This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Astron?
Asts: 176.2.3

Haven Fund.

Rec.
July 20th.
1849.

ASTRONOMISCHE

UNTERSUCHUNGEN

VON

FRIEDRICH WILHELM BESSEL.

ERSTER BAND.

KÖNIGSBERG IN PR. 1841.

IM VERLAGE DER GEBRÜDER BORNTRÄGER.

Astr. 176.2.3 (1)

Gedruckt bei E. J. Dalkowski in Königsberg in Pr.

Als die Astronomie anfing mich an sich zu ziehen, äusserte sie ihren Reiz nicht durch die eine oder die andere Art der Arbeiten, welche sie ihren Verehrern auferlegt, sondern durch die Resultate, welche dadurch erlangt werden können. Auch später hat sich keine Vorliebe für eine besondere astronomische Beschäftigung eingefunden; und wenn ich zuweilen bereit gewesen bin, längere Zeit auf Rechnungen, oder auf die Vermehrung des Vorrathes der astronomischen Beobachtungen zu verwenden, so ist diese Bereitwilligkeit immer aus dem Bestreben hervorgegangen, entweder einen bestimmten Gegenstand, vollständiger als er bekannt war, kennen zu lernen, oder ein deutlich hervorgetretenes Hinderniss wegzuräumen, welches die Vervollständigung der Kenntniss mehrerer Gegenstände zugleich hemmte. Abgesehen von der mir mangelnden Neigung, Material zu sammeln ohne seine Benutzung zu beabsichtigen, bin ich auch früh zu der Ansicht gelangt und habe sie nicht wieder verloren, dass eigenes Fortschreiten bis zu den Resultaten astronomischer Arbeiten, wenn auch wohl nicht geradezu Bedingung ihres Gelingens ist, doch diesem die sicherste Bürgschaft, welche erlangt werden kann, gewährt, indem es ihre Mängel verräth und die Veranlassung herbeiführt, zur Beseitigung derselben geeignete Mittel zu ergreifen.

Diese Andeutung der Stellung zu der Astronomie, in welcher ich mich, jetzt seit 37 Jahren, gefunden habe, musste ich mir hier erlauben, wo ich die Veranlassung des Werkes erklären muss, dessen ersten Band ich jetzt den Astronomen übergebe. Sie hat nothwendig auf eine Menge von Untersuchungen führen müssen, welche, insofern sie nicht Theile eines Ganzen waren dem ein eigenes Buch gewidmet wurde, in zahlreichen Abhandlungen oder Aufsätzen bekannt geworden sind, wovon einige, mit dem Fortschreiten der Zeit, ihr Interesse nicht gänzlich verloren haben mögen. Die Veranlassung des gegenwärtigen Werkes ist

aber nichtsowohl der Wunsch, diese an Einem Orte zusammenzustellen, als das, durch Vermehrung der Hülfsmittel zu einer Untersuchung, oder durch Erlangung besserer Einsicht in ihre Natur, in vielen Fällen herbeigeführte Bedürfniss, an frühere Arbeiten mehr oder weniger wesentliche Verbesserungen anzubringen.

Indessen soll dieses Werk nicht allein ältere Abhandlungen verbessert enthalten, sondern auch zur Bekanntmachung neuer Arbeiten dienen, welche zu viel Raum erfordern, um sie in den häufig auch von mir benutzten *Astronomischen Nachrichten* erscheinen zu lassen, durch deren Herausgabe mein hochgeehrter, geliebter Freund *Schumacher* sich, seit 20 Jahren, ein grosses Verdienst um die Wissenschaft erworben hat.

Auf eine systematische Anordnung meiner *Astronomischen Untersuchungen* kann ich mich nicht einlassen wollen; ebensowenig kann ich ältere Beiträge dazu, zum zweitenmale in derselben Reihefolge erscheinen lassen, in welcher sie zum erstenmale erschienen sind. Jedoch werde ich mich bemühen, die Anordnung so zu treffen, dass der Zusammenhang verschiedener Untersuchungen einigermassen berücksichtigt wird. — Den jetzt bekanntwerdenden ersten Band beabsichtigte ich, grossentheils durch eine neue Untersuchung über die Jupiters-Satelliten zu füllen, welche auf Beobachtungen mit dem grossen Heliometer der Königsberger Sternwarte beruhet; allein ich muss diese und andere, von ähnlichen Beobachtungen ausgehende Arbeiten, für den folgenden Band aufsparen, weil ihre gehörige Begründung das Vorangehen der Abhandlungen fordert, welche den Raum des gegenwärtigen Bandes ausfüllen.

Die *erste* dieser Abhandlungen betrifft die Theorie des Heliometers im Allgemeinen, welchen Gegenstand ich schon einmal, in der 15ten Abtheilung meiner astronomischen Beobachtungen behandelt, hier aber neu bearbeitet habe. Die *zweite*, fast ein Drittel des Bandes füllende, bezieht sich besonders auf das *Königsberger* Heliometer und ist daher in unmittelbarer Berührung mit Allem, was ich durch die Hülfe dieses Instruments erlangt habe. Sie erscheint hier zum erstenmale; allein einen ihrer Bestandtheile, nämlich die in §. 13—16 enthaltene allgemeine Untersuchung über Dioptrik, habe ich, um ihn abgesondert bekannt zu machen, schon im Decbr. 1840 an Herrn Conferenzrath *Schumacher*

gesandt, in Folge wovon er in № 415 der *Astronomischen Nachrichten* erschienen ist. Dass diese Untersuchungen, in der Zeit ihrer Bekanntmachung mit denen zusammentreffen, welche Herr Hofrath *Gauss* über denselben Gegenstand angestellt hat, glaube ich hier für die Leser bemerken zu müssen, welche etwa ihren früheren Abdruck übersehen haben und dann eine Erklärung der Unterlassung der Anführung der Verdienste von *Gauss* um denselben Gegenstand vermissen werden.

Die *dritte* Abhandlung, über den Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen, ist auch die dritte, welche ich über diesen Gegenstand geschrieben habe; die beiden früheren finden sich im XVII. Bande von *v. Zach's Monatlicher Correspondenz* und in № 69 der *Astronomischen Nachrichten*. Diesesmal habe ich die für alle Arten von Mikrometerbeobachtungen nöthigen Vorschriften aus einem Principe abgeleitet, welches sich dadurch empfiehlt, dass es zur leichten Übersicht über die Grösse der Fehler führt, welche einige nicht völlig wahre, aber die Rechnung beträchtlich abkürzende Voraussetzungen erzeugen. Es geht daraus hervor, dass die auf diesen Voraussetzungen beruhenden, möglichst einfachen Formeln, welche die Abhandlung enthält, immer wenn die mikrometrisch miteinander verglichenen Punkte eine 85° nicht übertreffende Entfernung vom Scheitelpunkte haben, den wünschenswerthen Grad von Genauigkeit besitzen.

Die *vierte* Abhandlung entwickelt den Einfluss der Praecession, Nutation und Aberration auf die Resultate mikrometrischer Messungen. Die *fünfte* enthält die Resultate zahlreicher, in dem Sternhaufen der *Plejaden* gemachter Beobachtungen, durch welche sowohl einige der zur Kenntniss des Heliometers erforderlichen Elemente, als auch die Örter der in demselben befindlichen helleren Sterne, bis zur 9ten Grösse incl., bestimmt worden sind. Beide erscheinen hier zum erstenmale; nur die in der letzteren enthaltenen Verzeichnisse S. 235 und S. 237 sind schon (*Astronom. Nachr.* № 387 und № 430) bekannt geworden.

Die *sechste* Abhandlung, über die scheinbare Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe, hat in diesem Bande einen Platz erhalten, weil ihre Resultate für die Berechnung der Heliometerbeobachtungen der Satelliten des Jupiter nothwendig sind. Sie ist № 277 der *Astron. Nachr.* zuerst erschienen, hat aber jetzt einige Verbesserungen

erhalten und ist durch die Verfolgung der verschiedenen vorkommenden Fälle vervollständigt worden.

Die *siebente* Abhandlung enthält Beobachtungen der gegenseitigen Stellungen von 38 Doppelsternen; die *achte* handelt von dem, besondere Aufmerksamkeit verdienenden Doppelsterne *p Ophiuchi* und giebt eine nicht unwesentliche Erläuterung der mit dem Heliometer gemachten Beobachtungen der Doppelsterne im Allgemeinen. Die erstere habe ich hieher gesetzt, weil die letztere sich auf sie bezieht; diese aber, weil ich die Absicht verfolgte, in diesem Bande Alles zusammenzustellen, was zu der Kenntniss des Heliometers und der Berechnung damit gemachter Beobachtungen erforderlich ist. Die erstere ist ursprünglich in den *Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften* für 1833, die letztere in den *Astronomischen Nachrichten* № 343, erschienen; beide haben hier nur unwesentliche Änderungen erfahren.

Königsberg, den 3. September 1841.

F. W. Bessel.

Inhalt.

		Seite
I.	Theorie eines, mit einem Heliometer versehenen Aequatoreal-Instruments	1
II.	Besondere Untersuchung des Heliometers der Königsberger Sternwarte	55
III.	Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen	153
IV.	Einfluss der Praecession, Nutation und Aberration auf die Resultate mikrometrischer Messungen	202
V.	Beobachtungen verschiedener Sterne der Plejaden	209
VI.	Über die scheinbare Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe	239
VII.	Beobachtungen der gegenseitigen Stellungen von 38 Doppelsternen	280
VIII.	Über den Doppelstern *p Ophiuchi*	296

I.

Theorie eines mit einem Heliometer versehenen Aequatoreal-Instruments.

1.

Das Heliometer ergiebt die Messung des Winkels zwischen zwei Punkten, indem beide Hälften seines Objectivs so gegeneinander gestellt werden, dass die dadurch entstehenden doppelten Bilder eines jeden der Punkte, so weit voneinander entfernt erscheinen, als die Punkte selbst. Um dieses beurtheilen zu können, ist nöthig, dass beide Hälften des Heliometerobjectivs gemeinschaftlich um die Axe des Fernrohrs gedrehet werden, damit die Richtung, in welcher die doppelten Bilder liegen, mit der Richtung der Punkte selbst zusammenfalle. Wenn das Instrument nicht allein zur Messung der Entfernung jeder der Objectivhälften von der Axe des Fernrohrs, sondern auch zur Messung des Winkels ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie mit einer, ihrer Lage nach bekannten, durch die Axe des Fernrohrs gelegten Ebene eingerichtet ist, so ergiebt es *zugleich* die Entfernung der Punkte und die Lage des durch dieselben gehenden grössten Kreises, also eine *vollständige* Bestimmung des einen Punktes durch den anderen. Wenn daher das Instrument allen Nutzen gewähren soll, den es seiner Natur nach gewähren kann, so muss es diese Einrichtung besitzen; überdies aber muss die Aufstellung und Bewegung des Fernrohrs eine solche Beziehung zu einem festen grössten Kreise der Himmelskugel haben, dass man aus der Angabe des Kreises am Objective den gegenseitigen Positionswinkel der beobachteten Punkte erkennen kann. Das Heliometer und seine Aufstellung müssen, aus diesem Grunde, als Ein Ganzes angesehen werden. Ich setze hier

voraus, dass die Aufstellung in Beziehung auf den *Aequator* gemacht ist, habe also die Theorie eines *mit einem Heliometer versehenen Aequatoreal-Instruments* zu verfolgen.

Als Aequatoreal hat das Instrument zwei Drehungsaxen, nämlich die *Stundenaxe*, um welche alle seine Theile, und die *Declinationsaxe*, um welche die zum Fernrohre gehörigen sich drehen; als Heliometer hat es eine dritte Axe, nämlich die Drehungsaxe beider Objectivhälften und des Oculars, welche ich die *Heliometeraxe* nennen werde. Die über dem Horizonte liegenden Pole der Weltaxe und der Stundenaxe werde ich P und P_1 bezeichnen und benennen; denjenigen Pol der Declinationsaxe, welcher in der Richtung von dem Fernrohre nach dem Declinationskreise des Instruments liegt Q; den in der Richtung von dem Oculare nach dem Objective liegenden Pol der Heliometeraxe R. Die Drehungen um die drei, dem Instrumente eigenthümlichen Pole werden resp. durch den *Stundenkreis*, den *Declinationskreis* und die Kreise am Objective und am Oculare, deren ersteren ich den *Positionskreis* nennen werde, gemessen. Ausser diesen Drehungen kommen noch die auf die Heliometeraxe senkrechten Bewegungen in Betracht, welche jeder der Objectivhälften und dem Oculare gegeben werden können; diese geben dem Fernrohre zwei verschiedene Absehenslinien, worunter ich die von einem bestimmten Punkte im Sehefelde des Oculars (etwa einem Durchschnittspunkte zweier Fäden) durch die optischen Mittelpunkte *) beider Objectivhälften gelegten geraden Linien verstehe, in deren Richtungen zwei Punkte der Himmelskugel erscheinen, welche ich S und S' bezeichnen und benennen werde, so wie die beiden Objectivhälften I und II.

2.

Sämmtliche Vorschriften, welche die hier zu entwickelnde Theorie liefern kann, sowohl die zur Berichtigung des Instruments, als die zur Berechnung damit gemachter Beobachtungen führenden, müssen

*) Unter dieser Benennung verstehe ich den Punkt, wo die geraden Linien sich durchkreuzen, welche correspondirende Punkte eines unendlich entfernten Gegenstandes und seines Bildes miteinander verbinden.

aus der Auflösung Einer Aufgabe abgeleitet werden können, nämlich der Aufgabe, den Stundenwinkel t und die Declination d des Punkts S der Himmelskugel, welcher in der Absehenslinie einer der Objectivhälften (I) liegt, durch Angaben auszudrücken, welche theils am Instrumente abgelesen werden können, theils den jedesmaligen Zustand seiner Berichtigung und seiner Aufstellung bestimmen. Allein die Zahl dieser Angaben ist sehr gross, nämlich 18, und wenn man auch Biegungen der verschiedenen Axen des Instruments durch die Schwere in Betrachtung ziehen will, sogar 20, so dass eine sie alle zugleich enthaltende Aufgabe zu viele Grössen berücksichtigen muss, als dass ihre Auflösung ein sehr bequemes Mittel zur Ableitung der erforderlichen Vorschriften sein könnte. Man vermeidet aber diese Unbequemlichkeit, wenn man die Aufgabe in zwei Theile sondert. Zuerst werde ich daher das *Aequatoreal-Instrument*, ohne Rücksicht auf seine Verbindung mit dem Heliometer abhandeln.

Die *Stundenaxe* hat eine feste, wenn das Instrument berichtigt ist, der Weltaxe parallele Lage. Um aber dieses nicht vorauszusetzen, werde ich die Entfernung ihres Pols vom Weltpole (P,P) durch ε bezeichnen; den Stundenwinkel von $P_,$, vom Scheitelpunkte Z an gezählt und nach der Richtung der täglichen Bewegung genommen, durch h; seine Entfernung vom Scheitelpunkte $P_,Z$ durch $90^\circ - \varphi_,$; das Complement der Polhöhe PZ durch $90^\circ - \varphi$. Den Verticalkreis von $P_,$ werde ich den *Meridian des Instruments* nennen und den auf denselben und auf $P_,$ bezogenen Stundenwinkel des Weltpols P durch $180^\circ + h_,$, oder den Winkel $ZP_,P$ durch $180^\circ - h_,$ bezeichnen. Endlich werde ich die sich auf den Meridian und den Pol des Instruments beziehenden Angaben für den in der Absehenslinie des Fernrohrs liegenden Punkt der Himmelskugel, den Stundenwinkel durch $t_,$, die Declination durch $d_,$ bezeichnen. — Eine Biegung der *Stundenaxe* durch die Schwere des Instruments darf nicht in Betracht gezogen werden, wenn der Schwerpunkt aller seiner sich um diese Axe drehenden Theile in ihr liegt. Denn dann ist die Biegung in allen Lagen des Instruments vollkommen gleich, und ihre Wirkung besteht nur darin, dass sie den Pol des Instruments an einen Punkt der Himmelskugel bringt, welcher der Richtung der Axenlager nicht entspricht, aber mit dieser unveränderlich ist. An dem, wenigstens sehr nahen Zusammenfallen des Schwerpunkts des ganzen Instruments mit der

Stundenaxe ist aber wahrscheinlich in keinem Falle zu zweifeln, da das Instrument sich immer sehr leicht drehen muss und dennoch, in keiner Lage, fehlendes Gleichgewicht verrathen darf.

Die *Declinationsaxe* ist, beziehungsweise auf die Stundenaxe, *fest* und sollte senkrecht auf ihr stehen, oder ihr Pol Q sollte von dem Pole $P_,$ des Instruments einen Quadranten entfernt sein. Um dieses nicht vorauszusetzen, werde ich $P_,Q = 90° - i$ annehmen, so dass der Pol Q, wenn das Instrument um die Stundenaxe gedrehet wird, einen Kreis um $P_,$ beschreibt, welcher $90° - i$ von diesem Punkte entfernt ist. Diese Drehung wird durch den *Stundenkreis* des Instruments gemessen; wenn seine Nonien $90° + c$ angeben, indem Q sich im Meridiane des Instruments, und zwar *über* dem Pole befindet, so ist für jede andere Lage von Q, welcher eine Angabe T der Nonien zugehört, der Ausdruck des Winkels $ZP_,Q = T + c + 90°$. — Eine Biegung der *Declinationsaxe* durch die Schwere bringt hervor, dass ihr Pol nicht wirklich in Q, sondern in einem anderen Punkte $Q_,$ liegt, welcher sich in dem Verticalkreise ZQ befindet und dessen Entfernung von Q dem Sinusse von ZQ proportional angenommen werden soll. Ich werde das Maximum der Biegung durch α bezeichnen,

$$QQ_, = \alpha \sin ZQ$$

und α positiv annehmen, wenn $ZQ_, < ZQ$. Versteht man unter Q denjenigen der beiden Pole der Declinationsaxe, welchem der *Declinationskreis* zugewandt ist, so ist also die Biegung positiv angenommen, wenn sie das diesem Kreise entgegengesetzte Ende der Axe erniedrigt.

Das *Fernrohr* ist, beziehungsweise auf die Declinationsaxe, *fest* und sollte senkrecht auf ihr stehen, oder, wenn R in der Richtung seiner Absehenslinie ist, sollte Q,R ein Quadrat sein, was ich aber nicht voraussetzen, sondern Q,R durch $90° - i'$ bezeichnen werde. Die Drehung des Fernrohrs um die Declinationsaxe wird durch den *Declinationskreis* des Instruments gemessen, dessen Angabe, für den Fall, dass R sich in dem grössten Kreise $P_,Q_,$ befindet, ich durch $90° - c'$ bezeichne; woraus für jede andere Lage von R, welcher eine Angabe D der Nonien des Declinationskreises zugehört, der Winkel $P_,Q,R$ entweder $= 90° - D - c'$, oder $= D + c' - 90°$ folgt. Der erstere dieser

Ausdrücke ist der anzuwendende, wenn eine Bewegung der Absehenslinie, von dem dem Stundenwinkel $T+c$ entsprechenden Punkte des Aequators des Instruments, durch Norden hindurch, nach dem entgegengesetzten Punkte, die Ablesung des Declinationskreises von 0 bis 180° verändert; der andere, wenn die Theilungen dieses Kreises in entgegengesetzter Richtung gezählt werden. Jenes ist bei dem Königsberger Instrumente der Fall, weshalb ich hier $P,Q,R = 90° - D - c'$, also positiv oder negativ, jenachdem dieser Ausdruck es fordert, annehmen werde. Indem der Pol Q der Declinationsaxe einen 90° grösseren Stundenwinkel besitzt als der $T+c$ entsprechende Punkt des Aequators, so tritt der erste Fall ein, wenn jener Pol dem Declinationskreise dieses Punkts *vorgeht*, der zweite, wenn er auf ihn *folgt:* man kann also die beiden Fälle hierdurch unterscheiden. — Wenn eine Biegung des *Fernrohrs* durch die Schwere Einfluss auf die Richtung seiner Absehenslinie erhält, so dass diese einem anderen Punkte R, des Himmels entspricht, so soll derselbe im Verticalkreise ZR liegend, und

$$RR, = \beta \operatorname{Sin} ZR$$

angenommen werden, wo β das Maximum der Biegung bedeutet und positiv sein soll, wenn $ZR, < ZR$.

Ich werde jetzt die Gleichungen aufsuchen, durch welche die Angaben, sowohl der Kreise des Instruments, als auch die seinen jedesmaligen Zustand bestimmenden, mit dem Stundenwinkel und der Declination des in der Absehenslinie des Instruments erscheinenden Punkts der Himmelskugel verbunden sind. Die die Grösse der Biegungen bestimmenden α und β sowohl, als auch i und i', werde ich als kleine Grössen und ihre Quadrate und Producte als unmerklich annehmen. Aber von der Entfernung des Pols des Instruments vom Weltpole, werde ich das Ähnliche nicht voraussetzen, indem es wohl vorkommen kann, dass man ein Aequatoreal-Instrument anwenden will, ohne seiner Stundenaxe näherungsweise die richtige Lage geben zu können.

Zur Bestimmung des Orts des Pols Q, der Declinationsaxe, bezogen auf den Pol und den Meridian des Instruments, hat man

$$P,Q = 90° - i; \quad ZP,Q = 90° + T + c$$
$$P,Q, = P,Q - QQ' \operatorname{Cos} P,QZ = 90° - i - \alpha \operatorname{Sin} ZQ \operatorname{Cos} P,QZ$$

$$ZP_,Q_, = ZP_,Q - QQ_, \quad \frac{\sin P_,QZ}{\sin P_,Q} = 90^\circ + T + c - \alpha \frac{\sin ZQ \sin P_,QZ}{\sin P_,Q}$$

und wenn man die Ausdrücke

$$\sin ZQ \cos P_,QZ = \sin\varphi, \cos i + \cos\varphi, \sin i \sin(T+c)$$
$$\sin ZQ \sin P_,QZ = \cos\varphi, \cos(T+c)$$

substituirt, aber Alles weglässt, was die festgesetzte Näherungsgrenze überschreitet:

$$\left.\begin{aligned} P_,Q_, &= 90^\circ - i - \alpha \sin\varphi, \\ ZP_,Q_, &= 90^\circ + T + c - \alpha \cos\varphi, \cos(T+c) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

wofür ich, um abzukürzen, $90^\circ - i$, und $90^\circ + T$, schreiben werde.

Zur Bestimmung des in der Absehenslinie des Instruments erscheinenden Punkts R, des Himmels, gleichfalls in Beziehung auf den Pol und den Meridian des Instruments, hat man, im Dreiecke $P_,Q_,R$:

$$P_,Q_, = 90^\circ - i_,, \; Q_,R = 90^\circ - i', \; P_,Q_,R = 90^\circ - D - c'$$

woraus, mit der beabsichtigten Näherung,

$$\cos P_,R = \sin(D+c')$$
$$\sin P_,R \cos RP_,Q_, = i' - i, \sin(D+c')$$
$$\sin P_,R \sin RP_,Q_, = \cos(D+c')$$

folgt, und ferner, wenn man übereinkommt $P_,R$ und $90^\circ - D - c'$ *zugleich* positiv oder negativ zu nehmen:

$$P_,R = 90^\circ - D - c'$$
$$RP_,Q_, = 90^\circ - \frac{i' - i, \sin(D+c')}{\cos(D+c')}$$

oder, da $ZP_,R = ZP_,Q_, - RP_,Q_,$ ist:

$$ZP_,R = T, + \frac{i' - i, \sin(D+c')}{\cos(D+c')}$$

Ferner hat man

$$P_,R_, = P_,R - RR_, \quad \cos P_,RZ = 90^\circ - D - c' - \beta \sin ZR \cos P_,RZ$$
$$ZP_,R_, = ZP_,R - RR_, \quad \frac{\sin P_,RZ}{\sin P_,R} = T, + \frac{i' - i, \sin(D+c')}{\cos(D+c')} - \beta \frac{\sin ZR \sin P_,RZ}{\cos(D+c')}$$

und wenn man die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\operatorname{Sin} ZR \operatorname{Cos} P_,RZ &= \operatorname{Sin}\varphi, \operatorname{Cos}(D+c') - \operatorname{Cos}\varphi, \operatorname{Sin}(D+c') \operatorname{Cos} ZP_,R\\ \operatorname{Sin} ZR \operatorname{Sin} P_,RZ &= \operatorname{Cos}\varphi, \operatorname{Sin} ZP_,R\end{aligned}$$

substituirt und wieder das weglässt, was die Näherungsgrenze überschreitet:

$$P_,R_, = 90^\circ - D - c' - \beta \left\{\operatorname{Sin}\varphi, \operatorname{Cos}(D+c') - \operatorname{Cos}\varphi, \operatorname{Sin}(D+c') \operatorname{Cos}(T+c)\right\}$$

$$ZP_,R_, = T, + \frac{i'-i, \operatorname{Sin}(D+c')}{\operatorname{Cos}(D+c')} - \beta \frac{\operatorname{Cos}\varphi, \operatorname{Sin}(T+c)}{\operatorname{Cos}(D+c')}$$

Den schon angenommenen Bezeichnungen zufolge ist aber

$$P_,R_, = 90^\circ - d_,\ ,\quad ZP_,R_, = t_,$$

wodurch man, nachdem man für $T_,$ und $i_,$ ihre Ausdrücke geschrieben hat:

$$\left.\begin{aligned} d_, &= D + c' + \beta \left\{\operatorname{Sin}\varphi, \operatorname{Cos}(D+c') - \operatorname{Cos}\varphi, \operatorname{Sin}(D+c') \operatorname{Cos}(T+c)\right\}\\ t_, &= T + c + \frac{i'-i \operatorname{Sin}(D+c')}{\operatorname{Cos}(D+c')} - \frac{\alpha}{\operatorname{Cos}(D+c')}\left\{\operatorname{Sin}\varphi, \operatorname{Sin}(D+c') + \operatorname{Cos}\varphi, \operatorname{Cos}(D+c') \operatorname{Cos}(T+c)\right\}\\ &\quad - \frac{\beta}{\operatorname{Cos}(D+c')} \operatorname{Cos}\varphi, \operatorname{Sin}(T+c)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

erhält. Um nicht verschiedene Fälle unterscheiden zu dürfen, muss man $d_,$ wenn sein eben gegebener Ausdruck es fordert, auch über 90° hinaus zählen. Ein 90° überschreitender Werth von $d_,$ und der mit ihm verbundene Werth von $t_,$ bestimmen einen Punkt am Himmel, dessen in gewöhnlicher Bedeutung genommene Declination und Stundenwinkel resp. $180^\circ - d_,$ und $180^\circ + t_,$ sind.

Die Vergleichung der auf den Pol und den Meridian des Instruments bezogenen Bestimmung des Punkts $R_,$ mit der auf den Weltpol und den Meridian des Beobachtungsorts bezogenen, geht aus dem Dreiecke $PP_,R_,$ hervor, in welchem:

$$\begin{aligned} P_,PR_, &= t - h & PP_,R_, &= t_, - h_, + 180^\circ\\ PR_, &= 90^\circ - d & P_,R_, &= 90^\circ - d_,\\ PP_, &= \varepsilon\end{aligned}$$

sind, und welches

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin} d &= \operatorname{Cos}\varepsilon \operatorname{Sin} d_, - \operatorname{Sin}\varepsilon \operatorname{Cos} d_, \operatorname{Cos}(t_, - h_,)\\ \operatorname{Cos} d \operatorname{Cos}(t-h) &= \operatorname{Sin}\varepsilon \operatorname{Sin} d_, + \operatorname{Cos}\varepsilon \operatorname{Cos} d_, \operatorname{Cos}(t_, - h_,)\\ \operatorname{Cos} d \operatorname{Sin}(t-h) &= \operatorname{Cos} d_, \operatorname{Sin}(t_, - h_,)\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ergiebt. Die Verbindungen zwischen φ, h, ε, $\varphi_{,}$, $h_{,}$ werden endlich durch das Dreieck $ZPP_{,}$ gegeben, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin}\varphi_{,} &= \operatorname{Cos}\varepsilon \operatorname{Sin}\varphi + \operatorname{Sin}\varepsilon \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}h \\ \operatorname{Cos}\varphi_{,} \operatorname{Cos}h_{,} &= -\operatorname{Sin}\varepsilon \operatorname{Sin}\varphi + \operatorname{Cos}\varepsilon \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}h \\ \operatorname{Cos}\varphi_{,} \operatorname{Sin}h_{,} &= \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}h \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

3.

Das Aequatoreal hat eine Eigenschaft, auf welche seine *Berichtigung* gegründet werden kann; die Eigenschaft nämlich, dass jeder Punkt am Himmel, durch *zwei verschiedene* Stellungen des Instruments in seine Absehenslinie gebracht werden kann; ausgenommen hiervon sind nur die Punkte, deren Entfernung vom Pole des Instruments kleiner ist als $P_{,}Q_{,} - Q_{,}R = i' - i - \alpha \operatorname{Sin}\varphi_{,}$, welche gar nicht in die Absehenslinie gelangen können. Indem sowohl $d_{,}$ und $t_{,,}$ als auch $180^{\circ} - d_{,}$ und $180^{\circ} + t_{,}$ einem und demselben Punkte am Himmel angehören, gelangt nämlich dieser Punkt in die Absehenslinie, nicht allein wenn D und T so bestimmt werden, dass sie, den Ausdrücken (2) gemäss, $d_{,}$ und $t_{,}$ ergeben, sondern auch so, dass sie $180^{\circ} - d_{,}$ und $180^{\circ} + t_{,}$ ergeben. Die dieses letztere leistenden Werthe von D und T werde ich durch D' und T' bezeichnen.

Wendet man die Ausdrücke (2) auf beide Stellungen des Instruments an, nämlich:

$$d_{,} = D + c' + \beta \left\{\operatorname{Sin}\varphi_{,} \operatorname{Cos}(D+c') - \operatorname{Cos}\varphi_{,} \operatorname{Sin}(D+c') \operatorname{Cos}(T+c)\right\}$$

$$t_{,} = T + c + \frac{i' - i\operatorname{Sin}(D+c')}{\operatorname{Cos}(D+c')} - \frac{\alpha}{\operatorname{Cos}(D+c')}\left\{\operatorname{Sin}\varphi_{,}\operatorname{Sin}(D+c') + \operatorname{Cos}\varphi_{,}\operatorname{Cos}(D+c')\operatorname{Cos}(T+c)\right\}$$
$$- \frac{\beta}{\operatorname{Cos}(D+c')} \operatorname{Cos}\varphi_{,} \operatorname{Sin}(T+c)$$

und

$$180^{\circ} - d_{,} = D' + c' + \beta \left\{\operatorname{Sin}\varphi_{,} \operatorname{Cos}(D'+c') - \operatorname{Cos}\varphi_{,} \operatorname{Sin}(D'+c') \operatorname{Cos}(T'+c)\right\}$$

$$180^{\circ} + t_{,} = T' + c + \frac{i' - i\operatorname{Sin}(D'+c')}{\operatorname{Cos}(D'+c')} - \frac{\alpha}{\operatorname{Cos}(D'+c')}\left\{\operatorname{Sin}\varphi_{,}\operatorname{Sin}(D'+c') + \operatorname{Cos}\varphi_{,}\operatorname{Cos}(D'+c')\operatorname{Cos}(T'+c)\right\}$$
$$- \frac{\beta}{\operatorname{Cos}(D'+c')} \operatorname{Cos}\varphi_{,} \operatorname{Sin}(T'+c)$$

so geht daraus hervor, dass ihnen durch die Annahmen:

$$\left.\begin{aligned} D + c' &= d_{,} - \beta \left\{ \operatorname{Sin}\varphi, \operatorname{Cos} d_{,} - \operatorname{Cos}\varphi, \operatorname{Sin} d_{,} \operatorname{Cos} t_{,} \right\} \\ T + c &= t_{,} - \frac{i'' - i \operatorname{Sin} d_{,}}{\operatorname{Cos} d_{,}} + \frac{\alpha}{\operatorname{Cos} d_{,}} \left\{ \operatorname{Sin}\varphi, \operatorname{Sin} d_{,} + \operatorname{Cos}\varphi, \operatorname{Cos} d_{,} \operatorname{Cos} t_{,} \right\} \\ &\quad + \frac{\beta}{\operatorname{Cos} d_{,}} \operatorname{Cos}\varphi, \operatorname{Sin} t_{,} \end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

und

$$\left.\begin{aligned} D' + c' &= 180^{\circ} - d_{,} + \beta \left\{ \operatorname{Sin}\varphi, \operatorname{Cos} d_{,} - \operatorname{Cos}\varphi, \operatorname{Sin} d_{,} \operatorname{Cos} t_{,} \right\} \\ T' + c &= 180^{\circ} + t_{,} + \frac{i'' - i \operatorname{Sin} d_{,}}{\operatorname{Cos} d_{,}} - \frac{\alpha}{\operatorname{Cos} d_{,}} \left\{ \operatorname{Sin}\varphi, \operatorname{Sin} d_{,} + \operatorname{Cos}\varphi, \operatorname{Cos} d_{,} \operatorname{Cos} t_{,} \right\} \\ &\quad + \frac{\beta}{\operatorname{Cos} d_{,}} \operatorname{Cos}\varphi, \operatorname{Sin} t' \end{aligned}\right\} \ldots (6)$$

genügegeleistet wird. Wenn alles, was zu der Kenntniss des Zustandes des Instruments erforderlich ist, als bekannt angenommen wird, so bestimmen diese Formeln sowohl jede der beiden Stellungen des Instruments auf einen Punkt, welcher durch $d_{,}$ und $t_{,}$ gegeben ist, als auch den jeder derselben entsprechenden Werth von $d_{,}$ und von $t_{,}$.

In den Summen und den Unterschieden der Ausdrücke (5) und (6) trennen sich verschiedene der zur Kenntniss des Zustandes des Instruments erforderlichen Grössen voneinander, so dass dadurch zu ihrer Bestimmung führende Gleichungen erlangt werden. Diese sind:

$$\left.\begin{aligned} 180^{\circ} &= D' + D + 2c' \\ 180^{\circ} - 2d_{,} &= D' - D - 2\beta \left\{ \operatorname{Sin}\varphi, \operatorname{Cos} d_{,} - \operatorname{Cos}\varphi, \operatorname{Sin} d_{,} \operatorname{Cos} t_{,} \right\} \\ 180^{\circ} + 2t_{,} &= T' + T + 2c + \frac{2\beta}{\operatorname{Cos} d_{,}} \operatorname{Cos}\varphi, \operatorname{Sin} t_{,} \\ 180^{\circ} &= T' - T - 2 \cdot \frac{i'' - i \operatorname{Sin} d_{,}}{\operatorname{Cos} d_{,}} + \frac{2\alpha}{\operatorname{Cos} d_{,}} \left\{ \operatorname{Sin}\varphi, \operatorname{Sin} d_{,} + \operatorname{Cos}\varphi, \operatorname{Cos} d_{,} \operatorname{Cos} t_{,} \right\} \end{aligned}\right\} (7)$$

Die erste dieser Gleichungen bestimmt den Indexfehler des Declinationskreises (c') unabhängig von jedem anderen Elemente, durch die beiden Einstellungen des Instruments auf einen festen Punkt am Himmel. — Der Indexfehler des Stundenkreises (c) kann, durch die dritte Gleichung, nur bestimmt werden wenn $t_{,}$ gegeben ist; im Allgemeinen ist seine Bestimmung von der Biegung des Fernrohrs abhängig, aber sie wird frei davon, wenn der beobachtete Punkt sich im Meridiane des Instruments befindet, oder $\operatorname{Sin} t_{,} = 0$ ist. — Die vierte Gleichung bestimmt eine Verbindung zwischen i', i und α, welche nur durch die Beobachtung wenigstens dreier Werthe von $T' - T$,

an verschiedenen Punkten des Himmels, getrennt werden kann. — Die Biegung des Fernrohrs β zeigt ihren Einfluss in der zweiten und dritten Gleichung. Um sie durch die letztere, in welcher sie mit c verbunden ist, zu bestimmen, muss der Unterschied der auf den Pol und den Meridian des Instruments bezogenen Stundenwinkel, wenigstens *eines Paares* von Punkten am Himmel, bekannt sein, und mit den Angaben des Stundenkreises, in den beiden Stellungen des Instruments auf jeden derselben, verglichen werden; ihre Bestimmung durch die erstere fordert nur die Kenntniss der beiden Angaben des Declinationskreises für *einen* Punkt, dessen auf den Pol des Instruments bezogene Declination bekannt ist. Vortheilhafter ist aber die Vergleichung der bekannten d, *zweier* Punkte, welche sich in beträchtlichen Entfernungen vom Scheitelpunkte, in 180° voneinander verschiedenen Azimuthen befinden, mit den beiden Angaben des Declinationskreises für jeden von ihnen. Am vortheilhaftsten und von der Voraussetzung der Kenntniss einer Declination frei, ist jedoch die Anwendung derselben Mittel, welche ich zur Bestimmung der Biegung des Fernrohrs eines Meridiankreises empfohlen und angewandt habe. Da der Einfluss der Biegung des Fernrohrs auf die Zenithdistanzen immer eine sehr kleine Grösse sein wird, so wird die Bestimmung seiner Grösse übrigens wohl nur dann für nöthig erachtet werden, wenn das Aequatoreal-Instrument, durch die Vollendung seines Baues und seiner Theilungen, Anspruch erhält, zur *unmittelbaren* Bestimmung der Declinationen angewandt zu werden.

4.

Wenn β entweder verschwindet, oder einen schon bekannt gewordenen Werth hat, so erlangt man, durch beide Einstellungen des Instruments auf einen Stern, sowohl d, als auch $t, -c$, durch die Ausdrücke, welche die 2te und 3te der Gleichungen (7) dafür geben; diese Bezeichnungen bedeuten dann die Mittel aus den zu beiden Beobachtungszeiten gehörigen Werthen der auf den Pol und Meridian des Instruments bezogenen, scheinbaren, d. h. mit der Strahlenbrechung behafteten, Declination und des Stundenwinkels, die letzteren so genommen, wie die Ablesung des Stundenkreises sie angiebt. Hat man auf diese Art

die Werthe von $d_,$ und $t_,-c$ für *zwei* Punkte am Himmel bestimmt, deren auf den Weltpol und den Meridian des Beobachtungsorts bezogene Declination und Stundenwinkel d, t und d', t' man *anderweitig* kennt, so kann man daraus die *Lage der Stundenaxe* kennen lernen.

Man findet die hierzu erforderlichen ε und h durch die Auflösung der beiden Gleichungen (3):

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Sin} d_, &= \operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} \varepsilon + \operatorname{Cos} d \operatorname{Sin} \varepsilon \operatorname{Cos} (t-h)\\ \operatorname{Sin} d', &= \operatorname{Sin} d' \operatorname{Cos} \varepsilon + \operatorname{Cos} d' \operatorname{Sin} \varepsilon \operatorname{Cos} (t'-h)\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

und wenn sie gefunden sind, $t_, - h_,$ aus den Ausdrücken:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cos} d_, \operatorname{Cos} (t_,-h_,) &= \operatorname{Sin} d \operatorname{Sin} \varepsilon - \operatorname{Cos} d \operatorname{Cos} \varepsilon \operatorname{Cos} (t-h)\\ \operatorname{Cos} d' \operatorname{Sin} (t_,-h_,) &= \operatorname{Cos} d \operatorname{Sin} (t-h)\end{aligned}$$

so wie auch $h_,$ und $\varphi_,$ aus (4). Da man hierdurch $t_,$ kennt, und $t_,-c$ durch das Instrument bekannt geworden ist, so kennt man auch c. Die Auflösung der beiden Gleichungen (8) ist nicht verschieden von der Auflösung der bekannten Aufgabe, den Ort eines Punkts an der Himmelskugel, aus seinen gemessenen Entfernungen von zwei anderen Punkten, deren Örter gegeben sind, zu finden. Ich glaube, mich hier nicht dabei aufhalten zu dürfen.

Dagegen werde ich den Fall, in welchem ε eine kleine Grösse ist, deren Quadrat man vernachlässigen kann, weiter entwickeln. Man wird diesen Fall, weil er jeder Anwendung des Aequatoreals die meiste Bequemlichkeit giebt, vorzugsweise herbeiführen, wenn nicht etwa der Ort, wo man das Instrument aufstellen muss, oder die Kürze der Zeit zwischen seiner Aufstellung und Anwendung, seine Herbeiführung verhindert. Man erlangt die näherungsweise richtige Lage der Stundenaxe, oder die Kleinheit von ε, indem man das (übrigens schon berichtigte) Instrument zuerst auf die Declination eines culminirenden Sterns stellt und denselben, durch diejenigen seiner Fussschrauben, welche seine Drehung in der Ebene des Meridians bewirken, in die Absehenslinie bringt; dann aber, bei einem 6 Stunden vom Meridiane entfernten Sterne, dasselbe wiederholt, indem man das Instrument entweder um die Lothlinie, oder um die in der Richtung des Meridians liegende horizontale Linie drehet, welches letztere durch die Fussschrauben geschieht. Um den Werth von ε, welchen

die anfängliche Berichtigung der Stundenaxe übriggelassen haben mag, so wie auch das damit verbundene $h_,$, und endlich c mit grösserer Genauigkeit zu erkennen, kann man vollständige Beobachtungen an verschiedenen Punkten des Himmels machen, daraus für jeden dieser Punkte $d_,$ und $t_,-c$ bestimmen (7), ihre gefundenen Werthe mit den anderweitig bekannten d und t derselben Punkte vergleichen und diese Gleichungen zur Erlangung der gesuchten Bestimmung anwenden.

In dem hier zu verfolgenden Falle eines sehr kleinen ε ergeben die Gleichungen (3):

$$d = d_, - \varepsilon \operatorname{Cos}(t_,-h_,)$$
$$t = t_, + h - h_, - \varepsilon \operatorname{Tang} d_, \operatorname{Sin}(t_,-h_,)$$

und die Gleichungen (4):

$$h - h_, = - \varepsilon \operatorname{Tang}\varphi \operatorname{Sin} h_,$$

Schreibt man, um abzukürzen, x, y, γ für $\varepsilon \operatorname{Cos} h_,$, $\varepsilon \operatorname{Sin} h_,$, $c - y \operatorname{Tang}\varphi$, so erhält man, durch Vergleichung mit (7), die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} d &= 90^\circ - \tfrac{1}{2}(D'-D) - x \operatorname{Cos} t - y \operatorname{Sin} t + \beta \left\{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} d - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} t\right\} \\ t &= -90^\circ + \tfrac{1}{2}(T'-T) + \gamma - x \operatorname{Tang} d \operatorname{Sin} t + y \operatorname{Tang} d \operatorname{Cos} t + \beta \operatorname{Sec} d \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} t \end{aligned}\right\} \ldots . (9)$$

welches also die zur Bestimmung von x, y, γ anzuwendenden Gleichungen sind.

Die Ausdrücke von d und t durch die von einer *einzelnen* Einstellung des Instruments gewährten Angaben, und durch alles, was zur Kenntniss seines Zustandes erforderlich ist, erhält man durch die Substitution von (5) und (6), nämlich:

$$\left.\begin{aligned} d &= D + c' - x \operatorname{Cos} t - y \operatorname{Sin} t + \beta \left\{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} d - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} t\right\} \\ t &= T + \gamma - x \operatorname{Tang} d \operatorname{Sin} t + y \operatorname{Tang} d \operatorname{Cos} t + i' \operatorname{Sec} d - i \operatorname{Tang} d \\ &\quad - \alpha \left\{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Tang} d + \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} t\right\} - \beta \operatorname{Sec} d \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} t \end{aligned}\right\} \ldots . (10)$$

wo d wieder, wie im 2ten §., erforderlichenfalls über 90° hinausgezählt, und dann mit einem 180° veränderten Werthe von t verbunden wird.

5.

Sobald man die Werthe von x und y erkannt hat, ist ein sicheres und leicht anwendbares Mittel vorhanden, die Aufstellung des Instruments zu verbesseren. Um x wegzuschaffen, richtet man das Fernrohr auf einen Punkt im Meridiane, verändert dann die Absehenslinie, durch ihre Mikrometerbewegung, in der Richtung des Meridians, um die Quantität x, und bringt den Punkt, durch nur in derselben Richtung wirkende Drehung der Fussschrauben des Instruments, in die Absehenslinie zurück; y wird auf ähnliche Art weggeschaft, wenn man einen Punkt in 90° oder 270° Stundenwinkel und die Fussschrauben so anwendet, dass sie das Instrument nur in der auf den Meridian senkrechten Ebene drehen. Wenn keine hierzu schicklichen Punkte im Horizonte sichtbar sind, so kann das Fadenkreuz eines vor dem Objective aufgestellten Fernrohrs ihre Stelle vertreten. Ob die Mikrometerbewegung der Absehenslinie, welche man bei dieser Berichtigungsart benutzten muss, durch das Objectiv eines Heliometers, oder durch einen beweglichen Faden im Brennpunkte des Objectivs hervorgebracht wird, ist offenbar gleichgültig. —

Die senkrechte Lage der Absehenslinie auf der Declinationsaxe wird bei jedem Aequatoreal-Instrumente erlangt, oder der Werth von i' wird weggeschafft werden können, indem es nie an einer Einrichtung fehlen wird, die Lage, entweder des ganzen Fernrohrs, oder seiner Absehenslinie, beziehungsweise zu der Declinationsaxe, zu verändern. Dagegen wird es auf die bei dem Instrumente vorhandene Art der Verbindung der Declinationsaxe mit der Stundenaxe ankommen, ob der Winkel, welchen beide miteinander machen, geändert werden kann, oder nicht; kann er nicht geändert werden, so muss man Verzicht darauf leisten, einen gefundenen Werth von i, durch eine Änderung am Instrumente, zum Verschwinden zu bringen; man muss sich begnügen, seinen Einfluss auf die Resultate der Beobachtungen in Rechnung zu bringen, so wie dieses auch mit dem Einflusse der Grössen α und β geschehen muss. Ob die Indexfehler c und c' der beiden Kreise des Instruments mechanisch weggeschafft werden können oder nicht, hängt von der Einrichtung ab, welche die Nonien besitzen. — Uebrigens gewährt die *mechanische* Wegschaffung von Fehlern der Instrumente, oder von Unvollkommenheiten ihrer Berichtigung, nur eine Erleichterung der Berechnung

der Beobachtungen, nicht eine Vermehrung ihrer Sicherheit; vielmehr ist die *Rechnung* das sicherste Mittel, Fehler und Unvollkommenheiten von bekannter Grösse unschädlich zu machen, wesshalb man sich auch vorzugsweise bemühen muss, Anordnungen zu treffen, welche die fortwährende Kenntniss ihrer Grössen herbeiführen.

6.

Ich werde noch zeigen, in wiefern man die verschiedenen, in den Formeln (10) vorkommenden unbekannten Grössen, unabhängig von der Genauigkeit der Eintheilungen und Ablesungen der beiden Kreise des Instruments bestimmen kann.

Die Neigung der Declinationsaxe gegen die Stundenaxe, oder $90^\circ - i'$, kann man, unvermischt mit anderen unbekannten Grössen, dadurch kennen lernen, dass man, in der rückwärts verlängerten Fernrohrlinie des auf einen irdischen Gegenstand gerichteten Aequatoreals, ein mit einem Fadenkreuze versehenes Hülfsfernrohr aufstellt, dieses nach dem Gegenstande, dann das Aequatoreal nach seinem Fadenkreuze richtet, und endlich das Aequatoreal, durch Drehung um die Declinationsaxe, auf den irdischen Gegenstand führt. Offenbar muss dieser in seiner Absehenslinie erscheinen wenn $i' = 0$ ist; sonst in der Entfernung $2i'$ von derselben, welche Entfernung mikrometrisch gemessen werden kann. — Die Forderung, dass man das Hülfsfernrohr auf den irdischen Gegenstand richten soll, setzt voraus, dass die Aussicht dahin nicht unterbrochen sei: wenn die Absehenslinie neben der Stundenaxe vorbeigeht (wie bei dem Königsberger Instrumente der Fall ist), so kann die freie Aussicht durch Drehung des Aequatoreals um die Stundenaxe erlangt werden; wenn aber die Absehenslinie die Stundenaxe durchschneidet, so wird nöthig, das Objectiv und das Ocular, vor der Beobachtung, aus dem Fernrohre des Aequatoreals zu nehmen, um durch seine leere Röhre hindurch, die Aussicht von dem Hülfsfernrohre nach dem irdischen Gegenstande zu erlangen. — Wenn man auch den Werth von β aufsuchen will, so kann es, verbunden mit der Aufsuchung von i' geschehen; es wird dazu nur noch verlangt, dass man auch den Drehungswinkel um die Declinationsaxe, welcher die Absehenslinie des Aequatoreals, von dem Fadennetze des Hülfsfernrohrs auf den irdischen Gegenstand bringt, ablese.

Eine zur Bestimmung der Neigung der Declinationsaxe gegen die Stundenaxe beitragende Gleichung kann man, ohne die Ablesung des Stundenkreises vorauszusetzen, durch den Ausdruck des Unterschiedes der Stundenwinkel zweier Sterne, welche ihren Durchgangszeiten durch die Absehenslinie, bei ungeänderter Lage der Declinationsaxe, zugehören, erlangen. Die zweite der Formeln (10) ergiebt diesen Ausdruck:

$$= -\left\{x \operatorname{Sin} t - y \operatorname{Cos} t + i + \alpha \operatorname{Sin} \varphi\right\} (\operatorname{Tan} d' - \operatorname{Tan} d) + \left\{i' - \beta \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} t\right\} (\operatorname{Sec} d' - \operatorname{Sec} d)$$

also, wenn sein Werth aus der Beobachtung der beiden Durchgangszeiten hervorgegangen ist, eine Gleichung zwischen $i + \alpha \operatorname{Sin} \varphi$, i', x, y, β. Wiederholt man aber diese Beobachtung bei entgegengesetzter Lage der Declinationsaxe, für welche $180° - d$ und $180° + t$ statt d und t zu setzen sind, so wird der Ausdruck des dann stattfindenden Unterschiedes der Stundenwinkel:

$$= -\left\{x \operatorname{Sin} t - y \operatorname{Cos} t - i - \alpha \operatorname{Sin} \varphi\right\} (\operatorname{Tan} d' - \operatorname{Tan} d) - \left\{i' + \beta \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} t\right\} (\operatorname{Sec} d' - \operatorname{Sec} d)$$

und aus dem Unterschiede beider Gleichungen verschwinden x, y, β. — Bezeichnet man den Unterschied der, beiden Beobachtungen des ersten Sterns entsprechenden Stundenwinkel, auf den ersten von beiden bezogen, durch $2\Delta t$, den ähnlichen Unterschied für den zweiten Stern durch ${}^2\Delta t'$, so hat man also:

$$\Delta t' - \Delta t = (i + \alpha \operatorname{Sin} \varphi) (\operatorname{Tang} d' - \operatorname{Tang} d) - i' (\operatorname{Sec} d' - \operatorname{Sec} d) \ldots\ldots\ldots (11)$$

wodurch, da i' schon bekannt ist, $i + \alpha \operatorname{Sin} \varphi$ bestimmt wird. Statt des einen Sterns kann man auch einen festen Punkt am Horizonte wählen, auf welchen man die Absehenslinie, in beiden Lagen der Declinationsaxe einstellt. Wenn dieser Punkt als unendlich entfernt angesehen werden kann, oder wenn die Stundenaxe von der Absehenslinie durchschnitten wird, ist $\Delta t = 0$; wenn diese aber, in einer Entfernung e, neben der Stundenaxe vorbeigeht und die Entfernung des irdischen Punkts vom Objective des Fernrohrs $= \varrho$ ist, ist

$$\Delta t = \frac{\omega e}{\varrho \operatorname{Cos} d} \ldots (\omega = 206264,''8)$$

und daher

$$i + \alpha \operatorname{Sin}\varphi = \frac{\operatorname{Cos}d \operatorname{Cos}d'}{\operatorname{Sin}(d'-d)} \left\{ \triangle t' - \frac{\omega \cdot e}{\varrho \operatorname{Cos}d} \right\} + i' \cdot \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(d'+d)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(d'-d)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Die Verbindung $i + \alpha \operatorname{Sin}\varphi$ der beiden unbekannten Grössen i und α, kann nur durch Ablesungen des Stundenkreises getrennt werden.

Die Grössen von x und y kann man unabhängig von den Ablesungen des Declinationskreises kennen lernen, wenn man einen Stern, sowohl wenn $t=0$ und $=180°$, als auch wenn es $=90°$ und $=270°$ ist, ohne das Fernrohr um die Declinationsaxe zu drehen, beobachtet und seine Entfernungen von der Absehenslinie, durch das Mikrometer misst. Für $t=0$ und $t=180°$ sind, der ersten der Formeln (10) zufolge, die Declinationen, welchen die Absehenslinie entspricht:

$$d_0 = D + c' - x + \beta \left\{ \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}d - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}d \right\}$$

$$d_1 = D + c' + x + \beta \left\{ \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}d + \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}d \right\}$$

Die sich in beiden Culminationen zeigenden Declinationen des Sterns sind dagegen $(d) - \varrho_0$ und $(d) + \varrho_1$, wo (d) seine wahre Declination und ϱ_0, ϱ_1 die Strahlenbrechungen bedeuten. Hat man die Entfernungen des Sterns von der Absehenslinie, $(d) - \varrho_0 - d_0 = f_0$ und $(d) + \varrho_1 - d_1 = f_1$, mit dem Mikrometer gemessen, so folgt daraus und aus den Ausdrücken von d_0 und d_1:

$$x = \tfrac{1}{2}(\varrho_0 + \varrho_1) + \tfrac{1}{2}(f_0 - f_1) - \beta \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Ferner sind die der Absehenslinie entsprechenden Declinationen, wenn $t=90°$ und $t=270°$ ist,

$$d_0 = D + c' - y + \beta \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}d$$
$$d_1 = D + c' + y + \beta \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}d$$

und wenn die Einflüsse der Strahlenbrechung auf die Declination durch ϱ_0 und ϱ_1 *) bezeichnet werden, die des Sterns $=(d)+\varrho_0$ und $=(d)+\varrho_1$, also, wenn wieder $(d)+\varrho_0 - d_0 = f_0$ und $(d)+\varrho_1 - d_1 = f_1$ mikrometrisch gemessen werden:

---

*) Beide sind einander sehr nahe gleich; völlig, wenn die meteorologischen Instrumente zu den Zeiten beider Beobachtungen gleiche Stände besitzen.

$$y = \tfrac{1}{2}(\varrho_{,} - \varrho_{0}) + \tfrac{1}{2}(f_{0} - f_{,}) \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Man kann also, ohne die Theilungen der beiden Kreise des Instruments ablesen zu dürfen, durch sein Mikrometer allein, x, y, i' und $i + \alpha \operatorname{Sin}\varphi$ bestimmen; α von i getrennt und β aber nur durch diese Ablesung. Dass c' und c (oder γ) nur aus Ablesungen der Kreise hervorgehen können, versteht sich von selbst. — Aus der zweiten der Formeln (10) wird übrigens klar, dass die abgesonderte Kenntniss von α nicht erlangt zu werden braucht, wenn Unterschiede der Geradenaufsteigungen der Sterne nur durch Unterschiede ihrer Durchgangszeiten durch die Absehenslinie des Fernrohrs des Aequatoreals, ohne seine Drehung um die Stundenaxe, beobachtet werden sollen; wesshalb es auch angemessen ist, statt $i + \alpha \operatorname{Sin}\varphi$ eine einfache Bezeichnung einzuführen. Schreibt man, wie schon im 2ten §, i, dafür, so wie auch γ, für die mit t veränderliche Grösse $\gamma - \alpha \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} t$, so nehmen die Formeln (10) die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} d &= D + c' - x \operatorname{Cos} t - y \operatorname{Sin} t + \beta \left\{ \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} d - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} t \right\} \\ t &= T + \gamma_{,} - x \operatorname{Tang} d \operatorname{Sin} t + y \operatorname{Tang} d \operatorname{Cos} t + i' \operatorname{Sec} d - i_{,} \operatorname{Tang} d - \beta \operatorname{Sec} d \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} t \end{aligned}\right\} (15)$$

an, in welcher ich sie weiter anwenden werde.

7.

Nachdem ich das Aequatoreal-Instrument jetzt vollständig genug abgehandelt zu haben glaube, wende ich mich zu dem *Heliometer*, welches, statt des gewöhnlichen Fernrohrs, darauf angebracht ist. Was dadurch geleistet werden soll, ist die Erfindung der relativen Lage zweier Punkte an der Himmelskugel, nämlich ihrer *Entfernung* von einander ($= s$) und ihrer gegenseitigen *Richtung*; diese werde ich durch den Winkel bestimmen, in welchem der, beide Punkte verbindende grösste Kreisbogen den durch *seine Mitte* gelegten Declinationskreis schneidet, welchen Winkel ich durch φ bezeichnen und von dem Nordpole an, nach der Seite, nach welcher die Geradenaufsteigungen zunehmen, von 0 bis 360° zählen werde. Es muss also gezeigt werden, wie die am Heliometer abgelesenen Örter seiner beiden Objectivhälften und die gleichfalls abgelesene Lage ihrer

Durchschnittslinie, welche beide Punkte zugleich in die Absehenslinie bringen, verbunden mit der Kenntniss des jedesmaligen Zustandes des ganzen Instruments und des Ortes der Mitte zwischen beiden Punkten an der Himmelskugel, s und p bestimmen. Die Angaben der beiden Kreise des Aequatoreals müssen aus der Betrachtung geschafft werden, damit ihre jedesmalige Ablesung nicht gefordert werden darf.

Zuerst werde ich die Declination und den Stundenwinkel des in der Absehenslinie des Instruments erscheinenden Punkts der Himmelskugel, durch alles das ausdrücken, was zur Kenntniss, sowohl der Lage des Fernrohrs, als auch der jedesmaligen Absehenslinie desselben erforderlich ist.

Das was in der Theorie des Aequatoreals auf die Absehenslinie des Fernrohrs bezogen worden ist, werde ich jetzt auf die *Heliometeraxe* beziehen, nämlich auf die Axe, um welche sowohl das Objectiv, als auch das Ocular gedrehet werden können, in welcher also die Spitzen der Kegel liegen, welche die, mit den Stellungen jeder der Objectivhälften und des Oculars veränderlichen Absehenslinien, durch die Drehung beschreiben. Die Bezeichnung $90^\circ - i'$ gilt also nun für die Entfernung des Pols R der Heliometeraxe, von dem Pole Q, der Declinationsaxe. Indem die Heliometeraxe in der Mitte zwischen beiden Richtungen der Absehenslinie liegt, welche jedem Zustande des Fernrohrs, vor und nach einer *halben* Drehung, sowohl des Objectivs als auch des Oculars, entsprechen, bezieht sich das Mittel aus zwei, vor und nach einer solchen Drehung gemachten Beobachtungen eines in die jedesmalige Absehenslinie gebrachten Punktes, unmittelbar auf die Heliometeraxe, selbst wenn die erstere der letzteren nicht ganz parallel ist; wesshalb auch der Werth des in seiner jetzigen Bedeutung genommenen i', durch solche Paare von Beobachtungen eben so bestimmt wird, wie der Werth des in seiner vorigen Bedeutung genommenen durch einzelne. — Die Formeln (15) drücken jetzt die Declination und den Stundenwinkel des in der Heliometeraxe liegenden Punkts der Himmelskugel aus.

Ich werde zuerst annehmen, dass jede der Objectivhälften die im Fernrohre sichtbaren, unendlich entfernten Punkte, auf einer auf der Heliometeraxe senkrechten Ebene vollkommen richtig abbilde;

so dass, wenn jeder derselben mit seinem Bilde durch eine gerade Linie verbunden wird, alle diese Linien sich in einem Punkte O, dem optischen Mittelpunkte der Objectivhälfte, durchschneiden. Dieser Punkt wird, durch die Mikrometerschraube der Objectivhälfte, in einer auf der Heliometeraxe senkrechten Ebene bewegt, in einer geraden Linie, welche durch die Heliometeraxe gehen sollte; was aber nicht vorausgesetzt, sondern deren Entfernung von der Heliometeraxe unbestimmt gelassen und durch b bezeichnet werden soll. Der jedesmalige Ort des Punkts O auf dieser Linie wird durch die Angabe der Schraube bestimmt; ich werde ihn durch m, und den der kleinsten Entfernung dieses Punkts von der Heliometeraxe zugehörigen Werth von m durch a bezeichnen. Die Richtung der Bewegungslinie von O wird durch die Angabe n des Positionskreises bestimmt, welche ihren Winkel mit der durch die Heliometeraxe und die Declinationsaxe gelegten Ebene, nämlich $Q,R,O = 90° + n + k$ ergiebt, wenn k den Indexfehler des Positionskreises bedeutet, oder die Angabe dieses Kreises für den Fall des Verschwindens von $Q,R,O = -90° - k$ ist. Die Richtung derselben Linie, von der Ebene des Declinationskreises angezählt, ist $= Q,R,O - Q,R,P$, also durch $n + k$ und die Grössen gegeben, welche Q,R,P bestimmen. Dieser Winkel gehört zu dem Dreiecke Q,R,P, in welchem $PR, = 90° - d$, $ZPR, = t$ sind, so wie auch $PQ,$ und $ZPQ,$, durch die Reduction der Ausdrücke (1) von $P,Q,$ und $ZP,Q,$ auf den Weltpol,

$$PQ, = 90° - i, - x \operatorname{Sin} t + y \operatorname{Cos} t$$
$$ZPQ, = 90° + T, - y \operatorname{Tang} \varphi = 90° + T + \gamma,$$

gefunden werden. Aus dem Unterschiede der beiden Winkel folgt

$$R,PQ, = ZPQ, - ZPR, = 90° + T + \gamma, - t$$

und die Formeln (15) ergeben

$$T + \gamma, - t = (x \operatorname{Sin} t - y \operatorname{Cos} t + i,) \operatorname{Tang} d - i'' \operatorname{Sec} d + \beta \operatorname{Sec} d \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} t.$$

Durch die Substitution dieser Ausdrücke in die trigonometrischen Formeln:

$$\operatorname{Sin} Q,R, \operatorname{Cos} Q,R,P = \operatorname{Cos} PQ, \operatorname{Sin} PR, - \operatorname{Sin} PQ, \operatorname{Cos} PR, \operatorname{Cos} R,PQ,$$
$$\operatorname{Sin} Q,R, \operatorname{Sin} Q,R,P = \operatorname{Sin} PQ, \operatorname{Sin} R,PQ,$$

erhält man

$$\text{Sin}\,Q,R,\ \text{Cos}\,Q,R,P = (x\,\text{Sin}\,t - y\,\text{Cos}\,t + i,)\,\text{Sec}\,d - i''\,\text{Tang}\,d + \beta\,\text{Tang}\,d\,\text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin}\,t$$
$$\text{Sin}\,Q,R,\ \text{Sin}\,Q,R,P = 1.$$

also

$$Q,R,P = 90° - \{x\,\text{Sin}\,t - y\,\text{Cos}\,t + i,\}\,\text{Sec}\,d + i''\,\text{Tang}\,d - \beta\,\text{Tang}\,d\,\text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin}\,t$$

und den Winkel der Bewegungslinie von O mit der Ebene des Declinationskreises $= PR,O = Q,R,O - Q,R,P$

$$= n + k + (x\,\text{Sin}\,t - y\,\text{Cos}\,t + i,)\,\text{Sec}\,d - i''\,\text{Tang}\,d + \beta\,\text{Tang}\,d\,\text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin}\,t \ldots . \quad (16)$$

wofür ich, um abzukürzen, $n + k$, schreiben werde. Die Entfernungen des Punkts O von der Ebene des Declinationskreises und der darauf senkrechten sind daher:

$$(m - a)\,\text{Sin}\,(n + k,) + b\,\text{Cos}\,(n + k,)$$
$$\text{und} \ldots\ldots\ldots (m - a)\,\text{Cos}\,(n + k,) - b\,\text{Sin}\,(n + k,)$$

Wenn μ, α, β, ν, $\varkappa$, $\varkappa$,*) dieselben Bedeutungen für den zweiten, die Absehenslinie bestimmenden und mit dem Oculare beweglichen Punkt o haben, welche resp. m, a, b, n, k, k, für den optischen Mittelpunkt O der Objectivhälfte gegeben worden sind, so haben auch

$$(\mu - \alpha)\,\text{Sin}\,(\nu + \varkappa,) + \beta\,\text{Cos}\,(\nu + \varkappa,)$$
$$\text{und} \ldots\ldots\ldots (\mu - \alpha)\,\text{Cos}\,(\nu + \varkappa,) - \beta\,\text{Sin}\,(\nu + \varkappa,)$$

die den obigen Ausdrücken ähnlichen Bedeutungen, und man erhält, zur Bestimmung der Lage der Absehenslinie oO, die Ausdrücke:

$$f\,\text{Tang}\,R,S\ \text{Sin}\,PR,S = (m - a)\,\text{Sin}\,(n + k,) + b\,\text{Cos}\,(n + k,) - (\mu - \alpha)\,\text{Sin}\,(\nu + \varkappa,) - \beta\,\text{Cos}\,(\nu + \varkappa,)$$
$$f\,\text{Tang}\,R,S\ \text{Cos}\,PR,S = (m - a)\,\text{Cos}\,(n + k,) - b\,\text{Sin}\,(n + k,) - (\mu - \alpha)\,\text{Cos}\,(\nu + \varkappa,) + \beta\,\text{Sin}\,(\nu + \varkappa,)$$

wo f die Entfernung der beiden Ebenen bedeutet, in welchen O und o sich bewegen. Nimmt man die Grösse einer Windung der Mikrometerschraube zum gemeinschaftlichen Maasse von f, m, a, b, μ, α, β,

*) Die Bezeichnung β ist schon für die Constante der Biegung der Heliometeraxe angewandt worden; allein aus ihrer neuen Bedeutung wird keine Verwirrung entstehen können, obgleich auch die vorige im Folgenden noch vorkommt.

so hat man den Winkel R, welcher einer dieser Windungen entspricht, aus dem Ausdrucke

$$\text{Tang } R = \frac{1}{f}$$

und, wenn man Δ für R,S, π für PR,S schreibt:

$$\left.\begin{aligned}\text{Tang}\Delta\,\text{Sin}\pi &= \text{Tang}R\left\{(m-a)\,\text{Sin}(n+k_{,})+b\,\text{Cos}(n+k_{,})-(\mu-\alpha)\,\text{Sin}(\nu+\varkappa_{,})-\beta\,\text{Cos}(\nu+\varkappa_{,})\right\}\\ \text{Tang}\Delta\,\text{Cos}\pi &= \text{Tang}R\left\{(m-a)\,\text{Cos}(n+k_{,})-b\,\text{Sin}(n+k_{,})-(\mu-\alpha)\,\text{Cos}(\nu+\varkappa_{,})+\beta\,\text{Sin}(\nu+\varkappa_{,})\right\}\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Die Declination δ und der Stundenwinkel τ des in der Abscissenlinie einer der Objectivhälften erscheinenden Punkts der Himmelskugel, sind hierdurch und durch die Declination d und den Stundenwinkel t des der Heliometeraxe entsprechenden, gegeben, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}\text{Sin}\,\delta &= \text{Sin}\,d\,\text{Cos}\,\Delta + \text{Cos}\,d\,\text{Sin}\,\Delta\,\text{Cos}\,\pi\\ \text{Cos}\,\delta\,\text{Cos}(\tau-t) &= \text{Cos}\,d\,\text{Cos}\,\Delta - \text{Sin}\,d\,\text{Sin}\,\Delta\,\text{Cos}\,\pi\\ \text{Cos}\,\delta\,\text{Sin}(\tau-t) &= -\,\text{Sin}\,\Delta\,\text{Sin}\,\pi\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

8.

Die eben erlangten Formeln (17) und (18) führen zu der Bestimmung der relativen Lage zweier Punkte S und S', deren Bilder im Fernrohre, durch *verschiedene* Stellung der beiden Objectivhälften, zur Deckung gebracht werden. Ich werde diese relative Lage durch die Entfernung $SS'=s$ und durch den an der Mitte M zwischen beiden Punkten stattfindenden Positionswinkel $PMS'=p=180°+PMS$ angeben; die Declination δ_0 und den Stundenwinkel τ_0 von M werde ich als bekannt ansehen. So wie die Formeln (17) und (18) geschrieben sind, sollen sie sich auf die Objectivhälfte I und den durch sie abgebildeten Punkt S beziehen; schreibt man darin

$$\begin{aligned}&\Delta',\ \pi',\ m',\ a',\ k_{,}',\ b',\ \delta',\ \tau'\\ \text{statt}\ldots\ &\Delta,\ \pi,\ m,\ a,\ k_{,},\ b,\ \delta,\ \tau\end{aligned}$$

so sollen sie für die Objectivhälfte II und den Punkt S' gelten. Die Bedeutung von $k_{,}'$ ist der von $k_{,}$ ähnlich, nämlich $k_{,}'-k'=k_{,}-k$. Man hat also, zur Bestimmung der Lage des Punkts S' die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Tan}\triangle'\operatorname{Sin}\pi' &= \operatorname{Tan}R\left\{(m'-a')\operatorname{Sin}(n+k_{,}')+b'\operatorname{Cos}(n+k_{,}')-(\mu-\alpha)\operatorname{Sin}(\nu+\varkappa_{,})-\beta\operatorname{Cos}(\nu+\varkappa_{,})\right\}\\ \operatorname{Tan}\triangle'\operatorname{Cos}\pi' &= \operatorname{Tan}R\left\{(m'-a')\operatorname{Cos}(n+k_{,}')-b'\operatorname{Sin}(n+k_{,}')-(\mu-\alpha)\operatorname{Cos}(\nu+\varkappa_{,})+\beta\operatorname{Sin}(\nu+\varkappa_{,})\right\}\end{aligned}\right\}\quad(17^*)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Sin}\delta' &= \operatorname{Sin}d\operatorname{Cos}\triangle'+\operatorname{Cos}d\operatorname{Sin}\triangle'\operatorname{Cos}\pi'\\ \operatorname{Cos}\delta'\operatorname{Cos}(\tau'-t) &= \operatorname{Cos}d\operatorname{Cos}\triangle'-\operatorname{Sin}d\operatorname{Sin}\triangle'\operatorname{Cos}\pi'\\ \operatorname{Cos}\delta'\operatorname{Sin}(\tau'-t) &= -\operatorname{Sin}\triangle'\operatorname{Sin}\pi'\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(18^*)$$

Schreibt man, um abzukürzen, u und v statt $\operatorname{Tang}\triangle\operatorname{Sin}\pi$ und $\operatorname{Tang}\triangle\operatorname{Cos}\pi$, so wie auch u' und v' statt $\operatorname{Tang}\triangle'\operatorname{Sin}\pi'$ und $\operatorname{Tang}\triangle'\operatorname{Cos}\pi'$, und ferner r und r' statt $\sqrt{(1+uu+vv)}$ und $\sqrt{(1+u'u'+v'v')}$, wodurch die Formeln (18) und (18*) sich in:

$$\left.\begin{aligned}r\operatorname{Sin}\delta &= \operatorname{Sin}d+v\operatorname{Cos}d\\ r\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Cos}(\tau-t) &= \operatorname{Cos}d-v\operatorname{Sin}d\\ r\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Sin}(\tau-t) &= -u\end{aligned}\right.$$

und

$$\left.\begin{aligned}r'\operatorname{Sin}\delta' &= \operatorname{Sin}d+v'\operatorname{Cos}d\\ r'\operatorname{Cos}\delta'\operatorname{Cos}(\tau'-t) &= \operatorname{Cos}d-v'\operatorname{Sin}d\\ r'\operatorname{Cos}\delta'\operatorname{Sin}(\tau'-t) &= -u'\end{aligned}\right.$$

verwandeln, und eliminirt man dadurch sowohl δ und τ, als auch δ' und τ' aus den Ausdrücken von s und p, welche sowohl das Dreieck PMS, als auch das Dreieck PMS' ergeben, nämlich aus:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s\operatorname{Sin}p &= \operatorname{Cos}\delta\operatorname{Sin}(\tau-\tau_0)\\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s\operatorname{Cos}p &= -\operatorname{Sin}\delta\operatorname{Cos}\delta_0+\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Sin}\delta_0\operatorname{Cos}(\tau-\tau_0)\\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}s &= \operatorname{Sin}\delta\operatorname{Sin}\delta_0+\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Cos}\delta_0\operatorname{Cos}(\tau-\tau_0)\end{aligned}\right.$$

und aus:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s\operatorname{Sin}p &= -\operatorname{Cos}\delta'\operatorname{Sin}(\tau'-\tau_0)\\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s\operatorname{Cos}p &= \operatorname{Sin}\delta'\operatorname{Cos}\delta_0-\operatorname{Cos}\delta'\operatorname{Sin}\delta_0\operatorname{Cos}(\tau'-\tau_0)\\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}s &= \operatorname{Sin}\delta'\operatorname{Sin}\delta_0+\operatorname{Cos}\delta'\operatorname{Cos}\delta_0\operatorname{Cos}(\tau'-\tau_0)\end{aligned}\right.$$

so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}r\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s\operatorname{Sin}p &= -\operatorname{Cos}d\operatorname{Sin}(\tau_0-t)-u\operatorname{Cos}(\tau_0-t)+v\operatorname{Sin}d\operatorname{Sin}(\tau_0-t)\\ r\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s\operatorname{Cos}p &= -\operatorname{Sin}d\operatorname{Cos}\delta_0+\operatorname{Cos}d\operatorname{Sin}\delta_0\operatorname{Cos}(\tau_0-t)-u\operatorname{Sin}\delta_0\operatorname{Sin}(\tau_0-t)\\ &\quad -v\left\{\operatorname{Cos}d\operatorname{Cos}\delta_0+\operatorname{Sin}d\operatorname{Sin}\delta_0\operatorname{Cos}(\tau_0-t)\right\}\\ r\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}s &= \operatorname{Sin}d\operatorname{Sin}\delta_0+\operatorname{Cos}d\operatorname{Cos}\delta_0\operatorname{Cos}(\tau_0-t)-u\operatorname{Cos}\delta_0\operatorname{Sin}(\tau_0-t)\\ &\quad +v\left\{\operatorname{Cos}d\operatorname{Sin}\delta_0-\operatorname{Sin}d\operatorname{Cos}\delta_0\operatorname{Cos}(\tau_0-t)\right\}\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
r' \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s \operatorname{Sin}p &= \operatorname{Cos}d \operatorname{Sin}(\tau_0-t) + u' \operatorname{Cos}(\tau_0-t) - v' \operatorname{Sin}d \operatorname{Sin}(\tau_0-t)\\
r' \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s \operatorname{Cos}p &= \operatorname{Sin}d \operatorname{Cos}\delta_0 - \operatorname{Cos}d \operatorname{Sin}\delta_0 \operatorname{Cos}(\tau_0-t) + u' \operatorname{Sin}\delta_0 \operatorname{Sin}(\tau_0-t)\\
&\quad + v' \left\{\operatorname{Cos}d \operatorname{Cos}\delta_0 + \operatorname{Sin}d \operatorname{Sin}\delta_0 \operatorname{Cos}(\tau_0-t)\right\}\\
r' \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}s &= \operatorname{Sin}d \operatorname{Sin}\delta_0 + \operatorname{Cos}d \operatorname{Cos}\delta_0 \operatorname{Cos}(\tau_0-t) - u' \operatorname{Cos}\delta_0 \operatorname{Sin}(\tau_0-t)\\
&\quad + v' \left\{\operatorname{Cos}d \operatorname{Sin}\delta_0 - \operatorname{Sin}d \operatorname{Cos}\delta_0 \operatorname{Cos}(\tau_0-t)\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (19^*)$$

Aus diesen 6 Gleichungen kann man d und t eliminiren und s und p bestimmen. Multiplicirt man die drei ersten in r', die drei letzten in r und zieht man die ersten Producte von den letzten ab, so erhält man:

$$0 = (r+r') \operatorname{Cos}d \operatorname{Sin}(\tau_0-t) + (r'u+ru') \operatorname{Cos}(\tau_0-t) - (r'v+rv') \operatorname{Sin}d \operatorname{Sin}(\tau_0-t)$$

$$0 = (r+r') \left\{\operatorname{Sin}d \operatorname{Cos}\delta_0 - \operatorname{Cos}d \operatorname{Sin}\delta_0 \operatorname{Cos}(\tau_0-t)\right\} + (r'u+ru') \operatorname{Sin}\delta_0 \operatorname{Sin}(\tau_0-t)$$
$$+ (r'v+rv') \left\{\operatorname{Cos}d \operatorname{Cos}\delta_0 + \operatorname{Sin}d \operatorname{Sin}\delta_0 \operatorname{Cos}(\tau_0-t)\right\}$$

$$0 = (r-r') \left\{\operatorname{Sin}d \operatorname{Sin}\delta_0 + \operatorname{Cos}d \operatorname{Cos}\delta_0 \operatorname{Cos}(\tau_0-t)\right\} + (r'u-ru') \operatorname{Cos}\delta_0 \operatorname{Sin}(\tau_0-t)$$
$$- (r'v-rv') \left\{\operatorname{Cos}d \operatorname{Sin}\delta_0 - \operatorname{Sin}d \operatorname{Cos}\delta_0 \operatorname{Cos}(\tau_0-t)\right\}$$

Setzt man

$$\frac{r'u+ru'}{r+r'} = \operatorname{Tang}g \operatorname{Sin}G$$

$$\frac{r'v+rv'}{r+r'} = \operatorname{Tang}g \operatorname{Cos}G$$

so kann man die beiden ersten dieser Gleichungen

$$0 = \left\{\operatorname{Cos}d - \operatorname{Sin}d \operatorname{Tang}g \operatorname{Cos}G\right\} \operatorname{Sin}(\tau_0-t) + \operatorname{Tang}g \operatorname{Sin}G \operatorname{Cos}(\tau_0-t)$$

$$\left\{\operatorname{Sin}d + \operatorname{Cos}d \operatorname{Tang}g \operatorname{Cos}G\right\} \operatorname{Cotg}\delta_0 = \left\{\operatorname{Cos}d - \operatorname{Sin}d \operatorname{Tang}g \operatorname{Cos}G\right\} \operatorname{Cos}(\tau_0-t) - \operatorname{Tang}g \operatorname{Sin}G \operatorname{Sin}(\tau_0-t)$$

schreiben. Aus der Summe ihrer Quadrate verschwindet τ_0-t; addirt man zu ihr, auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens, das Quadrat von $\operatorname{Sin}d + \operatorname{Cos}d \operatorname{Tang}g \operatorname{Cos}G$, so ergiebt sie

$$\frac{\left\{\operatorname{Sin}d + \operatorname{Cos}d \operatorname{Tang}g \operatorname{Cos}G\right\}^2}{\operatorname{Sin}\delta_0{}^2} = 1 + \operatorname{Tang}g^2$$

oder, wenn man

$$\text{Tang}\,\mu = \text{Tang}\,g\,\text{Cos}\,G$$

setzt:

$$\text{Cos}\,\mu\,\text{Sin}\,\delta_0 = \text{Cos}\,g\,\text{Sin}\,(d+\mu)$$

Multiplicirt man die erste Gleichung in $\text{Sin}\,(\tau_0-t)$, die zweite in $\text{Cos}\,(\tau_0-t)$; ferner die erste in $-\text{Cos}\,(\tau_0-t)$, die zweite in $\text{Sin}\,(\tau_0-t)$, so sind die Summen der Producte:

$$(\text{Sin}\,d + \text{Cos}\,d\,\text{Tang}\,g\,\text{Cos}\,G)\,\text{Cotg}\,\delta_0\,\text{Cos}\,(\tau_0-t) = (\text{Cos}\,d - \text{Sin}\,d\,\text{Tang}\,g\,\text{Cos}\,G$$
$$(\text{Sin}\,d + \text{Cos}\,d\,\text{Tang}\,g\,\text{Cos}\,G)\,\text{Cotg}\,\delta_0\,\text{Sin}\,(\tau_0-t) = -\,\text{Tang}\,g\,\text{Sin}\,G$$

und man erlangt durch ihre Verbindung mit der vorigen Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \text{Sin}\,\delta_0 &= \frac{\text{Cos}\,g}{\text{Cos}\,\mu}\,\text{Sin}\,(d+\mu) \\ \text{Cos}\,\delta_0\,\text{Cos}\,(\tau_0-t) &= \frac{\text{Cos}\,g}{\text{Cos}\,\mu}\,\text{Cos}\,(d+\mu) \\ \text{Cos}\,\delta_0\,\text{Sin}\,(\tau_0-t) &= -\,\text{Sin}\,g\,\text{Sin}\,G \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

welche Ausdrücke auch der noch nicht berücksichtigten dritten Gleichung genügeleisten. Hierdurch sind d und t bestimmt, nämlich τ_0-t wird durch

$$\text{Sin}\,(\tau_0-t) = \frac{-\,\text{Sin}\,g\,\text{Sin}\,G}{\text{Cos}\,\delta_0}$$

bekannt und darauf d durch:

$$\text{Tang}\,(d+\mu) = \frac{\text{Tang}\,\delta_0}{\text{Cos}\,(\tau_0-t)}$$

Durch Addition der Gleichungen (19) und (19*) werden s und p bestimmt, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} (r'+r)\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}s\,\text{Sin}\,p &= (u'-u)\,\text{Cos}\,(\tau_0-t) - (v'-v)\,\text{Sin}\,d\,\text{Sin}\,(\tau_0-t) \\ (r'+r)\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}s\,\text{Cos}\,p &= (u'-u)\,\text{Sin}\,\delta_0\,\text{Sin}\,(\tau_0-t) + (v'-v)\left\{\text{Cos}\,d\,\text{Cos}\,\delta_0 + \text{Sin}\,d\,\text{Sin}\,\delta_0\,\text{Cos}\,(\tau_0-t)\right\} \\ (r'+r)\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}s &= 2\left\{\text{Sin}\,d\,\text{Sin}\,\delta_0 + \text{Cos}\,d\,\text{Cos}\,\delta_0\,\text{Cos}\,(\tau_0-t)\right\} - (u'+u)\,\text{Cos}\,\delta_0\,\text{Sin}\,(\tau_0-t) \\ &\quad + (v'+v)\left\{\text{Cos}\,d\,\text{Sin}\,\delta_0 - \text{Sin}\,d\,\text{Cos}\,\delta_0\,\text{Cos}\,(\tau_0-t)\right\} \end{aligned}\right\} (21)$$

wo Alles was rechts von den Gleichheitszeichen steht gegeben ist,

theils durch die Ablesungen am Instrumente, theils durch die, die Kenntniss seines jedesmaligen Zustandes gewährenden Grössen, endlich durch die Formeln (20).

9.

Wenn auch der Fall vorkommen kann, dass man die Formeln (21) vollständig anwenden muss, nämlich dann, wenn die beiden Punkte so nahe bei dem Pole stehen, dass u, v, u', v', vergleichungsweise mit ihren Entfernungen von demselben, nicht als kleine Grössen angesehen werden können, so wird man sie doch gewöhnlich als solche Grössen betrachten, und dann statt der Formeln selbst, eine näherungsweise richtige Entwickelung derselben anwenden können. Diese besitzt, wenn sie anwendbar ist, Vorzüge vor den Formeln selbst, weshalb ich sie jetzt aufsuchen werde. Sie beruht auf der Vernachlässigung aller über die dritte Ordnung von u, v, u', v' hinausgehenden Grössen, fordert also, dass man die in $u'-u$, $v'-v$, $u'+u$, $v'+v$ multiplicirten Ausdrücke (21) bis zu der zweiten Ordnung incl. entwickele.

Dadurch erhält man:

$$
\begin{aligned}
(r'+r)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}s\,\mathrm{Sin}p &= (u'-u)\left[1-\tfrac{1}{8}(u'+u)^2-\tfrac{1}{8}(u'+u)^2\,\mathrm{Tang}\,\delta_0^{\,2}\right] \\
&\quad +(v'-v)\left[\tfrac{1}{4}(u'+u)\,\mathrm{Tang}\,\delta_0-\tfrac{1}{4}(u'+u)\,(v'+v)\right] \\
(r'+r)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}s\,\mathrm{Cos}p &= (v'-v)\left[1-\tfrac{1}{8}(v'+v)^2-\tfrac{1}{8}(u'+u)^2\,\mathrm{Tang}\,\delta_0^{\,2}\right]-(u'-u)\,\tfrac{1}{4}(u'+u)\,\mathrm{Tang}\,\delta_0 \\
(r'+r)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}s &= 2\left[1+\tfrac{1}{8}(u'+u)^2+\tfrac{1}{8}(v'+v)^2\right]
\end{aligned}
$$

oder

$$
\left.
\begin{aligned}
2\,\mathrm{Tang}\tfrac{1}{2}s\,\mathrm{Sin}p &= (u'-u)\left[1-\tfrac{1}{4}(u'+u)^2-\tfrac{1}{8}(v'+v)^2-\tfrac{1}{8}(u'+u)^2\,\mathrm{Tang}\,\delta_0^{\,2}\right] \\
&\quad +(v'-v)\left[\tfrac{1}{4}(u'+u)\,\mathrm{Tang}\,\delta_0-\tfrac{1}{4}(u'+u)\,(v'+v)\right] \\
2\,\mathrm{Tang}\tfrac{1}{2}s\,\mathrm{Cos}p &= (v'-v)\left[1-\tfrac{1}{4}(v'+v)^2-\tfrac{1}{8}(u'+u)^2-\tfrac{1}{8}(u'+u)^2\,\mathrm{Tang}\,\delta_0^{\,2}\right] \\
&\quad -(u'-u)\,\tfrac{1}{2}(u'+u)\,\mathrm{Tang}\,\delta_0
\end{aligned}
\right\}(22)
$$

in welchen Ausdrücken $u'-u$, $v'-v$, $u'+u$, $v'+v$ nun durch zweckmässige Bezeichnungen zu ersetzen sind.

Bezeichnet man den Winkel zwischen den Bewegungslinien des Oculars und der Objectivhälfte II durch w, so dass $\nu+\varkappa=n+k'-w$ ist, und setzt man

$$\left.\begin{aligned} f\,\mathrm{Sin}\,F &= \mathrm{Tang}\,R\,\{(m-a)\,\mathrm{Sin}\,(k-k') + b\,\mathrm{Cos}\,(k-k') + (\mu-\alpha)\,\mathrm{Sin}\,w - \beta\,\mathrm{Cos}\,w\} \\ f\,\mathrm{Cos}\,F &= \mathrm{Tang}\,R\,\{(m-a)\,\mathrm{Cos}\,(k-k') - b\,\mathrm{Sin}\,(k-k') - (\mu-\alpha)\,\mathrm{Cos}\,w - \beta\,\mathrm{Sin}\,w\} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

so erhält man, durch Multiplication in $\mathrm{Cos}\,(n+k')$ und $\mathrm{Sin}\,(n+k')$, so wie auch in $-\mathrm{Sin}\,(n+k')$ und $\mathrm{Cos}\,(n+k')$ und durch Addition der Producte (17):

$$\left.\begin{aligned} x &= f\,\mathrm{Sin}\,(n+k'+F) \\ v &= f\,\mathrm{Cos}\,(n+k'+F) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

wo f und $n+k'+F$ die §. 7. durch Tang $\triangle$ und π bezeichneten Grössen sind. Setzt man ferner:

$$\left.\begin{aligned} 2\,\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,S\,\mathrm{Sin}E &= \mathrm{Tang}\,R\,\{-(m-a)\,\mathrm{Sin}\,(k-k') + b'-b\,\mathrm{Cos}\,(k-k')\} \\ 2\,\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,S\,\mathrm{Cos}E &= \mathrm{Tang}\,R\,\{m'-a'-(m-a)\,\mathrm{Cos}\,(k-k') + b\,\mathrm{Sin}\,(k-k')\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (25)$$

so folgt daraus, durch die eben angewandten Multiplicationen und Additionen,

$$\left.\begin{aligned} x'-x &= 2\,\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,S\,\mathrm{Sin}\,(n+k'+E) \\ v'-v &= 2\,\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,S\,\mathrm{Cos}\,(n+k'+E) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

Aus (24) und (26) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\,(x'+x) &= \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,S\,\mathrm{Sin}\,(n+k'+E) + f\,\mathrm{Sin}\,(n+k'+F) \\ \tfrac{1}{2}\,(v'+v) &= \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,S\,\mathrm{Cos}\,(n+k'+E) + f\,\mathrm{Cos}\,(n+k'+F) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (27)$$

Setzt man die Ausdrücke (26) von $x'-x$ und $v'-v$ in die Formeln (22), multiplicirt man sie dann in

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cotg}\,\tfrac{1}{2}\,S\,\mathrm{Cos}\,(n+k'+E) \text{ und } -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cotg}\,\tfrac{1}{2}\,S\,\mathrm{Sin}\,(n+k'+E)$$

so wie auch in

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cotg}\,\tfrac{1}{2}\,S\,\mathrm{Sin}\,(n+k'+E) \text{ und } \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cotg}\,\tfrac{1}{2}\,S\,\mathrm{Cos}\,(n+k'+E)$$

so erhält man die Summen der Producte:

$$\frac{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}\,s}{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}\,S}\,\mathrm{Sin}\,(p-n-k'-E) = \tfrac{1}{2}\,(x'+x)\,\mathrm{Tan}\,\delta_0 - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\,(n+k'+E)\left[\{(x'+x)^2-(v'+v)^2\}\,\mathrm{Sin}\,(n+k'+E) + 2\,(x'+x)\,(v'+v)\,\mathrm{Cos}\,(n+k'+E)\right]$$

$$\frac{\text{Tang}\,\frac{1}{2}s}{\text{Tang}\,\frac{1}{2}S}\,\text{Cos}\,(p-n-k'-E) = 1-\tfrac{1}{2}\Big[(u'+u)^2+(v'+v)^2+(u'+u)^2\,\text{Tang}\,\delta_0{}^2 + \Big\{(u'+u)\,\text{Sin}\,(n+k'+E)+(v'+v)\,\text{Cos}\,(n+k'+E)\Big\}^2\Big]$$

Hieraus folgt:

$$\text{Tan}\,\tfrac{1}{2}s = \text{Tan}\,\tfrac{1}{2}S\left\{1-\tfrac{1}{2}\Big[(u'+u)^2+(v'+v)^2+\Big\{(u'+u)\,\text{Sin}\,(n+k'+E)+(v'+v)\,\text{Cos}\,(n+k'+E)\Big\}^2\Big]\right\}$$

$$p = n+k'+E+\tfrac{1}{2}(u'+u)\,\text{Tan}\,\delta_0-\tfrac{1}{8}\,\text{Cos}\,(n+k'+E)\Big[\Big\{(u'+u)^2-(v'+v)^2\Big\}\,\text{Sin}\,(n+k'+E) + 2(u'+u)\,(v'+v)\,\text{Cos}\,(n+k'+E)\Big]$$

und wenn die Ausdrücke (27) von $u'+u$ und $v'+v$ gesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned}\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}s &= \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}S\left\{1-\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}S^2-2f\,\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}S\,\text{Cos}\,(F-E)-\tfrac{1}{2}ff\,(1+\text{Cos}\,(F-E)^2)\right\}\\ p &= n+k'+E+\Big\{\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}S\,\text{Sin}\,(n+k'+E)+f\,\text{Sin}\,(n+k'+F)\Big\}\,\text{Tang}\,\delta_0\\ &\quad-\tfrac{1}{4}\,\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}S^2\,\text{Sin}\,2\,(n+k'+E)-f\,\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}S\,\text{Sin}\,(n+k'+F)\,\text{Cos}\,(n+k'+E)\\ &\quad-\tfrac{1}{2}ff\,\text{Sin}\,(n+k'+2F-E)\,\text{Cos}\,(n+k'+E)\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

Man kann aber diese Formeln noch vereinfachen, indem man die Beschaffenheit des Winkels E gehörig berücksichtigt. Den Formeln (25) zufolge ist $2\,\text{Tang}\,\frac{1}{2}S\,\text{Sin}\,E$ von der Ordnung von $k-k'$ und $b'-b$, und $2\,\text{Tang}\,\frac{1}{2}S\,\text{Cos}\,E$ ist nur in der Ordnung der Quadrate und Producte dieser Grössen von $\text{Tang}\,R\{m'-a'-m+a\}$ verschieden. Diese Grössen sind aber, indem die Bewegungslinien der optischen Mittelpunkte beider Objectivhälften sehr nahe zusammenfallen müssen, immer sehr kleine Grössen, und es folgt daraus, dass E im Allgemeinen, entweder ein kleiner, oder ein wenig von 180° verschiedener Winkel ist, das erstere wenn $m'-a'-m+a$ positiv, das letztere wenn es negativ ist. Ausgenommen hiervon ist der Fall, in welchem die zu messende Entfernung so klein ist, dass sie selbst als eine Grösse von der Ordnung von $k-k'$ und $b'-b$ angesehen werden muss, in welchem Falle E jede Grösse, und die bei vorhandenen Werthen von $m-a$, $k-k'$, b', b messbare Entfernung eine kleinste Grenze, welche die erste der Formeln (25)

$$= \text{Tang}\,R\left\{-(m-a)\,\text{Sin}\,(k-k')+b'-b\,\text{Cos}\,(k-k')\right\}$$

ergiebt, erlangen kann. Wenn diese Ausnahme nicht stattfindet, kann man also, in den Gliedern der zweiten Ordnung der Formeln (28),

E entweder $= 0$ oder $= 180°$ setzen, so wie p statt $n + k'_, + E$ schreiben. Dadurch werden sie:

$$\begin{aligned}
\text{Tang}\tfrac{1}{2}s &= \text{Tang}\tfrac{1}{2}S\left\{1 - \text{Tang}\tfrac{1}{2}S^2 \mp 2f\,\text{Tang}\tfrac{1}{2}S\,\text{Cos}F - \tfrac{1}{2}ff(1+\text{Cos}F^2)\right\}\\
p &= n + k'_, + E + \left\{\text{Tang}\tfrac{1}{2}S\,.\,\text{Sin}p \pm f\,\text{Sin}(p+F)\right\}\text{Tang}\,\delta_0\\
&\quad - \left\{\tfrac{1}{2}\,\text{Tang}\tfrac{1}{2}S^2\,\text{Sin}p \pm f\,\text{Tang}\tfrac{1}{2}S\,\text{Sin}(p+F) + \tfrac{1}{2}ff\,\text{Sin}(p+2F)\right\}\text{Cos}\,p\\
&\quad - \left\{\tfrac{1}{2}\,\text{Tang}\tfrac{1}{2}S^2\,\text{Sin}\,2p \pm f\,\text{Tang}\tfrac{1}{2}S\,\text{Sin}(2p+F) + \tfrac{1}{2}ff\,\text{Sin}(2p+2F)\right\}\text{Tang}\,\delta_0^2
\end{aligned}$$

wo das obere oder das untere Zeichen genommen wird, je nachdem $m' - a' - m + a$ positiv oder negativ ist. Aber auch in dem Ausnahmefalle können diese Formeln angewandt werden, weil, bei einem sehr kleinen Werthe von S, die Glieder derselben, welche durch diesen Fall geändert werden, ohne merklichen Nachtheil sogar ganz vernachlässigt werden könnten. Dividirt man noch die erste Formel durch $1 - \text{Tang}\frac{1}{2}S^2$, schreibt man in den kleineren Gliedern $\frac{1}{2}s$ statt $\text{Tang}\frac{1}{2}S$ und setzt man für $k'_,$ seinen Ausdruck (16), in diesem aber δ_0 und τ_0 statt d und t, was ohne erheblichen Fehler geschehen kann, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\text{Tang}\,s &= 2\,\text{Tang}\tfrac{1}{2}S\left\{1 \mp fs\,\text{Cos}F - \tfrac{1}{2}ff(1+\text{Cos}F^2)\right\}\\
p &= n + k' + E + (x\,\text{Sin}\tau_0 - y\,\text{Cos}\tau_0 + i,)\,\text{Sec}\,\delta_0\\
&\quad + \left\{\tfrac{1}{2}s\,\text{Sin}p \pm f\,\text{Sin}(p+F) - i' + \beta\,\text{Cos}\varphi\,\text{Sin}\tau_0\right\}\text{Tang}\,\delta_0\\
&\quad - \left\{\tfrac{1}{8}ss\,\text{Sin}p \pm \tfrac{1}{2}fs\,\text{Sin}(p+F) + \tfrac{1}{2}ff\,\text{Sin}(p+2F)\right\}\text{Cos}\,p\\
&\quad - \left\{\tfrac{1}{8}ss\,\text{Sin}\,2p \pm \tfrac{1}{2}fs\,\text{Sin}(2p+F) + \tfrac{1}{2}ff\,\text{Sin}(2p+2F)\right\}\text{Tang}\,\delta_0^2
\end{aligned}\right\} \ldots\ (39)$$

Der Ausdruck von p bezieht sich auf die Richtung *von* dem durch die erste Objectivhälfte (I) abgebildeten Punkte *nach* dem durch die zweite (II) abgebildeten. Die Grössen von S und E, und ob das letztere kleiner oder grösser als 90° zu nehmen ist, werden durch die Formeln (25) bestimmt. Man darf aber, bei der Anwendung des Ausdruckes von p das nicht übersehen, was im 2ten §., bei Gelegenheit der Formeln (2), gesagt worden ist: wenn der Pol Q der Declinationsaxe den durch die Beobachtung miteinander verglichenen Punkten *vorgeht*, so ist p der von dem Nordpole an, nach der Richtung, nach welcher die Geradenaufsteigungen wachsen, gezählte Positions-

winkel PMS'; wenn er auf sie *folgt*, so ist unter δ_o die Ergänzung der Declination zu 180° und unter τ_o der um 180° veränderte Stundenwinkel zu verstehen, und p ist dann der um 180° veränderte Positionswinkel, oder der Positionswinkel PMS.

10.

Die Bilder der beiden Punkte S, S' können, bei jeder Stellung einer der beiden Objectivhälften und des Oculars, auf zwei verschiedene Arten an dem mit der Stellung des Oculars veränderlichen Punkte o (§. 7.) zur Vereinigung gebracht werden; nämlich dadurch, dass man die Absehenslinie der anderen Objectivhälfte, durch Verschiebung derselben, in *entgegengesetzte* Lagen gegen die der ersteren bringt. Durch die Verbindung der in diesen beiden Fällen gemachten Beobachtungen miteinander, wird ihr Resultat frei von der Kenntniss von a, a', b, b', $k'-k$. Dieses werde ich jetzt entwickeln.

Lässt man die Objectivhälfte, von welcher in den Formeln des vorigen §'s angenommen worden ist, dass sie das Bild des Punkts S ergiebt, ohne Änderung, verschiebt man aber die andere bis die zweite Vereinigung der Bilder erfolgt, wozu auch eine gemeinschaftliche Drehung beider um die Heliometeraxe erforderlich sein kann, so macht diese Hälfte jetzt das Bild von S, die andere das Bild von S'. Bezeichnet man die durch diese zweite Beobachtung ergebenen Werthe von m' und n durch $m'_,$ und $n_,$, so wie die sich auf sie beziehenden Werthe von S, E, p durch $S_,$, $E_,$, $p_,$, so werden die hierdurch abgeänderten Formeln (25) und (29) für den gegenwärtigen Fall gültig. Man hat also, statt (25):

$$2\,\mathrm{Tang}\tfrac{1}{2}S_,\,\mathrm{Sin}\,E_, = \mathrm{Tang}\,R\left\{-(m-a)\,\mathrm{Sin}\,(k-k') + b'-b\,\mathrm{Cos}\,(k-k')\right\}$$

$$2\,\mathrm{Tang}\tfrac{1}{2}S_,\,\mathrm{Cos}\,E_, = \mathrm{Tang}\,R\left\{m'_,-a' - (m-a)\,\mathrm{Cos}\,(k-k') + b\,\mathrm{Sin}\,(k-k')\right\}$$

Da $m'_,-a'$ und $m'-a'$ auf entgegengesetzten Seiten von $m-a$ sind, so haben $2\,\mathrm{Tang}\frac{1}{2}S_,\,\mathrm{Cos}\,E_,$ und $2\,\mathrm{Tang}\frac{1}{2}S\,\mathrm{Cos}\,E$ verschiedene Zeichen; $2\,\mathrm{Tang}\frac{1}{2}S_,\,\mathrm{Sin}\,E_,$ und $2\,\mathrm{Tang}\frac{1}{2}S\,\mathrm{Sin}\,E$ sind einander gleich. Da $S_,$ und S nur in Grössen der dritten Ordnung voneinander abweichen können, so folgt daraus, dass $E_,$ nur in Grössen von der Ordnung

des Products von $(k-k')\,\mathrm{Sin}\,E$ in ss, sf, ff von $180°-E$ verschieden sein kann, welche Verschiedenheit als unmerklich betrachtet werden darf. Die Anwendung der Formeln (29) auf die zweite Beobachtung fordert daher, dass man den darin enthaltenen doppelten Zeichen die der ersten entgegengesetzte Bedeutung beilege. Indessen kann man die lästige Trennung der beiden Fälle in welchen E, für die erste Beobachtung entweder $<90°$ oder $>90°$ ist, dadurch vermeiden, dass man diejenige von beiden, für welche $E<90°$ ist, für die *erste* annimmt, für die auf welche die Bezeichnungen m' und n sich beziehen. Unter dieser Bedingung werden in den Formeln (29) die oberen Zeichen, in ihrer Anwendung auf die zweite Beobachtung die unteren gelesen; und die Bedeutung von p wird, in der zweiten Beobachtung, indem nun die unverändert gelassene Objectivhälfte den Punkt S' abbildet, die von der vorigen um $180°$ verschiedene. — Der grösseren Deutlichkeit wegen werde ich die Anwendung der Formeln (29) auf beide Beobachtungen hieherschreiben, auch den Ausdruck von $2\,\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}S$ (25) substituiren und daraus die immer unmerklichen Grössen weglassen:

1te *Beobachtung*.

$$\mathrm{Tang}\,s = \mathrm{Tang}\,R\,\frac{(m'-a'-m+a)}{\mathrm{Cos}\,E}\left\{1-fs\,\mathrm{Cos}\,F-\tfrac{1}{2}ff(1+\mathrm{Cos}\,F^2)\right\}$$

$$\begin{aligned} p = {} & n+k'+E+(x\,\mathrm{Sin}\,\tau_0-y\,\mathrm{Cos}\,\tau_0+i,)\,\mathrm{Sec}\,\delta_0 \\ & +\left\{\tfrac{1}{2}s\,\mathrm{Sin}\,p+f\,\mathrm{Sin}(p+F)-i'+\beta\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tau_0\right\}\mathrm{Tang}\,\delta_0 \\ & -\left\{\tfrac{1}{8}ss\,\mathrm{Sin}\,p+\tfrac{1}{2}fs\,\mathrm{Sin}\,(p+F)+\tfrac{1}{2}ff\,\mathrm{Sin}\,(p+2F)\right\}\mathrm{Cos}\,p \\ & -\left\{\tfrac{1}{8}ss\,\mathrm{Sin}\,2p+\tfrac{1}{2}fs\,\mathrm{Sin}(2p+F)+\tfrac{1}{2}ff\,\mathrm{Sin}(2p+2F)\right\}\mathrm{Tang}\,\delta_0^2 \end{aligned}$$

2te *Beobachtung* ($180°-E$, $180°+p$ statt E, p und die entgegengesetzte Annahme der zweideutigen Zeichen)

$$\mathrm{Tang}\,s = \mathrm{Tang}\,R\,\frac{(m-a-m'+a')}{\mathrm{Cos}\,E}\left\{1+fs\,\mathrm{Cos}\,F-\tfrac{1}{2}ff(1+\mathrm{Cos}\,F^2)\right\}$$

$$\begin{aligned} p = {} & n,+k'-E+(x\,\mathrm{Sin}\,\tau_0-y\,\mathrm{Cos}\,\tau_0+i,)\,\mathrm{Sec}\,\delta_0 \\ & +\left\{-\tfrac{1}{2}s\,\mathrm{Sin}\,p+f\,\mathrm{Sin}(p+F)-i'+\beta\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tau_0\right\}\mathrm{Tang}\,\delta_0 \\ & -\left\{\tfrac{1}{8}ss\,\mathrm{Sin}\,p-\tfrac{1}{2}fs\,\mathrm{Sin}\,(p+F)+\tfrac{1}{2}ff\,\mathrm{Sin}\,(p+2F)\right\}\mathrm{Cos}\,p \\ & -\left\{\tfrac{1}{8}ss\,\mathrm{Sin}\,2p-\tfrac{1}{2}fs\,\mathrm{Sin}(2p+F)+\tfrac{1}{2}ff\,\mathrm{Sin}(2p+2F)\right\}\mathrm{Tang}\,\delta_0^2 \end{aligned}$$

Die aus beiden Beobachtungen zusammengenommen hervorgehenden Werthe werden durch die halbe Summe der für beide geltenden Formeln ausgedrückt, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \text{Tang}\, s &= \text{Tang}\, R\, \frac{m'-m'_,}{2\,\text{Cos}\, E}\left\{1-\tfrac{1}{2}ff\ (1+\text{Cos}\, F^2)\right\} \\ p &= \frac{n+n_,}{2}+k'+(x\,\text{Sin}\,\tau_0-y\,\text{Cos}\,\tau_0+i_,)\,\text{Sec}\,\delta_0+\left\{f\,\text{Sin}(p+F)-i'+\beta\,\text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin}\,\tau_0\right\}\text{Tan}\,\delta_0 \\ &\quad -\tfrac{1}{16}ss\,\text{Sin}\,2p-\tfrac{1}{4}ff\,\text{Cos}\,p\,\text{Sin}(p+2F)-\left\{\tfrac{1}{8}ss\,\text{Sin}\,2p+\tfrac{1}{4}ff\,\text{Sin}(2p+2F)\right\}\text{Tan}\,\delta_0^{\,2} \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Wenn die Declinationsaxe (ihr Pol Q) *vorangeht*, so drückt die letzte Formel den Positionswinkel der Richtung *von* dem Punkte, welcher in der am wenigsten vorgerückten Objectivhälfte, oder (im umgekehrt zeigenden Fernrohre) den Köpfen der Mikrometerschrauben am nächsten gesehen wird, *nach* dem in der am meisten vorgerückten erscheinenden aus; wenn sie *folgt* drückt die Formel den Positionswinkel der entgegengesetzten Richtung aus. Dann sind aber $180°-\delta_0$ und $180°+\tau_0$, statt δ_0 und τ_0 zu lesen.

Der Ausdruck von E wird durch den Unterschied der beiden Formeln für p erlangt, nämlich:

$$E=\frac{n_,-n}{2}-\tfrac{1}{2}s\,\text{Sin}\,p\,\text{Tang}\,\delta_0+\tfrac{1}{2}fs\,\text{Cos}\,p\,\text{Sin}(p+F)+\tfrac{1}{2}fs\,\text{Sin}(2p+F)\,\text{Tang}\,\delta_0^{\,2} \quad (31)$$

Der Ausdruck von Tang s setzt zwar E als bekannt voraus, allein da es nur für sehr kleine Werthe von s, für solche deren Grösse, selbst vergleichungsweise mit den sehr kleinen $k-k'$ und $b-b'$ nicht beträchtlich ist, so gross werden kann, dass sein Cosinus merklich von 1 verschieden ist, so darf dieser nur berücksichtigt werden, wenn eine sehr kleine Entfernung durch die Beobachtungen bestimmt werden soll. In diesem Falle aber kann man $E=\frac{1}{2}(n_,-n)$ annehmen.

Der Vortheil, welchen die jetzt entwickelte Methode, *zwei zusammengehörige* Beobachtungen zum Resultate zu vereinigen, gewährt, nämlich die Befreiung desselben von der Kenntniss von a, a', b, b' und $k-k'$, kann durch die Bestimmung dieser Grössen und die Berechnung ihrer Einflüsse auf *einzelne* Beobachtungen, nicht ersetzt werden. Es ist nämlich zweifelhaft, ob ihre Werthe, in allen Lagen des Instruments gegen den Horizont sich gleich bleiben. Wenn ein Heliometer angewandt werden soll, welches in dieser Beziehung noch

nicht geprüft worden ist, so ist die Methode der *zusammengehörigen* Beobachtungspaare nicht bloss bequem und vortheilhaft, sondern *nothwendig*. Ich glaube, dass man sich nicht leicht berechtigt finden wird, diese Nothwendigkeit zurückzuweisen.

11.

Stellt man die Absehenslinie der einen Objectivhälfte, derjenigen, welche man während der Beobachtung unverrückt lassen will, statt ihre Lage durch willkürliche Werthe von m, μ und ν zu bestimmen, der Heliometeraxe parallel, welches durch $m-a=\mu-\alpha$ und zugleich $n+k=\nu+\varkappa$, am einfachsten aber durch $m-a=\mu-\alpha=0$ geschieht, so vereinfachen sich die Formeln (30) beträchtlich, indem dann $f=0$ wird. Sie werden

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Tang} s &= \operatorname{Tang} R \cdot \frac{m'-m_{,}'}{2\operatorname{Cos} E} \\ p &= \frac{n+n_{,}}{2} + k' + (x \operatorname{Sin}\tau_0 - y \operatorname{Cos}\tau_0 + i_{,}) \operatorname{Sec}\delta_0 - (i'-\beta \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\tau_0) \operatorname{Tan}\delta_0 \\ &\quad - \tfrac{1}{12} ss \operatorname{Sin} 2p \,(1 + 2 \operatorname{Tang}\delta_0^{\,2}) \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Die Anwendung dieser Beobachtungsart empfiehlt sich also durch die Symmetrie die sie den Beobachtungen, und die Einfachheit die sie ihrer Berechnung giebt. Will man die Übereinstimmung der beiden einzelnen Beobachtungen des Positionswinkels, welche zu der hier angenommenen *vollständigen Beobachtung* vereinigt worden sind, prüfen, so geschieht dieses durch die Formel (31), indem man darin, falls b, b', $k-k'$ durch Berichtigung des Instruments zum Verschwinden gebracht sind, $E=0$ setzt; falls man ihre Werthe kennt, aber E nach (25) berechnet.

Ich erwähne noch einer zweiten Beobachtungsmethode, welche darin besteht, dass man $m=a$ macht, die Verschiebungslinien der Objectivhälften und des Oculars parallel stellt, das letztere aber zwischen beiden Beobachtungen nicht unverrückt lässt, sondern bei der einen so stellt, dass $\mu-\alpha=\frac{1}{2}(m'-a')$, bei der anderen so, dass $\mu-\alpha=\frac{1}{2}(m_{,}'-a')$ ist. Bei dieser Anordnung der Beobachtungen ist $f=\frac{1}{2}s$, und F für die eine Beobachtung $=180°$, für die andere $=0$,

und man erhält, indem man diese Änderung in (29) und (30) macht, die Endformeln für die *vollständige* Beobachtung:

$$\left.\begin{aligned} 2\,\mathrm{Tang}\tfrac{1}{2}s &= \mathrm{Tang}\,R\,\frac{m'-m'_,}{2\,\mathrm{Cos}\,E} \\ p &= \frac{n+n_,}{2}+k'+(x\,\mathrm{Sin}\,\tau_0-y\,\mathrm{Cos}\,\tau_0+i_,)\,\mathrm{Sec}\,\delta_0-(i'-\beta\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\tau_0)\,\mathrm{Tan}\,\delta_0 \end{aligned}\right\}\ldots(33)$$

Dieses Verfahren unterscheidet sich dadurch von dem vorigen, dass es die Strahlen von beiden beobachteten Punkten, in gleichen Winkeln ($=\frac{1}{2}s$) mit den Axen der beiden Objectivhälften einfallen lässt, während sie bei dem vorigen mit der Axe der einen Objectivhälfte den Winkel s machen, der anderen aber parallel einfallen; es erlangt hierdurch den Vorzug, dass es die Undeutlichkeit der Bilder vermindert, welche nothwendige Folge ihrer Entfernung von der Axe eines Objectivs ist, und in einem, mit derselben schnell zunehmenden Verhältnisse wächst. Dagegen ist es in seiner Ausführung weniger einfach als das vorige, das Ocular unverrückt in der Heliometeraxe lassende Verfahren. Wenn die zu beobachtenden Punkte nicht über die Grenze des hinreichend deutlichen Sehens hinaus voneinander entfernt sind, so scheint mir, im Allgemeinen, kein Grund vorhanden zu sein, diese grössere Einfachheit der Beobachtungen aufzuopfern.

Ein drittes Verfahren vereinigt den Vorzug des zweiten mit der Einfachheit der Ausführung des ersten: es besteht darin, dass man das Ocular in die Heliometeraxe, die beiden Objectivhälften aber in entgegengesetzte, gleich grosse Entfernungen von derselben stellt. Wenn ich ihm dennoch die beiden ersten Methoden vorziehe, so ist der Grund davon, dass man bei diesen alle Messungen durch *eine* der beiden Heliometerschrauben erlangen kann. Ich bin nämlich der Meinung, dass man diese Schrauben nicht als gleichförmig geschnitten annehmen soll, sondern sie einer Untersuchung unterwerfen muss, aus welcher Verbesserungen ihrer unmittelbaren Angaben hervorgehen können und, nach meinen Erfahrungen, hervorgehen werden; diese Untersuchung ist aber, wenn sie bis zu grosser Sicherheit getrieben werden soll, so schwierig, dass es mir wünschenswerther erscheint, alle Zeit, die man darauf zu verwenden beabsichtigt, *einer* der beiden Schrauben zu widmen, als sie auf beide zu vertheilen. — In Fällen, in welchen eine zu messende Entfernung sich schnell ändert, wird

die stets symmetrische Stellung der beiden Objectivhälften nicht ohne einigen Zeitverlust erlangt werden können. Von dieser Unbequemlichkeit ist das erste Verfahren frei; das zweite erfährt sie in grösserem Maasse als das dritte. — Zur Berechnung der nach dem dritten gemachten Beobachtungen dienen auch die Formeln (33), in welchen aber $\frac{1}{2}(k+k')$ statt k' zu nehmen ist.

Wenn man das Resultat einer vollständigen Beobachtung auch von den Abweichungen der Declinationsaxe und der Heliometeraxe von ihren senkrechten Stellungen auf resp. der Stundenaxe und der Declinationsaxe, und eben so von dem Einflusse der Biegung der letzteren, befreien will, ohne $i_{,}=i+\alpha \operatorname{Sin}\varphi$ und i' als bekannt vorauszusetzen, so muss man die Beobachtung in entgegengesetzten Lagen der Declinationsaxe wiederholen. Die Formeln (32) und (33) zeigen, dass $i_{,}$ und i' aus dem Mittel dieser beiden Beobachtungen verschwinden.

12.

Die §. 9—11 gegebenen Formeln setzen voraus, dass die Bilder der beiden Punkte S und S' in dem Punkte o, wofür man wohl immer den Mittelpunkt des Sehefeldes annehmen wird, zur Deckung gebracht seien. Diese Voraussetzung ist jedenfalls desto näher richtig, je stärker das Ocular vergrössert, je kleiner daher sein Sehefeld ist. Nichtsdestoweniger aber ist es nöthig, die Einflüsse zu untersuchen, welche eine Abweichung von der Voraussetzung, auf s und auf p hat.

Offenbar hört die ausser der Axe des Oculars beobachtete Dekkung der Bilder nicht auf stattzufinden, wenn man diese Axe so verrückt, dass sie mit den sich deckenden Bildern zusammenfällt. Die Formeln (29) drücken daher s und p, auch wenn der Voraussetzung nicht entsprochen wird, richtig aus, allein f und F beziehen sich dann nicht auf die Axe des Oculars, sondern auf den Punkt der Sehefeldes wo die Deckung der Bilder beobachtet worden ist. Bezeichnet man die Entfernung dieses Punkts (o') von der Axe des Oculars (o) durch h, den Winkel der Linie oo' mit der Linie SS' durch H, und zählt man H und w in gleicher Richtung, so sind die Änderungen, welche $f \operatorname{Sin} F$ und $f \operatorname{Cos} F$ erfahren, den Formeln (23) zufolge:

$$= h \operatorname{Sin} H \text{ und } = -h \operatorname{Cos} H$$

Sieht man h als eine kleine Grösse an, deren Quadrat vernachlässigt werden kann, so erhält man seine Einflüsse (29):

$$\text{auf Tang } s = sh\left\{(\pm s - 2f \operatorname{Cos} F) \operatorname{Cos} H - f \operatorname{Sin} F \operatorname{Sin} H\right\}$$

$$\text{auf } \ldots\ldots p = h\Big[\pm(\text{Tang}\,\delta_0 - \tfrac{1}{2} s \operatorname{Cos} p)\operatorname{Sin}(p+H) - f \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin}(p+F+H)$$
$$- \left\{\pm \tfrac{1}{2} s \operatorname{Sin}(2p+H) + f \operatorname{Sin}(2p+F+H)\right\} \text{Tang}\,\delta_0^{\,2}\Big]$$

Hieraus geht hervor, dass der Einfluss von h auf die Messung der Entfernung, von der Ordnung des Products von h in ss und sf, und, da h wohl nicht über einige Minuten steigen wird, selbst bei den grössten vorkommenden Werthen von s und f, von geringer Bedeutung ist. Der grösste Theil seines Einflusses auf den Positionswinkel ist der Tangente der Declination proportional; aber er verschwindet, wenn $\operatorname{Sin}(p+H) = 0$, also H entweder $= -p$ oder $= 180° - p$ ist, oder wenn der Punkt, wo die Bilder zur Deckung gebracht werden, in dem durch die Axe des Oculars gehenden Declinationskreise liegt. Wenn das Heliometer, von einem Uhrwerke, der täglichen Bewegung gemäss fortbewegt wird, so wird dadurch die Entfernung der einmal in die Axe des Oculars gebrachten Bilder von dem ihr entsprechenden Declinationskreise, verhindert. Je grösser die Declination der beobachteten Punkte ist, desto aufmerksamer muss man allerdings sein, die Deckung ihrer Bilder nicht beträchtlich ausser dem Declinationskreise der Axe des Oculars zu bewirken; allein dennoch wird die Schätzung der Mitte des Sehefeldes, den Punkt, wo die Beobachtung gemacht werden soll, immer sicher genug andeuten, um nicht zu der Anwendung eines beleuchteten Fadennetzes zu veranlassen.

13.

Ich werde jetzt zeigen, wie man $k-k'$ $b'-b$ und k', so wie auch β und $\varkappa$, durch Beobachtungen bestimmen kann. Beobachtet man den Positionswinkel eines Doppelsterns, so erlangen $k-k'$ und $b'-b$ desto grössere Einflüsse auf die beiden einzelnen Einstellungen des Positionskreises, welche zusammen eine vollständige Beobachtung

ergeben, je näher beieinander die beiden, den Doppelstern zusammensetzenden Sterne sind. Es ist daher vortheilhaft, die Bestimmung von $k-k'$ und $b'-b$ auf solche Beobachtungen zu gründen.

Vernachlässigt man die Glieder der Formel (31), welche bei der vorausgesetzten Kleinheit von s von keiner Bedeutung sind, nimmt man also $E=\frac{1}{2}(n_{,}-n)$, so erhält man, aus (25) und (31), für eine der beiden zusammengehörigen Beobachtungen, hinreichend nahe:

$$s\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(n_{,}-n) = R\{m'-a' - m+a\}$$
$$s\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(n_{,}-n) = R\{(m-a)(k'-k) + b'-b\}$$

und für die andere

$$s\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(n_{,}-n) = R\{m-a - m_{,}+a'\}$$
$$s\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(n_{,}-n) = R\{(m-a)(k'-k) + b'-b\}$$

und aus der Verbindung beider:

$$\tfrac{1}{2}(m'-m_{,})\,\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}(n_{,}-n) = (m-a)(k'-k) + b'-b \ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

Solcher Ausdrücke des ersten, aus der unmittelbaren Beobachtung hervorgehenden Gliedes, kann man so viele erhalten, als man die Beobachtungen auf verschiedene Werthe von m beziehen will. Man kann also die beiden, in diesen Ausdrücken enthaltenen unbekannten Grössen $k'-k$ und $b'-b$ vortheilhaft bestimmen. Ich bemerke hierbei, dass es weder nöthig noch vortheilhaft ist, das Bild, welches die eine Objectivhälfte von dem einen, mit dem Bilde welches die andere von dem anderen Sterne des Doppelsterns macht, zur Deckung zu bringen, sondern dass es hinreicht, die beiden Bilder des Doppelsterns in gerade Linie und auf beiden Seiten in gleiche Entfernung voneinander zu legen.

Den Indexfehler des Positionskreises k' kann man bestimmen, indem man $m'-a'$ und $m-a$ beträchtlich verschieden voneinander macht, und dann die Stellung des Positionskreises aufsucht, welche die beiden Bilder eines festen Punktes, durch Drehung des Instruments, entweder um die Stundenaxe, oder um die Declinationsaxe, nacheinander in die Absehenslinie gelangen lässt. Durch Wieder-

holung dieser Beobachtung, nach vorangegangener beträchtlicher Veränderung von m', kann das Resultat von dem Einflusse von $k'-k$ und $b'-b$ befreiet werden. Ich werde die Verbindung aufsuchen, welche zwischen den aus solchen Beobachtungen hervorgehenden Angaben n des Positionskreises und seinem Indexfehler k' stattfindet.

Wenn das Instrument um die *Stundenaxe* gedrehet werden und ein fester Punkt dadurch in die Absehenslinie jeder der Objectivhälften gelangen soll, so wird hierdurch gefordert, dass eine unbestimmte Veränderung von ZPQ, während PQR ungeändert bleibt, die beiden Absehenslinien durch jenen Punkt führt. Indem hier die Angabe des Declinationskreises des Instruments ungeändert bleibt, erlangt man die der Forderung entsprechende Gleichung, indem man die Ausdrücke der Declination δ des festen Punktes, durch die Angabe des Declinationskreises des Instruments und die, die Lage jeder der beiden Objectivhälften bestimmenden Grössen, einander gleich setzt. Ich werde die Formeln (18) von den unmittelbaren Angaben beider Kreise des Instruments abhängig machen, allein sie auf den Pol des Instruments beziehen, indem es eine Weitläuftigkeit ohne Nutzen sein würde, wenn man die Lage der Stundenaxe, beziehungsweise auf die Weltaxe, in die Betrachtung aufnehmen wollte; diese Änderung der Bedeutung der Formeln fordert, dass man x und y weglasse und unter φ die Polhöhe des Instruments verstehe. In dieser Bedeutung hat man (15):

$$d = D+c' + \beta\{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} d - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} t\}$$
$$t = T+c + i' \operatorname{Sec} d - i, \operatorname{Tang} d - \alpha \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} t - \beta \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sec} d \operatorname{Sin} t$$

wo man, in den von i', $i_,$, α, β abhängigen Gliedern, $D+c'$ und $T+c$ statt d und t schreiben kann. Führt man die abgekürzten Bezeichnungen D und T, für $D+c'$ und $T+c$ ein, so hat man also:

$$d = D+\beta\{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} D - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} D \operatorname{Cos} T\} \ldots\ldots\ldots = D+\triangle D$$
$$t = T+i' \operatorname{Sec} D - i, \operatorname{Tang} D - \alpha \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} T - \beta \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sec} D \operatorname{Sin} T = T+\triangle T$$

und damit die Gleichungen (18):

$$\left.\begin{aligned} r \operatorname{Sin}\delta &= \operatorname{Sin} D + v \operatorname{Cos} D + r \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}(\tau - T).\triangle D \\ r \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}(\tau - T) &= \operatorname{Cos} D - v \operatorname{Sin} D - r \operatorname{Sin}\delta.\triangle D - r \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin}(\tau - T).\triangle T \\ r \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin}(\tau - T) &= -u + r \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}(\tau - T).\triangle T \end{aligned}\right\} (35)$$

Aus der Anwendung der ersten dieser Gleichungen auf beide Objectivhälften geht der Ausdruck der Bedingung, dass die Drehung des Instruments um die Stundenaxe die Absehenslinien beider Objectivhälften durch den festen Punkt führt, hervor, nämlich:

$$\begin{aligned}\operatorname{Sin}\delta &= \frac{1}{r}\operatorname{Sin}D + \frac{v}{r}\operatorname{Cos}D + \operatorname{Cos}\delta\operatorname{Cos}(\tau-T).\triangle D\\ &= \frac{1}{r'}\operatorname{Sin}D + \frac{v'}{r'}\operatorname{Cos}D + \operatorname{Cos}\delta\operatorname{Cos}(\tau-T').\triangle D'\end{aligned}$$

Man kann aber die Producte der kleinen Grössen i', $i_{,}$, α, β in die Quadrate und Producte von u, u', v, v' vernachlässigen und daher $\operatorname{Cos}\delta$ für $\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Cos}(\tau-T)$ und $\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Cos}(\tau-T')$ setzen, wodurch die Gleichung sich in

$$\frac{1}{r}\operatorname{Sin}D + \frac{v}{r}\operatorname{Cos}D + \operatorname{Cos}\delta.\triangle D = \frac{1}{r'}\operatorname{Sin}D + \frac{v'}{r'}\operatorname{Cos}D + \operatorname{Cos}\delta\triangle D'$$

oder

$$0 = \left(\frac{v'}{r'}-\frac{v}{r}\right)\operatorname{Cos}D + \left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}\right)\operatorname{Sin}D + \beta\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}D\operatorname{Cos}\delta\,(\operatorname{Cos}T-\operatorname{Cos}T')$$

verwandelt. Aus den beiden letzten Gleichungen (35) folgt, mit der erforderlichen Näherung

$$\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Cos}T = \operatorname{Cos}D\operatorname{Cos}\tau - v\operatorname{Sin}D\operatorname{Cos}\tau - u\operatorname{Sin}\tau$$

also auch

$$\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Cos}T' = \operatorname{Cos}D\operatorname{Cos}\tau - v'\operatorname{Sin}D\operatorname{Cos}\tau - u'\operatorname{Sin}\tau$$

und damit wird die Gleichung:

$$0 = \frac{v'}{r'}-\frac{v}{r} + \left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}\right)\operatorname{Tang}D + \beta\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Tang}D\left\{(v'-v)\operatorname{Sin}D\operatorname{Cos}\tau + (u'-u)\operatorname{Sin}\tau\right\}$$

oder, anders geschrieben:

$$v'-v = 2\frac{r'-r}{r'+r}\left\{\operatorname{Tan}D + \frac{v'+v}{2}\right\} - \frac{2r'r}{r'+r}.\beta\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Tang}D\left\{(v'-v)\operatorname{Sin}D\operatorname{Cos}\tau+(u'-u)\operatorname{Sin}\tau\right\}$$

Wenn man das weglässt was die dritte Ordnung überschreitet, auch die Ausdrücke (26) und (27) substituirt und durch $2\operatorname{Tang}\frac{1}{2}S$ dividirt, verwandelt sie sich in:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cos}(n+k'_{,}+E) = &\left\{\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}S + f\operatorname{Cos}(F-E)\right\}\left\{\operatorname{Tan}D+\operatorname{Tan}\tfrac{1}{2}S\operatorname{Cos}(n+k'_{,}+E)+f\operatorname{Cos}(n+k'_{,}+F)\right\}\\ &-\beta\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Tang}D\left\{\operatorname{Sin}D\operatorname{Cos}\tau\operatorname{Cos}(n+k'_{,}+E)+\operatorname{Sin}\tau\operatorname{Sin}(n+k'_{,}+E)\right\}\end{aligned}$$

Es folgt daraus, dass $\mathrm{Cos}(n+k'_,+E)$ von der Ordnung von S und f und daher $n+k'_,+E$ entweder nahe $=90°$ oder nahe $=270°$ ist. Da $m'-a'$ und $m-a$ beträchtlich voneinander verschieden sind, so ist E, dessen Tangente den Ausdruck (25):

$$\frac{(m-a)\,(k'-k)\,+\,b'-b}{m'-a'-m+a}$$

hat, entweder sehr klein, oder sehr nahe $=180°$, das erstere wenn $m'-a' > m-a$, das letztere wenn $m'-a' < m-a$ ist. Ohne die beabsichtigte Annäherung zu beeinträchtigen, kann man in dem rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrucke, $E=0$ oder $=180°$ und $n+k'_,+E=90°$ oder $=270°$ setzen. In dem Falle, in welchem $n+k'_,$ nahe $=90°$ ist, erhält man also für beide Fälle von E:

$$\mp\,(n+k'_,-90°)-\mathrm{Sin}E=\left\{\mathrm{Tan}\tfrac{1}{2}S\pm f\,\mathrm{Cos}F\right\}\left\{\mathrm{Tan}D-f\,\mathrm{Sin}F\right\}\mp\beta\,\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Tan}D\,\mathrm{Sin}\tau \quad (36a)$$

und wenn $n+k'_,$ nahe $=270°$ ist:

$$\pm(n+k'_,-270°)+\mathrm{Sin}E=\left\{\mathrm{Tan}\tfrac{1}{2}S\pm f\,\mathrm{Cos}F\right\}\left\{\mathrm{Tan}D+f\,\mathrm{Sin}F\right\}\pm\beta\,\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Tan}D\,\mathrm{Sin}\tau \quad (36b)$$

Wenn man $k'-k$ und $b'-b$ als bekannt annehmen will, so ist auch E bekannt und $k'_,$ kann durch *eine* Beobachtung von n gefunden werden; allein man wird ohne Zweifel vorziehen, *zwei* Beobachtungen, bei verschiedenen Werthen von m', zu machen und durch ihre Verbindung miteinander die, beiden gemeinschaftliche, Grösse $\mathrm{Tang}\frac{1}{2}S\,\mathrm{Sin}E$ zu eliminiren. Die Biegung β der Heliometeraxe verschwindet übrigens aus den Gleichungen (36), indem ihr Einfluss derselbe ist, welchen sie auf den Werth von $k'_,$ (16) geäussert hat; lässt man das sie enthaltende Glied aus den Gleichungen (36) weg, so bedeutet also das darin vorkommende $k'_,$ die Grösse:

$$k'+i,\,\mathrm{Sec}D-i'\,\mathrm{Tang}D \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Ich habe diese Gleichungen entwickelt, ohne dabei die Absehenslinie der einen Objectivhälfte mit der Heliometeraxe zusammenfallend, oder ohne $m-a=0$ und $\mu-\alpha=0$, also auch $f=0$ vorauszusetzen, obgleich man diesen Fall wohl immer eintreten lassen wird, wenn man eine Beobachtungsreihe zur Bestimmung von k' zu machen beabsichtigt. Die Veranlassung dieser unnöthig erscheinenden Verallgemeinerung

der Aufsuchung der Gleichungen war, dass sie ohne Weiteres zeigen sollten, welchen Einfluss kleine Abweichungen von der Absicht die eine Absehenslinie in die Heliometeraxe zu verlegen, auf das Resultat der Beobachtungen äussern. Setzt man, nachdem dieses erreicht worden ist, $f=0$, so vereinfachen sich die Gleichungen (36) in:

$$\mp(n+k'-90^\circ) - \operatorname{Sin} E = \operatorname{Tang} \tfrac{1}{2} S \operatorname{Tang} D$$
$$\pm(n+k'-270^\circ) + \operatorname{Sin} E = \operatorname{Tang} \tfrac{1}{2} S \operatorname{Tang} D$$

Multiplicirt man sie in

$$\pm(m'-a'-m+a) = \frac{2 \operatorname{Tang} \frac{1}{2} S}{\operatorname{Tang} R}$$

und bezeichnet man die unbekannte beständige Grösse

$$\frac{2 \operatorname{Tang} \frac{1}{2} S}{\operatorname{Tang} R} \operatorname{Sin} E \text{ durch } z$$

so verwandeln sie sich, wenn $n+k'$ nahe $=90^\circ$ ist, in:

$$(m'-a'-m+a)(n+k'-90^\circ) + z = -2 \frac{\operatorname{Tang}^2 \frac{1}{2} S}{\operatorname{Tang} R} \operatorname{Tang} D \quad \ldots\ldots\ldots (38^a)$$

und wenn $n+k'$ nahe $=270^\circ$ ist in

$$(m'-a'-m+a)(n+k'-270^\circ) + z = 2 \frac{\operatorname{Tang}^2 \frac{1}{2} S}{\operatorname{Tang} R} \operatorname{Tang} D \quad \ldots\ldots\ldots (38^b)$$

Wenn dagegen das Instrument um die *Declinationsaxe* gedrehet werden, und dadurch ein fester Punkt in die Absehenslinien jeder der Objectivhälften gelangen soll, so wird hierdurch gefordert, dass eine unbestimmte Veränderung von P,Q,R, während ZP,Q, ungeändert bleibt, die beiden Absehenslinien durch jenen Punkt führt. Die dieser Forderung entsprechende Gleichung erlangt man, wenn man die Ausdrücke, entweder von $\operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}(\tau-T)$, oder von $\operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin}(\tau-T)$ (35) für jede der beiden Objectivhälften, einander gleich setzt; ich werde den letzten, einfacheren wählen. Man hat also die Gleichung

$$-\frac{u}{r} + \operatorname{Cos}\delta \triangle T = -\frac{u'}{r'} + \operatorname{Cos}\delta \triangle T'$$

oder

$$0 = \frac{u'}{r'} - \frac{u}{r} - \operatorname{Cos}\delta (\triangle T' - \triangle T);$$

wenn man den Ausdruck des letzten Gliedes, nämlich

$$-\operatorname{Cos}\delta\left\{-i_{,}(\operatorname{Tang}D'-\operatorname{Tang}D)+(i''-\beta\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}T)(\operatorname{Sec}D'-\operatorname{Sec}D)\right\}$$

oder mit hinreichender Näherung:

$$-(v'-v)\left\{i_{,}\operatorname{Sec}\delta-(i''-\beta\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}T)\operatorname{Tang}\delta\right\}$$

schreibt, wird sie

$$0=\frac{u'}{r'}-\frac{u}{r}-(v'-v)\left\{i_{,}\operatorname{Sec}\delta-(i''-\beta\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}T)\operatorname{Tang}\delta\right\}$$

oder, anders geschrieben

$$u'-u=\frac{r'-r}{r'+r}(u'+u)+\frac{2r'r}{r'+r}(v'-v)\left\{i_{,}\operatorname{Sec}\delta-(i''-\beta\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}T)\operatorname{Tang}\delta\right\}$$

Wenn man weglässt was die dritte Ordnung überschreitet, die Ausdrücke (26) und (27) substituirt und durch $2\operatorname{Tang}\frac{1}{2}S$ dividirt, verwandelt sich diese Gleichung in:

$$\operatorname{Sin}(n+k'_{,}+E)=\left\{\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}S+f\operatorname{Cos}(F-E)\right\}\left\{\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}S\operatorname{Sin}(n+k'_{,}+E)+f\operatorname{Sin}(n+k'_{,}+F)\right\}$$
$$+\operatorname{Cos}(n+k'_{,}+E)\left\{i_{,}\operatorname{Sec}\delta-(i''-\beta\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}T)\operatorname{Tang}\delta\right\}$$

Da hieraus folgt, dass $n+k'_{,}+E$ entweder eine kleine Grösse der zweiten Ordnung, oder um eine solche von 180° verschieden ist, auch E entweder sehr klein, oder sehr nahe $=180°$ ist, so kann man, rechts von dem Gleichheitszeichen, sowohl das eine, als das andere entweder $=0$ oder $=180°$ annehmen. Setzt man zuerst $n+k'_{,}$ sehr klein voraus, so hat man für beide Fälle von E:

$$\pm(n+k'_{,})+\operatorname{Sin}E=\left\{\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}S\pm f\operatorname{Cos}F\right\}f\operatorname{Sin}F\pm\left\{i_{,}\operatorname{Sec}\delta-(i''-\beta\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}T)\operatorname{Tang}\delta\right\}\quad(39^{a})$$

und wenn $n+k'_{,}$ nahe $=180°$ ist:

$$\mp(n+k'_{,}-180°)-\operatorname{Sin}E=-\left\{\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}S\pm f\operatorname{Cos}F\right\}f\operatorname{Sin}F\mp\left\{i_{,}\operatorname{Sec}\delta-(i''-\beta\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}T)\operatorname{Tang}\delta\right\}\quad(39^{b})$$

Die Bemerkungen, welche ich zu den Gleichungen (36) gemacht habe, gehören auch zu den gegenwärtigen. Lässt man auch hier das letzte, von $i_{,}$, i'', β abhängige Glied weg, so bedeutet $k'_{,}$ den Indexfehler k' des Positionskreises selbst (16). Fällt die Absehenslinie der einen

Objectivhälfte mit der Heliometeraxe zusammen, oder ist $f=0$, so verschwindet daher Alles was rechts vom Gleichheitszeichen steht, und die Gleichungen werden:

$$\begin{aligned} \pm (n+k') &+ \operatorname{Sin} E = 0 \\ \mp (n+k'-180^\circ) &- \operatorname{Sin} E = 0 \end{aligned}$$

Multiplicirt man sie in:

$$\pm (m'-a'-m+a) = \frac{2 \operatorname{Tang} \frac{1}{2} S}{\operatorname{Tang} R}$$

und wendet man die vorher durch z bezeichnete unbekannte Grösse wieder an, so werden die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} (m'-a'-m+a)\,(n+k') + z &= 0 \\ (m'-a'-m+a)\,(n+k'-180^\circ) + z &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

Wenn man zu einer gemachten Beobachtung von n eine *correspondirende* macht, nämlich eine, bei welcher $m'-a'-m+a$ der Grösse nach $=m'-a'-m+a$, aber dem Zeichen nach ihm entgegengesetzt ist, so wird das Mittel des vorigen n und des sich aus dieser ergebenden n, sowohl von der unbekannten Grösse z frei, als auch die bekannte, auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen der Formeln (38) befindliche Grösse daraus verschwindet. Man mag das Instrument also um die Stundenaxe, oder um die Declinationsaxe gedrehet haben, so gewähren dergleichen *correspondirende* Beobachtungen den Vortheil, dass sie das gesuchte Resultat ohne alle Rechnung ergeben. Hat man deren mehrere angestellt, bezeichnet man die ihnen zukommenden Werthe von $\frac{1}{2}(m'-m')$ und $\frac{1}{2}(n+n')$ durch $M, M', M''\ldots$ und $N, N', N''\ldots$, und nimmt man Fehler von $N, N', N''\ldots$ als gleich wahrscheinlich an, wenn sie im Verhältnisse $\frac{1}{M}, \frac{1}{M'}, \frac{1}{M''}\ldots$ sind, so hat man das Resultat aller Beobachtungen:

$$(N) = \frac{MN + M'N' + M''N'' + \ldots.}{M + M' + M'' + \ldots.}$$

und dann, im Falle der Drehung um die *Stundenaxe*,

$$k' + i, \operatorname{Sec}\delta - i'' \operatorname{Tang}\delta = -(N) + 90^\circ, \text{ oder } = -(N) + 270^\circ$$

und im Falle der Drehung um die *Declinationsaxe*

$$k' = -(N), \text{ oder } = -(N) + 180^\circ$$

Hat man die Drehung um die Stundenaxe angewandt, und will man k', frei von i, und i', daraus bestimmen, so muss man die Beobachtungen in der entgegengesetzten Lage der Declinationsaxe, an dem vorher beobachteten festen Punkte wiederholen: dadurch erhält δ den den vorigen zu 180° ergänzenden Werth und die von i, und i' abhängigen Glieder erhalten entgegengesetzte Zeichen, so dass sie aus dem mittleren Resultate beider Beobachtungsreihen verschwinden.

Den Indexfehler $\varkappa$ des Kreises am Oculare bestimmt man, wenn man das Objectiv in einer Richtung, welche durch die Ablesung des Positionskreises und seinen Indexfehler bekannt ist, beträchtlich von der Heliometeraxe entfernt, dem Oculare dieselbe Entfernung davon giebt, und die Angabe seines Kreises abliest, bei welcher ein fester Punkt in seiner Absehenslinie erscheint; dann aber dieselbe Beobachtung, nachdem man die Entfernungen in gleich grosse, entgegengesetzte verwandelt hat, wiederholt: der gesuchte Indexfehler ist offenbar der Unterschied zwischen der bekannten Richtung der Verschiebung des Objectivs und dem Mittel der beiden Ablesungen des Kreises am Oculare. — Man wird auch den Index dieses Kreises so befestigen können, dass seine Angabe mit der Angabe der Nonien des Positionskreises übereinstimmt.

Die Entfernung β der Bewegungslinie des Oculars (des Punkts o §. 7.) von der Heliometeraxe, kann man durch Ablesungen des Kreises am Oculare bestimmen. Wenn man das Ocular um eine, durch die Ablesung μ seiner Scale bekannte Quantität $\mu-\alpha$ von der Heliometeraxe entfernt, und dann einen festen Punkt in seine Absehenslinie bringt; wenn man ferner μ in μ' verändert, so dass $\mu'-\alpha=-(\mu-\alpha)$ wird, und das Ocular so weit um die Heliometeraxe drehet, dass der feste Punkt wieder in der Absehenslinie erscheint, auch beidemale die Angabe seines Kreises ν und ν' ablieset, so ist

$$\pm\beta = \frac{\mu-\mu'}{2} \cdot \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\left\{180^\circ - \nu + \nu'\right\}$$

Ich begnüge mich, dieses nur anzudeuten, sowohl weil β immer nur einen geringen Einfluss auf die heliometrischen Messungen äussern kann, als auch weil man wohl vorziehen wird, das Ocular, durch vorhandene Berichtigungsschrauben, so zu stellen, dass seine Bewe-

gungslinie den Punkt o durch die Heliometeraxe führt, dass also β verschwindet.

Es wird kaum nöthig sein, das Mittel anzudeuten, wodurch man a, a', α finden kann; es besteht in der Drehung sowohl des Objectivs, als auch des Oculars um die Heliometeraxe. Sucht man die Stellung m der Objectivhälfte I, bei welcher ein durch sie abgebildeter Punkt seinen Ort im Sehefelde nicht verändert, während man sie um die Heliometeraxe drehet, so ist dieses $m=a$; eben so wird a' bestimmt, so wie α durch eine Drehung des Oculars.

Die Ausführung der Vorschriften, welche ich im gegenwärtigen § entwickelt habe, wird an Sicherheit und Leichtigkeit beträchtlich gewinnen, wenn man in dem Raume wo das Instrument aufgestellt ist, die Einrichtung trifft, ein Fernrohr befestigen zu können, dessen Objectiv dem Heliometer zugewandt ist und dessen, in die Neigung von 45° gegen die tägliche Bewegung gebrachtes Fadenkreuz die Stelle des festen Punkts vertritt.

14.

Aus dem vorigen § geht hervor, dass der Indexfehler des Positionskreises, durch die Drehung des Instruments um die Declinationsaxe *unmittelbar* gefunden wird, d. h. ohne durch einen Einfluss der kleinen Grössen i, i', α, β entstellt zu werden. Man sollte daher erwarten, durch abgeänderte Anwendungen dieses Verfahrens, z. B. durch seine Wiederholung in beiden Lagen des auf den festen Punkt gerichteten Instruments, stets auf einen gleichen Werth von k' geführt zu werden, auch wenn die Declinationsaxe auf der Stundenaxe und die Heliometeraxe auf der Declinationsaxe nicht ganz senkrecht stehen und das Instrument nicht frei von Biegungen ist. Allein das *Königsberger* Heliometer hat diese Erwartung nicht gerechtfertigt; vielmehr haben alle Bestimmungen des Positionskreises, wenn sie in entgegengesetzten Lagen der Declinationsaxe wiederholt wurden, einen *beträchtlichen*, bis auf etwa 4 Minuten steigenden, Unterschied gezeigt, dessen Ursache, da er durch das Vorige nicht erklärt wird, noch aufzusuchen ist.

Ich betrachte den Einfluss, welchen die Lage der Declinationsaxe auf den Indexfehler des Positionskreises geäussert hat, als eine Wirkung der beträchtlichen Schwere des, nicht symmetrisch zu der Declinationsaxe, sondern an einem Ende derselben befestigten Fernrohrs, welches, indem es von diesem Ende nur an einer Seite gehalten wird, sich um die gehaltene Seite zu drehen sucht, und sich wirklich so weit drehet als die Elasticität seiner Materie erlaubt. Wenn man die Grösse dieser Drehung der sie erzeugenden Kraft proportional annimmt, so kann man das Gesetz, welchem sie in allen Lagen des Instruments folgt, leicht angeben. Die drehende Kraft ist nämlich der Theil der Schwere, welcher senkrecht auf die durch die Declinationsaxe und die Heliometeraxe gelegte Ebene wirkt; sie wird also durch den Cosinus der Zenithdistanz des Punkts ausgedrückt, dessen Stundenwinkel derselbe (t) ist, den der in der Richtung der Heliometeraxe befindliche Punkt besitzt, dessen Declination aber 90° nördlicher ist als die Declination dieses Punkts, also $= 90° + d$. Sie ist also

$$= \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} d - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} t$$

und die ihr proportionale Drehung ist

$$= \mu \left\{ \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} d - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} t \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

wo μ ihr Maximum bedeutet. Eine im Fernrohre feste, durch die Heliometeraxe, senkrecht auf die Declinationsaxe gelegete Ebene wird, durch diese Ursache, um die eben angegebene Grösse, und zwar so gedrehet, dass ihr *über* der Heliometeraxe liegender rechter Winkel mit dem Pole Q der Declinationsaxe, in einen grösseren verwandelt wird. Die beobachteten Positionswinkel gehen von dieser Ebene aus, und nicht von der Ebene des Declinationskreises, von welcher sie ausgehen sollten, und ihre Beziehung auf diese fordert, dass man ihnen die Grösse (41) hinzusetze, welche also den Formeln des 11ten §'s noch hinzuzusetzen ist, nachdem man δ_0 und τ_0, statt d und t darin geschrieben hat. Die beiden Lagen, in welchen das Instrument auf δ_0 und τ_0 gestellt werden kann, unterscheiden sich, nicht minder in der gegenwärtigen Beziehung wie im ganzen Verlaufe dieser Abhandlung, dadurch, dass, wenn die Declinationsaxe *vorgeht*

δ_0 und τ_0 in der gewöhnlichen Bedeutung, wenn sie *folgt* aber $= 180° - \delta_0$ und $= 180° + \tau_0$ zu nehmen sind.

Die Grösse von μ wird durch die Vergleichung zweier Bestimmungen des Indexfehlers des Positionskreises, welche in verschiedenen Lagen der Declinationsaxe, durch Drehung um sie erlangt werden, gefunden; z. B. in den beiden einander entgegengesetzten Lagen, durch welche ein fester Punkt in die Absehenslinie gebracht werden kann.

15.

In dem Vorhergehenden ist noch nicht von den Mitteln die Rede gewesen, welche zu der Kenntniss dessen führen können, was nothwendig ist um von den Angaben einer der Mikrometerschrauben in beiden Momenten einer vollständigen Beobachtung, zu der in Kreistheilen ausgedrückten *Entfernung* der beiden beobachteten Punkte überzugehen. Diesen eben so schwierigen als wichtigen Theil der Theorie des Heliometers werde ich jetzt betrachten.

Zuerst muss untersucht werden, in wiefern das durch Drehung der die Objectivhälften bewegenden Mikrometerschrauben bewirkte Fortschreiten derselben, dem Wachsen der Angaben ihrer Scalen und Trommeln proportional ist; ob es vielleicht nothwendig ist, diesen Angaben, ehe man das Fortschreiten ihnen proportional annimmt, Verbesserungen hinzuzufügen. — Eine Methode Mikrometerschrauben zu prüfen, habe ich in meinem Buche über die *Einheit des Preussischen Längenmaasses* bekannt gemacht und sie auch wieder angewandt um die Ungleichheiten der Schrauben des Königsberger Heliometers kennen zu lernen. Ich werde das Nöthige über diese Anwendung und ihre Resultate, in der folgenden, sich auf das Königsberger Instrument *besonders* beziehenden Abhandlung sagen, auch dann die zu der erfolgreichen Ausführung des Verfahren nöthige Einrichtung beschreiben. — Der letzte Zweck einer Untersuchung der Schrauben ist die Erlangung einer Tafel, welche die Ausgleichungen ihrer Unregelmässigkeiten angiebt, so dass die durch ihre Hinzufügung veränderten unmittelbaren Ablesungen der ganzen Drehungen und ihrer Theile, dem entsprechenden Fortschreiten der Objectivhälften wirklich proportional werden.

Zweitens muss ausgemittelt werden, welche Relation zwischen einer Entfernung einer der Objectivhälften von der Heliometeraxe, und der ihr entsprechenden Richtung der Absehenslinie stattfindet. Im 7ten §. und der darauf gebaueten weiteren Verfolgung der Theorie des Heliometers ist vorläufig angenommen worden, dass jede der Objectivhälften die im Fernrohre sichtbaren, unendlich entfernten Punkte, auf einer auf der Heliometeraxe senkrechten Ebene vollkommen richtig abbilde, so dass, wenn jeder derselben mit seinem Bilde, durch eine gerade Linie verbunden wird, alle diese Linien sich in Einem Punkte durchschneiden; welcher Annahme zufolge, die Entfernung des Bildes von der Heliometeraxe und die *Tangente* des Winkels zwischen dieser Axe und der Richtung nach dem abgebildeten Punkte des Himmels, ein constantes Verhältniss haben. Allein diese Annahme ist nur eine Näherung an die Wahrheit, welche zwar für *sehr kleine* Winkel kaum unrichtig sein kann; jedoch einer genauen Untersuchung unterworfen werden muss, wenn man die Messungen mit dem Heliometer nicht auf solche Winkel beschränken, sondern sie bis zu der Grenze des deutlichen Sehens im Fernrohre ausdehnen will. Es ist bekanntlich unmöglich, ein Objectiv zu construiren, welches von seiner Axe entfernte Punkte, als *Punkte* abbildete; sie müssen als Lichtmassen erscheinen, deren Ausdehnung etwa dem Cubus des Winkels proportional wächst, deren Mittelpunkt auch in Grössen *dieser* Ordnung von *dem* Punkte entfernt sein kann, wohin ihr Bild, der zum Grunde gelegten Annahme zufolge, fallen sollte.

Ich werde hier zwei in ihrem Principe voneinander verschiedene Mittel andeuten, durch deren Anwendung man zur Kenntniss der Relation zwischen der Entfernung des optischen Mittelpunkts einer Objectivhälfte von der Heliometeraxe und dem ihr entsprechenden Winkel der Absehenslinie mit dieser Axe, gelangen kann, ihre Verfolgung bis zu dem Resultate aber der *folgenden* Abhandlung vorbehalten. Das *eine* dieser Mittel beruhet auf der Kenntniss der *Construction des Objectivs;* dessen vier Krümmungshalbmesser, so wie die Dicken und Brechungsverhältnisse beider, dasselbe zusammensetzenden Linsen und ihre Entfernung voneinander, also bekannt sein müssen, wenn dieses Mittel soll angewandt werden können. Nimmt man eine cylindrische Masse unter sich paralleler Strahlen, deren Basis das Objectiv ist und

welche einen Winkel w mit seiner Axe machen, so kann man den Durchgang eines jeden von ihnen durch die vier Oberflächen des Objectivs, durch trigonometrische Rechnung verfolgen und also finden, wo er eine Ebene trifft, welche senkrecht auf der Axe, in dem Brennpunkte des Objectivs errichtet ist; man kann folglich die Figur bestimmen, welche durch einen leuchtenden, um den Winkel w von der Axe des Objectivs entfernten Punkt auf dieser Ebene erleuchtet wird, so wie auch die Stärke der Erleuchtung an jedem Punkte in ihren Grenzen. Wählt man einen bestimmten Punkt dieses *undeutlichen Bildes* zum Gegenstande der Beobachtung, oder erlangt einer, durch besondere Auszeichnung, vor allen übrigen Punkten diesen Vorzug, so kennt man, durch die ausgeführte Rechnung, seine Entfernung von der Axe des Objectivs; welche, wenn man sie für verschiedene Werthe von w sucht, auch die Kenntniss der Relation zwischen dieser Entfernung und dem Winkel w herbeiführt.

Das zweite Mittel beruhet auf der *Messung* der Entfernung zwischen zwei Punkten am Himmel, in veränderten Lagen derselben gegen eine, der Heliometeraxe parallel, durch das Ocular gelegte gerade Linie, welche veränderte Lagen man durch Verschiebungen des *Oculars* hervorbringen kann. Wenn man eine Reihe mit unbestimmten Coefficienten annimmt, welche den Winkel zwischen dieser Linie und einem Punkte am Himmel, durch die Entfernung seines Bildes von derselben ausdrückt, so kann man ihre Coefficienten durch solche Messungen bestimmen. Legt man die Bewegungslinien des Oculars und der Objectivhälfte in die Ebene der beiden Punkte; bringt man ihre Bilder, durch Verschiebung einer der Objectivhälften zur Deckung, während die andere und das Ocular willkürlich gestellt sind, und liest man die Stellungen aller drei an ihren Scalen u. s. w. ab, so werden dadurch die Entfernungen der beiden Objectivhälften von der erwähnten Linie bekannt, und man kann nun den Winkel zwischen dieser Linie und jedem der Punkte, durch eine Anwendung der Reihe ausdrücken, in welcher nur ihre Coefficienten unbekannt sind. Der Unterschied dieser Ausdrücke ist der Winkel zwischen beiden Punkten selbst; für welchen man also so viele abgeänderte Ausdrücke erhalten kann, als man durch Verschiebung des Oculars abgeänderte Beobachtungen machen will. Da alle einen gleichen Winkel darstellen, so ergiebt ihre Ver-

gleichung untereinander das Mittel, die unbekannten Coefficienten der Reihe zu bestimmen. —

Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dass man der gegenwärtigen Untersuchung ganz überhoben sein würde, wenn die Objectivhälften sich nicht auf einer Ebene, sondern auf einer Cylinderfläche verschöben, deren Mittelpunkt mit dem Brennpunkte des Objectivs zusammenfiele. Bei dieser Einrichtung eines Heliometers würde die Axe jeder Objectivhälfte immer genau in der Richtung nach dem Punkte sein, welchen sie in der Heliometeraxe abbildet; sie würde ihn folglich, in grossen wie in kleinen Entfernungen von dieser, immer gleich vollkommen abbilden. Dieser wesentliche Vorzug der eben angedeuteten Einrichtung veranlasste mich, sie dem verewigten *Fraunhofer* vorzuschlagen, als er beschäftigt war, das Königsberger Heliometer zu verfertigen; er glaubte aber, dass die mechanische Ausführung der Bewegung der Objectivhälften auf einer Cylinderfläche Schwierigkeiten haben werde.

Drittens muss man untersuchen, ob der in Theilen des grössten Kreises ausgedrückte Werth des, einer Windung der Schraube entsprechenden Fortschreitens der bewegten Objectivhälfte, *in jeder Wärme* gleich gross ist, oder ob er eine vom Thermometerstande abhängige Ungleichheit besitzt, deren Grösse dann durch Beobachtungen bestimmt werden muss. Diese Bestimmung muss auf die Vergleichung der, in stark veränderter Wärme gemachten Messungen eines immer gleich bleibenden Winkels gegründet werden. — Wenn der Standpunkt des Heliometers Aussicht in eine beträchtliche Entfernung gewährt und man daselbst Signale errichten kann, welche sich unter allen Umständen deutlich darstellen, und deren Entfernung voneinander keine merkliche Veränderung erleiden kann, so werden diese Signale, indem man die Winkel zwischen ihnen im Sommer und im Winter misst, einen Einfluss der Wärme auf die Messungen, wenn er vorhanden ist, verrathen und seine Grösse zu erkennen geben. — Ich habe aber die Hauptsterne der Plejaden zu demselben Zwecke angewandt und werde in der folgenden Abhandlung auch davon Rechenschaft geben.

Viertens muss, nachdem die drei vorigen Forderungen befriedigt worden sind, der Winkelwerth einer — ausgeglichenen und auf eine bestimmte Wärme bezogenen — Windung der Mikrometerschraube,

ausgemittelt werden. Ich habe zu diesem Zwecke vier verschiedene Methoden angewandt, deren Wesentliches ich hier nur andeuten werde, während ich ihre Verfolgung ins Einzelne, so wie aller im gegenwärtigen §. berührten Materien, der *folgenden* Abhandlung vorbehalte.

Eine dieser Methoden beruhet auf dem *Gaussischen* Verfahren der Beobachtung eines Fadens im Brennpunkte eines Fernrohrs, durch sein Objectiv hindurch. Will man dadurch den Winkelwerth einer Schraubenwindung des Heliometers erfahren, so muss man, während der optische Mittelpunkt der einen Objectivhälfte sich in der Heliometeraxe befindet, den der anderen beträchtlich von ihr entfernen und dann den Winkel zwischen beiden Absehenslinien, durch ein möglichst nahe vor dem Objective aufgestelltes Winkelinstrument messen. Die Wiederholung dieser Messung, nachdem die zweite Objectivhälfte in die entgegengesetzte Lage gegen die Heliometeraxe gebracht worden ist, befreiet das Resultat offenbar von der Voraussetzung der Kenntniss des Punkts wo die optischen Axen beider Hälften zusammenfallen. Indem man den beiden Ablesungen der Schraube, welche die Örter der bewegten Objectivhälfte ergeben, die schon bekannten Verbesserungen ihrer unmittelbaren Angaben hinzufügt, bezieht man das Resultat auf die daraus hervorgehende Anzahl *ausgeglichener* Schraubenwindungen. Will man endlich die Voraussetzung gelten lassen, dass dieselbe Relation, welche zwischen dem Winkel einfallender paralleler Strahlen mit der Axe einer Objectivhälfte und der Entfernung des durch sie erzeugten Bildes von dieser Axe, schon bekannt geworden ist, auch auf die Richtung anwendbar sei, welche Strahlen, von einem Punkte in der im Brennpunkte, senkrecht auf die Axe errichteten Ebene ausgehend, nach ihrem Durchgange durch das Objectiv zu haben scheinen, so kann man von dem beobachteten Winkelwerthe der von der Objectivhälfte durchlaufenen Anzahl von Schraubenwindungen, auf den Winkelwerth einer einzelnen schliessen.

Eine *andere* Methode beruhet auf der heliometrischen Messung *anderweitig* bekannt gewordener Winkel. Wenn aber von dem Heliometer grössere Genauigkeit gefordert wird, als durch andere Instrumente erreichbar ist, so wird es schwer sein, die gegenseitige Lage zweier Punkte, durch die letzteren so genau zu bestimmen, dass sie zur Grundlage der Bestimmung des Werthes der Schraubenwindungen

des ersteren gemacht werden dürfte. Ich habe mir viele Mühe gegeben, die relativen Örter der Hauptsterne der Plejaden durch Meridianbeobachtungen auszumitteln, zum Theil in der Absicht, durch ihre Vergleichung mit den Heliometermessungen ihrer Entfernungen, den Winkelwerth einer Schraubenwindung zu erfahren; allein ich habe ihnen nicht so grosse Genauigkeit geben können, dass das Resultat der beabsichtigten Anwendung dadurch die gewünschte Sicherheit erhalten hätte.

Man vermindert diese Schwierigkeit, durch die Anwendung einer *dritten* Methode, welche von der vorigen dadurch verschieden ist, dass sie statt einzelner Paare von Punkten, mehrere Punkte anwendet, welche mehr oder weniger näherungsweise, in einem grössten Kreise erscheinen. Bestimmt man nämlich die Entfernung zwischen den beiden äussersten dieser Punkte durch ein anderes Instrument, und vergleicht man damit die Summe der mit dem Heliometer gemessenen Entfernungen zwischen ihren einzelnen Paaren, nachdem man jede auf den durch die äussersten gelegten grössten Kreis reducirt hat, so wird der Einfluss des Fehlers der als bekannt angenommenen Entfernung, im umgekehrten Verhältnisse der Zahl der Paare von Punkten verkleinert und kann also, durch Vermehrung dieser Zahl, in hinreichend enge Grenzen zurückgeführt werden. — Es wird immer gelingen, zu dieser Untersuchung geeignete kleine Fixsterne zu finden, deren äusserste dann durch Meridianbeobachtungen zu bestimmen sind. Auch kann man, wenn eine Reihe deutlich erscheinender irdischer Signale in beträchtlicher Entfernung errichtet werden kann, diese zu demselben Zwecke benutzen, indem man den Winkel zwischen den beiden äussersten durch einen Theodoliten, die Winkel zwischen je zwei aufeinanderfolgenden aber durch das Heliometer misst. Dass man auch die Mittel besitzen muss, die letzteren Messungen, von den Punkten im Raume, wo die Bilder jedes Paars von ihnen im Fernrohre zusammenfallen, auf den Standpunkt des Theodoliten zu reduciren, um ihre Summe mit dem durch diesen gemessenen Winkel vergleichen zu können, wird oft die Schwierigkeit der Anwendung irdischer Signale beträchtlich vermehren.

Die *vierte* Methode besteht in der Messung, sowohl der Brennweite des Objectivs $=f$, als einer Schraubenwindung $=m$, beide durch ein gleiches Längenmaass, wodurch man:

$$R = \frac{m}{f}\ 206264,''8$$

erhält. Die Messung der Brennweite kann man auf die Ausmittelung der *kleinsten* Entfernung zwischen einem Punkte und seinem, durch das Objectiv gemachten Bilde gründen, welche kleinste Entfernung man durch ein, in der folgenden Abhandlung zu beschreibendes Verfahren, mit grosser Genauigkeit messen kann. Der Werth von m kann gleichfalls mit grosser Genauigkeit gemessen werden, wenn man auf den Schieber der einen Objectivhälfte einen Maassstab, auf den der anderen ein Mikroscop befestigt, welches auf diesen gerichtet ist, und in dessen Absehenslinie die Theilstriche des Maassstabes durch die ihn, mit der Objectivhälfte zugleich bewegende Mikrometerschraube gebracht werden können.

16.

Zum Schlusse werde ich noch verschiedener *Formen* erwähnen, in welchen das Resultat einer Heliometerbeobachtung dargestellt werden kann.

Die Formeln des 11ten §s setzen die Declination δ_0 und den Stundenwinkel τ_0 des in der Mitte zwischen S und S' liegenden Punkts M als gegeben voraus und bestimmen die Entfernung $s = SS'$, so wie auch den Positionswinkel an M; nämlich, wenn die Declinationsaxe *vorangeht*, den Positionswinkel der Richtung *von* dem den Köpfen der Mikrometerschrauben am nächsten *erscheinenden* Punkte, *nach* dem anderen; wenn sie *folgt* den der entgegengesetzten Richtung, in welchem letzteren Falle aber $180° - \delta_0$ und $180° + \tau_0$ statt δ_0 und τ_0 zu lesen sind. Damit man, in keinem der vorkommenden Fälle, diesen Abänderungen der Bedeutung der Formeln weitere Aufmerksamkeit widmen dürfe, werde ich alle Fälle vollständiger Beobachtungen hier zusammenstellen. Wenn man unter δ_0 und τ_0 die in *gewöhnlicher* Bedeutung genommenen Declination und Stundenwinkel von M versteht und

$$(x \operatorname{Sin}\tau_0 - y \operatorname{Cos}\tau_0) \operatorname{Sec}\delta_0 + \beta \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\tau_0 \operatorname{Tang}\delta_0 \ldots\ldots \text{durch } \lambda$$

$$i, \operatorname{Sec}\delta_0 - i' \operatorname{Tang}\delta_0 + \mu \left\{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\delta_0 - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\delta_0 \operatorname{Cos}\tau_0\right\} \ldots\ldots J$$

bezeichnet, so ist der Positionswinkel, welchen die Anwendung

der *ersten* Beobachtungsmethode §. 11. ergiebt, den Formeln (32) und (41) zufolge:

a) wenn die Declinationsaxe *vorangeht:*

$$p = \frac{n+n_{,}}{2} + k' - \tfrac{1}{16}\, ss \operatorname{Sin} 2p\, (1 + 2 \operatorname{Tang} \delta_0^2) + \lambda + J$$

und er gehört zu der Richtung *von* dem Punkte, welcher in der am *wenigsten* vorgerückten Objectivhälfte gesehen wird, oder den Schraubenköpfen am *nächsten* erscheint, *nach* dem anderen.

b) wenn die Declinationsaxe *folgt:*

$$p = \frac{n+n_{,}}{2} + k' - \tfrac{1}{16}\, ss \operatorname{Sin} 2p\, (1 + 2 \operatorname{Tang} \delta_0^2) + \lambda - J$$

und er gehört zu der Richtung *von* dem Punkte welcher in der am *meisten* vorgerückten Objectivhälfte gesehen wird, oder von den Schraubenköpfen am *entferntesten* erscheint, *nach* dem anderen.

Bei der Anwendung der *zweiten* oder *dritten* Beobachtungsmethode §. 11. fällt das kleine Glied $-\frac{1}{16}\, ss \operatorname{Sin} 2p\, (1 + 2 \operatorname{Tang} \delta_0^2)$ dieser Ausdrücke weg.

Wenn man, statt des Positionswinkels am Punkte M, die halbe Summe der Positionswinkel der Linie SS' an S und an S', beide nach gleicher Richtung genommen, kennen lernen will, so muss zu dem ersteren $\frac{1}{16}\, ss \operatorname{Sin} 2p\, (1 + 2 \operatorname{Tang} \delta_0^2)$ hinzugesetzt werden. Wenn man daher die *erste* Beobachtungsmethode anwendet, aber aus den Formeln *a* und *b* diese kleine Grösse weglässt, so drücken sie die halbe Summe der beiden Positionswinkel aus. Bei der Anwendung der *zweiten* oder *dritten* Beobachtungsmethode drücken *dieselben* Formeln den Positionswinkel am Punkte M aus.

Es hängt von der Art der Anwendung, welche von einer Heliometer-Beobachtung gemacht werden soll, ab, ob die in dieser Abhandlung gewählte Form ihres Resultats, oder eine andere, die zweckmässigere ist. Oft wird der Ort eines der beiden Punkte an der Himmelskugel bekannt sein, und der des anderen durch die Beobachtung gesucht werden. Versteht man unter p die halbe Summe der Positionswinkel der Linie SS' an beiden Punkten, und zwar beide in der Richtung von dem bekannten nach dem unbekannten Orte genommen, bezeichnet man den Positionswinkel an dem bekannten Orte durch $p - \Delta p$, an dem

unbekannten durch $p+\Delta p$, die Geradenaufsteigungen und Abweichungen des ersteren durch α, δ, des letzteren durch α', δ', so hat man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\text{Sin}\tfrac{1}{2}s\,\text{Cos}\,p &= \text{Cos}\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\,\text{Sin}\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)\\
\text{Sin}\tfrac{1}{2}s\,\text{Sin}\,p &= \text{Sin}\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\,\text{Cos}\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)\\
\text{Cos}\tfrac{1}{2}s\,\text{Cos}\,\Delta p &= \text{Cos}\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\,\text{Cos}\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)\\
\text{Cos}\tfrac{1}{2}s\,\text{Sin}\,\Delta p &= \text{Sin}\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\,\text{Sin}\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)
\end{aligned}$$

Aus der 2ten und 4ten folgt:

$$\text{Sin}\,\Delta p = \text{Tang}\tfrac{1}{2}s\,\text{Sin}\,p\,\text{Tang}\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta),$$

und aus der 1ten und 3ten:

$$\text{Tang}\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta) = \text{Tang}\tfrac{1}{2}s\,\frac{\text{Cos}\,p}{\text{Cos}\,\Delta p}$$

wo $\text{Cos}\,\Delta p$, in gewöhnlichen Fällen $=1$ gesetzt werden kann, wenn dieses aber nicht erlaubt ist, aus der vorigen Formel hervorgeht. Wenn $\frac{1}{2}(\delta'-\delta)$ hierdurch bekannt ist, kennt man auch $\frac{1}{2}(\delta'+\delta) = \delta + \frac{1}{2}(\delta'-\delta)$ und damit, durch die 2te Gleichung $\alpha'-\alpha$. Will man den Positionswinkel an dem bekannten Orte kennen lernen, so ist er, hinreichend nahe:

$$= p - \tfrac{1}{2}s\,\text{Sin}\,p\,\text{Tang}\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)$$

In dieser ganzen Abhandlung ist nur von *scheinbaren* Orten der beobachteten Punkte, von die Strahlenbrechung enthaltenden, die Rede gewesen. Wie man die Resultate der Beobachtungen von der Strahlenbrechung befreien kann, werde ich in einer folgenden Abhandlung entwickeln.

II.

Besondere Untersuchung des Heliometers der Königsberger Sternwarte.

Die Resultate, welche die mit dem Heliometer gemachten Beobachtungen ergeben sollen, nämlich die Entfernung zweier Punkte am Himmel und der ihre gegenseitige Richtung bestimmende Positionswinkel, fordern zu ihrer Berechnung aus den unmittelbaren Zahlenangaben der Mikrometerschrauben und des Positionskreises, die Kenntniss, nicht allein verschiedener, der Construction des Instruments eigenthümlicher, *beständiger* Elemente, sondern auch derjenigen von Zeit zu Zeit *veränderlichen*, welche den jedesmaligen Zustand seiner Berichtigung bestimmen. Es ist meine Absicht, gegenwärtig Alles mitzutheilen, was zur Reduction der Beobachtungen erforderlich ist, welche von der Zeit der Aufstellung des Königsberger Heliometers an, bis zum Ende von 1840, gemacht worden sind.

Ich werde das Folgende in zwei Theile trennen, deren erster sich nur auf die *Positionswinkel*, der zweite nur auf die *Entfernungen* bezieht. Die Aufstellung des Instruments, die Winkel seiner Axen untereinander und ihre Biegungen durch die Schwere, haben nur Einfluss auf die Positionswinkel, nicht auf die Entfernungen; wesshalb der *erste* Theil von diesen verschiedenen, theils beständigen, theils veränderlichen Elementen Rechenschaft zu geben hat, während der *zweite* es nur mit ein für allemal zu bestimmenden, nämlich den im 15ten §. der vorigen Abhandlung erwähnten, zu thun hat.

Erster Theil.

Positionswinkel.

1.

Ich werde zuerst das mittheilen, was über die Constanten α, β der durch die Schwere verursachten Biegungen der Declinationsaxe und der Heliometeraxe bekannt geworden ist. — Aus der letzten der Gleichungen (7) (Abh. I. §. 3.) geht hervor, dass man die Grösse α, durch Vergleichung der beiden Einstellungen der Absehenslinie des Fernrohrs auf einen festen Punkt bestimmen kann. Wenn man die Polhöhe des Instruments mit der wahren Polhöhe verwechseln kann, also immer wenn seine Stundenaxe der Weltaxe nahe parallel ist, hat der halbe Unterschied der beiden Ablesungen des Stundenkreises, in beiden Stellungen des Instruments auf den festen Punkt, den Ausdruck:

$$15\Delta T = i' \operatorname{Sec} d - i_{,} \operatorname{Tang} d - \alpha \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} t \ldots\ldots\ldots \Theta$$

wo die Ablesung des Stundenkreises, wenn die Declinationsaxe *vorgeht* durch $T-\Delta T$, und wenn sie *folgt* durch $12^h+T+\Delta T$ bezeichnet sind, d und t die Declination und den Stundenwinkel des festen Punkts bedeuten und $i_{,}=i+\alpha \operatorname{Sin}\varphi$ ist. Die Trennung der unbekannten Grössen i', $i_{,}$, α voneinander fordert also die Wiederholung solcher Beobachtungen an verschiedenen festen Punkten und zwar in Beziehung, sowohl auf d, als auch auf t verschiedenen.

Ich habe diese Beobachtungen so gemacht, dass ich die Durchgangszeiten von Sternen, während der Stundenkreis eine bestimmte Stellung erhalten hatte, und die Declinationsaxe ihnen *voranging*, wahrnahm; dann das Instrument in seine zweite Lage brachte, die Ablesung des Stundenkreises und die Wahrnehmung der Durchgangszeit wiederholte, und endlich die halbe Zwischenzeit der beiden Beobachtungen zu der ersten Ablesung des Stundenkreises hinzufügte, von der zweiten abzog; wodurch also die Beobachtung auf den Fall eines unveränderlichen Stundenwinkels des beobachteten Sterns reducirt wurde. Um i' nicht auf die zufällige Lage der Absehenslinie, sondern auf die Heliometeraxe bezogen zu erhalten, habe ich jede der beiden Beobachtungen vor und nach einer halben Drehung, sowohl

des Objectivs, als auch des Oculars um diese Axe, wiederholt (Abh. I. §. 7); wenn es erforderlich war, habe ich die kleine, aus der Strahlenbrechung hervorgehende Veränderung der Geradenaufsteigung eines beobachteten Sterns, während der Zwischenzeit der 4 Beobachtungen (selten mehr als 15 Minuten) berücksichtigt. Diese Beobachtungen habe ich nur in den zur Bestimmung von α vortheilhaftesten Stundenwinkeln, nämlich im Meridiane und 90° von ihm entfernt, gemacht. Ich führe jetzt die aus einigen Wiederholungen derselben hervorgegangenen Werthe von $\triangle T$ an:

1830. Octob. 19.

	$\triangle T$	d	t
	″	° ′	h ′ ″
α Coronae . . .	— 2,69	+ 27° 19,3	18 0 0
α Tauri.	— 3,00	+ 16 12,7	6 0 0
α Aurigae . . .	— 5,25	+ 45 49,6	6 0 0
β Leonis	— 3,50	+ 15 32,0	0 0 0
α Lyrae	— 3,38	+ 38 39,4	18 0 0
α Ursae minoris	+ 138,75	+ 91 54,9	0 0 0

1830. Octob. 20.

Nach einer vorgenommenen Änderung von i'.

	″	° ′	h ′ ″
α Coronae . . .	+ 0,13	+ 27° 19,3	18 0 0
α Tauri.	+ 1,38	+ 16 12,7	6 0 0
α Aurigae . . .	— 2,00	+ 45 49,6	6 0 0
β Leonis	— 1,68	+ 15 32,0	0 0 0
α Lyrae.	— 2,00	+ 38 39,4	18 0 0
α Ursae minoris	+ 88,00	+ 91 34,9	0 0 0

1832. April 20.

	″	° ′	h ′ ″
α Aurigae . . .	— 2,19	+ 45° 49,9	18 0 0
β Tauri.	— 0,32	+ 28 28,8	18 0 0
α Lyrae.	— 0,58	+ 28 38,9	6 0 0
α Ursae minoris	— 66,88	+ 88 24,0	0 0 0
α Cygni	— 0,44	+ 44 41,6	6 0 0
α Tauri.	— 1,19	+ 16 10,5	0 0 0
β Orionis	— 0,03	— 8 22,5	0 0 0
β Tauri.	— 1,45	+ 28 23,8	0 0 0
Meridianzeichen	+ 0,83	— 35 28,8	0 0 20,8

In den Gleichungen Θ, welche man durch diese Beobachtungen zur Bestimmung von i', $i_{,}$, α erhält, ist der Werth der ersteren dieser Grössen, in jeder der drei Reihen, als ein *verschiedener* anzusehen;

i, und α sind aber als *gleichbleibend* zu betrachten, indem die Declinationsaxe unveränderlich mit der Stundenaxe verbunden und daher ein bestimmter Werth von i dem Instrumente nicht minder eigenthümlich ist, als ein bestimmter Werth von α. Multiplicirt man die Gleichungen, um ihre ersten Glieder in Secunden des grössten Kreises zu verwandeln, in Cos d, so erhält man:

$$
\begin{array}{l}
-35{,}''8 = i' - 0{,}459\, i_{,} \\
-43{,}2 = i' - 0{,}279\, i_{,} \\
-54{,}9 = i' - 0{,}717\, i_{,} \\
-50{,}6 = i' - 0{,}268\, i_{,} - 0{,}963 \,.\, \alpha \mathrm{Cos}\varphi \\
-39{,}8 = i' - 0{,}625\, i_{,} \\
-57{,}4 = i' - 1{,}000\, i_{,} + 0{,}028 \,.\, \alpha \mathrm{Cos}\varphi \\
\hline
+1{,}7 = i' - 0{,}459\, i_{,} \\
+19{,}9 = i' - 0{,}279\, i_{,} \\
-20{,}9 = i' - 0{,}717\, i_{,} \\
-24{,}3 = i' - 0{,}268\, i_{,} - 0{,}963 \,.\, \alpha \mathrm{Cos}\varphi \\
-23{,}4 = i' - 0{,}625\, i_{,} \\
-36{,}4 = i' - 1{,}000\, i_{,} + 0{,}028 \,.\, \alpha \mathrm{Cos}\varphi \\
\hline
-22{,}9 = i' - 0{,}717\, i_{,} \\
-4{,}2 = i' - 0{,}477\, i_{,} \\
-7{,}6 = i' - 0{,}479\, i_{,} \\
-28{,}0 = i' - 1{,}000\, i_{,} - 0{,}028 \,.\, \alpha \mathrm{Cos}\varphi \\
-4{,}7 = i' - 0{,}703\, i_{,} \\
-17{,}1 = i' - 0{,}279\, i_{,} - 0{,}960 \,.\, \alpha \mathrm{Cos}\varphi \\
-0{,}4 = i' + 0{,}146\, i_{,} - 0{,}989 \,.\, \alpha \mathrm{Cos}\varphi \\
-18{,}9 = i' - 0{,}477\, i_{,} - 0{,}879 \,.\, \alpha \mathrm{Cos}\varphi \\
+10{,}1 = i' + 0{,}580\, i_{,} - 0{,}814 \,.\, \alpha \mathrm{Cos}\varphi
\end{array}
$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die drei Werthe von i', so ergeben sie:

$$i_{,} = +25{,}''9; \qquad \alpha \,\mathrm{Cos}\varphi = +2{,}''9$$

Obgleich diese Bestimmungen, wegen der nicht unter 4 Zeitsecunden herabgehenden unmittelbaren Angaben der Nonien des Stundenkreises, wohl einige Secunden unsicher sein können, so sind sie doch hinreichend, zu zeigen, dass α Cos φ zu klein ist, um bei der Reduction der Positionswinkel aus gemachten Beobachtungen am Positionskreise, welcher nur in ganzen Minuten abgelesen werden kann, Rücksicht zu verdienen. Ich halte auch für unnöthig, mehr ähnliche Beobachtungsreihen hier anzuführen.

Ein ähnliches Resultat habe ich für die Constante β der Biegung der Heliometeraxe, durch Vergleichung bekannter Declinationsunterschiede von Sternen, mit den beiden zusammengehörigen Angaben des Declinationskreises des Instruments (Abh. I. 2te Gleichung (7)) gefunden. Ich werde also beide Biegungen im Folgenden vernachlässigen.

2.

Ich werde ferner Beobachtungen anführen, welche den Werth von $i_{,}=i+\alpha \operatorname{Sin}\varphi$ ergeben werden. Zwar ist dieser Werth schon im vorigen §. bestimmt worden; allein da ich ihn für jederzeit *beständig* halte, er auch nicht *so* klein ist, dass er unbedingt als unter der Kraft der Ablesungen des Positionskreises bleibend angesehen werden könnte, so scheint er, als ein zur Kenntniss des Instruments gehöriges Element, Anspruch auf wiederholte Bestimmung zu erhalten. Die Beobachtungen, welche ich zu diesem Zwecke benutzt habe, sind an dem *Meridianzeichen* der Sternwarte und einem der *Polarsterne*, während ihrer oberen oder unteren Culmination, gemacht. Jenes hat, auf den Standpunkt des Heliometers bezogen, die Declination $d=-35°28'47''$ und den in Zeit ausgedrückten Stundenwinkel $0^h0'20,''8$; seine Entfernung ist = 2138 Toisen und die Entfernung der Heliometeraxe von der Stundenaxe = 13 Zolle, woraus folgt, dass der in Zeit ausgedrückte Stundenwinkel, wenn die Declinationsaxe *vorgeht* oder *folgt* 1,″43 grösser oder kleiner erscheint als 20,″8. Richtet man also die Heliometeraxe in beiden Stellungen des Instruments auf das Zeichen und bezeichnet man die ihnen entsprechenden Angaben des Stundenkreises durch $T-\Delta T$ und $12^h+T+\Delta T$, so hat man (Abh. I. (5) und (6)):

$$15\left\{\Delta T+1,''43\right\}=i'\operatorname{Sec}d-i,\operatorname{Tang}d$$

Richtet man dagegen die Heliometeraxe auf einen der Polarsterne und bezeichnet man seine Declination, so wie das Instrument sie angiebt, (für untere Culminationen über 90° hinausgezählt), durch d', die Angaben des Stundenkreises, während der Stern culminirt, durch $T'-\Delta T'$ und $12^h+T'+\Delta T'$, so hat man:

$$15\ \Delta T'=i'\operatorname{Sec}d'-i,\operatorname{Tang}d'$$

und durch Verbindung beider Gleichungen:

$$i' = (15\,\Delta T + 21,''45)\,\frac{\sin d'\,\cos d}{\sin d' - \sin d} - 15\,\Delta T'\,\frac{\sin d\,\cos d'}{\sin d' - \sin d}$$

$$i_{,} = (15\,\Delta T + 21,''45)\,\frac{\cos d}{\sin d' - \sin d} - 15\,\Delta T'.\,\frac{\cos d'}{\sin d' - \sin d}$$

oder, wenn man $\sin d' = 1$ setzt, was die Nähe beider Polarsterne bei dem Pole hier verstattet:

$$i' = +\,11,''05 + 7,73\,\Delta T + 5,509\,\Delta T'.\cos d'$$
$$i_{,} = +\,11,''05 + 7,73\,\Delta T - 9,491.\,\Delta T'.\cos d'$$

Ich führe hier 23, nach diesen Formeln berechnete Bestimmungen von i' und $i_{,}$ an

			ΔT	$\Delta T'$	d'	i'	$i_{,}$
1832	April 20	α Ursae . .	o	— 0,''56	— 65,''88	88° 22,′4	+ 3,''6	+ 24,''5
	Novbr. 20	—	u	— 0,25	+ 75,38	91 34,4	+ 2,3	+ 28,7
1834	Octob. 13	—	u	— 2,25	+143,07	91 33,0	— 27,6	+ 30,4
1835	Octob. 12	δ —	o	— 3,00	— 74,95	86 35,1	— 36,6	+ 30,6
1837	Juni 10	α —	u	— 1,00	+ 92,63	91 31,1	— 10,2	+ 26,6
	— 16	—	o	— 1,69	— 95,00	88 26,2	— 16,3	+ 22,6
	— 17	—	u	— 0,50	+ 90,75	91 33,2	— 6,4	+ 30,5
	— 21	—	u	— 1,38	+ 89,23	91 32,7	— 12,9	+ 23,2
	Octob. 2	—	u	— 1,25	+108,88	91 33,8	— 15,0	+ 29,6
1838	May 7	—	o	— 2,13	—139,50	88 25,9	— 26,4	+ 30,7
	Septb. 16	—	u	— 1,50	+ 95,50	91 32,3	— 14,7	+ 23,8
	— 17	—	u	— 1,50	+ 96,38	91 32,2	— 14,8	+ 24,0
	— 25	—	u	— 1,13	+107,75	91 32,8	— 13,7	+ 29,9
	Nov. 20	—	u	— 0,88	+123,09	91 33,2	— 14,1	+ 35,9
1839	Febr. 19	—	o	— 1,00	—111,00	88 27,7	— 13,1	+ 31,6
	May 1	—	o	— 0,25	— 89,13	88 25,7	— 4,3	+ 32,3
	Octob. 16	—	u	— 0,75	+ 86,95	91 32,8	— 7,7	+ 27,5
	— 20	—	u	— 0,50	+ 88,88	91 31,4	— 5,8	+ 29,6
1840	März 29	—	o	— 2,13	—107,45	88 27,0	— 21,4	+ 22,2
	Juni 6	—	u	— 0,69	+ 90,61	91 31,2	— 5,5	+ 28,5
	Juli 19	—	o	— 2,13	— 91,55	88 25,5	— 19,2	+ 18,4
	Septb. 23	—	u	— 1,25	+141,80	91 32,5	— 19,6	+ 37,6
	Nov. 20	—	u	— 1,00	+118,61	91 31,5	— 14,1	+ 33,3

Das arithmetische Mittel der Zahlen der letzten Columne ist:

$$i_{,} = +\,28,''35;$$

Die, ein Paarmal bis fast auf 10″ steigenden Unterschiede von diesem Mittel sind wahrscheinlich den Beobachtungen von ΔT zuzuschreiben, welche, bei der nicht unter 4 Zeitsecunden herabgehenden Angabe der beiden Nonien des Stundenkreises, wohl bis auf eine Zeitsecunde fehlerhaft sein können. Indessen ist der mittlere Werth von i, sicher genug bestimmt um der Reduction der beobachteten Positionswinkel zum Grunde gelegt werden zu dürfen.

In Beziehung auf i' bemerkt man, durch die Zahlen der vorletzten Columne, dass ich immer bemüht gewesen bin, die Heliometeraxe nahe senkrecht auf der Declinationsaxe zu erhalten. Da der Einfluss von i' auf die Positionswinkel, der Tangente der Declination proportional ist, so kömmt ein kleiner Werth dieser Grösse, bei den Beobachtungen von Sternen, welche sich nicht sehr weit von dem Aequator entfernen, wenig in Betracht.

3.

Die Lage der Stundenaxe, beziehungsweise auf die Weltaxe, oder die Bestimmung der Grössen x und y (Abh. I. §. 4.) habe ich gewöhnlich auf Beobachtungen des *Meridianzeichens* und eines der beiden *Polarsterne* gegründet. Indem die Ausdrücke der Declination d eines festen Punkts, durch die Angaben des Declinationskreises des Instruments, in beiden Stellungen der Heliometeraxe auf ihn (Abh. I. §. 4. (10)):

$$d = D + c' - x \operatorname{Cos} t - y \operatorname{Sin} t + \beta \left\{ \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} d - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} t \right\}$$

$$180° - d = D' + c' + x \operatorname{Cos} t + y \operatorname{Sin} t - \beta \left\{ \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} d - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} d \operatorname{Cos} t \right\}$$

sind, erhält man, wenn man β vernachlässigt (§. 1):

$$d = 90° - \tfrac{1}{2}(D' - D) - x \operatorname{Cos} t - y \operatorname{Sin} t,$$

also, durch die beiden zusammengehörigen Beobachtungen jedes Punkts von bekannter Declination, eine Gleichung zwischen den unbekannten Grössen x und y. — Indem man ferner die Ausdrücke des Stundenwinkels t eines festen Punkts, durch die Angaben des Stundenkreises des Instruments, in beiden Stellungen der Heliometeraxe auf ihn (ebendaselbst):

$$t = 15(T+\gamma) - x\,\mathrm{Tan}\,d\,\mathrm{Sin}\,t + y\,\mathrm{Tan}\,d\,\mathrm{Cos}\,t + i'\,\mathrm{Sec}\,d - i,\,\mathrm{Tan}\,d - \alpha\,\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\,t - \beta\,\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Sec}\,d\,\mathrm{Sin}\,t$$

$$180^\circ + t = 15(T'+\gamma) - x\,\mathrm{Tan}\,d\,\mathrm{Sin}\,t + y\,\mathrm{Tan}\,d\,\mathrm{Cos}\,t - i'\,\mathrm{Sec}\,d + i,\,\mathrm{Tan}\,d + \alpha\,\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\,t - \beta\,\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Sec}\,d\,\mathrm{Sin}\,t$$

hat, erhält man, wenn man wieder β vernachlässigt und die oben eingeführten Bezeichnungen $T-\Delta T$ und $12^h+T+\Delta T$, statt T und T' anwendet,

$$t = 15\,T + 15\gamma - (x\,\mathrm{Sin}\,t - y\,\mathrm{Cos}\,t)\,\mathrm{Tan}\,d.$$

Man muss also wenigstens zwei solche Gleichungen besitzen, also wenigstens zwei feste Punkte von bekannten Stundenwinkeln beobachtet haben, um γ von den Angaben des Stundenkreises trennen und eine Gleichung zwischen x und y erhalten zu können.

Ich habe, wie schon gesagt, gewöhnlich nur das Meridianzeichen und einen der beiden Polarsterne beobachtet. Bezeichnet man, um abzukürzen, $90^\circ - \frac{1}{2}(D'-D)$ durch D und bezieht man D und T auf das erstere, D' und T' auf den letzteren; bezeichnet man ferner die anderweitig bekannten Declinationen und Stundenwinkel beider durch d, t, d', t'; macht man die Beobachtungen des Polarsterns zur Zeit der Culmination, oder wenn $t'=0$ ist; vernachlässigt man endlich die Producte $x\,\mathrm{Sin}\,t$ und $y\,\mathrm{Sin}\,t$, was wegen der Nähe des Zeichens bei dem Meridiane erlaubt ist, so erhält man, indem man für d und t ihre im vorigen § angegebenen Werthe setzt:

$$-35^\circ 28' 47'' = D - x, \ldots\ldots \text{ oder } x = D + 35^\circ 28' 47''$$

$$d' = D' - x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x = D' - d'$$

und

$$0 = 15(T+\gamma-20,''8) + y\,\mathrm{Tang}\,d$$

$$0 = 15(T'+\gamma) + y\,\mathrm{Tang}\,d'$$

also

$$y = \frac{15(T-20,''8-T')}{\mathrm{Tang}\,d' - \mathrm{Tang}\,d} = \frac{15(T-20,''8-T')}{\mathrm{Tang}\,d' + 0{,}713}$$

Will man die Declination, in welcher das Meridianzeichen erscheint, immer $= -35^\circ 28' 47''$ annehmen, so kann man auch das Mittel aus beiden Ausdrücken von x, nämlich

$$x = \tfrac{1}{2}\left\{D' - d' + D + 35^\circ 28' 47''\right\}$$

für seinen Werth ansehen. Die immer unbekannten Veränderungen der irdischen Strahlenbrechung machen jedoch diese Annahme unsicher und würden der Anwendung von $x = D' - d'$ den Vorzug aneignen, wenn einerseits in der Entfernung des Zeichens, von nur 2138 Toisen, über wenige Secunden hinausgehende Veränderungen der Strahlenbrechung zu erwarten wären, und andrerseits die Aufsuchung von x einen anderen Zweck erfüllen sollte, als zur Reduction der beobachteten Positionswinkel zu dienen, wobei einige Secunden wirklich ohne Interesse sind. Ich habe immer das Mittel beider Ausdrücke von x angewandt, zumal die Ablesungen der Angaben des Declinationskreises weniger sicher sind als die Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Strahlenbrechung des Zeichens. Im 1ten §. ist schon gefordert worden, dass man die Beobachtungen nicht auf die zufällige Lage der Absehenslinie gegen die Heliometeraxe, sondern auf diese selbst beziehen solle, was durch ihre Wiederholung vor und nach einer halben Drehung, sowohl des Objectivs, als auch des Oculars, erlangt wird; so wie diese Forderung bei den §. 2. angeführten Beobachtungen erfüllt worden ist, so kann sie auch jetzt erfüllt werden, obgleich ihre Erfüllung hier nicht wesentlich ist. Der im Ausdrucke von y vorkommende Werth von T' ist dann das Mittel aus den auf die Culminationszeit reducirten vier Angaben des Stundenkreises, wovon zwei kurz vor ihr, zwei kurz nach ihr abgelesen werden; unter ihrer Reduction auf die Culminationszeit ist die Hinzufügung der Unterschiede zwischen den Beobachtungszeiten und der Culminationszeit, zu den unmittelbaren Ablesungen, zu verstehen.

Es ist wünschenswerth, dass man Mittel besitze, die Unveränderlichkeit der durch das eben beschriebene Verfahren erlangten Werthe von x und y, oder der Lage der Stundenaxe des Instruments, zu prüfen und etwanige Veränderungen auf eine leichte und zu jeder Zeit anwendbare Art, so kennen zu lernen, dass man gemachte Beobachtungen von Positionswinkeln immer richtig reduciren könne. Da das Fussgestell des Instruments aus Balken von Holz besteht, auch auf einem Unterbau von Holz ruhet, so sind Einflüsse von Änderungen der Wärme und der Feuchtigkeit der Luft noch mehr zu fürchten, als wenn nur ihre Wirkungen auf Metall und auf Mauerwerk in Betracht kämen. Ich habe mich daher bemühet, solche Mittel zu finden und werde sie jetzt beschreiben.

Da jede Änderung der Aufstellung, als durch Drehungen des Instruments um ein beliebiges System dreier, aufeinander senkrechter Axen entstehend, angesehen werden kann, so kommt es nur darauf an, diese Axen so zu wählen, dass die Drehungen um dieselben, unabhängig von den astronomischen Beobachtungen, welche x und y unmittelbar bestimmen, erkannt werden können. Legt man zwei dieser Axen in den Horizont, die erste von Osten nach Westen, die andere von Norden nach Süden, so können die Drehungen um dieselben, durch zwei in denselben Richtungen angebrachte Wasserwagen angegeben werden; die dritte Axe ist dann die Lothlinie, und die Drehung um sie kann nur durch die Richtung des Instruments auf einen, gegen den Horizont festen Punkt erkannt werden. Damit alle Änderungen des Fussgestells, welche Einfluss auf die Richtung der Stundenaxe erhalten, auf diese Art bekannt werden, müssen die Wasserwagen unmittelbar an den Lagern dieser Axe befestigt werden.

Ich habe zwei, von den Herren *Pistor* und *Schiek* verfertigte Wasserwagen, an dem starken Metallstücke, welchem die Stundenaxe parallel ist und worauf ihre Lager befestigt sind, so anbringen lassen, dass sie, beziehungsweise zu der Stundenaxe, als fest angesehen werden können. Der Werth eines Scalentheils beträgt, für die von Norden nach Süden gerichtete 24″, für die von Osten nach Westen gerichtete 26″; empfindlichere Wasserwagen habe ich nicht gewählt, theils weil eine Genauigkeit von einer oder einigen Secunden kein Interesse hat, theils weil ich wünschte, die Drehungen bis zu der Ausdehnung von einigen Minuten damit messen zu können. Zur Beobachtung der Drehungen um die lothrechte Axe habe ich das Meridianzeichen angewandt, welches (§. 2) in der Declination $= -35°28'47''$ und dem Stundenwinkel $0^s0'20,''8$ erscheint.

Bezeichnet man die Drehungswinkel um die drei Axen durch p, q, r und nimmt man p positiv wenn es den nördlichen, q wenn es den östlichen Theil des Instruments erhöhet, r wenn es in der Richtung der täglichen Bewegung ist, so ist der Einfluss derselben auf x, y, $15c$, 15γ:

$$\delta x = p;\ \delta y = q\,\mathrm{Sin}\varphi - r\,\mathrm{Cos}\varphi;\ 15\delta c = q\,\mathrm{Sec}\varphi,\ 15\delta\gamma = q\,\mathrm{Cos}\varphi + r\,\mathrm{Sin}\varphi$$

und auf die, einer bestimmten Richtung des Instruments entsprechende Angabe seines Stundenkreises (Abh. I. (10))

$$15\,\delta T = -15\,\delta\gamma + \delta x\,\mathrm{Tang}\,d\,\mathrm{Sin}\,t - \delta y\,\mathrm{Tang}\,d\,\mathrm{Cos}\,t$$

In diesen Ausdrücken ist $p = 24''\,\xi$, $q = 26''\,\eta$, wenn ξ die nach Norden positiv genommene Angabe der ersten Wasserwage, η die nach Osten positiv genommene der zweiten bezeichnen; r aber muss aus der Angabe des Stundenkreises des auf das Meridianzeichen gerichteten Instruments abgeleitet werden, nämlich aus der angeführten Gleichung zwischen δT, $\delta\gamma$, δx, δy; welche, wenn man darin die Ausdrücke der drei letzteren Grössen substituirt:

$$r = \frac{p\,\mathrm{Tang}\,d\,\mathrm{Sin}\,t - q\,(\mathrm{Cos}\varphi + \mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Tang}\,d\,\mathrm{Cos}\,t) - 15\delta T}{\mathrm{Sin}\varphi - \mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Tang}\,d\,\mathrm{Cos}\,t}$$

ergiebt. Befreiet man hierdurch den Ausdruck von δy von der Grösse r, so wird er:

$$\delta y = \frac{-p\,\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Tang}\,d\,\mathrm{Sin}\,t + q + 15\,\mathrm{Cos}\varphi\,\delta T}{\mathrm{Sin}\varphi - \mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Tang}\,d\,\mathrm{Cos}\,t}$$

Setzt man endlich statt p und q ihre Ausdrücke durch ξ und η, für d und t die dem Meridianzeichen zugehörigen Werthe, und $\varphi = 54°42'50,''5$, so erhält man

$$\delta x = 24''\xi$$
$$\delta y = 0,''01\,\xi + 21,''17\,\eta + 7,056\,\delta T$$

wovon man aber den unbedeutenden, von ξ abhängigen Theil der letzten Formel weglassen kann.

Setzt man

$$x' = x - 24''\xi$$
$$y' = y - 21,''17\,\eta - 7,056\,\delta T$$

so behalten also diese Grössen so lange *beständige* Werthe, als das Instrument nur Änderungen erfährt, welche durch Bewegungen seines Fussgestells erklärt werden können; und zwar bleibt der Werth von T, von welchem an man δT zählen will, in Beziehung auf diese Eigenschaft willkürlich. Zählt man δT von dem Stundenwinkel an, in welchem das Meridianzeichen erscheint, nimmt man also $\delta T = T - 20,''8$, wo T die jederzeit stattfindende Angabe des Stundenkreises des (in

beiden Stellungen) auf das Meridianzeichen gerichteten Instruments bedeutet, so sind die Ausdrücke der beiden *Constanten*:

$$x' = x - 24''\xi$$
$$y' = y - 21,''17\,\eta - 7,056\ (T - 20,''8)$$

Wenn daher x und y durch die am Anfange dieses §'s erklärte Methode bestimmt, und zugleich ξ, η und T abgelesen worden sind, erhält man dadurch Werthe dieser Constanten, welche sich, durch Wiederholungen der Bestimmung zu anderen Zeiten, so lange ungeändert wiederfinden müssen, bis die Zusammensetzung des Instruments eine, absichtlich herbeigeführte oder ohne bekannte Ursache entstandene, Änderung erfährt. Man besitzt also hierdurch ein Mittel, zu verschiedenen Zeiten gemachte Bestimmungen von x und y untereinander zu vergleichen und sie zu *einer genaueren* zu vereinigen.

Wenn x' und y' bekannt sind, hat man daraus die zu der Reduction der Beobachtungen der Positionswinkel erforderlichen Werthe von x und y, nämlich:

$$x = x' + 24''\xi$$
$$y = y' + 21,''17\,\eta + 7,056\ (T - 20,''8).$$

Die Werthe von ξ und η werden, zur Zeit jeder Beobachtung, von den beiden Wasserwagen abgelesen; der Werth von T braucht seltener aufgesucht zu werden, da sich gezeigt hat, dass er nur langsame und während längerer Zeit ihre Richtung beibehaltende Veränderungen erfährt. Die von Zeit zu Zeit bestimmten Werthe von x' und y', so wie auch von $(y') = y' + 7,056\ (T - 20,''8)$ findet man am Ende dieser Abhandlung in Tafel VI.

4.

Nachdem ich im Vorhergehenden gezeigt habe, wie ich zu der Kenntniss derjenigen Elemente des *Aequatoreal-Instruments* gelangt bin, welche Einfluss auf die Reduction der mit dem Heliometer beobachteten Positionswinkel haben, werde ich jetzt mittheilen, was mir, in derselben Beziehung, von dem *Heliometer* bekannt geworden ist. Ich fange mit der *Theilung des Positionskreises* und ihrer Ablesung an.

Dieser Kreis wird durch *vier* Nonien abgelesen, deren zwei in der Richtung des Durchschnitts des Objectivs, zwei senkrecht darauf stehen. Die beiden ersteren sind *gewöhnlich* so schwer abzulesen, dass nothwendig wurde, sie unbeachtet zu lassen. Ich habe daher nur die beiden anderen Nonien, nämlich II und IV abgelesen; jener giebt 90°, dieser 270° mehr an als der Nonius I, welcher der den Schraubenköpfen der Mikrometervorrichtung entgegengesetzte ist. Das was ich in der vorigen Abhandlung durch n bezeichnet habe, ist das *verbesserte* Mittel aus II$-90°$ und IV$-270°$. Von welcher *Verbesserung* ich hier rede und wie ich sie kennen gelernt habe, werde ich jetzt mittheilen.

Da das Mittel aus den Angaben jedes Paars von Nonien, welche einander entgegengesetzt angebracht sind, frei von der Excentricität ist, so würde der auf dem Positionskreise abgelesene Winkel zwischen den, beiden Paaren entsprechenden Durchmessern, wie sie auch gedrehet werden mögen, keine Veränderuug erfahren, wenn der Kreis frei von Theilungsfehlern wäre. Es zeigen sich aber solche Veränderungen wirklich; sie deuten also Theilungsfehler an und geben zugleich das Mittel, diese *so* zu bestimmen, dass die Ablesung *eines* Paars der Nonien, durch die Hinzufügung der Bestimmung der Fehler, eben so frei davon wird, wie das Mittel der Ablesungen *beider* Paare unmittelbar sein würde. Hierdurch wird erlangt, dass die Aufopferung der Ablesung des einen Nonien-Paares keinen Verlust hervorbringt, ausser der wenig bedeutenden Vermehrung der zufälligen Ablesungsfehler im Verhältnisse $1:\sqrt{2}$.

Um alle 4 Nonien, rings um den Positionskreis herum, gehörig ablesen zu können, muss man die Schlüssel, welche die Bewegung des ganzen Objectivs und seiner beiden Hälften von dem Oculare aus vermitteln, von dem Instrumente abnehmen und dieses in eine geeignete Lage bringen. Liest man sie alle ab, so erhält man dadurch den Winkel zwischen den Durchmessern II—IV und I—III, so wie er auf der Theilung des Positionskreises erscheint. Wiederholt man dieses, indem man den ersten Nonius nach und nach auf 0°, 10°,....350° der Theilung stellt, so erkennt man dadurch das Verhalten eines *beständigen* Winkels zu den Theilungen an 36 Punkten des Kreises. — Eine zweimal wiederholte Reihe von Ablesungen dieser Art habe ich 1830 gemacht; 1839 habe ich Herrn *Schlüter* ersucht, das Ähnliche, in zwei

entgegengesetzten Lagen des Instruments zu wiederholen. Ich führe hier diese drei Reihen von Ablesungen an; um ihr Verhalten zueinander in eine von der zufälligen (von Zeit zu Zeit veränderten) Stellung der Nonien befreiete Übersicht zu bringen, werde ich von jedem der 36 abgelesenen Werthe von $\frac{1}{2}$ (II+IV) — $\frac{1}{2}$ (I+III) — 90° jeder Reihe, das 36^{tel} der Summe aller abziehen.

Non. I.	1te Reihe.	2te Reihe.	3te Reihe.	Mittel.	Non. I.	1te Reihe.	2te Reihe.	3te Reihe.	Mittel.
0°	— 1′,597	— 1′,882	— 1′,344	— 1′,608	180°	— 1′,347	— 1′,382	— 1′,219	— 1′,316
10	— 1,097	— 1,757	— 2,094	— 1,649	190	— 1,847	— 1,882	— 1,594	— 1,774
20	— 1,097	— 2,632	— 2,469	— 2,066	200	— 2,097	— 3,007	— 2,969	— 2,691
30	— 1,597	— 2,257	— 2,344	— 2,066	210	— 1,847	— 2,882	— 2,594	— 2,441
40	— 1,097	— 1,757	— 2,094	— 1,649	220	— 2,347	— 1,882	— 2,594	— 2,274
50	— 1,597	— 1,882	— 2,219	— 1,899	230	— 2,097	— 2,382	— 1,969	— 2,149
60	— 1,347	— 1,132	— 0,844	— 1,108	240	— 1,097	— 1,132	— 1,094	— 1,108
70	+ 0,153	— 0,007	— 0,094	+ 0,017	250	+ 0,153	— 0,257	+ 0,156	+ 0,017
80	+ 1,403	+ 0,493	+ 1,406	+ 1,101	260	+ 1,153	+ 1,118	+ 1,406	+ 1,226
90	+ 1,403	+ 1,243	+ 1,156	+ 1,267	270	+ 1,653	+ 1,618	+ 1,531	+ 1,601
100	+ 1,903	+ 2,243	+ 1,906	+ 2,017	280	+ 1,653	+ 2,368	+ 1,906	+ 1,976
110	+ 2,653	+ 2,618	+ 2,281	+ 2,517	290	+ 1,903	+ 2,618	+ 2,906	+ 2,476
120	+ 2,153	+ 1,993	+ 2,406	+ 2,184	300	+ 2,153	+ 3,118	+ 2,656	+ 2,642
130	+ 1,653	+ 2,118	+ 2,281	+ 2,017	310	+ 2,153	+ 2,743	+ 2,531	+ 2,476
140	+ 1,403	+ 1,493	+ 2,156	+ 1,684	320	+ 1,903	+ 1,743	+ 1,656	+ 1,767
150	+ 1,153	+ 0,993	+ 1,156	+ 1,101	330	+ 0,403	+ 1,243	+ 0,906	+ 0,851
160	— 0,847	+ 0,493	+ 0,281	— 0,024	340	— 1,347	— 0,507	— 0,094	— 0,649
170	— 1,097	— 0,632	— 1,344	— 1,024	350	— 1,597	— 1,007	— 1,719	— 1,441

Sucht man die Darstellung der Zahlen der letzten Columne durch eine periodische Reihe, so findet man, dass der periodische Theil von $\frac{1}{2}\{II + IV\} - \frac{1}{2}\{I + III\}$, für die Angabe u des Nonius I:

$$= -1'{,}893 \sin 2u - 1'{,}556 \cos 2u + 0'{,}0308 \sin 4u + 0'{,}0028 \cos 4u + \text{etc.}$$

ist. Die Hälfte dieses Ausdruckes, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, ist die *Verbesserung*, welche man den an den Nonien II und IV allein gemachten Ablesungen von u hinzufügen muss, um dadurch das zu erhalten, was die Ablesung an allen vier Nonien gegeben haben würde. Giebt man dieser Verbesserung die Angabe u_2 des Nonius II zum Argumente, so wird ihr Ausdruck:

$$= -0'{,}9465 \sin 2u_2 - 0'{,}778 \cos 2u_2 - 0'{,}0154 \sin 4u_2 - 0'{,}0014 \cos 4u_2 + \text{etc.}$$

wovon jedoch die auf die beiden ersten folgenden Glieder kein Vertrauen mehr verdienen, indem sie viel zu klein sind um aus so wenig genauen Ablesungen, als der Positionskreis sie gewähren kann, mit einiger Sicherheit abgeleitet werden zu können; auch könnten dem Sinus und Cosinus des vierfachen Winkels proportionale Glieder des Ausdrucks eines Theilungsfehlers nicht durch Ablesungen zweier, senkrecht auf einander gestellten Nonienpaare entdeckt werden. — Eine von Grad zu Grad fortgehende Tafel des Werthes der beiden ersten Glieder findet man am Ende dieser Abhandlung (Taf. IV).

5.

Die Bestimmung des *Indexfehlers des Positionskreises* ist durch die im 13ten § der Abhandlung I entwickelte Methode gemacht worden. Ich werde zuerst die desshalb getroffene Einrichtung beschreiben. In der Drehkuppel, unter welcher der Heliometer sich befindet, ist ein *Fraunhofersches* Fernrohr von 2½ Fuss so aufgestellt worden, dass sein Objectiv dem Heliometer, sein Ocular dem äusseren Tageslichte zugewandt und daher ein Fadenkreuz in seinem Brennpunkte, durch das Heliometerfernrohr sichtbar ist; seine Aufstellung verstattet Bewegungen, sowohl in der Höhe als im Azimuthe, wodurch seine Axe und die Heliometeraxe immer zum Zusammenfallen gebracht werden können, wenn die Richtung der letzteren durch seinen Mittelpunkt gelegt worden ist. Für gehörige Blendung des neben dem Fernrohre vorbeigehenden Lichts ist gesorgt worden.

Wenn der Indexfehler des Positionskreises bestimmt werden soll, so werden zuerst die Axen beider Objectivhälften des Heliometers in die Heliometeraxe gestellt, und die Aufstellung des Hülfsfernrohrs wird so gemacht, dass beide Objectivhälften gleichviel Licht von ihm erhalten. Lässt man dann die Hälfte I ferner mit der Heliometeraxe zusammenfallen, verschiebt man aber die andere II bis an die eine Grenze ihrer Bewegung, oder bis 0^Rev^ ihrer Schraube, so kann man beide Objectivhälften gemeinschaftlich so um die Heliometeraxe drehen, dass eine Drehung des Heliometers selbst um eine der Axen des Aequatoreals, die beiden, von den beiden Hälften gegebenen Bilder des Fadenkreuzes des Hülfsfernrohrs durch das Fadenkreuz des Heliometers

führt; die Erlangung der dann stattfindenden Angabe der Nonien des Positionskreises ist das, was durch die Beobachtung beabsichtigt wird. Sie muss aber, aus den im 13ten § der vorigen Abhandlung angeführten Gründen, nothwendig mit einer *correspondirenden*, d. h. in gleich grosser, aber entgegengesetzt liegender Entfernung der Axe der Objectivhälfte II von der Heliometeraxe gemachten, verbunden werden. — Ich habe beide zusammengehörigen Beobachtungen immer fünfmal, in verschiedenen Entfernungen der Axe der Objectivhälfte II von der Heliometeraxe, wiederholt, nämlich in den Entfernungen 20^R, 30^R, 40^R, 50^R, 60^R, wovon die letztere der Grenze der Verschiebung entspricht; wenn das Mittel der beiden zusammengehörigen Ablesungen des Positionskreises, für jede dieser Wiederholungen, nach seiner Berichtigung durch den Theilungsfehler (§. 4.); durch N_2, N_3, ... N_6 bezeichnet wird, ist das anzunehmende Mittel aller 5 Beobachtungen:

$$(N) = \tfrac{1}{15}\left\{2N_2 + 3N_3 + 4N_4 + 5N_5 + 6N_6\right\}$$

Die im 14ten § der vorigen Abhandlung erwähnte, der Schwere zuzuschreibende Drehung des Fernrohrs um die Heliometeraxe fordert aber, dass man allen Ablesungen am Positionskreise die Grösse dieser Drehung, oder den daselbst gegebenen Ausdruck

$$\mu\left\{\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}d - \operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}d\operatorname{Cos}t\right\}$$

hinzusetze, worin d und t die Declination und den Stundenwinkel eines Punkts in der Richtung der Heliometeraxe bedeuten, und wenn die Declinationsaxe *vorgeht* auf *gewöhnliche* Art, wenn sie *folgt* als $180°-d$ und $180°+t$ verstanden werden. Man hat also das berichtigte Resultat der 5 Beobachtungen:

$$= (N) + \mu\left\{\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}d - \operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}d\operatorname{Cos}t\right\}$$

Hat nun das Instrument diese Beobachtungen durch Drehung um seine *Stundenaxe* gegeben, so ist der daraus hervorgehende Werth des Indexfehlers des Positionskreises, für die Objectivhälfte II, dem im 13ten § der vorigen Abhandlung dafür gegebenen Ausdrucke zufolge:

$$k' = \left.\begin{matrix}90°\\270°\end{matrix}\right\} - (N) - i\operatorname{Sec}d + i'\operatorname{Tang}d - \mu\left\{\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}d - \operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}d\operatorname{Cos}t\right\}$$

und wenn es sie durch Drehung um seine *Declinationsaxe* gegeben hat,

$$k' = \begin{matrix}0^\circ\\180^\circ\end{matrix} - (N) - \mu\left\{\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}d - \mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Sin}d\,\mathrm{Cos}t\right\}$$

Dass die Angaben des Positionskreises die von der Lage der Declinationsaxe abhängige Einwirkung erfahren, welche ich einer Drehung des Fernrohrs um die Heliometeraxe zugeschrieben habe, wurde zuerst im März 1833 bemerkt, als ich die sich damals hier aufhaltenden Herren Doctor *Peters* (jetzt in Pulkowa) und Professor *Selander* (jetzt in Stockholm) ersuchte, den Indexfehler des Positionskreises, in *beiden* Stellungen des Instruments auf das Fadenkreuz des Hülfsfernrohrs zu bestimmen: es zeigte sich in diesen Bestimmungen ein Unterschied, welcher viel zu gross war, um ihn einer Unvollkommenheit der Beobachtungen zuschreiben zu können, und welcher auch in der Folge immer wieder hervorgetreten ist, so häufig und so verschiedenartig die Veranlassungen seines Hervortretens waren. Er hat sich in der That nicht allein in der Bestimmung des Indexfehlers des Positionskreises gezeigt, sondern auch in der Beobachtung der Positionswinkel von Sternenpaaren, z. B. der Plejaden. Die Grösse dieses Einflusses, oder μ, kann durch Vergleichung von Bestimmungen des Indexfehlers des Positionskreises, bei *vorgehender* und bei *folgender* Declinationsaxe gemacht, am leichtesten erlangt werden; auch mit hinreichender Sicherheit, indem das beschriebene Verfahren, wodurch der Indexfehler bestimmt wird, darin die grösste, erreichbare Genauigkeit herbeiführt.

Ich werde jetzt die Bestimmungen mittheilen, aus welchen ich die Grösse von μ abgeleitet habe. Ich wende zu diesem Zwecke nur die durch Drehung des Instruments um die Declinationsaxe erlangten Bestimmungen des Indexfehlers an, weil sie ihn unabhängig von der Kenntniss anderer Elemente ergeben; während seine durch Drehung um die Stundenaxe erlangten Bestimmungen i, und i' als bekannt voraussetzen. Die beiden Bestimmungen des Indexfehlers aus deren Vergleichung miteinander μ hervorgehen sollte, sind immer im Meridiane des Heliometers gemacht; das Hülfsfernrohr befand sich entweder bei der einen gegen Süden, bei der anderen gegen Norden, und die Declinationsaxe blieb in unveränderter Lage; oder es befand sich bei beiden entweder gegen Süden oder gegen Norden und die Lage

der Declinationsaxe wurde zwischen beiden in die entgegengesetzte verwandelt. Wenn das Hülfsfernrohr sich gegen Süden befindet, so sieht man sein Fadenkreuz in der Declination $= -27°7'$, wenn es sich gegen Norden befindet in $+43°30'$; in dem ersten Falle ist der Coefficient von $\mu = \pm 0{,}98985$, in dem zweiten $= \mp 0{,}98973$. Der Unterschied zwischen den beiden, mit einander zu vergleichenden Bestimmungen des Indexfehlers ist daher, wenn das Hülfsfernrohr sich bei der einen gegen Süden, bei der anderen gegen Norden befand $= 1{,}97958\,\mu$; wenn bei beiden gegen Süden $= 1{,}97970\,\mu$, gegen Norden $= 1{,}97946\,\mu$; welche Ausdrücke so wenig voneinander verschieden sind, dass man alle gleich und zwar $= 1{,}9796\,\mu$ annehmen kann. Der Werth dieses Unterschiedes ist, bis zum 15. Nov. 1840, 50mal bestimmt worden; ich führe diese Bestimmungen einzeln an, weil man dadurch ein Urtheil über die Sicherheit erhalten kann, mit welcher der Indexfehler durch das beschriebene Verfahren bestimmt wird:

1833	März	11	3,69	1838	Nov.	4	3,53	1839	Juli	1	3,96
1834	März	20	2,03		—	28	4,02		Aug.	27	4,62
	Octob.	11	4,46		Decbr.	17	5,61		Septb.	16	5,30
1835	May	10	2,37	1839	Januar	7	3,09		—	30	4,44
	Septb.	17	3,73		Febr.	1	3,20		Octbr.	21	3,98
	Octob.	21	3,46		—	18	3,71		Nov.	4	4,21
1836	Nov.	11	2,66		März	4	3,30		—	18	3,06
1837	Aug.	8	5,63		—	25	7,00		Decbr.	10	4,13
	Septb.	5	4,10		April	8	2,51		—	30	3,71
1838	März	26	3,51		—	22	2,23	1840	Januar	25	3,37
	May	11	3,82		May	6	3,34		Febr.	10	3,45
	Septb.	4	3,98		—	27	3,59		—	24	4,45
	—	22	3,90		Juni	11	4,06				

1840	März	16	2,70
	April	6	3,86
	Juni	10	2,37
	—	11	2,63
	Juli	16	4,56
	Aug.	2	4,97
	—	16	3,66
	Septb.	20	3,60
	Octob.	4	4,34
	—	18	3,90
	Novbr.	1	3,55
	—	15	2,99

Das Mittel dieser 50 Bestimmungen ist:

$$1{,}9796\,\mu = 3{,}789$$

und es folgt daraus

$$\mu = 1{,}914.$$

Den *Indexfehler des Positionskreises* selbst, habe ich dagegen stets auf das mittlere Resultat der Drehungen um die Stundenaxe und um die Declinationsaxe gegründet, nicht wie die Bestimmung von μ auf die letzteren allein. So wie die eben angeführten Zahlen aus Wiederholung der Drehungen des Instruments um seine Declinationsaxe, unter

das *Zeichen* des Einflusses von μ umändernden Umständen beobachtet, hervorgegangen sind, so sind mit diesen Beobachtungen immer auch Drehungen um die Stundenaxe verbunden worden. Seit dem März 1833, wo die jedesmalige Wegschaffung von μ aus dem Werthe des Indexfehlers wünschenswerth wurde und daher die Wiederholung seiner Bestimmung in zwei verschiedenen Lagen des Instruments zur Folge hatte, sind also immer *vier* Reihen von Drehungen vorhanden, aus deren Mittel der Indexfehler des Positionskreises frei von μ und entweder ganz, oder grossentheils frei von i, und i' hervorgeht. Er wird ganz frei von i, und i' wenn das Hülfsfernrohr sich in beiden Beobachtungsreihen entweder gegen Süden oder gegen Norden befindet, in welchem Falle die Declinationsaxe entgegengesetzte Lagen erhält; wenn sich dagegen das Hülfsfernrohr zuerst gegen Süden in $d = -27°7'$, dann gegen Norden in $d = 180° - 43°30'$ befindet, erfährt der durch die Drehungen um die Stundenaxe gefundene Werth des Indexfehlers, dem oben gegebenen Ausdrucke zufolge, die Einflüsse von i, und i':

$$-i, \operatorname{Sec} 27°7' - i' \operatorname{Tang} 27°7'$$

und $$+i, \operatorname{Sec} 43°30' - i' \operatorname{Tang} 43°30'$$

wovon die Viertel-Summe:

$$= 0{,}0638\, i, - 0{,}3653\, i'$$

der Einfluss von i, und i' auf das Mittel der vier Bestimmungen ist. Die Zeichen dieser Formel entsprechen dem Falle, in welchem die Declinationsaxe der ersten Richtung des Fernrohrs vorgeht, also der zweiten folgt; im entgegengesetzten Falle müssen sie entgegengesetzt gelesen werden. — Ich habe im 2ten § gezeigt, dass $i, = + 28,''35 = + 0,'473$, und dass i' immer ein kleiner Bruch einer Minute gewesen ist; die Verbesserung des Mittels ist daher

$$= \pm 0{,}03 \mp 0{,}3653\, i'.$$

Man vermeidet sie aber, wie ich schon erinnert habe, ganz, wenn man das Hülfsfernrohr beidemale in Süden, oder beidemale in Norden aufstellt.

Vor dem März 1833 beruhet jede vorhandene Bestimmung des Indexfehlers auf zwei Beobachtungsreihen, deren Resultat nur dadurch

frei von μ wird, dass man den später bekannt gewordenen Werth dieser Grösse in Rechnung bringt. — Alle nach und nach bestimmten Werthe des Indexfehlers des Positionskreises, beziehungsweise auf die Objectivhälfte II, findet man am Ende dieser Abhandlung in Taf. V.

6.

Nachdem ich Alles mitgetheilt habe, was Einfluss auf die Reduction der Beobachtungen der Positionswinkel erhält, werde ich es zusammenstellen und die darauf beruhenden Rechnungsvorschriften angeben.

Ich setze voraus, dass nur von der Aufsuchung des Resultats *zusammengehöriger* Beobachtungen die Rede ist (Abh. I. §. 10), nämlich solcher, welche in gleichen aber entgegengesetzt liegenden Entfernungen der Axe der Hälfte II des Objectivs von der Axe der Hälfte I wiederholt worden sind, so wie auch, dass diese Beobachtungen nach der *ersten* der im 11ten §. Abh. I. angeführten Methoden gemacht sind. Wenn die halbe Summe der Angabe des Non. II und der um 180° verminderten oder vermehrten des Non. IV des Positionskreises, für die erste der beiden zusammengehörigen Beobachtungen durch n, für die zweite durch n_1 bezeichnet wird, und wenn bedeuten:

ε.... den Theilungsfehler des Positionskreises..... Taf. IV
k'.... den Indexfehler des Positionskreises ..... Taf. V

ferner δ_0 und τ_0 die Declination und den Stundenwinkel des Punkts in der Mitte zwischen beiden miteinander verglichenen Punkten SS' und

$$\lambda = (x \operatorname{Sin}\tau_0 - y \operatorname{Cos}\tau_0) \operatorname{Sec}\delta_0$$
$$J = i_1 \operatorname{Sec}\delta_0 - i'' \operatorname{Tang}\delta_0 + \mu (\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\delta_0 - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\delta_0 \operatorname{Cos}\tau_0)$$

so ist:

die halbe Summe der Positionswinkel an den Endpunkten von SS', in der Richtung *von* dem Punkte, welcher durch die am *wenigsten* vorgerückte Objectivhälfte gesehen wird, (welcher auch den Schraubenköpfen am nächsten erscheint) *nach* dem anderen genommen:

a) wenn die Declinationsaxe *vorangeht:*

$$= \tfrac{1}{2}(n+n_1) - 90° + \varepsilon + k' + \lambda + J$$

b) wenn die Declinationsaxe *folgt:*

$$= \tfrac{1}{2}(n+n_1) + 90° + \varepsilon + k' + \lambda - J$$

Die Grössen x und y haben die Ausdrücke $x'+0,''4 . \xi$ und $y'+7,056 (T-20,''8)+0,''353 . \eta = (y')+0,''353 . \eta$ (§. 3.) und man findet

x', y', (y') in ..... Taf. VI.

Wenn man, im Ausdrucke von J, für i, und μ ihre *beständigen* Werthe setzt, nämlich $i, = +28,''35 = +0,''473$ (§. 2.), $\mu = 1,''914$ (§. 5.), so wird dieser Ausdruck:

$$J = +\alpha\, 0,''473 \operatorname{Sec}\delta_0 + 1,''562 \operatorname{Cos}\delta_0 - 1,''106 \operatorname{Sin}\delta_0 \operatorname{Cos}\tau_0 - s'' \operatorname{Tang}\delta_0$$

Seine Berechnung wird durch Taf. VII und Taf. VIII erleichtert. Man erhält nämlich

$a = +\ 0,''473 \operatorname{Sec}\delta_0 + 1,''562 \operatorname{Cos}\delta_0$, mit dem Argumente δ_0 aus Taf. VII

$b = +\ 0,''353 \operatorname{Sin}(\tau_0 - \delta_0)$, mit dem Argumente ..... $\tau_0 - \delta_0$

$c = +\ 0,''353 \operatorname{Sin}(\tau_0 + \delta_0)$, ... $\tau_0 + \delta_0$ } aus Taf. VIII

und dadurch

$$J = a + b - c - s'' \operatorname{Tang}\delta_0$$

Für meine Beobachtungen war s'' immer so klein, dass es unnöthig war das letzte Glied dieses Ausdruckes zu berücksichtigen.

Zweiter Theil.

Entfernungen.

7.

Die Schrauben, welche die Objectivhälften des Heliometers verschieben, dienen zugleich zu der Messung *der Grösse ihrer Bewegung*. Die ganzen Drehungen jeder der beiden Schrauben werden durch eine Scale gezählt, die Theile derselben durch die Schraubentrommel, auf welche die Hundertel unmittelbar aufgetragen sind und welche die Tausentel durch sichere Schätzung ergiebt. Ich habe alle meine Messungen mit dem Heliometer durch die Schraube der Objectivhälfte II gemacht. Die Untersuchung, welche ich jetzt mitzutheilen im Begriffe bin, bezieht sich daher allein auf *diese* Schraube.

Zuerst muss untersucht werden, inwiefern das Fortschreiten des Schiebers, in welchen die Objectivhälfte II eingefasst ist, dem Wachsen

der Angaben der Scale und Trommel der Schraube proportional ist. Dass diese Proportionalität in aller Schärfe stattfinde, kann nicht erwartet werden; man muss vielmehr Mittel suchen, solche *Ausgleichungen* der unmittelbaren Angaben der Schraubentrommel zu bestimmen, dass diese durch ihre Hinzufügung den Bewegungen des Schiebers wirklich proportional werden.

Wenn man ein Mittel besitzt, von beliebigen Anfangspunkten aus, eine immer *gleich grosse* Bewegung der Objectivhälfte hervorzubringen, so kann diese Bewegung mit dem Unterschiede der ihrem Anfange und Ende entsprechenden Angaben der Schraube verglichen werden. Sind keine *Ausgleichungen* der Angaben der Schraube nöthig, so müssen diese Unterschiede einander gleich sein, von welchen Anfängen die Messung der gleich grossen Bewegung durch die Schraube auch ausgehen möge. Sind aber Ausgleichungen erforderlich, so muss ihre Grösse und die Art ihres Fortganges an den Tag gelegt werden können, indem dieser Messung nach und nach verschiedene Anfänge gegeben werden. Die Grundlage der Untersuchung der Schraube ist daher ein Apparat, durch dessen Hülfe dem Schieber, von beliebigen Anfangspunkten aus, eine Bewegung von beliebiger, aber, so lange man sie nicht abändern will, *gleicher* Grösse gegeben werden kann.

Herr *Theodor Baumann* in Berlin, derselbe Künstler, der sich durch die Verfertigung sämmtlicher, bei Gelegenheit der Festsetzung der Einheit des Preussischen Längenmasses angewandter Apparate, grosse Ehre erworben hat, hat mir auch die Einrichtung geliefert, welcher ich zur Untersuchung der Schraube des Heliometers bedurfte. Sie besteht aus zwei abgesonderten Theilen, welche auf die Schieber der beiden Objectivhälften aufgeschraubt werden können. Der auf dem Schieber I zu befestigende trägt zwei, nach entgegengesetzten Seiten wirkende Fühlhebel; der auf den Schieber II aufzuschraubende trägt zwei quadratische, senkrecht auf ihre gemeinschaftliche Axe abgeschnittene Prismen von hartem Stahl, welche in einer, der Bewegungslinie der Schieber parallelen Bahn, einzeln bewegt und an beliebigen Stellen derselben befestigt werden können, so dass die Entfernung ihrer Endflächen voneinander willkürlich geändert werden kann. Die beiden Fühlhebel des ersten Theils befinden sich zwischen diesen Endflächen, so dass ebensowohl der

eine gegen eine derselben, als der andere gegen die andere wirken kann. — Wenn der Schieber I so gestellt wird, dass der eine Fühlhebel die ihm entgegenstehende Endfläche gehörig berührt; wenn dann der Schieber II soweit bewegt wird, dass bei dem anderen Fühlhebel und der anderen Endfläche dasselbe eintritt, so hängt die Grösse der dazu erforderlichen Bewegung offenbar nur von der Entfernung der Endflächen der beiden Prismen ab; und von welchem Punkte sie auch ausgehen möge, ist sie so lange beständig, als diese Entfernung nicht geändert wird. — Diese Einrichtung leistet also das, was zu einer Untersuchung der Heliometerschraube erforderlich ist. — Ausser ihr hat Herr *Baumann* mir noch eine andere geliefert, bei welcher die beiden Fühlhebel durch ein achromatisches Mikroscop und die beiden Endflächen der Prismen durch zwei, auf Silber gezogene Striche vertreten werden, welche man in jede beliebige Entfernung voneinander bringen kann.

8.

Ich habe die beschriebene Einrichtung zuerst benutzt um zu untersuchen, inwiefern die, einer *ganzen* Umdrehung der Schraube entsprechende Fortbewegung des Schiebers, durch die auf der Schraubentrommel abgelesenen Theile einer Drehung richtig *eingetheilt* wird. Ich stellte die Prismen so, dass ihre Entfernung ein Fortschreiten von etwa der halben Grösse einer Schraubenwindung bedingte, und beobachtete dieses Fortschreiten dann, indem ich jedes Zehntel der Angabe der Schraubentrommel zwischen 55,0 und 64,9 nach und nach zum Anfange wählte. Diese 100 Beobachtungen haben folgende Ausdrücke des immer gleichen Fortschreitens, durch auf der Schraubentrommel abgelesene Theile ihres ganzen Umfanges, ergeben:

R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
55,0	0,4985	56,0	0,4985	57,0	0,5000	58,0	0,5005	59,0	0,4985	60,0	0,4985	61,0	0,4990	62,0	0,5020	63,0	0,5015	64,0	0,5045
1	4945	1	4960	1	4970	1	4955	1	4955	1	4965	1	4965	1	4985	1	4990	1	5000
2	4930	2	4905	2	4940	2	4940	2	4950	2	4955	2	4945	2	4955	2	4960	2	4970
3	4905	3	4905	3	4915	3	4925	3	4915	3	4930	3	4920	3	4940	3	4950	3	4945
4	4930	4	4910	4	4915	4	4910	4	4925	4	4935	4	4920	4	4935	4	4930	4	4950
5	4945	5	4955	5	4945	5	4940	5	4950	5	4960	5	4965	5	4965	5	4970	5	4960
6	4985	6	4995	6	4990	6	4985	6	4985	6	4990	6	5000	6	4995	6	4990	6	4990
7	5005	7	5005	7	5010	7	5005	7	5010	7	5015	7	5015	7	5040	7	5015	7	5020
8	5025	8	5020	8	5020	8	5020	8	5025	8	5030	8	5045	8	5045	8	5040	8	5070
55,9	5025	59,9	5020	57,9	5020	58,9	5015	59,9	5020	60,9	5045	61,9	5045	62,9	5050	63,9	5045	64,9	5055

Ferner habe ich 100 ähnliche Beobachtungen, von denselben Anfangspunkten aus, nach einer Verkleinerung des Zwischenraums bis auf etwa ein Viertel einer Schraubenwindung, gemacht:

R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
55,0	0,2630	56,0	0,2660	57,0	0,2680	58,0	0,2670	59,0	0,2670	60,0	0,2665	61,0	0,2660	62,0	0,2665	63,0	0,2670	64,0	0,2640
1	2615	1	2640	1	2645	1	2640	1	2650	1	2695	1	2630	1	2660	1	2650	1	2670
2	2630	2	2630	2	2655	2	2650	2	2650	2	2640	2	2650	2	2650	2	2670	2	2640
3	2610	3	2620	3	2600	3	2620	3	2600	3	2620	3	2610	3	2630	3	2630	3	2620
4	2565	4	2580	4	2590	4	2555	4	2590	4	2585	4	2585	4	2580	4	2575	4	2600
5	2560	5	2570	5	2570	5	2560	5	2560	5	2570	5	2580	5	2560	5	2570	5	2580
6	2580	6	2605	6	2570	6	2585	6	2610	6	2560	6	2610	6	2590	6	2570	6	2570
7	2600	7	2625	7	2665	7	2630	7	2600	7	2640	7	2615	7	2630	7	2600	7	2605
8	2650	8	2630	8	2645	8	2620	8	2660	8	2660	8	2640	8	2650	8	2635	8	2660
55,9	2630	56,9	2675	57,9	2660	58,9	2700	59,9	2640	60,9	2655	61,9	2640	62,9	2680	63,9	2650	64,9	2670

Wenn man beide Verzeichnisse betrachtet, so fällt eine Ähnlichkeit des Verhaltens auf, welche die einzelnen Schraubenwindungen, von der 55ten bis zur 65ten zeigen: der erste Zwischenraum ist, von dem 8ten oder 9ten Zehntel der Theilung der Schraubentrommel aus, immer am grössten, von dem 3ten oder 4ten Zehntel aus immer am kleinsten gemessen worden, der zweite Zwischenraum erscheint im Ganzen am grössten, wenn er vom 0ten Zehntel aus gemessen wird, am kleinsten wenn von dem 5ten aus. Diese Ähnlichkeit des Verhaltens der Schraube, durch mehrere Windungen hindurch, ist für die Erlangung der Kenntniss ihrer Ausgleichungen nicht unbedeutend, indem sie verstattet, die mittleren Werthe der Ausgleichungen mehrerer untersuchten Windungen, als Näherung an die, jeder einzelnen von ihnen zukommenden zu betrachten. Auch zeigt die Schraube diese Ähnlichkeit ihres Verhaltens nicht von der 55ten bis zu der 65ten Windung allein, sondern sie zeigt sie auch noch an vier anderen, auf gleiche Art untersuchten Stellen, nämlich zwischen der 15ten und 25ten, der 35ten und 45ten, der 75ten und 85ten, der 95ten und 105ten Windung. Ich habe sie sogar bei allen Mikrometerschrauben gefunden, welche näher zu untersuchen ich Veranlassung gehabt habe; man findet Beispiele davon in meinem Buche über die Einheit des Preussischen Längenmaasses.

Dieser Bemerkung zufolge gelangt man zu einer besseren Übersicht über das Verhalten der Schraube zwischen ihrer 55ten und 65ten Windung, wenn man aus jeder der 10 Zeilen der mitgetheilten Verzeichnisse, das arithmetische Mittel nimmt. Man findet dadurch, dass die beiden gewählten Zwischenräume, von den einzelnen Zehnteln

der Schraubentrommel aus, durch diese gemessen, in folgenden Grössen erscheinen:

		1ter Zwischenr.	2ter Zwischenr.
		R	R
Anfang 0	Zehntel	0,50045	0,26610
1	—	49690	26495
2	—	49440	26465
3	—	49240	26160
4	—	49260	25805
5	—	49555	25680
6	—	49905	25850
7	—	50140	26200
8	—	50340	26440
9	—	50350	26600

9.

Man kann die *Ausgleichung* φu einer Angabe u der Schraubentrommel, aus diesen Zahlen so erkennen, dass durch ihre Anbringung sowohl an den Anfang als an das Ende jeder Messung, die Veränderungen verschwinden, welche die Zahlen durch die Veränderungen des Anfanges der Messungen erfahren haben. Wenn der Anfang einer von ihnen auf die Angabe u der Schraubentrommel fällt, das Ende auf u', so ist die Bedingung, aus deren Verfolgung die Kenntniss von φu hervorgehen muss, die, dass $u' + \varphi u' - u - \varphi u$ von u unabhängig werde. — Setzt man

$$\varphi u = \alpha \operatorname{Cos} u + \beta \operatorname{Sin} u + \alpha' \operatorname{Cos} 2u + \beta' \operatorname{Sin} 2u + \ldots.$$

und bezeichnet man den gemessenen Zwischenraum durch f, so hat man also seinen Ausdruck:

$$f = u' - u + \alpha(\operatorname{Cos} u' - \operatorname{Cos} u) + \beta(\operatorname{Sin} u' - \operatorname{Sin} u) + \alpha'(\operatorname{Cos} 2u' - \operatorname{Cos} 2u) + \text{etc.}$$

aus dessen Vergleichung mit beiden Reihen von Messungen, sowohl $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \ldots$, als auch die, beiden zugehörigen Werthe von f abzuleiten sind.

Wenn, wie in dem gegenwärtigen Falle, $\alpha, \beta, \ldots.$ sehr kleine Grössen sind, kann man das Mittel aller beobachteten Werthe von $u' - u$ für f annehmen und $\operatorname{Cos}(u+f)$, $\operatorname{Sin}(u+f)$ u. s. w. statt $\operatorname{Cos} u'$,

Sin u', u. s. w. schreiben. Auf diese Art erhält man, durch jeden beobachteten Werth von $u'-u$ die Gleichung:

$$u'-u-f = 2\alpha \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}f \operatorname{Sin}(u+\tfrac{1}{2}f) - 2\beta \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}f \operatorname{Cos}(u+\tfrac{1}{2}f) + 2\alpha' \operatorname{Sin} f \operatorname{Sin}(2u+f) - 2\beta' \operatorname{Sin} f \operatorname{Cos}(2u+f) + \ldots$$

und aus allen Gleichungen jeder Reihe:

$$\begin{aligned} 10\,\alpha \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}f &= \Sigma(u'-u-f) \operatorname{Sin}(u+\tfrac{1}{2}f) \\ 10\,\beta \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}f &= -\Sigma(u'-u-f) \operatorname{Cos}(u+\tfrac{1}{2}f) \\ 10\,\alpha' \operatorname{Sin} f &= \Sigma(u'-u-f) \operatorname{Sin}(2u+f) \\ 10\,\beta' \operatorname{Sin} f &= -\Sigma(u'-u-f) \operatorname{Cos}(2u+f) \end{aligned}$$

Wendet man dieses auf die erste Reihe der Beobachtungen an, so findet man

$$f = {}^{\mathrm{R}}0{,}497965 = 179°16'{,}04$$

und

$$\begin{aligned} 10\alpha &= {}^{\mathrm{R}} + 0{,}013056 \\ 10\beta &= - 0{,}024874 \\ 0{,}128\,\alpha' &= + 0{,}000147 \\ 0{,}128\,\beta' &= + 0{,}000337 \end{aligned}$$

Die zweite Reihe der Beobachtungen ergiebt

$$f = {}^{\mathrm{R}}0{,}262305 = 94°25'{,}79$$

und

$$\begin{aligned} 7{,}339\,\alpha &= {}^{\mathrm{R}} + 0{,}015915 \\ 7{,}339\,\beta &= - 0{,}016126 \\ 9{,}970\,\alpha' &= - 0{,}004987 \\ 9{,}970\,\beta' &= - 0{,}000576 \end{aligned}$$

Die Verbindung der aus beiden Reihen gezogenen Bestimmungen ergiebt:

$$\begin{aligned} \alpha &= {}^{\mathrm{R}} + 0{,}001608 \\ \beta &= - 0{,}002386 \\ \alpha' &= - 0{,}000499 \\ \beta' &= - 0{,}000057 \end{aligned}$$

oder, die *ausgeglichene* Angabe der Schraubentrommel, zwischen der 55ten und 65ten Windung der Schraube, ist:

$$= u + {}^{\mathrm{R}}0{,}001608 \operatorname{Cos} u - {}^{\mathrm{R}}0{,}002386 \operatorname{Sin} u - {}^{\mathrm{R}}0{,}000499 \operatorname{Cos} 2u - {}^{\mathrm{R}}0{,}000057 \operatorname{Sin} 2u$$

Die Anwendung dieser Formel auf den Anfang und das Ende jeder Messung sollte den Unterschied beider $= f$ ergeben; inwiefern sie dieses wirklich leistet, zeigen die folgenden Verzeichnisse der übrigbleibenden Abweichungen von f:

		1ter Zwischenr.	2ter Zwischenr.
		R	R
Anfang	0 Zehntel	— 0,0007	+ 0,0007
	1 —	— 0,0009	+ 0,0002
	2 —	— 0,0001	+ 0,0012
	3 —	0,0000	+ 0,0007
	4 —	+ 0,0001	— 0,0002
	5 —	+ 0,0009	— 0,0004
	6 —	+ 0,0009	— 0,0007
	7 —	— 0,0001	— 0,0007
	8 —	— 0,0002	— 0,0009
	9 —	+ 0,0002	+ 0,0001

Da diese Unterschiede wohl nicht grösser sind als die Unvollkommenheiten der Messungen, so halte ich die Absicht dieses Theils der Untersuchung der Schraube für erreicht, nämlich die Absicht, den *periodischen* Theil ihrer Ausgleichungen zwischen ihrer 55ten und 65ten Windung kennen zu lernen.

10.

Ich habe schon erwähnt, dass noch vier andere, auch 10 Windungen lange Stellen der Schraube auf ähnliche Art untersucht worden sind. Nachdem ich den ganzen Hergang dieser Untersuchung für Eine solche Stelle, durch Anführung aller seiner einzelnen Momente, anschaulich gemacht habe, glaube ich die Mittheilung der Untersuchungen der übrigen Stellen abkürzen zu dürfen.

Zuerst theile ich die für jedes Zehntel des Umfanges der Schraubentrommel zusammengezogenen Messungen der beiden Zwischenräume mit:

1ter *Zwischenraum:*

		R 15 bis 25	R 35 bis 45	R 55 bis 65	R 75 bis 85	R 95 bis 105
		R	R	R	R	R
Anfang	0 Zehntel	0,50555	0,50225	0,50045	0,50695	0,50620
	1 —	50160	49985	49690	50385	50410
	2 —	49660	49715	49440	50045	50045
	3 —	49585	49420	49240	49640	49670
	4 —	49635	49450	49260	49435	49680
	5 —	49870	49850	49555	49630	49780
	6 —	50150	50135	49905	49955	49995
	7 —	50410	50405	50140	50275	50215
	8 —	50665	50545	50340	50625	50585
	9 —	50745	50565	50350	50630	50740
Mittel .... $f =$		0,501435	0,500295	0,497965	0,501515	0,501740

2ter *Zwischenraum:*

		R	R	R	R	R
Anfang	0 Zehntel	0,25910	0,26610	0,26610	0,26740	0,26720
	1 —	25920	26545	26495	26940	26895
	2 —	25740	26360	26465	26755	26720
	3 —	25485	26055	26160	26355	26435
	4 —	25035	25805	25805	26095	26040
	5 —	24990	25810	25680	25855	25795
	6 —	25325	26155	25850	26025	25905
	7 —	25640	26410	26200	26235	26215
	8 —	25750	26660	26440	26365	26435
	9 —	25875	26720	26600	26640	26700
Mittel .... $f =$		0,255670	0,263070	0,262305	0,264085	0,263860

Ich bemerke hierbei, dass diese Beobachtungen zu verschiedenen Zeiten gemacht worden sind, und dass der Apparat oft von den Schiebern entfernt werden musste, um das Instrument seinen fortlaufenden Anwendungen nicht entziehen zu dürfen. Hierdurch haben die Werthe von f Änderungen erfahren; ihre aus den Messungen hervorgehenden Unterschiede sind ganz oder zum Theil dieser Ursache zuzuschreiben.

Die aus diesen Beobachtungen hervorgehenden Werthe der Coefficienten der Reihenentwickelung von φu sind, für die verschiedenen untersuchten Theile der Schraube:

von 15^R bis 25^R

$10{,}000\,\alpha = +\ 0{,}01711$	$7{,}196\,\alpha = +\ 0{,}01372$	$\alpha = +\ 0{,}001778$
$10{,}000\,\beta = -\ 0{,}02374$	$7{,}196\,\beta = -\ 0{,}01730$	$\beta = -\ 0{,}002384$
$0{,}090\,\alpha' = -\ 0{,}00170$	$9{,}994\,\alpha' = -\ 0{,}00575$	$\alpha' = -\ 0{,}000577$
$0{,}090\,\beta' = -\ 0{,}00377$	$9{,}994\,\beta' = +\ 0{,}00376$	$\beta' = +\ 0{,}000373$

von 35^R bis 45^R

$10{,}000\,\alpha = +\ 0{,}01292$	$7{,}356\,\alpha = +\ 0{,}00886$	$\alpha = +\ 0{,}001263$
$10{,}000\,\beta = -\ 0{,}02469$	$7{,}356\,\beta = -\ 0{,}01995$	$\beta = -\ 0{,}002558$
$0{,}019\,\alpha' = +\ 0{,}00191$	$9{,}966\,\alpha' = -\ 0{,}00372$	$\alpha' = -\ 0{,}000373$
$0{,}019\,\beta' = -\ 0{,}00048$	$9{,}966\,\beta' = +\ 0{,}00206$	$\beta' = +\ 0{,}000207$

von 75^R bis 85^R

$10{,}000\,\alpha = +\ 0{,}02782$	$7{,}376\,\alpha = +\ 0{,}02110$	$\alpha = +\ 0{,}002810$
$10{,}000\,\beta = -\ 0{,}01710$	$7{,}376\,\beta = -\ 0{,}00979$	$\beta = -\ 0{,}001575$
$0{,}095\,\alpha' = +\ 0{,}00105$	$9{,}961\,\alpha' = -\ 0{,}00305$	$\alpha' = -\ 0{,}000305$
$0{,}095\,\beta' = -\ 0{,}00212$	$9{,}961\,\beta' = +\ 0{,}00371$	$\beta' = +\ 0{,}000370$

von 95^R bis 105^R

$10{,}000\,\alpha = +\ 0{,}02271$	$7{,}367\,\alpha = +\ 0{,}02227$	$\alpha = +\ 0{,}002535$
$10{,}000\,\beta = -\ 0{,}01399$	$7{,}367\,\beta = -\ 0{,}01138$	$\beta = -\ 0{,}001450$
$0{,}110\,\alpha' = -\ 0{,}00006$	$9{,}964\,\alpha' = -\ 0{,}00179$	$\alpha' = -\ 0{,}000180$
$0{,}110\,\beta' = -\ 0{,}00238$	$9{,}964\,\beta' = +\ 0{,}00087$	$\beta' = +\ 0{,}000085$

Die periodischen Theile der Ausgleichung der Angaben der Schraubentrommel sind daher:

von 15^R bis 25^R....	$+\ 0{,}001778\ \mathrm{Cos}\,u$	$-\ 0{,}002384\ \mathrm{Sin}\,u$	$-\ 0{,}000577\ \mathrm{Cos}\,2u$	$+\ 0{,}000373\ \mathrm{Sin}\,2u$
„ 35 — 45—..	$+\ 0{,}001263\ \mathrm{Cos}\,u$	$-\ 0{,}002558\ \mathrm{Sin}\,u$	$-\ 0{,}000373\ \mathrm{Cos}\,2u$	$+\ 0{,}000207\ \mathrm{Sin}\,2u$
„ 55 — 65—..	$+\ 0{,}001606\ \mathrm{Cos}\,u$	$-\ 0{,}002386\ \mathrm{Sin}\,u$	$-\ 0{,}000499\ \mathrm{Cos}\,2u$	$-\ 0{,}000057\ \mathrm{Sin}\,2u$
„ 75 — 85—..	$+\ 0{,}002810\ \mathrm{Cos}\,u$	$-\ 0{,}001575\ \mathrm{Sin}\,u$	$-\ 0{,}000305\ \mathrm{Cos}\,2u$	$+\ 0{,}000370\ \mathrm{Sin}\,2u$
„ 95 — 105—..	$+\ 0{,}002535\ \mathrm{Cos}\,u$	$-\ 0{,}001450\ \mathrm{Sin}\,u$	$-\ 0{,}000180\ \mathrm{Cos}\,2u$	$+\ 0{,}000085\ \mathrm{Sin}\,2u$

Obgleich die Coefficienten dieser Formeln hier so wie die Rechnung sie ergeben hat, bis auf 6 Decimalstellen, angeführt sind, so ist doch schon die vierte vielleicht einige Einheiten unsicher. Ein Fehler von $0^s{,}0002$ beträgt auch nur ein Hundertel einer Secunde. — Es ist zwar nicht zu bezweifeln, dass die periodischen Ausgleichungen an den 5 untersuchten Stellen der Schraube, nicht ganz gleiche Werthe

haben; aber dennoch findet ihre schon bemerkte Eigenschaft, in vielen aufeinanderfolgenden Windungen der Schraube nahe gleiche Werthe zu behalten, in den drei ersten Ausdrücken sowohl, als auch in den zwei letzten, eine neue, und in der Ausdehnung über eine so grosse Zahl von Windungen vielleicht nicht erwartete Bestätigung.

Wenn gleichmässiges Steigen der Windungen einer Schraube, in Beziehung auf eine Axe stattfindet, welche der ihrigen nicht parallel ist, so können dadurch die von dem einfachen Drehungswinkel abhängigen Theile der Ausgleichungen erklärt werden; aber auch die Mutter der Schraube muss eine ähnliche Beschaffenheit haben, indem ihre Windungen, wenn sie vollkommen gleichmässig stiegen, stets von *derselben* Stelle der Windungen der Schraube berührt werden würden, und diese sich also, bei der Drehung der Schraube, in einem gleichmässig steigenden Gewinde vorwärts bewegen würde. Eine sich zeigende Ungleichheit der Schraubendrehungen beweiset also Fehler der Schraube selbst *und* ihrer Mutter. — Es ist indessen bei einer gewissen Beschaffenheit der Einrichtung, auch möglich, dass eine Ungleichheit aus der Fläche entsteht, gegen welche die Schraube sich, bei ihrer Drehung, stützt.

Wenn man aus den fünf gefundenen Formeln für φu Nutzen für die Reduction einer Beobachtung ziehen will, so wird man einige Willkür in der Interpolation für Windungen der Schraube, welche nicht unmittelbar untersucht worden sind, nicht vermeiden können. Am einfachsten wäre es, wenn man das arithmetische Mittel aus allen 5 Formeln, nämlich

$$\varphi u = + \overset{R}{0},001999 \operatorname{Cos} u - \overset{R}{0},002071 \operatorname{Sin} u - \overset{R}{0},000387 \operatorname{Cos} 2u + \overset{R}{0},000196 \operatorname{Sin} 2u$$

für die ganze Länge der Schraube anwendete. Um genauer zu erfahren, welchen Erfolg man dadurch erlangen würde, habe ich die 10 einzelnen Reihen der Beobachtungen eben so mit dieser Formel verglichen, wie am Ende des 9ten §'s zwei von ihnen mit der aus diesen selbst abgeleiteten, und gefunden, dass diese Beobachtungen dadurch mit dem mittleren Fehler $= \pm 0'',001145$ dargestellt werden. Ihre Vergleichung mit den fünf, den einzelnen untersuchten Theilen der Schraube zukommenden Formeln, stellt sie mit dem mittleren Fehler

$= \pm 0^{s},000678$ dar; ohne alle Ausgleichung würde ihr m. F. $= \pm 0^{s},00393$ erscheinen.

Diese Untersuchungen der Schraube würden übrigens noch viel weiter fortgesetzt werden müssen, wenn sie so weit getrieben werden sollten, dass die periodische Ausgleichung der Angabe der Schraubentrommel, allenthalben bis auf $0^{s},0002$, oder bis auf etwa ein Hundertel einer Secunde sicher, bekannt würde; was jedoch sehr schwer durchzuführen sein würde. Man kann aber den Beobachtungen eine Anordnung geben, welche ihr Resultat von der periodischen Ausgleichung der Schraube *befreiet* und also die Kenntniss derselben unnöthig macht. Dieses wird geleistet, wenn man ein Mittel aus mehreren Wiederholungen einer Beobachtung nimmt, welche von verschiedenen Angaben der Schraubentrommel anfangen und sich also auch mit ebensoviel verschiedenen endigen. Entfernt man die, während der Beobachtung unverrückt bleibende Objectivhälfte I, $0^{s},25$ von der Heliometeraxe und macht man dann eine Beobachtung, so wie eine zweite in gleich grosser, aber entgegengesetzter Entfernung dieser Objectivhälfte von der Heliometeraxe, so ist das mittlere Resultat beider Beobachtungen offenbar frei von den von α und β abhängigen Theilen der Ausgleichung. Um auch α' und β' aus dem Resultate zu schaffen, muss dieses das Mittel aus wenigstens vier Beobachtungen sein, z. B. aus vier in den Entfernungen der Objectivhälfte I von der Heliometeraxe $= -0^{s},375, -0^{s},125, +0^{s},125, +0^{s},375$ gemachten; oder auch das Mittel aus fünf in den Entfernungen $-0^{s},4, -0^{s},2, 0, +0^{s},2, +0^{s},4$ gemachten. Um diesen Verschiebungen der Objectivhälfte I aus der Heliometeraxe, keinen Einfluss auf den Positionswinkel einzuräumen, kann man dem Oculare dieselben Verschiebungen geben. — Obgleich diese Beobachtungsmethode wesentlich *Wiederholungen* fordert, so glaube ich doch nicht, dass dieses von ihrer Anwendung abhalten wird: wenn man eine so grosse Sicherheit sucht, dass einige Hundertel der Secunde nicht unerheblich erscheinen, muss man ohnehin die Beobachtung wiederholen, und wird dann in der jedesmaligen Verschiebung der Objectivhälfte I keine wesentliche Vermehrung der Mühe sehen. — Ich muss jedoch bemerken, dass ich auf diese Beobachtungsmethode erst später aufmerksam geworden bin und sie also früher nicht angewandt habe.

11.

Ausser den periodischen Ausgleichungen erfordert die Angabe der Schraubentrommel noch andere, welche von nicht vollkommener Gleichheit der Grösse der Windungen, an verschiedenen Stellen der Schraube, herrühren. Ihre sorgfältige Untersuchung ist desto nothwendiger, da ihr Einfluss auf die Messungen mit dem Heliometer, nicht durch eine Anordnung der Beobachtungen vermieden werden kann, wie dieses bei dem Einflusse der periodischen Ausgleichungen möglich ist.

Zur Untersuchung dieses Theils der Ausgleichungen der Schraube habe ich den im 7ten § erwähnten *mikroscopischen* Apparat angewandt, indem er mir bequemer dazu erschien als der andere. Wenn man die beiden Striche dieses Apparats in eine Entfernung J voneinander bringt, die zu untersuchende Schraube der Objectivhälfte II auf einen willkürlichen Anfangspunkt m stellt, dann die Schraube der Objectivhälfte I benutzt, um dadurch das Mikroscop auf den einen der beiden Striche zu bringen, endlich die Schraube von II anwendet, um den anderen Strich unter das Mikroscop zu führen, und ihre Angabe m' abliest, so ist $m' + fm' - m - fm = J$, wenn fm und fm' die Ausgleichungen der Schraube am Anfangspunkte und am Endpunkte der Messung bedeuten. Wenn man dieselbe Beobachtung von anderen Anfangspunkten aus $m_1, m_2, m_3, \ldots$ wiederholt und dadurch auf die Endpunkte $m'_1, m'_2, m'_3, \ldots$ gelangt, so erhält man dadurch

$$J = m' - m + fm' - fm = m'_1 - m_1 + fm'_1 - fm_1 = m'_2 - m_2 + fm'_2 - fm_2 = \text{u. s. w.}$$

also eine Vergleichung der verschiedenen Stellen der Schraube untereinander, welche man so anordnen kann, dass daraus die Werthe der verschiedenen $fm, fm_1, \ldots$ hervorgehen.

Ich habe J nach und nach, nahe $= 10^R, 20^R, 30^R, 40^R, 50^R, 60^R$ gemacht, für $m, m_1, m_2, \ldots$ aber alle die Zehner der Schraubenwindungen genommen, auf welche der Anfang der Messungen verlegt werden konnte, ohne dass ihr Ende über das Ende der Schraube (120^R) hinausging. Um diese Messungen ganz von den periodischen Ausgleichungen zu befreien, habe ich sie nicht allein von einem beabsichtigten Anfangspunkte m, sondern von $m - 0^R,4$, $m - 0^R,2$, m, $m + 0^R,2$, $m + 0^R,4$ anfangen lassen und aus diesen fünf Wiederholungen das Mittel genommen.

Jede der Messungsreihen habe ich, zu verschiedenen Zeiten, zweimal wiederholt. Ich werde diese Messungsreihen jetzt mittheilen.

1. J *nahe* $= 10^R = 10^R + i_1$

Anfang.	Ende. 1te Reihe.	Ende. 2te Reihe.	Mittel.
R	R	R	R
0	10,0154	10,0130	10,0142
10	20,0168	20,0126	20,0147
20	30,0154	30,0108	30,0131
30	40,0122	40,0122	40,0122
40	50,0126	50,0088	50,0107
50	60,0116	60,0098	60,0107
60	70,0110	70,0080	70,0095
70	80,0130	80,0066	80,0098
80	90,0098	90,0034	90,0066
90	100,0074	100,0050	100,0062
100	110,0114	110,0080	110,0097
110	120,0216	120,0094	120,0155

2. J *nahe* $= 20^R = 20^R + i_2$

0	20,0282	20,0278	20,0280
10	30,0302	30,0280	30,0291
20	40,0294	40,0264	40,0279
30	50,0280	50,0244	50,0262
40	60,0288	60,0242	60,0265
50	70,0306	70,0202	70,0254
60	80,0248	80,0186	80,0217
70	90,0226	90,0156	90,0191
80	100,0196	100,0156	100,0176
90	110,0216	110,0172	110,0194
100	120,0288	120,0210	120,0249

3. J *nahe* $= 30^R = 30^R + i_3$

0	30,0516	30,0504	30,0510
10	40,0530	40,0492	40,0511
20	50,0508	50,0496	50,0502
30	60,0476	60,0476	60,0476
40	70,0438	70,0436	70,0437
50	80,0408	80,0410	80,0409
60	90,0372	90,0408	90,0390
70	100,0356	100,0390	100,0373
80	110,0380	110,0398	110,0389
90	120,0434	120,0438	120,0436

4. J nahe $= 40^R = 40^R + i_4$

0	40,0708	40,0706	40,0707
10	50,0700	50,0708	50,0704
20	60,0692	60,0684	60,0688
30	70,0680	70,0642	70,0661
40	80,0634	80,0580	80,0607
50	90,0592	90,0556	90,0574
60	100,0544	100,0526	100,0535
70	110,0534	110,0514	110,0524
80	120,0576	120,0550	120,0563

5. J nahe $= 50^R = 50^R + i_5$

0	50,0940	50,0906	50,0923
10	60,0972	60,0884	60,0928
20	70,0902	70,0844	70,0873
30	80,0862	80,0794	80,0828
40	90,0792	90,0736	90,0764
50	100,0736	100,0670	100,0703
60	110,0732	110,0660	110,0696
70	120,0742	120,0674	120,0708

6. J nahe $= 60^R = 60^R + i_6$

0	60,1080	60,1120	60,1100
10	70,1054	70,1074	70,1064
20	80,1016	80,1014	80,1015
30	90,0928	90,0968	90,0948
40	100,0904	100,0878	100,0891
50	110,0856	110,0842	110,0849
60	120,0844	120,0830	120,0837

12.

Betrachtet man die Ausgleichungen der Angaben der Schraubentrommel, für 0^R, 10^R, 20^R, ... 120^R, als die aus diesen Messungen zu bestimmenden Grössen, so haben die 57, aus ihnen hervorgehenden Gleichungen 19 unbekannte Grössen, nämlich diese 13 und die 6 Werthe von i_1, i_2, ... i_6. Zwei davon kann man aber willkürlich annehmen, indem durch diese Messungen nur das Verhältniss eines willkürlich angenommenen Theils der Schraube zu den übrigen bestimmt werden kann; ich setze demzufolge $f0 = 0$ und $f120 = 0$.

Von den 57 Gleichungen werde ich die sich aus der 4ten Messungsreihe, in welcher $J = 40^R + i_4$ ist, ergebenden, als Beispiel hiehersetzen:

$$
\begin{aligned}
i_4 &= +\ 0{,}6707 + f40 \\
&= +\ 0{,}0704 + f50 - f10 \\
&= +\ 0{,}0688 + f60 - f20 \\
&= +\ 0{,}0661 + f70 - f30 \\
&= +\ 0{,}0607 + f80 - f40 \\
&= +\ 0{,}0574 + f90 - f50 \\
&= +\ 0{,}0535 + f100 - f60 \\
&= +\ 0{,}0524 + f110 - f70 \\
&= +\ 0{,}0563 \qquad - f80
\end{aligned}
$$

Die gehörige Auflösung aller vorhandenen ähnlichen Gleichungen ergiebt:

$$
\begin{aligned}
i_1 &= +\ 0{,}01108 \\
i_2 &= +\ 0{,}02449 \\
i_3 &= +\ 0{,}04515 \\
i_4 &= +\ 0{,}06310 \\
i_5 &= +\ 0{,}08196 \\
i_6 &= +\ 0{,}09776
\end{aligned}
$$

und

	R		R
$f\,0 =$	0,00000	$f\,60 =$	− 0,01070
$f10 =$	− 0,00163	$f\,70 =$	− 0,00925
$f20 =$	− 0,00444	$f\,80 =$	− 0,00694
$f30 =$	− 0,00682	$f\,90 =$	− 0,00349
$f40 =$	− 0,00874	$f100 =$	+ 0,00023
$f50 =$	− 0,00981	$f110 =$	+ 0,00194
$f60 =$	− 0,01070	$f120 =$	0,00000

Mit diesen Werthen der unbekannten Grössen stimmen die 57 Gleichungen, einzeln, folgendermassen überein:

Zwischenraum ..	10^R	20^R	30^R	40^R	50^R	60^R
	+ 0,0015	− 0,0009	− 0,0010	− 0,0011	+ 0,0005	+ 0,0015
	+ 0,0008	− 0,0006	− 0,0012	− 0,0009	+ 0,0018	+ 0,0010
	− 0,0004	− 0,0009	− 0,0003	− 0,0006	+ 0,0005	+ 0,0012
	− 0,0008	− 0,0013	− 0,0014	+ 0,0006	+ 0,0007	+ 0,0004
	− 0,0014	+ 0,0001	− 0,0020	− 0,0006	− 0,0003	+ 0,0003
	− 0,0013	+ 0,0015	− 0,0014	+ 0,0006	− 0,0016	− 0,0011
	− 0,0001	+ 0,0010	+ 0,0011	+ 0,0013	+ 0,0003	− 0,0034
	+ 0,0010	+ 0,0004	+ 0,0016	+ 0,0005	− 0,0020	
	− 0,0010	+ 0,0003	+ 0,0026	+ 0,0001		
	− 0,0012	+ 0,0003	+ 0,0019			
	+ 0,0005	+ 0,0002				
	+ 0,0025					

Die Aufmerksamkeit, welche ich auf diese Messungen verwandt habe, liess mich eine grössere Übereinstimmung erwarten. Allein schon während ihres Verlaufes wurden fremde Einwirkungen bemerkbar, deren Ursache ich zum Theil in einem Einflusse der Körperwärme des Beobachters auf das Mikroscop und die Entfernung der beiden Striche suche, zum Theil aber auch in Fettigkeit und Staub, welche sich zwischen die Schraube und ihre Mutter setzen. Ich erwähne dieser kleinen Unterschiede hier, weniger weil ich fürchtete, dass sie eine erhebliche Unsicherheit der Bestimmung der gesuchten Ausgleichungen zur Folge hätten, als um darauf aufmerksam zu machen, dass es wesentlich ist, die Schraube stets möglichst rein und mit unverdicktem Oele versehen, zu erhalten. Wenn man dieses vernachlässigt, so können, nach meiner Erfahrung, Fehler erzeugt werden, welche bis auf mehrere Tausentel einer Schraubenwindung steigen.

Die Beobachtungsmethode, welche ich befolge, lässt die Objectivhälfte I unverrückt und bringt also die Objectivhälfte II in entgegengesetzte, gleich grosse Entfernungen von der Heliometeraxe. In dieser befindet sich ihr optischer Mittelpunkt, wenn die Schraube 60^R angiebt; der Index ist stets so gesetzt worden, dass dieses sehr nahe stattfand. Man kann daher aus den angegebenen Werthen der Ausgleichungen, die bei allen vollständigen Beobachtungen anzuwendenden ableiten, nämlich, wenn die Entfernung, in Schraubenwindungen ausgedrückt, durch F bezeichnet wird, ist die ihrer Messung hinzuzusetzende Ausgleichung

$$= \tfrac{1}{2} f(60+F) - \tfrac{1}{2} f(60-F)$$

Die Werthe dieser Grösse für $F=0$, 10^R, 20^R, ... 60^R, gehen aus den schon angegebenen Werthen von $f0$, $f10$, $f20$, u. s. w. folgendermassen hervor:

Entfernung	Ausgleichung. R
0^R	0,00000
10	+ 0,00028
20	+ 0,00090
30	+ 0,00166
40	+ 0,00233
50	+ 0,00179
60	0,00000

13.

Die ferneren, auf das Messen der Entfernungen bezüglichen Untersuchungen, welche ich mitzutheilen habe, berühren mehr oder weniger die *dioptrische Wirkung* des Objectivglases des Heliometers und fordern daher, dass ich das Königsberger Instrument auf einige Zeit verlasse, um diejenigen allgemeinen Betrachtungen über *Dioptrik* zu verfolgen, welche ich später auf dieses Instrument anwenden muss.

Ich werde zuerst die trigonometrischen Formeln anführen, welche einen Strahl, in seinem Durchgange durch eine beliebige Anzahl Glaslinsen verfolgen, deren Krümmungsmittelpunkte sich auf einer geraden Linie — ihrer gemeinschaftlichen Axe — befinden. Der Strahl wird in einer durch diese Axe gehenden Ebene angenommen. Ich werde folgende Bezeichnungen anwenden. Die Halbmesser der Krümmung der ersten und zweiten Fläche der Linsen r, ϱ; r_1, ϱ_1; r_2, ϱ_2,...; die Dicken der Gläser, in der Axe gemessen, d, d_1, d_2,...; die Entfernungen der einander nächsten Flächen der Linsen e, e_1, e_2, ...; die Brechungsverhältnisse der Glasarten woraus die verschiedenen Linsen gemacht sind, $n:1$, $n_1:1$, $n_2:1$, ... Die den verschiedenen Linsen zugehörigen r betrachte ich als positiv oder negativ, jenachdem ihre ersten Flächen convex oder concav sind; die ϱ aber als positiv oder negativ, jenachdem die zweiten Flächen concav oder convex sind; oder, was dasselbe ist, ich betrachte die r sowohl, als auch die ϱ, als positiv, wenn die Mittelpunkte der Krümmung der Flächen, wozu sie gehören, von diesen aus nach Innen liegen; als negativ wenn sie nach Aussen liegen.

Ein Strahl macht, vor seinem Eintritte in die erste Fläche der ersten Linse den Winkel w mit der Axe, im Inneren der Linse den Winkel v, nach seinem Austritte den Winkel ω. Er durchschneidet die Axe vor seinem Eintritte in der Entfernung a von der ersten Fläche; wenn er sich im Inneren der Linse befindet in der Entfernung b von dieser, oder β $(=b-d)$ von der zweiten Fläche; nach seinem Austritte in der Entfernung α von der letzteren. Er trifft die erste Fläche an einem Punkte, zwischen welchem und der Axe, an dem Mittelpunkte ihrer Krümmung, der Winkel t liegt; die zweite an dem Punkte dem der, ähnlich zu verstehende Winkel τ zugehört. Ich

betrachte a, b, β, α als positiv, wenn die durch sie bestimmten Punkte, von den betreffenden Glasflächen aus, nach Innen liegen, welche Richtung auch für r und ϱ als die positive angenommen worden ist.

Diesen Bezeichnungen zufolge, ergeben sich alle Umstände des Durchganges des Strahls durch die erste Linse, aus den Formeln:

$$\left.\begin{array}{l} r\ \mathrm{Sin}\,(t-w) = (a-r)\ \mathrm{Sin}\,w \\ n\ \mathrm{Sin}\,(t-v) = \mathrm{Sin}\,(t-w) \\ (b-r)\ \mathrm{Sin}\,v = r\ \mathrm{Sin}\,(t-v);\ \beta = b-d \\ \varrho\ \mathrm{Sin}\,(\tau-v) = (\beta-\varrho)\ \mathrm{Sin}\,v \\ \mathrm{Sin}\,(\tau-\omega) = n\ \mathrm{Sin}\,(\tau-v) \\ (\alpha-\varrho)\ \mathrm{Sin}\,\omega = \varrho\ \mathrm{Sin}\,(\tau-\omega) \end{array}\right\} \quad (A)$$

Wenn zwei der in der ersten Formel vorkommenden Grössen a, t, w gegeben sind, so bestimmt diese Formel die dritte; dann giebt die zweite Formel v, die 3te b, die 4te τ, die 5te ω, die 6te α. Offenbar wiederholen sich diese Formeln für eine zweite Linse, für welche nur die Zeichen $r_{,}$, $a_{,}$, $t_{,}$, $w_{,}$, ... angewandt werden, und zu welcher der Übergang von der ersten durch die Annahmen

$$a_{,} = \alpha - e,\ w_{,} = \omega$$

stattfindet. Man kann dieselben Formeln auch für eine dritte Linse anwenden wenn man r_2, a_2, t_2, w_2... schreibt und

$$e_2 = a_{,} - e_{,},\ w_2 = \omega_{,}$$

annimmt. — Auf diese Art sind die Formeln auch für jede Anzahl von Linsen anwendbar.

14.

Eine besondere Betrachtung verdient der Fall, in welchem die Winkel t, w, v, τ, ω als *unendlich klein* angenommen, oder ihre Quadrate u. s. w. vernachlässigt werden sollen. Wenn man ihn voraussetzt, verwandeln die Formeln (A) sich in:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n}{b} = \frac{1}{a} + \frac{n-1}{r};\ rt = aw = bv;\ \beta = b-d \\ \frac{n}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{n-1}{\varrho};\ \varrho\tau = \alpha\omega = \beta v \end{array}\right\} \quad (B)$$

Geht derselbe Strahl durch eine zweite Linse, so hat man für diese:

$$\left.\begin{aligned} a_{,} &= \alpha - e,\ w_{,} = \omega \\ \frac{n_{,}}{b_{,}} &= \frac{1}{a_{,}} + \frac{n_{,}-1}{r_{,}};\ r_{,}t_{,} = a_{,}w_{,} = b_{,}v_{,};\ \beta_{,} = b_{,} - d_{,} \\ \frac{n_{,}}{\beta_{,}} &= \frac{1}{\alpha_{,}} + \frac{n_{,}-1}{\varrho_{,}};\ \varrho_{,}\tau_{,} = \alpha_{,}\omega_{,} = \beta_{,}v_{,} \end{aligned}\right\} \quad (\mathfrak{B}_{,})$$

so wie ähnliche Formeln für alle folgenden Linsen, durch welche er geht.

Aus der Combination des zweiten Theils dieser Formeln für die $i+1$ ersten Linsen erhält man unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned} w_i &= w\ M_i \\ r_i\ t_i &= w\ M_i a_i \\ v_i &= w\ M_i \frac{a_i}{b_i} \\ \varrho_i\ \tau_i &= w\ M_i \frac{a_i \beta_i}{b_i} \\ \omega_i &= w\ M_i \frac{a_i \beta_i}{\alpha_i\ b_i} \end{aligned}\right\} \quad (\mathfrak{C})$$

wo M_i für

$$\frac{a \,.\, a_{,} \,.\, \ldots \,.\, a_{i-1}}{\alpha \,.\, \alpha_{,} \,.\, \ldots \,.\, \alpha_{i-1}} \cdot \frac{\beta \,.\, \beta_{,} \,.\, \ldots \,.\, \beta_{i-1}}{b \,.\, b_{,} \,.\, \ldots \,.\, b_{i-1}}$$

gesetzt worden ist. Es geht hieraus hervor, dass die Grössen $a, a_1, a_2 \ldots$; $b, b_1, b_2 \ldots$; $\beta, \beta_1, \beta_2 \ldots$; $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$. auch sämmtliche Winkel des Strahls mit der Axe, also seinen Weg vollständig bestimmen. Auch für den Fall, in welchem a unendlich gross und w unendlich klein ist, braucht man keine anderen Formeln, indem die dann stattfindende scheinbare Unbestimmtheit der vorigen verschwindet, wenn man rt für aw schreibt. Ich habe also nur zweckmässige Ausdrücke jener Grössen aufzusuchen. Aus den Gleichungen

$$\frac{n_i}{\beta_i} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{n_i - 1}{\varrho_i}$$

$$\frac{n_i}{b_i} = \frac{1}{a_i} + \frac{n_i - 1}{r_i}$$

folgt:

$$\alpha_i = \frac{1}{\frac{1-n_i}{\varrho_i} + \frac{n_i}{\beta_i}}$$

und da $\beta_i = -d_i + b_i$ ist

$$\frac{n_i}{\beta_i} = \frac{1}{\frac{-d_i}{n_i}} + \frac{b_i}{n_i};$$

ferner

$$\frac{b_i}{n_i} = \frac{1}{\frac{n_i - 1}{r_i}} + \frac{1}{a_i}$$

und da $a_i = -e_{i-1} + \alpha_{i-1}$ ist

$$\frac{1}{a_i} = \frac{1}{-e_{i-1}} + \alpha_{i-1}$$

Für die i^{te} Linse hat man offenbar die ähnlichen Ausdrücke:

$$\alpha_{i-1} = \frac{1}{\frac{1-n_{i-1}}{\varrho_{i-1}}} + \frac{n_{i-1}}{\beta_{i-1}}$$

$$\frac{n_{i-1}}{\beta_{i-1}} = \frac{1}{\frac{-d_{i-1}}{n_{i-1}}} + \frac{b_{i-1}}{n_{i-1}}$$

$$\frac{b_{i-1}}{n_{i-1}} = \frac{1}{\frac{n_{i-1}-1}{r_{i-1}}} + \frac{1}{a_{i-1}}$$

$$\frac{1}{a_{i-1}} = \frac{1}{-e_{i-2}} + \alpha_{i-2}$$

und wieder die ähnlichen, für jede vorhergehende Linse. Schreibt man also den Kettenbruch:

$$\frac{1}{\frac{1-n_i}{\varrho_i}} + \frac{1}{\frac{-d_i}{n_i}} + \frac{1}{\frac{n_i-1}{r_i}} + \frac{1}{-e_{i-1}} + \frac{1}{\frac{1-n_{i-1}}{\varrho_{i-1}}} + \frac{1}{\frac{-d_{i-1}}{n_{i-1}}} + \cdots$$

$$\cdots\cdots + \frac{1}{\frac{1-n}{\varrho}} + \frac{1}{\frac{-d}{n}} + \frac{1}{\frac{n-1}{r}} + \frac{1}{a} \qquad (\mathfrak{D})$$

so drückt er, ganz genommen, die Grösse α_i aus; trennt man von ihm sein erstes Glied, so drücken die übrigbleibenden $\frac{n_i}{\beta_i}$ aus; die nach der Absonderung seiner zwei ersten Glieder übrigbleibenden sind $= \frac{b_i}{n_i}$; lässt man drei Glieder weg so erhält man $\frac{1}{\alpha_i}$; die Weglassung von vier Gliedern ergiebt α_{i-1}, u. s. w. — Dieser Kettenbruch enthält daher Alles was zur Kenntniss des Weges eines Strahls durch ein beliebiges System von Glaslinsen erforderlich ist. Er ist der *einfachste* Ausdruck, welchen man dafür geben kann, denn er enthält jede zur Construction des Linsensystems erforderliche Grösse *nur einmal*. Den grossen Nutzen der Kettenbrüche in dieser Art von Untersuchungen hat Herr Professor *Möbius*, in zwei schönen Abhandlungen, welche im 5ten und 6ten Bande von *Crelles* Journal für reine und angewandte Mathematik erschienen sind, verfolgt. Er hat mir kaum etwas hinzuzusetzen übrig gelassen; allein er zieht nur die Brennweiten der Linsen in Betracht, während es mir wesentlich erschienen ist, ihre beiden Krümmungen, ihre Dicken und ihre Entfernungen voneinander, ganz scharf in Rechnung zu bringen. Nur wenn dieses geschieht, kann die Theorie mit schon ausgeführten optischen Instrumenten vergleichbar, oder auch die Grundlage neuer Constructionen werden.

15.

Wenn das System, durch welches der Strahl geht, aus $i+1$ Linsen besteht, hat der Kettenbruch $4i+4$ Glieder, welche aus $2i+2$ Krümmungshalbmessern, $i+1$ Dicken, i Entfernungen der Linsen und der Grösse a entstehen. Ich werde ihn jetzt durch

$$[4i+3, a] = \frac{1}{(4i+3)} + \frac{1}{(4i+2)} + \frac{1}{(4i+1)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(2)} + \frac{1}{(1)} + \frac{1}{a}$$

bezeichnen. Die hier eingeführten Bezeichnungen bedeuten also:

$$(1) = \frac{n-1}{r} \quad (5) = \frac{n_1-1}{r_1} \ldots\ldots\ldots (4i+1) = \frac{n_i-1}{r_i}$$
$$(2) = -\frac{d}{n} \quad (6) = -\frac{d_1}{n_1} \ldots\ldots\ldots (4i+2) = -\frac{d_i}{n_i}$$
$$(3) = \frac{1-n}{\varrho} \quad (7) = \frac{1-n_1}{\varrho_1} \ldots\ldots\ldots (4i+3) = \frac{1-n_i}{\varrho_i}$$
$$(4) = -e \quad (8) = -e_1 \ldots\ldots\ldots$$

und man hat, dem vorigen § zufolge:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_i = [4i+3, a]; \ \frac{n_i}{\beta_i} = [4i+2, a]; \ \frac{b_i}{n_i} = [4i+1, a]; \ \frac{1}{a_i} = [4i, a] \\ \alpha_{i-1} = [4i-1, a]; \ \frac{n_{i-1}}{\beta_{i-1}} = [4i-2, a]; \ \frac{b_{i-1}}{n_{i-1}} = [4i-3, a]; \ \frac{1}{a_{i-1}} = [4i-4, a] \\ \text{u. s. w.} \\ \alpha = [3, a] \ ; \ \frac{n}{\beta} = [2, a] \ ; \ \frac{b}{n} = [1, a] \end{array}\right\} (\mathfrak{E})$$

Wenn $p, q, r, \ldots. z$ beliebige Grössen bedeuten und man unter (p), (pq), (pr) u. s. w. folgende Grössen versteht:

$$(p) = p$$
$$(p,q) = q\,(p) + 1$$
$$(p,r) = r\,(pq) + (p)$$
$$(p,s) = s\,(pr) + (pq)$$
u. s. w.

so ist der Kettenbruch:

$$[p,z] = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \ldots. \ldots. + \frac{1}{z}$$

durch diese neuen Bezeichnungen ausgedrückt, bekanntlich:

$$[p,z] = \frac{(q,z)}{(p,z)}$$

Auch kann man die Reihefolge der Elemente, aus welchen eine der so bezeichneten Grössen zusammengesetzt ist, nicht nur umkehren, sondern auch jede in Beziehung auf ihre Mitte symmetrische Versetzung mit ihnen vornehmen, ohne dass die daraus zusammengesetzte

Grösse dadurch geändert wird. Man erhält, zum Beispiele, einen und denselben Werth von (ps) aus den vier Reihefolgen

$$pqrs,\ prqs,\ sqrp,\ srqp$$

oder einen und denselben von (pt) aus den folgenden:

$$pqrst,\ psrqt,\ tqrsp,\ tsrqp.$$

Der Grund hiervon ist eine offenbare Folge der Art der Zusammensetzung dieser Grössen.

Führt man diese Bezeichnungen in die Formeln (E) ein, und bemerkt man, dass das Product der vier Ausdrücke jeder Zeile:

$$\frac{\alpha_i\, b_i}{a_i\, \beta_i} = [4i+3, a]\,[4i+2, a]\,[4i+1, a]\,[4i, a]$$

ist, so erhält man

$$\frac{\alpha_i\, b_i}{a_i\, \beta_i} = \frac{(4i-1, a)}{(4i+3, a)}$$

und durch die Substitution dieses Ausdrucks in die Formeln (C):

$$\left.\begin{aligned} w_i &= (4i-1, a)\, w \\ r_i\, t_i &= (4i\ \ \ , a)\, w \\ n_i\, v_i &= (4i+1, a)\, w \\ \varrho_i\, \tau_i &= (4i+2, a)\, w \\ \omega_i &= (4i+3, a)\, w \end{aligned}\right\} \text{(F)}$$

Wenn a unendlich gross und w unendlich klein ist, werden diese Formeln scheinbar unbestimmt, was jedoch aufhört wenn rt für aw gesetzt wird. Die Einführung derselben Bezeichnungen in die Formeln (E) verwandelt sie in:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a_i} &= \frac{(4i-1, a)}{(4i, a)} \\ b_i &= \frac{(4i, a)}{(4i+1, a)}\, n_i \\ \frac{1}{\beta_i} &= \frac{(4i+1, a)}{(4i+2, a)}\, \frac{1}{n_i} \\ \alpha_i &= \frac{(4i+2, a)}{(4i+3, a)} \end{aligned}\right\} \text{(G)}$$

Durch diese beiden Systeme von Formeln ist Alles gegeben, was man von dem Wege des Strahls sowohl im Inneren des Linsensystems, als ausserhalb desselben, zu wissen wünschen kann. Die Producte $r_i t_i$

und $\varrho_i \sigma_i$ drücken die Entfernungen von der Axe aus, in welchen der Strahl die beiden Flächen der $i+1^{\text{ten}}$ Linse trifft; wodurch man, indem man $i=0, 1, 2, 3, \ldots$ annimmt, diese Entfernungen für alle Flächen des Systems erhält. — Will man nur den Weg des einfallenden Strahls mit seinem Wege nach seinem Ausgange aus dem Linsensysteme vergleichen, ohne seinen Weg im Inneren zu berücksichtigen, so hat man *nur* mit den Ausdrücken von ω_i und α_i zu thun. Aus diesen werde ich jetzt einige Folgerungen ziehen.

16.

Bestimmt man einen Punkt in dem Strahle, nach seinem Durchgange durch die letzte Linsenfläche, durch die von dieser Fläche an gezählte Abscisse ξ und die auf die Axe bezogene Ordinate η, so hat man

$$\eta = (\alpha_i - \xi)\,\omega_i = \left\{(4i+2, a) - \xi\,(4i+3, a)\right\} w$$

oder, wenn man

$$(4i+2, a) = a\,(4i+2, 1) + (4i+2, 2)$$
$$(4i+3, a) = a\,(4i+3, 1) + (4i+3, 2)$$

substituirt und sich erinnert, dass $aw = rt$ ist,

$$\eta = \left\{(4i+2, 1) - \xi\,(4i+3, 1)\right\} rt + \left\{(4i+2, 2) - \xi\,(4i+3, 2)\right\} w \ldots\ldots \text{(II)}$$

Wenn *parallele* Strahlen einfallen, so ist w für alle gleich, aber t hat für jeden von ihnen einen anderen Werth. Trotz dieser Verschiedenheit giebt es einen Punkt, in welchem alle diese Strahlen, nach ihrem Durchgange durch das Linsensystem sich durchkreuzen. Er wird durch die Bedingung des Verschwindens des in das veränderliche t multiplicirten Gliedes des Ausdruckes von η bestimmt, nämlich durch die beiden Gleichungen:

$$0 = (4i+2, 1) - \xi\,(4i+3, 1)$$
$$\eta = \left\{(4i+2, 2) - \xi\,(4i+3, 2)\right\} w$$

Man erlangt dadurch die Werthe von ξ und η, welche zu dem *Vereinigungspunkte paralleler Strahlen* gehören, nämlich:

$$\xi = \frac{(4i+2, 1)}{(4i+3, 1)}$$
$$\eta = \frac{(4i+3, 1)\,(4i+2, 2) - (4i+3, 2)\,(4i+2, 1)}{(4i+3, 1)}\, w$$

Allein der letzte Ausdruck kann in

$$\eta = \frac{-w}{(4i+3, 1)}$$

vereinfacht werden. Denn man hat zwischen den Grössen, welche unter den eingeführten Bezeichnungen verstanden werden, die bekannte, allgemeine Relation

$$(1, n)(2, n-1) - (2, n)(1, n-1) = (n, 1)(n-1, 2) - (n, 2)(n-1, 1) = (-1)^n$$

welche, da der Zähler des Ausdruckes von η, $4i+3$ statt n enthält, ihn $= -1$ ergiebt. Damit der Vereinigungspunkt *wirklich* vorhanden sei, ist erforderlich, dass ξ einen endlichen, positiven Werth habe.

Ziehet man von dem jetzt bestimmten Vereinigungspunkte paralleler Strahlen eine ihnen parallele Linie, so trifft sie die Axe an einem Punkte, dessen Entfernung von der letzten Linsenfläche ich durch γ bezeichnen werde; zur Bestimmung dieses Punkts hat man

$$\gamma = \xi + \frac{\eta}{w} = \frac{(4i+2, 1) - 1}{(4i+3, 1)} \ldots\ldots\ldots (J)$$

Dieser Punkt, welcher von w unabhängig ist, ist der *optische Mittelpunkt* des Linsensystems; der Punkt, wo gerade Linien sich durchkreuzen, welche correspondirende Punkte eines unendlich entfernten Gegenstandes und seines Bildes mit einander verbinden. Allgemein zu reden hat jedes Linsensystem *zwei* ähnliche Punkte; nämlich einen für jede der beiden Richtungen, in welchen parallele Strahlen in kleinen Winkeln mit der Axe einfallen können. Um die Entfernung c des zweiten dieser Punkte von der ersten Fläche der ersten Linse zu bestimmen, werde ich die Entfernung des Vereinigungspunktes der in der zweiten Richtung einfallenden parallelen Strahlen, von derselben Fläche, durch $-x$, seine Entfernung von der Axe durch y bezeichnen, welche Grössen die den obigen analogen Ausdrücke:

$$-x = \frac{(2, 4i+3)}{(1, 4i+3)}$$

$$y = \frac{-w}{(1, 4i+3)}$$

haben, und wodurch man

$$c = x - \frac{y}{w} = \frac{-(2, 4i+3)+1}{(1, 4i+3)} = \frac{-(4i+3, 2)+1}{(4i+3, 1)} \ldots\ldots (K)$$

erhält.

Die Entfernungen dieser beiden optischen Mittelpunkte des Linsensystems von den Vereinigungspunkten paraller Strahlen, wozu sie gehören, sind

$$\xi - \gamma = \frac{1}{(4i+3,1)}, \quad -x+c = \frac{1}{(4i+3,1)}$$

also einander gleich. Ich werde diese gleichen Entfernungen die *Brennweite* des Linsensystems nennen und sie durch f bezeichnen. Wenn es nur auf die Vergleichung der Wege eines Strahls vor seinem Einfallen und nach seinem Ausgehen ankommt, so ist dazu *keine weitere* Kenntniss der Construction des Linsensystems erforderlich, als die von f, c, γ. Man hat nämlich (G):

$$\alpha_i = \frac{(4i+2,a)}{(4i+3,a)} = \frac{a(4i+2,1)+(4i+2,2)}{a(4i+3,1)+(4i+3,2)}$$

und

$$(4i+3,1)(4i+2,2) - (4i+3,2)(4i+2,1) = -1$$

Wenn man $(4i+2,2)$ durch die letzte Gleichung aus der ersten wegschafft, so wird diese

$$\alpha_i = \frac{(4i+2,1)\{a(4i+3,1) + (4i+3,2)\} - 1}{(4i+3,1)\{a(4i+3,1) + (4i+3,2)\}}$$

oder

$$\left(\alpha_i - \frac{(4i+2,1)}{(4i+3,1)}\right)\left(a + \frac{(4i+3,2)}{(4i+3,1)}\right) = -\frac{1}{(4i+3,1)^2}$$

Setzt man darin, für die von der Construction des Linsensystems abhängigen Grössen, ihre Ausdrücke durch f, c, γ, nämlich:

$$\frac{1}{(4i+3,1)} = f$$
$$\frac{(4i+3,2)}{(4i+3,1)} = f-c$$
$$\frac{(4i+2,1)}{(4i+3,1)} = f+\gamma$$

so werwandelt sie sich in

$$(\alpha_i - \gamma - f)(a - c + f) = -ff$$

und wenn man $-ff$ auf beiden Seiten weglässt und durch $f(\alpha_i - \gamma)(a-c)$ dividirt, in

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{c-a} + \frac{1}{\alpha_i - \gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(L)}$$

Diesen schönen Satz hat Herr Professor *Möbius* gegeben. Seine obige Ableitung zeigt, dass er durch die vollständige Berücksichtigung aller Elemente der Construction des Linsensystems nichts von seiner Einfachheit verliert.

17.

Ich kehre wieder zu dem Königsberger Heliometer zurück, nachdem ich die zu seiner weiteren Untersuchung erforderliche Theorie in den vier letzten Paragraphen auseinandergesetzt habe. — Zunächst werde ich die Relation zwischen der durch die Schraube gemessenen Entfernung einer Objectivhälfte von der Heliometeraxe und dem ihr entsprechenden Winkel untersuchen.

Ich habe schon bemerkt (Abh. I. §. 15), dass die Entfernung des optischen Mittelpunkts der Objectivhälfte von der Heliometeraxe und die *Tangente* des Winkels zwischen dieser Axe und dem in ihr abgebildeten Punkte desHimmels, ein constantes Verhältniss haben würden, wenn die Objectivhälfte unendlich entfernte Gegenstände vollkommen richtig abbildete; zugleich aber habe ich den Grund angegeben, welcher die vollkommene Richtigkeit des Bildes solcher Gegenstände unmöglich macht und also eine genauere Untersuchung seiner Beschaffenheit fordert. Diese werde ich aus den Elementen der Construction des Objectivglases des Heliometers abzuleiten suchen.

Von dem Optischen Institute in München, in welchem das Glas noch zu *Fraunhofers* Zeit verfertigt wurde, sind mir die Elemente seiner Construction folgendermassen angegeben worden:

$$\left.\begin{array}{rr} r \ldots\ldots & +838{,}164 \\ d \ldots\ldots & 6{,}000 \\ \varrho \ldots\ldots & -333{,}768 \end{array}\right\} n = 1{,}529130;$$

$$\sigma \ldots\ldots \quad 0{,}000 \qquad dn : dn_1 = 1 : 2{,}025$$

$$\left.\begin{array}{rr} r_1 \ldots\ldots & -340{,}536 \\ d_1 \ldots\ldots & 4{,}000 \\ \varrho_1 \ldots\ldots & -1172{,}508 \end{array}\right\} n_1 = 1{,}639121;$$

Hieraus folgen, nach den Bezeichnungen des 15ten §'s:

$$(1) = \frac{n-1}{r}; \text{ Log } (1) = 6{,}8002333{,}8$$

$$(2) = \frac{-d}{n}; \text{ Log } (2) = 0{,}5937068{,}4\,n$$

$$(3) = \frac{1-n}{\varrho}; \text{ Log } (3) = 7{,}2001176{,}8$$

$$(4) = -e; \text{ Log } (4) = -\infty$$

$$(5) = \frac{n_{,}-1}{r_{,}}; \text{ Log } (5) = 7{,}2734200{,}7\,n$$

$$(6) = \frac{-d_{,}}{n_{,}}; \text{ Log } (6) = 0{,}3874489{,}9\,n$$

$$(7) = \frac{1-n_{,}}{\varrho_{,}}; \text{ Log } (7) = 6{,}7364672{,}8$$

und ferner, durch eine Rechnung, welche man durch die Hülfe der Logarithmentafeln von *Matthiessen* vorzüglich leicht führt

Log (1) = 6,8002334	Log (7) = 6,7364673
— (1,2) = 9,9989229	— (7,6) = 9,9994219
— (1,3) = 7,3449210	— (7,5) = 7,1235980 *n*
— (1,4) = 9,9989229	— (7,4) = 9,9994219
— (1,5) = 6,5321583	— (7,3) = 6,4048167
— (1,6) = 9,9985609	— (7,2) = 9,9989884
— (1,7) = 6,9463628	— (7,1) = 6,9463627

Nimmt man das Mittel aus den durch beide Rechnungen gegebenen Werthen von (1,7) und (7,1), welche übereinstimmen sollten, so erhält man dadurch

$$f = \frac{1}{(1,7)} = \frac{1}{(7,1)} = 1131{,}4548^{L};$$

ferner erhält man (§. 16. *J* und *K*)

$$\epsilon = \frac{-(7,2)+1}{(1,7)} = +\ 2{,}6323$$

$$\gamma = \frac{(1,6)-1}{(1,7)} = -\ 3{,}7430$$

Der durch *f* bestimmte Vereinigungspunkt der Axe paralleler Strahlen ist aber (unter der Voraussetzung der Richtigkeit der zu seiner Berechnung angewandten Werthe der Elemente) nur dann der dem Objective wirklich zugehörige, wenn dieses alle, parallel mit seiner Axe, auf seine ganze Oberfläche fallenden Strahlen in demselben Punkte vereinigt, in welchem die der Axe unendlich nahe einfallenden vereinigt

werden. Um den dem ganzen Objective entsprechenden Werth von f zu finden, muss man die Entfernungen von dem durch γ bestimmten Punkte suchen, in welchen Strahlen die Axe treffen, die parallel mit ihr, in verschiedenen Entfernungen von ihr, von dem Mittelpunkte bis zum Rande des Objectivs, in dieses einfallen; wenn diese Entfernungen aus den Formeln A (§. 13) hervorgegangen sind, muss man den Punkt der Axe aus ihnen ableiten, wo das Licht *am meisten zusammengedrängt* ist, welcher Punkt als der Brennpunkt des Objectivs anzunehmen ist.

Das Objectiv hat 70,2 Linien Öffnung, woraus der seinem Rande entsprechende Werthe von t (§. 13):

$$r \sin t = 35{,}1; \quad t = 2°24{,}0$$

hervorgeht. Nimmt man der Axe parallele Strahlen an, welche auf Punkte des Objectivs auffallen, welchen die Werthe von $t = 0$, $36'$, $72'$, $108'$, $144'$ zugehören, so findet man durch die Formeln A, dass sie, nach erlittenen Brechungen, die Axe in folgenden Entfernungen (ξ) von dem optischen Mittelpunkte durchschneiden:

$t =$	$0'$	$\xi =$ 1131,4548 L
	$36'$	4489
	$72'$	4388
	$108'$	4254
	$144'$	4087

Da hieraus hervorgeht, dass alle der Axe parallel einfallende Strahlen wirklich nicht in einem Punkte zusammentreffen, muss der Ableitung des Brennpunkts die Erklärung vorangehen, was unter der *grössten Zusammendrängung* des Lichts verstanden werden soll. Ich halte jedoch diese Erklärung für *willkürlich*, indem ich glaube, dass ein Beobachter das Ocular eines Fernrohrs nicht nach einem Principe dessen er sich deutlich bewusst wäre, sondern nach einem mehr oder weniger unbestimmten Gefühle, in die das beste Sehen gewährende Entfernung von dem Objective bringen wird. Ich halte für das Plausibelste, die grösste Zusammendrängung des Lichts auf einer die Axe senkrecht durchschneidenden Ebene *da* anzunehmen, wo das Product der auf jeden Punkt fallenden Lichtmenge und des Quadrats seiner Entfernung

von der Axe, ein *Minimum* wird. — Ein um den Mittelpunkt des Objectivs gelegter Ring, dessen beiden Grenzkreisen t und $t+dt$ zugehören, empfängt die Lichtmenge $2\pi r r \operatorname{Cos} t \operatorname{Sin} t\, dt$; wenn er sie in der Entfernung ξ von dem optischen Mittelpunkte in die Axe bringt, so ist sie, in einer anderen Entfernung α, in einem Ringe enthalten, dessen Halbmesser $(\xi-\alpha)\operatorname{Tang}\omega$ ist, wenn ω den Winkel bedeutet, in welchem die Strahlen die Axe durchschneiden. Der Annahme zufolge muss also α so bestimmt werden, dass das von $t=0$ bis $t=144'$ genommene Integral

$$2\pi r r \int (\xi-\alpha)^2 \operatorname{Tang}\omega^2 \operatorname{Cos} t \operatorname{Sin} t\, dt$$

ein Minimum wird, was durch

$$\alpha = \frac{\int \xi \operatorname{Tang}\omega^2 \operatorname{Cos} t \operatorname{Sin} t\, dt}{\int \operatorname{Tang}\omega^2 \operatorname{Cos} t \operatorname{Sin} t\, dt}$$

geleistet wird.

Wendet man dieses auf die mitgetheilten Werthe von ξ an, setzt man, der Rechnung woraus sie hervorgegangen sind zufolge,

$$\omega = 0;\ 26'40''{,}066;\ 53'19''{,}945;\ 79'59''{,}445;\ 106'38''{,}361$$

und sucht man die Integrale durch die 4te der *Cotesischen* Formeln:

$$\tfrac{1}{90}\left\{7R + 32R' + 12R'' + 32R''' + 7R^{\text{IV}}\right\}$$

so findet man für α, oder die Brennweite des *ganzen* Objectivs, welche ich jetzt durch f, bezeichnen werde, den Werth

$$f, = 1131^{\text{L}}{,}4216.$$

Dass die angegebene Construction des Objectivs alle Strahlen nicht genau in einen Punkt vereinigt und daher f, von f um $0^{\text{L}}{,}0332$ verschieden ist, muss übrigens von einer kleinen Ungenauigkeit der Rechnung herrühren, durch welche *Fraunhofer* die Elemente der Construction bestimmt hat, falls er nicht etwa die Absicht verfolgt hat, *andere* Strahlen des Farbenspectrums, als die worauf die angegebenen Werthe von n und n, sich beziehen, zur vollkommenen Vereinigung zu bringen.

18.

Nachdem der Brennpunkt des Objectivs bestimmt worden ist, kann das Bild näher untersucht werden, welches durch dasselbe, von einem

leuchtenden, unendlich entfernten, *ausser* seiner Axe liegenden Punkte, auf einer die Axe im Brennpunkte senkrecht durchschneidenden Ebene entworfen wird. Will man die Wirkung des Objectivs vollständig kennen lernen, so muss man nicht nur die Figur dieses Bildes und seine Lichtstärke an jedem Punkte, sondern auch die Entfernung von der Axe aufsuchen, in welcher derjenige seiner Punkte erscheint, den man zum Gegenstande der Messungen macht.

Theilt man das Objectiv in unendlich viele, um seinen Mittelpunkt beschriebene Ringe, so muss das Licht, welches jeder dieser Ringe von dem leuchtenden Punkte empfängt, auf der die Axe im Brennpunkte senkrecht durchschneidenden Ebene den Raum erleuchten, welcher zwischen zwei, einander unendlich nahen, geschlossenen Curven liegt, deren eine der inneren Grenze des Ringes, die andere der äusseren entspricht. Die Curve, welche diese, von allen Ringen des Objectivs herrührenden, erleuchteten Räume einschliesst, ist die Figur des Bildes des Punkts auf der Ebene — die Figur, in welcher das Ocular den Punkt zeigt. — Die Formeln *A* §. 13 sind aber nicht hinreichend zur Grundlage der Bestimmung der Figur der Curven, deren Zwischenraum jeder Ring des Objectivs erleuchtet; denn sie beruhen auf der Voraussetzung, dass durch den einfallenden Strahl und die Axe eine Ebene gelegt werden könne, und können also nur zur Bestimmung der beiden Punkte jeder dieser Curven angewandt werden, welche in der durch die Axe und den leuchtenden Punkt gehenden Ebene liegen. Es hat zwar keine Schwierigkeit, Formeln zu entwerfen, welche nicht voraussetzen, dass der einfallende Strahl in einer durch die Axe gehenden Ebene liege; allein ich halte die Ausdehnung der Rechnungen auf von anderen Strahlen erzeugte Punkte jeder Curve für unnöthig, da die in dieser Ebene einfallenden die beiden *Grenzen* der Ausdehnung der Curve bestimmen, und nur diese zur Beurtheilung der Entfernung von der Axe erforderlich sind, in welcher das von ihr herrührende Bild erscheint.

Hat man nämlich diese beiden Grenzen für jeden Ring des Objectivs gefunden, so kann die dem ganzen Ringe entsprechende Curve als eine Ellipse angesehen werden, deren eine Axe die Entfernung dieser Grenzen ist und deren andere Axe unbestimmt bleiben kann, indem nur die Ausdehnung des Bildes des leuchtenden Punkts nach

beiden Seiten der dasselbe symmetrisch theilenden Ebene davon abhängt. In Beziehung auf die *Entfernung* des von jedem Ringe des Objectivs gewährten Bildes von seiner Axe, mag man sich vorstellen, dass die zweite Axe der Ellipse verschwinde, oder dass alles in ihr enthaltene Licht in der allein in Betracht kommenden Ebene liege.

Für der Axe parallel einfallende Strahlen, oder für $w=o$, liegt das Bild des Punktes von welchem sie kommen, offenbar in der Axe. Die Annahmen $w=24'$ und $w=48'$ sind aber durch die Formeln A verfolgt worden und haben für $t=-144', -108', -72', \ldots +108', +144'$ die Zahlen ergeben, welche ich hier mittheilen werde:

	t	η L		t	η L
$w=24'$	−144′	7,90803	$w=48'$	−144′	15,82254
	−108	90421		−108	81401
	− 72	90154		− 72	80731
	− 36	89983		− 36	80223
	0	89894		0	79864
	+ 36	89872		+ 36	79639
	+ 72	89901		+ 72	79532
	+108	89965		+108	79526
	+144	90048		+144	79602

Diese Zahlen sind die Entfernungen von der Axe, in welchen die, mit beiden Werthen von w, auf verschiedene Punkte des Objectivs auffallenden Strahlen die Bildfläche treffen. Man sieht aus ihren nicht unbeträchtlichen Änderungen, dass die *Undeutlichkeit* des Bildes, für grössere Entfernungen des leuchtenden Punkts von der Axe keinesweges unbedeutend ist: unter den Werthen von η für $w=24'$ findet sich ein Unterschied von $0^L,00931$; für $w=48'$ ein Unterschied von $0^L,02728$; diese Unterschiede zeigen, dass ein $24'$ von der Axe entfernter Punkt 1,″7, ein $48'$ entfernter 5,″1 gross abgebildet wird.

19.

Wenn man aus den berechneten Werthen von η Nutzen für die Ableitung der Resultate von Messungen ziehen will, so muss man wissen, *welcher* Punkt des undeutlichen Bildes der Gegenstand der Messung ist. — Ein Fernrohr, dessen Objectiv, oder Ocular, in einer auf der Axe senkrechten Ebene verschoben werden kann, gewährt

eine Anschauung der Beschaffenheit dieses undeutlichen Bildes; — ich habe der einen oder der anderen dieser Verschiebungen am Heliometer, oft eine solche Grösse gegeben, dass das Licht von einem Fixsterne sich über einen Raum zerstreuet zeigte, dessen Ausdehnung hinreichend war, die Art seiner Vertheilung anschaulich zu machen. Dadurch bin ich veranlasst worden, zu glauben, dass ein Beobachter den Fixstern nicht leicht in eine andere Entfernung von der Axe versetzen wird, als in die, in welcher das *meiste* Licht von ihm erscheint. Ich werde indessen *zwei* Hypothesen über den Punkt des Bildes, welcher der Gegenstand der Messung ist, verfolgen; nämlich die Hypothese I, welche den *Schwerpunkt* alles Lichts dafür annimmt, und die Hypothese II, die ich eben erwähnt habe.

Die Verfolgung der Hypothese I fordert sehr wenige Rechnung. Der Schwerpunkt des von jedem Ringe des Objectivs auf die Bildfläche geworfenen Lichts liegt in einer Entfernung von der Axe, welche die halbe Summe der beiden, den entgegengesetzten Punkten des Ringes zugehörigen Werthe von η ist; ich werde sie durch (η) bezeichnen. Seine Beschwerung durch Licht ist dem Producte $\mathrm{Cos}\,t\,\mathrm{Sin}\,t$, oder $\mathrm{Sin}\,2t$ proportional (§. 17). Man hat also die Entfernung des Schwerpunkts alles Lichts von der Axe:

$$y = \frac{\int (\eta)\,\mathrm{Sin}\,2t\,.\,dt}{\int \mathrm{Sin}\,2t\,.\,dt}$$

wo die Integrale von $t = o$ bis zu dem der äusseren Grenze des Objectivs zugehörigen Werthe T von t zu nehmen sind. Das obere derselben wird durch die 4te *Cotesische* Formel, das untere auf gewöhnliche Art gesucht.

Die *zweite* Hypothese, die Bestimmung der Entfernung von der Axe, in welche das meiste Licht fällt, fordert mehr Rechnung, deren Theorie ich erläutern werde. Der Ring des Objectivs, dessen beide Grenzkreise durch t und $t + dt$ gegeben sind, erleuchtet auf der Bildfläche den Raum zwischen zwei, einander unendlich nahen Ellipsen, deren eine Axe sich von dem zu $-t$ gehörigen Werthe von η, bis zu dem zu $+t$ gehörigen erstreckt, welche beide Werthe ich durch η und η_1 $(> \eta)$ bezeichnen werde. Dieser erleuchtete Raum enthält alles Licht, welches der Ring des Objectivs durchgehen lässt, also eine $\pi\,\mathrm{Sin}\,2t\,dt$ proportionale Quantität desselben; davon liegt zwischen

zwei Entfernungen β und $\beta+d\beta$ von der Axe, welche beide $> \eta$ und $< \eta_,$ sind,

$$\frac{\text{Sin } 2t\ dt\ d\beta}{\sqrt{(\eta_,-\beta)(\beta-\eta)}};$$

oder die Lichtstärke in der Entfernung β, insofern sie von dem betrachteten Ringe herrührt, ist

$$\frac{\text{Sin } 2t\ dt}{\sqrt{(\eta_,-\beta)(\beta-\eta)}}$$

und also die von dem ganzen Objective erzeugte:

$$J = \int \frac{\text{Sin } 2t\ .\ dt}{\sqrt{(\eta_,-\beta)(\beta-\eta)}}$$

welches Integral von dem kleinsten positiven Werthe von t für welchen es reel wird, bis zu dem grössten für welchen es aufhört reel zu sein, oder, wenn dieser über den Grenzwerth T hinausgehen sollte, bis zu diesem genommen wird.

Durch die Differenzen der 9 angeführten Werthe von η bemerkt man leicht, dass sie sowohl für $w = 24'$, als auch für $w = 48'$, sich durch ganze, rationale Functionen von t vom dritten Grade sehr nahe darstellen lassen. In der That kommt der Ausdruck

$$\eta = a - bt + ct^2 - dt^3$$

wenn der Zwischenraum von 36′ als Einheit von t angenommen wird und wenn

für w	$\underbrace{24'}_{\text{L}}$	$\underbrace{48'}_{\text{L}}$
a	7,8989424	15,7986448
b	0,0005258	0,0028850
c	0,0003321	0,0006652
d	0,00002617 ...	0,0000270

gesetzt werden, ihnen so nahe, dass für $w = 24'$ kein Unterschied eine Einheit, und für $w = 48'$ keiner zwei Einheiten der 5ten Decimale beträgt. Ich werde ihn daher statt der Zahlenwerthe der verschiedenen η anwenden, indem ich dadurch den Vortheil erlange, die Integration analytisch, ohne Quadraturen, ausführen zu können.

Aus jedem der Ausdrücke, sowohl aus dem für $w = 24'$, als aus dem für $w = 48'$ geltenden, folgt ein *Minimum* von η, wenn

$$t_{,} = + 0{,}8840 \ldots\ldots\ldots + 2{,}5710$$

ist, und ein *Maximum*, wenn

$$t_{,,} = + 7{,}7589 \ldots\ldots\ldots + 13{,}8536$$

ist; die Werthe dieser Minima und Maxima von η sind:

$$\begin{array}{ll} {}^{L}7{,}898719 \ldots\ldots\ldots & {}^{L}15{,}795166 \\ 7{,}902641 \ldots\ldots\ldots & 15{,}81456 \end{array}$$

Wenn β *zwischen* diesen beiden Grenzen von η liegt, so hat daher die cubische Gleichung

$$\beta = a - b\tau + c\tau^2 - d\tau^3$$

drei reelle Wurzeln, wovon eine kleiner als $t_{,}$, eine zwischen $t_{,}$ und $t_{,,}$, und eine grösser als $t_{,,}$ ist. Da $t_{,,}$ schon grösser ist als der dem Rande des Objectivs entsprechende Werth von t (nämlich $T=4$), so geht die dritte Wurzel noch mehr über diesen Werth hinaus. Ich bezeichne sie durch $\tau_{,,,}$, die beiden anderen durch $\tau_{,}$ und τ.

Da die Ausdrücke von $\eta_{,} - \beta$ und $\beta - \eta$ resp.

$$\begin{array}{l} b(t+\tau) + c(t^2-\tau^2) + d(t^3+\tau^3) \\ b(t-\tau) - c(t^2-\tau^2) + d(t^3-\tau^3) \end{array}$$

sind, so haben diese Grössen resp. die Factoren $t+\tau$ und $t-\tau$; und da man eben so erkennt, dass sie auch die Factoren $t+\tau_{,}$ und $t-\tau_{,}$, so wie auch $t+\tau_{,,}$ und $t-\tau_{,,}$ haben, so sind sie:

$$\begin{array}{l} \eta_{,} - \beta = d(t+\tau)(t+\tau_{,})(t+\tau_{,,}) \\ \beta - \eta = d(t-\tau)(t-\tau_{,})(t-\tau_{,,}) \end{array}$$

Wenn man den constanten Factor d weglässt, indem es nur auf die *Vergleichung* der Werthe von J für verschiedene Werthe von β ankommt, auch $2t$ für $\mathrm{Sin}\,2t$ schreibt, was ohne erheblichen Fehler geschehen kann, so wird also

$$J = \int \frac{2t\,dt}{\sqrt{(t^2-\tau^2)(t^2-\tau_{,}^2)(t^2-\tau_{,,}^2)}}$$

Indessen ist t^2 immer kleiner als $\tau_{,,}^2$ und daher für alle Werthe von t, für welche der Nenner reel ist, einer der beiden anderen Factoren negativ, der andere positiv, wesshalb es zweckmässig ist, das Integral

$$J = \int \frac{2t\,dt}{\sqrt{(-\tau^2\tau_{,}^2 + (\tau^2+\tau_{,}^2)t^2 - t^4)(\tau_{,,}^2-t^2)}}$$

oder

$$J = \int \frac{2t\,dt}{\sqrt{\left(\left(\frac{\tau_,^2-\tau^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{\tau_,^2+\tau^2}{2} - t^2\right)^2\right)(\tau_{,,}^2 - t^2)}}$$

zu schreiben. Setzt man

$$\frac{\tau_,^2+\tau^2}{2} - t^2 = \frac{\tau_,^2-\tau^2}{2}\,\mathrm{Cos}\,2u$$

also auch

$$t\,dt = (\tau_,^2-\tau^2)\,\mathrm{Sin}\,2u\,du$$

so wird

$$J = \int \frac{2\,du}{\sqrt{\{(\tau_{,,}^2-\tau^2)\,\mathrm{Cos}\,u^2 + (\tau_{,,}^2-\tau_,^2)\,\mathrm{Sin}\,u^2\}}}$$

Versteht man unter $\tau_,^2$ das grössere, unter τ^2 das kleinere dieser beiden Quadrate, so folgt aus dem Ausdrucke von Cos $2u$:

$$\mathrm{Cos}\,u^2 = \frac{\tau_,^2-t^2}{\tau_,^2-\tau^2}, \quad \mathrm{Sin}\,u^2 = \frac{t^2-\tau^2}{\tau_,^2-\tau^2}$$

Wenn $\tau_,^2$ und folglich auch τ^2 kleiner ist als T^2, so kann t^2 alle Werthe zwischen τ^2 und $\tau_,^2$ haben ohne dass u aufhört reel zu sein: in diesem Falle ist also das Integral von $u=0$ bis $u=\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen. Wenn aber $\tau_,^2$ grösser ist als T^2, so ist seine erste Grenze $u=0$, die andere wird durch die Formeln

$$\mathrm{Cos}\,u = \sqrt{\frac{\tau_,^2-T^2}{\tau_,^2-\tau^2}}, \quad \mathrm{Sin}\,u = \sqrt{\frac{T^2-\tau^2}{\tau_,^2-\tau^2}}, \quad \mathrm{Tang}\,u = \sqrt{\frac{T^2-\tau^2}{\tau_,^2-T^2}}$$

gegeben. Die Mittel, die Integration, welche J erfordert auszuführen, haben bekanntlich durch die Bemühungen von *Legendre*, *Gauss* und *Jacobi* um die elliptischen Transcendenten, die äusserste Einfachheit erhalten.

So wie hierdurch der Fall beseitigt werden kann, in welchem der Punkt des Bildes, dessen Lichtstärke man sucht, zwischen dem *Minimo* und dem *Maximo* von η liegt, so sollte auch noch der Fall verfolgt werden, in welchem β kleiner ist als das erstere, oder grösser als das letztere. In diesem Falle hat die cubische Gleichung

$$\beta = a - b\tau + c\tau^2 - d\tau^3$$

offenbar nur eine reele Wurzel. Nicht allein der Wunsch, den hier

zu suchenden Vorschriften Vollständigkeit zu geben, sondern auch das Vorkommen dieses Falles bei dem Objective des Königsberger Heliometers, könnte seine Verfolgung rechtfertigen; denn die im vorigen § angeführten Werthe von η zeigen, dass diese Grösse für $w = 24'$ zweimal und für $w = 48'$ einmal über das *Maximum* hinausgeht. Allein zwischen dem Maximo und diesen darüber hinausgehenden Werthen ist die Lichtstärke des undeutlichen Bildes schon so klein, dass ihre Berechnung kein Interesse mehr hat, wenn dieses nur in der Bestimmung des Werthes von β gesucht wird, auf welchen die *grösste* fällt. Ich glaube daher, die Verfolgung des erwähnten Falles hier sparen zu müssen.

20.

Ich muss nun beide, im vorigen § verfolgte Hypothesen, für das Objectiv des Königsberger Heliometers durchführen.

Die *erste*, welche die Bestimmung der Entfernung des Schwerpunkts des über das undeutliche Bild vertheilten Lichts von der Axe fordert, kann auf die schon angedeutete Art, durch die Anwendung einer der Cotesischen Formeln, beseitigt werden, oder auch, wenn man in den y ausdrückenden Integralen $2t$ für Sin $2t$ schreiben will, durch die Anwendung der im vorigen § gegebenen Ausdrücke von η. Diese ergeben nämlich

$$(\eta) = a + ctt$$

und damit

$$y = a + \tfrac{1}{2} c\, T^2 = a + 8c$$

Beide Wege führen zu Resultaten, welche in der 6ten Decimalstelle noch nicht verschieden sind, nämlich zu:

$$w = 24' \ldots\ldots y = \overset{L}{7{,}901599}$$
$$w = 48' \ldots\ldots y = 15{,}803967$$

Die *zweite* Hypothese fordert zuerst die Aufsuchung der drei Wurzeln der Gleichung:

$$\beta = a - b\tau + c\tau^2 - d\tau^3$$

in welcher β die Entfernung von der Axe bedeutet, für welche man

J kennen lernen will. In dem verfolgten Falle, in welchem sie drei reelle Wurzeln hat, werden diese durch die Formeln:

$$k = \frac{2}{3d}\sqrt{(cc-3bd)}$$

$$\sin\varphi = \frac{-2c^3+9bcd+27dd(\beta-a)}{2(cc-3bd)^{\frac{3}{2}}} = l+\lambda(\beta-$$

$$\tau, \tau_{,}, \tau_{,,} = \frac{c}{3d} + k\sin\tfrac{1}{3}\varphi$$

gefunden, wo, wenn φ kleiner als 90° genommen wird, statt $\frac{1}{3}\varphi$ die drei Werthe $\frac{1}{3}\varphi$, $\frac{1}{3}\varphi+120^\circ$, $\frac{1}{3}\varphi+240^\circ$ anzuwenden sind. Die Substitution der schon mitgetheilten Werthe von a, b, c, d verwandelt diese Formeln in:

$w =$	$\underbrace{24'}$	.....	$\underbrace{48'}$
$a =$	7,8989424	.....	15,7986448
$\log\lambda =$	2,707575	.....	2,013447
$\sin\varphi =$	$-0{,}88608+\lambda(\beta-a)$	...	$-0{,}64114+\lambda(\beta-a)$
$\log k =$	0,825561	.....	1,052416
$\tau, \tau_{,}, \tau_{,,} =$	$4{,}23003+k\sin\frac{1}{3}\varphi$	.	$8{,}21235+k\sin\frac{1}{3}\varphi$

Wenn zwei der hierdurch gefundenen Wurzeln der Gleichung (τ und $\tau_{,}$), zwischen $-T$ und $+T$, d. h. zwischen -4 und $+4$ liegen, so hat man, der bekannten *Gaussischen* Vorschrift zur Berechnung des Zahlenwerths einer vollständigen elliptischen Transcendente der ersten Gattung zufolge:

$$J = \frac{\pi}{\mu}$$

wo μ die Grenze ist, welcher sich $m^{(i)}$ und $n^{(i)}$ desto mehr nähern, je weiter die Reihe

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{(\tau_{,,}^2-\tau^2)} & n &= \sqrt{(\tau_{,,}^2-\tau_{,}^2)} \\ m' &= \tfrac{1}{2}(m+n) & n' &= \sqrt{mn} \\ m'' &= \tfrac{1}{2}(m'+n') & n'' &= \sqrt{m'n'} \end{aligned}$$

u. s. w.

fortgesetzt wird. Wenn dagegen nur eine der Wurzeln der Gleichung (τ) zwischen -4 und $+4$ liegt, so ist *)

*) *Jacobi*, Fundamenta nova theoriae Funct. Ellipt. Regiomonti 1829. Pag. 97.

$$J = \frac{2U}{\mu}$$

wenn

$$m = V(\tau_{,,}^2 - \tau^2);\ n = V(\tau_{,,}^2 - \tau_{,}^2);\ \Delta = V(\tau_{,,}^2 - T^2)$$

$$\Delta' = V\left(mm'\,\frac{\Delta+n}{\Delta+m}\right);\ \Delta' = V\left(m'm''\,\frac{\Delta'+n'}{\Delta'+m'}\right);\ \text{u. s. w.}$$

$$\text{Tang } U = \frac{\Delta'}{m} \cdot \frac{\Delta''}{m'} \cdot \frac{\Delta'''}{m''} \cdots V\frac{T^2-\tau^2}{\tau_{,}^2-T^2}$$

bedeuten.

Nach diesen Formeln habe ich einige Werthe von J berechnet, welche hinreichen werden die Vertheilung des Lichts über das undeutliche Bild eines Fixsterns in so weit kennen zu lehren, als es hier erforderlich ist. Für $w = 24'$ gehören zusammen:

$\beta = {}^{L}$	$J =$	
7,898719	0,28824 ...	Minimum von β
7,899599	0,30388	
7,900479	0,32488 ...	Maximum der Lichtstärke.
7,901560	0,17610	
7,902641	0,16198 ...	Maximum von β

Für $w = 48'$

$\beta = {}^{L}$	$J =$	
15,795166	0,16257 ...	Minimum von β
15,796020	0,16402 ...	Maximum der Lichtstärke.
15,796500	0,11925	
15,797000	0,10551	
15,799000	0,08106	
15,801000	0,06866	
15,803000	0,05985	
15,805000	0,05292	
15,814560	0,02843 ...	Maximum von β

Man sieht hieraus, wie etwa die undeutlichen Bilder beschaffen sind: von dem Minimo von β bis zu dem Maximo der Lichtstärke, ändert diese sich sehr wenig; dann nimmt sie schnell, aber stetig ab und wird bald so viel kleiner, dass das Auge ihre Abnahme nicht unbemerkt lassen kann. Ich glaube, dass die geringe Zunahme der Lichtstärke zwischen dem Minimo von β und ihrem Maximo, nicht *wahrgenommen* werden kann, oder dass der kleine Raum in welchem sie stattfindet (für $w = 24'$ nur $0^{L},00176 = 0,''32$, für $w = 48'$ nur $0^{L},000854 = 0,''16$) gleichmässig beleuchtet gesehen wird; allein obgleich man, durch die scheinbar gleichmässige Beleuchtung dieses hellsten Raums veranlasst werden könnte, das Bild des Sterns in seiner Mitte liegend anzunehmen,

und obgleich diese Annahme sich auch würde rechtfertigen lassen, wenn das Licht für grössere Werthe von β *plötzlich* abnähme, so meine ich doch, dass diese Bemerkung eine Abweichung von der Hypothese, dass man den Stern in die Entfernung von der Heliometeraxe versetzt, in welcher das meiste Licht erscheint, nicht rechtfertigen kann: denn wenn auch das Licht in grösseren Entfernungen von ihr schneller abnimmt als es zugenommen hat, so ist diese Abnahme doch stetig, und der schwächer erleuchtete Raum wird seinen Eindruck auf das Auge auch durch seine grössere Ausdehnung verstärken. Ich werde daher die Hypothese *rein* durchführen oder annehmen:

$$\text{für } w = 24' \ldots\ldots y = \overset{L}{7{,}900479}$$
$$w = 48' \ldots\ldots y = 15{,}796020$$

21.

Will man aus den gefundenen Werthen von y die Gesetze ableiten, welche diese Entfernungen und die ihnen entsprechenden Winkel, in beiden Hypothesen, miteinander verbinden, so muss man vorher das jeder von ihnen angemessene *Centrum der Winkel*, so wie es für das ganze Objectiv ist, aufsuchen. Für Strahlen, welche dem Mittelpunkte des Objectivs unendlich nahe einfallen, ist dieses Centrum der Winkel der oben schon durch γ bestimmte Punkt, von welchem auch die Entfernung der Bildfläche gezählt worden ist; aber wenn das *ganze* Objectiv parallele, in einem unendlichkleinen Winkel mit seiner Axe einfallende Strahlen nicht genau in einem Punkte vereinigt, also der Ort des Bildes nicht unbedingt, sondern nur in Folge einer Erklärung über den Punkt, der für das Bild angenommen werden soll, bekannt wird, hängt das Centrum der Winkel von dieser Erklärung ab; denn immer ist es der Punkt, wo die Axe des Objectivs von der geraden Linie durchschnitten wird, welche von dem Bilde aus, den einfallenden Strahlen parallel gelegt wird. Ich werde es, den beiden verfolgten Hypothesen angemessen aufsuchen.

Wenn man die Entfernungen von der Axe, in welchen ein ihr parallel einfallender und ein den unendlichkleinen Winkel w mit ihr machender Strahl die Bildfläche treffen, für einen angenommenen Werth von t, durch η_0 und η bezeichnet, so wie beide für den gleich

grossen, aber entgegengesetzt genommenen Werth von t durch $-\eta_0$ und η_1, so hat man

$$\eta = \eta_0 + w\,\psi t$$
$$\eta_1 = -\eta_0 + w\,\psi t$$

wo ψt den in Beziehung auf w genommenen Differentialquotienten von η, für den Fall $w = o$ bedeutet. Hieraus folgt die halbe Summe beider η, oder, nach der früheren Bezeichnung (§. 19),

$$(\eta) = w\,\psi t$$

und also in der Hypothese I, welche das Bild des um den Winkel w von der Axe entfernten Punkts dahin versetzt, wo der Schwerpunkt alles Lichts auf der Bildfläche liegt,

$$y = w\,\frac{\int \psi t \,.\, \mathrm{Sin}\,2t\; dt}{\int \mathrm{Sin}\,2t\; dt}$$

Wenn man den Quotienten der beiden Integrale durch $-f_2$ bezeichnet, so ist f_2 offenbar die dem ganzen Objective, der Hypothese I zufolge entsprechende Brennweite.

Die Hypothese II versetzt das Bild eines Punkts dahin, wo die Helligkeit des von ihm erleuchteten Raums der Bildfläche am grössten ist. Wenn er sich in der Axe befindet, so erleuchtet ein um den Mittelpunkt des Objectivs gelegter Ring, dessen beiden Grenzkreisen t und $t+dt$ zugehören, einen kreisförmigen Ring auf der Bildfläche, dessen Halbmesser η_0 ist; die im 17ten §. mitgetheilten Zahlen ergeben die Werthe von $\eta_0 = (\xi - \alpha)\,\mathrm{Tang}\,w$:

für $t = 0$	$\eta_0 =$	$0{,}000000^{\mathrm{L}} =$	$0''{,}000$
$36'$	$+$	$0{,}000212 =$	$+0{,}039$
$72'$	$+$	$0{,}000267 =$	$+0{,}049$
$108'$	$+$	$0{,}000088 =$	$+0{,}016$
$144'$	$-$	$0{,}000400 =$	$-0{,}073$

Machen die Richtungen des leuchtenden Punkts und der Axe einen Winkel w miteinander, der so klein ist, dass sein Cubus nicht in Betracht kommt, so werden dadurch Grösse und Figur der erleuchteten Ringe nicht geändert, aber der vorher in der Axe liegende Mittelpunkt des zu t gehörigen Ringes erhält die Entfernung $w\,\psi t$ von ihr. Die Ringe sind aber so klein, dass man sie gewiss nicht als Ringe, sondern nur als erleuchtete Punkte würde sehen können, selbst wenn

jeder ihrer stetigen Reihefolge nicht in andere eingriffe und die zahlreichen vorhandenen Ursachen fehlten, welche zur Folge haben, dass das wirkliche Bild der Rechnung nicht genau entspricht. Das Bild zeigt sich also als eine erleuchtete *Linie*, deren hellster Punkt der Hypothese gemäss, aufzusuchen ist. — Ein zu t gehöriger Punkt dieser Linie empfängt das Licht von dem Ringe des Objectivs, dessen Grenzkreisen t und $t+dt$ zugehören, also eine $\mathrm{Sin}\,2t\,.\,dt$ proportionale Menge desselben; da seine Entfernung von der Axe $(\eta)=w\psi t$ ist und sie sich um $w\,d\psi t$ ändert, wenn t um dt geändert wird, so ist die angegebene Lichtmenge über den Raum $w\,d\psi t$ vertheilt oder die Lichtstärke der Linie an dem zu t gehörigen Punkte ist

$$\frac{\mathrm{Sin}\,2t}{\frac{d\psi t}{dt}}$$

proportional. Wenn man den Werth von t, für welchen dieser Ausdruck seinen *grössten* Werth erhält, durch τ bezeichnet, so ist, der Hypothese II zufolge,

$$y = w\psi\tau,$$

oder $f_2 = -\psi\tau$ die dem ganzen Objective entsprechende Brennweite.

Die Bestimmung von f_2 in der einen oder der anderen Hypothese setzt also die Werthe von ψt als bekannt voraus. Man findet sie durch Differentiirung der auf beide Linsen des Objectivs angewandten Formeln A (§ 13). Hat man dadurch $d\omega_1$ und $d\alpha_1$ gefunden, so erhält man

$$\frac{d\eta}{dw} = \frac{d(\alpha_1 - f_1 - \gamma)\,\mathrm{Tang}\,\omega_1}{dw} = \frac{d\alpha_1}{dw}\,\mathrm{Tang}\,\omega_1 + \frac{\alpha_1 - f_1 - \gamma}{\mathrm{Cos}\,\omega_1^{\,2}}\,\frac{d\omega_1}{dw}$$

und der Werth hiervon, für $w=0$ genommen, ist der gesuchte von ψt. Wenn man aus den sich unmittelbar ergebenden Differentialen der Formeln A, die Differentiale $db = d\beta$, $d\alpha = da$, eliminirt, erhält man:

$$\begin{aligned}
d(t-w) &= m\,.\,dw + m'\,\frac{da_1\,\mathrm{Tang}\,w}{a-r}\\
d(t-v) &= n\,d(t-w)\\
d(\tau-v) &= o\,d(t-v) + o'\,.\,dv\\
d(\tau-\omega) &= p\,d(\tau-v)\\
d(t_1-w_1) &= q\,d(t-\omega) + q'\,.\,d\omega
\end{aligned}$$

$$d(t_i - v_i) = n_i\, d(t_i - w_i)$$
$$d(\tau_i - v_i) = o_i\, d(t_i - v_i) + o_i'\, dp_i$$
$$d(\tau_i - \omega_i) = p_i\, d(\tau_i - v_i)$$
$$d\alpha_i \operatorname{Tang}\omega_i = \frac{\varrho_i \operatorname{Cos}(\tau_i - \omega_i)}{\operatorname{Cos}\omega_i}\, d(\tau_i - \omega_i) - (\alpha_i - \varrho_i)\, d\omega_i$$

und die Ausdrücke der hier eingeführten Grössen sind:

$$m = \frac{(a-r)\operatorname{Cos} w}{r \operatorname{Cos}(t-w)}$$
$$n = \frac{\operatorname{Cos}(t-w)}{n \operatorname{Cos}(t-v)}$$
$$o = \frac{r \operatorname{Cos}(t-v)}{\varrho \operatorname{Cos}(\tau - v)} \qquad o' = \frac{r - \varrho - d}{\varrho} \frac{\operatorname{Cos} v}{\operatorname{Cos}(\tau - v)}$$
$$p = \frac{n \operatorname{Cos}(\tau - v)}{\operatorname{Cos}(\tau - \omega)}$$
$$q = \frac{\varrho \operatorname{Cos}(\tau - \omega)}{r_i \operatorname{Cos}(t_i - w_i)} \qquad q' = \frac{(\varrho - r_i + e)}{r_i} \frac{1}{\operatorname{Cos}(t_i - w_i)}$$
$$n_i = \frac{\operatorname{Cos}(t_i - w_i)}{n_i \operatorname{Cos}(t_i - v_i)}$$
$$o_i = \frac{r_i \operatorname{Cos}(t_i - v_i)}{\varrho_i \operatorname{Cos}(\tau_i - v_i)} \qquad o_i' = \frac{r_i - \varrho_i - d_i}{\varrho_i} \frac{\operatorname{Cos} v_i}{\operatorname{Cos}(\tau_i - v_i)}$$
$$p_i = \frac{n_i \operatorname{Cos}(\tau_i - v_i)}{\operatorname{Cos}(\tau_i - \omega_i)}$$

Die erste Formel, wodurch dt bestimmt werden soll, gebraucht man hier nicht, da nur der Einfluss untersucht werden soll, welchen eine Änderung von w auf den Weg eines Strahls äussert, der an einem bestimmten Punkte des Objectivs einfällt; in den folgenden Formeln ist also auch $dt = 0$ anzunehmen. Die Winkel und Vereinigungsweiten, von welchen m, n, o... abhängen, sind schon durch die Berechnung des Durchganges der Axe paralleler Strahlen, deren Resultate ich § 17 mitgetheilt habe, bekannt geworden; ich habe also die folgenden Werthe von ψt leicht genug finden können:

$t =$	$\psi t =$
0′	−1131,4216
36′	−1131,4665
72′	−1131,5994
108′	−1131,8204
144′	−1132,1290

In der Hypothese I erhält man hieraus, der dafür angegebenen Formel gemäss, $f_2 = 1131{,}7760$. Die Hypothese II setzt $\frac{d\psi t}{dt}$

als bekannt voraus. Ich finde, dass die eben mitgetheilten Werthe von ψt sich durch die Formel

$$-\psi t = 1131{,}42156 + 0{,}00098\,t + 0{,}043975\,tt$$

darstellen lassen, in welcher 36′ zur Einheit von t genommen ist, welcher Formel zufolge

$$\frac{d\psi t}{dt} = -\,0{,}00098 - 0{,}08795\,t$$

ist. Diese Grösse ist so nahe t proportional, dass die Lichtstärke der erleuchteten Linie, an ihrem t entsprechenden Punkte, nämlich

$$\frac{\sin 2t}{\frac{d\psi t}{dt}}$$

als eine beständige Grösse angesehen werden kann. Diese Linie erscheint also gleichmässig erleuchtet; man sieht den leuchtenden Punkt in ihrer Mitte, oder man hat

$$\psi\tau = \tfrac{1}{2}\left\{\psi 0 + \psi T\right\} = -\,1131{,}7753^{L}$$

In der Hypothese II ist also $f_2 = 1131{,}7753^{L}$; welcher Werth von dem für Hyp. I gefundenen nicht weiter verschieden ist, als sich durch die Verwechselung der kleinen, auf der Bildfläche erleuchteten Ringe mit Punkten erklären lässt. Ich werde für beide Hypothesen $f_2 = 1131{,}776^{L}$ annehmen.

22.

Ich werde nun das Gesetz aufsuchen, welches die Messungen mit dem Heliometer und die ihnen entsprechenden Winkel miteinander verbindet. Zuerst werde ich diese Verbindung, so wie jede der beiden verfolgten Hypothesen sie ergiebt, betrachten. Für Hyp. I ist in den beiden vorigen Paragraphen gefunden:

für $w = 24'$ . . . . . $y = 7{,}901599^{L}$

$w = 48'$ . . . . . $y = 15{,}803967$

$f_2 = 1131{,}776^{L}$

Setzt man

$$y = 1131{,}776\left\{w + \alpha w^3 + \beta w^5 + \ldots\right\}$$

so erhält man daraus für $w = 24'$ und $w = 48'$:

$$7{,}901599 = 7{,}901287 \left\{1 + \alpha\left(\frac{\pi}{450}\right)^2 + \beta\left(\frac{\pi}{450}\right)^4 + \ldots\right\}$$

$$15{,}803967 = 15{,}802574 \left\{1 + 4\alpha\left(\frac{\pi}{450}\right)^2 + 16\beta\left(\frac{\pi}{450}\right)^4 + \ldots\right\}$$

welchen beiden Gleichungen man, durch Berücksichtigung von α allein, sehr nahe genügeleisten kann; nämlich durch $\alpha = +0{,}4918$, wodurch ihnen bis auf $\mp 0^{L}{,}000122 = \mp 0''{,}0222$ entsprochen wird. Man kann also, wenn der *Schwerpunkt* des Lichts, welches über das undeutliche Bild eines nicht in der Richtung der Axe befindlichen, unendlich entfernten Punkts zerstreuet ist, der Gegenstand der Beobachtung ist, seine Entfernung von der Axe näherungsweise

$$= 1131{,}^{L}776\, w \left\{1 + 0{,}4918\, ww\right\}$$

annehmen. Sollte diese Formel für $48'$ überschreitende Werthe von w auch grössere Fehler besitzen als bis zu $w = 48'$ (was sehr wahrscheinlich ist) so würde man diese doch für weniger erheblich ansehen müssen, indem die Undeutlichkeit, oder Unbestimmtheit des Bildes eines noch weiter von der Axe entfernten Punkts, seiner genauen Beobachtung unüberwindliche Schwierigkeiten in den Weg legt.

Die Hypothese II hat dagegen folgende Werthe ergeben:

für $w = 24' \ldots\ldots\ldots y = {}^{L}7{,}900479$

$w = 48' \ldots\ldots\ldots y = 15{,}796020$

$f_2 = 1131{,}776$

woraus man die Gleichungen:

$$7{,}900479 = 7{,}901287 \left\{1 + \alpha\left(\frac{\pi}{450}\right)^2 + \beta\left(\frac{\pi}{450}\right)^4 + \ldots\right\}$$

$$15{,}796020 = 15{,}802574 \left\{1 + 4\alpha\left(\frac{\pi}{450}\right)^2 + 16\beta\left(\frac{\pi}{450}\right)^4 + \ldots\right\}$$

erhält, denen durch $\alpha = -2{,}1241$, bis auf die unerheblichen Unterschiede $\mp 0^{L}{,}000010 = \mp 0''{,}0018$, entsprochen wird. Man hat also, wenn der *hellste Punkt* des undeutlichen Bildes eines nicht in der Axe befindlichen, unendlich entfernten Punkts, der Gegenstand der Beobachtung ist, seine Entfernung von der Axe:

$$= 1131{,}^{L}776\, w \left\{1 - 2{,}1241\, ww\right\}$$

Nachdem beide Hypothesen jetzt vollständig entwickelt worden sind, können sie mit *Beobachtungen* zusammengehalten werden, welche, in der Absicht sie zu prüfen, angestellt worden sind. Diese Beobachtungen sind wiederholte Messungen der Entfernung eines Paars von Fixsternen; dadurch abgeändert, dass dem Oculare nach und nach verschiedene Entfernungen von der Heliometeraxe gegeben werden, während seine Verschiebungslinie und die beiden Sterne in einer Ebene liegen. — Werden die, in gleicher Richtung gezählten Entfernungen der Axen der beiden Objectivhälften und des Oculars von der Heliometeraxe durch m, m', μ bezeichnet, der Winkelwerth des Maasses dieser Grössen (einer Schraubenwindung) durch R, so ist

$$y = f_2 w (1 + \alpha w w) = f_2 \operatorname{Tang} R (m - \mu)$$
$$y' = f_2 w' (1 + \alpha w' w') = f_2 \operatorname{Tang} R (m' - \mu)$$

und man erhält durch den Unterschied dieser Ausdrücke:

$$(w' - w) \{1 + \alpha (w'w' + w'w + ww)\} = \operatorname{Tang} R (m' - m)$$

und wenn man $- 3\alpha (w' - w) w'w$ auf beiden Seiten zusetzt

$$w' - w + \alpha (w' - w)^3 = \operatorname{Tang} R (m' - m) - 3\alpha (w' - w) w'w.$$

Da $w' - w$ die Entfernung beider Sterne ist, also für alle Beobachtungen denselben Werth hat, so ist die links von dem Gleichheitszeichen stehende Grösse constant; wenn man $C \operatorname{Tang} R$ dafür schreibt, und in dem in 3α multiplicirten Gliede auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens die 5te Dimension von w und w' vernachlässigt, so erhält man:

$$C = m' - m - 3\alpha \operatorname{Tang} R^2 (m' - m) (m' - \mu) (m - \mu)$$

Eine Reihe von Messungen, welche $m' - m$ für verschiedene Werthe von $m - \mu$ angiebt, muss daher die *den Beobachtungen entsprechende* Hypothese, dadurch rechtfertigen, dass der dieser zugehörige Werth von α dem rechts von dem Gleichheitszeichen stehenden Ausdrucke eine Reihe von Werthen giebt, welche keine Abhängigkeit von $m - \mu$ zeigen. — Ich habe im August und September 1830, bei ausgezeichnet günstiger Luft zwei Messungsreihen dieser Art, an dem Doppelsterne ϑ Serpentis und einem ihm südlich vorgehenden Sterne 7ter Grösse *) gemacht. Von den Einflüssen der Strahlenbrechung befreiet, haben sie ergeben:

*) Zone 174. $18^{u}47'34,''28.$

		Aug. 31.	Sept. 20.	
μ	m	$m'-m$	$m'-m$	Mittel.
R	R	R	R	R
0	0	51,7239	51,7262	51,7251
10	0	7292	7263	7278
20	0	7235	7263	7249
30	0	7278	7274	7276
40	0	7262	7270	7266
50	0	7205	7185	7195
60	0	7169	7006	7088
70	0	7103	6857	6980
80	0	7007	6838	6923

Setzt man der letzten Columne die Grösse

$$-3\alpha \operatorname{Tang} R^2 (m'-m)(m'-\mu)(m-\mu)$$

hinzu, indem man für α die beiden Werthe annimmt, welche beiden verfolgten Hypothesen entsprechen, so erhält man die Reihe der Werthe von C:

μ	Hyp. I.	Hyp. II.
0	51,7251	51,7251
10	7299	7187
20	7281	7111
30	7309	7135
40	7290	7164
50	7199	7176
60	7063	7190
70	6916	7257
80	6809	7414

Man sieht hieraus, dass der Gegenstand dieser Beobachtungen weder der Schwerpunkt, noch der hellste Punkt der undeutlichen Bilder der Sterne gewesen ist. Die Abweichungen der Hypothesen von den Beobachtungen finden im entgegengesetzten Sinne statt, so dass eine dritte Hypothese, welcher ein zwischen 0,4918 und $-2,1241$ liegender Werth von α zukommt, ihnen angemessener ist, als jede der vorigen. Man kann den Werth von α, welcher den Beobachtungen am angemessensten ist, durch die Vergleichung der in beiden verfolgten Hypothesen erlangten Werthe von C leicht bestimmen; man findet ihn dadurch $= -1,304$ und die ihm entsprechenden Werthe von C wirklich in so naher Übereinstimmung miteinader, dass man das daran noch fehlende den Beobachtungen zur Last legen kann, nämlich:

	R
0	51,7251
10	7221
20	7164
30	7190
40	7204
50	7183
60	7154
70	7150
80	7224

Die sich auf den Anblick des undeutlichen Bildes eines weit von der Axe entfernten Sterns gründende, im 19ten § geäusserte Vermuthung, dass man die Entfernung von der Axe in welche das *meiste Licht* fällt, zum Gegenstande der Beobachtung machen werde, wird hierdurch nicht völlig bestätigt; diese Entfernung ist den angeführten Beobachtungen indessen weniger unangemessen als die des Schwerpunkts. — Die Bestimmung von α durch die Beobachtungen selbst, hat die Schwierigkeit, dass sie nur auf Messungen gegründet werden kann, deren aus der Undeutlichkeit der Bilder entstehende Unsicherheit in demselben Maasse anwächst, in welchem der Einfluss von α sich entwickelt. Auch wird die Bestimmung Eines Beobachters wahrscheinlich nicht für einen anderen gelten, indem Beide *verschiedene* Punkte der Bilder wählen können. Ich selbst habe bemerkt, dass, trotz der Absicht stets denselben Punkt zu wählen, von einem Tage zum anderen Verschiedenheiten darin vorgekommen sind, welche mir von Änderungen der Helligkeit, der Sterne sowohl als des Himmels, herzurühren scheinen; die Unterschiede, welche sich zwischen den angeführten Messungen vom 31. Aug. und 20. Septr. von da an zeigen, wo die Undeutlichkeit der Bilder anfängt beträchtlich zu werden, sind ein Beispiel hiervon.

Aus diesen Bemerkungen geht hervor, dass ich die Bestimmung von α nicht für sehr sicher halte. Ich bin zweifelhaft gewesen, ob ich der Hypothese II, oder dem Resultate der Beobachtungen den Vorzug geben sollte. Um zu einer Entscheidung zu gelangen, habe ich ein Paar, fast einen Grad voneinander entfernte Sterne zur Deckung gebracht, indem ich zuerst $\mu = \frac{1}{2}(m+m')$ machte; dann aber μ beträchtlich und m' so viel änderte, als die Hypothese II es forderte; wonach sich zeigte, dass der Punkt des undeutlichen Bildes, welcher nun von dem deutlichen getroffen wurde, nicht der war, den ich zum Gegenstande einer Beobachtung gewählt haben würde. Ich habe also dem Resultate

der *Beobachtungen* den Vorzug eingeräumt und bemerke darüber nur noch, dass die, meiner Meinung nach dadurch so klein als möglich gemachte Unsicherheit, erst dann grösseren Einfluss erhält, wenn die Undeutlichkeit der Bilder auffallend wird und die Sicherheit der Beobachtung vermindert. Der Unterschied des der Hypothese II entsprechenden Werthes von α, von dem angenommenen ist $=0{,}8201$ und sein Einfluss auf die Messung eines Winkels $w = n \,.\, 10'$ ist $= n^3 \,.\, 0{,}''004164$. Könnte man den Punkt des undeutlichen Bildes, welchen man zum Gegenstande der Beobachtungen wählt, unabhängig von diesen bestimmen, und wollte man dieser Bestimmung folgen, so würde eine allgemeinere Untersuchung jenes Bildes, als die im 19ten § enthaltene, nothwendig werden. Diese beruhet nämlich auf der Voraussetzung, dass jeder unendlich wenig breite Ring des Objectivs einen *elliptischen* Ring *gleichmässig* erleuchte, welche Voraussetzung vielleicht nicht bis zu grösseren Werthen des Winkels w ausgedehnt werden darf.

Man würde die ganze, das Gesetz welches die Messungen mit dem Heliometer und die ihnen entsprechenden Winkel miteinander verbindet betreffende Untersuchung haben sparen können, wenn die Objectivhälften sich nicht auf einer Ebene, sondern auf einer Cylinderfläche bewegten, deren Axe durch den Brennpunkt geht (Abh. I §15). Aber es ist nichtsowohl diese Ersparung, als die Vermeidung jeder Undeutlichkeit der Bilder und der daraus hervorgehenden Schwierigkeiten, welche mich veranlasst, die Bewegung der Objectivhälften auf einer Cylinderfläche, als eine *wahre* und immer wenn man sich nicht auf die Messung kleinerer Winkel (zum Beispiele bis zu 24′ oder 30′ gehender) beschränken will, *nicht unerhebliche* Verbesserung des Instruments zu betrachten.

23.

Setzt man, dem vorigen § zufolge, die Entfernung von der Axe, in welcher das Bild eines unendlich entfernten, mit ihr den Winkel w machenden Gegenstandes erscheint,

$$y = f_2 w \left\{1 - 1{,}804\, ww\right\},$$

so kann man aus der Verbindung dieser Bestimmung mit den §. 11 und 12 bestimmten, nicht-periodischen Ausgleichungen der Mikrometerschraube, die Vorschrift ableiten, nach welcher die Entfernung s zweier, mit dem Heliometer beobachteter Punkte, aus den Angaben

des Instruments berechnet werden muss. Wenn die Objectivhälfte I und das Ocular in der Heliometeraxe erhalten werden, der Objectivhälfte II aber die einander entgegengesetzten, die Bilder der beiden Punkte zur Deckung bringenden Stellungen ($m_{,}$ und m') gegeben werden, so wie die von mir immer befolgte Beobachtungsmethode es fordert, so ist y dem *ausgeglichenen* Werthe von $\frac{1}{2}(m'-m_{,})$ proportional, oder

$$y = f_2 \left\{ \frac{m'-m_{,}}{2} + f\left(\frac{m'-m_{,}}{2}\right) \right\} \text{Tang } R$$

wo die Ausgleichung $f\left(\frac{m'-m_{,}}{2}\right)$ aus der kleinen Tafel am Ende des 12ten § genommen wird. Ferner ist $w=0$ und $w'=s$, also auch

$$y = f_2 s\,(1-1{,}304\,ss)$$

und aus beiden Ausdrücken zusammengenommen folgt, hinreichend nahe:

$$s = R\left\{ \frac{m'-m_{,}}{2} + f\left(\frac{m'-m_{,}}{2}\right) + 1{,}304 \text{ Tang } R^2 \left(\frac{m'-m_{,}}{2}\right)^3 \right\}$$

Das letzte Glied dieses Ausdruckes werde ich, im Folgenden, die *optische Verbesserung* nennen.

Ich setze die Werthe der Summe der beiden letzten Glieder dieser Formel für $\frac{m'-m_{,}}{2} = 10^R, 20^R, \ldots 60^R$ hierher; der durch ihre Hinzufügung verbesserte Werth des beobachteten, jedoch von dem periodischen Fehler der Schraube befreieten $\frac{m'-m_{,}}{2}$ ergiebt, durch seine Multiplication in R, unmittelbar die Entfernung.

$\frac{m'-m_{,}}{2}$	Verbesserung.
	R
0	+ 0,00000
10	+ 0,00037
20	+ 0,00159
30	+ 0,00398
40	+ 0,00782
50	+ 0,01252
60	+ 0,01858

Wenn die Helligkeiten der beiden Punkte, deren Entfernung gemessen werden soll, sehr verschieden sind, so wird es nöthig, die Objectivhälfte, welche den helleren abbildet zu bedecken. Wenn man aber ihre Öffnung durch eine halbkreisförmige, ihr concentrische Blendung verkleinert, so wird dadurch, den Untersuchungen § 18–20 zufolge, der Ort des Bildes verändert und zwar desto stärker, je weiter

der Punkt, von welchem es herrührt, von der Axe entfernt ist. Eine solche Bedeckung hat also eine Änderung des Werthes von α zur Folge. Ich habe, um dieses zu vermeiden, eine andere Art der Bedeckung gewählt, nämlich durch *Gewebe von Metallfäden*, welche das Licht vermindern, ohne die Öffnung des Objectivs zu ändern. Diese Gewebe bringen die durch *Fraunhofer*, *Herschel* und *Schwerd* vollständig bekannt gewordenen und erklärten Diffractionserscheinungen hervor — farbige Nebenbilder welche das Hauptbild umgeben. Sie vermindern aber, wenn ihre sich senkrecht durchschneidenden Fäden parallel und gleich weit entfernt voneinander sind, die Deutlichkeit des Hauptbildes nicht merklich.

24.

Ich komme nun zu der Untersuchung des Einflusses, welchen die *Wärme* auf den Winkelwerth einer Schraubendrehung äussert. Ich habe sie auf die Vergleichung der in sehr verschiedener Wärme gemachten Messungen der Entfernungen von 10 Sternen der Plejaden von ihrem Hauptsterne η gegründet. Diese Messungen selbst und die zu ihrer Reduction auf 1840 angewandten Mittel, werde ich in einer folgenden, die *Plejaden* betreffenden Abhandlung mittheilen, hier aber nur die gegenwärtig nothwendigen Resultate derselben anführen.

Wenn die Wärme Einfluss auf die Messungen äussert, so zeigt er sich dadurch, dass die in verschiedener Wärme gemachten, von der Strahlenbrechung befreieten und auf 1840 reducirten nicht übereinstimmen. Bezeichnet man eine, in der Wärme τ des Fahrenheitschen Thermometers gemessene, in Schraubenwindungen ausgedrückte Entfernung durch e und nimmt man den Einfluss der Wärme den Thermometergraden proportional an, so ist der Ausdruck der auf einen bestimmten Thermometerstand, wofür ich $50°F$ annehmen werde, bezogenen Entfernung

$$\varepsilon = \frac{e}{1+x(\tau-50)}$$

oder

$$e = \varepsilon + \varepsilon(\tau-50)x$$

wo x die Änderung des Einflusses der Wärme auf die Einheit von ε, für jeden Grad der Änderung des Thermometerstandes bedeutet. Eine Reihe von n Beobachtungen zweier Punkte von unveränderlicher Entfernung ergiebt daher die Gleichungen:

$$\begin{aligned} e &= \varepsilon + \varepsilon\,(\tau - 50)\,x \\ e' &= \varepsilon + \varepsilon\,(\tau' - 50)\,x \\ e'' &= \varepsilon + \varepsilon\,(\tau'' - 50)\,x \\ &\text{u. s. w.} \\ e^{(n-1)} &= \varepsilon + \varepsilon\,(\tau^{(n-1)} - 50)\,x \end{aligned}$$

und ferner, der Methode der kleinsten Quadrate gemäss, zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$x\,.\,\varepsilon\varepsilon\left\{n\,(aa) - (a)\,(a)\right\} = \varepsilon\left\{n\,(ae) - (a)\,(e)\right\}$$

wo a, a', a''... um abzukürzen, für $\tau - 50$, $\tau' - 50$, $\tau'' - 50$, ... geschrieben, (a), (e), (aa)... aber die bekannten *Gaussischen* Bezeichnungen der Summen sind.

Eine ähnliche Gleichung habe ich aus den Messungen der Entfernung jedes der 10 Sterne der Plejaden von η abgeleitet und x durch die Summe aller 10 Gleichungen bestimmt. Die einzelnen Sterne haben ergeben:

		$\varepsilon\varepsilon\left\{n(aa) - (a)\,(a)\right\}$	$\varepsilon\left\{n(ae) - (a)(e)\right\}$
g Plejadum.	31 Beobb. . .	16024000	+ 38,677
b —	40 —	29274000	+ 138,264
e —	35 —	22891000	+ 93,944
c —	34 —	12008000	+ 57,583
k —	30 —	12137000	+ 68,749
l —	27 —	8864000	+ 1,284
d —	28 —	2358000	— 2,462
s —	28 —	4569000	+ 16,256
f —	29 —	5976000	+ 19,770
h —	29 —	3620000	+ 12,509
Summe		117721000	+ 444,574

Den mittleren Fehler einer einzelnen Beobachtung habe ich $= \pm\ 0''{,}007238$ gefunden. Man erhält also:

$$x = +\ 0{,}0000037765;\ m\,.\,F = \pm\ 0{,}000000667$$

Die Uebereinstimmung, womit die einzelnen Sterne den Werth von x angeben, scheint mir befriedigend zu sein: obgleich er sehr klein ist, stimmen 9 Sterne in seinem Zeichen überein und nur einer ergiebt, aber mit einem sehr geringen Gewichte, das entgegengesetzte. Jede als einzeln angeführte Beobachtung ist das Mittel aus 6, zu drei

vollständigen Messungen verbundenen Einstellungen der Objectivhälfte II. Von einer solchen Beobachtung wäre vielleicht eine grössere Genauigkeit zu erwarten, als die, welche der mittlere Fehler $= \pm 0^{s},007238 = \pm 0,''383$ andeutet; sie würde wahrscheinlich auch grösser sein, wenn nicht viele der Beobachtungen bei heftiger Kälte hätten gemacht werden müssen, welche der Bestimmung einer von der Wärme abhängigen Grösse auf der einen Seite zwar vortheilhaft, auf der anderen aber nachtheilig ist, indem sie mit starkem Zittern der Sterne verbunden ist und, durch die Verhärtung des Oels an der Mikrometerschraube, eine Fehlerursache herbeiführt, welche ohne sie nicht, oder doch in einem geringeren Maasse vorhanden ist.

Wenn man den Winkelwerth einer Schraubendrehung, so wie er in der Wärme $\tau = 50°$ ist, durch R, den in einer anderen Wärme τ stattfindenden durch R' bezeichnet, so ist

$$R' = \frac{R}{1 + (\tau - 50)\, 0{,}0000037765}$$

wodurch also, wenn R einfürallemal bekannt ist, der für jede Beobachtung anzuwendende Winkelwerth einer Schraubendrehung gefunden wird. Aus seiner Verkleinerung mit zunehmender Wärme, geht hervor, dass diese *kleineren* Einfluss auf die Mikrometerschraube, als auf die Brennweite äussert; was vielleicht durch eine Verschiedenheit ihrer Einflüsse auf das Kronglas der äusseren und das Flintglas der inneren Linse erklärt werden kann, wenn auch beide kleiner sind als ihr Einfluss auf den Stahl der Schraube. Bezeichnet man die Ausdehnung für jeden Grad des hunderttheiligen Thermometers, für Stahl, Kronglas und Flintglas durch α, β, $\beta_{,}$, und setzt man voraus, dass die Wärme keinen Einfluss auf die Brechungsverhältnisse äussere, so findet man, nach den Formeln und Angaben §§ 13—17, die aus den beiden letzteren hervorgehende Veränderung der Brennweite:

$$df = f\left\{\frac{(1,3)\,(6,7)}{(1,7)}\beta + \frac{(1,2)\,(5,7)}{(1,7)}\beta_{,}\right\}$$
$$= f\left\{\ 2{,}5002\,\beta\ -\ 1{,}5002\,\beta_{,}\right\}$$

und damit

$$R' = R\,\frac{1 + (\tau - 50)\,\frac{5}{9}\,\alpha}{1 + (\tau - 50)\,\frac{5}{9}\left\{2{,}5002\,\beta - 1{,}5002\,\beta_{,}\right\}}$$

so wie, durch Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem auf die Beobachtungen der Plejaden gegründeten:

$$2{,}5002\,\beta - 1{,}5002\,\beta_{,} = \alpha + 0{,}0000067977$$

Setzt man α, so wie ich es, bei Gelegenheit meiner Untersuchungen über das Preussische Maass gefunden habe, $= 0{,}00001013$ *), so erhält man die Gleichung zwischen β und $\beta_{,}$:

$$2{,}5002\,.\,\beta - 1{,}5002\,.\,\beta_{,} = + 0{,}0000169277;$$

welche jedoch, indem sie auf der Beobachtung einer sehr kleinen Grösse, und auch auf der Voraussetzung keines Einflusses der Wärme auf die Brechungsverhältnisse beruhet, keinen Anspruch auf grosse Sicherheit besitzt.

25.

Nachdem nun die Ausgleichungen der messenden Schraube, die optische Verbesserung und der Einfluss der Wärme auf die Messungen festgesetzt worden sind, kann ich die verschiedenen Versuche mittheilen, welche ich gemacht habe um zur Kenntniss des *Winkelwerthes einer Schraubendrehung* zu gelangen. Ich fange mit dem Versuche an, welcher auf das Gaussische Verfahren, nämlich auf die Beobachtung eines Fadens im Brennpunkte des Heliometers, durch die verschieden gestellten Objectivhälften hindurch, gegründet worden ist.

Das Heliometer wurde in den Meridian gestellt und ihm eine fast senkrechte Richtung gegeben, so dass das Objectiv unten, das Ocular oben war; auf dem Fussgestelle des Instruments wurde ein 8zolliger *Reichenbachscher* Theodolit, als Höhenkreis, gleichfalls in der Ebene des Meridians, so aufgestellt, dass das Objectiv seines Fernrohrs das Heliometerobjectiv fast berührte, und der Winkel zwischen den beiden Bildern des (gegen die Ebene des Meridians 45° geneigten) Fadenkreuzes, durch Bewegung des Fernrohrs des Theodoliten im Verticalkreise, gemessen werden konnte. Eine der Objectivhälften (I) wurde in die Heliometeraxe gestellt, in welcher sich auch das Fadenkreuz befand, die andere (II) aber nach und nach -5 und $+5$, -10

*) Darstellung der Untersuchungen und Maassregeln u. s. w. Berlin 1839. S. 68.

und + 10, ... — 60 und + 60 Schraubenwindungen von derselben entfernt, und jeder hierdurch entstandene Winkel zu verschiedenen Zeiten, fünf Mahl, immer durch fünf Wiederholungen, gemessen. Auf diese Art haben die einzelnen Resultate eine sehr gute Übereinstimmung erhalten, welches ich der in jeder Hinsicht vortheilhaften Einrichtung zuschreibe; ich stelle sie hier zusammen:

1830	τ	5ª	10ª	15ª	20ª	25ª	30ª	35ª	40ª	45ª	50ª	55ª	60ª
Mrs. 22	35°,5	—″	529″,47	—″	1059″,16	—″	1587″,46	—″	2116″,86	—″	2646″,08	—″	3174″,15
Apr. 27	51	—	—	—	8,08	1323,00	7,13	1851,19	7,31	2380,44	—	—	—
30	55	—	—	783,44	7,94	3,94	6,94	2,56	6,84	2,31	—	—	—
May 1	45	264,46	—	4,00	—	3,50	—	1,88	—	0,25	—	—	—
4	50	—	8,38	—	8,50	—	8,10	—	7,06	—	5,56	—	—
4	54	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2910,38	5,06
5	56	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6,00	09,75	4,50
6	65	4,63	8,56	3,36	8,44	—	—	—	—	—	—	—	—
7	49	—	—	—	—	—	—	1,50	5,75	0,88	5,69	09,69	5,00
8	49	—	8,88	3,94	—	3,44	—	—	—	—	—	11,17	—
9	43	4,56	8,63	3,94	—	3,44	8,19	—	—	—	—	—	—
10	46	5,13	—	—	—	—	—	1,67	—	—	—	—	—
12	49	4,94	—	—	—	—	—	—	—	1,63	6,63	10,50	4,13
Mittel		264,74	528,78	793,74	1058,42	1323,46	1587,56	1851,76	2116,76	2381,10	2645,99	2910,30	3174,57
Thermom.		49°,6	48°,5	51°,4	51°,3	48°,6	46°,9	49°,2	48°,1	49°,8	47°,9	51°,4	48°,7

Ich habe im 22ten § den Punkt bestimmt, welchen ich als den Vereinigungspunkt unter sich parallel, aber gegen die Axe geneigt einfallender Strahlen ansehe. Da nicht alle solche Strahlen in diesen Punkt treffen, so werden von ihm ausgehende, nach ihrem Durchgange durch das Objectiv, auch nur näherungsweise parallel. Nimmt man aber von der Richtung, in welcher man sie in dem Fernrohre des Theodoliten gesehen hat, an, dass sie dieselbe sei, in welcher parallele Strahlen einfallen müssen, damit sie den angenommenen Vereinigungspunkt haben, so muss man den gemessenen Zwischenräumen von 5, 10, 15..... 60 Schraubenwindungen, die in der Tafel § 23 vereinigten Verbesserungen hinzufügen, um sie mit den Messungen durch

den Theodoliten vergleichbar zu machen. Ferner muss man sie sämmtlich auf $\varepsilon = 50°$ r[illegible]ren. Beides ist in der folgenden Zusammenstellung geschehen.

R	Verbesserung. R	Wärme. R	
5	+ 0,00009	− 0,00001	5,00008 R = 264,″74
10	+ 0,00037	− 0,00006	10,00031 R = 528,78
15	+ 0,00085	+ 0,00008	15,00093 R = 793,74
20	+ 0,00159	+ 0,00010	20,00169 R = 1058,42
25	+ 0,00262	− 0,00013	25,00249 R = 1323,46
30	+ 0,00398	− 0,00035	30,00363 R = 1587,56
35	+ 0,00576	− 0,00011	35,00565 R = 1851,76
40	+ 0,00782	− 0,00029	40,00753 R = 2116,76
45	+ 0,01004	− 0,00003	45,01001 R = 2381,10
50	+ 0,01252	− 0,00040	50,01212 R = 2645,06
55	+ 0,01533	+ 0,00029	55,01562 R = 2910,30
60	+ 0,01853	− 0,00029	60,01824 R = 3174,57

Der diesen 12 Gleichungen am meisten genügeleistende Werth von R ist

$$R = 52,''90299; \text{ m. F.} = \pm 0,''00275$$

26.

Ein *zweiter* Versuch den Werth von R zu bestimmen, wurde auf die Vergleichung der schon im 24ten § angewandten Messungen der Entfernungen verschiedener Sterne der Plejaden, von α, mit den Bestimmungen derselben Entfernungen, welche ich durch Beobachtungen mit dem Meridiankreise erhalten habe, gegründet.

Einige der Messungen der Plejaden mit dem Heliometer fallen in die Zeit bald nach der Aufstellung dieses Instruments, die meisten aber in die Jahre 1838—40; die ersteren wende ich nicht für den gegenwärtigen Zweck an, indem ihr Zusammennehmen mit den letzteren eine Kenntniss der eigenen Bewegungen gefordert haben würde, deren Voraussetzung vermieden werden konnte, da die späteren Messungen allein zahlreich genug sind. Ich führe hier nur das arithmetische Mittel der Messungen jeder Entfernung an, so wie es nach ihrer Befreiung von den Einflüssen der Strahlenbrechung, den Ausgleichungen der Schraube, der optischen Verbesserung, der Veränderlichkeit von R durch die Wärme und der von der Aberration herrührenden Veränderung,

für 1840 gefunden wird, verweise aber wegen aller Einzelnheiten auf die später folgende Abhandlung über die Plejaden. Diese Abhandlung wird auch von den Meridianbeobachtungen die näheren Umstände angeben, so dass ich auch von diesen jetzt nur die hiehergehörigen Resultate anführen darf.

			Heliometer. R	Meridianbeobacht. ″
g	Plejadum . .	29 Beobb.	43,45498	2296,16
b	—	35 — . .	40,52343	2143,30
e	—	30 — . .	43,05269	2277,42
c	—	29 — . .	31,32024	1656,52
k	—	27 — . .	39,14988	2067,59
l	—	24 — . .	36,37815	1922,16
d	—	24 — . .	20,92191	1105,60
s	—	26 — . .	28,24508	1496,68
f	—	25 — . .	26,30039	1391,48
h	—	25 — . .	26,52060	1402,95

Die sich aus dieser Vergleichung der Messungen mit dem Heliometer mit den durch die Meridianbeobachtungen bestimmten Entfernungen ergebenden Gleichungen zur Bestimmung von R, haben sehr ungleiche Gewichte, deren Aufsuchung der Ableitung des Resultats vorangehen muss. Den mittleren Fehler jeder der ersteren Messungen habe ich (§ 24) schon angeführt; er ist $= \pm 0^R,007238 = \pm 0,''3829 = \varepsilon$. Den auf den grössten Kreis bezogenen m. F. jeder Beobachtung einer Geradenaufsteigung eines Plejadensterns habe ich $\varepsilon' = \pm 1,''7996$, den einer Declinationsbeobachtung $\varepsilon'' = \pm 1,''3304$ gefunden. Wenn daher die Anzahlen der Meridianbeobachtungen des Sterns η Plejadum, in AR. und in Decl., durch b, c, eines anderen Sterns durch b', c', bezeichnet werden, so ist das Quadrat des mittl. Fehlers der aus so vielen Beobachtungen gefolgerten Entfernung beider Sterne:

$$\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)\varepsilon'\varepsilon' + \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c'}\right)\varepsilon''\varepsilon''$$

und das Quadrat des m. F. des Mittels aus a Heliometermessungen

$$\frac{\varepsilon\varepsilon}{a}$$

Das Quadrat des m. F. jeder der Vergleichungen ist daher

$$\frac{1}{a}\cdot\varepsilon\varepsilon + \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)\varepsilon'\varepsilon' + \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c'}\right)\varepsilon''\varepsilon''$$

und ihr *Gewicht* ist das Reciproke dieses Ausdrucks. Den Werth von a für jeden der Sterne habe ich oben schon angegeben; b ist $= 18$ und $c = 16$; b' und c' enthält die folgende Tafel zugleich mit dem Gewichte jeder Vergleichung:

	b'	c'	Gewicht.
g Plejadum . .	11	11	1,3321
b —.	11	10	1,3057
e —.	9	7	1,1014
c —.	6	6	0,8848
k —.	5	5	0,7708
l —.	3	3	0,5087
d —.	5	5	0,7704
s —.	12	12	1,3820
f —.	14	14	1,5293
h —.	12	12	1,4014

Die diesen Gewichten angemessene Auflösung der aus den Messungen der einzelnen Sterne hervorgehenden Gleichungen, ergiebt:

$$R = 52''{,}88127; \text{ m. F.} = \pm 0''{,}00880,$$

welcher Bestimmung zufolge, die durch die Meridianbeobachtungen gefundenen Entfernungen von den heliometrisch gemessenen folgendermassen abweichen:

g Plejadum .	— 1,814	*l* Plejadum . .	— 1,563
b —. . . .	+ 0,369	*d* —. . . .	— 0,777
e —. . . .	+ 0,739	*s* —. . . .	+ 3,044
c —. . . .	+ 0,266	*f* —. . . .	+ 0,782
k —. . . .	— 2,706	*h* —. . . .	+ 0,507

27.

Wenn die Ableitung des Werthes von R aus der Vergleichung der Heliometermessungen mit den Meridianbeobachtungen der Plejaden noch etwas zu wünschen übrig lässt, so ist der Grund davon die Schwierigkeit, den letzteren eine Sicherheit zu geben, welche der der ersteren gleich, oder wenigstens nahe kommt; wäre es gelungen, ihre Genauigkeit so gross zu machen, als die der ersteren ohne Zweifel ist, so würde die eben mitgetheilte Vergleichung viel kleinere Unterschiede darbieten. Man vermindert diese Schwierigkeit, wenn die

durch das Heliometer gemessenen Entfernungen nicht unzusammenhängenden Sternenpaaren zugehören, sondern mehreren, in einem grössten Kreise liegenden, und wenn man denn ihre *Summe* mit der durch Meridianbeobachtungen erlangten Bestimmung der *beiden äussersten* Sterne vergleicht. Dass man mehrere, ganz genau in einem grössten Kreise liegende Sterne nicht finden wird, ist kein wesentliches Hinderniss der Ausführung dieser Idee, indem man ihre Abweichungen von dem durch die beiden äussersten gehenden grössten Kreise, durch die Beobachtungen ihrer Positionswinkel bestimmen und dadurch ihre unmittelbar gemessenen Entfernungen auf diesen grössten Kreis reduciren kann.

Von dieser Art ist der *dritte* Versuch den Werth von R zu bestimmen. Er ist auf sechs, ziemlich nahe in einem grössten Kreise liegende Sterne gegründet worden, welche Herr *Schlüter* am Himmel aufgesucht und nachher auch mit dem Heliometer beobachtet hat. Zuerst theile ich 13 Beobachtungen dreier von diesen Sternen mit, welche Herr Doctor *Busch*, an dem Meridiankreise der Königsberger Sternwarte gemacht hat.

	Stern *a*		Stern *c*		Stern *f*	
	A.R. 1840.	Decl. 1840.	A.R. 1840.	Decl. 1840.	A.R. 1840.	Decl. 1840.
1839 Decbr. 4	5h 59′ 16″,22	25° 12′ 4″,11	5h 13′ 60″,14	24° 0′ 10″,45	5h 29′ 18″,02	22° 25′ 16″,09
5	13,86	4,57	57,78	14,31	18,67	17,07
8	14,60	5,13	57,95	13,51	17,95	19,81
10	18,63	8,95	59,90	13,34	20,51	17,26
30	15,39	4,86	57,91	10,08	17,57	19,34
1840 Jan. 1	14,58	7,99	58,72	14,43	18,72	17,33
2	16,13	6,07	60,28	12,72	21,49	22,82
15	16,61	6,96	58,38	11,15	17,81	18,84
16	16,71	6,86	56,12	10,85	17,04	18,35
31	15,42	5,35	57,34	11,12	21,10	15,60
Febr. 3	12,75	7,06	56,91	13,76	17,36	17,03
14	12,27	6,25	51,91	14,98	17,73	20,99
15	12,21	5,78	56,95	14,22	18,27	18,13
Mittel	5h 59′ 15,03	25° 12′ 6,15	5h 13′ 57,72	24° 0′ 12,69	5h 29′ 18,63	22° 25′ 18,37

Hieraus folgen die Entfernung $af = 3°5'58,''955 = 11158,''955$, und die auf den grössten Kreis reducirten Entfernungen des Sterns *c* von *a* und von *f*, nämlich $ac_1 = 4962,''146$, $c_1f = 6196,''809$. Der mittlere

Fehler jeder dieser Entfernungen geht aus den vorkommenden Abweichungen der einzelnen Rectascensions- und Declinations-Unterschiede von dem mittleren $= \pm 0,''7774$ hervor.

Die Entfernungen der sechs Sterne voneinander hat Herr *Schlüter*, an 10 Tagen, mit dem Heliometer gemessen, nach ihrer Befreiung von dem Einflusse der Strahlenbrechung folgendermassen:

	τ	ab	bc	cd	de	ef
	°	R	R	R	R	R
1839 Decbr. 9	10,0	40,7112	53,2434	49,3563	31,1053	37,1720
10	19,6	7080	2219	3495	1098	1644
10	19,0	7052	2476	3603	1048	1850
30	18,0	7170	2319	3590	1148	1790
1840 Jan. 2	5,4	7055	2258	3624	1111	1823
15	11,7	6912	2537	3469	1064	1751
16	19,5	7026	2142	3508	1106	1754
16	18,6	7118	2598	3707	1132	1681
Febr. 3	32,0	7073	2227	3534	1121	1610
11	29,4	7132	2232	3561	1078	1679
Mittel	18,32	40,70714	53,23436	49,35744	31,10959	37,17302
Periodische Ausgl. der Schraube		+ 0,00195	+ 0,00151	— 0,00189	— 0,00059	— 0,00100
Fortschr. Ausgl. + opt. Verbesserung		+ 0,00812	+ 0,01429	+ 0,01218	+ 0,00434	+ 0,00664
Reduction wegen Aberration		— 0,00271	— 0,00355	— 0,00329	— 0,00207	— 0,00248
Gemessene wahre Entfernung		40,7145	53,2466	49,3644	31,1113	37,1762

Den Positionswinkel, an dem in der Mitte jedes Paars der Sterne liegenden Punkte, nach seiner Befreiung von dem Einflusse der Strahlenbrechung, dem Theilungsfehler des Positionskreises und den von der Aufstellung des Instruments u. s. w. herrührenden Einflüssen, ergaben dieselben Beobachtungen:

1839 Decbr. 9	209° 58′,29	209° 42′,24	207° 47′,69	196° 34′,43	203° 9′,23
10	55,87	42,11	47,72	35,73	9,48
10	56,04	41,41	48,29	35,65	11,15
30	57,47	40,97	47,75	34,20	11,55
1840 Jan. 2	55,19	43,64	50,18	36,38	10,60
15	56,67	41,67	49,58	34,74	10,76
16	57,67	40,81	47,70	34,38	7,62
16	57,90	43,19	51,51	35,29	9,76
Febr. 3	58,25	43,14	48,57	34,36	10,25
11	57,73	41,61	49,78	34,81	9,36
Mittel	209 57,11	209 42,08	207 49,07	196 35,00	203 9,98
Reduction auf 1840	— 0,05	— 0,05	— 0,05	— 0,05	— 0,05
Positionswinkel 1840	209 57,06	209 42,03	207 49,02	196 34,95	203 9,93

Aus diesen Bestimmungen der Positionswinkel folgen die Entfernungen der Sterne b, c, d, e von dem grössten Kreise af:

$$+ 129''{,}7, \quad + 294''{,}7, \quad + 369''{,}3, \quad + 97''{,}5$$

und ferner die auf diesen grössten Kreis und auf die Wärme $= 50°\ F.$ reducirten Entfernungen $ab_{,}$, $b_{,}c_{,}$, ... $e_{,}f$:

	$ab_{,}$	$b_{,}c_{,}$	$c_{,}d_{,}$	$d_{,}e_{,}$	$e_{,}f$
	R	R	R	R	R
Gemessene Entfernungen	40,7145	53,2466	49,3644	31,1113	37,1762
Reduction auf d. grössten Kreis	— 0,0740	— 0,0916	— 0,0202	— 0,4258	— 0,0447
— auf $\tau = 50°$	+ 0,0049	+ 0,0064	+ 0,0059	+ 0,0037	+ 0,0044
Reducirte Entfernungen	40,6454	53,1614	49,3501	30,6892	37,1359

Den mittleren Fehler einer Messung der Entfernung zwischen einem Paare dieser Sterne nehme ich so an, wie ihn die — auf ganz gleiche Art gemachten — Plejadenbeobachtungen ergeben haben (§ 24); daraus folgt der m. F. jeder der eben gefundenen reducirten Entfernungen $= \pm \frac{0''{,}3829}{\sqrt{10}} = \pm\ 0''{,}1211$.

Man hat also, durch die Vergleichung der aus den Meridianbeobachtungen berechneten Entfernungen mit den durch das Heliometer gemessenen, folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} ac_{,} \ldots\ldots\ldots & \quad 4962''{,}146 = 93{,}8068\ R \\ ef \ldots\ldots\ldots & \quad 6196{,}809 = 117{,}1752\ R \\ af \ldots\ldots\ldots & \quad 11158{,}955 = 210{,}9820\ R \end{aligned}$$

deren erste Glieder den, für alle drei gleichen, mittleren Fehler $= \pm\ 0''{,}7774$, die zweiten $\pm\ 0''{,}1211\sqrt{2}$, $\pm\ 0''{,}1211\sqrt{3}$, $\pm\ 0''{,}1211\sqrt{5}$ besitzen. Setzt man, um nicht mit grossen Zahlen rechnen zu dürfen, $R = 52''{,}890555 + x$, so verwandeln sie sich in

$$\begin{aligned} + 0''{,}652 &= 93{,}8068\,.\,x \\ - 0{,}652 &= 117{,}1752\,.\,x \\ 0 &= 210{,}9820\,.\,x \end{aligned}$$

Sie sind aber nicht unabhängig voneinander, sondern durch die Bedingung verbunden, dass die Summe der in $ac_{,}$ und $c_{,}f$ übrigbleibenden Unterschiede, dem in af übrigbleibenden gleich sein muss. Man

kann statt ihrer, um Alles gehörig zu berücksichtigen, folgende sechs Gleichungen annehmen:

$$\left.\begin{array}{l} +\ 0,''652 = z \\ -\ 0,652 = z' \\ \quad 0 = z + z' \end{array}\right\} \text{m. F.} = \pm\, 0,''7774$$

$$\begin{array}{rl} z = & 93,8068 . x;\ \text{m. F.} = \pm\, 0,''1211\ V2 \\ z' = & 117,1752 . x;\ \ldots\ldots \pm 0,1211\ V3 \\ z+z' = & 210,9820\ x;\ \ldots\ldots \pm 0,1211\ V5 \end{array}$$

woraus z und z', den Vorschriften der Methode der kleinsten Quadrate gemäss, zu eliminiren sind und x zu bestimmen ist. Ich finde die Gleichungen, durch welche dieses geschehen muss:

$$\begin{array}{rl} +\ 1,0789 = & 51,0425 . z + 15,2928 . z' - 6075,7\ x \\ -\ 1,0789 = & +\ 15,2928 . z + 39,6775 . z' - 5540,8\ x \\ 0 = & -\ 6075,7 . z - 5540,8\ z' + 1219197\ x \end{array}$$

und durch ihre Auflösung $x = +\ 0,''000199$, oder

$$R = 52,''89036;\ \text{m. F.} = \pm\, 0,''00314.$$

28.

Der *vierte* Versuch der Bestimmung des Werthes von R, welchen ich gemacht habe, beruhet auf der unmittelbaren Messung der beiden Grössen, deren Verhältniss R ist, nämlich der Brennweite des Heliometerobjectivs und der Länge einer Schraubenwindung. Beiden Messungen habe ich eine Genauigkeit geben können, welche mich glauben lässt, durch ihre Verbindung miteinander bis zu der erreichbaren Grenze der Sicherheit der Bestimmung von R geführt worden zu sein. Ich werde zuerst die Messung der Brennweite verfolgen.

Ein Punkt A in der Axe eines Objectivs wird an einem Punkte B derselben Axe abgebildet, dessen Entfernung AB von dem ersteren, von dem Orte O abhängt, wo zwischen beiden das Objectiv sich befindet. Im Allgemeinen sind *zwei* Örter O und O' vorhanden, welchen eine gleiche Entfernung AB entspricht; aber beide vereinigen sich wenn diese ihr *Minimum* — etwa die vierfache Brennweite — ist. Die von mir angewandte Methode beruhet auf der Messung dieses *Minimums* und der Ausmittelung seines Verhältnisses zu der gesuchten Brennweite. Die erstere habe ich dadurch erlangt, dass ich für gemessene, das Minimum sehr wenig überschreitende Entfernungen AB,

die Entfernungen OO' gesucht und durch die Verbindung beider miteinander das Minimum berechnet habe. Die Einrichtung, wodurch ich diese Messungen ausgeführt habe, ist die folgende.

Das Fernrohr wurde von dem Instrumente abgenommen. Nachdem seine Ocularröhre herausgenommen war, wurde es auf zwei Lager horizontal aufgelegt, welche sich auf einem Schlitten befinden, der sich auf einem niedrigen und festen Tische, in zwei parallelen Bahnen verschieben lässt, so dass die Axe des Objectivs ihre Lage durch die Verschiebung nicht ändert. Über dem Fernrohre, parallel mit seiner Axe, wurde ein Balken, dessen Länge, von 33 Pariser Fuss, die vierfache Brennweite etwas übertraf, auf 6 festen Untersätzen so befestigt, dass eine seiner beiden oberen Kanten sich lothrecht über der Axe (und ihrer Verlängerung) befand, von ihr herabhängende Lothe also die Axe durchschnitten. An dem einen Ende dieser Vorrichtung wurde ein Ocular aufgestellt, vor welchem ein Loth, von dem Balken herab, aufgehängt wurde, so dass man seinen Faden, durch gehörige Verschiebung des Oculars in seiner Röhre, deutlich sehen konnte; ein anderes Loth hing von einem Punkte des Balkens, in der Nähe seines anderen Endes herab. Das Fernrohr wurde nun so lange verschoben, bis man *beide* Lothfäden vollkommen deutlich im Oculare sah; die dieses leistende Lage des Fernrohrs wurde durch einen dritten, von dem Balken herabhängenden und eine am Fernrohre befestigte Scale berührenden Lothfaden bestimmt. Dann wurde das Fernrohr in die *zweite* Lage geschoben, in welcher *beide* Lothfäden wieder deutlich erschienen und diese gleichfalls durch den Punkt der Scale, welchen der dritte Lothfaden nun traf, bestimmt. — Zum deutlichen Sehen des Bildes von A ist erforderlich, dass man das Zimmer, in welchem die Messungen gemacht werden, verdunkele und nur durch eine enge Spalte Licht auf das Objectiv fallen lasse. Als Lothfäden wurden Menschenhaare benutzt. Das angewandte Ocular vergrössert, bei dem gewöhnlichen Gebrauche des Heliometers, etwa 85 Mal, bei dem gegenwärtigen, der es in doppelte Entfernung von dem Objective bringt, also etwa 170 Mal.

Die Entfernung AB der beiden Lothfäden voneinander wurde auf der oberen, sorgfältig eben gemachten Fläche des Balkens von dem sie herabhingen, durch die Toise gemessen; die Entfernung der

beiden Lagen des Objectivs OO' wurde unmittelbar durch die Scale angegeben. Ich theile hier die auf diese Art gemachten Messungen der beiden Entfernungen und ihre Reductionen auf die Normalwärme der Toise ($= 16°,25\ C$), welche letzteren ich durch E und e bezeichnen werde, mit:

AB	OO'	Therm. Cent.	E	e
L	L	°	L	L
4541,73	131,60	11,6	4541,49	131,59
4544,54	169,75	12,5	4544,35	169,74
4546,12	195,60	12,6	4545,93	195,59
4547,60	208,93	12,1	4547,39	208,92
4548,77	223,85	13,8	4548,64	223,84
4550,14	234,60	12,9	4549,97	234,59
4553,53	267,30	14,0	4553,41	267,29

29.

Die im 17ten § angeführten und den schon mitgetheilten Untersuchungen zum Grunde gelegten Elemente der Construction des Objectivs können nur als die Absicht andeutend angesehen werden, welcher gemäss es verfertigt werden sollte; kleine Abweichungen von dieser Absicht sind zu erwarten, und der Zweck der gegenwärtigen Messung der Brennweite ist, ihren Einfluss da zu vermeiden, wo er nachtheilig werden würde. Wenn die aus den angegebenen Elementen berechnete Brennweite von der etwas verschieden ist, welche den eben mitgetheilten Messungen entspricht, so ist es, bei mangelnder Kenntniss der Abweichung jedes einzelnen der Elemente, am einfachsten und am wenigsten willkürlich, *alle* Abmessungen in einem gleichen Verhältnisse $= 1:\lambda$ zu verändern, so dass das, den im vorigen § mitgetheilten Messungen entsprechend geänderte Objectiv dem vorausgesetzten *ähnlich* bleibt. Diese Ähnlichkeit hat zur Folge, dass alle bisher für das vorausgesetzte Objectiv erlangten Resultate, wenn sie Winkel sind ungeändert bleiben, wenn sie Entfernungen sind im Verhältnisse $1:\lambda$ geändert werden.

Ich werde zuerst die Formeln für das *ganze* Objectiv geltend annehmen, welche für den seinen Mittelpunkt zunächst umgebenden Theil richtig sind (§ 16), später aber die Verbesserung hinzusetzen,

welche von der Grösse des Objectivs herrührt. — Wenn man, in der Formel L, unter a die *positiv* genommene Entfernung des Punkts A von der äusseren Fläche des Objectivs, unter α die Entfernung des Bildes von der inneren versteht, so ist sie:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a+\alpha} + \frac{1}{\alpha-\gamma}.$$

Wenn die Dicke des ganzen Objectivs ($= d+e+d'$) durch δ bezeichnet wird, so ist $E = a+\alpha+\delta$, wodurch diese Formel sich in

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a+\alpha} + \frac{1}{E-\delta-\gamma-a}$$

verwandelt; indem man den zweiten Werth $a+e$ von a setzt, welcher das Bild in gleiche Entfernung bringt, hat man auch:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a+e+\alpha} + \frac{1}{E-\delta-\gamma-a-e}$$

Aus der Vergleichung beider Ausdrücke folgt:

$$(a+\alpha)(E-\delta-\gamma-a) = (a+e+\alpha)(E-\delta-\gamma-a-e)$$

oder

$$0 = e\left\{E-\delta-\gamma-\alpha-2a-e\right\}$$

welcher Gleichung, ausser durch $e=0$, auch durch $e = E-\delta-\gamma-\alpha-2a$ genügegeleistet wird. Führt man e, diesem Ausdrucke gemäss, statt a, in den Ausdruck von f ein, so erhält man

$$4f = E-\varkappa-\frac{ee}{E-\varkappa}$$

wo $\varkappa = \delta+\gamma-\alpha$, also die Entfernung der beiden optischen Mittelpunkte des Objectivs voneinander ist.

Durch diese Formel wird die Brennweite gefunden, wenn E und e gemessen sind und $\varkappa$ durch die Construction des Objectivs bekannt ist. Die *kleinste* Entfernung eines Punkts von seinem Bilde, nämlich $4f+\varkappa$, welche ich nun durch (E) bezeichnen werde, wird durch gemessene Werthe von E und e, mittelst der Formel

$$(E) = E - \frac{ee}{E-\varkappa},$$

so gut wie unabhängig von irgend einer Kenntniss der Construction

des Objectivs bestimmt; denn $\varkappa$ beträgt immer nur wenige Linien (für das Objectiv des Königsberger Heliometers $3^{L},6247$ (§ 17)), deren Berücksichtigung im Nenner des letzten, für kleine Werthe von e sehr kleinen Gliedes unterbleiben könnte, ohne dass es dadurch merklich geändert werden würde.

Unter der verfolgten Voraussetzung, dass das ganze Objectiv den entfernteren Lothfaden da abgebildet habe, wo sein den Mittelpunkt zunächst umgebender Theil ihn abbildet, ist durch die gegenwärtige Bestimmung von (E), verbunden mit der im 21ten § erlangten von f_2, die gesuchte wahre Brennweite des Objectivs gegeben. Denn $f_2 = 1131^{L},776$ bedarf nur noch der Veränderung im Verhältnisse $1:\lambda$ und λ wird durch die Gleichung $\lambda(4f+\varkappa) = (E)$, in welcher f und $\varkappa$ die den angenommenen Constructionselementen des Objectivs entsprechenden Werthe dieser Grössen bedeuten, gefunden. Man erhält also die wahre Brennweite des ganzen Objectivs:

$$F = \frac{f_2}{4f+\varkappa}(E) = \frac{1131,776}{1132,361} \cdot \frac{1}{4}(E)$$

Dieser Ausdruck ist richtig wenn für (E) die *kleinste* Entfernung eines Punkts von dem Bilde, welches der dem Mittelpunkte nächstliegende Theil des Objectivs von ihm macht, gesetzt wird. *Die* kleinste Entfernung, welche die Anwendung der im vorigen § mitgetheilten Messungen von E und e in dem Ausdrucke von (E) ergiebt, ist aber die für das *ganze* Objectiv stattfindende und muss daher, vor ihrer Anwendung in dem Ausdrucke von F, auf die vorige reducirt werden. — Man kann durch die Formeln A (§ 13) die Entfernungen von der inneren Fläche des Objectivs berechnen, in welchen Strahlen die Axe durchschneiden, die von einem, um etwa die doppelte Brennweite entfernten Punkte der Axe ausgehen und die äussere Fläche des Objectivs an Punkten treffen, welchen die Winkel $t = 0, 36', 72', 108', 144'$ zugehören. Aus den Resultaten dieser Rechnung kann man den Punkt der Axe ableiten, wo das Licht am meisten zusammengedrängt ist; aus seiner Vergleichung mit dem den Centralstrahlen allein zugehörigen Vereinigungspunkte erkennt man die Reduction, welche dem unmittelbar durch die Messungen von E und e gegebenen Werthe von (E) anzubringen ist. Die einzelnen Momente dieser Rechnungen werde ich jetzt mittheilen: zuerst die Entfernungen ξ von der inneren

Fläche des Objectivs, in welchen, von einem $2258^{L},4648$ von seiner äusseren Fläche entfernten Punkte der Axe ausgehende Strahlen die Axe durchschneiden:

$$\begin{aligned} t = 0 \ldots . \ \xi &= 2260,^{L}9820 \\ 36' \ldots . \ &\quad 60,8828 \\ 72' \ldots . \ &\quad 60,5640 \\ 108' \ldots . \ &\quad 60,0441 \\ 144' \ldots . \ &\quad 59,3525 \end{aligned}$$

Die Durchschnittswinkel dieser Strahlen und der Axe sind

$$\omega = 0,\ 13'20'',360,\ 26'40'',862,\ 40'1'',640,\ 53'22'',784$$

und aus der Verbindung von t, ω, ξ folgt, nach der Theorie, welche ich des ähnlichen Zweckes wegen schon im 17ten § angewandt habe, die Entfernung von der inneren Oberfläche des Objectivs, in welcher das Licht am meisten zusammengedrängt ist, in welcher man also das Bild des strahlenden Punkts sieht:

$$\alpha = 2259,^{L}8450.$$

Man hat also die Entfernung dieses Punkts von seinem durch das *ganze* Objectiv gemachten Bilde:

$$= 2258,^{L}4648 + 10,^{L}0 + 2259,^{L}8450 = 4528,^{L}3098$$

und, da sie für die Centralstrahlen allein $= 4529^{L},4468$ ist, die anzubringende Reduction des Werthes von $(E) = +\ 1,^{L}137$.

Hierdurch wird

$$F = \frac{1131,776}{1132,361}\left\{\tfrac{1}{4}(E) + 0,^{L}284\right\}$$

oder, ohne bemerkbaren Fehler

$$F = \tfrac{1}{4}(E) - 0,^{L}302$$

Die Berechnung der mitgetheilten 7 Messungen von E und e nach dieser Formel hat ergeben:

$F = 1134{,}12^{L}$;	Wärme $= 11{,}6^{\circ}.C$
4,20	12,5
4,08	12,6
4,14	12,1
4,10	13,8
4,17	12,9
4,13	14,0
Mittel . . . . . $F = 1134{,}134^{L}$;	Wärme $= 12{,}8^{\circ}.C$

30.

Die Messung der *Länge einer Schraubenwindung* fordert, ausser dem Besitze des im 7ten § erwähnten, auf dem Schieber der Objectivhälfte I befestigten Mikroskops, auch noch die Kenntniss der Entfernung zweier Striche auf der Fläche eines Metallstückes, welches auf dem Schieber der Objectivhälfte II befestigt wird. Wenn man erst den einen, dann den anderen dieser Striche, durch die Schraube dieser Objectivhälfte in die Absehenslinie des Mikroskops bringt, so erlangt man, durch die Ablesungen der Scale und Trommel der Schraube, den Ausdruck ihrer Entfernung durch Schraubenwindungen; durch *ausgeglichene* Schraubenwindungen, wenn man den unmittelbaren Ablesungen die periodischen (§ 10) und die von der Periode unabhängigen Ausgleichungen (§ 12) hinzusetzt.

Wenn man den Nutzen der genauen Bestimmung der Brennweite, welche ich mitgetheilt habe, nicht verlieren will, so muss die Entfernung der Striche verhältnissmässig eben so genau bekannt sein. Ich habe dieses durch die gütige Hülfe der Herren *A. & G. Repsold* in Hamburg erlangt; welche eine mit sehr grosser Genauigkeit getheilte Scale von drei Pariser Fuss besitzen, deren einzelne Abtheilungen sie mit der grössten Sorgfalt, von einem vortrefflichen Apparate unterstützt, geprüft haben um dadurch die kleinsten Ungleichheiten, welche die Operation der Eintheilung noch übrig gelassen hatte, mit aller dem geschärftesten Sehen erreichbaren Sicherheit zu bestimmen. Von dieser Scale haben sie *zwei Zolle* auf ein Stahlblättchen übertragen und durch nachherige Vergleichungen mit verschiedenen Abtheilungen

derselben gefunden, dass die wahre Entfernung der beiden aufgetragenen Striche, in der Normalwärme des Pariser Maasses

$$= {}^{L}24{,}00006$$

ist.

Die Entfernung dieser Striche voneinander, habe ich durch die Mikrometerschraube der Objectivhälfte II gemessen, indem ich erst 0^R, 5^R, 10^R, ... 35^R zum Anfange, dann 85^R, 90^R, 95^R, ... 120^R zum Ende der Messungen machte. Um die periodischen Ausgleichungen der Schraube ganz zu vermeiden, habe ich jede dieser Messungen fünfmal wiederholt, indem ich sie von $-0''4$, $-0''2$, 0, $+0''2$, $+0''4$ verschiedenen Punkten der Schraubentrommel anfing (§ 10 am Ende). Solcher Messungsreihen habe ich *zwei* gemacht, nämlich die folgenden:

Anfang.	Ende. Reihe I.	Ende. Reihe II.	Mittel.	Ausgleichung.	Wahre Entfernung.
R	R	R	R	R	R
0,0000	82,5214	82,5244	82,5229	— 0,0062	82,5167
5,0000	87,5242	87,5302	5272	— 0,0037	5235
10,0000	92,5188	92,5258	5223	— 0,0009	5214
15,0000	97,5206	97,5206	5203	+ 0,0024	5227
20,0000	102,5176	102,5140	5158	+ 0,0053	5211
25,0000	107,5242	107,5196	5219	+ 0,0075	5294
30,0000	112,5134	112,5138	5136	+ 0,0086	5222
35,0000	117,5162	117,5122	5142	+ 0,0087	5229
		Mittel			82,5225

Anfang. Reihe I.	Anfang. Reihe II.	Ende.	Mittel.	Ausgleichung.	Wahre Entfernung.
R	R	R	R	R	R
2,4746	2,4794	85,0000	82,5230	— 0,0050	82,5180
7,4810	7,4802	90,0000	5194	— 0,0024	5170
12,4784	12,4792	95,0000	5212	+ 0,0008	5220
17,4846	17,4856	100,0000	5149	+ 0,0039	5188
22,4840	22,4864	105,0000	5148	+ 0,0065	5213
27,4892	27,4892	110,0000	5108	+ 0,0082	5190
32,4792	32,4898	115,0000	5155	+ 0,0088	5243
37,4880	37,4904	120,0000	5108	+ 0,0083	5191
		Mittel			82,5200

Die als Resultat dieser Messungen gefundene Zahl von Schraubenwindungen ist von der Wärme unabhängig, indem die Striche auf Stahl gezogen sind und auch die Schraube von Stahl gemacht ist, so dass angenommen werden kann, dass beide gleiche Veränderungen durch die Wärme erfahren. In derjenigen Wärme, in welcher die Entfernung der Striche $= 24^{L},00006$ ist, d. h. in der Normalwärme der Toise $= 16^{\circ},25\ C.$, sind also 82,5212 ausgeglichene Windungen der Mikrometerschraube II eben so lang, oder *eine* solche Windung ist

$$= \frac{24^{L},00006}{82,5212}$$

31.

Der Werth von R — der Winkelwerth einer Schraubenwindung in der Wärme von $50^{\circ}F$ — kann jetzt, aus der Verbindung der Resultate der beiden letzten Paragraphen und seiner schon bekannten Veränderung durch die Wärme abgeleitet werden. — In der Wärme von $12^{\circ},8\ C.$, in welcher die Brennweite des Objectivs $= 1134^{L},134$ gemessen worden ist, ist die Länge von 82,5212 Windungen der Schraube

$$= 24^{L},00006 \cdot \frac{1 + 12,8\ .\ 0,00001013}{1 + 16,25\ .\ 0,00001013} = 23^{L},99922;$$

in derselben Wärme ($= 55^{\circ},04F$) ist daher der Werth von R

$$= \frac{23,99922\ .\ 206264'',8}{82,5212\ .\ 1134,134} = 52'',89228$$

und in der Wärme von $50^{\circ}F.$ ist er $0'',00101$ grösser (§ 24), also

$$R = 52'',89329$$

Ich werde die Resultate der jetzt vollständig mitgetheilten Versuche den Werth von R zu bestimmen, zusammenstellen:

1. Beobachtungen eines Fadens im Brennpunkte, durch das Objectiv hindurch . . . . . $52'',90299$. m. F. $= \pm 0'',00275$
2. Vergleichung der Messungen von 10 Entfernungen in den Plejaden mit ihrer Bestimmung durch Meridianbeobachtungen . . . . $52,88127$ . . . . . $0,00880$

3. Vergleichung der Messungen von 5 Entfernungen mit der Bestimmung ihrer Summe durch Meridianbeobachtungen . . . . . 52″,89036 . m.F. = ±0″,00314
4. Messungen der Brennweite und der Länge einer Schraubenwindung 52,89329

Unter den Unterschieden der drei ersten Bestimmungen von der letzten, nämlich

$$+\ 0'',00970;\quad -\ 0'',01212;\quad -\ 0'',00293$$

überschreitet nur der zweite den 5000ten Theil des Ganzen, die beiden übrigen erreichen diese Grösse nicht. Ich glaube, dass man eine noch weiter gehende Übereinstimmung nicht erwarten darf. Der Unterschied der *zweiten*, am meisten abweichenden Bestimmung ändert die grösseren Entfernungen worauf sie beruhet, kaum eine halbe Secunde, während die am Ende des 26ten § mitgetheilte Vergleichung der aus den Meridianbeobachtungen gefolgerten Entfernungen von 10 Sternen der Plejaden mit ihren Heliometermessungen zeigen, dass jene keineswegs bis auf eine so kleine Grösse sicher sind. Der auf das *Gaussische* Verfahren gegründeten *ersten* Bestimmung könnte die Kleinheit ihres mittleren Fehlers Zutrauen erwerben; allein diese Kleinheit deutet nur die gute Übereinstimmung zwischen den verschiedenen, angewandten Beobachtungen an, die Richtigkeit des aus ihnen gezogenen Resultats aber nur unter der Bedingung, dass die die Beobachtungen damit in Verbindung setzende Theorie vollständig ist. Die hier in Betracht kommende ist, wie ich schon § 25 bemerkt habe, von einer Voraussetzung nicht frei, deren *völlige* Rechtmässigkeit auch dadurch zweifelhaft wird, dass die Strahlen, welche das Objectiv des Theodoliten von dem Faden im Brennpunkte des Heliometerobjectivs empfängt, durch einen excentrischen Theil des letzteren gehen. Man hätte sie vermuthlich, durch weitere Verfolgung durch Rechnung, entweder vervollkommnen, oder als zureichend erkennen können; ich habe dieses aber nicht versucht, weil die übrigen Bestimmungen, und namentlich die letzte, mir grösseres Zutrauen einflössten, als Messungen — wenn auch gut untereinander übereinstimmende — mit einem so kleinen Instrumente wie der ange-

wandte Theodolit ist. — Gegen die Richtigkeit der Schätzung des Werthes der *dritten* Bestimmung durch ihren mittleren Fehler, ist, meiner Meinung nach, nichts einzuwenden; auch stimmt sie, bis auf die unerhebliche Kleinigkeit von einem 18000^tel ihrer Grösse, mit der *vierten* überein. — Dieser allein glaube ich folgen zu müssen. Ich würde in der That die drei früheren Bestimmungen nicht gemacht haben, wenn sich die § 28—29 mitgetheilte Methode die Brennweite des Objectivs befriedigend zu bestimmen, nicht erst später dargeboten hätte; ich suchte und fand sie erst, als sich zeigte, dass der Aufwand vieler Zeit und einer Menge, sowohl mit dem Meridiankreise als mit dem Heliometer gemachter Beobachtungen der Sterne der Plejaden, nicht hingereicht hatte, den mittleren Fehler der darauf gegründeten Bestimmung von R so klein zu machen, als ich ihn wünschte.

Ich nehme also den Winkelwerth einer ausgeglichenen Windung der Schraube II, in der Wärme von 50°F, an:

$$R = 52'',89329;$$

in einer anderen Wärme $= \tau$ Fahr. (§ 24)

$$R' = \frac{52'',89329}{1 + (\tau - 50)\ 0{,}0000037765}$$

und die aus einer *vollständigen* Beobachtung zweier Punkte hervorgehende Entfernung derselben

$$s = \frac{\left\{\frac{m' - m_{,}'}{2} + \psi\left(\frac{m' - m_{,}'}{2}\right)\right\} 52'',89329}{1 + (\tau - 50)\ 0{,}0000037765}$$

wo m' und $m_{,}'$ die schon wegen der periodischen Ausgleichungen (§ 10) verbesserten beiden Angaben der Scale und Trommel der Schraube, und $\psi\left(\frac{m_{,} - m_{,}'}{2}\right)$ die Zahl der Tafel § 20 bedeuten.

Zur Erleichterung der Berechnung der Entfernung aus den unmittelbaren Angaben der Schraube, dienen die angehängten Tafeln I, II, III. Die *periodische* Ausgleichung jeder Angabe der Schraubentrommel, nach der Formel (§ 10):

$$+ \overset{R}{0},001999 \operatorname{Cos} u - \overset{R}{0},002071 \operatorname{Sin} u - \overset{R}{0},000387 \operatorname{Cos} 2u + \overset{R}{0},00196 \operatorname{Sin} 2u$$

berechnet, findet man in Taf. I. In Taf. II ist

$$A = \text{Log.} \left\{ \frac{m'-m_{,}'}{2} + \psi \left(\frac{m'-m_{,}'}{2} \right) \right\} - \text{Log.} \frac{m'-m_{,}'}{2} + \text{Log } 52,''89329$$

enthalten; in Taf. III.

$$B = - \text{Log} \left\{ 1 + (\tau - 50)\ 0,0000037765 \right\}$$

Man hat also

$$\text{Log } s = \text{Log} \left(\frac{m'-m_{,}'}{2} \right) + A + B$$

Tafeln zur Reduction der Messungen der Entfernungen.

Tafel I.

Periodische Ausgleichung der Schraube.

R	R	R	R
0,00	+0,0016	0,50	—0,0024
0,01	+0,0015	0,51	—0,0022
0,02	+0,0014	0,52	—0,0020
0,03	+0,0013	0,53	—0,0019
0,04	+0,0012	0,54	—0,0017
0,05	+0,0011	0,55	—0,0015
0,06	+0,0009	0,56	—0,0012
0,07	+0,0008	0,57	—0,0010
0,08	+0,0007	0,58	—0,0008
0,09	+0,0006	0,59	—0,0006
0,10	+0,0005	0,60	—0,0003
0,11	+0,0003	0,61	—0,0001
0,12	+0,0002	0,62	+0,0001
0,13	+0,0001	0,63	+0,0004
0,14	—0,0001	0,64	+0,0006
0,15	—0,0002	0,65	+0,0008
0,16	—0,0003	0,66	+0,0010
0,17	—0,0005	0,67	+0,0012
0,18	—0,0006	0,68	+0,0014
0,19	—0,0008	0,69	+0,0016
0,20	—0,0009	0,70	+0,0018
0,21	—0,0011	0,71	+0,0019
0,22	—0,0012	0,72	+0,0021
0,23	—0,0014	0,73	+0,0022
0,24	—0,0015	0,74	+0,0024
0,25	—0,0017	0,75	+0,0025
0,26	—0,0018	0,76	+0,0026
0,27	—0,0020	0,77	+0,0026
0,28	—0,0021	0,78	+0,0027
0,29	—0,0023	0,79	+0,0027
0,30	—0,0024	0,80	+0,0028
0,31	—0,0025	0,81	+0,0028
0,32	—0,0026	0,82	+0,0028
0,33	—0,0027	0,83	+0,0028
0,34	—0,0028	0,84	+0,0028
0,35	—0,0029	0,85	+0,0028
0,36	—0,0030	0,86	+0,0028
0,37	—0,0031	0,87	+0,0027
0,38	—0,0031	0,88	+0,0027
0,39	—0,0031	0,89	+0,0026
0,40	—0,0031	0,90	+0,0025
0,41	—0,0031	0,91	+0,0025
0,42	—0,0031	0,92	+0,0024
0,43	—0,0031	0,93	+0,0023
0,44	—0,0030	0,94	+0,0022
0,45	—0,0030	0,95	+0,0021
0,46	—0,0029	0,96	+0,0020
0,47	—0,0028	0,97	+0,0019
0,48	—0,0027	0,98	+0,0018
0,49	—0,0025	0,99	+0,0017
0,50	—0,0024	1,00	+0,0016

Tafel II.

Argum. $\frac{1}{2}(m'-m_1')$

	A
0R	1,723401
1	402
2	404
3	405
4	407
5	409
6	410
7	412
8	413
9	415
10	1,723417
11	418
12	420
13	422
14	423
15	425
16	427
17	429
18	431
19	433
20	1,723435
21	437
22	440
23	442
24	444
25	446
26	449
27	451
28	453
29	456
30	1,723458
31	461
32	464
33	467
34	469
35	472
36	475
37	477
38	480
39	483
40	1,723486
41	488
42	490
43	493
44	495
45	498
46	500
47	502
48	505
49	507
50	1,723509

	A
50R	1,723509
51	512
52	514
53	517
54	519
55	522
56	524
57	527
58	529
59	532
60	1,723535

Tafel III.

Einfluss d. Wärme.

F	B
—10°	+ 0,000098
— 9	97
— 8	95
— 7	93
— 6	92
— 5	90
— 4	88
— 3	87
— 2	85
— 1	84
0	+ 0,000082
+ 1	80
2	79
3	77
4	75
5	74
6	72
7	70
8	69
9	67
10	+ 0,000066
11	64
12	62
13	61
14	59
15	57
16	56
17	54
18	52
19	51
20	+ 0,000049
21	47
22	46
23	44
24	43
25	41
26	39
27	38

F	B
28	+0,000036
29	34
30	+0,000033
31	31
32	30
33	28
34	26
35	25
36	23
37	21
38	20
39	18
40	+0,000016
41	15
42	13
43	12
44	10
45	8
46	7
47	5
48	3
49	2
50	—0,000000
51	2
52	3
53	5
54	7
55	8
56	10
57	11
58	13
59	15
60	—0,000016
61	18
62	20
63	22
64	23
65	25
66	26
67	28
68	30
69	31
70	—0,000033
71	34
72	36
73	38
74	39
75	41
76	43
77	44
78	46
79	48
80	—0,000049
81	51

Tafeln zur Reduction der Beobb. der Positionswinkel.

Tafel IV.

Theilungsfehler des Positionskreises des Heliometers.

Argument . . . $\frac{1}{2}\{\text{Non. II} + \text{Non. IV} \pm 180^\circ\}$

Arg.		ε
°	°	′
0	180	—0,78
1	181	—0,81
2	182	—0,84
3	183	—0,87
4	184	—0,90
5	185	—0,93
6	186	—0,96
7	187	—0,98
8	188	—1,01
9	189	—1,03
10	190	—1,06
11	191	—1,08
12	192	—1,10
13	193	—1,11
14	194	—1,13
15	195	—1,15
16	196	—1,16
17	197	—1,17
18	198	—1,19
19	199	—1,20
20	200	—1,20
21	201	—1,21
22	202	—1,22
23	203	—1,22
24	204	—1,22
25	205	—1,22
26	206	—1,22
27	207	—1,22
28	208	—1,22
29	209	—1,21
30	210	—1,21
31	211	—1,20
32	212	—1,19
33	213	—1,18
34	214	—1,17
35	215	—1,16
36	216	—1,14
37	217	—1,12
38	218	—1,11
39	219	—1,09
40	220	—1,07
41	221	—1,05
42	222	—1,02
43	223	—1,00
44	224	—0,97
45	225	—0,95

Arg.		ε
°	°	′
45	225	—0,95
46	226	—0,92
47	227	—0,89
48	228	—0,86
49	229	—0,83
50	230	—0,80
51	231	—0,76
52	232	—0,73
53	233	—0,70
54	234	—0,66
55	235	—0,62
56	236	—0,59
57	237	—0,55
58	238	—0,51
59	239	—0,47
60	240	—0,43
61	241	—0,39
62	242	—0,35
63	243	—0,31
64	244	—0,27
65	245	—0,23
66	246	—0,18
67	247	—0,14
68	248	—0,10
69	249	—0,06
70	250	—0,01
71	251	+0,03
72	252	+0,07
73	253	+0,12
74	254	+0,16
75	255	+0,20
76	256	+0,24
77	257	+0,28
78	258	+0,33
79	259	+0,37
80	260	+0,41
81	261	+0,45
82	262	+0,49
83	263	+0,53
84	264	+0,56
85	265	+0,60
86	266	+0,64
87	267	+0,68
88	268	+0,71
89	269	+0,75
90	270	+0,78

Arg.		ε
°	°	′
90	270	+0,78
91	271	+0,81
92	272	+0,84
93	273	+0,87
94	274	+0,90
95	275	+0,93
96	276	+0,96
97	277	+0,98
98	278	+1,01
99	279	+1,03
100	280	+1,06
101	281	+1,08
102	282	+1,10
103	283	+1,11
104	284	+1,13
105	285	+1,15
106	286	+1,16
107	287	+1,17
108	288	+1,19
109	289	+1,20
110	290	+1,20
111	291	+1,21
112	292	+1,22
113	293	+1,22
114	294	+1,22
115	295	+1,22
116	296	+1,22
117	297	+1,22
118	298	+1,22
119	299	+1,21
120	300	+1,21
121	301	+1,20
122	302	+1,19
123	303	+1,18
124	304	+1,17
125	305	+1,16
126	306	+1,14
127	307	+1,12
128	308	+1,11
129	309	+1,09
130	310	+1,07
131	311	+1,05
132	312	+1,02
133	313	+1,00
134	314	+0,97
135	315	+0,95

Arg.		ε
°	°	′
135	315	+0,95
136	316	+0,92
137	317	+0,89
138	318	+0,86
139	319	+0,83
140	320	+0,80
141	321	+0,76
142	322	+0,73
143	323	+0,70
144	324	+0,66
145	325	+0,62
146	326	+0,59
147	327	+0,55
148	328	+0,51
149	329	+0,47
150	330	+0,43
151	331	+0,39
152	332	+0,35
153	333	+0,31
154	334	+0,27
155	335	+0,23
156	336	+0,18
157	337	+0,14
158	338	+0,10
159	339	+0,06
160	340	+0,01
161	341	—0,03
162	342	—0,07
163	343	—0,12
164	344	—0,16
165	345	—0,20
166	346	—0,24
167	347	—0,28
168	348	—0,33
169	349	—0,37
170	350	—0,41
171	351	—0,45
172	352	—0,49
173	353	—0,53
174	354	—0,56
175	355	—0,60
176	356	—0,64
177	357	—0,68
178	358	—0,71
179	359	—0,75
180	360	—0,78

Tafel V.

Indexfehler des Positionskreises des Heliometers

von der Aufstellung des Instruments an, bis Ende 1840.

		k'
1829	Novb. 26	— 6′,79
	— 30 bis Janr. 12	— 10,30
1830	Janr. 20 — Janr. 21	— 12,97
	März 21	— 14,37
	April 14	— 7,88
	— 17 — May 12	— 8,62
	May 16	— 5,58
	— 18	— 7,24
	Juni 18	— 4,96
	— 19	— 4,73
	— —	— 4,37
	Septr. 7	— 0,51
	Octb. 2 — Febr. 19	— 2,10
1831	Febr. 21	— 20,22
	April 15	— 20,26
	Octb. 15	— 16,57
1832	Febr. 24	— 17,90
1833	Febr. 4	— 19,81
	März 9	— 19,55
	April 10	— 17,38
1834	März 20 — Aug. 27	— 18,97
	Octb. 11	— 9,99
1835	May 10	— 13,16
	Septr. 17	— 9,98
	Octb. 21	— 10,72
1836	Novb. 11	— 15,65
1837	Aug. 8	— 10,08
	20	+ 7,14
	21	+ 5,02
	Septr. 5	+ 5,00
1838	März 26	+ 0,21
	May 11	+ 2,02
	Septr. 4	+ 1,54
	— 22	+ 2,65
	Novb. 4	+ 3,68
	28	+ 3,02
	Decbr. 17	+ 1,72

		k'
1839	Janr. 7	+ 1′,18
	Febr. 1	+ 0,81
	— 18	— 0,20
	März 4	+ 0,79
	— 25	+ 1,75
	April 8	+ 1,74
	— 22	+ 1,15
	May 6 — May 16	+ 1,21
	May 27	+ 3,46
	Juni 11	+ 4,00
	Juli 1	+ 4,16
	Aug. 27	+ 4,38
	Septr. 16	+ 4,50
	— 30	+ 3,86
	Octb. 21	+ 3,64
	Novb. 4	+ 4,35
	— 18	+ 2,93
	Decbr. 10	+ 3,31
	— 30	+ 1,89
1840	Janr. 25	+ 1,03
	Febr. 10	— 0,21
	— 24	+ 1,62
	März 16	+ 1,26
	April 6	+ 1,30
	Juni 11	+ 3,58
	— —	+ 3,70
	Juli 16	+ 5,74
	Aug. 1	+ 6,57
	— 16	+ 5,97
	Septr. 20	+ 6,15
	Octb. 4	+ 5,48
	— 18	+ 5,83
	Novb. 1	+ 4,32
	— 15	+ 4,81
	— 29	+ 4,00
	Decbr. 13	+ 4,47
	— 27	+ 3,73

Tafel VII.

Berichtigungen der Aufstellung des Instruments.

	x'	y'	(y')	
1829 Novb. 1	+ 0,′31	− 0,′69	− 0,′69	
1830 May 24	− 0,54	− 0,25	− 0,25	
Octb. 20	− 0,58	+ 1,17	+ 1,17	
21	0,00	0,00	0,00	
1832 Febr. 10	− 0,18	0,00	− 2,44	
April 20	− 1,15	+ 0,19	− 0,24	
Novb.20	− 1,01	+ 0,26	− 0,98	
1834 März 20	− 0,85	+ 0,26	− 0,36	
Octb. 13	− 1,01	+ 0,38	+ 0,41	
1835 Octb. 12	− 0,74	+ 0,27	+ 0,64	
1837 Juni 10	− 1,12	+ 0,53	− 0,32	
15	+ 0,16	+ 1,00	+ 0,88	Juni 11. Die Wasserwagen geändert.
21	− 0,21	− 0,38	− 0,10	— 17. Ebenfalls.
Sept. 4	+ 0,13	− 0,27	− 0,53	
Octb. 2	− 0,06	− 0,27	− 1,78	
1838 März 26	+ 0,15	− 0,27	− 0,08	
May 3	− 0,02	− 0,40	− 0,70	
7	− 0,18	− 0,54	− 0,83	
Sept. 16	− 0,31	− 0,30	− 1,45	Die Wasserwagen geändert.
17	− 0,34	0,00	0,00	
25	− 0,23	− 0,04	− 0,23	Octb. 3. Das Instrument abgenommen.
Novb.20	+ 0,21	− 0,68	− 1,08	
1839 Febr. 19	+ 0,28	− 0,56	+ 0,14	
May 1	− 0,02	− 0,58	+ 0,39	
Octb. 16	− 0,32	+ 0,48	− 1,14	
20	− 0,37	+ 0,43	+ 0,27	
1840 März 29	− 0,24	+ 0,11	+ 1,30	
Juni 6	− 0,51	+ 0,26	+ 0,80	
Juli 19	− 0,58	+ 0,29	+ 0,04	
Sept. 23	− 0,03	+ 0,56	− 0,48	
Novb.20	− 0,18	+ 0,30	+ 0,09	

Tafel VII.

Argument: $\pm \delta_0$

Arg.	a	Arg.	a
°	′	°	′
0	2,03	45	1,77
1	2,03	46	1,77
2	2,03	47	1,76
3	2,03	48	1,75
4	2,03	49	1,75
5	2,03	50	1,74
6	2,03	51	1,73
7	2,03	52	1,73
8	2,02	53	1,73
9	2,02	54	1,72
10	2,02	55	1,72
11	2,02	56	1,72
12	2,01	57	1,72
13	2,01	58	1,72
14	2,00	59	1,72
15	2,00	60	1,73
16	1,99	61	1,73
17	1,99	62	1,74
18	1,98	63	1,75
19	1,98	64	1,76
20	1,97	65	1,78
21	1,96	66	1,80
22	1,96	67	1,82
23	1,95	68	1,85
24	1,94	69	1,88
25	1,94	70	1,92
26	1,93	71	1,96
27	1,92	72	2,01
28	1,91	73	2,07
29	1,91	74	2,15
30	1,90	75	2,23
31	1,89	76	2,33
32	1,88	77	2,45
33	1,87	78	2,60
34	1,87	79	2,78
35	1,86	80	3,00
36	1,85	81	3,27
37	1,84	82	3,62
38	1,83	83	4,07
39	1,82	84	4,69
40	1,81	85	5,56
41	1,81	86	6,89
42	1,80	87	9,12
43	1,79		
44	1,78		
45	1,77		

Tafel VIII.

Argument: $\tau_0 - \delta_0$ für b; $\tau_0 + \delta_0$ für c.

Argum.		b und c	Argum.	
°	°	′	°	°
0	180	+0,00—	180	360
1	179	0,01	181	359
2	178	0,02	182	358
3	177	0,03	183	357
4	176	0,04	184	356
5	175	0,05	185	355
6	174	0,06	186	354
7	173	0,07	187	353
8	172	0,08	188	352
9	171	0,09	189	351
10	170	+0,10—	190	350
11	169	0,11	191	349
12	168	0,11	192	348
13	167	0,12	193	347
14	166	0,13	194	346
15	165	0,14	195	345
16	164	0,15	196	344
17	163	0,16	197	343
18	162	0,17	198	342
19	161	0,18	199	341
20	160	+0,19—	200	340
21	159	0,20	201	339
22	158	0,21	202	338
23	157	0,22	203	337
24	156	0,22	204	336
25	155	0,23	205	335
26	154	0,24	206	334
27	153	0,25	207	333
28	152	0,26	208	332
29	151	0,27	209	331
30	150	+0,28—	210	330
31	149	0,28	211	329
32	148	0,29	212	328
33	147	0,30	213	327
34	146	0,31	214	326
35	145	0,32	215	325
36	144	0,33	216	324
37	143	0,33	217	323
38	142	0,34	218	322
39	141	0,35	219	321
40	140	+0,36—	220	320
41	139	0,36	221	319
42	138	0,37	222	318
43	137	0,38	223	317
44	136	0,38	224	316
45	135	0,39	225	315

Argum.		b und c	Argum.	
°	°	′	°	°
45	135	+0,39—	225	315
46	134	0,40	226	314
47	133	0,40	227	313
48	132	0,41	228	312
49	131	0,42	229	311
50	130	+0,42—	230	310
51	129	0,43	231	309
52	128	0,44	232	308
53	127	0,44	233	307
54	126	0,45	234	306
55	125	0,45	235	305
56	124	0,46	236	304
57	123	0,46	237	303
58	122	0,47	238	302
59	121	0,47	239	301
60	120	+0,48—	240	300
61	119	0,48	241	299
62	118	0,49	242	298
63	117	0,49	243	297
64	116	0,50	244	296
65	115	0,50	245	295
66	114	0,51	246	294
67	113	0,51	247	293
68	112	0,51	248	292
69	111	0,52	249	291
70	110	+0,52—	250	290
71	109	0,52	251	289
72	108	0,53	252	288
73	107	0,53	253	287
74	106	0,53	254	286
75	105	0,53	255	285
76	104	0,54	256	284
77	103	0,54	257	283
78	102	0,54	258	282
79	101	0,54	259	281
80	100	+0,54—	260	280
81	99	0,55	261	279
82	98	0,55	262	278
83	97	0,55	263	277
84	96	0,55	264	276
85	95	0,55	265	275
86	94	0,55	266	274
87	93	0,55	267	273
88	92	0,55	268	272
89	91	0,55	269	271
90	90	+0,55—	270	270

Aus diesen Tafeln erhält man $J = a + b - c - i' \operatorname{Tang} \delta_0$.

III.

Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen.

Die Beobachtungsarten, für welche den Einfluss der Strahlenbrechung zu entwickeln gegenwärtig meine Absicht ist, haben den Zweck, die *Vergleichung* der Örter zweier, am Himmel sichtbaren Punkte S, S' zu ergeben, ohne die Bestimmung der beiden Örter selbst zu fordern. Sie haben miteinander gemein, dass diese Vergleichung durch Messung *kleiner* Winkel gemacht werden kann, allein sie unterscheiden sich wesentlich durch die Mittel wodurch sie gemacht wird. Diese Beobachtungsarten beruhen zum Theil auf wirklichen Messungen, zum Theil auf dem Ersatze derselben durch die tägliche Bewegung; einige von ihnen setzen ein als Aequatoreal aufgestelltes Instrument voraus, andere ersetzen die Kenntniss der Richtung des Declinationskreises, welche dieses Hülfsmittel gewährt, durch jedesmalige Verfolgung der von den beobachteten Punkten beschriebenen Wege. Die Verschiedenheit der Einrichtungen der Apparate, welche man zu diesen Beobachtungsarten angewandt hat, oder anwenden kann, ist so gross, dass es ermüdend sein würde, jeden davon einzeln zu verfolgen; ich werde aber versuchen, sie in gewisse Abtheilungen zu ordnen, so dass die Entwickelung des Einflusses der Strahlenbrechung auf alle in einer Abtheilung enthaltenen auf gleichen Betrachtungen beruhet.

1.

Die Auflösung der Aufgabe:

Eine Beobachtung der Entfernung zweier Sterne und des Winkels des durch sie gelegten grössten Kreises mit dem Verticalkreise, von dem Einflusse der Strahlenbrechung zu befreien

werde ich zuerst verfolgen. Diese Beobachtungsart ist zwar keine gebräuchliche, und würde nur ausgeführt werden, wenn ein Heliometer oder Fadenmikrometer in derselben Beziehung zu dem Scheitelpunkte aufgestellt wäre, welche ihm seine parallactische Aufstellung zu dem Pole giebt; aber der Einfluss der Strahlenbrechung auf sie ist einfacher als auf andere Beobachtungsarten, und seine Entwickelung kann zur Grundlage der für diese gehörigen Entwickelungen gemacht werden. Auch wird sie Gelegenheit geben, Mehreres was bei allen hiehergehörigen Beobachtungsarten Anwendung findet, einfürallemal zu verfolgen.

Die Bezeichnungen, welche ich anwenden werde, sind folgende:

ζ, ζ' und z, z'... wahre und scheinbare Zenithdistanzen der beiden Sterne S, S'.

a..... ihr Azimuthalunterschied

ϱ, ϱ'..... ihre Strahlenbrechungen

λ, λ' und l, l'... wahre und scheinbare Winkel des beide Sterne miteinander verbindenden gr. Kreises mit ihren Verticalkreisen, für beide nach einer Richtung gezählt

σ und s..... wahre und scheinbare Entfernungen der beiden Sterne voneinander.

Diesen Bezeichnungen gemäss hat man, für das Dreieck zwischen den scheinbaren Örtern der Sterne und dem Scheitelpunkte:

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s\,\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(l+l') = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\,\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(z+z')$$
$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s\,\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(l+l') = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(z-z')$$

und für das Dreieck zwischen den wahren Örtern der Sterne und dem Scheitelpunkte:

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\sigma\,\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda') = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\,\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(\zeta+\zeta')$$
$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\sigma\,\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda') = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(\zeta-\zeta')$$

Durch die Beobachtung gegeben sind s und $\frac{1}{2}(l+l') = l_0$; gesucht werden σ und $\frac{1}{2}(\lambda+\lambda') = \lambda_0$. Wenn die wahren Örter der beiden Sterne, die Polhöhe und die Sternenzeit bekannt sind, so kann man daraus die Zenithdistanzen ζ und ζ' berechnen; ihre halbe Summe $= \frac{1}{2}(\zeta+\zeta') = \zeta_0$ werde ich als gegeben ansehen. Man findet sie mit hinreichender Genauigkeit durch *eine* Rechnung, wenn man diese für den in der Mitte zwischen beiden Sternen liegenden Punkt macht.

Setzt man $\zeta-\varrho$ und $\zeta'-\varrho'$ für z und z', so erhält man, aus der Verbindung beider Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\sigma \operatorname{Sin}\lambda_0 &= \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s \operatorname{Sin}l_0 . \frac{\operatorname{Sin}\zeta_0}{\operatorname{Sin}\left\{\zeta_0-\frac{1}{2}(\varrho+\varrho')\right\}} \\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\sigma \operatorname{Cos}\lambda_0 &= \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s \operatorname{Cos}l_0 . \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\zeta-\zeta')}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\left\{\zeta-\zeta'-\varrho+\varrho'\right\}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (1)$$

Da $\frac{1}{2}(\varrho+\varrho')$ erst in Grössen von der Ordnung der Strahlenbrechung in das Quadrat von $\zeta-\zeta'$, von der zu ζ_0 gehörigen Strahlenbrechung ϱ_0 verschieden ist, und da, mit noch eine Ordnung weiter gehender Annäherung,

$$\varrho-\varrho' = \frac{d\varrho_0}{d\zeta_0}(\zeta-\zeta')$$

ist, so kann man, statt der Gleichungen (1) die folgenden:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\sigma \operatorname{Sin}\lambda_0 &= \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s \operatorname{Sin}l_0 \frac{\operatorname{Sin}\zeta_0}{\operatorname{Sin}(\zeta_0-\varrho_0)} \\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\sigma \operatorname{Cos}\lambda_0 &= \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s \operatorname{Cos}l_0 \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\zeta-\zeta')}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\left\{(\zeta-\zeta')\left(1-\frac{d\varrho_0}{d\zeta_0}\right)\right\}} \end{aligned}$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned} \sigma \operatorname{Sin}\lambda_0 &= s \operatorname{Sin}l_0 . \frac{\operatorname{Sin}\zeta_0}{\operatorname{Sin}(\zeta_0-\varrho_0)} \\ \sigma \operatorname{Cos}\lambda_0 &= s \operatorname{Cos}l_0 . \frac{d\zeta_0}{d\zeta_0-d\varrho_0} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (2)$$

anwenden. Obgleich diese Gleichungen nur Näherungen sind, so sind ihre Fehler, wegen der zur Bedingung gemachten Kleinheit der Entfernung der Sterne, doch so gering, dass sie nie merklich werden.

2.

Die Entwickelung der Gleichungen (2) ergiebt das was man den beobachteten s und l_0 hinzufügen muss, um σ und λ_0 zu erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \sigma - s &= s\left\{a-1+(b-a)\operatorname{Cos} l_0^2+\frac{(b-a)^2}{2a}\operatorname{Cos} l_0^2\operatorname{Sin} l_0^2+\ldots\right\} \\ \lambda_0 - l_0 &= -\frac{b-a}{a}\operatorname{Cos} l_0\operatorname{Sin} l_0+\frac{(b-a)^2}{aa}\operatorname{Cos} l_0^3\operatorname{Sin} l_0-\ldots\ldots \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(3)$$

wo a und b, um abzukürzen, für

$$\frac{\operatorname{Sin}\zeta_0}{\operatorname{Sin}(\zeta_0-\varrho_0)} \text{ und } \frac{d\zeta_0}{d\zeta_0-d\varrho_0}$$

geschrieben sind. Man muss also die beiden Grössen a und $b-a$ kennen, um eine gemachte Beobachtung von dem Einflusse der Strahlenbrechung befreien zu können. Ich werde den Zusammenhang dieser Grössen mit den Strahlenbrechungstafeln aufsuchen.

Die in den *Tabulis Regiomontanis* enthaltenen Tafeln dieser Art ergeben die Strahlenbrechung unter der Form

$$\varrho = \alpha.\beta^{A}.\gamma^{\lambda}.\operatorname{Tang} z = k\operatorname{Tang} z$$

wo α, A, λ, für alle Werthe von z von 0 bis 85°, in den Tafeln gegeben sind und β, γ von dem Barometer- und dem Thermometerstande abhängige Factoren bedeuten, welche für den Zustand der Atmosphäre, für welchen die Werthe von α gelten $= 1$ sind. Jene drei Grössen haben die Eigenschaft, für kleinere Zenithdistanzen fast beständig zu sein und sich auch für grössere langsam zu ändern; A und λ entfernen sich erst in diesen grösseren Zenithdistanzen so weit von 1, dass ihre Unterschiede davon merklichen Einfluss auf ϱ erhalten.

Man hat nun, für eine unbestimmte Zenithdistanz,

$$a = \frac{\operatorname{Sin}\zeta}{\operatorname{Sin}(\zeta-\varrho)} = \frac{\operatorname{Sin}(z+\varrho)}{\operatorname{Sin} z} = \operatorname{Cos}\varrho + \frac{\operatorname{Sin}\varrho}{\operatorname{Tang} z}$$

$$b = \frac{d\zeta}{d\zeta-d\varrho} = 1+\frac{d\varrho}{dz} = 1+k+k\operatorname{Tang} z^2+\frac{dk}{dz}\operatorname{Tang} z$$

und wenn man $\operatorname{Cos}\varrho = 1$ und $\operatorname{Sin}\varrho = \varrho = k\operatorname{Tang} z$ setzt, was keinen merklichen Fehler erzeugt:

$$a = 1+k$$

$$b-a = k\operatorname{Tang} z^2+\frac{dk}{dz}\operatorname{Tang} z$$

Wenn man die halbe Summe der *scheinbaren* Zenithdistanzen der beiden Sterne als gegeben voraussetzen wollte, so würde man es bei diesen Ausdrücken bewenden lassen können; allein die trigonometrische Rechnung ergiebt die halbe Summe der *wahren* Zenithdistanzen, von welcher *unmittelbar* a und $b-a$ abhängig gemacht werden können. Um diesen Vortheil nicht ungenutzt zu lassen, muss man die Ausdrücke von a und $b-a$ umformen.

Setzt man

$$b-a = \varkappa \operatorname{Tang} \zeta^2$$

so wird

$$\varkappa = k \frac{\operatorname{Tang} z^2}{\operatorname{Tang} \zeta^2} + \frac{dk}{dz} \frac{\operatorname{Tang} z}{\operatorname{Tang} \zeta^2},$$

und, indem man für $\operatorname{Tang} \zeta$ seinen Ausdruck durch z und k

$$\operatorname{Tang} \zeta = \frac{\operatorname{Tang} z + \operatorname{Tang} \varrho}{1 - \operatorname{Tang} z \operatorname{Tang} \varrho} = \frac{\operatorname{Tang} z\,(1+k)}{1-k \operatorname{Tang} z^2}$$

schreibt:

$$\varkappa = \left(k + \frac{dk}{dz} \operatorname{Cotg} z\right) \left(\frac{1-k \operatorname{Tang} z^2}{1+k}\right)^2.$$

In jedem einzelnen Falle, für welchen ζ, β, γ gegeben sind, kann man z, durch Auflösung der Gleichung

$$\zeta = z + k \operatorname{Tang} z,$$

in welcher k von z, β, γ abhängig ist, finden und den Werth von $\varkappa$, aus diesem Werthe von z und den ihm zugehörigen Werthen von k und seines Differentialquotienten, welchen letzteren man aus den Strahlenbrechungstafeln ableiten kann, berechnen; allein es ist viel bequemer, den Logarithmen von $\varkappa$ aus Tafeln zu nehmen, welche so eingerichtet sind, dass sie ihn für alle vorkommenden Werthe von ζ, β, γ ergeben können.

3.

Die Auflösung der Gleichung

$$\zeta = z + k \operatorname{Tang} z$$

in welcher

$$k = \alpha . \beta^A . \gamma^\lambda$$

ist, hat auch abgesehen von dem hier verfolgten Zwecke, ein Interesse,

indem sie die Mittel giebt, die Strahlenbrechung durch die *wahre* Zenithdistanz ζ auszudrücken.

Giebt man diesem Ausdrucke derselben die der obigen analoge Form:

$$\varrho = \alpha' . \beta^{A'} . \gamma^{\lambda'} \operatorname{Tang} \zeta$$

so hat man die beiden Gleichungen:

$$\alpha . \beta^{A} . \gamma^{\lambda} . \operatorname{Tang} z = \alpha' . \beta^{A'} . \gamma^{\lambda'} . \operatorname{Tang} \zeta = \zeta - z$$

welchen für unbestimmte Werthe von β und γ genügt werden muss. Die natürlichen Logarithmen der beiden Glieder der ersten dieser Gleichungen sind:

$$l(\alpha \operatorname{Tang} z) + A l\beta + \lambda l\gamma = l(\alpha' \operatorname{Tang} \zeta) + A' l\beta + \lambda' l\gamma$$

und der Werth von z, welchen der vor dem Gleicheitszeichen stehende Ausdruck voraussetzt, ist

$$z = \zeta - \alpha' . \beta^{A'} . \gamma^{\lambda'} \operatorname{Tang} \zeta$$

Bezeichnet man den unter der Annahme $\beta = 1$, $\gamma = 1$ zu ζ gehörigen Werth von z durch (z) und die ihm entsprechenden α, A, λ und ϱ durch (α), (A), (λ) und (ϱ), so erhält man aus der Entwickelung der letzten Formel:

$$z = (z) - \alpha' \operatorname{Tang} \zeta \left\{ A' l\beta + \lambda' l\gamma \right\} + \ldots$$

und wenn man dieses in der ihr vorhergehenden Gleichung anwendet:

$$l\left\{(\alpha) \operatorname{Tang}(z)\right\} - \frac{d\left\{(\alpha) \operatorname{Tang}(z)\right\}}{(\alpha) \operatorname{Tang}(z) . d(z)} \alpha' \operatorname{Tang} \zeta \left\{ A' l\beta + \lambda' l\gamma \right\} + (A) l\beta + (\lambda) l\gamma = l(\alpha' \operatorname{Tang} \zeta) + A' l\beta + \lambda' l\gamma$$

Da ihr für unbestimmte Werthe von β und γ genügegeleistet werden muss, so erhält man, durch die Vergleichung ihrer ähnlichen Glieder:

$$\alpha' = (\alpha) \frac{\operatorname{Tang}(z)}{\operatorname{Tang} \zeta}$$

$$A' = \frac{(A)}{1 + \frac{d(\varrho)}{d(z)}}$$

$$\lambda' = \frac{(\lambda)}{1 + \frac{d(\varrho)}{d(z)}}$$

Diese Bestimmung von A' und λ', welche durch die Vergleichung der in die erste Potenz von $l\beta$ und $l\gamma$ multiplicirten Glieder erlangt worden ist und daher *beide* Ausdrücke der Strahlenbrechung desto übereinstimmender macht, je weniger von 1 verschieden β und γ sind, kann sie offenbar nur in so weit übereinstimmend erhalten, als die für ϱ gewählte Form dieses möglich macht. Indessen ist das Opfer, welches man, in dem Falle beträchtlicher von 1 verschiedener Werthe von β und γ, der möglichst vortheilhaften Form bringt, nicht so erheblich, dass es zu grösserer Complication dieser Form veranlassen dürfte.

Die vorausgesetzte Auflösung der Gleichung:

$$\zeta = z + \alpha \operatorname{Tang} z$$

kann man am bequemsten auf folgende Art machen. Bezeichnet man einen Näherungswerth von z durch $z_,$, den dazugehörigen Werth von $\operatorname{Log}\alpha$ durch $\operatorname{Log}\alpha_,$, die Änderungen von $l\operatorname{Tang} z_,$ und $l\alpha_,$ für eine Secunde der Änderung von $z_,$, durch ν und $-\nu'$, die Änderung von $l(\alpha_, \operatorname{Tang} z_,)$ für eine Secunde, durch μ, den wahren Werth von (z) durch $z_,+x$, so hat man

$$l((\alpha)\operatorname{Tang}(z)) = l(\alpha_, \operatorname{Tang} z_,) + (\nu - \nu')x$$

$$\zeta = z_, + \alpha_, \operatorname{Tang} z_, + \left(1 + \frac{\nu - \nu'}{\mu}\right) x$$

woraus

$$x = \frac{\mu(\zeta - z_, - \alpha_, \operatorname{Tang} z_,)}{\mu + \nu - \nu'}$$

und ferner

$$l\alpha' = l\,\frac{\alpha_, \operatorname{Tang} z_,}{\operatorname{Tang}\zeta} + \frac{\mu(\nu - \nu')}{\mu + \nu - \nu'}(\zeta - z_, - \alpha_, \operatorname{Tang} z_,)$$

folgt. — Will man z. B. die Werthe von $l\alpha'$, A', λ' für $\zeta = 85°$ bestimmen, so kann man von $z_, = 84°50'30''$ ausgehen, wofür die *Tabulae Regiomontanae*

$$l\alpha_, = 1{,}71266,\ \nu' = \frac{252}{600} = 0{,}42,\ A = 1{,}01213,\ \lambda = 1{,}11805$$

enthalten. Man hat also die folgende Rechnung auszuführen:

$$\left.\begin{array}{rl} l\alpha_z = 1{,}71206 & \ldots\ldots \nu' = 0{,}42 \\ l\,\mathrm{Tang}\,z_z = \underline{1{,}04444} & \ldots\ldots \nu = 2{,}35 \end{array}\right\} \nu - \nu' = 1{,}93$$

$$l\alpha_z\,\mathrm{Tang}\,z_z = 2{,}75710\,;\ \alpha_z\,\mathrm{Tang}\,z_z = 9'31,''6,\quad \mu = 76$$

$$l\,.\,\mathrm{Tang}\,\zeta = \underline{1{,}05805}$$

$$l\frac{\alpha_z\,\mathrm{Tang}\,z_z}{\mathrm{Tang}\,\zeta} = 1{,}69905;\ l\alpha' = 1{,}69905 - \frac{76\,.\,1{,}93}{77{,}93}\,1{,}6 = 1{,}69902$$

$$A' = 1{,}01213\,.\frac{76}{77{,}93} = 0{,}9870$$

$$\lambda' = 1{,}11805\,.\,\frac{76}{77{,}93} = 1{,}0904$$

4.

Der Grösse $\varkappa$ werde ich gleichfalls die Form:

$$\varkappa = \alpha''\,.\,\beta^{A''}\,.\,\gamma^{\lambda''}$$

geben, also die von ζ abhängigen Grössen α'', A'', λ'' so bestimmen, dass sie der Gleichung:

$$\alpha''\,.\,\beta^{A''}\,.\,\gamma^{\lambda''} = \left(k + \frac{dk}{dz}\,\mathrm{Cotg}\,z\right)\left(\frac{1-k\,\mathrm{Tang}\,z^2}{1+k}\right)^2 = \left(k + \frac{dk}{dz}\,\mathrm{Cotg}\,z\right)\frac{\mathrm{Tang}\,z^2}{\mathrm{Tang}\,\zeta^2}$$

oder

$$l\alpha'' + A''\,l\beta + \lambda''\,l\gamma = l\left\{k + \frac{dk}{dz}\,\mathrm{Cotg}\,z\right\} + 2l\,\mathrm{Tang}\,z - 2l\,\mathrm{Tang}\,\zeta$$

für unbestimmte β und γ genügeleisten.

Setzt man für k und $\frac{dk}{dz}$ ihre Ausdrücke, nämlich:

$$k = \alpha\,.\,\beta^{A}\,.\,\gamma^{\lambda}$$

$$\frac{dk}{dz} = \alpha\,.\,\beta^{A}\,.\,\gamma^{\lambda}\left\{\frac{d\alpha}{\alpha dz} + l\beta\,.\,\frac{dA}{dz} + l\gamma\,.\,\frac{d\lambda}{dz}\right\}$$

so wird

$$k + \frac{dk}{dz}\,\mathrm{Cotg}\,z = \alpha\,.\,\beta^{A}\,.\,\gamma^{\lambda}\left\{1 + \left(\frac{d\alpha}{\alpha dz} + l\beta\,.\,\frac{dA}{dz} + l\gamma\,.\,\frac{d\lambda}{dz}\right)\mathrm{Cotg}\,z\right\}$$

und der Logarithme davon

$$= l\alpha + Al\beta + \lambda l\gamma + l\left\{1 + \left(\frac{d\alpha}{\alpha dz} + l\beta\,.\,\frac{dA}{dz} + l\gamma\,.\,\frac{d\lambda}{dz}\right)\mathrm{Cotg}\,z\right\}$$

also

$$l\alpha'' + A''l\beta + \lambda''l\gamma = l\alpha + Al\beta + \lambda l\gamma + l\left\{1 + \left(\frac{d\alpha}{\alpha dz} + l\beta\,.\,\frac{dA}{dz} + l\gamma\,.\,\frac{d\lambda}{dz}\right)\mathrm{Cotg}\,z\right\} + 2l\,\mathrm{Tang}\,z - 2l\,\mathrm{Tang}\,\zeta$$

Führt man den zu $\beta = 1$, $\gamma = 1$ gehörigen Werth von z, welcher im vorigen § durch (z) bezeichnet worden ist, so wie auch die davon abhängigen (α), (A), (λ), wieder ein, setzt man also

$$z = (z) - \alpha' \operatorname{Tang}\zeta\,(A' l\beta + \lambda' l\gamma) - \text{etc.}$$

$$\frac{\operatorname{Tang} z}{\operatorname{Tang}\zeta} = \frac{\operatorname{Tang}(z)}{\operatorname{Tang}\zeta} - \frac{\alpha'}{\operatorname{Cos}(z)^2}(A' l\beta + \lambda' l\gamma) = \frac{\alpha'}{(\alpha)} - \frac{\alpha'}{\operatorname{Cos}(z)^2}(A' l\beta + \lambda' l\gamma)$$

so wird diese Gleichung

$$l\alpha'' + A' l\beta + \lambda' l\gamma = 2l\alpha' - l(\alpha) + l\left(1 + \frac{d(\alpha)}{(\rho)\,d(z)}\right)$$

$$+ l\beta\left\{(A) - \frac{2(\alpha)}{\operatorname{Cos}(z)^2}A' - \frac{d(\alpha)}{d(z)}\operatorname{Tan}(z)\,A' + \frac{\frac{(\alpha)\,d(\alpha)}{(\rho)\,d(z)}\operatorname{Sec}(z)^2 A'}{1 + \frac{d(\alpha)}{(\rho)d(z)}} + \frac{\frac{d(A)}{d(z)}\operatorname{Cotg}(z)}{1 + \frac{d(\alpha)}{(\rho)d(z)}}\right\}$$

$$+ l\gamma\left\{(\lambda) - \frac{2(\alpha)}{\operatorname{Cos}(z)^2}\lambda' - \frac{d(\alpha)}{d(z)}\operatorname{Tan}(z)\,\lambda' + \frac{\frac{(\alpha)\,d(\alpha)}{(\rho)\,d(z)}\operatorname{Sec}(z)^2\,\lambda'}{1 + \frac{d(\alpha)}{(\rho)\,d(z)}} + \frac{\frac{d(\lambda)}{d(z)}\operatorname{Cotg}(z)}{1 + \frac{d(\alpha)}{(\rho)d(z)}}\right\}$$

Setzt man darin für (A) und (λ) ihre Ausdrücke durch A' und λ', nämlich

$$(A) = A'\left(1 + \frac{d(\rho)}{d(z)}\right) = A'\left\{1 + (\alpha) + (\alpha)\operatorname{Tang}(z)^2 + \frac{d(\alpha)}{d(z)}\operatorname{Tang}(z)\right\}$$

$$(\lambda) = \lambda'\left(1 + \frac{d(\rho)}{d(z)}\right) = \lambda'\left\{1 + (\alpha) + (\alpha)\operatorname{Tang}(z)^2 + \frac{d(\alpha)}{d(z)}\operatorname{Tang}(z)\right\}$$

so erhält man, durch Vergleichung ihrer ähnlichen Glieder:

$$l\alpha'' = 2l\alpha' - l(\alpha) + l\left(1 + \frac{d(\alpha)}{(\rho)\,d(z)}\right)$$

$$\left(1 + \frac{d(\alpha)}{(\rho)\,d(z)}\right)(A'' - A') = -\frac{A'(\alpha)}{\operatorname{Cos}(z)^2} + \frac{d(A)}{d(z)}\operatorname{Cotg}(z)$$

$$\left(1 + \frac{d(\alpha)}{(\rho)\,d(z)}\right)(\lambda'' - \lambda') = -\frac{\lambda'(\alpha)}{\operatorname{Cos}(z)^2} + \frac{d(\lambda)}{d(z)}\operatorname{Cotg}(z)$$

Eine Tafel welche $\operatorname{Log}\alpha''$, A'', λ'' enthält, kann eine *Strahlenbrechungstafel für Mikrometerbeobachtungen* genannt werden. Am Ende dieser Abhandlung findet man drei Strahlenbrechungstafeln miteinander vereinigt, nämlich

I. die gewöhnliche Tafel, aus den Tabulis Regiomont. wieder abgedruckt, welche zur Verwandlung scheinbarer Zenithdistanzen in wahre angewandt wird und $\operatorname{Log}\alpha$, A, λ mit dem Argumente z ergiebt.

II. die zur Verwandlung wahrer Zenithdistanzen in scheinbare anzuwendende, welche Log α', A', λ' mit dem Argumente ζ ergiebt.
III. die Strahlenbrechungstafel für Mikrometerbeobachtungen, welche Log α'', A'', λ'', gleichfalls mit dem Argumente ζ ergiebt.

In den beiden ersten Tafeln sind α und α' in Secunden ausgedrückt, in der letzten ist der Radius des Kreises die Einheit von α''. Dieser Tafel habe ich eine Decimalstelle weniger gegeben, als den beiden ersten; sowohl weil eine grössere Annäherung unnöthig ist, als auch, weil diese, durch die Ableitung der dritten Tafel aus der ersten, beträchtlich vermindert wird. Damit man Alles was die Berechnung der Strahlenbrechung erfordert, beisammen habe, lasse ich auch die Tafeln für Log β und Log γ wieder abdrucken.

5.

Es ist oben gezeigt worden, dass die Erfindung des Einflusses der Strahlenbrechung auf die Art von Beobachtungen, auf welche das Vorhergehende sich bezieht, von *zwei* Grössen, nämlich a und $b-a$ abhängt; ich habe mich bisher aber nur mit den Mitteln beschäftigt, die zweite, $b-a = \varkappa \operatorname{Tang}\zeta^2$, leicht zu finden. Zwar erhält man die erste, oder vielmehr $a-1=k$, aus der *ersten* Strahlenbrechungstafel, indem man k für die der wahren Zenithdistanz ζ entsprechende scheinbare z sucht; aber da es eine nicht unerhebliche Vereinfachung der Rechnung sein würde, wenn statt dieses k das vorige $\varkappa$ genommen werden könnte, so ist es der Mühe werth, zu untersuchen, wie grosse Fehler aus dieser Verwechselung entstehen. — Die wahren Ausdrücke der Grössen a und b sind

$$a = 1 + k \qquad = 1 + \varkappa + (k-\varkappa)$$
$$b = 1 + k + \varkappa \operatorname{Tang}\zeta^2 = 1 + \varkappa + \varkappa \operatorname{Tang}\zeta^2 + (k-\varkappa)$$

und die Verbesserungen, welche man den ohne Rücksicht auf das letzte Glied $(k-\varkappa)$ berechneten Werthen von σ und λ_0 hinzusetzen muss, sind näherungsweise

$$\text{für } \sigma \ldots . \; s\,(k-\varkappa)$$
$$\text{für } \lambda \ldots . \; -\varkappa \operatorname{Tang}\zeta^2 \operatorname{Cos} l_0 \operatorname{Sin} l_0\,(k-\varkappa)$$

Für eine Entfernung $s = n.1000''$ und für die Annahme $\beta=1, \gamma=1$, sind die Werthe dieser Verbesserung von σ, in verschiedenen Zenithdistanzen der Sterne, deren Entfernung gemessen wird:

$$\begin{aligned}
50^\circ &+ 0''{,}0020 \,.\, n \\
60 &+ 0{,}0033 \,.\, n \\
70 &+ 0{,}0068 \,.\, n \\
75 &+ 0{,}0114 \,.\, n \\
80 &+ 0{,}0229 \,.\, n \\
85 &+ 0{,}0576 \,.\, n
\end{aligned}$$

Die aus derselben Ursache hervorgehende Verbesserung von λ_0 bleibt, in allen diesen Zenithdistanzen, unmerklich. Aber ich glaube, dass auch die Verbesserung von σ der Einfachheit der Rechnung, ohne wesentlichen Nachtheil, zum Opfer gebracht werden darf, indem in den Entfernungen vom Scheitelpunkte, in welchen sie, für grössere Werthe von σ, einige Hundertel einer Secunde betragen kann, die Undeutlichkeit der Sterne auch schon so gross ist, dass die Messung ihrer Entfernung nicht mehr bis auf solche Kleinigkeiten sicher gemacht werden kann. Übrigens könnte sie, da sie von λ_0 unabhängig ist, für alle Zenithdistanzen einfürallemal berechnet und in eine, der eben mitgetheilten ähnliche, nur weiter ausgedehnte, Tafel gebracht werden.

Indessen darf man in dem Ausdrucke von λ_0 nicht allein $\alpha = 1 + \varkappa$ setzen, sondern man darf es auch geradezu $= 1$ annehmen; der Einfluss des Fehlers dieser Annahme auf λ_0 ist nämlich $= k\varkappa \operatorname{Tang}\zeta^2 \operatorname{Cos} l_0 \operatorname{Sin} l_0$ und er beträgt, in seinem Maximo, für $\zeta = 75^\circ$ nur $0''{,}1$, für $\zeta = 80^\circ$ nur $0''{,}2$, für $\zeta = 85^\circ$ nur $0''{,}6$, bleibt also immer so klein, dass er die Grenze bei weitem nicht erreicht, bis zu welcher man die Genauigkeit der Beobachtung von l_0 zu treiben hoffen darf.

Das in $(b-a)^3$ multiplicirte Glied der ersten der Formeln (3) ist, selbst in seinem Maximo, noch für $\zeta = 75^\circ$ ganz unbedeutend, nämlich $= 0''{,}0017\, n$; für $\zeta = 80^\circ$ ist es $= 0''{,}0086 \,.\, n$; für $\zeta = 85^\circ = 0''{,}0791\, n$. Es kann also mit etwa demselben Rechte vernachlässigt werden, mit welchem $k = \varkappa$ gesetzt worden ist. Der Einfluss des ähnlichen Gliedes der zweiten der Formeln (3) auf λ_0 ist, in seinem Maximo, für $\zeta = 75^\circ = 0''{,}9$; für $\zeta = 80^\circ = 4''{,}5$; für $\zeta = 85^\circ = 42''{,}4$; — ich glaube, dass eine, in der grössten dieser Entfernungen vom Scheitelpunkte gemachte Beobachtung nicht leicht so viel Vertrauen auf ihre Genauigkeit einflössen wird, dass man dadurch bewogen werden könnte, die Erlaubniss das zweite Glied zu vernachlässigen, auf Entfernungen vom Scheitelpunkte zu beschränken, welche einige Grade kleiner bleiben als 85°.

Die diesen Bemerkungen gemäss vereinfachten Formeln (3), nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= s + sx\left\{\operatorname{Tang}\zeta^2 \operatorname{Cos} l_0^2 + 1\right\} \\ \lambda_0 &= l_0 - x \operatorname{Tang}\zeta^2 \operatorname{Cos} l_0 \operatorname{Sin} l_0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (4)$$

werde ich also, insofern die Zenithdistanz ζ nicht 85° überschreitet, als die Auflösung der am Anfange des 1ten § ausgesprochenen Aufgabe betrachten. Noch grössere Zenithdistanzen, für welche man diese Form der Auflösung würde verlassen müssen, schliesse ich hier und in dem Folgenden aus. — Ich werde jetzt aus der Auflösung dieser Aufgabe die Mittel ableiten, die verschiedenen gebräuchlichen Beobachtungsarten von dem Einflusse der Strahlenbrechung zu befreien.

6.

Ich fange mit den

Beobachtungsarten, welche scheinbare Entfernung und Positionswinkel (s und p) unmittelbar ergeben

an. Sie setzen ein auf einem Aequatorealinstrumente befindliches Heliometer oder Fadenmikrometer voraus; sie sind, seitdem solche Instrumente gehörige Grösse und Vollendung erlangt haben, in häufigere Anwendung gekommen, und werden der Vorzüge wegen, welche sie vor anderen Arten der Mikrometerbeobachtungen besitzen, wahrscheinlich noch viel allgemeiner werden.

Der beobachtete Positionswinkel p ist die Summe zweier Winkel am *scheinbaren* Orte des in der Mitte zwischen beiden Sternen liegenden Punkts M, nämlich des Winkels q' des Verticalkreises mit dem Declinationskreise und des Winkels l_0 des durch die scheinbaren Örter beider Sterne gelegten grössten Kreises mit dem ersteren; oder es ist $p = l_0 + q'$. Der gesuchte Positionswinkel π ist dagegen die Summe zweier ähnlichen Winkel am *wahren* Orte von M, oder $\pi = \lambda_0 + q$. Der Winkel q wird, zugleich mit der Zenithdistanz ζ, aus der Polhöhe φ des Beobachtungsorts und der Declination und dem Stundenwinkel (δ_0 und τ_0) des Punkts M, durch die Formeln

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin}\zeta \operatorname{Sin} q &= \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\tau_0 \\ \operatorname{Sin}\zeta \operatorname{Cos} q &= \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\delta_0 - \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\delta_0 \operatorname{Cos}\tau_0 \\ \operatorname{Cos}\zeta &= \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\delta_0 + \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\delta_0 \operatorname{Cos}\tau_0 \end{aligned}$$

gefunden, und die Differentialformeln der sphärischen Trigonometrie ergeben, mit hinreichender Genauigkeit:

$$q' = q + \varrho \operatorname{Tang}\delta_0 \operatorname{Sin} q = q + k' \operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Sin} q \operatorname{Tang}\delta_0$$

woraus

$$l_0 = p - q - k' \operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Sin} q \operatorname{Tang}\delta_0$$

folgt. Dieser Ausdruck von l_0 ist also in den Formeln (4) zu substituiren; allein, da die Annahme $l_0 = p - q$, in den schon in $\varkappa$ multiplicirten Gliedern dieser Formeln, keinen erheblichen Fehler erzeugt und da $\lambda_0 = \pi - q$ ist, so erhält man dadurch:

$$\sigma = s + s\varkappa \left\{ \operatorname{Tang}\zeta^2 \operatorname{Cos}(p-q)^2 + 1 \right\}$$
$$\pi = p - \varkappa \operatorname{Tang}\zeta^2 \operatorname{Cos}(p-q) \operatorname{Sin}(p-q) - k' \operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Sin} q \,.\, \operatorname{Tang}\delta_0$$

Indessen darf man auch in dem letzten Gliede des Ausdruckes von π, $\varkappa$ statt k' setzen, ohne dass dadurch, selbst in den grösseren Zenithdistanzen, in welchen der Unterschied $k' - \varkappa$ erst anfängt erheblich zu werden, ein Fehler entsteht, welcher zu der Zurückweisung dieser Vereinfachung der Rechnung nöthigte. Ich finde das *Maximum* von $\operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Sin} q \operatorname{Tang}\delta_0$ für $\zeta = 75°$, $80°$, $85°$ und für die Polhöhe von Königsberg $= 54°\,42'\,50''{,}5$, resp. $= 1{,}499$, $1{,}830$, $2{,}945$ und den aus der Verwechselung von k' und $\varkappa$ entstehenden Fehler im Maximo $= 3''{,}2$, $7''{,}5$, $30''{,}2$. Ich bin daher der Meinung, dass auch die Anwendung der Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= s + s\varkappa \left\{ \operatorname{Tang}\zeta^2 \operatorname{Cos}(p-q)^2 + 1 \right\} \\ \pi &= p - \varkappa \left\{ \operatorname{Tang}\zeta^2 \operatorname{Cos}(p-q) \operatorname{Sin}(p-q) + \operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Sin} q \,.\, \operatorname{Tang}\delta_0 \right\} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (5)$$

bis zu der Zenithdistanz $85°$ erlaubt ist.

Das Resultat der Beobachtungen der hier betrachteten Art, kann noch in *anderer Form* angegeben werden, auf welche der Einfluss der Strahlenbrechung gleichfalls aufzusuchen ist. Werden die *Unterschiede der Geradenaufsteigungen und Abweichungen* beider Sterne angegeben, so wie sie, ohne Rücksicht auf die Strahlenbrechung, aus s und p berechnet worden sind, so sind diese Angaben, welche ich durch $a' - a$ und $d' - d$ bezeichnen werde, aus den Formeln:

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a'-a) \operatorname{Cos}\delta_0 = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2} s \operatorname{Sin} p$$
$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a'-a) \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(d'-d) = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2} s \operatorname{Cos} p$$

hervorgegangen. Die wahren Unterschiede der Geradenaufsteigungen und Abweichungen $\alpha'-\alpha$ und $\delta'-\delta$ haben dagegen die von σ und π abhängigen Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\operatorname{Cos}\delta_0 &= \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\sigma\operatorname{Sin}\pi \\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta) &= \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\sigma\operatorname{Cos}\pi \end{aligned}$$

Aus der Vergleichung beider Formelnpaare folgt, mit hinreichender Näherung,

$$\begin{aligned} \alpha'-\alpha &= a'-a + (\sigma\operatorname{Sin}\pi - s\operatorname{Sin}p)\operatorname{Sec}\delta_0 \\ \delta'-\delta &= d'-d + \sigma\operatorname{Cos}\pi - s\operatorname{Cos}p \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \alpha'-\alpha &= a'-a + \left\{(\sigma-s)\operatorname{Sin}p + s(\pi-p)\operatorname{Cos}p\right\}\operatorname{Sec}\delta_0 \\ \delta'-\delta &= d'-d + (\sigma-s)\operatorname{Cos}p - s(\pi-p)\operatorname{Sin}p \end{aligned}$$

und nach der Substitution von (5):

$$\left.\begin{aligned} \alpha'-\alpha &= a'-a + sx\left\{\operatorname{Tan}\zeta^2\operatorname{Cos}(p-q)\operatorname{Sin}q - \operatorname{Tan}\zeta\operatorname{Sin}q\,.\,\operatorname{Tan}\delta_0\operatorname{Cos}p + \operatorname{Sin}p\right\}\operatorname{Sec}\delta_0 \\ \delta'-\delta &= d'-d + sx\left\{\operatorname{Tan}\zeta^2\operatorname{Cos}(p-q)\operatorname{Cos}q + \operatorname{Tan}\zeta\operatorname{Sin}q\,.\,\operatorname{Tan}\delta_0\operatorname{Sin}p + \operatorname{Cos}p\right\} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Diese Formeln verlieren eins ihrer Glieder durch die Einführung eines, durch

$$\operatorname{Tang}u = \operatorname{Tang}\zeta\operatorname{Sin}q\operatorname{Tang}\delta_0$$

zu bestimmenden Hülfswinkels, wodurch sie sich in:

$$\left.\begin{aligned} \alpha'-\alpha &= a'-a + sx\left\{\operatorname{Tang}\zeta^2\operatorname{Cos}(p-q)\operatorname{Sin}q + \operatorname{Sec}u\operatorname{Sin}(p-u)\right\}\operatorname{Sec}\delta_0 \\ \delta'-\delta &= d'-d + sx\left\{\operatorname{Tang}\zeta^2\operatorname{Cos}(p-q)\operatorname{Cos}q + \operatorname{Sec}u\operatorname{Cos}(p-u)\right\} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

verwandeln.

Ist endlich das Resultat der Beobachtung in der Form:

$$\begin{aligned} x &= 2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s\operatorname{Sin}p \\ y &= 2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s\operatorname{Cos}p \end{aligned}$$

angegeben, und wird es in ähnlicher Form, nach seiner Befreiung von der Strahlenbrechung verlangt, nämlich in der Form:

$$\begin{aligned} \xi &= 2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\sigma\operatorname{Sin}\pi \\ \eta &= 2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\sigma\operatorname{Cos}\pi \end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \xi &= x + (\sigma-s)\operatorname{Sin}p + s(\pi-p)\operatorname{Cos}p \\ \eta &= y + (\sigma-s)\operatorname{Cos}p - s(\pi-p)\operatorname{Sin}p \end{aligned}$$

und hieraus, wie oben,

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x + sx\left\{\text{Tang}\,\zeta^2\,\text{Cos}\,(p-q)\,\text{Sin}\,q + \text{Sec}\,u\,\text{Sin}\,(p-u)\right\}\\ \eta &= y + sx\left\{\text{Tang}\,\zeta^2\,\text{Cos}\,(p-q)\,\text{Cos}\,q + \text{Sec}\,u\,\text{Cos}\,(p-u)\right\}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(8)$$

Die Formeln (5), (7), (8) lassen, in Beziehung auf ihre Genauigkeit, kaum etwas zu wünschen übrig, denn, wie ich schon bemerkt habe, fangen ihre Fehler erst in sehr grossen, sich 85° nähernden Zenithdistanzen an merklich zu werden, in welchen Zenithdistanzen die Beobachtungen selbst nur rohere Näherungen sein können; sie gewähren ihre Resultate auch durch so wenig Rechnung als man erwarten kann, können aber, in dieser Beziehung, noch wesentlich durch eine Hülfstafel unterstützt werden, welche für die Polhöhe jedes Beobachtungsorts zu berechnen ist. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned}\text{Cos}\,n &= \text{Cos}\,\varphi\ \text{Sin}\,\tau_0\\ \text{Sin}\,n\ \text{Cos}N &= \text{Cos}\,\varphi\ \text{Cos}\tau_0\\ \text{Sin}\,n\ \text{Sin}\,N &= \text{Sin}\,\varphi\end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned}\text{Sin}\,\zeta\ \text{Sin}\,q &= \text{Cos}\,n\\ \text{Sin}\,\zeta\ \text{Cos}\,q &= \text{Sin}\,n\ \text{Cos}(N+\vartheta_0)\\ \text{Cos}\,\zeta &= \text{Sin}\,n\ \text{Cos}(N+\vartheta_0)\end{aligned}$$

und

$$\left.\begin{aligned}\text{Tang}\,\zeta\ \text{Sin}\,q &= \text{Cotg}\,n\ \text{Cosec}\,(N+\vartheta_0)\\ \text{Tang}\,\zeta\ \text{Cos}\,q &= \text{Cotang}\,(N+\vartheta_0)\end{aligned}\right\}\ldots.(9)$$

woraus ζ und q mit sehr geringer Mühe gefunden werden, wenn eine Hülfstafel Log Cotg$n$ und N für jede Zeitminute von τ_0 angiebt. Die kleine Mühe, eine solche Tafel für eine Sternwarte zu berechnen, auf welcher häufige Mikrometerbeobachtungen gemacht werden, findet, in der Erleichterung welche ihre Anwendung gewährt, reichlichen Ersatz. Die für die Polhöhe der Königsberger Sternwarte = 54°42'50",5 berechnete, findet man am Ende dieser Abhandlung. — Das Folgende wird zeigen, dass dieselbe Hülfstafel die Berechnung des Einflusses der Strahlenbrechung auf die Resultate aller Arten von Mikrometerbeobachtungen wesentlich erleichtert.

7.

Beobachtungsarten, welche den Rectascensionsunterschied durch die Durchgangszeiten der Sterne durch senkrecht auf den Aequator stehende Fäden, den Declinationsunterschied durch unmittelbare Messung ergeben.

Diese Beobachtungsarten setzen, wie die vorigen, die auf den Aequator bezogene Aufstellung eines Instruments voraus, also einen sogenannten Aequatorealsector, ein parallactisch aufgestelltes Fadenmikrometer u. s. w. Der Einfluss der Strahlenbrechung auf die Resultate, welche sie unmittelbar ergeben, kann aus den Formeln (7) abgeleitet werden. Wenn nämlich die Sternenzeiten der Durchgänge beider Sterne μ und μ' beobachtet sind, so würde ein, auf dem Parallel des zweiten Sterns, in der Geradenaufsteigung $\alpha' - (\mu' - \mu)$ befindlicher Stern *gleichzeitig* mit dem ersten durchgegangen, oder, auf diesen bezogen, in dem Positionswinkel $p = 0$, oder $= 180°$ erschienen sein. Man überträgt daher die Formeln (7) auf die gegenwärtig betrachteten Beobachtungsarten, wenn man darin $\mu' - \mu$ für $\alpha' - \alpha$; $s \operatorname{Cos} p = \delta' - \delta$, $s \operatorname{Sin} p = 0$ setzt, wo $\delta' - \delta$ den beobachteten Declinationsunterschied bedeutet. Dadurch verwandeln sie sich in:

$$\alpha' - \alpha = \mu' - \mu + \varkappa(\delta' - \delta)\left\{\operatorname{Tang}\zeta^2 \operatorname{Cos} q \operatorname{Sin} q - \operatorname{Tang} u\right\} \operatorname{Sec}\delta_0$$
$$\delta' - \delta = \delta' - \delta + \varkappa(\delta' - \delta)\left\{\operatorname{Tang}\zeta^2 \operatorname{Cos} q^2 + 1\right\}$$

und wenn man die Ausdrücke von $\operatorname{Tang} u$, $\operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Cos} q$, $\operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Sin} q$ (9) substituirt, in:

$$\alpha' - \alpha = \mu' - \mu + \frac{\varkappa(\delta' - \delta)\operatorname{Cotg} n}{\operatorname{Sin}(N+\delta_0)^2 \operatorname{Cos}\delta_0}\left\{\operatorname{Cos}(N+\delta_0) - \operatorname{Tang}\delta_0 \operatorname{Sin}(N+\delta_0)\right\}$$
$$\delta' - \delta = \delta' - \delta + \varkappa(\delta' - \delta)\left\{\operatorname{Cotg}(N+\delta_0)^2 + 1\right\}$$

oder in

$$\left.\begin{aligned}\alpha' - \alpha &= \mu' - \mu + \frac{\varkappa(\delta' - \delta)}{\operatorname{Sin}(N+\delta_0)^2} \cdot \frac{\operatorname{Cotg} n \operatorname{Cos}(N+2\delta_0)}{\operatorname{Cos}\delta_0^2} \\ \delta' - \delta &= \delta' - \delta + \frac{\varkappa(\delta' - \delta)}{\operatorname{Sin}(N+\delta_0^2)}\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (10)$$

8.

Beobachtungsarten, welche sowohl den Rectascensions- als den Declinationsunterschied durch die Durchgangszeiten durch Fäden bestimmen,

deren gegenseitige Lage sowohl, als auch ihre Lage gegen die Ebene des Declinationskreises, gegeben sind.

Die Fernröhre, wodurch diese Beobachtungsarten ausgeführt werden sollen, müssen die geforderte Kenntniss der Lage ihres Fadennetzes gegen die Ebene eines Declinationskreises durch ihre Aufstellungs- und Bewegungsart hervorbringen. Die gegenseitige Lage der Fäden des Netzes werde ich durch Perpendikel h, $h_{,}$, $h_{,,}$...., von einem angenommenen Mittelpunkte desselben auf jeden von ihnen gefällt, und durch die Winkel i, $i_{,}$, $i_{,,}$,... dieser Perpendikel mit einer im Netze festen, durch seinen Mittelpunkt gehenden Linie bestimmen. Die Lage aller Fäden des Netzes am Himmel wird dann bekannt, sobald der Stundenwinkel und die Declination seines Mittelpunkts und der Winkel i_0 zwischen dem Declinationskreise und der Linie von welcher i, $i_{,}$, $i_{,,}$,... angezählt werden, bekannt sind. Die beiden ersteren sind unbekannte Grössen der Aufgabe, i_0 aber wird, durch die vorausgesetzte Aufstellungsart des Fernrohrs, beständig und muss bekannt sein. Die Winkel sollen, von Norden an, nach der Seite gezählt werden, nach welcher die Geradenaufsteigungen wachsen, wodurch der Ausdruck der Winkel der Perpendikel h, $h_{,}$, $h_{,,}$,... mit dem durch den Stundenwinkel des Mittelpunkts gegebenen Declinationskreise $= i_0+i$, $i_0+i_{,}$, $i_0+i_{,,}$,... wird.

Ich werde die Gleichung aufsuchen, welche durch jede Beobachtung der Sternenzeit μ des Durchganges eines Sterns durch einen Faden des Netzes erlangt wird. Wenn die Entfernung des Durchgangspunkts von dem angenommenen Mittelpunkte des Netzes durch s, die Winkel des beide Punkte miteinander verbindenden grössten Kreises mit den Declinationskreisen beider, am Mittelpunkte $p-\Delta p$, am Durchgangspunkte $p+\Delta p$ bezeichnet werden, so hat man:

$$\text{Tang } s \,.\, \text{Cos}\,(i_0+i-p+\Delta p) = \text{Tang } h$$

In dieser Gleichung sind die, sich auf die scheinbaren Örter des Mittelpunkts und des Durchgangspunkts beziehenden s, p, Δp, durch die ähnlichen, sich auf die wahren Örter beziehenden Grössen σ, π, $\Delta\pi$ und den Einfluss der Strahlenbrechung auszudrücken; später ergiebt dann der Ausdruck dieser Grössen durch die Geradeaufsteigung und Abweichung des beobachteten Sterns, die gesuchte Gleichung in ihrer

gehörigen Form. — Multiplicirt man die erste der Gleichungen (8) in $\mathrm{Sin}(i_0+i+\Delta p)$, die zweite in $\mathrm{Cos}(i_0+i+\Delta p)$, so ist die Summe der Producte:

$$2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\sigma\,\mathrm{Cos}(i_0+i-\pi+\Delta p) = 2\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}s\,\mathrm{Cos}(i_0+i-p+\Delta p) + \varkappa s\left\{\mathrm{Tang}\zeta^2\,\mathrm{Cos}(p-q)\,\mathrm{Cos}(i_0+i-q+\Delta p) + \mathrm{Sec}\,u\,\mathrm{Cos}(i_0+i-p+\Delta p+u)\right\}$$

Nimmt man $\mathrm{Sin}\frac{1}{2}\sigma : \mathrm{Sin}\frac{1}{2}s = \mathrm{Tang}\sigma : \mathrm{Tang}\,s$ an, was immer erlaubt ist, so verwandelt sich diese Gleichung in:

$$\mathrm{Tang}\sigma\,\mathrm{Cos}(i_0+i-\pi+\Delta p) = \mathrm{Tang}\,h + \varkappa s\left\{\mathrm{Tang}\zeta^2\,\mathrm{Cos}(p-q)\,\mathrm{Cos}(i_0+i-q+\Delta p) + \mathrm{Sec}\,u\,\mathrm{Cos}(i_0+i-p+\Delta p+u)\right\}$$

Setzt man, in den in $\varkappa$ multiplicirten Gliedern, $\mathrm{Tang}\,\sigma\,\mathrm{Cos}(\pi-\Delta p)$ und $\mathrm{Tang}\,\sigma\,\mathrm{Sin}(\pi-\Delta p)$ für $s\,\mathrm{Cos}(p-\Delta p)$ und $s\,\mathrm{Sin}(p-\Delta p)$, wodurch nur ein unbedeutender Fehler erzeugt werden kann, so kann man diese Gleichung:

$$\mathrm{Tang}\sigma\,\mathrm{Cos}(\pi-\Delta p)\left\{\mathrm{Cos}(i_0+i) - \varkappa\,\mathrm{Tang}\zeta^2\,\mathrm{Cos}(i_0+i-q+\Delta p)\,\mathrm{Cos}(q-\Delta p) - \varkappa\,\mathrm{Sec}\,u\,\mathrm{Cos}(i_0+i+u)\right\}$$
$$+\mathrm{Tang}\sigma\,\mathrm{Sin}(\pi-\Delta p)\left\{\mathrm{Sin}(i_0+i) - \varkappa\,\mathrm{Tang}\zeta^2\,\mathrm{Cos}(i_0+i-q+\Delta p)\,\mathrm{Sin}(q-\Delta p) - \varkappa\,\mathrm{Sec}\,u\,\mathrm{Sin}(i_0+i+u)\right\} = \mathrm{Tang}\,h$$

schreiben, und wenn man a und A einführt, so dass

$$a\,\mathrm{Cos}(i_0+i+A) = \mathrm{Cos}(i_0+i) - \varkappa\,\mathrm{Tang}\zeta^2\,\mathrm{Cos}(i_0+i-q+\Delta p)\,\mathrm{Cos}(q-\Delta p) - \varkappa\,\mathrm{Sec}\,u\,\mathrm{Cos}(i_0+i+u)$$
$$a\,\mathrm{Sin}(i_0+i+A) = \mathrm{Sin}(i_0+i) - \varkappa\,\mathrm{Tang}\zeta^2\,\mathrm{Cos}(i_0+i-q+\Delta p)\,\mathrm{Sin}(q-\Delta p) - \varkappa\,\mathrm{Sec}\,u\,\mathrm{Sin}(i_0+i+u)$$

oder (Tang $u = \mathrm{Tang}\,\zeta\,\mathrm{Sin}\,q\,\mathrm{Tang}\,\delta_0$. § 6.)

$$\left.\begin{aligned} a\,\mathrm{Cos}A &= \lambda - \varkappa\,\mathrm{Tang}\zeta^2\,\mathrm{Cos}(i_0+i-q+\Delta p)^2 - u \\ a\,\mathrm{Sin}A &= \varkappa\,\mathrm{Tang}\zeta^2\,\mathrm{Cos}(i_0+i-q+\Delta p)\,\mathrm{Sin}(i_0+i-q+\Delta p) - \varkappa\,\mathrm{Tang}\zeta\,\mathrm{Sin}\,q\,\mathrm{Tang}\,\delta_0 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

sind,

$$\mathrm{Tang}\,\sigma\,\mathrm{Cos}(i_0+i+A-\pi+\Delta p) = \frac{\mathrm{Tang}\,h}{a}$$

Das hier vorkommende Δp ist von der Ordnung von s, näherungsweise $= \frac{1}{2}s\,\mathrm{Sin}\,p\,\mathrm{Tang}\delta_0$; sein Unterschied von $\Delta\varkappa$ ist von der Ordnung von $s\varkappa$, und der Fehler, welcher aus der Verwechselung von Δp mit $\Delta\varkappa$, im ersten Gliede dieser Gleichung entsteht, von der Ordnung von $s\varkappa^2$. Wenn der beobachtete Stern nicht etwa sehr nahe bei dem Pole und dieser dem Horizonte nahe ist, so ist dieser Fehler unbedeutend und man kann die Gleichung:

$$\text{Tang}\,\sigma\,\text{Cos}\,(i_0+i+A-\pi+\triangle\pi) = \frac{\text{Tang}\,h}{a} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

schreiben.

Diese Gleichung zeigt, dass man Beobachtungen dieser Art genau so berechnen kann, wie man sie berechnen würde wenn die Strahlenbrechung nicht vorhanden wäre; dieses fordert, dass man für das von dem Mittelpunkte des Netzes auf den Faden gefällte Perpendikel und seinen Winkel mit dem Declinationskreise veränderte Werthe anwende. Wenn die wahre Declination und der wahre Stundelwinkel des zur Zeit der Beobachtung μ in dem Mittelpunkte des Netzes erscheinenden Punkts des Himmels durch (δ) und (τ) bezeichnet werden, die Declination und Rectascension des beobachteten Sterns durch δ und α, so hat man

$$\left.\begin{aligned} \text{Sin}\,\sigma\,\text{Sin}\,(\pi-\triangle\pi) &= \text{Cos}\,\delta\,\text{Sin}\,((\tau)-\mu+\alpha) \\ \text{Sin}\,\sigma\,\text{Cos}\,(\pi-\triangle\pi) &= \text{Cos}\,(\delta)\,\text{Sin}\,\delta - \text{Sin}\,(\delta)\,\text{Cos}\,\delta\,\text{Cos}\,((\tau)-\mu+\alpha) \\ \text{Cos}\,\sigma &= \text{Sin}\,(\delta)\,\text{Sin}\,\delta + \text{Cos}\,(\delta)\,\text{Cos}\,\delta\,\text{Cos}\,((\tau)-\mu+\alpha) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (13)$$

und wenn man dieses in der obigen Gleichung substituirt:

$$\text{Cos}\,(i_0+i+A)\left\{\text{Cos}\,(\delta)\,\text{Sin}\,\delta-\text{Sin}\,(\delta)\,\text{Cos}\,\delta\,\text{Cos}\,((\tau)-\mu+\alpha)\right\} + \text{Sin}\,(i_0+i+A)\,\text{Cos}\,\delta\,\text{Sin}\,((\tau)-\mu+\alpha)$$

$$= \frac{\text{Tang}\,h}{a}\left\{\text{Sin}\,(\delta)\,\text{Sin}\,\delta + \text{Cos}\,(\delta)\,\text{Cos}\,\delta\,\text{Cos}\,((\tau)-\mu+\alpha)\right\} \ldots\ldots (14)$$

Jeder der beobachteten Durchgänge des Sterns durch einen Faden ergiebt eine dieser ähnliche Gleichung; dadurch von dieser verschieden, dass sie andere Werthe von μ, von i_0+i+A und von $\frac{1}{a}\,\text{Tang}\,h$ erhält. Eine ähnliche Gleichung ergiebt auch jeder beobachtete Durchgang des anderen Sterns, dessen Vergleichung mit dem vorigen der Zweck der Beobachtung ist; sie enthält δ' und α' statt δ und α. Wenn der Ort des ersten Sterns der bekannte, der des zweiten der gesuchte ist, so werden sämmtliche, für den ersten vorhandene Gleichungen zur Bestimmung von (δ) und (τ) angewandt; die für den zweiten vorhandenen dann zur Bestimmung von δ' und α'.

9.

Die Grössen a und A hängen von der Zenithdistanz ζ und dem parallactischen Winkel q des Punkts ab, welcher in der Mitte zwischen dem Mittelpunkte des Netzes und dem Durchgangspunkte des Sterns

durch jeden Faden liegt; sie sind also für die verschiedenen Momente einer Beobachtung verschieden. Ihre Verschiedenheit ist zwar nur von der Ordnung von s und der Einfluss derselben auf die Resultate der Beobachtung von der Ordnung von $ss\varkappa$, welche Ordnung oben schon vernachlässigt worden ist; allein ein Theil dieses Einflusses ist in die dritte Potenz von Tang ζ multiplicirt und kann dadurch, in sehr grossen Zenithdistanzen, eine Grösse erlangen, welche die Rechtmässigkeit seiner Vernachlässigung zweifelhaft macht. Es ist zwar nicht nöthig, dass man in dieser Beziehung etwas vernachlässige, indem man ζ und q für jedes Moment der Beobachtung aufsuchen kann, allein die Vorschriften zur Berechnung der Beobachtungen gewinnen so sehr an Leichtigkeit ihrer Anwendung, wenn sie von Werthen von ζ und q ausgehen, welche für alle Momente dieselben sind, dass es der Mühe werth ist, die Veränderlichkeit dieser Grössen und der davon abhängigen weiter zu verfolgen.

Der Punkt, für welchen die in den Ausdrücken von α und A vorkommenden ζ und q aufzusuchen sind, hat die Declination $\frac{1}{2}[(\delta)+\delta]$ und den Stundenwinkel $(\tau)-\frac{1}{2}[(\tau)-\mu+\alpha]$. Jene ist für alle Momente der Beobachtung eines Sterns dieselbe; dieser aber ändert sich von dem einen Momente zum anderen, und zwar ist sein Ausdruck, wenn man die Sternenzeit $\mu_0=(\tau)+\alpha$ des Durchganges des Sterns durch den Declinationskreis des Mittelpunkts des Netzes einführt, $=(\tau)+\frac{1}{2}(\mu-\mu_0)$. Man muss also ζ und q aus den Formeln

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sin}\zeta\operatorname{Sin}q &= \operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}[(\tau)+\tfrac{1}{2}(\mu-\mu_0)]\\
\operatorname{Sin}\zeta\operatorname{Cos}q &= \operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}[\delta-\tfrac{1}{2}(\delta-(\delta))]-\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}[\delta-\tfrac{1}{2}(\delta-(\delta))]\operatorname{Cos}[(\tau)+\tfrac{1}{2}(\mu-\mu_0)]\\
\operatorname{Cos}\zeta &= \operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Sin}[\delta-\tfrac{1}{2}(\delta-(\delta))]+\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}[\delta-\tfrac{1}{2}(\delta-(\delta))]\operatorname{Cos}[(\tau)+\tfrac{1}{2}(\mu-\mu_0)]
\end{aligned}$$

berechnen, oder, wenn man, um keine neue Zeichen einzuführen, den für (τ) und δ berechneten die vorigen lässt, die anzuwendenden Werthe von Tang ζ Sin q und Tang ζ Cos q folgendermassen annehmen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tang}\zeta\operatorname{Sin}q &- \frac{d(\operatorname{Tang}\zeta\operatorname{Sin}q)}{d\delta}\tfrac{1}{2}(\delta-(\delta)) + \frac{d(\operatorname{Tang}\zeta\operatorname{Sin}q)}{d(\tau)}\tfrac{1}{2}(\mu-\mu_0)\\
\operatorname{Tang}\zeta\operatorname{Cos}q &- \frac{d(\operatorname{Tang}\zeta\operatorname{Cos}q)}{d\delta}\tfrac{1}{2}(\delta-(\delta)) + \frac{d(\operatorname{Tang}\zeta\operatorname{Cos}q)}{d(\tau)}\tfrac{1}{2}(\mu-\mu_0)
\end{aligned}$$

Wenn man wirklich differentiirt erhält man sie:

$$\operatorname{Tan}\zeta \operatorname{Sin} q + \operatorname{Tan}\zeta^2 \operatorname{Cos} q \operatorname{Sin} q \cdot \tfrac{1}{2}(\delta-(\delta)) + \left\{(\operatorname{Tan}\zeta^2 \operatorname{Sin} q^2+1)\operatorname{Cos}\delta - \operatorname{Tan}\zeta \operatorname{Cos} q \operatorname{Sin}\delta\right\}\tfrac{1}{2}(\mu-\mu_0)$$

$$\operatorname{Tan}\zeta \operatorname{Cos} q + (\operatorname{Tan}\zeta^2 \operatorname{Cos} q^2+1)\tfrac{1}{2}(\delta-(\delta)) + \left\{\operatorname{Tan}\zeta^2 \operatorname{Cos} q \operatorname{Sin} q \cdot \operatorname{Cos}\delta + \operatorname{Tan}\zeta \operatorname{Sin} q \operatorname{Sin}\delta\right\}\tfrac{1}{2}(\mu-\mu_0)$$

Die in den Ausdrücken von $a \operatorname{Cos} A$ und $a \operatorname{Sin} A$ (11) vorkommenden $\operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Sin}(q-\triangle p)$ und $\operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Cos}(q-\triangle p)$ findet man hieraus, da $\triangle p = -\tfrac{1}{2}(\mu-\mu_0)\operatorname{Sin}\delta$ ist:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Sin} q + \operatorname{Tang}\zeta^2 \operatorname{Cos} q \operatorname{Sin} q \tfrac{1}{2}(\delta-(\delta)) + (\operatorname{Tang}\zeta^2 \operatorname{Sin} q^2+1) \operatorname{Cos}\delta \tfrac{1}{2}(\mu-\mu_0)\\ &\operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Cos} q + (\operatorname{Tang}\zeta^2 \operatorname{Cos} q^2+1) \tfrac{1}{2}(\delta-(\delta)) + \operatorname{Tang}\zeta^2 \operatorname{Cos} q \operatorname{Sin} q \operatorname{Cos}\delta \tfrac{1}{2}(\mu-\mu_0)\end{aligned}$$

Allein da der Einfluss der von $\delta-(\delta)$ und $\mu-\mu_0$ abhängigen Änderungen auf die Resultate der Beobachtung, von der Ordnung von $ss\varkappa$ ist, und da es kein Interesse hat, die dadurch unbedeutend werdenden, nicht in $\operatorname{Tang}\zeta^3$ multiplicirten Theile der Änderungen zu berücksichtigen, so können die Formeln in folgende:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Sin} q \left\{1 + \operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Cos} q \tfrac{1}{2}(\delta-(\delta)) + \operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Sin} q \operatorname{Cos}\delta \tfrac{1}{2}(\mu-\mu_0)\right\}\\ &\operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Cos} q \left\{1 + \operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Cos} q \tfrac{1}{2}(\delta-(\delta)) + \operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Sin} q \operatorname{Cos}\delta \tfrac{1}{2}(\mu-\mu_0)\right\}\end{aligned}\right\} \ldots (15)$$

zusammengezogen, oder auch

$$\begin{aligned}&\operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Sin} q \,(1+\tfrac{1}{2}\sigma \operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Cos}(\pi-q))\\ &\operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Cos} q \,(1+\tfrac{1}{2}\sigma \cdot \operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Cos}(\pi-q))\end{aligned}$$

geschrieben werden.

Hierdurch verwandeln sich die Ausdrücke (11) in:

$$\left.\begin{aligned}&a \operatorname{Cos} A = 1-\varkappa-\varkappa \operatorname{Tang}\zeta^2 \operatorname{Cos}(i_0+i-q)^2 \,(1+\sigma \operatorname{Tang}\zeta \operatorname{Cos}(\pi-q))\\ &a \operatorname{Sin} A = -\varkappa \operatorname{Tan}\zeta \operatorname{Sin} q \operatorname{Tan}\delta + \varkappa \operatorname{Tan}\zeta^2 \operatorname{Cos}(i_0+i-q) \operatorname{Sin}(i_0+i-q)\,(1+\sigma \operatorname{Tan}\zeta \operatorname{Cos}(\pi-q))\end{aligned}\right\} (16)$$

und können nun leicht und hinreichend genau, für jedes Moment der Beobachtung gefunden werden. Will man den von σ abhängigen Theil dieser Ausdrücke vernachlässigen, also gleiche Werthe von a und A für alle Momente der Beobachtung anwenden, so kommt dieses auf die Annahme zurück, dass die Punkte durch welche jeder der Fäden geht, ebensowohl an der *wahren* Himmelskugel in einem grössten Kreise liegen, als dieses an der scheinbaren der Fall ist. Augenscheinlich kann der Fehler dieser Annahme nur in grösseren Zenithdistanzen erheblich werden, was die Formeln auch zeigen, indem sie ihn $\operatorname{Tang}\zeta^3$ proportional angeben.

10.

Sollen die Örter zweier Sterne durch eine Beobachtung der jetzt betrachteten Art vollständig miteinander verglichen werden, so müssen die Durchgangszeiten jedes derselben durch wenigstens zwei, einander nicht parallele Fäden gegeben sein. Will man sich nicht auf diese nothwendige Zahl der Durchgangszeiten beschränken, sondern Vorschriften zur Auflösung der allgemeineren, eine unbestimmte Zahl derselben berücksichtigenden Aufgabe erlangen, so muss vorher das Gewicht festgesetzt werden, welches jeder beobachteten Durchgangszeit beigelegt werden soll.

Die Fehler der Durchgangszeiten entstehen aus zwei gesonderten Ursachen, nämlich den Unvollkommenheiten, sowohl des Sehens eines Durchganges durch einen Faden, als auch der Schätzung seines Zeitmoments. Die erstere Ursache giebt Fehlern der Durchgangszeiten gleiche Wahrscheinlichkeit, wenn sie gleichen Entfernungen des durchgehenden Sterns von den Fäden entsprechen; die andere ist von der Schnelligkeit der Veränderung dieser Entfernungen, so wie auch von der Stärke des angewandten Fernrohrs unabhängig. Wenn das Gewicht, welches jede dieser Ursachen, für sich allein, einer Beobachtung geben würde, bekannt ist, so ist damit auch das Gewicht bekannt, welches der ihrem Zusammenwirken ausgesetzten Beobachtung beigelegt werden muss. Offenbar ist die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von seiner Grösse, für jeden Apparat von anderer optischen Kraft eine andere. Will man aber Beobachtungen mit *allen* Apparaten nach einer gleichen Vorschrift berechnen, so muss diese auf ein Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler gegründet werden, welches, wenn es nicht ganz willkürlich angenommen werden soll, entweder das der einen, oder das der anderen Ursache angemessene ist. Ich werde die Annahme verfolgen, dass der Ausdruck der Wahrscheinlichkeit des *ganzen* Beobachtungsfehlers durch seine Grösse, dieselbe Form besitze, welche die alleinige Wirkung der *ersten* Ursache ihm geben würde. Ich werde also die, aus den Beobachtungen der jetzt betrachteten Art zu ziehenden Resultate so festsetzen, dass die Unterschiede der daraus hervorgehenden Durchgangszeiten durch die einzelnen Fäden von den beobachteten, Entfer-

nungen von den Fäden entsprechen, deren Quadrate die möglichst kleine Summe haben. Offenbar werden hierdurch jene Resultate so festgesetzt, dass sie die bekannten Werthe der von dem angenommenen Mittelpunkte des Netzes auf seine einzelnen Fäden gefällten Perpendikel h, $h_{,}$, $h_{,,}$, ... bis auf Grössen darstellen, deren Quadrate die möglichst kleine Summe haben.

Wenn man δ und Näherungswerthe von (δ) und μ_0 als bekannt annimmt, so wie auch die ihnen entsprechenden Werthe von σ und $\pi-\Delta\pi$ (13), und die den Näherungswerthen hinzuzusetzenden kleinen Verbesserungen durch $\Delta(\delta)$ und $\Delta\mu_0$ bezeichnet, so ergiebt jedes Moment der Beobachtung eines Sterns eine Gleichung von der Form (12):

$$\begin{aligned}\operatorname{Tang} h - a\operatorname{Tang}\sigma\operatorname{Cos}(i_0+i+A-\pi+\Delta\pi) = {} & \frac{d\,(a\operatorname{Tang}\sigma\operatorname{Cos}(i_0+i+A-\pi+\Delta\pi))}{d(\delta)}\,\Delta(\delta) \\ & + \frac{d\,(a\operatorname{Tang}\sigma\operatorname{Cos}(i_0+i+A-\pi+\Delta\pi))}{d\mu_0}\,\Delta\mu_0\end{aligned}$$

in welcher die vor dem Gleichheitszeichen stehende Grösse bekannt ist und, in Secunden ausgedrückt, durch m bezeichnet werden soll. Vernachlässigt man, in den auf das Gleichheitszeichen folgenden Differentialquotienten, die unbedeutenden Einflüsse von $\Delta(\delta)$ und $\Delta\mu_0$ auf a und A, so wie auch das Quadrat von σ, so erhält man, durch Differentiirung der Formeln (13):

$$\begin{aligned}\frac{d\,[\operatorname{Tang}\sigma\,\operatorname{Sin}(\pi-\Delta\pi)]}{d(\delta)} &= 0 \\ \frac{d\,[\operatorname{Tang}\sigma\,\operatorname{Cos}(\pi-\Delta\pi)]}{d(\delta)} &= -1 \\ \frac{d\,[\operatorname{Tang}\sigma\,\operatorname{Sin}(\pi-\Delta\pi)]}{d\mu_0} &= \operatorname{Cos}\delta\,\operatorname{Cos}(\mu_0-\mu) \\ \frac{d\,[\operatorname{Tang}\sigma\,\operatorname{Cos}(\pi-\Delta\pi)]}{d\mu_0} &= \operatorname{Sin}(\delta)\,.\,\operatorname{Cos}\delta\,\operatorname{Sin}(\mu_0-\mu)\end{aligned}$$

und hieraus ferner:

$$\begin{aligned}m = -\,a\operatorname{Cos}(i_0+i+A)\,\Delta(\delta) + a\,\{ & \operatorname{Sin}(i_0+i+A)\,\operatorname{Cos}(\mu_0-\mu) \\ & + \operatorname{Cos}(i_0+i+A)\,\operatorname{Sin}(\mu_0-\mu)\,\operatorname{Sin}(\delta)\}\,\operatorname{Cos}\delta\,\Delta\mu_0 \qquad (17)\end{aligned}$$

Man wird indessen wohl in keinem Falle nöthig finden, a von 1 verschieden anzunehmen und A zu berücksichtigen; selbst den Coefficienten

von $\Delta\mu_0$ wird man, wenn die vorausgesetzte Kenntniss von μ_0 der Wahrheit sehr nahe, also $\Delta\mu_0$ sehr klein ist, mit $\mathrm{Sin}\,(i_0+i)\,\mathrm{Cos}\,\delta$ oder $\mathrm{Sin}\,(i_0+i)\,\mathrm{Cos}\,(\delta)$ verwechseln, also sich mit der Anwendung der einfachen Gleichung:

$$m = -\,\mathrm{Cos}\,(i_0+i)\,\Delta(\delta) + \mathrm{Sin}\,(i_0+i)\,\mathrm{Cos}\,(\delta)\,\Delta\mu_0 \quad \ldots\ldots (18)$$

begnügen. Jeder Durchgang des Sterns durch einen der Fäden liefert eine ähnliche Gleichung und aus der Auflösung aller vorhandenen ergeben sich die Werthe von $\Delta(\delta)$ und $\Delta\mu_0$. Jeder Durchgang des zweiten, mit dem vorigen verglichenen Sterns liefert wieder eine ähnliche Gleichung, nämlich

$$m' = -\,\mathrm{Cos}\,(i_0+i)\,\Delta(\delta') + \mathrm{Sin}\,(i_0+i)\,\mathrm{Cos}\,(\delta)\,\Delta\mu'_0$$

und aus der Auflösung aller vorhandenen dieser Art finden sich $\Delta(\delta')$ und $\Delta\mu'_0$. — Da die Werthe von $\Delta(\delta)$ und $\Delta(\delta')$ übereinstimmen müssen, wenn $\delta'-\delta$ so angenommen ist wie die Beobachtung es fordert, so erhält man den ihr entsprechenden Werth des Declinationsunterschiedes $\delta'-\delta$, indem man $\Delta(\delta)-\Delta(\delta')$ zu dem vorausgesetzten hinzufügt. Der wahre Werth des Rectascensionsunterschiedes $\alpha'-\alpha$ ist $=\mu'_0-\mu_0+\Delta\mu'_0-\Delta\mu_0$.

Einer besonderen Erwähnung verdient der Fall, in welchem keiner der beiden, miteinander verglichenen Sterne, an einem Faden beobachtet ist, an dem nicht auch der andere beobachtet wäre. In diesem Falle vereinigen sich nämlich die vier unbekannten Grössen der Aufgabe zu den *zwei* gesuchten $\Delta(\delta)-\Delta(\delta')$ und $\Delta\mu'_0-\Delta\mu_0$, welche man durch die Auflösung *eines* Systems von Gleichungen, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} m'-m &= \mathrm{Cos}\,(i_0+i)\,[\Delta(\delta)-\Delta(\delta')] + \mathrm{Sin}\,(i_0+i)\,[\Delta\mu'_0-\Delta\mu_0]\,\mathrm{Cos}\,(\delta)\\ m'_1-m_1 &= \mathrm{Cos}\,(i_0+i_1)\,[\Delta(\delta)-\Delta(\delta')] + \mathrm{Sin}\,(i_0+i_1)\,[\Delta\mu'_0-\Delta\mu_0]\,\mathrm{Cos}\,(\delta)\\ m'_2-m_2 &= \mathrm{Cos}\,(i_0+i_2)\,[\Delta(\delta)-\Delta(\delta')] + \mathrm{Sin}\,(i_0+i_2)\,[\Delta\mu'_0-\Delta\mu_0]\,\mathrm{Cos}\,(\delta)\\ &\text{u. s. w.}\end{aligned}\right\} (19)$$

erhält.

11.

Ich werde die Verbesserungen aufsuchen, welche Resultate der Beobachtungen der gegenwärtig betrachteten Art bedürfen, wenn sie ohne Rücksicht auf die Strahlenbrechung berechnet worden sind. Ich

nehme also an, dass man alle durch die Beobachtung gegebenen, der Gleichung (12) oder (14) ähnlichen Gleichungen, in der Voraussetzung $a\,\mathrm{Cos}\,A = 1$ und $a\,\mathrm{Sin}\,A = 0$ aufgelöset, d. h. $\delta' - \delta$ und $\alpha' - \alpha$ so bestimmt habe, dass dadurch die bekannten Werthe der Perpendikel $h, h_1, h_2, \ldots$, ohne Rücksicht auf die Strahlenbrechung, bis auf Grössen dargestellt werden, deren Quadrate die kleinste Summe haben.

Die gesuchten Verbesserungen müssen dann durch die ähnliche Auflösung der vorhandenen Gleichungen von der Form (12)

$$a\,\mathrm{Tang}\sigma\,\mathrm{Cos}\,(i_0+i+A-\pi+\Delta\pi) - [\mathrm{Tang}\sigma\,\mathrm{Cos}\,(i_0+i-\pi+\Delta\pi)] = 0$$

gefunden werden, in welcher der zweite, in Klammern eingeschlossene Theil, die Werthe von σ und $\pi - \Delta\pi$ voraussetzt, welche der schon gemachten Auflösung entsprechen. Man hat also, indem man das Quadrat der Strahlenbrechung vernachlässigt,

$$\frac{d\,[\mathrm{Tang}\sigma\,\mathrm{Cos}\,(i_0+i-\pi+\Delta\pi)]}{d(\delta)}\Delta(\delta) + \frac{d\,[\mathrm{Tang}\sigma\,\mathrm{Cos}\,(i_0+i-\pi+\Delta\pi)]}{d\mu_0}\Delta\mu_0$$
$$+ (a\,\mathrm{Cos}\,A - 1)\,\mathrm{Tang}\sigma\,\mathrm{Cos}(i_0+i-\pi+\Delta\pi) - a\,\mathrm{Sin}\,A\,.\,\mathrm{Tang}\sigma\,\mathrm{Sin}\,(i_0+i-\pi+\Delta\pi) = 0$$

und wenn man für $a\,\mathrm{Cos}\,A$ und $a\,\mathrm{Sin}\,A$ die Ausdrücke (11), und für die beiden ersten Glieder ihre schon im vorigen § gefundenen Ausdrücke setzt,

$$\varkappa\sigma\left\{\mathrm{Tang}\zeta^2\,\mathrm{Cos}(i_0+i-q+\Delta p)\,\mathrm{Cos}(\pi-q) + \mathrm{Sec}\,u\,\mathrm{Cos}(i_0+i-\pi+\Delta\pi+u)\right\}$$
$$= -\mathrm{Cos}(i_0+i)\Delta(\delta) + \left\{\mathrm{Sin}(i_0+i)\,\mathrm{Cos}(\mu_0-\mu) + \mathrm{Cos}(i_0+i)\,\mathrm{Sin}(\mu_0-\mu)\,\mathrm{Sin}(\delta)\right\}\mathrm{Cos}\,\delta\,\Delta\mu_0 \quad (20)$$

In dieser Gleichung bedeuten $\Delta(\delta)$ und $\Delta\mu_0$ die von der Strahlenbrechung herrührenden Verbesserungen der ohne ihre Berücksichtigung berechneten Werthe von (δ) und μ_0; ζ und q gelten für den Punkt, welcher in der Mitte zwischen dem Mittelpunkte des Netzes und dem Durchgangspunkte des Sterns durch den Faden liegt. Sollen sie die ihnen im 9ten § gegebene Bedeutung haben, also dem für den Stundenwinkel (τ) und die Declination δ berechneten Werthe der Zenithdistanz und des parallactischen Winkels entsprechen, so muss statt des ersten Gliedes, sein aus der Annahme der Ausdrücke (16) von $a\,\mathrm{Cos}\,A$ und $a\,\mathrm{Sin}\,A$ hervorgehender Ausdruck:

$$\varkappa\sigma\left\{\mathrm{Tang}\zeta^2\,\mathrm{Cos}(i_0+i-q)\,\mathrm{Cos}(\pi-\Delta\pi-q)\left[1+\sigma\,\mathrm{Tang}\zeta\,\mathrm{Cos}(\pi-q)\right] + \mathrm{Sec}\,u\,\mathrm{Cos}(i_0+i-\pi+\Delta\pi+u)\right\}$$

genommen werden. Da $\Delta(\delta)$ und $\mathrm{Cos}\,\delta\,\Delta\mu_o$ von der Ordnung von $\varkappa\sigma$ sind, so erzeugt die Verwechselung der Coefficienten der letzteren Grösse mit $\mathrm{Sin}\,(i_o+i)$ einen Fehler von der Ordnung von $\varkappa\sigma\sigma$, welcher nicht in $\mathrm{Tang}\,\zeta^3$ multiplicirt ist und daher vernachlässigt werden kann. Ich werde daher die Gleichung, welche jeder Durchgang des Sterns durch einen Faden liefert:

$$\varkappa\sigma\left\{\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Cos}(i_o+i-q)\,\mathrm{Cos}(\pi-\Delta\pi-q)\,[1+\sigma\,\mathrm{Tang}\,\zeta\,\mathrm{Cos}(\pi-q)]+\mathrm{Sec}\,u\,\mathrm{Cos}(i_o+i-\pi+\Delta\pi+u)\right\}$$
$$=-\,\mathrm{Cos}\,(i_o+i)\,\Delta(\delta)\,+\,\mathrm{Sin}\,(i_o+i)\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\Delta\mu_o\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(21)$$

annehmen.

Wenn man durch die Auflösung aller vorhandenen Gleichungen dieser Art, $\Delta(\delta)$ und $\Delta\mu_o$ bestimmt, so wie auch $\Delta(\delta')$ und $\Delta\mu'_o$ durch die Auflösung der durch die Beobachtung des zweiten Sterns gegebenen ähnlichen Gleichungen, so erhält man, dem vorigen § zufolge, die gesuchten Verbesserungen der ohne Rücksicht auf die Strahlenbrechung berechneten Declination δ' und Rectascension α' des zweiten Sterns, deren wahre Werthe also

$$\delta'+\Delta(\delta)-\Delta(\delta')\text{ und }\alpha'+\Delta\mu'_o-\Delta\mu_o$$

sind.

Will man das Glied der zweiten Ordnung der Gleichung (21) vernachlässigen, so ist der grösstmöglichste, daraus entstehende Fehler, für $\sigma=n.1000''$, in den Zenithdistanzen 75°, 80°, 85°, resp. $=0''{,}07\,.\,n^2$ $0''{,}22\,n^2$, $1''{,}40\,n^2$. Es muss Jedem überlassen bleiben, die Grösse, welche er in der Berechnung einer Beobachtung vernachlässigen zu dürfen glaubt, selbst festzusetzen, also auch hier selbst zu bestimmen, bis zu welcher Zenithdistanz er keine Rücksicht auf das Glied der zweiten Ordnung nehmen will. Im Allgemeinen kann aber bemerkt werden, dass die gegenwärtig betrachteten, auf den Durchgangszeiten der Sterne durch Fäden beruhenden Beobachtungsarten, bei weitem nicht so genau ausgeführt werden können, als die im 6ten § abgehandelten, mikrometrische Messungen voraussetzenden; dass also Rechnungsvorschriften, welche für kleinere Zenithdistanzen genügend sind, auch für grössere, wo ihr Fehler eine gewisse Grösse erlangt, eher angewandt werden dürfen, als die, die genauere Beobachtungsart betreffenden bis zu Zenithdistanzen wo *ihr* Fehler *dieselbe* Grösse erhält. —

In bei weitem den meisten Fällen würde die Berücksichtigung des Gliedes der zweiten Ordnung der Gleichung (21) ohne allen Nutzen sein, wesshalb es der Mühe werth ist, die Erleichterung geltend zu machen, welche der Rechnung durch seine Weglassung zu Theil wird. Der bekannte Theil dieser Gleichung kann dann:

$$x\sigma \operatorname{Cos}(\pi-\Delta\pi)\left\{\operatorname{Cos}(i_0+i)(\operatorname{Tang}\zeta^2\operatorname{Cos}q^2+1)+\operatorname{Sin}(i_0+i)(\operatorname{Tang}\zeta^2\operatorname{Cos}q\operatorname{Sin}q-\operatorname{Tang}u)\right\}$$
$$+x\sigma \operatorname{Sin}(\pi-\Delta\pi)\left\{\operatorname{Tang}\zeta^2\operatorname{Cos}(i_0+i-q)\operatorname{Sin}q+\operatorname{Sec}u\operatorname{Sin}(i_0+i+u)\right\}$$

geschrieben werden, auch können darin

$$\sigma\operatorname{Cos}(\pi-\Delta\pi)=\delta-(\delta),\quad \sigma\operatorname{Sin}(\pi-\Delta\pi)=\operatorname{Cos}\delta(\mu_0-\mu)$$

gesetzt werden, wodurch die Gleichung sich in:

$$x(\mu_0-\mu)\operatorname{Cos}\delta\left\{\operatorname{Tang}\zeta^2\operatorname{Cos}(i_0+i-q)\operatorname{Sin}q+\operatorname{Sec}u\operatorname{Sin}(i_0+i+u)\right\}$$
$$=-\operatorname{Cos}(i_0+i)\left\{\Delta(\delta)+x[\delta-(\delta)](\operatorname{Tang}\zeta^2\operatorname{Cos}q^2+1)\right\}$$
$$+\operatorname{Sin}(i_0+i)\left\{\operatorname{Cos}\delta\Delta\mu_0-x[\delta-(\delta)](\operatorname{Tang}\zeta^2\operatorname{Cos}q\operatorname{Sin}q-\operatorname{Tang}u)\right\}$$

und wenn man ihr die unbekannten Grössen:

$$x=\Delta(\delta)+x[\delta-(\delta)](\operatorname{Tang}\zeta^2\operatorname{Cos}q^2+1)$$
$$y=\operatorname{Cos}\delta\Delta\mu_0-x[\delta-(\delta)](\operatorname{Tang}\zeta^2\operatorname{Cos}q\operatorname{Sin}q-\operatorname{Tang}u)$$

giebt, in

$$x(\mu_0-\mu)\operatorname{Cos}\delta\left\{\operatorname{Tan}\zeta^2\operatorname{Cos}(i_0+i-q)\operatorname{Sin}q+\operatorname{Sec}u\operatorname{Sin}(i_0+i+u)\right\}=-\operatorname{Cos}(i_0+i)x+\operatorname{Sin}(i_0+i)y \quad (22)$$

verwandelt. Diese Form hat vor (21) den Vorzug, dass sie, statt σ und $\pi-\Delta\pi$, die durch die Beobachtung unmittelbar gegebene Grösse $\mu_0-\mu$ enthält.

12.

Um einen Fall der seit dem 8ten § betrachteten Beobachtungsarten vollständig zu entwickeln, werde ich beide Sterne an *drei*, sich in einem Punkte durchscheidenden Fäden beobachtet annehmen, deren mittlerer mit dem Declinationskreise zusammenfällt, während die beiden anderen in gleichen Winkeln i gegen ihn geneigt sind. Dieser Fall ist wohl der am häufigsten vorkommende, indem das sogenannte Netz von 45 Graden und das *Bradleysche* — wenn von diesem nur

zwei entgegengesetzt liegende der schiefen Fäden berücksichtigt werden — ihn herbeiführen.

Für den mittleren Faden ist $i_0 + i_1 = 90°$, für den einen Seitenfaden $i_0 + i = 90° + i$, für den andern $i_0 + i_2 = 90° - i$. Indem diese Fäden sich in *einem* Punkte durchschneiden, wird dieser als Mittelpunkt des Netzes angesehen, so dass $h = h_1 = h_2 = 0$ werden. Die Sternenzeiten der Durchgänge des Sterns S durch diese Fäden sollen durch μ, μ_1, μ_2 bezeichnet werden; die des Sterns S' durch μ', μ_1', μ_2'. Wenn ein Stern nördlich von dem Mittelpunkte durchgeht, ist $\mu_2 > \mu$; wenn südlich $\mu > \mu_2$; wenn die Durchgangszeiten nach der Folge der Fäden — nicht der Zeiten — geschrieben werden, so ist es unnöthig zu bemerken, auf welcher Seite des Mittelpunkts die Durchgänge stattfinden.

Zuerst werde ich die Vorschriften aufsuchen, nach welchen die Beobachtung, ohne Rücksicht auf die Strahlenbrechung, berechnet werden muss. Die drei Gleichungen, welche durch die drei Momente der Beobachtung des Sterns S gegeben werden, sind also, wenn μ_0 für $(\tau) + \alpha$ geschrieben wird (14):

$$-\sin i \left\{\cos(\delta)\sin\delta - \sin(\delta)\cos\delta\cos(\mu_0 - \mu)\right\} + \cos i\cos\delta\sin(\mu_0 - \mu) = \varepsilon$$
$$\cos\delta\sin(\mu_0 - \mu_1) = \varepsilon_1$$
$$+\sin i \left\{\cos(\delta)\sin\delta - \sin(\delta)\cos\delta\cos(\mu_0 - \mu_2)\right\} + \cos i\cos\delta\sin(\mu_0 - \mu_2) = \varepsilon_2$$

und (δ) und μ_0 sind daraus so zu bestimmen, dass $\varepsilon\varepsilon + \varepsilon_1\varepsilon_1 + \varepsilon_2\varepsilon_2$ ein Minimum wird. Indem $\mu_0 - \mu_1$ und $\mu_0 - \frac{1}{2}(\mu + \mu_2)$ sehr kleine, nur von dem Einflusse der Strahlenbrechung und den Beobachtungsfehlern herrührende Grössen sind, ist auch

$$-\sin i \left\{\cos(\delta)\sin\delta - \sin(\delta)\cos\delta\cos\frac{\mu_2 - \mu}{2}\right\} + \cos i\cos\delta\sin\frac{\mu_2 - \mu}{2}$$

eine sehr kleine Grösse, welche ich durch u, so wie $\mu_0 - \mu_1$ durch v bezeichnen werde. Durch ihre Einführung in die Gleichungen werden diese:

$$\varepsilon = u + \left(v + \mu_1 - \frac{\mu + \mu_2}{2}\right)\cos\delta\left\{\cos i\cos\frac{\mu_2 - \mu}{2} + \sin i\sin\frac{\mu_2 - \mu}{2}\sin(\delta)\right\}$$
$$\varepsilon_1 = v\cos\delta$$
$$\varepsilon_2 = -u + \left(v + \mu_1 - \frac{\mu + \mu_2}{2}\right)\cos\delta\left\{\cos i\cos\frac{\mu_2 - \mu}{2} + \sin i\sin\frac{\mu_2 - \mu}{2}\sin(\delta)\right\}$$

Ihre, der Methode der kleinsten Quadrate gemässe Auflösung ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\mathrm{Sin}(\delta)\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,i\,\mathrm{Sin}\,\frac{\mu_2-\mu}{2}}{1+2\,\mathrm{Cos}\,i^2\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\mu_2-\mu}{2}\right)^2}\left(\frac{\mu+\mu_2}{2}-\mu_,\right) \\ v &= \frac{2\,\mathrm{Cos}\,i^2\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\mu_2-\mu}{2}\right)^2}{1+2\,\mathrm{Cos}\,i^2\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\mu_2-\mu}{2}\right)^2}\left(\frac{\mu+\mu_2}{2}-\mu_,\right) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (23)$$

Da aber $\frac{\mu+\mu_2}{2}-\mu_,$ sehr klein und $\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\frac{\mu_2-\mu}{2}$ kleiner als der Halbmesser des Sehefeldes des zu der Beobachtung angewandten Fernrohrs ist, so ist u unbedeutend und kann vernachlässigt werden. Nur wenn der beobachtete Stern dem Pole sehr nahe ist, kann die Verwechselung von $\mathrm{Cos}\,\frac{\mu_2-\mu}{2}$ mit 1, einen die Beachtung verdienenden Einfluss auf v äussern.

Indem man v und v' aus den Beobachtungen beider, miteinander zu vergleichenden Sterne bestimmt, hat man ihre Durchgangszeiten durch den Declinationskreis des Mittelpunkts des Fadennetzes:

$$\mu_o = (\tau) + \alpha = \mu_, + v$$
$$\mu_o' = (\tau) + \alpha' = \mu_,' + v'$$

also

$$\alpha'-\alpha = \mu_o'-\mu_o = \mu_,'-\mu_, + v'-v \ldots\ldots\ldots (24)$$

Ferner hat man zur Vergleichung ihrer Declinationen die Gleichungen:

$$u = 0 = -\,\mathrm{Sin}\,i\left\{\mathrm{Cos}\,(\delta)\,\mathrm{Sin}\,\delta - \mathrm{Sin}\,(\delta)\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\frac{\mu_2-\mu}{2}\right\} + \mathrm{Cos}\,i\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\frac{\mu_2-\mu}{2}$$

$$u' = 0 = -\,\mathrm{Sin}\,i\left\{\mathrm{Cos}\,(\delta)\,\mathrm{Sin}\,\delta' - \mathrm{Sin}\,(\delta)\,\mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Cos}\,\frac{\mu'_2-\mu'}{2}\right\} + \mathrm{Cos}\,i\,\mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Sin}\,\frac{\mu'_2-\mu'}{2}$$

aus welchen (δ) zu eliminiren ist. Wenn man $2m = \mu_2'-\mu$ und $\mathrm{Cos}\,(\delta)$, $\mathrm{Sin}\,(\delta)$ durch $\mathrm{Tang}\,[45^\circ + \frac{1}{2}(\delta)]$ ausdrückt, wird die erste Gleichung:

$$0 = \mathrm{Sin}\,(i-m) + 2\,\mathrm{Tang}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,i\,\mathrm{Tang}\,[45^\circ+\tfrac{1}{2}(\delta)] - \mathrm{Sin}\,(i+m)\,\mathrm{Tang}\,[45^\circ+\tfrac{1}{2}(\delta)]^2$$

und ihre Auflösung:

$$\mathrm{Tan}[45^\circ+\tfrac{1}{2}(\delta)] = \sqrt{\frac{\mathrm{Sin}\,(i-m)}{\mathrm{Sin}\,(i+m)}}\left\{\mathrm{Tan}\,\delta\,\frac{\mathrm{Sin}\,i}{\sqrt{\mathrm{Sin}\,(i-m)\,\mathrm{Sin}\,(i+m)}} \pm \sqrt{\left[\mathrm{Tan}\,\delta^2\,\frac{\mathrm{Sin}\,i^2}{\mathrm{Sin}\,(i-m)\,\mathrm{Sin}\,(i+m)}+1\right]}\right\}$$

Die Fäden haben *zwei* Durchschnittspunkte, deren einer der im Fernrohre sichtbare Mittelpunkt des Netzes, der andere ihm diametral

entgegengesetzt ist; auf den ersteren bezieht sich das obere, auf den letzteren das untere Zeichen; jenes ist also anzuwenden. Diese Auflösung der Gleichung wird zur Rechnung bequem wenn man Δ nach der Formel:

$$\text{Tang}\,\Delta = \text{Tang}\,\delta\,\frac{\text{Sin}\,i}{\sqrt{(\text{Sin}(i-m)\,\text{Sin}(i+m))}} \qquad (25^a)$$

bestimmt, wodurch sie sich in

$$\text{Tang}\,[45^\circ+\tfrac{1}{2}(\delta)] = \text{Tang}\,[45^\circ+\tfrac{1}{2}\Delta]\sqrt{\frac{\text{Sin}\,(i-m)}{\text{Sin}\,(i+m)}} \qquad (26^a)$$

verwandelt. Indem man, für den zweiten Stern, auch

$$\text{Tang}\,[45^\circ+\tfrac{1}{2}(\delta)] = \text{Tang}\,[45^\circ+\tfrac{1}{2}\Delta]\sqrt{\frac{\text{Sin}\,(i-m')}{\text{Sin}\,(i+m')}} \qquad (26^b)$$

und

$$\text{Tang}\,\Delta' = \text{Tang}\,\delta'\,\frac{\text{Sin}\,i}{\sqrt{(\text{Sin}(i-m')\,\text{Sin}(i+m'))}} \qquad (25^b)$$

hat, kann man aus der Declination des einen Sterns die des anderen bestimmen. Sieht man δ als die gegebene an, so sucht man Δ durch (25^a), dann Δ' durch die Vergleichung der beiden Formeln (26), endlich δ' durch (25^b). Man kann auch mit einer indirecten, oder einer genäherten Ableitung von δ' aus δ ausreichen, was hier jedoch nicht weiter verfolgt zu werden braucht.

Ich werde jetzt den Einfluss der Strahlenbrechung aufsuchen. Immer wenn $h=0$ ist, also auch für unseren Fall, ist $i_o+i+A-\pi+\Delta\pi=90^\circ$ (12), wodurch die Gleichung (21), nach Weglassung des Quadrats der Strahlenbrechung, sich in:

$$\begin{aligned}
&\varkappa\sigma\left\{\text{Tang}\,\zeta^2\,\text{Cos}(i_o+i-q)\,\text{Sin}(i_o+i-q)\left[1+\sigma\,\text{Tang}\,\zeta\,\text{Sin}(i_o+i-q)\right]-\text{Tang}\,\varkappa\right\}\\
&=\varkappa\sigma\left\{\text{Tang}\,\zeta^2\,\text{Cos}(i_o+i-q)\,\text{Sin}(i_o+i-q)-\text{Tang}\,\zeta\,\text{Sin}\,q\,\text{Tang}\,\delta\right\}\\
&\qquad\qquad+\varkappa\sigma\sigma\,\text{Tang}\,\zeta^2\,\text{Cos}(i_o+i-q)\,\text{Sin}(i_o+i-q)^2\\
&=-\text{Cos}(i_o+i)\,\Delta(\delta)+\text{Sin}\,(i_o+i)\,.\,\text{Cos}\,\delta\,\Delta\mu_o
\end{aligned}$$

verwandelt. Wendet man sie auf die drei Momente der Beobachtung an und schreibt man $\delta-(\delta)$ für $\sigma\,\text{Sin}\,(i_o+i)$, so erhält man:

$$\text{Sin}\, i\,\Delta(\delta) + \text{Cos}\, i\,\text{Cos}\,\delta\,\Delta\mu_0 = \varkappa\,\frac{\delta-(\delta)}{\text{Cos}\, i}\Big\{\text{Tang}\,\zeta^2\,\text{Cos}(q-i)\,\text{Sin}(q-i) - \text{Tang}\,\zeta\,\text{Sin}\,q\,\text{Tang}\,\delta\Big\}$$
$$+ \varkappa\,\frac{(\delta-(\delta))^2}{\text{Cos}\, i^2}\,\text{Tang}\,\zeta^3\,\text{Cos}\,(q-i)^2\,\text{Sin}\,(q-i)$$

$$\text{Cos}\,\delta\,\Delta\mu_0 = \varkappa.(\delta-(\delta))\Big\{\text{Tang}\,\zeta^2\,\text{Cos}\,q\,\text{Sin}\,q - \text{Tang}\,\zeta\,\text{Sin}\,q\,\text{Tang}\,\delta\Big\}$$
$$+ \varkappa\,(\delta-(\delta))^2\,\text{Tang}\,\zeta^3\,\text{Cos}\,q^2\,\text{Sin}\,q$$

$$-\text{Sin}\, i\,\Delta(\delta) + \text{Cos}\, i\,\text{Cos}\,\delta\,\Delta\mu_0 = \varkappa\,\frac{\delta-(\delta)}{\text{Cos}\, i}\Big\{\text{Tang}\,\zeta^2\,\text{Cos}(q+i)\,\text{Sin}(q+i) - \text{Tang}\,\zeta\,\text{Sin}\,q\,\text{Tang}\,\delta\Big\}$$
$$+ \varkappa\,\frac{(\delta-(\delta))^2}{\text{Cos}\, i^2}\,\text{Tang}\,\zeta^2\,\text{Cos}\,(q+i)^2\,\text{Sin}\,(q+i)$$

Die der Methode der kleinsten Quadrate gemässe Auflösung dieser Gleichungen ergiebt, wenn man das Quadrat von $\delta-(\delta)$ vernachlässigt:

$$\left.\begin{aligned}\Delta(\delta) &= -\varkappa\,(\delta-(\delta))\,\text{Tang}\,\zeta^2\,\text{Cos}\,2q\\ \text{Cos}\,\delta\,\Delta(\mu_0) &= \varkappa\,(\delta-(\delta))\,\text{Tang}\,\zeta\,\text{Sin}\,q\Big\{\text{Tang}\,\zeta\,\text{Cos}\,q\,\frac{1+2\,\text{Cos}\,2i}{2+\text{Cos}\,2i} - \frac{3\,\text{Tang}\,\delta}{2+\text{Cos}\,2i}\Big\}.\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

Will man das Quadrat von $\delta-(\delta)$ nicht vernachlässigen, so kommt diesen Ausdrücken noch hinzu

$$-\varkappa\,(\delta-(\delta))^2\,\frac{\text{Tang}\,\zeta^2}{4\,\text{Cos}\, i^2}\Big\{\text{Cos}\,q + \frac{\text{Sin}\,3i}{\text{Sin}\, i}\,\text{Cos}\,3q\Big\}$$

und ..... $+\varkappa\,(\delta-(\delta))^2\,\frac{\text{Tang}\,\zeta^3}{2+\text{Cos}\,2i}\cdot\frac{1}{2}\Big\{\text{Sin}\,q + \frac{4\,\text{Cos}\,2i-1}{3}\,\text{Sin}\,3q\Big\}$

Ich habe aber schon bemerkt, dass es nur in sehr grossen Zenithdistanzen ein Interesse haben kann, diese Glieder der Formeln zu berücksichtigen; gewöhnlich sind sie ganz unbedeutend. — In Beziehung auf den zweiten Stern hat man ähnliche Ausdrücke, in welchen $\Delta(\delta')$, $\Delta\mu_0'$, δ', statt $\Delta(\delta)$, $\Delta\mu_0$, δ geschrieben werden und ζ, q und das von ζ abhängige $\varkappa$ zu der Declination δ' und dem vorigen Stundenwinkel, nämlich (ϖ), gehören. — Die von dem Einflusse der Strahlenbrechung befreieten Werthe von δ' und α' erhält man, wenn man den ohne ihre Berücksichtigung oben gefundenen, resp. $\Delta(\delta)-\Delta(\delta')$ und $\Delta\mu_0'-\Delta\mu_0$ hinzusetzt.

Man kann aber auch unmittelbar $\Delta(\delta)-\Delta(\delta')$ und $\Delta\mu_0'-\Delta\mu_0$ ausdrücken. Wenn man ζ_0 und q_0 für die Declination $\delta_0=\frac{1}{2}(\delta'+\delta)$ und den Stundenwinkel (ϖ) bestimmt, den zu ζ_0 gehörigen Werth von $\varkappa$ für beide Sterne anwendet und sich auf die Berücksichtigung der ersten Potenz von $\delta'-\delta$ beschränkt, so erhält man, aus (27), offenbar:

$$\Delta(\delta) - \Delta(\delta') = \varkappa(\delta'-\delta)\ \mathrm{Tang}\,\zeta_0^{\,2}\ \mathrm{Cos}\,2q_0$$

$$\Delta\mu'_0 - \Delta\mu_0 = \varkappa(\delta'-\delta)\ \mathrm{Sec}\,\delta_0\ \mathrm{Tang}\,\zeta_0\ \mathrm{Sin}\,q_0\left\{\mathrm{Tang}\,\zeta_0\ \mathrm{Cos}\,q_0\,\frac{1+2\,\mathrm{Cos}\,2i'}{2+\mathrm{Cos}\,2i'} - \frac{3\,\mathrm{Tang}\,\delta_0}{2+\mathrm{Cos}\,2i'}\right\} \quad (38)$$

welche Formeln in gewöhnlichen Fällen hinreichend genähert sind.

13.

Beobachtungsarten, welche den Rectascensions- und den Declinationsunterschied durch Durchgangszeiten durch Fäden bestimmen, deren gegenseitige Lage gegeben, deren Richtung gegen die Ebene eines Declinationskreises aber unbekannt ist.

Der Unterschied dieser Beobachtungsarten von den in der vorigen Classe (§ 8.) enthaltenen, besteht allein darin, dass das vorher *bekannte* i_0 jetzt *unbekannt* ist. Die Gleichung, welche durch jedes Moment einer Beobachtung gegeben wird, ist daher für beide Beobachtungsarten dieselbe, nämlich (12) oder (14) § 8., aber für die gegenwärtige hat sie *drei* unbekannte Grössen, indem den der vorigen noch i_0 hinzukommt. — Diese letztere unbekannte Grösse ist allen Gleichungen, welche durch die Beobachtungen *beider* Sterne gegeben werden, *gemeinschaftlich;* so dass die Aufgabe, den Ort des einen durch den gegebenen des anderen und die Beobachtung zu bestimmen, *fünf* unbekannte Grössen hat, deren eine in *allen* Gleichungen vorkommt. Hierdurch wird nothwendig, den Gleichungen welche jeder der beiden Sterne liefert, in dem Falle einer Verschiedenheit der Genauigkeit der Beobachtungen beider, verschiedene Gewichte beizulegen. Dieses wird z. B. geschehen müssen, wenn der eine ein Fixstern, der andere ein mehr oder weniger undeutlich erscheinender Komet ist; in welchem Falle die durch die Durchgänge des letzteren durch die Fäden gegebenen Gleichungen, ehe sie mit den durch die Durchgänge des ersteren gegebenen combinirt werden, mit dem eigentlichen Bruche multiplicirt werden müssen, welcher das Verhältniss der Schärfe der unter gleichen Umständen gemachten Beobachtungen des Fixsterns und des Kometen ausdrückt. — Ist jedoch dieser Bruch, den ich durch p bezeichnen werde, so klein, dass der Beitrag welchen die Beobachtungen des weniger genau beobachteten Sterns zur Bestimmung von i_0 liefern, als unerheblich betrachtet werden kann, und will man ihn, vielleicht wegen

der Schwierigkeit p richtig zu schätzen, ganz vernachlässigen, so muss i_0 aus den Beobachtungen des anderen Sterns allein bestimmt werden. Dann haben die Gleichungen, welche jeder der beiden Sterne liefert, keine ihnen gemeinschaftliche unbekannte Grösse mehr, und die Berücksichtigung der Verschiedenheit ihres Gewichts wird unnöthig.

Geht man von näherungsweise bekannten Werthen von (δ), μ_0, i_0 aus, bezeichnet man ihre Verbesserungen durch $\Delta(\delta)$, $\Delta\mu_0$, Δi_0 und nimmt man m in der § 10 gegebenen Bedeutung, nämlich

$$m = \text{Tang}\, h - a\,\text{Tang}\,\sigma\,\text{Cos}\,(i_0+i+A-\pi+\Delta\pi)$$

so erhält man die vollständige Bedingungsgleichung, welche jeder Durchgang durch einen Faden liefert, indem man zu (17) noch den Einfluss von Δi_0 hinzusetzt. Unter denselben Bedingungen, unter welchen die Abkürzung (18) der Gleichung (17) erlaubt ist, hat man also

$$m = -\,\text{Cos}\,(i_0+i)\,\Delta(\delta) + \text{Sin}\,(i_0+i)\,\text{Cos}\,\delta\,\Delta\mu_0 - a\,\text{Sin}\,(i_0+i-\pi+\Delta\pi)\,.\,\Delta i_0$$

oder wenn man, mit angemessener Näherung,

$$a\,\text{Cos}\,(\pi-\Delta\pi) = \delta-(\delta),\quad a\,\text{Sin}\,(\pi-\Delta\pi) = \text{Cos}\,\delta\,(\mu_0-\mu)$$

setzt,

$$m = -\,\text{Cos}\,(i_0+i)\,\Delta(\delta) + \text{Sin}\,(i_0+i)\,\{\text{Cos}\,\delta\,\Delta\mu_0 - (\delta-(\delta))\,\Delta i_0\} - \text{Cos}\,(i_0+i)\,\text{Cos}\,\delta\,.\,(\mu-\mu_0)\,\Delta i_0 \quad (29)$$

So wie jeder Durchgang des genauer beobachteten Sterns durch einen Faden, eine dieser ähnliche Gleichung liefert, so liefert jeder Durchgang des weniger genau beobachteten eine der folgenden

$$pm' = -p\,\text{Cos}\,(i_0+i)\,\Delta(\delta') + p\,\text{Sin}\,(i_0+i)\,\{\text{Cos}\,\delta'\,\Delta\mu'_0 - (\delta'-(\delta))\,\Delta i_0\} - p\,\text{Cos}\,(i_0+i)\,\text{Cos}\,\delta'\,(\mu'-\mu'_0)\,\Delta i_0$$

ähnliche. Man kann aber auch den Factor p des zweiten Systems von Gleichungen weglassen, wenn man nach der Elimination von $\Delta(\delta)$ und $\text{Cos}\,\delta\,\Delta\mu_0 - (\delta-(\delta))\,\Delta i_0$ aus den drei, der Methode der kleinsten Quadrate gemäss entwickelten Endgleichungen des ersten Systems, und nach der Elimination von $\Delta(\delta')$ und $\text{Cos}\,\delta'\,\Delta\mu'_0 - (\delta'-(\delta))\,\Delta i_0$ aus denen des zweiten, das Product der von dem letzteren übrig bleibenden Gleichung für Δi_0 in pp, zu der von dem ersteren übrig bleibenden ähnlichen Gleichung hinzufügt und Δi_0 aus der Summe beider bestimmt.

14.

Ich muss noch die Verbesserungen aufsuchen, welche ohne Rücksicht auf die Strahlenbrechung berechneten Resultaten der Beobachtungen dieser Art hinzuzusetzen sind. — In diesem Falle ist, statt der Grösse n, dem 11ten § zufolge,

$$\varkappa\sigma\left\{\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Cos}(i_0+i-q)\,\mathrm{Cos}(\pi-\Delta\pi-q)\left[1+\sigma\,\mathrm{Tang}\,\zeta\,\mathrm{Cos}(\pi-q)\right]+\mathrm{Sec}\,\varkappa\,\mathrm{Cos}(i_0+i-\pi+\Delta\pi+\varkappa)\right\}$$

zu setzen. Allein ich halte hier die Beibehaltung des in $\varkappa\sigma\sigma$ multiplicirten Gliedes dieses Ausdrucks, selbst für die Zenithdistanz $= 85°$, für überflüssig. Die Genauigkeit der Resultate dieser Beobachtungsart steht nämlich noch weiter hinter der Genauigkeit mikrometrischer Messungen zurück, als dieses bei der vorigen (§ 8) der Fall ist: ein beträchtlicher Theil des Gewichts der unmittelbaren Beobachtungen der Durchgangszeiten muss auf die Bestimmung von i_0 verwandt werden, welche Grösse vorher durch das mechanische Mittel der parallactischen Aufstellung bekannt wurde.

Vernachlässigt man das in $\varkappa\sigma\sigma$ multiplicirte Glied, so kann man die übrigen (§ 11)

$$\mathrm{Cos}(i_0+i).\varkappa(\delta-(\delta))\,(\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Cos}\,q^2+1)+\mathrm{Sin}(i_0+i).\varkappa(\delta-(\delta))\,(\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Cos}\,q\,\mathrm{Sin}\,q-\mathrm{Tang}\,\varkappa)$$
$$-(\mu-\mu_0)\,\mathrm{Cos}\,\delta.\varkappa\left\{\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Cos}(i_0+i-q)\,\mathrm{Sin}\,q+\mathrm{Sec}\,\varkappa\,\mathrm{Sin}(i_0+i+\varkappa)\right\}$$

schreiben. Setzt man ihren Ausdruck durch $\Delta(\delta)$, $\Delta\mu_0$, Δi_0 (29) mit entgegengesetztem Zeichen hinzu, so erhält man die Gleichung:

$$0=\mathrm{Cos}(i_0+i)\left\{\Delta(\delta)+\varkappa(\delta-(\delta))\,(\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Cos}\,q^2+1)\right\}$$
$$+\mathrm{Sin}(i_0+i)\left\{-\mathrm{Cos}\,\delta\,\Delta\mu_0+(\delta-(\delta))\,\Delta i_0+\varkappa(\delta-(\delta))\,(\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Cos}\,q\,\mathrm{Sin}\,q-\mathrm{Tang}\,\varkappa)\right\}$$
$$+(\mu-\mu_0)\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}(i_0+i)\left\{\Delta i_0-\varkappa\,(\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Cos}\,q\,\mathrm{Sin}\,q+\mathrm{Tang}\,\varkappa)\right\}$$
$$-(\mu-\mu_0)\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}(i_0+i).\varkappa(\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Sin}\,q^2+1)$$

Da aber

$$h=\sigma\,\mathrm{Cos}(i_0+i-\pi+\Delta\pi)=\mathrm{Cos}(i_0+i)\,(\delta-(\delta))-\mathrm{Sin}(i_0+i).(\mu-\mu_0)\,\mathrm{Cos}\,\delta$$

so kann, statt des letzten Gliedes dieser Gleichung,

$$+\left\{h-\mathrm{Cos}(i_0+i)\,(\delta-(\delta))\right\}.\varkappa\,(\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Sin}\,q^2+1)$$

geschrieben, und sein in $\mathrm{Cos}\,(i_o+i)$ multiplicirter Theil mit ihrem ersten Gliede vereinigt werden, wodurch sie, wenn noch für $\mathrm{Tang}\,\varkappa$ sein Ausdruck geschrieben wird, sich in:

$$\mathrm{Cos}(i_o+i)\left\{\triangle(\delta)+\varkappa(\delta-(\delta))\,\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Cos}\,2q\right\}$$
$$+\,\mathrm{Sin}\,(i_o+i)\left\{-\mathrm{Cos}\delta\,\triangle\mu_o+(\delta-(\delta))(\triangle i_o-\varkappa\,\mathrm{Tan}\zeta\,\mathrm{Sin}\,q\,\mathrm{Tan}\,\delta)+\tfrac{1}{2}\varkappa(\delta-(\delta))\,\mathrm{Tan}\,\zeta^2\,\mathrm{Sin}\,2q\right\}$$
$$+\,(\mu-\mu_o)\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}(i_o+i)\left\{\triangle i_o-\varkappa\,\mathrm{Tang}\,\zeta\,\mathrm{Sin}\,q\,\mathrm{Tang}\,\delta-\tfrac{1}{2}\varkappa\,\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Sin}\,2q\right\}$$
$$=-\varkappa h\,(\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Sin}\,q^2+1)$$

verwandelt. Giebt man ihr die unbekannten Grössen:

$$x=\triangle(\delta)+\varkappa(\delta-(\delta))\,\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Cos}\,2q$$
$$y=\mathrm{Cos}\,\delta\,\triangle\mu_o-(\delta-(\delta))\,(\triangle i_o-\varkappa\,\mathrm{Tang}\,\zeta\,\mathrm{Sin}\,q\,\mathrm{Tang}\,\delta)-\tfrac{1}{2}\varkappa(\delta-(\delta))\,\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Sin}\,2q$$
$$z=\triangle i_o-\varkappa\,\mathrm{Tang}\,\zeta\,\mathrm{Sin}\,q\,\mathrm{Tang}\,\delta-\tfrac{1}{2}\varkappa\,\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Sin}\,2q$$

so wird sie also:

$$-x\,\mathrm{Cos}(i_o+i)+y\,\mathrm{Sin}(i_o+i)-z\,\mathrm{Cos}(i_o+i)\,\mathrm{Cos}\,\delta\,(\mu-\mu_o)=\varkappa h\,(\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Sin}\,q^2+1)\quad(30)$$

und ähnlich für jedes andere Moment der Beobachtung des ersten Sterns. Auf die Beobachtungen des zweiten Sterns angewandt, wird sie

$$-x'\,\mathrm{Cos}(i_o+i)+y'\,\mathrm{Sin}(i_o+i)-z'\,\mathrm{Cos}(i_o+i)\,\mathrm{Cos}\,\delta'\,(\mu'-\mu_o')=\varkappa h(\mathrm{Tang}\,\zeta'^2\,\mathrm{Sin}\,q'^2+1)$$

wo x', y', z' die Bedeutungen

$$x'=\triangle(\delta')+\varkappa(\delta'-(\delta))\,\mathrm{Tang}\,\zeta'^2\,\mathrm{Cos}\,2q'$$
$$y'=\mathrm{Cos}\,\delta'\,\triangle\mu_o'-(\delta'-(\delta))\,(\triangle i_o-\varkappa\,\mathrm{Tang}\,\zeta'\,\mathrm{Sin}\,q'\,\mathrm{Tang}\,\delta')-\tfrac{1}{2}\varkappa(\delta'-(\delta))\,\mathrm{Tang}\,\zeta'^2\,\mathrm{Sin}\,2q'$$
$$z'=\triangle i_o-\varkappa\,\mathrm{Tang}\,\zeta'\,\mathrm{Sin}\,q'\,\mathrm{Tang}\,\delta'-\tfrac{1}{2}\varkappa\,\mathrm{Tang}\,\zeta'^2\,\mathrm{Sin}\,2q'$$

haben. Allein man darf, statt der zu dem Stundenwinkel (τ) und den Declinationen δ und δ' gehörenden Werthe von ζ, q und ζ', q', die zu demselben Stundenwinkel und der Declination $\delta_o=\frac{1}{2}(\delta'+\delta)$ gehörenden ζ_o, q_o, und eben so statt $\mathrm{Cos}\,\delta$, $\mathrm{Tang}\,\delta$ und $\mathrm{Cos}\,\delta'$, $\mathrm{Tang}\,\delta'$ ihren mittleren Werth für beide Sterne $\mathrm{Cos}\,\delta_o$, $\mathrm{Tang}\,\delta_o$, so wie auch den zu ζ_o gehörigen Werth von $\varkappa$ anwenden, wie auch schon in den Formeln (28) geschehen ist. Dadurch wird $z'=z$ die den Gleichungen für beide Sterne *gemeinschaftliche* unbekannte Grösse.

Wenn man die durch die einzelnen Momente der Beobachtung des ersten Sterns gegebenen Gleichungen (30)

$$ax+by+cz=n;\ a_1x+b_1y+c_1z=n_1;\ \text{u. s. w.}$$

die durch die einzelnen Momente der Beobachtung des zweiten Sterns gegebenen

$$a'x' + b'y' + c'z = n';\ a'_,x' + b'_,y' + c'_,z = n'_,;\ \text{u. s. w.}$$

bezeichnet, sie der Methode der kleinsten Quadrate gemäss behandelt und die, nach der Elimination der beiden ersten unbekannten Grössen jedes Systems übrigbleibenden Gleichungen, wie gewöhnlich, durch

$$(cc.2)\,z = (cn.2) \text{ und } (c'c'.2)\,z = (c'n'.2)$$

ausdrückt, so ist z durch die Gleichung

$$\left\{(cc.2) + pp(c'c'.2)\right\} z = (cn.2) + pp(c'n'.2)$$

zu bestimmen. Wenn die übrigen unbekannten Grössen, unter der Voraussetzung des so gefundenen Werthes von z, bestimmt sind, erhält man

$$\left.\begin{aligned} \Delta(\delta) - \Delta(\delta') &= x - x' + z(\delta' - \delta)\ \mathrm{Tang}\tfrac{\zeta}{2}\ \mathrm{Cos}2q_0 \\ \mathrm{Cos}\,\delta_0\,(\Delta\mu'_0 - \Delta\mu_0) &= y' - y + z(\delta' - \delta)\ \mathrm{Tang}\tfrac{\zeta}{2}\ \mathrm{Sin}2q_0 + (\delta' - \delta)\,z \end{aligned}\right\} \ldots\ (31)$$

und damit die wahren Werthe der ohne Berücksichtigung der Strahlenbrechung aus der Beobachtung abgeleiteten Declination und Rectascension des zweiten Sterns:

$$\delta' + \Delta(\delta) - \Delta(\delta') \text{ und } \alpha' + \Delta\mu'_0 - \Delta\mu_0$$

Wenn keiner der beiden Sterne an einem Faden beobachtet ist, an dem nicht auch der andere beobachtet wäre, werden $a, b, n = a', b', n'$; $a_,, b_,, n_, = a'_,, b'_,, n'_,$; u. s. w., oder man hat die Gleichungen für den ersten Stern:

$$ax + by + cz = n;\ a_,x + b_,y + c_,z = n_,;\ a_{,,}x + b_{,,}y + c_{,,}z = n_{,,};\ \text{u. s. w.}$$

und für den zweiten:

$$ax' + by' + c'z = n;\ a_,x' + b_,y' + c'_,z = n_,;\ a_{,,}x' + b_{,,}y' + c'_{,,}z = n_{,,};\ \text{u. s. w.}$$

worin nur die Coefficienten von z verschieden sind; hieraus geht eine Erleichterung ihrer Auflösung hervor. Aber besonderer Auszeichnung verdient der Fall, in welchem alle Fäden, an welchen man Beobachtungen gemacht hat, sich in *einem* Punkte durchschneiden. In diesem Falle sind sämmtliche $h=0$ und damit auch sämmtliche $n=0$, wodurch offenbar $x=0$, $y=0$, $x'=0$, $y'=0$, $z=0$ werden, also auch die, der Methode der kleinsten Quadrate gemässe Entwickelung und Auflösung von Gleichungen *wegfällt*. Statt (31) erhält man dann

$$\left.\begin{aligned} \Delta(\delta) - \Delta(\delta') &= \varkappa(\delta'-\delta)\ \mathrm{Tang}\,\zeta_0^2\ \mathrm{Cos}\,2q_0 \\ \mathrm{Cos}\,\delta_0(\Delta\mu'_0 - \Delta\mu_0) &= \varkappa(\delta'-\delta)\ \mathrm{Tang}\,\zeta_0^2\ \mathrm{Sin}\,2q_0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (32)$$

15.

Beobachtungsarten durch Kreismikrometer.

Diese Beobachtungsarten setzen ein feststehendes Fernrohr voraus, in dessen Sehefelde sich ein Ring befindet, der einen Kreis der scheinbaren Himmelskugel, von gegebenem Halbmesser r, ausschneidet, durch welchen die tägliche Bewegung die miteinander zu vergleichenden Sterne führt. *Fraunhofer* hat Kreismikrometer verfertigt, welche aus *zwei* concentrisch angebrachten Ringen, und andere, welche aus *vielen*, auf eine Glasplatte gezeichneten, concentrischen Kreisen bestehen, deren Beleuchtungsart so angeordnet ist, dass sie als helle Linien im dunkelen Sehefelde des Fernrohrs erscheinen. — Ein dieser Beobachtungsart eigenthümlicher Vorzug vor allen anderen, welche zur Bestimmung sowohl des Declinations- als auch des Rectascensionsunterschiedes zweier Sterne führen, ist, dass sie kein Mittel voraussetzt, eine bestimmte Lage des Instruments gegen den Declinationskreis hervorzubringen, und dennoch keinen Theil des Gewichts der Beobachtungen dem Resultate entzieht, um ihn auf die Bestimmung dieser Lage zu verwenden. Damit dieser Vorzug nicht verloren gehe, ist, in dem Falle dass der Apparat mehr Kreise als einen besitzt, zur *Verbindung* der verschiedenen Ein- und Austrittszeiten eines Sterns untereinander nothwendig, dass die Mittelpunkte derselben *zusammenfallen*; denn die Kenntniss jeder anderen Beziehung dieser Mittelpunkte zueinander würde, ohne ihre Orientirung in Beziehung zu dem Declinationskreise, nicht zu jener Verbindung führen. —

Was man durch ein *einfaches* Kreismikrometer an einem durchgehenden Sterne beobachten kann, sind die Sternenzeiten μ und $\mu_{,}$, wenn seine scheinbare Entfernung von dem Mittelpunkte des Kreises dem Halbmesser r gleich ist; jeder Kreis eines aus mehreren zusammengestzten kann nur die Sternenzeiten angeben, welche einer *anderen* Entfernung von dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte aller Kreise entsprechen. Das Kreismikrometer kann daher als ein Apparat betrachtet werden, wodurch eine, oder mehrere, *bestimmte* Entfernungen eines

durchgehenden Sterns von einem festen Punkte gemessen werden. Es dient zur Bestimmung der relativen Lage seines Mittelpunkts und jedes durch seine Kreise gehenden Sterns. Die diese ergebenden Gleichungen werden erlangt, indem die gemessenen Entfernungen durch die Declinationen (δ) und δ des Mittelpunkts der Kreise und des Sterns, und die Unterschiede des Stundenwinkels (τ) des Mittelpunkts von den Stundenwinkeln des Sterns zu den Zeiten seiner Ein- und Austritte, ausgedrückt werden; und es geht hieraus hervor, dass die Strahlenbrechung nur in sofern dabei in Betracht kommt, als sie die wahre Entfernung von der gemessenen scheinbaren verschieden macht, welche Verschiedenheit durch die erste der Formeln (5) ausgedrückt worden ist.

Schreibt man in dieser Formel π statt p, was nur einen Unterschied von der Ordnung von $\varkappa\varkappa s$ erzeugt und immer erlaubt ist, und ferner r für s, so wird sie

$$\sigma = r + r\varkappa\left\{\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Cos}(\pi-q)^2 + 1\right\}$$

Der Unterschied der Stundenwinkel des Mittelpunkts der Kreise und des Sterns, zur Sternenzeit μ, ist $=(\tau)-\mu+\alpha$, oder wenn man, wie oben, μ_0 für $(\tau)+\alpha$ setzt $=\mu_0-\mu$. Da man (13):

$$\mathrm{Sin}\,\sigma\,\mathrm{Sin}(\pi-\Delta\pi) = \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}(\mu_0-\mu)$$
$$\mathrm{Sin}\,\sigma\,\mathrm{Cos}(\pi-\Delta\pi) = \mathrm{Cos}(\delta)\,\mathrm{Sin}\,\delta - \mathrm{Sin}(\delta)\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}(\mu_0-\mu)$$

hat und, wenn a das Verhältniss $\sigma : r = 1 + \varkappa + \varkappa\,\mathrm{Tang}\,\zeta^2\mathrm{Cos}(\pi-q)^2$ bedeutet,

$$a\,\mathrm{Sin}\,r\,\mathrm{Sin}(\pi-\Delta\pi) = \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}(\mu_0-\mu)$$
$$a\,\mathrm{Sin}\,r\,\mathrm{Cos}(\pi-\Delta\pi) = \mathrm{Cos}(\delta)\,\mathrm{Sin}\,\delta - \mathrm{Sin}(\delta)\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}(\mu_0-\mu)$$

dafür schreiben kann, so entsteht die durch jedes Moment einer Beobachtung am Kreismikrometer gegebene Gleichung aus der Elimination von $\pi-\Delta\pi$ aus diesen beiden Gleichungen. Die in dem Ausdrucke von a enthaltenen ζ und q gehören zu dem Punkte am Himmel, welcher in der Mitte zwischen dem Mittelpunkte des Kreises und dem Orte des Sterns zur Zeit seiner Beobachtung liegt; also für jedes andere Moment der Beobachtung eines Sterns zu einem anderen Punkte. So wie es aber bei einer ähnlichen Gelegenheit (§ 9) angemessen war, die den verschiedenen Momenten zugehörigen Werthe von ζ und q durch die sich auf ein bestimmtes Moment beziehenden und ihre Veränderung

auszudrücken, so ist dieses auch hier der Fall. Versteht man demnach unter ζ und q die Werthe dieser Grössen, welche zu dem Stundenwinkel (τ) und der Declination δ gehören, so ist der im Ausdrucke von a vorkommende Werth von $\text{Tang}\,\zeta^2\,\text{Cos}\,(\pi-q)^2$, dem 9ten § zufolge, in

$$\text{Tang}\,\zeta^2\,\text{Cos}\,(\pi-\Delta\pi-q)\left\{1+r\,\text{Tang}\,\zeta\,\text{Cos}\,(\pi-\Delta\pi-q)\right\}$$

zu verwandeln. Man hat daher den Ausdruck von

$$a=1+x+x\,\text{Tang}\,\zeta^2\,\text{Cos}(\pi-\Delta\pi-q)^2+xr\,\text{Tang}\,\zeta^3\,\text{Cos}(\pi-\Delta\pi-q)^3$$

anzunehmen. Oder wenn man, um abzukürzen, λ statt $\pi-\Delta\pi$ schreibt und ζ, q für den Stundenwinkel (τ) und die Declination δ berechnet, hat man:

$$\left.\begin{aligned} a &= 1+x+x\,\text{Tang}\,\zeta^2\,\text{Cos}(\lambda-q)^2+xr\,\text{Tang}\,\zeta^3\,\text{Cos}(\lambda-q)^3 \\ a\,\text{Sin}\,r\,\text{Sin}\,\lambda &= \text{Cos}\,\delta\,\text{Sin}\,(\mu_o-\mu) \\ a\,\text{Sin}\,r\,\text{Cos}\,\lambda &= \text{Cos}(\delta)\,\text{Sin}\,\delta-\text{Sin}(\delta)\,\text{Cos}\,\delta\,\text{Cos}\,(\mu_o-\mu) \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(33)$$

Wenn δ gegeben ist und (δ), μ_o näherungsweise bekannt sind, so kann man, durch die beiden letzten Formeln, näherungsweise richtige Werthe von $a\,\text{Sin}\,r\,\text{Sin}\,\lambda$ und $a\,\text{Sin}\,r\,\text{Cos}\,\lambda$, also auch von $a\,\text{Sin}\,r$ und λ berechnen. Will man den Einfluss des kleinen Fehlers der Näherung, insofern er sich in dem Werthe von λ zeigt, im Ausdrucke von a vernachlässigen, was wegen seiner Multiplication in x geschehen kann, so ergiebt die Anwendung des berechneten Werthes von λ in der ersten Formel den Werth von a. Bezeichnet man nun den Unterschied des aus der angenommenen Näherung berechneten Werthes von $a\,\text{Sin}\,r$ von dem wahren, in Secunden ausgedrückt oder ($\omega=206264''{,}8$)

$$\omega\,.\,a\,\text{Sin}\,r-\omega\,[a\,\text{Sin}\,r]$$

durch m, so findet man den Ausdruck dieses Unterschiedes durch die der Näherung hinzuzusetzenden Verbesserungen:

$$m=-\,\text{Cos}\,\lambda\,.\,\Delta(\delta)+\text{Sin}\,\lambda\,\text{Cos}(\delta)\,\Delta\mu_o\ldots\ldots(34)$$

Jedes Moment der Beobachtung des ersten Sterns ergiebt eine dieser ähnliche Gleichung; aus allen vorhandenen sind $\Delta(\delta)$ und $\Delta\mu_o$ der Methode der kleinsten Quadrate gemäss abzuleiten. Eben so sind $\Delta(\delta')$ und $\Delta\mu_o'$ aus den verschiedenen Momenten der Beobachtung des zweiten Sterns zu bestimmen. Endlich hat man den wahren Werth von $\delta'-\delta=$ dem vorausgesetzten $+\,\Delta(\delta)-\Delta(\delta')$, den von $\alpha'-\alpha=\mu_o'-\mu_o+\Delta\mu_o'-\Delta\mu_o$.

16.

Das Vorige kann offenbar immer angewandt werden, wie gross auch die Zahl der Momente einer Beobachtung, und wie auch ihre Anordnung sein mag. Erforderlich ist nur, dass die Beobachtung jedes Sterns wenigstens so viele Momente besitze, als zur Bestimmung der sich auf ihn beziehenden unbekannten Grössen nothwendig sind, also wenigstens zwei; nicht aber, dass diese Momente, für jeden zur Beobachtung benutzten Kreis *paarweise* vorhanden seien. Auch enthält es die Vorschrift zur Berechnung des Einflusses der Strahlenbrechung auf die Resultate einer Beobachtung, welche ohne Berücksichtigung derselben schon berechnet worden ist: damit dieser gefunden werde, ist nur nöthig, dass in der Gleichung (34) und den ihr ähnlichen, $r(a-1)$ statt m gesetzt werde. — Inwiefern das in $\varkappa r$ multiplicirte Glied des Ausdruckes von a (33) berücksichtigt zu werden verdient, habe ich im 11ten § schon näher untersucht: vernachlässigt man es, so ist das gleichbedeutend mit der Vernachlässigung einer scheinbaren Ungleichheit des Halbmessers ($r = n.1000''$) des Kreises, auf welchen ein Moment der Beobachtung sich bezieht, deren Grösse, in den Zenithdistanzen 75°, 80°, 85°, resp. $\pm 0''{,}07\,n^2$, $\pm 0''{,}22\,n^2$, $\pm 1''{,}40\,n^2$ nicht übersteigt.

Ich werde einen besondern Fall vollständig entwickeln; nämlich den am häufigsten vorkommenden Fall des *einfachen*, d. h. aus Einem Kreise bestehenden Kreismikrometers. Offenbar müssen hier die Eintrittszeiten und die Austrittszeiten beider Sterne beobachtet sein. Bezeichnet man sie für den ersten Stern durch μ und $\mu_,$, für den zweiten durch μ' und $\mu'_,$ so werden die Gleichungen (33) für jenen und für den Eintritt:

$$a = 1 + \varkappa + \varkappa \operatorname{Tang}\zeta^2 \operatorname{Cos}(\lambda - q)^2 + \varkappa r \operatorname{Tang}\zeta^3 \operatorname{Cos}(\lambda - q)^3$$
$$a \operatorname{Sin} r \operatorname{Sin}\lambda = \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin}(\mu_0 - \mu)$$
$$a \operatorname{Sin} r \operatorname{Cos}\lambda = \operatorname{Cos}(\delta) \operatorname{Sin}\delta - \operatorname{Sin}(\delta) \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}(\mu_0 - \mu)$$

und für den Austritt:

$$a_, = 1 + \varkappa + \varkappa \operatorname{Tang}\zeta^2 \operatorname{Cos}(\lambda_, - q)^2 + \varkappa r \operatorname{Tang}\zeta^3 \operatorname{Cos}(\lambda_, - q)^3$$
$$a_, \operatorname{Sin} r \operatorname{Sin}\lambda_, = \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin}(\mu_0 - \mu_,)$$
$$a_, \operatorname{Sin} r \operatorname{Cos}\lambda_, = \operatorname{Cos}(\delta) \operatorname{Sin}\delta - \operatorname{Sin}(\delta) \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}(\mu_0 - \mu_,)$$

Man erhält daraus, durch Elimination von λ und $\lambda_,$, die Gleichungen:

$$aa\,\mathrm{Sin}\,r^2 = \left\{\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,(\mu_0-\mu)\right\}^2 + \left\{\mathrm{Cos}(\delta)\,\mathrm{Sin}\,\delta - \mathrm{Sin}(\delta)\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,(\mu_0-\mu)\right\}^2$$

$$a,a,\mathrm{Sin}\,r^2 = \left\{\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,(\mu_0-\mu,)\right\}^2 + \left\{\mathrm{Cos}(\delta)\,\mathrm{Sin}\,\delta - \mathrm{Sin}(\delta)\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,(\mu_0-\mu,)\right\}^2$$

Aus ihrem Unterschiede, nämlich:

$$(aa-a,a,)\,\mathrm{Sin}\,r^2 = 4\,\mathrm{Cos}(\delta)\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\frac{\mu,-\mu}{2}\,\mathrm{Sin}\left(\mu_0-\frac{\mu,+\mu}{2}\right)\left\{\mathrm{Sin}(\delta)\,\mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Cos}(\delta)\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\frac{\mu,-\mu}{2}\,\mathrm{Cos}\left(\mu_0-\frac{\mu,+\mu}{2}\right)\right\}$$

folgt, dass $\mu_0-\frac{\mu,+\mu}{2}$ von der Ordnung von $a-a,$ ist; vernachlässigt man das Quadrat dieser Grösse, und schreibt man Cos r für den in Klammern eingeschlossenen Factor, welcher die halbe Summe des Cosinus der beiden wahren Entfernungen ist, so wird diese Gleichung:

$$(aa-a,a,)\,\mathrm{Sin}\,r^2 = 4\,\mathrm{Cos}\,r\,\mathrm{Cos}(\delta)\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\frac{\mu,-\mu}{2}\left\{\mu_0-\frac{\mu,+\mu}{2}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (35)$$

Die halbe Summe der beiden Gleichungen, deren Unterschied die gegenwärtige ergeben hat, ist, bis auf Grössen von der Ordnung von $(a-a,)^2$:

$$\tfrac{1}{2}(aa+a,a,)\,\mathrm{Sin}\,r^2 = \left(\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\frac{\mu,-\mu}{2}\right)^2 + \left(\mathrm{Cos}\,(\delta)\,\mathrm{Sin}\delta - \mathrm{Sin}(\delta)\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\frac{\mu,-\mu}{2}\right)^2 \quad (36)$$

Setzt man nun

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\frac{\mu,-\mu}{2} &= \alpha\,\mathrm{Sin}\,r\,\mathrm{Sin}\,l\\ \mathrm{Cos}(\delta)\,\mathrm{Sin}\,\delta - \mathrm{Sin}(\delta)\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\frac{\mu,-\mu}{2} &= \alpha\,\mathrm{Sin}\,r\,\mathrm{Cos}\,l\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (37)$$

also $\alpha = \sqrt{\frac{aa+a,a,}{2}}$, oder bis auf $(a-a,)^2$ richtig $=\frac{1}{2}(a+a,)$ so sind λ von l und $\lambda,$ von $-l$ nur in Grössen von der Ordnung $a-a,$ verschieden, welche man in den Ausdrücken von a und $a,$ vernachlässigen darf. Man hat also

$$a = 1 + x + x\,\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Cos}(q-l)^2 + xr\,\mathrm{Tang}\,\zeta^3\,\mathrm{Cos}(q-l)^3$$
$$a, = 1 + x + x\,\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Cos}(q+l)^2 + xr\,\mathrm{Tang}\,\zeta^3\,\mathrm{Cos}(q+l)^3$$

woraus

$$\tfrac{1}{2}(a+a,) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x\,\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,(1+\mathrm{Cos}\,2q\,\mathrm{Cos}\,2l) + \tfrac{1}{4}xr\,\mathrm{Tang}\,\zeta^3\,(3\,\mathrm{Cos}\,q\,\mathrm{Cos}\,l + \mathrm{Cos}\,3q\,\mathrm{Cos}\,3l)$$
$$\tfrac{1}{2}(a-a,) = \tfrac{1}{2}x\,\mathrm{Tang}\,\zeta^2.\,\mathrm{Sin}\,2q\,\mathrm{Sin}\,2l + \tfrac{1}{4}xr\,\mathrm{Tang}\,\zeta^3\,(3\,\mathrm{Sin}\,q\,\mathrm{Sin}\,l + \mathrm{Sin}\,3q\,\mathrm{Sin}\,3l)$$

folgen. Wenn man diese Ausdrücke und die erste der Formeln (37) in (35) substituirt, auch $\delta-(\delta)$ statt $r\,\mathrm{Cos}\,l$ setzt, erhält man:

$$\mathrm{Cos}(\delta)\left\{\mu_0 - \frac{\mu_1+\mu}{2}\right\} = \varkappa(\delta-(\delta))\ \mathrm{Tang}\,\zeta^2\ \mathrm{Sin}\,2q \ldots\ldots (38)$$

aus welchem Ausdrucke jedoch das selten, oder vielleicht (bis zu $\zeta = 85°$) nie, in Betracht kommende Glied der höheren Ordnung weggelassen ist; dieses Glied würde übrigens noch

$$\tfrac{1}{2}\,\varkappa r^2\,\mathrm{Tang}\,\zeta^2\left\{3\,\mathrm{Sin}\,q + \mathrm{Sin}\,3q\,.\,\frac{\mathrm{Sin}\,3l}{\mathrm{Sin}\,l}\right\}$$

oder, wenn man es von l befreit ausdrücken will,

$$3\varkappa r^2\,\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Cos}\,q^2\,\mathrm{Sin}\,q - \varkappa\left(\frac{\mu_1-\mu}{2}\right)^2\mathrm{Cos}\,\delta^2\,.\,\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,\mathrm{Sin}\,2q$$

hinzugesetzt haben. Die Formeln (37), in welchen der Ausdruck von $\alpha = \frac{1}{2}(a+a_1)$ bekannt ist, dienen zur Vergleichung von δ und (δ); der in diesem Ausdrucke vorkommende Werth von l kann so angenommen werden, wie die erste Formel (37) ihn, unter der Voraussetzung $\alpha=1$ ergiebt. — So wie die sich auf den ersten Stern beziehenden $\delta-(\delta)$ und μ_0 durch (37) und (38) bekannt geworden sind, so werden auch die sich auf den zweiten beziehenden $\delta'-(\delta)$ und μ'_0 dadurch bekannt; also auch die gesuchten $\delta'-\delta$ und $\alpha'-\alpha = \mu'_0-\mu_0$.

Wenn eine durch das *einfache* Kreismikrometer erlangte Beobachtung schon ohne Rücksicht auf die Strahlenbrechung berechnet worden ist, so ist es nöthig, den Einfluss welchen diese auf die Resultate erlangt, abgesondert kennen zu lernen. — Indem man die Strahlenbrechung vernachlässigt hat, hat man (δ) aus den Gleichungen (37) ähnlichen Gleichungen, unter der Annahme $\alpha=1$ abgeleitet; bezeichnet man die wegen der Strahlenbrechung daran anzubringende Verbesserung durch $\triangle(\delta)$, so findet man ihren Ausdruck durch Differentiirung der Summe der Quadrate dieser Gleichungen, welche

$$-\triangle(\delta)\left\{\mathrm{Cos}(\delta)\,\mathrm{Sin}\,\delta - \mathrm{Sin}(\delta)\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\frac{\mu_1-\mu}{2}\right\}\left\{\mathrm{Sin}(\delta)\,\mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Cos}(\delta)\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\frac{\mu_1-\mu}{2}\right\} = (\alpha-1)\,\mathrm{Sin}\,r^2$$

oder, wenn man $\mathrm{Cos}\,r$ statt des zweiten Factors schreibt,

$$\triangle(\delta) = -(\alpha-1)\,\frac{\mathrm{Tang}\,r}{\mathrm{Cos}\,l} = -(\alpha-1)\,\frac{rr}{\delta-(\delta)}$$

ergiebt; setzt man darin den obigen Ausdruck von $\alpha = \frac{1}{2}(a+a_1)$, so erhält man

$$\triangle(\delta) = -\varkappa\left\{1 + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Tang}\,\zeta^2\,(1 + \mathrm{Cos}\,2q\,\mathrm{Cos}\,2l)\right\}\frac{rr}{\delta-(\delta)}$$

wofür man auch

$$\Delta(\delta) = -\varkappa(1+\mathrm{Tang}\zeta^2\,\mathrm{Sin}\,q^2)\frac{rr'}{\delta'-(\delta)} - \varkappa\,\mathrm{Tang}\zeta^2\,\mathrm{Cos}\,2q\,(\delta-(\delta))$$

schreiben kann. Ferner hat die Vernachlässigung der Strahlenbrechung die Annahme $\mu_0 = \frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)$ zur Folge gehabt, deren Verbesserung die Formel (38) unmittelbar angiebt, nämlich:

$$\mathrm{Cos}(\delta)\,\Delta\mu_0 = \varkappa\,\mathrm{Tang}\zeta^2\,\mathrm{Sin}\,2q\,(\delta-(\delta))$$

In Beziehung auf den zweiten Stern hat man eben so:

$$\Delta(\delta') = -\varkappa(1+\mathrm{Tang}\zeta'^2\,\mathrm{Sin}\,q'^2)\frac{rr'}{\delta'-(\delta)} - \varkappa\,\mathrm{Tang}\zeta'^2\,\mathrm{Cos}\,2q'\,(\delta'-(\delta'))$$

$$\mathrm{Cos}(\delta')\,\Delta\mu'_0 = \varkappa\,\mathrm{Tang}\zeta'^2\,\mathrm{Sin}\,2q'\,(\delta'-(\delta'))$$

Wenn ζ_0, q_0 die zu der Declination $\delta_0 = \frac{1}{2}(\delta'+\delta)$ und dem Stundenwinkel (τ) gehörenden Werthe von ζ, q bedeuten und der zu ζ_0 gehörende Werth von $\varkappa$ für beide Sterne angewandt wird, wie § 12, so erhält man die Verbesserung der ohne Berücksichtigung der Strahlenbrechung berechneten Resultate einer Beobachtung:

$$\left.\begin{aligned}\Delta(\delta)-\Delta(\delta') &= \varkappa(\delta'-\delta)\,\mathrm{Tan}\zeta_0^2\,\mathrm{Cos}\,2q_0 - \varkappa(\delta'-\delta)\frac{r.r'}{(\delta'-(\delta))\,(\delta-(\delta))}(\mathrm{Tan}\zeta_0^2\,\mathrm{Sin}\,q_0^2+1)\\ \mathrm{Cos}(\delta)(\Delta\mu'_0-\Delta\mu_0) &= \varkappa(\delta'-\delta)\,\mathrm{Tan}\zeta_0^2\,\mathrm{Sin}\,2q_0\end{aligned}\right\}(39)$$

Tafeln zur Erleichterung der Berechnung der Zenithdistanz

0ʰ	N	Lg.Cg. *n*	23ʰ	1ʰ	N	Lg.Cg. *n*	22ʰ	2ʰ	N	Lg.Cg. *n*	21ʰ
	° ′				° ′				° ′		
0	35 17,1	$-\infty$	60	0	34 21,3	9,17957	60	0	31 30,1	9,47955	60
1	35 17,1	7,40149	59	1	34 19,4	9,18675	59	1	31 26,3	9,48312	59
2	35 17,1	7,70252	58	2	34 17,5	9,19381	58	2	31 22,4	9,48666	58
3	35 17,0	7,87861	57	3	34 15,5	9,20075	57	3	31 18,4	9,49016	57
4	35 16,9	8,00355	56	4	34 13,5	9,20758	56	4	31 14,4	9,49363	56
5	35 16,8	8,10046	55	5	34 11,5	9,21431	55	5	31 10,4	9,49708	55
6	35 16,6	8,17954	54	6	34 9,5	9,22093	54	6	31 6,4	9,50049	54
7	35 16,4	8,24659	53	7	34 7,4	9,22746	53	7	31 2,3	9,50388	53
8	35 16,2	8,30458	52	8	34 5,3	9,23388	52	8	30 58,2	9,50724	52
9	35 15,9	8,35573	51	9	34 3,1	9,24022	51	9	30 54,0	9,51058	51
10	35 15,6	8,40149	50	10	34 0,9	9,24647	50	10	30 49,8	9,51388	50
11	35 15,3	8,44288	49	11	33 58,7	9,25262	49	11	30 45,6	9,51716	49
12	35 14,9	8,48067	48	12	33 56,5	9,25869	48	12	30 41,3	9,52041	48
13	35 14,5	8,51543	47	13	33 54,2	9,26467	47	13	30 37,0	9,52364	47
14	35 14,1	8,54762	46	14	33 51,9	9,27057	46	14	30 32,7	9,52684	46
15	35 13,7	8,57758	45	15	33 49,6	9,27639	45	15	30 28,4	9,53001	45
16	35 13,2	8,60561	44	16	33 47,2	9,28213	44	16	30 24,0	9,53316	44
17	35 12,7	8,63193	43	17	33 44,8	9,28780	43	17	30 19,5	9,53628	43
18	35 12,1	8,65676	42	18	33 42,4	9,29339	42	18	30 15,1	9,53938	42
19	35 11,6	8,68024	41	19	33 39,9	9,29892	41	19	30 10,6	9,54246	41
20	35 11,0	8,70252	40	20	33 37,4	9,30437	40	20	30 6,0	9,54551	40
21	35 10,3	8,72371	39	21	33 34,9	9,30975	39	21	30 1,4	9,54854	39
22	35 9,7	8,74391	38	22	33 32,3	9,31507	38	22	29 56,8	9,55154	38
23	35 9,0	8,76322	37	23	33 29,7	9,32032	37	23	29 52,2	9,55453	37
24	35 8,2	8,78170	36	24	33 27,1	9,32551	36	24	29 47,5	9,55749	36
25	35 7,5	8,79943	35	25	33 24,4	9,33064	35	25	29 42,8	9,56043	35
26	35 6,7	8,81646	34	26	33 21,7	9,33570	34	26	29 38,0	9,56334	34
27	35 5,9	8,83285	33	27	33 19,0	9,34071	33	27	29 33,2	9,56623	33
28	35 5,0	8,84864	32	28	33 16,2	9,34566	32	28	29 28,4	9,56910	32
29	35 4,1	8,86386	31	29	33 13,4	9,35055	31	29	29 23,6	9,57195	31
30	35 3,2	8,87861	30	30	33 10,6	9,35539	30	30	29 18,7	9,57478	30
31	35 2,3	8,89285	29	31	33 7,7	9,36017	29	31	29 13,7	9,57759	29
32	35 1,3	8,90663	28	32	33 4,8	9,36490	28	32	29 8,8	9,58038	28
33	35 0,3	8,92000	27	33	33 1,9	9,36958	27	33	29 3,8	9,58314	27
34	34 59,2	8,93296	26	34	32 58,9	9,37421	26	34	28 58,7	9,58589	26
35	34 58,2	8,94555	25	35	32 55,9	9,37879	25	35	28 53,6	9,58862	25
36	34 57,1	8,95778	24	36	32 52,9	9,38332	24	36	28 48,5	9,59132	24
37	34 56,0	8,96968	23	37	32 49,9	9,38780	23	37	28 43,4	9,59401	23
38	34 54,8	8,98126	22	38	32 46,8	9,39223	22	38	28 38,2	9,59668	22
39	34 53,6	8,99254	21	39	32 43,6	9,39662	21	39	28 33,0	9,59932	21
40	34 52,4	9,00354	20	40	32 40,5	9,40096	20	40	28 27,7	9,60195	20
41	34 51,1	9,01426	19	41	32 37,3	9,40526	19	41	28 22,4	9,60456	19
42	34 49,8	9,02472	18	42	32 34,1	9,40952	18	42	28 17,1	9,60715	18
43	34 48,5	9,03494	17	43	32 30,8	9,41373	17	43	28 11,8	9,60973	17
44	34 47,2	9,04492	16	44	32 27,5	9,41790	16	44	28 6,4	9,61228	16
45	34 45,8	9,05468	15	45	32 24,2	9,42203	15	45	28 0,9	9,61482	15
46	34 44,4	9,06422	14	46	32 20,8	9,42612	14	46	27 55,4	9,61734	14
47	34 42,9	9,07356	13	47	32 17,4	9,43018	13	47	27 49,9	9,61984	13
48	34 41,5	9,08270	12	48	32 14,0	9,43419	12	48	27 44,4	9,62232	12
49	34 39,9	9,09166	11	49	32 10,5	9,43817	11	49	27 38,8	9,62479	11
50	34 38,4	9,10043	10	50	32 7,0	9,44210	10	50	27 33,2	9,62724	10
51	34 36,8	9,10903	9	51	32 3,5	9,44600	9	51	27 27,5	9,62967	9
52	34 35,2	9,11746	8	52	31 59,9	9,44986	8	52	27 21,8	9,63208	8
53	34 33,6	9,12572	7	53	31 56,3	9,45370	7	53	27 16,1	9,63448	7
54	34 31,9	9,13384	6	54	31 52,7	9,45749	6	54	27 10,3	9,63685	6
55	34 30,2	9,14181	5	55	31 49,0	9,46125	5	55	27 4,5	9,63922	5
56	34 28,5	9,14960	4	56	31 45,3	9,46498	4	56	26 58,7	9,64157	4
57	34 26,8	9,15731	3	57	31 41,6	9,46867	3	57	26 52,8	9,64390	3
58	34 24,9	9,16486	2	58	31 37,8	9,47233	2	58	26 46,9	9,64621	2
59	34 23,1	9,17227	1	59	31 34,0	9,47596	1	59	26 41,0	9,64851	1
60	34 21,3	9,17957	0	60	31 30,1	9,47955	0	60	26 35,0	9,65079	0
12ʰ			11ʰ	13ʰ			10ʰ	14ʰ			9ʰ

N hat das Zeichen des Cosinus des Stundenwinkels; Cotg. *n* das des Sinus.

und des Parallactischen Winkels für die Königsberger Sternwarte.

3h	N	Lg.Cg.n	20h	4h	N	Lg. Cg.n	19h	5h	N	Lg.Cg.n	18h
0′	26° 35,0	9,65079	60′	0′	19° 29,1	9,76175	60′	0′	10 22,7	9,82761	60′
1	26 29,0	9,65306	59	1	19 20,9	9,76320	59	1	10 12,8	9,82833	59
2	26 22,9	9,65531	58	2	19 12,7	9,76464	58	2	10 2,8	9,82905	58
3	26 16,8	9,65754	57	3	19 4,5	9,76607	57	3	9 52,9	9,82976	57
4	26 10,7	9,65976	56	4	18 56,2	9,76749	56	4	9 42,9	9,83046	56
5	26 4,5	9,66197	55	5	18 47,9	9,76889	55	5	9 32,9	9,83114	55
6	25 58,3	9,66416	54	6	18 39,5	9,77028	54	6	9 22,9	9,83182	54
7	25 52,1	9,66633	53	7	18 31,1	9,77166	53	7	9 12,8	9,83248	53
8	25 45,8	9,66849	52	8	18 22,7	9,77303	52	8	9 2,7	9,83312	52
9	25 39,5	9,67063	51	9	18 14,2	9,77439	51	9	8 52,6	9,83376	51
10	25 33,1	9,67276	50	10	18 5,7	9,77573	50	10	8 42,5	9,83438	50
11	25 26,7	9,67488	49	11	17 57,2	9,77706	49	11	8 32,3	9,83499	49
12	25 20,3	9,67698	48	12	17 48,6	9,77838	48	12	8 22,2	9,83558	48
13	25 13,8	9,67906	47	13	17 40,1	9,77969	47	13	8 12,0	9,83617	47
14	25 7,3	9,68113	46	14	17 31,4	9,78099	46	14	8 1,8	9,83674	46
15	25 0,8	9,68318	45	15	17 22,8	9,78227	45	15	7 51,6	9,83730	45
16	24 54,2	9,68522	44	16	17 14,1	9,78354	44	16	7 41,4	9,83785	44
17	24 47,6	9,68725	43	17	17 5,4	9,78480	43	17	7 31,2	9,83839	43
18	24 41,0	9,68927	42	18	16 56,6	9,78605	42	18	7 20,9	9,83892	42
19	24 34,3	9,69126	41	19	16 47,8	9,78728	41	19	7 10,6	9,83943	41
20	24 27,6	9,69325	40	20	16 39,0	9,78850	40	20	7 0,3	9,83993	40
21	24 20,8	9,69522	39	21	16 30,2	9,78971	39	21	6 50,0	9,84041	39
22	24 14,0	9,69717	38	22	16 21,3	9,79091	38	22	6 39,7	9,84089	38
23	24 7,2	9,69912	37	23	16 12,4	9,79210	37	23	6 29,4	9,84136	37
24	24 0,3	9,70104	36	24	16 3,5	9,79327	36	24	6 19,0	9,84181	36
25	23 53,4	9,70295	35	25	15 54,5	9,79444	35	25	6 8,6	9,84224	35
26	23 46,5	9,70486	34	26	15 45,5	9,79559	34	26	5 58,3	9,84267	34
27	23 39,5	9,70675	33	27	15 36,5	9,79673	33	27	5 47,9	9,84309	33
28	23 32,5	9,70862	32	28	15 27,4	9,79787	32	28	5 37,5	9,84349	32
29	23 25,5	9,71048	31	29	15 18,3	9,79898	31	29	5 27,1	9,84388	31
30	23 18,4	9,71233	30	30	15 9,2	9,80008	30	30	5 16,6	9,84426	30
31	23 11,3	9,71416	29	31	15 0,0	9,80117	29	31	5 6,2	9,84462	29
32	23 4,1	9,71598	28	32	14 50,8	9,80225	28	32	4 55,7	9,84497	28
33	22 56,9	9,71779	27	33	14 41,6	9,80332	27	33	4 45,3	9,84531	27
34	22 49,7	9,71959	26	34	14 32,4	9,80437	26	34	4 34,8	9,84564	26
35	22 42,3	9,72137	25	35	14 23,1	9,80542	25	35	4 24,3	9,84595	25
36	22 35,1	9,72314	24	36	14 13,8	9,80645	24	36	4 13,8	9,84625	24
37	22 27,8	9,72489	23	37	14 4,5	9,80746	23	37	4 3,3	9,84655	23
38	22 20,4	9,72663	22	38	13 55,1	9,80847	22	38	3 52,8	9,84683	22
39	22 13,0	9,72836	21	39	13 45,8	9,80947	21	39	3 42,3	9,84709	21
40	22 5,5	9,73008	20	40	13 36,4	9,81046	20	40	3 31,7	9,84735	20
41	21 58,0	9,73178	19	41	13 26,9	9,81143	19	41	3 21,2	9,84759	19
42	21 50,5	9,73347	18	42	13 17,4	9,81238	18	42	3 10,7	9,84782	18
43	21 43,0	9,73515	17	43	13 7,9	9,81333	17	43	3 0,1	9,84804	17
44	21 35,4	9,73682	16	44	12 58,4	9,81427	16	44	2 49,5	9,84825	16
45	21 27,8	9,73847	15	45	12 48,9	9,81519	15	45	2 39,0	9,84844	15
46	21 20,1	9,74010	14	46	12 39,3	9,81610	14	46	2 28,4	9,84862	14
47	21 12,4	9,74173	13	47	12 29,7	9,81700	13	47	2 17,8	9,84878	13
48	21 4,7	9,74335	12	48	12 20,1	9,81789	12	48	2 7,3	9,84893	12
49	20 56,9	9,74495	11	49	12 10,5	9,81876	11	49	1 56,7	9,84907	11
50	20 49,1	9,74654	10	50	12 0,8	9,81963	10	50	1 46,1	9,84921	10
51	20 41,3	9,74812	9	51	11 51,1	9,82048	9	51	1 35,5	9,84933	9
52	20 33,4	9,74968	8	52	11 41,4	9,82132	8	52	1 24,9	9,84943	8
53	20 25,5	9,75123	7	53	11 31,6	9,82215	7	53	1 14,3	9,84953	7
54	20 17,5	9,75277	6	54	11 21,9	9,82297	6	54	1 3,7	9,84961	6
55	20 9,5	9,75430	5	55	11 12,1	9,82377	5	55	0 53,1	9,84968	5
56	20 1,5	9,75581	4	56	11 2,2	9,82456	4	56	0 42,4	9,84973	4
57	19 53,5	9,75731	3	57	10 52,4	9,82534	3	57	0 31,8	9,84978	3
58	19 45,4	9,75880	2	58	10 42,5	9,82611	2	58	0 21,2	9,84981	2
59	19 37,3	9,76028	1	59	10 32,6	9,82687	1	59	0 10,6	9,84983	1
60	19 29,1	9,76175	0	60	10 22,7	9,82761	0	60	0 0,0	9,84983	0
15h			8h	16h			7h	17h			6h

N hat das Zeichen des Cosinus des Stundenwinkels; Cotg. *n* das des Sinus.

Strahlenbrechungs-Tafeln.

	I. Arg. Scheinbare Z. D.			II. Arg. Wahre Z. D.			III. Arg. Wahre Z. D.		
°	Log α	A	λ	Log α′	A′	λ′	Log α″	A″	λ″
0	1,76156 2			1,76143 2			6,4458 0		
10	1,76154 5			1,76141 6			6,4458 1		
20	1,76149 10			1,76135 13			6,4456 4		
30	1,76139 9			1,76122 10			6,4452 3		
35	1,76130 11			1,76112 13			6,4449 3		
40	1,76119 15			1,76099 19			6,4446 5		
45	1,76104 4		1,0018	1,76080 5		1,0013	6,4441 2		1,005
46	1,76100 4		1,0019	1,76075 5		1,0013	6,4439 2		1,005
47	1,76096 4		1,0019	1,76070 5		1,0014	6,4437 1		1,005
48	1,76092 5		1,0020	1,76065 6		1,0015	6,4436 2		1,006
49	1,76087 5		1,0021	1,76059 6		1,0015	6,4434 1		1,006
50	1,76082 5		1,0023	1,76053 6		1,0016	6,4433 2		1,006
51	1,76077 6		1,0025	1,76047 7		1,0017	6,4431 2		1,007
52	1,76071 6		1,0026	1,76040 8		1,0018	6,4429 1		1,007
53	1,76065 7		1,0027	1,76032 8		1,0019	6,4428 3		1,008
54	1,76058 8		1,0029	1,76024 10		1,0021	6,4425 3		1,008
55	1,76050 8		1,0031	1,76014 10		1,0024	6,4422 3		1,009
56	1,76042 9		1,0034	1,76004 11		1,0026	6,4419 3		1,010
57	1,76033 10		1,0037	1,75993 12		1,0028	6,4416 4		1,011
58	1,76023 11		1,0040	1,75981 14		1,0030	6,4412 4		1,012
59	1,76012 11		1,0043	1,75967 14		1,0032	6,4408 4		1,013
60	1,76001 13		1,0046	1,75953 16		1,0035	6,4404 4		1,014
61	1,75988 15		1,0049	1,75937 18		1,0038	6,4400 5		1,015
62	1,75973 16		1,0054	1,75919 20		1,0041	6,4395 5		1,016
63	1,75957 18		1,0058	1,75899 22		1,0044	6,4390 6		1,017
64	1,75939 20		1,0063	1,75877 25		1,0048	6,4384 6		1,019
65	1,75919 22		1,0068	1,75852 28		1,0052	6,4378 8		1,020
66	1,75897 26		1,0075	1,75824 31		1,0058	6,4370 9		1,022
67	1,75871 29		1,0083	1,75793 36		1,0064	6,4361 10		1,024
68	1,75842 33		1,0092	1,75757 40		1,0071	6,4351 12		1,026
69	1,75809 38		1,0101	7,75717 47		1,0079	6,4339 13		1,028
70	1,75771 45		1,0111	1,75670 55		1,0088	6,4326 15		1,031
71	1,75726 51		1,0124	1,75615 63		1,0099	6,4311 19		1,034
72	1,75675 60		1,0139	1,75552 74		1,0110	6,4292 21		1,037
73	1,75615 72		1,0156	1,75478 88		1,0123	6,4271 26		1,040
74	1,75543 86		1,0175	1,75390 106		1,0140	6,4246 28		1,043
75 0′	1,75457 96		1,0197	1,75284 119		1,0155	6,4218 4		1,047
10	1,75441 16		1,0200	1,75265 19		1,0158	6,4214 6		1,048
20	1,75425 16		1,0204	1,75245 20		1,0161	6,4210 5		1,049
30	1,75408 17		1,0208	1,75225 20		1,0164	6,4205 5		1,050
40	1,75391 17		1,0212	1,75204 21		1,0167	6,4200 6		1,052
50	1,75373 18		1,0216	1,75182 22		1,0170	6,4194 6		1,053
76 0	1,75355 18		1,0220	1,75159 23		1,0173	6,4188 6		1,054
10	1,75336 19		1,0225	1,75136 23		1,0177	6,4181 7		1,055
20	1,75316 20		1,0230	1,75112 24		1,0180	6,4174 7		1,057
30	1,75295 21		1,0235	1,75087 25		1,0184	6,4167 7		1,058
40	1,75274 21		1,0241	1,75060 27		1,0188	6,4160 6		1,059
50	1,75252 22		1,0246	1,75033 27		1,0192	6,4153 7		1,061
77 0	1,75229 23	1,0026	1,0252	1,75005 28	0,9975	1,0197	6,4145 8	0,997	1,062

	I.				II.				III.			
	Log α		A	λ	Log α'		A'	λ'	Log α''		A''	λ''
77° 0′	1,75229	23	1,0026	1,0252	1,75005	29	0,9975	1,0197	6,4145	7	0,990	1,062
10	1,75205	24	1,0026	1,0258	1,74976	31	0,9974	1,0202	6,4138	8	0,997	1,064
20	1,75180	25	1,0027	1,0264	1,74945	31	0,9973	1,0208	6,4130	8	0,997	1,066
30	1,75155	25	1,0027	1,0272	1,74914	32	0,9972	1,0213	6,4122	8	0,996	1,067
40	1,75129	26	1,0028	1,0281	1,74882	34	0,9971	1,0219	6,4114	8	0,996	1,069
50	1,75101	28	1,0029	1,0290	1,74848	35	0,9970	1,0226	6,4106	9	0,996	1,071
78 0	1,75072	29	1,0030	1,0299	1,74813	36	0,9970	1,0234	6,4097	9	0,996	1,073
10	1,75043	30	1,0030	1,0308	1,74777	37	0,9969	1,0241	6,4088	10	0,996	1,075
20	1,75013	32	1,0031	1,0318	1,74740	39	0,9968	1,0249	6,4078	11	0,996	1,076
30	1,74981	34	1,0032	1,0328	1,74701	41	0,9967	1,0257	6,4067	11	0,996	1,078
40	1,74947	35	1,0033	1,0338	1,74660	43	0,9967	1,0265	6,4056	12	0,996	1,080
50	1,74912	36	1,0034	1,0347	1,74617	44	0,9966	1,0273	6,4044	12	0,995	1,082
79 0	1,74876	37	1,0035	1,0357	1,74573	46	0,9965	1,0281	6,4032	13	0,995	1,085
10	1,74839	40	1,0036	1,0367	1,74527	49	0,9964	1,0289	6,4019	14	0,995	1,087
20	1,74799	42	1,0037	1,0377	1,74478	50	0,9963	1,0296	6,4005	14	0,995	1,089
30	1,74757	43	1,0038	1,0387	1,74428	52	0,9962	1,0304	6,3991	15	0,995	1,091
40	1,74714	44	1,0039	1,0398	1,74376	55	0,9961	1,0312	6,3976	14	0,995	1,094
50	1,74670	47	1,0040	1,0409	1,74321	58	0,9960	1,0320	6,3962	15	0,994	1,096
80 0	1,74623	50	1,0041	1,0420	1,74263	60	0,9958	1,0329	6,3947	16	0,994	1,099
15	1,74573	52	1,0042	1,0431	1,74203	62	0,9957	1,0337	6,3931	17	0,994	1,102
20	1,74521	53	1,0043	1,0442	1,74141	66	0,9955	1,0346	6,3914	19	0,994	1,105
30	1,74468	56	1,0045	1,0454	1,74075	70	0,9954	1,0354	6,3895	19	0,993	1,108
40	1,74412	60	1,0046	1,0466	1,74005	72	0,9952	1,0363	6,3876	20	0,993	1,112
50	1,74352	61	1,0047	1,0479	1,73933	76	0,9951	1,0372	6,3856	20	0,993	1,115
81 0	1,74288	65	1,0049	1,0493	1,73857	80	0,9949	1,0382	6,3836	20	0,993	1,119
10	1,74223	68	1,0050	1,0508	1,73777	85	0,9948	1,0393	6,3816	21	9,992	1,123
20	1,74155	72	1,0052	1,0523	1,73692	87	0,9946	1,0404	6,3795	21	0,992	1,127
30	1,74083	76	1,0054	1,0540	1,73605	91	0,9944	1,0416	6,3774	22	0,992	1,132
40	1,74007	79	1,0056	1,0559	1,73514	97	0,9942	1,0429	6,3752	24	0,991	1,136
50	1,73928	83	1,0058	1,0579	1,73417	103	0,9940	1,0444	6,3728	26	0,991	1,141
82 0	1,73845	88	1,0060	1,0600	1,73314	107	0,9938	1,0459	6,3702	28	0,991	1,146
10	1,73757	94	1,0062	1,0622	1,73207	112	0,9936	1,0476	6,3674	31	0,990	1,151
20	1,73663	99	1,0065	1,0646	1,73095	121	0,9934	1,0493	6,3643	32	0,990	1,156
30	1,73564	105	1,0067	1,0671	1,72974	128	0,9931	1,0512	6,3611	33	0,989	1,161
40	1,73459	112	1,0070	1,0697	1,72846	135	0,9929	1,0531	6,3578	34	0,989	1,167
50	1,73347	118	1,0073	1,0725	1,72711	142	0,9926	1,0552	6,3544	36	0,988	1,172
83 0	1,73229	124	1,0075	1,0754	1,72569	151	0,9924	1,0573	6,3508	39	0,987	1,178
10	1,73105	131	1,0078	1,0784	1,72418	162	0,9920	1,0594	6,3469	42	0,986	1,183
20	1,72974	142	1,0081	1,0815	1,72256	173	0,9917	1,0617	6,3427	45	0,985	1,188
30	1,72832	151	1,0084	1,0846	1,72083	181	0,9913	1,0640	6,3382	48	0,984	1,193
40	1,72681	163	1,0088	1,0879	1,71902	194	0,9909	1,0664	6,3334	50	0,983	1,199
50	1,72519	173	1,0092	1,0914	1,71708	209	0,9905	1,0688	6,3284	53	0,982	1,204
84 0	1,72346	186	1,0096	1,0951	1,71499	223	0,9901	1,0715	6,3231	57	0,981	1,209
10	1,72160	199	1,0100	1,0992	1,71276	239	0,9897	1,0742	6,3174	59	0,980	1,214
20	1,71961	212	1,0105	1,1036	1,71037	255	0,9893	1,0771	6,3115	63	0,979	1,219
30	1,71749	227	1,0110	1,1082	1,70782	273	0,9888	1,0802	6,3052	65	0,977	1,224
40	1,71522	243	1,0115	1,1130	1,70509	293	0,9882	1,0834	6,2987	68	0,976	1,228
50	1,71279	259	1,0121	1,1178	1,70216	314	0,9876	1,0868	6,2919	72	0,974	1,232
85 0	1,71020		1,0127	1,1229	1,69902		0,9870	1,0903	6,2847		0,973	1,237

Von der Barometerhöhe abhängiger Factor.

Pariser Lin.	Log *B*	*Englische Zolle.*	Log *B*	*Französische Meter.*	Log *B*		Log *B*
315	— 0,02445	27,5	— 0,03191	0,725	— 0,01560	0,760	+ 0,00488
316	— 0,02307	27,6	— 0,03033	0,726	— 0,01500	0,761	+ 0,00545
317	— 0,02170	27,7	— 0,02876	0,727	— 0,01440	0,762	+ 0,00602
318	— 0,02033	27,8	— 0,02820	0,728	— 0,01380	0,763	+ 0,09659
319	— 0,91897	27,9	— 0,02564	0,729	— 0,01321	0,764	+ 0,00716
320	— 0,01761	28,0	— 0,02409	0,730	— 0,01261	0,765	+ 0,00773
321	— 0,01625	28,1	— 0,02254	0,731	— 0,01202	0,766	+ 0,00830
322	— 0,01490	28,2	— 0,02099	0,732	— 0,01142	0,767	+ 0,00886
323	— 0,01356	28,3	— 0,01946	0,733	— 0,01083	0,768	+ 0,00943
324	— 0,01221	28,4	— 0,01793	0,734	— 0,01024	0,769	+ 0,00999
325	— 0,01088	28,5	— 0,01640	0,735	— 0,00965	0,770	+ 0,01056
326	— 0,00954	28,6	— 0,01488	0,736	— 0,00906	0,771	+ 0,01112
327	— 0,00821	28,7	— 0,01336	0,737	— 0,00847	0,772	+ 0,01168
328	— 0,00689	28,8	— 0,01185	0,738	— 0,00788	0,773	+ 0,01225
329	— 0,00556	28,9	— 0,01035	0,739	— 0,00729	0,774	+ 0,01281
330	— 0,00425	29,0	— 0,00885	0,740	— 0,00670	0,775	+ 0,01337
331	— 0,00293	29,1	— 0,00735	0,741	— 0,00612	0,776	+ 0,01393
332	— 0,00162	29,2	— 0,00586	0,742	— 0,00553	0,777	+ 0,01449
333	— 0,00032	29,3	— 0,00438	0,743	— 0,00494	0,778	+ 0,01505
334	+ 0,00099	29,4	— 0,00290	0,744	— 0,00436	0,779	+ 0,01560
335	+ 0,00228	29,5	— 0,00142	0,745	— 0,00378	0,780	+ 0,01616
336	+ 0,00358	29,6	+ 0,00005	0,746	— 0,00319	0,781	+ 0,01672
337	+ 0,00487	29,7	+ 0,00151	0,747	— 0,00261	0,782	+ 0,01727
338	+ 0,00616	29,8	+ 0,00297	0,748	— 0,00203	0,783	+ 0,01783
339	+ 0,00744	29,9	+ 0,00443	0,749	— 0,00145	0,784	+ 0,01838
340	+ 0,00872	30,0	+ 0,00588	0,750	— 0,00087	0,785	+ 0,01894
341	+ 0,00999	30,1	+ 0,00732	0,751	— 0,00029	0,786	+ 0,01949
342	+ 0,01127	30,2	+ 0,00876	0,752	+ 0,00028	0,787	+ 0,02004
343	+ 0,01253	30,3	+ 0,01020	0,753	+ 0,00086	0,788	+ 0,02059
344	+ 0,01380	30,4	+ 0,01163	0,754	+ 0,00144	0,789	+ 0,02114
345	+ 0,01506	30,5	+ 0,01306	0,755	+ 0,00201	0,790	+ 0,02169
346	+ 0,01632	30,6	+ 0,01448	0,756	+ 0,00259	0,791	+ 0,02224
347	+ 0,01757	30,7	+ 0,01589	0,757	+ 0,00316	0,792	+ 0,02279
348	+ 0,01882	30,8	+ 0,01731	0,758	+ 0,00374	0,793	+ 0,02334
349	+ 0,02007	30,9	+ 0,01871	0,759	+ 0,00431	0,794	+ 0,02389
350	+ 0,02131	31,0	+ 0,02012	0,760	+ 0,00488	0,795	+ 0,02443

Von dem Stande des am Barometer befindl. Thermometers abhängiger Factor.

Fahrenheit. *S.*	Log *T*	Reaumur. *S.*	Log *T*	Centesimal *S.*	Log *T*
— 30°	+ 0,00242	— 35°	+ 0,00308	— 35°	+ 0,00246
— 20	+ 0,00203	— 30	+ 0,00264	— 30	+ 0,00211
— 10	+ 0,00164	— 25	+ 0,00220	— 25	+ 0,00176
0	+ 0,00125	— 20	+ 0,00176	— 20	+ 0,00140
10	+ 0,00086	— 15	+ 0,00132	— 15	+ 0,00105
20	+ 0,00047	— 10	+ 0,00088	— 10	+ 0,00070
30	+ 0,00008	— 5	+ 0,00044	— 5	+ 0,00035
40	— 0,00031	0	0,00000	0	0,00000
50	— 0,00070	+ 5	— 0,00044	+ 5	— 0,00035
60	— 0,00109	10	— 0,00088	10	— 0,00070
70	— 0,00148	15	— 0,00131	15	— 0,00105
80	— 0,00186	20	— 0,00175	20	— 0,00140
90	— 0,00225	25	— 0,00218	25	— 0,00175
100	— 0,00264	30	— 0,00262	30	— 0,00210
		35	— 0,00305	35	— 0,00244

$$\text{Log } \beta = \text{Log } B + \text{Log } T$$

Von dem Stande des Thermometers abhängiger Factor.

Fahrenheitsche Scale.				Reaumur. *S.*		Centesimal *S.*	
	Log γ		Log γ		Log γ		Log γ
— 20°	+0,06279	35°	+0,01185	— 35°	+0,08990	— 35°	+0,07373
— 19	+0,06181	36	+0,01098	— 30	+0,07829	— 30	+0,06476
— 18	+0,06083	37	+0,01011	— 25	+0,06698	— 25	+0,05596
— 17	+0,05985	38	+0,00924	— 24	+0,06476	— 24	+0,05423
— 16	+0,05887	39	+0,00837	— 23	+0,06254	— 23	+0,05249
— 15	+0,05790	40	+0,00750	— 22	+0,06034	— 22	+0,05077
— 14	+0,05693	41	+0,00664	— 21	+0,05815	— 21	+0,04905
— 13	+0,05596	42	+0,00578	— 20	+0,05596	— 20	+0,04734
— 12	+0,05500	43	+0,00492	— 19	+0,05379	— 19	+0,04564
— 11	+0,05403	44	+0,00406	— 18	+0,05163	— 18	+0,04394
— 10	+0,05307	45	+0,00320	— 17	+0,04948	— 17	+0,04225
— 9	+0,05211	46	+0,00234	— 16	+0,04734	— 16	+0,04057
— 8	+0,05115	47	+0,00149	— 15	+0,04522	— 15	+0,03889
— 7	+0,05020	48	+0,00064	— 14	+0,04310	— 14	+0,03722
— 6	+0,04924	49	—0,00021	— 13	+0,04099	— 13	+0,03556
— 5	+0,04829	50	—0,00106	— 12	+0,03889	— 12	+0,03390
— 4	+0,04734	51	—0,00191	— 11	+0,03681	— 11	+0,03225
— 3	+0,04640	52	—0,00275	— 10	+0,03473	— 10	+0,03060
— 2	+0,04545	53	—0,00360	— 9	+0,03266	— 9	+0,02896
— 1	+0,04451	54	—0,00444	— 8	+0,03060	— 8	+0,02733
0	+0,04357	55	—0,00528	— 7	+0,02855	— 7	+0,02570
+ 1	+0,04263	56	—0,00612	— 6	+0,02652	— 6	+0,02408
2	+0,04169	57	—0,00696	— 5	+0,02449	— 5	+0,02247
3	+0,04076	58	—0,00780	— 4	+0,02247	— 4	—0,02086
4	+0,03982	59	—0,00863	— 3	+0,02046	— 3	+0,01926
5	+0,03889	60	—0,00946	— 2	+0,01846	— 2	+0,01766
6	+0,03796	61	—0,01029	— 1	+0,01646	— 1	+0,01607
7	+0,03704	62	—0,01112	0	+0,01448	0	+0,01448
8	+0,03611	63	—0,01195	+ 1	+0,01251	+ 1	+0,01290
9	+0,03519	64	—0,01278	2	+0,01054	2	+0,01133
10	+0,03427	65	—0,01360	3	+0,00859	3	+0,00976
11	+0,03335	66	—0,01443	4	+0,00664	4	+0,00820
12	+0,03243	67	—0,01525	5	+0,00470	5	+0,00664
13	+0,03152	68	—0,01607	6	+0,00277	6	+0,00509
14	+0,03060	69	—0,01689	7	+0,00085	7	+0,00354
15	+0,02969	70	—0,01770	8	—0,00106	8	+0,00200
16	+0,02878	71	—0,01852	9	—0,00297	9	+0,00047
17	+0,02787	72	—0,01933	10	—0,00486	10	—0,00106
18	+0,02697	73	—0,02015	11	—0,00675	11	—0,00259
19	+0,02606	74	—0,02096	12	—0,00863	12	—0,00410
20	+0,02516	75	—0,02177	13	—0,01050	13	—0,00562
21	+0,02426	76	—0,02257	14	—0,01236	14	—0,00713
22	+0,02336	77	—0,02338	15	—0,01422	15	—0,00863
23	+0,02247	78	—0,02419	16	—0,01607	16	—0,01013
24	+0,02157	79	—0,02499	17	—0,01791	17	—0,01162
25	+0,02068	80	—0,02579	18	—0,01974	18	—0,01311
26	+0,01979	81	—0,02659	19	—0,02156	19	—0,01459
27	+0,01890	82	—0,02738	20	—0,02338	20	—0,01607
28	+0,01801	83	—0,02819	21	—0,02519	21	—0,01754
29	+0,01713	84	—0,02898	22	—0,02699	22	—0,01901
30	+0,01624	85	—0,02978	23	—0,02879	23	—0,02047
31	+0,01536	86	—0,03057	24	—0,03057	24	—0,02194
32	+0,01448	87	—0,03136	25	—0,03235	25	—0,02338
33	+0,01360	88	—0,03216	30	—0,04114	30	—0,03057
34	+0,01273	89	—0,03294	35	—0,04976	35	—0,03765
35	+0,01185	90	—0,03373				

IV.

Einfluss der Praecession, Nutation und Aberration auf die Resultate mikrometrischer Messungen.

Die Praecession und Nutation haben offenbar keinen Einfluss auf die Entfernung zweier Sterne, ändern aber die Richtungen ihrer Declinationskreise und damit die sich auf diese beziehenden Positionswinkel. Die Aberration erlangt Einfluss, sowohl auf die Entfernung, als auch auf die Positionswinkel.

Wenn der Ort eines Sterns, auf die feste Ecliptik und das feste Aequinoctium von 1750 bezogen, durch Länge L und Breite B angegeben wird, welche Angaben unveränderlich sind wenn der Stern keine eigene Bewegung am Himmel besitzt, und wenn der Ort des Aequinoctiums auf dieser festen Ecliptik, zu einer unbestimmten Zeit, durch $-\psi$, der Winkel in welchem der Aequator sie durchschneidet durch ω bezeichnet werden, so findet man die Declination δ und den Winkel q des Declinationskreises des Sterns mit dem Breitenkreise der angenommenen Ecliptik, aus den zu dem Dreiecke zwischen ihrem Pole, dem Pole des Aequators und dem Sterne gehörigen Formeln:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sin}\delta &= \operatorname{Cos}\omega \operatorname{Sin}B + \operatorname{Sin}\omega \operatorname{Cos}B \operatorname{Sin}(L+\psi)\\
\operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}q &= \operatorname{Cos}\omega \operatorname{Cos}B - \operatorname{Sin}\omega \operatorname{Sin}B \operatorname{Sin}(L+\psi)\\
\operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin}q &= \operatorname{Sin}\omega \operatorname{Cos}(L+\psi)
\end{aligned}$$

Indem für eine andere Zeit ähnliche Formeln gelten, in welchen die dieser Zeit zugehörigen Werthe von ω und ψ angenommen werden, kann man B und L eliminiren und den Unterschied der Werthe

von q für beide Zeiten *endlich* ausdrücken. Dieses ist bereits in der Einleitung der *Tabulae Regiom.* p. VIII. Form. [12] geschehen, wo der durch C bezeichnete Winkel die Veränderung von q bedeutet. Hier werde ich aber die Änderungen von q aufsuchen, welche kleinen Änderungen von ψ und ω entsprechen. — Differentiirt man die Ausdrücke von $\mathrm{Cos}\,\delta\ \mathrm{Cos}\,q$ und $\mathrm{Cos}\,\delta\ \mathrm{Sin}\,q$, so erhält man dadurch, nach der Elimination von $d\delta$:

$$\mathrm{Cos}\,\delta^2\,dq = d\psi\,.\,\mathrm{Sin}\,\omega\,\{\mathrm{Sin}\,B\ \mathrm{Sin}\,\omega - \mathrm{Cos}\,B\ \mathrm{Cos}\,\omega\ \mathrm{Sin}\,(L+\psi)\} + d\omega\,.\,\mathrm{Cos}\,B\ \mathrm{Cos}(L+\psi)$$

Wenn man die Geradeaufsteigung des Sterns durch α, und die von dem Durchschnittspunkte des Aequators und der festen Ecliptik von 1750 anfangende durch $\alpha+\lambda$ bezeichnet, hat man

$$\mathrm{Sin}\,B\ \mathrm{Sin}\,\omega - \mathrm{Cos}\,B\ \mathrm{Cos}\,\omega\ \mathrm{Sin}\,(L+\psi) = -\,\mathrm{Cos}\,\delta\ \mathrm{Sin}\,(\alpha+\lambda)$$
$$\mathrm{Cos}\,B\ \mathrm{Cos}\,(L+\psi) = \mathrm{Cos}\,\delta\ \mathrm{Cos}(\alpha+\lambda)$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke:

$$\mathrm{Cos}\,\delta\ dq = -\,d\psi\ \mathrm{Sin}\,\omega\,.\,\mathrm{Sin}\,(\alpha+\lambda) + d\omega\,.\,\mathrm{Cos}\,(\alpha+\lambda)$$

Der Positionswinkel p eines anderen Sterns an dem gegenwärtig betrachteten, wird durch Hinzufügung des Winkels q in den Winkel verwandelt, in welchem der beide Sterne verbindende grösste Kreis den festen Breitenkreis des ersten durchschneidet. Dieser Winkel ist unveränderlich, woraus hervorgeht, dass die Änderungen von p denen von q gleich sind, aber das entgegengesetzte Zeichen besitzen. Man hat also

$$\mathrm{Cos}\,\delta\,dp = d\psi\ \mathrm{Sin}\,\omega\,.\,\mathrm{Sin}(\alpha+\lambda) - d\omega\,,\mathrm{Cos}\,(\alpha+\lambda)$$

Die Änderungen $d\psi$ und $d\omega$ sind zum Theil mit der Zeit fortschreitend, zum Theil entstehen sie aus der Nutation. In jenem Theile derselben ist $d\omega$ sehr klein und

$$\lambda = \frac{d\omega}{\mathrm{Sin}\,\omega\,.\,d\psi}\ ^*)$$

wodurch die eben gegebene Formel sich in

$$\mathrm{Cos}\,\delta\,dp = d\psi\ \mathrm{Sin}\,\omega\,.\,\mathrm{Sin}\,\alpha$$

verwandelt, und den jährlichen Einfluss der *Praecession* auf den Positionswinkel

---

*) Tabulae Regiomontanae p. X.

$$\frac{dp}{dt} = n \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sec}\delta$$

ergiebt, wo

$$n = \frac{d\psi}{dt} \operatorname{Sin}\omega = 20,''06442 - t.0,''0000970204 \text{ *)}$$

ist.

Die *Nutation* erfordert, dass man

$$d\psi \operatorname{Sin}\omega = -6,''68299 \operatorname{Sin}\Omega + 0,''08046 \operatorname{Sin}2\Omega - 0,''53194 \operatorname{Sin}2\odot - 0,''08015 \operatorname{Sin}2\mathbb{D}$$
$$d\omega = +8,97707 \operatorname{Cos}\Omega - 0,08773 \operatorname{Cos}2\Omega + 0,57990 \operatorname{Cos}2\odot + 0,08738 \operatorname{Cos}2\mathbb{D}$$

und $\lambda = 0$ annehme **), wodurch ihr Einfluss auf den Positionswinkel

$$= [-6,''68299 \operatorname{Sin}\Omega + 0,''08046 \operatorname{Sin}2\Omega - 0,''53194 \operatorname{Sin}2\odot - 0,''08015 \operatorname{Sin}2\mathbb{D}] \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sec}\delta$$
$$- [+8,97707 \operatorname{Cos}\Omega - 0,08773 \operatorname{Cos}2\Omega + 0,57990 \operatorname{Cos}2\odot + 0,08738 \operatorname{Cos}2\mathbb{D}] \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sec}\delta$$

wird.

Die *Aberration* setzt den mittleren Geradenaufsteigungen und Abweichungen der beiden Sterne, deren Entfernung und Positionswinkel durch eine Mikrometerbeobachtung bestimmt werden, $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ und $\Delta\alpha'$, $\Delta\delta'$ hinzu, welche Grössen die Ausdrücke:

$$\Delta\alpha \operatorname{Cos}\delta = -\varkappa \operatorname{Cos}\omega \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\odot - \varkappa \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\odot$$
$$\Delta\delta = \varkappa [\operatorname{Cos}\omega \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\delta - \operatorname{Sin}\omega \operatorname{Cos}\delta] \operatorname{Cos}\odot - \varkappa \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Sin}\odot$$
$$\Delta\alpha' \operatorname{Cos}\delta' = -\varkappa \operatorname{Cos}\omega \operatorname{Cos}\alpha' \operatorname{Cos}\odot - \varkappa \operatorname{Sin}\alpha' \operatorname{Sin}\odot$$
$$\Delta\delta' = \varkappa [\operatorname{Cos}\omega \operatorname{Sin}\alpha' \operatorname{Sin}\delta' - \operatorname{Sin}\omega \operatorname{Cos}\delta'] \operatorname{Cos}\odot - \varkappa \operatorname{Cos}\alpha' \operatorname{Sin}\delta' \operatorname{Sin}\odot$$

haben, worin $\varkappa = 20,''255$ ist.

Die Einflüsse derselben auf die Entfernung s und die beiden Positionswinkel p und $p' + 180°$ an beiden Sternen, findet man durch die Differentialformeln der sphärischen Trigonometrie:

$$\Delta s = (\Delta\alpha' - \Delta\alpha) \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Sin}p' + \Delta\delta' \operatorname{Cos}p' - \Delta\delta \operatorname{Cos}p$$
$$\operatorname{Sin}s \, \Delta p = (\Delta\alpha' - \Delta\alpha) \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos}p' - \Delta\delta' \operatorname{Sin}p' + \Delta\delta \operatorname{Sin}p \operatorname{Cos}s$$
$$\operatorname{Sin}s \, \Delta p' = (\Delta\alpha' - \Delta\alpha) \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}p + \Delta\delta \operatorname{Sin}p - \Delta\delta' \operatorname{Sin}p' \operatorname{Cos}s$$

Allein, da man immer die *halbe Summe* von p und p' aus einer Beobachtung erkennt, hat nur die Verfolgung der halben Summe der beiden letzten Formeln ein Interesse, weshalb ich sie zu

---

*) Tabulae Regiomontanae Form. [16].

**) Ebendaselbst Form. [23].

$$\mathrm{Sin}\,s.\tfrac{1}{2}(\Delta p+\Delta p')=(\Delta\alpha'-\Delta\alpha)\tfrac{1}{2}\left\{\mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Cos}\,p'+\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,p\right\}-\left\{\Delta\delta'\,\mathrm{Sin}\,p'-\Delta\delta\,\mathrm{Sin}\,p\right\}\frac{1+\mathrm{Cos}\,s}{2}$$

vereinigen werde. — Man kann beide Ausdrücke, sowohl den von Δs, als auch den von $\frac{1}{2}(\Delta p+\Delta p')$, so schreiben, dass sie aus zwei Theilen zusammengesetzt erscheinen, deren jeder sich nur auf einen der Sterne beziehende Grössen enthält; dieses wird dadurch erlangt, dass

$$\begin{aligned}\mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Sin}\,p' &= \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,p\\ \mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Cos}\,p' &= \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,p.\mathrm{Cos}\,s-\mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,s\\ \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,p &= \mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Cos}\,p'\,\mathrm{Cos}\,s+\mathrm{Sin}\,\delta'\,\mathrm{Sin}\,s\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left\{\mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Cos}\,p'+\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,p\right\} &= \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,p\,\frac{1+\mathrm{Cos}\,s}{2}-\tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\delta.\mathrm{Sin}\,s\\ &= \mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Cos}\,p'\,\frac{1+\mathrm{Cos}\,s}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\delta'\,\mathrm{Sin}\,s\end{aligned}$$

geschrieben wird. Bezeichnet man

$$\begin{aligned}&\Delta\alpha\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,p+\Delta\delta\,\mathrm{Cos}\,p\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{ durch }u\\ &\Delta\alpha\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,p\,\frac{1+\mathrm{Cos}\,s}{2}-\Delta\alpha\,\mathrm{Sin}\,\delta\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,s-\Delta\delta\,\mathrm{Sin}\,p\,\frac{1+\mathrm{Cos}\,s}{2}\ldots\ldots v\\ &\Delta\alpha'\mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Sin}\,p'+\Delta\delta'\,\mathrm{Cos}\,p'\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u'\\ &\Delta\alpha'\mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Cos}\,p'\,\frac{1+\mathrm{Cos}\,s}{2}+\Delta\alpha'\mathrm{Sin}\,\delta'\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,s-\Delta\delta'\,\mathrm{Sin}\,p'\,\frac{1+\mathrm{Cos}\,s}{2}\ldots\ldots v'\end{aligned}$$

so hat man also:

$$\begin{aligned}\Delta s &= u'-u\\ \mathrm{Sin}\,s\,\tfrac{1}{2}(\Delta p+\Delta p') &= v'-v\end{aligned}$$

welche Formeln nun auf ihre einfachste Gestalt zu bringen sind. Diese Reduction erlangt man am leichtsten, wenn man die Lage des durch beide Sterne gehenden grössten Kreises in die Betrachtung einführt; nämlich seine Neigung i, die Geradeaufsteigung n des Punkts wo er den Aequator durchschneidet um von der südlichen Halbkugel in die nördliche überzugehen und die Entfernungen dieses Punkts von beiden Sternen $h-\frac{1}{2}s$ und $h+\frac{1}{2}s$.

Wenn man in den Ausdrücken von u und v die Ausdrücke von $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ substituirt, werden sie:

$$u = -x\,\mathrm{Cos}\odot\left\{\mathrm{Cos}\omega\,(\mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Sin}p - \mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Cos}p\,\mathrm{Sin}\delta) + \mathrm{Sin}\omega\,.\,\mathrm{Cos}p\,\mathrm{Cos}\delta\right\}$$
$$-x\,\mathrm{Sin}\odot\left\{\mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Sin}p + \mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Cos}p\,\mathrm{Sin}\delta\right\}$$

$$v = -x\,\mathrm{Cos}\odot\left\{\frac{1+\mathrm{Cos}s}{2}\,\mathrm{Cos}\omega\,(\mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Cos}p + \mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Sin}p\,\mathrm{Sin}\delta) - \frac{1+\mathrm{Cos}s}{2}\,\mathrm{Sin}\omega\,.\,\mathrm{Sin}p\,\mathrm{Cos}\delta\right.$$
$$\left. -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}s\,\mathrm{Cos}\omega\,.\,\mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Tang}\delta\right\}$$
$$-x\,\mathrm{Sin}\odot\left\{\frac{1+\mathrm{Cos}s}{2}\,(\mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Cos}p - \mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Sin}p\,\mathrm{Sin}\delta) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}s\,.\,\mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Tang}\delta\right\}$$

und für u' und v' erhält man ähnliche Ausdrücke, in welchen α', p', δ', $-s$ statt α, p, δ, s geschrieben werden. — Das Dreieck zwischen dem durch beide Sterne gehenden grössten Kreise, dem Declinationskreise und dem Aequator ergiebt, indessen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sin}(\alpha-n)\,\mathrm{Sin}p + \mathrm{Cos}(\alpha-n)\,\mathrm{Cos}p\,\mathrm{Sin}\delta &= \mathrm{Sin}(h-\tfrac{1}{2}s)\\
\mathrm{Cos}(\alpha-n)\,\mathrm{Sin}p - \mathrm{Sin}(\alpha-n)\,\mathrm{Cos}p\,\mathrm{Sin}\delta &= \mathrm{Cos}(h-\tfrac{1}{2}s)\,\mathrm{Cos}i\\
\mathrm{Cos}p\,\mathrm{Cos}\delta &= \mathrm{Cos}(h-\tfrac{1}{2}s)\,\mathrm{Sin}i\\
\mathrm{Sin}(\alpha-n)\,\mathrm{Cos}p - \mathrm{Cos}(\alpha-n)\,\mathrm{Sin}p\,\mathrm{Sin}\delta &= 0\\
\mathrm{Cos}(\alpha-n)\,\mathrm{Cos}p + \mathrm{Sin}(\alpha-n)\,\mathrm{Sin}p\,\mathrm{Sin}\delta &= \mathrm{Sin}i\\
\mathrm{Sin}p\,\mathrm{Cos}\delta &= \mathrm{Cos}i
\end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Sin}p + \mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Cos}p\,\mathrm{Sin}\delta &= \mathrm{Sin}(h-\tfrac{1}{2}s)\,\mathrm{Cos}n + \mathrm{Cos}(h-\tfrac{1}{2}s)\,\mathrm{Sin}n\,\mathrm{Cos}i\\
\mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Sin}p - \mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Cos}p\,\mathrm{Sin}\delta &= -\mathrm{Sin}(h-\tfrac{1}{2}s)\,\mathrm{Sin}n + \mathrm{Cos}(h-\tfrac{1}{2}s)\,\mathrm{Cos}n\,\mathrm{Cos}i\\
\mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Cos}p - \mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Sin}p\,\mathrm{Sin}\delta &= \mathrm{Sin}n\,\mathrm{Sin}i\\
\mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Cos}p + \mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Sin}p\,\mathrm{Sin}\delta &= \mathrm{Cos}n\,\mathrm{Sin}i
\end{aligned}$$

folgen. Man hat also

$$u = +x\,\mathrm{Cos}\odot\left\{\mathrm{Sin}(h-\tfrac{1}{2}s)\,\mathrm{Cos}\omega\,\mathrm{Sin}n - \mathrm{Cos}(h-\tfrac{1}{2}s)\,(\mathrm{Cos}\omega\,\mathrm{Cos}n\,\mathrm{Cos}i + \mathrm{Sin}\omega\,\mathrm{Sin}i)\right\}$$
$$-x\,\mathrm{Sin}\odot\left\{\mathrm{Sin}(h-\tfrac{1}{2}s)\,\mathrm{Cos}n + \mathrm{Cos}(h-\tfrac{1}{2}s)\,\mathrm{Sin}n\,\mathrm{Cos}i\right\}$$

$$a = -x\,\mathrm{Cos}\odot\left\{\frac{1+\mathrm{Cos}s}{2}\,(\mathrm{Cos}\omega\,\mathrm{Cos}n\,\mathrm{Sin}i - \mathrm{Sin}\omega\,\mathrm{Cos}i) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}s\,\mathrm{Cos}\omega\,\mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Tang}\delta\right\}$$
$$-x\,\mathrm{Sin}\odot\left\{\frac{1+\mathrm{Cos}s}{2}\,\mathrm{Sin}n\,\mathrm{Sin}i - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}s\,\mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Tang}\delta\right\}$$

und durch die Subtraction dieser Ausdrücke von den ähnlichen für u' und v',

$$\Delta s = 2x\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}s\,\mathrm{Cos}\odot\left\{\mathrm{Cos}\omega\,[\mathrm{Cos}h\,\mathrm{Sin}n + \mathrm{Sin}h\,\mathrm{Cos}n\,\mathrm{Cos}i] + \mathrm{Sin}\omega\,.\,\mathrm{Sin}h\,\mathrm{Sin}i\right\}$$
$$-2x\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}s\,\mathrm{Sin}\odot\left\{\mathrm{Cos}h\,\mathrm{Cos}n - \mathrm{Sin}h\,\mathrm{Sin}n\,\mathrm{Cos}i\right\}$$

$$\mathrm{Sin}s\,\tfrac{1}{2}(\Delta p + \Delta p') = -x\,\mathrm{Sin}s\,\mathrm{Cos}\odot\,\mathrm{Cos}\omega\,\tfrac{1}{2}\,[\mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Tang}\delta + \mathrm{Cos}\alpha'\,\mathrm{Tang}\delta']$$
$$-x\,\mathrm{Sin}s\,\mathrm{Sin}\odot\,\tfrac{1}{2}\,[\mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Tang}\delta + \mathrm{Sin}\alpha'\,\mathrm{Tang}\delta']$$

Wenn man die Geradeaufsteigung und Abweichung des in der Mitte zwischen beiden Sternen liegenden Punktes durch α_0 und δ_0 bezeichnet, hat man

$$\begin{aligned} \operatorname{Cos} h &= \operatorname{Cos}\delta_0 \operatorname{Cos}(\alpha_0 - n) \\ \operatorname{Sin} h \operatorname{Cos} i &= \operatorname{Cos}\delta_0 \operatorname{Sin}(\alpha_0 - n) \\ \operatorname{Sin} h \operatorname{Sin} i &= \operatorname{Sin}\delta_0 \end{aligned}$$

wodurch die erste, den Einfluss der Aberration auf die Entfernung ergebende Formel, sich in

$$\begin{aligned} \Delta s = {} & 2\varkappa \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s \operatorname{Cos}\odot \left\{\operatorname{Cos}\omega \operatorname{Cos}\delta_0 \operatorname{Sin}\alpha_0 + \operatorname{Sin}\omega \operatorname{Sin}\delta_0\right\} \\ & - 2\varkappa \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s \operatorname{Sin}\odot . \operatorname{Cos}\delta_0 \operatorname{Cos}\alpha_0 \end{aligned}$$

verwandelt. Die zweite ergiebt den Einfluss der Aberration auf den Positionswinkel

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\Delta p + \Delta p') = {} & -\varkappa \operatorname{Cos}\odot \operatorname{Cos}\omega \tfrac{1}{2}\left\{\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Tang}\delta + \operatorname{Cos}\alpha' \operatorname{Tang}\delta'\right\} \\ & -\varkappa \operatorname{Sin}\odot \tfrac{1}{2}\left\{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Tang}\delta + \operatorname{Sin}\alpha' \operatorname{Tang}\delta'\right\} \end{aligned}$$

Aus dem Ausdrucke von Δs geht hervor, dass alle Durchmesser eines, um einen beliebigen Punkt am Himmel beschriebenen Kreises, wie auch ihre Richtung sein mag, durch die Aberration in einem gleichen Verhältnisse verändert werden. Wenn die Entfernung s *klein* ist, so dass ihr Quadrat vernachlässigt werden kann, können auch α und δ mit α_0 und δ_0 verwechselt werden, woraus hervorgeht, dass auch die *Halbmesser* des Kreises eine von ihrer Richtung unabhängige Veränderung erfahren; unter derselben Bedingung wird auch der Ausdruck des Einflusses der Aberration auf den Positionswinkel für alle Richtungen gleich. Ein um jeden beliebigen Punkt beschriebener Kreis von kleinem Halbmesser, wird daher, durch die Aberration vergrössert oder verkleinert, ohne sich in eine andere Curve zu verwandeln; auch wird er dadurch um seinen Mittelpunkt gedrehet, ohne dass der Winkel zweier beliebigen seiner Radien eine Änderung erführe.

Die jetzt entwickelten Einflüsse der Praecession, Nutation und Aberration auf die beiden Resultate einer mikrometrischen Beobachtung, können durch die Hülfe derselben Grössen $A, B, C, D,$ deren Logarithmen Tab. VIII der *Tabb. Regiom.*, für das mit 1750 anfangende und sich mit 1850 endigende Jahrhundert angiebt, berechnet werden. Wenn man folgende Bezeichnungen einführt:

$$\gamma = -2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}s\,\{\mathrm{Cos}\,\delta_0\,\mathrm{Sin}\,\alpha_0 + \mathrm{Tang}\,\omega\,.\,\mathrm{Sin}\,\vartheta_0\}$$
$$\delta = 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}s\,.\,\mathrm{Cos}\,\delta_0\,\mathrm{Cos}\,\alpha_0$$
$$\alpha' = n\,\mathrm{Sec}\,\delta_0\,\mathrm{Sin}\,\alpha_0$$
$$\beta' = \mathrm{Sec}\,\delta_0\,\mathrm{Cos}\,\alpha_0$$
$$\gamma' = \mathrm{Tang}\,\delta_0\,\mathrm{Cos}\,\alpha_0$$
$$\delta' = \mathrm{Tang}\,\delta_0\,\mathrm{Sin}\,\alpha_0$$

so ist

1. die beobachtete Entfernung = der wahren $+ C.\gamma + D.\delta$
2. der beobachtete Werth von $\frac{1}{2}(p+p')$ = dem wahren für den Anfang des Jahres $+ A.\alpha' + B.\beta' + C.\gamma' + D.\delta'$

Die jährliche Veränderung von $\frac{1}{2}(p+p')$ ist $= n\,\mathrm{Sec}\,\delta_0\,\mathrm{Sin}\,\alpha_0$; soll sie angewandt werden um die Veränderung während eines längeren Zeitraums dadurch zu berechnen, so sind die Werthe von δ_0 und α_0 für seine Mitte zu nehmen.

V.

Beobachtungen verschiedener Sterne der Plejaden.

Die Sterne der Plejaden sind, auf der Königsberger Sternwarte, sowohl mit dem *Heliometer*, als auch mit dem *Reichenbachschen Meridiankreise*, häufig beobachtet worden. Sie haben aus mehreren Gründen vorzügliche Ansprüche auf genaue Bestimmung. Wenn die relativen Örter der einzelnen Sterne dieses ausgedehnten und sich durch seine Helligkeit auszeichnenden Haufens genau bekannt sind, so kann man dadurch verschiedene astronomische Zwecke vollständiger, oder leichter erreichen, als durch einzeln stehende Sterne, oder einzelne Paare derselben möglich ist. Hieher gehört die Bestimmung des Mittagsunterschiedes weit voneinander entfernter Örter, wo Durchgänge des Mondes durch die Plejaden mit einiger Vollständigkeit beobachtet sind; denn solche Beobachtungen geben das Mittel, das Resultat von den Einflüssen der Fehler der aus den Mondstafeln genommenen Elemente der Rechnung ganz oder fast ganz zu befreien, und werden dadurch für die Bestimmung der Mittagsunterschiede der Sternwarten sehr wichtig. Ferner gehört hieher die Bestimmung der Grössen der verschiedenen Kreise eines Kreismikrometers, welche, wenn sie so sicher als möglich gemacht werden soll, die genaue Kenntniss von

Declinationsunterschieden fordert, welche nur sehr wenig kleiner sind als die dadurch zu bestimmenden Grössen, und wofür man, unter den häufigen Sternen der Plejaden, immer passende finden wird. Auch die Bestimmung des Werthes der Windungen einer Mikrometerschraube wird sehr leicht, wenn man, jenachdem sie zur Messung von Declinationsunterschieden, oder von Entfernungen angewandt wird, die Declinationsunterschiede, oder die Entfernungen der Plejadensterne als bekannt voraussetzen kann. — Ich habe auch, wie man in einer früheren Abhandlung (II. § 24) gesehen hat, die Sterne der Plejaden beobachtet um dadurch zur Kenntniss der Einwirkung der Wärme auf die Messungen mit dem Heliometer zu gelangen. — Endlich habe ich einer möglichst sicheren Bestimmung der relativen Örter dieser Sterne einen für sich selbst bestehenden Werth beigelegt, indem ich glaube, dass eine Zeit kommen wird, für welche die Frage nach den inneren Bewegungen dieses merkwürdigen Sternhaufens ein Interesse gewinnen wird, welches, bei der äussersten Kleinheit dieser Bewegungen, nur durch frühere Beobachtungen befriedigt werden kann, wenn sie durch die Anwendung der dazu geeignetsten Mittel erlangt worden sind und daher die grösste erreichbare Genauigkeit besitzen. — In dieser Beziehung stehen die Beobachtungen mit dem Heliometer desto höher über den auf Meridian-Instrumente gegründeten, je schwieriger es ist, durch die letzteren zahlreiche Beobachtungen der einzelnen Sterne einer so gedrängten Gruppe, deren Culminationszeiten wenig von einander verschieden sind, zu erlangen.

Ich werde zuerst die zahlreicheren Heliometer-Beobachtungen, durch welche die 10 helleren Sterne der Plejaden mit ihrem Hauptsterne η verglichen worden sind, mittheilen; dann die weniger zahlreichen von 42 kleineren Sternen; endlich die Meridian-Beobachtungen. Was ich als *eine* Heliometer-Beobachtung anführen werde, ist immer das mittlere Resultat aus 6, zu drei vollständigen Messungen verbundenen Einstellungen der Objectivhälfte II. Wenn für einen Tag zwei Bestimmungen vorkommen, so ist das Instrument zwischen ihnen umgekehrt worden, so dass einmal seine Declinationsaxe *vorging* das anderemal *folgte*, was ich durch v und f bezeichnen werde.

Die Beobachtungen sind zum Theil von mir selbst gemacht, zum Theil von Herrn *Plantamour* (jetzt Professor in Genf), zum Theil von Herrn *Schlüter*, welcher, seit dem Juli 1839, ausgezeichneten Fleiss darauf verwandt und auch die Berechnung des Beobachteten nicht zurückgelassen hat. Diese verschiedenen Beobachter werde ich durch die Anfangsbuchstaben ihrer Namen bezeichnen.

1.

Beobachtungen der 10 helleren Sterne der Plejaden

Den beobachteten Quantitäten, welche ich angeben werde, sind die nöthigen Reductionen schon hinzugesetzt worden, nämlich den *Entfernungen:*

1. die periodische Ausgleichung der Angaben der Schraubentrommel (II. § 10. Taf. I.)
2. die Summe der Ausgleichung der Grösse der Windungen der Schraube und der optischen Verbesserung (II. § 23)
3. der Einfluss der Strahlenbrechung (III. § 6)
4. die Reduction auf 1840 (IV)

Die angegebenen Entfernungen sind daher die auf *ausgeglichene* Schraubenwindungen und auf 1840 reducirten; allein sie enthalten noch den Einfluss der Wärme auf die Messungen, so dass man die Grundlage der Untersuchung der Grösse dieses Einflusses (II. § 24) dadurch kennen lernt. Eine folgende Columne giebt den Unterschied jeder Beobachtung von dem arithmetischen Mittel aller Beobachtungen, in Theilen der Secunde ausgedrückt und wegen des Einflusses der Wärme berichtigt (II. § 24). Die *Positionswinkel* sind vollständig auf 1840 reducirt; sie beziehen sich auf die Richtung *von* η Plejadum *nach* dem zu bestimmenden Sterne und sind die halben Summen der an beiden Sternen stattfindenden.

$\eta - g$ Plejadum.

				Entfernung.	Thermomet.	Untersch.	Positionswinkel.	
				R	F o	″	°	
1830	Janr.	12	*f*	43,4285	11,5	— 0,49	285 58,58	*B*
		20	*f*	4476	15	+ 0,49	57,95	—
1836	Novb.	10	*f*	4422	30	— 0,50	—	—
		11	*v*	4484	28	— 0,16	—	—
1838	Janr.	5	*v*	4437	— 1,5	— 0,15	—	—
	Febr.	1	*f*	4570	0	+ 0,54	—	*P*
		10	*v*	4312	19,5	— 0,99	—	—
	März	11	*f*	4576	20,6	+ 0,39	—	—
		13	*v*	4499	20	— 0,01	—	—
	Septr.	25	*f*	4603	50	+ 0,28	57,92	*B*
		—	*v*	4593	50	+ 0,23	56,84	—
	Novb.	12	*v*	4487	30	— 0,16	58,51	—
		—	*f*	4482	30	— 0,18	60,69	—
1839	Febr.	17	*v*	4614	30	+ 0,51	59,28	—
		—	*f*	4724	30	+ 1,09	60,30	—
		25	*f*	4638	12	+ 0,79	58,71	—
		—	*v*	4510	12	+ 0,12	58,49	—
	Octb.	10	*f*	4591	46	+ 0,25	59,20	*S*
		—	*v*	4489	46	— 0,28	57,90	—
		14	*v*	4490	47	— 0,29	58,76	—
		—	*f*	4524	47	— 0,11	57,68	—
		16	*v*	4427	47	— 0,62	57,44	—
		—	*f*	4438	47	— 0,59	59,86	—
		17	*f*	4453	44	— 0,46	58,16	—
		—	*v*	4393	44	— 0,78	57,44	—
1840	Juli	16	*v*	4615	52,6	+ 0,32	58,29	—
		—	*f*	4601	52,6	+ 0,25	60,33	—
	Aug.	4	*v*	4552	55	— 0,03	57,70	—
		—	*f*	4497	55	— 0,33	58,85	—
	Septr.	3	*v*	4721	60,1	+ 0,82	57,78	—
		—	*f*	4569	60,1	+ 0,01	59,41	—
Mittel. Beobb. von 1830				43,43805	13,25	. . . . .	285 58,27	2 & 2 Beobb.
spätere Beobb.				45280	36,69	. . . . .	58,62	29 & 22 —

η — *b* Plejadum.

				R	°	″	° ′	
1830	Janr.	12	*f*	40,5049	11,5	— 0,60	269 60,16	*B*
		20	*f*	5118	15	— 0,26	58,68	—
	Juni	25	*f*	5270	64	+ 0,14	—	—
		27	*f*	5305	65	+ 0,32	—	—
		29	*f*	5328	70	+ 0,39	57,10	—
1836	Novb.	11	*v*	5062	28	— 0,73	—	—
1837	Juli	13	*f*	5288	60	+ 0,20	—	—
		20	*v*	5266	66	+ 0,03	—	—
		21	*v*	5297	67	+ 0,19	—	—
	Aug.	1	*v*	5270	62	+ 0,09	—	—
		4	*v*	5282	74	+ 0,06	—	—
1838	Janr.	5	*v*	5150	— 1,5	— 0,03	—	—
		29	*f*	5202	+ 0,4	+ 0,24	—	*P*
	Febr.	10	*v*	5179	19,5	— 0,05	—	—
	März	11	*f*	5222	20,6	+ 0,17	—	—
		13	*v*	5174	20	— 0,08	—	—
	Septr.	25	*f*	5294	50	+ 0,32	58,60	*B*
		—	*v*	5254	50	+ 0,10	57,47	—
	Novb.	12	*f*	5307	30	+ 0,55	62,32	—
		—	*v*	5212	30	+ 0,05	60,10	—
	Decbr.	20	*v*	5285	18	+ 0,53	57,80	—
		—	*f*	5239	18	+ 0,28	59,44	—
1839	Febr.	19	*f*	5262	20	+ 0,39	60,00	—
		—	*v*	5242	20	+ 0,28	57,81	—
	Juni	18	*f*	5352	74	+ 0,43	—	—
		—	*f*	5318	74	+ 0,25	—	—
	Octb.	10	*v*	5173	45	— 0,28	58,19	*S*
		—	*f*	5166	45	— 0,32	58,70	—
		14	*f*	5122	45	— 0,55	58,95	—
		—	*v*	5214	45	— 0,07	60,19	—
		16	*f*	5134	45	— 0,49	59,15	—
		—	*v*	5123	45	— 0,55	58,49	—
		17	*v*	5120	43	— 0,55	57,10	—
		—	*f*	5144	43	— 0,42	58,90	—
1840	Juli	21	*v*	5257	62,1	+ 0,02	57,60	—
		—	*f*	5228	62,1	— 0,13	60,10	—
	Aug.	1	*v*	5209	52,2	— 0,15	57,88	—
		—	*f*	5269	52,2	+ 0,17	60,21	—
	Septr.	3	*f*	5258	59	+ 0,06	59,16	—
		—	*v*	5248	59	0,00	58,07	—
Mittel. Beobb. von 1830				40,52140	45,10	. . . . .	269 58,65	5 & 3 Beobb.
spätere Beobb.				52235	42,93	. . . . .	58,92	35 & 22 —

η — e Plejadum.

				R					
1829	Novbr.	26	*f*	43,0469	12°	— 0,″19	304°	6,′66	*B*
	Decbr.	3	*v*	0540	3	+ 0,35		6,16	—
1830	Janr.	12	*f*	0298	11,5	— 1,00		6,38	—
		20	*f*	0522	15	+ 0,15		7,10	—
	Juni	29	*f*	0695	70	+ 0,59		4,34	—
1836	Novb.	10	*f*	0418	29	— 0,40		—	—
		11	*v*	0457	28	— 0,18		—	—
1837	Aug.	4	*v*	0606	73	+ 0,22		—	—
1838	Janr.	5	*v*	0317	— 1,5	— 0,67		—	—
	Febr.	1	*f*	0468	0	+ 0,12		—	*P*
		10	*v*	0515	19,5	+ 0,20		—	—
	März	11	*f*	0546	20,6	+ 0,36		—	—
		13	*v*	0484	20	+ 0,03		—	—
	Septr.	27	*f*	0369	48,4	— 0,82		5,18	*B*
		—	*v*	0526	48,4	+ 0,01		7,08	—
	Novb.	20	*f*	0517	13	+ 0,27		8,91	—
		—	*v*	0490	13	+ 0,12		7,77	—
	Decbr.	20	*f*	0634	18	+ 0,84		7,12	—
		—	*v*	0617	18	+ 0,75		7,29	—
1839	Febr.	19	*v*	0648	20	+ 0,90		6,24	—
		—	*f*	0672	20	+ 1,03		7,09	—
	Octb.	16	*v*	0489	43	— 0,14		7,72	*S*
		—	*f*	0503	43	— 0,07		8,27	—
		17	*f*	0465	42,5	— 0,26		7,50	—
		—	*v*	0488	42,5	— 0,14		6,45	—
		29	*v*	0323	28	— 0,89		6,64	—
		—	*f*	0341	28	— 0,79		7,51	—
	Novbr.	1	*f*	0406	29	— 0,46		6,40	—
		—	*v*	0356	29	— 0,72		7,10	*B*
1840	Juli	30	*f*	0549	44,7	+ 0,16		7,20	*S*
		—	*v*	0482	44,7	— 0,19		4,68	—
	Aug.	15	*v*	0563	53,7	+ 0,16		5,70	—
		—	*f*	0561	53,7	+ 0,15		6,91	—
	Septr.	3	*v*	0624	59	+ 0,43		6,02	—
		—	*f*	0538	59	— 0,02		7,86	—
Mittel. Beobb. von 1830				43,05048	22,30	. . . . .	304	6,13	5 & 5 Beobb.
spätere Beobb.				04991	32,91	. . . . .		6,94	30 & 22 —

η — *c* Plejadum.

				R				
1829	Novbr.	26	*f*	31,3105	12°	— 0,″10	303° 59′,54	*B*
	Decbr.	3	*v*	3187	3	+ 0,39	58,43	—
1830	Janr.	12	*f*	3073	11,5	— 0,26	59,38	—
		20	*f*	3091	15	— 0,19	59,75	—
	Juni	29	*f*	3223	70	+ 0,16	57,55	—
1836	Novbr.	10	*f*	3052	29	— 0,66	—	—
		11	*v*	2969	28	— 1,10	—	—
	Decbr.	15	*v*	3194	33	+ 0,06	—	—
1837	Juli	20	*v*	3178	66	— 0,23	—	—
1838	Janr.	5	*v*	3037	— 1,5	— 0,55	—	—
	Febr.	1	*f*	3140	0	— 0,02	—	*P*
		12	*v*	3180	14,5	+ 0,10	—	—
	Septbr.	28	*f*	3175	46,6	— 0,12	59,10	*B*
		—	*v*	3165	46,6	— 0,18	58,47	—
	Novbr.	20	*v*	3155	13	— 0,02	59,99	—
		—	*f*	3188	13	+ 0,16	60,52	—
	Decbr.	20	*v*	3273	17	+ 0,58	59,63	—
		—	*f*	3249	17	+ 0,45	59,59	—
1839	Febr.	20	*v*	3268	23	+ 0,52	59,34	—
		—	*f*	3282	23	+ 0,59	59,30	—
	Octb.	17	*v*	3159	41,3	— 0,18	60,64	*S*
		—	*f*	3195	41,3	+ 0,01	60,33	—
		20	*f*	3212	40,3	+ 0,10	59,71	—
		—	*v*	3201	40,3	+ 0,06	58,93	—
		30	*v*	3184	27,6	+ 0,04	59,66	—
		—	*f*	3175	27,6	0,00	59,71	—
	Novbr.	1	*v*	3088	28	— 0,47	60,50	*B*
		—	*f*	3128	28	— 0,26	59,17	*S*
1840	Juli	29	*f*	3243	53,8	+ 0,19	59,04	—
		—	*v*	3188	53,8	— 0,10	58,60	—
	Aug.	12	*v*	3230	57,9	+ 0,10	58,49	—
		—	*f*	3239	57,9	+ 0,15	60,83	—
	Septbr.	3	*f*	3251	58	+ 0,21	60,04	—
		—	*v*	3317	58	+ 0,56	58,87	—
Mittel. Beobb. von 1830				31,31358	22,30	. . . . .	303 58,93	5 & 5 Beobb.
spätere Beobb.				31833	33,88	. . . . .	59,57	29 & 22 —

$\eta - k$ Plejadum.

1829	Novbr.	26	*f*	R 39,1537	12°	+ 0,″26	320° 33′,48	*B*	
	Decbr.	1	*f*	1555	21	+ 0,29	34,25	—	
1830	Janr.	21	*f*	1381	10	— 0,55	32,94	—	
1838	Janr.	5	*v*	1289	— 1,5	— 0,71	—	—	
	Febr.	1	*f*	1480	0	+ 0,29	—	*P*	
		10	*v*	1433	19,5	— 0,11	—	—	
	März	11	*f*	1467	20,6	+ 0,06	—	—	
		13	*v*	1452	20	— 0,01	—	—	
	Septr.	27	*f*	1537	48,4	+ 0,21	32,92	*B*	
		—	*v*	1406	48,4	— 0,48	33,93	—	
	Novbr.	20	*f*	1419	11,5	— 0,12	35,56	—	
		—	*v*	1398	11,5	— 0,23	34,87	—	
1839	Febr.	19	*v*	1577	22	+ 0,63	33,85	—	
		—	*f*	1509	22	+ 0,27	34,60	—	
		20	*f*	1530	23	+ 0,38	34,39	—	
		—	*v*	1567	23	+ 0,57	33,77	—	
	Octbr.	18	*v*	1487	40	+ 0,02	34,86	*S*	
		—	*f*	1513	40	+ 0,15	32,44	—	
		20	*v*	1408	39,3	— 0,08	34,16	—	
		—	*f*	1413	39,3	— 0,37	34,38	—	
		30	*v*	1357	23,5	— 0,54	33,29	—	
		—	*f*	1412	23,5	— 0,25	34,55	—	
	Novbr.	2	*v*	1438	30,2	— 0,17	35,54	—	
		—	*f*	1398	30,2	— 0,38	34,98	—	
1840	Juli	27	*f*	1480	52,9	— 0,12	35,12	—	
		29	*v*	1574	54	+ 0,37	33,02	—	
	Aug.	4	*f*	1441	54,9	— 0,34	33,69	—	
		—	*v*	1526	54,9	+ 0,11	33,50	—	
	Septr.	13	*v*	1621	56,3	+ 0,60	34,01	—	
		—	*f*	1558	56,3	+ 0,27	36,16	—	
Mittel Beobb. von 1830				39,14910	14,33	. . . . .	320 33,59	3 & 3 Beobb.	
spätere Beobb.				14722	31,99	. . . . .	34.25	27 & 22 —	

η — *l* Plejadum.

			R				
1829	Novbr. 26	*f*	36,3768	12°	+ 0,″38	321° 27,′32	*B*
	Decbr. 1	*f*	3665	21	— 0,23	27,53	—
1830	Janr. 21	*f*	3674	15	— 0,14	27,23	—
1838	Febr. 1	*f*	3782	0	+ 0,37	—	*P*
	12	*v*	3779	14,5	+ 0,25	—	—
	Septr. 27	*f*	3771	48,4	— 0,04	25,68	*B*
	—	*v*	3698	48,4	— 0,44	26,52	—
	Novb. 20	*f*	3762	11,5	+ 0,18	26,81	—
	—	*v*	3649	11,5	— 0,42	25,69	—
1839	Janr. 3	*f*	3843	20	+ 0,54	27,99	—
	—	*v*	3805	20	+ 0,34	27,72	—
	Febr. 20	*v*	3859	20	+ 0,63	27,54	—
	—	*f*	3860	20	+ 0,63	27,56	—
	Octb. 18	*f*	3689	39	— 0,41	30,13	*S*
	—	*v*	3732	39	— 0,18	29,28	—
	20	*f*	3759	38	— 0,03	28,47	—
	—	*v*	3719	38	— 0,24	28,28	—
	30	*f*	3674	23,5	— 0,37	26,71	—
	—	*v*	3702	23,5	— 0,23	26,04	—
	Novbr. 2	*f*	3672	30	— 0,43	28,09	—
	—	*v*	3742	30	— 0,07	27,30	—
1840	Juli 27	*f*	3815	52,9	+ 0,16	29,86	—
	—	*v*	3715	52,9	— 0,37	28,52	—
	Aug. 4	*f*	3663	54,9	— 0,66	27,45	—
	—	*v*	3806	54,9	+ 0,09	27,00	—
	Septbr. 3	*v*	3877	56,3	+ 0,46	27,08	—
	—	*f*	3839	56,3	+ 0,26	29,33	—
Mittel. Beobb. von 1830			36,37023	16,00	. . . . .	321 27,36	3 & 3 Beobb.
spätere Beobb.			37588	33,48	. . . . .	27,68	24 & 22 —

η — d Plejadum.

				R				
1829	Novbr. 30	*f*	20,9282	32°	+ 0,″49	238° 30′,75	*B*
	Decbr. 21	*v*	9230	10	+ 0,31	31,98	—
1830	Janr. 12	*f*	9080	11,5	— 0,50	30,13	—
	20	*f*	9121	15	— 0,29	31,55	—
1836	Novbr. 11	*v*	9116	28	— 0,46	—	—
1838	Febr. 12	*v*	9138	14,5	— 0,28	—	*P*
	Septbr. 28	*f*	9190	46,5	— 0,14	31,25	*B*
	—	*v*	9202	46,5	— 0,07	29,43	—
	Novbr. 21	*f*	9212	19	+ 0,09	34,21	—
	—	*v*	9209	19	+ 0,08	32,65	—
1839	Janr. 3	*v*	9232	20	+ 0,20	31,30	—
	—	*f*	9247	20	+ 0,27	31,78	—
	Febr. 20	*f*	9294	20	+ 0,52	32,28	—
	—	*v*	9248	20	+ 0,28	31,34	—
	Octb. 18	*v*	9168	39	— 0,22	32,63	*S*
	—	*f*	9201	39	— 0,05	32,13	—
	28	*v*	9222	26	+ 0,12	31,94	—
	—	*f*	9234	26	+ 0,18	32,53	—
	Novbr. 1	*f*	9257	31,5	+ 0,28	32,82	—
	—	*v*	9235	31,5	+ 0,16	32,12	*B*
	2	*v*	9143	29,1	— 0,31	31,02	*S*
	—	*f*	9236	29,1	+ 0,17	33,46	—
1840	Juli 29	*v*	9210	53,3	— 0,06	29,17	—
	—	*f*	9227	53,3	+ 0,03	32,82	—
	Aug. 12	*f*	9180	56	— 0,23	33,86	—
	—	*v*	9165	56	— 0,31	32,05	—
	Septr. 4	*f*	9191	58,4	— 0,19	31,91	—
	—	*v*	9216	58,4	— 0,05	29,94	—
Mittel. Beobb. von 1830			20,91783	17,13	. . . . .	238 31,10	4 & 4 Beobb.
spätere Beobb.			92072	35,00	. . . . .	31,94	24 & 22 —

η — s Plejadum.

			R				
1829 Decbr.	1	*f*	28,2411	21°	+ 0,″48	125° 46,′09	*B*
	21	*v*	2312	10	+ 0,02	46,42	—
1830 Janr.	12	*f*	2216	11,5	— 0,50	47,06	—
1836 Novb.	11	*v*	2200	28	— 1,20	—	—
1838 Febr.	23	*v*	2394	7,8	— 0,06	—	*P*
März	2	*f*	2410	18,3	— 0,04	—	—
Octbr.	1	*v*	2415	35	— 0,10	44,91	*B*
	—	*f*	2419	35	— 0,08	44,16	—
Decbr.	16	*f*	2445	21	+ 0,13	47,15	—
	—	*v*	2471	21	+ 0,27	48,23	—
	17	*f*	2509	18	+ 0,49	46,77	—
	—	*v*	2494	18	+ 0,41	47,11	—
1839 Febr.	25	*v*	2444	12	+ 0,18	46,36	—
	—	*f*	2487	12	+ 0,40	48,39	—
Octb.	20	*v*	2466	42	+ 0,12	47,02	*S*
	—	*f*	2434	42	— 0,04	47,35	—
	29	*f*	2433	30,5	+ 0,02	46,44	—
	—	*v*	2402	30,5	— 0,15	47,54	—
	30	*f*	2376	24,2	— 0,25	45,64	—
	—	*v*	2377	24,2	— 0,25	47,06	—
Novbr.	1	*v*	2443	29,8	+ 0,07	46,60	*B*
	—	*f*	2382	29,8	— 0,25	45,04	*S*
1840 Juli	30	*f*	2480	48,3	+ 0,17	45,72	—
	—	*v*	2358	48,3	— 0,48	43,07	—
Septr.	1	*f*	2523	57,1	+ 0,34	49,08	—
	—	*v*	2592	57,1	+ 0,70	47,02	—
	4	*f*	2437	57,4	— 0,11	46,43	—
	—	*v*	2403	57,4	— 0,29	45,23	—
Mittel. Beobb. von 1830			28,23130	14,17	. . . . .	125 46,52	3 & 3 Beobb.
spätere Beobb.			24318	32,19	. . . . .	46,47	25 & 22 —

η — f Plejadum.

				R				
1829	Novb.	26	f	26,2938	12°	+ 0,″31	96° 53,′70	*B*
	Decbr.	1	f	2911	21	+ 0,12	52,72	—
		21	v	2833	10	— 0,24	52,01	—
1830	Janr.	12	f	2846	11,5	— 0,18	52,70	—
1836	Novb.	11	v	2922	28	— 0,32	—	—
1838	Febr.	23	v	3066	7,8	+ 0,55	—	*P*
	März	2	f	2922	18,3	— 0,27	—	—
	Octb.	1	v	2987	35	— 0,01	51,21	*B*
		—	f	2972	35	— 0,09	50,88	—
	Decbr.	16	f	3045	21	+ 0,37	53,02	—
		—	v	3051	21	+ 0,40	52,41	—
		17	f	3009	15	+ 0,21	53,75	—
		—	v	2977	15	+ 0,04	52,89	—
1839	Febr.	22	v	3012	21	+ 0,20	52,31	—
		—	f	2974	21	— 0,01	52,75	—
	Juni	18	f	2984	74	— 0,23	—	—
		—	v	3019	74	— 0,05	—	—
	Octbr.	19	f	3049	42	+ 0,28	52,25	*S*
		—	v	3073	42	+ 0,41	51,64	—
		29	v	2886	26,7	— 0,50	52,40	—
		—	f	2866	26,7	— 0,61	52,05	—
	Novb.	2	f	2916	28,5	— 0,35	52,73	—
		—	v	2887	28,5	— 0,51	52,90	—
1840	Juli	29	v	2898	53,4	— 0,05	50,39	—
		—	f	2892	53,4	— 0,08	53,71	—
	Septr.	1	v	3082	56,7	+ 0,38	52,51	—
		—	f	3076	56,7	+ 0,24	53,42	—
		4	v	3001	57,1	— 0,05	52,92	—
		—	f	3000	57,1	— 0,06	52,68	—
Mittel. Beobb. von 1830				26,28820	13,63	.....	96 52,78	4 & 4 Beobb.
spätere Beobb.				29906	36,60	.....	52,44	25 & 20 —

η — h Plejadum.

			R				
1829 Novbr.	26	*f*	26,5087	12°	— 0,19	84° 31,92	*B*
Decbr.	1	*f*	5218	21	+ 0,45	32,25	—
	21	*v*	5117	10	— 0,02	31,93	—
1830 Janr.	12	*f*	5079	11,5	— 0,23	32,46	—
1836 Novb.	11	*v*	5052	28	— 0,70	—	—
1838 Febr.	23	*v*	5235	7,8	+ 0,38	—	*P*
März	2	*f*	5106	18,3	— 0,36	—	—
Octobr.	1	*v*	5174	35	— 0,09	29,33	*B*
	—	*f*	5208	35	+ 0,09	30,58	—
Decbr.	16	*v*	5194	21	+ 0,09	32,27	—
	—	*f*	5197	21	+ 0,11	32,12	—
	17	*v*	5232	18	+ 0,31	30,67	—
	—	*f*	5200	18	+ 0,14	32,73	—
1839 Febr.	22	*f*	5277	20	+ 0,53	31,75	—
	—	*v*	5256	20	+ 0,42	33,11	—
Octbr.	19	*v*	5235	42	+ 0,20	32,39	*S*
	—	*f*	5192	42	— 0,03	33,33	—
	28	*f*	5195	25,2	+ 0,07	35,04	—
	—	*v*	5175	25,2	— 0,03	32,80	—
	29	*f*	5125	27,5	— 0,31	31,15	—
	—	*v*	5115	27,5	— 0,36	32,05	—
Novbr.	2	*v*	5125	27,7	— 0,31	32,21	—
	—	*f*	5112	27,7	— 0,38	31,79	—
1840 Juli	30	*v*	5202	48,4	— 0,01	29,75	—
	—	*f*	5174	48,4	— 0,16	32,04	—
Septr.	1	*f*	5248	56,4	+ 0,19	32,56	—
	—	*v*	5257	56,4	+ 0,23	31,48	—
	4	*v*	5230	57,0	+ 0,09	30,91	—
	—	*f*	5195	57,0	— 0,10	31,35	—
Mittel. Beobb. von 1830			26,51253	13,63	.....	84 32,14	4 & 4 Beobb.
spätere Beobb.			51884	32,42	.....	31,88	25 & 22 —

2.

Die in der Columne für den Positionswinkel nicht ausgefüllten Stellen deuten nicht sowohl auf fehlende, oder an sich weniger zuverlässige Beobachtungen, als auf fehlende Mittel zu ihrer sichern Reduction. Man sieht aus der oben (Abh. II. Taf. V) mitgetheilten Zusammenstellung aller, von der Aufstellung des Heliometers an bis zum Ende von 1840 gemachten Bestimmungen des Indexfehlers seines Positionskreises, dass diese Bestimmungen erst von Sept. 1838 an *häufiger* gemacht worden sind; früher hielt ich eine weniger häufige Wiederholung für hinreichend, indem ich den Indexfehler für beständiger hielt als er ist, auch nicht so weit als die Plejadensterne voneinander entfernte Gegenstände beobachtete und daher wenigere Veranlassung hatte, die äusserste erreichbare Sicherheit der Reductionselemente der Positionswinkel zu wünschen. Ich habe, aus diesem Grunde, die späteren Beobachtungen dieser Art nicht mit früheren, weniger sicheren, vermischen wollen und diese daher weggelassen; jedoch habe ich die in die Jahre 1829 und 1830 fallenden nicht unterdrückt, sowohl weil ich die Bestimmung des Indexfehlers für diese Zeit für ziemlich genügend halte, als auch weil diese, 10 Jahre älteren Beobachtungen eine Andeutung der Kleinheit der aus eigenen Bewegungen der Sterne entstehenden Änderungen geben können.

Wenn man die angeführten Unterschiede der einzelnen Beobachtungen der Entfernungen eines Sternenpaars von dem mittleren Resultate aller betrachtet, so bemerkt man, dass sie einigemale weit grösser sind, als die Beobachtungsart erwarten lässt. Man findet dieses fast nur bei heftiger Kälte, selten wenn das Thermometer höher als der Gefrierpunkt stand. Ich glaube, dass der Grund solcher ungewöhnlich grossen Fehler grösstentheils in der von der Kälte erzeugten Verhärtung des Öls an der Mikrometerschraube gesucht werden muss; aber das bei heftiger Kälte immer sehr grosse Zittern der Sterne mag auch dazu beigetragen haben. Den mittleren Fehler einer Beobachtung der Entfernung habe ich durch die angeführten Beobachtungen $= \pm 0^{s},007238 = \pm 0'',3829$ gefunden.

Die mittleren Resultate der Beobachtungen für 1840, sowohl die aus den früheren, als die aus den späteren abgesondert gezogenen,

werde ich jetzt zusammenstellen, nachdem die in ausgeglichenen Windungen der Schraube angegebenen und von dem optischen Einflusse schon befreieten Entfernungen, durch Multiplication mit

$$\frac{52''{,}89329}{1+(\tau-50)\,0{,}0000037765}$$

in Kreistheile verwandelt worden sind.

	Entfernungen.					*Positionswinkel.*				
	Frühr. Beobb.		Spätr. Beobb.		Unterschied.	Frühr. Beobb.		Spätr. Beobb.		Unterschied.
$\eta-g$ Plejadum	2297″,901	2	2298″,475	29	+0″,574	285° 58′,27	2	285° 58′,62	22	+0′,35
$-b$ —. . . .	2143,354	5	2143,420	35	+0,066	269 58,65	3	269 58,92	22	+0,27
$-e$ —. . . .	2277,320	5	2277,200	30	−0,120	304 6,13	5	304 6,94	22	+0,81
$-c$ —. . . .	1656,452	5	1656,630	29	+0,178	303 58,93	5	303 59,57	22	+0,64
$-k$ —. . . .	2071,004	3	2070,768	27	−0,236	320 33,59	3	320 34,25	22	+0,66
$-l$ —. . . .	1923,989	3	1924,159	24	+0,170	321 27,36	3	321 27,68	22	+0,32
$-d$ —. . . .	1106,550	4	1106,629	24	+0,079	238 31,10	4	238 31,94	22	+0,84
$-s$ —. . . .	1493,448	3	1493,976	25	+0,528	125 46,52	3	125 46,47	22	−0,05
$-f$ —. . . .	1390,660	4	1391,114	25	+0,454	96 52,78	4	96 52,44	20	−0,34
$-h$ —. . . .	1402,528	4	1402,762	25	+0,234	84 32,14	4	84 31,88	22	−0,26

Wenn man den Ort von η *Plejadum* für 1840

$$AR = 54^{\circ}29'45''{,}46;\quad \text{Decl.} = +23^{\circ}36'16''{,}43$$

annimmt, erhält man aus den auf die *späteren* Beobachtungen allein gegründeten Bestimmungen:

	Unterschiede für 1840.			
	AR.	Decl.	AR. 1840.	Decl. 1840.
g Plejadum . .	−40′ 13″,076	+10′ 32″,666	53° 49′ 32″,38	23° 46′ 49″,10
b —.	−38 59,133	− 0 0,673	50 46,33	23 36 15,76
e —.	−34 20,251	+21 17,214	55 25,21	23 57 33,64
c —.	−25 0,414	+15 26,209	44 4 45,05	23 51 42,64
k —.	−23 57,727	+26 39,490	5 47,73	24 2 55,92
l —.	−21 50,393	+25 5,059	7 55,07	24 1 21,49
d —.	−17 9,438	− 9 37,681	12 36,02	23 26 38,75
s —.	+22 1,554	−14 33,376	51 47,01	2321 43 ,05
f —.	+25 6,957	− 2 46,498	54 52,42	23 33 29,93
h —.	+25 24,095	+ 2 13,686	55 9,56	23 38 30,19

3.

Beobachtungen von 42 kleineren Sternen der Plejaden.

Diese Beobachtungen sind von Herrn *Schlüter* gemacht; einige wenige davon, welche Herr *Plantamour* und ich gemacht haben, sind durch *P* und *B* bezeichnet. Ihre Resultate werde ich vollständig auf 1840 reducirt angeben; die Entfernungen nicht zuerst in Schraubenwindungen, sondern sogleich in Secunden ausgedrückt. Denn das Interesse der ersten Art der Angabe, welches aus der Benutzung der Beobachtungen der 10 helleren Sterne zur Ausmittelung des Einflusses der Wärme auf die Messungen und zur Bestimmung des Werthes einer Schraubenwindung entstand, ist hier nicht vorhanden.

m Plejadum.

Dieser Stern ist zu weit von η Plej. entfernt um unmittelbar damit verglichen werden zu können, wesshalb ihn Herr *S.* mit 5 anderen Sternen verglichen hat.

1. *g — m Plejadum.*

1841 Janr.	26	*v*	1999″,94	7° 39′,63	
	—	*f*	9,94	40,34	
Mittel			1999,94	7 39,985	$\alpha' - \alpha = +\ 4'\ 52'',18$; $\delta' - \delta = +\ 33'\ 2'',06$

2. *e — m Plejadum.*

1841 Febr.	22	*v*	1339″,08	357° 35′,20	
	—	*f*	9,51	36,92	
Mittel			1339,295	357 36,06	. . . . $= -\ 1\ 1,44$ . . . . $= +\ 22\ 18,12$

3. *c — m Plejadum.*

1841 Febr.	22	*v*	1781″,62	341° 26′,95	
	—	*f*	82,00	27,82	
Mittel			1781,81	341 27,385	. . . . $= -10\ 20,75$ . . . . $= +\ 28\ 9,30$

4. *k — m Plejadum.*

1841 Febr.	18	*v*	1192″,03	328° 28′,14	
	—	*f*	2,37	29,22	
Mittel			1192,20	328 28,68	. . . . $= -11\ 23,31$ . . . . $= +\ 16\ 56,28$

5. *l* — *m Plejadum.*

1841 Febr.	18	*v*	1334″,23	326° 20′,32	
	—	*f*	4,93	20,56	
Mittel			1334,58	326 20,44	$\alpha' - \alpha = -13'\,30''{,}82$; $\delta' - \delta = +18'\,30''{,}84$

Hieraus und aus den Unterschieden der verglichenen Sterne von η Plejadum, findet man die auf den letzteren bezogenen Unterschiede des Sterns *m*:

1	— 35′ 20″,90	+ 43′ 34″,73
2	21,69	35,33
3	21,16	35,51
4	21,04	35,77
5	21,21	35,90
Mittel.	— 35 21,20	+ 43 35,45

η — *Anonyma* 1.

1840 März	5	*v*	1701″,94	260° 42′,01	
		f	1,85	42,47	
1841 Febr.	15	*v*	1,75	42,79	
		f	1,22	43,91	
Mittel			1701,69	260 42,795	$\alpha' - \alpha = -20'\,32''{,}20$; $\delta' - \delta = -4'\,34''{,}61$

η — *Anonyma* 2.

1841 Febr.	18	*v*	2029″,05	308° 40′,42	
		f	9,12	40,63	
März	19	*v*	9,83	39,42	
		f	9,90	41,03	
Mittel			2029,475	308 40,38	$\alpha' - \alpha = -28'\,51''{,}47$; $\delta' - \delta = +21'\,8''{,}18$

η — *Anonyma* 3.

1840 März	5	*v*	1557″,13	266° 17′,75	
		f	7,59	18,89	
1841 Febr.	15	*v*	7,63	17,78	
		f	7,30	19,78	
Mittel			1557,41	266 18,55	$\alpha' - \alpha = -28'\,15''{,}91$; $\delta' - \delta = -1'\,40''{,}26$

η — *Anonyma* 4. *Piazzi III.* 135.

1840 März	22	*f*	1732″,93	297° 47′,38	
		v	2,78	49,57	
1841 Febr.	16	*v*	2,56	48,01	
		f	2,79	48,63	
Mittel			1732,765	297 48,40	$\alpha' - \alpha = -27'\,54''{,}06$; $\delta' - \delta = +13'\,28''{,}32$

η — *Anonyma* 5.

1841 Febr.	18	v	2397″,45	320° 50′,80	
		f	7,12	51,15	
März	19	v	8,13	50,69	
		f	8,00	49,82	
Mittel			2397,675	320 50,615	$\alpha'-\alpha = -27'\,35'',50$; $\delta'-\delta = +30'\,59'',23$

η — *Anonyma* 6.

1840 März	22	f	1613″,98	293° 23′,66	
		v	3,85	23,49	
1841 Febr.	16	v	4,09	21,85	
		f	3,41	21,90	
Mittel			1613,83	293 22,725	$\alpha'-\alpha = -26'\,57'',69$; $\delta'-\delta = +10'\,40'',39$

η — *Anonyma* 7.

1840 März	9	f	1355″,02	259° 6′,95	
		v	5,39	3,39	
1841 Febr.	15	f	4,74	6,23	
		v	4,76	4,56	
Mittel			1354,98	259 5,28	$\alpha'-\alpha = -24'\,11'',57$; $\delta'-\delta = -4'\,16'',50$

η — *Anonyma* 8.

1838 Decbr.	14	v	1080″,27	286° 34′,93	*P*
		f	80,48	41,70	*P*
1840 März	18	v	80,40	39,23	
		f	80,25	39,12	
1841 Febr.	16	v	79,62	38,86	
		f	79,85	39,20	
Mittel			1080,145	286 38,84	$\alpha'-\alpha = -18'\,49'',74$; $\delta'-\delta = +5'\,9'',44$

η — *Anonyma* 9.

1840 März	18	v	1045″,07	286° 11′,02	
		f	5,06	10,07	
1841 Febr.	16	v	4,88	8,20	
		f	4,39	11,77	
Mittel			1044,85	286 10,265	$\alpha'-\alpha = -18'\,15'',48$; $\delta'-\delta = +4'\,51'',00$

η — *Anonyma* 10.

1840 März	10	f	1002″,63	301° 45′,44	
		v	2,57	42,79	
1841 Febr.	12	v	2,49	44,45	
		f	2,29	45,90	
Mittel			1002,495	301 44,645	$\alpha'-\alpha = -15'\,30'',39$; $\delta'-\delta = +8'\,47'',44$

η — *Anonyma* 11.

1840 März	19	*f*	680″,30	268° 38′,14	
		v	80,59	35,62	
1841 Febr.	15	*v*	79,72	37,71	
		f	79,93	38,86	
Mittel			680,135	268 37,58	$\alpha' - \alpha = -12'22'',01$; $\delta' - \delta = -6'16'',31$

η — *Anonyma* 12. *Piazzi III.* 147.

1840 Febr.	29	*f*	1547″,27	344° 2′,26	
		v	7,47	0,41	
1841 Janr.	8	*v*	7,86	0,99	
		f	7,65	1,99	
Mittel			1547,56	344 1,41	$\alpha' - \alpha = -7'45'',58$; $\delta' - \delta = +24'47'',79$

η — *Anonyma* 13.

1840 März	9	*v*	521″,61	219° 54′,79	
		f	1,52	54,05	
1841 Febr.	12	*f*	1,20	56,69	
		v	1,17	58,27	
Mittel			521,375	219 55,95	$\alpha' - \alpha = -6'5'',07$; $\delta' - \delta = -6'39'',79$

η — *Anonyma* 14.

1840 Febr.	15	*v*	1250″,30	191° 39′,51	
		f	51,04	37,81	
1841 Janr.	26	*f*	49,55	37,43	
	28	*v*	49,69	37,28	
Mittel			1250,145	191 38,01	$\alpha' - \alpha = -4'34'',76$; $\delta' - \delta = -20'24'',46$

η — *Anonyma* 15.

1839 Decbr.	31	*f*	189″,77	295° 7′,84	
		v	89,67	4 58,09	
1840 Decbr.	27	*f*	90,21	5 13,13	
		v	89,63	5 9,51	
Mittel			189,82	295 7,14	$\alpha' - \alpha = -3'7'',58$; $\delta' - \delta = +1'20'',58$

η — *Anonyma* 16.

1840 März	2	*f*	1050″,08	188° 27′,72	
	5	*v*	50,04	28,44	
1841 Janr.	26	*f*	50,12	25,48	
	28	*v*	49,94	24,56	
Mittel			1050,045	188 26,55	$\alpha' - \alpha = -2'48'',06$; $\delta' - \delta = -17'18'',67$

η — *Anonyma* 17.

1839 März 14	*f*	1374,33	185° 42,21	
	v	4,45	40,76	
1840 Febr. 15	*v*	3,71	41,37	
	f	4,43	41,05	
Novbr. 4	*f*	3,56	39,54	
	v	3,97	37,17	
Mittel		1374,075	185 40,45	$\alpha'-\alpha = -\ 2'28'',05$; $\delta'-\delta = -22'47'',34$

η — *Anonyma* 18.

1839 Decbr. 31	*v*	180,15	311° 40,00	
	f	79,95	52,13	
1840 Decbr. 27	*v*	80,55	45,68	
	f	80,17	49,35	
Mittel		180,205	311 46,79	$\alpha'-\alpha = -\ 2'26'',67$; $\delta'-\delta = +\ 2'\ 0'',07$

η — *p Plejadum.*

1839 Decbr. 31	*f*	116,36	289° 6,21	
	v	6,73	288 56,35	
1840 Decbr. 27	*v*	6,08	289 9,02	
	f	7,14	10,39	
Mittel		116,80	289 5,65	$\alpha'-\alpha = -\ 2'\ 0'',46$; $\delta'-\delta = +\ 0'38'',21$

η — *Anonyma* 19.

1839 März 11	*v*	1092,87	185° 4,24	*B*
14	*v*	2,70	2,71	*B*
	f	2,73	2,69	*B*
1840 März 2	*f*	1,14	3,36	
5	*v*	1,71	3,20	
1841 Janr. 26	*f*	1,12	3,01	
Mittel		1092,045	185 3,35	$\alpha'-\alpha = -\ 1'44'',90$; $\delta'-\delta = -18'\ 7'',80$

η — *Anonyma* 20.

1839 März 14	*f*	1741,37	356° 57,17	*B*
	v	1,44	57,09	*B*
27	*v*	1,30	58,31	*B*
1840 März 10	*v*	0,29	56,44	
	f	0,52	57,43	
April 4	*v*	1,33	55,19	
	f	1,39	56,73	
1841 Febr. 11	*f*	0,50	57,46	
Mittel		1741,02	356 57,045	$\alpha'-\alpha' = -\ 1'41'',26$; $\delta'-\delta = +28'56'',55$

η — *Anonyma* 21.

1840 März	10	v	1985,51	358° 17′,43	
		f	5,84	17,34	
April	4	v	6,59	18,39	
		f	7,38	18,00	
1841 Febr.	6	v	5,18	16,10	
	11	f	5,68	17,10	
Mittel			1986,03	358 17,39	$\alpha'-\alpha = -\ 4'\ 4''{,}82$; $\delta'-\delta = +\ 33'\ 5''{,}15$

η — *Anonyma* 22.

1838 Novbr.	26	v	689,65	184° 23′,74	*P*
		f	9,42	30,52	*P*
1839 Febr.	28	v	8,67	32,19	*B*
		f	9,00	30,74	*B*
1840 Febr.	14	v	8,42	33,69	
		f	8,38	34,68	
Mittel			688,92	184 30,93	$\alpha'-\alpha = -\ 0'\ 59''{,}15$; $\delta'-\delta = -\ 11'\ 26''{,}78$

η — *Anonyma* 23.

1839 März	14	v	1537,32	180° 21′,30	*B*
		f	7,06	23,50	*B*
1840 Febr.	15	v	6,78	22,04	
		f	6,64	21,53	
Novbr.	4	f	6,60	19,71	
		v	6,42	19,08	
Mittel			1536,80	180 21,19	$\alpha'-\alpha = -\ 0'\ 10''{,}32$; $\delta'-\delta = -\ 25'\ 36''{,}77$

η — *Anonyma* 24. *Piazzi III.* 151.

1838 Novbr.	22	v	659,41	359° 39′,59	*P*
		f	9,56	39,42	*P*
1840 Janr.	2	v	9,52	36,33	
		f	9,51	38,78	
März	9	f	9,25	42,09	
	10	v	9,43	40,84	
	23	f	9,51	42,91	
		v	9,51	41,74	
Septr.	29	v	60,21	35,99	
		f	59,96	41,59	
Mittel			659,59	359 39,93	$\alpha'-\alpha = -\ 0'\ 4''{,}20$; $\delta'-\delta = +\ 10'\ 59''{,}58$

η — *Anonyma* 25.

1839 März 31	*f*	1786,85	175° 58,05	*B*	
	v	6,94	56,13	*B*	
1840 Febr. 15	*f*	5,21	55,68		
	v	5,03	54,55		
Octbr. 29	*v*	5,54	51,26		
	f	5,60	53,65		
Mittel		1785,86	175 54,89	$\alpha' - \alpha = +\ 2'18'',58$;	$\delta' - \delta = +\ 29'41'',32$

η — *Anonyma* 26.

1840 Febr. 15	*f*	2031,54	174° 3,60		
	v	1,56	1,79		
April 3	*v*	2,27	1,74		
	f	2,85	2,60		
Octb. 29	*v*	2,14	59,84		
	f	1,82	2,25		
Mittel		2032,03	174 1,97	$\alpha' - \alpha = +\ 3'50'',04$;	$\delta' - \delta = -\ 33'41'',02$

η — *Anonyma* 27.

1840 Febr. 29	*v*	979,10	37° 34,88		
	f	8,85	37,72		
1841 Febr. 11	*v*	9,22	36,02		
	f	9,12	34,77		
Mittel		979,07	37 35,85	$\alpha' - \alpha = +\ 10'52'',42$;	$\delta' - \delta = +\ 12'55'',73$

η — *Anonyma* 28.

1840 Febr. 14	*f*	2561,65	163° 7,29		
	v	1,37	4,86		
Octbr. 29	*f*	1,84	6,75		
	v	1,40	4,76		
1841 Janr. 28	*f*	1,53	7,51		
30	*v*	1,66	5,67		
Mittel		2561,575	163 6,14	$\alpha' - \alpha = +\ 13'30'',45$;	$\delta' - \delta = -\ 40'50'',98$

η — *Anonyma* 29. *Piazzi III.* 153.

1839 Novb. 7	*f*	1201,87	43° 10,81		
	v	1,96	8,66		
1840 Febr. 29	*v*	1,43	10,62		
	f	1,54	14,63		
Septr. 19	*f*	2,13	10,63		
	v	2,29	8,46		
Mittel		1201,87	43 10,635	$\alpha' - \alpha = +\ 14'58'',32$;	$\delta' - \delta = +\ 14'36'',45$

η — *Anonyma* 30. *Piazzi III.* 161.

1840 Janr. 2	*f*	1616″,53	118° 17′,26	
	v	7,03	13,65	
Febr. 11	*v*	6,90	16,18	
	f	6,81	17,37	
Octob. 28	*f*	5,70	16,07	
	v	5,83	13,85	
Mittel		1616,47	118 15,73	$\alpha' - \alpha = +25'52''{,}52$; $\delta' - \delta = -12'45''{,}41$

η — *Anonyma* 31.

1839 März 31	*v*	1808″,04	53° 49′,62	*B*
	f	8,11	50,16	*B*
Novb. 12	*f*	7,32	46,65	
	v	7,18	48,14	
1840 Septr. 23	*f*	7,46	47,25	
	v	7,96	43,93	
Mittel		1807,68	53 47,625	$\alpha' - \alpha = +26'33''{,}60$; $\delta' - \delta = +17'47''{,}79$

η — *Anonyma* 32.

1839 März 31	*v*	1833″,79	56° 25′,30	*B*
	f	4,26	26,73	*B*
Novb. 12	*f*	3,32	24,31	
	v	3,18	23,12	
1840 Septr. 23	*f*	2,91	23,78	
	v	3,35	21,08	
Mittel		1833,47	56 24,05	$\alpha' - \alpha = +27'48''{,}39$; $\delta' - \delta = +16'54''{,}61$

η — *Anonyma* 33.

1839 April 4	*f*	1680″,55	71° 27′,47	*B*
	v	0,19	26,24	*B*
Novb. 13	*v*	0,30	24,17	
	f	0,39	25,44	
1840 Septr. 28	*f*	79,35	23,81	
	v	9,47	22,28	
Mittel		1780,04	71 24,90	$\alpha' - \alpha = +28'58''{,}82$; $\delta' - \delta = +8'55''{,}45$

η — *Anonyma* 34. *Piazzi III.* 163.

1840 Febr. 14	v	2323″,57	126° 42′,10	
	f	3,86	44,16	
Octb. 29	v	4,18	40,97	
	f	4,38	42,04	
1841 Janr. 28	v	3,37	43,25	
	f	3,67	44,19	
Mittel		2323,84	126 42,785	$\alpha' - \alpha = +\ 33'\ 50'',00$; $\delta' - \delta = -\ 23'\ 9'',22$

η — *Anonyma* 35.

1839 Novbr. 13	f	1942″,23	74° 19′,58	
	v	1,81	18,86	
1840 Septr. 28	f	1,51	18,20	
	v	0,99	15,00	
1841 Janr. 8	f	0,25	18,75	
	v	1,32	18,70	
Mittel		1941,35	74 18,18	$\alpha' - \alpha = +\ 34'\ 6'',74$; $\delta' - \delta = +\ 8'\ 45'',24$

η — *Anonyma* 36.

1839 Novb. 13	f	2036″,10	77° 50′,19	
	v	36,01	48,83	
1840 Septb. 28	f	35,90	49,76	
	v	35,18	45,86	
1841 Janr. 8	f	35,05	51,26	
	v	35,43	47,53	
Mittel		2035,61	77 48,905	$\alpha' - \alpha = +\ 36'\ 12'',42$; $\delta' - \delta = +\ 7'\ 9'',66$

η — *Anonyma* 37. *Piazzi III.* 164.

1839 April 2	f	2201″,17	65° 45′,27	*B*
	v	1,19	43,77	*B*
Novbr. 12	f	0,29	43,30	
	v	0,21	41,09	
1840 Septr. 24	f	0,69	40,36	
	v	0,29	38,22	
Mittel		2200,64	65 42,00	$\alpha' - \alpha = +\ 36'\ 30'',91$; $\delta' - \delta = +\ 15'\ 5'',60$

η — *Anonyma* 38. *Piazzi III.* 165.

1839 Decbr. 31	f	2241″,20	113° 32′,44	
	v	0,77	31,67	
1840 Octb. 28	v	0,16	29,39	
	f	0,22	30,53	
Mittel		2240,59	113 31,01	$\alpha' - \alpha = +\ 37'\ 19'',97$; $\delta' - \delta = -\ 14'\ 54'',05$

η — Anonyma 39. *Piazzi III.* 171.

1839 Novbr. 12	*v*	2818″,87	59° 21′,79	
	f	18,81	22,07	
1740 Septr. 24	*v*	19,64	19,82	
	f	20,09	23,16	
Octbr. 29	*f*	19,31	22,82	
	v	18,95	20,08	
Mittel		2819,28	59 21,77	$\alpha' - \alpha = +44'11'',28$; $\delta' - \delta = +23'56'',72$

η — Anonyma 40. *Piazzi III.* 172.

1839 Novbr. 13	*v*	2832″,93	99° 43′,67	
	f	2,82	43,52	
Decbr. 19	*f*	1,74	43,00	
	v	1,70	42,77	
1840 Octb. 28	*f*	2,80	43,16	
	v	2,88	41,22	
Mittel		2832,48	99 42,89	$\alpha' - \alpha = +50'48'',25$; $\delta' - \delta = -7'57'',97$

4.

Die durch die angeführten Beobachtungen bestimmten Sterne sind die helleren von denen, welche sich innerhalb eines mit dem Halbmesser 47′ bis 48′ um *η Plejadum* beschriebenen Kreises befinden; nur der Stern *m* steht ausser diesem Kreise und der Stern *Anonyma* 16 ist nicht heller als mehrere andere in ihm stehende. Die Helligkeiten grösserer Sterne lassen sich bekanntlich, durch den Anblick welchen sie bei Nacht im Fernrohre gewähren, schwer richtig vergleichen; am Tage ist ihre Vergleichung leichter, wesshalb ich anführe, dass sie mir, am 18. Juni 1839, in der Reihefolge *η, f, b, c, e, h* erschienen, *d* und *g* aber damals nicht aufgesucht wurden. Die übrigen Sterne hat Herr *Schlüter* am 15. März 1841, bei Nacht miteinander verglichen und sie in folgende Classen eingetheilt:

	7gr.	28.
7.	8.	*k, l, s, p,* 12, 34, 40.
	8.	1, 4, 7, 10, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 29, 31, 32, 37, 38, 39.
8.	9.	2, 8, 9, 11, 13, 15, 21, 23, 25, 27, 30, 33.
	9.	3, 5, 6, 14, 26, 35, 36.
9.	10.	16.

Die Sicherheit der Bestimmungen der auf η Plejadum bezogenen Unterschiede der Geradenaufsteigungen und Abweichungen der 10 häufiger beobachteten Sterne (§ 2) wird wenig zu wünschen übrig lassen; allein die 42 weniger häufig beobachteten (§ 3) sind, wie aus der Anführung ihrer einzelnen Beobachtungen hervorgeht, nicht so sicher bestimmt, dass man *alle* für innerhalb einer halben Secunde richtig halten dürfte. Zu den § 2 angegebenen Ursachen des Vorkommens grösserer Beobachtungsfehler gesellt sich auch die Schwierigkeit, welche die Vergleichung von Sternen von so verschiedenen Helligkeiten wie η Plejadum und die meisten der gegenwärtigen sie zeigen, immer darbietet wenn die Luft unruhig ist, was, in der Jahrszeit in welche die Beobachtungen fallen, mit seltenen Ausnahmen der Fall ist. — Indessen würde es sehr schwer sein, denselben Grad von Sicherheit der relativen Bestimmungen der mit η Plej. verglichenen 52 Sterne, welchen das mitgetheilte Verzeichniss gewährt, durch Meridianbeobachtungen herbeizuführen.

5.

Bestimmung von 27 Sternen der Plejaden durch Meridianbeobachtungen.

Diese Sterne habe ich vom J. 1820 an, mit dem *Reichenbachschen* Meridiankreise so häufig beobachtet, als die Witterung und andere Beschäftigungen es erlaubten. Später, von 1831 an, hat Herr Doctor *Busch* die Meridianbeobachtungen übernommen, und nicht versäumt, die meinigen der Plejaden noch zu vervollständigen. Die Reduction aller dieser Beobachtungen auf 1825 hat folgendes Verzeichniss ergeben, in welchem die eigenen Bewegungen durch Vergleichung mit den Örtern für 1755, so wie sie in den *Fundamentis Astronomiae pro A.* 1755 enthalten sind, erlangt wurden.

	Grösse	A. R. 1825.	Jährl. Praecess. 1825	Saec. Änd.	Eigene Bewegung.	Decl. 1825.	Jährl. Praecess. 1825	Saec. Änd.	Eigene Bewegung.	Anz. d. Beobb.	
16 *g* (Celaeno)	5.6	53° 36′ 17″,16	53″,149	+0″,273	+0″,076	23° 43′ 52″,41	11″,901	−0″,422	−0″,081	11	11
17 *b* (Electra)	4.5	37 29,67	53,092	+0,272	+0,016	23 33 19,58	11,895	−0,421	−0,055	10	10
18 *m*	7	41 3,60	53,342	+0,278	−0,025	24 16 55,09	11,878	−0,424		10	10
19 *e* (Taygeta)	5	42 6,59	53,218	+0,275	0,000	23 54 37,60	11,874	−0,423	−0,055	9	7
Piazzi III. 135	8	48 31,03	53,184	+0,273		23 46 47,86	11,844	−0,423		3	3
20 *c* (Maja)	5	51 27,06	53,200	+0,273	+0,025	23 48 47,13	11,830	−0,423	−0,060	6	6
n	8	52 29,95	52,793	+0,262		22 35 33,54	11,825	−0,420		5	5
21 *k* (Asterope)	7.8	52 32,62	53,264	+0,275	+0,104	23 59 59,21	11,824	−0,424	−0,072	5	5
22 *l*	7.8	54 37,70	53,259	+0,274	+0,021	23 58 24,68	11,815	−0,424	−0,074	3	3
23 *d* (Merope)	5	59 20,37	53,071	+0,269	+0,090	23 23 44,18	11,793	−0,423	−0,053	6	5
Piazzi III. 147	7.8	54 8 39,40	53,279	+0,273		23 58 8,88	11,749	−0,426		5	5
24 *p*	7.8	14 28,99	53,151	+0,269	+0,017	23 34 0,82	11,721	−0,425		5	5
25 η (Alcyone)	3.4	16 27,80	53,150	+0,269	+0,007	23 33 22,32	11,711	−0,425	−0,072	18	16
Anonyma 28.	7	30 1,26	52,941	+0,262	−0,026	22 52 32,29	11,647	−0,425	−0,066	2	2
Piazzi III. 153	8	31 28,78	53,255	+0,270	+0,068	23 47 58,06	11,640	−0,427		2	2
26 *s*	7.8	38 34,06	53,101	+0,265	+0,039	23 18 50,93	11,606	−0,427		12	12
27 *f* (Atlas)	4.5	41 34,74	53,172	+0,267	+0,001	23 30 37,47	11,593	−0,428	−0,087	14	14
28 *h* (Plejone)	5.6	41 51,36	53,201	+0,268	−0,008	23 35 37,74	11,591	−0,428	−0,095	12	12
Piazzi III. 161	8.9	42 18,77	53,117	+0,265		23 20 38,01	11,589	−0,427		3	3
— . . . 163	7.8	50 25,20	53,070	+0,263		23 10 15,13	11,550	−0,427		2	2
— . . . 164	8	53 2,14	53,291	+0,269		23 48 30,18	11,538	−0,429		3	3
— . . . 165	8	53 48,85	53,121	+0,264		23 18 32,22	11,534	−0,428		2	2
— . . . 170	7	57 10,87	53,723	+0,279		25 2 34,63	11,518	−0,433		7	7
— . . . 171	8	55 0 36,95	53,352	+0,269		23 57 20,89	11,501	−0,431		4	4
— . . . 172	7.8	7 17,34	53,180	+0,264		23 25 28,97	11,469	−0,430		2	2
— . . . 175	7.8	14 19,76	53,605	+0,274		24 37 33,98	11,436	−0,434		2	2
— . . . 179	7.8	26 11,95	53,626	+0,273		24 38 20,37	11,379	−0,435		3	3

Zur Beurtheilung des Maasses der Sicherheit dieser Bestimmungen führe ich an, dass sich der mittlere Fehler einer Beobachtung der AR. $= \pm 1''{,}7996 \operatorname{Sec} \delta$, der Declination $= \pm 1''{,}3304$ ergeben hat.

6.

Wenn man die durch die Heliometerbeobachtungen bestimmten Unterschiede der Geradenaufsteigung und Abweichung zwischen η und den übrigen Sternen der Plejaden als richtig annehmen will, so kann man die Geradeaufsteigung und Abweichung jedes der letzteren auf

den ersteren übertragen, und diesen Stern durch das arithmetische Mittel aus allen Meridianbeobachtungen sicherer bestimmen, als durch die ihn unmittelbar betreffenden allein. Ich habe daher die Angaben des Verzeichnisses des vorigen §'s auf 1840 reducirt und ihnen die durch das Heliometer bestimmten Unterschiede mit entgegengesetzten Zeichen hinzugefügt; die dadurch erlangten verschiedenen Bestimmungen von η und ihre Unterschiede von dem arithmetischen Mittel aus allen führe ich hier an. Die letzteren sind, unter der gemachten Annahme der Richtigkeit der Heliometerbeobachtungen, die Summen der Fehler, welche die Meridianbeobachtungen und ihre Reduction auf 1840 übriggelassen haben.

	AR. 1840.		Fehler.	Decl. 1840.		Fehler.
g	54° 29′ 48″,92	11	+ 2″,20	23° 36′ 18″,06	11	+ 1″,15
b	45,73	10	— 0,99	17,38	10	+ 0,47
m	45,24	10	— 1,48	16,96	10	+ 0,05
e	45,42	9	— 1,30	17,20	7	+ 0,29
Anon. 4. . . .	43,16	3	— 3,56	16,72	3	— 0,19
c	46,15	6	— 0,57	16,99	6	+ 0,08
k	51,12	5	+ 4,40	15,51	5	— 1,40
l	47,55	3	+ 0,83	15,26	3	— 1,65
d	47,53	6	+ 0,81	17,48	5	+ 0,57
Anon. 12. . .	44,47	5	— 2,25	16,85	5	— 0,06
p	47,27	5	+ 0,55	17,95	5	+ 1,04
η	45,46	18	— 1,26	16,43	16	— 0,48
Anon. 28. . .	44,83	2	— 1,89	16,51	2	— 0,40
— 29. . .	50,61	2	+ 3,89	15,75	2	— 1,16
a	49,91	12	+ 3,19	17,92	12	+ 1,01
f	45,68	14	— 1,04	16,08	14	— 0,83
h	45,46	12	— 1,26	16,91	12	— 0,90
Anon. 30. . .	43,30	3	— 3,42	16,78	3	— 0,13
— 34. . .	51,55	2	+ 3,83	17,12	2	+ 0,21
— 37. . .	50,90	3	+ 4,18	17,17	3	+ 0,26
— 38. . .	45,99	2	— 0,73	18,80	2	+ 1,89
— 39. . .	46,25	4	— 0,47	16,20	4	— 0,71
— 40. . .	50,09	2	+ 3,37	18,49	2	+ 1,58
Mittel	54 29 46,72	149		23 36 16,91	144	

Legt man diesen Ort des Sterns η zum Grunde, so erhält man folgendes, übrigens nur auf Heliometerbeobachtungen gegründetes

Verzeichniss von 53 Sternen der Plejaden.

	Grösse.	A. R. 1840.	Jährl. Praecess. 1840	Jährl. Praecess. Secc. Änd.	Eigene Bewegung.	Decl. 1840.	Jährl. Praecess. 1840	Jährl. Praecess. Secc. Änd.	Eigene Bewegung.	Anzahl.
16 *g* (Celaeno)	5.6	3h 49m 33,64s	3,190s	+ 0,″273	+0,″050	23° 46′ 49,″58	11,″838	− 0,″423	−0,″078	–
17 *b* (Electra)	4.5	50 47,59	53,132	+ 0,271	+0,028	23 36 16,24	11,832	− 0,423	−0,069	–
18 *m*	7	54 25,52	53,384	+ 0,277	−0,004	24 19 52,36	11,815	− 0,425		10
19 *e* (Taygeta)	5	55 26,47	53,259	+ 0,274	+0,015	23 57 34,12	11,810	− 0,424	−0,058	–
Anonyma 1. .	8	59 14,52	53,119	+ 0,270		23 31 42,30	11,792	− 0,423		4
– 2. .	8.9	54 0 55,25	53,267	+ 0,274		23 57 25,09	11,784	− 0,425		4
– 3. .	9	1 30,81	53,139	+ 0,270		23 34 36,65	11,782	− 0,424		4
– 4. .	8	1 52,66	53,225	+ 0,272		23 49 45,23	11,780	− 0,425		4
– 5. .	9	2 11,22	53,325	+ 0,275		24 7 16,14	11,778	− 0,425		4
– 6. .	9	2 49,03	53,210	+ 0,272		23 46 57,30	11,775	− 0,424		4
20 *c* (Maja)	5	4 46,31	53,240	+ 0,272	+0,032	23 51 43,12	11,766	− 0,425	−0,062	–
Anonyma 7.	8	5 35,15	53,131	+ 0,270		23 32 0,41	11,762	− 0,424		4
21 *k* (Asterope)	7.8	5 48,99	53,305	+ 0,274	+0,051	24 2 56,40	11,761	− 0,425	−0,057	–
22 *l*	7.8	7 56,33	53,300	+ 0,274	+0,011	24 1 21,97	11,751	− 0,425	−0,054	–
Anonyma 8.	8.9	10 56,98	53,192	+ 0,271		23 41 26,35	11,737	− 0,425		6
– 9. .	8.9	11 31,24	53,191	+ 0,270		23 41 7,91	11,734	− 0,425		4
23 *d* (Merope)	5	12 37,28	53,111	+ 0,268	+0,070	23 26 39,23	11,729	− 0,425	−0,060	–
Anonyma 10	8	14 15,83	53,217	+ 0,271		23 45 4,35	11,721	− 0,426		4
– . . . 11	8.9	17 24,71	53,171	+ 0,269		23 36 0,60	11,706	− 0,425		4
– . . . 12	7.8	22 1,14	53,319	+ 0,273		24 1 4,70	11,685	− 0,427		4
– . . . 13	8.9	23 41,65	53,144	+ 0,268		23 29 37,12	11,676	− 0,426		4
– . . . 14	9	25 11,96	53,069	+ 0,266		23 15 52,45	11,669	− 0,425		4
– . . . 15	8.9	26 39,14	53,194	+ 0,269		23 37 37,49	11,662	− 0,426		4
– . . . 16	9.10	26 58,66	53,089	+ 0,266		23 18 58,24	11,661	− 0,426		4
– . . . 17	8	27 18,67	53,059	+ 0,266		23 13 29,57	11,659	− 0,426		6
– . . . 18	8	27 20,05	53,198	+ 0,269		23 38 16,98	11,659	− 0,426		4
24 *p*	7.8	27 46,26	53,191	+ 0,269	+0,011	23 36 55,12	11,657	− 0,427		4
Anonyma 19	8	28 1,82	53,066	+ 0,266		23 18 9,11	11,656	− 0,426		6
– . . . 20	8	28 5,46	53,353	+ 0,273		24 5 15,46	11,656	− 0,428		8
– . . . 21	8.9	28 41,90	53,377	+ 0,273		24 9 22,06	11,653	− 0,428		6
– . . . 22	8	28 47,57	53,124	+ 0,267		23 24 50,13	11,652	− 0,426		6
– . . . 23	8.9	29 36,40	53,046	+ 0,265		23 10 40,14	11,648	− 0,425		6
– . . . 24	8	29 42,52	53,253	+ 0,270		23 47 16,49	11,648	− 0,427		12
25 η (Alcyone)	3.4	29 46,72	53,191	+ 0,268	+0,021	23 36 16,91	11,648	− 0,427	−0,068	–

Anonyma 25	8.9	54° 32′ 5,″30	53,″027	+0,″264		23° 6′ 35,″59	11,″637	−0,″425		6
— . . . 26	9	33 36,76	53,006	+0,263		23 2 35,89	11,629	−0,425		6
— . . . 27	8.9	40 39,14	53,280	+0,270		23 49 12,64	11,596	−0,428		4
— . . . 28	7	43 17,17	52,980	+0,262	−0,″003	22 55 25,93	11,583	−0,426	−0,″061	6
— . . . 29	8	44 45,04	53,296	+0,269	+0,021	23 50 53,36	11,576	−0,429		6
26 *s*	7.8	51 48,27	53,140	+0,265	+0,002	23 21 43,53	11,543	−0,428		—
27 *f* (Atlas)	4.5	54 53,68	53,212	+0,266	+0,013	23 33 30,41	11,528	−0,429	−0,077	—
28 *h* (Plejone)	5.6	55 10,82	53,241	+0,267	+0,007	23 38 30,60	11,527	−0,429	−0,085	—
Anonyma 30	8.9	55 39,24	53,156	+0,265		23 23 31,50	11,524	−0,429		6
— . . . 31	8	56 20,32	53,331	+0,269		23 54 4,70	11,521	−0,430		6
— . . . 32	8	57 35,11	53,328	+0,269		23 53 11,52	11,515	−0,430		6
— . . . 33	8.9	58 45,54	53,284	+0,268		23 45 12,36	11,509	−0,430		6
— . . . 34	7.8	55 3 36,72	53,109	+0,263		23 13 7,69	11,466	−0,429		6
— . . . 35	9	3 47,46	53,290	+0,267		23 45 2,15	11,485	−0,430		6
— . . . 36	9	5 59,14	53,285	+0,267		23 43 26,57	11,475	−0,430		6
— . . . 37	8	6 17,63	53,331	+0,268		23 51 22,51	11,473	−0,431		6
— . . . 38	8	7 6,69	53,161	+0,264		23 21 22,86	11,469	−0,430		4
— . . . 39	8	13 58,00	53,393	+0,269		24 0 13,63	11,436	−0,432		6
— . . . 40	7.8	20 31,97	53,220	+0,264		23 28 18,94	11,405	−0,431		6

VI.

Über die scheinbare Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe.

Die Figur, in welcher wir einen Planeten sehen, der ein Rotationssphäroid ist, ist nur dann die Figur seiner Meridiane, wenn das Auge sich in der Ebene seines Aequators und die Sonne sich auf der das Auge und den Planeten verbindenden geraden Linie befinden; sie ist eine Projection dieser Figur, wenn das letztere, nicht aber das erstere, stattfindet. Im Allgemeinen zeigt aber der Planet eine aus zwei verschiedenen Curven zusammengesetzte Figur, deren nähere Untersuchung von der Zeit an nothwendig geworden ist, von welcher an genauere Messungen des Planeten selbst und der relativen Lage seiner Satelliten möglich geworden sind. Instrumente wie das grosse Heliometer der Königsberger Sternwarte, geben solchen Messungen einen Grad von Sicherheit, von welchem etwas Wesentliches verloren gehen würde, wenn, z. B. im Falle sie den *Jupiter* betreffen, ihre Berechnung auf die Verwechselung der Figur, welche er wirklich zeigt, mit der welche er zeigen würde, wenn er vollständig erleuchtet wäre, gegründet werden sollte: man muss also, um Messungen dieser Art, sie mögen die Bestimmung der beiden Axen des Sphäroids eines Planeten, oder die Bestimmung der Lage seines Aequators, oder die relative Lage seiner Satelliten zum Zwecke haben, mit der erforderlichen Richtigkeit berechnen zu können, die Figur des Planeten, so wie sie sich wirklich zeigt, kennen. Die Bestimmung dieser Figur und die Berechnungsart der Beobachtungen, welche sich auf Punkte des Randes derselben beziehen, sind daher die Gegenstände dieser Abhandlung.

1.

Ich werde damit anfangen, den scheinbaren Ort eines Punktes auf der Oberfläche des Planeten anzugeben, dessen Entfernung von drei aufeinander senkrechten, durch den Mittelpunkt des Planeten gelegten Ebenen durch x, y, z, so wie die Entfernungen des Auges von denselben Ebenen durch ξ, η, ζ bezeichnet werden. Die Axe der z soll mit der Drehungsaxe des Planeten zusammenfallen.

Gesichtslinien, nach dem Mittelpunkte des Planeten und nach dem Punkte auf seiner Oberfläche gelegt, bestimmen die Örter beider an der Himmelskugel. Bezieht man diese Örter auf den grössten Kreis, welcher der Ebene des Aequators des Planeten entspricht, und bezeichnet man die von der Axe der x an, auf diesem grössten Kreise gezählten Längen des Mittelpunktes des Planeten und des Punktes auf seiner Oberfläche durch λ und λ', ihre auf denselben grössten Kreis bezogenen Breiten durch β und β', ihre Entfernungen von dem Auge durch ϱ und ϱ', so hat man:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\lambda &= -\xi \\ \varrho \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}\lambda &= -\eta \\ \varrho \operatorname{Sin}\beta &= -\zeta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (1)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \varrho' \operatorname{Cos}\beta' \operatorname{Cos}\lambda' &= x-\xi \\ \varrho' \operatorname{Cos}\beta' \operatorname{Sin}\lambda' &= y-\eta \\ \varrho' \operatorname{Sin}\beta' &= z-\zeta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (2)$$

Die scheinbare Entfernung des Punktes von dem Mittelpunkte des Planeten $= s$ und der Winkel des durch beide gelegten grössten Kreises mit dem Declinationskreise des letzteren $= p$, werden durch λ, β, λ', β', durch die Formeln:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin} s \operatorname{Sin}(p-P) &= \operatorname{Cos}\beta' \operatorname{Sin}(\lambda'-\lambda) \\ \operatorname{Sin} s \operatorname{Cos}(p-P) &= \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}\beta' - \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta' \operatorname{Cos}(\lambda'-\lambda) \\ \operatorname{Cos} s &= \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\beta' + \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta' \operatorname{Cos}(\lambda'-\lambda) \end{aligned}$$

ausgedrückt, in welchen P den Positionswinkel des Poles des Aequators des Planeten bezeichnet. Multiplicirt man sie mit ϱ' und substituirt man rechts von den Gleichheitszeichen die Ausdrücke (1) und (2), so verwandeln sie sich in:

$$\left.\begin{aligned} \varrho' \operatorname{Sin} s \operatorname{Sin}(p-P) &= -x \operatorname{Sin}\lambda + y \operatorname{Cos}\lambda \\ \varrho' \operatorname{Sin} s \operatorname{Cos}(p-P) &= -x \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\lambda - y \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\lambda + z \operatorname{Cos}\beta \\ \varrho' \operatorname{Cos} s &= x \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\lambda + y \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}\lambda + z \operatorname{Sin}\beta + \varrho \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3)$$

Da aber die Entfernung eines Punktes auf der Oberfläche eines Planeten von dem Mittelpunkte desselben, vergleichungsweise mit ϱ, so klein ist, dass Grössen von der Ordnung $\frac{xx}{\varrho}$, $\frac{xy}{\varrho}$, u. s. w. unmerklich werden, so kann man diese Formeln, durch Vernachlässigung der Grössen dieser Ordnung und höherer Ordnungen abkürzen und sie:

$$\left.\begin{aligned} s \operatorname{Sin}(p-P) &= \frac{\omega}{\varrho}(-x \operatorname{Sin}\lambda + y \operatorname{Cos}\lambda) \\ s \operatorname{Cos}(p-P) &= \frac{\omega}{\varrho}(-x \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\lambda - y \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\lambda + z \operatorname{Cos}\beta) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (4)$$

schreiben ($\omega = 206264''8$).

Indem der Punkt auf der Oberfläche des Planeten liegt, findet zwischen x, y, z die Gleichung statt, welcher diese Oberfläche entspricht; oder man kann für x, y, z ihre, der Gleichung genügeleistenden Ausdrücke durch *zwei* neue veränderliche Grössen setzen. Wenn die Oberfläche durch Drehung einer Ellipse, deren Axen $2a$ und $2b$ sind, um die letztere erzeugt wird, so dass ihre Gleichung:

$$1 = \frac{xx}{aa} + \frac{yy}{aa} + \frac{zz}{bb} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ist, so kann man offenbar:

$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} A \\ y &= a \operatorname{Cos} B \operatorname{Sin} A \\ z &= b \operatorname{Sin} B \end{aligned}$$

setzen, wo A den Winkel einer durch die Drehungsaxe und durch den zu bestimmenden Punkt gelegten Ebene, mit einer durch die erstere und die Axe der x gelegten, und B die auf die einbeschriebene oder umbeschriebene Kugel reducirte Breite des Punktes bedeuten. Setzt man diese Ausdrücke von x, y, z in die Formeln (4) und schreibt man a' und b' für $\frac{\omega a}{\varrho}$ und $\frac{\omega b}{\varrho}$, oder versteht man unter a' und b' die in Secunden ausgedrückten Winkel, unter welchen die beiden halben Axen des Sphäroids in der Entfernung ϱ erscheinen, so verwandeln die Formeln sich in:

$$\left.\begin{aligned} s\,\mathrm{Sin}(p-P) &= a'\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Sin}(A-\lambda) \\ s\,\mathrm{Cos}(p-P) &= b'\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,B - a'\,\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Cos}(A-\lambda) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (6)$$

Die hier vorkommenden β, λ, P sind durch den geocentrischen Ort des Planeten und die Lage der Ebene seines Aequators gegeben. Da das Berliner astronomische Jahrbuch von *Encke* und der Nautical Almanac den ersteren nur durch Geradeaufsteigung und Abweichung angeben, so werde ich durch diese (α und δ bezeichnet), verbunden mit der auf den Aequator bezogenen Länge des aufsteigenden Knotens des Planetenaequators ($=n$) und seiner Neigung ($=i$), β, λ, P ausdrücken. Legt man die Axe der x in diesen aufsteigenden Knoten, oder zählt man λ und A von demselben an, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Sin}\,\beta &= \mathrm{Cos}\,i\,\mathrm{Sin}\,\delta - \mathrm{Sin}\,i\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}(\alpha-n) \\ \mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,\lambda &= \mathrm{Sin}\,i\,\mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Cos}\,i\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}(\alpha-n) \\ \mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\lambda &= \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}(\alpha-n) \\ \mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,P &= \mathrm{Cos}\,i\,\mathrm{Cos}\,\delta + \mathrm{Sin}\,i\,\mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Sin}(\alpha-n) \\ \mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,P &= \mathrm{Sin}\,i\,\mathrm{Cos}(\alpha-n) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (7)$$

oder, alle drei gesuchten Grössen zugleich durch die *Gaussi*schen Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Cos}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\beta)\,\mathrm{Cos}\left(45^\circ+\frac{\lambda+P}{2}\right) &= \mathrm{Cos}\left(45^\circ+\frac{\delta+i}{2}\right)\mathrm{Cos}\left(45^\circ+\frac{\alpha-n}{2}\right) \\ \mathrm{Cos}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\beta)\,\mathrm{Sin}\left(45^\circ+\frac{\lambda+P}{2}\right) &= \mathrm{Cos}\left(45^\circ+\frac{\delta-i}{2}\right)\mathrm{Sin}\left(45^\circ+\frac{\alpha-n}{2}\right) \\ \mathrm{Sin}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\beta)\,\mathrm{Cos}\left(45^\circ+\frac{\lambda-P}{2}\right) &= \mathrm{Sin}\left(45^\circ+\frac{\delta+i}{2}\right)\mathrm{Cos}\left(45^\circ+\frac{\alpha-n}{2}\right) \\ \mathrm{Sin}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\beta)\,\mathrm{Sin}\left(45^\circ+\frac{\lambda-P}{2}\right) &= \mathrm{Sin}\left(45^\circ+\frac{\delta-i}{2}\right)\mathrm{Sin}\left(45^\circ+\frac{\alpha-n}{2}\right) \end{aligned}\right\} \ldots. (8)$$

Wenn der Punkt auf der Oberfläche des Planeten fest ist, also der Drehung desselben folgt, so wächst A der Zeit proportional, oder man hat:

$$A = \varepsilon + mt \ldots\ldots\ldots (9)$$

wo also ε die Entfernung des Punktes von dem aufsteigenden Knoten des Aequators des Planeten auf dem Aequator der Erde, für den Augenblick von welchem die Zeit t angerechnet wird, und m die Grösse der Drehung in der angenommenen Zeiteinheit bedeuten.

2.

Wenn man in die Formeln (4), für x, y, z die Coordinaten von Punkten der Planetenoberfläche setzt, welche durch Gesichtslinien *berührt* werden, so bestimmen diese Formeln Punkte der krummen Linie, welche die Projection des Sphäroids des Planeten auf eine Ebene ist, welche senkrecht auf der die Mittelpunkte der Erde und des Planeten verbindenden geraden Linie steht. Ich werde jetzt die Gleichung dieser krummen Linie aufsuchen.

Wenn Const. $= V$ die Gleichung einer Oberfläche ist, so ist bekanntlich die Bedingung, dass eine durch einen Punkt dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind gehende gerade Linie sie berühre, in der Gleichung:

$$0 = \frac{dV}{dx}(x-\xi) + \frac{dV}{dy}(y-\eta) + \frac{dV}{dz}(z-\zeta)$$

enthalten. Für das angenommene Sphäroid des Planeten (5) wird diese Gleichung:

$$0 = \frac{x(x-\xi)}{aa} + \frac{y(y-\eta)}{aa} + \frac{z(z-\zeta)}{bb},$$

und sie verwandelt sich, durch ihre Verbindung mit (5) in:

$$1 = \frac{x\xi}{aa} + \frac{y\eta}{aa} + \frac{z\zeta}{bb} \ldots\ldots (10)$$

Wenn man für ξ, η, ζ ihre Ausdrücke (1) setzt und die oben schon vernachlässigten Grössen auch hier nicht berücksichtigt, so verwandelt sie sich ferner in:

$$0 = \frac{x\,\mathrm{Cos}\beta\,\mathrm{Cos}\lambda}{aa} + \frac{y\,\mathrm{Cos}\beta\,\mathrm{Sin}\lambda}{aa} + \frac{z\,\mathrm{Sin}\beta}{bb} \ldots\ldots (11)$$

Durch diese Gleichung und durch die Gleichungen (4) werden x, y, z durch die Coordinaten $u' = s'\,\mathrm{Sin}(p'-P)$ und $v' = s'\,\mathrm{Cos}(p'-P)$ am Rande des Planeten liegender Punkte ausgedrückt. Man erhält daraus: $\left(\frac{bb}{aa} = 1-ee \text{ gesetzt}\right)$:

$$-x\,\mathrm{Sin}\lambda + y\,\mathrm{Cos}\lambda = \varrho u'$$

$$x\,\mathrm{Cos}\lambda + y\,\mathrm{Sin}\lambda = \varrho v' \frac{\mathrm{Sin}\beta}{1-ee\,\mathrm{Cos}\beta^2}$$

$$z = \varrho v' \frac{(1-ee)\,\mathrm{Cos}\beta}{1-ee\,\mathrm{Cos}\beta^2}$$

welche Ausdrücke, indem sie der Gleichung der Oberfläche entsprechen müssen, durch ihre Substitution in (5), die Gleichung der gesuchten krummen Linie:

$$a'a' = u'u' + \frac{v'v'}{1-ee\,\mathrm{Cos}\,\beta^2} \ldots\ldots (12)$$

ergeben. Die Projection des Sphäroids ist also eine Ellipse, deren grosse Axe $= 2a'$, die kleine $= 2a'\sqrt{(1-ee\,\mathrm{Cos}\beta^2)}$ ist.

3.

Diese Figur sieht man nur dann vollständig, wenn sie *ganz erleuchtet* ist; in allen anderen Fällen ist die sichtbare Figur des Planeten nur zur Hälfte durch die Ellipse (12), zur anderen Hälfte aber durch eine andere Ellipse, nämlich durch die Projection der Lichtgrenze auf die Ebene, welche von der Gesichtslinie senkrecht durchschnitten wird begrenzt. Ich werde diese zweite Ellipse jetzt bestimmen.

Wenn man die Sonne als einen Punkt ansieht, welches ich hier thun werde, so findet zwischen den Coordinaten der Punkte des Sphäroids durch welche die Lichtgrenze geht, offenbar eine der Gleichung (10) ganz ähnliche Bedingungsgleichung statt, welche nur dadurch von jener verschieden ist, dass sie statt ξ, η, ζ ähnliche, den Ort der Sonne bestimmende Coordinaten ξ', η', ζ', enthält. Bezeichnet man die heliocentrische Länge und Breite des Planeten, auf seinen Aequator bezogen, durch λ' und β', so verwandelt sich die aus (10) abgeleitete Gleichung (11) in die zur Bestimmung der Lichtgrenze nothwendige:

$$0 = \frac{x\,\mathrm{Cos}\beta'\,\mathrm{Cos}\lambda'}{aa} + \frac{y\,\mathrm{Cos}\beta'\,\mathrm{Sin}\lambda'}{aa} + \frac{z\,\mathrm{Sin}\beta'}{bb} \ldots\ldots (13)$$

Diese Gleichung und die Gleichungen (4) bestimmen die Coordinaten in der Lichtgrenze liegender Punkte durch ihnen zugehörige u' und v'; die Substitution der Ausdrücke derselben durch diese Grössen in die Gleichung der Oberfläche ergiebt die Gleichung zwischen u' und v'.

Führt man, statt β und β', davon abhängige β_1 und β_1' in die Rechnung ein, indem man

$$\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{Cos}\,\beta_{,} = \mathrm{Cos}\,\beta \qquad \frac{1}{\Delta'}\,\mathrm{Cos}\,\beta'_{,} = \mathrm{Cos}\,\beta'$$
$$\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{Sin}\,\beta_{,} = \frac{a}{b}\,\mathrm{Sin}\,\beta \qquad \frac{1}{\Delta'}\,\mathrm{Sin}\,\beta'_{,} = \frac{a}{b}\,\mathrm{Sin}\,\beta'$$

setzt, so verwandeln sich die drei Gleichungen, durch welche x, y, z bestimmt werden sollen, in:

$$0 = x\,\mathrm{Cos}\,\beta'_{,}\,\mathrm{Cos}\,\lambda' + y\,\mathrm{Cos}\,\beta'_{,}\,\mathrm{Sin}\,\lambda' + \frac{a}{b}\,z\,\mathrm{Sin}\,\beta'_{,}$$
$$\varrho u' = -x\,\mathrm{Sin}\,\lambda + y\,\mathrm{Cos}\,\lambda$$
$$\frac{a}{b}\Delta\,\varrho v' = -x\,\mathrm{Sin}\,\beta_{,}\,\mathrm{Cos}\,\lambda - y\,\mathrm{Sin}\,\beta_{,}\,\mathrm{Sin}\,\lambda + \frac{a}{b}\,z\,\mathrm{Cos}\,\beta_{,}$$

Durch Auflösung derselben findet man:

$$-x\,\mathrm{Sin}\,\lambda + y\,\mathrm{Cos}\,\lambda = \varrho u'$$
$$N(x\,\mathrm{Cos}\,\lambda + y\,\mathrm{Sin}\,\lambda) = \varrho u'\,\mathrm{Cos}\,\beta_{,}\,\mathrm{Cos}\,\beta'_{,}\,\mathrm{Sin}(\lambda-\lambda') - \frac{a}{b}\Delta\,.\,\varrho v'\,\mathrm{Sin}\,\beta'_{,}$$
$$N\frac{a}{b}z = \varrho u'\,\mathrm{Sin}\,\beta'_{,}\,\mathrm{Cos}\,\beta'_{,}\,\mathrm{Sin}(\lambda-\lambda') + \frac{a}{b}\Delta\,.\,\varrho v'\,\mathrm{Cos}\,\beta'_{,}\,\mathrm{Cos}(\lambda-\lambda')$$

wo N für $\mathrm{Sin}\,\beta_{,}\,\mathrm{Sin}\,\beta'_{,} + \mathrm{Cos}\,\beta_{,}\,\mathrm{Cos}\,\beta'_{,}\,\mathrm{Cos}\,(\lambda-\lambda')$ geschrieben ist. Oder, wenn man d und w nach den Formeln:

$$\mathrm{Cos}\,d = \mathrm{Sin}\,\beta_{,}\,\mathrm{Sin}\,\beta'_{,} + \mathrm{Cos}\,\beta_{,}\,\mathrm{Cos}\,\beta'_{,}\,\mathrm{Cos}(\lambda'-\lambda)$$
$$\mathrm{Sin}\,d\,\mathrm{Cos}\,w = \mathrm{Cos}\,\beta_{,}\,\mathrm{Sin}\,\beta'_{,} - \mathrm{Sin}\,\beta_{,}\,\mathrm{Cos}\,\beta'_{,}\,\mathrm{Cos}(\lambda'-\lambda)$$
$$\mathrm{Sin}\,d\,\mathrm{Sin}\,w = \mathrm{Cos}\,\beta'_{,}\,\mathrm{Sin}(\lambda'-\lambda)$$

bestimmt und in die Rechnung einführt, erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Cos}\,d\,\{-x\,\mathrm{Sin}\,\lambda + y\,\mathrm{Cos}\,\lambda\} &= \varrho u'\,\mathrm{Cos}\,d\\
\mathrm{Cos}\,d\,\{x\,\mathrm{Cos}\,\lambda + y\,\mathrm{Sin}\,\lambda\} &= -\varrho u'\,\mathrm{Sin}\,d\,\mathrm{Sin}\,w\,\mathrm{Cos}\,\beta_{,}\\
&\quad -\frac{a}{b}\Delta\,\varrho v'\,\{\mathrm{Cos}\,d\,\mathrm{Sin}\,\beta_{,} + \mathrm{Sin}\,d\,\mathrm{Cos}\,\beta_{,}\,\mathrm{Cos}\,w\}\\
\mathrm{Cos}\,d\,.\,\frac{a}{b}z &= -\varrho u'\,\mathrm{Sin}\,d\,\mathrm{Sin}\,w\,\mathrm{Sin}\,\beta_{,}\\
&\quad +\frac{a}{b}\Delta\,\varrho v'\,\{\mathrm{Cos}\,d\,\mathrm{Cos}\,\beta_{,} - \mathrm{Sin}\,d\,\mathrm{Sin}\,\beta_{,}\,\mathrm{Cos}\,w\}
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

welche Ausdrücke, in (5) gesetzt,

$$\mathrm{Cos}\,d^2\,\frac{a\alpha}{\varrho\varrho} = u'u'\,\mathrm{Cos}\,d^2$$
$$+\left\{(u'\,\mathrm{Sin}\,w + \frac{a}{b}\Delta v'\,\mathrm{Cos}\,w)\,\mathrm{Sin}\,d\,\mathrm{Cos}\,\beta_{,} + \frac{a}{b}\Delta v'\,\mathrm{Cos}\,d\,\mathrm{Sin}\,\beta_{,}\right\}^2$$
$$+\left\{(u'\,\mathrm{Sin}\,w + \frac{a}{b}\Delta v'\,\mathrm{Cos}\,w)\,\mathrm{Sin}\,d\,\mathrm{Sin}\,\beta_{,} - \frac{a}{b}\Delta v'\,\mathrm{Cos}\,d\,\mathrm{Cos}\,\beta_{,}\right\}^2$$

oder, wenn man $\varrho\alpha'$ für α schreibt, die drei Quadrate in zwei zusammenzieht und

$$\sqrt{(1-ee\,\mathrm{Cos}\beta^2)} \text{ statt } \frac{b}{a\Delta}$$

setzt,

$$a'a' = \left\{u'\,\mathrm{Cos}\,w - \sqrt{\frac{v'\,\mathrm{Sin}\,w}{(1-ee\,\mathrm{Cos}\beta^2)}}\right\}^2 + \left\{u'\,\mathrm{Sin}\,w + \sqrt{\frac{v'\,\mathrm{Cos}\,w}{(1-ee\,\mathrm{Cos}\beta^2)}}\right\}^2 \mathrm{Sec}\,d^2 \quad (15)$$

ergeben. Dieses ist also die Gleichung der Ellipse, welche die Figur des Planeten an den Stellen begrenzt, an welchen der Rand der Projection des Sphäroids nicht erleuchtet ist.

Man bemerkt leicht die geometrische Bedeutung der hier in die Reehnung gebrachten Grössen. Ziehet man gerade Linien von dem Mittelpunkte des Planeten nach der Erde und nach der Sonne, und fället man von den Punkten, in welchen sie die Oberfläche des Planeten durchschneiden, Perpendikel entweder auf seine Drehungsaxe oder auf die Ebene seines Aequators, so sind $-\beta$, und $-\beta'$, die Breiten der dadurch auf die einbeschriebene oder umbeschriebene Kugel projicirten Punkte; Δ und Δ' sind die Radien des Sphäroids an diesen Punkten; d ist die Entfernung der Punkte auf der einen oder anderen Kugel voneinander; w der Winkel des durch beide gelegten grössten Kreises mit dem Meridiane des ersteren.

Die hier bestimmte Ellipse kann übrigens von der, welche die wirkliche Begrenzung einer Planetenscheibe ist, etwas abweichen. Die Sonne ist in der Rechnung als ein Punkt angenommen, während sie in den Entfernungen des Mars und des Jupiters noch von erheblicher Grösse erscheint; auch hat auf die Strahlenbrechung auf dem Planeten, so wie auf die Lichtschwächung, welche nahe an der Lichtgrenze, auf der der Sonne zugewandten Seite des Planeten liegende Punkte wahrscheinlich unsichtbar macht, nicht Rücksicht genommen werden können. Es ist indessen nicht zu erwarten, dass die Entfernung der wahren Lichtgrenze von der, der Annahme zufolge hier bestimmten, so beträchtlich ist, dass sie in der sie verkürzenden Projection, in welcher sie uns bei den oberen Planeten erscheint, noch bemerkbar sein sollte.

4.

Es ist noch nöthig, zu bestimmen, welcher Theil der sichtbaren Figur des Planeten durch die Projection des Sphäroids, und welcher durch die Lichtgrenze begrenzt wird. Der Unterschied wird dadurch

erzeugt, dass in der Ausdehnung des ersten Theils die Lichtgrenze auf der von der Erde unsichtbaren Seite des Planeten liegt, in der Ausdehnung des anderen auf der von der Erde sichtbaren. Ziehet man eine gerade Linie von der Erde nach einem Punkte der Lichtgrenze, so durchschneidet sie entweder die Oberfläche des Planeten nicht nur an diesem Punkte, sondern noch an einem anderen, oder sie berührt dieselbe. Die Punkte an welchen das letztere stattfindet sind offenbar die, welche beiden Ellipsen gemeinschaftlich sind; liegt, an anderen Punkten, der zweite Durchschnitt der geraden Linie zwischen dem ersten und der Erde, so ist die Lichtgrenze unsichtbar; liegt er über den ersten hinaus, so ist sie sichtbar, und begrenzt also die Figur des Planeten.

Wenn eine gerade Linie von der Erde nach einem Punkte der Planetenoberfläche, dessen Coordinaten x, y, z sind, gelegt und die Entfernung dieses Punktes von der Erde durch ϱ bezeichnet wird, für den zweiten Durchschnittspunkt derselben geraden Linie mit der Oberfläche des Planeten aber die Bezeichnungen x', y', z', ϱ' angewandt werden, so ist

$$(x'-\xi)\,\varrho = (x-\xi)\,\varrho'$$
$$(y'-\eta)\,\varrho = (y-\eta)\,\varrho'$$
$$(z'-\zeta)\,\varrho = (z-\zeta)\,\varrho'$$

oder

$$x' = x - \frac{\varrho'-\varrho}{\varrho}(\xi-x)$$
$$y' = y - \frac{\varrho'-\varrho}{\varrho}(\eta-y)$$
$$z' = z - \frac{\varrho'-\varrho}{\varrho}(\zeta-z)$$

welche Ausdrücke der Gleichung der Oberfläche des Sphäroids Genüge leisten müssen und dadurch $\varrho'-\varrho$ bestimmen. Setzt man sie in (5), so erhält man:

$$0 = -\frac{2(\varrho'-\varrho)}{\varrho}\left\{\frac{x(\xi-x)}{aa} + \frac{y(\eta-y)}{aa} + \frac{z(\zeta-z)}{bb}\right\}$$
$$+ \frac{(\varrho'-\varrho)^2}{\varrho\varrho}\left\{\frac{(\xi-x)^2}{aa} + \frac{(\eta-y)^2}{aa} + \frac{(\zeta-z)^2}{bb}\right\}$$

Da das zweite Glied dieser Gleichung positiv ist, so muss das erste negativ sein, oder $\varrho'-\varrho$ und der andere Factor dieses Gliedes müssen immer gleiche Zeichen haben. Der Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, ist also sichtbar oder unsichtbar, jenachdem

$$\frac{x(\xi-x)}{aa} + \frac{y(\eta-y)}{aa} + \frac{z(\zeta-z)}{bb}$$

positiv oder negativ ist. Die Sichtbarkeit eines Punktes auf der Planetenscheibe erfordert also, dass das erstere stattfinde, oder dass

$$\frac{x\xi}{aa} + \frac{y\eta}{aa} + \frac{z\zeta}{bb} > 1$$

sei; welche Bedingung, in den Bezeichnungen des vorigen §s, nämlich:

$$\xi = -\frac{\varrho}{\Delta}\,\mathrm{Cos}\,\beta,\,\mathrm{Cos}\,\lambda$$
$$\eta = -\frac{\varrho}{\Delta}\,\mathrm{Cos}\,\beta,\,\mathrm{Sin}\,\lambda$$
$$\zeta = -\frac{b}{a}\frac{\varrho}{\Delta}\,\mathrm{Sin}\,\beta,$$

ausgedrückt, die Form:

$$(x\,\mathrm{Cos}\,\lambda + y\,\mathrm{Sin}\,\lambda)\,\mathrm{Cos}\,\beta, + \frac{a}{b}\,z\,\mathrm{Sin}\,\beta, < \frac{\Delta aa}{\varrho}$$

annimmt. Indem Grössen von der Ordnung des zweiten Gliedes hier als unmerklich betrachtet werden, so wird die Sichtbarkeit eines Punktes auf dem Planeten dadurch bedingt, dass das erste Glied *negativ* ist.

Liegt der Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, in der Lichtgrenze, so haben diese Coordinaten die Ausdrücke (14). Multiplicirt man den zweiten derselben in $\mathrm{Cos}\,\beta$, $\mathrm{Sec}\,d$, den dritten in $\mathrm{Sin}\,\beta$, $\mathrm{Sec}\,d$, so ist die Summe der Producte:

$$(x\,\mathrm{Cos}\,\lambda + y\,\mathrm{Sin}\,\lambda)\,\mathrm{Cos}\,\beta, + \frac{a}{b}\,z\,\mathrm{Sin}\,\beta, = -\varrho\,\mathrm{Tang}\,d\left\{u'\,\mathrm{Sin}\,w + \sqrt{\frac{v'\,\mathrm{Cos}\,w}{(1-ee\,\mathrm{Cos}\,\beta^2)}}\right\}$$

und es folgt daraus, dass die Lichtgrenze für die Werthe von u' und v' sichtbar ist, für welche dieser Ausdruck negativ, oder

$$\mathrm{Tang}\,d\left\{u'\,\mathrm{Sin}\,w + \sqrt{\frac{v'\,\mathrm{Cos}\,w}{(1-ee\,\mathrm{Cos}\,\beta^2)}}\right\}$$

positiv ist.

Drückt man u' und v' durch die Entfernung vom Mittelpunkte des Planeten und den Positionswinkel aus, oder setzt man

$$u' = s'\,\mathrm{Sin}\,(p'-P),\quad v' = s'\,\mathrm{Cos}\,(p'-P)$$

und ferner

$$\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}\,w}{(1-ee\,\mathrm{Cos}\,\beta^2)}} = \delta\,\mathrm{Cos}\,w'$$
$$\mathrm{Sin}\,w = \delta\,\mathrm{Sin}\,w',$$

so verwandelt der Ausdruck sich in:

$$s'\delta\,\mathrm{Tang}\,d\,\mathrm{Cos}\,(p'-P-w').$$

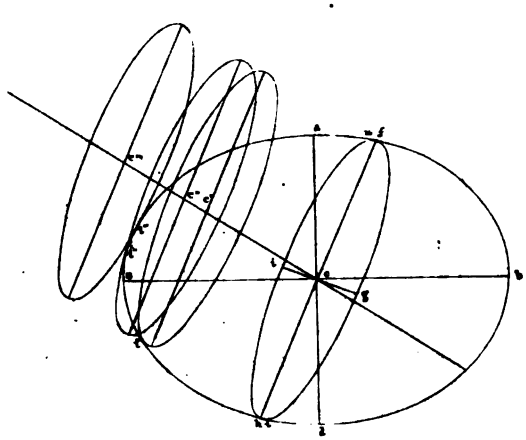
Wenn d kleiner ist als 90°, so ist also die Lichtgrenze sichtbar für Werthe von p' zwischen $P+w'-90°$ und $P+w'+90°$; wenn d grösser ist als 90°, so fängt sie bei der zweiten Grenze an sichtbar zu werden und hört bei der ersten auf. In dem ersten Falle ist der Planet mehr, in dem zweiten weniger als halb erleuchtet.

5.

Die in den vorigen Paragraphen gegebene Bestimmung der scheinbaren Figur des Planeten setzt uns in den Stand, die Berechnungsart aller Beobachtungen, welche auf Punkte an dem Rande des Planeten bezogen werden, aufsuchen zu können.

Ich werde zuerst die *Grösse des Durchmessers* untersuchen, welche man mit einem Heliometer, oder einem anderen, doppelte Bilder gewährenden Instrumente, in einer gegebenen Richtung misst. Diese Messungsart beruhet darauf, dass eins der doppelten Bilder so weit verschoben wird, dass ein Punkt an seinem Rande einen anderen Punkt am Rande des nicht verschobenen Bildes berührt: die Grösse der Verschiebung $=\sigma$ ist der gemessene Durchmesser in der Richtung der Verschiebung, welche ich durch den Positionswinkel ϖ angeben werde. Die aufzulösende Aufgabe ist also, die Relation zwischen σ, ϖ und den Axen des Sphäroids zu finden.

Die Natur dieser Aufgabe wird durch die beigedruckte Zeichnung anschaulich werden. Diese zeigt die Projection des Sphäroids $a\,b\,d\,e$, die Erleuchtungscurve $f\,g\,h\,i$, und auch Verschiebungen der letzteren. Jenachdem die Hälfte $u\,g\,t$, oder die Hälfte $t\,i\,u$ der Erleuchtungscurve die sichtbare ist, ist $u\,g\,t\,e$ oder $u\,i\,t\,e$ die sichtbare Figur des Planeten. Die Verschiebung des Mittelpunkts der Erleuchtungscurve auf der willkürlich gelegten Linie $c, c', c'', \ldots$ bringt eine Berührung der Ränder t' hervor, wenn der Mittelpunkt in c' ist; eine zweite



t'' und eine dritte t''', wenn er in c'' und c''' ist. Offenbar entstehen aus gleichen Verschiebungen nach der entgegengesetzten Richtung Berührungen, welche den vorigen symmetrisch sind. Der Bedingung, dass die Ränder beider Ellipsen sich, durch eine Verschiebung in gegebener Richtung, berühren, muss also durch 6 Werthe von σ Genüge geleistet werden können, welche paarweise von gleicher Grösse, aber im Zeichen verschieden sind. Dass alle diese Werthe in jedem gegebenen Falle möglich seien, ist weder nöthig noch findet es statt.

Die beiden Gleichungen (12) und (15), welche die hier in Betracht kommenden Ellipsen bestimmen, verlegen den Mittelpunkt der Coordinaten u' und v' in den Mittelpunkt der Projectionen, sowohl des Sphäroids, als seiner Erleuchtungscurve; wird eine dieser Ellipsen nach der dem Positionswinkel π entsprechenden Richtung um die Grösse σ verschoben, so ist die daraus entstehende Veränderung des Ortes ihres Mittelpunkts, in der Richtung der Axe der u $= \sigma \operatorname{Sin}(\pi - P)$ in der Richtung der Axe der $v = \sigma \operatorname{Cos}(\pi - P)$. Die Gleichung der so verschobenen ersten Ellipse, auf die unveränderten Coordinatenaxen bezogen, ist also:

$$a'a' = \left\{u' - \sigma \operatorname{Sin}(\pi - P)\right\}^2 + \frac{\left\{v' - \sigma \operatorname{Cos}(\pi - P)\right\}^2}{1 - ee \operatorname{Cos}\beta^2}$$

Um indessen die Gleichungen beider Ellipsen zu vereinfachen, werde ich

$$\begin{aligned} \frac{v'}{\sqrt{(1 - ee \operatorname{Cos}\beta^2)}} &= v_{,} \\ \frac{\sigma \operatorname{Cos}(\pi - P)}{\sqrt{(1 - ee \operatorname{Cos}\beta^2)}} &= \sigma_{,} \operatorname{Cos}\psi \\ \sigma \operatorname{Sin}(\pi - P) &= \sigma_{,} \operatorname{Sin}\psi \end{aligned}$$

setzen, also die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a'a' &= \left\{u' \operatorname{Cos} w - v_{,} \operatorname{Sin} w\right\}^2 + \left\{u' \operatorname{Sin} w + v_{,} \operatorname{Cos} w\right\}^2 \operatorname{Sec} d^2 \\ a'a' &= \left\{u' - \sigma_{,} \operatorname{Sin}\psi\right\}^2 + \left\{v_{,} - \sigma_{,} \operatorname{Cos}\psi\right\}^2 \end{aligned}\right\} \ldots \ldots (16)$$

schreiben.

Die Bedingung der Aufgabe, dass beide Ellipsen sich *berühren* sollen, fordert, dass sie, an einem ihnen gemeinschaftlichen Punkte, auch eine gemeinschaftliche Tangente haben, oder dass $\frac{dv_{,}}{du'}$, an diesem Punkte, in beiden Ellipsen einen gleichen Werth erhalte. Differentiirt

man demzufolge die beiden Gleichungen (16), so erhält man, durch die Gleichsetzung des Differentialquotienten, die dritte, zur Bestimmung der Aufgabe erforderliche Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = {} & (u' \operatorname{Cos} w - v_{,}' \operatorname{Sin} w)(u' \operatorname{Sin} w + v_{,}' \operatorname{Cos} w) \operatorname{Sin} d^2 \\ & + \sigma_{,} \operatorname{Cos}(\psi - w)(u' \operatorname{Cos} w - v_{,}' \operatorname{Sin} w) \operatorname{Cos} d^2 \\ & - \sigma_{,} \operatorname{Sin}(\psi - w)(u' \operatorname{Sin} w + v_{,}' \operatorname{Cos} w) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17) \end{aligned}$$

Wenn man u' und $v_{,}'$ aus diesen drei Gleichungen eliminirt, so bleibt eine Gleichung übrig, welche $\sigma_{,}$ bestimmt. Ich werde, um durch eine einfache Rechnung zu diesem Ziele zu gelangen, eine neue unbekannte Grösse x einführen, welche mit u' und $v_{,}'$ durch die Formeln:

$$\begin{aligned} u' \operatorname{Cos} w - v_{,}' \operatorname{Sin} w &= a' \operatorname{Sin} x \\ u' \operatorname{Sin} w + v_{,}' \operatorname{Cos} w &= a' \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} d \end{aligned}$$

verbunden ist. Hierdurch wird die erste Gleichung erfüllt. Indem

$$\begin{aligned} u' &= a' \left\{ \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} w + \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} w \operatorname{Cos} d \right\} \\ v_{,}' &= a' \left\{ -\operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} w + \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} w \operatorname{Cos} d \right\} \end{aligned}$$

ist, verwandeln die beiden anderen Gleichungen sich in:

$$\begin{aligned} \sigma_{,}\sigma_{,} - 2a'\sigma_{,} \left\{ \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin}(\psi - w) + \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos}(\psi - w) \operatorname{Cos} d \right\} &= a'a' \operatorname{Sin} d^2 \operatorname{Cos} x^2 \\ \sigma_{,} \left\{ \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin}(\psi - w) - \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos}(\psi - w) \operatorname{Cos} d \right\} &= a' \operatorname{Sin} d^2 \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} x \end{aligned}$$

Ziehet man das Product der zweiten in $a' \operatorname{Cotg} x$ von der ersten ab und dividirt man den Rest durch $\sigma_{,}$, so erhält man:

$$\sigma_{,} = a' \left\{ \frac{1 + \operatorname{Sin} x^2}{\operatorname{Sin} x} \operatorname{Sin}(\psi - w) + \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos}(\psi - w) \operatorname{Cos} d \right\} \ldots\ldots (18)$$

und wenn man diesen Ausdruck in die letzte Gleichung setzt,

$$\begin{aligned} 0 = {} & \operatorname{Sin}(\psi - w)^2 \operatorname{Cos} x^3 \\ & + \left\{ 2 \operatorname{Sin}(\psi - w)^2 - \operatorname{Cos}(\psi - w)^2 \operatorname{Cos} d^2 - \operatorname{Sin} d^2 \right\} \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} x^2 \\ & - 2 \operatorname{Sin}(\psi - w) \operatorname{Cos}(\psi - w) \operatorname{Cos} d \,.\, \operatorname{Sin} x^3 \ldots\ldots\ldots\ldots (19) \end{aligned}$$

In dieser Gleichung und in dem Ausdrucke von $\sigma_{,}$ (18) ist die Auflösung der Aufgabe enthalten. Der Ausdruck dessen Verschwinden die Gleichung bedingt, kann als das Product der Factoren:

$$\operatorname{Sin}(\psi - w)^2 \left\{ \operatorname{Cos} x - \alpha \operatorname{Sin} x \right\} \left\{ \operatorname{Cos} x - \alpha' \operatorname{Sin} x \right\} \left\{ \operatorname{Cos} x - \alpha'' \operatorname{Sin} x \right\}$$

angesehen werden; die in demselben vorkommenden α, α', α'', sind die Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$0 = \mathrm{Sin}(\psi-w)^2 . x^3 + \left\{2\,\mathrm{Sin}(\psi-w)^2 - \mathrm{Cos}(\psi-w)^2 \mathrm{Cos}\,d^2 - \mathrm{Sin}\,d^2\right\} x - 2\,\mathrm{Sin}(\psi-w)\,\mathrm{Cos}(\psi-w)\,\mathrm{Cos}\,d \quad (20)$$

und diese Wurzeln ergeben, wenn $\mathrm{Sin}(\psi-w)$ nicht verschwindet, drei, der Gleichung entsprechende Werthe von $\mathrm{Cotg}\,x$, nämlich:

$$\mathrm{Cotg}\,x = \alpha, \quad \mathrm{Cotg}\,x = \alpha', \quad \mathrm{Cotg}\,x = \alpha''$$

also, da jede Tangente zweien, um 180° voneinander verschiedenen Winkeln zugehört, 6 Werthe von x, welche, in den Ausdruck (18) von σ, gesetzt, die 6 erforderlichen Auflösungen der Aufgabe, oder 3 Werthe von $\pm\sigma$, hervorbringen.

In dem besonderen Falle $\mathrm{Sin}(\psi-w) = 0$ verschwinden das erste und das letzte Glied der Gleichung (20), wesshalb sie dann nur den Werth einer Wurzel, und zwar $\alpha = 0$, bestimmt. Man kann aber die Gleichung allgemein:

$$0 = \left\{z\,\mathrm{Sin}(\psi-w)\right\}^3 + \left\{2\,\mathrm{Sin}(\psi-w)^2 - \mathrm{Cos}(\psi-w)^2\,\mathrm{Cos}\,d^2 - \mathrm{Sin}\,d^2\right\} z\,\mathrm{Sin}(\psi-w) - 2\,\mathrm{Sin}(\psi-w)^2\,\mathrm{Cos}(\psi-w)\,\mathrm{Cos}\,d$$

schreiben, und daraus folgern, dass die 3 Werthe von $z\,\mathrm{Sin}(\psi-w)$ sich den Wurzeln der Gleichung:

$$0 = y^3 - y$$

destomehr näheren, je kleiner $\mathrm{Sin}(\psi-w)$ ist. Diese Wurzeln sind 0, 1, -1, und es folgt hieraus, dass die beiden Wurzeln, welche die Gleichung (20) in diesem Falle unbestimmt lässt, desto näher

$$\alpha' = \frac{1}{\mathrm{Sin}(\psi-w)}, \qquad \alpha'' = \frac{-1}{\mathrm{Sin}(\psi-w)}$$

sind, je kleiner $\mathrm{Sin}(\psi-w)$ ist. Man hat also, da diese Wurzeln die Cotangenten der der Gleichung genügeleistenden Werthe von x sind, desto näher, je kleiner $\mathrm{Sin}(\psi-w)$ ist,

$$\mathrm{Tang}\,x = \infty, \quad \mathrm{Tang}\,x = \mathrm{Sin}(\psi-w), \quad \mathrm{Tang}\,x = -\mathrm{Sin}(\psi-w)$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck von σ, (18), so erhält man für den Fall $\mathrm{Sin}(\psi-w) = 0$,

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= \pm\,\alpha'\,(1+\mathrm{Cos}\,d) \\ \sigma_3 &= \pm\,\alpha'\,(1-\mathrm{Cos}\,d) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (21)$$

Es geht hieraus auch hervor, dass es, immer wenn $\mathrm{Sin}(\psi - w)$ eine kleine Grösse ist, zweckmässig ist, $z\,\mathrm{Sin}(\psi - w)$ zur unbekannten Grösse der Gleichung zu machen.

6.

Wenn die cubische Gleichung (20) nur eine mögliche Wurzel hat, oder wenn nur ein Werth von $\mathrm{Tang}\,x$, also auch nur einer von $\pm\sigma$, möglich ist, so gehört dieser zu der *äusseren* Berührung beider Ellipsen, indem diese offenbar immer möglich ist. Wenn auch die beiden anderen Wurzeln möglich sind, so gehören sie, da nur *eine* äussere Berührung auf jeder Seite des Mittelpunkts stattfinden kann, *inneren* Berührungen zu, welche also beide zugleich möglich, oder beide zugleich unmöglich sind. Damit aber eine Berührung beobachtet werden könne, ist ausser ihrer Möglichkeit noch erforderlich, dass die Punkte der Ellipsen, an welchen sie stattfindet, *sichtbar* seien.

Für den Fall $d < 90°$, welcher für die oberen Planeten allein vorkommen kann, liegen die sichtbaren Begrenzungen beider Ellipsen auf verschiedenen Seiten des Mittelpunkts des Planeten. Dann ist die Erhabenheit der Begrenzungen allenthalben nach aussen gewandt und die Figur kann, bei ihrer Verschiebung, keine innere Berührung zeigen, wogegen die äussere immer sichtbar ist. Wenn also, in diesem Falle, auch drei Berührungen möglich sind, so findet in der Wahl derselben doch keine Zweideutigkeit statt, indem die allein sichtbare Berührung, die äussere, dem grössten Werthe von σ, zugehört.

Für den Fall $d > 90°$, welcher, so wie auch der vorige, bei den unteren Planeten vorkommt, liegen die sichtbaren Begrenzungen beider Ellipsen auf *einer* Seite des Mittelpunkts. Die Erhabenheit der Lichtgrenze ist nach innen gewandt und es können nur *innere* Berührungen sichtbar werden. Ist daher nur eine Wurzel der Gleichung möglich, so ist keine Berührung der Ellipsen sichtbar, denn die allein mögliche Wurzel gehört zu der äusseren Berührung, welche in diesem Falle unsichtbar ist. Sind aber auch die beiden anderen Wurzeln der Gleichung möglich, so sind die ihnen entsprechenden inneren Berührungen auch immer sichtbar. Um sie voneinander unterscheiden zu können, muss angegeben sein, ob die durch die Verschiebung des einen Bildes über das andere hervorgebrachte Berührung der Ränder, die nähere oder die entferntere ist.

7.

Für Jupiter und Saturn ist d immer ein kleiner Winkel; für Mars wächst er zwar, in den Quadraturen, bis über 45°, jedoch werden die Beobachtungen, welche nach der hier entwickelten Theorie berechnet werden müssen, auch bei diesem Planeten meistens in der Nähe des Gegenscheins angestellt werden, wo d keine beträchtliche Grösse besitzt. Es fehlt also nicht an Veranlassung, die Abkürzungen der Rechnung aufzusuchen, welche sich aus der Bedingung, dass d ein kleiner Winkel sei, ziehen lassen. Ich werde demnach jetzt untersuchen, auf welche Formeln die Auflösung der in den beiden letzten §§ behandelten Aufgabe zurückkommt, wenn d so klein ist, dass man Grössen von der Ordnung von $\mathrm{Sin}\, d^4$ vernachlässigen kann.

Man leistet der cubischen Gleichung (20) bis auf Grössen der zweiten Ordnung Genüge, durch $z = \mathrm{Cotg}\,(\psi - w)$; dieser Werth ist also eine Näherung an eine Wurzel der Gleichung, und zwar, den gemachten Bemerkungen zufolge, an die der äusseren Berührung entsprechende. Indem man seine Verbesserung durch z' bezeichnet, also

$$z = \mathrm{Cotg}\,(\psi - w) + z'$$

in die Gleichung setzt, wird sie

$$0 = \mathrm{Sin}\,(\psi - w)\,\mathrm{Cos}\,(\psi - w)\,(1 - \mathrm{Cos}\,d)^2 + \left\{2 - \mathrm{Sin}\,d^2\,\mathrm{Sin}\,(\psi - w)^2\right\} z' + \text{etc.}$$

und es geht hieraus hervor, dass der angenommene Näherungswerth von z auch noch in den Grössen der zweiten Ordnung richtig ist. Da man $z = \mathrm{Cotg}\, x$, für die hier gesuchte Annäherung also $= \mathrm{Cotg}\,(\psi - w)$ hat, so ist auch

$$\mathrm{Sin}\, x = \pm\, \mathrm{Sin}\,(\psi - w), \quad \mathrm{Cos}\, x = \pm\, \mathrm{Cos}\,(\psi - w)$$

und diese Ausdrücke, in (18) gesetzt, ergeben:

$$\sigma_{,} = \pm\, a' \left\{1 - 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\, d^2\,\mathrm{Cos}\,(\psi - w)^2\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Besonders einfache Ausdrücke haben die beiden Durchmesser des Planeten, welche den Winkeln $\psi - w = 0$ und $= 90°$ entsprechen. Der erstere ist schon am Ende des 5ten §, für die äussere Berührung,

$$\sigma_{,} = \pm\, a' (1 + \mathrm{Cos}\, d)$$

gefunden. Für den anderen wird die Gleichung (20):

$$0 = z^3 + (1 + \mathrm{Cos}\, d^2)\, z;$$

sie hat nur eine mögliche Wurzel, nämlich $z=0$, welcher $x=\pm 90°$ und

$$\sigma_{,} = \pm 2a'$$

entspricht. — Statt der von der Grösse der Verschiebung des einen Bildes des Planeten über das andere und von dem Positionswinkel, in welchem dieselbe vorgenommen ist, abhängigen $\sigma_{,}$, werde ich ihre Ausdrücke in die eben gefundenen Formeln einführen. Bezeichnet man den Positionswinkel, welcher $\psi - w = 0$ giebt, durch (p); die Grösse der Verschiebung, welche die äussere Berührung der Ränder in dieser Richtung hervorbringt durch (σ), so hat man

$$(\sigma)\ \mathrm{Cos}\,((p)-P) = \sigma_{,}\,\mathrm{Cos}\, w\, \sqrt{(1-ee\,\mathrm{Cos}\,\beta^2)}$$
$$(\sigma)\ \mathrm{Sin}\,((p)-P) = \sigma_{,}\,\mathrm{Sin}\, w$$

woraus

$$\mathrm{Tang}\,((p)-P) = \frac{\mathrm{Tang}\, w}{\sqrt{(1-ee\,\mathrm{Cos}\,\beta^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots (23)$$

und

$$\sigma_{,} = \frac{(\sigma)}{\sqrt{(1-ee\,\mathrm{Cos}\,\beta^2\,\mathrm{Cos}\, w^2)}},$$

also (21):

$$a'\sqrt{\{1-ee\,\mathrm{Cos}\,\beta^2\,\mathrm{Cos}\, w^2\}} = \frac{(\sigma)}{1+\mathrm{Cos}\, d} \quad \ldots\ldots\ldots (24)$$

hervorgehen. Bezeichnet man ferner die zu $\psi - w = 90°$ gehörigen Werthe von p und σ durch $(p_{,})$ und $(\sigma_{,})$, so hat man

$$(\sigma_{,})\ \mathrm{Cos}\,((p_{,})-P) = -\,\sigma_{,}\,\mathrm{Sin}\, w\, \sqrt{(1-ee\,\mathrm{Cos}\,\beta^2)}$$
$$(\sigma_{,})\ \mathrm{Sin}\,((p_{,})-P) = \quad \sigma_{,}\,\mathrm{Cos}\, w$$

und erhält dadurch

$$\mathrm{Tang}\,((p_{,})-P) = -\,\frac{\mathrm{Cotg}\, w}{\sqrt{(1-ee\,\mathrm{Cos}\,\beta^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots (25)$$

$$\sigma_{,} = \frac{(\sigma_{,})}{\sqrt{(1-ee\,\mathrm{Cos}\,\beta^2\,\mathrm{Sin}\, w^2)}}$$

und

$$a'\sqrt{(1-ee\,\mathrm{Cos}\,\beta^2\,\mathrm{Sin}\, w^2)} = \frac{(\sigma_{,})}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

Wenn man Beobachtungen zu machen beabsichtigt, aus welchen die Bestimmung der Axen des Sphäroids hervorgehen soll, so kann man, wenn man anders der grösseren Leichtigkeit der Rechnung einiges Gewicht beilegen will, (p) und $(p_{,})$ nach den Formeln (23) und

(25) vorher berechnen, und, statt in willkürlichen Richtungen, in den so bestimmten messen. Diese Wahl der Richtungen ist jedoch nur dann vortheilhaft für die Bestimmung der Axen des Sphäroids wenn sie mit der Richtung der Axen der Projection desselben nahe zusammentrifft.

8.

Eine der hier aufgelöseten nahe verwandte Aufgabe betrifft die Bestimmung der Lage eines auf der Scheibe des Planeten sichtbaren Punktes gegen seinen Mittelpunkt, durch Messungen, welche sich auf die Ränder seiner Figur beziehen. Ich werde sie hier nicht übergehen, weil ihre Auflösung, bei der Untersuchung der Drehungselemente des Planeten nicht entbehrt werden kann, wenn diese auf die Bewegung von Punkten, welche auf seiner Oberfläche sichtbar sind, gegründet werden soll.

Man kann weder die Entfernung eines Punktes O von dem Mittelpunkte eines Planeten, noch den Winkel des durch beide gelegten grössten Kreises mit dem Declinationskreise des ersteren unmittelbar messen, indem der Mittelpunkt des Planeten nicht von anderen Punkten der Planetenscheibe unterschieden werden kann; dagegen kann man die Entfernung des Punktes O von einem, in beliebiger Richtung liegenden Punkte des Randes messen; auch, statt des sich auf den Mittelpunkt beziehenden Positionswinkels, einen anderen beobachten, welcher, mit der Messung der Entfernung zusammengenommen, die vollständige Bestimmung der Lage des Punktes ergiebt. Wenn ein Heliometer, oder ein anderes, auf die Verdoppelung der Bilder gegründetes Instrument angewandt wird, so scheint es mir am zweckmässigsten zu sein, denjenigen Positionswinkel zu beobachten, bei welchem der gemeinschaftliche Punkt der zur Berührung gebrachten Bilder des Planeten, in gerader Linie zwischen beiden Bildern des Punktes O erscheint. Diese Beobachtungsart würde, wenn die scheinbare Figur des Planeten ein Kreis oder eine Ellipse wäre, *unmittelbar* den Positionswinkel des Punktes O, bezogen auf den Mittelpunkt, ergeben; wenn man die Messung der Entfernung des Punktes O von den Rändern hinzufügt, auch unmittelbar seine Entfernung von dem Mittelpunkte. Wenn diese Figur aber, bei unvollständiger Beleuchtung, aus

zwei verschiedenen Ellipsen zusammengesetzt ist, so ergiebt die Beobachtung nicht unmittelbar die Lage von O in Beziehung anf den Mittelpunkt, steht jedoch mit derselben in einem Zusammenhange, welchen ich jetzt untersuchen werde.

Bezeichnet man die Coordinaten des zu bestimmenden Punktes O durch u und v und drückt man sie durch seine Entfernung von dem Mittelpunkte des Planeten $= s$ und durch den Winkel des durch beide gelegten grössten Kreises mit dem Declinationskreise des letzteren $= p$ aus, nämlich:

$$u = s \operatorname{Sin}(p-P)$$
$$v = s \operatorname{Cos}(p-P);$$

bezeichnet man ferner durch π, wie vorher, den Positionswinkel unter welchem das eine Bild über das andere verschoben worden ist und durch t und t' die Entfernungen des nicht verschobenen und des verschobenen Bildes von O von dem Berührungspunkte, so hat man die Ausdrücke der Coordinaten des Berührungspunktes:

$$u' = s \operatorname{Sin}(p-P) + t \operatorname{Sin}(\pi-P)$$
$$v' = s \operatorname{Cos}(p-P) + t \operatorname{Cos}(\pi-P)$$

oder die daraus folgenden:

$$\left.\begin{aligned} s \operatorname{Sin}(p-\pi) &= u' \operatorname{Cos}(\pi-P) - v' \operatorname{Sin}(\pi-P) \\ s \operatorname{Cos}(p-\pi) &= u' \operatorname{Sin}(\pi-P) + v' \operatorname{Cos}(\pi-P) - t \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (27)$$

Die hier vorkommenden Coordinaten des Berührungspunktes u' und v' werden, wenn derselbe sich an der Lichtgrenze des nicht verschobenen Bildes befindet, dem 5ten § zufolge, durch x gegeben, nämlich durch den Winkel, dessen Cotangente eine Wurzel der cubischen Gleichung (20) ist. Man hat dadurch:

$$u' = a' \left\{ \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} w + \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} w \operatorname{Cos} d \right\}$$
$$v' = a' \left\{ -\operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} w + \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} w \operatorname{Cos} d \right\} \sqrt{(1-ee \operatorname{Cos}\beta^2)},$$

welche Formeln, so wie auch (27), sich zusammenziehen, wenn man

$$\operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} d = m \operatorname{Cos} M \qquad \sqrt{(1-ee \operatorname{Cos}\beta^2)} \operatorname{Cos}(M+w) = m' \operatorname{Cos} M'$$
$$\operatorname{Sin} x = m \operatorname{Sin} M \qquad \operatorname{Sin}(M+w) = m' \operatorname{Sin} M'$$

einführt. Dadurch erhält man nämlich:

$$u' = a' m m' \operatorname{Sin} M'$$
$$v' = a' m m' \operatorname{Cos} M'$$

und

$$\left.\begin{aligned} s\,\mathrm{Sin}\,(p-\pi) &= a'mm'\,\mathrm{Sin}\,(M'-\pi+P) \\ s\,\mathrm{Cos}\,(p-\pi) &= a'mm'\,\mathrm{Cos}\,(M'-\pi+P) - t' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (28)$$

Es ist indessen noch über zwei Zweideutigkeiten zu entscheiden. Die eine entsteht durch eine Zweideutigkeit von x, welches durch seine Cotangente gegeben wird, wofür also zwei, 180° voneinander verschiedene Werthe genommen werden können. In dem vorausgesetzten Falle, in welchem der Berührungspunkt beider Bilder des Planeten sich an dem Theile des Randes des nicht verschobenen Bildes befindet, welcher durch die Erleuchtungscurve begrenzt wird, muss aber x im ersten oder letzten Quadranten angenommen werden; denn da daselbst die Lichtgrenze sichtbar ist, so muss (§ 4)

$$\mathrm{Tang}\,d\left\{u'\,\mathrm{Sin}\,w + \frac{v'\,\mathrm{Cos}\,w}{\sqrt{(1-ee\,\mathrm{Cos}\beta^2)}}\right\}$$

positiv sein, welcher Ausdruck, durch die Einführung von x (§ 5) in $a'\mathrm{Sin}d\,\mathrm{Cos}\,x$ verwandelt wird, und, da $\mathrm{Sin}d$ immer positiv ist, einen positiven Werth von $\mathrm{Cos}\,x$ fordert. — Der entgegengesetzte Fall, in welchem der Berührungspunkt beider Bilder des Planeten sich an dem Theile des Randes des nichtverschobenen Bildes befindet, welcher durch die Projection des Sphäroids begrenzt wird, wird durch die Verschiebung t', in der π entgegengesetzten Richtung, d. h. in dem Positionswinkel $\pi+180°$, in jenen verwandelt; wodurch man, statt der Formeln (28), in diesem Falle:

$$\left.\begin{aligned} s\,\mathrm{Sin}\,(p-\pi) &= a'mm'\,\mathrm{Sin}\,(M'-\pi+P) \\ s\,\mathrm{Cos}\,(p-\pi) &= a'mm'\,\mathrm{Cos}\,(M'-\pi+P) + t' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (28^*)$$

erhält. — Die Entscheidung, welcher von beiden Fällen der vorhandene ist, wird durch das § 4 entwickelte Unterscheidungszeichen der Lichtgrenze und des Randes der Projection des Sphäroids gegeben: jene begrenzt die Figur des Planeten (für $d < 90°$) an Punkten deren zugehörige Positionswinkel p', zwischen $P+w'-90°$ und $P+w'+90°$ fallen. Diese Positionswinkel sind mit u' und v' durch die Formeln:

$$u' = s'\,\mathrm{Sin}\,(p'-P),\quad v' = s'\,\mathrm{Cos}\,(p'-P)$$

verbunden, während die obigen Ausdrücke derselben Coordinaten:

$$u' = a'mm'\,\mathrm{Sin}\,M',\quad v' = a'mm'\,\mathrm{Cos}\,M'$$

sind und also $p' = M + P$ ergeben. Fällt also M zwischen $w' - 90°$ und $w' + 90°$, so ist der erste, die Anwendung der Formeln (28) erfordernde Fall vorhanden; fällt es zwischen $w' + 90°$ und $w' + 270°$ so ist es der andere, die Anwendung der Formeln (28*) erfordernde Fall.

9.

Die Berechnungsart der Beobachtungen der Satelliten eines Planeten kann man aus dem Vorhergehenden gleichfalls ableiten. Da ihre Ableitung vielleicht die wichtigste Anwendung dieser Theorie ist, auch der Reduction meiner, mit dem Heliometer gemachten Beobachtungen der Satelliten des Jupiters zum Grunde gelegt werden muss, so werde ich ihre Mittheilung nicht unterlassen.

Man kann durch verschiedene Beobachtungsarten zu der Bestimmung der Lage eines Satelliten gegen den Planeten gelangen. Die von mir angewandte setzt voraus, dass das Bild des Satelliten, welches eine Hälfte des Objectivs macht, nach und nach in vier verschiedene Punkte des Randes der Figur des Planeten gebracht werde, welche von der anderen Hälfte dargestellt wird. Die Richtung der Verschiebung der Objectivhälften wird zuerst so gestellt, dass sie den Satelliten durch die Figur des Planeten führt; in dieser Stellung, welche durch den abzulesenden Positionswinkel $= (p)$ bekannt wird, werden die Entfernungen des Satelliten von beiden Rändern der sichtbaren Figur des Planeten $= \sigma$ und σ' gemessen; ferner wird das Bild des Satelliten, während man den Axen der Objectivhälften eine, am Instrumente abzulesende Entfernung $= (s)$ giebt, durch Drehung des Objectivs um die Heliometeraxe, an beide Ränder der Figur des Planeten gebracht, und die Positionswinkel π und π', welche dieses leisten, werden beobachtet. — Augenscheinlich werden durch diese Beobachtungen sowohl die Entfernung $= s$ des Satelliten von dem Mittelpunkte des Planeten, als auch sein Positionswinkel an diesem Mittelpunkte $= p$ bestimmt. Die Genauigkeit des Resultats und die Leichtigkeit der Rechnung werden vermehrt, wenn man (p) und (s) so wählt, dass dadurch der Satellit sehr nahe in den Mittelpunkt des Planeten gebracht werden kann.

Ich werde zuerst die Relation zwischen den gemessenen Entfernungen σ und σ' und der gesuchten Entfernung s ableiten, unter der

nothwendigen Voraussetzung, dass (p) und p bekannt sind. Bezeichnet man die Coordinaten des Punktes des Randes der Figur des Planeten, an welchem das Bild des Satelliten sich befindet, während die Entfernung σ und der Positionswinkel (p) ist, durch u' und v' (§ 2), so hat man:

$$\left.\begin{aligned} u' &= s\,\mathrm{Sin}\,(p-P) - \sigma\,\mathrm{Sin}\,((p)-P) \\ v' &= s\,\mathrm{Cos}(p-P) - \sigma\,\mathrm{Cos}((p)-P) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (29)$$

Setzt man diese Ausdrücke, nachdem man, wie oben:

$$s_1 \mathrm{Sin}\,\psi = s\,\mathrm{Sin}\,(p-P)$$
$$s_1 \mathrm{Cos}\,\psi = \frac{s\,\mathrm{Cos}\,(p-P)}{\sqrt{(1-ee\,\mathrm{Cos}\beta^2)}}$$

und

$$\sigma_1 \mathrm{Sin}\,\psi' = \sigma\,\mathrm{Sin}\,((p)-P)$$
$$\sigma_1 \mathrm{Cos}\,\psi' = \frac{\sigma\,\mathrm{Cos}\,((p)-P)}{\sqrt{(1-ee\,\mathrm{Cos}\beta^2)}}$$

in dieselben eingeführt hat, in die Gleichung der Projection *des Sphäroids* des Planeten (12), so erhält man die zur Bestimmung der Entfernung des Satelliten von dem Rande dieser Ellipse erforderliche Gleichung:

$$a'a' = (s_1 \mathrm{Sin}\,\psi - \sigma_1 \mathrm{Sin}\,\psi')^2 + (s_1 \mathrm{Cos}\,\psi - \sigma_1 \mathrm{Cos}\,\psi')^2 \ldots. (30)$$

und durch Auflösung derselben:

$$\sigma_1 = s_1 \mathrm{Cos}\,(\psi'-\psi) \pm \sqrt{\{a'a' - s_1 s_1 \mathrm{Sin}\,(\psi'-\psi)^2\}} \ldots\ldots\ldots (31)$$

Man erhält ferner, durch Substitution derselben Ausdrücke (29) von u' und v' in die Gleichung der Projection der *Lichtgrenze* (15), die zur Bestimmung der Entfernung des Satelliten von dem Rande dieser Ellipse erforderliche Gleichung. Man hat nämlich:

$$u' \mathrm{Cos}\,w - \frac{v' \mathrm{Sin}\,w}{\sqrt{(1-ee\,\mathrm{Cos}\beta^2)}} = s_1 \mathrm{Sin}\,(\psi-w) - \sigma_1 \mathrm{Sin}\,(\psi'-w)$$
$$u' \mathrm{Sin}\,w + \frac{v' \mathrm{Cos}\,w}{\sqrt{(1-ee\,\mathrm{Cos}\beta^2)}} = s_1 \mathrm{Cos}\,(\psi-w) - \sigma_1 \mathrm{Cos}\,(\psi'-w)$$

wodurch (15) sich in:

$$a'a' = \{s_1 \mathrm{Sin}(\psi-w) - \sigma_1 \mathrm{Sin}(\psi'-w)\}^2 + \{s_1 \mathrm{Cos}(\psi-w) - \sigma_1 \mathrm{Cos}(\psi'-w)\}^2 \mathrm{Sec}\,d^2 \quad (32)$$

verwandelt, und durch Auflösung:

$$\sigma_{,} = s_{,}\,\mathrm{Cos}\,(\psi'-\psi) + \frac{s_{,}\,\mathrm{Sin}\,d^2\,\mathrm{Sin}\,(\psi'-\psi)\,\mathrm{Cos}\,(\psi'-\varpi)\,\mathrm{Sin}\,(\psi'-\varpi)}{1-\mathrm{Sin}\,d^2\,\mathrm{Sin}\,(\psi'-\varpi)^2}$$
$$\pm\,\mathrm{Cos}\,d\,\sqrt{\left\{a'a'\,[1-\mathrm{Sin}\,d^2\,\mathrm{Sin}\,(\psi'-\varpi)^2]-s_{,}s_{,}\,\mathrm{Sin}\,(\psi'-\psi)^2\right\}}$$
$$\frac{}{1-\mathrm{Sin}\,d^2\,\mathrm{Sin}\,(\psi'-\varpi)^2} \quad \ldots\ldots\ (33)$$

ergiebt. Versteht man unter σ die Entfernung des Satelliten von dem sichtbaren Rande der Lichtgrenze, unter σ' die Entfernung desselben von dem erleuchteten Rande der Projection des Sphäroids, so ist unter der Voraussetzung $d < 90°$, (welche bei den oberen Planeten allein vorkommen kann), der irrationale Theil beider Formeln mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen. Man hat also:

$$\sigma'_{,} = s_{,}\,\mathrm{Cos}\,(\psi'-\psi) \pm \sqrt{\left\{a'a' - s_{,}s_{,}\,\mathrm{Sin}\,(\psi'-\psi)^2\right\}}$$
$$\sigma_{,} = s_{,}\,\mathrm{Cos}\,(\psi'-\psi) + \frac{s_{,}\,\mathrm{Sin}\,d^2\,\mathrm{Sin}\,(\psi'-\psi)\,\mathrm{Cos}\,(\psi'-\varpi)\,\mathrm{Sin}\,(\psi'-\varpi)}{1-\mathrm{Sin}\,d^2\,\mathrm{Sin}\,(\psi'-\varpi)^2}$$
$$\mp\frac{\mathrm{Cos}\,d.\sqrt{\left\{a'a'\,[1-\mathrm{Sin}\,d^2\,\mathrm{Sin}\,(\psi'-\varpi)^2]-s_{,}s_{,}\,\mathrm{Sin}\,(\psi'-\psi)^2\right\}}}{1-\mathrm{Sin}\,d^2\,\mathrm{Sin}\,(\psi'-\varpi)^2}$$

wo das untere oder das obere Zeichen anzuwenden ist, jenachdem der erleuchtete Rand der Projection des Sphäroids, in Beziehung auf den Satelliten, der nähere oder der entferntere ist.

Man kann aber diese Formeln beträchtlich vereinfachen, wenn man die besonderen Umstände, welche bei den Beobachtungen der Jupiters-Satelliten, und noch mehr der Saturns-Satelliten, immer vorhanden sind, berücksichtigt. In beiden Fällen ist nämlich d immer so klein, dass $\mathrm{Sin}\,d^4$ vernachlässigt werden kann (§ 7); wenn man überdies (p) so wählt, dass die Bewegung der Bilder des Satelliten sehr nahe durch den Mittelpunkt der Figur des Planeten geht, in welchem Falle $s_{,}\,\mathrm{Sin}\,(\psi'-\psi)$ von der Ordnung von $\mathrm{Sin}\,d^2$, also das zweite Glied der zweiten Formel von der Ordnung $\mathrm{Sin}\,d^4$ wird, so vereinfachen sich die Formeln in:

$$\sigma'_{,} = s_{,} \pm a'$$
$$\sigma_{,} = s_{,} \mp a' \pm \tfrac{1}{2}\,a'\,\mathrm{Sin}\,d^2\,\mathrm{Cos}\,(\psi'-\varpi)^2$$

Sie ergeben, bis auf Grössen von der Ordnung $\mathrm{Sin}\,d^4$ (excl.) richtig:

$$s_{,} = \tfrac{1}{2}\,(\sigma'_{,}+\sigma_{,}) - \tfrac{1}{2}\,(\sigma'_{,}-\sigma_{,})\,\mathrm{Sin}\,d^2\,\mathrm{Cos}\,(\psi'-\varpi)^2$$

Wenn man für $s_{,}$, $\sigma'_{,}$, $\sigma_{,}$ ihre Ausdrücke durch s, σ', σ schreibt, nämlich:

$$s_{,} = \frac{s}{\sqrt{\{1-ee\,\mathrm{Cos}\,\beta^2\,\mathrm{Cos}\,\psi^2\}}}$$

$$\sigma'_{,} = \frac{\sigma'}{\sqrt{\{1-ee\,\mathrm{Cos}\,\beta^2\,\mathrm{Cos}\,\psi'^2\}}}$$

$$\sigma_{,} = \frac{\sigma}{\sqrt{\{1-ee\,\mathrm{Cos}\,\beta^2\,\mathrm{Cos}\,\psi'^2\}}}$$

so erhält man hieraus:

$$s = \sqrt{\left\{\frac{1-ee\,\mathrm{Cos}\,\beta^2\,\mathrm{Cos}\,\psi^2}{1-ee\,\mathrm{Cos}\,\beta^2\,\mathrm{Cos}\,\psi'^2}\right\}}\left\{\tfrac{1}{2}(\sigma'+\sigma) - \tfrac{1}{8}(\sigma'-\sigma)\,\mathrm{Sin}\,d^2\,\mathrm{Cos}(\psi'-w)^2\right\}$$

und wenn man auch Grössen von der Ordnung $ee\,\mathrm{Sin}\,d^2$ als unbedeutend betrachtet und daher $\psi' = \psi = p-P$ setzt:

$$s = \tfrac{1}{2}(\sigma'+\sigma) - \tfrac{1}{8}(\sigma'-\sigma)\,\mathrm{Sin}\,d^2\,\mathrm{Cos}(p-P-w)^2 \ldots\ldots \quad (34)$$

Ehe man diese Formel anwenden kann, muss man wissen, welcher der beiden Ränder der Figur des Planeten die Lichtgrenze, und welcher die erleuchtete Projection des Sphäroids ist. Im 4ten § ist gezeigt worden, dass die Lichtgrenze (in dem gegenwärtig allein in Betracht kommenden Falle $d < 90°$) an einem durch u' und v' bestimmten Punkte des Randes der Figur des Planeten sichtbar ist, wenn

$$u'\,\mathrm{Sin}\,w + \frac{v'\,\mathrm{Cos}\,w}{\sqrt{(1-ee\,\mathrm{Cos}\,\beta^2)}}$$

positiv ist; diese Grösse ist aber

$$= s,\mathrm{Cos}(\psi-w), - \sigma,\mathrm{Cos}(\psi'-w),$$

welcher Ausdruck derselben die verlangte Entscheidung giebt. In dem Falle der zuletzt verfolgten Näherung kann man, ohne sich dadurch aus ihren festgesetzten Grenzen zu entfernen, einen positiven Werth des Ausdruckes $(s-\sigma)\,\mathrm{Cos}(p-P-w)$ als Bedingung der Sichtbarkeit der Lichtgrenze an dem Punkte des Randes, auf welchen σ sich bezieht, annehmen. Wenn daher $p-P$ zwischen $w-90°$ und $w+90°$ ist, so ist $s-\sigma$ positiv oder die Lichtgrenze liegt in der Richtung des Satelliten, der erleuchtete Rand der Projection des Sphäroids also in der entgegengesetzten; oder die kleinere der beiden gemessenen Entfernungen des Satelliten ist σ, die grössere σ' und die der halben Summe beider anzubringende Verbesserung ist negativ. Wenn

dagegen $p-P$ zwischen $v+90°$ und $v+270°$ ist, so ist diese Verbesserung positiv zu nehmen. — Die hinreichend genäherte Reduction der Beobachtungen dieser Art setzt, wie aus dem Verschwinden von $\psi'-\psi$ aus der Endformel hervorgeht, die Ablesung des Positionswinkels (p), bei welchem σ und σ' gemessen worden sind, nicht voraus, falls er nur nahe $=p$ gemacht, oder die Bewegungslinie des Bildes des Satelliten nahe durch den Mittelpunkt der Figur des Planeten gelegt wird.

10.

Der andere Theil der hier aufzulösenden Aufgabe fordert, dass der Positionswinkel p des Satelliten an dem Mittelpunkte des Planeten, aus den ähnlichen Winkeln $\varkappa$ und $\varkappa'$, welche sein um die Entfernung s' verschobenes Bild an die Ränder der Figur des Planeten bringen, abgeleitet werde.

Indem die Auflösung dieses Theils der Aufgabe die Bestimmung der Durchschnittspunkte einer gegebenen Ellipse und eines gegebenen Kreises fordert, und indem vier solcher Durchschnittspunkte vorhanden sein können, führt sie nothwendig auf eine Gleichung des vierten Grades. Man wird sehen, dass diese in der Form:

$$0 = a + 2b\,\mathrm{Cos}v + 2c\,\mathrm{Sin}v + d\,\mathrm{Cos}v^2 + 2e\,\mathrm{Cos}v\,\mathrm{Sin}v + f\,\mathrm{Sin}v^2$$

hervortritt, und daher zu einem häufig und bei interessanten Veranlassungen vorkommenden Ausdrucke der Gleichungen des 4ten Grades gehört. Aus diesem Grunde benutze ich die gegenwärtige Veranlassung, die Auflösung dieser Gleichung, abgesondert von der Aufgabe, welche hier auf sie führt, abzuhandeln.

Ich werde die Function

$$V = a + 2b\,\mathrm{Cos}v + 2c\,\mathrm{Sin}v + d\,\mathrm{Cos}v^2 + 2e\,\mathrm{Cos}v\,\mathrm{Sin}v + f\,\mathrm{Sin}v^2$$

betrachten und darauf ausgehen, sie in die beiden Factoren:

$$\left\{\alpha + \beta\,\mathrm{Cos}v + \gamma\,\mathrm{Sin}v\right\}\left\{\alpha' + \beta'\,\mathrm{Cos}v + \gamma'\,\mathrm{Sin}v\right\}$$

zu zerlegen, deren Product:

$$\alpha\alpha' + (\alpha\beta'+\alpha'\beta)\,\mathrm{Cos}v + (\alpha\gamma'+\alpha'\gamma)\,\mathrm{Sin}v + \beta\beta'\,\mathrm{Cos}v^2 + (\beta\gamma'+\beta'\gamma)\,\mathrm{Cos}v\,\mathrm{Sin}v + \gamma\gamma'\,\mathrm{Sin}v^2$$

ist. Da es nicht geändert wird, wenn das Product von $-1+\mathrm{Cos}v^2+\mathrm{Sin}v^2$

in einen unbestimmten Factor z hinzugefügt wird; so ist nur nach dieser Hinzufügung zu fordern, dass seine einzelnen Glieder den ähnlichen Gliedern von V identisch seien. Durch die Vergleichung derselben erhält man:

$$\begin{aligned} a &= \alpha\alpha' - z \\ 2b &= \alpha\beta' + \alpha'\beta \\ 2c &= \alpha\gamma' + \alpha'\gamma \\ d &= \beta\beta' + z \\ 2e &= \beta\gamma' + \beta'\gamma \\ f &= \gamma\gamma' + z \end{aligned}$$

Diese 6 Gleichungen lassen eine der Grössen α, β, γ; α', β', γ' unbestimmt, wie auch nothwendig ist, indem man den einen Factor mit einer beliebigen Grösse multipliciren, den anderen damit dividiren kann, ohne dass ihr Product sich ändert. Die 1te, 4te und 6te ergeben:

$$\alpha' = \frac{a+z}{\alpha}$$

$$\beta' = \frac{d-z}{\beta}$$

$$\gamma' = \frac{f-z}{\gamma}$$

wodurch die 2te und 3te sich in:

$$2b = \frac{\alpha}{\beta}(d-z) + \frac{\beta}{\alpha}(a+z)$$

$$2c = \frac{\alpha}{\gamma}(f-z) + \frac{\gamma}{\alpha}(a+z)$$

verwandeln und durch ihre Auflösung:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b+R}{a+z} \quad \ldots\ldots \quad RR = bb - (a+z)(d-z)$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{c+R'}{a+z} \quad \ldots\ldots \quad R'R' = cc - (a+z)(f-z)$$

ergeben. Aus den Ausdrücken von β' und γ' durch β und γ erhält man, wenn man für diese letzteren das eben Gefundene setzt:

$$\alpha\beta' = \frac{(a+z)(d-z)}{b+R} = b-R$$

$$\alpha\gamma' = \frac{(a+z)(f-z)}{c+R'} = c-R'$$

Hierdurch verwandelt die noch zu erfüllende 5te Gleichung sich in:

$$RR' = bc - e(a+z).$$

Nimmt man z so, dass es dieser Gleichung genügeleistet, so hat man also:

$$V=\frac{1}{a+z}\left\{a+z+(b+R)\,\mathrm{Cos}\,v+(c+R')\,\mathrm{Sin}\,v\right\}\left\{a+z+(b-R)\,\mathrm{Cos}\,v+(c-R')\,\mathrm{Sin}\,v\right\}$$

oder, gleichgültig damit,

$$V(a+z)=\left\{a+z+b\,\mathrm{Cos}\,v+c\,\mathrm{Sin}\,v\right\}^2-\left\{R\,\mathrm{Cos}\,v+R'\,\mathrm{Sin}\,v\right\}^2.$$

Ob R und R' gleiche, oder entgegengesetzte Zeichen haben, wird durch die letzte Gleichung entschieden: ist $bc-e(a+z)$ positiv, so findet das erstere statt, ist es negativ das andere. Das Zeichen eines der beiden R bleibt offenbar willkürlich, indem durch entgegengesetzte Annahmen desselben, nur der erste der beiden Factoren von V in den anderen, und der andere in den ersten verwandelt wird. Aufmerksamkeit auf die Zeichen wird daher ganz unnöthig, wenn man nur eins der beiden R aus ihren oben gegebenen Ausdrücken berechnet, das andere aber aus

$$RR'=bc-e(a+z)$$

folgert.

Erhebt man diese Gleichung zum Quadrate, um sie rational zu machen, setzt man für RR und $R'R'$ ihre Ausdrücke, lässt man $bbcc$ auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens weg und dividirt man den Rest durch $a+z$, so erhält man, zur Bestimmung von z, die cubische Gleichung:

$$0=2bcz-bb(f-z)-cc(d-z)-ee(a+z)+(a+z)(d-z)(f-z)$$

oder:

$$0=z^3-(d+f-a)z^2+[bb+cc-ee-a(d+f)+df]z-[bbf+ccd+eea-adf-2bce].$$

Die jetzt in zwei Factoren zerlegte Function V wird, wenn man Sin v und Cos v durch Tang $\frac{1}{2}v=\theta$ ausdrückt, ein Bruch dessen Zähler vom 4ten Grade und dessen Nenner $=(1+\theta\theta)^2$ ist. Sie kann also immer in zwei Factoren vom 2ten Grade:

$$\frac{\delta+\varepsilon\theta+\zeta\theta\theta}{1+\theta\theta}\cdot\frac{\delta'+\varepsilon'\theta+\zeta'\theta\theta}{1+\theta\theta}$$

zerlegt werden, deren Coefficienten reel sind; jeder von diesen kann wieder in zwei einfache Factoren

$$\frac{p+q\theta}{\sqrt{(1+\theta\theta)}}\text{ und }\frac{p'+q'\theta}{\sqrt{(1+\theta\theta)}}$$

oder

$$p\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}v + q\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}v \text{ und } p'\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}v + q'\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}v$$

zerlegt werden, deren jeder, wenn man ihn $= 0$ setzt, einen Werth von v, welcher der Gleichung $V = 0$ entspricht, ergiebt. Offenbar muss man durch jede der Wurzeln der cubischen Gleichung eine der drei Combinationen der 4 einfachen Factoren zu zwei Paaren erlangen, wovon eine in jedem Falle reel ist. Wenn alle vier Werthe von v, welche der Gleichung $V = 0$ genügeleisten, oder alle vier einfachen Factoren von V, reel sind, so ist jede Combination derselben reel und die cubische Gleichung muss nicht nur drei reelle Wurzeln haben, sondern auch jede derselben muss einen reellen Werth von R (also auch von R') ergeben.

Indessen ist es nöthig, die Kennzeichen der verschiedenen Fälle, welche die Zerlegung der Function V in ihre einfachen Factoren darbieten kann, aufzusuchen. Aus dem eben Gesagten folgt, dass die Bedingungen, welche erfüllt werden müssen damit alle vier einfachen Factoren von V reel seien, die Bedingung enthalten müssen, dass die cubische Gleichung drei reelle Wurzeln habe. Ich werde jetzt jene Bedingungen vollständig aufsuchen. Wenn alle vier einfachen Factoren von V *reel* sind, so muss sowohl $(b+R)^2 + (c+R')^2$, als auch $(b-R)^2 + (c-R')^2$ grösser sein als $(a+g)^2$, welche Wurzel der cubischen Gleichung g auch bedeuten möge. Indem man diese Forderung auch:

$$bb + cc + RR + R'R' - (a+g)^2 > \pm 2(bR + cR')$$

schreiben kann und die Grösse auf der rechten Seite des Ungleichheitszeichens, durch die Anwendung eines ihrer beiden Zeichen nothwendig positiv wird, so wird nöthig, nicht nur, dass auch die Grösse auf der linken Seite positiv, sondern auch, dass

$$[bb + cc + RR + R'R' - (a+g)^2]^2 > 4[bR + cR']^2$$

sei. Diese Bedingungen kommen, indem man hier für R und R' ihre Ausdrücke durch g schreibt, darauf zurück, dass sowohl

$$(\mathrm{II}) \ldots\ldots 2(bb+cc) - (a+g)(d+f+a-g),$$

als auch

$$(\mathrm{III}) \ldots\ldots (a+g)^2[d+f+a-g]^2 - 4(a+g)[bb(f+a) + cc(d+a) - 2bc\alpha]$$

positiv seien. Wenn man die cubische Gleichung abgekürzt:

$$0 = z^3 - Az^2 + Bz - C$$

schreibt, also

$$A = d+f-a$$
$$B = bb+cc-ee-a(d+f)+df$$
$$C = bbf+ccd+eea-adf-2bce$$

annimmt, so bemerkt man leicht, dass die im zweiten Gliede der letzten Formel enthaltene Grösse $bb(f+a)+cc(d+a)-2bce$

$$= a^3+Aa^2+Ba+C,$$

oder, wenn die drei Wurzeln der cubischen Gleichung durch g, g', g'' bezeichnet werden,

$$= (a+g)(a+g')(a+g'')$$

ist. Hierdurch wird der Ausdruck der Grösse, welche, der Bedingung (II) zufolge, positiv sein soll,

$$= (a+g)^2\left\{(d+f+a-g)^2-4(a+g')(a+g'')\right\};$$

oder da $g+g'+g''=d+f-a$, also $d+f+a-g=2a+g'+g''$ ist,

$$= (a+g)^2\left\{(2a+g'+g'')^2-4(a+g')(a+g'')\right\} = (a+g)^2(g'-g'')^2$$

Er kann nur positiv sein, wenn g' und g'' reel sind. Damit V vier reelle Factoren habe, ist also erforderlich, dass die cubische Gleichung drei reelle Wurzeln habe, und dass für jede derselben der Ausdruck (I) positiv sei.

Wenn dagegen alle vier einfachen Factoren von V *imaginär* sind, müssen sowohl $(b+R)^2+(c+R')^2$, als auch $(b-R)^2+(c-R')^2$, kleiner sein als $(a+g)^2$, oder

$$bb+cc+RR+R'R'-(a+g)^2 < \pm 2(bR+cR');$$

woraus, wie vorher, gefolgert wird, dass die links vom Ungleichheitszeichen stehende, oben durch (I) bezeichnete Grösse negativ ist, die durch (II) bezeichnete aber positiv bleibt. Das letztere ist, wie ich schon gezeigt habe, die Bedingung dreier reellen Wurzeln der cubischen Gleichung; das erstere muss stattfinden falls unter g diejenige von ihnen verstanden wird, welche die Combination der vier imaginären Factoren zu zwei reellen Paaren ergiebt. — Sowohl *vier reelle*, als auch *vier imaginäre* Factoren von V fordern also drei reelle Wurzeln der cubischen Gleichung; der erste Fall fordert ferner, dass $2(bb+cc)-(a+g)(d+f+a-g)$ für jeden der drei Werthe von g positiv,

der andere, dass es wenigstens für einen von ihnen negativ sei; nämlich für den, welcher die reelle Zerfällung von V in zwei Factorenpaare ergiebt.

Es ist noch der Fall zu verfolgen, in welchem zwei der einfachen Factoren von V reel und zwei imaginär sind. Bezeichnet man durch g diejenige Wurzel der cubischen Gleichung, welche die Combination dieser vier Factoren zu zwei reellen Paaren ergiebt, so muss durch die Anwendung derselben, eine der Grössen $(b+R)^2+(c+R')^2$ und $(b-R)^2+(c-R')^2$ grösser, die andere kleiner sein als $(a+g)^2$; also

$$bb+cc+RR+R'R'-(a+g)^2$$

grösser als $2(bR+cR')$ negativ genommen und kleiner als dieselbe Grösse positiv genommen, oder

$$\{bb+cc+RR+R'R'-(a+g)^2\}^2 < 4(bR+cR')^2;$$

welches, auf dem bei den vorigen Fällen verfolgten Wege, zu der Forderung führt, dass $(a+g)^2(g'-g'')^2$ negativ sei. Dieser Forderung kann nur durch einen $\sqrt{-1}$ zum Factor habenden Werth von $g'-g''$ genügegeleistet werden: der gegenwärtige Fall kann also *nur* stattfinden, wenn die cubische Gleichung zwei imaginäre Wurzeln hat und unter g die reelle verstanden wird. Dass die Bedingungen, deren Erfüllung jeder der drei abgesonderten Fälle fordert, ihn auch zur nothwendigen Folge haben, geht aus der Erschöpfung aller Fälle durch jene drei hervor.

11.

Ich kehre nun zur Auflösung der am Anfange des vorigen §'s ausgesprochenen Aufgabe zurück. Zuerst werde ich den Positionswinkel p am Mittelpunkte des Planeten aufsuchen, welcher dem am Rande der Projection seines Sphäroids stattfindenden Positionswinkel π des um die Entfernung s' verschobenen Bildes des Satelliten entspricht.

Indem man die Coordinaten des Punktes am Rande, wo das Bild des Satelliten sich befindet, wie vorher, durch u' und v' bezeichnet, hat man:

$$s\,\mathrm{Sin}(p-P) = s'\,\mathrm{Sin}(\pi-P) + u'$$
$$s\,\mathrm{Cos}(p-P) = s'\,\mathrm{Cos}(\pi-P) + v'.$$

u' und v' können durch *eine* neue unbekannte Grösse x ausgedrückt werden, so dass ihre Ausdrücke die Gleichung (12), nämlich:

$$a'a' = u'u' + \frac{v'v'}{(1-ee\,\mathrm{Cos}\beta^2)}$$

erfüllen. Diese Ausdrücke sind:

$$u' = a'\,\mathrm{Sin}\,x; \qquad v' = a'\,\mathrm{Cos}\,x\,\sqrt{(1-ee\,\mathrm{Cos}\beta^2)}$$

und man erhält dadurch:

$$\left.\begin{aligned} s\,\mathrm{Sin}(p-P) &= s'\,\mathrm{Sin}(\pi-P) + a'\,\mathrm{Sin}\,x \\ s\,\mathrm{Cos}(p-P) &= s'\,\mathrm{Cos}(\pi-P) + a'\,\mathrm{Cos}\,x\,\sqrt{(1-ee\,\mathrm{Cos}\beta^2)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (35)$$

woraus man, sobald x bekannt ist, das gesuchte p berechnen kann. Die zur Bestimmung von x nöthige Gleichung erhält man durch die Summe der Quadrate beider Grössen, nämlich:

$$0 = k + 2a's'\,[\mathrm{Sin}(\pi-P)\,\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}(\pi-P)\,\mathrm{Cos}\,x\,.\,\Delta] + a'a'\,[\mathrm{Sin}\,x^2 + \Delta\Delta\,\mathrm{Cos}\,x^2] \quad (36)$$

wo k für $s's'-ss$ und Δ für $\sqrt{(1-ee\,\mathrm{Cos}\beta^2)}$ geschrieben ist. Ich werde überdies noch e' für $e\,\mathrm{Cos}\beta$ schreiben.

Vergleicht man diese Gleichung mit der im vorigen § aufgelöseten, so hat man:

$$\begin{aligned} a &= k \\ b &= a's'\,\mathrm{Cos}(\pi-P)\,.\,\Delta \\ c &= a's'\,\mathrm{Sin}(\pi-P) \\ d &= a'a'\,\Delta\Delta \\ e &= 0 \\ f &= a'a' \end{aligned}$$

woraus die cubische Gleichung:

$$0 = x^3 - (a'a' + a'a'\Delta\Delta - k)\,xx + [a'a'\,s's'\,(1-e'e'\,\mathrm{Cos}(\pi-P)^2) + a'^4\Delta\Delta - ka'a'(1+\Delta\Delta)]\,x - a'^4\Delta\Delta\,(s's'-k) \ldots\ldots\ldots (37)$$

hervorgeht.

Wenn die Beobachtung wirklich gemacht ist, also x möglich sein muss, der Satellit aber ausser dem Umfange der Figur des Planeten steht, also nur zwei Werthe von x möglich sein können, so hat diese Gleichung, dem vorigen § zufolge, nur eine reelle Wurzel. Diese ist, bis auf Grössen von der Ordnung von $e'e'$ und k, $= a'a'$ und kann, da man diesen Näherungswerth derselben kennt, leicht bestimmt werden. Ihre Annahme in dem $=0$ zu setzenden Ausdrucke:

$$\varepsilon + x + (b+B)\,\mathrm{Cos}\,x + (c+B')\,\mathrm{Sin}\,x$$

bestimmt zwei Werthe von x, deren Substitution in (35) die beiden Werthe von p ergiebt, welche der Forderung genügeleisten. Um über diese Zweideutigkeit in der Bestimmung von p entscheiden zu können, muss man wissen, ob der beobachtete Werth von π der grössere, oder der kleinere der beiden möglichen ist.

Wenn dagegen der Punkt des Randes der Figur des Planeten, auf welchen π sich bezieht, zu der Lichtgrenze gehört, seine Coordinaten also der Gleichung (15):

$$a'a' = \left[u'\,\mathrm{Cos}\,w - \frac{v'}{\Delta}\,\mathrm{Sin}\,w\right]^2 + \left[u'\,\mathrm{Sin}\,w + \frac{v'}{\Delta}\,\mathrm{Cos}\,w\right]^2 \mathrm{Sec}\,d^2$$

entsprechen müssen, so können sie (wie § 5) durch eine neue veränderliche Grösse, welche mit ihnen durch die Formeln:

$$u'\,\mathrm{Cos}\,w - \frac{v'}{\Delta}\,\mathrm{Sin}\,w = a'\,\mathrm{Sin}\,x$$
$$u'\,\mathrm{Sin}\,w + \frac{v'}{\Delta}\,\mathrm{Cos}\,w = a'\,\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Cos}\,d$$

verbunden ist und welche:

$$u' = a'\left\{\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,w + \mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,w\,\mathrm{Cos}\,d\right\}$$
$$v' = a'\left\{-\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Sin}\,w + \mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Cos}\,w\,\mathrm{Cos}\,d\right\}\Delta$$

ergiebt, ausgedrückt werden. Durch die Substitution dieser Ausdrücke erhält man:

$$\left.\begin{aligned} s\,\mathrm{Sin}\,(p-P) &= s'\,\mathrm{Sin}\,(\pi-P) + a'\left\{\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,w + \mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,w\,\mathrm{Cos}\,d\right\} \\ s\,\mathrm{Cos}\,(p-P) &= s'\,\mathrm{Cos}\,(\pi-P) + a'\left\{-\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Sin}\,w + \mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Cos}\,w\,\mathrm{Cos}\,d\right\}\Delta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (38)$$

und durch die Summe der Quadrate:

$$\begin{aligned} 0 = k &+ 2a's'\left\{\mathrm{Sin}\,(\pi-P)\,\mathrm{Cos}\,w - \mathrm{Cos}\,(\pi-P)\,\mathrm{Sin}\,w\,.\,\Delta\right\}\mathrm{Sin}\,x \\ &+ 2a's'\left\{\mathrm{Sin}\,(\pi-P)\,\mathrm{Sin}\,w + \mathrm{Cos}\,(\pi-P)\,\mathrm{Cos}\,w\,.\,\Delta\right\}\mathrm{Cos}\,d\,.\,\mathrm{Cos}\,x \\ &+ a'a'\left\{\mathrm{Cos}\,w^2 + \mathrm{Sin}\,w^2\,\Delta\Delta\right\}\mathrm{Sin}\,x^2 \\ &+ 2a'a'\,\mathrm{Sin}\,w\,\mathrm{Cos}\,w\,\mathrm{Cos}\,d\,(1-\Delta\Delta)\,\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x \\ &+ s's'\left\{\mathrm{Sin}\,w^2 + \mathrm{Cos}\,w^2\,\Delta\Delta\right\}\mathrm{Cos}\,d^2\,\mathrm{Cos}\,x^2 \ldots\ldots\ldots (39) \end{aligned}$$

Die Vergleichung dieser Gleichung mit der im 10ten § aufgelösten ergiebt:

$$a = k$$
$$b = a's' \left\{ \mathrm{Sin}(\pi - P)\,\mathrm{Sin}\,w + \mathrm{Cos}(\pi - P)\,\mathrm{Cos}\,w\,.\,\Delta \right\} \mathrm{Cos}\,d$$
$$c = a's' \left\{ \mathrm{Sin}(\pi - P)\,\mathrm{Cos}\,w - \mathrm{Cos}(\pi - P)\,\mathrm{Sin}\,w\,.\,\Delta \right\}$$
$$d = a'a' \left\{ \mathrm{Sin}\,w^2 + \mathrm{Cos}\,w^2\,\Delta\Delta \right\} \mathrm{Cos}\,d^2$$
$$e = a'a'\,\mathrm{Sin}\,w\,\mathrm{Cos}\,w\,\mathrm{Cos}\,d\,(1 - \Delta\Delta)$$
$$f = a'a' \left\{ \mathrm{Cos}\,w^2 + \mathrm{Sin}\,w^2\,\Delta\Delta \right\}$$

wodurch man die Coefficienten der cubischen Gleichung:

$$0 = z^3 - Azz + Bz - C \ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

erhält. Von dem gegenwärtigen Falle gelten auch die Bemerkungen, welche ich zu dem vorigen gemacht habe.

In dem 8ten § ist gezeigt worden, dass die Lichtgrenze an allen Punkten des Randes des Planeten sichtbar ist, für welche der Cosinus des dort und hier durch x bezeichneten Winkels positiv ist. Hieraus kann beurtheilt werden, ob die Punkte des Randes, auf welche man die Beobachtung des Satelliten bezogen hat, der Lichtgrenze oder der Projection des Sphäroids zugehören. Es ist offenbar möglich, dass beide in der einen, oder in der anderen Curve liegen, oder der eine in der einen, der andere in der anderen. Wenn k sehr klein und die Entfernung des Satelliten weit grösser ist als a', wird gewöhnlich der letztere der drei möglichen Fälle eintreten.

12.

Bei der Berechnung von Beobachtungen der Satelliten der Planeten, für welchen $e'e'$ ein ziemlich kleiner Bruch, so wie auch d ein kleiner Winkel ist, kann man die Anwendung dieser directen Auflösung der Aufgabe vermeiden, und dagegen durch aufeinanderfolgende Annäherungen zum Ziele gelangen, welche so schnell fortschreiten, dass sie leichter zu dem erforderlichen Grade von Genauigkeit führen, als man ihn durch die eben gegebene Auflösung würde erlangen können. Ich werde daher auch diese zweite Auflösung mittheilen.

Ich werde annehmen, dass die Entfernung s' des Satelliten von den beiden Punkten des Randes des Planeten, auf welche die beobachteten Positionswinkel x und x' (§. 9) sich beziehen, seiner Entfernung

von dem Mittelpunkte so nahe gleich ist, dass $s's' - ss = k$ eine sehr kleine Grösse ist, deren Quadrat man vernachlässigen kann; ich werde sie durch $2a's'\alpha$ bezeichnen, wo also $a'\alpha$ sehr nahe $= s' - s$ ist. Wenn man

$$\varrho \operatorname{Sin} \varphi = \triangle \operatorname{Cos} (\pi - P)$$
$$\varrho \operatorname{Cos} \varphi = - \operatorname{Sin} (\pi - P)$$

setzt, so verwandelt sich die Gleichung (36), welche sich auf den Rand der Projection des Sphäroids bezieht, in:

$$\operatorname{Sin} (x - \varphi) = \frac{a'}{2s'\varrho} (1 - e'e' \operatorname{Cos} x^2) + \frac{\alpha}{\varrho}$$

Setzt man, um eine erste Annäherung an x zu erhalten,

$$\operatorname{Sin} (x' - \varphi) = \frac{a'}{2s'\varrho}$$

so kann man einen der daraus hervorgehenden zwei Werthe von x' anwenden um $1 - e'e' \operatorname{Cos} x^2$ näherungsweise zu berechnen. Man erhält dann aus der Formel:

$$\operatorname{Sin} (x'' - \varphi) = \frac{a'}{2s'\varrho} (1 - e'e' \operatorname{Cos} x'^2)$$

eine zweite Annäherung, welche der Wahrheit schon sehr nahe sein wird, welche man aber auch noch weiter treiben kann, wenn man es für angemessen hält. Hat man die beabsichtigte Annäherung erreicht und setzt man:

$$\operatorname{Sin} \varepsilon = \frac{a'}{2s'\varrho} (1 - e'e' \operatorname{Cos} x^2), \ldots\ldots\ldots (41)$$

so ist

$$\operatorname{Sin} (x - \varphi) = \operatorname{Sin} \varepsilon + \frac{\alpha}{\varrho}$$

und

$$x = \varphi + \varepsilon + \frac{\alpha}{\varrho \operatorname{Cos} \varepsilon}$$

Man gelangt offenbar zu der einen oder der anderen Wurzel der Gleichung, jenachdem man für $x' - \varphi$, $x'' - \varphi$, ... ε spitze oder stumpfe Winkel nimmt. Mit dem gefundenen Werthe von x erhält man:

$$\operatorname{Sin} x = \operatorname{Sin} (\varphi + \varepsilon) + \alpha \frac{\operatorname{Cos} (\varphi + \varepsilon)}{\varrho \operatorname{Cos} \varepsilon}$$
$$\operatorname{Cos} x = \operatorname{Cos} (\varphi + \varepsilon) - \alpha \frac{\operatorname{Sin} (\varphi + \varepsilon)}{\varrho \operatorname{Cos} \varepsilon}$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in (35):

$$s \operatorname{Sin}(p-P) = s' \operatorname{Sin}(\pi-P) + a' \operatorname{Sin}(\varphi+\varepsilon) + a'\alpha \frac{\operatorname{Cos}(\varphi+\varepsilon)}{\varrho \operatorname{Cos}\varepsilon}$$
$$s \operatorname{Cos}(p-P) = s' \operatorname{Cos}(\pi-P) + \triangle s' \operatorname{Cos}(\varphi+\varepsilon) - a'\alpha \frac{\operatorname{Sin}(\varphi+\varepsilon)}{\varrho \operatorname{Cos}\varepsilon}$$

Hieraus folgt, durch Multiplication in $\operatorname{Cos}(\pi-P)$ und $-\operatorname{Sin}(\pi-P)$:

$$\operatorname{Sin}(p-\pi) = \frac{a'}{s}\left\{\operatorname{Cos}(\pi-P)\operatorname{Sin}(\varphi+\varepsilon) - \triangle \operatorname{Sin}(\pi-P)\operatorname{Cos}(\varphi+\varepsilon)\right\}$$
$$+ \frac{a'\alpha}{\varrho s \operatorname{Cos}\varepsilon}\left\{\operatorname{Cos}(\pi-P)\operatorname{Cos}(\varphi+\varepsilon) + \triangle \operatorname{Sin}(\pi-P)\operatorname{Sin}(\varphi+\varepsilon)\right\}$$

welcher Ausdruck sich durch die Substitution der Ausdrücke von $\operatorname{Cos}\varphi$ und $\operatorname{Sin}\varphi$ durch $\pi-P$, in:

$$\operatorname{Sin}(p-\pi) = \frac{a'}{s\varrho}\left\{\triangle \operatorname{Cos}\varepsilon - \tfrac{1}{2}e'e' \operatorname{Sin}\varepsilon \operatorname{Sin}2(\pi-P)\right\}$$
$$- \frac{a'\alpha}{s\varrho\varrho}\left\{\triangle \operatorname{Tan}\varepsilon - \tfrac{1}{2}e'e' \operatorname{Sin}2(\pi-P)\right\} \ldots\ldots (42)$$

verwandelt.

Wenn dagegen der beobachtete Positionswinkel π sich auf einen Punkt an der Lichtgrenze bezieht, also x aus der Gleichung (39) abzuleiten ist, so kann dieses gleichfalls durch aufeinanderfolgende Annäherungen geschehen, welchen aber, wenn sie leicht zum Ziele führen sollen, eine Umformung der Gleichung vorangehen muss. Durch die Einführung von ϱ und φ verwandelt sich diese Gleichung zunächst in:

$$0 = 2s'a'\alpha - 2s'a'\varrho\left\{\operatorname{Cos}(\varphi-w)\operatorname{Sin}x - \operatorname{Sin}(\varphi-w)\operatorname{Cos}x\operatorname{Cos}d\right\}$$
$$+ a'a'\left\{\operatorname{Cos}w\operatorname{Sin}x + \operatorname{Sin}w\operatorname{Cos}x\operatorname{Cos}d\right\}^2$$
$$+ a'a'\triangle\triangle\left\{\operatorname{Sin}w\operatorname{Sin}x - \operatorname{Cos}w\operatorname{Cos}x\operatorname{Cos}d\right\}^2$$

und ferner, durch

$$m\operatorname{Cos}\xi = \operatorname{Cos}x\operatorname{Cos}d$$
$$m\operatorname{Sin}\xi = \operatorname{Sin}x$$

in:

$$0 = 2s'\alpha - 2s'\varrho\, m \operatorname{Sin}(\xi-\varphi+w) + a'mm(1-e'e'\operatorname{Cos}(\xi+w)^2)$$

oder in:

$$\operatorname{Sin}(\xi-\varphi+w) = \frac{a'm}{2s'\varrho}(1-e'e'\operatorname{Cos}(\xi+w)^2) + \frac{\alpha}{\varrho' m}.$$

Da m durch ξ ausgedrückt werden kann, nämlich:

$$m = \frac{\operatorname{Cos}d}{\sqrt{\left\{1-\operatorname{Sin}d^2\operatorname{Sin}\xi^2\right\}}}$$

so enthält diese Gleichung, ausser gegebenen Grössen, nur ξ, und zwar in einer Art, welche sie zur Erfindung dieser unbekannten Grösse durch aufeinanderfolgende Näherungen eignet. Man setzt zuerst:

$$\mathrm{Sin}\,(\xi'-\varphi+w) = \frac{a'\,\mathrm{Cos}\,d}{2s'\varrho}$$

und sucht, mit einem der daraus hervorgehenden Werthe von ξ':

$$\frac{1-e'e'\,\mathrm{Cos}(\xi'+w)^2}{\sqrt{(1-\mathrm{Sin}\,d^2\,\mathrm{Sin}\,\xi'^2)}}$$

wodurch man ferner

$$\mathrm{Sin}\,(\xi''-\varphi+w) = \frac{a'\,\mathrm{Cos}\,d}{2s'\varrho}\cdot\frac{1-e'e'\,\mathrm{Cos}(\xi'+w)^2}{\sqrt{(1-\mathrm{Sin}\,d^2\,\mathrm{Sin}\,\xi'^2)}}$$

erhält u. s. w. Nach der Erreichung des beabsichtigten Grades von Genauigkeit setzt man:

$$\mathrm{Sin}\,(\varepsilon) = \frac{a'\,\mathrm{Cos}\,d}{2s'\varrho}\cdot\frac{1-e'e'\,\mathrm{Cos}(\xi+w)^2}{\sqrt{(1-\mathrm{Sin}\,d^2\,\mathrm{Sin}\,\xi^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots (43)$$

und erhält dadurch

$$\mathrm{Sin}\,(\xi-\varphi+w) = \mathrm{Sin}\,(\varepsilon) + \frac{\alpha}{\varrho m}$$

oder:

$$\xi = \varphi - w + (\varepsilon) + \frac{\alpha}{\varrho m\,\mathrm{Cos}\,(\varepsilon)}\,.$$

Offenbar erhält man die eine, oder die andere Wurzel der Gleichung, jenachdem man Anfangs den einen oder den anderen der beiden durch ihren Sinus bestimmten Werthe von $\xi'-\varphi+w$ annimmt. Wenn ξ gefunden ist, hat man:

$$u' = a'm\,\mathrm{Sin}\,(\xi+w) = a'm\,\mathrm{Sin}\,(\varphi+(\varepsilon)) + \frac{a'\alpha}{\varrho}\,\frac{\mathrm{Cos}\,(\varphi+(\varepsilon))}{\mathrm{Cos}\,(\varepsilon)}$$

$$\frac{v'}{\Delta} = a'm\,\mathrm{Cos}(\xi+w) = a'm\,\mathrm{Cos}(\varphi+(\varepsilon)) - \frac{a'\alpha}{\varrho}\,\frac{\mathrm{Sin}\,(\varphi+(\varepsilon))}{\mathrm{Cos}\,(\varepsilon)}$$

und erlangt, durch die Substitution dieser Ausdrücke in die Formeln:

$$s\,\mathrm{Sin}\,(p-P) = s'\,\mathrm{Sin}\,(\pi-P) + u'$$
$$s\,\mathrm{Cos}(p-P) = s'\,\mathrm{Cos}(\pi-P) + v'$$

und durch eine Rechnung, welche mit der übereinstimmt, die auf (42) geführt hat:

$$\mathrm{Sin}\,(p-\pi) = \frac{a'm}{s\varrho}\left\{\Delta\,\mathrm{Cos}\,(\varepsilon) - \tfrac{1}{2}e'e'\,\mathrm{Sin}\,(\varepsilon)\,\mathrm{Sin}\,2(\pi-P)\right\}$$
$$-\frac{a'\alpha}{s\varrho\varrho}\left\{\Delta\,\mathrm{Tang}\,(\varepsilon) + \tfrac{1}{2}e'e'\,\mathrm{Sin}\,2(\pi-P)\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (44)$$

Es muss noch über die Zweideutigkeiten entschieden werden, welche die Formeln (42) und (44) einschliessen, indem ε und (ε) sowohl kleiner, als grösser als 90° angenommen werden können. Da die Bedingung der Sichtbarkeit eines durch x bestimmten Punktes der Lichtgrenze ist, dass $\cos x$ einen positiven Werth habe, und da $\cos x$ und $\cos \xi$ gleiches Zeichen haben, so muss, für jeden sichtbaren Punkt der Lichtgrenze, auch $\xi = \varphi - w + (\varepsilon)$ in den ersten oder vierten Quadranten fallen, oder $< \mp 90°$, also $(\varepsilon) > w - \varphi - 90° < w - \varphi + 90°$ sein. Ferner muss der Ausdruck (42) positiv sein, wenn $\pi < p$, negativ wenn $\pi > p$, welche Bedingungen (wenigstens mit der Ausnahme der Fälle in welchen (ε) sehr nahe $= 90°$ wäre, welche aber in der Anwendung nicht vorkommen können) damit übereinkommen, dass (ε) im ersten Falle ein spitzer, im zweiten ein stumpfer Winkel ist. Wenn man also den kleineren der beiden beobachteten Positionswinkel als sich auf die Lichtgrenze beziehend annimmt, folglich für das ihm zugehörige (ε) den *spitzen* Winkel, welcher der obigen Gleichung genügeleistet wählt, so muss *dieser* zwischen $w - \varphi - 90°$ und $w - \varphi + 90°$ fallen, wenn die Annahme richtig ist; wenn man den grösseren der beiden Positionswinkel als sich auf die Lichtgrenze beziehend annimmt, also für (ε) den *stumpfen*, der Gleichung entsprechenden Winkel wählt, so fordert die Richtigkeit der Annahme, dass *dieser* zwischen $w - \varphi - 90°$ und $w - \varphi + 90°$ falle. — Hierdurch wird in allen Fällen vollständig entschieden. Es ist schon erinnert worden, dass beide beobachtete Positionswinkel sich entweder auf die Lichtgrenze, oder auf den erleuchteten Rand der Projection des Sphäroids beziehen können; oder der eine von beiden auf die erstere, der andere auf die letztere Begrenzungscurve der Figur des Planeten.

13.

Ich werde jetzt den Fall weiter verfolgen, in welchem man beide Positionswinkel π und π' beobachtet hat und p aus der halben Summe beider ableiten will. Beobachtungen, durch welche p bestimmt werden soll, müssen immer in diesem Falle sein, wenn ihr Resultat nicht von einer Annahme für die Grösse des Halbmessers des Planeten abhängig bleiben soll. Unter π werde ich den kleineren, unter π' den grösseren der beiden Positionswinkel verstehen.

Indem die Werthe von $\mathrm{Sin}\,\varepsilon$ oder $\mathrm{Sin}\,(\varepsilon)$ in beiden Fällen, auf welche der beiden Begrenzungscurven der Figur des Planeten sich auch jeder von ihnen beziehen mag, nur in Grössen von der Ordnung von $\mathrm{Sin}\,\alpha^2$ und $e'e'$ voneinander verschieden sein können, das eine ε aber ein spitzer, das andere ein stumpfer Winkel ist, so sind die in die kleine Grösse α multiplicirten Glieder der Formeln (42) und (44) von nahe gleicher Grösse, aber von entgegengesetzten Zeichen und verschwinden daher nahe aus der Summe beider Formeln. Hieraus folgt (so wie das Ähnliche am Ende von § 9) dass es nicht nöthig ist, ε' abzulesen, sondern dass es hinreicht, dasselbe sehr nahe $=\varepsilon$ zu machen.

Zuerst muss entschieden werden, an welcher der Begrenzungscurven jeder der Positionswinkel beobachtet worden ist. Indem man die Formel (43) zuerst auf π anwendet und, weil dieses der kleinere Positonswinkel ist, den Werth von (ε) dadurch sucht, welcher $<90°$ ist, so erkennt man, ob diese Beobachtung sich auf die Lichtgrenze bezieht oder nicht; das erstere ist der Fall wenn (ε) zwischen $w-\varphi-90°$ und $w-\varphi+90°$, das letztere wenn es ausser dieser Begrenzung liegt. Indem man ferner dieselbe Formel auf π' anwendet und, weil dieses der grössere Positionswinkel ist, für (ε) den Werth sucht welcher $>90°$ ist, so giebt dasselbe Kennzeichen auch an, ob die zweite Beobachtung sich auf die Lichtgrenze bezieht oder nicht. Indem hierdurch bekannt wird, welche der beiden Formeln (42) und (44) man zur Berechnung jeder der beiden Beobachtungen anzuwenden hat, bedarf es nur noch der Zusammenstellung der verschiedenen möglichen Fälle. Dabei werde ich die sich auf den grösseren Positionswinkel π' beziehenden, oben eingeführten Grössen ϱ, m, ε, (ε), von den sich auf den kleineren beziehenden durch die Bezeichnungen ϱ', m', ε', (ε') unterscheiden; ε und (ε) sind also immer die spitzen Winkel, wodurch man den Gleichungen (41) und (43) genügeleisten kann, ε' und (ε') die stumpfen.

1. π und π' beziehen sich auf den erleuchteten Rand der *Projection des Sphäroids.*

Die anzuwendende Formel (42) ergiebt:

$$\mathrm{Sin}\,(p-\pi) = \frac{\alpha'}{s\varrho}\left\{\Delta\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon - \tfrac{1}{4}\,e'e'\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,2(\pi-P)\right\}$$

$$\mathrm{Sin}\,(p-\pi') = \frac{\alpha'}{s\varrho'}\left\{\Delta\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon' - \tfrac{1}{4}\,e'e'\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon'\,\mathrm{Sin}\,2(\pi'-P)\right\}$$

und man erhält dadurch:

$$\mathrm{Sin}\left(p-\frac{\pi'+\pi}{2}\right)=\frac{a'}{2s\,\mathrm{Cos}\frac{\pi'-\pi}{2}}\left\{\Delta\left(\frac{\mathrm{Cos}\,\varepsilon}{\varrho}+\frac{\mathrm{Cos}\,\varepsilon'}{\varrho'}\right)-\tfrac{1}{2}e'e'\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\varepsilon}{\varrho}+\frac{\mathrm{Sin}\,\varepsilon'}{\varrho'}\right)\mathrm{Cos}(\pi'-\pi)\,\mathrm{Sin}(\pi'+\pi-2P)\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{2}e'e'\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\varepsilon}{\varrho}-\frac{\mathrm{Sin}\,\varepsilon'}{\varrho'}\right)\mathrm{Sin}\,(\pi'-\pi)\,\mathrm{Cos}(\pi'+\pi-2P)\right\}\quad(45)$$

2. π und π' beziehen sich auf die *Lichtgrenze*.

Die anzuwendende Formel (44) ergiebt:

$$\mathrm{Sin}(p-\pi)=\frac{a'}{s}\cdot\frac{m}{\varrho}\left\{\Delta\mathrm{Cos}\,(\varepsilon)-\tfrac{1}{2}e'e'\,\mathrm{Sin}\,(\varepsilon)\,\mathrm{Sin}\,2(\pi-P)\right\}$$
$$\mathrm{Sin}(p-\pi')=\frac{a'}{s}\cdot\frac{m'}{\varrho'}\left\{\Delta\mathrm{Cos}\,(\varepsilon')-\tfrac{1}{2}e'e'\,\mathrm{Sin}\,(\varepsilon')\,\mathrm{Sin}\,2(\pi'-P)\right\}$$

und man erhält dadurch

$$\mathrm{Sin}\left(p-\frac{\pi'+\pi}{2}\right)=\frac{a'}{2s\,\mathrm{Cos}\frac{\pi'-\pi}{2}}\left\{\Delta\left(\frac{m}{\varrho}\mathrm{Cos}(\varepsilon)+\frac{m'}{\varrho'}\mathrm{Cos}(\varepsilon')\right)\right.$$
$$-\tfrac{1}{2}e'e'\left(\frac{m}{\varrho}\mathrm{Sin}(\varepsilon)+\frac{m'}{\varrho'}\mathrm{Sin}(\varepsilon')\right)\mathrm{Cos}\,(\pi'-\pi)\,\mathrm{Sin}\,(\pi'+\pi-2P)$$
$$\left.+\tfrac{1}{2}e'e'\left(\frac{m}{\varrho}\mathrm{Sin}(\varepsilon)-\frac{m'}{\varrho'}\mathrm{Sin}(\varepsilon')\right)\mathrm{Sin}\,(\pi'-\pi)\,\mathrm{Cos}(\pi'+\pi-2P)\right\}\;..\;(46)$$

3ª. π bezieht sich auf den *erleuchteten Rand*, π' auf die *Lichtgrenze*.

Auf π ist die Formel (42), auf π' die Formel (44) anzuwenden, und man erhält dadurch:

$$\mathrm{Sin}\left(p-\frac{\pi'+\pi}{2}\right)=\frac{e'}{2s\,\mathrm{Cos}\frac{\pi'-\pi}{2}}\left\{\Delta\left(\frac{1}{\varrho}\mathrm{Cos}\,\varepsilon+\frac{m'}{\varrho'}\mathrm{Cos}(\varepsilon')\right)\right.$$
$$-\tfrac{1}{2}e'e'\left(\frac{1}{\varrho}\mathrm{Sin}\,\varepsilon+\frac{m'}{\varrho'}\mathrm{Sin}(\varepsilon')\right)\mathrm{Cos}(\pi'-\pi)\,\mathrm{Sin}\,(\pi'+\pi-2P)$$
$$\left.+\tfrac{1}{2}e'e'\left(\frac{1}{\varrho}\mathrm{Sin}\,\varepsilon-\frac{m'}{\varrho'}\mathrm{Sin}(\varepsilon')\right)\mathrm{Sin}\,(\pi'-\pi)\,\mathrm{Cos}(\pi'+\pi-2P)\right\}\;..\;(47^a)$$

3ᵇ. π bezieht sich auf die *Lichtgrenze*, π' auf den *erleuchteten Rand*.

Auf π ist die Formel (44), auf π' die Formel (42) anzuwenden, und man erhält dadurch:

$$\mathrm{Sin}\left(p-\frac{\pi'+\pi}{2}\right)=\frac{a'}{2s\,\mathrm{Cos}\frac{\pi'-\pi}{2}}\left\{\Delta\left(\frac{m}{\varrho}\mathrm{Cos}(\varepsilon)+\frac{1}{\varrho}\mathrm{Cos}\,\varepsilon'\right)\right.$$
$$-\tfrac{1}{2}e'e'\left(\frac{m}{\varrho}\mathrm{Sin}(\varepsilon)+\frac{1}{\varrho'}\mathrm{Sin}\,\varepsilon'\right)\mathrm{Cos}(\pi'-\pi)\,\mathrm{Sin}\,(\pi'+\pi-2P)$$
$$\left.+\tfrac{1}{2}e'e'\left(\frac{m}{\varrho}\mathrm{Sin}(\varepsilon)-\frac{1}{\varrho'}\mathrm{Sin}\,\varepsilon'\right)\mathrm{Sin}\,(\pi'-\pi)\,\mathrm{Cos}\,(\pi'+\pi-2P)\right\}\;...\;(47^b)$$

Zur Anwendung auf die Beobachtungen der Satelliten der Planeten reichen indessen Näherungsformeln hin, in welchen e'^4, $e'e'\mathrm{Sin}\,d^2$, $\mathrm{Sin}\,d^4$ vernachlässigt werden. Setzt man

$$\frac{a'}{2s} = \operatorname{Sin}\delta$$

so darf man, in den in $e'e'$ multiplicirten Gliedern der eben angeführten Formeln,

$$\frac{1}{\varrho}\operatorname{Sin}\varepsilon = \frac{1}{\varrho'}\operatorname{Sin}\varepsilon' = \frac{m}{\varrho}\operatorname{Sin}(\varepsilon) = \frac{m'}{\varrho'}\operatorname{Sin}(\varepsilon') = \operatorname{Sin}\delta$$
$$\tfrac{1}{2}(\pi'-\pi) = 2\delta;\quad \tfrac{1}{2}(\pi'+\pi) = p$$

annehmen; und ferner hat man, bis zu $e'e'$ und $\operatorname{Sin} d^2$ incl. richtig:

$$\frac{1}{\varrho}\operatorname{Cos}\varepsilon = \operatorname{Cos}\delta\left\{1 + \frac{e'e'}{2}\frac{\operatorname{Cos}2\delta}{\operatorname{Cos}\delta^2}\operatorname{Cos}(\pi-P)^2 + e'e'\operatorname{Tang}\delta^2\operatorname{Sin}(\pi-P+\delta)^2\right\}$$

$$\frac{1}{\varrho'}\operatorname{Cos}\varepsilon' = -\operatorname{Cos}\delta\left\{1 + \frac{e'e'}{2}\frac{\operatorname{Cos}2\delta}{\operatorname{Cos}\delta^2}\operatorname{Cos}(\pi'-P)^2 + e'e'\operatorname{Tang}\delta^2\operatorname{Sin}(\pi'-P-\delta)^2\right\}$$

$$\frac{m}{\varrho}\operatorname{Cos}(\varepsilon) = \operatorname{Cos}\delta\left\{1 + \frac{e'e'}{2}\frac{\operatorname{Cos}2\delta}{\operatorname{Cos}\delta^2}\operatorname{Cos}(\pi-P)^2 + e'e'\operatorname{Tang}\delta^2\operatorname{Sin}(\pi-P+\delta)^2 - \frac{\operatorname{Sin}d^2}{2}\frac{\operatorname{Cos}2\delta}{\operatorname{Cos}\delta^2}\operatorname{Sin}(\pi-P-w+\delta)^2\right\}$$

$$\frac{m'}{\varrho'}\operatorname{Cos}(\varepsilon') = -\operatorname{Cos}\delta\left\{1 + \frac{e'e'}{2}\frac{\operatorname{Cos}2\delta}{\operatorname{Cos}\delta^2}\operatorname{Cos}(\pi'-P)^2 + e'e'\operatorname{Tang}\delta^2\operatorname{Sin}(\pi'-P-\delta)^2 - \frac{\operatorname{Sin}d^2}{2}\frac{\operatorname{Cos}2\delta}{\operatorname{Cos}\delta^2}\operatorname{Sin}(\pi'-P-w-\delta)^2\right\}$$

Setzt man dieses in die Formeln (45) bis (47^b), so verwandeln sie sich in:

Fall 1 . . . . . $p = \frac{1}{2}(\pi'+\pi) + e'e'\operatorname{Sin}\delta^2\operatorname{Sin}2(p-P)$ . . . . . (48)

— 2 . . . . . $p = \frac{1}{2}(\pi'+\pi) + e'e'\operatorname{Sin}\delta^2\operatorname{Sin}2(p-P) + \operatorname{Sin}d^2\operatorname{Sin}\delta^2\operatorname{Sin}2(p-P-w)$ . . (49)

— 3^a . . . . $p = \frac{1}{2}(\pi'+\pi) + e'e'\operatorname{Sin}\delta^2\operatorname{Sin}2(p-P) + \operatorname{Sin}d^2\tfrac{1}{2}\operatorname{Tang}\delta\operatorname{Sin}(p-P-w+\delta)^2$ (50^a)

— 3^b . . . . $p = \frac{1}{2}(\pi'+\pi) + e'e'\operatorname{Sin}\delta^2\operatorname{Sin}2(p-P) - \operatorname{Sin}d^2\tfrac{1}{2}\operatorname{Tang}\delta\operatorname{Sin}(p-P-w-\delta)^2$ (50^b)

Welcher von diesen Fällen bei einer gemachten Beobachtung vorhanden ist, geht zwar schon aus den oben gegebenen Regeln hervor; allein da diese von den Winkeln φ und ε abhängig gemacht sind, welche in den Näherungsformeln nicht mehr vorkommen, so ist es bequemer, neue, unmittelbar von δ, π, π', P abhängige Ausdrücke dafür zu besitzen. Setzt man, mit hier erlaubter Näherung,

für π . . . . . $\varphi = 90^\circ + \pi - P$; $\varepsilon = (\varepsilon) = \delta$
für π' . . . . . $\varphi = 90^\circ + \pi' - P$; $\varepsilon' = (\varepsilon') = 180^\circ - \delta$

so kann man die Bedingungen, dass die beobachteten Positionswinkel sich auf die Lichtgrenze beziehen, so aussprechen, dass

$\pi > P+w-\delta-180^\circ$ und $< P+w-\delta$
$\pi' > P+w+\delta$ und $< P+w+\delta+180^\circ$

sein müssen. Hieraus folgt, dass π an der Lichtgrenze beobachtet ist, wenn

$$p > P+w+\delta-180^\circ \text{ und } < P+w+\delta$$

und π' ebenfalls, wenn

$$p > P+w-\delta \text{ und } < P+w-\delta+180^\circ$$

Beides zusammengenommen giebt die Kennzeichen der vier abgesonderten Fälle:

Fall 1 ... p zwischen	$P+w-\delta$	und	$P+w+\delta$		
— 2	$P+w+180^\circ-\delta$	und	$P+w+180^\circ+\delta$		
— 3^a	$P+w-\delta$	und	$P+w-\delta+180^\circ$;	u. zwsch. $P+w+\delta$	und $P+w+\delta+180^\circ$
— 3^b	$P+w-\delta-180^\circ$	und	$P+w-\delta$;	..... $P+w+\delta-180^\circ$	und $P+w+\delta$

Indem die hier angegebenen Begrenzungen der verschiedenen Fälle durch die Anwendung von Näherungswerthen für φ und ε erlangt worden sind, sind sie der Wahrheit nur nahe, nicht völlig entsprechend; wovon die Folge sein muss, dass sie, wenn p einer dieser Begrenzungen sehr nahe kommt, eine Beobachtung als zu einem der Fälle gehörend angeben können, während sie wirklich zu einem anderen gehört. Hieraus entsteht indessen kein Fehler, welcher die Richtigkeit der Rechnung, in Grössen der Ordnung bis zu welcher sie eine Näherung sein soll, beeinträchtigt: innerhalb des Umfanges der Unvollkommenheit der Begrenzungen, kommen die beiden Curven, deren Verschiedenheit in dieser Abhandlung verfolgt worden ist, sich einander so nahe, dass die Näherung, durch Annahme der einen statt der anderen, nicht im Wesentlichen beeinträchtigt wird.

VII.

Beobachtungen der gegenseitigen Stellungen von 38 Doppelsternen.

Seitdem *Sir William Herschel* bemerkt hat, dass das häufige Vorkommen der Doppelsterne mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit erwarten lässt, dass ein doppelt oder mehrfach erscheinender Stern ein zusammengehöriges System von zwei oder mehreren Sternen ist, und nicht etwa, durch zufällig nahe in eine gerade Linie fallende Stellung der Sterne woraus er besteht und des Punktes von welchem wir ihn sehen, von der Erde aus so erscheint — seit der Zeit dieser Bemerkung haben diese Sterne neue Ansprüche auf die Aufmerksamkeit der Astronomen erhalten. *Herschel* selbst hat die gegenseitige Stellung vieler derselben, in Zwischenzeiten von beträchtlicher Länge beobachtet, und in den wahrgenommenen Änderungen der Entfernungen und Positionswinkel die Bestätigung der Wahrscheinlichkeit gefunden. Das wirkliche Zusammengehören der beiden, den 61sten Stern des Schwans zusammensetzenden Sterne, ist dadurch augenscheinlich geworden, dass dieses Sternenpaar die grösste fortschreitende Bewegung, welche man bis jetzt unter den Fixsternen gefunden hat, gemeinschaftlich besitzt; andere Doppelsterne haben, während der Dauer ihrer Beobachtungen, schon so grosse Bewegungen um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt gezeigt, dass man sogar versucht hat, die Elemente ihrer relativen Bahn durch die vorhandenen Angaben zu bestimmen. Es tritt nun das Bedürfniss hervor, Beobachtungen zu sammeln, aus

welchen die gegenseitigen Bewegungen der zusammengehörigen Systeme unter den Fixsternen, mit der Zeit genügend bestimmt werden können.

Sir John Herschel und *Sir James South* haben grossen Fleiss auf eine Beobachtungsreihe dieser Art gewandt, und setzen diese Bemühungen jetzt mit vollkommneren Instrumenten fort. In der That sind die vorzüglichsten Hülfsmittel erforderlich, wenn man Beobachtungen anstellen will, welche zur Bestimmung von Bahnen führen sollen, welche uns meistens nur einige Secunden gross erscheinen. Wenn man das Mistrauen, mit welchem man während langer Zeit die Mikrometer-Beobachtungen betrachtet hat, für rechtmässig ansieht, so kann man nicht zweifeln, dass die für die Doppelsterne erforderliche Genauigkeit nur durch sehr beträchtliche Verbesserungen der Beobachtungsmethoden erlangt werden könne. Wirklich waren diese Methoden, wenn sie die gegenseitige Stellung einander sehr naher Punkte der Himmelskugel betrafen, zurückgeblieben, während sie, für andere Seiten der beobachtenden Astronomie, verschiedene Male wesentliche Vervollkommnungen erhalten hatten. Ihr Zurückbleiben war so gross, dass die Astronomen allen, auf Mikrometer-Beobachtungen gegründeten Bestimmungen kein Zutrauen schenkten, und lieber den weitesten Umweg machten, als die Resultate dieser Beobachtungen anwandten. Als Beispiel hiervon führe ich die auf die Veranlassung von *Laplace*, von *Bouvard* unternommene Bestimmung der Massen des Jupiters und Saturns an, welche auf der Beobachtung der durch diese Planeten hervorgebrachten Störungen beruhet, ohne dass das am geradesten und sichersten zum Ziele führende Mittel — die Messungen der Entfernungen ihrer Satelliten — dabei berücksichtigt worden wäre. Wenn man ferner die grossen Unterschiede betrachtet, welche in den verschiedenen Messungen der Durchmesser der Planeten, und in den Angaben für die Doppelsterne vorkommen, so kann man nicht mehr zweifeln, dass die *Beobachtungsmethoden selbst* das Mistrauen rechtfertigten.

Fraunhofer hat indessen wirklich zwei Vorschritte in dieser dringenden Angelegenheit der Astronomie gethan. Für das Messen in ganz geringen Entfernungen hat er dadurch gesorgt, dass er seine grossen und starken Fernröhre mit Uhrwerken versehen hat, welche zwischen den zu beobachtenden Gestirnen und den Fäden des Mikrometers

relative Ruhe hervorbringen und dadurch die, durch die tägliche Bewegung der Erde erzeugte Schwierigkeit aufheben sollen. Für das gleich genaue Messen in den kleinsten, so wie in grösseren Entfernungen, bis etwa zu der Grenze eines Grades, hat er, auf meinen Wunsch, zum ersten Male, die Verfertigung eines *grösseren* Heliometers unternommen, welches, indem es seine, ausschliesslich auf genaues und vollständiges Messen berechnete Einrichtung, durch die Kraft eines Fernrohrs von 8 Fuss Länge und 6 Zoll Öffnung unterstützt, die allerbefriedigendsten Resultate nicht nur verhiess, sondern auch wirklich liefert.

Unter den Beobachtungen, welche ich mit diesem Instrumente gemacht habe, befindet sich auch die Reihe von Messungen der Doppelsterne, welche ich gegenwärtig mittheile. Die Wahl dieser Sterne ist zwischen Herrn Etatsrath *Struve* und mir verabredet worden; denn wir beabsichtigten, *dieselben* Sterne auf unseren beiderseitigen Sternwarten zu beobachten, um, ausser der gewünschten Bestimmung derselben, auch eine Vergleichung des Verhaltens der zu den beiderseitigen Beobachtungen angewandten Apparate zu erlangen. Damit Keiner von uns durch die Resultate der Anderen gestört werden möge, sind wir übereingekommen, die gegenseitige Mittheilung derselben erst nach der öffentlichen Bekanntmachung auszuwechseln *).

Über meine Beobachtungen habe ich, nachdem ich Erläuterungen, welche das Instrument und die Art seiner Anwendung im Allgemeinen betreffen, bei anderen Gelegenheiten schon gegeben habe, wenig Erklärendes zu sagen. Jede Angabe ist das Mittel aus mehreren Beobachtungen der *vierfachen* Entfernung der Sterne. Während eine der Objectivhälften (I) des Instruments willkürlich gestellt war, wurde ihr die andere (II) so weit genähert, und beide gemeinschaftlich wurden so um die Axe des Fernrohrs gedrehet, dass die beiden, im Fernrohre erscheinenden Bilder des Doppelsterns, *vier*, in gerader Linie und in gleichen Entfernungen liegende, einzelne Sterne darstellten. Nachdem die Angaben des Positionskreises und der Schraube (II) abgelesen waren, wurde die Objectivhälfte (II) fortbewegt und auch das Heliometer gedrehet, bis die beiden Bilder, die nun voreinander vorüber-

*) Das Gegenwärtige ist am 15. August 1833 der Berliner Akademie der Wissenschaften vorgelesen.

gegangen waren, wieder so erschienen wie vorher. Die durch die Schraube gemessene Bewegung der Objectivhälfte, durch den Cosinus des halben Unterschiedes der beiden Ablesungen des Positionskreises dividirt, ist die vierfache Entfernung der beiden Sterne, in Revolutionen der Schraube ausgedrückt; die halbe Summe der beiden Ablesungen des Positionskreises, vom Indexfehler befreiet, ist der Positionswinkel. — Eine Beobachtung dieser Art ist meistens 4 oder 5 Mahl wiederholt worden, ehe das Instrument auf einen andern Doppelstern gerichtet wurde. Bei diesen Wiederholungen blieb immer die Objectivhälfte II, durch welche die vorangegangene Beobachtung gemacht war, unverändert auf dem Punkte, auf welchen sie durch diese gekommen war: beide Hälften wurden also abwechselnd bewegt, wodurch zwei aufeinanderfolgende Beobachtungen *eine* gemeinschaftliche Ablesung der Schraube erhielten, und alle zusammen, nach bekannten Formeln, auf die vortheilhafteste Art berechnet werden konnten. — Nur in wenigen Fällen habe ich *doppelte* Entfernungen, statt *vierfacher*, gemessen; es ist nur geschehen, wenn die Entfernung der Sterne grösser war, denn es giebt eine Grenze, wo der bei kleinen Entfernungen sehr grosse Vortheil des letzteren Verfahrens, sich in Nachtheil verwandelt und daher das erstere ihm vorgezogen werden muss. — Die angewandte Vergrösserung ist ohne Ausnahme die stärkste vorhandene, von 280 Mahl. Der Positionswinkel ist der Winkel der Richtung von dem helleren Sterne nach dem weniger hellen, mit dem Declinationskreise, von Norden links herum, von 0° bis 360° gezählt; wenn ich keinen Unterschied der Helligkeiten bemerken konnte, kann willkürlich, entweder der angegebene Positionswinkel, oder der um 180° grössere oder kleinere genommen werden.

24. *η Cassiopeae.*

		Entfernung.	Positions-Winkel.	Zahl.	Atmosphärische Umstände.
1830 Septr. 29	1830,74	10″,11	87° 56′	4	gut
30	0,75	10,04	86 12	4	mittelmässig
—	0,75	10,13	85 47	4	gut
Octbr. 2	0,75	10,02	85 45	4	mittelmässig
3	0,75	10,02	85 26	4	gut
4	0,76	10,12	86 17	4	gut
Mittel	1830,75	10,073	86 14	24	Beobb.

86. ζ *Piscium.*

1830 Septr. 24	1830,73	23″,18	63° 44′	4	gut
29	0,74	23,40	63 42	4	gut
30	0,75	23,48	64 0	4	gut
Octbr. 2	0,75	23,32	64 7	4	ziemlich
3	0,75	23,24	63 48	4	gut
15	0,79	23,43	—	5	mittelmässig
1831 Octbr. 14	1,78	23,48	64 7	4	gut
Mittel	1830,90	23,364	63 55	29	Beobb.

Die beiden letzten Beobachtungen sind Messungen der doppelten, nicht der vierfachen Entfernung; wenn diese so gross ist wie hier, halte ich dieses Verfahren für vortheilhafter.

5. γ *Arietis.*

1830 Septr. 24	1830,73	8″,79	177° 55′	4	gut
29	0,74	9,07	178 34	4	gut
30	0,75	9,04	178 54	4	gut
Octbr. 2	0,75	9,03	179 33	4	ziemlich
3	0,75	8,97	178 47	4	gut
Dec. 19	0,97	8,93	179 6	4	gut
1831 Octbr. 15	1,79	8,87	179 31	4	gut
Mittel	1830,93	8,957	178 55	28	Beobb.

Beide Sterne erschienen mir gleich hell.

113. α *Piscium.*

1830 Septr. 24	1830,73	3″,79	331° 25′	4	gut
29	0,74	3,77	334 5	4	gut
Octbr. 2	0,75	3,79	334 4	4	ziemlich
3	0,75	3,70	332 55	4	gut
15	0,79	3,80	334 5	4	gut
1831 Octbr. 15	1,79	3,80	331 22	4	mittelmässig
Mittel	1830,925	3,775	332 59	24	Beobb.

57. *γ Andromedae.*

1830 Septr. 29	1830,74	10″,64	62° 50′	4	gut
30	0,75	10,43	62 17	4	gut
Octbr. 2	0,75	10,64	62 29	4	ziemlich
3	0,75	10,55	61 26	4	gut
4	0,76	10,49	62 16	4	gut
12	0,78	10,56	62 23	4	gut
Mittel	1830,755	10,552	62 17	24	Beobb.

6. *ι Trianguli.*

1830 Septr. 29	1830,74	3″,81	78° 11′	4	gut
30	0,75	3,79	78 38	4	gut
Octbr. 2	0,75	3,84	77 15	4	gut
3	0,75	3,85	77 32	4	gut
15	0,79	3,87	79 22	4	gut
1831 Octbr. 15	1,79	4,02	78 31	4	mittelmässig
21	1,80	3,96	77 59	4	gut
Mittel	1831,05	3,877	78 13	28	Beobb.

1. *Camelopardali.*

1830 Octbr. 15	1830,79	10″,45	306° 35′	4	mittelmässig
20	0,80	10,55	306 44	4	gut
21	0,80	10,47	306 55	4	gut
Nov. 3	0,84	10,40	307 26	5	mittelmässig
4	0,84	10,56	307 20	4	gut
20	0,89	10,35	307 18	4	mittelmässig
Mittel	1830,83	10,461	307 4	25	Beobb.

118. *Tauri.*

1830 Octbr. 15	1830,79	5″,11	195° 19′	3	mittelmässig
20	0,80	5,10	195 35	4	gut
21	0,80	5,07	195 51	4	gut
Nov. 3	0,84	4,98	195 4	4	mittelmässig
4	0,84	5,23	194 49	4	mittelmässig
20	0,89	5,11	195 16	4	mittelmässig
Mittel	1830,83	5,100	195 18	23	Beobb.

39. λ Orionis.

1830	Nov.	4	1830,84	4″,44	44° 27′	5	gut
	Dec.	5	0,93	4,65	44 25	4	mittelmässig
		19	0,97	4,54	43 59	4	gut
1831	Janr.	18	1,05	4,52	45 2	4	mittelmässig
	April	11	1,28	4,49	43 4	4	gut
		12	1,28	4,53	42 48	4	gut
Mittel			1831,05	4,525	43 59	25	Beobb.

50. ζ Orionis.

1830	Dec.	5	1830,93	2″,76	148° 20′	4	mittelmässig
1831	April	12	1,28	2,68	—	3	mittelmässig
1832	Febr.	15	2,12	2,70	148 45	5	ausgezeichnet
		17	2,13	2,80	143 12	4	mittelmässig
	März	11	2,19	2,75	148 40	5	gut
		14	2,20	2,76	149 43	5	ziemlich
		28	2,24	2,64	147 42	5	gut
Mittel			1831,93	2,727	147 52	31	Beobb.

41. Aurigae.

1830	Octbr.	20	1830,80	8″,10	353° 53′	4	gut
		21	0,80	8,15	354 14	4	gut
	Nov.	3	0,84	8,12	353 32	4	mittelmässig
		4	0,84	8,13	354 22	4	gut
		20	0,89	8,20	353 24	4	ziemlich
	Dec.	5	0,93	8,18	353 16	4	gut
Mittel			1830,85	8,156	353 47	24	Beobb.

38. Geminorum.

1830	Dec.	5	1830,93	6″,09	173° 5′	4	gut
		19	0,97	6,15	172 30	4	gut
1832	Febr.	11	2,11	6,13	172 36	4	gut
		26	2,16	6,18	172 50	4	ziemlich
	März	14	2,20	6,07	172 59	4	mittelmässig
		28	2,24	6,18	172 33	4	gut
Mittel			1831,60	6,133	172 46	24	Beobb.

20. *Lyncis.*

1830 Octbr.	20	1830,80	15″,15	253° 6′	4	gut
	21	0,80	15,02	253 17	4	gut
Nov.	3	0,84	15,17	253 1	4	ziemlich
	4	0,84	15,06	253 38	4	gut
1831 Nov.	2	1,84	15,16	253 14	4	ziemlich
	18	1,88	15,26	252 57	4	mittelmässig
Mittel		1831,17	15,137	253 12	24	Beobb.

Obgleich beide Sterne sehr nahe gleich hell sind, so erkannte ich doch meistens einen Unterschied, dem gemäss ich den Positionswinkel angesetzt habe.

66. *α Geminorum.*

1830 Mai	24	1830,40	4″,77	258° 45′	3	mittelmässig
	25	0,40	4,59	260 27	3	mittelmässig
	28	0,41	4,76	260 11	3	gut
Juni	10	0,44	4,68	259 27	4	gut
Octbr.	2	0,75	4,73	260 2	4	gut
1831 April	11	1,28	4,75	258 45	5	gut
	21	1,30	4,72	259 56	5	gut
Mai	25	1,40	4,72	359 33	5	gut
1832 März	15	2,20	4,81	257 58	5	gut
Mittel		1831,06	4,730	259 23	37	Beobb.

Die Beobachtung vom 28sten Mai 1830 ist von Herrn Etatsrath *Struve*, die vom 15ten März 1832 von Herrn Professor *Argelander* gemacht.

16. *ζ Cancri.*

Dieser Stern ist dreifach; den hellsten Stern nenne ich *A*, den ihm nahen Gefährten *B*, den entfernteren *C*. Für diesen letzteren beziehen sich meine Beobachtungen auf die Mitte zwischen *A* und *B*.

1. *A* und *B*.

1832 Febr.	15	1832,12	1″,39	28° 30′	4	gut
	17	2,13	1,23	28 14	4	gut
März	11	2,19	1,29	32 22	4	mittelmässig
	15	2,20	1,28	33 0	4	gut
	28	2,24	1,40	34 23	4	ziemlich
	31	2,25	1,35	31 28	4	gut
Mittel		1832,19	1,323	31 20	24	Beobb.

2. Mitte A-B und C.

1832 Febr. 15	1832,12	5″,95	154° 9′	4	gut
17	2,13	5,82	152 7	4	gut
März 11	2,19	5,86	154 12	4	mittelmässig
15	2,20	5,83	153 54	4	gut
28	2,24	5,87	153 18	4	ziemlich
31	2,25	5,94	152 41	4	gut
Mittel	1832,19	5,878	153 24	24	Beobb.

Hieraus folgt die Bestimmung von C, auf A bezogen:

1832,19	5″,555	147° 36′

23. 2 φ *Cancri*.

1830 Dec. 5	1830,93	4″,80	33° 43′	4	gut
19	0,97	4,87	33 39	4	gut
1831 April 14	1,29	4,99	34 8	4	ziemlich
17	1,29	4,92	33 2	4	ziemlich
21	1,31	4,87	32 30	4	gut
1832 März 15	2,20	4,90	34 7	4	gut
Mittel	1831,33	4,892	33 32	24	Beobb.

Die Beobachtung vom 15ten März 1832 ist von Herrn Professor *Argelander* gemacht. Beide Sterne erschienen gleich hell.

24. 1 v *Cancri*.

1830 Dec. 5	1830,93	6″,11	37° 57′	4	gut
19	0,97	6,09	37 56	4	gut
1831 April 14	1,29	6,09	39 12	4	ziemlich
17	1,29	6,12	38 42	4	ziemlich
1832 März 15	2,20	6,06	38 37	4	gut
1833 Janr. 6	3,02	6,13	38 8	5	gut
Mittel	1831,67	6,101	38 25	25	Beobb.

Die Beobachtung vom 15ten März 1832 ist von Herrn Professor *Argelander* gemacht.

41. γ Leonis.

1830 Mai	29	1830,41	2,″68	101° 43′	3	gut
Juni	6	0,43	2,66	102 20	3	ziemlich
	10	0,44	2,61	101 16	4	ziemlich
	11	0,44	2,49	102 29	5	gut
Juli	2	0,50	2,66	102 13	5	ziemlich
Octb.	2	0,75	2,65	101 58	4	gut
	3	0,75	2,64	102 38	4	gut
1831 Mai	25	1,40	2,69	103 32	4	gut
Octb.	25	1,82	2,57	101 48	5	gut
Mittel		1830,80	2,622	102 13	37	Beobb.

58. ξ Ursae majoris.

1830 Nov.	9	1830,86	1,″79	203° 46′	7	mittelmässig
	10	0,86	1,84	202 52	4	ziemlich
Dec.	11	0,95	1,85	202 23	4	ziemlich
1831 Mai	22	1,39	1,98	198 28	4	ziemlich
	23	1,39	1,94	198 33	3	mittelmässig
	24	1,39	1,86	200 44	4	ziemlich
Mittel		1831,08	1,868	201 32	26	Beobb.

29. γ Virginis.

1830 Juni	6	1830,43	1,″56	84° 35′	3	mittelmässig
	11	0,44	1,65	82 25	4	mittelmässig
	20	0,47	1,55	82 3	5	mittelmässig
	21	0,47	1,55	82 42	5	gut
	28	0,49	1,64	82 0	4	mittelmässig
Dec.	10	0,94	1,55	79 55	4	ziemlich
	11	0,94	1,61	82 28	4	ziemlich
Mittel		1830,59	1,586	82 10	29	Beobb.

79. ξ Ursae majoris.

1830 Octbr.	12	1830,78	14,″58	147° 45′	4	gut
	20	0,80	14,38	147 2	5	gut
	21	0,80	14,38	147 41	5	gut
	22	0,81	14,37	146 44	5	gut
1831 Juni	4	1,42	14,62	147 24	4	gut
Novb.	2	1,84	14,38	147 35	4	gut
Mittel		1831,01	14,425	147 19	27	Beobb.

29. *π Bootis.*

1830 Juni	18	1830,46	6″,13	98° 10′	4	gut
	19	0,47	6,02	99 23	4	gut
	28	0,49	6,12	99 31	4	gut
1831 Mai	19	1,38	6,24	98 29	4	ziemlich
	22	1,39	6,25	98 15	4	gut
	23	1,39	6,14	99 14	4	gut
	24	1,40	6,25	98 17	4	gut
Juni	4	1,42	6,30	99 11	4	mittelmässig
Mittel		1831,05	6,181	98 49	32	Beobb.

30. *ζ Bootis.*

1830 Juni	18	1830,46	1″,18	132° 41′	4	gut
Septr.	4	0,68	1,31	130 38	4	mittelmässig
Dec.	11	0,95	1,32	132 46	4	ziemlich
1832 Mai	5	2,34	1,33	127 29	5	ziemlich
Mittel		1831,18	1,288	130 41	17	Beobb.

36. *ε Bootis.*

1830 Juni	8	1830,44	2″,86	315° 3′	4	mittelmässig
1831 Mai	14	1,37	2,98	314 8	4	gut
Octb.	14	1,78	2,98	319 42	4	gut
	23	1,81	3,01	317 48	6	ziemlich
	29	1,83	2,98	315 21	6	ziemlich
Nov.	2	1,84	2,91	314 51	4	ziemlich
Mittel		1831,56	2,959	316 13	28	Beobb.

37. *ξ Bootis.*

1831 Mai	19	1831,38	7″,32	331° 23′	4	gut
	22	1,39	7,23	331 18	4	gut
	23	1,39	7,34	331 27	4	gut
	24	1,40	7,30	331 10	4	gut
Juni	4	1,42	7,33	330 55	4	gut
Mittel		1831,40	7,304	331 15	20	Beobb.

7. *ζ Coronae Bor.*

1830 Juni	19	1830,47	6″,18	301° 6′	4	gut
	20	0,47	6,27	300 8	5	mittelmässig
	24	0,48	6,13	301 9	5	gut
	27	0,49	6,11	301 2	5	gut
Octb.	4	0,76	6,19	300 20	4	gut
1831 Octb.	15	1,79	6,20	300 21	4	gut
Mittel		1830,68	6,178	300 42	27	Beobb.

64. α Herculis.

1830 Juni	28	1830,49	4,88	118° 46′	4	gut
Aug.	31	0,66	4,98	—	4	gut
Septr.	2	0,67	4,96	118 30	5	ausgezeichnet
	4	0,68	4,96	119 28	4	mittelmässig
	20	0,72	4,98	117 53	5	gut
1831 Juli	21	1,55	5,17	118 59	4	mittelmässig
Octb.	10	1,77	5,04	118 0	4	gut
Mittel		1830,92	4,994	118 34	30	Beobb.

70. ρ Ophiuchi.

1830 Mai	16	1830,37	5,49	136° 2′	2	mittelmässig
	18	0,38	5,41	134 28	2	mittelmässig
	24	0,39	5,40	135 38	4	gut
Juni	6	0,43	5,50	136 33	2	gut
	7	0,43	5,45	136 19	3	ziemlich
	8	0,44	5,44	135 57	3	gut
	11	0,44	5,48	136 26	4	ziemlich
	16	0,46	5,50	135 21	5	gut
Septr.	2	0,67	5,52	136 2	5	ausgezeichnet
	20	0,72	5,51	135 23	4	gut
1831 Mai	19	1,38	5,62	133 0	4	ziemlich
	22	1,39	5,76	133 14	4	gut
	23	1,39	5,65	134 10	4	gut
	24	1,40	5,69	134 35	4	ziemlich
Juli	21	1,55	5,70	134 4	5	gut
Octb.	9	1,77	5,70	134 27	5	ziemlich
	10	1,77	5,76	133 56	4	gut
1832 Juli	10	2,52	5,68	134 3	5	gut
	13	2,53	5,73	133 11	5	gut
Octb.	13	2,78	5,83	132 53	5	gut
	18	2,80	5,83	132 36	5	gut
	19	2,80	5,90	132 12	5	gut
		1830,50	5,474	135 49	24	Beobb.
Mittel.		1831,53	5,679	133 57	30	—
		1832,69	5,794	132 59	25	—

100. *Herculis.*

1830 Juni. 28	1830,49	13,97	2 26	4	gut
Aug. 30	0,66	13,99	2 39	4	gut
Septr. 2	0,67	13,98	2 26	4	gut
21	0,72	14,02	3 1	4	gut
28	0,74	14,10	2 28	4	gut
Octb. 12	0,78	14,03	2 48	4	gut
1831 Octb. 14	1,78	14,00	2 54	4	gut
23	1,81	14,06	2 22	4	gut
Mittel	1830,95	14,024	2 40	32	Beobb.

Bei einigen Beobachtungen schien der südliche Stern etwas heller zu sein als der nördliche.

4. *ε Lyrae.*

1830 Aug. 30	1830,66	3,21	24 46	4	gut
Septr. 20	0,72	3,36	25 15	4	gut
21	0,72	3,37	24 51	4	gut
24	0,73	3,33	25 56	4	mittelmässig
28	0,74	3,32	25 36	4	mittelmässig
29	0,74	3,39	24 41	4	gut
Mittel	1830,72	3,313	25 11	24	Beobb.

5. *Lyrae.*

1830 Aug. 30	1830,66	2,82	154 17	4	gut
Septr. 20	0,72	2,79	156 5	5	mittelmässig
21	0,72	2,78	155 52	4	gut
24	0,73	2,82	157 59	4	mittelmässig
28	0,74	2,84	156 7	4	gut
29	0,74	2,86	156 21	4	gut
Mittel	1830,72	2,817	156 6	25	Beobb.

63. *θ Serpentis.*

1830 Septr. 28	1830,74	21,81	103 13	4	mittelmässig
29	0,74	21,89	103 26	4	gut
30	0,75	21,72	103 42	4	gut
Octb. 2	0,75	21,61	103 58	4	mittelmässig
4	0,76	21,53	103 47	4	mittelmässig
12	0,78	21,71	—	5	gut
Mittel	1830,75	21,712	103 41	25	Beobb.

Am 12ten October ist die Entfernung doppelt, nicht vierfach gemessen.

6. β Cygni.

1831 Octbr. 14	1831,78	34,32	56° 3′	4	ziemlich
15	1,79	34,38	55 20	4	gut
21	1,80	34,25	55 45	5	gut
23	1,81	34,63	55 35	5	mittelmässig
29	1,83	34,59	55 30	5	gut
Nov. 2	1,84	34,24	55 38	5	gut
Mittel	1831,81	34,327	55 38	28	Beobb.

Wegen der grossen Entfernung beider Sterne sind die Messungen doppelt, nicht vierfach, gemacht. Am 23ten October ist am Tage beobachtet worden, unter Umständen, welche den Gefährten nicht hell genug erscheinen liessen. Dieses ist vielleicht die Ursache der stärkeren Abweichung. Ich habe aber, dem Vorsatze, keine der gemachten Messungen auszuschliessen, getreu, auch diese Beobachtung mit zum mittleren Resultate gezogen.

52. π Aquilae.

1830 Octbr. 20	1830,80	1,56	123° 14′	4	mittelmässig
—	0,80	1,62	121 42	4	ziemlich
21	0,80	1,60	119 55	4	gut
22	0,81	1,54	122 8	4	gut
Nov. 3	0,84	1,59	122 48	5	gut
11	0,86	1,56	120 47	5	gut
Mittel	1830,82	1,582	121 46	26	Beobb.

12. γ Delphini.

1830 Septr. 7	1830,66	11,80	272° 41′	4	ziemlich
21	0,72	11,98	273 27	4	gut
22	0,72	11,95	272 37	4	gut
28	0,74	12,10	272 43	4	mittelmässig
29	0,74	12,02	272 22	4	gut
Nov. 3	0,84	12,10	273 33	4	gut
1831 Octbr. 14	1,78	12,06	272 47	4	gut
Mittel	1830,89	12,016	272 53	28	Beobb.

61. *Cygni.*

1830	Aug. 30	1830,66	15,64	90° 0′	4	gut
	Septr. 7	0,68	15,71	90 11	4	gut
	19	0,72	15,55	90 33	5	gut
	21	0,72	15,53	90 39	4	gut
	22	0,72	15,45	90 25	4	gut
	24	0,73	15,70	90 24	4	gut
	Octbr. 12	0,78	15,79	90 12	4	gut
	Nov. 3	0,84	15,79	90 30	5	gut
1831	Octb. 9	1,77	15,56	90 8	4	gut
Mittel		1830,84	15,688	90 21	38	Beobb.

8. *β Cephei.*

1830	Septr. 21	1830,72	13,61	249° 40′	5	gut
	Octbr. 20	0,80	13,64	250 55	5	gut
	21	0,80	13,56	249 52	5	gut
	Nov. 3	0,84	13,52	249 47	5	gut
	4	0,84	13,64	249 30	5	gut
Mittel		1830,80	13,594	249 57	25	Beobb.

55. *ζ Aquarii.*

1830	Septr. 7	1830,68	3,53	354° 57′	4	gut
	19	0,72	3,52	356 57	4	gut
	21	0,72	3,48	355 23	4	ausgezeichnet
	22	0,72	3,43	355 23	4	gut
	24	0,73	3,49	356 24	4	gut
	Octb. 2	0,75	3,56	355 36	4	ziemlich
1831	Octb. 10	1,77	3,60	354 49	4	gut
	14	1,78	3,59	356 10	4	gut
Mittel		1830,98	3,525	355 44	32	Beobb.

Obgleich beide Sterne nahe gleich hell sind, so erkannte ich doch meistens den südlichen für den helleren.

	Zeit.	Entfernung.	Positions-Winkel.	Anzahl der Beobb.
			° ′	
η Cassiopeae	1830,75	10,″073	86 14	24
ζ Piscium	1830,90	23,364	63 55	29
γ Arietis	1830,93	8,957	178 55	28
α Piscium	1830,93	3,775	332 59	24
γ Andromedae.....	1830,76	10,552	62 17	24
ε Trianguli	1831,05	3,877	78 13	28
1 *Camelopardali* ...	1830,83	10,461	307 4	25
118 *Tauri*.....	1830,83	5,100	195 18	23
λ Orionis.....	1831,05	4,525	43 59	25
ζ Orionis.....	1831,93	2,727	147 52	31
41 *Aurigae*	1830,85	8,156	353 47	24
38 *Geminorum*.....	1831,60	6,133	172 46	24
20 *Lyncis*.....	1831,17	15,137	253 12	24
α Geminorum.....	1831,06	4,730	259 23	37
ζ Cancri... *Com. B.*	1832,19	1,323	31 20	24
Com. C.	1832,19	5,555	147 36	24
2*φ Cancri*	1831,33	4,892	33 32	24
1*υ Cancri*.....	1831,67	6,101	38 25	25
γ Leonis	1830,80	2,621	102 13	37
ξ Ursae majoris ..	1831,08	1,863	201 32	26
γ Virginis.....	1830,59	1,586	82 10	29
ζ Ursae majoris...	1831,01	14,435	147 19	27
π Bootis.....	1831,05	6,181	98 49	32
ζ Bootis.....	1831,18	1,288	130 41	17
ε Bootis.....	1831,56	2,959	316 13	28
ξ Bootis	1831,40	7,304	331 15	20
ζ Coronae Bor.....	1830,68	6,178	300 42	27
α Herculis	1830,92	4,994	116 34	30
ρ Ophiuchi.....	1830,50	5,474	135 49	34
derselbe	1831,53	5,679	133 57	30
derselbe	1832,69	5,794	132 59	25
100 *Herculis*.....	1830,95	14,024	2 40	32
ε Lyrae.....	1830,72	3,313	25 11	24
5 *Lyrae*.....	1830,72	2,817	156 6	25
θ Serpentis.....	1830,75	21,712	103 41	25
β Cygni.....	1831,81	34,327	55 38	28
π Aquilae	1830,82	1,582	121 46	26
γ Delphini	1830,89	12,016	272 53	28
61 *Cygni*	1830,84	15,638	90 21	38
β Cephei.....	1830,80	13,594	249 57	25
ζ Aquarii.....	1830,98	3,525	355 44	32

VIII.

Über den Doppelstern *p Ophiuchi*.

Der Stern *p Ophiuchi* gehört bekanntlich zu den vorzugsweise merkwürdigen Doppelsternen, welche eine fortschreitende Bewegung und zugleich eine Umlaufsbewegung, beide von ungewöhnlicher Schnelligkeit, zeigen. Die letztere änderte, zwischen den beiden äussersten, etwa 25 Jahre voneinander entfernten Beobachtungen *Herschels I*, den Positionswinkel um 131° und hat ihn auch ferner sehr beträchtlich geändert. Zwar ist *p Ophiuchi* nicht der einzige Doppelstern, welcher eine so schnelle Umlaufsbewegung besitzt, allein er ist der einzige bis jetzt bekannt gewordene, welcher sie verbunden mit einer beträchtlicheren Entfernung der beiden, ihn zusammensetzenden Sterne gezeigt hat; so dass kleine Fehler der Beobachtungen ihrer gegenseitigen Lage, vergleichungsweise mit den Abmessungen ihrer Bahn um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt und der Bewegung in ihr, bei ihm kleiner sind als bei anderen Doppelsternen. Die Auszeichnung, welche dieser Stern hierin vor anderen besitzt, begründet die Erwartung, dass seine Bahn früher wird bestimmt werden können, als die Bahnen anderer Doppelsterne. Allein der höchste Grad der durch die Hülfsmittel der gegenwärtigen Zeit erreichbaren Genauigkeit der Beobachtungen wird kaum hinreichen, einer Angabe der gegenwärtigen gegenseitigen Stellung der beiden Sterne des Doppelsterns so viel Gewicht zu geben, dass sie als ein werthvoller Beitrag zu den Grundlagen der schwierigen, in späterer Zeit zu versuchenden Bestimmung

der *sieben* Elemente einer, in dem engen Raume weniger Secunden vorsichgehenden Bewegung erscheinen kann.

Ich habe das Heliometer der Königsberger Sternwarte häufig in der Hoffnung angewandt, einen solchen Beitrag zu den Beobachtungen des Doppelsterns *p Ophiuchi* zu erlangen; auch habe ich verschiedene Methoden der Beobachtung versucht, in der Absicht, dadurch zu einer Prüfung der Richtigkeit der aus der gewöhnlichen, auch bei den in der vorigen Abhandlung mitgetheilten Messungen angewandten, hervorgehenden Resultate zu gelangen. Das Folgende wird nicht nur das was sich auf den Doppelstern bezieht, welcher seine Veranlassung ist, angeben, sondern auch die Beobachtungsart der Doppelsterne im Allgemeinen näher erörtern.

1.

Die Beobachtungen von 38 Doppelsternen, welche die vorige Abhandlung enthält, beruhen, mit einigen Ausnahmen, auf Messungen der *vierfachen* Entfernung der Sterne, deren Hergang ich S. 282 schon angegeben habe. Auf dieselbe Art habe ich *p Ophiuchi* von 1830 bis 1837 an 50 verschiedenen Tagen beobachtet und dadurch Folgendes erhalten.

			Entfernung.	Positions-Winkel.		
1830	Mai 16	1830,37	5,49	136° 2′	2	Messungen.
	18	0,38	5,41	134 28	2	—
	24	0,39	5,40	135 38	4	—
	Juni 6	0,43	5,50	136 33	2	—
	7	0,43	5,45	136 19	3	—
	8	0,44	5,44	135 57	3	—
	11	0,44	5,48	136 26	4	—
	16	0,46	5,50	135 21	5	—
	Septr. 2	0,67	5,52	136 2	5	—
	20	0,72	5,51	135 23	4	—
1831	Mai 19	1,38	5,62	133 0	4	—
	22	1,39	5,76	133 14	4	—
	23	1,39	5,65	134 10	4	—
	24	1,40	5,69	134 35	4	—
	Juli 21	1,55	5,70	134 4	5	—
	Octb. 9	1,77	5,70	134 27	5	—
	10	1,77	5,76	133 56	4	—
1832	Juli 10	2,52	5,68	134 3	5	—

1832 Juli	13	1832,53	5″,73	133° 11′	5	Messungen.
Octbr.	13	2,78	5,83	132 53	5	—
	18	2,80	5,83	132 36	5	—
	19	2,80	5,90	132 12	5	—
1834 Juni	23	4,48	6,11	129 50	5	—
	25	4,48	6,05	130 23	5	—
Juli	3	4,50	6,13	130 35	5	—
	8	4,52	6,14	131 14	5	—
Sept.	19	4,72	6,18	131 18	5	—
Octb.	5	4,76	6,13	131 42	5	—
	12	4,78	6,15	130 17	5	—
1836 Juni	23	6,48	6,26	128 6	5	—
Juli	4	6,51	6,36	129 56	5	—
	7	6,52	6,38	130 23	5	—
	13	6,53	6,36	130 11	5	—
	21	6,55	6,34	129 9	5	—
1837 Juni	14	7,45	6,49	128 48	5	—
	17	7,46	6,50	128 44	5	—
	28	7,49	6,28	128 39	5	—
Juli	6	7,51	6,51	129 9	5	—
	20	7,55	6,39	128 44	5	—
Aug.	3	7,59	6,46	129 15	5	—
	6	7,60	6,44	129 1	5	—
	18	7,63	6,50	127 55	5	—
	20	7,63	6,56	128 3	5	—
	28	7,66	6,49	127 23	5	—
Sept.	8	7,69	6,49	128 15	5	—
	9	7,69	6,46	128 7	5	—
	11	7,70	6,34	127 55	5	—
	20	7,72	6,47	127 50	5	—
Octb.	2	7,75	6,48	128 4	5	—
	3	7,76	6,44	127 40	5	—

Vereinigt man die in jedem der früheren Jahre gemachten Beobachtungen in ein arithmetisches Mittel, die im letzten Jahre gemachten aber in zwei arithmetische Mittel, so erhält man:

1830,50	5″,474	135° 49′	34	Messungen.
1831,53	5,679	133 57	30	—
1832,69	5,794	132 59	25	—
1834,61	6,127	130 47	35	—
1836,52	6,344	129 33	25	—
1837,52	6,439	128 54	35	—
1837,69	6,470	127 55	45	—

2.

Struve hat, in seinem grossen Werke über die Messungen der Doppelsterne, seine Beobachtungen *p Ophiuchi* gleichfalls in arithmetische Mittel zusammengezogen. Davon werde ich *die* hier anführen, welche, der Zeit nach, mit den meinigen nahe zusammentreffen und daher mit diesen verglichen werden können.

1830,84	5″,310	135° 45′	2 Tage
1831,68	5,410	134 42	5 —
1832,75	5,553	133 58	3 —
1834,47	5,852	131 9	4 —
1835,60	6,108	130 46	5 —

Diese Beobachtungen stimmen in der Zunahme der Entfernung und der Abnahme des Positionswinkels, welche sie andeuten, nahe mit den vorher angeführten überein, allein sie ergeben die Entfernung immer kleiner und den Positionswinkel immer grösser, die Unterschiede sind, im Mittel etwa $= -0''{,}23$ und $= +41'$. Dass ein Unterschied der gemessenen Entfernungen sich nicht etwa bei diesem Sterne allein, sondern bei den Doppelsternen im Allgemeinen findet, geht aus der Vergleichung hervor, welche zwischen den Königsberger und Dorpater Messungen von 37 Doppelsternen, in № 240 von *Schumachers Astronomischen Nachrichten* und auch in der Einleitung des *Struve*schen Werkes (P. CXL.) gemacht worden ist: die Dorpater Entfernungen sind im Allgemeinen kleiner als die Königsberger, und *Struve* bemerkt darüber, dass sich ein gewisses Gesetz in den Unterschieden zu zeigen scheint, nach welchem sie für ganz kleine Entfernungen, so wie auch wieder für Entfernungen von 20″ und darüber, fast verschwinden, und bei der Entfernung von 6″ ihr, etwa 0″,27 betragendes Maximum erreichen. So klein diese Unterschiede an sich sind, so lassen ihr Vorkommen bei so vielen Sternen und die nahe Übereinstimmung der einzelnen Beobachtungen untereinander, doch nicht bezweifeln, dass sie aus einer bestimmten Ursache hervorgehen, deren Folge war, dass entweder in Königsberg *zu gross*, oder in Dorpat *zu klein* gemessen wurde. — Dass der beständige Unterschied zwischen den an beiden Orten beobachteten Positionswinkeln *p Ophiuchi*, sich bei allen Doppelsternen, und stets in demselben Sinne zeigen sollte, ist weder zu erwarten, noch wird es durch die Vergleichung der 37 Doppelsterne

angedeutet. Ich werde aber unten auf die Positionswinkel zurückkommen und darüber Etwas mittheilen, was, wenn auch vielleicht nicht beständige, doch grössere zufällige Fehler der einzelnen Beobachtungen hat erzeugen können, als der Kraft des in Königsberg angewandten Apparats angemessen erscheinen.

Wenn man an dem Stattfinden eines beständigen Unterschiedes der von *Struve* und von mir gemessenen Entfernungen nicht zweifeln kann, so kann man auch nicht zweifeln, dass wenigstens einer der beiderseitigen Apparate, den dadurch erlangten Resultaten nicht alle die Genauigkeit giebt, welche die Kleinheit der zufälligen Beobachtungsfehler erwarten lässt. So klein der Unterschied ist, so kann man ihn dennoch nicht für unerheblich halten; denn die Auffindung seiner Ursache wird entweder eine Vervollkommnung der Beobachtungsmethode der kleinen Entfernungen ergeben, oder, wenn der Fehler sich von dem einen der Apparate unzertrennlich zeigen sollte, zur vorzugsweisen Benutzung des anderen auffordern. In Beziehung auf die Doppelsterne ist der Unterschied auch nicht unerheblich, da er, trotz seiner Kleinheit, ein nicht kleines Verhältniss zu den kleinen Grössen besitzt, bei welchen er sich zeigt und welche der eigentliche Gegenstand der Beobachtungen sind.

Dieses ist auch die Absicht gewesen, welche *Struve* verfolgt hat, indem er der Ursache des Unterschiedes weiter nachgespürt hat. Er hat weisse Punkte auf schwarzem Grunde, in bekannten Entfernungen voneinander und von dem Fernrohre angebracht, und sich durch Messung der Winkel zwischen ihnen überzeugt, dass das Fadenmikrometer seines Fernrohrs diese Winkel richtig angiebt. Die unmittelbare Prüfung der Richtigkeit der Angaben des Fadenmikrometers, welche man hierdurch erhält, ist ohne Zweifel wünschenswerth, indem sie eine der *Möglichkeiten* beseitigt, durch deren Verfolgung man die Erklärung des Fehlers zu versuchen geneigt sein könnte. Allein die Messung des Winkels zwischen zwei *festen* Punkten wird durch das Fadenmikrometer durch ein so *einfaches* Verfahren ergeben, dass ich glaube, die Möglichkeit eines beständigen Fehlers derselben zu den *unwahrscheinlicheren* zählen zu müssen. Das von *Struve* angewandte Verfahren bei der Messung der Entfernung zweier fester Punkte ist nämlich folgendes: man drehet das Mikrometer zuerst so um die Axe

des Fernrohrs, dass die gerade Linie zwischen beiden Punkten senkrecht auf seinen beiden Fäden steht; dann bringt man einen, in der Mitte zwischen beiden zu messenden Punkten befindlichen dritten Punkt unter den festen Faden, den beweglichen aber zuerst auf den einen, dann auf den anderen der beiden äusseren Punkte und liest die Angaben der Schraube ab. Der Unterschied zwischen beiden Ablesungen ist die doppelte Entfernung jedes der äusseren Punkte von dem mittleren. Vorausgesetzt dass man die Schraube immer in *einer* Richtung drehet, glaube ich nicht, dass die Messung durch etwas anderes, als durch Unvollkommenheit des Sehens im Fernrohre und durch Unregelmässigkeiten der Schraube unrichtig gemacht werden kann; diese Ursachen können zufällige, übrigens bei dem schönen Dorpater Apparate nur kleine, nicht aber beständige Fehler erzeugen. Dieses ist auch das Ergebniss von *Struve's* unmittelbaren Versuchen, welche also auch den leisesten Zweifel an der Richtigkeit des Mikrometers selbst verscheuchen.

Dagegen macht *Struve* eine Bemerkung, welche einen Zweifel an der Richtigkeit der Messungen mit dem Königsberger Heliometer erzeugt. Er erinnert, dass, indem die Beobachtungsart der *vierfachen* Entfernungen auf der, durch Augenmass erlangten Vergleichung des *zweiten* Zwischenraumes zwischen den vier, sich im Fernrohre zeigenden Sternen, mit den *beiden äusseren* Zwischenräumen beruhet, und die letzteren nicht, wie der zweite, beiderseits durch *zwei* Sterne eingeschlossen sind, bezweifelt werden kann, ob das Augenmass ein durch diese Verschiedenheit nicht beeinträchtigtes Urtheil ablege. Diese Bemerkung würde wenn ich selbst sie gemacht hätte, mich veranlasst haben, vor dem Anfange der Beobachtungen der Doppelsterne unmittelbare Prüfungen vorzunehmen, aus welchen sich hätte ergeben müssen, ob ein Einfluss der angegebenen Ursache wirklich vorhanden ist, oder nicht. Solche Prüfungen habe ich, nachdem ich die Bemerkung kennen gelernt habe, vorgenommen und werde ihr Ergebniss in den beiden folgenden §§ mittheilen. Vorher aber werde ich den Grund angeben, welcher mich veranlasst hat, meine Messung auf die Vergleichung des mittleren Zwischenraumes mit den *beiden* äusseren zu bauen. Ich hätte nämlich jenen auch mit *einem* der äusseren vergleichen und den anderen absichtlich *ganz übersehen* können; denn es ist gar nicht schwierig,

dem vierten Sterne, vielleicht mit der Ausnahme sehr naher Doppelsterne, die Aufmerksamkeit ganz zu entziehen und sich eben so wenig dadurch stören zu lassen, als wenn er gar nicht vorhanden wäre. Dass ich nicht diese Beobachtungsart, sondern die andere, welche von der *Struve*schen Bemerkung getroffen wird, gewählt habe, geschah, weil bekanntlich die Entfernung zweier Punkte desto kleiner beurtheilt wird, je näher sie bei dem Scheitelpunkte stehen, welches falsche Urtheil sowohl bei dem Sehen im Fernrohre, als bei dem Sehen mit blossen Augen stattfinden kann und dann in der Beurtheilung der Gleichheit zweier Entfernungen, falls sie nicht in horizontaler Richtung liegen, einen Fehler erzeugen muss. Um diesen Fehler zu vermeiden, verglich ich den mittleren Zwischenraum mit *beiden* äusseren. Allein seitdem mir der Zweifel gegen diese Beobachtungsart bekannt geworden ist, habe ich die Beobachtungen von *p Ophiuchi*, vom 18ten August 1837 an, so gemacht, dass ich immer nur den Zwischenraum zwischen beiden Bildern des kleineren Sterns, durch das zwischen ihnen liegende Bild des grösseren, in zwei gleiche Hälften getheilt und das zweite Bild des letzteren gar nicht berücksichtigt habe. Bemerkbaren Einfluss auf die Messung der Entfernung hat diese Änderung aber nicht hervorgebracht, wie die Vergleichung der beiden letzten arithmetischen Mittel im vorigen § zeigt. Ich glaube überzeugt zu sein, dass mich das unbeachtet gelassene Bild des grösseren Sterns, bei diesen Beobachtungen, bei welchen ich es nicht beachten *wollte*, wirklich nicht im Mindesten gestört hat und bin daher geneigt, in der Übereinstimmung der durch beide Methoden erlangten Resultate einen Grund der Annahme zu finden, dass es auch die Richtigkeit der Beurtheilung der Entfernungen nicht stört wenn man es *nicht* übersehen will.

3.

Die Natur des Heliometers bringt mit sich, dass man grössere Entfernungen mit derselben Genauigkeit messen kann, mit welcher kleinere gemessen werden. Hieraus kann man Vortheil ziehen wenn es darauf ankömmt, unmittelbar zu prüfen, ob die Messung einer kleinen Entfernung richtig, oder mit einem, aus einer unbekannten Ursache hervorgehenden, immer wiederkehrenden Fehler behaftet ist: man kann nämlich die kleine Entfernung aus dem Unterschiede zweier

grösseren ableiten und dadurch den etwanigen beständigen Fehler der Messung der ersteren ganz umgehen. Sowohl dieser Prüfung wegen, als auch um eine neue, von den angeführten Beobachtungen und der dabei angewandten Methode ganz unabhängige Bestimmung der Entfernung beider Sterne *p Ophiuchi* zu erlangen, habe ich eine *zweite* Beobachtungsart angewandt, welche ich jetzt beschreiben werde.

Ich suchte einen Stern in der Nähe des Doppelsterns und näherungsweise in der Richtung seiner beiden Sterne, in der Absicht, die Entfernungen beider Sterne des Doppelsterns von ihm zu messen und von ihrem Unterschiede auf die Entfernung der letzteren voneinander zu schliessen. Ein solcher Stern (*a*) der 7. 8 Grösse findet sich in der Entfernung 45′ 12″ und im Positionswinkel 116° 49′, also wenn man für den Positionswinkel des Doppelsterns das letzte der im 1ten § enthaltenen Resultate annimmt, 11°6′ aus seiner Richtung ausweichend. Die eine Objectivhälfte des Heliometers wurde etwa um die Hälfte der Entfernung rechts, die andere eben so weit links von seiner Axe gestellt, wodurch ein Bild von *a* in die Nähe des Bildes des Doppelsterns gebracht wurde; dann wurde, durch Drehung des Heliometers und durch Drehung der Schraube der zweiten Objectivhälfte, das Bild von *a* in die Richtungslinie des Doppelsterns und in dieselbe Entfernung von seinem Hauptsterne gebracht, in welcher der Gefährte auf der anderen Seite stand, so dass die drei Bilder einen dreifachen Stern in gerader Linie und beiderseits gleichen Entfernungen darstellten; nach der Ablesung der Schraube der Objectivhälfte II wurde sie weiter vorwärts gedrehet und auch das ganze Heliometer so um die Axe des Fernrohrs bewegt, dass sich wieder ein dreifacher Stern, wie vorher, nun aber in der Ordnung *p*, Comes, *a* zeigte. Der Unterschied der vorigen Ablesung von der jetzigen ist die Projection der *dreifachen* Entfernung des Doppelsterns auf die ihn mit *a* verbindende Linie. Um die Beobachtung zu wiederholen, wurden die Schraube der Objectivhälfte I und das Heliometer selbst gedrehet, so dass die erste Erscheinung wieder hervorgebracht wurde; dann die Objectivhälfte II u. s. w., um die zweite hervorzubringen. Auf diese Art wurden an jedem Tage 5 Beobachtungen der dreifachen Projection der Entfernung gemacht, nach deren Beendigung die Objectivhälften auf entgegengesetzte Seiten der Axe des Fernrohrs gebracht und nun wieder

zu 5 maliger Wiederholung der Beobachtung angewandt wurden. Ich habe im Jahre 1837 10 Reihen solcher Sätze von 10 Beobachtungen gemacht und werde die daraus hervorgehenden 100 einzelnen Messungen der dreifachen Projection der Entfernung jetzt anführen:

Aug. 3.	Aug. 6.	Aug. 7.	Aug. 16.	Aug. 18.	Aug. 20.	Aug. 28.	Aug. 30.	Septr. 4.	Septr. 8.
R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
0,371	0,350	0,362	0,368	0,360	0,360	0,368	0,369	0,360	0,359
0,363	0,358	0,358	0,346	0,360	0,364	0,366	0,362	0,358	0,357
0,366	0,366	0,360	0,360	0,352	0,355	0,360	0,370	0,357	0,371
0,353	0,365	0,370	0,359	0,351	0,352	0,362	0,362	0,365	0,360
0,371	0,358	0,366	0,364	0,356	0,368	0,358	0,370	0,359	0,361
0,371	0,362	0,357	0,372	0,363	0,380	0,366	0,365	0,350	0,362
0,354	0,360	0,362	0,360	0,347	0,361	0,353	0,361	0,368	0,368
0,350	0,358	0,350	0,356	0,345	0,364	0,364	0,360	0,360	0,369
0,378	0,353	0,370	0,356	0,355	0,360	0,355	0,365	0,350	0,365
0,370	0,356	0,370	0,347	0,355	0,365	0,349	0,347	0,350	0,365

Das arithmetische Mittel dieser 100 Messungen ist $= 0^R,36062$ und sein mittlerer Fehler $= \pm 0^R,000716$. Die Projection der Entfernung des Doppelsterns auf die ihn mit dem Sterne a verbindende Linie ist also:

$$0^R,12021; \quad \text{m. F.} = \pm 0^R,000239$$

und die Entfernung selbst, in Secunden ausgedrückt:

$$1827,63 \ldots\ldots = 6'',482; \quad \text{m. F.} = \pm 0'',0129$$

Ich bemerke bei diesem Resultate, dass die vier ersten Beobachtungsreihen bei sehr unruhiger Luft gemacht worden sind, so wie sie bei ungewöhnlicher, damals stattfindender Wärme gewöhnlich ist; später wurde es kühler und die Luft ruhiger; allein ich zweifle nicht, dass Beobachtungen dieser Art noch beträchtlich besser untereinander übereinstimmen würden, wenn sie bei ganz ruhiger (in Königsberg freilich seltener) Luft gemacht werden könnten.

4.

Ich habe noch eine *dritte* Beobachtungsart angewandt um der Entfernung des Doppelsterns noch sicherer zu werden. Diese beruhet, wie die vorige, auf der Vergleichung desselben mit dem Sterne a, ist aber dadurch von jener verschieden, dass das Bild dieses Sterns nicht in Entfernungen von dem Hauptsterne und dem Gefährten, welche der Entfernung des Doppelsterns gleich sind, gebracht, sondern im Zu-

sammenfallen mit beiden beobachtet wurde. Diese Beobachtungsart giebt also die *einfache* Projection der Entfernung des Doppelsterns auf die ihn mit *a* verbindende Linie. Es versteht sich, dass die Bilder der Sterne nicht unmittelbar zur Deckung gebracht wurden, sondern dass ich das Stattfinden derselben durch kleine Drehungen des Heliometers um die Axe des Fernrohrs beurtheilte, welche den Bildern kleine Bewegungen gaben, deren Annäherung und Entfernung in *einer* Linie man weit genauer beobachten kann als ihre Deckung selbst. Auch diese Beobachtungsart habe ich an 10 Tagen, an jedem 10 mal, angewandt und dadurch Folgendes erhalten:

Juli 28.	Juli 29.	Sept. 11.	Sept. 14.	Sept. 20.	Sept. 21.	Sept. 24.	Sept. 25.	Octb. 2.	Octb. 8.
R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
0,121	0,120	0,115	0,117	0,122	0,122	0,123	0,121	0,111	0,121
0,122	0,120	0,121	0,125	0,115	0,111	0,124	0,112	0,118	0,113
0,116	0,120	0,119	0,118	0,121	0,116	0,114	0,119	0,124	0,123
0,121	0,122	0,112	0,112	0,114	0,126	0,118	0,120	0,120	0,122
0,116	0,121	0,121	0,126	0,123	0,124	0,124	0,121	0,125	0,119
0,126	0,122	0,117	0,120	0,121	0,120	0,120	0,117	0,119	0,119
0,116	0,125	0,117	0,110	0,120	0,115	0,109	0,120	0,116	0,118
0,125	0,121	0,124	0,127	0,125	0,117	0,116	0,123	0,122	0,117
0,111	0,125	0,119	0,116	0,119	0,133	0,117	0,116	0,118	0,119
0,115	0,115	0,124	0,120	0,117	0,113	0,121	0,128	0,117	0,124

Diesen Beobachtungen zufolge ist die Projection der Entfernung des Doppelsterns auf die ihn mit dem Sterne *a* verbindende Linie:

$$\overset{R}{0,11945}; \quad \text{m. F.} = \pm \overset{R}{0,000434}$$

und die Entfernung selbst, in Secunden ausgedrückt:

$$1837{,}70 \ldots\ldots 6''{,}462; \quad \text{m. F.} = \pm 0''{,}0234.$$

5.

Reducirt man alle im Jahre 1837 gemessenen Entfernungen auf 1837,69, indem man die jährliche Änderung $= + 0''{,}12$ annimmt, und trennt man die bis zum 6ten August, nach der gewöhnlichen Beobachtungsart gemachten von den späteren, bei welchen die im 2ten § angegezeigte Änderung derselben stattfand, so erhält man folgende Zusammenstellung:

1te	Beobachtungsart *a.*	6″,495	m. F. = ± 0″,0250	140	*einfache*	Entfernungen.
	—. . . . . *b.*	6,470	. . . . . ± 0,0220	180	—	—
2te	—.	6,489	. . . . . ± 0,0199	300	—	—
3te	—.	6,441	. . . . . ± 0,0234	100	—	—

Die beiden letzten dieser Resultate, welche mir *entscheidend* zu sein scheinen, vereinigen sich mit dem zweiten, um die Annahme eines beständigen Fehlers des ersten so unwahrscheinlich erscheinen zu lassen, als Etwas durch Beobachtungen gemacht werden kann. Ich glaube wirklich, dass die Richtigkeit der Beobachtungsart, welche diesem zum Grunde liegt, keine strengere Prüfung als die gegenwärtige erfahren konnte, und zweifle also nicht länger, dass der, wenn auch mit Recht befürchtete, Einfluss der beiden äusseren Zwischenräume auf die Beurtheilung des mittleren Zwischenraumes, nicht wirklich vorhanden ist.

Für den Doppelstern *p Ophiuchi* wird hierdurch eine Bestimmung der Entfernung gewonnen, deren Genauigkeit, bei den gegenwärtig vorhandenen Beobachtungsmitteln, schwer wird übertroffen werden können, nämlich:

$$1837{,}69 \ldots\ldots 6''{,}474; \quad \text{m. F.} = \pm 0''{,}00935.$$

Der Ursache des Unterschiedes zwischen den Dorpater und Königsberger Messungen der Entfernungen der Doppelsterne aber, kommt man durch diese Untersuchung nur in sofern näher, als daraus hervorgeht, wo sie *nicht* zu suchen ist.

Ich glaube, jetzt zu der Aufklärung dieses Gegenstandes beigetragen zu haben, was ich von meiner Seite dazu beitragen konnte. *Struve* hat gleichfalls einen Beitrag dazu geliefert, indem er gezeigt hat, dass sein Fadenmikrometer an sich selbst richtig misst. Was noch zu wünschen ist, scheint mir die Untersuchung zu sein, ob die mit dem richtig messenden Fadenmikrometer erlangte Messung der Entfernung zweier *festen* Punkte, und die Messung der Entfernung zweier *Sterne*, aus einander so gleichen Verfahrungsarten hervorgehen, dass das was in dem ersteren Falle stattfindet, auch in dem anderen als gültig angenommen werden muss. Ein Unterschied zwischen den, in beiden Fällen anzuwendenden Verfahrungsarten ist aber, wenn das Fernrohr, durch sein Uhrwerk, den Sternen nicht vollkommen, sondern nur

näherungsweise folgend gemacht werden kann, offenbar vorhanden; dann wird nämlich nothwendig, die Bisection beider *Sterne* durch die Fäden *zugleich* zu beurtheilen, statt dass die Bisection jedes der *festen* Punkte, ohne Rücksicht auf den anderen beurtheilt wird. Während man in dem letzten Falle, das Auge immer nur auf *einen* Punkt, nämlich auf den jedesmal bisecirten, zu richten braucht, muss es, in dem ersten, in zwei Richtungen zugleich sehen und ein Urtheil über das Gesehene vermitteln. Dass es wirklich nothwendig ist, die Bisectionen der beiden Sterne eines Doppelsterns zugleich im Auge zu haben, geht aus verschiedenen Stellen der Einleitung des grossen *Struve*schen Werkes hervor; ganz unzweideutig aus der Angabe (P. LIX), dass sie desto sicherer beobachtet werden kann, je kleiner die Entfernung der Sterne ist; so dass 24″ bis 32″ voneinander entfernte Sterne auch nicht mehr mit den stärker vergrössernden Ocularen gemessen werden können, indem die Richtung des Auges nach zwei weit voneinander entfernten Punkten des Sehefeldes, der Genauigkeit der Messung zu sehr schaden würde. Die grössere oder geringere Entfernung *fester* Punkte hat dagegen, wenn sie nur den Raum des deutlichen Sehens im Fernrohre nicht überschreitet, keinen Einfluss auf die Genauigkeit ihrer Messung, was sowohl zu erwarten ist, als auch durch *Struve's* unmittelbare Versuche bestätigt wird. Was also, meiner Meinung nach, vorzüglichen Anspruch auf Untersuchung hat, ist die Frage, ob der zwischen den Messungsarten der Entfernungen der *festen* Punkte und der *Doppelsterne* wirklich *vorhandene* Unterschied, *nur* grössere *zufällige* Fehler oder auch beständig wirkende erzeugt. Die Möglichkeit, dass das Auge entweder *eines* Beobachters, oder *aller* Beobachter, zwei gleichzeitig und daher ausser der Richtung seiner Axe wahrzunehmende Bisectionen an verschiedenen Punkten des Sehefeldes, als vorhanden annimmt, wenn die Fäden nicht central, sondern entweder innerhalb oder ausserhalb der Mittelpunkte sind, ist wenigstens denkbar, vorausgesetzt dass nur von einem so kleinen Unterschiede die Rede ist, wie der, um welchen es sich hier handelt. Ob aber dieser Unterschied *wirklich* vorhanden ist, kann nur durch Versuche mit dem Apparate selbst, dessen unmittelbare Angaben von der Voraussetzung seines Nichtvorhandenseins befreiet werden sollen, entschieden werden. Wenn *Struve* die hier angedeutete *Möglichkeit* der

Ausgleichung eines vorhandenen Widerspruchs, der Verfolgung werth hält, so werden wir von seiner Seite noch einen Beitrag zu den Verhandlungen über diesen Gegenstand erwarten dürfen. Ich lasse in dieser Beziehung nicht unerwähnt, dass das Verschwinden des Unterschiedes in grösseren Entfernungen, von 20″ und darüber, gegen die Wahrscheinlichkeit der hier angedeuteten möglichen Erklärung zu sein scheint. Um auch diese Übereinstimmung in dem einen Falle mit dem Unterschiede in dem anderen zu vereinigen, müsste man annehmen, dass entweder die erste nur scheinbar, bei einer verhältnissmässig kleinen Anzahl von Sternen stattfindet und durch die in beiden Beobachtungsarten bei grösseren Entfernungen grösser werdenden zufälligen Fehler hervorgebracht ist; oder dass das Fadenmikrometer grössere Entfernungen durch ein *anderes* Verfahren ergiebt, als kleinere. Wenn die Entfernung die Grenze überschreitet, bis zu welcher man beide Sterne noch *zugleich* sehen kann, muss die hierauf gegründete Beobachtungsart verlassen und dagegen eine andere gewählt werden, welche darin besteht, dass man *zuerst* den einen Stern an einen der Fäden bringt, *dann* den anderen an den anderen Faden, und nun darauf rechnet, dass die Bewegung des Fernrohrs auch den ersteren auf dem Faden erhalten habe; findet sich dieses, bei der Wiederholung des Blickes nach diesem, nicht bestätigt, so ist die Beobachtung nicht gelungen und man versucht eine neue; findet es sich bestätigt, so wird die erlangte Messung wenigstens nicht durch einen Fehler entstellt, welchen man für beständig in gleichem Sinne wiederkehrend ansehen könnte.

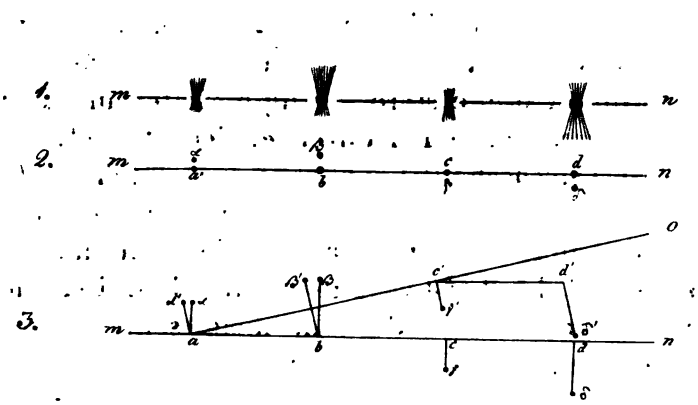
6.

Bei Gelegenheit einer allgemeinen Beschreibung des Heliometers*) habe ich schon bemerkt, dass die beiden Bilder eines Sterns, welche man, bei einer kleinen Entfernung der Axen beider Objectivhälften, nebeneinander erhält, nicht mehr vollkommen rund, sondern durch, zerstreuetes Licht, welches sich in der auf den Durchschnitt derselben senkrechten Richtung zeigt, etwas entstellt erscheinen; dieses ist vorzüglich bei ruhiger Luft und mit starken Vergrösserungen bemerkbar

*) *Schumacher's* Astronomische Nachrichten. Nro. 189. S. 410.

und entsteht aus der unvollkommenen Compensation der optischen Aberration in der Hälfte eines Objectivs und der Inflexion des Lichts an den Rändern seines Durchschnitts. In wiefern diese Unvollkommenheit der Bilder Einfluss auf die Beobachtungen der Doppelsterne erhält, werde ich jetzt näher untersuchen.

Aus dieser Ursache stellt ein, aus zwei Sternen zusammengesetzter Doppelstern, wenn der Durchschnitt der beiden Objectivhälften sich in der Ebene der beiden Sterne befindet und ihre Axen nocheinmal so weit voneinander entfernt sind als die Sterne, sich etwa so dar, wie Fig. 1 (der Deutlichkeit wegen stark vergrössert) zeigt; nämlich es ist *mehr* zerstreuetes Licht nach der Seite der Objectivhälfte, als nach der entgegengesetzten vorhanden; und *mehr* bei dem helleren Sterne als bei dem weniger hellen. Wenn dieses zerstreuete Licht auch nur bei ruhiger Luft deutlich unterschieden werden kann, so ist doch auch an seinem Vorhandensein nicht zu zweifeln, wenn es, bei zitternder Luft, sich mit der Unbestimmtheit der Begrenzung der Bilder vermischt. Sein Einfluss muss darin bestehen, dass die Mittelpunkte der links gezeichneten Bilder beider Sterne *über* der Linie *mn*, auf welcher sie wirklich liegen, angenommen werden, während das Entgegengesetzte bei den rechts gezeichneten Bildern stattfindet; ihre Ausweichungen aus dieser Linie sind bei dem helleren Sterne grösser als bei dem weniger hellen. Man glaubt also, die vier Bilder nicht in der Linie *mn*, sondern ausser derselben zu sehen, etwa wie Fig. 2 darstellt.



Durch die Bewegungen des Heliometers, sowohl jeder der beiden Hälften des Objectivs, als auch des ganzen um seine Axe, kann man dem Bilde der beiden Sterne, welches die eine Objectivhälfte macht, beziehungsweise auf das durch die andere gemachte, eine beliebige

Lage geben, ohne dass jedoch dadurch der Winkel, in welchem die Richtungen $\beta\alpha$ und $\delta\gamma$ sich durchschneiden, erheblich geändert würde. Man kann also nicht hervorbringen, dass alle vier Sterne in gerader Linie erscheinen, ausser in dem Falle der gleichen Helligkeit derselben, in welchem Falle $a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta$ sein würde. Sehr oft ist diese Ausweichung der vier Sterne aus einer geraden Linie nicht zu bemerken; oft, und zwar gerade unter den Umständen, welche einer Beobachtung am günstigsten sind, ist sie mir aber aufgefallen und würde eine Verlegenheit erzeugt haben, wenn nicht vorher eine bestimmte Erscheinung, als die zu beobachtende, ausgewählt worden wäre.

Um die Beobachtungsart der Doppelsterne durch ein Heliometer vollständig zu verstehen, muss man die Ortsveränderungen der vier Sterne aufsuchen, welche durch Verschiebung der einen Objectivhälfte und durch Drehung des ganzen Heliometers um seine Axe hervorgebracht werden. Die durch die erstere erlangte Entfernung der Axen der beiden Objectivhälften werde ich durch e, den Winkel, um welchen die Drehung ihre Durchschnittslinie von der durch beide Sterne des Doppelsterns gehenden Ebene entfernt hat, durch u bezeichnen, die Entfernung der beiden Sterne durch d, die Entfernungen $a\alpha = -c\gamma$ durch k, $b\beta = -d\delta$ durch $k+i$. Die dritte Figur ist, um ihre Deutlichkeit zu vermehren, unter der Annahme sehr grosser Werthe von k und i gezeichnet.

Drehet man die Durchschnittslinie der Objectivhälften, während man ihren Axen die Entfernung $ac = e$ gegeben hat, um die Axe der einen a, so würde hieraus keine Ortsveränderung des Bildes $\alpha\beta$ entstehen, wenn das Heliometer die Sterne nicht entstellte, also ihre Mittelpunkte in a und b gesehen würden; unter derselben Voraussetzung würde c nach c' gelangen ($ac = ac'$), und d nach d', wo $c'd'$ gleich und parallel cd ist. Da aber die Objectivhälften die Mittelpunkte der vier Sterne, senkrecht auf die Durchschnittslinie um $a\alpha = k$, $b\beta = k+i$, $c\gamma = -k$, $d\delta = -k-i$ verrücken, ohne parallel mit ihr eine Änderung hervorzubringen, so erhält man die Örter wo die Bilder wirklich gesehen werden, indem man die Linien $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ senkrecht auf die neue Durchschnittslinie, an die Punkte a, b, c', d' ansetzt. Hierdurch findet man die Punkte α', β', γ', δ' wo die vier

Sterne erscheinen. Die Coordinaten dieser Punkte, bezogen auf die neue Durchschnittslinie, welche mit der vorigen den Winkel $oan = u$ macht, sind:

$$\begin{aligned} x &= 0 & y &= k \\ x' &= d\,\mathrm{Cos}\,u & y' &= -d\,\mathrm{Sin}\,u + k + i \\ x'' &= e & y'' &= -k \\ x''' &= d\,\mathrm{Cos}\,u + e & y''' &= -d\,\mathrm{Sin}\,u - k - i \end{aligned}$$

Nachdem hierdurch die Punkte bestimmt sind wo man die vier Sterne sieht, kann man jede gewählte Beobachtungsart leicht verfolgen. Die welche ich angewandt habe, besteht darin, dass ich die vier Bilder so gelegt habe, dass 1) das 2te und 4te von der durch das 1te und 3te gelegten geraden Linie nach entgegengesetzten Seiten gleichweit entfernt erschienen und 2) der Zwischenraum zwischen dem 2ten und 3ten so gross wurde wie das Mittel der Zwischenräume zwischen dem 1ten und 2ten und zwischen dem 3ten und 4ten. Ich habe schon bemerkt, dass sich gewöhnlich keine Ausweichung der vier Bilder aus der geraden Linie zeigt; glaubte ich aber sie zu sehen, so war es die zuerst ausgesprochene Regel, welcher gemäss ich den Positionswinkel zu beobachten suchte; es versteht sich, dass in den Fällen, in welchen eine Ausweichung aus der geraden Linie sichtbar wurde, die zweite sich auf die Beobachtung der Entfernung beziehende Regel, nicht auf die Bilder selbst, sondern auf ihre Projectionen auf die angegebene Linie angewandt wurde.

Legt man eine gerade Linie durch α' und γ', d. h. durch die beiden Bilder des kleineren Sterns, so sind die auf sie projicirten Entfernungen:

$$\begin{aligned} \alpha'\beta' &= \frac{d}{r}(e\,\mathrm{Cos}\,u + 2k\,\mathrm{Sin}\,u) - \frac{2ki}{r} \\ \beta'\gamma' &= \frac{ee}{r} - \frac{d}{r}(e\,\mathrm{Cos}\,u + 2k\,\mathrm{Sin}\,u) + \frac{2k(2k+i)}{r} \\ \gamma'\delta' &= \frac{d}{r}(e\,\mathrm{Cos}\,u + 2k\,\mathrm{Sin}\,u) + \frac{2ki}{r} \end{aligned}$$

wo r für $\sqrt{(ee + 4kk)}$ geschrieben ist, und die Entferungen des 2ten und 4ten Bildes von ihr

$$\begin{aligned} & \frac{d}{r}(-e\,\mathrm{Sin}\,u + 2k\,\mathrm{Cos}\,u) + \frac{ei}{r} \\ \text{und} \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{d}{r}(-e\,\mathrm{Sin}\,u + 2k\,\mathrm{Cos}\,u) - \frac{ei}{r} \end{aligned}$$

Die befolgte Beobachtungsart fordert also: 1) dass die beiden letzten Ausdrücke von gleicher Grösse, aber entgegengesetzten Zeichen seien, und 2) dass $\frac{1}{2}(\alpha'\beta' + \gamma'\delta') = \beta'\gamma'$ sei. Durch diese Bedingungen erhält man die Gleichungen:

$$0 = e \operatorname{Sin} u - 2k \operatorname{Cos} u$$
$$0 = ee - 2d(e \operatorname{Cos} u + 2k \operatorname{Sin} u) + 2k(2k+i)$$

welche

$$\operatorname{Tang} u = \frac{2k}{e}$$
$$2d = \frac{e}{\operatorname{Cos} u} + \frac{2ki}{e} \operatorname{Cos} u = \frac{e}{\operatorname{Cos} u} + i \operatorname{Sin} u$$

ergeben. Die Beobachtung, welche ich hier verfolgt habe, ist die erste Hälfte einer vollständigen; die andere Hälfte derselben wird auf genau gleiche Art erlangt, nachdem die Axe der einen Objectivhälfte vor der anderen vorüberbewegt worden ist. Für diese zweite Hälfte verwandeln sich k und i in $-k$ und $-i$, also auch u in $-u$; der Ausdruck von d bleibt ungeändert. Indem man das Mittel der beiden abgelesenen Positionswinkel annimmt, enthält man also die Richtung des Doppelsterns *richtig*; allein die Division der abgelesenen Entfernung durch den Cosinus des halben Unterschiedes der beiden Ablesungen des Positionswinkels, giebt immer eine *zu kleine* Entfernung, falls nicht entweder k oder i verschwinden, welches der Fall ist wenn einer der Sterne sehr klein ist, oder beide von gleicher Helligkeit sind. Die noch hinzuzufügende Verbesserung kann man nicht berechnen, da man i nicht kennt; auf die Erfindung seiner Grösse für Sternenpaare von allen Helligkeitsverhältnissen auszugehen, halte ich zwar nicht für unmöglich, aber für unausführbar. Jedenfalls ist die Grösse, um welche die befolgte Beobachtungsart die Entfernungen zu klein giebt, *unter* der Grenze, bis zu welcher man die Genauigkeit der Beobachtungen zu treiben hoffen kann.

Ich hätte noch eine andere Beobachtungsart wählen, nämlich den Positionswinkel so beobachten können, dass der 2te Stern auf die gerade Linie zwischen dem 1ten und 3ten, und die Entfernung so, dass er in die Mitte dieser Linie gelegt worden wäre. Diese Beobachtungsart erfüllt die beiden Gleichungen:

$$x' - x = x'' - x'$$
$$y' - y = y'' - y'$$

und ergiebt, wenn man die obigen Ausdrücke dieser Grössen setzt,

$$d\,\mathrm{Cos}\,u = e - d\,\mathrm{Cos}\,u$$
$$-d\,\mathrm{Sin}\,u + i = d\,\mathrm{Sin}\,u - 2k - i$$

oder

$$\mathrm{Tang}\,u = \frac{2(k+i)}{e}$$
$$2d = \frac{e}{\mathrm{Cos}\,u}$$

woraus hervorgeht, dass der Unterschied des in beiden Hälften einer vollständigen Beobachtung gesehenen Positionswinkels zwar grösser ist, als bei der vorigen Beobachtungsart, jedoch auf das mittlere Resultat beider Hälften keinen Einfluss behält, und dass die Entfernung durch die Division mit dem Cosinus des halben Unterschiedes vollständig gefunden wird.

Den Grund, welcher mich veranlasst hat, der ersten Beobachtungsart, insofern es sich um die Messung der Entfernung handelt, den Vorzug zu geben, habe ich im 2ten § angeführt; auch in Beziehung auf den Positionswinkel glaubte ich, sie, der grösseren Länge der Linie wegen, deren Richtung das Auge auffasst, vorziehen zu müssen. In dieser Beziehung fürchte ich aber jetzt, mich geirrt und den beobachteten Positionswinkeln (Abhdl. VII) dadurch geschadet zu haben. Wenigstens ist mir die zweite Beobachtungsart der Positionswinkel, welche ich dem 2ten § zufolge, bei meinen letzten Beobachtungen *p Ophiuchi* befolgt habe, so viel *leichter* geworden als die erste, dass ich sie auch für *sicherer* zu halten geneigt bin. Auch scheint dieses durch bessere Übereinstimmung der dadurch erhaltenen, § 1. angeführten Resultate bestätigt zu werden. Dass das Mittel aus diesen letzten Beobachtungen, dem aus den früheren des Jahrs 1837 gezogenen, etwa 47′ grösseren vorzuziehen ist, bezweifle ich nicht: wenn auch der Beobachtungsart kein Vorzug eingeräumt wird, so besitzen die späteren Beobachtungen ihn doch sicher in der weit günstigeren Beschaffenheit der Luft, welche, wie ich schon angeführt habe, nach der Mitte des Augusts eintrat. Für Sternenpaare von gleicher Helligkeit sind beide Beobachtungsarten nicht voneinander verschieden.

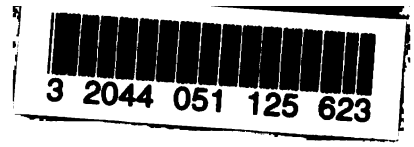
Druckfehler.

Seite	9	Formel (6)	statt	$\mathrm{Sin}\, t'$	lese man	$\mathrm{Sin}\, t$,
„	11	Zeile 11	„	$\mathrm{Cos}\, d'$	—	$\mathrm{Cos}\, d$,
„	75	„ 7	„	$\alpha\, 0'{,}473\, \mathrm{Sec}\, \delta_0$	—	$0'{,}473\, \mathrm{Sec}\, \delta_0$
„	162	„ 26	„	$1 + x + (x - x)$	—	$1 + x + (h - x)$
„	167	„ 19	„	$\mathrm{Cos}\zeta = \mathrm{Sin}\, n\, \mathrm{Cos}(N + \delta_0)$	—	$\mathrm{Cos}\zeta = \mathrm{Sin}\, n\, \mathrm{Sin}(N + \delta_0)$
„	170	Formel (11)	„	$\lambda - x\, \mathrm{Tang}\, \zeta^2$ etc.	—	$1 - x\, \mathrm{Tang}\, \zeta^2$ etc.
„	195	Zeile 8	„	$\triangle(\delta')$	—	$\triangle(\delta')$
„	206	„ 24	„	$\sigma = z$	—	$v = \ldots$
„	223	„ 28	„	$44°\, 4'\, 45'',05$	—	$54°\, 4'\, 45'',05$

In unserem Verlage sind noch erschienen:

Bessel, F. W., Tabulae Regiomontanae reductionum observationum astronomicarum ab anno 1750 usque ad annum 1850. 8. maj. 1830. 6 Thlr. 16 gGr.

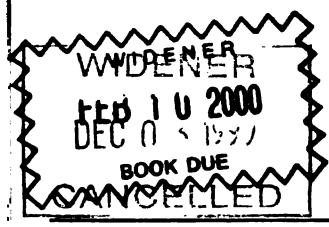
Jacobi, C. G. J., Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. 4 maj. 1829. 3 Thlr.



The borrower must return this item on or before the last date stamped below. If another user places a recall for this item, the borrower will be notified of the need for an earlier return.

Non-receipt of overdue notices does ***not*** *exempt the borrower from overdue fines.*

Harvard College Widener Library
Cambridge, MA 02138 617-495-2413



Please handle with care.
Thank you for helping to preserve library collections at Harvard.