\begin{cases}\dfrac{((n-1)^2w^2-(n-1)^2)((n-1)^2w^2-(n-3)^2)..((n-1)^2w^2-1^2)}{(n-1)^2w^2-(n-2\mu+1)^2}\\[2ex]\dfrac{((n-1)^2w^2-(n-1)^2)((n-1)^2w^2-(n-3)^2)..((n-1)^2w^2-2^2)(n-1)}{(n-1)^2w^2-(n-2\mu+1)^2}\end{cases}$$

so ist offenbar

$$\frac{(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)..((n-1)v-(n-1))}{(n-1)v-(\mu-1)}$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}}((n-1)w-(n-2\mu+1))\,W_\mu;$$

und weil nun $\partial v=\frac{1}{2}\partial w$ und für $v=0$, $v=1$ respective $w=-1$, $w=+1$ ist, so ist nach dem Obigen offenbar

$$V_\mu=\frac{1}{2^n}\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\,W_\mu\,\partial w.$$

Also ist das allgemeine Glied von

$$\int_a^b y\partial x$$

nach dem Obigen:

$$\frac{1}{2^n}\,\omega\,K_\mu A_\mu\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\,W_\mu\,\partial w.$$

Die beiden Fälle, wenn $\mu=1$ und $\mu=n$ ist, müssen, wie leicht die Nothwendigkeit aus dem Vorhergehenden von selbst erhellen wird, nun noch besonders betrachtet werden.

Das erste Glied von y ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)\ldots(a_1-a_n)}A_1.$$

Der Nenner dieses Gliedes ist

$$-1\overline{\omega}.-2\overline{\omega}.-3\overline{\omega}.-4\overline{\omega}\ldots-(n-1)\overline{\omega}$$
$$=(-1)^{n-1}.1.2.3\ldots(n-1)\overline{\omega}^{n-1};$$

und der Zähler ist, wenn wieder

$$u=x-a$$

gesetzt wird:

$$(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})(u-3\overline{\omega})\ldots(u-(n-1)\overline{\omega}).$$

Also ist das obige erste Glied von y:

$$(-1)^{n-1}.\frac{(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})(u-3\overline{\omega})\ldots(u-(n-1)\overline{\omega})}{1.2.3\ldots(n-1)\overline{\omega}^{n-1}}A_1.$$

Weil nun $\partial x=\partial u$ und für $x=a$, $x=b$ respective $u=0$, $u=b-a=\omega$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$K_1=\frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

und

$$U_1=\int_0^{\omega}(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})(u-3\overline{\omega})\ldots(u-(n-1)\overline{\omega})\partial u$$

gesetzt wird, das erste Glied von

$$\int_a^b y\partial x$$

offenbar

$$\frac{K_1 U_1}{\overline{\omega}^{n-1}}A_1$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$(u-1\bar\omega)(u-2\bar\omega)(u-3\bar\omega)\ldots(u-(n-1)\bar\omega)$$

$$=\bar\omega^{n-1}\frac{\frac{u}{\bar\omega}\left(\frac{u}{\bar\omega}-1\right)\left(\frac{u}{\bar\omega}-2\right)\left(\frac{u}{\bar\omega}-3\right)\ldots\left(\frac{u}{\bar\omega}-(n-1)\right)}{\frac{u}{\bar\omega}},$$

also, wenn man

$$\frac{u}{\bar\omega}=(n-1)v,\quad u=(n-1)\bar\omega v=\omega v$$

setzt:

$$(u-1\bar\omega)(u-2\bar\omega)(u-3\bar\omega)\ldots(u-(n-1)\bar\omega)$$

$$=\bar\omega^{n-1}\frac{(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)\ldots((n-1)v-(n-1))}{(n-1)v},$$

und weil nun $\partial u=\omega\partial v$ und für $u=0$, $u=\omega$ respective $v=0$, $v=1$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$V_1=\int_0^1\frac{(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)\ldots((n-1)v-(n-1))}{(n-1)v}\partial v$$

gesetzt wird, offenbar

$$U_1=\omega\bar\omega^{n-1}V_1.$$

Also ist nach dem Obigen von

$$\int_a^b y\partial x$$

das erste Glied:

$$\omega K_1 V_1 A_1,$$

wo K_1 seinen obigen Werth hat.

Diese Rechnung noch weiter fortzuführen, ist unnöthig, weil die fernere Rechnung ganz unter dem obigen allgemeinen Falle enthalten ist.

Das letzte Glied von y ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)(a_n-a_3)(a_n-a_4)\ldots(a_n-a_{n-1})}A_n.$$

Der Nenner dieses Gliedes ist

$$(n-1)\bar\omega.(n-2)\bar\omega.(n-3)\bar\omega\ldots1\bar\omega$$
$$=(-1)^0.1.2.3\ldots(n-1)\bar\omega^{n-1};$$

und der Zähler ist, wenn wieder

$$u = x - a$$

gesetzt wird:

$$u(u-1\varpi)(u-2\varpi)(u-3\varpi)\,..\,(u-(n-2)\varpi).$$

Also ist das obige letzte Glied von y:

$$(-1)^0.\frac{u(u-1\varpi)(u-2\varpi)(u-3\varpi)\,..\,(u-(n-2)\varpi)}{1.2.3...(n-1)\varpi^{n-1}}A_n.$$

Weil nun $\partial x = \partial u$ und für $x = a$, $x = b$ respective $u = 0$, $u = b - a = \omega$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$K_n = \frac{(-1)^0}{1.2.3..(n-1)}$$

und

$$U_n = \int_0^\omega u(u-1\varpi)(u-2\varpi)(u-3\varpi)..(u-(n-2)\varpi)\,\partial u$$

gesetzt wird, das letzte Glied von

$$\int_a^b y\partial x$$

offenbar

$$\frac{K_n U_n}{\varpi^{n-1}}A_n.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$u(u-1\varpi)(u-2\varpi)(u-3\varpi)..(u-(n-2)\varpi)$$

$$=\varpi^{n-1}\frac{\frac{u}{\varpi}\left(\frac{u}{\varpi}-1\right)\left(\frac{u}{\varpi}-2\right)\left(\frac{u}{\varpi}-3\right)...\left(\frac{u}{\varpi}-(n-1)\right)}{\frac{u}{\varpi}-(n-1)},$$

also, wenn man

$$\frac{u}{\varpi} = (n-1)v,\quad u = (n-1)\varpi v = \omega v$$

setzt:

$$u(u-1\varpi)(u-2\varpi)(u-3\varpi)\ldots(u-(n-2)\varpi)$$
$$=\varpi^{n-1}\frac{(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)..((n-1)v-(n-1))}{(n-1)v-(n-1)},$$

und weil nun $\partial u=\omega\partial v$ und für $u=0$, $u=\omega$ respective $v=0$, $v=1$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$V_n=\int_0^1\frac{(n-1)v((n-1)v-1((n-1)v-2)..((n-1)v-(n-1))}{(n-1)v-(n-1)}\partial v$$

gesetzt wird, offenbar

$$U_n=\omega\,\varpi^{n-1}\,V_n.$$

Also ist nach dem Obigen von

$$\int_a^b y\partial x$$

das letzte Glied:

$$\omega K_n V_n A_n,$$

wo K_n seinen obigen Werth hat.

Von jetzt an ist die Rechnung wieder ganz unter dem oben betrachteten allgemeinen Falle enthalten, und dieselbe braucht daher nicht weiter fortgeführt zu werden.

Nehmen wir nun alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich zur Berechnung des μten Gliedes von

$$\int_a^b y\partial x$$

die folgende allgemeine Regel:

Man setze

$$K_\mu=\frac{(-1)^{n-\mu}}{1.2.3..(\mu-1).1.2.3..(n-\mu)},$$

und lege in den Fällen, wenn $\mu=1$ und $\mu=n$ ist, dem Nenner dieses Bruchs jederzeit den Werth $1.2.3..(n-1)$ bei. Hierauf setze man, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist,

$$W_\mu=\begin{cases}\dfrac{((n-1)^2w^2-(n-1)^2)((n-1)^2w^2-(n-3)^2)..((n-1)^2w^2-1^2)}{(n-1)^2w^2-(n-2\mu+1)^2}\\[2ex]\dfrac{((n-1)^2w^2-(n-1)^2)((n-1)^2w^2-(n-3)^2)..((n-1)^2w^2-2^2)(n-1)w}{(n-1)^2w^2-(n-2\mu+1)^2},\end{cases}$$

und berechne das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{+1} ((n-1)w-(n-2\mu+1))\, W_\mu \partial w,$$

was nie die geringste Schwierigkeit hat, da, wie aus dem Obigen sich ganz von selbst ergiebt, W_μ immer eine ganze rationale algebraische Function von w ist. Dann ist

$$\frac{1}{2^n}\,\omega\, K_\mu\, A_\mu \int_{-1}^{+1} ((n-1)w-(n-2\mu+1))\, W_\mu \partial w$$

das gesuchte μte Glied des bestimmten Integrals

$$\int_a^b y\partial x,$$

und folglich

$$\begin{aligned}\int_a^b y\partial x = & \frac{1}{2^n}\,\omega\, K_1\, A_1 \int_{-1}^{+1} ((n-1)w-(n-1))\, W_1 \partial w\\ & +\frac{1}{2^n}\,\omega\, K_2\, A_2 \int_{-1}^{+1} ((n-1)w-(n-3))\, W_2 \partial w\\ & +\frac{1}{2^n}\,\omega\, K_3\, A_3 \int_{-1}^{+1} ((n-1)w-(n-5))\, W_3 \partial w\\ & +\frac{1}{2^n}\,\omega\, K_4\, A_4 \int_{-1}^{+1} ((n-1)w-(n-7))\, W_4 \partial w\\ & \qquad \text{u. s. w.}\\ & +\frac{1}{2^n}\,\omega\, K_n\, A_n \int_{-1}^{+1} ((n-1)w-(n-(2n-1)))\, W_n \partial w,\end{aligned}$$

wodurch also der Werth unsers bestimmten Integrals näherungsweise gefunden ist.

Wir wollen jetzt die beiden Glieder

$$\frac{1}{2^n}\,\omega\, K_\mu\, A_\mu \int_{-1}^{+1} ((n-1)w-(n-2\mu+1))\, W_\mu \partial w,$$

$$\frac{1}{2^n}\,\omega\, K_\nu\, A_\nu \int_{-1}^{+1} ((n-1)w-(n-2\nu+1))\, W_\nu \partial w$$

betrachten, indem wir annehmen, dass $\mu+\nu=n+1$ sei, so dass diese beiden Glieder gleich weit vom Anfange und vom Ende abstehen.

Weil $n=\mu+\nu-1$ ist, so ist

$$n-2\mu+1=\mu+\nu-1-2\mu+1=\nu-\mu,$$
$$n-2\nu+1=\mu+\nu-1-2\nu+1=\mu-\nu$$

und folglich nach dem Obigen offenbar

$$W_\mu=W_\nu.$$

Also ist

$$\begin{aligned}((n-1)w-(n-2\nu+1))W_\nu\partial w&=((n-1)w-(\mu-\nu))W_\mu\partial w\\&=((n-1)w+(\nu-\mu))W_\mu\partial w,\end{aligned}$$

d. i.

$$((n-1)w-(n-2\nu+1))W_\nu\partial w=((n-1)w+(n-2\mu+1))W_\mu\partial w.$$

Setzen wir nun $w=-w'$, also $\partial w=-\partial w'$, so ist, wie leicht aus dem Obigen erhellen wird,

$$((n-1)w-(n-2\nu+1))W_\nu\partial w=\pm((n-1)w'-(n-2\mu+1))W_\mu\partial w',$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem n gerade oder ungerade ist, und folglich überhaupt

$$((n-1)w-(n-2\nu+1))W_\nu\partial w=(-1)^n((n-1)w'-(n-2\mu+1))W_\mu\partial w'.$$

Weil nun für $w=-1$, $w=+1$ respective $w'=+1$, $w'=-1$ ist, so ist

$$\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\nu+1))W_\nu\partial w$$
$$=(-1)^n\int_{+1}^{-1}((n-1)w'-(n-2\mu+1))W_\mu\partial w'$$

oder, was dasselbe ist,

$$\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\nu+1))W_\nu\partial w$$
$$=-(-1)^n\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))W_\mu\partial w.$$

Daher sind die Grössen, in welche in dem μten und νten Gliede A_μ und A_ν multiplicirt sind, nach dem Obigen

$$\frac{1}{2^n}\omega K_\mu \int_{-1}^{+} ((n-1)w-(n-2\mu+1))\, W_\mu \partial w$$

$$-(-1)^n \frac{1}{2^n}\omega K_\nu \int_{-1}^{+} ((n-1)w-(n-2\mu+1))\, W_\mu \partial w.$$

Für $\mu=1$ und $\nu=n$ ist nach dem Obigen bekanntlich

$$K_\mu = \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3..(n-1)},$$

$$K_\nu = \frac{(-1)^{n-n}}{1.2.3..(n-1)};$$

$$-(-1)^n K_\nu = (-1)^{n-1} K_\nu = \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3..(n-1)} = K_\mu,$$

ass also im ersten und letzten Gliede von $\int_a^b y\partial x$ die Coeffi-

ten von A_1 und A_n nach dem Vorhergehenden offenbar einan-
gleich sind.

Allgemein ist bekanntlich

$$K_\mu = \frac{(-1)^{n-\mu}}{1.2.3..(\mu-1).1.2.3..(n-\mu)},$$

$$K_\nu = \frac{(-1)^{n-\nu}}{1.2.3..(\nu-1).1.2.3..(n-\nu)}$$

folglich, weil nach der Voraussetzung $\mu+\nu=n+1$, also

$$n-\mu=\nu-1, \quad n-\nu=\mu-1$$

$$K_\mu = \frac{(-1)^{\nu-1}}{1.2.3..(\mu-1).1.2.3..(\nu-1)},$$

$$K_\nu = \frac{(-1)^{\mu-1}}{1.2.3..(\mu-1).1.2.3..(\nu-1)};$$

er ist

$$-(-1)^n K_\nu = (-1)^{n-1} K_\nu = (-1)^{\mu+\nu-2} K_\nu = \frac{(-1)^{2\mu+\nu-3}}{1.2.3..(\mu-1).1.2.3..(\nu-1)}$$

$$= \frac{(-1)^{2(\mu-1)}.(-1)^{\nu-1}}{1.2.3..(\mu-1).1.2.3..(\nu-1)} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{1.2.3..(\mu-1).1.2.3..(\nu-1)},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden wieder

$$-(-1)^n K_\nu = K_\mu,$$

woraus man also sieht, dass unter den gemachten Voraussetzungen überhaupt in dem μten und νten Gliede von $\int_a^b y\partial x$ die Grössen A_μ und A_ν gleiche Coefficienten haben.

Man gelangt also hierdurch zu dem allgemeinen Resultate, dass in dem obigen Ausdrucke von $\int_a^b y\partial x$ die Grösse A_μ in den vom ersten und letzten Gliede gleich weit abstehenden Gliedern mit gleichen Coefficienten behaftet ist, wodurch natürlich die numerische Entwickelung der Coefficienten von

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots A_n$$

in dem obigen allgemeinen Ausdrucke von $\int_a^b y\partial x$ wesentlich abgekürzt wird, und daher das in Rede stehende Resultat als ein für die numerische Berechnung dieser Coefficienten sehr wichtiges bezeichnet werden muss.

§. 7.

Wir wollen jetzt noch eine sehr bemerkenswerthe ganz allgemeine Methode zur Entwickelung des bestimmten Integrals

$$\int_a^b y\partial x$$

angeben, indem wir natürlich wie früher auch jetzt immer

$$y = \frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)\ldots(a_1-a_n)} A_1$$

$$+ \frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\ldots(a_2-a_n)} A_2$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)(x-a_5)\ldots(x-a_n)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\ldots(a_3-a_n)}A_3$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_5)\ldots(x-a_n)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\ldots(a_4-a_n)}A_4$$

u. s. w.

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)(a_n-a_3)(a_n-a_4)\ldots(a_n-a_{n-1})}A_n$$

setzen.

Wir wollen zuerst eine neue veränderliche Grösse u, welche durch die Gleichung

$$u=\frac{x-a}{b-a},$$

woraus sich $x=a+(b-a)u$ ergiebt, bestimmt wird, einführen. Setzen wir der Kürze wegen

$$\alpha_1=\frac{a_1-a}{b-a},\quad \alpha_2=\frac{a_2-a}{b-a},\quad \alpha_3=\frac{a_3-a}{b-a},\ \ldots\ldots \alpha_n=\frac{a_n-a}{b-a};$$

so erhalten wir nach leichter Substitution, wie sogleich erhellen wird:

$$y=\frac{(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_n)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)}A_1$$

$$+\frac{(u-\alpha_1)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_n)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)}A_2$$

$$+\frac{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_4)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_n)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)}A_3$$

$$+\frac{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_n)}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_n)}A_4$$

u. s. w.

$$+\frac{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)\ldots(u-\alpha_{n-1})}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}A_n,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$N_1=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_n),$$

$$N_2=(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_n),$$

$$N_3=(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_n),$$

$$N_4 = (\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_n),$$

u. s. w.

$$N_n = (\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})$$

und

$$U_1 = (u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_n),$$
$$U_2 = (u-\alpha_1)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_n),$$
$$U_3 = (u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_4)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_n),$$
$$U_4 = (u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_n),$$

u. s. w.

$$U_n = (u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)\ldots(u-\alpha_{n-1})$$

setzen, wo

$$N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4,\ldots N_n$$

die Werthe sind, welche respective

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ldots U_n$$

erhalten, wenn man in diesen Grössen für u respective

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ldots \alpha_n$$

setzt:

$$y = \frac{A_1}{N_1}U_1 + \frac{A_2}{N_2}U_2 + \frac{A_3}{N_3}U_3 + \frac{A_4}{N_4}U_4 + \ldots + \frac{A_n}{N_n}U_n;$$

also, weil nach dem Obigen

$$\partial x = (b-a)\partial u$$

ist:

$$y\partial x$$
$$= (b-a)\left\{\frac{A_1}{N_1}U_1 + \frac{A_2}{N_2}U_2 + \frac{A_3}{N_3}U_3 + \frac{A_4}{N_4}U_4 + \ldots + \frac{A_n}{N_n}U_n\right\}\partial u.$$

Weil nun aber nach dem Obigen für $x=a$, $x=b$ respective $u=0$, $u=1$ ist, so ist

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b y\partial x = \frac{A_1}{N_1}\int_0^1 U_1 \partial u$$

$$+\frac{A_2}{N_2}\int_0^1 U_2 \partial u$$

$$+\frac{A_3}{N_3}\int_0^1 U_3 \partial u$$

u. s. w.

$$+\frac{A_n}{N_n}\int_0^1 U_n \partial u.$$

ietzen wir aber

$$U=(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)\ldots(u-\alpha_n),$$

sst sich die vorstehende Gleichung auch auf folgende Art ücken:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b y\partial x = \frac{A_1}{N_1}\int_0^1 \frac{U\partial u}{u-\alpha_1}$$

$$+\frac{A_2}{N_2}\int_0^1 \frac{U\partial u}{u-\alpha_2}$$

$$+\frac{A_3}{N_3}\int_0^1 \frac{U\partial u}{u-\alpha_3}$$

u. s. w.

$$+\frac{A_n}{N_n}\int_0^1 \frac{U\partial u}{u-\alpha_n},$$

er Coefficient von A_k in der Entwickelung von

$$\int_a^b y\partial x$$

ıer im Allgemeinen

$$\frac{b-a}{N_k}\int_0^1 \frac{U\partial u}{u-\alpha_k}.$$

enken wir uns nun das Product U absteigend nach Poten-n u entwickelt, und setzen demzufolge

$$U=u^n+C_1 u^{n-1}+C_2 u^{n-2}+\ldots+C_{n-1} u+C_n,$$

wo die Bedeutung der Coefficienten

$$C_1, C_2, C_3, \ldots C_{n-1}, C_n$$

nach einem bekannten arithmetischen Satze von selbst erhellet, so ist

$$0 = \alpha_k^n + C_1\alpha_k^{n-1} + C_2\alpha_k^{n-2} + \ldots + C_{n-1}\alpha_k + C_n,$$

und folglich, wenn man subtrahirt:

$$U = u^n - \alpha_k^n + C_1(u^{n-1} - \alpha_k^{n-1}) + C_2(u^{n-2} - \alpha_k^{n-2}) + \ldots + C_{n-1}(u - \alpha_k),$$

also nach einer bekannten Divisionsregel:

$$\frac{U}{u - \alpha_k}$$

$$\begin{aligned}
= u^{n-1} &+ \alpha_k u^{n-2} + \alpha_k^2 u^{n-3} + \alpha_k^3 u^{n-4} + \ldots + \alpha_k^{n-2} u + \alpha_k^{n-1} \\
&+ C_1 u^{n-2} + C_1\alpha_k u^{n-3} + C_1\alpha_k^2 u^{n-4} + \ldots + C_1\alpha_k^{n-3} u + C_1\alpha_k^{n-2} \\
&+ C_2 u^{n-3} + C_2\alpha_k u^{n-4} + \ldots + C_2\alpha_k^{n-4} u + C_2\alpha_k^{n-3} \\
&+ C_3 u^{n-4} + \ldots + C_3\alpha_k^{n-5} u + C_3\alpha_k^{n-4} \\
&\text{u. s. w.} \\
&+ C_{n-2} u + C_{n-2}\alpha_k \\
&+ C_{n-1},
\end{aligned}$$

und folglich

$$\int_0^1 \frac{U\partial u}{u - \alpha_k}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \\
&+ \frac{1}{n-1}(\alpha_k + C_1) \\
&+ \frac{1}{n-2}(\alpha_k^2 + C_1\alpha_k + C_2) \\
&+ \frac{1}{n-3}(\alpha_k^3 + C_1\alpha_k^2 + C_2\alpha_k + C_3) \\
&\text{u. s. w} \\
&+ \frac{1}{2}(\alpha_k^{n-2} + C_1\alpha_k^{n-3} + C_2\alpha_k^{n-4} + C_3\alpha_k^{n-5} + \ldots + C_{n-3}\alpha_k + C_{n-2}) \\
&+ \frac{1}{1}(\alpha_k^{n-1} + C_1\alpha_k^{n-2} + C_2\alpha_k^{n-3} + C_3\alpha_k^{n-4} + \ldots + C_{n-3}\alpha_k^2 + C_{n-2}\alpha_k + C_{n-1})
\end{aligned}$$

oder

$$\int_0^1 \frac{U\partial u}{u - \alpha_k}$$

$$=\frac{1}{1}(\alpha_k^{n-1}+C_1\alpha_k^{n-2}+C_2\alpha_k^{n-3}+C_3\alpha_k^{n-4}+\ldots+C_{n-3}\alpha_k^2+C_{n-2}\alpha_k+C_{n-1})$$
$$+\frac{1}{2}(\alpha_k^{n-2}+C_1\alpha_k^{n-3}+C_2\alpha_k^{n-4}+\ldots+C_{n-4}\alpha_k^2+C_{n-3}\alpha_k+C_{n-2})$$
$$+\frac{1}{3}(\alpha_k^{n-3}+C_1\alpha_k^{n-4}+\ldots+C_{n-5}\alpha_k^2+C_{n-4}\alpha_k+C_{n-3})$$
$$+\frac{1}{4}(\alpha_k^{n-4}+\ldots+C_{n-6}\alpha_k^2+C_{n-5}\alpha_k+C_{n-4})$$
u. s. w.
$$+\frac{1}{n-2}(\alpha_k^2+C_1\alpha_k+C_2)$$
$$+\frac{1}{n-1}(\alpha_k+C_1)$$
$$+\frac{1}{n}.$$

Wenn wir nun die Function

$$U=(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)\ldots(u-\alpha_n)$$
$$=u^n+C_1u^{n-1}+C_2u^{n-2}+\ldots+C_{n-1}u+C_n,$$

natürlich in ihrer zweiten entwickelten Form, mit der unendlichen Reihe

$$u^{-1}+\frac{1}{2}u^{-2}+\frac{1}{3}u^{-3}+\frac{1}{4}u^{-4}+\frac{1}{5}u^{-5}+\ldots.$$

nach bekannten Regeln multipliciren, das Product absteigend nach Potenzen von u ordnen, und den bloss Potenzen von u mit positiven Exponenten, Null eingeschlossen, enthaltenden Theil dieses Products durch U', den bloss Potenzen von u mit negativen Exponenten enthaltenden Theil desselben durch U'' bezeichnen, demzufolge also

$$U(u^{-1}+\frac{1}{2}u^{-2}+\frac{1}{3}u^{-3}+\frac{1}{4}u^{-4}+\frac{1}{5}u^{-5}+\ldots)=U'+U''$$

setzen, so finden wir auf der Stelle, dass der oben entwickelte Werth des bestimmten Integrals

$$\int_0^1\frac{U\partial u}{u-\alpha_k}$$

aus U' hervorgeht, wenn man darin α_k für u setzt; und bezeichnen wir also den Werth von U' für $u=\alpha_k$ durch $\overset{(k)}{U'}$, so ist

$$\int_0^1\frac{U\partial u}{u-\alpha_k}=\overset{(k)}{U'}.$$

Um folglich das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{U\partial u}{u-\alpha_k}$$

zu erhalten, entwickeln wir durch gemeine Multiplication den bloss Potenzen von u mit positiven Exponenten, Null eingeschlossen, enthaltenden Theil des Products

$$U(u^{-1}+\frac{1}{2}u^{-2}+\frac{1}{3}u^{-3}+\frac{1}{4}u^{-4}+\frac{1}{5}u^{-5}+\dots),$$

und setzen darin $u=\alpha_k$.

Noch kann man Folgendes bemerken. Wenn man in dem oben entwickelten Ausdrucke von

$$U_k=\frac{U}{u-\alpha_k}$$

für u den Werth α_k setzt, so erhält man als entsprechenden Werth von U_k die Grösse

$$n\alpha_k^{n-1}+(n-1)C_1\alpha_k^{n-2}+(n-2)C_2\alpha_k^{n-3}+\dots+2C_{n-2}\alpha_k+C_{n-1},$$

und weil nun nach dem Obigen

$$\frac{\partial U}{\partial u}=nu^{n-1}+(n-1)C_1u^{n-2}+(n-2)C_2u^{n-3}+\dots+2C_{n-2}u+C_{n-1}$$

ist, so erhält man offenbar den Werth, welchen U_k für $u=\alpha_k$ erhält, aus dem Differentialquotienten $\frac{\partial U}{\partial u}$, wenn man darin $u=\alpha_k$ setzt. Bezeichnet man also diesen Werth des Differentialquotienten $\frac{\partial U}{\partial u}$ der Kürze wegen durch $\frac{\partial \overset{(k)}{U}}{\partial u}$, so ist nach dem Obigen

$$N_k=\frac{\partial \overset{(k)}{U}}{\partial u},$$

und folglich

$$\frac{b-a}{N_k}\int_0^1 \frac{U\partial u}{u-\alpha_k}=(b-a)\frac{\overset{(k)}{U'}}{\frac{\partial \overset{(k)}{U}}{\partial u}}.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)\left\{ \frac{\overset{(1)}{U'}}{\frac{\partial \overset{(1)}{U}}{\partial u}} A_1 + \frac{\overset{(2)}{U'}}{\frac{\partial \overset{(2)}{U}}{\partial u}} A_2 + \frac{\overset{(3)}{U'}}{\frac{\partial \overset{(3)}{U}}{\partial u}} A_3 + \ldots + \frac{\overset{(n)}{U'}}{\frac{\partial \overset{(n)}{U}}{\partial u}} A_n \right\},$$

wodurch jetzt der Werth unsers bestimmten Integrals vollständig entwickelt ist.

§. 8.

Wenn wir im Vorhergehenden

$$u = \frac{1}{2}(v+1),\quad v = 2u - 1$$

und

$$\beta_1 = 2\alpha_1 - 1 = 2\frac{\alpha_1 - a}{b-a} - 1 = \frac{2\alpha_1}{b-a} - \frac{b+a}{b-a},$$

$$\beta_2 = 2\alpha_2 - 1 = 2\frac{\alpha_2 - a}{b-a} - 1 = \frac{2\alpha_2}{b-a} - \frac{b+a}{b-a},$$

$$\beta_3 = 2\alpha_3 - 1 = 2\frac{\alpha_3 - a}{b-a} - 1 = \frac{2\alpha_3}{b-a} - \frac{b+a}{b-a},$$

$$\beta_4 = 2\alpha_4 - 1 = 2\frac{\alpha_4 - a}{b-a} - 1 = \frac{2\alpha_4}{b-a} - \frac{b+a}{b-a},$$

u. s. w.

$$\beta_n = 2\alpha_n - 1 = 2\frac{\alpha_n - a}{b-a} - 1 = \frac{2\alpha_n}{b-a} - \frac{b+a}{b-a};$$

also

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\beta_1+1),\ \alpha_2 = \frac{1}{2}(\beta_2+1),\ \alpha_3 = \frac{1}{2}(\beta_3+1), \ldots \alpha_n = \frac{1}{2}(\beta_n+1)$$

setzen; so ist, wie man leicht findet:

$$y = \frac{(v-\beta_2)(v-\beta_3)(v-\beta_4)(v-\beta_5)\ldots(v-\beta_n)}{(\beta_1-\beta_2)(\beta_1-\beta_3)(\beta_1-\beta_4)(\beta_1-\beta_5)\ldots(\beta_1-\beta_n)} A_1$$

$$+ \frac{(v-\beta_1)(v-\beta_3)(v-\beta_4)(v-\beta_5)\ldots(v-\beta_n)}{(\beta_2-\beta_1)(\beta_2-\beta_3)(\beta_2-\beta_4)(\beta_2-\beta_5)\ldots(\beta_2-\beta_n)} A_2$$

$$+ \frac{(v-\beta_1)(v-\beta_2)(v-\beta_4)(v-\beta_5)\ldots(v-\beta_n)}{(\beta_3-\beta_1)(\beta_3-\beta_2)(\beta_3-\beta_4)(\beta_3-\beta_5)\ldots(\beta_3-\beta_n)} A_3$$

$$+ \frac{(v-\beta_1)(v-\beta_2)(v-\beta_3)(v-\beta_5)\ldots(v-\beta_n)}{(\beta_4-\beta_1)(\beta_4-\beta_2)(\beta_4-\beta_3)(\beta_4-\beta_5)\ldots(\beta_4-\beta_n} A_4$$

u. s. w.

$$+\frac{(v-\beta_1)(v-\beta_2)(v-\beta_3)(v-\beta_4)\ldots(v-\beta_{n-1})}{(\beta_n-\beta_1)(\beta_n-\beta_2)(\beta_n-\beta_3)(\beta_n-\beta_4)\ldots(\beta_n-\beta_{n-1})}A_n;$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_1 &= (\beta_1-\beta_2)(\beta_1-\beta_3)(\beta_1-\beta_4)(\beta_1-\beta_5)\ldots(\beta_1-\beta_n),\\
\mathfrak{A}_2 &= (\beta_2-\beta_1)(\beta_2-\beta_3)(\beta_2-\beta_4)(\beta_2-\beta_5)\ldots(\beta_2-\beta_n),\\
\mathfrak{A}_3 &= (\beta_3-\beta_1)(\beta_3-\beta_2)(\beta_3-\beta_4)(\beta_3-\beta_5)\ldots(\beta_3-\beta_n),\\
\mathfrak{A}_4 &= (\beta_4-\beta_1)(\beta_4-\beta_2)(\beta_4-\beta_3)(\beta_4-\beta_5)\ldots(\beta_4-\beta_n),\\
&\text{u. s. w.}\\
\mathfrak{A}_n &= (\beta_n-\beta_1)(\beta_n-\beta_2)(\beta_n-\beta_3)(\beta_n-\beta_4)\ldots(\beta_n-\beta_{n-1})
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
V_1 &= (v-\beta_2)(v-\beta_3)(v-\beta_4)(v-\beta_5)\ldots(v-\beta_n),\\
V_2 &= (v-\beta_1)(v-\beta_3)(v-\beta_4)(v-\beta_5)\ldots(v-\beta_n),\\
V_3 &= (v-\beta_1)(v-\beta_2)(v-\beta_4)(v-\beta_5)\ldots(v-\beta_n),\\
V_4 &= (v-\beta_1)(v-\beta_2)(v-\beta_3)(v-\beta_5)\ldots(v-\beta_n),\\
&\text{u. s. w.}\\
V_n &= (v-\beta_1)(v-\beta_2)(v-\beta_3)(v-\beta_4)\ldots(v-\beta_{n-1})
\end{aligned}$$

setzen, wo

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_4,\ldots\mathfrak{A}_n$$

die Werthe sind, welche respective

$$V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4,\ldots V_n$$

erhalten, wenn man in diesen Grössen für v respective

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ldots\beta_n$$

setzt:

$$y=\frac{A_1}{\mathfrak{A}_1}V_1+\frac{A_2}{\mathfrak{A}_2}V_2+\frac{A_3}{\mathfrak{A}_3}V_3+\frac{A_4}{\mathfrak{A}_4}V_4+\ldots+\frac{A_n}{\mathfrak{A}_n}V_n;$$

also, weil nach dem Obigen

$$\partial x=(b-a)\partial u=\frac{1}{2}(b-a)\partial v$$

ist:

$$y\partial x$$
$$=\frac{1}{2}(b-a)\left\{\frac{A_1}{\mathfrak{A}_1}V_1+\frac{A_2}{\mathfrak{A}_2}V_2+\frac{A_3}{\mathfrak{A}_3}V_3+\frac{A_4}{\mathfrak{A}_4}V_4+\ldots+\frac{A_n}{\mathfrak{A}_n}V_n\right\}\partial v.$$

il nun aber nach dem Obigen für $x=a$, $x=b$ respective $u=0$, 1, also $v=-1$, $v=+1$ ist, so ist:

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b y\partial x = \frac{A_1}{\mathfrak{A}_1}\int_{-1}^{+1} V_1\partial v$$
$$+\frac{A_2}{\mathfrak{A}_2}\int_{-1}^{+1} V_2\partial v$$
$$+\frac{A_3}{\mathfrak{A}_3}\int_{-1}^{+1} V_3\partial v$$
u. s. w.
$$+\frac{A_n}{\mathfrak{A}_n}\int_{-1}^{+1} V_n\partial v.$$

zen wir aber

$$V=(v-\beta_1)(v-\beta_2)(v-\beta_3)(v-\beta_4)\ldots(v-\beta_n),$$

lässt sich die vorstehende Gleichung auch auf folgende Art drücken:

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b y\partial x = \frac{A_1}{\mathfrak{A}_1}\int_{-1}^{+1} \frac{V\partial v}{v-\beta_1}$$
$$+\frac{A_2}{\mathfrak{A}_2}\int_{-1}^{+1} \frac{V\partial v}{v-\beta_2}$$
$$+\frac{A_3}{\mathfrak{A}_3}\int_{-1}^{+1} \frac{V\partial v}{v-\beta_3}$$
u. s. w.
$$+\frac{A_n}{\mathfrak{A}_n}\int_{-1}^{+1} \frac{V\partial v}{v-\beta_n},$$

der Coefficient von A_k in der Entwickelung von

$$\int_a^b y\partial x$$

daher im Allgemeinen

$$\frac{b-a}{2\mathfrak{A}_k}\int_{-1}^{+1} \frac{V\partial v}{v-\beta_k}.$$

Denken wir uns nun das Product V absteigend nach Poten- von v entwickelt, und setzen demzufolge

$$V = v^n + \mathfrak{C}_1 v^{n-1} + \mathfrak{C}_2 v^{n-2} + \ldots + \mathfrak{C}_{n-1} v + \mathfrak{C}_n,$$

wo die Bedeutung der Coefficienten

$$\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2,\ \mathfrak{C}_3, \ldots \mathfrak{C}_{n-1},\ \mathfrak{C}_n$$

nach einem bekannten arithmetischen Satze von selbst erhellet, so ist

$$0 = \beta_k^n + \mathfrak{C}_1 \beta_k^{n-1} + \mathfrak{C}_2 \beta_k^{n-2} + \ldots + \mathfrak{C}_{n-1} \beta_k + \mathfrak{C}_n,$$

und folglich, wenn man subtrahirt:

$$V = v^n - \beta_k^n + \mathfrak{C}_1(v^{n-1} - \beta_k^{n-1}) + \mathfrak{C}_2(v^{n-2} - \beta_k^{n-2}) + \ldots + \mathfrak{C}_{n-1}(v - \beta_k),$$

also nach einer bekannten Divisionsregel:

$$\begin{aligned}
\frac{V}{v-\beta_k}
&= v^{n-1} + \beta_k v^{n-2} + \beta_k^2 v^{n-3} + \beta_k^3 v^{n-4} + \ldots + \beta_k^{n-2} v + \beta_k^{n-1} \\
&\quad + \mathfrak{C}_1 v^{n-2} + \mathfrak{C}_1 \beta_k v^{n-3} + \mathfrak{C}_1 \beta_k^2 v^{n-4} + \ldots + \mathfrak{C}_1 \beta_k^{n-3} v + \mathfrak{C}_1 \beta_k^{n-2} \\
&\quad + \mathfrak{C}_2 v^{n-3} + \mathfrak{C}_2 \beta_k v^{n-4} + \ldots + \mathfrak{C}_2 \beta_k^{n-4} v + \mathfrak{C}_2 \beta_k^{n-3} \\
&\quad + \mathfrak{C}_3 v^{n-4} + \ldots + \mathfrak{C}_3 \beta_k^{n-5} v + \mathfrak{C}_3 \beta_k^{n-4} \\
&\qquad \text{u. s. w.} \\
&\quad + \mathfrak{C}_{n-2} v + \mathfrak{C}_{n-2} \beta_k \\
&\quad + \mathfrak{C}_{n-1},
\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} \frac{V \partial v}{v-\beta_k}
&= \frac{1}{n}\{(+1)^n - (-1)^n\} \\
&\quad + \frac{1}{n-1}(\beta_k + \mathfrak{C}_1)\{(+1)^{n-1} - (-1)^{n-1}\} \\
&\quad + \frac{1}{n-2}(\beta_k^2 + \mathfrak{C}_1 \beta_k + \mathfrak{C}_2)\{(+1)^{n-2} - (-1)^{n-2}\} \\
&\quad + \frac{1}{n-3}(\beta_k^3 + \mathfrak{C}_1 \beta_k^2 + \mathfrak{C}_2 \beta_k + \mathfrak{C}_3)\{(+1)^{n-3} - (-1)^{n-3}\} \\
&\qquad \text{u. s. w.} \\
&\quad + \frac{2}{3}(\beta_k^{n-3} + \mathfrak{C}_1 \beta_k^{n-4} + \mathfrak{C}_2 \beta_k^{n-5} + \mathfrak{C}_3 \beta_k^{n-6} + \ldots + \mathfrak{C}_{n-4} \beta_k + \mathfrak{C}_{n-3}) \\
&\quad + \frac{2}{1}(\beta_k^{n-1} + \mathfrak{C}_1 \beta_k^{n-2} + \mathfrak{C}_2 \beta_k^{n-3} + \mathfrak{C}_3 \beta_k^{n-4} + \ldots + \mathfrak{C}_{n-4} \beta_k^3 + \mathfrak{C}_{n-3} \beta_k^2 \\
&\qquad + \mathfrak{C}_{n-2} \beta_k + \mathfrak{C}_{n-1}),
\end{aligned}$$

also, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{V\partial v}{v-\beta_k}$$

$$=\frac{2}{1}(\beta_k^{n-1}+\mathfrak{C}_1\beta_k^{n-2}+\mathfrak{C}_2\beta_k^{n-3}+\mathfrak{C}_3\beta_k^{n-4}+\ldots+\mathfrak{C}_{n-4}\beta_k^3+\mathfrak{C}_{n-3}\beta_k^2$$
$$+\mathfrak{C}_{n-2}\beta_k+\mathfrak{C}_{n-1})$$
$$+\frac{2}{3}(\beta_k^{n-3}+\mathfrak{C}_1\beta_k^{n-4}+\ldots+\mathfrak{C}_{n-6}\beta_k^3+\mathfrak{C}_{n-5}\beta_k^2+\mathfrak{C}_{n-4}\beta_k+\mathfrak{C}_{n-3})$$

u. s. w.

$$+\frac{2}{n-3}(\beta_k^3+\mathfrak{C}_1\beta_k^2+\mathfrak{C}_2\beta_k+\mathfrak{C}_3)$$
$$+\frac{2}{n-1}(\beta_k+\mathfrak{C}_1)$$

oder

$$\int_{-1}^{+1}\frac{V\partial v}{v-\beta_k}$$

$$=\frac{2}{1}(\beta_k^{n-1}+\mathfrak{C}_1\beta_k^{n-2}+\mathfrak{C}_2\beta_k^{n-3}+\mathfrak{C}_3\beta_k^{n-4}+\ldots+\mathfrak{C}_{n-3}\beta_k^2+\mathfrak{C}_{n-2}\beta_k$$
$$+\mathfrak{C}_{n-1})$$
$$+\frac{2}{3}(\beta_k^{n-3}+\mathfrak{C}_1\beta_k^{n-4}+\ldots+\mathfrak{C}_{n-5}\beta_k^2+\mathfrak{C}_{n-4}\beta_k+\mathfrak{C}_{n-3})$$

u. s. w.

$$+\frac{2}{n-2}(\beta_k+\mathfrak{C}_1\beta_k+\mathfrak{C}_2)$$
$$+\frac{2}{n}.$$

Wenn wir nun die Function

$$V=(v-\beta_1)(v-\beta_2)(v-\beta_3)(v-\beta_4)\ldots(v-\beta_n)$$
$$=v^n+\mathfrak{C}_1v^{n-1}+\mathfrak{C}_2v^{n-2}+\ldots+\mathfrak{C}_{n-1}v+\mathfrak{C}_n,$$

natürlich in ihrer zweiten entwickelten Form, mit der unendlichen Reihe

$$v^{-1}+\frac{1}{3}v^{-3}+\frac{1}{5}v^{-5}+\frac{1}{7}v^{-7}+\frac{1}{9}v^{-9}+\ldots$$

nach bekannten Regeln multipliciren, das Product absteigend nach Potenzen von v ordnen, und den bloss Potenzen von v mit positiven Exponenten, Null eingeschlossen, enthaltenden Theil dieses Products durch V', den bloss Potenzen von v mit negativen Exponenten enthaltenden Theil desselben durch V'' bezeichnen, demzufolge also

$$V(v^{-1}+\frac{1}{3}v^{-3}+\frac{1}{5}v^{-5}+\frac{1}{7}v^{-7}+\frac{1}{9}v^{-9}+\ldots)=V'+V''$$

setzen, so finden wir auf der Stelle, dass die Hälfte des oben entwickelten Werths des bestimmten Integrals

$$\int_{-1}^{+1}\frac{V\partial v}{v-\beta_k}$$

aus V' hervorgeht, wenn man darin β_k für v setzt; und bezeichnen wir also den Werth von V' für $v=\beta_k$ durch $\overset{(k)}{V'}$, so ist

$$\int_{-1}^{+1}\frac{V\partial v}{v-\beta_k}=2\overset{(k)}{V'}.$$

Um folglich das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{+1}\frac{V\partial v}{v-\beta_k}$$

zu erhalten, entwickeln wir durch gemeine Multiplication den bloss Potenzen von v mit positiven Exponenten, Null eingeschlossen, enthaltenden Theil des Products

$$V(v^{-1}+\frac{1}{3}v^{-3}+\frac{1}{5}v^{-5}+\frac{1}{7}v^{-7}+\frac{1}{9}v^{-9}+\ldots),$$

setzen darin $v=\beta_k$, und nehmen das Resultat doppelt.

Noch kann man Folgendes bemerken. Wenn man in dem oben entwickelten Ausdrucke von

$$V_k=\frac{V}{v-\beta_k}$$

für v den Werth β_k setzt, so erhält man als entsprechenden Werth von V_k die Grösse

$$n\beta_k^{n-1}+(n-1)\mathfrak{C}_1\beta_k^{n-2}+(n-2)\mathfrak{C}_2\beta_k^{n-3}+\ldots+2\mathfrak{C}_{n-2}\beta_k+\mathfrak{C}_{n-1},$$

und weil nun nach dem Obigen

$$\frac{\partial V}{\partial v}=nv^{n-1}+(n-1)\mathfrak{C}_1v^{n-2}+(n-2)\mathfrak{C}_2v^{n-3}+\ldots+2\mathfrak{C}_{n-2}v+\mathfrak{C}_{n-1}$$

ist, so erhält man offenbar den Werth, welchen V_k für $v=\beta_k$ erhält, aus dem Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial v}$, wenn man darin $v=\beta_k$

st. Bezeichnet man also diesen Werth des Differentialquotien $\frac{\partial V}{\partial v}$ der Kürze wegen durch $\frac{\partial \overset{(k)}{V}}{\partial v}$, so ist nach dem Obigen

$$\mathfrak{N}_k = \frac{\partial \overset{(k)}{V}}{\partial v},$$

d folglich

$$\frac{b-a}{2\mathfrak{N}_k}\int_{-1}^{+1}\frac{V\partial v}{v-\beta_k}=(\beta-a)\frac{\overset{(k)}{V'}}{\frac{\partial \overset{(k)}{V}}{\partial v}}.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\int_a^b y\partial x=(b-a)\left\{\frac{\overset{(1)}{V'}}{\frac{\partial \overset{(1)}{V}}{\partial v}}A_1+\frac{\overset{(2)}{V'}}{\frac{\partial \overset{(2)}{V}}{\partial v}}A_2+\frac{\overset{(3)}{V'}}{\frac{\partial \overset{(3)}{V}}{\partial v}}A_3+\ldots+\frac{\overset{(n)}{V'}}{\frac{\partial \overset{(n)}{V}}{\partial v}}A_n\right\}.$$

Dass die hier entwickelte Methode vor der im vorhergehenden ıragraphen entwickelten Methode rücksichtlich der Kürze der erechnung der Coefficienten von

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ldots A_n$$

dem Ausdruck von $\int_a^b y\partial x$ Vorzüge hat, wird sich späterhin igen; für jetzt wollen wir uns darüber nicht weiter verbreiten.

§. 9.

Wir wollen jetzt annehmen, dass den Werthen

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots a_n,\ a_{n+1}$$

n x die Werthe

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ldots A_{n+1}$$

ıtsprechen, so dass wir uns also die beiden vorher betrachteten eihen einander entsprechender Werthe von x und y um zwei lieder, jede der beiden Reihen am Anfange und am Ende um n Glied, vermehrt denken, und daher diese beiden Reihen zu-.mmenstimmender Werthe von x und y etwas grössere Intervalle ie vorher umfassen, und setzen demzufolge jetzt

$$((n-1)v+1)(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)\ldots((n-1)v-n)$$

$$=\frac{(n-1)w+(n+1)}{2}\cdot\frac{(n-1)w+(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-1)w+(n-3)}{2}\cdot\frac{(n-1)w+2}{2}\cdot\frac{(n-1)}{2}$$

$$\times\frac{(n-1)w-(n+1)}{2}\cdot\frac{(n-1)w-(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-1)w-(n-3)}{2}\cdots\frac{(n-1)w-}{2}$$

$$=\frac{1}{2^{n+2}}((n-1)^2w^2-(n+1)^2)((n-1)^2w^2-(n-1)^2)\ldots((n-1)^2w^2-2^2)(n-1)$$

Setzen wir folglich der Kürze wegen, jenachdem n gerade oder ungerade ist:

$$\mathfrak{W}_\mu=\begin{cases}\dfrac{((n-1)^2w^2-(n+1)^2)((n-1)^2w^2-(n-1)^2)\ldots((n-1)^2w^2-1^2)}{(n-1)^2w^2-(n-2\mu+1)^2}\\[2ex]\dfrac{((n-1)^2w^2-(n+1)^2)((n-1)^2w^2-(n-1)^2)\ldots((n-1)^2w^2-2^2)(n-1)}{(n-1)^2w^2-(n-2\mu+1)^2}\end{cases}$$

so ist offenbar

$$\frac{((n-1)v+1)(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)\ldots((n-1)v-n)}{(n-1)v-(\mu-1)}$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}((n-1)w-(n-2\mu+1))\mathfrak{W}_\mu;$$

und weil nun $\partial v=\frac{1}{2}\partial w$ und für $v=0$, $v=1$ respective $w=-1$, $w=+1$ ist, so ist nach dem Obigen offenbar

$$\mathfrak{V}_\mu=\frac{1}{2^{n+2}}\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\,\mathfrak{W}_\mu\partial w.$$

Also ist das allgemeine Glied von

$$\int_0 y\partial x$$

nach dem Obigen:

$$\frac{1}{2^{n+2}}\,\omega\,\mathfrak{K}_\mu A_\mu\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\,\mathfrak{W}_\mu\partial w.$$

Die beiden Fälle, wenn $\mu=0$ und $\mu=n+1$ ist, müssen noch besonders betrachtet werden, wovon die Nothwendigkeit leicht aus dem Vorhergehenden von selbst erhellen wird.

Das erste Glied von y ist

$$\frac{x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_{n+1})}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)(a_0-a_4)\ldots(a_0-a_{n+1})}A_0.$$

Nenner dieses Gliedes ist

$$-1\overline{\omega}.-2\overline{\omega}.-3\overline{\omega}.-4\overline{\omega}\ldots-(n+1)\overline{\omega}$$
$$=(-1)^{n+1}.1.2.3\ldots(n+1)\overline{\omega}^{n+1};$$

der Zähler ist, wenn wieder

$$u=x-a$$

etzt wird:

$$u(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})(u-3\overline{\omega})\ldots(u-n\overline{\omega}).$$

ist das obige erste Glied von y:

$$(-1)^{n+1}.\frac{u(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})(u-3\overline{\omega})\ldots(u-n\overline{\omega})}{1.2.3\ldots(n+1)\overline{\omega}^{n+1}}A_0.$$

l nun $\partial x=\partial u$] und für $x=a$, $x=b$ respective $u=0$, $b-a=\omega$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$\mathfrak{A}_0=\frac{(-1)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}$$

$$\mathfrak{U}_0=\int_0^{\omega}u(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})(u-3\overline{\omega})\ldots(u-n\overline{\omega})\partial u$$

tzt wird, das erste Glied von

$$\int_a^b y\partial x$$

ıbar:

$$\frac{\mathfrak{A}_0\mathfrak{U}_0}{\overline{\omega}^{n+1}}A_0.$$

ist aber, wie man leicht findet:

$$u(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})(u-3\overline{\omega})\ldots(u-n\overline{\omega})$$
$$=\overline{\omega}^{n+1}\frac{\left(\frac{u}{\overline{\omega}}+1\right)\frac{u}{\overline{\omega}}\left(\frac{u}{\overline{\omega}}-1\right)\left(\frac{u}{\overline{\omega}}-2\right)\ldots\left(\frac{u}{\overline{\omega}}-n\right)}{\frac{u}{\overline{\omega}}+1},$$

wenn man

$$\frac{u}{\overline{\omega}}=(n-1)v, u=(n-1)\overline{\omega}v=\omega v$$

setzt:

$$u(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})(u-3\overline{\omega})\,..\,(u-n\overline{\omega})$$

$$=\overline{\omega}^{n+1}\frac{((n-1)v+1)(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)\,..\,((n-1)v-n)}{(n-1)v+1}$$

und weil nun $\partial u=\omega\partial v$ und für $u=0$, $u=\omega$ respective $v=0$, $v=1$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$\mathfrak{V}_0=\int_0^1\frac{((n-1)v+1)(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)\,..\,((n-1)v-n)}{(n-1)v+1}\partial v$$

gesetzt wird, offenbar

$$\mathfrak{U}_0=\omega\overline{\omega}^{n+1}\mathfrak{V}_0.$$

Also ist nach dem Obigen von

$$\int_a^b y\partial x$$

das erste Glied

$$\omega\mathfrak{X}_0\,\mathfrak{V}_0\,A_0,$$

wo $\mathfrak{X}_0$ seinen obigen Werth hat.

Diese Rechnung noch weiter fortzuführen, ist unnöthig, weil die fernere Rechnung ganz unter dem obigen allgemeinen Fall enthalten ist.

Das letzte Glied von y ist nach dem Obigen

$$\frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\,..\,(x-a_n)}{(a_{n+1}-a_0)(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)(a_{n+1}-a_3)\,..\,(a_{n+1}-a_n)}A_{n+1};$$

Der Nenner dieses Gliedes ist

$$(n+1)\overline{\omega}.\,n\overline{\omega}.\,(n-1)\overline{\omega}\,...\,1\overline{\omega}$$
$$=(-1)^0.1.2.3\,..\,(n+1)\overline{\omega}^{n+1},$$

und der Zähler ist, wenn wieder

$$u=x-a$$

gesetzt wird:

$$(u+1\overline{\omega})u(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})\,...\,(u-(n-1)\overline{\omega}).$$

so ist das obige letzte Glied von y:

$$(-1)^0 \cdot \frac{(u+1\bar{\omega})u(u-1\bar{\omega})(u-2\bar{\omega})..(u-(n-1)\bar{\omega})}{1.2.3..(n+1)\bar{\omega}^{n+1}} A_{n+1}.$$

Weil nun $\partial x = \partial u$ und für $x=a$, $x=b$ respective $u=0$, $b-a=\omega$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$\mathfrak{X}_{n+1} = \frac{(-1)^0}{1.2.3.\,(n+1)}$$

l

$$\mathfrak{U}_{n+1} = \int_0^{\omega} (u+1\bar{\omega})u(u-1\bar{\omega})(u-2\bar{\omega})..(u-(n-1)\bar{\omega})\partial u$$

etzt wird, das letzte Glied von

$$\int_a^b y\partial x$$

nbar

$$\frac{\mathfrak{X}_{n+1}\mathfrak{U}_{n+1}}{\bar{\omega}^{n+1}} A_{n+1}.$$

n ist aber, wie man leicht findet:

$$(u+1\bar{\omega})u(u-1\bar{\omega})(u-2\bar{\omega})..(u-(n-1)\bar{\omega})$$

$$= \bar{\omega}^{n+1} \frac{\left(\frac{u}{\bar{\omega}}+1\right)\frac{u}{\bar{\omega}}\left(\frac{u}{\bar{\omega}}-1\right)\left(\frac{u}{\bar{\omega}}-2\right)..\left(\frac{u}{\bar{\omega}}-n\right)}{\frac{u}{\bar{\omega}}-n},$$

), wenn man

$$\frac{u}{\bar{\omega}} = (n-1)v, u = (n-1)\bar{\omega}v = \omega v$$

t:

$$(u+1\bar{\omega})u(u-1\bar{\omega})(n-2\bar{\omega})..(u-(n-1)\bar{\omega})$$

$$\bar{\omega}^{n+1} \frac{((n-1)v+1)(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)..((n-1)v-n)}{(n-1)v-n},$$

weil nun $\partial u = \omega \partial v$ und für $u=0$, $u=\omega$ respective $v=0$, 1 ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$_{+1} = \int_0^1 \frac{((n-1)v+1)(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)..((n-1)v-n)}{(n-1)v-n}\partial v$$

$$\frac{u}{\overline{\omega}}=(n-1)\,v,\, u=(n-1)\overline{\omega}\, v=\omega v$$

setzt:

$$u(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})(u-3\overline{\omega})\,..\,(u-n\overline{\omega})$$

$$=\overline{\omega}^{n+1}\frac{((n-1)\,v+1)\,(n-1)v((n-1)v-1)\,((n-1)v-2)\,..\,((n-1)v-n)}{(n-1)v+1},$$

und weil nun $\partial u=\omega\partial v$ und für $u=0$, $u=\omega$ respective $v=0$, $v=1$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$\mathfrak{V}_0=\int_0^1\frac{((n-1)v+1)(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)..((n-1)v-n)}{(n-1)v+1}\partial v$$

gesetzt wird, offenbar

$$\mathfrak{U}_0=\omega\overline{\omega}^{n+1}\mathfrak{V}_0.$$

Also ist nach dem Obigen von

$$\int_a^b y\partial x$$

das erste Glied

$$\omega\mathfrak{B}_0\,\mathfrak{V}_0\,A_0,$$

wo $\mathfrak{B}_0$ seinen obigen Werth hat.

Diese Rechnung noch weiter fortzuführen, ist unnöthig, weil die fernere Rechnung ganz unter dem obigen allgemeinen Falle enthalten ist.

Das letzte Glied von y ist nach dem Obigen

$$\frac{(x-a_0)\,(x-a_1)\,(x-a_2)\,(x-a_3)\,..\,(x-a_n)}{(a_{n+1}-a_0)\,(a_{n+1}-a_1)\,(a_{n+1}-a_2)\,(a_{n+1}-a_3)\,..\,(a_{n+1}-a_n)}A_{n+1}.$$

Der Nenner dieses Gliedes ist

$$(n+1)\,\overline{\omega}.\,n\,\overline{\omega}.\,(n-1)\,\overline{\omega}\,...\,1\,\overline{\omega}$$

$$=(-1)^0.1.2.3..(n+1)\,\overline{\omega}^{n+1},$$

und der Zähler ist, wenn wieder

$$u=x-a$$

gesetzt wird:

$$(u+1\overline{\omega})u(u-1\,\overline{\omega})\,(u-2\,\overline{\omega})\,...\,(u-(n-1)\,\overline{\omega}).$$

Also ist das obige letzte Glied von y:

$$(-1)^0 . \frac{(u+1\bar{\omega})u(u-1\bar{\omega})(u-2\bar{\omega})..(u-(n-1)\bar{\omega})}{1.2.3..(n+1)\bar{\omega}^{n+1}} A_{n+1}.$$

Weil nun $\partial x = \partial u$ und für $x=a$, $x=b$ respective $u=0$, $u=b-a=\omega$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$\mathfrak{B}_{n+1} = \frac{(-1)^0}{1.2.3.\ (n+1)}$$

und

$$\mathfrak{U}_{n+1} = \int_0^{\omega} (u+1\bar{\omega})u(u-1\bar{\omega})(u-2\bar{\omega})..(u-(n-1)\bar{\omega})\partial u$$

gesetzt wird, das letzte Glied von

$$\int_a^b y \partial x$$

offenbar

$$\frac{\mathfrak{B}_{n+1}\mathfrak{U}_{n+1}}{\bar{\omega}^{n+1}} A_{n+1}.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$(u+1\bar{\omega})u(u-1\bar{\omega})(u-2\bar{\omega})..(u-(n-1)\bar{\omega})$$

$$= \bar{\omega}^{n+1} \frac{\left(\frac{u}{\bar{\omega}}+1\right)\frac{u}{\bar{\omega}}\left(\frac{u}{\bar{\omega}}-1\right)\left(\frac{u}{\bar{\omega}}-2\right)..\left(\frac{u}{\bar{\omega}}-n\right)}{\frac{u}{\bar{\omega}}-n},$$

also, wenn man

$$\frac{u}{\bar{\omega}} = (n-1)v, u = (n-1)\bar{\omega}v = \omega v$$

setzt:

$$(u+1\bar{\omega})u(u-1\bar{\omega})(n-2\bar{\omega})..(u-(n-1)\bar{\omega})$$

$$= \bar{\omega}^{n+1} \frac{((n-1)v+1)(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)..((n-1)v-n)}{(n-1)v-n},$$

und weil nun $\partial u = \omega \partial v$ und für $u=0$, $u=\omega$ respective $v=0$, $v=1$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$\mathfrak{V}_{n+1} = \int_0^1 \frac{((n-1)v+1)(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)..((n-1)v-n)}{(n-1)v-n}\partial v$$

$$((n-1)w-(n-2\nu+1))\mathfrak{W}_\nu\partial w=((n-1)w-(\mu-\nu))\mathfrak{W}_\mu\partial w$$
$$=((n-1)w+(\nu-\mu))\mathfrak{W}_\mu\partial w,$$

d. i.

$$((n-1)w-(n-2\nu+1))\mathfrak{W}_\nu\partial w=((n-1)w+(n-2\mu+1))\mathfrak{W}_\mu\partial w.$$

Setzen wir nun $w=-w'$, also $\partial w=-\partial w'$, so ist, wie leicht [...] dem Obigen erhellen wird,

$$((n-1)w-(n-2\nu+1))\mathfrak{W}_\nu\partial w=\pm((n-1)w'-(n-2\mu+1))\mathfrak{W}_\mu[...]$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem [...] eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, und folglich überhaupt

$$((n-1)w-(n-2\nu+1))\mathfrak{W}_\nu\partial w=(-1)^n((n-1)w'-(n-2\mu+1))\mathfrak{W}_\mu[...]$$

Weil nun für $w=-1$, $w=+1$ respective $w'=+1$, $w'=-$[...] ist, so ist

$$\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\nu+1))\mathfrak{W}_\nu\partial w$$
$$=(-1)^n\int_{+1}^{-}((n-1)w'-(n-2\mu+1))\mathfrak{W}_\mu\partial w'$$

oder, was Dasselbe ist,

$$\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\nu+1))\mathfrak{W}_\nu\partial w$$
$$=-(-1)^n\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\mathfrak{W}_\mu\partial w.$$

Daher sind die Grössen, in welche in dem $(\mu+1)$sten [...] $(\nu+1)$sten Gliede A_μ und A_ν multiplicirt sind, nach dem Obigen

$$\frac{1}{2^{n+2}}\,\omega\,\mathfrak{B}_\mu\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\mathfrak{W}_\mu\partial w$$

und

$$-(-1)^n\frac{1}{2^{n+2}}\,\omega\,\mathfrak{B}_\nu\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\mathfrak{W}_\mu\partial w.$$

Für $\mu=0$ und $\nu=n+1$ ist nach dem Obigen bekanntlich

$$\mathfrak{B}_\mu=\frac{(-1)^{n+1}}{1.2.3..(n+1)},$$

$$\mathfrak{B}_\nu = \frac{(-1)^{n-(n+1)+1}}{1.2.3..(n+1)};$$

also

$$-(-1)^n \mathfrak{B}_n = (-1)^{n+1} \mathfrak{B}_\nu = \frac{(-1)^{n+1}}{1.2.3..(n+1)} = \mathfrak{B}_\mu,$$

so dass also im ersten und letzten Gliede von $\int_a^b y\partial x$ die Coefficienten von A_0 und A_{n+1} nach dem Vorhergehenden offenbar einander gleich sind.

Allgemein ist bekanntlich

$$\mathfrak{B}_\mu = \frac{(-1)^{n-\mu+1}}{1.2.3..\mu.1.2.3..(n-\mu+1)},$$

$$\mathfrak{B}_\nu = \frac{(-1)^{n-\nu+1}}{1.2.3..\nu.1.2.3..(n-\nu+1)};$$

und folglich, weil nach der Voraussetzung $\mu+\nu=n+1$, also

$$n-\mu+1=\nu, n-\nu+1=\mu$$

ist:

$$\mathfrak{B}_\mu = \frac{(-1)^\nu}{1.2.3..\mu.1.2.3..\nu},$$

$$\mathfrak{B}_\nu = \frac{(-1)^\mu}{1.2.3..\mu.1.2.3..\nu};$$

daher ist

$$-(-1)^n \mathfrak{B}_\nu = (-1)^{n+1} \mathfrak{B}_\nu = (-1)^{\mu+\nu} \mathfrak{B}_\nu = \frac{(-1)^{2\mu+\nu}}{1.2.3..\mu.1.2.3..\nu}$$

$$= \frac{(-1)^{2\mu}.(-1)^\nu}{1.2.3..\mu.1.2.3..\nu} = \frac{(-1)^\nu}{1.2.3..\mu.1.2.3..\nu},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$-(-1)^n \mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{B}_\mu,$$

woraus man also sieht, dass unter den gemachten Voraussetzungen überhaupt in dem $(\mu+1)$sten und $(\nu+1)$sten Gliede von $\int_a^b y\partial x$ die Grössen A_μ und A_ν gleiche Coefficienten haben.

Man gelangt also hierdurch auch jetzt zu dem allgemeinen Resultate, dass in dem obigen Ausdrucke von $\int_a^b y\partial x$ die Grösse

A_μ in den vom ersten und letzten Gliede gleich weit abstehenden Gliedern mit gleichen Coefficienten behaftet ist, wodurch natürlich die numerische Entwickelung der Coefficienten von

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots A_{n+1}$$

in dem obigen allgemeinen Ausdrucke von $\int_a^b y\partial x$ wesentlich abgekürzt wird, und daher das in Rede stehende Resultat auch jetzt als ein für die numerische Berechnung dieser Coefficienten sehr wichtiges bezeichnet werden muss.

Die in §. 7. und §. 8. entwickelte Methode, welche ganz allgemein ist, findet eben deshalb auch im vorliegenden Falle Anwendung, wenn man nur für die dort gebrauchten allgemeinen Symbole die in diesem Paragraphen gebrauchten Zeichen setzt.

§. 10.

Wenn wir uns bei der näherungsweisen Ermittelung des Werths des bestimmten Integrals

$$\int_a^b y\partial x$$

der in §. 6. entwickelten Methode bedienen, so werden der Rechnung die folgenden einander entsprechenden Werthe von x und y zum Grunde gelegt:

$$\begin{array}{ll}
x = a_1 = a & y = A_1; \\
 = a_2 = a + \frac{1}{n-1}(b-a), & = A_2; \\
 = a_3 = a + \frac{2}{n-1}(b-a), & = A_3; \\
 = a_4 = a + \frac{3}{n-1}(b-a), & = A_4; \\
\text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \\
 = a_n = a + \frac{n-1}{n-1}(b-a), & = A_n;
\end{array}$$

und wenn nun

$$\overset{n}{T}_1,\ \overset{n}{T}_2,\ \overset{n}{T}_3,\ \overset{n}{T}_4, \ldots \overset{n}{T}_n$$

wisse numerische, d. h. nur von n abhängende Coefficienten zeichnen, so hat man nach §. 6. für

$$\int_a^b y\partial x$$

en Ausdruck von der folgenden Form:

$$\int_a^b y\partial x=(b-a)(\overset{n}{T}_1 A_1+\overset{n}{T}_2 A_2+\overset{n}{T}_3 A_3+\ldots+\overset{n}{T}_n A_n).$$

enn nun aber n eine gerade Zahl ist, so ist, wie wir aus §. 6. ssen:

$$\overset{n}{T}_1=\overset{n}{T}_n,$$

$$\overset{n}{T}_2=\overset{n}{T}_{n-1},$$

$$\overset{n}{T}_3=\overset{n}{T}_{n-2},$$

u. s. w.

$$\overset{n}{T}_{\frac{1}{2}n}=\overset{n}{T}_{\frac{1}{2}n+1}$$

d folglich, wenn wir der Kürze wegen überhaupt

$$A_\lambda+A_\mu=A_{\lambda,\mu}$$

tzen:

$$\int^b y\partial x=(b-a)\{\overset{n}{T}_1 A_{1,n}+\overset{n}{T}_2 A_{2,n-1}+\overset{n}{T}_3 A_{3,n-2}+\ldots+\overset{n}{T}_{\frac{1}{2}n} A_{\frac{1}{2}n,\frac{1}{2}n+1}\}.$$

enn dagegen n eine ungerade Zahl ist, so ist nach §. 6.

$$\overset{n}{T}_1=\overset{n}{T}_n,$$

$$\overset{n}{T}_2=\overset{n}{T}_{n-1},$$

$$\overset{n}{T}_3=\overset{n}{T}_{n-2},$$

u. s. w.

$$\overset{n}{T}_{\frac{1}{2}(n-1)}=\overset{n}{T}_{\frac{1}{2}(n-1)+2}$$

d folglich, wenn wir dieselbe abkürzende Bezeichnung wie vor-r anwenden:

$$x = a_0 = a - \frac{1}{n-1}(b-a), \quad y = A_0;$$

$$x = a_{n+1} = a + \frac{n}{n-1}(b-a), \quad y = A_{n+1}\ .$$

hinzufügt. Weil also bei der zweiten Methode eine grössere An- zahl einander entsprechender Werthe von x und y benutzt wor- den sind wie bei der ersten, so wird jene im Allgemeinen den Werth von $\int_a^b y\partial x$ genauer als diese liefern. Bezeichnen wir den Werth des bestimmten Integrals $\int_a^b y\partial x$, welchen aus n Paaren einander entsprechender Werthe von x und y die erste Methode liefert, durch $\overset{n}{J}$, und den Werth dieses bestimmten Integrals, welchen in der aus dem Obigen von selbst ersichtlichen Weise aus $n+2$ Paaren einander entsprechender Werthe von x und y die zweite Methode liefert, durch $\overset{n}{J'}$, so pflegt man sich Formeln für die Differenzen $\overset{n}{J'} - \overset{n}{J}$ zu entwickeln, welche aus den obigen allgemeinen Ausdrücken unmittelbar durch Subtraction folgen, und diese Formeln Correctionsformeln zu nennen, indem man sich der- selben in der Weise bei der Entwickelung des Werths von $\int_a^b y$ bedient, dass man unmittelbar die Werthe von $\overset{n}{J}$ mittelst der obi- gen Formeln und die Werthe von $\overset{n}{J'} - \overset{n}{J}$ mittelst der Corrections- formeln berechnet, wo denn die grössere oder geringere Kleinh- der Correction $\overset{n}{J'} - \overset{n}{J}$ zugleich ein Kriterium abgiebt, nach welchem man ein Urtheil über den Grad der Genauig- keit zu fällen im Stande ist, welche man erreicht, wenn man den berechneten Werth von $\overset{n}{J}$ als den gesuchten Werth von $\int_a^b y\partial x$ annimmt; den verbesserten Werth $\overset{n}{J'}$ dieses Integrals wird man aber erhalten, wenn man zu $\overset{n}{J}$ die Correction $\overset{n}{J'}-$ hinzulegt, indem

$$\overset{n}{J'} = \overset{n}{J} + (\overset{n}{J'} - \overset{n}{J})$$

ist. Dass diese Methode der Berechnung des verbesserten Werths $\overset{n}{J'}$ bequemer ist, als wenn man denselben unmittelbar aus der Formel, durch welche er ausgedrückt wird, berechnet, hat seinen Grund, dass in der Formel für $\overset{n}{J'} - \overset{n}{J}$ die numerischen Coefficienten beträchtlich kleiner sind als in der Formel für wie sich aus dem Folgenden von selbst ergeben wird.

§. 11.

Die numerischen Coefficienten

$$\overset{n}{T}_1,\ \overset{n}{T}_2,\ \overset{n}{T}_3,\ \overset{n}{T}_4, \ldots \overset{n}{T}_n$$

, nachdem schon Newton ein Paar besondere Fälle betrachhatte, für $n=2$ bis $n=11$ zuerst mit besonderer Sorgfalt tes berechnet, und in der Schrift: „De methodo differenli Newtoniana" am Ende mitgetheilt, ohne die Methode der echnung anzugeben. Diese Schrift findet man in einer Samm; verschiedener Schriften von Cotes, welche unter dem Titel: pera miscellanea Rogeri Cotes" oder „Aestimatio orum in mixta mathesi, per variationes partium triguli plani et sphaerici, auctore Rogero Cotes. Lemiae. 1768.*) erschienen ist, wo sich p. 86. die Cotesischen meln finden.

Um die Anwendung unserer obigen Methoden zur Berechnung in Rede stehenden Coefficienten an einem Beispiele zu erläu, wollen wir dieselben jetzt für $n=5$ berechnen.

Wenn wir die in §. 6. angegebene Methode auf diesen Fall enden, so ist zuvörderst, weil $n=5$ ungerade ist:

$$W_1=\frac{(4^2w^2-4^2)(4^2w^2-2^2)4w}{4^2w^2-4^2}=4w(4^2w^2-2^2),$$

$$W_2=\frac{(4^2w^2-4^2)(4^2w^2-2^2)4w}{4^2w^2-2^2}=4w(4^2w^2-4^2),$$

$$W_3=\frac{(4^2w^2-4^2)(4^2w^2-2^2)4w}{4^2w^2}=\frac{(4^2w^2-4^2)(4^2w^2-2^2)}{4w};$$

$$W_1=16w(4w^2-1),$$

$$W_2=64w(w^2-1),$$

$$W_3=\frac{16(w^2-1)(4w^2-1)}{w};$$

$$(4w-4)W_1= 64w(w-1)(4w^2-1),$$

---

*) Dieser letztere Titel ist eigentlich der Haupttitel, wenngleich ur eine einzelne Abhandlung bezeichnet.

$$(4w-2)\,W_2 = 128w\,(2w-1)\,(w^2-1),$$
$$4w\,W_3 = \ 64(w^2-1)(4w^2-1);$$

und folglich nach gehöriger Entwickelung:

$$(4w-4)\,W_1 = \ 64(4w^4-4w^3-w^2+w),$$
$$(4w-2)\,W_2 = 128(2w^4-w^3-2w^2+w),$$
$$4w\,W_3 = \ 64(4w^4-5w^2+1).$$

Integrirt man nun zwischen den Gränzen -1 und $+1$, so erhält man:

$$\int_{-1}^{+1}(4w-4)\,W_1\,\partial w = \frac{896}{15},$$
$$\int_{-1}^{+1}(4w-2)\,W_2\partial w = -\frac{1024}{15},$$
$$\int_{-1}^{+1}4w\,W_3\,\partial w \quad = \frac{256}{15}.$$

Ferner ist

$$K_1 = \frac{1}{1.2.3.4} = \frac{1}{24},$$
$$K_2 = -\frac{1}{1.1.2.3} = -\frac{1}{6},$$
$$K_3 = \frac{1}{1.2.1.2} = \frac{1}{4};$$

und weil nun $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ ist, so ist

$$\overset{5}{T}_1 = \overset{5}{T}_5 = \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{24}\cdot\frac{896}{15} = \frac{7}{90},$$
$$\overset{5}{T}_2 = \overset{5}{T}_4 = \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1024}{15} = \frac{16}{45},$$
$$\overset{5}{T}_3 = \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{256}{15} = \frac{2}{15}.$$

Also ist

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)\left(\frac{7}{90}A_{1,5} + \frac{16}{45}A_{2,4} + \frac{2}{15}A_3\right),$$

oder

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)(\frac{7A_{1,5}+32A_{2,4}+12A_3}{90}.$$

Wenn wir die in §. 8. angegebene Methode auf den vorliegenden Fall anwenden, so ist

$$a_1 = a, \qquad \frac{a_1-a}{b-a} = 0;$$

$$a_2 = a + \frac{1}{4}(b-a), \frac{a_2-a}{b-a} = \frac{1}{4};$$

$$a_3 = a + \frac{2}{4}(b-a), \frac{a_3-a}{b-a} = \frac{2}{4};$$

$$a_4 = a + \frac{3}{4}(b-a), \frac{a_4-a}{b-a} = \frac{3}{4},$$

$$a_5 = a + \frac{4}{4}(b-a), \frac{a_5-a}{b-a} = \frac{4}{4};$$

also

$$\beta_1 = 2\frac{a_1-a}{b-a} - 1 = 0 - 1 = -1,$$

$$\beta_2 = 2\frac{a_2-a}{b-a} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2},$$

$$\beta_3 = 2\frac{a_3-a}{b-a} - 1 = 1 - 1 = 0,$$

$$\beta_4 = 2\frac{a_4-a}{b-a} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2},$$

$$\beta_5 = 2\frac{a_5-a}{b-a} - 1 = 2 - 1 = 1;$$

und folglich

$$V = (v+1)(v+\frac{1}{2})v(v-\frac{1}{2})(v-1)$$
$$= v(v^2-\frac{1}{4})(v^2-1),$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung

$$V = v^5 - \frac{5}{4}v^3 + \frac{1}{4}v,$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial v} = 5v^4 - \frac{15}{4}v^2 + \frac{1}{4}$$

und

$$\left.\begin{aligned} V' = v^4 - \frac{5}{4}v^2 + \frac{1}{4} \\ + \frac{1}{3}v^2 - \frac{5}{12} \\ + \frac{1}{5} \end{aligned}\right\} = v^4 - \frac{11}{12}v^2 + \frac{1}{30}.$$

Daher ist

$$\frac{V'}{\frac{\partial V}{\partial v}} = \frac{v^4 - \frac{11}{12}v^2 + \frac{1}{30}}{5v^4 - \frac{15}{4}v^2 + \frac{1}{4}}$$

oder

$$\frac{V'}{\frac{\partial V}{\partial v}} = \frac{60v^4 - 55v^2 + 2}{300v^4 - 225v^2 + 15},$$

und in diesem Bruche muss man nun für v nach und nach $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = -\frac{1}{2}$, $\beta_3 = 0$ setzen, um $\overset{5}{T}_1$, $\overset{5}{T}_2$, $\overset{5}{T}_3$ zu erhalten. Dies giebt

$$\overset{5}{T}_1 = \overset{5}{T}_5 = \frac{60 - 55 + 2}{300 - 225 + 15} = \frac{7}{90},$$

$$\overset{5}{T}_2 = \overset{5}{T}_4 = \frac{\frac{15}{4} - \frac{55}{4} + 2}{\frac{75}{4} - \frac{225}{4} + 15} = \frac{16}{45},$$

$$\overset{5}{T}_3 = \frac{2}{15};$$

ganz wie vorher.

Auf diese Weise kann man die sämmtlichen numerischen Coefficienten berechnen. Die von **Cotes** angegebenen Werthe derselben wollen wir nun im Folgenden zusammenstellen.

Für $n=2$ ist:

$$\overset{2}{T}_1 = \overset{2}{T}_2 = \frac{1}{2}.$$

Für $n=3$ ist:

$$\overset{3}{T}_1 = \overset{3}{T}_3 = \frac{1}{6},$$

$$\overset{3}{T}_2 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}.\,^{*)}$$

Für $n=4$ ist:

$$\overset{4}{T}_1 = \overset{4}{T}_4 = \frac{1}{8},$$

---

*) Denkt man sich, indem n eine gerade Zahl bezeichnet, das Intervall $b-a$ in n gleiche Theile getheilt, und bezeichnet die den Werthen

$$a,\, a+1\frac{b-a}{n},\, a+2\frac{b-a}{n}, \ldots a+n\frac{b-a}{n}$$

von x entsprechenden Werthe von y respective durch

$$y_0,\, y_1,\, y_2,\, y_3, \ldots y_n;$$

so ist nach dem Obigen und nach der Lehre von den bestimmten Integralen:

$$\int_a^b y\partial x = \frac{2(b-a)}{n}\left\{\frac{1}{6}(y_0+y_2)+\frac{4}{6}y_1\right\}$$

$$+\frac{2(b-a)}{n}\left\{\frac{1}{6}(y_2+y_4)+\frac{4}{6}y_3\right\}$$

$$+\frac{2(b-a)}{n}\left\{\frac{1}{6}(y_4+y_6)+\frac{4}{6}y_5\right\}$$

u. s. w.

$$+\frac{2(b-a)}{n}\left\{\frac{1}{6}(y_{n-4}+y_{n-2})+\frac{4}{6}y_{n-3}\right\}$$

$$+\frac{2(b-a)}{n}\left\{\frac{1}{6}(y_{n-2}+y_n)+\frac{4}{6}y_{n-1}\right\}.$$

also, wie man leicht findet:

$$\int_a^b y\partial x = \frac{b-a}{3n}\left\{\begin{array}{l} y_0+2(y_2+y_4+y_6+\ldots+y_{n-2}+y_n) \\ \quad +4(y_1+y_3+y_5+\ldots+y_{n-3}+y_{n-1})+y_n \end{array}\right\}.$$

Dies ist die gewöhnlich unter dem Namen der Simpson'schen Regel in den Lehrbüchern vorkommende Formel (m. s. auch Archiv. Thl. X. S. 281.). Dass man sich mittelst des Obigen leicht andere, eine noch grössere Genauigkeit gewährende Regeln oder Formeln dieser Art bilden könnte, erhellet leicht, und bedarf hier keiner weitern Erläuterug.

$$\overset{4}{T}_2=\overset{4}{T}_3=\frac{3}{8}.$$

Für $n=5$ ist:

$$\overset{5}{T}_1=\overset{5}{T}_5=\frac{7}{90},$$

$$\overset{5}{T}_2=\overset{5}{T}_4=\frac{16}{45}=\frac{32}{90},$$

$$\overset{5}{T}_3=\frac{2}{15}=\frac{12}{90}.$$

Für $n=6$ ist:

$$\overset{6}{T}_1=\overset{6}{T}_6=\frac{19}{288},$$

$$\overset{6}{T}_2=\overset{6}{T}_5=\frac{25}{96}=\frac{75}{288},$$

$$\overset{6}{T}_3=\overset{6}{T}_4=\frac{25}{144}=\frac{50}{288}.$$

Für $n=7$ ist:

$$\overset{7}{T}_1=\overset{7}{T}_7=\frac{41}{840},$$

$$\overset{7}{T}_2=\overset{7}{T}_6=\frac{9}{35}=\frac{216}{840},$$

$$\overset{7}{T}_3=\overset{7}{T}_5=\frac{9}{280}=\frac{27}{840},$$

$$\overset{7}{T}_4=\frac{34}{105}=\frac{272}{840}.$$

Für $n=8$ ist:

$$\overset{8}{T}_1=\overset{8}{T}_8=\frac{751}{17280},$$

$$\overset{8}{T}_2=\overset{8}{T}_7=\frac{3577}{17280},$$

$$\overset{8}{T}_3=\overset{8}{T}_6=\frac{49}{640}=\frac{1323}{17280},$$

$$\overset{8}{T}_4=\overset{8}{T}_5=\frac{2989}{17280}.$$

Für $n=9$ ist:

$$\overset{9}{T}_1=\overset{9}{T}_9=\frac{989}{28350},$$

$$\overset{9}{T}_2=\overset{9}{T}_8=\frac{2944}{14175}=\frac{5888}{28350},$$

$$\overset{9}{T}_3=\overset{9}{T}_7=-\frac{464}{14175}=-\frac{928}{28350},$$

$$\overset{9}{T}_4=\overset{9}{T}_6=\frac{5248}{14175}=\frac{10496}{28350},$$

$$\overset{9}{T}_5=-\frac{454}{2835}=-\frac{4540}{28350}.$$

Für $n=10$ ist:

$$\overset{10}{T}_1=\overset{10}{T}_{10}=\frac{2857}{89600},$$

$$\overset{10}{T}_2=\overset{10}{T}_9=\frac{15741}{89600},$$

$$\overset{10}{T}_3=\overset{10}{T}_8=\frac{27}{2240}=\frac{1080}{89600},$$

$$\overset{10}{T}_4=\overset{10}{T}_7=\frac{1209}{5600}=\frac{19344}{89600},$$

$$\overset{10}{T}_5=\overset{10}{T}_6=\frac{2889}{44800}=\frac{5778}{89600}.$$

Für $n=11$ ist:

$$\overset{11}{T}_1=\overset{11}{T}_{11}=\frac{16067}{598752},$$

$$\overset{11}{T}_2=\overset{11}{T}_{10}=\frac{26575}{149688}=\frac{106300}{598752},$$

$$\overset{11}{T}_3=\overset{11}{T}_9=-\frac{16175}{199584}=-\frac{48525}{598752},$$

$$\overset{11}{T}_4=\overset{11}{T}_8=\frac{5675}{12474}=\frac{272400}{598752},$$

$$\overset{11}{T}_5=\overset{11}{T}_7=-\frac{4825}{11088}=-\frac{260550}{598752},$$

$$\overset{11}{T}_6=\frac{17807}{24948}=\frac{427368}{598752}.$$

Mittelst dieser numerischen Coefficienten kann man nach dem Obigen leicht die erforderlichen Formeln zur näherungsweisen Berechnung des bestimmten Integrals $\int_a^b y\partial x$ herstellen, was keiner weiteren Erläuterung bedarf.

§. 12.

Bei der Berechnung der durch

$$\overset{n}{\mathfrak{C}}_0,\ \overset{n}{\mathfrak{C}}_1,\ \overset{n}{\mathfrak{C}}_2,\ \overset{n}{\mathfrak{C}}_3,\ \overset{n}{\mathfrak{C}}_4, \ldots \overset{n}{\mathfrak{C}}_n,\ \overset{n}{\mathfrak{C}}_{n+1}$$

bezeichneten Coefficienten wollen wir uns jetzt der in §. 8. angegebenen Methode bedienen.

Für $n=2$ ist

$$a_0=a-\frac{1}{1}(b-a),\qquad \frac{a_0-a}{b-a}=-\frac{1}{1};$$

$$a_1=a,\qquad \frac{a_1-a}{b-a}=0;$$

$$a_2=a+\frac{1}{1}(b-a),\qquad \frac{a_2-a}{b-a}=\frac{1}{1};$$

$$a_3=a+\frac{2}{1}(b-a),\qquad \frac{a_3-a}{b-a}=\frac{2}{1};$$

also

$$\beta_0=2\frac{a_0-a}{b-a}-1=-2-1=-3,$$

$$\beta_1=2\frac{a_1-a}{b-a}-1=0-1=-1,$$

$$\beta_2=2\frac{a_2-a}{b-a}-1=2-1=1,$$

$$\beta_3=2\frac{a_3-a}{b-a}-1=4-1=3.$$

Folglich ist

$$V=(v+3)(v+1)(v-1)(v-3)=(v^2-1)(v^2-9),$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung

$$V=v^4-10v^2+9,$$

folglich

$$\frac{\partial V}{\partial v}=4v^3-20v.$$

il nun, wie man leicht findet,

$$\left.\begin{array}{r}V'=v^3-10v\\ +\frac{1}{3}v\end{array}\right\}=v^2-\frac{29}{3}v$$

so ist

$$\frac{V'}{\frac{\partial V}{\partial v}}=\frac{v^2-\frac{29}{3}}{4v^2-20}=\frac{3v^2-29}{12v^2-60},$$

folglich, wenn man für v nach und nach $\beta_0=-3$, $\beta_1=-1$
tt:

$$\overset{2}{\mathfrak{C}}_0=\overset{2}{\mathfrak{C}}_3=\frac{3.9-29}{12.9-60}=-\frac{1}{24},$$

$$\overset{2}{\mathfrak{C}}_1=\overset{2}{\mathfrak{C}}_2=\frac{3.1-29}{12.1-60}=\frac{13}{24}.$$

Für $n=3$ ist

$$a_0=a-\frac{1}{2}(b-a),\quad \frac{a_0-a}{b-a}=-\frac{1}{2};$$

$$a_1=a,\quad \frac{a_1-a}{b-a}=0;$$

$$a_2=a+\frac{1}{2}(b-a),\quad \frac{a_2-a}{b-a}=\frac{1}{2};$$

$$a_3=a+\frac{2}{2}(b-a),\quad \frac{a_3-a}{b-a}=\frac{2}{2};$$

$$a_4=a+\frac{3}{2}(b-a),\quad \frac{a_4-a}{b-a}=\frac{3}{2};$$

$$\beta_0=2\frac{a_0-a}{b-a}-1=-1-1=-2,$$

$$\beta_1=2\frac{a_1-a}{b-a}-1=0-1=-1,$$

$$\beta_2=2\frac{a_2-a}{b-a}-1=1-1=0,$$

$$\beta_3=2\frac{a_3-a}{b-a}-1=2-1=1,$$

$$\beta_4=2\frac{a_4-a}{b-a}-1=3-1=2.$$

Folglich ist

$$V=(v+2)(v+1)v(v-1)(v-2)=v(v^2-1)(v^2-4).$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung

$$V=v^5-5v^3+4v,$$

und folglich

$$\frac{\partial V}{\partial v}=5v^4-15v^2+4.$$

Ferner ist, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{array}{r} V'=v^4-5v^2+4 \\ +\frac{1}{3}v^2-\frac{5}{3} \\ +\frac{1}{5} \end{array}\right\}=v^4-\frac{14}{3}v^2+\frac{38}{15},$$

und folglich

$$\frac{V'}{\frac{\partial V}{\partial v}}=\frac{v^4-\frac{14}{3}v^2+\frac{38}{15}}{5v^4-15v^2+4}=\frac{15v^4-70v^2+38}{75v^4-225v^2+60}.$$

Also ist

$$\overset{3}{\mathfrak{C}}_0=\overset{3}{\mathfrak{C}}_4=\frac{15.16-70.4+38}{75.16-225.4+60}=-\frac{1}{180},$$

$$\overset{3}{\mathfrak{C}}_1=\overset{3}{\mathfrak{C}}_3=\frac{15.1-70.1+38}{75.1-225.1+60}=\frac{17}{90}.$$

$$\overset{3}{\mathfrak{C}}_2=\frac{19}{30}.$$

Für $n=4$ ist

$$a_0 = a - \frac{1}{3}(b-a), \qquad \frac{a_0-a}{b-a} = -\frac{1}{3};$$

$$a_1 = a, \qquad \frac{a_1-a}{b-a} = 0;$$

$$a_2 = a + \frac{1}{3}(b-a), \qquad \frac{a_2-a}{b-a} = \frac{1}{3};$$

$$a_3 = a + \frac{2}{3}(b-a), \qquad \frac{a_3-a}{b-a} = \frac{2}{3};$$

$$a_4 = a + \frac{3}{3}(b-a), \qquad \frac{a_4-a}{b-a} = \frac{3}{3};$$

$$a_5 = a + \frac{4}{3}(b-a), \qquad \frac{a_5-a}{b-a} = \frac{4}{3};$$

$$\beta_0 = 2\frac{a_0-a}{b-a} - 1 = -\frac{2}{3} - 1 = -\frac{5}{3},$$

$$\beta_1 = 2\frac{a_1-a}{b-a} - 1 = 0 - 1 = -1,$$

$$\beta_2 = 2\frac{a_2-a}{b-a} - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3},$$

$$\beta_3 = 2\frac{a_3-a}{b-a} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3},$$

$$\beta_4 = 2\frac{a_4-a}{b-a} - 1 = \frac{6}{3} - 1 = 1,$$

$$\beta_5 = 2\frac{a_5-a}{b-a} - 1 = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}.$$

glich ist

$$V = (v+\frac{5}{3})(v+1)(v+\frac{1}{3})(v-\frac{1}{3})(v-1)(v-\frac{5}{3})$$
$$= (v^2-\frac{1}{9})(v^2-1)(v^2-\frac{25}{9}),$$

i. nach gehöriger Entwickelung

$$V = v^6 - \frac{35}{9}v^4 + \frac{259}{81}v^2 - \frac{25}{81},$$

o

$$\frac{\partial V}{\partial v}=6v^5-\frac{140}{9}v^3+\frac{518}{81}v.$$

Ferner ist, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{aligned}V'=v^5-\frac{35}{9}v^3+\frac{259}{81}v\\ +\frac{1}{3}v^3-\frac{35}{27}v\\ +\frac{1}{5}v\end{aligned}\right\}=v^5-\frac{32}{9}v^3+\frac{851}{405}v,$$

und folglich

$$\frac{V'}{\frac{\partial V}{\partial v}}=\frac{v^4-\frac{32}{9}v^2+\frac{851}{405}}{6v^4-\frac{140}{9}v^2+\frac{518}{81}}=\frac{405v^4-1440v^2+851}{2430v^4-6300v^2+2590}.$$

Also ist

$$\overset{4}{\mathfrak{T}}_0=\overset{4}{\mathfrak{T}}_5=\frac{405\cdot\frac{625}{81}-1440.\frac{25}{9}+851}{2430\cdot\frac{625}{81}-6300.\frac{25}{9}+2590}=-\frac{1}{160},$$

$$\overset{4}{\mathfrak{T}}_1=\overset{4}{\mathfrak{T}}_4=\frac{405-1440+851}{2430-6300+2590}=\frac{23}{160},$$

$$\overset{4}{\mathfrak{T}}_2=\overset{4}{\mathfrak{T}}_3=\frac{405\cdot\frac{1}{81}-1440.\frac{1}{9}+851}{2430\cdot\frac{1}{81}-6300.\frac{1}{9}+2590}=\frac{58}{160}.$$

Für $n=5$ ist

$$a_0=a-\frac{1}{4}(b-a),\qquad \frac{a_0-a}{b-a}=-\frac{1}{4};$$

$$a_1=a,\qquad \frac{a_1-a}{b-a}=0;$$

$$a_2=a+\frac{1}{4}(b-a),\qquad \frac{a_2-a}{b-a}=\frac{1}{4};$$

$$a_3=a+\frac{2}{4}(b-a),\qquad \frac{a_3-a}{b-a}=\frac{2}{4};$$

$$a_4 = a + \frac{3}{4}(b-a), \qquad \frac{a_4-a}{b-a} = \frac{3}{4};$$

$$a_5 = a + \frac{4}{4}(b-a), \qquad \frac{a_5-a}{b-a} = \frac{4}{4};$$

$$a_6 = a + \frac{5}{4}(b-a), \qquad \frac{a_6-a}{b-a} = \frac{5}{4};$$

)

$$\beta_0 = 2\frac{a_0-a}{b-a} - 1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}.$$

$$\beta_1 = 2\frac{a_1-a}{b-a} - 1 = 0 - 1 = -1,$$

$$\beta_2 = 2\frac{a_2-a}{b-a} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2},$$

$$\beta_3 = 2\frac{a_3-a}{b-a} - 1 = \frac{2}{2} - 1 = 0,$$

$$\beta_4 = 2\frac{a_4-a}{b-a} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2},$$

$$\beta_5 = 2\frac{a_5-a}{b-a} - 1 = \frac{4}{2} - 1 = 1,$$

$$\beta_6 = 2\frac{a_6-a}{b-a} - 1 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}.$$

glich ist

$$V = (v+\frac{3}{2})(v+1)(v+\frac{1}{2})v(v-\frac{1}{2})(v-1)(v-\frac{3}{2})$$
$$= v(v^2-\frac{1}{4})(v^2-1)(v-\frac{9}{4}),$$

l. nach gehöriger Entwickelung

$$V = v^7 - \frac{7}{2}v^5 + \frac{49}{16}v^3 - \frac{9}{16}v,$$

o

$$\frac{\partial V}{\partial v} = 7v^6 - \frac{35}{2}v^4 + \frac{147}{16}v^2 - \frac{9}{16}$$

rner ist, wie man leicht findet:

$$\beta_2 = 2\frac{a_2-a}{b-a} - 1 = 1 - 1 = 0,$$

$$\beta_3 = 2\frac{a_3-a}{b-a} - 1 = 2 - 1 = 1,$$

$$\beta_4 = 2\frac{a_4-a}{b-a} - 1 = 3 - 1 = 2.$$

Folglich ist

$$V = (v+2)(v+1)v(v-1)(v-2) = v(v^2-1)(v^2-4),$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung

$$V = v^5 - 5v^3 + 4v,$$

und folglich

$$\frac{\partial V}{\partial v} = 5v^4 - 15v^2 + 4.$$

Ferner ist, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{aligned} V' = v^4 - 5v^2 + 4 \\ +\frac{1}{3}v^2 - \frac{5}{3} \\ +\frac{1}{5} \end{aligned}\right\} = v^4 - \frac{14}{3}v^2 + \frac{38}{15},$$

und folglich

$$\frac{V'}{\frac{\partial V}{\partial v}} = \frac{v^4 - \frac{14}{3}v^2 + \frac{38}{15}}{5v^4 - 15v^2 + 4} = \frac{15v^4 - 70v^2 + 38}{75v^4 - 225v^2 + 60}.$$

Also ist

$$\overset{3}{\mathfrak{C}}_0 = \overset{3}{\mathfrak{C}}_4 = \frac{15.16 - 70.4 + 38}{75.16 - 225.4 + 60} = -\frac{1}{180},$$

$$\overset{3}{\mathfrak{C}}_1 = \overset{3}{\mathfrak{C}}_3 = \frac{15.1 - 70.1 + 38}{75.1 - 225.1 + 60} = \frac{17}{90}.$$

$$\overset{3}{\mathfrak{C}}_2 = \frac{19}{30}.$$

Für $n=4$ ist

$$a_0 = a - \frac{1}{3}(b-a), \qquad \frac{a_0-a}{b-a} = -\frac{1}{3};$$

$$a_1 = a, \qquad \frac{a_1-a}{b-a} = 0;$$

$$a_2 = a + \frac{1}{3}(b-a), \qquad \frac{a_2-a}{b-a} = \frac{1}{3};$$

$$a_3 = a + \frac{2}{3}(b-a), \qquad \frac{a_3-a}{b-a} = \frac{2}{3};$$

$$a_4 = a + \frac{3}{3}(b-a), \qquad \frac{a_4-a}{b-a} = \frac{3}{3};$$

$$a_5 = a + \frac{4}{3}(b-a), \qquad \frac{a_5-a}{b-a} = \frac{4}{3};$$

also

$$\beta_0 = 2\frac{a_0-a}{b-a} - 1 = -\frac{2}{3} - 1 = -\frac{5}{3},$$

$$\beta_1 = 2\frac{a_1-a}{b-a} - 1 = 0 - 1 = -1,$$

$$\beta_2 = 2\frac{a_2-a}{b-a} - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3},$$

$$\beta_3 = 2\frac{a_3-a}{b-a} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3},$$

$$\beta_4 = 2\frac{a_4-a}{b-a} - 1 = \frac{6}{3} - 1 = 1,$$

$$\beta_5 = 2\frac{a_5-a}{b-a} - 1 = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}.$$

Folglich ist

$$V = (v + \frac{5}{3})(v+1)(v + \frac{1}{3})(v - \frac{1}{3})(v-1)(v - \frac{5}{3})$$
$$= (v^2 - \frac{1}{9})(v^2-1)(v^2 - \frac{25}{9}),$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung

$$V = v^6 - \frac{35}{9}v^4 + \frac{259}{81}v^2 - \frac{25}{81},$$

also

und

$$\int_a^b y\partial x = -\frac{b-a}{160}\{A_{0,4} - 23A_{1,4} - 58A_{2,4}\}.$$

Zieht man die erste Formel von der zweiten ab, so erhält man als Differenz

$$-\frac{b-a}{160}\{A_{0,4} - 3A_{1,4} + 2A_{2,4}\}.$$

Für $n=5$ ist nach §. 11. und §. 12. respective

$$\int_a^b y\partial x = \frac{b-a}{90}\{7A_{1,5} + 32A_{2,4} + 12A_3\}$$

und

$$\int_a^b y\partial x = -\frac{b-a}{1890}\{4A_{0,6} - 171A_{1,5} - 612A_{2,4} - 332A_3\}.$$

Zieht man die erste Formel von der zweiten ab, so erhält man als Differenz

$$-\frac{b-a}{1890}\{4A_{0,6} - 24A_{1,5} + 60A_{2,4} - 80A_3\},$$

oder

$$-\frac{2(b-a)}{945}\{A_{0,6} - 6A_{1,5} + 15A_{2,4} - 20A_3\},$$

oder

$$-\frac{b-a}{472,5}\{A_{0,6} - 6A_{1,5} + 15A_{2,4} - 20A_3\}.$$

Stirling (a. a. O. p. 146.), welcher diese Formel, jedoch ohne Beweis, zuerst gegeben hat, schreibt der leichteren Rechnung wegen näherungsweise 470 statt 472,5.

Wir haben daher zur Berechnung von $\int_a^b y\partial x$ jetzt die folgenden Näherungsformeln.

Für $n=2$ ist

$$\int_a^b y\partial x = \frac{b-a}{2}A_{1,2}$$

und die hierzu zu addirende Correction ist

Wir wollen jetzt diese etwas weitläufigen Rechnungen nicht noch weiter fortsetzen, weil die betreffenden Formeln für den praktischen Gebrauch zu weitläufig werden.

§. 13.

Nach den beiden vorhergehenden Paragraphen haben wir nun die folgenden Formeln.

Für $n=2$ ist nach §. 11. und §. 12. respective

$$\int_a^b y\partial x = \frac{b-a}{2} A_{1,2}$$

und

$$\int_a^b y\partial x = -\frac{b-a}{24} \{A_{0,3} - 13A_{1,2}\}$$

Zieht man die erste Formel von der zweiten ab, so erhält man als Differenz

$$-\frac{b-a}{24} \{A_{0,3} - A_{1,2}\}.$$

Für $n=3$ ist nach §. 11. und §. 12. respective

$$\int_a^b y\partial x = \frac{b-a}{6} \{A_{1,3} + 4A_2\}$$

und

$$\int_a^b y\partial x = -\frac{b-a}{180} \{A_{0,4} - 34A_{1,3} - 114A_2\}.$$

Zieht man die erste Formel von der zweiten ab, so erhält man als Differenz

$$-\frac{b-a}{180} \{A_{0,4} - 4A_{1,3} + 6A_2\}.$$

Für $n=4$ ist nach §. 11. und §. 12. respective

$$\int_a^b y\partial x = \frac{b-a}{8} \{A_{1,4} + 3A_{2,3}\}$$

Für $n=7$ ist nach §. 11.

$$\int_a^b y\partial x = \frac{b-a}{840}\{41A_{1,7}+216A_{2,6}+27A_{3,5}+272A_4\}$$

und die hierzu zu addirende Correction ist nach Stirling

$$-\frac{b-a}{930}\{A_{0,8}-8A_{1,7}+28A_{2,6}-56A_{3,5}+70A_4\},$$

wo die Zahl 930 auch nur näherungsweise richtig sein wird.

Für $n=9$ ist nach §. 11.

$$\int_a^b y\partial x$$

$$=\frac{b-a}{28350}\{989A_{1,9}+5888A_{2,8}-928A_{3,7}+10496A_{4,6}-4540A_5\}$$

und die hierzu zu addirende Correction ist nach Stirling

$$-\frac{b-a}{1600}\{A_{0,10}-10A_{1,9}+45A_{2,8}-120A_{3,7}+210A_{4,6}-252A_5\},$$

wo wieder die Zahl 1600 nur annähernd richtig sein wird.

§. 14.

Eine sehr wichtige Erweiterung und Vervollkommnung haben die vorhergehenden Methoden zur näherungsweisen Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale durch Gauss in der Abhandlung: Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*) erhalten. Da jedoch diese verfeinerte Methode von Gauss, wie man sie mit Recht nennen kann, für unsere Zwecke in dieser Abhandlung mit hinreichender Leichtigkeit in der Praxis nicht wohl anwendbar ist, so wird es genügen, hier nur einen kurzen Begriff von derselben durch Betrachtung von ein Paar einfachen besondern Fällen zu geben. Im Allgemeinen wollen wir nur vorläufig bemerken, dass das Wesen dieser Methode von Gauss darin besteht, die Werthe von x, deren entsprechende Werthe von y der Rechnung zum Grunde gelegt werden, nicht wie bisher willkührlich anzunehmen, sondern so zu wählen, dass dadurch die möglichst grosse Genauigkeit in der Bestimmung von $\int_a^b y\partial x$ erreicht wird, und wenn diese Bemer-

*) Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. III. Gottingae. 1816. p. 39.

kung auch in der Allgemeinheit, in welcher wir dieselbe so eben ausgesprochen haben, nicht ganz verständlich sein kann, so werden die folgenden Beispiele doch gewiss hinreichend sein, das Wesen der merkwürdigen und wichtigen Gaussischen Methode völlig deutlich zu machen.

Wir wollen für y die Form

$$y=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3$$

oder, wenn wir

$$x-a=u$$

setzen, die Form

$$y=\beta_0+\beta_1u+\beta_2u^2+\beta_3u^3$$

annehmen. Dann ist, weil $\partial x=\partial u$ und für $x=a$, $x=b$ respective $u=0$, $u=b-a$ ist:

$$\int_a^b y\partial x=\int_0^{b-a}(\beta_0+\beta_1u+\beta_2u^2+\beta_3u^3)\partial u,$$

d. i.

$$\int_a^b y\partial x=\beta_0(b-a)+\frac{1}{2}\beta_1(b-a)^2+\frac{1}{3}\beta_2(b-a)^3+\frac{1}{4}\beta_3(b-a)^4$$

Wenn wir nun, indem A_1, A_2 wieder die Werthe von y für $x=a_1$, $x=a_2$ bezeichnen,

$$\int_a^b y\partial x=(b-a)(K_1A_1+K_2A_2)$$

setzen, wo K_1, K_2 gewisse noch zu bestimmende numerische Coefficienten bezeichnen, so ist, weil

$$\begin{aligned}A_1&=\alpha_0+\alpha_1a_1+\alpha_2a_1^2+\alpha_3a_1^3\\&=\beta_0+\beta_1(a_1-a)+\beta_2(a_1-a)^2+\beta_3(a_1-a)^3,\\A_2&=\alpha_0+\alpha_1a_2+\alpha_2a_2^2+\alpha_3a_2^3\\&=\beta_0+\beta_1(a_2-a)+\beta_2(a_2-a)^2+\beta_3(a_2-a)^3\end{aligned}$$

ist, nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned}\int_a^b y\partial x=\ &\beta_0\{K_1+K_2\}(b-a)\\&+\beta_1\{K_1(a_1-a)+K_2(a_2-a)\}(b-a)\\&+\beta_2\{K_1(a_1-a)^2+K_2(a_2-a)^2\}(b-a)\\&+\beta_3\{K_1(a_1-a)^3+K_2(a_2-a)^3\}(b-a)\end{aligned}$$

oder, wenn wir

$$a_1 - a = \tau_1(b-a), \quad a_2 - a = \tau_2(b-a)$$

setzen:

$$\begin{aligned}\int_a^b y\partial x = \;& \beta_0(K_1+K_2)(b-a)\\ &+\beta_1(K_1\tau_1+K_2\tau_2)(b-a)^2\\ &+\beta_2(K_1\tau_1^2+K_2\tau_2^2)(b-a)^3\\ &+\beta_3(K_1\tau_1^3+K_2\tau_2^3)(b-a)^4.\end{aligned}$$

Soll nun dieser Ausdruck von $\int_a^b y\partial x$ mit dem obigen Ausdruck

$$\int_a^b y\partial x = \beta_0(b-a) + \frac{1}{2}\beta_1(b-a)^2 + \frac{1}{3}\beta_2(b-a)^3 + \frac{1}{4}\beta_3(b-a)^4$$

zur Uebereinstimmung gebracht werden, so müssen wir die vier Grössen K_1, K_2 und τ_1, τ_2 so bestimmen, dass den vier Gleichungen

$$K_1 + K_2 = 1,$$

$$K_1\tau_1 + K_2\tau_2 = \frac{1}{2},$$

$$K_1\tau_1^2 + K_2\tau_2^2 = \frac{1}{3},$$

$$K_1\tau_1^3 + K_2\tau_2^3 = \frac{1}{4}$$

genügt wird, und es wird also jetzt darauf ankommen, diese vier Gleichungen aufzulösen.

Leicht erhält man aber aus diesen Gleichungen:

$$K_2(\tau_1-\tau_2) = \tau_1 - \frac{1}{2},$$

$$K_2(\tau_1-\tau_2)\tau_2 = \frac{1}{2}\tau_1 - \frac{1}{3},$$

$$K_2(\tau_1-\tau_2)\tau_2^2 = \frac{1}{3}\tau_1 - \frac{1}{4};$$

und hieraus ferner

$$\tau_1\tau_2 - \frac{1}{2}(\tau_1+\tau_2) + \frac{1}{3} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\tau_1\tau_2-\frac{1}{3}(\tau_1+\tau_2)+\frac{1}{4}=0;$$

r, wenn wir

$$t_1=\tau_1+\tau_2, \quad t_2=\tau_1\tau_2$$

zen:

$$t_2-\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{3}=0,$$

$$\frac{1}{2}t_2-\frac{1}{3}t_1+\frac{1}{4}=0;$$

raus leicht

$$t_1=1, \quad t_2=\frac{1}{6}$$

alten wird.

Weil nun

$$\begin{aligned}(v-\tau_1)(v-\tau_2) &= v^2-(\tau_1+\tau_2)v+\tau_1\tau_2\\ &= v^2-t_1v+t_2=v^2-v+\frac{1}{6}\end{aligned}$$

, so sind τ_1, τ_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$v^2-v+\frac{1}{6}=0,$$

ch deren Auflösung sich

$$v=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{\sqrt{12}}=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}\pm1}{2\sqrt{3}}$$

iebt.

Also kann man

$$\tau_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}},$$

$$\tau_2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$$

zen, und für K_1 und K_2 erhält man nun leicht mittelst des
igen

$$K_1=K_2=\frac{1}{2}.$$

Nach der Berechnung von Gauss ist

$$\tau_1 = 0{,}2113248654051871$$
$$\tau_2 = 0{,}7886751345948129$$

wovon man eine beliebige Anzahl von Decimalstellen beibehalten kann, wie es gerade die Genauigkeit der anzustellenden Rechnung erfordert.

Wenn man also

$$\begin{aligned} a_1 &= a + \tau_1(b-a) = a + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(b-a) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)a + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)b, \\ a_2 &= a + \tau_2(b-a) = a + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(b-a) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)a + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)b \end{aligned}$$

setzt, und A_1, A_2 wie immer die diesen Werthen a_1, a_2 von x entsprechenden Werthe von y bezeichnen, so ist

$$\int_a^b y\partial x = \frac{b-a}{2}(A_1 + A_2),$$

und bei dieser Bestimmung ist

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

gesetzt werden, d. h. man hat für y eine ganze rationale algebraische Function des dritten Grades angenommen, ungeachtet man nur die zwei den oben bestimmten Werthen a_1, a_2 von x entsprechenden Werthe A_1, A_2 von y der Rechnung zum Grunde gelegt hat.

Wir wollen nun für y die Form

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5$$

oder, wenn wir

$$x - a = u$$

setzen, die Form

$$y = \beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4 + \beta_5 u^5$$

annehmen. Dann ist, weil $\partial x = \partial u$ und für $x = a$, $x = b$ respective $u = 0$, $u = b - a$ ist:

$$\int_a^b y\partial x = \int_0^{b-a} (\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4 + \beta_5 u^5)\partial u.$$

$$\int_a^b y\partial x=\beta_0(b-a)+\frac{1}{2}\beta_1(b-a)^2+\frac{1}{3}\beta_2(b-a)^3+\frac{1}{4}\beta_3(b-a)^4$$
$$+\frac{1}{5}\beta_4(b-a)^5+\frac{1}{6}\beta_5(b-a)^6.$$

n wir nun, indem A_1, A_2, A_3 die Werthe von y für $x=a_1$, $=a_2$, $x=a_3$ bezeichnen,

$$\int_a^b y\partial x=(b-a)(K_1A_1+K_2A_2+K_3A_3)$$

zen, wo K_1, K_2, K_3 gewisse noch zu bestimmende numerische fficienten bezeichnen, so ist, weil

$$=\alpha_0+\alpha_1a_1+\alpha_2a_1^2+\alpha_3a_1^3+\alpha_4a_1^4+\alpha_5a_1^5$$
$$=\beta_0+\beta_1(a_1-a)+\beta_2(a_1-a)^2+\beta_3(a_1-a)^3+\beta_4(a_1-a)^4+\beta_5(a_1-a)^5;$$
$$=\alpha_0+\alpha_1a_2+\alpha_2a_2^2+\alpha_3a_2^3+\alpha_4a_2^4+\alpha_5a_2^5$$
$$=\beta_0+\beta_1(a_2-a)+\beta_2(a_2-a)^2+\beta_3(a_2-a)^3+\beta_4(a_2-a)^4+\beta_5(a_2-a)^5,$$
$$=\alpha_0+\alpha_1a_3+\alpha_2a_3^2+\alpha_3a_3^3+\alpha_4a_3^4+\alpha_5a_3^5$$
$$=\beta_0+\beta_1(a_3-a)+\beta_2(a_3-a)^2+\beta_3(a_3-a)^3+\beta_4(a_3-a)^4+\beta_5(a_3-a)^5$$

, nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned}\int_a^b y\partial x= \;&\beta_0\{K_1+K_2+K_3\}(b-a)\\
&+\beta_1\{K_1(a_1-a)+K_2(a_2-a)+K_3(a_3-a)\}(b-a)\\
&+\beta_2\{K_1(a_1-a)^2+K_2(a_2-a)^2+K_3(a_3-a)^2\}(b-a)\\
&+\beta_3\{K_1(a_1-a)^3+K_2(a_2-a)^3+K_3(a_3-a)^3\}(b-a)\\
&+\beta_4\{K_1(a_1-a)^4+K_2(a_2-a)^4+K_3(a_3-a)^4\}(b-a)\\
&+\beta_5\{K_1(a_1-a)^5+K_2(a_2-a)^5+K_3(a_3-a)^5\}(b-a)\end{aligned}$$

r, wenn wir

$$a_1-a=\tau_1(b-a),\quad a_2-a=\tau_2(b-a),\quad a_3-a=\tau_3(b-a)$$

zen:

$$\begin{aligned}\int_a^b y\partial x= \;&\beta_0(K_1+K_2+K_3)(b-a)\\
&+\beta_1(K_1\tau_1+K_2\tau_2+K_3\tau_3)(b-a)^2\\
&+\beta_2(K_1\tau_1^2+K_2\tau_2^2+K_3\tau_3^2)(b-a)^3\\
&+\beta_3(K_1\tau_1^3+K_2\tau_2^3+K_3\tau_3^3)(b-a)^4\end{aligned}$$

$$+\beta_4(K_1\tau_1^4+K_2\tau_2^4+K_3\tau_3^4)(b-a)^5$$
$$+\beta_5(K_1\tau_1^5+K_2\tau_2^5+K_3\tau_3^5)(b-a)^6.$$

Soll nun dieser Ausdruck von $\int_a^b y\partial x$ mit dem obigen Ausdrucke

$$\int_a^b y\partial x=\beta_0(b-a)+\frac{1}{2}\beta_1(b-a)^2+\frac{1}{3}\beta_2(b-a)^3+\frac{1}{4}\beta_3(b-a)^4$$
$$+\frac{1}{5}\beta_4(b-a)^5+\frac{1}{6}\beta_5(b-a)^6$$

zur Uebereinstimmung gebracht werden, so müssen wir die sechs Grössen K_1, K_2, K_3 und τ_1, τ_2, τ_3 so bestimmen, dass den sechs Gleichungen

$$K_1+K_2+K_3=1,$$
$$K_1\tau_1+K_2\tau_2+K_3\tau_3=\frac{1}{2},$$
$$K_1\tau_1^2+K_2\tau_2^2+K_3\tau_3^2=\frac{1}{3},$$
$$K_1\tau_1^3+K_2\tau_2^3+K_3\tau_3^3=\frac{1}{4},$$
$$K_1\tau_1^4+K_2\tau_2^4+K_3\tau_3^4=\frac{1}{5},$$
$$K_1\tau_1^5+K_2\tau_2^5+K_3\tau_3^5=\frac{1}{6}$$

genügt wird, und es wird sich also jetzt darum handeln, diese sechs Gleichungen aufzulösen.

Leicht erhält man aber aus diesen Gleichungen:

$$K_2(\tau_1-\tau_2)+K_3(\tau_1-\tau_3)=\tau_1-\frac{1}{2},$$
$$K_2(\tau_1-\tau_2)\tau_2+K_3(\tau_1-\tau_3)\tau_3=\frac{1}{2}\tau_1-\frac{1}{3},$$
$$K_2(\tau_1-\tau_2)\tau_2^2+K_3(\tau_1-\tau_3)\tau_3^2=\frac{1}{3}\tau_1-\frac{1}{4},$$
$$K_2(\tau_1-\tau_2)\tau_2^3+K_3(\tau_1-\tau_3)\tau_3^3=\frac{1}{4}\tau_1-\frac{1}{5},$$
$$K_2(\tau_1-\tau_2)\tau_2^4+K_3(\tau_1-\tau_3)\tau_3^4=\frac{1}{5}\tau_1-\frac{1}{6};$$

und hieraus ferner:

$$K_3(\tau_1-\tau_3)(\tau_2-\tau_3)=\tau_1\tau_2-\frac{1}{2}(\tau_1+\tau_2)+\frac{1}{3},$$

$$K_3(\tau_1-\tau_3)(\tau_2-\tau_3)\tau_3=\frac{1}{2}\tau_1\tau_2-\frac{1}{3}(\tau_1+\tau_2)+\frac{1}{4},$$

$$K_3(\tau_1-\tau_3)(\tau_2-\tau_3)\tau_3^2=\frac{1}{3}\tau_1\tau_2-\frac{1}{4}(\tau_1+\tau_2)+\frac{1}{5},$$

$$K_3(\tau_1-\tau_3)(\tau_2-\tau_3)\tau_3^3=\frac{1}{4}\tau_1\tau_2-\frac{1}{5}(\tau_1+\tau_2)+\frac{1}{6};$$

folglich

$$\tau_1\tau_2\tau_3-\frac{1}{2}(\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3)+\frac{1}{3}(\tau_1+\tau_2+\tau_3)-\frac{1}{4}=0,$$

$$\frac{1}{2}\tau_1\tau_2\tau_3-\frac{1}{3}(\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3)+\frac{1}{4}(\tau_1+\tau_2+\tau_3)-\frac{1}{5}=0,$$

$$\frac{1}{3}\tau_1\tau_2\tau_3-\frac{1}{4}(\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3)+\frac{1}{5}(\tau_1+\tau_2+\tau_3)-\frac{1}{6}=0;$$

oder, wenn wir

$$t_1=\tau_1+\tau_2+\tau_3,\quad t_2=\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3,\quad t_3=\tau_1\tau_2\tau_3$$

setzen:

$$t_3-\frac{1}{2}t_2+\frac{1}{3}t_1-\frac{1}{4}=0,$$

$$\frac{1}{2}t_3-\frac{1}{3}t_2+\frac{1}{4}t_1-\frac{1}{5}=0,$$

$$\frac{1}{3}t_3-\frac{1}{4}t_2+\frac{1}{5}t_1-\frac{1}{6}=0;$$

woraus leicht

$$t_1=\frac{3}{2},\quad t_2=\frac{3}{5},\quad t_3=\frac{1}{20}$$

erhalten wird.

Weil nun

$$\begin{aligned}&(v-\tau_1)(v-\tau_2)(v-\tau_3)\\&=v^3-(\tau_1+\tau_2+\tau_3)v^2+(\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3)v-\tau_1\tau_2\tau_3\\&=v^3-t_1v^2+t_2v-t_3=v^3-\frac{3}{2}v^2+\frac{3}{5}v-\frac{1}{20}\end{aligned}$$

ist, so sind τ_1, τ_2, τ_3 die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

$$v^3-\frac{3}{2}v^2+\frac{3}{5}v-\frac{1}{20}=0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $\frac{1}{2}$, wie man leicht findet, und die beiden andern Wurzeln derselben werden also durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$v^2-v+\frac{1}{10}=0$$

gefunden. Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind, wie man leicht findet

$$\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=\frac{5\pm\sqrt{15}}{10},$$

und man kann also

$$\tau_1=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=\frac{5-\sqrt{15}}{10},$$

$$\tau_2=\frac{1}{2},$$

$$\tau_3=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=\frac{5+\sqrt{15}}{10}$$

setzen; für K_1, K_2, K_3 erhält man aber mittelst des Obigen leicht die folgenden Werthe:

$$K_1=\frac{5}{18},\quad K_2=\frac{4}{9},\quad K_3=\frac{5}{18}.$$

Nach der Berechnung von Gauss ist

$$\tau_1=0{,}1127016653792583$$

$$\tau_2=0{,}5$$

$$\tau_3=1{,}8872983346207417.$$

Wenn man also

$$a_1=a+\tau_1(b-a)=a+\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)(b-a)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a+\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)b,$$

$$a_2=a+\tau_2(b-a)=a+\frac{1}{2}(b-a),$$

$$a_3 = a + \tau_3(b-a) = a + \frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{3}{5}})(b-a)$$

$$= \frac{1}{2}(1-\sqrt{\frac{3}{5}})a + \frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{3}{5}})b$$

setzt, und A_1, A_2, A_3 wie immer die diesen Werthen a_1, a_2, a_3 von x entsprechenden Werthe von y bezeichnen, so ist

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)\{\frac{5}{18}(A_1+A_3) + \frac{4}{9}A_2\},$$

oder

$$\int_a^b y\partial x = \frac{b-a}{18}\{5(A_1+A_3)+8A_2\},$$

und bei dieser Bestimmung ist

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5$$

gesetzt worden, d. h. man hat für y eine ganze rationale algebraische Function des fünften Grades angenommen, ungeachtet man nur die drei den oben bestimmten Werthen a_1, a_2, a_3 von x entsprechenden Werthe A_1, A_2, A_3 von y der Rechnung zum Grunde gelegt hat.

Wenn man

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \alpha_6 x^6 + \alpha_7 x^7$$

setzt, und sich übrigens ganz ähnlicher Bezeichnungen bedient wie vorher, die sogleich durch sich selbst verständlich sein werden, so sind τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 die vier Wurzeln der Gleichung

$$v^4 - 2v^3 + \frac{9}{7}v^2 - \frac{2}{7}v + \frac{1}{70} = 0.$$

Löst man diese Gleichung auf, so erhält man nach der Berechnung von **Gauss**

$$\tau_1 = 0,0694318442029754$$

$$\tau_2 = 0,3300094782075677$$

$$\tau_3 = 0,6699905217924323$$

$$\tau_4 = 0,9305681557970246$$

und für K_1, K_2, K_3, K_4 ergeben sich die folgenden Werthe:

$$K_1 = K_4 = 0,1739274225687284$$

$$K_2 = K_3 = 0,3260725774312716$$

setzt, die diesen Werthen von x entsprechenden Werthe von y aber durch A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 bezeichnet, so ist

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)\{K_1(A_1+A_6)+K_2(A_2+A_5)+K_3(A_3+A_4)\}.$$

Wenn man

$$y=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\alpha_4 x^4+\alpha_5 x^5+\alpha_6 x^6+\alpha_7 x^7+\alpha_8 x^8+\alpha_9 x^9$$
$$+\alpha_{10} x^{10}+\alpha_{11} x^{11}+\alpha_{12} x^{12}+\alpha_{13} x^{13}$$

setzt, so sind τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_5, τ_6, τ_7 die Wurzeln der Gleichung

$$v^7-\frac{7}{2}v^6+\frac{63}{13}v^5-\frac{175}{52}v^4+\frac{175}{143}v^3-\frac{63}{286}v^2+\frac{7}{429}v-\frac{1}{3432}=0.$$

Nach der Rechnung von Gauss ist

$$\tau_1=0,0254460438286202$$
$$\tau_2=0,1292344072003028$$
$$\tau_3=0,2970774243113015$$
$$\tau_4=0,5$$
$$\tau_5=0,7029225756886985$$
$$\tau_6=0,8707655927996972$$
$$\tau_7=0,9745539561713798$$

und

$$K_1=K_7=0,0647424830844348$$
$$K_2=K_6=0,1398526957446384$$
$$K_3=K_5=0,1909150252525595$$
$$K_4=0,2089795918367347$$

und wenn man dann

$$a_1=a+\tau_1(b-a),$$
$$a_2=a+\tau_2(b-a),$$

$$a_3 = a + \tau_3(b-a),$$

$$a_4 = a + \tau_4(b-a),$$

$$a_5 = a + \tau_5(b-a),$$

$$a_6 = a + \tau_6(b-a),$$

$$a_7 = a + \tau_7(b-a)$$

setzt, die diesen Werthen von x entsprechenden Werthe von y aber durch A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 bezeichnet, so ist

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)\{K_1(A_1+A_7)+K_2(A_2+A_6)+K_3(A_3+A_5)+K_4A_4\}.$$

Eine noch weitere Ausführung dieses wichtigen und interessanten Gegenstandes liegt jetzt nicht in meiner Absicht, die, wie ich schon im Eingange erinnert habe, zunächst darauf gerichtet war, denselben in die Praxis einzuführen, und zum Gebrauch bei praktischen Arbeiten zu empfehlen. Jedoch hoffe ich späterhin auf diese Betrachtungen zurückzukommen, und dieselben dann, was die Gaussi'sche Methode betrifft, zu noch grösserer Allgemeinheit zu erheben.

XXI.

Ueber Singularitaeten an Curven der vierten Ordnung.

Von dem
Herrn Doctor Beer
zu Bonn.

1.

Die Gleichung des 4ten Grades zwischen zwei Veränderlichen x und y lässt sich im Allgemeinen auf folgende Form bringen:

$$pqrs+\{ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f\}=0;$$

wo p, q, r und s lineare ganze Functionen von x und y vorstellen, a, b, c u. s. w. aber constante Grössen bedeuten.

Denken wir uns unter x und y Punkt-Coordinaten, so gehört obige Gleichung einer Curve 4. Ordnung an, deren Asymptoten folgende Gleichungen haben:

$$p=0,\ q=0,\ r=0,\ s=0.$$

Die $2.4=8$ Durchschnitte dieser Geraden und der Curve liegen auf einem Kegelschnitte, dessen Gleichung erhalten wird, wenn man die in der ersten Gleichung zum Vorschein kommende Function des 2. Grades der Null gleich setzt. Wir wollen diese Function mit μR_2, wo μ eine constante Grösse bedeutet, sowie auch noch das Product $pqrs$ mit Π bezeichnen; alsdann schreibt sich die Gleichung des 4. Grades wie folgt:

$$F\equiv\Pi+\mu R_2=0.$$

Wenn wir Π annehmen und ungeändert lassen, während wir für μR_2 immer andere Functionen des 2., 1. und 0. Grades ein-ten, so erhalten wir die Gleichungen aller möglichen Curven 4. Ordnung mit denselben Asymptoten p, q, r und s. Wir nen unter diesen Linien eine dadurch bestimmen, dass wir 6 linearen Bedingungen unterwerfen, denn so viele Constanten hält die Function μR_2. Es ergeben sich aber zwischen den fficienten a, b, c u. s. w. 6 Gleichungen vom ersten Grade, n ausgedrückt wird, dass eine der erwähnten Curven durch n willkührlich angenommenen Punkt der Ebene mit drei ihrer eige gehe, oder mit anderen Worten, dass jener Punkt ein ifacher Punkt der Curve werde. Seine Coordinaten-Werthe lich müssen folgenden Gleichungen genügen:

$$1)\quad F \equiv \Pi + \mu R_2 = 0.$$

$$2)\quad \frac{dF}{dx} \equiv \frac{d\Pi}{dx} + \mu\frac{dR}{dx} \equiv \frac{d\Pi}{dx} + 2ax + cy + d = 0,$$

$$3)\quad \frac{dF}{dy} \equiv \frac{d\Pi}{dy} + \mu\frac{dR}{dy} \equiv \frac{d\Pi}{dy} + 2by + cx + e = 0,$$

$$4)\quad \frac{d^2F}{dx^2} \equiv \frac{d^2\Pi}{dx^2} + \mu\frac{d^2R}{dx^2} \equiv \frac{d^2\Pi}{dx^2} + 2a = 0,$$

$$5)\quad \frac{d^2F}{dy^2} \equiv \frac{d^2\Pi}{dy^2} + \mu\frac{d^2R}{dy^2} \equiv \frac{d^2\Pi}{dy^2} + 2b = 0,$$

$$6)\quad \frac{d^2F}{dxdy} \equiv \frac{d^2\Pi}{dxdy} + \mu\frac{d^2R}{dxdy} \equiv \frac{d^2\Pi}{dxdy} + c = 0.$$

Wir ersehen hieraus, dass sich immer eine Curve des 4. ades finden lasse, die ein willkührlich angenommenes Asymten-System besitzt und einen willkührlich angenommenen Punkt dreifachen Punkt aufnimmt. Sind x', y' die Coordinaten des teren, so ergiebt sich für die Gleichung der zugehörigen ve die folgende:

$$F' \equiv$$

$$s - p'q'r's' - \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\Pi}{dx'^2}(x^2 - x'^2) - \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\Pi}{dy'^2}(y^2 - y'^2) - \frac{d^2\Pi}{dx'dy'}(xy - x'y')$$

$$+ \left(\frac{d^2\Pi}{dx'^2}\cdot x' + \frac{d^2\Pi}{dx'dy'}\cdot y' - \frac{d\Pi}{dx'}\right)(x - x')$$

$$+ \left(\frac{d^2\Pi}{dy'^2}\cdot y' + \frac{d^2\Pi}{dx'dy'}\cdot x' - \frac{d\Pi}{dy'}\right)(y - y') = 0.$$

Wenn der Punkt eine solche Lage hat, dass für ihn $c^2 - 4ab$ schwindet, so ist der Kegelschnitt R_2 der zugehörigen Curve : Parabel, ein Fall, der für alle Punkte der Curve 4. Ordnung ritt, deren Gleichung diese ist:

$$V \equiv \left(\frac{d^2\Pi}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2\Pi}{dx^2}\cdot\frac{d^2\Pi}{dy^2} = 0.$$

Für die Punkte eines Theiles der Räume, in welche die Ebene von der Curve V getheilt wird, erlangt der Ausdruck V einen positiven Werth, daher wird der Kegelschnitt der einem solchen Punkte entsprechenden Curve F eine Hyperbel, während allen Punkten der übrigen Räume solche Curven zugehören, deren Durchschnitte mit den Asymptoten auf Ellipsen liegen.

Nehmen wir die Abstände p und q von den Graden $p=0$ und $q=0$ zu unabhängigen Veränderlichen, so finden wir statt der Gleichung $V=0$ eine andere von der Form

$$(R'_2)^2-pqtu=0.$$

R'_2 ist eine Function des 2., und t und u sind Functionen des 1. Grades. Diese Gleichung stellt dieselbe Curve V dar und läßt uns aus ihrer Form ersehen, dass die Asymptoten p und q jene Linie, eine jede in 2 Punkten, berühren. Die Berührungspunkte liegen auf dem Kegelschnitte $R'_2=0$. Was von p und q gezeigt worden, gilt ebenfalls für r und s. Hiernach sind die Asymptoten Doppeltangenten der Curve V.

Es sei beispielsweise

$$p\equiv x,\ q\equiv y,\ r\equiv x-2y-1,\ s\equiv y-2x-1.$$

Die Asymptoten bilden alsdann ein symmetrisches Viereck, und es besteht die Curve V aus zwei gesonderten Ovalen, von denen das eine die Asymptoten x und y in bezüglich den Punkten

$$y=\frac{1}{6}(1+\sqrt{7})\ \text{und}\ x=\frac{1}{6}(1-\sqrt{7}),$$

das andere in den Punkten

$$y=\frac{1}{6}(1-\sqrt{7})\ \text{und}\ x=\frac{1}{6}(1+\sqrt{7})$$

berührt. Die Tangentialpunkte der andern Asymptoten sind imaginär. Für das Asymptoten-System

$$\{p\equiv x,\ q\equiv y,\ r\equiv x-y-1,\ s\equiv y-x-1\}$$

ergeben sich wiederum zwei getrennte Ovale, die auch wie in dem vorhergehenden Falle ganz innerhalb der beiden von den Asymptoten p, q, r und p, q, s gebildeten Dreiecke liegen, von denen aber jetzt das eine ausser p und q die Gerade r, das andere die Gerade s in einem Punkte berührt. Die übrigen Durchschnitte von r und s und der Curve liegen unendlich weit. Diejenige Linie der 4. Ordnung also mit den Asymptoten p, q, r und s, welche einen Punkt jener Ovale als dreifachen ausweist hat als zugehörigen Kegelschnitt R_2, als Grund-Curve wollen wir sagen, eine Parabel; den in der Höhlung der Eier gelegenen Punkten entsprechen Ellipsen, und einem jeden ausserhalb befindlichen Punkte gehört eine Hyperbel zu.

Von den Punkten, in welchen sich eine Curve 4. Ordnung und eine ihrer Asymptoten schneiden, können höchstens 2 in endlicher Entfernung liegen, so dass auch kein Punkt des Asymptoten-Vierecks dreifacher Punkt einer eigentlichen Curve 4. Ordnung werden kann. Und in der That, sucht man die Curve auf, welche einen solchen Punkt als dreifachen besitzt, so findet man für ihre Grund-Curve zwei Gerade, von denen die eine immer mit der Asymptote zusammenfällt, auf welcher der Punkt liegt, so dass alsdann die Curve aus eben dieser Asymptote und einer Curve 3. Ordnung besteht, welche den Punkt mit zwei ihrer Aeste durchsetzt, und deren Asymptoten die drei übrigen Seiten des Asymptoten-Vierecks sind. Für die Tangentialpunkte der Asymptoten und der Curve V werden die eben erwähnten Geraden einander parallel; zwei Parallelen gehören aber zur Gruppe der Parabeln.

2.

Plücker hat in seinem System der analytischen Geometrie gezeigt, dass der Ort der Rückkehrpunkte aller Curven dritten Grades mit denselben Asymptoten der dem Inhalte nach grösste Kegelschnitt ist, der dem Asymptoten-Dreieck eingeschrieben werden kann. Ein Punkt im Innern des Kegelschnittes kann nur ein Einsiedler werden, während sich in einem ausserhalb gelegenen Punkte, wenn er Doppelpunkt wird, zwei reelle Zweige schneiden. Analoges stellt sich bei Linien der 4. Ordnung heraus. Es liegen nämlich diejenigen Punkte, in welchen, wenn sie dreifache Punkte werden, ein Rückkehrpunkt der Curve auf einen reellen Zweig zu liegen kommt, auf einer Curve der 4. Ordnung, welche jede Seite des Asymptoten-Vierecks berührt. Auf ihr liegen ausserdem noch 3 Punkte, in denen der dritte Zweig der entsprechenden Curve die im Rückkehrpunkte zusammenfliessenden Züge tangirt. Und lässt man einen in den positiven Räumen der Curve gelegenen Punkt einen dreifachen werden, so fällt in ihm ein isolirter Punkt auf einen reellen Zweig, eine Singularität, die sich dem blossen Anblick verbirgt. Jeder Punkt der negativen Räume endlich kann nur ein solcher dreifacher Punkt werden, in dem sich drei reelle Aeste schneiden. Wir wollen diese Behauptungen jetzt erweisen.

Die Richtungen der drei Tangenten eines dreifachen Punktes, abhängig von den Werthen des Differential-Quotienten $\frac{dy}{dx} = k$, bestimmen sich bekanntlich aus folgender cubischen Gleichung:

$$\frac{d^3\Pi}{dy^3}\cdot k^3 + 3.\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\cdot k^2 + 3.\frac{d^3\Pi}{dydx^2}\cdot k + \frac{d^3\Pi}{dx^3} = 0,$$

wofür wir zur Abkürzung setzen wollen:

$$1)\quad a.k^3 + 3b.k^2 + 3c.k + d = 0.$$

Es fallen nun zwei Tangenten des singulären Punktes zusammen, oder, was dasselbe heisst, in dem singulären Punkte liegt eine Spitze der I. Art auf einem reellen Zweige, wenn zwei

Wurzeln der Gleichung 1) einander gleich werden. Alsdann aber wird die erste derivirte der Gleichung 1), d. i.:

$$2)\ 3a.k^2+2.3.b.k+3c=0$$

durch jenen Wurzelwerth befriedigt. Es tritt somit der erwähnte Fall ein, wenn die durch Elimination von k zwischen den Gleichungen 1) und 2), oder, was auf dasselbe hinaus kommt, wenn die durch Annullirung des Radicanden der Quadratwurzel in der cardanischen Formel erhaltene Gleichung besteht. Es ist diese die folgende:

$$W\equiv(bc-ad)^2-4(c^2-bd)(b^2-ac)=0.$$

Wenn W einen negativen Werth hat, so sind sämmtliche Wurzeln der cubischen Gleichung reell und ungleich, und letztere besitzt eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln, so oft der Ausdruck W positiv ist. Das erstere und letztere findet aber für die einen und andern Räume Statt, in welche die Ebene von der Linie $W=0$ getheilt wird. Wir nennen daher die ersteren positive, die übrigen negative Räume. Unmittelbar leuchtet hieraus die Richtigkeit eines Theiles der oben gemachten Behauptungen ein.

Nehmen wir zwei der Asymptoten, z. B. p und q, zu Coordinaten-Axen, so wird:

$$a\equiv\frac{d^3\Pi}{dq^3}\equiv6p.\frac{dr}{dq}\cdot\frac{ds}{dq},\ d\equiv\frac{d^3\Pi}{dp^3}\equiv6q.\frac{dr}{dp}\cdot\frac{ds}{dp},$$

$$b\equiv\frac{d^3\Pi}{dq^2dp}\equiv2\left\{r.\frac{ds}{dq}+s.\frac{dr}{dq}+q.\frac{dr}{dq}\cdot\frac{ds}{dq}\right\}+2p\left\{\frac{dr}{dp}\cdot\frac{ds}{dq}+\frac{dr}{dq}\cdot\frac{ds}{dp}\right\}.$$

$$c\equiv\frac{d^3\Pi}{dp^2dq}\equiv2\left\{r.\frac{ds}{dp}+s.\frac{dr}{dp}+p.\frac{dr}{dp}\cdot\frac{ds}{dp}\right\}+2q\left\{\frac{dr}{dp}\cdot\frac{ds}{dq}+\frac{dr}{dq}\cdot\frac{ds}{dp}\right\}.$$

Für einen Punkt der Asymptote p verschwindet hiernach a, und es tritt demzufolge in der Gleichung $W=0$ b^2 als Factor auf; der andere Factor ist $3c^2-4bd$. Sonach berührt die Asymptote p die Curve W in dem Durchschnitte jener und der Geraden $\frac{d^3\Pi}{dq^2dp}=0$; ausserdem schneidet sie dieselbe in zwei Punkten, die auf dem Kegelschnitte $3c^2-4bd=0$ gelegen sind. Entsprechendes gilt für die übrigen Asymptoten. Die Bedingungen $a=0$, $3c^2-4bd=0$ reduciren die Gleichung 1) auf eine quadratische mit zwei gleichen Wurzeln, und die Bedingungen $a=0$, $b=0$ auf eine Gleichung vom ersten Grade. Wird aber ein Punkt des Asymptoten-Vierecks ein dreifacher, so zerfällt, wie wir gesehen haben, die zugehörige Linie der 4. Ordnung in eine mit einer Seite des Vierecks zusammenfallende Gerade und eine Linie des 3. Grades, die in jenem Punkte einen Doppelpunkt hat. Folglich entsprechen den Berührungs-Punkten der Asymptoten und der Curve W die Asymptoten selbst mit Linien 3. Ordnung, die in einem der durch jene Punkte gehenden beiden Zweige die Asymptote ptoten berühren. Den acht übrigen Durchschnitten des Asymptoten-Vierecks und der Curve V entsprechen aber die Asymptoten selbst mit Linien der 3. Ordnung, die in jenen Durchschnitten Spitzen der 1. Art zeigen.

Die linke Seite der Gleichung 1) geht in einen vollständigen Cubus über, so oft man hat:

$$1)\ bc-ad=0,\quad 1)\ c^2-bd=0.\quad 3)\ b^2-ac=0.$$

Von diesen Gleichungen kann irgend eine aus den beiden andern abgeleitet werden. Sie stellen drei Kegelschnitte dar, die sich in denselben drei Punkten schneiden; alle Punkte nämlich, deren Coordinaten-Werthe den beiden letzten Gleichungen Genüge thun, liegen auch auf dem Kegelschnitte 1), mit Ausnahme jedoch des Durchschnittes der beiden Geraden $b=0$ und $c=0$. Auf der Curve W gibt es mithin im Allgemeinen drei Punkte, in welchen, wenn sie dreifache Punkte werden, die Tangenten dreier reeller Aeste in eine einzige zusammenfallen. Für eben diese Punkte verschwinden, wie leicht einzusehen, gleichzeitig die Differentialquotienten $\frac{dW}{dx}$ und $\frac{dW}{dy}$; es sind folglich Doppelpunkte der Curve W, die also auch ausser jenen keine Singularitäten zeigt.

Zwischen der §. 1. aufgeführten Curve V und der Curve W findet die Beziehung statt, dass, wenn erstere Doppelpunkte besitzt, diese auf die Linie W fallen. Die Coordinatenwerthe der singulären Punkte von V nämlich befriedigen folgende Gleichungen:

$$\frac{dV}{dx}=2.\frac{d^2\Pi}{dxdy}.\frac{d^3\Pi}{dx^2.dy}-\frac{d^2\Pi}{dx^2}.\frac{d^3\Pi}{dy^2dx}-\frac{d^2\Pi}{dy^2}.\frac{d^3\Pi}{dx^3}=0,$$

$$\frac{dV}{dy}=2.\frac{d^2\Pi}{dxdy}.\frac{d^3\Pi}{dy^2dx}-\frac{d^2\Pi}{dy^2}.\frac{d^3\Pi}{dx^2.dy}-\frac{d^2\Pi}{dx^2}.\frac{d^3\Pi}{dy^3}=0.$$

Die Elimination der drei Ausdrücke $\frac{d^2\Pi}{dx^2}$, $\frac{d^2\Pi}{dy^2}$ und $\frac{d^2\Pi}{dxdy}$ zwischen diesen beiden Gleichungen und der Gleichung $V=0$ liefert:

$$\left\{\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}.\frac{d^3\Pi}{dy^2dx}-\frac{d^3\Pi}{dx^3}.\frac{d^3\Pi}{dy^3}\right\}^2$$
$$-4\left\{\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}-\frac{d^3\Pi}{dx^3}.\frac{d^3\Pi}{dy^2dx}\right\}\left\{\frac{d^3\Pi}{dy^2dx}-\frac{d^3\Pi}{dy^3}.\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}\right\}=0,$$

d. i.

$$W=0.$$

Lässt man also einen singulären Punkt der Curve V, falls ein solcher vorhanden ist, dreifachen Punkt einer Curve vierter Ordnung werden, deren Asymptoten-System Π ist, so fallen in jenem zwei Tangenten zusammen und die Grund-Curve wird eine Parabel.

bestimmten Werth von μ aber erlangt auch $\frac{dq}{dp}$ einen bestimmten Werth, so lange nicht $\frac{dR}{dp}$ und $\frac{dR}{dq}$ gleichzeitig verschwinden. Wenn also letzteres nicht stattfindet, so kann der fragliche Punkt kein Doppelpunkt werden; sämmtliche Curven berühren in ihm den Kegelschnitt R. Wenn aber $\frac{dR}{dp}$ und $\frac{dR}{dq}$ gleichzeitig verschwinden, so wird wirklich der Punkt ein Doppelpunkt und zwar für jede Curve der Gruppe; in Folge dessen wird jedoch die Anzahl der Cardinal-Punkte nicht grösser, sie vermindert sich vielmehr. Dieser Fall ist demjenigen untergeordnet, welchen wir, den zweiten, in der allgemeinen Betrachtung abgesondert haben, wo nämlich für einen Punkt $\frac{d\Pi}{dx}$ und $\frac{dR}{dx}$ verschwinden und die Coordinaten-Werthe jenes der Gleichung 2) genügen. Das Verschwinden der beiden Differentialquotienten ist immer dann eine Folge der Wahl der Coordinaten und kann somit durch die Annahme von andern verhindert werden, wenn nicht der fragliche Punkt der in eine Ecke des Asymptoten-Vierecks fallende Durchschnitt zweier Geraden ist, in die der Kegelschnitt R ausgeartet ist. Wir sind so zur Betrachtung der Modificationen geführt, die im Obigen vor sich gehen, wenn anstatt einer eigentlichen Curve der zweiten Ordnung zwei Gerade als Grund-Curve auftreten. Wir wollen diese selbst zu Coordinaten-Axen nehmen; so erhalten wir an die Stelle der Gleichungen 1), 2) und 3) die folgenden:

$$1') \ y(x.\frac{d\Pi}{dx}-\Pi)=0, \qquad 2') \ x(y.\frac{d\Pi}{dy}-\Pi)=0,$$

$$3') \ x.\frac{d\Pi}{dx}-y.\frac{d\Pi}{dy}=0.$$

Aus ihnen ergeben sich wieder 11 Cardinalpunkte, unter ihnen der Durchschnitt der beiden Geraden. Der dem letzteren entsprechende Werth von μ ist unendlich, so dass es keine der Curven gibt, die ihn als wirklichen Doppelpunkt aufnimmt; es nähern sich ihm aber ähnlich wie einem Cardinalpunkte die immer grösseren Werthen von μ entsprechenden Curven.

Fällt der Durchschnitt der beiden Geraden auf eine Asymptote, so erhält Π einen Factor von der Form $y+mx$, und in Folge dessen erhalten wir jenen Punkt unter den Cardinalpunkten zweimal, so dass deren nur 10 verschiedene vorhanden sind. Der Durchschnitt der Geraden wird auch hier für kein endliches μ ein Doppelpunkt. Die Asymptote, auf welche er fällt, wird in ihm von sämmtlichen Curven berührt.

Wenn endlich beide Gerade durch eine Ecke des Asymptoten-Vierecks gehen, so wird diese, welches auch der Werth von μ sein mag, ein Doppelpunkt. Dadurch, dass alsdann Π den Factor $(y+mx)(y+m'x)$ erhält, zieht sich die Anzahl der übrigen möglichen Doppelpunkte auf vier zurück.

Es kann auch eine der beiden Geraden unendlich weit wegrücken, in welchem Falle der Grad der Function R vom zweiten auf den ersten sich reducirt. Man erhält dann statt der früheren Gleichungen die folgenden:

$$1''') \; L.\frac{d\Pi}{dx} - c.\Pi = 0, \quad 2''') \; L.\frac{d\Pi}{dy} - c'.\Pi = 0,$$

$$3''') \; c'.\frac{d\Pi}{dx} - c.\frac{d\Pi}{dy} = 0.$$

L bedeutet hier die lineare Function, welche an die Stelle von R_2 tritt, und c und c' sind die in ihr vorkommenden Coefficienten der Veränderlichen x und y. Da die beiden ersten Gleichungen vom vierten, die dritte vom dritten Grade sind, so resultiren nur 6 Cardinal-Punkte. Ihre Anzahl fällt auf die Hälfte, auf 3, zurück, wenn auch die Gerade L in's Unendliche rückt, d. i., wenn die Function L durch eine Constante ersetzt wird. Jene Punkte bestimmen sich alsdann durch diese beiden Gleichungen:

$$1'''') \; \frac{d\Pi}{dx} = 0, \quad 2'''') \; \frac{d\Pi}{dy} = 0.$$

Wie wir gesehen haben, liegen die Cardinal-Punkte auf den durch die Gleichungen 1), 2) und 3) dargestellten Curven T_1, T_2 und U. Letztere, die von der vierten Ordnung ist, geht durch die Ecken des Asymptoten-Vierecks und den Mittelpunkt des Kegelschnittes R. Falls dieser eine Asymptote berührt, geht U auch durch den Tangentialpunkt, und dieser wird ein Angelpunkt. Die Curve U bleibt dieselbe, welches auch die Dimensionen der Grund-Curve sein mögen, wofern nur ihre Axen dieselbe Lage und dasselbe Längenverhältniss beibehalten. Lässt man den Kegelschnitt R, wenn er eine Ellipse oder eine Hyperbel ist, sich zu concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Linien ausdehnen oder bezüglich sich bis zu einem Punkte zusammenziehen oder in zwei Gerade übergehen, oder verschiebt man, falls R eine Parabel ist, diese in der Richtung ihrer Axe, so rücken die entsprechenden Cardinal-Punkte auf der Curve U fort. Ein jeder Punkt der letzteren kann ein Angelpunkt werden; nimmt man einen solchen an, so bestimmt eine der Gleichungen 1) und 2) die Ausdehnung des zugehörigen Kegelschnitts. Wir werden sehen, dass, wenn man einen Doppelpunkt der Curve U, wenn anders ein solcher vorhanden ist, zu einem Cardinal-Punkte designirt, dieser nur ein dreifacher Punkt werden kann.

Unter besondern Umständen können mehre Cardinal-Punkte zusammenfallen. Diese Coïncidenz wird dadurch begründet, dass zwei der Linien T_1, T_2 und U sich berühren und die dritte in dem Berührungs-Punkte entweder jene ebenfalls tangirt oder einen Doppelpunkt hat. Wir wollen die Werthe, eventuell die sogenannten wahren Werthe, welche $\frac{dy}{dx}$ in einem Cardinal-Punkte für jene drei Linien und die durch ihren Durchschnitt gehende Curve F annimmt, bezüglich mit k_1, k_2 und k bezeichnen. Wir finden alsdann:

$$k_1 = -\frac{\frac{d^2F}{dx^2}}{\frac{d^2F}{dxdy}}, \quad k_2 = -\frac{\frac{d^2F}{dxdy}}{\frac{d^2F}{dy^2}},$$

$$k_3 = \frac{\frac{dR}{dx}\cdot\frac{d^2F}{dxdy} - \frac{dR}{dy}\cdot\frac{d^2F}{dx^2}}{\frac{dR}{dx}\cdot\frac{d^2F}{dy^2} - \frac{dR}{dy}\cdot\frac{d^2F}{dxdy}} = k_2 \cdot \frac{\frac{dR}{dx} - \frac{dR}{dy}\cdot k_1}{\frac{dR}{dx} - \frac{dR}{dy}\cdot k_2}.$$

Wenn nun erstlich die beiden Linien T_1 und T_2 sich berühren, so wird $k_1 = k_2$, also auch $k_1 = k_2 = k_3$, d. h. es berühren sich dann alle drei Linien T_1, T_2 und U in dem fraglichen Punkte, und es genügen die Coordinaten-Werthe des letztern der folgenden Gleichung:

$$S \equiv \left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2F}{dx^2}\cdot\frac{d^2F}{dy^2} = 0.$$

Diese besagt, dass die durch den Angelpunkt gelegte Curve F in diesem einen Rückkehrpunkt erlangt.

Wenn zweitens eine der Linien T, z. B. T_1, in einem Cardinal-Punkte einen Doppelpunkt erhält, so wird $k_1 = \frac{0}{0}$, und es berühren sich, da $k_2 = k_3 = 0$ wird, die Linien T_2 und U. Es besteht dann wieder die Gleichung $S = 0$, und F erhält abermals eine Spitze. Die Tangente in letzterer bestimmt sich durch die Gleichung:

$$\frac{d^2F}{dy^2}\cdot k^2 + 2\,\frac{d^2F}{dxdy}\cdot k + \frac{d^2F}{dx^2} = 0.$$

Der oben gefundene Werth von k_2 befriedigt, an die Stelle von k substituirt, diese Gleichung, woraus wir ersehen, dass sich die Curven U und F in den Spitzen der letzteren berühren.

Für einen dreifachen Punkt von F werden k_1, k_2 und k_3 so bestimmt, so dass die drei Linien T_1, T_2 und U einen solchen mit je zwei Aesten durchsetzen, er nimmt also vier Cardinalpunkte auf. Die Richtungen der Tangenten von T_1 und U finden sich mit Hülfe folgender Gleichungen:

$$1)\ \frac{d^2T_1}{dy^2}\cdot k_1^2 + 2\cdot\frac{d^2T_1}{dxdy}\cdot k_1 + \frac{d^2T_1}{dx^2} = 0,$$

$$2)\ \frac{d^2U}{dy^2}\cdot k_1^2 + 2\cdot\frac{d^2U}{dxdy}\cdot k_1 + \frac{d^2U}{dx^2} = 0.$$

Wenn nun die Tangenten von T_1 und U in ihrem gemeinschaftlichen Doppelpunkte zusammenfallen, so besteht die durch Elimination der k aus 1) und 2) resultirende Gleichung. Diese ist:

$$\left\{\frac{d^2T_1}{dy^2}\cdot\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{d^2T_1}{dx^2}\cdot\frac{d^2T_1}{dy^2}\right\}^2$$

$$\left\{\frac{d^2T_1}{dxdy}\cdot\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{d^2T_1}{dx^2}\cdot\frac{d^2U}{dxdy}\right\}\cdot\left\{\frac{d^2T_1}{dy^2}\cdot\frac{d^2U}{dxdy}-\frac{d^2T_1}{dxdy}\cdot\frac{d^2U}{dy^2}\right\}=0.$$

Für die hier vorkommenden Ausdrücke findet man:

$$\frac{d^2U}{dy^2}=-\frac{d^3\Pi}{dy^3}\,\frac{dR}{dx}+\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\cdot\frac{dR}{dy},\ \frac{d^2U}{dx^2}=\frac{d^3\Pi}{dx^3}\frac{dR}{dy}-\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}\cdot\frac{dR}{dx},$$

$$\frac{d^2U}{dxdy}=\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}\cdot\frac{dR}{dy}-\frac{d^3\Pi}{dy^2dx}\cdot\frac{dR}{dx},$$

$$\frac{d^2T_1}{dx^2}=\frac{d^3\Pi}{dxdy^2},\ \frac{d^2T_1}{dxdy}=\frac{d^3\Pi}{dydx^2},\ \frac{d^2T_1}{dy^2}=\frac{d^3\Pi}{dx^3}.$$

rch Substitution dieser Werthe in die gefundene Gleichung t diese über in:

$$\left\{\frac{d^3\Pi}{dydx^2}\cdot\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}-\frac{d^3\Pi}{dx^3}\cdot\frac{d^3\Pi}{dy^3}\right\}^2$$

$$-4\left\{\left(\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\right)^2-\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}\cdot\frac{d^3\Pi}{dy^3}\right\}\left\{\left(\frac{d^3\Pi}{dydx^2}\right)^2-\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\cdot\frac{d^3\Pi}{dx^3}\right\}=0.$$

drückt, wie wir §. 2. gesehen haben, aus, dass zwei Tangen- der Curve F zusammenfallen. Fällt also ein Rückkehr- kt auf einen andern Zweig der Curve, so liegen in dem so standenen dreifachen Punkte sechs Cardinal-Punkte.

Besteht endlich der dreifache Punkt aus einer Spitze und em dritten Aste, der jene berührt, fallen also sämmtliche genten in eine zusammen, so wird:

$$\left(\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\right)^2-\frac{d^3\Pi}{dydx^2}\cdot\frac{d^3\Pi}{dy^3}=0,\quad \left(\frac{d^3\Pi}{dydx^2}\right)^2-\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\cdot\frac{d^3\Pi}{dx^3}=0,$$

$$\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\cdot\frac{d^3\Pi}{dydx^2}-\frac{d^3\Pi}{dx^3}\cdot\frac{d^3\Pi}{dy^3}=0.$$

Eine Folge hiervon ist, dass die singulären Punkte der Curven T_1 und U Rückkehrpunkte werden. Es kommt nämlich:

$$\left(\frac{d^2U}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2U}{dx^2}\cdot\frac{d^2U}{dy^2}=\left\{\left(\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}\right)^2-\frac{d^3\Pi}{dx^3}\cdot\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\right\}\left(\frac{dR}{dy}\right)^2$$

$$+\left\{\left(\frac{d^3\Pi}{dy^2dx}\right)^2-\frac{d^3\Pi}{dy^3}\cdot\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}\right\}\left(\frac{dR}{dx}\right)^2$$

$$-\left\{\frac{d^3\Pi}{dydx^2}\cdot\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}-\frac{d^3\Pi}{dx^3}\cdot\frac{d^3\Pi}{dy^3}\right\}\frac{dR}{dx}\cdot\frac{dR}{dy},$$

$$\left(\frac{d^2T_1}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2T_1}{dx^2}\cdot\frac{d^2T_1}{dy^2}=\left(\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}\right)^2-\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\cdot\frac{d^3\Pi}{dx^3}.$$

Diese Ausdrücke verschwinden also für den fraglichen Punkt, d. h. er ist ein Rückkehrpunkt der Curven T und U. Was die Tangenten in demselben betrifft, so hat man:

$$k_1=-\frac{\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}}{\frac{d^3\Pi}{dy^3}},\quad k_3=\frac{\left(\frac{d^3\Pi}{dx^3}\cdot\frac{dR}{dy}-\frac{d^3\Pi}{dydx^2}\cdot\frac{dR}{dx}\right)\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}}{\left(\frac{d^3\Pi}{dy^3}\cdot\frac{dR}{dx}-\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\cdot\frac{dR}{dy}\right)\frac{d^3\Pi}{dydx^2}},$$

$$k=-\frac{\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}}{\frac{d^3\Pi}{dy^3}}.$$

Wegen der für den Punkt bestehenden Gleichungen a) ist hiernach $k_1=k_2=k_3$. Die Tangenten der beiden Spitzen und des dreifachen Punktes fallen mithin in eine einzige zusammen.

Legen wir den Ausdrücken $\mu.\frac{d^2R}{dx^2}=a$, $\mu\frac{d^2R}{dy^2}=b$ und $\mu\frac{d^2R}{dxdy}$ $=c$ bestimmte Werthe bei, so begrenzen wir dadurch unter den Linien vierter Ordnung mit demselben Asymptoten-System eine Gruppe von solchen, deren Grund-Curven ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte sind, und welche sich, wie letztere auch, in Punkten schneiden, die auf geraden Linien liegen. Wir erhalten eine stetige Reihe von Curven, die einer der erwähnten Gruppen angehört, wenn wir dem Coefficienten μ einen bestimmten Werth beilegen und die Grund-Curve so verschieben, dass sich die Richtung ihrer Axen nicht ändert. Und die Gruppe lässt sich dadurch in lauter solche Reihen zerlegen, dass man μ immer andere Werthe gibt. Sämmtliche Rückkehr-Punkte aus der Curven einer der angegebenen Gruppen liegen auf der Linie $S=0$, ihre eigentlichen Doppelpunkte (Durchschnitte reeller Zweige) liegen in den positiven Räumen, ihre isolirten Punkte in den negativen Räumen derselben Curve. Die Linie S ist von der vierten Ordnung; ihre Asymptoten fallen mit denen der in §. 1. aufgeführten Linie V zusammen. Umgekehrt kann auch jeder Punkt der Linie S Rückkehrpunkt einer Curv werden, die schon, wie angegeben wurde, theilweise bestimmt ist; die Lage ihrer Grund-Curve ergibt sich aus den beiden Gleichungen

$$\frac{d\Pi}{dx}+\mu.\frac{dR}{dx}=0,\ \frac{d\Pi}{dy}+\mu.\frac{dR}{dy}=0,$$

und ihre Ausdehnung aus der Gleichung

$$\Pi+\mu R=0.$$

4.

Die Anzahl der Doppelpunkte einer Curve vierter Ordnung nn bis auf drei steigen. Weist eine Linie, deren Gleichung n vierten Grade ist, vier singuläre Punkte auf, so besteht sie s dem Complexe zweier Kegelschnitte. Es seien x', y' und , y'' die Coordinaten zweier Doppelpunkte einer Linie vierter dnung. Bezeichnen wir das, was aus Π, $\frac{d\Pi}{dx}$ u. s. w. wird, wenn n in diese Ausdrücke $x=x'$, $y=y'$ setzt, mit Π', $\frac{d\Pi}{dx'}$ u. s. w., so : man:

$$1)\ \Pi'+\mu R'=0, \qquad 1')\ \Pi''+\mu R''=0;$$

$$2)\ \frac{d\Pi}{dx'}+2ax'+cy'+d=0, \qquad 2')\ \frac{d\Pi}{dx''}+2ax''+cy''+d=0;$$

$$3)\ \frac{d\Pi}{dy'}+2by'+cx'+e=0, \qquad 3')\ \frac{d\Pi}{dy''}+2by''+cx''+e=0.$$

Da die Anzahl dieser Gleichungen der Anzahl der in μR vorkom-ınden Constanten gleichkommt, so könnte man glauben, es sei stattet, nach willkührlicher Annahme von Π irgend zwei Punkte n vornherein als Doppelpunkte zu designiren. Es widerspre-en sich jedoch im Allgemeinen jene Gleichungen. Ziehen wir nämh die beiden ersten Gleichungen von einander ab, so finden wir:

$$4)\ \Pi'-\Pi''+a(x'^2-x''^2)+b(y'^2-y''^2)+c(x'y'-x''y'') \\ +d(x'-x'')+e(y'-y'')=0.$$

ıd an die Stelle der übrigen können wir folgende aus ihnen ab-leitete hinsetzen:

$$5)\ 2a(x'-x'')+c(y'-y'')+\frac{d\Pi}{dx'}-\frac{d\Pi}{dx''}=0,$$

$$6)\ 2b(y'-y'')+c(x'-x'')+\frac{d\Pi}{dy'}-\frac{d\Pi}{dy''}=0,$$

$$7)\ d(x'-x'')+c(x'y''-x''y')+\frac{d\Pi}{dx''}\cdot x'-\frac{d\Pi}{dx'}\cdot x''=0,$$

$$8)\ e(y'-y'')+c(x''y'-x'y'')+\frac{d\Pi}{dy''}\cdot y'-\frac{d\Pi}{dy'}\cdot y''=0.$$

Venn nun die hieraus sich ergebenden Werthe von $a(x'-x'')$, $y'-y''$), $d(x'-x'')$ und $e(y'-y'')$ in die Gleichung 4) substituirt erden, so kommt:

$$R \equiv \Pi' - \Pi'' - \frac{x'-x''}{2}\left(\frac{d\Pi}{dx'} + \frac{d\Pi}{dx''}\right) - \frac{y'-y''}{2}\left(\frac{d\Pi}{dy'} + \frac{d\Pi}{dy''}\right) = 0.$$

Also nur wenn man die zwei Punkte so wählt, dass die Werthe ihrer Coordinaten die letzte Gleichung befriedigen, gibt es Curven vierter Ordnung, die in beiden zugleich Singularitäten zeigen. Ihre Anzahl ist unbegrenzt, da man (und dies ist eine Folge der den Gleichungen 5) — 7) zukommenden Form) über eine Constante von μR beliebig verfügen kann. Nehmen wir einen Punkt, z. B. den, dessen Coordinaten x' und y' sind, von vornherein willkührlich an, so leuchtet ein, dass jeder Punkt der Curve, die durch die Gleichung $R=0$ dargestellt wird, wenn wir uns in dieser x'' und y'' als laufende Coordinaten denken, mit dem ersten zugleich Doppelpunkt ein und derselben Curve vierter Ordnung werden kann. Es ist auch gestattet einen der Punkte zum Rückkehrpunkte zu designiren. Soll z. B. in (x', y') die Curve eine Spitze erhalten, so muss sein:

$$\left(\frac{d^2\Pi}{dx'dy'} + c\right)^2 - \left(\frac{d^2\Pi}{dx'^2} + 2a\right)\left(\frac{d^2\Pi}{dy'^2} + 2b\right) = 0.$$

In Folge der Gleichungen 5) und 6) ist der Ausdruck $c^2 - 4ab$ in Bezug auf c vom ersten Grade, so dass also die eben vorgeführte Gleichung einen einzigen Werth für c liefert. Die Gleichungen 5) — 8) und eine der Gleichungen 1) und 1′) bestimmen hierauf die Curve vollständig.

Die Asymptoten der Curve R laufen den Seiten des angenommenen Asymptoten-Vierecks Π parallel.

XXII.

Auflösung einer praktischen Aufgabe durch die Zahlenlehre.

Von dem

Herrn Doctor E. W. Grebe,

Gymnasiallehrer zu Cassel.

Aufgabe. Man hat drei Gefässe, ein kleines von a, ein mittleres von b und ein grosses von $a+b$ Masseinheiten Inhalt. Hierbei sind die Zahlen a und b ohne gemeinschaftlichen Theiler zu denken; denn hätten sie einen solchen c, so könnte man immer c Masseinheiten zu einer einzigen höhern zusammenfassen. Das kleine und das mittlere Gefäss sind mit einer Flüssigkeit gefüllt, das grosse dagegen ist leer. Man soll nun durch alleinige Benutzung der drei genannten Gefässe die $a+b$ Masseinheiten Flüssigkeit entweder in zwei gleiche Theile theilen, wenn $a+b$ eine gerade Zahl ist, oder überhaupt eine beliebige ganze Zahl Masseinheiten von der Gesammtmasse absondern.

Auflösung. Gibt man für fortwährend vorzunehmende Umgiessungen die nachstehenden Vorschriften:

1. So oft das kleine Gefäss gefüllt und das mittlere nicht leer ist, giesse man den Inhalt des kleinen in das grosse;

2. So oft das kleine Gefäss leer ist, fülle man es, wenn dieses möglich ist, aus dem mittleren, oder giesse wenigstens, wenn der Inhalt des mittleren zur Füllung nicht hinreicht, diesen Inhalt des mittleren in das kleine;

3. Ist das mittlere Gefäss leer, so fülle man es aus dem grossen;

4. Ist das mittlere Gefäss ganz, das kleine aber nur zum

Theil gefüllt, so giesse man aus dem mittleren noch so viel i das kleine, dass das letztere vollständig gefüllt sei:

so ist leicht einzusehen, dass diese Vorschriften nicht alle immer ausführbar, sondern auch für alle denkbaren Fälle ausrei chend sind. Durch jede einzelne Umgiessung wird ein neu Zustand der Gefässe herbeigeführt. Wir betrachten diese Zu stände jetzt genauer.

Das grosse Gefäss ist anfangs leer; sein Inhalt wird sodan a und würde in der Progression $2a$, $3a$, $4a$ u. s. w. fortwähren zunehmen, wenn nicht bisweilen das mittlere Gefäss aus de grossen gefüllt werden müsste. Die Inhaltsänderungen des gro sen Gefässes bestehen also entweder in einem Gewinn von a oder in einem Verlust von b Masseinheiten. Den letztern Verlu können wir aber als einen Gewinn von $a-(a+b)$ Masseinheite betrachten. Es folgt hieraus, dass man die successiven ver schiedenen Zustände des grossen Gefässes von dem ursprüng lichen an dadurch finden kann, dass man die Zahlenreihe 0, 1, 2, 3, 4 u. s. w. mit a multiplicirt und in diesen Producten so oft es angeht $a+b$ weglässt, oder mit andern Worten die Reste die ser Producte für den Modulus $a+b$ nimmt. Da nun die Zahlen a und $a+b$ als relative Primzahlen vorausgesetzt sind; so liefern die Producte $0.a$, $1.a$, $2.a$, $3.a$ bis zu $(a+b-1).a$ durch $a+b$ ge theilt lauter verschiedene Reste, und es kommen somit alle Zah len von 0 an bis zu $a+b-1$ einschliesslich als Reste vor. Hier durch ist bewiesen, dass unsere Aufgabe unter allen Umstände lösbar ist. Zugleich folgt, dass wenn das grosse Gefäss zum $(a+b)$ten Male einen der verschiedenen Zustände erhalten hat, der anfängliche Zustand seiner Leerheit und damit des Gefüll seins der beiden andern Gefässe wiederhergestellt ist.

Obgleich nun das grosse Gefäss im Ganzen nur $a+b$ verschie dene Inhaltszustände hat; so ist doch die Zahl der Inhaltszustände aller drei Gefässe grösser; denn auf jeden Zustand, durch wel chen das grosse Gefäss seinen Inhalt geändert hat, folgt ein an derer, welcher bloss den Inhalt des mittleren und kleinen Gefäs ses abändert, mit alleiniger Ausnahme des ersten Zustandes einer jeden Periode, wo nämlich das grosse Gefäss leer ist. Es gibt also im Ganzen $2(a+b)-1$ Inhaltszustände der drei Gefässe, die sich bei fortgesetzten Umgiessungen periodisch wiederholen.

Soll das grosse Gefäss gerade $\frac{1}{2}(a+b)$ Masseinheiten erhal ten; so muss sowohl a als b eine ungerade Zahl sein. Setzt man daher $a=2n+1$; so ist

$$\frac{1}{2}(a+b).a=\frac{1}{2}(a+b)(2n+1)=(a+b).n+\frac{1}{2}(a+b);$$

und da dieser Ausdruck durch $a+b$ dividirt den Rest $\frac{1}{2}(a+b)$ lässt, so folgt mit Berücksichtigung des vorhin Gesagten, dass der Zustand der Halbirung der Flüssigkeit gerade der $(a+b)$te oder mittelste Zustand der Periode ist, und also jedesmal sich

$a+b-1$ Umgiessungen eintritt. Da überhaupt jeder neue Inhaltszustand des grossen Gefässes mit Ausnahme des ersten eine gerade Ordnungszahl in der Periode trägt, welche mit $2x$ bezeichnet werden kann; so findet man den Zustand, in welchem sich m Masseinheiten in dem grossen Gefäss befinden, nach Auflösung der Gleichung

$$ax-(a+b)y=m$$

in ganzen Zahlen durch den Werth von $2x$.

Die Zustände einer Periode kann man nun aber auch in ganz entgegengesetzter Folge sich aus einander entwickeln lassen, so nämlich, dass der letzte Zustand mit dem zweiten, der vorletzte mit dem dritten u. s. w. tauscht. Dann bekommt der Zustand, welcher eben noch die Ordnungszahl $2x$ trug, nun die Ordnungszahl $2(a+b)+1-2x$, und man gelangt zu den gesuchten m Masseinheiten im grossen Gefässe leichter auf diesem Wege, wenn $2(a+b)-2x<2x$, oder wenn $x>a+b$. Die Vorschriften für die einzelnen Umgiessungen lauten aber, wenn man diesen Weg zu verfolgen beabsichtigt, anders als früher, nämlich so:

1. So oft das kleine Gefäss ganz oder theilweise gefüllt ist, und das mittlere nicht auch ganz, giesse man den Inhalt des kleinen Gefässes in das mittlere; sollte aber in dem mittleren nicht mehr Raum genug vorhanden sein, um den Inhalt des kleinen ganz aufzunehmen, so fülle man wenigstens das mittlere vollständig.

2. So oft das mittlere Gefäss vollständig gefüllt ist, giesse man seinen Inhalt in das grosse.

3. Ist das kleine Gefass leer, so fülle man es aus dem grossen.

Aus dem hier Mitgetheilten wird nun auch erhellen, dass unsere Aufgabe immer auf zwei, aber auch nur auf zwei Weisen lösbar sei, indem nur die oben oder die eben gegebenen Vorschriften unvermischt angewandt geeignet sind, den Zustand der drei Gefässe auf eine Art abzuändern, durch welche nicht schon da gewesene Zustände sofort wieder zurückkehren.

wieder sämmtlich $=0$ ausfielen, obige Formel sich auf

$$u_n = A_r \Delta^r u_0$$

reduciren würde, woraus man sogleich

$$A_r = \frac{u_n}{\Delta^r u_0}$$

erhielte.

Sollen die Grössen u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$ etc. bis $\Delta^{r-1} u_0$ verschwinden, so müssen auch u_1, u_2, u_3, etc. bis u_{r-1} sämmtlich $=0$ sein. Es wird also für u_n eine Function von n zu wählen sein, welche sich auf Null reducirt, wenn man entweder

$$n=0, \text{ oder } n=1, \text{ oder } n=2 \text{ u. s. w. oder } n=r-1$$

setzt.

Die einfachste dieser Forderung entsprechende Form ist

$$u_n = n(n-1)(n-2) \ldots [n-(r-1)];$$

es lässt sich aber leicht zeigen, dass dieselbe auch den weiteren Bedingungen, nämlich dass $\Delta^r u_0$ von 0 verschieden bleibe, und $\Delta^{r+1} u_0$, $\Delta^{r+2} u_0$ etc. gleich Null werden, Genüge leistet. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta u_n &= u_{n+1} - u_n \\ &= (n+1)n(n-1) \ldots [n-(r-2)] \\ &\quad - n(n-1)(n-2) \ldots [n-(r-1)] \\ &= r.n(n-1)(n-2) \ldots [n-(r-2)]; \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} \Delta^2 u_n &= \Delta u_{n+1} - \Delta u_n \\ &= r.(n+1)n(n-1) \ldots [n-(r-3)] \\ &\quad - r.n(n-1)(n-2) \ldots [n-(r-2)] \\ &= r(r-1).n(n-1) \ldots [n-(r-3)]; \end{aligned}$$

auf dieselbe Weise findet man

$$\Delta^3 u_n = r(r-1)(r-2).n(n-1) \ldots [n-(r-4)],$$

und endlich

$$\Delta^{r-1} u_n = r(r-1)(r-2) \ldots 3.2.n,$$

mithin

$$\Delta^r u_n = r(r-1)(r-2) \ldots 3.2.1.$$

Da dieser Ausdruck von n unabhängig ist, so folgt daraus

Ich durfte bei meinen Zuhörern eine durch höhere wissenschaftliche Studien erworbene Fertigkeit im strengeren Denken, aber kein reichhaltiges mathematisches Hilfsmaterial, nicht mehr als die gewöhnlichsten Elementar-Kenntnisse der Algebra, kaum bis zur Binomialformel reichend, voraussetzen; daher sah ich mich genöthigt, vorher das Bildungsgesetz der numerischen Coefficienten in der Grundformel, von welcher ich auszugehen hatte, ersichtlich zu machen. Da ich das von mir bei dieser Lehrweise gewählte Verfahren nirgends durch den Druck veröffentlicht habe, so dürfte es nicht unpassend erscheinen, wenn ich dasselbe jetzt noch der hochverehrten Klasse zur Aufnahme in unsere Sitzungsberichte vorlege.

Bezeichnet man die Glieder irgend einer Reihe, oder auch nur regellosen Grössenfolge mit

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots .$$

und die Glieder der daraus hervorgehenden Differenzreihen mit

$$\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3, \ldots \Delta u_n, \ldots .$$

$$\Delta^2 u_0, \Delta^2 u_1, \Delta^2 u_2, \Delta^2 u_3, \ldots \Delta^2 u_n, \ldots$$

u. s. w.,

wobei jede dieser Reihen aus der vorhergehenden entsteht, wenn man daselbst jedes Glied von dem nächstfolgenden abzieht, so lässt sich auf die allbekannte Weise zeigen, dass jedes Glied u_n der Grundreihe durch u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$, etc. bis $\Delta^n u_0$ mittelst einer Formel von der Gestalt

$$u_n = u_0 + A_1 \Delta u_0 + A_2 \Delta^2 u_0 + \ldots$$
$$\ldots + A_r \Delta^r u_0 + \ldots + \Delta^n u_0$$

ausgedrückt wird, wobei die Coefficienten A_1, A_2, ... A_r, ... von der Beschaffenheit der Grundreihe unabhängige positive ganze Zahlen sind, deren stufenweise Berechnung mittelst des Pascal'schen Zahlendreiecks vollzogen werden kann.

Um die Zusammensetzung jedes dieser Coefficienten, wie A_r, aus den einzig und allein darauf Einfluss nehmenden Elementen n und r ausfindig zu machen, bedenke man, dass für eine Reihe, bezüglich welcher die Grössen

$$u_0, \Delta u_0, \Delta^2 u_0, \ldots \text{ bis } \Delta^{r-1} u_0$$

sämmtlich $= 0$ wären, ferner

$$\Delta^r u_0$$

von Null verschieden bliebe, und endlich

$$\Delta^{r+1} u_0, \Delta^{r+2} u_0, \ldots \text{ bis } \Delta^n u_0$$

Setzt man $n+1$ an die Stelle von n, so hat man

$$R_{n+1} = \binom{n+1}{r} \Delta^r u_0 + \binom{n+1}{r+1} \Delta^{r+1} u_0 + \ldots\ldots + \Delta^{n+1} u_0$$

Es ist aber, wie schon aus dem Pascal'schen Dreiecke erhellet, und auch aus dem Bildungsgesetze von $\binom{n}{r}$ leicht nachgewiesen werden kann,

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r};$$

daher kann man auch setzen:

$$R_{n+1} = \left[\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}\right] \Delta^r u_0 + \left[\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}\right] \Delta^{r+1} u_0$$
$$+ \left[\binom{n}{r+1} + \binom{n}{r+2}\right] \Delta^{r+2} u_0 + \ldots\ldots$$
$$\ldots + \left[\binom{n}{n-1} + 1\right] \Delta^n u_0 + \Delta^{n+1} u_0,$$

Bedenkt man nun, dass

$$\Delta^r u_0 + \Delta^{r+1} u_0 = \Delta^r u_1, \quad \Delta^{r+1} u_0 + \Delta^{r+2} u_0 = \Delta^{r+1} u_1, \text{ u. s. w.}$$

ist, so erhält man

$$R_{n+1} = \binom{n}{r-1} \Delta^r u_0 + \binom{n}{r} \Delta^r u_1 + \binom{n}{r+1} \Delta^{r+1} u_1 + \ldots$$
$$\ldots\ldots + \binom{n}{n-1} \Delta^{n-1} u_1 + \Delta^n u_1.$$

Die Summe der Glieder dieses Ausdruckes, vom zweiten angefangen, ist der Ausdruck, in welchen R_n übergeht, wenn die Reihe

$$u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_{n+1}$$

an die Stelle von

$$u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$$

tritt; bezeichnen wir den solcherweise aus R_n entspringenden Ausdruck mit $R^1{}_n$, so haben wir

$$R_{n+1} = \binom{n}{r-1} \Delta^r u_0 + R^1{}_n.$$

Es ist, wie aus der Form von R_n erhellet,

$$R_r = \Delta^r u_0, \quad \text{also } R^1{}_r = \Delta^r u_1$$

l somit, nach der so eben aufgestellten Formel:

$$R_{r+1}=\binom{r}{r-1}\Delta^r u_0+\Delta^r u_1.$$

raus folgt

$$R^1_{r+1}=\binom{r}{r-1}\Delta^r u_1+\Delta^r u_2,$$

hin weiter

$$R_{r+2}=\binom{r+1}{r-1}\Delta^r u_0+\binom{r}{r-1}\Delta^r u_1+\Delta^r u_2.$$

enso ergibt sich

$$R_{r+3}=\binom{r+2}{r-1}\Delta^r u_0+\binom{r+1}{r-1}\Delta^r u_1+\binom{r}{r-1}\Delta^r u_2+\Delta^r u_3,$$

l allgemein

$$R_{r+p}=\binom{r+p-1}{r-1}\Delta^r u_0+\binom{r+p-2}{r-1}\Delta^r u_1+\ldots\ldots+\Delta^r u_p.$$

tzt man $r+p=n$, so wird

$$=\binom{n-1}{r-1}\Delta^r u_0+\binom{n-2}{r-1}\Delta^r u_1+\binom{n-3}{r-1}\Delta^r u_2+..+\Delta^r u_{n-r}.$$

Es lassen sich nun leicht zwei Gränzen angeben, zwischen lche R_n fällt: Es sei

$$\binom{n-k-1}{r-1}\Delta^r u_k$$

s kleinste, und

$$\binom{n-g-1}{r-1}\Delta^r u_g$$

s grösste unter den Gliedern des Ausdruckes R_n, wobei die rgleichung in algebraischem Sinne angestellt wird, also nega- e Grössen für kleiner gelten als positive, und zwar für um so iner, je grösser ihre numerischen Werthe sind, so liegt R_n enbar zwischen den Gränzen

$$(n-r+1)\binom{n-k-1}{r-1}\Delta^r u_k$$

l

$$(n-r+1)\binom{n-g-1}{r-1}\Delta^r u_g$$

oder auch: Es sei $\Delta^r u_k$ die kleinste, $\Delta^r u_g$ die grösste unter den Grössen $\Delta^r u_0$, $\Delta^r u_1$, $\Delta^r u_2$, ... $\Delta^r u_{n-r}$, so fällt R_n zwischen die Gränzen

$$\left[\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-2}{r-1}+\binom{n-3}{r-1}+\ldots\ldots+1\right]\Delta^r u_k$$

und

$$\left[\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-2}{r-1}+\binom{n-3}{r-1}+\ldots\ldots+1\right]\Delta^r u_g,$$

d. h. wie man mittelst oben benützter Eigenschaft der Grössen von der Form $\binom{n}{r}$ leicht sieht, zwischen

$$\binom{n}{r}\Delta^r u_k \text{ und } \binom{n}{r}\Delta^r u_g.$$

Lässt sich dem in der Grössenfolge u_0, u_1, u_2, ... herrschenden Gesetze gemäss $\Delta^r u_n$ als eine Function von n darstellen, welche durch $F(n)$ angedeutet werde, so lassen sich obige Ausdrücke als besondere Werthe der Functionen

$$(n-r+1)\binom{n-z-1}{r-1}F(z)$$

und

$$\binom{n}{r}F(z)$$

für $z=k$ und $z=g$ betrachten.

Aendert sich $F(z)$, während z vom Werthe k zum Werthe g stetig übergeht, gleichfalls nach dem Gesetze der Stetigkeit, so gibt es sicher einen zwischen k und g, also um so mehr zwischen 0 und $n-r$ liegenden Werth für z, bezüglich dessen

$$R_n=(n-r+1)\binom{n-z-1}{r-1}F(z)$$

oder auch

$$R_n=\binom{n}{r}F(z)$$

gesetzt werden darf, wobei natürlich der Werth von z im zweiten Falle von jenem im ersten verschieden gedacht wird.

Die Anwendung dieser Resultate auf die Herstellung der Taylor'schen Formel sammt ihrer Ergänzung unterliegt keiner Schwierigkeit. Hierüber darf ich mich hier wohl ganz kurz fassen.

Setzt man

$$u_n = f(x + nw), \text{ also } u_0 = f(x)$$

wobei $f(x)$ irgend eine durchgehends angebbare Function der Veränderlichen x vorstellt, und lässt man $nw = h$ sein, denkt man sich ferner h als eine bestimmte Grösse und die ganze Zahl n ins Unendliche wachsend, folglich $w = \frac{h}{n}$ unendlich klein werdend, so ergibt sich auf die bekannte Weise unter der Voraussetzung der Stetigkeit der Function $f(x)$ und ihrer Differentialquotienten in der Gegend des für x gewählten Werthes:

$$f(x+h) = f(x) + h \lim . \frac{\Delta f(x)}{w} + \frac{h^2}{1.2} \lim . \frac{\Delta^2 f(x)}{w^2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^{r-1}}{1.2.3\ldots(r-1)} \lim . \frac{\Delta^{r-1} f(x)}{w^{r-1}} + R,$$

wobei

$$R = \lim . (n-r+1) \binom{n-z-1}{r-1} \Delta^r f(x+zw)$$

oder auch

$$R = \lim . \binom{n}{r} \Delta^r f(x+zw)$$

erscheint. Diese beiden Ausdrücke reduciren sich, wenn man die Symbole

$$\binom{n-z-1}{r-1} \text{ und } \binom{n}{r}$$

durch die Brüche, welche sie vorstellen, ersetzt und erwägt, dass zw zwischen 0 und nw oder h fällt, mithin unter der Gestalt des Productes θh gedacht werden kann, wobei θ einen zwischen 0 und 1 liegenden Factor bedeutet, auf

$$R=\frac{h^r(1-\theta)^{r-1}}{1.2.3..(r-1)}\lim.\frac{\Delta^r f(x+\theta h)}{\omega^r}$$

und

$$R=\frac{h^r}{1.2.3...r}\lim.\frac{\Delta^r f(x+\theta h)}{\omega^r},$$

wobei θ in der zweiten Form der Ergänzung R nicht denselben Werth hat, wie in der ersten. Wie mit dieser Deduction die Entwicklung der Grundbegriffe der Differentialrechnung, und zwar auf die lichtvollste Weise gegeben werden kann, bedarf keiner weiteren Erörterung.

Friedrich Leopold Stollberg erzählt in einem an den Domainenrath Scheffner in Königsberg gerichteten Briefe (datirt Berlin den 5. Decbr. 1789), der in den Blättern für literarische Unterhaltung (1834. Nr. 352.) abgedruckt ist, dass Lagrange zu einem seiner Freunde gesagt habe: „Je n'ai jamais connu d'autres jouissances que celles du coeur.“

XXIV.

Bestimmte Lösung der Aufgabe über die Vertheilung eines Drucks auf mehr als drei Stützpunkte.

Von

Herrn Chr. Wiener,

Lehrer der Mathematik an der höheren Gewerbschule zu Darmstadt.

Wenn eine Last P von einer Unterlage mit drei Stützpunkten getragen wird, so ist der Druck auf jeden derselben leicht zu bestimmen aus den drei Gleichungen, welche ausdrücken, dass P die Resultante der drei Seitenkräfte ist. Sei der Angriffspunkt P der Last (Taf. VI. Fig. 1.) der Mittelpunkt eines Polarcoordinatensystems, sei XX' die Axe, und seien die Stützpunkte, auf welche der Druck P_1, P_2, P_3 geübt wird, durch ihre Abstände $PP_1=a_1$, $PP_2=a_2$, $PP_3=a_3$ und durch die Winkel $P_1PX=\alpha_1$ u. s. w., welche diese Abstandslinien mit der Axe bilden, gegeben, so sind die drei Gleichungen, welche ausdrücken, dass P die Resultante von P_1, P_2 und P_3 ist, folgende:

$$\begin{aligned}
P&=P_1+P_2+P_3,\\
0&=P_1a_1\sin\alpha_1+P_2a_2\sin\alpha_2+P_3a_3\sin\alpha_3,\\
0&=P_1a_1\cos\alpha_1+P_2a_2\cos\alpha_2+P_3a_3\cos\alpha_3;
\end{aligned}$$

woraus die drei unbekannten Grössen P_1, P_2 und P_3 bestimmt werden können.

Sind aber mehr als drei, im Allgemeinen n Stützpunkte gegeben, so reichen die drei ähnlichen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
P&=P_1+P_2+\ldots.+P_n,\\
0&=P_1a_1\sin\alpha_1+P_2a_2\sin\alpha_2+\ldots.+P_na_n\sin\alpha_n,\\
0&=P_1a_1\cos\alpha_1+P_2a_2\cos\alpha_2+\ldots.+P_na_n\cos\alpha_n
\end{aligned}\right\}\ A.$$

zur Bestimmung der n Unbekannten nicht hin, sondern es können $n-3$ derselben willkührlich angenommen werden; es ist dieses einleuchtend, indem man z. B. eine Anzahl Stützpunkte ganz unbelastet denken kann, da ja schon drei genügen. Die Aufgabe ist dann unbestimmt.

Denkt man sich aber die Bedingungen dieser Aufgabe physisch ausgeführt und zwar, wie wir es auch bei der Auflösung der Einfachheit halber annehmen wollen, von dem belasteten Punkte P Arme ausgehen, welche, in einer horizontalen Ebene liegend, mit ihren Enden auf Stützen ruhen; so scheint es paradox, dass der Druck auf jede Stütze nicht ein ganz bestimmter sein soll. Der Grund, warum eine Bestimmtheit der Aufgabe sich uns sogleich als gewiss aufdrängt, liegt aber darin, dass die Arme physische Körper sind, welche am einen Ende belastet, sich biegen; und dieses ist es auch, worauf die folgende Lösung gestützt ist. — Die Belastung des Vereinigungspunktes P der Arme wird nun folgende Wirkung haben: Da die Arme den Druck der Last nicht auf die Stützen fortpflanzen können, ohne eine gleiche elastische Spannung anzunehmen, was aber nur durch Biegung möglich ist, so wird der belastete Punkt P sich senken, von seinem neuen Orte werden die Arme, alle von einer gemeinschaftlichen Berührungsebene tangirt, ausgehen und sich bis zum Horizonte ihrer Stützpunkte erheben, indem sie auf diese den Druck üben, welcher ihrer Ablenkung von der in P gemeinschaftlichen Berührungsebene und ihrem Biegungsmomente entspricht. Aber die Stützen selbst sind ebenfalls physische Körper, welche die Fähigkeit, den auf sie geübten Druck im Gleichgewicht zu halten, nur dadurch erlangen, dass sie etwas zusamengedrückt werden und so die rückwirkende Elasticität gewinnen.

Durch diese auf die wahre Natur der Sache gestützte Betrachtungsweise wird eine bestimmte Auflösung möglich. Wir wollen dabei nach einander die drei Fälle betrachten: 1) dass die Zusammendrückbarkeit der Stützen sehr klein sei gegen die Biegsamkeit der Arme, wie es z. B. stattfindet, wenn erstere aus Eisen, letztere aus Fischbein bestehen und die Last P klein ist; dann bleibt der Horizont der Stützen ungeändert; 2) dass die Biegsamkeit der Arme sehr klein sei gegen die Zusammendrückbarkeit der Stützen, wie es z. B. stattfindet, wenn erstere starke Eisenarme, letztere aber schraubenförmig gewunden aufrecht stehende Stahlfedern sind; dann bilden die Arme eine etwas gesenkte und im Allgemeinen geneigte Ebene; 3) dass endlich beide Momente zugleich berücksichtigt werden müssen, wobei dann die hohle Fläche der Arme auf Stützpunkten von verschiedener Höhe lagert.

Erster Fall. Die Stützpunkte liegen in Einem Horizonte, die Arme sind von diesen abwärts gehende nach oben hohle physische Linien, welche im gesenkten Punkte P eine gemeinschaftliche Berührungsebene haben. Wir wollen durch die drei Gleichungen $A.$ unter Berücksichtigung der Gesetze der Elasticität die drei Elemente bestimmen, durch welche die genannte Berührungsebene festgelegt wird, und dann den Druck auf jeden Stützpunkt aus seiner Ablenkung von dieser Ebene ableiten.

Schneide jene Berührungsebene den Horizont der Stützpunkte in OO' (Taf. VI. Fig. 2.) unter dem Winkel φ, bilde die Linie OO' oder ihre Parallele oo' durch den Ursprung mit der Axe XX' den Winkel β, und sei der senkrechte Abstand dieser Schnittlinie OO' vom Ursprung oder $PM = r$, so hat sich der Punkt P gesenkt um $r \operatorname{tg} \varphi$. Ferner liegt der Stützpunkt P_1 über der Tangirungsebene um $b_1 = (PM + P_1 A_1) \operatorname{tg} \varphi$, oder da $P_1 A_1$ senkrecht auf oo' und $= a_1 \sin(\alpha_1 - \beta)$ ist, um

$$b_1 = [r + a_1 \sin(\alpha_1 - \beta)] \operatorname{tg} \varphi.$$

Wir müssen nun die Arme als Balken betrachten, welche an ihrem einen Ende P eingemauert sind und deren anderes durch die senkrecht aufwärts wirkende Kraft P_1 um b_1 gehoben wird. Haben alle Arme gleiche prismatische Gestalt und gleiches Biegungsmoment, und vermöge die Krafteinheit bei einem solchen Arme von der Länge $= 1$ das Ende, an welchem sie wirkt, um b von der Tangente am andern eingemauerten Ende abzulenken, so wird die Kraft P_1, welche bei dem Balken von der Länge a_1 das Ende um b_1 zu heben vermag, nach den Gesetzen der Elasticität sein:

$$P_1 = \frac{b_1}{b a_1^3} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{b a_1^3} [r + a_1 \sin(\alpha_1 - \beta)],$$

oder

$$P_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{b} \left[\frac{r}{a_1^3} + \frac{\sin \alpha_1 \cos \beta}{a_1^2} - \frac{\cos \alpha_1 \sin \beta}{a_1^2} \right],$$

und analog für die übrigen Druckkräfte:

$$P_2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{b} \left[\frac{r}{a_2^3} + \frac{\sin \alpha_2 \cos \beta}{a_2^2} - \frac{\cos \alpha_2 \sin \beta}{a_2^2} \right]$$

u. s. w.

Führt man diese Werthe in die obigen drei Gleichungen A. ein und bildet Klammern, so erhält man:

$$P = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{b} \Big\{ r \left(\frac{1}{a_1^3} + \frac{1}{a_2^3} + \ldots \right) + \cos \beta \left(\frac{\sin \alpha_1}{a_1^2} + \frac{\sin \alpha_2}{a_2^2} + \ldots \right)$$
$$- \sin \beta \left(\frac{\cos \alpha_1}{a_1^2} + \frac{\cos \alpha_2}{a_2^2} + \ldots \right) \Big\},$$

$$0 = r \left(\frac{\sin \alpha_1}{a_1^2} + \frac{\sin \alpha_2}{a_2^2} + \ldots \right) + \cos \beta \left(\frac{\sin^2 \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin^2 \alpha_2}{a_2} + \ldots \right)$$
$$- \sin \beta \left(\frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{a_2} + \ldots \right),$$

$$0 = r\left(\frac{\cos\alpha_1}{a_1^2} + \frac{\cos\alpha_2}{a_2^2} + \dots\right) + \cos\beta\left(\frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{a_1} + \frac{\sin\alpha_2\cos\alpha_2}{a_2} + \dots\right)$$
$$- \sin\beta\left(\frac{\cos^2\alpha_1}{a_1} + \frac{\cos^2\alpha_2}{a_2} + \dots\right);$$

und wenn wir hierin der Uebersicht halber setzen:

$$s = \frac{1}{a_1^3} + \frac{1}{a_2^3} + \dots + \frac{1}{a_n^3};$$

$$t = \frac{\sin\alpha_1}{a_1^2} + \frac{\sin\alpha_2}{a_2^2} + \dots + \frac{\sin\alpha_n}{a_n^2},$$

$$t' = \frac{\cos\alpha_1}{a_1^2} + \frac{\cos\alpha_2}{a_2^2} + \dots + \frac{\cos\alpha_n}{a_n^2};$$

$$u = \frac{\sin^2\alpha_1}{a_1} + \frac{\sin^2\alpha_2}{a_2} + \dots + \frac{\sin^2\alpha_n}{a_n},$$

$$u' = \frac{\cos^2\alpha_1}{a_1} + \frac{\cos^2\alpha_2}{a_2} + \dots + \frac{\cos^2\alpha_n}{a_n};$$

$$v = \frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{a_1} + \frac{\sin\alpha_2\cos\alpha_2}{a_2} + \dots + \frac{\sin\alpha_n\cos\alpha_n}{a_n};$$

so bekommen wir sie unter der Form:

$$P = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{b}\{rs + t\cos\beta - t'\sin\beta\},$$
$$0 = rt + u\cos\beta - v\sin\beta,$$
$$0 = rt' + v\cos\beta - u'\sin\beta;$$

woraus der Reihe nach die Werthe abgeleitet werden:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{vt - ut'}{u't - vt'},$$

$$r = \frac{v\sin\beta - u\cos\beta}{t},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{b} = \frac{P}{rs + t\cos\beta - t'\sin\beta}.$$

Führt man diese Werthe in die obigen Formeln für P_1, P_2 u. s. w. ein, so bekommt man die Grösse des Drucks auf jeden Stützpunkt.

Die gefundenen Ausdrücke zeigen, dass β, r, $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{b}$ und also auch die Grössen P_1, P_2 u. s. w. ganz unabhängig von der Grösse b der Biegsamkeit sind, dass also die Vertheilung des Drucks auf die Stützpunkte dieselbe bleibt, wenn auch die

Elasticität der Arme noch so klein wird; nur darf sie nicht gleich Null werden, indem sonst auch $\operatorname{tg}\varphi=0$ wird, und der Werth $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{b}=\frac{0}{0}$ den Werth von P_1, P_2 u. s. w. unbestimmt macht. Von dieser Einschränkung werden wir uns noch bei dem zweiten Falle näher überzeugen.

Wenden wir diese Formeln auf ein einfaches Beispiel an, sei nämlich $P=1$,

$$a_1=5,\quad a_2=2,\quad a_3=1,\quad a_4=4;$$
$$\alpha_1=0^0,\ \alpha_2=90^0,\ \alpha_3=180^0,\ \alpha_4=270^0;$$

so wird

$$s=1{,}149,\ t=0{,}187,\ t'=-0{,}96,$$
$$u=0{,}75,\ u'=1{,}2,\ v=0;$$

daher

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{0{,}75\,.\,0{,}96}{1{,}2\ .\,0{,}187}\ \text{und}\ \beta=72^0 39',$$

ferner

$$r=-1{,}193,\ \frac{\operatorname{tg}\varphi}{b}=-2{,}511.$$

Der negative Werth von r und $\operatorname{tg}\varphi$ drückt aus, dass die Durchschnittslinie OO' (1) (Taf. VI. Fig. 3.) die Axe auf der negativen Seite vom Ursprung trifft. — Mit Hülfe dieser Werthe erhält man:

$$P_1=\frac{-2{,}511}{125}(-1{,}193-5\sin\beta)=0{,}120$$

$$P_2=\frac{-2{,}511}{8}(-1{,}193+2\cos\beta)=0{,}187$$

$$P_3=\frac{-2{,}511}{1}(-1{,}193+1\sin\beta)=0{,}599$$

$$P_4=\frac{-2{,}511}{64}(-1{,}193-4\cos\beta)=0{,}094$$

und
$$P_1+P_2+P_3+P_4=1{,}000=P,$$

zum Beweise der richtigen Rechnung.

Es kann vorkommen, dass der Druck auf einzelne Punkte negativ wird, wie in folgendem Beispiele. Sei (Taf. VI. Fig. 4.) $P=1$,

$$a_1=5, \qquad a_2=1, \qquad a_3=10, \qquad a_4=5;$$
$$\alpha_1=36^0 52' 11'',6, \ \alpha_2=180^0, \ \alpha_3=180^0+\alpha_1, \ \alpha_4=-\alpha_1;$$

so dass

$$\sin\alpha_1=0,6, \ \cos\alpha_1=0,8;$$

so erhält man

$$\beta=77^0 44', \ r=-1,53, \ \frac{\operatorname{tg}\varphi}{b}=-1,61;$$
$$P_1=0,06, \ P_2=0,88, \ P_3=-0,01, \ P_4=0,07;$$

zusammen

$$=1,01-0,1=1,00.$$

In einem solchen Falle fällt die Tangirungsebene bei P oberhalb der Stützpunkte mit negativem Drucke, so dass die Arme, welche nach Annahme mit dem einen Ende den Stützpunkt berühren, hier nicht aufwärts gedrückt, sondern abwärts gezogen werden. Soll dagegen eine solche feste Verbindung mit den Stützpunkten nicht stattfinden, so würden die betreffenden Arme jene Tangirungsebene nicht verlassen und sich über ihre früheren Stützen erheben, so dass diese unbelastet blieben. Man muss dann mit Weglassung dieser Punkte eine neue Berechnung vornehmen, also in unserem Beispiele die Last P auf die drei Punkte P_1, P_2 und P_4 vertheilen, wobei das Resultat:

$$P_1=0,10, \ P_2=0,80, \ P_4=0,10$$

erhalten wird.

Zweiter Fall. Es bilden die Arme unveränderlich eine Ebene, welche auf den durch den Druck P etwas gesenkten Stützpunkten lagert. Diese Ebene schneide den ursprünglichen Horizont der Stützpunkte in der Linie OO' (Taf. VI. Fig. 2.) unter dem Winkel φ; und diese Linie, welche den Abstand r von dem Ursprung habe, bilde den Winkel β mit der Axe XX'. Die Grösse der Senkung jedes Punktes P_1, P_2 u. s. w. sei e_1, e_2 u. s. w., welche ausgedrückt wird, wie früher, durch die Gleichung

$$e_1=[r+a_1\sin(\alpha_1-\beta)]\operatorname{tg}\varphi.$$

Sei nun e die Länge, um welche die Krafteinheit einen Stützpunkt niederdrücken kann, und bieten alle gleichen Widerstand dar, so ist die Kraft, welche einen solchen um e_1 senkt,

$$P_1=\frac{e_1}{e}=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{e}[r+a_1\sin(\alpha_1-\beta)],$$

oder

$$P_1=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{e}[r+a_1\sin\alpha_1\cos\beta-a_1\cos\alpha_1\sin\beta].$$

Dieser Werth und die analogen für die übrigen Druckkräfte in die drei Gleichungen A. eingeführt, geben ähnlich wie vorhin:

$$P=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{e}\{rn+\cos\beta(a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2+\ldots)-\sin\beta(a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+\ldots)\},$$

$$0=r(a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2+\ldots)+\cos\beta(a_1^2\sin^2\alpha_1+a_2^2\sin^2\alpha_2+\ldots)$$
$$-\sin\beta(a_1^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1+a_2^2\sin\alpha_2\cos\alpha_2+\ldots),$$

$$0=r(a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+\ldots)+\cos\beta(a_1^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1+a_2^2\sin\alpha_2\cos\alpha_2+\ldots)$$
$$-\sin\beta(a_1^2\cos^2\alpha_1+a_2^2\cos^2\alpha_2+\ldots);$$

und setzen wir hierin:

$$\begin{aligned}
n&=\text{ der Anzahl der Stützpunkte},\\
t&=a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2+\ldots+a_n\sin\alpha_n,\\
t'&=a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+\ldots+a_n\cos\alpha_n;\\
u&=a_1^2\sin^2\alpha_1+a_2^2\sin^2\alpha_2+\ldots+a_n^2\sin^2\alpha_n,\\
u'&=a_1^2\cos^2\alpha_1+a_2^2\cos^2\alpha_2+\ldots+a_n^2\cos^2\alpha_n;\\
v&=a_1^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1+a_2^2\sin\alpha_2\cos\alpha_2+\ldots+a_n^2\sin\alpha_n\cos\alpha_n;
\end{aligned}$$

so erhalten obige Gleichungen die Gestalt:

$$P=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{e}(rn+t\cos\beta-t'\sin\beta),$$
$$0=rt+u\cos\beta-v\sin\beta,$$
$$0=rt'+v\cos\beta-u'\sin\beta.$$

Hieraus erhalten wir:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{vt-ut'}{u't-vt'},$$
$$r=\frac{v\sin\beta-u\cos\beta}{t},$$
$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{e}=\frac{P}{rn+t\cos\beta-t'\sin\beta};$$

welche Resultate der Form nach mit denen bei 1) gefundenen übereinstimmen, der Grösse nach aber davon verschieden sind, da die einzelnen Buchstaben andere Werthe ausdrücken. — Mit diesen nun bekannten Grössen lassen sich die einzelnen Druckkräfte nach den obigen Formeln wie vorhin bestimmen.

Auch hier ist sichtbar, dass die Werthe von β, r, $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{e}$ und somit die von $P_1, P_2, \ldots P_n$ durchaus von der Grösse e der Elasticität unabhängig sind, dass sie also auch für jede noch so kleine Zusammendrückbarkeit dieselben bleiben, nur nicht für

$e=0$, weil wie vorhin dann $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{e}=\frac{0}{0}$, und hierdurch die Druckkräfte unbestimmt würden. — Wollte man in beiden Fällen die erhaltenen Grössen auch für die Grenzwerthe $b=0$ und $e=0$ gelten lassen, so müssten beide gleich sein. Denn im ersten Falle war von vornherein $e=0$ angenommen und $b=0$ ein Grenzwerth; im zweiten Falle aber war $b=0$ die ursprüngliche Annahme und $e=0$ der Grenzwerth; da also jedesmal $b=0$ und $e=0$ ist, so müssten auch die bestimmten Grössen der Druckkräfte übereinstimmen; dieses aber findet nicht statt, und es müssen daher, wenn die Tragarme und deren Stützen beide ganz unelastisch sind, die Druckkräfte wirklich unbestimmt sein.

Betrachten wir als Beispiel dieselbe Aufgabe wie vorhin, nehmen also $P=1$,

$$a_1=5,\quad a_2=2,\quad a_3=1,\quad a_4=4;$$
$$\alpha_1=0^0,\ \alpha_2=90^0,\ \alpha_3=180^0,\ \alpha_4=270^0;$$

so wird

$$t=-2,\ t'=4,\ u=20,\ u'=26,\ v=0;$$

und daraus

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{80}{52},\ \text{also}\ \beta=56^0 59',$$

ferner

$$r=5{,}450,\ \frac{\operatorname{tg}\varphi}{e}=0{,}0576,$$

und endlich

$$P_1=0{,}072,\ P_2=0{,}377,\ P_3=0{,}362,\ P_4=0{,}189,$$

deren Summe

$$=1{,}000=P$$

ist.

Es fällt also hier die Linie OO' (2) (Taf. VI. Fig. 3.) auf die positive Seite der Axe, und die der Last nahe Stütze P_3 wird weniger belastet, als im ersten Falle, weil der Einfluss der Nähe auf die Grösse des Drucks geringer geworden ist.

Auch hier ist der Fall möglich, dass einzelne Druckkräfte negativ werden. Sei z. B. (Taf. VI. Fig. 5.) $P=1$,

$$a_1=10,\ a_2=5,\qquad a_3=1,\quad a_4=5;$$
$$\alpha_1=0^0,\ \alpha_2=36^0 52' 11'',6,\ \alpha_3=180^0,\ \alpha_4=-\alpha_2;$$

so erhält man

$$t = 10\sin 0^{0} + 4 - 1\sin 0^{0} - 4 = 0,\; t' = 15,\; u = 32,\; u' = 119,$$
$$v = 100\sin 0^{0} + 12 - 1\sin 0^{0} - 12 = 0;$$

und daraus

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{32.15}{0} = \infty\text{, also } \beta = 90^{0},$$

$$r = \frac{(100\sin 0^{0} - 1\sin 0^{0}) - 32\cos 90^{0}}{10\sin 0^{0} - 1\sin 0^{0}} = \frac{99-32}{9} = 7{,}444,\; \frac{\operatorname{tg}\varphi}{e} = 0{,}0677.$$

Hierdurch wird

$$P_1 = -0{,}173,\; P_2 = 0{,}301,\; P_3 = 0{,}571,\; P_4 = 0{,}301,$$

zusammen

$$= 1{,}173 - 0{,}173 = 1{,}000 = P.$$

In diesem Falle schneidet, wie in dem ersten Falle, die Ebene der Arme zwischen dem Angriffspunkte der Last und einem Stützpunkte P_1 in den ursprünglichen Horizont der Stützpunkte ein und geht bei P_1 über dem Stützpunkte weg. Bei einer festen Verbindung von beiden wird die Stütze mit einer Kraft $P_1 = -0{,}173$ ausgedehnt, bei einem losen Auflagern dagegen muss eine neue Berechnung mit Ausscheidung des Stützpunktes P_1 vorgenommen werden, welche uns hier auf den einfachen Fall von drei Stützpunkten bringt, und die Resultate $P_2 = \frac{1}{8}$, $P_3 = \frac{3}{4}$, $P_4 = \frac{1}{8}$ liefert.

Dritter Fall. Es sei die Elasticität der Arme und die der Stützen zugleich zu berücksichtigen; dann lagern die Enden der gekrümmten Arme auf den etwas niedergedrückten Stützpunkten. Sei auch hier wieder die Lage der in dem Punkte P an die Arme tangirenden Ebene durch die drei Grössen β, r und φ festgelegt, seien die Abstände der Armenden von jener Ebene b_1, b_2 u. s. w. und ihre Abstände von dem ursprünglichen Horizonte der Stützpunkte oder die Senkung der letzteren e_1, e_2 u. s. w., so ist

$$b_1 + e_1 = [r + a_1 \sin(\alpha_1 - \beta)]\operatorname{tg}\varphi;$$

ferner ist wie oben

$$b_1 = P_1 \cdot b \cdot a_1^{3} \text{ und } e_1 = P_1 e,$$

daher

$$P_1 (b a_1^{3} + e) = \operatorname{tg}\varphi[r + a_1 \sin(\alpha_1 - \beta)],$$

oder

$$P_1 = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{b a_1^{3} + e}[r + a_1 \sin(\alpha_1 - \beta)].$$

Verfahren wir mit diesen und den analogen Ausdrücken für F u. s. w. ebenso wie früher, so bekommen wir die drei Gleichungen A. unter der Form:

$$P = \operatorname{tg}\varphi \Big\{ r\left(\frac{1}{ba_1^3+e} + \frac{1}{ba_2^3+e} + \dots\right) + \cos\beta\left(\frac{a_1 \sin\alpha_1}{ba_1^3+e} + \frac{a_2 \sin\alpha_2}{ba_2^3+e} + \dots\right)$$
$$- \sin\beta\left(\frac{a_1 \cos\alpha_1}{ba_1^3+e} + \frac{a_2 \cos\alpha_2}{ba_2^3+e} + \dots\right)\Big\},$$

$$0 = r\left(\frac{a_1 \sin\alpha_1}{ba_1^3+e} + \frac{a_2 \sin\alpha_2}{ba_2^3+e} + \dots\right) + \cos\beta\left(\frac{a_1^2 \sin^2\alpha_1}{ba_1^3+e} + \frac{a_2^2 \sin^2\alpha_2}{ba_2^3+e} + \dots\right)$$
$$- \sin\beta\left(\frac{a_1^2 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1}{ba_1^3+e} + \frac{a_2^2 \sin\alpha_2 \cos\alpha_2}{ba_2^3+e} + \dots\right),$$

$$0 = r\left(\frac{a_1 \cos\alpha_1}{ba_1^3+e} + \frac{a_2 \cos\alpha_2}{ba_2^3+e} + \dots\right) + \cos\beta\left(\frac{a_1^2 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1}{ba_1^3+e} + \frac{a_2^2 \sin\alpha_2 \cos\alpha_2}{ba_2^3+e} + \dots\right)$$
$$- \sin\beta\left(\frac{a_1^2 \cos^2\alpha_1}{ba_1^3+e} + \frac{a_2^2 \cos^2\alpha_2}{ba_2^3+e} + \dots\right),$$

und wenn wir darin

$$s = \frac{1}{ba_1^3+e} + \frac{1}{ba_2^3+e} + \dots + \frac{1}{ba_n^3+e};$$

$$t = \frac{a_1 \sin\alpha_1}{ba_1^3+e} + \frac{a_2 \sin\alpha_2}{ba_2^3+e} + \dots + \frac{a_n \sin\alpha_n}{ba_n^3+e},$$

$$t' = \frac{a_1 \cos\alpha_1}{ba_1^3+e} + \frac{a_2 \cos\alpha_2}{ba_2^3+e} + \dots + \frac{a_n \cos\alpha_n}{ba_n^3+e};$$

$$u = \frac{a_1^2 \sin^2\alpha_1}{ba_1^3+e} + \frac{a_2^2 \sin^2\alpha_2}{ba_2^3+e} + \dots + \frac{a_n^2 \sin^2\alpha_n}{ba_n^3+e},$$

$$u' = \frac{a_1^2 \cos^2\alpha_1}{ba_1^3+e} + \frac{a_2^2 \cos^2\alpha_2}{ba_2^3+e} + \dots + \frac{a_n^2 \cos^2\alpha_n}{ba_n^3+e};$$

$$v = \frac{a_1^2 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1}{ba_1^3+e} + \frac{a_2^2 \sin\alpha_2 \cos\alpha_2}{ba_2^3+e} + \dots + \frac{a_n^2 \sin\alpha_n \cos\alpha_n}{ba_n^3+e}$$

setzen, so bekommen wir sie fast unter der früheren Form:

$$P = \operatorname{tg}\varphi \{rs + t\cos\beta - t'\sin\beta\},$$
$$0 = rt + u\cos\beta - v\sin\beta,$$
$$0 = rt' + v\cos\beta - u'\sin\beta.$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{vt - ut'}{u't - vt'},$$

$$r = \frac{v \sin\beta - u \cos\beta}{t},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{P}{rs + t\cos\beta - t'\sin\beta};$$

und mit Hülfe dieser bekannten Werthe können nun die Druckkräfte berechnet werden. — Man sieht aus den erhaltenen Formeln, dass in diesem dritten Falle die Werthe von β, r, φ und mithin auch von P_1, P_2 u. s. w. nicht unabhängig sind von der Grösse der Biegsamkeit der Arme b und der Zusammendrückbarkeit der Stützen e, weil hier b und e nicht als allgemeine Factoren verschwinden. Es genügt jedoch, wenn das Verhältniss zwischen b und e gegeben ist, weil beide unter gleichen Potenzen im Nenner vorkommen. — Ferner gehen die letzten Formeln in die von 1) oder 2) über, wenn man $e=0$ oder $b=0$ setzt, so dass die letzte Auflösung die allgemeine ist und jene als besondere Fälle in sich begreift.

Betrachten wir auch hier das obige Beispiel, setzen also $P=1$,

$$a_1 = 5,\quad a_2 = 2,\quad a_3 = 1,\quad a_4 = 4;$$
$$\alpha_1 = 0,\quad \alpha_2 = 90^0,\quad \alpha_3 = 180^0,\quad \alpha_4 = 270^0;$$

und nehmen ferner

$$b = 0{,}01,\quad e = 0{,}1;$$

so wird

$$s = 16{,}739,\ t = 5{,}707,\ t' = -5{,}386,\ u = 43{,}839,\ u' = 27{,}616,\ v = 0;$$

daraus

$$\operatorname{tg}\beta = 1{,}498 \text{ und } \beta = 56^0 17',\ r = -4{,}264,\ \operatorname{tg}\varphi = -0{,}0157$$
$$\text{und } \varphi = -53'56'',$$

und endlich

$$P_1 = 0{,}098,\ P_2 = 0{,}275,\ P_3 = 0{,}490,\ P_4 = 0{,}137,$$

deren Summe $1{,}000 = P$ ist.

Diese Werthe fallen zwischen die von 1) und 2), wie auch das Verhältniss $\frac{e}{b} = 10$ zwischen das $\frac{e}{b} = 0$ und $\frac{e}{b} = \infty$ fällt. Die folgende Tabelle, sowie auch theilweise Taf. VI. Fig. 3. gibt eine Uebersicht der in den drei Fällen erhaltenen Resultate, wenn man, um φ zu finden, auch in 1), $b = 0{,}01$ und in 2), $e = 0{,}1$ annimmt.

	1)	3)	2)	
r	−1,193	−4,264	5,450	
β	72°39′	56°17′	56°59′	
φ	−1°26′	−54′	20′	
P_1	0,12	0,10	0,07	
P_2	0,19	0,27	0,38	
P_3	0,60	0,49	0,36	
P_4	0,09	0,14	0,19	

Auf ganz ähnliche Weise kann man den Druck auf je[illegible] Stützpunkt bestimmen, wenn die Last auf einer Ebene statt [illegible] Armen liegt und diese Ebene selbst entweder wieder auf einz[illegible] Stützen oder auf einem Körper, dessen obere Fläche eben i[illegible] auflagert; doch müsste für diesen Fall vorher die Biegungsge[illegible] einer elastischen Ebene, auf welche mehrere Kräfte wirken, u[illegible] sucht werden.

Ich will noch kurz die Ansichten erwähnen, welche i[illegible] über diese Aufgabe auffinden konnte. Unger in seinen „Ueb[illegible] gen aus der Statik und Mechanik, Berlin 1831“ sagt bei Ge[illegible] genheit der ganz ähnlichen Aufgabe über die Vertheilung d[illegible] Drucks auf drei Punkte, welche in eine gerade Linie fallen, da[illegible] man, um die fehlende Gleichung der unbestimmten Aufgabe [illegible] gewinnen, verschiedene Hypothesen angenommen habe, [illegible] lich dass die Linie elastisch sei, oder dass die Vertheilung d[illegible] Drucks eine möglichst gleichförmige sein müsse. Crelle in [illegible] nem „Journale für Mathematik, I. Band, Berlin 1826, Seite [illegible] bestimmt bei derselben Aufgabe die Grenzen für jede der [illegible] Druckkräfte unter der Voraussetzung, dass sie an keinem S[illegible] punkte negativ sein dürfe. Jedoch spricht er in dieser Ab[illegible] lung die Ansicht aus, dass die Unbestimmtheit nur desswe[illegible] paradox erscheine, weil die unnatürliche Annahme einer [illegible] biegsamen Linie gemacht worden, dass aber mit Berücksichtig[illegible] der Biegsamkeit die Druckkräfte vollkommen bestimmt [illegible] (nach Eytelweins Statik fester Körper §. 341—349 und An[illegible] §. 123—129.). Endlich gibt er noch den Weg an, auf welc[illegible] bei unserer Aufgabe die Grenzen für jede Druckkraft best[illegible] werden können.

Ueber unsere Aufgabe selbst konnte ich nur Eine Abhand[illegible] finden, nämlich von Euler „de pressione ponderis in pl[illegible] cui incumbit“ in den „Novi Commentarii Academiae scienti[illegible] imperialis Petropolitanae pro anno 1773“. Der Verfasser [illegible] darin, dass wenn die ebene Platte, auf welcher die Last [illegible] auf mehr als drei Stützpunkten ruht, die Bestimmung der Dr[illegible] kräfte auf die einzelnen Punkte ungewiss scheine, denn es [illegible] den doch nur die drei höchsten sein, weil kaum eine vollkom[illegible] Gleichheit der Füsse angenommen werden dürfe. Nehme [illegible] um diese Schwierigkeit zu umgehen, an, dass die untere Fläche jener Platte nicht vollkommen hart, sondern gleichsam mit einem weichen Ueberzuge bedeckt sei, so würden die Füsse in diesen eindringen, und zwar, wie man mit Sicherheit voraussetzen könne, im Verhältniss zu dem Drucke auf diesen Stützpunkt. Damit jedoch Niemand einen Anstand an jenem Ueberzuge nehme, sei es ja erlaubt, die demselben zugeschriebene Nachgiebigkeit beliebig zu verkleinern, so dass er zuletzt die Beschaffenheit der harten Platte selbst annehme.

Euler also findet die Unbestimmtheit in der Unvollkommenheit der physischen Ausführung, und nachdem er die Annahme des weichen Ueberzugs gemacht, sucht er dadurch, dass er die Nachgiebigkeit immer kleiner werden und zuletzt verschwinden lässt, wieder auf die rein mathematische Anschauung zurückzukommen; während umgekehrt die Unbestimmtheit nur bei rein mathematischer Anschauung besteht, bei physikalischer aber verschwindet. — Dass bei rein mathematischer Anschauung wirklich unendlich viele Lösungen möglich sind, davon kann man sich leicht durch folgende Betrachtung überzeugen: Ist die belastete Platte an den Stützpunkten nicht auf Füsse gelegt, sondern an Schnüren aufgehängt, welche über Rollen gehen und auf der andern Seite gewichtslose Schalen tragen, in denen die Gewichte so vertheilt sind, dass sie der Last das Gleichgewicht halten, so kann man die Vertheilung in den Schalen auf unendlich viele Arten vornehmen, wenn nur jenen drei Gleichungen *A.* Genüge geleistet wird. Hier werden die Druckkräfte auf die einzelnen Punkte nicht durch die Elasticität der Stützen, sondern durch Gewichte aufgehoben, welche bei kleinen Verrückungen ihre Grösse nicht ändern; es sind also nur die Bedingungen der mathematischen Aufgabe erfüllt und es tritt die Unbestimmtheit der rein mathematischen Lösung ein. — Eulers Hülfsbetrachtung mit dem weichen Ueberzuge stimmt dem Wesen nach ganz mit unserer zweiten Annahme überein; aber Euler nimmt noch an, dass die durch sie erhaltenen Resultate auch für vollkommen harte Platten gelten, was jedoch, wie wir oben gezeigt haben, unzulässig ist, da, wenn man sich auf einem andern Wege dieser Grenze nähert und die nahe an der Grenze erhaltenen Werthe auch für die Grenze selbst gelten liesse, verschiedene bestimmte Resultate für denselben Fall richtig wären. —

Die Aufgabe ist daher vollkommen unbestimmt, wenn man sie nur aus dem mathematischen Gesichtspunkt betrachtet, und wird nur dadurch bestimmt, dass man die der Natur gemässe Biegsamkeit und Elasticität zu Hülfe nimmt.

Durch dieselbe Hülfe können noch andere, sonst unbestimmte Aufgaben gelöst werden, wovon wir zwei Beispiele anführen wollen:

Erste Aufgabe. Ein Balken ist an beiden Enden A_1 und A_2 (Taf. VI. Fig. 6.) befestigt, im Punkte B wirkt auf denselben eine Kraft P in seiner Richtung; was ist der Zug P_1 und der Druck P_2 an jedem Endpunkte A_1 und A_2?

Werde durch die Kraft P der Punkt B nach C um $BC=e_1$ heruntergedrückt, so wird das Stück $A_1 B=a_1$ des Balkens um e_1 ausgedehnt, und das Stück $A_2 B=a_2$ um e_1 zusammengedrückt. Wenn nun die Krafteinheit einen Balken von der Länge 1 um e ausdehnt oder zusammendrückt, so muss

$$P_1=\frac{e_1}{ea_1} \text{ und } P_2=\frac{e_1}{ea_2} \text{ sein,}$$

und da

$$P_1+P_2=P \text{ oder } \frac{e_1(a_1+a_2)}{ea_1 a_2}=P$$

ist, auch

$$e_1=\frac{Pe\,a_1\,a_2}{e_1(a_1+a_2)}.$$

Dieser Werth, in die obigen Ausdrücke eingesetzt, gibt

$$P_1=P\frac{a_2}{a_1+a_2} \text{ und } P_2=P\frac{a_1}{a_1+a_2},$$

oder die Kraft vertheilt sich ebenso auf die beiden Endpunkte, als wenn ihre Richtung nicht in die Richtung des Balkens fiele.

Zweite Aufgabe. Eine Last P (Taf. VI. Fig. 7.) wird durch eine senkrechte Stütze und zwei schiefe Streben, welche auf Einer geraden Linie fussen, getragen; welches ist der Druck in der Richtung jedes Balkens?

Sei $AB=a$ die Länge der senkrechten Stütze und $AD=AD'=d$ die der schiefen Streben, werde der Punkt A nach C um $AC=e_1$ herabgedrückt, so nehmen die Streben die Länge DC an, werden also, wenn CE senkrecht auf AD um $AE=e_2$ verkürzt. Da aber $AE:AC=AB:AD$, oder $e_2:e_1=a:d$, so finden wir

$$e_2=\frac{e_1 a}{d}.$$

Sei nun der Druck in der Richtung der Stütze $=P_1$, in der jeder Strebe $=P_2$, so ist

$$P_1=\frac{e_1}{ea} \text{ und } P_2=\frac{e_2}{ed}=\frac{e_1 a}{ed^2},$$

da

$$P_1 + 2\,P_2 \cdot \frac{a}{d} = P,$$

st auch

$$\frac{e_1}{ea} + 2\,\frac{e_1 a^2}{ed^3} = \frac{e_1\,(d^3 + 2a^3)}{ead^3} = P,$$

ıus

$$e_1 = e\,\frac{Pad^3}{d^3 + 2a^3}.$$

s, in obige Ausdrücke eingesetzt, gibt endlich

$$P_1 = P \cdot \frac{d^3}{d^3 + 2\,a^3} \text{ und } P_2 = P \cdot \frac{a^2 d}{d^3 + 2\,a^3}.$$

z. B.

$$a = 3,\ d = 5;$$

rird

$$P_1 = 0{,}70\,P,\ \ P_2 = 0{,}25\,P.$$

XXV.

Ableitung der Sätze über Supplementarsehnen und conjugirte Durchmesser der Ellipse aus einer einfachen geometrischen Betrachtung.

Von

Herrn Chr. Wiener,

Lehrer der Mathematik an der höhern Gewerbschule zu Darmstadt.

Diese Sätze, deren Entwickelung auf analytischem Wege einige Weitläufigkeit verursacht, sind sehr leicht zu beweisen, wenn man die Ellipse als diejenige Kurve betrachtet, welche durch Projection eines Kreises auf eine Ebene entsteht. Alle Sätze nebst Beweis lassen sich dann mit einem einzigen Gedanken übersehen.

Der Mittelpunkt O des Kreises $AB'A'$ (Taf. VI. Fig. 8.) liege in der Projectionsebene ABA', und er selbst bilde mit dieser Ebene den Winkel $B'OB = \alpha$, die Durchschnittslinie AA' sei die Axe X, die im Mittelpunkte errichteten Senkrechten OB' und OB die Axen Y. Die Coordinaten des laufenden Punktes M' des Kreises in seiner Ebene seien $OP = X$ und $PM' = Y$, und die seiner Projection M: $OP = x$ und $PM = y$; so ist $x = X$ und $y = Y\cos\alpha$. Die Gleichung des Kreises ist

$$X^2 + Y^2 = a^2,$$

wenn $a = OA$ sein Halbmesser, und daraus folgt für die Projection

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2\alpha} = a^2,$$

oder, mit $a^2\cos^2\alpha$ multiplicirt,

$$y^2a^2+x^2.a^2\cos^2\alpha=a^2.a^2\cos^2\alpha,$$

oder endlich, wenn wir die Ordinate der Ellipse im Ursprung $a\cos\alpha=b$ setzen wollen:

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Die Projection ist also eine **Ellipse**, weil diese Gleichung mit derjenigen übereinstimmt, welche aus dem gewöhnlich als characteristische Eigenschaft angenommenen Verhalten zu ihren Brennpunkten hergeleitet wird.

Wir wollen nun aus dieser Betrachtung die folgenden Sätze herleiten:

1.) **Der Werth der Subtangente ist $\frac{a^2-x'^2}{x'}$, also unabhängig von b.**

Liegt der Kreis (Taf. VI. Fig. 9.) vorerst in der Projectionsebene, so ist, wenn X' und Y' die Coordinaten des Berührungspunktes M' der Tangente und PT die Subtangente,

$$X'.\mathrm{stg}=Y'^2=a^2-X'^2,$$

daher

$$PT=\mathrm{stg}=\frac{a^2-X'^2}{X'}.$$

Dreht sich dann der Kreis, so bleibt die Projection seiner Tangente die Tangente seiner Projection, und es bleibt für die Ellipse:

$$\mathrm{stg}=\frac{a^2-x'^2}{x'}$$

unabhängig von dem Neigungswinkel α oder von b.

2.) **Bilden die Supplementarsehnen AL und $A'L$ (Taf. IV. Fig. 10.) über der grossen Axe mit derselben die Winkel $A'AL=\beta$ und $AA'L=\beta'$, so ist $\mathrm{tg}\beta.\mathrm{tg}\beta'=-\frac{b^2}{a^2}$.**

Da sie sich in dem Kreise unter einem rechten Winkel $AL'A'$ schneiden, so ist für denselben:

$$\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}B'=-1.$$

Da sich aber die Producte der beiden Tangenten in der Ellipse und im Kreise verhalten wie $y'^2:Y'^2$, d. i. wie $b^2:a^2$, so ist

$$\mathrm{tg}\beta.\mathrm{tg}\beta'=-1.\frac{b^2}{a^2}.$$

3.) Zieht man in der Ellipse zwei mit einem Paare Supplementarsehnen parallele Gerade durch den Mittelpunkt, so sind diese conjugirte Durchmesser, d. h. jeder halbirt das System der mit dem andern parallel gezogenen Sehnen.

Denn zieht man (Taf. VI. Fig. 10.) im Kreise solche mit einem Paare von Supplementarsehnen $A'L'$ und AL' parallele Durchmesser OM' und ON', so sind sie, weil sie auf einander senkrecht stehen, conjugirte Durchmesser. Da nun auch die Projectionen aller dieser Sehnen parallel bleiben und sich ebenfalls halbiren müssen, so sind auch in der Ellipse die mit einem Paare Supplementarsehnen $A'L$ und AL parallel gezogenen Durchmesser OM und ON conjugirte. — Für einen schiefen Durchmesser der Ellipse findet diese Eigenschaft ebenfalls statt, weil sie in dem Kreise jedem Durchmesser zukommt.

5.) Die am Endpunkte eines Durchmessers der Ellipse gezogenen Tangenten sind parallel mit dem conjugirten Durchmesser.

Dieses folgt aus der gleichen Eigenschaft des Kreises (Taf. VI. Fig. 10.)

6.) Die Summe der Quadrate zweier conjugirten Durchmesser ist constant und gleich der Summe der Quadrate der beiden Hauptaxen.

Es ist nämlich, wenn (Taf. VI. Fig. 10.) $OP = QN' = m$, $OQ = PM' = n$, $m^2 + n^2 = a^2$; und wenn die beiden halben Durchmesser $OM = a'$ und $ON = b'$ seien,

$$OM^2 = OP^2 + PM^2 \text{ und } ON^2 = OQ^2 + QN^2,$$

oder

$$a'^2 = m^2 + n^2\cos^2\alpha \text{ und } b'^2 = n^2 + m^2\cos^2\alpha,$$

und hieraus

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + a^2\cos^2\alpha = a^2 + b^2:$$

7.) Jedes um die Ellipse über zwei conjugirte Durchmesser beschriebene Parallelogramm ist gleich dem Rechtecke aus den beiden Hauptaxen.

Da jedes solches Parallelogramm durch Projection aus einem um den Kreis beschriebenen Quadrate von dem constanten Inhalte $4a^2$ entsteht, so muss es stets

$$= 4a^2\cos\alpha = 2a \times 2b$$

sein.

8.) Die Gleichung der Ellipse, bezogen auf ein Paar conjugirte Durchmesser, ist mit der auf die Hauptaxe bezogenen analog, nämlich

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2.$$

Die Gleichung des Kreises, bezogen auf ein beliebiges Paar conjugirter Durchmesser, ist $X^2+Y^2=a^2$. In der Projection wird aus X und Y, x und y, aus den conjugirten Durchmessern a und a wird a' und b', und da

$$X:x=a:a' \text{ und } Y:y=a:b',$$

so wird die Gleichung der Ellipse:

$$x^2\frac{a^2}{a'^2}+y^2\frac{a^2}{b'^2}=a^2,$$

oder

$$a'^2y^2+b'^2x^2=a'^2b'^2.$$

9.) **Sind OM und ON (Taf. VI. Fig. 9.) ein Paar conjugirte halbe Durchmesser, und trifft die in M gezogene Tangente die beiden Axen in T und t, so ist**

$$MT\times Mt=ON^2.$$

Im Kreise ist $M'T\times M't'=OM'^2=ON'^2$. Da nun Tt' und ON' im geneigten Kreise mit der Projectionsebene beide denselben Winkel δ bilden und desswegen $ON=ON'.\cos\delta$, $MT=M'T.\cos\delta$, $Mt=M't'.\cos\delta$, so folgt aus

$$M'T.\cos\delta\times M't'.\cos\delta=ON'^2.\cos^2\delta$$

auch

$$MT\times Mt=ON^2.$$

Dieser Satz gilt noch, wenn statt der Hauptaxe irgend ein Paar conjugirter Durchmesser der Ellipse genommen wird, weil er auch im Kreise für jedes Paar conjugirter Durchmesser gilt.

XXVI.

Ueber die grösste und die kleinste Ellipse, welche durch zwei gegebene Punkte geht und zwei gegebene Gerade berührt.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Vergleicht man diese Aufgabe mit den beiden oft behandelten über die einem Viereck eingeschriebene grösste und umgeschriebene kleinste Ellipse, zwischen welchen sie, sozusagen, mitteninne steht, und erwägt, dass die Mittelpunktscurve hier weder, wie in der ersten, eine gerade Linie, noch auch, wie in der letzten, ein Kegelschnitt, sondern ein System von zwei Kegelschnitten ist, so kann es scheinen, dass die Auflösung derselben verwickelterer Natur als die beiden ersteren sei. In der That aber ist dieselbe wenigstens ebenso einfach als jene, und einfacher als diese, indem die Konstruktion ausser dem Lineale nur noch einen beliebigen festen Kreis, dessen Mittelpunkt gegeben ist, erfordert.

Es seien in Taf. VII. Fig. 1. a und b die beiden gegebenen Punkte; sa_1 und sb_1 die gegebenen Geraden, welche die Verbindungslinie der ersteren in den Punkten a_1 und b_1 schneiden; so gibt es, wofern die Aufgabe nicht überhaupt unmöglich werden soll, wie später gezeigt wird, allemal zwei Punkte p und q, welche, als zugeordnete, sowohl mit a und b, als auch mit a_1 und b_1 harmonisch sind. Wegen dieser Eigenschaft sind 1) die Punkte p und q zugeordnete harmonische Pole der Geraden ab, und 2) die Geraden sp und sq zugeordnete harmonische Polaren des Punktes s, in Bezug auf den fraglichen Kegelschnitt, d. h. die harmonischen Polaren von p, q gehen wechselsweise durch die Punkte q, p; und die harmonischen Pole von sp, sq liegen wechselsweise auf sq, sp.

Gesetzt nun: p sei nicht selbst der harmonische Pol von sq, so ist dieser Pol ein von p verschiedener Punkt der Geraden sp; nun geht aber die harmonische Polare des Punktes q durch den Punkt p und auch durch den harmonischen Pol von sq; also fällt diese Polare mit der Geraden sp zusammen, d. h. q ist der harmonische Pol von sp; und umgekehrt: ist q nicht der harmonische Pol von sp, so ist p der harmonische Pol von sq. Dass aber in einem zugleich p von sq und q von sp harmonische Pole sind, kann offenbar nur dann stattfinden, wenn s der harmonische Pol von ab, d. h. der Kegelschnitt entweder sich auf die Strecke $a_1 b_1$ oder auf das System der Geraden sa, sb reducirt.

Es zerfallen demnach sämmtliche Kegelschnitte, welche durch a und b gehen und sa_1, sb_1 berühren, in zwei völlig getrennte Gruppen: in Bezug auf alle, welche der einen angehören, ist q der harmonische Pol von sp, in Bezug auf die der anderen ist p der harmonische Pol von sq.

Wir fassen zunächst die erste Gruppe ins Auge, welcher auch die Figuren Taf. VII. Fig. 1., Taf. VII. Fig. 2., Taf. VII. Fig. 3. entsprechen.

Gleichung der Mittelpunktscurve.

Es sei (Taf. VII. Fig. 1.) M der Mittelpunkt irgend eines Kegelschnitts der ersten Gruppe, m und m_1 die Mittelpunkte der Strecken ab und a_1b_1, sg parallel ab, und ausserdem seien die Geraden sm_1 und Mm gezogen, welche letztere die Geraden sp, sg, sm_1 bezüglich in den Punkten k, g, f schneide; ferner sei mh parallel sp und treffe sm_1 in h; die Gerade vw, welche ab in v, sm_1 in w trifft, sei ebenfalls parallel sp und gehe durch den Punkt M. Endlich seien noch parallel ab die Gerade wi, welche mh in d und sp in i trifft, und Mx gezogen, deren Durchschnittspunkte sp und kq x und z heissen. Man setze

$$sp=\varrho,\ mh=\varkappa,\ Mv=px=r,\ Mw=p.$$

Diess vorausgesetzt, so kann man offenbar die Segmente p und r als die Coordinaten des Punktes M betrachten, indem durch diese, von den festen Geraden sm_1 und mm_1 begrenzten Strecken der Punkt M auf lineäre und einzige Weise bestimmt ist. Setzt man nämlich fest, dass für die Lage dieses Punktes im Winkel α sowohl p als r positiv sind, so wird derselbe in den Winkeln β, γ oder δ liegen müssen, jenachdem p und r mit den Zeichen (+) und (—), (—) und (+) oder (—) und (—) behaftet sind.

Da m der Mittelpunkt der Sehne ab ist, so ist die Gerade Mm, der Richtung nach, der der Richtung von ab zugeordnete Durchmesser des gedachten Kegelschnittes, oder die harmonische Polare des unendlich entfernten Punktes von ab, und weil nun die harmonischen Polaren zweier Punkte der Geraden ab im Punkte k sich schneiden, so ist letzterer der harmonische Pol von ab; also m und k zwei zugeordnete harmonische Pole der Geraden Mm, und daher, wenn A die halbe Durchmesserlänge von Mm bezeichnet:

$$Mk.\ Mm = A^2.$$

Da ferner m_1 der Mittelpunkt der Strecke $a_1 b_1$ ist, so sind die Geraden sg und sm_1 mit den Tangenten sa_1 und sb_1 harmonisch, also zwei zugeordnete harmonische Polaren des Punktes s. Folglich liegt der harmonische Pol der Geraden sg auf sm_1; zugleich aber auch auf der harmonischen Polare Mm des unendlich entfernten Punktes von sg, folglich im Durchschnitte f beider Linien; es sind also auch f und g zugeordnete harmonische Pole von Mm, und man hat wiederum

$$Mf.Mg = A^2.$$

Aus den Proportionen

$$mk : Mm = mp : mv$$

oder

$$Mk : Mm = pv : mv = sw : kw = si : kd$$
$$= \varrho - p - r : \pi - p - r;$$
$$Mg : Mm = sx : px = \varrho - r : r$$

und

$$Mf : mf = Mw : mk = p : \pi$$

oder

$$Mf : Mm = p : \pi - p$$

ergeben sich die Ausdrücke

$$Mk.Mm = \frac{\varrho - p - r}{\pi - p - r} Mm^2 = A^2;$$

$$Mf.Mg = \frac{p(\varrho - r)}{r(\pi - p)} Mm^2 = A^2;$$

folglich ist

$$\frac{\varrho - p - r}{\pi - p - r} = \frac{p(\varrho - r)}{r(\pi - p)}$$

oder

$$p(\varrho - r)(\pi - p - r) = r(\pi - p)(\varrho - p - r),$$

oder

$$p^2\varrho - p\pi\varrho = r^2\pi - r\pi\varrho,$$

oder

$$\frac{p^2}{\pi} - p = \frac{r^2}{\varrho} - r,$$

er endlich auch

$$\frac{\varrho-p-r}{\pi-p-r}=\frac{p^2\varrho}{r^2\pi}$$

Gleichung derjenigen Curve, welche die Mittelpunkte M ämtlicher Kegelschnitte der gedachten Gruppe enthält.

Wegen der letzten Form, in welche sich diese Gleichung ngen lässt, ist nun auch, einfacher ausgedrückt:

$$A^2=\frac{p^2\varrho}{r^2\pi}Mm^2.$$

Jene Gleichung wird durch die Coordinatenwerthe

$(p=0, r=0)$, $(p=\pi, r=0)$, $(p=0, r=\varrho)$ und $(p=\pi, r=\varrho)$

friedigt. Ergänzt man also dass Dreieck smm_1 zu einem Parallelogramm sm_1mn, in welchem die Ecke n der Ecke m_1 gegenerliegt, so geht jene Curve, welche offenbar ein Kegelschnitt , durch die vier Ecken dieses Parallelogramms, und der Mittelpunkt der ersteren fällt mit dem Mittelpunkte der Strecke ms zummen.

Fragen wir ferner nach dem zweiten Punkte, welchen einmal e Gerade sp, deren Gleichung

$$p+r=\varrho$$

, das anderemal die Gerade mh, deren Gleichung

$$p+r=\pi$$

, mit der Curve gemein hat; so erhalten wir im ersten Falle:

$$p=\pm 0 \text{ und } r=\varrho,$$

d im zweiten

$$r=\pm 0 \text{ und } p=\pi,$$

h. diese Geraden berühren die Curve in den Punkten s und m

Man kennt also vier Punkte und die Tangenten in zweien rselben, d. h. mehr als zur Zeichnung der Curve nöthig ist.

Inhalt der Ellipse.

Es ist p der harmonische Pol der Geraden kq in Bezug auf den Kegelschnitt der ersten Gruppe; also geht die harmonische olare des Punktes z durch den Punkt p; zugleich aber auch ich dem harmonischen Pole von Mx, welcher der unendlich itfernte Punkt von Mm ist; also sind die Punkte z und y, in elchem letzteren die Gerade Mx von der mit Mm parallelen eraden py geschnitten wird, zugeordnete harmonische Pole von

Mx, und man hat, wenn B die halbe Durchmesserlänge von M bezeichnet, die Gleichung

$$Mz.My=mq\frac{Mk}{mk}\cdot mp=mq\frac{sw}{sk}\,mp=mp.mq.\frac{\varrho-p-r}{\varrho-\pi}=B^2.$$

Ist nun φ der von den zugeordneten Durchmessern Mn und Mx, und ε der constante, von den Geraden sp und mp eingeschlossene Winkel, so ist

$$Mm=r\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varphi},$$

und demnach

$$A^2B^2\sin^2\varphi=\frac{p^2\varrho}{r^2\pi}Mm^2.mp.mq\frac{\varrho-p-r}{\varrho-\pi}$$
$$=mp.mq.p^2\frac{\varrho(\varrho-p-r)}{\pi(\varrho-\pi)}\sin^2\varepsilon.$$

Die Punkte p und q sind mit a und b harmonisch, also

$$mp.mq=ma^2=\left(\frac{ab}{2}\right)^2,$$

und, wenn Δ den Flächeninhalt des Dreiecks sab bezeichnet:

$$mp.mq.\varrho^2\sin^2\varepsilon=\Delta^2.$$

Hieraus folgt:

$$A^2.B^2.\sin^2\varphi=\frac{p^2(\varrho-p-r)}{\pi\varrho(\varrho-\pi)}.\Delta^2,$$

oder:

$$A.B.\sin\varphi=\pm p.\Delta.\sqrt{\frac{\varrho-p-r}{\pi\varrho(\varrho-\pi)}}.$$

Der Ausdruck $A.B.\sin\varphi$ ist bekanntlich im Falle der Hyperbel der Inhalt der Dreiecksfläche, welche von den Asymptoten und einer Tangente begrenzt wird, und wenn man ihn im Falle der Ellipse mit der Ludolphischen Zahl multiplicirt, der Inhalt der Ellipse. Dieser Inhalt wird also ein Grösstes oder Kleinstes, je nachdem der variabele Theil dieses Ausdruckes, den wir mit f bezeichnen, d. i.

$$f=p\sqrt{\varrho-p-r},$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird.

Fällt der Punkt M mit dem Punkte m zusammen, für welchen $p=\pi$, $r=0$ ist, so ist

$$A.B.\sin\varphi=\Delta\sqrt{\frac{\pi}{\varrho}};$$

und fällt derselbe mit κ zusammen, für welchen $p=\pi$, $r=\varrho$ ist, so ist

$$A.B.\sin\varphi=\frac{\pi\Delta}{\sqrt{\varrho(\varrho-\pi)}}.$$

Bestimmung des Grössten und Kleinsten.

Aus den Gleichungen

$$p^2\varrho-p\pi\varrho=r^2\pi-r\pi\varrho \text{ und } f=p\sqrt{\varrho-p-r}$$

ergeben sich als Differenzialquotienten von f:

$$f'_{(p)}=\frac{(3r-\varrho)\sqrt{\varrho-p-r}}{2r-\varrho};$$

$$f'_{(r)}=\frac{\pi}{\varrho}\cdot\frac{(3r-\varrho)\sqrt{\varrho-p-r}}{2p-\pi}.$$

Die Bedingungen eines Grössten oder Kleinsten sind demnach

$$3r-\varrho=0 \text{ oder } \varrho-p-r=0,$$

d. h.

1) $r=\frac{1}{3}\varrho$ und $p=\frac{1}{2}\pi+\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2-\frac{2}{9}\pi\varrho}$;

2) $r=\frac{1}{3}\varrho$ und $p=\frac{1}{2}\pi-\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2-\frac{2}{9}\pi\varrho}$;

3) $r=\varrho$ und $p=0$.

Ausserdem wird f auch

4) durch $r=0$ und $p=0$ gleich Null.

Dagegen entspricht die Bedingung $2r-\varrho=0$ weder einem Grössten noch einem Kleinsten. Denn für

$$r=\frac{1}{2}\varrho \text{ ist } p=\frac{1}{2}\pi\pm\frac{1}{2}\sqrt{\pi(\pi-\varrho)},$$

also

$$2p-\pi=\pm\sqrt{\pi(\pi-\varrho)};\ \varrho-p-r=\frac{1}{2}(\mp\sqrt{\pi}-\sqrt{\pi-\varrho})\sqrt{\pi-\varrho}$$

und

$$\frac{\varrho-p-r'}{(2p-\pi)^2}=\frac{1}{2}\,\frac{1\mp\sqrt{\pi}-\sqrt{\pi-\varrho}}{\pi\sqrt{\pi-\varrho}}.$$

Entspräche nun die Bedingung $2r-\varrho=0$ einem Grössten oder Kleinsten, so müsste auch die damit identische $2p-\pi=\pm\sqrt{\pi(\pi-\varrho)}$ einem solchen entsprechen, also, da in diesem Falle die Grösse f weder $=0$, noch $=\infty$ ist, die Grösse $f'(r)$ für $2p-\pi=\pm\sqrt{\pi(\pi-\varrho)}$ entweder $=0$ oder $=\infty$ werden, was unmöglich ist, es sei denn, dass $\pi=\varrho$.

Neben den Fällen 3) und 4), für welche $f=0$ ist, sind noch diejenigen aufzuführen, wo $f=\infty$. Diese beziehen sich auf die unendlich entfernten Punkte der Mittelpunktscurve, welche offenbar nur Parabeln angehören können.

Das Hauptinteresse der gegenwärtigen Untersuchung aber nehmen die Fälle 1) und 2) in Anspruch, in welchen die Grösse f einen begrenzten Werth hat.

Konstruktion des Mittelpunktes der grössten und der kleinsten Ellipse.

1.

Sind p' und p'' die Werthe von p, welche demjenigen von $r=\frac{1}{3}\varrho$ entsprechen, so ist

$$p'+p''=\pi \text{ und } p'.p''=\frac{2}{9}\pi\varrho;$$

die Konstruktion derselben läuft also auf die Elementar-Aufgabe hinaus: ein gegebenes Rechteck $=\frac{1}{3}\varrho.\frac{2}{3}\pi$ in ein anderes von gegebenem Umfange $=2\pi$ zu verwandeln.

2.

Man halbire die Strecken ab und a_1b_1 in den Punkten m und m_1, lege durch die Punkte a, b einen Kreis und durch $a_1 b_1$ einen zweiten, welcher jenen in zwei Punkten schneidet; ziehe die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise und um denjenigen Punkt, in welchem diese Sehne die Gerade aba_1b_1 trifft, mit einem Halbmesser von der Länge der Tangente, welche von demselben Punkte an einen der Kreise gelegt wird, einen dritten Kreis; es schneidet letzterer die Gerade aba_1b_1 in den Punkten p und q.

Man ziehe sodann sp (oder sq), theile dieselbe in x dergestalt, dass $sx=2px$, und lege durch x mit aba_1b_1 eine Parallele ex. Hierauf ziehe man sm_1, halbire mm_1 und lege durch deren Mittelpunkt eine Parallele mit sm_1, welche die Gerade ex im Punkte μ schneidet. Endlich ziehe man $s\mu$, welche aba_1b_1 in

Punkte σ treffe, und durch x eine Parallele mit sm_1, welche aba_1b_1 in τ treffe.

Jetzt beschreibe man über der Strecke τm_1, als Durchmesser, einen Kreis, lege an denselben durch σ eine Tangente und beschreibe mit dieser, als Halbmesser, um σ einen Kreis, welcher aba_1b_1 in η und ω schneidet; diese letzteren Punkte endlich verbinde man mit s durch zwei Gerade; so treffen dieselben die Gerade ex in den Mittelpunkten M, M der gesuchten Ellipsen.

Es ist nämlich nach dieser Konstruktion $m_1\sigma = \frac{3}{2}e\mu = \frac{3}{4}mm_1$, und $m_1\tau = ex = \frac{2}{3}m_1p$; hieraus folgt:

$$(\sigma\eta)^2 = (\sigma\omega)^2 = m_1\sigma . \tau\sigma = \frac{3}{4}mm_1\left(\frac{3}{4}mm_1 - \frac{2}{3}pm_1\right) = \frac{9}{4}mm_1\left(\frac{1}{4}mm_1 - \frac{2}{9}pm_1\right)$$

$$= \frac{9}{4}\frac{\pi}{\varrho} \cdot pm_1\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\varrho}pm_1 - \frac{2}{9}pm_1\right) = \frac{4}{9}\frac{pm_1^2}{\varrho^2}\left(\frac{1}{4}\pi^2 - \frac{2}{9}\pi\varrho\right)$$

$$= \frac{9}{4}\frac{pm_1^2}{\varrho^2}\left(\frac{p'-p''}{2}\right)^2 \text{ und } M\mu = \frac{1}{2}MM = \frac{2}{3}\sigma\eta = \frac{pm_1}{\varrho}\left(\frac{p'-p''}{2}\right),$$

wo p' und p'' diejenigen Werthe von p bedeuten, welche den beiden Durchschnittspunkten der Mittelpunktscurve mit der Geraden ex entsprechen. Bezeichnen wir diese Punkte mit M' und M'', so hat man:

$$pm_1 - M'x : pm_1 = p' + \frac{1}{3}\varrho : \varrho,$$

und

$$pm_1 - M''x : pm_1 = p'' + \frac{1}{3}\varrho : \varrho;$$

also

$$M''x - M'x : pm_1 = p' - p'' : \varrho,$$

oder

$$\frac{1}{2}M'M'' = \frac{pm_1}{\varrho} . \frac{p'-p''}{2} = M\mu.$$

Aber der Punkt μ halbirt nicht nur die Strecke MM, sondern auch die Sehne $M'M''$ der Mittelpunktscurve, weil die, die Strecke mm_1 und $s\mu$ halbirende Gerade die harmonische Polare des unendlich entfernten Punktes von ex in Bezug auf diese Curve ist. Also fallen die Punkte M, M mit den Punkten M', M'' zusammen.

3.

Stehen für die Konstruktion nur das Lineal und ein beliebig gegebener fester Kreis mit gegebenem Mittelpunkte zu Gebote, so verbinde man einen beliebigen Punkt B dieses Kreises mit den Punkten a, b, a_1, b_1 durch gerade Linien, welche denselben zum zweitenmale in den Punkten α, β, α_1, β_1 schneiden; ziehe die Geraden $\alpha\alpha_1$ und $\beta\beta_1$, deren Durchschnitt γ sei, und die Geraden $\alpha\beta_1$ und $\beta\alpha_1$, deren Durchschnitt γ' sei; ziehe die Gerade $\gamma\gamma'$ und verbinde den Punkt B mit den Punkten, in welchen $\gamma\gamma'$ den Kreis schneidet, durch zwei gerade Linien; so treffen diese die Linien aba_1b_1 in den Punkten p und q.

Jetzt lege man durch den Punkt s irgend eine Gerade, welche den gegebenen Kreis in zwei Punkten schneidet, verbinde die Durchschnittspunkte mit dem Mittelpunkte des Kreises durch zwei Gerade und die Punkte, wo diese den Kreis zum zweitenmale schneiden, miteinander durch eine gerade Linie; so ist letztere mit der durch s gezogenen parallel, und es ist nun kraft der Eigenschaft des Trapezes ein Leichtes, die durch s und aba_1b_1 begrenzte Strecke $s\delta$ diese letzteren im Punkte λ zu halbiren. Man halbire nun noch eine zweite solche Strecke $s\nu$, welche den Kreis schneidet, im Punkte π, ziehe $\nu\lambda$ und $\delta\pi$, die sich in ϱ schneiden, sodann $s\varrho$, welche $\delta\nu$ in ξ trifft, ferner $\xi\pi$, welche $\nu\lambda$ in ψ trifft, und $\delta\psi$, welche $s\nu$ in φ trifft. Endlich verbinde man die Punkte ϱ und φ mit einander durch eine Gerade, so hat man die Linie ex. Mittels dieser oder auch der Linie $\lambda\pi$ kann man nun die Strecken ab und a_1b_1 in m und m_1, und sofort die Strecke mm_1 halbiren, und verbindet man den Mittelpunkt der letzteren mit demjenigen Punkte, in welchem sm von $\lambda\pi$ geschnitten wird, durch eine Gerade, so schneidet diese die ex im Punkte μ, welcher mit s verbunden, wie in 2), den Punkt σ bestimmt. Um nun auch noch den Punkt τ zu finden, ziehe man von p nach dem Mittelpunkte von sm_1, welcher auf $\lambda\pi$ liegt, eine Gerade, ziehe m_1x_1 und verbinde den Punkt, wo diese beiden letzten sich treffen, mit dem Punkte s durch eine Gerade, so schneidet diese die aba_1b_1 in τ.

Um nun endlich die Punkte η, ω und sofort M, M zu finden, wiederhole man dasselbe Verfahren, wodurch oben die Punkte p, q gefunden wurden, indem man die Punkte a und b (oder auch a_1 und b_1) mit m_1 und τ, und die Punkte a_1 und b_1 (a und b) mit σ und dem unendlich entfernten Punkte von aba_1b_1 vertauscht. Wählt man nämlich auf dem festen Kreise einen solchen Punkt B, welcher zugleich auf einer der schon vorhandenen, oder noch zu ziehenden mit aba_1b_1 parallelen Linien liegt, so schneidet diese Parallele den Kreis zum zweitenmale in β_1, die Geraden Bm_1, $B\tau$, $B\sigma$ in α, β, α_1 u. s. w.

Es sind nämlich auch hier die Punkte η, ω sowohl mit m_1 und τ als mit σ und dem unendlich entfernten Punkte harmonisch, was aus Folgendem erhellt: Betrachtet man das der Mittelpunktscurve eingeschriebene Dreieck smm_1 und das von den Tangenten in s, m, m_1 gebildete Dreieck, so folgt, dass die Tangente in m_1 nach dem Mittelpunkte k von sp geht; folglich ist k der harm. Pol von sm_1 in Bezug auf diese Curve. Daher geht die harm. Polare von e durch k, zugleich aber auch durch den vierten harmonischen Punkt zu s, e, m_1, welcher ebensoweit von m_1, als m_1

von s entfernt ist; folglich trifft diese Polare die es in dem, dem e zugeordneten harmonischen Pole $\mathfrak{z}$ dergestalt, dass

$$e\mathfrak{z}:\frac{1}{m}pm_1=\frac{4}{3}:\frac{3}{2},\ \text{oder}\ e\mathfrak{z}=\frac{4}{9}pm_1\ \text{ist.}$$

Da nun

$$\tau m_1=\frac{2}{3}pm_1=\frac{3}{2}e\mathfrak{z}$$

ist, so liegen s, $\mathfrak{z}$ und τ in einer Geraden u. s. w.

Determination.

Berücksichtigt man die gegenseitige Lage der gegebenen Punktenpaare a und b, a_1 und b_1, so lassen sich folgende drei wesentlich verschiedene Fälle unterscheiden; entweder

a) liegen die Punkte a und b zwischen den Punkten a_1 und b_1 (Taf. VII. Fig. 1); oder

b) die Punkte a_1 und b_1 liegen zwischen a und b (Taf. VII. Fig. 2) oder

c) beide Punktenpaare schliessen einander aus (Taf. VII. Fig. 3).

Ein vierter Fall: dass nur einer der Punkte a und b zwischen a_1 und b_1 liege, ist nicht denkbar, weil dann nothwendig eine der gegebenen Tangenten einen innerhalb des Kegelschnitts liegenden Punkt enthielte.

Jene Punktenpaare sind daher jedenfalls **ungleichliegend**, und daher gibt es allemal zwei Punkte p und q, welche mit beiden harmonisch sind. Diese Punkte liegen in den bezeichneten Fällen *a*) und *b*) ausserhalb der Mittelpunkte m, m_1 der Strecken ab, a_1b_1, im dritten dagegen zwischen diesen Punkten. Insbesondere besteht der charakteristische Unterschied der Fälle *a*) und *b*) darin, dass in jenem die Strecken pm und qm kleiner, in diesem dagegen grösser als pm_1 und qm_1 sind. Da nun in der oben gegebenen Entwickelung, welche sich auf den Fall *a*) stützte, die Lage der Strecken ϱ und $\varkappa$, d. i. sp und mh, gegen die Geraden pq und sm_1 als positiv angesehen wurden, so sind dieselben im Falle *c*) ebenfalls beide als positiv, im Falle *b*) dagegen ϱ als positiv, $\varkappa$ als negativ zu behandeln. Daher erhält in diesem letzteren Falle die Gleichung der Mittelpunktscurve die besondere Form:

$$p^2\varrho+p\varkappa\varrho=-r^2\varkappa+r\varkappa\varrho,$$

welche offenbar die einer Ellipse ist, während dieselbe im Falle *c*) ebenso wie in *a*) eine Hyperbel darstellt. Doch besteht zwischen *a*) und *c*) der Unterschied, dass dort $\varkappa$ kleiner als ϱ, hier aber $\varkappa$ grösser als ϱ erscheint.

Auch durch blosse Anschauung kann man sich von der verschiedenen Gestalt der Mittelpunktscurve in den drei Fällen einen

Begriff machen. Da nämlich in allen drei Fällen sp und mh Tangenten dieser Curve sind, so muss dieselbe eine Hyperbel sein, wo wie in a) und c) irgend ein Punkt m_1 derselben nicht zwischen diesen parallelen Tangenten liegt, und sie muss eine Ellipse sein, wo wie in b) der Punkt m_1 zwischen diesen Tangenten liegt. Diess letztere liess sich auch von vornherein erwarten: denn da hier die gegebenen Tangenten zwischen den Punkten a, b hindurchgehen, so konnte der Kegelschnitt keine Parabel sein, also auch die Mittelpunktscurve keine unendlich entfernten Punkte enthalten.

Die beiden Zweige der Mittelpunktscurve sind in den Fällen a) und c) durch die Tangenten sp und mh völlig von einander getrennt. Ich behaupte nun, dass in diesen Fällen derjenige Zweig, welcher den Punkt m enthält, nur von Ellipsen, und der andere nur von Hyperbeln die Mittelpunkte enthalte. Denn aus den allgemeinen Eigenschaften der harmonischen Pole und Polaren ergiebt sich, dass die harmonische Polare eines ausserhalb des Kegelschnittes gelegene Punktes, wenn derselbe eine Ellipse ist, jedesmal; dagegen, wenn er eine Hyperbel ist, niemals zwischen jenem Punkte und dem Mittelpunkte des Kegelschnitts hindurchgehe. Nun aber ist der Punkt k allemal der harmonische Pol der Geraden pq in Bezug auf den Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt M ist, und zwar ein ausserhalb dieses Kegelschnitts liegender Punkt, weil die Gerade pq denselben in zwei Punkten a, b schneidet; und welche Lage auch man einer durch m gehenden Geraden geben mag, immer wird der Punkt m, und mit ihm zugleich die Gerade pq, zwischen die Punkte k und M, in welchen sie die Gerade sp und den durch m gehenden Zweig der Mittelpunktscurve schneidet, niemals aber zwischen die Punkte, in welchen sie sp und den durch s gehenden Zweig schneidet, zu liegen kommen. Also gehört der Punkt M im ersten Falle niemals einer Hyperbel, und im zweiten niemals einer Ellipse an. Den Uebergang von der Schaar der Ellipsen zu der der Hyperbeln bilden zwei Parabeln, deren Mittelpunkte die unendlich entfernten Punkte der Mittelpunktscurve sind.

Der Ausdruck

$$p=\frac{1}{2}\pi\pm\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2-\frac{2}{9}\pi\varrho},$$

welcher in a) und c) dem Werthe $r=\frac{1}{3}\varrho$ entspricht, ist immer reell im Falle c), wo $\pi>\varrho$; kann aber imaginär werden im Falle a), wo $\pi<\varrho$, und ist nur dann auch hier reell, wenn $9\pi\geqq 8\varrho$ ist.

Dass im Falle b) der Werth für p, wenn $r=\frac{1}{3}\varrho$, immer reell ist, geht in Uebereinstimmung mit dem Ausdrucke

$$p=-\frac{1}{2}\pi\pm\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2+\frac{2}{9}\pi\varrho}$$

:h daraus hervor, dass die Ellipse, welche die Punkte m und nthält, von jeder Geraden Mx, welche mit pq parallel ist und ischen s und pq liegt, geschnitten werden muss.

Eine Hauptfrage ist noch, ob in den Punkten M der Konuktion für die einzelnen Fälle a), b), c) ein Grösstes oder ein einstes von f stattfinde? Suchen wir zu diesem Zwecke den eiten Differenzialquotienten von f, so erhalten wir für die Fälle und c):

$$f''_{(p)}=\frac{(2r-\varrho)(3r-\varrho)r\pi-p\varrho^2(2p-\pi)}{p\pi(2r-\varrho)^2}\sqrt{\varrho-p-r},$$

o, wenn hier $r=\frac{1}{3}\varrho$ gesetzt wird:

$$f''_{(p)}=27\frac{2p-\pi}{\pi\varrho}\sqrt{\varrho-p-r}=\pm 54\frac{\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2-\frac{2}{9}\pi\varrho}}{\pi\varrho}\cdot\sqrt{\varrho-p-r},$$

sowohl $\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2-\frac{2}{9}\pi\varrho}$ als $\sqrt{\varrho-p-r}$ positive Grössen sind, d das obere Zeichen dem, dem Punkte m zunächst liegenden mkte M, das untere dem entfernteren entspricht. Wir schliesn hieraus, das für den ersteren Punkt M die Grösse f ein einstes, für den anderen ein Grösstes sein muss. Verfolgen r also, vom ersteren Punkt M in der Richtung nach m aushend, den Lauf der ganzen Mittelpunktscurve, so ist

im Falle a): die Grösse f zuerst ein Kleinstes, wächst sodann d erreicht in m den Werth

$$\pi\sqrt{\varrho-\pi},$$

ichst sodann fortwährend, wird im unendlich entfernten Punkte endlich gross, nimmt dann nach dem Uebergange zum anderen veige fortwährend ab, geht im Punkte s durch Null hindurch, ichst wieder, erreicht in s den absoluten Werth

$$\pi\sqrt{\pi},$$

hrt dann fort zuzunehmen, wird im zweiten unendlich entfernten inkte der Curve unendlich gross, nimmt wieder fortwährend ab, geht m_1 wieder durch Null hindurch, wächst, wird im anderen Punkte ' ein Grösstes und kehrt abnehmend zum anfänglichen Kleinsten rück;

im Falle c) dagegen ist f zuerst ein Kleinstes, wird in m gleich

$$\pi\sqrt{\pi-\varrho},$$

ichst bis ins Unendliche, nimmt ab bis zu Null (in s), wird im deren Punkte M ein Grösstes, nimmt wieder ab bis Null (in m_1), ird wieder unendlich gross, nimmt ab zunächst bis zu

$$\pi\sqrt{\pi},$$

nimmt weiter ab und kehrt zum anfänglichen Kleinsten zurück.

Der Fall *b*) zeichnet sich auch hier vor den beiden anderen aus. Da jetzt der eine Werth von p für $r=\frac{1}{3}\varrho$ negativ ist, also auch $f=p\sqrt{\varrho-p-r}$ negativ würde, was unstatthaft ist, so muss man sich erinnern, dass von Haus aus

$$f=\pm p\sqrt{\varrho-p-r};$$

f ist also allemal positiv, wenn bei positivem p das obere, bei negativem p das untere Zeichen gewählt wird. Je nachdem aber $f=\pm p\sqrt{\varrho-p-r}$ ist, muss auch $f''_{(p)}$ das Vorzeichen $\pm$ erhalten, ohne dass sonst der Ausdruck dafür eine Aenderung erleidet. Schreibt man also vor den oben gegebenen Ausdruck von $f''_{(p)}$ das Zeichen $\pm$ und zugleich statt π, $-\pi$, so wird derselbe:

$$f''_{(p)}=\pm\frac{(2r-\varrho)(3r-\varrho)r\pi+p\varrho^2(2p+\pi)}{p\pi(2r-\varrho)^3}\sqrt{\varrho-p-r},$$

wo das obere Zeichen für

$$p'=-\frac{1}{2}\pi+\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2+\frac{2}{9}\pi\varrho},$$

das untere dagegen für

$$p''=-\frac{1}{2}\pi-\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2+\frac{2}{9}\pi\varrho}$$

zu nehmen ist. Da nun $(2r-\varrho)^3=-\left(\frac{\varrho}{3}\right)^3$ ist, so wird $f''_{(p)}$, sowohl für $p=p'$ als $p=p''$ negativ, und es ist somit f in beiden Fällen ein Grösstes.

Diese beiden Maxima sind aber einander keineswegs gleich; denn schreibt man der Kürze wegen statt $\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2+\frac{2}{9}\pi\varrho}$ das blosse Wurzelzeichen, so ist das erstere

$$=\left(-\frac{1}{2}\pi+\sqrt{\ }\right)\sqrt{\frac{2}{3}\varrho+\frac{1}{2}\pi-\sqrt{\ }},$$

das letztere

$$=\left(\frac{1}{2}\pi+\sqrt{\ }\right)\sqrt{\frac{2}{3}\varrho+\frac{1}{2}\pi+\sqrt{\ }},$$

woraus unmittelbar ersichtlich ist, das letzteres grösser als ersteres ist.

Ueberhaupt sind alle in den Fällen a), b) und c) gefundenen Grössten und Kleinsten es bloss in relativem Sinne, d. h. in Bezug auf ihre Nachbarwerthe, mit alleiniger Ausnahme desjenigen, welches im Falle b) dem, dem m zunächst liegenden Punkte M entspricht.

Vergleichen wir jetzt Taf. VII. Fig. 2., so finden wir, dass f in dem zuletzt gedachten Punkte M ein Maximum ist, nach m hin abnimmt, in $m=\pi\sqrt{\varrho+\pi}$ ist, fort und fort abnimmt, in m_1 durch Null hindurchgeht, wieder zunimmt, im andern Punkte M einen relativ grössten Werth erreicht, sodann wieder abnimmt, in s von Neuem durch Null hindurchgeht, dann zunächst in n die Grösse $\pi\sqrt{\pi}$ und endlich wieder den absolut grössten Werth erreicht.

Der blosse Anblick der drei Figuren reicht hin, um sich zu überzeugen, dass die in den Fällen a), b), c) gefundenen Verschiedenheiten, welche von vornherein durch die gegenseitige Lage der Punkte m, m_1 und p bedingt sind, sich nicht änderen, wenn man den Punkt p mit dem Punkte q vertauscht, und somit ist durch diese einzige Bemerkung auch die anfangs in Aussicht gestellte Theorie der zweiten Gruppe von Kegelschnitten gegeben.

Mit Rücksicht hierauf können wir daher jetzt das Gesammtresultat der vorhergehenden Betrachtungen in folgenden zwei Lehrsätzen aussprechen:

Lehrsatz 1.

a) **Die Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte, welche zwei Punkte und zwei Tangenten gemein haben, sind auf die Umfänge zweier Kegelschnitte K vertheilt, welche unter sich folgende vier Punkte gemein haben: den Durchschnittspunkt s der gegebenen Tangenten, den Mittelpunkt m der gemeinschaftlichen Sehne, den Mittelpunkt m_1 der Strecke, welche auf der gemeinschaftlichen Sekante durch die gegebenen Tangenten bestimmt wird, und den Punkt n, welcher mit s, m und m_1, als Gegenecke des letzteren, ein Parallelogramm bildet.**

b) **Bestimmt man zwei Punkte p und q, welche sowohl mit den gegebenen zwei Punkten als mit den, den gegebenen Tangenten zugehörigen Punkten harmonisch sind, und verbindet beide mit dem Durchschnitte der Tangenten durch zwei Gerade sp, sq; so berührt ein jeder der beiden Kegelschnitte K, der eine die eine, der andere die andere von diesen Geraden im Durchschnitte der gegebenen Tangenten, und ausserdem im Punkte m eine mit dieser Geraden parallele Linie.**

c) Die Kegelschnitte *K* sind beide entweder zwei Hyperbeln, deren Sehnen mm_1 und m innerhalb derselben; oder zwei Hyperbeln, deren Sehnen mm_1 und m ausserhab derselben liegen, oder zwei Ellipsen, jenachdem die gegebenen Punkte zwischen den Durchschnitten der gegebenen Tangenten und ihrer Verbindungslinie, oder völlig ausserhalb derselben, oder letztere zwischen den ersteren liegen.

d) Im ersten und zweiten der so eben unterschiedenen Fälle gibt es unzählige Ellipsen und Hyperbeln, aber nur vier Parabeln, welche durch die gegebenen Punkte gehen und die gegebenen Geraden berühren; nämlich alle Punkte derjenigen beiden Zweige der Kegelschnitte *K*, welche die gemeinschaftliche Sehne in m halbiren, sind Mittelpunkte von Ellipsen, und alle Punkte der beiden anderen Zweige, welche den Durchschnitt der gemeinschaftlichen Tangenten enthalten, sind Mittelpunkte von Hyperbeln, während nur die vier unendlich entfernten Punkte derselben Parabeln angehören. Im dritten Falle dagegen sind alle Punkte der Kegelschnitte *K* ohne Ausnahme bloss Mittelpunkte von Hyperbeln.

Lehrsatz 2.

Unter sämmtlichen Kegelschnitten, welche zwei gegebene Punkte und zwei gegebene Tangenten gemein haben, gibt es:

a) wenn jene Punkte zwischen diesen Tangenten liegen, entweder zwei (relativ) grösste und zwei (relativ) kleinste Ellipsen, oder nur eine (relativ) grösste und eine (relativ) kleinste, oder keine von beiden;

b) wenn die gegebenen Tangenten die gegebenen Punkte ausschliessen, so gibt es allemal zwei (relativ) kleinste Ellipsen und zwei Hyperbeln, deren Asymptotendreiecke relative Grösste sind;

c) wenn die gegebenen Tangenten zwischen den gegebenen Punkten hindurchgehen, gibt es allemal vier Hyperbeln, deren Asymptotendreiecke, die einen relative, die anderen absolute Grösste sind.

d) Die Mitelpunkte aller dieser Ellipsen und Hyperbeln liegen in einer geraden Linie, welche mit der gemeinschaftlichen Sehne parallel und doppelt soweit von dem Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten als von jener Sehne entfernt ist.

Besondere Fälle.

Der behandelten allgemeinen Aufgabe lassen sich folgende Fälle subordiniren: 1) wenn die gegebenen Punkte sich vereinigen, wodurch ihre Verbindungslinie zur Tangente wird; 2) wenn die beiden gegebenen Tangenten einen gestreckten Winkel bilden, wodurch ihr Durchschnittspunkt zum gemeinschaftlichen Berührungspunkte wird, und 3) wenn der Berührungspunkt der einen Tangente in den einen der beiden gegebenen Punkte fällt. — Es soll hier der erste dieser Fälle noch behandelt werden. Er betrifft die Aufgabe:

Unter allen einem gegebenen Dreiecke eingeschriebenen Ellipsen, welche eine Seite desselben in einem gegebenen Punkte berühren, die grösste und die kleinste zu finden.

Da hier $\pi=\varrho$ ist, so geht die Gleichung der Mittelpunktscurve in den Fällen *a*) und *c*) in folgende:

$$(p+r)(p-r)=(p-r)\varrho,$$

d. h. in die beiden einfachen $p+r=\varrho$ und $p-r=0$, und folglich die Curve selbst in ein System zweier Geraden über. Die eine dieser Geraden ist sm oder sp, die andere verbindet den Punkt m_1 mit der Mitte von sm.

Im Falle *b*) behält jene Gleichung die Form der Ellipse; er ist aber unmöglich, weil keine Tangente durch den Berührungspunkt m einer anderen Tangente gehen kann.

Der Ausdruck

$$A^2B^2\sin^2\varphi=\frac{\varrho-p-r}{\varrho-\pi}.\frac{p^2}{\pi\varrho}.\Delta^2$$

wird jetzt illusorisch, da $\Delta=0$ und $\varrho-\pi=0$ wird; wir müssen ihn daher zum Behuf der Anwendung auf den jetzigen Fall erst umformen, indem wir auf den früheren:

$$A^2B^2\sin^2\varphi=mp.mq\frac{p^2\varrho(\varrho-p-r)}{\pi(\varrho-\pi)}\sin^2\alpha$$

zurückgehen

Es ist nämlich

$$\frac{pm}{\varrho-\pi}=\frac{pm_1}{\varrho} \text{ und } mq=qm_1-mm_1,$$

folglich

$$\frac{mp.mq}{\varrho-\pi}\sin^2\alpha=\frac{pm_1.qm_1-pm_1.mm_1}{\varrho}\sin^2\alpha;$$

aber

$$pm_1\,.\,qm_1=\left(\frac{a_1b_1}{2}\right)^2=(a_1m_1)^2,\text{ und } pm_1.mm_1=(mm_1)^2,$$

weil mit a und b auch m und p zusammenfallen; also ist, wenn $\pi=\varrho$:

$$\frac{mp.mq}{\varrho-\pi}\sin^2\alpha=\frac{(\Delta sa_1b_1)^2-4(\Delta smm_1)^2}{\varrho^3}$$

und

$$A^2B^2\sin^2\varphi=[(\Delta sa_1b_1)^2-4(\Delta smm_1)^2]\,\frac{p^2(\varrho-p-r)}{\varrho^3}.$$

Dieser Ausdruck wird $=0$, wenn $p+r=\varrho$, d. h. jede Ellipse, deren Mittelpunkt der Linie sm angehört, ist $=0$. Setzt man dagegen $p-r=0$ und zugleich $r=\frac{1}{3}\varrho$, so ist

$$A^2B^2\sin^2\varphi=\frac{1}{27}[(\Delta sa_1b_1)^2-4(\Delta smm_1)^2],$$

und dieser Ausdruck ist ein Grösstes, weil

$$f''(p)=-\frac{9}{\varrho}\sqrt{\frac{1}{3}\varrho}.$$

Denkt man sich endlich den gegebenen Berührungspunkt veränderlich, so wird $A^2B^2\sin^2\varphi$ um so grösser, je kleiner das Dreieck smm_1 d. h. die Strecke mm_1 wird, und wird demnach ein Maximum maximorum, wenn m mit m_1 zusammenfällt. Dann ist, wenn π die Ludolphische Zahl bezeichnet, der Inhalt der Ellipse

$$E=A\,.\,B\,.\,\pi.\sin\varphi=\frac{1}{9}\pi\sqrt{3}\,.\,\Delta sa_1b_1;$$

die Linie, deren Gleichung $p-r=0$, fällt mit der Linie sm_1, und daher der Mittelpunkt der Ellipse mit dem Schwerpunkte des Dreiecks $8a_1b_1$ zusammen.

Lehrsatz 3.

Der Mittelpunkt der grössten unter allen Ellipsen, welche einem gegebenen Dreieck eingeschrieben sind und eine Seite desselben in einem gegebenen Punkte berühren, ist der Schwerpunkt desjenigen Dreiecks, welches von dem gegebenen Berührungspunkte, von dem Mittelpunkte der gedachten Seite und von deren Gegenecke gebildet wird, und zwar ist der Inhalt dieser Ellipse, multiplicirt mit $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$, die mittlere Proportionale zwischen den beiden Dreiecken, in welche das gegebene Dreieck durch die nach dem gegebenen Berührungspunkte gehende Transversale zerlegt wird.

Lehrsatz 4.

Der Mittelpunkt der grössten unter allen Ellipsen, welche einem gegebenen Dreiecke eingeschrieben werden können, ist der Schwerpunkt dieses Dreiecks, und die Berührungspunkte sind die Mittelpunkte der drei Seiten; und zwar verhält sich der Inhalt dieser Ellipse zum Inhalte des Dreiecks wie $\pi:3\sqrt{3}$.

$$(2)\quad (y'+\alpha x'+\gamma)y+(\alpha y'+\beta x'+\delta)x+\gamma y'+\delta x'+\varepsilon=0.$$

Ihre Differentialgleichung

$$(2')\quad \alpha y+\beta x+\delta+(y+\alpha x+\gamma)\frac{dy'}{dx'}=0.$$

Dass (1) und (2) parallel sind und dass erstere die Entfernung der letzteren vom Punkte x', y' halbirt, ist bekannt und lässt sich aus den Gleichungen ersehen.

Es lassen sich schon leicht folgende Resultate angeben:

Aus Gleichung (1) ist ersichtlich, dass sich alle Asymptotenchorden dann im Anfangspunkte schneiden, wenn die Bahn des Poles ein Kegelschnitt

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2-\varepsilon=0$$

ist. Nun ist aber dieser der gegebenen Directrix ähnlich und ähnlich liegend und schneidet sie überdies in denselben beiden Punkten, wie die Polare des Anfangspunktes, da

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2-\varepsilon=\Omega-2(\gamma y+\delta x+\varepsilon).$$

Hieraus ergibt sich also unmittelbar der Satz:

Schneiden sich ähnliche (und ähnlich liegende) Kegelschnitte, was immer in zwei Punkten stattfindet, so treffen sich die Asymptotenchorden für alle Punkte des einen Kegelschnittes als Bahn des Poles in Bezug auf die anderen als Directrix in zwei festen Punkten, die erhalten werden, wenn man an die Directrix da, wo sie von der Bahn geschnitten wird, Tangenten zieht, deren Durchschnittspunkt ein solcher fester Punkt ist. Liegen diese Punkte in unendlicher Entfernung, d. h. geht die Bahn des Poles durch die beiden Endpunkte eines Durchmessers der Directrix, so werden die Asymptotenchorden unter sich parallel sein.

Wendet man dieses auf den Kreis an, so resultirt der interessante Satz (Taf. VIII. Fig. 1.):

„Die Halbirungslinien der Tangentenpaare, die man von beliebigen auf der Peripherie eines Kreises liegenden Punkten an einen anderen Kreis zieht, schneiden sich in einem festen Punkte."

Eine weitere Betrachtung der Gleichung (1) zeigt, dass, wenn sich der Pol auf der Geraden $\alpha y+\beta x+\delta=0$ bewegt, welche die der Axe der x parallelen Chorden der Directrix halbirt, die Asymptotenchorden parallel der Axe der x sind; bewegt er sich hingegen auf der Geraden $y+\alpha x+\gamma=0$, die alle der Axe der y parallelen Chorden halbirt, so sind sie der letzteren Axe parallel. Mit anderen Worten: Bewegt sich der Pol auf einer durch den Mittelpunkt der Directrix gehenden Geraden, so sind die Asymptotenchorden (und Polaren) dem zugeordneten Durchmesser parallel.

Es führt dieses, wenn man den Durchschnitt der Geraden mit der Directrix zum Pole wählt, zu dem bekannten Satze, dass die Tangente am Endpunkte eines Diameters parallel dem zugeordneten ist.

Ist die Bahn des Poles eine gerade Linie, so haben wir, da die Polaren in diesem Falle einen Punkt umhüllen, bloss Das zu berücksichtigen, was uns die Asymptotenchorden geben. Wählen wir die Bahn zur Axe der x, so haben wir aus der nun anzunehmenden Gleichung derselben $y'=0$, so wie aus den Gleichungen (1) und (1') x', y' und $\frac{dy'}{dx'}$ zu eliminiren. Mittelst $y'=0$ wird

$$\text{Gleichung (1)}\quad (\alpha x'+\gamma)y+(\beta x'+\delta)x-\frac{1}{2}(\beta x'^2-\varepsilon)=0,$$

$$(1')\quad y=-\frac{\beta}{\alpha}(x-x')$$

oder

$$\beta x'=\alpha y+\beta x.$$

Den Werth von x' in (1) substituirt, gibt als Gleichung der gesuchten Umhüllungscurve

$$(3)\quad (\alpha y+\beta x)^2+\beta(2\gamma y+2\delta x+\varepsilon)=0,$$

also eine Parabel.

Setzen wir

$$\alpha y+\beta x\equiv\eta,\quad 2\gamma y+2\delta x+\varepsilon\equiv\xi;$$

so ist

$$\eta^2=-\beta\xi$$

die Gleichung derselben, welche demnach die Grade $\xi=0$ da berührt, wo $\eta=0$, die ein Durchmesser der Parabel ist, sie schneidet. Da über die Ordinaten-Axe keine Bestimmung getroffen war und $\eta=0$ eine dem zugeordneten Durchmesser des der Axe der x parallelen Durchmessers parallele und durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Gerade ist, so wollen wir als Axe des y eine in der eben angegebenen Richtung durch den Mittelpunkt der Directrix gehende Gerade ansehen.

Die Linie $\xi=0$ ist offenbar die Asymptotenchorde für den Durchschnittspunkt dieser Geraden mit der Bahn des Poles in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt als Directrix und diese muss, nach dem am Schlusse des vorhergehenden Abschnittes Gesagten, der Bahn des Poles parallel sein.

Bei der eben eingeführten Bestimmung der zweiten Axe in der Gleichung der Directrix α und $\delta=0$, indem letztere einerseits auf dieselbe Axe als Durchmesser, andererseits auf eine dem zugeordneten Diameter derselben parallele Linie bezogen ist.

Als Gleichung der resultirenden Parabel hat man also

$$(3') \quad \beta x^2 + 2\gamma y + \varepsilon = 0$$

oder

$$x^2 = -\frac{2\gamma}{\beta}\left(y + \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{\gamma}\right),$$

wie leicht a priori geschlossen werden konnte, da $-\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{\gamma}$ auch aus der Gleichung der Asymptotenchorde des Anfangspunktes als Durchschnitt derselben mit der Axe der y resultirt.

Ist die Directrix eine Parabel, so erhellet leicht, da die Asymptotenchorde in diesem Falle die Tangente in dem Punkte ist, wo der vom Pole aus gezogene Durchmesser die Parabel trifft, dass Directrix und Einhüllungscurve zusammenfallen. Dieses ergibt sich auch aus der Betrachtung ihrer Gleichungen, die dann identisch werden. Da nämlich dann $\beta=\alpha^2$ ist, so wird die Gleichung der Directrix

$$(y+\alpha x)^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0,$$

und ganz Dasselbe wird Gleichung (3) für $\beta=\alpha^2$.

Man hat demnach folgende einfache Construction der Umhüllungscurve (Taf. VIII. Fig. 2.):

Durch den Mittelpunkt O des gegebenen Kegelschnitts ziehe man eine der Bahn AB parallele Linie, construire den zugeordneten Durchmesser und verlängere denselben, bis er die Bahn im Punkte P schneidet. Für P als Pol ziehe man die Asymptotenchorde st zum Kegelschnitt, welche der Bahn parallel sein wird, und construire eine Parabel, welche letztere da berührt, wo jener Durchmesser sie schneidet, und die denselben ebenfalls zum Durchmesser hat.

Geht die Directrix in ein System zweier Geraden über (Taf. VIII. Fig. 3.), (MN, MN'), so hat man (Entw. S. 131.), da bereits die Axe der y so gelegt wurde, dass α und δ verschwanden, d. h. hier so, dass sie das Stück ab halbirt, noch $\varepsilon=\gamma^2$.

Also Gleichung des Systemes:

$$y^2+\beta x^2+2\gamma y+\gamma^2=0$$

oder

$$(y+x\sqrt{-\beta}+\gamma)\quad(y-x\sqrt{-\beta}+\gamma)=0.$$

Die Gleichung (3') der resultirenden Parabel wird dann

$$\beta x^2+2\gamma y+\gamma^2=0,$$

so dass, wie durch Subtraction beider Gleichungen erhellet, $y^2=0$, d. h. die Axe der x, gemeinschaftliche Chorde ist. Die Parabel berührt demnach*) das System in den beiden Punkten a und b, wo die Bahn des Poles es schneidet. Sie berührt ferner die Asymptotenchorde zu des Anfangspunktes O, die leicht zu construiren ist, so dass man drei Tangenten derselben und die Richtung des Durchmessers kennt.

Ist die Bahn des Poles ein Kegelschnitt, so wird die Entwickelung der von den Asymptotenchorden eingehüllten Curven sehr complicirt. Am einfachsten scheint folgendes Verfahren zu sein:

Man lege die Coordinatenaxen so, dass der Anfangspunkt in der Bahn liegt, die Axe der x durch den Mittelpunkt der Bahn geht und die Axen zugleich für Bahn und Directrix zugeordneten Durchmesser parallel sind, was auf folgende Weise geschieht:

Die Gleichung der Directrix ist $\Omega=0$, die der Bahn

$$y'^2+2\alpha'x'y'+\beta'x'^2+2\delta'x'=0;$$

dann hat man, wenn die Gleichungen $y=ax$, $y=a'x$ die neuen Axen bezeichnen, a und a' aus den beiden Gleichungen:

$$aa'+\alpha(a+a')+\beta=0,$$

$$aa'+\alpha'(a+a')+\beta'=0 \text{ (Entw. S. 138.);}$$

oder aus

$$a+a'=\frac{\beta'-\beta}{\alpha-\alpha'},$$

$$aa'=\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha-\alpha'}$$

zu bestimmen, woraus

---

*) S. Schluss des früheren Aufsatzes.

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha - \alpha'} \left[\beta' - \beta \pm \sqrt{(\beta - \beta')^2 + 4(\alpha\beta' - \alpha'\beta)}\right],$$

$$a' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha - \alpha'} \left[\beta' - \beta \mp \sqrt{(\beta - \beta')^2 + 4(\alpha\beta' - \alpha'\beta)}\right];$$

wodurch α und α' verschwinden.

Man hat demnach:

Gleichung der Bahn:

$$y'^2 + \beta' x'^2 + 2\delta' x' = 0 \equiv \Omega';$$

Differentialgleichung der Bahn:

$$y' \frac{dy'}{dx'} + \beta' x' + \delta' = 0;$$

Gleichung der Asymptotenchorde für $\alpha = 0$:

$$(y - y')^2 + \beta(x - x')^2 = \Omega';$$

Differentialgleichung der Asymptotenchorde für $\alpha = 0$:

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{\beta(x' - x)}{y - y'};$$

woraus $\frac{dy'}{dx'}$, x', y' zu eliminiren ist.

Die Combination der beiden Differentialgleichungen liefert:

$$y' = \frac{y(\beta' x' + \delta')}{(\beta' - \beta)x' + \beta x + \delta},$$

$$y - y' = \frac{\beta(x - x')y + (\delta - \delta')y}{(\beta' - \beta)x' + \beta x + \delta}.$$

Letzterer Werth, in die Gleichung der Asymptotenchorde substituirt, gibt für x' die kubische Gleichung:

$$\begin{aligned} &\beta^2 y^2 (x - x')^2 + 2\beta(\delta - \delta')y^2(x - x') \\ &+ \beta \{(\beta' - \beta)x' + \beta x + \delta\} (x - x')^2 - \Omega' (\beta' - \beta)x' \\ &= \Omega' (\beta x + \delta) - (\delta - \delta')^2 y^2, \end{aligned}$$

oder, $x - x' = v$ gesetzt,

$$\begin{aligned} v^3 + \left(\frac{\beta y^2 + \delta}{\beta - \beta'} - x\right) v^2 + \left(\frac{2(\delta - \delta')y^2}{\beta - \beta'} - \frac{\Omega'}{\beta}\right) v \\ = \frac{\Omega'(\beta' x + \delta) - (\delta - \delta')^2 y^2}{\beta(\beta - \beta')}. \end{aligned}$$

Hat man aus derselben x' und mithin auch y' gefunden, so sind die gefundenen Werthe in die Gleichung der Bahn zu substituiren, wodurch im Allgemeinen eine Curve 12ten Grades resultirt.

Es ist (aus dem früheren Aufsatze) bekannt, dass diese Curve durch die Punkte geht, welche Bahn und Directrix gemeinschaftlich haben. Liegen also beide Kegelschnitte ganz aus einander, so wird auch die Curve sie nicht schneiden, sonst aber in zwei oder vier oder, im Berührungsfalle, in einem oder in drei Punkten, deren Coordinaten sich durch Elimination von x oder y aus den beiden Gleichungen:

$$y^2+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon=0$$

und

$$y^2+\beta' x^2+2\delta' x=0$$

ergeben.

Sind Bahn und Directrix ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte, so ist $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$. Die vorstehenden Ausdrücke für a und a' werden in diesem Falle ungültig; man hat bloss die eine Gleichung

$$aa'+\alpha(a+a')+\beta=0,$$

mit welcher die zweite identisch ist, wie auch zu vermuthen war, weil in diesem Falle zwei zugeordnete Durchmesser der einen Curve stets zwei entsprechenden für die andere parallel sind. In diesem Falle reducirt sich die Gleichung für v auf den zweiten Grad. Sie wird

$$v^2+2.\frac{(\delta-\delta')y^2}{\beta y^2+\delta}v=\frac{\Omega'(\beta x+\delta)-(\delta-\delta')^2y^2}{\beta(\beta y^2+\delta)}.$$

Bezeichnet man

$$\sqrt{\Omega'(\beta x+\delta)(\beta y^2+\delta)-\delta(\delta-\delta')^2y^2} \text{ mit } \Pi,$$

so wird die Gleichung der Umhüllungscurve:

$$\begin{aligned}\beta y^2\{(\beta x+\delta)(\beta y^2+\delta)-\delta(\delta-\delta')y\pm y\Pi\sqrt{\beta}\}^2 \\ +\beta(\beta x+\delta)^2\{x(\beta y^2+\delta)\sqrt{\beta}+(\delta-\delta')y^2\sqrt{\beta}\mp\Pi\}^2 \\ +2\delta'\sqrt{\beta}(\beta x+\delta)^2(\beta y^2+\delta)\{x(\beta y^2+\delta)\sqrt{\beta}+(\delta-\delta')y^2\sqrt{\beta}\mp\Pi\}=0.\end{aligned}$$

Sind Bahn und Directrix Kreise, so ist $\beta=1$

---

*) Im Allgemeinen muss die Gleichung der Curve sein:

$$f(\Omega')+\Phi(y^2+\beta' x^2+2\delta' x)=0.$$

$$\Pi=\sqrt{(x^2+y^2+2\gamma y+2\beta x+\varepsilon)(x+\delta)(y^2+\delta)-\delta(\delta-\delta')^2y^2}$$

und die Gleichung der Curve

$$\begin{aligned}&y^2\{(x+\delta)(y^2+\delta)-\delta(\delta-\delta')y\pm y\Pi\}^2\\&+(x+\delta)^2\{x(y^2+\delta)-(\delta-\delta')y^2\mp\Pi\}^2\\&+2\delta'(x+\delta)^2(y^2+\delta)\{x(y^2+\delta)+(\delta-\delta')y^2\mp\Pi\}=0,\end{aligned}$$

welche beiden letzteren Gleichungen sich, aufgelöst, auf einen Punkt reduciren, wie im Anfange auch gezeigt wurde.

Betrachten wir diejenigen Curven, die durch Einhüllung von Polaren oder Berührungschorden erzeugt werden, wenn der Pol sich auf einem Kegelschnitte bewegt, so erleichtern wir uns die Untersuchung dadurch, dass wir die verschiedenen Arten der Bahn einzeln einführen.

a). Die Bahn ist eine Ellipse oder Hyperbel.

Beziehen wir sie auf zugeordnete Durchmesser, so dass wir die Gleichung

$$a^2y'^2\pm b^2x'^2=a^2b^2$$

haben, deren Differentialgleichung

$$\frac{dy'}{dx'}=\mp\frac{b^2x'}{a^2y'}$$

ist.

Substituiren wir letzteren Werth in Gleichung (2'), so resultirt

$$y'=\pm\frac{b^2}{a^2}x'\;\frac{y+\alpha x+\gamma}{\alpha y+\beta x+\delta}.$$

Dies, in Gleichung (2) substituirt, gibt

$$x'=\frac{-a^2(\alpha y+\beta x+\delta)(\gamma y+\delta x+\varepsilon)}{a^2(\alpha y+\beta x+\delta)^2\pm b^2(y+\alpha x+\gamma)^2},$$

woraus

$$y'=\frac{\mp b^2(y+\alpha x+\gamma)(\gamma y+\delta x+\varepsilon)}{a^2(\alpha y+\beta x+\delta)^2\pm b^2(y+\alpha x+\gamma)^2}.$$

Dies, in die Gleichung der Bahn eingesetzt, gibt nach einigen Reductionen:

$$(4)\quad a^2(\alpha y+\beta x+\delta)^2 \pm b^2(y+\alpha x+\gamma)^2=(\gamma y+\delta x+\varepsilon)^2$$

als Gleichung der gesuchten Umhüllungscurve, welche also von derselben Art, wie die Bahn, d. h. eine Ellipse oder Hyperbel sein wird, je nachdem es jene ist.

Setzen wir

$$\alpha y+\beta x+\delta=\eta,\quad y+\alpha x+\gamma=\xi;$$

so geht,

$$\frac{\delta-\alpha\gamma}{\alpha^2-\beta}=x_0,\quad \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\alpha^2-\beta}=y_0$$

gesetzt, wo x_0, y_0 die Mittelpunkts-Coordinaten der Directrix sind, Gleichung (4) über in

$$(4')\quad a^2\eta^2 \pm b^2\xi^2=(x_0\eta+y_0\xi-(\gamma y_0+\delta x_0+\varepsilon))^2,$$

welche Gleichung nicht den Fall umfassen kann, wo die Directrix eine Parabel ist, weil dann die Linien $\eta=0$ und $\xi=0$ parallel werden. $\gamma y_0+\delta x_0+\varepsilon$ muss immer positiv sein, weil der Mittelpunkt der Directrix in positiver Richtung jenseit der Geraden $\gamma y+\delta x+\varepsilon=0$, der Asymptotenchorde des Anfangs liegt. Bezeichnen wir den Ausdruck mit ε', so ist ersichtlich, dass die Curve durch den Durchschnitt des Systems $a^2\eta^2 \pm b^2\xi^2=0$ und der Geraden $x_0\eta+y_0\xi-\varepsilon'=0$ geht. Ihre Gleichung vereinfacht sich, wenn man eine der Coordinatenaxen durch den Mittelpunkt der Directrix legt, wodurch x_0 oder y_0 verschwindet. Wählt man z. B. die Centrale von Bahn und Directrix zur Axe der x, so verschwindet y_0 und die Gleichung der Curve wird

$$(4'')\quad (a^2-x_0^2)\eta^2 \pm b^2\xi^2+2x_0\varepsilon.\eta-\varepsilon'^2=0,$$

so dass die Axe der ξ ein Durchmesser ist und die der η dem zugeordneten desselben in der Entfernung $\frac{x_0\varepsilon'}{x_0^2-a^2}$ parallel läuft. Sie schneidet die Axe der ξ in den Punkten $\pm\frac{\varepsilon'}{b}\sqrt{\pm 1}$, also nur für den Fall der Ellipse, die der η in den Punkten $\frac{\varepsilon'}{x_0 \pm a}$.

Die Polare des Mittelpunktes der Directrix, als Anfangspunktes der ξ und η, in Bezug auf die gefundene Curve, ist $\eta=\frac{\varepsilon'}{2x_0}$, also der Axe der ξ parallel. (Taf. VIII. Fig. 4.).

Für den Fall, dass die Bahn eine Hyperbel ist, lässt sich auch ihre Asymptotengleichung $x'y' = A^2$ nehmen, deren Differentialgleichung $\frac{dy'}{dx'} = -\frac{y'}{x'}$ ist. Dann resultirt auf die frühere Weise die Curve

$$(\gamma y + \delta x + \varepsilon)^2 = 4A^2(y + \alpha x + \gamma)(\alpha y + \beta x + \delta)$$

oder

$$(5) \quad 4A^2\xi\eta = (x_0\eta - y_0\xi - \varepsilon')^2,$$

wo sich x_0 oder y_0 nicht mehr willkürlich fortschaffen lässt. Die Curve, eine Hyperbel, geht durch den Durchschnitt der Geraden $\xi = 0$ und $\eta = 0$ mit der Geraden $x_0\eta - y_0\xi - \varepsilon' = 0$ oder $\gamma y + \delta x + \varepsilon = 0$.

Sind Directrix und Bahn concentrisch, so ist $x_0 = y_0 = 0$ und Gleichung (4') geht über in

$$a^2\eta^2 \pm b^2\xi^2 = \varepsilon^2,$$

Gleichung (5) in

$$\xi\eta = \frac{\varepsilon^2}{4A^2}.$$

Ist in diesem Falle, wenn die Bahn eine Ellipse ist, die Directrix ein Kreis und die Gleichung desselben $x^2 + y^2 = r^2$, so ist die resultirende Curve die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = r^4$, die also mit der Bahn $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ concentrisch ist. Ist die Bahn selbst ein Kreis, d. h. hat man zwei concentrische Kreise, so ist $a^2 = b^2 = R^2$. Die resultirende Curve ist dann ein dritter concentrischer Kreis $y^2 + x^2 = \frac{r^4}{R^2}$. Der Radius desselben ist also $\frac{r^2}{R} = \varrho$, so dass $\varrho : r = r : R$. Es ist auch in der That in Taf. VIII. Fig. 4. a., da $On = On'$:

$$Om : On = On : Op.$$

Ganz analog verhält es sich, wenn die Bahn eine Hyperbel ist.

Für den Ausnahmefall, wo die Directrix eine Parabel ist, hat man $\beta = \alpha^2$. Dann geht Gleichung (4) über in

$$(6) \quad a^2[\alpha(y + \alpha x + \gamma) + \delta - \alpha\gamma]^2 + b^2(y + \alpha x + \gamma)^2 \\ = (\gamma y + \delta x + \varepsilon)^2.$$

Nimmt man

$$y + \alpha x + \gamma = \xi, \quad \gamma y + \delta x + \varepsilon = \eta;$$

so hat man

(6') $\eta^2 = (a^2\alpha^2 \pm b^2)\xi^2 + 2a^2\alpha(\delta - \alpha\gamma)\xi + a^2(\delta - \alpha\gamma)^2,$

einen Kegelschnitt, für den die Linie $\xi = 0$ ein Diameter ist und die Linie $\eta = 0$ dem zugeordneten in der Entfernung

$$\frac{a^2\alpha(\alpha\gamma - \delta)}{a^2\alpha^2 \pm b^2}$$

parallel. Er schneidet die Linie $\xi = 0$ in den Punkten $\pm a(\delta - \alpha\gamma)$. Die Gleichung desselben vereinfacht sich, wenn man die Axe der x so legt, dass sie ein Durchmesser der Directrix wird. Dann muss in der Gleichung der letzteren $\alpha = 0$ werden, und es ist $\xi = y + \gamma$. Also Gleichung der Curve:

$$\eta^2 \mp b^2\xi^2 = a^2\delta^2,$$

d. h. eine Hyperbel, wenn die Bahn eine Ellipse ist und umgekehrt. Auf der Linie $\eta = 0$ schneidet sie die Stücke $\pm a\delta$, auf der Linie $\xi = 0$ die Stücke $\pm \frac{a\delta}{b}\sqrt{\mp 1}$ ab. (Taf. VIII. Fig. 5.).

b) Die Bahn des Poles ist eine Parabel.

Ihre auf zugeordnete Durchmesser (Tangente und Durchmesser) bezogene Scheitelgleichung sei $y'^2 = 2px'$. Nach den bekannten Eliminationen ergibt sich als Gleichung der Curve

(7) $p(y + \alpha x + \gamma)^2 = 2(\gamma y + \delta x + \varepsilon)(\alpha y + \beta x + \delta)$.

$y + \alpha x + \gamma = \xi$, $\alpha y + \beta x + \delta = \eta$ gesetzt, gibt

(7') $p\xi^2 - 2y_0\xi\eta - 2x_0\eta^2 + 2\varepsilon'\eta = 0,$

eine durch den Durchschnitt der ξ und η, d. h. durch den Mittelpunkt der Directrix gehende Hyperbel. Legt man die Abscissen-Axe durch den Mittelpunkt der Directrix, so geht, da $y_0 = 0$, (7') über in

$$p\xi^2 - 2x_0\eta^2 + 2(\delta x_0 + \varepsilon)\eta = 0,$$

so dass die Curve auf Axen, die zugeordneten Durchmessern parallel sind, bezogen ist. (Taf. VIII. Fig. 6.).

Ist auch die Directrix eine Parabel, so hat man als Gleichung der Curve

$$p(y + \alpha x + \gamma)^2 = 2(\gamma y + \delta x + \varepsilon)[\alpha(y + \alpha x + \gamma) + \delta - \alpha\gamma].$$

Wählt man zur Axe der y einen Durchmesser der Directrix, d. h. bezieht man die Bahn auf diejenige Tangente, die zugleich ein Durchmesser der Directrix ist, so wird $\gamma=0$, also die vorstehende Gleichung

$$p(y+\alpha x)^2=2(\delta x+\varepsilon)[\alpha(y+\alpha x)+\delta].$$

$y+\alpha x=\eta$, $\delta x+\varepsilon=\xi$ gesetzt, gibt:

$$p\eta^2=2\xi(\alpha\eta+\delta),$$

$$p\eta^2-2\alpha\xi\eta-2\delta\xi=0.$$

Dieselbe ist also eine Hyperbel, welche durch den Durchschnittspunkt der Geraden

$$\xi=0 \text{ und } \eta=0$$

geht und erstere zum Durchmesser hat, letztere zur Tangente. Ihre Construction bietet, da $\eta=0$ und $\xi=0$ nach dem Früheren bekannte Linien sind, keine weitere Schwierigkeit.

XXVIII.

Ueber die Begründung der Theorie der elliptischen Functionen durch die Betrachtung unendlicher Doppelproducte.

Von
Herrn Ludwig Schläfli,
Docenten der Mathematik zu Bern.

Bekanntlich werden die elliptischen Functionen sinam$x$, cosam$x$, Δam$x$ unendlich gross oder verschwinden der Reihe nach, wenn der Werth des Arguments x resp. die Formen

$$2mK+(2n+1)K'\sqrt{-1},\qquad 2mK+2nK'\sqrt{-1},$$

$$(2m+1)K+2nK'\sqrt{-1},\ (2m+1)K+(2n+1)K'\sqrt{-1}$$

annimmt, wo m, n beliebige ganze Zahlen und K, K' die den beiden complementären Moduln k, k' entsprechenden vollständigen elliptischen Integrale der ersten Art bezeichnen. Sie sind also gleichsam als Brüche anzusehen, deren Zähler sammt dem gemeinschaftlichen Nenner ganze Functionen von unendlich hohem Grad sind, deren lineare Factoren die Form

$$x+mK+nK'\sqrt{-1}$$

haben. Von dieser Beschaffenheit sind nun die von Jacobi in seinen Fundamentis Novis mit H und Θ bezeichneten Functionen. Während aber in diesem vortrefflichen Buche die gebrochenen oder eigentlichen elliptischen Functionen, wie sinam$x$, den Ausgangspunkt bilden, von dem aus durch eine wunderbare Verkettung von Transformationen zuletzt zur Theorie der ganzen elliptischen Functionen, wie Θx, gelangt wird, so treten andererseits die Eigenschaften der elliptischen Functionen überhaupt nicht minder in ein helles Licht, wenn man von den ganzen elliptischen Functionen Θx, oder, was dasselbe ist, von unendlichen Doppelproducten ausgeht. Diesen Weg hat Cayley*) eingeschlagen, und Eisenstein**) hat das Wesen der fraglichen Doppelproducte einer sehr genauen Untersuchung unterworfen. Wenn man in möglichster Kürze die bekannten Sätze über die elliptischen Functionen beweisen will, so scheint mir der genannte umgekehrte Weg diesen Zweck am besten zu erreichen, besonders wenn man die daraus entstehende Schwierigkeit, dass ein und dasselbe Doppelproduct je nach der Anordnung seiner Factoren verschiedene Werthe darbietet, durch geometrische Hülfsvorstellungen erleichtert. Einen Umstand, der ihnen freilich bekannt sein musste, scheinen mir beide, Cayley und Eisenstein, nicht erwähnt zu haben, dass nämlich von den unendlichen Doppelproducten aus eine in den Fundamentis novis noch unerledigte Frage ohne grosse Mühe entschieden wird. Die beiden Integrale

$$K=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$K'\sqrt{-1}=\int_0^{+\infty\sqrt{-1}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

in denen die Variable x resp. die zwischen 0 und 1 liegenden reellen und die zwischen 0 und $+\infty\sqrt{-1}$ liegenden rein imaginären Werthe nur einmal durchläuft, haben offenbar jedes einen einzigen, bestimmten Werth, mag der Modul k rein oder complex sein. Bezeichnet nun λ irgend einen der $n+1$ Modulo, welche sich aus dem reellen Modul k durch eine Transformation von der ungeraden Ordnung n ergeben, so sind bekanntlich nur zwei Werthe von λ reell, die $n-1$ übrigen sind complex, und wenn Λ, $\Lambda'\sqrt{-1}$ die Werthe der obigen bestimmten Integrale bezeichnen, falls darin k durch λ ersetzt wird, so liefert die in den Fundamentis entwickelte Theorie der Transformation dafür die Ausdrücke

$$\Lambda=\frac{\alpha K+\beta K'\sqrt{-1}}{nM}, \quad \Lambda'\sqrt{-1}=\frac{\gamma K+\delta K'\sqrt{-1}}{nM};$$

wo M den Multiplicator und α, δ ungerade, β, γ gerade Zahlen bezeichnen, die der Bedingung

---

*) Cambridge Mathematical Journal IV. Maiheft 1845. On the inverse elliptic functions.

**) Crelle's Journal. XXXV. Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte. (Septbr. 1847.) Ebendas. XXVII. Bemerkungen zu den elliptischen und Abelschen Transcendenten. (Jan. 1844.)

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm n$$

und ausserdem noch einer linearen Congruenz genügen, die von der besondern Art der Transformation $n$ter Ordnung abhängt; aber für die $n-1$ complexen Moduln λ werden dort A, $A'\sqrt{-1}$ nicht völlig bestimmt. Auf unserm Standpunkte wird sich zeigen, dass diese Bestimmung nicht in allgemeiner Weise geschehen kann, sondern von dem jeweiligen numerischen Werthe von $\frac{K'\sqrt{-1}}{K}$ abhängt.

§. 1.

Ueber die Anordnung der Factoren des unendlichen Doppelproducts und über die Convergenz desselben.

Man denke sich ein System rechtwinkliger Coordinaten in der Ebene; dessen Ursprung sei O und P irgend ein durch die Abscisse p und die Ordinate q bestimmter reeller Punkt. Die Anschauung dieses Punkts P gelte als Zeichen für die complexe Grösse $p+q\sqrt{-1}$, so wird jeder complexen oder reinen Grösse ein reeller Punkt in der Ebene entsprechen und umgekehrt. Dann stellt der Abstand OP des Punkts vom Ursprung den Modul, und der Winkel, um welchen sich OP von der Abscissenaxe gegen die Ordinatenaxe hin entfernt, die Amplitude der Grösse $p+q\sqrt{-1}$ dar. Es seien a, b zwei beliebige Grössen, deren bezeichnende Punkte A, B nicht mit dem Ursprung in eine und dieselbe Gerade fallen, so entspricht der Formel $ma+nb$, wo m, n ganze Zahlen bezeichnen, ein System von über die ganze Ebene zerstreuten Punkten, die sämmtlich durch ein Netz mit $\triangle OAB$ congruenter Dreiecke unter sich verbunden sind. Mit einem Halbmesser k, der die Dimensionen des Dreiecks OAB weit übertrifft, beschreibe man nun aus dem Mittelpunkt O einen Kreis und beschränke das Doppelproduct

$$z = \Pi \frac{x + ma + nb}{ma + nb}$$

auf alle diejenigen Factoren, welche innerhalb des Kreises befindlichen Punkten $ma+nb$ entsprechen, mit der einzigen Ausnahme, dass im Nenner der dem Ursprung O entsprechende Factor 0 wegfällt, während im Zähler der demselben Punkt entsprechende Factor x stehen bleibt. Es frägt sich nun, ob die Function z von x für einen unendlich gross werdenden Halbmesser k einen bestimmten Gränzwerth hat.

Da jedem innerhalb des Kreises k gelegenen Punkt $ma+nb$ ein ebenfalls innerhalb liegender diametral entgegengesetzter Punkt $-ma-nb$ entspricht, so darf man auch setzen:

$$z^2 = x^2 \Pi \left(1 - \frac{x^2}{(ma+nb)^2}\right),$$

wo das Doppelproduct Π alle vom Kreise k umschlossenen Punkte mit Ausnahme des Ursprungs O umfasst. Wird der begränzende Kreis bis auf den Halbmesser k' erweitert, so soll die Function z in z' übergehen; dann ist

$$\frac{z'^2}{z^2} = \overset{k'}{\underset{k}{\Pi}} \left(1 - \frac{x^2}{(ma+nb)^2}\right),$$

wo das Doppelproduct alle Factoren enthält, welche den zwischen beiden concentrischen Kreisen k, k' befindlichen Punkten $ma+nb$ entsprechen. Geht man zu den Logarithmen über, so verwandelt sich das Doppelproduct in eine Doppelsumme mit denselben Gränzen, und nimmt man den Modul von x als sehr klein in Vergleich mit k an, so kann man rechts die Logarithmen in convergente Reihen entwickeln; man bekömmt:

$$2\log \frac{z'}{z} = -x^2 \overset{k'}{\underset{k}{\Sigma}} \frac{1}{(ma+nb)^2} - \frac{1}{2} x^4 \overset{k'}{\underset{k}{\Sigma}} \frac{1}{(ma+nb)^4} - \text{etc.}$$

Lässt man in dem oben erwähnten Netz von Dreiecken alle mit AB parallelen Geraden weg, so bleibt ein Netz von congruenten Parallelogrammen zurück; der Inhalt eines derselben sei c und positiv, so ist, wenn der Factor von $\sqrt{-1}$ in der complexen Grösse $\frac{b}{a}$ positiv ist, d. h. wenn der Winkel AOB des Parallelogramms zwischen 0 und π liegt, und wenn a', b' die conjugirten Werthe von a, b bezeichnen,

$$a'b - ab' = 2c\sqrt{-1}.$$

Dann kann die Doppelsumme

$$\Sigma \frac{c}{(ma+nb)^2}$$

füglich mit einem Doppelintegral verglichen werden, worin c durch das Flächenelement und $ma+nb$ durch die seinem Orte entsprechende complexe Zahl ersetzt ist. Schreibt man in jedes von der Peripherie des Kreises k durchschnittene Parallelogramm den Betrag $\frac{1}{k^2}$ und addirt, so giebt die Summe eine ungefähre Vorstellung von der Grösse des Fehlers, den man begeht, wenn man wirklich das Doppelintegral an die Stelle der Doppelsumme setzt. Derselbe ist also nicht grösser als von der Ordnung $\frac{1}{k}$ und muss daher beim Unendlichwerden von k verschwinden. Aus demselben Grunde kommen die in der rechten Seite der obigen Gleichung auf das erste folgenden Glieder noch weniger in Betracht, da sie den Ordnungen $\frac{1}{k^3}$, $\frac{1}{k^5}$, ... angehören. Ist nun $re^{\varphi\sqrt{-1}}$ die für $ma+nb$ gesetzte continuirlich veränderliche Grösse, so ist $rdrd\varphi$ das Flächenelement; folglich

$$2\log\frac{z'}{z}=-c\int_k^{k'}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}e^{-2\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi dr=0$$

mit einem Fehler von der Ordnung $\frac{1}{k}$. Also hat für ein beliebiges Argument x mit endlichem Modul die Function z beim unendlichen Wachsen von k einen einzigen bestimmten Werth.

Dieser Beweis gründet sich wesentlich darauf, dass die innerhalb des das Doppelproduct begränzenden Kreises liegenden Punkte $ma+nb$ paarweise einander diametral entgegengesetzt sind, wodurch das Doppelproduct zu einer ungeraden Function von x wird. Hält man den Ursprung O und den begränzenden Kreis k fest und versucht es, das System der Punkte parallel mit sich selbst zu verschieben, so dass die Eigenschaft der diametralen Entgegensetzung je zweier Punkte bleibt, so kann diess nur auf drei Arten geschehen, indem der Punkt, der früher in O war, sich resp. in die Mitte jeder der drei Seiten des Dreiecks OAB begiebt. Weil alsdann der Ursprung leer bleibt, so sind alle drei entstehenden Doppelproducte gerade Functionen. Ich bezeichne nach Cayley alle vier Doppelproducte resp. mit $\gamma x, gx, Gx, \mathfrak{G}x$*), je nachdem ein Punkt des Systems in den Ursprung O oder in die Mitte von OA, oder von OB, oder endlich von AB fällt. Um diese vier Functionen noch deutlicher zu definiren, will ich unter einem System von Punkten zugleich das Doppelproduct aller den einzelnen Punkten entsprechenden complexen Grössen, mit Ausschluss der Null, falls diese sich darunter befindet, verstanden wissen, und bezeichne die vier fundamentalen Systeme von Punkten nach einem einzigen zugehörigen Punkte resp. durch

$$(0),\ \left(\frac{a}{2}\right),\ \left(\frac{b}{2}\right),\ \left(\frac{a+b}{2}\right);$$

für jedes dieser Systeme hat der begränzende Kreis von unendlich wachsendem Halbmesser den Ursprung zum Mittelpunkt. Verschiebt man nun eines dieser vier Systeme parallel mit sich selbst sammt dem begränzenden Kreise, so dass nunmehr der Mittelpunkt des letztern die endliche complexe Grösse x darstellt, und dividirt das so veränderte System durch das entsprechende fundamentale System, so ist der Quotient resp. eine der Functionen γx, gx, Gx, $\mathfrak{G}x$. Sie mögen **ganze elliptische Functionen** heissen.

In Betreff der Convergenz der drei letzten Doppelproducte gx, Gx, $\mathfrak{G}x$ braucht bloss bemerkt zu werden, dass auf dieselben der oben für γx geführte Beweis unverändert übergetragen werden kann.

---

*) Das Zeichen $\mathfrak{G}x$ war im Mscpt. ganz undeutlich geschrieben. Ich habe überall den Buchstaben $\mathfrak{G}$ setzen lassen. G.

§. 2.

Ueber die verschiedenen Darstellungen einer und derselben ganzen elliptischen Function.

Der Werth eines der beschriebenen Doppelproducte hängt nur von der Lage der Punkte ab, auf welche es sich bezieht; das Netz von Parallelogrammen, durch welches diese Punkte verbunden sind, ist dabei völlig gleichgültig. Es seien daher m, n, m', n' ganze Zahlen, welche der Bedingung $mn'-m'n=1$ genügen, und man wird, wenn man a durch $ma+nb$, b durch $m'a+n'b$ ersetzt, dasselbe Punktensystem (0) erhalten wie vorher; nur ist an die Stelle des Parallelogramms, dessen Seiten den complexen Constanten a, b entsprachen, ein anderes von gleichem Inhalt mit den Seiten $ma+nb$, $m'a+n'b$ getreten. Man hat daher sofort, indem man die Constanten a, b mit in die Bezeichnung einer ganzen elliptischen Function aufnimmt,

$$\gamma(x, a, b)=\gamma(x, ma+nb, m'a+n'b).$$

Die Mitte der durch $ma+nb$ dargestellten Seite des secundären Parallelogramms fällt in eines der fundamentalen Systeme

$$\left(\frac{a}{2}\right), \left(\frac{b}{2}\right), \left(\frac{a+b}{2}\right),$$

je nachdem m ungerade, n gerade, oder m gerade, n ungerade, oder endlich m und n zugleich ungerade sind. Dann wird

$$g(x, ma+nb, m'a+n'b)$$

resp. gleich

$$g(x, a, b), \quad G(x, a, b), \quad \mathfrak{G}(x, a, b).$$

Wie sich die Sache in den anderen ähnlichen Fällen verhält, ist daher leicht zu beurtheilen. Nur mag bemerkt werden, dass, wenn alle drei geraden Functionen mittelst der neuen Darstellung $(ma+nb, m'a+n'b)$ in sich selbst zurückkehren sollen, die beiden Zahlen m, n' ungerade, die beiden anderen m', n gerade sein müssen.

Giebt es unter den unendlich vielen Darstellungen einer und derselben ganzen elliptischen Function eine, die sich vor allen übrigen auszeichnet? Diese Frage hängt, wie wir später sehen werden, mit der im Eingang erwähnten, einen complexen transformirten Modul λ betreffenden Schwierigkeit enge zusammen. Sie ist mittelst der geometrischen Hülfsvorstellung leicht zu entscheiden. Nämlich unter den zahllosen Dreiecken von gleichem Inhalt, welche anstatt des anfänglichen Dreiecks OAB gebraucht werden können, um ein und dasselbe System $(0, a, b)$ von Punkten zu erzeugen, giebt es nur ein einziges spitzwinkliges, und dieses ist immer vorhanden. Nur wenn ein rechtwinkliges Dreieck möglich ist, so giebt es zwei verschiedene gegen einander symmetrisch liegende Netze, welche aus zwei symmetrischen rechtwinkligen Dreiecken hervorgehen.

Um zu zeigen, dass es nur ein spitzwinkliges Dreieck geben kann, nehme ich an, $\triangle OAB$ sei ein solches, OA seine kleinste Seite, so wird das entsprechende Netz ein System mit OA paralleler Geraden enthalten, deren Abstand der auf OA senkrechten Höhe des $\triangle OAB$ gleich und daher grösser als $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot OA$ sein wird. OPQ sei ein anderes mit OAB gleich grosses Dreieck, welches dasselbe System von Punkten erzeugt, so steht es uns frei, das Eck P auf der nämlichen Seite von der verlängerten Geraden OA zu suchen, auf welcher auch B liegt. Suchen wir P in der durch B gehenden Parallellinie, so dürfen wir Q mit A zusammenfallen lassen, überzeugen uns aber leicht, dass das neue Dreieck an seiner Grundlinie einen stumpfen Winkel bekommen wird, sobald P nicht auch mit B zusammenfällt. Suchen wir daher P in irgend einer entfernteren Parallele, z. B. in der zweiten, dritten u. s. f. und ziehen dann durch Q eine Parallele mit OP, welche OA in M schneidet, so wird wegen des gleichen Inhalts der beiden Dreiecke OAB und OPQ das Stück OM gleich $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ u. s. f. von OA, also kleiner als $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{2/3}{\sqrt{3}}$ u. s. f. mal der Abstand der zuerst erwähnten Parallellinien (OA) sein. Also ist jedenfalls der Abstand der Parallelen OP und MQ oder die aus Q auf OP gefällte Höhe des Dreiecks OPQ kleiner als die auf OA senkrechte Höhe des ursprünglichen Dreiecks. Daher kann die Spitze Q nicht auf einer der Parallellinien mit OA, welche OP nicht schneiden, gesucht werden, wenn die Winkel O und P des Dreiecks OPQ spitz sein sollen. Die Spitze Q muss also auf einer zwischen O und P durchgehenden Parallellinie gesucht werden, und zugleich muss sie ausserhalb eines Kreises liegen, der OP zum Durchmesser hat. Nehmen wir den ungünstigsten Fall, wo OP nur bis an die zweite Parallellinie reicht, und bezeichnen durch L, N die beiden Punkte, in denen die durch B gehende Parallellinie von OP und MQ geschnitten wird, so ist LN jedenfalls kleiner als der Radius $LO = LP$; folglich $\angle ONP$ ein stumpfer.

Ich gestehe, dass dieser Beweis einer für die empirische Anschauung sehr einleuchtenden Sache ziemlich weitläufig erscheint. Der algebraische Beweis leidet an dem nämlichen Uebelstande.

Soll das $\triangle OAB$ spitzwinklig sein, so genügt es, wenn die reellen Theile der beiden complexen Grössen $\frac{b}{a}$ und $\frac{a}{b}$ positive ächte Brüche sind. Wenn also die Punkte P, Q den complexen Grössen $ma+nb$, $m'a+n'b$ entsprechen, wo die ganzen Zahlen m, n, m', n' der Bedingung $mn'-m'n=1$ genügen, so müssen auch die reellen Theile von

$$\frac{m'a+n'b}{ma+nb} \text{ und } \frac{ma+nb}{m'a+n'b}$$

positive ächte Brüche sein, wenn das Dreieck OPQ spitzwinklig sein soll. Nun ist aber

$$\frac{m'a+n'b}{ma+nb}=\frac{n'}{n}-\frac{1}{n}\frac{a}{ma+nb}=\frac{m'}{m}+\frac{1}{m}\frac{b}{ma+nb},$$

$$\frac{ma+nb}{m'a+n'b}=\frac{n}{n'}+\frac{1}{n'}\frac{a}{m'a+n'b}=\frac{m}{m'}-\frac{1}{m'}\frac{b}{m'a+n'b}.$$

Es sei

$$\frac{b}{a}=p+q\sqrt{-1},$$

so ist $0<p<1$, weil ΔOAB spitzwinklig ist; also der reelle Theil von

$$\frac{a}{ma+nb} \text{ gleich } \frac{1}{(m+np)\left(1+\left(\frac{q}{\frac{m}{n}+p}\right)^2\right)},$$

ein positiver ächter Bruch, wenn m positiv und grösser als $-n$ ist. Ebenso ist der reelle Theil von $\frac{b}{nb+ma}$ ein positiver ächter Bruch, wenn n positiv und grösser als $-m$ ist, folglich ein negativer ächter Bruch, wenn $-n$ positiv und grösser als m ist. Aehnliches gilt, wenn zu m, n Accente gesetzt werden. Wir dürfen nun jedenfalls m als positiv annehmen und schliessen vorerst diejenigen Fälle von der Betrachtung aus, wo eine der Zahlen m, n, m', n' verschwindet. Dann sind mn' und $m'n$ zugleich positiv oder zugleich negativ. Im ersten Falle sind m, n' positiv und entweder auch m', n positiv, folglich die reellen Theile von

$$\frac{a}{ma+nb} \text{ und } \frac{a}{m'a+n'b}$$

positive ächte Brüche. Bezeichnen wir einen solchen, abgesehen von seinem Werth, durch ε, so müsste zugleich

$$\frac{n'-\varepsilon}{n}<1,\quad \frac{n+\varepsilon}{n'}<1;$$

folglich $n' \overline{\overline{<}} n$ und zugleich $n<n'$ sein, was nicht angeht. Oder aber m', n sind negativ. Dann wäre immerhin der reelle Theil von

$\frac{a}{ma+nb}$ gleich einem ächten positiven Bruche ε, und es müsste $\frac{\varepsilon-n'}{-n}>0$ sein, was unmöglich ist. — Wir kommen nun zum zweiten Fall, wo die Producte mn' und $m'n$ zugleich negativ sind. Es sei also m positiv, n' negativ und entweder m' negativ und n positiv, folglich der reelle Theil von $\frac{m'a+n'b}{ma+nb}$ offenbar negativ, was auszuschliessen ist. Oder aber es ist m' positiv und n negativ. Hier sind nun wieder zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder ist $-n$ kleiner als m, folglich auch $-n'<m'$; also sind die reellen Theile von

$$\frac{a}{ma+nb}, \quad \frac{a}{m'a+n'b}$$

positive ächte Brüche, und man bekömmt für die reellen Theile von

$$\frac{m'a+n'b}{ma+nb}, \quad \frac{ma+nb}{ma'+n'b}$$

die unvereinbaren Bedingungen

$$\frac{-n'+\varepsilon}{-n}<1, \quad \frac{-n-\varepsilon}{-n'}<1.$$

Oder aber $-n$ ist grösser als m, folglich auch $-n'>m'$. Dann sind die reellen Theile von

$$\frac{b}{ma+nb}, \quad \frac{b}{m'a+n'b}$$

negative ächte Brüche, so dass man die ebenfalls unvereinbaren Bedingungen

$$\frac{m'-\varepsilon}{m}<1, \quad \frac{m+\varepsilon}{m'}<1$$

erhält. Wir sind nunmehr anzunehmen genöthigt, dass eine der vier Zahlen m, n, m', n' Null sei. Setzen wir z. B. $m'=0$, so folgt $m=1$, $n'=1$ und n bleibt unbestimmt. Dann sollte der reelle Theil von $\frac{a+nb}{b}$ ein positiver ächter Bruch sein. Diess ist aber unmöglich wegen der rücksichtlich $\frac{b}{a}$ gemachten Voraussetzungen. Durchgeht man alle einzelnen Fälle, so findet man, dass unter allen möglichen Formen des Bruchs $\frac{m'a+n'b}{ma+nb}$ nur diese drei:

$$\frac{b}{a},\quad \frac{a}{a-b},\quad \frac{a-b}{-b}$$

den gemachten Anforderungen genügen. Diese beziehen sich aber auf ein und dasselbe Dreieck OAB. Dieses ist also das einzige spitzwinklige Dreieck, aus welchem dasselbe Punktensystem $(0, a, b)$ erzeugt werden kann.

Wenn ein System von Punkten durch irgend ein stumpfwinkliges Dreieck OPQ erzeugt worden ist, so giebt es im Allgemeinen immer ein spitzwinkliges Dreieck, welches dasselbe System von Punkten erzeugt, und welches durch folgendes Verfahren gefunden werden kann.

Wenn P der stumpfe Winkel des Dreiecks OPQ ist, so ziehe man durch Q eine Parallele mit der Grundlinie OP, so wird dieselbe eine Reihe von Punkten des gegebenen Systems enthalten, deren Abstände sämmtlich gleich der Grundlinie OP sind. Also ist unter den genannten Punkten gewiss einer und zwar im Allgemeinen nur einer — er möge Q' heissen, — welcher sich auf die Grundlinie OP selbst senkrecht projicirt. Wenn wir daher das Dreieck OPQ durch OPQ' ersetzen, so sind beide Winkel OPQ' und POQ' spitz, und die Projection der Seite OQ' auf die Grundlinie OP ist gewiss kleiner als die Hälfte der Projection der Seite OQ auf dieselbe Grundlinie. Auch sieht man leicht, dass die Projection der Grundlinie OP auf OQ' kleiner ist als diejenige auf OQ. Ist nun immer noch der Winkel $OQ'P$ ein stumpfer, so ziehe man durch P eine Parallele mit OQ'; auf dieser liegt ein einziger Punkt P' des gegebenen Systems, der sich auf OQ' selbst senkrecht projicirt. Man wird nunmehr das Dreieck $OP'Q'$ zur Erzeugung des gegebenen Systems von Punkten gebrauchen können. Hat dieses noch einen stumpfen Winkel, so kann es nur der bei P' sein. Ferner ist die Projection von OP auf OQ' kleiner als die Hälfte der Projection von OP auf OQ, um so mehr also kleiner als die Hälfte der Projection von OP auf OQ; und die Projection von OQ' auf OP' ist kleiner als diejenige auf OP, um so mehr also kleiner als die Hälfte der Projection von OQ auf OP. Setzt man dieses Verfahren so lange fort, als noch stumpfe Winkel sich zeigen, so erhält man eine Reihenfolge von Dreiecken

$$OPQ,\ OPQ',\ OP'Q',\ OP'Q'',\ OP''Q'',\ \text{u. s. f.},$$

worin jeweilen das neugefundene Eck ein stumpfwinkliges ist, und wo die Projectionen von OQ auf OP, von OQ' auf OP', von OQ'' auf OP'', u. s. f., wie auch diejenigen von OP auf OQ, von OP' auf OQ', u. s. f. zwei Reihen bilden, welche schneller fallen als die geometrische Reihe

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots.$$

So lange nun die Dreiecke noch stumpfwinklig sind, ist immer diejenige Seite, welche das feste Eck O mit dem Scheitel des stumpfen Winkels verbindet, kleiner als die Projection der andern von O ausgehenden Seite auf die erste. Folglich bilden auch die Seiten OP, OP', OP'',... und die Seiten OQ, OQ', OQ'',... zwei Reihen, welche schneller fallen als die geometrische Reihe 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$,.... Gäbe es nun kein spitzwinkliges Dreieck, so gingen beide Reihen ohne Ende fort; und man müsste in beiden auf Glieder kommen, die kleiner wären als die Quadratwurzel aus dem doppelten constanten Inhalt eines jeden dieser Dreiecke. Ein Dreieck, worin zwei Seiten zugleich von dieser Beschaffenheit wären, enthält aber einen Widerspruch. Folglich kann das oben beschriebene Verfahren nicht ohne Ende fortgesetzt werden, sondern es muss einmal zu einem spitzwinkligen Dreieck führen und dann aufhören.

Man gelangt noch schneller zum Ziele, wenn man, ohne gerade den Punkt O festzuhalten, immer die kleinste Seite des so eben gefundenen erzeugenden Dreiecks als Grundlinie betrachtet.

In Uebereinstimmung mit dem zuerst beschriebenen geometrischen Verfahren ist nun auch die numerische Rechnung anzustellen, sobald es sich darum handelt, die zu irgend einer gegebenen Darstellung (a, b) gehörende Hauptdarstellung auszumitteln. Da es nämlich freisteht, das Verhältniss $\frac{b}{a}$ durch seinen entgegengesetzten oder auch durch seinen umgekehrten Werth zu ersetzen, wofern über das Vorzeichen des reellen Factors von $\sqrt{-1}$ nichts verfügt wird, so dürfen wir immerhin den reellen Theil von $\frac{b}{a}$ als positiv und grösser als 1 voraussetzen. Denn ginge das Letzte nicht an, so wäre (a, b) schon die gesuchte Hauptdarstellung selbst. Es sei daher

$$\frac{b}{a} = p + q\sqrt{-1}$$

und r die Zahl der in p enthaltenen positiven Einheiten, folglich $0 < p - r < 1$; man setze

$$p - r + q\sqrt{-1} = \frac{1}{p' + q'\sqrt{-1}},$$

so wird p' positiv sein. Ist es auch noch grösser als 1, so sei r' die Zahl der darin enthaltenen positiven Einheiten; und wenn man diese wegnimmt, so sei $p'' + q''\sqrt{-1}$ der umgekehrte Werth des Rests u. s. f. Die Rechnung wird da aufhören, wo der umgekehrte Werth des Rests einen positiven ächten Bruch als reellen Theil hat. Sie steht demnach so:

$$\frac{b}{a}=p+q\sqrt{-1}=r+\frac{1}{p'+q'\sqrt{-1}},$$

$$p'+q'\sqrt{-1}=r'+\frac{1}{p''+q''\sqrt{-1}},$$

$$p''+q''\sqrt{-1}=r''+\frac{1}{p'''+q'''\sqrt{-1}},$$

. . . .

$$p^{(n-1)}+q^{(n-1)}\sqrt{-1}=r^{(n-1)}+\frac{1}{p^{(n)}+q^{(n)}\sqrt{-1}}.$$

Hier sind $r, r', \dots r^{(n-1)}$ lauter positive ganze Zahlen, $p, p', p'', \dots p^{(n)}$ sämmtlich positiv und überdiess die letzte $p^{(n)}$ kleiner als 1, und dazu noch $q^{(n)2} > p^{(n)}(1-p^{(n)})$. Die Factoren $q, q', q'', \dots q^{(n)}$ sind abwechselnd positiv und negativ. Bezeichnet nun $\frac{h}{k}$ den reducirten Werth des aus den Quotienten $r, r', \dots r^{(n-1)}$ gebildeten Kettenbruchs und $\frac{h'}{k'}$ dessen letzten Näherungswerth, so ist

$$\frac{b}{a}=\frac{h(p^{(n)}+q^{(n)}\sqrt{-1})+h'}{k(p^{(n)}+q^{(n)}\sqrt{-1})+k'},$$

folglich

$$p^{(n)}+q^{(n)}\sqrt{-1}=\frac{-h'a+k'b}{ha-kb},\quad [hk'-h'k=(-1)^n]$$

und $(ha-kb, -h'a+k'b)$ oder $(-h'a+k'b,\ ha-kb)$ die gesuchte Hauptdarstellung, jenachdem $q^{(n)}$ positiv oder negativ ist. Es versteht sich übrigens, dass jede Darstellung auf drei verschiedene Arten geschrieben werden kann, weil je zwei Seiten eines Dreiecks auf drei Arten combinirt werden können, und dass jeder anderen Schreibweise ein Wechsel der Zeichen $g, G, \mathfrak{G}$ der geraden Functionen entspricht.

§. 3.

Ueber die Transformation und Multiplication der ganzen elliptischen Functionen.

Wir haben oben gesehen, dass ein einfaches Product $\Pi\left(1-\frac{x^2}{(ma+nb)^2}\right)$, dessen Factoren längs der Peripherie des unendlich gross werdenden Gränzkreises liegen, sich von 1 nur um eine Grösse von der Ordnung des verkehrten Halbmessers dieses Kreises unterscheidet, und daher aus einem Product endlicher Factoren nach Belieben weggelassen oder demselben zugesetzt werden darf. Ich schicke diese Bemerkung voraus, um sie nicht im Folgenden wiederholen zu müssen.

Es sei (a, b) irgend ein erzeugendes Parallelogramm; man theile die durch die complexen Grössen a, b dargestellten Seiten desselben resp. in p, q gleiche Theile, wo p, q ungerade sein sollen, und ziehe durch die Theilungspunkte Parallellinien mit den Seiten des Parallelogramms. Man wird so ein neues Punktensystem $\left(0, \frac{a}{p}, \frac{b}{q}\right)$ erhalten, welches aus der Ueberlagerung der Punktensysteme $\left(\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}, a, b\right)$, wo m, n alle den Gränzbedingungen

$$-\frac{p-1}{2}<m<\frac{p-1}{2}, -\frac{q-1}{2}<n<\frac{q-1}{2}$$

genügenden ganzen Zahlen bezeichnen, entstanden sich denken lässt. Es seien λ, μ ganze Zahlen und $\lambda a+\mu b$ ein **bei der Peripherie** des Gränzkreises befindlicher Punkt, und es mögen je zwei Factoren, wie

$$\frac{x+\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}+\lambda a+\mu b}{\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}+\lambda a+\mu b} \text{ und } \frac{x-\frac{ma}{p}-\frac{nb}{q}-\lambda a-\mu b}{-\frac{ma}{p}-\frac{nb}{q}-\lambda a-\mu b},$$

zugleich wegfallen oder neu hinzukommen, so wird dadurch die Richtigkeit einer endlichen Gleichung nicht getrübt werden*). Gerade dieses, und nicht mehr, geschieht aber, wenn wir setzen:

$$\gamma\left(x, \frac{a}{p}, \frac{b}{q}\right)=\prod_{m=-\frac{p-1}{2}}^{m=\frac{p-1}{2}}\prod_{n=-\frac{q-1}{2}}^{n=\frac{q-1}{2}}\frac{\gamma(x+\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}, a, b)}{\gamma\left(\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}, a, b\right)},$$

wo rechts im **Nenner** die dem Systeme $m=0$, $n=0$ entsprechende Function γ wegzulassen ist. Diese Gleichung ist also richtig, und wenn Π ein endliches Doppelproduct bezeichnet, worin von je zwei diametral entgegengesetzten Systemen (m, n) und $(-m, -n)$ nur das eine berücksichtigt und $(0, 0)$ weggelassen ist, so kann sie auch so geschrieben werden:

$$\gamma\left(x, \frac{a}{p}, \frac{b}{q}\right)=(-1)^{\frac{pq-1}{2}}\gamma x.\Pi\frac{\gamma\left(x+\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}\right)\gamma\left(x-\frac{ma}{p}-\frac{nb}{q}\right)}{\gamma^2\left(\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}\right)},$$

*) Der Fehler ist nämlich von der Ordnung $\frac{\text{Peripherie}}{k^2}$, also von der Ordnung $\frac{1}{k}$ und daher verschwindend.

wo rechts unter den Functionszeichen die specifischen Constanten a, b weggelassen sind, wie fortan immer geschehen soll, sobald kein Missverständniss zu besorgen ist.

Weil p, q ungerade sind, so überzeugt man sich auch durch die nämliche Grundanschauung von der Richtigheit der drei folgenden Gleichungen:

$$g\left(x,\frac{a}{p},\frac{b}{q}\right)=\prod_{m=-\frac{p-1}{2}}^{m=\frac{p-1}{2}}\ \prod_{n=-\frac{q-1}{2}}^{n=\frac{q-1}{2}} \frac{g\left(x+\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}\right)}{g\left(\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}\right)},$$

$$G\left(x,\frac{a}{p},\frac{b}{q}\right)=\Pi\,\Pi\,\frac{G\left(x+\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}\right)}{G\left(\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}\right)},$$

$$\mathfrak{G}\left(x,\frac{a}{p},\frac{b}{q}\right)=\Pi\,\Pi\,\frac{\mathfrak{G}\left(x+\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}\right)}{\mathfrak{G}\left(\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}\right)}.$$

Setzt man eine der ungeraden Zahlen p, q, z. B. $q=1$, so gehen die endlichen Doppelproducte in einfache Producte über, und die vier vorliegenden Formeln betreffen dann die **Transformation $p$ter Ordnung.**

Nennen wir $\left(\frac{a}{p},\frac{b}{q}\right)$ eine transformirte Darstellung zu der ursprünglichen (a, b), und es sei $(\lambda a+\mu b,\ \lambda' a+\mu' b)$, wo $\lambda\mu'-\lambda'\mu=1$, eine mit der letzteren äquivalente Darstellung, so folgt, dass auch $\left(\frac{\lambda a+\mu b}{p},\frac{\lambda' a+\mu' b}{q}\right)$ eine transformirte zu der ursprünglichen Darstellung (a, b) sei.

Ist insbesondere $p=q$, so wird $\gamma\left(x,\frac{a}{p},\frac{b}{p}\right)=\frac{1}{p}\gamma(px,\ a,\ b)$, $g\left(x,\frac{a}{p},\frac{b}{p}\right)=g(px,\ a,\ b)$ und ebenso für G, $\mathfrak{G}$. Man kann also mit Beibehaltung der specifischen Constanten a, b eine ganze elliptische Function des Arguments px als endliches Product solcher des einfachen Arguments x ausdrücken. Hierin ist das Princip der **Multiplication** enthalten.

Eine getrennte Behandlung erfordert die Zahl 2. Aus der Grundanschauung gehen sogleich folgende Formeln hervor:

$$\gamma\left(x,\frac{a}{2},b\right)=\gamma x\,.\,gx,$$

$$G\left(x,\frac{a}{2},b\right)=Gx\,.\,\mathfrak{G}x,$$

$$\gamma\left(x, a, \frac{b}{2}\right) = \gamma x \,.\, Gx,$$

$$g\left(x, a, \frac{b}{2}\right) = gx \,.\, \mathfrak{G}x,$$

$$\gamma\left(x, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \gamma x \,.\, gx \,.\, Gx \,.\, \mathfrak{G}x;$$

folglich auch

$$\gamma(2x) = 2\gamma x \,.\, gx \,.\, Gx \,.\, \mathfrak{G}x.$$

Weiter können wir hier noch nicht gehen, und die Ausdrücke für

$$g\left(x, \frac{a}{2}, b\right), \quad \mathfrak{G}\left(x, \frac{a}{2}, b\right), \quad G\left(x, a, \frac{b}{2}\right), \quad \mathfrak{G}\left(x, a, \frac{b}{2}\right)$$

bleiben einer späteren Betrachtung vorbehalten.

§. 4.

Bestimmung des Verhältnisses solcher unendlichen Doppelproducte, deren Factoren zusammenfallen und die sich daher nur durch ihre Begränzung unterscheiden.

Nehmen wir uns die Bestimmung des Quotienten $Q = \dfrac{\gamma\left(x + \frac{a}{2}\right)}{gx}$ vor, und abstrahiren von constanten Factoren, so kömmt wesentlich nur das Verhältniss der beiden Werthe in Betracht, welche ein und dasselbe Punktensystem nach einander annimmt, wenn der Mittelpunkt des begränzenden Kreises k das eine Mal in $x + \frac{a}{2}$, das andere Mal in x fällt. Also ist das Product aller innerhalb des ersten und ausserhalb des zweiten Kreises liegenden Punkte durch das Product aller derjenigen zu dividiren, für welche das Umgekehrte stattfindet; oder, wenn man zu den Logarithmen übergeht, die mit dem Inhalte c des erzeugenden Parallelogramms multiplicirte Einheit des Punkts durch das Flächenelement $d\omega$, und die Doppelsumme durch ein Doppelintegral ersetzt, und endlich die ortsanzeigende complexe Zahl durch z bezeichnet, so ist

$$\log Q = \text{const} + \frac{x}{c} \int \frac{d\omega}{z},$$

wo die Flächenelemente $d\omega$ im einen Monde positiv, im andern negativ zu nehmen sind. Es sei nun $a = \mathfrak{a} e^{\alpha\sqrt{-1}}$, $z = re^{(\varphi+\alpha)\sqrt{-1}}$, wo $r = k$ angenommen werden darf. Zieht man aus dem Centrum einen Strahl nach dem Punkte z, so ist die Länge eines innerhalb des Mondes befindlichen Stückes $\frac{1}{2}\mathfrak{a}\cos\varphi$, also positiv im ersten, negativ im zweiten Monde. Man darf also $d\omega$ durch $\frac{1}{2}\mathfrak{a}\cos\varphi.\,kd\varphi$ ersetzen. Es ergiebt sich demnach

$$\log Q = \text{const.} + \frac{x}{2c}\mathfrak{a}\, e^{-\alpha\sqrt{-1}}\int_0^{2\pi} e^{-\varphi\sqrt{-1}}\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \text{const} + \frac{\mathfrak{a}e^{-\alpha\sqrt{-1}}\pi x}{2c}.$$

Wird der Kürze wegen die zu a conjugirte Grösse $\mathfrak{a}e^{-\alpha\sqrt{-1}} = a'$ gesetzt, so hat man

$$Q = \text{const}\times e^{\frac{a'\pi}{2c}x}.$$

Bestimmt man die Constante durch die Annahme von $x=0$, so ergiebt sich

$$\frac{\gamma\left(x+\frac{a}{2}\right)}{gx} = \gamma\frac{a}{2}\cdot e^{\frac{a'\pi}{2c}x}.$$

Setzt man hier $-\frac{a}{2}-x$ an die Stelle von x, so ergiebt sich

$$-\frac{\gamma x}{g\left(\frac{a}{2}+x\right)} = \gamma\frac{a}{2}\cdot e^{-\frac{aa'}{4c}\pi}\, e^{-\frac{a'\pi}{2c}x};$$

oder

$$\frac{g\left(\frac{a}{2}+x\right)}{\gamma x} = -\frac{e^{\frac{aa'}{4c}\pi}}{\gamma\frac{a}{2}}\, e^{\frac{a'\pi}{2c}x};$$

folglich, für ein verschwindendes x,

$$g\frac{a}{2} = 0, \quad g'\frac{a}{2}\cdot\gamma\frac{a}{2} = -e^{\frac{aa'}{4c}\pi}.$$

Durch dieses Verfahren ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{matrix}\gamma\\ g\\ G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}\left(x+\frac{a}{2}\right) = \left.\begin{matrix}\gamma\\ g'\\ G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}\left(\frac{a}{2}\right)\cdot e^{\frac{a'\pi}{2c}x}\cdot\left.\begin{matrix}g\\ \gamma\\ \mathfrak{G}\\ G\end{matrix}\right\}(x),$$

$$\left.\begin{matrix}\gamma\\ g\\ G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}\left(x+\frac{b}{2}\right)=\left.\begin{matrix}\gamma\\ g\\ G'\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}\left(\frac{b}{2}\right)\cdot e^{\frac{b'\pi}{2c}x}\cdot\left.\begin{matrix}G\\ \mathfrak{G}\\ \gamma\\ g\end{matrix}\right\}(x),$$

$$\left.\begin{matrix}\gamma\\ g\\ G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}\left(x+\frac{a+b}{2}\right)=\left.\begin{matrix}\gamma\\ g\\ G\\ \mathfrak{G}'\end{matrix}\right\}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot e^{\frac{a'+b'}{2c}\pi x}\cdot\left.\begin{matrix}\mathfrak{G}\\ G\\ g\\ \gamma\end{matrix}\right\}(x).$$

Die Constanten dieser Gleichungen sind durch folgende Relationen verbunden:

$$\gamma\frac{a}{2}\cdot g'\frac{a}{2}=-e^{\frac{aa'}{4c}\pi},\quad G\frac{a}{2}\cdot\mathfrak{G}\frac{a}{2}=e^{\frac{aa'}{4c}\pi},$$

$$\gamma\frac{b}{2}\cdot G'\frac{b}{2}=-e^{\frac{bb'}{4c}\pi},\quad g\frac{b}{2}\cdot\mathfrak{G}\frac{b}{2}=e^{\frac{bb'}{4c}\pi},$$

$$\gamma\frac{a+b}{2}=\gamma\frac{a}{2}\cdot g\frac{b}{2}\cdot e^{\frac{a'b\pi}{4c}}=\gamma\frac{b}{2}\cdot G\frac{a}{2}\cdot e^{\frac{ab'\pi}{4c}},$$

$$g\frac{a+b}{2}=g'\frac{a}{2}\cdot\gamma\frac{b}{2}\cdot e^{\frac{a'b\pi}{4c}}=g\frac{b}{2}\cdot\mathfrak{G}\frac{a}{2}\cdot e^{\frac{ab'\pi}{4c}},$$

$$G\frac{a+b}{2}=G\frac{a}{2}\cdot\mathfrak{G}\frac{b}{2}\cdot e^{\frac{a'b\pi}{4c}}=G'\frac{b}{2}\cdot\gamma\frac{a}{2}\cdot e^{\frac{ab'\pi}{4c}},$$

$$\mathfrak{G}'\frac{a+b}{2}=\mathfrak{G}\frac{a}{2}\cdot G'\frac{b}{2}\cdot e^{\frac{a'b\pi}{4c}}=\mathfrak{G}\frac{b}{2}\cdot g'\frac{a}{2}\cdot e^{\frac{ab'\pi}{4c}}.$$

Aus den vier letzten Gleichungen folgt unter anderm:

$$\frac{\gamma\frac{a}{2}}{G\frac{a}{2}}\sqrt{-1}=\frac{\gamma\frac{b}{2}}{g\frac{b}{2}},\quad\frac{\gamma\frac{a}{2}}{\mathfrak{G}\frac{a}{2}}\sqrt{-1}=\frac{\gamma\frac{a+b}{2}}{g\frac{a+b}{2}},\quad\frac{\gamma\frac{b}{2}}{\mathfrak{G}\frac{b}{2}}=\frac{\gamma\frac{a+b}{2}}{G\frac{a+b}{2}}\sqrt{-1}.$$

Von derselben geometrischen Betrachtung ausgehend wie oben, findet man, wenn m, n beliebige ganze Zahlen bezeichnen,

$$\frac{\gamma(x+ma+nb)}{\gamma x}=\text{const.}\times e^{\frac{ma'+nb'}{c}\pi x},$$

wo das Functionszeichen γ durch die drei übrigen ersetzt werden darf. Um den Werth der Constanten auszumitteln, muss man aber die vier Functionen unterscheiden. Setzt man nämlich

$x=-\frac{ma+nb}{2}+\omega$, wo ω eine verschwindende Grösse bezeichnet, so ist zuerst für γ der Fall, wo m, n zugleich gerade sind, von den übrigen abzutrennen, weil alsdann $\gamma\frac{ma+nb}{2}$ verschwindet. Man findet hier

$$\frac{\gamma\left(\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)}{\gamma\left(-\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)}=\frac{\omega\gamma'\frac{ma+nb}{2}}{\omega\gamma'\left(-\frac{ma+nb}{2}\right)}=+1,$$

in allen andern Fällen dagegen

$$=\frac{\gamma\frac{ma+nb}{2}}{\gamma\left(-\frac{ma+nb}{2}\right)}=-1;$$

folglich überhaupt

$$\frac{\gamma\left(\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)}{\gamma\left(-\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)}=-(-1)^{(m+1)(n+1)}=(-1)^{m+n}.(-1)^{mn}.$$

Für g, G, $\mathfrak{G}$ sind resp. die Fälle, wo m ungerade, n gerade; wo m gerade, n ungerade, und endlich wo m, n zugleich ungerade sind, von allen übrigen Fällen abzutrennen. Man findet dann überhaupt:

$$\frac{g\left(\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)}{g\left(-\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)}=(-1)^m(-1)^{mn},$$

$$\frac{G\left(\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)}{G\left(-\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)}=(-1)^n(-1)^{mn},$$

$$\frac{\mathfrak{G}\left(\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)}{\mathfrak{G}\left(-\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)}=(-1)^{mn}.$$

Es ergeben sich demnach folgende vier Gleichungen:

$$\left.\begin{matrix}\gamma\\ g\\ G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}(x+ma+nb)=\left.\begin{matrix}(-1)^{m+n}\\ (-1)^{m}\\ (-1)^{n}\\ +1\end{matrix}\right\}\times(-1)^{mn}\,e^{\frac{ma'+nb'}{e}\pi\left(x+\frac{ma+nb}{2}\right)}\times\left.\begin{matrix}\gamma\\ g\\ G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}(x).$$

§. 5.

Quotienten unendlicher Doppelproducte in Doppelsummen von Partialbrüchen verwandelt.

Denkt man sich im Ausdruck $\frac{\gamma x}{Gx}$ Zähler und Nenner als endliche Producte, von denen jener eine kleinere Zahl von Factoren hat als dieser, so ist nach den algebraischen Regeln

$$\frac{\gamma x}{Gx}=\Sigma\frac{\gamma\left(-ma-\left(n+\frac{1}{2}\right)b\right)}{G'\left(-ma-\left(n+\frac{1}{2}\right)b\right)}\,\frac{1}{x+ma+\left(n+\frac{1}{2}\right)b},$$

wo die Summe rechts sich über alle Punkte $ma+\left(n+\frac{1}{2}\right)b$ erstreckt, welche im Producte Gx, begränzt durch den Kreis k, vorkommen. Setzt man im Ausdruck des constanten Zählers eines Partialbruchs die auf einen unendlich grossen begränzenden Kreis bezüglichen Werthe von γ und G', so begeht man einen Fehler von der Ordnung $\frac{1}{k}$, und dann ist der hieraus entstehende Gesammtfehler, wenn man je zwei Partialbrüche, welche diametral entgegengesetzten Punkten entsprechen, zusammenfasst, von der Ordnung

$$\frac{1}{k}\int^{k}\frac{2\pi r dr}{r^2}=\frac{2\pi}{k}\int^{k}\frac{dr}{r}$$

d. h. von der Ordnung $\frac{\log k}{k}$, also verschwindend, wenn k unendlich gross wird. Da ferner der erwähnte constante Zähler des Partialbruchs immerfort einen endlichen Werth behält, so ist auch der aus der unendlichen kreisförmigen Ausdehnung der Doppelsumme entstehende Fehler nur von der Ordnung $\frac{1}{k}$. Nun ist der fragliche constante Zähler nach dem vorigen Paragraphen gleich $\frac{\gamma\frac{b}{2}}{G'\frac{b}{2}}.(-1)^m$; folglich in transscendentem Sinne:

$$\frac{\gamma x}{Gx}=\frac{\gamma\frac{b}{2}}{G'\frac{b}{2}}\Sigma\frac{(-1)^m}{x+ma+\left(n+\frac{1}{2}\right)b}$$

$$=\frac{\gamma\frac{b}{2}}{G'\frac{b}{2}}\left\{\frac{d}{dx}\log G(x,\ 2a,b)-\frac{d}{dx}\log \mathfrak{G}(x,2a,b)\right\}.$$

Setzt man hier a in $\frac{a}{2}$ um und wendet die Transformationsformeln am Ende von §. 3. an, so erhält man

$$\frac{\gamma x.gx}{Gx.\mathfrak{G}x}=\frac{\gamma\frac{b}{2}\cdot g\frac{b}{2}}{G'\frac{b}{2}\cdot\mathfrak{G}\frac{b}{2}}\frac{d}{dx}\log\frac{Gx}{\mathfrak{G}x},$$

oder, da

$$\gamma\frac{b}{2}\cdot G'\frac{b}{2}=-g\frac{b}{2}\cdot\mathfrak{G}\frac{b}{2}$$

ist, wenn man rechts die Differentiation vollzieht:

$$\frac{\gamma x.gx}{Gx.\mathfrak{G}x}=-\left(\frac{\gamma\frac{b}{2}}{\mathfrak{G}\frac{b}{2}}\right)^2\left(\frac{G'x}{Gx}-\frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x}\right).$$

Theils, indem man hier $x+\frac{b}{2}$ für x setzt, theils, indem man die specifischen Constanten a, b vertauscht, oder auch $a+b$, ... an die Stelle von a, b setzt, gelangt man zu folgenden sechs Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l|l}
\frac{\gamma' x}{\gamma x}-\frac{g'x}{gx}=\frac{Gx.\mathfrak{G}x}{\gamma x.gx} & \frac{G'x}{Gx}-\frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x}=p\frac{\gamma x.gx}{Gx.\mathfrak{G}x}\\
\frac{\gamma' x}{\gamma x}-\frac{G'x}{Gx}=\frac{\mathfrak{G}x.gx}{\gamma x.Gx} & \frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x}-\frac{g'x}{gx}=q\frac{\gamma x.Gx}{\mathfrak{G}x.gx}\\
\frac{\gamma' x}{\gamma x}-\frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x}=\frac{gx.Gx}{\gamma x.\mathfrak{G}x} & \frac{g'x}{gx}-\frac{G'x}{Gx}=r\frac{\gamma x.\mathfrak{G}x}{gx.Gx}
\end{array}\right\}\quad(1)$$

wo

$$p=-\left(\frac{\mathfrak{G}\frac{b}{2}}{\gamma\frac{b}{2}}\right)^2=\left(\frac{G\frac{a+b}{2}}{\gamma\frac{a+b}{2}}\right)^2,\quad q=\left(\frac{\mathfrak{G}\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}\right)^2=-\left(\frac{g\frac{a+b}{2}}{\gamma\frac{a+b}{2}}\right)^2,$$

$$r=-\left(\frac{G\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}\right)^2=\left(\frac{g\frac{b}{2}}{\gamma\frac{b}{2}}\right)^2.$$

Verbindet man nun je drei dieser sechs Gleichungen, so dass die logarithmischen Differentiale verschwinden, und reducirt, so erhält man folgende vier Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} G^2x-\mathfrak{G}^2x&=p\cdot\gamma^2x,\\ \mathfrak{G}^2x-g^2x&=q\cdot\gamma^2x,\\ g^2x-G^2x&=r\cdot\gamma^2x,\\ pg^2x+qG^2x+r\mathfrak{G}^2x&=0.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Sollen die drei ersten zugleich bestehen, so wird

$$p+q+r=0$$

erfordert. Die vierte ist eine nothwendige Folge der drei ersten.

§. 6.

Das Argument x als einfaches Integral mittelst der gebrochenen Function $\frac{\gamma x}{Gx}$ dargestellt.

Setzt man $y=\frac{\gamma x}{Gx}$, so geben die vorigen Gleichungen

$$\frac{gx}{Gx}=\sqrt{1+ry^2},\quad \frac{\mathfrak{G}x}{Gx}=\sqrt{1-py^2}$$

und

$$dy=\sqrt{1+ry^2}\,\sqrt{1-py^2}\,dx,$$

folglich

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{(1+ry^2)(1-py^2)}},$$

wo x und y zugleich verschwinden sollen. Wenn daher $-\frac{p}{r}=k^2$, also der Modul $k=\frac{\mathfrak{G}\frac{b}{2}}{g\frac{b}{2}}$ gesetzt wird, so ist

$$\sqrt{-r}\cdot\frac{\gamma x}{Gx}=\sin\text{am}(x\sqrt{-r}),\ \frac{gx}{Gx}=\cos\text{am}(x\sqrt{-r}),$$

und

$$\frac{\mathfrak{G}x}{Gx}=\Delta\,\text{am}(x\sqrt{-r}),\ \text{wo}\ \sqrt{-r}=\frac{G\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}\ \text{ist.}$$

Zugleich ist der complementäre Modul

$$k'=\sqrt{-\frac{q}{r}}=\frac{\mathfrak{G}\frac{a}{2}}{G\frac{a}{2}}.$$

§. 7.

Addition der Argumente der elliptischen Functionen.

Macht man die erste der Gleichungen (1) ganz, so erhält man für zwei beliebige Argumente x, y:

$$Gx\,\mathfrak{G}x=gx\gamma'x-\gamma x g'x,$$
$$Gy\,\mathfrak{G}y=gy\gamma'y-\gamma y g'y;$$

also, wenn man resp. mit $Gy\,\mathfrak{G}y$, $Gx\,\mathfrak{G}x$ multiplicirt und substrahirt:

$$Gy\,\mathfrak{G}y\,(gx\gamma'x-\gamma xg'x)-Gx\,\mathfrak{G}x(gy\gamma'y-\gamma yg'y)=0.$$

Andere fünf Gleichungen dieser Art unterscheiden sich nur durch gegenseitige Vertauschung der Functionszeichen γ, g, G, $\mathfrak{G}$. Addirt man zur vorigen Gleichung diejenige, welche sich ergiebt, wenn man resp. G, $\mathfrak{G}$, g, γ gegen g, γ, G, $\mathfrak{G}$ vertauscht, und setzt $x+y=\text{const}$, so ergiebt sich

$$gx\,Gy\,d(\gamma x\mathfrak{G}y)+gy\,Gx\,d(\gamma y\mathfrak{G}x)=\gamma x\,\mathfrak{G}y\,d(gx\,Gy)+\gamma y\,\mathfrak{G}x\,d(gy\,Gx).$$

und wenn man hier g, G vertauscht und die so entstandene Gleichung addirt oder substrahirt, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$(gx\,Gy\pm gy\,Gx)d(\gamma x\mathfrak{G}y\pm\gamma y\mathfrak{G}x)=(\gamma x\mathfrak{G}y\pm\gamma y\mathfrak{G}x)d(gx\,Gy\pm gy\,Gx).$$

aus denen sich durch Integration die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{Gx\,gy+gx\,Gy}{\gamma x\,\mathfrak{G}y+\mathfrak{G}x\,\gamma y}&=\frac{G(x+y)+g(x+y)}{\gamma(x+y)}\\ \frac{Gx\,gy-gx\,Gy}{\gamma x\,\mathfrak{G}y-\mathfrak{G}x\,\gamma y}&=\frac{G(x+y)-g(x+y)}{\gamma(x+y)}\end{aligned}\right\}\ (3)$$

ergeben. Multiplicirt man sie mit einander und berücksichtigt die Formeln (2), so sieht man, dass je eine der Gleichungen (3) eine nothwendige Folge der anderen ist. Noch zwei andere Paare solcher Gleichungen ergeben sich, wenn man die Function $\mathfrak{G}$ mit g oder G vertauscht. Setzt man in (3) $-y$ anstatt y, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}\frac{Gx\,gy+gx\,Gy}{\gamma x\,\mathfrak{G}y-\mathfrak{G}x\,\gamma y}&=\frac{G(x-y)+g(x-y)}{\gamma(x-y)},\\ \frac{Gx\,gy-gx\,Gy}{\gamma x\,\mathfrak{G}y+\mathfrak{G}x\,\gamma y}&=\frac{G(x-y)-g(x-y)}{\gamma(x-y)}.\end{aligned}\right\}\ (3\text{ bis})$$

Die Vertäuschung von $\mathfrak{G}$ mit g oder G liefert noch zwei andere Paare.

Die Gleichungen (3) können ihrer Natur nach nur dazu dienen, die gebrochenen Functionen der Summe $x+y$ durch solche der getrennten Argumente x, y auszudrücken. Es entsteht daher die Aufgabe, von den erwähnten gebrochenen Gleichungen zu ganzen zurückzugehen, aus deren Division jene als hervorgegangen angesehen werden können.

Für welche Argumente bekömmt die gebrochene Function $\frac{\gamma x}{gx}$ dieselben Werthe? Die Formeln am Ende von §. 4. geben uns

$$\frac{\gamma(x+ma+nb)}{g(x+ma+nb)}=(-1)^n\frac{\gamma x}{gx}.$$

Unterscheidet man daher, ob n gerade oder ungerade ist, so hat man

$$\frac{\gamma(x+ma+2nb)}{g(x+ma+2nb)}=\frac{\gamma x}{gx},\quad \frac{\gamma(ma+(2n+1)b-x)}{g(ma+(2n+1)b-x)}=\frac{\gamma x}{gx}.$$

Also wird der ganze Ausdruck

$$\gamma x\,gy-\gamma y\,gx$$

so oft verschwinden, als entweder $x-y=ma+2nb$, oder aber $x+y=ma+(2n+1)b$ ist. Schliesst man hieraus auf die linearen Factoren des erwähnten Ausdrucks, so folgt, dass derselbe durch die ganze Function

$$\gamma(x-y,\ a,\ 2b)\,G(x+y,\ a,\ 2b)$$

theilbar ist. Dürfte man annehmen, dass jener Ausdruck die linearen Factoren nur einmal und keine anderen ausser denselben enthalte, so fände Gleichheit statt, ohne dass man einen constanten Factor beizufügen brauchte, weil für $y=0$ sich die am Ende von §. 3. bewiesene Gleichung

$$\gamma(x,\, a,\, b)=\gamma(x,\; a,\; 2b)\, G(x,\, a,\, 2b)$$

ergäbe. Nähme man die durch Umsetzung von y in $-y$ entstehende Gleichung hinzu, so hätte man die zwei Gleichungen

$$\gamma x g y-\gamma y g x=\gamma(x-y,\ a,\ 2b)\, G(x+y,\ a,\ 2b),$$
$$\gamma x g y+\gamma y g x=\gamma(x+y,\ a,\ 2b)\, G(x-y,\ a,\ 2b);$$

aus deren Multiplication sich vermöge der angeführten Transformation zweiter Ordnung die Gleichung

$$\gamma^2 x\, g^2 y-\gamma^2 y\, g^2 x=\gamma(x+y)\,\gamma(x-y)$$

ergäbe. Diese Formel soll nun streng bewiesen werden. Da ihre linke Seite verschiedentlich dargestellt werden kann, so wollen wir sie kurz durch $N(x, y,\ a,\ b)$ oder nur durch $N(x,\ y)$, wenn sich die specifischen Constanten a, b von selbst verstehen, bezeichnen. Man erhält dann aus den Formeln (2)

$$\left.\begin{array}{l|l}
\gamma^2 x\, g^2 y-\gamma^2 y\, g^2 x=N(x,y) & G^2 x\,\mathfrak{G}^2 y-G^2 y\,\mathfrak{G}^2 x=pN(x,y)\\
\gamma^2 x\, G^2 y-\gamma^2 y\, G^2 x=N(x,y) & \mathfrak{G}^2 x\, g^2 y-\mathfrak{G}^2 y\, g^2 x=q\,N(x,y)\\
\gamma^2 x\,\mathfrak{G}^2 y-\gamma^2 y\,\mathfrak{G}^2 x=N(x,y) & g^2 x\, G^2 y-g^2 y\, G^2 x=rN(x,y)
\end{array}\right\}\ (4)$$

Vermöge der Transformationsformeln zweiter Ordnung hat man

$$\gamma\left(x,a,\tfrac{b}{2}\right)g\left(y,a,\tfrac{b}{2}\right)-\gamma\left(y,a,\tfrac{b}{2}\right)g\left(x,a,\tfrac{b}{2}\right)=\gamma x\, Gx\, gy\,\mathfrak{G}y-\gamma y\, Gy\, gx\,\mathfrak{G}x.$$

Wenn man aber die Formeln (3) addirt, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{G(x+y)}{\gamma(x+y)}=\dfrac{\gamma x\, Gx\, gy\,\mathfrak{G}y-\gamma y\, Gy\, gx\,\mathfrak{G}x}{N(x,y)},\\[2ex]
\dfrac{G(x-y)}{\gamma(x-y)}=\dfrac{\gamma x\, Gx\, gy\,\mathfrak{G}y+\gamma y\, Gy\,\gamma x\,\mathfrak{G}x}{N(x,y)}.
\end{array}\right\}\ (5)$$

Folglich ist

$$\gamma\left(x,a,\tfrac{b}{2}\right)g\left(y,a,\tfrac{b}{2}\right)-\gamma\left(y,a,\tfrac{b}{2}\right)g\left(x,a,\tfrac{b}{2}\right)=N(x,y)\,\frac{G(x+y)}{\gamma(x+y)},$$

$$\gamma\left(x,a,\tfrac{b}{2}\right)g\left(y,a,\tfrac{b}{2}\right)+\gamma\left(y,a,\tfrac{b}{2}\right)g\left(x,a,\tfrac{b}{2}\right)=N(x,y)\,\frac{G(x-y)}{\gamma(x-y)};$$

und wenn man beide Gleichungen mit einander multiplicirt:

$$N\left(x,y,a,\tfrac{b}{2}\right)=\overline{N(x,y)}^{\,2}\,\frac{G(x+y)\,G(x-y)}{\gamma(x+y)\,\gamma(x-y)}.$$

Diese Gleichung werde nun durch

$$\gamma\left(x+y,\, a, \frac{b}{2}\right)\gamma\left(x-y,\, a, \frac{b}{2}\right) = \gamma(x+y)\, G(x+y)\, \gamma(x-y)\, G(x-y)$$

dividirt, so ergiebt sich

$$\frac{N\left(x, y, a, \frac{b}{2}\right)}{\gamma\left(x+y, a, \frac{b}{2}\right)\gamma\left(x-y, a, \frac{b}{2}\right)} = \left\{\frac{N(x, y, a, b)}{\gamma(x+y, a, b)\gamma(x-y, a, b)}\right\}^2.$$

Eine ähnliche Gleichung entsteht durch Vertauschung von a und b. Wendet man beide hinter einander an und bedenkt, dass

$$\gamma(x, 2a, 2b) = 2\gamma\left(\frac{x}{2}, a, b\right)$$

ist, so erhält man

$$\frac{N(x,y)}{\gamma(x+y)\gamma(x-y)} = \left\{\frac{N\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)}{\gamma\frac{x+y}{2}\,\gamma\frac{x-y}{2}}\right\}^4;$$

folglich, wenn n irgend eine ganze positive Zahl bezeichnet:

$$\frac{N(x,y)}{\gamma(x+y)\gamma(x-y)} = \left\{\frac{N\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right)}{\gamma\frac{x+y}{2^n}\,\gamma\frac{x-y}{2^n}}\right\}^{4^n}.$$

Es ist aber, wenn man nach steigenden Potenzen von x, y entwickelt:

$$\frac{N(x,y)}{\gamma(x+y)\gamma(x-y)} = 1 + Lx^2y^2 + \text{u. s. w.},$$

wo

$$L = \frac{1}{q}(\gamma'''0)^2 + \frac{1}{3}\gamma'''0.g''0 - \frac{1}{12}\gamma^{V}0 - \frac{1}{4}(g''0)^2 - \frac{1}{12}g^{IV}0;$$

folglich für ein unendlich gross werdendes n:

$$\frac{N(x,y)}{\gamma(x+y)\gamma(x-y)} = \left(1 + L\frac{x^2y^2}{4^{2n}} + \text{u. s. w.}\right)^{4^n} = 1 + L\frac{x^2y^2}{4^n} + \text{u. s. w.}$$

Also endlich

$$\gamma(x+y)\gamma(x-y) = N(x,y). \qquad (6)$$

Werden die Gleichungen (5) mit einander multiplicirt, und rechts die Functionen g, $\mathfrak{G}$ mittelst der Relationen (2) in γ, G ausgedrückt, so erhält man

$$G(x+y)\,G(x-y) = G^2x\,G^2y + rp\gamma^2x\gamma^2y.$$

Ebenso ist

$$\left.\begin{aligned} g(x+y)\,g(x-y) &= g^2x\,g^2y + qr\gamma^2x\,\gamma^2y, \\ \mathfrak{G}(x+y)\mathfrak{G}(x-y) &= \mathfrak{G}^2x\mathfrak{G}^2y + pq\gamma^2x\gamma^2y. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Vermöge der Gleichung (6) werden die Gleichungen (5)

$$\gamma(x+y)\,G(x-y) = \gamma x\,Gx gy\,\mathfrak{G}y + \gamma y Gy gx\,\mathfrak{G}x,$$
$$\gamma(x-y)\,G(x+y) = \gamma x\,Gx gy\mathfrak{G}y - \gamma y\,Gy gx\,\mathfrak{G}x.$$

Durch Addition und Substraction ergeben sich hieraus zwei andere Gleichungen. Vertauscht man darin G mit g oder mit $\mathfrak{G}$, und setzt der Kürze wegen

$$s = x+y,\ t = x-y;$$

so bekömmt man folgende sechs Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l|l} \gamma s gt + \gamma t gs = 2\gamma x\,gx\,Gy\,\mathfrak{G}y & \gamma s gt - \gamma t gs = 2\gamma y\,gy\,Gx\,\mathfrak{G}x \\ \gamma s Gt + \gamma t Gs = 2\gamma x\,Gx\,gy\,\mathfrak{G}y & \gamma s Gt - \gamma t Gs = 2\gamma y\,Gy\,\mathfrak{G}x\,gx \\ \gamma s\mathfrak{G}t + \gamma t\mathfrak{G}s = 2\gamma x\,\mathfrak{G}x\,gy\,Gy & \gamma s\mathfrak{G}t - \gamma t\mathfrak{G}s = 2\gamma y\,\mathfrak{G}y\,gx\,Gx \end{array}\right\} \quad (8)$$

Sechs andere Gleichungen dieser Art ergeben sich entweder, indem man hier x um eine halbe specifische Constante vermehrt, oder auch auf folgendem Wege. Wenn man in den Formeln (3) das eine Mal x, y durch s, t ersetzt, das andere Mal hingegen y gleich x werden lässt, so kommen in beiden Fällen die rechten Seiten jener zwei Formeln gleich heraus. Man hat also

$$\frac{Gs gt + gs Gt}{\gamma s\mathfrak{G}t + \mathfrak{G}s\gamma t} = \frac{gx\,Gx}{\gamma x\,\mathfrak{G}x},$$

$$\frac{Gs gt - gs\,Gt}{\gamma s\,\mathfrak{G}t - \mathfrak{G}s\,\gamma t} = \frac{Gx\,g'x - gx\,G'x}{\gamma x\mathfrak{G}'x - \mathfrak{G}x\,\gamma' x} = \frac{r\gamma x\,\mathfrak{G}x}{-gx\,Gx}$$

in Folge der Formeln (1). Da nun die Nenner links durch die Formeln (8) bekannt sind, so erhalten die zwei vorliegenden Gleichungen sammt denen, welche daraus durch Vertauschung der Functionszeichen sich ergeben, folgende Gestalt:

$$\left.\begin{array}{l|l} Gs\mathfrak{G}t + \mathfrak{G}s Gt = 2Gx\,Gy\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y & Gs\mathfrak{G}t - \mathfrak{G}s Gt = 2p\gamma x\gamma y gx gy \\ \mathfrak{G}s\,gt + gs\mathfrak{G}t = 2\mathfrak{G}x\,\mathfrak{G}y\,gx\,gy & \mathfrak{G}s gt - gs\mathfrak{G}t = 2q\gamma x\gamma y\,Gx\,Gy \\ gs\,Gt + Gs gt = 2\,gx\,gy\,Gx\,Gy & gs\,Gt - Gs gt = 2r\gamma x\gamma y\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y \end{array}\right\} \quad (9)$$

Die drei letzten Gleichungen führen zu merkwürdigen Folgerungen. Multiplicirt man sie nämlich der Reihe nach mit gz, Gz, $\mathfrak{G}z$ und addirt, so erhält man links eine Determinante:

$$\begin{vmatrix} gs, & gt, & gz \\ Gs, & Gt, & Gz \\ \mathfrak{G}s, & \mathfrak{G}t, & \mathfrak{G}z \end{vmatrix} = 2\gamma x \gamma y (pgxgygz + q\,Gx\,Gy\,Gz + r\,\mathfrak{G}x\,\mathfrak{G}y\,\mathfrak{G}z).$$

Da die Determinate durch $\gamma x \gamma y = \gamma\frac{s+t}{2}\gamma\frac{s-t}{2}$ theilbar ist, so muss sie der Symmetrie wegen auch durch $\gamma\frac{t+z}{2}\gamma\frac{t-z}{2}.\ \gamma\frac{z-s}{2}\gamma\frac{z+s}{2}$ theilbar sein. Man setze daher in dem eingeklammerten Ausdrucke rechts $x = \frac{s+t}{2}$, $y = \frac{s-t}{2}$, drücke mittelst der Formeln (7) alles in den Argumenten $\frac{s}{2}, \frac{t}{2}, \frac{z}{2}$ aus und reducire es mittelst (2) auf zwei einzige Functionszeichen z. B. γ und g. Zerlegt man den erhaltenen Ausdruck in Factoren und beachtet die Formel (6), so ergiebt sich

$$\begin{aligned} &pgxgygz + q\,Gx\,Gy\,Gz + r\,\mathfrak{G}x\,\mathfrak{G}y\,\mathfrak{G}z \\ &= -2pqr\gamma\frac{x+y+z}{2}\gamma\frac{y+z-x}{2}\gamma\frac{z+x-y}{2}\gamma\frac{x+y-z}{2}, \end{aligned} \tag{10}$$

und wenn man in der Determinante s, t durch x, y ersetzt, so wird sie

$$\begin{vmatrix} gx, & gy, & gz \\ Gx, & Gy, & Gz \\ \mathfrak{G}x, & \mathfrak{G}y, & \mathfrak{G}z \end{vmatrix} = -4pqr\gamma\frac{y+z}{2}\gamma\frac{y-z}{2}\gamma\frac{z+x}{2}\gamma\frac{z-x}{2}\gamma\frac{x+y}{2}\gamma\frac{x-y}{2}. \tag{11}$$

Setzt man in (10) $z = x+y$ oder $z = x-y$, so verschwindet die rechte Seite, und man bekömmt

$$\left.\begin{aligned} pgxgyg(x+y) + q\,GxGyG(x+y) + r\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\,\mathfrak{G}(x+y) = 0, \\ pgxgyg(x-y) + q\,Gx\,Gy\,G(x-y) + r\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\,\mathfrak{G}(x-y) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Setzt man $z = 0$, so wird

$$pgxgy + qGxGy + r\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y = 2pqr\gamma^2\frac{x+y}{2}\gamma^2\frac{x-y}{2} \tag{13}$$

oder auch

$$pg(x+y)g(x-y) + qG(x+y)G(x-y) + r\mathfrak{G}(x+y)\mathfrak{G}(x-y) = 2pqr\gamma^2 x\gamma^2 y.$$

Setzt man $x = y = z$, so ergiebt sich

$$pg^3x + q\,G^3x + r\mathfrak{G}^3x = -2pqr\gamma^3\frac{x}{2}\gamma\frac{3x}{2}. \tag{14}$$

Vermehrt man in (10) das Argument x nach einander um a, b, $a+b$, so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$-pgxgygz+qGxGyGz+r\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}z$$
$$=-2pg\frac{x+y+z}{2}g\frac{y+z-x}{2}g\frac{z+x-y}{2}g\frac{x+y-z}{2},$$

$$pgxgygz-qGxGyGz+r\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}z$$
$$=-2qG\frac{x+y+z}{2}G\frac{y+z-x}{2}G\frac{z+x-y}{2}G\frac{x+y-z}{2},$$

$$pgxgygz+qGxGyGz-r\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}z$$
$$=-2r\mathfrak{G}\frac{x+y+z}{2}\mathfrak{G}\frac{y+z-x}{2}\mathfrak{G}\frac{z+x-y}{2}\mathfrak{G}\frac{x+y-z}{2}.$$

Vermehrt man in (10) und (15) beide Argumente y und z um $\frac{a}{2}$, so erhält man:

$$pgx\gamma y\gamma z+Gx\mathfrak{G}y\mathfrak{G}z+\mathfrak{G}xGyGz$$
$$=2\mathfrak{G}\frac{x+y+z}{2}\mathfrak{G}\frac{y+z-x}{2}G\frac{z+x-y}{2}G\frac{x+y-z}{2},$$

$$-pgx\gamma y\gamma z+Gx\mathfrak{G}y\mathfrak{G}z+\mathfrak{G}xGyGz$$
$$=2G\frac{x+y+z}{2}G\frac{y+z-x}{2}\mathfrak{G}\frac{z+x-y}{2}\mathfrak{G}\frac{x+y-z}{2},$$

$$pgx\gamma y\gamma z-Gx\mathfrak{G}y\mathfrak{G}z+\mathfrak{G}xGyGz$$
$$=-2pg\frac{x+y+z}{2}g\frac{y+z-x}{2}\gamma\frac{z+x-y}{2}\gamma\frac{x+y-z}{2},$$

$$pgx\gamma y\gamma z+Gx\mathfrak{G}y\mathfrak{G}z-\mathfrak{G}xGyGz$$
$$=-2p\gamma\frac{x+y+z}{2}\gamma\frac{y+z-x}{2}g\frac{z+x-y}{2}g\frac{x+y-z}{2}.$$

Acht andere Gleichungen dieser Art ergeben sich, wenn man p, g, G, $\mathfrak{G}$ das eine Mal resp. durch q, G, $\mathfrak{G}$, g, das andere Mal durch r, $\mathfrak{G}$, g, G ersetzt.

Vermehrt man in (11) jedes der Argumente x, y, z um $\frac{a}{2}$, so ergiebt sich

$$\begin{vmatrix} \gamma x, & \gamma y, & \gamma z \\ Gx, & Gy, & Gz \\ \mathfrak{G}x, & \mathfrak{G}y, & \mathfrak{G}z \end{vmatrix}=4pg\frac{y+z}{2}g\frac{z+x}{2}g\frac{x+y}{2}\gamma\frac{y-z}{2}\gamma\frac{z-x}{2}\gamma\frac{x-y}{2}$$

und noch zwei ähnliche Gleichungen. Von hier aus kann man zu folgender merkwürdigen Formel gelangen:

$$\begin{vmatrix} \gamma w, & \gamma x, & \gamma y, & \gamma z \\ gw, & gx, & gy, & gz \\ Gw, & Gx, & Gy, & Gz \\ \mathfrak{G}w, & \mathfrak{G}x, & \mathfrak{G}y, & \mathfrak{G}z \end{vmatrix}$$

$$=8pqr\gamma\frac{w-x}{2}\gamma\frac{w-y}{2}\gamma\frac{w-z}{2}\gamma\frac{x-y}{2}\gamma\frac{x-z}{2}\gamma\frac{y-z}{2}\gamma\frac{w+x+y+z}{2}.$$

Ich bemerke hier noch zwei Formeln, deren ich mich zum Beweise der vorliegenden bediente:

$$pqr\,\gamma w\,\gamma x\,\gamma y\,\gamma z+p\,gw\,gx\,gy\,gz+q\,Gw\,Gx\,Gy\,Gz+r\mathfrak{G}w\,\mathfrak{G}x\,\mathfrak{G}y\,\mathfrak{G}z$$
$$=2pqr\gamma\frac{w+x-y-z}{2}\gamma\frac{w+y-x-z}{2}\gamma\frac{w+z-x-y}{2}\gamma\frac{w+x+y+z}{2};\ (a)$$

worin (10) als specieller der Annahme $w=0$ entsprechender Fall enthalten ist. Setzt man $w+a$ anstatt w und reducirt, so kömmt:

$$pqr\,\gamma w\gamma x\gamma y\gamma z+p\,gwgxgygz-q\,GwGxGyGz-r\mathfrak{G}w\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}z$$
$$=2pg\frac{w+x-y-z}{2}\,g\,\frac{w+y-x-z}{2}\,g\,\frac{w+z-x-y}{2}\,g\,\frac{w+x+y+z}{2},\ (b)$$

und noch zwei andere Gleichungen dieser Art. — Die andere Formel war:

$$G\frac{x+y}{2}\,G\frac{x-z}{2}\mathfrak{G}\frac{x-y}{2}\mathfrak{G}\frac{x+z}{2}-G\frac{x-y}{2}\,G\frac{x+z}{2}\mathfrak{G}\frac{x+y}{2}\mathfrak{G}\frac{x-z}{2}$$
$$=p\gamma x\gamma\frac{y-z}{2}\,g\frac{y+z}{2},$$

und ähnliche.

§. 8.

Anwendung des Vorigen auf die Verwandlung zweiter Ordnung.

Am Schlusse des §. 3., wo die Transformation zweiter Ordnung vorkam, konnten die Ausdrücke für $g\left(x,\frac{a}{2},b\right)$, u. s. w. noch nicht gegeben werden, weil sie nicht unmittelbar aus der dortigen Grundanschauung hervorgehen. Erst die Formel (9) des vorigen Paragraphen machen es uns möglich, die Transformation zweiter Ordnung in dieser Beziehung zu vervollständigen. Setzt man nämlich in (9) $x=y$, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l|l} G2x+\mathfrak{G}2x=2G^2x\mathfrak{G}^2x, & G2x-\mathfrak{G}2x=2pr\gamma^2xg^2x, \\ \mathfrak{G}2x+g2x=2\mathfrak{G}^2xg^2x, & \mathfrak{G}2x-g2x=2q\gamma^2xG^2x, \\ g2x+G2x=2g^2xG^2x, & g2x-G2x=2r\gamma^2x\mathfrak{G}^2x. \end{array}\right\}(A).$$

Setzt man in (13) $y=0$ und verdoppelt x, so ergiebt sich

$$p\mathfrak{g}2x+qG2x+r\mathfrak{G}2x=2pqr\gamma^4x.$$

Diese Gleichungen geben die Functionen des einfachen Arguments x ausgedrückt durch solche des doppelten Arguments $2x$; sie dienen also zur Halbirung des Arguments, erfordern aber hiezu die Ausziehung vierter Wurzeln. Für den Zweck dieses Paragraphen geben die zwei Gleichungen der ersten Horizontalreihe:

$$G2x=G^2(x,\tfrac{a}{2},b)+p\gamma^2(x,\tfrac{a}{2},b),$$

$$\mathfrak{G}2x=G^2(x,\tfrac{a}{2},b)-p\gamma^2(x,\tfrac{a}{2},b).$$

Man setze hier $2a$ statt a, und dann möge p in P übergehen, so wird

$$G\left(x,\ a,\frac{b}{2}\right)=G^2x+P.\gamma^2x,$$

$$\mathfrak{G}\left(x,\ a,\frac{b}{2}\right)=G^2x-P.\gamma^2x.$$

Um die Constante P zu bestimmen, setze man $x=\frac{b}{2}$, so wird nach §. 4:

$$\left.\begin{matrix}G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}\left(\frac{b}{2},a,\frac{b}{2}\right)=\mp e^{\frac{bb'\pi}{4c}}=\mp g\frac{b}{2}\mathfrak{G}\frac{b}{2};$$

folglich

$$P=-\frac{g\frac{b}{2}\mathfrak{G}\frac{b}{2}}{\gamma^2\frac{b}{2}}=-\frac{e^{\frac{bb'\pi}{4c}}}{\gamma^2\frac{b}{2}};$$

also endlich die gesuchten Transformationsformeln:

$$G\left(x,\ a,\frac{b}{2}\right)=G^2x-\frac{g\frac{b}{2}.\mathfrak{G}\frac{b}{2}}{\gamma^2\frac{b}{2}}\gamma^2x,$$

$$\mathfrak{G}\left(x,\ a,\frac{b}{2}\right)=G^2x+\frac{g\frac{b}{2}.\mathfrak{G}\frac{b}{2}}{\gamma^2\frac{b}{2}}\gamma^2x;$$

und ebenso

$$g\left(x,\frac{a}{2},b\right)=g^2x-\frac{G\frac{a}{2}.\mathfrak{G}\frac{a}{2}}{\gamma^2\frac{a}{2}}\gamma^2x,$$

$$\mathfrak{G}\left(x,\frac{a}{2},b\right)=g^2x+\frac{G\frac{a}{2}\cdot\mathfrak{G}\frac{a}{2}}{\gamma^2\frac{a}{2}}\gamma^2x.$$

Betrachtet man die in §. 5. definirten Constanten p, q, r als Functionen der specifischen Constanten a, b und bezeichnet sie daher durch $p(a,b)$, u. s. f., so hat man

$$\left.\begin{aligned}
p\left(\frac{a}{2},b\right)&=\left(\frac{G\frac{a}{2}-\mathfrak{G}\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}\right)^2=(\sqrt{-r(a,b)}-\sqrt{q(a,b)})^2,\\
q\left(\frac{a}{2},b\right)&=\frac{4G\frac{a}{2}.\mathfrak{G}\frac{a}{2}}{\gamma^2\frac{a}{2}}=4\sqrt{-r(a,b).q(a,b)},\\
r\left(\frac{a}{2},b\right)&=-\left(\frac{G\frac{a}{2}+\mathfrak{G}\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}\right)^2=-(\sqrt{-r(a,b)}+\sqrt{q(a,b)})^2,
\end{aligned}\right\}\quad(B)$$

$$p\left(a,\frac{b}{2}\right)=-\frac{4g\frac{b}{2}.\mathfrak{G}\frac{b}{2}}{\gamma^2\frac{b}{2}}=4\sqrt{-r(a,b).p(a,b)},$$

$$q\left(a,\frac{b}{2}\right)=-\frac{\left(g\frac{b}{2}-\mathfrak{G}\frac{b}{2}\right)^2}{\gamma^2\frac{b}{2}}=(\sqrt{-r(a,b)}-\sqrt{p(a,b)})^2,$$

$$r\left(a,\frac{b}{2}\right)=\frac{\left(g\frac{b}{2}+\mathfrak{G}\frac{b}{2}\right)^2}{\gamma^2\frac{b}{2}}=-(\sqrt{-r(a,b)}+\sqrt{p(a,b)})^2.$$

§. 9.

Zur Verwandlung von ungerader Ordnung.

In §. 3. wurde gezeigt, wie sich ganze elliptische Functionen, die zur Darstellung $\left(\frac{a}{h},\frac{b}{k}\right)$ (wo h, k zwei ungerade Zahlen sind) gehören, als endliche Producte solcher darstellen lassen, die zur Darstellung (a,b) gehören. Hier sollen nun die bestimmten Functionen, wie $\gamma\left(\frac{a}{2h}, \frac{a}{h}, \frac{b}{k}\right)$, einer besonderen Betrachtung unterworfen werden.

Der Kürze wegen wird hier durch P ein endliches Doppelproduct bezeichnet werden, welches sich über alle den Gränzbedingungen

$$-\frac{h-1}{2} \overline{\overline{<}}\, m \,\overline{\overline{<}} \frac{h-1}{2},\ -\frac{k-1}{2} \overline{\overline{<}}\, n \,\overline{\overline{<}} \frac{k-1}{2}$$

genügenden ganzen Werthe von m,n erstreckt. Wird in diesem Producte der dem Systeme $m=0$, $n=0$ entsprechende Factor weggelassen, und wird von je zweien diametral entgegengesetzten Systemen (m, n), $(-m, -n)$ nur das eine berücksichtigt, so soll das alsdann nur $\frac{pq-1}{2}$ Factoren zählende Product durch Π angedeutet werden.

Nach §. 3. ist nun

$$\gamma\left(\frac{a}{2h}, \frac{a}{h}, \frac{b}{k}\right) = (-1)^{\frac{hk-1}{2}} \frac{P.\gamma\left(\frac{a}{2h}+\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)}{\Pi\gamma^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)}.$$

Für ein constantes n bekömmt hier das Argument $\frac{a}{2h}+\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}$ die h Werthe

$$-\frac{a}{2}+\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k},\ \frac{a}{2}-\frac{ma}{h}-\frac{nb}{k},\ \frac{a}{2}\left[1 \overline{\overline{<}}\, m \,\overline{\overline{<}} \frac{h-1}{2}\right].$$

Wendet man dann die Formeln an, welche zur Verwandlung des Arguments $x \pm \frac{a}{2}$ in x dienen, so bekömmt man:

$$\gamma\left(\frac{a}{2h}, \frac{a}{h}, \frac{b}{k}\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \gamma^{hk}\frac{a}{2} \cdot e^{-\frac{(h^2-1)kaa'\pi}{8hc}}\ \Pi \frac{g^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)}{\gamma^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)},$$

$$G\left(\frac{a}{2h}, \frac{a}{h}, \frac{b}{k}\right) = G^{hk}\frac{a}{2} \cdot e^{-\frac{(h^2-1)kaa'\pi}{8hc}}\ \Pi \frac{\mathfrak{G}^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)}{G^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)},$$

$$\gamma\left(\frac{b}{2k},\frac{a}{h},\frac{b}{k}\right)=(-1)^{\frac{k-1}{2}}\gamma^{hk}\frac{b}{2}\cdot e^{-\frac{(k^2-1)hbb'\pi}{8kc}}\;\Pi\frac{G^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)}{\gamma^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)},$$

$$g\left(\frac{b}{2k},\frac{a}{h},\frac{b}{k}\right)=g^{hk}\frac{b}{2}\cdot e^{-\frac{(k^2-1)hbb'\pi}{8kc}}\;\Pi\frac{\mathfrak{G}^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)}{g^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)};$$

und hieraus

$$p\left(\frac{a}{h},\frac{b}{k}\right)=(-1)^{\frac{k-1}{2}}p^{hk}\,\Pi\frac{\gamma^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)g^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)}{G^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)\mathfrak{G}^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)},$$

$$q\left(\frac{a}{h},\frac{b}{k}\right)=(-1)^{\frac{k-1}{2}}q^{hk}\,\Pi\frac{\gamma^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)G^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)}{\mathfrak{G}^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)g^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)},$$

$$r\left(\frac{a}{h},\frac{b}{k}\right)=(-1)^{\frac{k-1}{2}}r^{hk}\,\Pi\frac{\gamma^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)\mathfrak{G}^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)}{g^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)G^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)}.$$

Wendet man die Formeln (6) und (7) des §. 7. auf die Transformationsformeln des §. 3. an, so erhält man

$$\gamma\left(x,\frac{a}{h},\frac{b}{k}\right)=(-1)^{\frac{hk-1}{2}}\gamma x.\,\Pi\frac{g^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)\gamma^2x-\gamma^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)g^2x}{\gamma^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)},$$

$$g\left(x,\frac{a}{h},\frac{b}{k}\right)=gx\,\Pi\frac{g^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)g^2x+qr\gamma^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)\gamma^2x}{g^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)},$$

u. s. f.

Ist die reelle Componente von $\frac{b}{a}$ ein positiver rationaler Bruch $\frac{h}{k}$, dessen Zähler und Nenner ungerade sind, so kann man die Functionen $\gamma(x.a,b)$, u. s. w. mittelst der vorigen Transformationsformeln als endliche Producte von Functionen wie $\gamma(y,\ 1,\ 1+\theta\sqrt{-1})$

darstellen, wo $\frac{kb}{ha} = 1 + \theta\sqrt{-1}$ ist, und somit durch solche elliptische Functionen ausdrücken, wo das specifiche Verhältniss rein imaginär, d. h. wo der Modul reell ist.

§. 10.

Herleitung der ganzen elliptischen Functionen aus den gebrochenen.

In §. 7. ist eigentlich die Addition der Argumente für ganze elliptische Functionen nicht gelungen; denn es wurde nur ein Product zweier ganzen Functionen von $x+y$ und $x-y$ in ganzen Functionen der getrennten Argumente x, y ausgedrückt. Dagegen sind die dortigen Formeln so beschaffen, dass durch dieselben die Aufgabe der Addition der Argumente für eine gebrochene elliptische Function wirklich gelöst ist. Es ergiebt sich z. B. aus (8)

$$\gamma(x+y)\,G(x-y) = \gamma x Gx gy \mathfrak{G} y + \gamma y Gy gx \mathfrak{G} x,$$

und nach (7) ist

$$G(x+y)\,G(x-y) = G^2 x G^2 y + rp\gamma^2 x \gamma^2 y.$$

Dividirt man diese beiden Gleichungen durch einander, so fällt das Argument $x-y$ weg, und man bekömmt dann eine wirkliche Additionsformel für die gebrochene Function $\frac{\gamma}{G}$, nämlich

$$\frac{\gamma(x+y)}{G(x+y)} = \frac{\gamma x Gx gy \mathfrak{G} y + \gamma y Gy gx \mathfrak{G} x}{G^2 x G^2 y + rp\gamma^2 x \gamma^2 y},$$

oder, was dasselbe ist,

$$\sin\mathrm{am}(x+y) = \frac{\sin\mathrm{am}x\cos\mathrm{am}y\,\Delta\,\mathrm{am}y + \sin\mathrm{am}y\cos\mathrm{am}x\,\Delta\,\mathrm{am}x}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}x\sin^2\mathrm{am}y},$$

wenn $r = -1$, $p = k^2$ angenommen wird.

Was so in §. 7. für gebrochene Functionen geleistet ist, soll nun auch für ganze geschehen, freilich nicht in endlicher Weise, sondern nur mittelst Differentialgleichungen. Im Zusammenhange hiemit wird sich dann eine ganze Function, wie gx, mittelst Integrationen aus irgend einer gebrochenen Function, wie z. B. $\frac{\gamma x}{gx}$, herleiten lassen.

Aus der Formel (7) in §. 7. folgt

$$\frac{g(x+y)g(x-y)}{g^2 x g^2 y} = 1 + qr\frac{\gamma^2 x \gamma^2 y}{g^2 x g^2 y}.$$

Differentiirt man diese Gleichung logarithmisch nach x und berücksichtigt, dass nach (1)

$$\frac{d\log}{dx}\left(\frac{\gamma x}{gx}\right)=\frac{Gx\mathfrak{G}x}{\gamma x gx}$$

ist, so erhält man

$$\frac{g'(x+y)}{g(x+y)}+\frac{g'(x-y)}{g(x-y)}-2\frac{g'x}{gx}=2qr\frac{\gamma^2x\gamma^2y}{g(x+y)g(x-y)}-\frac{Gx\mathfrak{G}x}{\gamma x gx}.$$

Durch Vertauschung von x und y ergiebt sich

$$\frac{g'(x+y)}{g(x+y)}-\frac{g'(x-y)}{g(x-y)}-2\frac{g'y}{gy}=2qr\frac{\gamma^2x\gamma^2y}{g(x+y)g(x-y)}-\frac{Gy\mathfrak{G}y}{\gamma y gy}.$$

Addirt man beide Gleichungen, beachtet, dass nach (8)

$$\gamma x gx Gy\mathfrak{G}y+\gamma y gy Gx\mathfrak{G}x=\gamma(x+y)g(x-y),$$

und halbirt, so ergiebt sich

$$\frac{g'(x+y)}{g(x+y)}-\frac{g'x}{gx}-\frac{g'y}{gy}=qr\frac{\gamma x\gamma y\gamma(x+y)}{gxgyg(x+y)}, \qquad (16)$$

und zwei andere Formeln dieser Art entstehen, wenn man von g zu G und zu $\mathfrak{G}$ fortgeht. Da die gebrochene Function $\frac{\gamma(x+y)}{g(x+y)}$ sich durch gebrochene Functionen der getrennten Argumente x, y darstellen lässt, so enthält die vorliegende Gleichung die Lösung der Aufgabe, die ganze Function $g(x+y)$ ohne Beihülfe des Arguments $x-y$ einzig durch Functionen der getrennten Argumente x, y darzustellen.

Differentiirt man die Gleichung (16) nach y und setzt dann $y=0$, so erhält man

$$\frac{d\frac{g'x}{gx}}{dx}-g''0=qr\frac{\gamma^2x}{g^2x};$$

folglich

$$\frac{g'x}{gx}=xg''0+qr\int\left(\frac{\gamma x}{gx}\right)^2dx.$$

Es bestehen demnach folgende Formeln, durch welche die ganzen Functionen γ, g, G, $\mathfrak{G}$ mittelst der gebrochenen $\frac{\gamma x}{Gx}$, u. s. w. ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{g'x}{gx} &= xg''0+qr\int\frac{\gamma^2 x}{g^2 x}dx \\
&= xG''0+r\int\frac{\mathfrak{G}^2 x}{g^2 x}dx = x\mathfrak{G}''0-q\int\frac{G^2 x}{g^2 x}dx, \\
\frac{G'x}{Gx} &= xG''0+rp\int\frac{\gamma^2 x}{G^2 x}dx \\
&= x\mathfrak{G}''0+p\int\frac{g^2 x}{G^2 x}dx = xg''0-r\int\frac{\mathfrak{G}^2 x}{G^2 x}dx, \\
\frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x} &= x\mathfrak{G}''0+pq\int\frac{\gamma^2 x}{\mathfrak{G}^2 x}dx \\
&= xg''0+q\int\frac{G^2 x}{\mathfrak{G}^2 x}dx = xG''0-p\int\frac{g^2 x}{\mathfrak{G}^2 x}dx, \\
\frac{\gamma'x}{\gamma x} &= xg''0-\int\frac{g^2 x}{\gamma^2 x}dx \\
&= xG''0-\int\frac{G^2 x}{\gamma^2 x}dx = x\mathfrak{G}''0-\int\frac{\mathfrak{G}^2 x}{\gamma^2 x}dx.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Uebrigens ist

$$G''0-\mathfrak{G}''0=p,\ \mathfrak{G}''0-g''0=q,\ g''0-G''0=r.$$

Um noch eine der Gleichung (16) ähnliche Gleichung für die Function γ zu bekommen, setze man in jener $x+\frac{\alpha}{2}$ anstatt x, so wird man

$$\frac{\gamma'(x+y)}{\gamma(x+y)}-\frac{\gamma'x}{\gamma x}-\frac{g'y}{gy}=\frac{gxg(x+y)\gamma y}{\gamma x\gamma(x+y)gy}$$

erhalten. Zieht man hiervon die Gleichung

$$\frac{\gamma'y}{\gamma y}-\frac{g'y}{gy}=\frac{Gy\mathfrak{G}y}{\gamma ygy}$$

ab, so erhält man:

$$\frac{\gamma'(x+y)}{\gamma(x+y)}-\frac{\gamma'x}{\gamma x}-\frac{\gamma'y}{\gamma y}=\frac{gxg(x+y)\gamma^2 y-\gamma x\gamma(x+y)Gy\mathfrak{G}y}{\gamma x\gamma(x+y)\gamma ygy}.$$

Man multiplicire rechts Zähler und Nenner mit q, setze

$$q\gamma^2 y=\mathfrak{G}^2 y-g^2 y$$

und beachte die Gleichung

$$gy\mathfrak{G}x\mathfrak{G}(x+y)+qGy\gamma x\gamma(x+y)-\mathfrak{G}ygxg(x+y)=0,$$

welche sich aus (12) ergiebt, wenn man dort $x+\frac{b}{2}$ anstatt x setzt. Dann erhält man

$$\frac{\gamma'(x+y)}{\gamma(x+y)}-\frac{\gamma'x}{\gamma x}-\frac{\gamma'y}{\gamma y}=\frac{\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}(x+y)-gxgyg(x+y)}{q\gamma x\gamma y\gamma(x+y)}$$

$$=\frac{gxgyg(x+y)-GxGyG(x+y)}{r\gamma x\gamma y\gamma(x+y)}=\frac{GxGyG(x+y)-\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}(x+y)}{p\gamma x\gamma y\gamma(x+y)}.$$

§. 11.

Ueber die elliptischen Integrale der dritten Art.

Die Theorie der elliptischen Integrale dritter Art ist in folgenden einfachen Betrachtungen enthalten. Es ist

$$\frac{d}{dx}\log\frac{\gamma(x+y)}{\gamma(x-y)}=\frac{\gamma'(x+y)}{\gamma(x+y)}-\frac{\gamma'(x-y)}{\gamma(x-y)}=\frac{d}{dy}\log\left[\gamma(x+y)\gamma(x-y)\right];$$

also, wenn man (6) berücksichtigt und nach x integrirt:

$$\log\frac{\gamma(x+y)}{\gamma(x-y)}=2\int\frac{gyg'y\gamma^2x-\gamma y\gamma'yg^2x}{\gamma^2xg^2y-\gamma^2yg^2x}dx=\text{u. s. w.}$$

Ebenso

$$\log\frac{g(x+y)}{g(x-y)}=2\int\frac{g^2xgyg'y+q\gamma^2x\gamma y\gamma'y}{g^2xg^2y+q\gamma^2x\gamma^2y}dx,\ \text{u. s. w.}$$

Lässt man hier unter dem Integrationszeichen das Argument x nur mit den Functionszeichen γ, G erscheinen, so erhalten diese vier Gleichungen folgende Gestalt:

$$\log\frac{\gamma(x+y)}{\gamma(x-y)}=2\int\frac{\gamma^2xGyG'y-G^2x\gamma y\gamma'y}{\gamma^2xG^2y-G^2x\gamma^2y}dx,$$

$$\log\frac{g(x+y)}{g(x-y)}=2\int\frac{G^2xgyg'y+r\gamma^2x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}'y}{G^2xg^2y+r\gamma^2x\mathfrak{G}^2y}dx,$$

$$\log\frac{G(x+y)}{G(x-y)}=2\int\frac{G^2xGyG'y+q\gamma^2x\gamma y\gamma'y}{G^2xG^2y+q\gamma^2x\gamma^2y}dx,$$

$$\log\frac{\mathfrak{G}(x+y)}{\mathfrak{G}(x-y)}=2\int\frac{G^2x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}'y-p\gamma^2xgyg'y}{G^2x\mathfrak{G}^2y-p\gamma^2xg^2y}dx.$$

Setzt man endlich

$$a=2K,\ b=2K'\sqrt{-1},\ \text{also}\ c=4KK';$$

so werden

$$p=k^2,\ q=k'^2,\ r=-1,$$

und man erhält folgende Formeln:

$$\log\frac{\gamma(x+\alpha)}{\gamma(x-\alpha)}=2\int\frac{\frac{G'\alpha}{G\alpha}\sin^2\mathrm{am}x-\frac{\gamma'\alpha}{\gamma\alpha}\sin^2\mathrm{am}\alpha}{\sin^2\mathrm{am}x-\sin^2\mathrm{am}\alpha}dx,$$

$$\log\frac{g(x+\alpha)}{g(x-\alpha)}=2\int\frac{\cos^2\mathrm{am}\alpha\frac{g'\alpha}{g\alpha}-\Delta^2\mathrm{am}\alpha\frac{\mathfrak{G}'\alpha}{\mathfrak{G}\alpha}\sin^2\mathrm{am}x}{\cos^2\mathrm{am}\alpha-\Delta^2\mathrm{am}\alpha\sin^2\mathrm{am}x}dx,$$

$$\log\frac{G(x+\alpha)}{G(x-\alpha)}=2\int\frac{\frac{G'\alpha}{G\alpha}-k^2\sin^2\mathrm{am}\alpha\frac{\gamma'\alpha}{\gamma\alpha}\sin^2\mathrm{am}x}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\alpha\sin^2\mathrm{am}x}dx,$$

$$\log\frac{\mathfrak{G}(x+\alpha)}{\mathfrak{G}(x-\alpha)}=2\int\frac{\Delta^2\mathrm{am}\alpha\frac{\mathfrak{G}'\alpha}{\mathfrak{G}\alpha}-k^2\cos^2\mathrm{am}\alpha\frac{g'\alpha}{g\alpha}\sin^2\mathrm{am}x}{\Delta^2\mathrm{am}\alpha-k^2\cos^2\mathrm{am}\alpha\sin^2\mathrm{am}x}dx$$

Wird das elliptische Integral dritter Art durch $\int\frac{dx}{1+n\sin^2\mathrm{am}x}$ dargestellt, so erstrecken sich für ein reelles α die vorigen Formeln nur auf diejenigen Werthe von n, welche innerhalb der Gränzen

$$-\infty<n<-1,\ -k^2<n<0$$

enthalten sind. Giebt man aber dem Argument α einen rein imaginären Werth, so gelten die angeführten Formeln für diejenigen Werthe von n, welche innerhalb der Gränzen

$$0<n<+\infty,\ -1<n<-k^2$$

enthalten sind. In dieser Aufzählung sind also alle reellen Werthe von n begriffen.

§. 12.

Ueber die Addition der Argumente bei den elliptischen Integralen der dritten Art.

Der Zweck dieses Paragraphen erfordert ein Zurückgehen auf die Formeln (a) und (b) des §. 7. Setzt man in (a)

$$w = s + t,\ x = s - t,\ y = u + v,\ z = u - v$$

und bezeichnet der Kürze wegen das Product

$$\gamma(s+t)\,\gamma(s-t)\,\gamma(u+v)\,\gamma(u-v)$$

durch $\gamma(st,\,uv)$, u. s. f., so verwandelt sich die angeführte Formel in

$$pqr\gamma\,(st,uv) + pg\,(st,uv) + qG\,(st,uv) + r\mathfrak{G}\,(st,uv) = -2pqr\gamma\,(su,vt)$$

und hieraus durch Vertauschung von u und v:

$$-pqr\gamma\,(st,uv) + pg\,(st,uv) + qG\,(st,uv) + r\mathfrak{G}\,(st,uv) = 2pqr\gamma\,(sv,tu).$$

Addirt und subtrahirt man diese zwei Gleichungen, so ergiebt sich

$$pg\,(st,uv) + qG\,(st,uv) + r\mathfrak{G}\,(st,uv) = pqr\,\{\gamma(sv,tu) - \gamma\,(su,vt)\}, \quad (c)$$

$$\gamma\,(st,uv) + \gamma\,(su,vt) + \gamma\,(sv,tu) = 0. \quad (d)$$

Auf gleiche Art gewinnt man aus (b) die beiden Gleichungen

$$pqr\gamma\,(st,uv) + pg\,(st,uv) - qG\,(st,uv) - r\mathfrak{G}(st,uv) = 2pg\,(su,vt), \quad (e)$$

$$-pqr\gamma\,(st,uv) + pg(st,uv) - qG\,(st,uv) - r\mathfrak{G}\,(st,uv) = 2pg\,(sv,tu); \quad (f)$$

und aus diesen durch Addition und Subtraction

$$pg\,(st,uv) - qG\,(st,uv) - r\mathfrak{G}\,(st,uv) = p\,\{g\,(su,vt) + g\,(sv,tu)\}, \quad (g)$$

$$qr\gamma\,(st,uv) = g(su,tv) - g\,(sv,tu). \quad (h)$$

Ich erlaube mir eine kleine Zwischenbemerkung. Wenn man in (f) von der Function g zu G fortgeht, und die so entstandene Gleichung zu der unveränderten (e) hinzuaddirt, so ergiebt sich

$$pg\,(su,vt) + pG\,(sv,tu) + r\mathfrak{G}\,(st,uv) = 0.$$

Die Gleichungen (c), (d), (g), (h) können nun bei der Addition der Argumente der elliptischen Functionen dritter Art auf folgende Weise benutzt werden. Setzt man darin

$$s = \frac{x+y}{2} + \alpha,\ t = \frac{x+y}{2} - \alpha,\ u = \frac{x+y}{2},\quad v = \frac{x-y}{2};$$

so wird

$$pqr\,\{\gamma\alpha\gamma(x+y+\alpha)\,\gamma(x-\alpha)\,\gamma\,(y-\alpha) - \gamma\alpha\gamma\,(x+y-\alpha)\,\gamma\,(x+\alpha)\gamma(y+\alpha)\}$$
$$= pg2\alpha g\,(x+y)\,gxgy + qG2\alpha G(x+y)\,GxGy + r\mathfrak{G}2\alpha\mathfrak{G}(x+y)\,\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y,$$

$$\gamma\alpha\gamma\,(x+y+\alpha)\,\gamma\,(x-\alpha)\,\gamma\,(y-\alpha) + \gamma\alpha\gamma(x+y-\alpha)\,\gamma\,(x+\alpha)\,\gamma\,(y+\alpha)$$
$$= \gamma 2\alpha\gamma(x+y)\,\gamma x\,\gamma y,$$

$$p\,\{g\alpha g\,(x+y+\alpha)\,g\,(x-\alpha)\,g\,(y-\alpha) + g\alpha g\,(x+y-\alpha)\,g\,(x+\alpha)\,g\,(y+\alpha)\}$$
$$= pg2\alpha g(x+y)\,gxgy - qG2\alpha G\,(x+y)\,GxGy - r\mathfrak{G}2\alpha\mathfrak{G}\,(x+y)\,\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y,$$

$$g\alpha g(x+y+\alpha)g(x-\alpha)g(y-\alpha)-g\alpha g(x+y-\alpha)g(x+\alpha)g(y+\alpha)$$
$$=qr\gamma^2\alpha\gamma(x+y)\gamma x\gamma y.$$

Mittelst der Formeln (12) in §. 7. und (A) in §. 8. kann man die vorliegenden Gleichungen auf folgende Art umgestalten. Es sei der Kürze wegen

$$M=g\alpha G\alpha\mathfrak{G}\alpha\gamma x\gamma y\gamma(x+y),$$
$$N=\frac{\gamma\alpha}{p}\{G^2\alpha\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}(x+y)-\mathfrak{G}^2\alpha GxGyG(x+y)\}$$
$$=\frac{\gamma\alpha}{q}\{\mathfrak{G}^2\alpha gxgyg(x+y)-g^2\alpha\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}(x+y)\}$$
$$=\frac{\gamma\alpha}{r}\{g^2\alpha GxGyG(x+y)-G^2\alpha gxgyg(x+y)\},$$

so ist

$$\frac{\gamma(x+y+\alpha)\gamma(x-\alpha)\gamma(y-\alpha)}{\gamma(x+y-\alpha)\gamma(x+\alpha)\gamma(y+\alpha)}=\frac{M+N}{M-N},$$

$$M^2-N^2=(g^2\alpha\gamma^2x-\gamma^2\alpha g^2x)(g^2\alpha\gamma^2y-\gamma^2\alpha g^2y)(g^2\alpha\gamma^2(x+y)-\gamma^2\alpha g^2(x+y))$$

und, wenn man, um zu der von Jacobi eingeführten Bezeichnungsart der gebrochenen elliptischen Functionen überzugehen, $p=k^2$, $q=k'^2$, $r=-1$ annimmt, und dann der Kürze wegen

$$\varrho\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}=\cos\operatorname{am}\alpha\Delta\operatorname{am}\alpha\sin\operatorname{am}x\sin\operatorname{am}y\sin\operatorname{am}(x+y),$$

$$\varrho\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}=\sin\operatorname{am}\alpha(\cos\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}y\cos\operatorname{am}(x+y)-\cos^2\operatorname{am}\alpha)$$

folglich

$$\varrho^2=(\sin^2\operatorname{am}x-\sin^2\operatorname{am}\alpha)(\sin^2\operatorname{am}y-\sin^2\operatorname{am}\alpha)(\sin^2\operatorname{am}(x+y)-\sin^2\operatorname{am}\alpha)$$

setzt, so ist

$$\log\frac{\gamma(x+y+\alpha)\gamma(x-\alpha)\gamma(y-\alpha)}{\gamma(x+y-\alpha)\gamma(x+\alpha)\gamma(y+\alpha)}=2\theta.$$

Setzt man ferner

$$P=g\alpha\{G^2\alpha gxgyg(x+y)+r\gamma^2\alpha\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}(x+y)\}$$
$$=g\alpha\{\mathfrak{G}^2\alpha gxgyg(x+y)-q\gamma^2\alpha GxGyG(x+y)\},$$
$$Q=qr\gamma\alpha G\alpha\mathfrak{G}\alpha\gamma x\gamma y\gamma(x+y);$$

so ist

$$\frac{g(x+y+\alpha)g(x-\alpha)g(y-\alpha)}{g(x+y-\alpha)g(x+\alpha)g(y+\alpha)}=\frac{P+Q}{P-Q},$$

$$P^2-Q^2=$$
$$(g^2\alpha g^2x+q r\gamma^2\alpha\gamma^2x)(g^2\alpha g^2y+q r\gamma^2\alpha\gamma^2y)(g^2\alpha g^2(x+y)+q r\gamma^2\alpha\gamma^2(x+y)).$$

Geht man von g zu G über und gebraucht dann gebrochene Functionen, so hat man dieses System von Gleichungen:

$$\varrho\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}=\Delta^2\mathrm{am}\alpha+k^2\sin^2\mathrm{am}\alpha\cos\mathrm{am}\,x\cos\mathrm{am}\,y\cos\mathrm{am}\,(x+y),$$
$$\varrho\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}=k^2\sin\mathrm{am}\alpha\cos\mathrm{am}\alpha\,\Delta\,\mathrm{am}\alpha\sin\mathrm{am}\,x\sin\mathrm{am}\,y\sin\mathrm{am}\,(x+y),$$
$$\log\frac{G(x+y-\alpha)\,G(x+\alpha)\,G(y+\alpha)}{G(x+y+\alpha)\,G(x-\alpha)\,G(y-\alpha)}=2\theta.$$

Die Legendre'sche Formel für die Addition der Argumente der Amplituden bei den elliptischen Integralen dritter Art kann auf folgendem Wege erhalten werden. Es ist

$$\frac{G(x+\alpha)\,G(y+\alpha)}{G(x-\alpha)\,G(y-\alpha)}=\frac{G(s+v)\,G(s-v)}{G(t+v)\,G(t-v)}=\frac{G(sv,uu)}{G(tv,uu)}$$

Trägt man aber die obige Formel (h) von g auf G über und setzt dann $t=u$ hinein, so giebt sie

$$G(sv,\ uu)=G(su,vu)-pr\gamma\,(su,uv);$$

folglich ist

$$\frac{G(x+\alpha)\,G(y+\alpha)}{G(x-\alpha)\,G(y-\alpha)}=\frac{G(x+y+\alpha)\,G\alpha Gx Gy-pr\gamma(x+y+\alpha)\gamma\alpha\gamma x\gamma y}{G(x+y-\alpha)G\alpha Gx Gy+pr\gamma(x+y-\alpha)\gamma\alpha\gamma x\gamma y},$$

und hieraus

$$\frac{G(x+y-\alpha)\,G(x+\alpha)\,G(y+\alpha)}{G(x+y+\alpha)\,G(x-\alpha)\,G(y-\alpha)}$$
$$=\frac{1+k^2\sin\mathrm{am}\alpha\sin\mathrm{am}\,x\sin\mathrm{am}\,y\sin\mathrm{am}\,(x+y+\alpha)}{1-k^2\sin\mathrm{am}\alpha\sin\mathrm{am}\,x\sin\mathrm{am}\,y\sin\mathrm{am}\,(x+y-\alpha)}.$$

Wie dieser Ausdruck mit der Addition der Argumente der Amplituden der elliptischen Integrale dritter Art zusammhängt, ist aus dem vorhergehenden Paragraphen klar.

§. 13.

Wenn das Argument x als Function von $z=\dfrac{g(x,a,b)}{G(x,a,b)}$ und der specifischen Constanten a, b gedacht wird, die in Beziehung auf die beiden letztern genommene Variation δx des Arguments (z als constant vorausgesetzt) zu bestimmen.

Setzt man

$$\frac{\gamma x}{Gx}=u,\ \frac{\mathfrak{G}x}{Gx}=v;$$

so hat man vermöge der Gleichungen (2) und (1) des §. 5.:

$$ru^2=z^2-1,\ -rv^2=pz^2+q,\ 1=ruv\frac{dx}{dz}.$$

Die letzte Gleichung wird daher

$$(z^2-1)(pz^2+q)\left(\frac{dx}{dz}\right)^2=-1,$$

und, wenn man sie nach a, b logarithmisch differentiirt, so erhält man

$$2ruv\,\delta\frac{dx}{dz}+\frac{\delta p}{p}-\frac{p\delta q-q\delta p}{prv^2}=0.$$

Nun ist $\delta\frac{dx}{dz}=\frac{d\delta x}{dz}$, und wenn man die vorliegende Gleichung mit dx multiplicirt, so wird

$$ruv\,dx\frac{d\delta x}{dz}=\frac{d\delta x}{dz}dz=d\delta x,$$

wo das Zeichen d eine Differentiation nach z anzeigt, während a, b als constant gedacht werden. Integrirt man nun in Beziehung auf z oder x allein, so erhält man

$$\delta x=-x\frac{\delta p}{2p}+\frac{p\delta q-q\delta p}{2pr}\int\left(\frac{Gx}{\mathfrak{G}x}\right)^2dx.$$

Da die Werthe $x=0$ und $z=1$ immer zusammengehören, was auch a, b sein mögen, so verschwinden x und δx gleichzeitig; also muss auch das Integral rechts für $x=0$ verschwinden. Vermöge der Formeln (17) in §. 10. kann aber dasselbe durch den ebenfalls für $x=0$ verschwindenden Ausdruck

$$\frac{1}{q}\left(\frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x}-x\,g''0\right)$$

ersetzt werden, wodurch man

$$\delta x=-x\left(\frac{\delta p}{2p}+g''0\frac{p\delta q-q\delta p}{2pqr}\right)+\frac{p\delta q-q\delta p}{2pqr}\frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x}$$

erhält. Setzt man jetzt $x=a+\omega$, so wird $z=-\frac{g\omega}{G\omega}$, und, wenn ω eine verschwindend kleine Grösse bezeichnet,

$$z = -\frac{1 + z\omega^2 g''0}{1 + z\omega^2 G''0} = -1 - \frac{1}{2}\omega^2(g''0 - G''0) = -(1 + \frac{1}{2} r\,\omega^2);$$

folglich

$$\frac{\delta r}{r} + 2\frac{\delta\omega}{\omega} = 0;$$

also ist $\delta\omega$ selbst von der Ordnung ω, so dass man $\delta x = \delta a$ setzen darf. Aus den Formeln am Schluss von §. 4. ergiebt sich aber

$$\frac{\mathfrak{G}'(x+a)}{\mathfrak{G}(x+a)} = \frac{a'\pi}{c} + \frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x}; \text{ also } \frac{\mathfrak{G}'a}{\mathfrak{G}x} = \frac{a'\pi}{c}.$$

Setzt man jetzt der Kürze wegen

$$\frac{p\delta q - q\delta p}{2pqr} = -\varepsilon, \quad \frac{\delta p}{2p} + g''0\frac{p\delta q - q\delta p}{2pqr} = \frac{g''0.p\delta q - G''0.q\delta p}{2pqr} = -\eta,$$

so dass

$$\delta x = x\eta - \frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x}\varepsilon$$

wird, so bekömmt man für $x = a$ und $x = b$ folgende zur Bestimmung von ε und η dienende Gleichungen:

$$\delta a = a\eta - \frac{a'\pi}{c}\varepsilon,$$

$$\delta b = b\eta - \frac{b'\pi}{c}\varepsilon;$$

woraus sich

$$\varepsilon = \frac{a\delta b - b\delta a}{2\pi\sqrt{-1}}, \quad \eta = \frac{a'\delta b - b'\delta a}{2c\sqrt{-1}}$$

ergeben. Also ist für einen constanten Werth von $\dfrac{g(x,a,b)}{G(x,a,b)}$

$$\delta x = x\frac{a'\delta b - b'\delta a}{2c\sqrt{-1}} - \frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x}\cdot\frac{a\delta b - b\delta a}{2\pi\sqrt{-1}}.$$

Aus dieser Gleichung ersieht man, dass sich die Continuität von δx nur allemal dann verliert, wenn $\mathfrak{G}x$ verschwindet, d. h. nur dann, wenn $x = \left(m + \frac{1}{2}\right)a + \left(n + \frac{1}{2}\right)b$ wird, wo m, n beliebige ganze Zahlen bedeuten.

§. 14.

Wie muss das specifische Dreieck, welches zur Darstellung einer ganzen elliptischen Function dient, beschaffen sein, damit eines der Verhältnisse der drei in §. 5. bestimmten Constanten p, q, r reell sein könne?

Ist eines der genannten Verhältnisse reell, so sind es wegen der Relation $p+q+r=0$ nothwendig auch die beiden übrigen. Dann wird man irgend drei reelle Grössen angeben können, welche mit p, q, r proportional sind; und da ihre Summe gleich Null ist, so muss eine derselben entgegengesetztes Vorzeichen haben mit den beiden übrigen. Unter den drei möglichen Fällen wollen wir denjenigen voraussetzen, wo die mit r proportionale Grösse den beiden übrigen entgegensetzt ist. Dann sind $-\frac{p}{r}$, $-\frac{q}{r}$ zugleich positive ächte Brüche, weil $-\frac{p}{r}-\frac{q}{r}=1$ ist. Setzt man dann $\sqrt{-r}\,\frac{\gamma x}{Gx}=y$, $-\frac{p}{r}=k^2<1$, so ist der Modul k reell, und man hat nach §. 6.

$$\sqrt{-r}.\,x=\int_0\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

Bezeichnet man nun den Werth dieses Integrals durch K oder $K'\sqrt{-1}$, jenachdem in demselben y continuirlich die zwischen 0 und $+1$ liegenden reellen oder die zwischen 0 und $+\infty\sqrt{-1}$ liegenden rein imaginären Werthe einmal durchläuft, so sind K, K' endliche reelle und positive Grössen, und nimmt man $\left(\frac{K}{\sqrt{-r}},\ \frac{K'}{\sqrt{-r}}\sqrt{-1}\right)$ als Darstellung an, so ist y dieselbe Function von x, wie bei der ursprünglichen Darstellung (a, b).*) Beide Darstellungen geben also ein und dasselbe Netz von Punkten, und jene erstere ist die Hauptdarstellung desselben, weil ihr ein rechtwinkliges Dreieck zu Grunde liegt, d. h. weil das zugehörige specifische Verhältniss rein imaginär ist. Das Gesagte führt zu folgendem Schluss:

„Wenn die Verhältnisse der Grössen p, q, r reell sind, so kann das zugehörige Netz von Punkten durch ein rechtwinkliges Dreieck erzeugt werden, dessen Katheten denjenigen zwei von den Grössen p, q, r entsprechen, deren Verhältniss einen positiven Werth hat."

---

*) Hier ist die schwache Stelle des Beweises; denn die Reduction eines Ausdrucks, wie $\sin am(mK+nK'\sqrt{-1}+x)$, scheint hierbei schon vorausgesetzt werden zu müssen.

§. 15.

Ueber die analytische Bedeutung der Hauptdarstellung einer elliptischen Function.

Denken wir uns auf die in §. 1. beschriebene Weise jedes complexe Argument x durch einen Punkt in der Ebene dargestellt, so bildet die Reihenfolge aller derjenigen Punkte x, welche zu reellen Werthen der gebrochenen Function $\frac{g(x,a,b)}{G(x,a,b)}$ gehören, eine Curve. Die genannte Function bekömmt aber resp. die reellen Werthe $(-1)^{m+n}, 0, \infty$, so oft als das Argument x eine der Formen

$$ma+nb,\ \left(m+\frac{1}{2}\right)a+nb,\ ma+\left(n+\frac{1}{2}\right)b$$

annimmt. Folglich geht die betrachtete Curve 1°. durch alle Ecken des specifischen Dreiecksnetzes, 2°. durch die Mitten aller der Constanten a und 3°. durch die Mitten aller der Constanten b entsprechenden Seiten. In den ersten Punkten erhält die gebrochene Function $\frac{gx}{Gx}$ abwechselnd die reellen Werthe $+1$ und -1, in den zweiten die Werthe 0 und in den dritten die Werthe ∞. Vielfache Punkte der Curve können nur da liegen, wo der nach x genommene erste Differentialcoefficient von $\frac{gx}{Gx}$ verschwindet, also nach (1) in §. 5. da, wo $\gamma x \mathfrak{G} x$ verschwindet. Da

$$\frac{g(ma+nb+x)}{G(ma+nb+x)}=(-1)^{m+n}\frac{gx}{Gx}$$

ist, und die Curve demnach nach zweien Richtungen hin periodisch verläuft, so brauchen wir in der zuletzt erwähnten Beziehung nur die beiden Punkte $x=0$, $x=\frac{a+b}{2}$ zu betrachten. Nehmen wir vorerst x verschwindend klein an, so wird $\frac{gx}{Gx}=1+\frac{1}{2}rx^2$. Unter allen complexen Werthen von x, die zu demselben verschwindend kleinen Modul gehören, kann es aber nur zwei x und $x\sqrt{-1}$ (je zwei entgegengesetzte werden, als einer und derselben Tangente entsprechend, hier nur für einen gezählt) geben, für welche rx^2 reell wird. Folglich sind die Ecken des Dreiecksnetzes stets Doppelpunkte der betrachteten Curve, in denen diese sich rechtwinklich schneidet. Setzen wir zweitens $x=\frac{a+b}{2}+\omega$, wo ω verschwindend klein sein soll, so wird nach §. 4.

$$\frac{g\left(\frac{a+b}{2}+\omega\right)}{G\left(\frac{a+b}{2}+\omega\right)}=\frac{g\frac{a+b}{2}}{G\frac{a+b}{2}}\frac{G\omega}{g\omega}=\sqrt{-\frac{q}{p}}\cdot\left(1-\frac{1}{2}r\omega^2\right).$$

Die Curve kann also nur dann durch diesen Punkt $\frac{a+b}{2}$ gehen, wenn das Verhältniss $\frac{q}{p}$ reell und negativ ist, also nach §. 14. nur dann, wenn im specifischen Dreieck der Hauptdarstellung einer der beiden mit p und q homologen Seiten ein rechter Winkel gegenüberliegt. Dann sind auch die Mitten aller mit r homologen Seiten des Dreiecksnetzes Doppelpunkte der Curve, in denen sie sich rechtwinklig schneidet.*)

Um eine Anschauung von der Continuität der Realitätscurve für $\frac{gx}{Gx}$ zu bekommen, nehmen wir zuerst $\frac{b}{a}$ als rein imaginär (mit positivem Factor von $\sqrt{-1}$) an. Dann ist aus der Form der unendlichen Doppelproducte auf der Stelle klar, dass die gesuchte Curve mit den beiden sich rechtwinklich schneidenden Systemen paralleler und äquidistanter Geraden des specifischen Dreiecksnetzes zusammenfällt und demnach ein Netz von congruenten Rechtecken bildet. Geht nun das specifische Dreieck aus der rechtwinkligen Form allmählig in die spitzwinklige über, so verwandelt sich das Netz congruenter Rechtecke in ein aus zwei Systemen sich rechtwinklig schneidender geschlängelter Curven bestehendes Netz, in welchem die einen mit p correspondirenden Curven den zwischen $+1$ und -1 oscillirenden reellen Werthen von $\frac{gx}{Gx}$ zugehören, während die anderen mit q correspondirenden Curven zu denjenigen reellen Werthen von $\frac{gx}{Gx}$ gehören, welche von $+1$ bis $+\infty$ und von $-\infty$ bis -1 und wieder zurück verlaufen. Isolirte geschlossene Zweige der Realitätscurve können niemals auftreten, und zwar aus folgendem Grunde. Es sei $\frac{gx}{Gx}=\frac{gy}{Gy}$, so folgt nach (9):

$$gxGy-Gxgy=2r\gamma\frac{x+y}{2}\mathfrak{G}\frac{x+y}{2}\gamma\frac{x-y}{2}\mathfrak{G}\frac{x-y}{2}=0,$$

folglich entweder

$$x\pm y=2ma+2nb,$$

oder

$$x\pm y=(2m+1)a+(2n+1)b.$$

Da nun die beschriebenen offenen Curvenzweige schon alle reellen Werthe von $\frac{gx}{Gx}$ enthalten und der durch die letzten Gleichungen ange-

*) Hierdurch wird §. 13. entbehrlich gemacht.

deuteten doppelten Periodicität vollkommen entsprechen, so ist durch dieselben die ganze Curve auch vollkommen erschöpft. — Bei fortschreitender Formänderung des specifischen Dreiecks kann erst dann eine Discontinuität in der gleichzeitigen Formänderung der Realitätscurve eintreten, wenn dieselbe die Mitten der mit r correspondirenden Dreieckseiten erreicht, d. h., wie wir oben gesehen haben, wenn das specifische Dreieck an dieser Seite einen rechten Winkel bekömmt. Gesetzt die Hypotenuse correspondire mit q, so ist nunmehr $\frac{a}{a-b}$ rein imaginär, und da

$$\frac{g(x,a,b)}{G(x,a,b)}=\frac{G(x,a-b,a)}{\mathfrak{G}(x,a-b,a)},$$

so ist die Realitätscurve durch die Gleichungen

$$x=(a-b)u,\quad x=au,\quad x=\frac{a-b}{2}+au,$$

wo u einen beliebigen reellen Factor bezeichnet, dargestellt. Die mit p correspondirenden Zweige fallen wieder mit den entsprechenden Dreiecksseiten zusammen, während die mit q correspondirenden Zweige sich in rechtwinklig gebrochene Zickzacklinien verwandeln, von denen die einen Stücke in die Seiten $a-b$ fallen, während die anderen parallel mit den Seiten a durch die Mitten der Seiten b gehen. Je zwei aufeinanderfolgende Zickzacklinien erreichen einander mit ihren Ecken in den Mitten der Seiten $a-b$. Diese Beschreibung gilt, wenn der mit q correspondirende rechte Winkel noch wie der ihm unmittelbar vorhergehende spitze Winkel aufgefasst wird. Sobald man ihn aber wie den nachfolgenden stumpfen Winkel behandelt, so müssen die geradlinigen Elemente der vorigen Zickzacklinien in den Mitten der Seiten $a-b$ anders verbunden werden, die Zickzacke müssen die Richtung der Seite b plötzlich verlassen, um in die Richtung $2a-b$ überzugehen. D. h. weil jetzt $(2a-b,\,a)$ im Begriff ist, Hauptdarstellung zu werden, so richtet sich von nun an auch die Realitätscurve nach dieser Hauptdarstellung.

Während $\frac{gx}{Gx}$ die reellen Werthe von 1 bis 0 einmal durchläuft, durchläuft $\sqrt{-r}.\frac{\gamma x}{Gx}$ ebenfalls einmal die reellen Werthe von 0 bis 1; und während $\frac{gx}{Gx}$ die reellen Werthe von 1 bis $+\infty$ einmal durchläuft, durchläuft $\sqrt{-r}.\frac{\gamma x}{Gx}$ ebenfalls einmal die rein imaginären Werthe von $+0\sqrt{-1}$ bis $+\infty\sqrt{-1}$. Setzt man nun $y=\sqrt{-r}.\frac{\gamma x}{Gx}$, so folgen aus der vorigen Betrachtung über die Realitätscurve für $\frac{gx}{Gx}$ die Gleichungen

$$\sqrt{-r}.\frac{a}{2}=\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1+\frac{p}{r}y^2\right)}}$$

$$iV\overline{-r}.\frac{b}{2}=\int_{+0\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1+\frac{p}{r}y^2\right)}},$$

wofern die specifischen Constanten a, b der Hauptdarstellung angehören, welchen complexen Werth auch der Modul $\sqrt{-\frac{p}{r}}$ dieser vollständigen elliptischen Integrale erster Art haben mag.

§. 16.

Verwandlung der elliptischen unendlichen Doppelproducte in unendliche einfache Producte trigonometrischer Factoren.

Vollzieht man in den vier Doppelproducten, wie $\Pi\frac{x+ma+nb}{ma+nb}$, welche oben in §. 1. unter dem Namen der ganzen elliptischen Functionen beschrieben worden sind, die Multiplication zuerst von $m=-\infty$ bis $m=+\infty$, so ergeben sich resp. die einfachen Producte:

$$\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}\,\Pi_{(n\gtrless 0)}\frac{\sin\frac{\pi(x+nb)}{a}}{\sin\frac{\pi nb}{a}},\qquad \Pi\frac{\cos\frac{\pi(x+nb)}{a}}{\cos\frac{\pi nb}{a}},$$

$$\Pi\frac{\sin\frac{\pi\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)b\right)}{a}}{\sin\frac{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)b}{a}},\qquad \Pi\frac{\cos\frac{\pi\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)b\right)}{a}}{\cos\frac{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)b}{a}}.$$

Dieselben sind convergent, sobald $\frac{b}{a}$ nur nicht reell ist. Man denke sie sich zwischen gleichen und entgegengesetzten sehr grossen Werthen von n oder $n+\frac{1}{2}$ genommen. Es handelt sich nun darum, ihre Verhältnisse zu den entsprechenden Functionen γ, g, G, $\mathfrak{G}$ zu bestimmen.

In der Ebene, in welcher die Werthe von $ma+nb$ durch Punkte dargestellt sind, sei um den Ursprung als Mittelpunkt ein Kreis mit dem sehr grossen Halbmesser k beschrieben, welcher als Gränze fur die Doppelproducte γ, u. s. w. gelten soll. Ausserhalb desselben liegen zwei Parallellinien von der durch a bezeichneten Richtung und den beiden entgegengesetzten Gränzwerthen von n oder $n+\frac{1}{2}$ entsprechend. Bezeichnet nun Q den gemeinsamen Quotienten, der aus der Division der obigen einfachen Producte durch die entsprechenden Functionen γ, g, G, $\mathfrak{G}$ hervorgeht, so ist Q gleich dem Doppelproducte $\Pi\left(1+\frac{x}{ma+nb}\right)$, welches sich über den ganzen ausserhalb des Kreises k und innerhalb der Parallellinien $(\pm n)$ liegenden Flächenraum erstreckt. Nun ist mit einem Fehler von der Ordnung $\frac{1}{k}$:

$$\log Q = -\frac{1}{2}\Sigma\Sigma\frac{x^2}{(ma+nb)^2} = -\frac{x^2}{2}\iint\frac{dm\,dn}{(ma+nb)^2},$$

und wenn man zuerst in Beziehung auf m integrirt:

$$\log Q = -\frac{x^2}{2a}\left(\int\frac{dn}{m''a+nb} - \int\frac{dn}{m'a+nb}\right),$$

wo m' sich auf den Anfangs-, m'' auf den Endpunkt einer mit der Richtung a parallelen, durch den Werth von n bestimmten Sehne des Kreises k bezieht. Um nun das einfache Integral längs der ganzen Peripherie k verfolgen zu können, setze man

$$a = \mathfrak{a}e^{\alpha\sqrt{-1}},\ ma+nb = ke^{(\alpha+\varphi)\sqrt{-1}};$$

so ist der Inhalt des durch die Seiten a, $ma+nb$ bestimmten Parallelogramms $nc = \mathfrak{a}k\sin\varphi$, folglich $dn = \frac{\mathfrak{a}k}{c}\cos\varphi\,d\varphi$,

$$\log Q = -e^{-2\alpha\sqrt{-1}}\frac{x^2}{2c}\int_0^{2\pi} e^{-\varphi\sqrt{-1}}\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= -e^{-2\alpha\sqrt{-1}}\frac{\pi x^2}{2c} = -\frac{a'\pi}{2ac}x^2,$$

wo $a' = \mathfrak{a}e^{-\alpha\sqrt{-1}}$ den conjugirten Werth von a bezeichnet. Hieraus folgt nun:

$$\gamma(x,a,b) = e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{a}}{\sin^2\frac{n\pi b}{a}}\right),$$

$$g(x,a,b) = e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\cos\frac{\pi x}{a}\,\Pi\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{a}}{\cos^2\frac{n\pi b}{a}}\right),$$

$$G(x,a,b)=e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\,\Pi\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{a}}{\sin^2\frac{(2n-1)\pi b}{2a}}\right),$$

$$\mathfrak{G}(x,a,b)=e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\,\Pi\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{a}}{\cos^2\frac{(2n-1)\pi b}{2a}}\right).$$

Oder auch, wenn $e^{\frac{b\pi}{a}\sqrt{-1}}=h$ gesetzt wird:

$$\gamma(x,a,b)=e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\,\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}\,\Pi\,\frac{1-2h^{2n}\cos\frac{2\pi x}{a}+h^{4n}}{(1-h^{2n})^2},$$

$$g(x,a,b)=e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\cos\frac{\pi x}{a}\,\Pi\,\frac{1+2h^{2n}\cos\frac{2\pi x}{a}+h^{4n}}{(1+h^{2n})^2},$$

$$G(x,a,b)=e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\,\Pi\,\frac{1-2h^{2n-1}\cos\frac{2\pi x}{a}+h^{4n-2}}{(1-h^{2n-1})^2},$$

$$\mathfrak{G}(x,a,b)=e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\,\Pi\,\frac{1+2h^{2n-1}\cos\frac{2\pi x}{a}+h^{4n-2}}{(1+h^{2n-1})^2}.$$

Da $a'b-ab'=2c\sqrt{-1}$ ist und da c als positiv vorausgesetzt wurde, so ist $\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}=\frac{2c}{aa'}\sqrt{-1}$ und daher die imaginäre Componente von $\frac{b}{a}$ positiv; folglich ist der Modul von

$$h=e^{-\frac{c\pi}{aa'}}\left(\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{b'}{a'}\right)+\sqrt{-1}.\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{b'}{a'}\right)\right)$$

ein ächter Bruch, weshalb die steigenden Potenzen von h sich der Null ohne Ende nähern.

Setzt man in den obigen Formeln $x=\frac{a}{2}$, $x=\frac{b}{2}$, und bedenkt im letztern Fall, dass

$$\frac{a'\pi}{2ac}\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{bb'\pi}{8c}+\frac{b\pi}{4a}\sqrt{-1},$$

$$\sin\frac{\pi b}{2a}=\frac{\sqrt{-1}}{2\sqrt{h}}(1-h),\quad \cos\frac{\pi b}{2a}=\frac{1+h}{2\sqrt{h}},$$

$$1\pm 2h^m\cos\frac{\pi b}{a}+h^{2m}=(1\pm h^{m-1})(1\pm h_{m+1})$$

ist, so erhält man:

$$\gamma\frac{a}{2}=e^{\frac{aa'\pi}{8c}}\cdot\frac{a}{\pi}\Pi\left(\frac{1+h^{2n}}{1-h^{2n}}\right)^2,\qquad \gamma\frac{b}{2}=e^{\frac{bb'\pi}{8c}}\frac{a\sqrt{-1}}{2\pi h^{\frac{1}{4}}}\Pi\left(\frac{1-h^{2n-1}}{1-h^{2n}}\right)_2,$$

$$G\frac{a}{2}=e^{\frac{aa'\pi}{8c}}\Pi\left(\frac{1+h^{2n-1}}{1-h^{2n-1}}\right)^2,\qquad g\frac{b}{2}=e^{\frac{bb'\pi}{8c}}\frac{1}{2h^{\frac{1}{4}}}\Pi\left(\frac{1+h^{2n-1}}{1+h^{2n}}\right)^2;$$

und hieraus

$$p=16\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 h\,\Pi\left(\frac{1-h^{4n}}{1-h^{4n-2}}\right)^4,\quad q=\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\Pi\left(\frac{1-h^n}{1+h^n}\right)^4,$$

$$r=-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\Pi\left(\frac{1+h^{2n-1}}{1-h^{2n-1}}\,\frac{1-h^{2n}}{1+h^{2n}}\right)^4.$$

§. 17.

Verwandlung der elliptischen unendlichen Doppelproducte in einfache Summen der Cosinus oder Sinus der Vielfachen des Arguments.

Da die hier angekündigte Entwickelung aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphen in derselben Weise hergeleitet werden kann, wie es in den „Fundamenta" von Jacobi geschieht, so könnte ich mich geradezu auf diese Schrift berufen. Es möchte indess manchem Leser nicht unangenehm sein, wenn auch hier diese interessante Entwickelung an das Frühere angeschlossen wird, und überdiess kann hier die Bestimmung einer gewissen Constanten vielleicht etwas einfacher gegeben werden, als in der erwähnten Schrift des berühmten Verfassers geschieht.

Denkt man sich in den Formeln des vorignn Paragraphen die Multiplicationen ausgeführt, und die Producte der Sinus und Cosinus durch Cosinus und Sinus der vielfachen Winkel ersetzt, so sieht man, dass die Functionen

$$e^{-\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\left\{\begin{matrix}G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}(x),\; e^{-\frac{a'\pi}{2ac}x^2}gx,\; e^{-\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\gamma x$$

sich respective nach

$$\cos\frac{2n\pi x}{a},\quad \cos\frac{(2n-1)\pi x}{a},\quad \sin\frac{(2n-1)\pi x}{a}$$

entwickeln lassen. Wir können daher, indem wir die Betrachtung zunächst auf die beiden ersten Functionen beschränken,

$$e^{-\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\left\{\begin{matrix}G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n\, e^{\frac{2n\pi x}{a}\sqrt{-1}}$$

setzen, wo $C_n = C_{-n}$ vorausgesetzt ist. Aus den Formeln am Ende des §. 4. ergeben sich leicht die folgenden

$$e^{-\frac{a'}{a}\cdot\frac{\pi}{2c}(x+a)^2}\left\{\begin{matrix}\gamma\\ g\end{matrix}\right\}(x+a)=-e^{-\frac{a'}{a}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2}\left\{\begin{matrix}\gamma\\ g\end{matrix}\right\}(x),$$

$$e^{-\frac{a'}{a}\cdot\frac{\pi}{2c}(x+a)^2}\left\{\begin{matrix}G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}(x+a)=e^{-\frac{a'}{a}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2}\left\{\begin{matrix}G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}(x),$$

$$e^{-\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}(x+b)^2}\left\{\begin{matrix}\gamma\\ G\end{matrix}\right\}(x+b)=-e^{-\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2}\left\{\begin{matrix}\gamma\\ G\end{matrix}\right\}(x),$$

$$e^{-\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}(x+b)^2}\left\{\begin{matrix}g\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}(x+b)=-e^{-\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2}\left\{\begin{matrix}g\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}(x);$$

welche uns nun zu der Bestimmung der Coefficienten C_n dienen sollen. Der Exponent $\frac{2n\pi x}{a}\sqrt{-1}$ in der oben angenommenen Entwickelung kann durch

$$\frac{\pi(x+nb)^2}{ab}\sqrt{-1}-\frac{\pi x^2}{ab}\sqrt{-1}$$

ersetzt werden, so dass $\left(\text{wegen}\ \frac{a'}{a}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2-\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2=\frac{\pi x^2\sqrt{-1}}{ab}\right)$

$$\left\{\begin{matrix}G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}(x)=e^{\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} L_n\, e^{\frac{\pi(x+nb)^2}{ab}\sqrt{-1}}$$

wird, wo $L_n = L_{-n}$ den zu bestimmenden constanten Coefficienten bezeichnet. Ersetzt man jetzt x durch $x+b$ und berücksichtigt die aus §. 4. angeführten Relationen, so ergiebt sich

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} L_n e^{\frac{\pi(x+(n+1)b)^2}{ab}\sqrt{-1}} = \sum \mp L_n e^{\frac{\pi(x+nb)^2}{ab}\sqrt{-1}}.$$

Die Coefficienten L sind also entweder abwechselnd entgegengesetzt oder sämmtlich gleich, jenachdem man es mit der Function G oder $\mathfrak{G}$ zu thun hat. Folglich ist

$$G(x) = e^{\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2}\cdot\frac{\Sigma(-1)^n e^{\frac{\pi(x+nb)^2}{ab}\sqrt{-1}}}{\Sigma(-1)^n e^{\frac{nnb\pi}{a}\sqrt{-1}}},$$

$$\mathfrak{G}x = e^{\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2}\cdot\frac{\Sigma e^{\frac{\pi(x+nb)^2}{ab}\sqrt{-1}}}{\Sigma e^{\frac{nnb\pi}{a}\sqrt{-1}}};$$

und hieraus, indem man x in $x+\frac{b}{2}$ übergehen lässt:

$$\gamma x = e^{\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2}\,\frac{\Sigma(-1)^n e^{(x+(n+\frac{1}{2})b)^2\frac{\pi\sqrt{-1}}{ab}}}{\frac{\pi}{a}\sqrt{-1}\,\Sigma(-1)^n(2n+1)e^{(n+\frac{1}{2})^2\frac{b\pi}{a}\sqrt{-1}}},$$

$$gx = e^{\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2}\cdot\frac{\Sigma e^{(x+(n+\frac{1}{2})b)^2\frac{\pi\sqrt{-1}}{ab}}}{\Sigma e^{(n+\frac{1}{2})^2\frac{b\pi\sqrt{-1}}{a}}}.$$

Setzt man wiederum $e^{\frac{\pi b\sqrt{-1}}{a}} = h$, wie früher, so erhalten diese vier Formeln folgende Gestalt:

$$Gx = e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\,\frac{1-2h\cos\frac{2\pi x}{a}+2h^4\cos\frac{4\pi x}{a}-h^9\cos\frac{6\pi x}{a}+\dots}{1-2h+2h^4-2h^9+\dots\dots},$$

$$\mathfrak{G}x = e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\,\frac{1+2h\cos\frac{2\pi x}{a}+2h^4\cos\frac{4\pi x}{a}+2h^9\cos\frac{6\pi x}{a}+\dots\dots}{1+2h+2h^4+2h^9+\dots\dots};$$

$$\gamma x = e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\,\frac{a}{\pi}\,\frac{\sin\frac{\pi x}{a}-h^{1\cdot2}\sin\frac{3\pi x}{a}+h^{2\cdot3}\sin\frac{5\pi x}{a}-h^{3\cdot4}\sin\frac{7\pi x}{a}\dots\dots}{1-3h^{1\cdot2}+5h^{2\cdot3}-7h^{3\cdot4}\dots\dots},$$

$$gx = e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\,\frac{\cos\frac{\pi x}{a}+h^{1\cdot2}\cos\frac{3\pi x}{a}+h^{2\cdot3}\cos\frac{5\pi x}{a}+h^{3\cdot4}\cos\frac{7\pi x}{a}\dots\dots}{1+h^{1\cdot2}+h^{2\cdot3}+h^{3\cdot4}\dots\dots}.$$

Es bleiben noch die constanten Werthe der Reihen in den Nennern dieser Ausdrücke zu bestimmen übrig. Die zwei ersten Gleichungen geben

$$\frac{\mathfrak{G}\frac{a}{2}}{G\frac{a}{2}}=\left(\frac{1-2h+2h^4-2h^9\ldots}{1+2h+2h^4+2h^9\ldots}\right)^2;$$

folglich, wenn man die Quadratwurzeln $\sqrt{G\frac{a}{2}}$, $\sqrt{\mathfrak{G}\frac{a}{2}}$ so versteht, dass sie für ein verschwindendes a sich auf die positive Einheit reduciren,

$$\frac{\sqrt{G\frac{a}{2}}+\sqrt{\mathfrak{G}\frac{a}{2}}}{2\sqrt{G\frac{a}{2}}}=\frac{1+2h^4+2h^{16}+2h^{36}\ldots}{1+2h+2h^4+2h^9\ldots}=\frac{\varphi(h^4)}{\varphi(h)},$$

wo

$$\varphi(h)=1+2h+2h^4+2h^9+\ldots.$$

sein soll. Nun geben die zwei letzten der Formeln (B) des §. 8:

$$\frac{G\frac{a}{2}+\mathfrak{G}\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}=\frac{G\left(\frac{a}{4},\frac{a}{2},b\right)}{\gamma\left(\frac{a}{4},\frac{a}{2},b\right)},\quad \frac{2\sqrt{G\frac{a}{2}\cdot\mathfrak{G}\frac{a}{2}}}{\gamma\frac{a}{2}}=\frac{\mathfrak{G}\left(\frac{a}{4},\frac{a}{2},b\right)}{\gamma\left(\frac{a}{4},\frac{a}{2},b\right)};$$

woraus sich durch Addition und nochmalige Anwendung der ersten Gleichung

$$\frac{\left(\sqrt{G\frac{a}{2}}+\sqrt{\mathfrak{G}\frac{a}{2}}\right)^2}{\gamma\frac{a}{2}}=\frac{G\left(\frac{a}{4},\frac{a}{2},b\right)+\mathfrak{G}\left(\frac{a}{4},\frac{a}{2},b\right)}{\gamma\left(\frac{a}{4},\frac{a}{2},b\right)}=\frac{G\left(\frac{a}{8},\frac{a}{4},b\right)}{\gamma\left(\frac{a}{8},\frac{a}{4},b\right)}$$

ergiebt. Wir bekommen demnach

$$\left(\frac{\varphi(h^4)}{\varphi(h)}\right)^2=\frac{1}{4}\frac{\gamma\frac{a}{2}}{G\frac{a}{2}}\cdot\frac{G\left(\frac{a}{8},\frac{a}{4},b\right)}{\gamma\left(\frac{a}{8},\frac{a}{4},b\right)},$$

oder auch

$$\frac{[\varphi(h)]^2}{a\dfrac{G\left(\frac{a}{2},a,b\right)}{\gamma\left(\frac{a}{2},a,b\right)}}=\frac{[\varphi(h^4)]^2}{\dfrac{a}{4}\cdot\dfrac{G\left(\frac{a}{8},\frac{a}{4},b\right)}{\gamma\left(\frac{a}{8},\frac{a}{4},b\right)}}=\text{u. s. w.}=C.$$

Wenn a in $\frac{a}{4}$ übergeht, so geht auch h in h^4 über; der vorliegende Ausdruck C ändert also seinen Werth nicht, wenn darin für a nach und nach $\frac{a}{4}, \frac{a}{16}, \frac{a}{64}, \ldots$ substituirt werden; folglich ist sein Werth derselbe wie für ein verschwindendes a. Für ein solches haben aber

$$\gamma\left(\frac{a}{2}, a, b\right), \quad G\left(\frac{a}{2}, a, b\right), \ \varphi(h)$$

resp. die Gränzwerthe $\frac{a}{\pi}$, 1, 1. Demnach ist $C = \frac{1}{\pi}$; folglich

$$\varphi(h) = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 \ldots = \sqrt{\frac{a}{\pi} \frac{G\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}} = \Pi \frac{1 + h^{2n-1}}{1 - h^{2n-1}} \cdot \frac{1 - h^{2n}}{1 + h^{2n}},$$

und wenn man die Darstellung (a, b) mit $(a, a+b)$ vertauscht, wodurch h in $-h$ und G in $\mathfrak{G}$ übergeht:

$$1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \ldots = \sqrt{\frac{a}{\pi} \frac{\mathfrak{G}\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}} = \Pi \frac{1 - h^n}{1 + h^n}.$$

Setzt man in den vorletzten Ausdrücken für γx, gx, welche noch die Exponentialfunctionen enthalten, $x = \frac{b}{2}$, so bekömmt man

$$\gamma\frac{b}{2} = e^{\frac{bb'\pi}{8c}} \frac{a}{\pi} \sqrt{-1} \cdot \frac{1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 \ldots}{2h^{\frac{1}{4}} - 6h^{\frac{9}{4}} + 10h^{\frac{25}{4}} \ldots},$$

$$g\frac{b}{2} = e^{\frac{bb'\pi}{8c}} \frac{1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 \ldots}{2h^{\frac{1}{4}} + 2h^{\frac{9}{4}} + 2h^{\frac{25}{4}} \ldots}.$$

Durch Vergleichung dieser Werthe mit den am Ende von §. 16. gefundenen ergiebt sich:

$$\frac{2h^{\frac{1}{4}} - 6h^{\frac{9}{4}} + 16h^{\frac{25}{4}} \ldots}{1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 \ldots} = 2h^{\frac{1}{4}}\, \Pi\left(\frac{1 - h^{2n}}{1 - h^{2n-1}}\right)^2,$$

$$\frac{2h^{\frac{1}{4}} + 2h^{\frac{9}{4}} + 2h^{\frac{25}{4}} \ldots}{1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 \ldots} = 2h^{\frac{1}{4}}\, \Pi\left(\frac{1 + h^{2n}}{1 + h^{2n-1}}\right)^2;$$

und hieraus durch Substitution der bereits gefundenen Werthe von

$$1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 \ldots \text{ und } 1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 \ldots$$

und unter Berücksichtigung der Relation $\Pi(1+h^n)(1-h^{2n-1})=1$:

$$2h^{\frac{1}{4}}-6h^{\frac{9}{4}}+10h^{\frac{25}{4}}-\ldots=2h^{\frac{1}{4}}\,\Pi(1-h^{2n})^3,$$

$$2h^{\frac{1}{4}}+2h^{\frac{9}{4}}+2h^{\frac{25}{4}}\ldots=2h^{\frac{1}{4}}\,\Pi\frac{1-h^{4n}}{1-h^{4n-2}}.$$

Dieselben Reihen in h, durch die vollständigen Functionen ausgedrückt, werden:

$$2h^{\frac{1}{4}}-6h^{\frac{9}{4}}+10h^{\frac{25}{4}}-\ldots=\sqrt{\left(\frac{a}{\pi}\right)^3\frac{g\frac{b}{2}}{\gamma\frac{b}{2}}\sqrt{-1}\cdot\frac{\mathfrak{G}\frac{b}{2}}{\gamma\frac{b}{2}}\sqrt{-1}\cdot\frac{\mathfrak{G}\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}},$$

$$2h^{\frac{1}{4}}+2h^{\frac{9}{4}}+2h^{\frac{25}{4}}+\ldots=\sqrt{\frac{a}{\pi}\frac{\mathfrak{G}\frac{b}{2}}{\gamma\frac{b}{2}}\sqrt{-1}}.$$

Denn es ist

$$e^{\frac{bb'\pi}{8c}}=\sqrt{g\frac{b}{2}\cdot\mathfrak{G}\frac{b}{2}}\text{ und }\frac{G\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}=\frac{g\frac{b}{2}}{\gamma\frac{b}{2}}\sqrt{-1}.$$

Fasst man Alles zusammen und benutzt die in §. 5. gegebenen Constanten p, q, r, so gewinnt man folgende Uebersicht:

$$2h^{\frac{1}{4}}-6h^{\frac{9}{4}}+10h^{\frac{25}{4}}-\ldots=\sqrt{\left(\frac{a}{\pi}\right)^3\sqrt{-pqr}}=2h^{\frac{1}{4}}\,\Pi(1-h^{2n})^3,$$

$$2h^{\frac{1}{4}}+2h^{\frac{9}{4}}+2h^{\frac{25}{4}}+\ldots=\sqrt{\frac{a}{\pi}\sqrt{p}}=2h^{\frac{1}{4}}\,\Pi(1-h^{2n})(1+h^{2n})^2,$$

$$1-2h+2h^4-2h^9+\ldots=\sqrt{\frac{a}{\pi}\sqrt{q}}=\Pi(1-h^{2n})(1-h^{2n-1})^2,$$

$$1+2h+2h^4+2h^9+\ldots=\sqrt{\frac{a}{\pi}\sqrt{-r}}=\Pi(1-h^{2n})(1+h^{2n-1})^2.$$

Da nun in den „Fundamenta" von Jacobi die Reihe

$$1-2h\cos\frac{2\pi x}{a}+2h^4\cos\frac{4\pi x}{a}-2h^9\cos\frac{6\pi x}{a}+\ldots$$

als die Function Θ des Arguments $x\sqrt{-r}$ bezeichnet wird, so ist

$$\Theta(x\sqrt{-r}) = \sqrt{\frac{a}{\pi}\sqrt{q}} \cdot e^{-\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\, G(x),$$

und $\sqrt{-\frac{p}{r}}$ ist der Modul dieser Function Θ. Der Werth derselben ändert sich also, wenn man die Darstellung (a, b) mit irgend einer andern äquivalenten Darstellung vertauscht, während dagegen der Werth der Function $G(x)$ von der Wahl der Darstellung unabhängig ist.

§. 18.

Ueber die Entwickelung der gebrochenen elliptischen Functionen in trigonometrische Partialbrüche.

Es soll hier nur an einem einzigen Beispiele gezeigt werden, wie dieselbe aus den Sätzen des §. 5. hervorgeht. Dort wurde gefunden:

$$\frac{\gamma x}{Gx} = -\frac{\gamma^2 \frac{b}{2}}{g\frac{b}{2}\,\mathfrak{G}\frac{b}{2}} \frac{d}{dx} \log \frac{G(x, 2a, b)}{\mathfrak{G}(x, 2a, b)}.$$

Nach §. 16. ist aber

$$\frac{G(x, 2a, b)}{\mathfrak{G}(x, 2a, b)} = \Pi \left(\frac{1+h^{\frac{2n-1}{2}}}{1-h^{\frac{2n-1}{2}}}\right)^2 \frac{1-2h^{\frac{2n-1}{2}}\cos\frac{\pi x}{a}+h^{2n-1}}{1+2h^{\frac{2n-1}{2}}\cos\frac{\pi x}{a}+h^{2n-1}};$$

folglich ist

$$\frac{\gamma x}{Gx} = \frac{\frac{4\pi}{a}}{\sqrt{-pr}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{h^{\frac{2n-1}{2}}(1+h^{2n-1})\sin\frac{\pi x}{a}}{1-h^{2n-1}\cos\frac{2\pi x}{a}+h^{4n-2}}.$$

XXIX.

Ueber die Bestimmung eines häufig vorkommenden Gränzwerthes.

Von dem

Herrn Dr. O. Schlömilch,

Professor der höheren Mathematik und Mechanik an der techn. Bildungsanstalt zu Dresden.

Die elementaren Quadraturen und Cubaturen, sowie zahlreich Untersuchungen der niederen Mechanik, erfordern bekanntlich d Anwendung des Satzes, dass für unendlich wachsende s d Gleichung

$$\text{Lim}\,\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+s^m}{s^{m+1}}=\frac{1}{m+1}$$

statt findet. Gewöhnlich beweist man denselben mittels d Binomialtheoremes, was aber, wenn man hinreichend st sein will, nicht einmal sehr rasch geht; viel kürzer dag kommt man auf folgendem Wege zum Ziele, der nichts als d Kenntniss der Summenformel für die geometrische Progress voraussetzt.

Nehmen wir in der identischen Gleichung

$$\frac{(1+u)^n-1}{(1+u)\;\;-1}=1+(1+u)+(1+u)^2+\ldots(1+u)^{n-1}$$

u als positive Grösse, so ist die Progression eine steige und wenn man an die Stelle aller n Glieder einmal das klein und nachher das grösste Glied setzt, so folgt augenblicklich

$$\frac{(1+u)^n-1}{u}>n \text{ und } \frac{(1+u)^n-1}{u}<n(1+u)^{n-1}$$

und durch eine kleine Umstellung

1) $$u < \frac{(1+u)^n - 1}{n},$$

2) $$(1+u)^{n-1} > \frac{(1+u)^n - 1}{nu}.$$

Aus No. 1) ergiebt sich für $u = \frac{1}{z}$ und durch Multiplikation mit z^n

3) $$z^{n-1} < \frac{(z+1)^n - z^n}{n}.$$

Lassen wir ferner in der zweiten Ungleichung $\frac{1}{z-1}$ an die Stelle von u treten, so giebt eine nachherige Multiplikation mit $(z-1)^{n-1}$

4) $$z^{n-1} > \frac{z^n - (z-1)^{n-1}}{n}.$$

Die beiden Ungleichungen 3) und 4) fassen wir in die folgende zusammen, wobei $m+1$ für n gesetzt ist:

5) $$\frac{(z+1)^{m+1} - z^{m+1}}{m+1} > z^m > \frac{z^{m+1} - (z-1)^{m+1}}{m+1}.$$

Hieraus ergeben sich für $z = 1, 2, 3, \ldots s$ die Ungleichungen:

$$\frac{2^{m+1} - 1^{m+1}}{m+1} > 1^m > \frac{1^{m+1}}{m+1},$$

$$\frac{3^{m+1} - 2^{m+1}}{m+1} > 2^m > \frac{2^{m+1} - 1^{m+1}}{m+1},$$

$$\frac{4^{m+1} - 3^{m+1}}{m+1} > 3^m > \frac{3^{m+1} - 2^{m+1}}{m+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{(s+1)^{m+1} - s^{m+1}}{m+1} > s^m > \frac{s^m - (s-1)^{m+1}}{m+1}.$$

Die Summe dieser Ungleichungen liefert die Beziehung

$$\frac{(s+1)^{m+1} - 1^{m+1}}{m+1} > 1^m + 2^m + \ldots + s^m > \frac{s^{m+1}}{m+1},$$

und wenn man linker Hand 1^{m+1} weglässt, so ist um so mehr

6) $$\frac{(s+1)^{m+1}}{m+1} > 1^m + 2^m + \ldots + s^m > \frac{s^{m+1}}{m+1}.$$

Durch Division mit s^{m+1} folgt hieraus

$$\frac{1}{m+1}\left(1+\frac{1}{s}\right)^{m+1} > \frac{1^m+2^m+\ldots+s^m}{s^{m+1}} > \frac{1}{m+1}$$

und durch Uebergang zur Gränze für unendlich wachsende s

$$\operatorname{Lim}\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+s^m}{s^{m+1}} = \frac{1}{m+1},$$

womit der in Rede stehende Satz bewiesen ist.

Dividirt man die Ungleichung 6) allgemeiner mit $(s+k)^{m+1}$, wo k eine unveränderliche Grösse ist, so kann man dem Resultate die Form geben:

$$\frac{1}{m+1}\left(1-\frac{k-1}{s+k}\right)^{m+1}$$

$$> \frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+s^m}{(s+k)^{m+1}} >$$

$$\frac{1}{m+1}\left(1-\frac{k}{s+k}\right)^{m+1},$$

und hieraus folgt die allgemeinere Formel

$$\operatorname{Lim}\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+s^m}{(s+k)^{m+1}} = \frac{1}{m+1},$$

für welche der individuelle Werth der Constanten k gleichgültig bleibt.

XXX.
Ueber die Bestimmung des Gränzwerthes von
$$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{s}}{s\sqrt{s}}$$
für unendlich wachsende Werthe der Zahl s.

Von dem

Herrn Dr. O. Schlömilch,

Professor der höheren Mathematik und Mechanik an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Wir bemerken zunächst, dass vermöge der identischen Gleichung

$$\sqrt{u+1}-\sqrt{u}=\frac{1}{\sqrt{u+1}+\sqrt{u}}$$

die beiden Beziehungen

1) $$\sqrt{u+1}-\sqrt{u}>\frac{1}{2\sqrt{u+1}},$$

2) $$\sqrt{u+1}-\sqrt{u}<\frac{1}{2\sqrt{u}}$$

statt finden, deren Ableitung aus jener Gleichung unmittelbar erhellen wird. — Betrachten wir weiter die Differenz

3) $$(u+1)\sqrt{u+1}-u\sqrt{u},$$

so können wir dieselbe unter einer doppelten Form so darstellen, dass die obigen Ungleichungen anwendbar sind. Erstens schreiben wir nämlich statt jener Differenz den Ausdruck

$$(u+1)[\sqrt{u+1}-\sqrt{u}]+\sqrt{u}$$

$$>(u+1).\frac{1}{2\sqrt{u+1}}+\sqrt{u}$$

$$>\frac{1}{2}\sqrt{u+1}+\sqrt{u},$$

und da $\sqrt{u+1}>\sqrt{u}$, so haben wir, $\sqrt{\ }$ für $\sqrt{u+1}$ setzend,

4) $$(u+1)\sqrt{u+1}-u\sqrt{u}>\frac{3}{2}\sqrt{u}.$$

Die in No. 3) verzeichnete Differenz ist ferner gleich

$$u[\sqrt{u+1}-\sqrt{u}]+\sqrt{u+1}$$

$$<u.\frac{1}{2\sqrt{u}}+\sqrt{u+1}$$

$$<\frac{1}{2}\sqrt{u}+\sqrt{u+1},$$

und wenn $\sqrt{u+1}$ für $\sqrt{u}$ gesetzt wird:

5) $$(u+1)\sqrt{u+1}-u\sqrt{u}<\frac{3}{2}\sqrt{u+1}.$$

Nehmen wir in No. 4) $u=z$, in No. 5) $u=z-1$, so lassen sich beide Ungleichungen in die folgende zusammenfassen:

$$\sqrt{(z+1)^3}-\sqrt{z^3}>\frac{3}{2}\sqrt{z}>\sqrt{z^3}-\sqrt{(z-1)^3}.$$

Für $z=1, 2, 3, \ldots s$ folgen hieraus die Beziehungen:

$$\sqrt{2^3}-\sqrt{1^3}>\frac{3}{2}\sqrt{1}>\sqrt{1^3},$$

$$\sqrt{3^3}-\sqrt{2^3}>\frac{3}{2}\sqrt{2}>\sqrt{2^3}-\sqrt{1^3},$$

$$\sqrt{4^3}-\sqrt{3^3}>\frac{3}{2}\sqrt{3}>\sqrt{3^3}-\sqrt{2^3},$$

. . . .

$$\sqrt{(s+1)^3}-\sqrt{s^3}>\frac{3}{2}\sqrt{s}>\sqrt{s^3}-\sqrt{(s-1)^3};$$

deren Addition sogleich giebt:

$$\sqrt{(s+1)^3}-\sqrt{1^3}>\frac{3}{2}[\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{s}]>\sqrt{s^3}.$$

Lässt man linker Hand $\sqrt{1^3}$ weg, wodurch die Ungleichung stärker wird, und multiplizirt durchgängig mit

$$\frac{2}{3}\frac{1}{s\sqrt{s}}=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{s^3}},$$

so ergiebt sich die Beziehung

$$\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+\frac{1}{s}\right)^3}>\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{s}}{s\sqrt{s}}>\frac{2}{3},$$

und aus dieser folgt durch Uebergang zur Gränze für unendlich wachsende s:

$$\operatorname{Lim}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{s}}{s\sqrt{s}}=\frac{2}{3}.$$

Die Quadratur der Parabel bildet u. A. ein nettes Beispiel für den Gebrauch dieser Formel, deren Ableitung nach der obigen Weise ebenso streng als einfach ist; es wiederholt sich überhaupt bei diesem und dem vorigen Aufsatze die Bemerkung Moigno's: „la rigueur n'est pas ennemie de la simplicité, elle en est au contraire la compagne inséparable „(Leçons de calcul différentiel. XIX).

LIII.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Die vollständige Lösung numerischer Gleichungen, bei welcher durch ein und dasselbe Verfahren sowohl die imaginären, als auch die reellen Wurzeln leicht bestimmt werden. Von Dr. William Rutherford. Aus dem Englischen übersetzt von Dr. August Wiegand. Halle. 1849. 4. 15 Sgr.

Durch die Verpflanzung dieser Schrift auf deutschen Boden hat sich der Herr Uebersetzer um so mehr ein Verdienst erworben, weil er derselben auch noch ein neues einfaches Verfahren des Herrn Rutherford zur Bestimmung aller drei Wurzeln einer cubischen Gleichung aus dem Märzhefte 1849. der Zeitschrift „The Mathematician" und noch einiges Andere beigefügt hat. Rücksichtlich der Methoden des Herrn Rutherford selbst müssen wir die Leser hier natürlich auf die instructive Schrift verweisen, und bemerken nur noch, dass dieselben auf Gleichungen des dritten, vierten, fünften und sechsten Grades in vollständig ausgerechneten Beispielen angewandt worden sind.

Grundriss der höhern Analysis von Dr. H. Burhenne. Cassel. 1849. 8.

Dieser Grundriss der höhern Analysis ist zunächst für die Schüler der höhern Gewerbschule zu Cassel, an welcher der Herr Verfasser, wie wir wissen, schon seit deren Gründung sehr segensreich wirkt, verfasst worden. Derselbe ist bei grosser Kürze der Darstellung, indem sich der Herr Verfasser oft nur mit der Angabe allgemeiner Gesichtspunkte begnügt und die weitere Ausführung dem mündlichen Vortrage überlässt, doch sehr vollständig und verbreitet sich fast über alle wesentlichen Punkte der Wissenschaft, selbst mit Einschluss der Grundlehren der Variationsrechnung, in ihrem rein analytischen Theile; denn eigentliche Anwendungen auf die Geometrie, und noch weniger auf die Mechanik, enthält dieses Lehrbuch, mit Ausnahme einiger kurzen allgemeinen Andeutungen in §. 116. und §. 117., nicht. Auch Beispiele zur Erläuterung der allgemeinen Lehren sind nur wenige gegeben, indem der Herr Verfasser jedenfalls auch diese dem mündlichen Vortrage des Lehrers zu überlassen beabsichtigte, da ihm immer der Zweck eines eigentlichen Compendiums bei der Abfassung vorschwebte. Dagegen sind in Anmerkungen öfters sinnreiche und interessante Beziehungen hervorgehoben, und besonders verdient bemerkt zu werden, dass der Herr Verfasser, auch die praktische Anwendung der vorgetragenen Lehren stets vor Augen habend, vielfache Rücksicht auf den so wichtigen Gebrauch der Differentialrechnung zur Entwickelung brauchbarer Näherungsformeln, auf die näherungsweise Entwickelung der Werthe bestimmter Integrale u. s. w. genommen hat, und auch in §. 59. das Grundprincip der Methode der kleinsten Quadrate, in §. 60. das Princip des kleinsten Zwangs (oder der grösstmöglichen Freiheit) als Grundgesetz der Natur entwickelt. Auch die bei Anwendungen der höheren Analysis auf die Naturwissenschaft bekanntlich so wichtigen Fourier'schen Reihen, und manches Andere, worüber man in vielen anderen Lehrbüchern keine Belehrung findet, sind nicht unberücksichtigt geblieben, und man sieht daher, dass dieser bei grosser Kürze doch sehr vollständige Grundriss namentlich allen denen, welche in möglichst kurzer Zeit hauptsächlich Behufs der Anwendungen der höheren Analysis theils im praktischen Leben, theils in der Naturwissenschaft, sich eine hinreichende Kenntniss der ganzen Wissenschaft verschaffen und insbesondere zunächst die allgemeinen Gesichtspunkte kennen lernen wollen, welche sie bei ihren Untersuchungen zu verfolgen und festzuhalten haben, so wie auch Lehrern, welchen in der angegebenen Beziehung die Ertheilung des Unterrichts in der höhern Analysis obliegt, recht sehr zur Beachtung empfohlen zu werden verdient. Auch selbst für solche Leser, die schon mit den dem Falle Hauptlehren der höhern Analysis bekannt, aber weniger in sind dieselben fortwährend anzuwenden, und die wieder einmal einen raschen Ueberblick über die wichtigsten Partieen der Wissenschaft sich zu verschaffen für nöthig halten, kann dieses Buch nützlich sein; und wir haben uns sehr gefreu't, aus demselben einen jüngern Mathematiker kennen zu lernen, welcher, wie aus dem ganzen Buche hervorgeht, sich jedenfalls eine Anschauung von der Wissenschaft verschafft hat, die wir vorzugsweise mit dem Namen einer philosophischen bezeichnen möchten, und dabei zugleich mit sicherm pädagogischen Takte dem Ziele zusteuert, dessen Erreichung ihm bei dem von ihm zu ertheilenden Unterrichte obliegt. Auch muss das vorliegende Lehrbuch von der Lehranstalt, auf welcher es dem Unterrichte als Grundlage dienen soll, jedenfalls ein sehr günstiges Vorurtheil erwecken, und, da Jeder, wer es in jetziger Zeit mit dem Menschengeschlechte wahrhaft gut meint, das wärmste Interesse an dem immer kräftigeren Aufblühen der mehr eine praktische oder technische Richtung verfolgenden Lehranstalten nehmen muss, zu dem lebhaftesten Danke gegen eine

Regierung verpflichten, welche den Gewerbtreibenden ihres Volkes eine so treffliche Gelegenheit zu ihrer Ausbildung darbietet, wie die kurhessische Regierung in der höheren Gewerbschule zu Cassel. Möchten alle anderen Regierungen in der jetzigen bewegten unaufhaltsam vorwärts strebenden Zeit sich ein solches Beispiel zum Muster nehmen, und, ohne sich in irgend einer Beziehung wieder zu retrograden Bewegungen verleiten zu lassen, immer mehr die Ueberzeugung gewinnen, dass in einem tüchtig gebildeten und nach allen Seiten hin sich möglichst frei entfalten könnenden Gewerbstande ein grosser Theil der Kraft des Volkes, der wahren Wohlfahrt des Landes ruhet. Möge man uns diese Expectoration, zu welcher uns das vorliegende Lehrbuch mit Hinblick auf die durch dasselbe deutlich bekundete, jedenfalls grosse Vortrefflichkeit der höhern Gewerbschule zu Cassel, veranlasst hat, bei dem lebhaften Interesse, welches wir namentlich auch an dem immer kräftigeren Aufblühen der genannten Lehranstalten nehmen, an diesem Ort verzeihen!

Noch ein Wort müssen wir schliesslich über die ganze in diesem Grundrisse inne gehaltene Darstellung sagen. Das Punctum saliens, worauf es bei der Darstellung der höhern Analysis gegenwärtig eigentlich ankommt, und worin sich die ältere und neuere Darstellungsweise hauptsächlich von einander unterscheiden, ist bekannt, und, von unserm Standpunkte aus, schon oft genug in dieser Zeitschrift besprochen worden, so dass wir darüber unsere Ansicht nicht von Neuem auszusprechen brauchen. In der Vorrede des vorliegenden Grundrisses sagt der Herr Verfasser: „Was die Methode betrifft, so bin ich der Ueberzeugung gefolgt, dass man „Solche, die zum ersten Male einen Ueberblick über das reiche „Gebiet der Analysis gewinnen, und auch bald zu Anwendungen „gelangen wollen, nicht durch allzu grossen Rigorismus in der „Darstellung ermüden und aufhalten darf. Mögen dann später „diejenigen, welche die Theorie weiter verfolgen wollen, durch „Privatstudium sich mit den Werken eines Cauchy vertraut „machen." — Auch hierin stimmen wir dem Herrn Verfasser vom pädagogischen Standpunkte aus, namentlich mit Bezug auf solche Lehranstalten, für welche das Buch vorzugsweise bestimmt ist, vollkommen bei, ohne dadurch unsere hinreichend bekannte Ansicht von dem eigentlichen Wesen der Wissenschaft aufzugeben, und bemerken, dass der Herr Verfasser in der angegebenen Beziehung den Mittelweg eingeschlagen hat, dass er zuerst bei'm Eintritt in das Gebiet der Differentialrechnung sich der in älterer Zeit gewöhnlichen Darstellungsweise durch die Methode der unbestimmten Coefficienten u. s. w. bedient, und dann späterhin in der Integralrechnung in §. 77. (Die Taylor'sche Reihe mit dem Reste), in §. 78. (Andere Form für den Rest der Taylor'schen Reihe), §. 79. (Convergenz der Reihen für die einfachen Functionen), §. 80. (Anwendung der bestimmten Integrale bei Beurtheilung der Convergenz einer Reihe) auf die früher entwickelten Reihen zurückkommt, und dieselben in Bezug auf Convergenz und Divergenz näher bestimmt. Um die von dem Herrn Verfasser bei diesen Dingen mit Hülfe der Integralrechnung befolgte Darstellung in der Kürze etwas näher zu characterisiren, mag es uns, um nur ein jedenfalls in den Händen vieler Leser befindliches Buch anzuführen, erlaubt sein, auf den Artikel Differentialrechnung in dem ersten Supplementbande zum Klügel'schen Wörterbuche S. 446 ff. zu verweisen.

Möge dem Herrn Verfasser jede Aufmunterung bei seinem verdienstlichen Wirken auf dem Felde des mathematischen Unterrichts zu Theil werden, und das Buch die wohlverdiente Beachtung überall finden!

Geometrie.

Lehrbuch der Geometrie und Trigonometrie nebst ihren ausgedehnten Anwendungen auf die Lösung geometrischer Probleme. Vorzüglich für Militair- und technische Lehranstalten von R. Curuk. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage, herausgegeben in drei Theilen von C. Kuhn, k. Professor der Mathematik und Physik am k. b. Cadetten-Corps. Landshut. 1850. 8. 1 Thlr. 27 Sgr.

Ein ziemlich vollständiges recht deutliches Lehrbuch mit vielen Aufgaben, welches in der Hand eines geschickten Lehrers besonders auf den auf dem Titel genannten Schulen, gewiss Nutzen stiften wird.

Der allgemeine goldene Schnitt und sein Zusammenhang mit der harmonischen Theilung. Ein neuer Beitrag zum Ausbau der Geometrie. Zugleich eine Ergänzung zu des Verfassers Schrift: Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks mit Rücksicht auf harmonische Theilung. Von Dr. August Wiegand. Halle. 1849. 8. $2\frac{1}{2}$ Sgr.

Eine recht lesenswerthe neue kleine Abhandlung des schon vielfach um die Geometrie verdienten Herrn Verfassers über eine Verallgemeinerung der Aufgabe vom goldenen Schnitt (Theilung einer Linie nach dem äusseren und mittleren Verhältnisse), die auch Schülern zur Uebung in der Geometrie empfohlen zu werden verdient. Inhalt: I. Gruppen harmonischer Punkte. II. Der allgemeine goldene Schnitt. III. Zusammenhang des allgemeinen goldenen Schnitts mit den früheren Gruppen harmonischer Punkte.

Dissertatio mathematica inauguralis de superficierum curvatura, quam pro Gradu Magisterii et Doctoratus, summisque in Mathesi et Philosophia naturali honoribus ac privilegiis, in Academia Groningana rite et legitime consequendis, publico ac solemni examini

ıbmittit Arnoldus Gulielmus Alings, Groninganus rroningae. 1849. 4.

Wir haben schon einige Mal in diesen literarischen Berichten elegenheit gehabt, uns über die Gründlichkeit und den oft ziemh grossen Umfang der auf den holländischen Universitäten erheinenden mathematischen Dissertationen mit Beifall auszupreen. Dies zu thun, giebt uns auch die vorliegende Schrift wier Veranlassung, in welcher die bekanntlich nicht leichte Theorie r Krümmung der Flächen mit grosser Gründlichkeit und in ziemhem Umfange, zugleich aber auch in einer solchen Weise bendelt worden ist, dass die Darstellung eine dem Verfasser zenthümliche mit Recht genannt werden kann. Indem wir daher ch diese Schrift als einen neuen Beleg für den sehr guten Zuınd des mathematischen Studiums auf den holländischen Unirsitäten gern anerkennen, soll durchaus kein Tadel ausgesproen werden, wenn wir bemerken, dass wir gewünscht hätten, ss der Herr Verfasser auch auf die Untersuchungen von Gauss er die Krümmung der Flächen, auf das z. B., was Gauss die inze Curvatur und das Maass der Curvatur einer Fläche nannt hat, bestimmtere Rücksicht genommen hätte. — Der Inılt ist folgender: *Pars* I. De proprietatibus cuiusque ystematis linearum rectarum, quarum directiones eterminantur functionibus coordinatarum, quae lineum origines definiunt; atque de iis, quae tantum ad perficierum normales pertinent. — *Pars* II. De superficierum curvatura, e normalium proprietatibus deıcta. Cap. I. Theoremata, in quibus superficiei planm tangens habetur pro plano coordinatarum. — In ıem dritten Theile will der Herr Verfasser (Introitus pag. 2.) äter die Geschichte der Theorie der Krümmung der Flächen rz behandeln, und wird dann vielleicht auch den oben von uns sgesprochenen Wunsch berücksichtigen.

Trigonometrie.

Elemente der ebenen und sphärischen Trigonometrie, zusammengestellt von Dr. Meister, Prof. der Physik und Mathematik ı K. Lyceum u. s. w. zu Freising. Freising. 1850. 10 Sgr.

Mechanik.

Lehrbuch der Statik fester Körper, n elementarer irstellung, mit besonderer Rücksicht auf technische

Gewerbe. Von Adolph Ferd. Wenzel Brix, Fabriken-Commissions-Rathe u. s. w. Zweite gänzlich umgearbeitete Auflage. Erste Abtheilung: Die Lehren der reinen Statik enthaltend, mit 12 Figurentafeln und einem Anhange. Berlin. 1849. 8. 3 Thlr. 15 Sgr.

Dieses ausgezeichnete Lehrbuch der Statik fester Körper ist aus seiner im Jahre 1831 erschienenen ersten Auflage allgemein bekannt, und eine besondere Empfehlung desselben daher überflüssig. Die elementare Darstellung ist auch in dieser zweiten Auflage durchgängig beibehalten worden, und es leidet gar keinen Zweifel, dass nur dieser Weg, wenn er namentlich meistens mit so viel Einfachheit und Eleganz wie von dem Herrn Verfasser des vorliegenden Werks, betreten wird, für die Ausbildung von Technikern wirklich zweckmässig ist, besonders bei dem jetzigen Zustande der Wissenschaft, wo an die höhere Analysis und ihre Anwendung in der Geometrie und Mechanik in Rücksicht auf wahre Strenge der Darstellung weit grössere Ansprüche gemacht werden, als vordem. Je mehr wir selbst auf der einen Seite dieser durch höchste Strenge sich auszeichnenden Darstellungsweise huldigen, desto mehr sind wir auf der andern Seite überzeugt, dass dieselbe wegen ihrer Schwierigkeit sich für den Unterricht von Technikern nicht wohl eignet, sondern nur für solche Schüler, welche sich ausschliesslich dem Studium der Mathematik überhaupt hinzugeben, und dasselbe zu ihrer Lebensaufgabe zu machen beabsichtigen. Will man also bei dem für Techniker bestimmten Vortrage der Mechanik und der Theorie der dazu nothwendigen Curven die höhere Analysis in Anwendung bringen, so muss man sich — wie auch schon mehrmals in diesen Literarischen Berichten von uns ausgesprochen worden ist — mehr der älteren Darstellungsweise der höheren Analysis anschliessen oder einen Mittelweg einschlagen, was aber freilich immer mit vielen wesentlichen Nachtheilen verbunden sein muss, da bei dem mathematischen Unterrichte natürlich überall höchste Strenge eine Hauptsache ist. Ohne übrigens der Meinung zu sein, dass die Techniker der von der höheren Analysis dargebotenen so grossen und wichtigen Vortheile ganz verlustig gehen sollen, theilen wir daher doch auf der andern Seite mit dem Herrn Verfasser des vorliegenden Lehrbuchs vollkommen die Ueberzeugung, dass man sich bei dem für Techniker bestimmten mathematischen Unterrichte hauptsächlich der elementaren Darstellungsweise zu bedienen habe, und halten alle Bemühungen, dieselbe immer mehr zu vervollkommnen, namentlich zu vereinfachen, und immer mehr und mehr zu der Eleganz, welcher sie nach unserer festesten Ueberzeugung in hohem Grade fähig ist, zu erheben, in jeder Beziehung für sehr verdienstlich, wünschen auch sehr, dass das Archiv noch mehr als bisher zur Mittheilung solcher elementaren Darstellungen und anderer beim Unterrichte gemachter Erfahrungen benutzt werden möge.

Dass die vorliegende zweite Auflage mit vollem Rechte den Namen einer vielfach verbesserten und vermehrten verdient, geht aus einer nur oberflächlichen Vergleichung beider Auflagen sogleich hervor. Denn so ist z. B. in die neue Auflage die Theorie der Kräftepaare, die Bestimmung des Schwerpunkts der sphärischen

Dreiecks, die Lehre von der Stabilität, die Theorie der Waagen und Kraftmesser, die dem Praktiker so wichtige elastische Curve und vieles Andere, was sich in der älteren Auflage nicht findet, aufgenommen worden, ohne die Bogenzahl bedeutend zu vergrössern. Auch ist die Zugabe zweckmässiger Beispiele zu allen allgemeinen Lehren und Theorieen namentlich bei einem Buche von der Tendenz des vorliegenden höchst dankenswerth. Indem wir nun schliesslich noch bemerken, dass auch der, eine Zusammenstellung der wichtigsten Theorien aus der niedern Analysis, Curvenlehre und Stereometrie enthaltende Anhang zu diesem statischen Lehrbuche schon weit früher (1843) in einer verbesserten und erweiterten Auflage erschienen ist, wünschen wir diesem empfehlenswerthen Lehrbuche eine möglichst weite Verbreitung und die allgemeinste Beachtung, die es jedenfalls sehr verdient.

Astronomie.

Der nördliche gestirnte Himmel, dargestellt von Dr. Ferdinand Reuter, ordentlichem Lehrer an der I. Bürgerschule, Secretair der astronomischen und Mitgliede der naturforschenden Gesellschaft in Leipzig. (Mit einem Vorworte von Dr. G. A. Jahn.). Gotha. Preis roh $1\frac{1}{2}$ Thlr. — Aufgezogen in Mappe 2 Thlr.

Der Grund dieser Sternkarte ist schwarz, die Umrisse der Sternbilder sind roth und die Sterne der verschiedenen Grössen sind in verschiedenen Farben aufgetragen. Wir sind der Meinung, dass diese neue Sternkarte durch naturgetreue Darstellung des gestirnten Himmels, durch wenig complicirte Zeichnung der Sternbilder und durch die Anzahl der aufgenommenen Sterne, in welcher Beziehung der Herr Herausgeber uns für Liebhaber der Astronomie ganz das richtige Maass getroffen zu haben scheint, sich vor früheren Arbeiten dieser Art sehr vortheilhaft auszeichnet, und empfehlen daher diese sehr verdienstliche Arbeit, die namentlich auch durch schöne Ausführung sehr anspricht, aus voller Ueberzeugung allen denen, welche in möglichst kurzer Zeit sich eine genügende Kenntniss des gestirnten Himmels verschaffen wollen, angelegentlichst, und wünschen derselben eine recht weite und allgemeine Verbreitung. Eine Anweisung zum Gebrauch ist beigegeben.

Cometen-Beobachtungen an der k. k. Wiener Sternwarte, redigirt von Dr. C. Jelinek und C. Hornstein. Enthaltend die Beobachtungen des Halley'schen Cometen im Jahre 1835 und 1836, und der Cometen in den Jahren 1843—1846. (Aus den Annalen der k. k. Wiener Sternwarte. Band XXXIII.).

Es sind in dieser Schrift die folgenden Cometen behandelt: Comet Halley. — Comet Mauvais I. — Comet Faye. — Comet

Mauvais II. — Comet de Vico I. — Comet d'Arrest. — Comet de Vico II. — Grosser Comet vom Juni 1845. — Comet Biela. — Comet de Vico III. — Comet de Vico IV. — Comet Brorsen I. — Comet Brorsen II. — Bei jedem Cometen sind ausser der Zusammenstellung der Beobachtungen die mittlern Oerter der Vergleichsterne gegeben, und man sieht daher aus dem Obigen, ein wie reiches Material diese höchst fleissige und wichtige Arbeit für die Berechnung der Bahnen der beobachteten Cometen enthält.

URANUS. ΟΥΡΑΝΟΣ. Synchronistisch geordnete Ephemeride aller Himmelserscheinungen des Jahres 1850, erstes Quartal, zunächst berechnet für den Horizont der Sternwarte zu Breslau, aber auch für jeden Ort unseres Erdtheils eine tägliche treue Darstellung der wechselnden Erscheinungen am Himmel. Fünfter Jahrgang (19te Bearbeitung seit 1832) in Vierteljahrsheften herausgegeben von der Königl. Universitäts-Sternwarte zu Breslau. 1850. 8. Jedes Quartal bei Abnahme des completen Jahrgangs 10 Sgr., einzeln 12 Sgr.

Bei'm Beginn eines neuen Jahrgangs dieser jetzt auch äusserlich sehr gut ausgestatteten Zeitschrift, durch deren Herausgabe sich Herr Professor von Boguslawski jedenfalls ein wahres Verdienst um alle Freunde der Astronomie erwirbt, glauben wir die Leser des Archivs von Neuem auf dieselbe aufmerksam machen zu müssen, wenn wir auch schon im Literarischen Bericht Nr. XXIX. S. 441. einige Worte zur Empfehlung derselben gesagt haben. Wir weisen daher jetzt insbesondere nur nochmals darauf hin, dass diese Ephemeride in ihrer jetzt vielfach verbesserten Gestalt hauptsächlich für jeden einzelnen Tag des Jahrs nach den einzelnen Stunden und Minuten desselben eine genaue und vollständige Angabe aller an diesem Tage vorfallenden merkwürdigen Himmelserscheinungen, die sich im Voraus bestimmen lassen, enthält, so dass also jeder Freund der Astronomie an jedem einzelnen Tage weiss, auf welche Beobachtungen er sich an diesem Tage vorzubereiten hat. Die Nützlichkeit einer solchen Ephemeride, namentlich in der sehr zweckmässigen und genügenden Ausführung wie bei der vorliegenden, leuchtet von selbst ein, und der Herr Herausgeber verdient daher gewiss den Dank aller Freunde der Astronomie für diese mühevolle Arbeit. Ausser der eigentlichen Ephemeride sind unter dem Texte auch noch Aufsätze von vielfach belehrendem Inhalte beigegeben, die zur Erhöhung des Interesses ganz geeignet sind, und stets Nachrichten von den neuesten astronomischen Entdeckungen und Erfindungen geben. Wir wünschen daher diesem Unternehmen immer grössere Verbreitung und allgemeinere Anerkennung aus voller Ueberzeugung recht sehr, und zwar um so mehr, weil, was bei einem solchen Unternehmen natürlich eine Hauptsache ist, aber leider nur zu oft nicht gehörig berücksichtigt wird, der Herr Herausgeber das bestimmte Versprechen gegeben hat, dass jedes einzelne Quartal immer eine hinreichende Zeit vor dessen Beginn erscheinen soll.

Nautik.

Erster Bericht über die zur Dampfschifffahrt geeigneten Steinkohlen Englands. Von Sir Henry de la Beche und Dr. Lyon Plaifair. Auf Veranlassung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien aus den „Memoirs of the geological survey of Great Britain. Vol. II, Part. II.“ übersetzt und von ihr herausgegeben. Wien. 1849. 8.

Die Wichtigkeit des Gegenstandes und das grosse Interesse, welches diese Schrift, die auch zugleich Untersuchungen über die Heizkraft des Holzes enthält, nicht bloss in technischer, sondern auch in physikalischer und physiko-mathematischer Rücksicht darbietet, veranlasst uns, dieselbe hier kurz anzuzeigen, wenn sie auch, streng genommen, nicht mehr ganz in den Kreis unserer Zeitschrift gehört. Die Herren Franz Ritter von Hauer und Dr. Moser haben die, allen Anforderungen, welche man an eine solche Arbeit zu machen berechtigt ist, vollkommen entsprechende Uebersetzung übernommen, und sich auch dadurch ein besonderes Verdienst erworben, dass sie alle englischen Maasse und Gewichte in österreichische umwandelten, um dadurch die Resultate der englischen Versuche mit den aus der angebahnten Untersuchung der österreichischen Kohlen hervorgehenden Daten leichter vergleichbar, und die Schrift überhaupt zugänglicher zu machen. Wir halten, wie gesagt, die möglichst weite Verbreitung und allgemeine Beachtung dieser $8\frac{1}{2}$ Bogen starken Schrift, mit 5 schönen Kupfertafeln, für sehr wünschenswerth, und sind der Meinung, dass sich die k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien und die Herren Uebersetzer durch die Verpflanzung derselben auf deutschen Boden um die Dampfschifffahrt und die Technik überhaupt jedenfalls ein wesentliches Verdienst erworben haben. Auch bemerken wir schliesslich noch, dass die mathematisch-physikalische Klasse der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien in ihrer Sitzung vom 1. Februar 1849 beschlossen hat, eine Untersuchung der mannigfaltigen Stein- und Braunkohlen-Lager der österreichischen Monarchie zu veranlassen, deren Resultate von der Art sein sollen, dass sie eine unmittelbare Anwendung im praktischen Leben gestatten, was einen neuen höchst erfreulichen Beweis liefert, wie sehr die kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien ihren wahren Beruf als höchste wissenschaftliche Behörde des Landes erkennt, den ungeheuren Kreis der Wissenschaften nämlich nicht bloss nach allen Seiten und Richtungen hin immer mehr und mehr zu erweitern, sondern auch wissenschaftliche Untersuchungen, die zur Förderung des Wohles des Landes dienen, anzuordnen, wodurch sie mehr als andere wissenschaftliche Anstalten dieser Art den Anforderungen der Zeit in Wahrheit Rechnung trägt.

Physik.

Physikalische Technik oder Anleitung zur Anstellung von physikalischen Versuchen und zur Herstellung von physikalischen Apparaten mit möglichst einfachen Mitteln. Von Professor Dr. J. Frick, Vorstand der höhern Bürgerschule zu Freiburg i. B. Mit 56 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Braunschweig 1850. 8. 2 Thlr.

Schon Nollet hat eine Art des experiences. Paris 1770. III. T. geschrieben, von der auch eine deutsche Uebersetzung (Leipzig. 1771.) in drei Theilen erschienen ist. Einen ähnlichen Zweck hat das vorliegende Buch, wenn es auch vorzugsweise nur das für den physikalischen Unterricht, hauptsächlich auf Schulen, Nothwendige berücksichtigt. Aber eben desshalb, weil es sich nicht zu sehr ausbreitet, und besonders diejenigen Versuche, welche zur Erläuterung und theilweisen Begründung der theoretischen Lehren unbedingt nothwendig und erforderlich sind, berücksichtigt, halten wir diese Anleitung zu physikalischen Versuchen für ein für Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten sehr nützliches Buch, namentlich für solche, denen ein grösserer Instrumentenvorrath nicht zu Gebote steht, und die wegen Beschränktheit der Geldmittel sich Manches selbst anfertigen oder durch gewöhnliche Handwerker anfertigen lassen müssen. Die Ausstattung sowohl des Textes, als auch der Figuren, ist vortrefflich, wie es der Verlagshandlung von Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig, die schon so vieles Ausgezeichnete auf diesem Felde geleistet hat, von vorn herein zu erwarten war. Auf den Inhalt näher einzugehen, verbietet hier der Raum und ist auch unnöthig, indem die Versicherung genügt, dass, ohne sich auf zu grosse Einzelnheiten und auf zu künstliche und kostspielige Apparate erfordernde Versuche einzulassen, alle Lehren der Physik ziemlich gleichmässige Berücksichtigung gefunden haben. Wir halten daher, wie schon erinnert, dieses Buch für Lehrer der Physik in mehrfacher Beziehung recht nützlich, und empfehlen es deshalb zur Beachtung, ohne ihm, ausser seinem pädagogischen Nutzen, eine höhere wissenschaftliche Bedeutung, die der Herr Verfasser aber auch nicht beansprucht wird, beilegen zu können. Jedenfalls ist das Erscheinen dieses nützlichen und in der angegebenen Weise empfehlenswerthen Buchs ein neues, sehr erfreuliches Zeichen von der grossen Bedeutung, welche jetzt dem physikalischen und mathematischen Unterrichte auf niedern und höhern Schulen immer mehr und mehr beigelegt wird.

Beiträge zur meteorologischen Optik und zu verwandten Wissenschaften. In zwanglosen Heften her-

ausgegeben von Johann August Grunert. Erster Theil. Drittes Heft. Mit einer lithographirten Tafel. Leipzig. 1849. 8. 21 Sgr.

Die beiden ersten Hefte dieser der Förderung der meteorologischen Optik gewidmeten Zeitschrift sind im Literar. Bericht Nr. XLV. S. 632. und Nr. XLVI. S. 650. angezeigt worden. Das vorliegende dritte Heft enthält die mathematische Theorie der Luftspiegelung von dem Herausgeber. Es ist versucht worden, diese Theorie in möglichster Allgemeinheit mit geometrischer Strenge zu entwickeln, und insbesondere ist auch auf eine strenge Unterscheidung und gehörige Begränzung der verschiedenen möglichen Fälle, die hier eintreten können, sorgfältig Rücksicht genommen worden, so dass der Herausgeber sich der Hoffnung hingiebt, dass sowohl in dieser Rücksicht, als auch überhaupt, nicht bloss in optischer, sondern auch in geometrischer Rücksicht die Abhandlung der Belehrung Mancherlei darbieten, und, auch für die Theorie der Curven im Allgemeinen von Interesse sein werde. Auf die Erklärung einzelner Erscheinungen der Luftspiegelung ist in dieser vorzugsweise eine mathematische Tendenz habenden Abhandlung bis jetzt noch nicht Rücksicht genommen worden, weil der Herausgeber glaubt, dass, wer sich mit der allgemeinen Theorie gehörig vertraut gemacht hat, auch zu der Erklärung einzelner Erscheinungen von selbst befähigt sein wird, indem diese Abhandlung ihrer ganzen Anlage und Tendenz nach weniger für Anfänger, als vielmehr für solche bestimmt ist, die mit den Grundlehren der Wissenschaft und mit den einzelnen in unserer Atmosphäre vorkommenden Erscheinungen schon im Allgemeinen bekannt sind. Da aber diese Beiträge zur meteorologischen Optik, wie schon in der Ankündigung derselben gesagt worden ist, neben streng wissenschaftlichen Abhandlungen keineswegs mehr populär gehaltene Aufsätze ausschliessen sollen, um der so wichtigen und im höchsten Grade allgemein interessanten meteorologischen Optik immer mehr Liebhaber und eifrige Beobachter der in ihr Gebiet fallenden Erscheinungen zu gewinnen, so werden in späteren Aufsätzen noch verschiedene einzelne Erscheinungen der Luftspiegelung aus der in der vorliegenden Abhandlung entwickelten allgemeinen Theorie derselben erklärt werden. Das vierte Heft dieser Zeitschrift wird in den nächsten Tagen im Druck vollendet werden, und enthält eine ganz allgemein verständliche Abhandlung von dem schon durch mehrere in dieses Fach schlagende schöne Arbeiten sehr vortheilhaft bekannten Herrn Dr. R. Clausius in Berlin, worin derselbe eine sehr interessante Uebersichtliche Darstellung aller in das Gebiet der meteorologischen Optik gehörenden Erscheinungen geliefert hat, durch welche der eine Zweck der Zeitschrift, neben streng wissenschaftlichen Arbeiten nämlich auch mehr populär gehaltene Aufsätze zu liefern, gewiss auf eine die Liebhaber der meteorologischen Optik vollkommen befriedigende Weise ausgesprochen werden wird, was bisher noch nicht so vollständig möglich war, wie der Herausgeber wohl gewünscht hätte. Diese ein ganzes Heft füllende Abhandlung des Herrn Doctor Clausius, welche zugleich als ein Elementarlehrbuch der ganzen meteorologischen Optik betrachtet werden kann, hätte eigentlich an die

Spitze der Zeitschrift gestellt werden sollen, da sie zugleich den Kreis von Erscheinungen scharf bestimmt und abgränzt, in welchem sich die Zeitschrift zu bewegen haben wird; früher als jetzt dieselbe zu liefern, war aber leider nicht möglich, da dieselbe, ohne von der Schwierigkeit der Abfassung zu reden, auch die Herbeischaffung eines grossen literarischen Apparats erforderte.

Je mehr der Herausgeber im Interesse der Wissenschaft wünscht, diese Zeitschrift ihrem Zwecke immer näher zu führen, desto dringender richtet er hier nochmals an alle Liebhaber der meteorologischen Optik die Bitte, ihn durch Beiträge bei der Herausgabe der Zeitschrift zu unterstützen; insbesondere aber wünscht er auch, dass ihm aus allen Gegenden genaue Beschreibungen merkwürdiger in der Atmosphäre vorgekommener optischer Erscheinungen, und Bemerkungen über das Verhältniss, in welchem dieselben vielleicht zu anderen meteorologischen Erscheinungen gestanden haben, zur Veröffentlichung in der Zeitschrift mitgetheilt werden möchten; und sind auch freilich genaue Messungen immer sehr wünschenswerth, so dürfen sich doch Liebhaber, die mit genauen Messwerkzeugen nicht versehen sind, dadurch nicht von der Mittheilung ihrer Beobachtungen und Wahrnehmungen abhalten lassen, weil auch diese weniger vollkommenen Beobachtungen sehr dankenswerthe Bausteine zur immer solidern Aufführung des Gebäudes der meteorologischen Optik und der Meteorologie überhaupt liefern werden. Möglichst genaue Zeitangaben, zu denen ein Jeder für den hier zu erreichenden Zweck immer hinreichend ausgerüstet sein wird, dürfen natürlich nie unterlassen werden. G.

Von Herrn Quetelet in Brüssel sind neuerlich die folgenden interessanten Schriften erschienen, die leider eines Auszugs hier nicht fähig sind, aber die Beachtung der Leser des Archivs recht sehr verdienen:

Sur le Climat de la Belgique par A. Quetelet. Troisième Partie. De l'Electricité de l'air. Bruxelles. 1849. 4.

Observations des Phénomènes périodiques en 1848.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der ssenschaften zu Wien. (S. Literar. Bericht Nr. LII. 727.)

Jahrgang 1849. Juni- und Juli-Heft. S. 1. Doppler: ıer eine Reihe markscheiderischer Declinationsbeobachtungen der Zeit 1735—1736. — S. 9. Stampfer: Commissions-icht über die Art und Weise der Veröffentlichung der Resul-: der Vermessungen des Catasters. — S. 19. Jelinek: Bei-; zur Theorie der krummen Linien. (Ein interessanter Aufsatz :r gewisse krumme Linien, auf welche Herr Jelinek durch das h Angabe des Herrn Directors Kreil construirte und bereits Thätigkeit befindliche Anemometer geführt worden ist.). — 28. Baumgärtner: Versuche über den elektrischen Leitungs-lerstand der Erde. — S. 30. Pierre: Ueber Versuche, die ximalspannung der Dämpfe in der Luft zu bestimmen. — S. 38. umgartner: Vorschlag zu Kreil's Uebersetzung: „Ueber n Nutzen der Meteorologie." — S. 40. Zmurko: Zur Integra-n irrationaler und goniometrischer Differentialformeln. — S. 58. mmissionsbericht über Dr. Pollak's mathematische Noten. — 62. Ryll: Abhandlung über die Elemente der Lagerechnung ortsetzung.). — S. 130. Schrötter: Ueber Brooke's meteoro-ische Instrumente. (Es sind dies registrirende meteorologische strumente, welche sehr ausgezeichnet sein sollen.). —

NECROLOG.

Der nachstehende Necrolog ist uns von der Steiner'schen Buchhandlung in Winterthur ohne Angabe seines Verfassers zugesandt und der Wunsch ausgesprochen worden, dass er in das Archiv der Mathematik und Physik aufgenommen werden möge. Wir entsprechen, die ganze uns gemachte Mittheilung wörtlich aufnehmend, diesem Wunsche um so lieber, je aufrichtiger wir selbst den so zeitigen Hintritt eines Mathematikers beklagen, dessen ausgezeichnete Verdienste, namentlich um die Geometrie, von uns im Archiv stets freudigst anerkannt worden sind, wie den Lesern desselben gewiss noch erinnerlich sein wird. Jedenfalls würde Adams, wenn er länger gelebt hätte, der weiteren Ausbildung der Geometrie, und der so sehr zu wünschenden immer grössern Benutzung der neuen Eroberungen auf diesem Felde bei dem Unterrichte auf Schulen, noch sehr genützt haben, und sein früher Verlust in der Blüthe der Jahre ist daher aufrichtigst zu beklagen.

Carl Adams.

Die mathematische Wissenschaft hat jüngster Tage einen ihrer eifrigsten Vertreter verloren, indem Carl Adams, aus Rheinpreussen gebürtig, Lehrer an der Gewerbsschule in Winterthur, am 14. November 1849 einem hitzigen Nervenfieber im kaum vollendeten 39. Lebensjahre unterlag.

Wenn uns im Allgemeinen Schmerz befällt beim Hinscheiden eines noch so jungen Mannes, so wird unsere Trauer zur wehmuthsvollen Klage, wenn wir mit dem Hingeschiedenen einen Schatz von schönen Hoffnungen, eine geistige Kraft in die Grube senken sehen, deren längere Wirksamkeit für die Nachwelt von segensreichen Folgen gewesen wäre. Dies gilt von dem Heimgegangenen im vollsten Maasse, und zwar nicht nur von seiner Amtsthätigkeit als trefflicher Lehrer, sondern vielmehr von der treuen Pflege, mit welcher er seine Wissenschaft umfing. Von der Natur mit ausgezeichneten Geistesgaben versehen, ausgerüstet mit tiefer Kenntniss seines Faches, hatte er sich zur schönen Aufgabe gemacht, seine Kraft einem Zweige der Wissenschaft zuzuwenden, welcher leider durch eine einseitige Cultur der grossen Entdeckungen des 17. und 18. Jahrhunderts allzulange vernachlässigt worden ist, nemlich der Euklidischen Geometrie. Weit entfernt aber — wie dies seither so oft geschah — in einer sklavischen Nachahmung des grossen griechischen Meisters oder in einer Reform seiner Methode das Heil für die Schule und die Wissenschaft zu finden, richtete er mit seltenem Erfolge sein Streben dahin, zu zeigen, dass die euklidische Geometrie innere Lebenskraft genug habe, um sich selbstständig auf den Höhepunkt zu heben, auf welchen man dieselbe nur durch das Element der Algebra heben zu können vermeinte. Dieser leitende Gedanke, welcher den Verstorbenen mit der vollsten Klarheit durchdrang, musste ihn nothwendig zu der in ihm fest gegründeten Ansicht bringen, dass eine Reform im Systeme der Geometrie sowohl durch die Entwickelung der Wissenschaft selbst, als durch die Anforderungen der Zeit nothwendig geworden sei. Beseelt von dem Bewusstsein, dass diese Reform, wenn sie zum segensreichen Resultate führen sollte, mit der grössten Sorgfalt vorgenommen werden müsse, und mit dem festen Entschlusse, das Seinige zu Erreichung dieses schönen Zieles beizutragen, unternahm er, einzelne Partieen der Geometrie nach der oben ausgesprochenen Grundansicht zu bearbeiten.

Den Anfang machte er mit seiner „Lehre von den Transversalen“ (Winterthur bei Steiner 1843) und sicherte sich mit diesem ersten Auftreten den Ruf eines selbstständigen und scharfsinnigen mathematischen Schriftstellers, der es trefflich verstand, der auf dem Uebergang von den Elementen ins weitere Gebiet der geometrischen Forschung begriffenen Jugend jene schönen und neuen Theorieen zugänglich zu machen. Selbst in Paris machte diese Arbeit Aufsehen, und fand besonders bei einigen Professoren der école centrale einen solchen Beifall, dass ein ehemaliger Schüler von Adams, welcher dort studirte, mit einer Uebersetzung derselben beauftragt wurde, deren Erscheinen wir von der nächsten Zukunft erwarten dürfen.

Das Jahr 1845 brachte uns den ersten Theil seiner „harmonischen Verhältnisse“, ein Werk, welches den deutlichsten Beweis giebt, wie tief der Verfasser die Bedürfnisse erkannt und wie sehr er der geeignete Mann war, denselben abzuhelfen. In Verbindung mit der zuerst erwähnten Schrift lag nun die ganze Bedeutung der Richtung vor, welche Adams im Gebiete der Geometrie eingeschlagen wissen wollte; es lagen zwei klar ausgearbeitete Partieen der Geometrie vor, die besonders im Gebiete der angewandten Mathematik (z. B. Optik) zum Theile schon eine Rolle spielen, und noch eine wichtigere Rolle spielen werden. Schade, dass der zweite Theil dieses Werkes, welcher die harmonischen Verhältnisse des körperlichen Raumes und eine ausführliche Theorie der Kegelschnitte enthalten sollte, bis jetzt nicht erscheinen konnte, indem der Verfasser von anderer Beschäftigung abgezogen wurde, denn schon im Jahre 1846 erschienen seine „merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks" eine Schrift, welche sich selbst nicht als ein blosses curiosum ankündigt, etwa als Uebungsstoff des geometrischen Scharfsinnes zu ihrem Dasein berechtigt; sondern die vielmehr mithelfen soll und kann, ein vollständiges und abgerundetes System der Geometrie zu ermöglichen. Nicht ohne grossen Beifall zu ernten, erschien im gleichen Jahr eine neue Auflösung des Malfattischen Problems, welche vor allen andern bisher bekannten Auflösungen das zum Voraus hatte, dass sie die Ausdrücke leicht und fasslich darstellte, welche Malfatti selbst hinterlassen hatte, und welche selbst von den scharfsinnigsten mathematischen Forschern vergebens darzustellen versucht worden waren. Eine noch fasslichere Auflösung dieses Problems findet sich im Programm der Winterthurer Gewerbsschule von 1848.

Wenn diese genannten Werke des Verstorbenen schon die Aufmerksamkeit der mathematischen Welt auf sich gezogen hatten, so geschah dies jedoch noch in weit höherem Maasse durch sein neuestes Werk „Geometrische Aufgaben mit besonderer Rücksicht auf geometrische Construction"; worin die ausgesprochene Tendenz in ihrer vollen Bedeutung an den Tag tritt, und worin die geistige Kraft des Verfassers in ihrem hellsten Lichte strahlt. Diese Aufgabensammlung birgt unter ihrem bescheidenen Titel einen wahrhaft goldenen Kern für die Wissenschaft, und sichert dem Heimgegangenen unsterblichen Nachruhm in den Annalen der Mathematik. Nicht nur wird jede andere ähnliche Sammlung durch sie überflüssig, sondern es öffnet sich durch sie dem studirenden Jünglinge ein Gesichtspunkt der Wissenschaft, der nur von den vortheilhaftesten Folgen für die andern Zweige seines Studiums sein kann.

Es konnte unsere Absicht nicht sein, eine ausführliche Kritik der Werke unseres hingeschiedenen Freundes zu liefern; aber an seinem frischen Grabhügel konnten wir es uns nicht versagen, uns und den Freunden des Heimgegangenen in Deutschland vor die Seele zu rufen, was und wen wir in Adams verloren.

Friede, Friede seiner Asche! —

Druckfehler.

Im Literar. Ber. Nr. LII. S. 721. Z. 17. v. u. (im Text) s. „befinden" für „beschäftigt."

LIV.

Literarischer Bericht.

ysteme, Lehr- und Wörterbücher.

Taschenbuch der Mathematik oder kürzester Weg Erlernung des Wesentlichen derselben, zum Ge- uche für höhere Schulanstalten, Beamte, Techniker von Dr. C. Enzmann, mit einem Vorworte von Dr., A. Jahn. Dresden. 1849. 8. 1 Thlr. 15 Sgr.

Die ganze sogenannte reine Mathematik bis incl. zur Differen- und Integralrechnung in Taschenbuchformat! Diese Schrift daher eine ganz ähnliche Tendenz wie J. J. v. Littrow's im Jahre 1838 herausgegebene Kurze Anleitung zur ammten Mathematik, die den Lesern des Archivs wohl nnt sein wird. Vergleichen wir aber beide Bücher mit einan- , so müssen wir doch der Schrift von J. J. v. Littrow, die rer Sphäre wirklich mit Geist verfasst, und in einer überaus achen und deutlichen Sprache geschrieben ist, ja selbst auch treng wissenschaftlicher Beziehung, z. B. in der Integralrech- g, manche nicht uninteressante Bemerkungen enthält, bei Wei- den Vorzug geben. Wir glauben daher, dass das vorliegende h, da schon eine in ihrer Art gewiss sehr ansprechende rift von ganz gleicher Tendenz existirt, ohne sich, so viel uns igstens bekannt geworden ist, besonders Bahn haben brechen können, immerhin hätte ungeschrieben bleiben können, wenn der Wille des Herrn Verfassers gewiss gut gewesen ist. er die gewählte Art der Darstellung wollen wir mit ihm bei r solchen Schrift nicht rechten; gewiss ist aber bei einer rift wie dieser der Gebrauch so vieler ganz ungewöhnlicher

Zeichen, z. B. Sx, $\mathfrak{S}x$, Tx, $\mathfrak{T}x$, $Sc.x$, $\mathfrak{S}c.x$ respective statt $\sin x$, $\cos x$, $\tan g x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, ferner δ statt des gewöhnlichen Differentialzeichens ∂, wobei der Herr Verfasser doch auch hätte bedenken sollen, dass δ in der Mathematik, nämlich in der Variationsrechnung, schon eine ganz andere allgemein recipirte Bedeutung erhalten hat, sehr am unrechten Orte angebracht

---

Arithmetik.

Die Arithmetik und Algebra für den Schul- und Selbstunterricht bearbeitet von Karl Koppe, Professor und Oberlehrer am Gymnasium zu Soest. Zweite umgearbeitete und durch zahlreiche Aufgaben vermehrte Auflage. Essen. 1849. 8. 27 Sgr.

Dieses empfehlenswerthe Lehrbuch, so wie die mathematischen und physikalischen Lehrbücher des Herrn Verfassers überhaupt, ist aus seiner ersten Auflage bekannt genug, und bedarf deshalb keiner neuen Empfehlung. Es umfasst alle diejenigen Lehren der Arithmetik und Algebra, mit Einschluss des Binomischen Lehrsatzes, der Combinationslehre, der unbestimmten Analytik u. s. w., welche auf höheren Unterrichtsanstalten vorgetragen zu werden pflegen, in ziemlicher Ausführlichkeit, und wird wegen seiner deutlichen Darstellung und zweckmässigen Anordnung bei'm höhern mathematischen Schulunterrichte gewiss mit Nutzen als Lehrbuch zum Grunde gelegt werden.

Exercices et problèmes de calcul différentiel et intégral; ouvrage traduit de l'anglais par M. Léonce Clarke et dédié à M. Augustin Cauchy. Premier cahier. In 8°., 1849. Prix 1 fr. 50 c.

Wir hoffen nächstens dieses Werk, welches wir jetzt nur dem Titel nach anzuzeigen uns begnügen müssen, um es bald zur Kenntniss des deutschen mathematischen Publikums zu bringen, besonders zu besprechen.

Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. Von L. A. Sohncke, ord. Professor an der Universität zu Halle. Halle. 1850. 2 Thlr. 8.

Wir beeilen uns das Erscheinen einer Schrift anzuzeigen, welche einem wirklichem Bedürfnisse in sehr genügender Weise abhilft. Denn wenn wir auch schon mehrere Beispiel-Sammlungen zur Differential- und Integral-Rechnung besitzen, so genügt doch keine dieser Sammlungen insofern hinreichend, dass sie neben vorzüglicher Anregung zum Nachdenken auch vollständig genug sei, um dem Anfänger in der Differential- und Integral-Rechnung eine hinreichende Uebung im Calcul und dessen Anwendung in der Theorie der krummen Linien und krummen Flächen zu gewähren. Beiden Anforderungen genügt aber die vorliegende Schrift nach unserer Ueberzeugung in ausgezeichneter Weise, wie schon die folgende Angabe ihres Hauptinhalts beweisen wird: I. Differentialquotienten der ersten Ordnung expliciter Functionen einer Variablen. II. Independente Darstellung der Differentialquotienten höherer Ordnung. III. Differentiation impliciter Functionen mehrerer Variabeln. IV. Anwendung der Differentialrechnung auf die Auswerthung unbestimmt erscheinender Ausdrücke. V. Anwendung der Differentialrechnung auf die Bestimmung der Maxima und Minima. VI. Anwendung der Differentialrechnung auf Geometrie. VII. Integration algebraischer irrationaler Functionen. VIII. Integration algebraischer rationaler Functionen. IX. Integration transcendenter Functionen. X. Integration zwischen bestimmten Gränzen. XI. Anwendung der Integralrechnung auf Geometrie. — Wir haben uns beeilen zu müssen geglaubt, alle Lehrer der höheren Analysis, und alle Anfänger in dieser Wissenschaft, welche beabsichtigen, sich in derselben fester zu setzen und sich eine tüchtige Uebung im Differentiiren und Integriren zu verschaffen, auf dieses gewiss sehr nützliche und dem Unterrichte in der Analysis gewiss sehr förderliche Buch aufmerksam zu machen, und empfehlen dasselbe nochmals zur sorgfältigsten Beachtung.

Die Vortheile der Lebens-Versicherungs-Banken. Durch mathematisch genaue Berechnung nachgewiesen an der Lebens- und Pensions-Versicherungs-Gesellschaft Janus in Hamburg. Zugleich eine Aufgabensammlung über Zinseszins-, Sparkassen- und Rentenrechnung. Von Dr. August Wiegand. Halle. 1849. 8. 3 Sg.

Eine zwar nur kleine, aber manche Belehrung darbietende Schrift. Unter mehreren Banken giebt der Herr Verfasser dem Janus, nach angestellter Vergleichung desselben mit jenen, den Vorzug.

Geometrie.

Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maasses. Ein Lehrbuch von Dr. Oskar Schlömilch, Professor der höheren Mathematik und Mechanik an der technischen Bildungsanstalt zu

Dresden. Erster Theil. Geometrie der Ebene. Mit fünf Figurentafeln. Eisenach. 1849. 8. 1 Thlr.

Der Herr Verfasser hat in diesem ersten Theile des vorliegenden Werks ein sehr ansprechendes Lehrbuch der sogenannten ebenen Geometrie und der ebenen Trigonometrie in „organischer Gliederung" und nach „heuristischem Gedankengange" geliefert, in welchen beiden Beziehungen er in der Vorrede sein Buch den nach euklidischer Methode verfassten Lehrbüchern gegenüber stellt. Wenn denkende Mathematiker der nach euklidischer Methode verfassten Lehrbücher zuweilen besonders rühmend gedenken, so haben dieselben dabei wohl weniger diese Methode an sich, als vielmehr die durch dieselbe unzweifelhaft erreichbare und wirklich erreichte grosse mathematische Strenge und Evidenz im Sinne, ohne damit geradezu in Abrede stellen zu wollen, dass eine solche Strenge auch auf anderem Wege erreichbar sei. Wenn nun der Herr Verfasser in der Vorrede eine etwa zu ziehende Parallele zwischen seinem vorliegenden Buche und dem, wie er meint, eine gleiche Tendenz verfolgenden Lehrbuche der Geometrie von K. Snell. Leipzig. 1841. (M. s. Literar. Ber. Nr. II. S. 29.) entschieden zurückweist, so geben wir ihm darin vollkommen recht, sind jedoch der Meinung, dass eine solche Zurückweisung für urtheilsfähige Mathematiker ganz unnöthig war; denn wer beide Bücher kennt, kann unmöglich versucht werden, eine solche Parallele zu ziehen. Herrn Schlömilch's Buch ist, mag es immerhin nicht der sogenannten euklidischen Methode in ihrer Form huldigen, doch ein völlig strenges und dabei, wie schon erwähnt worden, in sehr ansprechender Darstellung verfasstes Lehrbuch, das man aber nicht nach Tisch, auf dem Sopha liegend, lesen kann, sondern das Nachdenken erfordert und zum Nachdenken anregt, was bei einem Lehrbuche immer mit eine Hauptsache ist; was Herrn Snell's Buch ist, wollen wir hier nicht weiter aus einander setzen, aber, ohne dessen Herrn Verfasser im Geringsten persönlich zu nahe treten zu wollen, müssen wir doch wenigstens so viel bemerken, dass durch dasselbe gewiss Niemand ein Geometer, d. h. zur selbstständigen Führung einer geometrischen Untersuchung befähigt werden wird. Wir wiederholen, dass das vorliegende neue Lehrbuch der ebenen Geometrie und ebenen Trigonometrie eine sehr gute, aus einer selbstständigen Anschauung der Wissenschaft hervorgegangene Darstellung der beiden betreffenden Disciplinen liefert, das wir mit grossem Vergnügen gelesen haben, und das sich gewiss viele Freunde erwerben wird, selbst auch bei seiner grossen Deutlichkeit und einfachen Darstellungsweise zum Selbststudium empfohlen zu werden verdient, wobei noch besonders hervorgehoben werden muss, dass es auch eine ziemliche Vollständigkeit erstrebt und in manchen Partieen weiter geht als andere derartige Bücher, indem es z. B. auch die ebene Polygonometrie in seinen Kreis gezogen hat, und auch die Construction des regulären Siebzehnecks lehrt, auch manche Aufgaben und Betrachtungen heranzieht, die sich in andern geometrischen Lehrbüchern nicht finden. Wir empfehlen daher dieses neue Lehrbuch der Beachtung der Leser unserer Zeitschrift recht sehr aus vollkommenster Ueberzeugung, und wünschen, dass der Herr Verfasser uns recht bald mit der Fortsetzung erfreuen möge.

Lehrbuch der descriptiven Geometrie von T. Franke, Dr. phil., Professor an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden.*) Erstes Heft. Die Darstellung des Punktes, der Linie und der Ebene nach der Parallel-Projection. Mit acht Taf. in Qrt. Leipzig. 1849. 8. 22½ Sgr.

Die deutsche Literatur, wenn auch in neuerer Zeit mehrere Werke über descriptive Geometrie erschienen sind, was bei der grossen Wichtigkeit dieses Gegenstandes für die Technik, welche mit Recht auch bei uns immer mehr anerkannt wird, nicht anders sein kann, ist nicht gerade sehr reich an solchen Werken, wenigstens jedenfalls nicht so reich wie die französische Literatur, und jede neue Erscheinung auf diesem Gebiete verdient daher Dank. So auch die vorliegende verdienstliche Schrift. Mit Recht bemerkt der Herr Verfasser in der Vorrede, dass die descriptive Geometrie zwar in ihrem dermaligen Gewande allerdings die Regeln umfasse, nach welchen Linien und Flächen mit Hülfe der Projection sich darstellen lassen, damit aus der Projection die wahre Beschaffenheit oder äussere Erscheinung dem Gesichtssinne zugeführt werde, dass aber allerdings die Methode der Projection einer höheren Auffassung fähig sei, zufolge welcher ihr Zweck darin bestehe, aus den Wahrheiten der elementaren Geometrie der Ebene und des Raumes heraus die Eigenschaften der gesetzmässigen Raumgebilde organisch zu entwickeln, sonach die elementare Geometrie in nothwendiger Schlussfolge fortzubilden. Sie leite im Allgemeinen zu demselben Ziele, wie die analytische Geometrie; denn der Veränderung, welche diese mit ihren Gleichungen vornehme, entspreche die Zeichnung der graphischen Methode, nur mit dem Unterschiede, dass die Bedeutung jener Veränderung, wenn sie eine geometrische Wahrheit enthalte, in die Sprache der Geometrie zu übersetzen sei, während die graphische Methode das Liniengebilde oder dessen Veränderung nach Lage und Gestalt dem äussern und innern Sinne zur unmittelbaren Anschauung bringt, und daher auf einem geraden und leichten Wege zum Ziele führe. In diesem Sinne beabsichtigt der Herr Verfasser die ganze descriptive Geometrie in dem Werke, dessen erstes Heft uns jetzt vorliegt, zu behandeln, und je mehr wir selbst von der Richtigkeit dieser Auffassungsweise überzeugt sind, durch welche allein die descriptive Geometrie zur wissenschaftlichen Methode erhoben wird und nicht bloss eine Dienerin der Technik bleibt; desto mehr empfehlen wir dieses neue Werk über descriptive Geometrie den Lesern des Archivs zu sorgfältiger Beachtung. Das vorliegende erste Heft enthält nach einer Einleitung den Punkt, die gerade Linie, zwei Gerade, die Ebene, die Ebene und Gerade, zwei Ebenen, das körperliche Dreieck, neue Lage der Projections-Ebenen, neue Lage des Punktes, der Geraden und der Ebene. Man wird aus dieser Inhaltsangabe die systematische Anordnung des Ganzen und die auf die analytische Geometrie genommene Beziehung — indem z. B. die beiden letzten Abschnitte der Lehre von der Transformation der Coordinaten in der analytischen Geometrie entsprechen — leicht

*) Jetzt an der polytechnischen Schule zu Hannover.

erkennen, und dem Herrn Verfasser das Zeugniss nicht versagen, dass er das sich vorgesteckte Ziel streng im Auge behalten hat. Ausser der allgemeinen Auffassungsweise enthält auch im Einzelnen dieses Heft manches Neue, in welcher Beziehung die Leser besonders auf die ganz vollständige und systematische graphische Behandlung des sphärischen Dreiecks, für welches gewöhnlich nur ein Paar isolirt stehende Aufgaben graphisch aufgelöst werden, aufmerksam gemacht werden müssen, sowie auf andere, damit in Verbindung stehende neue Auflösungen einiger Aufgaben, so dass wir auch in dieser Beziehung dem baldigen Erscheinen der folgenden Hefte dieses sehr verdienstlichen Buchs, welche vorzüglich der Geometrie der Flächen gewidmet sein werden, mit Verlangen entgegen sehen. Die Ausstattung des Textes und der Figurentafeln ist vorzüglich.

Die schwierigeren geometrischen Aufgaben aus des Herrn Prof. C. F. A. Jacobi Anhängen zu van Swinden's Elementen der Geometrie. Mit Ergänzungen englischer Mathematiker und Auflösungen herausgegeben von Dr. August Wiegand, Oberlehrer an der Realschule in den Francke'schen Stiftungen zu Halle. Halle 1849. 8. 1 Thlr. 7½ Sgr.

Ausser den aus den erwähnten Anhängen entlehnten und aufgelösten Aufgaben enthält diese empfehlenswerthe Schrift noch geometrische Aufgaben und Sätze von 28 englischen Mathematikern, welche der Zeitschrift „The Mathematician" entnommen worden sind. Im Ganzen enthält die Schrift 159 geometrische Aufgaben, ausserdem in einem Anhange und Nachtrage noch 14 trigonometrische Aufgaben und Sätze von englischen Mathematikern, und die Leser des Archivs sehen also, welches reiche Material ihnen hier geboten wird. Da die Aufgaben in den Anhängen zu van Swinden's Elementen der Geometrie meistens grössere Schwierigkeiten darbieten als Aufgaben in anderen ähnlichen Sammlungen, und die genannte englische Zeitschrift, die vorzüglich für den mathematischen Unterricht wichtig ist, sich wohl in den Händen nur weniger Lehrer der Mathematik befindet, so ist die vorliegende Schrift des Herrn Dr. Wiegand, dessen so eifrigen Bestrebungen für die Förderung des mathematischen, insbesondere des geometrischen Unterrichts wir den erfreulichsten Erfolg von Herzen wünschen, jedenfalls eine sehr verdienstliche zu nennen, und keineswegs etwa in eine Kategorie mit den Auflösungen der algebraischen Aufgaben des Meyer Hirsch von Sachs u. s. w. oder ähnlichen dem mathematischen Unterrichte wenig Nutzen bringenden, fast nur schadenden Büchern, zu setzen, da ihr auch neben ihrem pädagogischen Nutzen wissenschaftlicher Werth nicht abgesprochen werden kann. Sie schliesst sich übrigens an die früher, von demselben Herrn Verfasser, erschienenen „Lehrsätze und Aufgaben aus des Herrn Prof. Jacobi Anhängen u. s. w. Halle. 1847. I. Band und II. Band. 1. Abtheil." an und bildet mit denselben ein Werk, von welchem sie der Schluss ist.

Optik.

Das orthoskopische Ocular, eine neu erfundene achromatische Linsencombination, welche dem astronomischen Fernrohr, mit Einschluss des dialytischen Rohrs, und dem Mikroscop, bei einem sehr grossen Gesichtsfeld, ein vollkommen ungekrümmtes, perspektivisch richtiges, seiner ganzen Ausdehnung nach scharfes Bild ertheilt, so wie auch den blauen Rand des Gesichtsraumes aufhebt. Mit einer Anleitung zur Kenntniss aller Umstände, welche zu einer massgebenden Beurtheilung und richtigen Behandlungsart der optischen Instrumente, insbesondere des Fernrohrs durchaus nöthig sind, von Carl Kellner, Optiker zu Wetzlar. Nebst einem Anhange: Zur Kenntniss und genauen Prüfung der Libellen oder Niveau's von M. Hensoldt, Mechaniker. Braunschweig. 1849. 8. 15 Ngr.

Wahrlich viel Worte auf diesem Titel! Was es mit dem neuen „orthoskopischen Ocular" für eine Bewandtniss hat, erfährt man aus dieser Schrift keineswegs, denn der Herr Verf. sagt S. 18. ausdrücklich: „Es wird gewiss keiner meiner geehrten Leser die Erwartung hegen, dass ich hier, meine Erfindung rücksichtslos preisgebend, mich auf eine Zergliederung der Einrichtung dieses Oculars und Entwicklung der Grundprincipien, auf welche der gute Erfolg sich gründet, einlassen werde, sondern es vielmehr gern verzeihen, wenn ich nur berichte, was das neue Ocular leistet." Demzufolge hätte er, weil auch alles Uebrige in der Schrift meistens wenig wirkliche Belehrung gewährendes blosses Gerede ist, dieselbe besser ungeschrieben gelassen, sich auf eine blosse öffentliche Ankündigung beschränkt, und die Beurtheilung seines Oculars dem praktischen Gebrauch lediglich anheim gestellt. Aus der Schrift selbst erfährt man nichts weiter, als dass das Ocular vor dem Campani'schen und Ramsden'schen zweifachen Oculare wesentliche Vortheile, die der Titel angiebt, haben soll, „und dass dasselbe, obwohl es ein dreifaches Ocular ist, also aus drei Linsen besteht, doch nur vier spiegelnde Flächen hat." Es kann also durchaus nur der praktische Gebrauch über die Leistungen dieses sogenannten orthoskopischen Oculars entscheiden, die Schrift selbst wäre jedenfalls besser ungeschrieben geblieben; wenigstens warnen wir vor der Anschaffung, wenn sie auch nur 15 Sgr. kostet. Die Vorrede und der Anhang: „An die Männer der Wissenschaft" klingen etwas marktschreierisch. In dem Anhange über die Prüfung der Libellen beschreibt Herr Hensoldt ein zu diesem Zweck bestimmtes besonderes Instrument, über dessen Brauchbarkeit man auch nur nach wirklicher Anwendung wird urtheilen können. Wir sollten meinen, dass wenigstens derjenige, wer einen hinlänglich genau getheilten Vertikalkreis besitzt, an welchen er die Libelle anbinden kann, ein solches besonderes Instrument zur Prüfung der Libellen sollte entbehren können; jedoch wollen wir nicht absprechen, da bei solchen Dingen eigne praktische Anwendung nöthig ist, wenn man sich zu einem vollgültigen Urtheile will für berechtigt halten.

Astronomie.

Mittlere Oerter von 12000 Fix-Sternen für den Anfang von 1836, abgeleitet aus den Beobachtungen auf der Hamburger Sternwarte von Carl Rümker. Vierte Abtheilung. Erste Hälfte, die 18te bis 21ste Stunde enthaltend. Hamburg. 1849. 4. 1 Thlr. 15 Sgr.

Wir freuen uns sehr, wieder eine Fortsetzung dieses trefflichen, aus directen auf der Hamburger Sternwarte angestellten Beobachtungen abgeleiteten Fixstern-Catalogs anzeigen zu können. Wer die Wichtigkeit genauer Sternpositionen für die heutige Astronomie zu würdigen versteht, wird das grosse Verdienst, welches der Herr Director Rümker durch Bearbeitung dieses Sternkatalogs um die Wissenschaft sich erwirbt, gewiss dankbar erkennen. In dieser Zeitschrift müssen wir uns mit der blossen Anzeige dieser neu erschienenen Fortsetzung begnügen, wünschen aber sehr, dass dieser ausgezeichnete Catalog neben anderen ähnlichen verdienstlichen Arbeiten von allen Astronomen recht vielfach bei ihren Rechnungen und Beobachtungen benutzt werden möge.

Nautik.

Längen-Bestimmung durch den Mond. Eine nautisch-astronomische Abhandlung von Carl Rümker Hamburg. 1849. 2 Thlr.

Diese sehr zu empfehlende, mit grosser Deutlichkeit verfasste Schrift enthält mehr als ihr Titel angiebt. Sie enthält nämlich vier Abhandlungen: Längenbestimmung durch Mond-Distanzen. — Längenbestimmung durch Fixstern-Bedeckungen. — Vorausberechnung der Stern-Bedeckungen. — Längenbestimmung durch Culmination des Mondes und der Mondes-Sterne, welche sämmtlich sehr instructiv, ganz elementar, mit fortwährender Rücksicht auf anschauliche Erläuterung durch Figuren verfasst, und durch vollständig ausgerechnete numerische Beispiele sehr zweckmässig erläutert sind, wobei auch mehrere dem Herrn Verfasser eigenthümliche Methoden vorkommen. Den Hauptinhalt bildet aber eine Sammlung sehr sorgfältig berechneter sehr nützlicher nautischer Tafeln, nämlich: *Tafel* I. Zur Berechnung der wahren Mond-Distanz. S. 2 — 175. II. Mittlere Refraction und Kimmtiefe. III. Halbmesser und Höhen-Parallaxe der Sonne. IV. Contraction des verticalen Halbmessers durch Refraction. V. Vergrösserung des Mondshalbmessers. VI. Höhen-Parallaxe eines Planeten. VII. Correction der mittleren Refraction für Thermometer- und Barometer-Stand. VIII. Zur Verwandlung der Barometer- und Thermometer-Scala. IX. Radienvectoren und Abstände des geocentrischen Zeniths vom geographischen. X. Zur Berechnung der Correction wegen zweiter Differenzen. XI. Correction der mittleren Greenwich-Zeit für zweite Differenzen bei Mond-Distanzen. XII. Verbesserung der Halbmesser in der Ebene der Mond-Distanz. XIII. Correction der Aequatorial-Horizontal-Parallaxe des Mondes wegen Abplattung. XIV. An die durch Approximation gefundene wahre Distanz anzubringende Correction. XV. Hülfstafel für eine neue Methode zur Berechnung der wahren Distanz. — Man sieht hieraus, wie vieles Nützliche diese nautischen Tafeln enthalten, und muss sich dem Herrn Verfasser für die auf die Berechnung derselben verwandte grosse Mühe und Sorgfalt zu dem lebhaftesten Danke verpflichtet fühlen. Möge das Werk bei allen wissenschaftlich gebildeten Seefahrern und auf allen nautischen Lehranstalten die wohlverdiente Beachtung im vollsten Maasse finden, und vielfach gebraucht werden!

Physik.

Der Charakter des Flüssigen. Versuch, den Zwiespalt zu beseitigen, welchen die Erklärung der Erscheinungen des Drucks und der Hebung der Flüssigkeiten veranlasst hat. Von B. T. Berlin. 1850. 8. 5 Sgr.

Gehört zur Drieberg-Literatur, und wird daher hier nicht weiter besprochen, sondern das Urtheil den Lesern selbst anheim gestellt.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1847. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. III. Jahrgang. Redigirt von Professor Dr. G. Karsten.

Erste Abtheilung. Enthaltend: Allgemeine Physik, Akustik, Optik und Wärmelehre. Berlin. 1849. 8. 1 Thlr. 10 Sgr.

Was im Literar. Ber. Nr. XXXVII. S. 538. zur Empfehlung dieses Unternehmens gesagt worden ist, gilt auch von diesem Jahrgange. Der Inhalt der ersten Abtheilung ist auf dem Titel angegeben.

Vermischte Schriften.

Verhandlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft bei ihrer Versammlung zu Solothurn den 24., 25. und 26. Heumonat 1848. 33. Versammlung. Solothurn. 8.

Ausser den Relationen über die einzelnen Versammlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft und den Berichten über die Verhandlungen der Kantonalgesellschaften zu Basel, Bern, La Chaux-de-Fonds, Genf, Waadt, Solothurn, Zürich in den Jahren 1847 und 1848, enthalten diese Verhandlungen auch einige grössere Aufsätze, welche die Beachtung der Leser des Archivs verdienen, und deren Titel daher hier vollständig angegeben werden sollen: Relation über das von Chorherr Berchtold in Sitten entdeckte Maass-System der Natur von Professor O. Möllinger (S. 74. — S. 86.). Jedenfalls ein viele merkwürdige Ideen und Auffassungsweisen enthaltender Aufsatz, der — ohne hier für jetzt irgend Rücksicht auf die praktische Ausführbarkeit der gemachten Vorschläge nehmen und die Richtigkeit der ausgesprochenen Ansichten prüfen zu wollen — den Lesern des Archivs zur Beachtung empfohlen zu werden verdient. Die Schrift selbst, in welcher diese Ideen ausgesprochen sind, führt nach Herrn Professor Möllinger's Angabe den Titel: La Métrologie de la nature, découverte par M. Jos. Ant. Berchthold, Chanoine de Sion etc. ouvrage approuvé par plusieurs comités scientifiques; traduit de l'Allemand par M. Jos. Nic. Hubert. Am Ende seines Berichts macht Herr Professor Möllinger der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft die folgenden Vorschläge:

1) Die naturforschende Gesellschaft der Schweiz möge dem Herrn Verfasser der Métrologie de la nature ihren Dank und ihre Anerkennung seiner Verdienste aussprechen;

2) es möchte der ehemaligen Kommission für die Feststellung der schweizerischen Maasse und Gewichte die Entdeckung des Herrn Verfassers zur Prüfung und zur Berichterstattung an das Centralkomité unseres Vereins vorgelegt werden;

3) im Falle die Kommission die Wünschbarkeit einer allgemeinen Einführung des neuen Maassystems ausspricht, soll das Centralkomité der naturforschenden Gesellschaft beauftragt werden, sich mit den Akademien oder statistischen Vereinen der angränzenden Staaten in Verbindung zu setzen und behufs einer allgemeinen Einführung zur Prüfung des neuen Maassystems einzuladen.

Wir führen dies hier an, um zu zeigen, welchen Werth Herr Professor Mülli nger auf die Ideen des Herrn Chorherrn Berchthold in Sitten legt. Welche Aufnahme die obigen Anträge bei der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft gefunden haben, geht aus den Verhandlungen (S. 15.) nicht hervor.

Ueber die langsame Oxydation der Körper in atmosphärischer Luft von Prof. Schönbein. S. 87. — S. 113.

Ueber die Erzeugung des Ozons durch Phosphor in reinem Sauerstoffgas von Demselben. S. 114 — 142.

Auszug aus der Abhandlung über die Erfahrungen im Gebiete der Alpenwirthschaft von Kasthofer. S. 143 — S. 145.

Methode den Einfluss zu compensiren, welchen die Eisenmassen eines Schiffes in Folge der Vertheilung der magnetischen Flüssigkeiten durch den Erdmagnetismus auf die Compassnadel ausüben. Von Jacob Amsler. In nautischer Rücksicht machen wir auf diese Abhandlung, welche mit einer andern in den Denkschriften der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft abgedruckten Abhandlung in Verbindung steht, aufmerksam. Die Untersuchungen von Barlow, und die auf verschiedenen Seereisen mit dem von demselben vorgeschlagenen einfachen Compensationsapparate vorgenommenen Prüfungen sind den Lesern des Archivs, welche sich für diesen Gegenstand interessiren, bekannt, und können in dem eine sehr lehrreiche Darstellung von Horner enthaltenden Artikel „Ablenkung der Magnetnadel" in dem ersten Theile des Gehler'schen Wörterbuchs nachgelesen werden. Die grosse Wichtigkeit dieses Gegenstandes für die Schifffahrt leuchtet auf den ersten Blick ein, und wird, wie Horner am Ende des angeführten Artikels bemerkt, z. B. durch das Unglück des Ostindienfahrers Thames bewiesen, welcher ausser den gewöhnlichen eisernen Schiffsgeräthschaften noch eine Ladung von mehr als 400 Tonnen Eisen und Stahl an Bord hatte, und, nachdem er Abends um 6 Uhr noch das Vorgebirge Beachy-head in Sicht hatte, um 1 bis 2 Uhr Morgens auf der nämlichen Stelle strandete, während dem man sich noch weit vom Lande entfernt glaubte. Sollte es wohl einer anderen Erklärung dieses merkwürdigen Unglücksfalls bedürfen, als der durch die vielen an Bord befindlichen Eisenmassen herbeigeführten grossen Missweisung der Magnetnadel?

Ausserdem enthalten die verliegenden Verhandlungen noch interessante ausführliche Nekrologe von Heinrich Zschokke (geb. den 22. März 1771 zu Magdeburg, gest. den 27. Juni 1848 zu Aarau), der sich immer eifrig mit Naturwissenschaften in weitester Beziehung beschäftigte, so weit dies ohne höhere mathematische Kenntnisse möglich war; und von Daniel Alexander Chavanne's (geb. den 21. Julius 1765 zu Vevey, gest. den 29. Octbr. 1846 zu Lausanne); so wie viele einzelne interessante mathematische und naturwissenschaftliche Notizen, welche die vorliegenden Verhandlungen der Beachtung der Leser des Archivs sehr werth machen.

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. Edited by W. Thomson, M. A., F. R. S. E. Vergl. Literar. Bericht. Nr. LII. S. 726.

No. XXII. On the Mathematical Theory of Electricity in Equilibrium. VI. — Geometrical Investigations regarding Sperical Conductors. By William Thomson. — On certain Theorems in the Calculus of Operations. By W. F. Donkin. — On Curves of Double Curvature and Developable Surfaces. By Arthur Cayley. — On the Classification of Curves of Double Curvature. By Rev. George Salmon. — On the Developable Surfaces which arise from Two Surfaces of the Second Order. By Arthur Cayley. — On the Theorems in Space anologous to those of Pascal and Brianchon in a Plane. Part II. By Thomas Weddle. — On the Bifocal Chords of Surfaces of the Second Order. By John Y. Rutledge. — Analytical Demonstration of a Theorem in Carnot's „Theorie des Transversales." By William Walton.

(The next Number will be published on the 1st of May.)

Druckfehler.

In dem Titel der Abhandlung Nr. VIII. in diesem Hefte S. 113. ist leider der Name des Herrn Vfs. der Abhandlung falsch „Mossburger" gesetzt worden. Der richtige Name ist „Mossbrugger."

LV.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Mathematische Abhandlungen von Dr. O. Schlömilch, Professor der höheren Mathematik an der Königlich Sächsischen technischen Bildungsanstalt zu Dresden. Dessau. 1850. 8.

Der Herr Vf. beschenkt uns hier wieder mit einer Reihe interessanter und wichtiger mathematischer Abhandlungen, deren Titel folgende sind: I. Ueber das Theorem von Maclaurin. — II. Die Bürmann'sche Reihe. — III. Ueber approximative Quadraturen. — IV. Ueber ein Doppelintegral mit zwei willkührlichen Functionen. — V. Ueber die Bestimmung der Masse bei ungleichförmiger Dichtigkeit.

Besonders interessant ist uns Nr. II. gewesen, in welcher Abhandlung die Gültigkeitsbedingungen der Bürmann'schen Reihe zum ersten Male vollständig erörtert sind. Aber auch alle übrigen Abhandlungen enthalten des Bemerkenswerthen so vieles, dass wir die Leser des Archivs dringend auffordern, sich auch mit diesen ganz im Geiste der neueren Analysis gehaltenen Arbeiten des Herrn Vfs. baldigst bekannt zu machen. Uebrigens bilden die Abhandlungen I., II., III., und ebenso IV., V., in gewisser Rücksicht ein Ganzes, und das in der Abhandlung V. gewonnene allgemeine elegante Theorem (S. 146.) verdient jedenfalls alle Beachtung.

Geometrie.

Die geometrischen Oerter einiger merkwürdigen Punkte im Dreieck und damit in Verbindung stehende Dreiecksätze. Vom Inspector Gent. Liegnitz. 1850. 4. (Programm der Ritter-Akademie zu Liegnitz von Ostern 1850.)

Diese Abhandlung schliesst sich an die im Archiv Thl. IV. S. 445. gemachte Bemerkung: „dass, wenn man von einem Punkte der Peripherie eines Kreises auf die Schenkel eines Centriwinkels Lothe fällt, die Entfernung der Fusspunkte derselben unabhängig von der Lage des Punktes auf dem Umkreise ist, indem sie lediglich von der Grösse des Winkels abhängt" an, und führt durch sehr einfache Betrachtungen zu einer ziemlich grossen Anzahl geometrischer Sätze, die auch als Uebungen für Schüler sich sehr zweckmässig werden benutzen lassen, weshalb wir dieses lesenswerthe Programm der Aufmerksamkeit der Leser des Archivs recht angelegentlich empfehlen.

Trigonaltriaden in arithmetischer und harmonischer Progression. Von Dr. A. Wiegand. Halle. 1850. 4. 4 Sgl.

Die Anregung zu dieser, sehr zweckmässigen Stoff zu geometrischen und trigonometrischen Uebungen für Schüler darbietenden und deshalb Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten zur Beachtung zu empfehlenden kleinen Schrift gab der in der Zeitschrift: „The Mathematician" zum Beweise hingestellte Lehrsatz:

If the radii of the escribed circles of any plane triangle be in harmonical progression, then will the sides of the triangle be in arithmetical progression; welchen der Herr Vf. in sehr geschickter Weise ziemlich allgemein auszubeuten, und aus demselben viele zweckmässige Uebungs-Sätze und -Aufgaben für Schüler zu ziehen gewusst hat.

De novo systemate coordinatarum. Dissertatio mathematica auctore G. Stammer. Bonnae. 1849. 8.

Das neue Coordinatensystem, von welchem der Herr Vf. in dieser Schrift handelt, wollen wir mit seinen eignen Worten charakterisiren, indem wir bemerken, dass sich die Figur der Leser selbst leicht wird ergänzen können.

„A puncto fixo F in circuli circumferentia AFB jacente, quae e centro C radio $CF=R$ descripta est, arcus FA, FB in directione opposita abscindamus et in arcuum extremitatibus A, B tangentes circuli AM, BM ducamus, quae sese in puncto M secabunt. Quum in quovis circumferentiae puncto una tantum tangens duci possit, patet punctum M unicum semper exstare, igitur arcubus FA, FB perfecte determinatum esse. Vice versa, quum e puncto M extra circulum iacente duae solum tangentes strui possint, dato puncto M perfecte determinantur arcus AF, *BF*, qui a punctis contactus tangentium cum puncto fixo *F* includuntur. Itaque datis centro et radio circuli atque puncto fixo in circumferentia posito, quodcunque punctum extra circulum situm, duobus arcubus definiri potest, quibus igitur tanquam coordinatis uti licet. Quas novas coordinatas circulares vocemus et litteris ξ, η designemus ita ut ξ arcum *FA* sinistrorsum a puncto *F* numeratum, η contra arcum *FB* dextrorsum descriptum denotet. Punctum fixum *F* origo coordinatarum est."

Es ist diese Schrift, welche wir mit vielem Vergnügen gelesen haben, ein neuer Beweis für die Richtigkeit der schon in diesen literarischen Berichten bei verschiedenen anderen Gelegenheiten gemachten Bemerkung, die aber ursprünglich hauptsächlich von Plücker hervorgehoben und auf die deutlichste Weise in's Licht gesetzt worden ist, dass neue Coordinatensysteme fast immer auch zu neuen merkwürdigen Sätzen und Relationen führen. Es verdient daher diese Dissertation der Beachtung der Leser des Archivs empfohlen zu werden.

Praktische Geometrie.

Verhandeling over de Meetkundige Inhoudsvinding der Nederlandsche Matendoor F. J. Stamkart, Math. Mag. Phil. Nat. Doct., Arrondissements - Ijker te Amsterdam. 'S Gravenhage. 1844. 8.

Diese freilich schon früher erschienene Schrift ist erst jetzt zu unserer Kenntniss gelangt. Wir halten dieselbe jedoch für in mehrfacher Rücksicht bemerkenswerth, und machen daher noch jetzt auf dieselbe aufmerksam. Sie betrifft eine Verbesserung der ganz geometrischen Methode, wodurch die Niederländischen Inhalts-Maasse, seit ihrer Einführung, gesetzlich verificirt werden, und zeigt, wie viel diese Methode vor einem directen Messen, mit anderen Inhalts-Maassen, den sogenannten Standart-Maassen, voraus hat. Bei der Anwendung dieser Methode bedürfen die Aicher zur Verificirung eines Inhalts-Maasses nichts weiter als einige nach dem Längenmaasse (dem Meter) getheilte Stäbchen, um die Durchmesser und Höhe zu messen. Auch in allgemeiner mathematischer Beziehung ist diese Schrift interessant, wegen verschiedener in derselben entwickelter Näherungsformeln zur Flächen- und Körperberechnung, die wohl anderweitig wenigstens nicht in dieser Weise gegeben sein dürften. Wir bemerken daher nochmals, dass wir namentlich in jetziger Zeit, wo man wohl in verschiedenen Ländern bald zu neuen Maassregulirungen schreiten wird oder schon geschritten ist, eine besondere Hinweisung auf diese freilich schon vor einigen Jahren erschienene Schrift für angemessen und zweckmässig halten.

Zugleich verbinden wir hiermit noch zwei andere früher erschienene Abhandlungen desselben Herrn Verfassers:

Eenvoudig middel ter naauwkeurige vergelijking van Lengtematen (Overgenomen uit den Algemeenen Konst-en Letterbode. No. 36. van het Jaar 1839.)

Das Princip der in dieser Schrift entwickelten Methode stimmt mit der des Fühlspiegels von Herrn von Steinheil, neuerdings bekannt gemacht in den astronomischen Nachrichten. Nr. 684., ganz überein, und ist auch zur Vergleichung von Maassstäben à bout angewandt. Obschon der Herr Vf. die Theile des Apparats nur selbst, ohne Hülfe eines Künstlers, verfertigt hat, war doch die Richtigkeit des Verfahrens so gross, dass die mittleren Fehler einiger Vergleichungen $\frac{1}{1000}$ *mm.* nicht überstiegen. Die Hinweisung auf diese in Deutschland wohl gar nicht bekannte Abhandlung dürfte daher hier gleichfalls angemessen erscheinen.

Aanwijzing eener eenvoudige manier van Wegenwaardoor de fouten der Balansen grootendeels onschadelijk gemaakt worden, nevens beschrijving eener Nieuwe Balans. (Overgenomen uit den Algemeenen Konst-en Letterbode. Nr. 51., 52. en 53., van het Jaar 1844.)

Diese Schrift giebt eine Beschreibung einer neuen Weise des Wiegens, welche hauptsächlich darin bestehet, die beiden Schalen vor der Umwechselung der Gewichte fest zu setzen, oder, bei der Methode *Borda's* nur die eine Schale, wovon das Gewicht gewechselt werden soll. Dieses Princip ist angewendet worden bei einer Wage, welche Herr *E. Wenckebach* zu Amsterdam nach des Herrn Vfs. Angabe trefflich verfertiget hat, und das Resultat war, bei einer wiederholten Wiegung von 1 Kilogr., ein mittlerer Fehler für jede Wiegung $= \pm$ 0,5 Milligr.; bei einer Wiegung von einem Gewichte von 5 Kilogr. ein mittlerer Fehler für jede Wieg. $= \pm$ 0,7 Milligr., und bei einer Wiegung von 10 Kilogr. ein mittlerer Fehler einer Wieg. $= \pm$ 1,8 Milligr.

Die vieles Treffliche enthaltende holländische mathematische und physikalische Literatur ist leider für uns Deutsche grösstentheils verschlossen, was wohl zum Theil Schuld des Buchhandels ist. Das Archiv hat daher schon früher öfters auf Erscheinungen in holländischer Sprache gebührend hingewiesen, und wird dies auch fernerhin thun, so oft sich Gelegenheit dazu darbietet.

Astronomie.

Der Bischof Synesius von Cyrene als Physiker und Astronom beurtheilt nebst der ersten deutschen Uebersetzung der Rede des Synesius de dono Astrolabii, oder über das Lob der Astronomie mit verbessertem griechischen Texte herausgegeben von Dr. Bernhard Kolbe. Berlin. 1850. 8. 6 Sgl.

Uranus. ΟΥΡΑΝΟΣ. 1850. Zweites Quartal (April. Mai. Juni.)

Das erste Quartal 1850 ist im Literar. Ber. Nr. LIII S. 740. angezeigt, und gilt Alles, was dort gesagt worden ist, auch von diesem Quartal. Die Zeitschrift ist für einen Jeden, welcher sich an irgend einem Tage zu einer an demselben vorfallenden Himmelserscheinung vorbereiten will, im höchsten Grade nützlich. Mancher Liebhaber der Astronomie wird erst in den gewöhnlichen Zeitungen auf eine vorhandene besonders merkwürdige Himmelserscheinung aufmerksam gemacht. Hier findet er Alles, was sich vorausberechnen lässt, beisammen und weiss schon ein Vierteljahr voraus, was merkwürdiges am Himmel vorkommen wird. Keiner, wer sich für die am gestirnten Himmel vorfallenden Begebenheiten interessirt, sollte daher die Anschaffung dieser sehr nützlichen Zeitschrift unterlassen.

Wir machen die Leser des Archivs auf eine Abhandlung von Encke: Ueber die Auflösung der Kepler'schen Gleichung in dem neuesten Stücke der Astromischen Nachrichten. Nr: 714. aufmerksam, welche ihre Betrachtungen an eine geometrische Construction anschliesst, und zu bemerkenswerthen Resultaten und leichten Rechnungsmethoden führt. Uebrigens bemerkt Encke am Schluss seines Aufsatzes selbst, dass schon Cassini zu ähnlichen Resultaten gelangt sei, wie er nachträglich aus Lalande's Astronomie. Ed. III. §. 1248. gesehen habe, einem Buche, von welchem er mit Recht sagt, „dass es in neuerer Zeit zu wenig benutzt werde, da es ein bis jetzt noch nicht erreichtes Muster von Vollständigkeit für seine Zeit bleibe.“

Ferner findet sich in Nr. 709 — Nr. 712. desselben ausgezeichneten Journals eine sehr bemerkenswerthe Abhandlung: Untersuchungen über die Convergenz der Reihe, durch welche das Kepler'sche Problem gelöst wird, von Franz Carlini“, welche eine durch Herrn Professor C. G. J. Jacobi veranstaltete Uebersetzung oder vielmehr Bearbeitung und Vervollständigung einer früher unter dem Titel: Ricerche sulla convergenza della serie che serve alla soluzione del problema di Keplero. Memoria di Francesco Carlini. Milano. 1817. erschienenen merkwürdigen Abhandlung von Carlini ist.

Nautik.

Nautisches Jahrbuch oder vollständige Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1852 zur Bestimmung der Länge, Breite und Zeit zur See nach astronomischen Beobachtungen, nebst einer Anleitung, wie die erforderlichen Rechnungen anzustellen sind. Unter amtlicher Aufsicht herausgegeben von Dr. C. Bremiker Plankammer: Inspector im Königl. Preuss. Ministerium für Handel etc. Berlin. 1850. 8. 15 Sgr.

Diese nautischen Ephemeriden dürften wohl Alles enthalten, was auf der See zur Anwendung kommen möchte, und die Frage möchte nur sein, ob zu diesem Zwecke nicht eine noch etwas grössere Verkürzung zweckmässig und hinreichend gewesen sein möchte, etwa nach Anleitung des nach unserer Meinung sehr ausgezeichneten, auch, was hier nicht unwesentlich ist, auf sehr schönes und starkes Papier gedruckten Nautischen Almanachs von G. F. Ursin (Literar. Ber. LI. S. 708.). Die Zugrundlegung des Meridians von Greenwich kann natürlich nur gebilligt werden, und jede andere würde hier unzweckmässig gewesen sein.

Physik.

Beiträge zur meteorologischen Optik und zu verwandten Wissenschaften. In zwanglosen Heften herausgegeben von Johann August Grunert. Erster Theil. Viertes Heft. Mit sechs lithographirten Tafeln. Leipzig. 1850. 8.

Dieses den ersten Theil beschliessende vierte Heft der Beiträge zur meteorologischen Optik führt auch den besonderen Titel:

Die Lichterscheinungen der Atmosphäre dargestellt und erläutert von R. Clausius. Mit sechs lithographirten Tafeln. Leipzig. 1850. 8. und hat, wie der Titel auch schon besagt, den Zweck, eine übersichtliche, ganz populäre, wenigstens auf alles mathematische Formelwesen verzichtende Darstellung aller in das Gebiet der meteorologischen Optik gehörenden Erscheinungen zu liefern. Eigentlich hätte die Zeitschrift mit dieser Abhandlung beginnen sollen; es war aber nicht leicht, einen ganz geeigneten Schriftsteller für die Verfassung derselben zu finden und zu gewinnen, und so erscheint dieselbe, statt am Anfange, jetzt am Schlusse des ersten Theils der Zeitschrift. Wenn auch dem Herausgeber dieser Zeitschrift nicht zusteht, hier ein Urtheil über die vorliegende Abhandlung auszusprechen, so hält er sich doch für berechtigt, darauf hinzuweisen, dass man an keinem anderen Orte alle in das Gebiet der meteorologischen Optik gehörenden Erscheinungen in so vollständiger Weise wie hier dargestellt finden wird, und weil die Darstellung, wie schon erinnert, auf alles mathematische Formelwesen verzichtet hat, so giebt sich der Herausgeber der Hoffnung hin, dass diese Abhandlung des um die meteorologische Optik schon vielfach verdienten Herrn Dr. Clausius in Berlin für alle, welche sich für die zum Theil so prachtvollen Lichterscheinungen in der Atmosphäre interessiren, — und wer sollte dies nicht! — und dieselben nach ihren Gründen kennen lernen wollen, die reichste Belehrung darbieten, und dieselben gewiss auch zur Anstellung eigener sorgfältiger Beobachtungen aufmuntern wird. Wir müssen uns hier begnügen, den reichen Inhalt dieser Abhandlung nur in übersichtlicher Kürze anzugeben: Einleitung. — Gestalt des Himmels. — Erscheinungen, welche durch die Absorption und Reflexion des Lichts in der Atmosphäre bedingt werden. Schwächung des Lichts in der Atmosphäre. Allgemeine Tageshelle. Die Dämmerung. Die blaue Farbe des Himmels und die Morgen- und Abendröthe. Polarisation des Himmelslichtes. — Strahlenbrechung in der Atmosphäre. Astronomische und terrestrische Strahlenbrechung bei'm gewöhnlichen Zustande der Atmosphäre. Ungewöhnliche Senkung und Hebung des Horizonts. Luftspiegelungen. Fata Morgana. Das Funkeln der Fixsterne. — Erscheinungen, welche durch fremde, nur unter besonderen Umständen in der Atmosphäre vorhandene Körper hervorgebracht werden. Der Regenbogen. Der Hof mit seinen Nebenerscheinungen (Nebensonnen etc.). Die Lichtkränze und das Nebelbild. Das Wasserziehen der Sonne. — Das Nordlicht.

Eine grössere Anzahl sehr schön ausgeführter Figurentafeln tragen sehr zum leichteren und besseren Verständniss dieser Abhandlung bei, welche wegen ihrer systematischen Abfassung und ihrer Vollständigkeit gewiss auch sehr zweckmässig als Lehrbuch bei mehr populär gehaltenen Vorlesungen über meteorologische Optik wird gebraucht werden können.

Für die Fortsetzung dieser „Beiträge zur meteorologischen Optik" und auch für die schon früher gelieferten streng mathematisch gehaltenen Abhandlungen ist die vorliegende Abhandlung namentlich insofern von grosser Wichtigkeit, dass sie die genaue Beschreibung der betreffenden Erscheinungen, mit sorgfältiger Hervorhebung aller bei der Theorie hauptsächlich zu beachtender Umstände derselben enthält, so dass also in dieser Beziehung bei den die strenge mathematische Theorie der Erscheinungen liefernden Abhandlungen stets auf die vorliegende Abhandlung Bezug genommen werden kann, was natürlich der Kürze sehr förderlich ist.

Die Miscellen (Nr. IX.) in diesem Hefte enthalten noch eine von dem Schulamts-Kandidaten Herrn W. Schlesicke in Berlin mitgetheilte interessante literarische Notiz, durch welche die in der Abhandlung Nr. V.*) S. 263. ausgesprochene Vermuthung, dass auch bei Lacaille's Dämmerungsbeobachtungen, nicht weniger

*) S. 463. steht durch einen Druckfehler Nr. VII statt Nr. V.

als bei den Lambertschen Beobachtungen, das Zodiakallicht eine grosse Rolle gespielt haben mag, auf die vollständigste Weise bestätigt wird.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Literar. Ber. Nr. LIII. S. 727.)

(Die Hefte 1849. August und September, sind uns leider, wahrscheinlich durch ein Versehen, bis jetzt noch nicht zugegangen; daher wir deren Anzeige späterhin nachliefern werden.)

Jahrgang 1849. October-Heft. S. 156. Doppler: Ueber ein Mittel, die Spannkraft des Wasserdampfes der comprimirten oder der erwärmten Luft durch das Gehör zu bestimmen. — S. 165. Petrina: Einfluss der Entfernung des Polardrahtes von der Magnetnadel auf das Maximum ihrer Ablenkung. — S. 185. Santini: Mittheilung über den von Gasparis zu Neapel neu entdeckten Planeten. — S. 187. Kapeller's Verbesserung der Barometer. — S. 188. Kunzek: Ueber Beobachtungen der Vegetationsdauer der Kulturpflanzen. — S. 189. Reissenberger: Uebersicht aller bis nun theils trigonometrisch, theils barometrisch bestimmten Höhenpunkte von Siebenbürgen.

Jahrgang 1849. November- und December-Heft. S. 203. Russegger: Beiträge zur Ausmittelung der Abweichung der Magnetnadel. — S. 216 Hartner: Allgemeiner Beweis für Lehmann's Satz über die Lösung des Pothenot'schen Problems. — S. 230. Unger: Mikroskopische Untersuchung des atmosphärischen Staubes von Gratz. — S. 238. Boué: Mittheilung über einen anomalen Regenbogen. — S. 239. Doppler: Ueber eine merkwürdige in Oesterreich aufgefundene gelatinöse Substanz. — S. 266. Boué: Ueber die äusseren Formen der Erdoberfläche und ihre Ursachen. — S. 295. Schrötter: Bericht über die chemische Beschaffenheit einer unter einem Torflager bei Aussee gefundenen gelatinösenSubstanz. — S. 285. Haidinger: Bericht über denselben Gegenstand (Dopplerit). — S. 298. Hessler: Commissionsbericht über die Verhandlungen zur Feststellung genauer und bequemer Branntweinwagen. — S. 303. Gutachten der Commission. — S. 304. Stampfer: Zur Begründung des Commissionsvorschlages. — S. 316. Brücke: Mittheilung über Reinigung von Aräometern aus Glas. — S. 329. Kunzek: Commissionsbericht bezüglich der Brückenwagen von Rollé und Schwilgué. — S. 331. Arenstein: Eisverhältnisse der Donau, beobachtet in Pesth in den Jahren $18^{47}/_{48}$ und $18^{48}/_{49}$ (Mit einer grössern Anzahl interessanter Figurentafeln.). — S. 336. Baumgartner: Ueber Ofenheim's Photometer.

LVI.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra, oder einer Grundlehre von der Ablenkung algebraischer Grössenbeziehungen, unternommen von Wilhelm Matzka, Dr. der Phil., k. k. ordentl. Professor der Mathematik und praktischen Geometrie an dem k. böhm. ständischen polytechnischen Institute zu Prag. Mit drei Figurentafeln. Prag. 1850. 4.

Dass man die Lehre von dem Imaginären in der Mathematik in neuerer Zeit aus neuen Gesichtspunkten darzustellen versucht hat, ist den Lesern des Archivs schon aus dieser Zeitschrift selbst, welche mehrere den betreffenden Gegenstand in's Auge fassende Abhandlungen enthält, hinreichend bekannt. Keineswegs dürften aber nach unserer Ansicht die Acten über diesen Gegenstand schon als geschlossen zu betrachten sein, und jede Schrift, welche neue Aussichten auf diesem im Ganzen noch wenig angebauten Felde eröffnet, hat schon deshalb Anspruch auf besondere Beachtung. Die vorliegende Schrift des schon durch viele scharfsinnige Arbeiten bekannten Herrn Verfassers ist wohl das ausführlichste bis jetzt über diesen Gegenstand erschienene Werk, und liefert eine ausführliche systematische Behandlung desselben nach den eigenthümlichen Ansichten des Herrn Verfassers, an welcher wir namentlich auch den dabei aufgewandten philosophischen Scharfsinn besonders rühmend hervorheben müssen. Eine ausführliche Kritik dieses verdienstlichen Werkes würde den Raum, welchen diese literarischen Berichte uns darbieten, bei Weitem überschreiten, und wir müssen uns daher, ausser einer nochmaligen, aus vollkommenster Ueberzeugung geflossenen Empfehlung desselben zu sorgfältigster Beachtung, mit der folgenden allgemeinen Angabe seines Inhalts begnügen:

Einleitung. Erstes Hauptstück Grundzüge der Lehre vom Gegensatze algebraischer Beziehungen der Grössen. Zweites Hauptstück. Grundlinien der Lehre von den imaginären Grössen, oder vielmehr von der Abweichung algebraischer Beziehungen der Grössen. Drittes Hauptstück. Weitere Auseinandersetzung der Lehre von den abweichenden Beziehungen der Wurzeln. A. Vieldeutigkeit der Beziehungen der Wurzeln. B. Besondere Betrachtung der elusiven und transversiven Beziehungen, als jener der zweiten Wurzeln aus negativ beziehlichen Zahlen. Viertes Hauptstück. Das Potenziren nach transversiv beziehlichen Exponenten. Fünftes Hauptstück. Zeichnende Darstellung abweichender Beziehungen von Raumgrössen und graphische Erläuterung des Rechnens mit abweichend, insbesondere mit gekreuzt beziehlichen oder complexen bestimmten Grössen und Zahlen. Einleitung. A. Ablenkende Beziehung der Strecken. B. Ablenkende Beziehung der Winkel und der sie bestimmenden Kreisbogen. C. Ablenkende Beziehungen der ebenen Flächen (Figuren). D. Gedrängte Zusammenstellung der bisherigen Leistungen der Mathematiker in der geometrischen Construction der s. g. imaginären Grössen (Heinrich Kühn. 1736 und 1750. – Buée. 1805. — C. V. Mourey. 1828. — John Warren. 1828. – Karl Friedrich Gauss. 1831. — Anhänger und Nachahmer der Gaussischen Lehre: W. M. Drobisch, Prof. zu Leipzig. G. W. Müller, Major zu Hannover. C. A. Bretschneider, Professor zu Gotha. Dr. Theodor Wittstein zu Hannover. L. Ballauf, Lehrer der Mathem. zu Varel. H. B. Lübsen. J. C. Ullher, Prof. zu Nürnberg. Heinr. Scheffler zu Helmstädt. Franz Moth, Prof. zu Linz. J. Arnstein, Prof. zu Pesth. — W. R. Hamilton. 1844–4?. — Man sieht aus diesem Abschnitte, wie genau der Herr Verfasser auch mit den Leistungen seiner Vorgänger bekannt ist, und nirgends wird man eine so vollständige und schöne Uebersicht derselben wie hier finden. — Sechstes Hauptstück. Zeichnende Darstellung der Gleichungen des Zusammenhanges gleichzeitig veränderlicher, complexer oder in ablenkenden Beziehungen vorkommender Zahlen. — Siebentes Hauptstück. Auslegung der Gleichungen des Zusammenhanges allgemeiner Zahlen, wenn einige oder alle solche Zahlen complex — ablenkend beziehlich — werden.

Möge dieses scharfsinnige und gelehrte Werk die allseitigste Beachtung, welche es gewiss recht sehr verdient, in reichstem Maasse finden!

Die Grabekassen. Ihre Einrichtung und Verwaltung, so wie die Reorganisation der bestehenden fehlerhaften Institute. Im Auftrage der königl. sächs. Regierung verfasst von Dr. Carl Heym, Lehrer der Ma-

matik und der Naturwissenschaften an der Thosschule zu Leipzig. Leipzig. 1850. 8.

Diese sehr deutlich verfasste Schrift, welche auf die Anweng alles analytischen Calculs verzichtet, und sich bloss der ieinen Arithmetik, ohne natürlich die Decimalbrüche auszufiessen, bedient, verdient allen denen, welche sich über die annten Institute deutliche Begriffe verschaffen wollen, recht r empfohlen zu werden, und wir haben dieselbe mit Vergnügen sen. Auch ist in derselben Alles durch Beispiele belegt und utert, und die königl. sächs. Regierung, sowie der Herr Verer, verdienen jedenfalls Dank, dass sie durch dieselbe über genannten Institute, welche hauptsächlich von dem gewöhnlien Handwerkerstande in's Leben gerufen zu werden pflegen leider nur zu oft schlecht genug eingerichtet sind, richtige riffe zu verbreiten sich haben angelegen sein lassen. Da Leversicherungsanstalten principiell von den Grabekassen nicht entlich verschieden sind, so dürfte das Schriftchen auch denen, über erstere sich einen klaren Begriff verschaffen wollen, zur chtung zu empfehlen sein.

Geometrie.

Geometrische Aufgaben von Miles Bland. Nach der rten englischen Originalausgabe für das Bedürfs deutscher Lehranstalten bearbeitet von Dr. gust Wiegand, Oberlehrer an der Realschule zu lle. Mit 434 Figuren. Halle. 1850. 8.

Der Herr Uebersetzer hat sich durch die Verpflanzung dieser England sehr beliebten Sammlung geometrischer Aufgaben eometrical Problems, by Miles Bland) auf deutschen len ein Verdienst erworben, und das Buch verdient jedenfalls emeiner bekannt zu werden. Die Aufgaben selbst sind mit inerer Schrift vorangedruckt, und dann folgen die Auflösungen. r Inhalt ist folgender: Erster Abschnitt. Gerade Linien und nkel. 34 Aufgaben. Zweiter Abschnitt. Gerade Linien und ise. 100 Aufgaben. Dritter Abschnitt. Gerade Linien und iecke. 43 Aufgaben. Vierter Abschnitt. Parallelogramme l Polygone überhaupt. 50 Aufgaben. Fünfter Abschnitt. fgaben über Transversalen. 47 Aufgaben. Sechster Abschnitt. nstruction von Figuren für sich sowohl, als in und um andere. Aufgaben. Siebenter Abschnitt. Eigenschaften der in und Kreise beschriebenen Dreiecke. 43 Aufgaben. Achter Abnitt. Quadrate und Rechtecke von Linien in Verbindung mit eisen. 39 Aufgaben. Neunter Abschnitt. Construction von eiecken. 46 Aufgaben.

Die Lösung der gestellten Aufgaben setzt nur die Elemente klid's voraus, und es wird, wie dies in England allgemein gebräuchlich ist, auch nur auf diese verwiesen. Die Resultate der neueren Geometrie sind nur mässig benutzt, wofür in Deutschland mehrere andere neuerlich erschienene Schriften reichlichen Ersatz darbieten. Dass der Herr Uebersetzer die bei dem Original befindlichen „Elemente der Trigonometrie" weggelassen hat, ist ganz recht. Die „Algebraical Problems by Miles Bland" sind früher schon von Herrn Rector Dr. Nagel übersetzt und in diesen literarischen Berichten angezeigt worden.

Geodäsie.

G. Fuss, A. Sawitsch und G. Sabler: Beschreibung der zur Ermittelung des Höhenunterschiedes zwischen dem Schwarzen und Caspischen Meere mit allerhöchster Genehmigung auf Veranstaltung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in den Jahren 1836 und 1837 ausgeführten Messungen, nach den Tagebüchern und den Beschreibungen der drei Beobachter zusammengestellt von Sabler. Im Auftrage der Akademie herausgegeben von W. Struve. (Vorangestellt ist der an die Akademie abgestattete kritische Bericht des Herausgebers.). St. Petersburg. 1849. 4. 7 Thlr. 23 Sgr.

(Wir hoffen später auf dieses wichtige Werk zurückzukommen.).

Praktische Mechanik.

Der Bau der Kettenbrücken, begründet auf die Gesetze des Gleichgewichts der dabei in Wechselwirkung tretenden Kräfte, und bearbeitet für das praktische Bedürfniss ohne Hilfe der Differential- und Integral-Rechnung von Ferdinand Hoffmann, Eisenbahn-Bau-Inspector der k. k. General-Bau-Direction im h. östr. Ministerium für Handel, Gewerbe und öffentliche Bauten. Mit 7 Kupfertafeln. Wien. 1850. 8. 1 Thlr. 15 Sgr.

Dieses nach Navier's Rapport et Mémoires sur les ponts suspendus. Paris. 1823., worin aber die höhere Analysis angewandt wird, bearbeitete Werk scheint ein recht gutes, namentlich auch Praktikern zu empfehlendes Buch zu sein, welches das leistet, was sein Titel verspricht. Wer indess die höhere Analysis und Mechanik kennt, wird freilich gerade bei diesem Gegenstande lieber nach einer deren Hülfe in Anspruch nehmenden Schrift greifen, was aber den Werth der vorliegenden Schrift für Praktiker natürlich keineswegs beeinträchtigt.

Optik.

Zwei weitere Abhandlungen aus dem Gebiete der Optik. I. Ueber die Anzahl der möglichen Gesichtswahrnehmungen. 2. Versuch einer systematischen Classification der Farben. Von Christian Doppler. Prag. 1848. 4. 12 Sgr.

Leider gestatten diese beiden interessanten Abhandlungen einen Auszug hier nicht. Der Herr Verfasser hat sich aber schon durch so viele scharfsinnige Untersuchungen auf demselben Gebiete bekannt gemacht, dass die Leser des Archivs gewiss nicht unterlassen werden, auch von diesen beiden mehrfaches Interesse darbietenden Abhandlungen nähere Kenntniss zu nehmen.

Physik.

Magnetische und geographische Ortsbestimmungen im österreichischen Kaiserstaate, ausgeführt von Carl Kreil, Director der k. k. Sternwarte zu Prag u. s. w. und Karl Fritsch, k. k. Conceptspraktikanten u. s. w. Zweiter Jahrgang 1847. Prag. 1849. 4. 2 Thlr. 20 Sgr.

Der erste Jahrgang ist im Literar. Ber. Nr. LI. S. 712. angezeigt worden. Der vorliegende zweite Jahrgang enthält Oesterreich unter der Enns, Steiermark, Illyrien, Küstenland, das venetianische Königreich, Dalmatien.

Die Ausdauer und der Fleiss der Herrn Verfasser nehmen unsere vollste Bewunderung in Anspruch.

Geographische Naturkunde oder Grundzüge einer Allgemeinen Naturgeschichte der drei Reiche mit physiognomischer Schilderung der Erdoberfläche von Dr. Wilhelm Ebel. Erste Abtheilung: Plan der geographischen Naturkunde. Zweite Abtheilung: Geographische Naturkunde von Island. Mit 14 zum Theil colorirten Karten und Tafeln. Königsberg. 1850. 8. 2 Thlr. 7½ Sgr.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Liter. Ber. Nr. LV. S. 768.).

Jahrgang 1850. Erste Abth. (Jänner.). S. 3. Santini: Ueber den neu entdeckten Planeten Hygea. — S. 11. Martin: Ueber Photographie. — S. 18. Fritsch: Resultate aus den Beobachtungen über jene Pflanzen, deren Blumenkronen sich täglich periodisch öffnen und schliessen. — S. 34. Stampfer: Abhandlung über die Farbenzersetzung der Atmosphäre. — Koller: Vortrag über Fellöcker's Sternkarte. — S. 37. Pierre: Einige Bemerkungen über magnetische und diamagnetische Erscheinungen. — S. 59. Boué: Ueber die Geologie der Erdoberfläche in Rücksicht auf die Vertheilung der Temperatur, der Aërolithen und der Oceane. — S. 131. Weisse: Uebersicht der meteorologischen Beobachtungen an der Krakauer Sternwarte während des Jahres 1849. —

(Aus den „Sitzungs-Protokollen der zur Leitung des meteorologischen Unternehmens bestellten Commission" hebe ich für Lehranstalten und solche, die sich mit magnetischen Beobachtungen beschäftigen wollen, hervor, dass in Prag Apparate zu Variationsbeobachtungen für Declination und horizontale Intensität nach Angabe des Directors der dortigen Sternwarte, Herrn Kreil's, zu dem äusserst geringen Preise von 100 Fl. C. M. (etwa 69, 9 Thlr.) verfertigt werden, welche vollkommen scharfe Resultate zu liefern geeignet sind. Ferner werden von einem jungen geschickten Künstler, Herrn Nicolas, der sich in London mehrere Jahre mit der höheren Uhrmacherkunst befasst und sich jetzt in Senftenberg, weil er sich dort in der Nähe einer Sternwarte, die ihm für seine Zwecke grosse Vortheile gewährt, befindet, ansässig gemacht hat, nach Herrn Director Kreil's Urtheile hinlänglich gut gehende Chronometer zu dem äusserst geringen Preise von 140 Fl. C. M. (etwa 97, 9 Thlr.) angefertigt. Je mehr die Verbreitung hinreichend gut gehender Chronometer unter allen, die sich mit genaue Zeitbestimmungen erfordernden Beobachtungen beschäftigen, zu wünschen ist, desto mehr verdienen solche Gelegenheiten, durch welche man in den Besitz einer guten Uhr gelangen kann, bekannt gemacht und empfohlen zu werden, namentlich auch Lehranstalten, selbst schon des physikalischen Unterrichts wegen. Und der Preis von 97, 9 Thlr. ist ja so niedrig, dass man fast so viel schon für eine gute Taschenuhr ausgeben muss. Auf den leeren Tand eines goldenen Gehäuses werden Mathematiker und Physiker gewiss gern verzichten, wenn sie nur in dem Besitze eines guten, den an einen Chronometer zu machenden Ansprüchen genügenden Werks sich befinden, wobei wir voraussetzen, dass die von Herrn Nicolas verfertigten Chronometer Taschenchronometer (keine Dosenchronometer) sind, was a. a. O. nicht besonders bemerkt ist. Herr Director Kreil an der Sternwarte in Prag wird gewiss die Bestellung und Prüfung vor der Absendung gern übernehmen, wenn man sich deshalb an ihn wendet. Wir haben uns verpflichtet gehalten, das Archiv zu benutzen, das Obige zur Kenntniss seiner Leser zu bringen, und denselben diese schöne Gelegenheit, sich auf sehr wohlfeile Weise in den Besitz guter Instrumente zu setzen, zu empfehlen. G.)

Jahrgang 1850. Erste Abth. (Februar.). S. 134 Stampfer: Ueber das neue Planimeter des Ingenieurs Caspar Wetli zu Zürich. (Wir müssen alle Geodäten auf diesen in jeder Beziehung höchst lehrreichen Aufsatz des Herrn Prof. Stampfer dringend aufmerksam machen, weil in demselben das von Herrn Caspar Wetli in Zürich neuerlich erfundene, sehr sinnreich ausgedachte Planimeter, ein Instrument zur leichten Ermittelung des Flächeninhalts gegebener Figuren, sehr gründlich untersucht, und in Folge dieser Untersuchung für den praktischen Gebrauch dringend empfohlen wird. Für alle Mathematiker ist dieses Instrument noch besonders in sofern höchst interessant, weil dasselbe eigentlich ein allgemeines mechanisches Hülfsmittel zur eichten Ermittelung des Werths des bestimmten Integrals

$$\int_a^b y\partial x = \int_a^b f(x)\partial x$$

larbietet. Der Werkmeister Herr C. Starke am polytechnischen nstitute zu Wien hat in Gesellschaft mit Herrn Wetli ein Priilegium auf die Verfertigung solcher Planimeter im Bereiche des sterreichischen Kaiserstaates erworben; der Preis ist aber in dem Aufsatze des Herrn Professor Stampfer, den wir nach von Seien des Herrn Verfassers erhaltener Erlaubniss den Lesern des Archivs künftig vollständig mitzutheilen hoffen, nicht angegeben. Jedenfalls verdient die schöne und sinnreiche Idee, aus welcher liese neue Erfindung hervorgegangen ist: nämlich das Integral

$$\int_a^b y\partial x = \int_a^b f(x)\partial x$$

n aller Strenge mechanisch darzustellen, alle Aufmerksamkeit, und das Instrument selbst die dringendste Empfehlung md weiteste Verbreitung; denn Jeder, wer sich irgend mit praktischen geometrischen Arbeiten zu beschäftigen Gelegenheit oder Veranlassung hatte, weiss, wie zeitraubend und mühselig die Flächenberechnung ist, wenn der Plan, auf welchem dieselbe vorgenommen werden muss, nur einigermassen gross und complicirt st.) —

Als besonderes Werk ist den Sitzungsberichten der Kaiserichen Akademie die folgende ziemlich umfangreiche Schrift (209 Seiten mit einer grossen Anzahl von hauptsächlich Abbildungen on Instrumenten enthaltenden Figurentafeln) beigegeben:

Entwurf eines meteorologischen Beobachtungs-Systems für die österreichische Monarchie. Mit 15 Tafeln. Nebst einem Anhange, enthaltend die Beschreibung der an der k. k. Sternwarte zu Prag aufgestellen Autographen-Instrumente: Windfahne, Winddruckmesser, Regen- und Schneemesser. Mit 2 Tafeln. Von Carl Krell, Director der k. k. Universitäts-Sternwarte zu Prag. Wien. 1850. 8.

In Verbindung mit dem in dem 3ten Hefte der Sitzungsberichte (S. 58.—S. 95.) abgedruckten Aufsatze desselben Herrn Vfs. finden die Leser des Archivs in dieser Schrift eine höchst ehrreiche Anleitung zu allen Arten meteorologischer und magnetischer Beobachtungen, so wie auch zu den damit zu verbindenden astronomischen Beobachtungen in Betreff der Bestimmung der Zeit, der Breite und des Azimuths, so dass wir allen denen, welche sich mit derartigen Beobachtungen zu beschäftigen die Absicht haben, jetzt in der That keinen besseren Wegweiser empfehen können als die vorliegende Schrift, welcher die weiteste Verbreitung in jeder Beziehung sehr zu wünschen ist. Die Leser finden in derselben die Beobachtungen, welche sie in den Kr... ihrer Thätigkeit zu ziehen haben, namhaft gemacht, die erforder-lichen Instrumente (unter denen viele neue sinnreich ausgedach... sich befinden, was namentlich auch von den Autographen-Instru-menten gilt) sämmtlich sehr genau beschrieben und abgebild... die besten Beobachtungsmethoden, die am meisten zu empfeh-lenden Berechnungsmethoden deutlich auseinandergesetzt und, w... es nöthig ist, vollständig analytisch entwickelt, so wie endli... auch eine Sammlung sehr zweckmässiger, die Rechnung abkü-zender Tafeln. Man hat sich daher nicht etwa der falschen M...nung, die vielleicht durch den Titel veranlasst werden könnt... hinzugeben, als wenn diese Schrift bloss für den österreichisch... Kaiserstaat wichtig und interessant wäre; keineswegs ist dies d... Fall, sie ist vielmehr, wie schon bemerkt worden ist, eine ga... allgemeine sehr vollständige und deutliche Anweisung zur A...stellung aller Arten meteorologischer und magnetischer Beobac...tungen, so wie auch zu den damit nothwendig zu verbinden... astronomischen Beobachtungen, der eben deshalb die weite... Verbreitung unter Allen, die mit Erfolg sich mit dergleichen Beo...achtungen beschäftigen wollen, sehr zu wünschen ist.

The Cambridge and Dublin mathematical Journal Edited by W. Thomson, M. A., F. R. S. E. Vergl. Liter. Bericht. Nr. LIV. S. 760.

No. XXIII. On the meaning of the Equation $U^2 = V^2$ when U and V are Products of n Linear Functions of two Variables. By Rev. Thomas P. Kirkman. — On certain Properties of Surfaces of the Second Order. By John Y. Rutledge. — Problem respecting Polygons in a Plane. By Robert Moon. — Notes on the Preceding Paper. By William Thomson. — Extension of the word Area. By Professor De Morgan. — On the Potential of a closed Galvanic Circuit of any Form. By William Thomson. — Note on a Family of Curves of the Fourth Order. By Arthur Cailey. — On the Developable derived from an Equation of the Fifth Order. By Arthur Cailey. — On the Conditions that an Equation should have Equal Roots. Note by Mr. Salmon. — On the General Equations of Geodesic Lines and Lines of Curvature on Surfaces. By Benjamin Dickson. — Notes on Molecular Mechanics: I. On the General Equations of Motion. By Rev. Samuel Haughton. — Theorem on the Quadrature of Surfaces. By Rev. John H. Jellett. — On a Theorem in Confocal Surfaces of the Second Order. By Richard Townsend. — Mathematical Notes: I. On a Theorem in Mr. Hearn's Paper (vol. IV. p. 265.). II. Théorèmes sur l'intégration de l'equation

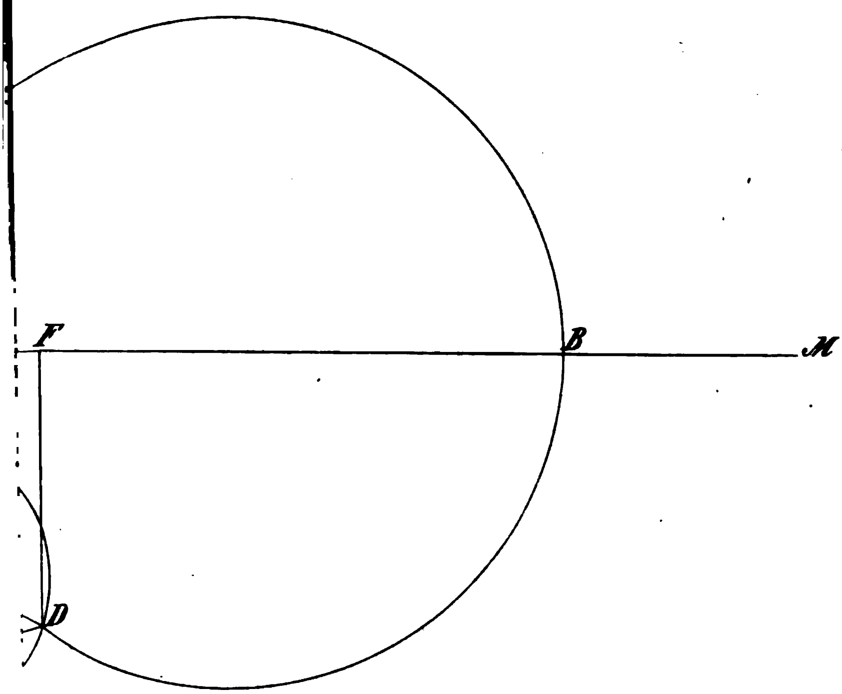
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{r}{x} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = (bx^m + \frac{s}{x^2})y.$$

Par C. J. Malmsten. III. Analytical Thorem concerning Polygons. By. W. Walton.

(The next Number will be published in the 1st of November.)

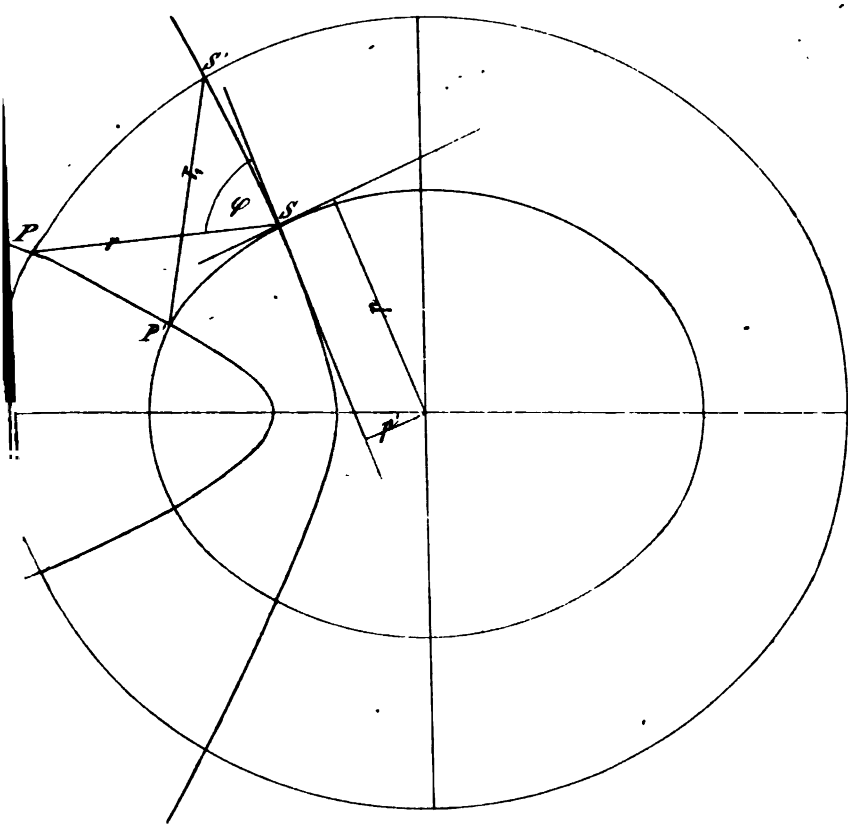
Taf. I.

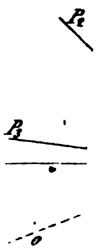
$\angle MOM' = 76^\circ\,16'$
$OA = 0{,}223$
$OB = 2{,}610$
$OA' = 0{,}267$
$OB' = 1{,}422$
$OC = 0{,}350$
$OD = 1{,}240$
$OE = 0{,}250$
$OE' = 0{,}300$



Taf. IV.

Fig. 2.





P_2
P_3
o

Fig. 2.

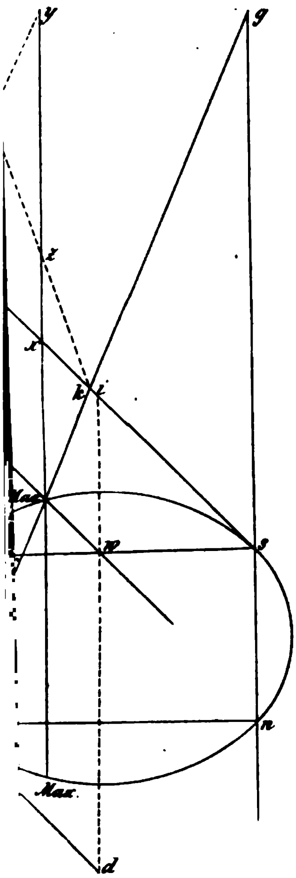


Fig. 3.