





506.913
A188
38481
Lunt

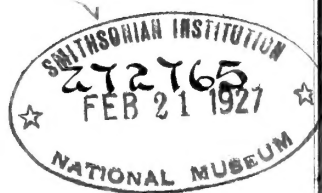
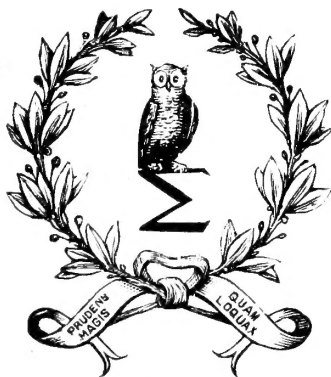
23

ATTI
DELLA
ACCADEMIA GIOENIA
DI SCIENZE NATURALI
IN CATANIA.

ANNO XCIV
1917.

SERIE QUINTA.

VOLUME X.



CATANIA,
C. GALÀTOLA, EDITORE
1917.

100-35-10781-10
100-35-10781-10
100-35-10781-10

SMITHSONIAN INSTITUTION
★ FEB 21 1927 ★
272765
NATIONAL MUSEUM

ATTI
DELLA
ACCADEMIA GIOENIA
DI SCIENZE NATURALI
IN CATANIA.

ANNO XCIV
1917.

SERIE QUINTA.

VOLUME X.



CATANIA,
C. GALÀTOLA, EDITORE
1917.

CARICHE ACCADEMICHE

PER L'ANNO 1916-1917

--

UFFICIO DI PRESIDENZA

RICCÒ Comm. Prof. Annibale — *Presidente*

CLEMENTI Comm. Prof. Gesualdo — *Vice-Presidente*

RUSSO Cav. Prof. Achille — *Segretario*

BOGGIO-LERA Prof. Enrico — *Vice-Segretario per la sezione di Scienze fisiche e matematiche*

FELETTI Cav. Prof. Raimondo — *Vice-Segretario per la sezione di Scienze naturali*

CONSIGLIO DI AMMINISTRAZIONE

STADERINI Prof. Rutilio

SEVERINI Prof. Carlo

CAPPARELLI Cav. Uff. Prof. Andrea

FODERA Prof. Filippo Arturo

GRASSI Cav. Prof. Giuseppe — *Cassiere*

DANIELE Prof. Ermenegildo — *Bibliotecario*

SOCI ONORARI

NOMINATI DOPO L'APPROVAZIONE DEL NUOVO STATUTO.

S. A. R. IL DUCA DEGLI ABBRUZZI

TODARO sen. comm. prof. Francesco	CIAMICIAN sen. comm. prof. Giacomo
CHAIX prof. Emilio	BRIOSI comm. prof. Giovanni
MACALUSO comm. prof. Damiano	BIANCHI comm. prof. Luigi
BLASERNA sen. comm. prof. Pietro	GOLGI sen. comm. prof. Camillo
NACCARI uff. prof. Andrea	PALAZZO comm. prof. Luigi
ROITI sen. uff. prof. Antonio	LUCIANI sen. comm. prof. Luigi
GRASSI sen. prof. Battista	ENGLER prof. Arturo
WIEDEMANN prof. Eilhard	FLAMMARION Camillo
CAPELLINI sen. comm. prof. Giovanni	LA CROIX prof. Alfredo
RIGHI sen. prof. Augusto	PRENANT prof. A.
VOLTERRA sen. prof. Vito	CALDARERA gr. uff. prof. Francesco
DINI sen. comm. prof. Ulisse	

SOCI EFFETTIVI

1. CLEMENTI comm. prof. Gesualdo	16. BUSCALIONI prof. Luigi
2. BASILE prof. Gioachino	17. MINUNNI prof. Gaetano
3. CAPPARELLI uff. prof. Andrea	18. MUSCATELLO cav. prof. Giuseppe
4. ARADAS cav. prof. Salvatore	19. SEVERINI prof. Carlo
5. UGHETTI cav. prof. Giambattista	20. BOGGIO-LERA prof. Enrico
6. FELETTI cav. prof. Raimondo	21. FODERÀ prof. Arturo
7. PETRONE comm. prof. Angelo	22. CARUSO prof. Francesco
8. RICCÒ comm. prof. Annibale	23. ASCOLI prof. Maurizio
9. BUCCA cav. prof. Lorenzo	24. CIPOLLA prof. Michele
10. GRIMALDI comm. prof. Giov. Pietro	25. MIRTO prof. Domenico
11. GRASSI cav. prof. Giuseppe	26. CONDORELLI FRANCAVIGLIA prof. Mario
12. DI MATTEI comm. prof. Eugenio	27. DANIELE prof. Ermenegildo
13. D'ABUNDO comm. prof. Giuseppe	28. FUCINI prof. Alberto
14. STADERINI prof. Rutilio	29. SCORZA prof. Gaetano
15. RUSSO cav. prof. Achille	30.

SOCI EFFETTIVI

DIVENUTI CORRISPONDENTI PER CAMBIAMENTO DI RESIDENZA.

SPECIALE prof. Sebastiano
STRACCIATI prof. Enrico
PERATONER prof. Alberto
RICCIARDI uff. prof. Leonardo
BACCARINI prof. Pasquale
ZANETTI prof. Carlo Umberto
CAVARA prof. Fridiano

FUBINI prof. Guido
DI LORENZO sen. prof. Giuseppe
PERRANDO cav. prof. Gian Giacomo
LOPRIORE prof. Giuseppe
VINASSA DE REGNY prof. Paolo
DE FRANCHIS prof. Francesco

SOCI CORRISPONDENTI

NOMINATI DOPO L'APPROVAZIONE DEL NUOVO STATUTO.

PELLIZZARI prof. Guido
MARTINETTI prof. Vittorio
MELI prof. Romolo
PAPASOGLI prof. Giorgio
GAGLIO cav. prof. Gaetano
MOSCATO dott. Pasquale
GUZZARDI dott. Michele
ALONZO dott. Giovanni
DISTEFANO prof. Giovanni
MAGNANINI prof. Gaetano
PAGLIANI cav. prof. Stefano
CHISTONI cav. prof. Ciro
GALITZINE Principe Boris
GUGLIELMO prof. Giovanni
CARDANI cav. prof. Pietro
GARBIERI cav. prof. Giovanni
GIANNETTI cav. prof. Paolo
CERVELLO comm. prof. Vincenzo
ALBERTONI sen. comm. prof. Pietro
LA MONACA dott. Silvestro
BAZZI prof. Eugenio
MORSELLI prof. Enrico
RAFFO dott. Guido
MATERAZZO dott. Giuseppe
BORZÌ cav. prof. Antonio
FALCO dott. Francesco
DEL LUNGO prof. dott. Carlo
GIOVANOZZI prof. Giovanni
KOHLEAUSCH prof. Giovanni
ZAMBACCO dott. N.
DONATI prof. Luigi
DE HEEN prof. Pietro

PERNICE prof. Biagio
CALDARERA dott. Gaetano
SALOMONE MARINO prof. Salvatore
PANDOLFI dott. Eduardo
GUZZANTI cav. Corrado
VALENTI prof. Giulio
MAJORANA prof. Quirino
PINTO prof. Luigi
ROMITI prof. Guglielmo
BEMPORAD prof. Azeglio
BELLECCI dott. Luigi
DRAGO prof. Umberto
POLARA dott. Giovanni
RINDONE dott. Carlo
CERMENATI prof. Mario
DE FRANCO prof. Salvatore
FOÀ prof. Carlo
PLATANIA prof. Gaetano
PLATANIA prof. Giovanni
SCALIA prof. Salvatore
COMES prof. Salvatore
CUTORE prof. Gaetano
DI MATTEI prof. Emilio
ODDO uff. prof. Giuseppe
BERTOLO prof. Pasquale
EREDIA prof. Filippo
MARLETTA prof. Giuseppe
MUSCHLER prof. Remo
CERRUTI prof. Attilio
CITELLI prof. Salvatore
PONTE prof. Gaetano
CLEMENTI prof. Antonino

Sul problema dell' induzione magnetica

Nota di E. DANIELE

Un campo magnetico di potenziale V , nel quale si porti una sostanza magnetizzabile temporaneamente, si modifica, in quanto a V (potenziale del campo inducente) si aggiunge il potenziale U del magnetismo indotto in quella sostanza. Il campo effettivo in presenza del quale ci si trova ha dunque il potenziale

$$W = V + U.$$

Chiamando S lo spazio occupato dalla sostanza magnetizzabile, che supporremo limitato da una superficie σ , si assume come legge sperimentale dell' induzione magnetica la proporzionalità, in ogni punto di S , tra *la forza magnetica* (derivante dal potenziale W) ed il vettore *magnetizzazione*, definito in ogni punto di S e mediante il quale si esprime U . Se diciamo (ρ) questo vettore, e (w) quello di componenti

$$X = - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad Y = - \frac{\partial W}{\partial y}, \quad Z = - \frac{\partial W}{\partial z},$$

quella legge è dunque espressa da

$$(\rho) = p \cdot (w).$$

Il *coefficiente di magnetizzazione* p viene assunto, nelle ordinarie trattazioni matematiche dell' induzione magnetica, come una costante: non solo nel senso che non varia da un punto all'altro di S , ma anche nel senso che non dipende dal campo inducente. Se questa assunzione sia accettabile o no, è l'esperienza che lo deve decidere. Ora se non vi ha difficoltà ad accogliere la prima parte, almeno per certi corpi di determinata costituzione fisica, non si può invece accettare la seconda che a titolo di grossolana approssimazione: tutti gli sperimentatori difatti giungono alla conclusione che il campo inducente influisce sui valori di p , e vi influisce, in taluni casi, in misura molto sensibile.

Una teoria matematica dell' induzione magnetica, che tenda ad accostarsi quanto più è possibile alla realtà fisica, non può dunque prescindere dalla variabilità di p insieme col campo inducente. In che modo si terrà conto di questa dipendenza, ammesso tuttavia che p abbia lo stesso valore in tutti i punti di S ? Invece di considerare la dipendenza di p dal campo inducente ci riferiremo, ciò che è lo stesso ed è conforme a quanto fanno gli sperimentatori, alla sua dipendenza dal campo effettivo (o risultante) di potenziale W . Se quest'ultimo campo fosse uniforme, e tale si conservasse nelle sue variazioni, sa-

rebbe individuato in ogni istante dai tre numeri $X Y Z$, e l'assumere p variabile con W equivarrebbe a porre p eguale ad un'ordinaria funzione delle tre variabili X, Y, Z . Ma supponiamo che si tratti di un campo affatto qualunque. Allora $X Y Z$ variano da un punto all'altro dello spazio infinito, e se noi riteniamo che tutto il campo, nel suo complesso, influisca sul valore attuale di p , cioè se noi pensiamo p come dipendente da tutti i valori che $X Y Z$ assumono nei vari punti dello spazio infinito, dovremo rappresentare quel coefficiente come una funzione di linea, ponendo

$$p = f \left[\left[X, Y, Z \right] \right],$$

dove $X Y Z$ si devono intendere come funzioni delle coordinate $x y z$ di un punto generico dello spazio (*).

* * *

La prima questione che ci si presenta è di mettere p sotto una forma atta ad essere introdotta nei calcoli, e perciò meno vaga della precedente. Vien naturale allora di ammettere la sviluppabilità di f in serie analoga a quella di Taylor, arrestando poi la serie ad un termine conveniente. Si comprende quanto sarebbe desiderabile che questo termine fosse quello lineare, ma le più semplici riflessioni sul legame, messo in luce dalla esperienza, fra p e la forza magnetica nel caso di campi uniformi, mostrano che tale assunzione non è possibile in generale.

Nel § 1°, precisamente nei num. 2 e 3, mi sono trattenuto alquanto su questo punto, giungendo alla conclusione che per avere un'espressione di p , le cui proprietà siano conformi a quelle segnalate dall'esperienza, occorrerebbe introdurre almeno i termini di 2° grado. L'arresto ai termini lineari è tuttavia possibile quando si limiti convenientemente il campo di variabilità della forza magnetica.

La messa in equazione del problema dell'induzione magnetica si fa al solito modo: o, seguendo Kirchhoff, assumendo come incognita la funzione potenziale U , oppure, seguendo Poisson, la funzione potenziale W . Le due funzioni U e W debbono soddisfare, oltre alle condizioni generiche dell'armonicità ecc., rispettivamente a due equazioni, cioè la (6) o la (7) del § 2°, di cui la prima è una condizione ai limiti, e la seconda vale per tutti i punti di S .

Queste due equazioni, l'una in U e l'altra in W , sono entrambe lineari. Orbene, il supporre p dipendente da U o da W altera sostanzialmente i caratteri delle equazioni (6) e (7), come è mostrato nel § 2°, in quanto sia l'una che l'altra perdono la linearità. La (6) si modifica anche più radicalmente, poichè perde il tipo differenziale, per acquistare il tipo integro-differenziale, ed inoltre cessa di essere una condizione ai limiti, perchè in essa vengono a comparire i valori di U (o delle sue derivate) in tutti i punti di S : le

(*) Analoga alla concezione attuale è quella mediante la quale il prof. Cisotti ampliò la legge di Hooke, supponendo che in un solido elastico la deformazione di una particella qualsiasi non dipenda soltanto dallo stato di tensione di quella particella, ma bensì da quello di tutte le particelle del corpo (Cfr. la Nota: *Sopra una estensione delle equazioni generali dell'elasticità*; Rend. d. R. Accad. d. Lincei, vol. XXIII, s. 5ª, 2° sem., 1914).

(13) e (14) sono le equazioni che vanno sostituite alla (6) quando p si supponga risp. funzione di 2° o di 1° grado in U .

Si tratta ora di vedere se le condizioni: di essere funzione armonica all'interno ed all'esterno di S , di annullarsi all'infinito, e di soddisfare entro tutto S e su σ all'equazione che prende il posto della (6) o della (7)—siano atte a determinare completamente le funzioni U o W . È noto in quale semplice modo si dimostri l'unicità della soluzione nel caso classico, in cui p non si fa dipendere dalla forza magnetica. Il procedimento ordinariamente seguito, nel quale la linearità delle (6) e (7) è una circostanza essenziale, non è estendibile al caso nostro, anche in causa della ignoranza in cui ci troviamo circa le proprietà di certi coefficienti che si presentano nell'espressione di p , analoghi ai coefficienti d'eredità che compaiono nello studio dei fenomeni della fisica ereditaria. Tralasciando allora di occuparmi della funzione U e della relativa equazione (13) o (14), studiai l'unicità della funzione W che deve verificare, entro S , l'equazione (7), ove p sia variabile con W . *In questo calcolo mi sono limitato a considerare p come funzione lineare di W* . La via che si è tentata appartiene ai metodi di approssimazioni successive, ed è analoga a quella seguita da Volterra per dimostrare l'unicità della soluzione dell'equazione integro-differenziale che si può considerare come tipo delle equazioni ellittiche alle derivate parziali (*)

Le diverse condizioni però in cui si svolge il nostro calcolo, — vale a dire la non linearità dell'equazione studiata, ed il fatto che gli integrali che vi compaiono sono a limiti fissi e non già variabili, — non permettono di giungere ad un risultato così netto come quello a cui pervenne Volterra. L'unicità della soluzione è cioè dimostrata soltanto a condizione che sia soddisfatta una certa disequaglianza, la quale esprime in sostanza una limitazione relativa ai coefficienti dell'espressione di p .

Il calcolo è eseguito nel § 4°. Evidentemente esso si applica pure al caso classico, e poichè non è privo d'interesse vedere come si specifichi il procedimento ed il risultato in questo caso più semplice, così ho creduto opportuno far precedere, nel § 3°, la corrispondente trattazione. Qui la condizione, alla quale l'unicità risulta dimostrata, si riduce a supporre che $|p|$ sia sufficientemente piccolo. Si noti del resto che una limitazione per p si rende necessaria anche nella dimostrazione ordinaria, in quanto bisogna supporre

$$1 - 4\pi p > 0.$$

È vero che il binomio $1 - 4\pi p$ (*permeabilità magnetica*) non diventa mai, praticamente, negativo; ciò non toglie che dal punto di vista puramente matematico la disequaglianza precedente sia una vera e propria condizione per p .

Infine, nel caso di p indipendente da W si riesce facilmente a calcolare W per approssimazioni successive, e ad assegnarne una rappresentazione mediante una serie di potenze di p , la quale converge tutte le volte che $|p|$ soddisfa alla condizione sotto la quale fu stabilita l'unicità della soluzione.

(*) Cfr. VOLTERRA: *Leçons sur les équations intégrales et intégror-différentielles*; pag. 142 e segg.

§ 1°.

1. Assumiamo

$$p = f \left[X, Y, Z \right],$$

e ammettiamo la sviluppabilità di f in serie analoga a quella di Taylor; si avrà:

$$\begin{aligned} p = p_0 + \int \int f_1(x, y, z) X(x, y, z) + f_2 Y + f_3 Z \{ dS + \\ + \int \int f_{11}(x, y, z, x', y', z') X(x, y, z) X(x', y', z') + \dots \\ + f_{23}(x, y, z, x', y', z') Y(x, y, z) Z(x', y', z') \{ dS dS' + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Intorno a questo sviluppo son necessarie alcune osservazioni.

1°) La costante p_0 dev'essere supposta diversa da zero; difatti è ciò a cui tende p quando si facciano tendere a zero X, Y, Z : ora l'esperienza mostra che il coefficiente di magnetizzazione non si annulla coll'annullarsi della forza magnetica, ma tende piuttosto ad un valor limite determinato diverso da zero.

2°) Le funzioni f con uno, due o più indici sono dei coefficienti analoghi ai coefficienti d'eredità che si presentano nello studio dei fenomeni della fisica ereditaria. Queste funzioni, come anche p_0 , si debbono pensare legate alla natura fisica del corpo magnetizzabile, e definite entro tutto lo spazio S da esso occupato; si dovranno invece ritenere nulle in tutto lo spazio esterno al corpo, allo stesso modo che il coefficiente di magnetizzazione, se variasse da un punto all'altro, perderebbe ogni significato fuori di S . Ne viene che gli integrali del secondo membro, che si dovrebbero estendere a tutto lo spazio infinito, in realtà risultano limitati allo spazio S occupato dal corpo magnetizzabile.

3°) Annullando tutte le f si trova che p si riduce a p_0 ; e poichè la presenza delle f è appunto ciò che stabilisce l'influenza di tutto il campo sul valore di p , ne segue che p_0 si può anche interpretare come il valore fisso che spetterebbe a p qualora non dipendesse del campo.

2. Vogliamo vedere a quale termine converrà arrestare lo sviluppo (1) per avere una espressione di p le cui proprietà siano conformi a quelle segnalate dall'esperienza. Conviene notare che gli sperimentatori operarono sempre con campi uniformi (o almeno che si potevano considerare tali nella regione in cui si facevano le misure) e con corpi di forma molto particolare (sfera, ellissoide rotondo, cilindro allungato, toro circolare, ecc.); di modo che p risultava funzione di un solo parametro: l'intensità della forza magnetica. L'andamento di p col variare di quest'ultima, che chiameremo H , è, nel suo insieme, piuttosto complicato. Da alcune tabelle numeriche esposte dal Wüllner (*) appare che, facendo crescere H a partire da valori assai piccoli fino a raggiungere valori grandissimi,

(*) *Lehrbuch der Experimentalphysik* (4^{te} Aufl.); 4. B., pag. 954 e segg.

p dapprima cresce, finchè, raggiunto un certo massimo, diminuisce. Col tendere però di H a zero oppure a valori grandissimi, p non tende ad annullarsi, ma tende invece a certi valori limiti non nulli.

Scendendo ad un esame più dettagliato del comportamento di p , si può dire (*) che per H debolissimo p si mantiene all'incirca costante, per diventare poi approssimativamente funzione lineare di H finchè questa rimane entro limiti abbastanza ristretti; dopo di che la legge secondo cui p varia va facendosi anche più complicata. Il Peirce (**) fece accurate esperienze sul modo di variare di p quando H assume valori molto grandi: le sue esperienze, ripetute con differenti campioni di ferro e riprodotte in opportuni diagrammi, mostrano che il reciproco di p si può considerare (s'intende per H molto grande) come funzione lineare di H , ciò che corrisponde al fenomeno della saturazione nell'induzione magnetica. Queste proprietà sono in certo modo compendiate in due diagrammi in cui Maxwell (***) studia la dipendenza della magnetizzazione dalla forza magnetizzante. I risultati dell'esperienza sono poi diversi quantitativamente a seconda della natura, della forma e delle dimensioni del corpo su cui si opera: così, mentre sono molto sensibili le variazioni di p in un ellissoide rotondo fortemente allungato, sono invece quasi trascurabili in una sfera (****). Anche il massimo valore di p ed i valori limiti a cui p tende quando si faccia tendere H a zero od a valori grandissimi, sono diversi da corpo a corpo.

3. Estendendo i risultati precedenti a campi qualsiasi, appare chiara l'impossibilità di arrestare lo sviluppo (1) ai termini di 1° grado: almeno in linea generale. Anzi, quando si volesse abbracciare il fenomeno della variazione di p in tutta la sua estensione, cioè si volessero considerare campi variabili entro limiti comunque grandi, e corpi qualsiasi, sarebbe lecito a mala pena arrestarsi ai termini di 2° grado. Se però ammettiamo che i campi da noi considerati varino in tutte le loro parti entro confini abbastanza ristretti, in particolare se si escludono dalle nostre considerazioni campi debolissimi oppure fortissimi, si può ritenere che p sia rappresentato con sufficiente esattezza dai termini di 1° e di 2° grado. Possiamo dire di più: risulta da quanto si è esposto poco sopra, che vi è un certo intervallo di variabilità del campo, in cui p si può assumere funzione lineare di X, Y, Z ; ed anche fuori di questo intervallo, tale assunzione sarà sempre possibile nell'ipotesi di campi soggetti a variazioni piccolissime.

4. Tenuto conto di queste considerazioni, nonchè dell'osservazione fatta al n. 1 circa il campo cui vanno estesi gl'integrali, rappresenteremo p , invece che colla serie (1), col polinomio

$$p = p_0 + \int_S \{ f_1(xy\varepsilon) X(xy\varepsilon) + f_2 Y + f_3 Z \} dS + \quad (2)$$

$$+ \int_S \int_{S'} \{ f_{11}(xy\varepsilon, x'y'\varepsilon') X(xy\varepsilon) X(x'y'\varepsilon') + \dots + f_{23}(xy\varepsilon, x'y'\varepsilon') Y(xy\varepsilon) Z(x'y'\varepsilon') \} dS dS'$$

(*) Confr. CHWOLSON: *Traité de Physique*; t. IV, fasc. 2°, ch. VIII.

(**) *The maximum value of the magnetization in iron*: Proc. of the Amer. Acad. of Arts and Sciences; vol. 49, n. 2 (June, 1913).

(***) *A treatise on Electricity and Magnetism* (2. edit.); vol. II, pagg. 79, 83.

(****) WÜLLNER: *l. c.*, pagg. 956-957.

oppure, sotto certe limitazioni relative alla variabilità del campo magnetizzante, coll'altro :

$$p = p_0 + \int_S (f_1 X + f_2 Y + f_3 Z) dS. \quad (3)$$

Poichè p è espresso mediante integrali estesi allo spazio S occupato dal corpo che subisce l'induzione magnetica, ne viene che dipenderà non soltanto dalla natura di questo corpo, ma anche dalla sua forma e dalle sue dimensioni: ciò va d'accordo colle misure sperimentali, come mostrano p. es. i valori trovati per ellissoidi di differenti dimensioni (verosimilmente dello stesso materiale) e registrati dal Wüllner (l. c., pp. 955-956).

Supponiamo il campo uniforme. Assunto l'asse x nella direzione del campo, la (2) prende la forma

$$p = p_0 + AX + BX^2, \quad (A, B \text{ costanti})$$

e la magnetizzazione — cioè il vettore (ρ) — diventa un polinomio di 3° grado in X . Se si osservano i diagrammi che esprimono la dipendenza della magnetizzazione dalla forza magnetica (p. es. quelli già ricordati di Maxwell, specialmente il secondo), vi si scorge difatti, all'ingrosso, l'andamento di curve del 3° ordine.

Un'espressione notevole è la (3). Se interpretiamo $f_1 f_2 f_3$ come componenti di un vettore (F), possiamo dire che la (3) fa dipendere p , oltrechè dal vettore (w) di componenti $X Y Z$, dalla costante p_0 e dal vettore (F), questa costante e questo vettore dipendendo esclusivamente dalla natura fisica del corpo. In particolare, se (F) è costante in tutto S , e se poniamo

$$\Xi = \int_S X dS, \quad H = \int_S Y dS, \quad Z = \int_S Z dS,$$

la (3) prende la forma

$$p = p_0 + f_1 \Xi + f_2 H + f_3 Z,$$

cioè p dipende solo più dalla risultante statica delle forze (XYZ). La sua forma è perciò del tutto analoga a quella che assumerebbe nel caso di un campo uniforme.

Essendo

$$X = - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad Y = - \frac{\partial W}{\partial y}, \quad Z = - \frac{\partial W}{\partial z},$$

se noi indichiamo con n la normale alla superficie σ rivolta verso l'interno di S , e poniamo

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \\ \chi &= f_1 \cos nx + f_2 \cos ny + f_3 \cos nz, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

la (3) si trasforma nel modo seguente:

$$p = p_0 + \int_S \phi W dS + \int_{\sigma} \chi W d\sigma. \quad (5)$$

A particolari proprietà di (F) potranno quindi corrispondere per p espressioni più semplici. Così nella (5) sparirà l' \int_{σ} quando (F) verifichi la condizione $\chi = 0$ in tutti i punti di σ ; mancherà invece l' \int_S qualora (F) soddisfi in tutto S alla condizione $\phi = 0$; infine in p mancherebbe tutta la parte omogenea di primo grado quando fossero soddisfatte simultaneamente le due condizioni precedenti.

§ 2°.

5. Il problema dell' induzione magnetica si studia matematicamente seguendo due vie classiche. L' una (Kirchhoff) conduce a ricercare una funzione U (funzione potenziale del campo indotto) che sia armonica tanto all' interno quanto all' esterno di S , che si comporti all' infinito come una funzione potenziale, e che soddisfi sopra la superficie σ all' equazione

$$(1 + 4\pi p) \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'} + 4\pi p \frac{\partial V}{\partial n} = 0. \quad (6)$$

V indica la funzione potenziale del campo inducente, n ed n' le normali a σ volte risp. verso l' interno e verso l' esterno di S .

Seguendo l' altra via (Poisson) si assume come funzione incognita

$$W = V + U,$$

la quale, oltre ad essere armonica all' interno ed all' esterno di S , deve soddisfare entro tutto S all' equazione

$$V - W + p \int_{\sigma} \frac{\partial W}{\partial n} \frac{d\sigma}{r} = 0. \quad (7)$$

indicando con r la distanza di un punto di σ da un punto di S .

Le condizioni a cui devono soddisfare, nel primo caso la U e nel secondo la W , sono tali (come è noto) da assicurare l' unicità della soluzione. Ben inteso, p si suppone costante, cioè indipendente dalle coordinate dei punti di S .

I procedimenti che ci portano all' equazione (6) oppure alla (7) nel caso classico, in cui si ritiene che p non dipenda da W , ci forniscono ancora le stesse equazioni nel caso che stiamo attualmente studiando, purchè in esse si sostituisca al parametro p l' una o l' altra delle espressioni che abbiamo assegnato a p nel § precedente. Ma in tal modo la funzione incognita viene a comparire anche in p , ed allora si comprende subito come debba modificarsi sostanzialmente il problema.

6. Vediamo p. es. quale aspetto prende la (6) quando si dia a p la forma (2). Consideriamo dapprima l' integrale

$$I_1 = \int_S (f_1 X + f_2 Y + f_3 Z) dS.$$

Indicando con Φ una funzione qualunque di x, y, z , faremo la posizione:

$$[f\Phi] = 4\pi \int_S \left(f_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + f_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + f_3 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) dS; \quad (8)$$

decomponendo allora W nella somma $V + U$, si ha:

$$4\pi I_1 = - [fV] - [fU]. \quad (9)$$

Passiamo all'integrale

$$I_2 = \iint (f_{11} XX' + \dots + f_{23} YZ') dS dS',$$

dove si è scritto per brevità X, X' , ecc. in luogo di $X(x, y, z), X(x', y', z')$, ecc.; in seguito scriveremo pure analogamente U', V', W' in luogo di $U(x', y', z')$, ecc. **Faremo l'ipotesi che i coefficienti f_{11}, \dots, f_{23} sieno simmetrici rispetto alle due terne di variabili x, y, z e x', y', z' .** Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} \iint f_{11} XX' dS dS' &= \iint f_{11} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U'}{\partial x'} dS dS' + \iint f_{11} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V'}{\partial x'} dS dS' + \\ &+ \int \varphi_{11} \frac{\partial U}{\partial x} dS, \end{aligned} \quad (10)$$

avendo posto

$$\varphi_{11}(xy z) = 2 \int f_{11} \frac{\partial V'}{\partial x'} dS'. \quad (11)$$

Similmente se poniamo

$$\varphi_{12} = \int f_{12} \frac{\partial V'}{\partial y'} dS', \quad \bar{\varphi}_{12} = \int f_{12} \frac{\partial V'}{\partial x'} dS', \quad (11')$$

troviamo:

$$\begin{aligned} \iint f_{12} XY' dS dS' &= \iint f_{12} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U'}{\partial y'} dS dS' + \iint f_{12} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V'}{\partial y'} dS dS' + \\ &+ \int \varphi_{12} \frac{\partial U}{\partial x'} dS + \int \bar{\varphi}_{12} \frac{\partial U}{\partial y} dS. \end{aligned} \quad (10')$$

Si scrivano ora le formole analoghe alle (10) e (10') colle posizioni analoghe alle (11) e (11'); si ponga inoltre

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13} \\ \varphi_2 &= \varphi_{22} + \varphi_{23} + \bar{\varphi}_{12} \\ \varphi_3 &= \varphi_{33} + \bar{\varphi}_{13} + \bar{\varphi}_{23} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$[F\Phi\Phi'] = 4\pi \iint \left(f_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi'}{\partial x'} + \dots + f_{23} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} \right) dS dS'; \quad (8')$$

si avrà, ricordando la posizione (8) :

$$4\pi I_2 = [FUU'] + [\varphi U] + [FVV'] . \quad (9')$$

Colle (9) e (9') si sostituirà nell' espressione (2) di p , dopo di che la (6) diventa :

$$\begin{aligned} & [FUU'] \frac{\partial U}{\partial n} + [\theta U] \frac{\partial U}{\partial n} + [FUU'] + \\ & + Q \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'} + \frac{\partial V}{\partial n} [\theta U] + (Q - 1) \frac{\partial V}{\partial n} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

dove si è posto :

$$\theta_1 = \varphi_1 - f_1, \quad \theta_2 = \varphi_2 - f_2, \quad \theta_3 = \varphi_3 - f_3$$

$$Q = 1 + 4\pi p_0 - [fV] + [FVV'] .$$

7. La (13), ossia la condizione che sottentra alla (6) quando si prenda p nella forma (2), non è più di tipo differenziale; essa è invece di tipo integro-differenziale, come mostrano le (8) e (8') che definiscono i simboli $[\theta U]$ e $[FUU']$. Inoltre non è più una semplice equazione ai limiti, perchè sotto gli integrali rappresentati da quei simboli compaiono i valori delle derivate di U in tutto lo spazio S . Infine, e questa è una circostanza che aggrava singolarmente le difficoltà, la (13) non è più lineare come la (6), ma contiene, accanto a termini lineari, anche termini di 2° e di 3° grado.

Si ha naturalmente una semplificazione assumendo p nella forma lineare (3). In tal caso dovremo sopprimere nella (13) tutti i termini che provengono dall' integrale I_2 , e così si trova, in luogo della (13), l' equazione

$$[fU] \frac{\partial U}{\partial n} - q \frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n'} + \frac{\partial V}{\partial n} [fU] - (q - 1) \frac{\partial V}{\partial n} = 0, \quad (14)$$

essendo

$$q = 1 + 4\pi p_0 - [fV].$$

La (14), pur avendo gli stessi caratteri della (13), contiene però soltanto termini di 1° e di 2° grado in U .

§ 3.º

8. In questo § faremo vedere come, nel caso di p indipendente da W , la (7) insieme colle note condizioni generiche a cui deve soddisfare W , determini in modo unico que-

st' ultima funzione tutte le volte che $|p|$ è abbastanza piccolo. Il procedimento seguito (n^o 9, 10) sarà poi esteso nel § seguente al caso in cui p abbia la forma lineare (5). Costruiremo anche la soluzione effettiva (n. 11) per approssimazioni successive, ottenendo una rappresentazione di W mediante una serie di potenze di p .

9. Cominceremo collo stabilire una disequaglianza, essenziale pel seguito. Sia h una funzione dei punti di σ finita e continua, tale che, indicando con H una costante positiva si abbia

$$|h| < H;$$

e sia r la distanza di un punto di σ da un punto generico dello spazio. La funzione

$$v = \int_{\sigma} \frac{h d\sigma}{r}$$

ammette le derivate prime finite e continue in ogni regione dello spazio che non contenga punti di σ ; in particolare si ha, in un punto M preso sopra una normale n , ma non su σ :

$$\frac{dv}{dn} = \int_{\sigma} h \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma,$$

e quindi:

$$\left| \frac{dv}{dn} \right| < H \int_{\sigma} \left| \frac{d \frac{1}{r}}{dn} \right| d\sigma.$$

Supponiamo ora che la superficie σ sia incontrata da una retta generica dello spazio in un numero finito di punti, e diciamo k il massimo di questi numeri. Si ha notoriamente (*), per posizioni di M tanto interne a σ quanto esterne:

$$\int \left| \frac{d \frac{1}{r}}{dn} \right| d\sigma < 4k\pi,$$

e perciò

$$\left| \frac{dv}{dn} \right| < 4k\pi H. \quad (15)$$

Importa notare che questa disequaglianza vale anche nei punti di σ : ciò dipende dal fatto che se si fa tendere il punto M alla superficie lungo la normale n , la funzione $\frac{dv}{dn}$ si

(*) Cfr. POINCARÉ: *Théorie du potentiel newtonien*; p. 228.

mantiene sempre continua, e la validità della (15) è indipendente dalla faccia di σ alla quale si fa tendere M .

10. Ciò premesso, si considerino due diverse soluzioni della (7), aventi i caratteri specificati per la funzione W in principio di questo §. La loro differenza, che chiameremo Φ , soddisferà (se p non dipende dalla forza magnetica) all' equazione

$$\Phi = p \int \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{d\sigma}{r}. \quad (16)$$

Siano A e M due costanti positive tali che

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right| < A, \quad \int \frac{d\sigma}{r} \leq M,$$

e poniamo

$$P = |p|;$$

dalla (16) ricaviamo, tenendo conto della (15):

$$|\Phi| < MPA, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right| < 4k\pi PA. \quad (17)$$

Sostituendo colla seconda (17) in (16) otteniamo nello stesso modo:

$$|\Phi| < 4k\pi P \cdot MPA, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right| < (4k\pi P)^2 A. \quad (18)$$

La sostituzione nella (16) colla seconda (18) dà:

$$|\Phi| < (4k\pi P)^2 MPA, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right| < (4k\pi P)^3 A.$$

Così continuando si avrà, per m comunque grande:

$$|\Phi| < (4k\pi P)^m MPA.$$

Ne segue che se

$$4k\pi P < 1, \quad (19)$$

Φ dev'esser nulla in tutto S e su σ , e poichè è armonica in tutto lo spazio esterno a σ ed è nulla all' infinito, così sarà nulla dovunque; cioè le due soluzioni supposte della (7) coincidono in tutto lo spazio.

11. Facciamo ora vedere come, sotto l'ipotesi (19), si possa costruire una effettiva soluzione del nostro problema. Poniamo:

$$W_0 = V$$

$$W_i = V + p \int \frac{\partial W_{i-1}}{\partial n} \frac{d\sigma}{r}, \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (20)$$

Sostituendo successivamente il valore di W_0 in W_1 , quello di W_1 in W_2 e così di seguito, si ha infine:

$$W_i = V + pV_1 + p^2V_2 + \dots + p^iV_i,$$

essendo

$$V_i = \int \frac{\partial V_{i-1}}{\partial n} \frac{d\sigma}{r}, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (21)$$

e intendendo che sia $V_0 = V$.

Studiamo ora il $\lim_{i \rightarrow \infty} W_i$, cioè la convergenza della serie

$$V + pV_1 + p^2V_2 + \dots \quad (22)$$

Sia B una costante positiva tale che si abbia

$$|V| < B, \quad \left| \frac{\partial V}{\partial n} \right| < B.$$

Dalla (21) ricaviamo:

$$\begin{aligned} |V_1| &< BM, & \left| \frac{\partial V_1}{\partial n} \right| &< 4k\pi B \\ |V_2| &< 4k\pi BM, & \left| \frac{\partial V_2}{\partial n} \right| &< (4k\pi)^2 B \\ |V_3| &< (4k\pi)^2 BM, & \left| \frac{\partial V_3}{\partial n} \right| &< (4k\pi)^3 B \\ &\dots & &\dots \\ |V_i| &< (4k\pi)^{i-1} BM. \end{aligned}$$

Si conclude che la serie (22) converge assolutamente ed equabilmente per tutti i valori di p soddisfacenti la condizione (19). Sotto questa condizione le approssimazioni successive (20) definiscono una funzione

$$W = \lim_{i \rightarrow \infty} W_i,$$

la quale verifica l'equazione (7) in tutto lo spazio S ; inoltre, come mostrano le (20), è armonica in S e fuori di S , e si annulla all'infinito. Possiamo anche dire di aver ottenuto colla (22) una rappresentazione di W mediante una serie di potenze del parametro p : rappresentazione valida per valori abbastanza piccoli di $|p|$.

§ 4°.

12. Il coefficiente di magnetizzazione dipenda linearmente da W , e si prenda sotto la forma (5). Chiamando W' e W'' due diverse soluzioni della (7), dotate entrambe delle proprietà più volte enunciate, poniamo:

$$\begin{aligned} \Phi &= W'' - W' \\ \lambda' &= \int_S \phi W' dS + \int_\sigma \chi W' d\sigma, \quad \lambda'' = \int_S \phi W'' dS + \int_\sigma \chi W'' d\sigma, \quad \lambda = \lambda'' - \lambda' \\ R &= |p_0| - \lambda'. \end{aligned} \quad (23)$$

Scrivendo che la (7) è soddisfatta da W' e da W'' , e poi sottraendo membro a membro, si trova:

$$\Phi - p_0 \int \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{d\sigma}{r} + \lambda' \int \frac{\partial W'}{\partial n} \frac{d\sigma}{r} - \lambda'' \int \frac{\partial W''}{\partial n} \frac{d\sigma}{r} = 0.$$

E poichè

$$W'' = \Phi + W', \quad \lambda'' = \lambda + \lambda',$$

possiamo dare all'equazione precedente la forma:

$$\Phi = (p_0 + \lambda') \int \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{d\sigma}{r} + \lambda \int \frac{\partial W''}{\partial n} \frac{d\sigma}{r}. \quad (24)$$

13. Supporremo

$$\left| W' \right|, \left| W'' \right|, \left| \frac{\partial W'}{\partial n} \right|, \left| \frac{\partial W''}{\partial n} \right| < \frac{A}{2}, \quad (25)$$

con A costante positiva, onde sarà

$$\left| \Phi \right|, \left| \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right| < A. \quad (26)$$

Ammetteremo anche che siano finite le quantità

$$\int_S |\psi| dS, \quad \int_\Sigma |\chi| d\sigma,$$

ed allora, indicando con K una conveniente costante positiva, porremo:

$$\int |\psi| dS + \int |\chi| d\sigma = \frac{KR}{A}, \quad (27)$$

per cui sarà

$$|\lambda| < 2KR. \quad (28)$$

Dalla (24), unitamente alle (25), (26), (28) e alla

$$\int \frac{d\sigma}{r} \leq M$$

già introdotta nel § precedente (n. 10), ricaviamo:

$$|\Phi| < RAM(1 + K), \quad (29)$$

ed applicando la (15):

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right| < 4k\pi RA(1 + K). \quad (29')$$

Dalle (23) abbiamo poi:

$$|\lambda| \leq \int |\psi \Phi| dS + \int |\chi \Phi| d\sigma,$$

e per le (27) e (29):

$$|\lambda| < 2R^2MK(1 + K). \quad (29'')$$

Riprendiamo la (24). Sostituendo a $\left| \frac{\partial W'}{\partial n} \right|$ colla (27), a $\left| \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|$ e $|\lambda|$ colle (29') e (29''), otteniamo:

$$|\Phi| < R^2AM(1 + K)(4k\pi + MK) \quad (30)$$

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right| < 4k\pi R^2A(1 + K)(4k\pi + MK), \quad (30')$$

mentre per λ si ha, applicando la (30):

$$|\lambda| < 2R^3MK(1 + K)(4k\pi + MK). \quad (30'')$$

Una successiva applicazione dell' identico procedimento darebbe:

$$|\Phi| < R^3 AM (1 + K) (4k\pi + MK)^2$$

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right| < 4k\pi R^3 A (1 + K) (4k\pi + MK)^2.$$

In generale si ha per m qualunque:

$$|\Phi| < AMR (1 + K) \cdot R^m (4k\pi + MK)^m;$$

se ne conclude che se è soddisfatta la condizione

$$R (4k\pi + MK) < 1, \quad (31)$$

Φ è nulla in tutto S e su σ , e quindi anche all'esterno di S , cioè le due soluzioni W' e W'' coincidono in tutto lo spazio.

14. Si osserverà che nella (31) sono inclusi i valori di W' in quanto sono contenuti in R ; inoltre figurano pure in R le funzioni ψ e χ , le quali, pei loro legami coi coefficienti f_1, f_2, f_3 [cfr. le form. (4)] sono strettamente affini, per significato fisico, a p_0 . Sarà quindi utile sostituire la (31) con un'altra disequaglianza, più restrittiva, ma dove le varie grandezze risultano messe meglio in vista; inoltre, invece di comparirvi i valori di W' in tutto S , vi entrerà soltanto il confine superiore $\frac{A}{2}$ assegnato nelle (25).

Dalle (23)

$$\kappa' = \int \psi W' dS + \int \chi W' d\sigma$$

$$R = |p_0 + \kappa'$$

e dalle (25) si ricava:

$$|\kappa'| < \frac{1}{2} A\Omega, \quad R < |p_0| + \frac{1}{2} A\Omega,$$

avendo posto

$$\Omega = \int |\psi| dS + \int |\chi| d\sigma.$$

Si ha poi dalla (27):

$$\kappa R = A\Omega;$$

ne segue:

$$R (4k\pi + MK) < 4k\pi |p_0| + A\Omega (2k\pi + M).$$

Si conclude perciò che la (31) è certamente verificata quando si abbia

$$4k\pi |p_0| + (2k\pi + M) A\Omega < 1 \quad (32)$$

Nella (32) entrano unicamente delle costanti. Accanto a p_0 e ad Ω , aventi un carattere esclusivamente fisico, compaiono k e M che dipendono soltanto dalla forma della superficie σ , e A che dipende sia dalla forma di σ sia dal campo inducente.

Qualora p fosse indipendente dalla forza magnetica, si annullerebbe Ω , e la (32) si ridurrebbe alla (19) del § 3°.

**Ancora poche parole sull'esistenza del nucleo nell'emasia
adulta dei mammiferi.**

— — — — —
pel dottor ANGELO PETRONE

Professore ordinario di Anatomia patologica nella R. Università di Catania

(con esposizione di preparati)

Stanti ancora delle divergenze nell'apprezzamento del reperto da me trovato nell'emasia adulta dei mammiferi, reperto che ora ammettono tutti, e soltanto ci si dà un'interpretazione diversa dalla mia, ho creduto doveroso insistere con ulteriori ricerche, con metodi che conservano nel modo più perfetto e naturale il globulo rosso; ed i risultati sono stati tali, che, a me pare, tolgono ogni dubbio sulla questione di interpretazione di quel nucleo, che la reazione chimica rende evidente nel globulo rosso adulto dei mammiferi: il quale, ripeto ancora una volta, ha perduto la sua nucleina, restandovi la sola paranucleina, per cui vita breve, alta attività funzionale, niente più di attività riproduttiva.

Ho impiegato molti mezzi di nuova fissazione del sangue allo stato naturale: ma dopo quella al cloruro di oro, già pubblicato nella memoria precedente, il migliore, e che supera anche il solo cloruro di oro, perchè fissa lo stesso, ma conserva i globuli più naturali, più rotondi, è la miscela di cloruro di oro 1:100 a parti eguali col liquido di Müller. Le lastrine covroggetti con lo strato sottile, fresco di sangue si mettono a galleggiare su di esso e si fanno restare 2 a 3 ore: così sono perfettamente fissati. Dopo si lavano ripetutamente per 3 o 4 volte con l'acqua distillata, per allontanare ogni traccia della miscela impiegata, principalmente pel cloruro di oro; e dopo si mettono a galleggiare sopra una soluzione 1:20 di cloruro stannoso in acqua distillata, fatta però lo stesso giorno: se è dei giorni precedenti, la reazione è meno nitida e perfetta. Immediatamente lo stratarello di sangue si colora in giallo-bruno, che gradatamente diventa più forte: la reazione è quasi immediata; ma i preparati si possono restare a galleggiare per ore. Dopo lavaggio in acqua distillata ripetuto, si essiccano alla temperatura dell'ambiente, e si chiudono in balsamo.

I globuli sono conservati nel modo più naturale, restano rotondi: il nucleo si vede ordinariamente nel centro, è rotondo, ma più grosso di quello che si ha nei preparati col solo cloruro di oro, nel quale la forma del globulo sovente è un poco allungata: tutto ciò molto probabilmente è dovuto all'aggiunta del liquido di Müller. Il corpo cellulare si colora appena in violaceo, mentre il nucleo è di un violetto profondo. Vi sono gradazioni di colore, che senza dubbio dipendono dall'età del globulo; ed a questa si deve riferire anche la grandezza del nucleo, che è maggiore nei globuli più giovani. Se si osserva lo stratarello di sangue ove comincia l'essiccamento, i globuli si deformano un poco: il nucleo non è più centrale, e spesso è frammentato. Nel centro del nucleo talora si può apprezzare un granulo più fortemente colorato. Mi pare soverchio ripetere, che il liquido di Müller aggiunto fa serbare meglio la forma naturale; e che la reazione microchimica av-

viene per la riduzione in oro finissimo, che fa il cloruro stannoso: riduzione, che è tanto più rapida e fina, quanto più la parte, che è il nucleo, si assimila cloruro di oro; essendo risaputo in Chimica, che ove la reazione è più rapida e fina, il colorito è più accentuato. Ciò cercherò comprovare più tardi con maggiore evidenza nel sistema nervoso.

Se i preparati di sangue fresco si assoggettano alla miscela di 2 parti di cloruro di oro con una di Müller, la conservazione dei globuli appare migliore della miscela a parti eguali, e la reazione col cloruro stannoso sembra più perfetta.

Anche nel cloruro di oro a parti eguali con soluzione osmica 1:100 i globuli sono ben conservati: e col cloruro stannoso risalta subito il nucleo, ma più piccolo per la più rapida fissazione: ciò si vede bene nei tratti sottili e ben riusciti.

Oltre dunque le altre reazioni chimiche, da me pubblicate, come il reperto di ematoporfirina soltanto nel nucleo, nei preparati ben riusciti, dopo l'azione di varî acidi: oltre il reperto di granuli di piombo nei preparati fissati col sublimato corrosivo e poi trattati col cloruro di piombo: oltre il reperto del sesquiossido di cromo secco nel solo nucleo, si aggiunge il metodo sunnotato, in cui il globulo resta fissato in modo perfetto, naturale. Se questi preparati non si assoggettano al cloruro stannoso, ma, dopo averli lavati in acqua distillata, si essiccano semplicemente e si chiudono in balsamo nei tratti ben riusciti si vede in modo bello e preciso la reazione nera del solo nucleo, per la fissazione del sesquiossido di cromo secco; facendo parte del liquido di Müller, come ognuno sà, il bicromato di potassa.

Dopo ciò, come bisogna interpretare questi fatti?

Se io non m'inganno, stante:

1. Che i mezzi meglio conosciuti per fissare il sangue allo stato naturale danno con le reazioni chimiche quel reperto del corpicciuolo.

2. Che non si apprezza detto reperto coi mezzi coloranti ordinari: allora tutto il globulo resta omogeneo nei mammiferi: il corpicciuolo viene scoperto soltanto con i mezzi chimici, appropriandosi esso solo l'oro, il sesquiossido di cromo, il piombo; e quando si sottrae il ferro, esso solo mostra i cristalli di ematoporfirina.

3. Non è un precipitato raccolto artificialmente, perchè vi si vede costantemente la forma precisa ed eguale, con l'apparenza di un contorno netto che simula una membrana.

4. Nel nucleo del globulo dell'embrione, ed in quello degli ovipari, stà misto con la nucleina, e non appare se non quando si sposta dal suo posto naturale, che è il nucleo; e nè si colora con le sostanze coloranti ordinarie. Invece con la Chimica si vede nel nucleo anche la paranucleina, che risalta con la reazione oro-stannosa.

5. Nelle fissazioni perfette, là ove il sangue comincia ad essiccarsi, con la reazione chimica nel globulo adulto dei mammiferi si vede il nucleo, ma spostato, deformato ed anche frazionato: ed allora anche il globulo è alterato dall'essiccamento.

6. Invece nel sangue ancora fresco e ben fissato non si notano mai gradazioni di passaggio dal così detto discoplasma fino a quella formazione perfetta: se per l'azione dei reagenti quella massa si spostasse per concentrarsi nel centro, a formare quel corpicciuolo, si dovrebbero notare gli stadî di passaggio: invece il resto del globulo non mostra mai alcuna apparenza intermedia di spostamento, e non si vede che emoglobina omogenea, mentre quel nucleo è sempre centrale, e perfettamente conformato.

7. Le lievi variande di colore, o di grandezza del globulo devono dipendere soltanto dalla diversa età dello stesso.

Conchiudo quindi, che resto sempre nell'interpretazione, che a quel corpicciuolo, da me trovato nel globulo rosso adulto dei mammiferi debba darsi il valore di un nucleo soltanto funzionale, fatto dalla paranucleina, residuale del nucleo primitivo: e probabilmente la paranucleina è aumentata per la funzione.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

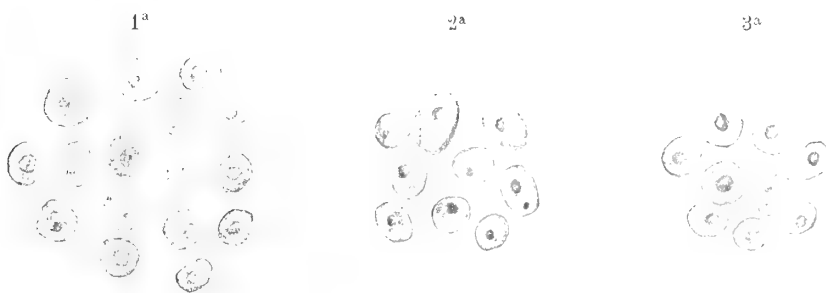
Fig. 1^a — Sangue di uomo adulto, fissato con la miscela a parti eguali di cloruro di oro e liquido di Müller: assoggettato poi al cloruro stannoso.

» **2^a** — Idem fissato con la miscela di oro ed acido osmico; e poi cloruro stannoso.

» **3^a** — Idem fissato con la miscela di 2 parti di cloruro di oro con una di liquido di Müller: e dopo cloruro stannoso.

Le 3 Figure sono ritratte con l'ingrandimento di circa 300.

A. PETRONE — Sull'esistenza del nucleo nell'emasia adulta dei mammiferi.



A. PETRONE *prep. e dis.*

**Contributo all'etiogenesi dei neoplasmi in un caso raro di tumori
dell'asse cerebro-spinale, con siringo ed idromielia,
e con porencefalia e scoliosi congenite.**

pel dottor **ANGELO PETRONE**

Professore ordinario di Anatomia patologica nella R. Università di Catania

(con esposizione di preparati)

Pubblico volentieri questa noticina, che stimo di notevole interesse, e che conferma la mia opinione già espressa e pubblicata da 30 anni sulla etiogenesi dei neoplasmi.

Si tratta di un'autopsia casuistica del cadavere di un individuo, proveniente dall'ospizio di mendicizia, Giarratano Pietro, di anni 26, con la diagnosi di mielite; e di cui non mi è stato possibile avere notizie storiche, circostanziate e precise.

Riferirò quasi letteralmente quel che dissi nella Cattedra al pubblico dei giovani studenti nell'ora dell'autopsia; aggiungendo soltanto l'esame istologico fatto posteriormente.

Ed in prima vi espongo la serie dei preparati fatti al microtomo, e che nelle figure ritraggo a grandezza naturale, soltanto nei contorni. La figura 1^a è una sezione della porzione lombare: la 2^a dorsale: la 3^a cervicale in vicinanza del midollo allungato: la 4^a delle circonvoluzioni cerebrali sane: la 5^a nel sito della porencefalia: la 6^a del cervelletto: la 7^a del tumore impiantato sul forame acustico interno: la 8^a del tumore attorno le radici spinali verso la fine della porzione dorsale: la 9^a del tumoretto impiantato sulla gran falce della dura madre cerebrale.

Dall'esame microscopico si rileva, che il tumore del midollo spinale è un sarcoma endoteliale e periteliale, Fig. 11^a; quello delle radici spinali mostra la struttura classica del sarcoma midollare, alveolare, Fig. 12^a; quello della dura madre cranica la struttura caratteristica di un epitelioma papillare angiomatico, Fig. 10^a; e quello in corrispondenza del forame acustico interno di sinistra, di un sarcoma fuso-cellulare Fig. 13^a.

Il focolaio porencefalico della corteccia cerebrale mostra soltanto ipoplasia, non atrofia per fatti cicatriziali, compressione da tumori, ecc.: quindi è porencefalia congenita.

La scoliosi destra della colonna vertebrale non mostra alcuna alterazione locale, che possa giustificarla: quindi è anche congenita.

Dopo l'esposizione di questi fatti, come giustificare l'etiogenesi di 4 neoplasmi di natura diversa nel medesimo individuo?

A me è sembrato di molta importanza anche il reperto concomitante della porencefalia e scoliosi congenite, le quali dinotano un'anomalia, un disordine nello sviluppo embrionale: e quindi ho giudicato, che anche lo sviluppo di 4 neoplasmi differenti vi avesse uno stretto rapporto genetico, cioè lo sviluppo di essi su aberrazioni di germi embrionali diversi, che poi con lo sviluppo si sono messi come il fondo essenziale della formazione

dei tumori: e che perciò non si debba ricorrere a cause microbiche ipotetiche, le quali finora non sono state seriamente dimostrate.

L'individuo aveva 26 anni, ed era vissuto sino a quell'età, rimanendo completamente paralitico alla fine.

Mi pare soverchio riferire, che le cellule nervose ed il resto dei tessuti del midollo sono atrofici, e che vi è idromielia, come si vede dalle dilatazioni, ove vi è ancora l'epitelio ependimale; e la siringomielia multipla per perdite di sostanza da necrosi, degenerazioni, come bene si osserva nei preparati.

Resto quindi sempre più seguace della teoria di Cohnheim sull'etiogenesi dei neoplasmi da germi embrionali aberrati, o non utilizzati a tempo debito; e che più tardi per tutte le ragioni risapute, principalmente dell'età, dei traumi, riprendono la loro energia di sviluppo.

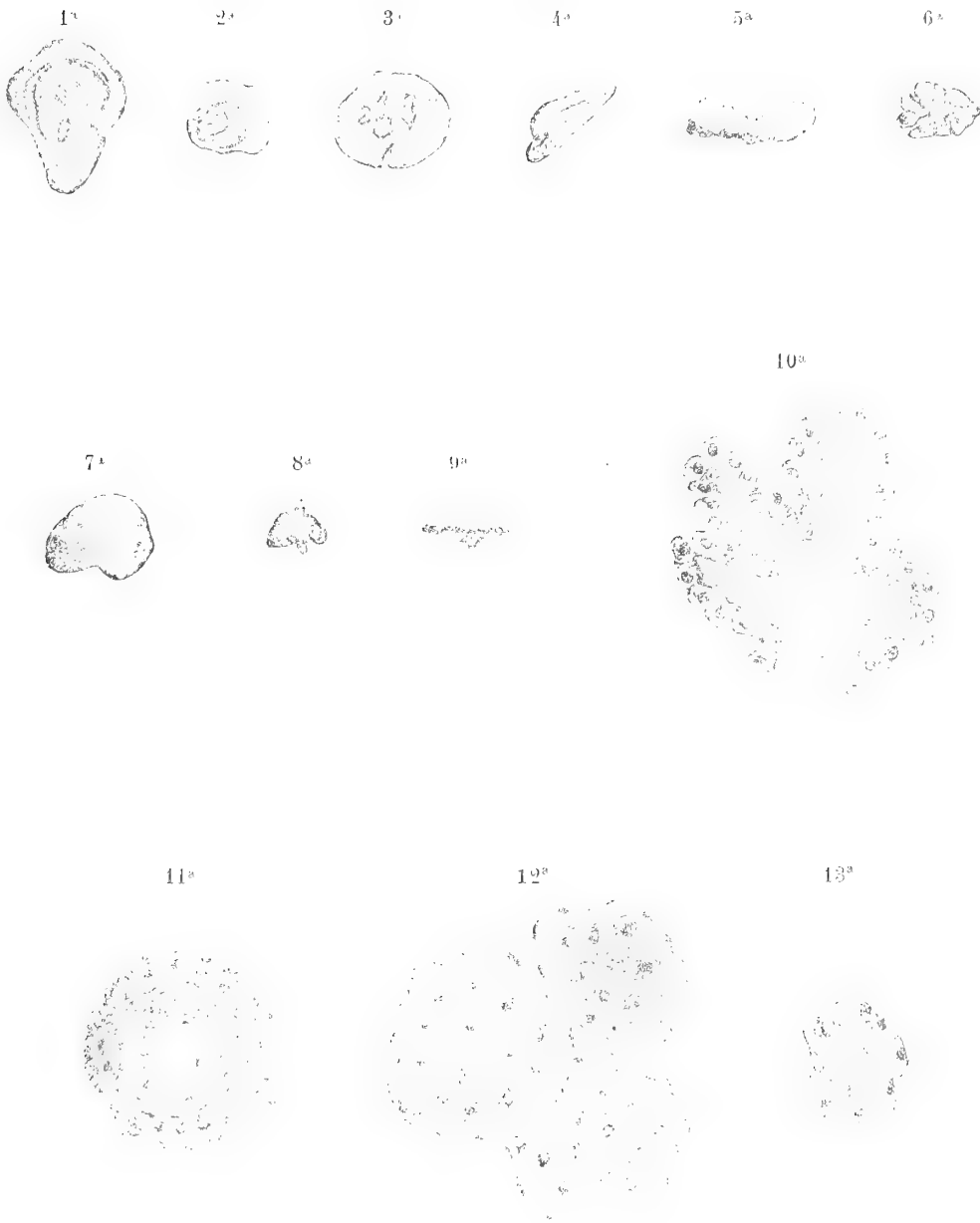
Nella mia *breve Guida allo studio dei tumori "Catania 1890"*, aggiunti per la etiogenesi, anche le cellule di tipo embrionale, come gli elementi di rigenerazione smodata, come cercai dimostrare anche con fatti sperimentali.

Per quanto io mi sappia, nessuno sinora ha dato un esempio sicuro di contagio, come invece si ha ogni giorno per le malattie infettive, e quindi da microrganismi: quando si crede a questo, vi è sempre l'eredità da parte del creduto contagiato. Sono gli elementi cellulari embrionali aberrati, nascosti, sopiti, secondo me, i veri parassiti, che per condizioni speciali sopravvenute, crescono localmente, e si propagano lontano per embolismo: e tutto questo è il solo fatto, che vien giustificato dalla struttura e dallo sviluppo ulteriore; e non vi danno alcun contributo i tessuti preesistenti ben sviluppati, soffrendo solo la compressione per infiltramento, o disseminazione.

La spiegazione delle figure è soverchia, stante nel testo.

Le figure microscopiche sono disegnate con un ingrandimento di circa 300.

A. PETRONE -- Contributo all' etiogenesi dei neoplasmi.



Saggio di Geometria ad infinite dimensioni.

Nota di GIUSEPPE MARLETTA

Per quanto io sappia, quel poco che si conosce degli spazi ad infinite dimensioni è stato trattato analiticamente, anzi si può addirittura affermare che la Geometria entri, nei pochissimi lavori sui detti spazi, soltanto come utilità di linguaggio (*). Si noti, inoltre che lo spazio a cui si è accennato dagli analisti è ad un numero di dimensioni infinito ma numerabile.

Dal punto di vista geometrico possiamo dunque dire che nulla si sa di Geometria ad infinite dimensioni; ho creduto quindi interessante intraprenderne una trattazione sistematica, che io esporrò in varie Note via via che le mie ricerche mi daranno risultati soddisfacenti.

In questo Saggio costruiti gli spazi ad infinite dimensioni (che io chiamo *ultraspazi*) ne studio le intersezioni e l'immersione, la dualità, la perpendicolarità, la prospettività e l'omologia.

La trattazione è perfettamente analoga a quella degli iperspazi, e ciò in virtù di un'idea, semplice ma felice, per la quale si usa di un certo numero (detto *rango*) che preso col segno negativo funge nella teoria degli spazi ad infinite dimensioni, tale e quale come il numero delle dimensioni nella teoria degli iperspazi.

§ 1.

Preliminari.

1. POSTULATO:

Dato un iperspazio esiste un punto che non appartiene ad esso.

2. La classe di tutti i punti che esistono sarà chiamata *ambiente assoluto*, e sarà indicata con U_0 .

3. In U_0 sia dato un iperspazio proprio S'_r con $r > 0$; le rette perpendicolari ad esso in uno stesso suo punto proprio P' , generano una figura F che è incontrata in un sol punto da ogni S_r che non abbia con essa infiniti punti comuni.

Infatti un S_r siffatto ⁽¹⁾ e l' S'_r giacciono in un S_{2r+1} ; le rette perpendicolari ad S'_r

(*) Cfr., p. es., i lavori di S. PINCHERLE, e specialmente:

Cenno sulla Geometria dello spazio funzionale [Rendiconti della R. Accademia di Bologna, febbraio 1897];
Appunti di calcolo funzionale distributivo [Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie 2^a, vol. XXX (1897)];
Lo spazio funzionale e le sue omografie [Giornale di Matematiche, vol. L (1912)].

(1) Volendo un S_r che non abbia infiniti punti comuni con F , si può procedere come segue. Si conduca per S'_r un S_{2r+1} ; in questo le rette perpendicolari ad S'_r in P' , generano un S_{r+1} che ha un sol punto comune, e non infiniti, con un S_r generico di S_{2r+1} . Deduciamo, inoltre, che esistono infiniti S_r ognuno dei quali ha con F un sol punto comune.

in P' e poste in quest' S_{2r+1} , generano un S_{r+1} (parte di F) che non avendo per ipotesi infiniti punti comuni con S_r , ne avrà uno solo.

Si osservi, inoltre, che F non è contenuta in alcun iperspazio; infatti dato un S_n qualunque, sia S_m un iperspazio che contenga S'_r e S_n . Scelto (n° 1) un punto A fuori di S_m , si ottiene un $S_{r+1} \equiv AS'_r$ che ha in comune con S_m l' S'_r nè alcun altro punto. Ne segue che la retta perpendicolare ad S'_r in P' e posta nell' S_{r+1} , siccome non giace in S'_r , non appartiene all' S_m , e quindi nemmeno all' S_n , mentre essa appartiene ad F .

4. Si osservi che la figura I luogo dei punti impropri di F , è incontrata in un sol punto da ogni S_{r+1} che non abbia con essa infiniti punti comuni.

Infatti siccome un S_r generico di S_{r+1} ha un punto solo comune con F , la figura comune a questa e ad S_{r+1} è una retta, il cui punto improprio ⁽²⁾ è l' unico punto comune ad I e ad S_{r+1} .

È da notare, ancora, che I , come (n° 3) F , non appartiene ad alcun iperspazio, perchè altrimenti F , che evidentemente è la proiezione di I da P' , apparterrebbe anch' essa ad un iperspazio.

5. Una figura F' che, come la F e la I (n.° 3 e 4), sia incontrata in un sol punto ovvero (ma non sempre) in infiniti punti da qualunque S_l , non può godere della stessa proprietà rispetto a qualunque S_h con $h \geq l$.

Infatti siccome ogni S_l ha almeno un punto comune con F' , per $h > l$ ogni S_h avrebbe sempre infiniti punti comuni con F' ; se poi fosse $h < l$, allora sarebbe ogni S_l ad avere sempre infiniti punti comuni con F' .

6. L' ambiente assoluto U_0 , la figura F , e i luoghi dei loro punti impropri saranno chiamati *spazi (lineari) ad infinite dimensioni*, o anche, per amor di brevità, *ultraspazi*.

Se un ultraspazio è incontrato (n.° 3 e 4) in un sol punto ovvero (ma non sempre) in infiniti punti da qualunque S_l , esso sarà indicato con U_{-l} , e il numero l ne sarà il *rango*.

Se i punti di un ultraspazio sono tutti impropri, esso sarà chiamato *improprio*; altrimenti sarà chiamato *proprio*.

Dunque, p. es., la figura F (n° 3) è un U_{-r} proprio, mentre la figura I (n° 4) è un $U_{-(r+1)}$ improprio.

Quando l' ultraspazio è proprio, e precisamente (n° 3) è il luogo delle rette perpendicolari ad un S'_r proprio in un punto proprio P' di questo, si dirà che l'iperspazio S'_r e il punto P' costituiscono una *coppia generatrice* dell' ultraspazio; si scriverà $U_{-r} \equiv (S'_r, P')$.

Assumeremo lo 0 come *rango* dell' ambiente assoluto U_0 ⁽³⁾.

⁽²⁾ Questa retta non è impropria perchè, per ipotesi, S_{r+1} e I non hanno infiniti punti comuni.

⁽³⁾ Si è dato senz' altro il nome di *ultraspazio* alla figura I per amor di semplicità; ma basta togliere nel n° 3 la condizione che P' sia proprio, affinchè sia possibile poi *dimostrare* che anche la figura I è il luogo delle rette (improprie) perpendicolari ad un S_{r+1} proprio in un punto improprio di questo.

E invero sia $U_{-r} \equiv (S_r, P)$ un ultraspazio proprio (onde P è proprio) ed A_∞ un suo punto improprio; la retta PA_∞ è dunque perpendicolare ad S_r in P . Posto $S_{r+1} \equiv A_\infty S_r$, si vuol dimostrare che il luogo I dei punti impropri di U_{-r} , è l' $U_{-(r+1)} \equiv (S_{r+1}, A_\infty)$. Si conduca infatti un S_{r+2} per S_{r+1} ; la retta impropria S'_1 , del piano posto in S_{r+2} e perpendicolare ad S_r in P , appartiene ad U_{-r} ; inoltre siccome essa è la polare (nella polarità assoluta di S_{r+2}) dell' S_{r-1} improprio di S_r , così il polo dell' $S'_1 \equiv A_\infty S_{r-1}$ giace in S'_1 medesima, onde questa retta, che già passa per A_∞ , è perpendicolare ad S_{r+1} in A_∞ . Viceversa

7. Se una retta ha due punti distinti in un ultraspazio, essa giace in questo.

Infatti siano A e B due punti distinti dell'ultraspazio proprio $U_{-r} \equiv (S'_r, P')$; ognuna delle rette AP' , BP' è perpendicolare a tutte le rette di S'_r . Ne segue che una qualunque di questa passante per P' , è perpendicolare al piano ABP' , onde la retta AB appartiene all'ultraspazio U_{-r} .

Se, poi, i punti A e B appartenessero all'ultraspazio improprio U_{-l} , per quanto ora si è dimostrato la retta AB appartenerrebbe all' $U_{-(l-1)}$ proprio di cui, per definizione (n° 4 e 6), U_{-l} è il luogo dei punti impropri. Ma AB è una retta impropria, quindi essa appartiene ad U_{-l} .

8. Dal teorema del n° precedente si deduce che

a) la parallela ad una retta di un ultraspazio condotta per un punto di questo, giace in questo medesimo.

b) Ne segue ancora che in un ultraspazio esistono infiniti iperspazi S_n , n qualunque; anzi se un S_n ha $n+1$ punti linearmente indipendenti nell'ultraspazio, esso appartiene a questo.

c) Osserviamo infine che (n° 8, b) due ultraspazi hanno sempre infiniti punti comuni.

9. Sia l'ultraspazio proprio $U_{-r} \equiv (S'_r, P')$. Se S''_r è lo spazio, ad r dimensioni, parallelo di 1^a specie (4) ad S'_r e passante per un qualunque punto proprio P'' di U_{-r} , si conduca per P'' , in U_{-r} , una retta S''_1 ad arbitrio, e da P' la parallela S'_1 a questa. Siccome S'_1 , che (n° 8, a) giace in U_{-r} , è perpendicolare ad S'_r , sarà anche S''_1 perpendicolare ad S''_r . Viceversa, se S''_1 è una retta perpendicolare ad S''_r in P'' , la parallela S'_1 ad S''_1 , condotta per P' , risulterà perpendicolare ad S'_r in P' , cioè apparterrà ad U_{-r} , e di conseguenza (n° 8, a) anche S''_1 apparterrà ad U_{-r} . Ne segue che questo ultraspazio si può anche costruire come il luogo delle rette perpendicolari ad S''_r in P'' , cioè $U_{-r} \equiv (S''_r, P'')$.

Concludiamo che

ogni ultraspazio proprio ammette infinite coppie generatrici.

10. Siano dati l'ultraspazio improprio U_{-r} e il punto proprio P ; sia inoltre

$U'_{-(r-1)} \equiv (S'_{r-1}, P')$ l'ultraspazio proprio di cui (n° 6) U_{-r} è il luogo dei punti impropri.

Indicato con S_{r-1} lo spazio, ad $r-1$ dimensioni, parallelo di 1^a specie ad S'_{r-1} e passante per P , è evidente che la figura ottenuta proiettando da P tutti i punti di U_{-r} , coincide coll' $U'_{-(r-1)} \equiv (S_{r-1}, P)$. Concludiamo dunque che

ogni ultraspazio improprio U_{-r} è il luogo dei punti impropri di infiniti ultraspazi propri $U'_{-(r-1)}$.

11. Siano dati un ultraspazio U_{-r} e un punto S_0 fuori di esso, onde è $-r < 0$; si

sia S''_1 una retta perpendicolare ad S_{r+1} in A_∞ , onde essa è impropria: nell' $S'_{r+2} \equiv S''_1 S_{r+1}$, S''_1 passa per il polo di S'_r , e quindi lo spazio (ad $r-1$ dimensioni) polare di S''_1 apparterrà ad S'_r , e dovendo esso essere polare di A_∞ nella polarità assoluta di S_{r+1} , sarà precisamente S_{r-1} . Ne segue che le rette proiettanti da P i punti di S''_1 , risultano perpendicolari ad S_r , cioè S''_1 appartiene ad U_{-r} . Concludiamo dunque che il luogo I dei punti impropri di U_{-r} è $U_{-(r+1)} \equiv (S_{r+1}, A_\infty)$.

Si osservi infine che un altro modo di definire gli ultraspazi (propri o impropri) è quali *spazi lineari* (figure, cioè, alle quali appartiene una retta qualora abbia con essi due punti distinti comuni) tali che ognuno di essi goda della seguente proprietà: esiste un numero (intero positivo) finito r , da chiamarsi *rango*, tale che ogni S_r abbia coll'ultraspazio un sol punto comune ovvero (ma non sempre) infiniti punti comuni. Ma con questa definizione, della quale ci serviremo in altri lavori, si va incontro all'obiezione se possano esistere spazi lineari (non iperspazi) privi di rango (spazi che si potrebbero chiamare *ultraspazi a rango infinito*).

(4) Cioè S'_r e S''_r hanno in comune un S_{r-1} improprio.

vuol dimostrare che la figura $S_0 U_{-r}$, ottenuta proiettando U_{-r} da S_0 , è un ultraspazio, e precisamente è un $U_{-(r-1)}$.

a) Cominciamo a supporre che sia $U_{-r} \equiv (S_r, P)$; sia inoltre S_0 anche proprio e, com'è sempre (n° 9) possibile ammettere, fuori di S_r .

L' $S_{r+1} \equiv S_0 S_r$ seca evidentemente U_{-r} nell' unica retta AP perpendicolare ad S_r e posta in esso S_{r+1} ; e seca la figura $S_0 U_{-r}$ nel fascio di rette di centro S_0 esistente nel piano APS_0 . Ciò posto si costruisca nel detto S_{r+1} l' S_{r-1} perpendicolare a questo piano in S_0 ; si vuol dimostrare che è $S_0 U_{-r} \equiv U_{-(r-1)} \equiv (S_{r-1}, S_0)$.

Sia infatti PB una qualunque retta perpendicolare ad S_r , e quindi posta in U_{-r} ; la PB è perpendicolare a tutte le rette di S_r , e quindi anche alle rette di S_{r-1} perchè queste sono parallele ad S_r ⁽⁵⁾; in altri termini possiamo dire che PB è perpendicolare all' S_{r-1} . Ne segue che questo essendo perpendicolare alle rette PS_0 e PB , è perpendicolare al piano BPS_0 , e quindi a tutte le rette che da S_0 proiettano i punti di PB . In altri termini: S_{r-1} è perpendicolare a qualunque retta che da S_0 proietta un punto di U_{-r} , cioè $S_0 U_{-r}$ è parte di $U_{-(r-1)} \equiv (S_{r-1}, S_0)$.

Viceversa sia S'_1 una qualunque retta perpendicolare ad S_{r-1} in S_0 . L' $S'_1 \equiv S'_1 S_{r-1}$ incontra U_{-r} (almeno) in un punto (n° 6 e 3) che congiunto con S_0 dà, per quanto si è ora dimostrato, una retta S''_1 perpendicolare ad S_{r-1} . Ne segue $S''_1 \equiv S'_1$, ed ecco che S'_1 incontra U_{-r} , cioè ogni retta perpendicolare ad S_{r-1} in S_0 , si può ottenere proiettando da S_0 un punto di U_{-r} . Dunque è $S_0 U_{-r} \equiv U_{-(r-1)} \equiv (S_{r-1}, S_0)$.

b) Se, invece, S_0 è improprio, si scelga un punto proprio S'_0 fuori di U_{-r} e di S_r . Detto A un qualunque punto di U_{-r} , siccome la retta congiungente A con la traccia della retta $S_0 S'_0$ in U_{-r} , appartiene al piano $AS_0 S'_0$ e (n° 7) anche ad U_{-r} , così la retta $S'_0 A$ appartiene alla figura $S_0 U_{-r}$, e la retta $S_0 A$ alla figura $S'_0 U_{-r}$, cioè $S_0 U_{-r} \equiv S'_0 U_{-r}$. Ma si è sopra dimostrato che $S'_0 U_{-r}$ è un $U_{-(r-1)}$ proprio, dunque anche $S_0 U_{-r}$ è un $U_{-(r-1)}$ proprio.

c) Supponiamo ora che U_{-r} sia improprio ed S_0 proprio.

Che la figura $S_0 U_{-r}$ sia un $U_{-(r-1)}$ proprio, fu dimostrato nel n° 10.

d) Siano, infine, impropri U_{-r} e S_0 .

Detto $U_{-(r-1)}$ l' ultraspazio proprio di cui U_{-r} è il luogo dei punti impropri, la figura $S_0 U_{-(r-1)}$ è, per la parte b), un $U_{-(r-2)}$ proprio.

L' $U'_{-(r-1)}$ luogo dei punti impropri di questo, contiene (n° 7) la figura $S_0 U_{-r}$, anzi coincide con questa, perchè i punti impropri di $S_0 U_{-(r-1)}$ si ottengono soltanto quando da S_0 si proiettano punti impropri di $U_{-(r-1)}$, cioè punti di U_{-r} . Possiamo dunque affermare che è $S_0 U_{-r} \equiv U'_{-(r-1)}$.

Concludiamo dunque che

proiettando un ultraspazio U_{-r} da un punto fuori di esso, si ottiene un ultraspazio $U_{-(r-1)}$.

12. Applicando successivamente il teorema del n° precedente, si può concludere ⁽⁶⁾ che

⁽⁵⁾ Infatti se $S_0 M$ è una retta di S_{r-1} , essa determina col piano APS_0 un S_3 che seca l' S_r in un piano S_2 . Or siccome AP è perpendicolare ad S_2 , sarà APS_0 perpendicolare ad S_2 . Ma anche $S_0 M$ è perpendicolare ad APS_0 , e quindi $S_0 M$, essendo parallela ad S_2 , è parallela ad S_r .

⁽⁶⁾ Che il rango dell' ultraspazio $S_n U_{-r}$, per $r \geq n + 1$, sia $r - n - 1$, si può dimostrare direttamente facendo vedere che esso ha un sol punto comune con un S_{r-n-1} generico.

proiettando un ultraspazio U_{-r} da un iperspazio S_n non avente alcun punto comune con esso, si ottiene un $U_{-(r-n-1)}$.

Si noti che per $r = n + 1$ è $U_{-(r-n-1)} \equiv U_0 \equiv$ ambiente assoluto.

13. Siano dati i due ultraspazi U_{-r} e $U'_{-r'}$, con $-r' \geq -r$; si vuol dimostrare che $U'_{-r'}$ non è parte di U_{-r} , eccetto il caso che sia $r' = r$ e i due ultraspazi coincidano.

Supponiamo primieramente che i detti ultraspazi siano propri, e precisamente si abbia, com'è (n° 8 c, e n° 9) sempre possibile, $U_{-r} \equiv (S_r, P)$ e $U'_{-r'} \equiv (S'_{r'}, P)$. Se questo ultraspazio è parte di quello, tutte le rette di $U'_{-r'}$ passanti per P sono perpendicolari ad S_r , oltre che ad $S'_{r'}$; se dunque questi due iperspazi non coincidessero, tutte le rette di $U'_{-r'}$ passanti per P sarebbero perpendicolari ad un S_l ove è $l > r'$, ciò che è assurdo (7). Dunque dev'essere $S_r \equiv S'_{r'}$, e quindi $U_{-r} \equiv U'_{-r'}$.

Consideriamo ora l'ipotesi che $U'_{-r'}$ sia improprio e parte di U_{-r} anch'esso improprio (8). Proiettandoli ambidue da un punto proprio A , si ottengono (n° 11) gli ultraspazi propri $U'_{-(r'-1)} \equiv AU'_{-r'}$ e $U_{-(r-1)} \equiv AU_{-r}$, e per quanto si è dimostrato, risultando $U'_{-(r'-1)}$ parte di $U_{-(r-1)}$, dev'essere $U_{-(r'-1)} \equiv U_{-(r-1)}$, e di conseguenza $U_{-r} \equiv U'_{-r'}$.

Concludiamo dunque che

per $-r' > -r$ un $U'_{-r'}$ non è parte di un U_{-r} , nè ciò è possibile per $-r' = -r$, eccetto il caso che i due ultraspazi coincidano (9).

14. Sia dato un ultraspazio $U_{-r} \equiv (S_r, P)$; per l' S_r si conduca un qualunque S_l (onde è $l > r$). Siccome ogni retta perpendicolare ad S_l in P , è di conseguenza perpendicolare ad S_r (ma non viceversa), si deduce che l'ultraspazio $U_{-l} \equiv (S_l, P)$ è contenuto in U_{-r} .

Se, invece, U_{-r} è improprio, applicando quanto si è dimostrato all' $U_{-(r-1)}$ proprio di cui U_{-r} è il luogo dei punti impropri, si ottiene un U_{-l} contenuto in $U_{-(r-1)}$, e l' $U_{-(l+1)}$, luogo dei punti impropri di U_{-l} , appartiene evidentemente ad U_{-r} .

Concludiamo che (10)

in ogni ultraspazio U_{-r} esistono infiniti ultraspazi U_{-l} , ove (n° 13) è $-l < -r$.

15. Gli ultraspazi $U_{-(r+1)}$ contenuti (n° 14) in un U_{-r} , saranno chiamati *ultrapiani* di questo.

16. Siano dati gli ultraspazi $U_{-r} \equiv (S_r, P)$ e $U'_{-r'} \equiv (S'_{r'}, P)$, ove $U'_{-r'}$ è parte di U_{-r} , onde (n° 13) è $-r' < -r$, ovvero è $-r' = -r$ e son coincidenti i detti ultraspazi. Si vuol dimostrare che l'iperspazio S_r appartiene ad $S'_{r'}$.

Infatti se così non fosse, ogni retta di $U'_{-r'}$ passante per P , essendo perpendicolare ad S_r , oltre che ad $S'_{r'}$, sarebbe perpendicolare ad un S_l , ove è $l > r'$, e ciò è assurdo.

Dunque

se $U'_{-r'} \equiv (S'_{r'}, P)$ appartiene ad $U_{-r} \equiv (S_r, P)$, S_r appartiene ad $S'_{r'}$.

(7) Infatti è evidente che essendo $S'_{r'}$ parte di S_l , con $r' < l$, esistono rette perpendicolari ad $S'_{r'}$ ma non ad S_l .

(8) Se U_{-r} fosse proprio, $U'_{-r'}$ sarebbe parte dell' $U_{-(r+1)}$ luogo dei punti impropri di U_{-r} , e si ragionerebbe come nel testo, venendo alla conclusione che l' $U'_{-(r'-1)} \equiv AU'_{-r'}$ sarebbe parte di $U_{-(r-1)} \equiv AU_{-r}$, ciò che è assurdo per la dimostrazione già fatta nel testo, e dopo avere osservato che $r' - 1$ non è eguale ad r .

(9) A cominciare da questo punto, e si vedrà molto meglio in seguito, si può osservare che il numero opposto al rango (n° 6) degli ultraspazi, si comporta, per questi, come la dimensione per gli iperspazi. Sarebbe quindi forse conveniente dare agli ultraspazi il nome di « spazi a dimensione negativa » denominazione non propria ma utile.

(10) Cfr. l'annotazione (9).

§ 2.

Immersione; intersezione.

17. Una o più figure si dicono *immerse* in un ultraspazio U_{-r} , quando esse appartengono a questo, ma non appartengono ad alcun ultraspazio U_{-l} con $-l < -r$.

18. Siano U_{-l} e U_{-h} due ultraspazi immersi (n° 17) in un U_{-r} .

a) Cominciamo ad esaminare l'ipotesi che essi siano ambidue propri.

Amnesso che esista un punto proprio P comune ad U_{-l} e U_{-h} , si può (n° 9) sempre porre

$$U_{-r} \equiv (S_r, P), \quad U_{-l} \equiv (S_l, P), \quad U_{-h} \equiv (S_h, P).$$

I due iperspazi S_l e S_h hanno in comune (n° 16) S_r , nè alcun altro punto, perchè se essi avessero in comune un S_n , con $n > r$, i due ultraspazi U_{-l} e U_{-h} apparterebbero ad $U_{-n} \equiv (S_n, P)$, ciò che è assurdo perchè per ipotesi questi due ultraspazi sono immersi (n° 17) in U_{-r} . Ne segue che S_l e S_h sono immersi in un S_{l+h-r} , onde U_{-l} e U_{-h} hanno in comune ⁽¹⁴⁾ l' $U_{-(l+h-r)} \equiv (S_{l+h-r}, P)$.

b) Se U_{-l} e U_{-h} non hanno alcun punto proprio comune, ma uno almeno di essi, p. es. U_{-l} , è proprio, proiettando da un punto proprio A di U_{-l} , si ottiene (n° 11) l' $U_{-(h-1)} \equiv AU_{-h}$ che insieme con U_{-l} sono immersi in U_{-r} . Ne segue, per la dimostrazione fatta, che essi si secano in un $U_{-(h-1+l-r)}$, il cui ultraspazio improprio $U_{-(l+h-r)}$ è evidentemente la figura comune ad U_{-l} e U_{-h} .

c) Se, infine, ambidue gli ultraspazi U_{-l} , U_{-h} sono impropri (onde pure improprio è U_{-r}), proiettando da un punto proprio P si ottengono (n° 11) gli ultraspazi

$$U_{-(r-1)} \equiv PU_{-r}, \quad U_{-(l-1)} \equiv PU_{-l}, \quad U_{-(h-1)} \equiv PU_{-h},$$

gli ultimi due dei quali sono immersi nel primo ⁽¹²⁾, onde essi, per la dimostrazione fatta avanti in a), si secano in un $U_{-(l-1+h-1-r+1)} \equiv U_{-(l+h-r-1)}$, il cui $U_{-(l+h-r)}$ improprio è evidentemente la figura comune ad U_{-l} e U_{-h} .

Dalla discussione fatta possiamo concludere che ⁽¹³⁾
due ultraspazi U_{-l} e U_{-h} immersi in un U_{-r} , si secano in un $U_{-(l)+(h)-(r)}$.

19. Ne segue che se una figura immersa in un U_{-r} appartiene ad un U_{-k} ($-k \geq -r$), questo contiene U_{-r} .

Infatti nell'ipotesi contraria U_{-k} e U_{-r} avrebbero in comune (n° 18) un ultraspazio U_{-s} , $-s < -r$, cui apparterebbe la data figura, ciò che è assurdo perchè questa è immersa in U_{-r} .

20. Siccome, inoltre, è (n° 18 a) sempre $l+h-r > 0$, così possiamo affermare che due e quindi
più ultraspazi hanno in comune un ultraspazio.

⁽¹⁴⁾ Nè alcun altro punto, perchè ogni retta comune ad U_{-l} e U_{-h} e passante per P , dovendo essere perpendicolare ad S_l ed anche ad S_h , sarà perpendicolare all'iperspazio in cui questi sono immersi, cioè apparterrà all' $U_{-(l+h-r)}$ del testo.

⁽¹²⁾ Infatti se essi appartenessero ad un U'_{-r} (certamente proprio perchè tale è P), U_{-l} e U_{-h} apparterebbero all' $U_{-(r+1)}$ improprio di questo, ciò che (n° 17) è assurdo.

⁽¹³⁾ Cfr. l'annotazione ⁽⁹⁾.

21. Siano ora dati due ultraspazi U_{-l} e U_{-h} immersi in U_{-r} e secantisi (n° 20) in un U_{-t} . Per il teorema del n° 18 è

$$-t = (-l) + (-h) - (-r), \text{ da cui } -r = (-l) + (-h) - (-t).$$

Concludiamo che ⁽¹⁴⁾

se due ultraspazi U_{-l} e U_{-h} si secano in un U_{-t} , essi sono immersi in un $U_{(-l)+(-h)-(-t)}$.

22. Sia F una figura immersa in un ultraspazio U_{-r} , e sia P un punto fuori di questo; le figure F e P giacciono nell' $U_{-(r-1)}$ ottenuto (n° 11) proiettando U_{-r} da P . Se poi esse appartenessero ad un U'_{-r} , questo conterrebbe (n° 19) U_{-r} , cioè (n° 13) sarebbe $U_{-r} \equiv U'_{-r}$, ciò che è assurdo perchè P è per ipotesi fuori di U_{-r} .

Concludiamo che la figura F e il punto P sono immersi (n° 17) in $U_{-(r-1)}$.

23. L' ultraspazio U_{-r} e l' iperspazio S_n si sechino in un S_t ; si vuol dimostrare che essi sono immersi in un $U_{-(r-n+t)}$.

a) Esaminiamo prima l' ipotesi $n = t + l$.

Proiettando U_{-r} da un punto P di S_n , ma che sia fuori di S_t , si ottiene (n° 11) un $U_{-(r-1)}$ che contiene U_{-r} e S_n . Questi, poi, sono immersi in quest' $U_{-(r-1)}$, perchè se appartenessero ad un U'_{-r} , questo coinciderebbe (n° 13) con U_{-r} , ciò che è assurdo perchè S_n non appartiene, per ipotesi, ad U_{-r} .

b) Si ammetta ora che il teorema sia vero per n ; lo dimostreremo vero per $n + l$.

Si conduca, infatti, per S_t un iperpiano S_n dell' S_{n+l} dato; questo S_n e U_{-r} , per quanto si è ammesso, sono immersi in un $U_{-(r-n+t)}$ che non contiene ⁽¹⁵⁾ S_{n+l} . Ne segue che U_{-r} , S_n , e un punto P di S_{n+1} posto fuori di $U_{-(r-n+t)}$, sono immersi (n° 22) in un $U_{-(r-n-t+t)}$.

Concludiamo dunque che ⁽¹⁶⁾

se un ultraspazio U_{-r} e un iperspazio S_n si secano in un S_t , essi sono immersi in un $U_{(-r)+n-t}$.

24. L' ultraspazio U_{-r} e l' iperspazio S_n siano immersi in un U_{-l} . Indicando con S_t l' iperspazio secondo cui si secano ⁽¹⁷⁾, è (n° 23)

$$-l = (-r) + n - t, \text{ cioè } t = (-r) + n - (-l).$$

Dunque ⁽¹⁸⁾

se un ultraspazio U_{-r} e un iperspazio S_n sono immersi in un U_{-l} , essi si secano in un $S_{(-r)+n-(-l)}$.

25. In un ultraspazio U_{-n} sia dato un $U_{-(n+2)}$; l' ente i cui elementi sono gli ultrapiani (n° 15), di U_{-n} , passanti per esso, si chiamerà *fascio* di ultrapiani.

Analogamente, dato un $U_{-(n+3)}$, l' ente i cui elementi sono gli ultrapiani, di U_{-n} , passanti per esso, si chiamerà *rete* di ultrapiani.

⁽¹⁴⁾ Cfr. l' annotazione ⁽⁹⁾.

⁽¹⁵⁾ Infatti preso in S_{n+1} un punto B fuori di S_n , ammettiamo che B appartenga ad $U_{-(r-n+t)}$, ultraspazio, questo, che si può (n° 12) costruire proiettando U_{-r} da un S_{n-t-1} generico di S_n . Allora l' $S_{n-t} \equiv B.S_{n-t-1}$ incontrerebbe U_{-r} in un punto A che non appartiene ad S_t (perchè altrimenti S_{n-t} , e quindi B , apparterebbe ad S_n), onde U_{-r} ed S_{n+1} avrebbero in comune l' $S_{t+1} \equiv A.S_t$, e ciò è assurdo.

⁽¹⁶⁾ Cfr. l' annotazione ⁽⁹⁾.

⁽¹⁷⁾ La figura dei punti comuni ad U_{-r} e S_n , è tale che se contiene due punti distinti di una retta, contiene (n° 7) questa; dunque, giacchè la figura appartiene a un iperspazio, è essa stessa un iperspazio.

⁽¹⁸⁾ Cfr. l' annotazione ⁽⁹⁾. Per $-r + n + l < 0$, U_{-r} e S_n non hanno alcun punto comune.

È poi evidente che gli ultrapiani di un fascio si possono mettere (n° 24 e 11) in corrispondenza biunivoca continua coi punti di una retta; quelli di una rete si possono mettere (n° 24 e 12) in corrispondenza biunivoca continua con (le rette di un piano, e quindi con) i punti di un piano (19).

Si osservi, infine, che un fascio è individuato (n° 18) da due qualunque dei suoi ultrapiani, e una rete (n° 18) da tre.

§ 3.

Dualità, perpendicolarità, rotazione.

26. Dato un ultraspazio U_{-r} , siano U_{-l} e S_n un ultraspazio e un iperspazio di U_{-r} . Diremo che U_{-l} e S_n sono spazi *duali* (in U_{-r}) quando (20) è $-l + n = -r - 1$.

Al punto S_0 , dunque, è duale l'ultrapiano $U_{-(r+1)}$; alla retta S_1 è duale l' $U_{-(r+2)}$; al piano S_2 è duale l' $U_{-(r+3)}$; e così via.

Siccome le proprietà sin ora osservate degli ultraspazi sono (21) le medesime proprietà fondamentali degl'iperspazi, proprietà per le quali questi soddisfano alla legge di dualità, così possiamo affermare che

in ogni ultraspazio la legge di dualità esiste.

È noto, per esempio, che se un S_l e un S_n si secano in un S_t , essi sono immersi in un S_{l+n-t} ; applicando la legge di dualità in un ultraspazio U_{-r} , si ha che se un $U_{-(r+l+1)}$ e un $U_{-(r+n+1)}$ sono immersi in un $U_{-(r+t+1)}$, essi si secano in un $U_{-(r+l+n-t+1)}$, e ciò è (n° 18) vero (22).

27. Consideriamo un U_{-l} proprio di un ultraspazio (proprio) U_{-r} , e sia P un qualunque punto proprio di U_{-l} , onde (n° 9) è $U_{-l} \equiv (S_l, P)$.

Ciò posto si osservi che essendo (23) U_{-l} ed S_l immersi nell'ambiente assoluto, anche U_{-r} ed S_l godono della stessa proprietà, onde (n° 24) essi si secano in un S_{l-r} . Ma il luogo delle rette perpendicolari (24) ad U_{-l} in P è S_l , dunque le rette siffatte e poste

(19) In U_{-n} si abbia un $U_{-r'}$; ogni U_{-r} , di U_{-n} , passante per $U_{-r'}$, seca (n° 24) un generico $S_{r'-n-t}$ in un $S_{r'-r-1}$: viceversa dato un $S_{r'-r-1}$ di $S_{r'-n-t}$, rimane individuato (n° 12) un U_{-r} passante per $U_{-r'}$. Possiamo dunque concludere che
gli U_{-r} , di U_{-n} , passanti per un $U_{-r'}$, si possono mettere in corrispondenza biunivoca continua con gli $S_{r'-r-1}$ di un $S_{r'-n-t}$.

Per $-r = -n - t$ e $-r' = -n - 2$, per $-r = -n - t$ e $-r' = -n - 3$ si ottengono i casi particolari considerati nel testo.

(20) Cfr. l'annotazione (9).

(21) Cfr. l'annotazione (9).

(22) È noto, p. es., che gli S_l di un dato S_n sono in numero $(l+t)(n-l)$ volte infinito. Dualmente, nell' U_{-r} , gli $U_{-(r+l+1)}$ passanti per un dato $U_{-(r+n+1)}$ sono pure in numero $(l+t)(n-l)$ volte infinito, e ciò d'accordo con quanto si conlude nell'annotazione (19).

(23) Infatti U_{-l} ed S_l hanno in comune soltanto il punto P , e quindi (n° 23) essi sono immersi in U_0 .

(24) Dato un ultraspazio proprio U_{-l} e un suo punto proprio P , diremo che una retta è *perpendicolare* ad U_{-l} in P , quando essa è perpendicolare a tutte le rette di U_{-l} passanti per P (e quindi a tutte le rette di U_{-l}). Ciò posto si osservi che se è $U_{-l} \equiv (S_l, P)$, è S_l il luogo delle rette perpendicolari ad U_{-l} in P ; infatti se fosse S_l una retta, fuori di S_l , perpendicolare ad U_{-l} in P , ogni retta di U_{-l} sarebbe perpendicolare, in P , all' $S_{l+t} \equiv S_l$, ciò che (n° 13) è assurdo.

in U_{-r} costituiscono l' S_{l-r} ora detto.

Concludiamo che

dato un ultraspazio proprio U_{-r} , tutte le sue rette perpendicolari ad un suo U_{-1} in un dato punto proprio di questo, costituiscono un iperspazio S_{1-r} .

28. In particolare, dunque, per $l=r+1$ possiamo (n° 27) affermare che dato un U_{-r} proprio, esiste in questo una sola retta perpendicolare ad un dato ultrapiano (di U_{-r}) e passante per un punto dato.

29. In un ultraspazio proprio U_{-r} sia dato un iperspazio proprio S_h ; il luogo delle rette di U_{-r} perpendicolari ad S_h in un punto proprio P di esso, è (n° 6, 3, 20) un ultraspazio che indichiamo con U_{-x} . Ma (n° 27) dev'essere $-x+h=-r$, cioè $x=r+h$, dunque (25) *dato un ultraspazio proprio U_{-r} , tutte le sue rette perpendicolari ad un suo S_h in un dato punto proprio di esso, costituiscono un ultraspazio $U_{-(r+h)}$.*

30. Sia S_l una retta propria di un ultraspazio U_{-r} ; le rette di questo perpendicolari ad S_l in un suo punto proprio P , costituiscono (n° 29) un ultrapiano $U_{-(r+1)}$. Assumiamo come corrispondenti il punto improprio S_0 di S_l e l' $U_{-(r+2)}$ improprio di $U_{-(r+1)}$. Si ottiene in tal modo fra i punti e gli ultrapiani dell' ultrapiano improprio $U'_{-(r+1)}$ di U_{-r} , una corrispondenza biunivoca tale che ai punti di un S_l corrispondono (n° 29 e 6) gli ultrapiani passanti per un $U_{-(r+l+2)}$, e ai punti di un U_{-h} corrispondono (n° 11 e 27) gli ultrapiani passanti per un S_{h-r-2} . Osserviamo inoltre che, sempre in $U'_{-(r+1)}$, agli ultrapiani passanti per S_l , corrispondono i punti del sopradetto $U_{-(r+l+2)}$. Possiamo dunque dire che la corrispondenza sopradetta, esistente fra i punti e gli ultrapiani di $U'_{-(r+1)}$, è involutoria; essa sarà chiamata *polarità assoluta* di U_{-r} , e spazi *polari* si diranno un iperspazio e un ultraspazio di $U'_{-(r+1)}$ che si comportino tra loro come S_l e $U_{-(r+l+2)}$.

Si noti che due spazi polari sono (n° 26) spazi duali in $U'_{-(r+1)}$, e che due spazi di U_{-r} sono o no perpendicolari tra loro, secondo che i loro spazi impropri appartengono ovvero no a due spazi polari, cioè, come diremo, secondo che questi spazi impropri sono o no *reciproci* rispetto alla polarità assoluta di U_{-r} (26).

31. Sia $U_{-(r+2)}$ un dato ultraspazio proprio di U_{-r} ; le rette perpendicolari ad esso in un suo punto proprio P costituiscono (n° 27) un piano S_2 .

Ciò posto siano M ed M_1 due punti di S_2 equidistanti da P ; diremo che il punto M_1 si è ottenuto facendo *rotare* il punto M intorno ad $U_{-(r+2)}$. Si dirà inoltre che M è rotato dell' angolo (convesso o piatto) $M(P)M_1$ nel senso dell'arco $\widehat{MM_1}$ (del cerchio di centro P).

32. Indichi S'_2 il piano perpendicolare ad $U_{-(r+2)}$ in un altro punto proprio P' di questo, e siano M' e M'_1 due punti di S'_2 equidistanti da P' . Diremo che M_1 e M'_1 si sono ottenuti facendo rispettivamente rotare M e M' nello *stesso senso* o in *senso opposto*, secondo che gli archi MM_1 e $M'M'_1$ hanno o no lo stesso senso considerati nei piani paralleli (di 1ª specie) S_2 e S'_2 (27).

(25) Si noti che è S_h il luogo delle rette di U_{-r} perpendicolari ad U_{-x} in P ; infatti se esistesse una retta S_1 , fuori di S_h , e perpendicolare ad U_{-x} in P , ogni retta di U_{-r} sarebbe perpendicolare all' $S_{h+1} \equiv S_1 S_h$, cioè ogni retta di U_{-r} perpendicolare ad S_h in P , sarebbe perpendicolare ad S_{h+1} , e ciò evidentemente è assurdo.

(26) Due spazi (iperspazi o ultraspazi che siano) diconsi *perpendicolari* tra loro, quando ogni retta dell' uno è perpendicolare a tutte le rette dell' altro; cfr. l' annotazione (24). Si cfr. pure l' annotazione (9).

(27) I piani S_2 e S'_2 sono paralleli (di 1ª specie) perchè ogni ultrapiano di U_{-r} passante per $U_{-(r+2)}$ li seca in due rette che, come si dimostra facilmente, sono parallele.

33. In generale, se fra i punti di due figure F e F' di U_{-r} esiste una corrispondenza biunivoca tale che ogni punto di F' si possa ottenere facendo rotare il suo corrispondente di F intorno ad $U_{-(r+2)}$ costantemente nello stesso senso (n° 32) e di un angolo dato, si dirà che la figura F' si è ottenuta facendo *rotare* la figura F intorno ad $U_{-(r+2)}$ nel senso dato e dell'angolo dato.

34. Siano dati due ultraspazi propri U_{-r} e U'_{-r} secantisi in un $U_{-(r+1)}$, onde essi sono immersi (n° 21) in un $U_{-(r-1)}$, e si tiri (n° 27) il piano S_2 perpendicolare ad $U_{-(r+1)}$ in un punto P .

Indicando con S_1 e S'_1 le rette (n° 24) tracce di U_{-r} e U'_{-r} in S_2 , l'angolo (acuto o retto) $\widehat{S_1 S'_1}$ si dirà *angolo* dei due ultrapiani U_{-r} e U'_{-r} (28).

Ciò posto si faccia rotare U_{-r} , intorno ad $U_{-(r+1)}$, dell'angolo $\widehat{S_1 S'_1}$; è chiaro che la figura così ottenuta sarà precisamente l'ultrapiano U'_{-r} . Ne segue (29) che i due ultraspazi U_{-r} e U'_{-r} sono eguali.

In generale gli ultraspazi U_{-r} e U'_{-r} si sechino in un U_{-l} , e si conduca per questo, per un punto generico di U_{-r} e per un punto generico di U'_{-r} , un U''_{-r} del resto arbitrario. Evidentemente basterà dimostrare $U_{-r} = U''_{-r}$ (e analogamente $U'_{-r} = U''_{-r}$) per poi dedurre $U_{-r} = U'_{-r}$. Se dunque si osserva che gli ultraspazi U_{-r} e U''_{-r} non hanno in comune soltanto U_{-l} , ma bensì si secano (n° 11) in un $U_{-(l-1)}$, possiamo ridurci, applicando successivamente lo stesso procedimento, a dover dimostrare l'eguaglianza di U_{-r} e un U^*_{-r} secantisi in un $U_{-(r+1)}$, ciò che si fece in principio di questo n°. Possiamo dunque affermare che effettivamente è $U_{-r} = U'_{-r}$.

Concludiamo dunque che
due ultraspazi propri aventi lo stesso rango sono figure eguali.

§ 4.

Prospettività, omologia, ultrasfera.

35. In un U_{-r} siano dati due ultraspazi distinti U_{-h} e U'_{-h} ; fissato, in U_{-r} , un iperspazio $\Omega \equiv S_{h-r-1}$ non avente alcun punto comune con essi, si dicano *corrispondenti* un punto di U_{-h} e uno di U'_{-h} ogni qual volta appartengano (n° 24) ad uno stesso S_{h-r} passante per Ω .

L' U_{-t} , con $t \leq 2h - r$, comune ad U_{-h} e U'_{-h} , è evidentemente il luogo dei punti *uniti*, cioè dei punti ognuno dei quali corrisponde a se stesso; ne segue che ad una fi-

(28) Al variare del punto P in $U_{-(r+1)}$, il piano S_2 varierà rimanendo sempre parallelo (di 1ª specie) a se stesso, onde l'angolo $\widehat{S_1 S'_1}$, sarà di grandezza costante.

(29) Se M_1 e N_1 sono i piedi delle rette perpendicolari condotte ad $U_{-(r+1)}$ da due qualunque punti M ed N di U_{-r} , il quadrangolo semplice MM_1N_1N è evidentemente eguale all'altro $M'M_1N_1N'$, onde sarà $MN = M'N'$. In quanto all'eguaglianza delle figure, ci riferiamo alla definizione seguente: « Due figure si dicono eguali quando fra i loro punti esiste una corrispondenza biunivoca, in modo che il segmento che congiunge due punti qualunque di una di esse, sia eguale al segmento che congiunge i punti corrispondenti dell'altra figura.

Se si volesse introdurre il *moto* (senza deformazione) nel senso meccanico, allora si dimostrerebbe subito che due ultraspazi propri U_{-r} e U'_{-r} sono eguali. Infatti posto $U_{-r} \equiv (S_r, P)$ e $U'_{-r} \equiv (S'_r, P')$, basterà far coincidere S_r e S'_r in modo che coincidano P e P' , affinché evidentemente coincidano pure U_{-r} e U'_{-r} .

gura qualunque di U_{-h} avente punti in U_{-t} , corrisponde in U'_{-h} una figura passante per questi stessi punti. Inoltre ad un S_t di U_{-h} corrisponde (n° 24) un S'_t di U'_{-h} , onde in particolare alle rette di U_{-h} corrispondono le rette di U'_{-h} ; ad un ultraspazio U_{-s} di U_{-h} corrisponde (n° 12 e 18) un ultraspazio U'_{-s} di U'_{-h} , onde, in particolare, agli ultrapiani di U_{-h} corrispondono gli ultrapiani di U'_{-h} .

La corrispondenza in esame chiamasi *prospettività*; Ω ne è il *centro*.

36. Supponiamo ora che i due ultraspazi U_{-h} e U'_{-h} coincidano, e si fissi un ultrapiano $U_{-(h+1)}$ e tre punti collineari distinti O, A, A' fuori di questo.

Ciò posto scelto un altro punto generico B di U_{-h} , il piano OAB seca $U_{-(r+1)}$ in una retta s ; nell'omologia piana di centro O , asse s , e A, A' punti omologhi, a B corrisponderà un certo punto B' che assumeremo quale corrispondente di B in U'_{-h} . Si ottiene in tal modo fra i punti di U_{-h} e quelli di U'_{-h} una corrispondenza biunivoca tale che due punti omologhi sono sempre collineari con O , e ogni punto del dato ultrapiano $U_{-(h+1)}$ è un punto unito ⁽³⁰⁾.

È poi facilissimo dimostrare che ad una retta di U_{-h} corrisponde una retta di U'_{-h} , e queste due rette si secano in $U_{-(h+1)}$. Ne segue, evidentemente, che ad un S_n di U_{-h} corrisponde un S'_n di U'_{-h} , e questi due iperspazi si secano in un S_{n-1} di $U_{-(h+1)}$.

Analogamente ad un ultraspazio U_{-s} di U_{-h} , corrisponde un ultraspazio U'_{-s} di U'_{-h} , e questi due ultraspazi si secano in un $U_{-(s+1)}$ di $U_{-(h+1)}$. Infatti sia P un punto di U_{-s} fuori dell'ultraspazio $U_{-(s+1)} \equiv U_{-s} U_{-(h+1)}$, e sia P' il suo corrispondente; è facile dimostrare che all'ultraspazio $U'_{-s} \equiv P' U_{-(s+1)}$ appartiene ⁽³¹⁾ il corrispondente di un qualunque punto di U_{-s} . In particolare dunque agli ultrapiani di U_{-h} corrispondono gli ultrapiani di U'_{-h} .

La corrispondenza in esame chiamasi *omologia*; O ne è il *centro*; $U_{-(h+1)}$ ne è l'*ultrapiano d'omologia*.

Con gli ordinari ragionamenti si dimostra che un'omologia è anche individuata qualora si conoscano il centro, l'ultrapiano d'omologia, e due qualunque ultrapiani corrispondenti.

È anche facile definire la *caratteristica* dell'omologia, e quindi l'*omologia armonica*: ecc.

37. In U_{-r} siano dati $n+1$ ultraspazi $U_{-l}, U'_{-l}, \dots, U_{-l}^{(n)}$ in posizione generica tra loro, e due qualunque consecutivi (nell'ordine scritto) siano (n° 35) prospettivi. Si ottiene in tal modo fra i punti di U_{-l} e $U_{-l}^{(n)}$ una corrispondenza biunivoca tale che ad un S_h qualunque di U_{-l} corrisponde (n° 35) un $S_h^{(n)}$ di $U_{-l}^{(n)}$, e ad un U_{-s} qualunque di U_{-l} corrisponde un $U_{-s}^{(n)}$ di $U_{-l}^{(n)}$.

Si osservi, inoltre, che l'ultraspazio comune (n° 20) agli $n+1$ ultraspazi dati, è evidentemente luogo di punti uniti per la detta corrispondenza biunivoca; dunque possiamo concludere che per questa è luogo ⁽³²⁾ di punti uniti un $U_{-[(n+1)l-n]}$.

⁽³⁰⁾ Si dimostra come nell'ordinaria Geometria Proiettiva che la coppia A, A' può essere sostituita da qualunque altra coppia di punti omologhi per la costruzione della detta corrispondenza. Ne segue che anche nella retta $OA \equiv OA'$ esistono infinite coppie di punti corrispondenti (che costituiscono una proiettività).

⁽³¹⁾ Se M è un qualunque punto di U_{-s} , basterà osservare che alla retta PM corrisponde la retta che da P' proietta il punto comune alla stessa PM e ad $U_{-(s+1)}$, onde M' appartiene ad $U'_{-s} \equiv P' U_{-(s+1)}$.

⁽³²⁾ Si noti che, come caso particolare, potrebbero esistere punti uniti non comuni a tutti gli $n+1$ ultraspazi dati; p. es. per $n=2$ e $l=r+1$ se la retta congiungente i due centri di prospettiva incontra l' $U_{-(2l-r)} \equiv U_{-(r+2)}$ comune ad U_{-l} e U_{-l}'' in un punto che sia fuori dell' $U_{-(r+3)}$ comune a tutti e tre gli ultraspazi dati.

38. Sia O un punto proprio di un ultraspazio U_{-r} ; il luogo Σ dei punti di questo che hanno da O distanza eguale ad un segmento dato (finito), chiamasi *ultrasfera*; questo segmento ne è il *raggio* e O ne è il *centro*.

Dato un punto qualunque P , si considerino tutte le rette (di U_{-r}) perpendicolari alla OP nel punto P' coniugato armonico di P rispetto ai due punti comuni a questa retta e a Σ ; esse costituiscono (n° 29) un ultrapiano che sarà chiamato *ultrapiano polare* di P , perchè contiene tutte le rette polari di P rispetto ai cerchi secondo cui Σ è secata dai piani passanti per la retta OP .

Viceversa dato un ultrapiano $U_{-(r+1)}$ esiste un (solo) punto P che l'ammette come ultrapiano polare, punto che si ottiene conducendo da O la perpendicolare ad esso ultrapiano, e poi trovando il coniugato armonico del piede di questa perpendicolare rispetto ai due punti in cui questa stessa retta incontra l'ultrasfera Σ . Il punto P si chiamerà *polo* di $U_{-(r+1)}$.

È poi evidente che, in particolare, se il punto P appartiene a Σ , il suo ultrapiano polare passa per esso, e viceversa; in questo caso l'ultrapiano prende anche il nome di ultrapiano *tangente* a Σ in P (questo ne è il *punto di contatto*) perchè contiene tutte le rette tangenti in P ai cerchi secondo cui Σ è secata dai piani passanti per la retta OP .

È infine da osservare che se un punto A appartiene all'ultrapiano polare di un altro punto B , questo appartiene ⁽³³⁾ all'ultrapiano polare di A ; due punti siffatti si diranno *reciproci*.

Per amor di brevità omettiamo le proposizioni analoghe a quelle dell'ordinaria polarità rispetto ad un'ipersfera.

Catania, 14 agosto 1916.

⁽³³⁾ Basta considerare il piano OAB .

Su due complessi di rette, dell' S_4 , d'ordine due e della terza specie.

Memoria di GIORGIO APRILE

RELAZIONE

DELLA COMMISSIONE DI REVISIONE COMPOSTA DAI SOCI EFFETTIVI

PROFF. CIPOLLA E SEVERINI (*Relatore*).

In questo lavoro il Dott. G. APRILE traendo profitto di una certa trasformazione doppia dell' S_4 , riesce a trovare, in questo, due complessi di rette d'ordine 2 e di 3^a specie, e di essi fa uno studio piuttosto accurato. Sono i primi esempi di complessi siffatti, onde l'importanza del lavoro che merita la pubblicazione negli Atti accademici.

PREFAZIONE.

Nel Cap. I del presente lavoro si accenna ad una trasformazione doppia nello spazio a quattro dimensioni, riportando (molto fuggacemente) qualche proprietà, fra le tante espone nella mia recentissima memoria ⁽¹⁾: *Di una trasformazione doppia nello spazio a quattro dimensioni*.

Il resto del lavoro è dedicato ad alcuni risultati su due complessi (sistemi ∞^3) di rette d'ordine due e della terza specie, del sudetto spazio.

Di qualche interesse io credo tali risultati, poichè, per quanto a me risulti, sono essi i *primi* complessi d'ordine due e della *terza specie* che in detto spazio si conoscono, sebbene ricco e fecondo sia il contributo apportato, in tale spazio, ai complessi degli ordini uno e due.

Cade qui opportuno osservare come le notevoli, molteplici ed utilissime ricerche sulle congruenze di rette dello spazio ordinario, dovevano, sicuramente, invogliare gli studiosi ai non meno interessanti studî sui complessi di rette dello spazio a quattro dimensioni.

Vennero, siffatte ricerche, iniziate dal CASTELNUOVO ⁽²⁾ il quale assegnò il primo com-

⁽¹⁾ In corso di stampa presso il Giornale di Matematiche, Napoli.

⁽²⁾ CASTELNUOVO. *Ricerche di Geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni* [Atti R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, S. VII, t. II (1891), pp. 855-901] §§ 7 e 8.

plesso d'ordine uno. Seguì un lavoro di ASCIONE ⁽³⁾ su certi complessi d'ordine uno, completato poscia dal SEVERI ⁽⁴⁾.

Pochi anni dopo, una serie di assai preziose ricerche dovute al MARLETTA, trattarono completamente la teoria dei complessi d'ordine uno, ed assegnarono quasi tutti quelli d'ordine due.

I lavori in proposito sono così distribuiti:

- nei primi due ⁽⁵⁾ vengono determinati e classificati tutti i complessi d'ordine uno;
- nei successivi si trattano quelli d'ordine due.

E precisamente, assegnando alla 1^a 2^a, 3^a e 4^a specie rispettivamente ogni complesso tale che dei tre fochi di un suo raggio generico, tre, due, uno o nessuno siano punti singolari per il complesso, le succennate ricerche continuano nel modo seguente:

- due lavori ⁽⁶⁾ dedicati alla classificazione di tutti i complessi della 1^a specie;
- un altro ⁽⁷⁾ si occupa dei complessi della 2^a specie;
- ed i rimanenti due ⁽⁸⁾ sono dedicati ad alcuni complessi della 4^a specie.

Come si vede, dunque, il MARLETTA non ha trattato di complessi della 3^a specie, onde credo di qualche interesse i due complessi di siffatta specie e d'ordine 2 che qui presento.

⁽³⁾ ASCIONE. *Sul complesso di 1° ordine delle trisecanti di una superficie immersa in un S_4* . [Rend. R. Acc. dei Lincei, (5), vol. VI, 1° semestre (1897), pp. 162-169].

⁽⁴⁾ SEVERI. *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni, e a' suoi punti tripli apparenti* [Rend. del Circolo Matem. di Palermo, t. XV (1901) pp. 33-51] n. 13.

⁽⁵⁾ MARLETTA. *Sui complessi di rette del primo ordine dello spazio a quattro dimensioni* [Rend. del Circolo Matem. di Palermo, t. XXVIII (1909), pp. 353-359], e *Sopra i complessi di rette d'ordine uno dell' S_4* [Atti Acc. Gioenia di Catania, (5), Vol. III (1910) Memoria II].

⁽⁶⁾ MARLETTA — *Sui complessi di rette d'ordine due e della prima specie dell' S_4* [Giornale di Matematiche, Napoli, vol. L, (1912) pp. 17-59], e *Le superficie generali dell' S_4 dotate di due punti tripli apparenti* [Rend. del Circolo Matem. di Palermo, t. XXXIV (1912)].

⁽⁷⁾ MARLETTA — *Ricerche sui complessi di rette d'ordine due e della 2^a specie dell' S_4* [Atti Acc. Gioenia di Catania, (5), vol. VI (1913) Memoria I].

⁽⁸⁾ MARLETTA — *Sui complessi di rette dell' S_4 d'ordine 2 e di 4^a specie, e in particolare, su quello di classe 4* [Rend. del Circolo Matem. di Palermo, t. XXXVIII (1914)], e *Sul complesso di rette, dell' S_4 , di 4^a specie, d'ordine 2 e di classe 4* [Atti Acc. Gioenia di Catania, (5), vol. VIII (1914) Memoria V].

INDICE

CAP. I.

Cenni su una trasformazione doppia nello spazio a quattro dimensioni.

- § 1. Generalità.
- § 2. Elementi fondamentali di S S' : cenni sulla trasformazione congiunta e sulle corrispondenze w , w' .
- § 3. La trasformazione L_i .
- § 4. Su due complessi Γ , Γ' d'ordine uno.
- § 5. La ipersuperficie doppia Φ , e la ipersuperficie limite Φ' .
- § 6. Elementi dello spazio doppio corrispondenti a determinate rette e piani dello spazio semplice.

CAP. II.

Di un complesso Λ_i d'ordine due, classe tre e della terza specie.

- § 1. Generalità.
- § 2. Congruenze (2, 2) e punti singolari di Λ_i .
- § 3. Una costruzione del complesso.
- § 4. Alcune superficie ed ipersuperficie di Λ_i .

CAP. III.

Di un complesso Δ d'ordine due, classe cinque e della terza specie.

- § 1. Proprietà generali,
- § 2. Le congruenze (2, 3) ed i coni quadrici di Δ .
- § 3. La corrispondenza D .
- § 4. Una costruzione di Δ .

CAP. I.

Cenni su una trasformazione doppia nello spazio a quattro dimensioni.

§ 1. Generalità.

1. Cinque iperquadriche di uno spazio S , a quattro dimensioni, aventi a comune una stessa cubica gobba (irriducibile) c_3 e tre punti non collineari T_i ($i = 1, 2, 3$) fuori dello spazio di questa, e tali che il loro piano τ non si appoggi alla c_3 , determinano un *sistema lineare* ∞^4 di iperquadriche dello spazio S , sistema il quale verrà in seguito indicato con Σ .

Si osservi che: ogni spazio del fascio avente a sostegno il piano $\tau \equiv T_1 T_2 T_3$, completa con lo spazio ρ , della cubica c_3 , una iperquadrica del sistema Σ .

Detto S' un altro spazio, pure a quattro dimensioni, che supporremo sovrapposto al primo, si assegni una corrispondenza proiettiva fra gli spazi (S_3) α' di S' e le iperquadriche α di Σ : tale corrispondenza la indicheremo con Ω .

2. Siano:

— P' un punto generico di S' , — α'_i ($i = 1, 2, 3, 4$) quattro spazi qualunque uscenti da P' , — ed α_i ($i = 1, 2, 3, 4$) le iperquadriche corrispondenti in Ω agli spazi predetti. Per le ipotesi fatte (n. 1) tre qualunque di queste ultime, ad es. $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, hanno a comune la cubica c_3 ed una quintica s_5 , passante per i tre punti T_i , ed appoggiantesi alla c_3 nei cinque punti in cui s_5 incontra lo spazio ρ : sicchè la rimanente iperquadrica α_4 incontra la predetta s_5 , fuori della c_3 e dei tre punti T_i , in due punti P, P_1 variabili col dato punto P' .

Discende di qui e dal n. 1 che agli ∞^3 spazi α' uscenti da P' corrispondono, nella Ω , ∞^3 iperquadriche di Σ passanti per i punti P, P_1 e formanti un *sistema lineare*, in virtù della data proiettività Ω .

In tale modo viene stabilita una *trasformazione* W dei due dati spazi a quattro dimensioni: ad ogni punto P' di S' corrispondono, nella trasformazione W , due punti P, P_1 di S ; mentre a ciascuno di questi ultimi corrisponde, nella medesima W , il solo punto P' di S' .

Chiameremo *trasformazione doppia*, degli spazi S, S' , la predetta trasformazione W .

Seguendo le notazioni usate dal DE-PAOLIS ⁽⁹⁾ per le trasformazioni doppie dello spazio ordinario, diremo *spazio doppio* lo spazio S' , *spazio semplice* lo spazio S , e chiameremo *trasformazione congiunta* quella involutoria che in S fa corrispondere ad un punto P il suo *congiunto* P_1 che insieme con P corrisponde, nella W , ad uno stesso punto P' di S' ; chiameremo *congiunte* due figure di S se sono generate da punti congiunti. Possiamo pertanto asserire che: *se due figure di S sono congiunte fra loro tutte e sole le iperquadriche di Σ passanti per una di esse, passano anche per l'altra.*

(9) DE PAOLIS — *Le trasformazioni doppie dello spazio* — [Atti Acc. Lincei (4) v. I (1884-85)].

§ 2. *Elementi fondamentali di S, S' : cenni sulla trasformazione congiunta e sulle trasformazioni w, w' .*

3. Chiameremo *fondamentali* quegli elementi, dello spazio S , comuni a tutte le iperquadriche di Σ , ed un punto fondamentale lo diremo *fondamentale di 1^a classe o di 2^a classe* se per esso passano o no tutte le curve s_3 ; per cui: *nello spazio semplice gli elementi fondamentali sono costituiti dai tre punti T_i che sono di 1^a classe, e dai punti della cubica c_3 che sono della 2^a classe.*

A ciascun punto fondamentale T_i di 1^a classe, dello spazio semplice, corrisponde in S' uno spazio \mathcal{C}'_i .

La retta comune ai tre spazi \mathcal{C}'_i ($i=1, 2, 3$) la indicheremo con k' .

A ciascun punto fondamentale di 2^a classe, dello spazio semplice, corrisponde nello spazio doppio un piano. •

Si ottengono così ∞^1 piani formanti una varietà C d'ordine cinque, la quale ammette il piano τ' (corrispondente al piano τ di S) ed una rigata d'ordine cinque a direttrice tripla k' , quali doppi. Per ogni punto di k' passa una terna di piani della C , terna che secca τ' in un triangolo inscritto ad una conica l' . Gli spigoli del triedro di ciascuna siffatta terna sono generatrici della rigata doppia suddetta, Ogni spazio α' del fascio (τ') secca C nel piano doppio τ' e nella terna di piani concorrenti nel punto $\alpha'k'$.

4. Detto β un qualsiasi spazio del fascio (τ), spazio che completa con ρ una iperquadrica di Σ (n. 1), indichiamo con k_3 la cubica gobba di β passante per i punti fondamentali (di 1^a classe) T_i e per i tre (di 2^a classe) βc_3 . Se P è un punto generico k_3 , e P_1 il suo congiunto, ogni iperquadrica di Σ passante per P (e quindi per P_1 , n. 2) incontra la k_3 in più di sei punti epperò contiene tale curva cioè: *ciascun punto di ogni cubica k_3 è congiunto a tutti i punti della medesima.* Chiameremo *curva parassita* ogni curva di S congiunta ad un suo punto qualsiasi, e *superficie parassita* una superficie luogo di curve parassite.

La superficie parassita, luogo della ∞^1 k_3 , è una rigata cubica normale K , avente a comune col piano τ i soli punti fondamentali T_i , e passante per la cubica fondamentale c_3 .

La superficie predetta K è luogo dei vertici di ∞^2 S_0 -coni quadrici di Σ .

Alla rigata cubica K dello spazio semplice corrisponde, nello spazio doppio, la retta k' ; a ciascun punto di tale retta corrisponde in S una cubica parassita k_3 .

5. I punti dei piani τ, τ' si corrispondono, in virtù della data W , in una *trasformazione quadratica*, la quale ammette il triangolo $T_1 T_2 T_3$ quale fondamentale in τ , ed il triangolo $T'_1 T'_2 T'_3$ (sezione dei tre spazi \mathcal{C}'_i con τ') quale fondamentale in τ' .

I punti del piano τ e le corde della cubica c_3 si corrispondono biunivocamente nella trasformazione congiunta, con w indicheremo siffatta corrispondenza, La w è una *corrispondenza cremoniana* del 4^o ordine, la quale ammette:

- in τ i tre punti T_i quale fondamentali doppi,
- in ρ la cubica c_3 quale fondamentale doppia, ecc.

Anche i punti del piano τ' e le corde della cubica c_3 si possono far corrispondere biunivocamente nel modo che segue :

Ad un punto generico A' di τ' , corrisponde in virtù della trasformazione W un punto A di τ , e la corda a di c_3 congiunta a tale punto; il punto A' e la corda a si assumano quali corrispondenti: indicheremo con w' siffatta *corrispondenza*.

La cubica c_3 è luogo di punti fondamentali per la trasformazione w' , ai suoi punti P , considerati quali vertici dei rispettivi coni $P-c_3$, corrispondono rette di τ' , formanti un involuppo $[c']$ della seconda classe.

Alla sviluppabile delle tangenti alla cubica fondamentale c_3 corrisponde, in w' , la conica luogo c' .

Ad una curva d'ordine n , generica del piano τ' , corrisponde, nella w' , una rigata d'ordine $2n$ con la cubica gobba c_3 n -pla.

I punti di un qualsiasi piano σ di ρ e quelli del piano τ' vengono riferiti, in virtù della w' , in una trasformazione quadratica che ha i tre punti $P_i \equiv \sigma c_3$ quali fondamentali di σ , e le tre rette dell'involuppo $[c']$, corrispondenti ai predetti punti P_i quali fondamentali di τ' .

Se il piano σ percorre il fascio (t, ρ) , ($t \equiv \tau\rho$) il relativo triangolo fondamentale percorre una rigata del 4° ordine; i vertici dei corrispondenti triangoli fondamentali, di τ' , percorrono la conica t' ed i lati dei medesimi l'involuppo $[c']$.

6. Ai tre coni cubici proiettanti dai punti fondamentali T_i la cubica c_3 , corrispondono, in S' , tre cubiche gobbe V_i ($i = 1, 2, 3$), appartenenti agli spazi fondamentali \mathcal{T}_i' rispettivamente.

Siffatte cubiche sono luogo di punti fondamentali di 2ª classe; ad ogni punto di ciascuna di esse corrisponde una generatrice del relativo cono cubico.

Il piano τ' non ha alcun punto comune con le cubiche gobbe V_i , mentre la retta k' ha un sol punto G'_i su ciascuna di esse. I predetti coni T_i-c_3 sono luogo di *rette parassite* per la W .

Detti τ_i ($i = 1, 2, 3$) i piani delle coniche di K passanti per i tre punti T_i , presi due a due, si ha che i tre fasci di coniche aventi per punti base le quaterne di punti fondamentali (di 1ª e di 2ª classe) appartenenti rispettivamente ai tre piani τ_i , sono formati da curve parassite di S ; ovvero, ciascun piano τ_i è parassita per la W .

Ai tre piani τ_i corrispondono in S' tre rette m'_i rispettivamente; ad ogni punto, di ciascuna di esse, corrisponde una conica del relativo fascio.

Due qualsiasi cubiche fondamentali V_k, V_l hanno due (soli) punti in comune, i quali appartengono alla retta $m'_i \equiv T'G'$ ($i = k = l = 1, 2, 3$).

§ 3. La trasformazione L_i .

7. Sia P' un qualunque punto di τ' , p la corda di c_3 che vi corrisponde in w' : i due punti pc_3 proiettati da T_i danno due generatrici del cono T_i-c_3 , alle quali corrispondono due punti della rispettiva V_i (n. 6).

La corda, congiungente ciascuna coppia siffatta di punti, si assegni quale corrispondente del punto P' . Si ottiene in tal modo una *corrispondenza biunivoca* che viene indicata con L_i .

La corrispondenza L_i fra i punti di τ' e le corde di l'_i è quadratica, e del tipo w' .

La L_i ammette quale fondamentale la (sola) cubica l'_i . Un qualunque piano che giace in uno dei tre spazi \mathcal{C}'_i risulta riferito, in virtù di L_i , al piano τ' in una trasformazione quadratica.

Il prodotto $L_i w'$ è una corrispondenza proiettiva, fra le corde di ciascuna l'_i e quelle della c_3 .

Seguono da ciò diverse proprietà, ad es:

— A ciascuna retta fondamentale t'_i corrisponde in L_i la quadrica q'_i delle corde di l'_i incidenti k' .

Ai punti di ciascuna l'_i corrispondono le rette dell'involuppo $[c']$.

I piani σ' , congiungenti punti e rette omologhe in L_i , giacenti nel rispettivo spazio \mathcal{C}'_i appartengono al fascio di sostegno k' ; mentre considerando t'_i quale retta di detto spazio, ammette per corrispondente in L_i^{-1} , una conica, ed i piani che proiettano le corde di l'_i incidenti l'_i , dai rispettivi punti omologhi, nella predetta L_i , danno tutti e soli i piani σ' incidenti τ' . Sono piani generatori di S_0 -coni del quarto ordine.

§ 4. — Su due complessi Γ, Γ' d'ordine uno.

8. Chiameremo *raggi principali*, dello spazio S quelli che congiungono due punti congiunti P, P_1 .

Ogni raggio principale, dello spazio semplice, appartiene alla curva base di un sistema lineare ∞^2 di Σ ; — ovvero: ciascun raggio principale di S è congiunto a se stesso, ed ha per corrispondente, nello spazio S' , un raggio p' .

In ogni raggio principale esistono ∞^1 coppie di punti congiunti, costituenti una g_2^1 .

Ogni spazio del fascio (τ) contiene ∞^1 raggi principali, formanti la congruenza (1, 3) delle corde della cubica k_3 del dato spazio.

I raggi principali generano un complesso Γ , d'ordine uno, della quarta classe, avente per superficie singolare il piano τ e la rigata cubica normale K .

Il complesso Γ si può generare secondo i piani delle coniche di K con gli spazi del fascio (τ).

I raggi di Γ uscenti da ciascun punto fondamentale T_i sono tutti e soli quelli formanti l' S_0 -cono quadrico che da T_i proietta la rigata cubica K : — si ottengono così tre S_0 -coni: sono quelli che corrispondono nella Ω ai tre spazi \mathcal{C}'_i ($i = 1, 2, 3$).

I raggi di Γ uscenti da un punto generico P della cubica c_3 formano un cono quadrico di vertice P (è quello che da P proietta la k_3 dello spazio τP).

Tale cono e quello che proietta, dal medesimo P , la c_3 completano la superficie base π_4 del fascio, di S_0 -coni del sistema Σ , corrispondente agli spazi del fascio di S' , avente per base il piano π' (della ipersuperficie C') corrispondente al punto P che si considera (n. 5).

Al complesso Γ dei raggi principali corrisponde, in S' , un complesso Γ' d'ordine uno e classe uno, formato dai raggi incidenti la retta k' ed il piano τ' .

§ 5. *La ipersuperficie doppia Φ , e la ipersuperficie limite Φ' .*

9. *Ipersuperficie doppia*, o *nodale* diremo la varietà Φ di \mathcal{S} , luogo di tutte le coppie di punti congiunti ed infinitamente vicini. Chiameremo *ipersuperficie limite Φ'* quella di \mathcal{S}' , corrispondente alla predetta.

Ogni punto della Φ è doppio per qualche iperquadrica del sistema Σ .

La ipersuperficie Φ risulta razionale, d'ordine quattro e contiene gli S_i -so-stegni di tutti gli S_0 -coni ed S_1 -coni del sistema Σ .

Le superficie parassite di S cioè: la rigata cubica K , i tre coni cubici T_i-c_3 ed i tre piani τ_i appartengono alla Φ , e ciascuna quale luogo di S_0 -vertici di iperquadriche del sistema Σ .

La Φ ammette i tre punti T_i e la cubica c_3 quali elementi doppi.

La Φ è luogo di ∞^1 superficie di WEDDLE formanti fascio.

10. *La ipersuperficie limite Φ' è d'ordine quattro, della quinta classe e razionale.*

La ipersuperficie Φ' ammette quali elementi doppi: la retta k' , le tre rette m'_i , e le tre cubiche l'_i .

Alle rette dello spazio S corrispondono in \mathcal{S}' coniche: queste risultano tangenti alla Φ' nei quattro punti corrispondenti a quelli comuni alla Φ ed a ciascuna retta che si considera.

Le rette r' di \mathcal{S}' , corrispondenti a quelle uscenti da punti fondamentali (di 1^a e di 2^a classe), risultano bitangenti alla Φ' .

La Φ' ammette ∞^1 superficie di KUMMER μ' , i cui spazi formano il fascio (τ'). Il so-stegno di questo contiene la conica t' quale curva base per il sistema della predetta superficie: tale conica contiene sei punti doppi per ciascuna superficie: tre dei quali, T'_i , sono fissi e doppi per Φ' ; la rimanente terna, variabile con μ' , dà punti di contatto della Φ' col relativo spazio del fascio predetto.

Ciascuna siffatta terna di punti coincide con quella dei punti fondamentali del piano τ' , nella trasformazione quadratica che la L_i coordina fra questo piano ed il piano, traccia su \mathcal{C}'_i , del dato spazio β' .

I gruppi di piani singolari per ciascuna superficie di KUMMER, della varietà Φ' , generano al variare della superficie:

— *tre S_0 -coni d'ordine quattro $T'_i-\varphi'_i$ aventi τ' quale piano direttore comune (danno 10 piani per ciascuna superficie).*

— *tre fasci (l'_i, \mathcal{C}'_i) (i quali ne forniscono 3)*

— *la ipersuperficie C , d'ordine cinque con τ' doppio, (la quale ne dà altri 3),*

I gruppi dei 16 punti doppi per ciascuna superficie predetta percorrono:

— *la retta k' (la quale dà un punto per ciascuna superficie)*

— *la conica t' (che ne dà sei)*

— *la terna di cubiche gobbe l'_i (che ne danno nove).*

Gli spazi \mathcal{C}'_i sono tangenti singolari della Φ' ; ciascuno di essi tocca questa ipersuperficie lungo i punti di una medesima quadrica.

§ 6. *Elementi dello spazio doppio corrispondenti a determinate rette e piani dello spazio semplice.*

11. *Ogni raggio uscente da un punto fondamentale T_i , dello spazio semplice, ha per corrispondente un solo raggio, e per curva congiunta una cubica gobba passante per i rimanenti due punti fondamentali, la quale ammette quel raggio quale corda.*

Ogni raggio incidente la cubica fondamentale c_3 , ha per corrispondente, in S' , un sol raggio, e per curva congiunta una quartica razionale normale, passante per i tre punti fondamentali T_i , la quale ammette quel raggio quale corda.

Ai raggi passanti per un medesimo punto della cubica fondamentale c_3 , corrispondono raggi incidenti il piano corrispondente al dato punto della c_3 . Ne segue che al sistema lineare ∞^2 delle iperquadriche di Σ passanti per r appartiene una sola iperquadrica del fascio (π_4) : la superficie π_4 e la quartica r_1 (congiunta ad r) hanno quindi un sol punto comune, fuori degli elementi fondamentali. A siffatto punto corrisponde in π' il punto in cui r' si appoggia a questo piano.

Ad un raggio generico dello spazio S corrisponde, nello spazio S' , una conica.

La superficie σ' che corrisponde ad un qualunque piano incidente τ , è una superficie di STEINER, la quale ammette il piano τ' quale tangente.

La superficie σ' , corrispondente ad un qualunque piano passante per una generica corda di c_3 , è una quadrica. Se il piano σ passa per una tangente alla c_3 , la superficie σ' , corrispondente, è un cono quadrico, il cui vertice appartiene al piano fondamentale π , corrispondente al punto di contatto della tangente che si considera (n. 3).

CAP. II.

Di un complesso Λ_i d'ordine due, classe tre, e della terza specie.

§ 1. *Generalità.*

12. Ad ogni raggio r , uscente da uno qualunque dei punti fondamentali T_i , corrisponde un solo raggio di S' sostegno dello stelloide di spazi, corrispondente al sistema ∞^3 delle iperquadriche di Σ passanti per r (n. 11). E poichè ad un qualsiasi punto A' corrispondono nella W , due punti (congiunti) A, A_1 , le coppie dei raggi, proiettanti questi ultimi da T_i danno, quali corrispondenti, coppie di rette uscenti dal rispettivo punto A'

Per cui:

Ciascuna iperstella (T_i) di rette ammette quale corrispondente, nella trasformazione W , un complesso, (sistema ∞^3) di rette, d'ordine due.

Tale complesso si indichi con Λ_i .

13. Inoltre poichè A , ed A_1 (non fondamentali), risultano non distinti soltanto nel caso in cui appartengono alla Φ (n. 9), risulta Φ' *ipersuperficie focale* del complesso Λ_i ; ciascun raggio di questo risulta bitangente a tale ipersuperficie (n. 10), e per ciascun punto di questa passano due soli raggi (infinitamente vicini) del complesso.

D'altra parte la iperstella (T_i) si può considerare quale luogo degli ∞^2 fasci, che dal punto T_i proiettano le corde di c_3 , fasci ai cui piani corrispondono piani proiettanti le corde della rispettiva cubica l'_i , dai punti omologhi (del piano τ') nella corrispondenza L_i . Discende di qui che il terzo foco di ciascun raggio del complesso Λ_i , appartiene al piano τ' , ed è singolare per detto complesso; per ogni suo punto passa un fascio del medesimo: — Ovvero concludendo:

— *il complesso Λ_i , generato dai raggi dello spazio doppio corrispondenti alle rette di S , uscenti da un suo punto fondamentale di 1^a classe, è d'ordine due e della terza specie (cioè dei tre fochi di un suo raggio generico soltanto uno è singolare). Inoltre ammette la ipersuperficie limite Φ' quale focale, ed il piano τ' quale singolare; per ogni punto di questo passa un fascio del complesso.*

— *Il complesso Λ_i risulta luogo degli ∞^2 fasci di raggi i cui centri percorrono τ' , ed i cui piani sono quelli che proiettano, da ciascuno di tali punti, le corde che ad essi corrispondono nella trasformazione L_i .*

14. Sia α' un qualunque spazio di S' , a' una sua generica retta, l'iperquadrica α , e la quintica a_5 gli elementi che vi corrispondono in S . Le rette di α uscenti da ciascun punto fondamentale T_i , formano un cono quadrico, nel cui spazio β (tangente ad α nel predetto punto T_i) giace la tangente alla a_5 nel punto anzidetto; β seca dunque a_5 , fuori di questo punto, in soli tre punti. Questi proiettati da T_i danno tre raggi di (T_i) , i cui corrispondenti sono tutti e soli i raggi del complesso Λ_i giacenti nello spazio α' , ed incidenti la retta a' di questo: — cioè la rigata dei raggi di Λ_i giacenti in α' è d'ordine tre, ovvero:

Il complesso Λ_i è della terza classe.

§ 2. Congruenze (2. 2) e punti singolari di Λ_i .

15. Detto β' un qualsiasi spazio del fascio (τ') i raggi di questo spazio corrispondenti a quelli della stella (T_i, β) formano una congruenza (2,2) di Λ_i .

Difatti un qualunque punto A di β ha il suo congiunto A_i in questo spazio (n. 8).

Inoltre qualunque quadrica, traccia su β di qualche iperquadrica di Σ , contiene due soli raggi della sudetta stella. Sicchè:

Il complesso Λ_i risulta luogo di ∞^1 congruenze (2,2), le cui superficie focali sono tutte e sole le superficie di KUMMER giacenti sulla Φ' (n. 10).

16. I piani, dei fasci di Λ_i , cospaziali al piano τ' sono evidentemente tutti e soli quelli dell' S_1 -cono $T'_i - \varphi'_i$ (n. 10), epperò:

— *I raggi del complesso Λ_i giacenti nel piano τ' formano il fascio di centro T'_i .*

17. Segue inoltre che i fasci di Λ_i giacenti nello spazio \mathcal{C}'_i (sono quelli che dai punti della retta t'_i proiettano le corde di l'_i ad essi corrispondenti nella trasformazione L_i n. 7) generano una congruenza (1,1) avente due rette k' , t'_i quali singolari.

Discende da ciò che i due raggi di Λ_i passanti per un generico punto A' dello spazio \mathcal{C}'_i sono dati dal raggio di detta congruenza passante per esso e dal raggio che uni-

sce questo punto a quello (di τ) corrispondente in L_i alla corda di V_i passante per siffatto punto. Facilmente se ne deduce che :

La cubica V_i è luogo di punti singolari per Λ_i , per ciascun punto P' di essa passano i raggi che proiettano, da questo, la retta dell' involuppo $[c']$ corrispondente in L_i al cono quadrico $P'-V_i$.

Siffatte conclusioni risultano confermate da semplici ed opportune considerazioni sugli elementi doppi della Φ' , e sui piani tangenti singolari di questa.

§ 3. Una costruzione del complesso.

18. In questo §. si dimostra che ogni trasformazione tipo L_i genera un complesso tipo Λ_i .

Siano, un piano τ ed uno spazio \mathcal{C} generici dell' S_4 , l una cubica gobba di tale spazio, cubica non avente alcun punto su τ . Si assegni una trasformazione quadratica L fra i punti di τ e le corde di l , rispetto a tale trasformazione il sistema dei piani σ congiungenti punti e rette omologhe in L sia secato :

— dallo spazio \mathcal{C} secondo un fascio di piani avente per sostegno una retta k incidente in un sol punto la cubica predetta;

— e dal piano τ secondo un fascio di rette, il cui centro indicheremo con T .

Si consideri il sistema Λ luogo di ∞^3 raggi dei fasci, i cui centri appartengono al piano τ , ed i cui piani σ son quelli che proiettano da tali punti le rette ad essi corrispondenti in L .

Discende pertanto che il sistema Λ , così generato, è un complesso, ciascun raggio generico del quale ammette un sol punto singolare: il centro del fascio a cui esso appartiene, cioè

Il complesso Λ è della terza specie.

19. Considerando inoltre un generico punto B dell' S_4 e detto β lo spazio τB , i piani τ e $\pi \equiv \beta \mathcal{C}$ risultano riferiti, in virtù di L , in una trasformazione quadratica; quando si assegnano quali elementi omologhi, in questa, un punto A di τ , ed il punto A' , del piano π , sezione di questo col piano σ passante per A e per la corda α , corrispondente a tale punto nella L .

Le rette congiungenti le coppie di punti omologhi, in siffatta trasformazione quadratica, generano una congruenza di classe *due*.

Difatti detto ν un generico piano di β ed n la conica di τ corrispondente alla retta $n' \equiv \nu \pi$; i due punti $n\nu$, congiunti con gli omologhi di π , danno tutti e soli i raggi della predetta congruenza giacenti in ν .

Inoltre detta r una qualunque retta di τ ed r' la conica che vi corrisponde in π , la sudetta trasformazione riferisce, in corrispondenza biunivoca, r ed r' ; epperò le congiungenti i punti omologhi di quest' ultime, generano una rigata cubica. Questa insieme al fascio (T, τ) completa la rigata delle rette di detta congruenza incidenti la retta r : ciò basta per concludere che tale congruenza è d'ordine due. Il complesso Λ ammette quindi una congruenza $(2, 2)$ per ogni spazio del fascio (τ) ; ovvero:

Il complesso Λ è d'ordine due.

20. Finalmente detto γ un qualunque spazio dell' S_4 , si indichi con c' la conica, traccia sul piano γ della quadrica che corrisponde in L alla retta $c \equiv \tau\gamma$. I raggi di Λ giacenti in γ sono tutti e soli quelli che congiungono i punti omologhi di c e c' , nella corrispondenza che in essi coordina la L ; — cioè γ seca Λ nella rigata, del 3° grado, così generata, — ovvero:

Il complesso Λ è della terza classe.

Seguono facilmente tutte le proprietà assegnate nel precedente §, a proposito del complesso Λ_i .

Concludendo si ha:

— *Dati nell' S_4 una cubica gobba ed un piano, in posizione generica, assegnando fra i punti di questo e le corde della cubica una determinata trasformazione quadratica (1, 1), i raggi dei fasci, aventi i centri sul dato piano, ed appartenenti ai piani che proiettano punti e rette omologhe nella trasformazione suddetta, generano un complesso di rette d'ordine due, di classe tre e della terza specie. Tale complesso ammette il piano dato quale superficie singolare, ed infinite congruenze (2, 2), i cui spazi formano il fascio che ha questo piano quale sostegno.*

§ 4. Alcune superficie ed ipersuperficie di Λ_i .

21. In questo § si fa un semplice cenno di alcune superficie ed ipersuperficie del complesso Λ_i .

I raggi di Λ_i incidenti una generica retta r' di S' formano una rigata d'ordine cinque con r' doppia; rigata che seca il piano τ' in una cubica ⁽¹⁰⁾.

Se la r' si appoggia al piano τ' , dalla predetta rigata si stacca il fascio che dal punto $r'\tau'$ proietta la corda ad esso corrispondente nella L_i . Si ottiene, quale superficie residua, una rigata d'ordine quattro, dello spazio $\beta' \equiv \tau'r'$, con direttrice doppia r' : rigata che seca τ' in una cubica passante per il punto $r'\tau'$ ed in una retta del fascio (T_i', τ') . Questa cubica e la data r' risultano riferite in corrispondenza (1, 2) dalle generatrici di tale rigata: questa è dunque di 12^a specie di CREMONA, 4^a specie di CAYLEY.

22. Se la retta r' giace in τ' , i raggi di Λ_i incidenti questa retta, sono quelli degli ∞^4 fasci di Λ_i appartenenti ai piani che proiettano, dai punti della retta r' , le rispettive corde omologhe nella trasformazione L_i .

Tali piani generano una ipersuperficie cubica, già nota ⁽¹¹⁾.

23. Le rette del complesso Λ_i incidenti un generico piano π' di S' generano una ipersuperficie $\Lambda_i - \pi'$ d'ordine cinque con π' doppio.

A tale ipersuperficie appartengono (semplicemente) il piano τ' , ed piano del fascio di Λ_i avente il punto $\tau'\pi'$ quale vertice.

⁽¹⁰⁾ Basta difatti osservare che un qualunque spazio uscente da r' contiene tre soli raggi di Λ_i incidenti questa retta.

⁽¹¹⁾ SEGRE — *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni ecc.* [Memorie R. Acc. Scienze di Torino (1889)].

24. Se il piano π giace nello spazio \mathcal{C}_i' dalla ipersuperficie $\Lambda_i \pi'$ si stacca questo spazio. Si ottiene una *ipersuperficie residua, d'ordine quattro dotata di sei punti doppi*, sono i tre punti $\pi' l_i'$, ed i tre punti corrispondenti in L_i alle corde di l_i' giacenti in π' .

Alla ipersuperficie sudetta appartengono evidentemente:

- i piani π' e τ' ,
- la terna di piani congiungenti le corde predette ai rispettivi punti omologhi nella L_i ,
- e la terna di piani congiungenti i tre punti $\pi' l_i'$ alle rispettive rette corrispondenti nella L_i .

CAP. III.

Di un complesso Δ d'ordine due, classe cinque, e della terza specie.

§ 1. Proprietà generali.

25. Sia (P) la iperstella dei raggi di S uscenti da un medesimo punto P della cubica fondamentale c_3 , r un generico raggio di tale iperstella, ed r' il raggio che vi corrisponde in S' , (n. 11). Siano:

- π_4 il cono di $[\sigma_4]$ avente il vertice in P , cono costituito dai due coni quadrici $P-c_3$, $P-k_3$ (k_3 essendo la cubica parassita dello spazio $P\tau$, n. 4);
- π' il piano, della ipersuperficie C , corrispondente a detto π_4 (n. 8);
- (π_4) il fascio di iperquadriche avente per base π_4 , epperò fascio di Σ ,
- e (π') il fascio di spazi a questo corrispondente.

Segue pertanto che una qualunque retta r uscente da P appartiene sempre ad una sola iperquadrica (S_0 -cono) del fascio (π_4) , e quindi il corrispondente raggio r' risulta sempre incidente al piano π' (n. 11). D'altra parte si noti che un qualsiasi punto A' di S' ammette quali corrispondenti, in S , una coppia di punti congiunti, i quali proiettati da P forniscono due raggi, i cui corrispondenti passano per A' . Per cui

Ai raggi di S appartenenti ad una medesima iperstella (P) , che ha il suo centro in un punto P della cubica fondamentale c_3 , corrispondono raggi formanti un complesso d'ordine due, il quale ammette il piano π' (corrispondente al dato punto P) quale luogo di punti singolari.

Indicheremo con Δ siffatto complesso.

26. Si noti che ciascun raggio p del predetto complesso non può ammettere alcun altro punto singolare distinto da quello in cui tale raggio si appoggia a π' : — difatti i rimanenti due fochi di p sono i punti in cui questo raggio tocca Φ' , e tali punti, in generale, non sono fondamentali. — Epperò:

Il complesso Δ è della terza specie.

27. Detto: β' un qualunque spazio di S' , r' una sua retta, β ed r_s gli elementi che vi corrispondono in S ; i raggi di (P) giacenti nella iperquadrica β sono tutti e soli quelli del cono quadrico che giace nello spazio α tangente a detta iperquadrica nel punto P . I

cinque punti αr_5 proiettati da P danno cinque raggi della iperstella, appartenenti a detto cono, i cui corrispondenti sono i soli raggi del complesso Δ giacenti in β' ed incidenti r' , sicchè:

Il complesso Δ è della quinta classe.

§ 2. *Le congruenze (2, 3) ed i coni quadrici di Δ .*

28. Essendo π' piano singolare per Δ , segue che ogni spazio del fascio (π') contiene ∞^2 raggi di Δ ; non esistono evidentemente altri spazi siffatti.

Diremo *singolari* per Δ tali spazi.

Detto Π' uno di questi spazi, Π l' S_0 -cono ad esso corrispondente (S_0 -cono di vertice P , n. 8), ed α lo spazio tangente in P ad una generica iperquadrica β di Σ ; delle quattro generatrici, comuni a questa e all' S_0 -cono Π , una (sola) è corda ⁽¹²⁾ della c_3 ; tre sono dunque le rette di Δ giacenti in un generico piano $\Pi' \beta'$ dello spazio Π' . -- Epperò:

Il complesso Δ ammette ∞^4 spazi singolari formanti il fascio che ha per base il piano singolare del medesimo; ogni spazio del fascio predetto contiene una congruenza, d'ordine due e classe tre, del complesso.

29. Ai raggi della stella (P, ρ) corrispondono in ω' le rette del piano τ' (n. 5) sicchè questo è luogo di rette del complesso Δ , cioè:

Il piano fondamentale τ' è parassita semplice ⁽¹³⁾ per il complesso Δ .

30. Si è dimostrato (n. 11) che ad un qualsiasi piano σ di S , passante per una qualunque tangente p alla c_3 , corrisponde una σ'_4 spezzata nel piano π' , corrispondente al punto P di contatto (piano da contarsi due volte), ed in un cono quadrico σ' , il cui vertice appartiene al piano π' .

Le generatrici di detto cono sono le rette che corrispondono al fascio (P, σ) . Al variare del piano σ nello stelloide (p), il corrispondente cono σ' percorre il complesso Δ .

Alla retta sostegno dello stelloide sudetto corrisponde il punto P' di contatto per la retta $\pi'\tau'$ e la conica c' (n. 11). Per cui

Gli ∞^1 raggi di Δ passanti per un qualunque punto B' del piano singolare π' formano un cono quadrico, avente B' per vertice.

Il complesso Δ è luogo di ∞^2 coni quadrici i cui vertici percorrono il piano singolare π' ; siffatti coni formano un sistema d'indice due il quale ammette un punto base: è il punto P' in cui il piano π' tocca la conica c' del piano τ' , parassita per Δ .

Ciascun cono quadrico sudetto ha sul piano singolare π' una (sola) generatrice.

Il fascio (P', π') è luogo di siffatte generatrici; ognuna di queste è comune ai

⁽¹²⁾ È la corda di c_3 (generatrice di β) che giace nel piano $\alpha\rho$, tangente alla c_3 nel punto P .

⁽¹³⁾ Si noti che alla congruenza di Δ giacente nello spazio singolare $\beta' \equiv \pi'\tau'$ appartiene quella (2, 2) corrispondente alla stella (P, β) del corrispondente spazio β .

coni di Δ aventi i vertici nei punti di essa; un cono del complesso ne contiene una sola ⁽¹⁴⁾.

31. Detto A' un generico punto di π' , e σ' il cono di Δ che ha tale punto per vertice, si noti che ogni spazio passante per A' ha per corrispondente in S una iperquadrica tangente in P al piano σ , corrispondente al cono sudetto.

Direttamente si può dimostrare come segue. Se r è una qualunque retta dell'iperstella (P), ed r' la retta di Δ ad essa corrispondente, un qualunque fascio di iperquadriche del sistema Σ seca r in una punteggiata, proiettiva a quella che il fascio corrispondente di spazi seca su r' ; epperò esiste su r' un punto A' corrispondente al (solò) punto P di r , siffattamente che ogni spazio, di \mathcal{S}' , passante per A' ha per corrispondente una iperquadrica tangente ⁽¹⁵⁾ ad r nel punto P .

Sia a una generatrice del cono $P-k_3$ ed a' la retta ad essa corrispondente; retta del fascio (H', π), H' essendo il punto in cui π' si appoggia alla retta k' (n. 3).

Un qualunque spazio β' passante per a' seca Δ nella rigata R'_5 (avente a' quale retta direttrice n. 25), luogo delle rette corrispondenti a tutti e soli i raggi della iperquadrica β uscenti dal punto P ; raggi che formano il cono quadrico traccia di β sullo spazio α tangente a questa in detto punto. Questo spazio contiene la tangente p alla c_3 nel punto P , e la tangente h alla k_3 nel medesimo punto. Al variare di β' nello stelloide (a'), lo spazio α (dovendo passare per p , h , ed a) non varia; sicchè mentre R'_5 percorre tutti e soli i raggi di Δ appoggiandosi a π' lungo i punti della retta a' , il cono quadrico corrispondente genera la stella (P, α). Cioè, indicando con δ il piano ph (tangente alla rigata cubica K nel punto P), si può concludere che:

Ai raggi della iperstella (P) giacenti in un qualunque spazio del fascio (δ), corrispondono tutti e soli i raggi del complesso Δ , che si appoggiano al piano singolare π' lungo un medesimo raggio del fascio (H', π').

Ovvero:

Gli ∞^1 coni quadrici di Δ i cui centri percorrono un medesimo raggio a' del

⁽¹⁴⁾ Una conferma di alcune delle suesposte proprietà si ottiene dalle considerazioni che seguono.

Scelti tre punti generici di σ , per essi, e quindi per σ , passa una sola iperquadrica β , del sistema ∞^3 delle iperquadriche di Σ passanti per la predetta tangente p (n. 5).

La quartica b , traccia di β_2 sul cono $P-k_3$, ha per corrispondente in π' la retta b' , traccia su questo piano dello spazio β' ; tale b' è luogo dei punti in cui i raggi corrispondenti a quelli del fascio (P, σ) si appoggiano a π' .

D'altra parte detto a un qualsiasi raggio di detto fascio, a' il raggio ad esso corrispondente, a' un qualunque spazio uscente da questo raggio ed α la corrispondente iperquadrica; questa seca ulteriormente σ in un'altra retta, la cui corrispondente dovendo appartenere ad a' , ed incontrare il piano π' in un punto di b' , risulta incidente a questo piano nel medesimo punto $a'\pi'$.

⁽¹⁵⁾ Due raggi qualsiasi uscenti da P , non hanno per rette corrispondenti due rette incidenti, poichè, in generale, esse non stanno in una stessa superficie del sistema $[\sigma_4]$: — ne discende che i punti A' di tali raggi sono, in generale, distinti.

A qualunque spazio di S' che contiene quattro punti A'_i , appartenenti a quattro raggi r'_i ($i = 1, 2, 3, 4$) di Δ , corrisponde una iperquadrica di Σ tangente in A alle quattro rette r_i , epperò agli spazi che congiungono tali rette tre a tre. La iperquadrica succennata è dunque un S_0 -cono avente il vertice in P .

Osservando che gli S_0 -coni del fascio (π_4) sono tutti e soli quelli di Σ aventi il vertice in P , segue che i punti A' percorrono il piano π' . Confermato così il risultato del n. 3.

fascio (H', π') , sono quelli che corrispondono ai piani del fascio (p, a) , essendo α lo spazio che proietta, dal piano δ , la generatrice a , di $P-k_3$, corrispondente al dato raggio a' .

32. Si consideri un qualunque spazio Ω del fascio (τ) , e si indichi con (d, Ω) il fascio traccia su detto spazio del predetto fascio (δ) : sia Ω lo spazio α quello corrispondente, e $[\nu']$ il sistema delle superficie di STEINER, corrispondenti ai piani (n. 11) del fascio (d, Ω) . Siffatto sistema è d'indice due (n. 1), ha per curva base la conica d' corrispondente alla retta d , ed i tre punti fondamentali T'_i quali punti base; il piano della predetta conica passa per la retta $\pi' \tau'$; e questa retta incontra la conica nel punto P' , e nel punto Q' corrispondente del punto $h\tau \equiv \delta\tau$.

Segue da ciò che gli ∞^1 coni quadrici, corrispondenti ai piani di un medesimo fascio (p, a) , secano la superficie di $[\nu']$ corrispondente al piano $\alpha\Omega$, nel fascio delle sue coniche ⁽¹⁶⁾ passanti per P' . — Per cui:

Le rette del complesso Δ giacenti nel piano singolare π formano il fascio di centro $H' \equiv \pi' k'$; le rette di Δ incidenti ad un medesimo raggio di tal fascio costituiscono ∞^1 coni quadrici (i cui vertici percorrono questo raggio) i quali secano ogni spazio del fascio (τ') in un fascio di coniche appartenenti ad una medesima superficie di STEINER.

Ovvero, indicando con $[P', \nu']$ il sistema ∞^2 delle sudette coniche:

Gli ∞^2 coni quadrici di Δ secano un medesimo spazio, del fascio (τ') , in ∞^2 coniche formanti un sistema, d'indice due (il quale ammette un punto base P' sulla retta $\pi' \tau'$), sistema costituito da ∞^1 fasci di coniche, ciascuno dei quali formato dalle coniche passanti per il punto base predetto ed appartenenti ad una medesima superficie di STEINER.

33. Si consideri la iperstella (P) quale luogo degli ∞^2 fasci di raggi, proiettanti da P i raggi del complesso Γ appartenenti ad un medesimo spazio β del fascio (τ) . — Se k_3 è la curva parassita di detto spazio, (I, β) la congruenza delle corde di questa, epperò appartenente a Γ (n. 8), ed r una qualunque di tali corde, al piano $\sigma \equiv Pr$ corrisponde una superficie, del sistema $[\sigma_4]$, dalla quale si stacca il piano π' (n. 3). — Sia σ' la superficie cubica residua, luogo delle rette corrispondenti al fascio (P, σ) : osservando che il piano σ appartiene sempre ad un solo S_0 -cono ⁽¹⁷⁾ α di Σ , segue che la corrispondente rigata cubica σ' giace nello spazio α' .

Inoltre essendo r luogo di coppie di punti congiunti, sarà il corrispondente raggio r' (di Γ') la direttrice doppia della rigata σ' . — Per cui:

Il complesso Δ ammette ∞^3 rigate cubiche gobbe, le cui direttrici semplici sono rette di π' , mentre le direttrici doppie appartengono al complesso Γ' .

Ogni spazio α' di ciascuna rigata cubica σ' seca Δ in questa rigata, ed in una quadrica η' , la quale ha la medesima retta $\alpha' \pi'$ quale direttrice; sicchè:

Il complesso Δ ammette ∞^3 quadriche, ciascuna delle quali ha una sola retta (direttrice) sul piano π' .

⁽¹⁶⁾ Coniche corrispondenti alle rette, del piano sudetto, uscenti dal punto $p\Omega$.

⁽¹⁷⁾ Difatti per due punti generici di σ passa una sola iperquadrica del sistema ∞^2 di Σ , individuato dal raggio r di Γ (n. 8); siffatta iperquadrica contiene quindi σ .

§ 3. *La corrispondenza D.*

34. Si osservi che le ∞^4 coppie di coniche, in cui le superficie del sistema $[\nu']$ secano il piano τ' , formano due fasci: sono quelli che corrispondono ai fasci di raggi, traccia di (d, Ω) sui piani τ ed $\Omega\rho$ rispettivamente.

Epperò (n. 32) $Q' T_i$ ($i = 1, 2, 3$) formano i punti base del fascio $[Q', T_i']$, corrispondente a quello di τ ; mentre P' ed i tre punti P'_i ($i = 1, 2, 3$) (di ν'), corrispondenti alle corde di c_3 giacenti nel piano $\Omega\rho$, danno i punti base del fascio $[P', P'_i]$, corrispondente a quello del piano $\Omega\rho$ (n. 11).

La superficie ξ' , luogo del fascio di coniche, traccia su \mathcal{Q}' degli ∞^1 coni quadrici di Δ , i cui vertici appartengono ad un medesimo raggio g' del fascio (H', π') , è quella del sistema $[\nu']$ individuata dalla conica del fascio $[P', P'_i]$ passante per il punto in cui g' seca τ' .

Sicchè indicando con D la corrispondenza che ad un generico punto A' , di π' , coordina la conica, traccia su \mathcal{Q}' del cono di Δ avente A' quale vertice, ne discende un criterio per determinare il fascio delle coniche di $[\nu']$ corrispondente, in D , ad un generico raggio del fascio $(H' \pi')$. — Segue pertanto che:

Il complesso Δ assegna una corrispondenza biunivoca D fra i punti di π' e le coniche del sistema $[P', \nu']$; la retta $\pi'\tau'$ è luogo di punti uniti in tale corrispondenza, — a ciascun punto di tale retta corrisponde la conica del fascio $[P', P'_i]$ passante per esso.

35. Detto Π' un qualsiasi spazio del fascio (π') , epperò singolare per Δ , la congruenza (2,3) di detto spazio coordina, ad un qualunque raggio r' di π' la quartica r'_4 , traccia sul piano $\Pi'\mathcal{Q}'$ della rigata del 4° grado, che insieme al fascio (H', π') completa la rigata dei raggi di detta congruenza incidenti r' . Questa retta e la rispettiva quartica r'_4 vengono riferite fra loro, e biunivocamente, dai raggi predetti; basta difatti assegnare quale corrispondente di un punto A' di r' , il punto in cui il raggio (della predetta rigata di 4° ordine) uscente da A' si appoggia alla r'_4 .

Indichiamo con $D-II'$ siffatta corrispondenza.

Si noti che, in particolare, ai raggi del fascio (H', π') corrispondono, in $D-II'$ le quartiche traccia, sul piano $\Pi'\mathcal{Q}'$, delle superficie di STEINER sostegno dei fasci di $[P', \nu']$, corrispondenti nella D ai raggi che si considerano.

Per maggior brevità si tralascia un più minuzioso studio della corrispondenza D .

§ 4. *Una costruzione di Δ .*

36. In questo § si assegna una costruzione del complesso Δ , e precisamente si dimostrerà che: *le rette congiungenti punti e coniche omologhe in qualunque corrispondenza tipo D generano un complesso tipo Δ .*

Detto π un generico piano dell' S_4 , ed Ω un qualunque spazio del medesimo; si fissi,

in questo spazio, un sistema $[\nu]$, d'indice due, di superficie di STEINER, *tipo* $[\nu']$ (n. 32),— e su ciascuna di queste un fascio di coniche, siffattamente da ottenere un sistema ∞^2 di coniche $[P, \nu]$, *tipo* $[P', \nu']$.

I coni quadrici che congiungono i punti di π con le rispettive coniche corrispondenti in D formano un complesso (sistema ∞^3) di raggi, che ammette il piano π quale singolare. Risulta facilmente che non esistono altre superficie o curve singolari del predetto complesso. Per cui:

— il complesso Δ , così generato, è della terza specie, ed ammette il piano π quale singolare, ed un piano τ quale parassita semplice.

37. Si consideri un qualunque spazio Π del fascio (π) ; la corrispondenza D coordina una trasformazione $D-\Pi$, *tipo* $D'-\Pi'$ (n. 35), fra i punti di π e quelli del piano $\Pi\Omega$. Tale trasformazione è biunivoca e del 4° grado, sicchè le rette congiungenti coppie di punti omologhi, in essa, generano una congruenza della terza classe.

Difatti una generica retta r di π , e la quartica r_4 che vi corrisponde, nella $D-\Pi$, vengono riferite, in virtù di questa, biunivocamente fra loro, ed in modo che il punto $r\tau$ ne risulta unito. Segue che un qualunque piano uscente da r e giacente in Π , contiene soltanto tre raggi della predetta congruenza; sono quelli che congiungono i tre punti in cui detto piano incontra r_4 , fuori di $\tau\pi$, con gli omologhi di r' , nella $D\Pi$.

Dal fatto poi che la rigata dei raggi di tale congruenza incidenti r , risulta d'ordine 5, poichè formata dalla rigata di 4° grado, delle predette congiungenti, e dal fascio $[H, \pi]$, ne segue:

— il complesso Δ è luogo di ∞^4 congruenze $(2, 3)$ i cui spazi formano un fascio che ha per sostegno il piano singolare del complesso.

— il complesso Δ è d'ordine due.

38. Infine se Θ è un generico spazio dell' S_4 , e Π un qualunque spazio del fascio (π) il piano $\Pi\Theta$ incontra la rigata $\Delta\Theta$ nei tre raggi, che la congruenza $(2, 3)$ di Π ha in detto piano, e nella retta doppia (direttrice) $\Pi\pi$; per cui, cinque è l'ordine di detta rigata, ovvero:

— il complesso Δ è di classe cinque.

Catania, settembre 1915.

Mineralogia. — Nuove osservazioni sugli acidi silicici del Tschermak

Memoria di AURELIO SERRA ⁽¹⁾

RELAZIONE

DELLA COMMISSIONE DI REVISIONE COMPOSTA DEI SOCI EFFETTIVI

PROFF. A. FUCINI E L. BUCCA (*Relatore*).

I tentativi iniziati dal Groth per stabilire una correlazione tra la composizione chimica e la forma cristallina non hanno dato sempre buoni risultati, e i lavori sull'argomento del Tschermak hanno trovato delle critiche molto aspre del Bruni, dello Zambonini e dello stesso Serra. Nella presente memoria il Serra si difende dagli appunti fatti ad un suo lavoro sulla Leucite dal Tschermak, il quale dava una interpretazione tutta propria agli esperimenti fatti dall' A. e ch'egli ora ripete sull' Olivina.

I Relatori trovano l'argomento del presente lavoro importante e d'attualità e opinano che esso sia degno di essere pubblicato negli Atti dell'Accademia Gioenia.

Tschermak (2) esaminò durante l'esposizione all'aria la perdita dei geli, ne costruì i relativi diagrammi e giunse a stabilire che la velocità di evaporazione tende via via fortemente a diminuire sino a raggiungere il peso costante, ammettendo che dapprima si elimini acqua liberamente inclusa, poscia acqua igroscopica o combinata meccanicamente, solo verso la fine si verificherebbe nella perdita di peso una variazione repentina corrispondente al "knick", che denoterebbe la eliminazione totale dell'acqua meccanicamente commista. In questo momento ritiene debbasi considerare la silice come una reale combinazione chimica cui in effetto si converrebbe una formola definita. Secondo *Van Bemmelen*, (3) che largamente si è occupato dell'argomento, l'acqua può essere inerente al

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Sassari.

(2) *Ueber die chemische Konstitution der Feldspath. Sitz. der Akad. der Wissensch.*, 1903.

(3) *Die Absorption. Das Wasser in den Kolloiden, besonders in dem Gel der Kieselsäure* 1897. *Kieselsäure von G. Tschermak.*

tessuto, occupante i pori capillari, legata micellareamente e chimicamente. Richiama in specie l'attenzione sulle micelle, quantunque nulla vi sia di deciso sul loro contegno, per cui chiaramente non si intende gran fatto. *Nägeli* diede questo nome a piccole parti morfologiche contenenti acqua in condizioni tutte particolari che sarebbero costituite in un modo enigmatico rimanendo solo note le proprietà che le distingue di assorbire acqua. Questa, se chimicamente legata, si troverebbe in combinazione chimica, formando un idrato che sarebbe caratterizzato da un rapporto stechiometrico. *Van Bemmelen* presume che lo stato colloidale della silice sia un gelo di Si O_2 ; per molti geli rimane indeciso sulla quantità di acqua che deve essere considerata in essi e su quella riferentesi all'idrato. In base ai risultati ottenuti nell'andamento della evaporazione ne inferisce l'acqua idratata e giunge a conclusioni che non sono in rispondenza con quelle suesposte.

Mugge (1), partendo da considerazioni puramente critiche, ritiene che non possiamo ammettere una combinazione chimica per il solo fatto che la velocità di evaporazione diminuisce gradualmente ed in seguito, con una certa approssimazione, resta costante, poichè i geli mostrano caratteri assai varii subordinatamente al tenore in acqua, che per nulla resta determinato.

L'argomento si presenta quindi mal definito e le obiezioni mosse allo *Tschermak* se non sono sufficienti ad escludere senz'altro l'applicabilità del metodo tendente ad ottenere gli acidi silicici dai quali i silicati naturali derivano, in seguito a decomposizione di questi mediante acidi, in modo indubbio impongono un prudente riserbo, donde la ineluttabile necessità di ordinate esperienze dirette a meglio accertare i fatti discussi. Nei riguardi della *leucite* già mi occupai dell'argomento (2). I risultati da me ottenuti furono espressamente controllati dallo *Tschermak* (3) che istituì apposite esperienze evidentemente per scagionarsi dalle critiche rivolte al suo metodo.

Pur riconoscendo le determinazioni in precedenza da lui fatte non sufficienti ad accertare per la *leucite* la formola $\text{SiO}_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$, giunge a conclusioni che sono in perfetta armonia con i dati dapprima enunciati ed in conformità ritiene i miei erronei. Mi riservo il diritto di difendere i risultati combattuti, rispondendo adeguatamente alla obiezione insorgente; non da altro informato se non dal nobile intento di giovare modestamente alla scienza, esaminando serenamente i fatti, al disopra di qualunque principio, di qualunque sentimento che possa essere a questo estraneo.

Per quanto io sappia altri studi non seguirono, volti a stabilire se e in qual misura le mutevoli condizioni sperimentali abbiano influenza sulla costituzione dei geli, credetti perciò opportuno di esaminare sotto tale punto di vista il contegno della olivina. Le esperienze, pure appearing in teoria molto semplici, in fatto non sono scevre di difficoltà e soprattutto richiedono lungo tempo e grande accuratezza nell'esecuzione, poichè interessano valori talora al limite delle formole calcolabili. Venne allo scopo adoprato un campione di *olivina* proveniente dal giacimento di *Minas Geras* (Stati Uniti) campione che dopo essere stato diligentemente purificato si ridusse in polvere esilissima ed indi si trattò

(1) *Bemerkungen und Versuch zu Tschermak's Methode der Darstellung von Kieselsäuren ect. Centralblatt für Mineralogie, Geologie* 1908.

(2) *Sugli acidi silicici di Tschermak. Rend. Acc. Lincei* 1910.

(3) *Atti Acc. Vienna* 1912.

in diverse esperienze con acido cloridrico alle concentrazioni ed alle temperature sotto indicate:

Numero delle esperienze	Quantità di sostanza	Densità dell'Hcl	Quantità dell'Hcl	temperatura
1	gr. 1	1, 19	50 cc.	21°
2	»	1, 19	100 cc.	21°
3	»	1, 19	100 cc.	21°
4	»	1, 19	200 cc.	21°
5	»	1, 19	100 cc.	40°
6	»	1, 19	100 cc.	70°
7	»	1, 19	100 cc.	70°
8	»	1, 19	100 cc.	70°
9	»	, 07	50 cc.	21°
10	»	1, 07	100 cc.	21°
11	»	1, 07	100 cc.	21°
12	»	1, 07	200 cc.	21°
13	»	1, 07	100 cc.	40°
14	»	1, 07	100 cc.	70°
15	»	1, 05	50 cc.	21°
16	»	1, 05	100 cc.	21°
17	»	1, 05	100 cc.	21°
18	»	1, 05	200 cc.	21°
19	»	1, 05	100 cc.	40°
20	»	1, 05	100 cc.	70°

Le esperienze ai numeri 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18, diedero risultati negativi poichè durante il periodo di due mesi non si ebbe completa decomposizione del silicato. Formarono una massa gelatinosa dopo un periodo di giorni 12 le esperienze ai numeri 5, 6, 7, 8, 13, 14, 19, 20. Il residuo in questo modo ottenuto venne lavato con apposito sifone sino a completa eliminazione dell'acido cloridrico. Le singole masse raccolte su vetrini tarati, poste sotto campane di vetro a contatto con l'aria si coagularono formando una massa gelatinosa. Alla temperatura di 21° pesate successivamente in tempi uguali diedero le diminuzioni sotto indicate:

Tempi delle pesate	Gelo I	Gelo II	Gelo III	Gelo IV	Gelo V	Gelo VI	Gelo VII	Gelo VIII
ore 12	0, 811	0, 968	1, 374	1, 269	2, 980	1, 569	3, 155	1, 569
» 24	0, 555	0, 788	1, 039	0, 923	1, 765	1, 299	2, 816	0, 687
36	0, 418*(1)	0, 538	0, 692	0, 617	1, 308	1, 025	2, 615	0, 482
48	0, 390	0, 431	0, 423	0, 443	0, 962	0, 809	2, 236	0, 382
60	0, 389	0, 417 *	0, 374 *	0, 436 *	0, 669	0, 606	1, 471	0, 376 *
72	0, 384	0, 412	0, 371	0, 434	0, 482	0, 465	1, 451	0, 373
84	0, 312	0, 407	0, 371	0, 433	0, 415 *	0, 359 *	1, 245	0, 371
96	0, 378	0, 398	0, 371	0, 432	0, 415	0, 359	0, 872	0, 369
108	0, 378	0, 397	0, 371	0, 432	0, 415	0, 359	0, 563	0, 365
120	0, 378	0, 397	0, 371	0, 432	0, 415	0, 359	0, 414	0, 364
132	0, 378	0, 397	0, 371	0, 432	0, 415	0, 359	0, 391 *	0, 362
144	0, 378	0, 397	0, 371	0, 432	0, 415	0, 359	0, 389	0, 362
156	0, 378	0, 397	0, 371	0, 432	0, 415	0, 359	0, 389	0, 362

(1) L'asterisco indica il peso corrispondente al « Knick » dello Tschermak.

Nella seguente tabella sono calcolate le quantità percentuali di acqua igroscopica nei tempi successivi (1):

Tempi in ore	Temperatura	Gelo I H ₂ O %	Gelo II H ₂ O %	Gelo III H ₂ O %	Gelo IV H ₂ O %	Gelo V H ₂ O %	Gelo VI H ₂ O %	Gelo VII H ₂ O %	Gelo VIII H ₂ O %
12	21°	39,30	37,1	31,8	48,7	54,7	45,0	48,3	31,1
24	»	13,7	12,1	4,9	18,1	25,4	24,7	17,4	10,6
36	»	0,0	1,4	0,0	0,7	6,7	10,6	2,5	0,6
48	»	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,2	0,0
60	»	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Si rileva così come la perdita di acqua vada sensibilmente diminuendo, come in principio sia molto rilevante ed in ultimo, per una temperatura costante, si annulla.

Con l'aumentare della temperatura la disidratazione prosegue ancora: così il gelo I riscaldato a 30° diede

perdita di H ₂ O	0,8 %
riscaldato a 100°	
perdita di H ₂ O	1,8 %

Esponendo il gelo, dopo aver raggiunto il peso costante, all'aria umida si verifica un aumento nell'acqua di idratazione. Il gelo II in queste condizioni diede:

Tempi	Temperatura	Aumento in acqua	
ore 12	22°	3,1	%
» 24	«	3,7	%
» 36	»	4,3	%
» 48	»	5,2	%
» 56	»	5,2	%
» 68	»	5,2	%
» 80	»	5,2	%

Si avverte che dopo un certo tempo si ottiene un peso costante. Messo nell'essiccatore il gelo III fornì i seguenti risultati

Tempi	temperatura	Diminuzione in H ₂ O	
ore 12	22°	1,2	%
» 24	»	1,5	%
« 36	»	1,7	%
» 48	«	1,7	%

(1) Vennero trascurate alcune pesate con contenuto eccessivo di acqua.

Sicchè la disidratazione in queste condizioni prosegue ancora, ma tosto si raggiunge il peso costante.

Dopo la calcinazione la proprietà dell'assorbimento si può dire che sia quasi nulla, solo in aria umida si osserva un aumento che al massimo raggiunge 2,7 ‰. Le silici ai numeri IV, V, VI, VII, VIII diedero i seguenti risultati:

Tempi	Gelo IV	Gelo V (aria umida)	Gelo VI	Gelo VII	Gelo VIII
ore 12	0,2 ‰	0,2	0,3	0,2	0,1
» 24	0,2	0,1	0,4	0,5	0,2
» 36	0,2	1,8	0,5	0,6	0,2
» 48	0,2	2,5	0,6	0,7	0,2
» 60	0,2	2,5	0,6	0,7	0,2
» 72	0,2	2,7	0,6	0,7	0,2

Come si rileva la quantità di acqua assorbita da questi *geli* che subiscono la calcinazione si mostra sempre inferiore all'1 ‰, solo nell'aria umida si ha un lieve aumento. Le silici calcinate, in seguito a trattamento in acqua fornirono una massa gelatinosa omogenea che esposta all'aria perdette acqua assai rapidamente.

I *geli* I e II diedero:

Tempi in ore	Gelo I	Gelo II
12	28,5	41,4
24	2,9	3,4
36	0,2	0
48	0,1	0

Si osserva che la disidratazione è molto differente e per nulla coincide con quella ottenuta da principio, in essa si riscontra un processo ciclico non reversibile che ricorda i fenomeni di isterisi chimica (1). Il contegno dei diversi geli evidentemente si mostra in relazione con la struttura micellare, infatti con la calcinazione essi perdono quasi totalmente la proprietà di assorbire acqua appunto perchè gli alveoli così si eliminano, sicchè il peso specifico ne rimane anche modificato. Colorando le varie masse con anilina si osserva che nei *geli* idratati si ha una colorazione più cupa di quelli perfettamente anidri i quali mostrano una colorazione più scialba, osservazione pur fatta dal *Tschermak* col bleu di metilene e giustamente interpretata da *Van Bemmelen*.

I seguenti diagrammi danno l'andamento delle curve che rispettivamente si riferiscono

(1) MOLINARI: *Trattato di Chimica inorganica. Hoepli 1905.*

ai geli I, IV, VI: questi ultimi rispondono ai *geli* chimicamente più differenziati: il tempo risulta nelle ascisse, l'acqua percentuale emessa nelle ordinate :

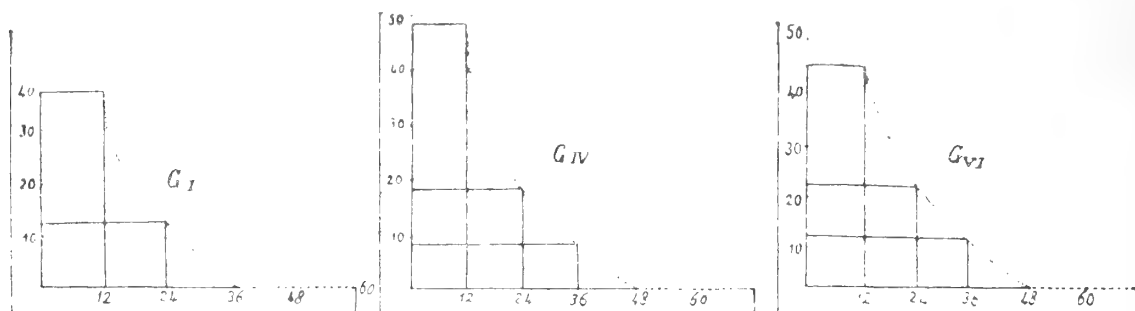


Fig. 1.

Cotesti *idrogeli* mostrerebbero contegno analogo ai colloidi che si possono ottenere per mezzo di opportuni reagenti. provocando in seguito la congelazione, oppure aggiungendo alla soluzione colloidale una soluzione salina: lo stato elettrico delle particelle che si presentano indivisibili viene così mutato sicchè rimanendo distrutto l'equilibrio si ottiene una massa gelatinosa.

Tschermak volgendo le sue osservazioni all'idrato ferrico ottenuto per precipitazione con l'ammoniaca accenna a questo fatto, per quanto ha riferimento ai suoi "acidi", e *Van Bemmelen* accerta, in base a diligenti indagini, che questo non è uno idrato chimico, bensì un *idrogelo* che mostra le proprietà delle sostanze amorfe ed in cui il tenore in acqua è subordinato a varie circostanze.

Secondo esperienze da me istituite strette analogie mostrerebbero con l'*opale*: un campione proveniente dell'isola d'Elba diede le seguenti perdite:

Tempi in ore	Temperatura	H ₂ O % emessa
12	24°	0,2
24	24°	0,3

Alla temperatura di 60° si ebbe:

Tempi in ore	H ₂ O % emessa
12	1,6
24	0,3

Con la calcinazione si ottenne una perdita dal 7 % di H₂O.

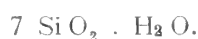
La silice così ottenuta bagnata con acqua diede esposta all'aria custodita in campana:

di vetro, una massa gelatinosa che rapidamente perdette acqua e precisamente :

Tempi	H ₂ O emessa	temperatura
in ore 12	27 %	24°
» » 24	0,7 %	24°

A peso costante si ottenne una differenza dell'1 % del *gelo* inizialmente esaminato.

In base dei risultati ottenuti, all'*opale* in questione si dovrebbe attribuire la seguente formula :



Lo *Zambonini* (1) ammette che esistano pure spiccate analogie di struttura fra gli *idrogeli* e le *zeoliti* e rileva come fra i geli e i cristalli non esistano le differenze volute dal *Tauman*, il quale tende ad eguagliare lo stato solido con lo stato cristallino e ciò in armonia con le vedute sulle modificazioni degli *idrogeli* di *Gladstone* e di *Hilbert* (2), del *Billtzer* e del *Kuriloff*, che propendono per l'esistenza di uno stato cristallino intermedio e infine con le esperienze del *Von Weimarn* tendente a dimostrare che la materia debba in generale ritenersi cristallina e che in effetto le sostanze amorfe, non escluse quelle in questione, sussistono oltre uno stato *ultramicroscopico* cristallino. Da quanto è sopra detto emerge quindi come si possa paragonare il contegno degli *idrogeli* con quello delle *zeoliti*. *Zambonini* per queste potè constatare, in base ad accurate ricerche, che le proprietà assorbenti sovente assai rapide sono in rapporto di frequente oltre che con la quantità di acqua liberata, con la temperatura cui questa si emette. Per la *heulandite* giunge a interessanti e nuove deduzioni riflettenti il modo come procede l'assorbimento dell'acqua, la perdita di peso con acido solforico concentrato a pressione ridotta, sulla influenza che esercita nella eliminazione dell'acqua la tensione di vapor di acqua dell'ambiente in cui avviene la disidratazione ad una data temperatura, sui risultati ottenuti scaldando al di sotto del punto di fusione e numerosi altri problemi sono con geniale intuizione risolti.

Manasse (3) determinò particolarmente la perdita di acqua nella *cabasite* e rilevò che per la completa disidratazione del minerale è necessario il calor rosso, che l'acqua emessa ad una determinata temperatura può essere riacquistata con l'espore la polvere all'aria, oltrepassato però questo limite si ha rilevante diminuzione nell'assorbimento e l'impossibilità di riprenderla completamente, infine che con la calcinazione la proprietà dell'assorbimento viene totalmente perduta, perciò si ha costanza di peso anche quando si lasci il minerale per lungo tempo in ambiente di aria umida. Per l'*apofillite* avverte nelle diverse prove riacquisti di acqua assai tenui o molto differenziati. Anche questa dopo calcinazione non mostra riassorbimento alcuno. Siffatte osservazioni collimano con quelle, in massima,

(1) ZAMBONINI: *Contributo allo studio dei silicati idrati*. Reale Acc. Napoli 1903.

(2) *Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie* 1903.

(3) MANASSE E. *Sopra le zeoliti di alcune rocce basaltiche della Colonia Eritrea*. Atti della Società Toscana di Scienze 1906.

da me ottenute per i vari *geli* e trovano spiegazione con la struttura micellare accennata, perchè gli alveoli con l'elevata temperatura si eliminano.

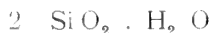
Per i diversi *geli* al " *Knick* „ dello *Tschermak* si ottennero le seguenti composizioni:

	Gelo I	Gelo II	Gelo III	Gelo IV	Gelo V	Gelo VI	Gelo VII	Gelo VIII
Si O ₂	32,8	32,2	29,3	34,8	32,2	26,7	28,9	29,0
(r) H ₂ O	9,0	9,5	8,1	8,8	9,3	9,2	10,2	8,6
	41,8	41,7	37,4	43,6	41,5	35,9	39,1	37,6

Corrispondentemente si calcolano i seguenti rapporti:

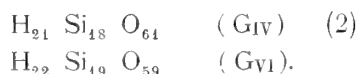
G _I	SiO ₂ : H ₂ O =	2,1 : 1
G _{II}	SiO ₂ : H ₂ O =	2,0 : 1
G _{III}	SiO ₂ : H ₂ O =	2,2 : 1
G _{IV}	SiO ₂ : H ₂ O =	2,4 : 1
G _V	SiO ₂ : H ₂ O =	2,1 : 1
G _{VI}	SiO ₂ : H ₂ O =	1,7 : 1
G _{VII}	SiO ₂ : H ₂ O =	1,7 : 1
G _{VIII}	SiO ₂ : H ₂ O =	2,1 : 1

Quantunque questi rispondano tutti alla formola



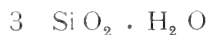
tuttavia si nota come essi sieno molto oscillanti.

Calcolando più esattamente le formole con gli atomi metallici dopo averne desunto i rapporti molecolari si potrebbero attribuire a siffatti geli i valori estremi

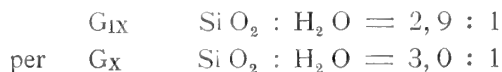


Minori fluttuazioni si ottengono evaporando a secchezza alla temperatura di 40° dopo che il silicato è stato decomposto per azione dell'acido, riprendendo il residuo con HCl concentrato indi con acqua calda e lavando perfettamente il residuo.

Operando in questo modo si ottennero diversi geli rispondenti esattamente alla formola



con rapporti molecolari molto vicini, così per



Calcolando la formola con gli atomi metallici come dianzi si è detto si ottengono per entrambi gli stessi valori rispondenti a



(1) L'acqua venne determinata per arroventamento sino a peso costante.

(2) Il calcolo venne fatto in base alla tabella dei pesi atomici internazionali del 1911.

Le relazioni fra le analisi risultano evidenti dal seguente schema ove sui lati del triangolo equilatero sono riportate le quantità percentuali degli elementi, sicchè i geli IV, VI, IX, X occupano rispettivamente i punti a, b, c; ulteriori chiarimenti risultano superflui:

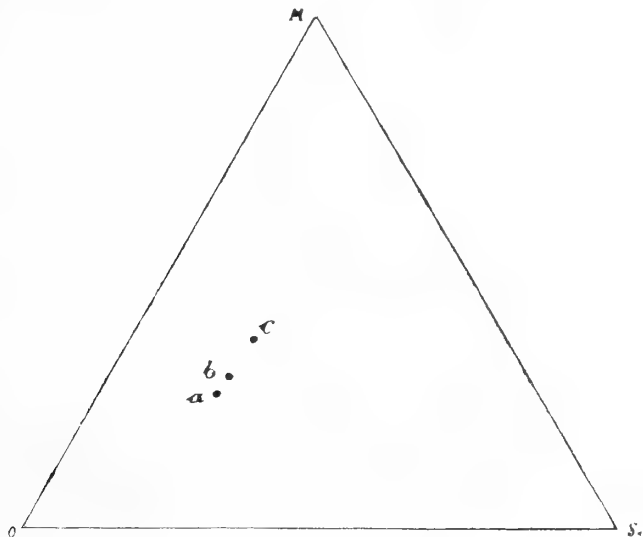
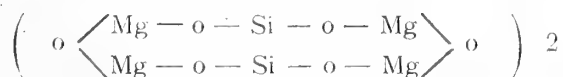


Fig. 2.

Tschermack molto opportunamente disseca il *gelo* all'aria libera, poichè è noto, che a 100° si elimina anche l'acqua chimicamente combinata. D'altra parte però l'esclusivo trattamento con HCl trasporta una parte della silice in soluzione, non essendo praticamente possibile raggiungere il punto esatto di decomponibilità, perchè un difetto di questo porterebbe ad un conseguente aumento di silice, un eccesso, al passaggio della silice come idrosole. Per cui è da preferirsi il metodo da me accennato quantunque anche questo non si mostri scevro di inconvenienti. Per ottenere risultati esatti bisognerebbe essicare a 110° indi riprendere con HCl e portare di nuovo a secchezza, ma in questo modo verrebbe modificata l'intima costituzione del *gelo* per cui il metodo non si mostra atto alle indagini in questione. Nel calcolo delle ultime analisi tenni conto del residuo delle impurezze, ottenute in seguito a trattamento delle silici con HF ed alcune gocce di H₂ SO₄, residuo che si mostrò variare dal 1,3 ad 1 %.

— Secondo le più accurate analisi per la *olivina* si ottengono risultati rispondenti alle formole (Mg Fe)₂ Si O₄.

Hillebrand (1) le attribuisce il seguente diagramma:



Rilevo però, con l'*Artini*, che simili presupposti strutturali, allo stato attuale delle nostre ricerche, sono da ritenersi ipotetici. È indubbio che l'*olivina* debba ritenersi come un ortosilicato, ora, i risultati da me ottenuti molto si scostano da quelli dell'acido ortosilicico e neppure si accordano quelli riportati dallo *Tschermak*, per i quali l'*olivina* do-

(1) *Zeitschrift für Krystallographie und mineralogie* 1908.

vrebbe ritenersi come un vero e proprio metasilicato derivante da $\text{Si O}_2 \cdot \text{H}_2 \text{O}$. Il metodo proposto, portando a risultati errati non può essere preso a base di ricerche e giova rilevare ancora che maggiori differenziazioni si otterrebbero qualora si riuscisse a separare perfettamente la silice, poichè nel rapporto $\text{Si O}_2 : \text{H}_2 \text{O}$ si avrebbe maggiore prevalenza di Si O_2 . Queste considerazioni unite a quelle riflettenti i fenomeni di assorbimento fanno brillare le concezioni dello Zambonini (1) secondo cui la costituzione dei silicati complessi non può desumersi dalla valutazione dei rispettivi *geli*. — Al microscopio i singoli *geli* si mostrano isotropi, presentano però plaghe con distinta birifrangenza.

Rinne (2) osservò che alcuni silicati zeolitici, quale la *heulandite*, la *bavenite*, la *desmina*, l' *armotomo*, in seguito a decomposizione con HCl formano *idrogeli* di SiO_2 con evidenti fenomeni di polarizzazione, che questa si manifesta nettamente dopo la calcinazione, e ne riferisce la causa ad una anomalia ottica.

Io attribuisco il fenomeno di polarizzazione al fatto *che le diverse parti del gelo hanno una differente densità, subordinatamente al diverso contenuto in acqua che offrono in causa di una non uniforme disidratazione, infatti, questa si mostra più sensibile in principio che verso la fine, quanto più si spinge lo stato di secchezza.*

Circa al fenomeno che si verifica dopo la calcinazione trovano valida conferma i fatti e le ragioni ammesse da Rinne, però le proprietà ottiche che si riscontrano nei *geli*, *non possono riferirsi alla particolare struttura del silicato originario* e in questo punto, secondo le mie vedute, si mostrano manchevoli le osservazioni di Rinne, il quale senza addentrarsi particolarmente sulle cause determinanti il fenomeno intravede un'intima relazione: *Con quel rigore che è proprio delle osservazioni chimiche e fisiche ne escludo decisamente qualunque rapporto.*

Il complesso delle esperienze eseguite mi portano a concludere che *a seconda della natura del silicato originario, del modo di formazione, i GELI mostrano varia struttura fisica cui essenzialmente è subordinato il contenuto in acqua la quale è indipendente da qualunque stato di combinazione chimica; essi ubbidiscono alle leggi generali della evaporazione, conseguentemente, GELI ottenuti nello stesso modo, mantenuti nelle stesse identiche condizioni di temperatura, di pressione con la stessa superficie evaporante, forniscono le stesse percentuali di SiO_2 e di H_2O e mano mano che si verificano divergenze fra i fattori sopracennati, si ottengono maggiori differenze nella costituzione chimica; se lievi tali divergenze poco dissimili le formole che ad essi si convergono.*

Per mio conto sono lungi dal porre in dubbio le ultime osservazioni del grande mineralogo viennese e le divergenze poste in evidenza rimangono con quanto è sopra detto facilmente spiegate. Se lo Tschermak avesse pazientemente soffermato la sua attenzione sulla *leucite* ordinando meglio le sue esperienze, estendendole a parecchie temperature, a molteplici concentrazioni dell'acido attaccante, sarebbe al certo giunto a conclusioni ben diverse che lo avrebbero indotto ad abbandonare il prescelto indirizzo, a riconoscere la fondatezza delle obiezioni mossegli. Mi duole di non poter essere deferente all'autorità

(1) ZAMBONINI loco cit.

(2) RINNE: *Die Lockerung des Krystallgebäudes, von Zeoliten unter dem Einfluss von Salzsäure. Centralblatt für Mineralogie* 1902.

dell'eminente scienziato : di fronte a dati numerici non è lecito transigere. Le divergenze rilevate con le mie esperienze si spiegano con la oscillante composizione del silicato esaminato, con le diverse condizioni in cui si sperimentò. Le analisi segnalano infatti per la *leucite* forti differenziazioni nella proporzione della silice la quale può variare dal 42,18 % al 63,84 % (1) e la rispondenza dei valori voluti, in condizioni disparate di temperatura e di pressione, non si può che attribuire a compensazioni puramente fortuite e neanche *Tschermak* l'ottiene in modo assoluto, ma entro determinati limiti non comportabili dalle formole che rigorosamente possono calcolarsi.

Mi par di avere così esaurientemente assolto il mio compito notando che i risultati attualmente ottenuti sottraggono da ogni pericolo di confusione, per cui la dottrina del *Tschermak*, al riguardo, deve essere senz'altro respinta e nella mineralogia non può lasciare altro tempo che quello trovato.

Soprattutto mi preme rilevare come i risultati non devono essere travisati, toccando di volo i punti salienti dell'argomento ed interpretando erroneamente coincidenze puramente casuali: solo da un accurato studio, dalla rigida comparazione dei fatti osservati scaturisce il vero.

(1) HINTZE: *Handbuch der Mineralogie. Silicate und Titanate* Seite 1312, Leipzig 1897.

Istituto di Materia Medica della R. Università di Catania
(Direttore Prof. F. A. FODERÀ)

**Alterazioni della cellula nervosa nell'ipertermia sperimentale
e nel colpo di calore**

NOTA PREVENTIVA
del Dott. GIUSEPPE CONSOLI
(con una Tavola)

RELAZIONE

DELLA COMMISSIONE DI REVISIONE COMPOSTA DEI SOCI EFFETTIVI
PROFF. A. RUSSO E F. A. FODERÀ

Le ricerche presentate dal Dott. Giuseppe Consoli portano un pregevole contributo istologico alla dottrina della identità patogenetica del colpo di calore e della ipertermia. La Commissione le crede pertanto degne di essere pubblicate negli Atti Accademici.

Le presenti ricerche datano dall'agosto 1914. Furono iniziate allo scopo di portare un contributo alla conoscenza del meccanismo patogenetico del colpo di calore, argomento ancora assai controverso malgrado le numerose ricerche eseguite e le molteplici teorie messe avanti dai vari sperimentatori.

Non essendomi stato possibile continuarle, perchè impegnato prima nel servizio sanitario militare al fronte, e poi per le speciali condizioni di salute in cui mi sono trovato, nè essendo tuttora in grado di farlo secondo il programma che mi ero proposto, stimo utile di far conoscere per il momento le alterazioni da me riscontrate nelle cellule nervose degli animali sottoposti ad ipertermia sperimentale ed all'azione diretta dei raggi solari.

Premetto una rapida rassegna della letteratura esistente sull'argomento.

* *

Le prime ricerche istologiche sui centri nervosi nel colpo di calore risalgono al 1897, nel quale anno *Goldescheider e Flatau*, servendosi del metodo Nissl, studiarono e descrissero le lesioni provocate nei centri nervosi di conigli dal soggiorno in termostato a 45°.

In seguito varii altri autori indagarono le alterazioni del sistema nervoso tanto sugli animali sottoposti ad elevazioni artificiali di temperatura, quanto su quelli esposti all'azione diretta dei raggi solari.

Tra gli AA. che studiarono le alterazioni dell' elemento nervoso per riscaldamento artificiale, oltre *Goldescheider* e *Flatau* già citati, vanno principalmente ricordati *Lugaro*, *Marinesco*, *Alessi* e *Pieri*, *Scarpini*, *Lassagna*, *Rigotti*, *Omorokovv*.

Goldescheider e *Flatau* notarono che nel determinismo delle alterazioni delle cellule nervose due fattori hanno importanza fondamentale: *il grado di elevazione termica*, che deve oltrepassare i 43° perchè le lesioni appariscano, e *la durata della ipertermia*.

Mantenendo dei conigli in termostato a 45° per due ore, essi trovarono che le cellule delle corna anteriori erano aumentate di volume, omogenee e senza alcuna traccia dei corpuscoli di Nissl. Il nucleo non presentava la nettezza normale; il nucleolo appariva con contorni frastagliati; i dendriti erano tumefatti e colorati in bleu pallido; il cilindrase mostravasi finamente granuloso.

Lugaro, tanto nelle cellule motrici che nelle cellule cordonali e dei gangli spinali di conigli sottoposti ad elevazione di temperatura oltre i 43°, constatò: disgregazione e dissoluzione della sostanza cromatica; integrità della sostanza acromatica fibrillare, della membrana e del reticolo nucleare e dei prolungamenti dendritici e nervosi; diminuzione di colorazione della parte acidofila del nucleo. Fece rilevare che tali lesioni non variavano da una cellula all'altra, ma interessavano tutte le cellule nello stesso grado.

Marinesco, ripetendo le esperienze dei precedenti ricercatori, osservò che la intensità della lesione e la quantità delle cellule alterate nella ipertermia sperimentale erano in rapporto con la elevazione della temperatura e con il tempo di sopravvivenza dell' animale.

Egli vide che con una temperatura rettale di 47° gli animali non vivono oltre i 35' e che nel loro midollo si riscontra sola cromatolisi periferica più o meno completa. Con una temperatura invece di 45° gli animali vivono più a lungo, la cromatolisi si estende dalla periferia al centro della cellula, la dissoluzione della sostanza cromatica diviene completa, il corpo cellulare ed i prolungamenti assumono una tinta diffusa, carica, talmente intensa da riuscire impossibile lo studio della fine struttura del citoplasma.

Quanto al meccanismo con cui nella ipertermia sperimentale si producono le lesioni sudette, il *Marinesco* paragona la cellula nervosa ad una sfera sottoposta all'azione di una sorgente di calore. " Il est facile, egli scrive, de comprendre que cette action se fera " sentir tout d'abord à la périphérie, tandis que les couches profondes mieux abritées ne " souffriront des effets de la chaleur que si son action se continue. C' est ce qui ar- " rive en pratique. Nous avons vu, en effet, que chez les animaux qui sont morts rapi- " dement avec une température de 44° a 47° on ne trouve qu' une lésion limitée à la " périphérie de la cellule. La persistance de l'élévation de température détermine des mo- " difications profondes dans la construction de substances albuminoïdes que j'ai rappor- " portées à la coagulation. Cette opinion se trouve confirmée par les recherches de *Ha-* " *liburton*. En effet, cet auteur a décrit dans le protoplasma nerveux trois substances " protéiques :

" 1° Une neuroglobuline qui se coagule a 116,6 F (47°).

" 2° Une substance nucleoprotéique coagulable a 132,8 F (56°).

" 3° Une neuroglobuline qui se précipite à 167 F (75°). Ce trois corps peuvent être " séparés l'un de l'autre par la coagulation fractionnée. „

Alcuni anni più tardi (1904-1905) *Marinesco* studiò pure l' influenza delle variazioni di temperatura sullo stato delle neurofibrille. Egli vide che il reticolo delle cellule nervose è eccessivamente sensibile ai cambiamenti di temperatura. Sottoponendo piccoli animali,

cani e gatti, a temperature di 8°—10° sino a 30° per tre ore il *Marinesco* rilevò che, a misura che la temperatura aumenta, le neurofibrille diventano più fine; che a 10° si produce la loro coalescenza ed anche la loro ipertrofia, la quale può persistere sino alla temperatura di 15°, ma che scompare negli animali riscaldati a 30°.

Quasi nella stessa epoca *Tello*, per controllare la ipotesi del *Cajal* secondo cui le neurofibrille ipertrofiche, riscontrate nei rettili durante l'inverno, costituirebbero una modificazione morfologica secondaria dovuta all'azione del freddo e ad una diminuzione notevole dei riflessi midollari, sottopose delle lucertole per due o tre giorni ad una temperatura variabile da 37° a 25°. In tutti i casi osservò che le neurofibrille ispessite erano scomparse per far posto ad un numero considerevole di fibrille fini e che il corpo cellulare era aumentato leggermente di volume.

Alessi e Pieri facendo circolare, a mezzo di un dispositivo speciale, soluzione fisiologica a temperature varie nei vasi cerebrali, osservarono cromatolisi periferica, addensamento, vacuolizzazione del protoplasma, rigonfiamento del nucleo, ipercolorazione del nucleolo, varicosità, dilatazioni e spezzettature nei prolungamenti dendritici.

Scarpini, studiando le alterazioni della cellula nervosa con il metodo *Donaggio* negli animali tenuti in termostato alla temperatura di 44°—45°, trovò condensazione delle maglie del reticolo, frammentazione, tortuosità delle neurofibrille ed anche la loro completa disintegrazione granulosa (negli animali morti in termostato).

Il nucleo si presentava omogeneo, con bordi dentellati, per la presenza di corpuscoli semilunari perinucleari, mentre il nucleolo mostravasi a contorni irregolari ed aveva spesso dei corpuscoli alla sua periferia.

Lassagna, servendosi del metodo di *Cajal*, ottenne reperti quasi identici a quelli di *Scarpini*. Nelle cellule nervose di animali rimasti lungo tempo nella stufa, oltre la disintegrazione del reticolo, per la dissoluzione granulosa delle neurofibrille, riscontrò formazione di vacuoli e forte impregnazione e rigonfiamento del nucleo.

Rigotti, adoperando il metodo di *Donaggio*, modalità 3^a, ed il metodo *Besta*, ebbe reperti concordanti perfettamente con quelli del *Donaggio* nella insolazione, ma alquanto differenti da quelli di *Scarpini* e di *Lassagna*, pur avendo adoperato le medesime temperature. Il *Rigotti* infatti nelle cellule del midollo spinale di animali tenuti in termostato a temperature diverse, sia costanti che crescenti, osservò sconvolgimento del reticolo, assottigliamento, tortuosità, scarsa colorazione delle neurofibrille, inversione della tingibilità del protoplasma; non vide mai disgregazione granulosa e distruzione delle neurofibrille.

Omorokow ha studiato recentemente le modificazioni delle cellule nervose, delle fibre nervose, delle cellule nevrogliche, nella ipertermia sperimentale. Nel sistema nervoso di conigli sottoposti alla temperatura di 43° ha riscontrato: alterazione delle cellule gangliari con l'aspetto di una malattia cellulare acuta del *Nissl*, a forma non grave, vacuolizzazione, ingrossamento, trasformazione ameboide delle cellule nevrogliche, alterazione della colorabilità, della forma, e riduzione in granuli delle fibre nervose. Ha osservato ancora rigonfiamento dell'endotelio dei capillari, iperemia ed emorragie sia nella sostanza bianca, che nella grigia.

Tra gli AA., che si sono occupati delle alterazioni degli elementi nervosi negli animali esposti all'azione diretta dei raggi solari, devonsi principalmente ricordare *Scagliosi*, *Marinesco*, *Donaggio*, *Amato*.

Scagliosi, servendosi di animali esposti al sole per un tempo più o meno lungo nei

mesi di Agosto e Settembre, trovò alterazioni varie del sistema nervoso, che si stabilivano con la stessa progressione già rilevata da *Goldescheider* e *Flatau* nella ipertermia sperimentale. Le alterazioni erano precoci ed intense negli elementi corticali del cervello, nei nuclei grigi e nelle cellule del Purkynie; più tardive e meno intense nelle corna anteriori del midollo spinale. Consistevano in: dissoluzione della cromatina fino alla completa cromatolisi; raggrinzamento e vacuolizzazione del protoplasma; rigonfiamento, deficiente colorazione, spostamento del nucleo e mancanza di nettezza del contorno nucleare; vacuolizzazione, colorazione parziale, deformazione dei nucleoli, i quali talora si mostravano muniti di vere sporgenze.

Marinesco fece uso per le sue ricerche di animali neonati: cani, gatti, conigli e cavie. Negli animali che espose al sole durante i mesi di luglio ed agosto, e che morivano dopo 45' a 60' di esposizione con una temperatura rettale di 46°—47°, trovò sempre congestione e diminuzione di consistenza dei centri nervosi all'esame macroscopico, e lesioni delle cellule nervose, rassomiglianti a quelle prodotte con la ipertermia sperimentale, all'esame istologico. Le lesioni osservate nelle cellule del cervello, del bulbo, del midollo e dei gangli, più o meno gravi anche secondo la specie dell'animale, furono: dissoluzione granulosa dei corpuscoli di Nissl; frammentazione e disorganizzazione della periferia cellulare; presenza di vacuoli e di fessure nel citoplasma, rigonfiamento del nucleo, mancanza del reticolo nucleare; vacuolizzazione del nucleolo; varicosità, rottura, frammentazione dei prolungamenti; mancanza di nettezza del reticolo, aspetto pallido delle sue maglie, talora disorganizzazione del reticolo, disintegrazione granulosa ed anche degenerazione delle fibrille.

Nei cani neonati esposti al sole meno ardente di Settembre, ripetendo e prolungando la durata dell'esposizione, *Marinesco* riscontrò: pallore, frammentazione e disintegrazione della sostanza cromatofila; tumefazione del corpo cellulare e del nucleolo; mancanza di nettezza del contorno del nucleo. Il reticolo endocellulare si presentava però con aspetto normale: solo le sue maglie erano alquanto dilatate. Nelle suaccennate condizioni di esperienza l'A. osservò che la temperatura dell'animale si elevava notevolmente, malgrado che quella del mezzo ambiente non fosse così alta.

Come causa delle alterazioni riscontrate, rilevando l'analogia dei reperti avuti nell'insolazione con quelli del soprariscaldamento artificiale, il *Marinesco* nota che " l'insolation, " augmentant la temperature de l'animal d'une façon considerable, on est conduit à ad- " mettre que la cause principale des lésions de l'insolation est l'hyperthermie. Peut-etre y " aurait-il quelques réserves à faire à cet égard. En effet, les radiations solaires, en de- " hors des rayons de chaleur et des rayons lumineux que sont pénétrants et par consé- " quent arrivent jusqu'au système nerveux central par l'intermédiaire du sang, contiennent " aussi des rayons chimiques ou actiniques. „

Pertanto, per vedere se i raggi chimici avessero parte nella produzione delle gravi lesioni riscontrate nell'insolazione, il *Marinesco* fece, insieme al *Minea*, ricerche speciali, che però non gli diedero risultati ben netti. Tuttavia Egli ritenne che gli accidenti gravi e la morte per insolazione non potessero dipendere dal solo fattore *ipertermia*, a cui però senza alcun dubbio deve attribuirsi una influenza predominante. La ipertermia infatti determina gravi alterazioni nella vita elementare di tutte le cellule dell'organismo, e più specialmente del sistema nervoso.

" On pourrait dire que la mort dans l'insolation serait due à la suppression de la

“ vie élémentaire des cellules de l'organisme et spécialement des cellules nerveuses qui sont les plus sensibles à l'action de la chaleur. (*Marinesco*).

Donaggio, nei cani e nei conigli morti per azione diretta dei raggi solari, trovò che la rete endocellulare degli elementi nervosi non era distrutta, ma soltanto divenuta straordinariamente fitta e costituita da fili molto più esili del normale. Il fondo appariva lievemente ipercolorato.

Amato, servendosi di conigli adulti che esponeva al sole nei mesi di Luglio ed Agosto, sino a determinarne la morte, trovò alterazioni cellulari di varia intensità nei singoli elementi del sistema nervoso centrale. Riscontrò una maggiore vulnerabilità degli elementi corticali, specialmente delle piccole cellule piramidali. Le alterazioni da lui messe in rilievo furono: cromatolisi, vacuolizzazione del protoplasma, rigonfiamento e deformazione del nucleo, modificazioni del nucleolo. Alle modificazioni del nucleolo, già osservate da precedenti ricercatori, l'*Amato* attribuì speciale importanza per la patogenesi dell'insolazione, ritenendole caratteristiche del colpo di sole, e dipendenti dall'azione dei raggi violetti ed ultra-violetti.

“ Il nucleo, egli scrive, già ad un esame superficiale si presenta deformato; ed infatti ora presenta alla sua periferia delle sporgenze rotondeggianti, ora a guisa di spine, ed ha assunto forma ora triangolare, ora quadrangolare, ora poligonale, ora manda come dei prolungamenti, o presenta altri aspetti singolarissimi. Ad un esame più accurato, si può rilevare che le parti centrali di esso hanno assunto un colore sbiadito, mentre alla periferia spiccano nettamente delle piccole zolle rotondeggianti, che appaiono disposte variamente, e che hanno assunto intensamente la tionina. Ho potuto anche notare che qualcuna di queste piccole zolle si allontana talvolta dalle altre, accompagnata da un prolungamento della porzione meno colorata del nucleolo, e che le zolle possono anche staccarsi restando libere nel corpo nucleare, dove si disgregano rapidamente riducendosi in piccoli granuli, tanto da non potersi osservare più in qualche cellula il nucleolo caratteristico, mentre si può notare nell'interno del nucleo la presenza di piccoli granuli in numero vario, colorati intensamente e che spiccano bene sul fondo nucleare. „

L' *Amato* dimostrò pure alterazioni varie delle neurofibrille, specialmente nella corteccia cerebrale, ove esse si mostravano ora ispessite ed addensate in tutto od in parte dell'elemento, ora sfioccate e sfibrillate (ciò specialmente nel prolungamento apicale), ora in preda ad una vera disgregazione granulosa. In molte cellule le neurofibrille erano ispessite ed addensate attorno al nucleo, mentre alla periferia esse apparivano irregolari, spezzettate, limitate da vacuoli e frammiste a granuli risultanti dal loro disfacimento; altre volte mostravansi ispessite ed addensate in maniera tale da non potersi distinguere più l'una dall'altra. Oltre che sugli animali, non sono mancate ricerche anche su materiale umano, là dove esse furono possibili.

Così il *Silvagni*, servendosi del metodo Nissl, del metodo Apathy e dei metodi comuni di colorazione con l'emallume ed il carmallume, studiò le lesioni istologiche dei centri nervosi di uomini deceduti sotto l'azione diretta dei raggi solari. Le più importanti alterazioni riscontrate dall'A., morfologicamente uguali a quelle provocate artificialmente negli animali, furono: cromatolisi in tutte le sue varietà; vacuolizzazione, retrazione e sfrangiamento del corpo cellulare, che in alcuni esemplari mostravasi invece rigonfio, quasi vescicoloso; decentramento, deformazione, picnosi, rigonfiamento del nucleo con cariolisi; atrofia, frequente mancanza, scontinuatione dei prolungamenti dendritici.

Il *Silvagni* riscontrò ancora molti elementi ridotti ad un ammasso reticolare od amor-

fo, contenuto in uno spazio pericellulare ampliissimo, in cui a volte si poteva vedere un vestigio di nucleo, a volte non si notava che qualche zolla cromatica intensamente tinta, ed iniezione dei vasi venosi e dei capillari. Le lesioni erano assai notevoli nella corteccia cerebrale, nei nuclei grigi del ponte e del bulbo.

Altri sperimentatori, *Dejerine, Goldscheider e Flatau, Goldscheider e Brasch, Juliusburger e Meyer, Brasch, Mott*, hanno pure studiato le lesioni del sistema nervoso centrale di individui morti in seguito a malattia accompagnantesi con considerevole elevazione termica.

Tutti questi *AA.*, specialmente nei casi in cui la temperatura aveva raggiunto i 41° e vi si era mantenuta per alcune ore, trovarono lesioni paragonabili a quelle riscontrate nella ipertermia sperimentale, ed alcuni di essi (*Juliusburger e Meyer*) vennero alla conclusione che le lesioni del sistema nervoso centrale nelle malattie infettive febbrili sono attribuibili in blocco all'aumento di temperatura.

Giustamente però il *Marinesco* rileva a questo proposito che “ on ne peut pas identifier l'hyperthermie expérimentale a la fièvre. En effet, la fièvre chez l'homme est due a l'action d'un agent infectieux toxique ayant pénétré dans le torrent circulatoire. Or, il est bien connu aujourd'hui que la plupart des agents toxiques ou infectieux sont capables d'impressionner et de changer la constitution chimique de la cellule nerveuse.

“ Donc, on ne doit pas attribuer tout simplement à l'état fébrile les lésions trouvées dans l'hyperthermie et on doit savoir distinguer ce qui appartient aux agents toxiques ou infectieux et ce qui revient à l'hyperthermie. „

* * *

Dalla succinta esposizione fatta risulta chiaramente che, mentre la maggioranza degli *AA.* concordano nell'ammettere che le lesioni del sistema nervoso di animali sottoposti ad ipertermia sperimentale non differiscono da quelle che si hanno per l'azione diretta dei raggi solari, e che quindi non appare giustificata la distinzione fra colpo di calore ed insolazione basata esclusivamente sulle alterazioni istologiche del sistema nervoso, qualche *A.* invece ritiene che le alterazioni differiscano nei due casi, e che anzi debba ad esse riconoscersi carattere specifico.

L' *Amato* infatti ritiene che il reperto nucleolare da lui riscontrato sia dipendente dall'azione dei raggi violetti ed ultravioletti e che debba considerarsi come caratteristico della insolazione, per la quale egli ammette un meccanismo patogenetico speciale, ben diverso da quello del colpo di calore. Conforta la sua ipotesi ricordando i reperti identici riscontrati dal *Donzello*, nel midollo spinale in seguito all'azione dei raggi.

Dall'esposizione letteraria risulta ancora che mentre qualche ricercatore (*Lugaro*) mette in rilievo il fatto che nella ipertermia sperimentale la lesione cellulare è diffusa ed interessa tutte le cellule allo stesso grado (contrariamente a quanto si osserva nelle affezioni generali che si accompagnano a lesioni delle cellule nervose, in cui la lesione varia da una cellula all'altra), altri ricercatori invece mettono in rilievo alterazioni di varia intensità, di grado differente, nei diversi elementi cellulari.

Risulta infine che, mentre alcuni *AA.* rilevano, sia nella insolazione che nella ipertermia sperimentale, alterazioni varie a carico del reticolo endocellulare, sino ad aversi, nei gradi più spinti di lesione, dissoluzione granulosa completa delle neurofibrille e disorganiz-

zazione del reticolo, altri *AA.* invece (*Donaggio, Rigotti*) affermano la resistenza del reticolo all'azione dei raggi solari ed al soprariscaldamento artificiale: le neurofibrille, in ogni caso, non rimarrebbero mai distrutte, non andrebbero mai incontro alla disgregazione granulosa.

.

Come rilevasi dal titolo di questa comunicazione, le mie ricerche riguardano tanto la ipertermia sperimentale, che l'azione diretta dei raggi solari.

Nell'uno e nell'altro caso, come animali da esperimento, mi son servito di cavie di piccola taglia e di ratti bianchi. Mi son servito pure del sistema nervoso di diversi ratti gentilmente cedutomi, assieme ai relativi protocolli di esperienze, dal capitano medico *Dr. Gangi*, il quale ha fatto uno studio accurato, pregevolissimo del colpo di calore. A lui porgo qui i più affettuosi ringraziamenti.

Per la constatazione delle lesioni prodotte dalla ipertermia sperimentale, mi son servito del sistema nervoso di animali tenuti sia in termostato a temperatura crescente da 30° a 42° ed oltre, sia in termostato regolato direttamente a tali alte temperature.

Degli animali di esperienza, alcuni si lasciavano morire in termostato, altri venivano sacrificati a diversi intervalli di tempo per rapido dissanguamento. In ogni caso, appena morto l'animale, si prelevava il sistema nervoso per le opportune ricerche. Di alcuni animali, oltre il sistema nervoso, venivano contemporaneamente prelevati pezzetti dei varii organi e tessuti per farne poi oggetto di indagini speciali.

Nei reperti, oltre che della temperatura del termostato, venne tenuto conto della permanenza in esso degli animali e rispettivamente della sopravvivenza, e della temperatura rettale da essi raggiunta.

Per studiare le alterazioni della cellula nervosa nell'insolazione, mi son servito del sistema nervoso di animali lasciati esposti all'azione del sole nel mese di Agosto e nella prima metà di Settembre, sino a provocarne la morte.

L'esposizione al sole veniva fatta in due modi diversi: 1°). Tenendo la sola testa dell'animale esposta al sole, mentre il corpo rimaneva all'ombra. 2°). Tenendo il corpo dell'animale esposto al sole dalla superficie ventrale, mentre la testa restava in ombra. In entrambi i casi l'animale era sempre costretto all'assoluta immobilità mediante fissazione su di un asse.

Evidentemente, mentre nella prima modalità di esperienza si hanno associati gli eventuali effetti della ipertermia e della diretta azione dei raggi solari sul sistema nervoso, nella seconda modalità il sistema nervoso non può risentire che gli effetti della ipertermia.

Come per il soprariscaldamento artificiale, anche per l'insolazione venne tenuto conto della durata in vita e della temperatura rettale dell'animale in esperienza. Tanto l'una che l'altra variarono nei singoli animali. Senza entrare in minuti dettagli, che riservo al lavoro di insieme, dirò che gli animali esposti con la sola testa al sole sopravvissero molto di più di quelli esposti con la testa all'ombra ed il resto del corpo al sole. La sopravvivenza media fu nei primi di 3 1/2 a 4 ore, nei secondi di un'ora appena.

In tutte le esperienze, appena morto l'animale, veniva prelevato il sistema nervoso, con tutte le precauzioni possibili, e lo si divideva nei suoi varii segmenti, per studiarlo poi con gli opportuni mezzi di indagine tecnica, di cui ora dirò. In alcuni casi venivano

contemporaneamente prelevati pezzetti dei vari organi e tessuti per opportune ricerche che mi riservo di comunicare in seguito.

* * *

Delle diverse parti di cui risulta costituito il sistema nervoso, io ho studiato il comportamento delle cellule nervose della corteccia cerebrale, del cervelletto, del bulbo e del midollo spinale. Ho pure studiato il comportamento della neuroglia protoplasmatica.

Per la tecnica istologica mi sono avvalso:

1.) Del metodo Nissl-Boccardi per lo studio della sostanza cromatica e della neuroglia protoplasmatica. Tale metodo, come fa rilevare il *Pandolfi*, dà sempre buoni risultati anche per lo studio della neuroglia protoplasmatica. Vero è che non è elettivo per la neuroglia, ma lo stesso rimprovero può farsi anche ai cosiddetti metodi protoplasmatici.

2.) Del metodo Cajal lievemente modificato secondo le indicazioni date dal *Cutore* nel lavoro: "Modificazioni strutturali delle cellule motrici del midollo spinale durante il letargo — *Archivio italiano di Anatomia ed Embriologia*. Vol. VII, 1908.

3.) Del metodo Donaggio modalità 1^a e 3^a per lo studio del reticolo endocellulare.

4.) Del metodo 6^o di Alzheimer per la dimostrazione dei corpuscoli fucsiofilii.

Per amor di brevità tralascio di riferire i vari protocolli delle mie esperienze ed i relativi reperti anatomo-patologici; ciò sarà fatto nel lavoro completo.

Per il momento preferisco descrivere, nel loro insieme e nella loro evoluzione, le alterazioni riscontrate nelle diverse condizioni sperimentali, per avere così una visione sintetica delle lesioni cellulari che si producono nella ipertermia sperimentale e nella insolazione.

Ipertermia sperimentale.

Nel sistema nervoso di cavie morte in seguito a soprariscaldamento artificiale, si riscontrano alterazioni varie, di diversa intensità, a carico della sostanza cromatica, del reticolo, del nucleo e del nucleolo e dei prolungamenti.

Con il metodo Boccardi infatti si riscontrò: polarizzazione della sostanza cromatica; cromatolisi in diversi stadii, sino alla dissoluzione completa dei corpuscoli di Nissl; retrazione e sfrangiamento del corpo cellulare, che in alcuni esemplari mostrasi invece rigonfio; vacuolizzazione, presenza di fessure nel citoplasma; disgregazione molecolare, talora limitata alla periferia, per cui la cellula si vede per un certo tratto disorganizzata, quasi priva di contenuto, talora estesa a tutta la cellula, di cui si notano solo informi avanzi, talora sforniti di nucleo, o con nucleo anch'esso alterato.

Si è notato altresì: mancanza di colorazione dei prolungamenti, tortuosità, spezzature degli stessi prolungamenti; rigonfiamento del nucleo, talora accompagnato da carioli e con la presenza di uno o più vacuoli; rigonfiamento e frequente migrazione periferica del nucleolo, che in numerosi esemplari mostrasi a contorni irregolari, per la presenza di sporgenze periferiche, rotondeggianti, piriformi od a guisa di raggi. Tali sporgenze appaiono più colorate della porzione centrale del nucleo, sono in numero vario, si mostrano variamente disposte, talora distaccate dal margine nucleolare restando libere nel nucleo, od attaccate al margine nucleolare a mezzo di un tratto esilissimo, debolmente

colorato. In alcuni esemplari inoltre il nucleolo mostrasi diviso in diversi frammenti, sparsi per il nucleo, su cui spiccano per la loro intensa colorazione.

Il reperto nucleolare sopradescritto presenta grande analogia con quello riscontrato dall'*Amato* nell'insolazione, e da lui ritenuto specifico per tale condizione morbosa.

Oltre le alterazioni sopradette, sempre con il metodo Boccardi, si son notati alcuni esemplari con aspetto omogeneo, di colore oscuro, con pochi granuli di cromatina disposti alla periferia e con nucleo uniformemente tinto, rimpicciolito, circondato da un alone chiaro.

Con i metodi Cajal e Donaggio si è riscontrato: sconvolgimento del reticolo; scarsa colorazione, assottigliamento, spezzettamento, disintegrazione granulosa delle neurofibrille.

La disintegrazione granulosa talora è circoscritta ad alcune neurofibrille soltanto, cosicchè la cellula conserva ancora la sua struttura reticolare, in altri esemplari invece è completa, cosicchè il loro reticolo appare disorganizzato, trasformato in un ammasso di granuli.

Con il metodo VI° di Alzheimer si riscontrò aumento di numero e di volume dei corpuscoli fucsino-fili assumenti generalmente la forma di granuli più o meno voluminosi, sparsi pel protoplasma.

Nella nevroglià protoplasmatica furono riscontrate alterazioni del tipo regressivo, e cioè vacuolizzazione e rigonfiamento del nucleo, vacuolizzazione del protoplasma, trasformazione in cellule granulo-adipose. Fu notata la presenza di cellule a bastoncello.

Le alterazioni sopradescritte furono riscontrate nel sistema nervoso di cavie morte con temperatura rettale di 42° dopo un'ora e mezza a due ore di permanenza in termostato regolato a 41.5°, 42°.

Nel sistema nervoso di cavie morte in termostato dopo una permanenza di circa tre ore alla temperatura di 41°—42° si rilevò una maggiore estensione delle lesioni sopra notate; si potè osservare infatti che era maggiore il numero degli elementi in preda a dissoluzione completa dei corpuscoli di Nissl, a disgregazione molecolare ed a disintegrazione granulosa delle neurofibrille con disorganizzazione del reticolo.

Nel sistema nervoso di cavie sacrificate dopo un breve periodo di permanenza (1/2 ora in media) in termostato, o morte dopo 30' o poco più di esposizione a temperature più elevate (45°—46°), le lesioni apparivano meno estese, meno intense; la cromatolisi era solo parziale; il reticolo non si mostrava disorganizzato; la disgregazione molecolare colpiva solo scarsi elementi.

Alterazioni analoghe a quelle osservate nelle cavie, a prescindere da lievi differenze individuali, furono riscontrate nel sistema nervoso di ratti bianchi, esposti a soprariscaldamento artificiale e sacrificati, o morti, con temperature rettali di 40°—41.5° dopo circa 50' a 60' di permanenza in termostato.

In tali animali però non fu riscontrato il caratteristico reperto nucleolare descritto nelle cavie; solo in qualche esemplare il nucleolo presentava delle piccole sporgenze, ma non bene distinte, non molto marcate, così da poterle segnalare come uno speciale reperto.

Anche nei ratti, sacrificati o morti in termostato dopo breve periodo di esposizione, fu rilevato lo stesso rapporto, già riscontrato nelle cavie, tra intensità ed estensione delle lesioni e tempo di sopravvivenza dell'animale in esperienza.

In tutti gli animali intanto sottoposti ad ipertermia sperimentale le lesioni cellulari furono riscontrate tanto nel cervello che nel cervelletto, nel bulbo e nel midollo spinale, nelle quali regioni, insieme alle alterazioni istologiche descritte, fu pure riscontrata dilatazione e forte replezione dei vasi sanguigni.

Le maggiori alterazioni però furono riscontrate nelle cellule della corteccia cerebrale, soprattutto nelle piccole cellule piramidali e nel bulbo.

Insolazione.

Nel sistema nervoso di ratti morti con temperatura rettale di 42.5° — 43° dopo tre ore e mezza in media di esposizione all'azione diretta dei raggi solari sulla testa, restando il corpo in ombra (mese di Agosto). si riscontrarono alterazioni varie a carico delle cellule nervose.

Col metodo Boccardi fu notato: cromatolisi in diversi stadii sino alla completa dissoluzione dei corpuscoli di Nissl; vacuolizzazione; raggrinzamento del protoplasma, disgregazione molecolare ora limitata alla sola periferia della cellula, ora estesa a tutto il citoplasma; frequente mancanza e spezzettature dei prolungamenti protoplasmatici; rigonfiamento del nucleo talora con cariolisi; tumefazione e migrazione periferica del nucleolo, che spesso si mostra munito di varie sporgenze, talora ridotto in diversi frammenti sparsi nel carioplasma.

Con i metodi Cajal e Donaggio fu rilevato: mancanza di nettezza del reticolo, spezzettamento, deficiente colorazione, assottigliamento delle neurofibrille, che nei gradi più spinti di lesione si mostrarono pure in istato di disintegrazione granulosa ora circoscritta, ora completa, con conseguente disorganizzazione del reticolo.

Con il metodo VI° di Alzheimer fu riscontrato aumento di numero e di volume dei granuli fucsino-fili.

Anche nella nevrogliia furono riscontrate le alterazioni del tipo regressivo tanto a carico del nucleo che del protoplasma. Fu pure notata la presenza di cellule a bastoncino.

Le alterazioni sopradescritte presentano la più grande analogia, anche per quanto riguarda la loro ubicazione, con quelle riscontrate negli animali sottoposti a riscaldamento artificiale. Esse presentarono pure lo stesso comportamento cronologico sia nel modo di svolgersi, sia nel loro intensificarsi in rapporto al tempo di sopravvivenza dell'animale.

Negli animali infatti uccisi dopo $30'$ — $45'$ di esposizione con la testa al sole ed il corpo all'ombra le lesioni riscontrate si riducevano a debole colorazione, rarefazione della sostanza cromatica, cromatolisi parziale per lo più periferica e segmentaria, deficiente colorazione ed assottigliamento delle neurofibrille, mancanza di nettezza del reticolo.

Queste lesioni apparivano sempre più intense e più diffuse man mano che si distanziava l'uccisione degli animali dall'inizio dell'esperienza.

Nei ratti morti con temperatura rettale di 43° dopo $55'$ a $60'$ di esposizione con il corpo al sole e la testa all'ombra le alterazioni furono morfologicamente uguali a quelle descritte per i ratti esposti con la testa al sole. Esse però erano meno estese, meno intense: le lesioni a tipo grave affettavano infatti un minor numero di elementi.

Tale differenza nel reperto però è da attribuirsi alla diversa durata di sopravvivenza dell'animale, anziché al fatto che nei relativi animali mancava la diretta influenza dei raggi solari sul sistema nervoso.

Sacrificando infatti dopo uno stesso intervallo di tempo degli animali tenuti nelle due modalità di esperienza descritte, la differenza nei reperti scompare e persino si inverte.

Dall'altra parte, il fatto rilevato dal *Rho* che sulle montagne non si verificano mai casi di insolazione, sebbene vi siano molto attivi i raggi chimici e luminosi, ed i recenti

studii riportati dall' *Aschoff* sull'azione e sulla capacità di penetrazione dei raggi chimici e dei raggi luminosi nei tessuti viventi, tendono ad escludere ogni azione diretta di tali raggi sugli organi interni.

*
* *

Dando uno sguardo di insieme alle lesioni da me riscontrate, risaltano subito alcuni dati che occorre rilevare per le deduzioni che se ne possono trarre.

Ed anzitutto: la analogia del reperto nucleolare da me riscontrato nelle cavie sottoposte a soprariscaldamento artificiale con quello riscontrato da *Amato* negli animali sottoposti all'azione diretta dei raggi solari, e da lui ritenuto specifico per l'insolazione, mostra chiaramente come dal lato istologico non possa affatto sostenersi con fondamento una distinzione tra *colpo di calore* ed *insolazione*.

L'analogia inoltre delle alterazioni provocate nella cellula nervosa dalla ipertermia sperimentale e dall'azione diretta dei raggi solari, analogia già rilevata da precedenti sperimentatori, induce a pensare che in entrambe le condizioni, colpo di calore cioè ed insolazione, identico debba essere il determinismo delle lesioni.

Il fatto poi che nella insolazione gli animali esposti con il corpo al sole e la testa all'ombra presentano lo stesso quadro di lesioni offerto dagli animali esposti con la testa al sole ed il corpo all'ombra, salvo quelle lievi differenze di grado fatte notare e dovute più che altro alla diversa durata di sopravvivenza presentata dall'animale, dimostra chiaramente che la cellula nervosa non presenta una vulnerabilità speciale ai raggi solari diretti, e che nel *determinismo delle lesioni nella insolazione deve darsi importanza precipua, se non unica, al fattore ipertermia*.

Il fatto inoltre che, tanto nella insolazione, quanto nel soprariscaldamento artificiale, le lesioni, come già aveva fatto anche notare il *Marinesco*, si evolvono sempre più e si intensificano quanto più a lungo si mantiene in vita l'animale, rivela apertamente *che nella patogenesi delle alterazioni ha massima importanza la durata dell'ipertermia*.

Questa constatazione, data anche la circostanza che negli animali morti dopo 30' di permanenza in termostato regolato a 43°—46° non si riscontrano gravi ed estese alterazioni cellulari nervose (come si riscontrano negli animali morti dopo una permanenza di oltre due ore a temperature di 42°—43°), mentre già altre gravi lesioni son dovute verificarsi nell'organismo così da aversi la morte, potrebbe indurre a pensare che le lesioni del sistema nervoso possano anche essere la conseguenza di altre alterazioni organiche (alterazione della crasi sanguigna, del sistema endocrino simpatico etc. etc.) capaci di agire per proprio conto sulla cellula nervosa e di disturbarne il metabolismo.

Comunque, le presenti ricerche, se non consentono di spiegare il meccanismo intimo con cui si producono le lesioni nella ipertermia sperimentale e nella insolazione, autorizzano però a porre in dubbio che tale intimo meccanismo risieda nella invocata coagulazione di una delle neuroglobuline che entra nella costituzione chimica delle cellule nervose (*Marinesco, Haliburton*).

A tale conclusione negativa si è forzati da un lato per il polimorfismo con cui si presentano le lesioni nelle due condizioni morbose, dall'altro per il fatto che le lesioni si determinano anche in animali esposti ad una temperatura di 41°—42° e per un tempo re-

lativamente breve (da un' ora e mezza a due ore). È noto invece che a provocare la coagulazione delle neuroglobuline è necessario che la temperatura raggiunga i 47°, oppure, come ha visto il *Mott*, che l'azione di una temperatura di 42° a 43° si prolunghi per 4 ore almeno.

Per concludere, ripeto : Sulla base delle alterazioni istologiche della cellula nervosa nessuna differenza può farsi fra colpo di calore e semplice ipertermia. Con ciò non intendo pregiudicare una questione che è stata così autorevolmente agitata nella scienza, e sulla quale vertono le belle e diligenti ricerche del caro collega ed amico Capitano medico Dott. *Gangi*, tutt' ora inedite, avendone egli fatto argomento della sua tesi di libera docenza, ed alle quali perciò io non posso riferirmi.

LETTERATURA

- Alessi e Pieri** — Sulle alterazioni della corteccia cerebrale nella ipertermia ed ipotermia sperimentale — *Po-
liclinico*. Vol. VIII M. 1901.
- Amato A.** — Die Ganglienzelle bei der insolation — *Virchow's Archiv f. path. Anat. u. Phys. u. f. Klinis.
Medizin*. Bd. 195, 1905.
- Brasch** — Demonstration von Fieberveränderungen an menschlichen Nervenzellen — *Verein f. innere Me-
dizin zu Berlin* 24 Oc. 1898.
- Donaggio** — Il reticolo fibrillare endocellulare degli elementi nervosi di vertebrati — *Archives internationales
de physiologie* 1904 e *Rivista Sperimentale di Freniatria* 1904. Vol. XXX.
- Déjérine** — Sur la cromatholyse de la cellule nerveuse au cours des infections avec hyperthermie — *Soc. de
biol.* — 17 juillet 1897.
- Iuliusburger und Meyer** — Ueber den Einfluss fieberhafter Prozesse auf die Ganglienzelle — *Berliner Klin.
Woch.* 1898. H. 31.
- Goldscheider und Flatau** — Beiträge zur Patholog. der Nervenzellen — *Fortschritte der Medizin* 1897 Bd. 7.
- Goldscheider und Flatau** — Ueber Veränderungen der Nervenzellen im Fieber — *Fortschritte der Medizin*.
Bd. XVI. 1898.
- Lasagna** — Degli effetti dell' ipotermia e della ipertermia sperimentale sul reticolo neurofibrillare della cellula
nervosa di animali adulti — *Rivista di patologia nervosa e mentale* — 1908. pag. 211.
- Lugaro** — Sulle alterazioni delle cellule nervose nella ipertermia sperimentale. *Rivista di patologia nervosa
e mentale*. Vol. III fas. 5. 1898.
- Marinesco** — Recherches sur les lésions des centres nerveux consécutives à l'hyperthermie expérimentale et
à la fièvre — *Revue Neurol.* 1899.
- Idem** — *Revista Stăntelor Medical.* N. 3. Bucarest 1905.
- Idem** — *La Cellule nerveuse* — Tome II, pag. 267 (Doin. Edit.) 1909.
- Omorokow** — Ueber den Einfluss hoher Temperaturen auf das Zentralnervensystem — *Orbesteiner's Arbeiten*
Bd. XI.
- Rigotti** — Indagini sulle alterazioni del reticolo endocellulare degli elementi nervosi nella ipertermia sperimen-
tale. *Rivista di patol. nervosa e mentale* 1913. pag. 388.
- Scagliosi** — Ueber den Sonnenstich — *Virchow's Arch.* Bd. 165. 1901.
- Scarpini** — Sulle alterazioni delle cellule nervose nella ipertermia sperimentale studiate con il metodo Donag-
gio — *Rivista Sperimentale di Freniatria* 1906 pag. 725.
- Silvagni** — *Rivista critica di Clinica Medica* 1907.
- Tello** — Les neurofibrilles en los vertebrados inferiores. *Trabajos del Laboratorio de investigaciones biolo-
gicas de la Univ. de Madrid*. Vol. III. 1904. N^o 2-3.
-

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

(Tutte le figure si riferiscono al sistema nervoso centrale di cavie sottoposte ad ipertermia sperimentale).

Figure 1^a 2^a e 3^a — Cellule del bulbo — Cromatolisi diffusa, polarizzazione della sostanza cromatica, mancanza di colorazione dei prolungamenti, modificazioni nucleolari. Tra le cellule nevrogliche notasi qualche cellula a bastoncello.

Metodo Boccardi — Ocul. comp. S — Immers. Omog. $\frac{1}{12}$ Koristka.

Figura 4^a — Cellula bulbare — Disgregazione molecolare, polarizzazione della sostanza cromatica.

Metodo Boccardi — Ocul. comp. S — Immers. Omog. $\frac{1}{12}$ Koristka.

» **5^a** — Cellule della corteccia cerebrale — Disgregazione degli elementi nervosi che si vedono ridotti al nucleo e ad informi avanzi di protoplasma. Alcuni elementi si vedono invasi da cellule nevrogliche.

Metodo Boccardi — Ocul. comp. S — Immers. Omog. $\frac{1}{12}$ Koristka.

» **6^a** — Cellule del bulbo — Rarefazione delle maglie neurofibrillari, sconvolgimento del reticolo.

Metodo Cajal — Ocul. comp. S — Immers. Omog. $\frac{1}{12}$ Koristka.

» **7^a** — Cellule della corteccia cerebrale — Addensamento delle neurofibrille che in qualche elemento si mostrano in via di dissoluzione granulosa.

Metodo Cajal — Ocul. comp. S — Immers. Omog. $\frac{1}{12}$ Koristka.

» **8^a** — Cellule della corteccia cerebrale — Spezzettamento, disintegrazione granulosa delle neurofibrille.

Metodo Cajal — Ocul. comp. S — Immers. Omog. $\frac{1}{12}$ Koristka.

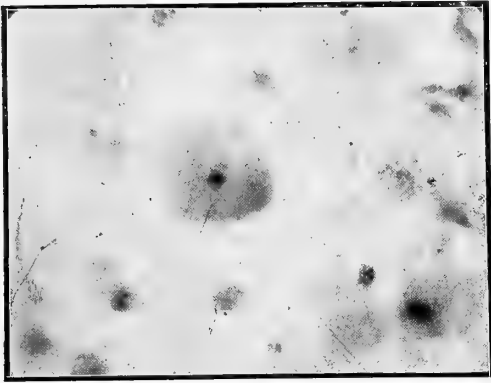


FIG. 1.

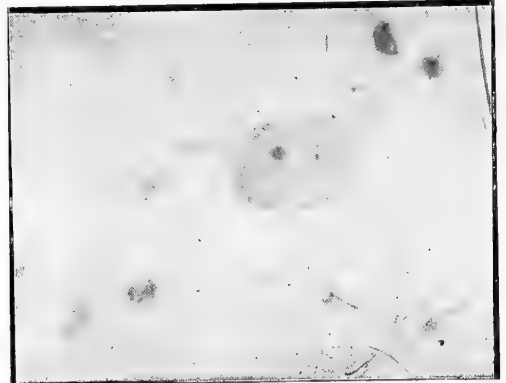


FIG. 2.



FIG. 3.

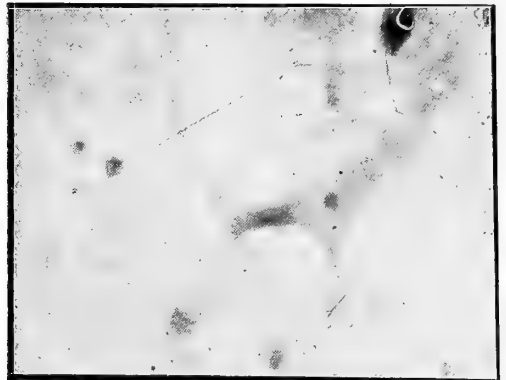


FIG. 4.

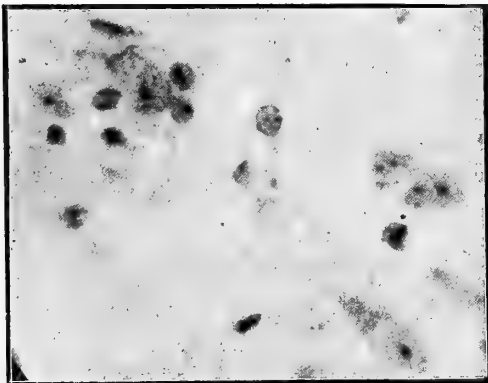


FIG. 5.

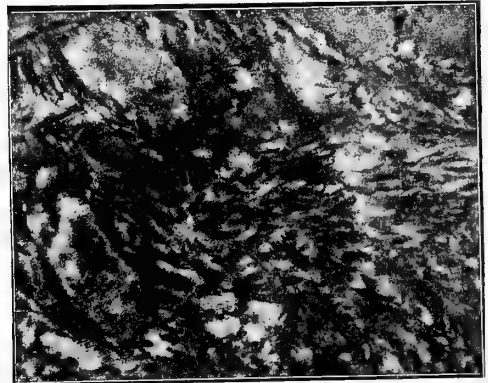


FIG. 6.



FIG. 7.

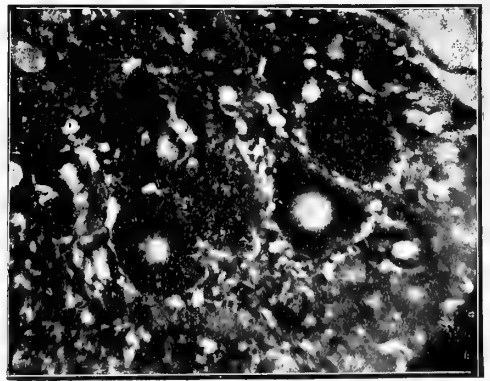


FIG. 8.

Sul problema dell' induzione magnetica

Nota II di E. DANIELE

Il metodo, col quale pervenni, in una Nota precedente (*), a costruire la soluzione del problema dell' induzione magnetica nell' ipotesi che il coefficiente di magnetizzazione p , costante in tutto il corpo, non dipenda dalla forza magnetica, si può estendere al caso più generale in cui quel coefficiente dipenda da tutti i valori della forza magnetica nello spazio S occupato dal corpo: almeno, quando per p si ammetta la sviluppabilità in serie analoga a quella di Taylor, e la possibilità di arrestare lo sviluppo ai termini lineari.

Nella discussione che feci nella Nota citata (§ 1.) per stabilire a qual termine ci si poteva arrestare nello sviluppo di p , si è osservato che l' arresto ai termini lineari, non ammissibile in linea generale, riesce tuttavia possibile sotto certe particolari condizioni. Questa osservazione dovrà essere tenuta presente per assegnare al calcolo attuale il grado di validità che gli spetta. Ma vi è un' altra restrizione di cui ora faccio uso, e che è del resto pienamente giustificata dall' esperienza, secondo quanto ricordai nell' accennata discussione. Scritto cioè p nella forma

$$p = p_0 + \int_S \phi W dS + \int_\sigma \chi W d\sigma, \quad (1)$$

che è la form. (5) della Nota I, la restrizione di cui si tratta consiste nel supporre che i termini successivi a p_0 abbiano nel fenomeno un' influenza molto minore di p_0 stesso. È ciò che accade difatti per molti corpi: p. es. nella sfera p è sensibilmente indipendente dalla forza magnetica. Si può dunque ritenere che il nostro risultato, ottenuto in base a tale ipotesi, sarà certamente applicabile per lo meno a corpi di forma prossima alla sfera.

La soluzione che ora otterremo ci è fornita da due serie di potenze. L' una sviluppa la funzione incognita secondo le potenze di p ed ha gli stessi coefficienti come nel caso classico; l' altra sviluppa a sua volta p (che altrimenti conterrebbe ancora la funzione incognita) secondo le potenze di p_0 . Queste due serie sono costruite nei primi tre n.¹ della Nota. Nel n. 4 poi si fa vedere che la convergenza di entrambe è assicurata quando sia soddisfatta una condizione, nella quale son contenute delle costanti in relazione cogli elementi fondamentali del problema.

Nel § 4. della Nota I si era dimostrata l' unicità della soluzione del problema dell' induzione magnetica, supposto p nella forma (1), subordinatamente ad una condizione che involge un confine superiore del modulo della soluzione stessa. Enunciando la cosa in

(*) *Atti dell' Acc. Gioenia, serie 5* vol. X.* Questa Nota, a cui mi riferirò nel seguito anche pel significato dei simboli, sarà indicata con « Nota I. »

termini precisi si può dire se W' è una soluzione del problema dotata delle solite proprietà generali, e se $\frac{A}{2}$ è un confine superiore di $|W'|$ soddisfacente alla disuguaglianza

$$4\pi k |p_0| + A\Omega (2\pi k + M) < 1 \quad (2)$$

(che è la (32) di quella Nota), non esiste altra soluzione che verifichi le stesse condizioni.

Ora è interessante constatare (e ciò è fatto nel n. 5) che, nei limiti di approssimazione in cui è valido il nostro calcolo e tenendo conto, in particolare, dell'osservazione relativa alla prevalenza di p_0 sui termini successivi nella (1), la soluzione attualmente costruita soddisfa alla disuguaglianza (2); per cui rimane anche esaurita la questione dell'effettiva esistenza della soluzione di cui si era già dimostrata l'unicità.

1. Il problema che dobbiamo risolvere consiste nel trovare una funzione W armonica all'interno ed all'esterno di uno spazio S limitato da una superficie σ , nulla all'infinito come una funzione potenziale, e che in tutto lo spazio soddisfi all'equazione

$$W = V + p \int_{\sigma} \frac{\partial W}{\partial n} \frac{d\sigma}{r}, \quad (3)$$

dove V è una funzione nota avente i caratteri di una funzione potenziale, r la distanza di un punto di σ da un punto generico dello spazio, n la normale a σ diretta verso l'interno di S , e p una quantità definita dalla (1).

Poniamo successivamente:

$$\left. \begin{aligned} W_0 &= V \\ W_i &= V + \omega_{i-1} \int_{\sigma} \frac{\partial W_{i-1}}{\partial n} \frac{d\sigma}{r}, \quad (i=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\omega_i = p_0 + \int_S \phi W_i dS + \int_{\sigma} \gamma W_i d\sigma, \quad (i=0, 1, 2, \dots). \quad (4')$$

Porremo anche

$$V_i = \int_{\sigma} \frac{\partial V_{i-1}}{\partial n} \frac{d\sigma}{r}, \quad (i=1, 2, \dots) \quad (5)$$

intendendo che sia $V_0 = V$; ed allora dalle (4) e (4') si ricava:

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= V + \omega_0 V_1 \\ W_2 &= V + \omega_1 V_1 + \omega_1 \omega_0 V_2 \\ &\dots \\ W_i &= V + \omega_{i-1} V_1 + \dots + \omega_{i-1} \omega_{i-2} \dots \omega_0 V_i. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Sostituendo il valore di W_i in ω_i quale è dato dalla (4') otteniamo:

$$\omega_i = \omega_0 + \omega_{i-1} \xi_1 + \omega_{i-1} \omega_{i-2} \xi_2 + \dots + \omega_{i-1} \dots \omega_0 \xi_i, \quad (7)$$

essendo

$$\xi_i = \int_S \phi V_i dS + \int_\sigma \chi V_i d\sigma, \quad (i=0, 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Sia ora, con notazioni già introdotte nella Nota I:

$$|V| < B, \quad \left| \frac{\partial V}{\partial n} \right| < B, \quad \int_\sigma \frac{d\sigma}{r} \leq M,$$

$$P = |p_0|, \quad \Omega = \int_S |\phi| dS + \int_\sigma |\chi| d\sigma;$$

dalla (8) e dalle disequaglianze (21') della Nota I ricaviamo:

$$|\xi_i| < (4k\pi)^{i-1} BM\Omega. \quad (9)$$

2. Introdurremo ora in modo esplicito la restrizione di cui si fece parola dappprincipio: limiteremo cioè il nostro studio a quei casi in cui nella (1) il valore di p_0 prevale notevolmente sul valore dei termini che seguono, qualunque sia W . Precisando, ammetteremo che Ω e $|\xi_i|$ siano così piccoli rispetto a P , che si possan trascurare le potenze di Ω superiori alla prima, come pure i termini in $\xi_0 \xi_1 \dots$ di grado superiore al primo.

Ciò posto, le (4') danno:

$$\omega_0 = p_0 + \xi_0;$$

sostituendo questo valore in ω_1 come è dato dalla (7), poi il valore di ω_1 in ω_2 , e così via, si trova per ω_i un polinomio di ordine i in p_0 , e di un certo ordine in $\xi_0 \xi_1 \dots \xi_i$. Sopprimendo allora, conformemente all'ultima restrizione, i termini non lineari nelle ξ , si ottiene:

$$\omega_i = \omega_0 + p_0 \xi_1 + p_0^2 \xi_2 + \dots + p_0^i \xi_i. \quad (10)$$

Studiamo il $\lim_{i \rightarrow \infty} \omega_i$. Consideriamo perciò la serie

$$\omega_0 + p_0 \xi_1 + p_0^2 \xi_2 + \dots; \quad (10')$$

la serie dei moduli è

$$|\omega_0| + P |\xi_1| + P^2 |\xi_2| + \dots,$$

ed ammette come serie maggiorante [cfr. la (9)]

$$|\omega_0| + BM\Omega P + BM\Omega \cdot 4k\pi P^2 + BM\Omega \cdot (4k\pi)^2 P^3 + \dots$$

Ne segue che se è soddisfatta la condizione

$$4k\pi P < 1, \quad (11)$$

la serie (10') è convergente; detta ω la sua somma, avremo allora:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \omega_i = \omega_0 + p_0 \xi_1 + p_0^2 \xi_2 + \dots = \omega. \quad (11')$$

Per il modo come ω è stata calcolata appare che è una quantità costante in ogni punto dello spazio, ma dipendente da p_0 , da ψ e da χ (cioè dal vettore (F) del n. 4 Nota I), dalla funzione potenziale V del campo inducente e dalla forma della superficie σ .

3. Passiamo a studiare il $\lim_{i=\infty} W_i$. Dalle (6) si ha:

$$\lim_{i=\infty} W_i = V + \lim_{i=\infty} \omega_{i-1} \cdot V_1 + \dots + \lim_{i=\infty} (\omega_{i-1} \omega_{i-2} \dots \omega_{i-j}) \cdot V_j + \dots,$$

e per la (11'):

$$\lim W_i = V + \omega V_1 + \dots + \omega^j V_j + \dots$$

Ripetendo letteralmente il calcolo che si eseguì al n. 11 della Nota I a proposito della serie

$$V + pV_1 + p^2 V_2 + \dots,$$

si giunge alla conclusione che *la serie*

$$V + \omega V_1 + \omega^2 V_2 + \dots$$

converge assolutamente ed equabilmente tutte le volte che è verificata la condizione

$$+k\pi |\omega| < 1. \quad (12)$$

In tale ipotesi si ha, indicando con W la somma di questa serie:

$$\lim W_i = V + \omega V_1 + \omega^2 V_2 + \dots = W. \quad (12')$$

È facile vedere come la funzione ora costruita sia una soluzione del nostro problema. Intanto verifica l'equazione (3). Difatti dalle (4) si ha;

$$\lim_{i=\infty} W_i = V + \lim_{i=\infty} \omega_{i-1} \int_{\sigma} \frac{\partial \lim W_{i-1}}{\partial n} \frac{d\sigma}{r},$$

con

$$W = V + \omega \int_{\sigma} \frac{\partial W}{\partial n} \frac{d\sigma}{r}.$$

Ma dalle (4') si ha pure:

$$\lim \omega_i = p_0 + \int_S \psi \lim W_i dS + \int_{\sigma} \chi \lim W_i d\sigma,$$

ossia

$$\omega = p_0 + \int_S \psi W dS + \int_{\sigma} \chi W d\sigma.$$

Il confronto di questa colla (1) mostra appunto che W soddisfa alla (3), ove si prenda p nella forma (1).

Quanto alle altre proprietà che si richiedono alla funzione W , basta osservare che W_i è rappresentata dalle (4) come somma di due funzioni potenziali: una, V , è quella del campo inducente, l'altra è la funzione potenziale di una distribuzione superficiale fatta su σ .

Da quanto precede risulta ancora che la costante ω definita colla serie (11') è poi nient'altro che il coefficiente di magnetizzazione p , il quale viene così espresso come una serie di potenza di p_0 , i cui coefficienti son formati esclusivamente mediante la funzione V . Per modo che la (12') ci fornisce ancora W colla medesima serie di potenze di p come nel caso classico [Cfr. Nota I, n. 11]: però lo scrivere soltanto la serie (12') non significherebbe punto, nel caso attuale, aver risolto il problema, poichè in p è inclusa la funzione incognita W ; volendo esprimere p mediante i dati del problema bisogna fare uso della serie (11').

4. La (12), che esprime una condizione sufficiente per la convergenza della serie (12'), si può sostituire con un'altra diseuguaglianza più restrittiva, ma contenente soltanto i dati iniziali del problema, mentre in ω son contenuti i valori delle successive V_i . Dalla (10) deduciamo:

$$|\omega_i| \leq |\omega_0| + P|\xi_1| + \dots + P^i |\xi_i|,$$

e per la (9):

$$|\omega_i| < |\omega_0| + PBM\Omega \left\{ 1 + 4k\pi P + \dots + (4k\pi P)^{i-1} \right\},$$

mentre le (4') danno

$$|\omega_0| < P + B\Omega;$$

allora, tenuto conto della (11), abbiamo;

$$|\omega_i| < P + B\Omega + \frac{PBM\Omega}{1-4k\pi P}. \quad (13)$$

Poichè questa diseuguaglianza vale qualunque sia l'indice i , e poichè il secondo membro non dipende da i , si avrà, col porre

$$\theta = 1 - 4k\pi P:$$

$$|\omega| < P + B\Omega \left(1 + \frac{PM}{\theta} \right). \quad (13')$$

Ne segue che la (12) è soddisfatta tutte le volte che si ha

$$4k\pi P + 4k\pi B\Omega \left(1 + \frac{PM}{\theta} \right) < 1,$$

od anche :

$$\theta > 4k\pi B\Omega \left(1 + \frac{PM}{\theta} \right),$$

ossia, per essere $\theta > 0$:

$$\theta^2 - 4k\pi B\Omega\theta - 4k\pi PB\Omega M > 0.$$

Questa è soddisfatta per

$$\theta > 2k\pi B\Omega + \sqrt{(2k\pi B\Omega)^2 + 4k\pi PB\Omega M} \quad (14)$$

oppure per

$$\theta < 2k\pi B\Omega - \sqrt{\quad}.$$

Dobbiamo scartare la seconda soluzione, che darebbe per θ valori negativi; rimane per θ la condizione (14). Affinchè questa sia verificata, basta verificare la seguente :

$$\theta > 2k\pi B\Omega + \sqrt{(2k\pi B\Omega + PM)^2},$$

che si può scrivere :

$$4k\pi P + 4k\pi B\Omega + PM < 1, \quad (15)$$

ed in questa è contenuta la (11). È dunque sufficiente che sia soddisfatta la (15) perchè siano convergenti tanto la serie (11') che fornisce ω , quanto la serie (12') che in seguito fornisce W .

5. Mediante la (13') siamo riusciti ad ottenere un confine superiore di $|\omega|$ espresso unicamente colle costanti P, Ω, M, k, B . Analogamente, siamo in grado di costruire, in funzione delle medesime costanti, un confine superiore per $|W|$. Se noi poniamo per brevità

$$\eta = P + B\Omega \left(1 + \frac{PM}{\theta} \right), \quad (16)$$

la (13) si scrive :

$$|\omega_i| < \eta,$$

e dalle (6) si ricava :

$$|W_i| < |V| + \eta |V_i| + \dots + \eta^i |V_i|.$$

Per essere $|V| < B$, e per le (21') della Nota I si ha quindi :

$$|W_i| < B + BM\eta \frac{1 - (4k\pi\eta)^i}{1 - 4k\pi\eta}.$$

Se dunque supponiamo

$$4k\pi\eta < 1$$

(e per questo basta, come s'è visto nel n. precedente, che sia soddisfatta la (15)) avremo :

$$|W| < B + \frac{BM\eta}{1-4k\pi\eta}. \quad (17)$$

Ciò posto, ci occuperemo dell' ultima questione cui si accennò nell' introduzione: verificheremo, cioè, se la soluzione rappresentata dalla (12') soddisfa alla condizione (sufficiente) che fu trovata alla fine della Nota I per l'unicità, e che abbiamo espresso coll'attuale form. (2).

Se nella (2) sostituiamo ad $\frac{A}{2}$ il secondo membro della (17), otteniamo la diseuguaglianza

$$4k\pi P + \Omega(4k\pi + 2M) \left(B + \frac{BM\eta}{1-4k\pi\eta} \right) < 1 \quad ; \quad (18)$$

ora noi andremo a constatare, tenendo presenti tutte le speciali ipotesi nelle quali svolgiamo il nostro calcolo, che la (18) rientra nella (15). Possiamo scrivere la (18) nel seguente modo :

$$4k\pi P + 4k\pi B\Omega + 2MB\Omega \left\{ 1 + \frac{(2k\pi + M)\eta}{1-4k\pi\eta} \right\} < 1 \quad ;$$

affinchè dunque la (18) discenda come conseguenza dalla (15) basta che sia

$$2B\Omega \left\{ 1 + \frac{(2k\pi + M)\eta}{1-4k\pi\eta} \right\} \leq P,$$

cioè

$$2B\Omega(1 - 2k\pi\eta + M\eta) \leq P(1 - 4k\pi\eta).$$

Ricordiamo ora la restrizione che abbiamo formulato al n. 2 relativamente all'ordine di grandezza di Ω . Poichè η , come mostra la (16), è funzione lineare di Ω , il primo membro dell'ultima relazione è un polinomio di 2° grado in Ω , ed in base a quanto fu colà stabilito noi potremo trascurare i termini quadratici. Con ciò questa relazione si riduce alla seguente forma :

$$2B\Omega \left\{ 1 + P(M - 2k\pi) \right\} \leq P \left\{ \theta - 4k\pi B\Omega \left(1 + \frac{PM}{\theta} \right) \right\},$$

od anche :

$$2B\Omega \left\{ 1 + PM \left(1 + \frac{2k\pi P}{\theta} \right) \right\} \leq P\theta.$$

Poichè il coefficiente di Ω è certamente positivo, si può scriverla così :

$$\Omega \leq \frac{P\theta^2}{2B\{1 + PM\}\theta + 2k\pi P^2 M} \quad (19)$$

Questa dice che la costante Ω non deve superare una certa quantità ; ora questa quantità, cioè il secondo membro della (19), ha un valore finito, del medesimo ordine di grandezza di P , mentre Ω , secondo le nostre ipotesi, deve riguardarsi come molto piccolo rispetto a P : nell'ambito di queste ipotesi adunque la (19) deve ritenersi soddisfatta senz'altro.

6. Il risultato conseguito si può compendiare nel seguente enunciato :

Per Ω abbastanza piccolo le approssimazioni successive (4) e (4') danno una soluzione W rappresentabile colla serie (12'), ove ω è a sua volta rappresentabile colla serie (11'). Affinchè entrambe le serie siano convergenti (assolutamente la (11'), assolutamente ed equabilmente la (12')) è sufficiente che sia soddisfatta l'unica condizione (15). La soluzione costruita è inoltre l'unica il cui modulo verifichi la diseuguaglianza (17).

È evidente come l'attuale soluzione comprenda in particolare quella che fu trovata nella Nota I pel caso classico, caratterizzato dall'annullarsi di ϕ e χ , e quindi anche di Ω .

Di alcune particolarità di struttura del cilindrasse della fibra nervosa periferica a doppio contorno e del loro possibile significato funzionale

(NOTA PRELIMINARE)

Prof. Dott. SALVATORE COMES

Libero docente di Zoologia e Anatomia Comparata nella R. Università di Palermo.

(Con 9 figure nel testo).

A tutti è noto che, trattando con una soluzione di Nitrato d'argento al 0,75 % dei pezzettini di nervi di un vertebrato, p. es. del nervo sciatico di rana, per un tempo variabile da 24 a 48 ore, e dissociando poi, previo lavaggio in acqua distillata, nell'acqua stessa o in glicerina, è possibile mettere in evidenza nella fibra nervosa alcuni particolari di struttura relativi al cilindrasse di essa.

Precisamente, adoperando il metodo sudetto, Ranvier scoprì in corrispondenza degli strozzamenti che da lui portano il nome, la formazione di una croce detta latina dal suo aspetto e conosciuta perciò in seguito col nome di croce latina o di Ranvier. Il sale di argento penetrerebbe più facilmente in corrispondenza dello strozzamento e attaccherebbe dapprima la placca nervosa che verrà a costituire le due bande trasversali della croce, in seguito i segmenti del cilindrasse più vicini alla placca, che ne verrebbero a costituire le due bande verticali.

Ma, ancora indipendentemente dal Ranvier, il Fromann sin dal 1864 descrisse un altro particolare di struttura che è possibile mettere in evidenza con l'uso dello stesso nitrato di argento nel cilindrasse. Questo, in seguito all'azione del sale, si presenta attraversato da striature che presero il nome di strie del Fromann: le strie del Fromann sono più facilmente visibili in prossimità delle bande verticali della croce latina donde s'inizia la loro formazione, ma si estendono quindi per un notevole tratto del cilindrasse.

Ben diverso è il significato che si attribuì ai due reperti sopra ricordati. La formazione della croce latina fu messa in rapporto coll'esistenza d'una sostanza intercellulare a livello dello strozzamento, poichè è risaputo che il Nitrato di Argento mette in evidenza la sostanza intercellulare e s'invocava questo speciale comportamento della fibra nervosa rispetto al sale di Ag. su ricordato per ammettere l'origine pluricellulare di tutti i suoi elementi: guaina dello Schwann, guaina di mielina, cilindrasse. Si assurgeva in tal modo alla concezione di catene cellulari unificanti ulteriormente durante lo sviluppo. Le strie di Fromann d'altro lato fecero paragonare la struttura della fibra nervosa a quella della fibra muscolare striata, cosicchè veniva ad estendersi e a diventare più intima una somiglianza già esistente nella forma dei due elementi ugualmente allungati e nella funzione di essi ugualmente conduttrice. Ma questa seducente somiglianza cadde, si può dire, sul

nascere, perchè si fece strada fra gli istologi e i citologi (Demoor, Cajal ecc.) il sospetto che le strie del Fromann potessero rappresentare niente altro che delle alterazioni, dei precipitati dovuti all'azione del Nitrato, che non rispecchiano la realtà.

Si obiettò che uguali strutture formavansi nel corpo della cellula nervosa ed anche in altri elementi tissurali.

Per quello che brevemente esporrò questa obiezione non mi pare abbia una portata decisiva. E anzitutto: perchè si vorrebbero considerare come produzioni artificiali le strie del Fromann messe in evidenza col Nitrato di Argento sul cilindrase della fibra nervosa, senza considerare pure come alterazioni le croci del Ranvier, che lo stesso sale mette in rilievo nella fibra nervosa in corrispondenza degli strozzamenti? E volendo generalizzare ancora, perchè non sarebbero degli artefatti i reticoli endocellulari che il Colgi, il Cajal, e altri citologi hanno scoperto nella cellula nervosa coll'uso, più o meno combinato, dello stesso nitrato di argento?

Se debbo esprimere la mia opinione dirò che son lontano dal considerare tali strie come prodotti di alterazione: esse invece starebbero a dimostrare realmente una struttura speciale, o quanto meno, uno stato funzionale particolare del cilindrase in rapporto colla funzione conduttrice che questo compie. E cercherò dimostrare che esse potrebbero anzi avere un'importanza notevole, potendosi considerare come l'espressione della maniera con cui, attraverso il cilindrase vien trasmesso lo stimolo nervoso alla stessa guisa che le striature della fibra muscolare striata dimostrano la particolare maniera di contrarsi di essa. Se Fromann non le avesse scoperto, oso dire che sarebbe stato necessario scoprirle!

Vengo a riferire adesso e brevemente per ora di un reperto che integra la scoperta del Fromann e getta, secondo me, un lampo di luce nella fitta tenebra della fisiologia generale del sistema nervoso. Con una leggiera modificazione di tecnica, facendo cioè prolungare di uno o due giorni l'azione del sale di Argento nella soluzione sopra ricordata in pezzettini di nervo, e di uno o di due giorni similmente, invece di mezz'ora, quella dell'acqua distillata di lavaggio (1) mi è stato possibile ottenere in piccoli segmenti del



Fig. I. — Porzione di fibra nervosa del nervo brachiale. Semischematica. Ob. im om. $\frac{1}{15}$ oc. 3 (dis. sul tavolo).

nervo sciatico o brachiale di *Discoglossus pictus* (materiale del quale sinora mi sono esclusivamente servito) accanto a fibre nervose nelle quali si osservano soltanto le croci latine, altre fibre il cui cilindrase è striato, non soltanto nella vicinanza delle croci, ma bensì

(1) Nel processo non bisogna oltrepassare certi limiti di tempo sia per il bagno nel sale che per il lavaggio in acqua distillata, diversamente avviene che il primo precipiti e intorbidì il materiale, rendendolo friabile e inadatto alla dissociazione, e il secondo faccia scomparire le strie e persino le croci latine, che per altro riappaiono sul preparato, almeno in parte, esponendolo alla luce. In questo laboratorio di Zoologia nel quale sono ospitato, gli studenti, volendo ripetere le mie esperienze hanno adoperato una soluzione di AgNO_3 al 2% colla quale si ha una maggiore rapidità di reazione (bastando mezzora di immersione in essa e lavaggio successivo di pochi minuti in acqua distillata) pur ottenendo gli stessi dettagli.

per tutta la sua estensione. A questo particolare non venne attribuita dal Fromann alcuna importanza. Un'altra osservazione possibile, guardando i miei preparati, è la seguente: le strie del Fromann non sono fra loro equidistanti, nè tutti di uguale spessore: di solito sono più avvicinate fra loro quelle più prossime allo strozzamento o meglio alla placca interanulare. Nemmeno questo particolare strutturale viene messo in rilievo da ricerche anteriori. Continuando nello studio dei miei preparati potei accorgermi che mentre alcuni cilindrassi striati avevano un calibro costante in tutta la loro lunghezza per assottigliarsi gradatamente in corrispondenza della croce latina, altri invece presentavano variazioni di calibro, precisamente presentavano delle parti fusate in alternanza con porzioni più assottigliate o strozzate, senza che qui le strozzature corrispondessero a quelle del Ranvier,



Fig. 2 A. — Porzione di cilindrasse di fibra nervosa di nervo sciatico. Semischematicca Ob. im. om. $\frac{1}{15}$ oc. 4 (dis. sul tavolo).



Fig. 2 B. — Porzione di cilindrasse dopo trattamento con AgNO_3 0,75 % sul vivente.

ma essendone comprese in parecchie da un solo segmento anulare. Questi fusi possono variare di calibro e di lunghezza, come si rileva dalle figure riportate nel testo. Alcuni sono molto allungati, a ventre poco convesso ed a nodi più estesi: nel caso più esagerato tutto il fuso corrisponde all'intero segmento di Ranvier, esso sembra allora isodiametrico con un leggero strozzamento in corrispondenza della croce latina, che rappresenta quindi un nodo attraversato dalla placca anulare (v. fig. 1). In tali condizioni le strie del Fromann sono sensibilmente equidistanti, salvo che presso le bande verticali della croce. in cui si stringono le une alle altre, al punto che presso la placca formano una apparenza omogenea, spesso impossibile a risolvere anche coi più forti ingrandimenti. Ma, nei casi più frequenti, in ogni strozzamento si possono intercalare più fusi, con ventri tanto più convessi e con nodi tanto più corti, quanto più essi stessi son corti e viceversa, come è possibile vedere nelle riportate figure del testo (figg. 2, 3 ecc.).

Talora è possibile imbatterci in semiventri — o ventri unilaterali — come è dato osservare con ogni evidenza nella fig. 3B del testo. Questi semiventri sono straordinariamente importanti, tanto per la somiglianza che esse presentano a consimili apparenze messe in rilievo nelle fibre muscolari striate, tanto per quella che presentano coi fenomeni fisici relativi alle onde delle corde elastiche in vibrazione nella forma, nel comportamento e nel significato. Da ciò che si è detto risulta un'estrema variabilità nel numero e nella lunghezza dei fusi interanulari. Non potrei però affermare sino a questo momento che abbiano uguale lunghezza e forma i fusi che appartengono allo stesso segmento, a giudicare

anche dalle figure illustrative di questa nota, mentre certamente diversificano quelle dei cilindrassi delle diverse fibre anche nello stesso nervo.

Un particolare comportamento presentano, quando si formano dei fusi interanulari, le croci latine. Pare che costantemente (così di frequente si ripete il fenomeno) esse cessino di rappresentare in questo speciale momento morfo-fisiologico del cilindrasse una regione nodale e diventino invece per lo più una regione ventrale, come è messo in evidenza dalle figure 3A e B del testo. Si inverte dunque in questi casi il carattere fisico della regione del cilindrasse corrispondente alla croce latina.



Fig. 3A e 3B. — Porzioni di cilindrassi di fibre del nervo sciatico, radice posteriore. Semischematica ob. im. om. $\frac{1}{15}$ oc. 4 (disegno sul tavolo) In A la croce latina è divenuta regione ventrale, in B si notano pure delle onde laterali.

Sarebbe poi di grande interesse vedere se la variazione di forma e di grandezza dei fusi e dei loro elementi si connette colla variazione della qualità delle fibre, ovvero con quella della lunghezza dei nervi e della estensione della loro area motrice e sensibile, ovvero e molto probabilmente colla variazione della qualità e dell'intensità dello stimolo.

Comunque nessun Citologo, che io sappia, rivolse prima d'ora l'attenzione ad un simile aspetto che il cilindrasse può assumere, aspetto tanto più importante, in quanto ad esso si collega una particolare quanto interessante disposizione delle strie del Frommann. Precisamente in corrispondenza del ventre dei fusi le strie sono più chiare, più spesse e più lontane fra loro, in corrispondenza dei nodi, cioè, delle parti distali dei fusi, esse sono più vicine, più sottili e più impregnate dal reattivo.

Una più attenta e paziente osservazione ci fa acquistare conoscenza di altri importanti dettagli.

Talora p. es. fra due fusi più grandi vicini ve ne ha uno intercalare, di minore calibro, in cui le striature sono fra loro avvicinatissime tanto che assumono l'apparenza di una formazione omogenea, a manicotto, e soltanto l'obbiettivo ad immersione può risolverle e

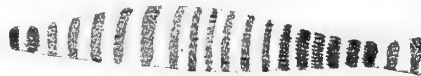


Fig. 4. — Porzione di cilindrasse di fibra del nervo brachiale. Semischematica. Ob. im. om. $\frac{1}{15}$ oc. 3 (dis. sul tavolo).

farle distinguere separatamente (v. fig. 5). Invece le strie dei fusi contigui sono fra loro assai più distanziate (1). Spessissimo coll'uso di forti ingrandimenti ci è dato vedere che la stria-

(1) I nodi di tali fusi, che potrebbero chiamarsi di interferenza, in quanto sono spiegabili colla coincidenza d'una doppia serie di onde dirette nello stesso senso, sono meno strozzati di quelli dei fusi semplici sopra descritti, anche qui in accordo colle leggi fisiche che studiano tali fenomeni.

tura di Fromann è ulteriormente risolubile in delicate fibrille longitudinali dal cui accollamento è probabile risulti l'aspetto ed il colore della striatura medesima. D'altro canto, alla loro volta, queste fibrille pare risultino formate dall'allineamento di certi granuli, che si osservano spesso e molto frequentemente disposti in ordine longitudinalmente seriato

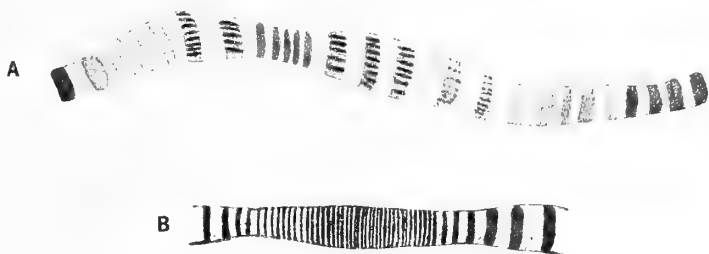


Fig. 5A e 5B — Porzione di cilindrassi di fibre del nervo brachiale. Semischematica. In A si osserva un fuso con le regioni nodali adiacenti, in B un fuso di interferenza. Ob. im. om. $\frac{1}{15}$ oc. 4. (disegno sul tavolo).

in corrispondenza alle strie del Fromann (1) (vedi figg. 4 e 5). Tutti questi particolari si possono osservare in cilindrassi di fibre diverse, ma anche e spesso, lungo il decorso dello stesso cilindrasse. Così in una delle figure del testo noi vediamo in corrispondenza dei nodi strie compatte e in corrispondenza dei fusi strie punteggiate o striate alla loro volta nel senso longitudinale (fig. 4). Malgrado le variazioni di calibro dei cilindrassi, resta invece costante quello della fibra nervosa, ciò che sarebbe una ulteriore dimostrazione, se fosse necessaria, dello stato fluido della guaina di mielina, e della funzione di sostegno propria dello scheletro neuro cheratinico che la sorregge.

I dettagli di struttura che son venuto elencando, hanno, secondo me, una radicale importanza perchè analogamente a quanto si osserva nelle fibre muscolari striate le strie longitudinali che si osservano nelle strie del Fromann potrebbero corrispondere alle neuro fibrille. Se fosse vera questa interpretazione, sarebbero le neuro fibrille a presentarsi alternativamente striate in chiaro e scuro, e tutto quello che si è detto del cilindrasse nel suo complesso potrebbe essere espressione delle modificazioni chimiche e fisiche avvenute nelle singole neurofibrille.

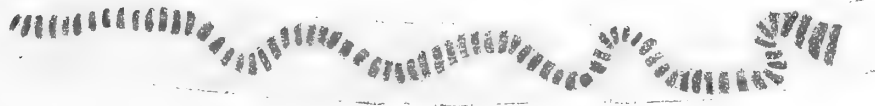


Fig. 6. — Porzione di cilindrasse di fibra di nervo sciatico. Semischematica. Ob. im. om. $\frac{1}{15}$. Oc. 2 (dis. sul tavolo).

(1) Non si potrebbe escludere in modo assoluto che tali granuli rappresentino una reazione incompleta del sale di argento sul cilindrasse, ma perchè essi si trovano localizzati sempre in corrispondenza delle strie di Fromann e in disposizione longitudinale? e perchè in cilindrassi diversi dello stesso preparato, e persino sullo stesso cilindrasse ci sono strie di Fromann compatte, o striate longitudinalmente? A me pare che questa differenza di reazione del reattivo corrisponda ad una reale differenza di struttura nelle parti costituenti del cilindrasse.

Il comportamento del cilindrasse delle fibre nervose sarebbe in tutto simile a quello della fibra muscolare striata non solo nel riguardo morfologico, ma anche nel fisiologico. Come questa infatti esso presenta una striatura costituita a sua volta da fibrille e un aspetto fusato con nodi intercalari, come appunto esso è presentato dalla miofibra in contrazione.

Il carattere della contrattilità o meglio, nella fattispecie, della elasticità, o meglio ancora di una particolare attitudine vibratoria, è adunque nel cilindrasse, come nella fibra muscolare striata, molto evidente, e come in quella la vibrazione si manifesterebbe nel senso trasverso e nel longitudinale, come è dimostrato dal colore più forte e dallo avvicinamento delle strie in corrispondenza dei nodi (1).

Ciò armonizza con il comportamento delle cosiddette onde di vibrazione della fisica, studiabili nei fili o nelle corde elastiche in vibrazione. Infatti anche in esse le vibrazioni trasversali sono rese manifeste dalla formazione dei ventri e dei nodi e le longitudinali " con variazioni di densità che si stabiliscono nel mezzo elastico, nei ventri dove gli spostamenti delle particelle sono massimi, le variazioni di densità e quindi anche le variazioni di pressione sono minime, mentre nei nodi, dove gli spostamenti sono minimi, si hanno le massime variazioni di densità e di pressione „ (Battelli e Cardani: Fisica Sperimentale vol. II). In altri termini la trasmissione della corrente nervosa attraverso il cilindrasse (se le parvenze visibili con il trattamento delle fibre nervose col nitrato di argento corrispondono alla realtà) avverrebbe per vibrazione dello stesso (e per esso, con ogni probabilità delle neurofibrille con conseguente formazione di onde di vibrazione risolubili in ventri e in nodi (2).

*
* *

Ora si sa, dagli studi di Apathy sugli Invertebrati (Irudinei) che le fibre nervose risultano costituite da tante neurofibrille, distinte nel loro decorso, le quali da esse passano nelle cellule nervose, dove però variamente si intrecciano. Si sa pure dagli studi del Bethe sugli stessi Invertebrati che le neurofibrille costituiscono l'elemento conduttore del sistema nervoso. Secondo questo A. nelle fibrille esisterebbe una sostanza acida, da lui denominata acido fibrillico, il cui condensamento durante il passaggio d'una corrente continua (elettrotono) attraverso il nervo aumenterebbe al polo negativo, diminuendo al polo positivo, rimanendo invariata però la sua quantità assoluta. In seguito a tale diversa distribuzione dell'acido fibrillico le neurofibrille assumono una colorazione diversa da quella che assumevano prima della colorazione dello elettrotono.

Questa elegante teoria potrebbe applicarsi alle ricerche attuali, senza voler pregiudicare con questo la spiegazione fisica già data del reperto. L'acido fibrillico, ogni qualvolta le neurofibrille entrano in vibrazione, si distribuisce diversamente, condensandosi in sezioni trasverse di esse che, a livello di questo condensamento, diverrebbero visibili,

(1) In seguito a tale comportamento delle strie del Fromann e del cilindrasse, mentre da un lato si deve affermare la reale esistenza delle stesse ed escludere che essi siano prodotti artificiali, dall'altro pare insostenibile l'opinione di chi vorrebbe vedere in esse la manifestazione delle fibrille dello scheletro neurocherostinico ad imbuti del Golgi (vedi p. es. il trattato di Istologia del Fusari).

(2) Intanto da ricerche in corso posso affermare che i nodi e i ventri interanulari del cilindrasse sono visibili anche a fresco.

col trattamento del Nitrato di Argento, manifestandosi come strie del Fromann. In tal caso solo i cilindrassi le cui neurofibrille entrano in vibrazione (che cioè conducono la corrente nervosa) presentano le strie, ne sarebbero sprovvisti quelli in riposo. Ciò spiegherebbe perchè non tutti i cilindrassi delle fibre ottenute per dissociazione del nervo sottoposto all'azione del sale di argento siano striati.

Seguendo un tale ordine di idee e di raffronti ho proceduto alla anestesia locale diretta del nervo sciatico di *Discoglossus*, mediante l'azione del cloroformio protratta per cinque minuti. Ebbene, trattando poi il nervo colla soluzione del nitrato di argento e col solito processo, le strie del Fromann non si resero visibili, mentre erano tali le croci latine. Evidentemente l'anestesia porta all'ineccitabilità del cilindrasse, quindi delle neurofibrille: durante l'ineccitabilità non si deve avere spostamento apprezzabile dell'acido fibrillico. Anche per questo comportamento di fronte al cloroformio i miei risultati convergono con quelli messi in luce dal Bethe negli Invertebrati, nei quali l'azione dei narcotici portava, secondo l'Autore, alla mancanza della modificabilità dell'acido fibrillico.

* * *

Conseguentemente sorge naturale la questione di sapere se questa trasmissione della corrente per vibrazione del cilindrasse (e subordinatamente delle neurofibrille) è uguale per le fibre sensibili e per le fibre motrici, o è diversa, come sarebbe da presumere, se è vera l'asserzione di Perelès e Sachs (1) che cioè gli stimoli sono più rapidamente trasmessi dalle fibre sensibili e meno dalle motrici, e la constatazione di Hafemann (2), secondo il quale l'influenza della temperatura sarebbe risentita più presto dalle fibre sensibili che non dalle motrici. Un'altra domanda richiede pure un'adeguata risposta, se cioè, esagerando l'azione di uno stimolo qualsiasi sul nervo, la vibrazione del cilindrasse si accentua e si modificano le sue manifestazioni sensibili, cioè il comportamento dei ventri e dei nodi. In ordine alla prima questione ho pensato di sottoporre alla azione del sale di argento separatamente la radice anteriore e la radice posteriore dello stesso nervo sciatico. I risultati non possono considerarsi decisivi anche per il poco numero di esperienze fatte. In ogni modo dalle mie osservazioni risulterebbe una formazione più frequente di fusi piuttosto corti, specialmente in corrispondenza delle croci latine (v. fig. 3 del testo) dei cilindrassi delle fibre posteriori piuttosto che in quelle delle fibre anteriori, dove le forme fusate sono molto più lunghe e sottili, ma più rare, come più rare si presentavano le striature. In ordine alla seconda domanda, ho provocata la sovraeccitazione del nervo sciatico (e precisamente dell'altro nervo sciatico dello stesso individuo al quale si era cloroformizzato il primo, per avere anche un dato di controllo sullo stesso soggetto) coll'azione d'un stimolo cutaneo prolungato per 120" mediante il contatto diretto di gocce di acido acetico sull'epidermide dello stesso arto. Avendo poi posto dei pezzettini di nervo a diversi livelli al solito trattamento di nitrato di argento, ho notato la quasi generale striatura dei cilindrassi delle sue fibre con frequente formazione di ventri e di nodi.

(1) Perelès und Sachs. Ueber die Wirkung von Aether, Chloroform und Alkohol auf das Zeitungsvermögen motorischen und sensibler Froschnerven — *Pflügers Arch.* Bd 52 1903.

(2) Hafemann, M. — Erllscht das Zeitungsvermögen motorischer und sensibler Froschnerven bei derselben Temperaturer Löhung? — *Pflügers Arch.* Bd 122-1908.

Svariati sarebbero gli eccitanti da applicare ed in modo pure svariato, ciò che sarà argomento di mie ulteriori ricerche, ma i dati raccolti sembrano suggestivi per accogliere l'opinione che c'è un rapporto di causalità tra lo stimolo applicato e le modificazioni prodotte da esso sul cilindrase. Pare che lo stimolo produrrebbe, a giudicare dalle particolari strutture descritte nel cilindrase, una vibrazione di questo, con susseguente formazione di onde a movimento trasversale e longitudinale insieme. Il movimento trasversale si manifesta colla formazione dei ventri e dei nodi, il longitudinale coll'ammassamento molto accentuato delle strie nei punti nodali. Questa trasmissione della corrente nervosa per onde crea un substrato fisico, prima d'ora non intravisto, della maniera di spiegarci la conduzione della corrente medesima. Per le proprietà dei corpi vibratorii, nei quali il cilindrase (e subordinatamente le neurofibrille) verrebbero annoverati, ci spiegheremmo la grande differenza di velocità fra la corrente nervosa, che in un secondo percorre poche decine di metri e la corrente elettrica che percorre centinaia di migliaia di chilometri (300.000 Km!). Ad uno studio ulteriore più analitico rimando il confronto fra le mie considerazioni e le teorie attualmente in voga per spiegare la causa e le modalità della conduzione della corrente nervosa. In ogni modo è la prima volta che si dimostra un rapporto fra la funzione e la forma del cilindrase, cioè del veicolo della corrente nervosa.

*
* *

Un altro carattere morfologico che fa attribuire al cilindrase quelle proprietà elastiche possedute in sommo grado dai corpi vibratorii è l'aspetto spiraloide od ondulato che talora esso assume. Talora infatti fra i cilindrassi delle fibre dilacerate dopo il trattamento con AgNO_3 (o servendoci di altri metodi) accade vederne qualcuno che presenta una caratteristica ondulazione, particolare ben dimostrato dall'annessa figura 6 del testo. Tale ondulazione manifesta nel cilindrase una particolare capacità elastica, che è la causa della sua variazione di calibro in nodi e in ventri.

Una uguale ondulazione presentano gli elementi di natura elastica come le fibre connettivali elastiche e le fibre gliari che sostengono gli elementi nervosi degli invertebrati, e della cui forma e del cui funzionamento mi sono occupato in altro mio lavoro (1).

RIASSUNTO

Dai fatti esposti credo si possano desumere le seguenti attendibili considerazioni, senza voler dare ad esse il valore esplicito di conclusioni recise, per un legittimo riserbo dovuto alla interpretazione di fenomeni di così grave momento.

1. Le strie del Fromann si estendono a tutto il cilindrase e non alla parte di esso prossima alla croce latina.

2. Esse sono tanto più avvicinate fra loro quanto più sono prossime alla croce latina (2).

(1) S. COMES — Importanza delle fibre della glia per spiegare il meccanismo di movimento nei Lombri-coidi. — Atti Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania Ser. V, Vol. VIII, 1914.

(2) I fatti riferiti da queste due prime conclusioni son riportati pure da Cajal nella sua *Hystologie du Sistheme nerveux de l'homme* ecc. (1909) senza per altro annettervi alcun significato.

3. I dischi scuri o le strie del Fromann risultano costituiti dalla iustapposizione, nel senso longitudinale, di sottili segmenti lineari, che potrebbero considerarsi come una porzione delle neurofibrille messa in evidenza dal reattivo.

4. Nello stesso nervo spinale ci sono fibre che non presentano nei loro cilindrassi tali striature, fibre con cilindrassi striati. Di quest'ultimi cilindrassi alcuni sono isodiametrici, altri si presentano costituiti da fusi intercalati a strozzamenti, che, per analogia di comportamento coi fenomeni fisici osservabili nelle corde elastiche in vibrazione, potremo indicare col nome di ventri e di nodi. In corrispondenza dei ventri le strie sono più spesse, più pallide, più lontane, in corrispondenza dei nodi esse sono impregnate dal reattivo, più sottili e molto più vicine.

5. Come nelle onde stazionarie anche in queste nervose esistono nodi e ventri di interferenza i cui caratteri sembrano subordinati ugualmente alle leggi fisiche che studiano le vibrazioni dei corpi elastici.

6. Si può stabilire dall'esposto un'intima somiglianza di forma e di funzione tra la fibra nervosa e la fibra muscolare striata, della quale somiglianza durante la superiore esposizione abbiamo determinato i rapporti, e per cui la contrazione muscolare e la conduzione della corrente nervosa sarebbero effetti diversi della stessa causa.

7. La conduzione della corrente nervosa susseguente all'applicazione di uno stimolo avviene per vibrazione del cilindrase, lasciando in questo un effetto morfologicamente apprezzabile e secondo modalità che rientrano nei fenomeni studiati dalla fisica.

È dunque alla stregua dello studio di tali fenomeni morfo-fisici probabilmente che verranno, con maggior probabilità di successo, esplorate le vie dell'anima.

Palermo, gennaio 1917.

Istituto Anatomico della R. Università di Catania
diretto dal Prof. R. STADERINI

Contributo allo studio della muccosa del seno mascellare.

Nota del Prof. G. CUTORE

Se intorno alla struttura della muccosa del seno mascellare, di costituzione relativamente semplice e di facile indagine, non sono pervenuti a risultati concordi quanti si son dati finora a studiarla, ciò devesi a cause diverse, ma principalmente, io credo, al difetto di un esame rigorosamente esteso a tutta l'estensione di essa.

Le indagini che si vogliono con tal criterio condurre richiedono tempo non breve, più di quanto non si possa a tutta prima prevedere perchè l'estensione di questa muccosa non è piccola ed inoltre perchè, a fine di ottenere buoni preparati istologici, è necessario scomporla in un buon numero di lembi da sezionare separatamente. Calcolata dalla superficie di un getto in paraffina ricavato da un seno mascellare umano di media ampiezza, la muccosa in parola misura d'insieme a un di presso 40 cm. q. dei quali 9 appartengono al lembo che riveste la porzione anteriore della parete o faccia laterale del seno, 13,5 a quello che riveste la porzione posteriore di essa, 7 al lembo corrispondente alla parete superiore od orbitale e 10,5 a quello corrispondente alla parete mediale o nasale.

A me parve utile esaminare separatamente la muccosa che riveste le diverse pareti del seno e quella che corrisponde ai diversi margini con i quali le pareti si continuano l'una nell'altra.

Le mie indagini sono state estese a tutta, o quasi tutta, la muccosa dei seni mascellari di 5 uomini adulti (tra il 23° e il 83° anno di età) ed inoltre, per alcuni raffronti, ho esaminato lembi più o meno estesi della muccosa del seno mascellare di alcuni bambini e di mammiferi appartenenti agli ordini dei perissodattili (cavallo, asino, mulo), degli artiodattili (capra, pecora, montone) e dei carnivori (cane). Per lo più la muccosa è stata distaccata, in cadaveri opportunamente scelti, dalle pareti ossee del seno e così isolata è stata sottoposta ai diversi trattamenti richiesti dalla tecnica istologica. Ho preparato inoltre alcune serie di sezioni con muccosa attaccata alle pareti ossee decalcificate.

Della tecnica istologica adoperata avrò occasione di dire in seguito.

Riassumo i risultati delle mie osservazioni dicendo separatamente: 1° dell'epitelio di rivestimento; 2° delle ghiandole; 3° della tunica propria; 4° della muccosa nel suo insieme.

1. *Epitelio di rivestimento* — Fondamentalmente esso somiglia, com'è noto, a quello di diversi altri segmenti dell'apparato respiratorio; è da per tutto cilindrico semplice vibratile. Il Romiti afferma che in alcuni punti esso è pavimentoso vibratile, ma a me non fu dato riscontrarne con siffatto aspetto. Secondo Prenant, esso misurerebbe 30 μ ; dalle

mie osservazioni risulta che, in media, nell' uomo lo spessore di esso oscilla fra 20 e 38 μ . L'epitelio è più spesso, di solito, in prossimità e sul contorno dell' *hiatus maxillaris*. Un notevole spessore epiteliale (42-43 μ .) ho riscontrato nella muccosa del seno di bambini da 1 a 2 anni di età.

Anche nella vecchiaia, l'epitelio si mantiene bene sviluppato in altezza. Considerata la muccosa secondo le diverse pareti del seno, si può affermare che l'epitelio è meno spesso (μ . 30-33) nella muccosa che riveste le pareti orbitale e nasale, e più spesso (μ . 37-38) nella muccosa che riveste la parete laterale. Nei lembi di muccosa appartenenti a pareti del seno dirette più o meno verticalmente, quali la nasale e le due porzioni della laterale, lo spessore epiteliale, pur modificandosi diverse volte, è maggiore di solito nelle sezioni ricavate dalla parte più alta. Per l'epitelio della muccosa che riveste la parete orbitaria, disposta quasi orizzontalmente, pare che esso, più spesso nella parte media, diminuisca di spessore verso le parti anteriore e posteriore di essa. L'epitelio della muccosa che riveste i margini, di solito è più spesso in corrispondenza di quelli che fanno continuare la parete orbitaria con quella nasale e con le due porzioni della parete laterale.

Nei mammiferi, ho trovato l'epitelio alto, in media, μ . 25-28 nel cavallo, nell'asino, nel mulo e nel cane e μ . 35-38 nella capra, nella pecora e nel montone.

A comporre l'epitelio della muccosa del seno mascellare contribuiscono tre sorta di cellule: c. cilindriche ciliate, c. caliciformi e c. basali.

Le c. cilindriche ciliate, fissando col liquido di Regaud e colorando col Sudan III e con l'emallume di Mayer, danno costantemente la reazione dei grassi neutri in forma di minutissimi granuli del caratteristico color rosso-arancio, che sono piuttosto rari nella metà più profonda delle cellule e si fanno sempre più numerosi man mano che andiamo a considerarli verso l'estremità libera di esse.

Si può inoltre mettere in evidenza in queste cellule un condrioma che, in preparati trattati con l'ematosilina ferrica di Heidenhain, risulta costituito da granuli mitocondriali orientati in serie longitudinali (condromiti) secondo il maggior asse della cellula. Anch'essi sono più numerosi nella metà più superficiale delle cellule.

Le c. caliciformi, che ho esaminato tanto nei preparati, molto numerosi, colorati con l'ematosilina Ehrlich, quanto in altri colorati con la muciemateina, esistono costantemente nell'uomo e pare che siano più numerose là dove difettano le ghiandole. Molto numerose si riscontrano di frequente nella muccosa che contorna l'*hiatus*. Negli altri mammiferi esaminati, le cellule caliciformi sono state scarsissime di numero, senza la forma caratteristica alla quale devono il nome.

Le cellule basali, che possono mancare in zone più o meno limitate di muccosa, racchiudano anch'essi, in mezzo al citoplasma, granuli di grassi neutri ed un apparato mitocondriale costituito da granuli disposti a coroncina attorno al nucleo.

2. *Ghiandole* — Delle ghiandole ho cercato di determinare:

- a) dove esse siano di preferenza disposte nello spessore della muccosa;
- b) se ed in quali delle diverse pareti e dei diversi margini del seno si rinvengono più costantemente ed in maggior numero;
- c) a qual tipo di ghiandole siano da riferire dal punto di vista morfologico;
- d) di qual natura, per quanto lo consentano le indagini isto-chimiche, sia il prodotto di secrezione da esse elaborato;
- e) in quali, tra i mammiferi esaminati, numericamente esse prevalgono.

a) Le ghiandole della muccosa in esame, a seconda che il corpo di esse è piccolo o voluminoso, trovano posto nella parte più superficiale od in quella più profonda della tonaca propria. Si possono pertanto distinguere: gh. superficiali e gh. profonde. Per quest'ultime è detto nel Trattato d'istologia di Prenant, Bouin e Maillard che, quando sono voluminose, arrivano qualche volta al periostio od al pericondrio. Or io credo di dover richiamare l'attenzione su una terza categoria di ghiandole, della quale finora, per quanto risulta dalle ricerche bibliografiche che ho potuto eseguire, non è stato fatto alcun cenno. Le sezioni istologiche che comprendono la muccosa e le pareti ossee del seno dimostrano che in alcune zone, più spesso in corrispondenza della parete nasale e del margine antero-mediale, fra tessuto osseo e muccosa esistono rapporti molto intimi. Per il modo di ingrandirsi di questa cavità paranasale, che si va ampliando principalmente per un processo di riassorbimento del tessuto osseo spongioso, in molti punti la zona più profonda della tonaca propria è insinuata in anfrattuosità ossee a volte molto pronunziate; nel tessuto connettivo che riempie queste anfrattuosità si rinvengono ghiandole che d'ordinario sono tra le più voluminose di quelle della muccosa in esame. Per tali ghiandole propongo il nome di *ghiandole intraossee*.

b) Se esistano nella muccosa del seno siti determinati nei quali più di frequente risiedano ghiandole non può ritenersi precisato dal differente modo di esprimersi di diversi Autori (Sappey, Kölliker, Luschka, Virkow, Krause, Scheff, Zuckerkandl, Paulsen, Schieferdecker ecc).

Dalle mie osservazioni risulta, con una costanza di reperto impressionante, che in maggior numero le ghiandole trovansi disseminate nella muccosa che riveste la parete nasale del seno: in tutte le sezioni (dello spessore di 10 μ .) nelle quali è stato scomposto questo lembo di muccosa, ho riscontrato ghiandole. In ordine decrescente, devo subito dopo segnare la mucosa della parete orbitale ed infine quella della parete laterale. Per la muccosa che riveste i margini posso affermare che in essa le ghiandole sono più numerose in corrispondenza del margine antero-mediale, dove frequentemente decorre verticalmente un grosso e lungo condotto escretore che è comune a molti corpi ghiandolari. La muccosa che riveste il margine postero-mediale accoglie anch'essa diverse ghiandole, ma più piccole e meno numerose ed un buon numero di esse, con una certa frequenza, sbocca in speciali lacune o tasche della muccosa, che descriverò in seguito. Meno numerose le ghiandole si riscontrano lungo il margine supero-mediale e lungo il margine inferiore, rare sono lungo il margine supero-anteriore ed ancor più rare in quello supero-posteriore.

Ed infine nel margine laterale, le ghiandole sono abitualmente mancanti del tutto.

Questo particolare di struttura fa differenziare questo margine dagli altri del seno e costituisce un nuovo criterio morfologico che induce a considerare, col Chiarugi, la faccia laterale del seno come unica, a differenza di quanti la distinguono in faccia anteriore e faccia posteriore con un margine interposto.

Riassumendo, possiamo ritenere che le ghiandole si trovano in maggior numero lungo i quattro margini che delimitano la parete nasale del seno, si vanno facendo più rare man mano che consideriamo i punti più lontani da essa e si rendono rare a dirittura nella muccosa che corrisponde al punto opposto alla parete nasale, qual'è quella che riveste il margine laterale.

Le numerose ghiandole che sono molto vicine all'orifizio di sbocco del seno si di-

spongono coi loro corpi seguendo una linea circolare che contorna l'orifizio stesso ed hanno i condotti escretori che si aprono in gran parte sul margine che lo delimita.

Da quanto ho fin qui esposto risulta che gli organi i quali versano il prodotto di secrezione nel seno mascellare sono, nell'uomo adulto, veramente numerosi. Questa constatazione contrasta, o per lo meno non si concilia facilmente, con l'idea espressa dal Torrigiani che " le ghiandole dopo la loro comparsa uniforme (verso il 6^o, 7^o mese della vita fetale) nelle fosse nasali e nei recessi, non aumentano mai di numero... „. Dalle misure date dallo Schaeffer e riportate dallo stesso Torrigiani risulta che il seno mascellare, a 7 mesi, misura in senso ventro-dorsale appena 5 mm., a termine 7 mm. Medio-lateralmente, a termine, è anch'esso di 7 mm. Nello adulto, in media, a questi diametri possiamo rispettivamente assegnare, secondo misurazioni da me praticate, la lunghezza di cm. 4 e di cm. 2,5.

Il seno mascellare è destinato ad accrescersi fino alla più tarda vecchiaia ed anche allora è veramente notevole il numero di ghiandole che ho riscontrato in tutta la muccosa. È dunque possibile ammettere che si tratti dello stesso numero di ghiandole comparse verso il 7^o mese di vita fetale, quando ho potuto inoltre constatare nella muccosa di bambini da 1 a 2 anni di età che le ghiandole non sono in quell'epoca più numerose e stipate che nell'adulto?

c) Prevalentemente, nell'uomo, le ghiandole del seno mascellare sono tubulose ramificate; di rado si riscontrano anche ghiandole tubulose semplici. Sulla presenza di questi due tipi di ghiandole nella muccosa del seno concordano Sieur e Jacob, Paulsen ed i Trattati di Anatomia del Testut e del Sappey. Solo il Rugani ha detto che le ghiandole del seno mascellare, nell'uomo, sono tubulari semplici.

La forma di ghiandole detta racemosa del Sappey ho riscontrato nel montone nel quale le ghiandole, più numerose e voluminose che nella capra e nella pecora, sono separate l'una dall'altra da aree piuttosto estese di tessuto connettivo. Nella capra, nella pecora e negli equini, nei quali sono più rare, le ghiandole hanno di solito la forma a grappolo. Nel cane esse sono tubulose ramificate e numerosissime da formare uno strato spesso e compatto di tubi ghiandolari, che occupa quasi tutto lo spessore della tunaca propria; i tubi ghiandolari sono separati da sottili tramezzi di tessuto connettivo. Si ha insomma una ricchezza ed una disposizione ghiandolare che ricorda molto quella della muccosa palatina.

d) Intorno alla natura delle ghiandole del seno mascellare si hanno i giudizi più disparati. Paulsen, che più diffusamente si è occupato dell'argomento, ha riferito che nel cane trovò tubi misti e che nel castrato rinvenne struttura varia, cioè: in un caso tubi sierosi; in due, tubi sierosi e qualche tubo misto ed in due altri infine tutti i tubi erano misti.

Non dobbiamo immaginare, egli ha detto, la composizione di questo epitelio come uguale e inalterabile in tutte le circostanze. Vi è piuttosto da pensare che tale composizione è sottoposta a modificazioni e che si verifica il passaggio dell'una all'altra varietà cellulare. Ed a meglio rafforzare questo suo modo di vedere, ha ricordato quanto è stato osservato dal Möbius nello spinello (*Spinachia vulgaris*), il cui rene, soltanto durante il periodo della riproduzione, oltre l'urina, elabora mucina che, emessa in forma di fili viene impiegata per la costruzione del nido. Esclusivamente in questo periodo, fra le comuni cellule epiteliali dei tubuli uriniferi, il Möbius ne osservò alcune aventi tutti i

caratteri delle cellule mucchose. Questi reperti hanno certo un interesse notevole in quanto dimostrano la possibilità di eventuali modificazioni funzionali in epitelii appartenenti ad organi ghiandolari anche se d'ordine così elevato qual'è il rene. Per analogia è possibile ammettere che, anche la natura delle ghiandole del seno mascellare, sotto l'influenza di cause diverse, possa subire eventuali modificazioni.

In tal modo possiamo giustificare non solo i pareri discordi di osservatori competentissimi, ma spiegarci altresì il reperto variabile del Paulsen nel castrato.

Dalle mie osservazioni risulta che l'*epitelio dei condotti escretori* delle ghiandole del seno mascellare è costituito da cellule cilindro-coniche e da cellule mucchose intercalate.

Queste vanno diminuendo di numero man mano che dal condotto escretore principale passiamo a considerar quelli di secondo, di terz'ordine e così via. Le cellule cilindro-coniche presentano nel citoplasma, col Sudan III, granuli di grassi neutri e, con l'ematossilina ferrica, un condrioma risultante di granuli variabili molto, per il numero e per la disposizione, nei diversi condotti escretori. L'*epitelio dei tubi ghiandolari* è costituito invece da cellule aventi i caratteri delle cellule sierose. Solo in due soggetti ottuagenarii, in alcuni tubi ghiandolari, il citoplasma di qualche cellula epiteliale, con l'ematossilina, ha presentato un accenno di quel sottile reticolo color bleu chiaro che con questo liquido colorante dà la mucina. Con la muciemateina intanto, ho ottenuto la colorazione caratteristica della mucina nelle cellule calciformi, molto numerose, dell'epitelio di rivestimento, non nelle cellule dei tubi ghiandolari.

Le sezioni praticate a tutto spessore nella muccosa che, lungo il contorno dell'*hiatus maxillaris*, guarda da una parte verso le fosse nasali e dall'altra opposta verso la cavità del seno, permettono di osservare, in zone molto vicine, le ghiandole che sboccano in queste due cavità. In tali sezioni, nei soggetti da me esaminati (ad eccezione dei due ottuagenari sopra ricordati) risulta evidente che le ghiandole delle fosse nasali, oltrechè per il maggior volume e per altri caratteri sui quali non devo ora intrattenermi, differiscono da quelle del seno perchè posseggono numerosi tubi misti, mentre in quest'ultime i tubi sono unicamente sierosi.

e) Una comparazione riguardo al numero di ghiandole riscontrate nel seno mascellare dei mammiferi esaminati, mi permette di affermare che esse nel cane sono in tanto numero da occupare quasi tutto lo spessore (che in alcuni tratti è di 1 mm. e più) della tunica propria della muccosa; sono meno numerose negli ovini (fra questi sono in maggior numero nel montone che nella capra e nella pecora); ancor meno numerose si riscontrano nell'uomo e piuttosto rare nel mulo. Nel cavallo e nell'asino non ne ho riscontrate con l'esame limitato al solo lembo di muccosa che riveste la parete orbitale del seno. Questo difetto di ghiandole mi ha fatto ricordare quanto asserì il Felisch riguardo al cavallo, cioè che piccole ghiandole trovò sparse solo in prossimità dell'orifizio di sbocco del seno, mentre non ne esisteva alcuna traccia nel resto della muccosa. Paulsen d'altro canto ha affermato che esistono ghiandole nel seno di questo equino, ma che, irregolarmente distribuite, possono mancare in vasti tratti di muccosa.

3. *Tunica propria* — Mi limito ad accennare ai particolari istologici che mi sembrano degni di speciale menzione, tralasciando quanto, riguardo a questa membrana, è comunemente noto.

Granuli di grassi neutri si osservano nella scarsa quantità di citoplasma che è nelle cellule endoteliali dei vasi sanguigni.

La *membrana basale*, negata da Zuckerkandl e da Schiefferdecker, è stata ammessa da Scheff. Oppikofer ha detto che abitualmente essa manca nella muccosa dei seni oppure esiste solo per breve tratto. Io credo di poter meglio determinare il comportamento di questa membrana dicendo che essa si riscontra solo in alcuni tratti ed in generale *là dove l'epitelio è più alto*.

Le *fibre elastiche* nella tunica propria sono costanti, non molto numerose ed in gran parte disposte parallelamente alla superficie libera della muccosa di cui seguono le diverse ondulazioni. Le più superficiali sono le meno numerose e le più sottili e formano un delicatissimo intreccio in prossimità dell'epitelio. A metà spessore circa del connettivo sottoepiteliale, le fibre elastiche sono più robuste e si riuniscono in fasci decorrenti nella direzione poc' anzi indicata. Nella parte più profonda infine della tunica propria, le fibre elastiche corte, sottili e poco ondulate vanno dalla superficie ossea a perdersi, con decorso obliquo, nel connettivo più vicino. Attorno a ciascun tubo ghiandolare ed a ciascun condotto escretore, queste fibre incurvandosi si dispongono a guisa di anello attorno la parete epiteliale di questi canali.

Gli *elementi linfatici* nella tunica propria del seno mascellare si trovano d' ordinario in numero molto limitato in prossimità dell'epitelio (o migranti attraverso le cellule epiteliali); in maggior numero si rinvencono attorno ai condotti escretori ed ai tubi ghiandolari.

Concrezioni — In mezzo al connettivo che costituisce la tunica propria, in un individuo ottuagenario ho riscontrato numerosi piccoli cumuli di concrezioni con l'aspetto di cristalli. Kölliker, Scheff e Schiefferdecker hanno osservato nella muccosa del seno mascellare concrezioni calcaree.

Ho voluto accertarmi se le concrezioni osservate risultassero di veri cristalli. Mi sono perciò rivolto alla cortesia del chiarissimo Prof. S. Di Franco, dell' Istituto di Mineralogia, ed il suo giudizio (per il quale gli rinnovo i più vivi ringraziamenti) qui riporto. Pare non si tratti nel caso in esame di veri cristalli, perchè questi (tranne i monometrici, che sono molto rari) a nicols incrociati, girando il piattello dell' apposito microscopio, interferiscono, cioè danno luce. Questo fenomeno manca invece osservando le concrezioni che si trovano nella muccosa del seno mascellare, le quali perciò sono da ritenere costituite da sostanze allo stato di cristalliti, non di veri cristalli, a meno che, come s' è detto, non si tratti di cristalli monometrici.

4. *Muccosa d' insieme*. — Lo spessore della muccosa che riveste il seno non è uniforme: anche ad occhio nudo, più specialmente quando si riesce a distaccarla d' insieme, si nota che la parte corrispondente ai margini d' ordinario è più sottile di quella corrispondente alle faccie del seno. La massima sottigliezza ho riscontrato più di frequente, nell' uomo, in quella parte di muccosa che riveste il margine inferiore e quello antero-mediale.

In queste zone, nei preparati istologici permanenti, lo spessore non va di solito, al di là di 100-150 μ . Lo spessore della muccosa varia inoltre tra punti vicini per le irregolarità della superficie ossea che essa riveste e tende a render regolare.

Differenze di spessore della muccosa in esame pare esistano tra i diversi mammiferi; così, tra quelli esaminati, nei perissodattili (cavallo, asino, mulo) presentasi molto più sottile che negli altri. Lo spessore massimo ho trovato invece nel cane.

Per meglio precisare questo particolare, riporto le medie ottenute misurando lo spes-

sore della muccosa con l'oculare micrometrico 2 Koristka. Ben s'intende che lo spessore della muccosa nei preparati microscopici permanenti è inferiore a quello che in realtà essa possiede allo stato fresco. Le cifre sottosegnate si riferiscono, in micron, a medie minime e massime ottenute da un buon numero di misurazioni.

Uomo	: 100 — 890	Capra	: 325 — 390
Cavallo	: 260 — 350	Pecora	: 725 — 800
Asino	: 200 — 265	Montone	: 825 — 875
Mulo	: 225 — 250	Cane	: 450 — 1340

Nell'uomo ho trovato le seguenti differenze di spessore nella muccosa delle diverse faccie del seno:

Parte posteriore della faccia laterale	: 70 — 275
„ anteriore „ „ „	: 100 — 700
Faccia orbitale	: 100 — 358
„ nasale	: 150 — 890

Costante e spiccata è la prevalenza di spessore della muccosa che riveste la parete nasale del seno.

Frequentemente la muccosa in esame presenta ripiegature in forma di lembetti costituiti da una parte centrale connettivale e dal rivestimento epiteliale, le quali si estendono in lunghezza fino a 3 mm. e più.

D'ordinario esse non si portano verso la parte centrale della cavità del seno, ma decorrono molto avvicinate, quasi addossate, alle pareti di esso seguendone il comportamento.

In uno dei casi esaminati, una di tali ripiegature si seguiva, gradatamente sempre più sviluppata in lunghezza, per 45 sezioni consecutive dello spessore di 10 μ ciascuna, praticate in senso orizzontale nella muccosa corrispondente al margine postero-mediale, procedendo dalla parte più alta verso quella più bassa del margine. Dopo questo tratto, l'estremo libero di tale ripiegatura veniva a saldarsi con la muccosa più vicina rimanendo così delimitata, nello spessore della tunica propria, una cavità in forma di fessura allungata a guisa di tasca, tappezzata da epitelio, continuazione di quello di rivestimento, di cui serba le caratteristiche fondamentali. È da notare che l'epitelio della parete più superficiale di queste fessure o tasche suole essere alto quanto quello che riveste la muccosa tutta del seno mascellare (20-25 μ), mentre quello della parete profonda è più alto (fino a 40-43 μ). Io sono rimasto impressionato dalla costanza con la quale i tubi ghiandolari della regione si dispongono verso le estremità opposte di queste fessure o tasche ed in esse si aprono i condotti escretori.

In sezioni successive, la cavità si rende meno estesa in lunghezza, si strozza nella parte di mezzo e si continua in due cavità più piccole, ciascuna delle quali gradatamente si restringe finchè termina a fondo cieco. Prima ancora che queste due cavità siano scomparse, alla superficie libera della muccosa si vanno sviluppando, ad una certa distanza l'una dall'altra, due altre ripiegature le cui estremità libere stanno rivolte l'una contro l'altra delimitando un'area depressa della muccosa stessa. Successivamente esse si allungano, vengono a contatto, si saldano rimanendo in tal modo delimitata, nello spessore

della tunica propria, una nuova cavità somigliante alla prima descritta. Anch'essa è destinata a terminare a fondo cieco in un'area connettivale che, oltre a ghiandole, contiene numerosi vasi sanguigni.

Nella muccosa del seno mascellare, anche quando abbia aspetto normale, possono dunque riscontrarsi lacune o fessure più o meno profonde, in forma di tasche terminanti a fondo cieco, tappezzate da epitelio cilindrico, nelle quali sboccano numerose ghiandole. Queste disposizioni ricordano le lacune di Morgagni della muccosa uretrale.

Ma non sono soltanto queste le particolarità di struttura che si possono riscontrare in queste lacune. Con un più attento esame si può distinguere che, in alcune di esse, la parete profonda presentasi irregolare per diverse estroflessioni epiteliali che, a guisa di diverticoli, rendono più complicata, estesa e profonda la cavità considerata d'insieme. Alcuni di questi diverticoli tendono ad estendersi in lunghezza nello stesso senso della lacuna dalla quale si sono originati, rimanendo da essa poco distanti e più profondamente disposti nello spessore della tonaca propria. Per tale disposizione si possono riscontrare, in alcune sezioni, diversi ordini di lacune, alcune più superficiali, altre più profonde, comunicanti le une con le altre.

Poc' anzi ho richiamato l'attenzione sulla notevole altezza (fino a 40-43 μ .) che presenta l'epitelio di rivestimento della parete profonda di queste lacune. Con forti ingrandimenti, in preparati colorati con ematossilina Ehrlich ed aurantia, alcune cellule epiteliali di questa parete si differenziano dalle comuni cilindriche per i seguenti caratteri speciali. Esse sono in gran parte più voluminose delle altre, alte 17-20 μ , con base a volte larga fino a 12-13 μ , possiedono nucleo centrale, vescicolare e si colorano in giallo-oro nel citoplasma finemente granuloso. Cosiffatte cellule si riscontrano più di frequente nelle depressioni e nei diverticoli epiteliali ed occupano il posto delle cellule basali oppure, dove l'epitelio è più sottile e rappresentato dalle sole cellule cilindriche, stanno incuneate in mezzo a queste e ne ripetano l'altezza.

Queste elementi, la cui natura non mi è riuscito di determinare perchè, riscontrati in un solo soggetto adulto, non poterono essere trattati con metodi istologici diversi, sono più numerosi nelle lacune o diverticoli più profondi cioè di secondo ordine, dove, per tratti più o meno estesi, specie verso i cul di sacco di queste cavità, formano da soli l'epitelio di rivestimento. Diverse volte mi occorse di riscontrare elementi con i caratteri sopradescritti dentro il lume di queste lacune, con disposizione analoga alle cellule centroacinose del pancreas.

Queste speciali cellule epiteliali pare non abbiano significato patologico mostrando la muccosa che le contiene aspetto normale ed è da escludere che siano cellule mucose perchè queste, com'è noto e come conferma in diversi punti l'esame delle stesse sezioni nelle quali esse si notano, prendono, per l'ematossilina, la colorazione bleu caratteristica della mucina.

Pur non avendo potuto determinare, col materiale di cui potei disporre, la natura di questi speciali elementi, ho creduto tuttavia opportuno di richiamare su di essi l'attenzione.

Da quanto ho fin qui esposto parmi potersi concludere che al seno mascellare, il quale contribuisce con gli altri seni paranasali e con le cellule etmoidali a render più leggero lo scheletro della testa, e ad ampliare le fosse nasali, molto verosimilmente compiono, speciali funzioni, che si compiono nella muccosa che lo tappezza. *I grassi neutri*, elaborati dalle cellule cilindriche, tanto dell'epitelio di rivestimento vero e proprio quanto

da quello dei condotti escretori e dalle cellule endoteliali dei vasi sanguigni; *il muco*, segregato dalle cellule caliciformi dell'epitelio di rivestimento e da quelle dei condotti escretori; *il siero*, prodotto dalle ghiandole tubulose semplici o ramificate (certo, non senza ragione, tanto numerose nel cane) ed infine *altre sostanze*, di natura per ora non nota, in rapporto con speciali cellule che con l'aurantia si colorano in giallo-oro, palesano d'insieme un'attività biologica e funzionale della muccosa del seno mascellare a bastanza complessa ed elevata.

BIBLIOGRAFIA

- Chiarugi** — Anatomia dell' uomo. Vol. primo.
- Felisch** — Beiträge zur Histologie d. Schleimhäute in d. Lufthöhlen d. Pferdekopfes—Göttinger phil. Inaug. — Dissert. — Berlin, 1878 (cit. da Paulsen).
- Kölliker** — Hand. der Gewebelehre des Menschen. Leipzig, 1902.
- Luschka** — Die Anatomie d. Menschen — u. Schleimpolypen d. Oberkieferhöhle — Virchow's Arch., Bd. VIII. (cit. da Paulsen).
- Oppikofer** — Beiträge zur normalen und pathologischen Anatomie der Nase und ihrer Nebenhöhlen. Arch. Laryngol. u. Rhinol., Bd. 19, N. 1.
- Paulsen** — Ueber die Schleimhaut, besonders die Drüsen der Oberkieferhöhle, Arch. f. Mikrosk. Anatomie Bd. 32. Bonn, 1888.
- Prenant, Bouin, Maillard** — Traité d'Histologie. T. II, Paris, 1911.
- Romiti** — Anatomia dell' uomo. Vol. secondo.
- Rugani** — Sulla distribuzione del tessuto elastico nella mucosa nasale e delle cavità accessorie. Monitore zoologico ital., Anno XV, 1904.
- Lo stesso** — Intorno alla minuta struttura della mucosa delle fosse nasali e delle cavità accessorie. Arch. ital. di Anatomia e di Embriologia. Vol. V. 1906.
- Sappey** — Trattato di Anatomia descrittiva.
- Scheff** — Krankh. d. Nase, ihr. Nebenhöhl. u. d. Rachens und ihre Untersuchungs — und Behandlungsmethoden. Berlin (cit. da Schiefferdecker).
- Schiefferdecker** — Histologie der Schleimhaut der Nase und ihrer Nebenhöhlen in Heymann — Hand. der Laryngologie und Rhinologie. Bd. III. Wien, 1900.
- Sieur et Jacob** — Recherches Anat., Clin. et Opérat. sur les fosses nasales et leurs sinus. Paris, 1901, (cit. da Rugani, 1906).
- Testut** — Trattato di Anatomia umana — trad. ital.
- Torrigiani** — Lo sviluppo delle cavità accessorie delle fosse nasali nell'uomo. Arch. ital. di Anatomia e di Embriologia. Vol. XII. Firenze 1913-14.
- Zuckerkandl** — Norm. u. pathol. Anat. d. Nasenhöhle u. ihr. pneumatischen Anhänge. II. Aufl. Wien, Bd. 1. (cit. da Schiefferdecker)

Istituto di Parassitologia Medica della R. Università di Catania
diretto dal Prof. M. CONDORELLI FRANCAVIGLIA Maggiore medico nella Riserva

**Congiuntivite catarrale acuta in un militare provocata
mediante l'uso di semi di ricino.**

pel Prof. M. CONDORELLI FRANCAVIGLIA

Fra le malattie provocate, di cui in questo periodo di guerra abbiamo deplorato indegna fioritura nelle reclute e nei richiamati, sono da noverarsi in primo luogo le oftalmie, sotto forma di congiuntivite catarrale acuta ed anche blenorragica, dovute all'impiego di polveri irritanti (tabacco, ipecacuana, ecc.) e all'inoculazione di pus di origine gonococcica.

Non avevo mai pensato alla possibilità dell'uso dei semi di ricino a tale scopo delittuoso; ed è appunto per la novità e per l'interesse dal punto di vista medico - militare ch'io riferisco ed illustro il seguente caso clinico.

Premetto che nel periodo di tempo, in cui ho lasciato sospesa la pubblicazione di questo lavoro per il desiderio di completarlo con ricerche sperimentali, che soltanto adesso ho potuto ultimare, è comparso nel Policlinico (Sezione Pratica, Fasc. 4, 21 gennaio 1917), fra i resoconti delle *Riunioni Medico-Chirurgiche Castrensi* (Ospedale da Campo 074, Zona di guerra, 30 ottobre 1916) il riassunto di una comunicazione del Tenente medico G. Sbordone, oculista del 2° Corpo d'Armata, su alcuni casi di congiuntivite provocata con semi di ricino.

La mattina del 16 novembre ultimo scorso, durante la chiamata alle armi della 3ª Cat. non istruita Classe 1887, M. G. di C. da Biancavilla, recluta, si presentava alla visita medica distrettuale, affetto da malattia oculare.

Egli aveva le congiuntive palpebrali superiori alquanto iperemiche, quelle inferiori molto arrossate e tomentose, e così pure la congiuntiva del culdisacco inferiore di ambo gli occhi; la congiuntiva bulbare era iniettata ma non fortemente. Le ciglia erano riunite a pennellini; nei fornici inferiori riscontravasi discreta secrezione opaca con fiocchi filiformi muco-purulenti.

Feci la diagnosi di *congiuntivite catarrale acuta*. Ma per la ineguale intensità del processo flogistico, con un massimo di flogosi nelle congiuntive palpebrali inferiori e nel rispettivo culdisacco, ebbi ragione di dubitare della natura spontanea del male; talchè ordinai al carabiniere, di servizio nella sala della visita medica, di perquisire la recluta, nelle cui tasche furono trovati, avvolti in carta, 34 semi, che, secondo il militare M., erano *fagioli da servirgli per la semina*, ma che invece, evidentemente, erano semi di ricino (*Ricinus communis L.*), euforbeacea indigena, com'è ben noto, dell'Africa tropicale, da noi coltivata un po' da per tutto, segnatamente nel Lombardo Veneto, e già divenuta spontanea in Calabria, Sicilia, Sardegna, ed isole minori.

In altri due casi posteriormente osservati di oftalmia, provocata pure coll' uso dei semi di ricino, riscontrai sempre i caratteri d'una congiuntivite catarrale acuta mucopurulenta con predominio dei fenomeni flogistici nella congiuntiva palpebrale inferiore e relativo culdisacco. Riscontrai una volta, insieme con forte edema palpebrale inferiore, chemosi della congiuntiva bulbare, carattere ricordato da Sbordone, sotto forma di cercine cingente la cornea, e costantemente uno *speciale colorito di carne lavata* della congiuntiva affetta, colore da ritenersi caratteristico in tale forma di congiuntivite provocata. Pure una sola volta mi fu dato constatare nel culdisacco congiuntivale inferiore sottili *strie biancastre* (piccole escare), descritte dallo stesso Autore nelle congiuntiviti provocate con semi di ricino.

In uno dei superiori casi l' affezione era monocolare: l' altro occhio si conservava perfettamente integro.

Talchè, riassumendo, i caratteri dell' autolesione in discorso sono: ineguale distribuzione del processo flogistico, fortemente pronunziato nella congiuntiva palpebrale inferiore e relativo culdisacco, meno in quella bulbare e pochissimo in quella palpebrale superiore. Nei casi gravi si aggiunge edema delle palpebre inferiori e chemosi della congiuntiva bulbare, formante un cercine rilevato attorno la cornea. La congiuntiva affetta prende sempre il *colore caratteristico di carne lavata*, ben diverso dal rosso scarlatto delle infiammazioni genuine; vi ha secrezione mucopurulenta più o meno abbondante, e le ciglia sono riunite a pennellini. Tale autolesione si constata ad ambo o in un solo occhio; mentre la forma naturale si sviluppa bruscamente nei due occhi e quasi contemporaneamente.

I semi, dei quali era in possesso quella recluta, avevano l' aspetto caratteristico della specie: forma ovoide un poco appiattita, dimensione di un fagiolo, ombelico sormontato da caruncola voluminosa, episperma a superficie liscia, lucida, di color giallo-grigio picchiettata di bruno, tigrata, che, insieme colla forma generale del seme, ricorda la zecca dei cani [*Ixodes ricinus* (L.)], da cui pare abbiano preso nome il seme e la pianta.

Tali semi, indubbiamente, non dovevano servire alla semina, come il M., per scagionarsi, assumeva; ma a fornirgli il mezzo idoneo a mantenere in atto e, nel caso, aggravare la malattia degli occhi; come pure, indubbiamente, di altri medesimi semi egli erasi servito per provocarla.

Nei semi del ricino si trova dal 40 al 46 % di olio fisso, che, applicato sulle mucose più delicate, non manifesta alcuna azione irritante, come non irrita nemmeno lo stomaco, che attraversa senza decomporsi; ma, arrivato nell' intestino, per l' influenza del succo pancreatico si scinde in glicerina ed acido ricinoleico, il quale ultimo eccita i movimenti peristaltici, e spiega l' attività purgativa, nel mentre che l' eccesso d' olio, rimasto indecomposto, lubrifica la mucosa intestinale e le masse fecali, agevolandone l' espulsione.

Ma nei semi di ricino, oltre all' olio purgativo, si trova la *ricina*, veleno potentissimo di natura albuminoide, secondo Ehrlich e Kobert, che la considerarono una toxalbumina; invece, secondo altri autori (Tuson, Gautier, Gaglio, ecc.), appartenente al gruppo dei fermenti vegetali. È solubile nell' acqua, nella glicerina acquosa, nell' etere, insolubile nell' alcool e nell' olio; motivo per cui, colla spremitura dei semi, essa non passa nell' olio purgativo, e rimane nei panelli.

La ricina è una sostanza eminentemente tossica, al punto di uccidere il coniglio alla dose di mgr. 0,04 per via ipodermica e di mgr 3 per os. L' ingestione di 2 a 4 semi

provoca nell'uomo gravissimi fenomeni di avvelenamento: accidenti atasso-adinamici, anuria, coma e per fino la morte. L'azione tossica si accompagna a quella fortemente irritante: infatti la ricina, deposta sulle mucose, le irrita, le iperemizza, le infiamma; ragion per cui l'intossicazione grave da seme di ricino per la via dello stomaco è caratterizzata, oltre che dagli accidenti sopra ricordati, da gastro-enterite acuta spesso con vaste ulcerazioni, che interessano in modo speciale le placche del Peyer.

La ricina, più di altre fitotossine (abrina, crotina, tossine del polline), è importante dal punto di vista scientifico per la sua analogia con le tossine batteriche: come Ehrlich ha dimostrato, la somministrazione agli animali da esperimento di ricina in quantità piccolissima, progressivamente crescente, li immunizza contro la ricina stessa, in modo da fare poi tollerare quantità fortissime di gran lunga superiori alla dose letale.

Tale immunità è la conseguenza della produzione nel corpo dell'animale immunizzato di un anticorpo (*antiricina*), che si trova nel sangue in eccesso, e che neutralizza la tossina *in vitro et in vivo* (Citron, Gaglio).

Ho voluto direttamente controllare l'azione irritante della ricina sulla congiuntiva degli animali, sperimentando sui volatili (tacchino e pollo) e sui mammiferi (cavia).

Come materiale irritante mi sono valso del seme *in toto*, oppure della polpa dei semi liberati dall'episperma, oppure del liquido ottenuto mediante emulsione dei semi finamente trituriati in mortaio di porcellana in presenza di acqua distillata, e successiva filtrazione in comune carta da filtro.

I. Gruppo di esperienze mediante l'uso dei semi in toto — Liberati i semi dal tegumento, si tagliuzzano questo finamente con le forbici, e si polverizza nel mortaio sino a ridurlo in polvere impalpabile. Si aggiungono i cotiledoni coll'albumine, e si triturano finissimamente, fino a ridurre il tutto in una massa butirrosa omogenea a grana finamente impalpabile e di colore cioccolata.

1ª Esperienza — 5 marzo 1917 ore 15: la quantità di una lenticchia di tale poltiglia viene deposta nel culdisacco inferiore della congiuntiva palpebrale dell'O. D. di un tacchino di Cg. 5,350. Ore 20: si nota lieve iperemia congiuntivale. Si depone uguale quantità di sostanza nel medesimo occhio.

Giorno 6 ore 7: forte iperemia congiuntivale, maggiormente pronunziata alla palpebra inferiore, con abbondante secrezione sierosa. Si depone uguale quantità di sostanza nel medesimo occhio. Ore 15: chemosi palpebrale con secrezione muco-purulenta. Si depone uguale quantità di sostanza nel medesimo occhio.

Giorno 7 ore 7: chemosi palpebrale fortissima, che impedisce l'ispezione del globo oculare; abbondante secrezione muco-purulenta. L'animale manifesta un senso di malessere, e rifiuta il cibo. Si sospende l'applicazione della sostanza.

Giorno 8: l'animale si trova nelle condizioni del giorno precedente, e una crosta di muco-pus condensato ricopre l'O. D. Semplice lavaggio di pulizia con acqua potabile tiepida.

Giorno 9: chemosi diminuita; si riesce a mettere in evidenza la cornea, nella quale si constata lieve opacamento.

Giorno 10: chemosi palpebrale quasi del tutto scomparsa, le congiuntive sono alquanto arrossate, la lieve opacità corneale è stazionaria, secrezione muco-purulenta scarsissima.

Giorno 11: occhio quasi normale. Si sospendono le osservazioni.

2ª Esperienza — 5 marzo 1917 ore 15: nel culdisacco congiuntivale inferiore dell'O. D. di un pollo del peso di Cg. 1,200 viene deposta della poltiglia di seme di ricino nella quantità di una grossa capocchia di spillo. Ore 20: si nota semplice iperemia congiuntivale. Si depone uguale quantità di sostanza.

Giorno 6 ore 7: forte iperemia congiuntivale con secrezione sierosa; palpebra inferiore e nittitante alquanto tumide. Si aggiunge uguale quantità di sostanza. Ore 15: intensa chemosi palpebrale con secrezione muco-purulenta; non si riesce a scoprire la cornea; senso di generale malessere, rilevabile dal fatto che il pollo sta accovacciato e rifiuta il cibo. Si sospende l'applicazione della sostanza.

Giorno 7: come nel giorno precedente. Semplice lavaggio di pulizia con acqua potabile tiepida.

Giorno 8: i fenomeni infiammatori, per quanto ancora imponenti, accennano ad attenuarsi.

Giorno 9: le palpebre cominciano ad aprirsi, non è però possibile constatare lo stato del globo oculare.

Giorno 10: chemosi diminuita, ma ancora rilevante; lieve opacità della cornea alquanto rammollita.

Giorno 11: palpebre e congiuntive migliorate; cornea come nel giorno precedente.

Giorno 12: edema palpebrale lievissimo, secrezione poco abbondante, cornea sensibilmente migliorata.

Giorno 13: quasi ripristinate le condizioni normali. Si sospendono le osservazioni.

3^a Esperienza — 7 marzo 1917 ore 16: la quantità di sostanza della dimensione di una lenticchia viene deposta nel culdisacco congiuntivale inferiore dell'O. D. di cavia del peso di gr. 400.

Giorno 9 ore 8: congiuntiva palpebrale lievemente arrossata. Si depone uguale quantità di sostanza nel culdisacco congiuntivale. Ore 16: forte iperemia congiuntivale, più pronunciata alla palpebra inferiore; abbondante secrezione muco-purulenta. Si aggiunge altra sostanza.

Giorno 10: Aumenta la secrezione muco-purulenta, la quale traccia sulla guancia una sottile striscia di arrossamento, che va dall'angolo interno dell'occhio destro all'angolo boccale dello stesso lato. La palpebra comincia a tumefare.

Giorno 11: forte chemosi palpebrale e della congiuntiva bulbare formante un cercine rilevato attorno la cornea; presenza di sottili strie trasversali biancastre (piccole escare) sulla congiuntiva palpebrale inferiore e relativo culdisacco; cheratite abbastanza pronunciata con cornea un poco opaca ma non rammollita. Si sospende l'applicazione della sostanza. A poco a poco i fenomeni flogistici si attenuano, e il giorno 14 la cavia può considerarsi guarita, pur persistendo lieve opacità corneale.

Le superiori esperienze dimostrano che nei semi di ricino *in toto* si contengono delle sostanze flogogene, che, deposte sulla congiuntiva oculare, determinano una infiammazione acuta sotto forma di congiuntivite catarrale muco-purulenta con possibile complicazione corneale; e dicono pure che l'azione di esse sostanze è più pronta e violenta nei volatili (pollo e tacchino, nel primo principalmente), anzichè nei mammiferi (cavia).

Se prima che si verifichino gravi alterazioni corneali, si sospende l'applicazione della sostanza irritante, i fenomeni flogistici in primo tempo si arrestano, e poscia gradatamente si attenuano, sino a scomparsa quasi completa nel breve periodo di 4 a 6 giorni.

Si può obiettare che la oftalmia, che si provoca deponendo sulla congiuntiva la poltiglia di semi di ricino *in toto*, sia dovuta non all'azione flogogena di speciali sostanze irritanti contenute nella polpa e nel tegumento dei semi, ma al traumatismo esercitato sulla congiuntiva stessa dai frammentini dell'episperma, ridotto prima in polvere impalpabile e poi fortemente impastato e reso omogeneo colla polpa.

A prevenire tale possibile obiezione, ho eseguito le seguenti esperienze:

II. Gruppo di esperienze mediante l'uso dei semi di ricino liberati dall'episperma — I semi, mondi dal tegumento, vengono triturati lungamente in mortaio di por-

cellana : si ottiene una sostanza bianco-giallastra omogenea di consistenza e di aspetto butirroso.

1^a *Esperienza* — 7 marzo ore 15 : si depone la quantità di una grossa lenticchia di essa sostanza nel culdisacco congiuntivale inferiore dell' O. D. di un tacchino del peso di Cg. 4, 200. Ore 20 : si nota rilevante iperemia congiuntivale con secrezione sierosa. Si applica uguale quantità di sostanza.

Giorno 8 marzo ore 7 : fortissima iperemia congiuntivale con abbondante secrezione muco-purulenta. Si applica uguale quantità di sostanza. Ore 20 : chemosi palpebrale fortissima, tale da impedire la ispezione del globo oculare. L' animale rifiuta il cibo. Si sospende l' applicazione della sostanza.

Giorno 9 marzo ore 7 : come la sera del giorno precedente ; O. D. coperto da ampia crosta di muco-pus disseccato, che si rimuove con semplice lavaggio di acqua potabile tiepida.

Giorno 10 marzo ore 7 : i fenomeni flogistici tendono ad attenuarsi, ma non è ancora possibile ispezionare la cornea.

Giorno 11 marzo : chemosi palpebrale diminuita, abbondante secrezione muco-purulenta, cornea un poco opaca e leggermente rammollita.

Giorno 12 marzo : chemosi palpebrale sensibilmente attenuata, stato della cornea migliorato.

Giorno 13 marzo : palpebre detumefatte, congiuntive ancora arrossate.

Giorno 14 marzo : l'occhio può considerarsi clinicamente guarito, e quindi si sospendono le osservazioni.

2^a *Esperienza* — 7 marzo ore 16 : si depone la quantità di una grossa capocchia di spillo della sostanza nel culdisacco congiuntivale inferiore dell' O. D. di un pollo del peso di Cg. 1, 100. Ore 19 : notevole iperemia congiuntivale. Si applica uguale quantità di sostanza.

Giorno 8 ore 8 : fortissima chemosi palpebrale, che impedisce l' ispezione del globo oculare. Allontanando appena e con forza le palpebre, schizza un liquido sieroso. L' animale rifiuta il cibo. Si sospende l' applicazione della sostanza.

Giorno 9 marzo : continua grave la chemosi ; palpebre ricoperte da crosta di muco-pus disseccato.

Giorno 10 marzo : come sopra.

Giorno 11 marzo : chemosi diminuita, cornea infiltrata e leggermente opaca.

Giorno 12 marzo : palpebre meno tumefatte, stato di nutrizione della cornea migliorato, abbondante secrezione muco-purulenta.

Giorno 13 marzo : chemosi palpebrale scomparsa, cornea quasi del tutto trasparente.

Giorno 14 marzo : l'occhio può considerarsi sano, e quindi si sospendono le osservazioni.

3^a *Esperienza* — 12 marzo ore 16 : si depone la quantità di una lenticchia di sostanza nel culdisacco inferiore dell' O. D. di una cavia del peso di g. 350.

Giorno 13 ore 8 : lieve iperemia congiuntivale. Si applica altra sostanza. Ore 16 : forte iperemia congiuntivale, più pronunziata alla palpebra inferiore ; comincia la secrezione muco-purulenta. Si aggiunge altra sostanza.

Giorno 14 marzo ore 8 : la flogosi aumenta con abbondante secrezione muco-purulenta. Si aggiunge altra sostanza. Ore 16 : come sopra, in più lieve chemosi palpebrale. Si aggiunge altra sostanza.

Giorno 11 marzo ore 16 : forte chemosi palpebrale ; la cornea è un po' opaca ed infiltrata ; congiuntiva alquanto tumida e del colore di carne lavata ; presenza di piccole escare a forma di sottili strie biancastre sulla congiuntiva palpebrale inferiore e relativo culdisacco ; abbondante secrezione muco-purulenta, che determina sulla pelle la comparsa di una sottile striscia rossa, estendentesi dall'angolo interno dell'occhio ammalato all'angolo labiale dello stesso lato. Si aggiunge altra sostanza.

Giorno 16 marzo ore 8: condizione dell'occhio come sopra; in più chemosi della congiuntiva bulbare formante un cerchio rilevato attorno la cornea; congiuntiva colore carne lavata. Si sospende l'applicazione della sostanza. Ore 12: la cavia si rinviene morta, ma ancora calda.

All'autopsia si riscontra: enterite acutissima estesa a tutto quanto l'intestino tenue, la cui mucosa è fortemente congesta e in più punti rammollita ed ulcerata in corrispondenza delle placche del Peyer; stomaco pieno di alimento; fegato fortemente aumentato di volume e rammollito, con vescica biliare distesa da un liquido di colore giallo pallido; milza poco ingrossata; reni macroscopicamente normali; capsule surrenali ingrossate, congeste e con infarto emorragico centrale; vescica urinaria semipiena di liquido torbido di colore biancastro; ventricolo sinistro in diastole.

La morte indubbiamente avvenne per enterite acuta tossica, cagionata da ingestione di parte della polpa di semi di ricino, deposta nell'O. D. e poi dall'animale trasportata colle zampe alla bocca, o qui pervenuta colla secrezione muco-purulenta lungo il solco di arrossamento tracciato sulla guancia.

Tali esperienze dimostrano che la polpa, libera dall'episperma, è di azione più pronta ed energica della sostanza proveniente dai semi *in toto*, e che la oftalmia sperimentale non è dovuta all'azione traumatica della polvere dell'episperma, fittamente impastata e resa omogenea colla polpa dei semi di ricino, ma esclusivamente a speciali sostanze flo-gogene (*ricina*) contenute in essi.

Incidentalmente viene pure provato che la cavia è sensibilissima all'azione tossica della *ricina*, e che sono sufficienti quantità piccolissime di polpa di semi di ricino per provocare enterite acuta tossica con effetti letali.

A meglio dimostrare che l'azione irritante dei semi di ricino sulla congiuntiva è dovuta a speciale sostanza solubile (*ricina*), contenuta nella polpa di essi, non avendo a mia disposizione della ricina, nè essendomi possibile ritirla dal commercio o prepararla direttamente dai semi, institui una 3^a serie di esperienze coll'uso di un collirio, da me preparato mediante emulsione dei semi pesti in acqua distillata tiepida, ove la ricina è solubile, e successiva filtrazione.

III. Gruppo di esperienze mediante l'uso di un collirio contenente sciolta la ricina — 20 semi di ricino, liberati dall'episperma, vengono lungamente triturati in un mortaio di porcellana ed emulsionati in 10 cmc. di acqua distillata tiepida. Per 24 ore si lascia la miscela al termostato alla temperatura di 30° C.; indi si filtra, e si mette da parte il liquido filtrato, contenente in soluzione la ricina, ch'è solubile nell'acqua.

Tale liquido, perfettamente limpido e trasparente, scorrevole e di reazione leggermente acida, ho adoperato come collirio nelle seguenti esperienze:

1^a *Esperienza* — 10 marzo 1917 ore 7: due gocce di collirio si instillano sulla congiuntiva dell'O. D. di una tacchina del peso di Gg. 2,900. Ore 15: nessuna reazione. Si instillano altre due gocce di collirio.

Giorno 11 marzo ore 7: congiuntiva alquanto arrossata; niente secrezione. Si aggiunge altro collirio. Ore 15: forte iperemia congiuntivale con lieve secrezione. Si aggiunge altro collirio.

Giorno 12 marzo ore 7: chemosi palpebrale con secrezione muco-purulenta; lieve.

opacità corneale. Si sospende il collirio. Ore 15: forte chemosi palpebrale; cornea non ispezionabile; abbondante secrezione muco-purulenta appiccaticcia. Lavaggi dell'occhio con acqua potabile tiepida.

Giorno 13 marzo ore 7: chemosi diminuita; secrezione sempre abbondante.

Giorno 14 marzo: chemosi quasi scomparsa, cornea molto migliorata, secrezione diminuita.

Giorno 15 marzo: l'O. D. è ritornato in condizioni quasi normali; si sospendono per tanto le osservazioni.

2ª Esperienza — 10 marzo 1917 ore 8: due gocce del superiore collirio si instillano nella congiuntiva dell'O. D. di un pollo del peso Cg. 1. 450. Ore 16: nessuna reazione. Si aggiunge altro collirio.

Giorno 11 marzo ore 8: iperemia congiuntivale; lieve secrezione sierosa. Si aggiunge altro collirio. Ore 16: chemosi palpebrale, cornea trasparente, abbondante secrezione sierosa. Si aggiunge altro collirio.

Giorno 12 marzo ore 8: forte chemosi, cornea leggermente opaca, secrezione muco-purulenta. Si sospende il collirio. Ore 16: chemosi più forte, cornea non ispezionabile, palpebre coperte da secrezione incrostata. Lavaggi tiepidi di acqua potabile.

Giorno 13 marzo: come sopra.

Giorno 14 marzo: fenomeni flogistici in decrescenza, cornea alquanto opaca, secrezione diminuita.

Giorno 15 marzo: chemosi lieve, infiltrazione corneale scomparsa, secrezione poca.

Giorno 16 marzo: occhio in condizioni quasi normali.

3ª Esperienza — 14 marzo ore 8: si instillano poche gocce di collirio nell'O. D. di cavia del peso di g. 450. Ore 16: nessuna reazione. Si instilla altro collirio.

Giorno 15 marzo ore 8: iperemia congiuntivale, poca secrezione di liquido sieroso. Si aggiunge altro collirio.

Ore 16: aumento del catarro congiuntivale con secrezione muco-purulenta; leggera chemosi palpebrale. Si aggiunge altro collirio.

Giorno 16 marzo: Ore 8: chemosi palpebrale, congiuntiva fortemente iperemica ed infiltrata, secrezione muco-purulenta abbondante. Si aggiunge altro collirio. Ore 16: come sopra, in oltre lieve opacità della cornea senza segni di rammollimento della medesima. Si sospende il collirio.

Giorno 17 marzo ore 8: chemosi palpebrale diminuita, congiuntiva iperemica del colore di carne lavata, secrezione meno abbondante e più densa. Dall'angolo interno dell'O. D. all'angolo labiale dello stesso lato, notasi sulla pelle una sottile striscia rossa dovuta all'azione irritante del secreto commisto all'eccesso di collirio instillato. Ore 16: lieve miglioramento dei fenomeni flogistici. La congiuntiva palpebrale, ancora iperemica, conserva il colore di carne lavata.

Giorno 18 marzo: le condizioni dell'occhio sono molto migliorate, e il dì seguente riprendono quasi lo stato normale.

Queste esperienze dimostrano che, con l'uso del collirio di cui sopra, si può provocare un'oftalmia (congiuntivite catarrale acuta muco-purulenta), dovuta esclusivamente all'azione irritante di speciali sostanze chimiche (*ricina*) contenute nei semi di ricino e solubili in acqua. È dimostrato pure che l'azione irritante del collirio è meno pronta ed energica di quella della poltiglia dei semi *in toto* e meno ancora di quella della poltiglia dei semi mondi dal tegumento.

CONCLUSIONI

1. I semi di ricino, per la *ricina* che contengono, esercitano un'azione generale fortemente tossica e un'azione topica irritante sulla congiuntiva oculare, che s'infiamma coi caratteri di una congiuntivite catarrale acuta muco-purulenta.

2. Tale congiuntivite provocata differisce dalle forme cliniche spontanee e naturali per l'ineguale distribuzione del processo flogistico, ch'è più intenso nella congiuntiva palpebrale superiore e relativo culdisacco (ove viene deposta la sostanza flogogena), e meno pronunziato o quasi nullo nella congiuntiva palpebrale superiore. La congiuntiva bulbare partecipa anch'essa, ma moderatamente, nei casi ordinari, mentre in quelli gravi si presenta chemotica e forma un cerchio rilevato attorno la cornea. Inoltre la congiuntiva iperemica assume il colore caratteristico di carne lavata e non quello rosso scarlatto delle infiammazioni genuine. Nei casi gravi, dove intensa è la flogosi, sulla congiuntiva palpebrale inferiore e relativo culdisacco notasi la presenza di piccole escare sotto forma di strie biancastre trasversali. L'edema palpebrale può o no esistere, a seconda l'intensità del processo flogistico. Contrariamente a quanto avviene quasi sempre nelle forme catarrali genuine, l'autolesione congiuntivale può essere monoculare.

3. La congiuntivite catarrale acuta può provocarsi deponendo nel culdisacco congiuntivale inferiore piccola quantità di poltiglia, ricavata da pestamento dei semi *in toto* o dei semi liberi dall'episperma; oppure instillando poche gocce di un collirio, facilmente preparabile mediante triturazione dei semi in acqua distillata tiepida, ove la ricina è solubile, e successiva filtrazione.

4. La poltiglia, ricavata dai semi liberi dall'episperma, esercita sulla congiuntiva un'azione più pronta ed energica di quella ricavata dai semi *in toto*; come pure l'azione di questa è, alla sua volta, più pronta ed energica di quella del collirio.

5. Per la maggiore speditezza di preparazione e praticità d'uso, credo che più comunemente si ricorra all'impiego di polpa di semi mondi, la quale facilmente può ridursi in poltiglia omogenea mediante una qualunque spatola o lama di coltello.

6. Non si esclude la possibilità dell'uso dei semi di ricino per *os* allo scopo di provocare una gastro-enterite acuta.

Catania, Marzo 1917.

Istituto d' Anatomia, Fisiologia comparate e Zoologia
della R. Università di Catania

Ulteriori ricerche su l'origine del deutolecite nell' ovo di Coniglia

(Natura microchimica dei granuli mitocondriali, dei globuli a struttura mielinica
e del materiale che imbeve la zona pellucida).

Nota del Prof. **ACHILLE RUSSO**

(Con 1 Tavola e 2 figure nel testo).

Questa Nota fa seguito ad alcune mie precedenti pubblicazioni (1), nelle quali ho trattato dei mitocondri e dei materiali deutoplasmici dell' oocite di Coniglia. In esse ho sostenuto che il materiale per l' incremento di tali formazioni, durante la crescita dell' uovo, provenga dall' esterno, e che i granuli mitocondriali, ritenuti da alcuni osservatori parti cellulari non modificabili, possano nell' ovo di Coniglia essere influenzati dal particolare metabolismo dei soggetti.

Le prove di fatto da me addotte furono in parte di natura sperimentale, in parte di natura morfologica: Fra le prime è da annoverare il loro aumento nell' ooplasma e la loro presenza, sotto forma granulare, al di fuori dell' ovo, alla base delle cellule follicolari e dentro la zona pellucida, quando questa si è costituita, nelle Coniglie convenientemente trattate con *Lecitina*; la loro diminuzione o, comunque, la loro alterazione, quando le Coniglie siano state assoggettate ad un prolungato digiuno. Riguardo ai dati di natura morfologica, per identificare i granuli di natura mitocondriale, fondavo le mie conclusioni, tenendo presente la loro forma, la loro disposizione in serie e la loro elettività per i reagenti, messi generalmente in uso per differenziarli da altre granulazioni protoplasmatiche. Nei citati lavori, inoltre, mettevo in luce un dato di fatto, che potrebbe avere un notevole valore per il significato biologico di coteste speciali granulazioni, cioè che il materiale per il loro incremento provenga dal di fuori, attraverso la zona pellucida. Questa, difatti, nei soggetti trattati con *Lecitina*, si trova imbevuta di una sostanza, che si colora costantemente come i granuli, che si osservano nell' ooplasma: in azzurro, quando si adoperi la colorazione Benda al *Cristalvioletto*, in nero intenso, quando s' impieghi l' *Ematossilina di Heidenhain*, proposta da O. Van der Stricht, e tale sostanza ho chiamata *mitocondriogena* (Vedi figure 1^a e 2^a nel testo).

(1) RUSSO A. — I mitocondri ed i globuli vitellini dell' oocite di Coniglia allo stato normale ed in condizioni sperimentali. Atti Accad. Gioenia di Sc. Nat. Ser. V. vol. 2, 1909.

» » — Sui mutamenti che subiscono i mitocondri ed i materiali deutoplasmici nell' oocite di Coniglia in diversi periodi d' inanizione. Arch. f. Zellforschung, Bd. V, Heft II. 1910.

» » — Aumento dei granuli protoplasmatici nell' oocite delle Coniglie iniettate con Lecitina, loro diminuzione nelle Coniglie digiunanti e loro natura lipoide e mitocondriale. Arch. f. Zellforsch. Bd. VIII, Hft II. 1912.

Per quanto concerne i dati sperimentali fu obiettato che i granuli, aumentati con le iniezioni di *Lecitina*, siano di natura *deutoplasmica* e che quindi essi possano appartenere alla categoria dei *grassi neutri*; riguardo a quelli di natura morfologica fu osservato che finora non si hanno metodi precisi per differenziare detti granuli (1). Non ostante di queste obiezioni abbia trattato diffusamente il Duesberg (2), trovando un pieno accordo tra le mie ricerche e quelle da lui fatte nelle stesse ova di Coniglia, pure, trattandosi di soggetti lecitinati, l'obiezione poteva essere giustificata.

Essendo le presenti ricerche dirette a chiarire tale problema, ho creduto necessario impiegare qualche metodo microchimico fra i più attendibili che possa differenziare i *grassi neutri*, che compongono i globuli di deutolecite, a struttura mielinica, dai materiali *lipoidi*, che formano in tutto o in parte i granuli mitocondriali. Soltanto, se, con tali metodi, i granuli fuori dell'ovo si fossero tinti come i globuli di deutolecite, non sarebbe stato più alcun dubbio che l'obiezione, mossa dai vari autori, cioè che la *Lecitina* iniettata giungesse come tale all'ovo, avesse avuto una giustificazione. Di fatto però, ciò non si osserva in alcuno dei preparati fatti con i metodi ritenuti specifici per differenziare i grassi dai lipoidi o da altre costituenti del protoplasma cellulare, come si dirà nel corso di questo lavoro; perciò è da ammettere che la *Lecitina* stessa si decomponga prima di giungere alla formazione ovarica.

Il materiale per queste osservazioni mi fu fornito da Coniglie, che avevano subito il trattamento ipernutriento a mezzo della *Lecitina*. Alcune (1° Gruppo), nel corso di due anni ebbero 51 iniezioni di *Lecitina* Merck, com'è detto in un'altra mia pubblicazione (3), altre (2° Gruppo) ebbero un trattamento più breve, avendo subito soltanto 20 iniezioni di *Bioplastina Sersono* nel corso di tre mesi, cioè da Settembre a Novembre 1917. Quest'ultimo trattamento, dai reperti che si sono avuti, si è dimostrato ugualmente efficace, avendo osservato, dopo di esso, anche un aumento dell'elemento granulare, sia fuori sia dentro dell'ovo.

Dalle ovaie, estratte dall'animale appena ucciso, furono asportati i follicoli più grossi con un po' di tessuto circostante, dei quali, quelli del 1° gruppo furono fissati con la miscela di Benda, subendo l'ulteriore trattamento prescritto dal metodo. In questo caso le sezioni, invece di essere colorate con i metodi comunemente adoperati per mettere in evidenza le formazioni mitocondriali, furono trattate con un colorante poco adatto e tale da far risaltare solo i globuli di deutolecite, anneriti dall'Acido osmico. A tale scopo fu scelta la *Saffranina Pfitzner* e le sezioni furono montate in *Gomma sciroppo* di Apàthy ovvero in *Balsamo* sciolto in *Xilolo*.

Dalle ovaie delle Coniglie del 2° gruppo furono asportati anche i follicoli più grossi, per essere trattati con i metodi specifici, adatti a differenziare i *lipoidi* dai *grassi neutri* e ciò allo scopo di vedere, come avanti fu detto, se questi ultimi, oltre a trovarsi nell'ooplasmia, si trovassero anche nella zona pellucida o nelle cellule follicolari. A tale scopo fu-

(1) Non ostante la specificità dei metodi per differenziare i *mitocondri* nelle diverse categorie di cellule sia ancora discutibile, pure finora *incontestabilmente* quello del Benda rimane il più adatto a questo scopo.

(2) DUESBERG I.—Plastosomen « Apparato reticolare interno » und Chromidialapparat. Ergebn. d. Anatomie u. Entwicklungsgesch. Wiesbaden. Cfr. pagine: 710, 711, 712, 713, 714.

(3) RUSSO A — Influenza del riproduttore sulla proporzione numerica dei nati dei due sessi nella Coniglia. Arch. di Fisiologia. Vol. XIV, Fasc. I. 1915 Firenze.

rono adoperati i tre metodi proposti dal Ciaccio, i quali, come è noto, servono a differenziare cotesti costituenti protoplasmatici. La colorazione al *Sudan III*, nel 1° metodo, tinge in rosso aranciato soltanto i *Lipoidi*; mentre con il 2° e 3° metodo, avendo i pezzi, nella fissazione, subito l'azione anche dell'*Acido osmico*, i grassi comuni assumono una tinta nera. In effetti però, nel materiale da me studiato, con questo 3° metodo non si ha una tinta spiccatamente nera dei globuli di deutolecite, assumendo essi una tinta più tosto grigia, nerastra, o caffè; ma è pur vero che essi, dentro l'ooplasma, si differenziano dalle esili granulazioni mitocondriali, che si colorano spiccatamente in aranciato con il 1° metodo, ed in giallo rossastro con il 3°; mentre, d'altra parte, i globuli di deutolecite non si osservano affatto sia nella zona pellucida sia alla base delle cellule follicolari, o, comunque al di fuori dell'ovo.

Dalle figure 1^a 2^a e 3^a nelle quali furono riprodotte alcuni stadi di oociti, tratti da ovaie fissate secondo Benda e colorati con la *Saffranina*, appartenenti a Coniglie del 1° gruppo, risulta evidente che nell'ooplasma soltanto esistono globuli a struttura mielinica o di deutolecite, anneriti dall'*Acido osmico* e presumibilmente di natura adiposa. Granuli di tale natura non esistono nè nel protoplasma dell'oocite primordiale, nè nelle cellule follicolari, situate attorno l'ovo, nè nella zona pellucida, la quale si presenta sempre uniformemente colorata in rosso.

Negli oociti primordiali, aventi un rivestimento di cellule follicolari piatte, in cui ancora la zona pellucida non si è costituita, come si osserva nella Fig. 1^a della Tavola, l'ooplasma è solo infarcito di granuli che si tingono in rossastro e che per la loro disposizione corrispondono ai granuli mitocondriali, che si mettono in evidenza con i metodi specifici, come si può rilevare da mie precedenti pubblicazioni. La mancanza di globuli di deutolecite a questo stadio, secondo il mio parere, starebbe a dimostrare che l'oocite primordiale assuma una sostanza chimicamente diversa della *Lecitina*, la quale, com'è noto, dovrebbe tingersi in giallastro, e che l'oocite stesso, per lo stadio precoce del suo sviluppo, non abbia ancora la capacità sintetica necessaria a trasformare le sostanze lipoidi assunte dall'esterno, attraverso gli apparati cellulari che lo rivestono, in deutolecite, che è chimicamente affine ai grassi neutri.

Al contrario, negli oociti, che hanno raggiunto uno stadio più avanzato dello sviluppo, con un solo strato di cellule follicolari cubiche (fig. 2^a della Tavola), in cui la zona pellucida si è già costituita, per la funzione specifica, che l'oocite in crescita esplica come elemento a funzione tipicamente anabolica e costruttrice, già si comincia ad osservare, qua e là sparsi nell'ooplasma, alcuni globuli di deutolecite, anneriti dall'*Acido osmico*. Negli oociti più sviluppati, che sono circondati di un follicolo polistratificato (fig. 3^a), i globuli di deutolecite sono più abbondanti: essi spiccano per la loro tinta nera o caffè, per le loro dimensioni maggiori dei granuli mitocondriali e per essere ancora in numero relativamente scarso.

Negli oociti a sviluppo più inoltrato, con cavità follicolare già formata, senza alcun segno di degenerazione sia nella granulosa ovulare sia nella parietale, i globuli di deutolecite di natura adiposa, tinti dall'*Acido osmico*, sono invece sparsi abbondantemente in tutto l'ooplasma e posti lungo le maglie della rete, che limita i vacuoli. Tali globuli, che non assumono mai una tinta spiccatamente nera come i grassi ordinari, si trovano soltanto negli oociti delle Coniglie lecitinate; poichè negli oociti delle Coniglie normali gli stessi elementi, che sono sempre in più scarso numero, si tingono in grigio molto sbiadito, quando si colora con l'*Ematossilina* di Heidenhain, ovvero in un bel rosa, quando s'impieghi la colorazione pro-

posta dal Benda al *Cristalvioletto* ed alla *Solfoalizarina*, per lo studio delle formazioni mitocondriali, come ho rilevato nei lavori precedenti (1). Ciò fa supporre o che esista una differenza di costituzione chimica tra i materiali, che artificialmente si son fatti penetrare nell'ovo, a mezzo delle iniezioni di Lecitina, ed i materiali ordinari, propri all'attività costruttrice e sintetica dell'ovo, ovvero che la maggiore quantità di materiale lipoidico, artificialmente introdotto, dia ai globuli di deutolecite più spiccatamente la reazione propria dei grassi.

Ho cercato d'indagare quale potesse essere il meccanismo della formazione di detti globuli, se cioè essi si formino per deposito di materiale adiposo indipendentemente dai granuli elementari di natura mitocondriale, ovvero se essi si costituiscono dai mitocondri stessi, i quali sarebbero il centro, attorno a cui si depositano degli strati di grasso, secondo la nota teoria di *Altmann*. Tale ricerca, trattandosi di ovaie tratte da Coniglie lecitinate, speravo potesse condurmi a qualche risultato, in favore dell'una o dell'altra dottrina, ma, non mi ha dato risultati migliori da quelli avuti precedentemente ed esposti nel lavoro, pubblicato nel 1910 in Arch. f. Zellforsch. dal titolo: "*Sui mutamenti che subiscono i mitocondri ed i materiali deutoplasmici nell'ooците di Coniglia in diversi periodi d'inanizione*". In tale lavoro ho dimostrato, infatti, che il granulo mitocondriale si trasforma direttamente in globulo di deutolecite, perchè si vede gradatamente rigonfiarsi e mutare la sua elettività verso i coloranti impiegati: dal colore azzurro che esso assume dal *Cristalvioletto*, nello stato di granulo mitocondriale, passa, per una serie graduale di tinte intermedie, al colorito *rosa*, che assume dalla *Solfoalizarina*.

Con l'uso dei tre metodi al Sudan III, proposti dal Ciaccio, e che, adoperati sul medesimo materiale, possono servire a differenziare i *grassi neutri* dai *lipoidi* in genere, si ottenne una dimostrazione più precisa e dettagliata del problema, che mi ero proposto risolvere e che ho accennato al principio di questa Nota.

Con il I^o metodo, che serve soltanto a mettere in evidenza quelle sostanze, che, con termine generale, furono dette Lipoidi, come si osserva nelle figure 4^a, 5^a, 6^a e 7^a della Tavola, i granuli, ritenuti di natura mitocondriale, assumono una tinta aranciato, che spicca bene sul fondo anche aranciato, ma sbiadito dell'ooplasma.

Tali granuli sono quasi puntiformi, molto più piccoli delle analoghe formazioni, che si mettono in evidenza con le colorazioni specifiche (Metodo di Benda).

Negli oociti primordiali (fig. 4^a) essi sono sparsi uniformemente nell'ooplasma; ma nello sviluppo successivo (fig. 5^a), vengono spinti verso la periferia, da dove, disponendosi in serie, s'insinuano fra i vacuoli, che si originano, come ho detto in altro lavoro (2), nella regione mediana dell'ooplasma.

A misura che l'ovo cresce, i granuli, tinti in aranciato, crescono sempre più di numero, tanto che in quelli con follicolo polistratificato e in quelli con follicolo di Graaf a completo sviluppo, tutto l'ooplasma ne è occupato (fig. 6^a e 7^a).

Ma, ciò che a me pare interessante si è che i granuli con la stessa colorazione aranciato si trovano al di fuori dell'ovo, cioè nel protoplasma delle cellule follicolari ed alla base di queste nel punto in cui s'impiantano sulla superficie esterna della zona pellucida.

(1) RUSSO A. — Cfr. lavori citati in prima pagina.

(2) RUSSO A. — Cfr. lavoro dal titolo: *Aumento dei granuli protoplasmatici nell'ooците delle Coniglie iniettate etc.* Arch. f. Zellforsch. Bd, VIII, Hft. 1 — 1912, pag. 209.

In questa regione si osserva una sostanza granulare e filamentosa con tinta giallastra molto sbiadita, in mezzo alla quale sono sparsi in mucchietti delle granulazioni, che hanno il colore aranciato, caratteristico dei granuli, che sono dentro l'ooplasma.

La zona pellucida non presenta alcuna struttura speciale, salvo qualche stria radiale incolore: essa però in generale si colora in un giallo tendente all'aranciato, il che farebbe credere che nella sua costituzione chimica entrerebbe a far parte anche un lipide, analogo a quello che entra nella costituzione dei granuli, che si osservano dentro e fuori dell'ovo, e che sono, come fu detto, di natura mitocondriale.

Ma la migliore prova che nella zona pellucida ed alla periferia dell'ovo non si trovino dei grassi neutri, simili ai globuli di deutolecite, che si osservano nell'ooplasma, si ebbe con l'applicazione del 3° metodo Ciaccio, che serve appunto a differenziare i grassi ordinari dagli altri costituenti chimici del protoplasma. Con tale metodo la zona pellucida, le cellule follicolari, che circondano l'ovo, il materiale elaborato da queste e posto sulla superficie esterna della zona medesima, non presenta alcun granulo imbrunito dall'*Acido osmico*, assumendo questi apparati sussidiari dell'ovo una tinta aranciato, alquanto più grigia o *foncè* di quella che gli stessi elementi assumono con il 1° metodo. Al contrario, quando l'ovo ha raggiunto un determinato sviluppo, quando cioè in esso si desta l'attività elaboratrice di quella parte del deutolecite, formata dai globuli a struttura mielinica, si osservano dei granuli piuttosto grossi, con tinta caffè, distinti dalle minute granulazioni mitocondriali, che prendono una tinta aranciato più tosto tendente al grigio.

Come dianzi fu detto, però, non si tratta di un vero *grasso neutro*, che con il 3° metodo tingesi tipicamente in nero e che tale rimane nella successiva colorazione con il Sudan III, ma di una sostanza chimicamente affine, differente in ogni caso da quella che compone l'elemento mitocondriale.

Con il 3° metodo i globuli di deutolecite, se si osservano nelle sezioni sparaffinate e montate in Gomma-sciroppo, si mostrano di colore grigio tendente al nerastro; solo nelle sezioni colorate con il Sudan III essi assumono la tinta caffè più o meno scura, per cui spiccano benissimo in mezzo al rimanente materiale ooplasmico a tinta aranciato *foncè*. La loro natura adiposa, analoga a quella dei grassi comuni, viene anche rivelata dalla solubilità, quando le sezioni siano tenute per alcune ore, alla temperatura ordinaria, nell'*Essenza di Trementina*.

Con il 3° metodo, mentre negli oociti primordiali raramente si osserva qualche globulo di deutolecite tinto in caffè, in quelli con follicolo monostratificato a cellule cubiche (fig. 8^a) o polistratificato, questi stessi globuli sono abbastanza numerosi, di varia grossezza e largamente sparsi lungo le maglie della rete ooplasmica. Negli oociti a completo sviluppo, aventi una larga cavità follicolare, sono molto più numerosi, sono sparsi lungo le maglie di tutta la rete ooplasmica e sempre chiaramente distinti dalle granulazioni mitocondriali più esili e di tinta diversa (fig. 9^a).

Allo stesso stadio di sviluppo degli oociti di Coniglie, anche trattate con Lecitina, le immagini sono diverse, quando i follicoli furono fissati con il liquido di Benda e le sezioni colorate con l'Ematossilina Heidenhain.

Con tale colorazione, se non è possibile fare una netta distinzione tra i granuli ooplasmici, anneriti dall'Acido osmico, ed i granuli mitocondriali, anneriti dall'Ematossilina (sebbene con un attento esame si possa vedere che, mentre i primi assumono una tinta gri-

gio sporca, i secondi si colorano in un bel nero, spesso tendente al violetto), si ha un reperto, che presenta un particolare interesse per il significato biologico delle formazioni mitocondriali. In questo caso, a differenza di quanto fu osservato nei preparati colorati con la Saffranina, o con i metodi specifici al Sudan III, la zona pellucida assume costantemente una tinta nero intensa, in tutto simile ai granuli ooplasmici mitocondriali.

Quando la zona non è ancora costituita, come nell'ooците a follicolo monostratificato, rappresentato nella 1ª figura, inserita nel testo, al di fuori dell'ovo e propriamente alla

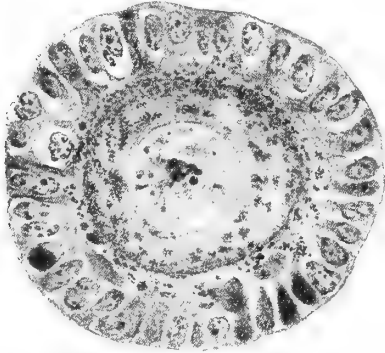


Fig. 1ª — Oocite di *Coniglia lecinata*, con follicolo monostratificato. Alla base delle cellule follicolari sono dei gruppi di granuli che si tingono come i granuli mitocondriali posti nell'ooplasmia, dove sono anche più numerosi che nel normale. Fissazione e colorazione, secondo Benda—Van der Stricht.

Koristka $\frac{\text{oc. com. 4}}{\text{obb. m. omog. 2,0 mm.}}$

Tubo alzato 15—Carta a livello del piano del preparato.

Da Russo: Arch. f. Zellforsch. Bd. VIII, Hft. II, 1912.

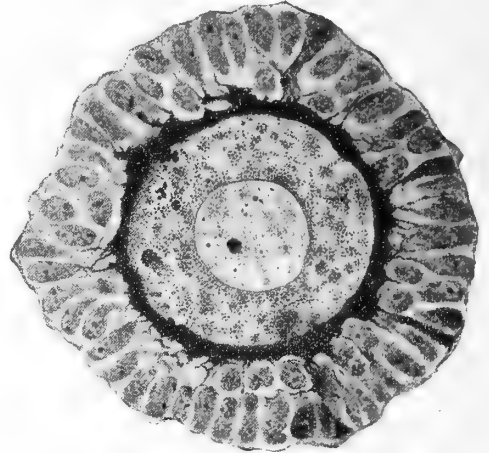


Fig. 2ª—Oocite, come nella fig. 1ª, con follicolo 1-2 strati cellulari. Nell'ooplasmia i granuli sono molto numerosi e disposti in cordoni. L'ooците è circondato di una sostanza che occupa tutto lo spessore della zona pellucida, che si colora in nero intenso, come i granuli, e che forma la sostanza mitocondriogena.

Fiss., color. ingr. come nella fig. 1ª.
(Da Russo etc.)

base delle cellule follicolari, si osservano dei granuli isolati o in gruppi, aventi la stessa tinta nera dei granuli ooplasmici. Questo materiale, come altri reperti analoghi mi fanno supporre, concorre alla costituzione della zona, formando, con il suo accumularsi, il materiale mitocondriogeno.

Negli oociti a follicolo monostratificato a cellule cubiche, bistratificato e polistratificato, come si osserva nella fig. 2ª qui inserita, e nelle figure 3ª e 4ª del lavoro, dal quale la stessa fig. 2ª fu riprodotta, nei quali oociti la zona è a completo sviluppo, essa è interamente imbevuta di tale materiale.

La tinta nera, assunta dalla zona pellucida, nelle colorazioni ottenute con l'Ematossilina ferrica, indubbiamente è dovuta alla composizione chimica della sostanza che imbeve quest' involucre dell'ovo. Il suo comportamento con tale colorante è dovuto alla presenza di un lipide, simile a quello che concorre alla formazione del granulo mitocondriale, come dimostrarono Faurè-Fremiet, Mayer e Schaeffer (1) e successivamente Mayer, Rathery e Schaeffer (2).

(1) FAURÈ FREMIET, MAYER E SCHAEFFER — Sur la constitution et le rôle de mitochondries. Compt. rend. Soc. d. Biologie 1909.

» » » » — Sur les réactions chimiques des mitochondries. — Ibidem 1909.

(2) MAYER, RATHERY E SCHAEFFER — Sur les propriétés des granulations ou mitochondries de la cellule hépatique normale. Soc. de Biologie, 1910.

Tale constatazione si fonda sulla insolubilità dei lipoidi, prodotta dalle sostanze che compongono il fissatore di Benda e dalla successiva *cromizzazione*, dovuta all'azione dell'*Acido cromatico* 1 % e del *Bicromato potassico* 2 %, mediante il quale processo, con l'*Ematossilina*, si forma una *lacca cromo-ematossilinica*, colorata in nero.

Ora, se tale reazione vale a mettere in evidenza le granulazioni mitocondriali nell'interno del protoplasma cellulare, deve anche valere a scoprire le sostanze analoghe che si trovano al di fuori, e nel caso presente quelle che si trovano nella zona pellucida. Tali fatti, che avevo già esposto in una mia precedente pubblicazione (1), con questa nota suppletiva vengono suffragati da constatazioni di fatto più dirette, in quanto che con i nuovi metodi, applicati sul medesimo materiale, si è potuto fare una distinzione più precisa fra i *lipoidi*, che entrano nella costituzione chimica dei *mitocondri*, ed i *grassi neutri*, che compongono i globuli di *deutolecite*.

Il fatto che nella zona pellucida non si osservano materiali di natura grassa e tali da potere essere anneriti dall'*Acido osmico*, dimostra che nell'ooplasma penetra soltanto una sostanza, che può essere trasformata in grasso, e tale è appunto il *lipoide*, che imbeve la zona e che prende parte alla costituzione dell'elemento mitocondriale.

Il volere approfondire l'analisi fino al punto di conoscere se i granuli trovati in aumento si costituiscano direttamente dalle sostanze assunte dall'ooците, ovvero se essi si formino da granuli preesistenti, che assumono la colorazione specifica dei mitocondri perchè s'impregnano delle sostanze stesse artificialmente introdotte, esorbita dei mezzi tecnici di cui oggi si dispone.

Da quanto si è esposto risulta tuttavia che l'uovo ha una funzione specifica o una proprietà sintetica tutta propria, che lo rende capace di eseguire la trasformazione dei *lipoidi*, che vi penetrano dall'esterno, in sostanze *grasse e deutolecitiche*.

CONCLUSIONI

Da quanto fu sopra esposto risulta :

1. che i *granuli ooplasmici* di natura mitocondriale contengano nella loro costituzione un *lipoide*,
2. che tali elementi lipoidici si trovano anche nel protoplasma delle *cellule follicolari* e sulla superficie dell'ovo, fuori della *zona pellucida*,
3. che la *zona pellucida* non contiene mai globuli di *deutolecite* o, comunque, sostanze di natura grassa, che vengono anneriti dall'*Acido osmico*, quando si adopera il fissatore di Benda,
4. che la *zona pellucida* stessa, nelle ovaie trattate col metodo specifico per la ricerca dei *lipoidi* e propriamente con il 1° *metodo Ciaccio al Sudan III*, assume una tinta aranciato, analoga a quella dei granuli mitocondriali, il che fa supporre che essa sia imbevuta di una sostanza di analoga costituzione chimica,
5. che con il 3° metodo, diretto a differenziare i *grassi neutri* dai *lipoidi*, al di fuori dell'ovo e dentro la *zona pellucida* non si sono trovati mai *grassi*, i quali invece

(1) RUSSO A. — Cfr. lavoro avanti citato, pag. 213.

si mostrano, sotto forma di *globuli, a struttura mielinica*, tinti in caffè, nell'ooplasma delle ova che hanno raggiunto un determinato sviluppo, e propriamente a cominciare da quelle che sono fornite di un *follicolo monostratificato a cellule cubiche*,

6. che la produzione di tali elementi deutolecitici, di natura adiposa, sia dovuta ad una particolare *attività costruttrice o anabolica* dell'ovo, che si manifesta solo, quando esso ha raggiunto un determinato periodo del suo accrescimento,

7. in ultimo, che nel trattamento ipernutriento alla *Lecitina*, questa sostanza non arriva all'uovo con la stessa costituzione chimica, poichè essa dovrebbe trovarsi al di fuori, negli apparati sussidiari, dove sarebbe identificabile per la sua speciale reazione microchimica: probabilmente essa si scinde ed all'ovo giungono solo gli *Acidi grassi*.

Sta di fatto, in ogni modo, che fuori dell'ovo normale, qualunque sia lo stadio della crescita, non si trovano mai *grassi neutri* o *Lecitina*, imbruniti dall'*Acido osmico* o diversamente rilevabili col *Sudan III*, trovandosi invece soltanto granuli di lipoide, di natura mitocondriale.

Catania, marzo 1917.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE DELLA TAVOLA

•

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE DELLA TAVOLA

*Tutte le figure furono tratte da sezioni di ovaie di Coniglie
iniettate con Lecitina.*

Le figure 1^a, 2^a e 3^a sono del 1^o gruppo; le figure 4^a, 5^a, 6^a, 7^a, 8^a e 9^a del 2^o gruppo.

- Fig. 1.** — Tre Oociti primordiali con follicolo a cellule piatte, in cui si osservano le granulazioni mitocondriali colorate in roseo. Fiss. Benda, Colorazione con Saffranina Pfitzner-Zeiss: $\frac{\text{oc. comp. } 4^{\circ}}{\text{obb. } 160 \text{ mm. im. omog.}}$
tubo corto — carta sul piano del preparato.
- Fig. 2.** — Oocite con follicolo a cellule cubiche e con zona pellucida già costituita. Nell' ooplasma si osservano dei globuli di deutolecite tinti in nero dall' Acido osmico, ma la zona e le cellule follicolari ne sono affatto prive. Fiss., Color., ingr. come sopra.
- Fig. 3.** — Oocite con follicolo polistratificato. Nell' ooplasma si distinguono i globuli di grasso, tinti in nero, di cui la zona è sprovvista. Fiss. Coloraz., Ingr. come sopra.
- Fig. 4.** — Oociti primordiali, in cui si osservano le granulazioni di natura lipoide e mitocondriale, tinte in aranciato. 1^o metodo Ciaccio. Zeiss: $\frac{\text{oc. comp. } 4^{\circ}}{\text{obb. im. omog. } \frac{1}{15}}$ tubo corto — carta sul piano del preparato.
- Fig. 5.** — Oocite con follicolo a cellule cubiche. Le granulazioni tinte in aranciato si trovano dentro e fuori l' ooplasma. Alla base delle cellule follicolari sono degli aggruppamenti degli stessi granuli lipoidi e mitocondriali. 1^o metodo Ciaccio. Ingr. come sopra.
- Fig. 6.** — Oocite con follicolo polistratificato. Le granulazioni lipoidi, tinte in aranciato, oltre che nell' ooplasma, sono nel protoplasma delle cellule follicolari e sulla superficie esterna della zona pellucida. Fiss., color. ingr. come sopra.
- Fig. 7.** — Oocite con follicolo di Graaf a completo sviluppo. Si osservano le medesime particolarità della figura precedente. Fiss., color., ingr. c. sopra.
- Fig. 8.** — Oocite con follicolo monostratificato a cellule cubiche, quasi allo stesso stadio di quelli riprodotti nelle figure 2^a e 5^a — I grassi neutri con tinta caffè, sotto forma di globuli, sono sparsi in discreto numero nell' ooplasma, ma mancano al di fuori dell' ovo, sia nelle cellule follicolari, sia sulla superficie ovulare, in cui si dovrà costituire la zona pellucida — 3^o metodo Ciaccio per differenziare i grassi neutri dai lipoidi. Ingr. c. s. .
- Fig. 9.** — Oocite con follicolo di Graaf a completo sviluppo. I globuli adiposi sono sparsi abbondantemente sulla rete ooplasmica, che limita i vacuoli. Come nella figura precedente, oltre a detti globuli, sono delle granulazioni di colore aranciato, tendente più al grigio di quelli che si mettono in evidenza con il 1^o metodo. Le cellule della granulosa ovulare e la zona pellucida sono affatto sprovvisti di elementi granulari, che possano riferirsi per la loro tinta nera o caffè ai grassi neutri. 3^o Metodo. Ingr. come s. .

Fig. 1.

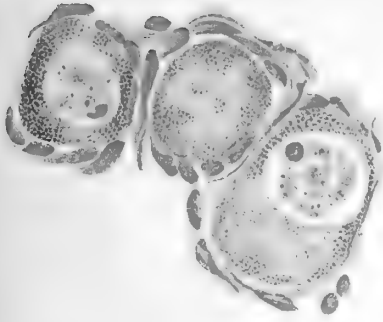


Fig. 2.



Fig. 3.

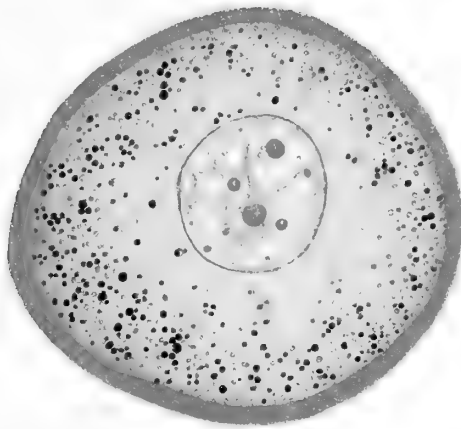


Fig. 4.

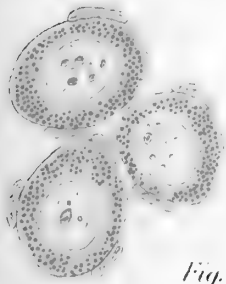


Fig. 5.

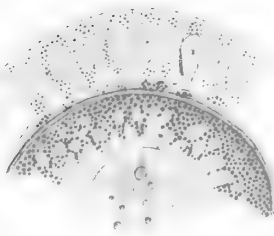


Fig. 7.

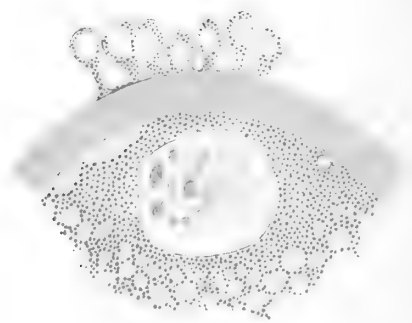


Fig. 6.

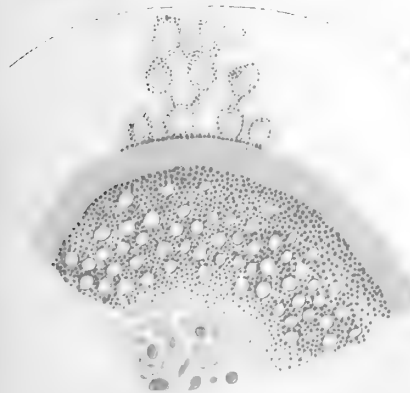


Fig. 9.

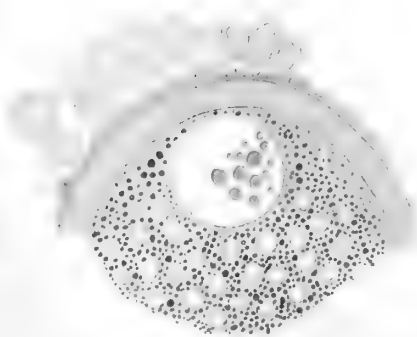
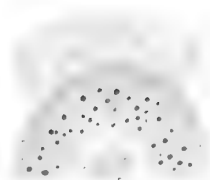
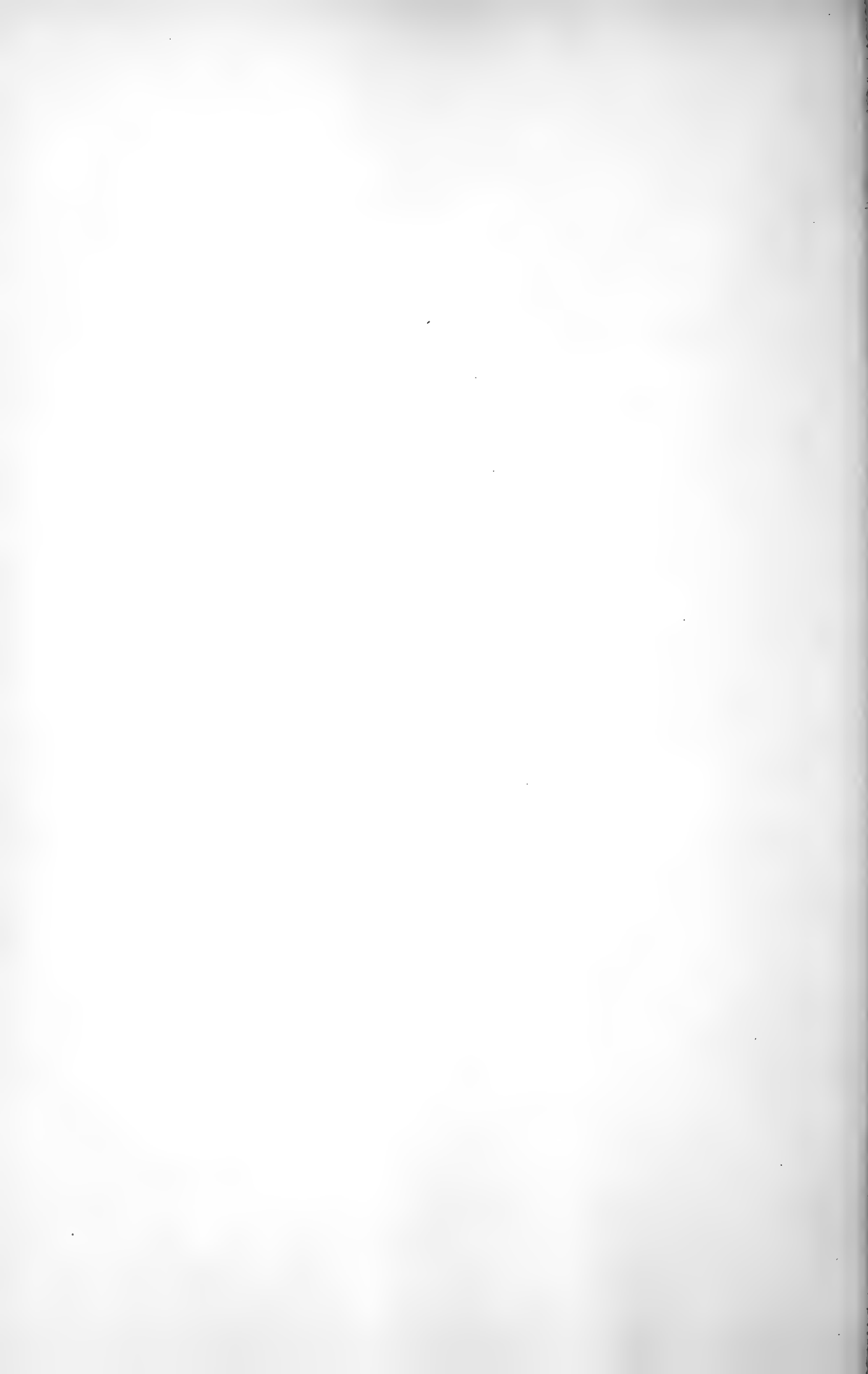


Fig. 8.





**Il discriminante e il numero delle radici immaginarie
di un'equazione algebrica a coefficienti reali.**

Nota del Prof. MICHELE CIPOLLA

*Ortae ex Cartesio, quam Newtonus insuper auxit,
Doctrinae en! demum fons et origo patent.*

SYLVESTER ¹⁾

1. La regola dei segni di CARTESIO e quella di NEWTON ²⁾, che, com'è noto, dànno un limite superiore del numero delle radici reali di un'equazione

$$(1) \quad f(x) = 0,$$

nella quale $f(x)$ è una funzione razionale intera di x , a coefficienti reali, conducono immediatamente alla determinazione di una successione di funzioni razionali intere dei coefficienti dell'equazione, dai segni delle quali si può in ogni caso dedurre un limite superiore delle dette radici.

La questione analoga per la determinazione, sulla scorta del teorema di STURM, del numero esatto delle radici stesse, non è invece di così facile risoluzione.

Com'è noto, il numero delle variazioni che presenta la successione dei coefficienti dei termini di massimo grado delle successive funzioni di STURM, relative alla funzione $f(x)$, è uguale al numero delle coppie distinte delle radici immaginarie coniugate dell'equazione ³⁾. La questione viene così ricondotta alla determinazione dei coefficienti suddetti. E tale determinazione, per una funzione $f(x)$ generale di grado n , fu eseguita da SYL-

¹⁾ Questo distico fu pubblicato da J. J. SYLVESTER nei *Proceedings of London Mathematical Society* dell'a. 1865, e trovasi riportato nella raccolta degli epigrammi latini del SYLVESTER, pubblicata *for private circulation only* dall' *Athenaeum Club, Pall Mall, London* nel 1896. Rendo in proposito sentite grazie al ch.mo Prof. G. TORELLI della R. Università di Napoli, che gentilmente m' inviò un esemplare di questa raccolta. Il distico vi è preceduto da questa dichiarazione: *Quum theorema Newtoni de radicibus imaginariis equationum per longos annos non demonstratum, demonstrassem*; e porta la dedica: *Urbi et orbi*, ossia: *To Oxford and the World*, come leggesi nella raccolta stessa nella traduzione in versi inglesi degli epigrammi. Circa la questione che diede origine al distico v. ²⁾.

²⁾ I. NEWTON, *Arithmetica universalis*, Cambridge a. 1707; nuova ed. Leyda a. 1732, p. 572. La prima dimostrazione della regola di NEWTON fu data da J. J. SYLVESTER, *Transactions of the R. Irish Academy*, t. 24, a. 1871. Cfr. H. WEBER, *Lehrbuch der Algebra*, 2° Aufl., B. 1, Braunschweig a. 1898, p. 345.

³⁾ Per una dimostrazione non richiedente l' ipotesi che le radici sian tutte semplici, si può consultare ad es.:

M. CIPOLLA, *Analisi algebrica ed introduzione al Calcolo infinitesimale*, Palermo, D. Capozzi, a. 1914, p. 295.

VESTER ⁴⁾, il quale trovò che i coefficienti in discorso non differiscono che per fattori positivi dai termini della successione

$$(2) \quad \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n,$$

essendo $\sigma_0 = 1$ e σ_k ($0 < k \leq n$) il minore principale contenuto nelle prime k righe del discriminante Δ dell'equazione data:

$$(3) \quad \Delta = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

espresso tale discriminante per mezzo delle somme s_r delle potenze r^{ime} delle radici. Pertanto:

Il numero delle coppie delle radici immaginarie coniugate dell'equazione è uguale al numero delle variazioni che presenta la successione dei minori principali (2) del discriminante dell'equazione, PURCHÈ LA SUCCESSIONE NON PRESENTI TERMINI NULLI ⁵⁾.

Quest'ultima condizione viene imposta dalla dimostrazione stessa cui si è fatto cenno, ed esclude in particolare che l'equazione abbia radici multiple.

2. Alla prop. enunciata si può anche pervenire in modo più elegante con un procedimento indipendente dal teor. di STURM, riportato nei trattati moderni ⁶⁾. Esso è fondato sulla legge d'inerzia delle forme quadratiche e sulla riduzione della forma quadratica col discriminante (3) in forma canonica avente come coefficienti dei quadrati delle variabili i rapporti

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0}, \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \frac{\sigma_3}{\sigma_2}, \dots, \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}},$$

formati coi termini della successione (2). Ed anche così, è necessario supporre che questi termini sian tutti diversi da zero.

Il metodo però ha il vantaggio di mettere in rilievo il fatto che *per la determinazione del numero delle coppie delle radici immaginarie coniugate dell'equazione data può assumersi, in luogo della particolare successione (2), un'altra qualsivoglia successione di minori principali del discriminante, degli ordini da 0 ad n , ciascuno contenuto nel successivo, purchè tali minori sian tutti diversi da zero.*

⁴⁾ J. J. SYLVESTER, Philosophical Magazine, a. 1839; Journ. des Mathem. pures et appliquées, a. 1862, p. 368. Per la dimostrazione si può consultare: J. A. SERRET, Cours d'Algèbre supérieure, 4^e éd., t. I, p. 572.

⁵⁾ K. G. JACOBI (Werke, Berlin, t. 3, a. 1884, p. 471) ammette tacitamente questa condizione.

⁶⁾ C. W. BORCHARDT, Journ. des Math. pures et appliquées, a. 1847, p. 58. Cfr. E. CESÀRO, Analisi algebrica, Torino, a. 1894, p. 408 — Come JACOBI ⁵⁾ anche BORCHARDT, SERRET ⁴⁾ e CESÀRO non fanno alcun cenno del caso in cui si annulli qualcuno dei termini della successione.

L'ipotesi poi che l'equazione data abbia radici tutte semplici può togliersi modificando leggermente la prop. enunciata al n. 1. Si dimostra in primo luogo con tutta facilità che ⁷⁾:

Se l'equazione data ha p , e non più, radici distinte, allora sono nulli tutti i minori principali del discriminante, aventi un ordine maggiore di p , e il minore principale σ_p , d'ordine p , è diverso da zero.

E poi, con poche modificazioni all'uno o all'altro dei procedimenti su accennati, si perviene al teor. ⁸⁾:

Se nella successione (2) i termini sino al p -esimo sono tutti diversi da zero, mentre sono nulli tutti i successivi, allora l'equazione ha p radici distinte, e tante coppie distinte di radici immaginarie coniugate quante sono le variazioni che presenta la successione stessa.

3. Il caso che la successione presenti termini nulli fra σ_1 e σ_p non è preso in considerazione nei trattati; anzi taluni autori non lo pongono affatto in rilievo e lo ammettono tacitamente ⁶⁾. Eppure è facile assicurarsi della possibilità dei termini nulli, e riconoscere inoltre che la prop. in generale cade in difetto.

Considerando infatti ad es. l'equazione $x^3 - 1 = 0$, il cui discriminante è

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix},$$

si ottiene

$$\sigma_1 = 3, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -3^3.$$

Escludendo il termine nullo, questa successione presenta una variazione, e l'equazione ha una coppia di radici immaginarie coniugate, d'accordo col teor. Se però si considera l'equazione $x^5 - 1 = 0$, il cui discriminante è

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

si ha

$$\sigma_1 = 5, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0, \quad \sigma_4 = 0, \quad \sigma_5 = 5^5,$$

e la successione non presenta variazioni, mentre l'equazione ha due coppie distinte di radici immaginarie coniugate.

Or è naturale domandarsi:

Nel caso che i termini della successione (2) non siano tutti diversi da zero,

⁷⁾ L. BAUR, Math. Ann., t. 50, a. 1898, p. 241; t. 52, a. 1899, p. 113.

⁸⁾ M. CIPOLLA, l. c. ³⁾ p. 360.

si può sempre dalla successione dei loro segni dedurre il numero delle coppie distinte delle radici immaginarie coniugate dell'equazione?

La risposta, come vedremo, è affermativa, ma la prop. dev'essere modificata. Mostriamo infatti che se nella successione (2) si presentano termini nulli tra σ_i e σ_p (supposto sempre che l'equazione abbia p radici distinte soltanto), si può asserire che il numero delle coppie distinte delle radici immaginarie coniugate dell'equazione eguaglia il numero delle variazioni che presenta la successione (dopo l'esclusione dei termini nulli) allora e soltanto quando non si presentino termini nulli consecutivi.

Noi qui daremo del teorema generale una dimostrazione affatto indipendente dal teorema di STURM, come anche dalla teoria delle forme quadratiche; essa è fondata sulla teoria dei determinanti simmetrici e su considerazioni di continuità.

Il risultato generale è però deducibile dalle ulteriori ricerche di FROBENIUS ⁹⁾ sulla legge d'inerzia delle forme quadratiche a discriminante ortosimmetrico (cioè con l'elemento generico a_{rs} dipendente dalla somma $r + s$ degl'indici). Tuttavia, per il procedimento diretto e la maggiore semplicità dei mezzi che abbiamo adoperato, non ci sembra superflua la presente trattazione, la quale serve a dare un assetto organico, definitivo all'argomento.

All'uopo occorrono talune proposizioni generali sui determinanti simmetrici, che generalmente son trascurate nei trattati.

Per maggiore chiarezza, e perchè le proprietà in discorso si riconnettono a varie interessanti questioni di Algebra, esse con gli opportuni complementi saranno qui raccolte in un'esposizione sistematica preliminare.

I. Proposizioni preliminari sui determinanti simmetrici ed ortosimmetrici.

4. A fondamento delle proprietà dei determinanti simmetrici, che qui ci occorrono, porremo la seguente proposizione di SYLVESTER ¹⁰⁾:

1 — Se A è un determinante d'ordine n , ed A_r un suo minore non nullo d'ordine r , ad es.:

$$(4) \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad A_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}, \quad \cdot$$

⁹⁾ G. FROBENIUS, Sitzungsberichte der k. Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin, a. 1894, pp. 241-256, 407-431.

¹⁰⁾ J. J. SYLVESTER, Philosophical Magazine, s. 4, t. 1, a. 1851, p. 297, t. 2, p. 124.

La prop. che diede il SYLVESTER senza dimostrazione, è più generale, e fu argomento di vari lavori. Per il caso particolare qui richiamato si può consultare G. FROBENIUS, Journ. reine u. angew. Math., t. 86, a. 1879, p. 53; M. CIPOLLA, I. c. ³⁾, p. 102.

il determinante d'ordine $n - r$ formato coi minori A_{ij} di A , d'ordine $r + 1$ orlati di A_r :

$$(5) \quad A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1r+j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r,r+j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r+i,1} & \dots & a_{r+i,r} & a_{r+i,r+j} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (i = 1, 2, \dots, n-r) \\ (j = 1, 2, \dots, n-r) \end{matrix}$$

è uguale al prodotto di A per la potenza $(n-r-1)$ -esima di A_r .

Denotando con κ, λ due combinazioni ad s ad s degl'indici $1, 2, \dots, n - r$,

$$\kappa = (k_1, k_2, \dots, k_s), \quad \lambda = (l_1, l_2, \dots, l_s).$$

poniamo, estendendo la notazione (5):

$$A_{\kappa\lambda} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1r+l_1} & \dots & a_{1r+l_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r,r+l_1} & \dots & a_{r,r+l_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r+k_1,1} & \dots & a_{r+k_1,r} & a_{r+k_1,r+l_1} & \dots & a_{r+k_1,r+l_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r+k_s,1} & \dots & a_{r+k_s,r} & a_{r+k_s,r+l_1} & \dots & a_{r+k_s,r+l_s} \end{vmatrix},$$

Si ottiene allora, come immediata conseguenza del teor. precedente, la prop.:

2 — Un minore $A_{\kappa\lambda}$ d'ordine $r + s$ di A orlato di A_r è legato ai minori d'ordine $r + 1$ di A , orlati di A_r , dalla relazione:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} A_{k_1 l_1} & A_{k_1 l_2} & \dots & A_{k_1 l_s} \\ A_{k_2 l_1} & A_{k_2 l_2} & \dots & A_{k_2 l_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k_s l_1} & A_{k_s l_2} & \dots & A_{k_s l_s} \end{vmatrix} = A_r^{s-1} A_{\kappa\lambda}.$$

5. D'ora innanzi noi supporremo che il determinante A sia simmetrico e ad elementi reali, e denoteremo con A_k il minore principale d'ordine k , contenuto nelle prime k righe di A ; in particolare $A_n = A$. Inoltre porremo

$$A_0 = 1.$$

Chiameremo *catena* di minori del determinante A una successione di minori, di tutti gli ordini da 0 ad n , ciascuno dei quali sia contenuto nel successivo.

Una parte di catena formata da tutti i termini che vanno da un termine ad un altro della catena, si dirà *catena parziale*: il primo e l'ultimo termine se ne diranno gli *estre-*

mi, gli altri *intermedi*. Il numero dei termini intermedi si dirà l'*ordine* della catena.

Se gli estremi sono diversi da zero la catena parziale si dirà *tratto*. Per tratto *nullo* intenderemo un tratto i cui termini intermedi sono tutti nulli.

Noi ci occuperemo esclusivamente di catene di minori principali del determinante simmetrico A , e in particolare della catena

$$(7) \quad A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad \dots, \quad A_n.$$

Una prima importante conseguenza del teor. 4.1 è la seguente:

1 — *Se in una catena di minori principali di un determinante simmetrico si annulla un termine fra due diversi da zero, questi hanno segno contrario.*

Infatti, se $A_{r+1} = 0$, e A_r, A_{r+2} sono diversi da zero, poichè (4.1)

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_r A_{r+2},$$

e inoltre $A_{11} = A_{r+1}$, $A_{21} = A_{12}$, si deduce

$$A_r A_{r+2} = - A_{12}^2.$$

Ed ancora, essendo (4.2)

$$\begin{vmatrix} A_{k_1 k_1} & A_{k_1 k_2} \\ A_{k_2 k_1} & A_{k_2 k_2} \end{vmatrix} = A_r A_{k_1 k_2, k_1 k_2},$$

se $A_{k_1 k_2} = 0$ e $A_{k_1 k_2, k_1 k_2} = 0$, risulta $A_{k_1 k_2} = 0$, quindi ⁴¹⁾:

2 — *Se in un determinante simmetrico sono nulli tutti i minori principali d'ordine $r+1$, $r+2$, orlati di un minore principale non nullo d'ordine r , il determinante è nullo, ed ha la caratteristica r .*

Se ne deducono varie conseguenze:

3 — *Se in un determinante simmetrico sono nulli tutti i minori principali d'ordine $r+1$, $r+2$, il determinante è nullo (e la sua caratteristica è minore o eguale ad r).*

La prop. si dimostra subito se $r = 0$, perchè, essendo nulli tutti gli elementi principali e i minori principali del second'ordine, risultano nulli tutti gli elementi del determinante. Si ammetta allora la prop. per r minore di k , e siano nulli tutti i minori principali d'ordine $k+1$, $k+2$. Allora, se esiste un minore principale d'ordine k , diverso da zero, il determinante ha (2) la caratteristica k ; altrimenti esso, avendo nulli tutti i minori principali d'ordine k e $k+1$, ha la caratteristica minore di k .

Pertanto:

4 — *Se un determinante simmetrico ha la caratteristica p , fra i suoi minori principali d'ordine p ce n'è uno almeno diverso da zero.*

⁴¹⁾ S. GUNDELFINGER, Journ. reine u. angew. Math. t. 91, a. 1881, p. 221.

Questa prop. si può anche dedurre dalla proprietà ¹²⁾ che se un determinante nullo A ha la caratteristica p , denotando con λ_i una combinazione qualunque a p a p degli indici $1, 2, \dots, n$, il determinante

$$\begin{vmatrix} A_{\lambda_1 \lambda_1} & A_{\lambda_1 \lambda_2} & \dots & A_{\lambda_1 \lambda_r} \\ A_{\lambda_2 \lambda_1} & A_{\lambda_2 \lambda_2} & \dots & A_{\lambda_2 \lambda_r} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{\lambda_r \lambda_1} & A_{\lambda_r \lambda_2} & \dots & A_{\lambda_r \lambda_r} \end{vmatrix}$$

essendo $r = \binom{n}{p}$, ha la caratteristica eguale a 1. Nel nostro caso questo determinante è simmetrico, e dall'annullarsi dei suoi minori principali del second'ordine si deduce che gli elementi principali non possono essere tutti nulli. Inoltre il prodotto di due elementi principali diversi da zero è positivo (poichè gli elementi di A si suppongono reali). Quindi:

5 — *Se un determinante simmetrico ad elementi reali ha la caratteristica p , i suoi minori principali (non nulli) d'ordine p han tutti lo stesso segno.*

Un tratto di minori principali di un determinante simmetrico si dirà *normale* se non ha termini nulli consecutivi.

Per conseguenza un tratto d'ordine 0 o 1 è sempre normale.

6 — *Un tratto non normale può sempre normalizzarsi, cioè possono i termini nulli di esso sostituirsi con altri minori principali dello stesso ordine così che il nuovo tratto risulti normale.*

Sia infatti

$$A_r, A_{r+1}, \dots, A_{r+k}, A_{r+k+1}$$

un tratto non normale d'ordine k (e però $k > 1$). Basta dimostrare la prop. nell'ipotesi che il tratto stesso sia nullo. Ed infatti, in tal caso o esiste un minore principale A'_{r+1} , d'ordine $r+1$, orlato di A_r in A_{r+k+1} , che sia diverso da zero, e allora il tratto A_r, A'_{r+1} è normale, oppure sono nulli tutti gli orlati d'ordine $r+1$ di A_r in A_{r+k+1} . Ma in questo caso, dovendo esistere un minore principale A'_{r+2} d'ordine $r+2$ orlato di A_r e contenuto in A_{r+k+1} , è normale il tratto A_r, A'_{r+1}, A'_{r+2} , dove A'_{r+1} è uno qualsivoglia dei due minori (nulli) d'ordine $r+1$, orlati di A_r e contenuti in A'_{r+2} . Così continuando si otterrà un tratto normale tra A_r e A_{r+k+1} .

6. Possiamo ora dare una dimostrazione diretta della proprietà che per qualsivoglia catena normale di minori principali di un determinante simmetrico non nullo, è costante il numero delle variazioni che la catena presenta (dopo la soppressione dei termini nulli); proprietà che suole dedursi da particolari procedimenti di riduzione a forma canonica di una quadrica e dalla legge d'inerzia.

Premettiamo la prop.:

1 — *Da una catena (parziale o no) si può passare ad un'altra qualunque cogli stessi estremi mediante successive catene cogli stessi estremi, ciascuna non differendo dalla precedente che per un termine solo.*

¹²⁾ Cfr. M. CIPOLIA, I. c. ³⁾ p. 100, 104.

La prop. è vera per una catena d'ordine 1. Ammettiamola per una catena d'ordine k , e consideriamo una catena d'ordine $k+1$, di cui A_r, A_{r+k+2} siano gli estremi. Denotando per semplicità con $(s_1 s_2, \dots, s_i)$ il minore principale di A , d'ordine $r+i$, orlato di A_r mediante le righe e le colonne d'indici s_1, s_2, \dots, s_i , siano

$$(8) \quad A_r, (s_1), (s_1 s_2), \dots, (s_1 s_2 \dots s_k s_{k+1}), A_{r+k+2},$$

$$(9) \quad A_r, (t_1), (t_1 t_2), \dots, (t_1 t_2 \dots t_k t_{k+1}), A_{r+k+2}$$

le due catene.

Se $t_1 = s_1$, basterà applicare la prop. alle due catene d'ordine k , ottenute da (8) e (9) escludendo in ciascuna il primo termine. Altrimenti, si consideri il primo termine della (8) che contiene l'indice t_1 ; (nella peggiore ipotesi questo termine sarà A_{r+k+2}). Se $(s_1 s_2 \dots s_\rho t_1)$ è questo termine, al suo precedente $(s_1 s_2 \dots s_{\rho-1} s_\rho)$ potremo sostituire il minore principale $(s_1 s_2 \dots s_{\rho-1} t_1)$ ottenendo così una catena. Per analoga ragione nella nuova catena potremo sostituire al termine $(s_1 s_2 \dots s_{\rho-2} s_{\rho-1})$ che precede l'ultimo considerato, il minore $(s_1 s_2 \dots s_{\rho-2} t_1)$; e così continuando otterremo una catena il cui primo termine intermedio è (t_1) . In tal modo si è ricondotti al primo caso.

2 — *Ad un tratto nullo non normale se ne può sempre sostituire un altro fra gli stessi estremi tale che dei suoi termini intermedi uno solo sia diverso da zero.*

Infatti, per la prop. precedente e la 5'6, si può passare del tratto dato ad un tratto normale fra gli stessi estremi cambiando successivamente un solo elemento: il primo tratto non nullo che si ottiene in questo, ha soltanto un termine intermedio che sia diverso da zero.

Ciò posto, si ha la prop. fondamentale:

3 — *Il numero delle variazioni che presenta un tratto normale (dopo la soppressione dei termini nulli), non muta se si cambiano i termini intermedi così da ottenere un altro tratto normale cogli stessi estremi.*

Sia

$$(10) \quad A_k, A_{k+1}, \dots, A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_{s-1}, A_s$$

un tratto normale, almeno del prim'ordine, e

$$(11) \quad A_k, A'_{k+1}, \dots, A'_r, A'_{r+1}, A'_{r+2}, \dots, A'_{s-1}, A_s$$

un altro tratto normale cogli stessi estremi del primo.

Dimostriamo il teor. supponendo dapprima che tutti i minori principali orlati di A_k , di tutti gli ordini, contenuti in A_s , siano diversi da zero.

Poichè si può passare dal tratto (10) al tratto (11) per il successivo cambiamento di un solo termine, basterà dimostrare che il numero delle variazioni del tratto (10) non muta cambiando un sol termine, per es. A_{r+1} . Ed infatti, denotando con A'_{r+1} l'altro minore principale d'ordine A_{r+1} orlato di A_r contenuto in A_{r+2} , si ha (n. 5):

$$\begin{vmatrix} A_{r+1} & A_{12} \\ A_{21} & A'_{r+1} \end{vmatrix} = A_r A_{r+2},$$

ossia

$$A_{r+1} A'_{r+1} = A_{r+2}^2 + A_r A_{r+2},$$

e se ne deduce che se A_r e A_{r+2} hanno lo stesso segno, così può dirsi di A_{r+1} e A'_{r+1} , e però i due tratti

$$A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, \quad A_r, A'_{r+1}, A_{r+2}$$

presentano nel contempo due variazioni o nessuna secondo che il segno di A_r è contrario o eguale a quello comune ad A_{r+1} e A'_{r+1} .

Se poi A_r e A_{r+2} hanno segno contrario, ciascuno dei due tratti considerati presenta una sola variazione, qualunque sia il segno del termine intermedio.

Pertanto, se tutti gli orlati principali di A_k contenuti in A_s sono diversi da zero, il teor. è dimostrato.

Passando al caso generale, aggiungiamo agli elementi principali di A_s una variabile λ e sia

$$(12) \quad B_k, B_{k+1}, \dots, B_r, B_{r+1}, B_{r+2}, \dots, B_{s-1}, B_s$$

il tratto corrispondente al (10), e

$$(13) \quad B_k, B'_{k+1}, \dots, B'_r, B'_{r+1}, B'_{r+2}, \dots, B'_{s-1}, B'_s$$

il tratto corrispondente all'altro.

Un termine qualunque di (12) è una funzione razionale intera di λ , evidentemente non identica a zero, che assume, per il valore zero di λ , il valore del corrispondente termine del tratto (10). Pertanto esiste un intorno a destra di 0 in ogni punto interno al quale sono diversi da zero B_k, B_s e tutti i minori principali orlati di B_k , contenuti in B_s , e noi supponiamo che λ cada dentro il detto intorno.

Poichè il tratto (10) è normale, esso è formato da tratti consecutivi di due termini, oppure di tre di cui l'intermedio è nullo.

Se A_r, A_{r+1} sono due termini diversi da zero del (10), i corrispondenti termini B_r, B_{r+1} del (12), avendo segni rispettivamente eguali a quelli di A_r, A_{r+1} , presentano variazione o permanenza secondo che si ha variazione o permanenza tra A_r e A_{r+1} .

Se invece $A_{r+1} = 0$, allora A_r e A_{r+2} hanno segno contrario (5°1) e lo stesso si può dire di B_r e B_{r+2} , cosicchè il tratto B_r, B_{r+1}, B_{r+2} presenta una variazione come il tratto A_r, A_{r+1}, A_{r+2} .

Per conseguenza il tratto (12) presenta lo stesso numero di variazioni del (10). Analogamente il tratto (13) presenta lo stesso numero di variazioni del tratto (11), e poichè i due tratti (12) e (13), per la prima parte della dimostrazione, presentano egual numero di variazioni, lo stesso si può dire dei tratti (10) e (11).

Chiameremo numero di variazioni *corrispondente* ad un tratto il numero delle variazioni che presenta un tratto normale qualsivoglia, cogli stessi estremi del primo.

Dato un determinante simmetrico di caratteristica p , una catena di minori principali di esso, di tutti gli ordini da 0 a p , nella quale il minore d'ordine p è diverso da zero, si dirà una *catena caratteristica*.

*4 — *Il numero di variazioni corrispondente ad una catena caratteristica di minori principali di un determinante simmetrico A , è costante, qualunque sia la catena caratteristica.*

Consideriamo infatti due catene complete di minori principali di A :

$$(14) \quad \begin{array}{l} A_0, A_1, \dots, A_p, A_{p+1}, \dots, A_{n-1}, A, \\ A_0, B_1, \dots, B_p, B_{p+1}, \dots, B_{n-1}, A, \end{array}$$

ciascuna delle quali contenga un minore d'ordine p , diverso da zero.

Aggiunta agli elementi principali di A una variabile λ possiamo determinare un intorno a destra di 0, dentro il quale non si annulli nessuno dei minori principali del nuovo determinante. Assunto λ dentro il detto intorno, denotiamo con A'_r, B'_r i valori dei minori corrispondenti ad A_r, B_r . In virtù della prop. precedente, le due catene

$$(15) \quad \begin{array}{l} A'_0, A'_1, \dots, A'_p, A'_{p+1}, \dots, A'_{n-1}, A', \\ A'_0, B'_1, \dots, B'_p, B'_{p+1}, \dots, B'_{n-1}, A' \end{array}$$

presentano lo stesso numero di variazioni. Ma è facile riconoscere che il tratto da A'_p ad A' della prima catena e il corrispondente della seconda non presentano variazioni. Infatti, si ha

$$A'_{p+s} = \lambda^{p+s} + S_1 \lambda^{p+s-1} + S_2 \lambda^{p+s-2} + \dots + S_{p-1} \lambda^{s+1} + S_p \lambda^s,$$

dove S_r denota la somma dei minori principali d'ordine r di A_{p+s} , e se ne deduce che A'_{p+s} , non annullandosi nell'intorno considerato, ha in esso il segno di S_p ossia quello di A_p , poichè (4'5) i minori principali d'ordine p (non nulli) di A han tutti lo stesso segno.

Per conseguenza i due tratti formati coi primi $p+1$ termini delle (15) presentano lo stesso numero di variazioni, e questo è il numero di variazioni corrispondente alle due catene caratteristiche contenute nelle (14).

*5 — *Ad un tratto nullo d'ordine 2 corrispondono due variazioni se gli estremi sono dello stesso segno, una sola se gli estremi sono di segno contrario.*

Chiamando *segno* (in senso lato) di un numero l'unità positiva, negativa o lo zero secondo che il numero è positivo, negativo o nullo, e denotando con ε, η i segni degli estremi del tratto, questo presenta la successione dei segni

$$\varepsilon, 0, 0, \eta.$$

E poichè esiste un tratto fra gli stessi estremi del dato, che ha un sol termine intermedio diverso da zero (6'2), tale tratto non può presentare che l'una o l'altra successione di segni (4'1):

$$\varepsilon, -\eta, 0, \eta, \quad \varepsilon, 0, -\varepsilon, \eta.$$

In entrambi i casi, se $\varepsilon = \eta$ si hanno due variazioni, se $\varepsilon = -\eta$ si ha una variazione sola.

Osservazione. — Se si tenta di estendere la dimostrazione della prop. precedente al caso di un tratto nullo d'ordine 3, si trova che se i termini estremi hanno lo stesso segno, il tratto normalizzato presenta due variazioni, mentre se gli estremi sono di segno contrario, il tratto normalizzato può presentare o una o tre variazioni.

La possibilità di questi due casi viene dimostrata dal seguente esempio. Si consideri il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} ;$$

si ha (essendo $\varepsilon = \pm 1$):

$$A_1 = 1, \quad A_2 = A_3 = A_4 = 0, \quad A_5 = -1.$$

Si ottiene una catena normale considerando i minori principali d'ordine 2, 3, 4, contenuti nelle righe i cui indici sono rispettivamente (1, 3), (1, 2, 3), (1, 2, 3, 5). La corrispondente successione di segni è

$$1, \quad \varepsilon, \quad 0, \quad -\varepsilon, \quad -1,$$

e presenta una sola variazione se $\varepsilon = 1$, ne presenta tre se $\varepsilon = -1$.

Per conseguenza, *se un tratto presenta più di due termini nulli consecutivi non si può dedurre, in generale, dalla successione dei segni dei suoi termini, il numero di variazioni corrispondente al tratto.*

Non è però escluso che possa stabilirsi un criterio decisivo, valevole per i tratti nulli d'ordine qualunque, introducendo speciali condizioni cui devono soddisfare gli elementi del determinante. È questo il caso dei determinanti ortosimmetrici di cui ci occuperemo più sotto.

7. Denoteremo qui con una lettera greca minuscola un sistema di indici fra i numeri 1, 2, ..., n. Se per es. α è un tal sistema e k_1, k_2, \dots, k_s i suoi termini, denoteremo con $\alpha_i, \alpha_{ij}, \dots$ i sistemi che si ottengono da α sopprimendo k_i oppure k_i e k_j , ecc.

Se poi r è un indice diverso da quelli di α , denoteremo con $r\alpha$ e αr i sistemi ottenuti aggiungendo a r come primo o come ultimo termine l'indice r .

Ciò posto, possiamo esprimere sotto la forma semplice seguente la relazione riscontrata da KRONECKER ⁴³⁾ fra i minori dello stesso ordine di un determinante simmetrico:

1 — *Se A è un determinante simmetrico d'ordine n, e ρ, σ due sistemi di k indici ciascuno ($0 < k \leq n$), assunti fra gli indici 1, 2, ..., n:*

$$\rho = (r_1, r_2, \dots, r_k), \quad \sigma = (s_1, s_2, \dots, s_k),$$

si ha la relazione

$$(16) \quad a_{\rho, \sigma} = \sum_{i=1}^k (-1)^{k+i} a_{\rho_1 s_i, r_1 \sigma_i} \dots$$

⁴³⁾ L. KRONECKER. Sitzungsber. Akad. Berlin. a. 1882, p. 821.

Infatti, sviluppando il minore a primo membro secondo gli elementi della prima riga e i minori dell' altro secondo gli elementi dell' ultima, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 a_{\rho, \sigma} &= \sum_{i=1}^k (-1)^{k+1} a_{r_1, s_i} a_{\rho_1, \sigma_i} , \\
 &\sum_{i=1}^k (-1)^{k+i} a_{\rho_1 s_i, r_1 \sigma_i} = \\
 &= \sum_{i=1}^k (-1)^{k+i} \left[(-1)^{k+1} a_{s_i, r_1} a_{\rho_1, \sigma_i} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{k+j+1} a_{s_i, s_j} a_{\rho_1, r_1 \sigma_{ji}} + \sum_{j=i+1}^k (-1)^{k+j} a_{s_i, s_j} a_{\rho_1, r_1 \sigma_{ij}} \right] = \\
 &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} a_{s_i, r_1} a_{\rho_1, \sigma_i} + \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+j+1} a_{s_i, s_j} a_{\rho_1, r_1 \sigma_{ij}} + \sum_{j=2}^k \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{j+i} a_{s_i, s_j} a_{\rho_1, r_1 \sigma_{ij}} ;
 \end{aligned}$$

e poichè, essendo A simmetrico, i termini della seconda somma si elidono con quelli della terza, se ne deduce l' identità dei due primi membri.

Se ora si pone

$$\rho = (1, 2, \dots, r, r + s + 1), \quad \sigma = (2, 3, \dots, r + 1, r + t + 2),$$

il secondo membro della (16), elidendo i termini che sono nulli perchè determinanti con due righe eguali, si riduce a due termini soli. Fatta poi l' ipotesi che il determinante dato sia ortosimmetrico, e precisamente $a_{rs} = a_{r+s-3}$, ne consegue la prop.:

2 — Se A è un determinante ortosimmetrico d' ordine n :

$$A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-2} \end{vmatrix},$$

posto

$$A_r = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{r-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_r \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{r-1} & a_r & a_{r+1} & \dots & a_{2r-2} \end{vmatrix}, \quad A_{ik} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{r-1} & a_{r+i} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r & a_{r+i+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{r-1} & a_r & \dots & a_{2r-2} & a_{2r+i-1} \\ a_{r+k} & a_{r+k+1} & \dots & a_{2r+k-1} & a_{2r+i+k} \end{vmatrix}$$

si ha la relazione

$$(17) \quad A_{st} - A_{s-1 \ t+1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{r-2} & a_{r-1} & a_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{r-1} & a_r & a_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r-2} & a_{r-1} & \dots & a_{2r-4} & a_{2r-3} & a_{2r-2} \\ a_{r+s-1} & a_{r+s} & \dots & a_{2r+s-3} & a_{2r+s-2} & a_{2r+s-1} \\ a_{r+t} & a_{r+t+1} & \dots & a_{2r+t-2} & a_{2r+t-1} & a_{2r+t} \end{vmatrix} .$$

Da questa prop. si trae la seguente dovuta pure a KRONECKER ¹⁴⁾:

3 — Se A è un determinante ortosimmetrico, e se i minori principali A_r, A_{r+k+1} sono diversi da zero, condizione necessaria e sufficiente perchè siano nulli i minori

$$(18) \quad A_{r+1}, \quad A_{r+2}, \quad \dots, \quad A_{r+k},$$

è che siano nulli i seguenti k orlati di A_r :

$$(19) \quad A_{00}, \quad A_{01}, \quad A_{02}, \dots, \quad A_{0k-1} .$$

Quando questa condizione è soddisfatta risultano nulli tutti gli orlati A_{st} di A_r pei quali la somma $s+t$ degl'indici è minore di k , ed inoltre si ha

$$(20) \quad A_r^k A_{r+k+1} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} A_{0k}^{k+1} .$$

Infatti, essendo (4.1):

$$(21) \quad A_{00} = A_{r+1}, \quad \begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{vmatrix} = A_r A_{r+2}, \quad \begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_r^2 A_{r+3}, \dots, \\ \begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} & \dots & A_{0k-1} & A_{0k} \\ A_{10} & A_{11} & \dots & A_{1k-1} & A_{1k} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ A_{k-10} & A_{k-11} & \dots & A_{k-1 \ k-1} & A_{k-1k} \\ A_{k0} & A_{k1} & \dots & A_{k \ k-1} & A_{kk} \end{vmatrix} = A_r^{k-1} A_{r+k}, \quad \begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} & \dots & A_{0k-1} & A_{0k} \\ A_{10} & A_{11} & \dots & A_{1k-1} & A_{1k} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ A_{k-10} & A_{k-11} & \dots & A_{k-1 \ k-1} & A_{k-1k} \\ A_{k0} & A_{k1} & \dots & A_{k \ k-1} & A_{kk} \end{vmatrix} = A_r^k A_{r+k+1};$$

si deduce subito che se i minori (19) sono nulli, tali sono pure i minori (18).

Inversamente, se sono nulli i minori (18), si ha dapprima $A_{00} = 0, A_{01} = 0$; suppo-

¹⁴⁾ L. KRONECKER, Monatsb. Akad. Berlin, a. 1881, p. 584.

sto quindi che nell'ipotesi $i + j < h$ ($h = 1, 2, \dots, k - 1$) si abbia

$$A_{i+j} = 0,$$

risulta dalla (17) che, se $s + t = h$, la differenza $A_{st} - A_{s-1t+1}$ è uguale al determinante $\alpha_{r-1, r+t}$ che si ottiene sopprimendo la riga che comincia con a_{r-1} e la colonna che comincia con a_{r+t} nel determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{r-1} & a_r & a_{r+t} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r-1} & \dots & a_{2r-2} & a_{2r+1} & a_{2r+t-1} \\ a_{r+s-1} & \dots & a_{2r+s-2} & a_{2r+s+1} & a_{2r+s+t-1} \\ a_{r+t} & \dots & a_{2r+t-1} & a_{2r+t} & a_{2r+2t} \end{vmatrix}.$$

Ma questo è nullo perchè uguale (4.1) a

$$\frac{1}{A_r^2} \begin{vmatrix} A_{0s-1} & A_{0t} \\ A_{ts-1} & A_{tt} \end{vmatrix},$$

ed è $A_{0s-1} = A_{0t} = 0$, essendo $s-1 < h$, $t < h$; quindi, per una nota proprietà dell'aggiunto di un determinante nullo, si ha

$$\alpha_{r-1, r+t}^2 = \alpha_{r-1, r-1} \cdot \alpha_{r+t, r+t},$$

e poichè $\alpha_{r+t, r+t} = A_{0s-1} = 0$, si deduce $\alpha_{r-1, r+t} = 0$ e per conseguenza

$$A_{st} = A_{s-1, t+1}.$$

Facendo h eguale successivamente a $1, 2, \dots, k-1$, si ottiene che se sono nulli i minori (18), tali son pure i minori (19) e tutti gli orlati A_{st} di A_r pei quali la somma $s + t$ degli indici è minore di k .

Fatto infine $s + t = k$ si trae dall'ultima eguaglianza

$$A_{0k} = A_{1k-1} = A_{2k-2} = \dots = A_{k0},$$

e dall'ultima (21) segue la (20).

Dalla (20) si ha subito la conseguenza notevole:

*4 — *Gli estremi di un tratto nullo d'ordine dispari k in una catena di minori principali di un determinante ortosimmetrico (ad elementi reali) hanno i segni rispettivi ε, η legati dalla relazione:*

$$(22) \quad \eta = (-1)^{\frac{k+1}{2}} \varepsilon.$$

In base a questa proprietà, dalla successione dei segni di un tratto nullo relativo a un determinante ortosimmetrico, si può sempre dedurre, qualunque sia l'ordine del tratto,

il numero di variazioni corrispondente al tratto. Si ha infatti il teor.:

5 — Detto u il numero di variazioni corrispondente ad un tratto nullo d'ordine k :

$$A_r, \quad A_{r+1}, \quad \dots, \quad A_{r+k}, \quad A_{r+k+1}$$

di una catena di minori principali di un determinante ortosimmetrico, si ha

a) se k è dispari:

$$(23) \quad u = \frac{k+1}{2},$$

b) se k è pari ed ε, η sono i segni degli estremi:

$$(24) \quad u = \frac{k+1 - (-1)^{\frac{k}{2}} \varepsilon \eta}{2},$$

ossia

$$u = \begin{cases} \frac{k}{2}, & \text{se } \frac{k}{2} \text{ è pari ed } \varepsilon = \eta, \text{ o se } \frac{k}{2} \text{ è dispari ed } \varepsilon = -\eta, \\ \frac{k}{2} + 1, & \text{» } \varepsilon = -\eta, \text{ » } \varepsilon = \eta. \end{cases}$$

La prop. risulta evidente se $k=0$, e vera se $k=1$ in seguito al teor. 5'1. Ammettiamola dunque pei tratti nulli d'ordine minore di k .

Esiste, come sappiamo (6'2), un tratto cogli stessi estremi del dato, di cui un solo termine intermedio sia diverso da zero. Se A_{r+h} è questo termine e ζ il segno di esso applichiamo la prop. ai due tratti nulli degli ordini $h-1$ e $k-h$:

$$A_r \dots A_{r+h}, \quad A_{r+h} \dots A_{r+k+1},$$

di cui si compone il nuovo tratto.

a) Sia k dispari.

Allora se h è pari, saranno dispari $h-1$ e $k-h$, quindi

$$u = \frac{h}{2} + \frac{k-h+1}{2} = \frac{k+1}{2}.$$

Se invece h è dispari, $h-1$ e $k-h$ saranno pari, e poichè (4)

$$\eta = (-1)^{\frac{k+1}{2}} \varepsilon,$$

si ha

$$u = \frac{h - (-1)^{\frac{h-1}{2}} \varepsilon \zeta}{2} + \frac{k-h+1 - (-1)^{\frac{k-h}{2}} \zeta \eta}{2} = \frac{k+1}{2}.$$

b) Sia k pari.

Allora, se h è pari sarà $h-1$ dispari e $k-h$ pari, e inoltre (14)

$$\zeta = (-1)^{\frac{h}{2}} \varepsilon ,$$

quindi

$$u = \frac{h}{2} + \frac{k-h+1 - (-1)^{\frac{k-h}{2}} \zeta \eta}{2} = \frac{k+1 - (-1)^{\frac{k}{2}} \varepsilon \eta}{2} .$$

Se invece h è dispari, sarà $h-1$ pari e $k-h$ dispari, e poichè

$$\zeta = (-1)^{\frac{k-h+1}{2}} \eta ,$$

si ha

$$u = \frac{h - (-1)^{\frac{h-1}{2}} \varepsilon \zeta}{2} + \frac{k-h+1}{2} = \frac{k+1 - (-1)^{\frac{k}{2}} \varepsilon \eta}{2} .$$

La prop. è dunque vera in ogni caso.

Le due formole (23) e (24) possono riunirsi, come è facile osservare, nell' unica seguente

$$u = \frac{1}{2} \left\{ k + (-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} \cdot \varepsilon \eta + \frac{1}{2} \left[1 + (-1)^k \right] \right\} .$$

Diremo che un tratto nullo d'ordine pari k è di *classe pari* o di *classe dispari* secondo che i segni ε , η dei termini estremi soddisfano all' una o all' altra delle condizioni:

$$\varepsilon \eta = (-1)^{\frac{k}{2}} , \quad \varepsilon \eta = - (-1)^{\frac{k}{2}}$$

Ciò posto si ha la prop.:

6 — Il numero V delle variazioni, corrispondente ad una qualsivoglia catena caratteristica di un determinante ortosimmetrico, è dato dalla formola

$$(25) \quad V = v + \frac{\varepsilon + d}{2} + d_1 ,$$

dove v denota il numero delle variazioni dei tratti privi di termini nulli, z la somma degli ordini dei tratti nulli (o numero degli zeri di tali tratti), d , d_1 rispettivamente il numero dei tratti nulli d'ordine dispari, e dei tratti nulli di classe dispari.

Infatti si deve avere (15):

$$V = v + \sum_h \frac{h+1}{2} + \sum_k \frac{k+1 - (-1)^{\frac{k}{2}} \varepsilon \eta}{2}$$

essendo la prima somma estesa agli ordini dispari h , e la seconda agli ordini k pari dei tratti nulli della catena. E poichè

$$\sum_h (h + 1) + \sum_k k = s + d, \quad \sum_k \frac{1 - (-1)^{\frac{k}{2}} \epsilon \eta}{2} = d_1,$$

se ne ricava la (25).

Si può analogamente stabilire la prop.:

7 — *Il numero V delle variazioni, corrispondente ad una qualsivoglia catena caratteristica di un determinante ortosimmetrico, è dato dalla formola*

$$(26) \quad V = v' + \frac{s' + d'}{2} + d'_1,$$

essendo v' il numero delle variazioni dei tratti normali della catena, s' la somma degli ordini dei tratti nulli non normali, d' e d'_1 rispettivamente il numero dei tratti nulli non normali d'ordine dispari e quello dei tratti nulli di classe dispari.

Praticamente per la determinazione del numero V è più comoda l'applicazione della seguente regola che si ricava facilmente dalla *5:

*8 — *Il numero V delle variazioni, corrispondente ad una qualsivoglia catena caratteristica di un determinante ortosimmetrico, è uguale al numero delle variazioni che presenta la successione dei segni ottenuta cancellando in ciascun tratto nullo della catena i termini intermedi di posto dispari e mutando quelli di posto pari nei segni $+$ e $-$ alternativamente, cominciando col segno opposto a quello del primo estremo.*

II. Il teorema sul numero delle radici immaginarie di un'equazione algebrica a coefficienti reali.

8. I precedenti risultati trovano una bella ed assai interessante applicazione nella teoria delle equazioni algebriche.

Sia

$$(27) \quad f(x) = 0$$

un'equazione di grado n a coefficienti reali, e

$$(28) \quad x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n$$

le sue radici. Posto, come già al n. 1,

$$s_r = x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r,$$

consideriamo il discriminante Δ dell'equazione :

$$(29) \quad \Delta = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Esso com'è noto, è uguale al quadrato del determinante di VANDERMONDE formato con le radici dell'equazione :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}^2 = \prod_{i,j} (x_i - x_j)^2,$$

estesó il prodotto a tutte le combinazioni a due a due degli indici 1, 2, ..., n.

Denotiamo poi con σ_k il minore principale contenuto nelle prime k righe del determinante (29): esso è uguale al quadrato per righe della matrice formata dalle prime k righe del determinante di VANDERMONDE considerato, e però

$$(30) \quad \sigma_k = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{k-1} & s_k & \dots & s_{2k-2} \end{vmatrix} = \sum_{\rho} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{r_1} & x_{r_2} & \dots & x_{r_k} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{r_1}^{k-1} & x_{r_2}^{k-1} & \dots & x_{r_k}^{k-1} \end{vmatrix}^2$$

essendo la somma estesa a tutte le combinazioni ρ , $\rho = (r_1, r_2, \dots, r_k)$, a k a k degli indici 1, 2, ..., n; quindi

$$(31) \quad \sigma_k = \sum_{\rho} \prod (x_{r'} - x_{r''})^2,$$

dove il prodotto s'intende esteso a tutte le combinazioni (r', r'') a due a due degli indici del sistema ρ .

Ne consegue immediatamente il teor. di BAUR ¹⁵⁾:

1. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione (27) ammetta p , e non più, radici distinte, è che si abbia*

$$\sigma_p \neq 0, \quad \sigma_{p+1} = \sigma_{p+2} = \dots = \sigma_n = 0.$$

¹⁵⁾ Cfr. I. c. 7)

Difatti, se p , e non più, dei numeri (28) sono distinti, ogni combinazione a k a k di essi, se $k > p$, contiene elementi eguali, quindi sono nulli i termini della somma (30), e si ha $\sigma_k = 0$.

Invece, se $k = p$, si annullano i termini della detta somma ad eccezione di quelli che contengono i p numeri distinti, e poichè questi altri termini han tutti lo stesso valore, si ha $\sigma_p \neq 0$.

La prop. inversa n'è una conseguenza evidente.

Si riconosce poi, in modo analogo, che il determinante (29) ha la caratteristica p , e per conseguenza (5.5) i minori principali d'ordine p , diversi da zero, han tutti lo stesso segno. Sotto forma più generale:

•2 — *Se l'equazione (27) ammette p radici distinte soltanto, il determinante d'ordine m maggiore di p:*

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_m \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{m-1} & s_m & s_{m+1} & \dots & s_{2m-2} \end{vmatrix},$$

anche se $m > n$, ha la caratteristica p, e i suoi minori principali d'ordine p, diversi da zero, han tutti lo stesso segno.

Circa il significato di questo segno si ha la prop.:

•3 — *Se p è la caratteristica del discriminante dell'equazione, risulta σ_p positivo o negativo secondo che il numero delle coppie distinte delle radici immaginarie coniugate dell'equazione è pari o dispari.*

Infatti, se

$$x_1, x_2, \dots, x_p$$

sono le radici distinte dell'equazione, dalla dimostrazione del teor. •1 risulta che σ_p è uguale a un certo numero di volte il quadrato del determinante di VANDERMONDE:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_p \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_p^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_1^{p-1} & x_2^{p-1} & x_3^{p-1} & \dots & x_p^{p-1} \end{vmatrix}.$$

Il cambiamento di i in $-i$ muta una radice immaginaria nella sua coniugata, e però equivale a tante trasposizioni sulle colonne del determinante quante sono le coppie (distinte) delle radici immaginarie coniugate. Se il numero q di queste coppie è pari, il determinante non cambia di valore, e il suo quadrato (e però σ_p) è positivo. Invece, se q è dispari, il determinante cambia di segno, quindi esso è uguale ad un immaginario puro, e il suo quadrato è negativo.

Importa ancora osservare che il minore σ_k , quando k non supera p , considerato come funzione delle p variabili x_1, x_2, \dots, x_p , non può essere identicamente nullo. Infatti, dando valori distinti ed arbitrari a k delle dette variabili, e alle altre valori tutti eguali ad una qualsivoglia delle k considerate, si annullano tutti i termini della somma (30), salvo quelli nei quali figurano le k variabili distinte, il valore comune dei quali è uguale al discriminante delle dette k variabili.

Più generalmente:

4 — *Un minore principale del discriminante di n variabili di cui solo p sono distinte ed affatto arbitrarie: x_1, x_2, \dots, x_p , non è identicamente nullo se il suo ordine non supera p .*

Sia infatti τ_k un tal minore, d'ordine k non superiore a p :

$$\tau_k = \begin{vmatrix} s_{2r_1} & s_{r_1+r_2} & \dots & s_{r_1+r_k} \\ s_{r_2+r_1} & s_{2r_2} & \dots & s_{r_2+r_k} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{r_k+r_1} & s_{r_k+r_2} & \dots & s_{2r_k} \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} x_1^{r_1} & x_2^{r_1} & \dots & x_n^{r_1} \\ x_1^{r_2} & x_2^{r_2} & \dots & x_n^{r_2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_1^{r_k} & x_2^{r_k} & \dots & x_n^{r_k} \end{matrix} \right\|^2 = \sum \begin{vmatrix} x_{h_1}^{r_1} & x_{h_2}^{r_1} & \dots & x_{h_k}^{r_1} \\ x_{h_1}^{r_2} & x_{h_2}^{r_2} & \dots & x_{h_k}^{r_2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{h_1}^{r_k} & x_{h_2}^{r_k} & \dots & x_{h_k}^{r_k} \end{vmatrix}^2,$$

essendo la somma estesa a tutte le combinazioni (h_1, h_2, \dots, h_k) a k a k degli indici $1, 2, \dots, n$. Ma se le variabili x_1, x_2, \dots, x_n si riducono a sole k distinte: x_1, x_2, \dots, x_k , allora si annullano tutti i termini della somma salvo quelli che contengono le k variabili distinte. Questi hanno per comune valore il quadrato del determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^{r_1} & x_2^{r_1} & \dots & x_k^{r_1} \\ x_1^{r_2} & x_2^{r_2} & \dots & x_k^{r_2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_1^{r_k} & x_2^{r_k} & \dots & x_k^{r_k} \end{vmatrix}.$$

Se quindi τ_k fosse identicamente nullo, tale dovrebbe essere questo determinante, ciò che non è manifestamente.

Si osservi che, per conseguenza, non può τ_k divenire nullo identicamente se ad una o più coppie di variabili si sostituiscono numeri complessi coniugati, ad es.:

$$y_1 \pm iz_1, y_2 \pm iz_2, \dots, y_q \pm iz_q,$$

purchè $y_1, y_2, \dots, y_q, z_1, z_2, \dots, z_q$ siano variabili indipendenti.

9. Passiamo ora alla dimostrazione della prop. che è stata l'oggetto della presente ricerca:

1 — *Il numero delle coppie distinte delle radici immaginarie coniugate di un'equazione algebrica a coefficienti reali è uguale al numero delle variazioni che presenta una qualsivoglia catena caratteristica normale di minori principali del discriminante dell'equazione.*

Questo numero si può quindi determinare, mediante la formola (25) o (26) o

la regola 7.8, dalla successione dei segni di una catena caratteristica qualsivoglia di minori principali del discriminante; e in particolare dalla successione dei segni del tratto

$$(32) \quad \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}, \sigma_p,$$

essendo σ_r il minore principale d'ordine r contenuto nelle prime r righe del discriminante, e σ_p quello d'indice più alto, che ha un valore diverso da zero.

La prop. è vera manifestamente se l'equazione non ammette radici immaginarie, perchè allora la successione (32), avendo i termini tutti positivi, non presenta variazioni.

Ammettiamo dunque che la prop. sia vera per le equazioni che ammettono $q-1$ coppie distinte di radici immaginarie coniugate e dimostriamola per un'equazione che ne ammette q .

Possiamo supporre che una di queste coppie sia formata da numeri immaginari puri, perchè in caso contrario, se una radice immaginaria dell'equazione è $a + ib$, considerando l'equazione le cui radici sono quelle della data diminuite di a :

$$x_1 - a, x_2 - a, \dots, x_n - a,$$

i termini della catena (32), in virtù della formola (31), non cambiano di valore, il numero delle coppie delle radici immaginarie coniugate resta q , e una coppia risulta costituita dai numeri immaginari puri $ib, -ib$.

Supponiamo dunque che fra le p radici distinte x_1, x_2, \dots, x_p dell'equazione siano:

$$x_{p-1} = ib, \quad x_p = -ib.$$

Due casi dobbiamo considerare: secondo che fra le rimanenti radici x_1, x_2, \dots, x_{p-2} ci siano o no numeri opposti:

a) Se fra le dette radici non ci sono numeri opposti, consideriamo l'equazione che ammette come radici i quadrati delle radici della data. Tale equazione ha $p-1$ radici distinte:

$$x_1^2, x_2^2, \dots, x_{p-2}^2, -b^2,$$

e soltanto $q-1$ coppie distinte di radici immaginarie coniugate.

La catena corrispondente alla (32) per la nuova equazione è

$$(33) \quad \sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_{p-2}, \sigma'_{p-1},$$

essendo

$$\sigma'_r = \begin{vmatrix} s_0 & s_2 & s_4 & \dots & s_{2r-2} \\ s_2 & s_4 & s_6 & \dots & s_{2r} \\ s_4 & s_6 & s_8 & \dots & s_{2r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{2r-2} & s_{2r} & s_{2r+2} & \dots & s_{4r-4} \end{vmatrix},$$

e il numero di variazioni corrispondente alla catena stessa è uguale, per ipotesi, al numero $q-1$ delle coppie distinte delle radici immaginarie coniugate dell'equazione. Inoltre è (*)

$$(34) \quad \text{segno di } \sigma'_{p-1} = (-1)^{q-1}.$$

Ora il tratto (33) fa parte di una catena di minori principali del determinante

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \dots & S_{2n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{2n} \\ S_2 & S_3 & S_4 & \dots & S_{2n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ S_{2n-1} & S_{2n} & S_{2n+1} & \dots & S_{4n-2} \end{vmatrix}$$

che ha (2) la caratteristica p . Ne segue che non possono essere nulli tutti i minori principali d'ordine p , orlati di σ'_{p-1} in questo determinante, perchè altrimenti, siccome sono nulli tutti i minori principali d'ordine $p+1$, il determinante avrebbe la caratteristica $p-1$.

Sia dunque σ'_p un minore principale d'ordine p orlato di σ'_{p-1} , diverso da zero. Il segno di σ'_p è uguale a quello di σ_p , quindi (2):

$$(35) \quad \text{segno di } \sigma'_p = (-1)^q .$$

Ora la successione

$$(36) \quad \sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_{p-1}, \sigma'_p$$

è una catena caratteristica del determinante considerato, inoltre al tratto da σ'_1 a σ'_{p-1} corrispondono, come si è detto, $q-1$ variazioni, e risulta da (34) e (35) che si ha una variazione tra σ'_{p-1} e σ'_p , quindi alla catena corrispondono q variazioni. Ma anche la (33) è una catena caratteristica dello stesso determinante, quindi ad essa corrispondono pure q variazioni, quante sono appunto le coppie distinte delle radici immaginarie coniugate dell'equazione.

b) Resta a considerare il caso che tra le radici distinte x_1, x_2, \dots, x_{p-2} della data equazione ci siano numeri opposti.

Consideriamo in tal caso una catena caratteristica normale

$$(37) \quad \tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$$

del discriminante, e fra le dette radici x_1, x_2, \dots, x_{p-2} siano

$$a_1 \pm ib_1, a_2 \pm ib_2, \dots, a_r \pm ib_r \quad (r = q-2)$$

le coppie delle immaginarie coniugate, e

$$a_1, a_2, \dots, a_s$$

le radici reali ($2r+s = p-2$). Diamo alle parti reali a_1, a_2, \dots, a_r delle prime gl'incrementi (reali) h_1, h_2, \dots, h_r , e alle radici reali gl'incrementi k_1, k_2, \dots, k_s :

$$(38) \quad (a_1 + h_1) \pm ib_1, (a_2 \pm h_2) \pm ib_2, \dots, (a_r + h_r) \pm ib_r ; \\ \alpha_1 + k_1, \alpha_2 + k_2, \dots, \alpha_s + k_s ;$$

e consideriamo la catena corrispondente alla (37) del nuovo discriminante:

$$(39) \quad \tau'_0, \tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_p .$$

Poichè τ'_k è una funzione continua degl' incrementi h_i e k_j , che assume il valore τ_k quando i detti incrementi assumono il valore zero, possiamo supporre che gl' incrementi stessi variino in tali intorni di zero in cui nessun termine della (39) possa mutare di segno. Scelti poi gl' incrementi nei detti dintorni in maniera che fra i numeri (38) non vi siano numeri opposti, la successione (39) per il caso *a*) presenterà q variazioni. E lo stesso si potrà dire della (37), perchè se un termine τ_k è diverso da zero, esso ha lo stesso segno di τ'_k , e se invece è nullo, τ_{k-1} e τ_{k+1} sono di segno contrario e al tratto $\tau_{k-1} \dots \tau_{k+1}$ corrisponderà una variazione come al tratto $\tau'_{k-1} \dots \tau'_{k+1}$.

Il teorema è così dimostrato in generale.

10. Termineremo mostrando come, supposta stabilita la prop. (per es. con uno dei metodi indicati nei nn. 1 e 2) nell' ipotesi che i termini della successione (37) siano tutti diversi da zero, possa completarsi la dimostrazione, togliendo tale restrizione.

Basterà supporre che la (37) sia una catena caratteristica normale e dimostrare che il numero delle variazioni che essa presenta è uguale al numero delle coppie distinte delle radici immaginarie coniugate dell' equazione.

Siano queste coppie

$$a_1 \pm ib_1, \quad a_2 \pm ib_2, \quad \dots, \quad a_q \pm ib_q,$$

e

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots, \quad \alpha_s$$

le radici reali. Diamo alle parti reali a_1, a_2, \dots, a_q delle prime gl' incrementi (reali ed arbitrari) h_1, h_2, \dots, h_q , ai coefficienti b_1, b_2, \dots, b_q delle parti immaginarie gl' incrementi k_1, k_2, \dots, k_q e alle radici reali gl' incrementi l_1, l_2, \dots, l_s . Siano poi

$$(40) \quad \tau'_0, \quad \tau'_1, \quad \tau'_2, \quad \dots, \quad \tau'_p$$

le espressioni che di conseguenza assumono i termini della (37).

Ciascun termine di quest'ultima successione è una funzione razionale intera degli incrementi h_i, k_i, l_j , che non può essere identicamente nulla (84), quindi si possono assumere gl' incrementi in tali intorni a destra di zero dentro i quali ciascun termine della successione (40) non sia mai nullo e però abbia segno costante.

Ed allora, se τ_k è diverso da zero, τ'_k ha lo stesso segno di τ_k ; se invece $\tau_k = 0$, il tratto $\tau'_{k-1} \dots \tau'_{k+1}$ presenta una variazione come il tratto $\tau_{k-1} \dots \tau_{k+1}$. Pertanto la catena (37) presenta lo stesso numero di variazioni della (40), e poichè questa, avendo i termini tutti diversi da zero, presenta tante variazioni quante sono le coppie delle radici immaginarie coniugate dell' equazione, si può concludere che anche alla catena (37) corrispondono tante variazioni quante sono le coppie in parola.

Catania, febbraio 1917.



Ulteriori ricerche sulla struttura della cellula cartilaginea dei Mammiferi.

Per il Dott. SALVATORE COMES

(Ordinario di Storia Naturale nel R. Liceo Umberto di Palermo e Libero docente di Zoologia
e Anatomia comparate nella R. Università di Palermo).

Con 3 figure nel testo e una tavola.

I.

Introduzione.

Una ormai abbondante bibliografia comprende le numerose ricerche fatte in questi ultimi anni sulla struttura della cellula cartilaginea, ricerche che si connettono ad importanti questioni di citologia, come, per esempio, l'esistenza in essa d'un apparato reticolare interno, d'un reticolo mitocondriale, del materiale adiposo e glicogenico, e dei possibili rapporti che intercedono tra siffatte formazioni ed altre ancora, messe in evidenza anteriormente da Citologi di valore. A queste ricerche sono legati infatti i nomi di Aa. stranieri quali il Flemming, l'Heidenhain, il Ballowitz, il Benda, l'Arnold, il Bergen, il Dubreuil, il Renaut, il Duesberg, il Mewes, il Samisonow, il Retterer, lo Smirnow, e quelli di parecchi studiosi italiani, quali il Pensa, il Levi, il Perroncito, il Barinetti, il Torraca ed anche lo scrivente.

Io non ho l'intenzione di esporre qui la storia critica, per così dire, dei reperti sulla cellula cartilaginea. Mi rifarò soltanto dall'epoca in cui cominciano i miei studî sull'argomento, per quanto in gran parte questa disamina sia stata fatta diligentemente, in uno dei suoi ultimi lavori, dal Pensa.

Adunque, fra le numerose ricerche fatte sino al 1901 sul condroblasto, meritano speciale menzione quelle di Flemming e di Heidenhain, che, nelle cellule cartilaginee della larva di Triton, descrissero una struttura filamentosa rispettivamente e reticolare con formazioni bastonciniiformi, che l'ultimo dei suddetti Aa. omologava agli pseudocromosomi. Nel 1901 il Pensa scopriva, coi metodi del Golgi, nelle cellule delle cartilagini costali di alcuni Mammiferi, un apparato reticolare somigliante a quello che il Golgi aveva descritto negli elementi nervosi e che lui e il Negri descrissero in quel torno in alcuni elementi glandulari. Il Pensa finiva col consigliare nuove ricerche per stabilire " se per avventura qualche cosa di comune esistesse fra il reticolo da lui descritto e molte altre formazioni endocellulari: centrophormien di Ballowitz, chromosomen e pseudochromosomen di Heidenhain, chondrhomiten del Benda e di Meves. „

Altri lavori seguirono a quello del Pensa. Il Von Bergen nel 1904 descrisse coi metodi di Golgi e di Kopsch nella cartilagine ialina della trachea del gatto un apparato re-

ticolare a maglie ristrette, e, a differenza di quello del Pensa, che si stendeva a maglie larghe per tutto il corpo cellulare, più piccolo, essendo circoscritto ad una parte del corpo cellulare vicina al nucleo, quindi più somigliante del primo ai reticoli endocellulari messi in evidenza dalla scuola del Golgi. Seguirono poi i lavori di Renaut, di Arnold, di Loewental, di Renaut e Dubreuil, del Retterer, e sopra tutti del Meves, i quali in maniera più o meno dettagliata descrissero granuli e filamenti (Smirnow, Arnold, Meves) talora disposti a reticolo (Retterer) talora in un gruppo paranucleare di aspetto reticolare (Arnold) in rapporto coll'assimilazione del grasso e del glicogene, che più o meno esplicitamente ascrivevano a formazioni mitocondriali. Più esplicito di tutti il Meves, che opina appartengano, verosimilmente, alla categoria dei condriocenti ordinati in reticolo anche gli apparati reticolari descritti dal Golgi e dalla sua scuola.

A questo punto io trovai l'argomento quando intrapresi a studiarlo, ciò che feci spinto dai dubbi del Pensa e del Meves su questi possibili rapporti fra gli elementi del condrioma e l'apparato reticolare. Coi primi risultati delle mie ricerche pubblicati nel 1909, riuscii a mettere in evidenza, servendomi del metodo Benda genuino, un vero apparato reticolare in tutto simile a quello descritto dal Pensa nel 1901 e che quindi omologavo ad una formazione condriomatica.

Mi prefiggevo di continuare a studiare l'argomento per mostrare il comportamento del condrioma, di cui il reticolo rappresentava solamente una fase, nella cellula cartilaginea. Nel 1910 esposi in un altro mio lavoro altre ricerche intese a descrivere il processo della condriodieresi nella cellula cartilaginea, ciò che non era stato mai fatto per le cellule somatiche, sibbene, e secondo me incompletamente, dal Meves prima, e poi quasi contemporaneamente a me da Giglio-Tos e Granata per le cellule sessuali. Insieme coi miei lavori, o posteriormente ad essi, vedevano intanto la luce quelli di Prenant, Samisonow, Renaut e Dubreuil, altri del Meves, del Laguesse, del Dubreuil, del Duesberg, del Barinetti, del Perroncito, del Pensa, del Levi, del Torraca, del Terni, della Monti, del Luna ecc., fatti per illustrare viemmeglio e con nuovi criterî le formazioni reticolari e mitocondriali, oltre che nelle cellule cartilaginee, in altre svariate categorie di elementi.

Il Duesberg nel suo accurato lavoro di sintesi "Plastosomen, apparato reticolare interno und Chromidialapparat", apparso sugli *Ergebnisse* di Merkel e Bonnet nel 1911, ricorda per primo i miei lavori, convergendo manifestamente colle mie conclusioni, mentre degli stessi, e sulla stessa autorevole rivista apparivano le recensioni fatte dal Vitali e dal Pardi. Dopo ciò essi furono richiamati e confermati anche dagli studiosi italiani, e per maggiore mio compiacimento da quella stessa Scuola del Golgi dai cui lavori io avevo preso le mosse con spirito di sereno controllo. Così il Barinetti, in un lavoro inteso a risolvere la nota questione, se cioè l'apparato reticolare descritto dal Pensa fosse identico a quello descritto dal Von Bergen, ammette che il primo sia di natura mitocondriale, abbracciando in tal modo le mie vedute, il secondo soltanto corrisponda al reticolo endocellulare, messo in evidenza col metodo del Golgi e con metodi affini negli elementi non nervosi.

Precisamente l'A. ha visto nelle cellule cartilaginee di embrione di pollo e nella cartilagine costale di cavia adulta, coi metodi per rivelare l'apparato di Golgi, un reticolo localizzato in vicinanza del nucleo, corrispondente a quello del Von Bergen nelle cartilagini tracheali, vide pure, servendosi della reazione nera di Golgi, un reticolo più esteso a tutta la cellula, corrispondente, egli dice, all'apparato reticolare di Pensa e di Comes. Con

fissazione al Flemming, o col liquido di Regaud nelle cartilagini embrionali di pollo vide la centrosfera con centrosomi attaccata al nucleo e pure dei fili diffusi a tutta la cellula corrispondenti al grande reticolo della cartilagine embrionale di pollo. La conferma delle mie conclusioni è ripetutamente manifestata in diversi punti del lavoro, che per amore di brevità non riporto.

Al lavoro del Barinetti seguì quello del Perroncito, sulla dittocinesi nelle formazioni spermatiche di alcuni molluschi, processo che tante somiglianze mostra con quello della condriocinesi descritta da me nella cellula cartilaginea e da Giglio-Tos e Granata nelle cellule seminali di *Pamphagus marmoratus*.

L' A. si occupa a lungo dei reperti del Pensa e del Barinetti, coi quali fa concordare i suoi, ed in un ulteriore articolo riportato dall' *Anatomischer Anzeiger*, riconosce in me il merito di aver colorato col metodo di Benda l'apparato reticolare descritto da Pensa.

Ma, a ristudiare la struttura della cellula cartilaginea, cioè a controllare le ricerche proprie, le mie, e quelle del Barinetti, sull'argomento, è tornato il Pensa, in un suo recentissimo lavoro (1913), con una serenità e sincerità di osservazioni e di criteri che gli fanno molto onore. Materiale adoperato dal Pensa furono le cartilagini di gatti di 10 giorni, di 3 e di 6 mesi di vita, quelle di embrione di cavia e di cavia adulta, quelle di conigli nati da pochi giorni, degli embrioni del bue e del maiale in diverso periodo dello sviluppo, nonchè le cartilagini laringee e tiroidee della medesima cavia. Nelle sue conclusioni egli ammette la coesistenza del condrioma e dell'apparato reticolare descritto dal Bergen. Il primo può presentarsi sotto forma di apparato reticolare e quindi omologa a questa fase particolare del condrioma l'apparato reticolare da lui descritto nel 1901. Era quanto io stesso sostenni nel 1909 ed in seguito, nè il Pensa evita di dichiararlo apertamente in un punto del suo lavoro, che pure per amore di brevità non riporto.

Io gli son grato di questa piena riconoscenza del risultato dei miei studi, che vien confermata anche dalle sue principali conclusioni. L' A. passa quindi ad esaminare il comportamento del condrioma nelle diverse fasi di vita della cellula cartilaginea, e durante l'ossificazione di questa, quello del reticolo di Bergen durante le medesime fasi, i rapporti fra queste due formazioni, e si occupa anche, per quanto non sia venuto a risultati decisivi, della elaborazione del materiale lipoidico per parte degli elementi mitocondriali. Nel descrivere il comportamento del condrioma durante la mitosi non aggiunge nulla di nuovo a quanto hanno descritto e figurato il Perroncito, il Barinetti, il Levi da un lato, secondo i quali Aa. la divisione dei mitocondri durante la citodieresi avverrebbe quasi passivamente, (e il Pensa segue evidentemente queste vedute) il Meves, il Giglio-Tos e Granata e io stesso dall'altro, dai cui studi si rileva un vero processo di condriodieresi sincrone e parallelo a quello della cario-dieresi (*) Anche la Monti mostra di accettare insieme coi risultati del Barinetti e del Pensa, quelli, convergenti, delle mie ricerche.

Ora si può considerare il lavoro del Pensa come definitivo, come cioè l'ultima parola, la esauriente, sulla struttura della cellula cartilaginea? Io non lo credo e del resto non lo

(*) Il Pensa dubita che nella ricostruzione del mio schema di condriocinesi io abbia avuto sottocchi elementi disparati e cioè elementi mitocondriali ed elementi del reticolo che descrisse il Bergen, il quale spesso è circoscritto in modo da apparire talvolta, specialmente in preparati colorati con metodi non adatti per la sua dimostrazione come un corpo paranucleare. Io credo invece che una osservazione più accurata delle figure della tavola annessa al mio lavoro gli avrebbero tolto tale dubbio perchè in esse non coesistono mai formazioni riferibili tanto agli elementi mitocondriali quanto a quelli dal reticolo di Bergen!

crede nemmeno lui. Ecco infatti come si esprime egli nelle sue conclusioni riguardo al condrioma e al reticolo di Bergen, dopo avere stabilita l'omologia fra il reticolo da lui scoperto e il condrioma e quella del reticolo di Bergen cogli apparati reticolari stati descritti negli elementi non nervosi, " ma non esistono finora dati concreti nè per ammettere nè per negare in modo assoluto una omologia fra l'apparato reticolare da me descritto e l'apparato reticolare interno quale lo descrisse primitivamente il Golgi nelle cellule nervose, oppure fra questo e gli apparati reticolari che furono descritti in molti elementi non nervosi, compreso quello di Bergen, che vengono indicati anch'essi generalmente col nome di apparati reticolari interni di Golgi. „ Ed ecco quanto dice riguardo alla parte che gli elementi mitocondriali prenderebbero nella elaborazione del materiale lipoido: " Alcuni fatti farebbero pensare che gli elementi mitocondriali prendano parte attiva alla elaborazione del materiale lipoido, ma non avendo potuto eliminare alcuni dubbî in proposito non posso ammettere ciò come cosa completamente dimostrata. „

Date queste forme dubitative con cui il Pensa si esprime, ho creduto non del tutto inutile rendere pubbliche alcune osservazioni mie, fatte nel volgere, di qualche anno quasi sullo stesso materiale, nel mentre mi apparecchio a nuove e più estese ricerche sullo stesso argomento. Non lo reputo inutile perchè sento di poter confortare di nuove prove le mie precedenti conclusioni e di aggiungerne altre nuove da nuovi fatti corroborate. Distinguerò in 2 capitoli l'esposizione delle mie ricerche. Nel primo che intitolerò " *L'evoluzione del condrioma nella cellula cartilaginea* „ seguirò il condrioma in tutte le fasi che vanno dalla consistenza quasi membranosa della cellula a quella ossificata della zona di ossificazione; nel secondo, che avrà per titolo " *I rapporti del condrioma, la centrosfera e il materiale lipoido nella cellula cartilaginea* „ tratterò appunto delle relazioni che intercedono fra le parti suddette, con speciale riguardo all'origine del materiale lipoido nella cellula cartilaginea.

II.

L' Evoluzione del condrioma nella cellula cartilaginea durante l'ossificazione.

Prima di passare alla descrizione delle varie fasi del condrioma attraverso le modificazioni graduali che subisce il condroblasto durante il processo di ossificazione, debbo esprimere una mia convinzione quale me la son formata nel corso di queste ricerche. Il reticolo descritto da Bergen e da altri Aa. continua a rappresentare secondo me una fase anch'esso del condrioma perchè visibile col metodo dei mitocondri, quando nessun'altra formazione mitocondriale, tanto meno un altro reticolo, rilevante per quantità o per costanza, si può mettere in evidenza nello stesso elemento. La fig. 2 della tavola che ho voluto riportare illustra bene questo mio asserto. Figure simili furono da me riprodotte nei miei precedenti lavori, specialmente in quello in cui descrivevo la condriodieresi, di cui il reticolo, almeno quello da me descritto, costituirebbe una fase. E illustra pure il mio asserto la fig. 3 del testo ricavata da un preparato di cartilagine caudale di topo giovane col metodo Golgi dove accanto a cellule fornite del solo reticolo, morfologicamente molto simile a quello descritto dal Von Bergen, altre se ne vedono fornite di speciali formazioni paranucleari, ed altre con formazioni esclusivamente granulati. Il Pensa crede invece alla coesistenza dei due reticoli, e si indugia non poco a dimostrare questa sua asserzione.

Ma dell'esame delle figure del testo e delle tavole annesse al suo lavoro si ricava l'impressione che quando il reticolo di Bergen è ben evidente, la formazione mitocondriale è ridotta a granuli o a fili di poco rilievo o manca affatto e viceversa.

Io mi domando: se il reticolo mitocondriale, da me scoperto, si può mettere in evidenza coi metodi della reazione nera, i quali sembrano ancora più adatti a mettere in rilievo quello del Bergen, perchè le due formazioni non coesistono integralmente? Perchè quando si mette in evidenza l'una non si riesce a mettere, almeno interamente, in evidenza l'altra? E perchè anche col metodo dei mitocondri le due formazioni non coesistono, se è possibile metterle singolarmente in evidenza, dato che siano due parti distinte e non fra loro connesse, come due aspetti diversi dello stesso elemento? Questa serie di questioni io mi posi dinanzi anche quando dovetti prendere in considerazione il reperto del Bergen, che io conoscevo già, avendolo citato nel mio lavoro sulla condriodieresi.

Un altro fatto, che non può sfuggire a chi bene studi i lavori e le illustrazioni del Pensa e del Barinetti è questo, che essi parlando di reticolo mitocondriale, si riferiscono al solito apparato reticolare messo in evidenza col metodo Golgi, o con quello Golgi-Veratti, e non col metodo del Benda, o del Meves, o del Regaud.

Questi Aa. hanno dimostrato, coi metodi specifici pei mitocondri, forme reticolari molto incomplete, riferibili piuttosto a condrioconti ed a condriomiti. Ora con le osservazioni che andrò esponendo nel corso di questo lavoro potrò far notare che non solo mi è riuscito osservare sempre un reticolo completo, ma anche forme diverse di reticoli durante l'evoluzione del condrioma nella cellula cartilaginea (*)

Nelle figure noi possiamo riconoscere le trasformazioni subite dal condrioma della cellula cartilaginea man mano che questa va modificandosi da cellula superficiale membranosa a cellula cartilaginea vera e propria dapprima e poi gradatamente calcificata e infine a cellula della regione ossificata. Mi basta illustrarle un po' dettagliatamente per far notare la portata di queste trasformazioni alle quali facevo cenno anche nella mia prima nota. Il condrioma nelle cellule cartilaginee più giovani si mostra sotto l'aspetto di condriosomi in numero e forma indeterminati, condriosomi risultanti dall'accumulo di granuli mitocondriali. Che questi concorrano alla formazione dei condriosomi lo dimostra il fatto che negli stessi elementi oltre ai condriosomi si notano aggruppamenti più lassi di aspetto ugualmente condriosomico, ma dei quali è visibile la costituzione mitocondriale.

Oltre a ciò mitocondri isolati si notano nel resto del lume cellulare in rapporti più o meno stretti colle altre formazioni condriomatiche. Spesso, come nella fig. 1 è facile notare, i condriosomi sono in rapporto fra loro e coi mitocondri per mezzo di filamenti similmente di natura mitocondriale.

Questo stadio a me pare debba considerarsi il più giovane nella evoluzione della cellula cartilaginea perchè ci presenta il condrioma sotto l'aspetto *più embrionale*, quello dei mitocondri nei quali c'è la tendenza agli aggruppamenti in condriosomi e in filamenti. È quello che si osserva in tutti i tessuti embrionali studiati e descritti a questo riguardo dal Meves, quello che si nota anche nelle formazioni condriomatiche in quelle cellule eternamente embrionali che sono gli elementi sessuali, uova e spermii, quali ce li hanno descritti il Meves, il Russo, il Duesberg, il Giglio-Tos e tanti altri.

(*) Il reticolo mitocondriale esiste pure nelle cellule cartilaginee dei Cefalopodi, che da qualche tempo costituiscono argomento dei miei studi, con caratteri molto simili a quelli da me descritti sul reticolo mitocondriale della cellula cartilaginea dei Mammiferi!

Questa disposizione a cumuli (condriosomi) ed a granuli (mitocondri) è, secondo me, la più atta al processo anabolico, attivissimo, prevalente, nel ricambio materiale dello elemento cellula in via di accrescimento. In un stadio ulteriore il condrioma si disgrega ed acquista speciale tendenza a disporsi a reticolo, a filamenti ancora granulari e indecisi, come si nota appunto nella figura 2, che rappresenta una cellula cartilaginea più approfondita della precedente. In tale figura appunto noi osserviamo un reticolo che occupa un solo lato della cellula, e somiglia perciò più al reticolo di Bergen e quindi secondo la scuola del Golgi al reticolo endocellulare quale essa ce lo ha descritto, col metodo dell'illustre Patologo, che non al reticolo mitocondriale occupante tutto il protoplasma descritto da me col metodo Benda, in alcuni elementi cartilaginei, e dal Pensa col metodo della reazione nera. È bene far rilevare che qui il condrioma è rappresentato da questa sola forma di reticolo e da qualche granulo mitocondriale sparso nel resto del citoplasma: non esiste contemporaneamente il grande reticolo che solo, secondo Pensa, corrisponderebbe a una formazione condriomatica. Ma questa prima formazione reticolare non è stabile, come del resto il suo filamento granulare dimostra. Essa ben presto si risolve, in mitocondri, a disposizione molto avvicinata, data anche la forma acquistata dagli elementi a questo stadio. Siamo già nella zona della cartilagine seriale di cui la fig. 3 ci dà una chiara dimostrazione. In tale figura noi osserviamo appunto la risoluzione del condrioma in dense masse di mitocondri racchiudenti almeno un corpo di colorazione violetta, spesso come un condriosoma, di aspetto fisico però un po' diverso. Vedremo l'importanza di questo corpo, per lo più vicino al nucleo, quando tratteremo della centrosfera in relazione alla formazione del materiale lipoide.

È questo uno stadio importante di partecipazione dei mitocondri ai globuli lipogeni. Ma ben tosto il condrioma dalla sua disposizione mitocondriale torna a passare a quella di reticolo, disposizione che sembra più costante nell'elemento cartilagineo.

Se infatti noi esaminiamo un punto più profondo della zona cartilaginea seriale, come quello che ho rappresentato nella fig. 4., notiamo che in ognuna delle cellule disegnate esiste un fitto reticolo mitocondriale, che si estende a tutto il lume cellulare (ed è quindi più visibile in sezioni tangenziali) a maglie strettissime, talora poco risolubili, anche con un forte ingrandimento.

Nella fig. 5 ho rappresentato una cellula di questa zona, esaminata ad un più forte ingrandimento, appunto per mostrare in dettaglio il reticolo suddetto. È notevole che anche qui manchi la coesistenza d'un più piccolo reticolo paranucleare, che dovrebbe rappresentare il reticolo del Bergen, e quindi, secondo le omologie del Pensa, l'apparato reticolare interno del Golgi. Come tale non può considerarsi certamente il globulo, molto probabilmente di natura lipoide che si osserva ad un estremo della cellula.

La zona seriale è rappresentata da elementi cartilaginei veri e propri. Ora l'apparato reticolare, come dicevo sopra, tende a rendersi più visibile e frequente appunto in tali elementi, come formazione tipica del periodo vegetativo dell'elemento stesso nella sua fase di riposo, ove se ne voglia considerare l'attività riproduttiva.

Epperò esso tende a rendersi più visibile, a maglie più lasse, ma a filamento più nitido e chiaro, e ad occupare per lo più tutto il lume della cellula.

È quello che notasi nella fig. 6, rappresentante un gruppo cellulare di cartilagine vertebrale di coniglio, preso da una regione prossima alla cartilagine calcificata. Bellissimi reticoli, ugualmente conformati, ci è dato vedere anche in cartilagini costali dello stesso

materiale (coniglio neonato) a cominciare quasi dalla zona membranosa di esse sino alla regione seriata; anzi tali reticoli notansi con maggiore frequenza e formano talora un involucreto reticolare attorno alla centrosfera. Si può affermare che ogni elemento cartilagineo ne è provvisto! È questa appunto la forma tipica del reticolo che per primo ho descritto, servendomi del metodo del Benda, nel 1909, forma corrispondente allo apparato reticolare descritto dal Pensa nel 1901, ed alla formazione più grande reticolare descritta dallo stesso, e dal Barinetti in seguito.

Procedendo ora nella regione calcificata, gli elementi acquistano considerevole grandezza. Nello stesso tempo il reticolo, che nello stadio precedente aveva assunto la disposizione più tipica, diventa sempre più lasso e periferico, dimodochè una sezione trasversale della cellula non ce lo fa vedere nella sua integrità, sibbene ce ne fa osservare alcune e talora poche briglie, qualcuna delle quali in rapporto colla membrana nucleare, qualche altra con quella cellulare. Però una considerevole parte del condrioma reticolare si è risolta in mitocondri, che dal reticolo sono compresi, e intanto si rende più visibile una massa rotondeggiante iusta nucleare, che potrebbe corrispondere ai centrophormien di Ballowitz o alla centro sfera di Heidenhain, anche questa infarcita di mitocondri, e spesso fornita nel suo interno di uno o due centrioli.

Se questa massa dovesse corrispondere al reticolo del Bergen, non comprendo perchè con il metodo del Benda, da me usato, essa non mostri una struttura reticolare.

Intanto nelle figure del testo noi notiamo alcuni dettagli e modificazioni dello stesso stadio, precisamente in A della fig. 1 si ripete la stessa disposizione della figura precedente,

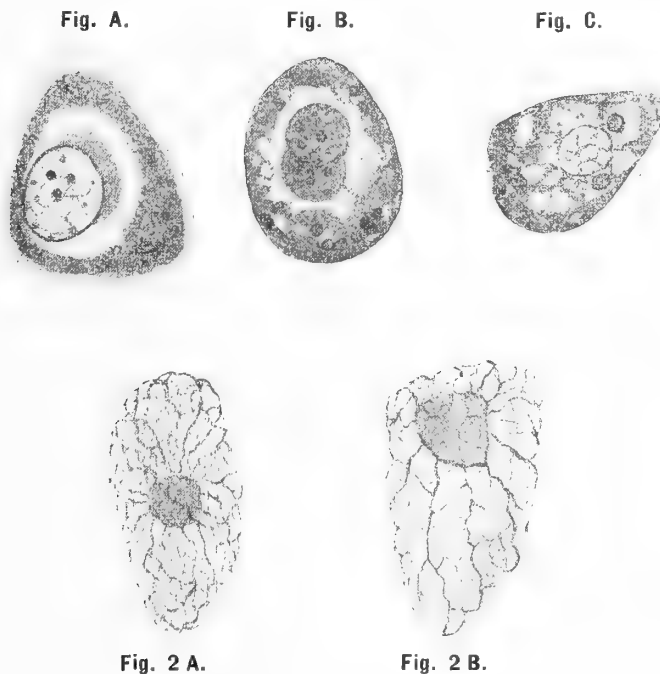


Fig. 1. — Cellule cartilaginee della regione più prossima alla ossificazione; A, B, C, stadi diversi del corpo perinucleare (cart. cost. topo neonato).

Fig. 2 B. — Apparati reticolari di transizione fra quelli delle figg. 5 e 8 della Tav. zona calcificata cart. cost. di topo neonato.

però la zona semilunare periferica rappresentante il condrioma mostra una più marcata disposizione mitocondriale, mentre è scomparso qualsiasi accenno di reticolo. In B il nucleo si

presenta infarcito di granuli, alcuni dei quali si notano nel corpo accessorio, paranucleare, ed altri, di uguale dimensione e colore, immersi nel condrioma. In C il corpo accessorio paranucleare è scomparso, nel condrioma che si distende in forme di trabecole mitocondriali di aspetto reticolare si notano globuli con tutta l'apparenza di lipoidi, limitati però da anelli risolubili in granuli mitocondriali. Procedendo verso la regione calcificata, le trabecole mitocondriali diventano più sottili, moniliformi, ricostituendo una specie di reticolo, che spessissimo è risolubile nei mitocondri da cui risulta formato. Si notano anche qui globuli in parte colorati in violetto e di varie dimensioni. Il reticolo si va sempre più delineando nella zona calcificata e acquista la nettezza e la continuità dei suoi filamenti. Le maglie se non sono fitte come quelle dello stadio rappresentato nella fig. 5, lo sono però di più che in quello designato nella fig. 6. Di questi due stadii, quello che adesso descriviamo rappresenta uno stadio di passaggio caratteristico per la disposizione molto periferica del reticolo e per l'irregolarità nello spessore del filamento (vedi fig. 2 del testo). Infine siamo pervenuti alla regione di ossificazione. La fig. 9 rappresenta appunto due elementi di tale regione corrispondenti a quelli che Pensa chiama cellule globose. Abbiamo qui un nuovo spezzettamento del reticolo in condrioconti o anche un disgregamento in condriomiti e in mitocondri. Condrioconti, condriomiti, mitocondri sono notevoli per la sottigliezza rispettivamente e per le piccole dimensioni loro, nonchè per un aspetto quasi scheletrico che li caratterizza. Per tutti questi caratteri si ha l'impressione che il condrioma sia in via di alterazione e di riduzione. Negli elementi meno progrediti del processo di ossificazione, come quelli che rappresenta precisamente la fig. 9, nel citoplasma osserviamo, più che negli stadi precedenti, numerosi granuli, alcuni dei quali colorati come i mitocondri da cui si distinguono per la maggiore grandezza, altri in rosso, colore assunto dalla trofocromatina nucleare. Bisogna fermare l'attenzione al seguente particolare, che alcuni di questi globuli cioè si presentano circondati da una membrana a contorno netto o granulare di colore violetto come le formazioni del condrioma.

Dai fatti esposti nei miei precedenti lavori, e da quelli che adesso son venuto elencando, risulta chiara la somiglianza di alcuni miei reperti e la differenza di altri con quelli descritti dal Pensa, nei suoi diversi lavori. Questo A. in seguito alle sue osservazioni nelle cartilagini costali del gatto di pochi mesi di vita è venuto a confortare la conclusione da me formulata sin dal 1909, cioè che l'apparato reticolare da lui descritto nel 1901 rappresenta una fase speciale del condrioma, di cui egli descrive altre fasi ed aspetti tali quali io pure avevo accennato con chiarezza nella nota testè citata.

Nelle sue descrizioni manca però, per quel che riguarda le cellule periferiche, la disposizione mitocondriale e condriosomica da me pure rilevata. La fase di reticolo non è riscontrabile, secondo il Pensa, nello stesso materiale di gatto di pochi giorni di vita o neonato. Il Pensa osserva poi anche, come io feci nel 1909, durante il processo di ossificazione globuli di diversa grandezza, i più grandi dei quali di aspetto lipoide, i più piccoli di aspetto mitocondriale, in rapporto più o meno diretto cogli elementi del condrioma. Pure qualche differenza va notata nel comportamento del condrioma durante il medesimo processo di ossificazione. Così, nelle cellule discoidali, corrispondenti allo stadio ch'io chiamo della zona seriata, egli nota bensì che i fili del condrioma diventano meno lunghi e grossolani, ma non si dispongono a reticolo perchè non presentano più ramificazioni: nelle cellule si notano quasi esclusivamente fini granuli e brevi ed esili bastoncini.

Ora ciò è talora osservabile, anzi, io aggiungo, per la forma allungata dell'elemento-

questi sottili condrioconti si presentano ai due estremi dell' elemento. Anche qui si potrebbe interpretare questa particolare disposizione come la sezione ottica di un reticolo superficiale. Ma accanto a questa disposizione del condrioma in questo stadio ho notato, più spesso l' esistenza d' un delicatissimo apparato reticolare a maglie strette ed esteso a tutta la cellula. La differenza del reperto si deve evidentemente ad imperfezione dei metodi adoperati dal Pensa.

Identità, più che somiglianza, mostrano le formazioni condriomatiche delle cellule globose corrispondenti alla zona da me detta calcificata, ed anche a quella che subisce il processo di ossificazione. Il condrioma dallo stato di reticolo tende a ridursi gradatamente, in condrioconti, condriomiti, mitocondri, mentre si rendono visibili e talora vistosi i globuli di materiale lipoido. Disposizioni del condrioma simili alle sopra esposte il Pensa descrive in altro materiale cartilagineo come nella cavia giovane e adulta, dove pare abbia intravisto anche nelle cellule più superficiali lo stadio condriosomico. Però è notevole il fatto che egli non descrive nè nel testo nè nelle figure un vero apparato reticolare quale io ho potuto rilevare (v. figg. 2, 5, 6, ecc.) adoperando lo stesso materiale. Solo nelle cellule cartilaginee di dischi vertebrali di embrioni dello stesso animale coll' uso del metodo Golgi. Veratti trova che i condrioconti di cui risulta costituito il condrioma " possono presentare anche ramificazioni, così che in alcuni punti la sovrapposizione di questi fili ramificati può simulare anche l' esistenza d' un reticolo. „

Concludendo, il Pensa, come si rileva dal testo del suo lavoro e più dalle figure della tav. XXVIII ricavate da preparati coi metodi dei mitocondri, non s' è trovato mai dinanzi a un vero apparato reticolare. Nè nel materiale su ricordato, nè nelle cartilagini laringee di cavia, nè nelle cartilagini costali di giovani conigli, nè in quelle di embrioni di bue o di porco, materiale da lui ugualmente impiegato nelle sue ricerche! Ecco perchè io ho insistito nel rendere di pubblica ragione i miei reperti sul reticolo mitocondriale e la mia insistenza al riguardo non sembrerà inopportuna.

Un grande peso sembra dia il Pensa al reticolo del Bergen che egli ha riscontrato negli elementi cartilaginei, servendosi dei metodi della reazione nera, reticolo che egli inclina ad omologare ai reticoli endocellulari messi in evidenza dalla scuola del Golgi e da molti altri ricercatori in elementi non nervosi. Certamente la somiglianza di aspetto deve averlo spinto a questa omologia e più ancora forse il fatto che col metodo, sia pure del Meves, egli non ha potuto riscontrare qualche cosa di simile. Ma io ho visto, durante la descrizione del processo di condriodieresi, e talora anche allo stadio di riposo, formazioni che ricordano molto da vicino il reticolo del Bergen (cfr. le figg. 2 e 19 della tavola annessa al mio lavoro sulla condriodieresi, la fig. 2 del presente, e la fig. 1 della mia prima Nota, quest' ultima con una formazione reticolare identica a quella disegnata nella fig. 30 tav. XXVII del lavoro del Pensa come reticolo del Bergen). Lo stesso Pensa è rimasto colpito da queste somiglianze al punto da scrivere: " Io dubito che nella ricostruzione del suo schema il Comes abbia avuto sott' occhio elementi disparati e cioè elementi mitocondriali ed elementi del reticolo che descrisse il Bergen „. Faccio notare però che quando trovavo la disposizione del reticolo simile a quella del Bergen non notavo la coesistenza del grande apparato reticolare descritto dal Pensa nel 1901, e viceversa; sarebbe dunque naturale dedurre che queste due formazioni rappresentino due stadi, due aspetti diversi del condrioma. D' altra parte si noti che io nei preparati di controllo eseguiti col metodo della reazione nera del Golgi (vedi fig. 2 del mio lavoro N. 3) osservai con frequenza,

direi esclusivamente il solo apparato reticolare descritto dal Pensa nel 1901 e viceversa. Ciò mi sembra molto naturale, perchè secondo me il reticolo somigliante a quello del Bergen si riscontra di solito nella speciale condizione della dieresi cellulare. Nè si dica ch'io non sia riuscito a mettere in evidenza il reticolo del Bergen: in alcuni elementi cartilaginei, come p. es. nella cartilagine fibrosa della coda di topo neonato l'unica formazione reticolare riscontrabile somiglia moltissimo al reticolo del Bergen. La *fig. 3* del testo qui sotto riportata, ricavata da un preparato col metodo Golgi, secondo le sue ultime prescrizioni, illustra bene questo fatto. Adunque se nel materiale da me adoperato in preferenza il reticolo del Bergen fosse stato più frequente o affatto coesistente con il grande reticolo del Pensa io lo avrei certamente riscontrato.



Fig. 3. — Cellule cartilaginee di coda di topo piccolo met. Golgi.

Adunque se anche il piccolo reticolo, somigliante a quello del Bergen, si può mettere talora in evidenza col metodo dei mitocondri perchè escludere senz'altro ch'esso sia una fase del condrioma? Perchè al contrario ricorrere all'ipotesi complicata della coesistenza dei due reticoli come vogliono il Barinetti, il Perroncito e il Pensa? Del resto, se questa coesistenza fosse certa, perchè il Pensa non l'ha sempre constatata invece di intravederla in qualche punto *fortunato*, come egli stesso sinceramente dichiara? (v. pag. 561 del suo lavoro) E può autorizzarlo questo eccezionale reperto ad avere *la prova matematica*, come egli dice, della esistenza contemporanea delle due formazioni reticolari? Ma v'ha di più. Lo stesso Pensa ha dovuto constatare che i due reticoli non sono indipendenti e ciò sorprende, naturalmente, ove si pensi alla diversa natura di essi.

Ecco infatti che cosa il Pensa, dopo aver rilevato che oltre alla coesistenza dei due reticoli nelle cartilagini costali del gatto di 10 giorni « si possono osservare in uno stesso

campo cellule col *reticolo colorato esclusivamente*, cellule coi *soli elementi mitocondriali*; cellule col reticolo e qualche frammento degli elementi mitocondriali (tutto ciò è molto pregiudizievole per la coesistenza dei due reticoli) „ aggiunge: “ ma le immagini più interessanti sono quelle date da cellule nelle quali filamenti appartenenti con sicurezza al condrioma confluiscono in una massa circoscritta, situata in prossimità del nucleo, nella quale la *penetrazione microscopica non permette distinguere ciò che appartiene al condrioma e ciò che appartiene al reticolo*. Le cose si complicano, come ben si vede, e non se lo nasconde lo stesso A, il quale è indotto a concludere: “ Di modo che, volendo essere puramente obiettivi si può dire che se ne ricava l'impressione che esista qui almeno una sovrapposizione topografica del condrioma e del reticolo, *una vera compenetrazione* degli elementi che compongono l'una e l'altra formazione. „

Come, dopo questo che il Pensa ha avuto la sincerità di affermare, e dopo quello che io son venuto osservando ed esponendo sinora, si può parlare, con tanta sicurezza della coesistenza di due distinti reticoli, di natura tanto diversa, e non piuttosto credere, sì come ho fatto io, che tanto l'uno che l'altro siano aspetti diversi dello stesso condrioma?

Altri dubbi il Pensa espone in seguito nella identificazione dei suoi reperti, altre decisioni si notano nelle sue figure (p. es. lo sviluppo del reticolo in quasi tutte le cellule della figura 3^a del testo fa pensare più al grande reticolo mitocondriale che al piccolo reticolo del Bergen) perchè lui pel primo possa senz'altro rigettare la mia ipotesi. Anche l'evoluzione del reticolo del Bergen durante il processo della ossificazione, quale il Pensa la descrive, ci fa notare che esso presenta analogie di comportamento col condrioma. Piccolo nelle cellule superficiali e nelle discoidali esso divien molto più voluminoso nelle cellule della zona di transizione alle cellule globose (mi servo quasi delle stesse parole del Pensa) nelle quali si estende a buona parte del corpo cellulare. Nelle cellule globose più voluminose, si badi, e più vicine alla ossificazione, il Pensa dice che non ottenne reperti positivi, o almeno ottenne colorazioni così poco decise o frammentarie, da non poterne tenere alcun conto, non essendo possibile stabilire se tali immagini corrispondevano ad una incompleta reazione o a fatti di alterazioni del reticolo. Ebbene, perchè considerarle come dovute ad una reazione incompleta, se per gli altri elementi cartilaginei la reazione si è supposta riuscita? Perchè non vedere in questo disgregamento del reticolo, che noi notammo a questo stadio nell'evoluzione del condrioma, una nuova irrefutabile prova che si tratti di una modificazione particolare del condrioma? A questo punto sento rivolgermi una obiezione di un certo valore. Se pure nè col metodo di Golgi-Veratti, nè tanto meno con quello di Meves, si può riuscire a mettere in evidenza la coesistenza dei due reticoli completi, è indiscutibile che almeno col primo dei metodi, oltre all'apparato reticolare più o meno esteso, coesistono nella cellula cartilaginea molti elementi condriomatici come mitocondri, condriomiti e condrioconti.

Come si spiega la presenza di questi elementi disgregati, se dato e non concesso, anche il reticolo fa parte del condrioma? L'obiezione è di una indiscutibile portata, ma io oso rispondere avanzando un'ipotesi che adesso sembra farsi strada nei più recenti studi di citologia, ipotesi che io emisi nel mio lavoro sulle condriodieresi e prima ancora nel mio lavoro su un Infusorio: *Balantidium tozoon* Ehr. Per molti caratteri, principalmente per la sua dieresi durante la divisione cellulare, il condrioma presenta un compor-

tamento parallelo a quello del nucleo (vedi il mio lavoro del 1910). La somiglianza però, oltre che durante la citodieresi, credo si possa riconoscere anche nello stadio di riposo della cellula. Infatti come nel nucleo così anche nel condrioma a questo stadio si ha una disposizione reticolare della maggior parte della sostanza che lo costituisce, mentre un'altra parte, la meno vistosa, acquista forma di granuli e di globuli, come appunto si verifica nel nucleo, granuli e globuli che rappresentano gli elementi extra-reticolari di Pensa. Siamo insomma in presenza di una vera binuclearità cellulare, in cui il nucleo comune, visibile con tutti i metodi, presiede di preferenza ai fenomeni riproduttivi, il condrioma invece in prevalenza a quelli della vita vegetativa. Termino il capitolo, rimandando il lettore a quello che a questo riguardo scrivevo nella mia Nota di critica del 1912.

Anche nel lavoro della Monti, sopra ricordato, l' A. si trova dinanzi al dilemma di dover apprezzare o no come formazioni mitocondriali i granuli e altre formazioni che oltre al reticolo da lei omologato al grande apparato reticolare scoperto dal Golgi nelle cellule nervose e da Pensa nelle carti laginee, si trovano nel materiale da lei studiato, epperò saggiamente conclude: Se non è tutto il condrioma ne è certo la parte essenziale per la vita della cellula, gli altri condriosomi che eventualmente possono trovarsi dispersi, debbono essere corpi residuali, quali potrebbero incontrarsi anche in formazioni destinate al riassorbimento.

III.

Rapporti fra il condrioma, il nucleo, la centrosfera e il materiale lipide nella cellula cartilaginea.

In questa seconda parte delle mie ricerche il contributo che porto all'argomento è certamente molto modesto, ma ugualmente originale.

In questa parte io cerco di lumeggiare alcuni rapporti del condrioma da altri ancora non messi in rilievo, come p. es. quelli del nucleo e precisamente colla membrana nucleare, e di altri rapporti, come p. es. di quelli del condrioma colla centrosfera e più ancora col materiale lipide sono condotto a dare una spiegazione radicalmente diversa da quella fornita dagli autori che mi precedono.

I fatti rappresentati nelle figure si riferiscono a cellule cartilaginee di materiale appartenente ad animali adulti. Bisogna quindi rifarsi prima da ciò che si osserva nelle giovani cellule delle cartilagini vertebrali e costali di neonati di topo e di coniglio, per trovare il naturale processo evolutivo dell'origine del materiale lipide, e dei suoi rapporti col nucleo e con la centrosfera da una parte, col condrioma dall'altra.

Esaminiamo da questo punto di vista ciò che si osserva nelle figure del testo e in quelle della tavola relative alla parte prima. Le figure 1-6 di questa tavola non mostrano ancora materiali lipoidi. Soltanto nel citoplasma della cellula rappresentata in fig. 3 osserviamo qualche massa rotondeggiante la cui colorazione e consistenza si allontanano un po' dal comune aspetto d'una formazione condriosomica con la quale si potrebbe a prima vista confondere. Nella figura 5 vediamo una sferetta molto diversa, per colore e consistenza, da una formazione condriomatica, essendo a struttura omogenea ed a colore giallo rossastro. Ma per trovare i primi notevoli fatti in relazione coll'origine del materiale lipide dobbiamo pervenire alla zona calcificata. Quivi ogni elemento si può dir fornito di

una ben visibile centrosfera, o meglio, per non pregiudicare coi nomi il significato e la interpretazione dei fatti, di un corpo paranucleare ora rotondeggiante e granulare (i granuli presentano spesso l'aspetto e la colorazione mitocondriale) ora a disco semilunare od a ferro di cavallo (fig. 7 della tav. I, e figg. 1A e 1B del testo). Nella fig. 7 questo corpo è in rapporto con gli elementi del condrioma, mediante una connessione di fili mitocondriali che son da interpretare, a parer mio, come resti di un reticolo mitocondriale. Nella fig. 1A del testo questa connessione è scomparsa, però anche tutta la formazione condriomatica si presenta allo stato di granuli mitocondriali. Molto più istruttiva è la fig. 1B del testo. La cellula da essa rappresentata mostra un nucleo infarcito di globuli (di natura trofica) e globuli di ugual natura si trovano anche nel corpo paranucleare. La cellula rappresentata nella fig. 1C del testo non presenta più globuli intranucleari, nel nucleo si rende soltanto visibile un reticolo cromatico; nel citoplasma è notevole da un lato la scomparsa del corpo paranucleare, dall'altro la presenza di due grossi globuli contornati da una membrana di aspetto condriomatico. Nella zona calcificata con cellule seriate si ricomincia a delineare un reticolo di aspetto moniliforme risolubile in mitocondri, per cui è da supporre che questi tendano ad assumere la disposizione reticolare. Si osservano sparsi e compresi in questo reticolo globuli più o meno grossi di colore intermedio fra quello con cui si presentano colorati gli elementi del condrioma e quello proprio dei globuli lipoidi. (fig. 8). Infine nella fig. 9 i globuli sparsi per tutto il citoplasma delle due cellule disegnate passano gradatamente dalla colorazione mitocondriale a quella rossastra propria della trofocromatina ed infine a quella giallastra propria del materiale lipoido: alcuni di essi son contornati da una visibile membrana tinta in violetto come le formazioni condriomatiche. Queste, il reticolo essendo già scomparso, son rappresentati da condrioconti, condriomiti, granuli mitocondriali liberi, di cui i più grossi fanno come s'è detto graduale passaggio ai granuli lipoidi. Si inferisce da ciò che l'origine del materiale lipoido riceve il primo impulso dell'attività secretiva del nucleo. Il nucleo degli elementi cartilaginei, prevalentemente quello della zona seriatata e della calcificata contiene granuli acidofili (cfr. fig. 7 della tav. I e fig. 1A e B del testo) che talora lo infarciscono completamente, nascondendo alla vista lo stesso reticolo di cromatina. Di questi globuli esso si scarica, cedendoli al citoplasma attraverso il corpo paranucleare, dove talora è possibile rintracciarne alcuni (v. fig. 1B del testo). Man mano che escono dal nucleo, aggrediscono il corpo paranucleare, che attraversano, ed in seguito raggiungono le parti più periferiche della cellula, stringendo allora rapporti più o meno stretti cogli elementi del condrioma e cangiando nel contempo come vedremo di consistenza e di colore. Nella fig. 1C del testo è scomparso il corpo paranucleare e nel nucleo non ci sono i globuli che sopra ricordammo, ma nel citoplasma è dato vedere due globuli piuttosto grossi limitati da un anelletto membranoso di colorazione e struttura mitocondriale. Al di fuori del corpo paranucleare e tanto più quanto più sono periferici e in diretto rapporto col condrioma, i globuli su accennati vanno man mano trasformandosi sino ad assumere l'aspetto e il colore dei globuli lipoidi. Possiamo osservare questo processo di trasformazione nella fig. 8 e meglio ancora nella fig. 9 della Tav. I. Nelle figg. 10-16 della Tavola sono illustrati particolari che si riferiscono ai rapporti del materiale lipoido già formatosi cogli elementi del condrioma. Nella figura 10 il citoplasma presenta un reticolo mitocondriale a maglie poligonali e, in contatto col nucleo, il corpo paranucleare granuloso a colorazione condriomatica. Nel nucleo si notano globuli cromatoidi. Nella fig. 11 il corpo paranucleare è scomparso, presso al

nucleo si nota un globulo che per l'aspetto e la colorazione rosso-giallastra si avvicina al materiale lipoido. Il reticolo mitocondriale è visibilissimo e a maglie strette, come nel caso precedente. In cellule che per la grandezza e per altri caratteri bisogna considerare più adulte, come è dato vedere nella figura 12, il nucleo diviene sensibilmente eccentrico, il reticolo mitocondriale è fatto a maglie più larghe e a filamento ondulato, maglie che nel loro interno racchiudono e sostengono grosse sfere di materiale lipoido, e che siano di tale natura lo dimostra la loro colorazione giallastra: questo colore infatti, coll'uso del metodo Benda, vien presentato soltanto dal materiale lipoido. È notevole che nel gruppo cellulare rappresentato nella figura citata, questi globuli di materiale lipoido siano tanto più grossi quanto più si allontanano dal nucleo. Ciò può derivare dalla fusione dei globuli perinucleari di prima formazione per costituirsi in globuli sempre più grandi; tale fusione può spingersi al punto da portare un unico globulo di grandi dimensioni come è il caso rappresentato nella fig. 13. Quivi il nucleo è divenuto assolutamente parietale e schiacciato appunto per la pressione subita dalla grossa sfera lipoido che occupa il resto del lume cellulare, comprimendo anche la parete cellulare opposta. È anche visibile un altro globuletto lipoido ad uno dei poli della cellula e tutto questo materiale è, come ben si osserva, avvolto e circoscritto da un evidentissimo reticolo mitocondriale moniliforme, poichè è facile discernere per lunghi tratti di esso la sua risoluzione in mitocondri. Degno ancora di rilievo è il particolare seguente, che cioè il nucleo si presenta circondato da un cercine mitocondriale. Questo cercine potrebbe esser prodotto anch'esso dalla pressione che i globuli del materiale lipoido esercitano su quella parte del reticolo, che si trova in vicinanza col nucleo. Talora la produzione di materiale lipoido è così imponente da riempire completamente tutto il lume cellulare, come si vede abbastanza chiaramente nella fig. 14. Quivi tutto il citoplasma cellulare è infarcito, direi quasi, completamente costituito da sfere lipoidi più o meno grandi incuneate fra la parete cellulare ed il nucleo divenuto eccentrico, anzi parietale. Il reticolo mitocondriale, sottoposto al grande stiramento, si presenta moniliforme, ad evidente costituzione granulata, presenta poche ma grandi maglie, e, attorno al nucleo, un cercine perinucleare fatto dalla pressione delle maglie perinucleari del reticolo medesimo. Appunto questo condensato aggroviamento costituente il cercine suddetto ci dà anche l'impressione molto sensibile che il condrioma a questo stadio sia quantitativamente ridotto; anzi esso presenta nel contempo la spiccata tendenza a risolversi in mitocondri, cosa che noi abbiamo vista anche nell'evoluzione del condrioma durante lo sviluppo del condroblasta.

Molto dimostrative, a questo riguardo sono le figure 15 e 16 della tavola tratte ugualmente da sezioni di cartilagine costate di cavia adulta. Nella figura 15 osserviamo che il reticolo moniliforme è, come nella precedente, in via di disgregazione mitocondriale, mentre s'è accumulato ad un lato del nucleo una notevole produzione di materiale lipoido. Nella fig. 16 questa è più imponente e il reticolo mitocondriale è del tutto scomparso, il condrioma si presenta nella sua più elementare costituzione di granuli mitocondriali. Da quanto brevemente abbiamo esposto che cosa possiamo dedurre? Poche deduzioni invero, ma tali da poter essere confortate dalla prova dei fatti messi in rilievo. Nella cellula cartilaginea giovane della porzione membranosa della serie non esistono formazioni lipoidi. È così che non ne esistono nelle cellule giovani di qualsiasi altro tessuto, compreso il connettivo adiposo, cioè nell'epiteliale, nel nervoso, nell'ovarico ecc. Però in questi primi momenti di vita il nucleo della cellula è più ricco in trofocromatina.

Man mano che la cellula cartilaginea si evolve, vediamo apparire accanto al nucleo una zona più o meno estesa, che potrebbe morfologicamente e per la sua posizione ricordare la centrosfera o l'idiozoma, o il nucleo accessorio descritto negli stessi e in altri elementi. I granuli di trofocromatina del nucleo sembra siano in parte visibili in questa zona, dove possibilmente saranno penetrati sotto forma fluida, per processo osmotico della membrana nucleare.

Che questo nucleo accessorio sia prevalentemente un organo lipogeno lo dice il fatto che esso non è costante, che cioè non esiste prima che qualsiasi formazione lipoida si formi nell'elemento, e scompare dopo che in questo il materiale lipoido in maggiore o minore abbondanza si è costituito. Avrebbe, in altri termini, questo corpo accessorio, lo stesso significato che nelle uova dei Mammiferi fu attribuito, per opera principalmente del Van der Stricht, alla *couche vitèllogène*. Anch'esso è da considerare come corpo lipogeno. Or quale importanza avrebbe il condrioma rispetto a questo processo lipogenico? Opera esso attivamente, ovvero si modifica passivamente la sua disposizione, in relazione alla quantità di materiale lipoido che infarcisce l'elemento? Io credo che avvenga l'una cosa e l'altra. Secondo me il condrioma non a caso stringe rapporti col materiale lipogeno e lipoido. Abbiamo visto ch'esso abbraccia con una parte del reticolo la centrosfera e può darsi che nella parziale impregnazione col metodo Golgi questa sola parte del reticolo venga messa in evidenza, dando l'illusione del piccolo reticolo endocellulare. Abbiamo visto ancora che ogni globulo lipogeno vien circondato da una membranella a contorno continuo o granulare di natura indiscutibilmente mitocondriale. (v. fig. 9 Tav. I) Che cosa cede al materiale lipogeno il condrioma, dati questi suoi intimi rapporti con esso? Si trasforma anch'esso forse in materiale lipoido? Son due domande alle quali non si può facilmente rispondere. Per quanto specialmente nello stato granulare, mitocondriale del condrioma nella cellula adulta ci siano dati per ritenere che i mitocondri gradualmente e direttamente si trasformino in granuli lipoidi (fig. 9 e 16 della tavola) io opino che nel processo più tipico della lipogenesi sotto l'azione del condrioma agente da materiale catalittico, si trasformano in globuli lipoidi i globuli emessi dal nucleo, nello stesso modo ch'io descrissi per la formazione lipoida dell'òvocite dei mammiferi.

In questo misi in evidenza una funzione glandulare a cui partecipa il nucleo, mandando nell'oplasma prodotti globulari, sotto la cui influenza una parte almeno del condrioma si trasformava in deutolecite: con un processo più modesto, ma simile, avverrebbe la formazione del materiale lipoido nella cellula cartilaginea. In questa emanano dal nucleo attraverso la centrosfera, che forse ulteriormente ne trasforma la natura chimica, dei granuli paragonabili ai granuli di zimogene, così bene studiati nelle cellule glandulari. Sotto l'azione di questi granuli i mitocondri, che si mettono con essi in intimo rapporto, si trasformano in materiale lipoido o meglio entrambe le formazioni si trasformano in materiale lipoido. Nella fig. 9 si vedono tutti gli stadi di passaggio dei granuli estranucleari colorati come la trofocromatina del nucleò ai granuli colorati come i mitocondri e infine a quelli colorati come i lipoidi. È perciò che nell'ultima fase della vita del condroblasta, cellule della zona calcificata e di ossificazione, il condrioma, perdendo la disposizione, reticolare abituale, si riduce in granuli, che come si è visto direttamente si trasformano in materiale lipoido. Con molta probabilità questa trasformazione in globuli lipoidi, sotto l'impulso dei globuli lipogeni, interessa solo una parte del condrioma, quella ch'io chiamai trofocondrioma e che suole presentare forma mitocondriale. L'altra parte,

l'idio condrioma, la cui disposizione più frequente sarebbe la reticolare, conserverebbe più propriamente il significato d'una parte meno alterabile del citoplasma, quella parte che, pel suo comportamento durante la citodieresi, assume, dietro gli studî di Meves, di Giglio-Tos e Granata e miei, il significato d'un secondo nucleo cellulare plasmatico, con proprietà alquanto diverse da quelle possedute dal vero nucleo. Come si rileva, i mitocondri assumerebbero anche qui in parte il significato di *elettosomi*, come, con fortunata denominazione, li ha chiamati Regaud, studiandone la loro trasformazione in diverse sostanze parablastiche, agendo essi nella fatti specie da corpi lipogenici. Per ragioni prevalentemente meccaniche la formazione del materiale lipoido nella cellula cartilaginea porta come conseguenza lo spostamento eccentrico del nucleo (fig. 12 e 14) e anche, se il materiale medesimo è prodotto in grande abbondanza, all'accollamento parietale di esso, non altrimenti di ciò che avviene durante la formazione dell'adipe negli elementi del connettivo adiposo. Sotto la pressione dei globuli e delle sfere lipoidi il reticolo mitocondriale presenta le sue maglie stirate e perciò stesso allargate e nella parte perinucleare queste maglie vengono schiacciate ed accollate contro il nucleo, formando così un cercine perinucleare (vedi figg. 13 e 14). Alla stessa guisa, e probabilmente per la stessa ragione, nelle cellule nervose le neurofibrille, pressate contro il nucleo dai corpi di Nissl e dai materiali lipoidi, vi formano quel cercine che si mette tanto bene in rilievo col metodo di Donaggio. Quando la tensione di questo materiale lipoido è spinta al più alto grado, può avvenire che le maglie di questo reticolo mitocondriale si risolvano in mitocondri, come può notarsi colla massima evidenza nelle figg. 13, 14, 15 della tavola. Nella fig. 16 vediamo che, forse in conseguenza di ciò, il reticolo è scomparso e il condrioma si presenta sotto l'aspetto di granuli mitocondriali.

Il Pensa ha pure tenuto d'occhio la formazione del materiale lipoido nelle cellule cartilaginee, ma le sue osservazioni al riguardo non gli hanno permesso di ricavare una conclusione sicura.

Ecco infatti quello che lui scrive nelle conclusioni. " Alcuni fatti farebbero pensare che gli elementi mitocondriali prendano parte attiva alla elaborazione del materiale lipoido, ma non avendo potuto eliminare alcuni dubbi in proposito non posso ammettere ciò come cosa completamente dimostrata. „

Col metodo Golgi-Veratti col metodo Meves le formazioni mitocondriali e le lipoidi presentano una serie così indefinita di *nuances* che non si può distinguere ciò che è condrioma da ciò che è esclusivamente grasso. Secondo me il metodo più indicato per rilevare tale distinzione è il metodo genuino del Benda, che io esclusivamente ho seguito nelle mie ricerche sul condrioma delle cellule cartilaginee. Con questo metodo si ha intanto una conservazione perfetta del materiale lipoido, per azione dell'acido osmico contenuto nel liquido fissatore, e in seguito alla colorazione ben si può distinguere il materiale colorato in giallo brunastro dalle formazioni condriomatiche colorate in violetto e da quelle nucleari colorate in rosso mattone. Il Pensa evidentemente non se ne è servito, e infatti nessuna delle sue figure è ricavata da preparati con quel metodo, e quindi non ha potuto trar profitto dalle sue importantissime osservazioni, restando incerto nel valutare ciò che era condrioma da ciò che era lipoido. Se a ciò si aggiunge la parte che il nucleo e la centrosfera prendono pure nella formazione dei lipoidi, la relazione di intimi rapporti che questi stringono col condrioma, si potrà giustificare l'esposizione delle mie osservazioni, anche dopo quelle da lui pubblicate. Per quanto si riferisce alla centrosfera e alla azione ch'essa prende nella forma-

zione del materiale lipoide, essa ha certo analogia di comportamento coi corpi paranucleari studiati dallo Arnold, al quale dunque questa partecipazione era già nota. Ma l'Arnold a sua volta non tenne nel dovuto conto quella del condrioma.

Rapporti diretti stringe il condrioma col nucleo, indipendentemente da quelli che esso stringe indirettamente con esso per mezzo del corpo paranucleare. Esaminando tutte le figure della tavola e quelle del testo del presente lavoro, nonché quelle dei miei lavori precedenti, si rivela subito un particolare che pel contrasto del colore è molto più rimarchevole nelle figure tratte da preparati col metodo Benda genuino: il nucleo è quasi sempre circondato da una membrana di natura mitocondriale. È questa la vera membrana accessoria, che, accollandosi alla prima, riveste ulteriormente il nucleo? In ogni caso la sua colorazione violetta nonché il suo comportamento ne rivelano l'origine condriomatica.

Nessun Autore che si è occupato del condrioma e dei suoi caratteri ha fatto cenno, ch'io sappia a questo notevole particolare. Io credo che tale membrana costituisca una membrana secondaria la quale risulterebbe dall'insieme trabecolare delle maglie tagenziali alla vera membrana nucleare. Per il principio delle più piccole superficie, noi sappiamo che la sezione ottica dei fili di una struttura reticolare o alveolare, si presenta a contorno continuo ed uniforme in modo da costituire una vera membrana. In tal modo nei più recenti trattati di citologia, vedi ad es. quello del Prenant, si spiega teoricamente la formazione della membrana cellulare, e in generale di tutte le membrane. Epperò tanto più l'apparato reticolare è vistoso e tanto più visibile sarà la membrana nucleare di origine condriomatica. Quando l'apparato reticolare diviene moniliforme, tale diviene appunto la struttura della membrana condriomatica accollata al nucleo. Di solito la membrana si presenta a contorno continuo, ma talora è dato osservare in essa dei notevoli ingrossamenti bottonciniformi. In questi ingrossamenti noi dovremmo riconoscere i punti nodali o quanto meno le sezioni delle trabecole tagliate in direzione perpendicolare alla sezione. Questo particolare si osserva molto bene nelle cellule cartilaginee dei Cefalopodi. Tuttavia anche dove il condrioma è disgregato in mitocondri, la membrana nucleare continua a persistere per qualche tempo, però finisce con l'assumere dapprima l'aspetto moniliforme, quindi il granulare per poi più o meno completamente scomparire. Nelle figure cariocinetiche alle quali sono parallele, come ho descritto in altro lavoro, le figure condriocinetiche, questa membrana non si rende più visibile, particolare che dà un'altra considerevole prova della sua natura condriomatica.

IV.

Conclusioni.

1. Il condrioma durante la graduale trasformazione della cellula cartilaginea in cellula ossificata non conserva una forma costante, bensì attraversa diversi e notevoli aspetti.

2. Nella cellula cartilaginea membranosa esso si dispone in mitocondri, che tendono ad accumularsi in condriosomi, accennando anche a collabire in reticolo.

3. Nella cellula cartilaginea della regione seriata si passa gradatamente dalla disposizione condriosomica alla reticolare. Il reticolo è caratteristico per la sottigliezza e fittezza delle sue maglie; esso va disponendosi sempre più perifericamente nell'elemento.

4. Nelle cellule cartilaginee della regione calcificata il reticolo mitocondriale già lasso

e periferico comincia a disgregarsi nel suo interno, a questo stadio esiste un corpo paranucleare di notevole dimensione.

5. Nelle cellule globose o del punto di ossificazione il condrioma si presenta sotto forma di condrioconti, condriomiti, mitocondri in quantità tanto più piccola quanto più avanzato è il processo di ossificazione.

6. La fase di reticolo mitocondriale è caratteristica, per quanto essa si presenti in diversi stadii dell'evoluzione del condroblasto e con caratteri peculiari diversi. Nessuno ha descritto col metodo Benda tale reticolo nella sua interezza e nei suoi dettagli.

7. Esiste una membrana nucleare di natura condriomatica, che bisogna interpretare come la sezione ottica del reticolo mitocondriale in contatto col nucleo.

8. Il materiale lipoido riceve il suo primo impulso dai granuli lipogeni contenuti in un primo momento dal nucleo (granuli di trofo-cromatina) allo stadio di cellula seriata e calcificata, poi nel corpo paranucleare, quindi nel citoplasma. Il condrioma stringe notevoli rapporti coi detti globuli, circondandoli sotto forma di membrana ovvero di granuli mitocondriali. Allo stato di cellule globose i granuli di cui si tratta sono in parte trasformati in globuli di grasso, che talora son circondati ancora da formazioni condriomatiche. In questi ultimi stadi sembra che i mitocondri si trasformino direttamente in lipoidi.

9. Nella cellula cartilaginea adulta i globuli lipoidi molto grossi e numerosi entrano in intimo rapporto col condrioma allo stato di reticolo, in quanto sono contenuti nelle sue maglie, provocandone un graduale stiramento sino a farlo risolvere in mitocondri. Anche il nucleo, in seguito alla pressione del materiale lipoido, diviene eccentrico e, nei casi estremi, parietale.

Per azione della medesima pressione si forma un cerchio perinucleare condriomatico, costituito dalle trabecole del reticolo compreso fra i globuli lipoidi e il nucleo stesso.

10. È verosimile che solo una porzione del condrioma, il trofo-condrioma, prenda parte attiva nel processo di elaborazione del materiale lipoido.

11. Da ciò che si è venuto esponendo risulta chiaramente che la cellula cartilaginea non si comporta come elemento inerte bensì, come opinava anche il Pensa, come elemento attivo capace di subire nel suo interno modificazioni a cui i suoi organiti essenziali nucleo, citoplasma centrosfera e condrioma contribuiscono direttamente.

Al Prof. A. Russo, nel cui Laboratorio e sotto il cui cortese interessamento il presente lavoro venne preparato, porgo i miei più vivi ringraziamenti.

Catania, Gennaio 1917.

BIBLIOGRAFIA

1. *Arnold, J.* — Plasmosomen, Granula, mitochondrien, Chondriomiten und netzfiguren Anat. Anzeig, Bd XXX S. 640 Jena 1907.
2. Supravitale Färfung mitochondrien und ähnlicher Granula in den knorpelzellen Anat. Anzeig. Bd. XXXII. S. 361, Jena 1908.
3. Zur Morphologie des Knorpelglykogens und zur Struktur der knorpelzellen, Virchows Archiv. f. Path. Anat. und Physiol. Bd. CXCIV S. 266. Berlin 1908.
4. Das Plasma der somatischen zellen im Lichte der Plasmosomen Granulalehre und der mitochondrien forschung. Anat. Anzeig. Bd. XLIII S. 433. Jena 1913.
5. *Balloutz, E.* — Über das Epithel der membrana elastica posterior des Auges, seine kerne und eine merkwürdige Struktur seiner grossen zellsphären usw. Archiv. f. mikr. Anat. Bd. LVI S. 230. Bonn 1900.
6. Eine Bemerkung zu dem von Golgi und seinen Schülern beschriebenen « Apparato reticolare interno » der Ganglien und Drusenzellen. Anat. Anzeig Bd. XVIII, S. 177 1900.
7. *Barinetti, C.* — L' apparato reticolare interno e la centrosfera nelle cellule di alcuni tessuti. Boll. Soc. Med. Chir. di Pavia p. 289, 1912.
8. *Benda C.* — Weitere Mitteilungen über die Mitochondria. Verhandl. d. Physiol. Gesell. zu Berlin. Jahrg. 1889.
9. *Bergen, J.* — Zur kenntnis gewisser Struktur bilder (Netz apparat, Saftkanälchen, Trophospongien) im Protoplasma verschiedener zellarten. Arch. f. Mikr. Anat. Bd. LXIV S. 498 Bonn 1904.
10. *Comes, S.* — Sulla natura mitocondriale dello « apparato reticolare » delle cellule cartilaginee. Boll. Accad. Gioenia di Scienze Naturali Fasc. 6, Serie II, Catania, 1909.
11. La partecipazione dei mitocondri alla formazione della membrana divisoria primitiva delle cellule. Atti Accad. Gioenia di Scienze Naturali Ser. V, Vol. III, 1910, Catania.
12. — Apparato reticolare o condrioma? Condriocinesi o ditocinesi? Anat. Anzeig. Bd. XLIII p. 422 Jena 1913.
- 12 bis. — Azione dell' atropina e della pilocarpina nell' ovocite della gatta. Atti Acc. Gioenia Catania Ser. V. Vol. I, 1907.
13. *Deineka* — Dar Netzapparat von Golgi in einigen Epithel und Bindegewebezellen während der Ruhe und während der Teilung derselben — Anat. Anzeig. 1912 Bd. XLII Jena.
14. *Dubreuil, C.* — Le mitochondries des cellules adipeuses. Comptes rendus Soc. Biol. T. LXX p. 48 Paris 1911.
15. — Le chondriome des cellules cartilagineuses chez les mammifères et chez l'homme. Comptes rendus Soc. Biol. T. LXX p. 791 Paris 1911.
16. — Le chondriome et le dispositif de l'activité sécrétoire aus differents stades du développement des éléments cellulaires de la lignée connective, descendante du lymphocyte Arch. d'Anat. microsc. T. XV p. 53, Paris 1913.
17. *Duesberg, J.* — Plastosoma, « Apparato reticolare interno », und Cromidial apparat. Ergebn. der. Anat. Entw. Bd. 20, 1912.
18. — Plastosomes, Apparato reticolare interno et Cromidialapparat Réponse aux critiques d'Arnold et Pensa, et de Perroncito Anat. Anzeig. Bd. XLIV 1912 Jena,
19. — Flemming, N. Zellsubstanz, kern und Zellteilung. Leipzig 1882.
20. *Giglio-Tos, E.* e *Granata, L.* — I mitocondri nelle cellule seminali maschili di *Pamphagus marmoratus* Biologica Vol, II 1908. Torino.
21. *Hcidenhain, M.* — Über die Centralkapseln und Pseudochromosmen in den Samenzellen von *Proteus* usw. Anat. Anz. Bd XVIII S. 513, Jena 1900.
22. *Hirschel, J.* — Über Plasmastrukturen (Golgi'scher Apparat, mithochondrien) in den Tunicaten, Spongien u. Protozoenzellen Anat. Anzeig. XLVII Bd 1914, Jena.
23. *Hoven, H.* — Contribution à l'étude du fonctionnement des cellules glandulaires. Du rôle du chondriome dans la sécrétion. Archi. f. Zellforsch. Bd. VIII S. 555 Leipzig 1912.
24. — Du rôle du chondriome dans l'elaboration des grains de sécrétion dans la glande mammaire. An. Anz. Bd. XXXIX S. 321 Jena 1911.
25. *Küll, H.* — Eine Modification der Altmann'schen methode zum Färfben der Chondriosomen. Anat. Anzeig. Bd. 45, 1913 Jena.

26. *Lagnesse, E.* — Les Chondriocontes de la cellule cartilagineuse et la structure du protoplasme. *Bibl. Anat.* T. XXI p. 296. Paris 1911.
27. *Levi, G.* — Sulla presunta partecipazione dei mitocondri alla differenziazione cellulare. *Arch. ital. di Anat. e di embriol.* Vol. X pag. 168 Firenze 1911.
28. — I condriosomi nelle cellule secernenti, con 12 fig. *Anat. Anz.* Bd. 42, 1911.
29. *Loewenthal N.* — Zur Kenntnis der Knorpelzellen. *An. Anz.* Bd. XXX S. 19, Jena 1907.
- 29 bis. *Luna E.* — Ricerche istologiche sugli epiteli. 2^a Nota. L'apparato mitocondriale nelle cellule dell'epitelio pigmentato della retina. *Arch. di Anat. pat. e scienze affini.* Anno IV. 1911.
30. *Marcora F.* — Sui rapporti tra apparato reticolare interno e corpi di Nissl. negli elementi nervosi. *Boll. Soc. Med. chir. Pavia* 1908.
31. *Meves, F.* — Die Chondriokonten in Ihrem Verhältnis zur Filarmasse Flemmings. *Anat. Anzeig* Bd. XXX S. 561. Jena 1907.
32. — Die Condriosomen als Träger erblicher Anlagen, cytologische Studien am Hühnerembryo. *Arch. f. Mikr. Anat. und Entwickl.* Bd. LXXII. S. 816. Bonn 1908.
33. — Die Zellen des Embryonalen Stützgewebes usw. *Arch. f. Mikr. Anat. u. Entwickl.* Bd. LXXV S. 149. Bonn 1910.
34. — Zur Einigung zwischen Faden und Granulalehre des Protoplasma usw. *Arch. f. Mik. Anat. u. Entwickl.* Bd. LXXV S. 642. Bonn 1910.
35. — Die Spermatozytenteilungen bei der Königbiene nebst Bemerkungen über Chromatinreduktion. *Arch. f. Mikr. Anat. u. Entwickl.* Bd. LXX S. 414 Bonn. 1907.
36. — Was sind die Plastosomen? Antwort auf. die Schrifts gleichen Titels von G. Retzius *Arch. f. Mikr. Anat.* Bd. 85, 1914.
37. *Monti, R.* — I condriosomi e gli apparati di Golgi nelle cellule nervose. *Ricerche comparative.* *Archiv. ital. di Anat. e di Embriol.* Vol. XIV, Firenze 1915.
38. *Nussbaum E.* — Über den sogenannten inneren Golgischen Netzapparat und sein Verhältniss zu den Mitochondrien, Cromidien und ander u. Zellstrukturen im Tierreich. *Arch. f. Zellforschung* Bd. X. H. 3. 1913.
39. *Pensa, A.* — Osservazione sulla struttura delle cellule cartilaginee *Boll. Soc. Med. Chir. Pavia* 1901.
40. — La struttura della cellula cartilaginea *Arch. f. Zellforsch.* XI Bd. 4 H. 1913, Leipzig.
41. — A propos d'une publication de Duesberg « Plastosoma, Apparato reticolare interno und Cromidialapparat. *Anat. Anz.* Bd. 43.
42. *Perroncito, A.* — Contributo allo studio della biologia cellulare. Mitocondri, cromidi, e apparato reticolare interno nelle cellule spermatiche. *Memorie della reale Accademia dei Lincei.* Anno CCCVII 1910.
43. — Mitochondres et Appareil reticulaire. À propos d'une publication de Duesberg. *Anat. Anzeig.* Bd. 44, 1913.
44. — A proposito di un articolo di S. Comes sulla dittocinesi *Anat. Anzeig.* Bd. 44. 1913.
45. *Prenant, A.* — Les mitochondries et l'érgastoplasme *Journal de l'Anat. et de la Physiol.* Année XLVI p. 217 Paris 1910.
46. *Regaud, C.* — Participation du chondriome à la formation des grains de ségrégation dans les cellule. des tubes contournés du réin chez les ophidiens et les Amphibiens — *C. r. de la Soc. de Biol.* T. 66, 1909.
47. *Renaud, J.* — Les grains et les vésicules de ségrégation intraprotoplasmiques des cellules du cartilage hyalin. *Comp. rend. Assoc. des. Anatomistes VI réunion* p. 67 1904.
48. — Mitochondries des cellules globuleuses du cartilage hylin des mammifères. *Compt. Rend. de l'Acad. d. Sciences* Vol. CLI 1911.
49. — et *Dubreuil, C.* — Note sur la préossification dans la croûte perichondrale et la lignè d'ossification du cartilage. *Compt. Rend. Assoc. Anat.* X réunion p. 55 Paris 1908.
50. *Retterer, Ed.* — Evolution du cartilage transitoire. *Journ. de l'Anat. et de la Physiol.* XXXVI année, p. 467, Paris 1900.
51. — De la structur réticulée de la cellule cartilagineuse. *Compt. Rend. Soc. biol.* LIX année T. II, p, 782, Paris 1907.
52. *Russo, A.* — Sull' origine dei mitocondri e sulla formazione del deutoplasma nell' oocite di alcuni Mammiferi. *Boll. R. Accad. dei Lincei Roma* 1907.
53. — Sull' origine e sulla funzione dell' apparato mitocondriale nelle cellule sessuali dei mammiferi. *Boll. Accad. Gioenia Catania* 1908.
54. *Samisonow, N.* — Über di Beziehungen der Filarmasse Flemmings zu den Fäden und körnern Altmanns nach Beobachtungen an Knorpel, Bindegewebe und Epidermisszellen. *Archif. f. Mikr. Anat. und Entwickl.* Bd. LXXV, S. 635 Bonn 1910.

55. *Schaxl, I.* — Plasmatrakturen, Chondriosomen und Chromidien. An. Anzeig. 39 Bd. 1910. Jena.
56. *Smirnow, A. E.* — Über die Mitochondrien und den Golgischen Bildungen analoge Strukturen in einigen Zellen von *Hyacinthus orientalis*. Anat. Hefte Bd. XXXII S. 143. Wiesbaden 1907.
57. *Terni, T.* — I condriosomi nella cellula nervosa. Rivista sintetica-critica — Rivista di patol. nervosa e mentale. Anno XIX. 1914.
58. *Torraca, C.* — Alcune osservazioni sui condriosomi delle cellule cartilaginee nella coda del Triton rigenerante Anat. Anzeig. Bd. 45, 1913.
59. *Van der Stricht, O.* — La structure de l'oeuf. des Mammifères. Archiv. de Biol. T. 21, 1904.
60. — La structure de l'oeuf des mammifères 3. Partie. L'ovocyte à la fin du stade d'accroissement, au stade de la maturation, au stade de la fécondation et au début de la segmentation — Mémoires publiées par la Classe des sciences de l'Acad. du Belgique S. 2, T. 3.
61. *Weigl, R.* — Vergleichende zytologische Untersuchungen über den Golgi-kopsch-schen Apparat und dessen verhältnis zu anderen Strukturen in den somatischen zellen u. Geschlechtszellen verschiedener Tiere. Bull. de l'Acad. des Sciences Cracovia 1912.
-

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE DELLA TAVOLA

Fissazione e colorazione secondo il metodo Benda modificato.

Tutte le figure, comprese quelle del testo, furono ottenute con Koristcka apocrom. imm. om. $\frac{1}{15}$ tubo evaginato 160, oc. comp. 4; le fig. 1, 2, 3, del testo e la fig. 5 della tavola, con l'oc. comp. 8.

Furono disegnate con la camera lucida koritska con proiezione sul tavolo da lavoro.

Fig. 1. — Gruppo di cellule della cartilagine costale di topo neonato.

- » **2.** — Cellula appartenente alla zona più superficiale della cartilagine costale dello stesso materiale.
- » **3.** — Gruppo di cellule della zona cartilaginea seriata, materiale come sopra.
- » **4.** — Gruppo di cellule della stessa zona in un piano più profondo, materiale come sopra.
- » **5.** — Una cellula della stessa zona a più forte ingrandimento.
- » **6.** — Gruppo di cellule di cartilagine vertebrale presso la zona calcificata (embrione al termine di coniglio).
- » **7.** — Cellula cartilaginea della regione prossima alla ossificazione (cart. cost. topo neonato).
- » **8.** — Cellule della zona seriata all'inizio della calcificazione (materiale come sopra).
- » **9.** — Osteoblasti tratti dalla zona di ossificazione contigua a quella di calcificazione (materiale come sopra).
- » **10, 11, 12, 13, 14.** — Cellule di cartilagine costale di topo adulto.
- » **15, 16.** — Cellule di cartilagine costale di cavia adulta.

Fig. 1.

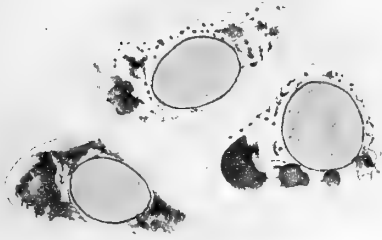


Fig. 2.



Fig. 3.



Fig. 4.



Fig. 6.

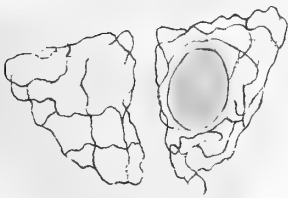


Fig. 5.



Fig. 7.

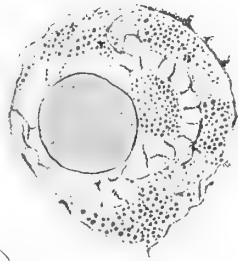


Fig. 10.



Fig. 8.

Fig. 11.

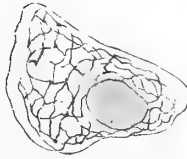


Fig. 9.



Fig. 12.

Fig. 13.

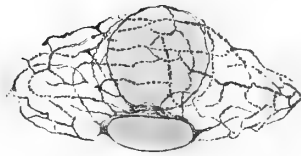


Fig. 16.

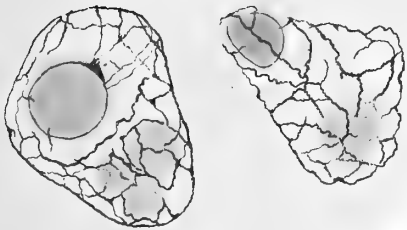


Fig. 14.

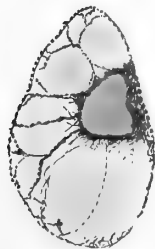
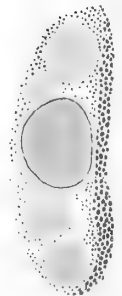
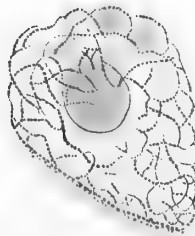


Fig. 15.





Sull'estinzione atmosferica al Monte Etna

Nota di E. PACI

Nel Giugno del 1916 il mio Direttore, Prof. A. Riccò, mi proponeva un programma di osservazioni dirette alla determinazione astronomica della differenza di longitudine tra Catania e l'Etna col metodo degli azimut reciproci, ed allo studio dell'assorbimento atmosferico nell'Osservatorio Etneo (altitudine m. 2942).

Per la prima osservazione avevo a disposizione un cannocchiale universale di Starke, appartenente al Gabinetto geodetico della R. Università di Palermo, cortesemente prestato dal Prof. C. Mineo, e per la seconda operazione un cannocchiale portatile di Browning con montatura altazimutale, di apertura cm. 11 e di distanza focale cm. 80, mancante però dei cerchi di puntata, appartenente al R. Osservatorio di Catania.

Per ragioni della guerra il Comando militare di Catania ebbe ad opporre delle difficoltà a dare il permesso per gli scambi delle segnalazioni ottiche tra gli Osservatori di Catania e dell'Etna, e si dovette aspettare circa due mesi per ottenere tale permesso dal Comando del Corpo d'Armata di Palermo; circostanza che postergò la mia ascensione sull'Etna fino agli ultimi di Agosto 1916, epoca in cui, come è noto, il cielo dell'Etna comincia a diventare incostante.

Però frattanto io mi occupai dello studio dell'Universale, ed il Sig. T. Fattorosi, addetto al Gabinetto geodinamico dell'Osservatorio di Catania, fornì, secondo i suggerimenti del Direttore Riccò, il cannocchiale di Browning di archi graduati per la lettura degli azimut e delle altezze, che dovevano dare le puntate alle stelle, e di un manicotto per attaccare il fotometro a cuneo di Töpfer al pezzo oculare.

Al Sig. Fattorosi vadano i miei ringraziamenti.

Qui riferisco sulle mie osservazioni fotometriche sull'assorbimento atmosferico all'Osservatorio Etneo, presso la cima del Vulcano, ed a Nicolosi (altitudine m. 698), ridente paesello posto alla falda meridionale dell'Etna, avendone già eseguito una prima serie nell'Osservatorio di Catania col medesimo fotometro attaccato al Circolo Meridiano di Ertel (1); e dò relazione dei risultati ottenuti in confronto con quelli dati per Potsdam e M. Säntis da Müller in una tabella riportata in *Photometrie der Gestirne* di questo autore (Leipzig, W. Engelmann 1897, p. 515).

L'interesse, per non dire l'importanza, di queste osservazioni è di valutare, fra certi limiti, i mutamenti che hanno luogo nelle differenze dell'estinzione corrispondenti a differenze di distanze zenitali delle stelle che si adoperano per lo studio delle variabili da stazioni diverse di osservazione.

(1) Cfr. « Studio sull'estinzione atmosferica a Catania con osservazioni fotometriche al Cerchio Meridiano » (Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani, Vol. IV, Serie 2^a, anno 1915).

Giunsi nell'Osservatorio Etneo nel pomeriggio del 28 Agosto, e la sera stessa collocai lo strumento nella spiazzata ad Est del fabbricato dell'Osservatorio su un treppiedi sufficientemente stabile, così che venne riparato dalle correnti di Est ed in certa misura anche da quelle di West, mentre le correnti ascendenti non potevano produrre nel cannocchiale delle oscillazioni molto nocive alle misure di estinzioni.

Feci le prime prove su stelle circumpolari prestabilite ed aggruppate in coppie per modo che le due componenti di ciascuna coppia avessero declinazioni pressocchè eguali ed ascensioni rette distanti per circa 12^h . Un simile programma eseguii nelle citate mie osservazioni all'Osservatorio di Catania; esso per ogni coppia dà un valore della differenza dell'assorbimento atmosferico relativo alla differenza delle altezze delle due stelle componenti.

Senonchè incontrai tali difficoltà pratiche nel puntare e nell'individuare le stelle con uno strumento, direi, di ripiego, che, per evitare incertezze ed equivoci, feci la risoluzione di cambiare programma, scegliendo invece configurazioni stellari di immediato riconoscimento ad occhio nudo.

Il nuovo programma fu così costituito da due gruppi di stelle, dei quali il primo comprendeva la δ Ursae minoris e cinque stelle ad essa intorno, le cui declinazioni sono prossime a $+72^\circ$, ed il secondo comprendeva la η Ursae minoris e due stelle ad essa vicine, le cui declinazioni sono prossime a $+76^\circ$. Queste nove stelle di prima sera erano appunto in quell'epoca presso alla culminazione superiore.

Generalmente iniziavo le misure di una serie una mezz'ora dopo il crepuscolo della sera e quelle della serie successiva un'ora innanzi il crepuscolo del mattino. Poichè lo strumento mancava di apparato motore, orientai il fotometro in modo che il cuneo avesse la sua corsa nel senso normale al moto apparente delle stelle, così che le diverse estinzioni della luce di una medesima stella erano fatte nella medesima sezione trasversale del cuneo, e precisamente lungo lo strato compreso tra le due laminette di puntata parallele tra loro e perpendicolari al lato del cuneo.

Da un accurato esame di questo fotometro, eseguito a Padova dal Dott. G. Silva (1) e dalle su citate osservazioni da me fatte a Catania col medesimo orientato nello stesso modo, fu accertato che il cuneo, lungo una qualunque sezione trasversale, ha spessore quasi costante ed identica omogeneità di tinta, cosichè, astrazione fatta dagli errori di osservazione, esso offre una stessa lettura nell'estinzione di una stella di grandezza costante, sia che questa estinzione avvenga sull'asse longitudinale del cuneo, cioè a distanze eguali dai bordi, sia che essa avvenga fuori. Quindi adoperai per la trasformazione delle grandezze millimetriche in grandezze stellari la costante 0,1622, determinata a suo tempo dal Prof. A. Bemporad.

Sopra ogni stella eseguivo da sei a dieci estinzioni nel modo seguente:

Mantenevo l'immagine della stella, come ho detto, sempre nello strato compreso fra le due laminette del fotometro per mezzo della vite dei piccoli movimenti in declinazione, per modo che l'asse ottico incideva sensibilmente sempre in un punto della medesima sezione trasversale del cuneo, e, spostando reiterate volte su e giù il cuneo, mi assicu-

(1) Cfr. G. SILVA « Esame del cuneo usato nelle osservazioni fotometriche all'Osservatorio di Catania » (Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani, Serie 2^a, Vol. II, pp. 44-56).

ravo ogni volta che aveva luogo effettivamente la completa estinzione della luce, prima di premere il tasto registratore del fotometro.

Le osservazioni all'Osservatorio Etneo durarono dalla sera del 29 Agosto al mattino del 5 settembre, ed il cielo fu quasi sempre sereno, trasparente e senza Luna, ed il Vulcano non mandò emanazioni sensibilmente visibili; solo il vento più o meno freddo e forte disturbò quasi sempre l'operatore, come sa chi è stato all'aperto sull'Etna, anche nelle notti d'està.

Per la fortunata circostanza della serenità del cielo ho creduto opportuno di associare nella riduzione delle osservazioni ogni misura conclusa su una medesima stella con ciascuna delle adiacenti, precedente e successiva, allo scopo di trarre il maggior numero di valori della corrispondente differenza d'assorbimento.

Ho dedotto così 73 differenze dell'assorbimento, e poichè le stelle del primo gruppo e quelle del secondo gruppo furono osservate rispettivamente ad altezze prossimamente eguali, le due medie aritmetiche di tali differenze ho assunto come valori conclusi dalle osservazioni nell'Osservatorio Etneo.

Quanto alle osservazioni a Nicolosi, debbo dire che, per ragioni diverse non potei iniziarle prima del 31 ottobre successivo e dopo il 1° novembre il cielo fu generalmente coperto. Quindi ho potuto utilizzare le osservazioni fatte nella notte dal 31 ottobre al 1° novembre, nella quale il cielo fu per fortuna sereno e trasparentissimo. Per queste adoperai lo stesso metodo e lo stesso strumento, che collocai nella terrazza della casa di abitazione del Sig. A. Barbagallo, funzionante custode dell'Osservatorio Etneo. Il loro programma è costituito di β e 11 Cephei e di altre otto stelle ad esse vicine, le cui declinazioni sono circa $+70^\circ$ e le cui ascensioni rette sono circa $21^{\text{h}}\frac{1}{2}$. Ho dedotto così solamente 10 differenze dell'assorbimento, la cui media ho assunto come valore concluso dalle osservazioni a Nicolosi.

È da avvertire che nessuna stella dei due programmi delle presenti osservazioni fu trovata di grandezza variabile nei diversi cataloghi.

Per solo titolo di riscontro ho paragonata ogni singola differenza d'assorbimento osservata, così all'Osservatorio Etneo come a Nicolosi, con quelle tratte dalla tabella di Müller in corrispondenza alle stesse altezze sull'orizzonte ed all'altitudine di Potsdam (m. 100) e di Monte Sântis (m. 2500), benchè le presenti non abbiano con quelle tutti i caratteri di omogeneità.

Nel quadro seguente sono riportati i due elenchi delle stelle osservate all'Osservatorio Etneo e a Nicolosi. Esso contiene nelle successive colonne:

- 1^a) il numero d'ordine della stella nelle osservazioni,
- 2^a) il numero d'ordine corrispondente nella *Bonner Durchmusterung*,
- 3^a), 4^a), 5^a) la grandezza, l'ascensione retta e la declinazione assegnate nel medesimo catalogo,
- 8^a) il numero d'ordine corrispondente nella *Photometrische Durchmusterung*,
- 7^a), 8^a), 9^a) la grandezza, l'ascensione retta e la declinazione assegnate nel medesimo catalogo.

N.	BD	Gr.	α	δ	PD	Gr.	α	δ
----	----	-----	----------	----------	----	-----	----------	----------

OSSERVATORIO ETNEO

1	679	m	h	m	s	+	72° 19'.9	8193	m	h	m	s	72° 11'.4
		2.8	15	21	1				3.34	15	20	53	
2	678	5.5	15	17	14		72 10.9	8162	5.10	15	17	10	72 11.2
3	722	7.7	15	17	13		71 44.5						
4	730	8.0	15	26	10		71 49.1						
5	718	7.5	15	13	22		71 51.9	8134	8.24	15	13	24	71 42.9
6	677	8.0	15	15	7		72 26.5						
7	596	5.3	16	21	49		76 4.9	8657	5.08	16	20	27	75 59.0
8	594	6.0	16	15	2		76 15.8	8612	5.66	16	13	40	76 7.8
9	600	7.2	16	24	28		76 28.5	8688	7.27	16	22	59	76 22.5

NICOLOSI

1	1193	5.0	21	39	48	70 38.1	12644	4.68	21	40	27	70 51.0
2	1190	7.1	21	37	8	70 39.2	12610	7.36	21	37	46	70 51.6
3	1191	8.0	21	37	39	70 46.6						
4	1192	7.0	21	38	21	70 7.6	12625	7.28	21	39	2	70 19.8
5	1190	8.0	21	38	38	69 51.9						
6	1189	7.7	21	36	45	69 48.4						
7	1173	3.0	21	26	48	69 55.7	12476	3.48	21	27	22	70 7.3
8	1182	7.7	21	28	54	70 21.7						
9	1183	7.2	21	29	6	70 9.7	12508	7.20	21	29	42	70 22.9
18	1169	7.4	21	23	30	69 58.8	12427	7.40	21	24	2	70 2.6

Nel quadro seguente sono riportati i dati delle osservazioni. Esso contiene nelle colonne successive per ciascuna data :

- 1°) Il numero d'ordine della stella osservata,
- 2°) il tempo siderale ϑ letto su un cronometro di Nardin regolato a tempo sidereo,
- 3°) la distanza zenitale z , corrispondente all'istante ϑ , calcolata per mezzo delle coordinate equatoriali della stella,
- 4°) la grandezza misurata della stella in mm. del cuneo.

*	θ	z	Gr.	*	θ	z	Gr.
1916. Osservatorio Etno. Agosto 29.				1916. Osservatorio Etno. Agosto 31.			
7	19 ^h 38 ^m	44°.1	33.60	1	18 ^h 13 ^m	40°.5	21.64
8	19 35	44.6	37.03	2	18 16	41.2	37.70
9	19 41	44.1	42.54	3	18 21	41.0	46.28
Agosto 30.				4	18 24	40.6	52.64
1	1 45	68.9	24.10	5	18 30	41.7	55.70
2	1 49	69.7	37.60	6	18 33	42.4	59.36
3	1 53	69.7	49.54	7	18 50	41.8	33.50
4	1 59	69.3	55.10	8	18 54	42.5	35.37
5	2 2	70.0	56.08	9	18 59	42.4	41.67
6	2 5	70.0	59.38	Settembre 1.			
7	1 30	63.1	34.62	1	2 52	70.0	23.22
8	1 25	63.2	38.05	2	2 54	70.6	38.21
9	1 35	63.0	44.13	3	2 53	70.7	49.91
Agosto 30.				4	2 58	70.5	54.11
1	18 8	40.2	21.84	5	3 0	70.6	53.10
2	18 12	40.9	34.85	6	3 2	70.6	62.65
3	18 16	40.7	46.65	7	2 45	65.3	35.37
4	18 20	41.0	51.87	8	2 47	65.8	36.12
5	18 23	41.7	54.17	9	2 49	65.0	43.43
6	18 24	41.7	57.53	Settembre 1.			
7	18 50	41.8	32.81	1	18 20	41.0	20.90
8	18 46	42.2	36.23	2	18 24	41.7	37.04
9	18 54	42.2	42.36	3	18 26	41.3	45.84
Agosto 31.				4	18 29	41.0	50.60
1	2 8	69.4	23.13	5	18 32	42.3	54.35
2	2 11	70.1	38.53	6	18 35	42.5	59.35
3	2 14	70.2	49.54	7	18 47	41.6	34.22
4	2 17	70.0	54.73	8	18 51	41.3	34.02
5	2 20	70.3	57.32	9	18 55	42.3	42.21
7	2 31	65.0	34.38	Settembre 2.			
8	2 35	65.2	37.65	2	3 10	71.8	40.98
9	2 38	64.8	43.26	3	3 12	70.7	48.96

*	θ	z	Gr.	*	θ	z	Gr.
1916. Osservatorio Etneo. Settembre 3.				1916. Osservatorio Etneo. Settembre 5.			
1	19 ^h 35 ^m	46 ^o .3	22.84	1	3 ^h 8 ^m	70 ^o .1	23.98
2	19 37	47.2	33.82	2	3 10	71.8	39.06
3	19 40	46.9	46.42	3	3 12	70.7	51.14
4	19 42	46.4	51.00	4	3 14	70.6	53.80
5	19 44	47.7	54.33	5	3 16	70.8	59.42
6	19 46	47.9	57.75	6	3 18	70.6	60.94
7	19 50	44.7	34.53	7	3 21	65.9	37.00
8	19 52	45.5	42.82	8	3 23	65.9	43.20
Settembre 4.				1916. Nicolosi. Ottobre 31.			
1	3 8	70.1	24.98	1	0 30.5	33.5	35.55
2	3 10	70.6	35.54	2	0 36.5	33.6	54.83
3	3 12	70.7	49.70	3	0 38.6	33.8	46.60
4	3 14	70.6	52.36	4	0 39.9	33.2	49.50
5	3 16	70.8	57.94	5	0 42.5	33.0	54.75
6	3 18	70.6	60.58	6	0 46.5	33.6	51.18
7	3 21	65.9	36.83	7	1 13.5	34.0	24.26
8	3 23	65.9	43.08	8	1 15.4	34.4	54.00
9	3 25	65.6	45.32	9	1 13.2	34.2	36.80
Settembre 4.				10	1 22.8	34.1	47.54
1	18 23	41.2	21.90	Ottobre 31.			
2	18 25	41.8	36.73	1	7 25.6	68.8	37.38
3	18 27	41.4	47.72	2	7 28.6	69.0	56.23
4	18 30	41.0	52.94	3	7 31.6	68.9	47.50
5	18 33	42.4	57.42	4	7 35.6	69.7	51.60
6	18 35	42.5	58.03	5	7 37.6	70.0	56.86
7	18 37	41.2	35.44	6	7 39.6	70.1	53.47
8	18 39	41.9	41.42	7	7 41.6	70.5	26.10
9	18 41	41.7	43.77	8	7 47.6	70.1	56.15
				9	7 49.6	70.4	48.20
				10	7 52.6	70.9	50.04

Nel quadro seguente sono riportati, così per l'Osservatorio Etneo come per Nicolosi, i risultati dei calcoli. Esso contiene nelle colonne successive per ciascuna stella:

- 1^o) il numero d'ordine della stella;
- 2^o) e 3^o) le distanze zenitali z_1 e z_2 alle culminazioni superiore e inferiore della stella;
- 4^o) la differenza delle grandezze osservate nelle due culminazioni, espressa in grandezza stellare;
- 5^o) e 6^o) la differenza di grandezza dedotta dalla tabella di Müller per Potsdam e per M. Sántis;
- 7^o) e 8^o) il rapporto C della differenza di estinzione all'Osservatorio Etneo e a Nicolosi alla differenza di estinzione a Potsdam e a M. Sántis.

*	z_1	z_2	Δ Gr. osservata	Δ Gr. Potsdam	Δ Gr. M. Sántis	C =	
						Etna : Potsdam	Etna : M. Sántis
1	40 ^o .2	68 ^o .9	m 0.367	m 0.355	m 0.206	1.03	1.78
	40.2	69.4	0.211	0.370	0.210	0.57	1.00
	40.5	69.4	0.242	0.367	0.209	0.66	1.16
	40.5	70.0	0.256	0.385	0.215	0.66	1.19
	41.0	70.0	0.376	0.380	0.210	0.99	1.79
	46.3	70.1	0.347	0.360	0.202	0.96	1.72
	41.2	70.1	0.500	0.383	0.212	1.31	2.36
	41.2	70.1	0.337	0.383	0.212	0.88	1.59
	Medie		0.329	0.373	0.210	0.88	1.57
	2	40.9	69.7	0.449	0.372	0.208	1.21
40.9		70.1	0.600	0.384	0.213	1.56	2.82
41.2		70.1	0.135	0.383	0.212	0.35	0.64
41.2		70.6	0.083	0.398	0.222	0.21	0.37
41.7		70.6	0.190	0.398	0.222	0.48	0.86
41.7		71.8	0.639	0.444	0.254	1.44	2.52
47.2		71.8	0.279	0.412	0.242	0.68	1.15
41.8		70.6	0.193	0.398	0.222	0.48	0.87
41.8		71.8	0.378	0.444	0.254	0.85	1.49
Medie		0.327	0.404	0.230	0.81	1.44	
3	40.7	69.7	0.469	0.374	0.210	1.25	2.23
	40.7	70.2	0.469	0.389	0.217	1.21	2.16
	41.0	70.2	0.525	0.386	0.214	1.36	2.45
	41.0	70.7	0.589	0.401	0.224	1.47	2.63
	41.3	70.7	0.660	0.401	0.224	1.65	2.95
	41.3	70.7	0.506	0.401	0.224	1.26	2.26
	46.9	70.7	0.532	0.372	0.214	1.43	2.49
	41.4	70.7	0.321	0.401	0.224	0.80	1.43
	41.4	70.7	0.555	0.401	0.224	1.38	2.48
	Medie		0.514	0.392	0.219	1.31	2.35
4	41.0	69.3	0.524	0.359	0.209	1.46	2.51
	41.0	70.0	0.464	0.380	0.210	1.22	2.22
	40.6	70.0	0.339	0.384	0.214	0.88	1.58
	40.6	70.5	0.238	0.399	0.224	0.60	1.06
	41.0	70.5	0.569	0.395	0.220	1.44	2.59
	46.4	70.6	0.221	0.374	0.212	0.59	1.05
	41.0	70.6	0.094	0.398	0.222	0.24	0.42
	41.0	70.6	0.139	0.398	0.222	0.35	0.63
	Medie		0.323	0.386	0.217	0.85	1.49
	5	41.7	70.0	0.310	0.380	0.210	0.82
41.7		70.3	0.511	0.389	0.216	1.31	2.37
41.7		70.3	0.263	0.389	0.216	0.68	1.22
41.7		70.6	0.412	0.398	0.222	1.04	1.86
42.3		70.6	0.203	0.361	0.205	0.56	0.99
47.7		70.8	0.586	0.367	0.209	1.60	2.80
42.4		70.8	0.084	0.400	0.226	0.21	0.37
42.4		70.8	0.324	0.400	0.226	0.81	1.43
Medie		0.337	0.385	0.216	0.88	1.56	
6		41.7	70.0	0.300	0.380	0.210	0.79
	42.4	70.6	0.534	0.394	0.222	1.36	2.41
	42.5	70.6	0.555	0.393	0.222	1.36	2.41
	47.9	70.6	0.459	0.359	0.203	1.28	2.26
	42.5	70.6	0.414	0.393	0.222	1.05	1.86
	42.5	70.6	0.472	0.393	0.222	1.20	2.13
	Medie		0.452	0.385	0.217	1.17	2.08

+	z_1	z_2	Δ Gr. osservata	Δ Gr. Potsdam	Δ Gr. M. Sántis	C =	
						Etna : Potsdam	Etna : M. Sántis
7	44°.1	63°.1	^m 0.165	^m 0.202	^m 0.120	0.82	1.37
	41.8	63.1	0.206	0.212	0.121	1.40	2.45
	41.8	65.0	0.255	0.250	0.140	1.02	1.82
	41.8	65.0	0.127	0.250	0.140	0.51	0.91
	41.8	65.3	0.287	0.256	0.143	1.12	2.01
	41.6	65.2	0.187	0.256	0.143	0.73	2.31
	44.7	65.9	0.324	0.251	0.142	1.29	2.28
	41.2	65.9	0.178	0.268	0.149	0.66	1.19
	41.2	65.9	0.238	0.268	0.149	0.89	1.60
	Medie		0.229	0.246	0.139	0.94	1.66
	8	44.6	63.2	0.165	0.198	0.116	0.83
42.2		63.2	0.295	0.212	0.122	1.39	2.42
42.2		65.2	0.230	0.252	0.142	0.91	1.62
42.5		65.2	0.270	0.249	0.142	1.49	2.61
42.5		65.8	0.122	0.261	0.148	0.47	0.82
41.3		65.8	0.341	0.266	0.148	1.28	2.30
45.5		65.9	0.032	0.248	0.139	0.13	0.23
41.9		65.9	0.269	0.268	0.149	1.00	1.81
41.9		65.9	0.289	0.268	0.149	1.08	1.94
Medie		0.235	0.247	0.139	0.95	1.69	
9	44.1	63.0	0.258	0.199	0.119	1.30	2.17
	42.2	63.0	0.287	0.208	0.120	1.38	2.35
	42.2	64.8	0.146	0.244	0.138	0.60	1.06
	42.4	64.8	0.238	0.242	0.138	1.07	1.87
	42.4	65.0	0.026	0.246	0.140	0.11	0.15
	42.3	65.0	0.198	0.247	0.140	0.80	1.41
	41.7	65.6	0.251	0.250	0.140	1.00	1.79
	Medie		0.203	0.234	0.134	0.89	1.54

*	z_1	z_2	Δ Gr. osservata	Δ Gr. Potsdam	Δ Gr. M. Sántis	C =	
						Nicolosi : Potsdam	Nicolosi : M. Sántis
1	33.5	68.8	^m 0.297	^m 0.374	^m 0.216	0.79	1.37
	33.6	69.0	0.227	0.380	0.220	0.60	1.03
	33.8	68.9	0.146	0.377	0.218	0.39	0.69
	33.2	69.7	0.324	0.401	0.227	0.81	1.43
	33.0	70.0	0.342	0.410	0.230	0.83	1.49
	33.6	70.1	0.371	0.413	0.232	0.90	1.60
	34.0	70.5	0.298	0.425	0.240	0.70	1.24
	34.4	70.1	0.345	0.413	0.232	0.83	1.49
	34.2	70.4	0.227	0.422	0.238	0.54	0.95
	34.1	70.9	0.406	0.437	0.248	0.93	1.65
Medie		0.298	0.405	0.230	0.73	1.29	

CONCLUSIONE

La media aritmetica delle Δ Gr. medie, ciascuna ricavata dalle osservazioni di ognuna delle prime sei stelle del programma dell' Osservatorio Etno, è 0.^m380, e quella delle Δ Gr. medie relative alle altre tre stelle dello stesso programma, è 0.^m222. I rapporti di queste

due grandezze alle corrispondenti $\Delta Gr.$ medie tratte dalla tabella di Müller per Potsdam e M. Sántis sono rispettivamente **0.98** e **1.75** per le prime sei stelle, e **0.93** e **1.63** per le rimanenti tre stelle.

Questi valori farebbero concludere, a meno degli errori di osservazione ed escludendo le cause esterne di errore, che sull'Etna, all'altitudine di m. 2942, nella stagione autunnale e nella direzione di Tramontana, l'estinzione atmosferica, dalla distanza zenitale di 43° circa alla distanza zenitale di 68° circa, può ritenersi che abbia la stessa variazione data da Müller per Potsdam e che abbia una variazione circa una volta e mezza maggiore di quella data dallo stesso autore per M. Sántis.

La media aritmetica delle 10 misure di $\Delta Gr.$ fatte a Nicolosi, dalla distanza zenitale di 34° circa alla distanza zenitale di 70° circa, dà per gli analoghi rapporti i valori **0.73** e **1.29**. Quest'ultimo risultato, per quanto derivato da uno scarso materiale di osservazione, indica, come era da aspettarsi, che all'altitudine di Nicolosi (m. 698), nella direzione di Tramontana e fra le distanze zenitali di 34° circa e 70° circa, l'assorbimento atmosferico ha una variazione maggiore che all'altitudine di Potsdam (m. 100) e minore che all'altitudine di M. Sántis (m. 2500). Tale risultato è in buon accordo con l'altro da me ottenuto con analoghe osservazioni nell'Osservatorio di Catania (altitudine m. 49), dove trovai che nella stagione autunnale e nella direzione di Tramontana, l'assorbimento atmosferico, fra le distanze zenitali di 41° circa e 64° circa, ha una variazione quasi eguale a quella data per Potsdam.

È però da avvertire in relazione alla precedente conclusione che dall'essere quasi paralleli rispettivamente i tratti delle curve, compresi tra i limiti considerati, che rappresentano l'assorbimento a Nicolosi e a Catania, con quello corrispondente nella curva di assorbimento a Potsdam, non segue che tali siano le curve nella loro totalità; che, cioè, l'assorbimento a Nicolosi sia 0,73 volte quello di Potsdam a qualunque distanza zenitale, e quello a Catania sia eguale a quello a Potsdam a qualunque distanza zenitale.

Quanto poi alle presenti osservazioni di estinzione all'Osservatorio Etneo, è da ritenersi che una sensibile influenza abbiano avuto le emanazioni del vicino cratere centrale, benchè fossero invisibili. Questa supposizione è confermata dalla circostanza che le puntate alle stelle osservate di sera, cioè in prossimità alla loro culminazione superiore, venivano fatte ad un'altezza dal detto cratere maggiore di quelle fatte di mattina, cioè in prossimità alla culminazione inferiore.

Per l'importanza dell'argomento, io mi propongo di tornare allo studio dell'estinzione sull'Etna adoperando metodo diverso e stelle lontane il più possibile da centri di emanazioni vulcaniche.



Sulla quartica di Klein e la quintica di Snyder

Nota del Prof. GAETANO SCORZA

Alla varietà jacobiana di una qualsiasi curva algebrica (non razionale) — o alla curva stessa — sono collegati, come ad ogni altra varietà abeliana, due caratteri fondamentali, gli *indici di singolarità e di moltiplicabilità* ⁽¹⁾. Ove siano aumentati di 1, essi coincidono coi *numeri-base* delle corrispondenze algebriche simmetriche ⁽²⁾ o di tutte le corrispondenze algebriche appartenenti alla curva, e se p è il genere della curva i valori massimi di cui essi sono suscettibili sono rispettivamente $p^2 - 1$ e $2p^2 - 1$. Inoltre, se $p > 1$, codesti valori massimi, ove siano raggiunti, sono raggiunti dai due indici contemporaneamente ⁽³⁾.

Ora io ho dimostrata l'esistenza di varietà abeliane con indici massimi per ogni valore della dimensione della varietà, e le ho anche pienamente caratterizzate ⁽⁴⁾; ma poichè la varietà jacobiana legata ad una curva di genere p è, per $p > 1$, una varietà abeliana particolare, resta dubbio se per ogni valore di p esistano curve di genere p con indici massimi ⁽⁵⁾.

Lo stesso dubbio si potrebbe naturalmente affacciare per tutti i teoremi di natura esistenza riflettenti le varietà abeliane, qualora si volesse trasportarli senz'altro alle varietà jacobiane.

Così, per es., io ho pure dimostrata l'esistenza di varietà abeliane impure di dimensione pari, prive di sistemi regolari isolati di integrali riducibili, coi sistemi regolari puri tutti di dimensione 1, e le ho classificate in quattro tipi fondamentali ⁽⁶⁾; ma ciò non autorizza a concludere che, corrispondentemente ad ognuno di questi tipi, esistano delle varietà che siano addirittura jacobiane.

Indipendentemente da queste osservazioni, data la scarsità delle conoscenze che per ora si hanno sui numeri-base in discorso, è interessante moltiplicare gli esempi di curve per le quali gli indici di singolarità e moltiplicabilità possano essere esplicitamente assegnati e indicare dei metodi che, nei singoli casi concreti, possano essere utilmente adoperati per il calcolo effettivo degli indici stessi.

⁽¹⁾ Per la definizione di questi caratteri vedi la mia Memoria: *Torno alla teoria generale delle matrici di RIEMANN e ad alcune sue applicazioni* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLI (1916), pp. 263-380].

⁽²⁾ Che l'indice di singolarità di una curva algebrica aumentato di 1 eguagli il numero-base delle corrispondenze algebriche simmetriche situate su di essa è conseguenza di note e belle ricerche del sig. ROSATI. Vedi la sua Memoria: *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e in particolare fra i punti di una curva di genere due* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie 3^a, vol. XXV (1915), pp. 1-32].

⁽³⁾ Loc. cit. ⁽¹⁾, Parte Prima, n. 58.

⁽⁴⁾ Loc. cit. ⁽¹⁾, Parte Prima, n. 54 e 58.

⁽⁵⁾ Veramente, e per ragioni tutte note, il dubbio non è giustificato se non quando sia $p > 3$.

⁽⁶⁾ Loc. cit. ⁽¹⁾, Parte Prima, n. 55.

Tra le infinite curve di genere 3 per le quali gli indici di singolarità e moltiplicabilità raggiungono i valori massimi 8 e 17 ho avuto occasione di far rilevare che è compresa la così detta *quartica di KLEIN*; e questa circostanza l'ho dedotta, applicando teoremi generali sulle matrici riemanniane, dal fatto, osservato prima da POINCARÉ e poi dallo HURWITZ, che la curva possiede terne di integrali ellittici indipendenti a moltiplicazione complessa e vincolati (7).

Qui voglio far vedere come quella circostanza e questo fatto possano dedursi con estrema semplicità partendo dalla considerazione delle trasformazioni collineari in sè, a periodo 7, ammesse dalla curva; e per mostrare con un altro esempio la fecondità del procedimento lo applico anche alla determinazione degli indici della *quintica di SNYDER*, cioè della quintica di genere 6 che è rappresentata in coordinate cartesiane dall'equazione

$$x^4 y + y^4 + x = 0 ,$$

e che ammette un gruppo di trasformazioni collineari in sè, d'ordine 39, generato da due collineazioni cicliche, l'una a periodo 13 e l'altra a periodo 3 (8).

Gli indici di questa quintica sono rispettivamente 17 e 35; e la sua jacobiana dà appunto un esempio di varietà jacobiana di dimensione 6 (cioè, pari), impura, priva di sistemi regolari isolati di integrali riducibili, e coi sistemi regolari puri tutti di dimensione 1.

§ 1.

1. Consideriamo la quartica di KLEIN C^4 , rappresentata in coordinate cartesiane dall'equazione

$$1) \quad x^3 y + y^3 + x = 0.$$

Tre suoi integrali indipendenti di 1ª specie sono dati evidentemente da:

$$u_1 = \int \frac{dx}{3y^2 + x^3}, \quad u_2 = \int \frac{x dx}{3y^2 + x^3}, \quad u_3 = \int \frac{y dx}{3y^2 + x^3}.$$

Adesso si consideri la matrice riemanniana costituita da sei sistemi di periodi primitivi degli integrali u_1, u_2, u_3 , e sia in un $S_4(x' y' z' t')$:

$$x' = x' (v_1, v_2, v_3)$$

$$y' = y' (v_1, v_2, v_3)$$

$$z' = z' (v_1, v_2, v_3)$$

$$t' = t' (v_1, v_2, v_3)$$

(7) Loc. cit. 4), Parte Prima, n. 59, nota a piè di pagina.

(8) Per questa interessante quintica vedi: V. SNYDER, *Plane Quintic Curves Which Possess a Group of Linear Transformations* [American Journal of Mathematics, vol. XXX (1908), pp. 1-9], ed E. CIANI, *Le quintiche piane autoproiettive* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXVI (2º sem. 1913), pp. 58-78]. Appunto perchè lo SNYDER è stato il primo a richiamar l'attenzione sul gruppo da essa posseduto, mi son permesso di indicarla col nome di *quintica di SNYDER*.

la rappresentazione parametrica, per funzioni abeliane dei parametri v_1, v_2, v_3 , di una varietà abeliana V appartenente a codesta matrice.

La V può riguardarsi come la varietà jacobiana di C^4 , e si ha una corrispondenza biunivoca T fra le serie lineari g_3 (di dimensione 0 o 1) di C^4 e i punti di V facendo corrispondere alla g_3 determinata da un gruppo G_3 di tre punti di C^4 il punto di V , per cui il parametro v_j ha come valore la somma dei valori dell'integrale u_j nei punti di G_3 .

Ciò posto, si osservi che, detta α una radice primitiva settima dell'unità¹, la trasformazione collineare (affine) a periodo 7:

$$2) \quad \begin{aligned} x &= \alpha^3 X \\ y &= \alpha Y \end{aligned}$$

muta in sè la curva C^4 tenendone fermi i tre punti che coincidono con l'origine delle coordinate e coi punti all'infinito degli assi x e y (⁹). Se quindi si suppone che l'origine dalla quale si fanno partire i cammini (indipendenti da j) lungo i quali si calcolano gli integrali u_j sia uno di questi tre punti, e si dicono u_j e U_j i valori dell'integrale u_j in due punti di C^4 omologhi nella collineazione 2), si può supporre (¹⁰):

$$3) \quad u_1 = \alpha U_1, \quad u_2 = \alpha^4 U_2, \quad u_3 = \alpha^2 U_3.$$

Ma allora la trasformazione birazionale della varietà V in sè stessa in cui si riflette, a traverso T , la trasformazione birazionale in sè della C^4 subordinata dall'affinità 2) è quella che è rappresentata dalla sostituzione lineare

$$4) \quad v_1 = \alpha V_1, \quad v_2 = \alpha^4 V_2, \quad v_3 = \alpha^2 V_3$$

sui parametri v_1, v_2 e v_3 .

Segue che le radici dell'equazione caratteristica della *sostituzione riemanniana* modulare di V rispondente alla sua trasformazione birazionale rappresentata dalle 4) sono tutte semplici (¹¹) e che quindi la matrice di RIEMANN cui appartiene V , cioè la matrice di RIEMANN cui è collegata C^4 , è *isomorfa* alla seguente matrice di genere 3 (¹²):

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 \\ 1 & \alpha^4 & \alpha & \alpha^5 & \alpha^2 & \alpha^6 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \alpha & \alpha^3 \end{array} \right\|$$

(⁹) L' involuzione d' ordine 7 generata su C^4 dalla trasformazione che su di essa induce l' affinità 2) ha dunque tre gruppi ridotti ciascuno a un punto settoplo, e all' infuori di questi non ha altri punti multipli. Segue, per la formula di ZEUTHEN, che essa è una g_7^1 .

(¹⁰) Occorre appena avvertire che perchè sussistano le 3) bisogna scegliere opportunamente il valore di U_j dopo che sia stato fissato quello di u_j . Volendo, anzi che delle uguaglianze, si potrebbero scrivere delle congruenze rispetto ai periodi come moduli.

(¹¹) Per il teorema che si trova al n. 22 della mia Memoria più volte citata (Parte Prima), le radici dell' equazione caratteristica in discorso sono $\alpha, \alpha^4, \alpha^2, \alpha^6, \alpha^3, \alpha^5$.

(¹²) Loc. cit. ¹) n. 23 (Parte Prima).

o, ciò che fa lo stesso, una volta che

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 0,$$

alla matrice:

$$5) \quad \left\| \begin{array}{cccccc} a & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^6 \\ \alpha^4 & a & \alpha^5 & \alpha^2 & \alpha^6 & \alpha^3 \\ \alpha^2 & \alpha^1 & \alpha^6 & a & \alpha^3 & \alpha^5 \end{array} \right\|.$$

Ora si applichi a questa matrice l'operazione A ⁽¹³⁾ che consiste nel sostituire alle sue righe le loro combinazioni lineari omogenee secondo i numeri

$$(1, 1, 1), \quad (\alpha^3, \alpha^5, \alpha^6), \quad (\alpha, \alpha^4, \alpha^2).$$

Posto

$$a + \alpha^2 + \alpha^4 = a,$$

per modo che sarà

$$\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6 = -1 - a,$$

la matrice 5) si muterà nella matrice ad essa *equivalente* ⁽¹⁴⁾

$$6) \quad \left\| \begin{array}{cccccc} a & a & -1-a & a & -1-a & -1-a \\ a & -1-a & -1-a & 3 & a & a \\ a & -1-a & a & -1-a & -1-a & 3 \end{array} \right\|.$$

Poichè si può supporre

$$a = \frac{-1 + \sqrt{-7}}{2},$$

la matrice 6) è ad indici massimi ⁽¹⁵⁾, dunque è tale anche quella legata alla curva C^4 e gli indici di singolarità e moltiplicabilità di questa curva sono 8 e 17.

§ 2.

2. Adesso consideriamo la quintica di SNYDER C^5 rappresentata in coordinate cartesiane dall'equazione:

$$x^4 y + y^4 + x = 0.$$

Essa è del genere 6 e sei suoi integrali indipendenti di 1^a specie sono dati da:

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{dx}{4y^3 + x^4}, & u_2 &= \int \frac{x dx}{4y^3 + x^4}, & u_3 &= \int \frac{y dx}{4y^3 + x^4}, \\ u_4 &= \int \frac{xy dx}{4y^3 + x^4}, & u_5 &= \int \frac{x^2 dx}{4y^3 + x^4}, & u_6 &= \int \frac{y^2 dx}{4y^3 + x^4}. \end{aligned}$$

⁽¹³⁾ Loc. cit. ¹⁾, n. 1 (Parte Prima).

⁽¹⁴⁾ Loc. cit. ¹⁾, n. 2 (Parte Prima).

⁽¹⁵⁾ Loc. cit. ¹⁾, n. 54 (Parte Prima).

Indicata con α una radice primitiva tredicesima dell'unità, l'affinità

$$7) \quad \begin{aligned} x &= \alpha X \\ y &= \alpha^{10} Y \end{aligned}$$

muta in sè la curva C^5 ; inoltre per le 7) gli integrali u_j si mutano negli integrali della stessa forma in X e Y moltiplicati, successivamente, per i fattori

$$\alpha^{10}, \alpha^{11}, \alpha^7, \alpha^8, \alpha^{12}, \alpha^4.$$

Segue, come prima, tenendo conto dell'identità

$$8) \quad \sum_{j=0}^{12} \alpha^j = 0,$$

che la matrice di RIEMANN cui è legata C^5 è isomorfa alla matrice di genere 6:

$$9) \quad \begin{vmatrix} \alpha^3 & \alpha^{10} & \alpha^7 & \alpha^4 & \alpha & \alpha^{11} & \alpha^8 & \alpha^5 & \alpha^2 & \alpha^{12} & \alpha^9 & \alpha^6 \\ \alpha^2 & \alpha^{11} & \alpha^9 & \alpha^7 & \alpha^5 & \alpha^3 & \alpha & \alpha^{12} & \alpha^{10} & \alpha^8 & \alpha^6 & \alpha^4 \\ \alpha^6 & \alpha^7 & \alpha & \alpha^8 & \alpha^2 & \alpha^9 & \alpha^3 & \alpha^{10} & \alpha^4 & \alpha^{11} & \alpha^5 & \alpha^{12} \\ \alpha^5 & \alpha^8 & \alpha^3 & \alpha^{11} & \alpha^6 & \alpha & \alpha^9 & \alpha^4 & \alpha^{12} & \alpha^7 & \alpha^2 & \alpha^{10} \\ \alpha & \alpha^{12} & \alpha^{11} & \alpha^{10} & \alpha^9 & \alpha^8 & \alpha^7 & \alpha^6 & \alpha^5 & \alpha^4 & \alpha^3 & \alpha^2 \\ \alpha^9 & \alpha^4 & \alpha^8 & \alpha^{12} & \alpha^3 & \alpha^7 & \alpha^{11} & \alpha^2 & \alpha^6 & \alpha^{10} & \alpha & \alpha^5 \end{vmatrix}.$$

Adesso si applichi alla 9) l'operazione A , definita, nel senso chiarito più sopra, dallo schema

$$\begin{aligned} &(0, 1, 1, 1, 0, 0) \\ &(1, 0, 0, 0, 1, 1) \\ &(0, \alpha^2, \alpha^6, \alpha^5, 0, 0) \\ &(\alpha^3, 0, 0, 0, \alpha, \alpha^9) \\ &(0, \alpha^{11}, \alpha^7, \alpha^8, 0, 0) \\ &(\alpha^{10}, 0, 0, 0, \alpha^{12}, \alpha^4). \end{aligned}$$

Posto, per comodità di scrittura:

$$\alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^6 = a, \quad \alpha + \alpha^3 + \alpha^9 = b, \quad \alpha^7 + \alpha^8 + \alpha^{11} = c, \quad \alpha^4 + \alpha^{10} + \alpha^{12} = d,$$

per modo che sarà

$$1 + a + b + c + d = 0,$$

la 9) si convertirà nella matrice equivalente:

$$10) \quad \begin{vmatrix} a & c & b & c & a & b & b & d & d & c & a & d \\ b & d & c & d & b & c & c & a & a & d & b & a \\ d & 3 & c & b & c & a & b & b & d & d & c & a \\ a & 3 & d & c & d & b & c & c & a & a & d & b \\ 3 & b & c & a & b & b & d & d & c & a & d & a \\ 3 & c & d & b & c & c & a & a & d & b & a & b \end{vmatrix},$$

e quindi gli indici di singolarità e moltiplicabilità della nostra quintica eguaglieranno quelli di questa matrice.

La matrice 10) è visibilmente isomorfa a una matrice *composta* ⁽¹⁶⁾ con tre matrici di genere 2 identiche alla matrice

$$11) \quad \left\| \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{array} \right\|,$$

o, ciò che fa lo stesso, alla matrice ad essa equivalente

$$12) \quad \left\| \begin{array}{cccc} 1 & a & b & c \\ 1 & b & c & d \end{array} \right\|,$$

dunque, in ordine a teoremi generali, gli indici di 10) si avranno subito appena siano calcolati quelli della matrice 12).

Per questo, si incominci dall'osservare che fra le quantità a, b, c, d passano le relazioni :

$$13) \quad \begin{aligned} ab &= a+b+c; & ac &= 2-a-c; & ad &= -1-c; & bc &= -1-a; & bd &= 3+a+c; & cd &= -1-b; \\ a^2 &= -1-a-b+c; & b^2 &= -2-a-2b-2c; & c^2 &= 2a+b; & d^2 &= 2b+c; \end{aligned}$$

e che se si indica con (j, l) il minore di 2° ordine formato con le colonne j^{ma} ed l^{ma} di 12) si ha :

$$14) \quad \begin{aligned} (1, 2) &= b-a; & (1, 3) &= c-b; & (1, 4) &= d-c = -1-a-b-2c; \\ (2, 3) &= ac-b^2 = 4+2b+c; & (2, 4) &= ad-bc = a-c; & (3, 4) &= bd-c^2 = 3-a-b+c. \end{aligned}$$

Ciò posto, l'indice di singolarità della matrice 12) è il massimo numero delle *forme riemanniane alternate* ⁽¹⁷⁾ indipendenti ad essa relative diminuito di 1, dunque per calcolarlo bisognerà cercare con quanti sistemi di valori non tutti nulli degli interi A, B, C, D, E, F si può soddisfare all'equazione :

$$15) \quad A(1, 2) + B(1, 3) + C(1, 4) + D(2, 3) + E(2, 4) + F(3, 4) = 0.$$

Poichè l'equazione di 12^{mo} grado 8), a coefficienti interi, cui soddisfa α , è irriducibile, le quantità a, b, c non possono soddisfare ad un'equazione lineare a coefficienti interi se non a patto che questi siano tutti nulli, dunque la condizione 15) a cui debbono soddisfare gli interi A, B, \dots, F si converte, per le 14), nelle seguenti quattro :

$$16) \quad \begin{aligned} -C + 4D + 3F &= 0 \\ -A - C + E - F &= 0 \\ A - B - C + 2D - F &= 0 \\ B - 2C + D - E + F &= 0. \end{aligned}$$

Le soluzioni intere delle 16) si ottengono tutte, per es., prendendo gli interi A e C

⁽¹⁶⁾ Loc. cit. ¹⁾, n. 27 (Parte Prima).

⁽¹⁷⁾ Loc. cit. ¹⁾ n. 6 (Parte Prima).

arbitrariamente e poi facendo

$$17) \quad B = A + 2C, \quad D = C, \quad E = A, \quad F = -C,$$

dunque l'indice di singolarità della matrice 12) è 1.

In base alle 17), si ha

$$AF - BE + CD = -A^2 - 3AC + C^2,$$

e questa espressione per A e C interi (non entrambi nulli) è certo diversa da zero, dunque la matrice 12) non ammette forme riemanniane alternate degeneri (non identicamente nulle), ossia è *pura* ⁽¹⁸⁾.

Segue che il suo indice di moltiplicabilità o è 1 o è 3 ⁽¹⁹⁾.

Per decidere quale di questi due sia il suo valore, occorre rifarsi dalla sua definizione ⁽²⁰⁾; occorre cioè ricercare quante siano le forme riemanniane indipendenti della matrice 12).

Se una tal forma è

$$18) \quad \sum_{j,l}^{1..4} A_{j,l} x_j y_l$$

dove le $A_{j,l}$ sono numeri interi, la 18) deve annullarsi quando vi si pongano per le x_j e le y_l gli elementi di una qualunque delle due righe della matrice 12).

Tenendo conto delle 13) e ragionando come prima si trovano così 16 equazioni lineari omogenee fra gli interi $A_{j,l}$.

Ora facendo una volta

$$x_1 = y_1 = 1, \quad x_2 = y_2 = a, \quad x_3 = y_3 = b, \quad x_4 = y_4 = c,$$

e un'altra

$$x_1 = y_1 = 1, \quad x_2 = y_2 = b, \quad x_3 = y_3 = c, \quad x_4 = y_4 = d = -1 - a - b - c,$$

si trovano per gli interi $A_{j,l}$ due quadruple di equazioni non distinte, perchè quelle della seconda quadrupla sono identicamente soddisfatte quando vi si pongano per gli interi $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}, A_{1,4}$ i valori dati, in funzione degli altri interi $A_{j,l}$, da quelle della prima; dunque l'indice di moltiplicabilità di 12) è senz'altro 3.

Ma allora ⁽²¹⁾:

Gli indici di singolarità e moltiplicabilità della matrice 10), cioè della quintica di SNYDER sono, rispettivamente, 17 e 35.

Notisi che l'involuzione generata su C^5 dalla trasformazione indottavi dall'affinità 7) è una g_{13}^1 ; invece quelle rispondenti alle trasformazioni indotte su C^5 dalle collineazioni a periodo 3 che essa ammette, sono del genere 2.

Catania, 8 maggio 1917.

⁽¹⁸⁾ Loc. cit. ¹), n. 32 (Parte Prima).

⁽¹⁹⁾ Loc. cit. ²), n. 16 e loc. cit. ¹), n. 11 (Parte Seconda).

⁽²⁰⁾ Loc. cit. ¹), n. 6 (Parte Prima).

⁽²¹⁾ Loc. cit. ¹), n. 55 (Parte Prima). Le (III) di questo n. per $p = 6$ danno $k = 17$ e $h = 35$.



- I. — Sui poli delle più semplici equazioni delle curve coniche.
 II. — Semplicissima dimostrazione di alcune formole trigonometriche.

Nota di FRANCESCO CALDARERA

Grande Uff. Prof. emerito della R. Università di Palermo,
 Socio onorario dell' Acc. Gioenia di Scienze Naturali in Catania,

Presentata questa Nota all' Accademia nella seduta 5 Maggio 1917.

I. ARGOMENTO.

— Posto il quesito :

“ Nel piano delle coniche vi sono punti, che presi per poli in sistema di coordinate polari, rendono l' equazioni nelle forme più semplici ?

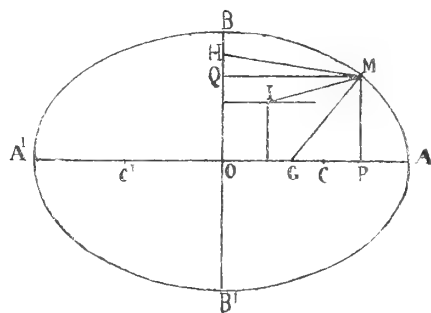
Cerchiamo la soluzione, premettendo alcuni indispensabili ricordi.

1. L' equazioni in coordinate rettangolari x, y , delle tre specie = Ellisse, Iperbola, Parabola = sono rispettivamente

$$(a) \dots a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2, a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2, y^2 = 2px;$$

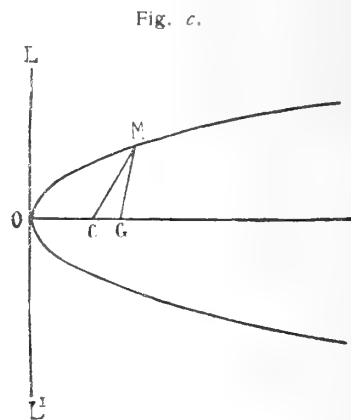
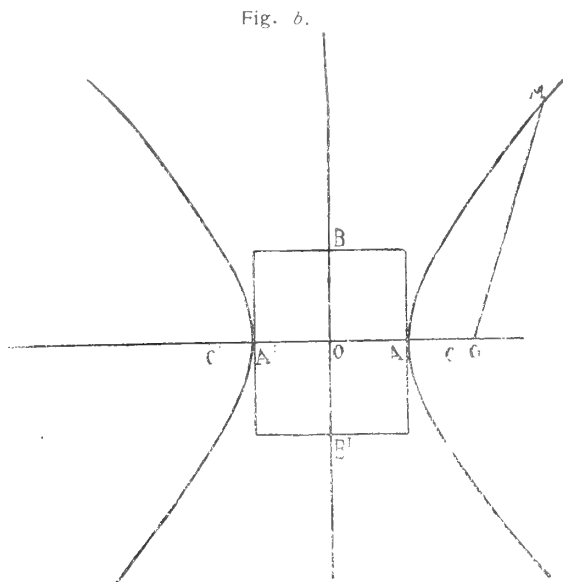
nell' *ellisse* (fig. a) il principale asse di simmetria AA' (grandasse) è dinotato $2a$, il minore BB' (piccolasse) $2b$, l' intersezione O è il centro, onde $OA = OA' = a$, $OB = OB' = b$,

Fig. a.



la distanza focale $CC' = 2c$, sicchè $OC = OC' = c$, $c^2 = a^2 - b^2$, e posto $c = ae$, e dicesi lo schiacciamento, espresso per $e^2 = (a^2 - b^2) : a^2$, si prende AA' per asse delle ascisse x , positivo da O ad A , il BB' per asse delle ordinate y , in verso positivo da O a B , l' origine delle coordinate è O , posto $p = b^2 : a$, $2p$ dicesi il parametro della curva; in riguardo all' *iperbola* vi sono analoghe designazioni: dei due assi di simmetria il primo

(fig. *b*) AA' , indefinitamente esteso (asse trasverso), la porzione $AA' = 2a$ è determinata dai vertici A, A' delle due branche, dell'altro asse (asse non trasverso), una porzione $BB' = 2b$



è in dipendenza della curvatura delle branche, l'intersezione O dei due assi è il centro, onde $OA = OA' = a$, $OB = OB' = b$, la distanza focale $CC' = 2c$, quindi $OC = OC' = c$, $c^2 = a^2 + b^2$, e posto $c = ae$, $e^2 = (a^2 + b^2) : a^2$, l'asse trasverso AA' è preso per asse delle ascisse x , il non trasverso BB' per asse delle ordinate y , l'origine in O , ed i versi positivi da O in A per le ascisse, da O in B per le ordinate, posto $p = b^2 : a$, $2p$ dicesi il parametro della curva; quanto poi alla *parabola*, il coefficiente $2p$ della sua equazione dicesi parametro, e della stessa (fig. *c*) l'unico asse di simmetria è preso per l'asse delle ascisse, l'origine in O vertice della curva, sul quale asse è il fuoco C , distante da O della lunghezza $OC = \frac{1}{2} p$, ossia un quarto del parametro, e il senso positivo delle ascisse è da O in C , la retta LL' indefinitamente estesa, condotta per O perpendicolare ad OC , costituisce l'asse delle ordinate y , con l'origine in O , e il verso positivo da O ad L .

2. Premessi questi ricordi, procediamo alla enunciata ricerca dei poli, osservando anzitutto che se ne esistono, devonsi trovare sugli assi delle curve, ciò che risulta evidente dal fatto della loro simmetria rispetto ai detti assi, tuttavia a migliore affermazione ne diamo la seguente prova apodittica.

Supposto che sia I (fig. *a*) uno di codesti punti fuori dagli assi, fissato di posizione dalle coordinate g, h , tirato per lo stesso un raggio vettore qualsiasi $IM = \rho$, formante un angolo θ con la parallela ad AA' condotta per I , e designate x, y le coordinate MQ, MP dall'estremo M sulla curva in considerazione, ne seguono l'espressioni

$$(\beta) \quad \dots \quad x = g + \rho \cos \theta, \quad y = h + \rho \sin \theta. \quad (*)$$

(*) S'intuisce facilmente che la costruzione indicata nella fig. *a*, riguardo al punto I e sue linee connesse, sia applicabile senz'altro alle due fig. (*b*), (*c*), onde la validità delle formole (β) ha luogo parimente per l'iperbola e la parabola.

Introdotte le stesse nelle (a), si hanno rispettivamente alle tre specie delle coniche l'equazioni

$$\begin{aligned} a^2 (h + \rho \operatorname{sen} \theta)^2 + b^2 (g + \rho \operatorname{cos} \theta)^2 &= a^2 b^2, \\ a^2 (h + \rho \operatorname{sen} \theta)^2 - b^2 (g + \rho \operatorname{cos} \theta)^2 &= -a^2 b^2, \\ (h + \rho \operatorname{sen} \theta)^2 &= 2p (g + \rho \operatorname{cos} \theta), \end{aligned}$$

dalle quali, opportunamente maneggiate, si traggono

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \dots \quad & \left(\rho + \frac{b^2 g \operatorname{cos} \theta + a^2 h \operatorname{sen} \theta}{a^2 (1 - e^2 \operatorname{cos}^2 \theta)} \right)^2 \\ &= \frac{b^2 [(a^2 - g^2) \operatorname{sen}^2 \theta + (b^2 - h^2) \operatorname{cos}^2 \theta + 2g h \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta]}{a^2 (1 - e^2 \operatorname{cos}^2 \theta)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad \dots \quad & \left(\rho - \frac{b^2 g \operatorname{cos} \theta - a^2 h \operatorname{sen} \theta}{a^2 (1 - e^2 \operatorname{cos}^2 \theta)} \right)^2 \\ &= \frac{b^2 [(g^2 - a^2) \operatorname{sen}^2 \theta + (b^2 + h^2) \operatorname{cos}^2 \theta - 2g h \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta]}{a^2 (1 - e^2 \operatorname{cos}^2 \theta)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad \dots \quad & \left(\rho + \frac{h \operatorname{sen} \theta - p \operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right)^2 \\ &= \frac{2p g \operatorname{sen}^2 \theta + p^2 \operatorname{cos}^2 \theta - 2p h \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen}^4 \theta}. \end{aligned}$$

Ora attentamente considerate queste equazioni, si rileva che per ridursi a forme alquanto semplici, perciò a diventare il secondo membro di ciascuna eguale ad un quadrato, bisogna per la (I) che siano $a^2 - g^2 = h^2$, $b^2 - h^2 = g^2$, per la (II) siano $g^2 - a^2 = h^2$, $b^2 + h^2 = g^2$, e per la (III) si abbia $2p g = h^2$, così infatti i loro secondi membri assumono le rispettive forme dei quadrati

$$\frac{b^2 (h \operatorname{sen} \theta + g \operatorname{cos} \theta)^2}{a^2 (1 - e^2 \operatorname{cos}^2 \theta)^2}, \quad \frac{b^2 (h \operatorname{sen} \theta - g \operatorname{cos} \theta)^2}{a^2 (1 - e^2 \operatorname{cos}^2 \theta)^2}, \quad \frac{(h \operatorname{sen} \theta - p \operatorname{cos} \theta)^2}{\operatorname{sen}^4 \theta}.$$

Però le poste condizioni sono inammissibili, non conducendo alla determinazione concreta dei sistemi delle coordinate g , h fissanti le posizioni dei punti ricercati; infatti, le due prime sono $g^2 + h^2 = a^2$, $g^2 + h^2 = b^2$, e poichè per l'ellisse non può essere $b = a$, costituiscono due distinte equazioni, rappresentanti i cerchi di raggi a e b , concentrici all'ellisse, l'uno circoscritto e l'altro inscritto alla stessa, i quali non hanno punti comuni, e lasciano quindi indeterminata la valutazione specifica delle g ed h ; le altre due $g^2 - h^2 = a^2$, $g^2 - h^2 = b^2$ parimente, stantechè per l'iperbola in generale è b differente di a , fatta eccezione dell'equilatero, in cui è $b = a$, in tale caso però le due indicate condizioni costituiscono unica equazione $g^2 - h^2 = a^2$, che lascia parimente indeterminate le g ed h ; quanto poi alla parabola, la $2p g = h^2$ non è che l'equazione primitiva della stessa in coordinate rettangolari, dinotate g ed h , col parametro $2p$. Emerge dunque dalla precedente analisi la prova dell'inesistenza fuori dei succennati assi di punti godenti la proprietà espressa nel posto quesito.

3. Esaminiamo in conseguenza ciò che ha luogo su codesti assi, e da prima sul secondo asse dell'ellisse e dell'iperbola, cioè piccolasse dell'una, ed asse non trasverso del-

l'altra; supposto quindi che su entrambi, e nel verso OB (fig. a ed analogamente nella fig. b) ne esista uno H distante da O della lunghezza $OH = h$, per adattare a questo caso l'equazioni (I), (II) si deve porre in esse $g = 0$, e ne vengono le seguenti:

$$(\gamma) \quad \dots \quad \left(\rho + \frac{a^2 h \operatorname{sen} \theta}{a^2 (1 - e^2 \cos^2 \theta)} \right)^2 = \frac{b^2 [a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + (b^2 - h^2) \cos^2 \theta]}{a^2 (1 - e^2 \cos^2 \theta)^2},$$

$$(\delta) \quad \dots \quad \left(\rho + \frac{a^2 h \operatorname{sen} \theta}{a^2 (1 - e^2 \cos^2 \theta)} \right)^2 = \frac{b^2 [-a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + (b^2 + h^2) \cos^2 \theta]}{a^2 (1 - e^2 \cos^2 \theta)^2};$$

dalla prima (γ) riguardante l'ellisse si rileva che, affine di rendere il secondo membro eguale al quadrato

$$\frac{b^2}{(1 - e^2 \cos^2 \theta)^2}$$

dev'essere $b^2 - h^2 = a^2$, $h^2 = b^2 - a^2 = -(a^2 - b^2)$, ed $h = \pm \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{-1} = \pm c \sqrt{-1}$, risultato immaginario; rispetto poi alla (δ) , riguardante l'iperbola, occorrerebbe porre $b^2 + h^2 = -a^2$, eguaglianza contraddittoria, e del resto conducente al risultato immaginario $h = \pm \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{-1} = \pm c \sqrt{-1}$; emerge quindi da questo esame l'impossibilità di esistenza sul secondo asse di ciascuna menzionata curva di punti godenti la proprietà nel posto quesito definita.

4. Non resta pertanto che riconoscere quello che abbia luogo sull'asse principale di simmetria di ognuna delle tre curve in considerazione; supposto conseguentemente (fig. a , così pure per le fig. b , c) che sul mentovato asse, e nel verso da O a C , vi sia un punto G dei richiesti, distante da O della lunghezza $OG = g$, per adattare al caso in esame l'equazioni (I), (II), (III), si deve porre in esse $h = 0$, deducendosi le seguenti

$$(\epsilon) \quad \dots \quad \left(\rho + \frac{b^2 g \cos \theta}{a^2 (1 - e^2 \cos^2 \theta)} \right)^2 = \frac{b^2 [(a^2 - g^2) \operatorname{sen}^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta]}{a^2 (1 - e^2 \cos^2 \theta)^2},$$

$$(\varphi) \quad \dots \quad \left(\rho - \frac{b^2 g \cos \theta}{a^2 (1 - e^2 \cos^2 \theta)} \right)^2 = \frac{b^2 [(g^2 - a^2) \operatorname{sen}^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta]}{a^2 (1 - e^2 \cos^2 \theta)^2},$$

$$(\chi) \quad \dots \quad \left(\rho - \frac{p \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right)^2 = \frac{2pg \operatorname{sen}^2 \theta + p^2 \cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^4 \theta}.$$

Dalle stesse si rileva agevolmente, per la prima (ϵ) riguardante l'ellisse che, ad assumere la più semplice forma, basta sia $a^2 - g^2 = b^2$, $g^2 = a^2 - b^2 = c^2$, $g = \pm c$, cioè adire il richiesto punto G esiste, e coincide con l'uno dei fuochi C , C' (fig. a); relativamente alla (φ) occorre che fosse $g^2 - a^2 = b^2$, $g^2 = a^2 + b^2 = c^2$, $g = \pm c$, ossia anche per l'iperbola il richiesto punto G esiste, coincidendo con l'uno dei due fuochi C , C' (fig. b); infine per la terza equazione (χ) bisogna che sia $g = \frac{1}{2} p$, conseguentemente il punto supposto G per la parabola esiste, coincidendo con l'unico fuoco C (fig. c).

Con le poste condizioni realizzabili, dalle medesime equazioni si ricavano, cioè dalle (ϵ) , (φ) , i rispettivi valori

$$\rho = \frac{b^2}{a(1 - e^2 \cos^2 \theta)} - \frac{b^2 g \cos \theta}{a^2 (1 - e^2 \cos^2 \theta)}, \quad \rho = \frac{b^2}{a(1 - e^2 \cos^2 \theta)} + \frac{b^2 g \cos \theta}{a^2 (1 - e^2 \cos^2 \theta)}$$

e poichè $g : a = \pm c$, si hanno per l'ellisse

$$(\lambda) \dots \dots \rho = \frac{b^2}{a(1 \pm e \cos \theta)} = \frac{p}{1 \pm e \cos \theta},$$

per l'iperbola

$$(\mu) \dots \dots \rho = \frac{b^2}{a(1 \mp e \cos \theta)} = \frac{p}{1 \mp e \cos \theta},$$

dalla (x) infine ne segue per la parabola

$$(\nu) \dots \dots \rho = \frac{p(1 + \cos \theta)}{\text{sen}^2 \theta} = \frac{p}{1 - \cos \theta}.$$

Conchiudendo si afferma, in riscontro al posto quesito, che nelle curve coniche i soli fuochi, presi per poli, forniscono le più semplici equazioni in coordinate polari; e sono le (λ) , (μ) , (ν) , che si possono includere nell'unica formola

$$(\omega) \dots \dots \rho = \frac{p}{1 \pm e \cos \theta},$$

osservando d'essere p il semiparametro rispettivo a ciascuna curva, per l'ellisse $e < 1$, ed allo stesso deve precedere il segno \pm , secondochè si prende per polo C o C' , per l'iperbola $e > 1$, facendovi precedere il segno \mp a seconda della scelta dei fuochi C, C' , per la parabola si ha esclusivamente $e = -1$.

II. ARGOMENTO.

5. Intendo delle quattro formole esprimenti i seni e coseni della somma e differenza di due dati archi in un cerchio di raggio 1, dipendentemente dai seni e coseni dei singoli archi cioè, dinotati a, b , i due archi dati, le formole

$$(1) \dots \dots \text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{sen } b,$$

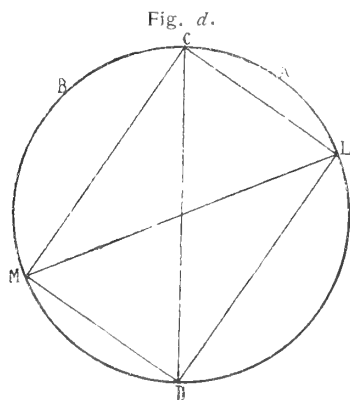
$$(2) \dots \dots \text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cos b - \cos a \text{sen } b,$$

$$(3) \dots \dots \cos(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{sen } b,$$

$$(4) \dots \dots \cos(a - b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{sen } b.$$

Delle stesse si conoscono varie dimostrazioni, alle quali aggiungo la seguente, che parmi assai rimarchevole per la sua semplicità, dipendente dal noto teorema di Tolomeo sui quadrilateri inscritti nel cerchio, ossia dall'uguaglianza tra il prodotto delle diagonali e la somma dei prodotti dei lati opposti presi a coppie.

1° — Consideriamo archi di un cerchio (fig. *d*), il cui raggio sia preso per unità, si



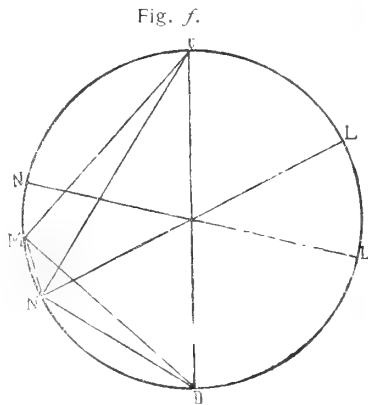
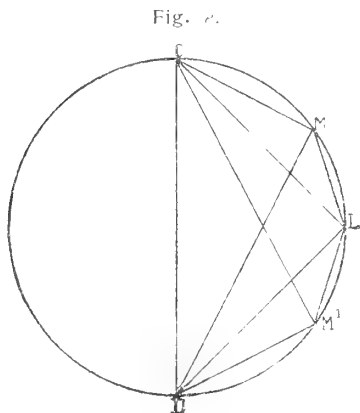
conduca in esso un diametro CD , a destra del quale si prenda un arco $CA = a$, a sinistra un arco $CB = b$, essendo a e b ambedue minori del quadrante $\frac{\pi}{2}$, sicchè siano $2a, 2b, a + b < \pi$; i due dati archi hanno così un estremo comune in C , e formano insieme l'arco $ACB = a + b$, si duplichino questi archi in $CL = 2a, CM = 2b$, avendosi perciò arco $DL = \pi - 2a, DM = \pi - 2b, LCM = 2(a + b)$. Congiunti a scambio per rette due a due i quattro punti C, L, D, M , risulta il quadrilatero inscritto, le cui diagonali sono $CD = 2, LM = 2 \text{ sen}(a + b)$, ed i lati $CL = 2 \text{ sen } a, CM = 2 \text{ sen } b, DL = 2 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{2} - a \right) = 2 \text{ cos } a, DM = 2 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{2} - b \right) = 2 \text{ cos } b$; e per l'invocato teorema avendo luogo l'eguaglianza

$$CD \cdot LM = CL \cdot DM + CM \cdot DL,$$

divisa la stessa per 4, e sostituitevi le precedenti espressioni, si consegue la prima surriferita formola

(1) $\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \text{ cos } b + \text{cos } a \text{ sen } b.$

2° — Se nello stesso cerchio di raggio 1 (fig. e), dopo tirato il diametro CD , e



preso a destra l'arco $CL = 2a$, si porti pure a destra l'arco $CM = 2b$, potrà avvenire o che l'estremo M preceda L , quando sia $a > b$, o che segua ad L in M' , allorchè invece sia $a < b$. Ritenendo la prima ipotesi, e costituito il quadrilatero inscritto coi vertici in C, M, L, D , si hanno per le diagonali $CL = 2 \text{ sen } a, DM = 2 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{2} - b \right) = 2 \text{ cos } b$, e poi lati $CM = 2 \text{ sen } b, DL = 2 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{2} - a \right) = 2 \text{ cos } a, CD = 2, LM = 2 \text{ sen}(a - b)$, e poichè si ha l'eguaglianza

$$CL \cdot DM = CM \cdot DL + CD \cdot LM,$$

dividendo la stessa per 4, e sostituitevi l'espressioni precedenti, risulta la seconda formola sopra riferita

(2) $\text{sen}(a - b) = \text{sen } a \text{ cos } b - \text{cos } a \text{ sen } b.$

Nella seconda ipotesi $a < b$, formato coi quattro punti C, L, M', D , il quadrilatero inscritto, e trattato lo stesso analogamente al precedente, si ricava la formola

(2') $\text{sen}(b - a) = \text{sen } b \text{ cos } a - \text{cos } b \text{ sen } a,$

cioè la stessa (2) con lo scambio tra i due archi a e b , e che si può scrivere anche in quella medesima forma, cangiando i segni ad ambedue i membri.

3° — Osserviamo in terzo luogo che, sussistendo le ineguaglianze $2a, 2b, a + b < \pi$, si può avere in generale $2a + 2b < \pi$, o $2a + 2b > \pi$, quindi come nella (fig. *d*) tirato il diametro CD (fig. *f*) e presi gli archi CL ovvero $CL' = 2a$, $CM = 2b$, a destra ed a sinistra di CD , con l'estremo comune in C , se si conduce il secondo diametro LN , od $L'N'$, l'estremità N cadrà fra D ed M , ed N' fra C ed M , secondochè sia $2a + 2b < \pi$, ovvero $2a + 2b > \pi$; supponiamo avverarsi la prima ipotesi, e coi quattro punti C, M, N, D , si formi il quadrilatero inscritto, le cui diagonali sono $CN = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - a \right) = 2 \cos a$, $DM = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - b \right) = 2 \cos b$, ed i lati $CM = 2 \operatorname{sen} b$, $DN = 2 \operatorname{sen} a$, $CD = 2$, $MN = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - a - b \right) = 2 \cos (a + b)$; intanto ha luogo l'eguaglianza

$$CN \cdot DM = CM \cdot DN + CD \cdot MN,$$

che divisa per 4, e sostituitevi le precedenti espressioni dà la terza formola sopra menzionata

$$(3) \quad \dots \dots \dots \cos (a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Posta l'altra ipotesi $2a + 2b > \pi$, con trattamento analogo al precedente si ottiene la medesima formola (3), donde si rileva che a conseguirla, qualunque sia l'arco $CL = 2a < \pi$, basta condurre i due diametri CD, LN , e farvi concorrere l'arco CM di qualsiasi ampiezza $2b < \pi$, affinchè si abbiano i quattro punti C, D, M, N (comunque quest'ultimi fossero rispettivamente disposti), coi quali formare il relativo quadrilatero inscritto, che fornirà la detta formola (3).

4° — In ultimo luogo, ripresa la (fig. *d*), conservando la parte a destra di CD , si prenda a sinistra l'arco $DM = 2b$, onde si ha arco $CM = \pi - 2b$, ed arco $LDM = 2b + \pi - 2a = \pi - 2(a - b)$, formato il quadrilatero inscritto coi vertici in C, L, D, M , si hanno per le diagonali $CD = 2$, $LM = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - a + b \right) = 2 \cos (a - b)$, e pei lati $CL = 2 \operatorname{sen} a$, $DM = 2 \operatorname{sen} b$, $DL = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - a \right) = 2 \cos a$, $CM = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - b \right) = 2 \cos b$, introdotte queste espressioni nell'uguaglianza

$$CD \cdot LM = CL \cdot DM + CM \cdot DL,$$

divisa per 4, risulta l'ultima delle formole summenzionate

$$(4) \quad \dots \dots \dots \cos (a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

6. Affermata nell'adoperato modo semplicissimo l'esistenza delle formole (1), ..., (4), con la condizione premessa d'essere i due archi a e b ciascuno minore del quadrante $\frac{\pi}{2}$, rimane a provare che le medesime hanno luogo egualmente, qualunque siano le ampiezze di essi archi, e comunque siano i rispettivi segni; il ragionamento riesce ben semplice tenendo presente il comportamento dei seni e coseni degli archi variabili AM in uno stesso cerchio, dei quali restando ferma la origine A , varia l'estremità M , percorrendo la intera circonferenza, una o più volte, nel verso costante, sia positivo sia negativo.

Consideriamo da prima le (1), (3), osservando anzitutto che per la loro forma simmetrica si possono scambiare a piacimento gli archi a e b ; ciò premesso, supponiamo che ad uno di essi a p. e., si aggiunga il quadrante $\frac{\pi}{2}$, perciò posto $a' = a + \frac{\pi}{2}$, e nelle

indicate due formole sostituendo $a' - \frac{\pi}{2}$ ad a , ne vengono le seguenti

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(a' - \frac{\pi}{2} + b\right) &= \operatorname{sen}\left(a' - \frac{\pi}{2}\right) \cos b + \cos\left(a' - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen} b, \\ \cos\left(a' - \frac{\pi}{2} + b\right) &= \cos\left(a' - \frac{\pi}{2}\right) \cos b - \operatorname{sen}\left(a' - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen} b,\end{aligned}$$

ma si hanno

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(a' - \frac{\pi}{2} + b\right) &= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a' - b\right) = -\cos(a' + b), \\ \cos\left(a' - \frac{\pi}{2} + b\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a' - b\right) = \operatorname{sen}(a' + b), \\ \operatorname{sen}\left(a' - \frac{\pi}{2}\right) &= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a'\right) = -\cos a', \quad \cos\left(a' - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a'\right) = \operatorname{sen} a',\end{aligned}$$

risultano pertanto le formole

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a' + b) &= \operatorname{sen} a' \cos b + \cos a' \operatorname{sen} b, \\ \cos(a' + b) &= \cos a' \cos b - \operatorname{sen} a' \operatorname{sen} b,\end{aligned}$$

dimostranti che le suddette (1), (3) sussistono parimente posto $a + \frac{\pi}{2}$ invece di a .

Segue da ciò, che le due formole anzidette dimostrate vere per due archi, ambedue dello stesso segno, e ciascuno minore di $\frac{\pi}{2}$, avranno luogo altresì aggiungendo all'uno di essi un multiplo qualunque di $\frac{\pi}{2}$, e stante la possibilità di scambio tra i due archi a e b , risulta che le medesime sussistono egualmente per archi di qualsiasi ampiezza.

Veniamo infine alla considerazione dei segni precedenti agli archi; li abbiamo sinora riguardati come aventi lo stesso segno, da potersi assumere sempre positivo, adesso supponiamo che abbiano differenti segni, e siano a positivo e b negativo, ognuno di qualunque ampiezza, prendendo un numero k positivo tale, che $2k\pi$ fosse maggiore di b , perciò $2k\pi - b$ sia un arco positivo, per le formole sopra considerate (1), (3), nelle condizioni generali di esistenza già stabilita, si hanno

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a + 2k\pi - b) &= \operatorname{sen} a \cos(2k\pi - b) + \cos a \operatorname{sen}(2k\pi - b), \\ \cos(a + 2k\pi - b) &= \cos a \cos(2k\pi - b) - \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(2k\pi - b),\end{aligned}$$

ma per la periodicità dei seni e coseni col periodo 2π ne seguono

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a + 2k\pi - b) &= \operatorname{sen}(a - b), \quad \cos(a + 2k\pi - b) = \cos(a - b), \\ \operatorname{sen}(2k\pi - b) &= \operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen} b, \quad \cos(2k\pi - b) = \cos b,\end{aligned}$$

adunque risultano come per la (2), (4) le formole

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a - b) &= \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b, \\ \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,\end{aligned}$$

sussistenti con l'arco $-b$ di qualsiasi ampiezza.

La generalità delle surriferite formole (1), (2), (3), (4) resta dunque *pienamente* provata.

PROF. CALDARERA FRANCESCO
nato a Randazzo il dì 5/5/1825.

Diorite orneblendica del Tempiese

Memoria di AURELIO SERRA ⁽¹⁾

RELAZIONE

DELLA COMMISSIONE DI REVISIONE COMPOSTA DAI SOCI EFFETTIVI

PROFF. A. RICCÒ E L. BUCCA (*Relatore*)

Il lavoro petrografico di A. Serra riguarda lo studio di una diorite orneblendica di Tempio (Sardegna), che ha grande importanza geologica, perchè essa si collega con le altre congeneri della Sardegna e della Corsica, dirette tutte secondo unica direzione N-S, e che riconferma ancora l'ipotesi di doversi riguardare le due isole come resti dell'antica Tirrenide, ed ha importanza mineraria, perchè alla presenza di tali rocce si ritiene collegarsi una relativa ricchezza mineraria. Pertanto i Relatori credono che il lavoro possa essere accolto e pubblicato negli Atti dell'Accademia.

Il *La Marmora* (2) riscontrò le rocce *dioritiche* nel versante orientale della *Sardegna*, segnatamente attraverso le plaghe di *Nuoro*, di *Ozieri*, della *Gallura*, ritenendole analoghe a quelle *serpentinose* della *Corsica*. Simili rocce secondo il *Sella* (3) si emisero da fenditure dando luogo alla formazione di dicche e di vene decisamente rivolte da N. a S.: tale allineamento venne confermato dal *Lovisato* (4), il quale in armonia alle ipotesi dapprima sostenute dal *Savi* dal *Suess*, e più recentemente dal *Forsyth Major*, opina che la *Sardegna* costituisca, insieme alla *Corsica*, il residuo evidente della supposta *Tirrenide*. Il *Riva* (5) nei dintorni di *Tempio*, ebbe modo di rilevare intrusioni di rocce volgenti al grigio verdognolo, nelle quali notò, come minerali essenziali, *augite*, miscele di *labradorite bitownite* ed *olivina*, accessori *oligoclasio*, *albite*, *anfibolo*, *biotite*, *quarzo magnetite titanifera*, *apatite*; secondari, *clorite*, *serpentino*, *calcite*, *prehnite*, *muscovite*: furono codeste classificate come *spessartiti diabasiche oliviniche*.

La roccia da me raccolta ed esaminata costituisce una piccola colata a contatto col *granito* in stato di avanzata decomposizione nel lato nord-ovest delle immediate vicinanze

(1) Lavoro eseguito nel gabinetto di Mineralogia della R. Università di Sassari.

(2) LA MARMORA: *Voyage en Sardaigne: Description géologique*. Paris.

(3) SELLA: *Relazione sull'Industria mineraria della Sardegna*.

(4) LOVISATO: *È la Sardegna parte dell'asse centrale della catena Tirrenica?* Rend. Acc. dei Lincei 1885.

(5) RIVA: *Le rocce granitoidi e filoniane della Sardegna*. Atti Reali Acc. di Napoli. Scienze fisiche e naturali. Memorie 1905.

della città di *Tempio*: differisce sensibilmente da quella ora ricordata per la composizione mineralogica, altrettanto non mi è lecito dire di quella chimica poichè, purtroppo, non è data. È per tale ragione che si rende utile un diligente studio particolareggiato, tanto più degno di rilievo in quanto fornisce utili applicazioni della scienza pura alla industria per la presenza di minerali di un certo interesse pratico, che potranno, in punti convenientemente esplorati, dar luogo a feconde iniziative.

La roccia mostra struttura finamente granulare, talvolta compatta; in essa hanno speciale risalto pagliuzze e piccoli granuli di *pirite* e *calcopirite*; al microscopio si rivela costituita in prevalenza da *orneblenda*, segue per quantità il *feldspato* che le mutevoli estinzioni fanno riferire ai vari termini costituenti i *plagioclasti* dall'*albite*, all'*anortite*, all'*andesina*, alla *labradorite*. Questi cristalli, dai granuli interclusi, ai microliti, si trovano per ogni verso compenetrati dalla *orneblenda*: frequentemente si rendono evidenti geminati secondo le leggi dell'*albite*, di *Carlsbad* e del *periclino*. Colori di interferenza vivissimi, volgenti all'azzurro, dispersione degli assi ottici

$$\rho > \nu$$

I cristalli, talora appaiono torbidi, e si mostrano decomposti dando luogo alla formazione di *zoisite*, come prodotto di formazione secondaria o metamorfica.

L'*orneblenda* nelle lamine sottili, si mostra in cristalli con estinzione di circa 20°, con aggregati fibrosi bacillari ed anche in granuli. I cristalli, in genere, notevoli per le dimensioni sviluppate, si riscontrano rotti, sformati e corrosi, spesso allungati secondo l'asse z e per la presenza dal prisma verticale e del pinacoide $\{010\}$ le sezioni figurano pseudo esagonali, non infrequenti sono pure le sezioni di aspetto ottagonale e listiforme ed i geminati secondo $\{100\}$. Il colore per lo più verde giallognolo, talvolta molto scialbo, altre piuttosto volgente al bruno rossastro, in ispecie lungo le faccie $\{010\}$ mostrasi *serpentinizzata*. Le facce terminali, base e prismi obliqui, denotano aspetto spiccatamente fibroso, pleocroismo assai spiccato, assorbimento

$$c > b > a$$

Colori di interferenza giallo-verdognoli ed azzuro bruni

$$c \text{ c} = 14^\circ$$

$$\varepsilon > \nu.$$

L'indice di rifrazione determinato col metodo di *Becke* mi diede i seguenti valori:

$$\alpha = 1,670$$

$$\beta = 1,780$$

$$\gamma = 1,790$$

Dalle differenze

$$\gamma - \beta$$

$$\gamma - \alpha$$

calcolai l'angolo degli assi ottici

$$2V = 67^\circ. 15'.$$

Spesso l'*orneblenda* si mostra inadatta alle osservazioni ottiche poichè alterata in *clorite*, ed in questo caso assume aspetto di reticolato assai complesso. Come prodotto

di secondaria formazione si nota talvolta il *glaucofane* con pleocroismo molto caratteristico.

- a** = violetto bruno
b = verdognolo
c = rosso-giallastro.

Simili interessanti fenomeni di metamorfosi vennero segnalati dall' *Artini* per le *dioriti* di *Val Sesia*, nelle quali ebbe modo di rilevare l' *orneblenda* trasformata in *anfibolo* fibroso verde, dal *Franchi* nelle rocce di *Val del Chisone*, dallo *Stella* e dal *Novarese* in analoghe delle *Alpi*.

Dovuto a metamorfismo di contatto si rinviene l' *amianto*, donde si desumono utili i tentativi di estrazione nei punti ove si rivela capace d' interessare zone di una certa estensione.

La *biotite* si ha in larghe lamine distintamente pleocroiche dal giallo al bruno, talora mostrasi decomposta, dando luogo alla formazione di *magnetite*.

Questa si trova in abbondanza, di frequente, nella roccia in masse informi, rettangolari e triangolari di colore rosso bruno e talvolta azzurrognolo; in essa si rendono talora evidenti, piccoli aghetti riferibili a *rutilo* e ad *ilmenite*, in genere contornati in giallastro dando luogo alla formazione di *titanite*. Accessorio si ha il *quarzo*, il quale si rende evidente in forme *sferolitiche* e in granuli spezzati, talvolta mostra le bipiramidi $(10\bar{1}1)$, (0111) : la misura dell' angolo piano del profilo diede circa $76^{\circ} 31'$. Il prisma (1010) palesa evidenti striature. Si nota la *clinozoisite*, come prodotto di trasformazione della *orneblenda*; in sezioni romboidali e rettangolari, con pleocroismo molto variabile dal giallo al bruno. Rifrazione assai forte,

$$\rho > \nu$$

L' analisi chimica mi fornì i seguenti risultati:

SiO ₂	43, 69	
TiO ₂	2, 11	
Al ₂ O ₃	24, 79	
Fe ₂ O ₃	4, 85	
FeO	1, 02	
MnO	0, 38	
CaO	10, 51	
MgO	6, 96	
Na ₂ O	3, 24	
K ₂ O	0, 67	
Li ₂ O	tracce	(1)
CuO	1, 00	(2)
P ₂ O ₅	tracce	
Perd. per arr.	3, 07	
	102, 29	

(1) La presenza del litio venne constatata micro-chimicamente.

(2) Per le opportune applicazioni è utile rilevare che esiste un intimo legame fra il tenore in Cu di questa roccia e la mineralizzazione cuprifera che si riscontra in varie giaciture simili della *Gallura*: la sua formazione si deve ritenere coeva ed attribuirsi ad una segregazione del magma eruttivo metallifero. Fenomeni metallogenici di un certo rilievo presentano anche le masse scistose delle quali avrò in seguito occasione di occuparmi.

Computando TiO_2 come SiO_2 , calcolando MnO come FeO , detraendo la perdita per arroventamento e CuO si ottiene :

	I	II (1)
SiO_2	45, 27	46, 34
Al_2O_3	24, 79	25, 38
Fe_2O_3	4, 85	4, 96
FeO	1, 40	1, 43
CaO	10, 51	10, 76
MgO	6, 96	7, 12
Na_2O	3, 24	3, 32
K_2O	0, 67	0, 69
	97, 69	100, 00

Seguono i rapporti molecolari

	III	IV (2)
SiO_2	77, 23	51, 47
Al_2O_3	24, 64	16, 42
Fe_2O_3	3, 10	2, 07
FeO	1, 99	1, 33
CaO	19, 21	12, 80
MgO	17, 80	11, 86
Na_2O	5, 34	3, 36
K_2O	0, 74	0, 44
	150, 05	100, 00

Seguendo *Loewinson Lessing*, si ricava la seguente formola

$$\alpha = 1, 15 : \beta = 94, 29$$

$$1, 6 \text{ RO} \cdot \text{R}_2\text{O}_3 \cdot 2, 8 \text{ SiO}_2$$

$$\text{R}_2\text{O} : \text{RO} = 1 : 4, 3$$

Secondo *Osann* si calcolano i seguenti valori :

$$s = 51, 47$$

$$a = 6, 8$$

$$c = 11, 7$$

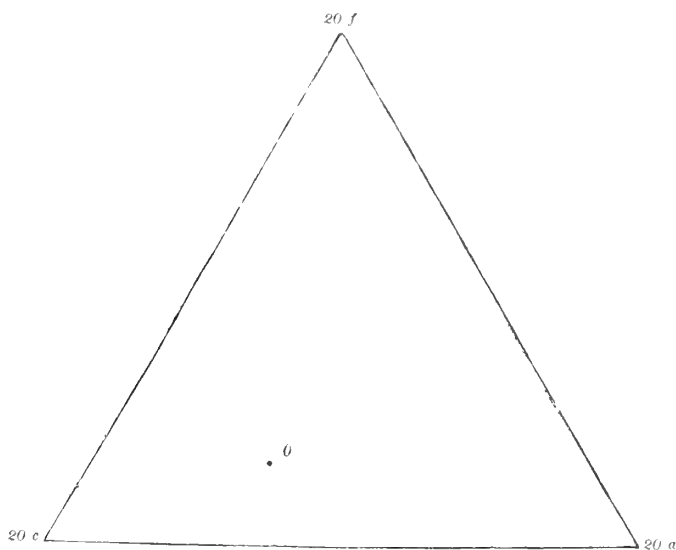
$$f = 1, 5$$

$$n = 5, 9$$

(1) Questa colonna dà i valori percentuali.

(2) » » » » » »

In base ai valori a , c , f possiamo costruire il diagramma appresso effigiato in cui il punto o sarebbe quello rispondente alla composizione della roccia:



Dal complesso dei caratteri mineralogici e chimici sopra riportati si deduce che la presente roccia si deve classificare come *diorite orneblendica*. Mostra una certa analogia con la *diorite* della *Corsica* (1) designata come *corsite* (2) per la sua speciale struttura, senonchè in questa il *feldspato* e la *orneblenda* si mostrano disposti secondo sferoidi a zone alternanti che in prevalenza costituiscono la roccia. Frequentemente si associa la *mica* in specie nelle varietà, come quelle in istudio, compatta. Si riscontrano minerali ferriferi e accessoriamente anche il *quarzo*. Pur mostra punti di contatto con le *pietre verdi* riscontrate dal *Viola* (3) nella *Nurra*. Questi contrassegnò, con metodo rigorosamente scientifico, un magma fondamentale *gabbro-peridotico*, di conseguenza fu indotto ad individualizzarle come *diabasi* di costituzione molto particolare poichè al posto del *pirosseno* rinvenne in gran copia l'*amfibolo*. I rapporti accennati sono resi evidenti dall'analisi chimica che riporto:

SO ₂	=	44, 37
Ti O ₂	=	3, 07
Al ₂ O ₃	=	16, 69
Fe ₂ O ₃	=	8, 03
F O	=	7, 64
Mn O	=	tracce
Mg O	=	4, 07
Ca O	=	7, 44
Na ₂ O	=	3, 99
K ₂ O	=	0, 65
Li ₂ O	=	tracce
H ₂ O	=	3, 23
P ₂ O ₅	=	0, 42
		99, 60

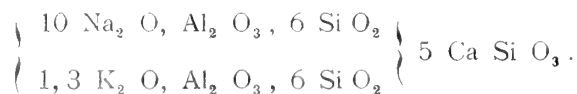
(1) DELESSE: *Sur la diorite orbiculaire de Corse* — *Compt. Rend. Acc. scien.* 1848.

» : » » » » » — *Annales de chemie* 1848.

(2) FERDINAND ZIRKEL: *Lehrbuch der Petrographie*. Leipzig 1894.

(3) VIOLA: *La diabase amfibolica della Nurra*. *Boll. del R. Comitato geologico* 1905.

Come nella nostra roccia vi figura il *ferro titanato* e l'*apatite*, quest'ultima in quantità di gran lunga più rilevante. Il *feldspato* si mostra *saussuritizzato*. La *mica bruna* si riscontra come prodotto di metamorfosi dell'*anfibolo*, pure come prodotto di trasformazione di questo si nota la *zoisite* e la *clorite*. In gran copia rinvenne l'*albite*, come prodotto secondario: per questa, dopo diligente separazione, trovò la seguente composizione:



Sicchè il *feldspato* risulterebbe così composto: $10 \text{ Ab} + 1,3 \text{ or}$.

Maggiori differenziazioni presenta la *spessartite diabasico-olivinica* della plaga *circumtempiese*, già segnalata dal *Riva* nelle fratture sotterranee: non è improbabile che questa sia una forma *eteromorfa* avente composizione mineralogica differente, ma composizione chimica analoga.

Franchi (1) accenna all'esistenza nella *Nurra* di rocce eruttive, riferendole a tipi *metamorfosati gabbroidi-diabasici*, e *Taricco* (2) alla presenza di *dioriti* nella regione *Canaglia*: sono, in generale, intrusioni e affioramenti che spesso si differenziano sensibilmente da punto a punto nella stessa manifestazione. Dioriti vennero pure riscontrate dal von Rath nella Sardegna S. E. (3)

Queste rocce, sia ché per la loro giacitura si trovino in filoni o in colate, si emisero nella venuta a giorno attraverso le preesistenti formazioni *paleozoiche* e conformemente all'opinione già espressa dallo *Zoppi* (4) devono ritenersi posteriori all'epoca *siluriana*, eruttate dal basso all'alto per opera di violenti parossismi.

Potrebbero pure riferirsi all'epoca *secondaria*, fatto questo che troverebbe appoggio nelle interessanti osservazioni del *Viola* che assicura di aver visto i suoi *diabasi* sopra i sedimenti del *secondario*. Il *Deprat* (5) riscontrò la presenza di *dioriti* ricche in orneblenda nelle *Isole Sanguinarie* e presso *Lopigna*, queste ultime palesemente anteriori al *granito*.

Può darsi che siffatte rocce del sistema *Sardo-Corso* non debbansi riferire ad una sola eruzione e si sieno emesse in tempi diversi, non facilmente determinabili, dando luogo a svariati prodotti, i quali talvolta presentano un sensibile distacco, talora grande simiglianza. Trovo opportuno però anche rilevare come nel mutare delle *variabili temperatura, pressione, concentrazione*, uno stesso magma possa pur dar luogo a rocce *variamente differenziate*.

(1) FRANCHI: *Sui giacimenti di minerali di ferro leptocloritico con struttura oolitica della Nurra (Sardegna) Bollettino del R. Comitato Geologico d'Italia Vol. XLI.*

(2) TARICCO: *I giacimenti di ferro oolitico nella Nurra (Sardegna) Rivista del serv. minerario 1909.*

(3) VON RATH: *Studi geologici e mineralogici nell'isola di Sardegna. Sitzungberichten der Nieterrheinischen Gesells. Natur und Heilkunde zu Bonn, 1885.*

(4) ZOPPI: *Descrizione geologica-mineraria dell'Iglesinoide. Roma 1888.*

(5) DEPRAT: *Bull. des services de la carte geol. de la Fr. etudes topogr. souter T. XVI. Paris 1905.*

Sullo sviluppo di un determinante secondo i minori di due matrici complementari

Nota di MICHELE CIPOLLA

Dato un determinante D dell'ordine n :

$$(1) \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

la formola che dà lo sviluppo di esso secondo i prodotti degli elementi di una data riga per gli elementi di una data colonna si stabilisce assai elegantemente introducendo il simbolo

$$\alpha_{js}^{(ri)}$$

per denotare l'aggiunto dell'elemento a_{js} nell'aggiunto α_{ri} dell'elemento a_{ri} , ed osservando che tale simbolo muta soltanto di segno se uno degl'indici superiori si scambia con l'inferiore di egual posto:

$$(2) \quad \alpha_{js}^{(ri)} = -\alpha_{ji}^{(rs)}.$$

Ed infatti, fissate nel determinante D la riga r^{ima} e la colonna s^{ima} , si hanno gli sviluppi ordinari

$$D = a_{rs} \alpha_{rs} + \sum_i a_{ri} \alpha_{ri} \quad (i = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, n),$$

$$a_{ri} = \sum_j \alpha_{js}^{(ri)} a_{js} \quad (j = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, n),$$

e se ne deduce, in base alla (2), la formola ¹⁾

$$D = a_{rs} \alpha_{rs} - \sum_{i,j} a_{ri} \alpha_{js}^{(rs)} a_{ji}.$$

Estendendo questo procedimento si perviene allo sviluppo del determinante secondo i prodotti dei minori contenuti in p righe pei minori contenuti in q colonne assegnate ad arbitrio.

La formola è nota nell'ipotesi che le righe e le colonne assegnate siano le ultime p righe e le ultime q colonne del determinante ²⁾; ma non ci risulta che sia stata stabilita

¹⁾ L. O. HESSE, Journ. reine u. angew. Math., t. 69, a. 1868, p. 319.

²⁾ O. NICOLETTI, Annali di Matematica, s. 3, t. 8, a. 1902, p. 287.

in generale. Poichè appunto nel caso generale sorgono quelle difficoltà di segno che già si presentano nel semplice caso, dianzi considerato, di una sola riga e di una sola colonna, non ci sembra superfluo mostrare come può essere allora risolta la questione.

Le difficoltà cui si fa cenno, saranno qui superate coll'estendere alle matrici la nozione di classe data ordinariamente pei minori di un determinante, ed introducendo un simbolo che nella rappresentazione della classe ha giuoco agile ed interessante.

1. Con una lettera greca minuscola denoteremo una combinazione degli'indici $1, 2, \dots, n$.

Se λ è una tale combinazione, con λ' indicheremo la combinazione complementare di λ , cioè quella formata dagli'indici che restano sopprimendo da $1, 2, \dots, n$ gli'indici appartenenti a λ .

Con $\Sigma\lambda$ si denoterà la somma di tutti gli'indici che costituiscono la combinazione λ .

Se due combinazioni λ, μ non hanno elementi comuni, rappresenteremo con $\lambda\mu$ la combinazione formata dalla riunione degli'indici appartenenti a λ e μ , e useremo il simbolo

$$s(\lambda, \mu)$$

per indicare l'unità positiva o negativa secondo che il numero delle inversioni che gli elementi di μ fanno con quelli di λ (rispetto alla permutazione principale $1, 2, \dots, n$) è pari o dispari.

Da questa definizione si deduce facilmente la prop.:

1 — Se

$$\lambda = (l_1, l_2, \dots, l_h), \quad \mu = (m_1, m_2, \dots, m_k),$$

risulta $s(\lambda, \mu)$ eguale a 1 o -1 secondo che positivo o negativo è il prodotto delle hk differenze

$$l_i - m_j \quad (i = 1, 2, \dots, h; j = 1, 2, \dots, k).$$

Per conseguenza:

2 — Ha luogo la proprietà

$$s(\lambda, \mu) = (-1)^{hk} s(\mu, \lambda).$$

3 — Se λ, μ, ν sono combinazioni a due a due senza elementi comuni, si ha

$$s(\lambda\mu, \nu) = s(\lambda, \nu) s(\mu, \nu), \quad s(\nu, \lambda\mu) = s(\nu, \lambda) s(\nu, \mu).$$

Infine per una nota proprietà ³⁾ risulta:

4 — Essendo h il numero degli elementi di λ , si ha

$$s(\lambda', \lambda) = (-1)^{\frac{h(h+1)}{2}}.$$

2. Se λ, μ sono due combinazioni dello stesso numero k di indici:

$$\lambda = (l_1, l_2, \dots, l_k), \quad \mu = (m_1, m_2, \dots, m_k),$$

denoteremo con

$$a_{\lambda, \mu}$$

³⁾ Cfr. ad es.: M. CIPOLLA, *Analisi algebrica*, Palermo, ed. Capozzi, a. 1914, p. 62.

quel minore in D che è contenuto nelle righe d'indici l_1, l_2, \dots, l_k , e nelle colonne d'indici m_1, m_2, \dots, m_k ; e con

$${}^c a_{\lambda, \mu}, \quad a_{\lambda, \mu}$$

rispettivamente il minore complementare e l'aggiunto di $a_{\lambda, \mu}$ in D .

Pertanto

$${}^c a_{\lambda, \mu} = a_{\lambda', \mu'}, \quad a_{\lambda, \mu} = (-1)^{\Sigma\lambda + \Sigma\mu} \cdot {}^c a_{\lambda, \mu}.$$

Essendo poi ρ, σ due combinazioni di p indici ciascuna, contenenti λ, μ rispettivamente, si denoterà con

$$a_{\lambda, \mu}^{(\rho, \sigma)}$$

l'aggiunto di $a_{\lambda, \mu}$ in $a_{\rho, \sigma}$ ossia in ${}^c a_{\rho', \sigma'}$.

In altri termini, $a_{\lambda, \mu}^{(\rho, \sigma)}$ è uguale al minore ${}^c a_{\lambda\rho', \mu\sigma'}$ preso col segno $+$ o $-$ secondo che la classe di $a_{\lambda, \mu}$ in $a_{\rho, \sigma}$ è pari o dispari.

Per rappresentare questa classe si osservi che, se p_i è il numero degli indici in ρ' che sono minori di l_i , e q_i il numero degli indici in σ' che sono minori di m_i , la classe di $a_{\lambda, \mu}$ in $a_{\rho, \sigma}$, giusta l'ordinaria definizione, è pari o dispari secondo che pari o dispari è la somma

$$\sum_i (l_i - p_i) + \sum_i (m_i - q_i) \quad \text{eguale a} \quad \Sigma\lambda + \Sigma\mu - \sum_i p_i - \sum_i q_i.$$

D'altra parte, se

$$\rho' = (r'_1, r'_2, \dots, r'_{n-p}),$$

il numero p_i è pari o dispari secondo che è positivo o negativo il prodotto

$$(r'_1 - l_i)(r'_2 - l_i) \dots (r'_{n-p} - l_i),$$

e però Σp_i è pari o dispari secondo che $s(\rho', \lambda)$ è uguale a 1 o a -1 .

Analogamente Σq_i è pari o dispari secondo che $s(\sigma', \mu)$ è uguale a 1 o a -1 . Si ha quindi

$$(3) \quad a_{\lambda, \mu}^{(\rho, \sigma)} = (-1)^{\Sigma\lambda + \Sigma\mu} s(\rho', \lambda) s(\sigma', \mu) {}^c a_{\lambda\rho', \mu\sigma'}.$$

In base a questo risultato, se il minore $a_{\varphi, \psi}$ è contenuto nel complementare di $a_{\rho, \sigma}$ ossia in $a_{\rho', \sigma'}$, si ha

$$a_{\varphi, \psi}^{(\rho, \sigma)} = (-1)^{\Sigma\varphi + \Sigma\psi} s(\rho, \varphi) s(\sigma, \psi) {}^c a_{\varphi\rho, \psi\sigma}.$$

Se quindi si denota con

$$\alpha_{\varphi, \psi}^{(\rho, \sigma)}$$

l'aggiunto di $a_{\varphi, \psi}$ in $a_{\rho, \sigma}$, ossia il minore $a_{\varphi, \psi}^{(\rho', \sigma')}$ preso col segno che compete all'aggiunto $a_{\rho, \sigma}$ di $a_{\rho, \sigma}$, risulta

$$(4) \quad a_{\varphi, \psi}^{(\rho, \sigma)} = (-1)^{\Sigma\rho + \Sigma\sigma + \Sigma\varphi + \Sigma\psi} \cdot s(\rho, \varphi) s(\sigma, \psi) \cdot {}^c a_{\varphi\rho, \psi\sigma}.$$

3. Data una matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{array} \right\|,$$

e considerata una matrice $\|a_{\lambda, \mu}\|$ contenuta in essa, diremo che $\|a_{\lambda, \mu}\|$ è di classe pari o dispari secondo che è uguale a 1 o a -1 l'espressione

$$(-1)^{\Sigma\lambda + \Sigma\mu}.$$

Facilmente si riconosce che due matrici complementari sono della stessa classe.

Come per il caso di un minore (n. 2) si dimostra che la classe di una matrice $\|a_{\lambda, \mu}\|$ contenuta in una matrice $\|a_{\rho, \sigma}\|$ che a sua volta è contenuta nella matrice data, è pari o dispari secondo che è uguale a 1 o a -1 l'espressione

$$(-1)^{\Sigma\lambda + \Sigma\mu} s(\rho', \lambda) s(\sigma', \mu).$$

Con $\|a_{\rho, \sigma}\|$ denoteremo la matrice *aggiunta* di $\|a_{\rho, \sigma}\|$ ossia la matrice complementare di $\|a_{\rho, \sigma}\|$ ma i cui minori s'intendono assunti col segno che compete alla classe di $\|a_{\rho, \sigma}\|$.

Se la matrice complementare di $\|a_{\lambda, \mu}\|$ in $\|a_{\rho, \sigma}\|$ è quadrata, denoteremo con

$$a_{\lambda, \mu}^{(\rho, \sigma)}$$

il minore che corrisponde ad essa, preso col segno che compete alla classe di $\|a_{\lambda, \mu}\|$ in $\|a_{\rho, \sigma}\|$.

Tale minore si dirà l'*aggiunto* di $\|a_{\lambda, \mu}\|$ in $\|a_{\rho, \sigma}\|$. Pertanto:

$$(5) \quad a_{\lambda, \mu}^{(\rho, \sigma)} = (-1)^{\Sigma\lambda + \Sigma\mu} s(\rho', \lambda) s(\sigma', \mu) \cdot {}^c a_{\lambda\rho', \mu\sigma'}.$$

In fine, se la matrice $\|a_{\varphi, \psi}\|$ è contenuta nella matrice complementare di $\|a_{\rho, \sigma}\|$, ossia in $\|a_{\rho', \sigma'}\|$, e se la complementare di $\|a_{\varphi, \psi}\|$ in $\|a_{\rho', \sigma'}\|$ è quadrata, denoteremo con

$$a_{\varphi, \psi}^{(\rho, \sigma)}$$

il corrispondente minore $a_{\varphi, \psi}^{(\rho', \sigma')}$ preso col segno che compete alla classe di $\|a_{\rho, \sigma}\|$ e lo diremo l'aggiunto di $\|a_{\varphi, \psi}\|$ in $\|a_{\rho, \sigma}\|$:

$$(6) \quad a_{\varphi, \psi}^{(\rho, \sigma)} = (-1)^{\Sigma \rho + \Sigma \sigma + \Sigma \varphi + \Sigma \psi} \cdot s(\rho, \varphi) s(\sigma, \psi) {}^c a_{\varphi \rho, \psi \sigma}.$$

4. Consideriamo ora una matrice qualunque $\|a_{\rho, \sigma}\|$ di p righe e q colonne, contenuta nel determinante dato D .

Per fissare le idee supponiamo sia $p < q$, e poniamo

$$d = q - p.$$

Sviluppiamo il determinante D secondo i minori d'ordine p , contenuti nelle p righe i cui indici formano la combinazione ρ . Si ha

$$(7) \quad D = \sum_{\tau} a_{\rho, \tau} \alpha_{\rho, \tau},$$

essendo la somma estesa a tutte le combinazioni τ a p a p degl'indici $1, 2, \dots, n$.

Considerata una combinazione τ e supposto che sia r il numero degl'indici in essa diversi da quelli di σ , denotiamo con ψ_r l'insieme dei detti r indici e con ν_{p-r} l'insieme dei $p-r$ rimanenti che appartengono tutti a σ .

Evidentemente r non può superare il più piccolo, che diciamo m , dei numeri $p, n-q$.

La (7) può quindi mettersi sotto la forma:

$$(8) \quad D = \sum_{r=0}^m \sum_{\psi_r} \sum_{\nu_{p-r}} a_{\rho, \psi_r \nu_{p-r}} \alpha_{\rho, \psi_r \nu_{p-r}},$$

essendo il secondo sommatorio esteso a tutte combinazioni ψ_r ad r ad r degl'indici appartenenti a σ' , e il terzo a tutte le combinazioni ν_{p-r} a $p-r$ a $p-r$ degl'indici appartenenti a σ .

Sviluppando $a_{\rho, \psi_r \nu_{p-r}}$ secondo i minori d'ordine r contenuti nelle colonne i cui indici formano la combinazione ψ_r , e denotando con ρ_r una qualsivoglia combinazione ad r ad r degl'indici ρ , si ha

$$a_{\rho, \psi_r \nu_{p-r}} = \sum_{\rho_r} a_{\rho_r, \psi_r} a_{\rho_r, \psi_r}^{(\rho, \psi)},$$

avendo posto per semplicità

$$(9) \quad \psi = \psi_r \nu_{p-r}.$$

Come pure, sviluppando $a_{\rho, \psi_r \nu_{p-r}}$ secondo i minori d'ordine $r+d$, contenuti nelle colonne i cui indici formano la combinazione σ_{r+d} complementare di ν_{p-r} rispetto a σ :

$$(10) \quad \sigma = \sigma_{r+d} \nu_{p-r},$$

e denotando con φ_{r+d} una qualsivoglia combinazione ad $r+d$ ad $r+d$ degl'indici ρ' , si ha

$$a_{\rho, \psi_r \nu_{p-r}} = \sum_{\varphi_{r+d}} a_{\varphi_{r+d}, \sigma_{r+d}} a_{\varphi_{r+d}, \sigma_{r+d}}^{(\rho, \psi)}.$$

Sostituendo nella (8) ad $a_{\rho, \psi r \nu_{p-r}}$ e ad $\alpha_{\rho, r \psi \nu_{p-r}}$ le espressioni ottenute si ha

$$(11) \quad D = \sum_{r=0}^m \sum_{\rho_r} \sum_{\psi_r} \sum_{\varphi_{r+d}} \sum_{\sigma_{r+d}} a_{\rho_r, \psi_r} a_{\varphi_{r+d}, \sigma_{r+d}} a_{\rho_r, \psi_r}^{(\rho, \psi)} a_{\varphi_{r+d}, \sigma_{r+d}}^{(\rho, \psi)},$$

avendo invertito i sommatore, e sostituito al sommatore relativo a ν_{p-r} il sommatore rispetto a σ_{r+d} , perchè, data una delle combinazioni ν_{p-r}, σ_{r+d} , l'altra è determinata in virtù di (10).

Essendo intanto

$$\sigma \sigma' = \psi \psi',$$

si ha, per le (9) e (10):

$$\sigma_{r+d} \nu_{p-r} \sigma' = \psi_r \nu_{p-r} \psi'$$

e però

$$(12) \quad \psi_r \psi' = \sigma_{r+d} \sigma'.$$

Ora si ha, tenendo presenti questo risultato e la formola (3):

$$a_{\rho_r, \psi_r}^{(\rho, \psi)} = (-1)^{\Sigma \rho_r + \Sigma \psi_r} s(\rho', \rho_r) s(\psi', \psi_r) a_{\rho_r, \rho', \sigma_{r+d} \sigma'}.$$

D'altra parte, poichè la matrice complementare di $\|a_{\rho_r, \sigma_{r+d}}\|$ in $\|a_{\rho, \sigma}\|$ è quadrata, risulta in base alla (5):

$$a_{\rho_r, \sigma_{r+d}}^{(\rho, \sigma)} = (-1)^{\Sigma \rho_r - \Sigma \sigma_{r+d}} s(\rho', \rho_r) s(\sigma', \sigma_{r+d}) a_{\rho_r, \rho', \sigma_{r+d} \sigma'}.$$

quindi dal confronto con la precedente ricavasi:

$$(13) \quad a_{\rho_r, \psi_r}^{(\rho, \psi)} = (-1)^{\Sigma \psi_r + \Sigma \sigma_{r+d}} s(\psi, \psi_r) s(\sigma', \sigma_{r+d}) a_{\rho_r, \sigma_{r+d}}^{(\rho, \sigma)}.$$

Analogamente, in base alla (4):

$$a_{\varphi_{r+d}, \sigma_{r+d}}^{(\rho, \psi)} = (-1)^{\Sigma \rho + \Sigma \psi + \Sigma \varphi_{r+d} + \Sigma \psi_r} s(\rho, \varphi_{r+d}) s(\psi, \sigma_{r+d}) a_{\varphi_{r+d}, \rho, \sigma_{r+d} \psi}.$$

ma si ha pure per la (6), ed osservando che $\sigma_{r+d} \psi = \psi_r \sigma$:

$$a_{\varphi_{r+d}, \psi_r}^{(\rho, \sigma)} = (-1)^{\Sigma \rho + \Sigma \sigma + \Sigma \varphi_{r+d} + \Sigma \psi_r} s(\rho, \varphi_{r+d}) s(\sigma, \psi_r) a_{\varphi_{r+d}, \rho, \sigma_{r+d} \psi}.$$

quindi

$$(14) \quad a_{\varphi_{r+d}, \sigma_{r+d}}^{(\rho, \psi)} = (-1)^{\Sigma \psi + \Sigma \sigma + \Sigma \sigma_{r+d} + \Sigma \psi_r} s(\psi, \sigma_{r+d}) s(\sigma, \psi_r) a_{\varphi_{r+d}, \psi_r}^{(\rho, \sigma)}.$$

Ora nel secondo membro l'esponente di -1 , in virtù di (10) e (11), è pari, inoltre si ha, per le proprietà indicate al n. 1,

$$\begin{aligned} s(\psi, \sigma_{r+d}) s(\sigma, \psi_r) &= s(\psi_r, \sigma_{r+d}) s(\nu_{p-r}, \sigma_{r+d}) s(\nu_{p-r}, \psi_r) s(\sigma_{r+d}, \psi_r) = \\ &= (-1)^{r(r+d)} s(\nu_{p-r}, \sigma_{r+d}) s(\nu_{p-r}, \psi_r), \end{aligned}$$

quindi la (14) diventa :

$$\alpha_{\varphi_{r+d}, \sigma_{r+d}}^{(\rho, \psi)} = (-1)^{r(r+d)} S(\nu_{r-\rho}, \sigma_{r+d}) S(\nu_{p-r}, \psi_r) \alpha_{\varphi_{r+d}, \psi_r}^{(\rho, \sigma)},$$

e da questa e dalla (13) si trae :

$$(15) \quad \alpha_{\varrho_r, \psi_r}^{(\rho, \psi)} \alpha_{\varphi_{r+d}, \sigma_{r+d}}^{(\rho, \psi)} = (-1)^{r(r+d) + \sum \psi_r + \sum \sigma_{r+d}} \cdot S(\psi' \nu_{p-r}, \psi_r) S(\sigma' \nu_{p-r}, \sigma_{r+d}) \alpha_{\varrho_r, \sigma_{r+d}}^{(\rho, \sigma)} \alpha_{\varphi_{r+d}, \psi_r}^{(\rho, \sigma)}.$$

Ma evidentemente e in base alla prop. 1^a si ha

$$S(\psi' \nu_{p-r}, \psi_r) = S(\psi'_r, \psi_r) = (-1)^{\sum \psi_r - \frac{r(r+1)}{2}},$$

$$S(\sigma' \nu_{p-r}, \sigma_{r+d}) = S(\sigma'_{r+d}, \sigma_{r+d}) = (-1)^{\sum \sigma_{r+d} - \frac{(r+d)(r+d+1)}{2}},$$

e però la (15) diviene

$$\alpha_{\varrho_r, \psi_r}^{(\rho, \psi)} \alpha_{\varphi_{r+d}, \sigma_{r+d}}^{(\rho, \psi)} = (-1)^{r + \frac{d(d+1)}{2}} \alpha_{\varrho_r, \sigma_{r+d}}^{(\rho, \sigma)} \alpha_{\varphi_{r+d}, \psi_r}^{(\rho, \sigma)}.$$

Per sostituzione nella (11) si ottiene finalmente :

$$(16) \quad D = (-1)^{\frac{d(d+1)}{2}} \sum_{r=0}^m (-1)^r \sum_{\varrho_r, \psi_r} \sum_{\varphi_{r+d}, \sigma_{r+d}} a_{\varrho_r, \psi_r} a_{\varphi_{r+d}, \sigma_{r+d}} \alpha_{\varrho_r, \sigma_{r+d}}^{(\rho, \sigma)} \alpha_{\varphi_{r+d}, \psi_r}^{(\rho, \sigma)}.$$

È da notare che in questo sviluppo

$$a_{\varrho_r, \psi_r}, \quad a_{\varphi_{r+d}, \sigma_{r+d}}$$

sono due minori qualunque degli ordini $r, r+d$ rispettivamente delle matrici fra loro complementari

$$\| a_{\varrho, \sigma'} \|, \quad \| a_{\varrho', \sigma} \|;$$

mentre

$$a_{\varrho_r, \sigma_{r+d}}^{(\rho, \sigma)}, \quad a_{\varphi_{r+d}, \psi_r}^{(\rho, \sigma)}$$

sono — salvo il segno da determinarsi com'è detto al n. 3 — due minori degli ordini $p-r, n-q-r$ delle matrici complementari

$$\| a_{\varrho, \sigma} \|, \quad \| a_{\varrho', \sigma'} \|,$$

e risultano completamente determinati dai primi due.

La parte dello sviluppo (16) corrispondente al valore 0 di r è

$$\sum_{\varphi_d, \sigma_d} a_{\varphi_d, \sigma_d} a_{\varrho_0, \sigma_d}^{(\rho, \sigma)} \alpha_{\varphi_d, \psi_0}^{(\rho, \sigma)},$$

dove $a_{\rho, \sigma}^{(\rho, \sigma)}$ denota, col segno che gli spetta, uno qualunque dei determinanti maggiori, cioè dell'ordine massimo p , della matrice $\|a_{\rho, \sigma}\|$, e $a_{\varphi_d, \psi_d}^{(\rho, \sigma)}$ denota, col debito segno, uno qualunque dei determinanti maggiori (d'ordine $n - q$) della matrice complementare di $\|a_{\rho, \sigma}\|$.

Se la matrice $\|a_{\rho, \rho}\|$ è quadrata allora la somma precedente si riduce al prodotto $a_{\rho, \sigma} a_{\rho, \sigma}$, e la (16) diviene:

$$D = a_{\rho, \sigma} a_{\rho, \sigma} + \sum_{r=1}^m (-1)^r \sum_{\varrho_r, \psi_r} \sum_{\varphi_r, \sigma_r} a_{\rho_r, \psi_r} a_{\varphi_r, \sigma_r} a_{\rho_r, \sigma_r}^{(\rho, \sigma)} a_{\varphi_r, \psi_r}^{(\rho, \sigma)},$$

dove $a_{\rho_r, \sigma_r}^{(\rho, \sigma)}$ è l'aggiunto di a_{ρ_r, σ_r} in $a_{\rho, \sigma}$, e $a_{\varphi_r, \psi_r}^{(\rho, \sigma)}$ l'aggiunto di a_{φ_r, ψ_r} in $a_{\rho, \sigma}$.

Catania, aprile 1917.

**Sulla determinazione della base canonica di un ideale
in un corpo quadratico.**

Nota di MICHELE CIPOLLA

Denotando con \mathbf{I} la classe dei numeri interi di un dato corpo algebrico, un ideale principale del corpo, determinato dal numero α appartenente ad \mathbf{I} , cioè l'insieme di tutti i numeri in \mathbf{I} che sono divisibili per α , può essere rappresentato con $\mathbf{I}\alpha$; e un ideale qualunque determinato da k numeri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ appartenenti ad \mathbf{I} , cioè l'insieme dei numeri del corpo che sono della forma

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_k\alpha_k,$$

essendo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ elementi qualsivogliano di \mathbf{I} , può rappresentarsi con

$$\mathbf{I}\alpha_1 + \mathbf{I}\alpha_2 + \dots + \mathbf{I}\alpha_k$$

cioè come *somma* d'ideali principali ¹⁾.

Se il corpo è di grado n , esistono, nell'ideale, n numeri $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ tali che l'ideale stesso è anche l'insieme

$$\mathbf{n}\beta_1 + \mathbf{n}\beta_2 + \dots + \mathbf{n}\beta_n,$$

essendo \mathbf{n} la classe dei numeri razionali interi relativi; in altri termini, ogni numero appartenente all'ideale è una combinazione lineare a coefficienti razionali interi (relativi) dei numeri $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Si dice allora che i numeri $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ costituiscono una *base* dell'ideale.

Si dimostra che esistono quante si vogliano basi di un ideale, ma generalmente non si assegna un procedimento per determinarne effettivamente una quando l'ideale è dato come somma di ideali principali. Ed è forse per le difficoltà che la questione presenta nel caso generale di un corpo algebrico qualunque che si trascura di risolverla anche nel caso di un corpo quadratico ²⁾.

¹⁾ Un ideale può definirsi come somma di un numero *finito* di ideali principali.

²⁾ Circa l'esistenza di una base di un ideale in un corpo quadratico e le proprietà della base canonica (n. 1) cfr.:

J. SOMMER, *Vorlesungen über Zahlentheorie. Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, Leipzig, a. 1917 (Edition française par A. LEVY, Paris, a. 1911, p. 38);

D. HILBERT, *Théorie des corps de nombres algébriques*, trad. de l'allemand par A. LÉVY et TH. GOT, Paris, a. 1913, Note IV par G. HUMBERT, p. 317.

In un corpo quadratico è quasi immediata la determinazione di una base se l'ideale è principale. Nel caso che l'ideale sia somma di più ideali principali, determinata una base per ciascuno di questi, si può procedere alla determinazione di una base per la somma dei primi due, poi di una base della somma dei primi due e del terzo, e così via. Ma da questo procedimento non si rileva facilmente il semplice risultato che forma l'oggetto di questa nota.

1. Consideriamo il corpo $\{\sqrt{m}\}$ definito dalla radice quadrata di un numero m razionale intero (positivo o negativo), diverso da 1, e non divisibile per il quadrato di alcun numero razionale intero maggiore di 1.

La classe \mathbf{I} degl'interi del corpo è formata da tutti i numeri della forma $a + b\omega$, essendo a, b numeri razionali interi (relativi) qualunque, ed

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{m} & , \text{ se } m \equiv 1 \pmod{4} , \\ \frac{1 + \sqrt{m}}{2} & , \text{ » } m \equiv 1 \text{ »} \end{cases}$$

Denotando con $N(a + b\omega)$ la norma di $a + b\omega$, risulta

$$N(a + b\omega) = \begin{cases} a^2 - b^2 m & , \text{ se } m \equiv 1 \pmod{4} , \\ a^2 + ab - b^2 \frac{m-1}{4} & , \text{ » } m \equiv 1 \text{ »} \end{cases}$$

Dato un ideale \mathbf{A} (non nullo) del corpo, si dimostrano facilmente ²⁾ le prop.:

1 -- Il più piccolo numero j razionale intero positivo, appartenente ad \mathbf{A} , è eguale al massimo comun divisore dei numeri razionali interi in \mathbf{A} .

2 -- Il più piccolo valore positivo j_2 che ha il coefficiente y di ω nei numeri $x + y\omega$ in \mathbf{A} , è eguale al massimo comun divisore dei coefficienti stessi.

3 -- Fra i numeri della forma $x + j_2\omega$ in \mathbf{A} , il più piccolo valore non negativo j_1 di x è uguale al minimo resto non negativo (mod. j) del valore di x in uno qualsivoglia dei detti numeri.

4 -- I numeri j, j_1 sono multipli di j_2 .

5 -- I numeri

$$j, j_1 + j_2\omega$$

costituiscono una base dell'ideale. Ogni altra base si può ottenere da questa (e quindi da una qualunque fissata ad arbitrio) mediante una trasformazione lineare unimodulare a coefficienti razionali interi.

I numeri $j, j_1 + j_2\omega$ diconsi il primo e il secondo numero fondamentale dell'ideale, e costituiscono la cosiddetta base canonica dell'ideale.

2. Sia

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}(a_1 + b_1\omega) + \mathbf{I}(a_2 + b_2\omega) + \dots + \mathbf{I}(a_k + b_k\omega),$$

e procediamo alla determinazione della base canonica.

Si ha innanzi tutto la prop.:

1 — Il numero j_2 è uguale al massimo comun divisore dei numeri $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$:

$$(1) \quad j_2 = D(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k),$$

Infatti un numero qualunque in \mathbf{A} è della forma

$$\sum_{i=1}^k (x_i + y_i \omega)(a_i + b_i \omega),$$

essendo x_i, y_i numeri razionali interi; e però, secondo che ω è uguale a \sqrt{m} o a $\frac{1+\sqrt{m}}{2}$, il coefficiente di ω è di una delle due forme:

$$\sum_{i=1}^k (a_i y_i + b_i x_i), \quad \sum_{i=1}^k [(a_i + b_i) y_i + b_i x_i],$$

e se ne deduce che, in entrambi i casi, il massimo comun divisore dei coefficienti di ω nei numeri appartenenti ad \mathbf{A} è uguale al massimo comun divisore dei numeri $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$.

2 — Il numero $\frac{j_1}{j_2}$ è l'unico numero razionale intero, non negativo, minore di $\frac{j}{j_2}$, che soddisfa contemporaneamente alle k congruenze:

$$(2) \quad b_i z \equiv a_i, \quad b_2 z \equiv a_2, \dots, b_k z \equiv a_k \quad (\text{mod. } j).$$

Infatti, corrispondentemente al numero $a_i + b_i \omega$ devono esistere due numeri razionali interi x_i, y_i tali che si abbia

$$j x_i + (j_1 + j_2 \omega) y_i = a_i + b_i \omega.$$

Se ne deduce

$$j_2 y_i = b_i, \quad j x_i + j_1 y_i = a_i,$$

e però

$$j x_i + \frac{j_1}{j_2} b_i = a_i.$$

Donde segue che $\frac{j_1}{j_2}$ deve soddisfare alle (2). Resta a dimostrare che le (2) ammet-

tono una sola soluzione comune che sia non negativa e minore di $\frac{j}{j_1}$.

Ed infatti le soluzioni comuni alle (2) sono quelle delle congruenze

$$\frac{b_i}{d_i} z \equiv \frac{a_i}{d_i} \pmod{\frac{j}{D(d_i, j)}} \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

essendo

$$(3) \quad d_i = D(a_i, b_i),$$

e però anche quelle delle congruenze

$$(4) \quad z \equiv \frac{a_i}{d_i} h_i \pmod{\frac{j}{D(d_i, j)}} \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

dove h_i è un numero soddisfacente alla congruenza

$$\frac{b_i}{d_i} h_i \equiv 1 \pmod{\frac{j}{D(d_i, j)}},$$

che è possibile essendo $\frac{b_i}{d_i}$ primo col modulo.

Ora alle (4) può sostituirsi un'unica congruenza:

$$z \equiv c \pmod{\mu},$$

essendo μ il minimo comune multiplo dei moduli delle congruenze (4), e c un numero ben determinato, che si deduce dai moduli e dai secondi membri delle (4) secondo note regole ³⁾.

³⁾ Condizione necessaria e sufficiente perchè esista una soluzione comune alle congruenze

$$z \equiv c_i \pmod{m_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

è che ciascuna differenza $c_i - c_s$ sia divisibile per $D(m_i, m_s)$. Quando questa condizione è soddisfatta (come lo è naturalmente nel nostro caso) i numeri z che verificano le congruenze proposte, sono date dalla congruenza

$$z \equiv \gamma_k \pmod{\mu_k},$$

nella quale γ_k ottiene per ricorrenza ponendo

$$\gamma_1 = c_1, \quad \gamma_{i+1} \equiv \gamma_i + \mu_i \xi_i \pmod{\mu_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k-1),$$

ed essendo μ_i il minimo comune multiplo dei numeri m_1, m_2, \dots, m_{i-1} ($i = 1, 2, \dots, k$), e ξ_i una soluzione qualsivoglia della congruenza

$$\mu_i \xi_i + \gamma_i \equiv c_{i+1} \pmod{m_i}.$$

In proposito cfr.:

M. CIPOLLA, *Note critiche ed esercizi di analisi algebrica*, litogr., Palermo, ed. D. Capozzi, a. 1916, p. 18.

C. F. GAUSS riconduce la questione al caso in cui i moduli siano primi tra loro a due a due; *Disquisitiones arithmeticae*, Lipsiae, a. 1801 (= Werke, t. 1), art. 32-36. La questione è trattata estesamente da T. J. STIELTJES, *Essai sur la Théorie des nombres*, Ann. de Toulouse, a. 1890, pp. 1-103 (Paris, Gauthier Villars, a. 1895).

Le soluzioni comuni alle (2) sono dunque i numeri congrui a c secondo il mod. μ . Ora essendo

$$\mu \quad \text{multiplo di} \quad \frac{j}{D(d_i, j)},$$

risulta

$$\mu d_i \quad \gg \quad \gg \quad \frac{D(d_i, j)}{j d_i},$$

e però μd_i è anche multiplo di j , ed è multiplo di j il massimo comun divisore dei numeri $\mu d_1, \mu d_2, \dots, \mu d_n$, cioè μj_2 .

Ed allora, essendo μ multiplo di $\frac{j}{j_2}$, ogni soluzione comune alle (2) è congrua a c anche secondo il mod. $\frac{j}{j_2}$, e quindi fra le dette soluzioni ce n'è una ed una sola che sia non negativa e minore di $\frac{j}{j_2}$: essa è uguale al minimo resto non negativo di c secondo il mod. $\frac{j}{j_2}$. A tale resto è dunque eguale il numero $\frac{j_1}{j_2}$.

3. Per calcolare il numero j_1 in base alla proposizione precedente occorre la conoscenza del numero j . Vediamo dunque come può determinarsi questo numero.

Nel caso che l'ideale sia principale abbiamo la prop.:

*1 — *Essendo*

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}(a + b\omega),$$

il primo numero fondamentale di \mathbf{A} è uguale al quoto del valore assoluto della norma di $a + b\omega$ per $D(a, b)$.

Infatti tutti i numeri in \mathbf{A} sono della forma $(x + y\omega)(a + b\omega)$, è però, supposto $\omega = \sqrt{m}$, i numeri interi in \mathbf{A} sono della forma

$$ax + mby,$$

purchè x ed y soddisfino all'equazione

$$bx + ay = 0.$$

Ma tutte le soluzioni in numeri razionali interi di quest'equazione si ottengono assumendo

$$x = \frac{a}{D(a, b)} t, \quad y = -\frac{b}{D(a, b)} t,$$

con t razionale intero arbitrario, quindi tutti i numeri razionali interi in \mathbf{A} sono della forma

$$\frac{a^2 - mb^2}{D(a, b)} t,$$

e il minimo positivo tra essi, cioè il primo numero fondamentale di \mathbf{A} è

$$\frac{|a^2 - mb^2|}{D(a, b)} \quad \text{ossia} \quad \frac{|N(a + b\omega)|}{D(a, b)}.$$

In modo analogo si dimostra la prop. nel caso che sia $\omega = \frac{1 + \sqrt{m}}{2}$.

Passando ora al caso generale si ha la prop.:

2° — Se l'ideale \mathbf{A} è somma di più ideali principali:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}(a_1 + b_1\omega) + \mathbf{I}(a_2 + b_2\omega) + \dots + \mathbf{I}(a_k + b_k\omega),$$

si ponga

$$n_i = \frac{|N(a_i + b_i\omega)|}{D(a, b)}, \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

e si denoti con Δ il massimo comun divisore dei numeri che si ottengono dividendo ciascun minore del 2° ordine della matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ b_1 & b_2 & \dots & b_k \end{array} \right\|$$

per il massimo comun divisore dei quattro numeri di cui il minore stesso è formato. Allora si ha:

$$j = D(n_1, n_2, \dots, n_k, \Delta).$$

La prop. si riduce alla 1° nel caso che l'ideale sia principale ($k = 1$). Ammettiamola dunque per un ideale somma di $k-1$ ideali principali. Posto

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}(a_1 + b_1\omega) + \dots + \mathbf{I}(a_{k-1} + b_{k-1}\omega),$$

e denotando con

$$e, \quad f + g\omega$$

la base canonica di \mathbf{A}_1 si avrà

$$(5) \quad e = D(n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, \Delta_1),$$

essendo Δ_1 il massimo comun divisore dei numeri che si ottengono dividendo ciascun minore del second' ordine della matrice

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{k-1} \end{vmatrix}$$

per il massimo comun divisore dei quattro numeri di cui è formato il minore che si considera. Ponendo

$$(6) \quad d_i = D(a_i, b_i), \quad d_{ih} = D(d_i, d_h) = D(a_i, b_i, a_h, b_h),$$

si ha dunque

$$(7) \quad \Delta_1 = D\left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{d_{12}}, \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{d_{13}}, \dots, \frac{a_{k-2} b_{k-1} - a_{k-1} b_{k-2}}{d_{k-2, k-1}}\right),$$

$$(8) \quad g = D(d_1, d_2, \dots, d_{k-1}).$$

Sia inoltre

$$q, \quad r + s\omega$$

la base di $\mathbf{I}(a_k + b_k)$, e però

$$(9) \quad s = D(a_k, b_k) = d_k, \quad q = n_k.$$

Poichè

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{I}(a_k + b_k\omega),$$

risulta

$$\mathbf{A} = \mathbf{n}e + \mathbf{n}(f + g\omega) + \mathbf{n}q + \mathbf{n}(r + s\omega),$$

e però tutti i numeri razionali interi in \mathbf{A} sono dati dalla forma lineare

$$ex + qy + fu + rv,$$

quando ad x, y si danno valori razionali interi ad arbitrio, e ad u, v valori razionali interi soddisfacenti all'equazione

$$gu + sv = 0.$$

Poichè tutte le soluzioni razionali intere di questa si ottengono assumendo

$$u = \frac{s}{j_2} \vartheta, \quad v = -\frac{g}{j_2} \vartheta,$$

essendo z un numero razionale intero arbitrario, e, per la (8) e la prima (9):

$$(10) \quad j_2 = D(g, s) = D(d_1, d_2, \dots, d_k),$$

se ne deduce che tutti i numeri razionali interi in \mathbf{A} sono dati dalla forma lineare

$$ex + qy + \frac{fs - gr}{j_2} z,$$

e però il loro massimo comun divisore j è uguale al massimo comun divisore della forma stessa:

$$(11) \quad j = D\left(e, q, \frac{fs - gr}{j_2}\right).$$

Per eliminare da questa formola f ed r , ricordiamo che si ha (2.2):

$$b_i \frac{f}{g} \equiv a_i \pmod{e} \quad (i = 1, 2, \dots, k-1),$$

$$b_k \frac{r}{s} \equiv a_k \pmod{q},$$

e però

$$b_i b_k \frac{f}{g} \equiv a_i b_k \pmod{eb_k}, \quad b_i b_k \frac{r}{s} \equiv a_k b_i \pmod{qb_i}$$

e poichè queste due congruenze sussistono anche secondo il mod. $D(eb_k, qb_i)$, sottraendo si ha

$$b_i b_k \frac{fs - gr}{gs} \equiv a_i b_k - a_k b_i \pmod{D(eb_k, qb_i)}.$$

Possiamo ora dividere ambo i membri di questa congruenza e il modulo per d_{ik} , e sostituire al modulo $D\left(e \frac{b_k}{d_{ik}}, q \frac{b_i}{d_{ik}}\right)$ il suo divisore $D(e, q)$, quindi, tenendo presente che $s = d_k$:

$$(12) \quad \frac{d_{ik}}{b_i} \frac{b_k}{d_k} \frac{fs - gr}{g} \equiv \frac{a_i b_k - a_k b_i}{d_{ik}} \pmod{D(e, q)}.$$

Posto poi

$$(13) \quad g_{ik} = \frac{g d_{ik}}{j_2}.$$

si ha, essendo « m » simbolo di minimo comune multiplo :

$$g_{ik} = m(g, d_{ik}),$$

e poichè d_i è divisibile per g e d_{ik} così è anche divisibile per g_{ik} , e la (12) può mettersi sotto la forma seguente :

$$\frac{d_i b_i b_k fs - gr}{g_{ik} d_i d_k j_2} \equiv \frac{a_i b_k - a_k b_i}{d_{ik}} \pmod{D(e, q)}.$$

Dando ad i tutti i valori da 1 a $k-1$ e posto

$$(14) \quad w = D\left(\frac{d_1 b_1 b_k}{g_{1k} d_1 d_k}, \frac{d_2 b_2 b_k}{g_{2k} d_2 d_k}, \dots, \frac{d_{k-1} b_{k-1} b_k}{g_{k-1 k} d_{k-1} d_k}\right),$$

se ne deduce

$$D\left(e, q, w \frac{fs - gr}{j_2}\right) = D\left(e, q, \frac{a_1 b_k - a_k b_1}{d_{1k}}, \dots, \frac{a_{k-1} b_k - a_k b_{k-1}}{d_{k-1 k}}\right)$$

e tenendo presenti la (5), la (7), la seconda (9) e la definizione di Δ :

$$(15) \quad D\left(e, q, w \frac{fs - gr}{j_2}\right) = D(n_1, n_2, \dots, n_k, \Delta).$$

Ricordando la (11), per concludere occorre mostrare che il valore del primo membro di (15) non si altera se si sopprime il fattore w . A tal fine consideriamo un divisore primo p qualunque di w . Se p non è divisore comune di e, q , esso potrà sopprimersi da w senza che si alteri il valore del primo membro di (15). Supponiamo dunque che p sia divisore comune di e, q . Cominciamo con l'osservare che p non può essere divisore comune di tutti i numeri $\frac{d_i}{g_{ik}}$ coi quali sono composti i numeri a secondo membro di (14), perchè questi sono primi tra loro. Infatti, detto γ il loro massimo comun divisore, avuto riguardo alla (13) si ha :

$$\frac{g d_k}{j_2} \gamma = D\left(\frac{d_1 d_k}{d_{1k}}, \dots, \frac{d_{k-1} d_k}{d_{k-1 k}}\right) = D\left(m(d_1, d_k), \dots, m(d_{k-1}, d_k)\right),$$

quindi per una proprietà nota ⁴⁾ :

$$\frac{g d_k}{j_2} \gamma = m\left(D(d_1, d_2, \dots, d_{k-1}), d_k\right) = m(g, d_k) = \frac{g d_k}{j_2},$$

e però $\gamma = 1$.

⁴⁾ Cfr. : G. MIGNOSI, *La legge distributiva delle operazioni D ed m*, Il Pitagora, t. 18, a. 1911.
M. CIPOLLA, l. c. ³⁾ p. 15.

Adunque p deve dividere o $\frac{b_k}{d_k}$ o almeno uno dei numeri $\frac{b_1}{d_1}, \frac{b_2}{d_2}, \dots, \frac{b_{k-1}}{d_{k-1}}$,

Se p divide $\frac{b_k}{d_k}$, dovendo dividere anche q , cioè n_k , dovrà dividere d_k , e ciò perchè, se $\omega = \sqrt[m]{m}$, è

$$n_k = \frac{|a_k^2 - m b_k^2|}{d_k} = d_k \left| \left(\frac{a_k}{d_k} \right)^2 - m \left(\frac{b_k}{d_k} \right)^2 \right|,$$

e se $\omega = \frac{1 + \sqrt{m}}{2}$ si ha

$$n_k = d_k \left| \left(\frac{a_k}{d_k} \right)^2 + \frac{a_k}{d_k} \frac{b_k}{d_k} - \frac{m-1}{4} \left(\frac{b_k}{d_k} \right)^2 \right|;$$

inoltre, poichè $\frac{a_k}{d_k}$ e $\frac{b_k}{d_k}$ sono primi tra loro, p entra in n_k alla stessa potenza che in d_k . Ma essendo $s = d_k$, r multiplo di s , ed f, g multipli di j_2 , si deduce che nel fattore $\frac{fs-gr}{j_2}$ di ω , ossia in

$$\frac{f}{j_2} d_k - \frac{g}{j_2} \frac{r}{d_k} d_k,$$

p entra a potenza non più bassa che in n_k e quindi a potenza non più bassa che in $D(e, q)$. Anche in questo caso dunque la soppressione del fattore p da ω non fa alterare il valor del primo membro di (15).

Finalmente supponiamo che p non divida $\frac{b_k}{d_k}$ ma uno almeno dei numeri

$$(16) \quad \frac{b_1}{d_1}, \frac{b_2}{d_2}, \dots, \frac{b_{k-1}}{d_{k-1}}.$$

Se p divide ad es. $\frac{d_i}{d_i}$, dovendo dividere e , dividerà anche n_i , e come sopra si conchiude che p dovrà dividere d_i ed entrare in n_i alla stessa potenza che in d_i . Supponiamo che fra i numeri (16) divisibili per p sia appunto $\frac{b_i}{d_i}$ quello o uno di quelli in cui p entri nel denominatore alla minima potenza, che diciamo p^α .

Ed allora, se p divide tutti i numeri (16), p dividerà d_1, d_2, \dots, d_{k-1} , e quindi il loro massimo comun divisore g , e sarà p^α la massima potenza di p che entra in g . Però tanto nel fattore $\frac{fs-gr}{j_2}$ di ω , che è multiplo di g , p entra a potenza non più bassa che in n_i , e quindi a potenza non più bassa che in $D(e, q)$, e però la soppressione del fattore p da ω non altera il valore del primo membro (15).

Se invece qualcuno dei numeri (16), ad es. $\frac{b_h}{d_h}$, non è divisibile per p , sarà divi-

sibile per p il numero $\frac{d_h}{g_{hk}}$ e quindi d_h . Se ne deduce che anche in questo caso p divide g . D'altra parte, dovendo p entrare in d_h a potenza più alta che in g_{hk} , ed essendo per la (13):

$$g_{hk} = m(g, D(d_h, d_k)),$$

dovrà p entrare in d_h a potenza più alta che in g . Per conseguenza la massima potenza di p che divide g è, anche in questo caso, p^a , e perciò si conchiude come nel caso precedente.

Poichè il valore del primo membro di (15) resta inalterato sopprimendo il fattore w si deduce, in virtù di (11), che esso è uguale a j , e la prop. è dimostrata.

Catania, maggio 1917.



Sul concetto d'integrale indefinito delle funzioni di più variabili.

Nota di CARLO SEVERINI (*)

Le proprietà delle funzioni assolutamente continue, dalle quali dipende lo studio dell'integrale indefinito

$$(1) \quad \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

di una funzione sommabile $f(x_1, \dots, x_n)$, espresso per mezzo delle variabili x_1, \dots, x_n , in quanto servono a fissare la natura dell'indeterminazione del precedente simbolo (1), o permettono di dedurne i teoremi fondamentali relativi agl'integrali definiti, non sono state ancora stabilite, che io mi sappia, in modo diretto ed elementare.

Scopo di questa nota è di esporre brevemente alcune ricerche in tale senso, che credo possano presentare interesse, specie dal punto di vista didattico: esse, insieme colle definizioni descrittive indicate alla fine del § 2, le quali non richiedono in precedenza lo sviluppo completo, generale della teoria della misura degl'insiemi e delle funzioni misurabili, possono infatti essere esposte in un corso elementare di Analisi infinitesimale, in cui permettono d'includere concetti divenuti oramai indispensabili e di conseguire anche, a mio avviso, notevoli altri vantaggi.

1. Ci riferiremo per semplicità, a funzioni di due sole variabili, giacchè quanto sarà detto per queste si estende immediatamente alle funzioni di quante si vogliano variabili. Per le funzioni di una variabile sarà solo il caso di aggiungere in fine qualche osservazione, d'altronde immediata.

Ricordiamo che, data una funzione

$$z = f(x, y),$$

e posto:

$$\Delta_x^h f(x, y) = f(x + h, y) - f(x, y),$$

$$\Delta_y^k f(x, y) = f(x, y + k) - f(x, y),$$

$\Delta_x^h f(x, y)$, $\Delta_y^k f(x, y)$ diconsi *differenze prime* di $f(x, y)$. Queste due differenze, se si riguardano h e k come costanti assegnate, sono a loro volta due funzioni di x e y ,

(*) Comunicata all'Accademia nell'adunanza del 3 febbraio 1917.

delle quali c'è luogo a considerare le differenze prime, relative ad incrementi h_1 e k_1 di x ed y . Si hanno così le differenze seconde della $f(x, y)$

$$\Delta_x^{h_1} \Delta_x^{h_2} f(x, y), \Delta_x^{h_1} \Delta_y^{k_1} f(x, y), \dots$$

In generale si dice *differenza di ordine n* una differenza prima di una differenza di ordine $n - 1$.

Potendosi invertire l'ordine di due qualunque delle precedenti operazioni, basterà assegnare gl'incrementi attribuiti alle singole variabili per individuare una di dette differenze; e si potrà una differenza di ordine n indicare col simbolo

$$\Delta^{(n)} f(x, y) = \Delta_x^{h_1} \dots \Delta_x^{h_p} \Delta_y^{k_1} \dots \Delta_y^{k_q} f(x, y) \quad (p + q = n),$$

ove gl'incrementi h_i e k_i possono anche essere fra loro eguali.

C'interessa per il seguito considerare il rapporto fra la differenza seconda $\Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y)$ ed il prodotto degl'incrementi h e k , nell'ipotesi che questi incrementi soddisfino alla condizione $|h| = |k|$.

Il limite di questo rapporto, se esiste al tendere comunque a zero di $|h| = |k|$, cioè il

$$\lim_{|h|=|k|=0} \frac{\Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y)}{h k},$$

si dirà *derivata totale simmetrica della $f(x, y)$* nel punto (x, y) , e s'indicherà colla notazione $Df(x, y)$.

Alla considerazione della derivata totale simmetrica potrebbe sostituirsi più generalmente la considerazione della *derivata totale regolare*, intendendo con ciò, in armonia alla definizione di famiglia regolare d'insiemi ⁽¹⁾, il limite, ammesso che esista, del precedente rapporto, quando h e k tendono a zero, in modo che $\left| \frac{h}{k} \right|$ resti compreso fra due numeri positivi fissi (non nulli).

In ciò che segue noi intenderemo sempre di riferirci alla derivata totale simmetrica.

2. Una funzione

$$z = f(x, y),$$

definita in un rettangolo:

$$(2) \quad \begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ c &\leq y \leq d, \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Cfr. LEBESGUE: *Sur l'intégration des fonctions discontinues* [Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure (Paris) serie III^e, tome 27 (1910) p. 387]. Cfr. anche *De la Vallée Poussin: Cours d'Analyse Infinitésimale*, tome II [Paris, Gauthier-Villars (1912) p. 113]; *Intégrale de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classes de Baire* [Paris, Gauthier-Villars (1916) p. 59].

si dice *assolutamente continua*, se la somma delle differenze seconde

$$(3) \quad \sum_i \Delta_x^{h_i} \Delta_y^{k_i} f(x_i, y_i) \quad (h_i > 0, k_i > 0),$$

relative ad un insieme finito qualsivoglia di rettangoli, contenuti nel campo (2) e non aventi due a due punti interni a comune (2)

$$(4) \quad \begin{aligned} x_i &\leq x \leq x_i + h_i \\ y_i &\leq y \leq y_i + k_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots),$$

tende a zero al tendere a zero della somma $\sum_i h_i k_i$ delle aree di questi rettangoli; se in altri termini, fissato comunque un numero positivo σ , si può sempre in corrispondenza determinare un numero positivo ε , tale da avere, qualunque sia il numero dei rettangoli (4):

$$(5) \quad \left| \sum_i \Delta_x^{h_i} \Delta_y^{k_i} f(x_i, y_i) \right| \leq \sigma,$$

tutte le volte che è:

$$(6) \quad \sum_i h_i k_i \leq \varepsilon.$$

È evidente che in tale ipotesi, se, invece di un insieme finito di rettangoli (4), se ne considera un insieme numerabile, la serie (3) delle differenze seconde risulta convergente, e la somma di questa serie tende del pari a zero al tendere a zero della somma della serie $\sum_i h_i k_i$.

Ancora si può dire che, se la $f(x, y)$ è assolutamente continua, tende a zero, al tendere a zero di $\sum_i h_i k_i$, la somma dei valori assoluti delle dette differenze seconde

$$(7) \quad \sum_i \left| \Delta_x^{h_i} \Delta_y^{k_i} f(x, y) \right|$$

e viceversa.

Posto infatti che la somma (3) tenda a zero con $\sum_i h_i k_i$, si fissi, nel modo dianzi detto, il numero positivo ε .

Delle differenze seconde $\Delta_x^{h_i} \Delta_y^{k_i} f(x_i, y_i)$, corrispondenti ad un insieme di rettangoli (4), pei quali sia soddisfatta la (6), alcune saranno positive, altre negative. La somma di quelle positive è minore di σ , ed è anche minore di σ la somma dei valori assoluti di quelle negative, perchè entrambe queste somme corrispondono a rettangoli, di cui la somma delle aree è minore di ε . Risulta pertanto:

$$\sum_i \left| \Delta_x^{h_i} \Delta_y^{k_i} f(x, y) \right| \leq 2\sigma,$$

e da ciò segue che la (7) tende a zero con $\sum_i h_i k_i$.

(2) Dicendo che un punto è interno ad un rettangolo escludiamo che possa appartenere al contorno.

La proposizione inversa è senz'altro evidente.

Poichè si ha in generale :

$$\left| \Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y) \right| = \left| \Delta_x^{-h} \Delta_y^k f(x+h, y) \right| = \left| \Delta_x^{-h} \Delta_y^{-k} f(x+h, y+k) \right| = \left| \Delta_x^h \Delta_y^{-k} f(x, y+k) \right| ,$$

si può anche aggiungere, togliendo la condizione che gl'incrementi h_i e k_i siano positivi, che se la $f(x, y)$ è assolutamente continua, la somma (7) e quindi anche la (3) tende a zero al tendere a zero di $\sum_i |h_i k_i|$ e viceversa.

3. — Ciò posto dimostriamo il seguente teorema :

Una funzione

$$z = f(x, y)$$

definita in un rettangolo

$$(2) \quad \begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ c &\leq y \leq d, \end{aligned}$$

assolutamente continua, è della forma

$$z = \varphi(x) + \psi(y),$$

se in ogni punto interno al campo (2), esclusi al più quelli di un insieme di misura (superficiale) nulla, o, come brevemente diremo, quasi da per tutto entro il campo (2), si ha :

$$(8) \quad D f(x, y) = 0.$$

Se in un punto (x, y) , interno al campo (2), è verificata la (8), si può determinare una quantità positiva δ , tale che, per ogni h e k , soddisfacenti alla condizione

$$|h| = |k| \leq \delta,$$

il punto $(x+h, y+k)$ appartenga ancora al campo (2), e si abbia :

$$(10) \quad \left| \Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y) \right| \leq \sigma |hk| ,$$

σ essendo un numero positivo, prefissato a piacere.

Detta inoltre ϵ' una quantità positiva, tale che risulti (n° 2) :

$$(11) \quad \sum_i \left| \Delta_x^{h_i} \Delta_y^{k_i} f(x_i, y_i) \right| \leq \sigma ,$$

tutte le volte che si ha :

$$(12) \quad \sum_i |h_i k_i| \leq \epsilon' ,$$

gl'incrementi h_i e k_i potendo essere positivi o negativi, si racchiuda l'insieme E dei punti

interni al campo (2), per i quali non si sa se la $Df(x, y)$ è nulla, in un insieme finito o numerabile di rettangoli

$$(13) \quad R_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

contenuti nello stesso campo (2), coi lati paralleli agli assi, in modo che ogni punto di E risulti interno ad uno almeno di questi rettangoli, e che la somma delle loro aree non superi ϵ' . Per ogni punto (x', y') di E s'indichi allora con δ' una quantità positiva, tale che il quadrato

$$\begin{aligned} x' - \delta' &\leq x \leq x' + \delta' \\ y' - \delta' &\leq y \leq y' + \delta' \end{aligned}$$

sia contenuto in uno almeno dei rettangoli (13).

Sia $g(x, y)$ la funzione eguale al massimo valore di δ in ogni punto (x, y) interno al campo (2), non appartenente ad E ed eguale al limite superiore dei valori di δ' in ogni punto di E .

Si può intendere definita la funzione $g(x, y)$ anche per i punti del contorno del campo (2), ponendo che sia in essi costantemente nulla.

Per l' assoluta continuità della $f(x, y)$, tutte le volte che si ha:

$$|h| = |k| \leq g(x, y),$$

risulta verificata la (10), se il punto (x, y) non appartiene ad E ; risulta invece verificata la (11), tutte le volte che si ha:

$$|h_i| \leq g(x_i, y_i), \quad |k_i| \leq g(x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

qualunque sia l'insieme finito (o numerabile) dei punti (x_i, y_i) , appartenenti ad E , se i rettangoli relativi, che hanno per vertici i punti

$$(x_i, y_i), (x_i + h_i, y_i), (x_i + h_i, y_i + k_i), (x_i, y_i + k_i) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

non ammettono due a due punti interni a comune.

Ciò posto s'indichi in generale con G_n l'insieme dei punti del campo (2), nei quali, ammesso che sia $b - a \geq d - c$, risulta:

$$g(x, y) \geq \frac{b - a}{n}.$$

Sarà, chiamando G l'insieme di tutti i punti interni al campo (2):

$$G = G_1 + (G_2 - G_1) + \dots + (G_n - G_{n-1}) + \dots$$

Per ogni valore fisso di n , supposti divisi i lati del rettangolo (2) in n parti eguali, e condotte per i punti di divisione le parallele agli assi, s'indichi con \overline{G}_n l'insieme costituito

da quei rettangoli parziali, in cui cadono punti di G_n . L'insieme $\overline{G_n}$ conterrà l'insieme G_n , e si potrà determinare un valore n' dell'indice n , abbastanza grande perchè sia:

$$(b - a)(d - c) - m \overline{G_{n'}} \leq \lambda,$$

λ essendo un numero positivo, assegnato ad arbitrio, minore di $\frac{1}{9} (b - a)(d - c)$.

In ciascuno dei rettangoli $R_{n'}$, che compongono $\overline{G_{n'}}$, si scelga un punto $(x_{n'i}, y_{n'i})$ di $G_{n'}$, e si consideri il quadrato coi lati paralleli agli assi, che ha questo punto come centro ed il lato eguale a $2g(x_{n'i}, y_{n'i})$. Questi quadrati, in numero finito, possono avere punti interni a comune. Se ciò si verifica, si sopprimano anzitutto i quadrati, che hanno punti interni a comune col più grande, o con uno dei più grandi, dei quadrati non isolati; quindi si sopprimano i quadrati, che hanno punti interni a comune col più grande, o con uno dei più grandi, dei quadrati, che non risultano isolati dopo la prima soppressione, e così di seguito fino ad avere soltanto quadrati isolati.

La somma delle aree dei quadrati conservati sarà almeno eguale ad $\frac{1}{9}$ dell'area primieramente ricoperta; quindi almeno uguale ad $\frac{1}{9} m \overline{G_{n'}}$, e perciò maggiore di $\frac{1}{9} (b - a)(d - c) - \lambda$. Se dunque s'indica con H il campo ottenuto dal rettangolo (2), togliendone i punti interni a questi quadrati, campo decomponibile evidentemente in un numero finito di rettangoli coi lati paralleli agli assi, si avrà:

$$(14) \quad mH \leq \frac{8}{9} (b - a)(d - c) + \lambda.$$

S'indichi ora con $g_1(x, y)$ la funzione, definita per tutti i punti di H , nulla lungo il contorno e coincidente in ogni punto interno (x, y) colla massima quantità positiva che, non supera $g(x, y)$, ed è anche minore od uguale alla minima distanza di (x, y) dal contorno.

Ragionando sopra ognuno dei rettangoli componenti H e sulla $g_1(x, y)$, come precedentemente è stato fatto sul campo (2) e sulla $g(x, y)$, si perverrà a trovare un numero finito di quadrati coi lati paralleli agli assi, non aventi due a due, fra loro e coi precedenti, punti interni a comune, di cui i lati sono eguali al doppio dei valori di $g_1(x, y)$ nei rispettivi centri, e tale che, detto H_1 il campo ottenuto da H togliendone i punti interni a questi quadrati, si abbia:

$$m H_1 \leq \frac{8}{9} mH + \lambda',$$

λ' essendo un numero positivo, arbitrariamente scelto, minore di $\frac{\lambda}{2}$ e di $\frac{1}{9} mH$.

Dalla precedente disuguaglianza e dalla (14) si deduce:

$$m H_1 \leq \left(\frac{8}{9}\right)^2 (b - a)(d - c) + \lambda + \lambda',$$

e si vede bene che, se si ha cura di scegliere in precedenza $\lambda \leq \frac{\epsilon'}{4}$, ove ϵ' ha il significato sopra detto, il procedimento in discorso conduce a trovare un insieme finito di qua-

drati

$$(15) \quad \begin{aligned} x_n &\leq x \leq x_n + h_n \\ y_n &\leq y \leq y_n + h_n \end{aligned} \quad (n = 1, 2, \dots, m)$$

non aventi due a due punti interni a comune, contenuti nel campo (2), i quali, fatta al più eccezione per un numero finito di rettangoli, di cui la somma delle aree non supera ϵ' , ricoprono questo campo, ed hanno i lati minori od uguali al valore assunto da $g(x, y)$ in una almeno dei vertici rispettivi.

Siano

$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 < \dots < x_p \\ y_1 &< y_2 < \dots < y_q \end{aligned}$$

le proiezioni sugli assi x ed y , interne agl' intervalli (a, b) e (c, d) , dei vertici di tutti i quadrati (15), e pongasi:

$$a = x_0, \quad b = x_{p+1}, \quad c = y_0, \quad d = y_{q+1}.$$

Si ha evidentemente:

$$(16) \quad \Delta_x^{b-a} \Delta_y^{d-c} f(a, c) = \sum_0^p \sum_0^q \Delta_x^{x_{i+1}-x_i} \Delta_y^{y_{j+1}-y_j} f(x_i, y_j).$$

Ma, se uno dei quadrati (15) è suddiviso dalle rette

$$x = x_i, \quad y = y_j \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, q \end{array} \right)$$

nei rettangoli

$$\begin{aligned} x_r &\leq x \leq x_{r+1} \\ y_s &\leq y \leq y_{s+1} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} r = 1, 2, \dots, p_n \\ s = 1, 2, \dots, q_n \end{array} \right),$$

risulta:

$$\Delta_x^{h_n} \Delta_y^{k_n} f(x_n, y_n) = \sum_1^{p_n} \sum_1^{q_n} \Delta_x^{x_{r+1}-x_r} \Delta_y^{y_{s+1}-y_s} f(x_r, y_s) \quad (n = 1, 2, \dots, m)$$

e quindi per la (16), tenuto conto della (11):

$$\left| \Delta_x^{b-a} \Delta_y^{d-c} f(a, c) \right| \leq \sum_1^m \left| \Delta_x^{h_n} \Delta_y^{k_n} f(x_n, y_n) \right| + \sigma.$$

D'altra parte per la (10) e la (11) si ha:

$$\sum_1^m \left| \Delta_x^{h_n} \Delta_y^{k_n} f(x_n, y_n) \right| \leq \sigma \left[(b-a)(d-c) + 1 \right].$$

Risulta dunque :

$$\left| \Delta_x^{b-a} \Delta_y^{d-c} f(a, c) \right| \leq \sigma \left[(b-a)(d-c) + 2 \right].$$

Potendo σ essere arbitrariamente scelto, se ne deriva :

$$\Delta_x^{b-a} \Delta_y^{d-c} f(a, c) = 0.$$

Il medesimo ragionamento si può ripetere, rimpiazzando il punto (b, d) con un punto (x, y) , comunque scelto nel campo (2), per modo che si ha nelle dette ipotesi :

$$\Delta_x^{x-a} \Delta_y^{y-c} f(a, c) = 0,$$

ossia :

$$f(x, y) = f(x, c) + f(a, y) - f(a, c),$$

e quindi :

$$f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y),$$

ponendo ad es :

$$\varphi(x) = f(x, c), \quad \psi(y) = f(a, y) - f(a, c),$$

che è quanto si voleva dimostrare.

4. Dal precedente teorema segue come corollario :

Due funzioni

$$z = f_1(x, y), \quad z = f_2(x, y),$$

definite in un rettangolo

$$(2) \quad \begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ c &\leq y \leq d, \end{aligned}$$

assolutamente continue, differiscono per una funzione della forma :

$$z = \varphi(x) + \psi(y),$$

se entro il rettangolo si ha quasi da per tutto :

$$Df_1(x, y) = Df_2(x, y).$$

La differenza delle due funzioni :

$$z = f_1(x, y) - f_2(x, y)$$

è infatti una funzione assolutamente continua nel campo (2), e la sua derivata totale simmetrica è entro tale rettangolo quasi da per tutto eguale a zero.

5. Con considerazioni analoghe a quelle del n. 3 si può ora dimostrare quest'altro teorema:

Se per una funzione

$$z = f(x, y),$$

definita in un rettangolo

$$(2) \quad \begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ c &\leq y \leq d, \end{aligned}$$

assolutamente continua, si ha quasi da per tutto entro il rettangolo:

$$Df(x, y) \geq 0,$$

ma non costantemente:

$$(8) \quad Df(x, y) = 0$$

in ogni punto interno, risulta:

$$\begin{aligned} \Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y) &\geq 0 && \text{se } hk \geq 0 \\ \Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y) &\leq 0 && \text{„ } hk \leq 0, \end{aligned}$$

L'eguaglianza esclusa, quando, coincidendo (x, y) con uno dei vertici, si faccia
 $|h| = b - a, \quad |k| = d - c.$

Risulta invece:

$$\begin{aligned} \Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y) &\leq 0 && \text{se } hk \geq 0 \\ \Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y) &\geq 0 && \text{se } hk \leq 0, \end{aligned}$$

L'eguaglianza ancora esclusa, quando, coincidendo (x, y) con uno dei vertici, si faccia
 $|h| = b - a, \quad |k| = d - c,$
se quasi da per tutto entro il rettangolo si ha:

$$Df(x, y) \leq 0,$$

ma non costantemente.

$$(8) \quad Df(x, y) = 0$$

in ogni punto interno.

Basterà che dimostriamo la prima parte del teorema.

Come nel n. 3, se in un punto (x, y), interno al campo (2), è verificata la (8), si può determinare una quantità positiva δ , tale che per ogni h e k, soddisfacenti alla condizione:

$$|h| = |k| \leq \delta,$$

il punto $(x+h, y+k)$ appartenga ancora al campo (2), e si abbia:

$$(10) \quad \left| \Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y) \right| \leq \sigma |hk|,$$

σ essendo il solito numero positivo, prefissato a piacere.

Se in un punto (x, y) , interno al campo (2), si ha:

$$(17) \quad Df(x, y) > 0,$$

si può determinare una quantità positiva δ' , in modo che per ogni h e k soddisfacenti alla condizione:

$$|h| = |k| \leq \delta'$$

il punto $(x+h, y+k)$ appartenga ancora al campo (2), e si abbia:

$$(18) \quad \Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y) \geq 0 \quad \text{se} \quad hk \geq 0$$

$$(19) \quad \Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y) \leq 0 \quad \text{„} \quad hk \leq 0.$$

In fine, detta ϵ' una quantità positiva tale che risulti:

$$(11) \quad \sum_i \left| \Delta_x^{h_i} \Delta_y^{k_i} f(x_i, y_i) \right| \leq \sigma,$$

tutte le volte che si ha:

$$(12) \quad \sum_i |h_i k_i| \leq \epsilon',$$

gl' incrementi h_i e k_i potendo essere positivi o negativi, si racchiuda, come nel n° 3, l'insieme E dei punti interni al campo (2), pei quali non si sa se $Df(x, y) \geq 0$, in un insieme finito o numerabile di rettangoli

$$(13) \quad R_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

contenuti nel campo (2), coi lati paralleli agli assi, in modo che ogni punto di E risulti interno ad uno almeno dei rettangoli R_n , e che la somma delle loro aree non superi ϵ' . Per ogni punto (x', y') di E s'indichi allora con δ'' una quantità positiva, tale che il quadrato

$$\begin{aligned} x' - \delta'' &\leq x \leq x' + \delta'' \\ y' - \delta'' &\leq y \leq y' + \delta'' \end{aligned}$$

sia contenuto in uno almeno dei rettangoli (13).

Sia $\bar{g}(x, y)$ la funzione eguale al massimo valore di δ in ogni punto interno al campo (2), in cui ha luogo la (8), eguale al massimo valore di δ' in ogni punto interno al campo (2), in cui ha luogo la (17) ed eguale al limite superiore dei valori di δ'' in ogni

punto di E . Sul contorno del campo (2) si può intendere definita la $\bar{g}(x, y)$, ponendo che ivi sia costantemente $\bar{g}(x, y) = 0$.

Per l'assoluta continuità della $f(x, y)$, tutte le volte che si ha:

$$|h| = |k| \leq \bar{g}(x, y),$$

risulta verificata la (10), se nel punto (x, y) è soddisfatta la (8), risulta verificata la (18) ovvero la (19), a seconda del segno di hk , se nel punto (x, y) è soddisfatta la (17); in fine, tutte le volte che si ha:

$$|h_i| \leq \bar{g}(x_i, y_i), \quad |k_i| \leq \bar{g}(x_i, y_i) \quad (i=1, 2, \dots),$$

e qualunque sia l'insieme finito (o numerabile) dei punti (x_i, y_i) appartenenti ad E , risulta verificata la (11), se i rettangoli, che hanno per vertici i punti:

$$(x_i, y_i), (x_i + h_i, y_i), (x_i + h_i, y_i + k_i), (x_i, y_i + k_i) \quad (i=1, 2, \dots)$$

non hanno due a due punti interni a comune.

Si consideri ora, come nel n° 3, un insieme finito di quadrati

$$(20) \quad \begin{aligned} x'_n &\leq x \leq x'_n + h'_n \\ y'_n &\leq y \leq y'_n + h'_n \end{aligned} \quad (n=1, 2, \dots, m')$$

non aventi due a due punti interni a comune, contenuti nel campo (2), i quali, fatta al più eccezione per un numero finito di rettangoli, di cui la somma delle aree non supera ε' , ricoprono questo campo, ed abbiano i lati minori od uguali al valore assunto da $\bar{g}(x, y)$ in uno almeno dei vertici rispettivi.

Ragionando sul sistema di questi quadrati come nel n° 3 si è fatto per il sistema dei quadrati (15), si arriva alla disuguaglianza

$$(21) \quad \Delta_x^{b-a} \Delta_y^{d-c} f(a, c) \geq -\sigma \left[(b-a)(d-c) + 2 \right].$$

Basta per veder ciò tener conto della (10) e della (11) ed osservare che, se per uno dei quadrati (20) il lato non supera il valore di $\bar{g}(x, y)$ in un vertice, nel quale sia verificata la (17), risulta:

$$\Delta_x^{h'_n} \Delta_y^{h'_n} f(x'_n, y'_n) \geq 0;$$

è infatti evidente che, se questo vertice è uno dei vertici (x'_n, y'_n) ($x'_n + h'_n, y'_n + h'_n$), si ha:

$$\Delta_x^{h'_n} \Delta_y^{h'_n} f(x'_n, y'_n) = \Delta_x^{-h'_n} \Delta_y^{-h'_n} f(x'_n + h'_n, y'_n + h'_n) \geq 0$$

mentre, se è uno dei vertici rimanenti, si ha:

$$-\Delta_x^{h'_n} \Delta_y^{h'_n} f(x'_n, y'_n) = \Delta_x^{h'_n} \Delta_y^{-h'_n} f(x'_n, y'_n + h'_n) = \Delta_x^{-h'_n} \Delta_y^{h'_n} f(x'_n + h'_n, y'_n) \leq 0.$$

Potendo σ essere arbitrariamente scelto, risulta dalla (21):

$$\Delta_x^{b-a} \Delta_y^{d-c} f(a, c) \geq 0.$$

Allo stesso modo si prova che deve essere:

$$\Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y) \geq 0 \quad \left(\begin{array}{l} a \leq x < b \\ c \leq y < d \end{array} \quad h > 0, k > 0 \right)$$

e quindi in generale:

$$(21) \quad \Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y) \geq 0 \quad \text{se } hk \geq 0,$$

$$(22) \quad \Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y) \leq 0 \quad \text{se } hk \leq 0.$$

Si esclude poi che possa aversi:

$$(23) \quad \Delta_x^{b-a} \Delta_y^{d-c} f(a, c) = -\Delta_x^{a-b} \Delta_y^{d-c} f(b, c) = \Delta_x^{a-b} \Delta_y^{c-d} f(b, d) = -\Delta_x^{b-a} \Delta_y^{c-d} f(a, d) = 0,$$

giacchè dalla (21) e dalla (22) segue rispettivamente, tenendo conto della (23):

$$\Delta_x^{b-a} \Delta_y^{d-c} f(a, c) \geq \Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y) \geq 0 \quad \text{se } hk \geq 0$$

$$\Delta_x^{a-b} \Delta_y^{d-c} f(b, c) \leq \Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y) \leq 0 \quad \text{se } hk \leq 0,$$

e, se avesse luogo la (23), risulterebbe in ogni punto interno al campo (2):

$$Df(x, y) = 0,$$

contrariamente a quanto è stato ammesso.

Con ciò il teorema è dimostrato.

7. Quanto è stato fin qui detto si può ripetere con lievi modificazioni per una funzione di una variabile $f(x)$, ove al posto della differenza seconda $\Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y)$ e della derivata totale simmetrica della $f(x, y)$ si considerino ora la differenza prima $\Delta^h f(x) = f(x+h) - f(x)$ e la derivata ordinaria della $f(x)$. Questa si dice assolutamente continua nell'intervallo (a, b) , in cui è definita, se la somma delle differenze prime

$$\sum_i \Delta^{h_i} f(x_i) \quad (h_i > 0),$$

relative ad un insieme finito qualsivoglia d'intervalli

$$(24) \quad x_i \leq x \leq x_i + h_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

contenuti in (a, b) , non aventi due a due punti interni a comune, tende a zero al tendere a zero della somma $\sum_i h_i$ delle lunghezze di questi intervalli, se cioè, fissato comunque il numero positivo σ si può sempre determinare un numero positivo ε tale da avere, qualunque sia il numero degl' intervalli (24):

$$| \sum_i \Delta^{h_i} f(x_i) | \leq \sigma ,$$

tutte le volte che è:

$$\sum_i h_i \leq \varepsilon .$$

La precedente definizione si può trasformare con ragionamento analogo a quello del n° 2, e si può anche aggiungere, come subito si vede, che, se la $f(x)$ è assolutamente continua, tende a zero, al tendere a zero di $\sum_i h_i$, la somma delle oscillazioni di $f(x)$ nell' intervalli (24) e viceversa. Inoltre è chiaro che l' assoluta continuità porta in questo caso come conseguenza la continuità ordinaria.

§ 2.

8. Sia ora $\varphi(x, y)$ una funzione sommabile nel campo (2).

L' ipotesi che la $\varphi(x, y)$ sia definita in tutto il rettangolo (2) non porta alcuna restrizione per ciò che andiamo a dire, giacchè, quando la $\varphi(x, y)$ fosse data soltanto per i punti di un insieme misurabile, contenuto in detto rettangolo, si rimpiazzerebbe la $\varphi(x, y)$ con una nuova funzione $\varphi_1(x, y)$, coincidente con $\varphi(x, y)$ in ogni punto dell' insieme dato e nulla in ogni punto dell' insieme complementare.

Ciò posto, convenendo di rappresentare in generale con $R \begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ y_1, y_2 \end{pmatrix}$ il rettangolo, che ha per vertici i punti di ascisse x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) e di ordinate y_1, y_2 ($y_1 < y_2$), si consideri la funzione

$$\Phi_1(x, y) = \iint_{R \begin{pmatrix} a, x \\ c, y \end{pmatrix}} \varphi(x, y) dx dy ,$$

rappresentata dall' integrale della $\varphi(x, y)$ esteso ad $R \begin{pmatrix} a, x \\ c, y \end{pmatrix}$.

Questa funzione è assolutamente continua nel campo (2), giacchè se (x, y) ed $(x+h, y+k)$ sono due punti di tale campo ($h > 0, k > 0$), si ha:

$$\iint_{R \begin{pmatrix} x, x+h \\ y, y+k \end{pmatrix}} \varphi(x, y) dx dy = \Delta_x^h \Delta_y^k \Phi_1(x, y) ,$$

e d' altra parte la somma degl' integrali di $\varphi(x, y)$, estesi ad un insieme finito qualsivoglia di rettangoli:

$$\begin{aligned} x_i &\leq x \leq x_i + h_i \\ y_i &\leq y \leq y_i + k_i \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \dots, n) ,$$

contenuti nel campo (2), non aventi due a due punti interni a comune, tende a zero al tendere a zero della somma $\sum_i h_i k_i$ delle aree di questi rettangoli ⁽³⁾.

Di più la $\Phi_1(x, y)$ ammette quasi da per tutto la derivata totale simmetrica, coincidente con $\varphi(x, y)$, cioè:

$$(25) \quad D \Phi_1(x, y) = \varphi(x, y).$$

Se infatti, convenendo di attribuire a $\varphi(x, y)$ il valore zero fuori del campo (2), si pone:

$$\Psi(e) = \iint_e \varphi(x, y) dx dy,$$

ove e indica un insieme misurabile qualsivoglia, risulta quasi da per tutto, detto h' un incremento positivo: ⁽⁴⁾

$$\lim_{h' \rightarrow 0} \frac{\Delta_x^{h'} \Delta_y^{h'} \Phi_1(x, y)}{h'^2} = \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{\Psi \left[R \left(\begin{smallmatrix} x, x+h' \\ y, y+h' \end{smallmatrix} \right) \right]}{h'^2} = \varphi(x, y)$$

$$\lim_{h' \rightarrow 0} \frac{\Delta_x^{-h'} \Delta_y^{h'} \Phi_1(x, y)}{-h'^2} = \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{\Psi \left[R \left(\begin{smallmatrix} x-h, x \\ y, y+h \end{smallmatrix} \right) \right]}{h'^2} = \varphi(x, y)$$

$$\lim_{h' \rightarrow 0} \frac{\Delta_x^{-h'} \Delta_y^{-h'} \Phi_1(x, y)}{h'^2} = \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{\Psi \left[R \left(\begin{smallmatrix} x-h', x \\ y-h', y \end{smallmatrix} \right) \right]}{h'^2} = \varphi(x, y)$$

$$\lim_{h' \rightarrow 0} \frac{\Delta_x^{h'} \Delta_y^{-h'} \Phi_1(x, y)}{-h'^2} = \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{\Psi \left[R \left(\begin{smallmatrix} x, x+h' \\ y-h', y \end{smallmatrix} \right) \right]}{h'^2} = \varphi(x, y);$$

e da queste eguaglianze segue senz'altro la (25).

Viceversa si dimostra che una funzione $\varphi(x, y)$ è sommabile nel rettangolo (2), se esiste una funzione assolutamente continua $\Phi(x, y)$, la cui derivata totale simmetrica coincide quasi da per tutto con $\varphi(x, y)$; e più generalmente ancora che una funzione qualunque, assolutamente continua, $f(x, y)$ ammette quasi da per tutto la derivata totale simmetrica sommabile.

Tenuto conto di quanto è stato or ora detto a proposito della $\Phi_1(x, y)$, la questione si riduce a far vedere che si può dalla $f(x, y)$, dedurre una funzione d'insieme $F(e)$, assolutamente continua, additiva, tale da avere, (x, y) ed $(x+h, y+k)$ essendo due punti qualsivogliano ($h > 0, k > 0$) del campo (2):

$$F \left[R \left(\begin{smallmatrix} x, x+h \\ y, y+k \end{smallmatrix} \right) \right] = \Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y). \quad (5)$$

⁽³⁾ Cfr. *Lebesgue e De la Vallée Poussin*, l. c. (1).

⁽⁴⁾ Cfr. *Lebesgue e De la Vallée Poussin* l. c. (1).

⁽⁵⁾ Cfr. *Lebesgue e De la Vallée Poussin* l. c. (1).

Si consideri perciò nel campo (2) un insieme misurabile qualsivoglia E , e se ne racchiudano i punti in un insieme finito o numerabile di rettangoli R_n , contenuti nello stesso campo (2), coi lati paralleli agli assi, non aventi due a due punti interni a comune. Un sistema di rettangoli R_n così fatti può ottenersi racchiudendo comunque in un insieme finito o numerabile di rettangoli R'_i , contenuti nel campo (2), coi lati paralleli agli assi, i punti di E ; togliendo dal rettangolo R'_i per $i=2, 3, \dots$, le parti comuni ai rettangoli precedenti R'_1, \dots, R'_{i-1} , e decomponendo la parte rimanente di R'_i in rettangoli parziali mediante le parallele agli assi, condotte per i vertici dei rettangoli precedenti, che cadono entro R'_i . In tal modo ogni rettangolo R'_i viene sostituito con un numero finito ben determinato di rettangoli parziali o soppresso del tutto, ed un punto di E contenuto in R'_i viene ad essere contenuto nei rettangoli R_n formati con R'_1, \dots, R'_i .

Siano i rettangoli R_n così ottenuti definiti dalle limitazioni

$$(26) \quad \begin{aligned} x_n &\leq x \leq x_n + h_n \\ y_n &\leq y \leq y_n + h_n \end{aligned} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

La serie delle corrispondenti differenze seconde della $f(x, y)$

$$(27) \quad \sum_n \Delta_x^{h_n} \Delta_y^{k_n} f(x_n, y_n)$$

è (n° 2) assolutamente convergente. Ad ogni sistema G di rettangoli R_n corrisponde così una quantità determinata S , somma della serie anzidetta.

Si fissi ora una successione numerabile di sistemi dei detti rettangoli

$$(28) \quad G_1, G_2, \dots, G_p, \dots,$$

in modo che, essendo i rettangoli $R_{n,p}$ di G_p definiti dalle limitazioni

$$\begin{aligned} x_{n,p} &\leq x \leq x_{n,p} + h_{n,p} \\ y_{n,p} &\leq y \leq y_{n,p} + h_{n,p} \end{aligned} \quad \left(\begin{aligned} n &= 1, 2, \dots \\ p &= 1, 2, \dots \end{aligned} \right),$$

risulti:

$$(29) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\sum_1^{\infty} h_{np} k_{np} - mE \right] = 0,$$

e si consideri la successione

$$(30) \quad S_1, S_2, \dots, S_p, \dots$$

dei corrispondenti valori di S : per la convergenza assoluta della serie (27) questa successione è indipendente dal modo, col quale vengono ordinati i rettangoli dei singoli sistemi (28).

È facile vedere che la successione (30) tende, al crescere di p , ad un limite determinato e finito.

Detta η una quantità positiva, che può essere scelta ad arbitrio, si considerino due

termini S_p ed S_q della (30), corrispondenti a due sistemi di rettangoli, per i quali si abbia:

$$(31) \quad \sum_1^{\infty} h_{np} k_{np} - mE \leq \eta,$$

$$\sum_1^{\infty} h_{nq} k_{nq} - mE \leq \eta.$$

L'insieme E è contenuto nelle parti comuni ai rettangoli di G_p ed ai rettangoli di G_q , e la somma delle misure di queste parti comuni, che si decompongono in un insieme finito o numerabile di rettangoli, non aventi due a due punti interni a comune, differirà a maggior ragione da mE per meno di η in valore assoluto.

Si consideri inoltre un valore n' dell'indice n , abbastanza grande, perchè si abbia:

$$(32) \quad \sum_{n'+1}^{\infty} h_{n,p} k_{n,p} \leq \eta, \quad \sum_{n'+1}^{\infty} h_{n,q} k_{n,q} \leq \eta.$$

Sarà:

$$(33) \quad S_p = \sum_1^{n'} \Delta_x^{h_{n,p}} \Delta_y^{k_{n,p}} f(x_{n,p}, y_{n,p}) + \sum_{n'+1}^{\infty} \Delta_x^{h_{n,p}} \Delta_y^{k_{n,p}} f(x_{n,p}, y_{n,p})$$

$$S_q = \sum_1^{n'} \Delta_x^{h_{n,q}} \Delta_y^{k_{n,q}} f(x_{n,q}, y_{n,q}) + \sum_{n'+1}^{\infty} \Delta_x^{h_{n,q}} \Delta_y^{k_{n,q}} f(x_{n,q}, y_{n,q})$$

A causa delle (32) la somma delle misure delle parti comuni ai rettangoli:

$$(34) \quad R_{n,p} \quad (n \leq n')$$

ed ai rettangoli

$$(35) \quad R_{n,q} \quad (n \leq n')$$

differisce in valore assoluto dalla somma delle misure di tutte le parti comuni ai rettangoli di G_p e di G_q per meno di 3η , e quindi per meno di 4η da mE .

Inoltre per le (31) e (32) le somme delle aree dei rettangoli (34) e (35) differiscono entrambe in valore assoluto da mE per meno di 2η , sicchè in conclusione ognuna di queste somme differisce in valore assoluto dalla somma delle misure delle parti comuni ai rettangoli (34) e (35) per meno di 6η .

Dopo ciò, assegnato comunque un numero positivo σ , s'indichi con ε una quantità positiva, tale da avere:

$$(36) \quad \left| S \right| = \left| \sum_1^{\infty} \Delta_x^{h_n} \Delta_y^{k_n} f(x_n, y_n) \right| \leq \frac{\sigma}{4},$$

tutte le volte che la somma $\sum_n h_n k_n$ delle aree dei corrispondenti rettangoli (26) non supera ε , e si assuma:

$$(37) \quad \eta \leq \frac{\varepsilon}{6}.$$

Le rette, a cui appartengono i lati dei rettangoli (35), dividano i rettangoli (34) nei rettangoli parziali

$$\begin{aligned} x_{npi} \leq x \leq x_{npi} + h_{npi} \\ y_{npi} \leq y \leq y_{npi} + k_{npi} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} n = 1, 2, \dots, n' \\ i = 1, 2, \dots, i_n \end{array} \right),$$

ed analogamente le rette, a cui appartengono i lati dei rettangoli (34), dividano i rettangoli (35) nei rettangoli parziali

$$\begin{aligned} x_{naj} \leq x \leq x_{naj} + h_{naj} \\ y_{naj} \leq y \leq y_{naj} + k_{naj} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} n = 1, 2, \dots, n' \\ j = 1, 2, \dots, j_n \end{array} \right).$$

In corrispondenza si ha :

$$\sum_1^{n'} \Delta_x^{h_{np}} \Delta_y^{k_{np}} f(x_{np}, y_{np}) = \sum_1^{n'} \sum_1^{i_n} \Delta_x^{h_{npi}} \Delta_y^{k_{npi}} f(x_{npi}, y_{npi}) \tag{38}$$

$$\sum_1^{n'} \Delta_x^{h_{nq}} \Delta_y^{k_{nq}} f(x_{nq}, y_{nq}) = \sum_1^{n'} \sum_1^{j_n} \Delta_x^{h_{naj}} \Delta_y^{k_{naj}} f(x_{naj}, y_{naj}),$$

e quindi :

$$\begin{aligned} \sum_1^{n'} \Delta_x^{h_{np}} \Delta_y^{k_{np}} f(x_{np}, y_{np}) - \sum_1^{n'} \Delta_x^{h_{nq}} \Delta_y^{k_{nq}} f(x_{nq}, y_{nq}) = \\ = \sum_1^{n'} \sum_1^{i_n} \Delta_x^{h_{npi}} \Delta_y^{k_{npi}} f(x_{npi}, y_{npi}) - \sum_1^{n'} \sum_1^{j_n} \Delta_x^{h_{naj}} \Delta_y^{k_{naj}} f(x_{naj}, y_{naj}), \end{aligned} \tag{39}$$

intendendo d'includere nelle somme $\sum_1^{n'} \sum_1^{i_n}$, $\sum_1^{n'} \sum_1^{j_n}$ soltanto i termini che non sono comuni ai secondi membri delle (38).

Ma per quanto è stato sopra detto e per la (37), si ha :

$$\sum_1^{n'} \sum_1^{i_n} h_{npi} k_{npi} \leq \varepsilon, \quad \sum_1^{n'} \sum_1^{j_n} h_{naj} k_{naj} \leq \varepsilon,$$

e quindi a causa della (36) :

$$\begin{aligned} \left| \sum_1^{n'} \sum_1^{i_n} \Delta_x^{h_{npi}} \Delta_y^{k_{npi}} f(x_{npi}, y_{npi}) \right| &\leq \frac{\sigma}{4}, \\ \left| \sum_1^{n'} \sum_1^{j_n} \Delta_x^{h_{naj}} \Delta_y^{k_{naj}} f(x_{naj}, y_{naj}) \right| &\leq \frac{\sigma}{4}. \end{aligned}$$

Dalla (39) segue dunque :

$$\left| \sum_1^{n'} \Delta_x^{h_{np}} \Delta_y^{k_{np}} f(x_{np}, y_{np}) - \sum_1^{n'} \Delta_x^{h_{nq}} \Delta_y^{k_{nq}} f(x_{nq}, y_{nq}) \right| \leq \frac{\sigma}{2}$$

e per le (32), (33), (36), (37):

$$|S_p - S_q| \leq \sigma.$$

Con ciò che precede resta dimostrato che, scelto comunque un numero positivo σ , si può sempre determinare, in base alle (31), e (37), un valore p' dell'indice p tale, che risulti soddisfatta la precedente disuguaglianza, qualunque siano p e q maggiori di p' ; e che pertanto la successione (30) tende, al crescere di p , ad un limite determinato e finito.

Risulta ancora da quanto è stato dianzi detto che, se si considera un'altra successione di sistemi di rettangoli

$$G'_1, G'_2, \dots, G'_p, \dots,$$

distinta dalla (28), ma soddisfacente alle stesse condizioni, la corrispondente successione dei valori di S

$$S'_1, S'_2, \dots, S'_p, \dots$$

tende, al crescere di p , allo stesso limite, a cui tende la (30).

Infatti, se p è abbastanza grande, perchè abbia luogo la prima delle (31) e la disuguaglianza analoga

$$\sum_1^{\infty} h'_{np} k'_{np} - mE \leq \eta,$$

ove con

$$\begin{aligned} x'_{np} &\leq x \leq x'_{np} + h'_{np} \\ y'_{np} &\leq y \leq y'_{np} + k'_{np} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} n = 1, 2, \dots \\ p = 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

s'indicano i rettangoli di G'_p , e s'intende ancora che sia soddisfatta la (37), risulta:

$$|S_p - S'_p| \leq \sigma,$$

il che basta al nostro scopo.

Il limite in discorso non dipende dunque dalla scelta della successione (28), ma solo dall'insieme E , e definisce pertanto una funzione d'insieme $F(E)$, per ogni insieme misurabile E , contenuto nel campo (2).

La definizione si estende nel solito modo a tutto il piano, ponendo per un insieme qualsivoglia e misurabile, limitato:

$$F(e) = F \left[e R \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right],$$

ove con $e R \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ s'indica l'insieme dei punti comuni ad e ed al campo (2).

L'assoluta continuità (n° 2) della $f(x, y)$ porta evidentemente l'assoluta continuità della $F(e)$, nel senso che $F(e)$ tende a zero al tendere a zero della misura di e .

La funzione $F(e)$ è inoltre additiva, cioè, data una successione finita o infinita d'insiemi misurabili

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$$

contenuti in un campo limitato, non aventi due a due punti a comune, si ha :

$$F(e_1 + e_2 + \dots) = F(e_1) + F(e_2) + \dots$$

Infatti si consideri, oltre all' insieme E un altro insieme \bar{E} , contenuto nel campo (2), non avente con E punti a comune, e si formi una successione di sistemi di rettangoli

$$(40) \quad \bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots, \bar{G}_p, \dots,$$

soddisfacenti alle condizioni poste per i sistemi della successione (28), e quindi in particolare tali da avere :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left[\sum_1^{\infty} \bar{h}_{np} \bar{k}_{np} - m \bar{E} \right] = 0,$$

supponendo che i rettangoli \bar{R}_{np} di \bar{G}_p siano definiti dalle limitazioni :

$$\begin{aligned} \bar{x}_{np} \leq x \leq \bar{x}_{np} + \bar{h}_{np} \\ \bar{y}_{np} \leq y \leq \bar{y}_{np} + \bar{k}_{np} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} n = 1, 2, \dots \\ p = 1, 2, \dots \end{array} \right).$$

Per ogni $p = 1, 2, \dots$ si ordinino i rettangoli di G_p e di \bar{G}_p in una successione semplicemente infinita, prendendo alternativamente, secondo i valori crescenti dell'indice n un rettangolo in G_p ed uno in \bar{G}_p , e dal sistema dei rettangoli così ottenuti, i quali contengono tutti i punti dell'insieme $E + \bar{E}$, si deduca nel modo sopra indicato, un nuovo sistema $\bar{\bar{G}}_p$ di rettangoli, non aventi due a due punti interni a comune e contenenti ancora tutti i punti di $E + \bar{E}$.

Si formi la successione

$$(41) \quad \bar{\bar{G}}_1, \bar{\bar{G}}_2, \dots, \bar{\bar{G}}_p, \dots$$

per la quale, se i rettangoli di $\bar{\bar{G}}_p$ si suppongono definiti dalle limitazioni

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}}_{np} \leq x \leq \bar{\bar{x}}_{np} + \bar{\bar{h}}_{np} \\ \bar{\bar{y}}_{np} \leq y \leq \bar{\bar{y}}_{np} + \bar{\bar{k}}_{np} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} n = 1, 2, \dots \\ p = 1, 2, \dots \end{array} \right),$$

risulta evidentemente :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left[\sum_1^{\infty} \bar{\bar{h}}_{np} \bar{\bar{k}}_{np} - m (E + \bar{E}) \right] = 0.$$

Siano :

$$\begin{aligned} \bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_p, \dots \\ \bar{\bar{S}}_1, \bar{\bar{S}}_2, \dots, \bar{\bar{S}}_p, \dots \end{aligned}$$

le successioni, analoghe alla (30), corrispondenti rispettivamente alla (40) ed alla (41).

Si fissi un valore di p abbastanza grande da avere:

$$\sum_1^{\infty} h_{np} k_{np} - mE \leq \eta$$

$$\sum_1^{\infty} \bar{h}_{np} \bar{k}_{np} - m\bar{E} \leq \eta$$

$$\sum_1^{\infty} \bar{\bar{h}}_{np} \bar{\bar{k}}_{np} - m(E + \bar{E}) \leq \eta,$$

e successivamente un valore \bar{n} di n , per il quale si abbia:

$$\sum_{\bar{n}+1}^{\infty} h_{np} k_{np} \leq \eta, \quad \sum_{\bar{n}+1}^{\infty} \bar{h}_{np} \bar{k}_{np} \leq \eta, \quad \sum_{2\bar{n}+1}^{\infty} \bar{\bar{h}}_{np} \bar{\bar{k}}_{np} \leq \eta.$$

Sarà allora:

$$\left| \sum_1^{\bar{n}} h_{np} k_{np} - mE \right| \leq 2\eta$$

$$\left| \sum_1^{\bar{n}} \bar{h}_{np} \bar{k}_{np} - m\bar{E} \right| \leq 2\eta$$

$$\left| \sum_1^{2\bar{n}} \bar{\bar{h}}_{np} \bar{\bar{k}}_{np} - m(E + \bar{E}) \right| \leq 2\eta,$$

e la somma delle misure delle parti comuni ai rettangoli

$$R_{np} \quad (n \leq \bar{n})$$

di G_p ed ai rettangoli:

$$\bar{R}_{np} \quad (n \leq \bar{n})$$

di \bar{G}_p non potrà superare la quantità 6η .

Pertanto se, come sopra, si assume η soddisfacente alla (37), risulteranno ad un tempo verificate le disuguaglianze

$$\left| \sum_1^{\bar{n}} \Delta_x^{h_{np}} \Delta_y^{k_{np}} f(x_{np}, y_{np}) - S_p \right| \leq \frac{\sigma}{4}$$

$$\left| \sum_1^{\bar{n}} \Delta_x^{\bar{h}_{np}} \Delta_y^{\bar{k}_{np}} f(\bar{x}_{np}, \bar{y}_{np}) - \bar{S}_p \right| \leq \frac{\sigma}{4}$$

$$\left| \sum_1^{2\bar{n}} \Delta_x^{\bar{\bar{h}}_{np}} \Delta_y^{\bar{\bar{k}}_{np}} f(\bar{\bar{x}}_{np}, \bar{\bar{y}}_{np}) - \bar{\bar{S}}_p \right| \leq \frac{\sigma}{4}$$

$$\left| \sum_1^{2\bar{n}} \Delta_x^{\bar{\bar{h}}_{np}} \Delta_y^{\bar{\bar{k}}_{np}} f(\bar{\bar{x}}_{np}, \bar{\bar{y}}_{np}) - \left(\sum_1^{\bar{n}} \Delta_x^{h_{np}} \Delta_y^{k_{np}} f(x_{np}, y_{np}) + \sum_1^{\bar{n}} \Delta_x^{\bar{h}_{np}} \Delta_y^{\bar{k}_{np}} f(\bar{x}_{np}, \bar{y}_{np}) \right) \right| \leq \frac{\sigma}{4},$$

e così in ultimo:

$$|\bar{S}_p - (S_p + \bar{S}_p)| \leq \sigma.$$

Segue senz'altro che deve aversi:

$$|F(E + \bar{E}) - (F(E) + F(\bar{E}))| \leq \sigma,$$

e potendo σ essere arbitrariamente scelto:

$$F(E + \bar{E}) = F(E) + F(\bar{E}).$$

Con ciò è provato che la $F(e)$ è additiva per due e quindi per un numero finito, qualsivoglia d'insiemi misurabili, contenuti in un campo limitato, non aventi due a due punti a comune.

Nel caso che sia data una successione illimitata d'insiemi così fatti

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \dots,$$

si ponga:

$$e'_n = e_{n+1} + e_{n+2} + \dots$$

Risulta:

$$F(e_1 + e_2 + \dots) = F(e_1) + F(e_2) + \dots + F(e_n) + F(e'_n),$$

e poichè:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m e'_n = 0,$$

e quindi per l'assoluta continuità di $F(e)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(e'_n) = 0,$$

si deduce che la serie

$$F(e_1) + F(e_2) + \dots,$$

converge, e si ha:

$$F(e_1 + e_2 + \dots) = F(e_1) + F(e_2) + \dots$$

Con ciò che precede resta pienamente dimostrato quanto abbiamo sopra asserito, e si conclude che *condizione necessaria e sufficiente, affinchè la funzione data $\varphi(x, y)$ sia sommabile nel campo (2), è che esista una funzione assolutamente continua $\Phi(x, y)$, di cui la derivata totale simmetrica coincida quasi da per tutto con $\varphi(x, y)$.*

9. — Delle funzioni $\Phi(x, y)$, soddisfacenti alle condizioni ora dette, quando ne esiste una, ne esistono infinite, e sono tutte e sole le funzioni, che si deducono dall'espressione

$$(42) \quad \Phi_1(x, y) = \varphi(x) + \psi(y),$$

ove:

$$\Phi_1(x, y) = \iint_{R(a, x, c, y)} \varphi(x, y) dx dy,$$

e $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono due funzioni arbitrarie di x ed y .

Una qualunque delle (42) si dice *funzione integrale* o *integrale indefinito* della $\varphi(x, y)$, e s'indica col simbolo

$$\iint \varphi(x, y) dx dy,$$

determinato, per quanto è stato ora detto, a meno di una funzione additiva, arbitraria, della forma $\varphi(x) + \psi(y)$.

Per ogni funzione integrale si ha evidentemente:

$$\Delta_x^h \Delta_y^k \Phi(x, y) = \Delta_x^h \Delta_y^k \Phi_1(x, y),$$

e quindi:

$$\iint_{R(a, b, c, d)} \varphi(x, y) dx dy = \Delta_x^{b-a} \Delta_y^{d-c} \Phi(a, c).$$

10. — Dopo quanto è stato fin qui detto, è manifesta l'equivalenza fra la definizione dell'integrale di *Lebesgue* e la definizione seguente:

Una funzione $\varphi(x, y)$, definita in un rettangolo (2), è sommabile, se esiste una funzione $\Phi(x, y)$, assolutamente continua (integrale indefinito), determinata a meno di una funzione additiva, arbitraria della forma $\varphi(x) + \psi(y)$, la quale abbia come derivata totale simmetrica quasi da per tutto la $\varphi(x, y)$.

L'integrale definito nel campo (2) è allora dato da $\Delta_x^{b-a} \Delta_y^{d-c} \Phi(a, c)$.

A questa definizione fa riscontro, nel caso delle funzioni di una variabile, la definizione ben nota:

Una funzione $\varphi(x)$, definita in un intervallo (a, b) , è sommabile, se esiste una funzione $\Phi(x)$, assolutamente continua (integrale indefinito) determinata a meno

di una costante additiva arbitraria, di cui la derivata coincida quasi da per tutto con $\varphi(x)$. L' integrale definito nell' intervallo (a, b) è allora dato da $\Phi(b) - \Phi(a)$. ⁽⁶⁾

11. — Come già è stato rilevato al principio di questo §, le precedenti considerazioni si applicano al caso che la $\varphi(x, y)$, invece di essere definita nel campo rettangolare (2), sia definita in un insieme misurabile qualsivoglia E , contenuto in detto campo; basta considerare una funzione $\varphi_1(x, y)$, coincidente con $\varphi(x, y)$ in ogni punto di E e nulla in ogni punto dell' insieme complementare, e porre per definizione, ammesso che la $\varphi_1(x, y)$ risulti sommabile :

$$\iint_E \varphi(x, y) dx dy = \iint_{R\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} \varphi_1(x, y) dx dy.$$

È anche facile vedere come dalle precedenti definizioni, mediante i teoremi del § 1, si possano dedurre in modo semplice e spedito le proprietà fondamentali degli integrali definiti. Senza entrare su ciò in particolari, ci limitiamo a rilevare che conseguenza immediata del teorema del n° 5 è il seguente :

Se $\varphi(x, y)$ è una funzione sommabile nel campo (2), e si ha quasi da per tutto $\varphi(x, y) \geq 0$, senza che sia di misura (superficiale) nulla l' insieme dei punti in cui $\varphi(x, y) = 0$, risulta :

$$\iint_{R\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} \varphi(x, y) dx dy > 0.$$

Risulta invece :

$$\iint_{R\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} \varphi(x, y) dx dy < 0$$

se, ferme rimanendo le altre ipotesi, si ha, quasi da per tutto nel campo (2) $\varphi(x, y) \leq 0$.

Catania, febbraio 1917.

⁽⁶⁾ Cfr. LEBESGUE: *Leçons sur l' intégration et la recherche des fonctions primitives* [Paris, Gauthier-Villars 1904] p. 129. Cfr. anche VITALI: *Sulle funzioni integrali* [Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1900].



Istituto Zoologico della R. Università di Catania

Esperimenti di pesca con luce subacquea

Nota del Prof. **ACHILLE RUSSO**

(Con 5 figure nel testo).

In una Nota precedente (1) descrissi una *lampada*, attivata da una *Batteria*, adatta a potere essere sommersa, ed un dispositivo per la pesca con luce subacquea. I risultati ottenuti con tale dispositivo, consistente in una *Nassa* di forma piramidale, dentro cui la lampada veniva applicata, se non furono quelli che mi ripromettevo, furono però tali da

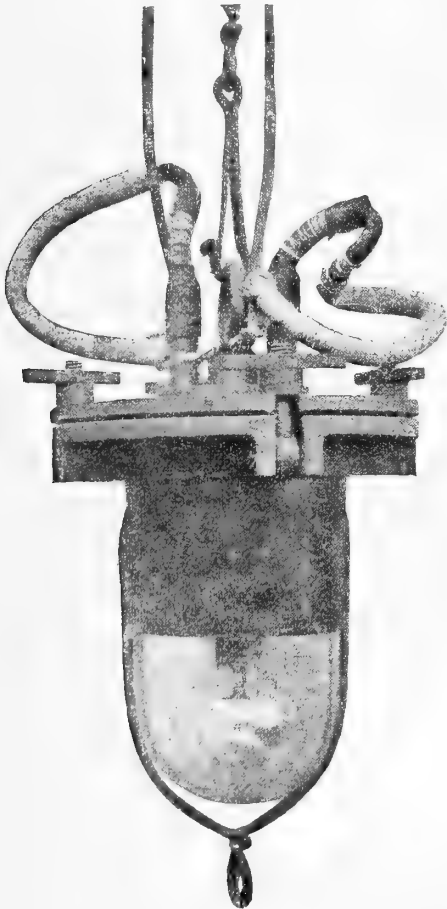


Fig. 1^a — Fotografia della lampada, chiusa nel globo di vetro, con relativa armatura metallica.

incoraggiarmi a proseguire le ricerche. Lo scopo che mi proposi di raggiungere fu quello di trovare il mezzo più adatto alla cattura dei Pesci, che si raccolgono attorno alla sorgente di luce, e quindi di rendere l'apparecchio un mezzo proficuo e pratico di pesca. In questa Nota espongo i vari dispositivi adottati, sperando con ciò di fare cosa utile all'industria pescareccia nei mari italiani, i quali con questo nuovo mezzo di pesca potrebbero dare un maggiore rendimento dell'attuale.

Risultati negativi allo scopo pratico della pesca.—Nella Nota sopra citata avevo detto che la *Nassa*, dentro cui collocavasi la *lampada*, era un mezzo inadatto alla cattura delle forme animali marine, probabilmente perchè esse, vedendo l'apparecchio illuminato, se ne allontanavano. Per tale ragione, anche per suggerimento delle persone pratiche, ho modificato la *Nassa*, costruendone una di forma conica, lunga 3 m. e del diametro alla base di m. 1. Al vertice del cono, dalla parte interna, fu applicata la lampada, munita di riflettore, e tutta la *Nassa* fu rivestita di tela, che era stata precedentemente dipinta con nero fumo ed olio di lino. In tal modo la luce interna, prodotta dalla lampada, non poteva passare al di fuori se non per il centro della parte anteriore o base del cono, chiamata *campa* a Catania, dove trovasi la *trappola*, e propriamente per

(1) RUSSO A. — *Ulteriori ricerche su la pesca con sorgenti luminose nel golfo di Catania.* (Tentativi di illuminazione subacquea) — Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali. Vol. VIII, Serie 5^a Catania 1915.

l'apertura centrale, per la quale possono penetrare all'interno le diverse forme animali marine. Da questa apertura circolare, che rimaneva soltanto libera del rivestimento di tela, quando l'apparecchio era in funzione, a profondità diverse nel mare, si proiettava un fascio di luce, che illuminava in linea retta le acque circostanti fino a 10 e più metri.

Come si rileva dallo specchio qui annesso, in cui sono riassunti i dati degli esperimenti, tale dispositivo non dette alcun pratico risultato, poichè, non ostante si raccogliesse

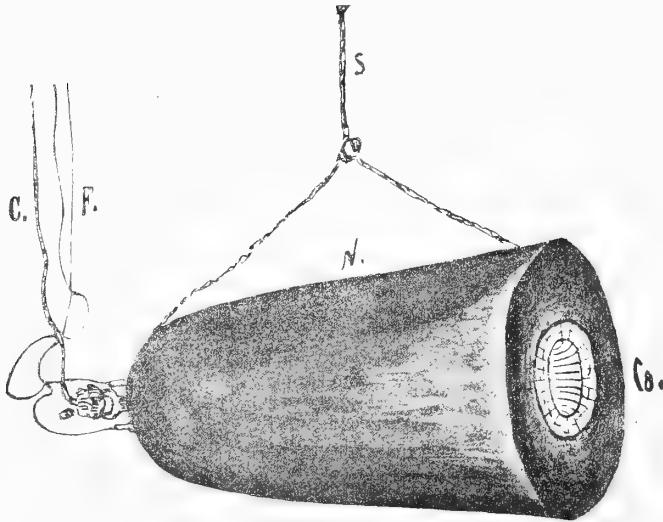


Fig. 2^a—Nassa coperta di tela fino all'imboccatura della trappola. C) — corda resistente, che accompagna i fili conduttori della corrente elettrica (F) — Ca) — *campa*, coperta di tela fino all'imboccatura della trappola. N) — Nassa. S) sospensione della nassa.

del *Plankton* nell'interno della *Nassa*, e fuori di essa, in prossimità dell'apertura circolare, nessun Pesce o altra forma marina adulta vi penetrò. Giova osservare che in questo caso gli esperimenti furono di breve durata, poco più di un'ora; ma, ritengo che, se anche l'esperimento fosse durato più lungo tempo, il risultato sarebbe stato poco incoraggiante ai fini della pratica della pesca.

Altri esperimenti furono allora intrapresi, lasciando libera del rivestimento di tela tutta la parte anteriore della *Nassa*, al limite esterno della *campa*, dalla quale perciò si proiettava un fascio di luce più grande. In questo caso, come risulta dall'esperimento riassunto nello specchio, mentre si è constatato la presenza del *Plankton* dentro e fuori della *Nassa* e nella zona illuminata una grande quantità di *Ope* (Box boops) e di altre specie di pesci, che non si sono potuto identificare per la rilevante profondità alla quale si sono tenuti, nell'interno non penetrò alcuno di essi.

In entrambe queste esperienze la *Nassa*, caricata da pesi convenientemente disposti lungo l'asse maggiore, fu tenuta sospesa in posizione orizzontale, a varie profondità. Con il mare perfettamente calmo la sospensione non presenta inconvenienti di sorta; però, non appena il mare è alquanto mosso, il movimento della

barca, il cigolio che produce la fune a cui la *Nassa* è sospesa, mentre non permettevano di far tenere a questa una posizione fissa, facevano allontanare dallo specchio d'acqua illuminato i Pesci e le altre forme adulte che si erano avvicinati.

Risultati anche negativi allo scopo pratico della pesca furono ottenuti, facendo pog-

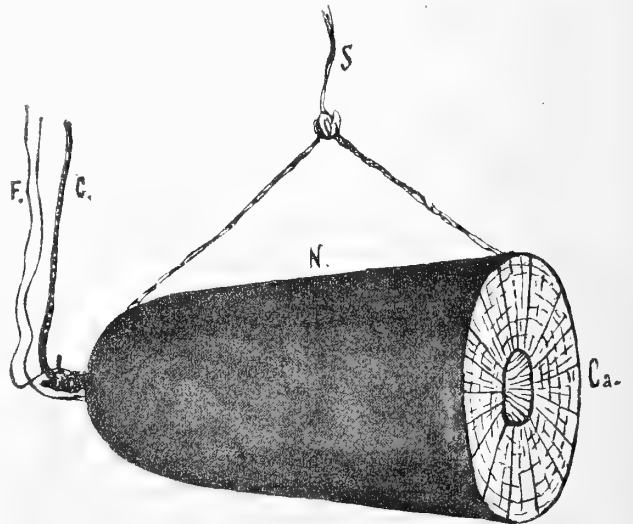


Fig. 3^a — Nassa con *campa* tutta scoperta. La spiegazione delle lettere, come nella figura precedente.

Esperimenti di pesca con luce subacquea, con lampada dentro la Nassa.

Data, ora, profondità e durata dell'immersione della Nassa	Località e distanza dalla spiaggia	Corrente, vento e stato del mare	Pesci avvicinati	Pesci catturati	Plankton	Osservazioni
13 Maggio 1916 -- Profondità d' immersione m. 17. Ore 20-22.	Porto d'Ulisse (Urnazzo) m. 450.	Corrente di Canale. Vento Maestrato leggero.	—	—	Presente	Nassa con <i>campha</i> coperta di tela fino all'imboccatura della trappola.
14 Maggio 1916 -- Profondità d' immersione m. 2. Ore 20-21.	Porto d'Ulisse (Urnazzo) m. 450.	Corrente di Canale. Vento Scirocco leggero.	Piccoli pesci indistinguibili per la profondità. Pochi Sauri. (<i>Trachurus trachurus</i> Cuv.)	—	Mysis, Eteronereis. Ova di Eteronereis. Larve di Crostacei decapodi, etc.	Nassa con <i>campha</i> coperta di tela fino all'imboccatura della trappola.
20 Maggio 1916 -- Profondità d' immersione m. 3. Ore 20-21.	Porto d'Ulisse m. 450.	Corrente di Canale. Vento Scirocco leggero. Mare alquanto agitato.	Ope (<i>Boae boops</i> Cuv.) in quantità. Altre specie indistinguibili per la profondità.	—	Mysis. Eteronereis. Larve di Decapodi, etc.	Nassa con <i>campha</i> libera della copertura di tela. La luce si proietta fino a 10 m. e più in linea retta.

N.B. — Questi esperimenti e quelli riprodotti nel Quadro seguente, furono fatti col permesso del Comando dell' XI^o Settore costiero di Catania. Essi furono di breve durata, essendo proibita nel momento attuale, per misure prudenziali, la pesca con la luce. Detti esperimenti saranno ripresi a tempo opportuno.

giare la *Nassa* sul fondo marino. È probabile che, tenendo per lungo tempo l'apparecchio in azione, alcune forme marine potrebbero penetrare nell'interno della *Nassa*; ma, in questo caso, ritengo che l'eccessivo consumo di energia elettrica non verrebbe compensato dal prodotto della pesca.

Non è da escludersi però che, costruendo Nasse molto più grandi di quelle da me adoperate ed impiegando un dispositivo per l'illuminazione più opportuno, il risultato non possa essere più pratico (1).

Risultati positivi allo scopo pratico della pesca.—Escluso con gli esperimenti su riferiti che l'impiego della *Nassa*, nel dispositivo da me adottato, possa essere un mezzo proficuo per la pesca con luce subacquea, ho fatto varie prove con l'*immersione libera* della lampada a varie profondità e scegliendo località diverse del Golfo di Catania, come è indicato nell'annesso specchietto.

Con questo metodo, il più semplice fra tutti, non appena la lampada è immersa nell'acqua, attorno alla sorgente di luce si raccoglie subito il *Plankton*, che è più o meno abbondante, più o meno vario per le forme marine galleggianti, che vi si riscontrano, se-

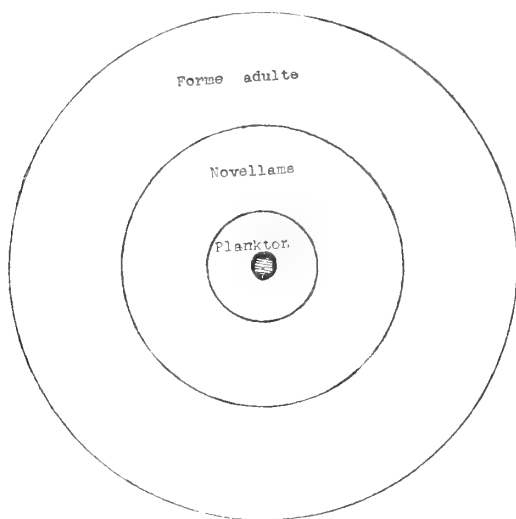


Fig. 4^a — Rappresentazione schematica delle zone, che si formano attorno alla sorgente luminosa, rappresentata dal cerchio interno più scuro.

condo la località, lo stato del mare più o meno mosso, le correnti etc. Attorno a questa parte centrale, formata dalla sorgente luminosa e dal *Plankton*, che rappresenta quasi il nucleo, si raccoglie dopo breve tempo il neonato dei Pesci ed il *novellame*, e perifericamente, cioè nella zona più esterna dello specchio d'acqua illuminato, i Pesci adulti ed altre forme marine, che nel *novellame* e nel *Plankton* trovano il loro nutrimento. Come fu rappresentato nella figura qui annessa, tutto lo specchio d'acqua illuminato può essere perciò distinto in tre zone concentriche, il cui centro è dato dalla sorgente di luce. Tali zone sono più o meno distinte, secondo dello stato del mare, poichè il movimento ondoso può rendere poco precisa tale distinzione.

Per la cattura dei Pesci, che si raccolgono nella zona più esterna dello spazio d'acqua illuminato, fu adoperata la rete, detta a Catania *Pulica* o *Ragostina*. Tale rete viene qui impiegata per la pesca con la luce, fatta a mezzo della *lampadara*, ma, essa si presta assai bene anche per la pesca con luce subacquea. Tale rete ed il modo di manovrarla fu descritto in altra mia pubblicazione (2), alla quale rimando il lettore; qui mi limito a riferire qualche dettaglio, relativo al nuovo metodo di pesca sperimentato.

(1) Furono fatti anche vari esperimenti con un apparecchio, che potrebbe essere paragonato al *Monteleva*, ma di piccolissime dimensioni. Esso consiste in un cerchio di ferro del diametro di circa 3 metri, al quale è legata una rete a forma di sacco, lungo circa 5 m. Tale apparecchio veniva tenuto al disotto della lampada e sollevato nel momento in cui i Pesci si erano raccolti attorno alla sorgente di luce. Mi riservo riferire più estesamente sui risultati che si possono ottenere con tale dispositivo, quando potrò fare nuovi esperimenti.

(2) RUSSO A. — *Effetti della pesca con le sorgenti luminose sul prodotto delle reti di posta a Catania e sul prodotto delle Tonnare della Sicilia orientale* — (Vedi *Appendice a pag. 17*). Atti Accademia Gioenia di Scienze Naturali — Vol. VI. Serie 5^a Catania 1913.

La cassa con l'*Accumulatore* e l'apparecchio d'illuminazione, messo in azione dalla *batteria*, si situano sopra una piccola barca, la quale è manovrata da un solo uomo, sufficiente anche ad immergere la lampada. Quest' uomo, quando il Pesce si è raccolto attorno alla lampada, dà un segnale perchè altre due barche di più grandi dimensioni, manovrate ciascuna da 6 a 7 uomini, e che portano la *Pulica*, si avanzino per cingere lo specchio d'acqua illuminato. Quando la parte centrale della rete, detta *fonte*, che è a maglia molto stretta, è vicina, ed i marinai delle due barche, raccogliendo i due lati della rete, detti *latera*, si sono anche avvicinati tanto da giungere al *tirapiombo*, a mezzo dell'*interruttore* della luce, la lampada viene spenta.

Tirando allora il *tirapiombo*, la *fonte*, che è munita nel suo margine superiore di

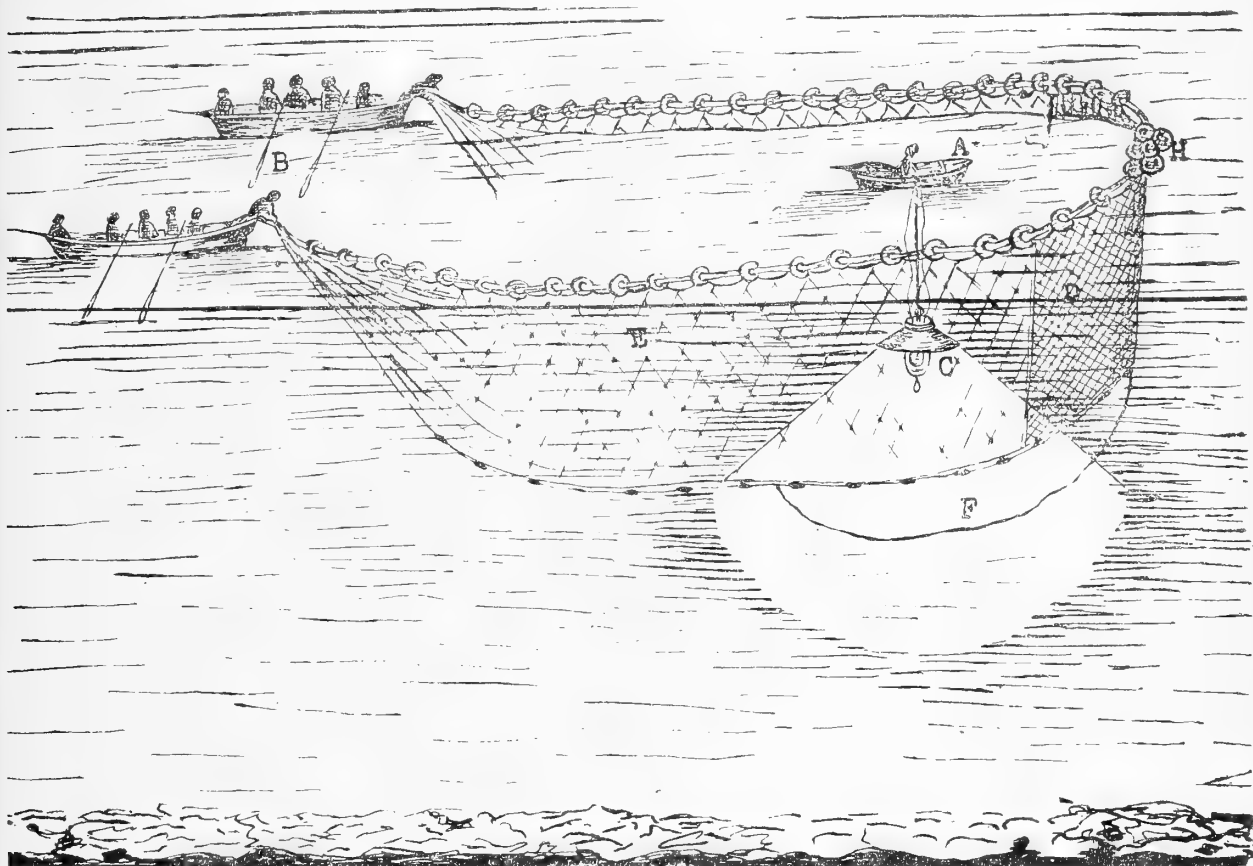


Fig. 5^a — La *pulica*, nell'atto che circonda lo specchio d'acqua illuminato dalla lampada, dopo che si sono raccolti i pesci attorno la sorgente luminosa: A) Barca di piccole dimensioni, manovrata da un solo uomo; con la lampada, B) Barche di più grandi dimensioni per la manovra della *Pulica* e per la raccolta del prodotto della pesca, C) Lampada con il riflettore, D) Parte della *Pulica* a maglia stretta, detta Fonte, E) Parte laterale della *Pulica*, a maglia larga, detta *Latera* F) *Tirapiombo*, H) *Sugherata*. (Figura schematica).

un mazzo di sugheri (*sugherata*), per cui dal lato superiore resta galleggiante, forma una specie di grande *coppa*, dentro cui trovasi il prodotto della pesca.

La figura qui annessa rappresenta l'operazione nel momento in cui la *pulica* cinge lo specchio d'acqua illuminato dalla lampada, dopo che il Pesce si è in esso raccolto.

Gli esperimenti eseguiti con tale sistema, oltre ad essere stati di breve durata, furono fatti nei mesi in cui si sa, per antica pratica, che la pesca con la luce è poco remunera-

Esperimenti di pesca con luce subacquea, con immersione libera della lampada.

Data, ora, profondità e durata d'immersione della lampada	Località e distanza dalla spiaggia	Corrente e Vento	Raggio d'illuminazione	Plankton	Pesci avvicinati e quantità catturata	Osservazioni
17 ottobre 1916—Ore 19. 19 ³ / ₄ —prof. d'im. 5 m. 1 ora circa d'immersione.	Aci-Trezza — Tra l'Isola dei Ciclopi e la terraferma, 400 m. circa.	Corrente da Nord, Ponente.	Il raggio d'illuminazione diminuisce a misura che la lampada si sommerge.	Abbondante. Eteronereis, Mysis, larve di Crostacei, ecc.	Occhiati (<i>Box-boops</i> Cuv.) Ope (<i>Oblada melanura</i> Cuv.) in quantità — catturati circa 16 kg. in poco tempo: $\frac{3}{4}$ ora.	Per la cattura dei Pesci fu adoperata la <i>Putica</i> .
21 ottobre 1916—ore 17 fu iniziato l'esperimento seguito fino a buio perfetto — L' esperimento durò fino alle ore 21, mutando località ed immergendo la lampada a varie profondità.	Aci-Trezza — Tra l'Isola dei Ciclopi e Capo Mulini, 150 m. circa.	Corrente da Sud, Maestro.	Molto grande.	Abbondante.	Ope in quantità—catturati circa 20 kg.	Adoperata la <i>Putica</i> . Con luce crepuscolare non si avvicinarono Pesci.
21 dicembre 1916—Imm. m. 12, ore 15 ¹ / ₂ —19 ¹ / ₂ .	Porto di Ulisse, m. 60.	Corrente da Ponente, Maestro.	Non molto grande.	Presente ma non abbondante.	Ope, Occhiate, Curineda (<i>Atherina</i>)—catturati kg. 8.	Il raggio d'illuminazione ristretto dipese dalla poca carica dell' accumulatore.
26 gennaio 1917—Imm. m. 3, ore 18.30 - 20.	Porto d' Ulisse.	Calma.	Grande.	Abbondante.	Grande quantità di piccole Sarde (<i>Clupea pilchardus</i>) abbondante Curineda, <i>Sepioida Rondeletii</i> anche abbondante.	Avvicinò alla lampada un grosso Pesce, indeterminabile, che subito andò via.
27 gennaio 1917—Imm. m. 4, ore 18-20.	Porto di Ulisse, m. 200.	Mezza corrente di terra.	Grande	Abbondante. Eteronereis, Aliciope, Appendicularie, larve di Crostacei.	Sarde, Ope in abbondanza, piccole Sarde abbondantissime, Curineda anche abbondante, 2 Occhiate.	
30 gennaio 1917—Imm. m. 9, ore 18-20.	Porto di Ulisse, località Urnazzo.	Mare calmo in principio dell' esperimento, poi mezza corrente di terra.	Grande	Abbondante.	Abbondantissima Curineda, che si è disposta in cerchio attorno alla sorgente di luce.	Movendosi la barca verso terra, il Pesce che si era raccolto, seguiva la sorgente di luce. Si tuata la barca vicino la spiaggia, avvicinarono moltissimi piccoli Cefali. Tenuta la lampada in vicinanza della spiaggia con fondo sabbioso e tre metri di profondità, si formò del Plankton attorno la luce, ma non avvicinarono Pesci.

tiva. Difatti, essa per lo più viene esercitata da Maggio a Settembre, quando le migrazioni dei Pesci sono più attive lungo le coste dei mari italiani, mentre i miei esperimenti furono fatti in Ottobre, Dicembre e Gennaio. Ciò non pertanto, gli esperimenti da me fatti dettero buoni risultati anche nella stagione invernale, comunemente ritenuta poco opportuna alla pesca con la luce, raccogliendosi quantità sufficiente di Pesce da farmi ritenere che, in epoca più propizia, il nuovo metodo, esercitato su più larga scala, potrebbe dare un rendimento superiore a quello di altri generi di pesca.

Catania, 15 febbraio 1917.



Istituto di clinica delle malattie nervose e mentali della R. Università di Catania
diretto dal Prof. D' Abundo

**Sopra una particolare neuropatia spasmodica con disturbo
del linguaggio articolato**

**Nota clinica ed anatomo - patologica
del Prof. G. D' ABUNDO**

(Con 13 figure nel testo).

Credo utile pubblicare due casi riguardanti una particolare forma neuropatica da me seguiti per lungo tempo nel loro decorso in clinica, fino all' esito dell' autopsia, ed i quali contribuiranno sempre più a dimostrare, quanto multiformi e complesse possono essere le manifestazioni morbose del sistema nervoso di origine traumatica, e come i reperti necroscopici rivelino nuove incognite nel difficile argomento, in cui il fattore ereditario neurotico e quello predisponente acquisito rappresentano sempre elementi da tenersi nella massima considerazione.

Le due osservazioni cliniche, che riassuntivamente riporterò, riguardano due sorelle, nelle quali senza dubbio alcuno il trauma rappresentò l' elemento etiologico indiscutibile nello svolgimento della neuropatia, la quale in ambo i casi presentò un singolare disturbo spasmodico del linguaggio.

Osservazione I^a

A...., di anni 41, quando il 7 Luglio 1903 venne ricoverata in Clinica.

Importante era la eredità nevropatica. Padre e madre erano cugini in 2° grado. Padre molto intelligente, ma nervosissimo, morì di 82 anni. Una zia materna pazza. La madre partorì 15 figli a termine, di cui 8 morirono in età diverse, fra i quali una sorella coi sintomi della demenza precoce.

Di tre fratelli nevrotici uno con conformazione antropologica generale deforme per rachitide era macrocefalo, e negli ultimi anni presentò accessi imperiosi di sonno spontaneo, che si verificavano anche quando mangiava. Era sufficientemente intelligente, e morì con manifestazioni neuropatiche.

Avea 3 sorelle viventi di cui una è il soggetto dell'Osservazione 2^a; due altre sono viventi, intelligenti ma di carattere nervosissimo.

Tutti i parenti dal lato materno e paterno sono nervosi. L' A. rivelò per tempo un carattere riservato ed impressionabilissimo. Era molto religiosa e voleva farsi monaca. Studiò con piacere, ed era discretamente istruita rispetto alla sua età prima del trauma.

Mestruada a 13 anni $\frac{1}{2}$ stette benissimo in salute fino a 14 anni, quando una sera nell'Agosto del 1876 a tarda ora mentre stava all'impiedi su d' una sedia ad assistere nella strada ai fuochi pirotecnici d' una festa religiosa, ad un tratto per un urto ricevuto cadde all'indietro battendo violentemente l' occipite sul selciato, e rimanendo svenuta. Non presentò alcuna manifestazione convulsiva.

Immediatamente soccorsa in una farmacia vicina dove venne portata, rimase alcune ore incosciente, finchè a poco a poco rinvenne, e fu trasportata a casa.

In seguito a tale caduta rimase 4, 5 giorni depressa e come stordita; indi cominciò rapidamente a rifarsi riprendendo la sua vita abituale.

Le mestruazioni si arrestarono.

Al trauma riportato nel 1876 non seguirono particolari disturbi paretici; però ben presto dopo circa un mese in famiglia cominciarono a rilevare, che l'A. presentava un lieve inceppamento della parola, al quale non dettero dapprima grande importanza; contemporaneamente Lei accusava una certa tensione nei muscoli della regione laterale destra del collo. Inoltre fu precisamente dopo il trauma che l'A. principiò rapidamente ad ingrassare in maniera notevolissima. Si noti che nella di Lei famiglia erano tutti di costituzione fisica magri.

Ciò le dispiaceva tanto, che per dimagrire cominciò a strapazzarsi salendo e scendendo centinaia di volte i dieci scalini che nella propria abitazione portavano ad un mezzanino, trasportando un recipiente pieno di acqua. E quando dalla famiglia ne venne impedita camminava per 6, 7 ore di seguito in una stanza, finchè rimaneva esaurita.

Dopo tali strapazzi praticati per diversi mesi dimagrò realmente, però lo stato fisico originario di magrezza si ripristinò dopo circa due anni dal trauma. L'arresto delle mestruazioni durò 16 mesi; indi esse ripresero a manifestarsi ogni 3, 4 mesi in quantità sparuta, finchè a 30 anni sparirono del tutto.

Il disturbo del linguaggio era dalla paziente descritto come se la lingua fosse divenuta più grossa, in modo da trovarsi a disagio nella cavità boccale; molto lentamente tale disturbo si rese ulteriormente più evidente.

Dopo circa 5 mesi dal trauma cominciò anche a rilevarsi che la tensione nel collo dianzi accennata si precisava con la tendenza della testa a rimanere ruotata a sinistra; ed indi a poco a poco anche nell'arto superiore di destra si manifestò uno stato di semplice tensione, che non ostacolava gran fatto i movimenti, perchè non era continuo ma a tratti; però ulteriormente, ma sempre con lentezza grandissima alternata da tappe stazionarie, lo stato di tensione assunse il carattere spasmodico. Da diligenti ricerche anamnestiche praticate risultò escluso che contemporaneamente allo stato spasmoide si fosse manifestato il carattere coreiforme. Per quanto anche nell'arto inferiore destro lo stato di tensione si fosse verificato contemporaneamente a quello dell'arto superiore, pure il disturbo funzionale era molto meno appariscente.

Mi venne affermato, che la forma spasmodica emilaterale destra dopo circa 5 anni sembrò acquistare il carattere della stabilità.

Sui mutamenti verificatisi nel carattere e nella intelligenza dopo il trauma mi venne affermato, che l'A. sorprese per il fatto che non dimostrò più la grande tendenza che avea sempre avuta per le pratiche religiose; inoltre era divenuta testarda, irritabilissima e sovente violenta. Il disturbo della parola e le manifestazioni spasmodiche la resero ritrosa a mostrarsi in pubblico.

Nell'Ospizio di Mendicità di Catania rimase dal 7 Luglio 1903, fino al 10 febbraio 1909 in cui morì all'età di 47 anni.

Per 6 anni consecutivi io seguii il decorso della nevropatia, ed ecco riassunti i sintomi da me rilevati.

L'atteggiamento della A. si può rilevare dalla Fig. 1^a, nella quale si nota, che il capo era ruotato a sinistra; dei movimenti spasmodici-coreiformi faceano continuamente ruotare verso sinistra il capo. Volontariamente l'A. potea ruotare verso destra la testa, ma in maniera molto incompleta.

Tali tentativi esageravano i movimenti spasmodici-coreiformi verso sinistra.

Nel viso tutte le rughe erano pronunziate, e la bocca rimaneva semiaperta con le mascelle in contrazione spasmodica, alternate da rilasciamenti; volontariamente però le riusciva aprire e chiudere la bocca.



Fig. 1.

Anche negli orbicolari delle palpebre si notava la tendenza spasmodica, senza però verificarsi la chiusura delle rime palpebrali.

La lingua rimaneva nella cavità boccale contratta verso destra ma potea essere proiettata fuori le arcate dentarie, non rimanendo però ferma ma verificandosi dei movimenti spasmodici-coreiformi di retrazione in fuori e in dentro la bocca. Vi era abbondante e continua salivazione per cui continuamente l'A. era costretta ad asciugarsi le labbra.

Nella metà destra della faccia i muscoli innervati dal VII° presentavano a tratti movimenti spasmodici coreiformi, che sovente si esageravano in seguito a cause emotive. Anche movimenti simiglianti si verificavano a sinistra; però evidentemente l'azione spasmodica era predominante a destra.

L'arto superiore destro si presentava addotto in contrazione spasmodica (fig. 1^a). L'A. non poteva elevare il braccio nè ruotare in supinazione l'avambraccio; la mano ordinariamente rimaneva chiusa a pugno. A tratti frequenti si verificavano dei movimenti di rilasciamento e contrazione in modo da presentare il carattere spasmodico-coreiforme.

Passivamente si riusciva malamente a vincere lo stato spasmodico in tutto l'arto.

La deambulazione era difficoltata, rilevandosi nella gamba destra uno stato spasmoide con lieve tendenza contratturale nei muscoli del polpaccio.

L'eccitabilità meccanica era vivace nei muscoli degli arti del lato destro.

Esisteva esagerazione dei riflessi rotulei con clono del piede bilateralmente, però più intenso a destra; non si rilevava il clono del ginocchio. Alle volte non si riusciva a provocare il clono dei piedi per un'azione spasmodica predominante ed intensa dei muscoli della regione posteriore della gamba. *Babinski* a destra.

La deglutizione era un po' turbata in special modo per i movimenti spasmodici della lingua; però in complesso l'A. riusciva ad alimentarsi convenientemente.

La voce era nasale, e la parola fortemente disturbata; sovente anzi non poteva pronunciare sillaba rimanendo in un atteggiamento di arresto spasmodico, colla bocca aperta e con *grimaces* molteplici nel viso.

Spesso si avea a tratti come un aumento generale di tutti i sintomi spasmodici, che si esageravano anche in seguito a qualunque eccitamento insignificante.

I riflessi cutanei e addominali erano vivaci a destra specialmente.

Un esame accurato della sensibilità generale riusciva difficoltoso, sia per la facile stanchezza dell'A., sia perchè attirando l'attenzione della malata si esageravano tutti i movimenti spasmodici-coreiformi; però se non fu possibile adoperare il compasso di *Weber*, dall'insieme delle indagini eseguite risultò diminuita la sensibilità generale negli arti di destra.

Sensi specifici conservati. Non fu possibile praticare l'esame del campo visivo col perimetro, ma coi soliti mezzi grossolani non risultò un palese restringimento.

Riguardo agli sfinteri a tratti avveniva un bisogno imperioso che non dava tempo, ma che alle volte si risolveva in uno spasmo, che non permetteva che con difficoltà l'emissione delle urine e delle feci.

Riguardo alle funzioni psichiche due furono i caratteri fondamentali riscontrati: uno stato apatico con notevole esauribilità dell'attenzione, ed una tendenza a scatti di grande irritazione nervosa per futili motivi i quali alle volte mancavano del tutto. Negli ultimi 2 anni poi si presentava smemorata e dal punto di vista affettivo assolutamente indifferente verso le sorelle, le quali s'interessavano molto di Lei, dolenti di non poterla curare in casa.

Nelle funzioni della vita vegetativa nessun disturbo degno di nota.

Nel sonno l'arto superiore destro si presentava come agitato di tanto in tanto da piccoli sussulti, e dall'infermiera mi venne assicurato, che nel viso le *grimaces* si manifestavano frequentemente.

Nei 6 anni circa in cui rimase nella sezione cronici la forma clinica rimase stabile nei suoi caratteri fondamentali. Un evidente ipotrofismo risultava nei muscoli degli arti di destra.

Nella lingua non risultarono almeno apparentemente differenze di nutrizione tra le due metà, però l'esame elettrico constatò semplicemente una diminuzione della contrattilità faradica a destra.

Anche negli arti di destra l'esame elettrico dimostrò una lieve diminuzione della contrattilità muscolare alla corrente faradica.

L'A. morì nel Febbraio 1909 in seguito ad una lieve affezione febbrile durata appena 2 giorni, e durante i quali si verificarono sintomi dinamici cardiaci imponenti.

L'autopsia fece rilevare: dura madre aderente lungo il seno longitudinale; aumento di liquido cefalo rachidiano negli spazi subaracnoidali; iperemia delle meningi.

Emisfero cerebrale sinistro ipotrofico nella quasi sua metà anteriore.

In tagli verticali ebbe a rilevarsi un evidente idrocefalo ventricolare in special modo nelle sezioni anteriori del cervello.

Nel corpo calloso si notava un colorito giallognolo-grigiastro nettamente limitato alla lamina inferiore. Cervelletto leggermente ipotrofico nell'emisfero destro. Normale la grandezza dell'ipofisi.

Un evidente ingrossamento in toto fu rilevato nella ghiandola tiroide, ed in particolar modo del lobo sinistro. Utero piccolissimo. Ipostasi pulmonare.

L'encefalo convenientemente fissato ed indurito nel liquido di Müller venne sottoposto a tagli seriali trattati col metodo *Weigert-Pall*, ed i dati isto-patologici rilevabili nelle Fig. 2 a 9 possono essere brevemente riassunti in ciò che segue.

Ipotrofismo dell'emisfero sinistro più marcato in avanti (fig. 2), dove la mielinizzazione nelle circonvoluzioni della convessità si notava sbiadita.

Nella circonvoluzione callosa bilateralmente si rilevava un fascetto di fibre nervose degenerate di maggiore entità a sinistra, che si poteva seguire in parte diretto nella lamina inferiore del corpo calloso, ed in parte

contornava la parte superiore del nucleo caudato. Inoltre nella parte mediana della lamina superiore del corpo calloso si constatava una evidente degenerazione, verificabile nei tagli seriali posteriori del cervello (Fig. 3, 4)

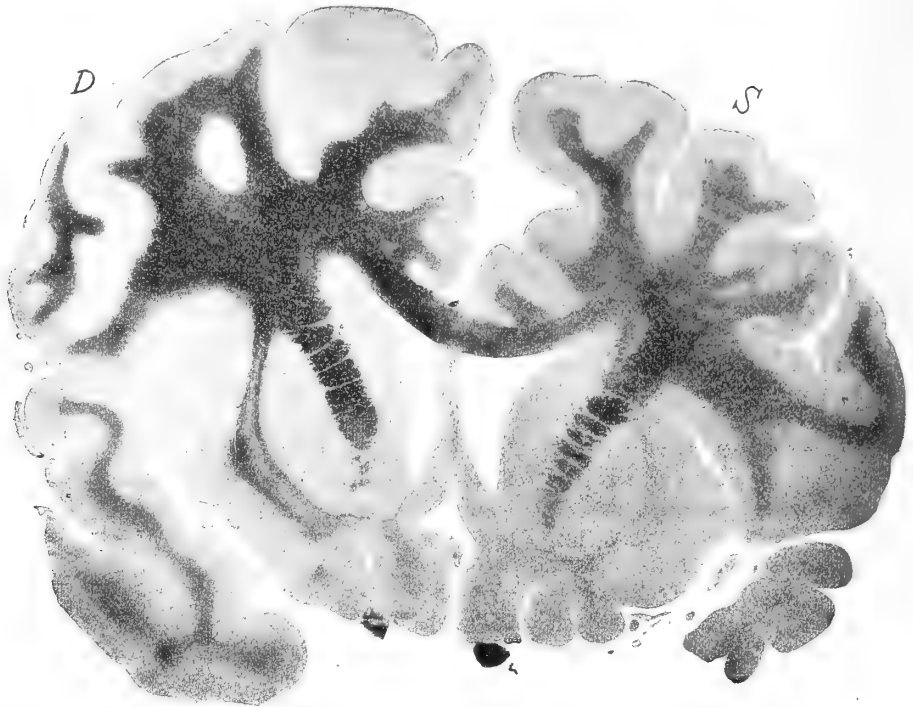


Fig. 2.

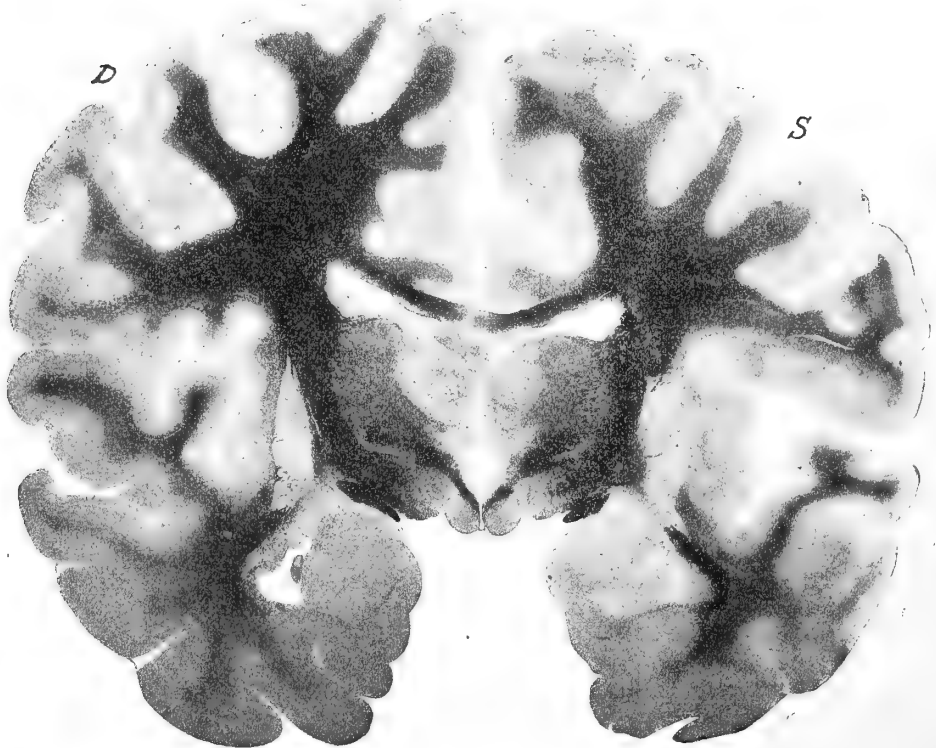


Fig. 3.

La degenerazione della lamina inferiore del corpo calloso, che in avanti (Fig. 2^a) si presentava più evidente a preferenza nella porzione corrispondente all'emisfero sinistro, nei tagli posteriori del cervello

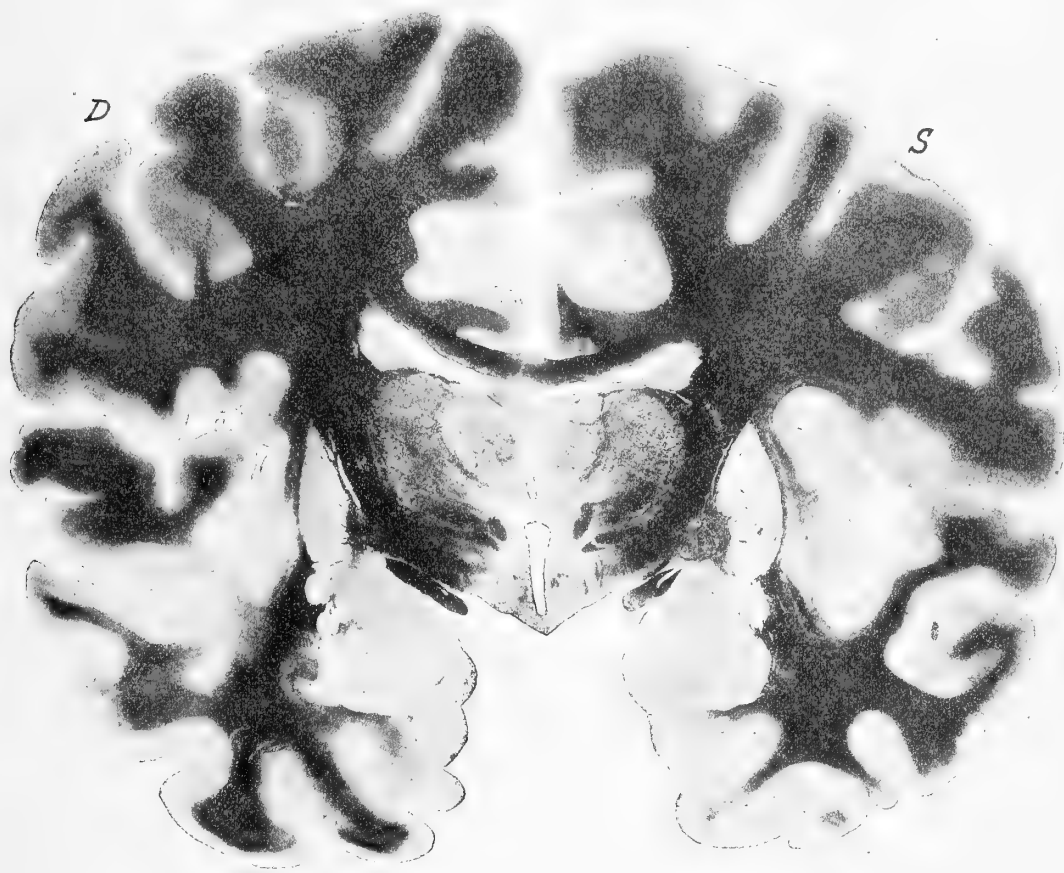


Fig. 4.



Fig. 5.

(Fig. 3^a e 4^a) si delineava chiaramente nella lamina inferiore bilateralmente, e nella parte centrale della lamina superiore.

La capsula interna era ridotta come risulta dalla Fig. 2^a.

Il fascio piramidale si presentava in parte degenerato nelle Fig. 3^a e 4^a ed atrofico nel ponte e nel bulbo Fig. 5, 6, 7, 8, 9.

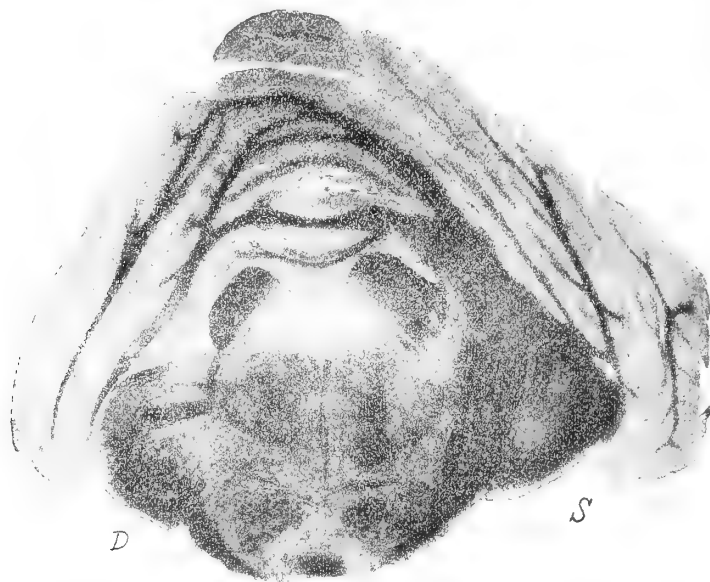


Fig. 6.

Nel ponte si rilevava il *lemniscus medialis* destro ridotto in volume (fig. 5 e 6) in modo da costituire un' atrofia incrociata col fascio piramidale.



Fig. 7.

Il peduncolo cerebellare medio si presentava ridotto di volume nella parte corrispondente al *lemniscus medialis* destro.

Il *putamen* e l'*antimuro* (1) si presentavano di volume maggiore nei $\frac{2}{3}$ posteriori dell'emisfero sinistro ipotrofico (fig. 3 e 4).

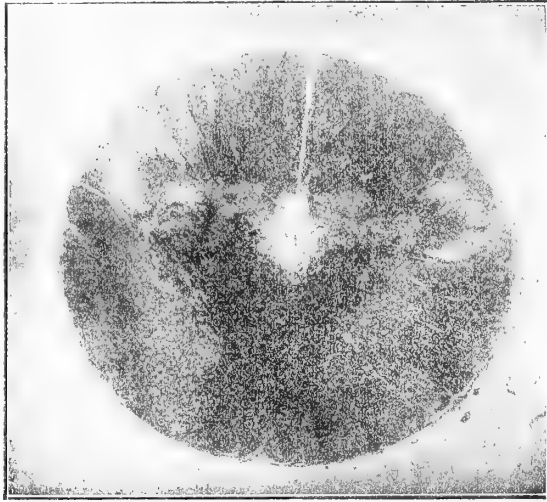


Fig. 8.

Nelle sezioni comprendenti i nuclei degli ipoglossi non si rilevò che qualche cellula nervosa impicciolita di volume e ciò bilateralmente.



Fig. 9.

Nei piccoli vasi cerebrali si notò un ispessimento delle pareti. In generale esisteva una dilatazione delle vie linfatiche parivascolari.

L'esame istologico della tiroide non fece rilevare che un aumento dei nuclei dello stroma.

(1) Anche in questo caso clinico all'ipotrofismo d'una parte d'un emisfero cerebrale corrispose l'ingrossamento del *putamen* e dell'*antimuro* corrispondente, giusto come venne rilevato in precedenti pubblicazioni.

— G. D' ABUNDO — *La fisiopatologia del talamo oltico*, 1909.

— id. — *Sulla probabile funzione del nucleo lenticolare*, 1913.

— id. — *Su d'una particolare microgiria parziale simmetrica negli emisferi cerebrali, e sui consecutivi probabili effetti compensativi*, 1913.

— id. — *Sopra alcune particolari manifestazioni compensative nei nuclei oplo-striati*.

In questo caso clinico oltre al fatto della grave eredità neuropatica, confermata anche dal carattere nevrotico originario del soggetto, risulta chiaro che il trauma accidentale riportato esplicò la sua azione intensa in special modo sul cranio; e la perdita di coscienza di alcune ore, e l'essere rimasta l'A. depressa e stordita parecchi giorni dimostrano, come il di lei sistema nervoso ebbe a risentirne una scossa abbastanza violenta.

Non si verificarono sintomi che facessero pensare ad un focolaio emorragico post-traumatico nell'encefalo che interessasse i centri o le vie motrici, avendo l'A. ripreso rapidamente la sua vita abituale; però una manifestazione spasmodica riguardante il linguaggio articolato fu la prima a presentarsi dopo un mese dal trauma, affermandosi indi a poco a poco una sintomatologia emilaterale destra, in cui all'elemento spasmodico predominante si associava più tardi quello coreiforme.

Sicchè chiaramente la neuropatia s'iniziò con una manifestazione non paretica, ma nettamente spasmodica, esplicandosi nel campo d'innervazione del XII° ed anche dell'XI° paio.

Però per quanto dall'anamnesi risultasse che la tendenza a ruotare verso sinistra il capo si fosse verificato dopo il disturbo del linguaggio articolato, pure è da considerare che già contemporaneamente all'inceppamento della parola l'A. notava una tensione nei muscoli del collo; per cui si può affermare, che il risentimento dei distretti innervati dal XII° e dall'XI° paio sia stato contemporaneo, per quanto il disturbo del linguaggio articolato abbia attirato più facilmente l'attenzione come ordinariamente avviene.

Affermatasi la forma clinica spasmodica emilaterale è bene considerare, che essa andò lentamente svolgendosi ed acquistando stabilità. Però se per gli arti e per l'innervazione dell'XI° paio la manifestazione spasmodica rimase nettamente emilaterale destra, al contrario per la lingua in maniera intensa, e per la faccia in grado molto minore, essa dimostrò una propagazione irritativa anche a sinistra.

Come già si è visto la forma neuropatica rimase quasi stereotipata per parecchi anni; fu lo stato mentale che presentò un deterioramento sempre più evidente negli ultimi tempi della vita.

Se non fosse stata ben rilevata l'anamnesi dell'evoluzione della sintomatologia, si sarebbe creduto di trovarsi innanzi ad una emiparesi pregressa presentante particolari manifestazioni spasmodiche-coreiformi, da attribuirsi con la massima probabilità ad un focolaio encefalico, che interessasse una regione tale da interpretare probabilmente l'intera sintomatologia.

Ma come già dissi fu chiaramente esclusa ogni manifestazione iniziale paretica, la quale insorse più tardi, e l'evoluzione si svolse primitivamente con un disturbo spasmodico riguardante il linguaggio articolato, e che coi suoi particolari caratteri complicava senza dubbio il concetto di localizzazione.

L'autopsia si è visto quali importanti alterazioni mise in evidenza.

Naturalmente l'aver fissato l'encefalo nel liquido di Müller non permise di usare tutti i molteplici metodi odierni d'indagine per le minute alterazioni morfologiche degli elementi cellulari; d'altra parte s'imponeva nel caso speciale il metodo di Weigert-Pall, poichè da esso solamente si potea sperare d'avere un concetto sintetico delle alterazioni del sistema nervoso centrale.

Si è già visto come complesse furono le lesioni rilevate, e sulle quali bisognerà fermarsi per vedere, se è possibile darne una conveniente interpretazione, mettendola in rapporto con la sintomatologia presentata dal soggetto.

Il primo dato di fatto messo in evidenza dalle sezioni seriali fu, che non esisteva alcuna lesione a focolaio, laddove risultavano marcati processi degenerativi ed atrofici.

Chiaro era l'ipotrofismo dell'emisfero cerebrale sinistro nella sua metà anteriore (fig. 2, 3, 4), dove si constatava anche sbiadita la mielinizzazione della sostanza bianca subcorticale, e tutto ciò senza che il detto ipotrofismo potesse essere l'esponente d'una lesione circoscritta pregressa della sostanza grigia corticale.

La degenerazione constatata nel corpo calloso, e precisamente nella lamina marginale inferiore e nella porzione mediana della lamina marginale superiore, oltre ai fascetti degenerati delle circonvoluzioni callose bilateralmente, rappresentano insieme alla sbiadita mielinizzazione della sostanza subcorticale, or ora accennata, un complesso di alterazioni, che per la mancanza di precise lesioni a focolaio impongono di considerarle come processi degenerativi primari.

Dopo gli studi importanti ed originali compiuti da *Marchiafava, Bignami e Nazari sulle alterazioni del corpo calloso negli alcoolisti*, pubblicati dal 1907 al 1915 (1), e confermati dal *Giannelli, Cesaris-Demel ed O. Rossi*, la regione anatomica della grande commissura cerebrale ha acquistato il diritto di essere più diligentemente considerata; il che per lo passato non sempre venne fatto, forse per l'abitudine invalsa per molto tempo di preferire nelle sezioni del cervello i tagli orizzontali a quelli verticali.

È merito indiscutibile di *Marchiafava e Bignami*, ed indi di *Bignami e Nazari* l'aver messo in evidenza negli alcoolisti la degenerazione primaria della zona mediana del corpo calloso, mentre le lamine marginali superiori ed inferiori si presentavano normali; ed inoltre di grande interesse furono le degenerazioni primarie subcorticali constatate da detti Autori, e le quali per quanto non avessero un carattere sistematico, pure si presentavano in sedi abbastanza circoscritte e con una certa uniformità.

Nel caso mio particolare dell'A., che non era alcoolista, è degno di rilievo il fatto, che la degenerazione era localizzata alla lamina marginale inferiore ed alla parte mediana della lamina marginale superiore, rispettando la zona mediana di *Marchiafava e Bignami*. Nella Fig. 3^a che rappresenta il punto massimo d'intensità di degenerazione circoscritta della parte mediana della lamina marginale inferiore del corpo calloso, è semplicemente apparente la rarefazione centrale della zona mediana, perchè all'esame istologico e nello studio delle numerose sezioni seriali le fibre nervose della zona mediana erano conservate.

Quindi risulterebbe chiara la deduzione, che nel soggetto A., non alcoolista, pur esistendo un processo degenerativo nel corpo calloso, esso rispettava la zona mediana callosa di *Marchiafava e Bignami*.

La qual cosa mentre eleva maggiormente in considerazione i risultati di *Marchiafava, Bignami e Nazari*, dimostra come processi morbosi diversi possano determinare alterazioni degenerative circoscritte differenti nel corpo calloso.

(1) MARCHIAFAVA E BIGNAMI. — *Sopra un'alterazione del corpo calloso osservata negli alcoolisti*. Rivista di Patologia nervosa e mentale. Firenze 1903.

BIGNAMI — *Sulle alterazioni del corpo calloso e della commissura anteriore ritrovata in un alcoolista*. Policlinico. Sezione pratica 1907.

MARCHIAFAVA E BIGNAMI. — *Sopra un'alterazione sistematica delle vie commessurali dell'encefalo nell'alcoolismo cronico*. Rendic. della R. Accad. dei Lincei. Seduta 6 febbraio.

BIGNAMI E NAZARI. — *Sulla degenerazione delle commissure encefaliche e degli emisferi nell'alcoolismo cronico*. Riv. sperimentale di Freniatica 31 marzo 1915.

Nell' insieme delle alterazioni nervose constatate nell'encefalo dall' A. molteplici sono i quesiti che si presentano, e notevoli le difficoltà per risolverli; basterà enumerare quelli fondamentali.

Fu unica la causa morbosa, o diverse e successive?

Dal punto di vista della successione di tempo quale fu il processo degenerativo-atrofico che precedette?

Quali rapporti intercedono tra l'ipotrofismo della porzione anteriore dell' emisfero cerebrale sinistro e tutti i processi degenerativi atrofici constatati nel resto dell' encefalo?

Quali i rapporti tra alterazioni nervose e sintomatologia?

Nel tentare di rispondere a questi quesiti io credo, che la sintomatologia presentata dall' A. nel suo inizio e nel suo decorso debbano servire di guida per interpretare, se è possibile, l'insieme delle alterazioni nervose.

E ad abbreviare la esposizione sarà utile che esprima, quale sia la concezione clinica ed anatomo-patologica sintetica che io mi son formata nel caso in discussione, per vedere se essa possa resistere ad una consecutiva critica analitica.

Al trauma intenso riportato al capo dall' A. credo che debba darsi l'importanza fondamentale nell'origine della nevropatia; però se ciò ebbe a verificarsi dipese nel caso speciale dal fatto, che nel soggetto esisteva una gravissima eredità neuro-psicopatica.

In clinica indagando con la massima accuratezza si riesce a rilevare, che nei casi in cui il trauma non produce una lesione a focolaio nel sistema nervoso centrale in modo da risulturne una forma clinica ben determinata, il risentimento ulteriore è più grave in coloro, che hanno una predisposizione neuro-psicopatica più o meno marcata.

Però è utile notare come in seguito a traumi al capo possono anche verificarsi disturbi funzionali da parte di organi importanti, per cui si hanno arresti di mestruazioni, profonde deficienze sessuali, rapidi ed allarmanti dimagrimenti od ingrassamenti, sintomatologie appartenenti ad alterazioni della tiroide, ecc. (1).

Nessuna meraviglia del resto che ciò possa avvenire, avendo il sistema nervoso centrale la suprema soprintendenza delle funzioni della vita organica, che turbate nell'equilibrio della loro contribuzione funzionale, possono rappresentare il punto di partenza di silenziose e subdole intossicazioni, innanzi alle quali non resistono i soggetti predisposti per cause ereditarie od acquisite (2).

Ora nel caso speciale dell' A. io credo, che l'intenso trauma al cranio abbia provocato nei rapporti dell' ipoglosso destro a preferenza una di quelle particolari condizioni rassomiglianti in parte a ciò che si verifica sovente nell' XI° paio ed in altri nervi cranici (III°, VI°, ecc.) in seguito a traumi.

Noi ignoriamo come si determini il *tic* spasmodico-clonico dell' XI° in seguito ad un trauma anche non al cranio; ma è un fatto, che il disturbo abbastanza sovente si mani-

(1) Ricordo di avere osservato 2 casi di morbo di Basedow che si svolsero certamente in seguito a gravi traumi. Si trattava di soggetti di carattere nervoso; ma dalle accurate indagini da me fatte dovetti convincermi che i primi sintomi s' iniziarono a brevissima distanza dal trauma, ed in uno di tali casi l'ingrossamento della tiroide fu precisamente quello che attirò subito l'attenzione della giovane signorina, che notò l' insolito gonfiore del suo collo. Si sarà trattato forse d' una semplice coincidenza?

(2) Riguardo alla predisposizione per cause acquisite basterà ricordare la sifilide, per cui i traumi al capo in soggetti sifilitici provocano frequentemente conseguenze disastrose.

fešta, e se la guarigione può avvenire, in altri casi il disturbo rimane per lunghissimo tempo, o non guarisce affatto.

La topografia anatomica speciale dei nervi cranici costretti a fuoriuscire da appositi forami o canali dalla cavità craniense può predisporli più o meno a risentire gli effetti d'un intenso scuotimento trasmesso dal trauma alla massa encefalica, la quale a sua volta deve pure in qualche maniera risentirne, appunto per quella tale vulnerabilità oramai indiscutibile creata dalla eredità neuropatica o da gravi infezioni e intossicazioni acquisite.

Però non sono sufficienti tali condizioni a spiegare l'insieme delle lesioni riscontrate nell'encefalo dell'A. È necessario invocare l'intervento d'un altro fattore all'infuori del sistema nervoso centrale, intervento provocato precisamente dall'influenza traumatica; e ciò perchè giusto come io per la prima volta esposi nel 1899 (1), *la causa efficiente delle malattie nervose sovente è d'uopo cercarla fuori del sistema nervoso, nella lesione di qualche organo protettivo importante.*

Nella storia clinica dell'A. vi è qualche particolare che può illuminare tale intervento.

L'A. presentò dopo il trauma da una parte l'arresto delle mestruazioni, che si erano appena iniziate 6 mesi prima, e dall'altro addivenne molto grassa, cosa insolita nella di lei famiglia; e la funzione mestruale si mantenne sempre irregolare con arresti a periodi, e scomparendo in età troppo giovane.

L'ingrossamento della tiroide constatato quando venne in Clinica poteva avere molteplici interpretazioni. È noto come col tramonto delle mestruazioni si può osservare un transitorio o prolungato ingrossamento della tiroide. Ed in questi casi anzi in soggetti predisposti vi è la coincidenza abbastanza frequente di turbe neurasteniche.

Cosa rappresenta in tali casi l'ingrossamento relativo della tiroide col tramonto delle funzioni mestruali? Forse un risentimento nell'equilibrio funzionale delle glandole a secrezione interna, ovvero una reazione compensativa?

Sono quesiti riguardanti quel grande enigma funzionale rappresentato dalla glandola tiroide, per cui a voler tenere in grande considerazione i cangiamenti di volume ne risultano alle volte delle contraddizioni cliniche.

Quante volte infatti non si notano soggetti in cui la tiroide assume un volume più o meno notevole senz'alcun particolare disturbo nervoso, mentre anche con piccoli e limitati ingrossamenti sovente coincide la manifestazione d'importanti turbe nevrotiche? È questione naturalmente in tali casi non di alterazioni quantitative ma qualitative di volume.

Nell'A. non si sa quando l'ingrossamento della tiroide ebbe a verificarsi; ma è un fatto che le molteplici degenerazioni ed atrofie riscontrate nel sistema nervoso centrale rassomigliano a quelle di origine tossica rilevate da *Marchiafava*, *Bignami* e *Nazari* negli alcoolisti, per quanto differenti per localizzazione. Ed allora io credo, che solamente una origine tossica potrebbe dare una interpretazione la meno scevra di obiezioni per riguardo alle alterazioni anatomo-patologiche riscontrate nell'A. Per cui ammettendo che il trauma capitando in soggetto così predisposto come l'A. ne avesse scosso fortemente la resistenza organica nervosa, l'intervento del fattore tossico rivelato dalle molteplici turbe funzionali trovò condizioni favorevoli ad alterare lentamente il trofismo di particolari sistemi di vie cellulipete e cellulifughe. S'intende bene che in tali casi è da

(1) G. D'ABUNDO — *Le intossicazioni e le infezioni nella patogenesi delle malattie mentali e delle neuropatie, anche nei riguardi terapeutici* — (Relazione fatta al Congresso Psichiatrico di Napoli, 1899).

ritenere, che la degenerazione primaria in tali vie sia stata possibile, in quantochè negli elementi morfologici centrali da cui esse fibre emanavano esisteva una *relativa deficienza reattiva costituzionale*.

Infatti le mie indagini sperimentali praticate nel 1887-1890 (1) dimostrarono, che provocando unilateralmente lesioni nella zona motrice corticale, ed inoculando culture di microrganismi patogeni in immediata vicinanza dello sciatico, si ottenevano da parte di quest' ultimo fatti reattivi più intensi nel lato opposto alla lesione corticale.

Lo stesso risultato si avea quando si producevano lievi lesioni nei cordoni laterali spinali; i fatti reattivi negli sciatici erano più intensi di quelli degli animali di controllo sani.

Se la interpretazione da me data sulla origine delle lesioni nervose constatate nell' A. venisse creduta probabile, si potrebbe rispondere ai quesiti dianzi formulati a me stesso nel seguente modo:

Che i fattori della nevropatia dell' A. furono molteplici; e ch' essa fu la risultante dell' addizione dell' elemento traumatico a quello tossico; i quali però potettero con successo esplicare la loro influenza per la gravissima eredità neuro-psicopatica del soggetto, che lo rendeva più vulnerabile agli effetti del trauma con tutte le complesse sue conseguenze.

Avendo a guida la sintomatologia, il processo degenerativo atrofico nell' encefalo dovette iniziarsi nel sistema motore.

L' ipotrofismo della parte anteriore dell' emisfero cerebrale sinistro, come già fu detto precedentemente, non può essere consecutivo ad un focolaio della corteccia cerebrale di origine traumatica (emorragia) verificatosi in un soggetto molto giovane (14 anni), giacchè nei tagli seriali non potea sfuggire la ciste cicatriziale se fosse esistita. Ed allora per la non facile interpretazione si potrebbe ricorrere all' ipotesi, che il trauma avesse esplicato una più efficace azione perturbatrice sulla parte anteriore dell' emisfero cerebrale sinistro, e precisamente nella zona di *Leonardo Bianchi*, la quale rappresentando la sede di più elevata elaborazione dei processi intellettivi, che acquista con l' età il massimo rendimento funzionale, avesse sofferto come conseguenza dell' influenza traumatica *non un arresto, ma una debolezza di sviluppo evolutivo*.

Del resto è concetto accettabile che una causa morbosa traumatica o tossica esplichi non solamente la sua influenza a preferenza sulle parti cerebrali meno antiche nell' evoluzione storica ontogenetica, ma eziandio sopra quelle parti del cervello, che raggiungono più tardi il grado funzionale più elevato nella vita dell' individuo.

E nell' A. il trauma si verificò in età giovanissima, a 14 anni, in un tempo cioè in cui il cervello ha dinanzi a sè ancora parecchio tempo per affermarsi nella sua stabilità di sviluppo.

Il disturbo coreiforme, che rilevai associato a quello spasmoide nell' A., potrebbe forse essere interpretato dall' associazione dell' atrofia del *lemniscus-medialis* e del peduncolo cerebelloso medio coll' alterazione delle vie motrici?

Per quanto il caso clinico da me riportato si allontani da quelli con lesioni a focolaio descritto da parecchi Autori con sintomi coreici o coreiformi (2), pure la coincidenza è abbastanza significativa per non prenderla in considerazione.

(1) G. D' ABUNDO — *Neuriti periferiche infettive e neuriti ascendenti* — Ricerche sperimentali. (Riforma Medica 1887 e *La psichiatria*, 1890, fasc. 3-4, Napoli).

(2) A tal proposito possono consultarsi le importanti pubblicazioni di *Leonardo Bianchi* sulla *Emicorea sintomatica* (1895 *Medicina contemporanea*, ed *Annali di Neurologia*, 1909, Napoli), nelle quali oltre al contributo originale personale è riportata una critica riassuntiva di tutte le dottrine sull' argomento.

Ciononostante molteplici sono le difficoltà che si frappongono ad armonizzare la forma clinica coll' insieme delle alterazioni anatomiche, tanto più che la sintomatologia si affermò coi suoi caratteri fondamentali abbastanza presto dopo il trauma, mentre la durata della neuropatia fu abbastanza lunga. Che potesse stabilirsi un rapporto incrociato tra l'ipatrofismo della porzione anteriore dell'emisfero cerebrale sinistro e l'atrofia del *lemniscus-medialis* e del peduncolo cerebelloso del lato opposto è cosa abbastanza probabile, che faciliterebbe l'interpertazione dell'insieme delle alterazioni morbose.

Il cangiamento di carattere dell'A. dopo il trauma, la coazione mentale e lo stato intellettuale affermatesi ulteriormente colla manifestazione apatica e cogli scatti di grande irritabilità nervosa possono essere messi in rapporto col coefficiente derivante dalla deficienza frontale sinistra, per quanto possa essere stata in parte compensata dal lobo prefrontale destro.

Sul particolare disturbo spasmodico del linguaggio articolato l'interpertazione dovrebbe essere inglobata in quella emilaterale destra; però la 2^a osservazione clinica che ha parecchi elementi d'identità colla 1^a come il trauma e la stessa base di eredità neuropatica, dimostrerà quanto difficile sia darne una conveniente spiegazione.

Ed infatti prima di procedere all'ulteriore discussione è bene riportarla in maniera riassuntiva.

Osservazione II^a

B... di anni 48 (quando entrò in Clinica; nata nel 1863), sorella di A. soggetto dell'osservazione precedente. Manifestò sempre carattere eminentemente nevrotico. D'intelligenza comune andò a scuola, dove-profitto d'una istruzione elementare.

Stette sempre bene in salute fino all'età di 33 anni, quando nel 1900 scavalcando un muro dell'altezza di 2 metri cadde malamente battendo la testa e la faccia destra, dove riportò una forte contusione; contemporaneamente si fratturò il radio sinistro, rimanendo per parecchie ore priva di coscienza. Rinvenuta era stordita e almeno per 10 giorni rimase come confusa di mente, rimettendosi poi del tutto intellettualmente.

Dopo circa un mese dal trauma la B. cominciò a presentare un lieve inceppamento della parola. Nello stesso modo come la sorella A. Lei avvertiva la sensazione come se la lingua le si fosse un po' ingrossata. Tale inceppamento della parola divenne molto lentamente sempre più evidente e progressivo.

Io ebbi l'occasione di vederla nel dicembre del 1903, cioè dopo 3 anni dacchè si era verificato il trauma, e precisamente quando Lei veniva a visitare la sorella A. ricoverata in clinica in Luglio dello stesso anno.

La B. si lamentava del disturbo della parola e delle particolari sensazioni che avvertiva nella lingua. Aprendo la bocca si notava che la lingua si manteneva come contratta nella cavità orale, con la punta incurvata in basso ed agitata da lenti e continui movimenti spasmodici.

Poteva esser tirata e mantenuta fuori la lingua, come si vede nella fig. 10, però la punta rimaneva retratta e si notava la tendenza a mantenersi nella posizione laterale destra. Certamente alla B. costava un po' di sforzo il metter fuori la lingua, la quale era agitata sempre dai movimenti spasmodici di sopra menzionati. Essa poteva essere portata lateralmente a sinistra, però si constatava allora con maggiore intensità l'azione spasmoide.

Non riusciva alla B. toccare la volta del palato colla punta della lingua; però era possibile un relativo incurvamento della lingua in su. Lei affermava di avvertire una sensazione di stiramento della punta destra della lingua.

Nella cavità boccale si raccoglieva una salivazione abbondante, la quale fuoriusciva in special modo quando mangiava.

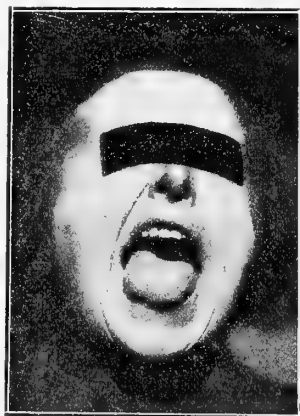


Fig. 10.

Il disturbo del linguaggio risultava evidente; e dal punto di vista fonetico si avvertiva l'impressione come se parlando fosse costretta a mantenere immobilizzata la lingua. Chi legge questa nota clinica può benissimo raffigurarsi il disturbo immobilizzando la propria lingua e parlando.

Però alla B. riusciva estremamente difficile pronunciare le consonanti *d, l, r, s, x*; e le parole della cui composizione esse facevano parte.

Non avvertiva alcuna sensazione di costrizione alla gola.

Potea mangiare e masticare benissimo, però una lieve difficoltà l'avvertiva dal lato sinistro; nessuna difficoltà provava nell'inghiottire.

Nella faccia si rilevava un *tic* bilaterale dell'orbicolare delle palpebre, che si verificava non a brevi intervalli; una tensione spasmoide si notava nei muscoli innervati dal ramo inferiore del VII° di destra (fig. 10).

Riguardo alla mobilità della faccia e degli arti non si constatava alcuna particolare deficienza motrice.

Negativi dal punto di vista patologico risultarono le indagini della vita di relazione riguardanti la sensibilità generale e specifica, e quella dei riflessi in generale.

L'esame elettrico dimostrò che l'eccitamento faradico determinava un aumento di numero e d'intensità delle contrazioni spasmoide della lingua. Nessun disturbo qualitativo all'eccitamento galvanico.

Funzioni vegetative normali.

Il fatto da mettere in rilievo era un lieve ingrossamento della tiroide.

L'esame psichico dimostrò, che la B. aveva intelligenza comune; e le funzioni mentali si esplicavano normalmente.

Nella B. si tentò una cura elettrica galvanica, che non dette alcun risultato per riguardo al disturbo spasmoide della lingua. Si cercò anche di agire sul *tic* degli orbicolari delle palpebre, che preoccupavano la B., che doveva lavorare per vivere; e la cura galvanica riuscì utile nel senso di attenuare la intensità e la frequenza del disturbo. Non è escluso che tale cura abbia agito anche a preferenza come elemento psicoterapico.

Ricordando un particolare disturbo funzionale spasmoide del linguaggio da me precedentemente osservato e pubblicato (1), ma del tutto diverso da quello della B., non mancai di suggerirle di parlare tenendo in bocca un corpo estraneo (piccolo confetto rotondo); però in tal maniera nessun miglioramento si otteneva del disturbo spasmoide, che anzi aumentava.

Dal 1903 al 1915 ebbi occasione di rivedere anno per anno la B. la quale continuò sempre a lavorare, in special modo occupandosi di cucito e di lavori di *crochet*. Il disturbo spasmodico della lingua sembrava stazionario, tanto più che non portava alcuna difficoltà nel mangiare e nel deglutire; però fondamentalmente in maniera lentissima un peggioramento si andava verificando; e infatti nel 1914 non le riusciva più di portare fuori la lingua, la quale rimaneva nella cavità boccale inchiodata nella posizione dimostrata dalla Fig. 11, agitata però da continue ed aritmiche contrazioni spasmodiche. Ma se volontariamente la lingua non poteva essere proiettata fuori le arcate dentarie, nella masticazione e nella deglutizione essa prendeva regolarmente parte ai movimenti automatici di tale funzione; ed inoltre la B. asseriva, che mangiando si accorgeva alle volte di potere riuscire a mettere alquanto infuori la lingua; cosa che non si verificò mai innanzi a me, quando la invitai a mangiare, molto probabilmente per l'intervento dell'attenzione e della volontà.



Fig. 11.

Il disturbo però che si rese molesto dal 1910 in poi fu certamente il *tic* spasmodico degli orbicolari delle palpebre dianzi accennato, e per cui si verificavano vere contrazioni spasmodiche prolungate, le quali si esageravano in seguito a stimoli luminosi ed emotivi. In maniera più attenuata si manifestavano a tratti nel resto dei muscoli del viso e per cui non poteva lavorare. Il disturbo spasmodico non risultava della stessa intensità in tutta la giornata; di sera si attenuava di molto.

Si adoperò la cura elettrica galvanizzando successivamente il VII° bilateralmente, ed essa riuscì proficua ad attenuare il disturbo, per cui la B. rimaneva anche parecchie ore della giornata libera dal disturbo, in modo da potere lavorare.

Ulteriormente la B. riuscì a stare per parecchio tempo in discrete condizioni per riguardo alle manifestazioni spasmodiche degli orbicolari delle palpebre, quando queste si esagerarono notevolmente nei primi mesi

(1) G. D' ABUNDO. — Su di un particolare disturbo del linguaggio (mogilofobia) Catania 1901, e Rivista di Neuropatologia, Psichiatria ecc. Catania 1915.

del 1915, per cui si decise nel Maggio ad entrare in clinica, anche perchè si erano iniziate altre manifestazioni spasmodiche sulle quali è necessario fermarmi brevemente.

Riassumo le di Lei condizioni all'entrata in clinica.

La lingua si notava nella qualità boccale come stirata a destra ed agitata da lente, incessanti ed aritmiche contrazioni; la metà sinistra della lingua dimostrava escursioni più estese nelle contrazioni spasmodiche ora menzionate, quasicchè il fattore spasmodico esplicasse maggiore intensità di tensione nella metà destra della lingua.

Nel parlare lo stato spasmodico diventava più evidente nella lingua, la quale però rimaneva sempre inchiodata nella cavità boccale.

La B. dimostrava tendenza a tenere in contrazione i muscoli del viso, come se volesse mantenere arricciato il naso; nello stesso tempo la mascella inferiore si vedea obbligata a brevi intervalli ad allontanarsi da quella superiore.

Gli occhi venivano mantenuti semichiusi; però durante la giornata vi erano delle ore in cui rimanevano aperti.

Durante il periodo mestruale gli occhi restavano aperti; e mi venne assicurato che lo stesso si verificava transitoriamente per lo passato, quando essendo in atto i disurbi spasmodici negli orbicolari delle palpebre sopravvenivano le mestruazioni.

La lingua non poteva essere proiettata fuori le arcate dentarie; però quando mangiava essa poteva più agevolmente muoversi e perfino alle volte quando era distratta fuoriusciva dalle arcate dentarie. Quando la B. si distraeva gli occhi rimanevano aperti.

L'eccitamento elettrico sia galvanico che faradico nella lingua col provocare delle contrazioni muscolari esagerava non solamente lo stato spasmodico, ma provocava un aumento del numero dell'agitazione aritmica della lingua senza verificarsi modificazioni qualitative apprezzabili.

Dal punto di vista del trofismo si rilevava che la metà destra della lingua era alquanto ipotrofica.

Durante la permanenza in clinica nuove manifestazioni spasmodiche cominciarono a verificarsi, e che ben presto assunsero un decorso tumultuoso. La B. si lamentava di sensazioni spasmodiche nel pellicciaio, negli sterno-clavicolari mastoidei ed in quelli della masticazione. Per tali sensazioni si trovava obbligata a tenere la bocca aperta ed a respirare rumorosamente e in maniera affrettata.

A vederla sembrava che si trovasse in preda ad un accesso asmatico, però era evidente che in lei anche tali manifestazioni spasmodiche assumevano un certo automatismo.

La fisionomia rimaneva stereotipata, continuando a verificarsi sia le contrazioni spasmodiche coreiformi riguardanti la lingua, che quelle puramente spasmodiche degli orbicolari delle palpebre.

Il numero dei movimenti respiratori era aumentato tra 24 e 28; il polso era di poco accelerato; il viso si presentava congesto. Tali accessi si prolungavano dapprima per ore, ed indi assunsero grande intensità, la quale di poco era attenuata da iniezioni di due, tre, cinque centigrammi di morfina.

La notte gli accessi sparivano col sonno, che d'ordinario si otteneva con ipnotici svariati.

Alcune ore nella giornata nei primi due mesi in cui entrò in clinica riusciva a rimanere tranquilla, per quanto un aumento dei movimenti respiratori e la stessa respirazione un po' rumorosa indicavano che la manifestazione spasmodica era semplicemente attenuata.

Le urine non presentarono mai albumina o glucosio.

Dal 1° agosto 1915 in poi i disturbi spasmodici divennero permanenti per l'intera giornata, verificandosi semplicemente brevissime attenuazioni dopo l'iniezione ipodermica di 3 a 5 centigrammi di morfina; ed allora riusciva a poter mangiare ed anche a parlare durante il disturbo.

Intellettualmente si conservò sempre benissimo; però la B. era sfiduciata prevedendo che non si sarebbe più riavuta.

Il 7 agosto e precisamente 6 giorni prima di morire cominciò a lamentarsi di difficoltà della deglutizione; gli accessi divennero insopportabili; qualche notte non le riuscì dormire.

Il cloralio fu l'ipnotico per lei più efficace.

Il 12 agosto si manifestò febbre con collasso; morì il 13 (1915) dopo essersi elevata la temperatura nelle ultime ore a 41° 4.

L'autopsia fece rilevare ciò che segue:

Forte iniezione attiva e passiva della dura madre, la quale era lievemente aderente lungo il seno longitudinale superiore. Esteriormente nell'encefalo non si notava niente di speciale all'infuori della congestione, la quale si rilevava anche internamente in parecchi tagli praticati verticalmente. La tiroide era alquanto ingrossata nel lobo destro. Polmoni congesti. Utero piccolo. Niente altro di speciale negli altri organi.

Il cervello fu conservato in formalina, parte del bulbo in alcool; dei pezzetti dell'ipoglossio bilateralmente vennero fissati in acido osmico.

Ulteriormente fissato il cervello nel liquido di Müller e praticate delle sezioni seriali trattate col metodo Weigert-Pall si rilevò ciò che segue:

In tutte le sezioni seriali trattate col *Weigert-Pall* (una sezione ogni 10 o 15) si notava una diffusa dilatazione delle vie linfatiche perivascolari, e ciò tanto nella sostanza bianca che in quella grigia. La Fig. 12,

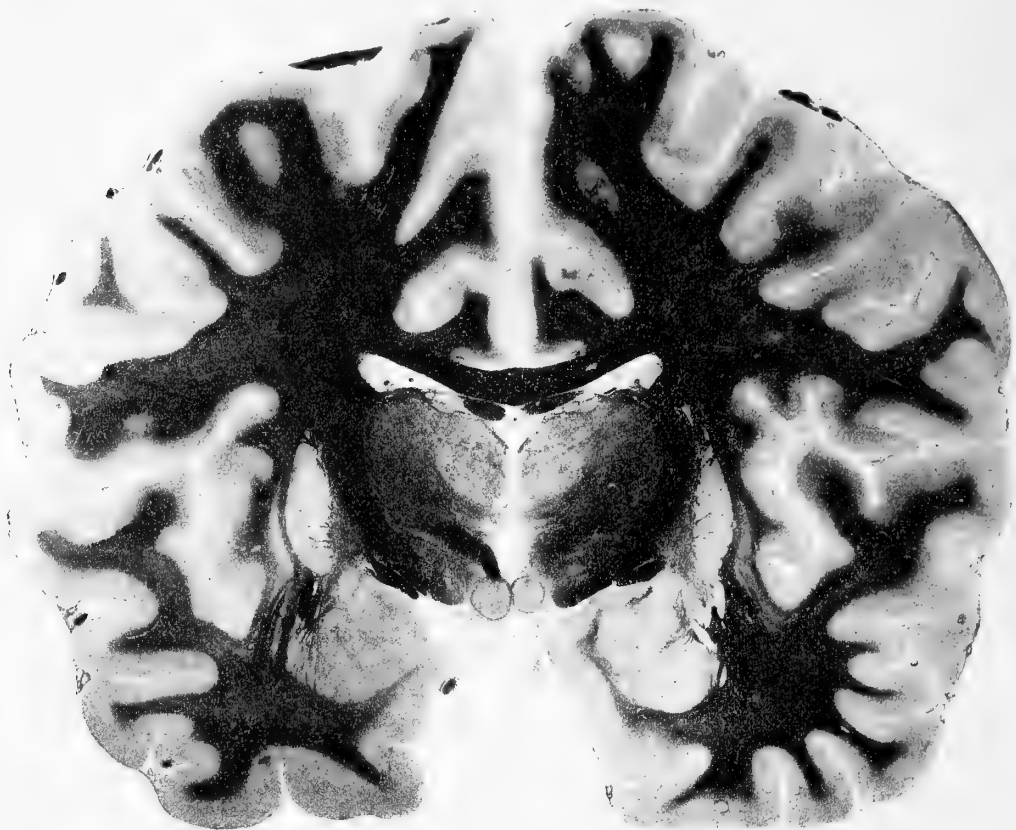


Fig. 12.

che rappresenta una sezione a grandezza naturale lo dimostra chiaramente, in special modo per la sostanza bianca, in cui la reazione nera rendeva la dilatazione macroscopicamente più evidente.

I vasi presentavano un lieve ispessimento.

Nel corpo calloso di sinistra attirò particolarmente l'attenzione la presenza di una piccola zona chiara, che si rileva nella Fig. 12, e ch'era rappresentata come da una zolla di rarefazione della mielina, che a più forte ingrandimento viene dimostrata dalla Fig. 13. Al centro di tale zolla esisteva un vaso arterioso, con-

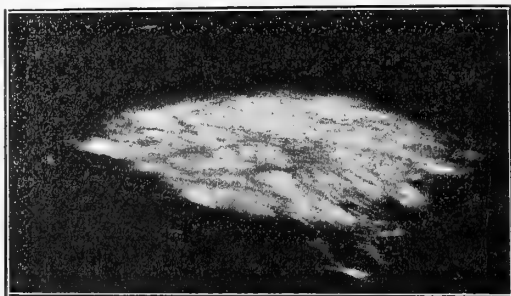


Fig. 13.

tornato da piccoli elementi cellulari. Nelle diverse sezioni seriali si riscontrava la stessa zolla, quasiché essa rappresentasse la sezione d'un cordone decorrente nel corpo calloso nel senso antero-posteriore, finché nella parte posteriore del cervello spariva.

Lo studio delle sezioni istologiche del bulbo fecero rilevare un impicciolimento ed una rarefazione di poche cellule nervose del nucleo del XII° bilateralmente ma a preferenza a destra; alcune cellule erano ricche di pigmento. Normali risultarono le sezioni dei nervi ipoglossi trattati con l'acido osmico.

La tiroide fece rilevare un lievissimo ispessimento dello stroma.

In questa 2ª osservazione clinica la sintomatologia si svolse nel distretto limitato d'innervazione del XII° paio di nervi cranici esplicandosi anche con un disturbo del linguaggio articolato; ed è singolare il fatto che esso si rivelò con manifestazioni spasmodiche-coreiformi rassomiglianti a quelle rilevate nella sorella A. soggetto dell'Oss. 1ª.

Però ulteriormente si ebbero le manifestazioni di *tic* bilateralmente nel campo d'innervazione del VII°; e la morte stessa venne preceduta da un insieme di turbe nevrotiche, che avevano la loro base evidentemente nella zona bulbare.

Nessun dubbio che anche in questo caso il trauma abbia rappresentato l'elemento importante etiologico della manifestazione clinica spasmoide-coreiforme, la quale per 12 anni rimase stabile come centro di massima intensità nella innervazione della lingua, e come irradiazione irritativa nel VII°.

Bisogna convenire che l'autopsia non rischiarò la forma clinica, poichè l'impicciolimento e la rarefazione di poche cellule nervose dei nuclei bulbari del XII° non possono che appena spiegare la lieve distrofia della lingua constatata negli ultimi mesi di vita della B.

Non è facile l'interpretazione della zolla di rarefazione mielinica nel corpo calloso, che si prolungava per parecchi centimetri, e che si allontanava completamente dalle parvenze riscontrate nelle dilatazioni linfatiche perivasali. D'altra parte non pare che tale trovato possa invocarsi per interpretare la forma spasmodica constatata clinicamente.

Questo 2° caso clinico non rende più facile l'interpretazione del disturbo del linguaggio, il quale se nel soggetto A. dell'osservazione 1ª potea essere inglobato nell'insieme della sintomatologia emilaterale, al contrario con l'essere esso rimasto isolato nella B. apre la via a nuove incognite.

Certamente in entrambi i casi fu in seguito ad un trauma intenso che sorse il disturbo spasmodico del linguaggio articolato, però il trauma esplicò la sua azione in età molto ben diverse, a 14 ed a 33 anni, determinando sindromi, che di comune aveano semplicemente il disturbo del linguaggio.

Se l'esito infausto del caso dell'A. è comprensibile, riesce singolare quello della B. che si esplicò con una sintomatologia bulbare a tratti dapprima, e tumultuosa asfittica all'ultimo.

E l'esame istologico del bulbo non giustificava l'esito letale rapidissimo della B., quando si osservano casi di gravi polioencefaliti inferiori con atrofie notevoli della lingua, il cui decorso è ben diverso da quello della B., nella quale naturalmente è da invocare l'elemento spasmodico riflesso diffuso al bulbo per spiegare la morte; ma con ciò non si risolve affatto il quesito della causa che produsse la diffusione riflessa spasmodica agli altri nuclei grigi bulbari.

Certamente è degno di rilievo il fatto che le manifestazioni spasmodiche del VII° cessavano nella B. nel tempo della mestruazione. Ciò renderebbe plausibile l'ipotesi della pro-

babile esistenza d'un turbamento nel bilancio delle glandole a secrezione interna, per cui ne venisse particolarmente influenzato il sistema nervoso.

Dopo tali considerazioni io credo che si può concludere, che da un trauma intenso, che colpisce specialmente al cranio un soggetto ereditariamente predisposto, è possibile attendersi le più *imprevedute e singolari sindromi nervose, che possono anche non prestarsi ad essere inquadrate nelle comuni forme neuropatiche finora bene accertate nella patologia nervosa*. Tali sindromi quindi non autorizzano a creare nuovi tipi di malattie nervose almeno nello stato attuale della scienza.

Per le sindromi spasmodiche come nella B. l'ipotesi più probabile da invocarsi è, che qualche articolazione reticolare neuronica (1) tra protoneurone corticale e quello bulbare del XII^o abbia avuto a risentirne in seguito al trauma, per cui innanzi al metabolismo organico sia derivato il perturbamento spasmodico della lingua.

Oggidi l'attenzione dei ricercatori nelle malattie nervose è diretta soprattutto al corpo cellulare ed all'axone della cellula nervosa; mentre se è dimostrato che si possono avere manifestazioni morbose in seguito ad alterazioni delle cellule o delle fibre nervose, è facile comprendere come sia possibile che possono per effetto del trauma determinarsi eziandio finissime modificazioni delle ultime diramazioni fibrillari dell' axone, là dove si verificano i rapporti più complessi di continuità o di contiguità, per cui in questi ultimi si affermino delle *deficienze* di organizzazione, che nello svolgimento dei molteplici circuiti di conducibilità si possono esplicare con manifestazioni spasmodiche.

Certamente è una semplice ipotesi, la quale però si propone lo scopo di attirare nella neuropatologia una maggiore attenzione sulle parti più distali del neurone.

(1) Coll'accennare alle articolazioni neuroniche intendo parlare indifferentemente dei rapporti terminali tra elementi nervosi di continuità o di contiguità, quistione oramai di cui non si discute più, forse anche perchè probabilmente nello sviluppo del sistema nervoso centrale esisteranno ambo le modalità dei rapporti in discussione rappresentanti fasi evolutive diverse.

Sul problema di Cauchy.

Nota di CARLO SEVERINI (*)

Mentre per un'equazione differenziale ordinaria :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

il problema di *Cauchy* è stato, dal punto di vista della teoria delle funzioni di variabili reali, risolto in tutta la sua generalità, per un'equazione a derivate parziali :

$$(1) \quad p = F(x, y, z, q),$$

ove :

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

resta invece aperto il campo ad ulteriori ricerche.

Di queste ricerche io mi occupo nella presente nota, ammettendo che la $F(x, y, z, q)$ e la funzione iniziale abbiano le derivate prime, soddisfacenti all'ipotesi di *Lipschitz*.

È facile vedere come le considerazioni che seguono si possano estendere ad un'equazione della forma :

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$$

ove :

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

§ 1.

1. Le ricerche anzidette si fondano sopra noti teoremi, relativi all'esistenza di funzioni limiti continue per un insieme infinito di funzioni, definite in un campo comune C , soggette alla condizione di essere tutte comprese fra due limiti finiti assegnabili, o, come brevemente diremo, *equilimitate* (1).

(*) Comunicata all'Accademia nell'adunanza del 30 novembre 1916.

(1) Cfr. ARZELÀ: *Esistenza degl'integrali nelle equazioni a derivate parziali*; Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna 1906.

Per maggiore chiarezza diamo in questo primo § gli enunciati ed un cenno delle dimostrazioni di tali teoremi, riferendoci al caso di due sole variabili: quanto sarà detto per funzioni di due variabili si estende immediatamente a funzioni di quante si vogliano variabili.

Ricordiamo anzitutto che, data una funzione $v(x, y)$ in un campo C , limitata, si dice che due altre funzioni $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ determinano un intorno della $v(x, y)$, se in ogni punto di C si ha:

$$(2) \quad \varphi(x, y) < v(x, y) < \psi(x, y);$$

e che la $v(x, y)$ si dice *funzione limite* di un insieme infinito di funzioni:

$$(3) \quad u(x, y), w(x, y), \dots,$$

definite in C , se, comunque si scelga l'intorno anzidetto, sempre esistono funzioni $u(x, y)$ dell'insieme (3), per le quali si abbia:

$$\varphi(x, y) \leq u(x, y) \leq \psi(x, y).$$

Ricordiamo ancora che infinite funzioni diconsi *equioscillanti per meno di un numero positivo* σ , se esiste un numero positivo δ , tale che in ogni cerchio o area di C , la cui massima corda non superi δ , ognuna di quelle funzioni faccia un'oscillazione minore od uguale a σ .

Non si può dire che infinite funzioni equioscillanti per meno di σ , siano anche equioscillanti per meno di $\sigma_1 < \sigma$, giacchè può non esistere un numero $\delta_1 > 0$, che abbia rispetto a σ_1 la proprietà, che ha δ rispetto a σ .

Quando in particolare, comunque si fissi il numero σ , le funzioni date risultano sempre equioscillanti per meno di σ , le funzioni medesime sono necessariamente continue e si dicono allora *equicontinue*; in altri termini infinite funzioni continue nel campo C diconsi *equicontinue*, se, assegnato comunque un numero positivo σ , sempre esiste in corrispondenza un numero positivo δ , tale che in ogni cerchio o area di C , la cui massima corda non superi δ , ognuna di quelle funzioni faccia un'oscillazione minore od uguale a σ .

Ciò posto, riferendoci al caso di un insieme numerabile di funzioni ⁽²⁾, che è il caso che a noi interessa considerare per il seguito, dimostriamo il seguente teorema:

Data una successione infinita di funzioni:

$$(S) \quad u_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \dots),$$

definite in un campo finito C , equilimitate, affinchè esista almeno una funzione limite continua di tale successione, è necessario e sufficiente che si possano assegnare numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero:

$$(4) \quad \sigma_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

ed in corrispondenza successioni parziali della S :

$$(5) \quad S(\sigma_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(²) Cfr. Arzela, l. c. (¹).

ognuna delle quali sia contenuta nella precedente e composta d' infinite funzioni equioscillanti rispettivamente per meno di

$$\sigma_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Se $v(x)$ è una funzione limite continua della S , ciascuno degl' intornoi:

$$(6) \quad \left(v(x, y) - \frac{\sigma_n}{3}, v(x, y) + \frac{\sigma_n}{3} \right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

conterrà infinite funzioni di S ; e, per un valore fisso di n , le funzioni contenute nell' intorno (6) saranno evidentemente equioscillanti per meno di σ_n . Inoltre, se indichiamo con $S(\sigma_n)$ la successione di tali funzioni, sarà $S(\sigma_n)$ contenuta in $S(\sigma_{n-1})$, per modo che la condizione del precedente teorema risulta necessaria.

Mostriamo che la condizione medesima è anche sufficiente.

Possiamo supporre la successione dei numeri (4) tale che converga la serie:

$$(7) \quad \sum_1^{\infty} \sigma_n :$$

ove ciò non si verificasse si ragionerebbe infatti sopra una successione parziale, estratta dalla (4) e soddisfacente a questa condizione.

Si considerino le successioni parziali della S :

$$(8) \quad S(\sigma_n) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

ognuna delle quali è contenuta nella precedente e composta d' infinite funzioni equioscillanti rispettivamente per meno di

$$\sigma_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Siano:

$$\delta_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

quantità positive tali che in ogni cerchio od area di C , la cui massima corda non superi δ_n , le funzioni della corrispondente successione $S(\sigma_n)$ facciano tutte un' oscillazione minore od uguale a σ_n .

S' indichino poi in generale con

$$u_{n,1}(x, y), u_{n,2}(x, y), \dots, u_{n,r}(x, y), \dots \quad (n = 1, 2, \dots)$$

le funzioni di

$$(8) \quad S(\sigma_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Supponiamo dapprima che, soltanto per un numero finito di valori di n , esista nel campo C qualche punto, in cui la differenza tra due funzioni appartenenti ad $S(\sigma_n)$, può risultare in valore assoluto maggiore di $k\sigma_n$, ove k è una quantità positiva, indipendente da n . In tal caso, da un certo valore n' dell' indice n in poi, si ha, in tutto il campo C , qualunque siano r ed s :

$$(9) \quad |u_{n,r}(x, y) - u_{n,s}(x, y)| \leq k\sigma_n \quad (n = n', n' + 1, \dots).$$

Considerando allora ad es. la serie :

$$(10) \quad u_{1,1}(x,y) + \sum_1^{\infty} [u_{n+1,1}(x,y) - u_{n,1}(x,y)] ,$$

e ricordando che $S(\sigma_n)$ è contenuta in $S(\sigma_{n-1})$, donde segue, a causa della (9) :

$$|u_{n+1,1}(x,y) - u_{n,1}(x,y)| \leq k\sigma_n \quad (n = n', n'+1, \dots),$$

si trova che questa serie deve, per la convergenza della (7), convergere assolutamente ed in egual grado nel campo C . La somma $v(x,y)$ della (10), che evidentemente è una funzione limite della successione S , è poi continua, giacchè, scelta a piacere una quantità positiva ε , se il numero n' anzidetto è abbastanza grande, perchè si abbia :

$$\sigma_{n'} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \sum_{n'}^{\infty} \sigma_n \leq \frac{\varepsilon}{3k},$$

risulta :

$$|v(x,y) - u_{n',1}(x,y)| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

ed in ogni cerchio od area di C , la cui massima corda non superi $\delta_{n'}$, l'oscillazione di $v(x,y)$ deve essere minore od uguale ad ε .

Passiamo al caso che non esista una quantità k sopra detta, e che per infiniti valori di n si abbiano quindi in $S(\sigma_n)$ coppie di funzioni, la cui differenza in valore assoluto è in qualche punto di C maggiore di $7\sigma_n$.

Consideriamo in $S(\sigma_1)$, ammesso che esista (nel caso contrario si ragionerebbe sulla prima delle successioni (8), per la quale ciò si verifica) un sistema di funzioni :

$$(11) \quad u_{1,t_1}(x,y), u_{1,t_2}(x,y), \dots, \quad (t_i < t_{i+1})$$

tali che la differenza fra due qualunque di esse sia, in qualche punto di C , maggiore in valore assoluto di $7\sigma_1$. Ove di questi sistemi ve ne fossero più di uno, si potrebbe ad es. convenire di scegliere quello, in cui l'indice t_1 ha il più piccolo valore, se i sistemi non hanno tutti in comune la prima funzione; quello in cui l'indice t_2 ha il più piccolo valore, se i sistemi hanno tutti in comune la prima funzione ma non la seconda, e così via.

Facciamo vedere che le (11) sono in numero finito.

A tal'uopo osserviamo che, poichè in ogni area di C , la cui massima corda non supera δ_1 , ognuna delle (11) oscilla per meno di σ_1 , se in (\bar{x}, \bar{y}) si ha :

$$(12) \quad |u_{1,t_1}(\bar{x}, \bar{y}) - u_{1,t_i}(\bar{x}, \bar{y})| > 7\sigma_1,$$

risulta, in ogni punto di C interno al cerchio di centro (\bar{x}, \bar{y}) e raggio eguale a δ_1 :

$$(13) \quad |u_{1,t_1}(x,y) - u_{1,t_i}(x,y)| > 5\sigma_1.$$

Ciò posto consideriamo un campo C' , interno a C , tale che la minima distanza δ'_1 fra un punto del contorno di C ed un punto del contorno di C' sia minore di δ_1 .

Faremo vedere che sono in numero finito quelle funzioni (11), per le quali la differenza fra due qualunque di esse è in qualche punto di C' maggiore in valore assoluto di $5\sigma_1$. Se è possibile di tali funzioni ne esistano invece infinite, e s'indichino con:

$$(14) \quad u_{x, t_{n_1}}(x, y), u_{x, t_{n_2}}(x, y), \dots \quad (t_{n_i} < t_{n_{i+1}})$$

Si considerino le differenze:

$$u_{x, t_{n_i}}(x, y) - u_{x, t_{n_{i-1}}}(x, y) \quad (i = 2, 3, \dots),$$

e sia E l'insieme dei punti di C' , in cui una almeno di queste differenze risulta in valore assoluto maggiore di $5\sigma_1$.

Se (x_0, y_0) è un punto limite di E , la $u_{x, t_{n_1}}(x, y)$ differisce in (x_0, y_0) da infinite altre delle (14):

$$(15) \quad u_{x, t_{p_1}}(x, y), u_{x, t_{p_2}}(x, y), \dots, \quad (t_{p_i} < t_{p_{i+1}})$$

per più di $3\sigma_1$; e, nel cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio eguale a δ'_1 , si ha pertanto:

$$|u_{x, t_{n_i}}(x, y) - u_{x, t_{p_i}}(x, y)| > \sigma_1 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Delle differenze:

$$u_{x, t_{n_i}}(x, y) - u_{x, t_{p_i}}(x, y) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

ve ne devono essere infinite di un medesimo segno nel cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio δ'_1 , ad es. positive; in modo che si hanno infinite funzioni tra le (15), siano le funzioni:

$$(16) \quad u_{x, t_{q_i}}(x, y) \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots \\ t_{q_i} < t_{q_{i+1}} \end{array} \right)$$

per le quali risulta nel detto cerchio:

$$u_{x, t_{q_i}}(x, y) < u_{x, t_{n_i}}(x, y) - \sigma_1 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Segue da ciò che deve esistere una porzione di spazio Δ_1 , almeno un cilindro di raggio δ'_1 e di altezza σ_1 , entro la quale non cade nessuna delle superficie rappresentatrici delle infinite funzioni (16).

Sulle funzioni (16) si può ragionare, come si è fatto sulle (14), e si trova analogamente che esiste della (16) una successione parziale, composta d'infinite funzioni:

$$(17) \quad u_{x, t_{r_i}}(x, y) \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots \\ t_{r_i} < t_{r_{i+1}} \end{array} \right),$$

tali che le differenze:

$$u_{x, t_{q_i}}(x, y) - u_{x, t_{r_i}}(x, y) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

sono dello stesso segno ed in valore assoluto maggiori ed uguali a σ_1 in tutti i punti di un cerchio di raggio δ'_1 . E si trova ancora che deve esistere una porzione di spazio Δ_1 , almeno un cilindro di raggio δ'_1 e di altezza σ_1 , interamente esterna a Δ_1 , entro la quale non cade nessuna delle superficie rappresentatrici delle funzioni (17).

Così continuando si ottengono infinite porzioni di spazio, ognuna delle quali ha un volume maggiore ed uguale a $\pi\delta_1^2 \cdot \sigma_1$, è interamente esterna a tutte le altre, ed è contenuta nello spazio racchiuso dalla superficie cilindrica, colle generatrici parallele all'asse z , avente per direttrice sul piano (x, y) il contorno di C , e dai piani $z = l$, $z = L$, ove con l ed L s'indicano i due limiti, fra cui sono contenute tutte le funzioni di S .

Ciò è assurdo, e si conclude pertanto che devono essere in numero finito quelle funzioni (11), per le quali la differenza fra due qualunque di esse è in qualche punto di C' maggiore in valore assoluto di $5\sigma_1$.

Da questo risultato si trae ora che devono essere in numero finito le (11), giacchè, se in un punto di C è soddisfatta la (12), per quanto è stato sopra detto, la (13) è soddisfatta nel cerchio che ha per centro quel punto e per raggio δ_1 , e quindi certamente in una porzione del campo C' .

Delle (11) si considerino gl'intorni:

$$(18) \quad (u_{1,i}(x, y) - 7\sigma_1, u_{1,i}(x, y) + 7\sigma_1) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

entro i quali sono contenute interamente tutte le funzioni di $S(\sigma_1)$.

Fra questi intorni ve ne sarà uno almeno, nel quale sono contenute infinite funzioni di ognuna delle successioni (8).

Si consideri ad es. quello, che corrisponde al più piccolo valore dell'indice i , e s'indichi con:

$$(19) \quad (u_{1,r_1}(x, y) - 7\sigma_1, u_{1,r_1}(x, y) + 7\sigma_1).$$

Siano:

$$S'(\sigma_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

le successioni parziali estratte rispettivamente dalle (8), formate colle funzioni contenute nell'intorno (19).

Come sopra, l'esistenza della funzione limite richiesta si dimostra immediatamente, se, soltanto per un numero finito di valori di n , esiste nel campo C qualche punto, in cui la differenza tra due funzioni appartenenti ad $S'(\sigma_n)$ può risultare in valore assoluto maggiore di $k\sigma_n$, k avendo il significato detto. Quando invece ciò non si verifichi, ammesso che esista un sistema di funzioni di $S(\sigma_2)$, contenute nell'intorno (19), per le quali la differenza fra due qualunque di esse sia, in qualche punto di C , maggiore in valore assoluto di $7\sigma_2$ (nel caso contrario si considererebbe la prima delle successioni (8), che soddisfa a questa condizione) se ne può, come precedentemente, fissare una, $u_{2,r_2}(x, y)$, in modo che nell'intorno:

$$(u_{2,r_2}(x, y) - 7\sigma_2, u_{2,r_2}(x, y) + 7\sigma_2)$$

cadano ancora infinite funzioni di ognuna delle (8), e così di seguito.

Se, ove non si presenti mai il primo caso, colle funzioni via via ottenute:

$$u_{1, r_1}(x, y), u_{2, r_2}(x, y), \dots$$

si forma la serie:

$$u_{1, r_1}(x, y) + \sum_1^{\infty} \left[u_{n+1, r_{n+1}}(x, y) - u_{n, r_n}(x, y) \right],$$

questa serie, per quanto è stato sopra detto, converge assolutamente ed in egual grado nel campo C , ed ha come somma una funzione continua $v(x, y)$, che è una funzione limite della successione S . Con ciò il teorema è pienamente dimostrato.

2. La condizione del precedente teorema è in particolare soddisfatta, se per ogni numero positivo σ , arbitrariamente scelto, esiste sempre in corrispondenza un valore i_σ dell'indice i , tale che tutte le funzioni:

$$(20) \quad u_i(x, y) \quad (i \geq i_\sigma)$$

siano equioscillanti per meno di σ .

Questa condizione e l'altra che si possa assegnare un valore i_ε dell'indice i , in modo da avere in tutto il campo C , qualunque sia ε :

$$(21) \quad |u_{i_\varepsilon}(x, y) - u_{i_\varepsilon + \rho}(x, y)| \leq \varepsilon,$$

ε essendo anch'esso un numero positivo, arbitrariamente scelto, sono insieme necessarie e sufficienti, affinchè la successione data S tenda in egual grado nel campo C ad una funzione limite continua.

3. Se in particolare si suppone che le funzioni date:

$$(S) \quad u_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

siano continue, la prima delle condizioni del precedente numero equivale evidentemente all'equicontinuità delle funzioni medesime, giacchè si può allora assegnare una quantità positiva δ_σ , tale che in ogni cerchio od area di C , la cui massima corda non superi δ_σ , oltre alle (20), anche le

$$u_i(x, y) \quad (i < i_\sigma)$$

oscillino per meno di σ ; in modo che l'equicontinuità delle funzioni di S è condizione sufficiente per l'esistenza di una funzione limite continua.

L'equicontinuità delle funzioni date e la condizione espressa dalla (21) sono insieme necessarie e sufficienti, affinchè in questo caso, la S tenda in egual grado ad una funzione limite continua.

4. Se la successione S è composta di funzioni equicontinue, o più generalmente equioscillanti per meno di un dato numero positivo σ , poichè l'oscillazione di ognuna di esse in tutto il campo C non può superare una medesima quantità positiva, finita, per

concludere che le $u_i(x, y)$ sono equilimitate, basta sapere che per ogni i esiste un punto (x_i, y_i) di C , nel quale si ha:

$$|u_i(x_i, y_i)| \leq M \quad (i = 1, 2, \dots),$$

M essendo una costante, positiva, finita.

A riconoscere che la successione S è composta di funzioni equicontinue giova il seguente criterio.

Una successione di funzioni

$$(S) \quad u_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \dots),$$

continue in un campo C , è composta di funzioni equicontinue, se ognuna di tali funzioni soddisfa ivi alla condizione di Lipschitz:

$$|u_i(x, y) - u_i(x', y')| \leq k \{ |x - x'| + |y - y'| \} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

k essendo una costante positiva, finita, indipendente dall'indice i e dalla scelta dei punti (x, y) , (x', y') nel campo C .

5. Una successione numerabile o più generalmente un insieme infinito qualsivoglia di funzioni equicontinue ed equilimitate, ammette una *funzione limite inferiore* ed una *funzione limite superiore, entrambe continue*; intendendosi per funzione limite inferiore la funzione, che, in ogni punto del campo C , ha per valore il limite inferiore dell'insieme dei valori, assunti dalle funzioni date in quel punto, e per funzione limite superiore la funzione, che, in ogni punto di C , ha per valore il limite superiore dell'insieme dei valori delle funzioni medesime.

Che le due funzioni limite inferiore e limite superiore siano continue segue evidentemente dal fatto, che esse oscillano per meno di 2σ in ogni porzione del campo C , nella quale le funzioni date oscillano per meno di σ .

6. Ancora si osservi che funzioni equicontinue di funzioni equicontinue, risultano equicontinue. Se ad es., oltre alle:

$$(S) \quad u_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \dots),$$

equicontinue in C , si considerano le funzioni equicontinue:

$$f_i(x, y, z) \quad (i = 1, 2, \dots),$$

per x ed y che siano coordinate di un punto di C e z variabile fra l ed L , ove l ed L sono due limiti, fra cui si mantengono costantemente comprese le $u_i(x, y)$, la successione:

$$f_i(x, y, u_i(x, y)) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

risulta composta di funzioni equicontinue in C .

In particolare, se le $u_i(x, y)$ tendono uniformemente nel campo C ad una funzione

limite continua $v(x, y)$, ed $f(x, y, z)$ è una funzione continua di x, y, z , per x ed y , che siano coordinate di un punto di C e z variabile fra l ed L , la successione delle funzioni:

$$f(x, y, u_i(x, y)) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

tende in egual grado, nello stesso campo C , ad $f(x, y, v(x, y))$.

7. Per ultimo c'è luogo a considerare il caso, che la proprietà d'infinite funzioni di due e più variabili di essere equioscillanti per meno di un numero positivo σ , e in particolare di essere equicontinue, abbia luogo parzialmente rispetto ad alcune delle variabili.

Ad es. infinite funzioni di due variabili:

$$(3) \quad u(x, y), w(x, y), \dots,$$

definite in un campo C , si diranno *equioscillanti per meno di σ rispetto ad x* , se, per ogni valore fisso y' di y , esiste sempre in corrispondenza un numero positivo δ , dipendente in generale da y' , tale che, in ogni tratto di variabilità di x di ampiezza minore od uguale a δ , ognuna delle funzioni:

$$u(x, y'), w(x, y'), \dots$$

faccia un'oscillazione minore ed uguale a σ . In particolare le (3) si diranno *equicontinue rispetto ad x* , se la precedente proprietà si verifica, comunque si fissi il numero σ .

Interessante è il caso che la quantità δ anzidetta possa determinarsi indipendentemente da y . Si dirà allora che le (3) sono, nel campo C , *equioscillanti per meno di σ rispetto ad x , uniformemente per tutti i valori di y* , ed in particolare, quando il numero δ esista e sia indipendente da y , comunque si fissi σ , che sono nel campo C *equicontinue rispetto ad x , uniformemente per tutti i valori di y* .

Al teorema del n° 4 corrisponde, nel caso attuale, il seguente:

Le funzioni:

$$u_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

definite in un campo C , sono equicontinue rispetto ad x uniformemente per tutti i valori di y , se ivi si ha:

$$|u_i(x, y) - u_i(x', y)| \leq k |x - x'| \quad (i = 1, 2, \dots)$$

k essendo una costante positiva, finita, indipendente dall'indice i e dalla scelta dei punti $(x, y), (x', y)$ nel campo C .

§ 2.

8. — Prima di venire allo studio dell'equazione (1), nelle ipotesi poste per la $F(x, y, z, q)$, conviene che ci occupiamo dell'equazione:

$$(22) \quad p = G(x, y, z, q),$$

in cui la $G(x, y, z, q)$, quale funzione delle variabili indipendenti x, y, z, q , s' intende dotata di derivate prime e seconde continue ⁽³⁾.

Il campo in cui è data la $G(x, y, z, q)$ sia il campo definito dalle limitazioni :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b \\ z_0 - c \leq z \leq z_0 + c \\ q_0 - d \leq q \leq q_0 + d \end{array} \right.$$

Poniamo :

$$X = - \frac{\partial G}{\partial x}, \quad Y = - \frac{\partial G}{\partial y}, \quad Z = - \frac{\partial G}{\partial z}, \quad Q = - \frac{\partial G}{\partial q},$$

e consideriamo il sistema normale di equazioni differenziali ordinarie :

$$(24) \quad \frac{dy}{dx} = Q, \quad \frac{dz}{dx} = p + Qq, \quad - \frac{dp}{dx} = X + Zp, \quad - \frac{dq}{dx} = Y + Zq,$$

per il quale, nelle ipotesi dette, esiste un solo sistema d'integrali, corrispondenti a dati valori iniziali.

Posto :

$$p_0 = G(x_0, y_0, z_0, q_0)$$

siano rispettivamente $p_0 - e, p_0 + e_1$ il minimo ed il massimo della funzione $G(x, y, z, q)$ nel campo (23), ed M il massimo valore assoluto delle funzioni $Q, p + Qq, X + Zp, Y + Zq$, nel campo :

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b \\ z_0 - c \leq z \leq z_0 + c \\ q_0 - d \leq q \leq q_0 + d \\ p_0 - e \leq p \leq p_0 + e, \end{array} \right.$$

intendendo che sia $e \geq e_1$.

⁽³⁾ BAGNERA : *Corso di Analisi Infinitesimale* P. IV, § 31, p. 347 ; Tipografia matematica di Palermo, 1915.

Se i valori iniziali $x_0', y_0', z_0', p_0', q_0'$ soddisfano alle condizioni:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 - \frac{a}{4} \leq x_0' \leq x_0 + \frac{a}{4} \\ y_0 - \frac{b}{4} \leq y_0' \leq y_0 + \frac{b}{4} \\ z_0 - \frac{c}{4} \leq z_0' \leq z_0 + \frac{c}{4} \\ q_0 - \frac{d}{4} \leq q_0' \leq q_0 + \frac{d}{4} \\ p_0 - \frac{e}{4} \leq p_0' \leq p_0 + \frac{e}{4} \end{array} \right.$$

poichè allora ogni punto del campo:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0' - \frac{3a}{4} \leq x \leq x_0' + \frac{3a}{4} \\ y_0' - \frac{3b}{4} \leq y \leq y_0' + \frac{3b}{4} \\ z_0' - \frac{3c}{4} \leq z \leq z_0' + \frac{3c}{4} \\ q_0' - \frac{3d}{4} \leq q \leq q_0' + \frac{3d}{4} \\ p_0' - \frac{3e}{4} \leq p \leq p_0' + \frac{3e}{4} \end{array} \right.$$

appartiene al campo (25), gl' integrali corrispondenti del sistema (24) esisteranno certamente nell' intervallo $(x_0' - h, x_0' + h)$, ove h è la minore delle quantità:

$$(28) \quad \frac{3a}{4}, \frac{3b}{4M}, \frac{3c}{4M}, \frac{3d}{4M}, \frac{3e}{4M}.$$

In questo intervallo gl' integrali medesimi varieranno rispettivamente entro i limiti:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_0' - \frac{3b}{4} \leq y \leq y_0' + \frac{3b}{4} \\ z_0' - \frac{3c}{4} \leq z \leq z_0' + \frac{3c}{4} \\ q_0' - \frac{3d}{4} \leq q \leq q_0' + \frac{3d}{4} \\ p_0' - \frac{3e}{4} \leq p \leq p_0' + \frac{3e}{4} \end{array} \right. \quad (*)$$

Possiamo intendere che delle quantità (28) la prima $\frac{3a}{4}$ sia minore delle altre. In-

(*) Cfr. ad es. Bagnera, I. c. (3), p. 303.

fatti, se così non fosse, si considererebbe al posto di a una quantità positiva $a' < a$, tale da verificare la condizione anzidetta, ed invece delle (26) si porrebbero per i valori iniziali le limitazioni:

$$(26') \quad \left. \begin{aligned} x_0 - \frac{a'}{4} &\leq x'_0 \leq x_0 + \frac{a'}{4} \\ y_0 - \frac{b}{4} &\leq y'_0 \leq y_0 + \frac{b}{4} \\ z_0 - \frac{c}{4} &\leq z'_0 \leq z_0 + \frac{c}{4} \\ q_0 - \frac{d}{4} &\leq q'_0 \leq q_0 + \frac{d}{4} \\ p_0 - \frac{e}{4} &\leq p'_0 \leq p_0 + \frac{e}{4} \end{aligned} \right\}$$

Gl' integrali corrispondenti del sistema (24) risulterebbero definiti nell'intervallo $\left(x'_0 - \frac{3a'}{4}, x'_0 + \frac{3a'}{4}\right)$, e per x variabile in questo intervallo resterebbero compresi entro i limiti (29).

Intenderemo dunque che sia $h = \frac{3a}{4}$.

Per ogni sistema di valori iniziali soddisfacenti alle (26), l'intervallo $(x'_0 - h, x'_0 + h)$ contiene allora il punto x' , se si ha:

$$x_0 - \frac{a}{2} \leq x' \leq x_0 + \frac{a}{2},$$

ed i valori y', z', p', q' assunti per $x = x'$ dai corrispondenti integrali del sistema (24) saranno compresi fra i limiti (29).

Per il teorema di unicità, valido nelle ipotesi da noi poste, si avrà che y'_0, z'_0, p'_0, q'_0 sono a loro volta i valori assunti, per $x = x'_0$, dagl'integrali del sistema (24), corrispondenti ai valori iniziali x', y', z', p', q' . Fissato un valore di x'_0 , ad es. ponendo $x'_0 = x_0$, le quattro quantità y'_0, z'_0, p'_0, q'_0 risulteranno pertanto funzioni ad un valore delle variabili indipendenti x', y', z', p', q' nel campo:

$$(26'') \quad \left. \begin{aligned} x_0 - \frac{a}{4} &\leq x' \leq x_0 + \frac{a}{4} \\ y_0 - \frac{b}{4} &\leq y' \leq y_0 + \frac{b}{4} \\ z_0 - \frac{c}{4} &\leq z' \leq z_0 + \frac{c}{4} \\ q_0 - \frac{d}{4} &\leq q' \leq q_0 + \frac{d}{4} \\ p_0 - \frac{e}{4} &\leq p' \leq q_0 + \frac{e}{4} \end{aligned} \right\}$$

e per le proprietà ben note degl'integrali dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie,

riguardati come funzioni dei loro valori iniziali ⁽⁵⁾, saranno le dette funzioni y'_0, z'_0, p'_0, q'_0 continue nel campo (26'') e dotate di derivate prime continue.

9. — Indichiamo ora con :

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = H(x, x'_0, y'_0, z'_0, p'_0, q'_0) \\ z = K(x, x'_0, y'_0, z'_0, p'_0, q'_0) \\ p = L(x, x'_0, y'_0, z'_0, p'_0, q'_0) \\ q = M(x, x'_0, y'_0, z'_0, p'_0, q'_0) \end{array} \right.$$

gl' integrali del sistema (24), corrispondenti a valori iniziali $x'_0, y'_0, z'_0, p'_0, q'_0$.

Le funzioni (30) restano definite, come è stato dianzi detto, in un campo, che comprende il campo :

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_0 - h \leq x \leq x'_0 + h \\ x_0 - \frac{a}{4} \leq x'_0 \leq x_0 + \frac{a}{4} \\ y_0 - \frac{b}{4} \leq y'_0 \leq y_0 + \frac{b}{4} \\ z_0 - \frac{c}{4} \leq z'_0 \leq z_0 + \frac{c}{4} \\ q_0 - \frac{d}{4} \leq q'_0 \leq q_0 + \frac{d}{4} \\ p_0 - \frac{e}{4} \leq p'_0 \leq p_0 + \frac{e}{4} \end{array} \right. ,$$

ed in tale campo esse e le loro derivate $\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial x}$ ammettono derivate parziali prime continue rispetto ad $x'_0, y'_0, z'_0, p'_0, q'_0$. Soddisfano inoltre all'equazione (22), se a questa equazione soddisfano i valori iniziali, se cioè si ha :

$$(32) \quad p'_0 = G(x'_0, y'_0, z'_0, q'_0).$$

Possiamo intendere che la $G(x'_0, y'_0, z'_0, q'_0)$ al variare di x'_0, y'_0, z'_0, q'_0 entro i limiti dati dalle (31) vari entro i limiti $p_0 - \frac{\varepsilon}{4}, p_0 + \frac{e}{4}$: quando infatti ciò non si verificasse, si potrebbero restringere convenientemente, ferma restando la condizione del n° 8, i limiti di variabilità di x'_0, y'_0, z'_0, q'_0 e sostituire al campo (31) il nuovo campo che così si otterrebbe.

Se ora supponiamo di sostituire nell'espressione :

$$(33) \quad p = G(x, y, z, q),$$

⁽⁵⁾ Cfr. *Bagnera* l. c. ⁽³⁾ pag. 303.

al posto di y, z, p, q , le funzioni (30), e deriviamo rispetto ad x , otteniamo :

$$\frac{d}{dx} [p - G(x, y, z, q)] = \frac{dp}{dx} + \left(X + Y \frac{dy}{dx} + Z \frac{dz}{dx} + Q \frac{dq}{dx} \right),$$

donde per le (24) risulta :

$$\frac{d}{dx} [p - G(x, y, z, q)] = 0,$$

il che significa che la funzione ottenuta dalla (33) colla detta sostituzione, è costante rispetto ad x . Ma per la (32) questa funzione si annulla nel punto $x = x_0$; essa è dunque costantemente eguale a zero, come è stato dianzi asserito.

10. — Ciò posto si consideri nell'intervallo $(y_0 - \frac{b}{4}, y_0 + \frac{b}{4})$ una funzione :

$$z = \varphi(y),$$

continua insieme alle sue prime due derivate, e soggetta alle condizioni :

$$z_0 - \frac{c}{4} \leq \varphi(y) \leq z_0 + \frac{c}{4}, \quad q_0 - \frac{d}{4} \leq \varphi'(y) \leq q_0 + \frac{d}{4}.$$

Pongasi fra i valori iniziali degli integrali (30) le relazioni :

$$(34) \quad z'_0 = \varphi(y'_0), \quad q'_0 = \varphi'(y'_0).$$

Fissato definitivamente x'_0 , ponendo ad es. $x'_0 = x_0$, in corrispondenza ad ogni y'_0 dell'intervallo $(y_0 - \frac{b}{4}, y_0 + \frac{b}{4})$, si consideri inoltre come valore di p'_0 il valore :

$$(35) \quad p'_0 = G \left(x'_0, y'_0, \varphi(y'_0), \varphi'(y'_0) \right).$$

Le (30) divengono allora funzioni di x ed y'_0 :

$$(30') \quad \left\{ \begin{array}{l} y = H \left[x, x_0, y'_0, \varphi(y'_0), G(x_0, y'_0, \varphi(y'_0), \varphi'(y'_0)), \varphi'(y'_0) \right] = H_1(x, y'_0) \\ z = K \left[x, x_0, y'_0, \varphi(y'_0), G(x_0, y'_0, \varphi(y'_0), \varphi'(y'_0)), \varphi'(y'_0) \right] = K_1(x, y'_0) \\ p = L \left[x, x_0, y'_0, \varphi(y'_0), G(x_0, y'_0, \varphi(y'_0), \varphi'(y'_0)), \varphi'(y'_0) \right] = L_1(x, y'_0) \\ q = M \left[x, x_0, y'_0, \varphi(y'_0), G(x_0, y'_0, \varphi(y'_0), \varphi'(y'_0)), \varphi'(y'_0) \right] = M_1(x, y'_0). \end{array} \right.$$

Da quanto si è detto per le (30) e dalle ipotesi fatte sulla funzione $z = \varphi(y)$ risulta che le (30') e le loro derivate $\frac{\partial H_1(x, y'_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial K_1(x, y'_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial L_1(x, y'_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial M_1(x, y'_0)}{\partial x}$ ammet-

tono le derivate parziali prime continue rispetto ad y'_0 .

Differenziando si ha pertanto:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} dy = \frac{\partial H_1(x, y'_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial H_1(x, y'_0)}{\partial y'_0} dy'_0 \\ dz = \frac{\partial K_1(x, y'_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial K_1(x, y'_0)}{\partial y'_0} dy'_0 \end{array} \right.$$

È facile vedere che deve aversi identicamente:

$$(37) \quad L_1(x_0, y'_0) dx + M_1(x, y'_0) dy - dz = 0.$$

Posto infatti per brevità:

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1(x, y'_0) = X[x, H_1(x, y'_0), K_1(x, y'_0), M_1(x, y'_0)] \\ Y_1(x, y'_0) = Y[x, H_1(x, y'_0), K_1(x, y'_0), M_1(x, y'_0)] \\ Z_1(x, y'_0) = Z[x, H_1(x, y'_0), K_1(x, y'_0), M_1(x, y'_0)] \\ Q_1(x, y'_0) = Q[x, H_1(x, y'_0), K_1(x, y'_0), M_1(x, y'_0)] \end{array} \right.$$

dalle (24), di cui le (30') ci danno un sistema d'integrali, si deduce:

$$\frac{\partial H_1(x, y'_0)}{\partial x} = Q_1(x, y'_0), \quad \frac{\partial K_1(x, y'_0)}{\partial x} = L_1(x, y'_0) + Q_1(x, y'_0) M_1(x, y'_0),$$

e quindi:

$$\frac{\partial K_1(x, y'_0)}{\partial x} = L_1(x, y'_0) + M_1(x, y'_0) \frac{\partial H_1(x, y'_0)}{\partial x},$$

donde segue senz'altro che nella (37) è identicamente nullo il coefficiente totale di dx :

$$L_1(x, y'_0) + M_1(x, y'_0) \frac{\partial H_1(x, y'_0)}{\partial x} - \frac{\partial K_1(x, y'_0)}{\partial x}.$$

Si consideri ora il coefficiente di dy'_0 :

$$(39) \quad \Delta(x, y'_0) = M_1(x, y'_0) \frac{\partial H_1(x, y'_0)}{\partial y'_0} - \frac{\partial K_1(x, y'_0)}{\partial y'_0}.$$

Derivando si ha:

$$\frac{\partial \Delta(x, y'_0)}{\partial x} = \frac{\partial M_1(x, y'_0)}{\partial x} \frac{\partial H_1(x, y'_0)}{\partial y'_0} + M_1(x, y'_0) \frac{\partial^2 H_1(x, y'_0)}{\partial x \partial y'_0} - \frac{\partial^2 K_1(x, y'_0)}{\partial x \partial y'_0};$$

e poichè per le (24), (30'), (38):

$$\frac{\partial^2 K_1(x, y'_0)}{\partial x \partial y'_0} = \frac{\partial L_1(x, y'_0)}{\partial y'_0} + Q_1(x, y'_0) \frac{\partial M_1(x, y'_0)}{\partial y'_0} + M_1(x, y'_0) \frac{\partial Q_1(x, y'_0)}{\partial y'_0}$$

ossia:

$$\frac{\partial^2 K_1(x, y'_0)}{\partial x \partial y'_0} = \frac{\partial L_1(x, y'_0)}{\partial y'_0} + \frac{\partial H_1(x, y'_0)}{\partial x} \frac{\partial M_1(x, y'_0)}{\partial y'_0} + M_1(x, y'_0) \frac{\partial^2 H_1(x, y'_0)}{\partial x \partial y'_0}$$

risulta:

$$\frac{\partial \Delta(x, y'_0)}{\partial x} = \frac{\partial M_1(x, y'_0)}{\partial x} \frac{\partial H_1(x, y'_0)}{\partial y'_0} - \frac{\partial H_1(x, y'_0)}{\partial x} \frac{\partial M_1(x, y'_0)}{\partial y'_0} - \frac{\partial L_1(x, y'_0)}{\partial y'_0}$$

e quindi, ancora per le (24), (30'), (38):

$$(40) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Delta(x, y'_0)}{\partial x} = & - \left[Y_1(x, y'_0) + Z_1(x, y'_0) M_1(x, y'_0) \right] \frac{\partial H_1(x, y'_0)}{\partial y'_0} - \\ & - Q_1(x, y'_0) \frac{\partial M_1(x, y'_0)}{\partial y'_0} - \frac{\partial L_1(x, y'_0)}{\partial y'_0}. \end{aligned}$$

D'altra parte, per quanto è stato detto nel precedente numero, se nell'equazione:

$$(22) \quad p = G(x, y, z, q)$$

s'intendono sostituite al posto di y, z, p, q le funzioni (30'), questa equazione è soddisfatta. Derivando in tale ipotesi la (22) rispetto ad y'_0 , si trova quindi:

$$(41) \quad \frac{\partial L_1(x, y'_0)}{\partial y'_0} + Y_1(x, y'_0) \frac{\partial H_1(x, y'_0)}{\partial y'_0} + Z_1(x, y'_0) \frac{\partial K_1(x, y'_0)}{\partial y'_0} + Q_1(x, y'_0) \frac{\partial M_1(x, y'_0)}{\partial y'_0} = 0,$$

e sommando membro a membro la (40) e la (41):

$$\frac{\partial \Delta(x, y'_0)}{\partial x} = - Z_1(x, y'_0) \left[M_1(x, y'_0) \frac{\partial H_1(x, y'_0)}{\partial y'_0} - \frac{\partial K_1(x, y'_0)}{\partial y'_0} \right],$$

cioè:

$$\frac{\partial \Delta(x, y'_0)}{\partial x} = - Z_1(x, y'_0) \Delta(x, y'_0),$$

donde si ricava:

$$\Delta(x, y'_0) = \Delta(x_0, y'_0) e^{-\int_{x_0}^x Z_1(x, y'_0) dx}$$

Ma per le (30'), (34) e (39) si ha:

$$\Delta(x_0, y'_0) = \varphi'(y'_0) - \varphi'(y'_0) = 0:$$

risulta pertanto identicamente:

$$\Delta(x, y'_0) = 0,$$

ed è identicamente soddisfatta, come abbiamo sopra asserito, la (37).

11. — Si consideri l'equazione:

$$y - H_1(x, y'_0) = 0.$$

Poichè si ha:

$$\left[\frac{\partial (y - H_1(x, y'_0))}{\partial y'_0} \right]_{x=x_0} = -1,$$

e l'equazione medesima è soddisfatta dai valori:

$$x = x_0, \quad y'_0 = y_0, \quad y = y_0,$$

se ne può trarre y'_0 in funzione di x e di y :

$$(42) \quad y'_0 = \phi(x, y),$$

per tutti i punti di un certo intorno di (x_0, y_0) :

$$(43) \quad \begin{cases} x_0 - \bar{a} \leq x \leq x_0 + \bar{a} \\ y_0 - \bar{b} \leq y \leq y_0 + \bar{b} \end{cases}$$

In questo intorno, opportunamente scelto, la (42) risulta dotata di derivate prime continue, e per $x = x_0$, $y = y_0$ assume il valore y_0 .

Dalle (30') e dalla (42) si deducono ora le funzioni:

$$(44) \quad \begin{cases} z = K_1 [x, \phi(x, y)] = K_2(x, y) \\ p = L_1 [x, \phi(x, y)] = L_2(x, y) \\ q = M_1 [x, \phi(x, y)] = M_2(x, y), \end{cases}$$

dotate anch'esse di derivate prime continue nel campo (43), e per le quali si ha inoltre, a causa dell'identità (37):

$$(45) \quad \frac{\partial K_2(x, y)}{\partial x} = L_2(x, y), \quad \frac{\partial K_2(x, y)}{\partial y} = M_2(x, y).$$

D'altra parte, come è stato detto nel precedente numero, le (30') soddisfano all'equazione (22); dalle (44) e (45) segue dunque che

$$(46) \quad z = K_2(x, y)$$

è un integrale di detta equazione.

Se nella (46) si pone $x = x_0$, si trova per le (34):

$$z'_0 = K_2(x_0, y'_0) = \varphi(y'_0),$$

e quindi, tenendo presente che y'_0 è arbitrario, mentre x_0 è fisso:

$$K_2(x_0, y) = \varphi(y).$$

12. — L'integrale anzidetto della (22) è l'unico integrale, che per $x = x_0$ si riduca alla funzione iniziale data $\varphi(y)$. Restando infatti x_0 fisso, le equazioni (34) e (35) determinano, per ogni valore di y'_0 , tutti i valori iniziali degli integrali del sistema (24), e risulta quindi determinata la linea caratteristica della superficie integrale $z = k(x, y)$, uscente dal punto (x'_0, y'_0, z'_0) . Due integrali, che si riducano ad una stessa funzione iniziale $z = \varphi(y)$ per $x = x_0$, avendo pertanto in comune tutte le linee caratteristiche, devono coincidere.

§ 3.

13. — Consideriamo ora l'equazione:

$$(1) \quad p = F(x, y, z, q),$$

ed ammettiamo che la $F(x, y, z, q)$ possenga in un dato campo, che supponiamo sia ancora il campo (23), le derivate prime, soddisfacenti all'ipotesi di *Lipschitz*:

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} |F'_x(x, y, z, q) - F'_x(x', y', z', q')| \leq \alpha |x - x'| + \beta |y - y'| + \gamma |z - z'| + \delta |q - q'| \\ |F'_y(x, y, z, q) - F'_y(x', y', z', q')| \leq \alpha |x - x'| + \beta |y - y'| + \gamma |z - z'| + \delta |q - q'| \\ |F'_z(x, y, z, q) - F'_z(x', y', z', q')| \leq \alpha |x - x'| + \beta |y - y'| + \gamma |z - z'| + \delta |q - q'| \\ |F'_q(x, y, z, q) - F'_q(x', y', z', q')| \leq \alpha |x - x'| + \beta |y - y'| + \gamma |z - z'| + \delta |q - q'|, \end{array} \right.$$

ove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono costanti positive, finite.

Fissata comunque una successione di numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero:

$$(48) \quad \sigma_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

si costruisca una successione di polinomi razionali interi:

$$G_\nu(x, y, z, q) \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

soddisfacenti nel campo (23) alle condizioni:

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| F(x, y, z, q) - G_\nu(x, y, z, q) \right| \leq \sigma_\nu \\ \left| \frac{\partial F(x, y, z, q)}{\partial x} - \frac{\partial G_\nu(x, y, z, q)}{\partial x} \right| \leq \sigma_\nu \\ \left| \frac{\partial F(x, y, z, q)}{\partial y} - \frac{\partial G_\nu(x, y, z, q)}{\partial y} \right| \leq \sigma_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots) \\ \left| \frac{\partial F(x, y, z, q)}{\partial z} - \frac{\partial G_\nu(x, y, z, q)}{\partial z} \right| \leq \sigma_\nu \\ \left| \frac{\partial F(x, y, z, q)}{\partial q} - \frac{\partial G_\nu(x, y, z, q)}{\partial q} \right| \leq \sigma_\nu \end{array} \right.$$

$$F(x_0, y_0, z_0, q_0) - G_\nu(x_0, y_0, z_0, q_0) = 0,$$

e tali che le loro derivate seconde siano equilimitate. Ciò è sempre possibile, giacchè per le (47) si possono in infiniti modi ⁽⁶⁾ costruire i polinomi:

$$g_\nu(x, y, z, q) \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

in modo che si abbia nel campo (23):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| F(x, y, z, q) - g_\nu(x, y, z, q) \right| < \frac{\sigma_\nu}{2} \\ \left| \frac{\partial F(x, y, z, q)}{\partial x} - \frac{\partial g_\nu(x, y, z, q)}{\partial x} \right| \leq \sigma_\nu \\ \left| \frac{\partial F(x, y, z, q)}{\partial y} - \frac{\partial g_\nu(x, y, z, q)}{\partial y} \right| \leq \sigma_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots) \\ \left| \frac{\partial F(x, y, z, q)}{\partial z} - \frac{\partial g_\nu(x, y, z, q)}{\partial z} \right| \leq \sigma_\nu \\ \left| \frac{\partial F(x, y, z, q)}{\partial q} - \frac{\partial g_\nu(x, y, z, q)}{\partial q} \right| \leq \sigma_\nu \end{array} \right.$$

⁽⁶⁾ Cfr. SEVERINI: *Sulle equazioni differenziali ordinarie contenenti un parametro arbitrario*: Rendic. del R. Istituto Lomb. di sc. e lett., Serie II, Vol. XXXIII, (1900) p. 2-9. Il procedimento seguito in questa nota per funzioni di una sola variabile si estende immediatamente a funzioni di quante si vogliono variabili, e dal procedimento medesimo segue anche subito la possibilità di soddisfare all'ultima condizione, relativa alle derivate seconde.

e che le loro derivate seconde siano equilimitate; dopo di che non resta che porre:

$$G_v(x, y, z, q) = g_v(x, y, z, q) + F(x_0, y_0, z_0, q_0) - g_v(x_0, y_0, z_0, q_0) \quad (v = 1, 2, \dots),$$

14. -- Sia ora analogamente a quanto è stato fatto nel n° 8:

$$\begin{aligned} X_v &= -\frac{\partial G_v}{\partial x}, & Y_v &= -\frac{\partial G_v}{\partial y} \\ Z_v &= -\frac{\partial G_v}{\partial z}, & Q_v &= -\frac{\partial G_v}{\partial q} \end{aligned} \quad (v = 1, 2, \dots),$$

e si considerino i sistemi normali di equazioni differenziali ordinarie:

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy_v}{dx} &= Q_v, & \frac{dz_v}{dx} &= p_v + Q_v q_v \\ -\frac{dp_v}{dx} &= X_v + Z_v p_v, & -\frac{dq_v}{dx} &= Y_v + Z_v q_v. \end{aligned} \right. \quad (v = 1, 2, \dots),$$

Posto:

$$\bar{p}_0 = F(x_0, y_0, z_0, q_0) = G_v(x_0, y_0, z_0, q_0) \quad (v = 1, 2, \dots),$$

s'indichino rispettivamente con $\bar{p}_0 - \bar{e}$, $\bar{p}_0 + \bar{e}_1$ il minimo ed il massimo della funzione $F(x, y, z, q)$ nel campo (23) e con \bar{M} il massimo valore assoluto delle funzioni:

$$-\frac{\partial F}{\partial q}, \quad p - \frac{\partial F}{\partial q} q, \quad -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z} p, \quad -\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial z} q$$

nel campo:

$$\begin{aligned} x_0 - a &\leq x \leq x_0 + a \\ y_0 - b &\leq y \leq y_0 + b \\ z_0 - c &\leq z \leq z_0 + c \\ q_0 - d &\leq q \leq q_0 + d \\ \bar{p}_0 - \bar{e} &\leq p \leq \bar{p}_0 + \bar{e}, \end{aligned}$$

intendendo che sia $\bar{e} \geq \bar{e}_1$.

Sarà allora nel campo (23):

$$\bar{p}_0 - (\bar{e} + \sigma_v) \leq G_v(x, y, z, q) \leq \bar{p}_0 + (\bar{e}_1 + \sigma_v) \quad (v = 1, 2, \dots),$$

e se con M_ν s' indica il massimo valore assoluto delle funzioni:

$$Q_\nu, p + Q_\nu q, X_\nu + Z_\nu p, Y_\nu + Z_\nu q \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

nel campo:

$$\begin{aligned} x_0 - a &\leq x \leq x_0 + a \\ y_0 - b &\leq y \leq y_0 + b \\ z_0 - c &\leq z \leq z_0 + c \\ q_0 - d &\leq q \leq q_0 + d \\ p_0 - (e + \sigma_\nu) &\leq p \leq p_0 + (e + \sigma_\nu), \end{aligned} \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

risulterà:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} M_\nu = \bar{M}.$$

Intenderemo senz' altro, analogamente a quanto è stato fatto nel § 8, che delle quantità:

$$\bar{h} = \frac{3a}{4}, \frac{3b}{4\bar{M}}, \frac{3c}{4\bar{M}}, \frac{3d}{4\bar{M}}, \frac{3e}{4\bar{M}}$$

la prima sia minore di ognuna delle rimanenti, ed inoltre che a, b, c, d siano tali che al variare di x'_0, y'_0, z'_0, q'_0 entro i limiti:

$$(51) \quad \left. \begin{aligned} x_0 - \frac{a}{4} &\leq x'_0 \leq x_0 + \frac{a}{4} \\ y_0 - \frac{b}{4} &\leq y'_0 \leq y_0 + \frac{b}{4} \\ z_0 - \frac{c}{4} &\leq z'_0 \leq z_0 + \frac{c}{4} \\ q_0 - \frac{d}{4} &\leq q'_0 \leq q_0 + \frac{d}{4}, \end{aligned} \right\}$$

si abbia:

$$(52) \quad \bar{p}_0 - \frac{e}{4} + \sigma \leq F(x'_0, y'_0, z'_0, q'_0) \leq \bar{p}_0 + \frac{e}{4} - \sigma,$$

σ essendo una quantità positiva, minore di $\frac{e}{4}$ e piccola a piacere.

Detto allora ε un numero positivo, tale che $M + \varepsilon$ risulti minore di ognuna delle fra-

zioni $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$, $\frac{\bar{e}}{a}$, si consideri un valore ν' dell'indice ν , abbastanza grande, perchè si abbia:

$$|M_\nu - \bar{M}| \leq \varepsilon \quad (\nu = \nu', \nu' + 1, \dots)$$

ed inoltre:

$$\sigma_\nu \leq \sigma, \quad (\nu = \nu', \nu' + 1, \dots)$$

donde segue, per la (52), quando x'_0, y'_0, z'_0, q'_0 variano entro i limiti (51):

$$\bar{p}_0 - \frac{\bar{e}}{4} \leq G_\nu(x'_0, y'_0, z'_0, q'_0) \leq \bar{p}_0 + \frac{\bar{e}}{4} \quad (\nu = \nu', \nu' + 1, \dots)$$

Nel campo comune:

$$(53) \quad \left. \begin{aligned} x'_0 - h &\leq x' \leq x'_0 + \bar{h} \\ x_0 - \frac{a}{4} &\leq x'_0 \leq x_0 + \frac{a}{4} \\ y_0 - \frac{b}{4} &\leq y'_0 \leq y_0 + \frac{b}{4} \\ z_0 - \frac{c}{4} &\leq z'_0 \leq z_0 + \frac{c}{4} \\ q_0 - \frac{d}{4} &\leq q'_0 \leq q_0 + \frac{d}{4} \\ p_0 - \frac{\bar{e}}{4} &\leq p'_0 \leq p_0 + \frac{\bar{e}}{4} \end{aligned} \right\}$$

gl' integrali:

$$(54) \quad \left. \begin{aligned} y_\nu &= H_\nu(x, x_0, y'_0, z'_0, p'_0, q'_0) \\ z_\nu &= K_\nu(x, x'_0, y'_0, z'_0, p'_0, q'_0) \\ p_\nu &= L_\nu(x, x'_0, y'_0, z'_0, p'_0, q'_0) \\ q_\nu &= M_\nu(x, x'_0, y'_0, z'_0, p'_0, q'_0) \end{aligned} \right\} \quad (\nu = \nu', \nu' + 1, \dots)$$

dei corrispondenti sistemi di equazioni (50), relativi ai valori iniziali $x'_0, y'_0, z'_0, p'_0, q'_0$, e le loro derivate $\frac{\partial H_\nu}{\partial x}, \frac{\partial K_\nu}{\partial x}, \frac{\partial L_\nu}{\partial x}, \frac{\partial M_\nu}{\partial x}$ ammettono derivate parziali prime continue rispetto ad $x'_0, y'_0, z'_0, p'_0, q'_0$.

Inoltre risulta, come nel § 9:

$$p_\nu = G_\nu(x, y_\nu, z_\nu, q_\nu) \quad (\nu = \nu', \nu' + 1, \dots)$$

se si ha:

$$p'_v = G_v(x'_0, y'_0, z'_0, q'_0) \quad (v=v', v'+1, \dots).$$

Le funzioni (54) sono equilimitate nel campo (53). Infatti per ogni sistema di valori di $x'_0, y'_0, z'_0, p'_0, q'_0$, soddisfacenti alle (53), qualunque sia x nell'intervallo $(x'_0 - \bar{h}, x'_0 + \bar{h})$, le (54) restano comprese (§ 8) entro i limiti:

$$\begin{aligned} y'_0 - \frac{3b}{4} &\leq y_v \leq y'_0 + \frac{3b}{4} \\ z'_0 - \frac{3c}{4} &\leq z_v \leq z'_0 + \frac{3c}{4} \\ q'_0 - \frac{3d}{4} &\leq q_v \leq q'_0 + \frac{3d}{4} \\ p'_0 - \frac{3(\bar{e} + \sigma)}{4} &\leq p_v \leq p'_0 + \frac{3(\bar{e} + \sigma)}{4}, \end{aligned} \quad (v=v', v'+1, \dots)$$

e quindi in ogni caso entro i limiti:

$$\begin{aligned} y_0 - b &\leq y_v \leq y_0 + b \\ z_0 - c &\leq z_v \leq z_0 + c \\ q_0 - d &\leq q_v \leq q_0 + d \\ p_0 - (\bar{e} + \sigma) &\leq p_v \leq p_0 + (\bar{e} + \sigma). \end{aligned} \quad (v=v', v'+1, \dots)$$

Da ciò si deduce, a causa delle (50), che sono equilimitate anche le derivate delle (54) rispetto ad x .

Le derivate delle (54) rispetto ai valori iniziali y'_0, z'_0, q'_0, p'_0 sono, per ogni v , come è noto (7), integrali del sistema di equazioni differenziali lineari:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= \frac{\partial Q_v}{\partial y_v} u_1 + \frac{\partial Q_v}{\partial z_v} u_2 + \frac{\partial Q_v}{\partial p_v} u_3 + \frac{\partial Q_v}{\partial q_v} u_4 \\ \frac{du_2}{dx} &= \frac{\partial (p_v + Q_v q_v)}{\partial y_v} u_1 + \frac{\partial (p_v + Q_v q_v)}{\partial z_v} u_2 + \frac{\partial (p_v + Q_v q_v)}{\partial p_v} u_3 + \frac{\partial (p_v + Q_v q_v)}{\partial q_v} u_4 \quad (v=v', v'+1, \dots) \\ \frac{du_3}{dx} &= - \frac{\partial (X_v + Z_v p_v)}{\partial y_v} u_1 - \frac{\partial (X_v + Z_v p_v)}{\partial z_v} u_2 - \frac{\partial (X_v + Z_v p_v)}{\partial p_v} u_3 - \frac{\partial (X_v + Z_v p_v)}{\partial q_v} u_4 \\ \frac{du_4}{dx} &= - \frac{\partial (Y_v + Z_v q_v)}{\partial y_v} u_1 - \frac{\partial (Y_v + Z_v q_v)}{\partial z_v} u_2 - \frac{\partial (Y_v + Z_v q_v)}{\partial p_v} u_3 - \frac{\partial (Y_v + Z_v q_v)}{\partial q_v} u_4 \end{aligned}$$

(7) Cfr. *Bagnera*, l. c. (3), pag. 309.

corrispondenti rispettivamente ai sistemi di valori iniziali $(x'_0, 1, 0, 0, 0)$, $(x'_0, 0, 1, 0, 0)$, $(x'_0, 0, 0, 1, 0)$, $(x'_0, 0, 0, 0, 1)$. D'altra parte, per il modo come sono stati costruiti i polinomi G_v , è chiaro che i coefficienti del sistema di equazioni (55) sono nel campo (53), equilimitati. Ne risulta che anche le dette derivate delle funzioni (54), rispetto ai valori iniziali y'_0, z'_0, p'_0, q'_0 , sono, come quelle rispetto ad x , equilimate nel campo (53).

Alla stessa conclusione si perviene in ultimo per le derivate delle funzioni medesime rispetto ad x'_0 , se si ricorda ⁽⁸⁾ che, posto :

$$\begin{aligned} X_{v,0} &= X_v(x'_0, y'_0, z'_0, q'_0), & Y_{v,0} &= Y_v(x'_0, y'_0, z'_0, q'_0) \\ Z_{v,0} &= Z_v(x'_0, y'_0, z'_0, q'_0), & Q_{v,0} &= Q_v(x'_0, y'_0, z'_0, q'_0), \end{aligned} \quad (v=1, \varepsilon\dots)$$

risulta :

$$(56) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial y_v}{\partial x'_0} &= -\frac{\partial y_v}{\partial y'_0} Q_{v,0} - \frac{\partial y_v}{\partial z'_0} (p'_0 + Q_{v,0} q'_0) + \frac{\partial y_v}{\partial p'_0} (X_{v,0} + Z_{v,0} p'_0) + \frac{\partial y_v}{\partial q'_0} (Y_{v,0} + Z_{v,0} q'_0) \\ \frac{\partial z_v}{\partial x'_0} &= -\frac{\partial z_v}{\partial y'_0} Q_{v,0} - \frac{\partial z_v}{\partial z'_0} (p'_0 + Q_{v,0} q'_0) + \frac{\partial z_v}{\partial p'_0} (X_{v,0} + Z_{v,0} p'_0) + \frac{\partial z_v}{\partial q'_0} (Y_{v,0} + Z_{v,0} q'_0) \\ \frac{\partial p_v}{\partial x'_0} &= -\frac{\partial p_v}{\partial y'_0} Q_{v,0} - \frac{\partial p_v}{\partial z'_0} (p'_0 + Q_{v,0} q'_0) + \frac{\partial p_v}{\partial p'_0} (X_{v,0} + Z_{v,0} p'_0) + \frac{\partial p_v}{\partial q'_0} (Y_{v,0} + Z_{v,0} q'_0) \\ \frac{\partial q_v}{\partial x'_0} &= -\frac{\partial q_v}{\partial y'_0} Q_{v,0} - \frac{\partial q_v}{\partial z'_0} (p'_0 + Q_{v,0} q'_0) + \frac{\partial q_v}{\partial p'_0} (X_{v,0} + Z_{v,0} p'_0) + \frac{\partial q_v}{\partial q'_0} (Y_{v,0} + Z_{v,0} q'_0). \end{aligned} \right\} \quad (v=1, \varepsilon\dots)$$

Dall'essere le derivate delle funzioni (54) equilimate in tutto il campo (53) segue (§ 1, n° 4) che le funzioni medesime sono in questo campo equicontinue; e, per l'osservazione contenuta nel n° 6, si può ancora asserire, in base alle equazioni (50), che il medesimo si verifica per le derivate delle (54) rispetto ad x .

Riguardo alle rimanenti derivate prime delle (54), risulta dalle (55) e dalle (56), per la suddetta osservazione del n° 6 e per il teorema del n° 7, che sono equicontinue rispetto ad x , uniformemente per tutti i sistemi di valori di $x'_0, y'_0, z'_0, p'_0, q'_0$, compresi entro i rispettivi limiti (53); il che significa (n. 7) che, fissata comunque una quantità positiva τ , esiste in corrispondenza una quantità positiva ρ , tale che in ogni tratto di variabilità di x , di ampiezza minore od uguale a ρ , ognuna di quelle derivate fa un'oscillazione minore od uguale a τ , qualunque sia il sistema di valori considerati per $x'_0, y'_0, z'_0, p'_0, q'_0$ nei rispettivi intervalli (53).

16. — Ciò posto sia data nell'intervallo $\left(y_0 - \frac{b}{4}, y_0 + \frac{b}{4} \right)$ una funzione :

$$z = f(v)$$

⁽⁸⁾ Cfr. *Bagnera*, l. c. ⁽³⁾ pag. 310.

con derivata prima soddisfacente all'ipotesi di *Lipschitz*:

$$|f(y) - f(y')| \leq \bar{\alpha} |y - y'|,$$

ove $\bar{\alpha}$ è una quantità positiva, finita, e tale che si abbia:

$$(57) \quad \varepsilon_0 - \frac{c}{4} + \eta \leq f(y) \leq \varepsilon_0 + \frac{c}{4} - \eta, \quad q_0 - \frac{d}{4} + \eta \leq f'(y) \leq q_0 + \frac{d}{4} - \eta,$$

η essendo una quantità positiva, arbitrariamente scelta, minore di $\frac{c}{4}$ e di $\frac{d}{4}$.

Si costruisca ⁽⁸⁾ una successione di polinomi razionali interi:

$$(58) \quad f_\nu(y) \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

in modo da avere nell'intervallo $(y_0 - \frac{b}{4}, y_0 + \frac{b}{4})$:

$$|f_\nu(y) - f(y)| \leq \sigma_\nu, \quad |f'_\nu(y) - f'(y)| \leq \sigma_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

e quindi per le (57):

$$\varepsilon_0 - \frac{c}{4} \leq f_\nu(y) \leq \varepsilon_0 + \frac{c}{4}, \quad q_0 - \frac{d}{4} \leq f'_\nu(y) \leq q_0 + \frac{d}{4} \quad (\nu = \nu'', \nu'' + 1, \dots),$$

se ν'' è un valore dell'indice ν abbastanza grande, perchè risulti:

$$\sigma_\nu \leq \eta \quad (\nu = \nu'', \nu'' + 1, \dots).$$

I polinomi (58) abbiano inoltre le derivate seconde equilimitate.

Intenderemo nel seguito che dei due numeri ν' e ν'' sia ν' il maggiore.

Fissato definitivamente x_0' , ponendo ad es. $x_0' = x_0$, in corrispondenza ad ogni y_0' dell'intervallo $(y_0 - \frac{b}{4}, y_0 + \frac{b}{4})$ e ad ogni $\nu \geq \nu'$, si considerino, come valori iniziali ε_0' , q_0' , p_0' , i valori:

$$\varepsilon_0' = f_\nu(y_0'), \quad q_0' = f'_\nu(y_0'), \quad p_0' = G_\nu[x_0', y_0', f_\nu(y_0'), f'_\nu(y_0')] \quad (\nu = \nu', \nu' + 1, \dots).$$

⁽⁸⁾ Cfr. *Severini*, l. c. ⁽⁶⁾.

Le (54) divengono allora :

$$(54') \quad \left\{ \begin{array}{l} y_v = H_v \left[x, x_0, y'_0, f_v(y'_0), G_v \left(x_0, y'_0, f_v(y'_0), f'_v(y'_0) \right), f'_v(y'_0) \right] = H_{I,v}(x, y'_0) \\ z_v = K_v \left[x, x_0, y'_0, f_v(y'_0), G_v \left(x_0, y'_0, f_v(y'_0), f'_v(y'_0) \right), f'_v(y'_0) \right] = K_{I,v}(x, y'_0) \\ p_v = L_v \left[x, x_0, y'_0, f_v(y'_0), G_v \left(x_0, y'_0, f_v(y'_0), f'_v(y'_0) \right), f'_v(y'_0) \right] = L_{I,v}(x, y'_0) \\ q_v = M_v \left[x, x_0, y'_0, f_v(y'_0), G_v \left(x_0, y'_0, f_v(y'_0), f'_v(y'_0) \right), f'_v(y'_0) \right] = M_{I,v}(x, y'_0) \end{array} \right. \quad (v=v', v'+1, \dots)$$

Da quanto si è detto sulle (54) e dalle proprietà dei polinomi (58) risulta che le (54') e le loro derivate :

$$\frac{\partial H_{I,v}(x, y'_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial K_{I,v}(x, y'_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial L_{I,v}(x, y'_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial M_{I,v}(x, y'_0)}{\partial x} \quad (v=v', v'+1, \dots)$$

ammettono le derivate parziali prime continue rispetto ad y'_0 .

Si ha pertanto, differenziando :

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} dy_v = \frac{\partial H_{I,v}(x, y'_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial H_{I,v}(x, y'_0)}{\partial y'_0} dy'_0 \\ dz_v = \frac{\partial K_{I,v}(x, y'_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial K_{I,v}(x, y'_0)}{\partial y'_0} dy'_0, \end{array} \right. \quad (v=v', v'+1, \dots)$$

e si prova, collo stesso ragionamento del § 2, che deve aversi identicamente :

$$(60) \quad L_{I,v}(x, y'_0) dx + M_{I,v}(x, y'_0) dy'_0 - dz_v = 0 \quad (v=v', v'+1, \dots).$$

17. -- Si considerino le equazioni :

$$(61) \quad y_v - H_{I,v}(x, y'_0) = 0 \quad (v=v', v'+1, \dots),$$

le quali sono tutte soddisfatte dai valori :

$$x = x_0, \quad y'_0 = y'_0, \quad y_v = y'_0.$$

Poichè si ha :

$$\left[\frac{\partial (y_v - H_{I,v}(x, y'_0))}{\partial y'_0} \right]_{x=x_0} = - \left[\frac{\partial H_{I,v}(x, y'_0)}{\partial y'_0} \right]_{x=x_0} = -1 \quad (v=v', v'+1, \dots),$$

e, per quanto è stato detto nel n° 15, le derivate parziali :

$$\frac{\partial H_{I,v}(x, y'_v)}{\partial y'_v} \quad (v = v', v' + 1, \dots)$$

sono equicontinue rispetto ad x , uniformemente per tutti i valori di y'_v , è chiaro che si può assegnare una quantità positiva λ , minore di h , ed una quantità positiva A , in modo che nel campo :

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 - \lambda \leq x \leq x_0 + \lambda \\ y_0 - \frac{b}{4} \leq y'_v \leq y_0 + \frac{b}{4} \\ y_0 - b \leq y_v \leq y_0 + b, \end{array} \right.$$

risulti :

$$(63) \quad \left| \frac{\partial (y_v - H_{I,v}(x, y'_v))}{\partial y'_v} \right| > A \quad (v = v', v' + 1, \dots),$$

Dallo stesso n° 15 segue che le derivate :

$$\frac{\partial (y_v - H_{I,v}(x, y'_v))}{\partial x} = - \frac{\partial H_{I,v}(x, y'_v)}{\partial x} \quad (v = v', v' + 1, \dots)$$

sono equilimitate, e può quindi assegnarsi una quantità positiva B , in modo da avere nel campo (62) :

$$(64) \quad \left| \frac{\partial (y_v - H_{I,v}(x, y'_v))}{\partial x} \right| \leq B \quad (v = v', v' + 1, \dots).$$

Se ne deduce che in un campo Γ , pel quale si abbia :

$$(65) \quad |x - x_0| \leq \lambda, |y_v - y_0| \leq b, B|x - x_0| + |y_v - y_0| \leq \frac{Ab}{4},$$

ognuna delle (61) definisce y'_v , come funzione implicita di x e di y_v :

$$(66) \quad y'_v = \psi_v(x, y_v) \quad (v = v', v' + 1, \dots),$$

dotata di derivate prime continue.

Analogamente a quanto è stato detto nel n° 11, dalle (54') e dalle (66) si deducono ora le funzioni:

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_\nu = K_{1,\nu} [x, \psi_\nu(x, y_\nu)] = K_{2,\nu}(x, y_\nu) \\ p_\nu = L_{1,\nu} [x, \psi_\nu(x, y_\nu)] = L_{2,\nu}(x, y_\nu) \quad (\nu = \nu', \nu' + 1, \dots) \\ q_\nu = M_{1,\nu} [x, \psi_\nu(x, y_\nu)] = M_{2,\nu}(x, y_\nu), \end{array} \right.$$

dotate anch'esse di derivate prime continue nel campo Γ , e per le quali si ha, a causa dell'identità (60):

$$(68) \quad \frac{\partial K_{2,\nu}(x, y_\nu)}{\partial x} = L_{2,\nu}(x, y_\nu), \quad \frac{\partial K_{2,\nu}(x, y_\nu)}{\partial y_\nu} = M_{2,\nu}(x, y_\nu) \quad (\nu = \nu', \nu' + 1, \dots).$$

D'altra parte, come nel § 2, si prova che le (54') soddisfano rispettivamente alle relazioni:

$$(69) \quad p_\nu = G_\nu(x, y_\nu, z_\nu, q_\nu) \quad (\nu = \nu', \nu' + 1, \dots)$$

e quindi, per le (67) e (68), rimpiazzando d'ora innanzi le variabili indipendenti x, y_ν con x, y , che le

$$z_\nu = K_{2,\nu}(x, y) \quad (\nu = \nu', \nu' + 1, \dots)$$

sono gl' integrali delle equazioni:

$$p = G_\nu(x, y, z, q) \quad (\nu = \nu', \nu' + 1, \dots),$$

corrispondenti, per $x = x_0$, alle funzioni iniziali:

$$(70) \quad K_{2,\nu}(x_0, y) = f_\nu(y) \quad (\nu = \nu', \nu' + 1, \dots).$$

18. Dalle disuguaglianze (63) e (64) segue, che le derivate delle funzioni (66):

$$\frac{\partial \psi_\nu(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi_\nu(x, y)}{\partial y} \quad (\nu = \nu', \nu' + 1, \dots)$$

sono equilimitate nel campo Γ , e perciò che le funzioni medesime sono in detto campo equicontinue.

D'altra parte, come è stato detto nel n° 15, le (54) sono equicontinue nel campo (53); tali sono quindi, per l'osservazione del n° 6, le (54) nel campo:

$$\begin{aligned} x_0 - \bar{h} &\leq x \leq x_0 + h \\ y_0 - \frac{b}{4} &\leq y \leq y_0 + \frac{b}{4}, \end{aligned}$$

ed in fine le (67) nel campo Γ .

Dalle successioni (67) si estraggono ora tre successioni parziali (§ 1):

$$\begin{aligned} z_{v_i} &= K_{2, v_i}(x, y) \\ p_{v_i} &= L_{2, v_i}(x, y) \quad (i = 1, 2, \dots) \\ q_{v_i} &= M_{2, v_i}(x, y), \end{aligned}$$

convergenti rispettivamente a tre funzioni limiti continue $R(x, y)$, $S(x, y)$, $T(x, y)$.

Sarà, a causa delle (68):

$$\frac{\partial R(x, y)}{\partial x} = S(x, y), \quad \frac{\partial R(x, y)}{\partial y} = T(x, y);$$

e poichè (n° 17):

$$\frac{\partial K_{2, v_i}(x, y)}{\partial x} = G_{v_i} \left[x, y, K_{2, v_i}(x, y), \frac{\partial K_{2, v_i}(x, y)}{\partial y} \right] \quad (i = 1, 2, \dots),$$

risulterà al limite:

$$\frac{\partial R(x, y)}{\partial x} = F \left[x, y, R(x, y), \frac{\partial R(x, y)}{\partial y} \right]$$

ed inoltre per le (70):

$$R(x_0, y) = f(y).$$

19. Con ciò che precede è stabilita l'esistenza di un integrale dell'equazione:

$$(1) \quad p = F(x, y, z, q),$$

che per $x = x_0$ si riduca ad una data funzione :

$$z = f(y),$$

nel caso che la $F(x, y, z, q)$ e la funzione iniziale $f(y)$ abbiano le derivate prime, soddisfacenti all'ipotesi di *Lipschitz*.

Interessa ora stabilire, se questo integrale è unico ed, occorrendo, assegnare delle condizioni di unicità. Di tali ricerche mi occuperò in una prossima nota.

Catania, novembre 1916.

Sopra l'algebra delle funzioni permutabili di 2^a specie

Nota di MARIA PRECCHIA

RELAZIONE

DELLA COMMISSIONE DI REVISIONE COMPOSTA DAI SOCI EFFETTIVI
PROFF. M. CIPOLLA E C. SEVERINI (*Relatore*)

La Memoria della Sig.na M. Precchia *Sopra l'Algebra delle funzioni permutabili di seconda specie* contiene un'esposizione sistematica, accurata, rigorosa dei risultati, che nell'argomento sono stati ottenuti, con notevoli osservazioni ed aggiunte, fra le quali è da segnalare in modo speciale lo studio delle equazioni integrali di quarto grado.

Proponiamo pertanto che la Memoria venga inserita negli Atti dell'Accademia.

La teoria algebrica delle funzioni permutabili, fondata da Volterra, ⁽¹⁾ ed ulteriormente sviluppata da Evans, ⁽²⁾ si arricchì, come è noto, di nuovi importanti risultati per opera di Lauricella ⁽³⁾, il quale, nel caso delle funzioni simmetriche, permutabili di 2^a specie, pose le basi per una trattazione generale della teoria medesima.

In questa nota espongo sistematicamente le ricerche di Lauricella, aggiungendo varie considerazioni, che credo non prive d'interesse, allo scopo di meglio chiarire e mettere in luce alcuni risultati, ed estendo inoltre le dette ricerche alle equazioni integrali di 4^o grado, che non furono trattate dal Lauricella nè, che mi sappia, da altri autori.

Ricordiamo i seguenti teoremi:

Teorema di Hilbert-Schmidt ⁽⁴⁾ Sia $k(x, y) = k'(x, y) + i k''(x, y)$ un nucleo ad autofunzioni reali, nel campo $a \leq x, y \leq b$. Indichiamo con $\varphi_i(x), \psi_i(x)$, ($i = 1, 2, \dots$) le sue coppie di autofunzioni reali; si ha allora che una funzione $g(x)$ della forma:

$$g(x) = \int_a^b k(x, y) h(y) dy$$

⁽¹⁾ *Leçons sur les fonctions de Lignes*. (Paris, Gauthier-Villars—1913).

⁽²⁾ *Sopra l'algebra delle funzioni permutabili*. (Memorie della R. Accad. dei Lincei, serie 5^a vol. 8^o, 1911).

⁽³⁾ Cfr. le note: *Sopra i nuclei reiterati* (Rendic. R. Accad. dei Lincei, vol. 20^o, serie 5^a, 1^o semestre); *Sopra le funzioni permutabili di 2^a specie* (Rendic. R. Accad. dei Lincei, Vol. 22^o, serie 5^a, 1^o semestre); e la memoria: *Sopra l'algebra delle funzioni permutabili di 2^a specie* (Annali di Matem. pura ed applicata, tomo 21^o serie 3^a).

⁽⁴⁾ Questo teorema è dimostrato supponendo reali le funzioni $k(x, y)$ ed $h(y)$, ma l'estensione di esso al caso in cui $k(x, y)$ ed $h(y)$ non siano reali, è immediata.

è sviluppabile in serie di autofunzioni ortogonali $\varphi_i(x)$, convergente quasi da per tutto nell'intervallo (a, b) , cioè è:

$$g(x) = \sum_k \varphi_k(x) \int_a^b g(t) \varphi_k(t) dt;$$

ed una funzione $g_1(x)$ della forma:

$$g_1(x) = \int_a^b k(y, x) h_1(y) dy$$

è sviluppabile in serie di autofunzioni ortogonali $\psi_i(x)$, convergente assolutamente quasi da per tutto nell'intervallo (a, b) , ossia è:

$$g_1(x) = \sum_k \varphi_k(x) \int_a^b g_1(t) \varphi_k(t) dt.$$

II. Sia

$$(1) \quad u_1(x, y), \quad u_2(x, y), \dots$$

una serie infinita di funzioni ortogonali, reali, nel campo $a \leq \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} \leq b$. Se una funzione $K(x, y) = K'(x, y) + iK''(x, y)$ ha la parte reale e la parte immaginaria separatamente sommabili insieme ai loro quadrati e insieme ai prodotti di ciascuna di esse per una qualsiasi delle (1), e se nel caso in cui la serie (1) non sia chiusa, soddisfa inoltre, come è necessario alle condizioni:

$$\int_a^b \int_a^b k(x, y) \theta_r(x, y) dx dy = 0, (r = 1, 2, \dots)$$

ove $\theta_r(x, y)$, ($r = 1, 2, \dots$) sono le funzioni di un sistema di funzioni ortogonali, complementare al sistema (1), è sempre possibile, ed in infiniti modi, determinare una serie di numeri interi, positivi e crescenti indefinitamente n_1, n_2, \dots , in modo che si abbia:

$$k(x, y) = \sum_I^{n_1} a_I u_I(x, y) + \sum_{n_1+1}^{n_2} a_I u_I(x, y) + \dots$$

ove

$$a_t = \int_a^b \int_a^b k(x, y) u_t(x, y) dx dy \quad (t = 1, 2, \dots),$$

e che la serie a secondo membro sia in tutto il campo $a \leq \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} \leq b$ convergente uniformemente in generale.

III. Sia $K(x,y) = K'(x,y) + iK''(x,y)$ un nucleo tale che le funzioni $K'(x,y)$ e $K''(x,y)$ siano sommabili insieme ai loro quadrati nel campo $a \leq \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} \leq b$, il quale ammetta come autofunzioni gli elementi di due serie di funzioni ortogonali reali e chiuse, corrispondenti ad autovalori che possono essere in tutto od in parte non reali, (incluso eventualmente l'autovalore ∞). Se $\varphi_i(x), \psi_i(x)$, ($i=1, 2, \dots$) sono le coppie di autofunzioni di $K(x,y)$ corrispondenti rispettivamente agli autovalori finiti $\lambda_i = \lambda'_i + i\lambda''_i$ ($i=1, 2, \dots$), è sempre possibile determinare, ed in infiniti modi, una serie di numeri interi positivi e crescenti indefinitamente, m_1, m_2, \dots in modo che si abbia

$$K(x,y) = \sum_{\rho=1}^{m_1} \frac{\varphi_{\rho}(x) \psi_{\rho}(y)}{\lambda_{\rho}} + \sum_{\rho=m_1+1}^{m_2} \frac{\varphi_{\rho}(x) \psi_{\rho}(y)}{\lambda_{\rho}} + \dots$$

IV. Due nuclei che hanno le parti reali e le parti immaginarie sommabili insieme ai loro quadrati nel campo $a \leq \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} \leq b$ e che ammettono i medesimi autovalori reali o complessi, (l'autovalore ∞ eventualmente incluso) ai quali corrispondono come autofunzioni gli elementi di due medesime serie ortogonali reali e chiuse, coincidono.

V. Sia $K(x,y) = K'(x,y) + iK''(x,y)$ un nucleo tale che le funzioni $K'(x,y)$ e $K''(x,y)$ siano sommabili insieme ai loro quadrati nel campo $a \leq \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} \leq b$, e che ammetta autofunzioni tutte reali. Se $\varphi_r(x), \psi_r(x)$, ($r=1, 2, \dots$), sono le sue coppie di autofunzioni ortogonali corrispondenti agli autovalori $\lambda_r = \lambda'_r + i\lambda''_r$ ($r=1, 2, \dots$), la funzione $K'(x,y)$ ammette come coppie di autofunzioni ortogonali le $\varphi_r(x), \psi_r(x)$ ($r=1, 2, \dots$) corrispondenti agli autovalori finiti $\frac{\lambda'_r + \lambda''_r}{\lambda'_r}$ per $\lambda'_r \neq 0$, e all'autovalore ∞ per $\lambda'_r = 0$, ($r=1, 2, \dots$); e la funzione $K''(x,y)$ ammette come coppie di autofunzioni ortogonali le $\varphi_r(x), \psi_r(x)$ ($r=1, 2, \dots$) corrispondenti agli autovalori finiti $-\frac{\lambda'_r + \lambda''_r}{\lambda''_r}$ per $\lambda''_r \neq 0$ e all'autovalore ∞ per $\lambda''_r = 0$, ($r=1, 2, \dots$).

VI. Sia $p(x,y)$ un nucleo simmetrico, ad autofunzioni reali. Indichiamo con $\varphi_i(x)$ ($i=1, 2, \dots$) un sistema completo di autofunzioni ortogonali del nucleo $p(x,y)$ e con ρ_i ($i=1, 2, \dots$) la corrispondente serie di autovalori; sia poi $\bar{\varphi}_i(x)$ ($i=1, 2, \dots$) la eventuale serie di funzioni ortogonali complementare alla serie $\varphi_i(x)$ ($i=1, 2, \dots$). La condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $q(x,y)$, ad autofunzioni reali, sia permutabile di 2^a specie con la funzione $p(x,y)$ è che siano soddisfatti le relazioni:

$$(2) \quad \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{p_i} \right) \int_a^b \int_a^b q(\xi, \eta) \varphi_i(\xi) \varphi_j(\eta) d\xi d\eta = 0$$

$$(3) \quad \int_a^b \int_a^b q(\xi, \eta) \varphi_i(\xi) \bar{\varphi}_j(\eta) d\xi d\eta = 0$$

$$(4) \quad \int_a^b \int_a^b q(\xi, \eta) \bar{\varphi}_i(\xi) \varphi_j(\eta) d\xi d\eta = 0$$

§ 1.

Proprietà delle funzioni simmetriche permutabili di 2^a specie.

1. Siano $p(x,y)$ e $q(x,y)$ due funzioni simmetriche, ad autofunzioni reali, nel campo $a \leq \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \leq b$, che indicheremo nel seguito con σ .

Si ha il teorema (5): *Condizione necessaria e sufficiente affinché $p(x,y)$ e $q(x,y)$ siano permutabili di 2^a specie (6) e che la funzione*

$$f(x,y) = \check{p} \check{q}(x,y)$$

sia simmetrica.

Infatti se le funzioni $p(x,y)$ e $q(x,y)$ sono permutabili si ha:

$$f(x,y) = \int_a^b p(x,\xi) q(\xi,y) d\xi = \int_a^b p(y,\xi) q(\xi,x) d\xi = f(y,x)$$

cioè la $f(x,y)$ è simmetrica.

Viceversa supposta la $f(x,y)$ simmetrica, sarà:

$$\int_a^b p(x,\xi) q(\xi,y) d\xi = \int_a^b p(y,\xi) q(\xi,x) d\xi = \int_a^b q(x,\xi) p(\xi,y) d\xi$$

2. La condizione di permutabilità di due funzioni simmetriche data dal precedente teorema, può mettersi sotto altra forma. Vediamo prima quali sono le condizioni necessarie e sufficienti, affinché tre funzioni simmetriche, ad autofunzioni reali, nel campo σ , $f(x,y)$, $p(x,y)$ e $q(x,y)$ siano legate dalla relazione:

$$(5) \quad f(x,y) = \check{p} \check{q}(x,y).$$

Indichiamo con

$$(6) \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots$$

un sistema completo di autofunzioni ortogonali del nucleo $p(x,y)$, e con

$$(7) \quad \rho_1, \rho_2, \dots$$

la corrispondente serie di autovalori.

Supposta verificata la (5), per il teorema di Hilbert-Schmidt, sarà per ogni valore di y , esclusi al più quelli di un insieme di misura nulla:

$$(8) \quad f(x,y) = \sum_i c_i(y) \varphi_i(x)$$

(5) *Sopra le funzioni permutabili di 2^a specie*, I. c. (1).

(6) Si avverte che nel seguito s'infenderà parlare di funzioni permutabili di 2^a specie.

ove

$$c_i(y) = \int_a^b f(x,y) \varphi_i(x) dx, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

e quindi ponendo $f(x,y) = f'(x,y) + i f''(x,y)$ e $c_i(y) = c'_i(y) + i c''_i(y)$ sarà per ogni valore di y , esclusi al più quelli di un insieme di misura nulla:

$$(8') \quad f'(x,y) = \sum_i c'_i(y) \varphi_i(x), \quad f''(x,y) = \sum_i c''_i(y) \varphi_i(x)$$

ove:

$$c'_i(y) = \int_a^b f'(x,y) \varphi_i(x) dx; \quad c''_i(y) = \int_a^b f''(x,y) \varphi_i(x) dx \quad (i = 1, 2, \dots)$$

L'insieme E dei punti del campo σ ove può non sussistere l'uguaglianza (8) e quindi le uguaglianze (8') si otterrà considerando i punti le cui ordinate y appartengono al detto insieme di misura nulla, e per ognuno dei rimanenti valori di y considerando eventualmente ogni volta un insieme di punti di misura lineare nulla.

Inoltre essendo:

$$c_i(y) = \int_a^b p(y,\xi) \left\{ \int_a^b q(\xi,x) \varphi_i(x) dx \right\} d\xi \quad (i = 1, 2, \dots)$$

si ha ancora per il teorema di Hilbert-Schmidt, escluso al più un insieme di punti di misura lineare nulla

$$(9) \quad c_{ij}(y) = \sum_j c_{ij} \varphi_j(y) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

ove

$$c_{ij} = \int_a^b c_i(y) \varphi_j(y) dy$$

posto allora $c_{ij} = c'_{ij} + i c''_{ij}$, sarà escluso al più un insieme di misura lineare nulla

$$(9') \quad c'_i(y) = \sum_j c'_{ij} \varphi_j(y); \quad c''_i(y) = \sum_j c''_{ij} \varphi_j(y)$$

ove

$$c'_{ij} = \int_a^b c'_i(y) \varphi_j(y) dy; \quad c''_{ij} = \int_a^b c''_i(y) \varphi_j(y) dy \quad (i, j = 1, 2, \dots)$$

L'insieme F dei punti ove non si ha (9) e quindi le (9') è evidentemente di misura nulla. Posto allora

$$g'(x,y) = \sum_i \left\{ \sum_j c'_{ij} \varphi_j(y) \right\} \varphi_i(x)$$

$$g''(x,y) = \sum_i \left\{ \sum_j c''_{ij} \varphi_j(y) \right\} \varphi_i(x)$$

ed

$$h'(x,y) = f'(x,y) - g'(x,y); \quad h''(x,y) = f''(x,y) - g''(x,y)$$

risulta quasi da per tutto nell'intervallo $a \leq y \leq b$

$$\int_a^b \{ h'(x,y) \}^2 dx = 0; \quad \int_a^b \{ h''(x,y) \}^2 dx = 0$$

e quindi

$$\int_a^b \int_a^b \{ h'(x,y) \}^2 dx dy = 0; \quad \int_a^b \int_a^b \{ h''(x,y) \}^2 dx dy = 0.$$

Le funzioni $h'(x,y)$ ed $h''(x,y)$ sono pertanto uguali a zero quasi da per tutto nel campo σ , si ha cioè:

$$h'(x,y) = 0, \quad h''(x,y) = 0$$

fatta al più eccezione per i punti di un insieme di misura superficiale nulla.

Segue quindi che si ha quasi da per tutto:

$$f'(x,y) = \Sigma_i \{ \Sigma_j c'_{ij} \varphi_j(y) \} \varphi_i(x)$$

$$f''(x,y) = \Sigma_i \{ \Sigma_j c''_{ij} \varphi_j(y) \} \varphi_i(x)$$

da cui

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f'(x,y) + i f''(x,y) = \Sigma_i \{ \Sigma_j (c'_{ij} + i c''_{ij}) \varphi_j(y) \} \varphi_i(x) \\ &= \Sigma_i \{ \Sigma_j c_{ij} \varphi_j(y) \} \varphi_i(x). \end{aligned}$$

Ancora per la permutabilità delle funzioni $p(x,y)$ e $q(x,y)$ e per l'equazione (2) a cui deve soddisfare la $q(x,y)$, risulta che i coefficienti

$$c_{ij} = \int_a^b \int_a^b \int_a^b p(x,\xi) q(\xi,y) \varphi_i(x) \varphi_j(y) dx d\xi dy = \frac{1}{p_i} \int_a^b \int_a^b q(\xi,y) \varphi_j(y) \varphi_i(\xi) d\xi dy$$

soddisfano alla relazione $c_{ij} = c_{ji}$ e sono nulli per i valori i ed j tali che $p_i \neq p_j$.

Sarà quindi quasi da per tutto:

$$f(x,y) = \sum_{\mathbf{I}}^{l_1} \sum_{\mathbf{I}}^{l_1} c_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(y) + \sum_{l_1+1}^{l_1+l_2} \sum_{l_1+1}^{l_1+l_2} c_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(y) + \dots$$

ove indichiamo con t_1 il numero delle autofunzioni della serie (6) corrispondente ad uno stesso autovalore $p_1 = p_2 = \dots = p_{t_1}$ della serie (7), con t_2 il numero di quelle corrispondenti all'altro autovalore successivo $p_{t_1+1} = p_{t_1+2} = \dots = p_{t_1+t_2}$ della serie (7), e così via.

Consideriamo ora i nuclei simmetrici:

$$F_1(x, y) = \sum_i^{t_1} \sum_j^{t_1} c_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(y); \quad F_2(x, y) = \sum_i^{t_1+t_2} \sum_j^{t_1+t_2} c_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(y); \dots$$

ed indichiamo con

$$(10) \quad \psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{\tau_1}(x); \psi_{\tau_1+1}(x), \psi_{\tau_1+2}(x), \dots, \psi_{\tau_1+\tau_2}(x); \dots$$

i sistemi di autofunzioni ortogonali rispettivamente dei nuclei $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, ..., e con

$$f_1, f_2, \dots, f_{\tau_1}; f_{\tau_1+1}, f_{\tau_1+2}, \dots, f_{\tau_1+\tau_2}; \dots$$

i corrispondenti sistemi di autovalori. Sarà (⁷) $\tau_1 \leq t_1$, $\tau_2 \leq t_2$, ..., ed inoltre le funzioni $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{\tau_1}(x)$ saranno combinazioni lineari delle funzioni $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{t_1}(x)$; le funzioni $\psi_{\tau_1+1}(x), \dots, \psi_{\tau_1+\tau_2}(x)$ saranno combinazioni lineari delle $\varphi_{t_1+1}(x), \dots, \varphi_{t_1+t_2}(x)$; e così via, cioè le funzioni (10) considerate insieme costituiranno un sistema di funzioni ortogonali, e sarà:

$$f(x, y) = \sum_i \frac{\psi_i(x) \psi_i(y)}{f_i}$$

Le funzioni $\psi_1(x), \dots, \psi_{\tau_1}(x)$ sono autofunzioni di $p(x, y)$ corrispondenti all'autovalore $p_1 = p_2 = \dots = p_{t_1}$; le $\psi_{t_1+1}(x), \dots, \psi_{t_1+t_2}(x)$; sono autofunzioni di $p(x, y)$ corrispondenti all'autovalore $p_{t_1+1} = \dots = p_{t_1+t_2}, \dots$; indichiamo genericamente con p'_i ($i = 1, 2, \dots$) gli autovalori di $p(x, y)$ corrispondenti alle autofunzioni (10), tali cioè che si abbia

$$(11) \quad \psi_i(x) = p'_i \int_a^b p(x, y) \psi_i(y) dy$$

Poichè la successione p'_1, p'_2, \dots è contenuta nella successione p_1, p_2, \dots , dalla convergenza delle serie $\sum_i \frac{1}{p_i^2}$ segue la convergenza della serie $\sum_i \frac{1}{p_i'^2}$. Sappiamo allora che esiste una e una sola funzione simmetrica $p'(x, y)$, ad autofunzioni reali, la quale ammette come autofunzioni ortogonali tutte e sole le funzioni (10) e come corrispondenti autovalori le costanti p'_i ($i = 1, 2, \dots$), tale cioè che

$$(12) \quad \psi_i(x) = p'_i \int_a^b p'(x, \xi) \psi_i(\xi) d\xi$$

(⁷) LAURICELLA — Sopra alcune equazioni integrali (Rend. della R. Acc. dei Lincei. Vol. XVII, serie 5^a, 1^o semestre).

Ponendo quindi

$$p''(x,y) = p(x,y) - p'(x,y)$$

si avrà, qualunque sia l'indice i a causa delle (11) e (12)

$$(13) \quad \int_a^b p''(x,y) \psi_i(y) dy = 0$$

ossia:

$$\int_a^b p'(x,\xi) p''(\xi,y) d\xi = 0$$

e per la simmetria delle due funzioni $p'(x,y)$ e $p''(x,y)$

$$\int_a^b p''(x,\xi) p'(\xi,y) d\xi = 0$$

cioè ⁽⁸⁾ la $p''(x,y)$ è ortogonale alla $p'(x,y)$, ossia le autofunzioni normalizzate della $p''(x,y)$ sono ortogonali a tutte le funzioni della serie (10).

Si osservi intanto che le funzioni (10) sono anche autofunzioni del nucleo $q(x,y)$ corrispondenti agli autovalori $q'_i = \frac{f_i}{p'_i}$ ($i=1, 2, \dots$).

Infatti si ha

$$(14) \quad \int_a^b q(x,y) \psi_i(y) dy = p'_i \int_a^b \int_a^b q(x,y) p(y,\xi) \psi_i(\xi) dy d\xi = \\ = p'_i \int_a^b f(x,\xi) \psi_i(\xi) d\xi = \frac{p'_i}{f_i} \psi_i(x)$$

Inoltre per la supposta sommabilità di $q(x,y)$ e del suo quadrato, la serie $\sum_i \frac{1}{q'_i^2}$ è convergente e quindi esiste un'unica funzione simmetrica $q'(x,y)$, ad autofunzioni reali, la quale ammette come sistema completo di autofunzioni ortogonali, le funzioni (10) e come corrispondenti autovalori le costanti q'_i ($i=1, 2, \dots$), tali cioè che:

$$(15) \quad \psi_i(x) = q'_i \int_a^b q'(x,y) \psi_i(y) dy.$$

Indicando quindi con $q''(x,y)$, la differenza

$$q(x,y) - q'(x,y)$$

si avrà dalla (14) e dalla (15), per tutte le funzioni $\psi_i(x)$

$$\int_a^b q''(x,y) \psi_i(y) dy = 0$$

⁽⁸⁾ GOURSAT, *Recherches sur les équations intégrales linéaires*, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 2^e sér., X.

cioè la funzione $q''(x,y)$ è ortogonale a $q'(x,y)$, ossia le autofunzioni normalizzate della $q''(x,y)$ sono ortogonali a tutte le funzioni della serie (10). Dalla (13) risulta ancora che le funzioni $p''(x,y)$ e $q'(x,y)$ sono ortogonali.

Poniamo adesso :

$$f'(x,y) = \check{p}' \check{q}'(x,y).$$

La funzione $f'(x,y)$ è simmetrica.

Infatti, indichiamo con

$$\bar{\psi}_1(x), \bar{\psi}_2(x) \dots$$

un sistema di funzioni ortogonali complementare al sistema (10), e consideriamo la serie chiusa ⁽⁹⁾ di funzioni ortogonali

$$(10') \quad \psi_i(x) \cdot \psi_j(y); \quad \psi_i(x) \cdot \bar{\psi}_j(y); \quad \bar{\psi}_i(x) \cdot \psi_j(y); \quad \psi_i(x) \cdot \psi_j(y) \quad (i, j = 1, 2, \dots)$$

Si ha, qualunque siano gli indici i ed j :

$$\int_a^b \int_a^b f'(x,y) \psi_i(x) \psi_j(y) dx dy = \int_a^b \int_a^b f'(y,x) \psi_i(x) \psi_j(y) dx dy = \begin{cases} \frac{1}{p_i q_i} & \text{per } i = j \\ 0 & \text{per } i \neq j \end{cases}$$

e quindi

$$\int_a^b \int_a^b \{ f'(x,y) - f'(y,x) \} \psi_i(x) \psi_j(y) dx dy = 0.$$

E per qualunque altra funzione $g(x,y)$ della serie (10') risulta

$$\int_a^b \int_a^b f'(x,y) g(x,y) dx dy = \int_a^b \int_a^b f'(y,x) g(x,y) dx dy = 0$$

da cui

$$\int_a^b \int_a^b \{ f'(x,y) - f'(y,x) \} g(x,y) dx dy = 0,$$

cioè essendo la serie (10') chiusa

$$f'(x,y) = f'(y,x),$$

da qui risulta che le funzioni $p'(x,y)$ e $q'(x,y)$ sono permutabili.

⁽⁹⁾ LAURICELLA. Sopra l'algebra delle funzioni permutabili di 2^a specie § 3. I. c. (3).

Inoltre la funzione $f'(x,y)$ ammette come autofunzioni ortogonali tutte e sole le $\phi_i(x)$ e come corrispondenti autovalori le costanti f_i , ($i = 1, 2, \dots$).

Infatti si ha :

$$\begin{aligned} f_i \int_a^b f'(x,y) \phi_i(y) dy &= f_i \int_a^b \int_a^b p'(x,\xi) q'(\xi,y) \phi_i(y) d\xi dy = \\ &= \frac{f_i}{q_i'} \int_a^b p'(x,\xi) \phi_i(\xi) d\xi = \phi_i(x), \quad (i = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

e per qualsiasi funzione $\psi'_i(x)$ ortogonale a tutte le funzioni (10) :

$$\int_a^b f'(x,y) \psi'_i(y) dy = 0;$$

segue allora che, (teorema IV):

$$f(x,y) = f'(x,y)$$

esclusi al più i punti di un insieme di misura nulla.

Risulta ancora

$$\begin{aligned} f(x,y) = \check{p} \check{q}(x,y) &= \check{p}' \check{q}'(x,y) + \check{p}'' \check{q}''(x,y) + \check{p}'' q'(x,y) + \check{p}' \check{q}''(x,y) = \\ &= f(x,y) + \check{p}'' \check{q}''(x,y) \end{aligned}$$

e quindi

$$\check{p}'' \check{q}''(x,y) = 0$$

cioè le funzioni $\check{p}''(x,y)$ e $\check{q}''(x,y)$ sono ortogonali, ossia le autofunzioni di $\check{p}''(x,y)$ sono ortogonali a tutte le autofunzioni di $\check{q}''(x,y)$.

Quindi:

Affinchè tra le funzioni simmetriche $f(x,y)$, $p(x,y)$ e $q(x,y)$, ad autofunzioni reali, sussista la relazione :

$$f(x,y) = \check{p} \check{q}(x,y)$$

è necessario : 1° che esista una serie S di funzioni ortogonali la quale contenga tutte le autofunzioni dei tre nuclei ; 2° che le autofunzioni di $f(x,y)$ siano tutte e sole le autofunzioni comuni a $p(x,y)$ e a $q(x,y)$; 3° che gli autovalori f_i , q_{n_i} , q_{m_i} rispettivamente dei tre nuclei corrispondenti ad una loro autofunzione comune soddisfino alla relazione $f_i = p_{n_i} q_{m_i}$.

3. Queste condizioni dimostrate necessarie affinchè tra le funzioni simmetriche $f(x,y)$, $p(x,y)$ e $q(x,y)$ sussista la relazione (5) sono anche sufficienti.

Supposto che esse siano verificate, indichiamo con

$$(16) \quad \varphi_{n_1}(x), \varphi_{n_2}(x) \dots$$

le funzioni della serie S che sono autofunzioni comuni a $p(x, y)$ e $q(x, y)$ e con p_{n_i} ($i=1, 2, \dots$), q_{m_i} ($i=1, 2, \dots$) i corrispondenti autovalori rispettivamente di $p(x, y)$ e $q(x, y)$. Sia ancora:

$$\bar{\varphi}_1(x), \bar{\varphi}_2(x), \dots$$

un sistema di funzioni ortogonali complementare al sistema (16). Consideriamo la serie *chiusa* di funzioni ortogonali

$$(16') \quad \varphi_{n_i}(x) \cdot \varphi_{n_j}(y); \varphi_{n_i}(x) \cdot \bar{\varphi}_j(y); \bar{\varphi}_i(x) \varphi_{n_j}(y); \bar{\varphi}_i(x) \bar{\varphi}_j(y) \quad (i=1, 2, \dots).$$

Osserviamo che essendo le autofunzioni di $p(x, y)$ e $q(x, y)$ contenute in un'unica serie S di funzioni ortogonali, un'autofunzione $\psi(x)$ del nucleo $p(x, y)$, contenuta in S , che non sia contenuta nella serie (16) è ortogonale a tutte le autofunzioni di $q(x, y)$, e quindi è autofunzione di $q(x, y)$, corrispondente all'autovalore ∞ . Similmente un'autofunzione di $q(x, y)$, contenuta in S , che non sia contenuta nella serie (16) è autofunzione di $p(x, y)$ corrispondente all'autovalore ∞ .

Inoltre, se la serie S non è chiusa, una funzione qualunque ortogonale a tutte le funzioni di S , ossia appartenente ad un sistema complementare ad S sarà autofunzione di $p(x, y)$ e $q(x, y)$ corrispondente all'autovalore ∞ .

Consideriamo ora la funzione $\Phi(x, y)$ che risulta dalla composizione di $p(x, y)$ e $q(x, y)$:

$$\Phi(x, y) = \check{p} \check{q}(x, y).$$

La $\Phi(x, y)$ è simmetrica.

Infatti si ha, qualunque siano gli indici i ed j delle funzioni $\varphi_{n_i}(x) \varphi_{n_j}(y)$ della serie (16'):

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b \Phi(x, y) \varphi_{n_i}(x) \varphi_{n_j}(y) dx dy &= \int_a^b \int_a^b \Phi(y, x) \varphi_{n_i}(x) \varphi_{n_j}(y) dx dy = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{p_{n_i} q_{n_j}} & \text{per } i=j \\ 0 & \text{per } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

da cui:

$$\int_a^b \int_a^b \{ \Phi(x, y) - \Phi(y, x) \} \varphi_{n_i}(x) \cdot \varphi_{n_j}(y) dx dy = 0;$$

ed inoltre, per qualunque altra funzione $G(x, y)$ della serie (16') risulta, perciò che si è sopra osservato:

$$\int_a^b \int_a^b \Phi(x, y) G(x, y) dx dy = \int_a^b \int_a^b \Phi(y, x) G(x, y) dx dy = 0$$

ossia

$$\int_a^b \int_a^b \{ \Phi(x, y) - \Phi(y, x) \} G(x, y) dx dy = 0$$

e quindi deve essere:

$$\Phi(x, y) = \Phi(y, x).$$

Mostreremo ora che la funzione $\Phi(x, y)$ ammette come sistema completo di autofunzioni ortogonali il sistema (16) e come corrispondenti autovalori le costanti $f_i = p_{ni} q_{mi}$.

Infatti per qualsivoglia funzione $\varphi_{ni}(x)$ del sistema (16) si ha:

$$\begin{aligned} \int_a^b \Phi(x, y) \varphi_{ni}(x) dx &= \int_a^b \int_a^b p(x, \xi) q(\xi, y) \varphi_{ni}(x) dx d\xi = \\ &= \frac{1}{p_{ni}} \int_a^b q(\xi, y) \varphi_{ni}(\xi) d\xi = \frac{1}{p_{ni} q_{mi}} \varphi_{ni}(y); \end{aligned}$$

ed inoltre per qualunque funzione $\bar{\varphi}_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) appartenente ad un sistema complementare al sistema (16), si ha:

$$\int_a^b \Phi(x, y) \bar{\varphi}_i(x) dx = 0.$$

Ma per ipotesi anche la $f(x, y)$ ammette come sistema completo di autofunzioni ortogonali, il sistema (16) a cui corrisponde la serie di autovalori $\frac{1}{p_{ni} q_{mi}}$ ($i = 1, 2, \dots$), quindi sarà quasi da per tutto

$$\Phi(x, y) = f(x, y).$$

Segue che tra le funzioni $f(x, y)$, $p(x, y)$ e $q(x, y)$ sussiste la relazione:

$$f(x, y) = \ddot{p} \ddot{q}(x, y).$$

Concludiamo quindi:

Affinchè tra le funzioni simmetriche, $f(x, y)$, $p(x, y)$, e $q(x, y)$, ad autofunzioni reali nel campo σ , sussista la relazione:

$$f(x, y) = \ddot{p} \ddot{q}(x, y)$$

è necessario e sufficiente: 1° che esista una serie S di funzioni ortogonali la quale contenga tutte le autofunzioni dei tre nuclei; 2° che le autofunzioni di $f(x, y)$ siano tutte e sole le autofunzioni comuni a $p(x, y)$ e $q(x, y)$; 3° che gli autovalori f_i, p_{ni}, q_{mi} , rispettivamente dei tre nuclei corrispondenti ad una loro autofunzione comune soddisfino alla relazione $f_i = p_{ni} \cdot q_{mi}$.

4. Il precedente teorema vale anche nel caso in cui $f(x, y)$ sia una costante $c \neq 0$, potendosi sempre una costante considerare come nucleo simmetrico avente l'unico autovale $\frac{1}{c(b-a)}$ e come corrispondente autofunzione normalizzata $\pm \sqrt{\frac{1}{b-a}}$.

Se la costante $c = 0$, le funzioni $p(x, y)$ e $q(x, y)$ devono essere ortogonali, e quindi: affinché esista la relazione $0 = \check{p} \check{q}(x, y)$ è necessario e sufficiente che esista una serie S di funzioni ortogonali contenente tutte le autofunzioni dei nuclei $p(x, y)$ e $q(x, y)$, e che questi non abbiano nessuna autofunzione in comune.

Osservazione. La condizione che un nucleo simmetrico $p(x, y)$ ammetta come autofunzione normalizzata, corrispondente ad autovalore finito o infinito, $\sqrt{\frac{1}{b-a}}$ equivale alla condizione che $p(x, y)$ sia permutabile con l'unità.

Se ne deduce che le autofunzioni ortogonali $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) di un nucleo simmetrico $p(x, y)$, permutabile con l'unità, devono soddisfare tutte, esclusa l'autofunzione $\sqrt{\frac{1}{b-a}}$, alla relazione

$$\int_a^b \varphi_i(x) dx = 0.$$

5. In base al precedente teorema, la condizione di permutabilità fra due funzioni simmetriche, enunciata in principio, si trasforma nell'altra:

Condizione necessaria e sufficiente affinché due funzioni simmetriche, $p(x, y)$, $q(x, y)$, ad autofunzioni reali siano permutabili, è che esista una serie S di funzioni ortogonali contenente tutte le loro autofunzioni.

Infatti se $p(x, y)$ e $q(x, y)$ sono permutabili, la risultante $f(x, y)$ della loro composizione è una funzione simmetrica, quindi avendosi tra le funzioni simmetriche, $p(x, y)$, $q(x, y)$ ed $f(x, y)$, la relazione:

$$f(x, y) = \check{p} \check{q}(x, y)$$

deve esistere una serie S di funzioni ortogonali contenente le autofunzioni di $p(x, y)$, $q(x, y)$ ed $f(x, y)$.

La condizione è quindi necessaria.

Viceversa, supposto che esista la serie S di funzioni ortogonali contenente le autofunzioni di $p(x, y)$ e $q(x, y)$, consideriamo la funzione risultante

$$f(x, y) = \check{p} \check{q}(x, y)$$

e mostriamo che essa è simmetrica.

È evidente che possiamo supporre *chiusa* la serie S di funzioni ortogonali, potendola chiudere in caso contrario con le funzioni di un sistema complementare.

Ora, la serie S è formata da tutte le autofunzioni comuni a $p(x, y)$ e $q(x, y)$ corrispondente ad autovalori finiti dei due nuclei che indichiamo $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$), e dalle autofunzioni corrispondenti all'autovalore ∞ per uno o per tutti e due i nuclei, che indichiamo con $\psi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$)

Consideriamo la serie *chiusa* di funzioni ortogonali

$$(17) \quad \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(y), \quad \varphi_i(x) \cdot \psi_j(y), \quad \psi_i(x) \cdot \varphi_j(y), \quad \psi_i(x) \cdot \psi_j(y). \quad (i, j = 1, 2, \dots)$$

Si ha, per una qualunque funzione $\varphi_i(x) \cdot \varphi_j(y)$

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b f(x, y) \varphi_i(x) \varphi_j(y) \, dx dy &= \int_a^b \int_a^b f(y, x) \varphi_i(x) \varphi_j(y) \, dx dy = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{p_i q_i} & \text{per } i = j \\ 0 & \text{per } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

ove p_i, q_i sono gli autovalori rispettivamente di $p(x, y)$ e $q(x, y)$ corrispondente all'autofunzione $\varphi_i(x)$; e quindi

$$\int_a^b \int_a^b \{ f(x, y) - f(y, x) \} \varphi_i(x) \varphi_j(y) \, dx dy = 0.$$

Inoltre risulta per qualunque altra funzione $g(x, y)$ della serie (17)

$$\int_a^b \int_a^b f(x, y) g(x, y) \, dx dy = \int_a^b \int_a^b f(y, x) g(x, y) \, dx dy = 0$$

e quindi

$$\int_a^b \int_a^b \{ f(x, y) - f(y, x) \} g(x, y) \, dx dy = 0$$

ed essendo la serie (17) chiusa risulta che :

$$f(x, y) = f(y, x).$$

Quindi le funzioni $p(x, y)$ e $q(x, y)$ sono permutabili.

§ 2.

Risoluzione dell'equazione integrale di 1° grado

$$f(x, y) = \ddot{p} \ddot{X}(x, y).$$

6. Premesso ciò consideriamo l'equazione integrale di 1° grado:

$$(18) \quad f(x, y) = \ddot{p} \ddot{X}(x, y)$$

ove $f(x, y)$ e $\ddot{p}(x, y)$ sono funzioni simmetriche ad autofunzioni reali, e proponiamoci di risolvere tale equazione mediante nuclei simmetrici ad autofunzioni reali.

Osserviamo subito che pel teorema del n. 3 è necessario affinché la (18) ammetta una soluzione simmetrica ad autofunzioni reali che le autofunzioni del nucleo $f(x, y)$ siano anche autofunzioni del nucleo $\ddot{p}(x, y)$; ed inoltre indicando con

$$(19) \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$$

un sistema completo di autofunzioni ortogonali del nucleo $\ddot{p}(x, y)$, con

$$(19') \quad \varphi_{n_1}(x), \varphi_{n_2}(x), \dots$$

le funzioni della serie (19) che sono anche autofunzioni di $f(x, y)$, e con \ddot{p}_{n_ν} , ($\nu=1, 2, \dots$); f_ν ($\nu=1, 2, \dots$) gli autovalori rispettivamente dei due nuclei $\ddot{p}(x, y)$ e $f(x, y)$ corrispondenti alle autofunzioni $\varphi_{n_\nu}(x)$, ($\nu=1, 2, \dots$), è necessario pure che risulti convergente la serie

$$(20) \quad \sum_{\nu} \frac{\ddot{p}_{n_\nu}^2}{f_\nu^2}.$$

Infatti la soluzione $X(x, y)$ deve ammettere come autovalori le costanti $\frac{f_\nu}{\ddot{p}_{n_\nu}}$.

Queste condizioni sono anche sufficienti affinché l'equazione (18) ammetta una soluzione simmetrica ad autofunzioni reali.

Supponiamo in primo luogo che il sistema (19) non sia chiuso e indichiamo con

$$(21) \quad \theta_1(x), \theta_2(x), \dots$$

una successione di funzioni ortogonali scelta ad arbitrio in un sistema complementare al sistema (19).

Ordiniamo in un' unica serie le funzioni (19') e (21), sia questa:

$$(22) \quad X_1(x), \quad X_2(x), \dots$$

ed associamo ad essa una serie di costanti:

$$(23) \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \dots$$

in modo che alle funzioni $X_r(x)$ coincidenti con le $\varphi_{n_i}(x)$ corrispondano le costanti $\lambda_r = \frac{f_i}{p_{n_i}}$, e alle rimanenti funzioni coincidenti con le $\theta_i(x)$ corrispondano costanti arbitrarie, tali però che la serie

$$(24) \quad \sum_i \frac{1}{|\lambda|^2}$$

risulti convergente.

La funzione $X(x, y)$ la quale ammette come sistema completo di autofunzioni ortogonali il sistema (22) e come corrispondenti autovalori le costanti (23) è pel teorema al n. 3 soluzione dell'equazione (18).

Si hanno quindi, nel caso che il sistema di funzioni ortogonali (19) non sia chiuso, infinite soluzioni dell'equazione (18), ciascuna in corrispondenza alla scelta delle funzioni ortogonali $\theta_i(x)$, ($i = 1, 2, \dots$) in un sistema complementare al sistema (19) e alla scelta delle costanti arbitrarie λ_r ($r = 1, 2, \dots$) soddisfacenti alla condizione che converga la serie (24) e che si abbia $\lambda_r = \frac{f_i}{p_{n_i}}$ tutte le volte che la corrispondente funzione $X_r(x)$ coincida con una $\varphi_{n_i}(x)$.

Se il sistema (19) di funzioni ortogonali è chiuso, sempre nelle ipotesi fatte in principio, è evidente che la soluzione dell'equazione (18) è unica.

Essa è quella funzione che ammette come sistema completo di autofunzioni ortogonali il sistema (19') e come corrispondenti autovalori le costanti $\frac{f_i}{p_{n_i}}$ ($i = 1, 2, \dots$).

Si conclude quindi:

Affinchè l'equazione integrale di primo grado (18), ove $f(x, y)$ e $p(x, y)$ sono funzioni simmetriche, ad autofunzioni reali ammetta una soluzione simmetrica ad autofunzioni reali è necessario e sufficiente che le autofunzioni di $f(x, y)$ siano anche autofunzioni di $p(x, y)$ e che converga la serie:

$$\sum_i \left| \frac{p_{n_i}^2}{f_i^2} \right|$$

ove p_{n_i} ($i = 1, 2, \dots$) sono gli autovalori di $p(x, y)$ corrispondenti alle autofunzioni che sono anche autofunzioni di $f(x, y)$; ed f_i sono i corrispondenti autovalori di $f(x, y)$; sotto queste condizioni, se il sistema delle autofunzioni ortogonali

di $p(x, y)$ è chiuso, si ha una sola soluzione dell'equazione; se invece il sistema delle autofunzioni ortogonali di $p(x, y)$ non è chiuso, l'equazione (18) ammette infinite soluzioni.

L'equazione (18) può avere ancora una delle forme particolari

$$(18') \quad c = \bar{p} \bar{X}(x, y)$$

ove c è una costante diversa da zero; e

$$(18'') \quad 0 = \bar{p} \bar{X}(x, y)$$

In base a ciò che si è detto al n. 4, per l'equazione (18') si ha che *condizione necessaria e sufficiente, affinché essa ammetta una soluzione simmetrica ad autofunzioni reali, è che il nucleo $p(x, y)$ abbia come autofunzione normalizzata, corrispondente ad autovalore finito, la costante $\sqrt{\frac{1}{b-a}}$* . Si osservi che se il sistema delle autofunzioni ortogonali del nucleo $p(x, y)$ è chiuso, la (18') è soddisfatta soltanto dalla costante che ammette come autovalore $\frac{1}{c\bar{p}(b-a)}$, cioè dalla costante $c\bar{p}$, ove con \bar{p} indichiamo l'autovalore di $p(x, y)$ corrispondente all'autofunzione normalizzata $\sqrt{\frac{1}{b-a}}$.

In quanto all'equazione (18'') è evidente che la risoluzione di essa si riduce alla ricerca delle funzioni simmetriche, ad autofunzioni reali, le quali siano ortogonali con la $p(x, y)$. Si ha quindi che *condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione (18'') ammetta soluzioni simmetriche ad autofunzioni reali, è che il nucleo $p(x, y)$ non sia chiuso*.

7. Vogliamo ora vedere se, dato un nucleo simmetrico $K(x, y)$, esiste una funzione simmetrica $U(x, y)$, che goda rispetto a quel nucleo della proprietà:

$$(25) \quad K(x, y) = \bar{K} \bar{U}(x, y).$$

La funzione $U(x, y)$ si può chiamare *funzione identica relativa al nucleo $K(x, y)$* .

In base alla teoria delle equazioni integrali di 1° grado possiamo subito dire che se il nucleo $K(x, y)$ ammette un numero infinito di autovalori la funzione identica $U(x, y)$ non esiste.

Indicando infatti con

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$$

un sistema completo di autofunzioni ortogonali del nucleo $K(x, y)$ e con

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots$$

i corrispondenti autovalori, sappiamo che, affinché l'equazione (25) ammetta soluzioni, deve essere convergente la serie

$$(26) \quad \sum_1^{\infty} \left| \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i^2} \right|$$

e questa condizione non è certamente soddisfatta.

Se invece il nucleo $K(x, y)$ ammette un numero finito p di autovalori, cioè se si ha :

$$(27) \quad K(x, y) = \sum_1^p \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(y)}{\lambda_i},$$

la serie (26) si riduce alla somma di un numero finito di termini, e quindi la funzione identica esiste.

E la più generale funzione identica relativa al nucleo (27) è la funzione che ammette come sistema completo di autofunzioni ortogonali, il sistema

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_p(x), \varphi_{p+1}(x), \varphi_{p+2}(x), \dots$$

ove $\varphi_{p+1}(x), \varphi_{p+2}(x) \dots$ sono funzioni ortogonali appartenenti ad un sistema complementare del sistema $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_p(x)$, e come corrispondenti autovalori le costanti :

$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 1, \dots, \mu_p = 1, \mu_{p+1}, \mu_{p+2}, \dots$$

arbitrarie, salvo le prime p , e soddisfacenti alla condizione che convenga la serie: $\sum_i \frac{1}{\mu_i^2}$.

§ 3.

Risoluzione dell'equazione integrale binomia

$$\ddot{X}^{(n)}(x, y) = p(x, y).$$

8. Sia data l'equazione integrale binomia :

$$(28) \quad \ddot{X}^{(n)}(x, y) = p(x, y)$$

ove $p(x, y)$ è un nucleo simmetrico, ad autofunzioni reali, incluse anche quelle corrispondenti all'eventuale autovalore $\lambda = \infty$, e del quale

$$(29) \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$$

sia un sistema completo di autofunzioni ortogonali, corrispondenti al sistema di autovalori finiti

$$(30) \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots$$

alcuni dei quali possono essere uguali fra di loro.

Se $X(x, y) = X'(x, y) + i X''(x, y)$ è una soluzione simmetrica, ad autofunzioni tutte reali dell'equazione (28); essa ⁽¹⁰⁾ dovrà ammettere come autovalore una almeno delle radici n^{esima} di λ_i ($i = 1, 2, \dots$), e quindi posto $\sqrt[n]{\lambda_i} = \mu_i = \mu'_i + i\mu''_i$ e $|\sqrt[n]{\lambda_i}| = \rho_i$, ($i = 1, 2, \dots$), il nucleo $X'(x, y)$ dovrà ammettere come autovalori le costanti $\frac{\rho_i^2}{\mu_i}$ ($i = 1, 2, \dots$), e il nucleo $X''(x, y)$ dovrà ammettere come autovalori le costanti $\frac{\rho_i^2}{\mu_i''}$ ($i = 1, 2, \dots$). Segue che è necessario, per la sommabilità delle funzioni $X'(x, y)$ e $X''(x, y)$ e dei loro quadrati che siano convergenti le serie

$$\sum_i \frac{\mu_i'^2}{\rho_i^4}, \quad \sum_i \frac{\mu_i''^2}{\rho_i^4}$$

e quindi anche la serie:

$$(31) \quad \sum_i \frac{1}{\rho_i^2}.$$

9. La convergenza della serie (31) che, abbiamo visto, è condizione necessaria affinché l'equazione (28) ammetta una soluzione simmetrica, ad autofunzioni reali, è anche condizione sufficiente.

Infatti, nell'ipotesi che la serie (31) sia convergente, indichiamo con

$$\varphi_{j_v+1}(x), \quad \varphi_{j_v+2}(x), \dots, \varphi_{j_v+l}(x)$$

le autofunzioni di $p(x, y)$ corrispondenti all'autovalore λ_v , e con

$$a_{r,s} \quad (r, s = 1, 2, \dots, l).$$

gli elementi della più generale sostituzione ortogonale d'ordine l , e consideriamo le funzioni:

$$\psi_{j_v+r}(x) = \sum_{i=1}^l a_{r,i} \varphi_{j_v+i}(x) \quad (r = 1, 2, \dots, l).$$

Operando analogamente sugli altri gruppi di autofunzioni $\varphi(x)$ del nucleo $p(x, y)$, corrispondenti a tutti gli autovalori λ della serie (30) che sono distinti fra di loro, si ottiene il sistema di funzioni ortogonali

$$(32) \quad \psi_1(x), \quad \psi_2(x), \dots$$

che costituisce pure un sistema completo di autofunzioni ortogonali del nucleo $p(x, y)$.

⁽¹⁰⁾ L. c. (9).

Poichè la serie (31) è convergente, esiste una e una sola funzione simmetrica, $X(x, y)$ sommabile insieme al suo quadrato, la quale ammette come sistema completo di autofunzioni ortogonali il sistema (32), e come corrispondenti autovalori le costanti

$$\sqrt[n]{\lambda_1}, \sqrt[n]{\lambda_2}, \dots$$

ove ciascun radicale va preso con una sola determinazione, ed è rappresentata dalla serie:

$$(33) \quad X(x, y) = \sum_{\nu=1}^{m_1} \frac{\psi_{\nu}(x) \psi_{\nu}(y)}{\sqrt[n]{\lambda_{\nu}}} = \sum_{\nu=m_1+1}^{m_2} \frac{\psi_{\nu}(x) \psi_{\nu}(y)}{\sqrt[n]{\lambda_{\nu}}} + \dots$$

ove m_1, m_2, \dots è una serie di numeri interi positivi e crescenti.

Questa funzione è soluzione dell'equazione (28).

Infatti, qualunque sia la determinazione delle $\sqrt[n]{\lambda_i}$, ($i=1, 2, \dots$), il nucleo reiterato $\ddot{X}^n(x, y)$ ammette come autovalori le costanti λ_i ($i=1, 2, \dots$) corrispondenti alle autofunzioni (32), ma anche la funzione $p(x, y)$ soddisfa a queste proprietà, quindi dovrà essere:

$$\ddot{X}^{(n)}(x, y) = p(x, y).$$

Inoltre è evidente ⁽¹¹⁾ che qualunque nucleo avente le autofunzioni tutte reali, e avente come reiterato d'ordine n la funzione $p(x, y)$ può essere ottenuto col metodo precedente. Quindi, indicando con l il numero degli autovalori del nucleo $\dot{p}(x, y)$, (l potendo essere anche uguale ad ∞), poichè sono n le determinazioni di $\sqrt[n]{\lambda_i}$ il numero delle possibili serie di autovalori delle soluzioni $X(x, y)$ dell'equazione (28) è n^l . Per ciascuna di queste serie si hanno poi in generale diversi nuclei $\dot{X}(x, y)$ in corrispondenza ai diversi sistemi di coefficienti a_{rs} delle sostituzioni ortogonali che si considerano per dedurre il sistema di funzioni ortogonali (32) dal sistema (29).

Si ha ancora che se $X(x, y)$ è soluzione dell'equazione (28), anche le funzioni:

$$\varepsilon X(x, y), \varepsilon^2 X(x, y), \dots, \varepsilon^{n-1} X(x, y)$$

ove ε è una radice n^{esima} dell'unità, sono soluzioni dell'equazione (28). Un tale sistema di soluzioni vien detto *ciclico*. Se si moltiplica una qualunque delle funzioni di un sistema ciclico successivamente per le n radici n^{esima} dell'unità si riottiene lo stesso sistema ordinato diversamente, e quindi due diversi sistemi ciclici di soluzioni non possono avere nessuna funzione in comune.

⁽¹¹⁾ L. c. (10) n. 6, 8.

Si conclude quindi :

condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione integrale binomia (28), ove $p(x, y)$ è un nucleo simmetrico, ad autofunzioni reali, ammetta soluzioni è che sia convergente la serie

$$\sum_i \frac{1}{\rho_i^2}$$

ove $\rho_i = \sqrt[|n]{|\lambda_i|}$ e $\lambda_i (i = 1, 2, \dots)$ sono gli autovalori del nucleo $p(x, y)$; soddisfatta questa condizione si hanno infinite soluzioni simmetriche, ad autofunzioni reali, dell'equazione (28), tutte contenute nella formula (33) e che si possono scindere in sistemi ciclici di n soluzioni ciascuno.

§ 4.

Risoluzione dell'equazione integrale di 2° grado

$$\ddot{X}^{(2)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{X}(x, y) + q(x, y) = 0$$

10. Consideriamo l'equazione integrale di 2° grado :

$$(34) \quad \ddot{X}^{(2)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{X}(x, y) + q(x, y) = 0$$

ove $\ddot{p}(x, y)$ e $q(x, y)$ sono funzioni simmetriche, ad autofunzioni reali.

Si vuol risolvere l'equazione (34) mediante nuclei simmetrici ad autofunzioni reali.

Se $X_1(x, y)$ è una tale soluzione, si ha :

$$\ddot{p} X_1(x, y) = - \ddot{X}_1^{(2)}(x, y) + q(x, y) \quad \{$$

e poichè $\ddot{X}_1^{(2)}(x, y) + q(x, y)$ è una funzione simmetrica, se ne deduce che la soluzione $X_1(x, y)$ è permutabile con la funzione nota $p(x, y)$. Segue allora che la funzione

$$q(x, y) = - \ddot{X}_1^{(2)}(x, y) - \ddot{p} X_1(x, y)$$

deve essere permutabile con la funzione $p(x, y)$.

Inoltre si verifica che se $X_1(x, y)$ è soluzione dell'equazione (34), è anche soluzione della stessa equazione la funzione :

$$(35) \quad X_2(x, y) = - \ddot{p}(x, y) - X_1(x, y)$$

la quale risulta permutabile con la funzione $X_1(x, y)$ e soddisfa alla relazione :

$$(36) \quad \ddot{X}_1 \ddot{X}_2(x, y) = q(x, y)$$

Un sistema così fatto di soluzioni $X_1(x, y)$, $X_2(x, y)$ dell'equazione (34) vien detto *ciclico*.

Si ha ancora, per la permutabilità delle funzioni $p(x, y)$ e $X_1(x, y)$ che deve esistere una serie S di funzioni ortogonali contenente le loro autofunzioni; dalla (35) risulta che la serie S deve anche contenere le autofunzioni di $X_2(x, y)$, e dalla (36) che deve contenere pure le autofunzioni di $q(x, y)$.

Dalle (35) e (36) si ha:

$$(37) \quad \{ \ddot{X}_1(x, y) - \ddot{X}_2(x, y) \}^{(2)} = \ddot{p}^{(2)}(x, y) - 4q(x, y);$$

la funzione $\ddot{p}^{(2)}(x, y) - 4q(x, y)$ vien detta *discriminante* dell'equazione (34) e si indica con $\Delta(x, y)$.

Le autofunzioni ortogonali del discriminante saranno certamente contenute nella serie S di funzioni ortogonali, e precisamente, indicando con

$$(38) \quad \omega_1(x), \omega_2(x), \dots$$

la serie S di funzioni ortogonali, e con

$$p_1, p_2, \dots$$

$$q_1, q_2, \dots$$

i corrispondenti autovalori rispettivamente di $p(x, y)$ e $q(x, y)$, ove alcune delle p_i e alcune delle q_s possono essere ∞ , si ha che le funzioni (38) sono autofunzioni di $\Delta(x, y)$ corrispondenti agli autovalori $\Delta_i = \frac{1}{\frac{1}{p_i^2} - \frac{1}{q_i}}$. E poichè $X_1(x, y) - X_2(x, y)$ è una soluzione

simmetrica, ad autofunzioni reali, dell'equazione binomia (37), risulta che deve essere convergente la serie

$$(39) \quad \sum_i \frac{1}{\Delta_i}.$$

Si ha quindi: *affinchè l'equazione (34) ammetta soluzioni sono condizioni necessarie che le funzioni note $p(x, y)$ e $q(x, y)$ siano permutabili e che sia convergente la serie (39).*

11. Queste condizioni dimostrate necessarie affinchè l'equazione integrale (34) ammetta soluzioni ad autofunzioni reali, sono anche sufficienti.

Siano $p(x, y)$ e $q(x, y)$ permutabili e sia convergente la serie (39).

Poichè $p(x, y)$ e $q(x, y)$ sono permutabili deve esistere una serie S di funzioni ortogonali contenente tutte le loro autofunzioni, sia questa la serie (38). Essa conterrà pure evidentemente le autofunzioni del discriminante $\Delta(x, y) = \ddot{p}^{(2)}(x, y) - 4q(x, y)$.

Inoltre essendo convergente la serie (39) esisteranno infinite soluzioni, ad autofunzioni reali dell'equazione integrale binomia :

$$(40) \quad \ddot{H}^{(2)}(x, y) = \Delta(x, y)$$

le quali avranno le stesse autofunzioni del discriminante $\Delta(x, y)$ e quindi le loro autofunzioni saranno contenute nella serie S di funzioni ortogonali (38).

Sia $H(x, y)$ una qualsiasi di tali soluzioni, poniamo :

$$(41) \quad \begin{aligned} X_1(x, y) + X_2(x, y) &= -p(x, y) \\ X_1(x, y) - X_2(x, y) &= H(x, y) \end{aligned}$$

risulta allora :

$$X_1(x, y) = \frac{-p(x, y) + H(x, y)}{2}.$$

Si verifica che la funzione $X_1(x, y)$ è soluzione dell'equazione (34), e quindi per la 1^a delle (41) anche la $X_2(x, y)$ è soluzione dell'equazione (34).

Le soluzioni $X_1(x, y)$ e $X_2(x, y)$ ammettono evidentemente come autovalori, corrispondenti alle autofunzioni della successione (38), rispettivamente :

$$\lambda_i = \frac{2}{-\frac{1}{p_i} \pm \sqrt{\frac{1}{p_i^2} - \frac{4}{q_i}}} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$\mu_i = \frac{2}{-\frac{1}{p_i} \mp \sqrt{\frac{1}{p_i^2} - \frac{4}{q_i}}} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

ove il segno avanti il radicale che compare nelle λ_i è lo stesso di quello avanti il radicale degli autovalori $\pm \sqrt{\Delta_i} = \pm \sqrt{\frac{1}{p_i^2} - \frac{4}{q_i}}$ della soluzione $H(x, y)$ che si è considerata dell'equazione (40), e il segno avanti il radicale che compare nelle μ_i è il contrario di quello degli autovalori di $H(x, y)$.

Si hanno quindi infinite coppie di soluzioni cicliche dell'equazione integrale (34) in corrispondenza alle infinite coppie di soluzioni cicliche dell'equazione integrale binomia (40). Infatti è evidente che le due funzioni $H(x, y)$ e $-H(x, y)$ di una coppia di soluzioni cicliche dell'equazione (40) danno luogo ad una stessa coppia di soluzioni dell'equazione (34).

Si conclude quindi:

Affinchè l'equazione integrale di 2^o grado (34), ove $p(x, y)$ e $q(x, y)$ sono funzioni simmetriche, ad autofunzioni reali, ammetta soluzioni simmetriche ad

autofunzioni reali, è necessario e sufficiente che le funzioni note siano permutabili e che sia convergente la serie:

$$\sum_i \left| \frac{1}{p_i^2} - \frac{4}{q_i} \right|$$

ove p_i e q_i sono gli autovalori rispettivamente dei nuclei $p(x, y)$ e $q(x, y)$.

Per ottenere tutte le soluzioni dell'equazione (34) si costruisca una serie S di funzioni ortogonali contenente tutte e sole le autofunzioni di $p(x, y)$ e $q(x, y)$, sia essa:

$$\omega_1(x), \omega_2(x), \dots$$

Siano p_1, p_2, \dots ; e q_1, q_2, \dots le corrispondenti serie di autovalori rispettivamente dei nuclei $p(x, y)$ e $q(x, y)$.

La funzione $X(x, y)$ che ha come autofunzioni le funzioni $\omega_i (i = 1, 2, \dots)$ e come corrispondenti autovalori una delle serie di costanti

$$(42) \quad \frac{1}{p_i} \pm \sqrt{\frac{1}{p_i^2} - \frac{4}{q_i}} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

è, per ciò che si è avanti detto, soluzione dell'equazione (34).

Le infinite soluzioni dell'equazione (34) si hanno considerando i vari sistemi S di funzioni ortogonali contenenti tutte e sole le autofunzioni di $p(x, y)$ e $q(x, y)$, e per ognuno di questi sistemi tutte le possibili serie (42) di autovalori corrispondenti alla scelta del segno avanti ciascun radicale.

12. Da quanto è stato detto segue il teorema:

Date due funzioni simmetriche $p(x, y)$ e $q(x, y)$, ad autofunzioni reali, le condizioni necessarie e sufficienti affinché esistano due funzioni simmetriche, ad autofunzioni reali, permutabili fra loro, che abbiano per somma $p(x, y)$ e come prodotto $q(x, y)$, sono che le funzioni $p(x, y)$ e $q(x, y)$ siano permutabili, e che sia convergente la serie (39).

§ 5.

Risoluzione dell'equazione integrale di 3° grado

$$\ddot{X}^{(3)}(x, y) + \ddot{a}_1 \ddot{X}^{(2)}(x, y) + \ddot{a}_2 \ddot{X}(x, y) + a_3(x, y) = 0$$

13. Consideriamo l'equazione integrale di 3° grado:

$$(43) \quad \ddot{X}^{(3)}(x, y) + \ddot{a}_1 \ddot{X}^{(2)}(x, y) + \ddot{a}_2 \ddot{X}(x, y) + a_3(x, y) = 0$$

ove $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$ sono funzioni simmetriche, ad autofunzioni reali.

Supposte le funzioni simmetriche date $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$ permutabili due a due fra loro, proponiamoci di risolvere l'equazione precedente mediante nuclei simmetrici ad autofunzioni reali, permutabili con le funzioni note $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$.

Queste condizioni risultano necessarie, come si può subito vedere, se in particolare la funzione $a_1(x, y)$ è costantemente nulla. Ad un'equazione di questo tipo

$$(43') \quad \ddot{X}^{(3)}(x, y) + p \ddot{X}(x, y) + q(x, y) = 0$$

possiamo nell'ipotesi contraria sempre ridurci, mediante la sostituzione

$$X(x, y) = \tilde{X}(x, y) - \frac{1}{3} \ddot{a}_1^{(2)}(x, y)$$

e le funzioni $p(x, y)$ e $q(x, y)$ saranno legate alle funzioni $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$ dalle relazioni

$$(44) \quad \begin{aligned} p(x, y) &= a_2(x, y) - \frac{1}{3} \ddot{a}_1^{(2)}(x, y) \\ q(x, y) &= a_3(x, y) + \frac{1}{9} \ddot{a}_1^{(3)}(x, y) - \frac{1}{3} \ddot{a}_1 \ddot{a}_2(x, y) \end{aligned}$$

Infatti essendo le funzioni $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$ permutabili due a due fra di loro esisterà una serie S di funzioni ortogonali contenente tutte le loro autofunzioni. Dalle (44) risulta che questa serie contiene pure le autofunzioni di $p(x, y)$ e $q(x, y)$ e quindi $p(x, y)$ e $q(x, y)$ sono permutabili fra di loro e con le funzioni $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$.

Inoltre se $X(x, y)$ è soluzione dell'equazione (43'), poichè essa è permutabile con le funzioni $p(x, y)$ e $q(x, y)$ dovrà esistere una serie S_1 di funzioni ortogonali contenente le autofunzioni di $X(x, y)$, $p(x, y)$ e $q(x, y)$; ma dalle (44) risulta che le autofunzioni di $a_1(x, y)$ ed $a_2(x, y)$ sono anche autofunzioni di $p(x, y)$ e le autofunzioni di $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$ sono anche autofunzioni di $q(x, y)$, segue che la serie S_1 dovrà contenere pure le autofunzioni di $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$ ossia che la funzione $X(x, y)$ è permutabile con le funzioni $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$. Ma allora anche la funzione $X(x, y) - \frac{1}{3} a_1(x, y)$ che, come facilmente si verifica, soddisfa l'equazione (43) sarà permutabile con le funzioni note $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$.

Nello stesso modo si vede che se $X(x, y)$ è soluzione dell'equazione (43) permutabile con le funzioni $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$, la funzione $X(x, y) + \frac{1}{3} a_1(x, y)$ sarà soluzione dell'equazione (43') e risulterà permutabile con le funzioni $p(x, y)$ e $q(x, y)$.

14. Supponiamo ora che $X_1(x, y)$ sia una soluzione simmetrica ad autofunzioni reali dell'equazione (43') e consideriamo l'equazione integrale di 2° grado

$$(45) \quad \ddot{X}^{(2)}(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}(x, y) + \frac{1}{3} p(x, y) + \ddot{X}_1^{(2)}(x, y) \frac{1}{3} = 0.$$

Se l'equazione (45) ammette una soluzione $X_2(x, y)$, questa funzione risulta permutabile con le funzioni $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$.

tabile con le funzioni $X_1(x, y)$ e $p(x, y) + \ddot{X}_1^{(2)}(x, y)$ e quindi anche con la funzione $p(x, y) = \ddot{X}_2^{(2)}(x, y) - \ddot{X}_1 \ddot{X}_2(x, y) - \ddot{X}_1^{(2)}(x, y)$. Si ha perciò

$$0 = \{ \ddot{X}_1 - \ddot{X}_2 \} \{ \ddot{X}_1^{(2)}(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_2(x, y) + p(x, y) + \ddot{X}_1^{(2)}(x, y) \} = \\ \ddot{X}_1^{(3)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{X}_1(x, y) + q(x, y) - \{ \ddot{X}_2^{(3)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{X}_2(x, y) + q(x, y) \}$$

e poichè $X_1(x, y)$ è soluzione dell'equazione (43'), sarà

$$\ddot{X}_2^{(3)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{X}_2(x, y) + q(x, y) = 0,$$

cioè, se l'equazione di 2° grado (45) ammette soluzioni queste sono pure soluzioni dell'equazione di 3° grado (43').

Siano $X_2(x, y)$ e $X_3(x, y)$ due soluzioni cicliche ⁽¹²⁾ dell'equazione (45), esse sono permutabili fra di loro e con la funzione $X_1(x, y)$ e quindi anche con la funzione $p(x, y) = \ddot{X}_2^{(2)}(x, y) - \ddot{X}_1 \ddot{X}_2(x, y) - \ddot{X}_1^{(2)}(x, y)$ e con la funzione $q(x, y) = - \{ \ddot{X}_1^{(3)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{X}_1(x, y) \}$, ed insieme alla $X_1(x, y)$ soddisfano alle relazioni:

$$X_1(x, y) + X_2(x, y) + X_3(x, y) = 0 \\ \ddot{X}_1 \ddot{X}_2(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) = \ddot{X}_1 \{ \ddot{X}_2(x, y) + \ddot{X}_3(x, y) \} + \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) = \\ = - \ddot{X}_1^{(2)}(x, y) + p(x, y) + \ddot{X}_1^{(2)}(x, y) = p(x, y) \\ \ddot{X}_1 \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) = - q(x, y).$$

15. Ciò posto definiamo *sistema di soluzioni cicliche dell'equazione (43')* tre soluzioni simmetriche, ad autofunzioni reali, $X_1(x, y)$, $X_2(x, y)$, $X_3(x, y)$ permutabili fra di loro due a due e con le funzioni note, soddisfacenti alle condizioni:

$$(46) \quad X_1(x, y) + X_2(x, y) + X_3(x, y) = 0$$

$$(47) \quad \ddot{X}_1 \ddot{X}_2(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) = p(x, y)$$

$$(48) \quad \ddot{X}_1 \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) = - q(x, y).$$

Ricerchiamo le condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'equazione (43') ammetta un sistema di soluzioni cicliche.

Indichiamo con

$$(49) \quad \omega_1(x), \quad \omega_2(x), \dots$$

(12) Cfr. n. 10, § 4.

un sistema di funzioni ortogonali contenente tutte e sole le autofunzioni di $p(x, y)$ e $q(x, y)$, e con

$$(50) \quad p_1, p_2, \dots$$

$$(51) \quad q_1, q_2, \dots$$

i corrispondenti sistemi di autovalori rispettivamente dei due nuclei, ove alcune delle p_i e alcune delle q_i possono essere infinite.

Supposto che $X_1(x, y)$, $X_2(x, y)$, $X_3(x, y)$ siano tre soluzioni cicliche della (43') poniamo:

$$(52) \quad H_1(x, y) = X_1(x, y) + \varepsilon X_2(x, y) + \varepsilon^2 X_3(x, y)$$

$$(53) \quad H_2(x, y) = X_1(x, y) + \varepsilon^2 X_2(x, y) + \varepsilon X_3(x, y)$$

ove ε è una radice cubica primitiva dell'unità.

Le funzioni $H_1(x, y)$ ed $H_2(x, y)$ risultano permutabili fra di loro e con $p(x, y)$ e $q(x, y)$, e si ha per le (52), (53) e per le (46), (47), (48):

$$(54) \quad \ddot{H}_1^{(3)}(x, y) + \ddot{H}_2^{(3)}(x, y) = -27 q(x, y)$$

$$(55) \quad \ddot{H}_1^{(3)} \ddot{H}_2^{(3)}(x, y) = -27 \ddot{p}^{(3)}(x, y)$$

cioè (n. 12 § 4), $H_1^{(3)}(x, y)$, $H_2^{(3)}(x, y)$ formano un sistema di soluzioni cicliche dell'equazione integrale di 2° grado

$$(56) \quad \ddot{Z}^{(2)}(x, y) + 27 \ddot{q} \ddot{Z}(x, y) - 27 \ddot{p}^{(3)}(x, y) = 0$$

e quindi dovrà essere convergente la serie

$$(57) \quad \sum_i \left| \frac{27^2}{q_i^2} + \frac{4 \cdot 27}{p_i^3} \right|$$

Le soluzioni $\ddot{H}_1^{(3)}(x, y)$, $\ddot{H}_2^{(3)}(x, y)$ dell'equazione (56) ammettono come autovalori corrispondenti alle autofunzioni del sistema (49), rispettivamente una determinata delle serie di costanti:

$$(58) \quad \lambda_i = \frac{1}{-\frac{27}{2q_i} \pm 27 \sqrt{\frac{1}{4q_i^2} + \frac{1}{27p_i^3}}}, \quad (i=1, 2, \dots)$$

$$(59) \quad \lambda_i'' = \frac{1}{-\frac{27}{2q_i} \mp 27 \sqrt{\frac{1}{4q_i^2} + \frac{1}{27p_i^3}}}, \quad (i=1, 2, \dots)$$

ove il doppio segno avanti ai radicali indica che se il radicale che compare in λ'_i è preceduto dal segno $+$, quello che compare in λ''_i deve essere preceduto dal segno $-$, e viceversa.

Segue da ciò che le funzioni $H_1(x, y)$ ed $H_2(x, y)$ aventi come reiterati rispettivamente le funzioni $\ddot{H}_1^{(3)}(x, y)$ ed $\ddot{H}_2^{(3)}(x, y)$, devono ammettere come autovalori corrispondenti alle autofunzioni del sistema (49), rispettivamente una determinata delle serie di costanti, (§ 3):

$$h'_i = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} \sqrt[3]{\lambda'_i} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$h''_i = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} \sqrt[3]{\lambda''_i} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

e quindi dovranno essere convergenti le serie:

$$(60) \quad \sum_i \left| \sqrt[3]{-\frac{1}{2q_i} \pm \sqrt{\frac{1}{4q_i^2} + \frac{1}{27p_i^3}}} \right|^2$$

$$(61) \quad \sum_i \left| \sqrt[3]{-\frac{1}{2q_i} \mp \sqrt{\frac{1}{4q_i^2} + \frac{1}{27p_i^3}}} \right|^2$$

ove i segni avanti ai radicali sono determinati, e sono quelli avanti ai radicali nelle espressioni delle λ'_i e λ''_i rispettivamente.

16. Le condizioni che $p(x, y)$ e $q(x, y)$ siano permutabili e che convergano la serie (57) e una coppia di serie (60), (61) che, abbiamo visto sono necessarie per l'esistenza di soluzioni cicliche dell'equazione (43'), sono anche sufficienti.

Infatti poichè la serie (57) è convergente esisteranno soluzioni dell'equazione (56): siano $Z_1(x, y)$, $Z_2(x, y)$ due soluzioni cicliche di questa equazione aventi per autofunzioni ortogonali le funzioni (49) e comè corrispondenti autovalori rispettivamente i sistemi di valori (58), (59) ove i segni avanti ai radicali di ciascun termine sono gli stessi di quelli avanti ai radicali dei termini rispettivamente delle serie (60) e (61) che abbiamo supposto convergenti.

Sarà, (§ 4):

$$(62) \quad Z_1(x, y) + Z_2(x, y) = -27q(x, y)$$

$$(63) \quad \ddot{Z}_1 \ddot{Z}_2(x, y) = -27\ddot{p}^{(3)}(x, y)$$

Poniamo le equazioni:

$$(64) \quad Z_1(x, y) = \ddot{H}_1^{(3)}(x, y)$$

$$(65) \quad Z_2(x, y) = \ddot{H}_2^{(3)}(x, y)$$

le quali ammettono soluzioni perchè si sono supposte convergenti le serie (60) e (61). Siano $H_1(x, y)$ ed $H_2(x, y)$ due soluzioni rispettivamente delle equazioni (64) e (65) che ammettono come autovalori rispettivamente uno dei sistemi di costanti:

$$(66) \quad h'_i = \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2q_i} \pm \sqrt{\frac{1}{4q_i^2} + \frac{1}{27p_i^3}}}} \quad (i=1, 2, \dots)$$

$$(67) \quad h''_i = \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{\varepsilon} \sqrt[3]{-\frac{1}{2q_i} \mp \sqrt{\frac{1}{4q_i^2} + \frac{1}{27p_i^3}}}} \quad (i=1, 2, \dots)$$

ove i segni $\frac{1}{\varepsilon^2}$ $\frac{1}{\varepsilon}$ indicano che se nell'espressione di h'_i il radicale cubico si fa precedere da uno dei 1, ε , ε^2 , nell'espressione di h''_i il radicale cubico dovrà farsi precedere rispettivamente da uno dei segni 1, ε^2 , ε .

Si avrà:

$$\ddot{H}_1 \ddot{H}_2(x, y) = -3p(x, y).$$

Infatti poichè $H_1(x, y)$ ed $H_2(x, y)$ sono permutabili, la funzione $\ddot{H}_1 \ddot{H}_2(x, y)$ sarà la funzione simmetrica che ammette per autofunzioni ortogonali il sistema (49) e come corrispondenti autovalori le costanti, (§ 1):

$$\begin{aligned} h'_i \cdot h''_i &= \frac{1}{9} \sqrt[3]{\left\{ -\frac{1}{2q_i} \pm \sqrt{\frac{1}{4q_i^2} + \frac{1}{27p_i^3}} \right\} \left\{ -\frac{1}{2q_i} \mp \sqrt{\frac{1}{4q_i^2} + \frac{1}{27p_i^3}} \right\}} \\ &= \frac{1}{9} \sqrt[3]{\frac{1}{-\frac{1}{27p_i^3}}} = -\frac{p_i}{3} \quad (i=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Ma anche la funzione $-3p(x, y)$ ammette come sistema completo di autofunzioni ortogonali il sistema (49) e come corrispondenti autovalori le costanti $-\frac{p_i}{3}$ ($i=1, 2, \dots$), e sappiamo che esiste una sola funzione godente di queste proprietà, (teorema IV), quindi è

$$(68) \quad \ddot{H}_1 \ddot{H}_2(x, y) = -3p(x, y).$$

Si ponga ora:

$$X_1(x, y) + \varepsilon X_2(x, y) + \varepsilon^2 X_3(x, y) = H_1(x, y)$$

$$X_1(x, y) + \varepsilon^2 X_2(x, y) + \varepsilon X_3(x, y) = H_2(x, y)$$

$$X_1(x, y) + X_2(x, y) + X_3(x, y) = 0$$

da cui si ha:

$$3. X_1(x, y) = H_1(x, y) + H_2(x, y)$$

$$3. X_2(x, y) = \varepsilon^2 H_1(x, y) + \varepsilon H_2(x, y)$$

$$3. X_3(x, y) = \varepsilon H_1(x, y) + \varepsilon^2 H_2(x, y).$$

Le funzioni $X_1(x, y)$, $X_2(x, y)$ e $X_3(x, y)$ sono soluzioni dell'equazione (43'). Infatti si ha, in forza delle (62), (63), (64), (65), (68):

$$\begin{aligned} \ddot{X}_2^{(3)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{X}_2(x, y) + q(x, y) &= \frac{1}{27} \left\{ \ddot{H}_1^{(3)}(x, y) + \ddot{H}_2^{(3)}(x, y) + \right. \\ 3. \varepsilon^2 \ddot{H}_1^{(2)} \ddot{H}_2(x, y) + 3. \varepsilon \ddot{H}_1 \ddot{H}_2^{(2)}(x, y) + 9 \ddot{p} \left[\varepsilon^2 \ddot{H}_1(x, y) + \varepsilon \ddot{H}_2(x, y) \right] + 27q(x, y) \left. \right\} = \\ &= \frac{1}{27} \left\{ Z_1(x, y) + Z_2(x, y) + 27q(x, y) + 3 \ddot{H}_1 \ddot{H}_2 \left[\varepsilon^2 \ddot{H}_1(x, y) + \varepsilon \ddot{H}_2(x, y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 9 \ddot{p} \left[\varepsilon^2 \ddot{H}_1(x, y) + \varepsilon \ddot{H}_2(x, y) \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

analogamente si verifica che soddisfano alla (43') le $X_1(x, y)$ e $X_3(x, y)$.

Inoltre si ha:

$$\begin{aligned} X_1(x, y) + X_2(x, y) + X_3(x, y) &= 0; \quad \ddot{X}_1 \ddot{X}_2(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) = p(x, y) \\ \ddot{X}_1 \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) &= -q(x, y); \end{aligned}$$

cioè le $X_1(x, y)$, $X_2(x, y)$, $X_3(x, y)$ costituiscono un sistema di soluzioni cicliche dell'equazione (43').

Esse ammettono come autofunzioni ortogonali le funzioni del sistema (49) e come corrispondenti autovalori rispettivamente le costanti di uno dei sistemi

$$(69) \quad x'_i = \frac{1}{\varepsilon^2 \sqrt[3]{-\frac{1}{2q_i} \pm \sqrt{\frac{1}{4q_i^2} + \frac{1}{27p_i^3}}} + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt[3]{-\frac{1}{2q_i} \mp \sqrt{\frac{1}{4q_i^2} + \frac{1}{27p_i^3}}} \quad (i=1,2,\dots)$$

$$(70) \quad x''_i = \frac{1}{\frac{3^2}{\varepsilon} \sqrt[3]{-\frac{1}{2q_i} \pm \sqrt{\frac{1}{4q_i^2} + \frac{1}{27p_i^3}}} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2q_i} \mp \sqrt{\frac{1}{4q_i^2} + \frac{1}{27p_i^3}}} \quad (i=1,2,\dots)$$

$$(71) \quad x'''_i = \frac{1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2q_i} \pm \sqrt{\frac{1}{4q_i^2} + \frac{1}{27p_i^3}}} + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} \sqrt[3]{-\frac{1}{2q_i} \mp \sqrt{\frac{1}{4q_i^2} + \frac{1}{27p_i^3}}} \quad (i=1,2,\dots)$$

ove i segni $\begin{matrix} 1 & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 & 1 \end{matrix}$ indicano che se il primo radicale cubico nell'espressione di x'_i si fa precedere da uno dei segni 1, ε , ε^2 , il secondo deve essere preceduto rispettivamente da uno dei segni 1, ε^2 , ε , il primo radicale cubico nell'espressione di x''_i deve essere preceduto rispettivamente da uno dei segni ε^2 , 1, ε , e il secondo rispettivamente da uno dei segni ε , 1, ε^2 , il primo radicale cubico nell'espressione di x'''_i deve essere preceduto rispettivamente da uno dei segni ε , ε^2 , 1 e il secondo rispettivamente da uno dei segni ε^2 , ε , 1.

Concludiamo quindi:

Affinchè l'equazione integrale di 3° grado (43') ove $p(x, y)$ e $q(x, y)$ sono funzioni simmetriche, ad autofunzioni reali, ammetta sistemi di soluzioni cicliche è necessario e sufficiente che le funzioni note siano permutabili e che siano convergenti la serie (57), e una coppia di serie (60), (61) ove p_i ($i=1, 2, \dots$), q_i ($i=1, 2, \dots$) sono gli autovalori rispettivamente dei nuclei $p(x, y)$ e $q(x, y)$ corrispondenti alle autofunzioni di una serie $\omega_i(x)$ ($i=1, 2, \dots$) di funzioni ortogonali la quale contiene tutte e sole le autofunzioni dei nuclei $p(x, y)$ e $q(x, y)$.

Soddisfatte queste condizioni si hanno infiniti sistemi di soluzioni cicliche dell'equazione (43') costituiti dalle funzioni simmetriche le quali ammettono come autofunzioni ortogonali le $\omega_i(x)$ ($i=1, 2, \dots$) e come corrispondenti autovalori rispettivamente le costanti di uno dei sistemi (69), (70) (71) e che variano al variare degli autovalori (69), (70), (71), in corrispondenza ai segni che si considerano avanti ciascun radicale cubico.

Questo risultato si può anche mettere sotto la forma

Date due funzioni simmetriche $p(x, y)$ e $q(x, y)$, ad autofunzioni reali, condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano tre funzioni simmetriche, ad autofunzioni reali, $X_1(x, y)$, $X_2(x, y)$, $X_3(x, y)$, permutabili fra di loro e soddisfacenti alle condizioni:

$$X_1(x, y) + X_2(x, y) + X_3(x, y) = 0$$

$$\ddot{X}_1 \ddot{X}_2(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) = p(x, y)$$

$$\ddot{X}_1 \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) = -q(x, y)$$

è che le funzioni $p(x, y)$ e $q(x, y)$ siano permutabili e che converga la serie (57) e una coppia di serie (60) (61).

17. Riprendiamo l'equazione (43). Supposto che $X_1(x, y)$, $X_2(x, y)$, $X_3(x, y)$ sia un sistema di soluzioni cicliche dell'equazione (43') ove $p(x, y)$ e $q(x, y)$ sono legate alle funzioni $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$ dalle relazioni (44), le funzioni

$$X_1(x, y) - \frac{1}{3} a_1(x, y), X_2(x, y) - \frac{1}{3} a_2(x, y), X_3(x, y) - \frac{1}{3} a_3(x, y)$$

sono, per ciò che si è osservato al n. 13, soluzioni dell'equazione (43), permutabili con le funzioni $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$.

Inoltre, tenendo conto delle (44) e delle (46), (47), (48) si ha:

$$\begin{aligned} & \{X_1(x, y) - \frac{1}{3} a_1(x, y)\} + \{X_2(x, y) - \frac{1}{3} a_1(x, y)\} + \{X_3(x, y) - \frac{1}{3} a_1(x, y)\} = a_1(x, y), \\ & \{\ddot{X}_1 - \frac{1}{3} \ddot{a}_1\} \{\ddot{X}_2(x, y) - \frac{1}{3} \ddot{a}_1(x, y)\} + \{\ddot{X}_1 - \frac{1}{3} \ddot{a}_1\} \{\ddot{X}_3(x, y) - \frac{1}{3} \ddot{a}_1(x, y)\} + \\ & \quad + \{\ddot{X}_2 - \frac{1}{3} \ddot{a}_1\} \{\ddot{X}_3(x, y) - \frac{1}{3} \ddot{a}_1(x, y)\} = a_2(x, y) \\ & \{\ddot{X}_1 - \frac{1}{3} \ddot{a}_1\} \{\ddot{X}_2 - \frac{1}{3} \ddot{a}_1\} \{\ddot{X}_3(x, y) - \frac{1}{3} \ddot{a}_1(x, y)\} = -a_3(x, y) \end{aligned}$$

cioè le funzioni $X_1(x, y) - \frac{1}{3} a_1(x, y)$, $X_2(x, y) - \frac{1}{3} a_1(x, y)$, $X_3(x, y) - \frac{1}{3} a_1(x, y)$, formano un sistema di soluzioni cicliche dell'equazione (43).

Viceversa se $X_1(x, y)$, $X_2(x, y)$, $X_3(x, y)$ è un sistema di soluzioni cicliche dell'equazione (43), si verifica che $X_1(x, y) + \frac{1}{3} a_1(x, y)$, $X_2(x, y) + \frac{1}{3} a_1(x, y)$, $X_3(x, y) + \frac{1}{3} a_1(x, y)$, è un sistema di soluzioni cicliche dell'equazione (43').

Possiamo quindi enunciare il teorema:

Affinchè l'equazione integrale di 3° grado (43), ove $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$ sono funzioni simmetriche, ad autofunzioni reali, permutabili due a due fra loro, ammetta sistemi di soluzioni cicliche è necessario e sufficiente che sia convergente la serie (57), e una coppia di serie (60), (61), ove

$$p_i = \frac{1}{\frac{1}{a_i''} - \frac{1}{3a_i'^2}}, \quad q_i = \frac{1}{\frac{1}{a_i'''} + \frac{1}{9a_i'^3} - \frac{1}{3a_i' a_i''}}$$

ed a_i' , ($i=1, 2, \dots$) a_i'' , ($i=1, 2, \dots$), a_i''' , ($i=1, 2, \dots$), sono gli autovalori rispettivamente dei nuclei $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$ corrispondenti alle autofunzioni di una serie $\omega_i(x)$, ($i=1, 2, \dots$) di funzioni ortogonali contenente tutte e sole le autofunzioni dei nuclei $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$.

Ed anche:

Date tre funzioni simmetriche, $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$, ad autofunzioni reali, permutabili due a due fra loro, condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano tre funzioni simmetriche, ad autofunzioni reali, $X_1(x, y)$, $X_2(x, y)$, $X_3(x, y)$ permutabili fra loro e soddisfacenti alle condizioni

è che sia convergente la serie (57), e una coppia di serie (60), (61).

$$X_1(x, y) + X_2(x, y) + X_3(x, y) = -a_1(x, y)$$

$$\ddot{X}_1 \ddot{X}_2(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) = a_2(x, y)$$

$$\ddot{X}_1 \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) = -a_3(x, y)$$

§ 6.

Risoluzione dell'equazione integrale di 4^o grado

$$\ddot{X}^{(4)}(x, y) + \ddot{a}_1 \ddot{X}^{(3)}(x, y) + \ddot{a}_2 \ddot{X}^{(2)}(x, y) + \ddot{a}_3 \ddot{X}(x, y) + a_4(x, y) = 0.$$

18. Consideriamo l'equazione integrale di 4^o grado :

$$(72) \quad \ddot{X}^{(4)}(x, y) + \ddot{a}_1 \ddot{X}^{(3)}(x, y) + \ddot{a}_2 \ddot{X}^{(2)}(x, y) + \ddot{a}_3 \ddot{X}(x, y) + a_4(x, y) = 0$$

ove $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$, $a_4(x, y)$ sono funzioni simmetriche ad autofunzioni reali, permutabili fra loro due a due.

Ci proponiamo di risolvere l'equazione precedente mediante nuclei simmetrici, ad autofunzioni reali, permutabili con le funzioni note $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$, $a_4(x, y)$.

Operando sulla (72) la sostituzione $\ddot{X}(x, y) = X(x, y) - \frac{1}{4} a_1(x, y)$ ci riduciamo ad un'equazione del tipo :

$$(72') \quad \ddot{X}^{(4)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{X}^2(x, y) + \ddot{q} \ddot{X}(x, y) + r(x, y) = 0$$

ove

$$\ddot{p}(x, y) = a_2(x, y) - \frac{3}{8} \ddot{a}_1^{(2)}(x, y)$$

$$(73) \quad \ddot{q}(x, y) = \frac{1}{8} \ddot{a}_1^{(3)}(x, y) - \frac{1}{2} \ddot{a}_1 \ddot{a}_2(x, y) + a_3(x, y)$$

$$r(x, y) = -\frac{3}{256} \ddot{a}_1^{(4)}(x, y) + \frac{1}{16} \ddot{a}_1^{(2)} \ddot{a}_2(x, y) - \frac{1}{4} \ddot{a}_3 \ddot{a}_1(x, y) + a_4(x, y).$$

Poichè le funzioni $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$, $a_4(x, y)$ sono permutabili due a due fra loro, esisterà una serie S di funzioni ortogonali contenente tutte le loro autofunzioni; dalle (73) risulta che la serie S contiene pure le autofunzioni di $\ddot{p}(x, y)$, $\ddot{q}(x, y)$ ed $r(x, y)$ e quindi $\ddot{p}(x, y)$, $\ddot{q}(x, y)$, $r(x, y)$ sono permutabili due a due fra loro e con le funzioni $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$, $a_4(x, y)$.

Inoltre se $X(x, y)$ è soluzione dell'equazione (72'), la funzione $X(x, y) - \frac{1}{4} a_1(x, y)$ è soluzione dell'equazione (72) permutabile con le funzioni $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$, $a_4(x, y)$. Infatti essendo $X(x, y)$ permutabile con le funzioni $\ddot{p}(x, y)$, $\ddot{q}(x, y)$ ed $r(x, y)$ esisterà una serie S_1 di funzioni ortogonali contenente tutte le autofunzioni di $X(x, y)$, $\ddot{p}(x, y)$, $\ddot{q}(x, y)$ ed $r(x, y)$; ma dalle (73) risulta che le autofunzioni di $a_1(x, y)$ ed $a_2(x, y)$ sono anche autofunzioni di $\ddot{p}(x, y)$, che le autofunzioni di $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$ sono pure autofunzioni di $\ddot{q}(x, y)$ e che le autofunzioni di $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$, $a_4(x, y)$ sono autofunzioni di $r(x, y)$, segue che la serie S_1 conterrà pure le autofunzioni di $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$, $a_4(x, y)$, ossia che la soluzione $X(x, y)$ dell'equazione (72') è permutabile con le funzioni $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$, $a_4(x, y)$. Segue che a funzione $X(x, y) - \frac{1}{4} a_1(x, y)$ sarà permutabile con le funzioni $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$,

$a_3(x, y)$, $a_4(x, y)$, e si può inoltre facilmente verificare che $X(x, y) - \frac{1}{4} a_4(x, y)$ è soluzione dell'equazione (72).

Viceversa, se $X(x, y)$ è soluzione dell'equazione (72) permutabile con le $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$, $a_4(x, y)$, dalle (73) risulta che $X(x, y)$ sarà pure permutabile con $p(x, y)$, $q(x, y)$ ed $r(x, y)$, e si verifica ancora che la funzione $X(x, y) + \frac{1}{4} a_4(x, y)$ la quale è certamente permutabile con le funzioni $p(x, y)$, $q(x, y)$ ed $r(x, y)$, è soluzione dell'equazione (73').

19. Ciò posto supponiamo che $X_1(x, y)$ sia una soluzione simmetrica ad autofunzioni reali dell'equazione (72'), permutabile con le funzioni note $p(x, y)$, $q(x, y)$ ed $r(x, y)$ e consideriamo l'equazione di 3° grado

$$(74) \quad \ddot{X}^{(3)}(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}^{(2)}(x, y) + \left[\ddot{X}_1^{(2)} + \ddot{p} \right] \ddot{X}(x, y) + \left[\ddot{X}_1^{(3)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{X}_1(x, y) + q(x, y) \right] = 0.$$

Se quest'equazione ammette una terna di soluzioni cicliche $X_2(x, y)$, $X_3(x, y)$, $X_4(x, y)$, queste funzioni, essendo permutabili con le funzioni $X_1(x, y)$, $X_1(x, y) + p(x, y)$ e $\ddot{X}_1^{(3)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{X}_1(x, y) + q(x, y)$, sono anche permutabili con le funzioni $p(x, y)$, $q(x, y)$ ed $r(x, y)$.

Si avrà inoltre:

$$X_2(x, y) + X_3(x, y) + X_4(x, y) = -X_1(x, y)$$

$$\ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_4(x, y) + \ddot{X}_3 \ddot{X}_4(x, y) = \ddot{X}_1^{(2)}(x, y) + p(x, y)$$

$$\ddot{X}_2 \ddot{X}_3 \ddot{X}_4 = - \left[\ddot{X}_1^{(3)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{X}_1(x, y) + q(x, y) \right]$$

e quindi:

$$X_1(x, y) + X_2(x, y) + X_3(x, y) + X_4(x, y) = 0$$

$$\begin{aligned} \ddot{X}_1 \ddot{X}_2(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_4(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_4(x, y) + \ddot{X}_3 \ddot{X}_4(x, y) &= \\ = \ddot{X}_1 \left[\ddot{X}_2(x, y) + \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_4(x, y) \right] + \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_4(x, y) + \ddot{X}_3 \ddot{X}_4(x, y) &= \\ = \ddot{X}_1^{(2)}(x, y) + \ddot{X}_1^2(x, y) + p(x, y) &= p(x, y) \end{aligned}$$

$$\ddot{X}_1 \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_3 \ddot{X}_4(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_2 \ddot{X}_4(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_3 \ddot{X}_4(x, y) =$$

$$\ddot{X}_1 \left[\ddot{X}_1^{(2)}(x, y) + \ddot{p}(x, y) \right] - \ddot{X}_1^{(3)}(x, y) - \ddot{p} \ddot{X}_1(x, y) - q(x, y) = -q(x, y)$$

$$\ddot{X}_1 \ddot{X}_2 \ddot{X}_3 \ddot{X}_4(x, y) = -\ddot{X}_1 \left[\ddot{X}_1^{(3)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{X}_1(x, y) + q(x, y) \right] = r(x, y).$$

Si ha poi che le soluzioni $X_2(x, y)$, $X_3(x, y)$, $X_4(x, y)$ dell'equazione (74) sono anche soluzioni della (72'). Infatti si ha per la funzione $X_2(x, y)$:

$$0 = \left[\ddot{X}_1 - \ddot{X}_2 \right] \left[\ddot{X}_2^{(3)}(x, y) + \ddot{X}_1^{(2)} \ddot{X}_2(x, y) + \left\{ \ddot{X}_1^{(2)} + \ddot{p} \right\} \ddot{X}_2(x, y) + \ddot{X}_1^{(3)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{X}_1(x, y) + q(x, y) = \ddot{X}_2^{(4)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{X}_2^{(2)}(x, y) + q \ddot{X}_1(x, y) + r(x, y) - \left[\ddot{X}_2^{(4)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{X}_2^{(2)}(x, y) + \ddot{q} \ddot{X}_2(x, y) + r(x, y) \right]$$

e poichè $X_1(x, y)$ è soluzione della (72'), deve essere

$$\ddot{X}_2^{(4)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{X}_2^{(2)}(x, y) + \ddot{q} \ddot{X}_2(x, y) + r(x, y) = 0$$

cioè $X_2(x, y)$ è pure soluzione dell'equazione (72'). Analogamente si verifica che le funzioni $X_3(x, y)$ e $X_4(x, y)$ sono soluzioni dell'equazione (72').

20. Chiameremo sistema ciclico di soluzioni dell'equazione (72'), un sistema di 4 soluzioni simmetriche, ad autofunzioni reali, $X_1(x, y)$, $X_2(x, y)$, $X_3(x, y)$ e $X_4(x, y)$ permutabili fra loro due a due e con le funzioni note e soddisfacenti alle relazioni

$$X_1(x, y) + X_2(x, y) + X_3(x, y) + X_4(x, y) = 0$$

$$(75) \quad \ddot{X}_1 \ddot{X}_2(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_4(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_4(x, y) + \ddot{X}_3 \ddot{X}_4(x, y) = p(x, y)$$

$$\ddot{X}_1 \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_2 \ddot{X}_4(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_3 \ddot{X}_4(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_3 \ddot{X}_4(x, y) = -q(x, y)$$

$$\ddot{X}_1 \ddot{X}_2 \ddot{X}_3 \ddot{X}_4(x, y) = r(x, y)$$

Da ciò che si è detto al n. 19 segue che se l'equazione (72') ammette una soluzione $X_1(x, y)$ ad autofunzioni reali, permutabili con $p(x, y)$, $q(x, y)$ ed $r(x, y)$, e se costruendo l'equazione di 3° grado (74), questa ammette soluzioni cicliche, la $X_1(x, y)$ considerata insieme ad una terna qualunque di soluzioni cicliche della (74) ci dà un sistema di soluzioni cicliche dell'equazione (72').

Ci proponiamo di ricercare le condizioni necessarie e sufficienti affinché l'equazione (72') ammetta un sistema di soluzioni cicliche.

Indichiamo con:

$$(76) \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$$

un sistema di funzioni ortogonali contenente tutte e sole le autofunzioni dei nuclei $p(x, y)$, $q(x, y)$ ed $r(x, y)$, e con

$$p_i, (i = 1, 2, \dots); \quad q_i, (i = 1, 2, \dots); \quad r_i, (i = 1, 2, \dots)$$

i corrispondenti sistemi di autovalori rispettivamente dei tre nuclei, alcune delle p_i, q_i, r_i potendo essere infinite.

Supposto che $X_1(x, y), X_2(x, y), X_3(x, y), X_4(x, y)$ sia un sistema di soluzioni cicliche dell'equazione (72'), formiamo le funzioni:

$$H_1(x, y) = X_1(x, y) + X_2(x, y) - X_3(x, y) - X_4(x, y)$$

$$H_2(x, y) = X_1(x, y) + X_3(x, y) - X_2(x, y) - X_4(x, y)$$

$$H_3(x, y) = X_1(x, y) + X_4(x, y) - X_2(x, y) - X_3(x, y)$$

esse sono permutabili fra di loro e con le funzioni note e quindi si trova, tenendo conto delle (75):

$$\ddot{H}_1^{(2)}(x, y) + \ddot{H}_2^{(2)}(x, y) + \ddot{H}_3^{(2)}(x, y) = -8p(x, y)$$

$$\ddot{H}_1^{(2)}\ddot{H}_2^{(2)}(x, y) + \ddot{H}_1^{(2)}\ddot{H}_3^{(2)}(x, y) + \ddot{H}_2^{(2)}\ddot{H}_3^{(2)}(x, y) = 16\ddot{p}^{(2)}(x, y) - 64r(x, y)$$

$$\ddot{H}_1^{(2)}\ddot{H}_2^{(2)}\ddot{H}_3^{(2)} = 64q(x, y),$$

cioè $\ddot{H}_1^{(2)}(x, y), \ddot{H}_2^{(2)}(x, y), \ddot{H}_3^{(2)}(x, y)$ formano un sistema ciclico di soluzioni dell'equazione integrale di 3° grado (n. 17):

$$(77) \quad \ddot{\Phi}^{(3)}(x, y) + 8\ddot{p}\ddot{\Phi}^{(2)}(x, y) + \{16\ddot{p}^{(2)} - 64\ddot{r}\}\Phi(x, y) - 64\ddot{q}^{(2)}(x, y) = 0$$

e quindi devono essere soddisfatte le condizioni affinché questa equazione ammetta soluzioni cicliche, ossia devono essere convergenti, la serie (n. 17):

$$(78) \quad \sum_i \left| \frac{27^2}{\mu_i^2} + \frac{4 \cdot 27}{\lambda_i^3} \right|^2$$

e una coppia di serie:

$$(79) \quad \sum_i \left| \sqrt{-\frac{1}{2\mu_i} + \frac{1}{27\lambda_i^3}} + \sqrt{\frac{1}{4\mu_i^2} + \frac{1}{27\lambda_i^3}} \right|^2$$

$$(80) \quad \sum_i \left| \sqrt{-\frac{1}{2\mu_i} + \frac{1}{27\lambda_i^3}} - \sqrt{\frac{1}{4\mu_i^2} + \frac{1}{27\lambda_i^3}} \right|^2$$

ove

$$(81) \quad \lambda_i = \frac{1}{\frac{16}{p_i^2} - \frac{64}{p_i} - \frac{8}{3p_i^2}}, \quad (i=1, 2, \dots); \quad \mu_i = \frac{1}{\frac{64}{q_i^2} + \frac{8^3}{9p_i^3} - \frac{8 \cdot 16}{3p_i^3} + \frac{8 \cdot 64}{3p_i r_i}}, \quad (i=1, 2, \dots)$$

Le soluzioni cicliche $\ddot{H}_4^{(2)}(x, y)$, $\ddot{H}_3^{(2)}(x, y)$, $\ddot{H}_3^{(2)}(x, y)$ dell'equazione (77) avranno come autovalori, corrispondenti alle autofunzioni ortogonali (76), rispettivamente uno dei sistemi di costanti

$$(82) \quad v'_i = \frac{1}{\varepsilon \sqrt[3]{-\frac{1}{2\mu_i} \pm \sqrt{\frac{1}{4\mu_i^2} + \frac{1}{27\lambda_i^3}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2\mu_i} \mp \sqrt{\frac{1}{4\mu_i^2} + \frac{1}{27\lambda_i^3}} - \frac{8}{3\rho_i}}} \quad (i=1,2,\dots)$$

$$(83) \quad v''_i = \frac{1}{\varepsilon^2 \sqrt[3]{-\frac{1}{2\mu_i} \pm \sqrt{\frac{1}{4\mu_i^2} + \frac{1}{27\lambda_i^3}} + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt[3]{-\frac{1}{2\mu_i} \mp \sqrt{\frac{1}{4\mu_i^2} + \frac{1}{27\lambda_i^3}} - \frac{8}{3\rho_i}}} \quad (i=1,2,\dots)$$

$$(84) \quad v'''_i = \frac{1}{\varepsilon^2 \sqrt[3]{-\frac{1}{2\mu_i} \pm \sqrt{\frac{1}{4\mu_i^2} + \frac{1}{27\lambda_i^3}} + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt[3]{-\frac{1}{2\mu_i} \mp \sqrt{\frac{1}{4\mu_i^2} + \frac{1}{27\lambda_i^3}} - \frac{8}{3\rho_i}}} \quad (i=1,2,\dots)$$

ove λ_i e μ_i sono date dalle (81) e per i segni avanti ai radicali valgono le osservazioni al n. 16, § 5.

Segue che le funzioni $H_1(x, y)$, $H_2(x, y)$, $H_3(x, y)$, ammettono come sistemi completi di autovalori rispettivamente uno dei sistemi di costanti:

$$(85) \quad h'_i = \pm \sqrt[3]{v'_i}, \quad (i=1,2,\dots)$$

$$(86) \quad h''_i = \pm \sqrt[3]{v''_i}, \quad (i=1,2,\dots)$$

$$(87) \quad h'''_i = \pm \sqrt[3]{v'''_i}. \quad (i=1,2,\dots)$$

e quindi dovranno essere convergenti le serie:

$$(88) \quad \sum_i \left| \frac{1}{v'_i} \right|; \quad (89) \quad \sum_i \left| \frac{1}{v''_i} \right|; \quad (90) \quad \sum_i \left| \frac{1}{v'''_i} \right|$$

Si ha quindi: *Condizione necessaria affinché l'equazione (72'), ove p(x, y) q(x, y) ed r(x, y) sono funzioni simmetriche, ad autofunzioni reali, permutabili fra loro due a due, ammetta soluzioni cicliche è che siano convergenti le serie (78), una coppia di serie (79), (80) e le serie (88), (89), (90).*

21. Facciamo vedere che questa condizione è sufficiente affinché l'equazione (72') ammetta soluzioni cicliche.

Infatti per la convergenza della serie (78) e di una coppia di serie (79), (80), l'equazione di 3º grado (77) ammetterà soluzioni cicliche. Sia $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$, $\Phi_3(x, y)$ una terna di tali soluzioni aventi per autofunzioni ortogonali le funzioni (76) e per corrispondenti autovalori rispettivamente tre sistemi di costanti (82), (83), (84).

Si ha:

$$(91) \quad \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y) + \Phi_3(x, y) = -8p(x, y)$$

$$(92) \quad \ddot{\Phi}_1 \ddot{\Phi}_2(x, y) + \ddot{\Phi}_1 \ddot{\Phi}_3(x, y) + \ddot{\Phi}_2 \ddot{\Phi}_3(x, y) = 16\dot{p}^{(2)}(x, y) - 64r(x, y)$$

$$(93) \quad \ddot{\Phi}_1 \ddot{\Phi}_2 \ddot{\Phi}_3(x, y) = 64q^{(2)}(x, y).$$

Poniamo le equazioni integrali binomie:

$$\ddot{H}_1^{(2)}(x, y) = \Phi_1(x, y); \quad \ddot{H}_2^{(2)}(x, y) = \Phi_2(x, y); \quad \ddot{H}_3^{(2)}(x, y) = \Phi_3(x, y)$$

le quali ammetteranno soluzioni perchè sono convergenti le serie (88), (89), (90). Siano $H_1(x, y)$, $H_2(x, y)$, $H_3(x, y)$ tre soluzioni rispettivamente delle precedenti equazioni, aventi come autovalori rispettivamente uno dei sistemi di costanti (85), (86), (87), ove, per ogni valore dell'indice i , i segni dei tre radicali siano tali che il loro prodotto risulti negativo. È facile vedere allora che si ha:

$$(94) \quad \ddot{H}_1 \ddot{H}_2 \ddot{H}_3(x, y) = -8q(x, y)$$

Infatti per la (93) si ha $\ddot{H}_1^{(2)} \ddot{H}_2^{(2)} \ddot{H}_3^{(2)}(x, y) = 64q(x, y)$ e da ciò segue che $\ddot{H}_1 \ddot{H}_2 \ddot{H}_3(x, y)$ e $q(x, y)$ hanno le stesse autofunzioni; inoltre per la permutabilità delle funzioni $H_1(x, y)$, $H_2(x, y)$, $H_3(x, y)$, $\ddot{H}_1 \ddot{H}_2 \ddot{H}_3(x, y)$ sarà la funzione simmetrica, la quale ammette come autovalori, corrispondenti al sistema (76) di autofunzioni ortogonali, le costanti

$$h'_i \cdot h''_i \cdot h'''_i = -\sqrt{v'_i \cdot v''_i \cdot v'''_i}$$

ossia, per la (93):

$$h'_i \cdot h''_i \cdot h'''_i = -\sqrt{\frac{q_i^2}{64}} = -\frac{q_i}{8} \quad (i=1, 2, \dots)$$

Anche la funzione $-8q(x, y)$ ammette come autovalori corrispondenti alle autofunzioni ortogonali (76) le costanti $-\frac{q_i}{8}$ ($i=1, 2, \dots$), e poichè esiste una sola funzione godente di queste proprietà, deve essere $\ddot{H}_1 \ddot{H}_2 \ddot{H}_3(x, y) = -8q(x, y)$.

Poniamo ora:

$$H_1(x, y) = X_1(x, y) + X_2(x, y) - X_3(x, y) - X_4(x, y)$$

$$H_2(x, y) = X_1(x, y) + X_3(x, y) - X_2(x, y) - X_4(x, y)$$

$$H_3(x, y) = X_1(x, y) + X_4(x, y) - X_2(x, y) - X_3(x, y)$$

$$0 = X_1(x, y) + X_2(x, y) + X_3(x, y) + X_4(x, y)$$

da cui si ha :

$$\begin{aligned} X_1(x, y) &= \frac{1}{4} \{ H_1(x, y) + H_2(x, y) + H_3(x, y) \} \\ X_2(x, y) &= \frac{1}{4} \{ H_1(x, y) - (H_2(x, y) - H_3(x, y)) \} \\ X_3(x, y) &= \frac{1}{4} \{ -H_1(x, y) + H_2(x, y) - H_3(x, y) \} \\ X_4(x, y) &= \frac{1}{4} \{ -H_1(x, y) - H_2(x, y) + H_3(x, y) \}. \end{aligned}$$

Si ha, poichè $\ddot{H}_1^{(2)}(x, y) = \Phi_1(x, y)$, $\ddot{H}_2^{(2)}(x, y) = \Phi_2(x, y)$, $\ddot{H}_3^{(2)}(x, y) = \Phi_3(x, y)$ e tenendo conto delle (91), (92), (94):

$$\begin{aligned} X_1(x, y) + X_2(x, y) + X_3(x, y) + X_4(x, y) &= 0 \\ (75) \quad \ddot{X}_4 \ddot{X}_2(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_4(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_4(x, y) + \ddot{X}_3 \ddot{X}_1(x, y) &= p(x, y) \\ \ddot{X}_1 \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_2 \ddot{X}_4(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_3 \ddot{X}_4(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_3 \ddot{X}_4(x, y) &= -q(x, y) \\ \ddot{X}_1 \ddot{X}_2 \ddot{X}_3 \ddot{X}_4(x, y) &= r(x, y). \end{aligned}$$

Queste relazioni ci dicono che $X_1(x, y)$, $X_2(x, y)$, $X_3(x, y)$, $X_4(x, y)$ formano un sistema di soluzioni cicliche dell'equazione (72'). Esse ammettono come autofunzioni ortogonali le funzioni (76) e come cosrispondenti autovalori rispettivamente uno dei sistemi di costanti:

$$(95) \quad x'_i = \frac{4}{\frac{1}{h'_i} + \frac{1}{h''_i} + \frac{1}{h'''_i}}, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$(96) \quad x''_i = \frac{4}{\frac{1}{h'_i} - \frac{1}{h''_i} - \frac{1}{h'''_i}}, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$(97) \quad x'''_i = \frac{4}{-\frac{1}{h'_i} + \frac{1}{h''_i} - \frac{1}{h'''_i}}, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$(98) \quad x''''_i = \frac{4}{-\frac{1}{h'_i} - \frac{1}{h''_i} + \frac{1}{h'''_i}}, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

ove h'_i , h''_i , h'''_i sono dati dalle (85), (86), (87) ed i loro segni devono essere scelti in modo che per ogni valore dell'indice i il prodotto $h'_i \cdot h''_i \cdot h'''_i$ risulti negativo.

Concludiamo quindi: *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione integrale di 4^o grado (72') ove $p(x, y)$, $q(x, y)$ ed $r(x, y)$ sono funzioni simmetriche, ad autofunzioni reali, permutabili fra loro due a due, ammetta soluzioni cicliche*

è che siano convergenti la serie (78), una coppia di serie (79), (80) e le serie (88), (89), (90) ove le λ_i e μ_i sono dati dalle (81) e p_i ($i=1, 2, \dots$); q_i ($i=1, 2, \dots$); r_i ($i=1, 2, \dots$) sono gli autovalori rispettivamente dei nuclei $p(x, y)$, $q(x, y)$ ed $r(x, y)$ corrispondenti alle autofunzioni $\varphi_i(x)$, ($i=1, 2, \dots$) di un sistema di funzioni ortogonali contenente tutte e sole le autofunzioni dei tre nuclei, ed alcune delle p_i , q_i , r_i possono essere infinite.

Soddisfatta questa condizione si hanno infinite soluzioni cicliche dell'equazione (72') che sono le funzioni aventi come autofunzioni ortogonali le funzioni della successione $\varphi_i(x)$, ($i=1, 2, \dots$), e come corrispondenti autovalori uno dei sistemi di costanti (95), (96), (97), (98) ove i valori delle h'_i , h''_i , h'''_i che sono dati dalle (85), (86), (87), devono essere scelti in modo che per ciascun valore di i , il prodotto $h'_i \cdot h''_i \cdot h'''_i$ risulti negativo.

Si ha anche il teorema: date tre funzioni simmetriche, ad autofunzioni reali $p(x, y)$, $q(x, y)$, $r(x, y)$ permutabili fra loro due a due, condizione necessaria e sufficiente affinché esistano quattro funzioni simmetriche, ad autofunzioni reali, $X_1(x, y)$, $X_2(x, y)$, $X_3(x, y)$, $X_4(x, y)$, permutabili fra loro due a due e con le funzioni note, le quali soddisfino alle relazioni (75) è che siano convergenti la serie (78), una coppia di serie (79), (80) e le serie (88), (89), (90).

22. Consideriamo ora l'equazione (72). Se $X_1(x, y)$, $X_2(x, y)$, $X_3(x, y)$, $X_4(x, y)$ è un sistema di soluzioni cicliche dell'equazione (72) ove $p(x, y)$, $q(x, y)$, $r(x, y)$ sono legate alle funzioni $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$, $a_4(x, y)$ dalle relazioni (73), le funzioni $X_1(x, y) - \frac{1}{4} a_1(x, y)$, $X_2(x, y) - \frac{1}{4} a_1(x, y)$, $X_3(x, y) - \frac{1}{4} a_1(x, y)$, $X_4(x, y) - \frac{1}{4} a_1(x, y)$, per ciò che si è osservato al n. 18, sono soluzioni dell'equazione (72), e sono permutabili con le funzioni $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$, $a_4(x, y)$. Inoltre si ha, tenendo conto delle (73) e delle (75):

$$\begin{aligned} & \left\{ X_1(x, y) - \frac{1}{4} a_1(x, y) \right\} + \left\{ X_2(x, y) - \frac{1}{4} a_1(x, y) \right\} + \left\{ X_3(x, y) - \frac{1}{4} a_1(x, y) \right\} \\ & \quad + \left\{ X_4(x, y) - \frac{1}{4} a_1(x, y) \right\} = -a_1(x, y) \\ & \left\{ \ddot{X}_1 - \frac{1}{4} \ddot{a}_1 \right\} \left\{ \ddot{X}_2(x, y) - \frac{1}{4} \ddot{a}_1(x, y) \right\} + \left\{ \ddot{X}_1 - \frac{1}{4} \ddot{a}_1 \right\} \left\{ \ddot{X}_3(x, y) - \frac{1}{4} \ddot{a}_1(x, y) \right\} \\ & + \left\{ \ddot{X}_1 - \frac{1}{4} \ddot{a}_1 \right\} \left\{ \ddot{X}_4(x, y) - \frac{1}{4} \ddot{a}_1(x, y) \right\} + \left\{ \ddot{X}_2 - \frac{1}{4} \ddot{a}_1 \right\} \left\{ \ddot{X}_3(x, y) - \frac{1}{4} \ddot{a}_1(x, y) \right\} \\ & + \left\{ \ddot{X}_2 - \frac{1}{4} \ddot{a}_1 \right\} \left\{ \ddot{X}_4(x, y) - \frac{1}{4} \ddot{a}_1(x, y) \right\} + \left\{ \ddot{X}_3 - \frac{1}{4} \ddot{a}_1 \right\} \left\{ \ddot{X}_4(x, y) - \frac{1}{4} \ddot{a}_1(x, y) \right\} = a_2(x, y) \\ & \ddot{X}_1 - \frac{1}{4} \ddot{a}_1 \left\{ \left\{ \ddot{X}_2 - \frac{1}{4} \ddot{a}_1 \right\} \left\{ \ddot{X}_3(x, y) - \frac{1}{4} \ddot{a}_1(x, y) \right\} + \left\{ \ddot{X}_1 - \frac{1}{4} \ddot{a}_1 \right\} \left\{ \ddot{X}_2 - \frac{1}{4} \ddot{a}_1 \right\} \left\{ \ddot{X}_4(x, y) - \frac{1}{4} \ddot{a}_1(x, y) \right\} + \right. \\ & \quad \left. \left\{ \ddot{X}_1 - \frac{1}{4} \ddot{a}_1 \right\} \left\{ \ddot{X}_3 - \frac{1}{4} \ddot{a}_1 \right\} \left\{ \ddot{X}_4(x, y) - \frac{1}{4} \ddot{a}_1(x, y) \right\} \right. \\ & \quad \left. + \left\{ \ddot{X}_2 - \frac{1}{4} \ddot{a}_1 \right\} \left\{ \left\{ \ddot{X}_3 - \frac{1}{4} \ddot{a}_1 \right\} \left\{ \ddot{X}_4(x, y) - \frac{1}{4} a_1(x, y) \right\} \right\} = -a_3(x, y) \right. \\ & \left. \left\{ \ddot{X}_1 - \frac{1}{4} \ddot{a}_1 \right\} \left\{ \ddot{X}_2 - \frac{1}{4} \ddot{a}_1 \right\} \left\{ \ddot{X}_3 - \frac{1}{4} \ddot{a}_1 \right\} \left\{ \ddot{X}_4(x, y) - \frac{1}{4} \ddot{a}_1(x, y) \right\} = a_4(x, y) \right. \end{aligned}$$

ossia le funzioni $X_1(x, y) = \frac{1}{4} a_1(x, y)$, $X_2(x, y) = \frac{1}{4} a_1(x, y)$, $X_3(x, y) = \frac{1}{4} a_1(x, y)$, $X_4(x, y) = \frac{1}{4} a_1(x, y)$, formano un sistema di soluzioni cicliche dell'equazione (72).

Viceversa si verifica che se $X_1(x, y)$, $X_2(x, y)$, $X_3(x, y)$, $X_4(x, y)$ è un sistema di soluzioni cicliche dell'equazione (72), le funzioni

$$X_1(x, y) + \frac{1}{4} a_1(x, y), X_2(x, y) + \frac{1}{4} a_1(x, y), X_3(x, y) + \frac{1}{4} a_1(x, y), X_4(x, y) + \frac{1}{4} a_1(x, y)$$

formano un sistema di soluzioni cicliche dell'equazione (72').

Segue che per l'equazione (72) possiamo enunciare il teorema *affinchè l'equazione integrale di 4° grado (72) ove $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$, $a_4(x, y)$ sono funzioni simmetriche, ad autofunzioni reali, permutabili due a due fra loro, ammetta sistemi di soluzioni cicliche è necessario e sufficiente che siano convergenti la serie (78), una coppia di serie (79), (80) e le serie (88), (89), (90) ove le λ_i e μ_i sono date dalle (81).*

$$p_i = \frac{1}{\frac{1}{a_i''} - \frac{3}{8a_i'^2}}; \quad q_i = \frac{1}{\frac{1}{8a_i'^3} - \frac{1}{2a_i' a_i''} + \frac{1}{a_i'''}},$$

$$r_i = \frac{1}{\frac{3}{256a_i'^4} + \frac{1}{16a_i'^2 a_i''} - \frac{1}{4a_i' a_i'''} + \frac{1}{a_i''''}}$$

ed a_i' , ($i = 1, 2, \dots$); a_i'' , ($i = 1, 2, \dots$); a_i''' , ($i = 1, 2, \dots$); a_i'''' , ($i = 1, 2, \dots$), sono gli autovalori rispettivamente dei nuclei $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$, $a_4(x, y)$ corrispondenti alle autofunzioni $\varphi_i(x)$, ($i = 1, 2, \dots$) di un sistema di funzioni ortogonali contenente tutte le loro autofunzioni, (alcune delle a_i' , a_i'' , a_i''' , a_i'''' potendo essere infinite).

Ed ancora:

Date quattro funzioni simmetriche, ad autofunzioni reali, $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_3(x, y)$, $a_4(x, y)$ permutabili fra loro due a due, condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano quattro funzioni simmetriche, $X_1(x, y)$, $X_2(x, y)$, $X_3(x, y)$, $X_4(x, y)$, permutabili fra loro due a due e con le funzioni note, le quali soddisfino alle relazioni

$$X_1(x, y) + X_2(x, y) + X_3(x, y) + X_4(x, y) = -a_1(x, y)$$

$$\ddot{X}_1 \ddot{X}_2(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_4(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_4(x, y) + \ddot{X}_3 \ddot{X}_4(x, y) = a_2(x, y)$$

$$\ddot{X}_1 \ddot{X}_2 \ddot{X}_3(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_2 \ddot{X}_4(x, y) + \ddot{X}_1 \ddot{X}_3 \ddot{X}_4(x, y) + \ddot{X}_2 \ddot{X}_3 \ddot{X}_4(x, y) = -a_3(x, y)$$

$$\ddot{X}_1 \ddot{X}_2 \ddot{X}_3 \ddot{X}_4(x, y) = a_4(x, y)$$

è che siano convergenti la serie (78), una coppia di serie (79), (80) e le serie (88), (89), (90).

GIOVANNI PENNACCHIETTI

PAROLE COMMEMORATIVE

di E. DANIELE

Una delle figure più caratteristiche della nostra Accademia e dell'Ateneo Catanese, quella di GIOVANNI PENNACCHIETTI, scompariva nel corso delle ultime vacanze estive, vittima di lunga, inesorabile malattia, che vinse, oltre alla Sua fibra già robustissima, le cure più intelligenti ed amorevoli.



Nato il 25 luglio 1850 in Arcevia (prov. di Ancona), laureatosi in Matematica nell'Università di Pisa il 28 febbraio 1874 dopo avervi compiuto gli studi superiori, veniva nominato lo stesso anno professore nel R. Liceo di Spoleto, dal quale passava, nell'ottobre 1880, a quello di Pavia. Quivi rimase fino all'autunno del 1888, in cui un concorso lo portava, come straordinario, alla cattedra di Meccanica razionale nell'Università di Catania, dalla quale più non si staccò. Fu nominato ordinario nel 1895. A partire dal 1889 ebbe l'incarico della Meccanica superiore, ed altri incarichi tenne pure provvisoriamente in varie circostanze, come quello di Fisica matematica e quello di Calcolo infinitesimale.

Le Sue ricerche scientifiche furono iniziate con una Memoria " Sugli integrali comuni a più problemi di dinamica „, che è la Sua tesi di abilitazione della Scuola Normale di Pisa, dove riprende ed amplia un celebre problema posto per la prima volta e parzialmente risolto dal BERTRAND, indi esaminato dal ROUCHÉ e dal KORKINE. Il lavoro Gli valse da quest'ultimo un giudizio assai lusinghiero, al quale Egli tenne sempre moltissimo. Su quell'argomento ritornò in seguito più d'una volta, estendendo il primitivo studio a casi più generali, e trasportandolo anche sul terreno puramente analitico degli integrali comuni a più equazioni differenziali. Si può dire che l'ultimo Suo lavoro, pubblicato nel 1910, si riattacca ancora a quel soggetto. In un ordine d'idee strettamente affine si aggira poi tutto un altro gruppo di Memorie, dove le equazioni differenziali in genere, ed in particolare quelle dinamiche, vengono studiate rispetto alla loro integrazione.

Un soggetto, al quale si dedicò pure con amore ed a più riprese, fu quello dell'equilibrio dei fili e delle superficie flessibili ed inestendibili: l'ispirazione originaria Gli era venuta dalla classica Memoria del BELTRAMI sull'equilibrio delle superficie.

Varii altri problemi di cui si occupò erano in relazione più o meno diretta con questioni che formavano oggetto dei Suoi corsi scolastici.

Ciò che merita di essere segnalato nell'attività scientifica di GIOVANNI PENNACCHIETTI è il fatto che ebbe il suo massimo d'intensità nel periodo successivo al raggiungimento della cattedra universitaria. Il che dimostra come fosse viva in Lui la coscienza della Sua posizione e intenso il sentimento del dovere. Questo lato del Suo carattere si manifestava del resto in tutti gli atti della Sua vita. Ed in primo luogo appariva nell'adempimento dell'ufficio d'insegnante. Io non so se altri fra di noi possa vantare un eguale studio nella preparazione dei corsi, un'eguale pazienza nella scelta del metodo espositivo, un'eguale cura minuziosa delle notazioni, dei dettagli, delle semplificazioni possibili. Questo lavoro raggiungeva in Lui le forme di una vera e propria passione, e Gli offrì più d'una volta, come già ebbi a dire, lo spunto a qualche pubblicazione. Ed alla scuola, bisogna riconoscerlo, consacrò le ultime sue energie: l'anno scorso, già s fibrato dal lungo male, quando un lieve movimento rappresentava già per Lui una grave fatica, volle ancora attendere per oltre un mese al Suo insegnamento; ed alle obiezioni insistenti della famiglia ribatteva che le ore, ch'Egli dedicava sia alla preparazione delle lezioni, sia al loro svolgimento, non erano per Lui ore di fatica, ma di sollievo, nelle quali ogni male veniva dimenticato.

Quale fosse la Sua scrupolosità nell'adempiere gli uffici che Gli venivano affidati lo sanno tutti quelli che Lo seguirono nelle Sue funzioni accademiche. La nostra Accademia, che L'aveva accolto fra i suoi soci fin dal 1890, potè subito apprezzare il Suo attaccamento al Sodalizio, ch'Egli dimostrò, oltrechè col concedere ai volumi degli Atti la maggior parte dei Suoi lavori, coll'interessamento che prendeva a tutto ciò che all'Accademia si riferisse. Per questo, e per l'autorità ch'Egli si era acquistata fra i Colleghi, essi Lo vollero, prima nel 1896, poi dopo un breve intervallo, nel 1903, elevato alla carica di Vice-Segretario per la sezione di Scienze fisico-matematiche; intanto, nel 1901 un altro ufficio Gli era assegnato, apparentemente più modesto, ma altrettanto più delicato, quello di Revisore dei Conti. Questo ufficio, nel quale venne riconfermato senza interruzione, e che esercitò effettivamente finchè le forze Glielo permisero, presenta GIOVANNI PENNACCHIETTI, accademico, sotto il suo aspetto più tipico: in Lui l'Accademia ebbe il Revisore dei Conti ideale, poichè le Sue qualità di ordine, di precisione, di meticolosità trovavano in quelle funzioni — si può dire — la loro applicazione specifica. Nulla sarebbe sfuggito al Suo occhio vigile. Aggiungerò (e questo a tutta lode della nostra Amministrazione) che mai, per contro, il Suo occhio vigile riuscì a scoprire alcunchè di meno che perfetto nel meccanismo contabile della nostra Accademia.

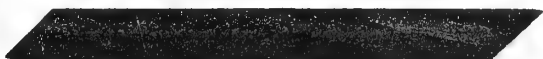
* * *

La Sua fine non fu quale dovette affacciarsi al Suo pensiero in quei momenti, che tutti attraversiamo, in cui la considerazione della fine esprime, più che un motivo di tristezza, una tendenza al riposo. Una vita metodica e illibata, spesa unicamente nelle cure della famiglia e nelle occupazioni del Suo ufficio di insegnante e di studioso, un organi-

simo che non conobbe mai ciò che fosse male, un carattere sereno e stoico che Gli permise di superare, senza scosse e senza ribellioni, dolorose contingenze famigliari, — costituivano tali elementi da fare apparire più che naturale il pronostico di una lunga e vegeta vecchiaia, divisa negli ultimi anni tra Catania e Senigallia, la ridente cittadina adriatica che legami di parentela avevano fatto la Sua terra, e dove Lo attendeva la casetta tranquilla che s'era preparato nella Sua previdenza. Purtroppo il Suo sogno — modesto sogno — non potè divenire realtà: la casetta di Senigallia attese invano il suo ospite. Invece, e la cosa Gli avrà amareggiato gli ultimi istanti, la morte Lo colse lontano dalla terra natale, lontano da Catania, che può dirsi la terra dei Suoi figli, e dove *tutti* i Suoi figli L'avrebbero circondato nel momento estremo; la morte, che Lo colpì il 21 agosto 1916 in Roma, segnò per Lui il termine di un pellegrinaggio, di cui le ultime due stazioni furono uno stabilimento di acque ed una clinica chirurgica.

Anche nell'ora suprema Lo seguì il pensiero dell'Università Catanese: a questa difatti volle, per desiderio verbalmente espresso, che fosse donata la Sua biblioteca, ricca di numerosi e pregevoli volumi.

Se le circostanze, che accompagnarono la Sua dipartita, furono tali da versargli nell'animo qualche amarezza, un conforto tuttavia avrebbe dovuto sorridergli: che la bontà e la rettitudine alle quali tutta la Sua esistenza si era ispirata, che l'affetto profondo e tenace di cui aveva circondata la famiglia, che la simpatia di cui aveva improntato i Suoi rapporti coi colleghi e cogli allievi, — non potevano passare senza lasciare una traccia. Questa traccia, noi possiamo affermarlo, è profonda e sarà duratura: la comporranno la simpatia e la riconoscenza colla quale colleghi ed allievi evocheranno il Suo ricordo, l'amore dolorante con cui il Suo nome e la Sua figura saranno richiamati ogni giorno dalla Sposa e dai Figli, il sentimento di rispetto col quale si rivolgerà alla Sua memoria chiunque Lo abbia conosciuto.





ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DEL PROF. GIOVANNI PENNACCHIETTI

1. Sugli integrali comuni a più problemi di dinamica. — Ann. R. Scuola Normale Sup. di Pisa, vol. IV, 1877.
2. Sugli integrali comuni a più problemi del movimento d'un punto sopra una superficie. — Cronaca del R. Liceo Pontano di Spoleto, 1878.
3. Sugli integrali completi di alcune classi di equazioni a derivate parziali d'ordine qualunque con due variabili indipendenti. — Rend. R. Ist. Lomb., (2), 17, 1884.
4. Sugli integrali delle equazioni del moto di un punto materiale. — Giorn. di Battaglini, vol. 23, 1885.
5. Sopra un integrale più generale di quello delle forze vive pel moto di un sistema di punti materiali. — Rend. R. Ist. Lomb., (2), v. 18, 1885.
6. Gli Italiani nella storia della Meccanica. Discorso pronunziato il 16 nov. 1889 per la solenne inaugurazione degli studi nella R. Università di Catania. — Annuario della R. Univ., 1889-1890.
7. Sugli integrali delle equazioni della dinamica. — Atti dell'Acc. Gioenia; (4) v. II, 1890.
8. Sugli integrali comuni a più sistemi di equazioni differenziali ordinarie. — Id.; (4), v. III, 1891.
9. Sugli integrali primi di secondo grado rispetto alle derivate delle coordinate nei problemi della meccanica — Id.; id.
10. Sui sistemi di equazioni aventi analogia con quelli di Hamilton. — Id.; id.
11. Sul moto brachistocrono. — Rend. del Circ. Mat. di Palermo; t. V, 1891.
12. Sulle curve brachistocrone. — Atti dell'Acc. Gioenia; (4) v. III, 1891.
13. Sulla riduzione delle equazioni differenziali ordinarie alla forma canonica. — Giorn. di Battaglini; v. 29, 1891.
14. In commemorazione di Lorenzo Maddem. — Atti dell'Acc. Gioenia; (4) v. IV, 1892. — Annuario della R. Univ. di Catania per l'anno scol. 1891-92.
15. Sulle curve funicolari: Nota I. — Rend. Circ. Mat. di Palermo; t. VI, 1892. — Atti Acc. Gioenia; (4), v. III.
16. Sulle curve funicolari: Nota II. — Rend. Circ. Mat. di Palermo; t. VI, 1892. — Atti Acc. Gioenia; (4), v. IV.
17. Sul moto brachistocrono d'un sistema qualunque di punti materiali. — Id., id. — id., id.
18. Sopra integrali che comprendono, come caso particolare, l'integrale delle forze vive. — Rend. Circ. Mat. Pal.; t. VI, 1892.
19. Sull'attrito. — Id.; t. VII, 1893.
20. Sulle soluzioni comuni a tre equazioni a derivate parziali del 3° ordine con due variabili. — Id., id.
21. Sopra le soluzioni comuni a più equazioni a derivate parziali del 1° e 2° ordine con più di due variabili indipendenti. — Id.; id.
22. Sull'equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili. — Id.; t. IX. 1895.
23. Sulle equazioni di equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili. — Atti Acc. Gioenia; (4), v. VIII, 1895.

24. Sulla integrazione delle equazioni d'equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili. — *Id.*, *id.*
25. Sui parametri differenziali — *Id.*; v. IX, 1895.
26. Giuseppe Zurria: Necrologia. — *Boll. Acc. Gioenia*; fasc. XLVI, 1897, nuova serie. — *Annuario della R. Univ. di Catania*, 1896-1897.
27. Sopra una generalizzazione della formola di Binet sulle forze centrali. — *Atti Acc. Gioenia*; (4), v. XIV, 1901.
28. Sugli invarianti nelle deformazioni infinitesime delle superficie elastiche. — *Id.*, *id.*
29. Antonio Aloï: ricordo necrologico. — *Annuario della R. Univ. di Catania*, 1900-01.
30. Sugli integrali comuni a più problemi del moto d'un punto materiale sopra una superficie. — *Atti Acc. Gioenia*; (4), v. XV, 1902.
31. Sulle equazioni differenziali del moto di un corpo solido intorno ad un punto fisso. — *Id.*; (4), vol. XVI, 1902.
32. Sopra un integrale d'una classe di problemi dell'equilibrio d'un filo flessibile e inestendibile. — *Rend. Circ. Mat. Palermo*; t. XVI, 1902.
33. Sopra una classe di problemi di meccanica riducibili a quadrature. — *Atti Acc. Gioenia*; (4), XVII, 1904.
34. Intorno a problemi di meccanica riducibili a quadrature. — *Id.*; (4), XVIII, 1905.
35. Sul movimento piano di un punto materiale libero nello spazio. — *Id.*; (4), XIX, 1906.
36. Sul moto di rotolamento: Memoria I. — *Id.*: *id.*
37. *Id.*: Memoria II. — *Id.*; (4), XX, 1907.
38. *Id.*: Memoria III. — *Id.*: *id.*
39. Filadelfo Fichera. — *Boll. Acc. Gioenia*; (2), fasc. VII, marzo 1909 — *Annuario della R. Univ. di Catania*, 1908-09.
40. Sulle forme più semplici degli integrali delle equazioni differenziali del moto d'un punto materiale. — *Atti del R. Ist. Veneto*; 1909-10, t. LXIX, parte 2^a.
41. Giuseppe Lauricella: cenno necrologico. — *Annuario della R. Univ. di Catania*, 1912-13.

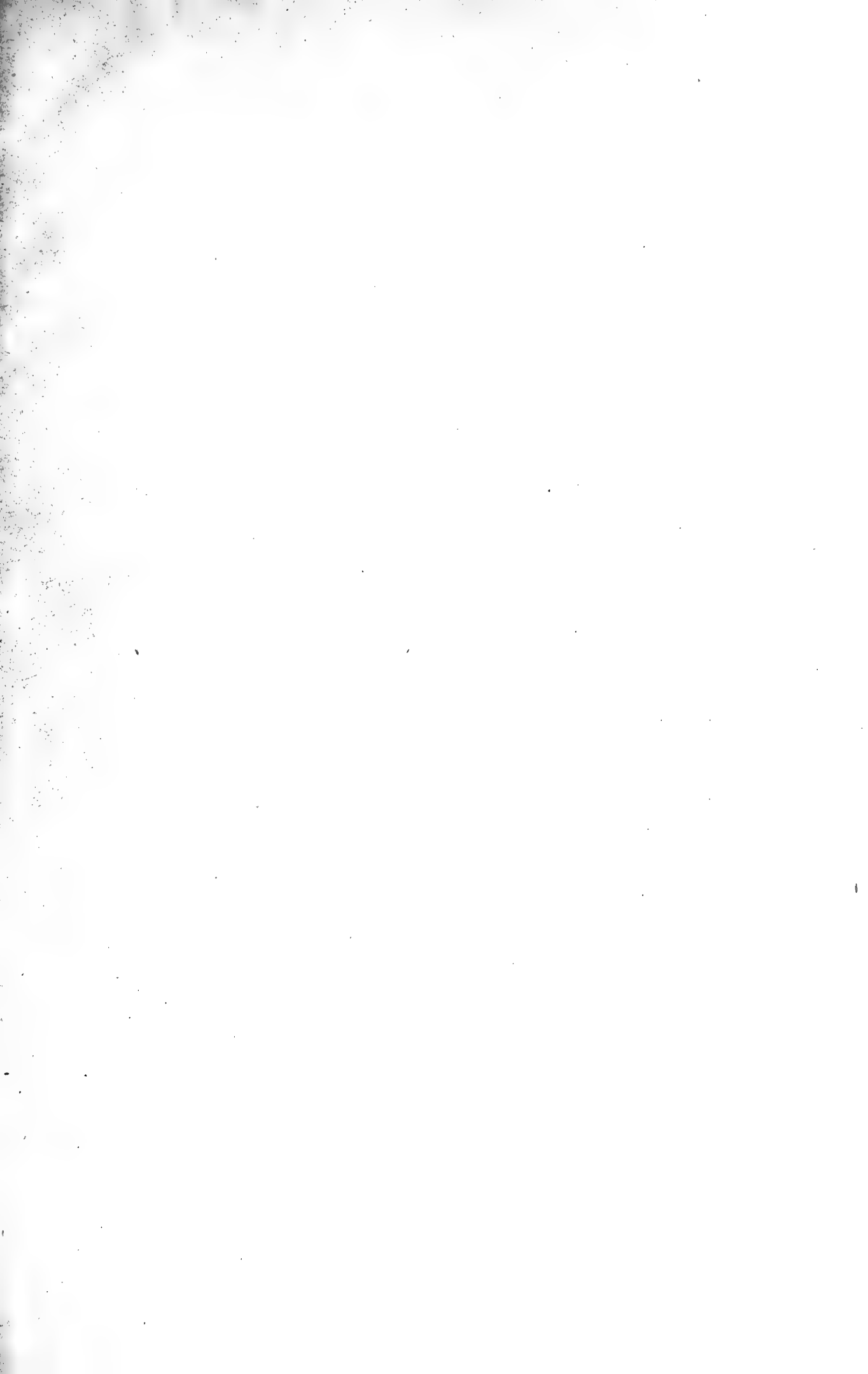
INDICE

MEMORIA

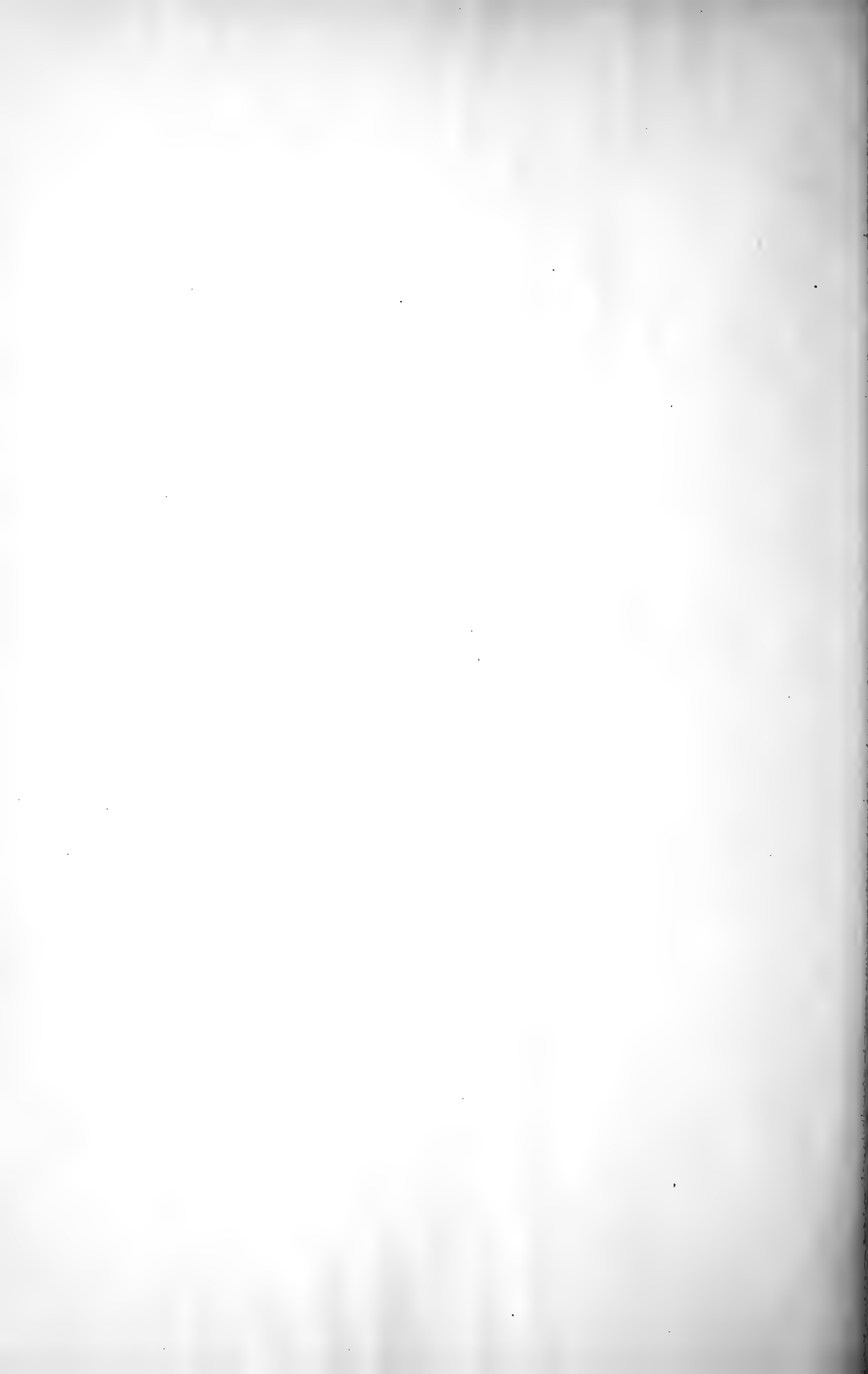
E. Daniele — <i>Sul problema dell' induzione magnetica</i>	I
A. Petrone — <i>Ancora poche parole sull' esistenza del nucleo nell' emasia adulta dei Mammiferi</i> (con esposizione di preparati).	II
A. Petrone — <i>Contributo all' etiogenesi dei neoplasmi in un caso raro di tumori dell' asse cerebro- spinale, con siringo ed idromielia, e con porencefalia e scoliosi congenite</i> (con esposizione di preparati)	III
G. Marletta — <i>Saggio di Geometria ad infinite dimensioni.</i>	IV
G. Aprile — <i>Su due complessi di rette, dell' S_3, d' ordine due e della terza specie.</i>	V
A. Serra — <i>Nuove osservazioni sugli acidi silicici del Tschermak</i> (con due figure nel testo). . . .	VI
G. Consoli — <i>Alterazioni della cellula nervosa nell' ipertermia sperimentale e nel colpo di calore.</i>	VII
E. Daniele — <i>Sul problema dell' induzione magnetica</i> (Nota II)	VIII
S. Comes — <i>Di alcune particolarità di struttura del cilindrasse della fibra nervosa periferica a doppio contorno e del loro possibile significato funzionale</i> (con 9 figure nel testo)	IX
G. Cutore — <i>Contributo allo studio della mucosa del seno mascellare.</i>	X
M. Condorelli Francaviglia — <i>Congiuntivite catarrale acuta in un militare provocata mediante l' uso di semi di ricino.</i>	XI
A. Russo — <i>Ulteriori ricerche su l' origine del deutolecite nell' ovo di Coniglia. (Natura microchi- mica dei granuli mitocondriali, dei globuli a struttura mielinica e del materiale che inveve la zona pellucida)</i> (con una tavola e due figure).	XII
M. Cipolla — <i>Il discriminante e il numero delle radici immaginarie di un' equazione algebrica a coefficienti reali.</i>	XIII
S. Comes — <i>Ulteriori ricerche sulla struttura della cellula cartilaginea dei Mammiferi</i> (con 3 fi- gure nel testo e una tavola).	XIV
E. Paci — <i>Sull' estinzione atmosferica al Monte Etna.</i>	XV
G. Scorza — <i>Sulla quartica di Klein e la quintica di Snyder.</i>	XVI
F. Caldarera — I. <i>Sui poli delle più semplici equazioni delle curve coniche</i> — II. <i>Semplicissima dimostrazione di alcune formole trigonometriche</i>	XVII
A. Serra — <i>Diorite orneblendica del Tempiese.</i>	XVIII
M. Cipolla — <i>Sullo sviluppo di un determinante secondo i minori di due matrici complementari.</i>	XIX
M. Cipolla — <i>Sulla determinazione della base canonica di un ideale in un corpo quadratico</i> . . .	XX
C. Severini — <i>Sul concetto d' integrale indefinito delle funzioni di più variabili</i>	XXI
A. Russo — <i>Esperimenti di pesca con luce subacquea</i> (con 5 figure nel testo).	XXII
G. D' Abundo — <i>Sopra una particolare neuropatia spasmodica con disturbo del linguaggio ar- ticolato</i>	XXIII
C. Severini — <i>Sul problema di Cauchy</i>	XXIV
M. Precchia — <i>Sopra l' algebra delle funzioni permutabili di 2^a specie.</i>	XXV

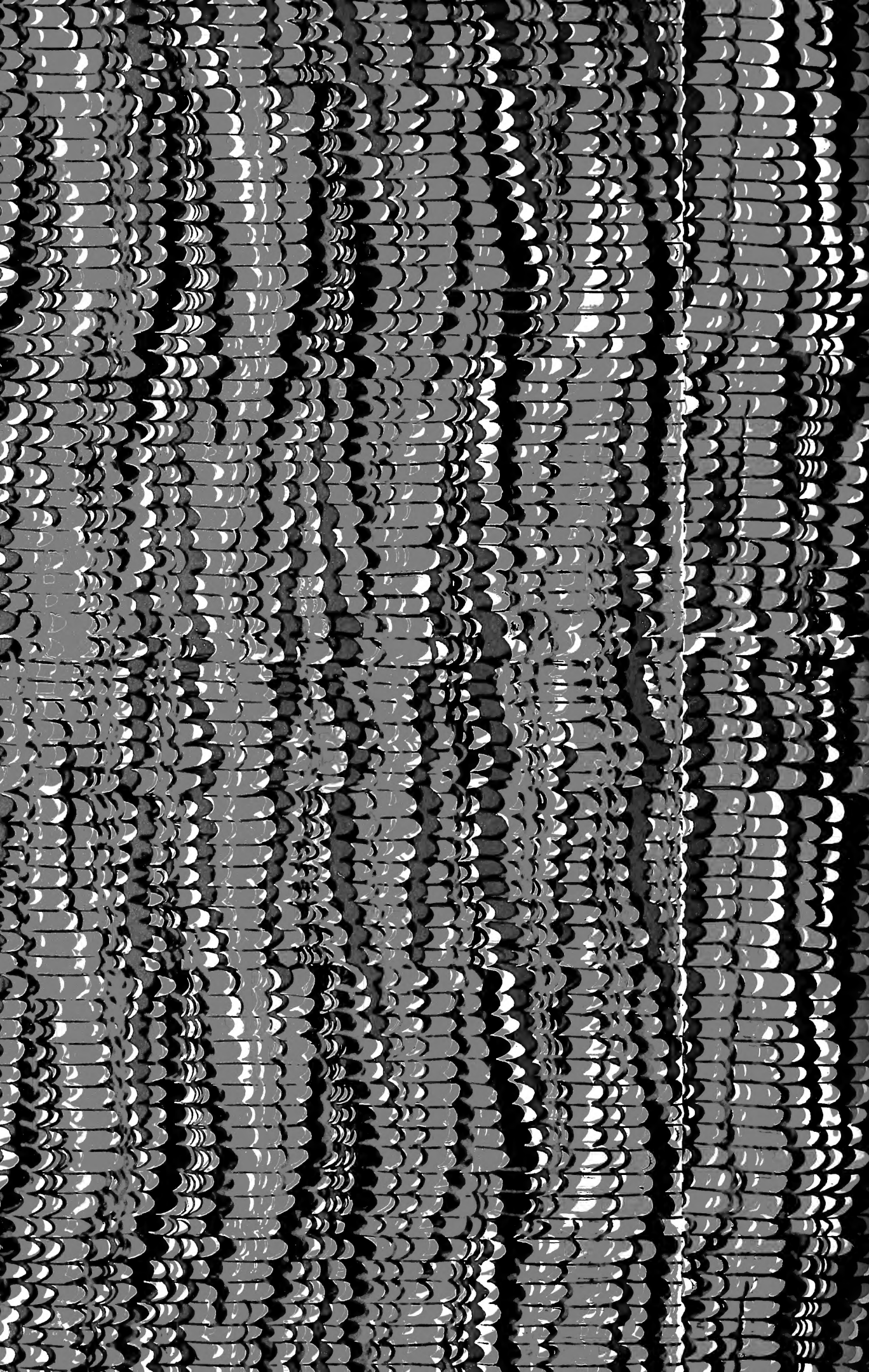
APPENDICE

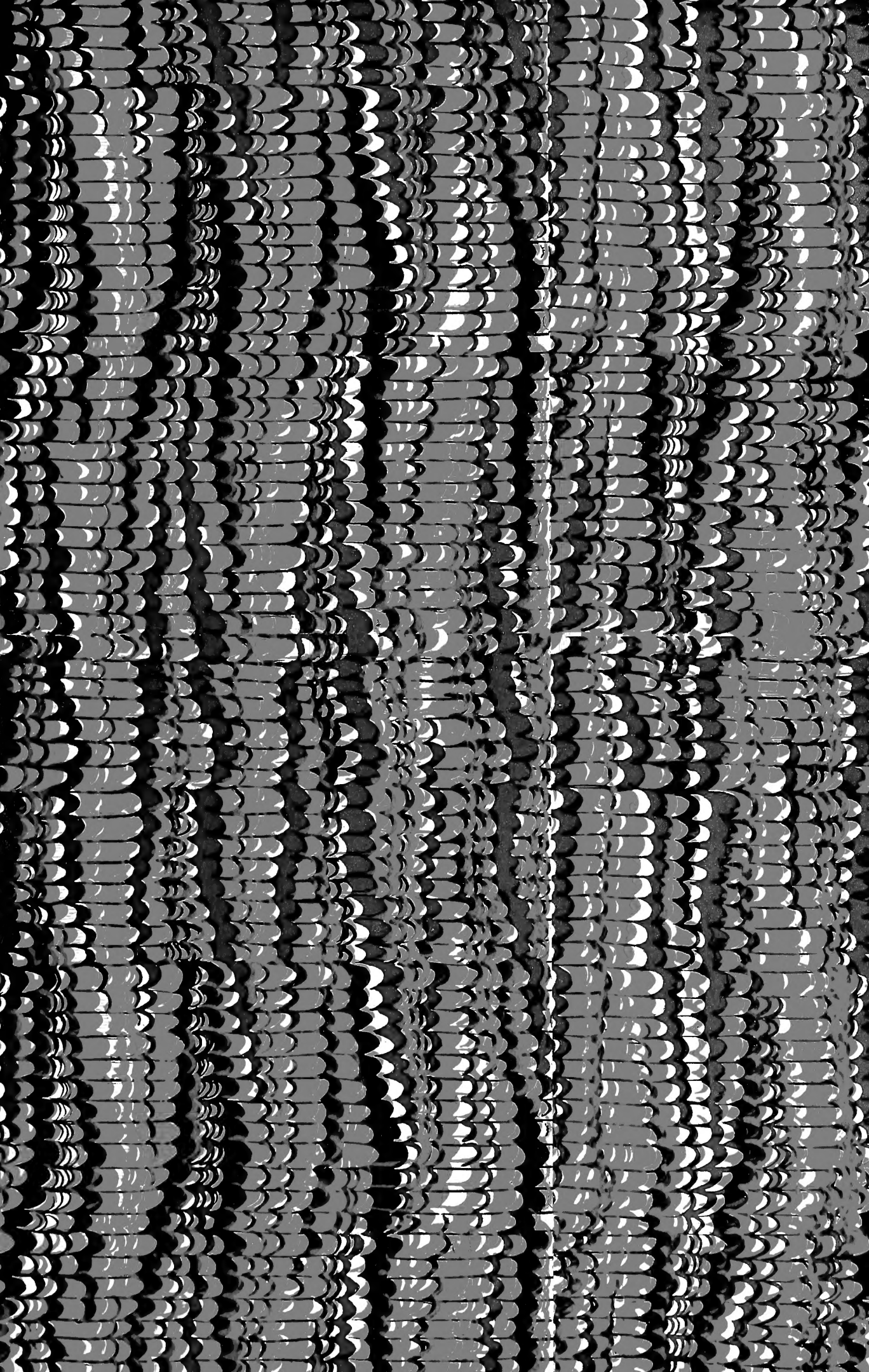
E. Daniele — *Necrologia di Giov. Pennacchiotti.*











SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES



3 9088 01315 7086