ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVI, DISP. 1ª, 1890-91

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME VIGESIMOSESTO

1890-91

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

Torino, Stamperia Reale della Ditta G B Paravia e C
824 (50C) 24 VIII-91.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 16 Novembre 1890.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Cossa, Bruno, Berruti, D'Ovidio, Ferraris, Naccari, Gibelli, Camerano, Segre e Basso Segretario.

Il Presidente apre questa prima seduta dell'anno accademico col porgere il ben venuto ai Soci, ed a nome di questi gli risponde, contraccambiando il saluto, il Socio Cossa, Direttore della Classe.

Il Segretario legge l'atto verbale dell'adunanza del 22 giugno p. p., che viene approvato.

Il Socio Cossa compie il gradito incarico di esprimere all'Accademia i ringraziamenti della imperiale Società mineralogica di Pietroburgo per le manifestazioni di simpatia trasmessele dall'Accademia stessa in occasione del 25° anniversario della Presidenza del Principe imperiale Nicola Maximilianowitch Romanowstky, Duca di Leuchtenberg.

Tra le molte pubblicazioni pervenute recentemente in dono all'Accademia sono segnalate le seguenti:

« *A Text book of Physiology* (Londra, 1888-89-90, parts I-III; in-8°); del Corrispondente M. Foster, Prof. nell'Università di Cambridge;

« Quattro Note stampate risguardanti analisi di acque minerali eseguite dal Corrispondente Dott. Remigio Fresenius in collaborazione col Prof. H. Fresenius di Wiesbaden: presentate dal Socio Cossa;

« Nota biografica (estratta dal Bollettino della Societa belga di Geologia) scritta dal Dott. F. Sacco sul compianto Socio Prof. Luigi Bellardi, del cui ritratto, disegnato dal Sig. Cav. Luigi Cantù, l'autore offre pure parecchie copie riprodotte in fototipia.

« Le comunicazioni e le letture si succedono nell'ordine che segue:

« Felice Casorati, *Cenno necrologico* del Socio D'Ovidio;

« *Effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Torino e per l'anno* 1891, *calcolate dall'Ingegnere Tomaso* Aschieri, Assistente all' Osservatorio di Torino »; presentate dal Socio Basso;

« *Sopra alcune deformazioni delle superficie rigate* »; Nota del Dott. M. Chini, presentata dal Socio Segre;

« *Un nuovo campo di ricerche geometriche* »: Nota IV dello stesso Socio Segre;

« *Ricerche intorno allo sviluppo ed alle cause del polimorfismo dei girini degli anfibî anuri* »: del Socio Camerano.

« *La legge di Roberts sul quadrilatero articolato* »; Nota dell'Ingegnere Giuseppe Pastore presentata dal Socio Ferraris;

Vengono ancora presentati due lavori, dei quali uno del Professore Federico Sacco, che ha per titolo: « *I molluschi* dei terreni terziarii del Piemonte e della Liguria; parte VIII (*Galeodoliideae*, *Doliideae*, *Siculideae* e *Naticideae*) »; l'altro, di cui sono autori i Dott. Fr. Sav. Monticelli e Cesare Crety, intitolato: « Ricerche intorno alla sottofamiglia delle *Solenophorinae* ».

Siccome gli autori di questi due lavori ne desiderano la pubblicazione nei volumi delle *Memorie*, il Presidente nomina due Commissioni perchè le esaminino e ne riferiscano alla Classe in una prossima adunanza.

LETTURE

FELICE CASORATI.

CENNO NECROLOGICO

del Socio E. D'OVIDIO.

A breve distanza dalla morte del compianto nostro Presidente GENOCCHI, un' altra grave perdita han fatto le scienze matematiche, e segnatamente l'Analisi, per la morte del Professore FELICE CASORATI, avvenuta l' 11 settembre di questo anno. Entrambi onoravano l'Italia con la profondità del sapere, col vigore dell'ingegno, con la doppia operosità di scrittore e d'insegnante. Anche del CASORATI la nostra Accademia porta il lutto, poichè lo contava fra' Soci corrispondenti dal 1880.

Il CASORATI è mancato immaturamente a 54 anni. L'animo nostro è doppiamente contristato, pensando ch' egli avrebbe potuto ancora per molti anni recar nuove contribuzioni alla scienza: unica consolazione il ricordare, che egli ha almeno potuto lavorare sino a pochi mesi avanti la sua dipartita, ed ha avuto la fortuna di non sapersi condannato, di non sentirsi morire a poco a poco.

Nacque il CASORATI a Pavia il 17 Dicembre 1835. Fece i suoi studi in quell'Università, dov'ebbe a maestro il *Brioschi*, a compagni il *Cremona*, il *Beltrami*, il *Cossa*, ai quali tutti era legato di intima amicizia. Divenne professore nella medesima Università nel 1857; dal 1861 era ordinario di Calcolo infinitesimale, e da molti anni insegnava anche l' Analisi superiore.

Coltivò con particolare predilezione l'Analisi, alla quale si riferisce la maggior parte delle sue pubblicazioni, che sommano a 50; non senza occuparsi di altri argomenti, come gli strumenti ottici e la teoria delle superficie.

Non sono in grado di fare ora l'enumerazione e la disamina di questi lavori: còmpito, che il Prof. *Brioschi* si è assunto e che assolverà con maggior diritto e competenza. Ma è noto a tutti che i lavori del Casorati spiccano per l'importanza delle questioni trattate, per la novità dei risultati, pel rigore dei concetti, per la esattezza bibliografica. La moderna teoria delle funzioni, sia secondo il metodo di *Riemann*, sia secondo quello di *Weierstrass*, egli possedeva maestrevolmente; al progresso di essa cooperò potentemente con le Memorie inserite nei periodici e nei volumi accademici, e ne promosse la diffusione fra noi con la pregevolissima *Teorica delle funzioni di variabili complesse*, della quale purtroppo non pubblicò che il primo volume: forse egli sentiva tutta la difficoltà che vi è a combattere e scrivere ad un tempo la storia del combattimento, o forse lo arrestarono gli ostacoli d'ogni maniera che pur oggi incontrano in Italia (giova sperare non sarà sempre così) gli scrittori di trattati scientifici pensati e scritti seriamente.

Felice Casorati, se fu da tutti i cultori delle discipline matematiche altamente stimato pel suo grande valore scientifico, fu altresì amato da tutti coloro che lo conobbero da vicino, per la squisita bontà dell'animo, per la cortese semplicità dei modi, per le stesse sue singolarità. Al Collega illustre, al gentile amico diamo, ammirati e dolenti, il saluto della mente e del cuore.

Effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Torino e per l'anno 1891,

calcolate dall'Ing. T. ASCHIERI, Assist. all'Osservatorio di Torino,

presentate dal Socio BASSO.

Gennaio 1891.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA						Età della Luna
		Il SOLE			La LUNA			
dell'Anno	del Mese	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
1	1	7 59	12 22 52,52	4 46	10 57*p.*	4 53*a.*	11 39*a.*	21
2	2	59	23 20,72	47	——	5 33	11 59	22
3	3	59	23 48,58	48	12 0*a.*	6 14	12 18*p.*	23
4	4	59	24 16,07	49	1 4	6 56	12 38	24
5	5	59	24 43,18	50	2 10	7 39	1 0	25
6	6	59	25 9,85	51	3 19	8 26	1 25	26
7	7	59	25 36,08	52	4 32	9 18	1 57	27
8	8	59	26 1,83	53	5 46	10 14	2 38	28
9	9	58	26 27,08	55	6 59	11 15	3 31	29
10	10	58	26 51,78	56	8 5	12 19*p.*	4 36	30
11	11	58	27 15,90	57	8 59	1 23	5 51	1
12	12	57	27 39,41	58	9 43	2 24	7 13	2
13	13	57	28 2,30	59	10 17	3 21	8 35	3
14	14	56	28 24,53	5 1	10 46	4 15	9 55	4
15	15	56	28 46,08	2	11 11	5 5	11 11	5
16	16	55	29 6,92	3	11 24	5 53	——	6
17	17	54	29 27,06	4	11 58	6 41	12 26*a.*	7
18	18	54	29 46,46	6	12 22*p.*	7 29	1 38	8
19	19	53	30 5,12	7	12 51	8 18	2 49	9
20	20	53	30 23,03	8	1 22	9 9	3 58	10
21	21	52	30 40,16	10	2 1	10 0	5 5	11
22	22	51	30 56,52	11	2 46	10 53	6 6	12
23	23	50	31 12,10	12	3 38	11 42	7 0	13
24	24	49	31 26,87	14	4 36	——	7 46	14
25	25	48	31 40,86	15	5 38	12 34*a.*	8 23	15
26	26	47	31 54,05	16	6 42	1 22	8 54	16
27	27	46	32 6,42	18	7 45	2 7	9 20	17
28	28	45	32 18,00	19	8 47	2 49	9 43	18
29	29	44	32 28,77	21	9 50	3 31	10 3	19
30	30	43	32 38,74	22	10 53	4 11	10 22	20
31	31	42	32 47,89	24	11 56	4 52	10 41	21

FASI DELLA LUNA

3	Ultimo quarto	11^h 2^m *ant.*
10	Luna nuova	4 14 *pom.*
17	Primo quarto	7 7 *ant.*
25	Luna piena	1 15 *ant.*

Il giorno nel mese cresce di 0^h 55^m

12 La Luna è in Perigeo 3^h *ant.*
27 Id. Apogeo 5 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Aquario* il giorno 20 ad ore 8 m. 8 *ant.*

Febbraio 1891.

GIORNO dell'Anno	GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Il SOLE nasce	Il SOLE passa al meridiano	Il SOLE tramonta	La LUNA nasce	La LUNA passa al meridiano	La LUNA tramonta	Età della Luna
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
32	1	7 41	12 32 56,25	5 25	——	5 34*a.*	11 2*a.*	22
33	2	40	33 3,81	26	1 2*a.*	6 18	11 25	23
34	3	39	33 10,56	28	2 11	7 5	11 53	24
35	4	38	33 16,52	29	3 23	7 58	12 27*p.*	25
36	5	36	33 21,69	31	4 35	8 55	1 12	26
37	6	35	33 26,07	32	5 43	9 56	2 10	27
38	7	33	33 29,64	34	6 42	11 0	3 11	28
39	8	32	33 32,42	35	7 32	12 3*p.*	4 41	29
40	9	31	33 34,41	37	8 12	1 4	6 5	1
41	10	29	33 35,59	38	8 43	2 1	7 29	2
42	11	28	33 35,99	39	9 11	2 54	8 50	3
43	12	27	33 35,61	41	9 36	3 45	10 8	4
44	13	25	33 34,45	42	10 0	4 35	11 24	5
45	14	23	33 32,53	44	10 24	5 24	——	6
46	15	22	33 29,85	46	10 52	6 14	12 39*a.*	7
47	16	21	33 26,42	47	11 23	7 5	1 50	8
48	17	19	33 22,27	48	11 59	7 57	2 58	9
49	18	17	33 17,39	49	12 42*p.*	8 49	4 2	10
50	19	16	33 11,82	51	1 33	9 41	4 57	11
51	20	14	33 5,56	52	2 29	10 31	5 45	12
52	21	12	32 58,64	53	3 30	11 19	6 25	13
53	22	11	32 51,05	55	4 33	——	6 57	14
54	23	9	32 42,83	56	5 36	12 5*a.*	7 24	15
55	24	7	32 34,00	58	6 40	12 48	7 48	16
56	25	6	32 24,57	59	7 43	1 30	8 8	17
57	26	5	32 14,56	6 1	8 45	2 10	8 27	18
58	27	3	32 4,00	2	9 47	2 51	8 46	19
59	28	1	31 52,92	4	10 53	3 32	9 6	20

FASI DELLA LUNA.

2	Ultimo quarto	5^h	32^m *ant.*
9	Luna nuova	3	2 *ant.*
15	Primo quarto	7	19 *pom.*
23	Luna piena	8	8 *pom.*

Il giorno nel mese cresce di 1^h 21^m

9 La Luna è in Perigeo 2^o *pom.*
23 Id. Apogeo 7 *ant.*

Il Sole entra nel segno *Pesci* il giorno 18 ad ore 10 m. 36 *pom.*

Marzo 1891.

GIORNO dell'Anno	GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Il SOLE nasce	Il SOLE passa al meridiano			Il SOLE tramonta	La LUNA nasce	La LUNA passa al meridiano	La LUNA tramonta	Età della Luna
		h	h	m	s	h m	h m	h m	h m	
60	1	6 58	12	31	41, 32	6 5	——	4 14*a.*	9 27*a.*	21
61	2	57		31	29, 22	7	12 0*a.*	5 0	9 53	22
62	3	55		31	16, 66	8	1 9	5 49	10 23	23
63	4	53		31	3, 65	9	2 19	6 42	11 3	24
64	5	51		30	50, 20	11	3 27	7 40	11 53	25
65	6	50		30	36, 34	12	4 28	8 41	12 55*p.*	26
66	7	48		30	22, 08	13	5 20	9 42	2 9	27
67	8	46		30	7, 43	15	6 3	10 43	3 31	28
68	9	44		29	52, 40	16	6 38	11 41	4 55	29
69	10	42		29	37, 03	17	7 8	12 37*p.*	6 19	30
70	11	41		29	21, 32	18	7 34	1 30	7 41	1
71	12	39		29	5, 29	20	7 59	2 22	9 0	2
72	13	37		28	48, 94	21	8 24	3 13	10 18	3
73	14	35		28	32, 31	22	8 50	4 5	11 34	4
74	15	33		28	15, 41	24	9 21	4 57	——	5
75	16	31		27	58, 27	25	9 56	5 50	12 47*a.*	6
76	17	29		27	40, 89	26	10 38	6 44	1 53	7
77	18	27		27	23, 31	27	11 27	7 36	2 53	8
78	19	26		27	5, 53	29	12 22*p.*	8 27	3 44	9
79	20	24		26	47, 58	30	1 22	9 16	4 26	10
80	21	22		26	29, 49	31	2 24	10 3	5 1	11
81	22	20		26	11, 27	33	3 28	10 47	5 29	12
82	23	18		25	52, 95	34	4 31	11 29	5 53	13
83	24	16		25	34, 55	35	5 34	——	6 14	14
84	25	14		25	16, 10	36	6 37	12 9*a.*	6 34	15
85.	26	12		24	57, 62	38	7 40	12 50	6 52	16
86	27	10		24	49, 13	39	8 45	1 31	7 11	17
87	28	9		24	20, 65	40	9 52	2 13	7 32	18
88	29	7		24	2, 22	41	11 0	2 58	7 56	19
89	30	4		23	43, 85	43	——	3 45	8 25	20
90	31	3		23	25, 56	44	12 10*a.*	4 37	9 0	21

FASI DELLA LUNA.

3	Ultimo quarto	8h	27m	*pom.*
10	Luna nuova	12	40	*pom.*
17	Primo quarto	10	0	*ant.*
25	Luna piena	2	2	*pom.*

Il giorno nel mese cresce di 1h 38m

10 La Luna è in Perigeo 2h *ant.*
22 Id. Apogeo 11 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Ariete* il giorno 20 ad ore 10 m. 13 *pom.*

Aprile 1891.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA						Età della Luna
		Il SOLE			La LUNA			
dell'Anno	del Mese	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
91	1	6 1	12 23 7,38	6 45	1 18*a.*	5 32*a.*	9 45*a.*	22
92	2	5 59	22 49,32	46	2 20	6 30	10 42	23
93	3	57	22 31,42	48	3 15	7 30	11 49	24
94	4	56	22 13,67	49	4 0	8 29	1 5*p.*	25
95	5	54	21 56,09	50	4 35	9 26	2 26	26
96	6	52	21 38,72	52	5 6	10 21	3 48	27
97	7	50	21 21,55	53	5 33	11 15	5 9	28
98	8	48	21 4,61	54	5 57	12 7*p.*	6 30	29
99	9	46	20 47,90	55	6 22	12 58	7 50	1
100	10	45	20 31,45	57	6 48	1 50	9 8	2
101	11	43	20 15,26	58	7 17	2 44	10 25	3
102	12	41	19 59,36	59	7 50	3 38	11 38	4
103	13	39	19 43,74	7 0	8 30	4 33	——	5
104	14	38	19 28,43	2	9 17	5 28	12 43*a.*	6
105	15	36	19 13,45	3	10 11	6 21	1 39	7
106	16	34	18 58,79	4	11 11	7 11	2 25	8
107	17	33	18 44,48	6	12 13*p.*	7 59	3 3	9
108	18	31	18 30,53	7	1 17	8 44	3 33	10
109	19	29	18 16,97	8	2 21	9 26	3 58	11
110	20	27	18 3,80	9	3 24	10 7	4 20	12
111	21	25	17 51,04	11	4 27	10 48	4 40	13
112	22	23	17 38,71	12	5 30	11 29	4 58	14
113	23	22	17 26,82	13	6 35	——	5 17	15
114	24	21	17 15,39	14	7 42	12 11*a.*	5 37	16
115	25	19	17 4,44	15	8 51	12 55	5 59	17
116	26	17	16 53,98	17	10 2	1 43	6 27	18
117	27	16	16 44,02	18	11 11	2 33	7 0	19
118	28	14	16 34,58	19	——	3 28	7 42	20
119	29	13	16 25,65	20	12 16*a.*	4 25	8 35	21
120	30	11	16 17,27	22	1 12	5 24	9 38	22

FASI DELLA LUNA.

2 Ultimo quarto	7^h 20^m	*ant.*
8 Luna nuova	9 47	*pom.*
16 Primo quarto	2 30	*ant.*
24 Luna piena	5 55	*ant.*

Il giorno nel mese cresce di 1^h 30^m

7 La Luna è in Perigeo 11^h *ant.*
19 Id. Apogeo 1 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Toro* il giorno 20 ad ore 10 m. 3 *ant.*

Maggio 1891.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA													
		Il SOLE							**La LUNA**						
dell'Anno	del Mese	nasce		passa al meridiano			tramonta		nasce		passa al meridiano		tramonta		Età della Luna
		h	m	h	m	s	h	m	h	m	h	m	h	m	
121	1	5	10	12	16	9,44	7	23	2	0*a.*	6	22*a.*	10	51*a.*	23
122	2		8		16	2,17		24	2	37	7	19	12	8*p.*	24
123	3		7		15	55,46		25	3	8	8	13	1	27	25
124	4		5		15	49,30		27	3	34	9	5	2	46	26
125	5		4		15	43,72		28	3	59	9	55	4	5	27
126	6		3		15	38,73		29	4	22	10	45	5	23	28
127	7		1		15	34,29		30	4	47	11	36	6	42	29
128	8		0		15	30,44		31	5	14	12	29*p.*	8	0	1
129	9	4	59		15	27,15		33	5	44	1	23	9	15	2
130	10		57		15	24,44		34	6	21	2	19	10	26	3
131	11		56		15	22,30		35	7	6	3	15	11	28	4
132	12		55		15	20,72		36	7	58	4	10	——		5
133	13		53		15	19,70		37	8	56	5	3	12	19*a.*	6
134	14		52		15	19,23		38	10	0	5	52	1	1	7
135	15		51		15	19,32		40	11	4	6	39	1	34	8
136	16		50		15	19,95		41	12	7*p.*	7	23	2	1	9
137	17		49		15	21,13		42	1	11	8	4	2	24	10
138	18		48		15	22,86		43	2	14	8	45	2	44	11
139	19		47		15	25,13		44	3	18	9	25	3	3	12
140	20		46		15	27,92		45	4	21	10	7	3	22	13
141	21		45		15	31,25		46	5	28	10	50	3	42	14
142	22		44		15	35,12		47	6	37	11	36	4	3	15
143	23		43		15	39,51		48	7	48	——		4	28	16
144	24		42		15	44,42		49	8	59	12	27*a.*	4	59	17
145	25		41		15	49,84		50	10	8	1	21	5	38	18
146	26		40		15	55,77		51	11	9	2	19	6	28	19
147	27		40		16	2,10		52	11	58	3	18	7	30	20
148	28		39		16	9,11		53	——		4	17	8	40	21
149	29		39		16	16,50		54	12	40*a*	5	15	9	57	22
150	30		38		16	24,36		55	1	12	6	9	11	15	23
151	31		37		16	32.67		56	1	39	7	1	12	33*p.*	24

FASI DELLA LUNA.

1	Ultimo quarto	2^h	41^m	*pom.*
8	Luna nuova	7	5	*ant.*
15	Primo quarto	7	54	*pom.*
23	Luna piena	7	16	*pom.*
30	Ultimo quarto	7	44	*pom.*

Il giorno nel mese cresce di $1^h\ 8^m$

5 La Luna è in Perigeo 10^h *pom.*
17 Id. Apogeo 7 *ant.*
31 Id. Perigeo 10 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Gemelli* il giorno 21 ad ore 9 m. 56 *ant.*

Giugno 1891.

GIORNO dell'Anno	GIORNO del mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Il SOLE nasce	Il SOLE passa al meridiano	Il SOLE tramonta	La LUNA nasce	La LUNA passa al meridiano	La LUNA tramonta	Età della Luna
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
152	1	4 37	12 16 41,42	7 57	2 4*a.*	7 51*a.*	1 49*p.*	25
153	2	36	16 50,59	58	2 27	8 40	3 5	26
154	3	36	17 0,17	59	2 49	9 28	4 22	27
155	4	35	17 10,13	59	3 14	10 19	5 39	28
156	5	35	17 20,47	8 0	3 42	11 11	6 54	29
157	6	35	17 31,14	1	4 15	12 5*p.*	8 7	30
158	7	34	17 42,12	1	4 56	1 1	9 13	1
159	8	34	17 53,40	2	5 45	1 57	10 10	2
160	9	33	18 4,94	2	6 42	2 52	10 56	3
161	10	33	18 16,72	3	7 44	3 44	11 33	4
162	11	33	18 28,71	4	8 49	4 32	—	5
163	12	33	18 40,90	4	9 54	5 17	12 3*a.*	6
164	13	32	18 53,25	5	10 57	5 59	12 28	7
165	14	32	19 5,75	5	12 0*p.*	6 40	12 48	8
166	15	32	19 18,38	6	1 3	7 20	1 8	9
167	16	32	19 31,11	6	2 6	8 1	1 26	10
168	17	32	19 43,91	6	3 12	8 43	1 44	11
169	18	32	19 56,76	7	4 18	9 28	2 6	12
170	19	33	20 9,66	7	5 29	10 16	2 29	13
171	20	33	20 22,58	7	6 41	11 9	2 57	14
172	21	33	20 35,49	8	7 53	—	3 32	15
173	22	34	20 48,38	8	8 59	12 7*a.*	4 19	16
174	23	34	21 1,23	8	9 54	1 7	5 17	17
175	24	34	21 14,01	8	10 39	2 8	6 27	18
176	25	34	21 26,70	8	11 14	3 8	7 44	19
177	26	35	21 39,29	8	11 44	4 5	9 3	20
178	27	35	21 51,77	8	—	4 58	10 22	21
179	28	36	22 4,10	8	12 9*a.*	5 48	11 39	22
180	29	36	22 16,26	8	12 32	6 37	12 56*p.*	23
181	30	37	22 28,25	8	12 54	7 25	2 11	24

FASI DELLA LUNA.

6	Luna nuova	5^h 16^m *pom.*
14	Primo quarto	1 24 *pom.*
22	Luna piena	6 2 *ant.*
29	Ultimo quarto	12 6 *ant.*

Il giorno nel mese cresce di 0^h 12^m

14 La Luna è in Apogeo 2 *ant.*
26 Id. Perigeo 6 *ant.*

Il Sole entra nel segno *Cancro* il giorno 21 ad ore 6 m. 1 *pom.*

Luglio 1891.

GIORNO dell'Anno	GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Il SOLE nasce	Il SOLE passa al meridiano	Il SOLE tramonta	La LUNA nasce	La LUNA passa al meridiano	La LUNA tramonta	Età della Luna
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
182	1	4 37	12 22 40,02	8 8	1 18*a.*	8 14*a.*	3 25*p.*	25
183	2	38	22 51,57	8	1 43	9 5	4 39	26
184	3	38	23 2,86	7	2 15	9 58	5 52	27
185	4	39	23 13,88	7	2 52	10 52	7 1	28
186	5	40	23 24,59	7	3 37	11 47	8 0	29
187	6	40	23 34,96	7	4 31	12 42*p.*	8 50	1
188	7	41	23 44,98	6	5 31	1 35	9 31	2
189	8	42	23 54,63	6	6 34	2 25	10 4	3
190	9	42	24 3,87	5	7 40	3 11	10 30	4
191	10	43	24 12,68	5	8 45	3 55	10 52	5
192	11	44	24 21,06	4	9 48	4 36	11 12	6
193	12	45	24 28,98	3	10 50	5 16	11 30	7
194	13	46	24 36,42	3	11 53	5 56	11 48	8
195	14	47	24 43,37	2	12 56*p.*	6 37	—	9
196	15	48	24 49,82	1	2 1	7 20	12 7*a.*	10
197	16	48	24 55,76	1	3 9	8 6	12 30	11
198	17	49	25 1,17	0	4 20	8 56	12 55	12
199	18	50	25 6,04	7 59	5 32	9 51	1 26	13
200	19	51	25 10,36	58	6 40	10 50	2 8	14
201	20	52	25 14,14	57	7 41	11 52	3 0	15
202	21	53	25 17,36	56	8 31	—	4 6	16
203	22	54	25 20,01	55	9 12	12 54*a.*	5 21	17
204	23	55	25 22,08	54	9 45	1 54	6 43	18
205	24	56	25 23,59	53	10 12	2 50	8 6	19
206	25	57	25 24,54	52	10 35	3 43	9 26	20
207	26	59	25 24,91	51	10 59	4 33	10 44	21
208	27	5 0	25 24,71	50	11 22	5 23	12 1*p.*	22
209	28	1	25 23,93	49	11 47	6 12	1 16	23
210	29	2	25 22,59	48	—	7 2	2 30	24
211	30	3	25 20,66	47	12 17*a.*	7 53	3 44	25
212	31	4	25 18,14	45	12 51	8 47	4 52	26

FASI DELLA LUNA.

6 Luna nuova 4h 49m *ant.*

14 Primo quarto 6 19 *ant.*

21 Luna piena 2 44 *pom.*

28 Ultimo quarto 5 23 *ant.*

Il giorno nel mese diminuisce di 0h 50m.

11 La Luna è in Apogeo 8h *pom.*

23 Id. Perigeo 5 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Leone* il giorno 22 ad ore 11 m. 20 *pom.*

Agosto 1891.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA						Età della Luna
		Il SOLE			La LUNA			
dell'Anno	del Mese	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
213	1	5 5	12 25 15,03	7 44	1 33*a*	9 41*a.*	5 54*p.*	27
214	2	6	25 11,34	43	2 23	10 36	6 47	28
215	3	7	25 7,05	41	3 21	11 29	7 30	29
216	4	9	25 2,15	40	4 23	12 19*p.*	8 4	30
217	5	10	24 56,64	38	5 28	1 7	8 32	1
218	6	11	24 50,54	37	6 34	1 51	8 56	2
219	7	12	24 43,84	36	7 37	2 33	9 16	3
220	8	13	24 36,53	35	8 40	3 14	9 45	4
221	9	15	24 28,64	33	9 42	3 53	9 53	5
222	10	16	24 20,14	32	10 45	4 33	10 11	6
223	11	17	24 11,06	30	11 49	5 14	10 31	7
224	12	18	24 1,40	28	12 54*p.*	5 58	10 55	8
225	13	19	23 51,17	27	2 2	6 45	11 22	9
226	14	20	23 40,38	25	3 12	7 37	11 58	10
227	15	22	23 29,02	24	4 21	8 33	——	11
228	16	23	23 17,12	22	5 25	9 33	12 44*a.*	12
229	17	24	23 4,69	20	6 20	10 35	1 43	13
230	18	25	22 51,73	19	7 5	11 36	2 54	14
231	19	26	22 38,26	17	7 41	——	4 14	15
232	20	28	22 24,31	16	8 11	12 35*a.*	5 38	16
233	21	29	22 9,89	14	8 37	1 31	7 2	17
234	22	30	21 55,01	12	9 1	2 24	8 24	18
235	23	31	21 39,69	11	9 24	3 15	9 44	19
236	24	32	21 23,95	9	9 49	4 6	11 2	20
237	25	34	21 7,82	7	10 18	4 57	12 19*p.*	21
238	26	35	20 51,30	6	10 51	5 49	1 35	22
239	27	36	20 34,40	4	11 31	6 43	2 46	23
240	28	37	20 17,15	2	——	7 37	3 50	24
241	29	38	19 59,56	0	12 19*a.*	8 32	4 45	25
242	30	40	19 41,63	6 58	1 14	9 25	5 30	26
243	31	41	19 23,37	57	2 15	10 16	6 7	27

FASI DELLA LUNA.

4 Luna nuova	6^h	2^m *pom.*
12 Primo quarto	10	1 *pom.*
19 Luna piena	10	18 *pom.*
26 Ultimo quarto	12	59 *pom.*

Il giorno nel mese diminuisce di 1^h 25^m.

8 La Luna è in Apogeo 11^h *ant.*
20 Id. Perigeo 10 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Vergine* il giorno 23 ad ore 12 m. 4 *pom.*

Settembre 1891.

GIORNO dell'Anno	GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Il SOLE nasce (h m)	Il SOLE passa al meridiano (h m s)	Il SOLE tramonta (h m)	La LUNA nasce (h m)	La LUNA passa al meridiano (h m)	La LUNA tramonta (h m)	Età della Luna
244	1	5 42	12 18 4,81	6 55	3 19*a*	11 4*a.*	6 36*p.*	28
245	2	43	18 45,95	53	4 25	11 49	7 1	29
246	3	44	18 26,80	51	5 31	12 32*p.*	7 22	1
247	4	46	18 7,40	49	6 32	1 12	7 40	2
248	5	47	17 47,74	47	7 34	1 52	7 58	3
249	6	48	17 27,86	45	8 37	2 32	8 16	4
250	7	49	17 7,75	44	9 40	3 12	8 35	5
251	8	50	16 47,45	42	10 44	3 55	8 57	6
252	9	52	16 26,95	40	11 50	4 40	9 22	7
253	10	53	16 6,28	38	12 58*p.*	5 28	9 54	8
254	11	54	15 45,48	36	2 6	6 21	10 4	9
255	12	55	15 24,53	34	3 11	7 18	11 25	10
256	13	56	15 3,47	32	4 9	8 17	——	11
257	14	58	14 42,32	30	4 56	9 17	12 30*a.*	12
258	15	59	14 21,10	28	5 36	10 16	1 44	13
259	16	6 0	13 59,83	27	6 8	11 13	3 6	14
260	17	1	13 38,52	25	6 35	——	4 30	15
261	18	2	13 17,21	23	7 0	12 8*a.*	5 53	16
262	19	4	12 55,92	21	7 24	1 1	7 16	17
263	20	5	12 34,69	19	7 49	1 53	8 38	18
264	21	6	12 13,53	17	8 17	2 46	10 0	19
265	22	7	11 52,47	15	8 48	3 40	11 19	20
266	23	8	11 31,54	13	9 27	4 35	12 34*p.*	21
267	24	10	11 10,75	11	10 13	5 31	1 43	22
268	25	11	10 50,13	9	11 7	6 27	2 42	23
269	26	12	10 29,68	8	——	7 22	3 31	24
270	27	13	10 9,43	6	12 7*a.*	8 13	4 9	25
271	28	14	9 49,41	4	1 11	9 2	4 41	26
272	29	16	9 29,61	2	2 16	9 48	5 7	27
273	30	17	9 10,07	0	3 21	10 31	5 28	28

FASI DELLA LUNA.

3 Luna nuova	9^h	6^m	*ant.*
11 Primo quarto	11	57	*ant.*
12 Luna piena	5	54	*ant.*
24 Ultimo quarto	11	57	*pom.*.

Il giorno nel mese diminuisce di 1^h 33^m.

4 La Luna è in Apogeo 9^h *pom.*
18 Id. Perigeo 8 *ant.*

Il Sole entra nel segno *Libra* il giorno 23 ad ore 9 m. 3 *ant.*

Ottobre 1891.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA														Età della Luna
		Il SOLE							La LUNA							
dell'Anno	del Mese	nasce		passa al meridiano			tramonta		nasce		passa al meridiano		tramonta			
		h	m	h	m	s	h	m	h	m	h	m	h	m		
274	1	6	18	12	8	50,81	5	58	4	24*a.*	11	12*a*	5	47*p.*		29
275	2		19		8	31,84		56	5	27	11	52	6	5		30
276	3		21		8	13,18		54	6	29	12	31*p.*	6	22		1
277	4		23		7	54,84		52	7	33	1	11	6	41		2
278	5		24		7	36,85		51	8	36	1	53	7	2		3
279	6		25		7	19,23		49	9	42	2	37	7	25		4
280	7		26		7	1,98		47	10	50	3	25	7	54		5
281	8		27		6	45,14		45	11	57	4	15	8	30		6
282	9		28		6	28,71		43	1	3*p*	5	10	9	17		7
283	10		29		6	12,71		42	2	1	6	6	10	13		8
284	11		31		5	57,16		40	2	51	7	4	11	22		9
285	12		32		5	42,07		38	3	32	8	2	—			10
286	13		33		5	27,46		36	4	6	8	58	12	39*a.*		11
287	14		34		5	13,36		35	4	35	9	52	2	0		12
288	15		36		4	59,77		33	5	0	10	45	3	22		13
289	16		37		4	46,74		31	5	23	11	37	4	43		14
290	17		39		4	34,29		29	5	47	—		6	6		15
291	18		40		4	22,43		28	6	13	12	30*a.*	7	29		16
292	19		41		4	11,18		26	6	44	1	24	8	52		17
293	20		43		4	0,58		24	7	19	2	20	10	12		18
294	21		44		3	50,63		23	8	4	3	17	11	26		19
295	22		45		3	41,36		21	8	56	4	16	12	33*p.*		20
296	23		47		3	32,78		19	9	56	5	13	1	27		21
297	24		48		3	24,90		18	11	0	6	7	2	10		22
298	25		49		3	17,74		16	—		6	58	2	44		23
299	26		51		3	11,32		14	12	5*a.*	7	45	3	12		24
300	27		52		3	3,64		13	1	11	8	29	3	34		25
301	28		54		3	0,72		11	2	14	9	11	3	54		26
302	29		55		2	56,56		10	3	18	9	51	4	12		27
303	30		56		2	53,18		8	4	20	10	21	4	29		28
304	31		58		2	50,60		7	5	23	11	10	4	48		29

FASI DELLA LUNA.

3	Luna nuova	1^h 48^m	*ant.*
10	Primo quarto	11 47	*pom.*
17	Luna piena	2 35	*pom.*
24	Ultimo quarto	2 46	*pom.*

Il giorno nel mese diminuisce di 1^h 34^m.

1 La Luna è in Apogeo 11^h *pom.*
16 Id. Perigeo 7 *pom.*
29 Id. Apogeo 5 *ant.*

Il Sole entra nel segno *Scorpione* il giorno 23 ad ore 5 m. 28 *pom.*

Novembre 1891.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA						Età della Luna
		Il SOLE			**La LUNA**			
dell'Anno	del Mese	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
305	1	6 59	12 2 48,80	5 6	6 27*a.*	11 52*a.*	5 7*p*	30
306	2	7 1	2 47,80	4	7 32	12 35*p.*	5 29	1
307	3	2	2 47,62	3	8 42	1 22	5 56	2
308	4	3	2 48,25	1	9 50	2 12	6 30	3
309	5	5	2 49,69	0	10 57	3 5	7 12	4
310	6	6	2 51,95	4 59	11 57	4 1	8 7	5
311	7	7	2 55,03	58	12 49*p.*	4 58	9 11	6
312	8	9	2 58,94	56	1 32	5 55	10 23	7
313	9	10	3 3,66	55	2 7	6 50	11 40	8
314	10	12	3 9,20	54	2 36	7 42	—	9
315	11	13	3 15,58	53	3 1	8 33	12 58*a.*	10
316	12	14	3 22,77	52	3 24	9 24	2 18	11
317	13	16	3 30,80	51	3 47	10 15	3 37	12
318	14	17	3 39,67	49	4 11	11 7	4 58	13
319	15	19	3 49,38	48	4 39	—	6 20	14
320	16	20	3 59,84	47	5 11	12 2*a*	7 42	15
321	17	21	4 11,35	47	5 52	12 59	9 1	16
322	18	23	4 23,59	46	6 41	1 58	10 13	17
323	19	24	4 36,67	46	7 39	2 57	11 15	18
324	20	25	4 50,58	45	8 44	3 55	12 5*p.*	19
325	21	27	5 5,23	44	9 51	4 49	12 44	20
326	22	28	5 20,89	43	10 58	5 39	1 14	21
327	23	29	5 37,26	42	—	6 25	1 39	22
328	24	30	5 54,42	42	12 3*a.*	7 8	1 59	23
329	25	32	6 12,38	41	1 6	7 58	2 18	24
330	26.	33	6 31,10	40	2 9	8 28	2 35	25
331	27	34	6 50,59	39	3 12	9 7	2 53	26
332	28	35	7 9,80	39	4 15	9 58	3 12	27
333	29	37	7 31,63	38	5 21	10 31	3 33	28
334	30	38	7 53,37	38	6 29	11 17	3 58	29

FASI DELLA LUNA.

1	Luna nuova	7h	22m	*pom.*
9	Primo quarto	9	36	*ant.*
16	Luna piena	1	6	*ant.*
23	Ultimo quarto	9	16	*ant.*

Il giorno nel mese diminuisce di 1h 9m.

14 La Luna è in Perigeo 3h *ant.*
25 Id. Apogeo 10 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Sagittario* il giorno 22 ad ore 2 m. 33 *ant.*

Dicembre 1891.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA						Età della Luna
		Il SOLE			La LUNA			
dell'Anno	del Mese	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
335	1	7 39	12 8 15,68	4 37	7 37*a.*	12 6*p.*	4 30*p.*	30
336	2	40	8 38,62	37	8 47	1 0	5 10	1
337	3	41	9 2,19	37	9 51	1 56	6 1	2
338	4	42	9 26,35	36	10 47	2 53	7 3	3
339	5	43	9 51,08	36	11 32	3 51	8 13	4
340	6	44	10 16,33	36	12 10*p*	4 46	9 30	5
341	7	45	10 42,10	35	12 40	5 38	10 47	6
342	8	46	11 8,33	36	1 5	6 29	—	7
343	9	47	11 35,00	36	1 28	7 18	12 4*a.*	8
344	10	48	12 2,11	36	1 50	8 7	1 21	9
345	11	49	12 29,60	36	2 12	8 56	2 38	10
346	12	50	12 57,45	36	2 37	9 48	3 56	11
347	13	51	13 25,64	36	3 7	10 43	5 15	12
348	14	51	13 54,16	36	3 42	11 40	6 35	13
349	15	52	14 22,84	36	4 28	—	7 50	14
350	16	53	14 51,99	37	5 21	12 40*a*	8 57	15
351	17	54	15 21,26	37	6 24	1 39	9 53	16
352	18	54	15 50,63	37	7 32	2 36	10 38	17
353	19	55	16 20,36	37	8 40	3 29	11 13	18
354	20	55	16 50,12	37	9 47	4 17	11 40	19
355	21	55	17 19,99	38	10 53	5 2	12 3*p.*	20
356	22	56	17 49,93	38	11 56	5 44	12 22	21
357	23	56	18 19,90	38	—	6 24	12 40	22
358	24	56	18 49,88	39	12 59*a.*	7 3	12 57	23
359	25	56	19 19,82	39	2 1	7 43	1 15	24
360	26	57	19 49,70	40	3 6	8 25	1 35	25
361	27	57	20 19,48	41	4 12	9 9	1 59	26
362	28	57	20 49,13	42	5 21	9 57	2 27	27
363	29	58	21 18,60	43	6 30	10 50	3 4	28
364	30	58	21 47,86	44	7 37	11 45	3 52	29
365	31	58	22 16,87	45	8 38	12 43*p.*	4 50	1

FASI DELLA LUNA.

1	Luna nuova	12^h 35^m	*pom.*
8	Primo quarto	6 3	*pom.*
15	Luna piena	1 43	*pom.*
23	Ultimo quarto	6 28	*ant.*
31	Luna nuova	4 10	*ant.*

Il giorno nel mese diminuisce di 0^h 16^m.

11 La Luna è in Perigeo 8^h *pom.*
23 Id. Apogeo 7 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Capricorno* il giorno 22 ad ore 3 m. 25 *ant.*

ECCLISSI

1891

(Tempo medio di Roma)

Nell'anno 1891 avverranno *due* ecclissi solari e *due* ecclissi lunari, tutte visibili nei nostri paesi, ad eccezione della seconda ecclisse solare.

I. *Ecclisse totale di* LUNA, 23 *Maggio; visibile in parte a Torino.*

Primo contatto con l'ombra, o principio dell'ecclisse	a	5^h	31^m	pom.
Principio della fase totale	»	6	40	»
Istante medio dell'ecclisse	»	7	19	»
Fine della fase totale	»	7	58	»
Ultimo contatto con l'ombra, o fine dell'ecclisse	»	9	7	»

Grandezza dell'ecclisse: 1, 30 del diametro lunare.

Questo ecclisse è visibile nella parte occidentale del Grande Oceano, in Australia, in Asia, in Africa ed in Europa.

A Torino la Luna nasce a 7^h 48^m pom., cioè solo 10 minuti prima che termini la fase totale; l'ultimo contatto avviene a 59° verso destra dal punto più alto del disco della Luna (immagine diritta).

II. *Ecclisse annulare di* SOLE, 6 *Giugno; visibile a Torino come ecclisse parziale.*

Principio dell'ecclisse . . .	a	6^h	12^m	pom.
Fine	»	7	18	»

Grandezza dell'ecclisse 0, 17 del diametro solare.

Questa ecclisse è visibile nell'America settentrionale (eccettó che nel sud-est), in Europa (all' infuori del Portogallo e di quasi tutta la Spagna), sulle coste settentrionali dell'Asia e nelle regioni polari artiche. La fase annulare dura al massimo 12^s.

Per Torino il primo contatto avviene a 87° verso destra dal punto più alto del disco e l'ultimo a 14° verso destra dallo stesso punto.

Tramonto del Sole a $8^h\ 1^m$, della Luna a $8^h\ 7^m$.

III. *Ecclisse totale di* Luna 15-16 *Novembre*, *visibile a Torino.*

Primo contatto con la penombra, Novembre 15	a	10^h	26^m	pom.
Primo contatto con l'ombra, o princ. dell'ecclisse	»	11	25	»
Principio della fase totale, Novembre 16 . .	»	12	27	ant.
Istante medio dell'ecclisse	»	1	9	»
Fine della fase totale	»	1	50	»
Ultimo contatto con l'ombra, o fine dell'ecclisse	»	2	52	»
Ultimo contatto con la penombra	»	3	51	»

Grandezza dell'ecclisse 1, 39 del diametro lunare.

Questa ecclisse è visibile in Asia (eccetto che nella parte orientale ; in Europa, in Africa, nell'Oceano Atlantico ed in America.

Per Torino si ha :

15 Nov.	- Nascere della Luna	a	4^h	39^m	pom.
16 id.	- Passaggio della Luna al meridiano	»	12	2	ant.
16 id.	- Tramonto della Luna	»	7	42	»

Per Torino il primo contatto con l'ombra avviene a 68° verso sinistra dal punto più alto del disco lunare ; e l'ultimo contatto a 138° verso destra dal medesimo punto (immagine diritta).

IV. *Ecclisse parziale di* SOLE, 1° *Dicembre, invisibile a Torino.*

Quantità della massima oscurazione: 0, 53 del diametro solare.

Questa ecclisse è visibile nelle regioni circompolari antartiche e sulla punta dell'America meridionale.

Passaggio di MERCURIO *sul disco solare.*

Nel 10 Maggio 1891 Mercurio passa sul disco del Sole nelle prime ore del giorno, descrivendo una corda la cui minima distanza dal centro è di circa 8 decimi dal raggio.

Il fenomeno è visibile nell'America settentrionale, in Australia, in Asia ed in Europa (eccettuato il sud-ovest); dal principio alla fine è visibile soltanto in Australia e nella metà orientale dell'Asia.

Noi possiamo soltanto vederne la fine. Al nascere del Sole sull'orizzonte di Torino, cioè a $4^h\ 57^m$, Mercurio ha già percorso circa i $^6/_7$ della corda.

Per Torino l'emersione avviene a 56'' dal punto più basso dal disco verso destra (immagine diritta). I tempi dei due contatti sono:

Contatto interno	. . . »	5^h	33^m	35^s
Contatto esterno	. . . .	5	38	36

Sopra alcune deformazioni delle superficie rigate;

Nota del Dott. M. CHINI,
presentata dal Socio C. SEGRE

Il prof. Beltrami nella sua Memoria « *Sulla flessione delle superficie rigate* (*) » studiando la deformazione di tali superficie che conserva rettilinee le loro generatrici, risolve varie questioni, in cui una linea (*direttrice*) della superficie che considera viene a soddisfare, dopo la flessione, a condizioni diverse.

In questo breve lavoro, riducendo anzitutto al minor numero possibile gli elementi che individuano la forma di una superficie rigata, ho introdotto poi questi nelle formule che danno tutte le superficie gobbe le quali sono deformate della prima; queste formule, divenendo assai semplici e riducendosi in ultima analisi a due sole, possono rendere in molti casi più agevole e sollecita la risoluzione di certe questioni relative alla flessione delle superficie rigate. Infatti, ho potuto applicarle utilmente alla trattazione di alcuni problemi che qui mi sono proposti, della stessa specie, ma meno semplici di quelli svolti dal prof. Beltrami nella citata Memoria.

È noto che il quadrato dell'elemento lineare di ogni superficie rigata, quando si prendono a linee coordinate le sue generatrici rettilinee ($v=\text{cost}$) e un sistema di traiettorie ($u=\text{cost}$) delle medesime, può sempre ridursi alla forma:

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\, du\, dv + (\mathrm{M}^2 u^2 + 2\,\mathrm{N} u + 1)\, dv^2\,,$$

essendo v l'arco di direttrice contato da un punto fisso, u la porzione di generatrice contata a partire dalla direttrice, e θ

(*) *Annali di Matematica* del TORTOLINI. Anno 1865, Tomo VII.

l'angolo che la generatrice $v=$cost forma con tale curva; mentre le quantità M^2 e N hanno i valori seguenti:

$$M^2=\left(\frac{dl}{dv}\right)^2+\left(\frac{dm}{dv}\right)^2+\left(\frac{dn}{dv}\right)^2$$

$$N=\alpha_1\frac{dl}{dv}+\beta_1\frac{dm}{dv}+\gamma_1\frac{dn}{dv}$$

dove (l, m, n), $(\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1)$ indicano, rispettivamente, i coseni di direzione di una generatrice qualunque e della tangente alla direttrice nel punto corrispondente, rispetto a una terna di assi cartesiani ortogonali fissati ad arbitrio.

Volendo introdurre nell'espressione di tale elemento lineare quantità che siano più intimamente legate colla superficie, che non dipendano, cioè, anche dalla posizione di questa nello spazio, ma solo dalla sua forma, osserveremo che allora la direttrice sarà completamente determinata appena siano note le espressioni dei suoi due raggi di curvatura ρ e T in funzione dell'arco v, e che per ogni punto di tale direttrice sarà individuata la posizione della generatrice appena siano conosciuti gli angoli θ e φ che, rispettivamente, la direzione positiva di questa forma colla direzione positiva della direttrice, e che il piano tangente alla superficie nel punto considerato fa col piano osculatore della curva medesima.

Sono, dunque, quattro le funzioni (dell'arco v) che possono servire a determinare completamente, a meno di movimenti nello spazio, una superficie rigata qualsiasi.

Ora, se indichiamo con $(\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2)$ $(\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3)$ i coseni di direzione della normale principale e della binormale alla direttrice, rispetto alla medesima terna di assi coordinati, avremo le relazioni:

$$l\alpha_1+m\beta_1+n\gamma_1=\cos\theta$$
$$l\alpha_2+m\beta_2+n\gamma_2=\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$$
$$l\alpha_3+m\beta_3+n\gamma_3=\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,.$$

Derivando ambo i membri della prima rapporto a v, col tener conto della seconda e delle formule di *Frenet*, si ottiene:

$$N=-\left(\frac{d\theta}{dv}+\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)\operatorname{sen}\theta\ .$$

Se invece deriviamo ambo i membri di tutte e tre, poi quadriamo e sommiamo, applicando le citate formule, si avrà:

$$M^2 = N^2 + \left\{ \frac{d}{dv}(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi) + \frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi}{T} \right\}^2 +$$
$$+ \left\{ \frac{d}{dv}(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi) - \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\varphi}{T} \right\}^2,$$

ovvero:

$$M^2 = \left(\frac{d\theta}{dv} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\right)^2 + \left\{ \left(\frac{d\varphi}{dv} - \frac{1}{T}\right)\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\cos\theta \right\}^2.$$

Talchè, nella forma precedente dell'elemento lineare possiamo sostituire a M^2 e N le espressioni ora trovate, in cui entrano le sole quantità ρ, T, θ, φ insieme alle derivate prime di alcune fra esse.

In particolare, se per direttrice si sceglie una traiettoria ortogonale delle generatrici, abbiamo:

$$ds^2 = du^2 + \left\{ \left(1 - \frac{u\cos\varphi}{\rho}\right)^2 + u^2\left(\frac{d\varphi}{dv} - \frac{1}{T}\right)^2 \right\} dv^2.$$

Ciò posto, considerando una superficie rigata, affinchè questa sia una deformazione della prima, è necessario e sufficiente che, scelta su quella a direttrice la deformata della direttrice della rigata primitiva, le corrispondenti quantità ρ_1 T_1 θ_1 e φ_1 che la individuano siano legate a ρ, T, θ e φ dalle relazioni:

$$\theta_1 = \theta$$

$$\frac{\cos\varphi_1}{\rho_1} = \frac{\cos\varphi}{\rho}$$

$$\left(\varphi_1' - \frac{1}{T_1}\right)\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{\rho_1}\cos\theta = \pm\left\{ \left(\varphi' - \frac{1}{T}\right)\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\cos\theta \right\}.$$

in cui gli accenti indicano derivate prese rispetto all'arco v, che per ambedue le direttrici ha il medesimo valore nei punti corrispondenti.

Se come direttrice della rigata primitiva si prende una traiettoria ortogonale delle generatrici, le condizioni precedenti diventano:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\cos\varphi_1}{\rho_1} = \frac{\cos\varphi}{\rho}, \qquad \varphi_1' - \frac{1}{T_1} = \pm\left(\varphi' - \frac{1}{T}\right).$$

Se scegliamo una geodetica:

$$\theta_1 = \theta, \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{1}{T_1}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{\rho_1}\cos\theta = \pm\left(\frac{1}{T}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{\rho}\cos\theta\right),$$

Se la data superficie rigata è il luogo delle binormali a una curva dello spazio (direttrice) abbiamo:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad T_1 = \pm T$$

e possiamo, perciò, concludere:

Date due superficie rigate, luogo delle binormali a due curve dello spazio, affinchè siano applicabili l'una sull'altra, è necessario e sufficiente che quelle curve abbiano uguale il quadrato della torsione nei punti corrispondenti.

Ritornando, ora, al caso generale, possiamo, dunque, asserire che, considerata una superficie gobba qualsiasi, si otterranno tutte le superficie rigate che sono deformazioni della primitiva quando per le quantità ρ_1 T_1 e φ_1, che insieme a θ_1 determinano una qualunque di queste, si scelgono tali funzioni di v da soddisfare alle due equazioni:

$$(1)\ldots\left\{\begin{aligned} &\frac{\cos\varphi_1}{\rho_1} = \frac{\cos\varphi}{\rho} \\ &\left(\varphi_1' - \frac{1}{T_1}\right)\operatorname{tang}\theta - \frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{\rho_1} = \pm\left\{\left(\varphi' - \frac{1}{T}\right)\operatorname{tang}\theta - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\right\}\end{aligned}\right.$$

e si prende inoltre:

$$(2)\ldots\ldots \qquad \theta_1 = \theta$$

dove ρ, T, θ e φ sono date funzioni della variabile v.

Poichè le tre quantità ρ_1 T_1 e φ_1 devono soddisfare a due sole equazioni, potremo sempre scegliere ad arbitrio una di esse, oppure assoggettarle ad esser legate da una relazione qualsiasi, che esprimerà geometricamente una condizione alla quale viene a soddisfare dopo la flessione una linea qualunque (direttrice) giacente sulla superficie rigata che si considera.

Così, poichè è sempre possibile porre:

$$\varphi_1 = 0$$

oppure:

$$\frac{1}{T_1} = 0$$

od anche:

$$\frac{\rho_1}{T_1} = \text{cost.}$$

risultando, in tal modo, per ogni singolo caso, determinate tutte le quantità ρ_1 T_1 θ_1 φ_1 dalle (1) e dalla (2), possiamo concludere:

È sempre possibile deformare una rigata in modo che una linea tracciata ad arbitrio su di essa diventi dopo la flessione un'assintotica della superficie, o una curva piana, oppure un'elica cilindrica.

Possiamo anche dimostrare:

Una superficie rigata può sempre flettersi in modo che una sua linea tracciata ad arbitrio venga a distendersi sopra una sfera di raggio qualunque.

Infatti, ciò risulta espresso dalla relazione:

$$(3) \ldots\ldots \qquad \frac{1}{T_1} = \frac{\rho_1'}{\sqrt{R^2 - \rho_1^2}},$$

essendo R il raggio arbitrario della sfera; allora, tenendo conto della prima delle (1), avremo:

$$(4) \ldots\ldots \qquad \operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{\sqrt{\rho^2 - \rho_1^2 \cos^2 \varphi}}{\rho}$$

$$\varphi_1' = -\frac{\rho_1' \cos \varphi}{\sqrt{\rho^2 - \rho_1^2 \cos^2 \varphi}} - \frac{\rho_1 \rho}{\sqrt{\rho^2 - \rho_1^2 \cos^2 \varphi}} \left(\frac{\cos \varphi}{\rho}\right)'.$$

Perciò la seconda delle (1) diventa in questo caso:

$$\rho_1'\left(\frac{1}{\sqrt{R^2-\rho_1^2}}+\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\rho^2-\rho_1^2\cos^2\varphi}}\right)\operatorname{tang}\theta+\frac{\rho_1\rho}{\sqrt{\rho_2-\rho_1^2\cos^2\varphi}}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)'\operatorname{tang}\theta+$$

$$+\frac{\sqrt{\rho^2-\rho_1^2\cos^2\varphi}}{\rho\rho_1}=\pm\left\{\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}-\left(\varphi'-\frac{1}{T}\right)\operatorname{tang}\theta\right\}.$$

Dunque, prendendo per ρ_1 una tal funzione di v che soddisfi all'equazione differenziale precedente, del primo ordine, col mezzo delle (2) (3) e (4) risulteranno completamente determinate tutte le quantità ρ_1 T_1 θ_1 φ_1 in modo tale da definire una superficie gobba applicabile sulla primitiva e per la quale la linea deformata di quella scelta precedentemente (direttrice) giace sulla sfera di raggio R.

Se, in particolare, la linea proposta è una traiettoria ortogonale delle generatrici abbiamo le due equazioni:

$$\frac{\cos\varphi_1}{\rho_1}=\frac{\cos\varphi}{\rho}$$

$$\varphi_1'-\frac{\rho_1'}{\sqrt{R^2-\rho_1^2}}=\pm\left(\varphi'-\frac{1}{T}\right)$$

e perciò, integrando quest'ultima:

$$\varphi_1-\operatorname{arcsen}\frac{\rho_1}{R}=\pm\left(\varphi-\int\frac{dv}{T}\right)=\pm\psi$$

essendo ψ una funzione nota della variabile v. Quindi ρ_1 risulterà determinata dall'equazione algebrica:

$$\rho_1\sqrt{R^2-\rho_1^2}+\rho_1\sqrt{\left(\frac{\rho}{\cos\varphi}\right)^2-\rho_1^2}=R\rho\frac{\cos\psi}{\cos\varphi},$$

la quale, risoluta, dà:

$$\rho_1^2=\frac{R^2\rho^2\cos^2\psi}{\rho^2+R^2\cos_2\varphi\pm2R\rho\cos\varphi\operatorname{sen}\psi}$$

E quindi:

$$\rho_1=\frac{R\rho\cos\psi}{\sqrt{\rho^2+R^2\cos^2\varphi\pm2R\rho\cos\varphi\operatorname{sen}\psi}}.$$

Per le altre quantità abbiamo:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}\,, \qquad T_1 = \frac{\sqrt{R^2 - \rho_1^2}}{\rho_1'}\,, \qquad \varphi_1 = \operatorname{arcsen} \frac{\rho_1}{R} \pm \psi\,.$$

Se, infine, la superficie proposta è il luogo delle binormali a una curva dello spazio (direttrice) avremo:

$$\rho_1 = R \operatorname{sen} \int \frac{dv}{T}\,, \qquad T_1 = \pm T\,, \qquad \theta_1 = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}\,,$$

Per passare alla ricerca di altre condizioni a cui sia possibile assoggettare, dopo la flessione', una linea tracciata ad arbitrio (direttrice) sopra una superficie rigata, esprimiamo in funzione di ρ, T, θ e φ i valori che assumono lungo la linea proposta le quantità D, D', D'' definite dalle uguaglianze:

$$D = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}\,,$$

$$D' = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}\,,$$

$$D'' = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}\,,$$

essendo E, F, G i coefficienti del quadrato dell'elemento lineare della superficie, e x, y, z le coordinate di uno qualunque dei suoi punti, rispetto alla solita terna di assi cartesiani ortogonali stabilita precedentemente.

A tale scopo, osserviamo che si ha:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=l \ , \quad \frac{\partial x}{\partial v}=\alpha_1+l'u \ , \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=0 \ , \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}=l' \ ,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\frac{\alpha_2}{\rho}+l''u \ ,$$

e analogamente per y e z; inoltre:

$$l=\alpha_1 \cos\theta+\alpha_2 \operatorname{sen}\theta\cos\varphi+\alpha_3 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \ ,$$
$$m=\beta_1 \cos\theta+\beta_2 \operatorname{sen}\theta\cos\varphi+\beta_3 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \ ,$$
$$n=\gamma_1 \cos\theta+\gamma_2 \operatorname{sen}\theta\cos\varphi+\gamma_3 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \ ,$$

dunque, tenendo conto delle formule di *Frenet*, otterremo:

$$D_0=0 \ , \quad D_0'=\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\cos\theta-\left(\varphi'-\frac{1}{T}\right)\operatorname{sen}\theta \ , \quad D_0''=\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}$$

essendo D_0 D_0' D_0'' i valori cercati di D, D', D'' lungo la direttrice $u=0$.

Per mezzo di essi e di quelli dei coefficienti dell'elemento lineare possiamo intanto determinare l'espressione delle due curvature *totale* e *media* della superficie lungo la direttrice $u=0$. Infatti, indicandole, rispettivamente, con K_0 e H_0, si ha:

$$K_0=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left\{\left(\varphi'-\frac{1}{T}\right)\operatorname{sen}\theta-\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\cos\theta\right\}^2$$

$$H_0=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(2\,D_0'\cos\theta-\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\right) \ ,$$

e poichè per una qualunque delle rigate deformate si ha analogamente:

$$D_{01}=0 \ , \quad D_{01}'=\frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{\rho_1}\cos\theta-\left(\varphi_1'-\frac{1}{T_1}\right)\operatorname{sen}\theta \ , \quad D_{01}''=\frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{\rho_1} \ ,$$

ne deduciamo che lungo la corrispondente direttrice dovremo avere:

$$K_{01} = K_0$$

$$H_{01} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \left\{ \pm 2 \left[\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\rho} \cos \theta - \left(\varphi' - \frac{1}{T} \right) \operatorname{sen} \theta \right] \cos \theta - \frac{\operatorname{sen} \varphi_1}{\rho_1} \right\} .$$

notando che in questa ultima formula e nella seconda delle (1) dovranno esser presi insieme i segni superiori o quelli inferiori.

Le (1) stesse, poi, stanno geometricamente a indicare che la curvatura geodetica della direttrice e la curvatura totale della superficie rigata, lungo questa linea, rimangono inalterate durante la flessione.

Ciò posto, è sempre possibile far diventare:

$$H_{01} = K_{01} f(v) + \frac{1}{f(v)} ,$$

essendo f il simbolo di una funzione arbitraria, giacchè per questo basta fare in modo che risulti:

$$\frac{\operatorname{sen} \varphi_1}{\rho_1} = \pm 2 \left\{ \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\rho} \cos \theta - \left(\varphi' - \frac{1}{T} \right) \operatorname{sen} \theta \right\} \cos \theta - \\ - \left\{ K_0 f(v) + \frac{1}{f(v)} \right\} \operatorname{sen}^2 \theta ,$$

e poichè deve sempre aversi:

$$\frac{\cos \varphi_1}{\rho_1} = \frac{\cos \varphi}{\rho}$$

basterà prendere per φ_1 una tale funzione di v che si abbia:

$$(5) \ldots \left\{ \begin{aligned} \frac{\cos \varphi}{\rho} \operatorname{tang} \varphi_1 = \pm 2 \left\{ \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\rho} \cos \theta - \left(\varphi' - \frac{1}{T} \right) \operatorname{sen} \theta \right\} \cos \theta - \\ - \left\{ K_0 f(v) + \frac{1}{f(v)} \right\} \operatorname{sen}^2 \theta . \end{aligned} \right.$$

Determinato così φ_1 si ha immediatamente l'espressione di ρ_1 dalla condizione:

$$(6) \ldots\ldots \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{\cos \varphi}{\rho} \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi_1} ,$$

e quella di T_1 dalla seconda delle (1), dopo che in questa si è sostituito al posto di ρ_1 e φ_1 le funzioni di v trovate antecedentemente, e dopo che nel secondo membro è stato preso il medesimo segno che venne scelto nella (5).

Ora, indicando con r_{01} e r_{02} i raggi principali di curvatura della superficie deformata lungo la sua direttrice, si conclude che possiamo sempre fare in modo che risulti:

$$r_{01} = f(v) \qquad \text{e quindi:} \qquad r_{02} = \frac{1}{K_0 f(v)} ,$$

Ossia:

È sempre possibile flettere una superficie rigata in modo che lungo tutta una linea tracciata ad arbitrio su di essa (direttrice) *uno dei raggi principali di curvatura della superficie diventi uguale a una data funzione dell'arco di quella linea, e in particolare che risulti uguale all'arco stesso contato da un punto fisso.*

Od anche:

Si può sempre deformare una superficie rigata in modo che lungo tutta una qualunque delle sue linee i due raggi principali di curvatura della superficie risultino legati fra loro da una relazione arbitraria.

Così, per esempio, se determiniamo φ_1 colla condizione che sia:

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} \operatorname{tang} \varphi_1 = \pm 2 \left\{ \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho} \cos\theta - \left(\varphi' - \frac{1}{T}\right) \operatorname{sen}\theta \right\} \cos\theta - \\ - \left(c K_0 + \frac{1}{c}\right) \operatorname{sen}^2\theta$$

dove c è una costante arbitraria, si ha lungo la direttrice della corrispondente superficie deformata:

$$r_{01} = c \; .$$

Dunque:

È possibile deformare una rigata in modo che lungo tutta una linea tracciata ad arbitrio su di essa divenga costante uno dei raggi principali di curvatura della superficie.

Se poi prendiamo:

$$f(v) = c - \sqrt{c^2 - \frac{1}{K_0}}$$

oppure:

$$f(v) = \sqrt{\frac{c}{K_0}} - \sqrt{\frac{c-1}{K_0}}$$

potremo concludere:

È sempre possibile deformare una superficie rigata in modo che lungo tutta una qualunque delle sue linee divenga costante la somma o il rapporto dei raggi principali di curvatura della superficie; e in particolare, *che essi risultino uguali e di segno contrario.*

Nel caso del rapporto la costante arbitraria c dovrà evidentemente essere scelta negativa.

Volendo servirci ancora delle espressioni trovate di D_0 D_0' D_0'' per ulteriori ricerche intorno alla flessione delle superficie rigate, osserviamo che su queste l'equazione delle assintotiche non rettilinee è:

$$2\,D' du + D'' dv = 0$$

e quindi lungo una qualunque di tali curve si ha:

$$\frac{du}{dv} = -\frac{D''}{2\,D'}\,,$$

Ora, se sopra la superficie gobba che si considera scegliamo una linea qualunque come direttrice $u = 0$, l'angolo α che le assintotiche della superficie fanno con detta linea è dato dall'equazione:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{D_0'' \operatorname{sen} \theta}{D_0'' \cos \theta - 2\,D_0'}$$

e quindi per l'angolo α_1 che le assintotiche di una qualunque delle rigate deformate fanno colla direttrice si avrà:

$$\operatorname{tang} \alpha_1 = \frac{D_{01}'' \operatorname{sen} \theta}{D_{01}'' \cos \theta - 2 D_{01}'} =$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{sen} \varphi_1}{\rho_1} \operatorname{sen} \theta}{\frac{\operatorname{sen} \varphi_1}{\rho_1} \cos \theta \pm 2 \left\{ \left(\varphi' - \frac{1}{T} \right) \operatorname{sen} \theta - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\rho} \cos \theta \right\}}$$

notando, al solito, che in quest'ultima formula e nella seconda delle (1) dovranno esser presi insieme i segni superiori o quelli inferiori.

Ora, si potrà sempre fare in modo che risulti:

$$\operatorname{tang} \alpha_1 = \text{cost}$$

ossia:

$$\frac{\operatorname{sen} \varphi_1}{\rho_1} (\operatorname{sen} \theta - c \cos \theta) = \pm 2 c \left\{ \left(\varphi' - \frac{1}{T} \right) \operatorname{sen} \theta - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\rho} \cos \theta \right\}$$

con c costante arbitraria; poichè, dovendo essere:

$$\frac{\cos \varphi_1}{\rho_1} = \frac{\cos \varphi}{\rho}$$

basterà, a tale scopo, prendere per φ_1 una funzione di v tale che si abbia:

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \pm \frac{2 c}{\operatorname{tang} \theta - c} \left\{ \rho \left(\varphi' - \frac{1}{T} \right) \frac{\operatorname{tang} \theta}{\cos \varphi} - \operatorname{tang} \varphi \right\},$$

Determinato in tal modo φ_1 si ha l'espressione di ρ_1 dalla (6), e quella di T_1 dalla seconda delle (1).

Dunque:

È sempre possibile flettere una superficie rigata in modo che una sua linea qualsivoglia diventi traiettoria sotto angolo costante arbitrario delle assintotiche non rettilinee della superficie deformata.

Se la funzione φ_1 è determinata dall'equazione:

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \pm 2 \left\{ \operatorname{tang} \varphi - \rho \left(\varphi' - \frac{1}{T} \right) \frac{\operatorname{tang} \theta}{\cos \varphi} \right\},$$

allora sulla corrispondente superficie deformata la linea (direttrice) che si considera, purchè non sia traiettoria ortogonale delle generatrici, è diventata traiettoria ortogonale delle assintotiche non rettilinee.

Possiamo mostrare la possibilità di una flessione della stessa specie, riferendoci anche a un sistema di linee di curvatura della superficie.

Osserviamo che sopra una superficie rigata l'equazione differenziale delle linee di curvatura è:

$$\mathrm{E\,D'}\, du^2 + \mathrm{E D''}\, du\, dv + (\mathrm{F\,D''} - \mathrm{G\,D'})\, dv^2 = 0$$

e quindi lungo le linee di curvatura di un sistema avremo:

$$\frac{du}{dv} = -\frac{\mathrm{E\,D''} + \sqrt{\mathrm{E}^2 \mathrm{D''}^2 - 4\,\mathrm{E\,D'}(\mathrm{F\,D''} - \mathrm{G\,D'})}}{2\,\mathrm{E\,D'}}.$$

Segue che, se indichiamo con α l'angolo che le linee di curvatura di tale sistema formano colla direttrice $u = 0$ avremo:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{(\mathrm{D}_0'' + \sqrt{\mathrm{D}_0''^2 - 4\,\mathrm{D}_0'\mathrm{D}_0'' \cos\theta + 4\,\mathrm{D}_0'^2}) \operatorname{sen} \theta}{(\mathrm{D}_0'' + \sqrt{\mathrm{D}_0''^2 - 4\,\mathrm{D}_0'\mathrm{D}_0'' \cos\theta + 4\,\mathrm{D}_0'^2}) \cos \theta - 2\,\mathrm{D}_0'}$$

Per l'angolo α_1 che fanno colla direttrice le linee di curvatura di un sistema, sopra una qualunque fra le rigate deformate, si avrà:

$$\operatorname{tang} \alpha_1 = \frac{(\mathrm{D}_{01}'' + \sqrt{(\mathrm{D}_{01}''^2 - 4\,\mathrm{D}_{01}'\mathrm{D}_{01}'' \cos\theta + 4\,\mathrm{D}_{01}'^2}) \operatorname{sen} \theta}{(\mathrm{D}_{01}'' + \sqrt{\mathrm{D}_{01}''^2 - 4\,\mathrm{D}_{01}'\mathrm{D}_{01}'' \cos\theta + 4\,\mathrm{D}_{01}'^2}) \cos \theta - 2\,\mathrm{D}_{01}}.$$

Ciò posto, è sempre possibile fare in modo che risulti:

$$\operatorname{tang} \alpha_1 = \text{cost.}$$

poichè a tale scopo basterà che sia:

$$\mathrm{D}_{01}''(\operatorname{sen}\theta - c\cos\theta) + 2c\,\mathrm{D}_{01}' =$$

$$= (c\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\sqrt{\mathrm{D}_{01}''^2 - 4\,\mathrm{D}_{01}'\mathrm{D}_{01}''\cos\theta + 4\,\mathrm{D}_{01}'^2}\ ,$$

da cui, quadrando, si ha:

$$\mathrm{D}_{01}''\left\{(c^2\operatorname{sen}\theta + 2c\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\cos\theta - c\right\} =$$

$$= \mathrm{D}_{01}'(c^2\operatorname{sen}\theta + 2c\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\ .$$

Dunque, tenendo conto delle (1) e (2), basterà che la funzione φ_1 sia determinata dall'equazione:

$$\operatorname{tang}\varphi_1 \cdot \left\{\frac{c}{(c^2\operatorname{sen}\theta + 2c\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\cos\theta} - 1\right\} =$$

$$= \pm\left\{\rho\left(\varphi' - \frac{1}{\mathrm{T}}\right)\frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos\varphi} - \operatorname{tang}\varphi\right\}\ .$$

Trovata così l'espressione richiesta di φ_1 si avrà, al solito, quella di ρ_1 per mezzo della (6), mentre la funzione di v che rappresenta T_1 si ricaverà dalla seconda delle (1), dopo che in essa al posto di ρ_1 e φ_1 si sono sostituite le funzioni determinate antecedentemente, e dopo che il segno del suo secondo membro sia stato fissato uguale a quello che venne scelto nell'equazione precedente.

Siamo, perciò, in grado di concludere:

Si può sempre deformare una superficie rigata in modo che una sua linea qualsivoglia risulti traiettoria sotto angolo costante arbitrario di un sistema di linee di curvatura della superficie.

La condizione:

$$(\mathrm{D}_{01}'' + \sqrt{\mathrm{D}_{01}''^2 - 4\,\mathrm{D}_{01}'\mathrm{D}_{01}''\cos\theta + 4\,\mathrm{D}_{01}'^2})\cos\theta = 2\,\mathrm{D}_{01}'$$

esprime che la direttrice della superficie deformata si è cambiata in traiettoria ortogonale delle linee di curvatura di un sistema, e quindi che essa stessa è divenuta linea di curvatura.

Poichè l'equazione precedente equivale all'altra:

$$D_{01}'' \cos\theta = D_{01}'$$

ne concludiamo che, scegliendo la funzione φ_1 in modo da soddisfare l'equazione:

$$\operatorname{tang}\varphi_1 \frac{\cos\theta\cos\varphi}{\rho} = \pm \left\{ \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\cos\theta - \left(\varphi' - \frac{1}{T}\right)\operatorname{sen}\theta \right\},$$

la quale dà, se θ è diverso da $\frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \pm \left\{ \operatorname{tang}\varphi - \rho\left(\varphi' - \frac{1}{T}\right)\frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos\varphi} \right\},$$

allora sulla corrispondente superficie deformata la linea che si considera (direttrice), purchè non sia traiettoria ortogonale delle generatrici, sarà diventata linea di curvatura.

Dunque:

È sempre possibile flettere una superficie rigata in modo che una sua linea qualsiasi, ma non traiettoria ortogonale delle generatrici, divenga linea di curvatura (*).

Pisa, 1890.

(*) Beltrami, Mem. cit., pag. 134.

Un nuovo campo di ricerche geometriche;

Saggio del Socio Prof. CORRADO SEGRE

NOTA IV (*).

Sistemi lineari ed intersezioni d'iperconiche e d'iperquadriche.

38. Abbiansi le $r+1$ equazioni linearmente indipendenti

$$(1) \ldots\ldots \quad \Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m = 0 \,, \quad \text{ove} \quad a_{ml} = \bar{a}_{lm}$$

$$(2) \ldots\ldots \quad \Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m = 0 \,, \quad \text{ove} \quad b_{ml} = \bar{b}_{lm}$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

rappresentanti due o più antipolarità del piano o dello spazio. Mediante esse si determina un *sistema lineare di antipolarità*, e quindi d'iperconiche o d'iperquadriche, considerando l'equazione

$$(3) \ldots\ldots \quad \lambda \Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m + \mu \Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m + \ldots = 0 \,,$$

analoga a quella che definisce un sistema lineare di polarità, di coniche o di quadriche. Qui però si ha una differenza sostanziale, dalla quale derivano come conseguenze varie altre; ed è che i parametri λ, μ,... non possono più essere numeri complessi qualunque, e però la dimensione del sistema non è più $2r$. Invero affinchè la (3) sia l'equazione di un'antipolarità dovranno (n. 35) λ, μ, ..., moltiplicate, ove occorra, per uno stesso fattor numerico, esser tali che

$$\lambda a_{ml} + \mu b_{ml} + \ldots = \bar{\lambda} \bar{a}_{lm} + \bar{\mu} \bar{b}_{lm} + \ldots,$$

(*) V. le Note I, II e III nel vol. preced. di questi Atti.

ossia, tenendo conto delle condizioni a cui soddisfanno le a, le b, ...,

$$(\lambda-\bar{\lambda})\, a_{ml} + (\mu-\bar{\mu})\, b_{ml} + \ldots = 0 ,$$

donde infine, in causa dell'indipendenza lineare supposta fra le equazioni (1), (2), ...,

$$\lambda-\bar{\lambda}=0 , \quad \mu-\bar{\mu}=0 , \ldots ;$$

sicchè la (3) rappresenterà un'antipolarità solo quando λ, μ, ..., o meglio i loro mutui rapporti, siano *reali*. — Ne segue che le antipolarità rappresentate da quell'equazione sono ∞^r (*).

Se nella (3) si fanno coincidere i punti x, y, l'equazione che così si ottiene

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \lambda \Sigma a_{lm} x_l \bar{x}_m + \mu \Sigma b_{lm} x_l \bar{x}_m + \ldots = 0$$

rappresenta, per valori reali dei parametri, un *sistema lineare d'iperconiche o d'iperquadriche*, composto delle iperconiche od iperquadriche fondamentali per le antipolarità del sistema (3).

Da $r+1$ *forme* (cioè antipolarità, iperconiche, iperquadriche) linearmente indipendenti è individuato un sistema lineare di dimensione r che le contiene; l'indipendenza lineare consiste nel non stare in un sistema lineare inferiore. Così due forme distinte determinano un *fascio* ∞^1; tre forme non situate in un fascio determinano una *rete* ∞^2; ecc.

39. Assoggettando una forma del sistema lineare ad avere una data coppia x, y di punti reciproci si vengono a porre pei parametri reali λ, μ, ... *due* equazioni lineari reali, cioè quelle in cui si scinde la (3) (combinazioni di questa e della sua coniugata): però se x ed y coincidono, cioè se si dà un punto unito, quelle equazioni coincidono nella (4). Ne segue ad esempio che

(*) Questo breve ragionamento vale per un numero qualunque di variabili, e però si applica già ai sistemi lineari di antinvoluzioni e di catene semplici su una forma di 1ª specie. Esso è pur valido per enti di gradi superiori: se le forme iperalgebriche $f(x, \bar{x})$, $\varphi(x, \bar{x})$, ... sono *reali* nel senso fissato nell'introduzione di questo Saggio, le forme *reali* del sistema lineare $\lambda f + \mu\varphi + \ldots$ da esse determinato sono quelle che corrispondono a valori reali dei parametri λ, μ, ... —

da k coppie di punti reciproci distinti (ove $2k \leq r$) ed $r-2k$ punti uniti è *in generale* individuata una forma del sistema lineare di dimensione r. — Inoltre è chiaro che ogni coppia di punti reciproci, ed in particolare ogni punto unito, che sia comune a due o più antipolarità (1), (2), ..., od alle loro iperconiche o iperquadriche fondamentali, sarà pur comune a tutte le forme del sistema lineare che esse determinano.

Esaminando i coefficienti delle loro equazioni si scorge che le antipolarità e le iperconiche di un piano formano un sistema lineare di dimensione 8, mentre le antipolarità spaziali e le iperquadriche formano un sistema lineare ∞^{15}. Ne segue che le antipolarità, le iperconiche e le iperquadriche, aventi alcuni punti uniti dati od alcune date coppie di punti reciproci formano sistemi lineari le cui dimensioni si conosceranno in generale immediatamente. In particolare per 8 punti del piano passa in generale un'iperconica ben determinata, per 7 punti un fascio, per 6 una rete, per 5 un sistema triplo, e così via; e vedremo in seguito che le iperconiche di quel fascio hanno in generale ∞^2 punti comuni, quelle della rete ∞^1, e quelle del sistema triplo un sesto punto oltre ai 5 per cui esso è condotto. Similmente per 15 punti dello spazio passa in generale una sola iperquadrica, e per $15-r$ punti un sistema lineare ∞^r avente per *base*, se $r \leq 5$, una ∞^{5-r} di punti comuni.

40. Se nell'equazione (3) del n. 38 si fan variare *ad arbitrio* i parametri λ, μ, ..., essa rappresenta un *sistema lineare* ∞^{2r} *di antireciprocità* nel quale è contenuto — e corrisponde ai valori *reali* dei parametri — il sistema lineare ∞^r di antipolarità che ivi si considerava. Quel sistema di antireciprocità presenta la particolarità che le antireciprocità in esso contenute sono a due a due inverse fra loro e corrispondenti a valori coniugati di λ, μ..., (come subito si scorge formando l'equazione inversa della (3)). Si potrebbe dire che in un siffatto sistema lineare di antireciprocità esiste un'*antinvoluzione* in cui si corrispondono due antireciprocità quando sono fra loro inverse, e per cui è *catena* fondamentale di specie r il sistema delle antipolarità. Queste espressioni corrisponderebbero al fatto che scaturisce dall'equazione (3) e che in seguito adopreremo ripetutamente: che *le rette od i piani polari di un punto rispetto alle antipolarità del sistema lineare costituiscono una catena* (generale o degenere) *nella ra-*

rietà lineare formata dalle rette o dai piani che corrispondono al punto nelle antireciprocità del sistema, e quella catena è fondamentale per l' antinvoluzione (generale o degenere) *che in questa varietà si ha considerando come omologhi due rette o due piani che corrispondano al punto in due antireciprocità inverse fra loro.* Aggiungiamo che la varietà delle polari del punto è riferita *projettivamente* al sistema lineare di corrispondenze (cioè al sistema descritto dai parametri λ, μ,...), sicchè mutando il punto essa rimane projettiva a se stessa.

In particolare le polari di un punto rispetto ad un fascio di antipolarità del piano concorrono in un punto, che sarà reciproco di quello rispetto a tutte le antipolarità, e formano una catena semplice che sarà riferita projettivamente a quel fascio; i poli di una retta rispetto alle varie antipolarità di questo si potranno considerare come intersezioni delle polari di due punti fissi arbitrari della retta e però formeranno una catena semplice di 2º ordine (v. n. 25) situata sulla conica luogo di quei punti che son reciproci ai punti della retta rispetto a tutte le antireciprocità del fascio (*). Similmente rispetto ad una rete di antipolarità piane le polari di un punto formano una catena doppia di rette; ed i poli di una retta formano la ∞^2 (di ordini 1 e 2) luogo delle intersezioni delle rette omologhe di due catene piane projettive. Ecc. — Nello spazio rispetto ad un fascio di antipolarità i piani polari di un punto stanno pure in un fascio e vi formano una catena semplice, mentre le polari di una retta formano una catena semplice di una schiera di rette di una quadrica, ed i poli di un piano formano una catena semplice cubica. Analogamente per le reti ecc.

41. Come nello studio dei sistemi lineari di antipolarità si presentano naturalmente le antireciprocità non involutorie, così

(*) Se ad ogni punto di un piano si fa corrispondere quel punto che gli è reciproco in due date antireciprocità (e quindi nel fascio da esse determinato si avrà una corrispondenza *iperalgebrica* in cui ad una retta corrisponde una conica, e in generale ad una curva (algebrica) corrisponde una curva (algebrica). Si avverta però che un fatto analogo non si presenta sempre nelle corrispondenze iperalgebriche: generalmente da corrispondenze siffatte le curve non sono trasfomate in curve (v. ad esempio la corrispondenza accennata nella seconda nota al n. 47).

viceversa lo studio di una tale antireciprocità si può collegare strettamente con quello di un fascio di antipolarità. Sia in fatti

$$\Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m = 0$$

l'equazione di un'antireciprocità non involutoria: perchè un fascio che la contenga passi pure per un fascio di antipolarità esso dovrà (n. 40) contenere anche l'antireciprocità inversa di quella, cioè

$$\Sigma \bar{a}_{ml} x_l \bar{y}_m = 0 \ ;$$

ed effettivamente il fascio di antireciprocità determinato da queste due,

$$\lambda \Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m + \mu \Sigma \bar{a}_{ml} x_l \bar{y}_m = 0 \ ,$$

contiene un fascio di antipolarità, corrispondenti a valori coniugati di λ e μ, poichè per valori siffatti quest'equazione diventa tale che due coefficienti qualunque corrispondenti agli stessi indici ma invertiti sono sempre coniugati. Ogni punto il quale sia unito per l'antireciprocità data, e quindi anche per l'inversa, sarà pure unito per tutto quel fascio di antireciprocità, e starà perciò sulla base del fascio d'iperconiche o d'iperquadriche; viceversa ogni punto x di quella base soddisferà all'equazione del fascio di antireciprocità in cui si ponga $y = x$ e però sarà unito per ognuna di quelle antireciprocità. Dunque concludiamo che: *i punti uniti di un'antireciprocità non involutoria, piana o spaziale, costituiscono (ove esistano) la varietà base di un fascio d'iperconiche o d'iperquadriche, e viceversa una tal varietà si può sempre considerare come il luogo dei punti uniti di ogni antireciprocità non involutoria di un fascio determinato.*

L'antireciprocità non involutoria da cui siamo partiti può essere *degenere*. Allora (v. n. 10) se si è nel piano essa riferisce antiprojettivamente fra loro due certi fasci di raggi; se si è nello spazio essa dà luogo a due stelle antireciproche ovvero a due fasci antiprojettivi di piani secondo che è degenere di 1ª o di 2ª specie. La sua inversa è data dalla stessa antiprojettività di fasci od antireciprocità di stelle, scambiando però le due forme. In ogni caso sono punti uniti dell'antireciprocità i punti comuni agli elementi omologhi dei due fasci o delle due stelle. Dunque applicando a questi casi le osservazioni precedenti abbiamo che: *Nel piano il luogo dei punti d'incontro dei raggi omologhi di due* *fasci antiprojettivi di rette è la base di un fascio d'iperconiche. Nello spazio il luogo dei punti d'incontro degli elementi omologhi di due stelle antireciproche, oppure di due fasci antiprojettivi di piani, è la base di un fascio d'iperquadriche.* — In quali casi si possa inversamente considerare la base di un fascio d'iperconiche o d'iperquadriche come generata da due fasci antiprojettivi di rette o di piani, o da due stelle antireciproche, risulterà nello studio speciale che ora passiamo a fare dei fasci d'iperconiche o d'iperquadriche (v. n[i] 45 e seg[i]).

42. Dei fasci. — Cominciamo coll'esame della base di un *fascio d'iperconiche.* È chiaro che se in questo fascio vi sono delle antipolarità prive d'iperconiche fondamentali, cioè prive di punti uniti, il fascio sarà privo di base; e così pure se vi è un'antipolarità avente un solo punto unito e quindi degenere, la base del fascio o manca affatto o si riduce a quell'unico punto.

In generale dall'equazione del fascio di antipolarità risulta evidente che esso determina su una retta qualunque un fascio di antinvoluzioni, o per eccezione un'antinvoluzione unica. Quindi le iperconiche del fascio tagliano in generale la retta secondo le catene di un fascio; donde segue [v. la nota al n. 18 (*) ed il n. 24] che la varietà Q base del fascio d'iperconiche (**) incontra in generale la retta in due punti, od in nessuno: a seconda dei due casi non vi è, oppure vi è sulla retta una determinata coppia di punti reciproci rispetto a tutte le forme del fascio. Se poi si avesse il caso eccezionale in cui sulla retta fosse determinata un'unica antinvoluzione di punti reciproci da tutte le antipolarità ed antireciprocità del fascio, l'iperconica di questo che passerebbe per un punto della retta non unito per l'antinvoluzione dovrebbe contenere tutta la retta e quindi degenerare in una catena semplice di rette; sicchè solo sulle rette che compongono le iperconiche degeneri del fascio accade quel fatto eccezionale e può l'intersezione con Q esser costituita da una catena semplice (es-

(*) Alcune proprietà ivi trovate pei fasci di catene di una forma semplice sono le analoghe di proprietà che presto vedremo dei fasci d'iperconiche e d'iperquadriche.

(**) Nel seguito chiameremo sempre Q l'insieme dei punti base di un fascio d'iperconiche (e Γ l'ente analogo per un fascio d'iperquadriche).

sendo allora tale intersezione quella delle rette stesse con *una* iperconica del fascio, diversa da quella degenere considerata).

Come limite del caso generale in cui una retta non incontra l'ente Q, oppure lo taglia in due punti, si ha il caso in cui la retta è *tangente* a Q in un punto, cioè quei due punti del caso generale vengono a coincidere. Allora nel fascio di catene rettilinee determinate sulla retta dal fascio d'iperconiche ve ne sarà una degenere che si ridurrà a quel solo punto; vale a dire tra quelle iperconiche ve ne sarà una tangente alla retta nel punto considerato; e viceversa. Dunque le tangenti a Q nei suoi vari punti sono le tangenti nei punti stessi alle iperconiche del fascio. Ne segue (n. 40) che le tangenti in un punto ordinario di Q formano in generale una catena semplice (il che concorda con una proposizione generale del n. 15); ma può quella catena ridursi ad una retta sola, tangente comune a tutte le iperconiche; oppure può un punto di Q esser tale che *tutte* le rette passanti per esso vi siano tangenti, e ciò accade se il punto stesso è singolare per un'iperconica degenere del fascio: esso si dirà allora *singolare* o *doppio* anche per Q.

Se l'ente Q esiste, cioè se vi è almeno un punto A il quale sia comune alle iperconiche di un fascio, tali punti, cioè i punti di Q, saranno in generale ∞^2; poichè su ciascuna delle ∞^2 rette passanti per A (escluse le tangenti) vi sarà in generale un altro punto di Q. Ciò se A è un punto ordinario. Se poi esso è singolare per un'antipolarità del fascio, e se questa è degenere di 1^a specie, avendo per fondamentale una catena semplice di rette, l'ente Q si comporrà in generale ancora di ∞^2 punti; mentre se essa è degenere di 2^a specie ed ha quindi una retta per fondamentale, Q si ridurrà in generale ad una catena rettilinea, ed eccezionalmente al solo punto A, oppure a tutta quella retta.

43. Per la base Γ di un fascio d'iperquadriche si possono fare considerazioni analoghe alle precedenti relative alla base Q di un fascio d'iperconiche. Del resto le une si collegano alle altre osservando che un piano qualunque sega il fascio di antipolarità in generale secondo un altro fascio di antipolarità. Per eccezione può un piano dare per sezione una sola antipolarità piana: ciò accade quando il piano stesso sia contenuto in un'iperquadrica del fascio, la quale deve quindi degenerare in una catena semplice di piani. Mentre in questo caso eccezionale un piano di questa catena il quale incontri Γ la taglia generalmente secondo un' iperconica, in generale avviene che un piano qualunque incontra Γ secondo un ente Q.

Una retta qualunque incontra Γ in generale in due punti od in nessuno; è *tangente* a Γ se quei due punti coincidono. Le tangenti a Γ in un suo punto A sono le tangenti in questo alle varie iperquadriche del fascio ed hanno quindi per luogo i piani tangenti in A a queste iperquadriche, piani che formano in generale (n. 40) una catena semplice e che si posson chiamare *tangenti* a Γ (coincidono coi piani che segano Γ secondo enti Q aventi in A un punto doppio): la retta di loro intersezione è la *tangente singolare* in A (cfr. n. 15). Va escluso il caso che A sia punto singolare per un'iperquadrica degenere del fascio: allora esso è *singolare* o *doppio* per Γ, in quanto che ogni retta passante per esso si può considerare come tangente a Γ, non incontrando essa altrove quest'ente, a meno che essa giaccia in quell'iperquadrica, nel qual caso incontra Γ in generale secondo una catena semplice.

Un fascio d'iperquadriche può mancare di punti base. Ma se ne ha uno, appare dalle osservazioni precedenti che esso ne avrà in generale una ∞^4 costituente l'ente Γ; come pure appare subito quali siano i casi d'eccezione.

44. Date le due antipolarità, piane o spaziali,

$$(1) \quad \ldots\ldots \qquad \Sigma\, a_{lm}\, x_l\, \bar{y}_m = 0 \;. \quad \text{ove} \quad a_{ml} = \bar{a}_{lm}$$

$$(2) \quad \ldots\ldots \qquad \Sigma\, b_{lm}\, x_l\, \bar{y}_m = 0 \;, \quad \text{ove} \quad b_{ml} = \bar{b}_{lm} \;,$$

e quindi il fascio

$$(3) \quad \ldots\ldots \qquad \lambda\, \Sigma\, a_{lm}\, x_l\, \bar{y}_m + \mu\, \Sigma\, b_{lm}\, x_l\, \bar{y}_m = 0 \;,$$

si possono collegare varie proprietà o particolarità che quelle o questo possono presentare alle proprietà della collineazione che risulta come prodotto delle due antipolarità: precisamente come nella nota teoria dei fasci di polarità o di quadriche si riduce tutta la classificazione a quella della collineazione prodotto di due polarità. Però nel caso attuale si presentano certi fatti da considerare che non hanno gli analoghi in quella teoria.

Si vede subito che i punti uniti di quella collineazione sono in pari tempo i punti singolari delle antireciprocità degeneri del fascio (3) ed i punti che rispetto alle antipolarità (1) e (2), e quindi rispetto a tutto il fascio (3), hanno una stessa retta od uno stesso piano come polare. Una qualunque di queste proprietà si esprime per un punto x mediante le equazioni

$$(4) \quad \ldots\ldots \qquad \lambda \sum_l a_{lm} x_l + \mu \sum_l b_{lm} x_l = 0 \ ,$$

dalle quali eliminando le x si trae

$$(5) \quad \ldots\ldots \qquad |\lambda\, a_{lm} + \mu\, b_{lm}| = 0 \ .$$

Ai valori di $\lambda : \mu$ che son radici di quest'ultima equazione corrispondono per la (3) le antireciprocità degeneri del fascio e per le (4) i relativi punti singolari. Poichè il fascio contiene con ogni antireciprocità anche l'inversa e due antireciprocità inverse fra loro corrispondono a valori coniugati di $\lambda : \mu$, segue che le radici imaginarie dell'equazione (5) saranno a due a due coniugate; cosa evidente del resto poichè il determinante (5) in causa delle ipotesi fatte sulle a e le b è funzione reale di λ e μ. Se poi una radice imaginaria della (5) annulla anche i primi suddeterminanti, lo stesso fatto accadrà per la radice coniugata (ed entrambe saranno radici doppie) e l'antireciprocità corrispondente (come pure la sua inversa) sarà degenere di 2ª specie. In ogni caso i punti singolari di due antireciprocità degeneri fra loro inverse, cioè i punti dati dalle (4) per radici coniugate dell'equazione (5), costituiscono i due centri od i due assi dei fasci antiprojettivi o delle stelle antireciproche che vengono a definire quelle antireciprocità degeneri; dalle intersezioni degli elementi omologhi di quei fasci o di quelle stelle viene allora generato l'ente base del fascio d'iperconiche o d'iperquadriche (v. n. 41).

45. Applichiamo queste considerazioni anzitutto al caso più generale di un fascio d'iperconiche, cioè a quello in cui la collineazione che abbiamo nominata è generale, sicchè l'equazione (5) ha 3 radici distinte, e nel fascio vi sono 3 distinte antireciprocità degeneri. *Due casi* possono presentarsi secondo che quelle radici sono tutte reali, ovvero una sola è reale e le altre due immaginarie coniugate; corrispondentemente a ciò abbiamo due specie generali di fasci d'iperconiche, o di enti Q, o (n. 41) di antireciprocità piane non involutorie.

Nel 1° caso le tre antireciprocità degeneri sono tutte antipolarità: detti A, B, C i loro punti singolari, è chiaro che la polare di A rispetto al fascio sarà la retta BC, e così via; sicchè ABC sarà un triangolo polare ordinario od autopolare di 1ª specie (v. n. 34) per tutte le antipolarità del fascio. Riferendole a questo triangolo le equazioni di queste corrispondenze e quindi delle iperconiche del fascio si riducono alla 1ª forma canonica del n. 36. Da ciò si trae subito una nuova distinzione di casi secondo che nel fascio vi sono o no delle antipolarità prive d'iperconiche fondamentali. Se vi sono, esisterà tra le antipolarità degeneri una sola dotata d'iperconica fondamentale, cioè il fascio d'iperconiche ne conterrà una sola degenerata in una catena semplice di rette; le iperconiche del fascio non s'incontreranno affatto, cioè non esisterà un ente base Q. Se invece il fascio non contiene antipolarità prive d'iperconiche fondamentali, fra le iperconiche del fascio ve ne saranno tre degenerate in catene di rette di centri A, B, C, ed esisterà un ente Q base del fascio, ente che si potrà dunque considerare come l'intersezione di due catene semplici di rette. In questo caso Q contiene 3 schiere ∞^1 di catene rettilinee situate risp. sulle rette delle 3 catene nominate di centri A, B, C; per ogni punto di Q passa una sola catena di ciascuna schiera; due catene di schiere diverse si tagliano in un sol punto; le catene di una schiera punteggiano projettivamente due altre catene qualunque, ecc.

Nel 2° caso, in cui una sola radice della (5) è reale, una sola delle antireciprocità degeneri sarà un'antipolarità e sia A il suo punto singolare. Le altre due inverse fra loro abbiano per punti singolari B e C; esse determineranno fra i fasci che hanno questi punti per centri un'antiprojettività. In questo caso, e solo in questo, *il fascio d'iperconiche avrà per base un ente* Q *generato dalle intersezioni dei raggi omologhi di due fasci antiprojettivi* B, C (*) (**). La polare del punto A rispetto al fascio

(*) È chiaro che per un siffatto ente Q generato da due fasci antiprojettivi B, C non si può spostare il centro di uno dei fasci generatori in modo che esso rimanga antiprojettivo all'altro; ed invero se l'ente stesso fosse generato dai due fasci antiprojettivi B, C′, esso risulterebbe pure da due fasci *projettivi* C, C′, e però sarebbe una conica: il che è assurdo, poichè una conica non può stare in alcuna iperconica (cfr. una nota al n. 33).

(**) Applicando al fascio delle iperconiche che passano per 7 punti qualunque del piano i risultati sopra ottenuti abbiamo che: *sette punti qualunque* sarà evidentemente la retta BC. Quanto alla polare di B si osservi che mentre a questo punto nell'una delle due antireciprocità degeneri e fra loro inverse corrisponde una retta indeterminata, nell'altra gli corrisponde quella retta del fascio B che è omologa alla CB nell'antiprojettività fra i fasci B e C: tale retta sarà dunque la polare di B e dovrà quindi passare per A. Similmente la polare di C sarà la CA e corrisponderà alla BC del fascio B nell' antiprojettività dei fasci B e C. Il triangolo ABC è dunque autopolare di 2ª specie per tutte le antipolarità del fascio (*). Queste corrispondenze sono tutte dotate d'iperconiche fondamentali aventi comuni le tangenti BA e CA nei punti B e C (**). Una sola di esse degenera in una catena semplice di

---

del piano ne determinano in generale 3 *oppure* 1 *tali che da ognuno di questi essi son projettati mediante sette rette d'una catena semplice; nel caso che vi sia solo un punto siffatto esisteranno inoltre altri due punti distinti dai quali i sette punti dati vengon projettati mediante due gruppi antiprojettivi di sette rette.* Un analogo corollario si potrà dedurre dai corrispondenti risultati che tosto otterremo pei fasci d'iperquadriche.

(*) Dall'esistenza in ambo i casi di un triangolo autopolare comune a tutte le antipolarità del fascio risulta sotto un nuovo aspetto il fatto (n. 40) che le polari di un punto rispetto a quelle antipolarità formano una catena semplice nel fascio di rette che le contiene. Invero quelle rette dovranno (nⁱ 30 e 34) far parte della catena piana che ha il triangolo detto per triangolo unito della stessa specie che quella secondo cui è autopolare per le antipolarità, e che inoltre passa pel punto dato. Da ciò segue appunto (cfr. n. 20) che quelle rette formano una catena. Aggiungiamo che per la 1ª specie di fasci di antipolarità queste catene di rette passano tutte pei vertici del triangolo autopolare, mentre per la 2ª specie esse contengono un vertice e separano armonicamente gli altri due.

(**) Si presenta così per le iperconiche un fatto opposto a quello che accade per le coniche. Mentre per due coniche l'avere punti di contatto è una particolarità di posizione, per due iperconiche può accadere nel caso più generale di avere comuni le tangenti in due punti d'incontro, senza che ciò costituisca una particolarità, anzi essendo questo caso altrettanto generale quanto quello contrario. Però si avverta subito che per due iperconiche un punto comune avente la stessa tangente non è sempre *punto di contatto* nello stesso senso che si avrebbe per due coniche; esso non è in generale *punto doppio* per l'intersezione delle due iperconiche, vale a dire tale che conti due volte fra i punti d'incontro di quest'intersezione e di una retta qualunque passante per esso. Un tal punto si ha solo (n. 42) quando esso è singolare per un'*antipolarità* degenere del fascio. — Osservazioni analoghe si potrebbero fare al nº seg., ove vedremo che nel caso più generale due iperquadriche possono avere comuni i piani tangenti in due o quattro particolari punti d'incontro.

rette, catena di centro A e contenente le rette AB, AC. Le rette di questa catena sono le sole su cui secondo il n. 42 vi sia un'unica corrispondenza di punti reciproci rispetto alle due antireciprocità degeneri fra loro inverse, cioè su cui i due fasci antiprojettivi B, C diano per sezione due punteggiate in antinvoluzione. L'ente Q contiene una ∞^1 di catene rettilinee poste su una parte delle rette di quella catena, parte che ha per estremi le rette AB, AC su cui quelle catene rettilinee d'incontro con Q si riducono risp. ai punti B, C; sulle rette dell'altra parte della catena non vi sono punti d'incontro con Q.

46. Risultati simili ai precedenti si possono ottenere in modo perfettamente analogo pei fasci d'iperquadriche. Qui però i casi in cui si suddivide il caso generale sono *tre*, corrispondenti all'essere 4, ovvero 2, o nessuna, le radici reali dell'equazione (5), e quindi 4, 2, 0 le antipolarità fra le quattro antireciprocità degeneri del fascio.

Nel 1° caso il fascio ammette un tetraedro polare ordinario od autopolare di 1ª specie. Valendosi di questo (segando ad esempio con una catena spaziale che ne contenga i vertici e ricorrendo al n 32 ed a proposizioni note sui fasci di quadriche reali) si vede che o non vi sono punti base, ed allora due sole delle 4 antipolarità degeneri hanno dei coni iperquadrici fondamentali; oppure il fascio d'iperquadriche contiene 4 coni ed allora vi è un ente Γ base del fascio (contenente 4 serie ∞^3 di catene rettilinee, ecc., ecc.).

Nel 2° caso (e non nel 1°) *il fascio d'iperquadriche avrà per base un ente* Γ *generato dalle intersezioni degli elementi omologhi di due stelle antireciproche* C, D. I piani di quelle due stelle che corrispondono alla comune retta CD nella loro antireciprocità saranno tangenti risp. in C e D a tutte le iperquadriche del fascio e si taglieranno secondo una retta contenente i centri A, B dei due coni del fascio. Il tetraedro ABCD sarà autopolare di 2ª specie per tutte le iperquadriche.

Nel 3° caso *il fascio d'iperquadriche avrà per base un ente* Γ *generato dalle intersezioni degli elementi omologhi di due stelle antireciproche* A, B *ed anche da altre due stelle antireciproche* C, D. I 4 punti A, B, C, D hanno per polari rispetto a tutto il fascio risp. i piani ACD, BCD, ABC, ABD e sono quindi vertici di un tetraedro autopolare di 3ª specie comune a tutte le iperquadriche. Queste saranno tutte rigate e conterranno il quadrilatero semplice ACBD. Fra esse non vi sarà alcun cono (*).

(*) *Sui fasci d'iperquadriche in uno spazio qualunque.* — Sia:

$$\lambda \Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m + \mu \Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m = 0$$

l'equazione di un fascio d'antipolarità di S_d, ove $a_{ml} = \bar{a}_{lm}$, $b_{ml} = \bar{b}_{lm}$; e s'indichino con α_{ml}, β_{ml} i rapporti dei complementi algebrici di queste quantità, risp. nei determinanti (supposti non nulli) formati con esse, ai determinanti stessi. Il determinante caratteristico

$$|\lambda a_{lm} + \mu b_{lm}|$$

di quel fascio, ossia della collineazione prodotto delle antipolarità con cui il fascio stesso s'è determinato, avrà le radici imaginarie a due a due coniugate e corrispondenti a divisori elementari in egual numero e di gradi uguali. Ad ogni radice corrisponde uno spazio fondamentale di punti che si compone di punti uniti della collineazione ed è singolare per un'antireciprocità del fascio e luogo di punti ognun dei quali ha uno stesso S_{d-1} per polare rispetto a tutto il fascio. Due spazi fondamentali di punti corrispondenti a radici coniugate sono sostegni di due forme antireciproche le quali generano colle intersezioni degli spazi omologhi l'ente base del fascio d'iperquadriche. Fra essi passa pure un altro legame geometrico notevole, che si collega a quello, ma che possiamo anche stabilire in modo indipendente. Sia x un punto dello spazio fondamentale di punti corrispondente alla radice $\lambda : \mu$, sicchè

$$\lambda \sum_l a_{lm} x_l + \mu \sum_l b_{lm} x_l = 0 ;$$

le coordinate dello spazio polare di x rispetto a tutte le forme del fascio si potranno rappresentare con ξ_m, ove

$$\xi_m = \lambda \sum_l a_{lm} x_l = - \mu \sum_l b_{lm} x_l ,$$

e quindi

$$\bar{\xi}_m = \bar{\lambda} \sum_l a_{ml} \bar{x}_l = - \bar{\mu} \sum_l b_{ml} \bar{x}_l .$$

Ne segue che questo S_{d-1} sarà nello spazio fondamentale di S_{d-1} definito dalle equazioni

$$\lambda' \sum_m \alpha_{mk} \xi_m + \mu' \sum_m \beta_{mk} \xi_m = 0$$

se si ha

$$\lambda' \bar{\lambda} \sum_{lm} \alpha_{mk} a_{ml} \bar{x}_l - \mu' \bar{\mu} \sum_{lm} \beta_{mk} b_{ml} \bar{x}_l = 0 ,$$

relazione che, per le note proprietà dei determinanti, si riduce (dopo esser stata divisa pel fattore $\bar{x}_k$) a

$$\lambda' \bar{\lambda} - \mu' \bar{\mu} = 0 .$$

Da essa si trae (v. i ni 12 e 13 del lavoro già citato *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie*) che quello spazio fondamentale di S_{d-1} è quello

47. *I casi particolari* più notevoli nei fasci di antipolarità e quindi nella posizione mutua di due iperconiche od iperqua-

---

associato (nel senso che ivi ed altrove ho fissato) allo spazio fondamentale di punti che corrisponde alla radice $\bar{\lambda}:\bar{\mu}$. Dunque: *di due spazi fondamentali di punti corrispondenti a radici coniugate l'uno qualunque ha per polare rispetto al fascio di antipolarità quello spazio fondamentale di* S_{d-1} *che è associato all'altro.* Possiamo chiamare *associati* due siffatti spazi fondamentali di punti.

Da quel risultato si deduce (v. loc. cit.) che ogni spazio fondamentale di punti ha per polare uno spazio che contiene tutti gli spazi fondamentali di punti tranne l'associato di quello. Uno spazio fondamentale di punti che non sia autoassociato starà dunque su tutte le iperquadriche del fascio (e lungo esso vi sarà uno spazio tangente fisso). E così pure starà sulla base del fascio lo spazio che congiunge due o più spazi fondamentali di punti fra i quali non ve ne siano due associati (nè, in particolare, uno autoassociato). Se poi uno spazio fondamentale di punti è autoassociato, la sua intersezione con lo spazio fondamentale di S_{d-1} che gli è associato (e polare) starà nelle iperquadriche: una tal intersezione esiste solo quando i divisori elementari corrispondenti al detto spazio non sono tutti lineari.

Quando si conosce la specie di una forma del fascio, le osservazioni precedenti danno delle condizioni pel determinante caratteristico. Così se supponiamo anzitutto che nel fascio vi sia una forma definita, cioè un'antipolarità priva di punti uniti, il fascio sarà privo di base, e però *le radici del determinante caratteristico saranno tutte reali e corrispondenti a divisori elementari di* 1° *grado.* Di questa proprietà godrà in particolare il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\rho & a_{12} & \cdot \\ a_{21} & a_{22}+\rho & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

ove $a_{ml}=\bar{a}_{lm}$. Essa costituisce una notevole estensione di un noto teorema sull'equazione da cui dipendono le perturbazioni secolari (teorema che si riferisce al caso che le a_{lm} siano reali), e fu data prima dal sig. Hermite nel 1855 (*Comptes Rendus*, t. 41, p. 181), e poi indipendentemente e in modo più completo dal Clebsch nel 1859 (*Crelle J.*, t. 57, p. 327; e t. 62, p. 232).

Possiamo ottenere subito una proposizione più generale supponendo anzitutto di avere un fascio pel quale il determinante caratteristico abbia le radici tutte distinte. Dicendo r il numero delle coppie di radici imaginarie coniugate e congiungendo r punti uniti corrispondenti a radici prese risp. in quelle r coppie, avremo degli spazi S_{r-1} che giaceranno su tutte le iperquadriche del fascio. Se dunque nel fascio vi è un'iperquadrica contenente degli spazi S_{r-1}, ma non degli S_r, il che significa (v. una nota al n. 36) che ridotta a forma canonica essa ha r coefficienti di un segno e $d+1-r(\geqq r)$ del segno opposto, il determinante caratteristico non potrà avere più di r coppie di radici imaginarie coniugate. Quando poi si abbia un fascio pel quale le radici non siano tutte distinte basterà considerarne uno infinitamente vicino per driche, si hanno quando qualcuna delle radici del determinante caratteristico ne annulla anche i primi suddeterminanti, ecc.

Nel piano questo fatto può accadere solo per una radice, la quale sarà perciò reale. Ad essa corrisponderà nel fascio un'iperconica degenere di 2ª specie, cioè ridotta ad una retta. L'intersezione di questa con un'altra iperconica del fascio darà la base di questo: sicchè questa base o non esisterà o sarà una catena semplice di punti di quella retta (catena che può ridursi ad un sol punto) ed allora questi punti saranno da considerarsi come doppi per quella base e saranno punti di contatto per tutte le iperconiche del fascio, avendo per tangenti le rette che compongono l'altra iperconica degenere che il fascio in generale ammette. —

Per un fascio d'iperquadriche se una radice *reale* del determinante caratteristico annulla i primi suddeterminanti, essa corrisponde ad un'iperquadrica degenere di 2ª specie, i cui punti costituiranno una catena semplice di piani oppure soltanto una retta; se la base del fascio non è generabile mediante due stelle antireciproche, il fascio ammetterà ancora due iperquadriche degeneri di 1ª specie, le quali possono coincidere in una nuova iperquadrica degenere di 2ª specie. Tale sarebbe il fascio che ha per base l'intersezione di due catene semplici di piani aventi gli assi sghembi fra loro: quest'intersezione si compone di ∞^2 rette che costituiscono un ente duale a se stesso. — Se poi una radice annulla anche i suddeterminanti di 2° ordine, vi sarà nel fascio un'iperquadrica degenere di 3ª specie, cioè ridotta ad un piano; la base, ove esista, starà in questo piano e sarà in generale un'iperconica lungo cui tutte le iperquadriche del fascio avranno lo stesso cono tangente; ecc., ecc.

Altro caso notevole di fasci d'iperquadriche si ha quando una radice *immaginaria* annulla i primi suddeterminanti del determinante caratteristico, sicchè lo stesso fatto accade per la radice

---

dedurne che questa proposizione rimane ancor vera. Possiamo dunque dire in generale che *quando nel fascio considerato di forme ve n'è una che ridotta a forma canonica viene ad avere* k *per differenza fra i numeri di coefficienti risp. dei due segni, il determinante caratteristico ha almeno* k *radici reali (distinte o coincidenti)*. — Nel caso particolare in cui le forme del fascio siano a coefficienti reali, questo teorema si riduce ad uno contenuto nell'*Inauguraldissertation* del sig. KLEIN (cfr. *Math. Ann.* XXIII, nota a pag. 562).

coniugata. Allora vi sarà nel fascio un'antireciprocità non involutoria la quale sarà degenere di 2^a specie, cioè si ridurrà ad un'antiprojettività fra due fasci di piani (mentre l'antireciprocità inversa si ridurrà all'inversa di quest'antiprojettività). *Il fascio d'iperquadriche avrà per base un ente* Γ *generato dalle intersezioni degli elementi omologhi di due fasci antiprojettivi di piani*, o ciò che fa lo stesso, *un ente* Γ *generato dalle congiungenti i punti omologhi di due punteggiate antiprojettive* (sezioni di quei fasci coi loro assi, scambiati; assi che supponiamo sghembi) (*) (**).

(*) Un esempio di siffatto ente Γ si ha nel luogo delle rette di un'iperquadrica rigata che si appoggiano a due generatrici sghembe qualunque; poichè queste vengono punteggiate antiprojettivamente da quelle rette. —

Abbiamo visto al n. 45 che *le rette di un piano sulle quali due dati fasci antiprojettivi di rette determinano un'antinvoluzione sono le rette di una catena semplice*. Questa proposizione non ha in generale l'analoga per due stelle antireciproche: cioè non esistono in generale dei piani su cui queste due stelle determinino, delle antipolarità piane (v. ad es. il n. 43). Solo si può dire, come risulta dalle cose esposte, che ove esistano cotali piani essi formano una catena semplice (iperquadrica degenere che contiene l'ente Γ generato dalle due stelle antireciproche). — La proposizione ricordata relativa al piano conduce a quest'altra relativa alle *rette dello spazio le quali segano due fasci antiprojettivi di piani secondo un'antinvoluzione*, o, ciò che fa lo stesso, *alle rette dalle quali si projettano secondo un'antivoluzione due punteggiate antiprojettive date* (sezioni di quei fasci coi loro assi): tali rette formano una varietà ∞^5 tale che in ogni piano ne giace una catena semplice e per ogni punto ne passa una catena semplice. Se si considerano come omologhi il centro ed il piano di una tal catena si viene per tal modo ad avere una corrispondenza univoca fra i punti ed i piani dello spazio sì che ogni punto sta nel piano omologo: la corrispondenza è iperalgebrica, ma *non è* un'antireciprocità.

(**) Verso la fine del n. 26 abbiamo esaminato la natura della corrispondenza fra i punti di due rette di un piano le quali si considerino come sezioni di una catena piana di rette. Un'analoga corrispondenza fra i punti di due piani π, π' si ha considerando come omologhi due punti quando stanno su una *corda* di una catena spaziale fissa C, cioè su una retta unita dell'antinvoluzione che ha questa catena per fondamentale. Allora ad una retta qualunque di π corrisponderà rispetto a quest'antinvoluzione una retta punteggiata antiprojettivamente a quella: dunque le corde di C uscenti dai punti di quella formano un ente Γ della specie che sopra è stata per ultima discorsa, e questo segherà π' secondo una ∞^2 Q, base di un fascio d'iperconiche. Alle rette di ogni piano corrispondono dunque nell'altro enti Q siffatti. La corrispondenza fra i due piani si potrebbe dunque, come quella analoga fra due rette ora ricordata, chiamare *quadratica* (iperalgebrica).

48. Infine altri casi particolari di fasci d'iperconiche o d'iperquadriche, degni di menzione, si hanno quando il determinante caratteristico è identicamente nullo (il che finora si escludeva), cioè tutte le forme del fascio sono degeneri. Osservando che la retta od il piano polare di un punto singolare di una forma rispetto ad un'altra sarà polare del punto rispetto a tutte le forme, e conterrà quindi i punti singolari di tutte, si giunge facilmente alla conclusione che oltre ai fasci in cui un punto singolare è comune a tutte le forme si hanno solo i fasci seguenti.

Il fascio d'iperconiche degeneri, o catene semplici di rette, determinato da due tali forme prese in modo da avere una retta comune. La base del fascio si comporrà (v. n. 20), oltre che di questa retta, di una catena piana. Questa catena piana incontrerà quella retta secondo una catena semplice, che sarà il luogo dei punti singolari delle iperconiche del fascio.

Il fascio d'iperquadriche degeneri determinato da due coni iperquadrici che abbiano comune una generatrice ed il piano tangente lungo essa. Il luogo dei vertici dei coni del fascio sarà ancora una catena posta su quella retta. Però vi sarà nel fascio un'iperquadrica contenente il piano nominato e quindi degenere di 2ª specie. (*). (**)

(*) Lo studio generale dei fasci d'iperquadriche degeneri di ogni spazio si può condurre in modo simile a quello dei fasci di quadriche degeneri (v. ad es. Segre, t. 19 di questi *Atti*; e Bertini, *Rendic. Acc. Lincei*, ser. 4ª, t. II).

(**) *Su alcune forme invariantive del sistema di due iperconiche od iperquadriche.* — Rappresentiamo con la notazione simbolica le due forme ripetutamente considerate, sicchè:

$$\Sigma\, a_{lm}\, x_l\, \bar{y}_m = a_x\, \bar{a}_{\bar{y}} = a'_x\, \bar{a}'_{\bar{y}} = \ldots$$

$$\Sigma\, b_{lm}\, x_l\, \bar{y}_m = b_x\, \bar{b}_{\bar{y}} = b'_x\, \bar{b}'_{\bar{y}} = \ldots$$

Allora servendoci degl'invarianti che pel campo binario furono introdotti nella nota al n. 18, ed applicando il principio di trasporto di Clebsch (convenientemente esteso) otteniamo subito questi primi risultati. Nel piano le rette su cui quelle due antipolarità (iperconiche) determinano due antinvoluzioni (catene semplici) permutabili od armoniche, inviluppano l'iperconica

$$(ab\xi)\,(\overline{ab\xi}) = 0\ .$$

Nello spazio le rette aventi la stessa relazione con due antipolarità spaziali (iperquadriche) soddisfano l'equazione

$$(ab\xi\eta)\,(\overline{ab\xi\eta}) = 0\ ,$$

49. Reti d'iperconiche; fili cubici. — Da tre antipolarità piane che non formino fascio

$$(1) \ldots\ldots \quad \Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m = 0 \,, \qquad (a_{ml} = \bar{a}_{lm})$$

$$(2) \ldots\ldots \quad \Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m = 0 \,, \qquad (b_{ml} = \bar{b}_{lm})$$

$$(3) \ldots\ldots \quad \Sigma c_{lm} x_l \bar{y}_m = 0 \,, \qquad (c_{ml} = \bar{c}_{lm})$$

---

e però formano una varietà ∞^7 tale che le rette giacenti in un piano inviluppano un'iperconica, e quelle uscenti da un punto formano un cono iperquadrico. — Nel piano *l'equazione tangenziale dell'ente* Q intersezione delle due iperconiche considerate, cioè base del loro fascio, vale a dire l'equazione soddisfatta dalle rette che segano quelle iperconiche secondo catene semplici tangenti fra loro, è:

$$(ab\xi)(\overline{ab\xi}).(a'b'\xi)(\overline{a'b'\xi}) - (aa'\xi)(\overline{aa'\xi}).(bb'\xi)(\overline{bb'\xi}) = 0 \,.$$

Un'analoga equazione in coordinate di rette tangenti si ha per l'ente Γ intersezione di due iperquadriche (basta rendere quaternari i determinanti ternari che figurano nell' equazione precedente, introducendovi ancora i simboli η, od $\bar{\eta}$).

Degl'invarianti delle due iperconiche od iperquadriche si ottengono subito considerando il determinante del fascio che esse determinano; e da essi applicando il principio di trasporto si traggono, similmente a quanto ora si fece, altre forme invariantive. Così nel caso delle iperconiche si ha

$$|\lambda a_{lm} + \mu b_{lm}| = \Delta\lambda^3 + I\lambda^2\mu + I_1\lambda\mu^2 + \Delta_1\mu^3$$

ove Δ e Δ_1 sono i determinanti delle due forme

$$\Delta = |a_{lm}| = \frac{1}{6}(aa'a'')(\overline{aa'a''})$$

$$\Delta_1 = |b_{lm}| = \frac{1}{6}(bb'b'')(\overline{bb'b''}) \,,$$

mentre I ed I_1 sono due invarianti simultanei

$$I = \Sigma b_{lm} A_{lm} = \frac{1}{2}(aa'b)(\overline{aa'b})$$

$$I_1 = \Sigma a_{lm} B_{lm} = \frac{1}{2}(abb')(\overline{abb'}) \,,$$

i quali col loro annullarsi esprimono una particolare posizione *armonica* delle due forme, della quale ci occuperemo nel seguito di questo Saggio. Il discriminante della forma cubica in λ, μ è un nuovo invariante che col suo segno serve ad indicare quale fra i due casi principali discussi al n. 45 presentano le due iperconiche; mentre annullandosi esprime che l'intersezione di queste ha un punto doppio. Col principio di trasporto dall'invariante I si è determinata una rete (di antireciprocità o di antipolarità).

$$(4) \ldots \qquad \lambda \Sigma a_{lm} x_l \bar{y}_m + \mu \Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m + \nu \Sigma c_{lm} x_l \bar{y}_m = 0 \; .$$

Due punti qualunque x, y reciproci rispetto a quelle tre saranno reciproci rispetto a tutte le antipolarità (ed antireciprocità) della rete, e se coincidono daranno un punto unito o punto *base* della rete. La condizione necessaria e sufficiente perchè un punto x faccia parte di una tal coppia di punti reciproci rispetto alla rete si avrà eliminando le $\bar{y}_m$ dalle equazioni (1), (2), (3), cioè sarà:

$$(5) \ldots \qquad \begin{vmatrix} \Sigma a_{l1} x_l \, , & \Sigma a_{l2} x_l \, , & \Sigma a_{l3} x_l \\ \Sigma b_{l1} x_l \, , & \Sigma b_{l2} x_l \, , & \Sigma b_{l3} x_l \\ \Sigma c_{l1} x_l \, , & \Sigma c_{l2} x_l \, , & \Sigma c_{l3} x_l \end{vmatrix} = 0 \; .$$

Alla stessa condizione giungiamo se vogliamo che un punto x sia singolare per un'*antireciprocità* della rete. Se quest'antireciprocità corrisponde ai valori (complessi) λ, μ, ν dei parametri che compaiono nella (4), dovrà essere (successivamente per $m = 1, 2, 3$).

$$(6) \ldots \qquad \lambda \Sigma a_{lm} x_l + \mu \Sigma b_{lm} x_l + \nu \Sigma c_{lm} x_l = 0 \; ,$$

donde eliminando λ, μ, ν si ritorna alla (5) (*). Questa sarà

---

trae che i piani su cui due date antipolarità dello spazio (iperquadriche) determinano due antipolarità piane (iperconiche) in posizione armonica inviluppano un'iperquadrica

$$(a a' b \xi)\,(\overline{a a' b \xi}) = 0 \; ;$$

e dal discriminante testè nominato si trarrebbe similmente l'*equazione tangenziale dell'ente* Γ intersezione di due iperquadriche, cioè l'equazione soddisfatta dai piani che gli sono tangenti. — Ecc., ecc.

(*) Anche sinteticamente si vede subito che per ogni punto il quale sia singolare per un'antireciprocità della rete, cioè abbia la stessa retta per polare rispetto ad un fascio di antipolarità della rete (v. n. 44), esiste un punto che gli è reciproco rispetto a tutte le forme della rete (il punto d'incontro di quella retta colla polare del punto rispetto ad una forma che stia nella rete ma non in quel fascio). Viceversa se un punto A ne ammette uno A′ come reciproco rispetto a tutta la rete, la catena piana delle rette polari di A rispetto alla rete (n. 40) dovendo comporsi di rette passanti per A′ degenererà in generale in questo fascio; e però vi sarà in questo (n. 14) una retta singolare la quale terrà luogo delle ∞^1 rette di una catena semplice contenuta nella catena piana, cioè sarà polare di A rispetto a tutto un fascio di antipolarità similmente soddisfatta dal punto singolare dell'antireciprocità inversa, la quale corrisponde ai valori coniugati di λ, μ, ν. Quando questi valori sono reali, i due punti coincidono nel punto singolare di un'*antipolarità* della rete. —

Osserviamo però subito che l'equazione (5) potrebbe ridursi ad un'identità; potrebbe cioè accadere che ogni punto del piano ne avesse uno reciproco rispetto a tutta la rete, ossia che ogni forma della rete fosse degenere. Ricordando (n. 48) che un fascio d'iperconiche è tutto composto di forme degeneri solo quando le due forme che lo determinano hanno comune il punto singolare, ovvero quando la base del fascio si spezza in una retta ed una catena piana, è facile dedurne che una rete d'iperconiche si compone tutta di forme degeneri solo nei seguenti casi. 1° quando le tre forme che la determinano hanno comune il punto singolare. 2° quando le tre iperconiche degeneri contengono una stessa catena piana: i punti di questa costituiscono allora la base della rete e le iperconiche di questa sono le ∞^2 catene semplici di rette che la projettano dai suoi punti (cfr. n. 20); due punti armonici rispetto alla catena piana sono reciproci rispetto alla rete; ecc. 3° quando le tre iperconiche contengono una stessa retta: questa sarà allora comune a tutte e ne conterrà i punti singolari; sulla catena piana in cui due iperconiche si segano ancora, un'altra determinerà (n^i 25, 26) una catena semplice di 2° ordine (di punti di una conica) la quale unitamente alla retta nominata costituirà la base della rete.

50. Nel seguito noi escluderemo sempre questi casi in cui tutte le forme della rete sono degeneri. Con questa restrizione avremo dunque dal n° prec. i risultati seguenti.

La rete determina una cubica γ e due corrispondenze iperalgebriche univoche, involutorie (o simmetriche), fra i suoi punti. Le coppie di punti omologhi dell'una corrispondenza, Ω, *sono le coppie di punti reciproci rispetto a tutte le forme della rete. Le coppie di punti omologhi dell'altra corrispondenza,* Π, *sono*

---

della rete: il punto A sarà dunque singolare per un'antireciprocità degenere della rete. — Quando quest'antireciprocità è involutoria si presenta il caso più particolare in cui la catena piana delle polari di A degenera in una catena semplice di rette del fascio A'; ognuna di queste figurando come singolare cfr. n. 52).

le coppie di punti singolari delle antireciprocità degeneri della rete, cioè i centri delle coppie di fasci antiprojettivi che fan parte della rete.

Di qui derivano altre conseguenze importanti. Due punti reciproci rispetto alla rete di antireciprocità dovranno in particolare trovarsi su due raggi omologhi di due fasci antiprojettivi costituenti un'antireciprocità degenere della rete. Dunque *i due fasci antiprojettivi di rette aventi i centri in due punti omologhi qualunque di* Π *projettano i punti di* γ *che si corrispondono in* Ω. In altri termini *alle coppie di punti di* γ *allineate con un punto fisso qualunque* A *di* γ *corrispondono mediante* Ω *delle coppie di punti allineate col punto* B *che è omologo di* A *in* Π, *e la corrispondenza che così si ha fra i due fasci di rette* A, B *è antiprojettiva*. In particolare considerando una tangente condotta da A a γ si vede che le dovrà corrispondere una tangente condotta da B, cioè *nella corrispondenza* Π *sono omologhi due punti quando sono i tangenziali su* γ *di due punti omologhi di* Ω. *Così i tangenziali dei punti uniti di* Ω *saranno punti uniti per* Π.

51. I punti uniti della corrispondenza Ω sono, come già notammo, i punti base della rete. Può accadere però che essi manchino completamente: basta perciò che nella rete vi sia un'antipolarità priva d'iperconica fondamentale (o coll'iperconica fondamentale degenerata in un punto, che non sia punto base). Ma se esistono, quei punti formeranno in generale sulla cubica γ una varietà iperalgebrica ∞^1, che noi diremo per brevità *filo del* 3° *ordine* o *filo cubico* (ed indicheremo ancora con Ω); chiamando in generale *fili* tutte le varietà di ∞^1 punti, e in particolare *fili del* 1° *ordine* le catene rettilinee e *fili* (piani) *del* 2° *ordine* le catene coniche. Vedremo che un filo cubico può comporsi di un sol *ramo*, o tratto continuo, ovvero anche di due rami.

I punti uniti della corrispondenza Π sono i punti singolari delle antipolarità degeneri della rete. Ognuno di essi è dunque centro di un fascio di rette nel quale si ha un'antinvoluzione che projetta la corrispondenza Ω: ogni retta unita di quest'antinvoluzione sega dunque γ ancora in due punti i quali o sono omologhi in Ω, ovvero sono uniti per Ω. Chiamando *corda* di Ω ogni retta la quale o incontri in due punti il filo cubico Ω, ovvero contenga due punti reciproci della rete cioè due punti omologhi nella corrispondenza Ω, potremo dire che le catene semplici di rette che, come iperconiche degeneri, fan parte della nostra rete, si compongono tutte di corde di Ω. Viceversa ogni corda di Ω fa parte di un'iperconica degenere della rete, giacchè l'iperconica della rete che è individuata dal passare per due punti arbitrari di quella retta avrà su questa 4 punti uniti, ovvero 2 punti uniti e 2 punti reciproci, assunti in modo arbitrario, e però dovrà contenere tutta la retta. Poichè le corde di Ω, anche quando la rete non ha un filo cubico base Ω, sono ∞^2, si vede che sempre vi saranno nella rete ∞^1 iperconiche degenerate in catene semplici di rette (*): il che risultava anche da ciò che (n. 45) in ogni fascio d'iperconiche contenuto nella rete vi è sempre un'iperconica (o tre) così degenerata. — *La corrispondenza* Π, a differenza della Ω, *ammette sempre in generale un filo* Π *di punti uniti.* Ogni corda (e in particolare ogni tangente) del filo Ω sega il filo Π. In altri termini ogni retta che congiunga un punto del filo Ω ad un punto del filo Π incontra ancora la curva γ in un 3° punto che sta pure nel filo Ω. Ecc. ecc.

52. Possiamo dimostrare che *il filo* Π *è pure del* 3° *ordine*, e più precisamente che *la corrispondenza* Π *fra i punti di* γ *si può, al modo stesso di* Ω, *considerare come la corrispondenza delle coppie di punti reciproci rispetto ad una rete d'iperconiche.*

Invero sia A un punto qualunque del filo Π e A' il suo reciproco rispetto alla rete, cioè l'omologo di A nella corrispondenza Ω. Il punto A ammette una retta fissa passante per A' come polare rispetto a tutto un fascio di forme della rete che comprenda l'antipolarità degenere di cui A è punto singolare. A seconda della natura di quel fascio (n. 45) accadrà che i due punti in cui quella retta incontra ancora γ saranno singolari per

(*) Se si projetta un filo cubico Ω da un suo punto su una retta r, e si considerano le projezioni delle due serie ∞^1 di catene rettilinee che sulle rette di un'iperconica degenere della rete son determinate da due altre (non formanti un fascio con quella), si vede che esse daranno su r *due fasci projettivi di catene rettilinee dai quali vien generato il filo di* 2° *ordine projezione di* Ω: si ottengono così tutti i fili rettilinei del 2° ordine e le loro generazioni projettive (cfr. la nota al n. 26).

due antipolarità del fascio, cioè saranno punti del filo Π, ovvero saranno singolari per due antireciprocità degeneri del fascio inverse l'una dell'altra, cioè saranno punti omologhi della corrispondenza Π. Facendo muovere quel fascio di forme in modo che descriva tutta la rete passando sempre per l'antipolarità che ha in A un punto singolare, la retta considerata, polare di A, descriverà intorno ad A' una catena semplice (poichè si può considerare come polare di A rispetto ad un'antipolarità mobile di un fascio contenuto nella rete ma *non* passante per la suddetta antipolarità degenere). Ciò posto, se il punto A percorre tutto il filo Π, il suo reciproco A' descriverà un nuovo filo Π' sì che ogni punto di questo sarà centro di una catena semplice composta di rette che projettano il filo Π (doppiamente) e di rette che contengono coppie di punti omologhi della corrispondenza Π. Considerando tre di queste catene di rette e la rete d'iperconiche che esse (considerate come iperconiche degeneri) determinano, vediamo che il filo Π è l'intersezione di quelle tre catene di rette, ossia il filo base di una rete d'iperconiche, cioè un filo cubico: come appunto avevamo asserito. Potremo inoltre aggiungere che *il filo Π' trasformato di Π mediante la corrispondenza Ω è quello che ha colla Π la stessa relazione che il filo Π ha colla Ω* (*).

53. *La cubica γ su cui sta un filo del 3° ordine ha necessariamente l'invariante assoluto reale, vale a dire è projettiva ad una cubica reale.* Per dimostrare questa proposizione e

(*) Poichè le iperconiche passanti per 6 punti del piano formano in generale una rete (n. 39), possiamo dedurre immediatamente le proposizioni seguenti da cui riescon definiti i fili cubici generali mediante la sola nozione delle catene semplici. *Il luogo di un punto dal quale 6 punti dati del piano son projettati mediante sei rette di una catena semplice è in generale un filo cubico; ed i punti comuni alle ∞^1 catene semplici di rette che così si ottengono costituiscono a lor volta un filo cubico, che riesce individuato dal passaggio pei 6 punti dati, e che sta con l'altro in una stessa curva del 3° ordine. Questa è il luogo descritto da due punti dai quali quei 6 – e quindi tutti i punti del filo cubico che li contiene - son projettati mediante due gruppi antiprojettivi di rette.* Ecc, ecc. — Queste proposizioni si connettono poi strettamente (v. n. 54) ad altre dell'ordinaria geometria projettiva relative alle coppie di punti di due piani da cui due date sestuple di punti son projettate mediante gruppi *projettivi* di rette (v. ad es. STURM, *Das Problem der Projectivität u. s. w.*, *Math. Ann.*, I, pag. 541), ecc.

collegare la natura di γ alla natura dei fili cubici che essa contiene, consideriamo un punto qualunque P del filo Π e le 4 tangenti a, b, c, d che da esso si possono condurre a toccare altrove, in A, B, C, D, la cubica γ. Quelle tangenti saranno distinte se questa curva non ha punti doppi. Nel fascio di rette di centro P abbiamo un'antinvoluzione (in cui degenera un'antipolarità della rete) che projetta la corrispondenza Ω fra i punti di γ; sì che due rette omologhe di quell'antinvoluzione segano ancora γ secondo due coppie di punti le quali si corrispondono in Ω. Quindi i punti A, B, C, D dovranno corrispondersi fra loro rispetto ad Ω; ciò che può avvenire in tre modi diversi, cioè: 1° senza che alcuno di essi sia unito per Ω, sicchè ad esempio A, B e C, D saranno due coppie di punti omologhi rispetto ad Ω; 2° essendo A, B, C, D quattro punti uniti di Ω; 3° essendo due di essi, A, B ad es., punti uniti, e gli altri due C, D punti omologhi rispetto ad Ω. Nei primi due casi l'antinvoluzione considerata del fascio P mostra che il gruppo di rette $abcd$ sarà antiprojettivo (al gruppo corrispondente, $badc$ nel 1° caso, $abcd$ nel 2°, cioè) a se stesso, cioè che il birapporto $(abcd)$ sarà reale. Nel 3° caso essa mostra che il gruppo $abcd$ sarà antiprojettivo ad $abdc$, cioè che il birapporto $(abcd)$ sarà (coniugato al suo inverso, cioè) un numero complesso avente per modulo l'unità. Dunque *la cubica γ fa parte o di quella specie di cubiche per cui il birapporto è reale, oppure di quella specie per cui il birapporto ha per modulo l'unità.* Com'è noto queste due specie di cubiche sono appunto quelle per cui l'invariante assoluto (*) è reale; esso è positivo per quelle della 1ª specie, negativo per quelle della 2ª. Le cubiche armoniche appartengono ad ambe le specie; per esse l'invariante s'annulla.

Ora *se la rete d'iperconiche non ha un filo base*, cioè se la corrispondenza Ω su γ non ha punti uniti, dovrà necessariamente presentarsi il caso in cui A, B e C, D son due coppie di punti reciproci, e però *la cubica γ avrà un birapporto reale.* — Se invece esistono punti uniti di Ω, si prenda per A uno di

(*) Qui e nel seguito per *invariante assoluto* della cubica, cioè della quaterna di tangenti condotte a questa da un suo punto, intendiamo quello che, indicando con α uno dei birapporti di questa quaterna, è dato da $\dfrac{(1+\alpha)^2\,(2-\alpha)^2\,(1-2\alpha)^2}{\alpha^2(1-\alpha)^2}$, e si esprime in modo noto mediante gl'invarianti g_2, g_3 (od i, j), oppure S, T, della quaterna, o della cubica.

essi e si determinino in conseguenza il punto P e poi B, C, D. Supponiamo che anche questi tre vengano a stare nel filo Ω. Allora se immaginiamo un raggio del fascio P il quale si muova descrivendo la catena semplice di rette che costituisce l'iperconica degenere di centro P, i due punti di γ projettati da questo raggio saranno due punti del filo Ω oppure due punti omologhi nella corrispondenza Ω, e passeranno dall'una all'altra relazione appunto quando il raggio mobile passerà per le quattro rette a, b, c, d della catena, su ognuna delle quali quei due punti vengono a coincidere. Ma da ciò segue subito che il filo Ω si compone di due rami continui, staccati fra loro, sì che quella catena di rette è divisa da a, b, c, d in quattro parti, di cui due, per es. ab e cd, projettano doppiamente risp. quei due rami del filo Ω, e le altre due, bc e da, non ne contengono alcun punto. — Se poi supponiamo che solo A, B siano uniti per Ω, mentre C, D siano omologhi, seguendo ancora il movimento continuo di un raggio del fascio P che descrive quella catena semplice, abbiamo che solo nel passaggio per a e b esso comincierà oppure cesserà di projettare due punti del filo Ω: questo si comporrà dunque di un sol ramo. — Concludiamo che *i fili cubici possono comporsi di due rami o di un solo; i fili a due rami stanno su cubiche aventi un birapporto reale, mentre quelli ad un ramo stanno su cubiche il cui birapporto ha per modulo l'unità.* (Cfr. n. 55).

Quando la corrispondenza Ω non ha punti uniti, il filo Π si compone di due rami, luoghi l'uno dei centri delle catene di rette che fan parte della rete, l'altro dei centri delle antinvoluzioni prive di catene fondamentali che pur si trovano in tal caso fra le antipolarità della rete. Così pure quando i punti uniti della corrispondenza Ω formano un filo composto di due rami, anche il filo Π si comporrà di due rami: l'uno di essi è incontrato dalle rette che tagliano il filo Ω in due punti di uno stesso ramo (e per un punto P di questo accade che i punti A, B, C, D che dianzi consideravamo sono uniti per Ω); l'altro invece dalle rette che s'appoggiano ad ambi i rami del filo Ω (e per un suo punto P accade invece che A, B e C, D son due coppie di punti omologhi di Ω).

54. L'analogia evidente fra alcuni dei risultati precedenti (n[i] 49 e seg[i]) e certe proposizioni note relative alle corrispondenze univoche fra due cubiche piane, alle forme di queste curve, ecc., avrà condotto naturalmente il lettore a considerare il legame che passa fra queste e quelli. Tale legame si può derivare da un concetto generale che riduce in molti casi le questioni relative ad antiprojettività a questioni riguardanti delle projettività: *si facciano seguire tutte le corrispondenze antiprojettive da un' antiprojettività fissa arbitraria, ad esempio dal coniugio, e si avranno così in luogo di esse altrettante corrispondenze projettive.*

Così, per lo studio della rete di antireciprocità (4) (n. 49) determinata dalle antipolarità (1), (2) e (3) di un piano π, si consideri un'anticollineazione **C** fra questo ed un piano π', distinto o sovrapposto a quello, e sia indicando con y e z due punti qualunque di π e π' omologhi rispetto a **C**,

$$(\mathbf{C}) \qquad y_l = \bar{z}_l \ .$$

Come prodotti di quelle antireciprocità (4) per l'anticollineazione **C** si avranno le *reciprocità* fra i piani π, π'

$$(4') \ . \ . \quad \lambda \Sigma a_{lm} x_l z_m + \mu \Sigma b_{lm} x_l z_m + \nu \Sigma c_{lm} x_l z_m = 0 \ ,$$

le quali formeranno pure una rete. Ora è ben noto, e si verifica subito, che da una rete di reciprocità fra π e π' risultano determinate in questi due piani due cubiche γ e γ' le quali si posson considerare sia come luoghi delle coppie di punti che son reciproci rispetto a tutte le reciprocità della rete, — il che stabilisce fra i punti di γ e γ' una determinata corrispondenza algebrica univoca **O**, — sia come luoghi delle coppie di punti singolari delle reciprocità degeneri della rete, cioè dei centri dei fasci projettivi che costituiscono queste reciprocità, — e ciò stabilisce fra γ e γ' un' altra corrispondenza univoca **P** tale che da due punti omologhi rispetto a questa i punti che si corrispondono rispetto ad **O** son projettati mediante due fasci projettivi. Per l'attuale rete (4') di reciprocità la cubica γ sarà appunto quella considerata nei n[i] prec[i], avente per equazione la (5). E poichè le antireciprocità (4) si ottengono dalle reciprocità (4') facendole seguire dall'anticollineazione **C** (e da reciprocità degeneri si ottengono in questa guisa delle antireciprocità degeneri), si vede subito che la corrispondenza Ω fra i punti di γ reciproci rispetto alla rete di antireciprocità si può considerare come prodotto della corrispondenza **O** fra i punti di γ e γ' che son reciproci rispetto alla rete di reciprocità e della corrispondenza anticollineare **C** fra γ' e γ; e che similmente la corrispondenza Π su γ è il prodotto della **P** fra γ e γ' e della **C**. — Di passaggio, dal fatto che fra γ e γ' esiste una corrispondenza univoca algebrica **O** (oppure **P**) ed in pari tempo un' anticollineazione **C**, deduciamo che gl' invarianti assoluti di queste cubiche sono in pari tempo uguali e coniugati, e quindi reali. (cfr. n. 53).

Basandoci sulle considerazioni ora fatte possiamo proporci di *determinare tutti i fili cubici giacenti su una data cubica piana γ d'invariante assoluto reale*, e più precisamente di *determinare tutte le corrispondenze che esistono su γ di punti reciproci rispetto a reti di antipolarità* (*corrispondenze* Ω). A tal fine si consideri la cubica γ' che corrisponde a γ in un'anticollineazione **C** fissata ad arbitrio (potendo anche γ' coincidere con γ): le corrispondenze cercate fra i punti di γ si potranno considerare come prodotti di corrispondenze algebriche univoche **O** fra γ e γ' e della corrispondenza anticollineare **C**. Ed abbiamo dalle cose dette una 1^a condizione da imporre ad una tal corrispondenza **O** fra γ e γ': quella di esser la corrispondenza dei punti reciproci rispetto ad una rete di reciprocità. Se essa si verifica, esiste pure, come dicemmo, una corrispondenza **P** fra γ e γ' tale che da due punti omologhi di **P** la **O** è projettata mediante due fasci projettivi. Viceversa se la corrispondenza **O** determina fra γ e γ' una corrispondenza **P** siffatta, tre coppie di fasci projettivi di rette che projettino i punti di γ e γ' omologhi rispetto ad **O** costituiscono tre reciprocità degeneri dalle quali (se scelte in modo da non stare in un fascio) è determinata una rete di reciprocità rispetto a cui due punti di γ e γ' omologhi in **O** sono sempre reciproci. — Quando questa 1^a condizione è soddisfatta, la corrispondenza Ω fra i punti di γ che è prodotto della **O** per la **C** viene ad essere quella dei punti reciproci rispetto ad una rete di antireciprocità. Perchè questa contenga una rete di *antipolarità*, cioè Ω sia appunto della specie voluta, occorrerà ancora che Ω risulti involutoria. E questa condizione sarà anche sufficiente, poichè allora la rete di antireciprocità con ogni antireciprocità degenere (coppia di fasci antiprojettivi che projettano Ω) conterrà pure quella inversa, sicchè in essa vi saranno infiniti fasci di antipolarità.

Applicheremo questi concetti successivamente alle cubiche ellittiche ed a quelle razionali (cioè ai due casi in cui l'invariante assoluto è finito od infinito).

55. Sulla cubica ellittica γ ad invariante assoluto reale sia u l'integrale di 1ª specie determinato in modo da annullarsi in un flesso. Se la cubica ha il birapporto reale (cioè l'invariante assoluto positivo), è noto che per parallelogrammo dei periodi di u si può prendere un *rettangolo*, cioè che i periodi fondamentali si possono indicare con ω_1 e $i\omega_2$, essendo ω_1 ed ω_2 reali. Se invece il birapporto della cubica ha per modulo l'unità (cioè se l'invariante assoluto è negativo), si può prendere per parallelogrammo dei periodi un *rombo*, e come periodi fondamentali due numeri complessi coniugati, che nel seguito indicheremo con $\frac{1}{2}(\omega_1+i\omega_2)$ e $\frac{1}{2}(\omega_1-i\omega_2)$; cosicchè anche in questo 2° caso ω_1 ed $i\omega_2$ saranno due periodi, ma non più fondamentali: nei loro multipli si avranno ancora risp. tutti i periodi reali e tutti quelli imaginari puri. — In ambo i casi, dalle espressioni note delle funzioni ellittiche di u mediante gl'invarianti, oppure anche dalla considerazione della cubica reale, si vede subito che la corrispondenza univoca fra i punti della curva che corrispondono a valori coniugati di u (*), cioè la corrispondenza rappresentata parametricamente da

$$u' \equiv \bar{u}\ , \qquad (\text{mod}^{\text{i}}\ \text{periodi})$$

è un'anticollineazione (nel caso della cubica reale il coniugio). Potremo assumerla come anticollineazione ausiliare **C** del n. preced. Allora, poichè la curva γ' coinciderà con γ, dovremo cercare le corrispondenze algebriche univoche fra i punti di γ che soddisfano alle due condizioni ivi trovate per le corrispondenze **O**.

La 1ª di quelle condizioni è soddisfatta da *ogni* corrispon-

---

(*) Questa corrispondenza è univoca appunto per l'ipotesi fatta che l'invariante assoluto di γ sia reale e che quindi il coniugato di un periodo sia ancora un periodo. Anche altre corrispondenze che ora otterremo su γ sono univoche solo in tali ipotesi. — A proposito di corrispondenze iperalgebriche simmetriche sulle curve ellittiche (*superficie simmetriche* $p=1$) si confrontino gli ultimi paragrafi dell'opuscolo del sig. Klein: *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale* (Leipzig, 1882).

denza algebrica univoca su γ. Poichè è noto (*) che qualunque sia questa corrispondenza, ne esiste *sempre* su γ un' altra (la corrispondenza dei *centri omologhi di projezione* rispetto a quella) che ha con quella le stesse relazioni che la **P** del n. prec. ha con la **O**. Ora le corrispondenze algebriche univoche *(ordinarie)* fra i punti di γ formano due sistemi infiniti rappresentati risp. da

$$(7) \ldots\ldots \qquad u' \equiv -u + C$$

$$(8) \ldots\ldots \qquad u' \equiv u + C \;,$$

ove C indica una costante qualunque. Facendo il prodotto di queste corrispondenze per l'anticollineazione ausiliare avremo i due sistemi infiniti di corrispondenze univoche iperalgebriche

$$(9) \ldots\ldots \qquad u' \equiv -\bar{u} + C$$

$$(10) \ldots\ldots \qquad u' \equiv \bar{u} + C \;.$$

Queste sarebbero già corrispondenze di punti reciproci rispetto a reti di antireciprocità. Ma volendo che siàn corrispondenze Ω della natura richiesta, cioè rispetto a reti di antipolarità, si dovrà introdurre la 2ª condizione, cioè che siano involutorie. Poniamo d' or innanzi $C = C_1 + iC_2$, e similmente $u = u_1 + iu_2$, ove le lettere con indici inferiori indicano numeri reali. Uguagliando la corrispondenza (9) alla sua inversa, si vede che essa è involutoria se $C - \bar{C} \equiv 0$, ossia $2iC_2 \equiv 0$, donde (poichè i periodi imaginari puri sono, per ambe le specie di cubiche, i multipli di $i\omega_2$)

$$iC_2 \equiv 0 \;, \qquad \text{oppure} \qquad iC_2 \equiv \frac{i\omega_2}{2} \;.$$

Similmente si vede che la corrispondenza (10) è involutoria se

$$C_1 \equiv 0 \;, \qquad \text{oppure} \qquad C_1 \equiv \frac{\omega_1}{2} \;.$$

(*) V. il n. 1 della mia Nota: *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche* nel vol. XXIV di questi Atti; ed anche il lavoro del sig. CASTELNUOVO ivi citato.

Concludiamo dunque che le corrispondenze Ω cercate nella cubica ellittica γ son date da

$$(\Omega_1) \qquad u' \equiv -\bar{u} + C_1$$

$$(\Omega_2) \qquad u' \equiv \bar{u} + i\,C_2$$

$$(\Omega_1^0) \qquad u' \equiv -\bar{u} + C_1 + \frac{i\,\omega_2}{2}$$

$$(\Omega_2^0) \qquad u' \equiv \bar{u} + \frac{\omega_1}{2} + i\,C_2 \,.$$

Sulla cubica ellittica a birapporto reale si hanno così quattro serie distinte ∞^1 *di corrispondenze* Ω. *Due di esse*, Ω_1^0 *e* Ω_2^0, *non hanno punti uniti, cioè derivano da reti che non hanno fili cubici base*, poichè ponendo $u' \equiv u$ l'equazione della Ω_1^0 diventa

$$2\,u_1 \equiv C_1 + \frac{i\,\omega_2}{2}\,,$$

che è assurdo, non essendovi in questo caso dei periodi i quali abbiano per parte immaginaria $\frac{i\,\omega_2}{2}$; e analogamente per le Ω_2^0. Ma pei punti uniti di una Ω_1 otteniamo invece

$$(11) \ldots\ldots\ldots \qquad 2\,u_1 \equiv C_1\,, \qquad (\text{mod. } \omega_1)$$

onde

$$(11') \ldots \qquad u_1 \equiv \frac{C_1}{2}\,, \quad \text{oppure} \quad u_1 \equiv \frac{C_1}{2} + \frac{\omega_1}{2}\,; \qquad (\text{id.})$$

e similmente pei punti uniti di una Ω_2

$$(12) \ldots \qquad 2\,u_2 \equiv C_2\,, \qquad (\text{mod. } \omega_2)$$

$$(12') \ldots \qquad u_2 \equiv \frac{C_2}{2}\,, \quad \text{oppure} \quad u_2 \equiv \frac{C_2}{2} + \frac{\omega_2}{2}\,. \qquad (\text{id.})$$

Dunque *le corrispondenze* Ω_1 *e* Ω_2 *ammettono tutte dei fili cubici di punti uniti, sì che per ogni punto di* γ *passa un filo cubico di ciascuno dei due sistemi* (*). Nel caso attuale *ogni*

(*) La semplicità della rappresentazione analitica che così si è trovata dei fili cubici sulle curve ellittiche del 3° ordine, cioè in sostanza con *le funzioni ellittiche (d'invariante assoluto reale) di argomenti* u *la cui parte reale, o la cui parte imaginaria pura, è costante*, fa presumere che essi devono già esser *filo si compone di due rami distinti*, corrispondenti alle due equazioni (11′), oppure (12′), poichè uno stesso punto non può corrispondere a due valori di u le cui parti reali differiscano di $\frac{\omega_1}{2}$, o le cui parti imaginarie differiscano di $\frac{i\omega_2}{2}$.

Sulla cubica il cui birapporto ha per modulo l'unità si hanno in generale due soli sistemi ∞^1 *di corrispondenze* Ω, poichè le serie Ω_1^0, Ω_2^0 coincidono risp. con Ω_1, Ω_2, ottenendosi le loro equazioni dalle equazioni di queste coll' aggiungere ai secondi membri il periodo $\frac{1}{2}(\omega_1 + i\omega_2)$ (e mutando le costanti reali C_1, C_2). *Entrambi questi sistemi hanno fili cubici di punti uniti* rappresentati ancora dalle (11), (12), ecc. Però in questo caso un punto per cui $u_1 \equiv \frac{C_1}{2}$ (mod. ω_1) si può, aggiungendo quel periodo al suo parametro, ridurre ad avere $u_1 \equiv \frac{C_1}{2} + \frac{\omega_1}{2}$, sicchè

---

stati considerati, almeno analiticamente, da lungo tempo. Così è infatti: ciò che vi ha di essenzialmente nuovo nelle cose suesposte è la definizione *geometrica* di quei fili come *intersezioni di iperconiche* e le proprietà diverse che vi si collegano.

Ad esempio il Siebeck (Crelle J., t. 57, p. 359; e t. 59 p. 173) rappresentando una funzione ellittica di u sui punti reali di un piano ottenne su questo due sistemi ortogonali di quartiche bicircolari omofocali, le quali si possono appunto riguardare come immagini dei nostri fili cubici: v. anche Schwarz, Crelle J., t. 77, p. 38 (o *Ges. Math. Abhandlungen*, t. II, p. 260), che di quei sistemi di curve rilevò le proprietà caratteristiche. Ma più particolarmente va qui citato l'Harnack che nella seconda parte della Memoria *Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades* (Math. Ann. IX) rappresenta l'ente ellittico secondo un concetto di Klein, cioè mediante i punti reali delle tangenti complesse di una curva piana reale di 3ª classe, e studia certi due sistemi di ∞^1 curve reali ellittiche del 6° ordine, le quali rappresentano precisamente la serie delle tangenti per cui è costante la parte reale o la parte imaginaria dell'integrale ellittico u, e corrispondono quindi ai nostri due sistemi di fili cubici. — Sia ricorrendo a queste rappresentazioni dell'ente ellittico (dell'integrale u) sulla superficie piana di Riemann o su quella di Klein, sia più in generale con le rappresentazioni su superficie chiuse (simmetriche) qualunque per le quali $p=1$ (v. l'opuscolo del sig. Klein citato precedentemente), le proprietà che sopra si trovano direttamente per le corrispondenze ed i fili cubici di γ, acquistano uno speciale carattere intuitivo, intorno al quale però non possiamo qui trattenerci.

le due equazioni (11′) si equivalgono, *i fili* (11) *si compongono di un sol ramo;* e similmente i fili (12). (*)

Le due specie di cubiche ellittiche hanno a comune le cubiche armoniche. Ne segue che *sulle cubiche armoniche vi sono sei serie* ∞^1 *di corrispondenze* Ω, *di cui due prive di punti uniti, due con fili cubici ad un ramo, e due con fili cubici a due rami.* A ciò si giunge anche se si bada che per una cubica armonica, i cui periodi fondamentali si posson rappresentare con ω (reale) ed $i\omega$ (sicchè il loro parallelogrammo sia un *quadrato*), le corrispondenze univoche algebriche non sono soltanto le (7), (8), ma anche quelle (*singolari*) date da

$$u' \equiv \pm\, i u + C\ ;$$

partendo da queste si ottengono i due nuovi sistemi di corrispondenze Ω

$$u' \equiv \pm\, i \bar{u} + C_1 (1 \mp i)\ ,$$

che hanno per fili di punti uniti i due sistemi

$$u_1 \mp u_2 \equiv C_1\ .\ (^{**})$$

56. Quando la cubica γ è di 2ª specie abbiamo visto che le due serie Ω_1 e Ω_1^0 si fondono in un sol sistema, e così pure le altre due Ω_2 e Ω_2^0. È opportuno introdurre questa considerazione anche quando γ è di 1ª specie, e riguardare in ogni caso le Ω_1 e Ω_1^0 come formanti un 1° *sistema* di corrispondenze Ω (il quale per la 1ª specie di cubiche si comporrebbe di due tratti Ω_1 e Ω_1^0, e per la 2ª di un tratto solo), e similmente Ω_2 e Ω_2^0 come formanti un 2° *sistema*. Ciò permette di abbreviare alcuni enunciati.

Così se si forma l'equazione della corrispondenza Π relativa ad una delle Ω_1, Ω_1^0 ovvero ad una delle Ω_2, Ω_2^0 (e ciò si fa scrivendo che nella Π si corrispondono i tangenziali di due punti omologhi nella Ω), si trova rispettivamente:

$$(\Pi_1) \qquad u' \equiv -\bar{u} - 2\, C_1\ ,$$

(*) Questi risultati sono in pieno accordo con quelli del n. 53.

(**) Un altro caso particolare notevole delle cubiche di 2ª specie si ha nella *cubica equianarmonica;* ma di questo lascio l'esame al lettore.

ovvero

$$(11_2) \qquad u' \equiv \bar{u} - 2\,i\,C_2\ ,$$

e si conchiude che *le corrispondenze* Ω *e* Π *sono entrambe del* 1° *od entrambe del* 2° *sistema.*

Così ancora se nelle equazioni delle Ω_1, $\Omega_1{}^0$ si tien fisso u mentre varia la costante reale C_1, si vede che $2u'_2$ rimarrà costante, ecc. ecc., e si conchiude che *i punti di* γ *che corrispondono ad un punto fisso rispetto alle infinite corrispondenze* Ω *dell'uno dei due sistemi sono i punti di quel filo cubico dell'altro sistema che passa pel punto fisso.* Da questa proposizione risulta più evidente il legame fra la scomposizione di ogni filo cubico in due rami e lo scomporsi di ogni sistema di corrispondenze Ω in due tratti.

Tralasciamo di risolvere altre questioni che si presentano spontanee sulle corrispondenze Ω, come le relazioni di *prodotti* e di *gruppi* che esse hanno fra loro e con le altre corrispondenze univoche, algebriche ed iperalgebriche: la determinazione delle serie finite di corrispondenze (o di fili cubici) di cui ognuna è la Π rispetto alla precedente considerata come Ω (il che coincide colla determinazione dei poligoni semplici che sono simultaneamente iscritti e circoscritti a γ); il numero e la natura delle intersezioni di due fili cubici di diverso sistema (4 in generale, ma 2 nel caso della curva armonica se i due sistemi da cui son presi i fili sono di specie diversa); ecc. ecc. Son tutte cose che dalle equazioni trovate delle corrispondenze e dei fili scaturiscono immediatamente.

57. Solo una questione conviene che trattiamo ancora, affine di rimuovere un'obiezione che altrimenti ci si potrebbe fare. I ragionamenti del n. 54 ci affidano completamente che ognuno dei fili da noi ottenuti sopra γ *sta* su una rete d'iperconiche; ma sarà egli sempre l'*intersezione completa* di questa rete? È facile vedere, basandosi sulla 2ª parte del n. 49, che ciò non sarà nel solo caso che la rete d'iperconiche abbia per base una catena piana, nella quale giacerà allora il filo. Questa catena piana sarà fondamentale per un'antinvoluzione che muta γ in se stessa determinandovi una particolare corrispondenza Ω. La ricerca di tali fili eccezionali (che chiameremo ancora *fili cubici*, quantunque ad essi non si applichi più senz'altro la definizione del

n. 51) coincide colla ricerca di quelle fra le corrispondenze Ω che sono anticollineari. Ricorrendo alle equazioni delle Ω e scrivendo che a tre punti u allineati corrispondono tre punti u' allineati, si trova che le antinvoluzioni Ω sono le tre Ω_1 per cui si ha $3\,C_1 \equiv 0$, ossia

$$C_1 = 0\ , \quad \frac{\omega_1}{3}\ , \quad \frac{2\,\omega_1}{3}\ ,$$

e le tre Ω_2 per cui $3\,i\,C_2 \equiv 0$, ossia

$$C_2 = 0\ , \quad \frac{\omega_2}{3}\ , \quad \frac{2\,\omega_2}{3}\ ,$$

(fra le quali è la $u' \equiv u$ di cui ci siam serviti al n. 55, come anticollineazione ausiliare). Dunque *per una cubica ellittica d'invariante assoluto reale vi sono in generale sei antinvoluzioni che la trasformano in se stessa, cioè sei catene piane che la segano secondo fili cubici: ognuno dei due sistemi di corrispondenze Ω contiene tre antinvoluzioni. Solo la cubica armonica, corrispondentemente ai quattro sistemi Ω che essa ammette, è trasformata in sè da dodici antinvoluzioni, le cui catene piane la segano, sei secondo fili cubici a due rami e sei secondo fili ad un sol ramo.*

Le particolari corrispondenze Ω che ora consideriamo si possono anche caratterizzare come quelle che coincidono con le rispettive Π: ciò si vede subito sì geometricamente che mediante le equazioni. In altri termini uno di questi particolari fili cubici si può caratterizzare dicendo che la retta che congiunge due suoi punti (e che in generale sega ancora γ in un punto del corrispondente filo Π: v. n. 51) lo sega ancora in un terzo punto: quando un filo cubico Ω ammette una tal retta *trisecante*, esso sta in una catena piana (intersezione di due catene semplici di rette contenenti quella trisecante, ecc.: cfr. n° cit.), e *ogni* retta che ne congiunga due punti ne contiene un terzo. Possiamo anche dire che questi fili cubici sono quei fili cubici di γ che contengono dei flessi della cubica. Ognuno di essi ne contiene tre posti in linea retta; in ogni sistema di fili cubici si hanno così 3 particolari fili i quali contengono risp. le 3 terne di flessi poste sui lati di un triangolo sizigetico: in generale si hanno così, corrispondentemente ai due sistemi Ω, due triangoli sizigetici; per la cubica armonica ai quattro sistemi Ω vengono a corrispondere i 4 triangoli sizigetici.

Se la cubica γ è reale, una delle catene piane considerate si compone dei punti reali del piano, ed il particolare filo cubico in cui essa taglia γ non è altro che l'ordinaria parte reale di γ: la quale appunto si compone di due rami o di un solo a seconda che la cubica è di 1^a o di 2^a specie (e contiene sempre tre flessi); solo le cubiche reali *armoniche* possono aver le parti reali composte tanto di un ramo quanto di due.

58. Occupiamoci finalmente della determinazione delle corrispondenze Ω e dei relativi fili cubici sopra una cubica piana *razionale* γ. Rifacciamoci alle considerazioni del n. 54 ed alle conclusioni a cui esse ci avevano condotti riguardo alle condizioni a cui il problema si può ridurre. Si tratta anzitutto di vedere quando è che una corrispondenza algebrica univoca fra due cubiche piane razionali γ, γ', cioè una *projettività* fra i punti di queste, si può considerare come corrispondenza di punti reciproci rispetto ad una rete di reciprocità fra i due piani. Trovammo che perciò occorre e basta che, comunque si scelga su γ un punto A, esista su γ' un punto A_1 tale che i fasci di rette che da A e A_1 projettano i punti di γ, γ' omologhi in quella corrispondenza siano projettivi: o, ciò che fa lo stesso, tale che alle coppie di punti di γ allineate con A corrispondano su γ' le coppie di punti allineate con A_1. Ora i due punti di γ che cadono nel punto doppio di questa curva (e che *sulla curva* van riguardati come distinti o come coincidenti secondo che quel punto doppio è un *nodo* od una *cuspide*) formano sempre una coppia allineata con A, qualunque sia questo punto: dunque i loro omologhi su γ' devono formare similmente una coppia di punti allineati con A_1, ovunque si trovi questo punto su γ', e però dovranno coincidere in un punto doppio di γ'. Dunque la projettività data fra i punti di γ e γ' deve soddisfare a questa condizione, che *rispetto ad essa ai due punti di γ che cadono nel punto doppio di questa curva corrispondano rispettivamente i due punti che cadono nel punto doppio di γ'*: condizione *doppia* se quei punti doppi son nodi, *semplice* se sono cuspidi. — Questa condizione è in pari tempo sufficiente; poichè da una semplice applicazione del principio di corrispondenza segue che le coppie di punti di γ' corrispondenti alle coppie di γ allineate con un punto qualunque A di questa stanno in generale sulle rette di un inviluppo di 2^a classe: ora, se quella condizione è soddisfatta, quest' inviluppo dovrà scindersi nel fascio delle rette passanti pel punto doppio di γ' ed in un altro fascio di rette A_1, donde ecc. (*).

Applicando ora l'anticollineazione ausiliare C del n. 54 per ritornare da γ' a γ e valendosi delle cose ivi dette otteniamo subito i risultati seguenti. *Sulla cubica γ dotata di un nodo vi sono due sistemi ∞^1 di corrispondenze Ω, e cioè le antinvoluzioni fra i punti di γ le quali hanno per punti uniti i due punti della curva che cadono nel nodo, e le antinvoluzioni fra i punti di γ per le quali invece questi due punti sono omologhi: questi due sistemi (fasci armonici) di antinvoluzioni dànno colle loro catene fondamentali due sistemi di fili cubici razionali, tra cui quelli del 1° sistema contengono il punto doppio di γ come punto doppio proprio, e quelli del 2° lo contengono come punto isolato; ecc. — Sulla cubica γ dotata di cuspide vi è un sistema ∞^2 di corrispondenze Ω, cioè le antinvoluzioni fra i punti di γ le quali hanno per punto unito la cuspide: ii fili cubici relativi ad esse sono la rete ∞^2 delle catene semplic di punti di γ che contengono quella cuspide* (**).

E qui, analogamente al n. 57, si presenta la questione di determinare quei fili cubici di γ i quali non sono l'intersezione *completa* di una rete d'iperconiche, ma l'intersezione di γ con

(*) Data una projettività *qualunque* fra due cubiche piane razionali γ, γ', essa vien projettata mediante fasci projettivi di rette dai due punti doppi, ed anche da altri due punti A, A_1 di γ, γ' che si ottengono, A come residua intersezione di γ colla retta che congiunge i due punti di γ corrispondenti al punto doppio di γ', ed A_1 in modo analogo. Ne segue che sempre esiste una corrispondenza birazionale quadratica fra i due piani (quella determinata da quelle due coppie di fasci projettivi), la quale determina fra γ e γ' quella corrispondenza projettiva (e vi sono altri due fasci projettivi di rette coi centri B, B_1 fuori di γ, γ', i quali projettano pure quella corrispondenza, sicchè alle terne di punti di γ allineate con B corrispondono le terne di punti di γ' allineate con B_1): in altri termini vi è sempre un fascio di reciprocità fra i due piani tale che son reciproci rispetto ad esso i punti omologhi della data projettività fra γ e γ'. — I casi che sopra si considerano sono quelli in cui invece che un *fascio* si ha una *rete* di reciprocità, e quindi invece di *una* corrispondenza birazionale fra i due piani se ne hanno infinite.

(**) Si possono verificare analiticamente questi risultati ed ottenerne con facilità degli altri valendosi della rappresentazione parametrica delle curve piane razionali (data ad es. in Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie* p. 586 e 592). Così se la cubica con un nodo si rappresenta in guisa che tre punti qualunque in linea retta abbiano parametri il cui prodotto sia costante i due sistemi ∞^1 di fili cubici sopra considerati si comporranno dei punti per cui è costante l'argomento (a meno di un multiplo di π), ovvero il modulo, del parametro. E se per la cubica con cuspide si sceglie la rappresentazione con parametri $x+iy$ in modo che la condizione di allineamento di tre punti si abbia annullando la somma dei loro parametri, la ∞^2 suddetta di fili cubici si rappresenta coll'equazione $ax+by+c=0$ a coefficienti a, b, c reali.

catene piane: e si trova subito che se γ ha un nodo vi sono tre di questi fili nel 1° sistema (passanti risp. pei tre flessi), ed uno nel 2° (contenenti i tre flessi), e che se γ ha una cuspide vi sono ∞^1 tali fili (determinati da catene piane che contengono la cuspide ed il flesso di γ ed il punto comune alle tangenti in essi). Ecc.

Da ultimo osserviamo che anche una catena semplice *qualunque* di punti di una cubica razionale piana (od anche sghemba) γ si potrebbe chiamare (per ragioni che appariranno meglio in un altro lavoro) un *filo cubico;* ma non sarebbe in generale su una *rete* d'iperconiche. Si potrebbe veder facilmente che esso sarebbe invece l'intersezione di γ con un *fascio* d'iperconiche (v. la prima nota a questo n°) (*).

(*) Per vedere ciò ed in pari tempo i principali risultati di questo n° può servire utilmente la considerazione di γ come projezione di una cubica sghemba C (considerazione utile anche per lo studio delle projettività fra due cubiche piane razionali) — Una catena semplice di punti di γ sarà la proiezione di una catena di C: possiamo supporre senza perdita di generalità (ed al solo scopo di abbreviare il discorso) che C sia reale e che quella sua catena sia appunto composta dei punti reali di C. Le catene semplici di rette che contengono la catena considerata di punti di γ si otterranno come sezioni di quelle catene semplici di piani cogli assi passanti pel centro P di proiezione, le quali contengono i punti reali di C. Una tal catena di piani è quella che ha per asse la retta reale su cui sta il punto (imaginario) P e che si compone tutta di piani reali. Se poi una retta imaginaria r passante per P è asse di un'altra catena di piani projettante i punti reali di C, questa catena sarà riferita projettivamente a quella dei piani coniugati, e però le rette reali, intersezioni di piani omologhi di queste due catene, saranno una schiera di generatrici reali di una quadrica rigata. Ognuna di queste rette conterrà un sol punto di C se r è la corda di questa curva che passa per P. Tolto questo caso, la r incontrerà semplicemente C, mentre i piani della catena, cioè le loro rette reali, incontreranno in due punti mobili il filo reale di C. Ora la quadrica reale considerata, dovendo contenere oltre a C la corda di questa curva passante per P, e la sua coniugata, sarà ben determinata; a meno che queste due rette coincidano, cioè che P stia su una corda reale di C, nel qual caso quella quadrica potrà muoversi in un fascio (ed il piano che le è tangente in P darà su C un punto mobile, quello d'appoggio di r, il quale descriverà su C una catena semplice). Da ciò si conclude che la catena semplice di γ sta in generale su tre sole catene semplici di rette (e quindi nel fascio d'iperconiche determinato da due di esse); e soltanto nei casi che i due punti di γ che cadono nel punto doppio stiano in quella catena semplice, ovvero siano armonici rispetto ad essa (casi che corrispondono risp. all'incontrarsi di C e della corda passante per P in due punti reali ovvero in due punti coniugati), avverrà che quelle catene di rette saranno infinite (coi centri formanti una catena semplice di punti di γ).

Ricerche intorno allo sviluppo ed alle cause del polimorfismo dei girini degli Anfibi anuri;

del Socio Prof. LORENZO CAMERANO

Gli Anfibi anuri presentano durante il loro periodo girinale un polimorfismo spiccatissimo. Quasi tutti gli osservatori che si sono occupati dello sviluppo dei girini degli Anfibi anuri hanno constatato questo fatto. Ma se il fare ciò è cosa agevole, il determinare invece quali sono le cause di tale polimorfismo è opera assai difficile.

Due serie di questioni si collegano collo studio del polimorfismo dei girini: 1° quelle che si riferiscono alle azioni dell'ambiente sugli organismi in quanto sono causa di variazioni degli organismi stessi: 2° quelle che si riferiscono al valore dei vari caratteri dei girini nella loro differenziazione sistematica.

Campo eccellente per lo studio del polimorfismo dei girini sono le regioni Alpine propriamente dette, le quali concedono all'osservatore di studiare contemporaneamente, e in uno spazio relativamente limitato, girini sottoposti a condizioni di esistenza notevolmente diverse.

Numerosi Autori si sono occupati di studiare l'azione che le condizioni biologiche esercitano sullo sviluppo ed anche sulla variabilità dei girini degli Anfibi e in particolar modo vennero studiate l'azione della luce, della temperatura, del digiuno, della natura del nutrimento, dell'altezza sul livello del mare, ecc. Ricorderò qui fra gli altri il Fatio, il Flüger, il Wiedersheim, il Brunk, il V. Ebner, l'Hamann, Marie de Chauvin, il Weismann, il Kollmam, Mauro Rusconi, l'Héron Royer, Michele Lessona, il Jung, lo Schnetzler, Kolasy, Knauer, Kessler, Velasco, C. Koch, Bedriaga, D. Barfurth, io stesso (1).

---

(1) Si consulti per le indicazioni bibliografiche relative all'argomento, L. CAMERANO, *Ricerche intorno alla vita branchiale degli anfibi*. Mem. Accad.

Non è quindi senza una notevole meraviglia che si leggono le seguenti parole in una recentissima Memoria del Prof. A. Moriggia stampata nei Rendiconti della Accademia dei Lincei (vol. VI°, Giugno 1870, pag. 548) col titolo: *Alcune sperienze su girini e rane:* « Siccome i girini sogliono nascere e specialmente svilupparsi col beneficio di calore, di luce e di opportuno alimento, perciò ho creduto non dovesse tornar vano, cercar di conoscere quale e quanta influenza potessero dispiegare cotesti fattori nella cresciuta del corpo e nelle metamorfosi che debbono aver luogo per salire dallo stadio di girino a rana fatta. Cosa possa il digiuno in cotali animaletti già venne in parte scandagliato dallo Spallanzani, felice sperimentatore, che s'incontra quasi su tutte le vie dello sperimentare. »

« Nell'effetto finale io volli far concorrere oltrecchè un digiuno assai prolungato, anche la scarsità della luce, e specialmente il freddo, come altri già fece pei bruchi, crisalidi, insetti. »

In una Nota poi il Moriggia dice ancora ..... « interesserebbe ricercare anche quale parte hanno per sè nel risultamento, il digiuno, l'ombra, il freddo, tentati isolatamente ed a lungo, ecc. ».

Non si riesce proprio a comprendere perchè il Moriggia si sia limitato a pigliar le mosse nei suoi sperimenti dallo Spallanzani e non abbia tenuto conto dei numerosi e svariati lavori recenti degli Autori sopra menzionati.

Già in altri lavori io mi sono occupato dei fenomeni di svernamento e dei fenomeni neotenici facendo osservare che essi sono senza fallo una delle cause del polimorfismo dei girini delle alte Alpi, operando essi unitamente al nutrimento, alla temperatura, alla luce, ecc. Non ritornerò qui sopra questo argomento.

Io desidero ora richiamare l'attenzione degli osservatori, sopra un'altra causa modificatrice della forma dei girini degli Anfibi anuri che io ebbi occasione di studiare nei mesi di Luglio, Agosto e Settembre a Ceresole Reale nei limiti di altitudine sul livello del mare compresi fra i 1500 e i 2800 metri. Si tratta cioè dell'azione modificatrice dell'acqua corrente e dell'acqua sta-

---

delle Scienze di Torine, Ser. II, vol. XXXV. 1883 — *Intorno alla neotenia* Atti Acc. delle Scienze di Torino, vol. XIX, 1883 — *Nuove osservazioni intorno alla neotenia*, ibidem. 1884 — *Note di Biologia Alpina.* I. *Dello sviluppo degli Anfibi anuri sulle Alpi*, Boll. dei Musei di Zool. ed Anat. comparata di Torino n. 30, 1887. — *Ulteriori osservazioni intorno alla neotenia negli Anfibi*, ibidem, n. 56, 1889.

gnante sullo sviluppo, sulla mole e sulla forma dei girini della *Rana muta* Laur.

Nel Piano di Ceresole Reale lo sviluppo dei girini si compie in molti luoghi in acque correnti, talvolta con velocità notevole. Le pozze isolate o per meglio dire le pozze nelle quali non vi è un rapido rinnovamento dell'aqua sono relativamente assai scarse.

Le osservazioni vennero compiute nelle località seguenti.

1° Pozza al disotto del Grand Hôtel. — Altezza sul livello del mare metri 1490 circa. — L'acqua è poco profonda ed è corrente con discreta velocità, provenendo da un rigagnolo. — La pozza è in pieno sole ed è piena di vegetazione: il fondo è melmoso.

2° Varie pozze fra le roccie che stanno sopra alla grande cascata dell'Orco. — Altezza sul livello del mare metri 1530 circa. — L'acqua è poco profonda e si può considerare quasi come stagnante, poichè il rinnovamento avviene con grande lentezza: le pozze sono alimentate da scoli d'acqua. Le pozze sono in pieno sole e ricche di Equiseti. — Il fondo è melmoso.

3° Numerosi rigagnoli di irrigazione dei prati del Piano di Ceresole. — Altezza sul livello del mare variabile da 1500 metri a 1600 circa. — L'acqua non è molto profonda ed ha un corso lento — il fondo dei rigagnoli è melmoso ed è ricchissimo di ossido idrato di ferro proveniente dalle acque che ve lo depositano.

4° Piccola pozza di un prato presso la diga che serve per la derivazione dell'acqua dell'Orco. — Altezza sul livello del mare metri 1520 circa. — L'acqua proviene dai rigagnoli dei prati e vi ristagna: il fondo è molto melmoso.

5° Canale d'acqua proveniente dall'Orco per mezzo di una diga, collocato in prossimità della pozza precedente. L'acqua non è molto profonda (metri 0,50 al più); il fondo è sabbioso: la corrente dell'acqua è notevolmente forte: nelle infrattuosità delle sponde vi sono piccoli seni nei quali l'acqua è più tranquilla: le sponde sono in parte erbose: il canale è in pieno sole.

6° Pozza collocata al disopra della borgata la Villa, a metri 1660 circa sul livello del mare. Questa pozza è formata dall'allargarsi di un rigagnolo il quale dà origine nel mezzo della pozza ed una corrente relativamente forte: la profondità massima è di venticinque o trenta centimetri: il fondo è melmoso: le sponde sono erbose; la pozza è in pieno sole.

Nelle località sopradette i girini erano molto numerosi e presentavano le misure indicate negli specchietti seguenti:

Ceresole Reale (1) — *Pozza sotto al Grand-Hôtel.* - *Acqua corrente.* - 6 *Agosto* 1890.

Lunghezza totale	m. 0,038	m. 0,035	m. 0,034	m. 0,032
Id. del corpo dalla bocca all'ano	» 0,015	» 0,013	» 0,014	» 0,013
Id. delle zampe posteriori	rudimenti	» 0,008	» 0,011	» 0,001
Id. della coda	» 0,023	» 0,022	» 0,023	» 0,019
La coda è più lunga del corpo di	» *0,008*	» *0,009*	» *0,009*	» *0,006*

Ceresole Reale (2) — *Pozza sopra la cascata dell'Orco.* - *Acqua stagnante.* - 1° *Settembre* 1890.

Lunghezza totale	m. 0,031	m. 0,028	m. 0,029	m. 0,027	m. 0,020	m. 0,026	m. 0,029
Id. del corpo dal capo all'ano	» 0,013	» 0,013	» 0,013	» 0,012	» 0,009	» 0,013	» 0,013
Id. delle zampe posteriori	» 0,012	» 0,009	» 0,003	» 0,003	rudimenti	» 0,003	» 0,010
Id. della coda	» 0,018	» 0,015	» 0,016	» 0,015	» 0,011	» 0,013	» 0,016
La coda è più lunga del corpo di	» *0,005*	» *0,002*	» *0,003*	» *0,003*	» *0,002* (*a*)	» *0,000*	» *0,003*

Ceresole Reale (3) — *Rigagnoli dei prati del piano.* - *Acqua con lento corso.* - 16 *Agosto* 1890.

Lunghezza totale	m. 0,030	m. 0,029	m. 0,031	m. 0,031	m. 0,030	m. 0,026	m. 0,029	
Id. del corpo dal capo all'ano	» 0,013	» 0,013	» 0,013	» 0,012	» 0,012	» 0,011	» 0,012	
Id. delle zampe posteriori	» 0,002	» 0,002	» 0,015	» 0,007	» 0,005	» 0,001	» 0,013	
Id. della coda	» 0,019	» 0,016	» 0,018	» 0,019	» 0,018	» 0,015	» 0,016	Lungh. delle zampe anteriori m. 0,005
La coda è più lunga del corpo di	» *0,006*	» *0,003*	» *0,005*	» *0,007*	» *0,006*	» *0,004*	» *0,004*	

Ceresole Reale (4) — *Pozza presso la diga dell'Orco. Acqua stagnante.* - 1° *Settembre* 1890.

Lunghezza totale	m. 0,020	m 0,026	m 0,021
Id. del corpo dal capo all'ano	» 0,009	» 0,011	» 0,009
Id. delle estremità posteriori	» 0,001	» 0,004	» 0,005 (1)
Id. della coda	» 0,011	» 0,015	» 0,012
La coda è più lunga del corpo di	» *0,002* (*a*)	» *0.004*	» *0,003*

(1) È notevole lo sviluppo delle estremità posteriori relativamente alla piccola mole del corpo.

Ceresole Reale (5) — *Canale d'acqua derivato dall'Orco.* - *Acqua fortemente corrente.*

6 *Agosto* 1890.

Lunghezza totale	m. 0,042	m. 0,046	m. 0,036	m. 0,042	m 0,040	m. 0,031	m. 0,035	
Id. del corpo dal capo all'ano	» 0,015	» 0,016	» 0,013	» 0,015	» 0,014	» 0,012	» 0,014	
Id. delle estremità posteriori	» 0,002	» 0,005	» 0,006	» 0,003	» 0,008	» 0,002	» 0,014	Estrem. ant. lungh. m. 0,006
Id. della coda	» 0,027	» 0,030	» 0,023	» 0,027	» 0,026	» 0,019	» 0,029	
La coda è più lunga del corpo di	» *0,012*	» *0,014*	» *0,010*	» *0,012*	» *0,012*	» *0,007*	» *0,015*	

1° *Settembre* 1890.

Lunghezza totale	m. 0,045	m. 0,043	m. 0,045	m. 0,046	m. 0,040	m. 0,042
Id. del corpo dal capo all'ano	» 0,016	» 0,015	» 0,016	» 0,015	» 0,015	» 0,015
Id. delle estremità posteriori	» 0 008	» 0,003	» 0,009	» 0,010	» 0,004	» 0,009
Id. della coda	» 0,029	» 0,026	» 0,029	» 0,031	» 0,025	» 0,027
La coda è più lunga del corpo di	» *0,013*	» *0,013* (*a*)	» *0,013*	» *0,016*	» *0,010*	» *0,012*

Ceresole Reale (6) — *Pozza sopra la borgata la Villa.* - *Acqua corrente.*

19 *Agosto* 1890.

Lunghezza totale	m. 0,034	m. 0,037	m. 0,034	m 0,034	m. 0,040	m. 0,039	m. 0,041	m. 0,023	m. 0,037
Id. del corpo dal capo all'ano	» 0,012	» 0,014	» 0,012	» 0,014	» 0,015	» 0,013	» 0,017	» 0,009	» 0,013
Id. delle estremità posteriori	» 0,001	» 0,004	» 0,002	» 0,001	» 0,008	» 0,012	» 0,003	rudimenti	» 0,002
Id. della coda	» 0,022	» 0,023	» 0,022	» 0,010	» 0,025	» 0,026	» 0,024	» 0,014	» 0,024
La coda è più lunga del corpo di	» *0,010*	» *0,009*	» *0,010*	» *0,006*	» *0,010*	» *0,013*	» *0,007*	» *0,005*	» *0,011*

2 *Settembre* 1890 (1).

Lunghezza totale	m. 0,025	m. 0,021
Id. del corpo dal capo all'ano	» 0,010	» 0,009
Id. delle estremità posteriori	rudimenti	rudimenti
Id. della coda	» 0,015	» 0,012
La coda è più lunga del corpo di	» *0,005* (*a*)	» *0,003* (*b*)

(1) In quest'epoca i girini erano meno numerosi, una parte essendosi trasformata, ed una parte essendo stata trascinata via dal rigagnolo ingrossato per una lunga pioggia. Nella pozza vi sono girini che presentano ad un dipresso le dimensioni di quelli misurati il 19 agosto. Qui ho segnato solo le dimensioni dei girini più piccoli e di sviluppo meno avanzato.

Le condizioni di vita pei girini si possono considerare come sensibilmente le stesse per tutte le pozze sopra menzionate, per quanto riguarda il nutrimento, la luce ed anche la quantità di sole che esse ricevono: essendo collocate si può dire tutte nel mezzo della vallata. La temperatura varia alquanto. Secondo le osservazioni fatte la temperatura media è alquanto superiore nelle pozze (N. 2) collocate sopra la cascata nelle quali si hanno in media due gradi centigradi di più che non nelle altre. La media di temperatura più bassa si ha nel canale proveniente dall'Orco (n. 5).

Nella pozza N. 2, ho osservato $+14^\circ + 15^\circ + 12^\circ$ (verso le ore undici antimeridiane, nelle giornate calde).

Nel canale (N. 5) ho osservato $+14^\circ + 12^\circ + 16^\circ$. Quest'ultima temperatura è del 1° Settembre 1890.

La temperatura delle altre pozze oscilla fra i limiti estremi, massimi e minimi indicati per le due pozze precedenti.

Nelle acque che si trovano al disopra del Piano di Ceresole verso i 2000 e i 2800 metri sul livello del mare io non ho trovato girini.

La temperatura di queste acque è in media inferiore a $+10^\circ$ ed anzi parecchi dei numerosi laghetti che stanno verso il colle del Nivolè o al disotto dei ghiacciai della Levanna, del Carro, ecc. non sono quasi mai totalmente liberi dal ghiaccio.

Le acque che sgorgano da essi sono freddissime e nelle pozze da essi formate non si trovano girini di anfibi anuri. Questo fatto concorda con quelli che io osservai in altre località alpine (1).

Dirò qui di passaggio che in tutta l'alta valle di Ceresole Reale non ho trovato nè girini nè adulti di nessuna specie di Anfibi urodeli.

Ciò premesso io credo che il polimorfismo assai spiccato che si osserva, sopratutto nello sviluppo della coda e della membrana caudale sia dovuto essenzialmente all'essere l'acqua nella quale i girini si sviluppano o stagnante o più o meno fortemente corrente.

Infatti dagli specchietti di misure sopra riferiti facendo una media della maggiore lunghezza della coda paragonata alla lunghezza del corpo (dal capo all'ano) si ottengono i valori seguenti:

---

(1) *Note di Biologia Alpina*, II. Bollett. dei Musei di Zoologia e di Anat. Comp. di Torino, n. 30, 1887.

1° Pozza N. 2. (Acqua stagnante) la coda è più lunga del corpo in media di m. 0,0025.

2° Pozza N. 4. (Acqua stagnante). La coda è più lunga del corpo in media di m. 0,003.

3° Pozza N. 3. (Acqua con lento corso). La coda è più lunga del corpo in media di m. 0,005.

4° Pozza N. 1 e N. 6. (Acqua corrente). La coda è più lunga del corpo in media di m. 0,008.

5° Canale d'acqua derivato dall'Orco N. 5 (Acqua fortemente corrente). La coda è più lunga del corpo in media di m. 0,012.

Dagli specchietti sopra riferiti risulta pure che lo sviluppo maggiore o minore della coda non è in correlazione collo sviluppo delle estremità posteriori (1).

Il lento svilupparsi dei girini di *Rana muta* nelle alte regioni alpine in ordine alle loro metamorfosi, e quindi il lungo soggiorno dei girini stessi nell'acqua è condizione eccellente, poichè si possa modificare lo sviluppo della coda. Questa condizione tuttavia si ha egualmente sia nelle pozze con acqua corrente sia in quelle con acqua stagnante e quindi l'azione modificatrice dell'acqua corrente rimane distinta.

Aggiungerò ancora che se teniamo conto della sola lunghezza del corpo (dal capo all'ano) questo è in media un po' più piccolo nei girini che si sviluppano nell'acqua stagnante che non in quelli che si sviluppano nell'acqua corrente, la differenza tuttavia è molto grande che non fra la lunghezza della coda, come si può vedere dagli specchietti sopra riferiti.

In complesso si può dire che i girini sviluppantisi nel canale derivato dall'Orco (2) (3°) in acqua fortemente corrente sono di mole un po' maggiore di quelli sviluppantisi in acque al tutto ferme.

(1) Anche coi girini che si allevano in laboratorio si può dimostrare l'azione modificatrice dell'acqua corrente. Nella primavera testè trascorsa io feci sviluppare numerosi girini di *Bufo vulgaris* in un acquario nel quale l'acqua si rinnovava continuamente dando luogo ad una corrente di cui potevo regolare a volontà la velocità. Sebbene il *Bufo vulgaris* non sia specie troppo conveniente per esperienze di tal fatta, tuttavia io ottenni nello spazio di un mese circa un aumento nella lunghezza della coda paragonata con quella del corpo, di m. 0,002 rispetto ai girini sviluppantisi nelle condizioni normali in acqua stagnante.

(2) Questi girini avevano una velocità di movimenti assai grande e potevano nuotare contro corrente in modo veramente notevole.

Si potrebbe ora domandare se queste variazioni possono, per via dell'azione secernente della scelta naturale e dei fenomeni ereditari dar luogo ad una modificazione costante pei girini di una data località, (come ad esempio pel Piano di Ceresole Reale dove prevalgono le acque correnti), tanto che esaminando complessivamente i girini della località stessa, questi presentino uno sviluppo maggiore della coda in confronto con quelli di altre località dove invece prevalgono le acque stagnanti.

Ciò pare non avvenga, poichè in realtà le rane sviluppatesi dai girini che crescono ad esempio nel canale derivato dall'Orco sopra citato è raro il caso vadano realmente a deporre le uova nello stesso canale. Ed in vero è noto come la *Rana muta* compiuta la deposizione delle uova, si allontani molto dalle acque e non vi ritorni che nella primavera successiva. Ora le peregrinazioni estive possono portare le rane in località diverse da quelle nelle quali si sono sviluppate. Sul Piano di Ceresole ciò può accadere facilmente perchè queste due sorta di acque si trovano non raramente vicine le une alle altre. I girini che nasceranno da queste rane si troveranno così molto spesso in condizioni opposte a quelle nelle quali i girini delle rane progenitrici si sono sviluppati.

Ne segue che non è possibile l'accumularsi per molte generazioni successive, di un carattere il quale tenda, per via ereditaria a divenir costante.

La scelta naturale in questo caso, quantunque tenda continuamente (ad esempio fra i girini che si sviluppano in acqua corrente) ad eliminare, per ragioni facili a comprendersi, gli individui più deboli e meno adatti, non riesce a fissare, per dir così, il carattere la di cui formazione venne provocata dalle circostanze esterne.

Così pure in tal caso le circostanze esterne, quantunque siano causa di modificazione negli organismi, tuttavia non sono (non potendo operare a lungo ed in modo uniforme ed anzi eliminandosi a vicenda), in grado di produrre una modificazione costante, di dar origine cioè a *varietà* nel significato tassonomico della parola.

Fatti anologhi a quelli sopra descritti rispetto al piano di Ceresole Reale si osservano anche in altre regioni, sebbene sopra una scala minore. Così ad esempio, ristudiando i girini di *Rana muta* che io raccolsi nell'estate del 1884 nell'alta valle di Andorno sul Biellese, ho ottenuto i dati seguenti:

I girini raccolti in pozze con acqua stagnante o di corso lentissimo presentano una lunghezza media della coda superiore a quella del corpo di m. 0,003 o di m, 0,005.

I girini raccolti in pozze alimentate da acqua corrente presentano una lunghezza media dalla coda superiore a quella del corpo di m. 0,007 e di m. 0,009.

A primo aspetto si potrebbe credere che la profondità maggiore dell'acqua nella quale i girini della *Rana muta* si sviluppano possa anch'essa operare analogamente all'acqua corrente, vale a dire provocare un maggior sviluppo della coda, similmente a quanto venne osservato pei girini degli Anfibi urodeli.

A questo riguardo è d'uopo osservare che i girini della *Rana muta* anche nei laghi profondi (Lago della Vecchia, ad esempio 1866 metri sul livello del mare nella Valle di Andorno) si scostano pochissimo dalle rive ed anzi si riducono nelle insenature là dove l'acqua è meno profonda ed il fondo è più melmoso. I girini infatti che io raccolsi in gran numero nel Lago della Vecchia presentano la coda più lunga in media di soli 3 millimetri paragonata alla lunghezza del corpo.

I girini invece raccolti nelle pozze dell'Alpe Rosei (pozza di piccole dimensioni, poco profonda: ma alimentata da una sorgente perenne) hanno una maggior lunghezza della coda di millimetri sette.

Anche nel Piano di Ceresole Reale, come in altre località delle alte Alpi, una parte certamente notevole di girini di *Rana muta* passa l'inverno allo stato di girino (1) poichè al 1° Settembre di quest'anno erano frequenti nelle pozze i girini con sviluppo molto poco inoltrato (vedansi negli specchietti sopra riferiti gli individui *a* pozza (2), *a* pozza (4), *a* pozza (5), *a*, *b* pozza (6).

Aggiungerò che essendosi in principio di Settembre la temperatura abbassata notevolmente, io trovava in tale epoca pochi girini liberamente nuotanti nelle acque mentre molti stavano affondati nel fondo, immobili.

Ora date le condizioni climatologiche del Piano di Ceresole Reale, ben pochi girini possono giungere alla metamorfosi prima del sopraggiungere dell'inverno alpino.

Nei girini di Ceresole Reale ed anche in quelli dell'alta valle

(1) L. Camerano, *Note di Biologia alpina*, I. *Dello sviluppo degli anfibi anuri sulle Alpi*. Boll. dei Musei di Zool. e di Anat. Comp. di Torino, n. 30, 1887.

di Andorno ho osservato, esaminando un grande numero di esemplari di varie età, che il così detto vestibolo boccale presenta pure un polimorfismo notevole.

Recentemente l'Héron-Royer e Van Bambeke (1) hanno cercato di stabilire differenze tassonomiche fra i girini della *Rana muta* Laur. (*Rana fusca* Roesel) e la *Rana fusca Honorati* Héron Royer (2) nel modo seguente: « Dans la forme de Grenouille rousse du sud-est de la France décrite par l'un de nous sous le nom de *Rana fusca Honorati*, la bouche du têtard se distingue par divers caractères de celle du têtard de *Rana fusca ordinaire*. Ainsi: elle est plus petite que chez *Rana fusca*; les papilles moins longue, moins nombreuses, disposées en un simple rang, ornent la lévre inferieure et remontent un peu sur les côtés de la lévre supérieure. Celle-ci est parfois incurvée en arc, mais à l'éstrémités moins relevées que chez la brune; d'autres fois plus molle, elle est un peu plissée; elle affecte alors des sinuosités sans forme bien arrêtés. Les lames palatines sont laterales et au nombre de quatre, dont deux premières longues et deux inférieures petites, bien nettement égales; chez *Rana fusca*, nous trouvons constamment six lames latérales palatines.

« Les linguales sont au nombre de cinq, dont la première qui est l'inférieure, est petite et mince; elle est médiane, plus courte et de moindre volume que chez *Rana fusca*; le deux suivantes sont aussi médianes et très-peu sinueuses: le deux autres sont latérales et proches du bec (3). »

Nei girini di *Rana muta* del Piano di Ceresole Reale (1600 metri circa sul livello del mare) e del Lago della Vecchia (alta valle di Andorno metri 1866 sul livello del mare), ho trovato promiscuamente nella stessa pozza le due disposizioni del vestibolo boccale sopra indicate: sia per quanto riguarda la forma generale di esso, sia per quanto riguarda il numero delle lamine palatine laterali. (4) Inoltre ho trovato parecchi casi di assimetria, vale a dire: due lamine palatine da una parte e tre lamine palatine

---

(1) *Le vestibule de la bouche chez les têtards des batraciens anoures d'Europe, sa structure, ses caractères chez le diverses especès* — Archives de Biologie de Van Beneden e Van Bambeke — vol. IX, 1889.

(2) Bull. Acad. Roy. de Belgique — 3 ser. vol. I, 1881.

(3) Op. cit. tav. XVII, fig. 11 e 17.

(4) Seguo per maggior chiarezza la nomenclatura proposta dai due autori sopracitati, quantunque essa sia poco felice.

dall'altra. Sono le lamine palatine inferiori quelle che variano più frequentemente in numero ed anche nello sviluppo (1).

Ho osservato pure assai variabile nello sviluppo la lamina linguale inferiore.

Le Rane adulte raccolte sul Piano di Ceresole, presentano, come del resto si suole osservare in generale, nelle alte regioni alpine, una notevole varietà di colorazione ed anche qualche variazione nella lunghezza del tronco rispetto a quelle delle estremità posteriori; ma senza che si possano stabilire varietà o sottospecie con caratteri veramente differenziali.

Da quanto sopra ho esposto credo di poter conchiudere:

1° Che pei girini degli Anfibi anuri una delle cause del polimorfismo, talvolta notevolissimo riguardante sopratutto la coda e la membrana caudale, si deve ricercare nell'azione esercitata dall'acqua corrente.

2° Che tale azione modificatrice è particolarmente aiutata dal fenomeno dello svernamento di molti girini, fenomeno frequente nelle alte regioni alpine dove dà luogo pure talvolta a casi di *neotenia*.

3° Che le modificazioni prodottesi per tali cause, sebbene talvolta molto spiccate, non si fissano come caratteri specifici per la non continuità della causa che le produce.

4° Che nello stabilire i caratteri differenziali dei girini delle varie specie di Anfibi anuri, è d'uopo tener conto di questi fatti per non correr rischio di dare troppa importanza a caratteri di indole transitoria, sviluppatisi per adattamenti speciali di corta durata.

5° Che volendo indicare lo stadio di sviluppo di un girino, vale a dire la distanza a cui esso si trova dalla metamorfosi (sopratutto se si tratta di girini delle alte regioni alpine) è d'uopo tener conto precipuamente dello sviluppo delle estremità posteriori: la mole, la lunghezza della coda, l'ampiezza e la forma della membrana caudale ed anche (fino ad un certo punto) lo sviluppo del vestibolo boccale essendo caratteri troppo facilmente modificabili per l'adattarsi rapido che fa il girino a certe condizioni dell'ambiente nel quale si sviluppa.

---

(1) Gli stessi Héron Royer e Van Bambeke hanno osservato (op. cit. p. 263) una variazione analoga nelle lamine palatine del girino della *Rana arvalis* Nillson.

La legge di Roberts sul quadrilatero articolato;

Nota dell'Ingegnere GIUSEPPE PASTORE,
presentata dal Socio FERRARIS

L'illustre professore S. Roberts, nella Memoria: « *On three-bar motion in plane space* » (*), dimostrò che la curva descritta da un punto invariabilmente congiunto colla biella di un quadrilatero articolato piano può essere descritta con tre quadrilateri articolati diversi.

La dimostrazione che il Roberts dà di questo teorema è essenzialmente analitica. Il Burmester, nel suo recente *Lehrbuch der Kinematik* (**), dimostra il teorema in modo geometrico, partendo dalla teoria del pantografo obliquo di Sylvester. Nella presente Memoria mi sono proposto di darne una dimostrazione diretta, che mi pare abbastanza semplice, e che spero sarà trovata opportuna; ne studio in seguito parecchie conseguenze ed applicazioni. In questa dimostrazione considero alcuni sistemi articolati speciali, poco studiati fin qui, in cui, oltre al membro fisso propriamente detto, vi ha un punto dei membri mobili che rimane fisso; meccanismi che, per brevità di locuzione, chiamo *meccanismi ad un punto fisso.*

I.

1. Si consideri un quadrilatero articolato ABNM (fig. 1), avente per lato fisso AB, e sia P un punto invariabilmente congiunto col tirante o biella MN. Nel movimento del sistema questo

(*) *Proceedings of the London mathematical Society.* Vol. VII, 1875, pag. 14. Vedasi pure nello stesso volume dei *Proceedings*, a pag. 136, la Memoria di CAYLEY, *On three-bar motion.*

(**) L. BURMESTER, *Lehrbuch der Kinematik.* — Leipzig, 1888. Vol. I, pag. 294.

punto descrive una certa linea l, in generale di sesto ordine, perfettamente determinata quando sono determinati il quadrilatero articolato ABNM, ed il triangolo invariabile MNP.

Si costruiscano poscia i due parallelogrammi AMPM', BNPM'', e sopra i lati M'P, PM'' dei medesimi i triangoli M'PN', PM''N'', simili al triangolo dato MNP, e disposti rispetto ai lati M'P, PM'' come il triangolo MNP è disposto rispetto al lato MN; si costruisca infine il parallelogrammo N'PN''C.

La legge di Roberts stabilisce:

In ciascuno dei tre quadrilateri articolati:

ABNM,	*col lato fisso*	AB ,
ACN'M',	»	AC ,
BCN''M'',	»	BC ,

il punto P *descrive la medesima curva* l.

2. La proposizione enunciata si può dimostrare in questo modo. Il movimento del quadrilatero articolato ABNM, fissato sul membro AB, non è *nè impedito, nè modificato*, aggiungendo al meccanismo i bracci AM', M'P, BM'', M''P, che completano i due parallelogrammi AMPM', BNPM'', nè quelli che formano i triangoli invariabili M'PN', PM''N'', nè infine gli altri due lati N'C, N''C, che completano il parallelogrammo N'PN''C. L'intiero sistema articolato a 10 membri che ne risulta, formato dai tre triangoli invariabili simili MNP, M'PN', PM''N'', articolati fra di loro in P, dai sei bracci che vanno ai punti A, B, C, e dal lato fisso AB, ha un movimento perfettamente determinato, ed il punto P del medesimo descrive la stessa linea l che è descritta dal punto P del quadrilatero primitivo ABNM.

Or bene, io dico che *nel movimento di questo meccanismo complesso il punto* C *rimane fisso.* Dimostrato quanto ora asserisco, è manifesto che le parti ABNM, ACN'M', BCN''M'' di tale meccanismo si muovono come tre quadrilateri articolati aventi rispettivamente per lato fisso AB, AC, BC, e che, per conseguenza, il punto P descrive la medesima curva l, sia considerato come appartenente a ciascuno di questi tre quadrilateri, sia considerato come facente parte del meccanismo risultante dal loro complesso.

Pongo per brevità:

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{MN}=a\ ,\\ \overline{MP}=\overline{AM'}=b\ ,\\ \overline{NP}=\overline{BM''}=c\ ,\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\overline{M'P}=\overline{AM}=a'\ ,\\ \overline{M'N'}=b'\ ,\\ \overline{N'P}=\overline{CN''}=c'\ ,\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\overline{M''P}=\overline{BN}=a''\ ,\\ \overline{PN''}=\overline{N'C}=b''\ ,\\ \overline{M''N''}=c''\ ,\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\angle PMN=\angle N'M'P=\angle N''PM''=\alpha\ ,\\ \angle MNP=\angle N'PM'=\angle N''M''P=\beta\ ,\\ \angle MPN=\angle M'N'P=\angle PN''M''=\gamma\ .\end{array}\right.$$

Si prolunghino i lati AM', BM'' fino ad incontrarsi in X: siccome questi lati sono rispettivamente paralleli ad MP, NP, l'angolo AXB è uguale a γ, e quindi costante. Perciò nel movimento del sistema articolato complesso il punto d'intersezione X si muove sopra di una circonferenza di circolo passante per i due centri fissi A e B.

Questa circonferenza di circolo contiene pure il punto C. Ed invero, segno le rette $M'C$, $M''C$ e considero i triangoli $M'CN'$, $M''CN''$. I loro angoli in N' ed N'', indicati in figura con x, sono uguali fra di loro, giacchè, per costruzione, la figura $N'PN''C$ è un parallelogrammo. Inoltre nei triangoli invariabili simili $M'PN'$, $PM''N''$ si ha:

$$\frac{b'}{c'}=\frac{b''}{c''}\ ;$$

cosicchè nei triangoli considerati. $M'CN'$, $M''CN''$, i due lati adiacenti agli angoli uguali in N' ed N'' sono proporzionali. Questi due triangoli sono perciò simili, e quindi:

$$\frac{b'}{c'}=\frac{b''}{c''}=\frac{\overline{CM'}}{\overline{CM''}} \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$\angle N'CM'=\angle CM''N''=e \qquad \ldots\ldots (2)$$

Considero ora l'altra coppia di triangoli $AM'C$, $BM''C$. Essi pure sono simili, perchè hanno gli angoli in M' ed M'' uguali fra di loro ed i lati adiacenti a questi angoli proporzionali.

Infatti, l'angolo $AM'C$ è esterno rispetto al triangolo $M'O'C$, essendo O' il punto d'incontro delle rette AM', CN'; quindi:

$$\angle AM'C = \angle M'O'C + e.$$

Ora, $\angle M'O'C = \angle MPN''$, perchè i lati del secondo sono paralleli e diretti nello stesso senso rispetto a quelli del primo, cosicchè:

$$\angle M'O'C = \angle MPN'' = \gamma + \delta + \alpha,$$

indicando con δ l'angolo variabile NPM''.

Ma $\gamma + \alpha = 180^\circ - \beta$, e perciò:

$$\angle M'O'C = 180^\circ - \beta + \delta,$$

ed

$$\angle AM'C = 180^\circ - \beta + \delta + e.$$

D'altra parte:

$$\angle BM''C = \angle BM''N'' + e = 360^\circ - (180 - \delta + \beta) + e =$$
$$= 180^\circ - \beta + \delta + e;$$

la quale dice appunto che:

$$\angle AM'C = \angle BM''C.$$

Per la similitudine poi dei triangoli invariabili MNP, $M'PN'$, $PM''N''$, si ha:

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{b''}{c''},$$

cosicchè, dalla relazione (1) si ottiene:

$$\frac{b}{c} = \frac{\overline{CM'}}{\overline{CM''}}.$$

Rimane così stabilito che i triangoli $AM'C$, $BM''C$ sono simili, e, per conseguenza, che:

$$\angle M'AC = \angle M''BC = m \qquad \ldots\ldots (3)$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\overline{CM'}}{\overline{CM''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \qquad \ldots\ldots (4)$$

La relazione (3) fa vedere che nel movimento del meccanismo complesso considerato, quando il braccio A M′ viene nella posizione A M'_0 sulla retta A C, il braccio B M″ viene in B M''_0 sulla retta B C, cosicchè il punto C è una delle posizioni prese dal punto X nel movimento del sistema. Questo punto C cade adunque sulla circonferenza fissa percorsa da X, e perciò nel triangolo A B C l'angolo A C B rimane costante ed uguale a γ.

La relazione (4) poi dice che in questo triangolo A B C i lati A C, B C, adiacenti all'angolo γ, sono proporzionali ai lati b, c, adiacenti all'angolo γ del triangolo invariabile M N P.

Dunque il triangolo A B C è simile al triangolo M N P. Esso inoltre ha il lato A B invariabile di lunghezza e di posizione; per conseguenza, come era da dimostrarsi, il suo vertice C rimane fisso (*).

II.

3. Poichè il triangolo A B C è simile al triangolo M N P, il punto C si può ottenere indipendentemente dalle costruzioni successive prima indicate: a togliere ogni ambiguità si noti ancora che questo triangolo A B C deve essere disposto rispetto al lato fisso A B come il triangolo M N P è disposto rispetto alla biella M N. Trovato il punto C rimane determinata la circonferenza di circolo A B C, sulla quale si trova il punto X, e che contiene pure, come si dimostra facilmente, il punto Y intersezione dei lati A M, C N″, ed il punto Z intersezione dei lati B N, C N′: si hanno così varii mezzi di verificare la costruzione.

Su questa medesima circonferenza A B C cadono eziandio i tre nodi o punti doppii, che, in generale, può avere la curva l (**).

(*) Il Roberts, osservando che i tre punti A, B, C sono *fuochi singolari* della curva l, cioè intersezioni reali degli assintoti circolari, enuncia la legge in questione nei termini seguenti (Vedi la Memoria citata di Roberts, al capoverso 5):

We conclude, then, that the locus in question can be described in three different ways, by similar traversing triangles moving with an angle on each of two circles about two singular foci as centres, and the angle moving on a circle, is equal to the angle subtended at its centre by the two remaining singular foci.

(**) L. Burmester, op. cit. Vol. I, pag. 296. Vedasi pure la Memoria citata di Roberts al capoverso 3.

Si dànno però casi speciali in cui la linea l possiede uno o due altri punti doppii non situati sulla circonferenza A B C.

4. È manifesto, da quanto precede, che *i tre quadrilateri articolati* ABNM, ACN′M′, BCN″M″ *capaci di generare la stessa linea l, hanno i lati proporzionali, benchè non disposti nello stesso ordine.*

Dato perciò uno di questi quadrilateri, si possono ottenere gli altri due con una costruzione assai più semplice di quella indicata nella fig. 1.

Siano dati, ad esempio, i lati a, a', a'' ed $\overline{AB}$ del quadrilatero ABNM, e le distanze b, c del punto P da M ed N. Allora per avere i lati b, b', b'' ed AC del quadrilatero ACN′M′ basta costruire quattro segmenti che siano coi primi nel rapporto costante $\frac{b}{a}$; e così per avere i lati c, c', c'' e $\overline{BC}$ del quadrilatero BCN″M″ quattro segmenti che siano coi primi nel rapporto $\frac{c}{a}$.

La costruzione si può fare in varii modi; però, affinchè non si abbia poi difficoltà nello stabilire quale dei segmenti ottenuti è la biella e quale il lato fisso, e per ottenere eziandio, sia in grandezza come in posizione relativa, i triangoli invariabili, conviene disporre la costruzione a questo modo.

Sopra di una retta indefinita (fig. 2) si portino, l'uno di seguito all'altro, uno dei bracci, $\overline{AM}=a'$, la biella, $\overline{MN}=a$, l'altro braccio, $ND=a''$, del quadrilatero dato ABNM, e sopra la biella MN si costruisca il triangolo invariabile MNP. Da A si conduca la retta AE parallela ad MP, e da D la retta DE parallela ad NP; si prolunghino poscia i lati MP, NP, fino ad incontrare in N″, N′ le parallele ora segnate, e dal punto P si conduca la parallela M′M″ ad AD. Si porti infine sulla retta AD, a partire da A, un segmento AB uguale al lato fisso dato AB del primo quadrilatero, e da B si segni la parallela BC a DE. Allora, come è manifesto, gli elementi del quadrilatero ACN′M′ sono: M′N′ biella, M′N′P triangolo invariabile, AM′ ed M′E bracci, ed AC lato fisso; e quelli del quadrilatero BCN″M″: M″N″ biella, M″N″P triangolo invariabile, DM″ ed EN″ bracci, e BC lato fisso.

Se il triangolo invariabile MNP è isoscele, oppure equilatero, due o tutti tre i quadrilateri capaci di generare la curva l hanno i lati rispettivamente uguali, però disposti in modo diverso. Se MNP è equilatero, e di più i bracci AM, BN sono uguali ai lati di questo triangolo, i tre quadrilateri sono identici fra di loro.

5. Qualsiasi movimento di una figura invariabile, nel proprio piano, si può ottenere facendo rotolare una certa linea (epiciclo), invariabilmente congiunta colla figura, sopra una cert'altra linea (deferente) fissa nel piano del movimento. Il deferente è il luogo geometrico dei centri istantanei di rotazione: l'epiciclo il luogo dei punti della figura mobile, che vengono successivamente a coincidere coi centri istantanei di rotazione.

Ora in ciascuno dei tre quadrilateri A B N M, A C N′ M′, B C N″ M″ (fig. 1) la linea l si può considerare come generata dal vertice P di un triangolo invariabile, di cui il lato opposto si muove coi suoi punti estremi sopra due circonferenze di circolo fisse. Perciò in ognuno dei tre sistemi il centro istantaneo di rotazione per il movimento della biella è il punto d'incontro dei due bracci: così, ad esempio, nel quadrilatero A B N M la biella, nell'istante in cui ha la posizione M N, ruota attorno al punto O intersezione di A M e B N. Per gli altri due quadrilateri gli attuali centri istantanei sono O′ ed O″.

Non vi ha quindi alcuna difficoltà a determinare la linea fissa e la linea rotolante corrispondenti a ciascuno di questi tre movimenti compiani: le tre coppie di linee sono rappresentate in parte, nella fig. 1, e distinte colle lettere f, r; f', r'; f'', r''; le f corrispondono alle linee fisse, le r alle rotolanti. Nel rotolamento di uno qualunque degli epicicli r sul rispettivo deferente f, il punto P, supposto invariabilmente congiunto con r, descrive ancora la linea l.

In un istante qualsiasi del movimento, i punti di contatto di queste tre coppie di linee, cioè i tre centri istantanei di rotazione O, O′, O″, *ed il punto descrivente* P *sono in linea retta.* Ed invero, la normale alla traiettoria descritta da un punto qualunque di un sistema piano, mobile nel proprio piano, è data, in un istante qualsiasi del movimento, dalla congiungente il punto mobile col centro istantaneo di rotazione del sistema nell'istante considerato. Ora, per le attuali posizioni dei tre sistemi i centri istantanei di rotazione sono O, O′, O″, e poichè il punto P, supposto invariabilmente congiunto colla biella di uno qualunque dei tre quadrilateri articolati A B N M, A C N′ M′, B C N″ M″, descrive sempre la medesima linea l, così le tre normali O P, O′ P, O″ P, devono cadere sopra di una medesima linea retta.

6. Nel dimostrare la legge di Roberts ho fatto vedere che i triangoli M′ C N′, M″ C N″ sono simili fra di loro. Or bene, se

si segna la retta M′M″, il triangolo M′M″P che ne risulta, è simile ai due precedenti, perchè l'angolo M′PM″ è uguale ad x, ed i due lati a' ed a'' adiacenti a questo angolo sono nello stesso rapporto dei lati b', b'' e c', c'' adiacenti all'angolo x dei triangoli M′CN′, M″CN″.

Dalla similitudine dei tre triangoli M′CN′, M″CN″, M′M″P si ricava la relazione:

$$a' : b' : c' = a'' : b'' : c'' = \overline{M'M''} : \overline{M'C} : \overline{M''C},$$

dalla quale si scorge che il triangolo variabile M′M″C si mantiene costantemente simile al triangolo invariabile MNP.

Ma il ragionamento si può estendere ad altri due gruppi di triangoli. Si considerino dapprima i tre triangoli AMN, AM′N′, N′PN: essi sono simili fra di loro, perchè hanno un angolo uguale, indicato in figura con y, ed i lati adiacenti a questo angolo proporzionali. Dalla loro similitudine se ne deduce che anche il triangolo variabile ANN′ rimane simile al triangolo MNP.

La stessa cosa si conchiude per il triangolo variabile MBN″, considerando i tre triangoli BNM, BM″N″, MPN″, simili fra di loro, perchè hanno un angolo uguale, z, ed i lati adiacenti a questo angolo proporzionali.

Riassumendo, nel meccanismo ad un punto fisso considerato abbiamo i seguenti quattro triangoli, che rimangono simili ai triangoli invariabili MNP, M′PN′, PM″N″:

ABC,

M′M″C, ANN′, MBN″.

7. Nel meccanismo ad un punto fisso della fig. 1 siano:

V la velocità del punto P,

v e v_1, le velocità dei punti M ed N della biella MN,

v' e v'_1, » » M′ ed N′ » M′N′,

v'' e v''_1, » » M″ ed N″ » M″N″.

Poichè il triangolo invariabile MNP si muove coi suoi vertici M, N sulle circonferenze A e B, esso ruota istantaneamente attorno al punto d'incontro O dei due raggi A M, B N. Ma nello stesso istante i triangoli $M'N'P$, $M''N''P$ ruotano rispettivamente attorno ai centri istantanei di rotazione O', O'', cosicchè si ha:

$$\frac{V}{\overline{OP}} = \frac{v}{\overline{OM}} = \frac{v_1}{\overline{ON}},$$

$$\frac{V}{\overline{O'P}} = \frac{v'}{\overline{O'M'}} = \frac{v'_1}{\overline{O'N'}},$$

$$\frac{V}{\overline{O''P}} = \frac{v''}{\overline{O''M''}} = \frac{v''_1}{\overline{O''N''}};$$

da cui si ottiene:

$$V = v\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = v_1\frac{\overline{OP}}{\overline{ON}} = v'\frac{\overline{O'P}}{\overline{O'M'}} = v'_1\frac{\overline{O'P}}{\overline{O'N'}} = v''\frac{\overline{O''P}}{\overline{O''M''}} = v_1''\frac{\overline{O''P}}{\overline{O''N''}} \quad (5).$$

Ora, si indichino con:

ω ed ω_1 le velocità angolari dei bracci A M e B N,

ω' ed ω'_1 » » » AM' e CN',

ω'' ed ω''_1 » » » BM'' e CN'';

allora si ha:

$$v = \omega a', \qquad v_1 = \omega_1 a'',$$

$$v' = \omega' b, \qquad v'_1 = \omega'_1 b'',$$

$$v'' = \omega'' c, \qquad v''_1 = \omega''_1 c'.$$

Sostituéndo nell'espressione (5) si ottiene:

$$V = \omega a'\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \omega_1 a''\frac{\overline{OP}}{\overline{ON}} = \omega' b\frac{\overline{O'P}}{\overline{O'M'}} = \omega'_1 b''\frac{\overline{O'P}}{\overline{O'N'}} = \omega'' c\frac{\overline{O''P}}{\overline{O''M''}} =$$

$$= \omega''_1 c'\frac{\overline{O''P}}{\overline{O''N''}}; \qquad \ldots\ldots (6)$$

da cui;

$$
\begin{cases}
\omega_1 = \omega \dfrac{a'}{a''} \dfrac{\overline{\mathrm{O\,N}}}{\overline{\mathrm{O\,M}}} \\[2ex]
\omega' = \omega \dfrac{a'}{b} \dfrac{\overline{\mathrm{O\,P}}}{\overline{\mathrm{O'\,P}}} \dfrac{\overline{\mathrm{O'\,M'}}}{\overline{\mathrm{O\,M}}}\,, \\[2ex]
\omega_1' = \omega \dfrac{a'}{b''} \dfrac{\overline{\mathrm{O\,P}}}{\overline{\mathrm{O'\,P}}} \dfrac{\overline{\mathrm{O'\,N'}}}{\overline{\mathrm{O\,M}}}\,, \\[2ex]
\omega'' = \omega \dfrac{a'}{c} \dfrac{\overline{\mathrm{O\,P}}}{\overline{\mathrm{O''\,P}}} \dfrac{\overline{\mathrm{O''\,M''}}}{\overline{\mathrm{O\,M}}}\,, \\[2ex]
\omega_1'' = \omega \dfrac{a'}{c'} \dfrac{\overline{\mathrm{O\,P}}}{\overline{\mathrm{O''\,P}}} \dfrac{\overline{\mathrm{O''\,N''}}}{\overline{\mathrm{O\,M}}}\,.
\end{cases}
$$

Ma dalle due coppie di triangoli simili OMP, OAO$'$ ed ONP, OBO$''$ si ricava:

$$
\frac{\overline{\mathrm{O\,P}}}{\overline{\mathrm{O'\,P}}} = \frac{b}{\overline{\mathrm{O'M'}}}\,, \qquad \frac{\overline{\mathrm{O\,P}}}{\overline{\mathrm{O''P}}} = \frac{c}{\overline{\mathrm{O''M''}}}\,.
$$

Di più si noti che i triangoli MNO, M$'$N$'$O$'$, M$''$N$''$O$''$, di cui un lato è la biella di ciascuno dei quadrilateri ed il vertice opposto il corrispondente centro istantaneo di rotazione, sono simili fra di loro, perchè uno dei loro angoli è x e gli altri sono rispettivamente i supplementi di y e di z. Dalla similitudine di questi triangoli si ricava:

$$
\frac{\overline{\mathrm{O'N'}}}{\overline{\mathrm{O'M'}}} = \frac{\overline{\mathrm{O\,N}}}{a}\,, \qquad \frac{\overline{\mathrm{O''N''}}}{\overline{\mathrm{O''M''}}} = \frac{\overline{\mathrm{O\,M}}}{a}\,.
$$

Sostituendo nelle cinque formole precedenti, otteniamo:

$$\left\{\begin{aligned} \omega_1 &= \omega \frac{a'}{a''} \frac{\overline{\mathrm{O\,N}}}{\overline{\mathrm{O\,M}}} \,. \\ \omega' &= \omega \frac{a'}{\overline{\mathrm{O\,M}}} \,, \\ \omega_1' &= \omega \frac{a'}{a''} \frac{\overline{\mathrm{O\,N}}}{\overline{\mathrm{O\,M}}} \,, \\ \omega'' &= \omega \frac{a'}{\overline{\mathrm{O\,M}}} \,, \\ \omega_1'' &= \omega \,. \end{aligned}\right. \qquad \ldots\ldots (7).$$

Da queste relazioni si deducono varie conseguenze:

1°.

$$\left\{\begin{aligned} \omega &= \omega_1'' \\ \omega' &= \omega'' \\ \omega_1 &= \omega_1' \end{aligned}\right. \qquad \ldots\ldots (8).$$

Cioè: *se si considerano due qualunque dei tre punti* A, B, C, *le sbarre girevoli attorno ad essi che non appartengono al quadrilatero articolato avente per centri fissi questi due punti, si muovono colla medesima velocità angolare.*

Questa proprietà è confermata dalla proprietà geometrica vista nella dimostrazione della legge di Roberts. Poichè i due bracci A M′, B M″, ad esempio, s'incontrano sempre in un punto X situato sulla circonferenza A B C, cioè fanno fra di loro l'angolo costante γ, è manifesto che essi ruotano attorno ai centri fissi A e B come i due lati A X, X B dell'angolo invariabile A X B i lati del quale passano costantemente per A e B: le loro velocità angolari ω' ed ω'' sono perciò uguali fra di loro. Lo stesso si può dire per le altre due coppie di lati.

2°.

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_1} &= \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}\frac{a''}{a'}, \\ \frac{\omega'}{\omega_1'} &= \frac{a''}{\overline{ON}}, \\ \frac{\omega''}{\omega_1''} &= \frac{a'}{\overline{OM}}. \end{aligned}\right. \quad \ldots\ldots (9).$$

Queste formole fanno vedere che i rapporti $\frac{\omega'}{\omega'_1}$ ed $\frac{\omega''}{\omega''_1}$ fra le velocità angolari nei due quadrilateri $A C N' M'$, $B C N'' M''$ si possono determinare per mezzo degli elementi del solo quadrilatero $A B N M$, senza che sia necessario di procedere alla determinazione di quei due quadrilateri.

Di più esse dimostrano che i rapporti $\frac{\omega'}{\omega'_1}$ ed $\frac{\omega''}{\omega''_1}$ sono indipendenti dai lati b e c del triangolo invariabile MNP; cosicchè se si varia la posizione del punto generatore P rispetto alla biella MN del quadrilatero $A B N M$, gli altri due quadrilateri $A C N' M'$, $B C N'' M''$ variano bensì di lati, ma i rapporti delle velocità angolari dei loro bracci non cambiano.

Dalle formole (9) si deduce ancora la relazione:

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\omega'}{\omega'_1} : \frac{\omega''}{\omega''_1} \quad \ldots\ldots (10).$$

8. Se il punto descrivente P cade sulla biella, si ha il sistema articolato ad un punto fisso rappresentato nella fig. 3. Esso si ottiene costruendo dapprima i due parallelogrammi $A M' P M$, $B M'' P N$; determinando poscia sul lato $M'P$ del primo, e sul lato $P M''$ del secondo, i punti N', N'', tali che:

$$\frac{\overline{M'N'}}{\overline{N'P}} = \frac{\overline{PN''}}{\overline{N''M''}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{PN}};$$

e costruendo infine il parallelogrammo $P N' C N''$.

In questo caso il punto C cade sulla retta AB e ne determina i segmenti AB, CB, tali che:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{PN}};$$

nel movimento del sistema, tenuto fisso il lato AB, questo punto C rimane fisso.

I tre quadrilateri capaci di generare la medesima curva l sono allora:

ABNM,	col lato fisso	AB,
ACN′M′,	«	AC,
BCN″M″,	«	BC.

Se nel primo il punto descrivente P cade sulla biella, come in figura, negli altri due questo punto cade sul prolungamento della biella. Ciò si deduce anche dal meccanismo generale della fig. 1, osservando che nel caso ora considerato si ha: $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = \pi$. Se invece nel primo quadrilatero il punto descrivente P cade sul prolungamento della biella, per esempio dalla parte di N, si ha $\alpha = o$, $\beta = \pi$, $\gamma = o$, e quindi nel quadrilatero ACN′M′ il punto P cade sulla biella e nell'altro BCN″M″ sul prolungamento della biella.

I quattro triangoli simili ai triangoli invariabili del meccanismo generale in questo caso si riducono a rette. Perciò nel meccanismo ad un punto fisso della fig. 3 abbiamo i seguenti gruppi di punti che rimangono in linea retta:

$$ABC,$$

$$M'M''C, \qquad ANN', \qquad MBN'';$$

e fra i vari segmenti si ha la relazione:

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{PN}} = \frac{\overline{M'N'}}{\overline{N'P}} = \frac{\overline{PN''}}{\overline{N''M''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{M'C}}{\overline{CM''}} = \frac{\overline{AN'}}{\overline{N'N}} = \frac{\overline{MN''}}{\overline{N''B}}.$$

I tre quadrilateri ABNM, ACN′M′, BCN″M″ hanno ancora i lati proporzionali, benchè non disposti nello stesso ordine. Dato uno di questi quadrilateri si possono perciò ottenere gli altri due con una costruzione derivata da quella della fig. 2. In questo caso però è forse più conveniente procedere senz'altro alla costruzione del meccanismo ad un punto fisso rappresentato nella fig. 3.

9. Si supponga che nel sistema articolato complesso della figura 1 non si fissi che uno dei vertici A, B, C, ad esempio il punto A (fig. 4). Allora, da quanto precede, comunque si deformi questo meccanismo attorno al punto A, il triangolo variabile ABC rimane sempre simile al triangolo invariabile MNP.

Si ottiene per conseguenza un pantografo: ad ogni movimento del punto C corrisponde un movimento simile del punto B. Se C percorre una certa linea λ, B descrive una linea λ' simile a λ: il rapporto costante degli elementi omologhi di queste due linee simili è uguale ad $\overline{AC}:\overline{AB}$, cioè a $b:a$. Esse hanno per punto corrispondente comune il punto fisso A, e *sono girate l'una rispetto all'altra dell'angolo* α. Perciò se la linea λ passa per A, anche λ' passa per questo punto. Se, in particolare, C è condotto lungo una retta mn, B si muove lungo la retta $m'n'$ inclinata dell'angolo α alla prima. Il punto C non può allontanarsi dal punto fisso A di una lunghezza maggiore di $\overline{AM'}+\overline{M'N'}+\overline{N'C}$: quando C raggiunge tale distanza i tre lati AM', M'N', N'C sono in linea retta, e si dispongono pure in linea retta i lati AM, MN, NB e BM'', M''N'', N''C: allora il meccanismo prende la forma di un triangolo AC_0B_0.

Anche il sistema articolato della fig. 3 può dar luogo ad un pantografo; in questo caso però lo spostamento angolare delle due figure simili è di 0° o di 180°. Se il punto fisso è C, le due figure sono spostate di 180°; se invece il punto fisso è A o B, lo spostamento angolare è nullo.

10. Questo pantografo generale si può semplificare notevolmente. Si consideri la sola parte del meccanismo che è costituita dal parallelogrammo AMPM' (fig. 5) e dai due triangoli invariabili M'PN', MNP, simili fra di loro, ma diversamente disposti, come indica la figura, rispetto ai lati M'P, MP del parallelogrammo. Comunque si deformi questo sistema articolato attorno al punto fisso A, i tre triangoli AMN, AM'N', N'PN si mantengono sempre simili tra di loro, e tali che:

$$a:b:c=a':b':c'=\overline{AN}:\overline{AN'}:\overline{NN'}\ ,$$

come quando questo sistema appartiene al meccanismo complesso della fig. 1. Il triangolo variabile A N N' si mantiene perciò sempr simile ai triangoli invariabili M N P, M' P N': cosicchè se si fissa uno dei vertici A, N, N', ad esempio il vertice A del parallelogrammo, si ottiene un altro pantografo, e, precisamente, il pantografo obliquo proposto da Sylvester (*).

Con questo meccanismo più semplice si ottengono i medesimi risultati del precedente: mentre il punto N perçorre una linea λ qualsiasi, il punto N' descrive una linea λ' simile; queste due linee hanno per punto comune corrispondente il punto fisso A e per rapporto di similitudine il rapporto costante $a:b$ od $a':b'$. Esse inoltre sono girate l'una rispetto all'altra dell'angolo α.

Se il punto N è sul lato M P o sui suoi prolungamenti, il punto N' cade su M' P o sui suoi prolungamenti, ed i tre punti A, N, N' cadono in linea retta. Allora il pantografo obliquo di Sylvester si riduce al pantografo comune, come è manifesto dalle figure 6 e 7.

11. Qualsiasi quadrilatero articolato che riceva applicazione o quale *strumento per tracciar curve*, o quale *conduttore rettilineo approssimato*, od in qualsiasi altro modo per la traiettoria descritta da un punto della sua biella, può essere sostituito da due altri quadrilateri, che si determinano colla legge testè dimostrata. In generale questi due nuovi meccanismi hanno disposizione e dimensioni diverse da quelle del meccanismo da cui derivano; cosicchè, dato questo, noi possediamo tre quadrilateri diversi, ma equivalenti per quanto riguarda le traiettorie, e nello studio di una macchina si applicherà quello dei tre meccanismi che meglio corrisponde alle condizioni speciali dell'impianto.

Dal notissimo conduttore rettilineo approssimato di Watt, ad esempio, si deducono due altri conduttori capaci di generare la stessa curva a lunga inflessione che si ottiene dal primo. In questo caso speciale si ricade sopra un meccanismo già noto; sul conduttore di Evans (**); però rimane dimostrata l'equivalenza di due conduttori prima ritenuti distinti: quello di Watt e quello di Evans.

(*) I. I. Sylvester, *On the plagiograph aliter the skew pantigraph. Nature*, Vol. XII, pag. 168. Vedasi pure nello stesso volume, a pag. 214, lo scritto di I. I. Sylvester, *Hystory of the plagiograph*.

(**) L. Burmester, op. cit., Vol. I, pag. 635.

Una cosa simile succede per l'antiparallelogrammo articolato, che, coll'applicazione della legge di Roberts, si riconosce essere equivalente al quadrilatero isoscele (*).

12. Escirebbe dal campo impostomi l'esame di tutte queste applicazioni, che, del resto furono già ampiamente trattate. Mi fermerò invece sopra di un caso specialissimo, nel quale la legge di Roberts rimane confermata da un'altra legge importantissima della Cinematica moderna, cioè dalla legge della *duplice generazione delle cicliche*, enunciata in tutta la sua generalità da Bellermann nel 1867.

Si supponga (fig. 8) che uno dei centri fissi del quadrilatero ABNM, per esempio, il centro B, si trovi a distanza infinita sopra di una retta NB_∞ perpendicolare alla retta AN, e che la biella MN del quadrilatero sia lunga quanto il braccio finito AM. Allora il punto N percorre la retta AN, ed il quadrilatero articolato si riduce al *manovellismo di spinta isoscele* ANM.

In questo caso la biella MN si muove di moto ellittico, e, per conseguenza:

1°. La linea fissa, cioè il luogo dei centri istantanei di rotazione O, è la circonferenza di circolo f di centro A e raggio $2\overline{AM} = 2\overline{MN}$; la linea rotolante è la circonferenza di circolo r di centro M e raggio $\overline{AM} = \overline{MN}$.

2°. La traiettoria descritta da un punto P congiunto invariabilmente colla biella MN è un'ellisse l, che ha per centro A, per assi le rette xx, yy passanti per i punti d'incontro Q, R della retta PM colla circonferenza rotolante r, e per semiassi le distanze $\overline{PR}$, $\overline{PQ}$; se il punto P cade sulla rotolante r, l'ellisse si riduce ad una retta passante per A; se P cade in M, l'ellisse si riduce ad una circonferenza di circolo di centro A e raggio AM.

3°. L'ellisse l si può pure supporre generata dal punto P invariabilmente congiunto colla circonferenza rotolante r, mentre questa linea rotola entro alla circonferenza fissa f: essa perciò appartiene alla classe delle *curve cicliche*, linee che nascono appunto quando le due linee, epiciclo e deferente, sono circonferenze di circolo.

Applicando la legge di Roberts a questo quadrilatero speciale, uno dei tre quadrilateri capaci di generare la curva l, il qua-

---

(*) L. BURMESTER, op. cit., Vol. I, pag. 310.

drilatero $B_\infty C_\infty N''_\infty M''_\infty$ va a distanza infinita, e, per conseguenza, non rimangono che i due quadrilateri $AB_\infty NM$, $AC_\infty N'M'$, che sono entrambi manovellismi di spinta isoscele.

In questo caso, infatti, il meccanismo complesso formato dai tre quadrilateri si riduce al pantografo obliquo di Sylvester $ANMPN'M'$, cosicchè mentre il punto N descrive la retta mn passante per il centro fisso A, il punto N' descrive la retta $m'n'$ passante essa pure per A, ed inclinata alla prima dell'angolo α. Allo stesso risultato si giunge osservando che N' deve ruotare attorno al punto C_∞, e che la retta $C_\infty N'$, essendo parallela a PN''_∞, è inclinata dell'angolo α sulla retta PM''_∞

L'ellisse l può così essere generata o dal punto P invariabilmente congiunto colla biella MN del manovellismo di spinta isoscele ANM, oppure dal punto P invariabilmente congiunto colla biella $M'N'$ del manovellismo di spinta isoscele $AN'M'$. Ora, in questo secondo manovellismo la biella $M'N'$ si muove pur essa di moto ellittico, ed ha per deferente la circonferenza di circolo f_1 di centro A e raggio $2\overline{AM'} = 2\overline{M'N'}$, e per epiciclo la circonferenza di circolo r_1 di centro M' e raggio $\overline{AM'} = \overline{M'N'}$. Cosicchè la ciclica l si può generare o col rotolamento di r entro f, oppure col rotolamento di r_1 entro f_1.

Si noti ancora che i centri istantanei di rotazione O, O', dei due manovellismi ed il punto P sono in linea retta; i triangoli OMP, OAO' sono dunque simili, cosicchè:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AM'}}{\overline{AO'}} ;$$

ma

$$\overline{AM'} = AO' - O'M' ,$$

e perciò:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = 1 - \frac{\overline{O'M'}}{\overline{O'A}} .$$

Ora, il teorema di Bellermann sulla duplice generazione delle cicliche stabilisce (*):

(*) BELLERMANN. *Epycicloiden und Hypocicloiden.* — Jena 1867. Intorno a questo teorema vedasi pure l'op. cit. di L. BURMESTER, vol. I, a pag. 136, e quella testè pubblicata dal prof. D. TESSARI, *La Cinematica applicata alle macchine.* — Torino 1890, pag. 117.

Una ciclica può essere generata mediante due diverse coppie di circonferenze di circolo. Le circonferenze fisse delle due coppie sono concentriche, e la distanza del punto descrivente dal centro di una delle rotolanti è uguale alla distanza dei centri dell'altra coppia di circonferenze. Inoltre se R, R′ *sono i raggi dell'epiciclo e del deferente di una coppia,* R_1, R'_1 *quelli dell'epiciclo e del deferente dell'altra, si ha* (per il caso del rotolamento interno) *la relazione:*

$$\frac{R}{R'} = 1 - \frac{R_1}{R'_1}.$$

Applicando questo teorema, si ottiene evidentemente il medesimo risultato ottenuto colla legge di Roberts.

Torino, novembre 1890.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

Fig. 8.

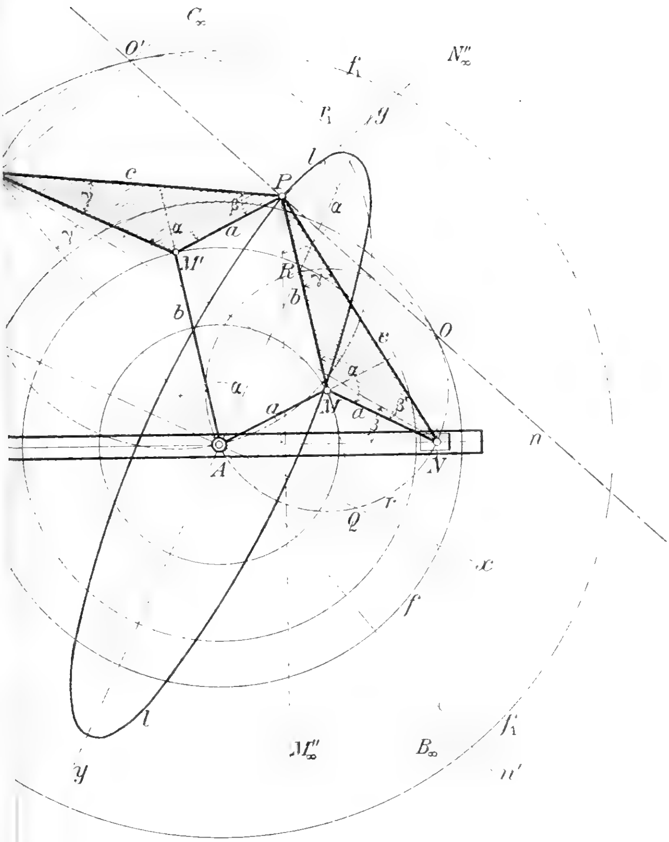
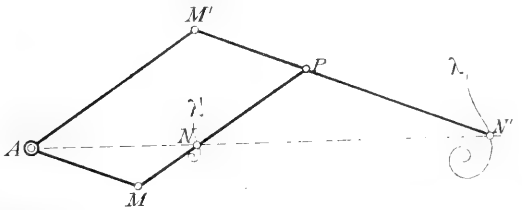


Fig. 7.



Lit. Salussolia, Torino.

Fig 1

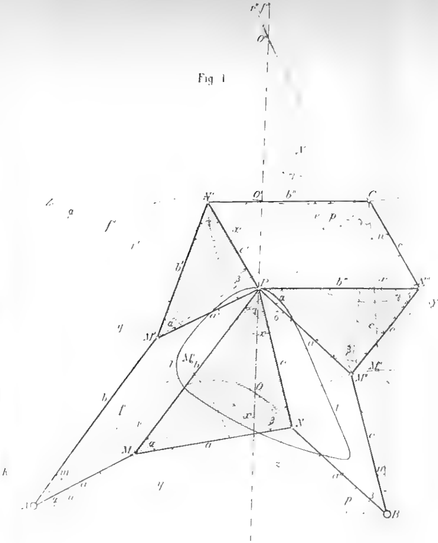


Fig 3

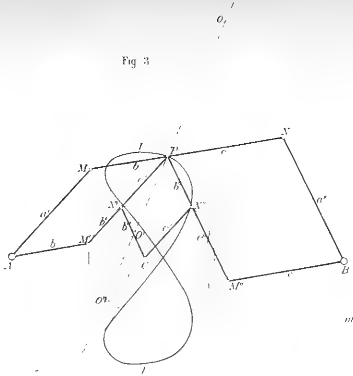


Fig 8

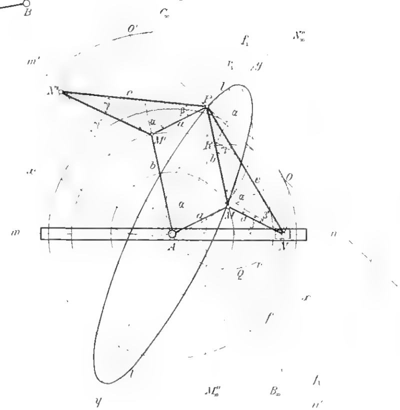


Fig 5

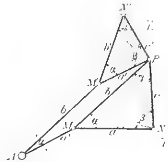


Fig 4.

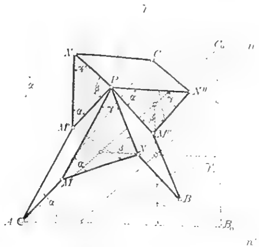


Fig 2

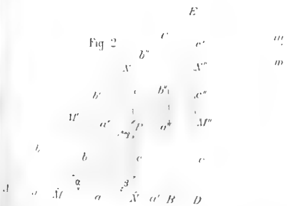


Fig 6

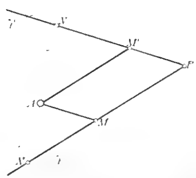
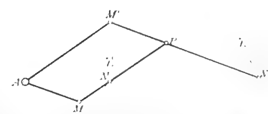


Fig 7



Lit. Salussolia Torino

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 16 Novembre 1890 . . . . Pag. 1

D'Ovidio — Felice Casorati, Cenno necrologico . . . . » 3

Aschieri — Effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Torino e per l'anno 1891 . . . . » 5

Chini — Sopra alcune deformazioni delle superficie rigate . . . . . » 20

Segre — Un nuovo campo di ricerche geometriche . . . . « 35

Camerano — Ricerche intorno allo sviluppo ed alle cause del polimorfismo dei girini degli Anfibi anuri . . . . » 72

Pastore — La legge di Roberts sul quadrilatero articolato . . . . » 84

Torino — Tip. Reale-Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXVI, Disp. 2ª, 1890-91

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 30 Novembre 1890.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: COSSA, Direttore della Classe, BRUNO, BERRUTI, SIACCI, D'OVIDIO, NACCARI, SPEZIA, GIACOMINI, CAMERANO, SEGRE e BASSO Segretario.

Si legge l'atto verbale dell'adunanza precedente che è approvato.

Il Socio BASSO presenta in dono, per parte dei rispettivi autori, un lavoro del Corrispondente Prof. Augusto RIGHI *Sulle forze elementari elettromagnetiche ed elettrodinamiche* (2^a Memoria), e due Note del marchese Antonio DE-GREGORIO, su argomenti di geologia.

Le letture e le comunicazioni si succedono nell' ordine seguente:

« *Intorno ad alcuni teoremi della Geometria sopra una curva algebrica:* Nota del Corrispondente Prof. Eugenio BERTINI, della R. Università di Pavia, presentata dal Socio SEGRE per incarico dell'Autore;

« Altra addizione alla Nota « *Sui determinanti di determinanti* » del Socio D'OVIDIO;

« *Sulle specie europee del genere Chrysotoxum* MEIG. », Studio del sig. Dott. E. GIGLIO-TOS, presentato dal Socio CAMERANO.

Il Socio CAMERANO presenta una Memoria del sig. Filippo CANTAMESSA, col titolo « *Il Mastodonte di Cinaglio d'Asti ed il Mastodon (Tetrolophodon) arvernensis:* Osteografia ed osservazioni ». Questo lavoro essendo destinato ai volumi delle *Memorie*, viene dal Presidente affidato ad una Commissione perchè lo esamini e ne riferisca alla Classe in una prossima seduta.

Infine lo stesso Socio Camerano, condeputato col Socio Spezia, legge una sua Relazione sopra « *I Molluschi dei terreni terziarii del Piemonte e della Liguria* » descritti dal Dott. Federico Sacco, Prof. di Paleontologia nella Università di Torino, parte VIII, *Galeodliidae, Doliidae, Ficulidae e Naticidae.*

La Classe accoglie le conclusioni della Commissione, e, ammesso alla lettura il lavoro del Dott. Sacco, ne delibera l'inserzione nei volumi delle *Memorie* dell'Accademia.

LETTURE

Intorno ad alcuni teoremi della geometria sopra una curva algebrica;

Nota del Corrispondente Prof. EUGENIO BERTINI, presentata dal Socio C. Segre

Nelle *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (Questi Atti, Vol XXIV), assai pregevoli per novità di metodo e di risultati, il Dott. Guido Castelnuovo risolve un importante problema della geometria sopra una curva algebrica; determina cioè il limite massimo del genere p, noti i numeri n, r di una serie g_n^r giacente sulla curva. E s'intende per serie g_n^r (riferendosi ad una curva piana) una serie di gruppi di n punti, r volte infinita, segnata sulla curva stessa da un qualsivoglia sistema lineare di curve (che può sempre essere sostituito da un sistema lineare di curve aggiunte (*)).

Le proprietà che conducono il Castelnuovo alla detta determinazione, hanno già interesse per sè e possono essere utilmente generalizzate. Tale generalizzazione è l'oggetto del § 2 del presente lavoro: e di essa sono fatte due applicazioni. Una, quella del § 3, è la stessa suddetta determinazione del limite superiore di p, ottenuta qui in modo forse più semplice e più chiaro: l'altra è l'estensione agli iperspazi di alcuni teoremi dimostrati da Noether nella sua bella Memoria: *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven* (Memorie dell'Accademia delle Scienze di Berlino, 1882).

(*) Cfr. Noether nei *Math. Ann.*, t. XXIII, pag. 348. Veggasi anche la Memoria fondamentale di Brill e Noether nel t. VII dei *Math. Ann.*

§ 1.

Proposizioni preliminari.

1. Una serie g_n^r sopra una curva C (irriduttibile) possegga la proprietà che i gruppi aventi un punto *arbitrario* (*) comune abbiano necessariamente altri $\rho - 1$ punti comuni. Allora è facile dimostrare che esiste sopra C una serie γ semplicemente infinita (razionale o non) di gruppi di ρ punti, tale che ogni gruppo di g_n^r consta di k gruppi ($n = k\rho$) di γ.

2. Escluso il caso precedente, *non può avvenire che i gruppi di una serie g_n^r aventi s punti arbitrari comuni* $(1 < s < r)$ *abbiano necessariamente altri σ punti comuni* $(0 < \sigma < n - s)$. Cioè non può avvenire, considerando una curva piana C, che una curva φ del sistema lineare ∞^r che dà g_n^r, la quale passi per s punti arbitrarii, passi necessariamente per altri σ punti. Suppongasi che ciò sia e che sia s il più piccolo numero, per il quale ciò avviene. Le φ per $s - 2$ punti arbitrarii formano un sistema Σ lineare ∞^{r-s+2}, cioè almeno ∞^3; e inoltre quelle di esse che passano per un punto arbitrario, essendo s minimo, non passano necessariamente per altri punti. Una rete generica di Σ può adunque servire ad una trasformazione birazionale della C. La curva C' trasformata gode della proprietà che le φ' del sistema Σ' trasformato di Σ, le quali passano per due suoi punti, passano necessariamente per altri σ punti che sono con quelli in linea retta, perchè ogni retta costituisce con una parte fissa una curva φ', e per l'ipotesi fatta sulla curva primitiva C. Ora si dimostrerà che la curva C' non esiste.

Sia X un punto arbitrario di C' e φ'^* una curva di Σ' che tocca C' in X: *dovrà φ'^* toccare C' in ogni altro punto comune.* Infatti sia Y un altro punto comune. Le φ' passanti semplicemente per X, Y costituiscono un sistema lineare Δ (almeno ∞^1) di cui altri σ punti base sono sulla retta XY. Sia Z uno

---

(*) Qui e in seguito, *arbitrario* significa scelto in modo assolutamente generale.

di essi (*) e X' un altro punto arbitrario. Anche le φ' per i punti X', Z appartengono ad un sistema lineare Δ' della stessa infinità di Δ e di cui sulla retta X'Z sono altri σ punti base Y'... Se (Z restando fisso) X' si avvicina indefinitamente ad X, i punti base di Δ' devono tendere ai punti base di Δ, Y' ad Y... e quindi segue che la curva φ'^* che, quando X è successivo ad X', appartiene ad amendue i sistemi, deve toccare C in Y, come asserimmo. Ma se ogni curva di Σ' tangente in un punto arbitrario X deve toccare C' in ogni altro punto (variabile), ciò dovrebbe accadere (per nuova considerazione al limite) anche di quella curva di Σ' costituita dalla tangente in X e da una parte fissa, il che non può essere.

3. Ne discende immediatamente che *in una serie* g_n^r, *che non presenta il caso del n°* 1, *r punti, comunque presi, di un gruppo arbitrario individuano il gruppo, cioè appartengono a quel solo gruppo.* Perchè se in *ogni* gruppo G di g_n^r esistesse un gruppo Γ di $s+\sigma$ punti tale che i gruppi di g_n^r per s punti passassero necessariamente per gli altri σ, i gruppi Γ costituirebbero una $\infty^{r-(r-s)}=\infty^s$: e quindi i gruppi di g_n^r per s punti *arbitrarii* passerebbero per altri σ punti (**).

(*) Il sistema Δ è indifferentemente determinato dai punti X, Y ovvero X, Z, essendo σ minimo.

(**) Un'altra dimostrazione delle proprietà dei n. 2, 3, favoritami per iscritto dal CASTELNUOVO e della quale sono una interpretazione nel piano la prima parte del n. 2 e il n. 3, è la seguente:

Per l'ipotesi fatta che i gruppi di g_n^r aventi un punto comune non hanno necessariamente altri punti comuni, si può riferire univocamente alla curva C una curva C' di ordine n di uno spazio (ad r dimensioni) S_r, gli spazi S_{r-1} di questo segnando sopra C' la serie g_n^r corrispondente a quella. Se in ogni S_r esistessero r punti di C' giacenti in un S_{r-2}, gli spazi S_{r-2} r— secanti sarebbero ∞^{r-1} ed avverrebbe che ogni spazio determinato da $r-1$ punti arbitrari di C' segherebbe ancora questa curva in un altro punto. Sia (come nel n. 2) s il minimo numero di punti arbitrari, pei quali avviene che l' S_{s-1} da essi determinato contenga altri σ punti. Se $s>2$, da un S_{s-3} passante per $s-2$ punti arbitrari di C' si projetti C' sopra uno spazio S_{r-s+2}; la projezione, per essere s minimo, è univoca e la curva projezione C'' è tale che ogni sua corda è almeno trisecante. Se $r-s+2>3$, si projetti C'' nello spazio ordinario da punti esterni e si avrà una curva C''', sghemba, di cui ogni corda è almeno trisecante. Tale curva non esiste. Perchè, se X, Y sono due punti qualunque di C''' e Z un terzo punto che XY ha sopra C''', questa

§ 2.

Serie speciali complete nascenti da una serie data, di cui k gruppi giacciono in una curva aggiunta di ordine $m-3$.

4. Sia C una curva piana d'ordine m: e facciamo l'ipotesi che k gruppi G', G'',... $G^{(k)}$ di una serie speciale completa $g_n^{r_1}$ esistano sopra una curva aggiunta φ_{m-3}. Supponiamo $r_1 \geq 2$ ed escludiamo il caso particolare del n° 1. Allora sussistono le seguenti proprietà.

Sia R il resto dei k gruppi dato dalla considerata φ_{m-3}. Per il teorema di Riemann-Roch (che s'indicherà in seguito brevemente con R-R), le φ_{m-3} per R, G'', G''',... $G^{(k)}$ (ad es.) segnano la serie $g_n^{r_1}$: onde per R, per un gruppo qualunque di questa serie e per G'', G''',... $G^{(k)}$ passa una φ_{m-3}. Ripetendo il ragionamento, si conclude che k *gruppi qualunque di $g_n^{r_1}$ sono dati da una φ_{m-3} per* R; cioè *costituiscono un gruppo di una serie speciale completa $g_{nk}^{r_k}$ che si ottiene variando φ_{m-3} per* R. Parimenti $k-1$ gruppi qualunque di $g_n^{r_1}$ sono dati da una φ_{m-3} per R e per un altro gruppo, cioè formano un gruppo di una serie speciale completa $g_{n(k-1)}^{r_{k-1}}$ contenuta nella $g_{nk}^{r_k}$: ecc. Si hanno così k serie speciali complete $g_{ni}^{r_i}$ $(i=1, 2,\ldots, k)$, di cui ciascuna contiene tutte le precedenti.

5. Sia μ_i il numero delle condizioni indipendenti a cui deve soddisfare una φ_{m-3} che passa già per $i-1$ gruppi G', G'',..., $G^{(i-1)}$ affine di passare per un i^{esimo} gruppo $G^{(i)}$. Per il teorema R-R è $\mu_1 = n - r_1$ e manifestamente $\mu_i \leq \mu_1$, cioè $n - \mu_i \geq r_1$. Ma troveremo in seguito una maggiore limitazione (n. 9).

Qui osserviamo che i gruppi G', G'',..., $G^{(i-1)}$ costituiscono un gruppo di $g_{n(i-1)}^{r_{i-1}}$ e quindi il passare φ_{m-3} per essi dà

curva è da Z projettata doppiamente mediante un cono al quale appartiene XY, e nel piano tangente lungo questa generatrice al cono giacciono le tangenti a C''' in X, Y. Adunque due tangenti qualunque di C''' si incontrano e quindi (C''' non essendo piana) passano tutte per un punto, il che non può essere (altrimenti lo stesso accadrebbe di una sua projezione piana).

precisamente (per il teorema R-R) $n(i-1)-r_{i-1}$ condizioni. Analogamente sono $n\,i-r_i$ le condizioni a cui deve soddisfare una φ_{m-3} che passi per $G', G'', \ldots, G^{(i)}$. Adunque deve essere

$$n\,i-r_i=\mu_i+n(i-1)-r_{i-1}$$

cioè

$$(1)\ldots\ldots \qquad \mu_i=n+r_{i-1}-r_i\,, \qquad (i=1, 2, \ldots k)$$

ove si porrà, per $i=1$, $r_0=0$. La formola precedente dimostra che μ è *costante* qualsiansi i dati $i-1$ gruppi e l'i^{esimo}.

Sommando le (1) si ha

$$(2)\ldots\ldots \qquad r_i=n\,i-(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_i)$$

che segue direttamente dall' osservare che $\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_3$ esprime il numero delle condizioni indipendenti per una φ_{m-i} contenente i gruppi di $g_n^{r_1}$, cioè contenente un gruppo di $g_{ni}^{r_i}$ e quindi (teorema R-R) è eguale ad $n\,i-r_i$.

6. Ora si noti che una φ_{m-3} passante per $\mu_1=n-r_1$ punti *comunque scelti* di un gruppo *arbitrario* G della serie $g_n^{r_1}$ soddisfa sempre in conseguenza a μ_1 condizioni indipendenti e quindi passa necessariamente per tutto il gruppo G; cioè non può accadere che il passaggio di una φ_{m-3} per certi μ_1-1 punti di G produca il passaggio per un altro punto di G. In vero, se ciò accadesse, quei μ_1 punti formerebbero (teorema R-R) un gruppo di una serie speciale $g^1_{\mu_1}$, la quale sarebbe segata dalle φ_{m-3} passanti per gli $n-\mu_1$ punti residui di G ed inoltre per un gruppo della serie residua di $g_n^{r_1}$: donde segue che ogni gruppo della $g^1_{\mu_1}$ cogli $n-\mu_1$ punti nominati formerebbe un gruppo di $g_n^{r_1}$. Si avrebbero dunque in questa serie ∞^1 gruppi aventi $n-\mu_1=r_1$ punti comuni, i quali starebbero nel gruppo arbitrario G: il che non può essere (n. 3).

Un teorema più generale, riguardante le φ_{m-3} che contengono $i-1$ gruppi dati ed inoltre μ_i punti di un gruppo arbitrario della $g_n^{r_1}$ può forse dimostrarsi con analoghe considerazioni. Quì basta osservare che in un gruppo arbitrario di quella serie si posson sempre scegliere μ_i punti tali che presentino altrettante condizioni indipendenti alle φ_{m-3} che passano per gli $i-1$ gruppi dati della $g_n^{r_1}$ e che si assoggettano inoltre a passare per quei μ_i punti (poichè, se una tal scelta non fosse possibile, il passaggio di quelle φ_{m-3} per *tutto* il primo gruppo darebbe meno di μ_i condizioni indipendenti).

7. Abbiansi due gruppi G', G'' di $g_n^{r_1}$ aventi $r_1 - 1$ punti *arbitrari* comuni P e dicansi P', P'' rispettivamente i residui $n-r_1+1$ punti di ciascun gruppo. Se G', G'' si considerano come posizioni limiti di due gruppi distinti, si ottengono φ_{m-3} passanti per i punti P', per i punti P'' e tangenti nei punti P alla curva fondamentale C. Dico che *ogni* φ_{m-3} *passante per i punti* P', P'' *è necessariamente tangente nei punti* P *a* C. Giacchè, ricordando il teorema R-R, la φ_{m-3} passa per G' (contenendone $n-r_1+1$ punti) e dà un resto R tale che tutte le φ_{m-3} per R segnano sopra C la serie g_n^r. Ma ad R appartengono i punti P'' e quindi queste φ_{m-3} passano per tutto il gruppo G'', cioè G'' fa parte di R. Una φ_{m-3} variabile per R dà un gruppo variabile G di $g_n^{r_1}$ e, quando G cade in G', essa cade nella suddetta φ_{m-3}: questa tocca adunque nei punti P, come doveva dimostrarsi

Si noti che in questa dimostrazione, come nelle seguenti, è essenzialmente applicata la proprietà del n° 6: onde, come già avvertimmo, resta escluso il caso particolare del n° 1.

8. La precedente proprietà si estende facilmente, si ha cioè che *se i gruppi di* $g_n^{r_1}$ *hanno* $r_1 - 1$ (*o meno*) *punti comuni arbitrari, ciascuna* φ_{m-3} *passante per i residui punti di ogni gruppo ha con* C *in ciascuno di quei punti comuni un contatto* i^{punto}.

9. Dalla proprietà del n° 7 discendono importanti limitazioni. Premettasi che deve essere

$$(3) \ldots\ldots \qquad \mu_i > r_1 - 1 \,;$$

perchè, se fosse $\mu_i \leq r_1 - 1$, ricordando il significato di μ_i, una φ_{m-3} per $i-1$ gruppi qualunque di $g_n^{r_1}$ dovrebbe contenere ogni altro gruppo che avesse, con uno di quelli, $r_1 - 1$ punti comuni, il che è assurdo.

Ora sieno G', G'', ..., $G^{(i-2)}$ gruppi arbitrari di $g_n^{r_1}$ e $G^{(i-1)}$, $G^{(i)}$ due altri aventi $r_1 - 1$ punti comuni arbitrarii; segue dal n° 7 che la serie residua della g_{ni}^{ri} è data tanto dalle φ_{m-3} passanti per i gruppi arbitrarii di $g_n^{r_1}$ quanto dalle φ_{m-3} per $G', G'', \ldots, G^{(i-2)}, G^{(i-1)}, G^{(i)}$. Quelle soddisfano precisamente, per il significato delle μ, a $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i$ condizioni, e queste, al più, a $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{i-2} + 2\mu_{i-1} - (r_1 - 1)$ condizioni. Ciò si dimostra notando che una φ_{m-3} per $G', G'', \ldots, G^{(i-2)}$ e per μ_{i-1} punti di $G^{(i-1)}$ contiene questo gruppo per intero e allora basta che passi per $\mu_{i-1} - (r_1 - 1)$ punti di $G^{(i)}$ perchè ne contenga μ_{i-1} e quindi certamente $G^{(i)}$ per intero. Si ha dunque

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i \leq \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{i-2} + 2\mu_{i-1} - (r_1 - 1),$$

ossia

$$(4) \ldots\ldots \qquad \mu_i \leq \mu_{i-1} - (r_1 - 1),$$

che, per $i = 1$, deve sostituirsi colla $\mu_1 = n - r_1$.

Dalle (3), (4) segue immediatamente

$$(5) \ldots\ldots \qquad \mu_{i-1} > 2(r_1 - 1):$$

dalla (4) si ricavano, sommando, le

$$(6) \ldots\ldots \qquad \mu_i \leq n - r_1 - (i-1)(r_1 - 1):$$

e da queste, pure sommando, le

$$(7) \ldots \quad \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i \leq i(n - r_1) - \frac{i(i-1)}{2}(r_1 - 1)$$

$(i = 1, 2, \ldots k)$.

Il confronto delle (2), (7) dà *un limite inferiore per l'infinità r_i della serie $g_{ni}^{r_i}$*; cioè

$$(8) \ldots\ldots \qquad r_i \geq i r_1 + \frac{i(i-1)}{2}(r_1 - 1);$$

e il confronto delle (5), (6), nella seconda delle quali si ponga $i-1$ al posto di i, per $i = k$, dà *un limite superiore per il numero k delle serie $g_{ni}^{r_i}$*; cioè

$$(9) \ldots\ldots \qquad k < \frac{n - r_1}{r_1 - 1}.$$

Infine si può notare che dalle (1), (4) si ottiene

$$r_i - r_{i-1} \geq r_{i-1} - r_{i-2} + r_1 - 1 .$$

10. Una condizione necessaria e sufficiente per le proprietà esposte è chiaramente la

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k < p .$$

Se i — 1 *gruppi di* $g_n^{r_1}$ *sono sopra una* φ_{m-3}, *è condizione sufficiente affinchè* i *gruppi sieno sopra una* φ_{m-3} *che si abbia*

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{i-2} + 2\mu_{i-1} - (r_1 - 1) < p .$$

Infatti una φ_{m-3} che passi già per $i-2$ gruppi arbitrarii e quindi soddisfacente già a $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{i-2}$ condizioni, può condursi per altri due gruppi aventi $r_1 - 1$ punti comuni, facendola passare per μ_{i-1} punti di uno e per $\mu_{i-1} - (r_1 - 1)$ punti (non comuni) dell'altro, e tale φ_{m-3} esiste per la relazione ammessa. E allora si trova facilmente (cfr. n° 7) che i gruppi arbitrari sono sopra una φ_{m-3}.

Colla ripetuta applicazione della proposizione precedente si giunge al teorema di Castelnuovo (l. c. n[i] 24, 25): cioè *se sussistono le*

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + 2\mu_{i-1} - (r_1 - 1) < p$$

per $i=2$ *e poi per* $i=3$, *e così via via fino ad* $i=k$, *la serie speciale* $g_n^{r_1}$ *gode della proprietà che* k *suoi gruppi qualunque stanno sopra una* φ_{m-3}, ossia valgono le proprietà dette nel presente paragrafo.

§ 3.

Limite superiore di p per una data g_n^r.

11. Esistano k gruppi di una $g_n^{r_1}$ completa sopra una φ_{m-3} ($k \geq 1$, cioè sia la serie almeno speciale) e non ne esistano $k+1$ gruppi. Mantenute le denominazioni del § 2, sussisteranno tutte le relazioni ivi dimostrate. Inoltre dovrà essere

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{k-1} + 2\mu_k - (r_1 - 1) \geq p ,$$

giacchè, se fosse $< p$, sarebbero (n. 10) $k+1$ i gruppi giacenti sopra una φ_{m-3}. La precedente e la (7), per $i=k$, dànno

$$p \leq k(n-r_1) - \frac{k(k-1)}{2}(r_1-1) + \mu_k - (r_1-1)$$

cioè, per la (6), ove si ponga $i=k$,

$$p \leq k(n-r_1) - \frac{k(k-1)}{2}(r_1-1) + n - r_1 - k(r_1-1)$$

o anche

(10) . . . . . $$p \leq (k+1)\left(n - r_1 - k\frac{r_1-1}{2}\right)$$

ove, per la (9), k è un numero intero minore di $\frac{n-r_1}{r_1-1}$. Ma osservisi che si può prendere per k il massimo intero inferiore ad $\frac{n-r_1}{r_1-1}$ (o, ciò che è lo stesso, il minimo intero non inferiore ad $\frac{n-r_1}{r_1-1}-1$), perchè allora il 2° membro della (10) assume un valore maggiore di quello che ottiene attribuendo a k un valore più piccolo, come è facile verificare (*).

Il limite ora trovato vale anche per una serie g_n^r completa non speciale, nel qual caso $p=n-r$. Invero se $n<2r$ si ha $\frac{n-r}{r-1} \leq 1$ e però $k=0$ e la (10) dà $n-r$ per limite di p, cioè ne dà il valore esatto. Che se $n \geq 2r$, onde $\frac{n-r}{r-1} > 1$, siccome per $k=0$ la (10) sussiste, sussisterà *a fortiori*, per la osserva-

---

(*) Il CASTELNUOVO ha già osservato che il 2° membro della (10) diventa massimo per $k+1 = \frac{n-r_1}{r_1-1} + \frac{1}{2}$ cioè per $k = \frac{n-r_1}{r_1-1} - \frac{1}{2}$. Ma, per lo scopo suddetto, basta notare che, se $\frac{n-r_1}{r_1-1} - \omega$ è intero ($1 \geq \omega > 0$) e si prende un valore inferiore $\frac{n-r}{r_1-1} - \omega'$, ove $\omega' = \omega + \delta$ (δ intero >0), indicando con Δ_ω, $\Delta_{\omega'}$ i corrispondenti valori del 2° membro della (10) per quei valori di k, si ha $\Delta - \Delta_{\omega'} = \frac{r_1-1}{2}(\omega - \omega' \quad 1 - \omega - \omega') = -\frac{r_1-1}{2}\delta(1 - 2\omega - \delta)$, e però $\Delta_\omega > \Delta_{\omega'}$.

zione già fatta, per k massimo intero minore di $\frac{n-r}{r-1}$: ma in questo caso il limite non è raggiunto.

Infine il detto limite vale per una serie g_n^r (speciale o no) anche non completa. Perchè, se dicasi $g_n^{r_1}$ la serie completa in cui g_n^r è contenuta, dalla (10) segue, essendo $r_1 > r$,

$$p \leq (k+1)\left(n-r-k\frac{r-1}{2}\right)$$

ove $k < \frac{n-r_1}{r_1-1} < \frac{n-r}{r-1}$ e si può prendere per k, come dianzi, il massimo intero inferiore ad $\frac{n-r}{r-1}$.

Concludiamo adunque il teorema di Castelnuovo: — *Se sopra una curva di genere* p *esiste una serie qualunque* g_n^r *(tale soltanto che i gruppi della serie che hanno un punto arbitrario comune non abbiano necessariamente altri punti comuni) si ha*

$$p \leq (k+1)\left(n-r-k\frac{r-1}{2}\right),$$

ove k *è il massimo intero inferiore ad* $\frac{n-r}{r-1}$.

Vedemmo già che il limite, se $n < 2r$, è raggiunto. Se $n \geq 2r$ si può pure affermare lo stesso (per g_n^r speciali) applicando una formola di Segre, ecc. (Vedi Castelnuovo, l. c. n. 27).

§ 4.

Altra applicazione alle curve piane projezioni di curve speciali di S_r (*).

12. Indichi g^{m2} la serie segnata sopra una curva piana C di ordine m e genere p dalle rette del piano. Se g_m^2 non è com-

(*) Per i concetti e le denominazioni adoperati in questo paragrafo, vedasi Veronese, *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens* (*Math. Ann.*, t. XIX); Segre, *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques.* (*Math. Ann.*, t. XXX, e XXXIV); Castelnuovo, l. c.

pleta (il che accade certamente se $m-2>p$), si avrà una serie g_m^r $(r\geq 3)$ completa che la contiene e che per ciò non può presentare il caso particolare del n° 1. In virtù di questa serie, alla curva C corrisponde univocamente una curva C′ normale di uno spazio ad r dimensioni S_r; ed è chiaramente C′ la projezione di C (o di una curva omografica a C) dallo spazio S_{r-3} sostegno della rete degli S_{r-1} corrispondente alla g_m^2.

13. Se g_m^2 è speciale e non completa, la serie completa g_m^r nella quale essa è contenuta è pure speciale (onde $m-r+1\leq p$) e C è la projezione di una C′ speciale di S_r. Allora una curva aggiunta φ_{m-3} per un gruppo di g_m^2 deve spezzarsi nella retta contenente quel gruppo e in una curva aggiunta φ_{m-4}. Dicasi μ l'ordine minimo di una curva aggiunta φ_μ e pongasi $\mu=m-3-k$, $(k\geq 1)$. La curva φ_μ e k rette del piano costituiscono una φ_{m-3} passante per k gruppi di g_m^r. Valgono quindi tutte le proprietà del § 2 (essendo ora $n=m$, $r_1=r$). In particolare dalla (9) si ha

$$k<\frac{m-r}{r-1}$$

e quindi

$$\mu>m-3-\frac{m-r}{r-1}.$$

Adunque *se una curva* C, *d'ordine* m, *è projezione di una curva speciale dello stesso ordine di* S_r, *si ha per l'ordine minimo* μ *di una curva aggiunta di* C *la limitazione*

$$m-3>\mu>m-3-\frac{m-r}{r-1}\ (*).$$

14. Inoltre, conservando le indicazioni del § 2, si avrà una serie (speciale completa) $g_{mi}^{r_i}$ $(i\leq k)$, a cui appartiene ogni gruppo formato di i gruppi di g_m^r. La serie residua (secondo il teorema

(*) Se $r=3$ si ha $\mu>\frac{m-3}{2}$, cioè $\mu\geq\frac{m-2}{2}$: il che è noto (e dimostrato nel caso che la curva possegga soltanto punti doppi). Cfr. (ad esempio) NOETHER, *Raumcurven*, § 1, n. 4, (ove l'ordine minimo è $n-1$), e KÜPPER nei *Math. Ann.*, t. XXXI, pag. 294.

R-R) della $g_{mi}^{r_i}$ è una serie $g_{2p-2-mi}^{p-1-mi+r_i}$, la quale può ottenersi colle φ_{m-3} passanti per i gruppi di g_m^r, ad esempio per i gruppi di g_m^2. Ciò facendo, la detta φ_{m-3} si spezza nella i rette contenenti gli i gruppi e in una curva aggiunta residua φ_{m-3-i}. Questa curva segna adunque la detta serie residua e però varia in una $\infty^{p-1-mi+r_i}$. Ma, se indichiamo con δ il numero dei vincoli fra le condizioni che esprimono i passaggi di una curva aggiunta φ_{m-3-i} pei punti multipli di C (cioè il numero di queste condizioni che sono conseguenza delle rimanenti), l'infinità delle φ_{m-3-i} è data anche dal numero $\frac{(i+1)(i+2)}{2}+p-mi+\delta-2$.
Per conseguenza abbiamo

$$p-1-mi+r_i=\frac{(i+1)(i+2)}{2}+p-mi+\delta-2$$

ossia

$$\delta=r_i-\frac{i(i+3)}{2}.$$

Se $i=1$, si ha $\delta=r-2$: cioè sono $r-2$ i vincoli per una φ_{m-4}. Reciprocamente se ciò ha luogo, cioè se le curve aggiunte φ_{m-4} di una data curva costituiscono un sistema lineare $\infty^{p-m+r-1}$ (onde deve essere $m-r+1\leq p$), si ha su quella curva una serie $g_{2p-2-m}^{p-m+r-1}$, di cui la residua è una serie g_m^r, alla quale appartiene la g_m^2 data dalle rette del piano: e però ecc.

Se $i>1$, applicando la (8), si trova

$$\delta\geq ir+\frac{i(i-1)}{2}(r-1)-\frac{i(i+3)}{2},$$

cioè

$$\delta\geq(r-2)\frac{i(i+1)}{2}.$$

Concludiamo che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva piana* C, *di ordine* m, *sia la projezione di una curva speciale normale di* S_r *è che per la curva aggiunta di ordine* m — 4 *di* C *sieno* r — 2 *i vincoli fra le condizioni espresse dai passaggi per i punti multipli di* C ($p\geq m-r+1$). *E, se ciò accade, per ogni altra curva aggiunta di ordine* m — 3 — i (*quando esista*) *il numero dei detti vincoli è almeno* $(r-2)\dfrac{i(i+1)}{2}$ (*).

Invece per una curva aggiunta di ordine $\geq m-3$ le condizioni espresse dai passaggi per i punti multipli sono sempre indipendenti (se la curva fondamentale è irriduttibile).

15. La curva aggiunta di ordine minimo di C sia di ordine $m-3-k$ e sia Γ la curva normale speciale di S_r che ha per projezione C. Pongasi che per Γ passi una ∞^h di varietà (ad $r-1$ dimensioni) di ordine $i\leq k$. Si trova per h un limite inferiore nel modo seguente.

Tutte le varietà dello stesso ordine i segnano sopra Γ una serie $\binom{i+r}{r}-h-2$ volte infinita, ciascun gruppo essendo composto di mi punti. Ad essa appartengono i gruppi formati di i gruppi qualunque di g_m^r (che è la serie data sopra Γ dagli S_{r-1}): ed anzi è chiaro che $\binom{i+r}{r}-h-1$ indipendenti di quei gruppi la determinano. Ne risulta che la detta serie è contenuta nella $g_{mi}^{r_i}$ e però si ha

$$r_i\geq\binom{i+r}{r}-h-2\ .$$

Ma $r_i<p-1$, essendo $g_{mi}^{r_i}$ serie speciale: e quindi, introducendo anche la limitazione di p data dal n. 10, si ha

$$h\geq\binom{i+r}{r}-(\varkappa+1)\left(m-r-\varkappa\frac{r-1}{2}\right)-1\ ,$$

ove $\varkappa$ è il massimo intero inferiore ad $\dfrac{m-r}{r-1}$ (e, per il n. 13, $k\leq\varkappa$).

Ad es., se $k=\varkappa$, $r=3$, si ottiene, per $i=\varkappa$,

$$h\geq\frac{1}{6}(\varkappa+1)\Big[(\varkappa+2)(\varkappa+3r)-m\Big].$$

Arenzano (Riviera Ligure) — Ottobre 1890.

(*) Anche questo teorema, se $r=3$, è noto (e dimostrato per la sola prima parte in modo analogo al precedente). Cfr. NOETHER, *Raumcurven*, (teor. I, II, del § 3) e KÜPPER, l. c., pag. 295.

Altra addizione alla Nota « Sui determinanti di determinanti »

per ENRICO D'OVIDIO

Il sig. Em. Barbier, in una comunicazione all'Académie des Sciences (*«Sur une formule de Lagrange déjà généralisée par Cauchy. Nouvelle généralisation. Note de* M. Em. Barbier — *Comptes-rendus*, 25 Giugno 1883, t. 96, p. 1845 ») recò tre esempi di un teorema, che disse aver divinato più che inventato, e che non enunciò. Or quel teorema non è altro se non il primo che trovasi dimostrato nella mia Nota « *Sui determinanti di determinanti* » (*Atti dell'Acc. di Torino*, v. XI, 11 Giugno 1876), e che già si trovava nella Memoria dello Spottiswoode: « *Elementary theorems relating to determinants* » (*Giorn. di Crelle-Borchardt*, v. 51, 1856), come notai nella « *Addizione* » alla Nota citata (ibid., 25 Marzo 1877). Veramente, dal modo come il Barbier scrive certi esponenti, parrebbe ch'egli non possedesse il teorema se non in casi particolari.

Il teorema era pure già stato dato come nuovo dal sig. Franke (*Giorn. di Borchardt*, 1863, t. LXI, p. 350: « *Ueber Determinanten aus Unterdeterminanten* »), e può enunciarsi così:

Dato un determinante $A = \begin{vmatrix} a_{11} & . & a_{1\lambda} \\ . & . & . \\ a_{\lambda 1} & . & a_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}$ *d'ordine* λ, *e preso l'intero* μ *fra* 0 *e* λ, *il determinante* A_μ *d'ordine* $\binom{\lambda}{\mu}$, *che ha per elementi i minori di ordine* $\lambda-\mu$ *in* A, *è eguale alla potenza* $\binom{\lambda-1}{\mu}^{ma}$ *di* A.

Dal che segue: *il determinante* $A_{\lambda-\mu}$ *d'ordine* $\binom{\lambda}{\mu}$, *che ha per elementi i minori d'ordine* μ *in* A, *è la potenza* $\binom{\lambda-1}{\mu-1}^{ma}$ *di* A.

A questo teorema si può aggiungere un altro, del quale il Barbier indica solo un caso particolare della prima parte:

Il determinante, che ha per elementi i prodotti di due elementi omologhi di A_μ *e* $A_{\lambda-\mu}$, *è multiplo di* A, *quando le linee di* A_μ *e* $A_{\lambda-\mu}$ *sono ordinate in modo che gli elementi di almeno una linea di* A_μ *abbiano per omologhi in* $A_{\lambda-\mu}$ *i loro minori complementari in* A; *invece è nullo quando gli elementi di ciascuna linea di* A_μ *hanno per omologhi in* $A_{\lambda-\mu}$ *i minori complementari di una linea parallela.*

Infatti, se le linee che si considerano sono le orizzontali, basta aggiungere nel nuovo determinante ad una verticale le altre, per ridurre quella verticale ad avere almeno un elemento eguale a A e gli altri nulli nella 1ª ipotesi, tutti gli elementi nulli nella 2ª ipotesi.

In una successiva comunicazione (« *Généralisation du théorème de Jacobi sur les déterminants partiels du système adjoint* », ibid., 9 Luglio 1883, t. 97, p. 82) il sig. Barbier recò un esempio della relazione

$$A_\mu A_{\lambda-\mu} = A^{\binom{\lambda}{\mu}},$$

la quale evidentemente è contenuta nel primo teorema (ed anzi è stata adoperata per dimostrarlo). Essa fu data da Cauchy (*Journ. de l'Ecole politechnique*, cah. XVII, p. 102).

Nella stessa comunicazione il Barbier diede due esempî (il 2º con qualche inesattezza) di un altro teorema, che nemmeno enunciò, e che è il seguente:

Ordinati gli elementi di A_μ *e* $A_{\lambda-\mu}$ *in modo che due elementi omologhi siano sempre due minori complementari in* A, *un minore qualsiasi di* A_μ *è eguale a quel minore di* $A_{\lambda-\mu}$ *che è complementare del proprio omologo, moltiplicato per* A *elevato all'esponente* $\nu - \binom{\lambda-1}{\mu-1}$, *ove* ν *indica l'ordine del detto minore di* A_μ.

Questo teorema è del Franke (l. c.). Esso si dimostra imitando il procedimento che suol tenersi nel caso particolare $\mu = 1$, che è notissimo e dovuto a Jacobi; e cioè: il minore scelto in A_μ si rende di ordine $\binom{\lambda}{\mu}$ introducendovi nuove orizzontali e verticali convenienti, indi si moltiplica per $A_{\lambda-\mu}$, e si vede che il prodotto si riduce a A^ν moltiplicato per quel minore di $A_{\lambda-\mu}$ di cui parla l'enunciato; onde il teorema.

Il signor Picquet pubblicò nei *Comptes-rendus* (1878, t. LXXXVI, p. 310) una Nota « *Sur les déterminants dont les éléments sont tous les mineurs possibles d'ordre donné d'un déterminant donné* », e poco dopo nel *Journal de l'École Polytechnique* (cahier 45, t. XXVIII, 1878) una Memoria dal titolo: « *Analyse combinatoire des déterminants* » posteriore anch'essa alle citate mie Note, delle quali tuttavia l'autore mostra di non aver avuta cognizione. In questi lavori, che certamente il sig. Barbier ignorava, sono esposti i varî teoremi che ho dianzi enunciati (tranne il 2°), e ne sono indicati gli scopritori: Cauchy, Sylvester, Franke. Ivi è anche ritrovato il teorema che costituisce il § III della mia prima Nota, e che non pare sia stato da altri prima avvertito.

Accanto ad esso merita esser notato il seguente, che credo del Picquet:

In un determinante B *d'ordine* n *si assegnino* λ *orizzontali ed altrettante verticali, e sia* $B_{\lambda\lambda}$ *il determinante degli elementi comuni alle rimanenti orizzontali e verticali di* B. *Posto* $\mu > \lambda$, *si assumano come elementi di un nuovo determinante di ordine* $\binom{n}{\mu} - \binom{n-\lambda}{\mu-\lambda}$ *i minori ottenuti da* B *prendendo gli elementi comuni a* μ *verticali di* B *fra le quali nessuna o al più* $\mu - 1$ *siano scelte fra quelle* λ *assegnate. Il nuovo determinante sarà eguale a*

$$B_{\lambda\lambda}^{\binom{n-\lambda-1}{\mu-\lambda}} \, B^{\binom{n-1}{\mu-1} - \binom{n-\lambda}{\mu-\lambda}} \, .$$

Il sig. Picquet dà poi altre proprietà, relative ai determinanti formati con elementi di due dati determinanti. Ma non fa cenno dei teoremi contenuti nella 2ª mia Nota.

Ho stimato non inutile analizzare le due comunicazioni del sig. Barbier e quelle del sig. Picquet, sia per rischiararle e rimetter le cose a posto, sia per l'occasione che mi offrivano di completare le due citate mie Note, nelle quali si trovano anche altri teoremi generali sui minori dei determinanti del tipo di A_μ.

Torino, 30 novembre 1890.

Le specie europee del genere Chrysotoxum Meig.

Studio del Dott. E. GIGLIO-TOS;
presentato dal Socio Camerano

Sebbene il Loew nel 1841, e più tardi poi nel 1856 abbia pubblicato due lavori assai pregevoli intorno al genere *Crysotoxum* Meig., la determinazione delle specie di questo genere presentasi ancora molto intricata e difficile specialmente per gli errori di sinonimia in cui incorre il Loew stesso e per la insufficienza delle diagnosi delle specie.

Nella collezione di Ditteri del Bellardi ho potuto avere più di duecentocinquanta individui di tal genere comprendente quasi tutte le specie europee finora descritte, eccettuato *C. parmense* Rond. e *C. sibiricum* Loew della Siberia che io credo di non comprendere nelle specie europee, contrariamente al parere del Loew. Con tal copioso materiale ho creduto utile di fare una nuova revisione del genere, aggiungendo alle già note, cinque altre nuove specie.

La maggior parte degli esemplari nominati sono Piemontesi, altri di Santa Radegunda in Stiria; ma è notevole ciò, che tutte le specie dell'Europa finora conosciute sono nel Piemonte rappresentate.

Gen. **CHRYSOTOXUM** Meig.

in Illiger's Magazin II, 259 (1803).

Musca Linn. (2) p. 979-253; (7) p. 404-III.
Conops Scop. (1) p. 351.
Syrphus Fabr. (3) p. 762-172; (5) p. 421-175; (8) p. 278-232.
Musca Degeer (4) p. 99-3.
Mulio Fabr. (11) p. 183-41 - Fallén (12) p. 4 (non *Milesia* Fabr.).

Chrysotoxum Meig. (13) p. 166-XCVI - Macq. (14) p. 196; (15) p. 489-6; Curtis (16) 653; Loew (17,23); Schummel (18); Zetterstedt (19) p. 633-64; Rond. (20) p. 194; (24) p. 197-32; Walker (21) p. 263-XV; Schiner (25) p. 252-166.

Antennis capite transverso circiter aeque longis, articulis tribus in tubercolo impositis: tertio oblungo, compresso, arista dorsuali nuda, prope basim inserta. Oculis plerumque hirtis, saltem in mare. Facie sub-recta supra epistomium tuberculata. Proboscide carnosa, palpis brevissimis. Scutello inerme, thorace piloso vel pubescente saltem in mare. Abdomine lato, vel ovato, vel sub lineare, flavo fasciato. Alis vena quarta longitudinali extrinsecus manifeste sinuosa; transversa exteriore contra apicem primae longitudinalis sita, quinta ad apicem, quartae conjuncta contra apicem tertiae: spuria ordinaria integra et perfecta, non interrupta. Pedibus non incrassatis.

Il *capo* è alquanto più largo del torace, emisferico. La *faccia* gialla più o meno rossiccia è tubercolata di sopra dell'epistomio con tre striscie nere o nericcie di cui due vanno dal margine antero-inferiore degli occhi all'apertura boccale ed una dalla base delle antenne all'epistomio. La *proboscide* è in generale nera, carnosa e dilatata all'estremità, i *palpi* brevissimi, triarticolati ed inseriti a metà della proboscide, esternamente quasi sempre invisibili. L'*apertura boccale* è ovale, assai larga ed il labbro superiore intaccato. Le *antenne* inserite sopra un tubercolo frontale sono triarticolate: il terzo articolo a forma allungata in generale a punta più o meno acuta porta inserita quasi presso alla sua base dal lato esterno uno stilo nudo, filiforme. Gli *occhi* sono grandi, reniformi, irti quasi sempre di peli almeno mei maschi. Gli *ocelli* in numero di tre, di color rossiccio splendente sono disposti sul vertice tra i due occhi in forma di triangolo isoscele framezzo a peli assai lunghi nei maschi. Il *torace* quadrangolare, armato, ha due striscie bianchiccie parallele mediane più o meno lunghe e due gialle ai margini interrotte: sui fianchi ha pure altre due macchie gialle triangolari al di sotto dell'inserzione dell'ali. Lo *scudetto* è inerme, semicircolare. L'*addome* composto di 5 anelli visibili è peloso, glabro o quasi nudo e largo, ovale o quasi lineare, fasciato di giallo più o meno rossiccio in vario modo: così pure il ventre. Le *ali* sono o limpide o fosche, col margine anteriore fosco o gialliccio totalmente od in parte, con o senza macchia nereggiante alla regione dello stimma. La 4ª vena longitudinale è più o meno ricurva e si riunisce alla corsale presso all'apice dell'ala; tra questa e la 5ª vena longitudinale esiste una venula spuria, obliqua, continua. I *bilancieri* sono sempre gialli più o meno ferruginosi, non molto grandi. Le *squame* o *calittere*, piccole, sono sempre di color giallo. I *piedi* di color giallo e nero, sebbene assai robusti; non sono tuttavia ingrossati in nessuna delle parti, e le tibie sono alquanto curve.

Caratteri sessuali.

Evidentemente il carattere primario sessuale si è la presenza nel maschio di un apparato copulatore posto all'apice dell'addome nella parte inferiore e capace di essere in parte ritirato nell'interno in modo da non lasciar visibile che la sua estremità. Tale apparato è composto di una parte arrotondata breve per cui sta unito all'addome e di un'altra esterna visibile, fatta di due articoli più o meno lunghi, arcuati, disposti a tenaglia, che servono al maschio per tenersi con efficaccia congiunto alla femmina durante l'accoppiamento. La grandezza e la colorazione sua è variabile molto: in qualche specie è molto grande (*C. arcuatum* Panz. *C. lubricum* mihi); in altre, sebbene sempre visibile, è mediocre: in talune è nero, (*C. elegans* Loew, *vernale* Loew, *festivum* Lin.) in altre giallo, munito o no di qualche breve pelo. Come caratteri sessuali secondari si possono annoverare i seguenti. Le *antenne* sono sempre nella femmina alquanto più lunghe e sottili che nei maschi e talora è alquanto diverso anche il rapporto degli articoli. Gli *occhi* sono sempre nella femmina meno pelosi che nei maschi e nella maggior parte della specie affatto nudi. Mentre nei maschi essi si toccano per quasi tutta l'estensione della linea mediana frontale, nelle femmine sono sempre più o meno distanti, derivandone da ciò che la fronte in quelli è piccolissima e di forma triangolare, bianchiccia o gialliccia nella parte superiore e coperta di peli lunghi neri o fulvi, mentre nelle altre è assai spaziosa a forma trapezoide nera, quasi sempre nuda, con due piccole macchie gialle o bianchiccie ben visibili. Il *torace* e lo *scudetto* di forma nei due sessi uguali differiscono solo nella copertura pelosa. Se questa è assai lunga e fitta nei maschi è meno lunga e fitta nelle femmine; se breve nei primi, manca quasi sempre affatto nelle seconde. L'*addome* è nelle femmine peloso (*C. fasciolatum* Deg., *hortense* Meig) o quasi glabro o affatto nudo: in generale è in esse più oblungo, talvolta però alquanto più largo (*C. vernale* Loew).

SINONIMIA. — Il gen. *Milesia* di Fabricio, da quasi tutti i ditterologi finora riferito come sinonimo di questo genere, non è tale giacchè avendolo quell'autore caratterizzato colle parole « *Antennae breves, triarticulatae: articulo ultimo ovato, compresso, setigero* » appare evidente che comprende in esso la specie a terzo articolo antennale non oblungo, ma ovale, o elittico.

Caratteri specifici.

Il carattere specifico della uguaglianza o ineguaglianza nella larghezza delle fascie gialle addominali, mi è parso quello più vistoso che divide nettamente in due gruppi molto ben distinti tutte le specie di questo genere. Così ho creduto pure di prendere per base di una seconda divisione la presenza di fascie che si estendono più o meno verso i margini laterali dell'addome ed anche questa ci permette di distinguere bene in due parti un buon numero di specie. L'avere poi il margine anteriore delle ali nereggiante fin dalla base e quasi fino all'apice è un carattere assai costante e non trova un'eccezione che in una varietà del *C. italicum* Rond.; così dicasi di quello del margine anteriore gialliccio, della presenza o mancanza di macchia nericcia allo stimma, delle vene delle ali a contorni limpidi o foschi, ecc. Corrispondenti a questi caratteri si nota una concomitanza di altri assai vistosi: tali sono la forma del corpo, la lunghezza relativa degli articoli delle antenne, la copertura pelosa del corpo ed anche il disegno stesso dell'addome. Ho voluto poi nelle descrizioni introdurre come elemento caratteristico di una certa importanza oltre alla lunghezza del corpo già sempre usata, anche la larghezza dell'addome presa nel punto dove essa si presenta maggiore cioè al margine posteriore del secondo segmento. Seguendo quindi l'esempio datoci da Loew ho riportato pure per ogni specie i rapporti numerici degli articoli delle antenne corrispondenti sempre ad altri caratteri pure importanti. E finalmente il disegno dell'addome sebbene molto variabile ha tuttavia per così dire un aspetto in complesso così caratteristico per molte specie, da non doversi trascurare e da essere anzi in talune così distintivo da divenire di molta importanza. Perciò ho aggiunto a questo lavoro una tavola con alcuni disegni rappresentanti gli addomi ed i ventri di molte specie, particolarmente di quelle dove le fascie gialle e le proporzioni di larghezza e lunghezza hanno un'importanza notevole: disegni che ho creduto quasi necessari giacchè non ne esistono finora altri, per quanto io sappia, se si eccettuano quelli pessimi di Degeer, e di Meigen, quello di Panzer del *C. arcuatum* e forse qualcun altro.

Chiave analitica.

1	Fascie mediane dei segmenti addominali tutte eguali o quasi fra di loro	2
	Fascie mediane dei segmenti addominali disuguali . . *C. bicinctum* Linn. (1758)	
2	Fascie medie che si dilatano alquanto presso i margini dell'addome o che li raggiungono	3
	Fascie medie non raggiungenti il margine dell'addome	15
3	Margine anteriore delle ali nereggiante	4
	Margine anteriore delle ali giallo o gialliccio	8
4	Addome nei due sessi coperto di peli lunghi e fitti .	5
	Addome nei due sessi glabro o nudo	6
5	Margine anteriore delle ali nereggiante fino all'apice . *C. fasciolatum* Deg. (1776)	
	Margine anteriore delle ali non nereggiante fino alla estremità . . . . . *C. hortense* Meig. (1822)	
6	Addome largo, quasi circolare, depresso *C. Lessonae* mihi	
	Addome stretto, quasi ovale, alquanto carenato . . .	7
7	Margini laterali dell'addome gialli e neri alternatamente *C. italicum* Rond. (1845)	
	Addome tutto circondato di una fascia gialla . . . . *C. cisalpinum* Rond. (1845)	
8	Scudetto bruno o con una una macchia nera, pellucida, poco distinta.	9
	Scudetto giallo o con una macchia nera opaca distinta	12
9	Striscie grigie mediane del torace che raggiungono o quasi il margine posteriore.	10
	Striscie grigie mediane del torace che ne oltrepassano appena la metà.	11

10 Terzo articolo delle antenne quasi uguale al primo. . *C. parmense* Rond. (1845)
Terzo articolo delle antenne più lungo del primo . . *C. arcuatum* Panzer (1796)

11 Organi copulatori maschili molto grandi *C. lubricum* mihi
Organi copulatori maschili poco grandi *C. Sackeni* mihi

12 Organi copulatori maschili neri *C. elegans* Loew. (1841)
Organi copulatori maschili gialli 13

13 Fascie addominali non congiunte fra di loro lungo i margini . . . . *C. Bigoti* mihi
Fascie addominali congiunte tutte o in parte lungo i margini. 14

14 Fascie marginali del 3° e 4° segmento addominali poco larghe . . . . . *C. chrysopolita* Rond. (1845)
Fascie marginali del 3° e 4° segmento addominali molto larghe. . . . . *C. octomaculatum* Curt. (1838)

15 Ali a macchia stigmaticale nereggiante distinta . . . 16
Ali a margine anteriore più o meno giallo-fosco, ma senza macchia stimmaticale nera distinta . . . 17

16 Femori a base nera o nereggiante *C. vernale* Loew. (1841)
Femori totalmente gialli *C. festivum* Linn. (1758)

17 Contorni delle vene delle ali offuscati *C. fuscum* mihi
Contorni delle vene delle ali limpidi . . . . *C. lineare* Zetters. (1819)

C. fasciolatum DEGEER (4) p. 124; 14 tav. 7, fig. 14,15; LOEW (23) pag. 609-3; SCHINER (25) pag. 253-3.

Mulio fasciolatus FALLÈN (12) SYRPH. 5-1.

C. costale MEG. in MEIGEN (13) pag. 172-7.

C. marginatum MEIG. (13) 171-5; SCHUMMEL (18) ZETTERSTEDT (19) pag. 633, 1; WALKER (21) 266-6.

MAS - *Corporis long. millim. 17-18 - Abdominis latit. millim. 6-7. — Nigrum, pilosulum. Antennis nigris, articulo tertio duobus primis conjunctim longiore, arista fusca. Fronte nigra,* *lutescente, pilis longis nigris instructa. Oculis hirtis. Thorace nigro, fusco piloso, maculis lateralibus flavis. Scutello nigricante, pilis longis nigris instructo, margine antico lineola flava transversa. Abdomine nigro flavo pubescente, fasciis quatuor interruptis, duabus marginis postici segmentorum tertio et quarto integris flavis, apice flavo. Ventre nigro, pilosulo, incisuris, maculisque quatuor parvis in tertio et quarto segmento flavis. Pedibus flavo-ferrugineis, femoribus nigricantibus. Alis margine antico nigricante* (Tav. Fig. 1 e 2).

Foemina differt: oculis breviter hirtis, fonte nigra, maculis duabus lutescentibus ad marginem oculorum contiguis.

Descrizione. — *Capo* largo poco più del torace. *Proboscide* cornea, dilatata e munita di qualche breve pelo all'estremità, nericcia. *Faccia* di un color giallo più o meno ocraceo; protuberanza epistomica poco sviluppata. Tre macchie nericcie la attraversano: due partendo dai margini infero-laterali degli occhi vanno a terminare sul margine boccale, l'altra più grande e più spiccata parte dalla insenatura anteriore dell'apertura boccale e si estende fino alla protuberanza su cui stanno inserite le antenne, senza però giungere al loro punto di inserzione. *Antenne* nere; proporzione degli articoli: 1 : 1 : 3 a un di presso: stilo lungo quanto il terzo articolo, bruniccio. *Protuberanza antennale* superiormente nera, munita di lunghi peli neri, e di brevi peli gialli alla sua base presso i margini interni degli occhi. *Occhi* neri, irti di peli assai lunghi e neri; margine posteriore biancheggiante. *Torace* nero coperto sopra e sotto di lunghi peli nericci o fulvi: due striscie gialle sui suoi margini laterali, interrotte poi da un tratto nero corrispondente a più di tutto lo spazio di inserzione delle ali. Due piccole linee mediane parallele, avvicinate, grigie, cominciando dal margine anteriore vanno un po' oltre la metà del torace. Una macchia gialla sta a ciascun suo lato immediatamente avanti alla base delle ali. *Scudetto* bruno posteriormente con lunghi peli neri; margine anteriore giallo con lunghi peli gialli. *Addome* nero di forma ovale, largo, molto curvo superiormente, incavato al di sotto, coperto di peli fitti, piuttosto brevi, uniformemente gialli, fuorchè sui fianchi dove spiccano due ciuffi di peli più lunghi, neri. Fascie di color giallo citrino o giallo ocraceo in numero di sei. Quattro decorrono sul mezzo dei segmenti addominali, interrotte lungo la loro linea mediana, si dilatano fortemente verso i margini laterali, ma in generale non li raggiungono: quelle del terzo e quarto segmento si uniscono o quasi colle fascie marginali le quali sono intiere, e si dilatano alquanto a triangolo verso la parte mediana: quella del quinto è separata dall'apice dell'addome giallo da una sottilissima striscia nera in forma di Y. (Fig. 1). *Ventre* nero, coperto di peli neri assai lunghi, colle linee di unione dei segmenti gialli e due macchiette gialle ovali più o meno grandi sul terzo e quarto segmento e talora anche sul quinto (Fig. 2). *Ali* limpide nel loro margine posteriore, fulve nel loro margine anteriore dalla base fino alla metà: nericcie nell'altra metà. Tale striscia fosca non oltrepassa in larghezza la 4ª nervatura longitudinale, la quale è poco curva. *Bilancieri* e *calittere* gialle o giallo-ferruginee. *Piedi* gialli più o meno ferruginei: *anche* nere, *femori* neri o nereggianti dalla loro base fino ad oltre la loro metà, coperti di peli fulvi, assai fitti e lunghi.

Habitat: Svezia, Norvegia, Gran Bretagna, Germania, Austria e Italia. Ne esaminai molti del Piemonte, provenienti tutti dalle regioni alpine fra cui dalla valle Formazza nell' Ossola e dai dintorni di Pesio nelle valli di Cuneo. È comunissimo pure nei dintorni di santa Radegunda nella Stiria. Trovasi nei mesi di luglio, agosto e forse anche settembre.

Sinonimia — Meigen descrisse questa specie col nome di *C. marginatum*, ma d' accordo con Loew io credo che si debba conservare il nome datole dal De Geer, giacchè la descrizione da costui fattane è assai chiara e determinata. La specie descritta da Meigen col nome di *C. fasciolatum* De Geer, differisce da questa per le ali immaculate, e lo scudetto nero contornato di giallo, mentre il De Geer dice chiaramente che « le bord exterieur des ailes a une forte teinte de brun jaunâtre » e che « l'écusson du dos, qui est brun ou roussâtre, est marqué d'un ligne transverse jaune ». Il *Mulio fasciolatus* Fallén corrisponde a questa specie, di cui però non è sinonimo il *Syrphus arcuatus* Panzer come quest' autore riporta. Il *C. costale* Megerle in Meigen differente da questa specie per la statura di poco minore è equivalente al *C. fasciolatum* Deg. trovandomi in ciò d'accordo con Loew e con Schiner. Non sono però d'accordo con questi nel riferire a questa specie il *Sirphus vespiformis* in «*Entomologia systematica*» e *Milesia vespiformis* in « *Systema Anthiatorum* » di Fabricio e di ciò avrò occasione di parlare più avanti per la sinonimia del *C. arcuatum* Panzer.

C. hortense Meigen (13) pag. 173-8.

C. fasciolatum Meig. (13) p. 170-4; Zetters. (19) p. 631-2.

C. arcuatum Walker? (21) Syrph. pag. 265-3; Loew (23) pag. 609-4; Schiner (25) p. 253-4.

C. scoticum, *pubescens* Curtis (16) p. 653-7-8.

Mas - *Corporis longit. millim. 11 - Abdominis latit. 4-5. Nigrum, pilosum. Antennis articulo tertio duobus primis longiore. Oculis hirsutis. Thorace luteo piloso. Scutello nigricante pellucido, pilis longis fusco-flavescentibus instructo, margine antico lineola flava transversa. Abdomine sub-globoso, flavo piloso, fasciis flavis alterne interruptis, apice flavo Femoribus nigricantibus, tibiis flavis, tarsis ferrugineis. Alis margine antico dimidia costa flavo-fuscescente* (Tav. fig. 5)

Foemina differt: oculis breviter albide hirtis, fronte nigra, maculis duabus lutescentibus.

Varietas: **nigropilosa,** mihi: *oculis magis hirsutis, thorace scutelloque pilis longis, nigris, alis margine antico nigricante.*

Descrizione. — Sebbene il carattere della statura debba considerarsi in generale di poca importanza, tuttavia credo che nei casi di maggior differenza non sia da trascurarsi affatto. La specie *C. hortense* Meig. è assai simile al *C. fasciolatum* Deg. ma ne differisce anzitutto per le minori dimensioni, e la differenza in questa circostanza è tale che credo a buon diritto potere formare un carattere specifico non spregevole unito naturalmente a quelli altri di cui ora verrò parlando.

In complesso il corpo si presenta nero e più peloso che non nella specie antecedente. *Capo* alquanto più largo del torace. *Proboscide faccia* e *antenne* come nel *C. fasciolatum* Deg. *Occhi* nei maschi coperti di peli neri lunghi e fitti, che nelle femmine sono più brevi, meno fitti e bianchicci. *Torace* coperto di peli gialli assai lunghi che sono neri nella varietà *nigropilosa* mihi e delle macchie marginali la posteriore alquanto più lunga dell'altra si porta fino al livello dell' inserzione del margine anteriore delle ali: al disotto delle macchie gialle laterali trovasi un'altra piccola macchia dello stesso colore, ovale, mancante nel *C. fasciolatum* Deg. *Scudetto* bruno scuro con una linea sottile gialla sul margine anteriore; in qualche esemplare tutto marginato strettamente di giallo: in ogni caso la macchia nera centrale sempre pellucida e non mai opaca e nettamente distinta.

Addome tondeggiante quasi globoso: le fascie mediane dei segmenti raggiungono i suoi margini laterali o quasi e si uniscono talora con quelle marginali. Nel secondo segmento la fascia marginale presentasi come una sottile striscia gialla ai lati che, gradatamente diminuendo, scompare affatto nella parte mediana Inoltre i ciuffi di peli che stanno sui fianchi alla base dell'addome sono gialli e frammischiati solo di qualche pelo bruno nella varietà *nigropilosa*. Le *ali* hanno il margine anteriore giallo più o meno fosco e alquanto nereggiante nella varietà *nigropilosa*, ma tale parte oscura generalmente non si estende in larghezza ed in lunghezza oltre la seconda nervatura longitudinale: in ciò differisce massimamente dal *C. fasciolatum* Deg. In tutto il resto è simile a quest'ultima specie.

Habitat: Germania, Scandinavia, Italia, Stiria, Gran Brettagna? Non è molto comune. Gli esemplari da me esaminati provengono da santa Radegunda in Stiria, e dalle regioni alpine del Piemonte, fra cui dalla Valle Formazza nell'Ossola, dai dintorni di Pesio e di Valdieri nelle valli di Cuneo. Trovasi nei mesi di luglio, agosto e settembre.

Sinonimia. — Il *C. fasciolatum* Deg. in Meigen, e di Zetterstedt ed il *C. scoticum* e *pubescens* di Curtis sono da riferirsi a questa specie e forse a quelle variazioni individuali in cui lo scudetto appare nero contornato di giallo, ed il margine anteriore delle ali di color giallo assai poco offuscato. Forse è sinomino pure di questa specie il *C. arcuatum* Walk.; tuttavia non è detto nella sua descrizione se il corpo sia coperto di peli, e questo è uno dei caratteri più salienti. Anche Loew e Schiner riferiscono questa specie al *C. arcuatum* Lin.: avrò occasione di ritornare sopra questa discussione nel descrivere il *C. festivum* Lin.; per ora mi limito ad affermare l'insussistenza di questa sinonimia giacchè Linneo attribuisce al suo *C. arcuatum* quattro fascie addominali e non sette nè otto, l' addome glabro inferiormente con quattro fascie gialle ed i piedi interamente ferruginei.

Non ho potuto poi vedere dove Linneo parli nella sua descrizione dell'addome peloso, come Loew afferma: riporto in prova quanto dice a tal proposito Linneo stesso: « *Abdomen ovatum, nigrum, arcubus quatuor luteis medio interruptis.....* »

C. Lessonae n. sp.

Mas. — *Corporis longit. millim. 15-17 Abdominis latit. millim. 5-7. Nigrum, pubescens. Antennis, arista pallida. Oculis tenuiter hirsutis. Thorace flavo pilosulo. Scutello flavo, macula magna media nigricante, pellucida, pilis longis nigris instructo. Abdomine lato, depresso, ovato, fasciis quatuor latis interruptis, duabus integris, apiceque flavis. Ventre, fasciis tribus flavis, latis, arcuatis. Alis margine antico nigricante. Pedibus luteo-ferrugineis, femoribus basi nigris.* (Tav. fig. 3, 4).

Foemina differt: statura minore (millim. 14) abdominis minore latitudine (mill. 4 1/2) fronte maculis duabus albidis, pilis brevibus tantum instructa. Oculis tomentosis. Thorace tenuiter pubescente. Femoribus, pedibusque luteo ferrugineis.

I Varietas: **affinis** mihi, *corporis longit. mill. 13-14; abdominis latit. millim. 4-5. Thorace flavo tomentoso. Scutello flavo, macula media nigricante, parva, pellucida. Abdomine fere glabro, ovato, fasciis mediis segmentorum latis, posticis subtillimis. Femoribus basi nigricantibus vel ferrugineis.*

II Varietas: **hyalipennis** mihi: *simillima varietati* affinis, *distincta tamen abdominis fascis latioribus. alis margine antico luteo non fusco.*

Descrizione. — Questa specie è assai affine al *C. italicum* Rond. sebbene nel suo *facies* generale si presenti molto nettamente distinta da esso. E concorrono specialmente a questa distinzione la maggior mole del corpo, e la larghezza dell'addome relativamente al torace. *Capo* alquanto più largo del torace; *faccia* gialla più o meno ocracea sparsa di qualche pelo fulvo, colle solite striscie nericcie di cui la mediana si tiene alquanto distante dalle radici delle antenne. *Fronte* coperta di peli lunghi neri, di color bianco argentino per molti peli brevissimi di tal colore che la coprono; protuberanza antennale nera. *Antenne* nere coll'ultimo articolo terminato a punta gradatamente e collo stilo lungo quanto questo, di color testaceo pallido. Proporzione nei loro articoli: 1 : 1 : 2 $^2/_3$. *Occhi* irti di peli assai fitti ma di colore cenerino; margine posteriore bianco argentino. *Torace* coperto di peli gialli assai lunghi sopra e sotto, colle macchie gialle marginali poco distanti fra di loro e di cui la posteriore è assai più lunga dell'anteriore. Linee grigie mediane assai visibili, larghe e che non vanno molto oltre la metà. Al disotto delle solite macchie laterali del torace due piccole macchie ovali assai distinte. *Scudetto* munito di peli lunghi neri o nereggianti ; nel mezzo una macchia ovale assai grande e pellucida. *Addome* largo, poco arcuato, ovale. leggermente carenato verso la sua parte posteriore, coperto di peli fitti, gialli e corti che vanno allungandosi gradatamente fin sui fianchi. Fascie addominali mediane larghe assai, che raggiungono i margini laterali e si uniscono insieme alle posteriori. Di queste, manca quella del secondo segmento; quella del terzo assai sottile si allarga alquanto verso il mezzo, terminando ad angolo molto ottuso, e quella del quarto ha la forma di triangolo col vertice vicino assai alla linea di interruzione della fascia anteriore. L'estremità anale ha una macchia a triangolo col vertice acutissimo, e riunita assai largamente alla fascia anteriore dello stesso segmento. (Tav. fig. 3). *Ventre* sparso di peli lunghi, rari, gialli; una striscia sottilissima gialla alla base, quindi si succedono alternatamente delle fascie assai larghe nere continue e gialle quasi sempre interrotte lungo la linea mediana (Tav. fig. 4). *Piedi* giallo-ferruginei ; *femori* anteriori e mediani a base nera ed i posteriori neri o nericci fin oltre la metà; tarsi ferruginosi. *Ali* a margine anteriore nericcio come nel *C. fasciolatum* Deg.

La varietà *affinis* (mihi), è la forma veramente di passaggio da questa specie al *C. italicum* Rond. In essa la mole va diminuendo, e l'addome prende una forma più oblunga. I peli degli occhi e del torace sono più rari e più corti, così quelli dello scudetto, che non sono più neri ma gialleggianti. Questo è quasi giallo del tutto e la macchia nera pellucida è assai piccola. Addome quasi glabro. Rarissimi i peli del ventre e limitati alla sua base, la quale è anche più largamente fasciata di giallo. Fascie intiere posteriori dell'addome meno grandi. Femori non neri, ma ferruginosi alla loro base. Nelle femmine poi gli occhi ed il torace sono appena tomentosi, lo scudetto è privo di peli lunghi, l'addome è glabro sopra e sotto e le macchie frontali sono gialleggianti.

La 2ª varietà *hyalipennis* (mihi), è somigliantissima a questa prima, ma tuttavia se ne distingue per le fascie addominali alquanto più larghe e sopratutto poi per le ali a margine giallo e non oscuro, nè fosco.

Sono convinto dell'esistenza reale di questa specie giacchè potei esaminarne parecchi individui e porli a confronto con un numero assai considerevole delle varietà *affinis*, *hyalipennis* e del *C. italicum* Rond.

Habitat: Piemonte. Gli esemplari esaminati provengono dai dintorni delle terme di Valdieri nelle valli di Cuneo: quelli della varietà *affinis* da regioni alpine o prealpine.

C. italicum Rond. (20) p. 196-1; (24) p. 201-2.
C. intermedium Loew. (23) p. 610-5; Schiner (25) 254-5.
C. monticola Schummel (18).
C. graecum Walker (22) p. 219.

Mas. — *Corporis longit. millim. 9-11. Abdominis latit. millim. 4-5. Antennis articulis duobus primis brevibus, subaequalibus, tertio longitudine dupla praecedentium conjunctim. Oculis pubescentibus. Thorace flavo pubescente. Scutello flavo, macula media nigricante pellucida. Abdomine ovato, arcuato fasciis quatuor latis interruptis, duabus integris subtillimis apiceque flavis. Alis margine antico nigricante. Pedibus luteo-ferrugineis.* (Tav. fig. 6).

Foemina differt: thorace et scutello brevissime pilosis: fronte nigra maculis duabus lateralibus cinereo-sublatuscentibus: oculis, abdomine atque ventre nudis.

Varietas: **gymnophthalma** mihi *statura minore, abdominis fasciis magis attenuatis, oculis nudis etiam in maribus.*

Descrizione. — Credo inutile riferire qui una descrizione più minuta di questa specie. Rondani la descrisse correttamente e ne rilevò in modo particolare i caratteri che la distinguono dal *C. intermedium* Meig. con cui taluni ditterologi l'avevano confusa (26, p. 141), riferendosi in tale descrizione alla diagnosi di questa ultima specie data dal Zetterstedt. In seguito Loew e Schiner nei lavori sopra citati ne diedero, specialmente il primo, una minuta ed accurata descrizione, alla quale credo dover rimandare colui che volesse maggiori particolari intorno a ciò.

La varietà *gymnophthalma* oltre al distinguersi per la statura più piccola, per le antenne più strette quasi lineari, per l'addome più stretto a fascie interrotte sottili e con mancanza quasi assoluta di fascie marginali si differenzia poi principalmente per la mancanza completa di peli sugli occhi non solo nelle femmine, ma anche nei maschi.

Habitat: Italia, Germania, Austria, Francia, Europa meridionale fino all'Asia Minore ed alla Siria. Da noi fu trovata da Rondani nell'Italia centrale e nella Meridionale. Tra gli esemplari da me esaminati taluni provengono da Valdieri, altri dai dintorni d'Ivrea nel Canavese, ed uno dall' isola di Cipro. La varietà *gymnophthalma* è del Piemonte.

Sinonimia. — La sinonimia di questa specie diede molto a discutere a parecchi ditterologi, onde penso propizia l'occasione di fare anch'io qualche parola intorno a tal soggetto.

Meigen fece una descrizione di una specie, da lui chiamata *C. intermedium*, unendovi una figura. Riferendoci nella determinazione ai suoi dati descrittivi e figurati, sebbene sieno alquanto incompleti, non possiamo far a meno di essere condotti a riconoscere nel suo *C. intermedium* una specie affinissima al *C. arcuatum* Linn. come vien da lui interpretato od al *C. festivum* Linn. secondo l'interpretazione del Loew. Tanto è vero ciò, che gli autori che vennero in seguito a lui, come Macquart, Curtis, Zetterstedt, Valker e Rondani seguendo la descrizione del Meigen vennero agli stessi risultati finali, e ciò si può molto bene scorgere, dalle descrizioni date da ognuno di essi. Ma nel 1856 il Loew nel suo citato lavoro, pag. 617, 618, dice che avendo potuto avere da Giac. Sturm un maschio determinato da Meigen come *C. intermedium* e portante ancora l'etichetta scritta da questo, potè togliere ogni dubbio che avesse sull'autenticità della specie, ed in base a ciò ne dà la descrizione minuta di cui già dissi, descrizione che concorda perfettamente con quella del *C. italicum* Rond. perciò moltissimo diversifica da quella di Meigen e dalla unita figura. Anzi il Loew stesso fa molto bene risaltare questa diversità. A questo punto due cose sole si possono ammettere: o che Meigen abbia dato, come suppone Loew, una cattiva descrizione ed una pessima figura *(herzlich schlecht figur)* del *C. intermedium*, oppure che uno sbaglio sia successo, per disattenzione o per altro motivo, quando il Meigen scrisse od infilzò nell'ago l'etichetta per l'esemplare inviato poi a Giac. Sturm. Quale delle due è più ammissibile? A parer mio la seconda, giacchè trattasi in tal caso di un errore che può commettere ognuno, mentre è per lo meno inverosimile che Meigen abbia potuto dare di una specie non solo una pessima figura, ma anche una cattiva descrizione. E credo che sia più nel vero la mia supposizione che non quella di Loew. Ciò ammesso la cosa si riduce ad una questione semplice di priorità. Il *C. intermedium* Loew non è il *C. intermedium* Meig.: ma il primo è identico al *C. italicum* Rondani: la descrizione data da questo nel 1845 antecede quella data da Loew nel 1856, dunque si deve conservare a questa specie il nome di *italicum* datole prima da Rondani.

Sono d'accordo del resto con Loew ad ammettere sinonimi di questa specie, il *C. monticola* Schum., ed il *C. graecum* Walk.

C. cisalpinum Rondani (20) p. 197-2; (24) p. 200-1; Loew (23) p. 611-6; Schiner (25) p. 254-5.

Mas. — *Corporis longit. millim. 9-11-Abdominis latit. milim. 3 $^1/_2$-4. Nigrum, pubescens. Antennis articulo tertio longitudine subaequali duobus primis coniunctim, arista flavescente. Thorace sub-nudo, scutello toto flavo vel interdum macula nigricante, parva, pellucida, pilis longis destituto. Abdomine nudo, fasciis flavis interruptis ad latera confluentibus in fasciam marginalem luteo-sub-fulvam quae totum abdomen circumdat. Alis margine antico flavo rufescente, macula apicali nigricante distincta. Pedibus flavis.* (tav. fig. 7).

Foemina differt: fronte flava, postice nigra et antice nigro marginata, oculis nudis.

Descrizione. — Questa specie è molto nettamente distinta da tutte le altre di questo genere. I caratteri suoi differenziali sono i seguenti. Rapporti degli articoli delle *antenne:* $1:1^1/_3:2^1/_3$. *Torace* quasi nudo e così lo *scudetto* il quale è talora completamente giallo, talora invece con una macchia bruna nel mezzo piccola e poco distinta. *Addome* quasi di larghezza costante dalla sua base fino al margine posteriore del quarto segmento; si restringe poi quasi d'un tratto, e, specialmente dopo il secondo anello, la parte dorsale è foggiata a carena. Fascie gialle del 2° segmento assai largamente interrotte che si dilatano moltissimo ai margini fino ad occupare quasi tutta la larghezza del segmento: le altre alquanto più strette, ma tutte disposte molto obliquamente. Al margine posteriore del 3° segmento vi è talora una linea sottilissima gialla dilatata alquanto nel mezzo: una simile, ma assai più visibile, sul 4° segmento, mentre sul 5° essa si restringe in una macchia triangolare. Tutte queste fascie sono riunite insieme da una fascia gialla assai larga che circonda tutto l'addome dalla base all'ano. *Ventre* nudo a fascie gialle alternate e disposte come nel *C. italicum* Rondani. *Apparato copulatore* maschile nericcio, e talora giallo. *Ali* col margine anteriore più o meno giallo-ferruginoso; verso il loro apice una macchia nereggiante. Vena 4ª longitudinale assai curva.

Habitat. Italia, Austria. Secondo il Loew si troverebbe anche in Corsica. Gli esemplari da me esaminati sono delle Alpi Marittime. Non pare una specie molto comune.

C. parmense Rond. (20), p. 198-3; (24) p. 201-3; Loew (23)-p. 613-13.

Vedi la descrizione data da Rondani e da Loew nelle opere succitate.

Habitat. Italia.

C. arcuatum Panzer (9) Erst. Jahrg. 2-10.
Musca arcuata Linn.? (2) p. 985-39; (7) p. 440-88 (non Deg.).
C. sylvarum Meig. (13) p. 171-6; Schummel (18); Loew (23) p. 608-1-Schiner (25)-p. 253-4.
C. scutellatum Macq. (14)-p. 201-4.
C. fasciolatum Rond. (20)-p. 199-5; (24)) p. 202-4.

Corporis longit. millim. 15-16-Abdominis latit. millim. 6-7. Nigrum, pilosulum. Antennis articulo tertio longiore duobus primis conjunctim. Oculis hirtis. Thorace fulvo piloso, tota longitudine griseo-bivittato. Scutello bruneo. Abdomine pubescente, depresso, lato, fasciis sex luteo-fuscis alterne interruptis, apice flavo. Ventre flavo, piloso, fasciis nigris arcuatis. Alis margine antico flavescente. Pedibus flavo-ferrugineis, femoribus basi nigris (tav. fig. 8, 9).

Varietas: **impudicum** Loew. (V. descriptionem in opere cit.).

Descrizione. — Sebbene per l'aspetto e per la mole si avvicini assai al *C. fasciolatum* Deg. se ne distingue tuttavia assai nettamente per i seguenti caratteri. Nella *faccia* la striscia nericcia mediana è assai più stretta, e la protuberanza epistomica alquanto più spiccata. Le *antenne* hanno nei loro articoli le seguenti proporzioni: $1 : 1^1/_3 : 2$. Nelle femmine le macchie frontali sono d'un grigio cenerino. *Occhi* meno pelosi. *Torace* coperto di peli fulvi e gialli, non molto lunghi; le due linee grigie longitudinali lo percorrono per tutta la sua lunghezza e le macchie gialle marginali e laterali come nelle altre specie. *Scudetto* interamente bruno con peli lunghi fulvi o gialli e talora con un margine sottile giallo. *Addome* depresso, largo, coperto di peli brevi neri sulle fascie nere, gialli sulle gialle, e quelli che stanno sui fianchi dell' addome alla sua base lunghi e gialli. Fascie gialle interrotte molto dilatate ai margini e congiunte con quelle marginali assai sottili: prima fascia assai più largamente interrotta che non le altre (tav. fig. 8). Sul *ventre*, alla base di ogni anello, delle fasce gialle interrotte nel mezzo che si continuano sul lembo posteriore dell' anello antecedente (tav. fig. 9). *Ali* a margine anteriore non nereggiante, ma giallo e talora giallo alquanto fosco compreso nei limiti della 2ª vena longitudinale. *Piedi* gialli e femori neri non oltre alla loro metà.

HABITAT: Austria, Germania, Inghilterra, Francia, Italia. Gli esemplari da me esaminati sono del Piemonte e provengono dalle selve lungo il torrente Sangone presso Torino, dai dintorni di Cuneo e di Susa. È assai comune.

SINONIMIA. — Osservando la figura che il Panzer dà del *Syrphus arcuatus* come sinonimo della *Musca arcuata* Linn. e del *Syrphus arcuatus* Fabr. si è condotti indubbiamente a riconoscere in essa la specie ora descritta, sia per le proporzioni del corpo, sia ancora per le fascie dell'addome, e non il *C. fasciolatum* Deg. come il Fallén crede. Il *C. fasciolatum* di Rondani, come ho potuto convincermi da due esemplari tipi di quest'autore è sinonimo del *C. sylvarum* Meig. come da Loew viene concluso. Non riconosco caratteri abbastanza importanti nel *C. scutellatum* Macq. per distinguerlo da questa specie. Quanto alla sinonimia della *Musca arcuata* Lin. la questione è in tal caso assai complicata. La descrizione datane da Linneo è così imperfetta, e la sinonimia sua è così scorretta che ho creduto bene di annullare affatto il nome Linneano e sostituirlo con quello del Panzer. Ho già detto (V. sinonim. *C. hortense*) perchè non si possa accettare la identità stabilita da Loew tra *C. hortense* Meig. e *Musca arcuata* Linn.; aggiungerò qui che questa potrebbe meglio riferirsi al *C. arcuatum* Panz. per il ventre giallo e per le quattro fascie gialle che vi si trovano, come Linneo accenna, ma anche da questo differenzia per avere i piedi totalmente ferruginosi (*pedes toti ferruginei*). Quanto alla sinonimia stabilita da Linneo colla *Musca arcuata* Deg. essa è affatto erronea trattandosi di una specie molto diversa. Taluni (per es. Schiner (25) - p. 253-4) riferiscono a questa specie il *Syrphus vespiformis* Fabr.: io non sono di quest'avviso giacchè la descrizione che egli ne dà è affatto insufficiente e può applicarsi tanto bene a questa come ad altre specie. Inoltre le sinonimie che Fabricio stesso riferisce a questa specie della *Musca vespiformis* di Linneo e di Degeer che non appartiene neppure al gen. *Chrysotoxum* Meig., ci provano ancora di più l'erroneità di Schiner. Aggiungasi ancora che nel « *Systema Antliatorum* » viene descritta sotto il nome generico *Milesia* che non è sinonimo del gen. *Chrysotoxum* come già ho notato. Lo stesso deve dirsi ancora delle diagnosi date da Fabricio ne' suoi vari lavori del *Syrphus arcuatus* che egli fa sinonimo della *Musca arcuata* di Linneo: esse sono talmente incomplete che per verità si potrebbero applicare a quasi tutte le specie del genere di cui trattiamo.

C. lubricum n. sp.

Mas. - *Corporis longit. mill. 13. Abdominis latit. mill. 4. - Nigrum, pilosulum. Antennis articulo tertio longitudine subaequali duobus primis conjunctim, arista flavescente. Oculis hirtis. Thorace flavo-piloso, scutello nigricante, flavo subtillime limbato, pilis longis flavis instructo. Abdomine oblungo, flavo piloso, fasciis quatuor interruptis latis, duabus integris, apiceque flavis. Ventre flavo pilis longis flavis munito, fasciis nigris. Genitalibus flavis, maximis. Alis margine antico flavescente. Pedibus ferrugineis, femoribus medietate basali nigris. (Tav. fig.* 10, 11*).*

Descrizione — Corpo oblungo, snello. La *faccia* ha la striscia nera mediana assai sottile, acutissima e distante dalla base delle antenne. *Occhi* coperti di brevi peli. Articoli delle antenne: 1 : 1 $^1/_4$: 2 $^1/_4$. *Torace* irto di peli assai lunghi gialli, e le due linee grigie mediane poco visibili oltrepassano appena la sua linea di mezzo. *Scudetto* bruno-nericcio pellucido con un orlo gialleggiante sottilissimo e con lunghi peli gialli. *Addome* coperto di peli poco lunghi, gialli con quattro fascie gialle interrotte, quasi diritte che si dilatano verso i margini laterali senza raggiungerli e si congiungono invece o quasi con quelle intiere marginali del 3°, 4° e 5° segmento. Queste sottilissime, quasi diritte, non dilatate nel mezzo; solo quella del 5° segmento alquanto più larga delle altre (tav. fig. 10.) *Ventre* giallo, sparso di peli assai lunghi, solcato da fascie nere diritte poste quasi al margine posteriore di ogni segmento e riunite l'una all'altra anteriormente lungo la linea mediana (tav. fig. 11.) *Apparato copulatore* maschile visibilissimo, giallo, molto grande, forcuto e assai sporgente all'esterno. *Bilancieri* giallo-ferruginosi: *ali* limpide col margine anteriore giallo-fosco sottilmente: quarta vena longitudinale appena sensibilmente curva. *Piedi* giallo-ferruginosi ed i femori neri nella loro metà basale.

HABITAT. Piemonte. Ne esaminai due individui maschi presi nei dintorni di Torino.

C. Sackeni n. sp.

MAS. — *Corporis longit. millim. 14 — Abdominis lat. millim. 5. Nigrum pubescens. Antennis articulis sub-aequalibus. Oculis hirtis. Thorace flavo-piloso, scutello ferrugineo macula nigra, pellucida, parum distincta, pilis longis flavis instructo. Abdomine ovato, arcuato, glabro, fasciis quatuor flavis interruptis et quatuor integris, ad latera connatis. Ventre flavo, fasciis nigris exilibus. Genitalibus flavis. Alis margine antico flavescente. Pedibus totis flavis (Tav. fig. 12 e 13).*

Foemina invisa.

DESCRIZIONE. — Proporzioni degli articoli delle antenne: 1 : $^5/_6$: 1 $^1/_4$. *Occhi* irti di peli assai fitti e lunghi. *Torace* macchiato come nelle antecedenti specie, coperto di peli lunghi, fitti, gialli. *Scudetto* ferruginoso con una macchia nera pellucida appena visibile. *Addome* quasi glabro, con due soli ciuffetti di peli giallo-bianchicci sui fianchi alla base. Tutti i segmenti hanno due fascie; una mediana anteriore interrotta, l'altra posteriore marginale intiera congiunte largamente fra di loro. Di queste ultime quella del 2° segmento è sottile, ma sempre ben visibile, quella del 3° più larga, quella del 4° larghissima, semicircolare appena disgiunta dall'anteriore da una sottile striscia nera ad arco, così quella del 5°. Tutte queste fascie, fuorchè quelle del 5° segmento, sono libere fra di loro fra un segmento e l'altro. (Tav. fig. 12). *Ventre*, quasi tutto giallo, sparso di peli lunghi alla sua base: tre fascie nere a mezzaluna sul mezzo del secondo, del terzo, e del quarto segmento, e la loro larghezza va diminuendo dalla prima alla terza. Una piccolissima macchia nera sul mezzo della base 4° segmento (fig. 13). Organi copulatori gialli con qualche pelo nericcio. Margine anteriore delle ali e piedi gialli.

HABITAT. Italia (Piemonte - Dintorni di Torino).

Sebbene non ne abbia potuto esaminare che un individuo solo, maschio, ho creduto farne una specie nuova, giacchè è assai bene distinto da tutte le altre. Differisce dal *C. elegans*

Loew e dal *C. Bigoti* mihi per la diversa colorazione dello scudetto e per le fascie dell'addome, dal *C. chrysopolita* Rond. e dal *C. octomaculatum* Curtis anche per il colore dello scudetto e perchè le fascie dell'addome non sono congiunte fra di loro ai margini laterali di esso. Aggiungasi ancora la differenza nei rapporti degli articoli antennali, nella forma generale dell'addome, nel disegno del ventre.

C. elegans Loew (17) 1841 pag. 140. (23) pag. 613-12. Zetterstedt (19) pag. 637-5 - Rondani (olim) (20)-p. 200 6: (24) pag. 203-8 - Schiner (25) - p. 256-10.
C. arcuatum Schrank (10)-III - 2407.

Mas. — *Corporis longit. millim. 13-14. Abdominis latit. millim.* 4 $^1/_2$-5 $^1/_2$. *Nigrum, pilosulum. Facie flava, oculis hirtis, antennis articulis subaequalibus. Thorace fulvo pubescente, scutello flavo macula nigra, opaca, distincta. Abdomine fulvo pilosulo, fasciis quatuor interruptis, duabus integris apiceque flavo-ferrugineis. Ventre fulvo piloso, maculis quatuor flavo-ferrugineis. Genitalibus nigris. Alis margine antico flavo-ferrugineo. Pedibus ferrugineis femoribus basi nigra. (Tav. fig. 14).*

Faemina differt: Antennis longioribus, oculis nudis, thorace, scutello, abdomine ventreque subnudis.

Descrizione. — È simile al *C. Sackeni* mihi, per l'aspetto e per la statura e ne differisce per i seguenti caratteri. Corpo alquanto più peloso e di colore in complesso più scuro. Proporzione degli articoli delle *antenne* 1 : 1 : 1 $^1/_5$. *Torace* coperto di peli alquanto lunghi, fulvi: *scudetto* a margine più o meno largo giallo, munito di peli lunghi, fulvi: nel mezzo una macchia opaca, nera, ben distinta. *Addome* di poco più largo, più depresso, alquanto più peloso specialmente sui fianchi presso la base. Fascie di color giallo-ferruginoso, di cui quattro assai largamente interrotte strette, raggiungenti i margini dell'addome. Nel 2° segmento manca la fascia marginale posteriore e nel 3° e 4° segmento sono sottilissime, appena alquanto dilatate ad angolo nel mezzo e congiunte ai margini con quelle interrotte: il 5° segmento ha sul margine posteriore una macchia giallo ferruginosa non grande, congiunta pure colla fascia interrotta (Tav. fig. 14). *Ventre* sparso di peli assai lunghi fulvi: nero nitido, con quattro macchie ovali giallo-ferruginose poste lateralmente alla linea mediana nel 3° e 4° segmento. *Apparato copulatore* maschile nero e assai visibile. Tutti i *femori* neri o nericci alla loro base e alquanto pelosi. La 4ª vena longitudinale delle *ali* alquanto più curvata. Nella femmina le antenne sono più lunghe, gli occhi quasi nudi, il torace pubescente, lo scudetto privo di peli lunghi, l'addome ed il ventre quasi glabri fuorchè sui fianchi presso la base, i femori talora del tutto gialli e nudi.

HABITAT. — Svezia, Inghilterra, Francia, Germania, Italia. Gli esemplari da me esaminati provengono dalle regioni alpine del Piemonte, fra cui da Ceresole.

SINONIMIA. — Rondani che ammise prima questa specie, la considerò poi come varietà del *C. intermedium* Meig. Ora io non sono di quest'avviso, giacchè i caratteri distintivi da quest'ultima specie sono assai notevoli. Il *C. intermedium* di Walker è questa stessa specie, riferendo egli certamente il carattere degli occhi nudi alle femmine e non ai maschi.

C. Bigoti n. sp.

MAS. — *Corporis longit. millim. 12-13-Abdominis latit. millim. 4-5. — Nigrum, pubescens. Antennis, articulis subaequalibus. Oculis subnudis. Thorace flavo piloso, scutello flavo macula media nigra distincta, pilis longis flavis instructo. Abdomine glabro, ovato, fasciis quatuor interruptis, duabus integris apiceque flavis. Ventre nudo, fasciis quatuor flavis. Genitalibus flavis. Pedibus flavescentibus. Alis margine antico tenuiter flavescente.*

Foemina differt: Antennis longioribus, oculis nudis, thorace tenuiter flavo-pubescente, scutello sub-nudo, abdomine ventreque nudis.

DESCRIZIONE. — Sebbene questa specie sia assai somigliante al *C. elegans* Loew, tuttavia i caratteri suoi distintivi sono tali che ho creduto a ragione poterne fare una specie a parte secondo il significato zoologico che oggidì si dà a questa parola. Ecco in quanto differisce dalla specie antecedente. In complesso il corpo appare più slanciato, e quasi nudo a primo aspetto. I rapporti di lunghezza degli articoli delle *antenne* sono: $1 : {}^1/_5 : 1{}^1/_5$. *Occhi* coperti di peli corti, rari ed appena visibili. *Torace e scudetto* muniti di peli assai lunghi e gialli e oltre alle macchie gialle laterali vi è ancora una piccola macchia dello stesso colore posta tra il limite anteriore della striscia gialla marginale del torace e l'inserzione del primo paio di zampe. Tale macchia resta quasi nascosta sotto al margine bianchiccio postero-laterale degli occhi. *Addome* quasi nudo; sui fianchi alla sua base due ciuffi di peli assai lunghi, gialli. Oltre le solite fascie, interrotte meno largamente qui che non nel *C. elegans* Loew., si hanno ancora le altre marginali. Di queste una si trova sul secondo segmento ed è sottilissima visibile in taluni esemplari solo verso i margini laterali, in tali altri solo nel mezzo. Le altre sono sempre visibili e alquanto più larghe: tutte poi sono congiunte ai margini con quelle interrotte. *Ventre* quasi tutto nudo, a base gialla, a tre fascie gialle alternate con altrettante nere, le quali talora sono congiunte più o meno ampiamente tra di loro lungo la linea mediana. *Organi copulatori* maschili gialli. La 4ª vena longitudinale delle ali alquanto meno curva: margine anteriore di esse giallo-pallido. *Piedi* gialli, così pure i femori, talora tendenti alquanto al bruno, non mai neri.

HABITAT. Piemonte. Gli esemplari esaminati provengono dai dintorni di Ivrea nel Canavese, dai contorni di Pesio nelle Valli di Cuneo, dal Colle del Moncenio, dalle valli di Lanzo, dai dintorni di Torino.

C. chrysopolita ROND. (20) p. 199-4; (24), p. 203-7; (26) p. 141.

MAS. — *Corporis longit. millim. 13-14-Abdominis latit. millim. 5-Nigrum, pubescens. Antennis, articulis sub-aequalibus. Oculis sub-hirtis. Thorace fulvo pubescente: scutello flavo macula nigra distinta, pilis longis fulvis instructo. Abdomine oblungo-ovato, sub-nudo, fasciis segmentorum tertii et sequentium extrinsecus conjunctis marginibus flavis antice et postice: fascia marginali tertii segmenti exiliori, quarti latiori. Alis margine antico late lutescente. Pedibus omnino luteis* (tav. fig. 15).

Foemina differt: antennis longioribus, oculis nudis, thorace abdomineque sub-nudis, fasciis exilioribus.

DESCRIZIONE. — Questa specie è assai simile a quella antecedente. Ne differisce per i seguenti caratteri. Rapporti di lunghezza degli articoli delle antenne $1 : {}^3/_4 : 1\,{}^1/_5$. *Occhi* alquanto più pubescenti. Fascie dorsali dell'*addome* congiunte fra di loro anteriormente e posteriormente lungo i suoi margini, almeno nei segmenti 3°, 4° e 5°; talora quelle del 2° segmento disgiunte.

Quasi sempre (nelle femmine) questo segmento addominale manca di fascía marginale e nei casi in cui è presente (qualche maschio) è solo una linea sottilissima: nel 3° segmento essa è più larga, nel 4° è semicircolare, la larghezza sua sorpassa la metà del segmento ed anteriormente ha una piccola intaccatura ad angolo acuto nel mezzo. (tav. fig. 15). Nelle femmine quest'ultima fascia è talora anch'essa sottile o dilatata a triangolo. *Ventre* alquanto peloso alla sua base, giallo con fascie nere, arcuate ai margini posteriori dei segmenti, unite fra di loro più o meno ampiamente lungo la linea mediana o disgiunte. *Ali* largamente giallo-fosche al margine anteriore ed i *piedi* totalmente gialli.

Habitat. — Italia, Stiria. Rondani ne ebbe dai dintorni di Parma. Degli esemplari da me esaminati taluni provengono dai dintorni di S. Radegunda in Stiria, altri da località alpine del Piemonte.

Sinonimia. — Il *C. intermedium* Zett. ed il *C. octomaculatum* Curtis, riferite da Loew e da Schiner come sinonimi di questa specie, ne sono invece assai distinte, come vedremo.

C. octomaculatum Curtis (16) p. 653-5-Loew (23) p. 612-11. - Schiner (25) p. 255-10.

Mas. — *Corporis longit. millim. 12-14- Abdominis latit. millim. 4-5.-Nigrum, pubescens. Antennis articulis sub-aequalibus. Oculis hirtis. Thorace fusco-flavescente piloso. Scutello flavo macula parva nigra distincta, pilis longis instructo. Abdomine oblungo ovato, sub-nudo, fasciis conjunctis marginibus flavis antice et postice: segmento secundo lineola marginali flava, tertio fascia lata, quarto latissima. Alis margine antico tenuiter lutescente. Pedibus omnino luteis.* (tav. fig. 16).

Foemina differt: Statura paulo minore, oculis nudis, antennis longioribus, thorace scutelloque sub-nudis, abdominis fasciis omnibus latioribus.

Descrizione. — Questa specie fu identificata col *C. chrysopolita* Rond., giacchè per verità essa le è somigliantissima, non tanto però che non si possa ritenere a parer mio come una specie distinta. Eccone i caratteri differenziali. Rapporti degli articoli delle *antenne*: $1 : {}^{3}/_{4} ; 1$. *Occhi* più pelosi sebbene brevemente nel maschio; nella femmina affatto nudi. *Torace* coperto di peli assai più fitti e più lunghi di color giallo alquanto fosco; macchia nera dello scudetto alquanto più piccola specialmente nelle femmine. *Adddome* quasi glabro con due ciuffetti di peli lunghi, giallo-bianchicci sui fianchi alla sua base; quasi sempre tutte le fascie dell'addome congiunte fra di loro ai margini, di modo che ha un contorno quasi continuo giallo. Il secondo segmento ha sempre una fascia marginale sebbene sottile, il terzo una più larga nel mezzo e con un'intaccatura ad angolo acuto; quella del quarto è larga, semicircolare e senza intaccatura. Caratteri distintivi maggiori si vedono nelle femmine. In esse le fascie dell'addome sono tutte più larghe. La fascia marginale del 2° segmento addominale è più larga che non nei maschi, quella del 3° oltrepassa in larghezza la metà del segmento, e quella del 4° è larghissima ed è separata da quella interrotta che le sta dinanzi da una sottil linea nera ad arco. Il quinto segmento è nei due sessi quasi completamente giallo e le sue fascie, ampiamente congiunte insieme sui margini posteriori, sono appena separate da una sottilissima linea nera (tav. fig. 16). Tanto nei maschi quanto nelle femmine il margine anteriore delle ali è strettamente di un giallo molto chiaro.

Il Curtis pone questa specie nel gruppo di quelle che hanno gli occhi nudi: ciò è improprio affatto e arguisco che quell'autore abbia fatto la sua descrizione sopra esemplari femmine, come del resto ci comprova ancora la figura da lui datane che è appunto di una femmina.

Habitat. — Inghilterra, Svezia, Francia, Austria, Italia. Gli esemplari da me esaminati provengono dai dintorni di Torino e di Bra.

C. vernale Loew (17)-459; (23) p. 612-10; Schummel (18) p. 118; Zettestedt. (19)-p. 637-6; Rond. (24) p. 204-10 Schiner (25) p. 255-9.
C. collinum Rond. (24) p. 202-5.

Mas. — *Corporis longit. millim, 12-13- Abdominis latit. millim. 5-6 - Nigrum. Antennis articulis inaequalibus. Oculis sub-hirtis. Thorace flavo pubescente. Scutello flavo, macula nigra distincta, pilis longis flavis instructo. Abdomine lato, arcuato, sub-rotundo, glabro, fasciis quatuor flavis arcuatis interruptis, a lateribus paulo remotis: apice flavo. Ventre subnudo, fasciis duabus flavis interruptis. Genitalibus nigris. Alis margine antico flavo, stigmate nigricante. Pedibus flavis, femoribus anticis et mediis basi nigris* (tav. fig. 17, 18).

Foemina differt: statura interdum majore, abdomine latiore antennis longioribus, oculis nudis, thorace scutelloque sub-nudis, abdomine glabro.

Descrizione. — S'assomiglia per la colorazione del torace e della faccia alle altre specie da cui differisce poi per i seguenti caratteri. Proporzioni degli articoli delle *antenne* $1:{}^5/_6:1\,{}^1/_6$ nei maschi: $1:{}^3/_4:1\,{}^1/_4$ nelle femmine. *Occhi* appena irti di peli brevi, rari, bianchicci. *Torace* e *scudetto* coperti di peli non molto lunghi, gialli; nella femmina quasi nudi. *Addome* assai largo, arcuato e di forma quasi tondeggiante; nudo nelle femmine, glabro nei maschi non che due ciuffi di peli giallo-bianchicci sui fianchi alla base. Le quattro fascie gialle interrotte sono di larghezza costante, non raggiungono i margini dell'addome ed anzi ne sono alquanto distanti: talora, specialmente nei maschi, sul margine posteriore del 3° segmento, e quasi sempre su quello del 4° notasi una sottilissima striscia gialla che appena arriva fino ai margini dell'addome, ma non si congiunge colla fascia antecedente. L'estremità del 5° segmento ha una macchia talora sottile, talora alquanto larga semilunare gialla ed isolata (tav. fig. 17). *Ventre* sparso solo alla sua base di qualche pelo; nero, talora giallo alla radice, con due fascie gialle alla base dei segmenti 3° e 4° più o meno largamente interrotte lungo la linea mediana. (tav. fig. 18). *Organi copulatori* maschili neri. *Ali* a margine anteriore assai largamente giallo ed una macchia nereggiante assai distinta presso il termine della 2ª vena longitudinale: la 4ª vena longitudinale alquanto curva. *Piedi* giallo ferruginosi, la base dei femori anteriori e mediani nera, le tibie posteriori talora con una fascia bruna nel mezzo.

Habitat. — Svezia, Germania, Francia, Austria, Italia fino alla Sicilia. Gli esemplari che esaminai provengono dai dintorni di Torino e di Valdieri, dalla Francia e da Santa Radegunda nella Stiria

Sinonimia. — Il *C. collinum* Rond. è forse una variazione di questa specie non credendo sufficienti i caratteri dei primi articoli delle antenne *quasi uguali* e dello scudetto *tutto giallo*, per distinguerlo in una specie propria.

C. festivum Lin. *Musca* (2) p. 986-45; (7) p. 444-94; Walker (21) p. 264-2; Loew (17) p. 612-9; Schiner (25) p. 255-9.

Conops festivus Scop. (1) p. 355-964.

Syrphus festivus? Fabr. (3) p. 769-34; (5) p. 430-47; (6) p. 339-54; (8) p. 300-82.

Musca arcuata Deg. (4) p. 125-15.

Mulio arcuatus Fabr. (11) p. 184-3. - Fallén (12) p. 5-2.

C. arcuatum Meig. (13) p. 168-2; Macquart (14) p. 199-2; Scummel (18); Fetterstedt (19) p. 636-4; Rondani (20) p. 201-7; (24) p. 203-9.

C. intermedium Meig. (13) p. 169-3.

Mas. — *Corporis longit. millim. 13-15-Abdominis latit. millim. 5-6 - Nigrum. Antennis articulis aequalibus, arista flavescente. Oculis hirtis. Thorace fulvo piloso. Scutello flavo macula nigra distincta, pilis longis nigricantibus instructo. Abdomine glabro, oblongo nigro fasciis quatuor arcuatis interruptis flavis a lateribus paulo remotis, apiceque flavo. Ventre sub-nudo, fasciis duabus flavis interruptis. Alis macula stigmaticali nigricante. Pedibus totis luteo-ferrugineis.* (tav. fig. 19).

Foemina differt: corpore exiliore, nudo, antennis longioribus, oculis nudis, thorace, scutello abdomineque nudis.

Varietas: **tomentosa** mihi. *Oculis sub-hirtis, antennis articulis sub-aequalibus thorace scutelloque pilis brevioribus flavis munitis, statura interdum minore.*

Descrizione. — Sebbene assai simile al *C. vernale* se ne distingue per vari caratteri. Proporzioni degli articoli delle antenne: 1 : 1 : 1 fuorchè nella varietà *tomentosa* in cui sono all'incirca 1:$^3/_4$:1. L'ultimo articolo è alquanto elissoidale. *Occhi* coperti di peli assai più lunghi e più fitti, fuorchè nella varietà accennata. Peli che coprono il *torace* più lunghi assai, di color fulvo e quelli dello *scudetto* quasi nereggianti. *Addome* glabro anch'esso con due soli ciuffi di peli lunghi bianchicci sui fianchi, con quattro fascie gialle, arcuate interrotte, e l'apice macchiato di giallo a mezzaluna più o meno larga; talora specialmente nei maschi sul margine posteriore del 3° e 4° segmento una linea sottilissima gialla che non raggiunge i margini dell'addome (tav. fig. 19). *Ventre* nero, sparso alla base di peli, con due fascie gialle di cui la seconda largamente interrotta: base gialla. *Piedi* interamente giallo-ferruginosi. *Capo* della femmina interamente nudo.

Habitat. — Svezia, Inghilterra, Francia, Germania, Austria, Italia. Molti degli esemplari che esaminai provengono dalle regioni alpine del Piemonte come dai dintorni di Alagna in Valsesia, da quelli di Valdieri nelle valli di Cuneo, da Ceresole in Val dell'Orco: alcuni poi da Santa Radegunda in Stiria.

Sinonimia. — D'accordo con Loew e per le ragioni da lui citate (Vedi 17-p. 615) io credo che la *Musca festiva* descritta da Linneo si riferisca al genere *Chrysotoxum* Meig. e non al gen. *Doros* Meig. Ciò posto tale specie, assai bene descritta dal naturalista svedese, e attribuita poi da Fallén, da Meigen e da molti altri ditterologi al secondo dei due generi ora detti, è da riferirsi ora alla specie descritta da quelli col nome di *C. arcuatum*. La sinonimia stabilita da Linneo col *Conops festivus* Scop. è giusta, ma erronea affatto quella colla *Musca festiva* di Degeer la quale appartiene al gen. *Doros* Meig. La *Musca arcuata* Deg è sinonima della *M. festiva* Lin. e non della *M. arcuata* Lin. come Degeer riferisce. Le diagnosi date da Fabricio del suo *Shyrphus festivus* sono talmente vaghe che possono benissimo addirsi a questa specie, ma è pure erronea la sinonimia da lui citata colla *Musca festiva* Deg. Il *Mulio arcuatus* descritto da Fabricio concorda coi caratteri di questa specie ed è posto in sinonimia col *C. arcuatum* di Meig. il quale evidentemente si riferisce alla *Musca festiva* di Linneo. Viene quindi il dubbio che molto probabilmente il *Syrphus festivus* di Fabricio sia piuttosto anch'esso da riferirsi al gen. *Doros*. Quanto al *C. intermedium* Meig. sono convinto non essere una specie distinta, ma una semplice variazione individuale, in cui il 2°, 3° e 4° segmenti addominali hanno una sottile striscia gialla al loro margine posteriore, la macchia apicale del 5° alquanto più larga, e la chiazza nereggiante stigmaticale delle ali alquanto più larga. Ciò ammesso la descrizione datane dal Meigen concorda pure colla figura annessa.

C. fuscum n. sp.

Mas. — *Corporis longit. millim.* 13-14. *Abdominis latit. millim.* 5. *Nigrum, pilosulum. Antennis articulis sub-aequalibus. Oculis hirtis. Thorace fulvo piloso. Scutello flavo, macula nigra parva. Abdomine pubescente, ovato, fasciis quatuor arcuatis, interruptis, flavis, a lateribus paulo remotis, apice flavo. Ventre basi et fasciis duabus flavis interruptis. Alis* *macula stigmaticali nulla, venis marginibus fuscis. Pedibus ferrugineis, femoribus omnibus basi nigris.*

Foemina differt: antennis longioribus, oculis nudis, corpore nudo, abdomine lato, arcuato, femoribus ima basi nigra.

VARIETAS: **vernaloides** mihi: *alis margine antico fusco lutescente, venis marginibus non fuscis.*

DESCRIZIONE. — Questa specie, la quale sebbene somigliante al *C. vernale* Loew ho creduto di separare in una distinta, ne differenzia per i seguenti caratteri. Rapporti degli articoli delle antenne: 1 : 1 : 1 $^1/_6$ nei maschi e nelle femmine 1 : $^4/_5$: 1 $^2/_3$. *Occhi* irti di peli nericci, numerosi e assai lunghi: quelli del *torace* molto fitti, lunghi, di color fulvo, così quelli dello *scudetto*, nella maggior parte dei casi nereggianti. *Addome* ovale, arcuato, quasi glabro; talvolta oltre alle fascie gialle come nel *C. vernale* anche due linee sottilissime al margine posteriore del 3° e 4° segmento. *Ventre* quasi nudo, con peli lunghi sparsi dalla sua base fin verso la metà circa. *Organi copulatori* maschili neri. *Piedi* ferruginosi; *femori* tutti o ferruginoso-nereggianti o neri dalla loro base fin verso la metà, specialmente i posteriori; tibie di un bel giallo citrino, ferruginosi i tarsi. *Ali* a margine anteriore molto largamente ed intensamente giallo-fosco, in generale tutte offuscate, perchè tutte le vene hanno il loro bordo contornato da una zona assai larga di color giallo fosco.

La varietà *vernaloides*, assai costante, si può dire veramente l'anello di congiunzione del *C. vernale* con questa specie, avendo in comune col primo i caratteri delle ali a vene limpide e dei femori a base nera e col secondo tutti gli altri.

HABITAT. — Piemonte. Si può dire una specie quasi schiettamente alpina: gli esemplari assai numerosi, così della specie, come delle varietà, che ebbi ad esaminare provengono tutti da regioni alpine, molti dai dintorni di Valdieri, altri dal colle del Moncenisio.

C. lineare ZETTERST. (19) p. 639-8; LOEW (17) p. 611-7. SCHINER (25) p. 255-8.
Mulio linearis FALL. (12) Suppl. p. 8.

MAS. — *Corporis longit. millim.* 9-10. *Abdominis latit. millim.* 4 : 4 $^1/_2$. *Nigrum, pubescens. Antennis articulis inaequalibus. Oculis hirtis. Thorace fulvo pubescente, scutello flavo macula lata, nigra, distincta. Abdomine ovato, glabro, fasciis* *quatuor flavis, exilibus, interruptis. a lateribus paulo remotis. Ventre nudo, fasciis duabus flavis interruptis. Alis macula stigmaticali fusca, non nigricante. Pedibus flavis, femoribus basi nigris.*

Foemina distincta: antennis longioribus, oculis et toto corpore nudis, abdomine sub-lineare.

Descrizione. — Questa specie dapprima descritta da Zetterstedt ha molta affinità con le tre ultime specie descritte, a cui si assomiglia per i disegni e le macchie del corpo. Tuttavia i caratteri seguenti sono distintivi. Anzitutto statura assai minore e, nelle femmine specialmente, forma del corpo assai snella e sottile. Rapporti degli articoli delle *antenne:* nei maschi $1 : {}^3/_4 : 1\ {}^1/_2$ e nelle femmine: $1 : {}^1/_2 : 1\ {}^3/_4$. Peli degli occhi in proporzione assai lunghi e molto fitti, quelli del torace fulvi e quelli dello scudetto assai lunghi e nereggianti. Fascie dell'*addome* sottili, gialle, quasi rettilinee sul mezzo dell'addome, curve verso i margini e distanti alquanto da questi. *Organi copulatori* maschili neri e muniti di qualche pelo. *Ali* con vene a contorni limpidi ed il margine anteriore ferruginoso intenso colla parte stigmaticale non nereggiante ma alquanto più fosca: la 4ª vena longitudinale è alquanto curva. *Piedi* gialli; base dei femori anteriori e medii nera, così talora anche quella dei femori posteriori.

Habitat. — Svezia, Germania, Francia, Ungheria, Stiria, Italia (Piemonte).

C. bicinctum Linn. *Musca* (2) p. 985-38; (7) p. 439-87. Deg. (4) p. 126-16. Schrank (10) III, 2413.

Syrphus bicinctus Fabr. (3) p. 767-21; (5) p. 427-30; (6) p. 337-34; (8) p. 293-54. Panz. (9) 4, 18.

Mulio bicinctus Fabr. (11) p. 183-2; Fallén (12) p. 6, 5.

C. bicinctum Meig (13) p. 168-1. — Macq. (14) p. 198-1; (15) p. 489-1; Zetterst. (19) p. 638-7. — Rondani (20) p. 202-9; (24) p. 205-12 — Valker (21) p. 264-1; Loew (23) p. 613-14; Schiner (25) p. 254-255-6.

C. tricinctum (var.) Rond. (20) p. 201-8; (24) p. 204, 11.

Mas. — *Corporis longit. millim.* 11-12. *Abdominis latit. millim.* 3-4. *Nigrum, pubescens. Antennis articulis inequalibus. Oculis hirtis. Thorace fulvo pubescente, scutello nigro, margine postico flavo. Abdomine glabro, sub-lineare, fasciis duabus flavis latis in secundo et quarto segmento. Alis macula* *stigmaticali lata nigricante. Pedibus flavis, femoribus nigris.* (Tav. fig. 20).

Foemina distincta: antennis longioribus, oculis et toto corpore nudo.

VARIETAS: **tricinctum** Rond: *pedibus flavis.*

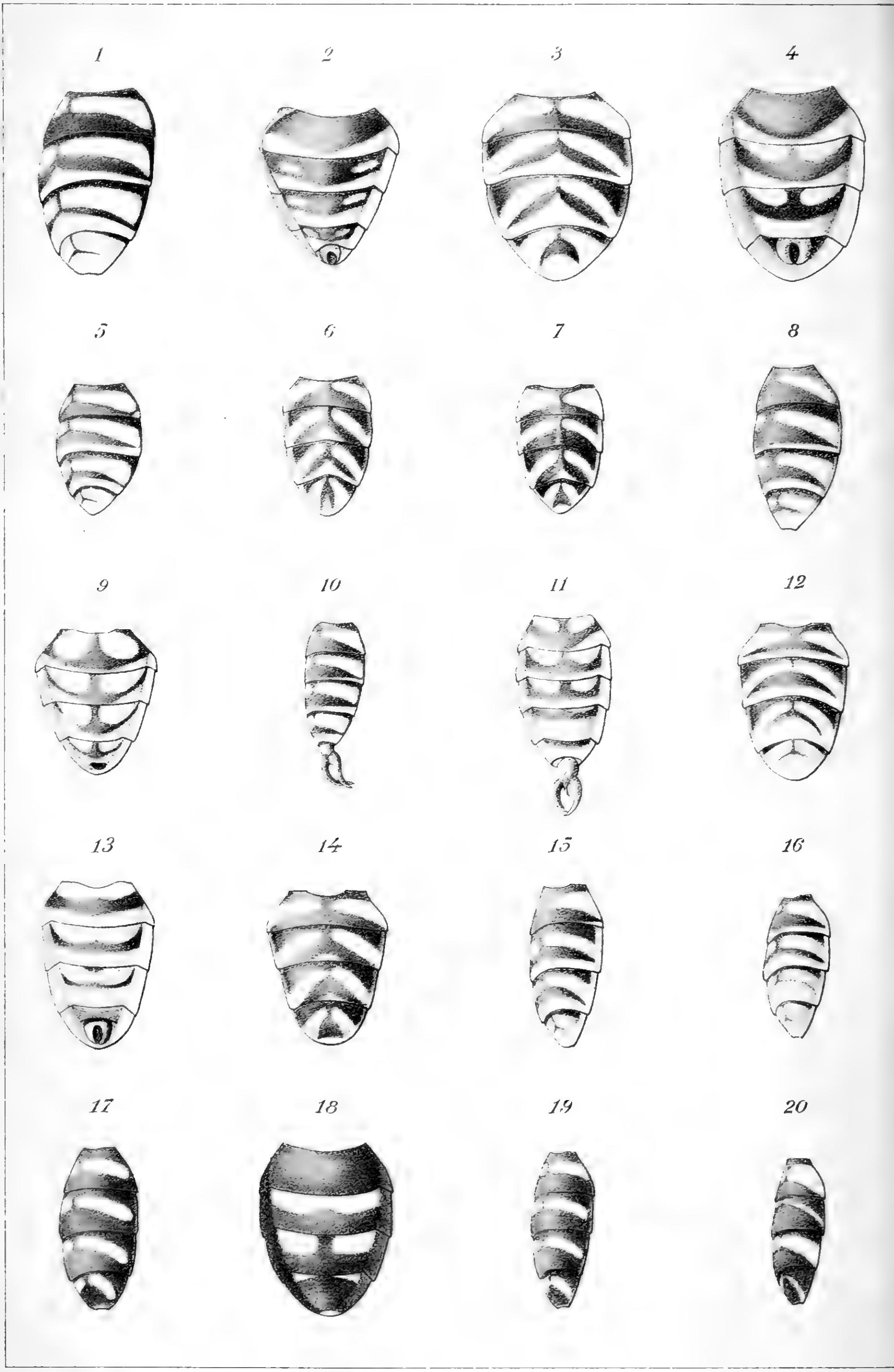
DESCRIZIONE. — Questa specie simile alle altre antecedenti per quanto riguarda la colorazione ed i disegni di tutto il corpo, ne differisce essenzialmente per la forma e la colorazione dell'addome. Proporzioni degli articoli delle *antenne*: $1 : {}^3/_4 : 1$ oppure $1 : {}^4/_5 : 1$. *Torace* e *occhi* sempre pubescenti nei maschi, nudi nelle femmine. *Addome* nudo nelle femmine, glabro nei maschi: due fascie gialle larghe nel 2° e nel 4° segmento; la prima quasi sempre appena interrotta e rilevata raggiunge sempre i lati dell'addome, la seconda continua o interrotta talvolta è in qualche caso poco distante dai margini laterali. Il 3° segmento addominale ha talora una sottilissima fascia arcuata interrotta che si unisce lateralmente con una linea sottilissima marginale posteriore: talora mancano o sono pochissimo visibili. Il 5° segmento ha pure una fascia sottilissima arcuata interrotta, sempre visibile. *Ventre* nero a base gialla, con una fascia larga gialla alla base del 3° segmento, che si prolunga alquanto sul margine adiacente del 2°. *Piedi* gialli con tarsi ferruginosi e femori quasi interamente neri. *Ali* a margine anteriore fosco con una macchia stigmaticale nereggiante o nera grande, che si estende dalla base della 3ª vena longitudinale fin presso alla estremità della 2ª: in larghezza non oltrepassa la 4ª vena longitudinale.

HABITAT. — Tutta l'Europa ed anche il Nord-America, secondo Loew. Comunissimo. Degli esemplari esaminati da me, 20 provengono da Santa Radegunda in Stiria altri da località alpine del Piemonte.

SINONIMIA. — Avendo avuto occasione di esaminarne 52 esemplari sono convinto che la specie descritta da Rondani col nome di *C. tricinctum* devesi solo considerare come varietà essendo troppo incostanti i caratteri da lui citati come distintivi. La specie d'altronde è variabilissima così per mole, come per colorazione, per disegno del corpo e per proporzione degli articoli delle antenne.

BIBLIOGRAFIA.

1. Scopoli J. A. *Entomologia carniolica*, Vindobonae, 1763.
2. Caroli a Linné *Systema naturae*. Tom. I, part. II, Holmiae, 1767 (Editio duodecima reformata).
3. Jo. Chr. Fabricii *Systema entomologiae*. Flensburgi et Lipsiae, 1775.
4. Degeer Ch. *Memoires pour servir à l'histoire des insectes*. Tom. VI, Stockholm, 1776.
5. Jo. Chr. Fabricii *Species insectorum*. Tom. II. Hamburgii et Kilonii, 1781.
6. Jo. Chr. Fabricii *Mantissa insectorum*. Tom. I. Hafniae, 1787.
7. Caroli Linnei *Entomologia, faunae suecicae descriptionibus aucta*. Tom. III. Lugduni, 1789.
8. Jo. Chr. Fabricii *Entomologia systematica*. Hafniae. Tom. IV, 1794.
9. Panzer D. Fr. *Faunae insectorum germanicae initia*. Nürnberg, 1796.
10. Schrank. *Fauna Boica*. Nürnberg, 1804.
11. Jo. Chr. Fabricii *Systema Antliatorum*. Brunsvigae, 1805.
12. Fallén C. F. *Diptera Sueciae*. Vol. I. Syrphici.-Lundae, 1814-1827.
13. Meigen Joh. Wil. *Systematische Beschreibung der bekannten europaeischen zweifluegeligen Insekten*. Th. III. Hamm, 1822.
14. Macquart. *Insectes diptères du nord de la France*. Tom. IV, Lille 1829.
15. Macquart. *Histoire naturelle des Insectes*. Tom. I. Paris, 1834.
16. Curtis John. *British entomology*. Vol. III. London, 1823-1840.
17. Loew Herm. *Ueber die Gattung Chrysotoxum*, in Stett. entom. Zeit., 1841, Tom. 2°.
18. Schummel Th. E. *Verzeichniss und Beschreibung der bis jetz in Schlesien gefangenen Zweifluegler der Syrphen Familie* in: Arb. schles. Gesels. f. vaterl. Kultur, 1841.



E. Giglio-Tos dis. dal vero.

Lit. Salussolia - Torino

19. ZETTERSTEDT JOH. WIL. *Diptera Scandinariae disposita et descripta.* Tom. I. Lundae, 1842.
20. RONDANI C. *Species italicae generis Chrysotoxi*, ecc.: in Ann. de la Soc. entomol. de France, 2. Ser., Tom. III, 2. trim., 1845.
21. WALKER FR. *Insecta Britannica, Diptera.* Vol. I. London, 1851.
22. — *Insecta Saundersiana.* Vol. I. London, 1856.
23. LOEW HERM. *Die europaeischen Arten der Gattung Chrysotoxum* in : Verh. des zool.-botan. Vereins in Wien. Band VI, Iahr. 1856.
24. RONDANI C. *Dipterologiae italicae prodromus.* Vol. II. Parmae, 1857.
25. SCHINER J. RUD. *Fauna Austriaca. Diptera.* Wien, 1860.
26. RONDANI C. *Diptera italica non vel minus cognita* in: Atti della Soc. ital. di scienze naturali Vol. VIII. 1865, Milano.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

1. Addome di *C. fasciolatum* DEG. ♂ (dorso visto di 3/4).
2. » » » ♂ (ventre).
3. » » *C. Lessonae* mihi ♂ (dorso).
4. » » » ♂ (ventre).
5. » » *C. hortense* MEIG. (dorso visto di 3/4).
6. » » *C. italicum* ROND. (dorso).
7. » » *C. cisalpinum* ROND. (dorso).
8. » » *C. arcuatum* PANZ. ♀ (dorso visto di 3/4).
9. » » » » » ♀ (ventre).
10. » » *C. lubricum* mihi ♂ (dorso visto di 3/4).
11. » » » » » ♂ (ventre).
12. » » *C. Sackeni* mihi ♂ (dorso).
13. » » » » » ♂ (ventre).
14. » » *C. elegans* LOEW ♂ (dorso).
15. » » *C. chrysopolita* ROND. ♀ (dorso di 3/4).
16. » » *C. octomaculatum* CURT. ♀ (id.).
17. » » *C. vernale* LOEW ♀ (dorso di 3/4).
18. » » » » » ♀ (ventre).
19. » » *C. festivum* LINN. ♂ (dorso di 3/4).
20. » « *C. bicinctum* LINN. ♂ (dorso di 3/4).

RELAZIONE sulla Memoria « *I Molluschi dei terreni terziari del Piemonte e della Liguria*. PARTE VIII. Galeodoliidae, Doliidae, Ficulidae e Naticidae », del Dott. FEDERICO SACCO.

Nella Memoria che la Classe ci ha incaricato di esaminare, l'Autore continua lo studio dei Molluschi dei terreni terziari del Piemonte e della Liguria, studio che iniziato, come è noto, dal compianto collega prof. L. Bellardi venne già in parte proseguito dallo stesso dott. F. Sacco.

La parte VIII presentata ora dal predetto Autore per la stampa nei volumi delle Memorie accademiche, comprende lo studio dei Molluschi delle seguenti quattro famiglie: *Galeodoliidae*, *Doliidae*, *Ficulidae*, e *Naticidae*.

La famiglia delle *Galeodoliidae* viene istituita qui per la prima volta dall'Autore. Questa nuova famiglia comprende il genere *Eudolium* con cinque specie del quale due sono nuove.

La famiglia delle *Doliidae* comprende il genere *Malea*.

La famiglia delle *Ficulidae* comprende due generi: genere Ficula con sette specie delle quali tre sono nuove e il genere *Fulgoroficus* istituito qui per la prima volta dall'Autore come una divisione dell'antico genere *Ficula*. L'Autore forma pure il sottogenere *Fusoficula* per le specie a spira molto alta e fusiforme.

La famiglia delle *Naticidae* comprende tre generi divisi ciascuno in vari sottogeneri e ricchi di numerose forme specifiche. In questa famiglia vengono istituiti parecchi nuovi sottogeneri e vengono descritte come nuove nove specie.

L'Autore descrive poi per quasi tutte le specie studiate numerose varietà e sottovarietà nuove.

A tale proposito i sottoscritti notano una tendenza ad un frazionamento, talvolta eccessivo, delle forme nella costituzione delle *sottovarietà*. Le sottovarietà essendo divisioni tassonomiche di valore troppo poco definibile, il costituirne troppe in una data specie, finisce per rendere talvolta incerta la stessa diagnosi specifica. I sottoscritti quindi credono che sarebbe, nella maggior parte dei casi, più conveniente venissero rese un po' più comprensive le diagnosi delle *varietà*.

Per quanto riguarda lo schema delle sinonimie, e delle diagnosi specifiche, l'Autore ha seguito come nelle precedenti Memorie quello adottato dal Bellardi. L'Autore indica inoltre per ciascuna forma la località e l'orizzonte geologico di rinvenimento.

Al lavoro vanno unite due tavole nelle quali sono figurate le forme nuove descritte nel testo.

Il lavoro del dott. Federico Sacco affidato al nostro esame è condotto con molta diligenza e costituisce un ottimo contributo alla conoscenza dei Molluschi dei terreni terziari del Piemonte e della Liguria ed è degna continuazione dell'opera intrapresa dal compianto prof. L. Bellardi; perciò i sottoscritti ne propongono la lettura alla Classe, e, qualora questa lo approvi, la stampa nei volumi accademici.

LORENZO CAMERANO, *Relatore*.
G. SPEZIA.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 30 Novembre 1890 . . . . *Pag.* 103

Bertini — Intorno ad alcuni teoremi della Geometria sopra una curva algebrica . . . . » 104

D'Ovidio — Altra addizione alla Nota « Sui determinanti di determinanti . . . . » 117

Giglio-Tos — Le specie europee del Genere *Chrysotoxum* Meig . . » 120

Camerano — Relazione sulla Memoria « *I Molluschi dei terreni terziari del Piemonte e della Liguria.* - Parte VIII. Galeodoliidae, Doliidae, Ficulidae e Naticidae », del Dott. Federico Sacco . . » 152

Torino — Tip. Reale-Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXVI, Disp. 3ª, 1890-91

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Dicembre 1890.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Cossa, Direttore della Classe, Bruno, Berruti, D'Ovidio, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia, Giacomini, Camerano, Segre e Basso Segretario.

Letto ed approvato l'atto verbale della seduta precedente, il Socio Segretario presenta in dono all'Accademia, a nome dei rispettivi autori, le pubblicazioni seguenti:

1° Un libro intitolato: *I cervelli dei microcefali* del Socio Prof. C. Giacomini:

2° Il vol. V del *Bollettino dei Musei di Zoologia ed Anatomia* comparata della R. Università di Torino (dal n. 74 al n. 92):

3° Dieci opuscoli intorno ad argomenti di geologia, idrologia e paleontologia del Prof. Federico Sacco.

Il Socio Ferraris presenta e legge una Memoria dell'Ingegnere Elia Ovazza, Assistente nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Torino, intitolata: *Sulla resistenza di attrito fra vite e madrevite.*

Il Socio Basso presenta una Nota del Dott. Guido Valle, Assistente per la Geometria proiettiva e descrittiva nell'Università di Torino, intitolato: *Sopra un caso particolare di trasformazione delle funzioni ellittiche.*

Il Socio Camerano presenta un lavoro del Dott. Fr. Saverio Monticelli che ha per titolo: *Osservazioni intorno ad alcune forme del genere Apoblema Dujard.*

I tre scritti ora menzionati saranno pubblicati negli *Atti.*

Infine il Socio Camerano, condeputato col Socio Spezia, legge una Relazione, che sarà inserita negli *Atti*, sopra il lavoro del signor Filippo Cantamessa, intitolato: *Il Mastodonte di Cinaglio d'Asti ed il Mastodon (Tetrolophodon) arvernensis; Osteografia ed osservazioni.*

Accogliendo le conclusioni della Relazione, la Classe ammette il lavoro del signor Cantamessa alla lettura, e poscia ne approva l'inserzione ne' volumi delle *Memorie* dell'Accademia.

LETTURE

Sulla resistenza di attrito fra vite e madrevite;

Memoria dell'Ingegnere Elia Ovazza.

Assunto.

1. Argomento della presente Nota è lo studio della resistenza di attrito che viene provocata nel moto relativo degli elementi costituenti la coppia cinematica *vite* e *madrevite*.

Partendo dal concetto che i *perni* non costituiscono che un caso speciale di tale coppia, si estenderanno alle viti le teorie oggidì in uso circa la resistenza di attrito nei perni; questo studio dell'argomento, più rigoroso di quello che ordinariamente si suol fare nei corsi di meccanica generale, varrà a stabilire il grado di approssimazione dei risultati dedotti dalle arbitrarie ipotesi che in tali corsi vengono fatte al solo fine di appianare le difficoltà della trattazione.

2. Assumeremo come caso generale quello in cui la vite ha *pane triangolare*, cioè tocca la madrevite secondo due porzioni di *elicoidi a direttrice rettilinea*, del resto comunque. (Secondo che *entrambi* questi elicoidi sono *retti*, oppure è *retto uno solo* di essi, si hanno rispettivamente i casi speciali della vite a *pane rettangolare* e della vite a *pane trapezioidale*).

Di più supporremo sempre in seguito che la *chiocciola sia fissa*, la vite invece mobile, con *asse verticale*, e *sollecitata da un peso Q* secondo l'asse.

In tali ipotesi ci proponiamo i seguenti due quesiti:

A) *Determinazione del momento M della coppia, agente in piano normale all'asse del meccanismo, capace di vincere la forza Q e le resistenze di attrito che l'accompagnano*, sia portando il meccanismo allo stato prossimo al moto. e sia mantenendolo in moto uniforme quando abbia abbandonato lo stato di riposo.

B) *Determinazione delle condizioni geometriche cui deve soddisfare il meccanismo, affinchè rimanga in riposo al cessare della potenza, permanendo la resistenza principale Q.*

Equazioni generali.

3. Per un elemento qualunque, A, di area $d\omega$, della superficie elicoidale di contatto fra vite e chiocciola (fig. 1ª e 2ª) conducansi: la verticale AV, la generatrice AG dell'elicoide, la tangente AT all'elica intersezione dell'elicoide col cilindro coassiale passante per A, la normale AN all'elicoide, e la proiezione AO della AT sul piano orizzontale per A. Si indichino rispettivamente con α, β, θ, x gli angoli VAG, VAT, VAN ed NAO, e con r la distanza dell'elemento A dall'asse del meccanismo.

Considerata la vite come sistema invariabile in equilibrio dinamico sotto l'azione della coppia motrice M, della resistenza Q e delle reazioni e resistenze offerte dalla chiocciola, applichiamo il Principio delle velocità virtuali attribuendo alla vite: 1° una traslazione virtuale infinitesima δh secondo l'asse ed a ritroso del peso Q; 2° una rotazione virtuale infinitesima $\delta \varepsilon$ attorno all'asse della vite e pel verso della coppia M.

Indicando con p la pressione normale unitaria fra vite e chiocciola in corrispondenza dell'elemento superficiale qualunque A e con f il coefficiente di attrito, si ottengono le equazioni di equilibrio dinamico:

$$\left\{\begin{array}{l} -Q\,.\,dh + dh\,.\displaystyle\iint p\,\cos\theta\,.\,d\omega - f\,.\,dh\,.\displaystyle\iint p\,\cos\beta\,.\,d\omega = 0 \\ M\,.\,d\varepsilon + d\varepsilon\,.\displaystyle\iint pr\cos x\,.\,d\omega - f\,.\,d\varepsilon\,.\displaystyle\iint pr\,\mathrm{sen}\,\beta\,.\,d\omega = 0\,, \end{array}\right.$$

ove i doppi integrali vanno estesi a tutta la superficie di contatto fra vite e madrevite.

Da queste equazioni deduconsi le seguenti:

$$Q = \iint p\,(\cos\theta - f\cos\beta)\,d\omega \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$M = \iint pr\,(f\,\mathrm{sen}\,\beta - \cos x)\,d\omega \qquad \ldots\ldots (2)\,,$$

che *risolvono il quesito* A), quando sia nota la legge di variazione della pressione normale unitaria p lungo la superficie di contatto.

4. Fatto $M = 0$, e cambiato di segno il coefficiente f, le (1) e (2) trasformansi nelle:

$$Q = \iint p (\cos\theta + f \cos\beta) \, d\omega \qquad \ldots\ldots (3)$$

$$\iint p r (f \operatorname{sen}\beta + \cos x) \, d\omega = 0 \qquad \ldots\ldots (4),$$

che *risolvono il quesito B*), previa eliminazione di p.

5. Alle equazioni (1) a (4) vanno aggiunte altre due, *relazioni geometriche necessarie fra gli angoli* α, β, θ ed x.

Tracciata con centro A una superficie sferica qualunque, (fig. 1), e segnatavi la figura che le rette AT, AG, AN ed AV vi determinano, dalla considerazione dei triangoli sferici rettilateri NVT ed NVG risulta:

$$\cos\Psi = -\operatorname{cotg}\theta \, . \operatorname{cotg}\beta$$

$$\cos\Phi = -\operatorname{cotg}\theta \, . \operatorname{cotg}\alpha \; ;$$

onde poichè

$$\Phi + \Psi = \frac{3}{2}\pi \, ,$$

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\operatorname{cotg}^2\alpha + \operatorname{cotg}^2\beta} \qquad \ldots\ldots (5).$$

Per altro dalla considerazione dei triangoli rettilateri ONV, ONT', (fig. 2ª), ricavasi:

$$-\cos x = \operatorname{sen}\theta \, . \cos\lambda$$

$$\cos\theta \, . \cos\beta = \operatorname{sen}\theta \, . \cos\lambda \, . \operatorname{sen}\beta \, .$$

Di qui la 2ª delle cercate relazioni geometriche:

$$\cos x = -\cos\theta \, . \operatorname{cotg}\beta = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cosec}^2\alpha \, . \operatorname{tg}^2\beta}} \ldots \qquad (6).$$

6. Posto $\alpha = \frac{\pi}{2}$ le (5) e (6) dànno:

$$\theta + \beta = \frac{\pi}{2} \, , \qquad x + \beta = \pi \; ;$$

e le (1) a (4) riduconsi alle seguenti, valevoli per vite a *superficie di contatto elicoide retta:*

$$\begin{cases} Q = \iint p\,(\operatorname{sen}\beta - f\cos\beta)\,d\omega & \ldots (1') \\ M = \iint p\,r\,(f\operatorname{sen}\beta + \cos\beta)\,d\omega & \ldots (2') \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q = \iint p\,(\operatorname{sen}\beta + f\cos\beta)\,d\omega & \ldots (3') \\ 0 = \iint p\,r\,(f\operatorname{sen}\beta - \cos\beta)\,d\omega & \ldots (4')\,. \end{cases}$$

7. Posto nelle (1) e (2) $\beta = \frac{\pi}{2}$ (= costante) ,

deduconsi le formole relative ai *perni conici di spinta:*

$$\begin{cases} Q = \iint p\operatorname{sen}\alpha\,.\,d\omega & \ldots (1'') \\ M = f\,.\iint p\,r\,.\,d\omega & \ldots (2'') \end{cases}$$

da cui per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si hanno le formole relative ai *perni di spinta cilindrici:*

$$\begin{cases} Q = \iint p\,d\omega & \ldots (1''') \\ M = f\cdot\iint p\,r\,d\omega & \ldots (2''') \end{cases}$$

Trattazione approssimata ordinaria.

8. Supponga si *costante la pressione unitaria* p, e detta Ω l'area totale della superficie elicoidale di contatto fra vite e chiocciola, *assumasi in via di approssimazione:*

$$\left.\begin{array}{ll} \iint \cos\theta\,.\,d\omega = \Omega\,.\cos\theta_m\ , & \iint r\cos x\,.\,d\omega = r_m\,.\,\Omega\,.\cos x_m \\ \iint \cos\beta\,.\,d\omega = \Omega\,.\cos\beta_m\ , & \iint r\operatorname{sen}\beta\,.\,d\omega = r_m\,.\,\Omega\,.\operatorname{sen}\beta_m \end{array}\right\}(7)\,,$$

contrassegnando con l'indice m i valori delle varie quantità corrispondenti ad elementi superficiali giacenti lungo l'elica di raggio medio della superficie di contatto, cioè lungo l'elica generata dal punto medio del segmento rettilineo generante detta superficie.

Eliminando p fra le (1) e (2), e dalla (4), avremo:

$$\begin{cases} M = \dfrac{f \operatorname{sen} \beta_m - \cos x_m}{\cos \theta_m - f \cos \beta_m} Q r_m & \dots\dots (8) \\ f \operatorname{sen} \beta_m = -\cos x_m & \dots\dots (9) \end{cases}$$

E nel caso di vite a *superficie di contatto elicoidale retta* (che d'ora in avanti, per brevità, diremo *vite rettangolare*), $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, posto $f = \operatorname{tg} \varphi$:

$$\begin{cases} M = Q r_m . \operatorname{cotg} (\beta_m - \varphi) & \dots\dots (8') \\ \beta_m = \dfrac{\pi}{2} - \varphi & \dots\dots (9') \end{cases}$$

9. Posto $f = 0$, e quindi $\varphi = 0$, si ottengono le relazioni corrispondenti all'ipotesi che *non sieno provocate resistenze di attrito:*

$$\begin{cases} M' = Q r_m . \operatorname{cotg} \beta_m & \dots\dots (8_i) \\ \beta_m = \dfrac{\pi}{2} & \dots\dots (9_i) \text{ (*)} \end{cases}$$

Il coefficiente di rendimento del meccanismo ha quindi per espressione:

***Per** vite a pane triangolare*

$$\mu = \frac{\cos \theta_m - f \cos \beta_m}{f \operatorname{sen} \beta_m - \cos x_m} \operatorname{cotg} \beta_m \qquad \dots\dots (10)$$

E per vite rettangolare

$$\mu = \operatorname{tg} (\beta_m - \varphi) . \operatorname{cotg} \beta_m \qquad \dots\dots (10')$$

10. Le relazioni ricavate ai numeri 8 e 9 e le conseguenze che ne derivano, sono quelle ordinariamente esposte nei

(*) Il meccanismo cessa di essere vite.

corsi di meccanica generale. Esse si possono direttamente dedurre mediante l'applicazione del principio delle velocità virtuali, supponendo le reazioni e resistenze offerte dalla madrevite concentrate in corrispondenza dell'elica di raggio medio r_m, ed attribuendo alla vite un opportuno movimento virtuale elicoidale attorno al suo asse, sì che *restino immediatamente eliminate dall'equazione* di equilibrio tali reazioni e resistenze. Il valore del parametro $\tau = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon}$ di questo moto risulta dalle (8) ed (8'):

Per vite a pane triangolare

$$\tau = \frac{M}{Q} = \frac{f \operatorname{sen} \beta_m - \cos x_m}{\cos \theta_m - f \cos \beta_m} r_m \qquad \ldots (11)$$

E per vite rettangolare

$$\tau = r_m . \operatorname{cotg} (\beta_m - \varphi) \qquad \ldots (11') .$$

A *guida di tale moto* virtuale elicoidale può assumersi l'elica di raggio r_m coassiale col meccanismo, la cui inclinazione determinasi come segue: Per un punto A della elica intersezione della superficie di contatto col cilindro coassiale di raggio r_m conducansi: la tangente AT a quest'elica, la normale AN all'elicoide, e la retta AR, giacente nel piano NAT ed inclinata ad AN dell'angolo φ di attrito, secondo la quale agisce la risultante della reazione normale elementare della madrevite, e della resistenza elementare di attrito. L'intersezione AD dei due piani condotti per A, uno tangente al cilindro di raggio r_m, l'altro normale ad AR, ha l'inclinazione dell'elica direttrice cercata. (*)

(*) È facile verificare in via puramente geometrica che il valore della tangente trigonometrica dell'angolo η che la retta AD fa con l'orizzonte coincide con quello del rapporto $\frac{\tau}{r_m}$, che si deduce dalla (11).

Segnate su una superficie sferica di centro A (figura 3ª) le intersezioni R, N, T, D, G, V delle rette AR, AN, AT, AD, della generatrice AG dell'elicoide e della verticale AV, detto y l'angolo TAD, si ha dalla considerazione dei triangoli sferici rettilateri NVT e TRD; tralasciando per semplicità gli indici m:

$$\cos \theta = \operatorname{sen} \beta . \cos \Psi \quad , \quad \operatorname{tg} \varphi = - \operatorname{tg} y . \cos \Psi$$

Nel caso di vite rettangolare quest'elica direttrice e l'elica di raggio medio, r_m, si incontrano sotto angolo eguale all'angolo di attrito $\varphi = artgf$.

11. Definiscasi *elica media* di una vite quell'elica lungo la quale devonsi supporre concentrate le reazioni e resistenze della madrevite affinchè si consumi per attrito una quantità di lavoro eguale a quella effettivamente consumata.

Ciò posto, le ipotesi su cui fondansi gli sviluppi ai numeri 8, 9 e 10, si possono condensare nella seguente, la cui arbitrarietà è di evidenza immediata, che cioè *l'elica media coincida con quella di raggio medio.*

Gli sviluppi che seguono determineranno il grado di approssimazione, praticamente invero notevole, di questa ipotesi.

Nuove teorie.

12. Volendo stabilire ipotesi meno arbitrarie circa la legge di variazione della pressione normale unitaria p lungo la superficie di contatto fra vite e madrevite, distingueremo le viti in *nuove* ed *usate* od *in servizio corrente* (*).

13. Per le *viti nuove*, fra cui vanno poste quelle che servono come organi di collegamento e le viti di trasmissione per

---

Onde

$$\operatorname{tg} y = -\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\theta}\operatorname{tg}\varphi = -f\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\theta}.$$

Ma

$$\eta = \frac{\pi}{2} - (\beta + y) ;$$

quindi

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{1 - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}y} = \frac{f\operatorname{sen}\beta - \cos x}{\cos\theta - f\cos\beta} = \frac{\tau}{r_m}.$$

(*) La *cognizione esatta* del modo di ripartizione della pressione p sulla superficie di contatto dipende dalla teoria dell'elasticità, la quale fornisce, per la determinazione della pressione p in un punto qualunque, delle equazioni differenziali, la cui integrazione supera ancora le forze attuali dell'analisi.

Cfr. A. Castigliano, *Manuale pratico per gli Ingegneri.* Parte 2ª, p. 102, Torino.

un tempo più o meno breve del loro servizio, ammessa un'accurata lavorazione del meccanismo, del resto non difficile cogli odierni mezzi dell'arte, l'ipotesi più ammissibile, data la ristrettezza dei limiti fra cui varia l'angolo θ nei casi della pratica, è che *la pressione normale unitaria* p *non varii* da punto a punto della superficie di contatto (*).

Quest'ipotesi coincide con quella proposta pei perni nuovi dal Weisbach (**), che la *proiezione sull'asse del meccanismo della pressione normale elementare in corrispondenza d'un elemento qualunque della superficie di contatto sia proporzionale alla proiezione dell'elemento su un piano normale all'asse.* Tale ipotesi verrà perciò da noi detta *ipotesi del* Weisbach (***).

14. Trattandosi *di viti di trasmissione*, è noto che *con l'uso* va diminuendo la quantità di lavoro che consumasi per vincere le resistenze di attrito, onde l'artificio di fare andare a vuoto per qualche tempo il meccanismo prima di porlo definitivamente in opera. Questo fatto può spiegarsi come segue. Ammessa l'ipotesi suesposta del Weisbach ed il principio di Morin circa la proporzionalità fra resistenza di attrito e pressione normale, quando una vite nuova comincia a funzionare, in causa della diversa velocità che assumono i punti del meccanismo posti a differenti distanze dall'asse di rotazione, si consumano diverse quantità di lavoro per attrito in corrispondenza dei punti posti a differenti distanze dall'asse. Onde *un logoramento* che, misurato in direzione *normale* alla superficie di contatto è *non uniforme*, sì che in alcuni punti va crescendo la pressione normale unitaria a scapito di altri punti della superficie di contatto. Con l'uso, a poco a poco le parti in contatto vengono ad adattarsi così da stabilire un regime di pressioni normali, variabili in senso radiale, dipendente dalla forma iniziale del meccanismo e dal materiale onde questo è costituito. E poichè generalmente appunto queste pressioni, e quindi, per la legge di Morin, le re-

(*) Cfr. A. Castigliano, l. c., pag. 103. — *Nota sul calcolo dei perni.*

(**) Cfr. Weisbach, *Lehrbuch der Ing.- und Maschinen-Mechanik. — Die Zwischenmaschinen.*

(***) Cfr. Th. Reye, *Zur Theorie der Zapfenreibung. — Civilingenieur*, volume VI, 1860. — S. Cappa, *Lezioni di Meccanica applicata alle macchine*, riassunte dall'assistente ing. Elia Ovazza, 1890. Torino, Tip. e Lit. C. Giorgis.

sistenze di attrito che le accompagnano, risultano maggiori laddove è minore la velocità relativa degli elementi in contatto, viene a consumarsi una quantità totale di lavoro minore di quella che consumasi verificandosi l'ipotesi di WEISBACG.

Per altro, data la costanza della direzione in cui agisce la resistenza principale Q, *a regime* il logoramento deve avere nella direzione dell' asse del meccanismo grandezza *costante*; siccome poi è da ritenersi la quantità di lavoro consumata pel logoramento *crescente* con la quantità di lavoro consumata per attrito, di cui è parte, assumeremo *proporzionali* queste due quantità di lavoro.

Laonde il calcolo delle viti usate verrà fatto in base alle seguenti ipotesi, coincidenti con quelle assunte dal REYE pei perni usati (*), e che diremo appunto *ipotesi del* REYE:

Il logoramento delle parti in contatto abbia grandezza costante in direzione dell'asse del meccanismo.

Il volume di materia esportato in direzione dell'asse ed in corrispondenza di un elemento qualunque della superficie di contatto sia proporzionale al lavoro consumato contemporaneamente dalla resistenza di attrito provocata in corrispondenza del medesimo elemento.

Meccanismi nuovi.

15. Supposto p costante, ed eliminato p fra le (1) e (2), si ha:

$$M_1 = \frac{\iint r\,(f \operatorname{sen}\beta - \cos x)\, d\omega}{\iint (\cos\theta - f\cos\beta)\, d\omega}\, Q \qquad \ldots (12).$$

E dalla (4)

$$\iint r\,(f \operatorname{sen}\beta + \cos x)\, d\omega = 0 \qquad \ldots (13),$$

Tenendo conto delle (5) e (6) ed osservando che, detto $d\varepsilon$ l'angolo elementare dei due piani passanti per l'asse della vite e limitanti l'elemento superficiale $d\omega$, può porsi:

$$d\omega = \frac{r\,.\,dr\,.\,d\varepsilon}{\cos\theta} \qquad \ldots (14),$$

(*) Cfr. Th. REYE, l. c., e CAPPA-OVAZZA, l. c.

mentre per altro r e β sono indipendenti da ε, le (12) e (13) trasformansi nelle:

$$M_1 = \frac{\int_{r_i}^{r_e} r^2 (f \operatorname{sen} \beta . \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{cotg}^2 \beta} + \operatorname{cotg} \beta)\, dr}{\int_{r_i}^{r_e} r (1 - f \cos \beta . \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{cotg}^2 \beta})\, dr} Q \quad \ldots (12')$$

$$\int_{r_i}^{r_e} r^2 (f \operatorname{sen} \beta . \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{cotg}^2 \beta} - \operatorname{cotg} \beta)\, dr = 0 \quad \ldots (13')$$

ove r_e ed r_i sono i valori estremi, maggiore e minore, della variabile r (*).

16. Dicasi h il passo, $H = \frac{h}{2\pi}$ il *passo ridotto* dell'elicoide di contatto, $S = \sqrt{H^2 + r^2}$ la *lunghezza ridotta d'una spira* dell'elica sezione dell'elicoide medesimo col cilindro coassiale di raggio r. Si ha:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{r}{S}, \qquad \cos \beta = \frac{H}{S} \quad \ldots (15)_1$$

Quindi, posto per semplicità:

$$\left.\begin{aligned} {}^{\beta_e}_{\beta_i}A &= \int_{\beta_i}^{\beta_e} \frac{d\beta}{\cos^4 \beta . \sqrt{1 - \cos^2 \alpha . \cos^2 \beta}} \\ {}^{\beta_e}_{\beta_i}B &= \int_{\beta_i}^{\beta_e} \frac{d\beta}{\cos^2 \beta . \sqrt{1 - \cos^2 \alpha . \cos^2 \beta}} \\ {}^{\beta_e}_{\beta_i}C &= \int_{\beta_i}^{\beta_i} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha . \cos^2 \beta}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (16)$$

(*) Poichè dalle (12') e (13') scompare la variabile ε, deducesi che *sui ri-*

ove β_e β_i sono i valori di β per le eliche estreme, esterna ed interna, dell'elicoide di contatto, alle (12) e (13) può ancora darsi la forma seguente:

$$M_1 = M' + \frac{fH^2}{\operatorname{sen}\alpha} \frac{A_{\beta_i}^{\beta_e} - B_{\beta_i}^{\beta_e}\cos^2\alpha}{\int_{r_i}^{r_e} r\,.\,dr - \frac{fH^2}{\operatorname{sen}\alpha}\left[B_{\beta_i}^{\beta_e} - C_{\beta_i}^{\beta_e}\cos^2\alpha\right]} QH \quad \ldots (17)$$

$$\left(A_{\beta_i}^{\beta_e} - B_{\beta_i}^{\beta_e}\right) - \left(B_{\beta_i}^{\beta_e} - C_{\beta_i}^{\beta_e}\right)\cos^2\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{fH^2}\int_{r_i}^{re} r\,.\,dr \ldots (18).$$

ove M' conserva il significato ed il valore che ha nella (8_t).

Ci riserbiamo di eseguire in seguito gli integrali (16), che ricompariranno ulteriormente.

Meccanismi usati.

17. Detta da la grandezza del logoramento del meccanismo, avvenuto in un tempo infinitesimo, misurata in direzione dell'asse della vite, il volume di materia esportato in corrispondenza di un elemento $d\omega = \frac{r\,.\,dr\,.\,d\varepsilon}{\cos\theta}$ della superficie di contatto è misurato da $r.dr.d\varepsilon.da$. Se quindi indicasi con ds lo spazio relativo simultaneo delle due superficie di contatto in corrispondenza dell'elemento $d\omega$, e con A una costante di proporzionalità, le ipotesi del Reye vengono algebricamente espresse dalla relazione:

$$r\,.\,dr\,.\,d\varepsilon\,.\,da = Afp\,\frac{r\,.\,dr\,.\,d\varepsilon}{\cos\theta}\,ds$$

per da=costante.

---

sultati del calcolo *non influisce il numero delle spire di contatto* fra vite e chiocciola, come ordinariamente suolsi ammettere come diretta conseguenza del principio di Morin che la resistenza di attrito è indipendente dall'estensione della superficie di contatto.

Eliminata la variabile s mediante la relazione geometrica

$$d\,s = \frac{d\,h}{\cos\beta}\,;$$

ove dh è il valore comune delle proiezioni, sull'asse, degli spazii relativi in corrispondenza dei singoli elementi di contatto, ricavasi la nuova più semplice relazione:

$$p = C\cos\theta\,.\,\cos\beta\,,\ \ldots \qquad \ldots (19\,,$$

C essendo una costante da determinarsi.

18. Se facciamo crescere β a partire da *zero*, e cioè consideriamo sulla superficie di contatto eliche coassiali i cui raggi crescano a partire da zero, il prodotto $\cos\theta.\cos\beta$ cresce a partire da zero fino a raggiungere un massimo, $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}$, in corrispondenza del valore β_1 di β per cui

$$\cos\beta_1 = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{sen}\alpha}}\,,$$

per decrescere nuovamente tendendo a zero col tendere di β a $\dfrac{\pi}{2}$.

Mediamente avendosi $\alpha = 62^\circ\,30'$ (viti triangolari), risulta: $\beta_1 = 43^\circ\,10' \backsim$, quantità da cui discostansi notevolmente, superandola, gli ordinari valori dell'angolo β.

Per $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ (viti rettangolari), risulta $\beta_1 = 45^\circ$.

Segue che praticamente può ritenersi che il prodotto $\cos\theta$. $\cos\beta$, e quindi la pressione normale unitaria p sia *decrescente col crescere del raggio* r (*), onde si deduce quanto fu premesso a numero 14.

(*) Crediamo vano il riportare qui la ricerca dell'angolo β_1. Ci limitiamo ad esporre nella figura 4ª la costruzione grafica di una coppia di segmenti, *AB* e *CD*, il cui rapporto misura il valore del prodotto $\cos\theta\cos\beta$ per fissati valori degli angoli α e β. Da tale figura deducesi facilmente in via sintetica l'indicato modo di variazione del prodotto di cui trattasi. Invero pel variare

È notevole che il valore di p nel caso delle viti, dietro le ipotesi del REYE, non può assumere valore infinito, anomalia che invece presentasi nella trattazione dei perni di spinta (*).

19. Eliminata p fra le (1) e (2) mediante la (19), si ottiene per valore di M:

$$M_2 = \frac{\iint r \,.\, \cos\theta \,.\, \cos\beta \,(f \operatorname{sen}\beta - \cos x)\, d\omega}{\iint \cos\theta \,.\, \cos\beta \,.\, (\cos\theta - f\cos\beta)\, d\omega}\, Q \quad \ldots (20).$$

E la (4) per la (19) trasformasi nella:

$$\iint r \,.\, \cos\theta \,.\, \cos\beta \,.\, (f \operatorname{sen}\beta + \cos x)\, d\omega = 0 \quad \ldots (21).$$

Le quali relazioni (**) tenendo conto delle (5), (6), (14) e (16) riduconsi alle seguenti:

$$M_2 = M' + \frac{f}{H}\, \frac{\int_{r_i}^{r_e} r \,.\, dr}{\left(B_{\beta_i}^{\beta_e} - C_{\beta_i}^{\beta_e}\right) \operatorname{sen}\alpha - f \int_{r_i}^{r_e} \frac{r\, dr}{r^2 + H^2}}\, Q \quad \ldots (22)$$

$$B_{\beta_i}^{\beta_e} - C_{\beta_i}^{\beta_e} = \frac{f}{H^2 \operatorname{sen}\alpha} \int_{r_i}^{r_e} \frac{r^3\, dr}{r^2 + H^2} \quad \ldots (23).$$

---

di β da $\frac{\pi}{2}$ a 0, il segmento AB cresce da 0 ad AF, mentre il segmento CD cresce da AC_0 ad ∞.

La figura 5ª è caso speciale della precedente per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (vite rettangolare) ed indica in modo ovvio che il rapporto $\frac{AB}{CD} = \cos\beta \cos\theta$ è massimo e vale $\frac{FA}{FC} = \frac{1}{2}$ per $\beta = \frac{\pi}{4}$.

(*) Cfr. Th. REYE, l. c.

(**) Sta ancora qui la osservazione fatta in nota a pag. 12.

Integrazioni.

20. Eseguiamo gli integrali (16). Essi appartengono alla categoria degli *integrali ellittici;* li esprimeremo anzitutto in funzione degli *integrali ellittici fondamentali.*

Indichiamo con A, B, C i corrispondenti integrali indefiniti:

$$\left.\begin{aligned} A &= \int \frac{d\beta}{\cos^4\beta \,.\, \sqrt{1-\cos^2\alpha \,.\, \cos^2\beta}} \\ B &= \int \frac{d\beta}{\cos^2\beta \,.\, \sqrt{1-\cos^2\alpha \,.\, \cos^2\beta}} \\ C &= \int \frac{d\beta}{\sqrt{1-\cos^2\alpha \,.\, \cos^2\beta}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (16').$$

Ponghiamo inoltre

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{\pi}{2} - \beta \\ k &= \cos\alpha \\ \Delta &= \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\gamma} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (24).$$

Avremo:

$$A = -\int \frac{d\gamma}{\Delta \,.\, \operatorname{sen}^4\gamma}, \quad B = -\int \frac{d\gamma}{\Delta \,.\, \operatorname{sen}^2\gamma}, \quad C = -\int \frac{d\gamma}{\Delta} \quad \ldots (16').$$

Con tali posizioni i primi due integrali ellittici fondamentali, seguendo le notazioni di LEGENDRE, assumono la forma:

$$E = \int \Delta \,.\, d\gamma\,, \qquad F = \int \frac{d\gamma}{\Delta} \quad \ldots (25).$$

Avremo intanto

$$C = -F \quad \ldots (26).$$

Per altro avendosi: (*)

$$d\,\frac{\cos\gamma \,.\, \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\gamma}}{\operatorname{sen}\gamma} = -\Delta \,.\, d\gamma + \frac{d\gamma}{\Delta} - \frac{d\gamma}{\Delta \,.\, \operatorname{sen}^2\gamma},$$

(*) Cfr. SERRET, *Calcul différentiel et intégral.* Vol. II, 1868, pag. 341.

risulta:

$$B = E - F + \Delta \operatorname{cotg} \gamma \qquad \ldots (27).$$

Analogamente, poichè

$$d\frac{\cos\gamma . \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \gamma}}{\operatorname{sen}^3 \gamma} = \frac{2(1+k^2)\,d\gamma}{\Delta . \operatorname{sen}^2 \gamma} - k^2 \frac{d\gamma}{\Delta} - 3\frac{d\gamma}{\Delta . \operatorname{sen}^4 \gamma},$$

risulta:

$$A = \frac{2}{3}(1+k^2)\,B + \frac{k^2}{3} F + \frac{\cos\gamma}{3 \operatorname{sen}^3 \gamma} \Delta \qquad \ldots (28)$$

Onde:

$$\left.\begin{aligned}
A - B\cos^2\alpha &= \frac{1}{3}\Big[(2-k^2)(E-F) + k^2 F + (3 - k^2 + \operatorname{cotg}^2\gamma)\,\Delta . \operatorname{cotg}\gamma\Big] \\
B - C\cos^2\alpha &= (E - F) + k^2 F + \Delta . \cot\gamma \\
A - B &= \frac{1}{3}\Big[(2k^2 - 1)(E-F) + k^2 F + (2k^2 + \operatorname{cotg}^2\gamma)\,\Delta . \operatorname{cotg}\gamma\Big] \\
B - C &= E + \Delta \operatorname{cotg}\gamma
\end{aligned}\right\} \ldots (29).$$

21. Pel calcolo degli integrali definiti $E_{\gamma_i}^{\gamma_e}$, $F_{\gamma_i}^{\gamma_e}$ si applicheranno le relazioni:

$$\left.\begin{aligned}
E_{\gamma_i}^{\gamma_e} &= E(\gamma_e) - E(\gamma_i) \\
F_{\gamma_i}^{\gamma_e} &= F(\gamma_e) - F(\gamma_i)
\end{aligned}\right\} \ldots (30)$$

indicando con $E(\gamma)$ ed $F(\gamma)$ i corrispondenti integrali definiti fra i limiti 0 e γ, i cui valori deduconsi dai noti sviluppi in serie:

$$\left.\begin{aligned}
E(\gamma) &= \gamma - \frac{1}{2} k^2 Z' - \frac{1 . 1}{2 . 4} k^4 Z'' - \frac{1 . 1 . 5}{2 . 4 . 6} k^6 Z''' - \text{ecc.} \\
F(\gamma) &= \gamma + \frac{1}{2} k^2 Z' + \frac{1 . 3}{2 . 4} k^4 Z'' + \frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6} k^6 Z''' + \text{ecc.}
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

posto:

$$Z' = \int_0^\gamma \operatorname{sen}^2\gamma . d\gamma\,, \quad Z'' = \int_0^\gamma \operatorname{sen}^4\gamma . d\gamma\,, \quad Z''' = \int_0^\gamma \operatorname{sen}^6\gamma . d\gamma, \text{ ecc.} \ (31').$$

I valori numerici di questi integrali Z per speciali valori della variabile γ sono dati dalle note *Tabelle del* LEGENDRE (*).

22. Praticamente per viti metalliche (**) γ_e varia fra 1° circa e 3° circa, e corrispondentemente γ_i fra 1° circa e 4° circa, sicchè la differenza $\gamma_e - \gamma_i$ resta sempre minore di 1°.

Dalle succitate tabelle di LEGENDRE le *differenze tabulari*, per variazioni di 1° della variabile γ, sono rispettivamente, arrotondando alla 5ª cifra decimale, per Z', Z'', Z''':

per $\gamma = 1°$	0,000 01	0	0
per $\gamma = 4°$	0,000 07	0	0

Segue che *con sufficiente approssimazione potremo senz'altro assumere:*

$$E = F = \gamma \qquad \ldots (31''),$$

con che le (29) si modificano nelle seguenti:

$$\left.\begin{aligned} A - B\cos^2\alpha &= \frac{1}{3}\left[k^2\gamma + (3 - k^2 + \operatorname{cotg}^3\gamma)\,\Delta\,.\operatorname{cotg}\gamma\right] \\ B - C\cos^2\alpha &= k^2\gamma + \Delta\cot\gamma \\ A - B &= \frac{1}{3}\left[k^2\gamma + (2\,k^2 + \operatorname{cotg}^2\gamma)\,\Delta\,.\operatorname{cotg}\gamma\right] \\ B - C &= \gamma + \Delta\,.\operatorname{cotg}\gamma \end{aligned}\right\}(29').$$

(1) LEGENDRE, *Exercices de calcul intégral.* Tome 3°, 1816, pag. 178.

(2) Assunto come *medio* il tipo WITHWORTH, si ha $\alpha = 62°30'$, onde $k^2 = 0{,}213\ldots$. Inoltre mentre $r_e - r_i = 0{,}64\,h$, la somma $r_e + r_i$ oscilla fra $15\,h$ (grosse viti e $5\,h$ (piccolissime viti). Onde risulta:

Per viti piccolissime: $\beta_e = \operatorname{artg}\dfrac{2\pi r_e}{h} = 86°\,46'$ e $\gamma_e = 3°\,14'$

$\beta_i = \operatorname{artg}\dfrac{2\pi r_i}{h} = 85°\,50'$ e $\gamma_i = 4°\,10'$

Per grosse viti: $\beta_e = 88°\,50'$, $\gamma_e = 1°\,10'$, $\beta_i = 88°\,43'$, $\gamma_i = 1°\,17'$.
Cfr. a proposito A. CASTIGLIANO, l. c., pag. 114.

23. Di più entro i limiti fra cui varia l'angolo γ, con grandissima approssimazione può ritenersi costantemente $\Delta = 1$ (*). Onde le (29') modificansi nelle più semplici:

$$\left.\begin{aligned} A - B\cos^2\alpha &= \frac{1}{3}\left[k^2(\gamma - \operatorname{tg}\beta) + 3\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}^3\beta\right] \\ B - C\cos^2\alpha &= k^2\gamma + \operatorname{tg}\beta \\ A - B &= \frac{1}{3}\left[k^2(\gamma + 2\operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}^3\beta\right] \\ B - C &= \gamma + \operatorname{tg}\beta \end{aligned}\right\} \ldots (29'').$$

Laonde, posto $r_e - r_i = 2\delta$, i corrispondenti integrali definiti fra i limiti β_i e β_e, assumono la forma:

$$\left.\begin{aligned} A_{\beta_i}^{\beta_e} - B_{\beta_i}^{\beta_e}\cos^2\alpha &= \frac{1}{3}\left[-\left(\frac{2\delta}{H} + (\beta_e - \beta_i)\right)\cos^2\alpha + \frac{6\delta}{H} + \frac{r_e^3 - r_i^3}{H^3}\right] \\ B_{\beta_i}^{\beta_e} - C_{\beta_i}^{\beta_e}\cos^2\alpha &= \frac{2\delta}{H} - (\beta_e - \beta_i)\cos^2\alpha \\ A_{\beta_i}^{\beta_e} - B_{\beta_i}^{\beta_e} &= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{4\delta}{H} - (\beta_e - \beta_i)\right)\cos^2\alpha + \frac{r_e^3 - r_i^3}{H^3}\right] \\ B_{\beta_i}^{\beta_e} - C_{\beta_i}^{\beta_e} &= \frac{2\delta}{H} - (\beta_e - \beta_i) \end{aligned}\right\} \ldots (32).$$

(*) $$\Delta = \sqrt{1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\beta}}$$

Onde restando col tipo WITHWORTH, arrotondando alla 4ª cifra decimale si ha:

Per piccolissime viti:

$$\Delta_e = \sqrt{1 - \frac{0{,}213}{1 + 17{,}72^2}} = 0{,}9997 \quad , \quad \Delta_i = \sqrt{1 - \frac{0{,}213}{1 + 13{,}70^2}} = 0{,}9994$$

e per grosse viti:

$$\Delta_e = \sqrt{1 - \frac{0{,}213}{1 + 49{,}14^2}} = 1 \quad , \quad \Delta_i = \sqrt{1 - \frac{0{,}213}{1 - 45{,}12^2}} = 1 .$$

24. Quindi le formole generali (17), (18), (22) e (23) riduconsi alle seguenti:

Viti nuove:

$$M_1 = M' + \frac{1 + \dfrac{\delta^2 + 3\, r_m^{\,2}}{3\, H^2} - \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{\beta_e - \beta_i}{2}\,\dfrac{H}{\delta}\right)\cos^2\alpha}{\dfrac{r_m \operatorname{sen}\alpha}{f H} - 1 + \dfrac{\beta_e - \beta_i}{2}\,\dfrac{H}{\delta}\cos^2\alpha}\, Q H \quad \ldots (33)$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha \, . \operatorname{cotg}\varphi = \left(1 + \dfrac{\delta^2}{3\, r_m^{\,2}}\right)\operatorname{tg}\beta_m - \\ -\dfrac{1}{3}\left[1 - \dfrac{2\,H}{\delta}(\beta_e - \beta_i)\right]\cos^2\alpha \, . \operatorname{cotg}\beta_m \end{array}\right\} \quad \ldots (34).$$

Viti usate:

$$M_2 = M' + \frac{2 f \delta}{\left[2\,\delta - (\beta_e - \beta_i)\, H\right]\operatorname{sen}\alpha - f H \log \dfrac{S_e}{S_i}}\, Q\, r_m \quad \ldots (35)$$

$$\operatorname{sen}\alpha \, . \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\dfrac{2\,\delta\, r_m}{H^2} - \log\dfrac{S_e}{S_i}}{2\,\dfrac{\delta}{H} - (\beta_e - \beta_i)} \quad \ldots (36)\,,$$

nelle quali $\dfrac{S_e}{S_i}$ è il rapporto fra le lunghezze delle spire dell'eliche estreme, esterna ed interna, limitanti la superficie elicoidale di contatto.

Viti rettangolari.

25. Fatto nelle precedenti formole $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, se ne deducono le corrispondenti pel caso in cui il contatto fra vite e chiocciola avvenga secondo un'*elicoide retto*. formole che *in via rigorosa ottenemmo pure direttamente* dalle (12') e (13'), (21) e (22):

Viti nuove:

$$M_1 = M + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{r_m}\right)^2 \frac{f}{1 - f\,\mathrm{cotg}\,\beta_m}\,Q\,r_m \qquad \ldots (33')$$

$$\mathrm{cotg}\,\varphi = \left(1 + \frac{\delta^2}{3\,r_m^2}\right)\mathrm{tg}\,\beta_m \qquad \ldots (34').$$

Viti usate:

$$M_2 = M' + \frac{2\,\delta\,f}{2\,\delta - H(\beta_e - \beta_i) - f\,H \log \dfrac{S_e}{S_i}}\,Q\,r_m \qquad \ldots (35')$$

$$\mathrm{cotg}\,\varphi = \frac{2\,\dfrac{\delta\,r}{H^2} - \log\dfrac{S_e}{S_i}}{2\,\dfrac{\delta}{H} - (\beta_e - \beta_i)} \qquad \ldots (36').$$

Viti in legno.

26. Per le dimensioni delle viti in legno non si dànno regole fisse. Dall'esame di parecchie di tali viti però noi deducemmo che mediamente si assume:

$$r_i = \frac{3}{4}\,r_m\,;\ r_e = \frac{5}{4}\,r_m,\quad h = 2\delta,\ \text{onde}\ \ \alpha = 63°\,30' \backsim.$$

Con tali proporzioni risulta $\lambda^2 = 0,199$, $\beta_e = 86°\ 22' \backsim$, $\beta_i = 83°\,57' \backsim$; onde $\gamma_e = 3°\,38'$, $\gamma_i = 6°\,3'$, $\gamma_e - \gamma_i = 2° \backsim$.

Per $\gamma = 6°$ le differenze tabulari per 1° delle quantità Z', Z'', Z''', arrotondate alla 5ª cifra decimale, risultano rispettivamente:

$$0{,}00022, \qquad 0, \qquad 0$$

In oltre si ha $\Delta_e = 0{,}9996$ $\Delta_i = 0{,}9990$.

Laonde, *sebbene con alquanto minore approssimazione*, possiamo anche per le ordinarie viti in legno assumere le stesse formole (33), (34), (35) e (36) ottenute per le viti metalliche.

Avuto riguardo alla maggiore incertezza con cui si hanno i valori del coefficiente φ di attrito, non si ritiene opportuna la ricerca di speciali formole per le viti in legno.

Perni conici di spinta.

27. Posto $\beta = \frac{\pi}{2}$ (=costante) la (12′) riducesi alla nota formola:

$$M_1 = \frac{2}{3} \frac{f}{\operatorname{sen}\alpha} \frac{r_e^3 - r_i^3}{r_e^2 - r_i^2} Q \qquad \ldots (33'')$$

che dà il momento, rispetto all'asse, della resistenza di attrito in un *perno conico di spinta* a generatrici inclinate di α sull'asse (*).

Posto ancora poi $\beta = \frac{\pi}{2}$ (=costante) nella (19) si ha la formola:

$$p = C \operatorname{sen}\alpha \qquad \ldots (19')$$

esprimente la legge di ripartizione della pressione normale unitaria p sulla superficie dei *perni conici usati*. Da essa deducesi la nota relazione (*).

$$M_2 = \frac{1}{2} \frac{f}{\operatorname{sen}\alpha} (r_e + r_i) Q \qquad \ldots (35'')$$

che dà il momento della resistenza di attrito in un perno conico usato con generatrici inclinati di α sull'asse e premuta secondo l'asse da una forza Q.

Viti di pressione.

28. La vite, quando funziona come organo di pressione appoggia oltrechè sulla superficie elicoidale della madrevite, anche contro un piano, destinato appunto a ricevere la pressione. Allo strisciamento sopra questo piano si oppongono altre resistenze di attrito, da calcolarsi come se si trattasse di un perno di spinta

(*) Cfr. *Des Ingegnieurs-Taschenbuch* herausgegeben von dem Verein *Hütte*. Edizione 13ª, pag. 124.

Fig. 1.

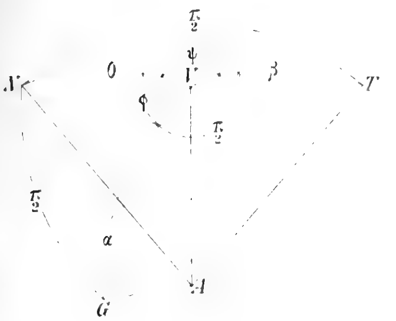


Fig. 2.

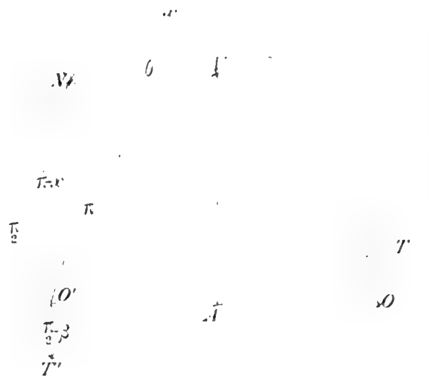


Fig. 3.

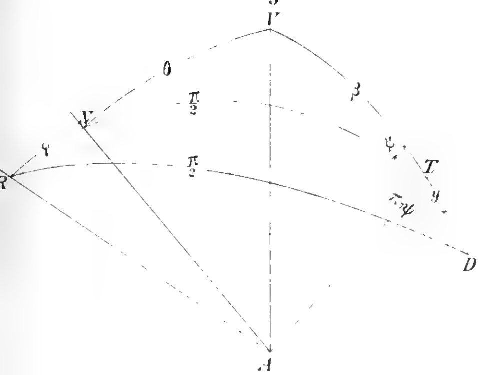


Fig. 5.

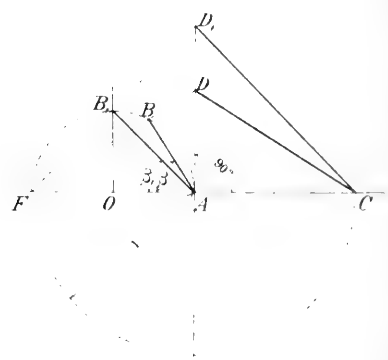
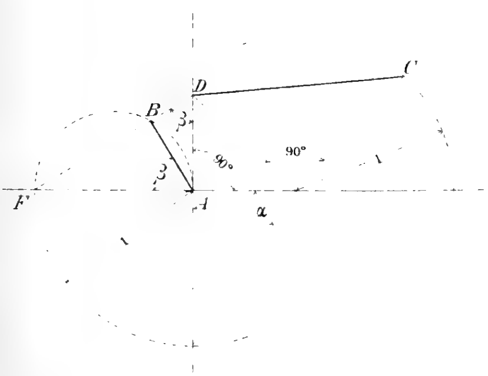


Fig. 4.



SULLA RESISTENZA DI ATTRITO

fra vite e madrevite

Ing. Elia Ovazza

cilindrico. Laonde in tal caso il momento M della potenza si ha sommando quelli dati dalle formole (33) e (33″), ovvero (35) e (35″), secondochè il meccanismo va considerato nuovo od in servizio corrente, posto $\alpha=\frac{\pi}{2}$ nelle (33″) e (35″).

Che se la potenza, invece che sotto forma di una *coppia* agente in piano normale all'asse del meccanismo, si applica *concentrata* all'estremità di un braccio solidale con la vite, vanno ancora considerate altre resistenze di attrito opponentisi al moto della vite funzionante in tal caso ancora come *perno a collare* (*).

Osservazione.

Da alcuni *risultati numerici* ottenuti applicando rispettivamente per diversi casi, limiti fra quelli della pratica, le ordinarie formole approssimate, quelle da noi trovate per meccanismi nuovi e quelle da noi pure trovate per meccanismi usati, deducesi (e questo dipendentemente dalla *poca sporgenza* del verme sul corpo della vite nei casi considerati) che le formole ordinariamente adottate sono *grandemente approssimate*.

Lo scarto massimo tra i valori del momento M della potenza corrispondenti ad uno stesso caso speciale è di 1 : 60, quantità trascurabile, data l'incertezza con cui le esperienze offrono il valore del coefficiente di attrito.

---

(1) Cfr. Reye, l. c., e Cappa-Ovazza, l. c.

Torino, 16 novembre 1890.

Sopra un caso particolare di trasformazione delle funzioni ellittiche;

Nota del Dott. GUIDO VALLE

Fra le varie trasformazioni di 2° ordine, per cui è soddisfatta l'equazione:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{\mu} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} \quad \ldots (1)$$

otto sono del tipo:

$$y = \frac{a + bx + cx^2}{a' + b'x + c'x^2}$$

sei del tipo:

$$y = \frac{a + bx^2}{a' + b'x^2}$$

e *quattro* del tipo:

$$y = \frac{ax}{1 + bx^2}$$

in tutto *diciotto* trasformazioni distinte, che ABEL segnalò pel primo in una sua lettera a LEGENDRE [Oeuvres 1881, t. 1° pag. 568].

Orbene a queste *diciotto* trasformazioni *quattro* altre vanno aggiunte non state finora indicate da alcuno.

Infatti supponiamo che si debba soddisfare all'equazione:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{a\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} \quad \ldots (1')$$

mediante la relazione:

$$y = \frac{a\,x}{1 + bx^2} \quad \ldots\ldots (2)$$

Differenziando la (2) e poi sostituendo in (1') viene:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}}= \\ =\dfrac{a(1-bx^2)\,dx}{\sqrt{[1-(a^2-2b)x^2+b^2x^4][1-(\lambda^2a^2-2b)x^2+b^2x^4]}}\end{array}\right\} \quad (3)$$

Ed affinchè i secondi membri delle (1') e (3) coincidano, è necessario che il prodotto posto sotto quest'ultimo radicale sia divisibile, per $(1-bx^2)^2$, ed inoltre il quoziente sia una funzione in x di 4^o grado.

Ora a questa condizione si può soddisfare in vari modi: infatti ponendo per brevità:

$$A = 1 - (a^2 - 2b)x^2 + b^2x^4 \qquad \ldots\ldots (4)$$

$$B = 1 - (\lambda^2a^2 - 2b)x^2 + b^2x^4 \qquad \ldots\ldots (5)$$

potremmo supporre che sia:

$$A = (1 - bx^2)^2 \qquad \ldots\ldots (6)$$

ovvero

$$B = (1 - bx^2)^2 \qquad \ldots\ldots (7)$$

ovvero anche che A e B siano entrambi divisibili per $1-bx^2$.

Tuttavia quest'ultima ipotesi non è ammissibile, poichè essa porterebbe per conseguenza che la differenza:

$$A - B = (\lambda^2 - 1)a^2x^2$$

sarebbe divisibile per $1-bx^2$, mentre evidentemente non lo è, tranne il caso che fosse $A-B=0$, ciò che del resto non può mai avvenire, essendo λ diverso da 1 ed a diverso da zero. Rimangono dunque ad esaminare le due prime ipotesi, ciascuna delle quali ci fornisce una coppia di trasformazioni distinte.

Supponiamo dapprima:

$$A = 1 - 2bx^2 + b^2x^4 \qquad \ldots\ldots (6)$$

sostituendo nella (4) viene

$$1 - (a^2 - 2b)x^2 + b^2x^4 = 1 - 2bx^2 + b^2x^4$$

donde si trae:

$$a^2 = 4\,b \qquad \ldots (8)$$

Ponendo questi valori di A e di a^2 nel 2° m. della (3), questo diviene:

$$\frac{a\,dx}{\sqrt{1 - 2b\,(2\lambda^2 - 1)\,x^2 + b^2 x^4}}$$

ed affinchè il radicando assuma la forma canonica:

$$(1 - x^2)(1 - k^2 x^2) = 1 - (1 + k^2)\,x^2 + k^2 x^4$$

dovremo porre:

$$b^2 = k^2$$

$$2b\,(2\,\lambda^2 - 1) = 1 + k^2$$

dalle quali deriva:

$$b = \pm\, k$$

$$\lambda^2 = \frac{(1 \pm k^2)^2}{\pm\, 4\,k}$$

e quindi

$$\lambda_1 = \frac{1 + k}{2\sqrt{k}} \qquad \lambda_2 = \frac{1 - k}{2\,i\sqrt{k}}$$

Sostituendo nelle relazioni (2) ed (8) successivamente i valori di λ_1 e λ_2, avremo i due seguenti sistemi di relazioni:

$$\left.\begin{array}{lll} a = 2\sqrt{k} & y = \dfrac{2\sqrt{k}\,.\,x}{1 + k x^2} & \lambda = \dfrac{1 + k}{2\sqrt{k}} \\[2ex] a = 2i\sqrt{k} & y = \dfrac{2i\sqrt{k}\,.\,x}{1 - k x^2} & \lambda = \dfrac{1 - k}{2\,i\sqrt{k}} \end{array}\right\} \ldots (9)$$

Se invece supponiamo:

$$B = 1 - 2b\,x^2 + b^2 x^4$$

allora confrontando questa con la (5), si trae:

$$1 - (\lambda^2 a^2 - 2b)\,x^2 + b\,x^4 = 1 - 2b\,x^2 + b^2 x^4$$

donde deriva:

$$\lambda^2 a^2 = 4b \qquad \ldots\ldots (10)$$

Sostituendo nel 2° m. della (3), questo diviene:

$$\frac{a\,dx}{\sqrt{1 - a^2\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)x^2 + \frac{\lambda^4 a^4}{16}x^4}}$$

Ed affinchè sia identicamente:

$$1 - a^2\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)x^2 + \frac{\lambda^4 a^4}{16}x^4 = 1 - (1 + k^2)x^2 + k^2 x^4$$

dovrà essere:

$$\left.\begin{aligned} a^2\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) &= 1 + k^2 \\ \frac{\lambda^2 a^2}{4} &= \pm k \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (11)$$

dalle quali si deduce:

$$\frac{2 - \lambda^2}{\lambda^2} = \frac{1 + k^2}{\pm 2k} \qquad \ldots\ldots (12)$$

donde

$$\lambda^2 = \frac{\pm 4k}{(1 \pm k)^2} \qquad \ldots\ldots (13)$$

e quindi

$$a = 1 \pm k \qquad \ldots\ldots (14)$$

Se ora nella (12) si assume il segno + e si aggiunge una volta +1 ed un'altra —1 ai due membri, avremo:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{(1+k)^2}{4k}$$

$$\frac{\lambda'^2}{\lambda^2} = \frac{(1-k)^2}{4k}$$

Dividendo m. a m. ed estraendo la radice quadrata, viene:

$$\pm\frac{1}{\lambda}=\frac{1+k}{1-k} \quad \ldots\ldots (15)$$

Volendo invece assumere il segno — basterà mutare il segno a k, ed operando come prima si trova:

$$\pm\lambda'=\frac{1+k}{1-k} \quad \ldots\ldots (16)$$

Dalle relazioni (15) e (16) si traggono i quattro seguenti valori di k:

$$k_1=\frac{1-\lambda'}{1+\lambda'}\ ; \quad \lambda_2=\frac{1+\lambda'}{1-\lambda'}=\frac{1}{k_1}\ ; \quad k_3=-\frac{1-\lambda'}{1+\lambda'}=-k_1\ ;$$

$$k_4=-\frac{1+\lambda'}{1-\lambda'}=-\frac{1}{k_1}$$

D'altra parte si ricava dalla (13):

$$\lambda_1=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\ ; \quad \lambda_2=\frac{-2\sqrt{k}}{1+k}=-\lambda_1\ ; \quad \lambda_3=\frac{2i\sqrt{k}}{1-k}=i\lambda_1\ ;$$

$$\lambda_4=\frac{-2i\sqrt{k}}{1-k}=-i\lambda_1\ .$$

Sostituendo questi valori di λ nella (10), indicando con ρ una radice dell'unità e tenendo presente la (14), si ricaveranno le due seguenti serie di relazioni:

per $\lambda=\pm\dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}$ si ha: $a=(1+k)\rho$ e $b=+k$

per $\lambda=\pm\dfrac{2i\sqrt{k}}{1-k}$ si ha: $a=(1-k)\rho$ e $b=-k$

e quindi le due trasformazioni distinte:

$$y=\frac{(1+k)\rho x}{1+kx^2}$$

$$y=\frac{(1-k)\rho x}{1-kx^2}$$

Riassumendo potremo quindi formare la seguente tabella:

λ	k	a	y
$\dfrac{1+k}{2\sqrt{k}}$	$\lambda \pm i\lambda'$	$2\sqrt{k}$	$\dfrac{2\sqrt{k}.x}{1+kx^2}$
$\dfrac{1-k}{2i\sqrt{k}}$	$\pm\lambda' - i\lambda$	$2i\sqrt{k}$	$\dfrac{2i\sqrt{k}.x}{1-kx^2}$
$\dfrac{\pm 2\sqrt{k}}{1-k}$	$\dfrac{1\pm\lambda'}{1\mp\lambda'}$	$(1+k)\rho$	$\dfrac{(1+k)\rho x}{1+kx^2}$
$\dfrac{\pm 2i\sqrt{k}}{1-k}$	$\dfrac{\lambda'\pm 1}{\lambda'\mp 1}$	$(1-k)\rho$	$\dfrac{(1-k)\rho x}{1-kx^2}$

Queste sono le *quattro* trasformazioni date per la prima volta da Abel (loco citato) dipendenti dalla trasformazione generale:

$$y = \frac{ax}{1+bx^2} \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Ma è alquanto notevole che l'illustre autore non abbia avvertito il fatto che l'equazione (1') è pure soddisfatta mutando in essa y, λ ed a rispettivamente in: $-\frac{1}{y}$, $\frac{1}{\lambda}$ e λa, e che per conseguenza *quattro* altre trasformazioni distinte saranno fornite dall'equazione:

$$y = -\frac{1+bx^2}{a\lambda x}$$

le quali io registro nella seguente tabella:

λ	a	y
$\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$	$1+k$	$-\frac{1+kx^2}{2\sqrt{k}.x}$
$\frac{2i\sqrt{k}}{1-k}$	$1-k$	$i\frac{1-kx^2}{2\sqrt{k}.x}$
$\pm\frac{1+k}{2\sqrt{k}}$	$\pm 2\sqrt{k}$	$\mp\frac{1+kx^2}{(1+k)x}$
$\mp i\frac{1-k}{2\sqrt{k}}$	$\pm 2i\sqrt{k}$	$\mp\frac{1-kx^2}{(1-k)x}$

Si avrebbero adunque *quattro* trasformazioni di più che Abel non abbia segnalato. Ora se l'asserzione è vera, si richiede che pel medesimo modulo, per es. $\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, si abbia simultaneamente:

$$y = \frac{1+kx^2}{2\sqrt{kx}} \quad \text{ed} \quad y = \frac{(1+k)x}{1+kx^2}$$

e che quindi ponendo:

$$\frac{1+kz^2}{2\sqrt{k}.z} = \frac{(1+k)x}{1+kx^2}$$

si possa esprimere z in funzione di x mediante relazioni note. Orbene risolvendo l'equazione precedente rispetto a z si trova:

$$z = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(1+k)x \pm i\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1+kx^2},$$

Ora è noto che ponendo:

$$x = S(u) \quad (*)$$

si ha:

$$S\left(u \pm i\frac{k}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(1+k)\,S(u) \pm i\,C(u)\,\Delta(u)}{1+h\,S^2(u)}$$

per conseguenza si avrà:

$$z = S\left(u \pm i\frac{k}{2}\right).$$

Il che conferma che alle *diciotto* trasformazioni di Abel vanno aggiunte le *quattro* precedenti: sicchè si avranno in tutto *ventidue* trasformazioni del second'ordine tutte quante distinte.

Torino, Novembre 1890.

(*) Ponendo per brevità $S(u) = \operatorname{sen}(\operatorname{am} u)$.

RELAZIONE intorno alla Memoria del sig Filippo CANTAMESSA intitolata: « Il *Mastodonte* di Cinaglio d'Asti e il *Mastodon* (*Tetralophodon*) *arvernensis* ».

Il signor Filippo CANTAMESSA, Autore della Memoria affidata al nostro esame, trovò nel gennaio del 1884, uno scheletro intiero di Mastodonte nelle sabbie plioceniche marine sovrastanti alle marne azzurre nelle vicinanze di Cinaglio, piccolo villaggio a undici chilometri circa da Asti. Egli scavò i preziosi resti con gran cura e con grande diligenza ricompose lo scheletro. Ne risultò uno scheletro quasi completo ed in mirabile stato di conservazione.

Il Cantamessa ne imprese in seguito lo studio visitando per gli opportuni confronti i principali Musei d'Europa e studiando diligentemente i numerosi lavori riferentisi ai resti di Mastodonti fino ad ora conosciuti. Nello scritto sopradetto, che l'autore presenta per essere stampato nelle Memorie della nostra Accademia, egli ha riassunto le sue osservazioni intorno alla determinazione della specie alla quale appartiene lo scheletro del Mastodonte trovato a Cinaglio, sopratutto per quanto si riferisce al cranio che è la parte più importante per lo studio dei Mammiferi in discorso.

Le principali conclusioni alle quali è giunto l'Autore sono le seguenti:

1° Le dimensioni dello scheletro del Mastodonte di Cinaglio superano notevolmente quelle del Mastodonte di Dusino illustrato dal Sismonda e così pure quelle di tutti i resti di Mastodonte fino ad ora conosciuti. Questo carattere unitamente a quello presentato dagli incisivi inferiori fanno vedere nel Mastodonte di Cinaglio una qualche analogia col *Mastodonte ohioticus* sebbene esso indubitatamente si debba riferire alla specie. *M.* (*Tetralophodon*) *arvernensis* Croiset e Jobert.

2° Lo studio del cranio, notevolmente ben conservato, del *M.* di Cinaglio concede all'Autore di dare una diagnosi più sicura e completa del *M. arvernensis*; il che fino ad ora non era stato possibile di fare per l'insufficienza dei resti conosciuti.

3° L'affinità del *M. arvernensis* col *M. sivalensis* accennata dal Falconer e dal Leydekker viene confermata collo studio del *M.* di Cinaglio.

4° Lo studio del cranio del *M.* di Cinaglio porta un contributo importante per determinare il valore, come carattere diagnostico, della sinfisi del mento dei Proboscidati fossili.

5° Finalmente il rinvenimento del Mastodonte di Cinaglio ha particolare importanza per lo studio della geologia del Piemonte confermando l'esistenza in esso di proboscidati nelle sabbie gialle plioceniche marine; il che era stato contestato pel Piemonte dal Sismonda e dal Gastaldi. Esso serve pure a confermare il sincronismo del terreno fluvio-lacustre (alluvioni plioceniche) col pliocene superiore marino.

I sottoscritti, considerata l'importanza dei fatti nuovi annunciati nella Memoria dell'Autore in ordine alla Paleontologia dei Proboscidati fossili in generale, e in particolar modo in ordine alla geologia e paleontologia Piemontese, ne propongono la lettura alla Classe, e qualora questa lo approvi, la stampa nei volumi Accademici.

G. Spezia.

L. Camerano, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Giuseppe Basso.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 14 Dicembre 1890 . . . . *Pag.* 155

Ovazza — Sulla resistenza di attrito fra vite e madrevite . . . . . » 157

Valle — Sopra un caso particolare di trasformazione delle funzioni ellittiche . . . . » 178

Camerano — Relazione intorno alla Memoria del sig. Filippo Cantamessa intitolata: « *Il Mastodonte di Cinaglio d'Asti e il Mastodon (Tetralophodon) arvernensis* . . . . » 186

Torino — Tip. Reale-Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVI, DISP. 4ª, 1890-91

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 28 Dicembre 1890.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Cossa, Direttore della Classe, Bruno, Berruti, Siacci, D'Ovidio, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Giacomini, Segre e Basso Segretario.

Il Segretario legge l'atto verbale dell'adunanza precedente il quale viene approvato.

Il Socio Siacci presenta in dono un volume del Prof. Rydberg intitolato « *Recherches sur la constitution des spectres d'emission des élements chimiques.* » Questo lavoro fu inviato dall'Autore al compianto Socio Prof. A. Genocchi, che negli ultimi anni di sua vita copriva l'ufficio di Presidente dell'Accademia.

Vengono letti ed accolti per la pubblicazione negli *Atti* i quattro lavori seguenti:

1° « *Su di un muscolo a fibre liscie osservato nella zona ciliare dell'occhio del Thynnus vulgaris* (Clinica oculistica della Università di Pisa); Nota del dott. Emilio Faravelli, presentata dal Socio Bizzozero;

2° « *Le trasformazioni razionali dello spazio determinato da una superficie generale di terz'ordine;* » Nota del Prof. Gino Loria della Università di Genova, presentata dal Socio D'Ovidio;

3° « *Sopra alcune curve regolari;* » Nota del Professore Giuseppe Peano della Università di Torino, presentata dal Socio Segre;

4° « *Sull'accelerazione di second'ordine nel moto rotatorio intorno ad un punto*; » Nota del Dott. Enrico Novarese, Assistente presso la Facoltà matematica dell'Università di Torino, presentata dal Socio Basso.

LETTURE

Su di un muscolo a fibre liscie osservato nella zona ciliare dell'occhio del Thynnus vulgaris;

Nota del Dott. EMILIO FARAVELLI

Durante alcune ricerche anatomiche comparative che intrapresi al principio di questo anno scolastico sull'occhio dei pesci richiamò la mia attenzione una particolarità anatomica abbastanza importante che riscontrai nel segmento anteriore dell'occhio del tonno (*thynnus vulgaris*). Indugiai finora a descriverla anzitutto perchè il materiale che potei raccogliere nell'inverno era troppo scarso per poterne fare uno studio; in secondo luogo perchè trattandosi, come dirò tosto, d'una forma anatomica visibile ad occhio nudo dietro un esame un po' accurato dell'occhio, dubitava fosse già stata da qualche autore descritta. Non avendo però trovato dopo indagini bibliografiche, per quanto potei accurate (1), alcuna notizia in proposito, mi decido a darne un cenno.

Non sarà, credo, inutile che per maggiore chiarezza esponga in brevi parole quanto è noto per studi antecedenti su quella parte del segmento anteriore del bulbo che ha attinenza coll'organo sul quale dovrò intrattenermi.

Esiste nell'occhio dei pesci un legamento anulare il quale unisce la cornea all'iride, corrispondente, secondo Leuckart,

(1) Sento il dovere di ringraziare qui il chiarissimo prof. Richiardi il quale in questa ed in altre occasioni con squisita gentilezza e liberalità mise a mia disposizione la sua ricchissima biblioteca.

Angelucci e Berger, al legamento pettinato degli animali superiori. La sua forma e le sue dimensioni variano assai nelle diverse specie.

Dal margine sclerale anteriore poi ed all'esterno del detto legamento, ne parte un altro che copre la superficie esterna della porzione anteriore della coroidea. Si chiama legamento ciliare ed è costituito di fibre connettive compatte che all'indietro vanno diminuendo di volume. Berger (1), il quale fece uno studio assai interessante sull'occhio dei pesci, Leuckart e Leydig non riscontrarono mai nello stesso delle fibre muscolari.

Ecco ora quello che io ho osservato: separando con un taglio praticato un po' all'indietro dell'equatore, la parte anteriore dalla posteriore di un occhio di tonno, e staccando con cautela nell'emisfero anteriore la coroidea dalla sclerotica, si incontra presso a poco in corrispondenza dell'equatore, nel quadrante superiore posteriore dell'occhio (che corrisponderebbe al quadrante superiore esterno dell'emisfero anteriore dell'occhio umano) un nervo abbastanza voluminoso (diametro di poco inferiore ad 1 mm.) il quale dopo aver perforato dall'esterno all'interno una delle due valve ossee che costituiscono lo scheletro dell'occhio del tonno, si dirige verso la cornea. Dopo breve decorso, dividendosi di solito in due rami, si immette in un tessuto d'aspetto biancastro, quasi lardaceo, succolento, il quale viene messo assai bene in evidenza staccando con leggera trazione tutta la periferia dell'iride dalla cornea. Si presenta allora come un rialzo leggermente convesso, che per una lunghezza di 22-25 mm. dal margine periferico dell'iride si porta all'indietro per circa 7 mm. diminuendo progressivamente di spessore per confondersi col tessuto coroideale. Ai lati diminuisce pure a poco a poco di spessore finchè si continua nel legamento ciliare del quale fa parte.

Staccati dei frammenti di questo tessuto in parecchi punti ed esaminati al microscopio trattandoli prima con carmino, ma meglio con ematossilina, si trovano costituiti da un intreccio di fibre le quali hanno tutti i caratteri delle muscolari liscie. Hanno una forma fusata ed una lunghezza che varia da 0,066-0,110 mm.; sono provvedute di un nucleo spiccatissimo di forma ora ovale, ora

---

(1) E. Berger. *Beiträge zur Anat. des Sehorganes der Fische.* Morphologisches Jahrbuch, 1883, S. 97.

a bastoncino, talora rotondeggiante, il cui diametro longitudinale oscilla tra 0,005-0,007 mm., il trasverso tra 0,002-0,004 mm. alle cui estremità si notano delle granulazioni fine e rifrangenti (V. fig. 1ª).

Tra queste fibre si trovano qua e là dei nervi midollati, ora isolati, ora a fascio. Avendo acquistato la sicurezza, in seguito a numerose preparazioni di tali forme elementari, che il tessuto in discorso era di natura muscolare a fibre liscie, passai allo studio più esatto della forma di tale muscolo e dei suoi rapporti.

Decalcificai perciò la sostanza ossea della sclerotica in soluzione di acido cromico all' 1 $^0/_0$ o in soluzione preparata secondo la formola di Ebner, e della metà anteriore del bulbo praticai col microtomo sezioni in tutti i meridiani.

Tralascio per brevità di descrivere il legamento anulare corneoirideo, perchè poco avrei da aggiungere alla descrizione data da Berger (1) e da altri, limitandomi solo al legamento ciliare.

Distinguerò dello stesso, per maggiore semplicità, una parte occupante circa i $^2/_3$ della periferia del bulbo di natura connettivale, ed una parte corrispondente al rimanente tratto, che si presenta, come dissi, modificata, ingrossata e di natura evidentemente muscolare.

Per la prima porzione è perfettamente esatto quanto ne dicono Berger, Leuckart, ecc.: cioè sulle sezioni meridiane si appalesa come un piccolo fascetto di fibre connettivali compatte, che si inserisce al punto in cui la superficie interna della cornea si continua nella sclerotica, e va all'indietro sotto forma di una sottile laminetta perdendosi nel tessuto sopracoroideale. Ha uno spessore che varia tra 0,110-0,137 mm. Come prima per dilacerazione, così pure sulle sezioni meridiane non incontrai mai delle fibre muscolari (V. fig. 2ª).

L'altro tratto, che comprende il terzo posteriore superiore della zona che forma questo legamento, ha l'aspetto, anche ad occhio nudo, di un piccolo muscolo con una parte mediana più sviluppata la quale va assottigliandosi gradatamente alle due estremità anteriore e posteriore. Lo spessore massimo del ventre muscolare è di circa 1,5 mm. La superficie rivolta verso la coroidea è molto

---

(1) Loc. cit., pag. 103.

più convessa di quella che guarda la sclerotica; questa anzi in talune sezioni riscontrai perfettamente piana. Esaminando una serie di tagli meridiani del tratto suddetto, si osserva che tale forma caratteristica va perdendosi dalla parte mediana verso i lati per un progressivo assottigliamento del ventre finchè alla fine si confonde nel legamento. La lunghezza del muscolo, dall'attacco corneale al punto opposto in cui si perde nel tessuto sopracoroideale, è di 7 mm. circa.

Nelle sezioni meridiane si vede che le fibre muscolari sono tutte dirette dall'indietro all'avanti, stipate le une accanto alle altre. Poco numerosi sono i vasi, numerosi invece i nervi, i più voluminosi dei quali si trovano di solito alla parte interna e posteriore. La faccia esterna del muscolo è parallela ed attigua alla lamina interna del cercine osseo scleroticale, la quale è rivestita da un sottile strato intermedio di connettivo lasso. La faccia interna, partendo dall'inserzione corneale per un tratto che varia alquanto nei singoli occhi da 1-2.5 mm., è in rapporto col legamento irido-corneale; per il resto della sua estensione colla superficie esterna della coroidea, dalla quale viene separata solamente da una striscia di pigmento che si continua con quello della superficie anteriore dell'iride. Noto qui per incidenza che lo spazio compreso tra la periferia della cornea e la base dell'iride, occupato dal legamento irido-corneale, varia alquanto per forma e dimensione nei diversi occhi. Talora è ampio ed ha la forma di un triangolo equilatero (V. fig. 3ª *d*), tal altra angusto per una maggiore convessità della parte anteriore interna del muscolo e protrusione dell'iride (V. fig. 4ª *d*).

La cagione di questo fatto non saprei dire; potrebbe forse attribuirsi alla diversa età degli animali, ovvero al diverso stato di conservazione dei bulbi; non è però improbabile che si tratti di differenze individuali, le quali, come è noto, si presentano di frequente e nel modo più bizzarro nell'occhio dei pesci. Basta citare a questo proposito la campanula d'Haller, la quale in alcune specie appare notevolmente più voluminosa in un occhio che nell'altro dello stesso animale (1).

L'inserzione alla periferia corneale non differisce da quella

---

(1) LEYDIG, *Beit. z. mikr. Anat. u. Entwick der Rochen u. Haie* 1857, p. 27.

di tutto il legamento, si fa però su una superficie più estesa (0,5 mm. circa) in ragione del maggior spessore del settore corrispondente. Ivi il tessuto ha un aspetto fibroso assai compatto. Le fibre più esterne si inseriscono alla faccia posteriore della cornea appena al davanti ed all'indentro dell'attacco di questa all'anello osseo; le centrali e le interne fanno al punto d'inserzione una leggera curva colla concavità all'interno. Questa disposizione è visibile anche nella sostanza corneale per brevissimo tratto, poi le fibre si intrecciano colle lamine corneali e non mi riuscì di stabilire con sicurezza ulteriori rapporti di quelle con queste.

L'estremità posteriore assai assottigliata si confonde collo strato sopracoroideale costituito da connettivo a larghe maglie. L'iride in corrispondenza del descritto settore muscolare presenta uno spessore notevolmente maggiore che non in corrispondenza del resto della zona legamentosa (V. fig. 2ª, 3ª, 4ª).

Come dissi, questo tessuto è assai ricco di nervi provenienti dal tronco cui sopra ho accennato. Non mi fu possibile finora, come avrei desiderato, fare delle ricerche sulle loro ultime terminazioni, per la mancanza di materiale abbondante e fresco quale si esige per tali sorta di ricerche.

Conoscendo ora nei loro tratti principali l'ubicazione, le dimensioni, i rapporti e la struttura di questo muscolo è ovvio il domandarsi quale possa essere la sua funzione. Una risposta soddisfacente a questa domanda è assai difficile, poichè le attuali cognizioni anatomiche, ma specialmente fisiologiche sull'occhio dei pesci, sono troppo piene di lacune e di contraddizioni. E ciò non deve meravigliare se si pensa alle varietà grandi che esistono nella forma anatomica di questo organo nelle singole specie alle quali per abitudini di vita le più disparate, deve occorrere un corrispondente vario modo di adattamento dell'organo visivo.

Il punto fisso d'inserzione del muscolo essendo alla cornea, è naturale il supporre che dovrà, contraendosi, far sentire la sua azione sulla coroidea stirandola all'innanzi. Se, come si ammette da Leuckart (1) e altri, l'azione della campanula di Haller (la cui struttura a fibre muscolari liscie primamente dimostrata da

(1) *Hand. der. ges. Aug.* Bd. 11, p. 227.

Leydig (1) è da altri contestata (2)) si esercita sulla lente in modo da appiattirla, o da avvicinarla alquanto alla retina, o da produrre questi due fatti insieme, per cui ne risulterebbe che, al contrario di quanto avviene negli altri vertebrati, l'occhio dei pesci sarebbe allo stato di riposo adattato per oggetti vicini, durante l'accomodazione per oggetti lontani, si potrebbe pensare che questo muscolo possa, stirando leggermente all'innanzi la coroidea e la retina, combinare la sua azione con quella della campanula. Ma oltrechè è poco probabile che la retina possa subire senza soffrirne dei movimenti per quanto leggeri durante la sua funzione, quest'ipotesi appoggerebbe su un fatto che è ben lontano dall'essere dimostrato. Ad ogni modo ho voluto accennarla attendendo che da ulteriori studi venga colmata questa lacuna.

Concludendo dunque:

Nell'occhio del *thynnus vulgaris* il legamento irido-ciliare non ha la stessa forma e struttura in tutta la sua estensione; mentre nei $^2/_3$ circa di questa è costituito da una sottile lamina di tessuto connettivo, nella rimanente porzione e precisamente nel quadrante superiore posteriore (come ho constatato in due esemplari intatti del pesce in discorso che ho potuto avere a mia disposizione), si trasforma in un organo assai più voluminoso e di natura muscolare (fibre liscie). Non so se lo stesso fatto si verifichi nelle altre specie di tonno.

Circa all'azione fisiologica di quest'ultima porzione è impossibile ora pronunciare un giudizio.

Al Prof. N. Manfredi i cui autorevoli consigli non mi mancarono mai durante queste ricerche mi è caro porgere qui i più vivi ringraziamenti.

Pisa, 18 maggio 1890.

---

(1) *Histologie*, p. 234.

(2) BEAUREGARD, *Rech. sur les plexus vasculaires de la chambre post. de l'œil des vertébrés.* Ann. des sciences. nat. (Zoologie) 1876, serie 6, t. IV, p. 116.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

Fig. 1ª — Fibre muscolari liscie isolate per dilacerazione. (Koristka oc. 3 — ob. 8 tubo abb.).

» 2ª — Sezione meridiana della parte anteriore dell'occhio in corrispondenza del legamento ciliare (Micr. sempl. Reichert - 10 diam. Cam. lucida Abbe).

a) cornea

b) iride

c) legamento ciliare

d) » anulare

e) coroidea

f) lamina ossea sdoppiantesi in

g) due foglietti che all'innanzi si ricongiungono e racchiudono della sostanza ossea spugnosa e dell'adipe.

» 3ª e 4ª — Sezione meridiana della parte anteriore di due occhi in corrispondenza del muscolo ciliare (Micr. sempl. Reichert - 10 diam. Cam. lucida Abbe).

a) cornea

b) iride

c) muscolo ciliare

d) legamento anulare

e) coroidea

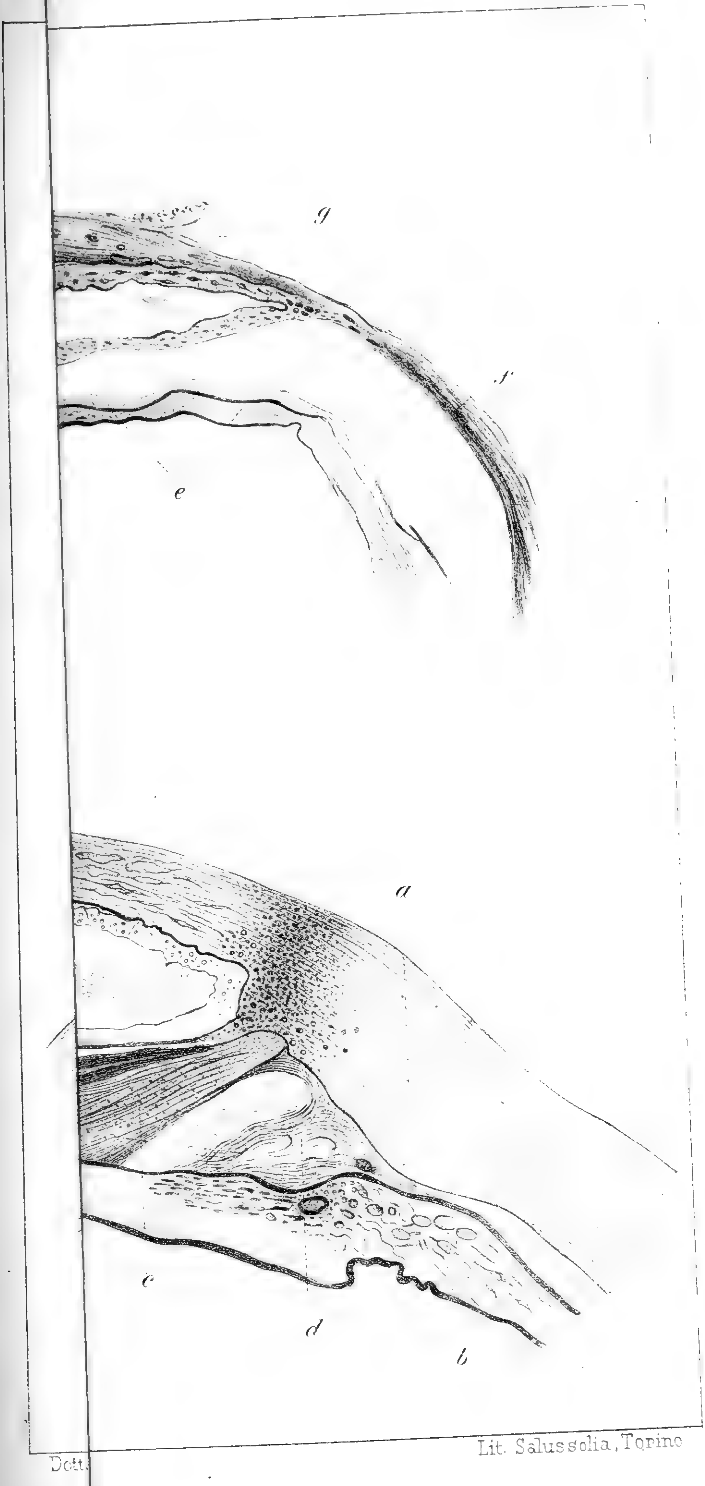
f) lamina ossea

g) foglietti in cui si sdoppia

h) tessuto adiposo

l) sezione di un grosso tronco nervoso nel muscolo.

Tav. V.



Dott.

Lit. Salussolia, Torino

Fig 1

Fig 2

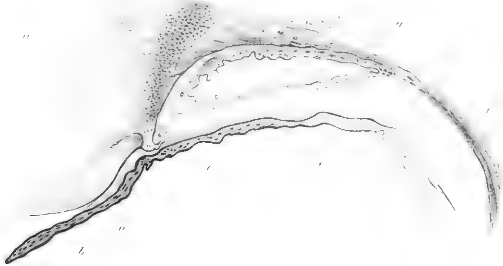


Fig 4

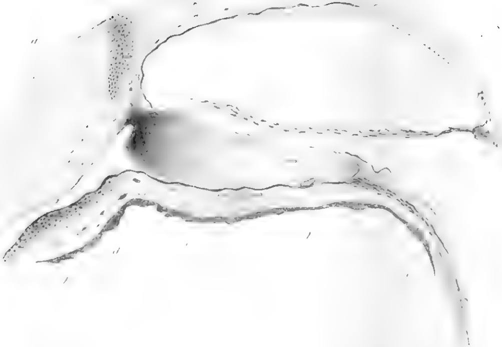
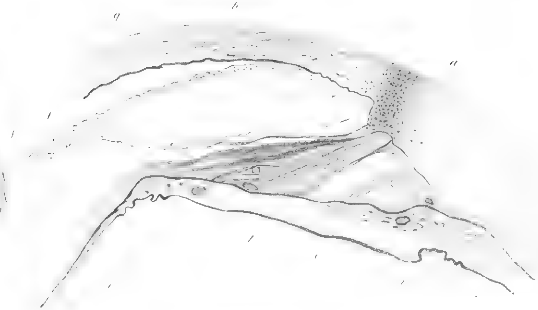


Fig 3



Le trasformazioni razionali dello spazio determinate da una superficie generale di terz'ordine

Nota di GINO LORIA

Come è noto, nel modo di studiare le trasformazioni razionali dello spazio dal Prof. Cremona proposto e ampiamente sviluppato (*), si prendono le mosse da una superficie omaloide φ di cui si conosce una rappresentazione su un piano Π e si studia se e di quali sistemi omaloidici essa possa far parte. In tal modo ogni superficie omaloide suscettibile di essere elemento di un sistema omaloidico si presenta come ente generatore di un gruppo — il quale può anche essere costituito da un solo membro — di trasformazioni razionali dello spazio (**). È sempre di grande

(*) Nelle due note *Sulle trasformazioni razionali nello spazio* inserite nei *Rend. del R. Istituto Lombardo* (T. IV della 2ª Serie, p. 268 e 315) e nella Memoria di egual titolo pubblicata negli *Annali di Matematica* (t. V della 2ª serie, p. 131).

Per alcune denominazioni da me adottate e certi teoremi tacitamente invocati, rimando alle mia Nota *Sulla classificazione delle trasformazioni razionali dello spazio e in particolare sulle trasformazioni di genere* 0 (Rend. del R. Istituto Lombardo, serie 2ª, t. XXIII, 1890), alla quale la presente serve di prima continuazione.

(**) Questo fatto non ha riscontro nella teoria delle corrispondenze razionali fra due piani, perchè è facile dimostrare che *una curva omaloide* (cioè *razionale*) *dà origine al massimo ad una rete omaloidica*. Sia infatti C una curva d'ordine n con r_α punti α -pli ($\alpha = 2, 3, \ldots$); affinchè essa possa entrare come elemento di una rete omaloidica è *necessario* che sia

$$(a) \qquad \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_\alpha \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} r_\alpha = 0$$

$$(b) \qquad \frac{n(n+3)}{2} - \sum_\alpha \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} r_\alpha \geq 2$$

Supposte verificate queste relazioni, una rete omaloidica contenente C dovrà avere un numero di punti fondamentali semplici il quale soddisfi le condizioni

$$(c) \qquad \begin{aligned} &\frac{n(n+3)}{2} - \sum_\alpha \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} r_\alpha - r_1 = 2 \\ &n^2 - \sum_\alpha \alpha^2 r_\alpha \qquad\quad - r_1 = 1 , \end{aligned}$$

interesse il conoscere completamente la composizione di tale gruppo o, in altre parole, il sapere quali siano tutte le trasformazioni razionali dello spazio che ripetono la loro origine da un'assegnata superficie. Per eseguire questa determinazione si possiede uno strumento conveniente in quel metodo inventato dal Cremona stesso per costruire le trasformazioni razionali determinate da una data superficie — metodo di cui supponiamo ora e in seguito nel lettore perfetta conoscenza —, disponendo in tutti i modi possibili del *luogo fisso* e della *rete ausiliaria*: onde applicarlo fa mestieri però avere presenti quali siano *tutte* le reti omaloidiche di curve piane d'ordine assegnato e non dimenticare che, quando la superficie omaloide considerata è suscettibile di parecchie rappresentazioni univoche fra loro equivalenti, vi sono su di essa più sistemi di curve di egual natura ma corrispondenti a sistemi di curve piane fra loro differenti (mutabili però gli uni negli altri col mezzo di trasformazioni univoche lascianti immutato l'ordine della rappresentazione piana della superficie).

Ma per eseguire l'anzidetta determinazione possono anche servire ragionamenti diversi, i quali si possono dire più diretti, perchè si fondano piuttosto sull'esame delle proprietà specifiche della superficie in questione che sullo studio esclusivo della sua rappresentazione piana.

Si noti infatti che, detto m l'ordine delle imagini delle sezioni piane di φ nella rappresentazione d'ordine minimo e M l'ordine di una *sezione principale* di questa superficie (cioè della parte mobile della curva in cui essa viene segata da una superficie di egual ordine avente comuni con essa le singolarità), l'ordine ν di un sistema omaloidico *inverso* ad uno determinato da φ non può essere inferiore a m nè superiore a M; ne viene che il sistema *diretto* avrà per linee fondamentali, oltre alle linee singolari di φ, delle linee fondamentali semplici equivalenti (*), nell'intersezione di due superficie analoghe a φ, a una linea d'or-

---

la seconda delle quali è, in causa della (a), conseguenza della prima. Ora la (c), in virtù della (b), dà per r_1 un valore determinato e non negativo, quindi è dimostrato quanto erasi enunciato; in pari tempo si vede che *l'essere o non* C *atta a produrre una trasformazione piana razionale dipende dall'essere o non verificata la condizione* (b), cioè *dall'esistere o non* ∞^r, $r \geq 2$, *curve aventi comuni con* C *le singolarità.*

(*) Ci esprimiamo così per includere il caso in cui lungo una linea fondamentale abbia luogo un contatto d'ordine qualsivoglia.

dine n compreso fra $M-m$ e 0. Si prenda ora ad arbitrio n entro questi limiti e si considerino successivamente tutte quelle curve di ordine equivalente a n, proprie o degeneri, giacenti sulla data superficie φ, avendo cura di escludere quelle che sono casi particolari di altre, onde non porre ad uno stesso livello una trasformazione razionale ed i suoi casi particolari. Presa una qualunque, f, di esse per ulteriore linea fondamentale si studi se e in quali modi, sia possibile scegliere sulla data superficie i punti fondamentali semplici (punti i quali possono essere di semplice passaggio o di contatto d'ordine qualunque) per modo che il sistema risulti in conseguenza omaloidico: allora si avrà un sistema il cui inverso è d'ordine $\nu=M-n$. Così si otterranno tutti i sistemi omaloidici determinati dalla data superficie φ e i cui inversi sono d'ordine $M-n$: variando poi n fra $M-m$ e 0 si otterranno tutti i sistemi omaloidici determinati da φ.

Nell'applicare questo procedimento occorre determinare *sempre* la postulazione (*) della curva f e *talora* anche il numero di condizioni che vengono aggiunte a questa postulazione allorquando si esige che f sia linea fondamentale di contatto per le superficie considerate. Noti questi numeri si conoscerà anche il grado d'infinità i del sistema costituito da tutte le superficie φ che passano per f o ivi si toccano e sarà facile l'assegnare il numero ρ delle intersezioni mobili di tre superficie qualunque appartenenti a questo sistema ∞^i. Ne viene che se noi imaginiamo di sottoporre le superficie di tale sistema a passare per x_1 punti dati e ad avere con $x_r\,(r=2, 3, \ldots)$ piani dati in altrettanti punti dati dei contatti d'ordine $r-1$: se inoltre rammentiamo che:

1°. Per una superficie algebrica qualunque l'avere in un dato punto con un dato piano un contatto d'ordine $r-1$, equivale a $\frac{1}{2}r(r+1)$ condizioni lineari semplici (**);

2°. Sono riunite r^2 intersezioni di tre superficie in un punto

---

(*) Secondo la denominazione proposta dal Cayley nella sua Memoria *On the Rational Transformation between two Spaces* (Proc. of the Lond math. Society, 1870, p. 165).

(**) Ciò risulta dall'osservare che in coordinate omogenee la forma generale dell'equazione di una superficie d'ordine n avente col piano di equazione $\varphi\equiv\varphi_1 x_1+\varphi_2 x_2+\varphi_3 x_3=0$ nel punto $x_1=x_2=x_3=0$ un contatto d'ordine r è

$$f_0\varphi x_4^{n-1}+f_1\varphi x_4^{n-2}+\ldots+f_{r-2}\varphi x_4^{n-r+1}+f_r x_4^{n-r}+\ldots+f_{n-1}x_4+f_n=0,$$

ove in genere f_i è una forma ternaria di grado i in x_1, x_2, x_3.

nel quale esse hanno con uno stesso piano un contatto d'ordine $r-1$, vedremo che affinchè il sistema risulti in conseguenza omaloidico è *necessario* che i numeri $x_1\ x_2\ x_3$ ... soddisfino le equazioni seguenti:

$$x_1+3x_2+6x_3+\ldots+\tfrac{1}{2}k(k+1)x_k=i-3 \quad \ldots (1),$$

$$x_1+4x_2+9x_3+\ldots+k^2x_k \quad =\rho-1 \quad \ldots (2),$$

ove k si deve scegliere in modo che sia

$$\tfrac{1}{2}k(k+1)\leq i-3\,, \qquad k^2\leq\rho-1 \text{ (*)}.$$

Lo scegliere i numeri x in questo modo è *in generale* anche *sufficiente* per l'omaloidicità del sistema ottenuto; lo è sempre ad eccezione di quei casi (alcuni dei quali ci si presenteranno più innanzi) in cui le condizioni imposte alle superficie φ del sistema ∞^i producano uno spezzamento in una parte fissa e una mobile della linea d'intersezione di due qualunque fra esse.

Le ovvie osservazioni esposte ci serviranno ad ottenere tutte le trasformazioni razionali dello spazio determinate da una superficie generale di terzo ordine φ (**); per ciascuna daremo i caratteri

---

(*) Per determinare tutte le soluzioni intere e positive delle equazioni (1) e (2), se ne deduca per sottrazione la seguente

$$(3) \quad x_2+3x_3+\ldots+\frac{1}{2}k(k-1)x_k=\rho-i+2\,;$$

si vedrà allora che gli unici valori ammissibili per x_k sono quelli non negativi nè maggiori a $(\rho-i+2):\frac{1}{2}k(k-1)$. Attribuito ad x_k, successivamente ciascuno di questi valori si otterranno altrettante equazioni indeterminate con le incognite x_2, x_3, ..., x_{k-1}; in ognuna di queste si potrà liberarsi da x_{k-1} colla stessa considerazione con cui si è fatto scomparire x_k dalla (3); così continuando si otterranno tutti i sistemi di valori di x_2 $x_3 \ldots x_k$ che soddisfano la (3): sostituendoli nella (1), o nella (2), si avranno altrettante soluzioni intere delle date equazioni; escludendo quelle per cui $x_1<0$ si sarà sciolto il problema di risolvere completamente in numeri interi positivi le equazioni (1) e (2).

(**) Esse mi hanno già servito a determinare tutte le trasformazioni razionali dello spazio prodotte o da una superficie di 4° ordine con conica essenziali e dimostreremo che esse esauriscono il gruppo generato da una superficie cubica senza singolarità (*): in alcune note abbiamo dimostrate certe proposizioni generali, forse nuove, che ci occorse invocare.

Per risolvere il problema che ci siamo proposti notiamo anzitutto che un sistema omaloidico contenente una superficie φ generale di terzo ordine avrà un sistema inverso il cui ordine ν sarà non inferiore a 3 nè superiore a 9; epperò le sue linee fondamentali dovranno, nell'intersezione di due superficie del sistema, equivalere a un luogo il cui ordine non può oltrepassare 6 ma può discendere fino a 0. Basterà quindi passare in rassegna le curve essenzialmente distinte (**), proprie o degeneri, contenute in φ e per ciascuna esaminare se possa fungere da linea fondamentale (di intersezione o contatto) di un sistema omaloidico; conviene per ciò tenere presente la classificazione delle curve algebriche sghembe e i risultati concernenti la geometria su una superficie cubica: quella si rileva dalla memoria del Nöther *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven* (***), questi si trovano nel lavoro dello Sturm *Ueber die Curven auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung* (****).

1. Una curva semplice di 6° ordine e genere inferiore a 3 posta su una superficie cubica, ha almeno una quadrisecante;

---

doppia (propria), o da una superficie di 5° ordine con quintica razionale doppia (cfr. il n. 3 della presente Nota), o finalmente da una superficie pure di 5° ordine dotata di una retta tripla incontrata da due rette doppie (cfr. il n. 4).

(*) Ad eccezione dell'ultima, queste trasformazioni furono rapidamente indicate dal Cremona, a p. 274-277 del T. IV, 2ª Serie, dei *Rend. del R. Istituto Lombardo*, fra gli esempi di applicazione del metodo citato nel testo.

(**) Perciò resta inteso che dalla nostra collezione vengono escluse tutte quelle trasformazioni che sono casi particolari di altre; esse nascono supponendo che, nelle trasformazioni che incontreremo, le curve fondamentali assumano forme speciali (p. es. si spezzino in curve d'ordine inferiore, per modo che nella curva composta l'ordine e il numero dei punti doppi apparenti siano gli stessi che nella curva primitiva).

(***) *Math. Abh. nicht zur Berl. Akademie gehör. Gelehrter*, 1882, I.

Preferisco questa Memoria a quella di egual tema dell'Halphen, perchè contiene i risultati che ci son necessari sotto forma più conveniente al nostro scopo.

(****) *Math. Annalen*, T. XXI, 1883, p. 457-514.

ogni superficie di 3° ordine contenente la curva contiene in conseguenza questa o queste quadrisecanti; epperò la curva stessa non può da sola fare l'ufficio di linea fondamentale di un sistema omaloidico. Come tale può dunque servire soltanto una sestica gobba di genere 3 o 4. Ora siccome quest'ultima è intersezione completa di una superficie di 3° ordine con una di 2°, così due qualunque fra le ∞^4 superficie cubiche che le contengano s'incontrano ancora in una cubica piana; affinchè questa sia razionale devono quelle superficie toccare in un punto dato un piano dato; ora questa condizione riducendo a ∞^1 le superficie passanti per la detta curva, toglie ad esse la possibilità di produrre un sistema omaloidico; quindi *nemmeno una curva di 6° ordine e genere 4 può fungere da linea fondamentale di un sistema omaloidico.*

Ci resta quindi soltanto da esaminare se lo possa quella f di genere 3. Ora questa è completata da una cubica gobba che la sega in 8 punti nella intersezione di due superficie cubiche (*); per ciò tre qualunque superficie di 3° ordine passanti per f si tagliano in un solo punto ad essa esterno. D'altronde sono ∞^3 le superficie di 3° ordine che contengono f. Dunque da sola individua un sistema omaloidico di 3° ordine il cui inverso è pure di 3° ordine. La Jacobiana del sistema diretto è una superficie di 8° ordine avente f per linea tripla; siccome per ogni punto di f passano tre rette appoggiate alla curva in altri due punti e siccome ognuna di queste rette sta sulla Jacobiana anzidetta, così questa non è altro che il luogo delle trisecanti di f. Per conseguenza è una rigata di genere 3 segante in 6 rette ogni superficie del sistema omaloidico; emerge da ciò che il sistema inverso ha una linea fondamentale di ordine 6 e genere 3, epperò è identico al sistema diretto.

Per ottenere una trasformazione (3, 3) (**) di genere 1 si

(*) Si rammenti, ora e in seguito, che allorquando l'intersezione di due superficie degli ordini μ e ν, si decompone in due parti degli ordini m' e m'', dei generi p' e p'', aventi comuni s punti, si hanno le relazioni:

$$2\,(p'-p'')=(m'-m'')\;(\mu+\nu-4)$$
$$s=m'(\mu+\nu-4)-2\,(p'-1)=m''(\mu+\nu-4)-2\,(p''-1)$$

(**) Col simbolo (μ,ν) si designa una trasformazione in cui μ e ν sono gli ordini delle superficie dei due sistemi omaloidici; dicendo poi *sistema* (μ,ν) s'intende indicare un sistema omaloidico d'ordine μ, il cui inverso è d'ordine ν.

potrebbe creder lecito di prendere una linea fondamentale degenere: ma quelle curve di 6° ordine le quali non rientrano come casi particolari in quelle di genere 3, hanno una postulazione compresa fra 20 e 24 epperò non possono servire (*): similmente si esclude l'ipotesi che nel sistema vi siano linee fondamentali di contatto. Talchè possiamo dire che *le uniche trasformazioni razionali* (3, 3) *di genere* 1 *sono: quella che ha in ogni spazio una linea fondamentale unica di ordine* 6 *e genere* 3 *ed i casi particolari di essa.*

2. Su una superficie generale di terzo ordine φ si trovano curve gobbe di 5° ordine e dei generi 0, 1, 2; quelle razionali ammettono ciascuna almeno una quadrisecante onde non possono servire da sole di base a un sistema omaloidico: vediamo se lo possono quelle di genere 2. Vi sono ∞^5 superficie cubiche contenenti una linea sghemba f di ordine 5 e genere 2; due qualunque di esse si tagliano ancora in una quartica gobba razionale segante f in 8 punti, mentre tre hanno comuni 4 punti mobili: ciò basta per potere concludere l'impossibilità di estrarre un sistema omaloidico da quel sistema ∞^5.

Invece vi sono ∞^4 superficie di terzo ordine contenenti una linea sghemba f di ordine 5 e genere 1: due qualunque di esse si tagliano ancora in una quartica gobba razionale la quale ha 10 punti comuni con f: emerge da ciò che *quelle fra le superficie anzidette che contengono uno stesso punto* F *formano un sistema omaloidico. Il quale è, per quanto si è detto, l'unico* (3, 4) *di genere* 1 *con una sola linea fondamentale.* Gli altri sistemi analoghi con parecchie linee fondamentali ne sono casi particolari, perchè le curve di 5° ordine, non casi speciali di quelle di genere 1, hanno una postulazione così alta che impedisce loro di fungere da linee fondamentali, e d'altronde, è agevole l'escludere la possibilità di linee fondamentali di contatto.

Per determinare le proprietà della trasformazione (3, 4) di cui ora si è avvertita l'esistenza, notiamo che la Jacobiana del sistema costituito dalle superficie cubiche contenenti il punto F e la linea f è una superficie di 8° ordine avente F per punto

(*) D'altronde la maggior parte di esse sarebbe da escludersi anche perchè ogni superficie cubica contenente una di esse contiene in conseguenza qualche altra linea.

doppio e f per linea tripla. Essa comprende quindi il luogo delle trisecanti di f, il quale è di 5° ordine (*), ha f per linea doppia, è di genere 1, e sega in 5 rette ogni superficie del sistema. La parte residua della Jacobiana è di 3° ordine, ha f per linea semplice e F per punto doppio, onde non è altro che quella superficie del sistema omaloidico per la quale F è punto doppio; osservando che essa contiene le ∞^1 coniche cinque-secanti di f e passanti per f si riconoscerà che la sua intersezione con una qualunque superficie del sistema (3, 4) si compone di due fra queste coniche.

Da ciò emerge che il sistema inverso consterà delle ∞^3 superficie di 4° ordine aventi comuni una conica Γ doppia per tutte e una curva Q di ordine 5 e genere 1 (segante Γ in 5 punti) semplice per tutte. La Jacobiana di questo sistema consta del piano di Γ preso due volte; e del luogo delle corde di Q appoggiate a Γ, il quale è d'ordine 10 e ha Q per linea tripla e Γ per linea quintupla: la prima parte corrisponde al punto F, alla linea f la seconda.

3. Una superficie generale di 3° ordine contiene quartiche gobbe tanto di 1ª quanto di 2ª specie. Per una quartica di 1ª specie passano ∞^7 superficie cubiche di cui due qualunque si tagliano ancora in una curva di 5° ordine e genere 2 segante la quartica in 8 punti, mentre tre qualunque hanno 7 intersezioni mobili. Ne viene che per dedurre da questo sistema ∞^7 un sistema omaloidico si devono conoscere due numeri x_1 e x_2 che soddisfino le equazioni $x_1 + 3x_2 = 4$, $x_1 + 4x_2 = 6$: ma queste non hanno soluzione positiva, perciò *una quartica gobba di 1ª specie non può da sola fungere da linea fondamentale di un sistema omaloidico di genere 1 e ordine 3.*

Invece una quartica di 2ª specie è contenuta in ∞^6 superficie cubiche di cui due qualunque si tagliano ancora in una curva di 5° ordine e genere 1 segante la quartica in 10 punti, mentre tre qualunque hanno 5 intersezioni mobili. Per conseguenza a fine di dedurre da questo sistema ∞^6, un sistema omaloidico, si devono far passare le superficie considerate per x_1 punti e si devono far toccare x_2 piani dati in altrettanti punti dati, ove x_1 e x_2 sono numeri soggetti alle condizioni seguenti

$$x_1 + 3x_2 = 3, \quad x_1 + 4x_2 = 4.$$

(*) V. p. es. SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes*, II Band, 1880, p. 299.

Ora da queste segue $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, quindi: *Tutte le superficie di 3° ordine passanti per una quartica gobba razionale* f *e tangenti in un punto dato* F *a un piano dato* φ *formano un sistema omaloidico, il quale è l'unico* (3, 5) *di genere* 1 *con una sola linea fondamentale.*

Per iscoprire le altre proprietà che caratterizzano la trasformazione (3, 5) ora stabilita, notiamo che la Jacobiana del sistema cubico è una superficie di 8° ordine di cui f è linea tripla e F è punto quadruplo il cui cono osculatore contiene come ingrediente il piano φ (*). Per ciò essa comprende la quadrica luogo

(*) *Come si comporti la Jacobiana di un sistema lineare in un punto* r*-plo per tutte le superficie di un sistema lineare nell'ipotesi che ivi il cono osculatore sia fisso.* Chiamando φ una forma ternaria di grado r in x_1 x_2 x_3, f_i g_i h_i k_i delle forme analoghe di gradi eguali ai relativi indici, il sistema lineare di cui è parola si potrà ritenere individuato dalle quattro superficie

$$f \equiv \varphi x_4^{n-r} + \sum_{i=r+1}^{i=n} f_i x_4^{n-i} = 0$$

$$g \equiv \varphi x_4^{n-r} + \sum_{i=r+1}^{i=n} g_i x_4^{n-i} = 0$$

$$h \equiv \varphi x_4^{n-r} + \sum_{i=r+1}^{i=n} h_i x_4^{n-i} = 0$$

$$k \equiv \varphi x_4^{n-r} + \sum_{i=r+1}^{i=n} k_i x_4^{n-i} = 0$$

Ora se si calcola il Jacobiano delle quattro forme f, g, h, k e lo si ordina secondo le potenze discendenti di x_4 si ottiene come primo termine

$$-\frac{n}{r+1} x_4^{4n-4-4r} \varphi \Big\{ J\,(g_{r+1}\ h_{r+1}\ k_{r+1}) - J\,(f_{r+1}\ h_{r+1}\ k_{r+1}) + $$
$$+ J(f_{r+1}\ g_{r+1}\ k_{r+1}) - J(f_{r+1}\ g_{r+1}\ h_{r+1}) \Big\} \,,$$

ove in genere J $(a\, b\, c)$ rappresenta il Jacobiano delle tre forme ternarie a b c. Per conseguenza: *Se tutte le superficie di un sistema lineare hanno comune un punto* r*-plo e il relativo cono osculatore, la Jacobiana del sistema avrà ivi un punto multiplo secondo* 4r *nel quale il cono osculatore comprende il cono osculatore comune a tutte le superficie del sistema.*

Per es. (cfr. Cremona Rend. del R. Ist. Lomb., T. IV_2 p. 321) le superficie (di Steiner) di 4° ordine aventi comuni tre rette doppie d_1 d_2 d_3 con-delle trisecanti di f; il resto è una superficie di 6° ordine avente f per linea doppia e in F la singolarità anzidetta. È facile vedere che quella quadrica seca in due rette ogni superficie del sistema, mentre questa superficie di 6° ordine la seca in 5 coniche tangenti in φ a F e quadrisecanti di f.

Scaturisce da ciò che il sistema inverso è costituito da superficie di 5° ordine aventi comuni una conica Γ semplice per tutte e una curva di 5° ordine Q doppia per tutte; la prima è incontrata in 2 punti e in 6 la seconda dalle cubiche gobbe corrispondenti alle rette del primo spazio.

La Jacobiana del sistema inverso comprende una quadrica, da contarsi tre volte, passante per Q e una superficie di 10° ordine avente Q per linea quadrupla e Γ per tripla. La natura di queste superficie risulta più determinata osservando che da F escono tre corde di f: $c_1\, c_2\, c_3$. Due qualunque di queste compongono una conica corrispondente a un punto di Q, onde le tre coppie di rette da esse risultanti corrispondono a un medesimo punto T triplo per Q. Questa curva è pertanto razionale e la quadrica che fa parte della Jacobiana del sistema (5, 3) in questione non è altro che il cono proiettante Q da T. Invece l'altra parte di Jacobiana è il luogo delle corde di Q appoggiate a Γ: talchè Q e Γ hanno comuni 4 punti. — Le corde $c_1\, c_2\, c_3$ sono, per le cose dette, rette doppie della parte di 6° ordine della Jacobiana del sistema (3, 5). Da ultimo osserviamo che a una retta r del secondo spazio condotta per T corrisponde, prescindendo dalle tre corde $c_1\, c_2\, c_3$, una conica passante per F e quadrisecante di f; siccome tale conica taglia in due punti ogni piano del primo spazio, così r sega in due soli punti diversi da T la superficie di 5° ordine corrispondente a questo piano. Ciò ne abilita a concludere che il punto T è triplo, non soltanto per la curva Q, ma eziandio per tutte le superficie del sistema inverso.

4. Fra le curve di 4° ordine composte, che non sono casi

---

correnti in un punto O e tre punti $O_1\, O_2\, O_3$, hanno O per punto triplo (triplanare) col cono osculatore fisso; il punto O, per il teorema dimostrato, dev'essere 12-plo per la Jacobiana e infatti questa è costituita dai tre piani $d_2\, d_3$, $d_3\, d_1$, $d_1\, d_2$ presi ciascuno due volte e dei tre coni quadrici circoscritti al triedro $d_1\, d_2\, d_3$ e passanti ciascuno per due de' punti fondamentali semplici.

particolari delle quartiche gobbe di 1ª o 2ª specie, non si possono assumere per curve fondamentali di un sistema omaloidico cubico:

a) Quella formata da quattro rette a due a due sghembe, giacchè ogni superficie di 3° ordine che le contenga, contiene pure le due rette che le incontrano tutte;

b) Quella formata da una conica e due rette sghembe, perchè ogni superficie di 3° ordine che le contenga, contiene pure la congiungente delle tracce delle due rette sul piano della conica;

c) Quella formata da due coniche che non s'incontrano, perchè l'intersezione dei piani di queste appartiene ad ogni superficie di 3° ordine passante per esse;

d) Quella formata da una cubica piana e una retta che non la taglia, perchè due tali linee, se stanno su una superficie di 3° ordine non degenere, si devono incontrare.

Resta da esaminare se lo possa una curva composta di una retta r e di una cubica gobba Γ.

Due qualunque fra le ∞^5 superficie di 3° ordine passanti per Γ e r si segano ancora in una curva razionale di 5° ordine, segante r in 4 punti e Γ in 8; quindi tre qualunque hanno soltanto 3 intersezioni mobili. Per estrarre da questo sistema ∞^5 un sistema omaloidico fa d'uopo conoscere due numeri x_1 e x_2 soddisfacenti le equazioni $x_1 + 3x_2 = 2$, $x_1 + 4x_2 = 2$. Ora queste danno $x_1 = 2$, $x_2 = 0$; perciò: *tutte le superficie di terzo ordine passanti per la retta* r, *la cubica gobba* Γ *e due punti assegnati ad arbitrio* F_1 *e* F_2, *formano un sistema omaloidico* (3, 5) *di genere* 1. Di questo sistema la Jacobiana è una superficie di 8° ordine, avente r e Γ per linee triple, F_1 e F_2 per punti doppi. Una corda di Γ appoggiata a r sta evidentemente sulla Jacobiana: la quale pertanto comprende la superficie rigata di 4° grado R avente Γ per linea doppia e r per retta semplice; tale superficie sega in 5 rette ogni elemento del sistema omaloidico. Consideriamo poi il piano $\pi_1 \equiv F_1 r$ e in esso il fascio di coniche di cui sono punti base F_1 e le tracce di Γ; ogni conica di questo fascio sega la Jacobiana (da cui si sia già separata R) in 9 punti e quindi sta su di essa. Talchè la Jacobiana comprende il piano π_1; similmente si vede che essa comprende il piano $\pi_2 \equiv F_2 r$. Tolti R, π_1 e π_2 resta della Jacobiana una superficie di secondo ordine contenente Γ, F_1, F_2 (e determinata inconseguenza); la quale interseca qualsia superficie del sistema omaloidico in una cubica gobba contenente i punti F_1 e F_2, segante Γ in 5 punti e r in 2.

Da queste proprietà della Jacobiana del sistema diretto, emerge tosto che il sistema inverso ha per linee fondamentali una retta tripla t, due rette doppie d_1 e d_2, e una curva razionale di 5° ordine S semplice per tutte le superficie del sistema; t incontra d_1 e d_2 mentre d_1 e d_2 sono fra loro sghembe. S ha t per bisecante, d_1 e d_2 per trisecanti: ciò risulta, ad es., dalla rappresentazione univoca di una superficie di 5° ordine del sistema inverso che si desume dalle cose anzidette.

La Jacobiana del sistema inverso (*) comprende i piani td_1 e td_2 (da contarsi ciascuno due volte); poi la superficie di 4° ordine di cui t_1 t_2 d sono rette doppie e S è linea semplice; finalmente la superficie di 8° ordine che ha t per linea quintupla, d_1 e d_2 per linee triple e S per linea doppia.

5. I due sistemi (3, 5) ora ottenuti sono gli unici di questi ordini e genere 1, perchè è facile escludere l'esistenza di sistemi analoghi con linee di contatto.

Per dedurre ora un sistema (3, 6) di genere 1, tentiamo di prendere per linea fondamentale una cubica piana C. Sono ∞^{10} le superficie di 3° ordine contenenti C; due qualunque di esse si tagliano ancora in una curva di ordine 6 e genere 4 segante C in 6 punti. Per ciò si otterrà da questo sistema ∞^{10} un sistema

---

(*) Per rendersi ragione di alcune fra queste asserzioni, nonchè di altre analoghe che seguiranno, è necessario conoscere (almeno il primo fra) i seguenti teoremi:

1°. *Il numero dei punti con cui la curva* C' *corrispondente a un punto qualunque* P *di una linea fondamentale* f *dello spazio* S *incontra una linea fondamentale* f' *dello spazio* S', *è uguale alla molteplicità della linea* f *per la superficie corrispondente alla linea* f'.

2°. *La molteplicità di un punto fondamentale* F' *di* S' *per la curva* C' *corrispondente a un punto qualunque* P *di una linea fondamentale* f *di* S, *è uguale alla molteplicità della linea* f *per la superficie corrispondente al punto* F'.

Queste proposizioni, le cui analoghe nel piano sono notissime, si possono dimostrare con ragionamenti analoghi a quelli in uso per rendere palese la verità di queste. Si osservi infatti, riguardo al 1° teorema, che ai ρ punti comuni a C' e f' deve corrispondere un egual numero di punti riuniti in P; onde P, il quale è un punto qualunque di f, dev'essere ρ-plo per la superficie corrispondente a f'. E, per il 2°, si noti che ai ρ punti di C' riuniti in f' devono corrispondere sulla superficie relativa a F', altrettante curve coincidenti con f.

omaloidico solo quando si conoscerà una soluzione in numeri interi e positivi delle equazioni $x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 7$, $x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 11$; ma una tale soluzione non esiste, dunque *una cubica piana non può servire come unica linea fondamentale di un sistema omaloidico composto di superficie generali di* 3° *ordine.*

Se invece si considerano le ∞^9 superficie di 3° ordine che contengono una cubica gobba f e si nota che due qualunque di esse s'intersecano ancora in una curva di 6° ordine e genere 3 tagliante la cubica in 8 punti, si perverrà alle equazioni

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 6\,, \quad x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 9\,,$$

le quali ammettono una e una sola soluzione in numeri interi e positivi, cioè $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$. In conseguenza: *tutte le superficie di terz'ordine passanti per una cubica gobba* f *e aventi con un piano* φ *in un punto* F *un contatto di second'ordine, formano un sistema omaloidico il cui inverso è di sest'ordine.*

A fine di caratterizzare la trasformazione razionale individuata da questo sistema, conviene ricorrere alla rappresentazione su un piano Π di una delle superficie del sistema. Se $A_1 \ldots A_6$ sono i punti fondamentali della rappresentazione e si assume come linea fondamentale del sistema una cubica gobba f di cui l'imagine sia $(A_1^2 \ldots A_6^2)_5$ e per punto fondamentale F quello avente per imagine G, allora la rete ausiliaria sarà $(A_1 \ldots A_6 G^3)_4$. Siccome la Jacobiana di questa rete consta delle sei rette $A_i G$ $(i = 1, \ldots, 6)$ e della cubica $(A_1 \ldots A_6 G^2)_3$ e siccome ad esse corrispondono sulla superficie sei coniche e una cubica gobba, così il sistema omaloidico inverso è costituito da ∞^3 superficie di 6° ordine dotate di una comune retta tripla Δ e di una comune curva doppia di 6° ordine. La Jacobiana di questo sistema si compone di una superficie di 3° ordine (presa 4 volte) avente Δ per linea doppia e Γ per semplice, e di una di 8° ordine avente Δ e Γ per linee triple.

Le altre proprietà della corrispondenza si possono dimostrare nel modo seguente (*). Consideriamo nel primo spazio una su-

---

(*) Il ragionamento seguente è applicabile in un gran numero di casi e conduce a conseguenze su cui mi riserbo ritornare in altra occasione. Qui voglio rilevare come l'analogo nel piano porga delle dimostrazioni, diverse dalle consuete, per alcune formole concernenti le corrispondenze razionali d'ordine qualunque n fra due piani α e β. A tale scopo chiamiamo r_1 $r_2 \ldots$

perficie Φ d'ordine ξ la quale abbia f per linea x — pla e F per punto y — plo; supponiamo che le corrisponda nel secondo

---

r_k le molteplicità delle curve della rete omaloidica di α nei relativi punti fondamentali $A_1\ A_2 \dots A_k$; $s_1\ s_2 \dots s_k$ le molteplicità delle curve della rete omaloidica di β nei relativi punti fondamentali $B_1\ B_2 \dots B_k$; chiamiamo finalmente λ_{ij} quel numero che esprime tanto le molteplicità di A_i per la curva corrispondente a B_j , quanto le molteplicità di B_j per la curva corrispondente a A_i . Consideriamo poi nel piano α la curva :

$$\Gamma\,(A_1^{x_1}\,A_2^{x_2}\dots A_k^{x_k})_\xi$$

e quella che le corrisponde nel piano β :

$$\Delta\,(B_1^{y_1}\,B_2^{y_2}\dots B_k^{y_k})_\eta \,.$$

Eguagliando fra loro il numero dei punti non fondamentali comuni a Γ e a una retta supposta prima arbitraria e poi passante per uno dei punti A, al numero dei punti non fondamentali comuni a Γ e alla linea che corrisponde a quella retta, si ottengono le $k+1$ equazioni seguenti :

$$(1) \quad \xi = n\eta - \sum_{i=1}^{i=k} s_i y_i \,, \qquad x_j = r_j\eta - \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_{ji}\, y_i \qquad (j=1,2,\dots,k).$$

Ripetendo lo stesso ragionamento dopo avere scambiati fra loro i due piani, si ottengono le altre $k+1$ equazioni

$$(2) \quad \eta = n\,\xi - \sum_{j=1}^{j=k} r_j\, x_j \,, \qquad y_i = s_i\,\xi - \sum_{j=1}^{j=k} \lambda_{ji}\, x_i \quad (i=1,2,\dots,k)$$

Ora le (1) si possono considerare come un sistema di $k+1$ equazioni fra le quantità $\eta\ y_1 \dots y_k$: dico che *il determinante di questo sistema non è nullo*, Infatti, ove esso lo fosse il sistema sarebbe o impossibile o indeterminato ; la prima ipotesi è da escludersi perchè il modo in cui furono ottenute le (1) assicura che esse sono fra loro compatibili ; la seconda ipotesi si può pure rigettare perchè essa trarrebbe seco che, comunque si scegliessero i numeri $\xi\ x_1\ x_2 \dots x_k$, alcuni dei numeri $\eta\ y_1\ y_2 \dots y_k$ sarebbero conseguenze degli altri, cioè alcune delle singolarità di Δ in $B_1\ B_2 \dots B_k$ sarebbero dipendenti dalle altre, e ciò non è vero perchè per $\xi=1$, $x_1=0, \dots, x_k=0$ si ottiene per curva Δ un elemento della rete omaloidica di β del quale le singolarità nei punti fondamentali sono fra loro indipendenti.

Essendo pertanto diverso da 0 il determinante del sistema (1) questo si potrà risolvere rispetto alle quantità $\eta\ y_1\ y_2 \dots y_k$: il risultato di tale operazione è il sistema (2). Talchè (1) e (2) sono sistemi equivalenti; ed essendo spazio una superficie Φ' d'ordine ξ' avente Γ per linea x' — pla e Δ per y' — pla. Alla intersezione di Φ' con una retta qualunque r' del secondo spazio, corrispondono i punti non fondamentali comuni a Φ e alla curva che corrisponde ad r' nel primo spazio; siccome questa è di 6° ordine, ha F per punto triplo e sega f in 8 punti, così si avrà:

$$\xi' = 6\,\xi - 8\,x - 3\,y\,.$$

Si seghi invece Φ' con una retta appoggiata in un punto a Γ; notando che al punto d'appoggio corrisponde una conica passante per F e trisecante f, e ragionando come dianzi si perverrà a un'equazione che, tolta dalla precedente, porge

$$x' = 2\,\xi - 3\,x - y\,.$$

Si seghi da ultimo Φ' con una retta appoggiata in un punto a Δ; tenendo conto del fatto che al punto d'incontro corrisponde una

---

i loro coefficienti interi, i determinanti dei due sistemi saranno fra loro eguali e varranno $\varepsilon = \pm 1$ (questo segno è realmente indeterminato, dipendendo dall'ordine in cui si considerano i punti fondamentali): siccome questi determinanti non differiscono fra loro che per lo scambio delle verticali con le orizzontali, così basterà che scriviamo

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & . & s_k \\ r_1 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & . & \lambda_{1k} \\ r_2 & \lambda_{21} & \lambda_{22} & . & \lambda_{2k} \\ . & . & . & . & . \\ r_k & \lambda_{k1} & \lambda_{k2} & . & \lambda_{kk} \end{vmatrix} = \varepsilon$$

Ogni termine di uno fra gli anzidetti determinanti differisce dal complemento algebrico del suo omologo nell'altro pel fattore ε: scaturisce da quest'osservazione anzitutto l'eguaglianza

$$(4)\quad n = \varepsilon \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & . & \lambda_{1k} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & . & \lambda_{2k} \\ . & . & . & . \\ \lambda_{k1} & \lambda_{k2} & . & \lambda_{kk} \end{vmatrix} \;;$$

inoltre, chiamando Λ_{ij} il complemento algebrico di λ_{ij} in quest'ultimo determinante, sarà

$$(5)\qquad s_j = (-1)^j\,\varepsilon \sum_{i=1}^{i=k} \Lambda_{ij}\, r_i$$

Le (3) (4) (5) sono le relazioni che intendevamo dimostrare.

cubica piana trisecante f e avente F per punto doppio, si ottiene, procedendo come dianzi,

$$y' = 3\xi - 3x - 2y.$$

Risolvendo le tre equazioni precedenti rispetto a ξ, x, y si trova:

$$\begin{aligned} \xi &= 3\xi' - 7x' - y' \\ x &= \xi' - 3x' \\ y &= 3\xi' - 6x' - 3y'. \end{aligned}$$

Ora queste tre equazioni si sarebbero potute ottenere direttamente scambiando le veci dei due spazi nel ragionamento precedente: soltanto sarebbe stato necessario conoscere che cosa corrisponda nel secondo spazio a una retta qualunque del primo, a una retta segante f, a una passante per F; ma tutte queste informazioni, che si potrebbero ottenere non senza difficoltà direttamente, sono offerte dalle tre equazioni ultimamente scritte. Infatti se esse si imaginano ottenute in modo analogo a quelle in cui furono stabilite le tre precedenti, riusciranno palesi i significati geometrici dei loro coefficienti, sarà chiaro cioè che a una retta qualunque del primo spazio corrisponde nel secondo una cubica gobba segante Γ in 7 punti e Δ in 1, che a un punto di f corrisponde una trisecante di Γ, che finalmente a *un punto dell'intorno di* F corrisponde una cubica avente Δ per corda e Γ per 6 — secante. Ne deduciamo che la parte di 8° ordine della Jacobiana del sistema inverso non è che il luogo delle trisecanti di Γ, onde questa curva è di genere 3; ne desumiamo ancora che la Jacobiana del sistema diretto è formata dal piano φ, toccato da tutte le superficie del sistema, e da una superficie di 7° ordine di cui f è linea tripla e F è punto triplo uniplanare con φ per relativo piano tangente (*).

(*) *Come si comporti la Jacobiana di un sistema lineare in un punto nel quale tutte le superficie del sistema hanno con un piano fisso un contatto d'ordine superiore.* Sia φ una forma lineare delle x_1 x_2 x_3 e f_i una forma di grado i delle stesse variabili; allora

$$f \equiv f_0\ \varphi\, x_4^{\,n-1} + f_1 \varphi\, x_4^{\,n-2} + \dots + f_{r-2} \varphi\, x_4^{\,n-r+1} + f_r\, x_4^{\,n-r} + \dots + f_{n-1} x_4 + f_n = 0$$

rappresenterà una superficie d'ordine n avente col piano $\varphi = 0$ nel punto

Tali proprietà sono sufficienti per determinare come sia rappresentata su un piano del primo spazio la superficie di 6° ordine

---

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ un contatto d'ordine $r-1$ (che supporremo maggiore di 1); siano $g=0$, $h=0$, $k=0$ le equazioni di altre tre superficie analoghe. Se calcoliamo il Jacobiano delle quattro forme f, g, h, k e l'ordiniamo secondo le potenze discendenti di x_4 otterremo come termini di grado più elevato il seguente

$$F = \begin{vmatrix} f_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} x_4^{n-1} & \frac{\partial(g_1\varphi)}{\partial x_1} x_4^{n-2} & \frac{\partial(h_1\varphi)}{\partial x_1} x_4^{n-2} & \frac{\partial(k_1\varphi)}{\partial x_1} x_4^{n-2} \\ f_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} x_4^{n-1} & \frac{\partial(g_1\varphi)}{\partial x_2} x_4^{n-2} & \frac{\partial(h_1\varphi)}{\partial x_2} x_4^{n-2} & \frac{\partial(k_1\varphi)}{\partial x_2} x_4^{n-2} \\ f_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} x_4^{n-1} & \frac{\partial(g_1\varphi)}{\partial x_3} x_4^{n-2} & \frac{\partial(h_1\varphi)}{\partial x_3} x_4^{n-2} & \frac{\partial(k_1\varphi)}{\partial x_3} x_4^{n-2} \\ (n-1) f_0 \varphi x_4^{n-2} & (n-2) g_1 \varphi x_4^{n-3} & (n-2) h_1 \varphi x_4^{n-3} & (n-2) k_1 \varphi x_4^{n-3} \end{vmatrix}$$

e i tre che da esso derivano con scambi di f, g, h, k e cambiamenti di segno del secondo e quarto. Ora si trova facilmente essere

$$F = f_0 \varphi^3 x_4^{4n-7} \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial k_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial k}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{\partial k_1}{\partial x_3} \\ (n-1)\varphi & -g_1 & -h_1 & -k_1 \end{vmatrix} = -n\varphi^4 x_4^{4n-8} \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial k_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial k_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{\partial k_1}{\partial x_3} \end{vmatrix};$$

quindi intanto si vede che il punto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ è quadruplo per la Jacobiana e che il relativo cono osculatore è il piano $\varphi = 0$ preso quattro volte. Ma per vedere meglio il modo di comportarsi della Jacobiana in detto punto, determiniamo di quale molteplicità esso sia per la sezione di questa superficie col piano anzidetto; basterà perciò porre $\varphi = 0$ nell'equazione della Jacobiana e sviluppare il risultato secondo le potenze discendenti di x_4. Ora, supponendo anzitutto $r < n$, si ha

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\varphi=0} = f_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} x_4^{n-1} + f_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} x_4^{n-2} + \ldots + f_{r-2} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} x_4^{n-r+1} + \frac{\partial f_r}{\partial x_i} x_4^{n-2} +$$
$$+ \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_i} x_4^{n-r+1} + \ldots + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_i} x_4 + \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \; (i = 1, 2, 3$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)_{\varphi=0} = \qquad (n-r) f_r x_4^{n-r-1} + \ldots + 2 f_{n-2} x_4 + f_{n-1};$$

che gli corrisponde nel secondo. Alle sezioni piane di questa corrispondono ∞^3 cubiche circoscritte a un triangolo $A_1 A_2 A_3$; alla retta tripla Δ corrisponde una retta del piano di rappresentazione; e alla curva doppia Γ una curva di 7° ordine avente $A_1 A_2 A_3$ per punti tripli. Le sezioni principali delle superficie corrispondono alle rette del piano di rappresentazione; emerge da ciò che tutte le superficie di 6° ordine avente comuni con quella

---

quindi per $\varphi = 0$ nella Jacobiana i termini di grado più alto in x_4 sono

$$(n-r) f_o\, x_4^{4n-4-3r} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial h_{r+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial k_{r+1}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial x_2} & \frac{\partial h_{r+1}}{\partial x_2} & \frac{\partial k_{r+1}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial x_3} & \frac{\partial h_{r+1}}{\partial x_3} & \frac{\partial k_{r+1}}{\partial x_3} \\ o & g_r & h_r & k_r \end{vmatrix}$$

ed i tre analoghi. Segue da ciò che :

In un punto nel quale tutte le superficie d'ordine n *di un sistema lineare hanno con un piano dato un contatto d'ordine* r — 1, *ove* $2 < r < n$, *la Jacobiana del sistema ha un punto quadruplo; il relativo cono osculatore è il piano tangente comune alle superficie del sistema preso quattro volte, piano il quale taglia la Jacobiana in una curva avente quel punto per* 3r-*plo.*

Dei due casi esclusi, $r = 2$ e $r = n$, il primo fu già studiato in una nota precedente, mentre l'altro esige una considerazione a parte. In vero, se $r = n$, è

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = \varphi \left\{ (n-1) f_o\, x_4^{n-2} + (n-2) f_1\, x_4^{n-3} + \ldots + 2 f_{n-3}\, x_4 + f_{n-2} \right\}$$

e simili espressioni hanno $\frac{\partial g}{\partial x_4}, \frac{\partial h}{\partial x_4}, \frac{\partial k}{\partial x_4}$. Ne viene che il Jacobiano ha per fattore φ, epperò: *Qualunque sia* n *il piano col quale tutte le superficie di ordine* n *del sistema hanno un contatto d'ordine* n — 1, *fa parte della Jacobiana del sistema; se* $n = 2$ *la parte residua di Jacobiana ha in generale il punto di contatto comune per punto triplo conico* (ed è in conseguenza un cono cubico avente per vertice quel punto), *mentre se* $n > 2$ *la parte residua di Jacobiana ha il punto di contatto comune per punto triplo unipolare in cui il piano tangente è il piano anzidetto.*

Un esempio del caso $n = 2$ è offerto dal sistema omaloidico composto delle quadriche passanti per tre punti $O_1\ O_2\ O_3$ e tangenti in un quarto punto O a un piano ω: la Jacobiana consta allora di ω e dei tre piani OO_2O_3, $OO_3\,O_1$, $OO_1\,O_2$ (Cremona, *Annali di Matematica*, t. V_2 p. 151).

rappresentata gli elementi singolari formano un sistema omaloidico; talchè *la detta superficie fa parte di un solo sistema omaloidico, il quale è da essa individuato.*

6. Per determinare le trasformazioni (3, 6) che non sono casi particolari della precedente, considereremo le superficie cubiche passanti per tre rette a due a due sghembe e poi quelle che passano per una retta e si toccano lungo un'altra.

Nel primo caso, chiamiamo $r_1 r_2 r_3$ le tre rette fondamentali e notiamo che esse stanno su ∞^7 superficie di 3° ordine. Due tali superficie si tagliano ancora in una curva di 6° ordine e genere 1 avente per quadrisecanti $r_1 r_2 r_3$, onde tre hanno 6 intersezioni mobili. Segue da ciò che per desumere da questo sistema ∞^7 un sistema omaloidico si deve conoscere una soluzione intera positiva delle equazioni $x_1 + 3x_2 = 4$, $x_1 + 4x_2 = 5$; tale soluzione è unica ed è $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Epperò *tutte le superficie di 3° ordine contenenti tre rette* $\mathrm{r_1 r_2 r_3}$, *passanti per un punto* F *e tangenti a un piano* τ *in un punto* T *costituiscono un sistema omaloidico il cui inverso è di 6° grado.*

La Jacobiana di tale sistema è una superficie di 8° ordine avente $r_1 r_2 r_3$ per rette triple, F per punto doppio e T per punto quadruplo nel quale il cono osculatore comprende il piano τ. Ne viene che le ∞^1 rette secanti $r_1 r_2 r_3$ appartengono alla Jacobiana: il loro luogo è una quadrica, secante in altre 3 rette ogni superficie del sistema omaloidico. Inoltre, se consideriamo una conica bisecante r_1, incontrante in un punto tanto r_2 quanto r_3 e tangente in T al piano τ, essa starà completamente sulla Jacobiana, la quale pertanto contiene il piano $T r_1$; similmente essa contiene i piani $T r_2$ e $T r_3$: ciascuno di questi piani taglia ogni superficie del sistema in una conica variabile. La parte residua di Jacobiana è la superficie di 3° ordine individuata dalle condizioni di contenere le rette $r_1 r_2 r_3$, di avere F per punto doppio, di toccare in T il piano τ: tale superficie si può considerare come il luogo delle ∞^1 cubiche gobbe di cui $r_1 r_2 r_3$ sono corde, di cui F è un punto, di cui τ è piano tangente in T.

Da ciò risulta: 1° ai piani del primo spazio corrispondono superficie di 6° ordine aventi comuni una conica tripla Γ, tre rette doppie $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$ e una cubica gobba semplice Λ; 2° alle rette del primo spazio corrispondono cubiche gobbe seganti Γ in 3 punti, ogni retta Δ in 1 punto e Λ in 2 punti.

La situazione relativa degli elementi fondamentali del secondo spazio si palesa rilevando la struttura della Jacobiana del sistema inverso. Questa superficie consta del piano di Γ, preso 2 volte; di una quàdrica contenente l'$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$, presa 3 volte; e di tre rigate di 4° grado aventi tutte per linee semplice Λ e due delle rette Δ e per linee doppie la terza di queste rette e la conica Γ.

Ogni superficie del sistema inverso è rappresentata univocamente sul corrispondente piano in modo che alle sezioni piane delle superficie corrispondono ∞^3 cubiche piane circoscritte a un triangolo: una determinata fra queste cubiche rappresenta la conica tripla, mentre le rette doppie corrispondono a tre rette uscenti dai vertici di questo triangolo. Sulla superficie si trovano sei rette semplici, ognuna delle quali ne incontra altre due soltanto.

7. Per studiare l'altra trasformazione (3, 6) di genere 1 che ancora rimane, consideriamo le ∞^6 superficie di 3° ordine tangenti fra loro lungo la retta t (*) e segantisi in una retta s

---

(*) *Numero delle condizioni lineari a cui equivale per una superficie il dovere toccarne un'altra della stessa specie lungo una retta data.* In coordinate omogenee x_i l'equazione generale di una superficie d'ordine n contenente la retta $x_1 = x_2 = 0$ è $x_1 f_1 + x_2 f_2 = 0$, ove f_1 e f_2 sono forme quaternarie di grado $n-1$. Se in ogni punto di quella retta la superficie possiede un piano tangente assegnato dovranno f_1 e f_2, quando si ponga in esse $x_1 = x_2 = 0$; differire da due date forme binarie $\varphi_1(x_1\, x_2)$, $\varphi_2(x_1\, x_2)$ per un fattore costante, ne viene che l'equazione generale di tale superficie sarà

$$(1)\quad f_0^{(n)} + \left\{ x_3 f_0^{(n)} + x_4 f_4^{(n)} \right\} + \left\{ x_3^2 f_0^{(n-1)} + x_3 x_4 f_1^{(n-1)} + x_4^2 f_2^{(n-1)} \right\} +$$
$$\ldots + \left\{ x_3^{n-2} f_0^{(2)} + x_3^{n-3} x_4 f_1^{(2)} + \ldots + x_4^{n-2} f_{n-2}^{(2)} \right\} + a \left\{ x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2 \right\} = 0$$

ove $f_k^{(l)}$ è una forma binaria di grado l in x_1 e x_2; o più semplicemente

$$(2)\qquad a \left\{ x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2 \right\} + F = o$$

ove F è una forma quaternaria di grado n soggetta alla condizione di mancare dei termini che sono in x_1 e x_2 di grado inferiore a 2. Il numero delle costanti che si trovano nella (1) è:

$$1 + 1\,.\,(n+1) + 2\,.\,n + 3(n-1) + \ldots + (n-1)3 =$$
$$= \left\{ 1\,.\,(n+1) + 2\,.\,n + 3\,.\,(n-1) + \ldots + (n-1)\,.\,3 + n\,.\,2 + (n+1)\,.\,1 \right\} - 3n$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3} - 3n\,;$$

(sghemba con t). Due qualsivogliano fra tali superficie si tagliano ancora in una curva razionale di 6° ordine 5—secante di t e 4—secante di s; mentre tre arbitrarie hanno 4 intersezioni mobili. Per conseguenza, a fine di separare da questo sistema ∞^6 un sistema omaloidico è necessario e sufficiente considerare le superficie di esso che contengono tre punti arbitrari $F_1 F_2 F_3$.

La Jacobiana del sistema omaloidico (3, 6) ora costruito è di 8° ordine, ha $F_1 F_2 F_3$ per punti doppi, s per linea tripla e t

---

quindi: *per una superficie d'ordine* n *il doverne toccare un'altra lungo una retta equivale in generale a* 3n *condizioni lineari semplici.*

Ma questo numero subisce in molti casi delle modificazioni le quali si possono determinare nel modo seguente.

Consideriamo due superficie Σ e Σ' d'ordine n aventi comuni delle linee semplici o multiple e di più una retta a appoggiata a queste in punti I_1 $I_2 \ldots I_k$ che per entrambe le superficie siano multipli secondo i numeri m_1 $m_2 \ldots m_k$; per ciascuna delle superficie il dovere contenere, oltre quelle linee, questa retta implica $(n+1)-(m_1+m_2+\ldots+m_k)$ condizioni. Ora ogni piano π per r taglia ciascuna delle superficie in una curva d'ordine $n-1$ avente per i punti $I_1 I_2 \ldots I_k$ per multipli secondo risp. m_1-1, m_2-1, $\ldots$, m_k-1 curva che incontra a in un numero di punti dato da $(n-1)-$

$$-\{(m_1-1)+(m_2-1)+\ldots+(m_k-1)\}=(n-1)-(m_1+m_2+\ldots+m_k)+k.$$

Variando π attorno ad a, nascono in tal modo su a due involuzioni proiettive di punti di ordine eguale a quest'ultimo numero; i punti comuni a due loro gruppi corrispondenti sono punti di contatto delle due superficie: tolti i contatti che hanno luogo nei punti $I_1 I_2 \ldots I_k$ ne rimangono $2\{(n-1)-$

$-(m_1+m_2+\ldots+m_k)\}+k$. Ne viene che affinchè le due superficie si tocchino lungo a è necessario e sufficiente abbiano $2\{(n-1)-(m_1+m_2+$

$+\ldots+m_k)\}+k+1$ punti di contatto su a in località diverse da' punti I. Questo numero è quello delle condizioni lineari semplici assorbite dal dovere le due superficie Σ e Σ' toccarsi lungo la retta a supposta già comune ad esse. Talchè possiamo concludere:

Se due superficie d'ordine n *hanno comuni delle linee che siano incontrate da una data retta in punti i quali siano per entrambe multipli secondo i numeri* $m_1 m_2 \ldots m_k$, *allora il dovere una di esse toccare l'altra in tutti i punti di quella retta equivale a* $3\{n-(m_1+m_2+\ldots+m_k)\}+k$ *condizioni lineari semplici.*

Se si suppone $k=0$ si ritrova la proposizione dimostrata dianzi analiticamente.

per linea quintupla (*). La composizione di essa si determina, ad esempio, ricorrendo alla rappresentazione univoca su un piano Π di una superficie φ del sistema. Detti infatti $A_1 \ldots A_6$ i punti fondamentali di questa rappresentazione, se $(A_2 A_3 A_4 A_5 A_6)_2$ è l'imagine di t e $(A_1 A_3 A_4 A_5 A_6)_2$ quella di s, se inoltre $G_1 G_2 G_3$ sono le imagini di $F_1 F_2 F_3$; alle sezioni di φ colle altre superficie del nostro sistema omaloidico corrisponderanno le ∞^2 curve $(A_1^2 A_2 G_1 G_2 G_3)_3$. Perciò l'intersezione di φ colla Jacobiana del sistema si compone

α) della quartica gobba rappresentata dalla conica $A_1 A_2 G_1 G_2 G_3$, quartica la quale passa pei punti $F_1 F_2 F_3$ e ha per trisecanti s e t;

β) delle coniche rappresentate dalle rette $A_1 G_i$ $(i = 1, 2, 3)$, coniche passanti per F_i e seganti in 1 punto s e in 2 punti t;

γ) dalle rette rappresentate da' punti $A_3 A_4 A_5 A_6$ e dalla retta $A_1 A_2$, rette appoggiate tutte alle rette s e t.

(*) *Una retta di contatto per tutte le superficie di un sistema lineare, di quale molteplicità è per la Jacobiana del sistema?* Per rispondere a tale questione applichiamo il risultato espresso dalla equazione (2) della nota precedente e supponiamo che il sistema lineare che consideriamo sia individuato dalle quattro superficie

$$a(x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2) + F = 0\,,\quad b(x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2) + G = 0,\quad c(x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2) + H = 0\,,$$
$$d(x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2) + K = 0\,.$$

Con una semplice trasformazione del determinante dei primi membri di queste equazioni si trova che, come equazione della Jacobiana, si può prendere

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial K}{\partial x_1} & \varphi_1 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_2} & \frac{\partial K}{\partial x_2} & \varphi_2 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} & \frac{\partial G}{\partial x_3} & \frac{\partial H}{\partial x_3} & \frac{\partial K}{\partial x_3} & x_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + x_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F}{\partial x_4} & \frac{\partial G}{\partial x_4} & \frac{\partial G}{\partial x_4} & \frac{\partial K}{\partial x_4} & x_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} + x_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} \\ a & b & c & d & -1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Ora nello sviluppo di questo determinante ogni termine è almeno di 5° grado nelle coordinate x_1, x_2. Perciò è lecito asserire che: *una retta lungo la quale si toccano tutte le superficie di un sistema lineare è in generale quintupla per la Jacobiana del sistema medesimo,* Ora il luogo della quartica α) è la quadrica $s\,t\,F_1\,F_2\,F_3$ e i luoghi delle tre serie di coniche β) non sono altro che i piani tF_1, tF_2, tF_3; per conseguenza il luogo delle rette γ) è una superficie di 3^o grado avente s per direttrice doppia e t per direttrice semplice: siccome questa rigata non sega altro che in queste sette rette la superficie φ, così essa deve toccarla lungo la retta t, epperò essa rigata è definita dalle condizioni di avere s per direttrice doppia e di toccare lungo t una e quindi tutte le superficie del sistema omaloidico.

Il sistema inverso risulta di superficie di 6^o ordine aventi a comune una retta quadrupla q, tre rette doppie $d_1 d_2 d_3$ e una curva razionale di 5^o ordine Λ. q è incontrato dalle tre rette d_i $(i=1, 2, 3)$ e il piano $q d_i$ corrisponde al punto F_i; di Λ, q è bisecante mentre le d_i sono trisecanti. Oltre ai tre piani anzidetti, presi due volte ognuno, della Jacobiana del sistema inverso fa parte la rigata di 4^o grado della quale q è retta tripla e gli altri elementi fondamentali del sistema sono linee semplici; e ancora un luogo di 10^o ordine il quale non è se non la superficie di 5^o ordine avente q per retta tripla, $d_1 d_2 d_3$ per doppie e Λ per linea semplice, da contarsi due volte.

La rappresentazione univoca per una superficie ψ del sistema inverso che scaturisce da quanto precede è tale che le sezioni piane di ψ hanno per imagine ∞^3 cubiche passanti per un punto M e tangenti in un altro punto N a una retta n: la retta quadrupla corrisponde a una conica passante per i punti M e N; delle rette doppie sono imagini tre rette per N e della quintica semplice una cubica piana tangente a n in N e avente per punto doppio M.

Quanto precede dimostra che le trasformazioni (3, 6) diverse dalle precedenti ne sono casi particolari. Cerchiamo se esistano delle trasformazioni (3, 7): bisognerà perciò considerare le superficie di 3^o ordine passanti per una conica o per una coppia di rette oppure tangenti fra loro lungo una retta. Per ottenere in corrispondenza un sistema omaloidico si deve risolvere il primo, il secondo o il terzo dei seguenti sistemi:

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 9 \qquad x_1 + 4x_3 + 9x_3 = 14$$
$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 8 \qquad x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 12$$
$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 7 \qquad x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 10 \ .$$

Ora i primi due sistemi non hanno alcuna soluzione intera e positiva, mentre il terzo ha l'unica $x_1 = x_3 = 1$. In tal caso, se si rappresenta una superficie φ del sistema omaloidico sul piano Π per modo che le sue sezioni piane corrispondano alle curve $(A_1 \ldots A_6)_3$ e si suppone che $(A_5 A_6)_1$ rappresenta la retta t lungo cui ha luogo il contatto, le sezioni di φ con le altre superficie del sistema corrisponderanno a una rete del tipo seguente

$$(A^3_1 \ldots A^3_4 A_5 A_6 M N^3)_7 ;$$

ma tutti gli elementi di questa rete si spezzano in una parte fissa, che è la conica $A_1 \ldots A_4 N$ e una parte mobile: quella rappresenta la sezione prodotta nella superficie φ dal piano che contiene la retta t e il punto avente per imagine N, questa una curva di 5° ordine e genere 1 non incontrante l'anzidetta conica. Ciò dimostra che il sistema ottenuto non è omaloidico.

Similmente, la ricerca delle trasformazioni razionali (3, 8) di genere 1, si fa dipendere dalla risoluzione del sistema

$$x_1 + 3\,x_2 + 6\,x_3 + 10\,x_4 = 12 \ , \qquad x_1 + 4\,x_2 + 9\,x_3 + 16\,x_4 = 19 \ ;$$

e siccome esso non ha alcuna soluzione intera positiva, così si conclude la non esistenza di trasformazioni dell'anzidetta specie.

Da ultimo, poichè il sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3\,x_2 + 6\,x_3 + 10\,x_4 + 15\,x_5 &= 16 \\ x_1 + 4\,x_2 + 9\,x_3 + 16\,x_4 + 25\,x_5 &= 26 \ . \end{aligned}$$

ha la soluzione (unica) $x_1 = x_5 = 1$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, sembra che esista una trasformazione (3, 9) determinata da una superficie generale di 3° ordine. Ma notiamo che rappresentando nel modo consueto una delle superficie dal sistema, le ∞^2 curve in cui essa è tagliata dalle altre superficie del sistema corrispondono a una rete del seguente tipo $(A^3_1 \ldots A^3_6 M N^5)_9$; ora tutte queste curve si spezzano nella parte fissa $(A_1 \ldots A_6 N^2)_3$ e in una parte mobile; la prima delle quali è l'imagine della sezione fatta nella superficie considerata dal piano che la tocca nel punto rappresentato da N, mentre la seconda rappresenta una superficie di 6° ordine e genere 1 non segante l'anzidetta sezione. Ciò prova che il sistema ottenuto non è omaloidico e ci abilita a concludere:

Non esistono trasformazioni razionali nelle quali in uno dei due spazi il sistema omaloidico sia formato da superficie generali di 3° ordine e nell'altro spazio consti di superficie d'ordine superiore a 6.

Genova, 20 Dicembre 1890.

Sopra alcune curve singolari.

Nota del Prof. GIUSEPPE PEANO

Lo Staudt, nel § 11 della sua Geometria di posizione, tratta per via sintetica, di alcune proprietà della tangente e del piano osculatore ad una curva qualunque. Queste proprietà si dimostrano in calcolo infinitesimale colla formula di Taylor; quindi si suppone che le funzioni che si considerano siano sviluppabili con questa formula. Invece lo Staudt non assoggetta le curve ch'egli considera ad alcuna condizione, salvo quella della continuità. Io mi propongo di dimostrare con esempi che quelle condizioni restrittive sono necessarie, e che quindi le proposizioni enunciate dallo Staudt non sono rigorosamente vere; e pubblico questi esempi, che credo nuovi, colla speranza di invogliare qualcuno a rendere rigorose le proposizioni e dimostrazioni di Staudt, senza abbandonare il campo sintetico.

Lo Staudt al N. 144 enuncia una proposizione, che in linguaggio ordinario suona: « Se P e P' sono due punti d'una curva piana, avente tangente in ogni suo punto, col tendere di P' a P, il punto d'incontro delle tangenti t e t' in P e P' ha per limite il punto P ».

Si possono invece dare delle curve, per cui, col tendere di P' a P, il punto $t\,t'$ non tenda ad alcun limite. Sia l'equazione $y = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ (e per $x = 0$, sia $y = 0$); la y è funzione continua di x; perciò questa equazione rappresenta una curva continua, passante per l'origine, e poichè $\lim_{x=0} \frac{y}{x} = 0$, avente ivi per tangente l'asse delle x. Considerando un altro punto qualunque di ascissa x, si avrà $\frac{dy}{dx} = y' = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, e il punto d'incontro della tangente ivi colla tangente all'origine avrà per ascissa

$$x - \frac{y}{y'} = x - \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{2\,x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}},$$

e per ordinata 0. Facendo tendere x verso 0, l'ascissa $x - \frac{y}{y'}$ non tende ad alcun limite, ma ha per estremi oscillatorii $-\infty$ e $+\infty$. Quindi il punto d'incontro della tangente in P colla tangente in O non tende alcun limite; ma preso ad arbitrio un punto A sull'asse delle x, in ogni arco di curva, arbitrariamente piccolo, avente un estremo in O, ci saranno sempre dei punti in cui la tangente viene a passare per A. In questa curva, y', col tendere di x a zero, non tende ad alcun limite, ma ha per estremi oscillatorii -1 e $+1$; quindi la tangente in P non tende ad alcun limite col tendere di P verso O.

Nell'esempio precedente la curva è incontrata dall'asse delle x in infiniti punti nelle vicinanze dell'origine. La curva

$$y = x^2 \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

è incontrata da ogni retta in un numero finito di punti; ed ha le stesse proprietà della precedente.

Si possono dare delle curve per cui col tendere di P' a P, la tangente t' abbia per limite t, senzachè il punto tt' tenda ad alcun limite. Sia la curva:

$$y = x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

Essa passa per l'origine, ed ha ivi per tangente l'asse delle x. Si ha $y' = 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$, e $\lim_{x=0} y' = 0$; onde la tangente nel punto di ascissa x ha per limite la tangente nell'origine. Ma l'ascissa del punto d'incontro delle due tangenti

$$x-\frac{y}{y'}=x-\frac{x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{3\,x\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{2}}$$

col tendere di x a zero non tende ad alcun limite, ed ha per estremi oscillatorii $-\infty$ e $+\infty$.

Si possono dare delle curve per cui, col tendere di P' a P, la tangente t' abbia per limite t, e il punto $t\,t'$ tenda ad un limite, senzachè il limite di questo punto sia P. Sia la curva di equazione

$$y=x^{\frac{2}{3}}+x^2\left(\operatorname{sen}^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x^3}-\cos^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x^3}\right).$$

Essa passa per l'origine, ed ha ivi per tangente l'asse delle y. Si ha:

$$y'=\frac{2}{3}\,x-\frac{1}{3}-\frac{2}{x^2}\,\frac{\cos^{\frac{4}{3}}\frac{1}{x^3}+\operatorname{sen}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{x^3}}{\cos^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^3}\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^3}}+2\,x\left(\operatorname{sen}^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x^3}-\cos^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x^3}\right).$$

Il terzo termine in y' tende a 0; la somma dei due primi termini si può scrivere

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{3}\,x^{\frac{5}{3}}-2\,\frac{\cos^{\frac{4}{3}}\frac{1}{x^3}+\operatorname{sen}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{x^3}}{\cos^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^3}\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^3}}\right).$$

Entro le parentesi, il primo termine tende a zero; nel secondo termine il numeratore è compreso fra 1 e $\sqrt[3]{4}$; il denominatore è, in valor assoluto minore dell' unità; quindi il secondo termine è in valor assoluto maggiore di 2. Moltiplicando per $\frac{1}{x^2}$, che tende ad ∞, si deduce $\lim\limits_{x=0} y'=\infty$; e si ha pure

$\lim_{x=0} x y' = \infty$. Quindi la tangente nel punto di ascissa x ha per limite l'asse delle y, cioè la tangente nell'origine; il punto d'incontro delle due tangenti, il quale ha per ascissa 0, e per ordinata $y - x y'$, col tendere di x a zero, poichè $\lim y = 0$ e $\lim x y' = \infty$, tende verso il punto all'infinito dell'asse delle y.

Analogamente, ammessa puramente la continuità d'una curva gobba, se P e P' sono due punti di essa, t e t' le tangenti, π e π' i rispettivi piani osculatori, non si possono enunciare, con Staudt, le proposizioni:

« Il piano π è il limite del piano passante per t e parallelo a t' » (N. 146).

« Il piano π è il limite del piano $P t'$ » (N. 148).

« La retta t è il limite della retta $\pi\pi'$ » (id.).

« Il punto P è il limite del punto $t\pi'$ » (id.).

« Il punto P è il limite del punto $t'\pi$ » (id.).

Sull'accelerazione di second'ordine nel moto rotatorio intorno a un punto;

Nota di ENRICO NOVARESE

Abbiasi una figura invariabile la quale ruoti intorno ad un punto, e si consideri l'accelerazione di 2° ordine che un punto qualunque della figura ha in un istante qualsiasi. W. SCHELL, nel suo ben noto trattato *Theorie der Bewegung und der Kräfte*, si è proposto di determinare le projezioni di detta accelerazione sopra tre assi coordinati speciali particolarmente notevoli (V. 1ª ediz., pp. 479-480, 2ª ediz., pp. 562-563 del Vol. I). Egli è giunto a certi risultati nella 1ª edizione del libro e a risultati un po' differenti nella 2ª edizione. Ora a me non sembrano pienamente esatti nè gli uni nè gli altri: e perciò, considerato l'importanza e la notorietà dell'opera del Prof. SCHELL, stimo non inopportuno l'esporre qui una soluzione della questione accennata, soluzione ottenuta con un metodo affatto diverso da quello dello SCHELL e, per quanto mi pare, sicuro da ogni obbiezione.

Nella Nota che ho l'onore di presentare all'Accademia, do altresì qualche formola, che ritengo nuova, intorno alla curvatura ed alla torsione della trajettoria di un punto qualunque del sistema mobile.

I.

Siano Ox, Oy, Oz tre assi ortogonali immobili uscenti dal centro della rotazione. Siano, per la fine del tempo t, OI la *parte positiva* dell'asse istantaneo di rotazione (*), a, b, c i coseni direttori di OI; ω il valore assoluto della velocità angolare, p, q, r le projezioni di questa sugli assi. Avremo

$$p=\omega a\,, \qquad q=\omega b\,, \qquad r=\omega c \qquad \ldots (1)$$

e, derivando rispetto a t (**),

$$p'=\omega' a+\omega a'\,, \quad \text{ecc.} \qquad \ldots (2)\,,$$

e

$$p''=\omega'' a+2\omega' a'+\omega a''\,, \quad \text{ecc.} \qquad \ldots (3)\,.$$

Consideriamo due segmenti (*Strecken, vettori*) ψ e χ, le cui projezioni sugli assi siano uguali rispettivamente ad a', b', c' e ad a'', b'', c''. Il segmento ψ è ciò che lo SCHELL chiama la *Wechselgeschwindigkeit* dell'asse istantaneo OI e che io, adottando una denominazione che ho usato altra volta (***), preferisco chiamare la *velocità sferica* dell'asse medesimo nel suo moto assoluto. Se immaginiamo una sfera di centro O e di raggio 1, e diciamo C, Γ le linee secondo cui la superficie di tale sfera interseca rispettivamente il cono immobile (C) e il cono mobile (Γ) degli assi istantanei di rotazione, ψ è la velocità con cui il punto P

(*) Cioè, la parte a cui deve addossarsi un osservatore avente i piedi in O per vedere la rotazione istantanea *farsi* da sinistra a destra.

(**) Qui ed in seguito indico con accenti le derivazioni rispetto al tempo.

(***) V. il mio *Studio sulla accelerazione di ordine* n *nel moto di una retta* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 24 febbraio 1889).

di contatto delle due linee si sposta tanto sulla C quanto sulla Γ. Analogamente, il segmento χ è l'*accelerazione sferica* di 1° ordine dell'asse istantaneo (nel suo moto assoluto) o, in altri termini, l'accelerazione di 1° ordine del moto del punto P sulla linea C.

Ritenendo le lettere ψ e χ per designare i valori assoluti dei due segmenti considerati, scriveremo come segue le (2) e (3)

$$\left.\begin{aligned} p' &= \omega' a + \omega\psi\cos(\psi x) \\ q' &= \omega' b + \omega\psi\cos(\psi y) \\ r' &= \omega' c + \omega\psi\cos(\psi z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2'),$$

$$\left.\begin{aligned} p'' &= \omega'' a + 2\,\omega'\psi\cos(\psi x) + \omega\chi\cos(\chi x) \\ q'' &= \omega'' b + 2\,\omega'\psi\cos(\psi y) + \omega\chi\cos(\chi y) \\ r'' &= \omega'' c + 2\,\omega'\psi\cos(\psi z) + \omega\chi\cos(\chi z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3')\ (***).$$

Notiamo ancora le relazioni seguenti, che ci occorreranno più innanzi

$$\cos(\chi\psi) = \frac{a'a'' + b'b'' + c'c''}{\psi\chi} = \frac{\frac{1}{2}\frac{d.\psi^2}{dt}}{\psi\chi} = \frac{\psi'}{\chi} \quad \ldots (4),$$

come può anche vedersi immediatamente avvertendo che il prodotto $\chi\cos(\chi\psi)$ esprime l'accelerazione tangenziale di 1° ordine del moto assoluto di P; e

$$\cos(\chi, OI) = \frac{a a'' + b b'' + c c''}{\chi} = -\frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{\chi} = -\frac{\psi^2}{\chi} \quad (5).$$

Ciò premesso, riesce facilissima la ricerca proposta. Si con-

---

(*) Queste formole sono suscettive di una notevole interpretazione.

Le (2') dicono che l'accelerazione angolare di 1° ordine del sistema mobile è la somma geometrica: 1° di un segmento $=\omega'$, parallelo all'asse istantaneo, volto pel verso OI o pel verso opposto secondochè ω' è $\gtrless 0$; 2° di un segmento $=\omega\psi$, avente la direzione ed il verso di ψ. Questa proposizione è conosciuta (Resal, *Cinématique pure*, p. 114; Schell, op. cit., 2ª ediz., p. 477 del vol. I).

Le formole (3') esprimono il teorema analogo per l'accelerazione angolare di 2° ordine, teorema che non credo notorio. E ognun vede come si estenderebbe il teorema all'accelerazione angolare d'ordine n, introducendo le accelerazioni sferiche successive (fino all'ordine $n-1$ incl.) dell'asse istantaneo.

sideri un punto qualunque della figura mobile; e siano, alla fine del tempo t, M (x, y, z) la posizione da esso occupata, v la sua velocità, $J^{(2)}$ la sua accelerazione di 2° ordine. Derivando due volte le formole notissime

$$v_x = qz - ry$$
$$v_y = rx - pz$$
$$v_z = py - qx\,,$$

si ottengono le projezioni di $J^{(2)}$ sugli assi:

$$\left.\begin{aligned} J_x^{(2)} &= -3\,(qq' + rr')\,x + (r\omega^2 + 2\,pq' + p'q - r'')\,y + \\ &\quad + (-q\omega^2 + rp' + 2\,r'p + q'')\,z \\ J_y^{(2)} &= (-r\omega^2 + pq' + 2\,p'q + r'')\,x - 3\,(rr' + pp')\,y + \\ &\quad + (p\omega^2 + 2\,qr' + q'r - p'')\,z \\ J_z^{(2)} &= (q\omega^2 + 2\,rp' + r'p - q'')\,x + \\ &\quad + (-p\omega^2 + qr' + 2\,q'r + p'')\,y - 3\,(pp' + qq')\,z \end{aligned}\right\} \quad \ldots(6).$$

Supponiamo ora che gli assi coordinati, fin qui arbitrarj, siano quelli adottati dallo SCHELL. E cioè: per semiasse positivo delle z prendiamo OI; per semiasse positivo delle x la retta condotta da O nella direzione e pel verso della velocità sferica $\dot\psi$: per semiasse positivo delle y la posizione che assumerebbe il semiasse positivo Ox dopo aver ruotato intorno ad OI di 90° pel verso della rotazione istantanea. (L'asse delle y sarà parallelo alla normale comune ai due coni (C) e (Γ) nel punto P). La questione da risolvere è ridotta a vedere che cosa valgano per questa scelta particolare di assi le quantità $p, q, r, p', q', r', p'', q'', r''$. Le prime sei si hanno immediatamente: attualmente

$$a = 0\,, \qquad \cos(\dot\psi\, x) = 1\,,$$
$$b = 0\,, \qquad \cos(\dot\psi\, y) = 0\,,$$
$$c = 1\,, \qquad \cos(\dot\psi\, z) = 0\,;$$

e però [form. (1) e (2')]

$$p = 0\,, \qquad p' = \omega\dot\psi\,,$$
$$q = 0\,, \qquad q' = 0\,,$$
$$r = \omega\,, \qquad r' = \omega'\,.$$

Per avere p'', q'', r'' occorre conoscere i coseni direttori di χ rispetto agli assi attuali; ora, nell'ipotesi fatta,

$$\cos(\chi x) = \cos(\chi \psi) = \frac{\psi'}{\chi} \qquad [\text{per la form. } (4)]\,,$$

$$\cos(\chi z) = \cos(\chi, OI) = -\frac{\psi^2}{\chi} \qquad [\text{per la form. } (5)]\,,$$

$$\cos(\chi y) = \frac{\sqrt{\chi^2 - \psi'^2 - \psi^4}}{\chi}\,;$$

e quindi [form. (3')]

$$p'' = 2\,\omega'\psi + \omega\psi'\,,$$

$$q'' = \omega\sqrt{\chi^2 - \psi'^2 - \psi^4}\,,$$

$$r'' = \omega'' - \omega\psi^2\,.$$

Il radicale $\sqrt{\chi^2 - \psi'^2 - \psi^4}$ è da prendersi positivo o negativo secondochè l'accelerazione χ fa angolo acuto od ottuso coll'asse delle y, vale a dire secondochè il cono immobile (C) è nel punto P concavo o convesso verso le y positive. Ma possiamo trovare delle espressioni più semplici di $\chi\cos(\chi y)$ e, per conseguenza, di q''. Poichè ψ' esprime l'accelerazione tangenziale del moto assoluto del punto P, $\chi^2 - \psi'^2$ esprimerà il quadrato dell'accelerazione normale χ_n del moto stesso: ma $\chi_n = \frac{\psi^2}{\mathbf{r}}$, detto $\mathbf{r}$ il valore assoluto del raggio di curvatura della linea C nel punto P; dunque $\sqrt{\chi^2 - \psi'^2 - \psi^4} = \psi^2 \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}^2} - 1}$. Od anche $\chi\cos(\chi y)$ rappresenta la projezione sull'asse Oy dell'accelerazione χ, la qual projezione si riduce a quella dell'accelerazione χ^n e però vale $\frac{\psi^2}{\mathbf{r}}\cos(\chi_n y)$. D'altra parte, se denotiamo con R il raggio di curvatura principale del cono (C) nel punto P (*), abbiamo, pel teorema di MEUSNIER,

$$\mathbf{r} = R\cos(\chi_n y)$$

(*) Cioè il raggio di curvatura della sezione fatta dal piano condotto per P normalmente alla generatrice OI.

uguaglianza che è sempre vera in grandezza e in segno, purchè si convenga di prendere R positivo o negativo secondochè il cono (C) volge nel punto P la concavità verso le y positive oppure verso le y negative. Quindi $\chi \cos(\chi y)$ è anche uguale a $\frac{\psi^2}{R}$. Riassumendo:

$$q'' = \omega \sqrt{\chi^2 - \psi'^2 - \psi^4} = \omega \psi^2 \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}^2} - 1} = \frac{\omega \psi^2}{\mathbf{r}} \cos(\chi_n y) = \frac{\omega \psi^2}{R}.$$

Di queste varie espressioni adotteremo l'ultima.

Sostituendo nelle eq. (6) i valori trovati di p, q, ecc., otteniamo

$$\left.\begin{aligned} J_x^{(2)} &= -3\,\omega\,\omega' x + (\omega^3 - \omega'' + \omega\psi^2)\,y + \omega\psi\left(\omega + \frac{\psi}{R}\right) z \\ J_y^{(2)} &= -(\omega^3 - \omega'' + \omega\,\psi^2)\,x - 3\,\omega\,\omega' y - (2\,\omega'\psi + \omega\,\psi')\,z \\ J_z^{(2)} &= \omega\psi\left(2\,\omega - \frac{\psi}{R}\right) x + (2\,\omega'\psi + \omega\,\psi')\,y \end{aligned}\right\} \quad (7).$$

Queste sono le formole richieste che esprimono le projezioni di $J^{(2)}$ sugli assi speciali assunti dallo SCHELL. Parmi inopportuno il rilevare le varie differenze che esistono tra queste formole e quelle analoghe date nelle due edizioni della *Theorie* ecc. Osservo soltanto che, delle quantità qui usate, non comparisce nelle formole dello SCHELL il raggio R: vi figurano per contro quantità da noi non introdotte e cioè l'accelerazione angolare di 1° ordine α, la derivata $\frac{di}{dt}$, essendo di « l'angolo compreso tra le direzioni di α e di $\alpha + d\alpha$ » e l'angolo $\varkappa$ che il piano di queste due rette fa col piano zx. Tale divario proviene dall'espressione di q'' adoperata dallo SCHELL, espressione assai diversa dalle nostre: $q'' = \alpha \operatorname{sen} \varkappa \frac{di}{dt}$. Quest'espressione è esatta.

II.

Farò un'applicazione delle formole (7) a determinare la torsione in M della trajettoria descritta dal punto considerato.

Siano ρ il raggio di curvatura, τ il raggio di torsione della trajettoria predetta nel punto M. Considerando l'accelerazione di 1° ordine, si può determinare ρ in funzione di ω, di ψ e delle coordinate di M. Ecco l'espressione di ρ data dallo SCHELL nella 1ª edizione (p. 411) del suo trattato (posto, per brevità, $u^2 = x^2 + y^2$):

$$\rho = \frac{\omega u^3}{\sqrt{(\omega u^2 + \psi y z)^2 + \psi^2 y^2 u^2}},$$

che si può scrivere, chiamando a la distanza invariabile del punto che si considera dal centro O della rotazione,

$$\rho = \frac{\omega u^3}{\sqrt{\omega^2 u^4 + 2\,\omega \psi y z u^2 + a^2 \psi^2 y^2}} \qquad \ldots (8).$$

Analogamente, valendoci dell'accelerazione di 2° ordine, possiamo determinare τ in funzione di ω, ψ, R e delle coordinate del punto M. Infatti, dalle eq. (7) si deduce facilmente la projezione $J_b^{(2)}$ di $J^{(2)}$ sulla binormale in M alla trajettoria considerata (*). D'altra parte, per la teoria del moto di un punto,

$$J_b^{(2)} = \frac{v^3}{\rho \tau} = \frac{\omega^3 u^3}{\rho \tau}:$$

sostituendo quivi a $J_b^{(2)}$ l'espressione dedotta dalle (7) e a' ρ l'espressione fornita dalla (8), si trova

$$\tau = \frac{\omega(\omega^2 u^4 + 2\,\omega \psi y z u^2 + a^2 \psi^2 y^2)}{\omega \psi \left(2\,\omega - \frac{\psi}{R}\right) x u^2 + (\omega \psi' - \omega' \psi)\, y u^2 + 3\,\omega \psi^2 x y z} \ldots (9)$$

Le formole (8) e (9) sono suscettibili di una trasformazione

(*) I coseni direttori di questa binormale sono proporzionali a

$$\psi x y\,, \qquad \psi y^2\,, \qquad \omega u^2 + \psi y z\,.$$

degna di menzione. È noto (*) che, se R_1 è il raggio di curvatura principale del cono mobile (Γ) nel punto P,

$$\frac{\omega}{\psi} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}$$

(Quest'uguaglianza è vera in ogni caso, purchè si estenda a R_1 la convenzione già fatta per R, cioè si consideri ciascuno dei due raggi R e R_1 come positivo o negativo, secondochè il cono rispettivo è (nel punto P) concavo verso le y positive ovvero verso le y negative). Mediante questa relazione, possiamo eliminare dalle (8) e (9) ω e ψ. Designando con K la curvatura relativa $\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}$, con σ l'arco della linea C, e avvertendo che

$$\frac{\omega\psi' - \omega'\psi}{\psi^3} = -\frac{1}{\psi}\frac{d\left(\frac{\omega}{\psi}\right)}{dt} = -\frac{K'}{\sigma'} = -\frac{dK}{d\sigma}\,,$$

le espressioni di ρ e di τ prendono questa forma notabile:

$$\rho = \frac{K u^3}{\sqrt{K^2 u^4 + 2\,K y z u^2 + a^2 y^2}}$$

$$\tau = \frac{K^2 u^4 + 2\,K y z u^2 + a^2 y^2}{\left(2\,K - \frac{1}{R}\right) x u^2 - \frac{1}{K}\frac{dK}{d\sigma}\, y u^2 + 3\,x y z}\,.$$

(*) SCHELL, op. cit., 2ª ediz., p. 268 del vol. I.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

GIUNTA ACCADEMICA PER IL PREMIO BRESSA

Programma per l'ottavo premio Bressa

La Reale Accademia delle Scienze di Torino, uniformandosi alle disposizioni testamentarie del Dottor Cesare Alessandro Bressa, ed al Programma relativo pubblicatosi in data 7 Dicembre 1876, annunzia che col 31 Dicembre 1890 si chiuse il Concorso per le opere scientifiche e scoperte fattesi nel quadriennio 1887-90, a cui erano chiamati Scienziati ed Inventori di tutte le nazioni.

Contemporaneamente essa Accademia ricorda che, a cominciare dal 1° Gennaio 1889, è aperto il Concorso per l'ottavo premio Bressa, a cui, a mente del Testatore, saranno ammessi solamente **Scienziati ed Inventori Italiani**.

Questo Concorso sarà diretto a premiare quello Scienziato italiano che durante il quadriennio 1889-92 « a giudizio dell'Ac-« cademia delle Scienze di Torino, avrà fatto la più insigne ed « utile scoperta, o prodotto l'opera più celebre in fatto di scienze « fisiche e sperimentali, storia naturale, matematiche pure ed « applicate, chimica, fisiologia e patologia, non escluse la geo-« logia, la storia, la geografia e la statistica. »

Questo Concorso verrà chiuso col 31 Dicembre 1892.

La somma destinata al premio, dedotta la tassa di ricchezza mobile, sarà di lire **10416** (diecimila quattrocentosedici).

Chi intende presentarsi al Concorso dovrà dichiararlo, entro il termine sopra indicato, con lettera diretta al Presidente dell'Accademia e inviare l'opera con la quale concorre. L'opera dovrà essere stampata; non si tiene alcun conto dei manoscritti. Le opere dei Concorrenti, che non venissero premiati, saranno loro restituite, quando ne venga fatta domanda entro sei mesi dal giorno dell'aggiudicazione del premio.

Nessuno dei Soci nazionali residenti o non residenti dell'Accademia Torinese potrà conseguire il premio.

L'Accademia dà il premio allo Scienziato che essa ne giudica più degno, ancorchè non si sia presentato al Concorso.

Torino, 1° *Gennaio* 1891.

Il Presidente dell'Accademia
M. LESSONA.

Il Segretario della Giunta
A. NACCARI.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 28 Dicembre 1890 . . . . *Pag.* 189

FARAVELLI — Su di un muscolo a fibre liscie osservato nella zona ciliare dell'occhio del *Thynnus vulgaris* . . . . » 190

GINO LORIA — Le trasformazioni razionali dello spazio determinate da una superficie generale di terz'ordine . . . . » 197

PEANO — Sopra alcune curve singolari . . . . » 221

NOVARESE — Sulla accelerazione di second'ordine nel moto rotatorio intorno a un punto . . . . » 224

Programma per l'ottavo premio Bressa . . . . » 233

Torino — Tip. Reale-Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVI, DISP. 5ª, 1890-91

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell' 11 Gennaio 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: COSSA, Direttore della Classe, BRUNO, BERRUTI, SIACCI, D'OVIDIO, BIZZOZERO, FERRARIS, NACCARI, MOSSO, SPEZIA, GIBELLI, GIACOMINI, CAMERANO, SEGRE e BASSO Segretario.

Il Socio Segretario legge l'atto verbale dell'adunanza precedente che viene approvato.

Il Presidente ricorda con parole di vivo rimpianto la recente perdita del Professore Antonio STOPPANI, Socio Corrispondente dell'Accademia per la sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia, e dell'illustre estinto commemora le molte benemerenze scientifiche e le insigni virtù civili.

Fra le opere stampate che giunsero recentemente in dono all'Accademia viene segnalato un lavoro del Socio corrispondente Ernesto HAECKEL, col titolo: *Plankton - Studien; Vergleichende Untersuchungen über die Bedeutung und Zusammensetzung der Pelagischen Flora.*

Vengono letti ed accolti per la pubblicazione negli *Atti* i cinque lavori seguenti:

1° « *Le proprietà focali delle coniche nella metrica proiettiva;* » Nota del Socio D'Ovidio;

2° *Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno* 1890 *all'Osservatorio della R. Università di Torino*, *calcolate dal* Dott. G. B. Rizzo, *Assistente all'Osservatorio stesso;* (*)

3° « *Sulla sostituzione degli alogeni negli idrocarburi aromatici;* » Nota del Dott. G. Errera, presentata dal Socio Cossa.

4° « *Sulla terminazione delle fibre nervose nelle capsule surrenali dei mammiferi;* » Studio del Dott. Romeo Fusari, Prof. di Anatomia umana normale nell' Università di Ferrara, presentata dal Socio Bizzozero;

5° « *Ricerche anatomo-fisiologiche intorno all'apparato uditivo dei Teleostei;* » del Dott. Pietro De-Vescovi, presentate dal Socio Camerano.

Infine lo stesso Socio Camerano, condeputato col Socio Bizzozero, legge una sua Relazione sopra un lavoro dei Dottori Saverio Monticelli e Cesare Crety, intitolato: « *Ricerche intorno alla sottofamiglia delle Solenophorinae.* » La Classe, accogliendo le conclusioni favorevoli della Relazione, ammette prima questo lavoro alla lettura, e poscia ne delibera la pubblicazione nei volumi delle *Memorie.*

(*) Queste *Osservazioni* sono pubblicate in un fascicolo separato, che va unito agli *Atti* dell'Accademia.

LETTURE

Le proprietà focali delle coniche nella metrica proiettiva;

Nota di ENRICO D'OVIDIO

§. **1**. Due coniche A e C di un piano ammettono in generale uno, ed un solo, triangolo autoconiugato comune, che è triangolo diagonale così del quadrangolo completo dei 4 punti I_0, I_1, I_2, I_3 comuni a A e C come del quadrilatero completo delle 4 tangenti t_0, t_1, t_2, t_3 comuni a A e C. Lo chiameremo triangolo *principale*, e ne indicheremo con O_1, O_2, O_3 i vertici, con o_1, o_2, o_3 i lati.

Siano x_1, x_2, x_3 e ξ_1, ξ_2, ξ_3 le coordinate omogenee di un punto P e di una retta r del piano rispetto al triangolo principale. Le equazioni di A e C come luoghi assumono allora la forma canonica (*)

$$a_{xx} \equiv \Sigma a_h x^2_h = 0\,, \quad c_{xx} \equiv \Sigma c_h x^2_h = 0 \quad (h = 1, 2, 3)\ ;$$

e le equazioni delle polari di $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$ rispetto a A e C saranno

$$a_{xx'} = a_{x'x} \equiv \Sigma a_h x'_h x_h = 0\,, \quad c_{xx'} = c_{x'x} \equiv \Sigma c_h x'_h x_h = 0\ ,$$

e i discriminanti di a_{xx}, c_{xx}

$$a \equiv a_1 a_2 a_3\,, \quad c \equiv c_1 c_2 c_3\ .$$

Posto $a_h \alpha_h = 1$, $c_h \gamma_h = 1$, le equazioni di A e C come inviluppi saranno

$$\alpha_{\xi\xi} \equiv \Sigma \alpha_h \xi^2_h = 0, \quad \gamma_{\xi\xi} \equiv \Sigma \gamma_h \xi^2_h = 0\ ,$$

(*) Questa ipotesi nulla detrae alla generalità delle formole, poichè i coefficienti della equazione di una conica ridotta a forma canonica si sanno esprimere mediante i coefficienti della equazione data nella forma più generale.

e le equazioni dei poli di $r'(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3)$ rispetto a A e C

$$\alpha_{\xi\xi'} = \alpha_{\xi'\xi} \equiv \Sigma\, \alpha_h \xi'_h \xi_h = 0 \quad , \quad \gamma_{\xi\xi'} = \gamma_{\xi\xi'} \equiv \Sigma\, \gamma_h \xi_h \xi_h = 0 \quad ,$$

e i discriminanti di $\alpha_{\xi\xi}$, γ_ξ

$$\alpha \equiv \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \frac{1}{a}\,, \qquad \gamma \equiv \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \frac{1}{c} \quad .$$

Se $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}'$ sono poli di r, r' rispetto a A o C, si ha

$$a_{xx'} = \alpha_{\xi\xi'} \quad \text{o} \quad c_{xx'} = \gamma_{\xi\xi'} \quad ,$$

e in particolare

$$a_{xx} = \alpha_{\xi\xi} \quad \text{o} \quad c_{xx} = \gamma_{\xi\xi} \quad .$$

Per due punti P, P' si hanno [ponendo $(xx')_h = x_k x'_l - x_l x'_k$, e indicando con $h\,k\,l$ le permutazioni pari $1\,2\,3$, $2\,3\,1$, $3\,1\,2$] le identità

$$a_{xx} a_{x'x'} - a^2_{xx'} = \Sigma\, a_k a_l (xx')^2_h = a\, \alpha_{(xx')(xx')}\,,\quad c_{xx} c_{x'x'} - c^2_{xx'} = c\, \gamma_{(xx')(xx')}\,,$$

ed analogamente per due rette r, r'

$$\alpha_{\xi\xi}\, \alpha_{\xi'\xi'} - \alpha^2_{\xi\xi'} = \alpha\, a_{(\xi\xi')(\xi\xi')}\,,\quad \gamma_{\xi\xi}\, \gamma_{\xi'\xi'} - \gamma^2_{\xi\xi'} = \gamma\, c_{(\xi\xi')(\xi\xi')}\,;$$

è noto che, se P', r' son fissi e P, r variabili,

$$a_{xx}\, a_{x'x'} - a^2_{xx'} = 0 \quad , \qquad \alpha_{\xi\xi}\, \alpha_{\xi'\xi'} - \alpha^2_{\xi\xi'} = 0$$

sono le equazioni delle tangenti da P' a A e dei punti rA; e analogamente per C.

Una conica qualunque del fascio AC, del quale I_0, I_1, I_2, I_3 sono i punti base, ha come autoconiugato il triangolo $O_1 O_2 O_3$, ed ha l'equazione

$$\lambda\, a_{xx} + \mu\, c_{xx} = 0 \quad \text{o} \quad \sum \frac{\xi^2_h}{\lambda\, a_h + \mu\, c_h} = 0 \quad .$$

In particolare l'equazione della coppia di rette $(I_0 I_h \,,\, I_k I_l)$ incrociate in O_h è

$$a_h\, c_{xx} - c_h\, a_{xx} = (ac)_l\, x^2_k - (ac)_k\, x^2_l = 0 \quad ;$$

e disponendo sempre le coordinate di punti o rette nell'ordine hkl, abbiamo

$$I_0\left[\sqrt{(ac)_h}\,,\ \sqrt{(ac)_k}\,,\ \sqrt{(ac)_l}\right]\,,\qquad I_h\left[-\sqrt{(ac)_h}\,,\ \sqrt{(ac)_k}\,,\ \sqrt{(ac)_l}\right]\,,$$
$$I_0 I_h\left[0\,,\ -\sqrt{(ac)_l}\,,\ \sqrt{(ac)_k}\right]\,,\qquad I_k I_l\left[0\,,\ \sqrt{(ac)_l}\,,\ \sqrt{(ac)_k}\right]\,.$$

Una conica qualunque della schiera AC, che ha per rette basi t_0, t_1, t_2, t_3, ha come autoconiugato il triangolo o_1, o_2, o_3, ed ha l'equazione

$$\lambda\,\alpha_{\xi\xi}+\mu\,\gamma_{\xi\xi}=0 \quad \text{o} \quad \sum \frac{x^2{}_h}{\lambda\,\alpha_h+\mu\,\gamma_h}=0\,.$$

In particolare, l'equazione della coppia di punti $(t_0 t_h, t_k t_l)$, posti su o_h, è

$$\alpha_h\,\gamma_{\xi\xi}-\gamma_h\,\alpha_{\xi\xi}=(\alpha\gamma)_l\,\xi^2{}_k-(\alpha\gamma)_k\,\xi^2{}_l=0\,,$$

ed abbiamo

$$t_0\left[\sqrt{(\alpha\gamma)_h}\,,\ \sqrt{(\alpha\gamma)_k}\,,\ \sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right]\,,\qquad t_h\left[-\sqrt{(\alpha\gamma)_h}\,,\ \sqrt{(\alpha\gamma)_k}\,,\ \sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right]\,,$$
$$t_0 t_h\left[0\,,\ -\sqrt{(\alpha\gamma)_l}\,,\ \sqrt{(\alpha\gamma)_k}\right]\,,\qquad t_k t_l\left[0\,,\ \sqrt{(\alpha\gamma)_l}\,,\ \sqrt{(\alpha\gamma)_k}\right]\ (*).$$

Gl'invarianti simultanei di a_{xx}, c_{xx} sono

$$s\equiv\Sigma\, a_h\, a_k\, c_l\quad,\quad s'\equiv\Sigma\, a_h\, c_k\, c_l\,,$$

e l'equazione delle tre coppie di rette $(I_0 I_h, I_k I_l)$ è

$$a\,c_{xx}^{\ 3}-s\,c_{xx}^{\ 2}\,a_{xx}+s'\,c_{xx}\,a_{xx}^{\ 2}-c\,a_{xx}^{\ 3}=0\,;$$

del pari gl'invarianti simultanei di $\alpha_{\xi\xi}$, $\gamma_{\xi\xi}$ sono

$$\sigma\equiv\Sigma\,\alpha_h\,\alpha_k\,\gamma_l\quad,\quad \sigma'\equiv\Sigma\,\alpha_h\,\gamma_k\,\gamma_l\,,$$

(*) Supposti reali i coefficienti delle equazioni generali delle due coniche A e C, ossia supposti reali i due sistemi polari che determinano A e C, i punti I_0, I_1, I_2, I_3 possono essere tutti reali distinti, 2 reali distinti e 2 imaginarî coniugati, tutti imaginarî a due a due coniugati. Nel 1° caso il loro quadrangolo ha 3 coppie di lati reali distinte, nel 2° e nel 3° una coppia reale e due imaginarie coniugate.

Lo stesso dicasi delle rette t_0, t_1, t_2, t_3 e delle tre coppie di vertici del loro quadrilatero.

e l'equazione delle tre coppie di punti $(t_0 t_h , t_k t_l)$ è

$$\alpha\gamma^3_{\xi\xi} - \sigma\gamma^2_{\xi\xi}\alpha_{\xi\xi} + \sigma'\gamma_{\xi\xi}\alpha^2_{\xi\xi} - \gamma\alpha^3_{\xi\xi} = 0 \ .$$

E si noti che

$$s = a\Sigma\alpha_h c_h \ , \ s' = c\Sigma a_h\gamma_h \ , \ \sigma = \alpha\Sigma a_h\gamma_h \ . \ \sigma' = \gamma\Sigma\alpha_h c_h \ ,$$

$$\frac{s}{a} = \frac{\sigma'}{\gamma} \ , \ \frac{s'}{c} = \frac{\sigma}{\alpha} \ .$$

Il covariante simultaneo di a_{xx}, c_{xx} è

$$u^2_{xx} \equiv \sum(\alpha_k\gamma_l + \alpha_l\gamma_k)x^2_h = \frac{1}{ac}\sum a_h c_h(a_k c_l + a_l c_k)x^2_h \ ;$$

e quello di $\alpha_{\xi\xi} \cdot \gamma_{\xi\xi}$ (ossia il controvariante simultaneo di a_{xx}, c_{xx}) è

$$\chi^2_{\xi\xi} \equiv \sum(a_k c_l + a_l c_k)\xi^2_h = \frac{1}{\alpha\gamma}\sum\alpha_h\gamma_h(\alpha_k\gamma_l + \alpha_l\gamma_k)\xi^2_h \ .$$

Le coordinate delle rette a_0, a_h e c_0, c_h tangenti risp. a A e C nei punti I_0, I_h, sono

$$a_0\left[a_h\sqrt{(ac)_h}, a_k\sqrt{(ac)_k}, a_l\sqrt{(ac)_l}\right] \ , \ a_h\left[-a_h\sqrt{(ac)_h}, a_k\sqrt{(ac)_k}, a_l\sqrt{(ac)_l}\right] ,$$
$$c_0\left[c_h\sqrt{(ac)_h}, c_k\sqrt{(ac)_k}, c_l\sqrt{(ac)_l}\right] \ . \ c_h\left[-c_h\sqrt{(ac)_h}, c_k\sqrt{(ac)_k}, c_l\sqrt{(ac)_l}\right] ;$$

e le coordinate dei punti A_0, A_h e C_0, C_h di contatto delle t_0, t_h con A e C

$$A_0\left[\alpha_h\sqrt{(\alpha\gamma)_h}, \alpha_k\sqrt{(\alpha\gamma)_k}, \alpha_l\sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right] . \ A_h\left[-\alpha_h\sqrt{(\alpha\gamma)_h}, \alpha_k\sqrt{(\alpha\gamma)_k}, \alpha_l\sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right] ,$$
$$C_0\left[\gamma_h\sqrt{(\alpha\gamma)_h}, \gamma_k\sqrt{(\alpha\gamma)_k}, \alpha_l\sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right] , \ C_h\left[-\gamma_h\sqrt{(\alpha\gamma)_h}, \gamma_k\sqrt{(\alpha\gamma)_k}, \gamma_l\sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right] .$$

I poli $c_0 c_h$, $c_k c_l$ delle rette $I_0 I_h$, $I_k I_l$ rispetto a C stanno su o_h ed hanno le coordinate

$$c_0 c_h\left[0, -c_l\sqrt{(ac)_l} \ , \ c_k\sqrt{(ac)_k}\right] \ , \ c_k c_l\left[0, c_l\sqrt{(ac)_l} \ , \ c_k\sqrt{(ac)_k}\right] ;$$

e le polari $C_0 C_h$, $C_k C_l$ dei punti $t_0 t_h$, $t_k t_l$ passano per O_h ed hanno le coordinate

$$C_0 C_h\left[0, -\gamma_l\sqrt{(\alpha\gamma)_l} \ , \ \gamma_k\sqrt{(\alpha\gamma)_k}\right] \ , \ C_k C_l\left[0, \gamma_l\sqrt{(\alpha\gamma)_l} \ , \ \gamma_k\sqrt{(\alpha\gamma)_k}\right] .$$

La conica C' polare-reciproca di C rispetto a A ha l'equazione

$$c'_{xx} \equiv \sum \frac{a^2_h}{c_h} x^2_h = 0 \quad \text{o} \quad \gamma'_{\xi\xi} \equiv \sum \frac{\alpha^2_h}{\gamma_h} \xi^2_h = 0 \ .$$

passa per A_0, A_1, A_2, A_3, tocca a_0, a_1, a_2, a_3, ed ha per triangolo autoconiugato $O_1 O_2 O_3$.

Come covariante delle forme a_{xx} e c_{xx}, deve c'_{xx} esprimersi linearmente per mezzo di esse e di u_{xx}; e lo stesso vale per $\gamma'_{\xi\xi}$ rispetto a $\alpha_{\xi\xi}, \gamma_{\xi\xi}, \chi_{\xi\xi}$; infatti

$$c\, c'_{xx} = s'\, a_{xx} - a\, c\, u_{xx} \ , \quad \gamma\gamma'_{\xi\xi} = \sigma'\, \alpha_{\xi\xi} - \alpha\gamma\chi_{\xi\xi} \ .$$

§. **2**. Assumiamo la conica A come assoluto per una determinazione metrica proiettiva nel suo piano, e ricordiamo le formole che definiscono la distanza (segmento) fra due punti P, P', la distanza (angolo) fra due rette r, r', e quella fra un punto P e una retta r: (*)

$$PP' = \frac{1}{2i}\, l\, \frac{a_{xx'} + i\sqrt{a_{xx}\, a_{x'x'} - a^2_{xx'}}}{a_{xx'} - i\sqrt{a_{xx}\, a_{x'x'} - a^2_{xx'}}} \ .$$

$$\cos PP' = \frac{a_{xx'}}{\sqrt{a_{xx}\, a_{x'x'}}} \ , \qquad \text{sen}\, PP' = \frac{\sqrt{a_{xx}\, a_{x'x'} - a^2_{xx'}}}{\sqrt{a_{xx}\, a_{x'x'}}} \ .$$

(*) Cfr. *Studio sulla Geometria proiettiva* di E. D'OVIDIO (Annali di Matematica, t. VI, s.2, 1873), ovvero *Le funzioni metriche fondamentali negli spazî di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante* (Memorie dei Lincei, v. I, 1877).

La quantità, di cui nell'espressione della distanza PP' si prende il logaritmo, è uno dei due rapporti anarmonici (reciproci fra loro) dei due punti P e P' e dei due punti che la retta PP' ha comuni con A. Scelto questo rapporto anarmonico, è definita la distanza PP' a meno di un multiplo di π, e però rimane ambiguo il segno di $\cos PP'$, $\text{sen}\, PP'$. Lo stesso dicasi per rr' e Pr. Di qui segue che nelle relazioni metriche che noi troveremo il segno preposto ai seni e coseni sarà fino a un certo punto arbitrario. Qualche disaccordo nei segni, che potrà riscontrarsi fra le nostre relazioni e quelle note della Geometria euclidea, è spiegato da questa osservazione: che, se si percorre il contorno del triangolo principale nel verso indicato dall'ordine $O_1 O_2 O_3$, quando poi i vertici O_2 e O_3 vanno all'infinito e i lati $O_1 O_2$, $O_1 O_3$ divengono due assi cartesiani, uno di questi due lati non viene più percorso in quel verso ma nel verso contrario.

$$rr' = \frac{1}{2i} l \frac{\alpha_{\xi\xi'} + i\sqrt{\alpha_{\xi\xi}\alpha_{\xi'\xi'} - \alpha^2_{\xi\xi'}}}{\alpha_{\xi\xi'} - i\sqrt{\alpha_{\xi\xi}\alpha_{\xi'\xi'} - \alpha^2_{\xi\xi'}}} \ .$$

$$\cos rr' = \frac{\alpha_{\xi\xi'}}{\sqrt{\alpha_{\xi\xi}\alpha_{\xi'\xi'}}} \ , \quad \operatorname{sen} rr' = \frac{\sqrt{\alpha_{\xi\xi}\alpha_{\xi'\xi'} - \alpha^2_{\xi\xi'}}}{\sqrt{\alpha_{\xi\xi}\alpha_{\xi'\xi'}}} \ ,$$

$$\operatorname{sen} Pr = \frac{\Sigma x_h \xi_h}{\sqrt{a_{xx}\alpha_{\xi\xi}}} \ ;$$

cosicchè due rette, o due punti, coniugati rispetto a A si diranno *ortogonali o normali o perpendicolari*, come pure un punto e la sua polare rispetto ad A.

Ciò premesso: $s=0$, ovvero $\sigma'=0$, è la condizione per l'esistenza di una e quindi ∞ terne di punti di C mutuamente ortogonali; e $s'=0$, ovvero $\sigma=0$, è la condizione per l'esistenza di una e quindi ∞ terne di tangenti di C mutuamente ortogonali. Il luogo dei punti comuni a due tangenti ortogonali di C è la conica U di equazione $u_{xx}=0$, che passa per gli 8 punti $A_0, \ldots, C_0, \ldots$ ed ha il triangolo principale $O_1 O_2 O_3$ come autoconiugato; e l'inviluppo delle rette unienti due punti ortogonali di C è la conica V di equazione $\chi_{\xi\xi}=0$, che tocca le 8 rette $a_0, \ldots, c_0, \ldots$, ed ha il triangolo principale $O_1 O_2 O_3$ come autoconiugato.

Più generalmente: il luogo dei punti, da cui escono due tangenti di C formanti un angolo φ, è la quartica (*)

$$4\, u^2_{xx} \operatorname{tg}^2 \varphi + ac a_{xx} c_{xx} = 0 \ ;$$

e variando φ si ha un fascio di curve passanti per $A_0, \ldots, C_0, \ldots$ ed ivi tangenti U (**). Del pari l'inviluppo delle rette secanti C in due punti di distanza δ è la curva di 4^a classe

$$4\, \chi^2_{\xi\xi} \operatorname{tg}^2 \delta + \alpha\gamma\alpha_{\xi\xi}\gamma_{\xi\xi} = 0 \ ,$$

(*) Cfr. Clebsch-Lindemann *Vorlesungen über Geometrie*, pag. 281, osservando che $\frac{e^{2i\varphi}-1}{e^{2i\varphi}+1} = i \operatorname{tg} \varphi$.

(**) Cfr. Salmon *Higher plane curves*, cap. *Quartics*, per le proprietà delle quartiche dedotte dalla equazione $UW = V^2$, ove $U=0$, $V=0$, $W=0$ rappresentano coniche. La nostra quartica è l'inviluppo della conica $\lambda^2 a a_{xx} + 4\lambda u_{xx} \operatorname{tg} \varphi - c c_{xx} = 0$ variabile con λ.

e variando δ si ha una schiera di curve tangenti a $a_0, \ldots, c_0, \ldots$ dove queste toccano V.

Due triangoli coniugati rispetto a A si diranno *ortogonali* e sono omologici. Vi sono ∞^3 triangoli *autortogonali*.

Uno fra essi, il principale, è autoconiugato rispetto a C.

$O_1 O_2 O_3$ e $o_1 o_2 o_3$ costituiscono rispettivamente l'unica terna di punti o di rette mutuamente ortogonali e coniugate rispetto a C. Le rette per O_h sono ortogonali a o_h; e in particolare le tangenti r_h, r'_h da O_h a C, che toccano nei punti Co_h. Per C, come per A, O_h e o_h sono centro ed asse di omologia armonica. È facile vedere che le corde di C passanti per O_h sono bisecate ivi e da o_h. Diremo O_1, O_2, O_3 e o_1, o_2, o_3 *centri ed assi principali* di C.

Per due punti $P(0, -x_k, x_l)$ $P'(0, x_k x_l)$ armonici rispetto a O_k e O_l si ha

$$\cos PP' = \frac{-a_k x^2_k + a_l x^2_l}{a_k x^2_k + a_l x^2_l}, \quad \operatorname{sen}^2 PP' = \frac{4\, a_k a_l x^2_k x^2_l}{(a_k x^2_k + a_l x^2_l)^2},$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} PP' = \frac{a_k x^2_k}{a_l x^2_l};$$

e si noti che $PP' = \widehat{O_h P, O_h P'}$.

Pei punti Co_h, cioè $P_h\left[0, -\sqrt{c_l}, \sqrt{-c_k}\right]$, $P'_h\left[0, \sqrt{c_l}, \sqrt{-c_k}\right]$, che diremo *vertici* di C, si ha (*)

$$\cos P_h P'_h = -\frac{a_k c_l + a_l c_k}{a_k c_l - a_l c_k} = \frac{\alpha_k \gamma_l + \alpha_l \gamma_k}{\alpha_k \gamma_l - \alpha_l \gamma_k},$$

$$\operatorname{sen}^2 P_h P'_h = -\frac{4\, a_k a_l c_k c_l}{(a_k c_l - a_l c_k)^2} = -\frac{4\, \alpha_k \alpha_l \gamma_k \gamma_l}{(\alpha_k \gamma_l - \alpha_l \gamma_k)^2},$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} P_h P'_h = -\frac{a_k c_l}{a_l c_k} = -\frac{\alpha_l \gamma_k}{\alpha_k \gamma_l},$$

(*) Occorrono sovente le identità che qui registriamo una volta per tutte:

$$\alpha_k \gamma_l + \alpha_l \gamma_k = \frac{a_k c_l + a_l c_k}{a_k a_l c_k c_l},$$

$$(\alpha\gamma)_h = -\frac{(ac)_h}{a_k a_l c_k c_l}, \quad \alpha_h (\alpha\gamma)_h = -\frac{c_h (ac)_h}{ac},$$

$$\Sigma\, a_h (ac)_h = 0, \quad \Sigma\, c_h (ac)_h = 0,$$

e quindi

$$\mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2} P_1 P'_1 \,.\, \mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2} P_2 P'_2 \,.\, \mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2} P_3 P'_3 = -1 \ .$$

Si noti che $P_h P'_h = r_h r'_h$.

Sia P' un punto di C: la retta coniugata di $O_h P'$ rispetto a C e passante per O_h forma fascio con o_h e con la tangente t' in P', ha l'equazione $c_k x'_k x_k + c_l x'_l x_l = 0$, e incontra C in due punti, uno dei quali è $P''(\pm x'_h \sqrt{c_k c_l}\,,\, c_l x'_l\,,\, -c_k x'_k)$. Ora si ha

$$\mathrm{tg}^2 O_h P' = \frac{a_k x'^2_k + a_l x'^2_l}{a_h x'^2_h} \ ; \quad \mathrm{tg}^2 O_h P'' = \frac{a_l c^2_k x'_k + a_k c^2_l x'^2_l}{a_h c_k c_l x'^2_h} \ ,$$

$$\mathrm{tg}^2 O_h t' = \frac{c^2_h x'^2_h}{a_h(\alpha_k c^2_k x'^2_k + \alpha_l c^2_l x'^2_l)} \ ;$$

onde le relazioni

$$\mathrm{tg}^2 O_h P' + \mathrm{tg}^2 O_h P'' = -\frac{c_h(a_k c_l + a_l c_k)}{a_h c_k c_l} = \mathrm{cost.} \ ,$$

$$\mathrm{tg}^2 O_h t' \,.\, \mathrm{tg}^2 O_h P'' = \frac{c^2_h a_k a_l}{a^2_h c_k c_l} = \mathrm{cost.} \ ,$$

generalizzazione di due noti teoremi di APOLLONIO.

§. **3.** Essendo $t_0, \ldots$ tangenti a C ed all'assoluto A, diremo *fuochi* di C i loro 6 punti d'incontro t_0 , t_1 , ... , e porremo $F_h \equiv t_0 t_h$, $F'_h \equiv t_k t_l$. È chiaro che, mentre l'involuzione delle coppie di rette coniugate rispetto a C e passanti per un punto fisso possiede una sola coppia ortogonale, l'involuzione diviene ortogonale quando il punto è un fuoco, e solo allora.

Consideriamo una retta $r(\xi_1 , \xi_2 , \xi_3)$, i suoi poli rispetto a

---

$$\alpha_k(\alpha\gamma)_k + \alpha_l(\alpha\gamma)_l = -\alpha_h(\alpha\gamma)_h = \frac{c_h(ac)_h}{ac} \ ,$$

$$\alpha_k(\alpha\gamma)_k - \alpha_l(\alpha\gamma)_l = 3\,\alpha_k \alpha_l \gamma_h - \sigma = \frac{3\,a_h c_k c_l - s'}{a\,c} \ ,$$

$$\alpha_k \gamma^2_l(\alpha\gamma)_l + \alpha_l \gamma^2_k(\alpha\gamma)_k = (\alpha\gamma)_h(2\,\alpha_h \gamma_k \gamma_l - \sigma') = \frac{1}{a^2 c^2} a_h c_h (ac)_h (s - 2\,a_k a_l c_h) \ ,$$

ed altre analoghe, in tutte le quali è lecito scambiare le lettere greche con le italiche.

A e C, e la retta di questi poli $p\left[(\alpha\gamma)_1\xi_2\xi_3, (\alpha\gamma)_2\xi_3\xi_1, (\alpha\gamma)_3\xi_1\xi_2\right]$, cioè la perpendicolare a r dal suo polo rispetto a C; sicchè reciprocamente r passa pei poli di p. I punti $ro_h(0, \xi_l, -\xi_k)$, $po_h\left[0, (\alpha\gamma)_l\xi_k, -(\alpha\gamma)_k\xi_l\right]$ hanno costante il prodotto dei rapporti delle loro coordinate, che è $\frac{(\alpha\gamma)_l}{(\alpha\gamma)_k}$; e però sono coniugati in un'involuzione, i cui punti doppi sono F_h, F'_h. O altrimenti: rotando r intorno a un punto di o_h, i suoi poli rispetto a A e C descrivono sulle due polari di quel punto due punteggiate proiettive di cui O_h è un punto unito, e quindi prospettive; ossia p roterà intorno a un punto. E siccome quando r passa per O_h la p diviene o_h, così quel punto sta su o_h. Si hanno così su o_h coppie di punti in corrispondenza univoca ed evidentemente reciproca, cioè in involuzione; ed è chiaro che F_h, F'_h ne sono i punti doppî. Quindi le r, p sono in armonia con le rette unienti il punto rp a F_h e F'_h; e in particolare, la tangente e la normale in un punto P di C sono in armonia coi raggi focali PF_h, PF'_h.

Tutte le coniche della schiera AC, incluse le 3 coppie di punti (F_h, F'_h), sono *confocali* a C. Ciascuna è individuata da una tangente; e per ogni punto ne passano due, le cui tangenti in quel punto sono ortogonali ed in armonia con le tangenti tirate a ogni altra conica della schiera, nonchè con le rette che vanno a F_h e F'_h.

Si ha

$$\cos F_hF'_h = \frac{\alpha_k(\alpha\gamma)_k - \alpha_l(\alpha\gamma)_l}{\alpha_k(\alpha\gamma)_k + \alpha_l(\alpha\gamma)_l} = \frac{\sigma - 3\alpha_k\alpha_l\gamma_h}{\alpha_h(\alpha\gamma)_h} = \frac{3a_hc_kc_l - s'}{c_h(ac)_h}.$$

$$\text{sen}^2 F_hF'_h = \frac{4\,\alpha_k\alpha_l(\alpha\gamma)_k(\alpha\gamma)_l}{\alpha^2_h(\alpha\gamma)^2_h} = \frac{4\,c_kc_l(ac)_k(ac)_l}{c^2_h(ac)^2_h}.$$

$$\text{tg}^2\tfrac{1}{2}F_hF'_h = \frac{\alpha_l(\alpha\gamma)_l}{\alpha_k(\alpha\gamma)_k} = \frac{c_l(ac)_l}{c_k(ac)_k},$$

$$\text{tg}\tfrac{1}{2}F_1F'_1 \,.\, \text{tg}\tfrac{1}{2}F_2F'_2 \,.\, \text{tg}\tfrac{1}{2}F_3F'_3 = 1 \quad ,$$

$$\text{tg}^2\tfrac{1}{2}F_hF'_h : \text{tg}^2\tfrac{1}{2}P_hP'_h = -\gamma_l(\alpha\gamma)_l : \gamma_k(\alpha\gamma)_k = -a_l(ac)_l : a_k(ac)_k\ .$$

E si noti che $F_hF'_h = \widehat{O_hF_h, O_hF'_h}$.

Diremo *direttrici* le rette $C_0C_1, \ldots$ polari dei fuochi rispetto a C, e porremo $d_h \equiv C_0 C_h$ polare di F_h, $d'_h \equiv C_k C_l$ polare di F'_h. Due rette r, p perpendicolari in F_h formano con d_h un triangolo autoconiugato rispetto a C; ogni retta r' pel punto pd_h ha il polo su r, e però questi due punti sono ortogonali, e le rette da F_h ai due punti $r'C$ sono armoniche con r, p. Ed altre proprietà si potrebbero dimostrare.

Si ha

$$\cos d_h d_h' = \frac{a_k \gamma^2_k (\alpha\gamma)_k - a_l \gamma^2_l (\alpha\gamma)_l}{a_k \gamma^2_k (\alpha\gamma)_k + a_l \gamma^2_l (\alpha\gamma)_l},$$

$$\operatorname{sen}^2 d_h d'_h = \frac{4 a_k a_l \gamma^2_k \gamma^2_l (\alpha\gamma)_k (\alpha\gamma)_l}{[a_k \gamma^2_k (\alpha\gamma)_k + a_l \gamma^2_l (\alpha\gamma)_l]^2},$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} d_h d'_h = \frac{\alpha_k \gamma_l^2 (\alpha\gamma)_l}{\alpha_l \gamma_k^2 (\alpha\gamma)_k} = \frac{a^2_l c_k (ac)_l}{a_k c_l (ac)_k},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} d_1 d'_1 \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2} d_2 d'_2 \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2} d_3 d'_3 = 1 \quad ,$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} d_h d'_h \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} P_h P'_h = -\gamma_l (\alpha\gamma)_l : \gamma_k (\alpha\gamma)_k = - a_l (ac)_l : a_k (ac)_k \quad ,$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} F_h F'_h : \operatorname{tg} \frac{1}{2} d_h d'_h = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} P_h P'_h \quad .$$

Le direttrici d_h, d'_h sono ortogonali a o_h nei due punti $D_h \left[0 \,, \gamma_k \sqrt{(\alpha\gamma)_k} \,, \gamma_l \sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right]$, $D'_h \left[0 \,, \gamma_k \sqrt{(\alpha\gamma)_k} \,, -\gamma_l \sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right]$; e si ha $D_h D'_h = d_h d'_h$.

§. **4**. Per una retta qualunque r si ha

$$\operatorname{sen} r F_h = \frac{\xi_l \sqrt{(\alpha\gamma)_k} - \xi_k \sqrt{(\alpha\gamma)_l}}{\sqrt{\alpha_{\xi\xi}} \sqrt{a_k (\alpha\gamma)_l + a_l (\alpha\gamma)_k}},$$

$$\operatorname{sen} r F'_h = \frac{\xi_l \sqrt{(\alpha\gamma)_k} + \xi_k \sqrt{(\alpha\gamma)_l}}{\sqrt{\alpha_{\xi\xi}} \sqrt{a_k (\alpha\gamma)_l + a_l (\alpha\gamma)_k}},$$

onde le relazioni

$$\sum c_h (ac)_h \operatorname{sen} r F_h = 0 \quad ,$$

$$c_h (ac)_h \operatorname{sen} r F_h - c_k (ac)_k \operatorname{sen} r F'_k + c_l (ac)_l \operatorname{sen} r F'_l = 0 \quad ,$$

$$c_h (ac)_h (\operatorname{sen} r F_h + \operatorname{sen} r F'_h) + c_k (ac)_k (\operatorname{sen} r F_k - \operatorname{sen} r F'_k) = 0 \quad ,$$

$$\frac{\operatorname{sen} r F_h + \operatorname{sen} r F'_h}{\operatorname{sen} r F_k - \operatorname{sen} r F'_k} + \frac{\operatorname{sen} r F_h - \operatorname{sen} r F'_h}{\operatorname{sen} r F_l + \operatorname{sen} r F'_l} = 1 \quad .$$

Inoltre si ha

$$\operatorname{sen} rF_h \operatorname{sen} rF'_h = \frac{(\alpha\gamma)_k \xi^2{}_l - (\alpha\gamma)_l \xi^2{}_k}{\alpha_{\xi\xi}\left[a_k(\alpha\gamma)_l + a_l(\alpha\gamma)_k\right]} ;$$

onde

$$\sum c^2{}_h (ac)^2{}_h \operatorname{sen} rF_h \operatorname{sen} rF'_h = 0 \ .$$

Si ha pure

$$\operatorname{sen} rF_h + \operatorname{sen} rF'_h = \frac{2\sqrt{(\alpha\gamma)_k}}{\sqrt{\alpha_{\xi\xi}}\sqrt{a_k(\alpha\gamma)_l + a_l(\alpha\gamma)_k}}\, \xi_l \ ,$$

$$\operatorname{sen} rF_h - \operatorname{sen} rF'_h = \frac{2\sqrt{(\alpha\gamma)_l}}{\sqrt{\alpha_{\xi\xi}}\sqrt{a_k(\alpha\gamma)_l + a_l(\alpha\gamma)_k}}\, \xi_k \ .$$

Suppongasi che r sia una tangente di C: allora (§ 1) $\gamma_h\alpha_{\xi\xi} = (\alpha\gamma)_k \xi^2{}_l - (\alpha\gamma)_l \xi^2{}_k$, e però sussisterà, oltre alle precedenti, la relazione

$$\operatorname{sen} rF_h \operatorname{sen} rF'_h = \frac{a_h c_l c_k}{c_h (ac)_h} = -\frac{\alpha_k \alpha_l \gamma_h}{\alpha_h (\alpha\gamma)_h} = \text{cost. (con } h) \ ,$$

analoga ad una ben nota, e

$$\sum \frac{a_h c_k c_l}{\operatorname{sen} rF_h \operatorname{sen} rF'_h} = 0 \ , \ \sum c_h (ac)_h \operatorname{sen} rF_h \operatorname{sen} rF'_h = s' \ ,$$

$$\sum \frac{a_l c^2{}_h (ac)_h}{(ac)_k} (\operatorname{sen} rF_h + \operatorname{sen} rF'_h)^2 = 0 \ ,$$

$$\sum \frac{a_k c^2{}_h (ac)_h}{(ac)_l} (\operatorname{sen} rF_h - \operatorname{sen} rF'_h)^2 = 0 \ .$$

Si noti che invece di $c_h(ac)_h$, $c_k(ac)_k$, $c_l(ac)_l$, in quelle relazioni che sono omogenee rispetto ad esse, si può scrivere le quantità proporzionali 1, $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} F_l F'_l$, $\cot^2 \frac{1}{2} F_k F'_k$, nonchè quelle che si deducono permutando circolarmente hkl; del pari si può scrivere -1, $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} P_l P'_l$, $\cot^2 \frac{1}{2} P_k P'_k$, o le analoghe terne, invece di $a_h c_k c_l, a_k c_l c_h, a_l c_h c_k$; come pure si può scrivere $\alpha_h(\alpha\gamma)_h, \ldots$ invece di $c_h(ac)_h, \ldots$ (mutando insieme s' in $-\sigma$); $\alpha_k \gamma_l \gamma_h, \ldots$ invece di $a_h c_k c_l, \ldots$; $\dfrac{\alpha_h^2 \gamma_l (\alpha\gamma)_h}{(\alpha\gamma)_k}, \ldots$ invece di $\dfrac{a_l c_h^2 (ac)_h}{(ac)_k}, \ldots$; $\dfrac{\alpha_h^2 \gamma_k (\alpha\gamma)_h}{(\alpha\gamma)_l}, \ldots$ invece di $\dfrac{a_k c_h^2 (ac)_h}{(ac)_l}, \ldots$

Suppongasi r tangente a C': sarà

$$\sum \frac{(ac)_h}{a_l c^2_k (ac)_k} (\operatorname{sen} rF_h + \operatorname{sen} rF'_h)^2 = 0 \ ,$$

$$\sum \frac{(ac)_h}{a_k c^2_l (ac)_l} (\operatorname{sen} rF_h - \operatorname{sen} rF'_h)^2 = 0 \ ,$$

dove può scriversi $\frac{(\alpha\gamma)_h}{\gamma_l \alpha_k^2 (\alpha\gamma)_k}, \ldots$ invece di $\frac{(ac)_h}{a_l c_k^2 (ac)_k}, \ldots$ e $\frac{(\alpha\gamma)_h}{\gamma_k \alpha_l^2 (\alpha\gamma)_l}, \ldots$ invece di $\frac{(ac)_h}{a_k c^2_l (ac)_l}, \ldots$

Sia ora P un punto qualunque. Detta r la sua polare rispetto ad A, ed osservato che $PF_h - rF = Pr = \frac{\pi}{2}$, potremo in tutte le relazioni testè trovate sostituire $\cos PF_h$ a $\operatorname{sen} rF_h$, e così pure $\cos PF'_h$ a $\operatorname{sen} rF'_h$. Allora le ipotesi che r sia tangente di C o C' si mutano nelle ipotesi che P sia un punto di C' o di C.

Avremo anche

$$\operatorname{sen}^2 PF_h = \cos^2 rF_h = \frac{\gamma_h (\alpha\gamma)_h \alpha_{\xi\xi} + \alpha_k \alpha_l \left| \xi_l \sqrt{(\alpha\gamma)_k} - \xi_k \sqrt{(\alpha\gamma)_l} \right|^2}{\alpha_h (\alpha\gamma)_h \alpha_{\xi\xi}}$$

$$= \frac{\alpha_h (\alpha\gamma)_h a_{xx} + \alpha_k \alpha_l \left| a_l x_l \sqrt{(\alpha\gamma)_k} - a_k x_k \sqrt{(\alpha\gamma)_l} \right|^2}{\alpha_h (\alpha\gamma)_h a_{xx}} \ ,$$

e analogamente per $\operatorname{sen}^2 PF'_h = \cos^2 rF'_h$.

§ **5**. Per un punto qualunque P abbiamo

$$\operatorname{sen} Pd_h = \frac{x_l \gamma_k \sqrt{(\alpha\gamma)_k} - x_k \gamma_l \sqrt{(\alpha\gamma)_l}}{\sqrt{a_{xx}} \sqrt{\alpha_k \gamma^2_l (\alpha\gamma)_l + \alpha_l \gamma^2_k (\alpha\gamma)_k}} \ ,$$

$$\operatorname{sen} Pd'_h = \frac{x_l \gamma_k \sqrt{(\alpha\gamma)_k} + x_k \gamma_l \sqrt{(\alpha\gamma)_l}}{\sqrt{a_{xx}} \sqrt{\alpha_k \gamma^2_l (\alpha\gamma)_l + \alpha_l \gamma^2_k (\alpha\gamma)_k}} \ ,$$

e ne deduciamo

$$\sum a_h (ac)_h \sqrt{s - 2 a_k a_l c_h} \,.\, \operatorname{sen} P d_h = 0 \ ,$$

$$a_h (ac)_h \sqrt{s - 2 a_k a_l c_h} \,.\, \operatorname{sen} Pd_h - a_k (ac)_k \sqrt{s - 2 a_l a_h c_k} \,.\, \operatorname{sen} Pd'_k$$
$$+ a_l (ac)_l \sqrt{s - 2 a_h a_k c_l} \,.\, \operatorname{sen} Pd'_l = 0 \ .$$

$$\operatorname{sen} Pd_h \operatorname{sen} Pd'_h = \frac{\gamma^2_k(\alpha\gamma)_k x^2_l - \gamma^2_l(\alpha\gamma)_l x^2_k}{a_{xx}\left[a_k \gamma^2_l(\alpha\gamma)_l + a_l \gamma^2_k(\alpha\gamma)_k\right]} \, ,$$

$$\sum a^2_h (ac)^2_h (s - 2\, a_k a_l c_h) \operatorname{sen} Pd_h \operatorname{sen} Pd'_h = 0 \quad ,$$

$$\operatorname{sen} Pd_h + \operatorname{sen} Pd'_h = \frac{2\, \gamma_k \sqrt{(\alpha\gamma)_k}}{\sqrt{a_{xx}} \sqrt{\alpha_k \gamma^2_l(\alpha\gamma)_l + \alpha_l \gamma_k^2(\alpha\gamma)_k}}\, x_l \ .$$

$$\operatorname{sen} Pd_h - \operatorname{sen} Pd'_h = \frac{-2\, \gamma_l \sqrt{(\alpha\gamma)_l}}{\sqrt{a_{xx}} \sqrt{\alpha_k \gamma^2_l(\alpha\gamma)_l + \alpha_l \gamma^2_k(\alpha\gamma)_k}}\, x_k \ .$$

Se P è un punto di C, sarà anche

$$\sum \frac{a_h (ac)_h (s - 2\, a_k a_l c_h)}{a_k (ac)_k} (\operatorname{sen} Pd_h + \operatorname{sen} Pd'_h)^2 = 0 \ ,$$

$$\sum \frac{a_h (ac)_h (s - 2\, a_k a_l c_h)}{a_l (ac)_l} (\operatorname{sen} Pd_h - \operatorname{sen} Pd'_h)^2 = 0 \ .$$

Se invece P è un punto di C'.

$$\sum \frac{a_l (ac)_h (s - 2\, a_k a_l c_k)}{c^2_l a^2_k (ac)_k} (\operatorname{sen} Pd_h + \operatorname{sen} Pd'_h)^2 = 0 \ .$$

$$\sum \frac{a_k (ac)_h (s - 2\, a_k a_l c_h)}{c^2_k a^2_l (ac)_l} (\operatorname{sen} Pd_h - \operatorname{sen} Pd'_h)^2 = 0 \ .$$

Si noti: che invece di $a_h (ac)_h, \ldots$ si possono scrivere le quantità loro proporzionali

$$-1, \ \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} F_l F'_l : \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} P_l P'_l \, , \ \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} P_k P'_k : \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} F_k F'_k \ ,$$

nonchè quelle che se ne ottengono permutando hkl circolarmente; invece di $s - 2\, a_k a_l c_h, \ldots$ le

$$-1 - \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} P_l P'_l - \cot^2 \tfrac{1}{2} P_k P'_k \, , \ 1 + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} P_l P'_l - \cot^2 \tfrac{1}{2} P_k P'_k \ ,$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} P_l P'_l + \cot^2 \tfrac{1}{2} P_k P'_k \, ,$$

od altre proporzionali; invece di

$$a_h (ac)_h \sqrt{s - 2\, a_k a_l c_h} \ , \ \ldots \ \text{le} \ \gamma_h (\alpha\gamma)_h \sqrt{2\, \alpha_h \gamma_k \gamma_k - \sigma'} \ , \ \ldots \ ;$$

invece di

$$\frac{a_h (ac)_h (s - 2\, a_k a_l c_h)}{a_k (ac)_k} \ , \ \ldots \ \text{le} \ \frac{(\alpha\gamma)_h (2\, \alpha_h \gamma_k \gamma_l - \sigma')}{\gamma_k (\alpha\gamma)_k} \ , \ \ldots \ , \ \text{ecc.}$$

Sia ora r una retta arbitraria: potremo in queste relazioni mutare $\operatorname{sen} Pd_h$, $\operatorname{sen} Pd'_h$ in $\cos rd_h$, $\cos rd'_h$, bastando portare P nel polo di r. Ai casi che P stia su C o C' corrispondono i casi che r tocchi C' o C.

§. **6**. Dalle date espressioni di $\operatorname{sen}^2 PF_h$ e $\operatorname{sen}^2 Pd_h$ si trae

$$\frac{\operatorname{sen}^2 PF_h}{\operatorname{sen}^2 Pd_h} =$$

$$\frac{\alpha_\gamma (\alpha\gamma)_h a_{xx} + \alpha_k \alpha_l \left[a_l x_l \sqrt{(\alpha\gamma)_k} - a_k x_k \sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right]^2}{\left[x_l \gamma_k \sqrt{(\alpha\gamma)_k} - x_k \gamma_l \sqrt{(\alpha\gamma)_l}\right]^2} \, \frac{2\alpha_h \gamma_k \gamma_l - \sigma'}{\alpha_h} .$$

Se P è un punto di C, e solo allora, la 1ª frazione del 2° membro risulta costante e vale $1 : \gamma_k \gamma_l$; dunque sarà

$$\frac{\operatorname{sen}^2 PF_h}{\operatorname{sen}^2 Pd_h} = \frac{\operatorname{sen}^2 PF'_h}{\operatorname{sen}^2 Pd'_h} = 2 - \frac{\sigma'}{\alpha_h \gamma_k \gamma_l} = \frac{s}{a_k a_l c_h} - 2 = \text{cost.} ,$$

relazione analoga ad una ben nota.

Da questa conseguono altre relazioni; p. e.

$$-\frac{\operatorname{sen}^2 PF_h}{\operatorname{sen}^2 Pd_h} = 1 + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} P_l P'_l + \cot^2 \tfrac{1}{2} P_k P'_k ;$$

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} P_k P'_k \frac{\operatorname{sen}^2 PF_h}{\operatorname{sen}^2 Pd_h} + \cot^2 \tfrac{1}{2} P_h P'_h \frac{\operatorname{sen}^2 PF_k}{\operatorname{sen}^2 Pd_k} + 2 = 0 ;$$

$$\sum \frac{c_h}{a_h} \frac{\operatorname{sen}^2 PF_h}{\operatorname{sen}^2 Pd_h} = \frac{s}{a} \quad \text{o} \quad \sum \frac{\alpha_h}{\gamma_h} \frac{\operatorname{sen}^2 PF_h}{\operatorname{sen}^2 Pd_h} = \frac{\sigma'}{\gamma} ;$$

nelle quali si può porre $F'_h, \ldots, d'_h, \ldots$ invece di $F_h, \ldots, d_h, \ldots$

Tenendo poi presenti le relazioni già dianzi trovate fra $\operatorname{sen} Pd_h, \ldots$, otteniamo le seguenti, sempre quando P sia un punto di C:

$$\sum \sqrt{a_h c_h}\, (ac)_h \operatorname{sen} PF_h = 0 .$$

$$\sqrt{a_h c_h}\, (ac)_h \operatorname{sen} PF_h - \sqrt{a_k c_k}\, (ac)_k \operatorname{sen} PF'_k + \sqrt{a_l c_l}\, (ac)_l \operatorname{sen} PF'_l = 0 .$$

$$\sum a_h c_h (ac)^2_h \operatorname{sen} PF_h \operatorname{sen} PF'_h = 0 .$$

$$\sqrt{a_h c_h}\, (ac)_h (\operatorname{sen} F_h + \operatorname{sen} PF'_h) + \sqrt{a_k c_k}\, (ac)_k (\operatorname{sen} PF_k - \operatorname{sen} PF'_k) = 0,$$

$$\sum \frac{c_h (ac)_h}{a_k (ac)_k} (\operatorname{sen} PF_h + \operatorname{sen} PF'_h)^2 = 0 \ .$$

$$\sum \frac{c_h (ac)_h}{a_l (ac)_l} (\operatorname{sen} PF_h - \operatorname{sen} PF'_h)^2 = 0 \ .$$

Invece di $\sqrt{a_h c_h}\,(ac)_h, \ldots$, si possono scrivere le quantità proporzionali

$$i \ , \ \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} F_l F'_l : \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} P_l P'_l \ , \ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} P_k P'_k : \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} F_k F'_k \ ,$$

nonchè quelle che se ne deducono permutando circolarmente $k k l$; invece di $\sqrt{a_h c_h}\,(ca)_h, \ldots$ le $\sqrt{\alpha_h \gamma_h}\,(\alpha\gamma)_h, \ldots$; invece di $\dfrac{c^h (ac)_h}{c_k (ac)_k}, \ldots$ le $\dfrac{\alpha_h (\alpha\gamma)_h}{\alpha_k (\alpha\gamma)_k}, \ldots$; ecc.

Si noti che in tutte le relazioni qui accennate in luogo di $\operatorname{sen} PF_h$, $\operatorname{sen} Pd_h, \ldots$ si può sostituire $\cos rF_h$, $\cos rd_h, \ldots$ All'ipotesi che P stia su C corrisponde l'ipotesi che r tocchi C'.

§ **7**. Vogliasi la podaria Φ di un punto fisso F rispetto a C. Una retta mobile uscente da F seca C' in due punti, cui corrispondono come polari rispetto ad A due tangenti di C ortogonali alla retta, e quindi due punti mobili della podaria Φ. Inoltre su ciascuna tangente da F a C due punti di Φ cadono in F. Dunque Φ è una quartica. Essa ha un punto doppio in F; tocca altrove le tangenti da F a C'; passa per $A_0, \ldots$; ed ha altri due punti doppî nei contatti G, G' delle tangenti da F ad A (giacchè per G passano due tangenti di C coi poli sulla FG, e del pari per C'). Dunque Φ è razionale.

Siano f_1, f_2, f_3 le coordinate di F. Una retta r, la cui perpendicolare da F contenga il polo di r rispetto a C, inviluppa (com'è facile vedere) la conica $\Sigma f_h (\alpha\gamma)_h \xi_k \xi_l = 0$, la quale è iscritta nel triangolo principale (e quindi in infiniti triangoli coi tre angoli retti). Le normali da F a C hanno i piedi nei punti di contatto di C con le tangenti comuni a C ed a questa conica, e però sono quattro. Questi punti di contatto sono i punti comuni a Φ e C; in essi dunque Φ e C si toccano.

Ma cerchiamo l'equazione di Φ. La perpendicolare da F a una retta qualunque r $(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0)$ è

$$\xi_1 \frac{(fx)_1}{a_1} + \xi_2 \frac{(fx)_2}{a_2} + \xi_3 \frac{(fx)_3}{a_3} = 0 \ ,$$

e se (x_1, x_2, x_3) è l'intersezione di queste due rette, sarà

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = a_1\, q^{(1)}{}_{xx} : a_2\, q^{(2)}{}_{xx} : a_3\, q^{(3)}{}_{xx} \ .$$

posto

$$q^{(h)}{}_{xx} \equiv [\,(fx)\,,\, ax\,]_h \ ;$$

e però, supponendo r tangente a C, si avrà l'equazione di Φ:

$$\Sigma\, a^2{}_h\, \gamma_h\, (q^{(h)}{}_{xx})^2 = 0 = c'_{q_{xx}\,,\, q_{xx}} \ ;$$

la quale prova che Φ è una quartica.

I punti comuni alle tre coniche $q^{(1)}{}_{xx} = 0$, $q^{(2)}{}_{xx} = 0$, $q^{(3)}{}_{xx} = 0$ son dati dalle equazioni $\dfrac{(fx)_1}{a_1 x_1} = \dfrac{(fx)_2}{a_2 x_2} = \dfrac{(fx)_3}{a_3 x_3} = \dfrac{0}{a_{xx}} = \dfrac{0}{a_{fx}}$; sicchè le tre coniche han comuni i tre punti F, G, G', e quindi appartengono a una rete.

Ciascuna conica della rete corrisponde univocamente alla coppia di punti in cui seca A (oltrechè in G e G'), od anche alla loro retta $r(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, od anche al polo P di questa retta rispetto ad A. L'equazione di una tal conica Q_r può ricever la forma $a_{xx} + k\, a_{fx}\, \xi_x = 0$, ove è posto $\xi_x \equiv \Sigma \xi_h x_h$ e k è dato dalla $1 + k\, \xi_f = 0$; e quindi la richiesta equazione sarà

$$q^{(\xi)}{}_{xx} \equiv a_{fx}\, \xi_x - a_{xx}\, \xi_f = \begin{vmatrix} a_{fx} & a_{xx} \\ \xi_f & \xi_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 x_1 & a_2 x_2 & a_3 x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}$$
$$= \Sigma\, (fx)_h\, (\xi, ax)_h \ .$$

Essa mostra che Q_r passa per P, e che le rette r, GG' fanno fascio con le sue tangenti in F e P.

A rette r di un fascio corrispondono coniche Q_r di un fascio; e però a un punto corrisponde un punto, e ai punti di una retta r corrispondono univocamente i punti della conica corrispondente Q_r. I punti di A sono i punti uniti della corrispondenza.

Siano ora g_1, g_2, g_3 e g'_1, g'_2, g'_3 le coordinate di G e G': saranno $a_{fx} = 0$, $a_{gx} = 0$, $a_{g'x} = 0$ le equazioni di GG', FG, FG', e si avrà l'identità

$$a_{gx}\, a_{g'x} = a_{ff}\, a_{xx} - a^2{}_{fx} \ ,$$

e polarizzando rispetto a un punto $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$,

$$a_{gx}\, a_{g'x'} + a_{gx'}\, a_{g'x} = 2\,(a_{ff}\, a_{xx'} - a_{fx}\, a_{fx'}) \ .$$

e applicando al punto P polo di r.

$$a_{gx}\,\xi_{g'} + a_{g'x}\,\xi_g = 2\,(a_{ff}\,\xi_x - a_{fx}\,\xi_f) \quad ,$$

onde

$$\xi_{g'}\,a_{fx}\,a_{gx} + \xi_g\,a_{fx}\,a_{g'x} = 2\,(a_{ff}\,a_{fx}\,\xi_x + \xi_f\,a_{gx}\,a_{g'x} - a_{ff}\,\xi_f\,a_{xx}) \quad ,$$

ovvero

$$2\,a_{ff}\,q^{(\xi)}{}_{xx} = -\,2\,\xi_f\,a_{gx}\,a_{g'x} + \xi_{g'}\,a_{fx}\,a_{gx} + \xi_g\,a_{fx}\,a_{g'x} \quad ;$$

la quale relazione conferma che Q_r è circoscritta al triangolo $F G G'$.

Le tangenti nei vertici di questo triangolo secano i lati opposti sulla retta $-\dfrac{a_{fx}}{2\,\xi_f} + \dfrac{a_{gx}}{\xi_g} + \dfrac{a_{g'x}}{\xi_{g'}} = 0$, e Q_r si potrebbe far corrispondere univocamente a questa retta, variando r. Mediante le suddette identità l'equazione della medesima retta prende la forma $(a_{ff}\,a_{\xi\xi} + 3\,\xi^2{}_f)\,a_{fx} - 4\,a_{ff}\,\xi_f\,\xi_x = 0$.

Ritornando alla corrispondenza fra Q_r e r, vediamo che alla retta o_h corrisponde la conica $Q o_h$, la quale passa pei due punti $A o_h$ e per O_h: essa non è altra che la $q^{(h)}{}_{xx} = 0$. Alle rette $G G'$, $F G$, $F G'$ corrispondono le coppie di rette $(FG,\ FG')$, $(FG,\ GG')$, $(FG',\ GG')$. Alla polare di F rispetto a C corrisponde la

$$a_{fx}\,c_{fx} - c_{ff}\,a_{xx} = 0 = \Sigma\,(fx)_h\,(cf,\ ax)_h \quad .$$

Alla polare di F rispetto a C' corrisponde la

$$a_{fx}\,c'_{fx} - c'_{ff}\,a_{xx} = 0 = \sum \frac{a_k\,a_l}{c_k\,c_l}\,(fx)_h\,(af,\ cx)_h \quad .$$

Al punto O_h corrisponde il punto $o_h\,.\,O_h F$.

Essendo

$$-\,q^{(h)}{}_{xx} = a_{fx}\,x_h - f_h\,a_{xx} = a_{x\ ,\ fx_h - f_h x} \quad ,$$

$$2\,a_{ff}\,q^{(h)}{}_{xx} = -\,2\,f_h\,a_{gx}\,a_{g'x} + g'_h\,a_{fx}\,a_{gx} + g_h\,a_{fx}\,a_{g'x} \quad ,$$

l'equazione di Φ può scriversi sotto una 2ª e una 3ª forma:

$$a^2{}_{fx}\,c'_{xx} - 2\,a_{fx}\,a_{xx}\,c'_{fx} + c'_{ff}\,a^2{}_{xx} = 0 = c'_{xa_{fx} - fa_{xx}\ ,\ xa_{fx} - fa_{xx}} \quad ,$$

$$4\,c'_{ff}\,a^2{}_{gx}\,a^2{}_{g'x} + c'_{g'g'}\,a^2{}_{fx}\,a^2{}_{g'x} + c'_{gg}\,a^2{}_{fx}\,a^2{}_{g'x}$$

$$-\,2\,(2\,c'_{fg'}\,a_{gx} + 2\,c'_{fg}\,a_{g'x} - c'_{gg'}\,a_{fx})\,a_{fx}\,a_{gx}\,a_{g'x} = 0 \quad .$$

Ed essendo

$$q^{(\xi)}{}_{xx} = \Sigma \xi_h q^{(h)}{}_{xx} ,$$

l'equazione di Φ può assumere una 4ª forma:

$$(q^{(\xi)}{}_{xx})^2 + (q^{(\xi')}{}_{xx})^2 + (q^{(\xi'')}{}_{xx})^2 = 0 ,$$

purchè

$$\frac{\xi_h \sqrt{c_h}}{a_h} , \quad \frac{\xi'_h \sqrt{c_h}}{a_h} , \quad \frac{\xi''_h \sqrt{c_h}}{a_h}$$

siano proporzionali ai coefficienti di una sostituzione ortogonale.

§ **8.** Ciascuna delle quattro forme dell'equazione di Φ mette in evidenza che la podaria ha per punti doppî F, G, G', e però è razionale. La 2ª forma mostra che Φ passa per i punti AC', ossia $A_0, \ldots$; che le tangenti da F a C' incontrano Φ in punti per cui $(a_{fx} c'_{fx} - c'_{ff} a_{xx})^2 = 0$, e però toccano Φ nei due punti diversi da G e G' che essa ha comuni con la conica della rete che corrisponde alla polare di F rispetto a C'; e che questi rimanenti due punti comuni a Φ e Q_r appartengono alla coppia di rette

$$c'_{xx} \xi^2_f - 2 \xi_f \xi_x c'_{fx} + c'_{ff} \xi^2_x = 0 = c'_{x\xi_f - f\xi_x ,\, x\xi_f - f\xi_x} ,$$

le quali passano per F e rispettivamente pei due punti $C'r$.

Poniamo

$$y_1 = -\frac{1}{2} a_{fx} , \quad y_2 = a_{gx} , \quad y_3 = a_{g'x} ,$$

vale a dire indichiamo con y_1, y_2, y_3 le coordinate del punto $P(x_1, x_2, x_3)$ rispetto al triangolo $FG'G$: allora la 3ª forma della equazione di Φ diviene

$$c'_{ff} y^2_2 y^2_3 + c'_{gg} y^2_3 y^2_1 + c'_{g'g'} y^2_1 y^2_2 + 2 (c'_{gg'} y_1 + c'_{fg'} y_2 + c'_{fg} y_3) y_1 y_2 y_3 = 0.$$

Se ora poniamo la corrispondenza birazionale (*)

$$z_1 : z_2 : z_3 = y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2 \quad \text{o} \quad y_1 : y_2 : y_3 = z_2 z_3 : z_3 z_1 : z_1 z_2 ,$$

ove z_1, z_2, z_3 son coordinate di un punto rispetto al triangolo $FG'G$, la Φ corrisponderà punto per punto alla conica C'' di equazione

$$c'_{ff} z^2_1 + c'_{gg} z^2_2 + c'_{g'g'} z^2_3 + 2 (c'_{gg'} z_2 z_3 + c'_{fg'} z_3 z_1 + c'_{fg} z_1 z_2) = 0$$

(*) Cfr. Salmon, *Higher plane curves*, cap. *Quartics*.

ossia

$$c'_{fz_1+gz_2+g'z_3,\ fz_1+gz_2+g'z_3}=0 \ .$$

A una retta $\eta_1 z_1+\eta_2 z_2+\eta_3 z_3=0$ corrisponderà una conica della rete dianzi considerata $\eta_1 y_2 y_3+\eta_2 y_3 y_1+\eta_3 y_1 y_2=0$; e precisamente: a $z_1=0$ corrisponderà $y_2 y_3=0$ e così via, vale a dire che a GG', FG, FG' corrisponderanno le coppie di rette (FG, FG'), (FG', GG'), (FG, GG'); e in generale la Q_r corrisponderà alla retta r' di equazione $\xi_f z_1+\xi_g z_2+\xi_{g'} z_3=0$ ossia $\xi_{fz_1+gz_2+g'z_3}=0$.

Insomma questa corrispondenza è diversa da quella che abbiamo considerata per la prima; ma le due rette r, r', cui corrisponde in esse una stessa Q_r sono rette corrispondenti fra loro nella omografia definita dalle

$$x_h=f_h z_1+g_h z_2+g'_h z_3 \ ,$$

od anche dalle

$$z_1=a_{fx}:a_{ff} \ , \quad z_2=a_{g'x}:a_{gg'} \ , \quad z_3=a_{gx}:a_{gg} \ .$$

In questa omografia F è un punto unito e GG' una retta unita, a G corrisponde G' e viceversa, a FG corrisponde FG' e viceversa. Inoltre a C' corrisponde C''; cosicchè noi potremmo far corrispondere Φ a C' punto per punto.

A una retta per F, $\eta_2 z_2+\eta_3 z_3=0$, corrisponde un' altra retta per F, $\eta_3 y_2+\eta_2 y_3=0$, oltre la retta GG'; a un punto di GG' un elemento di direzione uscente da F, e così via.

Alle coppie di punti d'incontro di C'' rispettivamente con GG', FG, FG' corrispondono le coppie di tangenti a Φ nei punti doppî F, G', G. Queste tre coppie di tangenti inviluppano una conica

$$c'_{ff}\eta_1^2+c'_{gg}\eta_2^2+c'_{g'g'}\eta_3^2-2(c'_{gg'}\eta_2\eta_3+c'_{fg}\eta_3\eta_1+c'_{fg'}\eta_1\eta_2)=0 \ ,$$

la quale è l'inviluppo delle rette $\eta_1 y_1+\ldots=0$, cui corrispondono coniche $\eta_1 z_2 z_3+\ldots=0$ che posseggono triangoli circoscritti autoconiugati rispetto a C''.

Le stesse coppie di tangenti secano le GG', FG, FG' in tre coppie di punti di una conica

$$\frac{z_1^2}{c'_{ff}}+\frac{z_2^2}{c'_{gg}}+\frac{z_3^2}{c'_{g'g'}}+2\left(\frac{c'_{gg'}}{c'_{gg}c'_{g'g'}}z_2 z_3+\frac{c'_{fg}}{c_{ff}c'_{g'g'}}z_3 z_1+\frac{c'_{fg}}{c'_{ff}c'_{gg}}z_1 z_2\right)=0 \ .$$

Anche le coppie di rette che vanno dai tre punti doppî a toccare altrove Φ inviluppano una conica.

Le equazioni delle quattro tangenti doppie della quartica Φ sono compendiate nella

$$\begin{aligned}&(c'_{gg'}y_1+c'_{fg'}y_2+c'_{fg'}y_3)\\ +&(y_1\sqrt{c'_{gg}}\sqrt{c'_{g'g'}}+y_2\sqrt{c'_{ff}}\sqrt{c_{g'g'}}+y_3\sqrt{c'_{ff}}\sqrt{c'_{gg}})=0\ ,\end{aligned}$$

prendendo per ciascun radicale l'uno o l'altro suo valore.

§ 9. Se F cade su una delle $t_0, \ldots$, e sia t_0, G' diviene A_0, e la Φ si scinde nella retta t_0 (perchè t_0 tocca C e coincide con la retta che unisce F al polo A_0 di t_0 rispetto ad A) e in una cubica; la quale passa per F, ha un punto doppio in G, passa per $A_0, \ldots$, tocca le tangenti da F a C', e tocca C in tre punti, piedi delle tre normali condotte da F a C (oltre la t_0).

L'equazione della cubica si ottiene dalla 3^a forma dell'equazione di Φ osservando che adesso $c'_{g'g'}=0$, sicchè nell'equazione compare il fattore $a_{g'x}$, soppresso il quale, rimane

$$\begin{aligned}&4c'_{ff}a^2_{gx}\,a_{g'x}+c'_{gg}\,a^2_{fx}\,a_{g'x}\\ &-2\,(2c'_{fg'}\,a_{gx}+2c'_{fg}\,a_{g'x}-c'_{gg'}\,a_{fx})a_{fx}a_{gx}=0\ ,\end{aligned}$$

ossia

$$c'_{ff}\,y_2^2\,y_3+c'_{gg}y_1^2\,y_3+2\,(c'_{gg'}y_1+c'_{fg'}y_2+c'_{fg}y_3)\,y_1y_2=0.$$

Se poi F cade in un fuoco F_h, G diviene A_h, e Φ si scinde nelle due rette t_0, t^h e in una conica; la quale passa pei quattro punti $A_0, \ldots$, e tocca C nei due punti P_h, P'_h (piedi delle due normali da F_h); cosicchè la stessa conica è podaria anche del fuoco F'_h.

L'equazione della conica è

$$2\,(c'_{ff}a_{gx}\,a_{g'x}-c'_{fg'}\,a_{fx}\,a_{gx}-c'_{g}\,a_{fx}\,a_{g'x})+c'_{gg'}\,a_{fx}^2=0\ ,$$

ossia

$$2\,(c'_{gg'}\,y_1+c'_{fg'}\,y_2+c'_{fg}\,y_3)\,y_1+c'_{ff}\,y_2\,y_3=0\ ,$$

e mediante le identità adoperate nel § precedente la equazione prende la forma

$$2\,a_{ff}\,c'_{ff}a_{xx}-4\,a_{ff}\,a_{fx}\,c'_{fx}+(2c'_{ff}+c'_{gg'})\,a_{fx}^2=0\ ,$$

dove

$$a_f = -\frac{\alpha_h(\alpha\gamma)_h}{\alpha_k\alpha_l}\ , \quad c'_{gg'} = -2\gamma_h(\alpha\gamma)_h\ , \quad c'_{ff} = (\alpha\gamma)_h \frac{3\alpha_h\alpha_l\gamma_h - \sigma}{\alpha_h^4\alpha_l^2}\ .$$

$$a_{fx} = -a_k x_k \sqrt{(\alpha\gamma)_l} + a_l x_l \sqrt{(\alpha\gamma)_k}\ .$$

$$c'_{fx} = -a^2{}_k\gamma_k x_k \sqrt{(\alpha\gamma)_l} + a^2{}_l\gamma_l x_l \sqrt{(\alpha\gamma)_k}\ .$$

L'equazione complessiva delle coniche podarie dei fuochi, essendo un covariante di A e C, deve potersi porre sotto la forma

$$\sum \lambda\, a^{\mu}{}_{xx}\, c'^{\nu}{}_{ff}\, u^{\rho}{}_{ff} = 0\ ,$$

ove λ è un numero e μ, ν, ρ interi positivi di somma 3; ma non intendiamo di occuparcene.

§ **10**. Supponiamo ora che l'assoluto A, come inviluppo, si riduca ad una coppia di punti L, L'. Basterà supporre $\alpha_3 = 0$, onde

$$\alpha = 0\ ,\ a_3 = \infty\ ,\ \alpha a_{xx} = \alpha_1\alpha_2 x_3^2,\ (\alpha\gamma)_1 = \alpha_2\gamma_3,\ (\alpha\gamma)_2 = -\alpha_1\gamma_3\ ;$$

Allora due delle t_0, t_1, t_2, t_3, p. e. t_0 e t_3, saranno le tangenti da L a C, e le altre due t_1, t_2 le tangenti da L' a C. I punti A_0, A_3, F_3 cadranno in L, e A_1, A_2 F'_3 in L'. La o_3 sarà la LL'. L'assoluto luogo sarà la retta LL' contata due volte.

Il punto O_3 sarà il centro al finito, e o_1, o_2 gli assi al finito di C. Le d_3, d_3 s'incontreranno al finito in O_3.

Le espressioni di $\cos rr'$, $\operatorname{sen} rr'$ sussisteranno; ma la distanza di due punti e quella fra un punto e una retta saran definite dalle formole

$$PP' = \lim\frac{\operatorname{sen} PP'}{\sqrt{\alpha}} = \lim\frac{\operatorname{tg} PP'}{\sqrt{\alpha}}\ , \quad Pr = \lim\frac{\operatorname{sen} Pr}{\sqrt{\alpha}} = \lim\frac{\operatorname{tg} Pr}{\sqrt{\alpha}}\ ,$$

per $\alpha_3 = 0$.

Quindi sarà

$$\overline{P_1P_1'}^2 = -\frac{4\gamma_2}{\alpha_1\alpha^2{}_2\gamma_3}\ , \quad \overline{P_2P_2'}^2 = -\frac{4\gamma_1}{\alpha^2{}_1\alpha_2\gamma_3}\ ;$$

onde

$$\overline{P_1P_1'}^2 - \overline{P_2P_2'}^2 = -\frac{4(\alpha\gamma)_3}{\alpha^2{}_1\alpha^2{}_2\gamma_3}\ , \quad \left(\frac{P_1P'_1}{P_2P'_2}\right)^2 = \frac{\alpha_1\gamma_2}{\alpha_2\gamma_1}\ ;$$

$$\overline{O_3P'}^2 + \overline{O_3P''}^2 = \text{cost.}\ , \quad O_3t'.\,O_3P'' = \text{cost.}\ ;$$

$$\overline{F_1F'_1}^2 = -\frac{4(\alpha\gamma)_3}{\alpha^2{}_1\alpha^2{}_2\gamma_3}\ , \quad \overline{F_2F'_2}^2 = \frac{4(\alpha\gamma)_3}{\alpha^2{}_1\alpha^2{}_2\gamma_3}\ ,$$

onde

$$\overline{F_1F'_1}^2 = -\overline{F_2F'_2}^2 = \overline{P_1P'_1}^2 - \overline{P_2P'_2}^2 ;$$

e

$$\overline{D_1D'_1}^2 = -\frac{4\gamma_2^2}{\alpha_2^2(\alpha\gamma)_3\gamma_3} = \frac{\overline{P_1P'_1}^4}{\overline{P_1P'_1}^2 - \overline{P_2P'_2}^2} ,$$

$$\overline{D_2D'_2}^2 = \frac{4\gamma_1^2}{\alpha_1^2(\alpha\gamma)_3\gamma_3} = \frac{\overline{P_2P'_2}^4}{\overline{P_2P'_2}^2 - \overline{P_1P'_1}^2} ,$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} d_3 d'_3 = -\frac{\alpha^2_1\gamma^2_2}{\alpha^2_2\gamma^2_1} = \left(\frac{D_1D'_1}{D_2D'_2}\right)^2 = -\left(\frac{P_1P'_1}{P_2P'_2}\right)^4 ;$$

onde

$$\left(\frac{F_1F'_1}{P_1P'_1}\right)^2 = \frac{(\alpha\gamma)_3}{\alpha_1\gamma_2} , \quad \left(\frac{F_2F'_2}{P_2P'_2}\right)^2 = -\frac{(\alpha\gamma)_3}{\alpha_2\gamma_1} ,$$

$$\left(\frac{P_1P'_1}{F_1F'_1}\right)^2 + \left(\frac{P_2P'_2}{F_2F'_2}\right)^2 = 1 ;$$

$$F_1F'_1 . D_1D'_1 = \overline{P_1P'_1}^2 , \quad F_2F'_2 . D_2D'_2 = \overline{P_2P'_2}^2 .$$

Per una retta qualunque r si avrà

$$(rF_1 + rF'_1) - (rF_2 - rF'_2) = 0 .$$

$$(rF_1 - rF'_1) : (rF_2 + rF'_2) = i\,\xi_2\sqrt{\alpha_2} : \xi_1\sqrt{\alpha_1} ,$$

sicchè

$$(rF_1 - rF'_1) : (rF_2 - rF'_2) = \text{cost.}$$

per le rette passanti per uno stesso punto di LL'. E se r è tangente a C, sarà pure

$$rF_1 . rF'_1 = \tfrac{1}{4}\overline{P_2P'_2}^2 , \quad rF_2 . rF'_2 = \tfrac{1}{4}\overline{P_1P'_1}^2 .$$

Per un punto qualunque P si avrà

$$Pd_1 + Pd'_1 = D_1D'_1 , \quad Pd_2 - Pd'_2 = D_2D'_2 ,$$

mentre $Pd'_1 - Pd_1$, $Pd_3 + Pd'_3$ variano con $x_2 : x_3$, e $Pd_2 + Pd'_2$, $Pd_3 - Pd'_3$ con $x_1 : x_3$; e però son costanti pei punti di una retta per O_1 e rispettivamente per O_2.

Per un punto di C si avrà

$$\left(\frac{PF_1}{Pd_1}\right)^2=\left(\frac{PF'_1}{Pd'_1}\right)^2=\frac{(\alpha\gamma)_3}{\alpha_1\gamma_2}=1-\left(\frac{P_2P'_2}{P_1P'_1}\right)^2.$$

$$\left(\frac{PF_2}{Pd_2}\right)^2=\left(\frac{PF'_2}{Pd'_2}\right)^2=\frac{(\alpha\gamma)_3}{\alpha_2\gamma_1}=-1+\left(\frac{P_1P'_1}{P_2P'_2}\right).$$

ed anche

$$PF_1+PF'_1=P_1P'_1\,,\qquad PF'_2-PF_2=P_2P'_2\,.$$

Notiamo che si è supposto α_1 non 0, α_2 non 0. Siccome $\sigma=\alpha_1\alpha_2\gamma_3$, così C non contiene terne di punti ortogonali se non è $\gamma_3=0$, ossia se C non si scinde in due punti di o_3. E siccome $\sigma'=(\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)\gamma_3$, così C non avrà terne di tangenti ortogonali, se non quando i punti Co_3 sono in armonia con L e L', e quando C si scinde in due punti di o_3.

La conica U è ora $(\alpha_2x^2_1+\alpha_1x^2_2)x^2_3+\gamma_3(\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)x^2_3=0$, che passa per L, L', e può dirsi un *circolo* di centro O_3.

La conica V è $c_2\xi^2_1+c_1\xi^2_2=0$, e però consta de' due punti Co_3.

La C', come inviluppo, si riduce a $\alpha^2_1c_1\xi^2_1+\alpha^2_2c_2\xi^2_2=0$, che è una coppia di punti di o_3; e come luogo si riduce a $x^2_3=0$, cioè alla retta o_3 contata due volte.

La podaria Φ di un punto F arbitrario è una quartica razionale, che ha per punti doppi F, L, L', tocca le rette da F ai due punti cui si è ridotta C', ecc. La sua equazione è

$$[\alpha^2_1\gamma_2(fx)^2_1+\alpha^2_2\gamma_1(fx)^2_2]\,x^2_3+\gamma_3[\alpha_2x_1(fx)_2-\alpha_1x_2(fx)_1]^2=0\ .$$

Le coniche (circoli) Q_{0_1}, Q_{0_2} divengono le coppie di rette $(FO_2,\,o_3)$, $(FO_1,\,o_3)$; la Q_{0_3} passa per O_3, $FO_1\,.\,o_1$, $FO_2\,.\,o_2$; ecc.

Se F cade in F_1, la Φ si scinde nelle t_0, t_1 e in un circolo, che tocca C in P_1, P'_1 ed ha per equazione $a_2c_{xx}+(a\,c)_3x^2_1=0$.

§ **11.** Accenniamo quel che avviene nel caso che la conica C tocchi l'assoluto A in un punto, sicchè possa chiamarsi una *parabola*. In questo punto cadono I_0, I_1, A_0, A_1, C_0, C_1; t_0 e t_1 divengono la tangente comune ivi; F_1 cade pure in I_0, F_3 coincide con F'_2 e F'_3 con F_2. La o_1 passa per I_0; o_1, o_2 divengono t_0; O_2, O_3 cadono in I_0.

Non vi sarà più un triangolo proprio $O_1 O_2 O_3$; ma, riferendoci al triangolo di vertici F'_1, F_2, F'_2 e di lati t_0, t_3, t_2, se l'equazione del punto di contatto è $a_2 \xi_3 + a_3 \xi_2 = 0$, potremo assumere:

$$\alpha_{\xi\xi} \equiv 2(a_1 \xi_2 \xi_3 + a_2 \xi_3 \xi_1 + a_3 \xi_1 \xi_2) \; , \quad \alpha \equiv 2\, a_1 a_2 a_3 \; ,$$

$$\gamma_{\xi\xi} \equiv 2(c_1 \xi_2 \xi_3 + a_2 \xi_3 \xi_1 + a_3 \xi_1 \xi_2) \; , \quad \gamma \equiv 2\, c_1 a_2 a_3 \; ,$$

$$-\alpha a_{xx} \equiv a^2_1 x^2_1 + \dots - 2 a_2 a_3 x_2 x_3 - \dots \; ,$$

$$-\gamma c_{xx} \equiv c^2_1 x^2_1 + a_2 x^2_2 + a_3 x^2_3 - 2 a_2 a_3 x_2 x_3 - 2 a_3 c_1 x_3 x_1 - 2 c_1 a_2 x_1 x_2 \; ,$$

$$a\alpha \equiv 1 \; , \quad c\gamma \equiv 1 \; ,$$

$$-\alpha a_{xx'} \equiv (a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3)\, a_1 x'_1 + \dots , \quad \alpha_{\xi\xi'} \equiv \alpha_1 (\xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi'_2) + \dots ,$$

$$-\gamma c_{xx'} \equiv (c_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3)\, c_1 x'_1 + \dots , \quad \gamma_{\xi\xi'} \equiv c_1 (\xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi''_2) + \dots ,$$

essendo $a_{xx'} = \alpha_{\xi\xi'}$ se P, P' sono i poli di r, r' rispetto ad A, ecc.

Inoltre potremo assumere

$$\frac{s}{a} = \frac{\sigma'}{\gamma} \equiv \frac{a_1 + 2 c_1}{a_1} \; , \quad \frac{s'}{c} = \frac{\sigma}{\alpha} = \frac{2 a_1 + c_1}{c_1} \; ,$$

$$u_{xx} \equiv a_1 c_1 x^2_1 + (a_2 x_2 - a_3 x_3)^2 - (a_1 + c_1)\, x_1 (a_2 x_2 + a_3 x_3) \; ,$$

$$\chi_{\xi\xi} \equiv (a_1 - c_1)^2 (a^2_3 \xi^2_2 + a^2_2 \xi^2_3)$$

$$+ 2\,(a_1 + c_1)\, a_2 a_3 [(a_1 + c_1)\, \xi_2 \xi_3 + 2\, a_2 \xi_3 \xi_1 + 2\, a_3 \xi_1 \xi_2] \; ,$$

$$c'_{xx} \equiv a^2_1 (c_1 - 2\, a_1)\, x^2_1 - c_1 (a_2 x_2 - a_3 x_3)^2 + 2\, a^2_1 x_1 (a_2 x_2 + a_3 x_3) \; ,$$

$$\gamma'_{\xi\xi} \equiv (a_1 - c_1)^2 (a_3 \xi_2 + a_2 \xi_3)^2 - 2 c \xi_1 (a_3 \xi_2 + a_2 \xi_3) - 2 a a_1 \xi_2 \xi_3 \; ;$$

$$P'_1 (4 a_2 a_3 , a_3 c_1 , c_1 a_2) , d'_1 (- c_1 , a_2 , a_3) , D'_1 (2 a_2 a_3 , a_3 c_1 , c_1 a_2) , \dots$$

Sarà quindi

$$\operatorname{sen}^2 P'_1 F'_1 = - \frac{c^2_1}{4 a_1 (a_1 - c_1)} \; , \quad \operatorname{sen}^2 P'_1 D'_1 = - \frac{c^2_1}{4\,(a_1 - c_1)(a_1 - 2\, c_1)} \; ,$$

$$1 - \frac{\operatorname{sen}^2 P'_1 F'_1}{\operatorname{sen}^2 P'_1 D'_1} = 2 \frac{c_1}{a_1} \; .$$

Per una retta qualunque r si avrà

$$\operatorname{sen} r F'_1 = \frac{\xi_1}{a_1 \sqrt{\alpha_{\xi\xi}}} \; , \quad \operatorname{sen} r F_2 = \frac{\xi_2}{a_2 \sqrt{\alpha_{\xi\xi}}} \; , \quad \operatorname{sen} r F'_2 = \frac{\xi_3}{a_3 \sqrt{\alpha_{\xi\xi}}} \; ;$$

e se r è tangente di C, si avranno le relazioni

$$c_1 \operatorname{sen} rF_2 \operatorname{sen} rF'_2 + a_1 \operatorname{sen} rF_1 (\operatorname{sen} rF_2 + \operatorname{sen} rF'_2) = 0 \quad ,$$

$$\operatorname{sen} rF_2 \operatorname{sen} rF'_2 = \frac{a_1}{c_1 - a_1} = \text{cost.}$$

Si noti che a c_1, a_1, $c_1 - a_1$ si può sostituire $1 - \frac{\operatorname{sen}^2 P'_1F'_1}{\operatorname{sen}^2 P'_1D'_1}$, 2, $-1 - \frac{\operatorname{sen}^2 P'_1F'_1}{\operatorname{sen}^2 P'_1D'_1}$, e a $\operatorname{sen} rF'_1$, ..., si può sostituire $\cos PF'_1$, ..., essendo P polo di r rispetto a A, e quindi arbitrario o su C'.

Per un punto qualunque P si avrà

$$\operatorname{sen}^2 PF'_1 = -\frac{4 a_2 a_3 x_2 x_3}{a^2_1 x^2_1 + \ldots} \quad ,$$

$$\operatorname{sen}^2 PF_2 = -\frac{4 a_3 a_1 x_3 x_1}{a^2_1 x^2_1 + \ldots} \quad , \quad \operatorname{sen}^2 PF'_2 = -\frac{4 a_1 a_2 x_1 x_2}{a^2_1 x^2_1 + \ldots} \quad ,$$

ed anche

$$\operatorname{sen} Pd'_1 = \frac{-c_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}{\sqrt{a^2_1 x^2_1 + \ldots}\sqrt{(2c_1 - a_1) : a_1}} \quad ,$$

$$\operatorname{sen} Pd_2 = \frac{c_1 x_1 - a_2 x_2 + a_3 x_3}{\sqrt{a^2_1 x^2_1 + \ldots}} \quad , \quad \operatorname{sen} Pd'_2 = \frac{c_1 x_1 + a_2 x_2 - a_3 x_3}{\sqrt{a^2_1 x^2_1 + \ldots}} \quad ;$$

e se P è un punto di C,

$$\left(1 - 2\frac{c_1}{a_1}\right)\operatorname{sen}^2 Pd'_1 + 4\left[\operatorname{sen} Pd'_1 \sqrt{1 - 2\frac{c_1}{a_1}} + \operatorname{sen} Pd_2\right]$$

$$\left[\operatorname{sen} Pd'_1 \sqrt{1 - 2\frac{c_1}{a_1}} + \operatorname{sen} Pd'_2\right] = 0 \quad ,$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 PF'_1}{\operatorname{sen}^2 Pd'_1} = 1 - 2\frac{c_1}{a_1} = \text{cost.} \quad , \quad \frac{\operatorname{sen}^2 PF_2}{\operatorname{sen}^2 Pd_2} = \frac{\operatorname{sen}^2 PF'_2}{\operatorname{sen}^2 Pd'_2} = \frac{c_1}{a_1} \quad .$$

Quanto alla podaria Φ, notiamo che la 2^a e la 3^a forma che demmo alla sua equazione nel § 7 son valide indipendentemente dalla scelta del triangolo di riferimento, e quindi servono anche nella ipotesi presente.

§ **12**. Se, rimanendo nel caso della parabola, supponiamo l'assoluto A ridotto a una coppia di punti L, L'; allora t_0, t_1 divengono la retta LL'; I_2, I_3, P_1, P_2, P'_2, P_3, P'_3 cadono anch'essi in F_1: A_2, F_2, F'_3 in L; A_3, F'_2, F_3 in L'. Basterà supporre a_1 nullo, e c_1, a_2, a_3 nulli ma proporzionali a tre numeri dati γ_1, γ_2, γ_3. E potremo assumere

$$\alpha_{\xi\xi} \equiv 2a_1\xi_2\xi_3 \;.\; \alpha \equiv 0 \;,\; -\alpha a_{xx} \equiv a^2{}_1 x^2{}_1 \;,\; \alpha a \equiv 1 \;,$$

$$\gamma_{\xi\xi} \equiv 2(\gamma_1\xi_2\xi_3 + \gamma_2\xi_3\xi_1 + \gamma_3\xi_1\xi_2) \;,\; \gamma \equiv 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \;,$$

$$c_{xx} \equiv \gamma^2{}_1\xi^2{}_1 + \ldots - 2\gamma_2\gamma_3\xi_2\xi_3 - \ldots \;,\; c\gamma \equiv 1 \;,\; \text{ecc.}$$

Ciò posto, sarà

$$\overline{P'_1F'_1}^2 = \overline{P'_1D'_1}^2 = -\frac{\gamma^2{}_1}{8a^3{}_1\gamma_2\gamma_3} \;.$$

Sarà pure

$$\overline{rF'_1}^2 = \frac{\xi^2{}_1}{2a^3{}_1\xi_2\xi_3} \;,\; \overline{PF'_1}^2 = -\frac{2x_2x_3}{a^3{}_1x^2{}_1} \;,\; \overline{Pd'_1}^2 = -\frac{(-\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_3x_3)^2}{2a^3{}_1\gamma_2\gamma_3x^2{}_1} \;, \ldots \;;$$

$$(Pd_2 + Pd'_2)^2 = -16\,\overline{P'_1F'_1}^2 \;;$$

e se P è un punto di C,

$$PF'_1 = Pd'_1 \;.$$

La podaria Φ si scinde nella retta t_0 e nella cubica

$$(c_1x_1 + c_2x_2 - c_3x_3)(fx)_1(fx)_2 - c_2x_1(fx)^2{}_1 - c_1x_2(fx)^2{}_2 = 0 \;;$$

e se F cade sulla t_0, si scinde nella t_0 contata tre volte e nella retta

$$f_1f_2(c_1x_1 + c_2x_2 - c_3x_3) - c_2f^2{}_1x_1 - c_1f^2{}_2x_2 = 0 \;,$$

che diviene t_3 o t_2 se F cade in L o L'; se poi F cade sulla t_3, Φ si scinde nelle t_0, t_3 e nella conica

$$f_3(c_1x_1 + c_2x_2 - c_3x_3)(fx)_1 - c_2(fx)^2{}_1 - c_1f^2{}_3x_1x_2 = 0 \;;$$

e se da ultimo F cade in F'_1, Φ si scinde nelle t_0, t_2, t_3 e nella retta $2c_1x_1 + 2c_2x_2 - c_3x_3 = 0$ tangente a C in P'_1.

§ **13** Quando A e C si toccano semplicemente in un punto, vi è da considerare un' altra scelta di triangolo di riferimento, come quella che ha il vantaggio di prestarsi anche ai casi del doppio contatto e dell'osculazione.

Scegliendo il triangolo $F'_2 C_3 F_1$ ossia $d'_2 t_0 t_3$, assumiamo

$$c_{xx} \equiv c_1 x^2_1 + 2c_0 x_2 x_3 , c \equiv - c_1 c^2_0 \; , \; \gamma_{\xi\xi} \equiv \gamma_1 \xi^2_1 + 2\gamma_0 \xi_2 \xi_3 \; , \; c_0 \gamma_0 \equiv c_1 \gamma_1 \equiv c\gamma \equiv 1 \; ,$$

$$a_{xx} \equiv a_1 (x_1 + b x_2)^2 + 2a_0 x_2 x_3 \; , \; a \equiv - a_1 a^2_0 \; .$$

$$\alpha_{\xi\xi} \equiv \alpha_1 \xi^2_1 + 2a_0 \xi_2 \xi_3 - 2\alpha_0 \xi_3 \xi_1 \; , \; a_0 \alpha_0 \equiv a_1 \alpha_1 \equiv a\alpha \equiv 1 \; ,$$

e quindi

$$\frac{s}{a} = \frac{\sigma'}{\gamma} = \frac{a_0 c_1 + 2a_1 c_0}{a_0 a_1} = \frac{2\alpha_0 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_0}{\gamma_0 \gamma_1} \; .$$

$$\frac{s'}{c} = \frac{\sigma}{\alpha} = \frac{2a_0 c_1 + a_1 c_0}{c_0 c_1} = \frac{\alpha_0 \gamma_1 + 2\alpha_1 \gamma_0}{\alpha_0 \alpha_1} \; ,$$

$$-\frac{1}{2} u_{xx} \equiv \alpha_0 \gamma_0 x^2_1 + (\alpha_0 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_0) x_2 x_3 + \alpha_0 \gamma_0 b x_1 x_2 \; ,$$

$$\chi_{\xi\xi} \equiv - a_0 c_0 \xi^2_1 + a_1 c_1 b^2 \xi^2_3 - 2 (a_0 c_1 + a_1 c_0) \xi_2 \xi_3 + 2a_1 c_0 b \xi_3 \xi_1 \; ,$$

$$d'_{xx} \equiv a^2_1 c_0 x^2_1 + a_1 (2a_0 c_1 + a_1 c_0) b^2 x^2_2 + 2a_1 (a_0 c_1 + a_1 c_0) b x_1 x_2 + 2a^2_0 c_1 x_2 x_3 ,$$

$$\gamma'_{\xi\xi} \equiv a^2_0 c_1 \xi^2_1 + a^2_1 c_1 b^2 \xi^2_3 - 2a_1 (a_0 c_1 + a_1 c_0) b \xi_3 \xi_1 + 2 a^2_1 c_0 \xi_2 \xi_3 \; ,$$

$$F'_1 (\alpha_0 \gamma_1 b \; , \; \alpha_1 \gamma_0 - \alpha_0 \gamma_1 \; , \; 0) \; , \; F_2 (\alpha_0 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_0 \; , \; 0 \; , \; 2\alpha_0 \gamma_0 b) \; .$$

Per ogni punto di C si trova

$$\frac{\mathrm{sen}^2 PF'_2}{\mathrm{sen}^2 Pd'_2} = - \frac{a_0 c_1}{a_1 c_0} = - \frac{\alpha_1 \gamma_0}{\alpha_0 \gamma_1} \; .$$

La podaria di F'_2 si scinde in t_0, t_3 e nella conica

$$c_1 (x_1 - b x_2)^2 + 2 c_0 x_2 x_3 = 0 \; ,$$

che tocca t_0 in F_1 e tocca t_3 nel punto armonico di A_3 rispetto a F'_2 e C_3.

Ciò posto, la C abbia un doppio contatto con A, nel qual caso può dirsi *circolo*. Allora t_0, t_1 coincidono e F_1, A_0, A_1, I_0, I_1

cadono in un punto di contatto di A e C; del pari t_2, t_3 coincidono e F'_1, A_2, A_3, I_2, I_3 cadono nell'altro punto di contatto; F_2, F'_2, F_3, F'_3 cadono nel punto $t_0 t_2$, e d_2,... divengono la corda di contatto.

Attualmente $b=0$. Rimane costante sen PF_2 : sen Pd_2, se P è su C. La C' e la podaria di F_2 coincidono con la C.

Se A degenera in una coppia di punti, C passa per essi, $\alpha_1=0$, e $\overline{PF_2}=0$.

Da ultimo, C abbia un contatto di 2° ordine con A. Allora t_0, t_1, t_2 coincidono; il punto di osculazione assorbe i punti I_0, I_1, I_2, A_0, A_1, A_2, C_0, C_1, C_2, F_1, F_2, F'_3. E si ha $a_0=c_0$, $a_1=c_1$, onde

$$\frac{s}{a}=\frac{\sigma'}{\gamma}=\frac{s'}{c}=\frac{\sigma}{\alpha}=3 \quad \text{, ecc. .}$$

Pei punti di C sarà $\operatorname{sen}^2 PF'_1 = -\operatorname{sen}^2 Pd'_1$.

Se A degenera in due punti L, L', la C passa per uno di essi L, e ivi tocca la retta LL', sicchè F'_1 cade in L'. Allora $1 : a_2=0$ e $\overline{PF'_1}=\infty$.

NB. A tutto ciò che abbiamo dianzi esposto è applicabile il principio di dualità; cosicchè, scambiando fra loro gli elementi punto e retta, e quindi conica luogo ed inviluppo, segmento e angolo, si ottengono delle proprietà, che sarebbe superfluo enunciare. A una schiera di coniche confocali sottentra un fascio di coniche aventi gli stessi quattro punti sull'assoluto.

Torino, 9 gennaio 1891.

Sulla sostituzione degli alogeni negli idrocarburi aromatici

del dott. G. ERRERA

Nel fascicolo luglio-agosto 1890 del *Monatshefte für Chemie*, O. Srpek pubblica un lavoro sulla sostituzione degli alogeni negli idrocarburi aromatici e non fa, senza accorgersi, che ripetere quasi esattamente una serie di esperienze eseguite già da me tre anni or sono sullo stesso argomento e che si trovano incidentalmente in una Memoria sull'*Azione dell'acido nitrico e del calore sugli eteri*, pubblicata negli *Atti* di questa R. Accademia delle Scienze, vol. XXII (1887) e nella *Gazzetta chimica italiana*, vol. XVII, pag. 193 e segg. Di questo mio lavoro si trova il sunto nel *Chemisches Central-Blatt* dello stesso anno vol. XVIII, pag. 1286 e una recensione più diffusa nel *Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft* dell'anno seg., vol. XXI *Referate*, pag. 85.

Siccome i risultati ottenuti da Srpek e da me, benchè concordino nelle loro linee generali, differiscono in molti particolari, ho creduto bene fare alcune esperienze che del resto confermano quanto asserii nella mia Memoria già citata.

Allo scopo di preparare l'etere parabromobenziletilico, io avea cercato di giungere al cloruro di parabromobenzile, sia bromurando a freddo ed in presenza di iodio il cloruro di benzile, sia clorurando a caldo il parabromotoluene. Nell'un caso e nell'altro, invece del desiderato composto ottenni una sostanza cristallizzata in lunghi aghi splendenti incolori, le cui diverse porzioni fondevano da 50°,5 a 55° e che mi diedero all'analisi una quantità di cloro molto minore ed una quantità di bromo assai maggiore di quella richiesta dal cloruro di bromobenzile. Basandomi sui risultati dell'analisi e sul fatto che per ossidazione non ottenni che acido parabromobenzoico, senza quantità apprezzabili d'acido paraclorobenzoico, conclusi che cloro non poteva esistere nel nucleo e che quindi la sostanza da me ottenuta si doveva considerare come un miscuglio di cloruro e bromuro di parabromobenzile (*).

Nella sua recente Memoria Srpek bromura anch'esso a freddo il cloruro di benzile in presenza di iodio e clorura il parabromotoluene sotto l'azione della luce solare diretta, azione che secondo gli studi di Schramm è equivalente a quella di una elevata temperatura. Arriva anch'egli a cristalli costituiti apparentemente da una sostanza unica, il cui punto di fusione cresce per successive cristallizzazioni da 36° a 59°. La determinazione totale degli alogeni dà all'Autore numeri analoghi a quelli ottenuti da me, però l'Autore avendo dosato separatamente gli alogeni contenuti nella catena laterale, deduce che cloro deve esistere nel nucleo e che quindi il prodotto da lui preparato è « principalmente bromuro di parabromobenzile (p. f. 61°) con un composto clorurato nel nucleo e nella catena laterale » aggiungendo che « calcolando in bromo la quantità di cloro trovata, si vede che in tutti i casi i numeri oltrepassano alquanto quelli richiesti da un toluene bisostituito » e più innanzi che « la combinazione ottenuta in ambedue i casi altro non è che bromuro di parabromobenzile, il quale trattiene impurità, più ricche in alogeni, difficili da allontanare ». Le analisi riportate dall'autore sono le seguenti:

		catena laterale		alogeno totale	
	p. f.	Cl. %	Br. %	Cl. %	Br %
dal cloruro di benzile e bromo	45° C	2,20	28,18	— —	— —
	52°	3,19	28,12	7,6	51,99
	58-59°	3,25	27,80	8,01	51,69
del parabromotoluene e cloro	36°	1,9	31,6	13,8	43,4
	52°	3,26	27,8	7,9	50,76

Se le analisi sono veramente esatte è necessario ammettere la presenza del cloro nel nucleo, non vedo però in qual modo dai numeri scritti sopra si possa dedurre, come fa Srpek, che calcolando il cloro in bromo si ottenga una quantità totale di alogeno superiore a quella richiesta da un bibromotoluene, il che appunto conduce l'Autore ad ammettere la esistenza, come impurità, di un toluene più che bisostituito.

(*) Noto incidentalmente che più tardi preparai il cloruro di parabromobenzile trattando con acido cloridrico l'alcool parabromobenzilico (*Gazz. Chim. Ital.* 18, 236).

Dato un composto il quale contenga su cento parti in peso c di cloro e b di bromo, il composto che ne risulta sostituendo nella molecola al cloro una quantità equivalente di bromo, conterrà una quantità x percentuale di bromo data dalla formula (*).

$$x = \frac{35,5\ b + 80\ c}{35,5 + 0.445\ c}$$

Ora sostituendo in questa formula a c successivamente i valori 7,6 — 8,01 — 13,8 — 7,9 trovati dall'Autore pel cloro totale, e a b i valori corrispondenti del bromo 51,99 — 51,69 — 43,4 — 50,76 si trovano per x i seguenti valori;

p.f.	52°	$x = \mathrm{Br}\ ^0/_0$	=	63,10
»	58-59°	»	»	63,38
»	36°	»	»	63,99
»	52°	»	»	62,37.

La teoria pel bromuro di parabromobenzile richiede una quantità un po' maggiore di bromo, cioè

$$\mathrm{Br} = 64\ ^0/_0\ .$$

Come si vede il calcolo esatto conduce ad un risultato diametralmente opposto a quello ottenuto da Srpek, anzi i numeri calcolati differiscono abbastanza poco dalla teoria perchè si possano considerare come una prova della non esistenza di derivati superiori ai bialogenici. Del resto nell'ipotesi che vi sia realmente cloro nel nucleo, nulla di più facile che immaginare un miscuglio di bromuro di parabromobenzile, bromuro di paraclorobenzile e cloruro di paraclorobenzile il quale soddisfi ai risul-

(*) Infatti la quantità q di bromo equivalente a c di cloro è uguale a $\frac{80\,c}{35,5}$; ma in seguito a questa trasformazione le 100 parti del composto clorobromurato sono diventate $100 + q - c$ del composto bromurato, per avere quindi il per cento totale di bromo x bisognerà ricorrere alla proporzione $q + b : 100 + q - c = x : 100$.

Risolvendo rispetto ad x e sostituendo a q il suo valore $\frac{80\,c}{35,5}$ si ottiene:

$$x = \frac{100\left(\frac{80\,c}{35,5} + b\right)}{100 + \frac{80\,c}{35,5} - c}$$

cioè la formula del testo.

tati ottenuti dall'Autore senza bisogno di ricorrere a derivati alogenici superiori. Per esempio nel caso dei cristalli fondenti a 52° si ha per un miscuglio di

bromuro di parabromobenzile	74,59
bromuro di paraclorobenzile	10,92
cloruro di paraclorobenzile	14,49
	100,00

		trovato %		calcolato %	
Br	metile	28,12	51,99	28,12	51,99
	fenile	23,87		23,87	
Cl	metile	3,19	7,60	3,19	8,27
	fenile	4,41		5,08	

Ed ora che credo dimostrata la presenza esclusiva di derivati bialogenici del toluene, passiamo a discutere la seconda questione, quella cioè che riguarda la esistenza, o meno, del cloro nel nucleo.

Nel mio precedente lavoro, per quanto riguarda l'analisi dei prodotti, m'era limitato alla determinazione del cloro e del bromo totale arroventando la sostanza con calce, ed avea escluso la presenza del cloro dal nucleo, solo pel fatto di non aver potuto trovare tra i prodotti di ossidazione l'acido paraclorobenzoico. Siccome questo metodo di ricerca non è suscettibile di una grande esattezza, potendo facilmente sfuggire piccole quantità dell'acido, e poichè dalle analisi di Srpek risulta precisamente il contrario di quanto asserii, ho giudicato opportuno fare l'analisi completa di un prodotto ben cristallizzato fondente a 49° e ottenuto bromurando a freddo il cloruro di benzile nelle condizioni descritte nella mia precedente Memoria, e cristallizzando una sola volta dall'alcool la massa solida spremuta al torchio.

La determinazione degli alogeni nella catena laterale fu fatta aggiungendo a pochi decigrammi della sostanza da analizzare sciolti nell'alcool, un eccesso di soluzione alcoolica di nitrato di argento (1 parte di nitrato d'argento, 10 d'alcool al 75 %) facendo ricadere per alcune ore nell'oscurità, raccogliendo sopra un filtro il miscuglio dei sali alogenici dell'argento, lavandolo con alcool, quindi con acqua, e pesandolo in crogiuolo prima e dopo d'aver riscaldato in una corrente di cloro (*).

(*) La soluzione alcoolica dalla quale furono separati il bromuro ed il

La quantità totale degli alogeni fu determinata arroventando la sostanza con calce. Si ebbero i risultati seguenti:

gr. 0,9347 di sostanza fatti bollire con nitrato d'argento in soluzione alcoolica diedero gr. 0,6699 di cloruro e bromuro di argento e gr. 0,0063 di argento metallico. La perdita di peso avuta nel trasformare in cloruro il miscuglio dei sali d'argento fu di gr. 0,0825.

E in cento parti

	nella catena laterale
Cl	8,63
Br	16,07

gr. 0,4474 di sostanza dopo arroventamento con calce diedero gr. 0,6718 di cloruro e bromuro d'argento e gr. 0,0153 di argento metallico. La perdita di peso notata nel trasformare in cloruro il miscuglio dei sali d'argento fu di gr. 0,1241.

E in cento parti

	totale
Cl	8,49
Br	51,68.

Dai risultati delle due analisi si deduce che nella sostanza da me analizzata non v'è assolutamente cloro nel nucleo poichè la differenza riscontrata tra la quantità di cloro nella catena laterale 8,63 e quella totale 8,49 cade nei limiti d'errore di esperienza e si può considerare come nulla. È poi facile calcolare che per un miscuglio di 49,5 parti di cloruro di parabro-

cloruro d'argento, per aggiunta d'acqua lascia depositare un liquido pesante, costituito a quanto pare da etere parabromobenziletilico impuro di nitroprodotti, formatosi in virtù delle equazioni

$$C_6H_4 \Big\langle {Br \atop CH_2Br} + C_2H_5OH + AgNO_3 = AgBr + HNO_3 + C_6H_4 \Big\langle {Br \atop CH_2OC_2H_5}$$

$$C_6H_4 \Big\langle {Br \atop CH_2Cl} + C_2H_5OH + A\ \ NO_3 = AgCl + HNO_3 + C_6H_4 \Big\langle {Br \atop CH_2OC_2H_5}.$$

Infatti esso distilla alla temperatura di circa 240° e dà per trattamento con acido nitrico (vedi « Azione dell'acido nitrico e del calore sugli eteri »), una sostanza solida cristallizzata volatile col vapor d'acqua la quale, benchè fonda a temperatura un po' bassa è probabilmente aldeide parabromobenzoica. Ad ogni modo arroventandone con calce una certa quantità non pesata ho ottenuto *esclusivamente* bromuro di argento senza traccia di cloruro.

mobenzile e 50,5 di bromuro di parabromobenzile, la teoria concorda assai bene colle quantità di cloro e di bromo determinate sperimentalmente. Si ha infatti prendendo per il cloro nella catena laterale la media dei due numeri 8,63 e 8,49:

	trovato		calcolato per $\begin{cases} 49,5\ C_6H_4\ Br\ CH_2Cl \\ 50,5\ C_6H_4\ Br\ CH_2Br \end{cases}$	
	nucleo	catena laterale	nucleo	catena laterale
Cl	——	8,56	——	8,55
Br	35,61	16,07	35,42	16,16

Tale risultato che conferma le asserzioni della mia precedente Memoria è nel tempo stesso in piena armonia colle esperienze di ossidazione fatte da Srpek medesimo. Anch'egli, come me, non trova tra i prodotti di ossidazione che l'acido bromobenzoico, risultato questo che male si potrebbe spiegare coll'esistenza del cloruro di paraclorobenzile, e in generale d'un prodotto clorurato nel nucleo. Non risulta dalla Memoria dell'Autore quali delle porzioni egli abbia ossidato, se tutte od alcune soltanto, ad ogni modo anche le porzioni meno ricche in cloro nel nucleo, sempre secondo le analisi di Srpek, come quelle fondenti da 50°-60°, dovrebbero dare un miscuglio di acidi contenente circa il 75 % d'acido parabromobenzoico, ed il 25 % di paraclorobenzoico, nè mi pare probabile che una quantità tale di quest'ultimo acido sia sfuggita a chi aveva tutto l'interesse a rintracciarlo. Non parliamo poi dei cristalli fondenti a 36° che dovrebbero dare come prodotto principale di ossidazione l'acido paraclorobenzoico.

Questa contraddizione tra le esperienze di ossidazione e le analisi dello Srpek non si può spiegare che ammettendo un errore o nelle une, o nelle altre. Che se le analisi sono esatte, rimane però sempre la divergenza colle mie e allora è giuocoforza ammettere, benchè il fatto appaia poco probabile, che le piccolissime diversità nel modo di operare la bromurazione del cloruro di benzile, abbiano fatto sì che nei cristalli analizzati da Srpek il cloro sia entrato nel nucleo, in quelli analizzati da me e che fondono presso a poco alle medesime temperature, non sia entrato. Srpek per 100 grammi di cloruro di benzile, ne adopera 5 di iodio, opera allo scuro e molto più lentamente di me, perchè impiega 36 ore ad aggiungere la quantità teorica di bromo, lascia poi il liquido a sè stesso per 12 ore, finchè cioè il colore rosso sia quasi scomparso; io aggiungo 10 grammi di iodio, opero alla luce diffusa e dopo versato il bromo (operazione che dura al più due ore) lascio in riposo il liquido per alcune ore prima di sottoporlo ad ulteriori trattamenti.

Dove è più naturale attendersi una diversità nei risultati è nel clorurare il parabromotoluene, poichè lo Srpek opera sotto l'influenza della luce diretta, io sotto quella del calore; del resto in questo caso io fondo la mia opinione sulla non esistenza del cloro nel nucleo soltanto sul non aver ottenuto nella ossidazione acido paraclorobenzoico, il che non esclude a rigore la presenza di piccole quantità di cloro nel nucleo, e di più io non ho mai studiato un prodotto fondente a così bassa temperatura come quello analizzato da Srpek p. f. 36°, nel quale prodotto è da presumersi come più probabile la esistenza del cloruro di paraclorobenzile.

Riassumendo io credo di poter asserire che nei prodotti solidi da me ottenuti bromurando il cloruro di benzile non v'ha certamente cloro nel nucleo, e che in quelli preparati clorurando a caldo il parabromotoluene è probabile non ce ne sia neppure, o almeno, se pur ve n'è, soltanto in piccola quantità. Non escludo con ciò che le porzioni liquide, o quelle fondenti a bassissima temperatura, non possano contenere cloruro di paraclorobenzile, anzi credo probabile che sì.

Srpek alla fine della sua Nota, supponendo dimostrata l'esistenza del cloruro di paraclorobenzile, e del bromuro di parabromobenzile, fa alcuni ragionamenti intorno al modo probabile di procedere della reazione; io credo prematura qualsiasi ipotesi, tanto più che, essendo gli alogeni nella catena laterale molto debolmente legati al rimanente della molecola (il nitrato d'argento alcoolico li elimina già a freddo), possono benissimo entrare in giuoco anche gli idracidi che si formano nel processo della bromurazione e della clorurazione. Per uno studio completo della reazione, la prima cosa a farsi sarebbe di analizzare i gaz che si svolgono; non è improbabile ad esempio che nel bromurare il cloruro di benzile il cloro scacciato dalla catena laterale, anzichè entrare completamente nel nucleo, si possa eliminare in parte sotto forma di acido cloridrico, che sarebbe facile constatare e dosare in mezzo all'acido bromidrico che si va sviluppando.

Torino, Laboratorio di Chimica della R. Università.

Sulla terminazione delle fibre nervose nelle capsule surrenali dei Mammiferi

per il dott. ROMEO FUSARI

Il modo di terminare dei fasci nervosi che fanno capo ai corpi surrenali, malgrado le più attive ricerche fatte fino a questi ultimi tempi, è rimasto tuttavia nella più completa oscurità. Se noi infatti trascorriamo la ricca letteratura risguardante la struttura degli organi surrenali troviamo tutto al più fatta menzione della maniera di comportarsi dei fascetti nervosi nel contesto dell'organo. Circa al contegno delle fibre rispetto agli elementi, a nessuno fu dato di poterlo studiare, e se Leydig (1) considera tutte le cellule della sostanza midollare come elementi gangliari nervosi, ciò non di meno la connessione diretta di tali cellule colle fibre nervose è solo da esso sospettata. E precisamente egli si esprime così: « Da nun diese im Marke sich verbreitenden « Nerven nicht mehr aus demselben heraustreten und ferner die « zellige Elemente des Markes die Natur von multipolaren Gan- « glienzellen an der Tag liegen, so darf man vermuthen, dass « die Nervenfasern aus den Ganglienkugeln entspringen, und somit « das Mark der Nebennieren als ein ganglioses Nervencentrum « wirkt. Naturlich kann nur von der specifisch nervöser Natur « des Markes die Rede sein, vahrend die rein fetthaltige Rinde « mit einer anderen Function betraut sein mag ».

Dopo Leydig Gottschau (2) è il solo che asserisce d'aver

(1) I. Leydig, *Leherbuch der Histologie des Menschen und der Thiere.* Frankfurt a. M. 1857.

(2) M. Gottschau, *Structur und embryonale Entwickelung der Nebennieren bei Sangethieren.* Archiv für Anat. und Physiol. Annata 1883.

veduto una connessione delle fibre nervose coi prolungamenti delle cellule nervose, le quali, secondo l'Autore, unite in gruppi di vario numero costituirebbero dei gangli in mezzo alla sostanza midollare delle capsule. Queste cellule gangliari abbondantissime nell'uomo, nella pecora, e nel bue, sarebbero rare nel riccio, nella faina e nella lontra, e mancherebbero totalmente nel coniglio. Riguardo al rapporto degli elementi nervosi colle cellule del parenchima non se ne fa parola.

Se così poco finora si era ottenuto, si deve alle grandi difficoltà che si incontrano nello studio dei corpi surrenali. Uno fra gli ostacoli più gravi è dovuto alla estrema alterabilità degli elementi, la quale massime coll'impiego del cloruro d'oro, fatto allo scopo di mettere in evidenza i filamenti nervosi, conduce fino allo spappolamento del tessuto. Il metodo dell'oro fu perciò anche da me tentato inutilmente sul principio delle mie ricerche, poscia fu abbandonato, e fu fatto invece ricorso alla reazione nera del Golgi, la quale anche in teoria rispondeva alle condizioni più favorevoli per una delicata ricerca, avvegnachè per essa si ha un'ottima fissazione degli elementi, e con essa è possibile l'osservazione miscroscopica anche su tagli piuttosto spessi. I migliori risultati li ho ottenuti usando del metodo così detto rapido, cioè immergendo direttamente i pezzi freschi nella miscela osmio-bicromica, dalla quale dopo un'immersione prolungata da tre a dieci giorni i medesimi venivano portati per uno o due giorni nel nitrato d'argento in soluzione all'1 per cento.

Oltre a ciò, non ho trascurato altri metodi di preparazione. Così ho tentata la reazione vitale di Ehrlich all'azzurro di metilene, ed i risultati ottenuti, sebbene molto parziali, mi furono tuttavia utili, perchè mi servirono di controllo agli altri ottenuti col metodo di Golgi. Ho fatto anche numerose preparazioni colorando coi mezzi ordinarii (carminio, ematossilina, ecc.) corpi surrenali stati preventivamente fissati sia nei liquidi cromici sia nel liquido di Kleinenberg. I mammiferi su cui si estesero le mie ricerche furono: l'uomo (neonato), il sorcio *(mus musculus)*, il ratto *(mus decumanus)*, il coniglio, il maiale, il gatto (neonato), e la capra (giovane).

I fasci di nervi che fanno capo alle ghiandole soprarenali, fatta proporzione colla grandezza di questi organi sono oltremodo numerosi. Questo fatto attirò ben presto l'attenzione degli anatomici, e Wharton, atteso questo intimo rapporto coi nervi, chiamò le capsule surrenali *glandulae ad plexum* (1). NAGEL (2) trovò che i nervi provengono dal plesso celiaco e dal plesso renale, e BERGMANN (3) aggiunse che una piccola parte provengono anche dal vago e dal frenico. KÖLLIKER (4) annoverò per ben 33 piccole branche nervose per la capsula surrenale destra dell'uomo, e SAPPEY (5) confermò senza citarle le osservazioni di BERGMANN nel senso che pur egli vide il pneumogastrico destro fornire alle capsule un ramo abbastanza voluminoso.

I fasci nervosi per la massima parte provengono dal plesso solare, e si mettono in rapporto colle ghiandole surrenali, accostandovisi per la parte interna. Sulla membrana involgente di questi organi formano già un plesso in cui non è raro trovare dei piccoli gangli nervosi; altri ganglietti stanno nello spessore stesso dell'involucro membranoso, e spesse volte anche immediatamente sotto.

Non tutti i fasci nervosi che toccano la capsula entrano nell'organo, e neppure quelli che entrano si distribuiscono tutti nel medesimo. Alcuni pochi fasci infatti dopo essersi accostati alla capsula e dopo essersi messi in rapporto colla sua membrana involgente se ne allontanano di nuovo. Altri, molto più rari, giungono a penetrare fino nella sostanza corticale, ma poi cambiando direzione fuorescono di nuovo. Questa particolarità fu già notata da BERGMANN, il quale dice: *Passim unus vel plures horum nervorum per marginem glandulae suprarenalis transeunt, ex parte altera rursus procedunt, atque ad ganglion semilunare rursus redeunt ita ut annulo comparari possint auricolari, qui nonnumquam tam laxus est ut rursum et retrorsum trahi possit.* La stessa particolarità fu poi constatata da GOTTSCHAU nel gatto, e da me venne confermata nello stesso animale.

Il maggior numero però dei fasci nervosi dopo un decorso più o meno lungo nell'involucro connettivo penetrano perpendicolarmente alla superficie nella sostanza corticale, e si approfondano nella medesima fino a raggiungere la sostanza midollare.

---

(1) BARTOLINI, *Anatomia Bartholiniana.* Lugduni 1684, pag. 188.

(2) NAGEL, *Ueber die Structur der Nebennieren.* Archivio di Müller, 1836.

(3) C. BERGMANN, *Dissertatio de glandulis suprarenalibus.* Gottingen, 1839.

(4) A. KÖLLIKER, *Handbuch der mikroskopischen Anatomie.* Leipzig, 1854, pag. 386.

(5) SAPPEY, *Traité d'Anatomie descriptive.* Paris 1873. Tomo IV, p. 565.

Facendo eccezione di Nagel, tutti gli altri osservatori hanno sostenuto che la sostanza corticale delle capsule è priva di nervi. Invece io ho notato che tale sostanza ne è sufficientemente provveduta. In primo luogo quasi ciascun capillare sanguigno è accompagnato per lo meno da un sottilissimo filamento nervoso, inoltre si vedono altre fibre nervose che decorrono obliquamente senza tenere alcun rapporto coi vasi. Queste fibre provengono o dalla membrana involgente o dalla sostanza midollare, più di rado dai fasci nervosi da cui la sostanza corticale è attraversata, e vanno a terminare sia nella zona glomerulare, sia nella zona fascicolata senza presentare altra particolarità.

I fasci nervosi che attraversano le citate due zone corticali giunti nella zona reticolare cominciano solo allora a biforcarsi, e le divisioni, per lo più dicotomiche, si ripetono in seguito numerose volte nella sostanza midollare. Il modo di comportarsi di questi fasci fu esattamente descritto da Taruffi (1). Questo osservatore riferisce che detti fasci si dividono in rami e ramoscelli a guisa delle arterie, colla differenza però che i rami mandano nuove diramazioni che si uniscono colle divisioni vicine costituendo archi ed anse. Simile contegno è tenuto anche dai piccoli ramoscelli, i quali possono nascere tanto dai tronchi che dai rami principali, oppure sono una suddivisione dei rami nervosi minori. Io aggiungerò che in nessun luogo altrove ho potuto constatare una irregolarità di decorso delle fibre nervose come nelle capsule surrenali. Ho notato certi contegni così strani che sfuggono a qualunque descrizione. Alcune volte il fascio nervoso si biforca e comprende nella biforcazione un gruppo di cellule midollari, poi le due branche si ricongiungono di nuovo. Altre volte è un solo fascettino composto di due o tre fibre nervose che si allontana dal tronco e fa un lungo giro ondulato fra i lobuli della sostanza midollare per tornare poi vicino al punto di partenza. Le anastomosi e gli incrociamenti dei fascetti nervosi sono così frequenti che nei preparati bene riusciti a piccolo ingrandimento si vede in tutta la sostanza midollare un esteso plesso con fibre nervose irregolarmente distribuite, dove più, dove meno sviluppato, dove formante reti a grandi maglie, dove stretti reticoli. Le maglie più grandi sono occupate dai cordoni di cellule midollari, le maglie più piccole

(1) C. Taruffi, *Sulla struttura delle capsule surrenali.* Bollettino delle Scienze mediche di Bologna. Vol. 2, 1866.

sono occupate da una o poche cellule midollari, oppure da un vaso. Nella figura 1ª della tavola ho disegnato tutta una sezione della sostanza midollare dei corpi surrenali di topo ed in questa vedesi un grosso fascio che penetra e si dirama. Naturalmente per farsi un' idea più esatta della maniera di comportarsi dei nervi fa d'uopo esaminare più sezioni disposte in serie, perchè le branche nervose ed in particolar modo i rami secondari occupano successivamente piani molto diversi.

Le fibre nervose di un fascio non hanno fra loro un decorso parallelo. Inoltre l'andamento di ciascuna fibra non è rettilineo, ma a curve più o meno strette ed irregolari, e però le varie fibre del fascio si accavallano e si intrecciano fra loro formando una specie di rete a maglie allungate. Molto spesso si incontrano anche anastomosi fra fibra e fibra, particolarità che è nota per i fasci nervosi appartenenti al sistema del simpatico. Tale contegno delle singole fibre nel fascio nervoso è in certo modo paragonabile a quello che tengono i diversi fascetti nervosi nella sostanza midollare, e si potrebbe dire che questo non è che una esagerazione di quello.

Un'altra particolarità presentata dalle fibre dei fasci è che ben di rado si possono ottenere colorate perfettamente in nero colla reazione di Golgi; d'ordinario, ed in ispecial modo le più grosse, si colorano solo in bruno nerastro (fig. 1, 2, 3); solo alcune mostrano un contorno più nero molto distinto.

Tanto i fasci nervosi principali come i piccoli rami racchiudono cellule nervose. Il numero di queste varia a norma degli animali; più frequenti sono nel coniglio, stanno in minor quantità nella capra, e piuttosto scarse si presentano nel sorcio. Nelle figure 2 e 3 sono riportati alcuni di tali fasci nervosi racchiudenti cellule di varia dimensione, da 8 a 30 micromillimetri. Queste cellule sono fusate o sferiche. Le cellule fusate hanno due prolungamenti, quelle sferiche anche, ma ne possono possedere uno solo, almeno ciò mi fu dato di constatare in molti casi. Quando queste ultime cellule posseggono due prolungamenti, d'ordinario l'uno è robusto, l'altro sottile; il primo in tal caso continuasi colle fibre del fascio; il secondo si fa divergente ed entra nel parenchima midollare dell'organo. È verosimile che tutte le cellule posseggano più d'un prolungamento, e che nei casi in cui ne appare solamente uno solo, ciò si debba alla mancata reazione sul prolungamento più piccolo. Altre cellule hanno più di due prolungamenti; così nella figura 3 è disegnata una cellula con tre prolungamenti, ed un'altra più piccola con quattro.

Le cellule nervose possono trovarsi anche su ciascun lato dei fasci nervosi, e ciò si verifica specialmente nel coniglio (fig. 2 *c*). Queste cellule si ravvicinano per lo più alla forma sferica e posseggono due prolungamenti di diverso diametro: il più robusto va a raggiungere le fibre del fascio, il più sottile entra nel parenchima.

Altre cellule nervose poligonali con prolungamenti ramificati (fig. 1, fig. 8 *c*) si riscontrano, sebbene più raramente, lungo il decorso dei più fini fasci o delle fibre nervose isolate decorrenti fra i cordoni della sostanza midollare. Queste cellule sono unite alle fibre per uno solo dei loro prolungamenti, il quale come gli altri può portare delle divisioni.

Oltre le cellule nervose, che colla reazione di Golgi appaiono completamente nere, si vedono nei diversi fasci altri corpi similmente colorati, ai quali per ragione della loro piccolezza non potrebbesi dare altro significato che quello di semplici varicosità o di rigonfiamenti della fibra nervosa. Non è raro vedere alcuni di questi corpiciattoli interporsi fra due fibrille nervose decorrenti parallelamente e servire così come mezzo di anastomosi fra le medesime.

In mezzo alle maglie del descritto plesso nervoso, vale a dire fra gli elementi dei cordoni della sostanza midollare rilevansi altre interessanti particolarità. Rami numerosi che si staccano dalle fibre nervose del plesso si aggiungono ai sottili prolungamenti delle cellule dianzi descritti, e penetrano fra le cellule dei cordoni, dove si dividono e si suddividono in fine fibre varicose. Il modo di comportarsi di queste divisioni varia notevolmente. Alcune volte queste costituiscono un fascetto, che termina come un pennello, altre volte le fibre presentano un piccolo rigonfiamento conico dalla cui base partono ramificazioni dicotomiche, e le fibrille che ne risultano si anastomizzano in parte fra loro (fig. 9). Invece in altri luoghi anche dello stesso preparato (fig. 1) si possono vedere filamenti terminanti in una pallina od in un dischetto, oppure in un corpuscolo provveduto di prolungamenti sottilissimi ramificati che terminano in alcuni casi in modo netto, ed in altri finiscono in una serie di punteggiature mal definite, quasi che i filamenti stessi si estendessero a formare una sottile membranella (fig. 1 *e*).

Ma si possono avere anche immagini molto più interessanti. In questi casi i filamenti che decorrono attorno ad un gruppo di cellule midollari ad un tratto si dividono, e formano un reticolo con punti nodali discoidali o formati da placchette poligonali, il quale reticolo veduto a piccolo ingrandimento prende la forma di un grossolano gomitolo, mentre esaminato con forti ingrandimenti appare in forma di una sfera cava più o meno ampia, più o meno regolare e completa. Vari filamenti attraversano in diversi sensi la cavità della sfera dividendola in tanti scompartimenti. Nelle figure 4, 5, 6 io ho cercato di dare un'idea di simile modo di terminare delle fibre nervose. Nelle figure 4 e 6 i rigonfiamenti nodali sono a forma di disco, nella figura 5 sono a forma di laminette poligonali.

Nell'ultimo periodo di queste mie ricerche, ho ottenuto preparati ancora più istruttivi. Contemporaneamente ad un reticolo finissimo ebbi colorati in rosso-bruno anche gli elementi midollari (fig. 7); così mi restava accertato ciò che nella mia Nota preventiva (1) aveva solamente potuto sospettare, cioè che ciascun gruppo di elementi midollari è contenuto in un reticolo nervoso i cui punti nodali, variabili di forma e grandezza si appoggiano sul corpo degli stessi elementi. Per i filamenti interni del reticolo ogni singola cellula resta in rapporto cogli elementi nervosi. Le figure 4, 5, 6 rappresentano perciò tante specie di cestelli destinati a contenere ciascuno un gruppo di cellule midollari.

Per questi risultati resta anche molto probabile che le terminazioni dianzi descritte a soli filamenti liberi od a rare anastomosi, come pure le terminazioni in placchette ed in corpuscoli stellati isolati non siano che un prodotto artificiale dovuto ad una reazione parziale, vale a dire del reticolo in questi casi si sarebbero colorati solo certi filamenti e certi punti nodali.

È noto che i varii cordoni cellulari della sostanza midollare delle capsule surrenali mostrano una diversità di contegno rispetto all'acido cromico ed ai suoi sali, perchè mentre questi reattivi colorano in bruno carico le cellule di alcuni cordoni, producono invece solo una lieve tinta nelle cellule degli altri

(1) R. Fusari, *Osservazioni sulle terminazioni nervose e sullo sviluppo delle capsule surrenali.* Rendiconto della R. Accademia dei Lincei. Classe di sc. fis. mat. e nat. Vol. VI. 1° Sem. fasc. 11, 1890.

cordoni. Ora riguardo alla distribuzione dei nervi queste due specie di gruppi cellulari non presentano alcuna differenza; ho notato solo che la reazione nera talora si verifica a preferenza sui gruppi delle cellule brune, talora sulle cellule chiare, e ciò a seconda delle diverse condizioni dell'esperimento. Quindi al differente contegno chimico dei varî cordoni cellulari non deve attribuirsi verosimilmente altro significato che quello di una manifestazione di un diverso stato di attività funzionale. Ed in vero, come già fece osservare GOTTSCHAU, fra le cellule dei due gruppi esistono molte forme di passaggio.

È noto anche che nei feti e nei neonati il midollo delle capsule surrenali presenta spesso dei cordoni in cui le cellule non appaiono limitate fra loro, di modo che sembrano formati da accumuli di nuclei immersi in un protoplasma comune. Spesso questi accumuli nucleari si possono accompagnare per buon tratto anche attraverso la sostanza corticale lungo le linee in cui questa è attraversata dai fasci di fibre nervose. Ebbene la reazione nera applicata sulle capsule surrenali dei neonati fa dimostrare l'intimo rapporto che questi cordoni di cellule apparentemente indivise hanno colle fibre nervose. Nel gatto neonato io ottenni colorato in nero il fascio nervoso attraversante la sostanza corticale, il quale andava poi a disperdersi in totalità in mezzo ai nuclei. Più davvicino non si potevano seguire i filamenti nervosi perchè anche il protoplasma dei cordoni aveva preso una tinta rosso-bruna carica.

In un altro preparato delle stesse capsule di neonato ottenni la terminazione dei nervi in un cordone cellulare già differenziato. In questo cordone molte cellule si sono colorate in bruno e quindi si sono fatte ben evidenti. Due fibre nervose entrano fra le medesime e suddividendosi distribuiscono molti filamenti che vanno a metter capo alle nominate cellule, così nell'insieme la immagine rassomiglia ad un grappolo nel quale le cellule rappresentano gli acini (fig. 8). I filamenti nervosi terminano sulla superficie della cellula espandendosi in modo non ben netto. Si vedono vicino alle estremità loro molte punteggiature e fili sottilissimi e brevi, particolarità dalle quali si può sospettare l'esistenza sulla superficie cellulare di un indeterminato finissimo reticolo. Dove gli elementi cellulari non riescono colorati appare solo distinta la fibra nervosa colle sue diramazioni terminali. La figura 9, che riproduce questa particolarità, fu presa dallo stesso preparato da cui fu ricavata la figura 8; confrontando le due figure fra loro si può facilmente convincersi che la seconda immagine è dovuta ad una reazione parzialmente riuscita.

Come ho già accennato in principio, da me fu tentata sulle capsule surrenali anche la reazione al *bleu* di metilene di Ehrlich. Nei risultati molto parziali che ho ottenuti ebbi colorate un buon numero di fibre nervose ed anche alcune diramazioni terminali nella sostanza midollare. Solo parecchie di queste finivano in una specie di espansione più o meno estesa fatta da minute punteggiature od a membrana mal definita. Ho riportate alcune di così fatte terminazioni nella figura 10; esse si possono molto bene mettere a riscontro colle altre ottenute mediante la reazione nera.

Usando la reazione del Golgi, e specialmente procedendo col metodo lento, vale a dire facendo precedere all'immersione nella miscela osmio-bicromica l'indurimento del pezzo in bicromato di potassio, si possono ottenere colorati nei corpi surrenali anche i vasi, le cellule connettive, e le fibro-cellule muscolari.

Quanto ai *vasi*, nulla ho da aggiungere a quanto si pose già in evidenza mediante le iniezioni. Mi sono riuscite anche le figure alate descritte da Guarnieri e Magini (1) nella sostanza reticolare, e ottenute pure collo stesso metodo. Queste non mi sembrano che espressione di un finissimo plesso di fibre connettivali che serve di sostegno all'endotelio, il quale plesso penetra anche in forma di esili lamine fra i diversi gruppi di cellule parenchimali separandoli fra loro.

Oltre di ciò nello stroma di sostegno della ghiandola trovasi un gran numero di *cellule connettivali*. Nella sostanza corticale, e specialmente nella zona fascicolata, le cellule connettive prendono per lo più la forma di fuso col massimo asse disposto in senso radiale. I prolungamenti che si partono in vario numero da qualsivoglia punto della superficie di tali cellule servono a connettere le stesse cellule fra loro ed a delimitare i cordoni formati dagli elementi epiteliali. E precisamente accade che coi prolungamenti degli apici le cellule si mettono in rapporto con

(1) G. Guarnieri e G. Magini, *Studi sulla fina struttura delle capsule soprarenali.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Classe di Sc. fis. mat. e nat. Vol. IV, 1° Sem., Serie 4ª, 1888.

quelle soprastanti e sottostanti, e coi prolungamenti che partono dal corpo delimitano lateralmente il cordone e si mettono in rapporto colle cellule connettivali che stanno dalla parte opposta del cordone medesimo. Nella figura 11 in *b* ho disegnato un gruppo di tali cellule vedute secondo la loro lunghezza, in *c* altre cellule simili sezionate trasversalmente. In *d* poi ho riportata la figura di altri due elementi connettivali assai appiattiti che riuscirono colorati in bruno e che terminano in espansioni membraniformi. Le cellule *b* e *c* furono ricavate dal sorcio, le *d* dall' uomo, e queste ultime fanno passaggio a quelle riportate nella figura 12 *a* appartenenti alla zona fascicolata della sostanza corticale delle capsule di maiale. Tali cellule sono estese in superficie e sono conformate a doccia. In esse si vedono i nuclei anneriti da cui partono dei prolungamenti ramificati che corrispondono forse a nervature protoplasmatiche che si sono annerite. La conformazione a doccia si vede meglio nella figura 12 *b*, in cui una serie di simili cellule stanno giustapposte fra loro per i margini a guisa di un endotelio, e compongono un semicanale. I limiti fra le diverse cellule non appaiono distinti.

Nella zona reticolare le cellule connettive sono numerosissime, piccole, stellate ed anastomizzate fra loro. Nella sostanza midollare le cellule connettive sono assai irregolari, ora grosse specialmente in prossimità ai vasi, ora sottili lamellari con molti prolungamenti (fig. 11 *a*), ora fusiformi molto allungate

Le *fibre muscolari liscie* furono da me ottenute nella membrana connettiva della capsula; esse si fanno notare specialmente per il grande numero di divisioni presentate dal loro apice.

Da questo mio studio appare ben evidente la differenza circa la distribuzione delle fibre nervose fra le cellule del parenchima midollare e quelle del parenchima corticale. Oltre alla enorme disparità nel numero delle fibre che si diramano rispettivamente a questo ed a quello, vi ha anche una grande diversità nel modo di terminare delle medesime mancando nelle cellule corticali l'intimo rapporto colle estremità nervose che esiste nelle cellule midollari. Questo fatto può trovare una spiegazione nelle antiche dottrine embriologiche le quali ammettono che la sostanza midollare delle capsule derivi dall'abbozzo del simpatico, mentre la sostanza corticale proverrebbe dal mesoderma. Queste dottrine essendo state poste in dubbio da alcuni recenti osservatori (Gottschau, Ianosik, Mihalkovich, Valenti, ciò fu cagione di altre mie ricerche a cui ho già accennato nella citata mia Nota preventiva e che saranno ben presto oggetto di un'altra pubblicazione. Da tali ricerche io come gli antichi autori fui tratto a conchiudere che gli abbozzi delle capsule surrenali hanno una doppia derivazione e che gli elementi provenienti dal simpatico entrano a formare la sostanza midollare. Però non sono riuscito a stabilire se questa sostanza, almeno nei mammiferi, sia formata esclusivamente dagli ultimi elementi, e quindi rimane ancora la questione se tutti gli elementi midollari abbiano ugual valore, ed in caso negativo quali fra i medesimi appartengono al simpatico e quali meno.

Ora i risultati del presente mio studio possono, benchè indirettamente, sciogliere tale questione?

Io sono inclinato a dare a questa domanda una risposta affermativa, perchè tutti gli elementi del parenchima midollare avendo eguali rapporti colle fibre nervose, ciò fa supporre che essi debbano avere egual valore sì fisiologico che morfologico. A ciò si devono anche aggiungere le seguenti considerazioni.

Se noi trascorriamo la letteratura risguardante l' argomento che ci occupa, troviamo le più aperte contraddizioni nelle interpretazioni che si fanno riguardo alle cellule della sostanza midollare; da Leydig che le considera tutte come nervose, andiamo fino ad Arnold (1) il quale mette in dubbio la presenza di cellule nervose anche isolate. Certi elementi dagli uni considerati come gangliari, da altri non sono affatto riconosciuti. Così il numero dei gangli nervosi e delle cellule nervose che si troverebbero nella sostanza midollare varia immensamente per lo stesso animale da autore ad autore. Ad esempio mentre Holm (2) e Dostojewsky (3) trovarono nella sostanza midollare delle capsule del coniglio molte cellule nervose disposte a piccoli

(1) I. Arnold, *Ein Beitrag zu der feineren Structur und zum Chemismus der Nebennieren.* Archiv für path. Anat. und Phys., Bd. XXXV, 1866.

(2) Holm, *Ueber die nervösen Elemente in der Nebennieren.* Sitzungsberichte der Wiener Akad. der Wiss. 1866.

(3) A. Dostoiewsky, *Ein Beitrag zur mikroskopischen Anatomie der Nebennieren bei Saugethieren.* Arch. f. mikr. Anat. Bd. 27, 1886.

gruppi, GOTTSCHAU al contrario non ne potè trovare in detto animale, trovò invece un'enorme ricchezza di gangli nervosi nel vitello, il quale animale diede per contro al TARUFFI risultati completamente negativi. Per CIACCIO (1) la sostanza midollare è composta di cellule le quali se non tutte almeno in gran parte hanno caratteri tali da farle considerare come cellule ganglionari; per MOERS (2) invece la sostanza corticale e la sostanza midollare sono formate dagli stessi elementi, le cellule nervose si presentano solo come rigonfiamenti dei nervi. BRUNN (3) considera le cellule brune midollari come elementi nervosi; HOLM ne fa a sua volta un gruppo a parte chiamandole elementi di natura nervosa dubbia (*Zellen von Zweifelhaft nervöser Natur*); BRAUN (4) le considera come forme di passaggio fra queste e le altre cellule del parenchima midollare. Basteranno, io credo, le citazioni fatte ed i fatti con esse addotti per trarre la conclusione che nella sostanza midollare dei corpi soprarenali oltre al trovarsi cellule che ricordano perfettamente per il loro aspetto gli elementi dei vicini gangli simpatici, ne esistono altre che non vi somigliano affatto, ma che fra le une e le altre vi sono forme che hanno in pari tempo i caratteri di amendue, le quali forme sono più o meno numerose a seconda degli animali, e molto probabilmente anche secondo l'età di questi ed i periodi di attività o di riposo della ghiandola. Da questa sola particolarità deriverebbe la grande diversità di giudizi negli autori.

L'aspetto ed il contegno chimico non essendo sufficiente a caratterizzare gli elementi in questione, rimane allora unico criterio per giudicare della loro natura l'esame dei loro rapporti colle fibre nervose. Ed appunto sui rapporti di certe cellule ganglionari simpatiche coi rispettivi nervi esistono oggidì osservazioni bene accurate che fanno sempre più concludere per una rasso-

---

(1) Comunicato nel lavoro di R. VERARDINI, *Nuovo contributo allo studio della malattia d'Addison*. Memorie della R. Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Serie IV, Tomo IX, 1888.

(2) A. MOERS, *Ueber den feineren Bau der Nebennieren*. Arch. f. path Anat. und Phys., Bd. XXIX, 1864.

(3) A. BRUNN, *Ein Beitrag zur Kenntniss des feineren Baues und der Entwickelungsgeschichte der Nebennieren*. Arch. f. mikr. Anat. Bd. VIII, 1872.

(4) BRAUN. *Bau und Entwickelung der Nebennieren bei Reptilien*. Arbeiten ans dem zool. Institute zu Würzburg, Bd. V, 1879.

miglianza notevolissima fra le medesime e gli elementi della sostanza midollare delle capsule surrenali.

Già da BEALE e da ARNOLD furono riscontrati nel simpatico della rana certi elementi ganglionari in rapporto con due fibre, una retta, l'altra avvolta a spirale attorno alla prima Più tardi col mezzo del suo metodo al *bleu* di metilene EHRLICH (1) trovò che di queste parti si colora solamente la fibra spirale, la quale dividendosi sulla superficie della cellula vi forma una rete nervosa terminale che ricetta nelle sue maglie una parte più o meno estesa od anche tutta la cellula. Dai filamenti reticolari partirebbero altre divisioni terminanti in un rigonfiamento. ARONSON (2) ripetendo le stesse ricerche confermò il reperto di EHRLICH, e così ARNSTEIN (3); solo che quest'ultimo trovò che i rigonfiamenti corrispondono sempre a punti nodali della rete, e che quando sembrano terminali ciò si deve ad una incompleta colorazione del reticolo. Un altro osservatore, FEIST (4), aggiunse che il polo della cellula a cui fa capo la fibra spirale si fa spesse volte distinto per una colorazione bluastra di una materia granulosa, in cui emergono alcuni grossi granuli dello stesso colore. Ora le qui riferite particolarità della fibra spirale corrispondono ben davvicino a quelle da me descritte per le fibre nervose nella sostanza midollare; ma FEIST è andato più in là, perchè mentre EHRLICH considera la fibra retta come centrifuga, la contorta come centripeta, per esso la prima non corrisponde altro che ad un semplice prolungamento protoplasmatico nutritizio, mentre il prolungamento nervoso, vale a dire il solo che partendo dalla cellula continuasi colle fibre del simpatico sarebbe rappresentato dalla fibra spirale. In tal caso l'analogia fra certi elementi simpatici e gli elementi midollari delle capsule è anche maggiore, perchè a me non fu dato di constatare che i brevi prolungamenti delle cellule capsulari si continuino colle fibre nervose.

L'analogia si fa più grande ancora se si tiene conto di altri fatti e soprattutto delle recenti scoperte di SMIRNOW. È da

(1) P. EHRLICH, *Ueber die Methylenblaufarbung als histologische Methode*. Deutsche med. Wochenschr, 1886, N. 4.

(2) H. ARONSON, *Beitrage zur Kenntniss der centralen und peripheren Nervenendigungen*. Inaugural dissertation. Berlin 1866.

(3) K. ARNSTEIN, *Die Methylenblaufarbung als histologysche Methode*. Anatom. Anzeiger 1887, pag. 130.

(4) B. FEIST, *Beitrage zur Kenntniss der vitalen Methylenblaufarbung des Nervengewebes*. Archiv f. Anat. und Phys. Anath. 1-2 Hefte, 1890.

tempo che Mayer (1) fra gli elementi del simpatico oltre le comuni cellule nervose distinse delle forme speciali che chiamò *Zellennester*, le quali sono costituite da un accumulo di piccoli corpi constanti di un nucleo e di poco protoplasma fra cui si trovano altre cellule più grandi. Questi elementi involti da una comune capsula connettiva sarebbero contigui ai nervi e non continui. Or bene secondo Mayer queste speciali formazioni sarebbero rappresentate anche nella sostanza midollare delle capsule surrenali. Dostoiewsky a sua volta fece notare che nei gangli nervosi, i quali stanno al di fuori delle capsule surrenali, trovansi gruppi di cellule che hanno l'aspetto e le reazioni chimiche delle cellule della sostanza midollare. Stilling (2) affatto recentemente confermò le asserzioni di Dostoiewsky. Nei gangli del simpatico addominale, specialmente del coniglio, del gatto e del cane, si trovano piccoli corpuscoli composti di cellule che come gli elementi midollari delle capsule si colorano in *bleu* col persolfato di ferro ed in bruno col bicromato di potassio. Detti corpi hanno una tunica connettiva comune, posseggono piccoli vasi capillari, e però corrispondono evidentemente ai *Zellennester* di Mayer. Smirnow (3) finalmente studiando la struttura delle cellule nervose del simpatico degli anfibi col mezzo della reazione vitale di Ehrlich è riuscito anche a mettere in evidenza il rapporto delle fibre nervose coi nidi cellulari di Mayer. Dentro la comune capsula che racchiude le cellule brune esiste un reticolo nervoso che è in tutto simile al reticolo che si trova sulla superficie delle cellule ganglionari simpatiche. Le fibre nervose circondano in forma di un reticolo generale tutto il conglomerato di cellule e penetrano anche fra i singoli elementi. La rete poi manda una, due o più fibre che passano nei tronchi nervosi. Smirnow dietro questo particolare contegno delle fibre nervose considera i nidi cellulari come cellule nervose circondate da una capsula generale. Ora il reperto di Smirnow coincide perfettamente con quanto io ho trovato nella sostanza midollare delle capsule surrenali. Anche qui i singoli gruppi cellulari sono

(1) I. Mayer, *Beobachtungen und Reflexionen über den Bau und die Verrichtungen des sympatichen Nervensystems.* — Sitzungsberichte der Wiener Akad. der Wiss., Bd. LXVI, 1872.

(2) H. Stilling, *A propos de quelques expériences nouvelles sur la maladie d'Addison.* — Revue de Médecin, Année X. Octobre 1890.

(3) A. Smirnow, *Die Structure der Nervenzellen im Sympathicus der Amphibien.* Arch. f. mikr. Anat. Bd. 35, 1890.

involti da una comune capsula connettiva e sono anche circondati da un reticolo nervoso generale, solo qualche fibra isolata penetra fra i vari elementi. Se dunque, come fece SMIRNOW, si vogliono considerare i nidi cellulari del simpatico come composti di elementi nervosi, per le stesse ragioni tutte le cellule della sostanza midollare delle capsule devono entrare in questa categoria.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

FIG. 1. — Sezione dorso-ventrale di una capsula surrenale di sorcio. La parte colorata rappresenta la sostanza midollare divisa in lobuli o cordoni cellulari che appaiono diversamente tinti. — *N*, fascio nervoso che attraversa la sostanza corticale per entrare in quella midollare; *c*, cellule nervose colorate in nero; *v*, vene; *a*, terminazioni in espansioni mal definite; *b*, terminazioni a rete, *d*, dilatazioni terminali delle fibre nervose a piastrina allungata; *e*, terminazioni in corpuscoli stellati. — Zeiss — Oculare 2 Obb. D.

» 2 e 3. — Fasci di fibre nervose decorrenti nella sostanza midollare delle capsule di coniglio. — *C*, *C*, cellule nervose. — Zeiss. Oc. 3 obb. D.

» 4, 5, 6. — Varie forme di terminazioni nervose a rete (sorcio). — Zeiss. Oc. 3, Obb. D.

» 7. — Terminazioni a rete su due piccoli gruppi cellulari nel topo. — Zeiss. Oc. 3, Obb. D.

» 8. — Terminazione a grappolo, *c* cellula nervosa (gatto neonato). — Zeiss. Oc. 3, Obb. D.

» 9. — Lo stesso modo di terminazione figurato in 8, a cui mancano le espansioni terminali (gatto neonato).

» 10. — Espansioni terminali ottenute nel coniglio col mezzo della reazione vitale di EHRLICH. — Zeiss. Oc. 3, Obb. E.

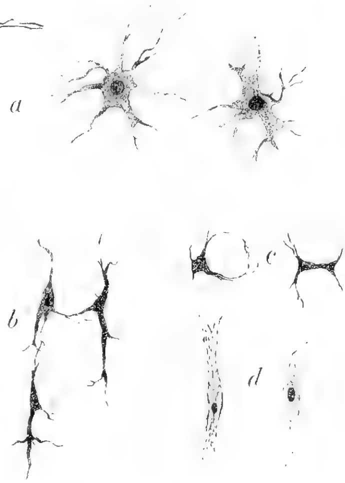
» 11. — Cellule connettive, *a* della sostanza midollare (coniglio); *b*, *c* della sostanza corticale (sorcio); *d*, della sostanza corticale (uomo). — Zeiss. Oc. 3, Obb. E.

» 12. — Cellule connettive della zona fascicolata (maiale). — Zeiss. Oc. 3, Obb. E.

Fig. 6

ig. 9

Fig. 11



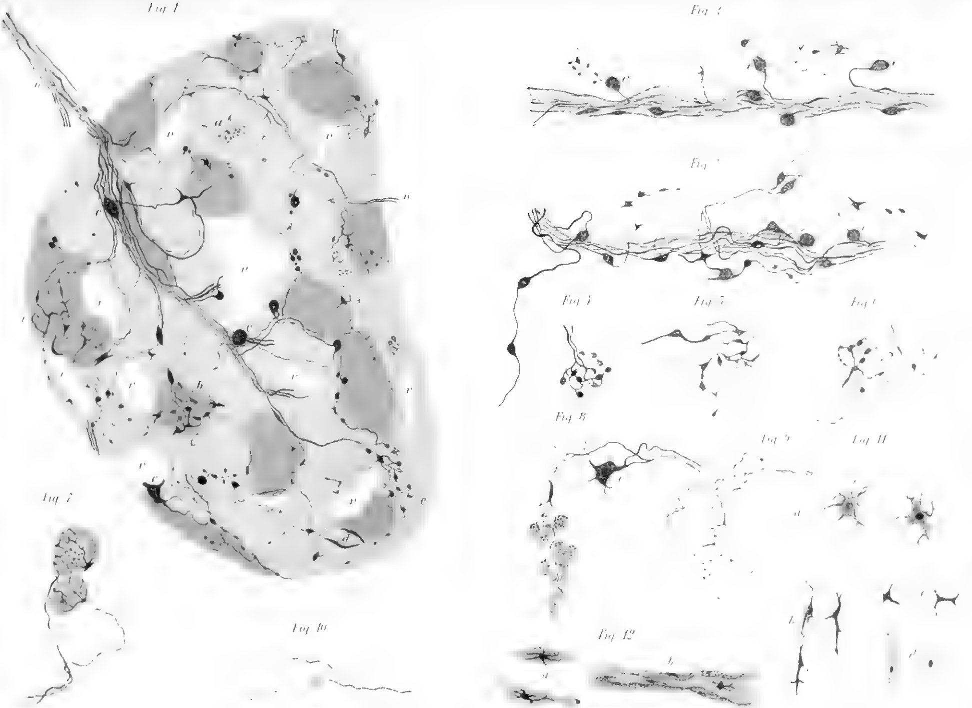


Fig 1
Fig 8
Fig 10
Fig 11
Fig 12

Ricerche anatomo-fisiologiche intorno all'apparato uditivo dei Teleostei.

Note del dott. PIETRO DE-VESCOVI

I. Sulla denominazione da assegnarsi agli otoliti dei Teleostei.
II. Sulla trasmissione delle vibrazioni sonore al labirinto membranoso dei Teleostei.

I.

Sulla denominazione da assegnarsi agli otoliti dei Teleostei.

Prima di pubblicare alcune osservazioni morfologiche e fisiologiche sull'organo acustico dei Teleostei, per non fare una troppo lunga disgressione da quegli argomenti speciali, mi determinai di trattare separatamente, con questa Nota critica, dei nomi assegnati agli otoliti per giustificare quelli che sono per proporre e sarò per adottare.

Ad alcuno può sembrare inconsulto o per lo meno inutile il cambiar denominazione ad un organo, ed anzi v'è chi sostiene che allorquando un organo, come una specie animale, possiede una sinonimia, sia, senz'altro d'accettarsi come definitivo quel nome che ha il primato del tempo.

Questo criterio mi sembra che assomigli, a quelli, dirò così, artificiali che si adottarono per le prime classificazioni degli oggetti naturali. Credo invece che un criterio più positivo, e che può arrecare dei vantaggi, sia quello di prendere come definitiva quella denominazione che si collega con un qualche fatto morfologico o fisiologico. È allora che il nome non rappresenta una parola vuota di senso, e serve non solo a denominare un oggetto perchè non si confonda con altri; ma giova anche a ricordarne una particolarità più o meno saliente di forma o di funzione: nome che in parte serve a caratterizzarlo.

Molti esempi si dànno di termini che addirittura sono sbagli; ed in questo caso non solo sarebbe opportuna, ma necessaria la sostituzione con termini che corrispondano al vero.

Il Congresso internazionale zoologico del 1889 ha stabilito le norme da seguirsi per la nomenclatura binomia degli organismi, ma della nomenclatura degli organi non si è occupato, dovendosi per questa seguire in modo assoluto un insieme di criteri più positivi e *di realtà*.

Egli è perciò che studiando l'organo uditivo dei Teleostei, e notando le varie denominazioni usate dagli Autori per designare i singoli otoliti, ed i criteri erronei che servirono di base per stabilirle, mi decisi d'indicare e nello stesso tempo dimostrare, quali denominazioni sarebbero le più appropriate per designare i lapilli dell'apparato acustico, attenendomi ad un criterio topografico che abbraccia anche un carattere morfologico.

Con esse *nella sintesi* dei trattati si potrebbero risparmiare agli studiosi le difficoltà d'interpretazione e le eventuali confusioni (1).

Gli otoliti sono denominati in generale *lapilli*, *pietruzze uditive*, *concrezioni litoidi dell'orecchio*, *otoliti*, ecc., e sono stati detti anche *ossa et ossicula petrosa* (2). Ma non è dei termini generali che voglio occuparmi, bensì dei particolari.

Per la prima volta gli otoliti furono rinvenuti dal Casserio (1600) (3), che descrisse quelli del Lucio (*Esoxlucius*) con termini generici; quantunque si sappia che Eliano e Plinio ne abbiano fatto menzione.

Il Bromel (1698) lasciò un catalogo di otoliti che egli aveva

(1) Vedi C. Gegembaur; *Elementi d'Anatomia comparata*. Edizione tedesca e francese. — Organo uditivo dove parla degli otoliti. Più innanzi tratterò questo punto.

(2) A. Compareiti, *Observationes anatomicae de aure interna comparata*. Patavii, 1789.

(3) I. Cosserius, *Vocis auditusque organorum historia anatomica*. Ferrariae, 1600. Parlando del Casserio alcuni Autori citano anche il suo: *Pantaestheseion, De quinque sensibus*, Venetiis, 1609; come pure il *Pantaestheseion* pubblicato a Francoforte nel 1610; ma certo deve qui avere l'antecedenza l'opera del 1600.

raccolti da pesci anatomizzati, senza stabilire dei nomi particolari (1).

Il KLEIN (2) ha descritto parecchie di tali concrezioni, egli però le ha esaminate e figurate isolatamente e non in rapporto o connessione col labirinto membranoso.

Il COMPARETTI descrivendo nell' « *Observatio LXVI* » della sua opera (3) l'organo acustico di parecchi teleostei, prende anche in considerazione gli otoliti designandoli quali « *ossa et ossicula petrosa* ».

Oltre ai sunnominati anatomici, CAMPER (1761), KOELREUTER (1773), MAURO (1785), I. HUNTER (1786), DUMÉRIL (1800), CUVIER (1800) ed altri ancora, descrissero la forma e il volume di qualcuno degli otoliti dei teleostei trattando sull'organo uditivo, ma servendosi di *termini* generali.

L'HUSCHKE (4) pel primo (1824) impose la denominazione di *lapillus* all'otolito appartenente all'otricolo e che propriamente giace nel *recessus utriculi;* chiamò poi *sagitta* la più grande concrezione spettante al sacculo ed *asteriscus* quella che occupa la porzione lagenare (*lagena*) del vestibolo membranoso.

Il BRESCHET (1836), pur conoscendo le denominazioni assegnate agli otoliti dall'HUSCHKE, basandosi in parte sulla relativa loro grandezza, in parte sulla rispettiva loro posizione nel laberinto membranoso, designò col nome di « *mégalithe* » l'otolito maggiore come l'indica il nome stesso, che trovasi nel sacculo, e che corrisponde alla *sagitta* di HUSCHKE. Chiamò poi « *microlithe* » il lapillo appartenente all'otricolo, prendendo di mira la sua piccolezza; ed infine, tenendo presente la posizione nominò « *paralithe* » la concrezione calcare appartenente alla lagena e che HUSCHKE aveva chiamato *asteriscus*.

Si avrebbero potuto accettare queste denominazioni del BRESCHET, come quelle che si basano sulla realtà dei fatti; però col nome di *microlito* si potrebbe comprendere tanto l'uno, quanto

(1) Vedi CUVIER, *Histoire nat. des poissons*, t. I, pag. 459

(2) JAC. TH. KLEIN, *Historiae piscium naturalis promovendae missus primus de lapillis eorumque numero in craniis piscium, cum praefatione de piscium auditu.* Gedani, 1740.

(3) AND. COMPARETTI, *Observationes anatomicae de aure interna comparata.* Patavii, 1789.

(4) AEM. HUSCHKE, *Beiträge zur Physiologie und Naturgeschichte.* I Bd. Ueber die Sinne. Weimar, 1824.

l'altro dei due piccoli lapilli, e perciò questa denominazione non regge; poichè per se stessa è troppo generica, data esclusivamente all'otolito del *recessus utriculi;* tanto è vero che il COSTA O. G. (1) chiamò *micro-otoliti*, sia questo, sia quel lapillo che trovasi nella lagena. Ma poi il BRECHET nell'illustrazione della grande figura spettante il laberinto membranoso del *Lophius piscatorius* e fatta «pour représenter les diverses parties constitutives de l'oreille» (2) trova più opportuno e più giusto di designare gli otoliti nel seguente modo « *otolithe sacculaire* » quello del sacculo, « *otolithe cysticulaire* » quello della lagena (3), ed « *otolithe utriculaire* » quello del *recessus utriculi.*

Nel lavoro poi del 1838 sull'organo uditivo dei pesci (4) il BRESCHET non usa più le surriferite denominazioni, ma designa gli otoliti semplicemente coll'epiteto di grande e piccolo, o, meglio, otolito del sacculo, della cisticola e dell'estremità del seno mediano (recessus utriculi).

Il KRIEGER (1840) dice (5) che la « *sagitta vulgo maximus esse solet lapillus* », e che un otolito « *posterior minor asteriscum* » (vocant). Egli poi accetta come specifica anche la denominazione di *lapillus* che l'HUSCHKE, non so proprio con quali criteri, chiama « *prae ceteris* » *lapillus.*

Il LANG (1863) nomina (6) le concrezioni calcari del laberinto in generale otoliti e, come risulta dalla pag. 313 del lavoro citato, accetta le denominazioni di *Sagitta*, *Asteriscus* e *Lapillus*, che egli mette fra parentesi.

Il COSTA O. G. (1867) nel già citato lavoro (7) giunto alla parte speciale descrive soltanto gli otoliti di tre specie di

---

(1) O. G. COSTA, *Degli otoliti in genere ed iconografia di quelli proprî de' pesci viventi nel Mediterraneo*, ecc. — Atti della R. Accad. delle Scienze Fis. e Mat., Napoli, 1867. Vol. III, N. 15.

(2) G. BRESCHET, op. cit. pag. 266.

(3) Il BRESCHET chiama sempre *cysticule* quella parte del laberinto membranoso che poi ricevette il nome di *lagena.*

(4) GIL. BRESCHET, *Recherches anatomiques et physiologiques sur l'organe de l'ouïe des poissons.* Paris, 1838.

(5) ED. KRIEGER, *De otolithis, Diss. inaug.* Berolini, 1840, pag. 21.

(6) G. LANG., *Das Gehörorgan der Cyprinoiden. Zeitschrift f. wiss. Zool. XIII*, Bd. 1863.

(7) O. G. COSTA, *Degli otoliti in generale ed iconografia*, ecc.

pesci (senza alcuna figura), otoliti che sono indicati coi nomi di *megalito*, il maggiore, e di *micro otoliti*, i due più piccoli.

Il RETZIUS (1872) usa sempre nel suo lavoro sul laberinto dei Teleostei (1) le denominazioni: *Sagitta*, *Asteriscus* e *Lapillus*.

L'HASSE (1872) si accorda in certo qual modo col BRESCHET, poichè non accetta i nomi stabiliti dall'HUSCHKE: ma usa invece i seguenti: *Otolith des Sacculus*, *Otolith des recessus utriculi*, *otolith der Schnecke* (2), avvertendo che « die Schnecke der Fische ist das Homologon der Lagena des haütigen Blindsacks. »

Il KUHN (1877) mantiene in tutto il suo lavoro (3) i termini più volte ricordati di *Lapillus*, *Sagitta* ed *Astericus*.

Il RETZIUS (1881) nel suo grande lavoro (4) non adopera più le denominazioni usate nel primo (1872); ma trova più naturale e più logico di chiamarle *Otolith des recessus utriculi*, *Otolith des Sacculus*, *Otolith der Lagena*.

R. CANESTRINI e L. PARMIGIANI (1883) dichiarano (5) che per gli otoliti hanno adottato i nomi usati da altri Autori, cioè « chiamiamo, essi dicono, *lapilli* quelli dei vestiboli (6), *sagitte* i due maggiori dei sacculi, *asterischi* i due minori pure dei sacculi » (7).

Il TAFANI (1885) trattando dell'organo uditivo del *Mullus surmuletus* (8), come primo fra i numerosi teleostei dei quali illustra l'organo uditivo, usa le denominazioni di *Sagitta*, *Lapillus* ed *Astericus* pei singoli otoliti.

---

(1) G. RETZIUS, *Anatomische Untersuchungen. Erste lieferung. Studien uber den Bau des Gehörlabyrinthes. Erste Abtheilung: Das Gehörlabyrinth der Knochenfische.* Stockholm, 1872.

(2) C. HASSE, *Anatomische Studien. Das Gehörorgan der Fische.* III Heft. Leipzig, 1872.

(3) KUHN, *Untersuchungen über das hautige Labyrinth der Knochenfische.* Archiv. f. mik. Anatom. XIV Bd. 1877.

(4) G. RETZIUS, *Das Gehörorgan der Wirbelthiere. I, Das Gehörorgan der Fische und Amphibien.* Stockholm, 1881.

(5) R. CANESTRINI e L. PARMIGIANI, *Gli otoliti dei pesci.* Atti della Società Veneto-Trentina di Scienze naturali, Vol. VIII, fas. 2.

(6) Gli Autori intendono di dire del *recessus utriculi.*

(7) Per il posto occupato dagli asterischi gli Autori intendono, senza dubbio di dire della *lagena.*

(8) AL. TAFANI, *L'organo dell'udito.* Firenze, 1885, pag. 120.

Il CANESTRINI R. in un suo lavoro del 1886 (1) mantiene le denominazioni già usate trattando in particolare degli otoliti (1883). E dove accenna alla grandezza relativa degli otoliti, fa un richiamo alla seguente nota: « Per evitare confusione avverto che il GEGENBAUR chiama *sagitta* quello che qui è detto *lapillo*, ed *asterisco* quello che qui è denominato *sagitta* » (2). Per verità il GEGENBAUR (3) così si esprime: « Die bei Knochenfischen die Stelle der feinen Krystalle vertretenden *Otolithen* besitzen bestimmte Gestalten. Der im vordern Abschnitte des Vorhofs gelegene wird als « *Sagitta* » der vom hintern Abschnitt umschlossene meist grössere als « *Asteriscus* » bezeichnet (vergl. Krieger, De Otolithis. Berol. 1840). » Pure nella traduzione francese (4) è detto: « Les *otolithes*, qui chez les Poissons osseux remplacent les cristeaux plus ténus, offrent des formes définies. On désigne sous les noms de *sagitta* celui qui occupe la partie antérieur du vestibule, et *asteriscus*, celui ordinairement plus grand qui se trouve dans la postérieur (KRIEGER, de Otolithis, Berol., 1840). »

Anzi tutto dirò che il GEGENBAUR ha omesso di accennare a quell'otolito che sta nel *recessus utriculi*, detto anche *lapillus*, del quale il KRIEGER così si esprime (5): « In alvei communis parte anteriori lapillus situs est, qui ab Huschke prae ceteris lapillus nominatur, colore albus, consistentia perdurus, subrotundus aut ovalis, superficie laevi, non plana, ecc. ».

Mi sembra poi che le parole del GEGENBAUR vogliano accennare alla porzione anteriore di quella parte del vestibolo che costituisce il *sacculus* e perciò a ragione egli dice che *sagitta* si chiama l'otolito che essa contiene, in quanto che egli neppur nomina l'otricolo, e così la porzione del vestibolo posteriore al

(1) R. CANESTRINI, *Osservazioni sull'apparato uditivo di alcuni pesci.* Atti della Società Veneto-Trentina di Scienze naturali, Vol. IX, fasc. 2°.

(2) Loc. cit., pag. 274. L'Autore non cita l'opera del Gegenbaur da dove ha appreso questo *qui pro quo;* però si capisce che vuol intendere il *Manuale d'Anatomia comparata*, e forse il Canestrini si riporta alla traduzione francese della quale nella bibliografia fa menzione.

(3) C. GEGENBAUR, *Grundzüge der Vergleicheuden Anatomie*, zweite Aufl. Leipzig, 1870, pag. 772.

(4) Tradotto in francese sotto la direzione di Carl Vogt. Paris 1874, pagina 731.

(5) ED. KRIEGER, *De otolithis.* Berol. 1840, pag. 21.

saccolo corrisponde alla lagena; perciò non è erroneo il nome di *asteriscus* dato dal GEGENBAUR all'otolito da essa contenuto.

Dove però il GEGENBAUR non è esatto, si è nell'accennare alla maggior grandezza dell'*asteriscus* (« meist grossere als *asteriscus* bezeichnet ») in confronto alla *sagitta;* poichè la relativa maggior grandezza della sagitta in confronto agli altri due otoliti è questione di fatto costante, ed anche il KRIEGER, al quale il GEGENBAUR rimanda è esplicito su questo punto. Di fatto, trattando delle cavità che ora sono distinte col nome di *sacculus* e *lagena*, KRIEGER scrive (1): « Uterque loculus lapillum continet, et anterior quidem, maior, sagittam quam vocant, posterior minor asteriscum ». E più innanzi (2): « Sagitta vulgo maximus esse solet lapillus »..., e « Asteriscus plerumque multo minor est, quam sagitta..... ».

In ogni modo da questo fatto risulta chiaro come non sia difficile incorrere in inesattezze quando i nomi degli organi non corrispondono al vero, e le loro indicazioni sieno fatte senza un criterio positivo caratteristico. Egli è perciò che maggiormente mi persuado dell'utilità di fissare le denominazioni ragionate per gli otoliti dei Teleostei, come quelle di parti componenti un organo difficile a studiarsi ed importantissimo.

Sicchè, riassumendo, abbiamo i seguenti modi per denominare gli otoliti in particolare:

1° *Lapillus.* *Sagitta.* *Astericus* (HUSCHKE, ecc.)

2° *Microlithe.* *Mégalithe* *Paralithe* (BRESCHET)

3° *Micro-otoliti* *Megalito* (COSTA O. G.)

4° Otolito dell'utricolo (*Recessus utriculi*). Otolito del sacculo, Otolito della lagena, della cisticola (BRESCHET, ecc.).

Se si riflette alle denominazioni date dall'HUSCHKE, si vede chiaro che agli otoliti dei teleostei sono stati imposti nomi che non si rannodano con un fatto costante, anzi a nulla di concreto, non essendovi in essi racchiuso alcun criterio che in qualche modo determini precisamente l'otolito del quale s'intende parlare. Di fatti, egli ne chiama uno *Lapillus* per eccellenza, ma non sono forse tutti lapilli i grandi ed i piccoli otoliti? Perchè specializzare col nome generico di *lapillo* la concrezione litoide ca-

(1) Loc. cit. pag. 21.
(2) Loc. cit. pag. 21.

ratteristica dell'otricolo, quasichè le altre non fossero della identica natura?

Astericus e *Sagitta* denomina gli altri due otoliti; ma come si convengano questi nomi ai due lapilli in discorso non lo si può comprendere, considerando le svariatissime forme di otoliti; e se in qualche caso speciale potrebbero passare, non possono reggere pei casi generali, nè assolutamente indicano la forma di queste concrezioni.

In vero, il BRESCHET si avvide che la nomenclatura dell'HUSCHKE non corrispondeva per nulla ai fatti e perciò troviamo nella pregiata sua opera (1836), già citata, che egli riferendosi in parte alla topografia, in parte alla forma, assegna altri nomi ai tre otoliti; ma poi in un seguente lavoro (1838) egli stesso li abbandona, senza accettare quelli dell'HUSCHKE, e si accontenta delle denominazioni generali.

Le denominazioni del COSTA O. G. non sono del pari ammissibili, perchè a due otoliti spetta lo stesso nome (« micro-otoliti ») e quindi non riesce specifico nè il nome dell'otolito dell'utricolo, nè quello della lagena.

Molti altri Autori, come si disse nel cenno storico, non accettarono nè le denominazioni dell'HUSCHKE, nè quelle particolari del BRESCHET, nè tampoco quelle del COSTA O. G.; ma trovarono più opportuno e molto più giusto servirsi di più parole per nominare i singoli otoliti (1).

Ora concordando col criterio di questi Autori, e cercando non già vaghezza di termini, ma solo di collegare col nome la posizione d'ogni singolo otolito nel laberinto membranoso, come un fatto costante; poichè nè forma, nè relativa grandezza possono fornire un criterio stabile, propongo tre nomi latini formati dal greco che indichino la pietruzza e le tre parti del laberinto che costantemente allogano i tre lapilli.

Perciò chiamo *Saccolithus* (Saccolito) il lapillo che sta nel sacculo, *Ascidiolithus* (Ascidiolito) quel lapillo che appartiene all'otricolo ed è situato all'estremità sua anteriore (*recessus utri-*

(1) Anche il WIEDERSHEIM nel suo tanto apprezzato « *Lehrbuch der vergleichenden Anatomie der Wirbelthiere.* Zweite Aufl. Iena 1886 » a pag. 446 accenna ai nomi degli otoliti servendosi dei termini generali: *Otolithen* (des Recessus utriculi, des Sacculus, und der Lagena).

culi), e *Lagenolithus* (1) (lagenolito) la concrezione calcarea spettante alla lagena.

Che tali nomi convengano decisamente lo dimostra anche la figura del laberinto membranoso del *Merlucius esculentus*, Riss. che ho disegnato dal vero cogli otoliti nella loro naturale posizione e forma, ingrandendo convenientemente tutto l'apparato.

Ho creduto opportuno di fare questa figura perchè in tanti lavori con illustrazioni che ho potuto esaminare, sull'organo uditivo dei Teleostei, in nessuno si trova una figura fatta espressamente per dimostrare con chiarezza la posizione e la forma esatta dei tre otoliti nel laberinto.

II.

Sulla trasmissione delle vibrazioni sonore al labirinto membranoso dei Teleostei.

Dalla conformazione generale dell'apparato acustico dei Pesci, e dallo sviluppo morfologico di ciascuna sua parte, si viene ben presto ad inferire che il meccanismo della percezione dei suoni deve essere abbastanza semplice in paragone a quello che si conosce pei vertebrati superiori.

Se poi si considera il valore fisiologico di questo apparato in rapporto colle condizioni biologiche tutte dell' ambiente, si scorge che il grado del suo sviluppo morfologico sta in correlazione colla sua importanza fisiologica; correlazione questa, che basandosi sui principii fondamentali dell'evoluzione, si comprende esser determinata dai fattori della trasformazione nella lotta per l'esistenza e nell'adattamento all'ambiente.

Nei Pesci teleostei non vi è apparecchio alcuno tra l'orecchio interno ed il mezzo ambiente, atto a facilitare la trasmissione delle vibrazioni sonore, cioè: non vi è alcun organo od apparato che si possa riferire all'orecchio esterno e medio dei vertebrati superiori.

Il laberinto membranoso dei Teleostei sta completamente racchiuso nell'impalcatura cranica lateralmente all'encefalo. Egli è

---

(1) Dal greco: σακκος = saccus; ἀσκίδιον = utriculus; λαγηνος = lagena; e λίθος = lapis.

adunque attraverso queste pareti involgenti (ossa e comuni tegumenti) che le vibrazioni sonore devono esser trasmesse per arrivare all'organo uditivo.

E a proposito del meccanismo della trasmissione dei suoni dall'ambiente al laberinto membranoso di questi Pesci, fisiologi ed anatomici, si accordano, stando però sulle generali.

Così, ad esempio, si esprimono l'Agassiz e il Gould (1): « In osseous Fishes. . . the sonorous vibrations propagated by the water are communicated through the walles of the cranium, as no openings exist for the special reception of waves of sound. »

L'Owen dice: « In osseous Fishes the sonorous vibrations of their liquid element is communicated by the medium of the solid parts of their body . . . to the liquid contents of the labyrinth » (2).

Il Milne Edwards trattando delle disposizioni di quest'organo dei Pesci (3) dice: « C'est donc directement à travers les parois osseuses ou cartilagineuses de cette cavité (boîte crânienne) que les ondes sonores doivent passer. »

E nella stessa guisa si spiegano altri fisiologi ed anatomici che trattano quest'argomento; per cui credo inutile far altre citazioni.

A prima giunta si potrebbe supporre che la via più facile a percorrersi dalle vibrazioni sonore sia la parete superiore cranica nella quale stanno allogati i canali semicircolari, essendo dagli Autori tracciata soltanto in generale la via di trasmissione delle vibrazioni foniche.

Se così fosse le vibrazioni sonore dell'ambiente arriverebbero prima che ad ogni altra parte alla regione occupata dai canali semicircolari e da essi sarebbero trasmesse a tutto il laberinto membranoso.

Prima d'incominciare l'esame critico del suesposto, voglio far notare una opinione del Breschet che si allontana dalla comune, riferita dall'Autore trattando dell'organo uditivo del *Petromyzon*

---

(1) Agassiz L., *and A. A. Gould, Outlines of Comparative physiology.* London, 1870, pag. 78.

(2) Owen R. *Lectures on the comparative anatomy and physiology of the vertebrate animals.* Vol. II, Part. I. Fishes. London, 1846, pag, 211.

(3) H. Milne Edwards, *Leçons sur la physiologie et l'anatomie comparée de l'homme et des animaux.* Tom. XII. Prem. partie. Paris, 1876, pag. 71.

maximus L. (1): « La trasmission des vibrations sonores a principalement lieu, je crois, par les branchies dont la cavité parvient jusqu'auprès du vestibule cartilagineuse ».

Ora, riportandomi alla prima ipotesi, per la posizione che occupa il laberinto uditivo nel cranio, le vibrazioni sonore, prima di arrivare all'organo acustico, dovrebbero percorrere una via più o meno lunga secondo i casi, costituita da parecchi mezzi eterogenei di densità differente, alle volte di una potenza abbastanza considerevole; quali lo strato epidermico e dermico, lo strato muscolare, poi quello osseo, quindi l'inviluppo perlinfatico.

Qui osserverò soltanto che se le vibrazioni acustiche di un corpo sonoro si trasmettessero immediatamente alle pareti del capo, stando con queste in diretto rapporto, allora dal lato fisico non sorgerebbero gravi difficoltà, trattandosi di mezzo denso, e quindi atto a mantenere l'energia della vibrazione ed a trasmetterla celermente; ma se il corpo sonoro è ad una certa distanza, anche piccola, allora le vibrazioni che si trasmettono al mezzo più denso (tegumenti ed ossa del capo), da un mezzo meno denso (acqua), come nel caso nostro, hanno poca energia per mettere in istato di vibrazione questo mezzo più denso.

E perciò considerata questa deficienza d'energia da un lato, e le perdite che essa subisce nell'attraversare gli svariati strati di diversa densità che costituiscono la parete del capo, si dovrà indagare quale deve essere la via più facile, la più breve, la più sensibile, in una parola, la più appropriata per l'arrivo delle vibrazioni acustiche al labirinto, che in ogni modo devono sempre attraversare la parete cranica.

Ma prima di passare a queste condizioni prendo in esame il secondo modo di spiegare la trasmissione delle vibrazioni sonore data dal Breschet, cioè la via delle branchie. Questa via non mi sembra affatto confaciente per la disposizione anatomica delle singole parti; poichè anche in questo caso le vibrazioni sonore dovrebbero fisicamente lottare, per trasmettersi all'apparato acustico, cogl'involucri epidermico e dermico, colle ossa o cartilagini opercolari (trattandosi del Petromizon), coi muscoli, col rivestimento interno degli opercoli stessi. E poi intervengono le branchie che certamente non devono favorire per la loro costituzione, la

(1) Gil. Breschet, *Recherches anatomiques et physiologiques sur l'organe de l'ouïe des Poissons.* Paris, 1838, pag. 5.

trasmissione delle vibrazioni foniche, le quali dovrebbero ancora attraversare la vôlta inferiore cranica. Sicchè tutto considerato non mi pare punto facilitata la via tracciata nell'opinione espressa dal BRESCHET, ma piuttosto resa difficoltosa.

E poi perchè ammettere la possibilità di percepire i suoni soltanto colla dilatazione della regione branchiale? « En voulant écouter, l'animal doit dilater ses branchies » (1). Ed i suoni che giungono in tempo diverso a questo non dovranno esser uditi?

Ora non ammettendo nè l'una, nè l'altra via sopradescritte, ne resta una terza che a me sembra più naturale, più semplice, più conforme alle leggi fisiche ed alle disposizioni anatomiche, sulle quali precipuamente credo di poter fondare le ragioni che m'inducono ad opinare diversamente su questo punto risguardante l'udito dei Teleostei.

A me sembra dunque che le vibrazioni sonore si trasmettano direttamente dal mezzo ambiente (acqua) alla vôlta inferiore cranica dove si presentano in modo più o meno pronunciate le capsule auricolari ossee rappresentate da due rigonfiamenti bulbosi che dall'OWEN vennero designati col nome di « *otocranio* » (2).

Per mettere in rilievo queste capsule, il diverso loro sviluppo ed orientamento ho figurato quattro cranii di Teleostei spettanti a diverse famiglie.

Nella figura 1 spettante al *Gadus minutus* LIN. si scorgono le capsule auricolari (ca) grandissime, disposte parallelamente all'asse mediano longitudinale del cranio. Anche nelle specie affini le capsule auricolari sono sviluppatissime (Vedi fig. 5).

Di volume alquanto minore sono le capsule uditive (fig. 2) dell'*Uranoscopus scaber*, LIN. e trovansi orientate diversamente dalle prime; vale a dire il loro asse longitudinale converge posteriormente coll'asse mediano del cranio, ed all'inanzi se ne allontana, formando così, le capsule, un angolo acuto col vertice verso l'occipite.

Le capsule auricolari del *Mugil cephalus*, CUV. (figura 3) sono pure inclinate rispetto all'asse mediano longitudinale del

(1) G. BRESCHET. Op. cit., pag. 5.

(2) Questa porzione del laberinto osseo vien pure indicata col nome di *loggia* o *camera labirintica*, e in gran parte vien costituita da quelle ossa che gli anatomici meno recenti designarono in generale col nome di *ossa petrose* o *rocciose*.

capo, e convergono posteriormente, ma sono molto più piccole di quelle che si riscontrano nell'Uranoscopo.

Nell' *Esox lucius*, LIN. contrariamente a quello che si è notato per l'Uranoscopo e per il Muggine, le capsule auricolari (fig. 4), convergono anteriormente verso l'asse mediano del cranio, e posteriormente divergono. Anche in questa forma l'otocranio è ben distinto.

Il grado di sviluppo dunque al quale arrivano queste capsule nelle numerose specie di Teleostei è vario (1), esse però racchiudono sempre una massima parte del laberinto membranoso. Per fissare la posizione topografica di queste capsule, si può tipicamente considerare la cavità cranica divisa in due porzioni da un piano orizzontale, ed allora sotto la vôlta superiore si trova la massa encefalica, e nella porzione basale infero-posteriore stanno allogate le parti principali del laberinto membranoso nelle rispettive capsule ossee, separate da una cresta mediana.

Considerando la posizione loro in rapporto agli organi della cavità boccale, si può dire in generale, che esse posteriormente cominciano fra l'inserzione degli archi branchiali di destra e quelli di sinistra all'innanzi dell'apertura esofagea, indi si protraggono sulla vôlta palatina ad un terzo circa della cavità boccale, a partire dal principio dell'esofago.

Ho figurato anche il cranio del *Merlucius esculentus*, RISS. (fig. 5) per mettere in rilievo particolare sia le sue capsule auricolari, e i loro limiti, sia le ossa che le compongono, per dichiarare poi che le vibrazioni acustiche trovano la via più opportuna, per giungere al labirinto membranoso, attraverso l'osso *otosphenoideum*.

Le capsule uditive considerate dall'esterno sono separate lungo la linea mediana del capo dall'osso *hyposphenoideum* (BRÜHL), anteriormente sono limitate dall'*orbitosphenoideum* (BRÜHL), e lateralmente dal *post frontale* s. *frontale posticum* (CUVIER, OWEN, STANNIUS, BRÜHL), e dallo *squamosale* (HUXLEY, BRÜHL); posteriormente sono limitate dall'*occipitale laterale* (Auct.) s. *pleu-*

(1) Il KRIEGER « De Otolithis, Diss. inaug. Berolini, 1840, pag. 21 » così accenna all'otocranio ed alla sua sporgenza: « Magnitudo lapillorum maxime variat, interdum enim *sagitta* (cioè il Saccolithus) tanta est, quae amplam bullosam efficiat inflationem ossis occipitalis lateralis, quem extus perspicere possis. »

roccipitale (BRÜHL). L'otocranio poi è formato in gran parte dall'*otosphennoideum* (BRÜHL) s. *prooticum* (HUXLEY) che ne costituisce la parete mediana più o meno rigonfia, ed è completato nella regione laterale posteriore dal *adoccipitale* (BRÜHL) s. *opistoticum* (HUXLEY) e posteriormente dal *basioccipitale* (OWEN).

Ora, basandomi su criteri anatomici e topografici, credo essere proprio l'*otosphenoideum* l'osso che più facilmente di ogni altra parte può trasmettere le vibrazioni acustiche all' organo uditivo; vibrazioni che arrivano alla superficie esterna delle capsule auricolari per mezzo dell'acqua che sempre bagna la cavità boccale e la regione branchiale in base al meccanismo della respirazione, per cui la regione occupata dalle capsule uditive trovasi di continuo in diretto rapporto coll'ambiente esterno. L'acqua giungendo fino al principio dell'esofago va a lambire in estrema vicinanza le capsule auricolari, tanto più che nei pesci la cavità primitiva boccale non si separa in palatina e boccale propria, ma rimane unica. Così le vibrazioni acustiche trasmettendosi continuatamente per lo stesso mezzo (acqua) non hanno da attraversare che uno strato di minima potenza, vale a dire lo strato della mucosa del fondo della bocca e lo spessore dell'*otosphenoideum* per giungere al *sacculus* del laberinto membranoso.

Oltre alle ragioni topografiche in favore della trasmissione delle vibrazioni foniche per la faccia inferiore cranica, si può portare il fatto che lo spessore delle capsule auricolari è di minima potenza in confronto a quello delle altre regioni craniche occupate dal laberinto membranoso, come si può scorgere dalla figura 8 che rappresenta una sezione trasversa verticale della testa del *Merlucius esculentus*, come anche lo si può dedurre dalle figure 3, 4, 5, 6 che rappresentano varî tipi di capsule auricolari, le quali spiccano per la loro semi-trasparenza lattea dovuta precisamente al poco spessore delle pareti che le costituiscono, ed alla bianchezza dell'otolito maggiore che racchiudono: il *saccolithus*.

Inoltre il sacchetto del laberinto *(sacculus)* aderisce alla parete della capsula auricolare e la parete stessa del sacculo nella regione ventrale inferiore è di uno spessore più debole che negli altri punti del laberinto (vedi fig. 8); osservazione questa che riscontrai in tutte le forme da me esaminate e che trovo pienamente confermata dal RETZIUS e dal TAFANI.

Di fatto il Retzius (1) trattando della parete del laberinto membranoso dei teleostei dice: « In den Bogengängen und Ampullen ist die Wand am dicksten, » e più innanzi: « Am *Utriculus*, *Sacculus* und der *Lagena* ist die Wand dünner. »

E il Tafani (2), sullo stesso argomento, così si esprime: « Ho notato però che la grossezza di queste pareti non è dovunque alta ad un modo e che è più notevole in corrispondenza dei punti nei quali si trova l'epitelio sensitivo e nei canali semicircolari. Una delle aree ove mi si presenta sottile in modo costante sta nel sacchetto contro la macchia acustica. »

Ma v'ha di più, l'otolito maggiore, il *saccolithus*, è situato sempre in un piano marcatamente inclinato, e in modo che una sua faccia è rivolta più o meno di rimpetto alla parete ventrale del cranio e precisamente verso l'osso otospenoideo (Vedi figura 8).

Farò ancora ricordare che nel sacculo di questi vertebrati si trova, la più grande terminazione nervosa dell'*acustico*, cioè la *macula acustica sacculi*, e che quindi anche sotto questo punto di vista morfologico, la regione sacculare si appalesa in essi come quella che occupa il primo posto, la maggior importanza, il massimo sviluppo fra le parti componenti il laberinto.

Ed anche considerando filogeneticamente il sacculo, esso presentasi come una parte integrante di primo ordine nel laberinto membranoso, parte che si rinviene in tutta la serie dei vertebrati.

Gioverà inoltre richiamare l'attenzione sul fatto che in quei vertebrati nei quali vi è una qualche disposizione per condurre le vibrazioni all'orecchio interno esse giungono prima che ad ogni altra parte del laberinto al sacculo. In vero negli Elasmobranchi è facilitata la via delle vibrazioni sonore per giungere al *sacculus* mediante il condotto endolinfatico (*ductus endolymphaticus*, che dal saccolo si dirige verso la periferia del capo e si mette in una più o meno diretta comunicazione coll'ambiente esterno.

Nei vertebrati superiori poi le vibrazioni trasmesse dalla

(1) G. Retzius, *Das Gehörorgan der Wirbelthiere. I, Das Gehörorgan der Fische und Amphibien*, Stockolm, 1881, pag. 51.

(2) Al. Tafani, *L'organo dell'udito.* Firenze, 1885, pag. 178.

membrana timpanica che sta in rapporto colla catena degli ossicini auricolari (o con la columella) dei quali la staffa è in diretta comunicazione colla perilinfa che investe il *sacculus (S. hemisphaericus)*.

Se poi il fatto suaccennato che il sacculo si presenta per tutto come il ricevitore primo dell'ondulazione sonora, non bastasse, o non lo si volesse ancora generalizzare ai Teleostei, ritenendo che in essi le vibrazioni acustiche possano anche trasmettersi in prima linea ai canali semicircolari e in seconda alle altre parti del laberinto, potrei far ancora valere in appoggio alle mie congetture, il valore fisiologico attribuito ai canali semicircolari da valenti fisiologi.

Imperciocchè, nei vertebrati superiori ai pesci, per gli studi del Flourens, del Breuer, del Vulpian, del Göltz, ecc. (1) si attribuisce ai canali semicircolari piuttosto la significazione di organi spettanti ad un senso di equilibrio, anzichè di un vero senso acustico.

E quantunque, secondo l'esperienze del Kiesselbach, nei pesci non si verifichino per la recisione dei canali semicircolari (2), i disturbi di equilibrio osservatisi negli altri vertebrati, pure non mi sembra giusto nell'incertezza della loro funzione di attribuir loro un significato funzionale totalmente diverso da quello che si riscontra negli altri vertebrati; come implicitamente avverrebbe se si ritenesse giusta l'opinione che le vibrazioni sonore si trasmettano dalla superficie esterna del cranio.

La trasmissione delle vibrazioni acustiche per mezzo della parete inferiore delle capsule auricolari fa scorgere di leggieri il vantaggio che presenta questa via su tutte le altre, pel fatto che le vibrazioni possono giungere ben presto, direi quasi immediatamente a tutte le altre terminazioni nervose del vestibolo (*macula acustica recessus utriculi*, *mac. ac. lagenae*, in molti casi la *mac. ac. neglecta*) essendo queste ben vicine a quelle del sacculo *(mac. ac. sacculi)*. Ma anche le terminazioni nervose delle ampolle dei canali semicircolari, le *cristae acusticae*, sono vicinissime al vestibolo, ed anzi la via dell'otocranio stabi-

(1) L. Landois, *Trattato di fisiologia dell'uomo,* trad. da B. Bocci, Roma, 1889, pag. 720.

(2) L. Landois, op. cit., loc. cit.

lita per le vibrazioni sonore è più breve che non quella dei canali semicircolari per giungere alle ampolle stesse.

Sicchè da tutti gli argomenti riportati, e che in fine riassumerò, parmi sufficientemente dimostrato esser la via della bocca e dell'otocranio la più semplice e la più consona al processo che normalmente si scorge, per gli altri vertebrati, nella trasmissione dei suoni dall'ambiente all'organo uditivo.

Qui mi giunge ancora opportuno ed a proposito di fare qualche osservazione su una delle funzioni attribuite alla vescica natatoria dei pesci, tanto da fisiologi, quanto anche da anatomici cominciando dal WEBER, e venendo al TREVIRANUS, al BOIANUS, al BRESCHET, al MÜLLER, al MORREAU, ecc.

E per non dilungarmi troppo su questo argomento, riporterò senz'altro, le parole testuali di un valente fisiologo moderno, il CHATIN, che riepiloga il valore funzionale della vescica natatoria accennando anche ad esperimenti fisici fattisi, che *dovrebbero* servire a dimostrare la verità dell'asserto, come segue (1): « Quant'à la vessie natatoire, qui se rencontre chez un gran nombre de Poissons, il suffit, pour apprécier son mode de fonctionnement, de se rapporter à certains fait obsérves par STURM et COLLADON, lors de leurs célèbrès expériences de Genève: ces deux physiciens remarquèrent une augmentation considérable dans l'intensité du son lorsque l'extremité du tube acoustique, dont'ils faisaient usage, se trouvait garnie d'une caisse métallique à minces parois et remplie d'air; or la nature a realisé cette modification en disposant dans la cavité abdominal de Poissons un large poche remplie de gaz et reliée au vestibule soit par un canal intermédiaire (ALOSE, HARENG. V. BRESCHET), soit par un chaîne d'osselets se succédant sans interruptions du vestibule à la vessie natatoire *Siluroides*, *Carpe*, *Loche*, etc. V. BRESCHET).

La vescica natatoria che stando alla filogenesi ha il suo omologo nel polmone, rappresenta ora un organo che ha già avuto il suo valore in lontane epoche ed in organismi differenti dai pesci attuali, ed ora si presenta come un organo di adattamento a pesci di varii ordini. Il suo valore morfologico attuale, di secondaria importanza, ha dato origine, senza dubbio, alle molte interpretazioni funzionali attribuite a quest'organo. E fra le

(1) I. CHATIN, *Les organes des sens dans la série animale.* Paris, 1880, pag. 380.

altre, come si vidde, quella di servire quale apparato trasmettitore, o di risonanza delle vibrazioni acustiche.

Ma ciò, decisamente, non può essere; poichè prima che le vibrazioni sonore possano giungere alla vescica natatoria, situata fra la regione superiore addominale e l'inferiore dorsale al disotto della colonna vertebrale, le dette vibrazioni possono arrivare molto più presto al vestibolo dell'organo uditivo giungendo al sacculo per la via da me tracciata, e ciò pel fatto che la vescica natatoria è separata dall'ambiente e *mezzo* acqua non solo dai tegumenti, ma ancora da uno strato più o meno potente di muscoli.

L'HASSE (1) ha già grandemente infirmato colle sue ricerche anatomiche sui varii modi di comunicazione della vescica natatoria col laberinto, l'importanza acustica del natatoio, quantunque egli non neghi in modo assoluto la sua cooperazione all'udito specialmente in qualche caso particolare; tanto è vero che a proposito di questa questione, in un certo punto del suo lavoro, così si esprime (2) « Dieselbe » (Beziehung der Schwimmblase zum Hören) « halte ich aber bis auf Weiteres für untergeordneter Natur. »

In quanto poi alle classiche esperienze di STURM e COLLADON, che oltre al CHATIN anche altri fisiologi riportano, devesi far notare che la vescica natatoria dei Pesci non si può mettere in paragone funzionale colla cassa metallica piena d'aria del tubo acustico adoperato dai sullodati fisici, per la semplice ragione che questa cassa aveva « *pareti sottili* », e nel caso nostro invece le pareti sono tutt'altro che sottili; poichè per parete non si deve intendere soltanto quella della vescica, ma bensì *tutto lo spessore della parete addominale.*

Si può qui ancora osservare che le pareti della cassa acustica di STURM e COLLADON rappresentavano una *membrana tesa* e quindi favorevolmente disposta a ricevere ed a trasmettere l'energia fonica; mentre le pareti addominali di un pesce a nulla corrispondono di tutto ciò.

Il MÜLLER I. in appoggio al lavoro acustico della vescica natatoria porta due esperimenti, dei quali il secondo è anche rife-

(1) C. HASSE, *Anatomische Studien, Beobactungen über die Schwimmblase der Fische.* Viertes Heft. Leipzig, 1873.

(2) C. HASSE, loc. cit., pag. 585.

rito dal Milne Edwards (1). Detti esperimenti tendono a dimostrare le seguenti proposizioni: « Des masses d'air résonnent dans l'eau par des ondes sonores, lorsque l'air est renfermé dans des membranes ou des corps solides, et produisent par là un renforcement considérable du son. » — « Des membranes remplies d'air résonnent dans l'eau, alors même que les ondes sonores sont communiquées à la vessie par des cordes solides » (2).

Per provare la prima tesi il Müller immerse nell'acqua la vescica natatoria di un ghiozzo tenendovela coll' estremità delle dita. Fece poi produrre delle vibrazioni sonore in vicinanza di questa, mediante un fischietto. Queste vibrazioni erano condotte all'orecchio ben turato per mezzo di una bacchetta conduttrice situata in vicinanza della vescica natatoria, ed allora il Müller osservò che « Dans ce cas, le son perceptible avec le conducteur devient beaucoup plus fort que quand les ondes sonores ne parviennent à ce dernier, tenu d'ailleurs à la même distance, que par le seul intermédiaire de l'eau » (3).

Per dimostrare la seconda tesi questo fisiologo sommerse in un vaso d'acqua la vescica natatoria di un ghiozzo, fissata nella fenditura di una bacchetta che pose in contatto colle pareti del vaso. Fece quindi vibrare la parete del vaso per mezzo di un diapason e mediante un'asticella funzionante da conduttore acustico, fece arrivare le vibrazioni all'orecchio preventivamente turato. Ora, con questo apparecchio si ottiene che le vibrazioni trasmesse all'acqua si manifestano molto più forti in vicinanza della vescica che in ogni altro punto del liquido egualmente distante dalle pareti del vaso. E quindi il Müller conclude dicendo che « Des faits précédents, il suit que la vessie natatoire des poissons est en même temps un appareil de resonnance pour les ondes sonores qui traversent le corps de l'animal » (4).

Ora, tutto ciò andrebbe benissimo se si trattasse di una vescica qualunque, ma non per quella dei Pesci. Di fatto gli esperimenti del Müller e le dedottene conseguenze applicate ai Pesci non reggono, perchè egli mise la vescica natatoria in ben altre con-

(1) Milne Edwards, *Leçon sur la physiologie et l'anatomie comparée.* Tom. XII. I part. Paris 1876, pag. 72.

(2) I. Müller, *Manuel de Physiologie.* Paris, 1851, pag. 417.

(3) I. Müller, op. cit., pag. 417.

(4) I. Müller, op. cit., pag. 418.

dizioni che non sieno quelle in cui realmente si trova, stando nella sua posizione normale nell'addome. Vale a dire egli pose il natatoio in condizioni favorevolissime per ricevere e trasmettere le vibrazioni acustiche, perchè, lo immerse isolato e quindi senza gl'involucri costituiti da *mezzi* di differente densità, *mezzi* che nella realtà delle cose ci sono.

Ora se la vescica natatoria non può servire di apparato ricevitore e trasmettitore delle vibrazioni acustiche, perchè esse più presto e meno indirettamente possono giungere per altra via all'organo uditivo, come mai può essa funzionare da apparato di risonanza? Ed ammettendo anche la possibilità di una risonanza, a che mai potrebbe essa giovare quando già l'organo acustico ha ricevuto la vibrazione sonora? A null'altro che a disturbare la percezione dei suoni.

Quindi nel caso nostro, escluso il primo supposto, quello cioè della trasmissione, rimane inammissibile anche il secondo. E così anche per queste ragioni oltre a quelle topografiche illustrate dall'Hasse (1) la vescica natatoria non può servire nè come apparato collettore nè come trasmettitore e rinforzatore delle vibrazioni acustiche.

Da quanto ho esposto parmi sufficientemente dimostrato:

I. Che le vibrazioni sonore giungono al laberinto membranoso dei Teleostei attraverso le capsule auricolari e più particolarmente attraverso l'osso otosfenoideo:

II. Che le vibrazioni acustiche anzichè trasmettersi per mezzo dei canali semicircolari alle varie parti del laberinto, arrivano direttamente alla porzione vestibolare del laberinto, e precisamente al *sacculus*, come avviene in tutti i vertebrati;

III. Che nei vertebrati vi è, in linea generale, unità di processo nel meccanismo della trasmissione dei suoni, giungendo in tutti le impressioni dell'ambiente esterno prima al sacculo che alle altre parti del laberinto.

IV. Che la vescica natatoria non può servire nè come apparato trasmettitore, nè come rinforzatore dell'energia fonica.

Le ragioni portate per dimostrare i suaccennati punti si basano sui seguenti argomenti:

---

(1) C. Hasse, op. cit.

1° Via più breve che le ondulazioni sonore possono tenere percorrendo la cavità boccale e lo spessore della base delle capsule auricolari;

2° Fatto fisico per cui i corpi non possono trasmettere l'energia fonifica con grande integrità se non quando il corpo sonoro sta con essi in diretto contatto; e quindi si appalesa la necessità di una via che faciliti la trasmissione delle vibrazioni al laberinto;

3° Posizione delle capsule auricolari;

4° Mancanza di separazione della cavità boccale in palatina e boccale propria;

5° Spessore degli invogli cranici meno potente nella regione dell'otocranio che nelle altre parti occupate dall'organo uditivo;

6° Attaccamento del sacculo alla parete dell'otospenoideo;

7° Parete membranosa del sacculo più sottile sulla faccia ventrale;

8° Orientamento del saccolito;

9° Innervazione massima nel saccolo (*mac. ac. sacculi*);

10° Criterio filogenetico per dimostrare che la parte più importante e prima nel laberinto dei Teleostei è il sacculo;

11° Comparazione della via percorsa dalle ondulazioni sonore negli Elasmobranchi e negli altri vertebrati (unità di processo);

12° Ufficio problematico dei canali semicircolari dei Pesci;

13° La vicinanza al sacculo delle varie terminazioni nervose non escluse quelle delle ampolle dei canali semicircolari;

14° Le condizioni naturali della vescica natatoria che non sono riportabili alle disposizioni degli apparati fisici di STURM e COLLADON, nè a quelli di MÜLLER per dimostrare l'ufficio della vescica natatoria relativamente all' udito;

15° Negato alla vescica natatoria il potere trasmettitore, rimane inammissibile quello di risonanza.

Roma, Gabinetto d'anatomia comparata, giugno 1890.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

Le figure 1 e 2, disegnate dal vero, rappresentano il laberinto membranoso del *Merlucius esculentus* Riss., spettante all'orecchio del lato destro.

Nella fig. 1, il laberinto è veduto lateralmente e dall'esterno; nella fig. 2 dal lato interno, per cui, da questo lato, scorgesi, nel saccolito, il solco dove espandesi il nervo acustico (*Ramus Sacculi. Macula acustica sacculi*), come pure il condotto endolinfatico (*de*).

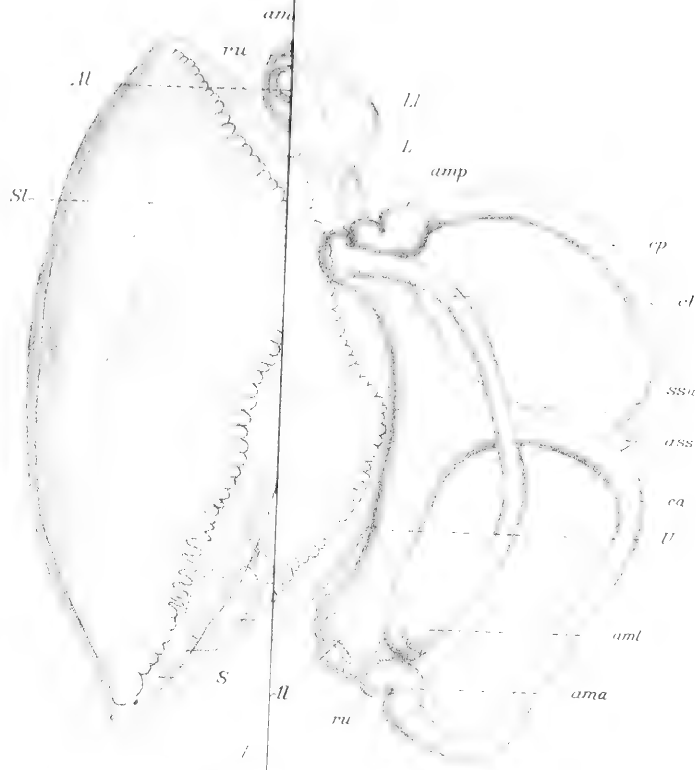
Nell'una e nell'altra figura il laberinto è stato liberato da tutti i rami dell'acustico, per metter meglio in evidenza le altre parti e specialmente il rapporto degli otoliti con queste.

Ingrandimento delle fig. diam. 3,5.

Le seguenti indicazioni servono per tutte due le figure:

S. *Sacculus.*
U. *Utriculus.*
L. *Lagena.*
ca. *canalis membranaceus anterior.*
cp. *canalis membranaceus posterior.*
cl. *canalis membranaceus lateralis.*
aa. *ampulla anterior.*
ap. *ampulla posterior.*
al. *ampulla lateralis.*
ru. *recessus utriculi.*
ssu. *sinus superior utriculi.*
de. *ductus endolymphaticus.*
ass. *apex sinus superioris.*
Sl. *Saccolithus* (*mihi*).
Al. *Ascidiolithus* (*mihi*).
Ll. *Lagenolithus* (*mihi*).

Fig. 2.



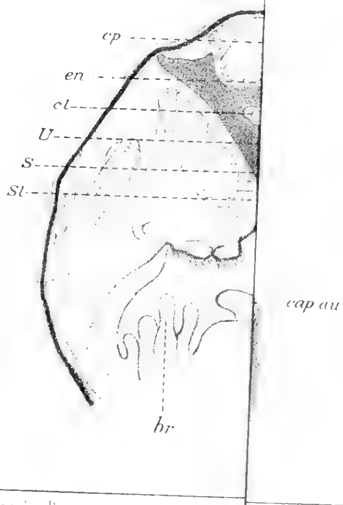
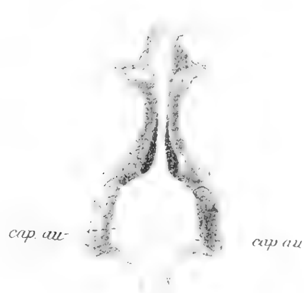


Fig. 3.



Dott. P. De Vescovi dis

lit. Salussolia

Fig 2

Fig 6

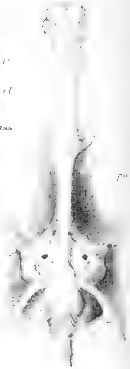


Fig 7

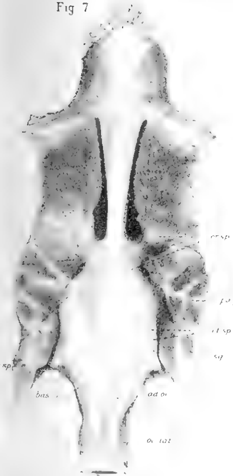


Fig 1

Fig 8

Fig 4

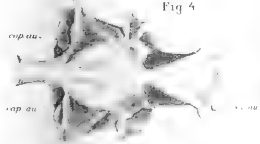


Fig 5

Fig 3

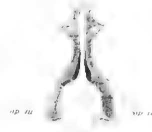


Fig. 3. Cranio di *Gadus minutus*, Lin. in grandezza naturale pel quale si scorgono le capsule auricolari (*cap. au.*) molto grandi e disposte in senso parallelo all'asse mediano longitudinale del capo.

Fig. 4. Cranio di *Uranoscopus scaber*, Lin. in grandezza naturale, dove si vedono le capsule auricolari (*cap. au.*) di uno sviluppo considerevole, ma minore di quello che si è osservato nel *gadus minutus*, ed orientate in modo che il loro asse longitudinale converge posteriormente coll'asse mediano del cranio.

Fig. 5. Cranio di *Mugil cephalus*, Cuv. nel quale le capsule auricolari (*cap. au.*) relativamente alle altre, finora considerate, sono poco sviluppate. Grandezza naturale.

Fig. 6. Cranio di *Esox lucius*, Lin. di grandezza naturale. Le capsule auricolari (*cap. au.*) presentano un tipo diverso da quelli finora indicati; poichè il loro asse longitudinale converge anteriormente coll'asse longitudinale mediano del capo

Fig. 7. Cranio di *Merlucius esculentus*, Riss. in grandezza naturale, veduto ventralmente. In esso si scorgono nella regione posteriore le sporgenze delle capsule auricolari molto grandi.

Le ossa che limitano e compongono dette capsule sono le seguenti:

or. sph.	*orbitosphenoideum,*
po. fr.	*post frontale.*
sq.	*squamosale.*
oc. lat.	*occipitale laterale s. pleuroccipitale.*
ad. oc.	*adoccipitale s. opistoticum.*
ot. sph.	*otosphenoideum s. prooticum.*
hy. sph.	*hyposphenoideum.*
bas. oc.	*basioccipitale.*

Fig. 8. Sezione trasversa semischematica della testa del *Merlucius esculentus* Riss. per dimostrare che lo spessore minimo delle pareti craniche e degli organi che lo rive-

stono si trovano in corrispondenza della faccia ventrale delle capsule craniche. La sezione cade alquanto più indietro della metà di dette capsule ed è in grandezza naturale.

t. *tegumenti.*

m. *muscoli.*

ic. *impalcatura cranica.*

mp. *mucosa palatina.*

cb. *cavità boccale.*

en. *encefalo,*

bt. *branchie.*

cp. *canalis membranaceus posterior.*

cl. *canalis membranaceus lateralis.*

u. *utriculus.*

s. *sacculus.*

sl. *saccolithus.*

ras. *ramus acusticus sacculi.*

mas. *macula acustica sacculi.*

RELAZIONE sulla Memoria dei Dottori F. S. MONTICELLI e G. CRETY intitolata: « *Ricerche intorno alla sottofamiglia Solenophorinae*.

Gli Autori, premessa la bibliografia riguardante l'argomento del loro lavoro, studiano anzitutto la forma esterna e l'interna struttura delle specie dei generi *Solenophorus* e *Duthiersia* passando in rassegna tutti i sistemi di organi. Da questo studio risulta che i due generi sopradetti, distinti per l'ospite nel quale si sogliono trovare, (poichè il genere *Duthiersia* si trova costantemente parassita dei Varanidi, mentre il genere *Solenophorus* lo è dei *Boidi*) lo sono anche per la loro interna struttura e devono essere conservati distinti nelle classificazioni

Gli A. studiano quindi i generi *Solenophorus* e *Duthiersia* nei loro rapporti, zoologici ed anatomici col genere *Botriocephalus*. Ne risulta che le affinità dei due primi generi con quest'ultimo sono grandissime ma non tali tuttavia da legittimare la riunione proposta dal PERRIER dei tre generi in uno solo. Anzi gli Autori della Memoria affidata al nostro esame credono di poter costituire pei due generi *Solenophorus* e *Duthiersia* una sottofamiglia distinta, quella delle *Solenophorinae* da contrapporsi a quella della *Botriocephalinae*.

Gli A. fanno in seguito una revisione critica delle specie fino ad ora conosciute della sottofamiglia *Solenophorinae*.

Questa sottofamiglia comprende i generi *Solenophorus* e *Duthiersia*. Pel genere *Solenophorus* gli Autori conchiudono: che esso contiene una sola specie il *Solenophorus megalocephalus* di CREPLIN e che le numerose specie descritte sono semplici sinonimi di questa. Anche pel genere *Duthiersia* gli Autori considerano una sola specie la *D. fimbriata* DIESING, riunendo ad essa la *D. elegans* PERRIER.

Per fare questo studio gli Autori hanno esaminato i tipi delle specie descritte, conservati nei principali Musei d'Europa.

Una tavola di disegni raffiguranti le particolarità più importanti di struttura accompagna questo lavoro.

I sottoscritti ritengono la Memoria presentata dai Dottori Monticelli e Crety essere un buon contributo per la conoscenza dei Solenoforini, gruppo di vermi parassiti fin ad oggi non ben noto, e perciò ne propongono la lettura alla Classe, e qualora questa lo approvi, la stampa nei volumi accademici.

Torino, 8 gennaio 1891.

G. Bizzozero

L. Camerano *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Giuseppe Basso.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA dell'11 Gennaio 1891 . . . . *Pag.* 235

D'Ovidio — Le proprietà focali delle coniche nella metrica proiettiva » 237

Errera — Sulla sostituzione degli alogeni negli idrocarburi aromatici . . . . » 265

Fusari — Sulla terminazione delle fibre nervose nelle capsule surrenali dei mammiferi . . . . » 272

De Vescovi — Ricerche anatomo-fisiologiche intorno all'apparato dei Teleostei . . . . » 287

Camerano — Relazione sulla Memoria dei Dott. F. S. Monticelli e G. Crety intitolata: *Ricerche intorno alla sottofamiglia* Solenophorinae . . . . » 311

Torino— Tip Reale-Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVI, DISP. 6ª, 1890-91

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Gennaio 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci; COSSA, Direttore della Classe, BRUNO, BERRUTI, SIACCI, D'OVIDIO, BIZZOZERO, FERRARIS, NACCARI, MOSSO, SPEZIA, GIBELLI, GIACOMINI, CAMERANO, SEGRE e BASSO Segretario.

Letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, il Presidente partecipa la dolorosa perdita di due Soci Corrispondenti dell'Accademia, cioè quella del luogotenente generale G. B. LIAGRE e quella di Edoardo SANG, della Società di Scienze ed Arti di Edimburgo.

Vengono presentati in dono all'Accademia, a nome dei rispettivi Autori:

1° Dal Socio BASSO, « *Annuario meteorologico italiano pubblicato per cura del Comitato direttivo della Società meteorologica italiana* (anno VI, 1891); 1 vol. in-16°;

2° Dal Socio NACCARI, « *La Scuola tecnica ed il Ginnasio*, » del Prof. Eugenio SEMMOLA di Napoli;

3° Dal Socio SEGRE, « *Guida del calcolo delle coordinate geodetiche*, » del Prof. Nicodemo JADANZA, dell'Università di Torino.

Il Socio D'OVIDIO legge un suo lavoro che si collega ad altri già presentati in adunanze precedenti, col titolo: *Sulle coniche confocali nella metrica proiettiva*. Questa monografia sarà pubblicata negli *Atti*.

LETTURE

Sulle coniche confocali nella metrica proiettiva;

Nota di ENRICO D'OVIDIO.

§ 1. La presente Nota fa seguito a quella dal titolo: *Le proprietà focali delle coniche nella metrica proiettiva*, inserita negli Atti dell'Accademia di Torino (vol. XXVI, 10 gennaio 1891), e presuppone la conoscenza di una parte di essa, cioè dei §§ 1, 2, 3, 10.

La conica A assoluto del piano abbia per equazioni in coordinate di punti e di rette

$$a_{xx} \equiv \sum a_h x^2_h = 0 \quad , \quad \alpha_{\xi\xi} \equiv \sum \alpha_h \xi^2_h = 0 \quad , \quad (h=1\,,2\,,3)\,,$$

ove $a_h \alpha_h = 1$; e siano $a \equiv a_1 a_2 a_3$, $\alpha \equiv \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ i discriminanti di a_{xx} , $\alpha_{\xi\xi}$, onde $a\alpha = 1$.

Una conica C qualunque del piano abbia le equazioni

$$c_{xx} \equiv \sum c_h x^2_h = 0 \,, \quad \gamma_{\xi\xi} \equiv \sum \gamma_h \xi^2_h = 0 \quad ,$$

ove $c_h \gamma_h = 1$; e siano $c \equiv c_1 c_2 c_3$, $\gamma \equiv \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ i discriminanti di c_{xx} , $\gamma_{\xi\xi}$, onde $c\gamma = 1$.

I due invarianti simultanei di $\alpha_{\xi\xi}$, $\gamma_{\xi\xi}$ sono

$$\sigma \equiv \sum \alpha_h \alpha_k \gamma_l \quad , \quad \sigma' \equiv \sum \gamma_h \gamma_k \alpha_l \quad ,$$

ove hkl sta pei gruppi 123, 231, 123.

Il covariante simultaneo di a_{xx}, c_{xx} è

$$u_{xx} \equiv \sum (\alpha_k \gamma_l + \alpha_l \gamma_k) x^2_h \quad .$$

Posto $\lambda_1 : \lambda_2 = \lambda$, una conica qualunque C_λ della schiera confocale a C avrà le equazioni (cfr. la Nota citata, 1 e 3)

$$\gamma_{\lambda,\xi\xi} \equiv \sum \gamma_{\lambda h} \xi^2_h = 0 \quad , \quad c_{\lambda,xx} \equiv \sum c_{\lambda h} x^2_h = 0 \quad ,$$

ove

$$\gamma_{\lambda h} \equiv \alpha_h \lambda_1 + \gamma_h \lambda_2 \quad , \quad c_{\lambda h} \equiv \frac{1}{\gamma_{\lambda h}} = \frac{a_h\, c_h}{a_h \lambda_2 + c_h \lambda_1} \quad .$$

Le A e C non sono altro che $C_{1:0}$ e $C_{0:1}$.

Se si pone $\alpha_k\gamma_l - \alpha_l\gamma_k \equiv (\alpha\gamma)_h$, $\lambda_1\lambda'_2 - \lambda_2\lambda'_1 \equiv (\lambda\lambda')$, ... , si avrà

$$(\alpha\gamma_\lambda)_h = (\alpha\gamma)_h \lambda_2 \quad , \quad (\gamma_\lambda \gamma_{\lambda'})_h = (\alpha\gamma)_h (\lambda\lambda') \quad .$$

Tutte le coniche A , C , C_λ , . . . sono riferite al triangolo autoconiugato rispetto a A e C e a tutte le altre. Indicando con O_h e o_h un vertice e il lato opposto di questo triangolo, con P_h e P'_h i punti Co_h, con $P_{\lambda h}$ e $P'_{\lambda h}$ i punti $C_\lambda o_h$, con p_h e $p_{\lambda h}$ i segmenti $P_h P'_h$, $P_{\lambda h} P'_{\lambda h}$ nel senso della metrica proiettiva, avremo (Nota cit., 2)

$$(\alpha\gamma)_h \cos p_h = \alpha_k \gamma_l + \alpha_l \gamma_k \quad , \quad (\alpha\gamma_\lambda)_h \cos p_{\lambda h} = \alpha_k \gamma_{\lambda l} + \alpha_l \gamma_{\lambda k} \quad ;$$

e quindi

$$\alpha_h (\alpha\gamma)_h (\cos p_{\lambda h} - \cos p_h) = 2\,\alpha\lambda = \text{costante con } \lambda \; ,$$

e

$$\sum \frac{1}{\cos p_{\lambda h} - \cos p_h} = 0 \quad .$$

Avremo anche

$$\alpha^2_h (\alpha\gamma)^2_h \operatorname{sen}^2 p_h = -4\,\alpha\alpha_h \gamma_k \gamma_l \quad , \quad \alpha^2_h (\alpha\gamma_\lambda)^2_h \operatorname{sen}^2 p_{\lambda h} = -4\,\alpha\alpha_h \gamma_{\lambda k} \gamma_{\lambda l} \quad ;$$

onde

$$\alpha^2_h (\alpha\gamma)^2_h (\operatorname{sen}^2 p_h - \operatorname{sen}^2 p_{\lambda h}) = 2\,\alpha\lambda \left[2\,\alpha\lambda + 2\,\alpha_h (\alpha_k \gamma_l + \alpha_l \gamma_k) \right] \; ;$$

e quindi

$$\sum \alpha^2_h (\alpha\gamma)^2_h (\operatorname{sen}^2 p_h - \operatorname{sen}^2 p_{\lambda h}) = 4\,\alpha\lambda (3\,\alpha\lambda + 2\,\sigma) = \text{cost. con } \lambda \; ,$$

e

$$\sum \alpha^3_h (\alpha\gamma)^3_h (\operatorname{sen}^2 p_h - \operatorname{sen}^2 p_{\lambda h}) = 0 \quad .$$

La penultima equazione e l'analoga relativa all'indice k porgono

$$\alpha^2_h (\alpha\gamma)^2_h (\operatorname{sen}^2 p_h - \operatorname{sen}^2 p_{\lambda h}) - \alpha^2_k (\alpha\gamma)^2_k (\operatorname{sen}^2 p_k - \operatorname{sen}^2 p_{\lambda k})$$
$$= 4\,\alpha\lambda\,\alpha_l (\alpha\gamma)_l = \text{cost. con } \lambda \, ;$$

e le stesse due equazioni, avendo nullo il risultante rispetto a $2\alpha\lambda$, porgono altresì

$$\left[\alpha^2_h(\alpha\gamma)^2_h(\mathrm{sen}^2 p_h - \mathrm{sen}^2 p_{\lambda h}) - \alpha^2_k(\alpha\gamma)^2_k(\mathrm{sen}^2 p_k - \mathrm{sen}^2 p_{\lambda k})\right]^2$$
$$+\alpha_l(\alpha\gamma)_l \left[\begin{array}{l} \alpha_k(\alpha_l\gamma_h+\alpha_h\gamma_l)\,\alpha^2_h(\alpha\gamma)^2_h(\mathrm{sen}^2 p_h - \mathrm{sen}^2 p_{\lambda h}) \\ -\alpha_h(\alpha_k\gamma_l+\alpha_l\gamma_k)\,\alpha^2_k(\alpha\gamma)^2_k(\mathrm{sen}^2 p_k - \mathrm{sen}^2 p_{\lambda k}) \end{array}\right] = 0 \;.$$

Va notato che $\alpha_h(\alpha\gamma)_h$, $\alpha_k(\alpha\gamma)_k$, $\alpha_l(\alpha\gamma)_l$ sono proporzionali ad altre quantità formate mediante le distanze tra i fuochi (Nota cit., 3 e 4), e quindi possono esser surrogate da queste quantità in quelle relazioni in cui entrano omogeneamente. Del pari $a_k a_l c_h$, $a_l a_h c_k$, $a_h a_k c_l$ sono proporzionali ad altre quantità formate mediante p_h, p_k, p_l (ibid.).

Adoperando le denominazioni adottate nella precedente Nota, quelle ora esposte sono delle relazioni fra le grandezze degli assi principali di due coniche confocali.

Nel caso più ovvio che l'assoluto A si riduca a una coppia di punti, basta supporre $\alpha_3=0$ e ricordare che allora si assume $p^2_h=\lim\dfrac{\mathrm{sen}^2 p_h}{\alpha}$ per $\alpha_3=0$, e così via. Dedurremo così da una delle precedenti relazioni

$$p^2_1-p^2_{\lambda 1}=p^2_2-p_{\lambda 2}{}^2=\frac{4\lambda}{\alpha_1\alpha_2\gamma_3}\;,$$
$$p^2_{\lambda 1}-p^2_{\lambda 2}=p^2_1-p^2_2=\mathrm{cost.}$$

In aggiunta al § 2 della Nota precedente, osserviamo che per un assoluto qualunque si ha

$$\mathrm{sen}^2 p_h-\mathrm{sen}^2 p_k=-\frac{4\,\alpha_l\gamma_l(\alpha\gamma)_l(\alpha_h\alpha_k\gamma^2_l-\gamma_h\gamma_k\alpha^2_l)}{(\alpha\gamma)^2_h(\alpha\gamma)^2_k}\;;$$

e quando $\alpha_3=0$,

$$p^2_1-p^2_2=-\frac{4\,(\alpha\gamma)_3}{\alpha^2_1\alpha^2_2\gamma_3}\;.$$

§ 2. Nella schiera A, C, C_λ,... vi sono due coniche che passano per un punto dato $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$. Le loro tangenti t', t'' in P' sono i raggi doppî dell'involuzione delle coppie di tangenti tirate da P' alle coniche della schiera, e sono quindi perpendicolari. I valori del parametro λ corrispondenti alle due coniche per P' siano λ', λ''; cosicchè saranno esse indicate da $C_{\lambda'}$, $C_{\lambda''}$. Saranno λ' e λ'' le radici della equazione

$$c_{\lambda, x'x'} = \sum \frac{x'^2_h}{\gamma_{\lambda h}} = 0 \quad .$$

e però sarà

$$(\lambda\lambda')(\lambda\lambda'') = \sum x'^2_h \gamma_{\lambda k} \gamma_{\lambda l} = \alpha a_{x'x'} \lambda^2_1 + u_{x'x'} \lambda_1 \lambda_2 + \gamma c_{x'x'} \lambda^2_2 \quad ,$$

$$\lambda'_1 \lambda''_1 = \gamma c_{x'x'} \quad , \quad \lambda'_1 \lambda''_2 + \lambda'_2 \lambda''_1 = -u_{x'x'} \quad , \quad \lambda'_2 \lambda''_2 = \alpha a_{x'x'} \quad ;$$

e per $\lambda_1 = \gamma_h$, $\lambda_2 = -\alpha_h$ avremo

$$\gamma_{\lambda' h} \gamma_{\lambda'' h} = -(\alpha\gamma)_k (\alpha\gamma)_l x'^2_h \quad .$$

Se poniamo

$$\frac{x_h}{\gamma_{\lambda h}} \equiv \tau_h \quad , \quad \frac{x'_h}{\gamma_{\lambda' h}} \equiv \tau'_h \quad , \quad \frac{x'_h}{\gamma_{\lambda'' h}} \equiv \tau''_h \quad , \quad \tau_x \equiv \sum \tau_h x_h \quad , \ldots ,$$

sarà

$$c^\lambda_{, xx} = \tau_x \quad , \quad c_{\lambda', xx} = \sum \frac{\tau'_h}{x'_h} x^2_h \quad , \quad c_{\lambda'', xx} = \sum \frac{\tau''_h}{x'_h} x^2_h \quad ;$$

ed otterremo per le tangenti t', t'' le equazioni

$$\tau'_x = 0 \quad , \quad \tau''_x = 0 \quad .$$

Inoltre sarà

$$\tau'_{x'} = 0 \,, \quad \tau''_{x'} = 0 \,,$$

e quindi

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = (\tau'\tau'')_1 : (\tau'\tau'')_2 : (\tau'\tau'')_3 \quad .$$

Si ha pure

$$\frac{(\alpha\gamma)_h}{\tau'_h \tau''_h} = \ldots = -(\alpha\gamma)_1 (\alpha\gamma)_2 (\alpha\gamma)_3 \quad ,$$

$$(\tau'\tau'')_h = -\frac{(\alpha\gamma)_h x'_k x'_l (\lambda'\lambda'')}{\gamma_{\lambda' k} \gamma_{\lambda' l} \gamma_{\lambda'' k} \gamma_{\lambda'' l}} = -\frac{(\lambda'\lambda'')}{(\alpha\gamma)_1 (\alpha\gamma)_2 (\alpha\gamma)_3 x'_k x'_l} \quad .$$

§ 3. Consideriamo una retta data $o(\omega_x = 0)$. Le coniche, rispetto a cui il triangolo $t't''o$ è autoconiugato, formano una rete, e l'equazione di una di esse in coordinate di punti è

$$\mu_1 y^2_1 + \mu_2 y^2_2 + \mu_3 y^2_3 = 0 \quad ,$$

posto

$$y_1 \equiv \tau'_x \quad , \quad y_2 \equiv \tau''_x \quad , \quad y_3 \equiv \omega_x \ ;$$

sostituzione di modulo $(\tau' \tau'' \omega)$.

Le stesse coniche formano un tessuto. E siccome i vertici del triangolo $t' t'' o$ hanno le equazioni

$$\eta_1 \equiv (\xi \tau'' \omega) = 0 \quad , \quad \eta_2 \equiv (\xi \omega \tau') = 0 \quad , \quad \eta_3 \equiv (\xi \tau' \tau'') = 0 \quad ,$$

così l'equazione della precedente conica, considerata come elemento del tessuto, in coordinate di rette sarà

$$\frac{\eta^2_1}{\mu_1} + \frac{\eta^2_2}{\mu_2} + \frac{\eta^2_3}{\mu_3} = 0 \quad .$$

Quelle coniche della rete-tessuto che passano pel punto O_h costituiscono un fascio: esse verificano la condizione

$$\mu_1 \tau'^2_h + \mu_2 \tau''^2_h + \mu_3 \omega^2_h = 0 \quad .$$

Una di queste coniche tocca o_k, e sia R_k: per essa si verifica l'altra condizione

$$\mu_1 \tau'_h \tau'_l + \mu_2 \tau''_h \tau''_l + \mu_3 \omega_h \omega_l = 0 \quad ;$$

e in virtù delle due condizioni l'equazione di R_k sarà, in coordinate di punti,

$$\begin{vmatrix} y^2_1 & y^2_2 & y^2_3 \\ \tau'^2_h & \tau''^2_h & \omega^2_h \\ \tau'_h \tau'_l & \tau''_h \tau''_l & \omega_h \omega_l \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Del pari, una conica del fascio tocca o_l, e sia R_l: la sua equazione sarà, in coordinate di punti,

$$\begin{vmatrix} y^2_1 & y^2_2 & y^2_3 \\ \tau'^2_h & \tau''^2_h & \omega^2_h \\ \tau'_h \tau'_k & \tau''_h \tau''_k & \omega_h \omega_k \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Quindi le equazioni delle medesime R_k, R_l in coordinate di rette saranno

$$\frac{\eta_1^2}{\tau''_h\,\omega_h\,(\tau''\omega)_k}+\frac{\eta_2^2}{\tau'_h\,\omega_h\,(\omega\tau')_k}+\frac{\eta_3^2}{\tau'_h\,\tau''_h\,(\tau'\tau'')_k}=0\ .$$

$$\frac{\eta_1^2}{\tau''_h\,\omega_h\,(\tau''\omega)_l}+\frac{\eta_2^2}{\tau'_h\,\omega_h\,(\omega\tau')_l}+\frac{\eta_3^2}{\tau'_h\,\tau''_h\,(\tau'\tau'')_l}=0\ .$$

Essendo t', t'' coniugate rispetto ad A (perpendicolari), se si suppone che o sia la polare di P' rispetto ad A, anche A apparterrà alla rete-tessuto; e si avrà

$$\bar{a}_{yy}\equiv\frac{1}{\tau'_h\,\tau''_h\,\omega_h\,(\tau'\tau''\omega)}\begin{vmatrix} y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 \\ \tau'_h\tau'_k & \tau''_h\tau''_k & \omega_h\omega_k \\ \tau'_h\tau'_l & \tau''_h\tau''_l & \omega_h\omega_l \end{vmatrix}=a_{xx}\ ,$$

$$\bar{\alpha}_{\eta\eta}\equiv\frac{\tau'_h\,\tau''_h\,\omega_h}{(\tau'\tau''\omega)}\left\{\frac{\eta_1^2}{\tau''_h\,\omega_h\,(\tau''\omega)_h}+\frac{\eta_2^2}{\omega_h\,\tau'_h\,(\omega\tau')_h}+\frac{\eta_3^2}{\tau'_h\,\tau''_h\,(\tau'\tau''_h)}\right\}=\alpha_{\xi\xi}\ .$$

ove $\omega_h=a_h x'_h$.

Resta a indagare quando avviene che la schiera determinata da R_k e R_l sia confocale, vale a dire che A appartenga alla schiera; o ancora che esistano due numeri ν_1, ν_2 tali che, moltiplicando per essi le ultime equazioni di R_k, R_l e sommando, i coefficienti della nuova equazione riescano eguali ai coefficienti di $\alpha_{\eta\eta}$. Ciò condurrebbe alla relazione

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{(\tau'',ax')_1} & \dfrac{1}{(\tau'',ax')_2} & \dfrac{1}{(\tau'',ax')_3} \\[2ex] \dfrac{1}{(ax',\tau')_1} & \dfrac{1}{(ax',\tau')_2} & \dfrac{1}{(ax',\tau')_3} \\[2ex] \dfrac{1}{(\tau'\tau'')_1} & \dfrac{1}{(\tau'\tau'')_2} & \dfrac{1}{(\tau'\tau'')_3} \end{vmatrix}=0\ ,$$

verificata la quale, si avrebbe

$$\nu_1:\nu_2=\tau'_k\,(ax',\tau')_k\,x'_k:\tau'_l\,(ax',\tau')_l\,x'_l\ ;$$

or la detta relazione (moltiplicata per $x'_1 x'_2 x'_3$) è una relazione fra λ', λ'', $a_1,\ldots$, $\alpha_1,\ldots$, $\gamma_1,\ldots$ indipendente da $x'_1,\ldots$ e non identica, e però in generale assurda, finchè A, C e P' rimangono affatto arbitrarî.

Ma non è più così quando A degenera in una coppia di punti ($\alpha_h=0$ con $a_h\alpha_h=1$); poichè allora la detta relazione è verificata e si ottiene $\nu_1:\nu_2=-x'_k:x'_l$.

§ 4. Esaminiamo dunque il caso che l'assoluto A consti di una coppia di punti L, L'. Allora la retta LL' è una delle o_h, e sia o_3; sicchè $\alpha_3=0$ con $a_3\alpha_3=1$. E si ha

$$\alpha_{\xi\xi}=\alpha_1\xi^2_1+\alpha_2\xi^2_2\,,\ \alpha=0\,,\ \alpha\, a_{xx}=\alpha_1\alpha_2 x^2_3\,,\ \alpha_3 a_{xx}=x^2_3\,,\ \alpha_3 a_{xx'}=x'_3x_3\,;$$

e la polare di un punto qualunque P' è o_3.

Alcune delle precedenti identità ed equazioni si semplificano, perchè $\gamma_{\lambda 3}=\gamma_3\lambda_2$, $\tau_3=\dfrac{x_3}{\gamma_3\lambda_2},\ldots$; p. e. si ha

$$\lambda'_2\lambda''_2=\alpha_1\alpha_2x'^2_3\,,\ \gamma_{\lambda'1}\gamma_{\lambda''1}=\alpha_1\gamma_3(\alpha\gamma)_3x'^2_1\,,\ \gamma_{\lambda'2}\gamma_{\lambda''2}=-\alpha_2\gamma_3(\alpha\gamma)_3x'^2_2\,,$$

$$\frac{\alpha_2\gamma_3}{\tau'_1\tau''_1}=-\frac{\alpha_1\gamma_3}{\tau'_2\tau''_2}=\frac{(\alpha\gamma)_3}{\tau'_3\tau''_3}=\alpha_1\alpha_2\gamma^2_3(\alpha\gamma)_3\ .$$

Invece di porre $y_3\equiv a_{xx'}$, porremo ora $y_3\equiv\dfrac{\alpha_3}{x'_3}a_{xx'}=x_3$, modificando in conseguenza le equazioni dianzi ottenute (leggendo, cioè, $\dfrac{x'_3y_3}{\alpha_3}$ invece del primitivo y_3). Ed osserviamo che il modulo dell'attuale sostituzione

$$y_1\equiv\tau'_x\,,\quad y_2\equiv\tau''_x\,,\quad y_3\equiv x_3$$

è $(\tau'\tau'')_3$.

Analogamente, useremo ora la sostituzione

$$\eta_1\equiv(\xi\tau'')_3\,,\quad \eta_2\equiv-(\xi\tau')_3\,,\quad \eta_3\equiv(\xi\,\tau'\tau'')\,,$$

il cui modulo è $(\tau'\tau'')^2_3$. (Ciò equivale a leggere $\dfrac{x'_3\eta_1}{\alpha_3}$, $\dfrac{x'_3\eta_2}{\alpha_3}$ invece di η_1, η_2).

Le equazioni di R_1, R_2 saranno

$$\tau''_2\tau''_3y^2_1-\tau'_2\tau'_3y^2_2+\tau'_3\tau''_3(\tau'\tau'')_1y^2_3=0\,,$$

$$-\tau''_1\tau''_3y^2_1+\tau'_1\tau'_3y^2_2+\tau'_3\tau''_3(\tau'\tau'')_2y^2_3=0\,,$$

e rispettivamente

$$\frac{\eta^2_1}{\tau''_2\tau''_3} - \frac{\eta'^2_2}{\tau'_2\tau'_3} + \frac{\eta^2_3}{\tau'_2\tau''_3(\tau'\tau'')_1} = 0 \ , \quad - \frac{\eta^2_1}{\tau''_1\tau''_3} + \frac{\eta^2_2}{\tau'_1\tau'_3} + \frac{\eta^2_3}{\tau'_3\tau''_3(\tau'\tau'')_2} = 0 \ .$$

Quanto all'assoluto, sarà

$$\bar{\varphi}_{\eta\eta} \equiv - \frac{\alpha_1\,\alpha_2\,\gamma_3\,(\alpha\gamma)_3}{(\tau'\tau'')_3}\,(\tau''_1\,\tau''_2\,\eta^2_1 - \tau'_1\,\tau'_2\,\eta^2_2) \ .$$

Qualunque forma quadratica di $\eta_1, \ldots$ si trasformi in un'altra di $\xi_1, \ldots$ mediante la sostituzione accennata di modulo $(\tau'\tau'')^2_3$, il rapporto fra il secondo e il primo discriminante sarà $(\tau'\tau'')^4_3$, quadrato di quel modulo. Quanto al discriminante $\bar{\alpha}$ di $\bar{\varphi}_{\eta\eta}$, esso è nullo come α, ma va ritenuto $\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = (\tau'\tau'')_3^{-4}$.

Nella Nota precedente (§ 10) abbiamo trovato per gli assi della conica C le espressioni

$$p^2_1 = - \frac{4\,c_3}{\alpha_1\,\alpha^2_2\,c_2} \ , \qquad p^2_2 = - \frac{4\,c_3}{\alpha^2_1\,\alpha_2\,c_1} \ ;$$

quindi per gli assi principali della C_λ avremo

$$p^2_{\lambda 1} = - \frac{4\,\gamma_{\lambda 2}}{\alpha_1\,\alpha^2_2\,\gamma_3\,\lambda_2} \ , \qquad p^2_{\lambda 2} = - \frac{4\,\gamma_{\lambda 1}}{\alpha^2_1\,\alpha_2\,\gamma_3\,\lambda_2} \ ;$$

e, in particolare, per quelli di $C_{\lambda'}$ e $C_{\lambda''}$

$$p^2_{\lambda' 1} = - \frac{4\,\gamma_{\lambda' 2}}{\alpha_1\,\alpha^2_2\,\gamma_3\,\lambda'_2} \ , \qquad p_{2\lambda'}{}^2 = - \frac{4\,\gamma_{\lambda' 1}}{\alpha^2_1\,\alpha_2\,\gamma_3\,\lambda'_2} \ ,$$

$$p^2_{\lambda'' 1} = - \frac{4\,\gamma_{\lambda'' 2}}{\alpha_1\,\alpha^2_2\,\gamma_3\,\lambda''_3} \ , \qquad p^2_{\lambda'' 2} = - \frac{4\,\gamma_{\lambda'' 1}}{\alpha^2_1\,\alpha_2\,\gamma_3\,\lambda''_2} \ .$$

La distanza O_3P' è data dalla formola

$$\overline{O_3P'}^2 = \frac{\alpha_2\,x'^2_1 + \alpha_1\,x'^2_2}{\alpha^2_1\,\alpha^2_2\,x'^2_3} \ .$$

Ora se si considera la conica

$$\sum \frac{x^2_h}{x'^2_h} = 0 \ ,$$

che ha il triangolo $O_1 O_2 O_3$ come autoconiugato e come polare di P' la retta armonica di P' rispetto al triangolo medesimo, si hanno per gli assi Ω_1, Ω_2 di questa conica le espressioni

$$\Omega_1^2 = -\frac{4\,x'^2_2}{\alpha_1\,\alpha_2^2\,x'^2_3}\,, \qquad \Omega_2^2 = -\frac{4\,x'^2_1}{\alpha_1^2\,\alpha_2\,x'^2_3}\ ;$$

sarà dunque

$$-4\,\overline{O_3P'}^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2\ .$$

Tenendo presenti le $\lambda'_1\lambda''_2 + \lambda'_2\lambda''_1 = -u_{x\,x'}$, $\lambda'_2\lambda''_2 = aa_{x'x'} = \alpha_1\alpha_2 x'^2_3$, si troverà anche

$$4\,\overline{O_3P'}^2 = p^2_{\lambda'1} + p^2_{\lambda''2} = p^2_{\lambda''1} + p^2_{\lambda'2}\ .$$

§ 5. Passiamo a considerare gli assi principali delle coniche R_1, R_2.

E primieramente ricordiamo che, se rispetto a due diversi triangoli sono rispettivamente $x'_1,\ldots$ e $y'_1,\ldots$ le coordinate di un punto P', $x''_1,\ldots$ e $y''_1\ldots$ quelle di un altro punto P'', $A_{xx}=0$ e $\overline{A}_{yy}=0$ le equazioni dell'assoluto, A e $\overline{A}$ i discriminanti di A_{xx} e $\overline{A}_{yy}$, si ha

$$\mathrm{sen}^2 P'P'' = \frac{A_{x'x'}\,A_{x''x''} - A^2_{x'x''}}{A_{x'x'}\,A_{x''x''}} = \frac{\overline{A}_{y'y'}\,\overline{A}_{y''y''} - \overline{A}^2_{y'y''}}{\overline{A}_{y'y'}\,\overline{A}_{y''y''}}\ .$$

Allorquando l'assoluto degenera in una coppia di punti, noi assumiamo come quadrato della distanza dei due punti P', P''

$$\lim\frac{\mathrm{sen}^2\,P'P''}{A}\ \text{ per } \overline{A}=0\,, \qquad \text{o invece} \qquad \lim\frac{\mathrm{sen}^2\,P'P''}{\overline{A}}\ \text{ per } A=0\,,$$

secondo che ci riferiamo al primo od al secondo triangolo. Or questi due limiti non sono eguali, ma il rapporto del primo al secondo è $\lim\frac{\overline{A}}{A}$, che equivale al quadrato del modulo M della sostituzione con cui si passa dalle coordinate x alle y. Di qui segue che non è lecito paragonare senz'altro le distanze misurate nel primo modo con quelle misurate nel secondo modo, ma che per far ciò occorre prima moltiplicare le seconde per M^2, ossia dividerle pel quadrato del modulo $1:M$ della sostituzione con cui si passa dalle y alle x.

Ciò premesso, siano π_1, π_2 e π'_1, π'_2 le lunghezze degli assi principali delle coniche R_1, R_2, sempre nel caso dell'assoluto degenere. Avendo noi le equazioni di R_1, R_2 in coordinate y e quella di A in coordinate η, ricorriamo ad esse; e poichè la sostituzione che esprime le y nelle x ha per modulo $(\tau'\tau'')^2_3$, troveremo, ponendo $\rho \equiv \alpha_1 \alpha_2 \gamma_3 (\alpha\gamma)_3$:

$$\pi^2_1 = -\frac{4\,.\,\tau'_3 \tau''_3 (\tau'\tau'')_1}{\frac{-\rho^3}{(\tau'\tau'')^3}(\tau'_1\tau'_2)(\tau''_1\tau''_2)^2(-\tau'_2\tau'_3)}(\tau'\tau'')_3^{-4}$$

ossia

$$\pi^2_1 = -\frac{4\,\tau''_3(\tau'\tau'')_1}{\rho^3(\tau'_1\tau''_1)(\tau'_2\tau''_2)^2\tau'_1(\tau'\tau'')_3},$$

e riducendo per mezzo di identità date nel § 4,

$$\pi_1{}^2 = -\frac{4\,\tau''_3 x'_1}{\alpha^2_1\alpha_2\tau''_1 x'_3};$$

similmente

$$\pi^2_2 = -\frac{4\,\tau'_3 x'_1}{\alpha^2_1\alpha_2\tau'_1 x'_3},$$

e

$$\pi'_1{}^2 = -\frac{4\,\tau''_3 x'_2}{\alpha_1\alpha^2_2\tau''_3 x'_3}, \qquad \pi'_3{}^2 = -\frac{4\,\tau'_3 x'_2}{\alpha_1\alpha^2_2\tau'_3 x'_3}.$$

Confrontando queste espressioni con quelle di $p_{\lambda'1}, \ldots$, ed osservando che

$$\frac{4\,\tau''_3 x'_1}{\alpha^2_1\alpha_2\tau''_1 x'_3} = \frac{4\,\gamma_{\lambda''1}}{\alpha^2_1\alpha_2\gamma_3\lambda''_3}, \quad \ldots,$$

otterremo

$$\pi_1{}^2 = p^2_{\lambda''2}, \quad \pi^2_2 = p_{\lambda'2}; \quad \pi'^2_1 = p^2_{\lambda''1}, \quad \pi'^2_2 = p^2_{\lambda'1}.$$

Raccogliamo i principali risultati ottenuti nel seguente enunciato:

« Abbiasi una schiera di coniche confocali C_λ nel caso che « l'assoluto A del loro piano sia una coppia di punti L, L'; e « sia O_3 il loro centro principale (esterno alla retta LL') e « o_1, o_2 i due assi principali per O_3. Si considerino le due co-

« niche $C_{\lambda'}$, $C_{\lambda''}$ della schiera che passano per un dato punto « P', e le loro tangenti t', t'' in P'. Esisterà un'altra schiera « di coniche confocali, aventi per centro ed assi principali il « punto P' e le rette t', t''; e quelle due coniche R_1, R_2 di « questa schiera che passano per O_3 avranno ivi per tangenti « o_1, o_2. Gli assi principali delle due coniche R_1, R_2 saranno « in un certo ordine eguali a quelli delle due $C_{\lambda'}$, $C_{\lambda''}$; e pre- « cisamente, gli assi primo e secondo di R'_1 eguali ai secondi « assi di $C_{\lambda''}$ e $C_{\lambda'}$, e gli assi primo e secondo di R''_2 ai primi « assi di $C_{\lambda'}$ e $C_{\lambda'}$.»

La prima parte di questo teorema si trova implicitamente contenuta nella mia Nota: *Teoremi sui sistemi di superficie di 2° grado* (Atti dell'Acc. di Torino, vol. XIV, 1879), nella quale l'analogo teorema relativo alle quadriche dello spazio a tre dimensioni è dimostrato sintenticamente in modo applicabile alle coniche di un piano. La dimostrazione qui data ha però il vantaggio di condurre immediatamente alla notevole relazione fra le grandezze degli assi delle due coppie di coniche $C_{\lambda'}$, $C_{\lambda''}$ e R_1, R_2.

§ 6. Il luogo dei poli di una data retta $r(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ rispetto alle coniche $A, C, C_\lambda, \ldots$ della proposta schiera confocale è una retta perpendicolare a r nel punto ove r tocca una ed una sola conica della schiera. La distanza fra O_3 ed r, e la distanza fra i poli P, P_λ di r rispetto a C e C_λ, per A qualunque, son date da

$$\operatorname{sen}^2 O_3 r = \frac{\xi^2_3}{a_3 \alpha_{\xi\xi}}\,, \quad \operatorname{sen}^2 PP_\lambda = \frac{\lambda^2_1 \Sigma \alpha_h (\alpha\gamma)^2_h \xi^2_k \xi^2_l}{\alpha \Sigma a_h \gamma^2_h \xi^2_h \,.\, \Sigma a_h \gamma^2_{\lambda h} \xi^2_h}\,;$$

cosicchè, quando A si scinde in due punti, si ha

$$\overline{O_3 r}^2 = \frac{\xi^2_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_{\xi\xi}}\,, \quad \frac{\overline{PP_\lambda}^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha_{\xi\xi}}{\alpha_1 \alpha_2 \gamma^2_3 \xi^2_3} = \frac{1}{\alpha^2_1 \alpha^2_2 \gamma^2_3} \cdot \frac{1}{\overline{O_3 r}^2} = \text{cost. con } r\,,$$

e

$$4\, PP_\lambda = \pm (p^2_{\lambda h} - p^2_h) : O_3 r\,, \quad (h = 1, 2)\,.$$

Il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da un dato punto P' alle coniche della schiera confocale è una curva di 3° ordine, che passa pei 6 fuochi ed ha P' come punto doppio. La sua equazione si ricava dalle $\frac{(xx')_h}{\tau_h} = \text{cost.}$, ossia

$$\alpha_h\lambda_1 + \gamma_h\lambda_2 = \frac{x'_h x_h \nu}{(xx')_h},$$

ed è

$$\sum \frac{(\alpha\gamma)_h x'_h x_h}{(xx')_k} = 0 .$$

Queste proprietà sono una estensione di altre già note delle coniche confocali ordinarie (Cfr. SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes*, testo e bibliografia); ma ho stimato utile di eseguirne la ricerca, segnatamente in vista delle osservazioni che porgono il destro di fare, sia circa il grado di generalità di cui son suscettibili, sia circa le cautele da usare nel paragone delle distanze, quando non tutte siano state misurate riferendosi a uno stesso sistema di coordinate.

E superfluo rilevare la natura dualistica delle formole e delle proprietà qui esposte.

Torino, 24 gennaio 1891.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 25 Gennaio 1891 . . . . *Pag.* 313

D'Ovidio — Sulle coniche confocali nella metrica proiettiva . . . . » 314

Torino — Tip. Reale-Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVI, DISP. 7ª E 8ª, 1890-91

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'8 Febbraio 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Cossa, Direttore della Classe, Bruno, Berruti, Siacci, D'Ovidio, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia, Gibelli, Giacomini, Camerano, Segre e Basso Segretario.

Il Socio Segretario legge l'atto verbale dell'adunanza precedente che viene approvato.

Il Socio Cossa espone verbalmente i risultati delle ricerche da lui ultimamente eseguite « *Sopra alcune nuove combinazioni del platino* ».

Adunanza del 22 Febbraio 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Cossa, Direttore della Classe, Bruno, Berruti, Siacci, D'Ovidio, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Gibelli, Giacomini, Camerano, Segre e Basso Segretario.

Letto ed approvato il processo verbale dell'adunanza precedente, viene presentato in dono all'Accademia, da parte del Signor Architetto Luca Beltrami « *Il Codice di Leonardo da Vinci nella Biblioteca del Principe Trivulzio in Milano, trascritto ed annotato dal prefato architetto e riprodotto in novantaquattro tavole eliografiche da Angelo della Croce;* Milano, 1891.

Il Socio Camerano presenta e legge un lavoro del signor Dott. Carlo Mylius « *Intorno ad alcune forme inedite di molluschi miocenici dei colli torinesi rinvenute a S. Margherita* ». Questo lavoro verrà pubblicato negli *Atti*.

Il Socio Segre presenta uno studio intitolato: « *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* », del Dottor Guido Castelnuovo, Assistente alla Cattedra di Algebra e Geometria analitica nella Università di Torino. Desiderando l'autore che questo lavoro venga pubblicato nei volumi delle *Memorie*, il Presidente nomina una Commissione incaricata di esaminarlo e di riferirne poscia alla Classe.

LETTURE

Intorno ad alcune forme inedite di Molluschi miocenici dei colli torinesi, rinvenute a S. Margherita;

Nota del Dott. CARLO MYLIUS

Nei lavori che si eseguirono due anni or sono sui colli torinesi, per il prolungamento di una strada vicinale, ad un chilometro dalla chiesa di Santa Margherita in direzione di S-S-E, venne scavata in un rialzo di terreno, presso la villa Cochis, una trincea poco profonda, lunga una cinquantina di metri. La sezione presenta due strati principali concordanti e inclinati da E a O, con pendenza di circa 40°: il superiore, grosso poco meno di un metro, ed a contatto collo strato superficiale di terra vegetale, consta di arenaria serpentinosa poco compatta, mentre il sottostante, di potenza non minore, ma variabile in diversi punti, è formato da un conglomerato grossolano ad elementi di mole mediocre. Abbondano in questo strato inferiore ciottoloso gli avanzi di organismi miocenici, tanto che, terminato lo sterro, chi attendeva a tale ricerca ebbe tra le mani una raccolta copiosissima di fossili, per lo più ben conservati.

Questa raccolta, acquistata dal Museo Geologico di Torino, era composta quasi esclusivamente di molluschi. Limitando il mio studio a questo solo tipo zoologico feci la determinazione sistematica di essi fossili. Trovai rappresentati i Cefalopodi da una sola specie (*Spirulirostra Bellardii d'Orb.*), i Gasteropodi da 53 generi e circa 120 specie, gli Scafopodi da 2 specie di uno stesso genere ed i Lamellibranchiati da 8 generi e 12 specie.

Tra codeste forme ne rinvenni 17, le quali, scostandosi per alcuni caratteri da quelle finora descritte, o non essendo ancora state trovate nel terreno miocenico torinese, mi paiono degne di un cenno speciale.

1. **Murex striaeformis**, Michtti (1).

Var. *bicristata*, Myl., fig. 11.

M. a M. striaeformi genuino his notis segregandus: *Testa minori, varicibus in ultimo anfractu duabus, magnis, oppositis.*

Un individuo di mole mediocre (lungh.: mm. 31, largh.: mm. 22) che differisce dalla forma tipica per la disposizione speciale delle varici nell'ultimo anfratto. Sono due sole: l'una, molto prominente, sull' orlo boccale; l' altra, meno sviluppata, diametralmente opposta alla prima. Lo spazio intermedio, con due costole trasversali cariniformi, non presenta alcuna traccia di varici. La bocca ha caratteri normali.

2. **Fusus multiliratus**, Bell. (2).

Var. *ventricosa*, Myl.

F. a F. multilirato Bell. his notis segregandus: *Anfractibus postice vix depressis, costulis longitudinalibus rarioribus, carina transversa minus perspicua.*

Tre individui imperfetti, mancanti dell'apice e della coda, di mole mediocre (diametro: mm. 19-24). Differiscono dalla forma tipica descritta dal Bellardi e dagli altri esemplari del Museo Geologico di Torino nel numero delle coste longitudinali (non maggiore di 12), negli anfratti meno depressi posteriormente, con una costola trasversale maggiore delle altre, ma non cariniforme. La forma tipica manca in questa raccolta.

---

(1) Michelotti, *Fossiles miocènes de l'Italie sept.* p. 241, tav. XXIV, fig. 13 — Bellardi, *Molluschi dei terreni terziarii del Piemonte*, Vol. I, pag. 95.

(2) Bellardi, Ibid. p. 138, tav. IX. fig. 8.

3. **Fusus semirugosus**, Bell. et Michtti (1).

Var. *exilicauda*, Myl., fig. 10.

F. a F. semirugoso genuino his notis segregandus: *Costulis longitudinalibus crebrioribus; extimo anfractu antice magis depresso: cauda prope basim gracili, tenui, recta.*

Un individuo di mole mediocre (lungh.: mm. 40, diam.: mm. 14). Va distinto dalla forma tipica pel numero maggiore di coste longitudinali (12 anzichè 10), per la forma globosa dell'ultimo anfratto, terminato da una coda sottile alla base, smilza, retta e profondamente canalicolata.

4. **Myristica cornuta**, Agass. (2).

Var. *tudicloides*, Myl., fig. 15.

M. a M. cornuta genuina his notis segreganda: *Extimo anfractu medio ventricoso, antice paulo, postice valde depresso: nodis obsoletis, labrum versus evanescentibus; spira prominula: cauda exili, longiuscula.*

Un individuo di piccola mole (lungh.: mm. 65, largh.: mm. 40), mancante della estremità della coda e dell'orlo boccale. Per quanto sia variabile nei caratteri esterni della conchiglia la *Myristica cornuta* (*Agass.*), i caratteri che si osservano in questo individuo sono tali da doverlo ritenere varietà distinta dalla specie stessa: infatti, tanto negli esemplari torinesi del Museo Geologico, quanto in quelli del bacino di Vienna, descritti e raffigurati dallo Hörnes (3), l' ultimo anfratto va assottigliandosi gradatamente fino alla coda, la spira è breve, poco acuta, dal profilo quasi rettilineo; mentre nel nostro è notevole la depressione

---

(1) Bellardi, op. cit. Vol. I, p. 133, tav. IX, fig. 5.

(2) Bellardi, Ibid. pag. 157.

(3) Hörnes. *Fossile Mollusken des Tertiaer-Beckens von Wien*, Vol. I, p. 274, tav. XXIX e XXX.

anteriore dell'ultimo anfratto e la forma acuta dei primi giri della spira: inoltre, la coda relativamente sottile e liscia concorre a dare a questo fossile un aspetto che ricorda il genere *Tudicla*, *Bolten*.

5. Clavella striata, Bell. (1).

Var. *ecostata*, Myl., fig. 7.

C. a C. striata genuina his notis segreganda: *Testa majori; suturis profundioribus; costis longitudinalibus in ultimis anfractibus nullis, in primis autem vix perspicuis.*

Individuo imperfetto (mancante della coda), notevole per la mole (lungh.: circa mm. 45, largh.: mm. 19), per le suture canalicolate e per le costole longitudinali confinate ai primi tre o quattro anfratti, in cui sono appena visibili.

6. Euthria magna, Bell. (2).

Due individui conformi al tipo descritto e raffigurato dal Bellardi (2); ma di mole poco minore (dimensioni del maggiore: lungh.: mm. 60, largh. mm. 25). — Ricordo la presenza di questa forma tra i fossili di Santa Margherita (terreno *elveziano*) perchè dal Bellardi fu creduta specie propria del *tortoniano* (Stazzano).

7. Anura Borsoni, Gené (3).

Var. *crassostriata*, Myl., fig. 13.

A. ab A. Borsoni genuina his notis segreganda: *Testa majori, spira magis producta, cauda longiori; striis latioribus*; *carinis nullis*; *cingulo tuberculifero unico, suturae posticae propinquo.*

Individuo alquanto malconcio: ma con caratteri spiccati, per cui facilmente si distingue dalla forma tipica e dalle tre varietà

---

(1) Bell., Ibid. p. 188, tav. XI, fig. 3.

(2) Bellardi, op. cit., Vol. I, p. 190, tav. XIII, fig. 1.

(3) Bellardi, op. cit., Vol I, p. 202.

descritte dal Bellardi. È affine alla varietà B (v. *parvornata Sacc.*), che ha pure un solo cingolo tubercolifero: ma nella nostra i tubercoli corrono vicinissimi alla sutura posteriore: inoltre la conchiglia è assai più smilza.

8. **Ranella gigantea**, Lam. (1).

Var. *turrito-reticularis*. Myl.

R. a R. gigantea Lam. his notis segreganda: *Testa minori: anfractibus convexioribus, ultimo autem breviori; superficie papillis crebris subspinosis ornata.*

Sette individui di mole diversa (lungh.: mm. 31-53, largh.: mm. 20-31). — Questa forma, la quale mi pare corrisponda a quella trovata al Pino Torinese dal Michelotti (2), e da esso descritta col nome di *R. miocenica*, è rappresentata in questo Museo Geologico da alcuni individui, pure dei nostri colli. Differisce dalla tipica per caratteri abbastanza spiccati: mole mediocre, forma più smilza e meno depressa lateralmente, anfratti tondeggianti, regolarmente crescenti, costole longitudinali poco sporgenti, fuorchè nell'intersezione colle coste trasversali, in modo da produrre, segnatamente nei primi anfratti, una superficie regolarmente granulosa. Sebbene, a detta di molti autori, la *Ranella gigantea Lam.* sia specie assai variabile, ritengo che, non essendo stata accettata dagli altri paleontologi la divisione di essa in tre specie distinte proposta dal Michelotti (3), convenga distinguere questa nostra forma dalla tipica, quale varietà locale.

9. **Drillia crebricosta**, Bell. (4).

Var. *majuscula*, Myl., fig. 6.

D. a D. crebricosta Bell. his notis segreganda: *Testa majori, latiori; costis longitudinalibus rarioribus (undecim) superficie sublaevi: striis transversis passim vix perspicuis.*

---

(1) Bell., Ibid., p. 240.
(2) Michelotti, op. cit. p. 258.
(3) Hörnes, op. cit., Vol. I, p. 211.
(4) Bellardi, op. cit., Vol. II, p. 96.

Individuo di mole ragguardevole (lungh.: circa mm. 30, largh.: mm. 10 $^1/_2$), mancante dell'estremità della coda. — Questa forma connette la *D. crebricosta Bell.*, colla *D. raricosta* (*Bon*) (1), scostandosi tuttavia da entrambe per la maggior larghezza della conchiglia.

10. Clavatula gothica, May. (2).

a. Var. *inermis*, Myl., fig. 12.

C. a C. gothica genuina his notis segreganda: *Extimo anfractu antice laevi, ecostato; spinis marginis postici raris, muticis.*

Un individuo di mole mediocre, mancante dell'estremità caudale e del labbro esterno. — Si distingue agevolmente dalla forma tipica e dalla varietà *A* descritta e raffigurata dal Bellardi per la mancanza assoluta di costole trasversali nella parte anteriore dell' ultimo anfratto. Inoltre sono poco sviluppate le spine del margine posteriore.

b. Var. *bimarginata*, Myl., fig. 9.

His notis agnoscenda: *Anfractibus antice posticeque costa spinifera instructis; spinis marginis postici vero majoribus.*

Dieci individui di diversa mole (lungh.: mm. 30-43, largh.: mm. 11-16). — Differiscono dalla forma tipica nell'avere la carena ventrale scoperta in tutti gli anfratti, mentre in quella essa appare soltanto nell'ultimo anfratto, rimanendo nascosta negli altri.

In questa raccolta la forma tipica è rappresentata da un solo individuo.

11. Conus antiquus, Lam. (3)

Var. *producta*, Myl. (4), fig. 2.

C. a C. antiquo Lam. his notis segregandus: *Testa longiori, superne minus dilatata.*

---

(1) Bellardi, Ibid., p. 111.

(2) Bellardi, op. cit., Vol. II, p. 195 e 196.

(3) Lamarck. *Histoire nat. des Anim. sans vert.*, 2e édit., Vol. XI, p. 153.

(4) L'individuo raffigurato nella tavola non è perfetto: manca l'apice della coda, lungo circa 2 mm.

Sette individui, di cui uno di mole normale (diam.: mm. 37), gli altri più piccoli ed in parte malconci. — Il carattere principale di questa varietà locale (rappresentata nel Museo Geologico di Torino da alcuni esemplari) sta nel profilo quasi rettilineo e nella maggior lunghezza dell'ultimo anfratto, per cui il diametro trasversale della conchiglia è pari *alla metà* della lunghezza totale, mentre nella forma tipica raggiunge i $^{2}/_{3}$ di essa.

12. **Conus betulinoides**, Lam. (1).

Var. *pusilla*, Myl., fig. 1.

C. a C. betulinoidi genuino his notis sejungendus: *Testa valde minori; spira magis acuta: ultimo ejus ambitu subcomplanato.*

Trentotto individui di piccola mole, rispetto a quella cui giunge la forma tipica (lungh.: mm. 35-55). — Differiscono dagli esemplari pliocenici di questo Museo (tutti assai più grandi) nella forma della spira, più alta e più acuta nei primi anfratti; inoltre l'ultimo di questi essendo spianato superiormente, la sua carena riesce meno ottusa. Si scostano pure alquanto nel carattere della spira dal tipo viennese, descritto e figurato dallo Hörnes (2). Nel complesso sono conformi alla descrizione del Lamarck.

13. **Conus Puschii**, Micht. (3) (?), fig. 3.

Un individuo imperfetto, che ascrivo come forma aberrante alla specie *C. Puschii, Micht.*, cui corrisponde in tutti i caratteri dell'ultimo anfratto. È degno di nota per lo sviluppo anormale della spira, la quale, aggiungendovi idealmente i primi giri mancanti, raggiunge o supera $^{1}/_{3}$ della lunghezza totale.

---

(1) Lamarck, loc. cit.
(2) Hörnes, op. cit. p. 17, tav. I, fig. 1.
(3) Michelotti, op. cit. p. 340, tav. XIV, fig. 6.

14. Cypraea Brocchii, Desh. (1).

Var. *flavopunctata* Myl., fig. 4.

C. a C. Brocchii genuina his notis segreganda: *Testa superne magis globosa, marginibus subnullis, puncticulis rufo-flavis passim ornata.*

Individuo di mole mediocre (lungh.: mm. 25), affine al tipo torinese della *C. Brocchii*; ma contraddistinto, oltrechè dallo sviluppo scarsissimo dei margini laterali, dai punticini rossicci sparsi su tutta la superficie. Esaminati colla lente essi appaiono come piccoli incavi riempiti da un minerale ferruginoso. I caratteri della bocca sono normali.

15. Turritella (Proto) cathedralis, Brong. (2).

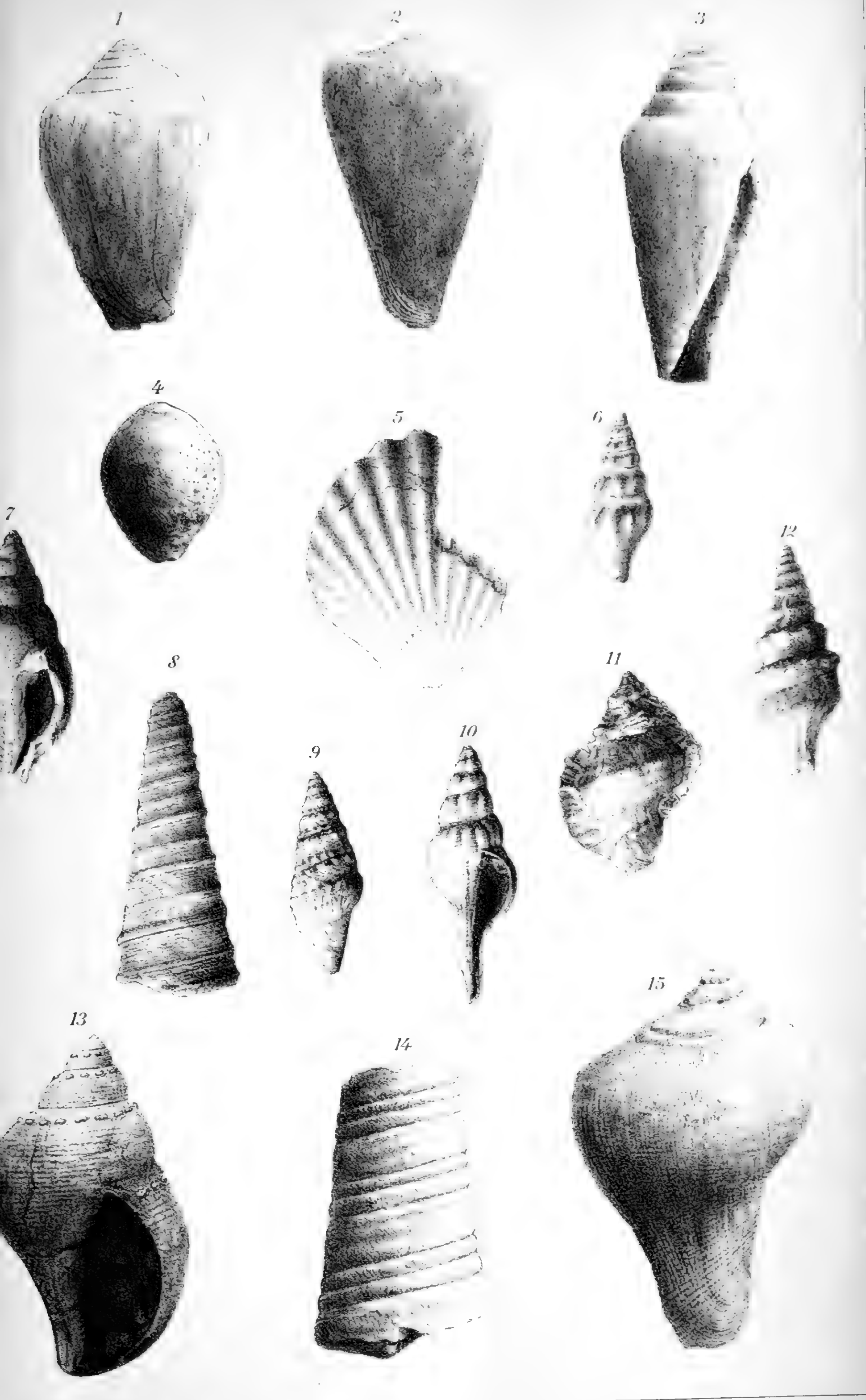
Var. *trisulca*, Myl., fig. 14.

T. a T. cathedrali Brong. his notis sejungenda: *Anfractibus magis minusve complanatis, antice tribus sulcis latiusculis instructis, postice late marginatis.*

Questa forma, rappresentata per ora da soli sette esemplari assai imperfetti e di diversa mole (15-30 mm. di diametro), si distingue facilmente dalla tipica in grazia dei tre solchi caratteristici che corrono sulla metà anteriore degli anfratti. Per quanto siano variabili i caratteri di questa specie (come ebbe ad osservare il Michelotti - op. cit., pag. 188), ritengo che la forma in parola si debba considerare come varietà distinta, scostandosi essa del pari dal tipo ad anfratti lisci e da quello confusamente e uniformemente solcato, comuni entrambi nei colli torinesi.

---

(1) Lamarck, op. cit., Vol. X, p. 575. — Hörnes op. cit., Vol. I, p. 69, tav. VII, fig. 3.
(2) Hörnes, op. cit., Vol. I, p. 419, tav. XLIII, fig. 1.



... lit.

Lit. Salussolia. Torino

16. Turritella strangulata, Grat. (1).

Var. *mediosubcarinata*, Myl., fig. 8.

T. his notis agnoscenda: *Anfractibus prope suturam anticam plica angusta praetextis, medio autem obtusissima carina instructis; superficie rugulis sinuosis longitudinalibus ac minutis striis transversis obsolete ornata.*

Individuo unico, imperfetto alle due estremità. Diametro magg.: mm. 18, lungh.: mm. 45. — Questa forma, rappresentata nel Museo Geologico da un solo esemplare di mole alquanto maggiore del nostro, va distinta da quella tipica del Grateloup per la dilatazione anteriore meno sporgente, e la carena caratteristica nel mezzo degli anfratti.

17. Pecten solarium, Lam. (2).

Var. *elongata* (?) Myl., fig. 5.

P. *valva superiori parva, obovata, aequilatera, paulo arcuata; costis quindecim fornicatis, intus biplicatis; striis minutissimis concentricis obsoletis passim perspicuis: auriculis parvis, verticaliter minutissime striatis.*

Una valva superiore imperfetta, di piccola mole (altezza: mm. 40, diametro trasversale: circa mm. 36). Questo individuo, che dal complesso dei caratteri ritengo giovane, differisce dal *P. solarium* tipico per la forma della conchiglia allungata in direzione dorso ventrale e per la piccolezza delle orecchie.

Il Museo Geologico possiede fra i Pettini fossili dei colli torinesi due valve affinissime a questa nella forma generale, nel numero ed aspetto delle coste radiali e di mole poco minore. Possiede inol-

(1) Grateloup, *Conchyliologie fossile du bassin de l'Adour.* Tav. XIV, fig. 13.

2) Lamarck, op. cit., Vol. VII, p. 115.

tre parecchie valve giovanili coi caratteri tipici della specie più o meno spiccati, ed alcune altre di mole maggiore (diam.: 10 cent. all' incirca), dall' aspetto adulto. Accenno a questo fatto perchè finora il *P. solarium* Lam. non era annoverato fra le specie fossili dei colli torinesi.

R. Museo Geologico di Torino
febbraio 1891.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZE dell'8 e del 22 Febbraio 1891 . . . . *Pag.* 327

Mylius — Intorno ad alcune forme inedite di Molluschi miocenici . » 329

Torino — Tip. Reale-Paravia

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXVI, Disp. 9ª, 1890-91

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'8 Marzo 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: COSSA, Direttore della Classe, BRUNO, BERRUTI, D'OVIDIO, BIZZOZERO, FERRARIS, NACCARI, SPEZIA, GIACOMINI, CAMERANO, SEGRE e BASSO Segretario.

Il Segretario legge l'atto verbale dell'adunanza precedente che viene approvato.

Fra le opere stampate che giunsero recentemente in dono all'Accademia merita menzione speciale un libro del signor Prof. A. CHAVEAU, Membro dell'Istituto di Francia, col titolo: *Le travail musculaire et l'énergie qu'il représente.*

Vengono in seguito letti ed accolti per la pubblicazione negli *Atti* i quattro lavori seguenti:

1° « *Nota intorno a teoremi sulle coniche nella metrica proiettiva* »; del Socio D'OVIDIO. Questo studio si collega ad altri dello stesso Socio già presentati in adunanze precedenti.

2° « *Influenza dell'eccentricità dell'alidada sui vernieri ed un microscopio ad ingrandimento costante* »; Nota del Prof. Nicodemo JADANZA, presentata dal Socio NACCARI.

3° « *Sulla velocità di massimo rendimento ed a vuoto delle turbine* »; Nota dell'Ing. Angelo BOTTIGLIA, Prof. nel R. Museo Industriale Italiano, presentata dal Socio FERRARIS.

4° *Della struttura dell'epitelio vaginale della coniglia e delle modificazioni che vi avvengono nella gravidanza* »; lavoro del Dott. Ignazio SALVIOLI, presentato dal Socio BIZZOZERO.

LETTURE

Osservazioni intorno ad alcune forme del Gen. Apoblema *Dujard.*;

di Fr. Sav. MONTICELLI

(Lavoro letto nell'adunanza del 14 Dicembre 1890)

Rudolphi ha trovato nei Clupeidi oltre al *D. appendiculatum* altre due forme differenti che indicò coi nomi di *D. ocreatum* e *D. ventricosum*; l'una trovò nell'intestino della *Clupea Harengus*, laltra nell'*Alosa vulgaris*. La prima specie descrisse per la prima volta col nome di *Fasciola ocreata* nel *Wiedemann's Archiv.*, J. III, I, pag. 79 e ridescrisse nell'*Entoz. Hist.*, Vol. II a pag. 397-398; la seconda nell'*Entoz. Synop.* a pag. 108 e 398. Alla prima specie riferì la *Fasciola halecis* di Gmelin ed il *Distoma halecis* di Zeder (ved. *Ent. Hist.*, pag. 398).

Egli così caratterizzò le due specie nuove:

1° *D. ocreatum: teres, collo antrorsum tenuiore divergente, cauda retractili, poris globosis, antico terminali, ventrali majore.*

2° *D. ventricosum: teres oblongum, abdomine prominente, poris globosis, ventrali majore* (pag. 108).

Al primo Distoma assegnò una lunghezza di mill. 1,2 a 2,25, al secondo quella di mill. 1,12 — 1.5.

Il Dujardin (1), tenuto conto della coda o appendice caudale retrattile, collocò il *D. ocreatum* nel suo sottogenere *Apoblema* (pag. 422); il *D. ventricosum*, invece, enumerò fra le specie di Distoma che non aveva potuto classificare con certezza nei suoi sottogeneri (pag. 465).

Diesing (2) riunì i due distomi nel suo gruppo degli *inermia* a *corpus teres* e ad *acetabulum sessile ore majus* (3), considerandoli, come già il Dujardin, forme distinte dal *D. appendiculatum*. Il Cobbold (3) li registra semplicemente a pag. 29 della sua *Synopsis*.

(1) *Hist. Nat. des Helminthes.*
(2) *Syst. Helm.*, I, pag. 369 (*D. ventricosum*), pag. 372 (*D. ocreatum*).
(3) In: *Journ. of the Linnean Society of London Zoology*, I (estratto).

Nel 1859 il Molin (1) riferì al *D. ocreatum*, Rud. un Distoma della *Clupea alosa* e modificò la frase di Rudolphi nel modo seguente: *Corpus teres inerme, os terminale globosum: collum antrorsum attenuatum acetabulum ore majus prominulum ad colli basim: apertura genitalis ante acetabulum: penis retortaeformis: porus excretorius in apice appendicis brevis retractilis.* Long. 0.01—0.02.

Diesing (2), nei suoi *Nachtrag* alla *Revision der Myzhelminthen* riporta il *D. ocreatum* Rud. con le nuove notizie fornite dal Molin, osservando che la *Clupea alosa* è un nuovo ospite del detto Distoma, fino allora noto solo della *Clupea harengus.*

Il Wagener (3) (1860) dall'esame di materiale fresco e da comparazione dei tipi di Rudolphi esistenti nel Museo Zoologico di Berlino scrive che: « Die Angaben über *Distoma appendiculatum*, unter welchem Artnamen sehr verschiedene Species von den Autoren verstanden werden, sind sehr luckenhaft », e conclude dalle sue ricerche che:

☛ NB. *La Tavola relativa a questa Memoria verrà pubblicata in una prossima Dispensa.*

ocreatum, *crenatum*, *ventricosum* beschrieben worden ».

Nello stesso lavoro a pag. 183 dice che dall'esame degli esemplari tipici di Rudolphi risulta che i seguenti Distomi così classificati in collezione dal Rudolphi sono = *D. ventricosum*: *D. ocreatum* e *D. appendiculatum* del ventricolo della *Clupea alosa*, *D. crenatum* ex int. *Gasterosteus aculeatus*, *D. appendiculatum* ex int. *Salmo Salar*.

---

(1) *Prospectus helminthum quae in prodr. faunae helm. Venetae*, ecc. in: Sitz. Berich. k. Akad. Wien, Bd. XXXIII, pag. 289.

(2) In: Sitz. Bericht k. Akad. Wien, Bd. XXXV, pag. 432.

(3) Ueber *Distoma appendiculatum* Rud. in: *Arch. f. Naturg*, 1860, 26 Jahr. I, pag. 166-167.

LETTURE

Osservazioni intorno ad alcune forme del Gen. Apoblema *Dujard.*;

di FR. SAV. MONTICELLI

(Lavoro letto nell'adunanza del 14 Dicembre 1890)

Rudolphi ha trovato nei Clupeidi oltre al *D. appendiculatum* altre due forme differenti che indicò coi nomi di *D. ocreatum* e *D. ventricosum*; l'una trovò nell'intestino della *Clupea Harengus*, laltra nell'*Alosa vulgaris*. La prima specie descrisse per la prima volta col nome di *Fasciola ocreata* nel *Wiedemann's* [illegible] retrattile, collocò il *D. ocreatum* nel suo sottogenere *Apoblema* (pag. 422); il *D. ventricosum*, invece, enumerò fra le specie di Distoma che non aveva potuto classificare con certezza nei suoi sottogeneri (pag. 465).

Diesing (2) riunì i due distomi nel suo gruppo degli *inermia* a *corpus teres* e ad *acetabulum sessile ore majus* (3), considerandoli, come già il Dujardin, forme distinte dal *D. appendiculatum*. Il Cobbold (3) li registra semplicemente a pag. 29 della sua *Synopsis*.

(1) *Hist. Nat. des Helminthes.*
(2) *Syst. Helm.*, I, pag. 369 (*D. ventricosum*), pag. 372 (*D. ocreatum*).
(3) In: *Journ. of the Linnean Society of London Zoology*, I (estratto).

Nel 1859 il Molin (1) riferì al *D. ocreatum*, Rud. un Distoma della *Clupea alosa* e modificò la frase di Rudolphi nel modo seguente: *Corpus teres inerme, os terminale globosum: collum antrorsum attenuatum acetabulum ore majus prominulum ad colli basim: apertura genitalis ante acetabulum: penis retortaeformis: porus excretorius in apice appendicis brevis retractilis.* Long. 0.01—0.02.

Diesing (2), nei suoi *Nachtrag* alla *Revision der Myzhelminthen* riporta il *D. ocreatum* Rud. con le nuove notizie fornite dal Molin, osservando che la *Clupea alosa* è un nuovo ospite del detto Distoma, fino allora noto solo della *Clupea harengus.*

Il Wagener (3) (1860) dall'esame di materiale fresco e da comparazione dei tipi di Rudolphi esistenti nel Museo Zoologico di Berlino scrive che: « Die Angaben über *Distoma appendiculatum*, unter welchem Artnamen sehr verschiedene Species von den Autoren verstanden werden, sind sehr luckenhaft », e conclude dalle sue ricerche che:

« Es sind bis jetz nur vier Distomenspecies mit zurückziehbarem schwanze bekannt:

1) *D. ventricosum* R.
2) *D. excisum* R.
3) *D. tornatum* R.
4) *D. rufoviride* R. »

Alle « übrigen, welche noch von Rudolphi und Dujardin als Distomen mit zurückziehbarem Schwanze aufgeführt werden, sind entweder auf die oben genannten zurückzuführen oder aber sie haben gar nichts mit dieser Thiergruppe zu thun » infatti del *D. ventricosum* scrive « von Rudulphi ist es als *D. appendiculatum*, *ocreatum*, *crenatum*, *ventricosum* beschrieben worden ».

Nello stesso lavoro a pag. 183 dice che dall'esame degli esemplari tipici di Rudolphi risulta che i seguenti Distomi così classificati in collezione dal Rudolphi sono = *D. ventricosum*: *D. ocreatum* e *D. appendiculatum* del ventricolo della *Clupea alosa*, *D. crenatum* ex int. *Gasterosteus aculeatus*, *D. appendiculatum* ex int. *Salmo Salar.*

---

(1) *Prospectus helminthum quae in prodr. faunae helm. Venetae*, ecc. in: Sitz. Berich. k. Akad. Wien, Bd. XXXIII, pag. 289.

(2) In: Sitz. Bericht k. Akad. Wien, Bd. XXXV, pag. 432.

(3) Ueber *Distoma appendiculatum* Rud. in: *Arch. f. Naturg*, 1860, 26 Jahr. I, pag. 166-167.

Molin (1861) nel *Prodromus Faunae helmintolog.*, ecc. (1), riporta il *D. ocreatum* e ne dà una figura. (Dal contesto si vede che egli non conosceva ancora il lavoro del Wagener). In questo lavoro il Molin, per meglio stabilire le differenze, dà pure una figura e descrizione del *D. appendiculatum*, ne stabilisce la sinonimia (pag. 204 Tav. II, fig. 3) e ne modifica, ampliandola, la frase diagnostica.

Olsson nel 1860 (2) descrive un *Distoma appendiculatum* Rud. et Molin ed un *Distoma ocreatum* Molin. Il primo, come si rileva dal contesto (pag. 46, Tav. V, fig. 95), è il *D. ventricosum* Rud. del Wagener, del quale accetta in parte le conclusioni, solo lo chiama *appendiculatum* col Molin, perchè questo nome è più antico del *ventricosum*. Il secondo è un Distoma che egli crede identico al *D. ocreatum* di Molin. Questa identità, secondo egli dice, si fonda esclusivamente sui caratteri dati dal Molin *penis retortaeformis* ed *apertura genitalis ante acetabulum*, perchè egli ammette che Molin sotto il nome di pene comprende pure la tasca del pene e la vescicola seminale esterna [« att Molin under penis inbegripit äfven bursa med vescicula semin. exter. »] (pag. 48-49, Tav. V, fig. 96-98). Egli sulla fede di Wagener non crede il *D. ocreatum* Rud.=*D. ocreatum* Molin.

Van Beneden (3) a pag. 67-69 indica il *D. ventricosum* Rud. della *Clupea sprattus*, dell'*Alosa finta* ed *A. communis* e dà un disegno degli esemplari della *Alosa finta* (Pl. IV, fig. 11). A pag. 67 indica un *D. minimum* n. sp. fra i parassiti della *Clupea sprattus*, ma non lo descrive, nè figura; in nota scrive d'averlo trovato in abbondanza nei ciechi pilorici e nello intestino di due individui presi nei serbatoi di ostriche.

Il Linstow nel *Compendium. d. Helminth.* fra i parassiti della *Clupea* (Alosa) *vulgaris*, segna il *D. ventricosum* R. come = al *D. ocreatum* Molin (4).

Carus (5) ha riunito al *D. ventricosum* Rud. di G. Wagener il *D. appendiculatum* p.p., *ocreatum* Molin, *crenatum* Rud. *D. appendiculatum* Duj. Mayer, ed il *D. varium* Eysenhardt.

(1) In: *Denk. k. Akad. Wien*, Bd. XIX, pag. 209, tav. VII, fig. 7.

(2) *Entozoa, jakttagna hos skandinaviska Hafsfiskar*, II, Platy, elminthes in: Lunds Universitets Arsskrift, tom. IV.

(3) *Les poissons des côtes de Belgique*, etc.

(4) V. pag. 209, n. 1462.

(5) *Prodromus faunae mediterraneae*, Vol. I, pag. 125.

Stossich (1) ammette: un *Distomum ventricosum* Rud., al quale riferisce il *D. ventricosum* Wagener ed il *D. ventricosum* Rud. indicato e figurato dal Van Beneden (loc. cit.), ed un *D. ocreatum* Molin, al quale riporta il *D. ocreatum* Molin di Olsson. Siccome lo Stossich non fa cenno di un *D. ocreatum* Rud. e cita nella sinonimia del suo *D. ventricosum* Rud. il Wagener, il quale, come si è innanzi visto, ritiene il *D. ocreatum* Rud. = al *D. ventricosum*, così io credo che egli lo consideri sinonimo del *D. ventricosum*.

Io ho ritrovato nelle *Clupea pilchardus* del nostro golfo un Distoma che ho riferito al *D. ocreatum* Molin (2) ed ho asserito essere esso identico al *D. ocreatum* Rud. e differente dal *D. ventricosum* Rud. col quale Linstow identificava (v. loc. cit. innanzi) il *D. ocreatum* Molin.

Recentemente il Juel, che ha dato una Synopsis (3) delle specie finora descritte del genere *Apoblema* Dujardin:

I. mette fra i sinonimi del *D. appendiculatum* Rud. il *D. ventricosum* Rud. del Wagener con l'osservazione « ich kann nicht finden, dass mit der Beschreibung Rudolphi 's von *D. ventricosum*, in Ent. Synops. pag. 108 und. 398, eine *Apoblema* - Art gemeint ist ».

In nota aggiunge che la *Fasciola ocreata* Rud. = *D. ocreatum* Rudolphi « scheint die vorige Art zu sein, wie auch Wagener und Olsson (teste Wagenero) annehmen ».

II. accetta fra le specie il *D. ocreatum* Molin dell'Olsson (non Rudolphi) come forma distinta attribuendo il nome specifico a quest' ultimo.

---

(1) *I Distomi dei pesci marini e di acqua dolce*. Trieste 1886, pag. 11-12.

(2) *Note elmintologiche: Sul nutrimento e sui parassiti della sardina (Clupea pilcardus) del Golfo di Napoli*, in: Boll. Soc. Nat. Napoli, Vol. I, fasc. 2, 1887, pag. 87 e nota 3.

(3) *Beiträge zur Anatomie der Trematodengattung Apoblema* Duj. in: Bihang, till. k. Svenska Vet. Akad. Handlingar. Bd. 15, Af. IV, n. 6.

Questo *A.* (pag. 3) per la presenza dell'appendice caudale e per le particolarità anatomiche da lui osservate, che allontanano le *Apoblema*, secondo la sua opinione, dagli altri Distomi, crede di elevare il sottogenere *Apoblema*, a genere distinto. Io credo questo operato pienamente giustificabile, chè parmi la presenza di un'appendice caudale ed il peculiare modo di sbocco dei genitali sono delle caratteristiche generiche sufficienti ed equivalenti a quelle invocate per gli altri generi di *Distomidae* e d'altra parte, credo utile smembrare il genere *Distomum* troppo ricco di specie. La mancanza della *vagina* (canale Laurer), invocata dal Juel

III. enumera fra le specie dubbie o poco note del genere insieme ai *D. gigas* e *Raynerianum* del Nardo (1) e *D. Labrirupestris* Olsson, anche il *D. ocreatum* Molin non Rudolphi, nec Olsson.

In questo anno il Sonsino (2) dai suoi studi sui Distomi appendicolati dei Pesci conclude che le sue osservazioni « collimerebbero con la classazione dei *Distomi appendicolati* fatta dal Wagener nelle quattro specie innanzi ricordate »: egli di queste ne descrive tre, *D. excisum*, *D. rufoviride*, *D. ventricosum*.

Dalla esposizione storica che ho fatto si vede che gli A. non sono tutti d'accordo sulle specie del genere *Apoblema* innanzi menzionate.

Scopo del presente studio è appunto di vedere se le due citate specie del Rudolphi *D. ocreatum* e *D. ventricosum* sono o no da conservarsi, e stabilire la loro sinonimia. Siccome però la loro sorte è legata a quella del *D. appendiculatum*, così debbo occuparmi anche di quest'ultimo.

Nelle collezioni zoologiche di Berlino, che, grazie alla cortesia del Prof. Möbius, ho potuto studiare, ho esaminati i tipi

---

come caratteristica generica, non può esser considerata come tale, perchè essa non si avvera solo nelle *Apoblema*. Io ho dimostrato infatti che essa può mancare anche in altri *Distomi* (*D. Richiardi*). V. *Boll. Soc. Nat.* in Nap., Vol. III, pag. 134 e posseggo osservazioni di simil genere sopra altre specie di *Distomi*.

(1) L'A. mette questi due *Distomi* fra le forme dubbie del suo genere *Apoblema* sulle indicazioni del Carus (*Prodromus faun. medit.*, pag. 125-126), pur osservando che in « *der Beschreibung Nardo 's wird von keinem einziehbaren Schwanze geredet* » (pag. 6-7). Le mie osservazioni personali provano evidentemente che il *D. gigas* Nardo non è un *Apoblema* (*Proc. Zool. Soc.* 1889, pag. 322, Pl. XXXIII, fig. 2-3). Il Carus ha male interpretato le parole della frase del Diesing (*Syst. Helm.*, I, pag. 373) *cauda longa retrorsum incrassata obtusa*, perchè il Nardo nella sua descrizione indica così la parte posteriore del corpo del suo *Distoma*.

L'esame di alcuni individui di *Distoma* raccolti nell'intestino del *Luvarus imperialis* a Trieste, dall'amico prof. M. Stossich gentilmente comunicatimi e che io riferisco al *D. Raynerianum* del Nardo, mi ha dimostrato evidentemente (cosa della quale io era precedentemente convinto) che anche questo non appartiene al genere *Apoblema* e che anche per questa specie era stata non bene interpretata la frase diagnostica del Diesing (copiata, come quella del *gigas*, dal Nardo *v. in: Isis*, 1833, pag. 523-524.

(2) *Studii e notizie elmintologiche, in : Proc. verb.* Soc. Tosc. Sc. Nat., 1890, 4 maggio, pag. 9-16 (estratto).

di Rudolphi del *D. ocreatum*, *D. ventricosum* e quelli del *D. ventricosum* Wagener, e da questo esame e dallo studio critico comparativo delle varie descrizioni e figure date dei *D. appendiculatum* Rud., *D. ocreatum* Rud. e *D. ventricosum* Rud., non che di materiale fresco, sono arrivato alle conclusioni seguenti:

I. che il *D. ocreatum* e *D. ventricosum* Rud. sono forme distinte dal *D. appendiculatum* Rud., dal quale si distinguono pricipalmente, oltrecchè per altri caratteri anatomici, per avere una coda brevissima (1), per le loro dimensioni molto minori e per il punto di sbocco allo esterno degli organi genitali.

Dai quali caratteri si rileva come il *D. ventricosum* del Wagener non può aver nulla di comune col *D. ventricosum* Rud. ma è invece forma identica all'*A. appendiculatum* Rud.

II. che il *D. ventricosum* Rud. ed il *D. ocreatum* Rud. vanno riuniti insieme in una sola specie che deve chiamarsi *A. ocreatum* Rud., essendo questo il nome più antico.

III. che il *D. ocreatum* Molin deve considerarsi sinonimo dell'*A. ocreatum* Rud.

IV. che il *D. ocreatum* Molin dell'Olsson (*D. ocreatum* Olsson del Juel) deve rientrare nei sinonimi dell'*A. appendiculatum*.

V. che il Distoma da me ritrovato nelle *Clupea pilchardus* del Golfo di Napoli, e che ho riferito al *D. ocreatum* Rud. dopo le comparazioni e gli studi fatti, deve esser considerato specie distinta dall'*A. ocreatum* (= *A. ventricosum*), dall'*A. appendiculatum* e dalle altre del genere *Apoblema*.

Descriverò ora e stabilirò la sinonimia dell'*A. appendiculatum*. Rud e dell'*A. ocreatum* Rud. e descriverò pure la nuova specie che indicherò col nome di *A. Stossichii*, dedicandola all'amico Prof. Michele Stossich di Trieste.

---

(1) Secondo il Rudolphi l'appendice caudale si troverebbe (vedi la diagnosi innanzi riportata) solo nel *D. ocreatum*, ma come io ho potuto vedere la coda, assai breve, esiste anche negli esemplari di *D. ventricosum* di Rudolphi da me esaminati, come innanzi esporrò.

APOBLEMA APPENDICULATUM Rud.

(Distoma appendiculatum)

in: Wiegmann's Archiv., Jahr. III, pag. 78, tab. II, fig. 6.

(Fig. 6, 12, 15*b*).

Note critiche.

Ammessa innanzi la non identità del *D. ventricosum* Wag. col *D. ventricosum* Rud., ne risulta che il Distoma descritto da Wagener deve entrare fra i sinonimi dell'*A. appendiculatum* Rud. L'Olsson (e ne ho dette le ragioni) ed il Juel anch'essi riferiscono il *D. ventricosum* Wag all'*A. appendiculatum* di Rud., ma la differenza fra la mia e la loro conclusione sta in ciò che essi nel riferire il *D. ventricosum* Wag. al *D. appendiculatum* Rud. ammettono col Wagener pure la identità del *D. ocreatum* Rud. e *D. ventricosum* col *D. appendiculatum*.

Dalle mie ricerche credo poter stabilire nel modo seguente la descrizione e sinonimia dell'*A. appendiculatum*. Non do una figura, perchè essa è stata già data dal Wagener ed è sufficiente a permettere il riconoscimento della specie (1).

Descrizione

Corpo inerme, ugualmente cilindrico, allungato per tutta la sua lunghezza, anteriormente ristretto, coniforme, molto contrattile, con appendice caudale di mediocre lunghezza (2) [circa la metà della lunghezza totale del corpo, in media], molto ristretta posteriormente ed a punta acuta, retrattile interamente. Tutta la superficie del corpo è fortemente pieghettata trasversalmente: tale pieghettatura, fortissima nei due terzi anteriori del corpo, si fa nel terzo posteriore meno apparente e così pure nella appendice caudale, nella quale spesso sembra mancare del tutto.

Ventosa anteriore piccola subglobosa, ventrale, subterminale.

---

(1) Op. cit., Tav. VIII (per errore indicata col n. IX) fig. 1-7 (2-7 particolarità) *D. ventricosum*.

(2) Comparativamente a quella lunga del *D. excisum*, lunghissima del *D. tornatum*, breve del *D. rufoviride* e brevissima dei *D. ocreatum* e *ventricosum* e della n. sp. *A. Stossichii*.

Ventosa posteriore grande, due volte maggiore della anteriore. Le due ventose sono tra loro assai ravvicinate e la piccola porzione di superficie ventrale che intercede tra esse mostrasi incavata leggermente. Apertura genitale immediatamente dietro la ventosa anteriore. Faringe a palla, esofago brevissimo, subnullo. Braccia intestinali esili, molto lunghe, che si spingono nella appendice caudale senza raggiungere l'estremità di questa. Tronco mediano del sistema escretore che si biforca dietro i testicoli in prossimità del testicolo posteriore.

Testicoli due, piccoli, globosi, situati l'uno innanzi all'altro, molto ravvicinati, nella linea mediana del corpo, nella metà della lunghezza del corpo (non calcolata, s'intende, l'appendice caudale). Dai singoli testicoli partono due deferenti i quali si fondono presto in un unico ed esile deferente brevissimo che si apre in una vescicola (ricettacolo) seminale esterna, spesso ristretta nel mezzo, a formare due cavità consecutive. Dalla estremità anteriore della vescicola seminale si origina la tasca del pene, che è di mediocre lunghezza e poco ondulata; il pene lungo quanto la tasca rivestito di papille coniche: la tasca del pene è circondata da numerose cellule prostatiche (*Drusenzellen* del Juel). La tasca del pene sbocca in vicinanza dell'ovidutto esterno nella estremità posteriore di un antro genitale di forma ovalare allungata e di complicata struttura (*Vestibulum genitale* Juel) che si apre allo esterno nella innanzi detta apertura genitale.

Ovario anch'esso globoso situato nella linea mediana del corpo innanzi le glandole vitelline e dietro i testicoli. Dall'ovario parte inferiormente un canale il quale da un lato si allarga (1) in una vescicola (ricettacolo seminale interno), dall'altro (ovidutto interno) si continua con l'utero; prima di slargarsi a formare l'utero, l'ovidotto riceve il dottolino vitellino e lo sbocco delle glandole del guscio. L'utero subito dopo la sua origine si dirige verso l'estremità posteriore del corpo, ravvolgendosi su se stesso e raggiunge l'appendice caudale nella quale si addentra per breve tratto, poi risale facendo poche ondulazioni fino all'altezza dei vitellogeni; da questo punto i suoi ravvolgimenti divengono maggiori e complicati: poi di nuovo si fa meno ravvolto (ovidutto esterno)

(1) Juel, op. cit., pag. 32, indica questa porzione nell'*A. excisum* come un *Befruchtungsgang*.

e descrivendo poche ondulazioni va a sboccare nel modo innanzi detto nell'antro genitale.

I vitellogeni sono due, semplici, rotondeggianti, giustapositi, situati nel mezzo della regione del corpo che intercede tra la ventosa posteriore e l'appendice caudale: essi sono riuniti fra loro da un vitellodutto trasverso che è formato dalla riunione dei singoli vitellodutti dei due vitellogeni, i quali nel loro punto di fusione si rigonfiano spesso leggermente a formare un piccolo ricettacolo vitellino; da questo parte il dottolino impari innanzi detto (1), che sbocca nell'ovidotto interno. Le uova sono perfettamente ovalari, assai numerose e molto piccole.

Il colorito generale di questa specie è gialletto molto chiaro anteriormente; posteriormente variabile dal giallo ocra al giallo chiaro; l'appendice caudale nella sua parte anteriore è colorata come la parte posteriore del corpo; la sua estremità è bianchiccia trasparente.

Lungh. 2-6 mill.

Sinonimia.

Per la sinonimia di questa specie fino al 1850 rimando al Diesing (Syst. Helm. Vol. I, pag. 370): enumero ora solamente quelle forme che devono ritenersi sinonime del *D. appendiculatum* illustrate da tal epoca ai giorni nostri.

1858	*D. appendiculatum*	Diesing. Sitz. Berich. k. Akad. Wien, Bd. XXXII, pag. 342.
1859	»	» ibid. » XXXV, pag. 431.
1859	»	Cobbold. Synopsis of Distomidae, p. 27.
1859-61	»	Molin. Sitz. Berich. k. Akad. Wien, Bd. XXXIII, pag. 289. » Denk. k. Akad. Wien, Bd. XIX, p. 204, Tav. II, fig. 3.
1868	»	Olsson. Entoz. skand. hafsfisk. II, pagina 46, Tav. V, fig. 95.

(1) Secondo il Juel, invece, i singoli vitellodutti dei vitellogeni sboccherebbero indipendentemente l'uno dall'altro nell'ovidotto, v. pag. 32, fig. 12 (*A. excisum*).

1870	*D. appendiculatum*	Van Beneden. P. J. Poiss. côtes de Belgigue parasitet comm. pag. 66, Tav. IV, fig. 15.
1876	»	Olsson. Bidrag till Skand. Helminth. fauna. I, pag. 20, n° 17.
1881	»	Levinsen. Gronland's Trematodfauna, pag. 9.
1883-88	»	Stossich. Bull. Soc. Adr. Sc. Nat. Vol. VIII, pag. 115; Vol. IX, pag. 159, Vol. IX, pag. 47, Vol. X, pag. 90, Vol. X, pag. 184. I Distomi dei Pesci Marini e di acqua dolce, pag. 13. — Appendice al lavoro suddetto pag. 5.
1889	»	Juel. Beiträge zur Anatomie der Trematodengatt. Apoblema, p. 4, fig. 17.
1860	*D. ventricosum.*	Wagener. Ueber Distoma appendiculatum, p. 166, Tav. VIII, fig. 1-7.
1884	»	(p.p.) Carus. Prodr. Fauna Medit. Vol. I, pag. 125.
1886	»	(p.p.) Stossich. I Distomi dei Pesci, ecc., pag. 11.
1888		Appendice al detto lavoro p. 5.
1890	»	(p.p.) Sonsino, Studi e notizie elmintologiche. Atti Soc. Tosc. Sc. Nat., Pr. verb. 4 Maggio 1890, p. 12-13.
1868	*D. ocreatum.*	Olsson. Entozoa Skandinav. hafsfisk. II, pag. 48-49, Tab. V, fig. 96-98.

Habitat. — Questo Distoma si trova frequente in moltissimi pesci molto diversi, ed è certamente il Distoma che ha più larga distribuzione zoologica fra tutti. Io non enumero qui tutti i pesci nei quali è stato finora trovato, osserverò solo che nei Pesci dei golfo di Napoli l'ho anche ritrovato comune e frequente; frequentissimo ed abbondante specialmente nella *Clupea alosa* Cuv.; non l'ho finora mai trovato nella *Clupea pilchardus* Walb.

Note biologiche.

Möbius e Willemoes-Suhum (1) hanno trovato nel Baltico sia libero, sia nelle larve pelagiche di Vermi e nei Copepodi liberi (Cyclops) una sorta di Distoma appendiculato asesssuato, che, probabilmente, secondo il Willemoes-Suhum, passerebbe direttamente nei Pesci per mezzo delle larve di Anellidi e dei Copepodi e si trasformerebbe, secondo Möbius, nel *D. ocreatum* della *Clupea harengus*. Più tardi il Giesbrecht ha ritrovato lo stesso Distoma appendicolato asessuato più frequentemente nel *Pseudocalanus elongatus* (*Lucullus acuspes*) e raro nel *Centropages hamatus* della baia di Kiel (2).

Dalle descrizioni brevi date dal Willemoes-Suhum e dal Giesbrecht non era possibile dire con certezza se veramente fosse questa forma da loro trovata quella larvale del *D. ocreatum* come credeva il Möbius.

La cortesia del sig. D[r] Giesbrecht, che ha voluto gentilmente mettere a mia disposizione i Distomi da lui trovati nei Copepodi di Kiel, mi ha permesso uno studio più accurato di questa forma di Distomide appendicolato e di concludere che esso è *la forma giovane dell'A. appendiculatum.*

Questa identificazione permette, come io credo, di spiegare la così larga distribuzione zoologica dell'*A. appendiculatum* appetto degli altri Distomidae dei pesci, perchè essendo i Copepodi nutrimento ordinario e forse esclusivo (3) per alcune specie di pesci (Clupeidi) e potendolo essere accidentalmente o fors'anco ordinario di molte altre specie di pesci, questi possono facilmente acquistare l'*A. appendiculatum.*

Non descriverò qui questa forma giovane che può facilmente riconoscersi dal disegno che ne do (fig. 6, 12). Osserverò solo

---

(1) *Biologisches Beobacht. über nieder Meersthiere*, in: *Zeit. Wiss. Zool. Band.* XXXI, pag. 383, § 3. *Entwick. eines appendiculate Distoms.*

(2) *Die freilebenden Copepoden der Kieler Fohrde — Bericht Comm. zu Wiss. Unters. d. Deut. Meere in Kiel* 1877-81, pag. 163.

(3) Infatti Möbius nel Baltico ha frequentemente osservato che il contenuto dello stomaco della *C. harengus* constava esclusivamente di Copepodi. (*Temora longiremis*) — *Jahrsb. d. Comm. zur Wiss. Unter. d. Deut. Meer. in Kiel*, 1873, *Exped. der Untersuchung. der Ostsee* in Sommer 1871, cap. IV, pag. 140-141.

che essa presenta già tutti gli organi genitali sviluppati e non un accenno dei medesimi, come sostiene il Willemoes-Suhum, ma non si osserva ancora produzione di uova (fig. 12); forse l'osservazione di Will.-Suhum si riferisce alle forme larvali non ancora penetrate nei Copepodi. L'individuo disegnato nella fig. 6 misura $^1/_2$ mill. in lunghezza, quello della fig. 12 1 mill. appena.

Il Willemoes-Suhum ed il Giesbrecht (op. cit.) non sono d'accordo sul modo come questa forma giovane penetra nei Copepodi. Il primo dice che esso penetra nei *Cyclops* per la parte anteriore del corpo. Il secondo descrive più minutamente come penetra nei *Centropages hamatus* e sostiene che vi entra per la estremità caudale. Io non ho osservazioni in proposito e quindi non posso dirimere la controversia, ma pare a me più possibile l'opinione del Willemoes-Suhum che penetri per la parte anteriore per le ragioni che più oltre dirò. Quel che ho potuto osservare e constatare è che l'*Apoblema* occupa quasi tutto il corpo del Copepodo del quale ha distrutti i tessuti del corpo (fig. 6).

Osservazioni.

Il Juel segna con dubbio fra le specie del genere *Apoblema* il *Distomum* (Fasciola) *scabrum* del Müller (Zool. Danica, p. 14, Tab. LI, fig. 1-8) con la seguente nota.

« Rudolphi citirt in Ent. Hist pag. 406 unter dem Namen *D. scabrum* die Beschreibung Muller's.: in Entoz. Synops pag. 424 beschreibteraber unter demselben Namen eine ganz andere Art, die warscheinlich der Untergattung Echinostoma Dujardin angehört, welche er in Lota molva gefunden hat: dieser Irrthum hat seitdem in der Litteratur fortgelebt, ecc... ».

Dall'esame della descrizione e delle figure del Müller io mi son convinto che la sua *Fasciola scabra* è la stessa cosa del *D. appendiculatum:* quindi il *Distoma scabrum* di Zeder, riportato dal Rudolphi, Entoz. Hist, pag. 406-408, alla *Fasciola scabra* di Müller, rientra nei sinonimi dell'*A. appendiculatum*.

Quanto al *Distoma scabrum* dal Rud. descritto nella Synops. sono d'accordo col Juel: esso è specie tutt'affatto differente, ma non sono d'accordo con lui nel ritenere le forme di *Apoblema* dell'Olsson (v. Juel, pag. 7, citat. Olsson n° 19, pag. 48) del *Gadus melanostomum*, *Rombus laevis* e *Pleuronectes limandoides* come distinte dall'*A. appendiculatum :* credo pure all'identità specifica dell'*A.* descritta sotto il nome di *D. appendiculatum* dal Levinsen (Groenl. Trematodfauna) coll'*A. appendiculatum.*

APOBLEMA OCREATUM Rud.

(*Fasciola ocreata* Rud.)

in Wiedmann's Archiv., Jahr. III, I, pag. 79.

[= *Ap. ventricosum (D. ventricosum)* Rud. Ent. Synopsis, Vol. II, pag. 108-398].

(Fig. 1, 5, 7, 10, 11, 14, 15 *c*)

Descrizione.

Corpo breve piriforme o fogliforme, anteriormente ristretto, posteriormente rigonfio: appendice caudale brevissima, retrattile, conica, subacuta. Non esiste una vera pieghettatura della superficie del corpo ; questa mostrasi solamente rugosa.

Ventosa anteriore globosa, ventrale, subterminale. Ventosa posteriore più grande della anteriore prominente, situata nella porzione posteriore della metà anteriore del corpo.

Apertura genitale poco innanzi la ventosa posteriore a livello dell'arco dell'intestino. Faringe piccola, allungata, ovoidale: esofago molto lungo ; braccia intestinali mediocri prolungantisi fino all'estremo posteriore del corpo.

Testicoli due, grandetti, situati l'uno accanto all'altro simmetricamente ai lati della linea mediana del corpo, sul cominciare della metà posteriore del corpo ; i dotti escretori dei singoli testicoli mettono capo in un breve deferente unico, che si apre in un ricettacolo seminale esterno che è di mediocri proporzioni ed a forma di pera allungata e presenta nella sua parte anteriore uno strozzamento che determina due cavità consecutive, come avviene nell'*A. appendiculatum* ; esso mette capo in tubo lungo che contiene il pene e sbocca nell'antro genitale: lungo il decorso del pene si osservano numerose glandole prostatiche.

Ovario situato innanzi i testicoli, dietro i vitellogeni nella linea mediana del corpo sul cominciare del terzo posteriore di questo: esso è di forma irregolare ed alle volte ha aspetto lobato. Dal suo lato antero-dorsale si origina l'ovidotto che si ripiega a formar l'utero, che, dopo aver descritto numerosi ravvolgimenti, all'altezza dei testicoli si svolge in un tubo serpeggiante e va a sboccare nell'antro genitale che qui è breve e tubolare. Dall'ovidotto interno si parte un tubo che si slarga a formare un ricettacolo seminale interno, come nella *A. Stossichii*, nella quale specie lo descriverò più minutamente.

Vitellogeni due, semplici, alle volte a contorni irregolari, situati all'altezza della ventosa posteriore, circa alla metà della lunghezza totale del corpo, innanzi i testicoli: i vitellodutti si rivolgono nella parte posteriore del corpo verso l'ovario, all'altezza del quale si incontrano in un grosso ricettacolo vitellino, dal quale parte un breve dotto che sbocca nell'ovidotto interno prima che in questo si aprano le glandole del guscio.

Il sistema escretore differisce da quello delle altre specie perchè le due braccia anteriori dell'Y formata dai grossi tronchi non si fondono: almeno io non ho potuto mai vederla questa fusione ad arco all'altezza della faringe, così evidente nelle altre specie.

Le uova sono numerose e rotondeggianti, più grandi di quelle dell'*A. appendiculatum*.

Lunghezza da 1-2,30 mill.

Sinonimia.

Anche per la sinonimia di questa specie fino al 1850 rimando al Diesing (Syst. Helm. Vol. I, - *D. ventricosum* pag. 369, *D. ocreatum* pag. 372), nemmeno cito la *Revisio* dello stesso Diesing e la *Synopsis* del Cobbold, perchè già citate nel testo.

1859	*D. ocreatum*	Molin in: Sitz. Ber. Ak. Wien, Bd. XXXIII, pag. 289.
1861	»	Molin in: Denk. Akad. Wien, Bd. XIX, pag. 209, tab. III, fig. 7.
1870	»	? Van Beneden P. J. Poiss. côt. Belg., ecc. pag. 64, confr. pure nota 3.

1886	*D. ocreatum*	(p. p.) Stossich I Distomi Pesci mar., p. 12,
1888	»	Appendice al lavoro, ecc , pag. 5.
1889	»	Juel. Beiträg. z. Anat. d. Gatt. Apoblema pag. 7 (*D. ocreatum* Molin), forme dubbie o poco note.
1870	*D. ventricosum*	Van Beneden P. J. Poiss. côt. Belg., ecc., pag. 68, Pl. IV, fig. 11-11'.
1884	»	(p. p.) Carus. Prodromus faunae medit., pag. 125.
1886	»	(p. p) Stossich. I Distomi dei pesci, ecc., pag. 11.
1888	»	(p. p.) Stossich. Appendice al lavoro, ecc., pag. 5.
1889	*D. Carolinae*	Stossich. Bull. Soc. Adr. Vol. XI, pag. 4. Tav. XIII, fig. 55. Append., ecc.. p. 5.
1890	»	(p.p.) Sonsino. Studi e notizie elmintologiche.

NOTE CRITICHE.

Sono stato indotto a riunire insieme le due specie principalmente dall'esame degli esemplari tipici e delle descrizioni del Rudolphi. Da quanto innanzi è detto si rileva che la differenza osservata da questo nelle A. due specie (vedi le diagnosi) sta appunto nella assenza nel *D. ventricosum* dell'appendice caudale che esiste invece nell'*ocreatum*. Ma questa coda assai breve esiste anche negli esemplari tipici del *D. ventricosum*. Le fig. 5 e 11 della Tav. sono ricavate da alcuni schizzi da me presi a Berlino dagli esemplari tipici del Rudolphi. La fig. 5 rappresenta un individuo di *D. ocreatum* della Clupea Harengus Mai. 28 R. (Così il cartellino autografo del Rud. che rimanda, come per tutte le specie di Entozoi della collezione, al suo libro *Entoz. Hist.*, Vol. II p. 379). La fig. 11 rappresenta uno degli esemplari del boccaccetto portante l'indicazione « *D. ventricosum*. Clupeae alosae 29, 817 Arimmi reperii ».

Ora, considerando le due figure si vedrà chiaro come l'appendice caudale, il solo carattere differenziale importante tra le due specie, esiste in entrambe, e come e quanto si rassomiglino tra loro le due forme. — Aggiungo inoltre che sul cartellino del *D. ocreatum* ho osservata la correzione a matita, che sembra essere dello stesso carattere del Rudolphi, del nome *ocreatum* in quello di *ventricosum*. La differenza di *habitat* non ha in generale gran valore e massime nel caso nostro, giacchè, infatti, il Distoma dell'Alosa trovasi anche nella *Clupea finta* (ne ho osservati dei belli esemplari di questo ospite nella collezione di Creplin a Greifswald, ed il van Beneden ve l'ha pure trovata ed ha appunto disegnati degli esemplari di questo ospite i quali concordano a capello con le mie figure) e nella *Clupea sprattus* (van Beneden citato), e quindi è possibilissimo che esso possa trovarsi anche nella *Clupea harengus*. In questa *Clupea* dopo il Loeuwenhoek ed il Rudolphi non è stato, a quanto mi risulta, più ritrovato il *D. ocreatum*, ma esaminando bene la incompleta descrizione datane dal Rudolphi si rileva che questa può addirsi anche bene al *D. ventricosum*. Anche le dimensioni date delle due forme sono quasi uguali.

Habitat. — Questa specie è molto frequente nell'intestino della *Clupea alosa* (io ne ho raccolto individui anche nelle appendici piloriche), della *Clupea finta* e *Clupea sprattus*. Nella *Clupea harengus* ne ha rinvenuto numerosi esemplari il Rudolphi. Non tengo conto degli altri *habitat* assegnati a questa specie dagli A., perchè, come sotto il nome di *D. ventricosum*, era indicato spesso pure l'*appendiculatum*, per lo scambio avvenuto fra queste due specie, non si può con certezza dire se nei pesci indicati sia stata trovata l'una o l'altra specie: io inclino per altro a credere che si tratti piuttosto dell'*A. appendiculatum* che dell'*A. ocreatum* (=*ventricosum*) che, a quanto sembra, è circoscritto ai *Clupeidi*.

Note biologiche.

Quale sia il mezzo per il quale questa specie di *Apoblema* arrivi nelle Clupee summenzionate, è ignoto; io suppongo che possano essere anche in questo caso dei Copepodi, dei quali ho trovato pieno lo stomaco delle Alose da me disseccate a Napoli. L'alimento di queste sembra essere, nel nostro Golfo, lo stesso di quello delle *Clupea pilchardus*, chè su per giù nel loro stomaco ho rincontrate le stesse forme trovate in queste.

Osservazioni.

Io ho ritrovata questa specie abbondantissima nelle nostre Alose e pare lo sia anche nelle altre Clupee che infesta: essa si trova nella metà anteriore del tubo intestinale; nella posteriore è raro trovarla; sembra preferire la regione dei ciechi pilorici, nei quali, come ho sopra notato, è facile ritrovarla isolatamente. Questa specie è facilmente riconoscibile ad occhio nudo o con occhio armato di semplice lente per le sue caratteristiche e per il suo colore: in mezzo al muco intestinale essa si mostra trasparente e colorata di un giallo bruno-ocraceo tendente un po' al verdastro. Isolata dal muco, ed osservata a più forte ingrandimento, si mostra trasparente con la metà posteriore (dove sono le uova in massa) di color giallo verdastro e con due macchie bruno-rossastre (i vitellogeni) all'altezza della ventosa posteriore: questa è colorata d'ordinario di una tinta rosso ocracea molto pallida, ora più, ora meno forte, che alle volte si estende a tutte le parti che la circondano. L'esame della descrizione e fignra del *D. Carolinae* Stossich. e la comunanza di ospite col *D. ocreatum* mi hanno convinto della identità delle due forme.

APOBLEMA STOSSICHII n. sp.

(Fig. 2, 3, 4, 8, 9, 13, 15 *a*, 16, 17).

Descrizione.

Corpo allungato, subterete, anteriormente un poco ristretto: appendice caudale brevissima, retrattile, spesso non visibile. Superficie del corpo pieghettata trasversalmente: pieghettatura abbastanza forte

Ventosa anteriore piccola, cerciniforme, subterminale, ventrale.

Ventosa posteriore assai più grande dell'anteriore (quasi il doppio), situata nel terzo anteriore del corpo.

Apertura genitale dietro la ventosa anteriore a livello dell'arco dell'intestino. Faringe globosa: esofago lungo: braccia intestinali esili, allungate che raggiungono l'estremo posteriore del corpo.

Testicoli due e piccoli situati l'uno accanto all'altro simmetricamente ai lati della linea mediana del corpo, nella metà anteriore della lunghezza della parte del corpo che intercede fra la ventosa posteriore e l'estremo caudale; i singoli dotti escretori mettono capo in un unico deferente che si apre in un grande ricettacolo seminale esterno che è situato quasi immediatamente dietro la ventosa posteriore: Questo ricettacolo è molto grande, quasi il doppio di un testicolo e si continua in un condotto che nella sua estremità, poco slargata, contiene il pene.

Lungo tutto il decorso di questo dotto si osservano numerose e grosse, relativamente alla piccolezza dell'animale, glandole prostatiche: queste non si posson osservare a fresco, nè su buone preparazioni in toto, ma solamente su sezioni: esse per forma e disposizione rassomigliano a quelle delle altre *Apoblema* e del *Dist. varicum* Müller.

Ovario situato innanzi al vitellogeno, dietro i testicoli, nella linea mediana del corpo, a metà (quasi) lunghezza della porzione di questa compresa fra l'estremo caudale e la ventosa posteriore. Dalla parte infero posteriore dell'ovario si origina l'ovidotto interno: questo da un lato manda un diverticolo che mette in una vescicoletta piriforme che è il ricettacolo seminale interno, dall'altro si continua nell'utero che descrive molte circonvoluzioni, frammettendosi fra gli organi genitali ed occupando tutta quasi la metà posteriore del corpo: all'altezza del ricettacolo seminale esterno l'utero si svolge in tubo serpeggiante che va a sboccare nell'antro genitale, che è di forma tubulare, imbutiforme. Vitellogeno unico grande situato immediatamente dietro l'ovario disposto quasi ad abbracciarlo: esso non è rotondeggiante ma ha contorni irregolari che alle volte lo fanno parere lobato: dal vitellogeno parte un unico dottolino che sbocca alla base dell'utero: poco innanzi lo sbocco del vitellodutto trovasi l'ammasso delle glandole del guscio. — Manca come nelle altre specie la vagina (1).

Il sistema escretore è fatto come nelle altre specie del genere: i tronchi grossi sono ripieni di concrezioni, che si colorano vivamente in rosso col picrocarminio nei preparati in toto.

Le uova, relativamente alla piccolezza della specie, sono molto grandi, più grandi di quelle dell'*A. appendiculatum*.

Esse sono piene di masse vitelline e non contengono ancora l'embrione: in alcune ho potuto osservare distintamente la cellula germinale che è grande ed è spostata verso uno dei poli (il più largo) dell'uovo (fig. 13).

La nuova specie misura appena un millimetro o poco più.

---

(1) In questa specie come nella precedente, non ho riscontrata quella struttura e disposizione del ricettacolo seminale interno osservata dal Juel (op. cit., pag. 35-36) nell'*A. excisum*, *A. rufoviride*, *A. appendiculatum*.

Sinonimia.

La sinonimia dell'*Apoblema Stossichii* è la seguente:

1887 *D. ocreatum* Monticelli. Boll. Soc. Nat. Napoli, Anno I, pag. 87.

1888 » Stossich. Appendice al mio lavoro, ecc., p. 5, N° 3 (3).

Note critiche.

L'*A. Stossichii* differisce dall'*A. ocreatum*, con la quale ha di comune la estrema picciolezza e la brevità dell'appendice caudale, oltrecchè per la forma generale del corpo, per la disposione generale degli organi genitali e specialmente per la forma e disposizione del vittellogeno, che è unico e posteriore all'ovario, mentre nell'*A. ocreatum* è duplice e situato innanzi a questo. Per l'unico vitellogeno esso differisce pure da tutte le altre specie di *Apoblema* a coda breve, ed anche da quelle a coda lunga.

Il *Distoma minimum* n. sp della *Clupea sprattus* del quale ho innanzi parlato, non descritto, nè figurato dal van Beneden nel lavoro sui pesci del Belgio ed i loro parassiti, è forse un sinonimo dell'*A. Stossichii?* Il nome imposto dal van Beneden potrebbe farlo supporre, chè la piccolezza è appunto una delle principali caratteristiche della mia n. sp. e d'altra parte non è supponibile potesse essere l'*A. ocreatum* che era ben noto al van Beneden che lo ha, come innanzi ho detto, anche ben disegnato.

Habitat. — Questa specie è comunissima nell'esofago e nel ventricolo della *Clupea pilchardus* Walb. del nostro golfo nella quale io l'ho ritrovata in tutte le stagioni dell'anno. Nella scorsa estate io ho avuto occasione di ritrovarla nell'esofago e nel ventricolo della *Clupea aurita* Cuv. che in certi periodi dell'anno si trova abbastanza comune sul nostro mercato di pesci.

Note biologiche.

Nella noterella citata in sinonimia di questa n. sp. io sospettai che essa probabilmente potesse pervenire nella *Clupea pilchardus*, per mezzo dei Copepodi, perchè essi sono i più largamente rappresentati nello stomaco della sardina e ne formano il nutrimento principale

Quantunque io non abbia ancora potuto rinvenire nei Copepodi ritrovati nello stomaco alcuna forma giovane di *A. Stossichii*, pure le mie nuove ricerche sul nutrimento della *Clupea pilchardus* e *Clupea aurita* confermano la mia supposizione, tanto più che quest'anno in una *Clupea pilchardus* ho trovato fra i resti di Copepodi una forma di Distoma, in una sorta di cisti avventizia, che sembravami somigliasse molto all'*A. Stossichii*: digraziatamente era in tali cattive condizioni che non mi fu dato poterlo bene studiare per accertarmi delle sue affinità coll'*A. Stossichii*.

In queste nuove ricerche ho trovato nello stomaco ed esofago delle nostre sardine sempre abbondantissimi *Copepodi* di specie differenti, che non ho potuto tutti determinare con certezza: ho ritrovate pure le due forme dubbiosamente nuove, da me citate nella mia Nota. Al nutrimento in questa menzionato devo aggiungere dei *Doliolum*, delle *Phronima* (rarissimamente) e degli scarsi *Peridinium*, che in allora non aveva ritrovati. Ho ritrovati ancora avanzi di Eteropodi e Pteropodi abbondanti; alcune sardine da me esaminate nello scorso Agosto avevano lo stomaco zeppo di radule e resti di *Pteropodi*.

Queste osservazioni provano sempre maggiormente che la *Clupea pilchardus* ad eccezione dei Copepodi, che formano la base costante del suo nutrimento, si ciba di ciò che trova, e che ha quindi nutrimento assai variabile secondo le stagioni e secondo i luoghi.

Osservazioni.

Questa specie così comune e frequente si ottiene facilmente quando si spacca lo stomaco e l'esofago della *Clupea pilchardus* e si raschia lungo le pareti e raccogliendo il contenuto si passa su dei porta-oggetti che, coperti debitamente, si sottopongono al microscopio. Essa apparisce evidente in mezzo al muco ed ai resti di alimento per il suo colorito generale caratteristico verdastro. Isolata essa ha colorito giallo verdastro e spicca in bruno-verdastro l'unico vitellogeno, ed in giallo intenso il ricettacolo seminale esterno: la massa delle uova tende al verdastro. Come si vede anche ad un esame superficiale, questa specie mostrasi così differente dalla precedente che non si può con questa confondere.

Considerazioni generali sul Gen. *Apoblema.*

In nota a pag. 6 ho brevemente espresso le ragioni che mi inducono ad accettare l'opinione di Juel e considerare il gruppo dei Distomi provvisti di un'appendice caudale come formante un genere distinto della sottofamiglia dei *Distomidae* per il quale è da accettarsi il nome di *Apoblema*, proposto dal Dujardin, che lo riteneva un sottogenere del genere *Distomum*. Ora ritorno sulla più importante di tutte, cioè la presenza di una coda, giacchè è necessario di cercare di stabilire quale valore morfologico si debba attribuire a questa appendice, che non si osserva in nessun altro digenetico adulto, e quale importanza essa possa avere nella vita dell'animale.

È essa omologa alla coda delle *Cercarie* e quindi da ritenersi un carattere larvale conservato nello stato adulto?

L'appendice caudale può essere breve, brevissima, subnulla, in alcune specie (*A. ocreatum*, *A. Stossichii*, *A. microporum*), in altre lunga (*A. appendiculatum*) ed alle volte lunghissima (*A. tornatum*). Sono le forme a coda più lunga le forme più antiche, e quelle a coda breve quelle che hanno subìto una riduzione successiva della appendice caudale?

Disgraziatamente lo sviluppo e la biologia di queste Distomidi ci è poco noto e per quante ricerche avessi da lungo tempo fatte allo scopo, mosso dal desiderio di risolvere le questioni innanzi proposte, non mi è riuscito poter fare osservazioni, che mi mettessero sulla via di risolverle. Non ho potuto, infatti, seguire lo sviluppo delle forme da me studiate ed in tutte le forme del genere da me esaminate non ho trovato mai embrioni nelle uova contenute nell'utero e nemmeno nelle uova, che spesso ho trovato numerose nel tubo digerente degli ospiti.

I risultati negativi delle mie ricerche m'inducevano a ritenere ed interpretare l'appendice caudale come una sorta di semplice allungamento della parte posteriore del corpo determinatasi principalmente per permettere una maggiore estensione dell'utero. Questa interpretazione veniva implicitamente ad ammettere che tale modificazione era un adattamento posteriore allo stato larvale di *Cercaria*, manifestantesi all'epoca della maturità sessuale solamente e che quindi le forme a coda breve nelle quali essa è poco distinta dal corpo, quando è in estensione e non ha tanta contrattilità, come quella delle forme a coda lunga, dove si mostrano sviluppati degli speciali fasci muscolari destinati a favorirla, fossero da considerarsi iniziali e primitive.

Ma le osservazioni di Möbiuse Willemoes-Suhum che hanno trovate le larve di *A. appendiculatum* fornite di appendice caudale, libere e penetranti, come le Cercarie, nelle larve pelagiche di Anellidi e nei Copepodi, le osservazioni di Giesbrecht a conferma di quelle degli A. succitati, la presenza di un'altra forma larvale di Apoblema osservata dal Will. nella *Beroe rufescens* (1) e dal Busch (2) nelle *Sagitta* e liberamente nuotante, ed il fatto da me osservato di aver trovato fra le squame di una *Solea* sp. una forma giovane riferibile all'*A. excisum*, mi hanno indotto a stabilire una omologia fra la coda delle Cercarie e l'appendice caudale delle *Apoblema*, e ritenere che questa sia una modificazione successiva, un nuovo adattamento della coda, che stando alla regola, le Cercarie di *Apoblema* avrebbero avuto, la quale, invece di staccarsi o venir riassorbita, come avviene nelle comuni *Cercarie*, è persistita allo stato adulto modificandosi per un nuovo adattamento. Le forme a coda breve, ammettendo la omologia innanzi accennata, rappresenterebbero forme che hanno avuto, forse, una coda lunga e che ora non presentano che solo un rudimento di questa.

Ho innanzi esposto brevemente, senza commentarli, i fatti biologici che mi hanno spinto ad ammettere la omologia enunciata: ora è necessario esaminare più dappresso i fatti e vedere se veramente è possibile di stabilire questa omologia. Tutti i Distomi, prima di raggiungere la loro maturità sessuale passano per un ospite intermedio nel quale s'incistano aspettando di poter pervenire nell'ospite definitivo: per raggiungere quest'ospite intermedio, quando questo vive nell'acqua, le larve del Distoma, le Cercarie, sono provviste di una coda, ossia di un prolungamento della parte posteriore del corpo, che per la sua mobilità serve come organo di locomozione e permette alle Cercarie di ritrovare l'ospite intermedio e penetrarvi.

---

(1) *Ueber Distoma Beroes, in: Arch. f. Naturg.*, 1844, pag. 343-344, tab. X, fig. 10-13.

(2) *Beobacht über Anat, u. Entwickl. ein. Wirbell. Seethiere,* Berlin 1851.

Lo sviluppo embrionale delle *Apoblema* non ci è noto, ma sappiamo però che la forma giovane prima di raggiungere l'ospite definitivo, si annida in un altro ospite intermedio (incistandovisi come *A. labri rupestris* Olsson, o no *A. appendiculatum*, *A.* sp. Will.) e per penetrare in questo essa ha un periodo di vita libera. Questa forma giovane è, dunque, biologicamente, omologa alla Cercaria degli altri Distomi: vediamo ora se lo è morfologicamente. Come nelle Cercarie, in questa forma giovane delle *Apoblema* allo stato libero troviamo gl'inizii degli organi genitali e, come nelle Cercarie nella parte posteriore del corpo la coda, in questa (v. *A. appendiculatum*, *A. sp.* Will., *A. excisum*) troviamo un prolungamento della parte posteriore del corpo, l'appendice caudale. Questa è retrattile ed ha speciali fasci muscolari, atti a permetterlo, ed anche le Cercarie possono in parte ritrarre la coda ed hanno, per raggiungere questo scopo, dei fascetti muscolari, non così differenziati e svilluppati, come nelle *Apoblema*, ma che funzionano analogamente a questi (1). La struttura di questa appendice della forma giovane di *Apoblema* è anch'essa fondamentalmente simile a quella della coda delle Cercarie. Come in alcune Cercarie avrebbe osservato il Villot, il sistema escretore, tronco impari delle *Apoblema*, si continua nell'appendice caudale. Questa differisce solo essenzialmente dalla coda delle Cercarie, perchè in essa si prolungano i gambi intestinali.

Dalle cose dette mi pare che anche i dati morfologici concorrono a stabilire una omologia fra la Cercaria dei Distomi e la forma giovane delle *Apoblema* e quindi mi pare che esse possano considerarsi *morfologicamente* e *biologicamente omologhe*. Ciò ammesso, ne risulta evidente, per le comparazioni innanzi fatte la omologia della appendice caudale della forma larvale di *Apoblema* con la coda della *Cercaria* ed io credo ne risulti anche la analogia: quantunque non vi sieno osservazioni in proposito, io credo, infatti, che nelle forme giovani libere di *Apoblema* la appendice caudale serva, come la coda della Cercaria, come organo di locomozione e come aiuto per la penetrazione nell'ospite intermedio (e ciò darebbe naturalmente ragione al Willemoes-Suhum che sosteneva la penetrazione dell'*Apoblema* nei *Cyclops* per la

---

(1) Vedi: Schwarze. *Postembryonal Entwich.* ecc., in: *Zeit. Wiss. Zool.* Bd. 43, pag. 46, tav. III, fig. 10, 13, 15.

parte anteriore) (1). Mentre però la Cercaria penetrata nell'ospite intermedio, perde la sua coda o la riassorbisce, nell'*Apoblema* essa persiste. Da tutto ciò ne risulta come conseguenza che l'appendice caudale delle forme adulte di *Apoblema* può considerarsi l'omologa della coda delle *Cercarie*.

Ma l'appendice caudale delle *Apoblema* quantunque fondamentalmente identica alla coda delle Cercarie, pure mostra delle caratteristiche proprie, come p. e. il prolungarsi in essa delle braccia intestinali e dell'utero: ma questi possono naturalmente interpretarsi come mutamenti avvenuti in seguito, per la persistenza della coda larvale negli adulti, come un nuovo adattamento di questa. Tutti i fatti esposti e le considerazioni fatte ci fanno pensare che le *Apoblema*, infatti, provengano da forme primitive, nelle quali la coda larvale tipica delle Cercarie si è conservata ed ha man mano subìto i nuovi adattamenti suddescritti, i quali si saranno esplicati in una serie di forme di passaggio, ora non più esistenti, che per le tendenze abbreviative dell'ontogenia, non si ripetono in questa, che invece ci dà l'ultimo portato dell'adattamento della coda delle Cercarie: ciò spiegherebbe la presenza delle braccia intestinali dell'appendice caudale anche nelle forme giovani di *Apoblema*.

Le specie di *Apoblema* a coda breve e brevissima si spiegherebbero ammettendo che in esse l'appendice caudale abbia subìta una riduzione posteriore, si sia, in breve, manifestata una tendenza a perderla. Noi non conosciamo disgraziatamente le forme giovani libere di *Apoblema* ad appendice caudale breve e quindi non possiamo sapere come e quando si manifesti nello sviluppo ontogenetico questa tendenza. Se sono delle larve nuotanti, è da supporre però che questa riduzione avvenga nell'ospite intermedio.

Dalla somma delle cose dette mi si presenta un quesito che pare ne emerga evidente, cioè: Si è autorizzati veramente a considerare la coda, o meglio, l'appendice caudale delle *Apoblema* come una coda di Cercaria persistente allo stato adulto e modificata ulteriormente, oppure si avrebbero ragioni per credere

(1) Di quanto aiuto sia la coda delle *Cercarie* nella penetrazione di questa io ho potuto bene osservare nella *C. setifera*, della quale ho potuto studiare il suo periodo di vita libera ed il modo come essa cerca l'ospite, vi entra e vi si incista (v. mia Nota in proposito, in *Boll. Soc. Nat.* Vol. II, pag. 193-199 e *Saggio di una Morfologia dei Trematodi*, pag. 78-79).

invece che la coda delle Cercarie sia un derivato della appendice caudale delle *Apoblema?*

Ritornando sulle considerazioni esposte si potrebbe vedere che alcuni fatti parlano in favore di che le forme primitive di Distomidae fossero state provviste di un'appendice posteriore, che nello stato larvale serviva come aiuto alla locomozione, persistente allo stato adulto, appendice che, perchè forse inutile nello stato adulto, sia andata perduta e non ne è rimasta traccia che nella ontogenia, trasformandosi in una caratteristica larvale e meglio specializzandosi per la funzione alla quale è destinata.

Conclusioni sistematiche.

In seguito alle mie ricerche l'ordinamento sinottico delle specie del genere *Apoblema* proposto dal Juel deve essere alquanto modificato.

Egli propone aggruppare nel modo seguente le nove specie del genere da lui ammesse:

A. Haut durch feine querlaufende Erhebungen regelmässig geringelt.

a. Dotterstöcke nicht tiefe gelappt, deutlich getrennt.

1. *A. appendiculatum* Rud., 2. *A. ocreatum* Olsson, nec Rudolphi, 3. *A. scabrum* O. F. Muller.

b. Dotterstöcke bestehen aus langen cylindrischen in einem Punkte zusammenfliessenden Lappen.

4. *A. excissum*, 5. *A. crenatum* Molin non Rudolphi, 6. *A. tornatum* Rud.

B. Haut nicht regelmässig geringelt.

7. *A. rufoviride*, 8. *A. grandiporum* Rud., 9 *A. mollissinum* Levinsen.

Ora, siccome alcune delle forme da lui messe fra le dubbie rientrano fra quelle da ammettersi (*D. ocreatum* Molin), altre vengono ad essere escluse di fatto dal genere *Apoblema* (*D. gigas* e *D. Raynerianum* Nardo) ed altre due nuove devono aggiungersi alle note: l'*A. Stossichii* ed il *Distomum microporum* (1) da me descritto del *Plagyodus ferox*, il quadro proposto dal Juel non prestandosi più ad un aggruppamento delle specie, che rag-

(1) *Proc. Zool. Soc. of. London*, 1889, pag. 322, Plt. XXXIII, fig. 1.

giunga lo scopo di guidare al facile riconoscimento di queste, io propongo l'altro seguente:

I. Appendice caudale lunga.

a) — Cute pieghettata.
  † — Vitellogeni due ramosi.
    o Ventosa anteriore integra; apertura genitale immediatamente dietro la ventosa anteriore.
      . Ventosa anteriore più piccola della posteriore. 1 *A. tornatum* RUD.
      .. Ventosa anteriore più grande della posteriore. 2 *A. crenatum* MOLIN.
    oo Ventosa anteriore posteriormente interrotta; apertura genitale nell'interruzione di questa. 3 *A. excisum* RUD.
  †† — Vitellogeni due rotondeggianti; apertura genitale immediatamente dietro la ventosa anteriore. 4 *A. appendiculatum* RUD.

b) — Cute non pieghettata. 5 *A. grandiporum* MOLIN.

II. Appendice caudale breve.

a) — Cute pieghettata.
  † — Vitellogeno unico rotondeggiante: apertura genitale dietro la ventosa anteriore. 6 *A. Stossichii* MONTIC.

b) — Cute non pieghettata, alle volte rugosa.
  † — Ventosa posteriore più piccola della anteriore. 7 *A. microporum* MONTIC.
  †† — Ventosa posteriore più grande della anteriore.
    o Vitellogeni due rotondeggianti; apertura genitale innanzi la ventosa posteriore. 8 *A. ocreatum* RUD.
    oo Vitellogeno unico ramoso; apertura genitale a metà distanza tra le due ventose.
      . Ovario rotondeggiante . . 9 *A. rufoviride* RUD.
      .. Ovario lobato . . . 10 *A. mollissimum* LEVINS.

Secondo le mie conclusioni, che vengono riassunte nel quadro proposto, le specie del genere *Apoblema* da ammettersi si riducono a nove. Oltre l'esclusione dei due Distomi del Nardo io credo debba essere escluso anche il *Distomum apertum* ritenuto dal Dujardin e dal Juel come specie dubbie del genere *Apoblema*. Come specie dubbia del genere va però registrata l'*A. Labrirupestris* dell'Olsson (Bidrag til Skandinav. Helm. fauna, pagina 20, N. 20) trovato immaturo ed incistato.

Ho considerate come forme distinte l'*A. crenatum* Molin e *A. excisum* Rud. che sono affinissimi tra loro, ma esprimo il dubbio che forse possono essere la stessa cosa: ciò a giudicare dal confronto della figura del *D. crenatum* data dal Molin (Sitz Ber. k. Akad. Wien, XXXVII. Tav. I, fig. 3) con quella del *D. excisum* data dal Wagener. (Op. cit. Tav. IX, fig. 10.).

Devo qui ricordare ad evitare ulteriori equivoci, che il *D. crenatum* del Molin (*Apoblema crenatum*) non è la stessa cosa del *D. crenatum*, descritto dal Rudolphi, nell'*Entoz. Hist.*, pagina 404, N. 44, del *Gasterosteus aculeatus* e disegnato nella Tab. V, fig. 1 e più tardi dal medesimo A., nella sua *Entoz. Synops.*, pag. 110, n° 85, riferito ed identificato al *D. appendiculatum*.

Napoli, Stazione Zoologica, 15 novembre 1890.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

Lettere comuni a tutte le figure.

ag — antro genitale
ap — appendice caudale
b — bocca
e — esofago
f — faringe
gg — glandole del guscio
gp — glandole prostatiche
i — braccia intestinali
ov — ovario
ovd — ovidutto interno
p — pene e tasca del pene

rse — ricettacolo seminale esterno
rsi — ricettacolo seminale interno
rv — ricettacolo vitellino
se — tronchi del sistema escretore
t — testicoli
ut — utero
Va — Ventosa anteriore
vd — vaso deferente
Vp — Ventosa posteriore
vtl — vitellogeni
vt — vitellodutti

NB. Tutte le figure, eccetto le fig. 2, 3, 5, 10, 11, 12, sono state eseguite col sistema Zeiss e con la camera chiara Abbe.

FIG. 1 *Apoblema ocreatum* Rud.; figura d'insieme da preparazioni a fresco, o debitamente fissate. $\frac{2}{A} \times 52$, pag. 15,

» 2 *Apoblema Stossichii* n. sp.; $\frac{2}{C}$ senza camera chiara: figura d'insieme $\times 145$, pag. 19-20;

» 3 *Apoblema Stossichii*, figura d'insieme dello sbocco dei genitali e dei loro rapporti reciproci e delle parti dell'apparato maschile $\frac{2}{D}$ ad occhio $\times 230$, pag. 19-20.

» 4 *Apoblema Stossichii;* sezione frontale per lasciar vedere i rapporti e la disposizione delle glandole prostatiche: contorni $\frac{4}{4,0} \times 250$, dettagli $\frac{8}{4,0} \times 500$, pag. 20.

» 5 Figura ricavata da uno schizzo preso da un esemplare tipico di *D. ocreatum* della *Clupea harengus* della collezione di Rudolphi, pag. 17.

» 6 *Pseudocalanus elongatus* contenente la forma giovane di *Apoblema appendiculatum:* $\frac{2}{A} \times 52$, pag. 13.

» 7 Estremità posteriore dell'*Apoblema ocreatum* vista di profilo per mostrare l'appendice caudale: $\frac{2}{A} \times 52$, pag. 15.

» 8 Sezione frontale di *Apoblema Stossichii:* contorni $\frac{2}{c} \times 145$, dettagli $\frac{4}{4,0} \times 250$, pag. 20.

FIG. 9 Figura ricavata da due sezioni frontali, alquanto oblique, consecutive di *Ap. Stossichii* per mostrare i rapporti e le disposizioni degli organi genitali femminili: contorni $\frac{4}{4,0} \times 250$, dettagli $\frac{8-12}{4,0} \times 500$, 750, pag. 20.

» 10 Figura d'insieme dei rapporti dell'ovidutto interno, ricettacolo vitellino ed ovario dell'*A. ocreatum:* ad occhio $\frac{2}{C} \times 145$, pag. 20.

» 11 Figura ricavata da uno schizzo di un esemplare tipico di *D. ventricosum* Rud della *Clupea alosa* della collezione di Rudolphi, pag. 17.

» 12 Forma giovane di *A. appendiculatum* estratta dal corpo di un *Pseudocalanus elongatus:* ad occhio $\frac{2}{C} \times 145$, pag. 13-14.

» 13 Un uovo di *Ap. Stossichii* nel quale si vede la cellula germinativa spostata verso il polo più largo dell'uovo: $\frac{4}{4,0} \times 250$, pag. 20.

» 14 *A. ocreatum:* figura d'insieme dello sbocco dei genitali e dei loro rapporti reciproci; si vede l'insieme delle parti escretorie dell'apparato maschile e delle glandole prostatiche: $\frac{2}{C} \times 145$, pag 15-16.

» 15 Uova delle tre specie di *Apoblema* descritte nel testo viste al medesimo ingrandimento per stabilire i loro rapporti di grandezza: $\frac{4}{4,0} \times 240$

a — *A Stossichii*, pag. 20.
b — *A*, *appendiculatum*, pag. 11.
c — *A*. *ocreatum*, pag. 16.

» 16 Un pezzo del tubo escretore principale dell'*A. Stossichii:* $\frac{4}{4,0} \times 250$, pag. 20.

» 17 *Apoblema Stossichii;* figura d'insieme: $\frac{2}{C} \times 145$, p. 19.

Fig. 1.

Fig. 2.

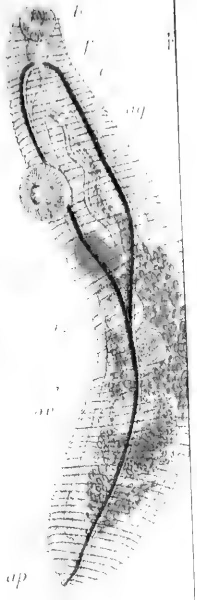


Fig. 8.

Fig. 12.

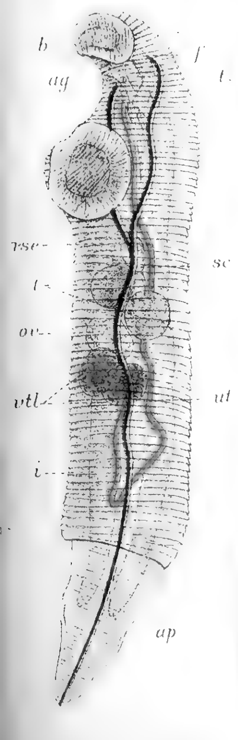
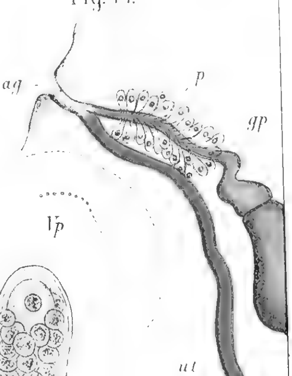


Fig. 14.



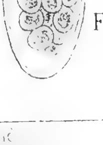


Fig. 13.

Fr. Sav. Monticelli disegnò

Taf. IX

Teoremi sulle coniche nella metrica proiettiva;

Nota del Socio Prof. ENRICO D'OVIDIO

§ **1**. Siano x_1, x_2, x_3 le cordinate omogenee di un punto in un piano; si scelga come assoluto del piano una conica A di equazione

$$a_{xx} \equiv a_{11} x^2_1 + \ldots + 2\, a_{23} x_2 x_3 + \ldots = 0 \ ,$$

e si ponga

$$a_{xx} \equiv a_{11} x_1 x'_1 + \ldots + a_{23} (x_2 x'_3 + x^3 x'_2) + \ldots$$

Se $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$, $M(y_1, y_2, y_3)$ sono due punti del piano, ogni punto N della loro retta ha coordinate della forma

$$\lambda x'_1 + \mu y_1 \ , \quad \lambda x'_2 + \mu y_2 \ , \quad \lambda x'_3 + \mu y_3 \ ,$$

corrispondenti univocamente ai valori del parametro $\lambda : \mu$; e si ha, in una determinazione metrica proiettiva di assoluto A,

$$\mathrm{tg}^2\, P'N = \frac{a_{x'x'} a_{\lambda x' + \mu y \,,\, \lambda x' + \mu y} - a^2_{x' ,\, \lambda x' + \mu y}}{a^2_{x' ,\, \lambda x' + \mu y}} = \frac{(a_{x'x'} a_{yy} - a^2_{x'y}) \mu^2}{(a_{x'x'} \lambda + a_{x'y} \mu)^2} \ .$$

Sia C una conica del piano, di equazione

$$c_{xx} \equiv c_{11} x_1^2 + \ldots + 2\, c_{23} x_2 x_3 + \ldots = 0 \ ;$$

e si ponga

$$c_{xx'} \equiv c_{11} x_1 x'_1 + \ldots + c_{33} (x_2 x'_3 + x_3 x'_2) + \ldots$$

I due punti N'_1, N'_2, comuni alla retta $P'M$ ed alla conica C, corrisponderanno alle radici $\lambda_1 : \mu_1$, $\lambda_2 : \mu_2$ della equazione

$$c_{\lambda x' + \mu y \,,\, \lambda x' + \mu y} = c_{xx'} \lambda^2 + 2\, c_{x'y} \lambda \mu + c_{yy} \mu^2 = 0 \ ;$$

cosicchè potremo assumere

$$\lambda_1\lambda_2 = c_{yy}\,, \quad \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 = -2\,c_{x'y}\,, \quad \mu_1\mu_2 = c_{x'x'}\,.$$

Quindi avremo

$$\operatorname{tg} P'N'_1 \operatorname{tg} P'N'_2 = \frac{(a_{x'x'}a_{yy} - a^2{}_{x'y})\,c_{x'x'}}{(a_{x'x'}\lambda_1 + a_{x'y}\mu_1)(a_{x'x'}\lambda_2 + a_{x'y}\mu_2)}$$

$$= \frac{(a^2{}_{x'x'}a_{yy} - a^2{}_{x'y})c_{x'x'}}{a^2{}_{x'x'}c_{yy} - 2\,a_{x'x'}a_{x'y}c_{x'y} + a^2{}_{yy}c_{x'x'}}\ (*).$$

Il prodotto tg $P'N'_1$ tg $P'N'_2$, se P' rimane fisso, varia con M: in particolare è zero con $a_{x'x'}a_{yy} - a^2{}_{x'y}$, cioè quando M percorre le due tangenti t'_1, t'_2 condotte da P' ad A; ed è infinito quando M annulla $a_{x'x'}\lambda_1 + a_{x'y}\mu_1$ o $a_{x'x'}\lambda_2 + a_{x'y}\mu_2$, cioè quando M percorre le rette r'_1, r'_2, che uniscono P' ai punti d'incontro di C con la polare di P' rispetto ad A.

Del pari, se $P''(x''_1, x''_2, x''_3)$ è un altro punto, e se la retta $P''M$ seca C in N''_1, N''_2, si ha

$$\operatorname{tg} P''N''_1 \operatorname{tg} P''N''_2 = \frac{(a_{x''x''}a_{yy} - a^2{}_{x''y})\,c_{x''x''}}{a^2{}_{x''x''}c_{yy} - 2\,a_{x''x''}a_{x''y}c_{x''y} + a_{yy}{}^2\,c_{x''x''}}\,,$$

e così via.

Il rapporto

$$\frac{\operatorname{tg} P'N'_1 \operatorname{tg} P'N'_2}{\operatorname{tg} P''N''_1 \operatorname{tg} P''N''_2}$$

$$= \frac{c_{x'x'}}{c_{x''x''}} \cdot \frac{a_{x'x'}a_{yy} - a^2{}_{x'y}}{a_{x''x''}a_{yy} - a^2{}_{x''y}} \cdot \frac{a^2{}_{x''x''}c_{yy} - 2\,a_{x''x''}a_{x''y}c_{x''y} + a^2{}_{yy}c_{x''x''}}{a^2{}_{x'x'}c_{yy} - 2\,a_{x'x'}a_{x'y}c_{x'y} + a^2{}_{yy}c_{x'x'}}$$

(*) Se si adopera la notazione simbolica, ponendo $a_{xx} \equiv a^2{}_x \equiv a'_x{}^2 \equiv \ldots$, $c_{xx} \equiv c^2{}_x$, si avrà

$$a_{x'x'}a_{yy} - a^2{}_{x'y} = [a, a', (x'y)]^2\,,$$

$$a_{x'x'}\lambda + a_{x'y}\mu = (a_{x'}\lambda + a_y\mu)\,a_{x'}\,,$$

$$(a_{x'x'}\lambda_1 + a_{x'y}\mu_1)(a_{x'x'}\lambda_2 + a_{x'y}\mu_2) = a^2{}_{x'x'}c_{yy} - 2a_{x'x'}a_{x'y}c_{x'y} + a^2{}_{yy}c_{x'x'}$$
$$= [a, c, (x'y)]\,[a', c, (x'y)]\,a_{x'}a'_{x'}\,.$$

varia con M, se P' e P'' rimangono fissi. Se si vuole che esso abbia un dato valore ρ, il punto M avrà per luogo la quartica

$$c_{x'x'}(a_{x'x'}a_{yy}-a^2_{x'y})(a^2_{x''x''}c_{yy}-2\,a_{x''x''}a_{x''y}c_{x''y}+a^2_{yy}c_{x''x''})$$
$$=\rho\, c_{x''x''}(a_{x''x''}a_{yy}-a^2_{x''y})(a^2_{x'x'}c_{yy}-2\,a_{x'x'}a_{x'y}c_{x'y}+a^2_{yy}c_{x'x'})\;;$$

e variando ρ, si otterrà un fascio di quartiche, al quale apparterranno le quaderne di rette $(t'_1, t'_2, r''_1, r''_2)$, $(t''_1, t''_2, r'_1, r'_2)$; cosicchè queste quartiche avranno per punti doppi P', P'' e passeranno per gli altri 8 punti comuni alle due quaderne. La quartica corrispondente a $\rho = c_{x'x'} : c_{x''x''}$ passerà pel polo della retta $P'P''$ rispetto ad A.

Sia

$$\alpha_{\xi\xi}\equiv\alpha_{11}\xi^2_1+\ldots+2\,\alpha_{23}\xi_2\xi_3+\ldots=0$$

l'equazione di A come inviluppo: chiamati a, α i discriminanti di a_{xx}, α_{xx}, potremo porre

$$\alpha_{11}=\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial a_{11}}\,,\;\ldots\,,\;\alpha_{23}=\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial a_{23}}\,,\;\ldots\,,$$

onde

$$a\alpha=1\;.$$

Nel caso che A si scinda in una coppia di punti $L(p_1, p_2, p_3)$, $L'(p'_1, p'_2, p'_3)$, si ha (posto $\xi_x=\xi_1x_1+\ldots$)

$$\alpha_{\xi\xi}=\xi_p\,\xi_{p'}\,,\qquad \alpha=0\;,$$
$$\alpha\, a_{xx}=-\tfrac{1}{4}(x\,p\,p')^2\,,\qquad \alpha\, a_{xx'}=-\tfrac{1}{4}(x\,p\,p')(x'p\,p')\;,$$
$$\alpha(a_{xx}a_{x'x'}-a^2_{xx'})=\alpha_{(xx'),\,(xx')}=(x\,x'p)(x\,x'p')\;;$$

e ricordando che $P'N=\lim\dfrac{\operatorname{tg} PN}{\sqrt{\alpha}}$ per $\alpha=0$, si trova

$$\overline{P'N}^2=-\frac{4\,(x'y\,p)(x'y\,p')\,\mu^2}{(x'p\,p')^2\left[(x'p\,p')\lambda+(y\,p\,p')\mu\right]^2}\;,$$

$$P'N'_1\,.\,P'N'_2=\frac{4\,(x'y\,p)(x'y\,p')\,c_{x'x'}}{(x'p\,p')^2\left[(x'p\,p')^2c_{yy}-2\,(x'p\,p')(y\,p\,p')\,c_{x'y}+(y\,p\,p')^2c_{x'x'}\right]}\;.$$

Allora le quartiche testè considerate passano per L, L' e pei due punti comuni a C ed alla retta LL'.

Siccome per $y \equiv \nu p + \nu' p'$ si ha

$$(x'yp) = -\nu'(x'pp') \,, \quad (x'yp') = \nu(xpp') \,, \quad (ypp') = 0 \,;$$

così, se M è un punto della retta LL', risulta

$$\overline{P'N}^2 = \frac{4\mu^2\nu\nu'}{\lambda^2(x'pp')^2} \,, \qquad P'N'_1 \,.\, P'N'_2 = \frac{4\nu\nu' c_{x'x'}}{(x'pp')^2 c_{yy}} \,,$$

e però

$$\frac{P'N'_1 \,.\, P'N'_2}{P''N''_1 \,.\, P''N''_2} = \frac{c_{x'x'}}{c_{x''x''}} \cdot \frac{(x''pp')^2}{(x'pp')^2} = \text{cost.}$$

Questa relazione è la generalizzazione di un teorema di Apollonio, del quale è conseguenza la proporzionalità fra i quadrati di due corde parallele e i prodotti dei segmenti in cui dividono il diametro coniugato, fra le tangenti da un punto e i diametri ad esse paralleli, ecc. Tale teorema fu esteso da Newton a curve d'ordine qualunque, sempre nel dominio della Geometria euclidea. Or siccome il procedimento dianzi tenuto serve anche se c_{xx} è di grado superiore a 2; così, limitandoci all'ultima relazione, otteniamo il teorema:

« Se due rette rotano in un piano intorno a due punti fissi « secandosi sempre su una retta fissa, assumendo come assoluto « del piano due punti di questa retta, sarà costante il rapporto « dei prodotti dei segmenti che una data curva algebrica del piano « determina sulle due rette rotanti a contare dai due punti ».

Di qui segue che il teorema di Carnot, relativo ai segmenti che una curva algebrica determina sui lati di un poligono, sussiste quando l'assoluto è una coppia di punti.

§ 2. Riprendiamo la forma canonica di a_{xx}, c_{xx} e le varie denominazioni e notazioni adottate nella Nota « *Le proprietà focali delle coniche nella metrica proiettiva* » (Atti dell'Acc. di Torino, v. XXVI, 11 Genn. 1891) e nell'altra « *Sulle coniche confocali...* » (ibid. 25 Genn.).

Chiamiamo *diametri principali* di C tutte le rette per O_h $(h = 1, 2, 3)$. Sia $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$ un punto di C; il diametro coniugato del diametro $O_hP'(x'_l x_k - x'_k x_l = 0)$ e passante per O_h

ha l'equazione $c_k x'_k x_k + c_l x'_l x_l = 0$, e seca C in due punti uno dei quali è $P''(\pm x'_k \sqrt{c_k c_l},\ c_l x'_l,\ -c_k x'_k)$; ora si ha, per un assoluto qualunque A,

$$\mathrm{tg}^2\, O_h P' = \frac{a_k x'^2_k + a_l x'^2_l}{a_h x'^2_h}\ ,\quad \mathrm{tg}^2\, O_h P'' = \frac{a_l c^2_k x'^2_k + a_k c^2_l x'^2_l}{a_h c_k c_l x'^2_h}\ .$$

$$\mathrm{sen}^2\,(O_h P',\, O_h P'') = \frac{a_k a_l c^2_h x'^4_h}{(a_k x'^2_k + a_l x'^2_l)\,(a_l c^2_k x'^2_k + a_k c^2_l x'^2_l)}\ ;$$

onde le relazioni

$$\mathrm{tg}^2\, O_h P' + \mathrm{tg}^2\, O_h P'' = -\frac{c_h (a_k c_l + a_l c_k)}{a_h c_k c_l} = \mathrm{cost.}\ ,$$

$$\mathrm{tg}^2 O_h P' \,.\, \mathrm{tg}^2\, O_h P'' \,.\, \mathrm{sen}^2 (O_h P',\, O_h P'') = \frac{c^2_h a_k a_l}{a^2_h c_k c_l} = \mathrm{cost.}\ ,$$

generalizzazione dei due teoremi di Apollonio sulle grandezze di due diametri coniugati. Il secondo può ricevere anche la forma

$$\mathrm{tg}^2\, O_h t' \,.\, \mathrm{tg}^2\, O_h P'' = \frac{c^2_h a_k a_l}{a^2_h c_k c_l} = \mathrm{cost.}\ ,$$

indicando con t' la tangente a C in P', la quale seca $O_h P'$ su o_h.

§ **3.** Siano invece $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$, $P''(x''_1, x''_2, x''_3)$ estremi di due semidiametri perpendicolari per O_h; sarà $a_k x'_k x''_k + a_l x'_l x''_l = 0$, e potremo assumere

$$x''_k = a_l x'_l,\ x''_l = -a_k x'_k,\ c_h x''^2_h = -(c_k a^2_l x'^2_l + c_l a^2_k x'^2_k)\ ,$$

onde

$$\mathrm{tg}^2\, O_h P'' = -\frac{c_h a_k a_l}{a_h} \cdot \frac{a_k x'^2_k + a_l x'^2_l}{c_k a_l x'^2_l + c_l a^2_k x'^2_k}\ ;$$

e però, ricordando che $c_{x'x'} = 0$, troveremo la relazione

$$\mathrm{cot}^2\, O_h P' + \mathrm{cot}^2\, O_h P'' = -\frac{a_h (a_k c_l + a_l c_k)}{c_h a_k a_l} = \mathrm{cost.}$$

§ **4.** Vi sono infiniti circoli bitangenti a C, e i due punti di contatto con C di un tal circolo sono quelli dove un diametro qualunque per O_h seca C, mentre i due punti di contatto con A cadono sulla retta coniugata di quel diametro rispetto a $I_0 I_h$ e $I_k I_l$; infatti tutto ciò si può dedurre dall'osservare che, supposto

$$c_{xx} + \xi_x^2 = \rho\, a_{xx} + \eta_x^2,$$

si ha

$$c_{xx} - \rho\, a_{xx} = (\eta_x + \xi_x)(\eta_x - \xi_x),$$

e viceversa.

In particolare, vi sono due circoli bitangenti a C in P_h e P'_h: essi toccano A due volte risp. su o_k e o_l, han per centri O_k e O_l, hanno come autoconiugato il triangolo $O_1 O_2 O_3$, sono in omologia con C rispetto a O_h e o_h, a due loro diametri perpendicolari per O_k ed O_l corrispondono nell'omologia due diametri coniugati di C, e le loro equazioni sono

$$a_l c_{xx} - (ac)_k x^2_h = c_l a_{xx} - (ac)_h x^2_k = 0 \ ,$$

$$a_k c_{xx} + (ac)_l x^2_h = c_k a_{xx} + (ac)_h x^2_l = 0 \ .$$

Consideriamo p. e. il circolo Γ, che tocca C in P_h, P'_h ed ha il centro in O_k. Una retta mobile per O_h, $\xi_k x_k + \xi_l x_l = 0$, seca o_h C, Γ nei punti

$$O'_h(0, \xi_l, -\xi_k), \quad M_h\left[\pm\sqrt{-(c_k\xi^2_l + c_l\xi^2_k) : c_h}, \ \xi_l, -\xi_k\right],$$

$$N_h\left[\pm\sqrt{-(c_k\xi^2_l + c_l\xi^2_k)\, a_l : a_h c_l}, \ \xi_l, -\xi_k\right],$$

e si ha

$$\operatorname{tg}^2 O'_h M_h = -\frac{a_h}{c_h}\cdot\frac{c_k\xi^2_l + c_l\xi^2_k}{a_k\xi^2_l + a_l\xi^2_k}, \quad \operatorname{tg}^2 O'N_h = -\frac{a_l}{c_l}\cdot\frac{c_k\xi^2_l + c_l\xi^2_k}{a_k\xi^2_l + a_l\xi^2_k},$$

e quindi

$$\frac{\operatorname{tg}^2 O'_h M_h}{\operatorname{tg}^2 O'_h N_h} = -\frac{a_h c_l}{a_l c_h} = \cot^2\frac{1}{2} P_k P'_k = \text{cost.}$$

§ 5. Consideriamo le due tangenti r_h, r'_h condotte da O_h a C, che diremo *asintoti*.

Combinando le loro equazioni $x_k\sqrt{c_k} \pm x_l\sqrt{-c_l} = 0$ con quelle di una tangente qualunque t di C, ossia $c_{xx'} = 0$, abbiamo pei punti $r_h t \equiv T_h$, $r'_h t \equiv T'_h$,

$$x_k = \sqrt{-c_l}\,, \quad x_l = \mp\sqrt{c_k}\,, \quad c_h x'_h x_h = (x'_k\sqrt{-c_k} \mp x'_l\sqrt{c_l})\sqrt{c_k c_l}\,;$$

ed applicando la formola dell'area di un triangolo, cioè

$$\operatorname{sen}^2 PP'P'' = \frac{a\,(x\,x'\,x'')^2}{a_{xx}\,a_{x'x'}\,a_{x''x''}},$$

otteniamo

$$-\operatorname{sen}^2 O_h\,T_h\,T'_h =$$

$$\frac{4\,a_k\,a_l\,c\,c^3_h\,x'^4_h}{\left[(ac)_h c^2_h x'^2_h - a_h c_k c_l (x'_k\sqrt{-c_k} - x'_l\sqrt{c_l})^2\right]\left[(ac)_h c^2_h x'^2_h - a_h c_k c_l (x'_k\sqrt{-c_k} + x'_l\sqrt{c_l})^2\right]}.$$

Questa espressione in generale non rimane costante mentre t varia.

Ma se l'assoluto degenera in due punti, e precisamente se $\alpha_h = 0$, si ottiene

$$O_h\,T_h\,T'_h = \lim \frac{\operatorname{sen}^2 \overline{O_h T_h T'_h}^2}{\alpha^2} = \frac{4\,c^3_h}{\alpha^3_k\,\alpha^3_l\,c} = \text{cost.}$$

§ **6**. Una tangente mobile di C segna su due tangenti fisse due punteggiate proiettive; e però fra i segmenti δ, δ' che essa vi determina a partire da due punti assegnati, p. e. dai punti di contatto, passa una relazione della forma

$$\lambda \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\delta' + \mu \operatorname{tg}\delta + \mu' \operatorname{tg}\delta' + \nu = 0 \quad ;$$

la quale diviene

$$\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\delta' = \text{cost.}$$

solo quando il punto comune alle due tangenti fisse ha la stessa polare rispetto a C ed A; il che, se A è una conica propria, avviene quando le tangenti fisse sono due asintoti r_h, r'_h; e, se A si scinde in due punti, avviene sempre quando le due tangenti fisse son parallele.

Due rette, che siano coniugate rispetto a C e mobili intorno a un punto fisso O, secano una tangente fissa t di C in coppie di punti di una involuzione, i cui punti doppî sono sulle tangenti da O a C; quindi le distanze ε, ε' fra il punto di contatto T della data tangente t e due punti corrispondenti dell'involuzione sono legati da una relazione della forma

$$\lambda \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\varepsilon' + \mu (\operatorname{tg}\varepsilon + \operatorname{tg}\varepsilon') + \nu = 0 \quad .$$

A T corrisponde nell'involuzione il polo della OT. Se questi due punti sono ortogonali, la relazione d'involuzione si riduce a

$$\operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \varepsilon' = \text{cost.}$$

Due rette coniugate rispetto a C secano una tangente di C in due punti tali, che le altre due tangenti di C passanti per essi si secano sulla polare del punto comune a quelle due rette coniugate (STAUDT, *Geom. d. Lage*, 254). Quindi segue che, per generare la precedente involuzione, si possono adoperare le coppie di tangenti tirate dai punti di una retta fissa (polare di O).

Scegliendo per punto fisso O_h, si ha $\operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\varepsilon' = \text{cost.}$ quando T è uno dei quattro vertici P_k, P'_k, P_l, P'_l. Che se inoltre l'assoluto degenera in due punti di o_h, allora si ha $\varepsilon\varepsilon' = \text{cost.}$ qualunque sia T.

§ 7. Da quel che abbiamo esposto in questa Nota e nelle due dianzi citate emerge che, quando si cercano le proprietà metriche di una conica C assumendo come assoluto del suo piano una conica qualsiasi A, ciascun vertice del triangolo $O_1 O_2 O_3$ autoconiugato rispetto a C e A fa l'ufficio analogo a quello del centro di C nella metrica euclidea, le rette passanti per O_1, O_2, O_3 fanno l'ufficio analogo a quello dei diametri di C, e i lati o_1, o_2, o_3 del detto triangolo l'ufficio analogo a quello degli assi di C. Noi perciò li abbiamo chiamati rispettivamente *centri*, *diametri*, *assi principali* di C. L'epiteto « principale » è stato adoperato ad evitar confusioni; poichè sonvi altri punti ed altre rette, che nella metrica proiettiva posseggono in una certa misura proprietà analoghe a quelle del centro, dei diametri e degli assi della metrica euclidea; siccome risulterà dai seguenti cenni.

Sia A' la conica polare-reciproca di A rispetto a C, la quale ha per equazioni in coordinate di punti e di rette

$$a'_{xx} \equiv \sum \alpha_h c^2_h x^2_h = 0 \quad , \quad \alpha'_{\xi\xi} \equiv \sum a_h \gamma^2_h \xi^2_h = 0 \ .$$

Le tangenti di A' hanno per poli rispetto a C i punti dell'assoluto A, e da questo punto di vista sono analoghe ai diametri della metrica euclidea, e possiamo chiamarli *diametri* di C.

Sia inoltre A'' la conica polare-reciproca di A' rispetto ad A, la quale ha le equazioni

$$a''_{xx} \equiv \sum a^3_h \gamma^2_h x^2_h = 0 \quad , \quad \alpha''_{\xi\xi} \equiv \sum \alpha^3_h c^2_h \xi^2_h = 0 \ .$$

Ogni diametro di C ne ha due coniugati, cioè le tangenti condotte ad A' dal suo polo rispetto a C.

Una tangente (ξ_1, ξ_2, ξ_3) di A' soddisfa la $\alpha'_{\xi\xi}=0$; i suoi poli rispetto a C e A sono $(\gamma_1\xi_1, \gamma_2\xi_2, \gamma_3\xi_3)$, $(\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, \alpha_3\xi_3)$, la retta di questi poli è $\left(\frac{a_1 c_1 (ac)_1}{\xi_1}, \frac{a_2 c_2 (ac)_2}{\xi_2}, \frac{a_3 c_3 (ac)_3}{\xi_3}\right)$, e questa retta è tangente ad A' quando

$$\beta_{\xi\xi} \equiv \sum \beta_h \xi^2_k \xi^2_l = 0 ,$$

posto

$$\beta_h \equiv a^3_h (ac)^2_h .$$

Or questa equazione rappresenta una curva di quarta classe, che chiameremo B: quindi raccogliamo che le otto tangenti comuni alle curve A', B si possono dividere in quattro coppie, e quelle di ciascuna coppia sono due diametri di C coniugati e perpendicolari; sicchè possiamo chiamarle le quattro coppie di *assi* di C.

È facile verificare che la B è altresì l'inviluppo delle rette che uniscono i poli delle tangenti di A' rispetto a C ed A.

Accenniamo le principali proprietà della curva B.

Come tutte le coniche A, C, C', A', A'' hanno O_h e o_h $(h=1,2,3)$ come centro ed asse di omologia armonica, così anche la B; onde segue che le quattro coppie di assi sono a due a due omologiche-armoniche rispetto a O_h e o_h.

La B ha per tangenti doppie o_1, o_2, o_3; e precisamente o_h la oscula nei punti $\beta_k \xi^2_l + \beta_l \xi^2_k = 0$ armonici con O_k, O_l; e i sei punti di osculazione giacciono sulla conica W di equazioni

$$w_{xx} \equiv \sum \beta_h x^2_h = 0 , \quad \omega_{\xi\xi} \equiv \sum b_h \xi^2_h = 0 , \quad (b_h \beta_h \equiv 1) ,$$

la quale ha pure il triangolo $O_1 O_2 O_3$ come autoconiugato.

Le rette da O_1 ai punti di osculazione di o_h con B inviluppano la conica

$$w_{\xi\xi} = \sum \beta_k \xi^2_h = 0 , \qquad \omega_{xx} = \sum b_h x_h^2 = 0 .$$

Quattro tangenti di B sono $(\pm\sqrt{\beta_1}, \pm\sqrt{\beta_2}, \pm\sqrt{\beta_3})$: esse sono le tangenti comuni a C' e A, e si trovano a due a due in omologia armonica rispetto a O_h e o_h.

Altre tangenti di B sono $\left[\pm\sqrt{\beta_1\gamma_1},\ \pm\sqrt{\beta_2\gamma_2},\ \pm\sqrt{\beta_3\gamma_3}\right]$; esse sono le tangenti comuni comuni a C' e A'', e si trovano a due a due in omologia armonica rispetto a O_h e o_h.

Per ogni punto di o_h passano due tangenti di B (oltre la doppia osculatrice o_h), omologiche-armoniche rispetto a O_h e o_h; le due coppie di tangenti passanti per due punti di o_h armonici rispetto a O_k e O_l secano o_k e o_l risp. negli stessi punti.

Nella corrispondenza birazionale

$$\eta_1:\eta_2:\eta_3=\xi_2\,\xi_3:\xi_3\,\xi_1:\xi_1\,\xi_2\,,\quad \text{ossia}\quad \xi_1:\xi_2:\xi_3=\eta_2\eta_3:\eta_3\eta_1:\eta_1\eta_2\,,$$

a un punto $\Sigma\, y_h\,\eta_h=0$ corrisponde una conica $\Sigma\, y_h\,\xi_k\,\xi_l=0$ iscritta nel triangolo $O_1\,O_2\,O_3$; a una retta per O_h un punto di o_h; e in particolare, alla retta da O_h al punto $\Sigma\, y_h\,\eta_h=0$ il punto di contatto di o_h con W; alla conica W corrisponde la curva B; alle due tangenti da O_h a W i due punti di contatto di o_h con B.

La B ha quattro punti doppî, le cui equazioni sono compendiate nella

$$\sum\pm\,\xi_h\sqrt{b_h}=0\ ;$$

ed a due a due essi sono in omologia armonica con O_h e o_h.

L'ordine della B è $4\,.\,3-2\,.\,3=6$.

Ogni retta per O_h seca B in tre coppie di punti in involuzione.

Indicando con n_0, n_1, n_2, n_3 il trinomio $\Sigma\,\xi_h\sqrt{b_h}$ e quelli che ne derivano col mutarvi di segno un sol radicale, si ha

$$w^2_{\xi\xi}-n_0\,n_1\,n_2\,n_3=2\,b_1\,b_2\,b_3\,\beta_{\xi\xi}\,.$$

Le quattro coppie di tangenti nei punti doppî di B toccano la conica W.

L'equazione della B può anche scriversi così:

$$\sqrt{n_0}+\sqrt{n_1}+\sqrt{n_2}+\sqrt{n_3}=0\ ,$$

ovvero

$$(n^2_0+\ldots-2\,n_0n_1-\ldots)^2-64\,n_0\,n_1\,n_2\,n_3=0\ .$$

L'equazione della B in coordinate di punti è

$$b_{xx}\equiv\left[\sum\beta_h\,x^2_h\right]^3-27\,\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,x^2_1\,x^2_2\,x^2_3=0\ .$$

Quanto alle equazioni degli otto assi di C, essa dipenderà da tre equazioni di 2° grado.

Ci asteniamo dal calcolarle; e solo notiamo che i prodotti delle coordinate omonime di due assi coniugati sono proporzionali a $a_1 c_1 (a\,c)_1$, $a_2 c_2 (a\,c)_2$, $a_3 c_3 (a\,c)_3$.

Se a_{xx}, c_{xx} e $\alpha_{\xi\xi}$, $\gamma_{\xi\xi}$ son date, non nella forma canonica, ma nella forma più generale, si possono esprimere come funzioni intere di a_{xx}, c_{xx}, u_{xx}, a, c, s, s' le a'_{xx}, c'_{xx}, a''_{xx}, b_{xx}, w_{xx}, e come funzioni intere di $\alpha_{\xi\xi}$, $\gamma_{\xi\xi}$, $\chi_{\xi\xi}$, ... le $\alpha'_{\xi\xi}$, ... Del pari l'equazione delle quattro coppie di assi si può esprimere come funzione intera di 4° grado di a_{xx}, c_{xx}, u_{xx} con cofficienti interi in a, c, s, s'. Ma non intendiamo di ricavare tali espressioni.

Se l'assoluto A degenera in due punti L, L' di o_3, C' diviene una coppia di punti di o_3, A' una coppia di rette per O_3, cioè le polari l, l' di L, L' rispetto a C, ed A'' una coppia di punti di o_3, armonici rispetto a L e L' coi punti lo_3, $l'o_3$. I diametri di C sono allora le rette per O_3, che è il centro, e gli assi sono o_1, o_2.

Ciò è d'accordo col fatto, che per $\alpha_3 = 0$ risulta

$$a'_{xx} = \alpha_1 c^2_1 x^2_1 + \alpha_2 c^2_2 x^2_2\,, \qquad \alpha''_{\xi\xi} = \alpha^3_1 c^2_1 \xi^2_1 + \alpha^3_2 c^2_h \xi^2_2\,,$$

$$\alpha^3_3 \beta_{\xi\xi} = (ac)^2_3 \xi^2_1 \xi^2_2\,.$$

Se invece l'assoluto degenera in due rette l, l' per O_3, A' degenera in due punti di o_3, cioè nei poli L, L' di l, l' rispetto a C, e A'' in due rette per O_3, armoniche rispetto a l, l' con $O_3 L$, $O_3 L'$. I punti L, L' sono allora i centri di C, le rette per L e quelle per L' ne sono i diametri; e vi sono due coppie di assi, cioè $(o_3, O_3 L)$, $(o_3, O_3 L')$.

Ciò è d'accordo col fatto, che per $a_3 = 0$ risulta

$$a_{xx} = a_1 x^2_1 + a_2 x^2_2\,, \qquad \alpha'_{\xi\xi} = a_1 \gamma^2_1 \xi^2_1 + a_2 \gamma^2_2 \xi^2_2\,,$$

$$a''_{xx} = a^3 \gamma^2_1 x^2_1 + a^3_2 \gamma^2_2 x^2_2\,; \qquad \beta_{\xi\xi} = a^2_1 a^2_2 c^2_3 (a_2 \xi^2_1 + a_1 \xi^2_1)\,,$$

$$w_{xx} = a^2_1 a^2_2 c^2_3 (a_1 x^2_1 + a_2 x^2_2)\,.$$

Torino, 8 Marzo 1891.

Influenza della eccentricità dell'alidada sui vernieri, ed un microscopio ad ingrandimento costante;

Nota del Prof. NICODEMO JADANZA

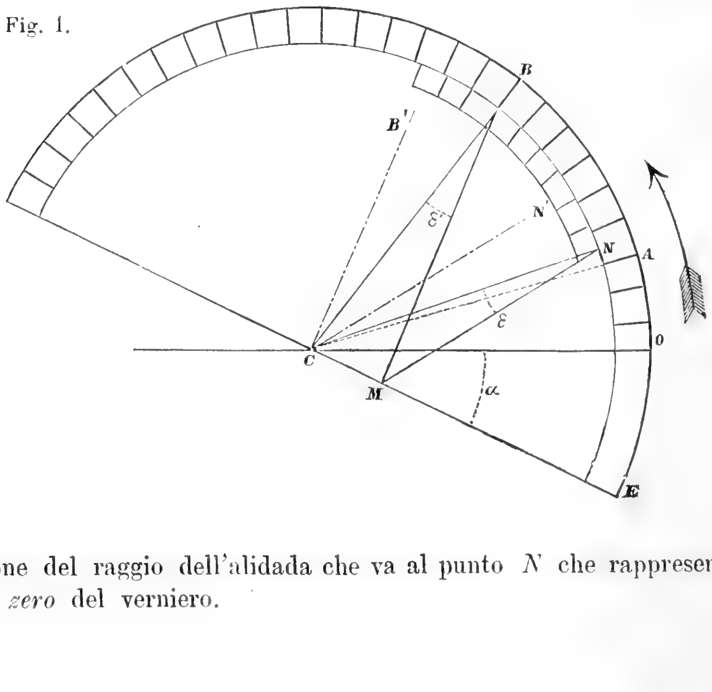
I.

Influenza della eccentricità dell'alidada sui vernieri.

Il sig. G. B. MAGNAGHI nel suo libro: *Gli strumenti a riflessione per misurare angoli* ha, per il primo, esaminato la influenza che la eccentricità dell'alidada ha sulla *lettura di un verniero*. Essendo la cosa di molta importanza crediamo non inutile esporne una nuova dimostrazione.

Sia C (fig. 1) il centro del circolo graduato (lembo) di un goniometro qualunque ed M quello dell'alidada: $M\ N$ la posi-

Fig. 1.



zione del raggio dell'alidada che va al punto N che rappresenta lo *zero* del verniero.

Se O è l'origine della graduazione che procede crescendo nel senso della freccia, l'angolo che si legge sul circolo graduato è

$$OCN = OCA + ACN$$

(A è la divisione del lembo che precede immediatamente lo zero del verniero). Ponendo $OCA = \alpha$, sarà:

$$OCN = \alpha + ACN.$$

Il valore del piccolo angolo ACN si ottiene per mezzo del verniero. Indicando con l il valore angolare della più piccola parte del lembo e con n il numero delle parti in cui è diviso il verniero, l'approssimazione di questo è $\frac{l}{n}$; quindi se la k^{ma} divisione del verniero coincide colla corrispondente del lembo in B, si avrà per valore dell'angolo ACN l'espressione

$$ACN = k\frac{l}{n}$$

la quale è vera quando non vi è eccentricità.

Nel caso attuale si ha:

$$ACN = ACB - NCB$$

ed

$$NCB = NMB + \varepsilon - \varepsilon'$$

$$(\varepsilon = MNC\ ,\quad \varepsilon' = MBC);$$

quindi, osservando che è

$$ACB = k\,l\ ,\qquad NMB = k\,l'$$

(l' essendo il valore angolare della più piccola parte del verniero). sarà:

$$ACN = k\,(l - l') + \varepsilon' - \varepsilon$$

ovvero, essendo $l - l' = \frac{l}{n}$

$$ACN = \frac{k\,l}{n} + \varepsilon' - \varepsilon$$

L'influenza della eccentricità dell'alidada sul verniero sarà dunque espressa dalla quantità:

$$\omega = \varepsilon' - \varepsilon \qquad \ldots\ldots (1).$$

I due triangoli CNM, BCM, ponendo $CM = e$ ed indicando con r il raggio del circolo graduato, dànno

$$\operatorname{sen} \varepsilon : e = \operatorname{sen} NMC : r$$

$$\operatorname{sen} \varepsilon' : e = \operatorname{sen} BMC : r$$

donde, ponendo $P = NME$, $\lambda = NMB$, si ottiene

$$\varepsilon = \frac{e}{r \operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} P$$

$$\varepsilon' = \frac{e}{r \operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} (P + \lambda)$$

e quindi $$\omega = \frac{e}{r \operatorname{sen} 1''} \left[\operatorname{sen} (P + \lambda) - \operatorname{sen} P \right],$$

ovvero $$\omega = \frac{2e}{r \operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \lambda \cos \left(P + \frac{1}{2} \lambda \right) \qquad \ldots (2).$$

Il massimo valore di ω si ottiene quando λ ha il valore dell'ampiezza totale λ_m del verniero e quando $P + \frac{1}{2} \lambda = 2 k \pi$. In tale ipotesi il massimo valore ω_m della *influenza della eccentricità* sul verniero è dato da

$$\omega_m = \frac{2e}{r \operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \lambda_m \qquad \ldots\ldots (3).$$

Nel caso di $\lambda_m = 9^\circ 50'$ come è effettivamente quando il circolo è diviso in *sesti* di grado, supponendo

$$e = 0^{mm}, 01 \, ; \quad r = 60^{mm}$$

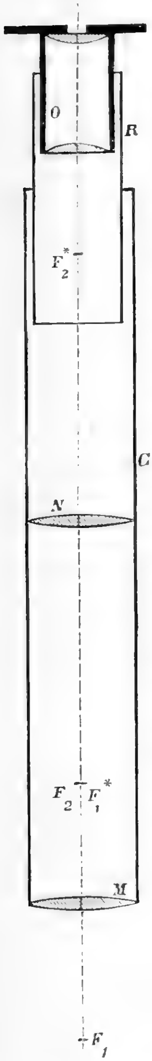
si ottiene $$\omega_m = 5'', 89 \, .$$

Adunque l'influenza della eccentricità dell'alidada sulle letture dei vernieri non è una quantità trascurabile; e quindi vi è una ragione di più per dare la preferenza ai microscopi, piuttosto che ai vernieri, quando si vogliono leggere circoli graduati.

II.

Un microscopio ad ingrandimento costante.

Fig. 2.



La ragione principale per cui molti pratici sono alieni dall'abbandonare il verniero nelle letture dei circoli graduati è che essi credono il microscopio composto un apparecchio molto delicato, e quindi poco adatto per gli strumenti destinati ai lavori topografici pei quali, in generale, non è necessaria una gran precisione. Codesto ha qualche fondamento di vero nei microscopi forniti di vite micrometrica nei quali una variazione nella distanza della lente obbiettiva del microscopio dal circolo graduato produce non solo una variazione nel sito in cui si forma l'immagine, ma anche una variazione nella grandezza di questa. E per coloro che non hanno molta pratica la correzione da fare riesce certamente lunga e noiosa.

A tale inconveniente si può ovviare coll'istrumento che qui presentiamo, cioè col MICROSCOPIO AD INGRANDIMENTO COSTANTE.

Il microscopio ad ingrandimento costante è rappresentato dalla fig. 2ª. L'obbiettivo, invece di essere formato da una sola lente, è un sistema composto di due lenti M ed N e propriamente un *sistema telescopico* (afocale). Indicando con φ_1 la distanza focale della lente M e con φ_2 quella della lente N (le due lenti si suppongono infinitamente sottili), se Δ è la loro distanza, si ha:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \varphi_2 + \varphi_1 \\ \varphi_2 &= k\varphi_1 \qquad (k > 1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4).$$

Essendo l'obbiettivo un sistema composto telescopico, il rapporto tra una dimensione dell'immagine normale all'asse e la corrispondente dimensione dell' oggetto è una quantità costante, qualunque sia la posizione dell'oggetto. L'obbiettivo adunque darà di un oggetto una immagine sempre maggiore di esso, e propriamente sarà :

$$\textit{Immagine} = \text{k. } \textit{oggetto} \qquad \ldots\ldots (5).$$

L'oculare O ingrandisce ancora codesta immagine data dall'obbiettivo telescopico e quindi l'ingrandimento totale è anch'esso costante.

È facile vedere che il fuoco anteriore F_1 della lente M ed il fuoco posteriore F_2^* della lente N sono due punti coniugati del sistema telescopico (M, N), quindi se l'oggetto è collocato in F_1, la sua immagine si troverà in F_2^*.

Ad uno spostamento dell'oggetto verso destra o verso sinistra di F_1 corrisponde uno spostamento della immagine verso destra o verso sinistra di F_2^*.

Codesti spostamenti sono legati dalla relazione:

$$\frac{\xi^* - F_2^*}{\xi - F_1} = \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2} = k^2 \qquad \ldots\ldots (6).$$

nella quale ξ, ξ^* sono le ascisse di due punti coniugati (oggetto ed immagine) qualunque riferiti ad una origine arbitraria; F_1, F_2^* sono le ascisse del primo fuoco della lente M e del secondo fuoco della lente N contate dalla medesima origine.

Il tubo R che contiene il reticolo e l'oculare è bene che abbia uno scorrimento abbastanza grande nel tubo C che contiene l'obbiettivo; si avrà così sempre la possibilità di vedere la immagine di un oggetto situato in prossimità del fuoco F_1 (a destra o a sinistra).

La utilità di codesto microscopio risulterà evidente qualora lo s'immagini applicato alla lettura della graduazione dei circoli di un teodolite. Un casuale spostamento nella distanza tra la lente M e la graduazione del circolo non obbliga l'osservatore ad una noiosa rettificazione; sarà sufficiente spostare, per mezzo di una chiavetta, il tubo R per portare il reticolo nel sito dove si trova la immagine.

Torino Febbraio 1891.

Sulle velocità di massimo rendimento ed a vuoto delle turbine;

Nota dell'Ing. Prof. ANGELO BOTTIGLIA

I. **Lavoro raccolto sulle palette di una turbina.** — Qualunque sia il tipo di una turbina e qualunque sia il modo di agire dell'acqua sulle sue palette, il lavoro raccolto su queste si può sempre intendere espresso dal prodotto della pressione esercitata dal liquido sulle palette stesse per la velocità dei punti a cui questa pressione è applicata.

Egli è appunto esprimendo in questo modo il lavoro raccolto sulle palette di una turbina che si può dedurre un'espressione generale, applicabile a qualunque turbina, della velocità di massimo rendimento e stabilire relazioni, utili nella pratica, fra questa velocità e quella a vuoto.

Siano:

V_0 la velocità effettiva colla quale l'acqua effluendo dal distributore viene ad incontrare le palette della motrice,

V_1 la velocità assoluta colla quale l'acqua abbandona le dette palette,

R ed R_1 le distanze dall'asse di rotazione dei centri delle luci d'introduzione e di uscita dell'acqua dalla ruota mobile,

v e v_1 le velocità di rotazione dei punti della turbina situati rispettivamente alle distanze R ed R_1 dall'asse,

u_0 ed u_1 le velocità relative dell'acqua all'ingresso ed all'uscita dai condotti rispetto alle velocità di rotazione v e v_1,

u_p la velocità perduta dall'acqua nell'entrare nei condotti mobili,

p e p_1 le pressioni, misurate in altezza di colonna d'acqua, dell'acqua nelle sezioni d'ingresso e d'uscita dai condotti motori,

h l'altezza delle luci di introduzione sulle luci d'efflusso della ruota girante,

$180^\circ - \beta_0$, $180^\circ - \beta_1$ ed α_0 gli angoli di v con u_0, di v_1 con u_1 e di V_0 con v,

Q i litri d'acqua che per ogni secondo attraversano la turbina,

H la caduta, in metri, dell'acqua,

g l'accelerazione dovuta alla gravità,

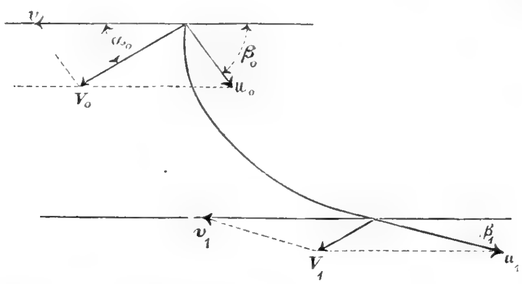
L il lavoro in chilogrammetri raccolto per ogni secondo sulle palette della turbina,

avremo, trascurando gli attriti, manifestamente:

$$L = Q \left\{ \frac{V_0^2 - V_1^2 - u_p^2}{2g} + p - p_1 + h \right\},$$

ma $V_0^2 = u_0^2 + v^2 - 2u_0 v \cos\beta_0$, $V_1^2 = u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1 \cos\beta_1$,

$$p + h + \frac{v_1^2 - v^2}{2g} = p_1 + \frac{1}{2g}(u_1^2 - u_0^2 + u_p^2),$$



quindi sostituendo e riducendo

$$L = \frac{Q}{g} \left\{ v^2 - v_1^2 + u_1 v_1 \cos\beta_1 - u_0 v \cos\beta_0 \right\}$$

e per essere

$$u_0 \cos\beta_0 = v - V_0 \cos\alpha_0 \qquad \text{e} \qquad v_1 = v\frac{R_1}{R}$$

avremo ancora

$$L = \frac{Q}{g} \left\{ \frac{R_1}{R} u_1 \cos\beta_1 + V_0 \cos\alpha_0 - v_1 \frac{R_1}{R} \right\} v \qquad \ldots (1)$$

nella quale relazione il fattore di v rappresenta appunto la pressione totale esercitata dall'acqua sulle palette, riferita ai punti posti alla distanza R dall'asse di rotazione.

Rappresentando con P questa pressione potremo scrivere, in generale per qualunque turbina

$$P = \frac{Q}{g} \left\{ \frac{R_1}{R} u_1 \cos\beta_1 + V_0 \cos\alpha_0 - v_1 \frac{R_1}{R} \right\} \qquad \ldots (2)$$

$$L = Pv.$$

II. **Velocità di massimo rendimento.** — Dall'equazione (1), la quale dà il lavoro L corrispondente ad una velocità qualunque di rotazione v, si ricava la velocità corrispondente al massimo rendimento, che chiameremo v_m, quando in essa facciamo $L = QH$ ed esprimiamo le condizioni che la velocità perduta u_p e la velocità V_1 siano zero.

Alla condizione $u_p = 0$ si soddisfa facendo il primo elemento della paletta tangente alla direzione di u_0, il che equivale a far dipendere v_m anche da α_0.

Per soddisfare alla condizione $V_1 = 0$ dovrebbesi fare u_1 eguale e direttamente opposta a v_1 e per conseguenza $\beta_1 = 0$. Siccome però β_1 non può mai essere zero quantunque si possa e si debba fare piccolo assai, così alla condizione di $u_1 = v_1$ dovremo sostituire quella di

$$u_1 \cos\beta_1 = v_1 .$$

Con queste condizioni la (1) diventa

$$QH = \frac{Q}{g} v_m V_0 \cos\alpha_0 ,$$

donde

$$v_m = \frac{gH}{V_0 \cos\alpha_0} \qquad \ldots \quad (3)$$

chè è la relazione fra la velocità del massimo rendimento, la caduta, la velocità e la direzione d'efflusso dell'acqua dal distributore, applicabile a qualsivoglia turbina, sia essa assiale o radiale, a libero efflusso oppure a reazione.

III. **Velocità a vuoto.** — Facendo camminare una turbina a vuoto, cioè senza che essa vinca alcuna resistenza utile, il lavoro raccolto sulle palette deve essere zero; ora non essendo zero la velocità di rotazione, dovrà necessariamente essere nulla la pressione P.

Quindi per questo caso, dicendo v_1 e v'_1 i valori che assumono le velocità v e v_1, in virtù della (2) si avrà

$$\frac{R_1}{R} u_1 \cos\beta_1 + V_0 \cos\alpha_0 - v'_1 \frac{R_1}{R} = 0 ,$$

ma facendo alla turbina smaltire a vuoto sempre la portata Q, deve aversi la relazione $u_1 \cos\beta_1 = v_{1m}$, essendo v_{1m} la velocità corrispondente al massimo rendimento dei punti situati alla distanza R_1 dall'asse di rotazione; quindi la relazione precedente diventa

$$\frac{R_1}{R} v_{1m} + V_0 \cos \alpha_0 - v'_1 \frac{R_1}{R} = 0 \ ,$$

donde

$$v_1 = v_{1m} + \frac{R}{R_1} V_0 \cos \alpha_0 \qquad \ldots (4)$$

che per le turbine assiali nelle quali $R = R_1$, $v_{1m} = v_m$ e $v' = v'_1$ si riduce a

$$v' = v_m + V_0 \cos \alpha_0 \ . \qquad \ldots (4').$$

La relazione (4) e la sua conseguente (4'), che ci dà la velocità a vuoto in funzione della velocità di massimo rendimento, è generale e vale per qualunque turbina e qualsivoglia valore di α_0, mentre la relazione $v'_1 = 2 v_{1m}$ dedotta da molti autori e seguita fin qui dai pratici, è solo vera nel caso particolare in cui la turbina fosse costrutta per modo che $\frac{R}{R_1} V_0 \cos \alpha_0 = v_{1m}$.

Infatti all'eguaglianza $v'_1 = 2 v_{1m}$ si arriva col differenziare la (1) rispetto a v e supponendo $V_0 \cos \alpha_0$ costante. Questa ipotesi di $V_0 \cos \alpha_0$ costante, unita alla condizione di non avere perdita di forza viva all'ingresso dell'acqua nei condotti, trae appunto con sè la conseguenza che sia $V_0 \cos \alpha_0 = v_m$ per le turbine assiali e $\frac{R}{R_1} V_0 \cos \alpha_0 = v_{1m}$ per le turbine cilindriche nelle quali havvi a tener calcolo della forza centrifuga.

IV. **Relazioni fra la velocità di massimo rendimento e la velocità a vuoto.** — Per le turbine assiali, cioè elicoidali, dalla (4') si ricava che sempre quando:

$$\left.\begin{array}{llll} V_0 \cos \alpha_0 > v_m & \text{ossia} & 180^\circ - \beta_0 < 90^\circ & \text{sarà} \quad v_m < \frac{v'}{2} \\ V_0 \cos \alpha_0 = v_m & \text{»} & 180^\circ - \beta_0 = 90^\circ & \text{»} \quad v_m = \frac{v'}{2} \\ V_0 \cos \alpha_0 < v_m & \text{»} & 180^\circ - \beta_0 > 90^\circ & \text{»} \quad v_m > \frac{v'}{2} \end{array}\right\} \ldots (5)$$

dunque:

Nelle turbine elicoidali la velocità del massimo rendimento teorico: — è inferiore alla metà della velocità a vuoto quando le palette si distaccano dal piano delle luci di introduzione, facendo, colla velocità di rotazione, un angolo inferiore a 90°, — è uguale alla metà della velocità a vuoto quando le palette si distaccano in direzione normale al piano delle luci di introduzione, — è superiore alla metà della velocità a vuoto quando l'indicato angolo è superiore a 90°.

Per le turbine cilindriche dalla (4) si ritrae che se:

$$\left.\begin{array}{llllll} V_0 \cos\alpha_0 > \frac{R_1}{R} v_{1m} & \text{ossia} & V_0 \cos\alpha_0 > v_m \left(\frac{R_1}{R}\right)^2 & \text{sarà} & v_{1m} < \frac{v'_1}{2} \\ V_0 \cos\alpha_0 = \frac{R_1}{R} v_{1m} & \text{»} & V_0 \cos\alpha_0 = v_m \left(\frac{R_1}{R}\right)^2 & \text{»} & v_{1m} = \frac{v'_1}{2} \\ V_0 \cos\alpha_0 < \frac{R_1}{R} v_{1m} & \text{»} & V_0 \cos\alpha_0 < v_m \left(\frac{R_1}{R}\right)^2 & \text{»} & v_{1m} > \frac{v'_1}{2} \end{array}\right\} \quad (5')$$

ossia osservando che sempre $\frac{R_1}{R}$ è maggiore di 1 e minore di 1,20, diremo che: quando $V_0 \cos\alpha_0 \gtreqless v_m$ ossia $180° - \beta_0 \gtreqless 90°$ sarà $v_{1m} > \frac{v'_1}{2}$, — quando $180° - \beta_0$ è inferiore ma di poco a $90°$ sarà $v_{1m} = \frac{v'_1}{2}$, — quando $180° - \beta_0$ è molto al disotto di $90°$ sarà $v_{1m} < \frac{v'_1}{2}$. Dunque:

Nelle turbine cilindriche la velocità del massimo rendimento teorico: — è superiore alla metà della velocità a vuoto quando le palette si distaccano dalla superficie cilindrica, sulla quale si trovano le luci d'introduzione, facendo colla velocità di rotazione un angolo uguale o superiore a 90°, — è uguale alla metà della velocità a vuoto quando quest'angolo è poco inferiore a 90°, — è inferiore alla metà della velocità a vuoto quando il detto angolo è molto inferiore a 90°.

Ma oltre alle precedenti relazioni, altre si possono ricavare tenendo conto del sistema della turbina, della caduta e della portata.

Cominciamo a considerare le turbine elicoidali.

Essendo in generale $V_0 = \delta\sqrt{2gH}$ in cui $\delta < 1$, e ricordando la (3), le (5) si possono porre sotto la forma

$$\left.\begin{array}{lll} v_m < \frac{v'}{2} & \text{quando} & 2\delta^2\cos^2\alpha_0 > 1 \\ v_m = \frac{v'}{2} & \text{»} & 2\delta^2\cos^2\alpha_0 = 1 \\ v_m > \frac{v'}{2} & \text{»} & 2\delta^2\cos^2\alpha_0 < 1 \end{array}\right\} \quad \ldots \ (6).$$

Ora per le turbine a libero efflusso $\delta \lesseqgtr 0,81$ perciò la relazione $2\delta^2\cos^2\alpha_0 = 1$ per $\delta = 0,81$ ci darà $\alpha_0 = 29^\circ\ 30'$, e per conseguenza qualsiasi valore di $\alpha_0 < 29^\circ\ 30'$ renderà $2\delta^2\cos^2\alpha_0 > 1$ mentre i valori di $\alpha_0 > 30^\circ$ renderanno $2\delta^2\cos^2\alpha_0 < 1$.

Ma $\alpha_0 = 30^\circ$ corrisponde alle portate e cadute medie (cioè ad $H > 3^m$ e $< 5^m$, ed a $Q > 600$ e < 3000), $\alpha_0 < 30^\circ$ alle piccole portate con grandi e medie cadute, $\alpha_0 > 30^\circ$ alle grandi portate con piccole cadute, perciò si deduce:

Nelle turbine elicoidali ad azione la velocità di massimo rendimento: — è inferiore alla metà della velocità a vuoto per le grandi e medie cadute con piccole portate, — è uguale alla metà della velocità a vuoto per le medie portate e medie cadute, — è superiore alla metà della velocità a vuoto per le grandi portate e piccole cadute.

Per le turbine a reazione, δ può assumere a seconda del grado di reazione valori diversi ma sempre inferiori a 0,81.

Supponendo la turbina costruita colle regole di Jonval, cioè $V_0 = \sqrt{gH}$ e quindi $\delta^2 = \frac{1}{2}$, le (6) diventano:

$$\left.\begin{array}{lll} v_m < \frac{v'}{2} & \text{quando} & \cos\alpha_0 > 1 \\ v_m = \frac{v'}{2} & \text{»} & \cos\alpha_0 = 1 \\ v_m > \frac{v'}{2} & \text{»} & \cos\alpha_0 < 1 \end{array}\right\}$$

e siccome $\cos\alpha_0$ non può mai essere superiore ad 1 e per altra parte le scritte disuguaglianze si verificherebbero *a fortiori* per $\delta^2 < \frac{1}{2}$, così stabiliremo che:

Nelle turbine elicoidali a reazione costruite con un grado di reazione eguale o superiore a quello suggerito da Jonval, cioè facendo $V_0 \gtreqless 0{,}71\sqrt{2gH}$, *la velocità di massimo rendimento è sempre superiore alla metà della velocità a vuoto.*

Per le turbine aventi un grado di reazione minore di quelle Jonval, cioè per δ compreso fra $0{,}71$ e $0{,}81$, si deduce dall'eguaglianza $2\delta^2\cos^2\alpha_0 = 1$ che sempre quando $\alpha_0 \gtreqless 30^\circ$ deve essere $\delta \gtreqless 0{,}81$. Ma volendo la turbina a reazione occorre che sia $\delta < 0{,}81$, quindi diremo che per queste turbine e per $\alpha_0 \gtreqless 30^\circ$ sarà necessariamente $2\delta^2\cos^2\alpha_0 < 1$ e quindi $v_m > \frac{v'}{2}$, dunque:

Nelle turbine elicoidali a reazione costruite con un grado di reazione minore di quello proposto da Jonval, la velocità di massimo rendimento è sempre superiore alla metà della velocità a vuoto per le piccole cadute con medie e grandi portate.

Veniamo alle turbine cilindriche.

Anche qui, per essere $V_0 = \delta\sqrt{2gH}$ e $v_m = \dfrac{gH}{V_0\cos\alpha_0}$, le (5') si trasformano nelle seguenti:

$$\left.\begin{array}{llll}
v_{1m} < \dfrac{v'_1}{2} & \text{ossia} \quad v_m < \dfrac{v'}{2} & \text{quando} & 2\delta^2\cos^2\alpha_0 > \left(\dfrac{R_1}{R}\right)^2 \\
v_{1m} = \dfrac{v'_1}{2} & \quad » \quad v_m = \dfrac{v'}{2} & \quad » & 2\delta^2\cos^2\alpha_0 = \left(\dfrac{R_1}{R}\right)^2 \\
v_{1m} > \dfrac{v'_1}{2} & \quad » \quad v_m > \dfrac{v'}{2} & \quad » & 2\delta^2\cos^2\alpha_0 < \left(\dfrac{R_1}{R}\right)^2
\end{array}\right\} \ldots (6').$$

Se la turbina cilindrica è a libero efflusso, $\delta \gtreqless 0{,}81$, $\frac{R_1}{R} \gtreqless 1{,}10$, quindi la relazione $2\delta^2\cos^2\alpha_0 = \left(\frac{R_1}{R}\right)^2$ per $\delta = 0{,}81$

ed $\frac{R_1}{R}=1{,}10$ ci somministra $\alpha_0=15^\circ$. Ma in queste turbine α_0 è sempre maggiore di 15°, $\frac{R_1}{R}$ è sempre maggiore di 1,10, quindi si avrà sempre:

$$2\delta^2\cos^2\alpha_0<\left(\frac{R_1}{R}\right)^2 \quad \text{ossia} \quad v_m>\frac{v'}{2}\,;$$

in conseguenza:

Nelle turbine cilindriche ad azione la velocità di massimo rendimento è sempre superiore alla metà della velocità a vuoto, qualunque siano la portata e la caduta.

Se la turbina è a reazione e se $V=\sqrt{gH}$ cioè $\delta^2=\frac{1}{2}$, le (6′) danno

$$v_m<\frac{v'}{2} \quad \text{quando} \quad \cos\alpha_0>\frac{R_1}{R}$$

$$v_m=\frac{v'}{2} \quad » \quad \cos\alpha_0=\frac{R_1}{R}$$

$$v_m>\frac{v'}{2} \quad » \quad \cos\alpha_0<\frac{R_1}{R}$$

dalle quali, per essere $\frac{R_1}{R}>1$ si deduce che sempre $v_m>\frac{v'}{2}$ quando $\delta^2\gtreqless\frac{1}{2}$; dunque:

Nelle turbine cilindriche costruite con un grado di reazione eguale o superiore a quello suggerito da Jonval, la velocità di massimo rendimento è sempre superiore alla metà della velocità a vuoto.

Se pur conservando la turbina a reazione si fa δ compreso fra 0,71 e 0,81, allora siccome la relazione $2\delta^2\cos^2\alpha_0=\left(\frac{R_1}{R}\right)^2$ per $\delta=0{,}81$ ed $\frac{R_1}{R}=1{,}10$ ci dà $\alpha_0=15^\circ$, così diremo che a

$\delta < 0,81$ deve corrispondere $\alpha_0 < 15°$: ma α_0 non scende mai al disotto di 15°, quindi ne risulta che in generale si avrà sempre

$2\,\delta^2 \cos^2 \alpha_0 < \left(\frac{R_1}{R}\right)^2$ ossia $v_m > \frac{v'}{2}$, cioè:

Nelle turbine cilindriche a reazione la velocità di massimo rendimento è sempre superiore alla metà della velocità a vuoto, qualunque sia il loro grado di reazione.

Stabilite le precedenti relazioni, occorre provvederci un'espressione la quale somministri la velocità del massimo rendimento in funzione della velocità a vuoto e della caduta.

Perciò ricorriamo alla (4) e sostituiamo in essa a $V_0 \cos \alpha_0$ il valore $\frac{gH}{v_m}$ che si ricava dalla (3), avremo:

$$v'_1 = v_{1m} + \frac{R}{R_1}\frac{gH}{v_m}$$

ossia

$$v'_1 = v_{1m} + \frac{gH}{v_{1m}}$$

donde

$$v_{1m} = \frac{v'_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{v'_1}{2}\right)^2 - gH} \quad \ldots \ (7)$$

che è la relazione cercata. — Si assumerà in essa il radicale col segno + oppure col segno — secondochè dall'applicazione delle regole sovra stabilite risulta $v_{1m} > \frac{v'_1}{2}$ oppure $v_{1m} < \frac{v'_1}{2}$.

La (7) fa anche vedere che il minimo valore della velocità a vuoto di una turbina è quello corrispondente alla velocità dovuta al doppio della caduta ($v'^2_1 = 4gH$) a cui la turbina è applicata, *ed è solo quando la velocità a vuoto raggiunge questo minimo che essa è doppia della velocità di massimo rendimento.*

Le regole precedenti e la (7) sono particolarmente utili quando nelle operazioni di collaudo devesi determinare il rendimento massimo di una turbina. — Invero esaminata la struttura delle palette, misurati i raggi della turbina e la caduta, determinati i giri a vuoto, si ricava colla (7) la velocità di massimo rendimento ed allora l'operatore conosce tosto a quale velocità deve frenare la turbina per ottenere dalla medesima il massimo effetto utile.

Anzi, occorrendo, si può mercè la conoscenza delle velocità a vuoto e di massimo rendimento, dei raggi e della portata, determinare il lavoro massimo della turbina senza ricorrere alle prove col freno. — Diffatti chiamando L_m questo lavoro massimo e conservando le notazioni precedenti, la (1) ci dà

$$L_m = \frac{Q}{g} \left\{ \frac{R_1}{R} u_1 \cos\beta_1 + V_0 \cos\alpha_0 - \frac{R_1}{R} v_{1m} \right\} v_m$$

ossia per essere $u_1 \cos\beta_1 = v_{1m}$

$$L_m = \frac{Q}{g} V_0 \cos\alpha_0 \, v_m$$

ed in forza della (4)

$$L_m = \frac{Q}{g} \frac{R_1}{R} (v'_1 - v_{1m}) \, v_m \qquad \ldots \quad (8).$$

Misurando adunque Q, R, R_1, v'_1 e calcolando colla (7) v_{1m} e poscia deducendo v_m si ricava facilmente dalla (8) il lavoro L_m. — Naturalmente nell'eseguire la prova a vuoto della turbina bisogna disporre le cose in modo che la portata Q si mantenga costante ed eguale a quella per la quale la turbina venne installata.

Tutto quanto venne sovra dedotto è vero quando si trascurino le resistenze passive degli attriti.

Inoltre per poter applicare le suesposte conclusioni si debbono condurre le esperienze in modo da mantenere costante non solo la portata ma eziandio la caduta.

Torino, marzo 1891.

Contributo alla fisiologia degli epitelii.

Della struttura dell'epitelio vaginale della coniglia e delle modificazioni che vi avvengono nella gravidanza;

del Dott. IGNAZIO SALVIOLI

Nell'anno 1889 Morau (1) pubblicò una serie di ricerche intorno alle modificazioni che subisce l'epitelio della vagina di alcuni roditori durante il ciclo genitale. Egli a questo scopo esaminò un numero assai grande di femmine del *mus musculus*, e vide che l'epitelio della vagina di questo animale in tale periodo, da pavimentoso stratificato come è normalmente, si trasforma a poco a poco in cilindrico pure stratificato, e che le cellule cilindriche neoformate, ad un certo periodo, subiscono una degenerazione mucosa, la quale, secondo Morau, servirebbe ad adattare l'organo alla nuova funzione a cui è destinato. Per quello che riguarda gli altri roditori egli dedica poche righe, limitandosi solo a dire che anche in questi si verifica lo stesso fatto.

L'importanza di tale fenomeno, ed il fatto che io avevo a mia disposizione un materiale assai abbondante, mi hanno indotto a ripetere queste osservazioni sul coniglio; e ciò ho fatto tanto più volentieri, perchè desideravo anche darmi una ragione del perchè tutti gli osservatori, che hanno esaminati gli organi genitali esterni della coniglia, sieno caduti in così aperte contraddizioni. Anche recentemente due ricercatori, Luzi e Barbacci, hanno descritto l'epitelio della vagina del coniglio in modo affatto diverso. Infatti Luzi ritiene che tale epitelio appartenga al tipo dei cilindrici semplici, mentre Barbacci sostiene che esso è un epitelio pavimentoso stratificato.

(1) MORAU, *Transformations épithéliales de la muqueuse du vagin de quelques rongeurs*, Journal de l'Anatomie et de la Physiologie, T. 25, A. 1889.

Vedremo, nel corso di queste mie osservazioni, come tali divergenze non dipendano altro che da un diverso modo di interpretazione, e come questa diversità di interpretazione dipenda dalla conformazione speciale che assume il condotto genitale esterno nelle coniglie.

Per queste considerazioni io dividerò il mio lavoro in due parti: una riguardante la struttura anatomica del condotto genitale esterno della coniglia, e l'altra riguardante le modificazioni che avvengono in una porzione di esso durante la gravidanza.

L'unico lavoro dove si trovino descritti un po' minutamente gli organi genitali esterni della coniglia è quello di Arloing (1). Questo Autore distingue in essi una cavità vulvare ed una cavità vaginale, separate solo da una valvola mucosa, che egli ritiene analoga all' imene. Questo suo studio è puramente anatomico, quindi non ci illumina menomamente sulla struttura, e sul rivestimento epiteliale di queste parti, cose tutte che invece sono indispensabili a conoscersi, onde farci un' idea chiara del loro significato anatomico. Anche il Cheaveau (2), nel suo trattato di anatomia degli animali domestici, condivide le idee dell'Arloing, descrivendo una vulva ed una vagina ben distinte fra di loro.

Le conclusioni a cui sono arrivato io, se nel complesso sono assai somiglianti a quelle ottenute dagli osservatori predetti, variano però da esse in alcuni particolari.

Se in una coniglia si esportano tutti gli organi genitali dopo averli bene separati dai tessuti circostanti, si vede, che tra il punto in cui si riuniscono i due corni uterini e l'orifizio vulvare esterno, esiste un canale, il quale, osservato anche solo dall'esterno si può dividere in due parti bene differenziabili l'una dall'altra. La prima che alcuni denominano vulva, ma che io mi limiterò a chiamare *distale*, o, per maggior chiarezza, *segmento vulvare*, è lunga 6 ad 8 cm. secondo la razza delle coniglie. Questo tratto

(1) Arloing, *Études comparatives sur les organes génitaux du lièvre, du lapin et du léporide*. Journal de l'Anatomie et de la Physiologie, T. V, A. 1868.
(2) Cheaveau, *Anatomia comparata degli animali domestici*, 1888.

di condotto, a causa della retrazione forte delle pareti che lo costituiscono, appare sotto la forma di un cilindro rotondo assai sottile, e sta in rapporto inferiormente e per la sua porzione più avanzata colla sinfisi del pube, mentre pel rimanente fino all'orifizio esterno vulvare è solo ricoperta da strati muscolari e dalla pelle. Colla sua parete superiore invece esso è aderente col retto assai strettamente nei suoi $^2/_3$ *posteriori*, più lassamente nel $^1/_3$ rimanente. Se si incide longitudinalmente il segmento vulvare si scopre una mucosa di aspetto lucente, di colorito rosso cupo; e questo le viene impartito da numerosi vasi sanguigni, i più grossi dei quali sono visibili anche ad occhio nudo, e che si trovano nel connettivo subito al disotto dell'epitelio. Tale connettivo è assai lasso, e ciò sta in relazione colla grande dilatabilità del condotto stesso: tale struttura permette quindi di potere con grande facilità spostare in qualunque direzione la mucosa.

Il segmento *prossimale* che Arloing e Cheaveau chiamano vagina, ma che io per molte ragioni, fra le quali, in primo luogo, la sua forma e struttura, ritengo più conveniente denominare *segmento uterino*, ha una forma di fettuccia larga quasi 2 cm. e grossa 4 mm. Tale disposizione dipende dal fatto che le sue pareti sono costituite in modo che esse non possono raggrinzarsi come nel segmento vulvare, ma sono più rigide, e quindi devono combaciare fra di loro applicando una metà della loro superficie interna contro l'altra. Questo fatto dimostra già una differenza assai spiccata fra la struttura delle pareti dei due segmenti. Il segmento uterino si trova libero nella cavità del bacino ed ha una lunghezza di 8 cm. Inferiormente sta in rapporto colla vescica, superiormente è rivestito dal peritoneo, e contribuisce a limitare la cavità del Douglas. Le sue pareti sono assai grosse (mm. 1,6), e nel suo spessore si notano due canali di Gärtner. Incise le pareti, si vede che la mucosa che riveste internamente questo canale ha un aspetto lucente, un colorito madreperlaceo, ed è percorsa longitudinalmente da numerose pieghe assai fine. La mucosa è intimamente adesa agli strati sottostanti. Nella sua parte più alta questo condotto abbraccia i due musi di tinca dei corni uterini.

Come ho già accennato prima, fra i due segmenti esistono delle differenze di forma assai spiccate; dirò ancora che non esiste un graduale passaggio dall'uno all'altro, ma bensì assai bruscamente l'un segmento passa nell'altro. Aggiungerò ancora che nel segmento uterino, appena esportato dal corpo, si notano delle contrazioni delle pareti, contrazioni che mancano completamente nel segmento vulvare.

Questo è quanto si ricava dall'esame fatto colla semplice dissecazione dell'organo allo stato fresco. Questo metodo non può però dare un'idea esatta della disposizione, e dei rapporti in cui stanno fra di loro i due segmenti. Ho perciò pensato di studiarli dopo averli fissati nella loro vera posizione. A questo scopo ho iniettato attraverso all'orificio vulvare esterno per mezzo di una siringa dell'alcool comune, poi, quando avevo bene disteso le pareti, passavo un laccio all'intorno del segmento vulvare in vicinanza del suo orificio esterno e stringevo: levavo quindi dal corpo dell'animale tutto l'apparato genitale, e lo immergevo in alcool: in tal modo dopo pochi giorni avevo queste parti indurite, e quindi pronte per lo studio. Se allora si incidono i due segmenti longitudinalmente sulla linea mediana, si vedono le seguenti particolarità.

Il segmento vulvare (Fig. 1ª *a*) ha la forma di un tubo cilindrico, del diametro di 14 mm., il quale termina da una parte coll'apertura vulvare, e dall'altra presenta una specie di fondo cieco un po' schiacciato dall'alto al basso, alla cui sommità si trova l'apertura del canale dell'uretra. Questa (Fig. 1° *d*), che è lunga appena 1 cm., sta quasi in linea retta coll'asse del segmento vulvare, in modo che appare che l'una non sia altro che la diretta continuazione dell'altro. Questa particolarità di struttura anatomica fu già rilevata da Otto e Carus, che la descrissero nelle tavole di anatomia comparata. La parete superiore del segmento vulvare non è continua in tutta la sua estensione, ma alla distanza di circa 12 mm. dallo sbocco dell'uretra presenta una apertura a forma elissoide (Fig. 1ª *c*), il cui diametro trasverso misura 10 mm., mentre l'altro ne misura soli 5 mm. Tale apertura serve a mettere in comunicazione il segmento vulvare col segmento uterino. Il breve tratto di parete che è compreso tra lo sbocco dell'uretra e tale apertura fu ritenuto da Arloing come una semplice valvola, prodotta da una ripiegatura della mucosa. Io però non credo esatta tale opinione, giacchè il supporre che questa sia una ripiegatura analoga all'imene, fa di necessità ammettere una diretta continuazione fra il segmento vulvare e l'uterino, fatto che io non ho potuto constatare. Infatti il segmento uterino (Fig. 1ª *b*) si unisce all'altro con un angolo approssimativo di 135° gradi. Esso non ha un andamento rettilineo, ma bensì descrive una leggera curva con concavità in basso: ha una forma di tubo cilindrico, con un diametro molto più ampio del precedente (19 mm.), non però in tutta la sua estensione, giacchè nel punto d'inserzione col segmento vulvare esso si restringe leggermente. Infine le sue pareti sono assai più grosse, e più resistenti di quelle del segmento vulvare.

In quanto alla struttura istologica di queste parti, e specialmente riguardo al loro rivestimento epiteliale, ecco quanto è risultato dalle mie osservazioni. Nelle coniglie adulte, in cui però gli organi genitali sieno in completo riposo funzionale, il segmento vulvare è tappezzato da un epitelio evidentemente pavimentoso (Fig. 4), dello spessore di circa 45 μ, composto di 4 o 5 strati di cellule, delle quali le più profonde hanno una forma ovale, e sono disposte col loro diametro lungo perpendicolarmente alla superficie d'impianto: tale disposizione è assai spiccata nei punti dove l'epitelio si infossa leggermente nel connettivo sottostante. Queste cellule profonde sono assai stipate fra di loro, posseggono un nucleo ovale molto ricco in cromatina, ed hanno scarso protoplasma. Gli strati mediani sono composti di cellule più grosse, di forma irregolarmente poligonale, hanno nuclei rotondi più grossi e più chiari, il protoplasma pure è più chiaro e presenta dei vacuoli. Le cellule superficiali sono più appiattite delle precedenti, non mai però lamelliformi; il loro protoplasma è chiaro e granuloso, e sono fornite di un nucleo ben conservato e bene colorabile.

Non tutte le cellule dello strato superficiale hanno i caratteri descritti or ora; bensì ve ne sono alcune, sparse irregolarmente in tutta la superficie della mucosa, le quali sono più grosse, ed altre le quali hanno acquistato una forma leggermente piramidale, colla punta in basso fra le cellule degli strati sottostanti. Queste cellule piramidali spiccano bene fra le altre, perchè il loro protoplasma è più scuro, ed il loro nucleo, che si trova spinto nella parte ristretta del corpo cellulare, è colorato più intensamente ed uniformemente.

Le cellule superficiali allungate o a forma di piramide aumentano molto verso il fondo cieco del segmento vulvare, in prossimità cioè dello sbocco dell'uretra. In questo punto l'epitelio è più basso (Fig. 5ª), e si compone di soli 3 strati di cellule. I due strati profondi sono formati da cellule rotondeggianti, le superficiali invece sono assai allungate, di forma irregolarmente cilindrica o piramidale, ed in molte di esse il bordo esterno è assai ampio e svasato, in modo che possono ricoprire le cellule sottostanti o riunendosi fra di loro limitare delle piccole cavità. Tali cellule non sono un prodotto artificiale, perchè esse si notano tanto nei pezzi di mucosa che furono distesi, quanto in quelli in cui la mucosa è raggrinzata.

Come ultima particolarità dell'epitelio che tappezza il segmento vulvare aggiungerò che, fra le sue cellule si notano le ciglia o spine descritte per la prima volta da Bizzozero (1) nell'epidermide e negli epitelii pavimentosi stratificati, fatto che Morau dice di non avere riscontrato nelle cellule della mucosa vaginale del *mus musculus*. Al disotto dell'epitelio si nota un grosso strato di connettivo con numerosi spazi venosi che danno l'idea di un corpo cavernoso. In ultimo vi sono numerosi strati di fibre muscolari striate.

Appena si entra nel segmento uterino, l'epitelio si modifica rapidamente, giacchè esso diventa cilindrico semplice (Fig. 6ª) e così si mantiene in tutta l'estensione del segmento stesso. Le cellule che compongono questo epitelio sono, come facilmente si può comprendere, cilindriche, lunghe 36 μ, e larghe 4-5 μ, hanno un piccolo nucleo ovale posto verso la base d'impianto della cellula, e contengono un protoplasma granuloso opaco, il quale alla superficie libera non è limitato da una membrana, ma bensì termina con un contorno indeciso.

Il connettivo che sostiene tale epitelio è poco alto, ma più compatto di quello che si trova nel segmento vulvare, ed in esso non esistono delle formazioni glandolari. Il resto della parete è costituito da grossi strati di fibre muscolari liscie.

Dalla brevissima esposizione fatta risulta, che fra i due segmenti esistono delle differenze assai spiccate, sia per la loro disposizione e forma, sia pel loro rivestimento epiteliale. Questa diversità di caratteri potrebbe già da sè sola condurre ad una ipotesi abbastanza fondata sul significato anatomico di tali parti, giacchè il segmento uterino ha molti caratteri che lo differenziano dalla vagina tipica degli altri mammiferi; però, per dire una cosa sicura, è necessario conoscere il modo con cui esse si

---

(1) Bizzozero, *Sulla struttura degli epitelii pavimentosi stratificati*, Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, 1870.

sviluppano. Quindi aspettando di avere fatto delle indagini metodiche a questo riguardo, mi limiterò per ora ad accennare che le divergenze che si sono notate nei diversi Autori dipendono solo da una diversità di apprezzamento, e per non accennare che ai due più recenti osservatori, dirò che Luzi ha descritto come vagina, quella parte che io ho creduto più conveniente chiamare segmento uterino, e Barbacci invece quella che ho denominato segmento vulvare. Le loro osservazioni furono però precise ed esatte. Resta a vedere quale dei due abbia meglio colpito nel segno, e ciò spero di potere presto dimostrare colle osservazioni embriologiche

Nel capitolo precedente, accennando alla struttura anatomica dei due segmenti in cui si divide tutto il condotto genitale esterno, ho anche detto quale fosse il loro rivestimento epiteliale. Questo però negli individui giovani non ha gli stessi caratteri come nell'animale adulto; perciò prima di trattare delle modificazioni che subisce l'epitelio del segmento vulvare durante la gravidanza, dirò qualche cosa delle variazioni morfologiche che subisce questo epitelio durante l'accrescimento dell'animale.

Avanti tutto mi preme far notare, a scanso di equivoci, come Morau dica che le trasformazioni epiteliali si manifestino nella vagina. Ora, stando alla maggioranza degli Autori, la vagina del coniglio corrisponderebbe alla parte a cui io ho dato il nome di segmento uterino. Or bene, io ho potuto constatare che in tale porzione l'epitelio si mantiene sempre cilindrico, mentre invece è l'epitelio del segmento vulvare quello che si trasforma gradatamente in cilindrico. Come si vede quindi, qui pure esiste la stessa diversità di opinione che vi è tra Luzi e Barbacci.

Ho esaminato gli organi genitali di buon numero di coniglie in diversi periodi di gestazione e quindi ho potuto studiare tutte le diverse fasi delle trasformazioni subìte dall'epitelio. Qui però, volendo essere breve, descriverò solo quei casi in cui le modificazioni sono più spiccate.

Non descriverò i metodi d'indagine; mi basta il dire che ho usato tutte le precauzioni possibili onde mantenere l'epitelio nella sua posizione normale, indurendo la mucosa dopo averla moderatamente tesa.

Le mie prime osservazioni furono fatte su una coniglia di 4 giorni di vita extrauterina In tale animale il segmento vulvare è tappezzato da un epitelio pavimentoso assai caratteristico, composto di 3 strati di cellule (fig. 2) le quali formano uno spessore di 25 μ. Le cellule che compongono i due strati più profondi hanno una forma ovale, misurano $4,7 \times 5,9\ \mu$, sono fornite di un nucleo rotondo molto tingibile che occupa quasi tutto il corpo cellulare.

Lo strato superficiale invece è fatto di cellule di forma quadrata o rettangolare, del diametro di $11,5 \times 16,6\ \mu$; sono disposte in uno strato solo col loro diametro più lungo parallelo all'asse della cavità. Hanno una membrana evidente, il loro protoplasma è chiaro, finamente granuloso, non colorabile, molto analogo a quello delle cellule che tappezzano la vulva della cavia, e nel loro centro sta un nucleo assai piccolo in confronto alla cellula ($5 \times 7\ \mu$), e meno colorabile degli altri. Questo epitelio mantiene tale forma in quasi tutta la superficie della cavità vulvare; solo verso lo sbocco dell'uretra si vede che le cellule superficiali si fanno più allungate nel diametro perpendicolare alla superficie, e tendono ad assumere una forma leggermente cilindrica.

Nella coniglia di 4 mesi di età, e che non aveva mai subìto il coito, l'epitelio del segmento vulvare è assai modificato. Esso (fig. 3) ha uno spessore di 21 μ, ed è formato da tre strati di cellule, le quali, tanto nello strato superficiale che nel mediano e profondo, hanno una forma irregolarmente poliedrica e sono assai schiacciate. La sola differenza che esiste fra le cellule dei diversi strati sta nella grandezza, giacchè le profonde sono più piccole e più schiacciate delle altre, misurano $7 \times 3,8\ \mu$, hanno un nucleo ovale del diametro di $4,5 \times 3\ \mu$. Le cellule dello strato mediano sono più grosse e contengono pure un nucleo più grosso. Infine le cellule superficiali misurano $10 \times 8\ \mu$, con un nucleo rotondo od ovale di circa 7 μ di diametro, e contengono protoplasma granuloso e chiaro.

Ho già descritto nel capitolo precedente la struttura dell'epitelio del segmento vulvare nella coniglia adulta, i cui organi genitali sieno in riposo. Mi limiterò solo a ricordare che esso è costituito (Fig. 4) da 4 o 5 strati di cellule, di cui le profonde sono ovali o rotonde e piccole, quelle di mezzo poliedriche, e le superficiali più schiacciate, e di queste alcune hanno una forma piramidale. Ricorderò ancora come in vicinanza dello sbocco dell'uretra, le cellule superficiali sieno quasi tutte cilindriche o piramidali. Or bene una struttura del tutto analoga si osserva anche nella coniglia appena gravida.

Invece se noi esaminiamo il segmento vulvare di una coniglia giunta al 18° giorno di gravidanza riscontriamo già delle modificazioni assai evidenti, specialmente nella sua parte anteriore. Infatti, in vicinanza all'orifizio vulvare esterno l'epitelio si mantiene ancora pavimentoso come nella coniglia normale; invece quanto più ci avviciniamo verso il fondo cieco vediamo che l'epitelio non variando di spessore, giacchè esso si mantiene di 48 μ, è però formato da soli 3 strati di cellule, di cui (figura 7) le superficiali sono evidentemente cilindriche. Queste sono lunghe 20 μ e larghe 6,5 μ; sono fornite di prolungamenti sottili che molte volte si approfondano fra gli strati di cellule sottostanti, in modo da arrivare sino al connettivo basale; sono fornite di protoplasma granuloso ed opaco, e contengono un nucleo ovale posto alla metà del loro corpo. Le cellule degli strati profondi invece sono assai più piccole e rotondeggianti, e contengono un nucleo grosso molto colorabile. Queste particolarità di struttura si vedono ancora meglio, quando si isolino gli elementi cellulari macerando la mucosa nel liquido di Müller allungato: allora si scorgono fra delle cellule poliedriche delle altre di forma piramidale lunghe 31 μ e larghe 12 μ, le quali sono fornite di un lungo prolungamento. Verso lo sbocco dell'uretra l'epitelio si fa più sottile (figura 8), poichè è composto di soli 2 strati, uno di cellule allungate e cilindriche, e l'inferiore di cellule piccole e rotonde.

Al 21° giorno di gravidanza tutta la mucosa del segmento vulvare è ricoperta da un epitelio cilindrico stratificato, analogo a quello descritto or ora e disegnato nella figura 7ª.

A questo punto quindi tutto l'epitelio ha subìto la trasformazione da pavimentoso in cilindrico. Tale forma però non è duratura, bensì si ha una graduale involuzione del processo, e l'epitelio torna di nuovo al tipo pavimentoso. Infatti nella coniglia gravida di feti quasi a termine, il segmento vulvare in prossimità del suo orifizio esterno è formato da 4 strati di cellule, le quali tutte insieme misurano uno spessore di 45 a 50 μ (fig. 9). Le cellule superficiali sono molto schiacciate, quasi lamellari, e molto oscure. Le cellule degli strati mediani sono poliedriche, più chiare con un nucleo vescicolare rotondeggiante od allungato: le cellule profonde sono rotonde, presentano nel loro protoplasma dei grossi vacuoli, i quali si trovano in vicinanza del nucleo, e questo è grosso, di forma irregolare, ed assai colorato.

Progredendo verso la metà del condotto, invece, si vede che l'epitelio mantiene ancora lo stesso spessore, ed è formato da un numero uguale di strati cellulari; solo le cellule superficiali che sono ancora oscure (fig 10), hanno assunto una forma poliedrica o rettangolare: contengono nn nucleo ben distinto, e fra queste alcune hanno ancora una forma allungata, ed allora sono più chiare. Verso la metà del segmento vulvare le cellule superficiali (fig. 11) hanno una forma sempre più cilindrica. Infine in vicinanza allo sbocco dell'uretra le cellule superficiali sono perfettamente cilindriche (fig. 12), mentre le cellule degli strati sottostanti sono ancora assai grosse e granulose, e fornite di piccole ciglia, e l'epitelio ha un aspetto del tutto simile a quello che si osserva nella coniglia al 18° e 21° giorno di gravidanza.

Se per ultimo, noi esaminiamo il condotto di una coniglia che abbia appena partorito, allora vediamo che il suo epitelio si è fatto molto grosso, è costituito da 5 o 6 strati di cellule, di cui le più profonde sono ovali, col diametro lungo perpendicolare alla superficie d'impianto, mentre le altre sono poliedriche per reciproca pressione, e più chiare delle precedenti: tale epitelio insomma ha tutti i caratteri di un vero epitelio pavimentoso stratificato (fig. 13).

Ho già detto come le conclusioni a cui ero arrivato fossero in alcune parti assai diverse da quelle di Morau. Infatti, questo Autore non accenna menomamente alle modalità di struttura che l'epitelio del segmento vulvare presenta nelle diverse porzioni, e così pure, parlando della trasformazione epiteliale, non dice se essa avvenga prima in una parte che in un'altra. Io invece nel coniglio ho potuto riscontrare che anche nell'animale normale l'epitelio del segmento vulvare presenta in vicinanza dello sbocco dell'uretra una struttura diversa da tutto il resto della mucosa, ed ho pure potuto dimostrare che la trasformazione in epitelio cilindrico comincia appunto in vicinanza dello sbocco dell'uretra, e si propaga gradatamente in basso fino verso all'orificio vulvare esterno.

Inoltre il Morau ritiene che le prime a trasformarsi in cellule cilindriche sieno nel *mus musculus* le profonde, e che le cellule superficiali sieno cellule destinate a produrre del muco. Invece in nessun punto della mucosa, anche là dove la trasformazione era appena incominciata, non ho mai potuto vedere le cellule degli strati sottostanti assumere una forma ovale, come pure non ho mai riscontrato le cellule cilindriche superficiali contenere del muco, ma sempre queste cellule sono fornite di un protoplasma granuloso ed opaco. Infine Morau sostiene che, quando il coito fu fecondatore, l'epitelio cilindrico neoformato persiste fino all'epoca del parto, mentre invece se l'animale non fu fecondato, allora verso il 13° giorno del ciclo genitale si arresta la trasformazione epiteliale, e per successive modificazioni ritorna alla primitiva forma di epitelio pavimentoso. Nel coniglio questo fatto non si verifica, perchè, come abbiamo visto, giunti al 21° giorno di gravidanza l'epitelio comincia a subire delle modificazioni regressive, ed all'epoca del parto esso è di nuovo pavimentoso.

Volendo trarre delle conclusioni potrò dire: Il condotto genitale esterno della coniglia si divide in due segmenti: segmento vulvare e segmento uterino, i quali non sono in diretta continuazione fra loro, ma bensì il segmento uterino sbocca nel vulvare, per mezzo di un'apertura che si trova nella parete superiore di questo ultimo.

Il segmento vulvare, nelle coniglie adulte non gravide, è rivestito da un epitelio pavimentoso stratificato, e questo, solo per una piccola porzione nella sua parte anteriore, presenta le cellule dello strato superficiale a forma cilindrica o piramidale. Il segmento uterino, invece, è tutto rivestito di cellule cilindriche ad uno strato unico.

L'epitelio del segmento vulvare presenta delle modificazioni assai rilevanti nella forma, se lo si esamina nei diversi periodi di accrescimento.

Nei primi periodi della gravidanza l'epitelio da pavimentoso stratificato diventa cilindrico, per una trasformazione delle sue cellule superficiali: tale trasformazione comincia nella parte anteriore, e si propaga gradatamente indietro fino ad arrivare all'apertura vulvare.

Al 21° giorno di gravidanza tutto l'epitelio è trasformato. A partire da questo momento il rivestimento epiteliare ritorna a farsi pavimentoso: e tale modificazione regressiva comincia in vicinanza dell'apertura vulvare, e a poco a poco si avanza sino all'altra estremità del condotto.

All'epoca del parto tutto l'epitelio del segmento vulvare è di nuovo pavimentoso.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

FIG. 1ª Condotto genitale esterno sezionato per metà lungo la linea mediana (grandezza naturale) — *a* segmento vulvare — *b* segmento uterino — *c* apertura che mette in comunicazione i due segmenti — *d* uretra — *e* vescica.

» 2ª Epitelio del segmento vulvare in una coniglia di 4 giorni di vita extrauterina (Ingr. 640 diam.).

» 3ª Epitelio del segmento vulvare di coniglia di 4 mesi (Ingr. 640 diam.).

» 4ª Epitelio del segmento vulvare in coniglia adulta non gravida (Ingr. 640 diam.).

» 5ª Lo stesso epitelio in prossimità dello sbocco dell'uretra (Ingr. 640 diam.).

» 6ª Epitelio del segmento uterino di coniglia adulta (Ingr. 640 diam.).

» 7ª Epitelio della metà anteriore del segmento vulvare di coniglia giunta al 18° giorno di gravidanza (Ingr. 640 diam.).

» 8ª Lo stesso epitelio in vicinanza dello sbocco dell'uretra (Ingr. 640 diam.).

» 9ª Epitelio del segmento vulvare in prossimità dell'apertura vulvare esterna di coniglia gravida di feti a termine (Ingr. 680 diam.).

» 10ª Lo stesso epitelio un po' più lontano dall'apertura della vulva (Ingr. 680 diam.).

» 11ª Lo stesso a metà circa del segmento vulvare (Ingr. 680 diam.).

» 12ª Lo stesso in prossimità dello sbocco dell'uretra (Ingr. 680 diam.).

» 13ª Epitelio del segmento vulvare di coniglia che ha partorito da poco (Ingr. 640 diam.).

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

Fig. 2

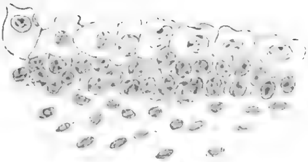


Fig. 3

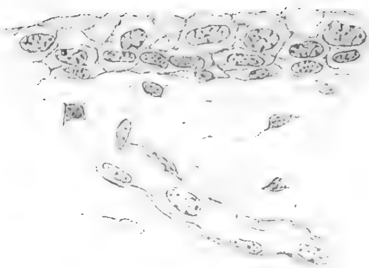


Fig. 1.

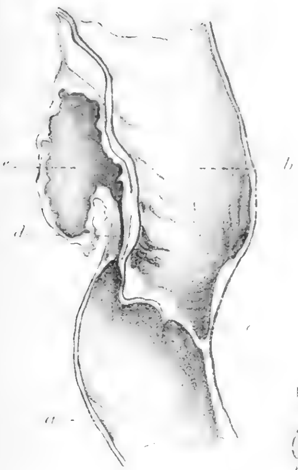


Fig. 4

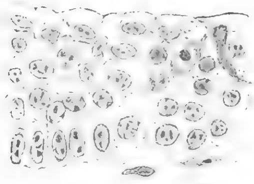


Fig. 5

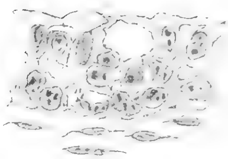


Fig. 6.

Fig. 7

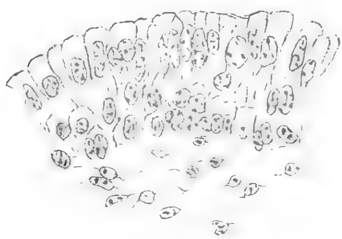


Fig. 8.

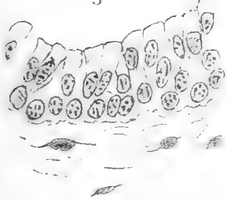


Fig. 9.

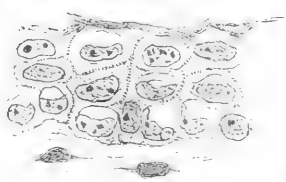


Fig. 11

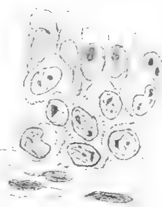


Fig. 12.

Fig. 10

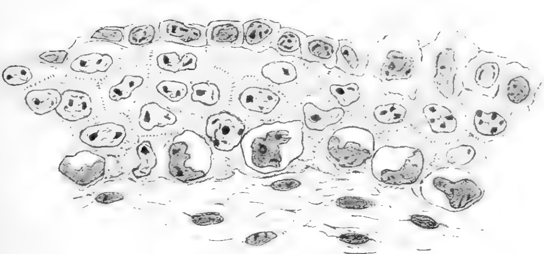


Fig. 13.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA dell'8 Marzo 1891 . . . . Pag. 339

MONTICELLI — Osservazioni intorno ad alcune forme del Gen. *Apoblema* DUJARD. . . . . » 340

D'OVIDIO — Teoremi sulle coniche nella metrica proiettiva . . . . » 369

JADANZA — Influenza della eccentricità dell'alidada sui vernieri ed un microscopio ad ingrandimento costante . . . . » 380

BOTTIGLIA — Sulle velocità di massimo rendimento ed a vuoto delle turbine. . . . . » 385

SALVIOLI — Contributo alla fisiologia degli epitelii. — Della struttura dell'epitelio vaginale della coniglia e delle modificazioni che vi avvengono nella gravidanza . . . . » 395

Torino — Tip. Reale-Paravia

8 —

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVI, DISP. **10-11**, **1890-91**

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 22 Marzo 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Cossa, Direttore della Classe, Salvadori, Bruno, Berruti, Bizzozero, Ferraris, Mosso, Spezia, Camerano, Segre, Peano e Basso Segretario.

Letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, il Segretario dà comunicazione di una lettera ministeriale che accompagna il R. Decreto di approvazione della nomina a Socio nazionale residente del Dott. Giuseppe Peano, Professore di calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino.

Il Socio Camerano offre, da parte dell'autore, in dono all'Accademia un volume corredato da una grande carta geologica, col titolo: « *Il bacino terziario e quaternario del Piemonte* », del Dott. Federico Sacco, Prof. di Paleontologia nella R. Università di Torino.

Il Socio Peano offre pure in dono i fascicoli già usciti della *Rivista di Matematica*, periodico mensile del quale l'offerente ha la direzione.

La Classe accoglie per la pubblicazione negli *Atti*:

1° Un lavoro, presentato dal Socio SEGRE, col titolo: « *Della compensazione del problema di* HANSEN, del Dott. Vincenzo REINA, Assistente di Geodesia nella R. Scuola per gli Ingegneri in Roma;

2° Una Nota, presentata dal Socio BASSO, per incarico del Socio NACCARI: « *Sulla dilatazione termica di alcune amalgame allo stato liquido* ». Di questa Nota che forma come un'appendice di un altro lavoro omonimo precedentemente inserito negli *Atti*, è autore il Dott. Prof. Carlo CATTANEO della R. Università di Siena.

Infine il Socio CAMERANO presenta e legge un suo nuovo Studio, il quale viene dalla Classe, con votazione unanime, approvato per la pubblicazione nei volumi delle *Memorie*. Esso costituisce la continuazione e la chiusa di altri suoi lavori già pubblicati nei volumi stessi, ed ha per titolo: « *Monografia degli Ofidi italiani* (parte II, *Colubridi*) e *Monografia dei Cheloni italiani* ».

LETTURE

Della compensazione nel problema di Hansen;

Nota di VINCENZO REINA

— 1 —

Nel problema di POTHENOT, dati tre punti, si può rispetto ad essi determinare la posizione di un quarto punto, misurando gli angoli sotto cui, da questo ultimo, sono visti i tre punti dati Se i punti dati fossero due soli, si può ancora rispetto ad essi (supposti inaccessibili) determinarne un terzo, purchè si aggiunga un secondo punto d'osservazione.

La soluzione di questo problema venne pubblicata per la prima volta da HANSEN (*), ma le formole da lui date debbono modificarsi di volta in volta, col variare della disposizione relativa dei quattro punti. Una soluzione generale, indipendente dalla peculiare disposizione dei punti, venne data da W. JORDAN (**), immaginando numerati i punti e generati gli angoli in modo opportuno.

— 2 —

Denotando con P e P_1 i punti nei quali si compiono le misure angolari, con P_3 e P_4 i punti dati (inaccessibili), JORDAN indica con P_3 quel punto che, nella rotazione positiva del raggio PP_1 intorno al punto P, viene incontrato per primo. Qui per rota-

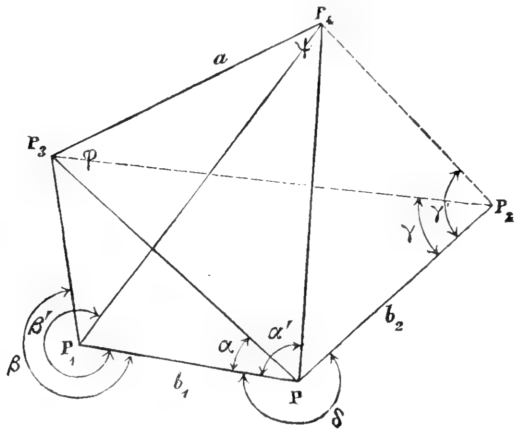
(*) *Eine Aufgabe der praktischen Geodäsie und deren Auflösung.* — Astronomische Nachrichten, Bd. 18, S. 165; 1841.

(**) Handbuch der Vermessungskunde. - Zweiter Band, S. 255.

zione positiva intendesi quella per la quale gli *azimut* vengono generati positivamente, ritenendo gli *azimut* contati da Nord a Sud, passando per l'Est.

In questo modo si intenderanno anche generati gli angoli misurati nei punti PP_1, e si porrà

$$P_1PP_3 = \alpha \quad P_1PP_4 = \alpha' \quad PP_1P_3 = \beta \quad PP_1P_4 = \beta'.$$



Si indicherà inoltre con a la distanza nota P_3P_4, con b_1 quella dei due centri di osservazione. La soluzione del problema si otterrà allora, molto semplicemente, colla introduzione dei due angoli ausiliari φ e ψ del triangolo PP_3P_4, giacchè si avrà:

$$(1) \ldots\ldots \qquad \varphi + \psi = \pi - (\alpha' - \alpha),$$

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\psi} = \frac{PP_4}{PP_3} = \frac{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}{\operatorname{sen}\beta} \, \frac{\operatorname{sen}\beta'}{\operatorname{sen}(\beta'-\alpha')} \,.$$

epperò ponendo

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}{\operatorname{sen}\beta} \, \frac{\operatorname{sen}\beta'}{\operatorname{sen}(\beta'-\alpha')} \,,$$

si otterrà

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}\operatorname{cotg}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \,,$$

la quale equazione, congiunta colla (1), permetterà di determinare separatamente φ e ψ. Le distanze dei centri di osservazione dai punti P_3, P_4 saranno allora date dalle formole

$$(2)\ldots\left\{\begin{array}{ll} PP_3 = a\dfrac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}(\alpha'-\alpha)}\,, & PP_4 = a\dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}(\alpha'-\alpha)}\,, \\ P_1P_3 = PP_3\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\beta\pm\pi)}\,, & P_1P_4 = PP_4\dfrac{\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}(\beta'\pm\pi)}\,. \end{array}\right.$$

— 3 —

Nel problema di Pothenot nasce la *compensazione*, quando i punti dati invece di tre sono quattro: il calcolo del vertice di piramide si può fare allora in doppio modo, ed uno dei lati, congiungenti esso vertice con uno dei punti dati, verrà determinato dalle due parti: l'equazione di condizione si ottiene eguagliando i due valori ottenuti per questo lato.

Nel problema di Hansen nasce la compensazione quando, invece di due centri d'osservazione, se ne assumono tre. Sia P_2 il terzo punto; immaginiamolo accoppiato al punto P, ed indichiamo con $\gamma\gamma'$ i due angoli in P_2 generati nel modo precedentemente definito, con δ l'angolo P_2PP_1. Applicando al quadrilatero $PP_2P_3P_4$ il procedimento di calcolo già dimostrato, si potrà così per una nuova via determinare la lunghezza del lato PP_4, la quale, confrontata con quella precedentemente ottenuta, darà luogo ad una equazione di condizione. Sarà facile convincersi che questa sarà la sola, ricordando la nota formola di Gauss

$$A+B-2P+3,$$

che dà il numero delle equazioni di condizione nascenti dalla compensazione di una rete di triangoli, formola nella quale A rappresenta il numero degli angoli misurati, B il numero delle basi, P il numero dei vertici. (Nel caso attuale $A=7$, $B=1$, $P=5$).

— 4 —

Per stabilire l'equazione di condizione sotto la forma più conveniente, si osservi che dai triangoli PP_1P_3, PP_1P_4 si ha:

$$b_1 = PP_3 \frac{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{\operatorname{sen}\beta} = PP_4 \frac{\operatorname{sen}(\beta' - \alpha')}{\operatorname{sen}\beta'} ,$$

ossia per le (2)

$$b_1 = a \frac{\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha' - \alpha)\operatorname{sen}\beta} = a \frac{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}(\beta' - \alpha')}{\operatorname{sen}(\alpha' - \alpha)\operatorname{sen}\beta'} ,$$

quindi

$$(3) \ldots\ldots \qquad \frac{\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\beta' \operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}(\beta' - \alpha')} = 1 .$$

Analogamente dalla considerazione dei triangoli PP_2P_3, PP_2P_4 si ricava:

$$b_2 = PP_3 \frac{\operatorname{sen}(2\pi - \alpha - \delta + \gamma)}{\operatorname{sen}\gamma} = PP_4 \frac{\operatorname{sen}(2\pi - \alpha' - \delta + \gamma')}{\operatorname{sen}\gamma'} ,$$

ossia

$$b_2 = a \frac{\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}(2\pi - \alpha - \delta + \gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha' - \alpha)\operatorname{sen}\gamma} = a \frac{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}(2\pi - \alpha' - \delta + \gamma')}{\operatorname{sen}(\alpha' - \alpha)\operatorname{sen}\gamma'} ;$$

epperò

$$(4) \ldots\ldots \qquad \frac{\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\gamma' \operatorname{sen}(2\pi - \alpha - \delta + \gamma)}{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}(2\pi - \alpha' - \delta + \gamma')} = 1 .$$

La eliminazione dei due angoli ausiliari φ e ψ, fra la (3) e la (4), conduce alla equazione di condizione richiesta:

$$(5) \ldots \qquad \frac{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma' \operatorname{sen}(2\pi - \alpha - \delta + \gamma) \operatorname{sen}(\beta' - \alpha')}{\operatorname{sen}\beta' \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}(2\pi - \alpha' - \delta + \gamma') \operatorname{sen}(\beta - \alpha)} = 1 ,$$

il cui primo membro non è altro che il rapporto dei due valori calcolati per il lato b_2.

Noi indicheremo con

$$\alpha + (1), \ \alpha' + (2), \ \beta + (3), \ \beta' + (4), \ \gamma + (5), \ \gamma' + (6), \ \delta + (7)$$

i valori compensati degli angoli. Allora la (3) (la quale insieme alla (1) serve alla definizione degli angoli $\varphi\,\psi$) e la (5), scritte nei valori compensati, daranno

$$\frac{\operatorname{sen}(\psi+d\psi)\operatorname{sen}\{\beta'+(4)\}\operatorname{sen}\{\beta-\alpha+(3)-(1)\}}{\operatorname{sen}(\varphi+d\varphi)\operatorname{sen}\{\beta+(3)\}\operatorname{sen}\{\beta'-\alpha'+(4)-(2)\}}=1\,,$$

$$\frac{\operatorname{sen}\{\beta+(3)\}\operatorname{sen}\{\gamma'+(6)\}\operatorname{sen}\{2\pi-\alpha-\delta+\gamma-(1)-(7)+(5)\}\operatorname{sen}\{\beta'-\alpha'+(4)-(2)\}}{\operatorname{sen}\{\beta'+(4)\}\operatorname{sen}\{\gamma+(5)\}\operatorname{sen}\{2\pi-\alpha'-\delta+\gamma'-(2)-(7)+(6)\}\operatorname{sen}\{\beta-\alpha+(3)-(1)\}}=1.$$

Per ridurre queste due equazioni alla forma lineare, basta applicare il solito metodo della differenziazione logaritmica. Si ponga

$$\begin{array}{ll}
t_1=\mu\operatorname{sen}1''\operatorname{cotg}\psi & t_6=\mu\operatorname{sen}1''\operatorname{cotg}(\beta'-\alpha') \\
t_2=\mu\operatorname{sen}1''\operatorname{cotg}(\alpha'-\alpha) & t_7=\mu\operatorname{sen}1''\operatorname{cotg}\beta' \\
t_3=\mu\operatorname{sen}1''\operatorname{cotg}(\beta-\alpha) & t_8=\mu\operatorname{sen}1''\operatorname{cotg}(2\pi-\alpha-\delta+\gamma) \\
t_4=\mu\operatorname{sen}1''\operatorname{cotg}\beta & t_9=\mu\operatorname{sen}1''\operatorname{cotg}\gamma \\
t_5=\mu\operatorname{sen}1''\operatorname{cotg}\varphi & t_{10}=\mu\operatorname{sen}1''\operatorname{cotg}(2\pi-\alpha'-\delta+\gamma')
\end{array}$$

$$t_{11}=\mu\operatorname{sen}1''\operatorname{cotg}\gamma'$$

$$\Delta=\log\frac{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma'\operatorname{sen}(2\pi-\alpha-\delta+\gamma)\operatorname{sen}(\beta'-\alpha')}{\operatorname{sen}\beta'\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}(2\pi-\alpha'-\delta+\gamma')\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}\,,$$

nelle quali formole μ rappresenta il modulo dei logaritmi volgari. Le quantità t così definite rappresentano, come è noto, le differenze tavolari nei logaritmi dei seni, corrispondenti alla variazione di un secondo nell'argomento: esse vennero numerate in quell'ordine nel quale si presentano nell'esempio di calcolo seguente.

Le due equazioni assumono allora la forma:

$$(6)\ \ldots\ t_1 d\psi-t_5 d\varphi-t_3(1)+t_6(2)+(t_3-t_4)(3)+(t_7-t_6)(4)=0\,,$$

$$(7)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l}(t_3-t_8)(1)+(t_{10}-t_6)(2)+(t_4-t_3)(3)+(t_6-t_7)(4)\\ +(t_8-t_9)(5)+(t_{11}-t_{10})(6)+(t_{10}-t_8)(7)+\Delta=0\,.\end{array}\right.$$

La (6) congiunta coll'equazione

$$d\varphi + d\psi = (1) - (2),$$

che si ottiene differenziando la (1), serve alla determinazione delle due correzioni $d\varphi$ $d\psi$. Se ne deduce

$$(8) \ldots d\psi = \frac{(t_3+t_5)(1)-(t_5+t_6)(2)+(t_4-t_3)(3)+(t_6-t_7)(4)}{t_1+t_5},$$

$$(9) \ldots d\varphi = \frac{(t_1-t_3)(1)+(t_6-t_1)(2)+(t_3-t_4)(3)+(t_7-t_6)(4)}{t_1+t_5},$$

Ponendo la equazione di condizione (7) sotto la forma

$$A_1(1)+A_2(2)+A_3(3)+A_4(4)+A_5(5)+A_6(6)+A_7(7)+\Delta=0,$$

$$A_1=t_3-t_8 \quad A_2=t_{10}-t_6 \quad A_3=t_4-t_3 \quad A_4=t_6-t_7$$

$$A_5=t_8-t_9 \quad A_6=t_{11}-t_{10} \quad A_7=t_{10}-t_8,$$

l'equazione correlante sarà

$$[AA]I+\Delta=0,$$

e le correzioni saranno date, in funzione del correlativo I, per mezzo delle formole:

$$(1)=A_1 I \quad (2)=A_2 I \quad (3)=A_3 I \quad (4)=A_4 I$$

$$(5)=A_5 I \quad (6)=A_6 I \quad (7)=A_7 I.$$

— 5 —

Applicheremo ora il metodo precedentemente esposto ad un esempio numerico, adottando una disposizione di calcolo analoga a quella indicata nella recente pubblicazione della Giunta Superiore del Catasto (*), per il caso della compensazione di un vertice di piramide.

(*) *Istruzione per i lavori trigonometrici.* Supplemento alla Istruzione (1).

Angoli osservati.

$$\alpha = 30^\circ.57'.43'' \quad \beta = 252^\circ.41'.06'' \quad \gamma = 49^\circ.00'.16''$$
$$\alpha' = 84^\circ.11'.33'' \quad \beta' = 299^\circ.32'.40'' \quad \gamma' = 92^\circ.19'.15''$$
$$\delta = 229^\circ.49'.38''.$$

Logaritmo del lato noto.

$$\log a = 3.231\ 616.$$

Angoli occorrenti nel calcolo.

$$\alpha' - \alpha = 53^\circ.13'.50'' \qquad \beta - \alpha = 221^\circ.43'.23''$$
$$\beta' - \alpha' = 215^\circ.21'.07'' \qquad 2\pi - \alpha - \delta + \gamma = 148^\circ.12'.55''$$
$$2\pi - \alpha' - \delta + \gamma' = 138^\circ.18'.04''.$$

Osservazione. — Nello schema di calcolo seguente è ommesso per semplicità il calcolo delle due correzioni $d\varphi$ $d\psi$, il quale si fa in base alle due formole (8) (9).

CALCOLO degli angoli ausiliari $\varphi\, \psi$	
$\alpha' - \alpha$	53° 13′. 50″
$\varphi + \psi$	126 . 46 . 10
$\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$	63 . 23 . 05
log sen $(\beta - \alpha)$	9. 823168 n
colog sen β	0. 020141 n
log sen β'	9. 939506
colog sen $(\beta' - \alpha')$	0. 237623
log cotg θ	0 020438
θ	43°. 39′. 08″ 3
$\theta + 45°$	88 . 39 . 08 . 3
log cotg $(\theta + \frac{\pi}{4})$	8 371549
log tg $\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$	0 300079
log tg $\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$	8. 671628
$\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$	2°. 41′. 17″
$\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$	63 . 23 . 05
φ	66°. 04′. 22″
ψ	60 . 41 . 48

Angoli compensati

α	30°. 57′. 44″. 1
α'	84 . 11 . 31 . 8
β	252 . 41 . 05 . 6
β'	299 . 32 . 41 . 0
γ	49 . 00 . 15 . 6
γ'	92 . 19 . 15 . 6
δ	229 . 49 . 38 . 2

CALCOLO con gli elementi osservati	
log a	3 231616
log sen ψ	9. 940537
colog sen $(\alpha' - \alpha)$	0. 096340
log PP_3	3 268493
log sen $(\beta - \alpha)$	9 823168
colog sen β	0. 020141
log b_1	3 111802
log a	3. 231616
log sen φ	9 960975
colog sen $(\alpha' - \alpha)$	0. 096340
log PP_4	3 288931
log sen $(\beta' - \alpha')$	9. 762377
colog sen β'	0. 060494
log b_1	3 111802
log PP_3	3. 268493
log sen $(2\pi - \alpha - \delta + \gamma$	9. 721587
colog sen γ	0. 122191
log b_2	3. 112271
log PP_4	3 288931
log sen $(2\pi - \alpha' - \delta + \gamma')$	9. 822962
colog sen γ'	0. 000356
log b_2	3. 112249

FERENZE ari per 1'' valori	CORREZIONI angolari	CORREZIONI risultanti nei logaritmi dei seni	CALCOLO con gli elementi compensati
			0.231616
+1.2	$d\psi$	−5.6	9.940531
+1.6	(1) − (2)	+4.0	0.096344
			3.268491
−2.4	(1) − (3)	+4.1	9.823172 *n*
−0.7	− (3)	−0.3	0.020141 *n*
			3.111804
			3.231616
+0.9	$d\varphi$	−6.5	9.960981
+1.6	(1) (2)	−4.0	0.096344
			3.288941
−3.0	(4) − (2)	−6.6	9.762370 *n*
+1.2	− (4)	−1.2	0.060493 *n*
			3.111804
			0.268491
+3.4	(5) − (1) − (7)	−6.4	9.721581
+1.8	− (5)	+0.7	0.122192
			3.112264
			3.288941
+2.4	(6) (2) − (7)	+3.8	9.822066
0.0	− (6)	0.0	0.000356
			3.112263

COMPENSAZIONE

A_1	$t_3 - t_8$	−5.8
A_2	$t_{10} - t_6$	+5.4
A_3	$t_4 - t_5$	+1.7
A_4	$t_6 - t_7$	−4.2
A_5	$t_8 - t_9$	+1.6
A_6	$t_{11} - t_{10}$	−2.4
A_7	$t_{10} - t_8$	−1.0

$$[AA] = 92,65$$

$$I = -\frac{\Delta}{[AA]} = -0.23$$

(1)	$A_1 I$	+1''.3
(2)	$A_2 I$	−1 .2
(3)	$A_3 I$	−0 .4
(4)	$A_4 I$	+1 .0
(5)	$A_5 I$	−0 .4
(6)	$A_6 I$	+0 .6
(7)	$A_7 I$	+0 .2

$d\psi$	−4''.7
$d\varphi$	+7 .3

$$+ A_2(2) + A_3(3) + A_4(4) + A_5(5) + A_6(6) + A_7(7) + \Delta = 0$$

$$\Delta = 22$$

Sulla dilatazione termica di alcune amalgame allo stato liquido. — Appendice alla Nota omonima (Vedi *Atti R. Accademia delle Scienze di Torino*, 1890, vol. XXV);

del Dott. Prof. CARLO CATTANEO

In questa Nota, come complemento di un'altra sullo stesso argomento pubblicata lo scorso anno, presento i risultati relativi alla dilatazione termica di due amalgame di stagno molto ricche di mercurio. Il Prof. VICENTINI, per la discussione dei risultati di alcune sue ricerche sperimentali sulla resistenza elettrica delle amalgame, ha avuto occasione di prendere in considerazione i valori da me registrati nella Tavola 4ª del mio lavoro sopracitato dello scorso anno. Occorrendogli poi anche valori relativi ad amalgame meno ricche di stagno di quelle da me già studiate (Sn_4Hg, Sn_2Hg, $SnHg$, $SnHg_2$), ho studiato ora le due $SnHg_8$, $SnHg_{20}$.

Per quanto riguarda la preparazione delle amalgame, la loro temperatura di fusione, la preparazione e calibrazione dei dilatometri, il riempimento e le pesate di questi, le determinazioni delle densità alle varie temperature ed i calcoli relativi rimando il lettore alla mia Nota precedente di cui questa è appendice. Ricordo qui soltanto il significato di alcuni simboli ed alcune formule adoperate:

D_t densità dell'amalgama a t.

γ coefficiente medio di dilatazione di essa allo stato di perfetta liquidità, fra due temperature t e t'.

γ' lo stesso coefficiente, calcolata colla formula (3) ove si ammette che i metalli componenti la amalgama conservino la dilatazione che isolatamente posseggono allo stato liquido.

D_f densità della amalgama alla temperatura f di fusione dello stagno.

D_f' la stessa densità calcolata colla formula (2) ove si ammette che i metalli componenti conservino nella amalgama il loro volume.

d_f densità dello stagno alla temperatura f calcolata colla formula (4).

φ temperatura di fusione della amalgama.

P e P' rispettivamente le quantità ponderali su cento di mercurio e stagno.

c il coefficiente di contrazione determinato colla formula (5).

ε coefficiente medio di dilatazione dello stagno allo stato liquido.

d_m densità del mercurio alla temperatura f.

m coefficiente medio di dilatazione del mercurio.

$$(1) \qquad \gamma = \frac{D - D'}{D'(t' - t)}$$

$$(2) \qquad D_f' = \frac{100\, d_m}{P + P' \dfrac{d_m}{d_f}}$$

$$(3) \qquad \gamma' = \frac{100\, d_m\, \varepsilon + D_f'(m P - \varepsilon P)}{100\, d_m}$$

$$(4) \qquad d_f = \frac{D_f P'}{100 - \dfrac{D_f}{d_m} P}$$

$$(5) \qquad c = \frac{D_f - D_f'}{D_f}$$

$f = 226^\circ{,}5 \qquad d_m = 13{,}05 \qquad m = 0{,}000186$

$\varepsilon = 0{,}000114 \qquad d_f = 6{,}99$

Ecco ora i risultati ottenuti in base alle esperienze :

1° Per *Amalgama* $Sn\, Hg_8$

$P = 93{,}151 \qquad P' = 6{,}849 \qquad \varphi = 81^\circ.$

Volume del dilatometro a 0° fino alla divisione 97,4 del cannello :

$V = 17^{cc}{,}2436$

Volume medio a 0° di una piccola divisione del cannello

$$v = 0^{cc},001506$$

Peso della amalgama contenuta nel dilatometro

$$p = 214^{gr},7228$$

$t = 226°,5$	$D_t = 12.4681$
$t = 241,8$	$D_t = 12,4392$
$t = 259,4$	$D_t = 12,4073$
$t = 276,4$	$D_t = 12,3785$
$D_f = 12.4681$	$\gamma = 0,000145$
$D'_f = 12,3190$	$\gamma' = 0,000177$
$c = 0,0119$	$d_f = 7,75$

2° Per *l'Amalgama* $Sn\,Hg_{20}$.

$P = 97,143$ $P' = 2,857$ $\varphi = 59$.

Dati relativi al dilatometro *idem* come sopra
Peso dell'amalgama

$$P = 220^{gr},788$$

$t = 233°,4$	D_t 12,8100
$t = 246,4$	D_t 12,7815
$t = 272,5$	D_t 12,7297
$D_f = 12,8235$	$\gamma = 0,000161$
$D'_f = 12,7340$	$\gamma' = 0,000182$
$c = 0,0069$	$d_f = 8,06$.

3° Entro i limiti di temperatura fra cui le due amalgame sono state studiate la dilatazione si può ritenere regolare confondendosi quasi la curva delle densità con una linea retta.

Dalla considerazione dei valori di γ e D_f si scorge per queste due amalgame lo stesso andamento già verificatosi per le quattro amalgame di stagno precedentemente studiate (vedi Tavola 4ª lavoro citato); infatti detti valori sono maggiori per l'amalgama

$Sn H_{20}$ che per la $Sn Hg_8$ e questi maggiori di quelli della (N. 1) $Sn Hg_2$. Anche i valori delle d_f ora trovati mostrano un aumento col diminuire della concentrazione della amalgama; trovo opportuno riportarli qui con ordine:

Amalgama	$Sn Hg_{20}$	$d_f = 8{,}06$
»	$Sn Hg_8$	$= 7{,}75$
»	$Sn Hg_2$	$= 7{,}35$
»	$Sn Hg$	$= 7{,}14$
»	$Sn_2 Hg$	$= 7{,}06$
»	$Sn_4 Hg$	$= 6{,}97$.

Anche la curva di queste densità (tracciata rappresentando colle ascisse le quantità percentuali dello stagno e colle ordinate le densità stesse) mostra, d'accordo coi risultati ottenuti precedentemente, che per piccole percentuali del metallo al mercurio allegato la variazione delle d_f è rapida; lo stesso fatto notisi anche per la curva dei valori di γ.

Le differenze poi fra i valori γ sperimentali ed i γ' calcolati comprovano pure che la dilatazione dell'amalgama non può ritenersi uguale alla somma delle dilatazioni dei metalli componenti quando la percentuale di metallo allegata è piccola; anche in questo caso si hanno sempre coefficienti più piccoli di quelli che alle dette amalgame spetterebbero se le dilatazioni dei componenti si sommassero.

Infine qui sotto sono registrate le differenze fra le D_f e le D_f' sperimentali e calcolate, unitamente ai rispettivi coefficienti di contrazione:

Amalgame	Differenze	Coeff. contraz.
$Sn Hg_{20}$	0,089	0,0069
$Sn Hg_8$	0,149	0,0119
$Sn Hg_2$	0,195	0,0176
$Sn Hg$	0,111	0,0111
$Sn_2 Hg$	0,047	0,0052
$Sn_4 Hg$	—0,022	—0,0027 .

L'andamento della curva dei coefficienti di contrazione (tracciata rappresentando colle ascisse le percentuali di stagno e colle ordinate i valori dei coefficienti stessi) accenna al fatto che tale contrazione dall'essere piccola per amalgame pochissimo concentrate tende a crescere gradatamente colla concentrazione fino ad un massimo per poi diventare insensibile per forti concentrazioni. Parrebbe quasi che in prossimità di una percentuale di stagno di circa 20 l'amalgama assumesse i caratteri di una lega chimica, modificando sensibilmente le proprietà fisiche dei componenti.

NB. Nella Nota precedente (Atti R. Accad. Scienze Torino, 1890, vol. XXV) è incorso un errore di stampa. Nella tavola 4ª in corrispondenza alla colonna orizzontale N. 3 ed alla verticale D_f leggasi 8,937 in luogo di 9,937.

Dal Laboratorio di Fisica sperimentale della R. Università.
Siena, 19 Marzo 1891.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO

Adunanza del 12 Aprile 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Cossa, Direttore della Classe, Salvadori, Bruno, D'Ovidio, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia, Gibelli, Giacomini, Camerano, Segre, Peano e Basso Segretario.

Vien letto l'atto verbale dell'adunanza precedente che è approvato.

Il Socio Basso presenta in dono all'Accademia, a nome dell'autore, Prof. Ing. Giovanni Luvini, un opuscolo intitolato: *Nuova forma di dinamo alla quale l'Autore ha dato il nome di Metergo*.

Il socio Cossa presenta, per incarico dell'autore, Prof. Francesco Brioschi, Socio nazionale non residente, una Nota intitolata: « *Sopra alcune formole ellittiche* ». Questo lavoro del Senatore Brioschi sarà inserito negli *Atti*.

Il Socio Segre anche a nome del condeputato Socio D'Ovidio, legge una sua Relazione sopra un lavoro del Dott. Guido Castelnuovo, col titolo: « *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* ». Conformemente alle conclusioni favorevoli della Relazione, la Classe ammette alla lettura tale lavoro, e poscia ne delibera con voti unanimi la pubblicazione nei volumi delle *Memorie* dell'Accademia.

La Relazione del Socio Segre sarà inserita negli *Atti*.

LETTURE

Sopra alcune formole ellittiche;

Nota del Socio FRANCESCO BRIOSCHI

1. Sia $f(x)$ un polinomio del quarto grado:

$$f(x)=A_0x^4+4A_1x^3+6A_2x^2+4A_3x+A_4$$

e sieno a_0, a_1, a_2, a_3 le radici dell'equazione $f(x)=0$.

Posto:

$$f_1(x)=\frac{1}{4}f'(x) \quad , \quad f_2(x)=\frac{1}{3\,.\,4}f''(x) \quad , \quad f_3(x)=\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}f'''(x)$$

ed:

$$l=f_1(a_0) \quad , \quad m=\frac{1}{2}f_2(a_0) \quad , \quad n=f_3(a_0)$$

è noto (*) che dalla formola di trasformazione:

$$(1) \; \ldots\ldots \qquad x=a_0+\frac{l}{s-m}$$

si deduce la:

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=\frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}}=\frac{ds}{\sqrt{\varphi(s)}}$$

e che le radici e_1, e_2, e_3 della equazione $\varphi(s)=4s^3-g_2s-g_3=0$ hanno i seguenti valori:

$$e_1=\frac{A_0}{12}(\beta-\gamma) \quad , \quad e_2=\frac{A_0}{12}(\gamma-\alpha) \quad , \quad e_3=\frac{A_0}{12}(\alpha-\beta)$$

(*) Caspary, *Extrait d'une lettre à M. Hermite.* Journal de Mathématique de Jordan, t. V, 1889.

essendo:

$$\alpha=(a_0-a_1)(a_2-a_3)\,,\quad \beta=(a_0-a_2)(a_3-a_1)\,,\quad \gamma=(a_0-a_3)(a_1-a_2)$$

e quindi $\alpha+\beta+\gamma=0$.

Indicando con a, b, c le tre espressioni:

$$a=(a_0-a_2)(a_0-a_3)\,,\quad b=(a_0-a_3)(a_0-a_1)\,,\quad c=(a_0-a_1)(a_0-a_2)$$

i valori di α, β, γ prendono la forma:

$$\alpha=b-c\,,\quad \beta=c-a\,,\quad \gamma=a-b$$

ed in conseguenza:

$$e_1=\frac{A_0}{12}(b+c-2a)\,,\quad e_2=\frac{A_0}{12}(c+a-2b)\,,\quad e_3=\frac{A_0}{12}(a+b-2c)$$

e siccome:

$$m=\frac{A_0}{12}(a+b+c)$$

si avranno le:

$$(2)\ldots\quad m-e_1=\frac{A_0}{4}a\,,\quad m-e_2=\frac{A_0}{4}b\,,\quad m-e_3=\frac{A_0}{4}c$$

Da queste relazioni, osservando, che:

$$4(m-e_1)(m-e_2)(m-e_3)=\varphi(m)\,,\quad l^2=\frac{A_0^2}{16}abc$$

deducesi essere:

$$l=\frac{1}{\sqrt{A_0}}\sqrt{\varphi(m)}\,.$$

Posto ora:

$$s=p(u)\,,\qquad m=p(v)\qquad \text{e quindi}\qquad \sqrt{\varphi(m)}=p'(v)$$

la formola di trasformazione (1) può scriversi:

$$x=a_0+\frac{1}{\sqrt{A_0}}\frac{p'(v)}{p(u)-p(v)}\,.$$

2. È noto che posto:

$$D = A_1^2 - A_0 A_2 , \qquad G = A_0^2 A_3 - 3 A_0 A_1 A_2 + 2 A_1^3$$

essendo:

$$g_2 = A_0 A_4 - 4 A_1 A_3 + 3 A_2^2$$
$$g_3 = A_0 A_2 A_4 + 2 A_1 A_2 A_3 - A_0 A_3^2 - A_1^2 A_4 - A_2^3$$

si ha identicamente:

$$\frac{G^2}{A_0^3} = 4 \left(\frac{D}{A_0} \right)^3 - g_2 \frac{D}{A_0} - g_3$$

per la quale posto:

$$\frac{D}{A_0} = p(w) \qquad \text{si ha:} \qquad \frac{G}{A_0 \sqrt{A_0}} = - p'(w)$$

Per determinare la relazione che deve esistere fra gli argomenti v, w, si osservi sussistere identicamente le due relazioni:

$$\frac{D}{A_0} = \frac{1}{A_0} n^2 - 2 m , \qquad \frac{G}{A_0 \sqrt{A_0}} = \sqrt{A_0} \,.\, l - \frac{6}{\sqrt{A_0}} m n + 2 \frac{n^3}{A_0 \sqrt{A_0}}$$

per le quali:

$$\frac{n^2}{A_0} = p(w) + 2 p(v)$$

$$\frac{n}{\sqrt{A_0}} = \frac{1}{2} \frac{p'(v) + p'(w)}{p(v) - p(w)}$$

ma:

$$\frac{1}{4} \left[\frac{p'(v) + p'(w)}{p(v) - p(w)} \right]^2 = p(v) + p(w) + p(v - w)$$

(Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, pag. 29), si avrà quindi:

$$p(v - w) = p(v)$$

e $v = \frac{1}{2} w$.

Dalla prima delle relazioni superiori deducesi così essere:

$$\frac{n^2}{A_0} = p(2v) + 2p(v)$$

o per la formola di duplicazione (HALPHEN, pag. 96)

$$\frac{n^2}{A_0} = \frac{1}{4}\left(\frac{p''(v)}{p'(v)}\right)^2$$

da cui:

$$\frac{n}{\sqrt{A_0}} = \frac{1}{2}\frac{p''(v)}{p'(v)}$$

la quale può dedursi anche dalla seconda delle formole superiori, essendo:

$$\frac{p'(v) + p'(2v)}{p(v) - p(2v)} = \frac{p''(v)}{p'(v)}$$

(HALPHEN, pag. 107).

Ora $n = A_0 a_0 + A_1$, si avrà quindi per la radice a_0 il valore:

$$a_0 = -\frac{A_1}{A_0} + \frac{1}{2\sqrt{A_0}}\frac{p''(v)}{p'(v)}$$

e per esso la formola di trasformazione diventa:

$$x = -\frac{A_1}{A_0} + \frac{1}{\sqrt{A_0}}\left[\frac{1}{2}\frac{p''(v)}{p'(v)} + \frac{p'(v)}{p(u) - p(v)}\right].$$

La formola di trasformazione (1) dà:

$$s = m + \frac{l}{x - a_0},$$

ma $l = \frac{A_0}{4} a(a_0 - a_1)$, $m - e_1 = \frac{A_0}{4} a$, quindi

$$s - e_1 = \frac{A_0}{4} a \frac{x - a_1}{x - a_0}$$

ed analogamente per $s-e_2$, $s-e_3$; si ottiene così

$$\sqrt{f(x)} = -\frac{1}{\sqrt{A_0}} \frac{\sqrt{\varphi(s)\varphi(m)}}{(s-m)^2} = -\frac{1}{\sqrt{A_0}} \frac{p'(u)p'(v)}{\left[p(u)-p(v)\right]^2}$$

ossia:

$$\sqrt{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{A_0}} \left[p(u+v) - p(u-v)\right] = \frac{dx}{du} .$$

Da quest'ultima si deducono le

$$f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{A_0}} \left[p'(u+v) - p'(u-v)\right], \quad f_2(x) = p(u+v) + p(u-v)$$

e per le medesime i valori dei due covarianti di $f(x)$:

$$h(x) = f f_2 - f^2_1 , \qquad t(x) = 2\,(f h_1 - h f_1) , \qquad \left(h_1 = \frac{1}{4}\frac{dh}{dx}\right)$$

trovansi essere:

$$\frac{h(x)}{f(x)} = -p(2u) , \qquad \frac{t(x)}{f(x)\sqrt{f(x)}} = p'(2u) ,$$

le quali conducono alla nota trasformazione del sig. HERMITE.

3. Dalla relazione superiore:

$$\frac{D}{A_0} = \frac{n^2}{A_0} - 2m$$

si ha:

$$\frac{D}{A_0^2} = \frac{1}{16}\left[(a_0-a_1)^2 + (a_0-a_2)^2 + (a_0-a_3)^2\right] - \frac{1}{24}(a+b+c) ,$$

quindi:

$$\frac{1}{A_0}\left[\frac{D}{A_0} - e_1\right] = \frac{1}{16}\left|a_0-a_1)^2 + (a_0-a_2)^2 + (a_0-a_3)^2 + 2a - 2b - 2c\right|$$

ossia

$$\frac{1}{A_0}\left[\frac{D}{A_0} - e_1\right] = \frac{1}{16}(a_0+a_1-a_2-a_3)^2 ,$$

ma:

$$\frac{D}{A_0} - e_1 = p(w) - e_1 = \frac{\sigma_1^2(w)}{\sigma^2(w)} \ .$$

Si ottengono così le tre relazioni:

$$a_0 + a_1 - a_2 - a_3 = - \frac{4}{\sqrt{A_0}} \frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)} ,$$

$$a_0 + a_2 - a_3 - a_1 = - \frac{4}{\sqrt{A_0}} \frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)} ,$$

$$a_0 + a_3 - a_1 - a_2 = - \frac{4}{\sqrt{A_0}} \frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)} ,$$

ed i valori delle radici a_0, a_1, a_2, a_3, nella forma data ad essi dalla signora KOWALEVSKI nell'importante suo lavoro premiato dall'Accademia delle Scienze di Parigi (*). Moltiplicando le tre equazioni superiori per α, β, γ, ed indicando con μ la espressione:

$$\mu = (a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(a_1 - a_2)$$

si ha:

$$\mu = \frac{8}{A_0 \sqrt{A_0}} \cdot \frac{1}{\sigma(w)} \left[(e_2 - e_3)\sigma_1(w) + (e_3 - e_1)\sigma_2(w) + (e_1 - e_2)\sigma_3(w) \right].$$

In secondo luogo moltiplicando quelle stesse equazioni per $\alpha(\beta - \gamma)$, $\beta(\gamma - \alpha)$, $\gamma(\alpha - \beta)$ e sommandole si ottiene:

$$\mu . m = - \frac{8}{A_0 \sqrt{A_0}} \cdot \frac{1}{\sigma(w)} \left[(e_2^2 - e_3^2)\sigma_1(w) + (e_3^2 - e_1^2)\sigma_2(w) + (e_1^2 - e_2^2)\sigma_3(w) \right].$$

Da ultimo moltiplicando fra loro le α, β, γ, trovasi:

$$\mu . l = - \frac{16}{A_0^2} (e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2) = - \frac{16}{A_0^2} E \ ;$$

(*) *Acta Mathematica*, t. 12, pag. 194, 196.

ponendo quindi:

$$h_0 = \frac{1}{\sigma(w)} \left[\sigma_1(w) + \sigma_2(w) + \sigma_3(w)\right] ,$$

$$h_1 = \frac{1}{\sigma(w)} \left[(e_2 - e_3)\,\sigma_1(w) + (e_3 - e_1)\,\sigma_2(w) + (e_1 - e_2)\,\sigma_3(w)\right] ,$$

$$h_2 = \frac{1}{\sigma(w)} \left[(e^2_2 - e^2_3)\,\sigma_1(w) + (e^2_3 - e^2_1)\,\sigma_2(w) + (e^2_1 - e^2_2)\,\sigma_3(w)\right] ,$$

la formula di trasformazione (1) dà:

$$x = -\frac{A_1}{A_0} - \frac{h_0}{\sqrt{A_0}} - \frac{2}{\sqrt{A_0}} \frac{E}{h_1 p(u) + h_2} .$$

4° Consideriamo due trasformazioni analoghe alla (1):

$$x_1 = a_0 + \frac{l}{p(u_1) - m} , \qquad x_2 = a_0 + \frac{l}{p(u_2) - m} ;$$

si avranno le:

$$p(u_1) + p(u_2) = \frac{1}{(x_1 - a_0)(x_2 - a_0)} \left[\begin{array}{l} \quad 2 m x_1 x_2 + (l - 2 a_0 m)(x_1 + x_2) \\ + 2 a_0 (a_0 m - l) \end{array}\right] ,$$

$$p(u_1) - p(u_2) = -l \frac{x_1 - x_2}{(x_1 - a_0)(x_2 - a_0)} ,$$

$$p(u_1)\,p(u_2) = \frac{1}{(x_1 - a_0)(x_2 - a_0)} \left[\begin{array}{l} \quad m^2 x_1 x_2 + m(l - a_0 m)(x_1 + x_2) \\ + (l - a_0 m)^2 \end{array}\right] .$$

Dalle note relazioni (*):

$$p(u_1 + u_2) = \frac{f(x_1, x_2) - \sqrt{f(x_1)\,f(x_2)}}{2\,(x_1 - x_2)^2} ,$$

$$p(u_1 - u_2) = \frac{f(x_1, x_2) + \sqrt{f(x_1)\,f(x_2)}}{2\,(x_1 - x_2)^2} ,$$

nelle quali:

$$f(x_1, x_2) = x^2_2 (A_0 x^2_1 + 2 A_1 x_1 + A_2) + 2 x_2 (A_1 x^2_1 + 2 A_2 x_1 + A_3) + \\ + A_2 x^2_1 + 2 A_3 x_1 + A_4 ,$$

osservando essere:

$$f(x_1, x_2) - 2 e_1 (x_1 - x_2)^2 = \frac{A_0}{2} \left[\varphi_1(x_1)\,\psi_1(x_2) + \varphi_1(x_2)\,\psi_1(x_1)\right]$$

(*) KLEIN, *Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen*. Math. Annalen, Bd. 27.

posto:

$$\varphi_1(x_1) = (x_1 - a_0)(x_1 - a_1)\ , \qquad \psi_1(x_1) = (x_1 - a_2)(x_1 - a_3)\ ,$$

deducesi pel valore della espressione:

$$P_1 = \sqrt{p(u_1 + u_2) - e_1}\ \sqrt{p(u_1 - u_2) - e_1}$$

il seguente:

$$P_1 = A_0 \frac{\varphi_1(x_1)\,\psi_1(x_2) - \varphi_1(x_2)\,\psi_1(x_1)}{4\,(x_1 - x_2)^2}\ .$$

ossia:

$$P_1 = \frac{A_0}{4\,(x_1 - x_2)^2}\left[\begin{array}{l}(a_0 + a_1 - a_2 - a_3)\,x_1 x_2 + (a_2 a_3 - a_0 a_1)(x_1 + x_2)\\ + a_0 a_1 (a_2 + a_3) - a_2 a_3 (a_0 + a_1)\end{array}\right]$$

ed analogamente pei valori di P_2, P_3.

Moltiplicando questi valori per α, β, γ e sommando si ottiene dapprima:

$$\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = \frac{1}{2}\,\mu A_0 \frac{(x_1 - a_0)(x_2 - a_0)}{x_1 - x_2}$$

ma $\alpha = -\dfrac{4}{A_0}(e_2 - e_3) \ldots\ ;\ \mu l = -\dfrac{16}{A_0^2}E$ come si è trovato sopra,

si avrà quindi:

$$p(u_1) - p(u_2) = \frac{-2E}{(e_2 - e_3)P_1 + (e_3 - e_1)P_2 + (e_1 - e_2)P_3}\ .$$

Così moltiplicando quei tre valori per $\alpha(\beta - \gamma)$, $\beta(\gamma - \alpha)$, $\gamma(\alpha - \beta)$ e sommando si giunge alla:

$$p(u_1) + p(u_2) = -2\,\frac{(e_2^2 - e_3^2)P_1 + (e_3^2 - e_1^2)P_2 + (e_1^2 - e_2^2)P_3}{(e_2 - e_3)P_1 + (e_3 - e_1)P_2 + (e_1 - e_2)P_3}$$

Infine moltiplicando quei tre valori per $\alpha(\alpha^2 + 5\beta\gamma)$, $\beta(\beta^2 + 5\gamma\alpha)$, $\gamma(\gamma^2 + 5\alpha\beta)$ si ottiene:

$$\ldots u_1)\,p(u_2) = -\frac{(e_2 - e_3)(e_1^2 + e_2 e_3)P_1 + (e_3 - e_1)(e_2^2 + e_3 e_1)P_2 + (e_1 - e_2)(e_3^2 + e_1 e_2)P_3}{(e_2 - e_3)P_1 + (e_3 - e_1)P_2 + (e_1 - e_2)P_3}\ ,$$

…mole esse pure dovute alla Sig^a Kowalevski (pag. 211).

Per le formole stesse il coefficiente di P_1 nel numeratore della espressione:

$$\left(p(u_1)-m\right)\left(p(u_2)-m\right)$$

è il seguente:

$$(e_2-e_3)\left[m^2-2me_1-e^2{}_1-e_2e_3\right]=$$

$$=(e_2-e_3)\left[(m-e_1)(2m+e_1)-(m-e_2)(m-e_3)\right]$$

ossia per le relazioni (2)

$$=\frac{A^2{}_0}{16}(e_2-e_3)(ab+ca-bc)=-\sqrt{A_0}\,.\,l(e_2-e_3)\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)}\,;$$

così essendo:

$$a_0\left(p(u_1)-m\right)\left(p(u_2)-m\right)+\frac{1}{2}l\left(p(u_1)+p(u_2)\right)-lm=$$

$$=\frac{A_0}{4}l(e_2-e_3)(a_0a_1-a_2a_3)=l(e_2-e_3)\left[\frac{A_1}{\sqrt{A_0}}\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)}-\frac{\sigma_2(w)\sigma_3(w)}{\sigma^2(w)}\right],$$

posto:

$$L=(e_2-e_3)\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)},\qquad L_1=(e_2-e_3)\frac{\sigma_2(w)\sigma_3(w)}{\sigma^2(w)},$$

$$M=(e_3-e_1)\frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)},\qquad M_1=(e_3-e_1)\frac{\sigma_3(w)\sigma_1(w)}{\sigma^2(w)},$$

$$N=(e_1-e_2)\frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)},\qquad N_1=(e_1-e_2)\frac{\sigma_1(w)\sigma_2(w)}{\sigma^2(w)}.$$

si hanno le:

$$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{A_1}{A_0}+\frac{1}{\sqrt{A_0}}\frac{L_1P_1+M_1P_2+N_1P_3}{LP_1+MP_2+NP_3},$$

$$\frac{x_1-x_2}{2}=-\frac{1}{\sqrt{A_0}}\frac{E}{LP_1+MP_2+NP_3},$$

alle quali corrispondono le equazioni differenziali:

$$\frac{d s_1}{\sqrt{\varphi(s_1)}} = \frac{d x_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{d x_2}{\sqrt{f(x_2)}}$$

$$\frac{d s_2}{\sqrt{\varphi(s_2)}} = - \frac{d x_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{d x_2}{\sqrt{f(x_2)}}$$

essendo

$$s_1 = p(u+v) \quad . \quad s_2 = p(u-v) \; .$$

RELAZIONE intorno alla Memoria di Guido Castelnuovo: *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane.*

I sistemi lineari di curve piane costituiscono uno fra gli argomenti di ricerche geometriche cui ripetutamente si è rivolta in questi ultimi anni l'attenzione dei geometri d'Italia: del paese cioè al quale la scienza era già debitrice della teoria generale delle corrispondenze piane birazionali, vale a dire delle reti omaloidiche di curve piane. In breve tempo son comparsi vari lavori di Bertini, Caporali, Guccia, Jung, Martinetti, ecc., nei quali sono ottenuti parecchi nuovi risultati, generali o speciali, su quei sistemi (*). E veramente lo studio dei sistemi lineari di curve piane è degno che ad esso si rivolgano i geometri, poichè la sua importanza è notevole, sia che lo si consideri in se stesso, sia che si badi alle sue applicazioni. Si pensi in fatti: che lo studio delle superficie, semplici o multiple, rappresentabili univocamente sul piano, ed in particolare lo studio dei piani multipli rappresentabili su un piano semplice, si riducono a ricerche intorno al sistema lineare rappresentativo. Che dall'esame delle rappresentazioni piane di una superficie razionale si trae la costruzione delle corrispon-

(*) Pel confronto di questi ed altri risultati fra loro e con quelli contenuti nella Memoria che esaminiamo, rimandiamo a questa e particolarmente al cenno storico sui sistemi lineari che si trova nell'Introduzione.

denze birazionali fra due spazi. Che lo studio delle *involuzioni piane* nel senso più generale, cioè dei raggruppamenti dei punti del piano in gruppi di μ, tali che ogni punto del piano stia in un sol gruppo, si può far dipendere in infiniti modi (ad esempio ricorrendo ad una superficie sui cui punti si rappresentino univocamente i gruppi dell'involuzione) da quello di particolari sistemi lineari di curve piane, tali che tutte le curve passanti per un punto qualunque del piano passino in conseguenza per i $\mu - 1$ associati. Ecc., ecc.

Quando di una varietà algebrica si studiano quelle proprietà che non mutano trasformando birazionalmente la varietà stessa, si fa quella che ora si suol chiamare la *geometria sulla varietà*. La *geometria sulla retta (punteggiata)* coincide con la geometria projettiva della retta stessa: non così la *geometria su una curva qualunque* di genere p, nè la *geometria sul piano*. Quelle proprietà dei sistemi lineari di curve piane che sono invariabili per trasformazioni Cremoniane appartengono appunto alla geometria sul piano. Esse serviranno d'introduzione allo studio delle *serie lineari di curve sopra una superficie qualunque* fatto nel senso della geometria su una superficie: studio che non è ancora avviato.

Ora allorquando i sistemi lineari di curve piane vengono studiati secondo quest'indirizzo, si ha nelle trasformazioni birazionali del piano uno strumento per semplificarli; e considerando come equivalenti quei sistemi che così si posson trasformare gli uni negli altri, nasce la questione di ridurre tutti i sistemi a dati tipi. Appunto di essa, per i sistemi di un dato genere p, si sono occupati alcuni fra gli scienziati italiani ricordati. Ma il CASTELNUOVO in questa Memoria si pone problemi di un'altra natura; e si basa sopra un concetto che, per quanto spontaneo possa sembrare, non era ancora stato applicato in queste ricerche con quell'ampiezza che era necessaria per rivelarne tutta la fecondità. Vogliam dire l'uso della geometria sulla curva, ed in particolare delle serie lineari di gruppi di punti sopra la curva, delle curve aggiunte di questa, ecc.: di quelle nozioni insomma che, introdotte nella scienza da RIEMANN, CLEBSCH ed altri, hanno poi trovato in un notissimo lavoro di BRILL e NÖTHER il loro assetto definitivo. Era ben naturale che queste cose dovessero aiutare grandemente le ricerche sui sistemi lineari di curve piane. Il CASTELNUOVO, che già aveva dimostrato, in alcuni scritti accolti dalla nostra Accademia nei suoi *Atti*, di possedere a fondo quelle proprietà di geometria sulla curva; e che in altre due Note se n'era già valso utilmente pei sistemi lineari, sia determinando tutti quelli che si compongono di curve iperellittiche, sia mostrando quali sono quei sistemi di genere p che hanno la massima dimensione (*); giunge nella Memoria su cui riferiamo, a tutta una serie di risultati della massima generalità ed importanza, basandosi appunto su quei concetti.

La Memoria è divisa in due capitoli. Il 1° studia i sistemi lineari di curve C d'ordine n che vengono determinati assegnando le multiplicità *(virtuali)* ν_1, ν_2, . . con cui queste curve passano per i punti a_1, a_2, . . . (comunque collocati, distinti od infinitamente vicini) di un dato gruppo A. In conseguenza di queste condizioni la curva generica C del sistema può venir ad avere in qualche punto di A una multiplicità superiore alla data, sicchè i numeri ν possono differire dalle multiplicità *effettive* che C avrà nei punti di A. Può accadere che uno stesso sistema lineare d'ordine n si possa determinare secondo quel concetto in più modi, con diverse scelte per A e per le ν. Bisogna dunque riferire sempre le proprietà dei sistemi lineari contenute in questo Cap.° ad un gruppo A e ν ben fissato: esse sono proprietà *relative* a questo gruppo. Quando poi nel 2° Cap.° si studieranno le proprietà *assolute* dei sistemi lineari determinati dai punti base, basterà prendere per A il gruppo di tutti i punti comuni alle curve del sistema e per multiplicità ν quelle effettive della curva generica. Ma le ipotesi più generali che su A e le ν si fanno nel Cap° 1° non hanno un mero scopo di generalizzazione: esse sono addirittura necessarie per ottenere risultati che si possano anche applicare alle curve *fondamentali*, od alle *aggiunte pure*, od a curve *particolari* del sistema, poichè quella scelta speciale di A fatta in relazione col sistema (o meglio con le sue curve generiche) non avrebbe più rapporti analoghi con quelle curve.

Al sistema dato spettano i seguenti *caratteri rispetto ad* A.

La *dimensione virtuale* $\mathbf{k} = \frac{1}{2}(n \,.\, n+3 - \Sigma\, \nu \,.\, \nu+1)$, che

---

(*) Il risultato notevole che in questa seconda Nota aveva ottenuto, egli generalizza alla fine della presente Memoria seguendo un metodo affatto diverso; quantunque com'egli osserva nella prefazione, anche il metodo che là aveva adoperato si potesse ancora applicare.

può essere minore della *dimensione effettiva* k del sistema (in tal caso il sistema si dirà *sovrabbondante*): la differenza $k - \mathbf{k}$ è la *sovrabbondanza* del sistema; essa è nulla solo quando il sistema è *regolare*, cioè tale che le condizioni imposte da A sono tutte indipendenti. Il *grado* (secondo JUNG) del sistema, cioè $D = n^2 - \Sigma\nu^2$ (nozione che poi si generalizza coll'espressione $n'n'' - \Sigma\,\nu'\,\nu''$ pel *numero delle intersezioni rispetto ad* A di due curve qualunque). Il *genere effettivo* ed il *genere virtuale* (sempre rispetto ad A), definiti da $p = k' + 1$, $\mathbf{p} = \mathbf{k}' + 1$, ove k' e $\mathbf{k}'$ indicano le dimensioni, effettiva e virtuale, del sistema lineare $[C']$ costituito dalle *curve aggiunte* (sottint. d'ordine $n - 3$) *rispetto ad* A delle C. Fra questi caratteri (che si possono riferire anche ad una sola curva C in rapporto con un dato gruppo A) passano alcune relazioni, fra cui la $D = \mathbf{k} + \mathbf{p} - 1$. Si dimostra poi che essi non mutano quando si eseguisce una trasformazione birazionale qualunque del piano, purchè allora si definisca convenientemente il gruppo, trasformato di A, al quale si riferisce il sistema lineare trasformato di $[C]$. Ciò permette di supporre nel seguito che A si componga di punti tutti distinti.

Data una curva irriduttibile C, assumendo per multiplicità virtuali quelle effettive dei punti di A, si ottiene uno stesso valore pei generi effettivo e virtuale; e la considerazione delle curve aggiunte rispetto ad A (di ogni ordine) conduce a definire su C delle *serie lineari di gruppi di punti rispetto ad* A per le quali hanno luogo certe proprietà (alcune delle quali, sotto ipotesi più generali, furono già considerate dal NÖTHER) perfettamente analoghe a proprietà note delle serie segate dalle ordinarie curve aggiunte (in luogo del genere ordinario si ha solo da mettere l'attuale genere rispetto ad A). Ad esempio si ha che se la curva generica del sistema lineare $[C]$ è irriduttibile, la serie $g_{\mathrm{D}}^{\mathbf{k}-1}$ (rispetto ad A) che su essa vien segata dalle altre curve del sistema è *completa*.

Segue lo studio dei caratteri nel caso che la curva C sia composta. Qui per ottenere risultati generali occorre la nozione di curva *connessa* (rispetto ad A), cioè di curva composta tale che ciascuna delle sue componenti (irriduttibile o no) abbia colla componente complementare infiniti punti comuni, od almeno un punto d'intersezione rispetto ad A. Si dimostra ad esempio che la curva è certo connessa se il genere effettivo uguaglia il genere virtuale, e che viceversa questo fatto accade sempre quando la curva è connessa (e priva di componenti multiple). Il genere effettivo di una curva composta di due o più altre, il quale in generale non è minore della somma dei generi effettivi di queste, è appunto uguale a tal somma quando quelle parti non hanno a due a due intersezioni rispetto ad A.

Il 2° Cap.° tratta dei sistemi lineari determinati dai punti base e nei quali la curva generica è irriduttibile. Scegliendo allora A e le ν nel modo particolare già accennato, si ottengono dalle cose generali che precedono, dei caratteri *assoluti* $\mathbf{k}$, k, p $(=\mathbf{p})$, D, e delle proprietà *assolute* di un sistema [C]. Qui la serie lineare completa g_{D}^{k-1} che sulla curva generica è segata dalle altre curve di [C] (*serie caratteristica* del sistema) assume una grande importanza. Essa è speciale o non speciale secondo che il sistema è sovrabbondante o regolare: e da ciò seguono subito alcuni utili corollari (così, la sovrabbondanza del sistema non può superare $p-k+1$; in un sistema lineare sovrabbondante di curve iperellittiche il passaggio di una curva per un punto arbitrario porta di conseguenza il passaggio per un altro punto determinato da quello; ecc.). L'applicazione poi di note proprietà delle serie lineari, e specialmente del teorema Riemann-Roch, conduce al teorema seguente: « Se esiste un sistema ∞^{k+r} d'ordine n le cui curve passano soltanto $r-1$ volte per un punto base r-plo a del sistema [C], ma si comportano come le C negli altri punti base, ogni curva aggiunta (d'ordine $n-3$) a [C] che passi per le intersezioni variabili di due curve di [C] avrà un punto r-plo in a; e reciprocamente ecc. ».

Indi si passa allo studio dei caratteri di due *sistemi residui* rispetto a [C], cioè tali che ogni curva dell'uno insieme con una curva dell'altro costituisce una curva di [C]; e delle *curve fondamentali*, cioè delle curve (semplici o composte) che non son segate fuori dei punti base dalla curva C generica. Si ottiene la seguente proposizione: « il genere effettivo di una curva fondamentale (che ammetta un sistema residuo) non può superare la sovrabbondanza del sistema, e se la uguaglia (e se inoltre la serie residua della serie caratteristica del sistema non ha punti fissi), la curva fondamentale contiene ogni punto base del sistema »; e varie altre relative ai caratteri virtuali ed al grado di una curva fondamentale, e non meno notevoli, ma che, per non dilungarci troppo, ci asteniamo dal riferire. Riportiamo invece i singolari risultati a cui si giunge nelle applicazioni ai sistemi sovrabbondanti col minimo numero di punti base: « Un sistema lineare sovrabbondante ha almeno nove punti base; e se ne ha precisamente nove esso dev'essere necessariamente un fascio di curve (ellittiche) d'ordine $3r$ colla multiplicità r in ogni punto base ». « Ogni sistema lineare di genere p, il quale sia determinato da nove dei suoi punti base e possegga tuttavia altri punti base, può sempre ridursi al tipo $[a_1^p \dots a_8^p a_9^{p-1} b]$ d'ordine $3p$ e dimensione effettiva p; i 10 punti base giacciono sopra una cubica fondamentale ».

Finalmente l'A. si rivolge alla considerazione del sistema aggiunto a $[C]$ e più specialmente del *sistema aggiunto puro* ∞^{p-1} costituito dalle sole parti variabili delle curve aggiunte di $[C]$. L'idea di valersi di questo elemento (invariabile per trasformazioni birazionali) per lo studio del sistema lineare non era stata ancora adoperata da altri; le applicazioni di grande importanza che qui ne son fatte ne mostrano tutta la fecondità e costituiscono un merito speciale di questa Memoria. Il sistema aggiunto puro $[C']$ di $[C]$ non può esser riduttibile se non quando la C generica è iperellittica; ove sia riduttibile e $k > p+1$, la curva generica di $[C']$ si spezzerà in $p-1$ curve razionali. Si ottengono notevoli proposizioni (che servono poi per dimostrare l'ultimo teorema del lavoro) collegando il sistema aggiunto puro con la serie lineare che sulla curva generica di $[C]$ è segata da tutte le rette del piano, ovvero dalle sole rette di un fascio. Indi si dimostrano i teoremi seguenti: « Se la curva generica del sistema aggiunto puro $[C']$ di genere virtuale (rispetto al gruppo base di $[C]$) $\mathbf{p}'$ non forma parte di alcuna curva di $[C]$, si ha $\mathbf{k} < 2p - \mathbf{p}' - 1$; mentre se il sistema $[C']$ ammette un sistema residuo $[C'']$ di dimensione virtuale $\mathbf{k}''$, si ha $\mathbf{k} = 2p - \mathbf{p}' + \mathbf{k}'' - 1$ ». « Se $\mathbf{k} > p+1$, il sistema aggiunto puro $[C']$ è regolare ed il suo genere $\mathbf{p}'$ è inferiore a $p-1$ ». L'importanza del primo appare meglio dopo che si è provato che $\mathbf{k}'' \leq 9$: si giunge con ciò alla relazione generale

$$\mathbf{k} \leq 2p - \mathbf{p}' + 7,$$

alla quale fanno solo eccezione quei sistemi che si possono trasformare nel sistema costituito da tutte le curve piane di un certo ordine (per essi si ha $\mathbf{k} = 2p - \mathbf{p}' + 8$). Questo risultato ha un grande valore e merita una speciale attenzione. Da esso si deducono subito una serie di proposizioni importanti, la prima delle quali era già stata ottenuta dall'A. in un lavoro che abbiamo ricordato. « Ogni sistema lineare la cui dimensione superi $3p+5$ si compone di curve razionali; fatta eccezione pel sistema di tutte le cubiche piane e pei suoi trasformati ». « Ogni sistema lineare di dimensione $> 2p+7$, o è contenuto in uno dei sistemi anzidetti, oppure si compone di curve iperellittiche; fatta eccezione pei sistemi trasformabili in quelli di tutte le quartiche o di tutte le quintiche ». « Ogni sistema lineare la cui dimensione superi $\frac{5}{3}p+9$, o è contenuto in uno dei precedenti, oppure si compone di curve contenenti una serie g^1_3; fatta eccezione pei sistemi trasformabili in uno di sestiche con un punto base semplice al più, ovvero nel sistema di tutte le curve del 7° ordine ». Il teorema generale di questa serie (nel quale si trova anche un fatto che, per brevità, abbiamo omesso nel riferire i casi particolari precedenti) viene enunciato così: « *Un sistema lineare di genere* p *la cui dimensione* k *soddisfi alla relazione*

$$k \geq (\mu + 2)\left(\frac{p}{\mu} + 2\right)$$

(*μ intero positivo*) *si può trasformare o in un sistema di curve d'ordine* $\leq 2\mu+1$, *ovvero in un sistema di curve di un certo ordine* M *avente un punto base di molteplicità* $\geq M-\mu$ »; e dimostrato per induzione completa, provando che esso vale pel sistema primitivo se ha luogo pel sistema aggiunto puro. Esso costituisce, come ognun vede, uno dei più generali ed importanti acquisti che si potessero fare in questo campo.

Al sistema aggiunto puro si potrebbero collegare vari altri problemi, alcuni dei quali si trovano accennati nella prefazione. Così esso può dare delle proprietà caratteristiche dei sistemi sovrabbondanti, le quali servano per costruirli. Ad esempio « se in un sistema ∞^r di genere p (non iperellittico) una tra le condizioni imposte dai punti base è conseguenza delle rimanenti, esiste una curva fondamentale di genere (virtuale = effettivo) uno, la quale contiene tutti i punti base del sistema. » Così ancora il sistema aggiunto puro potrà servire per lo studio dei sistemi la cui curva generica contiene una serie speciale di caratteri dati. Esso dà pure una classificazione dei sistemi lineari, se si assumono come criteri di distinzione i generi dei successivi sistemi aggiunti puri. Ecc.

Dal riassunto che ne abbiamo fatto emerge evidente senz'altre considerazioni il valore di questa Memoria. Essa ha una grande importanza sia pei risultati che essa contiene, sia per le vie che apre e pei nuovi originali concetti, per gl'innumerevoli problemi che essa addita, e di cui prepara la soluzione. Essa merita di avere dall'Accademia una piena approvazione.

E. D'Ovidio
C. Segre, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Giuseppe Basso.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 22 Marzo 1891 . . . . *Pag.* 407

Reina — Della compensazione del problema di Hansen . . . . . » 409

Cattaneo — Sulla dilatazione termica di alcune amalgame allo stato liquido. - Appendice alla Nota omonima (Vedi *Atti R. Accademia delle Scienze di Torino*, 1890, vol. XXV) . . . . » 418

ADUNANZA del 12 Aprile 1891 . . . . » 423

Brioschi — Sopra alcune formole ellittiche . . . . » 424

Segre — Relazione intorno alla Memoria di Guido Castelnuovo, che ha per titolo: *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* . . . . » 433

☛ NB. *A questo fascicolo vanno unite le Tavole IV, V, VI, VII, VIII e IX relative alle Memorie dei sigg. Dott.* Fr. Sav. Monticelli, R. Fusari, P. De-Vescovi, E. Faravelli, C. Mylius e I. Salvioli, *pubblicate nelle Dispense* 4ª, 5ª, 7ª, 8ª e 9ª.

Torino — Tip. Reale-Paravia

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVI, DISP. **12ª, 1890-91**

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 26 Aprile 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Bruno, Berruti, D'Ovidio, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia, Giacomini, Camerano, Segre, e Basso Segretario.

Letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, il Socio Basso offre in dono all'Accademia, a nome dei rispettivi autori:

1° Il n. 93 del vol. V, ed i n. 94 a 100 del vol. VI, che fanno parte del *Bollettino dei Musei di Zoologia e di Anatomia comparata della R. Università di Torino*, e che contengono lavori dei Dottori D. Rosa, E. Giglio-Tos, L. Camerano e C. Pollonera;

2° Cinque opuscoli del Prof. A. Sayno, estratti dai *Rendiconti* del R. Istituto Lombardo e versanti su argomenti di fisica molecolare.

Vengono poi letti ed accolti per la pubblicazione negli *Atti* i tre lavori seguenti:

a) « *Variazioni prodotte dal calore di alcuni spettri di assorbimento* »; lavoro del Dott. G. B. Rizzo, presentato dal Socio Naccari;

b) « *Sviluppo postembrionale dei Gonoplacidi* », del Dott. G. Cano, presentato dal Socio Camerano;

c) « *Un prisma universale a riflessione* », del Prof. Jadanza, presentato dal Socio Basso.

LETTURE

Variazioni prodotte dal calore in alcuni spettri d'assorbimento;

Nota del Dott. G. B. RIZZO

I.

Sir John Conroy ha comunicato recentemente alla Società fisica di Londra alcune sue esperienze sul cambiamento prodotto dal calore nello spettro del vetro di cobalto; ed ha mostrato che le bande crescono di intensità nella parte meno rifrangibile dello spettro ed appaiono spostate verso questa parte (1).

Siccome da alcun tempo anch'io studio l'assorbimento luminoso dei corpi e specialmente le variazioni col variare della temperatura, per portare il mio piccolo contributo a determinare la vera natura di questi fenomeni e dedurne i fondamenti per quella nuova scienza che è la meccanica molecolare, espongo qui alcuni risultati delle osservazioni fatte sullo spettro d'assorbimento dei corpi solidi.

Il Conroy ricorda che Brewster nel suo trattato sull'Ottica dice di essere maravigliato che il calore aumenti la trasparenza di alcuni corpi e la diminuisca per alcuni altri, e poi cita un lavoro di Feussner, il quale aveva osservato le variazioni dell'assorbimento prodotte dal calore nelle soluzioni colorate; e soggiunge che non vennero pubblicati altri esperimenti, dopo quelli di Brewster, sulla trasparenza delle sostanze solide riscaldate. Questo è inesatto: imperciocchè, per non parlare delle esperienze di Stokes (2) sul vetro di uranio, di quelle numerosissime, sebbene molto superficiali, di Houston (3), il quale volle anche spiegare

(1) Conroy (J.), *Nature*, vol. 43 (1891), pag. 406. — Phil. Mag (5), XXXI, (1891), pag. 317.

(2) Stokes (G. G.), *On the change of Refrangibility of Light.* Phil. Trans. 1852, 463.

(3) Houston (Ed. J.), *On the change of colour produced in certain chemical compounds by heat.* Chem. News, XXIV (1871), 177.

teoricamente i risultati osservati, o delle diligenti ricerche di Morton e Bolton (1), le modificazioni dello spettro d'assorbimento dei corpi solidi per causa del calore furono ancora studiate con molta cura da Glan (2) e da Ackroyd (3), che ne diedero inoltre una spiegazione teorica.

In un lavoro più esteso sull'assorbimento luminoso dei corpi farò una completa esposizione storica delle esperienze e delle discussioni fatte sinora, dal giorno in cui Brewster incominciò a studiare questi fenomeni, e perciò non mi fermo di più sopra questo punto, al quale ho solo voluto accennare, perchè le autorevoli parole del Conroy potevano far credere che un fenomeno così importante, quale è il cambiamento del colore e dello spettro d'assorbimento dei corpi col variare della temperatura, fosse rimasto tanto tempo senza essere studiato.

Fra i corpi solidi, che hanno uno spettro d'assorbimento molto ricco, sono notevoli sopra tutto i cristalli dei vari composti del didimio; ma non ho potuto ancora studiarne le variazioni col crescere della temperatura, perchè le variazioni di questi spettri sono molto complesse, e, come ha mostrato il Becquerel (4), l'intensità delle diverse bande d'assorbimento varia col variare della direzione in cui si propaga la luce; ed inoltre vi sono certe particolari direzioni, nelle quali cambia anche la posizione delle bande. Perciò considero qui soltanto le variazioni nello spettro del vetro roseo di didimio, del vetro azzurro di cobalto e del vetro violetto di manganese, i quali hanno una struttura molecolare molto stabile e presentano uno spettro d'assorbimento che è ben definito e non dipende dalla direzione in cui si propagano i raggi luminosi.

---

(1) MORTON (H.) *and* BOLTON (H. C.), *Investigation on the fluorescent and absorption spectra of the Uranium salts* Chem. News, XXVIII, 1873, 47.

(2) GLAN (P.), *Ueber die Absorption des Lichtes.* Pogg. Ann., CXLI (1870), 227.

(3) ACKROYD (W.), *Metachromatism or colour change.* Chem. News, XXXIV, 1876, 75.

Selective absorption. Phil. Mag. (5), II (1876), 423.

(4) BECQUEREL (H.), *Recherches sur les variations des spectres d'absorption dans les cristaux.* Ann. de Chim. et de Phys. (6), XIV (1888), 170.

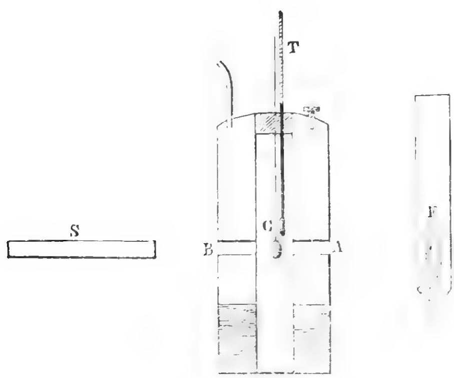
— *Sur les variations des spectres d'absorption des composés du didyme.* Ib. 257.

Le osservazioni furono fatte con uno *spettroscopio universale* di Krüss, adoperando quasi sempre il prisma semplice di flint pesante, perchè, con la media dispersione che esso produce, si vedono più nette le bande d'assorbimento; ed ho osservato lo spettro fra limiti molto estesi di temperatura: cioè alla temperatura ordinaria di circa 15°, a 300° ed a 500° approssimativamente.

Non mi parve opportuno di riscaldare i corpi, dei quali osservavo l'assorbimento, ponendoli sopra una fiamma Bunssen, come hanno fatto altri sperimentatori, perchè anzitutto sarebbe stato impossibile di determinare, anche per approssimazione, a quale temperatura venivano portati e poi l'energia chimica della fiamma poteva produrvi delle alterazioni, almeno alla superficie.

Ho invece riscaldato i corpi alla temperatura di 300°, tenendoli nella cavità circolare interna di una delle pentole cilindriche di ferro adoperate dal Prof. Naccari nel suo studio sui calori specifici di alcuni metalli fino alla temperatura di 320° (1).

La pentola conteneva del petrolio in ebollizione, e la luce vivissima e tranquilla di una fiamma a *gas incandescente* F, passando in una cavità cilindrica *AB*, chiusa con vetri e perpendicolare all'asse della pentola, attraversava il corpo assorbente *C*, sostenuto da una pinzetta, e poi cadeva sulla fenditura dello spettroscopio *S*.



La temperatura era determinata con un termometro a mercurio *T*. E per riscaldare i corpi alla temperatura di 500 gradi

(1) Naccari (A.), *Sui calori specifici di alcuni metalli dalla temperatura ordinaria sino a* 320°. Atti R. Acc. di Torino, XXIII, 1887.

li posi sopra un piccolo sostegno in un tubo di ferro, chiuso con vetri alle due estremità e collocato direttamente sopra una fiamma.

Nella tavola annessa sono descritti gli spettri di assorbimento osservati alla temperatura ordinaria e a 500°: qui trascrivo le lunghezze d'onda delle bande alle diverse temperature. Se le bande sono alquanto allargate, ne indico la posizione scrivendo successivamente la lunghezza d'onda del lembo meno rifrangibile, poi del massimo di intensità e dell'estremo più rifrangibile.

Vetro di didimio.

Lo spettro di assorbimento del vetro di didimio che ho osservato si compone, alla temperatura ordinaria, di otto bande di diversa intensità; ma, coll'aumentare della temperatura, talune si fanno più intense, ed altre diventano più sbiadite o cessano di essere visibili.

	$t =$	15°	300°	500°
I.	poco distinta	755 731 682	non visibile	non visibile
II.	sottile e poco visibile		684	allargata 685
III.		596 584 571	598 585 572	599 585 572
IV.		525	529	male distinta
V.		510	512	male distinta
VI.		483	—	—
VII.		475	—	—
VIII.	diffusa	447	male distinta	male distinta.

Alla temperatura ordinaria la terza banda è formata da un bel gruppo di bande distinte, una delle quali, verso la metà, è molto intensa; ma, al crescere della temperatura, queste si allargano e ne risulta una banda sola che non è separabile, neppure con una maggiore dispersione dello spettroscopio.

Le letture nella parte più rifrangibile sono alquanto incerte.

Vetro azzurro di cobalto.

	$t = 15^{\circ}$	300°	500°
I.	687	690	692
	659	668	671
	638	648	646
II.	603	611	613
	590	593	594
	578	580	580
III.	552	563	565
	532	547	550
	non distinta	non distinta	non distinta.

Col crescere della temperatura aumenta molto l'assorbimento nel rosso e diminuisce l'intensità della terza banda.

Vetro violetto di manganese.

Il vetro violetto di manganese dà anch'esso uno spettro di assorbimento ben definito con tre bande, che rassomigliano a quelle del vetro di cobalto.

	$t = 15^{\circ}$	300°	500°
I.	674	686	diffusa verso il rosso
	656	662	666
	638	546	550
II.	603	604	605
	590	592	593
	583	584	585
III.	554	554	554
	non definita	non definita	non definita.

Anche nel vetro di manganese aumenta l'assorbimento nel rosso e diminuisce nella parte più rifrangibile dello spettro col crescere della temperatura.

In tutti e tre i casi, lasciando raffreddare i corpi riscaldati, lo spettro riprende di nuovo l'aspetto primitivo e perciò si può ritenere che la variazione dell'assorbimento non sia dovuta ad una alterazione chimica della sostanza assorbente; ma sia prodotta esclusivamente dalla condizione fisica della più elevata temperatura.

Un attento esame di questi spettri dimostra che coll'aumentare della temperatura dei corpi solidi, cresce l'assorbimento per le radiazioni meno rifrangibili dello spettro luminoso, e le bande che sono nel rosso crescono di intensità dalla parte meno rifrangibile, e perciò lo spettro cambia d'aspetto come se le bande si spostassero verso il rosso; ma non pare che si produca un vero e proprio spostamento di alcuna banda.

II.

Sarebbe prematuro il voler trarre delle conseguenze teoriche dai pochi fatti che ho descritto; ma dalle sole osservazioni fatte e dagli studi eseguiti in questo campo dai fisici ricordati più sopra, senza introdurre alcuna ipotesi che non sia comunemente accettata, si può dedurre una notevole conferma del principio stabilito da Weber intorno al modo, col quale si sviluppano successivamente le radiazioni di diversa lunghezza d'onda da un corpo solido col crescere della temperatura.

In molti trattati di Ottica viene ancora riportata una legge, che si attribuisce al Draper, e secondo la quale tutti i corpi solidi, quando incominciano a diventare luminosi, emettono una luce rossa oscura; e poi, col crescere della temperatura, aumentano di intensità le prime radiazioni e vi si aggiungono man mano le radiazioni più rifrangibili, finchè, ad una temperatura sufficientemente elevata, emettono anche dei raggi chimici. Ma il Weber (1)

(1) Weber (H. F.), *Die Entwickelung der Lichtemission glühender fester Körper*. Wied. Ann., XXXII (1887), 256.

con numerose ed accurate osservazioni dimostrò che lo spettro di un corpo solido incandescente non si estende solo da un lato col crescere della temperatura, e si sviluppa invece regolarmente da ambi i lati da una debolissima banda che appare nel mezzo dello spettro. Ora questo principio viene indirettamente confermato dalle mie osservazioni.

Lo studio del movimento di una particella materiale componente un corpo, quando è sollecitata da una ondulazione luminosa, la quale attraversa l'etere che la circonda, aveva già condotto Eulero ad affermare che i corpi assorbono i raggi di lunghezza d'onda uguale a quelle, colle quali possono vibrare le loro particelle, e Kirchhoff diede a questo concetto una forma più rigorosa, dimostrandolo in tutta la sua generalità, e lo pose a fondamento della sua teoria dello spettro solare.

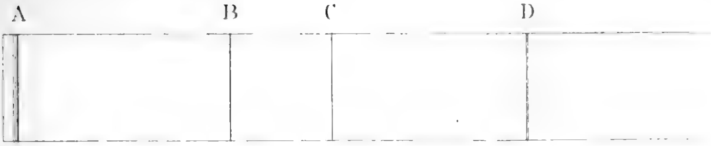
Ma qualunque sia per essere la sorte delle concezioni teoriche, colle quali noi ci spieghiamo la natura dei corpi, il calore, la luce e le altre energie fisiche, è un fatto dimostrato dalla esperienza che un corpo, fin che rimane inalterata la sua struttura molecolare, attenua ed assorbe precisamente quei raggi luminosi che esso è capace di emettere.

Ora, l'assorbimento dei corpi solidi, che io ho studiato, cresce da una regione intermedia fra il verde e l'azzurro verso la parte meno rifrangibile dello spettro coll'aumentare della temperatura; quindi si può conchiudere che, quando un corpo solido viene riscaldato, le radiazioni che esso emette crescono anche progressivamente di intensità nel medesimo senso.

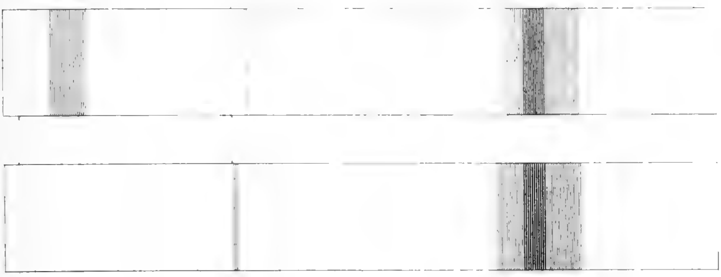
Ringrazio con animo riconoscente il signor Prof. Naccari che mi aiutò sempre col suo consiglio e mi fornì tutti i mezzi per il mio studio sull'assorbimento

Torino, Aprile 1891.

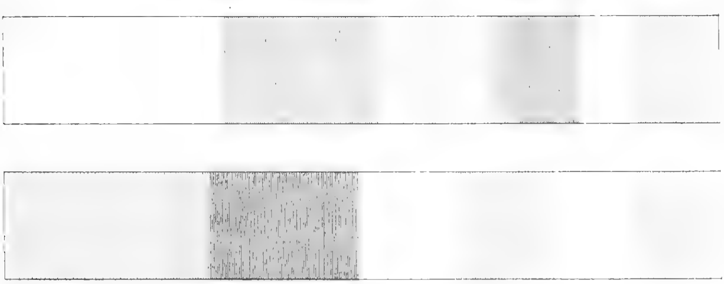
SPETTRO SOLARE



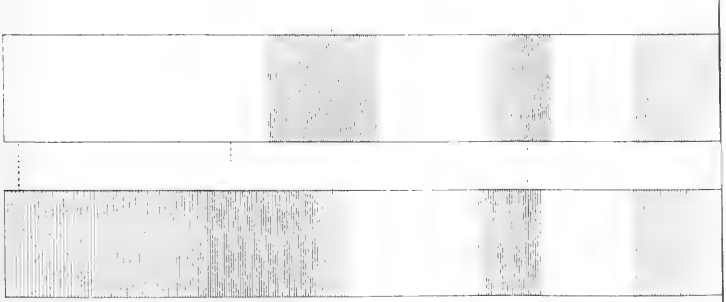
VETRO DI DIDIMIO



VETRO DI COBALTO

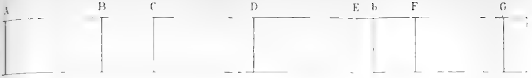


VETRO DI MANGANESE

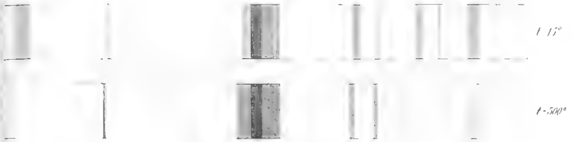


TORINO - LIT. SALUSSOLIA

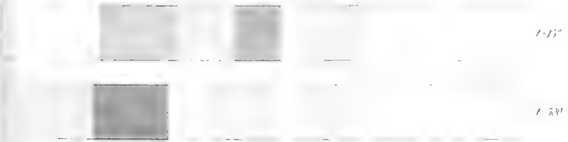
SPETTRO SOLARE



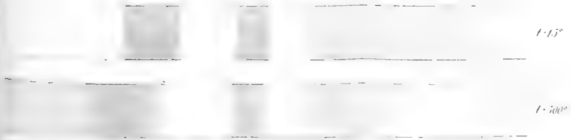
VETRO DI DIDIMIO



VETRO DI COBALTO



VETRO DI MANGANESE



TORINO LIT. SALUSSOLA

Sviluppo postembrionale dei Gonoplacidi;

pel Dott. G. CANO

Introduzione.

Dalla Monografia di M. Milne Edwards (1) « *Observations sur les affinités zoologiques et la classification naturelle des Crustacés* » risultano appartenere alla famiglia *Gonoplacidae* tre specie di Brachiuri viventi nel Mediterraneo, cioè: *Gonoplax angulata* (Fabr.), *G. rhomboides* (Fabr.) e *Brachynotus sexdentatus* (Risso).

Anche Heller (2) convenne più tardi nel medesimo errore; recentemente però Hilgendorf (3) ha dimostrato che il *G. sexdentata* Risso (4) (*Brachynotus sexdentatus* De Haan) (5) corrisponde senza alcun dubbio a quel medesimo crostaceo stato descritto da Lucas col nome di *Heterograpsus sexdentatus* e da Milne Edwards col nome di *H. Lucasi* (6). Il *Brachynotus sexdentatus* deve quindi pigliar posto tra i Grapsidi ai quali egli maggiormente si rapporta sia per le condizioni del suo sviluppo, sia per la forma del corpo e per l'organizzazione dell'adulto. Il genere *Gonoplax* collocato da Milne Edwards tra gli Ocypodidi e da De Haan tra i Canceridi conviene meglio con questi ultimi per la conformazione del suo apparecchio buccale. Infatti la forma dei peduncoli oculari che indusse Milne Edwards a stabilire rapporti più stretti di affinità del medesimo coi *Gelasimus*, *Ocypoda* e *Macrophthalmus* perde molto del suo valore se si

---

(1) *Ann. Sc. nat.*, Paris, t. XVIII e XX, 1852-53.
(2) *Crustaceen des südlichen Europa.* Wien, 1863, pag. 101-106
(3) *Sitz. Ber. Ges. Nat. Freunde.* Berlin, 1862, pag. 68.
(4) *Hist. nat. de l'Eur. Mérid.* Paris, t. V, 1826, pag. 13.
(5) *Fauna Japonica.* Lugdunum Batavorum, 1850, pag. 34.
(6) Op. cit., pag. 192.

considera questo stesso carattere tra due specie (*Portunus* e *Podophthalmus* appartenenti indiscutibilmente ad una medesima famiglia (*Portunidae*). Anche l'orifizio sessuale nel maschio del *Gonoplax* si apre apparentemente nello sterno, esso giace però effettivamente (1) nell'articolo basilare dell'ultimo piede ambulatorio al pari dei Canceridi.

Non ho potuto esaminare le prime fasi larvali di questo crostaceo, il quale nel golfo di Napoli è divenuto assai raro e ciò per meglio stabilire la posizione sistematica del medesimo nella serie dei Brachiuri.

Il *G. angulata* è una varietà del *G. rhomboides*, infatti tra i numerosi esemplari che io ho potuto esaminare si osserva che mentre negli individui giovani esiste un sol dente nel bordo laterale, negli individui adulti al contrario dietro il dente orbitario esterno si presenta sia un semplice tubercolo, sia un piccolo dente che in alcuni si sviluppa maggiormente.

Il *Gonoplax rhomboides* ed il *Brachynotus sexdentatus* vivono a poca profondità nelle acque luride e basse del porto e della spiaggia del Carmine (2). Il *Gonoplax* si riscontra però ancora a grandi profondità (400 m.). Il periodo di maturità sessuale di quest'ultimo non si è ancora potuto stabilire; quello del *Brachynotus* coincide coi mesi IV e VI, le prime fasi larvali si riscontrano ad una profondità di 40 a 60 m., le tre fasi del *Gonoplax* che io ho disegnato nella tavola provengono da una profondità di 200 a 400 m.

Brachynotus e Gonoplax.

(Tavola).

A. — Appena sortita dall'uovo la Zoea del *Brachynotus* presenta sullo scudo (fig. 1A) una lunga spina rostrale, una cardiaca, decorrenti in senso orizzontale e parallelo, e due spine laterali. Gli occhi non sporgono ancora sostenuti da un peduncolo

---

(1) Vedi Brocchi, *Recherches sur les organes génitaux des Crustacés Decapodes*, in Ann. Sc. nat. Paris, t. II, 1875, p. 76.

(2) Vedi a questo riguardo: *Notizie biologiche riguardanti il periodo di maturità sessuale degli animali del golfo di Napoli*, per Salvatore Lo Bianco, in Mith. Zool. Station Neapel, 1888, p. 409

ai lati della testa; le appendici del corpo sono in numero di sette paia, cioè cinque cefaliche (due paia di antenne e tre paia di appendici buccali) e due toraciche (più tardi primo e secondo piede mascellare). Le antenne interne sono semplici gemme coniche (fig. 2[a]) che portano sul loro apice due filamenti olfattivi ed una piccola setola; le antenne esterne risultano formate di due spine delle quali una più lunga in continuità diretta col pezzo basilare ed una più corta articolata colla prima e corrispondente alla squama delle antenne dei Macruri.

Le mandibole (fig. 3[a]) non hanno palpo e sono sprovviste di denti nella superficie triturante; nel primo paio di mascelle il palpo è diviso in due articoli (fig. 4[a]), la lacinia interna ed esterna sono unilobe; nel secondo paio di mascelle il palpo è semplice, bilobo nell'apice (fig 5[a]), la lacinia interna ed esterna sono bipartite, il ramo esterno si estende sotto forma di lamella branchiale guernita di setole nel suo margine.

Il primo ed il secondo piede toracico sono veri organi di nuoto e risultano di un ramo esterno (Schwimmfussast) diviso in due articoli che porta sull'apice quattro lunghissime setole, e di un ramo interno diviso in cinque articoli nel primo, in tre nel piede successivo, entrambi questi due rami sono articolati con un pezzo basilare impari (protopodite).

L'addome è diviso in cinque segmenti ed è privo di appendici; nel segmento anale mancano le spine 1, 2 e 3 (del segmento caudale dei Dromiacei) per cui l'armatura del medesimo è di 4 + 4 spine (fig. 9[a]).

B. — In una seconda fase larvale persiste la forma generale del corpo precedentemente descritta, gli occhi però sporgono peduncolati ai lati della testa (fig. 1B).

Le antenne interne presentano una porzione basilare rigonfia, come primo accenno di formazione del sacco uditivo (fig. 2[b]), la porzione terminale dei medesimi si è segmentata per costituire il flagello principale, ai lati di questo sorge un piccolo flagello accessorio, nelle antenne esterne si è sviluppato sotto forma di piccola gemma il ramo interno.

Le mandibole hanno un piccolo palpo; le due paia di mascelle conservano presso a poco la medesima forma.

I due primi piedi toracici sono ancora piedi nuotatori, la porzione basilare dei medesimi è però divisa in due articoli, il ramo esterno porta 10 lunghissime setole, sul primo articolo della base esiste un'appendice epipoidale; dietro di questi si sono sviluppate sei paia di gemme che rappresentano il primo abbozzo del terzo piede mascellare e dei cinque piedi ambulatori dell'adulto; la prima di queste gemme, oltre un'appendice epipoidale porta due appendici branchiali della serie *b* e *c* Claus, la seconda presenta del pari due appendici branchiali della medesima serie, la terza e la quarta una sola appartenente alla serie *c'* Claus.

L'addome è diviso in sette distinti segmenti, la seconda somite ha una distinta apofisi laterale, la terza, la quarta e la quinta terminano nel loro apice inferiore con una lunga spina, il segmento anale presenta 6 + 6 setole (fig. 9^b); esiste inoltre un paio di pleopodi sotto forma di piccole gemme nella seconda, terza, quarta e quinta somite.

C. — In una terza fase larvale (Metazoea) la forma del corpo e di tutte le sue appendici è quasi la stessa della fase larvale precedente (fig. 1C); le antenne interne (fig. 2^c) presentano l'orifizio del sacco uditivo, nelle antenne esterne si apre l'orifizio di sbocco della glandola antennale, il ramo interno è diviso in cinque articoli, il ramo nuotatore del primo e del secondo piede toracico porta 12 lunghissime setole, tutte le rimanenti appendici toraciche offrono un principio di segmentazione, i pleopodi nell'addome risultano di due rami, uno interno assai piccolo ed uno esterno lamelloso.

D. — In una quarta fase larvale (1ª fase di Megalopa) la forma del corpo e delle sue appendici è del tutto differente da quella delle fasi larvali precedenti, la spina rostrale (fig. 1D) si è in gran parte atrofizzata nel *Brachynotus*, persiste ancora ben sviluppata nel *Gonoplax* (fig. ID), la spina cardiaca è rappresentata da un semplice rudimento nel primo, si conserva ancora ben distinta nel secondo, le due spine laterali sono del tutto scomparse, lo scudo si è ripiegato nei lati (fig. X^d) per formare le camere branchiali, un lembo del medesimo si estende al dissotto delle antenne per formare le cavità antennarie, un altro lembo a guisa di duplicatura si solleva alquanto attorno al peduncolo oculare come primo accenno di formazione della cavità orbitaria.

Nelle antenne interne si distinguono due parti (fig. 2^d II^d): una peduncolare risultante di tre articoli dei quali quello della base in forma di sacchetto sferico ed una terminale costituita di due flagelli: uno principale coi filamenti olfattivi ed uno accessorio con due setole.

Nelle antenne esterne il pezzo basilare primitivo ha formato il primo articolo del peduncolo, il ramo interno coi suoi tre primi articoli forma successivamente il secondo, il terzo ed il quarto articolo del medesimo, coi rimanenti il cosidetto flagello.

Nelle mandibole la superficie triturante è sprovvista di denti, il palpo o è diviso in tre articoli (fig. 3^d) oppure presenta una semplice accenno di segmentazione (fig. III^d).

Nel primo paio di mascelle (fig. 4^c IV^d) il ramo interno ha perduto in parte la sua primitiva articolazione ed è sprovvisto di setole.

Nel secondo paio di mascelle (fig. 5^c, V^d) l'endopodite è divenuta stiliforme ed è fusa colla lacinia interna, l'esopodite si estende a lato della medesima in forma di lamella branchiale più larga per sostenere le correnti respiratorie.

Nel primo piede toracico (1° piede mascellare), i due articoli basilari divenuti lamellosi si sono trasformati in lacinie masticatrici, il ramo interno o conserva ancora un accenno della precedente segmentazione (fig. 6^d) oppure si è trasformato in una lamella di forma triangolare (fig. VI^d), l'articolo terminale del ramo esterno si ripiega ad angolo su quello precedente e diventa un'appendice flagelliforme del medesimo; la lamella epipoidale è molto sviluppata.

Nel secondo piede toracico (2° piede mascellare) i due articoli della base si sono raccorciati, il ramo interno si è ripiegato a ginocchio ed è diviso in cinque articoli, il ramo esterno ha subìto le medesime modificazioni del piede antecedente; l'articolo basilare porta una (fig. 7^d) oppure due (fig. VII^d) appendici epipoidali.

Nel terzo piede toracico (3° piede mascellare) i due primi articoli del ramo interno sono divenuti lamellosi, e si sviluppano a preferenza di quelli successivi, questi ultimi rappresentano quindi un' appendice flagelliforme dei due primi (fig. 8^d, $VIII^d$), il ramo esterno ha la medesima conformazione precedentemente descritta, l'articolo basilare porta una (fig. 8^d) oppure due (fig. $VIII^d$)

appendici epipoidali delle quali una rudimentale; al medesimo pure corrispondono due branchie della serie *b* e *c* Claus.

I cinque piedi toracici successivi (piedi ambulatori) sono divisi in sette articoli, il primo è terminato da una completa chela, i rimanenti terminano con un dattilo incurvato ed armato di spine, al primo corrispondono due appendici branchiali della serie *b* e *c* Claus, al secondo ed al terzo corrisponde una sola appendice branchiale della serie *c'*.

L'addome ha cinque paia di pleopodi provvisti, con eccezione dell'ultimo, di un piccolo ramo interno (fig. 11) con dei peli ripiegati ad uncino (*retinaculum*).

E. — In una quinta fase larvale (2ª fase di Megalopa) la forma del corpo si ravvicina a quella della fase larvale precedente, la spina rostrale e la spina cardiaca o persistono ancora ben sviluppate (fig. IE) oppure mentre quest'ultima è del tutto scomparsa, la prima persiste ancora come semplice rudimento nel punto mediano della fronte, la quale si ripiega davanti ai peduncoli oculari e sopra le cavità antennarie (fig. 1E). La fronte in entrambi i casi manda al dissotto un processo lamelloso (fig. X1) il quale, col ripiegarsi della fronte, unendosi ad un altro processo mediano dell'epistoma forma più tardi un setto tra le due antennule (fig. 1Xᵉ).

Quel lembo dello scudo che nella fase larvale precedente avea formato le cavità antennarie ora si estende maggiormente nel cavo boccale e manda quell'estraflessione conosciuta sotto il nome di epistoma, la quale, unendosi agli angoli delle ripiegature laterali che formano le camere branchiali, completa il cavo boccale (endostoma).

Le cavità orbitarie seguono uno sviluppo reciproco con quello dei peduncoli oculari e relativamente alla fase larvale precedente o sono meno sviluppati (fig. 1E) oppure lo sono maggiormente (fig. IE).

F. — Nello stadio postlarvale la forma del corpo (fig. 1F, IF) e di tutte le sue appendici è simile a quella dell'adulto, il rostro è completamente scomparso, la fronte si ripiega innanzi descrivendo col suo margine un contorno regolare (*Gonoplax*) oppure appena sinuoso (*Brachynotus*) dando luogo alla formazione di due lobi frontali. L'orbita è largamente aperta all'esterno ed in basso, e presenta un dente orbitario superiore, uno orbitario esterno ed un dente infraorbitario (*Brachynotus*), la medesima presenta due incisioni al dissopra. Il margine laterale è armato di tre denti (*Brachynotus*) oppure di un solo (*Gonoplax*). La forma e la disposizione di tutte le appendici cefaliche e toraciche è simile a quella dell'adulto. La formula branchiale per il *Brachynotus* è la seguente:

	a	*b*	*c*	*d*	
VIS.	E*p*	0	0	0 =	E*p*
VIIS.	E*p* + 1	0	0	0 =	E*p* + 1
VIIIS.	E*p*	1	1	0 =	E*p* + 2
IXS.	0	1	1	0 =	2
XS.	0	0	0	1 =	1
XIS.	0	0	0	1 =	1
XIIS.	0	0	0	0 =	0
XIIIS.	0	0	0	0 =	0

3 E*p* + 1 + 2 + 2 + 2 = 3E*p* + 7

per il *Gonoplax*:

	a	*b*	*c*	*d*	
VIS.	E*p*	0	0	0 =	E*p*
VIIS.	E*p* + 1	0	0	0 =	E*p* + 1
VIIIS.	E*p* + 1	1	1	0 =	E*p* + 3
IXS.	0	1	1	0 =	2
XS.	0	0	0	1 =	1
XIS.	0	0	0	1 =	1
XIIS.	0	0	0	0 =	0
XIIIS.	0	0	0	0 =	0

3 E*p* + 2 + 2 + 2 + 2 = 3E*p* + 8.

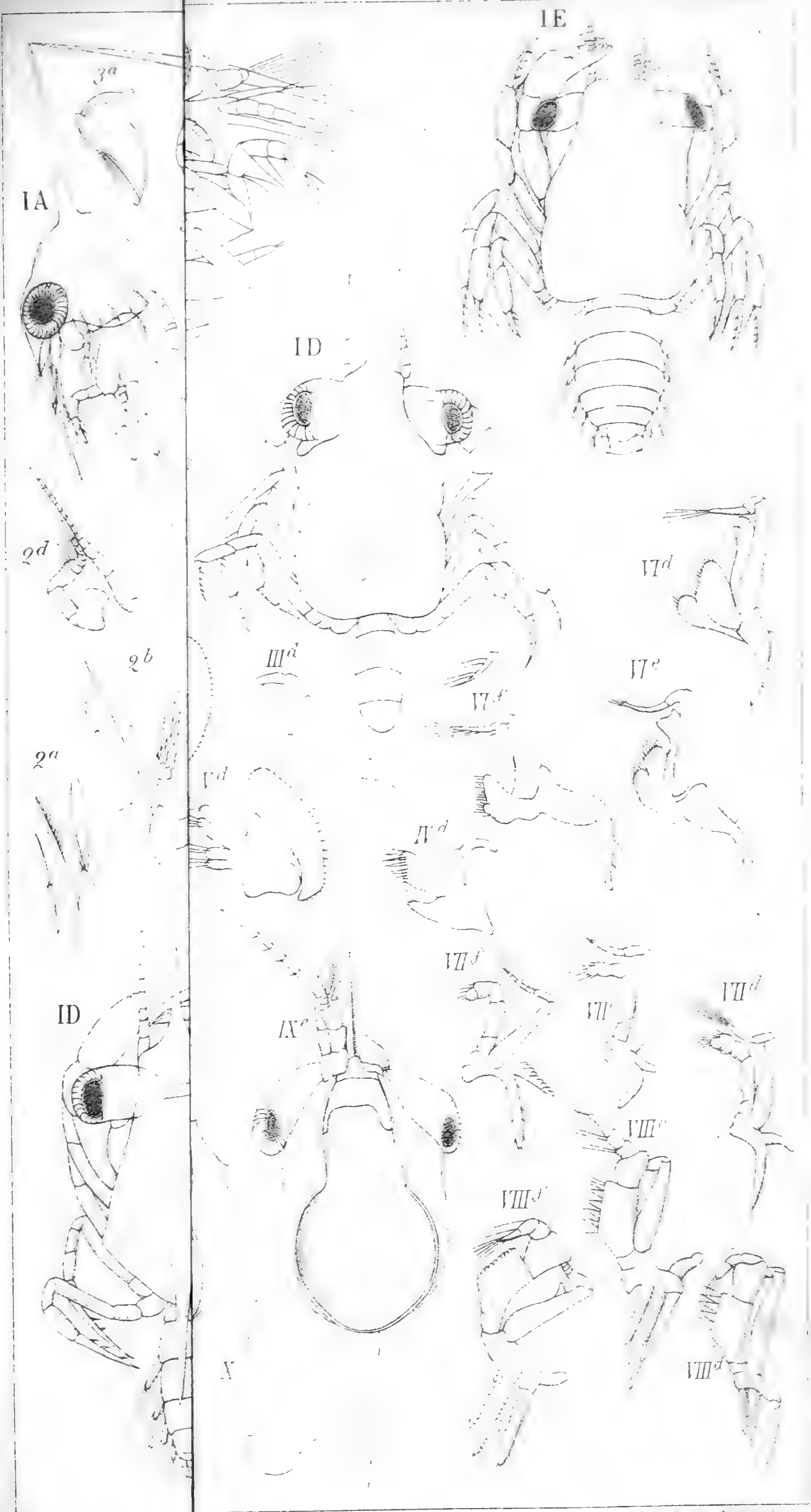
Conclusioni.

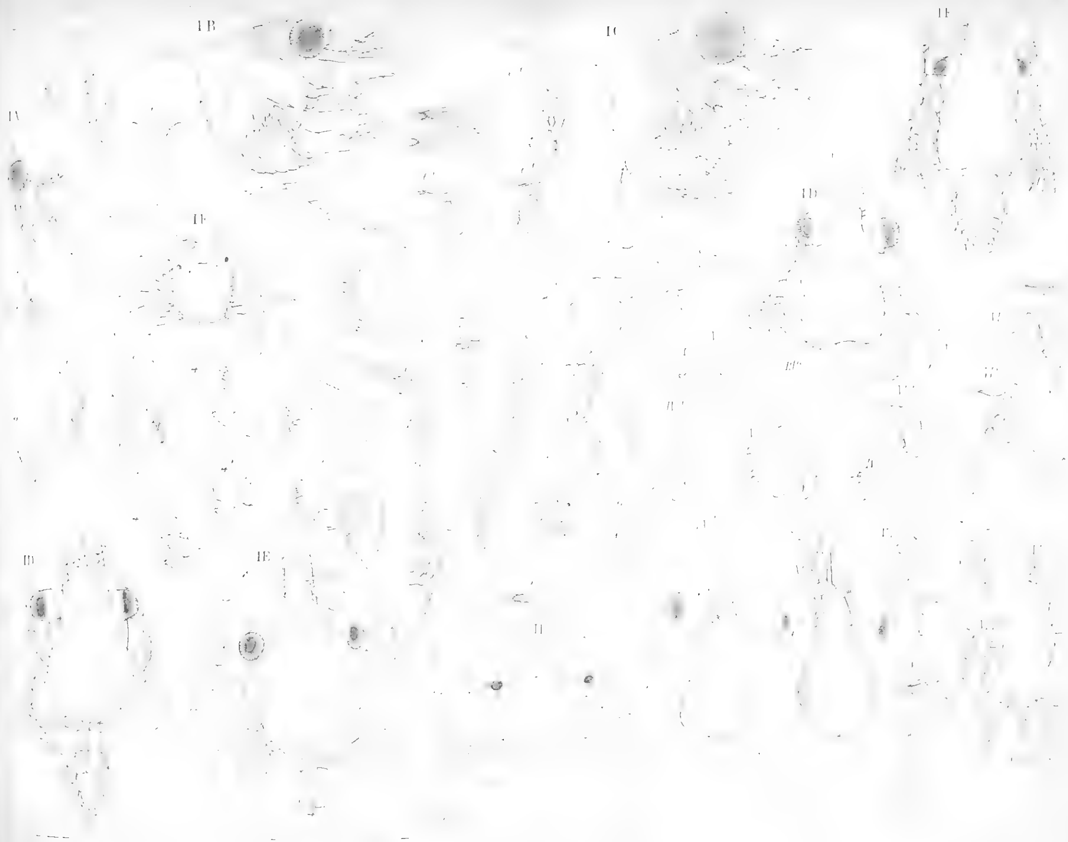
Esaminando le diverse fasi di sviluppo postembrionale qui sopra enumerate si osserva che il *Brachynotus* presenta stretti rapporti di affinità con alcuni Grapsidi (*Pachygrapsus* e *Nautilograpsus*). Al pari di questi lo scudo è armato nelle prime fasi larvali di due spine decorrenti in senso orizzontale e parallelo, il segmento anale è privo di spine laterali, a differenza dei primi però persiste ancora un rudimento della squama sotto forma di spina mobile nel secondo paio di antenne.

Il *Brachynotus* al pari dei Grapsidi ha pure due fasi di Megalopa pressochè identiche, caratterizzata l'ultima fase principalmente dalla conformazione caratteristica dell'addome; il medesimo inoltre presenta con questi strettissimi rapporti di affinità nello stadio postlarvale e nell'adulto sia per la forma e disposizione della regione antennaria, delle cavità orbitarie e del cavo boccale, sia per la formazione del setto interantennulare il quale si effettua in entrambi per l'unione di un processo sottofrontale all'epistoma. Anche le appendici della masticazione segnatamente quelle del terzo segmento toracico (terzo piede mascellare) dove il palpo si inserisce nell'angolo esterno dell'articolo precedente offrono disposizioni somiglianti a quelle che si osservano nei Grapsidi. È da osservare intanto che a differenza del *Pachygrapsus*, nel *Brachynotus* la lacinia esterna del secondo paio di mascelle diventa uniloba nello stadio postlarvale e nell'adulto, manca l'appendice branchiale della serie *c* nel secondo piede mascellare, infine il terzo piede mascellare ha una sola appendice epipoidale, disposizioni queste che si osservano nei Dorippidei (*Ethusa*).

Per quanto si riferisce al *Gonoplax* l'impossibilità nella quale io mi son trovato di poter esaminare le prime fasi larvali di questo crostaceo rende incerta la posizione sistematica del medesimo di fronte agli altri Brachiuri. Egli è certo che la formazione del setto interantennulare qui si effettua in seguito al ripiegamento della fronte e per l'unione di un processo sottofrontale

(1) Vedi a questo riguardo: *Sviluppo postembrionale dei Dorippidei, Leucosiadi, Corystoidei e Grapsidi*, pel Dott. G. Cano in Atti della Società dei Quaranta, t. VIII, 3, III. n° 4, 1891.


1E
3a
1A
1D
2d
VI d
2b
III d
VI f
VI e
2a
V d
IV d
VII f
VII d
ID
IX e
VII e
VIII e
VIII f
X
VIII d



all'epistoma come nei Grapsidi, in opposizione a quanto io ho osservato nello *Stenorynchus* dove il rostro della Megalopa si ripiega tra le due antennule per costituire un setto tra le medesime. La forma delle appendici boccali segnatamente quella del terzo piede mascellare, dove il palpo si inserisce nell'angolo interno dell' articolo precedente corrisponde meglio ad una condizione di cose che si osserva tipicamente nei Cyclometopi. È da osservare intanto che questo carattere manca nelle fasi di Megalopa e diventa soltanto acquisito nello stadio postlarvale ed adulto (v. fig. VIII^d, VIII^e, VIII^f).

Napoli, Stazione Zoologica. Aprile, 1891.

ELENCO DELLE FIGURE DELLA TAVOLA.

FIG. 1A Zoea, 1B fase intermediaria, 1C Metazoea, 1D prima fase di Megalopa, 1E seconda fase di Megalopa, 1F stadio postlarvale di *Brachynotus sexdentatus*.

» 2^a, 2^b, 2^c, 2^d differenti fasi di sviluppo delle antenne.

» 3^a, 3^d » » delle mandibole.

» 4^a, 4^c, 4^f » » del primo paio di [mascelle

» 5^a, 5^d, 5^f » » del secondo paio di [mascelle

» 6^d, 6^e, 6^f » » del primo piede ma- [scellare

» 7^d, 7^e, 7^f » » del secondo piede [mascellare

» 8^c, 8^d, 8^e, 8^f » » del terzo piede ma- [scellare

FIG. 9^a, 9^c forma del segmento anale negli stadi di Zoea e Metazoea

» 10. labbro inferiore nello stadio di Metazoea.

» 11. pleopode del primo segmento col *retinaculum* nel ramo interno.

» ID prima fase di Megalopa, IE seconda fase di Megalopa, IF stadio postlarvale di *Gonoplax rhomboides*.

» III^d mandibola nella fase D.

» IV^d, IV^f mascella del primo paio nella fase D ed F.

» V^d, V^f mascella del secondo paio » »

» VI^d, VI^e, VI^f primo piede mascellare nelle fasi D, E ed F.

» VII^d, VII^e, VII^f secondo piede mascellare » »

» $VIII^d$, $VIII^e$, $VIII^f$ terzo piede mascellare » »

» IX^d, IX^e scudo di *Gonoplax* nella fase D ed E per mostrare la formazione delle cavità antennarie, delle orbite e dell'epistoma.

» X si osserva la fronte lateralmente per mostrare il processo sottofrontale che si unisce all'epistoma per formare il setto tra le due antennule.

Un prisma universale a riflessione;

del Prof. NICODEMO JADANZA

I.

È a tutti nota la proprietà del prisma triangolare rettangolo isoscele di deviare un raggio luminoso di 90° mediante due riflessioni, la prima su di un cateto, l'altra sulla ipotenusa. Come si vede nella figura 1ª, il raggio luminoso PQ penetra nel prisma coll'angolo d'incidenza i in Q dove si rifrange prendendo la direzione QR. In R si riflette totalmente e prende la direzione RS facendo in S l'angolo colla normale all'ipotenusa eguale a $45^\circ - r$, se r indica l'angolo di rifrazione corrispondente all'angolo d'incidenza i. Quivi si riflette di nuovo secondo la direzione ST ed in T fa colla normale al cateto un angolo eguale ad r; talchè il raggio emergente TU fa colla normale al cateto l'angolo i. La direzione TU del raggio emergente è normale a quella del raggio incidente PQ.

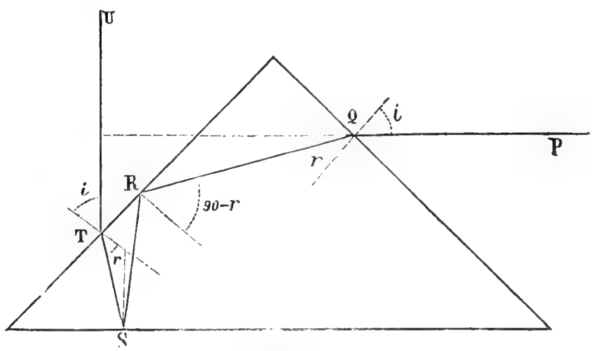


Fig. 1.

Siccome la riflessione in S non è sempre totale, così si usa inargentare la ipotenusa per rendere più luminosa la immagine definitiva.

Mediante doppia riflessione sui due cateti, si può deviare un raggio luminoso di 180°. È a codesto modo che agisce il prisma allineatore del Porro che si ottiene da quello triangolare con un taglio parallelo alla ipotenusa.

Indicando (fig. 2ª) con r l'angolo di rifrazione corrispondente all'angolo d'incidenza i del raggio PQ, gli angoli che le normali ai cateti nei punti RS fanno coi raggi rispettivi QR, RS sono $45° + r$ e $45° - r$; quindi per r sufficientemente piccolo vi può essere riflessione totale in R ed S.

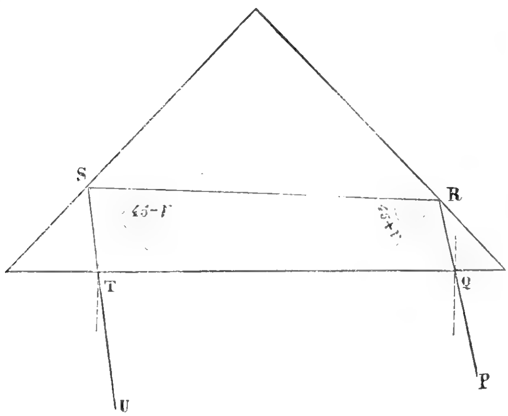


Fig. 2.

Adoperando un prisma triangolare rettangolo isoscele delle dimensioni indicate nella figura ed inargentando una parte della ipotenusa in modo da lasciare scoperti due segmenti agli estremi della ipotenusa si otterrà un prisma che servirà tanto come *squadro*, quanto come *allineatore*.

II.

Consideriamo ora nel prisma triangolare un raggio luminoso PQ (fig. 3) che è riflesso primieramente in R dalla ipotenusa e quindi di nuovo in S dal cateto AC; esso emergerà dal prisma nella direzione TU inclinata alla direzione PQ di un certo angolo

Ψ. Per trovare il valore di codesto angolo osserveremo che le due rette MQ, MT la prima perpendicolare al cateto BC in Q,

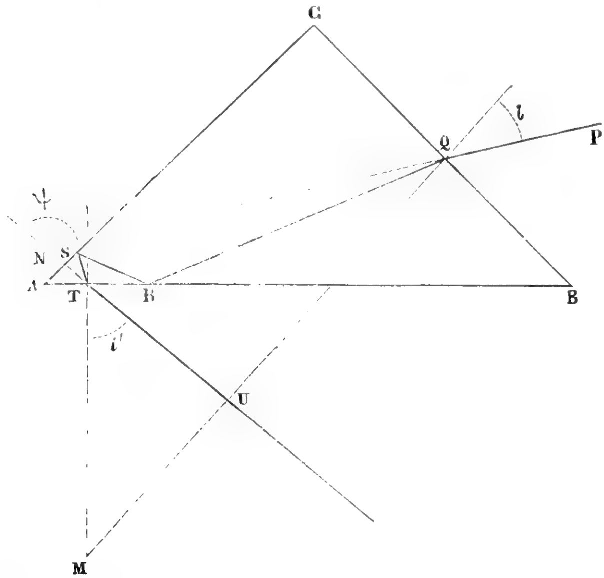


Fig. 3.

la seconda perpendicolare alla ipotenusa in T fanno tra loro un angolo di 45°, e quindi, se i, i' sono gli angoli d'incidenza e di emergenza, i due triangoli NUQ, UTM dànno

$$\Psi = u + i$$

$$u = 45° + i'$$

sicchè sarà

$$\Psi = 45° + (i + i') \qquad \ldots\ldots(1)$$

Inoltre è facile vedere che se r ed r' sono gli angoli di rifrazione corrispondenti agli angoli i, i' si ha

$$r' = 45° - r \qquad \ldots\ldots(2)$$

La funzione

$$i + i' = \operatorname{arcsen} n \operatorname{sen} r + \operatorname{arcsen} n \operatorname{sen}(45° - r)$$

ammette un *minimo;* esso è dato dalla equazione:

$$\frac{\partial(i+i')}{\partial r}=\frac{n\cos r}{\sqrt{1-n^2\operatorname{sen}^2 r}}-\frac{n\cos(45-r)}{\sqrt{1-n^2\operatorname{sen}^2(45-r)}}=0 \quad .....(3)$$

La (3) è soddisfatta per $r=45-r$, ossia per

$$r=22^\circ\ 30'$$

il quale valore rende positiva la seconda derivata che è

$$\frac{\partial^2(i+i')}{\partial r^2}=(n^2-1)\left[\frac{n\operatorname{sen} r}{(1-n^2\operatorname{sen}^2 r)^{\frac{3}{2}}}+\frac{n\operatorname{sen}(45-r)}{\left[1-n^2\operatorname{sen}^2(45-r)\right]^{\frac{3}{2}}}\right] \quad ...(4)$$

che per $r=45-r$ diventa:

$$2(n^2-1)\frac{n\operatorname{sen} r}{(1-n^2\operatorname{sen}^2 r)^{\frac{3}{2}}}\,. \quad .....(5)$$

Indicando con r_0 il valore particolare che assume r quando si ha $r=45-r$ e ponendo

$$i_0=\operatorname{arcsen} n\operatorname{sen} r_0\ ,$$

si avrà

$$\Psi_0=45^\circ+2\,i_0\,.$$

Per valori di r poco differenti da r_0 è:

$$r=r_0\pm\partial r$$

$$r'=45-r_0\mp\partial r=r_0\mp\partial r$$

e quindi

$$\operatorname{sen} i=n\operatorname{sen}(r_0\pm\partial r)=n\operatorname{sen} r_0\pm n\,\partial r\cos r_0$$

$$\operatorname{sen} i'=n\operatorname{sen}(r_0\mp\partial r)=n\operatorname{sen} r_0\mp n\,\partial r\cos r\ ,$$

donde

$$\operatorname{sen} i+\operatorname{sen} i'=2\,n\operatorname{sen} r_0$$

ovvero

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(i+i')\cos\frac{1}{2}(i'-i)=n\operatorname{sen} r_0=\operatorname{sen} i_0\,.$$

E poichè la differenza $i'-i$ è dell'ordine di ∂r, sarà

$$i+i'=2\,i_0\ ;$$

sicchè nel caso di r poco differente da r_0 si avrà

$$\Psi=45^\circ+2\,i_0\ . \qquad \ldots\ldots(6)$$

Adunque guardando nella direzione UT si vedrà fissa la immagine di P *quasi* allo stesso modo (*) come quando la deviazione è indipendente dall'angolo d'incidenza.

Nella ipotesi di $n=1,53$ si ha lo specchio seguente:

i	r	$45^\circ-r$	i'	$i+i'$
31° 33′	20° 00′	25° 00′	40° 17′	71° 50′
32 24	20 30	24 30	39 23	71 47
33 15	21 00	24 00	38 29	71 44
34 06	21 30	23 30	37 36	71 42
34 58	22 00	23 00	36 43	71 41
35 50	**22 30**	**22 30**	**35 50**	**71 40**

Essendo $i_0=35^\circ\,50'$ sarà

$$\Psi=116^\circ\,40'$$

e quindi un prisma triangolare rettangolare isoscele formato di una sostanza il cui indice di rifrazione è $=1,53$ può deviare un raggio luminoso di un angolo eguale a $116^\circ\,40'$.

Anche qui, per avere la immagine più luminosa, bisogna inargentare un pezzo del cateto AC.

Il supplemento dell'angolo Ψ è utile per la misura della distanza tra due punti A, B (fig. 4).

(*) È bene avvertire che l'immagine dell'oggetto guardato è colorata.

L' osservatore stando in A potrà far tracciare sul terreno l'allineamento AC inclinato di

$$\Psi = 45^\circ + 2 \operatorname{arcsen} n \operatorname{sen} 22^\circ\, 30' \, ;$$

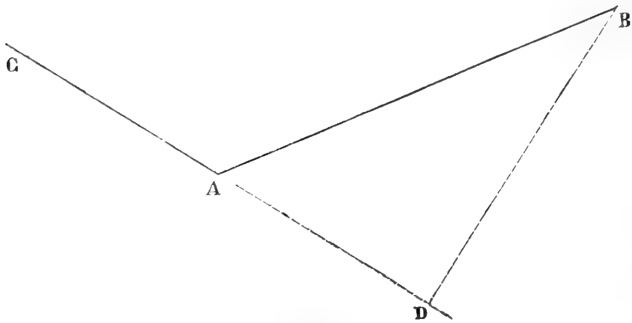


Fig. 4.

indi percorrendo l'allineamento CA, per mezzo dello stesso prisma potrà trovare il piede D della perpendicolare condotta da B su CA e misurare la lunghezza $AD = D$. Indicando con x la distanza richiesta AB si avrà:

$$x = \frac{D}{\cos(180 - \Psi)} \qquad \ldots\ldots(7)$$

Nella ipotesi di $n = 1{,}53$ si ottiene

$$x = 2{,}227\, D \, .$$

Il coefficiente $\dfrac{1}{\cos(180 - \Psi)}$ è una funzione dell' indice di rifrazione n della sostanza di cui è formato il prisma. Così p. e. per il *Crown-Glas* n. 9 per il quale è $n = 1{,}533005$ si ha

$$\Psi = 116^\circ\, 50' \; ; \qquad \frac{1}{\cos(180 - \Psi)} = 2{,}2148 \, .$$

Per il *Crown-Glas* n. 13 per cui $n = 1{,}531372$ è

$$\Psi = 116^\circ\, 45' \; ; \qquad \frac{1}{\cos(180 - \Psi)} = 2{,}2216 \, .$$

In pratica per un prisma di *Crown-Glas* si può sempre ritenere il coefficiente 2,220 e adoperare quindi la formola

$$x = 2,22\, D \qquad \ldots\ldots (8).$$

Del resto è meglio trovare sperimentalmente il valore del coefficiente $\dfrac{1}{\cos(180 - \Psi)}$ in ogni caso particolare.

III.

Finora abbiamo supposto intero il prisma triangolare; possiamo tagliare il vertice dell'angolo retto in modo da poter tracciare anche angoli semiretti.

Tagliando il prisma con un piano inclinato alla ipotenusa di un angolo eguale a 22° 30′ si otterrà il prisma *quadrangolare* $ABCD$ rappresentato dalla fig. 5ª in cui si vede il cammino $PQRSTU$ che deve fare il raggio luminoso attraverso il prisma per essere deviato di 45°.

La possibilità di tale cammino si vede nello specchio seguente dove nella parte sinistra si trovano gli angoli dei tre triangoli CQR, RDS, STA nel caso generale di un angolo di rifrazione r corrispondente ad un angolo d'incidenza i, e nella parte destra si trovano gli angoli degli stessi triangoli nel caso di $r = 30°$.

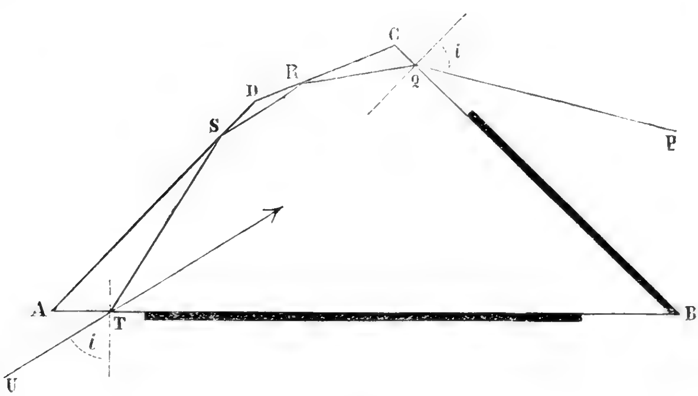


Fig. 5.

$$
\begin{array}{lll|lll}
C = & 90^\circ + 22^\circ\,30' & & C = & 112^\circ\,30' & (r = 30^\circ) \\
Q = & 90 - r & & Q = & 60 & \\
R = & r - 22\;30 & & R = & 7\;30 & \\
\hline
 & 180^\circ\,00' & & & 180\;00 & \\
 & & & & & \\
R = & r - 22^\circ\,30' & & R = & 7\;30 & \\
D = & 180 - 22\;30 & & D = & 157\;30 & \\
S = & 45 - r & & S = & 15 & \\
\hline
 & 180\;00 & & & 180\;00 & \\
 & & & & & \\
S = & 45 - r & & S = & 15\;00 & \\
T = & 90 + r & & T = & 120 & \\
A = & 45 & & A = & 45 & \\
\hline
 & 180\;00 & & & 180\;00 &
\end{array}
$$

Si vede facilmente che, per la possibilità della deviazione di 45° del raggio incidente PQ, è necessario che sia $r > 22^\circ\,30'$; sodisfatta tale condizione la riflessione sarà sempre totale tanto in R quanto in S.

Il prisma quadrangolare descritto precedentemente può adunque deviare un raggio luminoso di 45°, di 90°, 180° e può servire alla misura di una distanza; esso quindi può essere a buon diritto chiamato **Prisma universale.**

Sulla figura 5ª abbiamo marcato più intensamente quelle parti della ipotenusa e del cateto che debbono essere inargentate.

Le dimensioni del prisma possono essere le seguenti:

Ipotenusa $AB = 7$ centimetri

lato $AD = \frac{3}{4}$ del cateto intero (circa).

Marzo 1891.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 26 Aprile 1891 . . . . *Pag.* 441

Rizzo — Variazioni prodotte dal calore in alcuni spettri d'assorbimento . . . . » 442

Cano — Sviluppo postembrionale dei Gonoplacidi . . . . » 449

Jadanza — Un prisma universale a riflessione . . . . » 459

Torino — Tip. Reale-Paravia

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVI, DISP. 13ª, 1890-91

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 10 Maggio 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Cossa, Direttore della Classe, Bruno, D'Ovidio, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia, Giacomini, Camerano, Segre, Peano e Basso Segretario.

Si legge l'atto verbale dell'adunanza precedente che è approvato.

Tra i lavori offerti in omaggio all'Accademia sono segnalati i seguenti:

1° « *Cenni intorno alla vita e le opere di Felice Casorati* », del Prof. Gino Loria della R. Università di Genova, presentati dal Socio D'Ovidio;

2° Cinque opuscoli versanti su argomenti di metereologia e di fisica terrestre, del Prof. Francesco Denza, presentati dal Socio Basso.

Vengono in seguito presentati e letti i seguenti lavori:

1° « *Fossili del Lias medio nel conglomerato terziario di Lauriano* (colli torinesi) », lavoro del Dott. C. F. Parona, Prof. di Geologia nella R. Università di Torino, presentato dal Socio Spezia;

2° « *Sopra un cranio di Fursiops Cortesii* (Desm.) *var. astensis* Sacc. dell'Astigiana » ; Nota del Dott. Federico Sacco, presentata dal Socio Camerano.

LETTURE

Fossili del Lias medio nel conglomerato terziario di Lauriano (Colli di Torino);

Nota del Prof. C. F. PARONA

Il prof. A. Sismonda, nell'adunanza del 3 giugno 1860, comunicava alla R. Accademia la scoperta, fatta nel conglomerato miocenico della regione *roncheja* di Lauriano, di alcuni fossili liasici in una roccia simile al calcare rosso di Gozzano in Piemonte e di Arzo in Lombardia (1). La scoperta del Sismonda fu poco dopo ricordata dal prof. Gastaldi, che riconfermò la corrispondenza della roccia e dei fossili col calcare e coi petrefatti di Gozzano in quella sua Memoria, nella quale attribuì il trasporto dei massi compresi nei conglomerati alle zattere di ghiaccio galleggianti (2). Avvertì lo stesso calcare, in massi nei conglomerati miocenici, anche il prof. Portis (3), il quale accennò nuovamente a questo fatto in una sua recente Memoria (4), diretta a discutere sulla origine dei conglomerati delle colline di Torino, a proposito della spiegazione data dall'ing. Mazzuoli, del modo di formazione dei conglomerati miocenici nell'Appennino ligure.

La cosidetta *roncheja*, accennata dal prof. Sismonda, trovasi a circa un chilometro a sud di Lauriano e vi corrisponde precisamente la regione, desolata dallo sfacelo delle argille scagliose,

(1) Mem. d. R. Accad. di Torino, serie 2ª, tom. XX, 1863, pag. LXXXIX

(2) B. GASTALDI. *Frammenti di Geologia del Piemonte - Sugli elementi che compongono i conglomerati miocenici.* Mem. d. Accad. d. Sc. di Torino, serie 2ª, tom. XX, 1861, pag. 32, 35, 38. — V. anche la lettera al professore E. CORNALIA: *Sugli elementi che compongono i conglomerati miocenici del Piemonte.* Atti d. Soc. Ital. di Sc. Nat., vol. IV, 1862.

(3) A. PORTIS, *Breve cenno sulle condizioni geologiche della collina di Torino.* 1885, Torino.

(4) A. PORTIS, *Sul modo di formazione dei conglomerati miocenici della collina di Torino.* Boll. d. R. Comit. Geolog., 1888, pag. 81.

che dalla cascina Boggetto si stende giù verso il borgo ora ricordato. Nelle argille scagliose si alternano dei banchi di calcare alberese (che viene tuttora cavato per le fornaci di Lauriano), di arenarie cementate e di conglomerati. Questi ultimi sono diretti da est ad ovest e sono assai inclinati; constano specialmente di sabbia e di ghiaia poco cementate, nelle quali stanno irregolarmente distribuiti dei massi, non molto numerosi, angolosi, di varie dimensioni, con 20 o 30 cent. di diametro i più, pure osservandosene taluni col diametro di mezzo metro ed oltre. Il dottor Sacco, che ebbe occasione di accennare a questi conglomerati in due suoi lavori, li ritiene di età più antica di quella miocenica loro assegnata dal Sismonda ed infatti li ascrive al *Liguriano* (1).

In una gita fatta sui colli di Lauriano, insieme al cav. Rovasenda ed al collega Sacco, ebbi l'opportunità di esaminare in posto i massi sopraricordati e di convincermi, che la maggior parte di essi sono di porfido prevalentemente quarzifero. Vi sono rappresentate tutte quelle varietà di struttura, di colore ed anche di alterazione, che si osservano nei vasti espandimenti porfirici delle prealpi novaresi, dalla Valsessera al Lago Maggiore. Non sono rari i ciottoli di granito bianco, più o meno decomposti; scarsi quelli di granito roseo e di gneiss; più rari ancora i frammenti di quarzite e di diaspro rosso o roseo, e, a quanto pare, mancano in questo conglomerato i massi di roccie amfiboliche e serpentinose. Vi raccolsi un nodulo calcareo-selcioso simile a quelli frequenti nella *majolica* lombarda (Giura superiore e neocomiano), tanto nella sua costituzione, quanto perchè è ricco anch'esso di radiolarie nella parte interna calcare; rinvenimento abbastanza strano, perchè non saprei da quale punto e da quale roccia delle Alpi piemontesi possa essere derivato.

I massi di calcare vi si riscontrano assai rari; questa scarsità però potrebbe essere affatto superficiale, più apparente che reale, e dovuta al fatto, che quivi si cerca e si raccoglie il calcare per le fornaci già ricordate. Rinvenni dei massi di un calcare dolomitico identico a quello triasico che, ad Arona, a Maggiora presso Gozzano, sul M. Fenera allo sbocco di Valsesia ed a Sostegno presso Crevacuore, giace sul porfido. Diversi campioni di questa

---

(1) F. Sacco, *Il bacino terziario e quaternario del Piemonte*, 1889-90, pagina 84. — *Les conglomérats du Flysch* (Bull. d. la Soc. Belg. de Géolog., ecc., 1889, tom. III, pag. 158).

dolomia furono quivi raccolti, insieme ad altri di porfido, anche dal prof. Sismonda e nel Museo geologico di Torino se ne conserva un frammento, che porta la distinta impronta di uno dei piccolissimi gasteropodi, che non sono rari a trovarsi nella dolomia di Arona. Altri pezzi di calcare, di carattere litologico poco spiccato, mi si offersero mentre insisteva specialmente nella ricerca dei massi di calcare fossilifero liasico, simile a quello scoperto dal Sismonda. A questo riguardo le ricerche riuscirono infruttuose, mentre sperava di potere con nuovo rinvenimento estendere il mio studio sopra altri fossili, oltre quelli già esistenti in Museo.

Ho creduto tuttavia opportuno di non rinunciare all'esame di questi fossili, nella fiducia di raccogliere qualche nuovo dato per la migliore conoscenza della fauna liasica subalpina ed anche allo scopo di trovare col loro studio prova più sicura, che non sia la sola somiglianza litologica, per decidere se si debba ammettere come sicura o come dubbia la provenienza di questi massi di calcare rosso dal giacimento di Gozzano.

La somiglianza dei frammenti di calcare contenenti i fossili è tale per cui si può ritenere, che il prof. Sismonda li abbia staccati da un masso solo; il calcare è un vero impasto di frammenti di crinoidi (*Millericrinus*) e per questo riguardo, meglio che al calcare di Gozzano, corrisponde a quello di Arzo. Gli altri sono quasi tutti brachiopodi e si presentano in generale molto ben conservati, anche nei minuti caratteri della superficie, meglio ancora di quanto si osservi su quelli di Gozzano. Questo stato di buona conservazione mi ha permesso di potere determinare con sicurezza la maggior parte delle ventinove specie da me distinte, delle quali raccolgo i nomi in questo elenco, accompagnandoli coi brevissimi cenni descrittivi necessari a giustificarne il riferimento.

*
* *

AVICULA (Oxytoma) SINEMURIENSIS, d'Orb. (*A. inaequivalvis* Sow.). — Due piccole valve incomplete, che riferisco con sicurezza a questa specie, la quale trovasi anche nel Lias inferiore lombardo (1) e negli strati con *Terebr. Aspasia* di Sicilia.

---

(1) C. F. PARONA, *I fossili del lias inferiore di Saltrio in Lombardia.* 1890, pag. 20, tavol. II, fig. 7. (Atti d. Soc. Ital. d. Sc. Nat.).

Pecten subreticulatus, Stol. (?). Frammento. — Questa specie di Hierlatz (1) trovasi anche in Lombardia nel Lias medio e superiore.

Pecten inæquiradiatus, Par. — Questa piccolissima specie del calcare di Gozzano (2) è rappresentata da due esemplari ben caratterizzati.

Pecten sp. ind. — Piccola valva sinistra (altezza e larghezza mm. 8 (?)), appiattita, equilaterale, ornata da 14 coste larghe, robuste, arrotondate; orecchiette ampie, triangolare l'anteriore e quella posteriore col margine esterno arrotondato e con seno profondo; margine cardinale rettilineo. Non conosco nessuna specie liasica, cui possa essere riferita.

Terebratula sphenoidalis, Mgh. — Numerosi e piccoli esemplari ai quali bene si adatta la descrizione di Canavari (3), completata coll'osservazione di Gemmellaro (4), che questa specie è talora inequilaterale e che presenta il guscio elegantemente ornato di finissime ed attigue costelle irradianti dagli apici, visibili con lente d'ingrandimento anche debole.

Waldheimia Ewaldi, Opp. — L'esemplare corrisponde per le dimensioni al più piccolo dei due figurati dal prof. Gemmellaro (5) e per la forma alla figura colla quale il dott. Geyer rappresenta il tipo più comune a Hierlatz (6).

Waldheimia mutabilis, Opp. (?). — L'unico piccolo esemplare ha l'apice guasto ed è incompleto alla regione frontale, sicchè mancano i caratteri per una rigorosa determinazione.

Waldheimia Furlana, v. Zitt. — I tre esemplari appartengono alla varietà *abbreviata;* il minore somiglia assai alla figura data da Canavari per questa varietà (7), mentre gli altri due

---

(1) Stoliczka F., *Ueb. d. Gastrop. u. Aceph. d. Hierlatz-Schichten.* 1860, tav. VI, fig. 1-2.

(2) C. F. Parona, *Il calcare liassico di Gozzano e i suoi fossili,* 1880 pag. 25, tav. III, fig. 8.

(3) Canavari, *I Brachiopodi degli strati a* Ter. Aspasia *nell'Appenn. centr.*, 1880, pag. 14, tav. II, fig. 5-6.

(4) Gemmellaro, *Sopra i fossili della zona con* Ter. Aspasia *della Provincia di Palermo e Trapani,* 1874, pag. 57, tav. X, fig. 16 e 17 (non 18-19).

(5) Gemmellaro, op., cit. pag. 69, tav. X, fig. 7.

(6) G. Geyer, *Über die liasischen Brachiopoden des Hierlatz bei Hallstatt.* (Abhandl. d. k. k. Geolog. Reichzanst., Wien, 1889, Bd. XV), pag. 31, Taf. IV, fig. 5.

(7) M. Canavari, Mem. cit., 1880, pag. 22, tav. III, fig. 2.

sono assai più rigonfi. Per i suoi caratteri l'apice della valva perforata sarebbe identico a quello della forma appenninica, ove non presentasse i margini carenati, come si osserva nella forma di Hierlatz, che Geyer riferì per confronto a questa specie (1).

WALDHEIMIA GASTALDII, Par. — Parecchi esemplari di piccole dimensioni (2).

WALDHEIMIA OXYGONIA, Uhl. — L'identità nell'andamento così caratteristico della linea commessurale sui fianchi e sulla fronte mi persuade a riferire i tre esemplari alle specie di Uhlig (3), anzichè alla *Wald. Hierlatzica* Opp. cui forse meglio corrisponderebbe per la minor larghezza frontale.

WALDHEIMIA SUBNUMISMALIS, Dav. — Sono quattro esemplari, due assai piccoli e due di media grossezza, di forma assai varia come quelli del calcare di Arzo e Saltrio, che pure ascrissi a questa specie (4).

RHYNCHONELLA BRISEIS, Gemm. (*Rh. variabilis* Schlot. per Geyer) (5). — Pochi esemplari di piccola e media grossezza, con due o tre coste nel seno.

RHYNCONELLA LUBRICA, Uhl. (6). — Sono più di dieci gli esemplari da me esaminati e soltanto due presentano quattro coste sul lobo della valva brachiale, mentre gli altri ne presentano cinque.

RHYNCHONELLA SORDELLII, Par. — Esemplare di media grossezza, affatto corrispondente alla forma di Gozzano (7).

RHYNCHONELLA VERRII, Par. (?). — L'unico esemplare incompleto non permette di constatare la identità sua colla specie dell'Appennino centrale (8).

RHYNCHONELLA FRAASI, Opp. (?). — Non posso dar per certa la determinazione, perchè l'unico esemplare di valva brachiale è

---

(1) G. GEYER, Mem. cit., pag. 31, tav. IV, fig. 5.

(2) PARONA, Mem. cit., 1880, pag. 14, tav. I, fig. 10.

(3) V. UHLIG. *Ueb. die lias. Brachiopodenfauna v. Sospirolo bei Belluno*, 1879 (Sitzungsb. d. k. k. Akad. d. Wissensch., Wien, Bd. LXXX), pag. 23, tav. II, fig. 4-5.

(4) PARONA, Mem. cit., 1884, pag. 31, tav. V, fig. 8-14.

(5) G. GEYER, Mem. cit., pag. 36.

(6) UHLIG, Mem. cit., 1879, pag 39, tav. V, fig. 5-7.

(7) PARONA, Mem. cit., pag. 23, tav. III, fig. 4, 1880.

(8) C. F. PARONA, *Contributo allo studio della fauna liasica dell'Appennino centrale*, 1883, pag. 102, tav. IV, fig. 9-11.

imperfetto sui margini; sembra appartenere alla varietà comune a Hierlatz (1).

Rhynchonella cfr. Paoli Can. — Otto esemplari, che differiscono dalla forma di Hierlatz, riferita dal sig. Geyer (2) alle specie di Canavari, per la maggior larghezza, perchè le coste nascono robuste ed ottuse a maggior distanza dagli apici e perchè esse sono in minor numero sui fianchi; un esemplare presenta una sola costa nel seno della valva perforata, altri ne presentano due, altri tre.

Rhynchonella flabellum, Mgh. — Piccolo ed incompleto esemplare, riferibile alla varietà già da me distinta nel calcare di Gozzano (3).

Rhynchonella fissicosta, Mgh. (4) (?). — Lo stato di conservazione dei quattro piccoli esemplari, tutti monchi della parte frontale, mi toglie di poter dare per certa la determinazione.

Rhynchonella, sp. ind. — Valva brachiale somiglia alla *Rh. inversa* Opp. (*Rh. Kraussi*) Opp. (5), differendone per la maggior grossezza e perchè presenta l'altezza maggiore della larghezza.

Rhynchonella undata, Par. (?). — Frammento di piccolo esemplare (6).

Rhynchonella deltoidea, Mgh. — Il piccolo esemplare non corrisponde in tutto alla descrizione stabilita dal prof. Meneghini sopra un unico esemplare, grande il doppio di questo in esame (7). La sua larghezza è pari all'altezza e la valva perforata è meno rigonfia nella regione prossima all'apice, di modo che quest'ultimo risulta anche assai meno ricurvo. Tuttavia per la forma, per l'accenno di seno alla fronte della valva perforata e specialmente per i caratteri della superficie questa *Rhynchonella* non si può separare dalla specie dell'Appennino centrale.

Spiriferina rostrata, Schlot. — Nessuno degli esemplari, e sono parecchi, raggiunge la statura di quelli che si raccolgono nel calcare di Gozzano; sono tutti piccoli e vi predomina la forma con un semplice accenno di lobo e di seno ed in questo caso

(1) Geyer, Mem. cit., 1889, pag. 52, tav. VI, fig. 19.
(2) Geyer, Mem. cit., 1889, pag. 67, tav. VII, fig. 22-23.
(3) Parona, Mem. cit., pag. 18, tav. II, fig. 8, 1880.
(4) Canavari, Mem. cit., 1880, pag. 29, tav. IV, fig. 9.
(5) Geyer, Mem. cit., 1889, tav. VII, fig. 26.
(6) Parona, Mem. cit., 1880, pag. 16, tav. II, fig. 6.
(7) Canavari, Mem. cit., 1880, pag. 24, tav. IV, fig. 1.

ricordano molto da vicino la forma di Hierlatz (1); mentre gli esemplari provvisti di un marcatissimo seno, corrispondono assai bene, quantunque più piccoli, a quella degli strati a *Ter. Aspasia* del M. Soratte (prov. di Roma) (2).

Spiriferina alpina, Opp. — Piccolo esemplare colle due valve alquanto guaste ma sufficientemente caratterizzate; somiglia assai all'esemplare più piccolo figurato dal dott. Haas (3).

Spiriferina brevirostris, Opp. (?) — Valva perforata, piccola; per quanto somigliante alla forma più comune di questa specie (4), non è sufficientemente conservata per poter essere certi della determinazione.

Spiriferina obtusa, Opp. — Mentre nel calcare di Gozzano è comune la *Spiriferina angulata* Opp., nel calcare di Lauriano essa manca, ed invece non è rara la sua affine *Spirif. obtusa* con esemplari, che nelle dimensioni e nella conformazione corrispondono abbastanza bene all'esemplare più grande figurato da Geyer (5); vi si nota al confronto alquanto più accentuata la curvatura dell'apice e più demarcato il seno

Spiriferina expansa, Stopp. — Parecchi esemplari per lo più di piccole dimensioni; la forma liscia è associata alla forma *plicata* e, contrariamente a quanto avviene nel calcare di Arzo (6), quest'ultima è la più comune.

Spiriferina oxigona, E. Desl. — Esemplare incompleto, ma perfettamente corrispondente, quasi anche nelle dimensioni, a quello di Arzo da me disegnato (7).

Spiriferina münsteri, Dav. — Anche di questa specie ho potuto adunare buon numero di valve isolate: alla loro illustrazione si adattano perfettamente la descrizione e le figure che dà il prof. Gemmellaro per la forma siciliana (8).

---

(1) G. Geyer, Mem. cit., 1889, pag. 73, tav. VIII, fig. 3.

(2) Canavari, *Contribuz. III alla conosc. dei Brachiop. d. str. a* Ter. Aspasia *nell'Appenn. centr.*, 1884 (Mem. d. Soc. Tosc. Sc. Nat.), pag. 9, tav. IX, fig. 1.

(3) H. Haas, *Ét. monogr. et crit. d. brachiop. rhét. et jurass. des Alpes Vaudoises.* 1885., I part., pag. 27, tav. II, fig. 10.

(4) G. Geyer, Mem. cit., pag. 73, tav. VIII, fig. 9.

(5) G. Geyer, Mem. cit., pag. 75, tav. IX, fig. 3.

(6) C. F. Parona, Mem. cit., 1884, pag. 11, tav. I, fig. 4-9.

(7) Parona, Mem. cit., 1884, pag. 14, tav. I, fig. 11.

(8) Gemmellaro, Op. cit., 1874, pag. 57, tav. X, fig. 8, 9.

*
* *

Risulta da questo elenco, che la roccia, dalla quale derivò il masso coi fossili studiati, doveva contenere una fauna ricca, indubbiamente liasica media, per età e per *facies* corrispondente a quella di Gozzano, ma non identica; argomentandolo dalla mancanza delle specie più frequenti a Gozzano, quali la *Spiriferina angulata* Opp., la *Terebratula Gozzanensis* Par., la *Rhynchonella Zitteli* Gemm., *Rh. Calderinii* Par. e la comunissima *Rh. Scherina* Gemm. Vi si notano diverse specie, che non erano prima conosciute per il Lias medio del Piemonte. Esse sono, trascurando quelle di dubbia determinazione: *Waldheimia Furlana* Zitt. degli strati a *Ter. Aspasia* dell'Appennino centrale e del Lias di Hierlatz, *Waldheimia oxygonia* Uhl. e *Rhynchonella lubrica* Uhl. del Lias medio di Sospirolo nel Bellunese, *Rhynchonella deltoidea* Mgh. del Lias medio dell'Appennino centrale, *Spiriferina oxigona* E. Desl. e *Spiriferina expansa* Stopp., già riscontrate nel Lias lombardo. Invece della *Spirifer. angulata* Opp., assai comune a Gozzano, troviamo la sua affine *Sp. obtusa* Opp. — Ricordo infine la *Avicula sinemuriensis*, che fu raccolta altrove in Italia, negli strati a *Ter. Aspasia* in Sicilia e nel Lias inferiore in Lombardia.

Queste specie, mentre confermano alla fauna del Lias medio piemontese il posto già assegnatole fra quelle appartenenti a questo stesso piano e che presentano i caratteri di maggiore antichità per le loro affinità colla fauna del Lias inferiore, stabiliscono, ripeto, nel tempo stesso una differenza non trascurabile tra la fauna del calcare di Lauriano e quella di Gozzano. Questa differenza è tale da lasciar dubitare della diretta provenienza del masso o dei massi calcari fossiliferi da Gozzano e da lasciar credere più probabile che questi massi, nonchè quelli porfirici e dolomitici del conglomerato di Lauriano, anzichè dalle vicinanze di Gozzano per mezzo di ghiacci galleggianti, siano derivati piuttosto da qualche terra bagnata dal mare terziario, prossima alla regione ove ora si elevano i colli torinesi e scomparsa, dipoi distrutta dall'erosione nelle lunghe vicende geologiche dell'èra terziaria e quaternaria o coperta dal potente mantello dei terreni cenozoici e neozoici. Se l'antico ghiacciaio del Lago d'Orta avesse esteso la cerchia più esterna del suo anfiteatro morenico appena un chilometro più a valle, oppure anche se l'azione del terrazzamento fosse stata in quel punto meno energica nulla ci attesterebbe l'esistenza del calcare liasico nei dintorni di Gozzano, dove affiora per limitati scogli dalle argille plioceniche e dai depositi alluvio-morenici. In questi casi, accettata l'ipotesi del trasporto glaciale, avremmo potuto supporre, in base alla somiglianza litologica e di fauna, derivati i massi di Lauriano dal *broccatello* di Arzo nel Canton Ticino. Le dolomie triasiche delle prealpi novaresi, che si collegano per quella di Rocca d'Angera colle masse identiche ma più potenti e continue della Lombardia ed i lembi liasici di Gozzano e del Monfenera, che ripetono in Piemonte, con *facies* assai simili se non identiche, le formazioni lombarde dei calcari del Lias inferiore di Saltrio, del Lias medio a brachiopodi di Arzo, e del calcare ceruleo, marnoso-arenaceo con cefalopodi del Lias superiore di Laveno e Valmarianna, accennano a formazioni continue ed a mari vasti, sicchè possiamo credere, che questi mari durante il Trias ed il Lias si estendessero sull'attuale area subalpina anche più ad occidente della Valsesia.

Ma io conosco finora troppo poco la geologia di questa regione, perchè possa con sufficiente competenza esprimere il mio parere sul modo di formazione dei conglomerati delle colline torinesi; nè, per la stessa ragione, è mia intenzione di discutere sulla esistenza, dichiarata improbabile dal prof. Portis (1), di una scogliera emersa in epoca miocenica fra l'arco delle Alpi e la collina stessa. Mi accontento di portare un nuovo, per quanto modesto, contributo allo studio della fauna liasica del Piemonte e di accennare ai fatti, che possono mettere in dubbio la provenienza diretta del calcare fossilifero, trovato nel conglomerato di Lauriano, dal giacimento di Gozzano.

(1) A. Portis, Mem. cit., 1888, pag. 85.

Sopra un cranio di Tursiops Cortesii (Desm.) *var.* astensis Sacc. *dell'Astigiana;*

Nota del Dott. FEDERICO SACCO

Negli anni scorsi ebbi a descrivere una mandibola di *Balaenoptera* ed uno scheletro di *Emys* stati venduti al Museo geologico di Torino dagli eredi del sig. Marchioni d'Asti, privato collettore di fossili dell'Astigiana. Per l'identica via pervenne al Museo di Torino un frammento craniale di *Delfino* stato rinvenuto molti anni or sono nelle sabbie gialle di Vallelunga presso Valdondona nell'Astigiana, ma che finora non erasi voluto in niun modo cedere al nostro Museo.

Il rinvenimento di resti di Delfino nel pliocene piemontese è un fatto relativamente frequente, come risulta dal « Catalogo dei Talassoteri, ecc. 1885 » del Portis; infatti ne furono trovati a Mombercelli, a Cortandone, a Baldichieri, a Penango, a Ca-Lunga, a Bagnasco d'Asti, a Montafia ed in tante altre località dell'Astigiana; generalmente però si tratta soltanto di vertebre, o di costole o di denti isolati e quindi di importanza solo relativa. Quattro soltanto sono i resti cranici, e tutti incompleti; cioè quello di Ca-Lunga su cui il Brandt fondò il tipo dello *Steno Gastaldii*, quello di Bagnasco d'Asti, che il Portis denominò *Steno Bellardii*, ed i due di Mombercelli (1) e di Cortandone identificati ambedue, rispettivamente dal Capellini e dal Portis, col *Tursiops Cortesii.*

(1) Ho il piacere di poter dire come questo cranio del Delfino di Mombercelli, stato studiato dal Capellini, dopo essere stato ritirato dal suo proprietario, che non lo volle mai cedere al Museo geologico di Torino, venne ora, dopo la morte di detto proprietario, venduto dai suoi eredi a questo Museo. È questa, come risulta pure dal sopradetto, la fine logica e naturale dei resti fossili ritenuti come *tesori* dai loro proprietari.

Accennerò in fine di questa Nota quale sia il mio modo di vedere sulla determinazione di questi varii resti; passo ora senz'altro all'esame del cranio di Valdondona.

Questo resto fossile manca completamente di tutta la parte facciale ed è limitato alle parti craniche propriamente dette, anch'esse però molto guaste sia lateralmente che inferiormente; è però molto interessante per la quasi completa conservazione della calotta occipitale e delle parti condilari, che invece o mancano affatto o sono per lo più molto guaste ed alterate nei resti fossili delle forme simili a questa.

La grossezza del cranio in questione e la saldatura quasi completa delle sue ossa ci indica trattarsi di un cranio di individuo adulto.

La cavità cerebrale è in parte riempita di arenaria giallastra, granulosa, la quale pare indicarci come questo fossile provenga dai banchi inferiori dell'*Astiano*.

Paragonando questo cranio a quelli finora conosciuti di Delfini fossili nel pliocene italiano, esso sembrerebbe simile, nella parte occipitale, a quello di *Steno Bellardii* proveniente dalle sabbie gialle di Bagnasco d'Asti; ma tale rassomiglianza è forse solo dovuta in gran parte al fatto che detto cranio, come quello in esame, presenta assai ben conservata la porzione condilare dell'occipitale.

Ma con un esame più minuto si trova come il cranio di Valdondona sia piuttosto attribuibile ad un *Tursiops* del tipo del *T. Cortesii* Brandt; esso però non è identificabile a questa specie, il cui esemplare tipico pare provenga dal *Piacenziano* superiore, ma forse ne costituisce una varietà assai spiccata, se pure non una specie distinta, a cui do il nome di *astensis*.

Io quindi nell'esame particolare del frammento cranico in questione lo confronterò specialmente col cranio di *Tursiops Cortesii*, sia perchè è questa la specie tipica e, finora, meglio conservata allo stato fossile, sia perchè di essa esistono i modelli in quasi tutti i Musei d'Europa e quindi la mia descrizione e comparazione potrà essere facilmente seguita e controllata.

Occipitale. — È la parte meglio conservata del cranio in esame e che ci offre quindi maggior interesse, tanto più che il tipico *Tursiops Cortesii* si presenta alquanto alterato e deficiente nella porzione condilare dell'occipitale.

La parte superiore dell'occipitale ha una larghezza trasversale di circa 18 centim., ed un'altezza (dal foro occipitale al parietale) di circa 12 centim. Presenta nella parte medio-centrale un incavo assai profondo, una specie di gronda ampia e non ben delimitata, che va gradatamente scomparendo in alto ed in basso, ed è causata essenzialmente dalle due ampie e depresse gibbosità costituenti la parte esterna dell'occipitale superiore.

Tutta questa parte dell'occipitale è molto simile alla corrispondente del *T. Cortesii*, solo che in questo l'incavo mediano è ancora più profondo inferiormente, e viceversa appare superiormente presso i parietali una cresta mediana assai spiccata, che invece è appena accennata e molto corta e depressa nella var. *astensis*.

La linea di sutura fra l'occipitale ed i parietali è in generale ancora abbastanza visibile; detta linea costituisce una curva a semicerchio irregolare (del diametro di circa 7 centim.) nella parte centrale; quindi, formando rapidamente un'inflessione a gomito, e costituendo così un angolo di circa 125°, prende una direzione trasversale, ed in tal modo, con leggiera pendenza in basso e dopo una specie di gradino nella parte esterna, giunge alla cresta occipito-parietale con uno sviluppo trasversale di circa 6 centimetri.

La cresta occipito-parieto-temporale è molto simile a quella della specie tipica.

Le fosse trasversali che stanno sopra ai condili occipitali sono profonde, ampie, rapidamente allargantisi verso l'esterno; esse differiscono da quelle del tipo per essere meno profonde ma assai più ampie ed anche alquanto più discendenti.

Manca sgraziatamente quasi tutta la parte laterale esterna dell'occipitale, cioè la porzione d'attacco col temporale, essendo andata perduta sia per la sua gracilità che per la sua posizione.

Il foro occipitale presenta il diametro di circa 4 $^1/_2$ centim. sia verticalmente che trasversalmente, ricorda alquanto quello dello *Steno Bellardii*, solo che è assai più grande; non può essere fatto il paragone con quello del cranio tipico di *T. Cortesii*, perchè in questo detto foro si presenta assai guasto.

L'apparato condilare è interessante perchè assai ben conservato, mentre invece è molto deteriorato sia nell'esemplare tipico di *T. Cortesii*, sia negli altri esemplari finora conosciuti di questa specie.

I due condili sono robusti, assai sporgenti, a superficie articolare assai convessa e gradatamente inclinata dall'interno verso l'esterno; essi formano verso il foro occipitale un rialzo assai spiccato a bordo quasi crestiforme che si erge di circa 1 cent. sul piano di imbocco di detto foro; verso l'esterno la faccia articolare termina pure nettamente con un bordo crestato, sollevato anche di circa di 1 centim. sul piano dell'occipitale; invece sia verso l'alto che verso il basso detta faccia articolare, per quanto a limiti abbastanza spiccati viene quasi a terminare sul piano del restante osso occipitale.

I condili in esame hanno una forma irregolarmente elissoidale o reniforme, più allargati superiormente (diametro cent. $3\,^3/_4$ pel condilo sinistro, $4\,^1/_2$ pel condilo destro) che inferiormente (diametro centim. 3 circa), e della lunghezza massima di centimetri $9\,^1/_4$; distano fra di loro superiormente di centim. $5\,^1/_2$, inferiormente di centim. 2 presso il foro occipitale e solo più di cent. $1\,^1/_2$ alla base dell'occipitale; in questa regione basale esiste quindi fra i due condili un canale ampio e profondissimo, che presso il foro occipitale è largo 2 centimetri e profondo quasi 1 centim., si restringe e contemporaneamente diviene meno profondo al termine posteriore dei condili, e nuovamente si allarga rapidamente più avanti in modo da andarsi a confondere gradualmente col piano dello sfenoide.

Questa porzione condilare dell'occipitale ricorda assai quella dello *Steno Bellardii*; non è possibile invece paragonarla con quella del *T. Cortesii* essendo profondamente guasta, come è già stato detto, sia nell'esemplare tipico che negli altri trovati altrove; se però si osserva la porzione articolare anteriore dell'atlante del *T. Cortesii* tipico, vi vede che essa è amplissima, subovale, non molto curva, per modo che possiamo naturalmente concludere che i condili dell'esemplare tipico di *T. Cortesii* fossero più larghi, più ovali e meno convessi longitudinalmente che non quelli della var. *astensis*, ed invece meglio si avvicinassero per la forma a quelli dello *Steno Bellardii*.

La parte basilare dell'occipitale è perfettamente saldata allo sfenoide per modo che riesce incerto il seguirne la linea di sutura, quasi completamente scomparsa.

Sfenoide. — Nel cranio in esame lo sfenoide è conservato solo nella parte centrale, come più solida; le ali dello sfenoide mancano affatto dal lato sinistro, e esistono solo nella parte basilare sul lato destro; ad ogni modo si può ritenere che la grande conca dello sfenoide fosse tanto ampia come quella della specie tipica. È poi notevole osservare come il basisfenoide, che nella parte mediana è subpiano, sia presso l'occipitale che presso l'etmoide, invece nella parte centrale si presenti foggiato quasi a cresta rotondeggiante, ben spiccata; ai due lati di essa osservansi due fossette assai profonde, lunghe circa 4 centimetri nel senso antero-posteriore, con margine assai spiccato verso l'interno, cioè contro la cresta centrale, ed evanescenti verso gli altri lati. Invece ben diversa si presenta questa parte nello *St. Bellardii* (con cresta centrale corta e depressa, e fossette laterali subrotonde); nell'esemplare tipico di *T. Cortesii* essa non è ben conservata e quindi non ben paragonabile.

Etmoide. — L'etmoide è ben conservato nella sua parte basilare, e vi si presenta nettamente distinto dallo sfenoide per essersi verificato, durante la fossilizzazione, un piccolo spostamento lungo la loro linea di sutura. Così pure sono tuttora abbastanza visibili le suture che dividono l'etmoide dalle due alette montanti laterali, che hanno, ciascuna, una larghezza di circa 2 cent., mentre l'etmoide presenta un diametro trasverso variabile da 3 $^1/_2$ a 4 centimetri.

Della robusta cresta etmoidea che divide la fossa nasale è solo conservata una piccola parte basale.

Superiormente l'etmoide si salda strettamente colle ossa nasali, ma non essendo quivi ben conservato è alquanto difficile il conoscerne i precisi rapporti.

Parietali. — Molto robusti, col massimo diametro trasversale di 21 centim.; nella parte medio-superiore le ossa parietali, a struttura un po'spugnosa, si rialzano fortemente formando un rilievo assai spiccato dell'ampiezza (alla base) di circa 7 centim. e dell'altezza di quasi 3 centim. sulla linea della restante cresta parietale; con questa linea i fianchi del rilievo centrale formano un angolo di circa 130°. Il descritto rilievo è molto più spiccato che nel tipo del *T. Cortesii*, dove esso, oltre ad essere assai più depresso, si collega a pendìo dolcissimo, senza angolo alcuno, colla restante cresta parietale.

Inoltre detto rilievo parietale anteriormente si salda quasi completamente, pur restando visibile la linea di sutura, colla faccia posteriore dei nasali, mentre nel *T. Cortesii* di Colle Torrazza le ossa nasali sono divise dalla cresta parietale per mezzo di una profonda fossetta larga circa 1 centim.

Noto poi come la descritta parte medio-superiore delle ossa parietali presentisi nella var. *pedemontana* assai più simile a quella della var. *astensis* in esame, che non a quella del tipo.

La restante cresta parietale trasversa, continuazione, direi, del rilievo centrale sopradescritto, è assai spiccata, sporgente, tagliente, e forma colla cresta parietale laterale (o sopratemporale) un angolo quasi retto o appena acuto.

La cresta parieto-laterale (o sopratemporale) è robustissima, acuta, assai più rialzata e sporgente lateralmente che non nel tipo del *T. Cortesii*, per modo che la parete sopratemporale è superiormente alquanto concava, mentre nell'esemplare tipico tale concavità è appena accennata presso la cresta e cangiasi in leggiera convessità poco lungi da detta cresta; inoltre detta parete presentasi nella var. *astensis* (come anche nella var. *pedemontana*) quasi verticale, mentre che nel tipo è assai nettamente inclinata dall'interno (superiormente) all'esterno (inferiormente).

Nella porzione occipito-laterale la superficie dei parietali presenta una depressione irregolare, assai ampia e marcata, per quanto poco profonda, depressione che è assai meno accennata nel *T. Cortesii* tipico e che invece è più accentuata e profonda nella var. *pedemontana*.

Temporali. — Queste ossa mancano quasi completamente nel cranio in esame, solo se ne conserva sul lato destro la porzione scagliosa d'attacco al parietale; sul lato sinistro osservasi soltanto più la traccia di tale parte, cioè la irregolare, raggiatamente canaliculata superficie di sutura sopra l'osso parietale.

Frontali. — Le ossa frontali mascherate in gran parte, come di solito, dalle altre ossa circostanti, sono nell'esemplare in esame ancora più nascoste che nel *T. Cortesii* di Colle Torrazza a causa della sovraccennata riunione delle ossa nasali colla cresta parietale; invece sono alquanto, ma di poco, più visibili fra la cresta occipitale laterale ed il margine posteriore dei mascellari.

Nasali. — Ne è ben conservato soltanto quello di sinistra; del destro esiste solo più la base. Sono molto grossi e spugnosi, irregolarmente quadrangolari, larghi circa cent. 3 trasversalmente e 2 $^{1}/_{2}$ nel senso antero-posteriore, con una specie di irregolare appendice nella parte esterna, subeguali, saldati posteriormente alla cresta occipitale ed anteriormente alle ali montanti nasali dell'etmoide. Rassomigliano quindi assai ai nasali della var. *pedemontana* e distinguonsi invece nettamente dai nasali del *T. Cortesii* che sono diseguali, schiacciati nel senso antero-posteriore, e divisi con profonda fossa dalla cresta occipitale.

Vomero. — Nell'esemplare in esame quest'osso è poco e mal conservato; manca in gran parte la sua porzione montante superiore, ma per quanto si può ancora osservare essa doveva essere più strettamente unita all'etmoide che non nel tipo.

Della cresta vomerale media è pure solo più conservata la parte basale, che è assai spiccata e robusta.

Mascellari. — Ne è solo conservata sul lato sinistro la parte posteriore che s'attacca ai frontali. Essa sembra molto simile a quella del *T. Cortesii*, solo col margine posteriore un po' più regolarmente circolare, cioè senza quell'angolosità abbastanza spiccata che osservasi, verso le ossa nasali, nella specie tipica; inoltre il grande foro mascellare superiore trovasi alquanto più esterno che nella specie di Colle Torrazza.

Intermascellari. — Ne è appena conservata, sul lato sinistro, una piccola porzione posteriore senza la parte superficiale e quindi non adatta a studi di confronto.

Riassumendo il sopra esposto nell'esame del frammento craniale in questione possiamo dunque dire che detto cranio di Valdondona per quanto mostri notevoli caratteri di affinità con quello del *Tursiops Cortesii* (Desm.) di Colle Torrazza, se ne distingue nettamente pei seguenti caratteri principali:

1° Cresta mediana occipito-parietale meno accentuata.

2° Fossa mediana dell'occipitale, sopra al foro occipitale, meno profonda.

3° Fosse trasverse sopracondilari dell'occipitale più ampie e meno profonde.

4° Condili più stretti, subellittici invece che subovali, e più convessi nel senso longitudinale.

5° Presenza di due larghe e profonde fossette sulla faccia inferiore dello sfenoide.

6° Parte centrale della cresta parietale trasversa più rilevata e più sviluppata in avanti.

7° Cresta laterale (supratemporale) del parietale più rilevata e più sporgente all'infuori.

8° Ossa nasali quadrangolari e congiunte alla cresta parietale.

Ora se noi consideriamo il gran numero e l'importanza dei caratteri differenziali sovraccennati e se riflettiamo che essi ci si presentarono in una piccola parte soltanto dello scheletro, credo che, pur volendo tenere conto delle differenze sessuali, individuali, di età ecc., non si possa fare a meno di ammettere che il cranio esaminato appartenga, se non ad una specie nuova, certamente ad una varietà nuova di *Tursiops Cortesii*; a questa forma, specie o varietà che altri voglia considerarla, dò il nome di *astensis*.

È probabilmente a questa forma che andrà riferita una gran parte delle numerose ossa di *Tursiops* rinvenute nell'Astigiana e finora riferite al *T. Cortesii*.

Quanto al *Tursiops Cortesii* di Cortandone (Portis - Cat. descritt. Talassoteri ecc., pag. 96, 97 - Tav. IX, fig. 103, 104, 105), l'esame dell'esemplare mi convinse non potersi identificare col tipico *T. Cortesii*, per diversi caratteri differenziali che indicò già il Portis; lo designerei come var. *pedemontana* del *T. Cortesii*. Tale varietà sembrami quasi meglio accostarsi alla var. *astensis* che non alla specie tipica.

Il cranio di Mombercelli non è abbastanza ben conservato da potervi basare studi comparativi un po'generali ed importanti.

Quindi noi potremmo ammettere come il *Tursiops Cortesii* Desm. presenti già fin d'ora tre varietà, cioè: *Brocchii* Bals., *astensis* Sacc., e *pedemontana* Sacc. Certamente nuovi ritrovati e nuovi studi completeranno le diagnosi delle suddette varietà, ne creeranno diverse nuove e ne chiariranno meglio i reciproci rapporti.

Forse altri troverà essere un'esagerazione il creare così numerose varietà, quasi tante quanti sono gli esemplari un po' completi, specialmente nelle parti craniali che sono le più importanti. A tale obbiezione si può rispondere anzitutto come sia migliore, a mio parere almeno, il metodo di costituire, quando è il caso, varietà anche numerose, piuttosto che non di stabilire, su basi eguali, altrettante specie, come si usa generalmente ora; giacchè col primo metodo si raggruppano le forme simili attorno ad un tipo sicuro, conosciuto ed ammesso da tutti, mentre col secondo metodo, oltre a prodursi notevole confusione, si può facilmente incorrere nell' errore di dare nomi specifici differenti a forme dissimili solo per semplici differenze di età o individuali o sessuali, o per lievi variazioni locali o di tempo.

Quando poi si riscontrano differenze fra una forma tipica ed altre forme alquanto simili, ma non identiche, sembrami naturale di costituire di queste ultime, per quanto numerose, altrettante varietà della specie tipica; il grande numero di varietà di una data specie ci proverà soltanto il suo grande polimorfismo, che d' altronde sappiamo essere notevolissimo specialmente nei vertebrati superiori.

È dietro queste considerazioni d'indole generale che, avendo comparati i resti, pur troppo un po'scarsi e mal conservati, del tipico *Steno Gastaldii* Brandt con quelli di *Steno Bellardii* Portis, parvemi che questa forma debba solo considerarsi come una varietà della prima specie.

Museo Geologico di Torino.
1° maggio 1891.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

Tursiops Cortesii (Desm.) var. *astensis* Sacc.

Fig. I. Parte posteriore del cranio vista dal disopra (circa $^1/_2$ della grandezza naturale).

Fig. II. Parte posteriore del cranio vista dal didietro (circa $^1/_2$ della grandezza naturale).

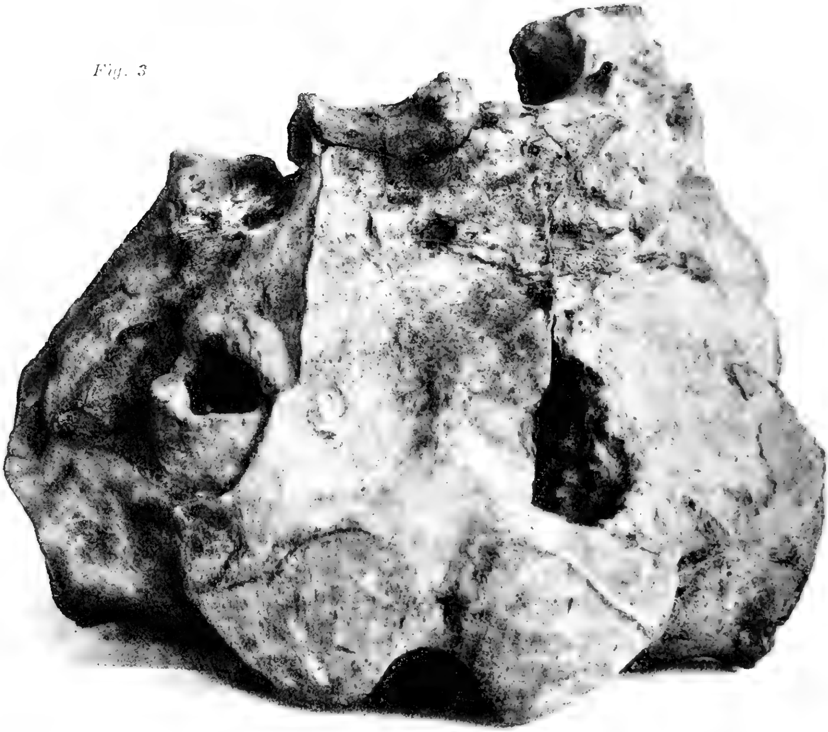
Fig. III. Parte posteriore del cranio vista dal disotto (circa $^1/_2$ della grandezza naturale).

Fig. IV. Parte posteriore del cranio vista dal lato destro (circa $^1/_2$ della grandezza naturale).

L'Accademico Segretario
Giuseppe Basso.

Fig. 1

Fig. 3



DOTT M. PERACCA FOT.

Fig. 3

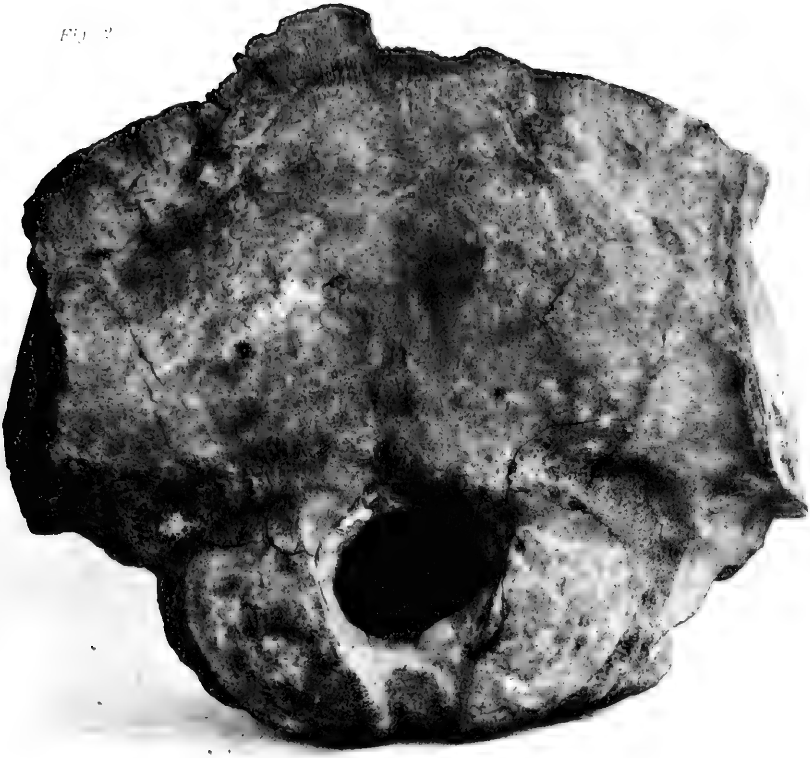


Fig. 4

ROMA FOTOTIPIA DANESI

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 10 Maggio 1891 . . . . *Pag.* 467

PARONA — Fossili nel Lias medio nel conglomerato terziario di Lauriano (Colli torinesi) . . . . » 468

SACCO — Sopra un cranio di *Tursiops Cortesii* (DESM.) *var.* astensis (SACC.) *dell'Astigiana* . . . . » 477

Torino — Tip. Reale-Paravia

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVI, DISP. 14ª, 1890-91

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 31 Maggio 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: SALVADORI, BRUNO, BERRUTI, FERRARIS, NACCARI, MOSSO, GIBELLI, GIACOMINI, CAMERANO, SEGRE, PEANO e BASSO Segretario.

Vien letto l'atto verbale dell'adunanza precedente che è approvato. Il Segretario presenta all'Accademia, a nome dell'Autore Prof. Giovanni CAPELLINI, Socio corrispondente, una monografia intitolata: « *Zofioidi fossili e il rostro di Dioplodonte della Farnesina presso Roma* ».

Il Socio SALVADORI legge un suo lavoro intitolato: « *Aggiunte alla Ornitologia della Papuasia e delle Molucche* », il quale costituisce l'ultima parte del suo studio su tale argomento, essendo già le altre parti state precedentemente pubblicate nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Il Socio GIBELLI dà lettura di un suo lavoro eseguito in collaborazione col Dott. Saverio BELLI, e intitolato « *Rivista delle specie di Trifolium italiane comparate con quelle del resto d'Europa e delle regioni circummediterranee, della Sezione Mystilus* PRESL ».

I due menzionati lavori dei Soci SALVADORI e GIBELLI vengono dalla Classe, con votazioni unanimi, approvati per l'inserzione nei volumi delle *Memorie*.

Il Socio NACCARI presenta la parte III dello studio che il Professore Angelo BATTELLI dell'Università di Cagliari prosegue *sulle* *proprietà termiche dei vapori*. L'attuale monografia ha per oggetto l'esame del vapore di solfuro di carbonio rispetto alle leggi di Boyle e di Gay-Lussac.

Il Socio Gibelli presenta una Memoria dei Dottori O. Mattirolo e L. Buscalioni, la quale contiene: « *Ricerche anatomo-fisiologiche sul tegumento seminale delle* **Papilionacee**, *e precisamente tratta dall'anatomia della membrana di rivestimento, delle cellule Malpighiane, delle cellule a colonna, dello strato profondo, e di alcuni organi scoperti dagli autori nell'area del funicolo* (*tubercoli gemini e chilario*) ».

Così il lavoro del Prof. Battelli, come quello dei Dottori Mattirolo e Buscalioni, sarebbero destinati ai volumi delle *Memorie*. Perciò il Presidente nomina apposite Commissioni incaricate di esaminarli e riferirne in seguito alla Classe.

Il Socio Naccari presenta per l'inserzione negli *Atti* e legge una Nota del Dott. G. B. Rizzo, Assistente all'Osservatorio della R. Università di Torino, col titolo: « *Di un notevole tipo isobarico subalpino* ».

Questo lavoro del Dott. Rizzo porge occasione al Socio Berruti di fare alcune osservazioni *intorno ai moti ciclonici dell'atmosfera ed alla influenza di questi sulle condizioni meteorologiche della nostra regione*. Tali osservazioni vengono dallo stesso Socio Berruti riassunte in uno scritto da pubblicarsi negli Atti.

Infine il Socio Basso presenta pure per l'inserzione negli *Atti*, per incarico del Socio D'Ovidio assente per ragioni d'ufficio, uno studio del Dott. Federico Amodeo, Prof. nel R. Istituto tecnico di Torino, intitolato: « *Quali possono essere i postulati fondamentali della Geometria proiettiva di uno* S_r.

LETTURE

Di un notevole tipo isobarico subalpino;

Nota del Dott. G. B. RIZZO
Assistente all'Osservatorio della R. Università in Torino

Per molti anni la Meteorologia ebbe solo per oggetto di raccogliere un gran numero d'osservazioni intorno alla temperatura, alla pressione atmosferica e agli altri elementi del tempo in ciascun paese e per un lungo periodo di anni, collo scopo di determinare il clima delle diverse regioni ed anche per vedere se veramente nel regolare avvicendarsi delle stagioni, alcuni fenomeni, che sembrano maggiormente degni di nota, come i freddi eccessivi e, in generale, le grandi variazioni nella temperatura e nel regime delle piogge, si succedano con una certa legge, o abbiano qualche relazione col moto degli astri. Non si giunse sinora a trovare alcuna relazione fra le vicende del tempo ed i movimenti degli astri, nè si potè scoprire alcun periodo (oltre a quelli determinati dai moti della terra), il quale regoli il succedersi dei più notevoli fenomeni atmosferici; ma le osservazioni meteorologiche diligentemente raccolte in un paese per lunghi anni, combinate opportunamente fra di loro e calcolate coi metodi suggeriti dall'Analisi Matematica, mostrano quale è il clima e forniscono delle indicazioni che sono preziosissime per l'igiene e l'agricoltura.

Essendosi poi considerevolmente accresciuto il numero degli Osservatori, e rese più facili e pronte le comunicazioni fra una regione e l'altra, si può conoscere quali siano, in un determinato istante, le condizioni generali dell'atmosfera sopra una gran parte della superficie terrestre, e sapendo quali variazioni del tempo sogliono accompagnare una determinata distribuzione della temperatura della pressione e della umidità atmosferica, ossia un determinato tipo isobarico, si può trarne un presagio per il tempo di qualche giorno appresso.

Ed ora si apre un nuovo campo agli studi meteorici; col progredire delle scienze fisiche si incominciarono a studiare i fenomeni atmosferici direttamente e non soltanto sulle medie pazientemente calcolate; uomini illustri nelle scienze sperimentali si sono dedicati all'osservazione di ciascun fenomeno in se stesso ricercandone le cause e studiandone le molteplici manifestazioni, coll'aiuto della Meccanica e della Fisica; e la Meteorologia, che era prima una statistica con tutti i suoi dati importanti, ma privi di legame e senza una spiegazione rigorosa, diventa ora una vera scienza, cioè la Fisica dell'atmosfera.

In questa Nota mi propongo di spiegare una apparente anomalia, che è frequentissima nelle condizioni del tempo in Piemonte.

Si ammette generalmente che per la differenza di riscaldamento fra i poli e l'equatore si producano quivi delle correnti d'aria ascendenti, le quali poi si riversano da una parte e dall'altra verso il Nord e verso il Sud, mentre delle correnti d'aria fredda affluiscono dai poli all'equatore; ma accanto a questa, che fu chiamata *la grande circolazione atmosferica*, si producono degli altri movimenti nell'aria, i quali sono la causa delle principali modificazioni del tempo.

Spesso si formano alla superficie della terra delle aree di bassa pressione atmosferica, intorno alle quali l'aria prende un movimento vorticoso, e questi sistemi di correnti intorno ad un minimo di pressione si chiamano col nome di cicloni. Nell'interno di un'area ciclonica l'aria ha, in generale, un moto ascendente, e mentre essa si innalza, si raffredda, perchè si espande e si condensa il vapor acqueo che essa contiene; perciò un ciclone comprende quasi sempre un'area di pioggia. Le cause che determinano la formazione e la conservazione dei cicloni sono molto complesse e sono ancora oggetto di vivissime discussioni; uno studio più maturo, fatto a grandi altezze nell'atmosfera terrestre, dove i fenomeni appaiono in tutta la loro pienezza, senza essere molto alterati dalle accidentalità del terreno, mostrerà se i movimenti che si compiono nei cicloni sono dovuti alla rarefazione dell'aria, che ne occupa il centro, o se, invece, la rarefazione è una conseguenza essa stessa, in tutto o in parte, di questi movimenti. Ma qualunque sia l'origine dei cicloni, è certo che essi, una volta formatisi, persistono a lungo senza scomporsi, e si muovono in tutto il loro insieme sulla superficie terrestre secondo certe leggi ben determinate; e quando un ciclone si avvicina ad un paese, si avverte dapprima un piccolo aumento e poi una rapida diminuzione nella pressione barometrica e il tempo va peggiorando, fin che il ciclone non si allontana. Questi principii sono sufficienti per fare una previsione del tempo, quando si osservi l'andamento del barometro e si conoscano le condizioni generali dell'atmosfera per una regione sufficientemente estesa, intorno al luogo di osservazione. In generale, quando il barometro indica una depressione, ciò significa che si avvicina a noi un ciclone e il tempo tende a peggiorare.

Ma vi sono alcuni casi, in cui le condizioni topografiche di una regione e specialmente la sua conformazione orografica, alterano sì fattamente le condizioni generali del tempo, che rendono fallace ogni previsione, la quale sia unicamente fondata sullo studio del tipo ciclonico, senza tenere esatto conto delle condizioni locali.

La grandiosa catena delle Alpi, specialmente a Ovest e a Nord-Ovest, si trova sul cammino dei più notevoli cicloni che attraversano l'Europa, e perciò deve notevolmente modificarne il movimento e gli effetti. Lo Schiaparelli e il De Marchi hanno mostrato quale azione esercitano queste montagne sulla formazione dei temporali nella valle del Po; io indicherò qui come in generale vengano modificate le condizioni del tempo ai piedi delle Alpi occidentali, quando il barometro indica una depressione e poi soffia impetuoso il vento di Ovest, ossia quando un ciclone attraversa l'Europa del Nord o l'Europa di mezzo.

Le osservazioni fatte all'Osservatorio di Torino, che io ho potuto consultare, abbracciano un periodo di oltre un secolo; e in tutto questo tempo si osservarono spesso dei rapidi aumenti di temperatura, accompagnati da venti forti di Ovest o di Sud-Ovest con cielo sereno, dopo una depressione barometrica; ma per brevità trascrivo soltanto le principali variazioni di questa specie avvenute negli ultimi venticinque anni, le quali sono sufficienti per mostrare quale è il carattere generale dei cambiamenti di tempo nelle condizioni che io considero.

E per mettere meglio in evidenza la grandezza di queste variazioni, insieme coi numeri che esprimono il valore della pressione atmosferica, della temperatura e degli altri più notevoli elementi meteorici nei giorni considerati, scrivo anche le differenze fra questi valori e i medi dei valori osservati alle stesse ore nei due giorni che precedono e nei due giorni che seguono.

DATA			PRESSIONE a 0°			TEMPERATURA				
Anno	Mese	Giorno	9h a.	3h p.	9h p.	9h a.	3h p.	9h p.	Mass.	M
1866	Dicembre . .	14	732.8 — 8.0	731.6 — 7.7	734.5 — 4.3	6,5 — 0.6	16.6 + 6.5	11.8 + 4.6	18.0 + 6.4	 —
1867	Febbraio . . .	7	26.3 —10.0	29.2 — 5.4	34.5 — 0.4	1.1 — 0.8	8.9 + 1.3	6.5 + 2.9	10.1 + 1.3	 —
1868	Marzo	6	25.5 — 9.1	25.7 — 8.2	28.6 — 4.4	12.0 + 5.1	14.1 + 1.5	8.9 — 0.4	14.0 + 0.6	 +
—	Dicembre . .	9	35.4 — 8.3	36.0 — 6.5	39.0 — 4.3	16.6 + 9.0	10.3 + 4.2	6.9 + 2.9	17.4 + 8.8	 +
—	— . .	17	38,3 — 2.4	38.5 — 0.7	39.6 + 0.7	13.6 + 7.4	8.1 + 3.0	0.8 — 3.0	14.3 + 7.4	1 +
1869	Aprile	19	28.2 — 1.6	29.2 — 0.6	34.4 + 3.5	13.9 + 2.8	20.9 + 4.7	13.8 + 1.3	21.0 + 4.7	1 +
—	Agosto	10-11	28.6 —10.0	27.3 — 9.9	30.0 — 7.3	22.2 + 2.0	26.6 + 2 0	23.1 + 1.1	29.4 + 4.2	1 +
—	Novembre . .	5	27.1 — 6.1	27.6 — 5.4	28.3 — 4.9	13.7 +10.9	15.5 + 5.6	13.1 + 5.9	15.8 + 5.2	1 +
1870	Giugno	25	31.5 — 7.1	30.4 — 5.9	35.1 — 1.3	22.0 + 0.1	26.5 + 0.5	21.2 — 0.5	26.9 + 0.1	1 —
—	Settembre . .	8	31.4 — 8.6	34.7 — 3.6	38.0 + 0.6	17.8 + 1.4	22.7 + 3.1	18.2 + 0.2	22.7 + 2.3	1 +
1871	Ottobre	2	25.0 — 6.5	25.9 — 3,1	27.5 — 1.7	19.2 + 3.6	21.1 — 0.3	18.0 + 1.8	21.3 — 0.3	14 +
1872	Settembre . .	21	28.8 — 4.4	30.7 — 1.0	33.5 + 0.4	17.9 + 1.8	20.5 + 0.7	14.6 — 1.9	21.1 + 0.9	14 +
1874	Agosto	9	31.9 — 5.4	33.0 — 3.0	35.1 — 0.7	21.2 — 0.3	25.0 + 1.5	20.1 — 0.4	25.8 + 0.3	15 — 1
1876	Febbraio . . .	24	36.0 — 3.0	35.4 — 2.3	36.4 + 0.4	9.7 + 5.3	12.2 + 4.5	9.9 + 4.7	12.3 + 4.3	4 + 1
—	Agosto	25	23.9 — 7.5	25.7 — 6.4	29.5 — 2.7	20.5 + 2.1	24.3 + 1.9	19.3 + 0.2	24.6 + 1.8	16 + 1
1877	Aprile	24	24.8 — 7.2	26.2 — 4.2	29.0 — 1.3	13.3 + 2.5	15.7 — 0.6	11.8 — 1.8	16.4 — 1.2	8 + 2
—	Maggio	13	32.0 + 2.2	32.0 — 1.6	34.2 — 0,2	15.9 + 1.7	20.8 + 4.4	15.6 + 2.2	21.0 + 3.2	11. + 0

MIDITÀ RELATIVA			VENTO			Acqua evaporata	STATO DEL CIELO		
h a.	3h p.	9h p.	9h a.	3h p.	9 p.		9h a.	3h p.	9h p.
98 + 12	45 − 19	34 − 42	*NE* 1	*SW* 4	*W* 4		≡²	0	0
91 + 18	33 − 28	36 − 46	*WSW* 1	*W* 3	*W* 4		2 ≡	6 *m*	0
53 − 3	31 − 6	25 − 26	*W* 4	*W* 4	*W* 2		8 *m*	1	0
67 − 16	21 − 47	49 − 33	*N* 2	*W* 2	*SW* 2		1	0	0
36 − 51	26 − 63	46 − 47	*W* 4	*NW* 3	— —		0	2	0
49 − 24	17 − 29	59 − 5	*SW* 2	*W* 4	*NE* 1		1	3	10
42 − 24	43 − 17	31 − 27	*W* 3	*W* 4	*W* 3	7.5 + 5.8	7	4	1
28 − 39	11 − 40	30 − 33	*W* 4	*W* 4	*W* 3	6.8 + 6.2	4	4	0
71 + 21	10 − 29	14 − 44	*SSW* 1	*W* 4	*W* 2	5.0 + 2.4	0	1	0
30 − 33	13 − 42	20 − 50	*W* 4	*W* 3	*NW* 2	5.7 + 4.2	0	0	0
29 − 33	27 − 7	23 − 38	*W* 3	*W* 4	*W* 3	4.3 + 2.2	2	1	0
16 − 58	11 − 42	27 − 47	*W* 3	*W* 3	*W* 2	4.0 + 2.6	0	0	0
32 − 31	19 − 36	77 + 8	*W* 4	*W* 4	*W* 1	3.0 + 0.3	0	0	0
32 − 48	27 − 48	24 − 58	*W* 4	*W* 4	*W* 3		2	0	0
31 − 42	29 − 27	52 − 15	*W* 3	*W* 3	*S* 2	2.6 + 1.1	3	7	3
21 − 43	19 − 23	27 − 26	*W* 4	*W* 4	*W* 3	2.3 + 0.8	1	1	0
73 + 3	15 − 52	33 − 40	*W* 1	*W* 4	*W* 1	2.0 + 0.8	0	1	0

DATA			PRESSIONE a 0°			TEMPERATURA				
Anno	Mese	Giorno	9h a.	3h p.	9h p.	9h a.	3h p.	9h p.	Mass.	Mi
1877	Dicembre . .	26	727,8 — 6.0	726.3 — 7.3	726.9 — 7.5	7.6 + 6.0	10.6 + 6.1	3.4 + 1 8	11.2 + 5.8	— 0 — 0
1878	Gennaio . . .	24	31.8 — 4.2	28.6 — 6.2	24.8 —10.1	8.1 + 8.2	9.5 + 5.1	5.3 + 3.6	10.9 + 6.1	0 + 2
—	Novembre . .	9	36.3 — 1.5	38.0 + 0.8	41.1 + 3.3	0.3 — 1.9	9.8 + 4.2	6.4 + 3.3	10.4 + 4.8	— 1 — 1
—	Dicembre . .	9	21.5 — 7.2	22.4 — 4.7	25.3 — 0.9	1.4 — 0.8	4.2 + 1.9	2.8 + 4.2	4.7 + 2.6	— 2 0
1879	Gennaio . . .	5	34.9 — 1.9	36.5 + 4.3	38.9 + 3.9	7.5 + 9.7	9.0 + 5.7	3.5 + 3.5	9.6 + 5.4	0. + 0
—	Dicembre . .	5	23.6 —10.9	25.0 — 8.9	27.6 — 6.7	6.0 — 0.8	5.6 + 6.6	2.2 + 5.5	6.2 + 6.2	— 6. + 0.
1881	Gennaio . . .	20	25.3 — 9.4	28.0 — 5.1	31.3 + 1.1	3.7 + 8.7	3.0 + 4.8	0.3 + 4.1	5.2 + 6.1	— 5. + 1,
—	Luglio	27	31.6 — 7.8	32.3 — 5.6	35.2 — 2.4	23.3 + 1.5	27.7 + 3.0	22.5 — 0.4	28.2 + 2.2	18. + 1.
—	Agosto	18	28.8 — 8.0	28.2 — 6.7	31.6 — 3.0	20.8 + 0.7	29.4 + 4.7	24.5 + 3.0	29.4 + 4.3	15. 0
1882	Dicembre . .	24	26.7 —11.3	25.3 —10.0	27.4 — 8.2	5.6 + 4.8	8.2 + 4.3	5.0 + 3.3	8.2 + 3.1	3. + 4.
1883	Luglio	15-16	34.4 — 1.2	35.0 — 0.1	35.0 — 0.4	23,1 + 0.9	27.8 + 2.9	23.3 + 2.5	28.2 + 2.3	19. + 0.
1884	Marzo	7	31.7 — 2.6	33.1 + 0.4	35.3 + 2.4	11.8 + 5.5	17.1 + 6,7	12.5 + 4.5	17.6 + 6.0	5. + 0.1
1886	Febbraio . . .	2	27.6 — 4.4	28.6 — 1.5	30.2 — 0.1	6.5 + 5.8	7.6 + 3.0	4.5 + 2.7	7.9 + 2.7	0.4 + 0.5
1887	Agosto	18	28.9 — 2.6	27.3 — 3.0	28.1 — 2.6	9.8 + 0.8	11.0 — 0.1	8.4 — 1,0	14.8 + 0.8	6.8 + 0.2
1889	Aprile	2	28.3 — 6.1	28.8 — 3.6	32.0 — 0.3	21.9 + 0.9	24.5 + 0.2	21.2 + 1.1	24.9 —	19.9 + 4.3
1890	Gennaio . . .	24	30.6 — 7.6	33.5 — 3.2	35.9 — 1.0	9.8 + 7.2	13.3 + 7,5	7.8 + 4.3	14.0 + 7,4	0.5 — 1.6

IIDITÀ RELATIVA			VENTO			Acqua evaporata	STATO DEL CIELO		
a.	3h p.	9h p.	9h a.	3h p.	9h p.		9h a.	3h p.	9h p.
49 23	34 — 26	68 — 4	W 4	W 4	NE 1		3	1	0
42 32	44 — 11	65 — 4	W 2	W 3	N 1		10	7	0
92 20	17 — 45	32 — 44	WNW 2	WNW 3	0	6.9 + 6.0	1	0	0
88 9	35 — 38	50 — 32	SW 1	W 3	W 3		0	2	1
29 61	26 — 55	58 — 34	W 2	W 3	S 2		0	0	6
79 20	53 — 39	69 — 45	SW 3	W 4	W 3		3	1	0
56 51	54 — 25	54 — 29	W 3	W 4	0		9	4	0
25 37	16 — 36	32 — 27	W 3	W 2	W 1	18.0 +11.9	0	0	0
72 2	17 — 32	23 — 42	— —	W 3	W 1	14.6 + 9.9	0	0	0
34 49	31 — 42	47 — 36	W 3	W 2	W 1		0	0	0
25 34	17 — 35	26 — 37	W 4	W 3	W 4	18.4 +13.8	0	0	0
53 29	24 — 46	35 — 48	WSW 3	W 4	SW 2		1	0	0
24 35	30 — 55	39 — 37	W 4	W 3	NW 2		0	0	0
79 45	16 — 22	28 — 22	SW 2	W 4	WNW 4	9.9 + 7.4	3	2	0
30 27	16 — 35	23 — 30	W 4	W 3	W 2	12.1 + 8.0	3	2	0
32 40	26 — 41	50 — 33	SW 3	W 3	S 2		1	2	0

Tutte queste osservazioni mostrano evidentemente che dopo una depressione barometrica, alla quale tenga dietro un vento forte occidentale, il cielo si rasserena tosto nel Piemonte, la temperatura si eleva notevolmente e sopra tutto diminuisce l'umidità dell'aria.

Per determinare la causa di questo fenomeno singolare, che apparentemente contraddice alle leggi generali sulla variazione del tempo, ho studiato con grande copia di osservazioni raccolte in tutto il Piemonte, sulle Alpi, nella Savoia e nel Delfinato, le condizioni dell'atmosfera nel mattino del 24 gennaio 1890.

Ma prima di parlare di queste osservazioni, ricorderò ancora un altro fenomeno che presenta i medesimi caratteri. È viva ancora nella memoria di tutti la burrasca che sconvolse il mare Mediterraneo dal 16 al 17 ottobre 1890, e che costò alla nostra flotta una torpediniera e la vita ai valorosi marinai che vi erano imbarcati. Qui a Torino il barometro scendeva rapidamente il giorno 16 con un tempo piuttosto cattivo e raggiungeva il valore minimo (727.3) alle ore 6 pomeridiane; in quell'ora stessa si levò un vento impetuoso di WSW che durò tutta la notte. E col levarsi del vento il cielo si rasserenò immediatamente, la temperatura mostrò un notevole aumento, l'aria si fece secchissima e il cielo continuò ad essere sereno tutto il giorno seguente, mentre seguitava a spirare il vento di W. Nel rimanente dell'Italia il cielo fu quasi sempre coperto e il tempo molto cattivo.

Affinchè si possa vedere come variano insieme la pressione atmosferica, la temperatura, l'umidità dell'aria e l'intensità del vento, quando si presentano le condizioni generali del tempo che sto esaminando, trascrivo i valori ottenuti dagli strumenti registratori dell'Osservatorio dal mezzodì del 23 gennaio 1890 fino alla mezzanotte del giorno successivo.

Condizioni atmosferiche in Torino il 23 e 24 gennaio 1890.

Giorno	Ora	Pressione barometrica	VENTO Direzione	Velocità	Temperatura	Umidità relativa	Stato del cielo
23	12h *m*	732.3	*SE*	4	0.6	92	10 $\equiv^2$
	1 *p*	31.3	*SE*	2	1.3	89	10 $\equiv$
	2	30.6	*SE*	1	2.0		
	3	29.5	(*SW*)	0	2.6	82	8 $\equiv^0$
	4	28.6	(*SSE*)	0	2.6		
	5	28.0	*S*	3	2.5		
	6	27.7	*SE*	8	2.2	89	10 $\circledcirc^0$
	7	27.3	*SSE*	8	2.3		
	8	27.1	*SSE*	5	2.2		
	9	26.9	*S*	8	2.2	87	10 $\circledcirc^0$
	10	25.2	*S*	7	2.0		
	11	24.0	*S*	8	1.0		
	12	24.2	*SSW*	15	1.3	76	8
24	1 *a*	26.0	*S*	18	1.6		
	2	26.7	*SSW*	25	3.5		
	3	27.0	*SSW*	20	4.2	63	2 *ms*
	4	27.0	*SW*	27	7.3		
	5	26.9	*SW*	25	8.0		
	6	27.5	*SSW*	18	8.2	58	1 *ms*
	7	29.0	*S*	16	9.0		
	8	30.0	*SW*	20	9.2	35	1 *msw*
	9	30.6	*SW*	20	9.8	32	1 *msw*
	10	31.3	*SW*	25	10.5		
	11	32.0	*SW*	30	11.2		
	12	32.7	*SSW*	35	11.8	42	3 *msw*
	1 *p*	33.0	*SW*	38	13.0	25	1 *ms*
	2	33.2	*W*	30	14.0		
	3	33.5	*W*	15	13.3	26	3 *msrw*
	4	33.8	*W*	18	13.5		
	5	34.6	*SW*	20	11.8		
	6	35.3	*ENE*	5	10.3	36	1 *msw*
	7	35.4	*ENE*	0	9.3		
	8	35.2	*NE*	4	8.8		
	9	35.9	*S*	7	7.8	50	0
	10	37.5	*NE*	6	7.4		
	11	38.1	*S*	8	7.0		
	12	38.6	*S*	0	4.2	72	2 *ms*

Queste variazioni sono rappresentate dai diagrammi della tavola I[a], e la II[a] rappresenta le condizioni del tempo in Europa al mattino del 24 gennaio e poi in particolare la temperatura , l'umidità , l'aspetto del cielo e la direzione del vento sulle Alpi occidentali e nel Piemonte (1).

Il mattino dal giorno 23 vi era una pressione barometrica molto bassa fra l' Inghilterra e l'Irlanda; alla sera il ciclone aveva il suo centro vicino allo Zuider Zee, e, seguitando nel suo movimento, si portò sulla Polonia al mattino del 24. Secondo la legge generale della circolazione dell'aria in un ciclone la penisola iberica e la Francia e l' Europa di mezzo furono percorse dai venti di ponente a cominciare dal giorno 23; ma questi venti venivano arrestati dalle Alpi occidentali e non si fecero sentire se non debolmente sull'Italia superiore; anzi si venne formando nella Valle del Po un'area secondaria di bassa pressione e quindi vi fu un leggero richiamo d'aria dal Sud, cosicchè nel pomeriggio del giorno 23 predominarono i venti deboli di Sud e di Sud-Est. L'aria si addensava sul versante occidentale delle Alpi, quasi come avrebbe fatto un corso d'acqua incontrando una diga; ma allorquando il rigurgito dell'aria superò la catena montuosa e il moto ciclonico dell'aria fu aiutato dalla notevole differenza di pressione barometrica fra la Valle del Po e il versante occidentale delle Alpi, incominciò a soffiare un fortissimo vento di Ovest e di Sud-Ovest, che solo in alcuni luoghi prendeva una direzione differente per la particolare conformazione orografica del paese. Allora nel Piemonte, e in modo particolare alle falde delle Alpi, dove prima arrivava l'aria che aveva superate le montagne, il cielo si rasserenò immediatamente, l'aria divenne secca, la temperatura si elevò ad un tratto e al mattino del giorno 24, mentre nelle altre contrade il tempo era generalmente cattivo, qui splendeva il più bel sole di primavera.

Simili giornate serene con temperatura molto mite, nel cuore dell'inverno, sono frequentissime nei nostri paesi di montagna e

(1) Le condizioni generali in Europa sono desunte dai Bollettini meteorici giornalieri che si pubblicano in Italia, in Francia e in Austria e dal Weekly Weather Report dell'Ufficio Meteorologico di Londra: ed ho costrutto la tavola del Piemonte e delle Alpi colle indicazioni che mi furono gentilmente trasmesse dai signori Direttori delle Stazioni Meteorologiche Piemontesi, del Delfinato e della Savoia; io li ringrazio qui della loro cortesia.

gli abitanti chiamano scirocco il vento che porta quella mitezza di cielo, senza punto cercare di spiegarne l'origine. Alcuni meteorologisti, poi, accogliendo troppo facilmente un'ipotesi che loro sembrava rendere ragione di quel vento caldo, pensarono senz'altro che fosse un ramo discendente di una corrente calda venuta dall'equatore.

Ma questa ipotesi è troppo artificiosa, e non è confermata da alcun fatto sperimentale, e poi è insufficiente a spiegare il fenomeno. Infatti non si saprebbe comprendere come quest'aria calda, che si sarebbe elevata dall' Oceano, o almeno dovrebbe aver attraversati i mari, non giunga a noi carica di vapori e non produca delle abbondanti precipitazioni venendo a contatto col suolo freddo; ma è invece straordinariamente secca. Osservando la distribuzione della temperatura e della umidità sul Piemonte nel mattino del 24 gennaio 1890, si vede che il cielo era sereno, l'aria secca e la temperatura elevatissima ai piedi delle Alpi e poi andava man mano diminuendo verso la pianura; la linea isotermica di 9° seguiva quasi esattamente la direzione della catena montuosa, mentre sull'altro versante la temperatura era molto più bassa, il cielo quasi tutto coperto e in alcuni luoghi cadeva la pioggia o la neve; e per spiegare questi fenomeni non possiamo pensare ad una corrente d'aria calda venuta dall'equatore a riscaldare tutta la zona che va da Boves nelle Alpi Marittime fino a Biella. Anzi la distribuzione della pressione barometrica sull'Europa e il sistema generale della circolazione atmosferica in quel giorno dimostrano che non sarebbe stata possibile una tale corrente.

Questi fenomeni così generali, che si ripetono sempre coi medesimi caratteri alle falde orientali delle nostre Alpi, come i fenomeni della medesima natura che si osservano alle falde delle Alpi Svizzere, quando soffia un vento impetuoso e molto caldo che discende dalla montagna, il föhn (1), e ai piedi delle montagne

---

(1) Questo classico vento caldo e asciutto, che spira sulla Svizzera dalle cime nevose delle Alpi, fu studiato particolarmente da Helmholtz, da Hann e da v. Bezold. Questi, insieme a molte pregevoli memorie, nelle quali applicò i principii della termodinamica ai fenomeni atmosferici, e in particolare al föhn, scrisse in forma elementare intorno a questo vento e intorno alla formazione delle precipitazioni un bellissimo articolo che fu pubblicato, nella rivista Himmel und Erde (1889) e poi tradotto e arricchito di preziose note dal Dott. Michele Raina dell'Osservatorio di Milano.

Rocciose, quando soffia il vento di Ovest, e persino alle falde orientali degli Urali, debbono avere un'origine più semplice e meglio determinata, che ha il suo fondamento nelle proprietà generali dei gas e dell'aria atmosferica e nei principii della termodinamica.

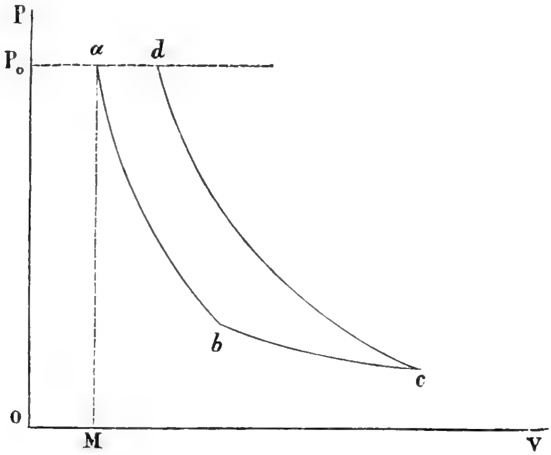
Consideriamo una certa massa di aria contenente del vapore acqueo, la quale si muova verso le Alpi da occidente verso oriente, partecipando al movimento di un ciclone, che attraversa l'Europa al Nord dell'Italia; quest'aria incontra la catena delle Alpi ed è costretta ad innalzarsi per sorpassarla. In questo sollevamento si espande, perchè diminuisce la pressione a cui è soggetta; e per il lavoro che fa nell'espandersi, vincendo la pressione esterna, si raffredda; quindi il vapore che essa contiene la satura completamente e poi, seguitando a diminuire la temperatura, lascia precipitare sotto forma di pioggia o di neve l'eccesso di vapore, mentre ritiene in gran parte il calore messo in libertà dal vapore condensato o dall'acqua che si è congelata.

L'analisi matematica permette di calcolare la temperatura che quest'aria possiede in ogni istante, ma questo calcolo presenta alcune difficoltà, anche perchè bisognerebbe tenere esatto conto del calore scambiato per irradiazione; però è certo che l'aria giunge alla sommità della montagna priva di una gran parte del suo vapore e ad una temperatura molto più alta di quella che avrebbe avuto senza la precipitazione del vapore, e questo spiega come in generale il tempo sia cattivo sul versante dal quale spira il vento.

Quando poi l'aria ha superato la sommità della montagna, si precipita a valle dall'altra parte con una velocità che è tanto maggiore quanto è più grande la differenza di pressione fra i due versanti; in questa discesa l'aria viene compressa e perciò si riscalda, si trasforma anche in calore una porzione dell'energia di movimento che essa possiede giungendo al piano, e viene portata ad una temperatura più alta di quella che aveva al principio della salita, perchè è quasi priva di vapore ed inoltre possiede una gran parte del calore che questo ha messo in libertà nel condensarsi sull'altro versante; quindi il cielo è sereno e la temperatura molto elevata alle falde delle Alpi verso il Piemonte.

Queste variazioni di temperatura di una massa d'aria umida, che sale sul fianco di una montagna e poi precipita dall'altra parte, si possono rappresentare in modo facile ed evidente coi metodi impiegati nello studio della termodinamica e che furono applicati alla Meteorologia specialmente da v. Bezold.

È noto che scegliendo due assi ortogonali OV, OP, se prendiamo sul primo un segmento OM proporzionale al volume di una data massa di gas, e sopra una parallela ad OP condotta per M prendiamo un segmento Oa proporzionale alla sua pressione, il punto a determina le condizioni del gas, perchè ne indica la pressione e il volume, e si potrà inoltre calcolarne la temperatura; quindi per studiare come variano le condizioni del gas basterà osservare la legge, colla quale si muove il punto a che lo rappresenta, nel piano dei due assi. Ora se una data massa di aria umida si eleva nell'atmosfera, senza che venga comunicato o sottratto calore dall'esterno, il punto a, che ne rappresenta le condizioni fisiche descriverà una linea come ab



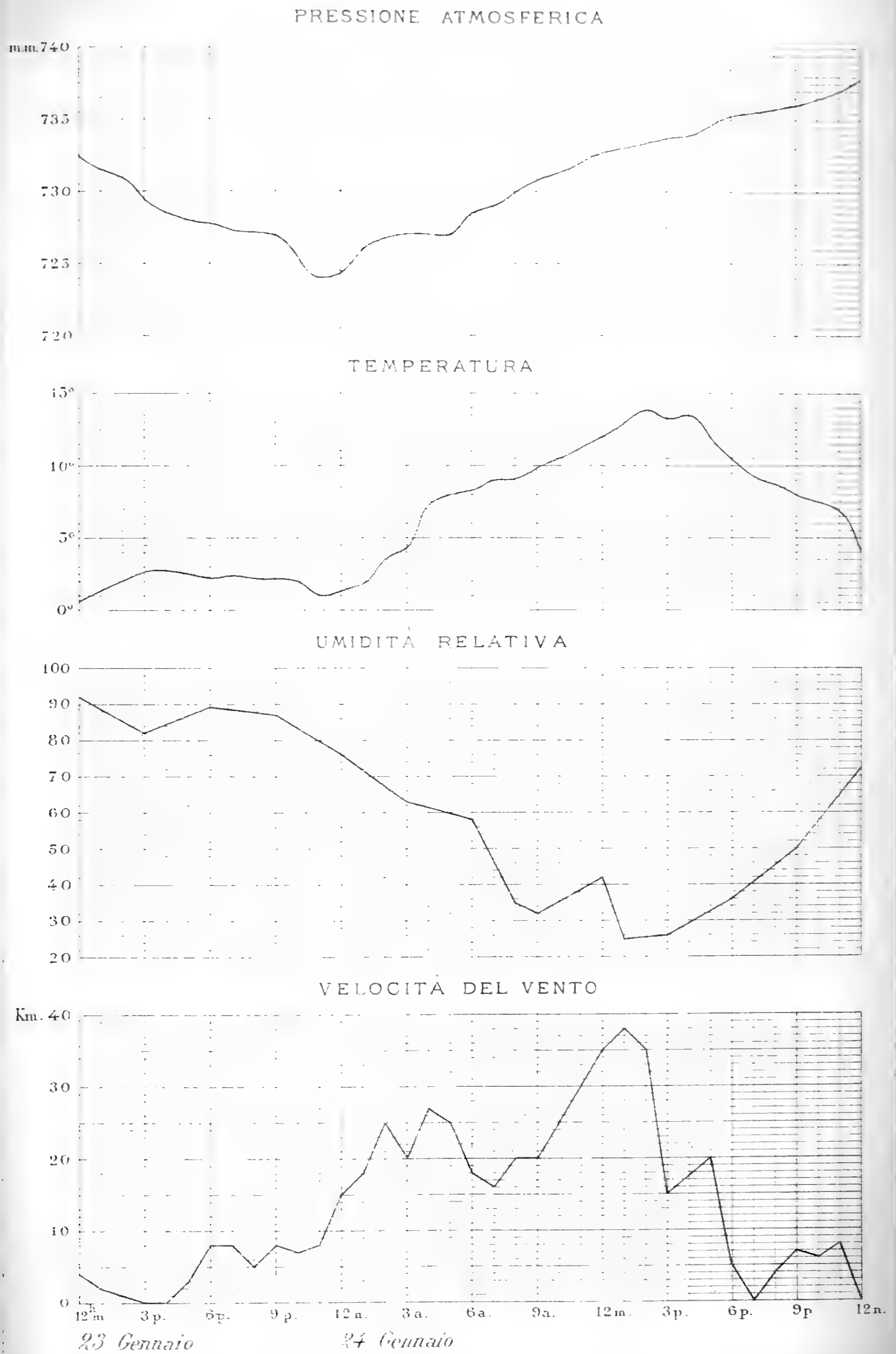
fino a tanto che incominci a condensarsi e a precipitare il vapore per il raffreddamento; quindi, per tutto il tempo che dura la condensazione descrive una linea come bc, e poi, quando l'aria discende dal fianco opposto della montagna il punto descrive una linea come cd, se immaginiamo che si arresti in d, ossia che la pressione finale sia uguale alla pressione che aveva l'aria al principio della salita.

Ora, per una determinata pressione, la temperatura assoluta di una certa massa di gas è proporzionale al suo volume, e perciò il segmento *ad* misura l'aumento di temperatura che l'aria subisce percorrendo il ciclo *abcd*. Da questo schema si vede ancora come la temperatura dell'aria che scende ai piedi delle Alpi dipende sopra tutto dalla temperatura dell'aria al principio del moto ascendente sull'altro versante e dall'abbondanza delle precipitazioni che si compiono nella salita. E questo spiega come i venti di Nord, i quali, nella loro discesa dalle Alpi, sembrerebbero dover dare origine a fenomeni analoghi a quelli studiati fin qui, non rechino in generale una temperatura mite con cielo sereno, quantunque alcuni rapidi aumenti di temperatura con venti di Nord siano stati osservati a Milano dallo Schiaparelli fin dal 1869.

Dalle osservazioni fatte parmi di poter così spiegare i caratteri del tipo isobarico, che mi ero proposto di studiare:

1° Quando un ciclone attraversa l'Europa al Nord dell'Italia, da ponente verso levante, il tempo peggiora sul versante occidentale delle Alpi; e, poichè sul Piemonte incomincia a spirare un vento forte di Ovest o di Sud-Ovest (che in alcuni luoghi può anche essere modificato dalle particolari condizioni orografiche), quivi il cielo si fa sereno e si innalza notevolmente la temperatura, specialmente alle falde delle montagne.

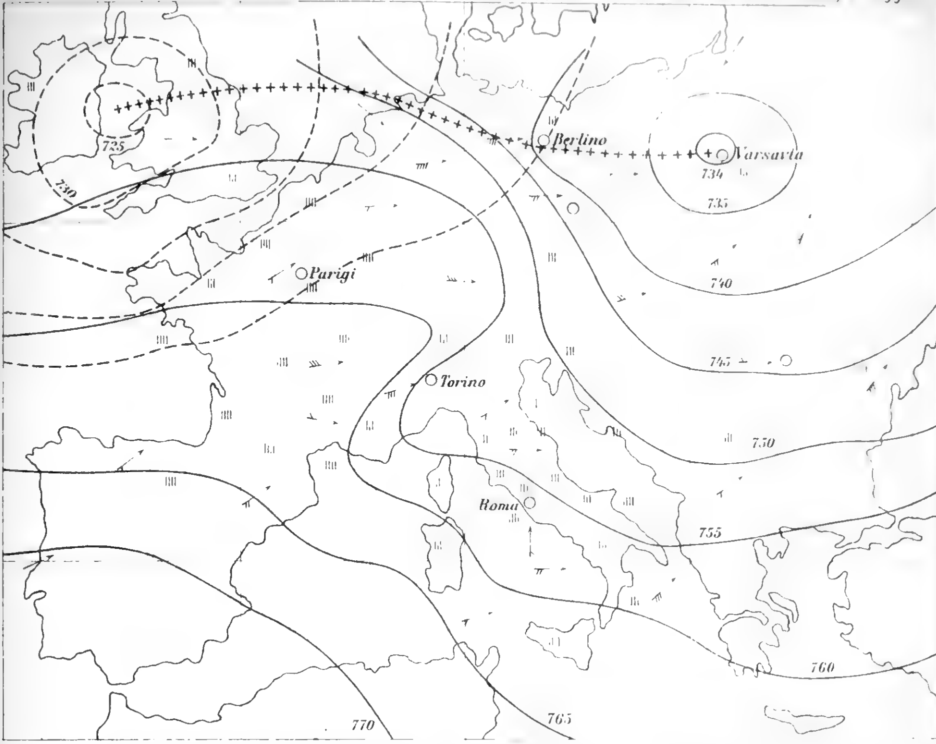
2° Questo vento caldo ed asciutto non è dovuto ad alcuna speciale corrente venuta dall'Equatore; ma la sua secchezza e la elevata temperatura sono una conseguenza della condensazione del vapore contenuto nell'aria quando questa si solleva, e del riscaldamento prodotto dall'aumentar della pressione, quando essa discende sul versante orientale, secondo le leggi generali della termodinamica.



Lit. Salussolia Torino

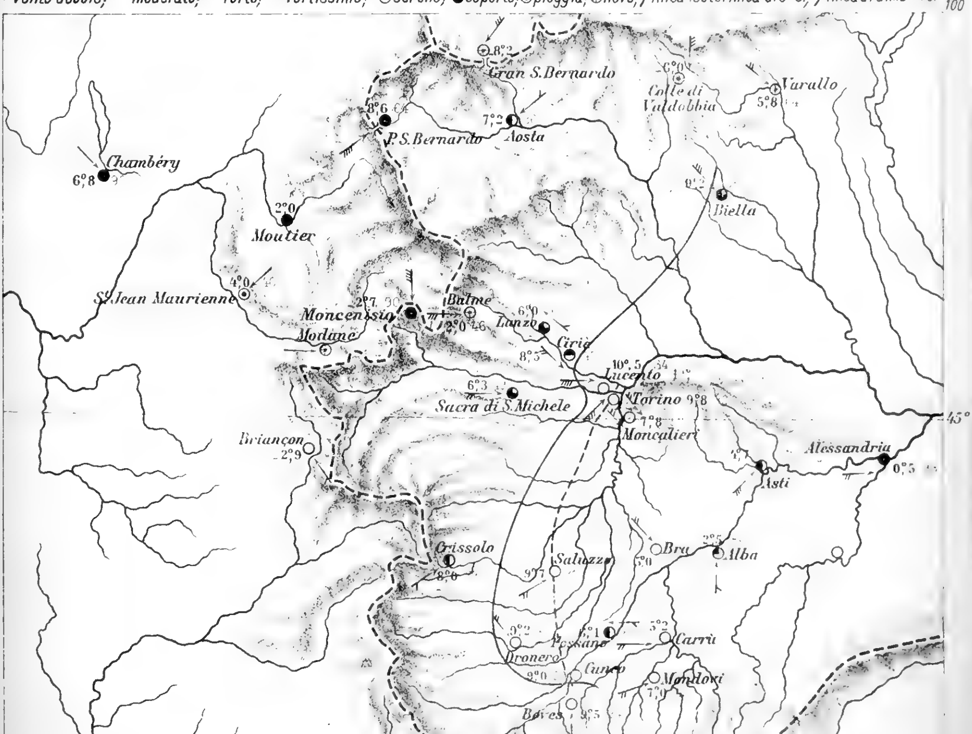
Distribuzione della Pressione atmosferica sull'Europa nel mattino del giorno 24 Gennaio 1890

/ Isobare al mattino 23 Genn. ×× Traiettoria del centro di depressione / Isobare del mattino 24 Genn. - Vento; Pioggia.



Condizioni atmosferiche nel Piemonte e nelle Alpi Occidentali il 24 Genn. 1890, 9h ant.

Vento debole; moderato; forte; fortissimo; ○ sereno; ● coperto; ⊙ pioggia; neve; / linea isotermica di 9° C.; / linea di umidtà relva $\frac{30}{100}$



Lit. Salussolia, Torino

Influenza dei cicloni sulla meteorologia locale:

Nota del Socio G. BERRUTI

Dalla Nota del dott. G. B. Rizzo, di cui l'egregio collega ha dato comunicazione all'Accademia, rilevo con piacere che all'osservatorio della R. Università di Torino si studi la meteorologia locale in relazione con quella generale. È oramai provato, che i fenomeni meteorologici locali dipendono in massima parte da fenomeni più generali, quali sono le grandi correnti atmosferiche ed i cicloni. L'Europa occidentale e la centrale subiscono gli effetti dei medesimi cicloni, che arrivano dall'America attraverso l'Atlantico. Il Piemonte ha contro gli effetti dinamici diretti dei medesimi una potente difesa nelle Alpi occidentali. L'influenza di questa difesa si manifesta nettamente nelle carte isobariche giornaliere pubblicate dall'ufficio centrale di meteorologia.

Percorrendo le Alpi ho avuto molte volte l'occasione di assistere allo spettacolo della bufera, che mentre infieriva sul versante francese e sulle alte vette, non riesciva a penetrare in Italia, che per brevi distanze attraverso i colli compresi fra i duemila ed i tremila metri di altezza. Questo fatto come l'altro, che le correnti umide del sud-ovest apportatrici di pioggia o di neve non arrivano in Piemonte attraversando le Alpi, ma vi arrivano solamente per riflessione o rigurgito dopo varcata la catena degli Appennini, io credo che valga a dimostrare, che anche nei cicloni allo spostamento verticale dell'aria dopo un certo percorso prevale lo spostamento orizzontale, ed è all'aria trascinata in questo movimento, che si devono attribuire i rapidi cambiamenti di temperatura, che si manifestano al passaggio del ciclone, il che concorderebbe col fatto, che in uno stesso luogo si ha aumento di temperatura e come un vento di scirocco quando passa l'arco di ciclone diretto da sud a nord, e diminuzione di temperatura quando passa l'arco diretto da nord a sud.

Così è avvenuto per l'ultimo grande ciclone, che ha attraversata l'Europa facendosi sentire dalla latitudine di Roma a quella di Berlino. Esso si manifestò da noi con due giorni di vento sciroccale a cui successero tosto quei venti freddi, che portarono la neve in Svizzera e le brinate in Francia ed in Liguria.

Del resto malgrado gli studi bellissimi già fatti specialmente dall'astronomo Faye sul moto ascendente o discendente dell'aria nell'interno dei cicloni, io credo che molto rimanga ancora da definirsi in proposito tanto più, che il ciclone deve subire delle grandissime deformazioni quando urta contro ineguaglianze del suolo, che come le Alpi non possono a meno di produrre correnti riflesse in direzioni diverse. Per studiare il fenomeno all'infuori di queste perturbazioni in Francia ed in Germania si sono creati degli osservatori in montagna. In Italia il Club alpino sta impiantandone uno sulla vetta del Monte-Rosa. Forse sarebbe meglio collocato per questo scopo un osservatorio sul Monviso o sopra altra vetta isolata delle Alpi occidentali.

Ad ogni modo è certo fin d'ora, che le più grandi perturbazioni atmosferiche dipendono dai cicloni e che colla osservazione degli effetti locali e coll'aiuto del telegrafo la meteorologia è già in grado di fare presagi praticamente utili. Con un buon servizio di comunicazioni telegrafiche internazionali, si poteva evitare il disastro di cui furono vittime al Montebianco nell'agosto 1890 il Conte di Villanova e le guide Castagneri e Maquignaz, poichè causa di quel disastro fu precisamente un ciclone, che già da due giorni percorreva la Francia producendo danni gravissimi sul suo passaggio, e che doveva inevitabilmente venire, come venne, a battere furiosamente contro le Alpi. Il viaggiatore e le guide avrebbero potuto riceverne avviso alla stazione telegrafica di Courmayeur in tempo utile per sospendere la loro partenza ed evitare il pericolo.

Quali possono essere i postulati fondamentali della Geometria proiettiva di uno $\mathbf{S}_r$*;*

Nota di FEDERICO AMODEO

> Hiervon aber ist eine nothwendige Folge, dass die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Grössenbegriffen ableiten lassen,.....
>
> RIEMANN, *Gesammelte Werke*, p. 254.

In un'epoca, in cui si discute con tanto interesse intorno alle idee fondamentali delle matematiche, non è forse fuor di proposito il cercare di mettere in evidenza quali debbano essere i postulati della geometria proiettiva, sia che si voglia considerarla limitata alle 3 dimensioni dello spazio ordinario, sia che si voglia estenderla ad un numero maggiore di dimensioni; sì che si possa dedurre da essi la rappresentazione dei punti dello spazio mediante coordinate (1). E ciò ha tanto maggiore interesse in quanto è noto che dalla geometria proiettiva si ricavano, con particolari considerazioni e opportune restrizioni, le tre geometrie metriche, *iperbolica*, *parabolica* ed *ellittica* (2). Quando questa questione fosse risoluta, si potrebbe anche di conseguenza definire che cosa è una *varietà lineare di dimensione* r, cioè precisare quali sono i caratteri che deve avere una varietà di dimensione r, perchè il suo studio sia analogo a quello di uno spazio lineare ad r dimensioni.

---

(1) Vedi a tal proposito, SEGRE, *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche* (*Rivista di Mat.*, vol I, p. 61, nota).

(2) Vedi le memorie del KLEIN pubblicate nei *Math. Ann.* Bd. IV, VI, VII e XXXVII sulla geometria non euclidea; e inoltre la 3ª parte del 2° vol. delle *Vorlesungen über Geometrie* di A. CLEBSCH pubblicate dal LINDEMANN, dove è esposto, secondo i concetti del KLEIN, lo studio di queste geometrie dipendentemente da quello della geometria proiettiva.

L'argomento si scinde in due parti ben distinte; l'una riguarda i postulati che necessitano per generare lo spazio ad r dimensioni; l'altra riguarda i postulati che bisogna aggiungere per rappresentare con coordinate i punti dello spazio, e stabilire l'equazione di uno S_{r-1} contenuto nello S_r.

Nessuno, che io sappia, ha ancora discusso l'argomento di cui qui si tratta; invece parecchi hanno trattato argomento analogo in riguardo allo spazio a 3 dimensioni, io mi limito a citare quelli che maggiormente ho avuto presenti in questa ricerca. In ordine cronologico essi sono:

R. De Paolis, *Sui fondamenti della geometria proiettiva;* Mem. Acc. dei Lincei, ser. 3ª, vol 9, p. 489, 1880-81;

M. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie,* Leipzig 1884;

Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*, 2º vol., Leipzig 1891 (1).

Il De Paolis tratta solo la seconda parte del tema e fonda tutto il suo lavoro sulla costruzione del *sistema armonico*, col quale stabilisce la teoria della proiettività e dell'involuzione, e se ne serve per passare alla rappresentazione della variabile numerica reale sulla retta. Si vedrà come si possa pervenire alla detta rappresentazione indipendentemente dal sistema armonico e dalla teoria dell'involuzione. Il Pasch, che tratta ambedue le parti dell'argomento, fonda il suo sistema di postulati sul concetto primitivo di segmento, e ammette che esso sia individuato dai suoi estremi; poi genera la retta, il piano e lo spazio; egli più che la geometria proiettiva tiene presente lo spazio fisico e poi generalizza il linguaggio estendendolo al modo di vedere della proiettiva. Il Lindemann stabilisce i concetti di piano e di retta in modo che non si potrebbero egualmente estendere ad uno spazio di qualunque numero di dimensione, e non si ferma abbastanza sulla seconda parte del tema.

Essendo nel mio intendimento di abbracciare in unico ragionamento, tanto lo spazio proiettivo, quanto ogni varietà lineare

---

(1) Un altro pregevole lavoro è stato pubblicato sullo stesso argomento dal Peano, intitolato: *I principii di geometria logicamente esposti*, Torino 1889. In esso l'A. segue con alquante modificazioni la via tenuta dal Pasch, limitandosi solo alla prima parte dell'argomento.

di forme geometriche, non ho creduto opportuno di seguire la via tracciata dal Pasch; sia perchè il segmento è il meno che si sappia ideare quando si voglia passare dal concetto ordinario di retta a quello più generale di un fascio di varietà qualsiansi, ma più perchè il segmento in un fascio non è *individuato* dai due suoi estremi; invece ho posto a base del mio sistema di postulati il concetto fondamentale della linea retta (1).

Il presente lavoro è diviso in tre paragrafi. Nel primo si tratta della generazione degli spazii e delle loro principali proprietà, e in esso si mostra che necessitano $r+2$ postulati per pervenire a generare uno spazio ad r dimensioni: si tenga però presente che di questi, solo due sono sostanzialmente diversi dai rimanenti e sono il postulato della retta e quello del piano, gli altri r sono identici nella forma e si potrebbero, volendo, ridurre ad un solo. Nel secondo paragrafo stabilisco in modo diretto la corrispondenza univoca fra i punti di una retta (o elementi di un fascio qualunque di varietà) e la variabile numerica: per questo si ha bisogno di altri tre postulati; l'uno riguarda la *forma* della retta; l'altro corrisponde al postulato di *Archimede;* il terzo è il postulato della *continuità*. Nel terzo paragrafo parlo del birapporto e della proiettività, accenno alla variabile immaginaria, e stabilisco la equazione di un S_{r-1} dello S_r (2).

Qualora si voglia passare dalla geometria proiettiva a una delle geometrie metriche, iperbolica, parabolica, o ellittica, ai postulati qui enunciati basterà aggiungere un postulato riguardante l'ente all'infinito e limitarsi alle trasformazioni proiettive che trasformano questo ente in se stesso.

(1) Avevo già terminato questo lavoro, quando dal chiar. prof. Veronese (che nel passato aveva nelle sue lezioni seguito i concetti del Pasch) mi fu comunicato a voce che egli nella sua opera sui fondamenti della geometria (in corso di stampa) nemmanco ha creduto più opportuno di poggiarsi sul concetto di segmento.

(2) Tengo ad avvertire che il numero dei postulati è rappresentato da $r+5$ per gli spazii di dimensione $r\geq 3$, e invece per l'S_1 e per l'S_2 sono gli stessi che per l'S_3; poichè per completare la geometria proiettiva della retta e del piano con questi postulati, a causa del teorema che tre elementi di una forma semplice, considerati in un certo ordine, individuano il quarto armonico v. n. 14), bisogna ammettere l'esistenza dell'S_3.

§ 1.

Generazione degli spazii.

1. — Supposto che si sia definito che cosa è un punto (1), bisogna ammettere che:

Post. 1.° *Esistono dei punti.*

Per indicare un punto useremo il simbolo S_0, e per indicare un determinato punto useremo una lettera italica minuscola marcata. Quando diremo che due punti **a**, **b** *coincidono*, o più brevemente che **a** $=$ **b**, intendiamo di dire che **a** e **b** rappresentano lo stesso punto. Per comodità diremo *indipendenti* due punti distinti.

2. — Post. 2.° *Dati due punti indipendenti* **a**, **b**, *è da essi individuata una classe di infiniti punti, di cui quei due fan parte, la quale ha la proprietà che ogni altra classe analoga di punti, che contenga quei due, è identica ad essa.*

Questa classe di infiniti punti dicesi *retta*, o *fascio*, o *varietà lineare* ∞^1. Con questo postulato ammettiamo come *ente* non definito la retta, e tale sarebbe se si trattasse solo della retta ordinaria, nel caso più generale del fascio propriamente detto, sarà sempre possibile, per le cognizioni che si hanno dell'ente che si assume come punto, di poter generare o costruire geometricamente un fascio. Per indicare una retta useremo il simbolo S_1; e per indicare la retta individuata dai punti **a**,**b** useremo la notazione **ab**: e diremo che **ab** congiunge **a** con **b**, ovvero che essa passa per i punti che essa contiene, che appartiene a tutti i suoi punti, e che i punti **a**, **b**,... della retta **ab** appartengono alla retta. Quando diremo che due rette *coincidono*, o più brevemente che **ab** $=$ **cd**, intendiamo di dire che **ab** e **cd** rappresentano la medesima retta; in generale estenderemo questo significato a tutti gli altri enti che in seguito andremo nominando.

---

(1) Non è necessario per lo scopo che ci proponiamo che il punto sia il punto ordinario; può essere l'insieme di un gruppo di punti, una curva o superficie di un determinato ordine, un complesso, un connesso, una *varietà qualsiasi a qualunque numero di dimensioni*, un ente geometrico qualunque.

Dal post. 2° si ricava che **ab** = **ba**; e inoltre che *la retta* **ab** *è pure individuata da due qualunque altri suoi punti indipendenti* **c, d**; cioè che se **c, d** sono due punti indipendenti della retta **ab**, è **ab** = **cd**.

3. — Con gl'infiniti punti di una retta potrebbero essere esauriti i punti che si sono supposti esistere mediante il post. 1°; quindi è necessario ammettere che:

Post. 3.° *Fuori della retta individuata da' due punti* **a, b** *esiste ancora un punto.*

Tre punti che non appartengono ad una medesima retta, oppure una retta ed un punto che non si appartengono si dicono *indipendenti.*

Siano $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ tre punti indipendenti; il luogo di tutti i punti degli S_1 che congiungono uno dei tre punti, p. es. $\mathbf{a}_0$, ai punti della retta che passa per i rimanenti punti $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, ciascuno considerato una volta sola (anche se fosse comune a due di essi come avviene per i punti della retta $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, o a più di essi come avviene per il punto $\mathbf{a}_0$), è un nuovo ente che chiameremo *piano*, o *varietà lineare* ∞^2.

Due rette, se non coincidono, non possono avere più di un punto comune (punto *d'intersezione*); quindi, *ognuno degli* S_1 *che passano per* $\mathbf{a}_0$ *non può segare la retta* $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$ *che in un punto solo.*

Per indicare un piano useremo il simbolo S_2, e per indicare che esso si è generato nel modo sopra indicato, scriveremo $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$.

Di ogni retta i cui punti appartengono ad un S_2, si dirà che *appartiene* al piano o *giace* o *è contenuta* nel piano, e si dirà che il piano *passa* per la retta o *appartiene* alla retta.

È evidente che se $\mathbf{b}_0\mathbf{c}_0 = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, sarà $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0\mathbf{c}_0 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$; o, in altre parole, che il piano è pure individuato dal punto $\mathbf{a}_0$ e da due altri punti indipendenti della retta $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$.

4. — Per poter ora passare ad esaminare la proprietà del piano, bisogna ammettere qualche cosa che lo distingua da ogni altra varietà ∞^2; a noi pare che, fra le diverse proprietà del piano che si potrebbero assumere come postulati, sia preferibile questa: *il piano è individuato da 3 suoi punti*, che noi limiteremo alla seguente forma:

Post. 4.° *Dati i tre punti* $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *e costruito il piano* $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, *ogni altro piano* $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{bc}$ *che contenga i punti* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *coincide con esso.*

Derivano dal post. 4° le seguenti proposizioni: *Se* $\mathbf{b}_1$ *è un punto della retta* $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_2$, sarà $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$. *Ogni retta che passa per il punto* $\mathbf{a}_1$ *e per un punto dell'* $S_1\,\mathbf{a}_0\mathbf{a}_2$ (o *per il punto* $\mathbf{a}_2$ *e per un punto dell'* $S_1\,\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1$) *giace nel piano* $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$.

Il piano $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$ *è identico al piano* $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_0\mathbf{a}_2$ (poichè ogni punto dell'uno giace nell'altro), *ed al piano* $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_0\mathbf{a}_1$. Perciò l'$S_2$ si può indicare anche con la scrittura $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$.

Se $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ *sono due punti rispettivamente degli* S_1 $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1$, sarà $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$; e quindi: *Ogni retta che unisce due punti indipendenti di due degli* S_1 *che congiungono i tre punti* $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *giace nel piano* $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$.

Se $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *sono due punti indipendenti non appartenenti ad uno dei due raggi* $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_2$, *sarà* $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{bc} = \mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$; e quindi: *Ogni retta che unisce due punti del piano giace nel piano.*

Se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *sono tre punti indipendenti del piano* $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, *sarà* $\mathbf{abc} = \mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$.

E finalmente: *Due rette* $\mathbf{ab}$, $\mathbf{cd}$, *che congiungono due coppie di punti di un piano, si segano in un punto;* poichè se non avessero alcun punto comune, nel piano $\mathbf{a} \cdot \mathbf{cd}$ non sarebbe compresa la retta $\mathbf{ab}$, e quindi nemmanco il punto $\mathbf{b}$.

5. — Post. 5.° *Fuori del piano* $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$ *esiste ancora un punto.*

Diremo *indipendenti* quattro punti che non appartengono ad uno stesso piano. Se quattro punti sono indipendenti; tre qualunque fra essi debbono pure essere indipendenti, poichè se fossero sopra una retta, il piano, che passa per essa e pel quarto punto, conterrebbe i punti dati; assurdo. *A fortiori*, anche due qualunque dei punti dati debbono essere indipendenti.

Un punto ed un piano che non si appartengono si diranno pure *indipendenti.*

Se quattro punti sono indipendenti, la retta che unisce due di essi, e quella che unisce gli altri due non hanno alcun punto comune.

Due rette che non hanno alcun punto comune si dicono *indipendenti.*

6. — Siano $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ quattro punti indipendenti, il luogo dei punti degli S_1 che congiungono uno di questi punti, p. es. $\mathbf{a}_0$, ai punti del piano individuato dai rimanenti punti $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$, contato ciascuno una volta sola, è un nuovo ente, che chiameremo *spazio a tre dimensioni* o *varietà lineare* ∞^3.

Per indicare uno spazio a tre dimensioni useremo il simbolo S_3, e quando vogliamo indicare che è generato nel modo qui indicato, diremo l'S_3 $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$. Sono evidenti le seguenti proposizioni.

Se $\mathbf{b}_0\mathbf{c}_0\mathbf{d}_0$ *sono punti indipendenti dell'* S_2 $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$, *sarà* $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0\mathbf{c}_0\mathbf{d}_0 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$.

L' S_3 $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ *è pure il luogo di tutti gli* S_2 *che passano per la retta* $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1$ *e per i punti della retta* $\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$.

Ogni S_2 *che passa per* $\mathbf{a}_0$ *e per una retta qualsiasi del piano* $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ *giace nell'*S_3.

Ogni S_1 *che passa per due punti* $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ *dello* S_3 $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ *giace in esso.*

Ogni S_2 *che passa per tre punti indipendenti* $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ *di* $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ *giace in esso.*

L' S_3 $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ *è identico agli* S_3 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_0\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$; e perciò indicheremo l'S_3 anche più semplicemente con $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$.

Se $\mathbf{bcd}$ *sono tre punti indipendenti di* S_3 che *non appartengono ad un piano di* $\mathbf{a}_0$, *sarà* $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{bcd} = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$.

Lo spazio $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ *è individuato da quattro qualunque* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ *dei suoi punti indipendenti;* poichè se $\mathbf{acd}$ è un piano che non passa per $\mathbf{a}_0$ (1), sarà $\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{acd} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_0\mathbf{cd} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{bcd}$. Quindi possiamo ancora aggiungere che lo stesso S_3 è pure individuato da un punto e da un piano in esso contenuti, o da due rette, purchè questi elementi siano indipendenti.

Due piani di un S_3, $\mathbf{bcd}$, $\mathbf{b'c'd'}$, *se non coincidono devono avere a comune una retta.*

Un piano $\mathbf{bcd}$ *ed una retta* $\mathbf{a'b'}$ di un S_3 se non *si appartengono devono avere in comune un punto.*

---

(1) Si noti che, se tre piani $\mathbf{abc}$, $\mathbf{acd}$, $\mathbf{abd}$ dei quattro determinati da $\mathbf{abcd}$ passano per $\mathbf{a}_0$, sarà $\mathbf{a}_0$ coincidente con $\mathbf{a}$ e si ricade nel teorema precedente; il quarto piano non può passare per $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}$.

7. — Post. 6.° *Fuori dell'*S_3 $a_0 \cdot a_1 a_2 a_3$ *esiste ancora un punto.*

Cinque punti a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 non appartenenti ad uno stesso S_3, oppure un punto ed un S_3 che non si appartengono si diranno *indipendenti.*

Analogamente a quando si è fatto nel n. 6, si mostrerebbe che cinque punti indipendenti generano un S_4 (*spazio a* 4 *dimensioni,* o *varietà lineare* ∞^4), luogo dei punti degli S_1 che congiungono uno dei punti dati ai punti dell'S_3 determinato dagli altri quattro; che questo S_4 contiene tutti gli S_1, S_2, S_3, che passano per due, tre o quattro dei suoi punti; che esso stesso è individuato da 5 qualunque dei suoi punti indipendenti.

E così di seguito, ammettendo che *fuori dell'*S_4 $a_0 a_1 a_2 a_3 a_4$ *esiste ancora un punto* (post. 7°) si genera un S_5, e con un altro analogo postulato (8°) si genera un S_6, ecc., ecc., fino a che si giunge con un (r+1)^{mo} postulato a generare un S_{r-1}, che è individuato da r qualunque dei suoi punti, purchè indipendenti fra loro.

In generale diremo che $k+1$ punti sono indipendenti, quando essi non appartengono ad uno stesso S_{k-1}, e quindi nemmanco ad uno spazio di minore dimensione. E diremo che due spazii contenuti in un medesimo spazio sono indipendenti, se essi non hanno alcun punto comune.

8. — Post. (r+2).^{mo} *Fuori dell'*S_{r-1} *esiste ancora un punto.*

Sian dati r+1 punti indipendenti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{r-2}, a_{r-1}, a_r$, il luogo dei punti degli S_1 che congiungono uno di questi punti, p. es. a_0, ai punti dell'S_{r-1} individuato dai rimanenti punti $a_1, a_2, \ldots, a_r$, contato ciascuno una volta sola, è un nuovo ente che chiameremo *spazio ad* r *dimensioni,* o *varietà lineare* ∞^r.

Indicheremo siffatto ente col simbolo S_r, e per indicare il modo di generazione qui accennato scriveremo $a_0 \cdot a_1 a_2 \ldots a_r$. Lo stesso S_r è pure il luogo dei punti di tutti gli S_2 che passano per l'S_1 $a_0 a_1$ e per i punti dell'S_{r-2} $a_2 a_3 \ldots a_r$, ecc., ecc.; ed è anche luogo dei punti di tutti gli S_{r-1} che passano per l'S_{r-2} $a_0 a_1 \ldots a_{r-2}$ e per i punti dell'S_1 $a_{r-1} a_r$.

Lo stesso S *contiene tutti gli* $S_2, S_3, \ldots, S_{r-2}$, *che congiungono il punto* a_0 *agli* $S_1, S_2, \ldots S_{-3}$ *dell'*S_{r-1} $a_1 a_2 \ldots a_r$; perchè questi sono contenuti negli spazii precedentemente nominati; *e contiene ogni* S_{r-1} *che passa per* a_0 *e per un* S_{r-2} *dell'*S_{r-1} $a_1 a_2 \ldots a_r$, perchè esso contiene quelli e soli gli S_1 che congiungono $\mathbf{a}_0$ ai punti dell'S_{r-2}.

Ogni S_k $(k=1,2,\ldots,r-1)$ *che passa per* $\mathbf{a}_0$ *non può avere con l'* S_{r-1} $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2..\mathbf{a}_r$ *alcun altro punto comune oltre l'* S_{k-1} *pel quale esso passa.*

Ogni S_1 *che è individuato da* 2 *punti* $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ *indipendenti dello* S_r *è contenuto nello* S_r*;* poichè esso o passa per $\mathbf{a}_0$ e allora è un S_1 che proietta un punto di $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_r$, o è contenuto nell'$S_2$ $\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ il quale è a sua volta contenuto in S_r.

Ogni S_{k-1} *individuato da* k *punti indipendenti dello* S_r $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_{k-1},\mathbf{b}_k$ $(k\leq r)$ *giace in esso;* poichè ogni S_1 dell'S_{k-1} $\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_2..\mathbf{b}_{k-1}\mathbf{b}_k$ sta nell'S_r.

L' S_r $\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2..\mathbf{a}_r$ *è identico all'* S_r $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_0\mathbf{a}_2..\mathbf{a}_r$, poichè ogni punto dell'uno è punto dell'altro. Si ha analogamente $\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2..\mathbf{a}_r=$ $=\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1..\mathbf{a}_r=\ldots=\mathbf{a}_r\cdot\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2..\mathbf{a}_{r-1}$; e perciò indicheremo l'S_r più semplicemente scrivendo $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1..\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r$.

Se $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots\mathbf{b}_{r-1},\mathbf{b}_r$ *sono* r *punti indipendenti di* S_r *non appartenenti ad un* S_{r-1} *di* $\mathbf{a}_0$, *sarà* $\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2..\mathbf{b}_r=\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1..\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r$. Difatti ogni punto di $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2..\mathbf{b}_{r-1}\mathbf{b}_r$, essendo un punto di $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1..\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r$, con $\mathbf{a}_0$ genera un raggio di $\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2..\mathbf{a}_r$; viceversa l'$S_r$ $\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2..\mathbf{b}_r$ contiene l'S_{r-1} $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2..\mathbf{a}_r$, e perciò ogni punto di $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2..\mathbf{a}_r$ con $\mathbf{a}_0$ produce un raggio di $\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2..\mathbf{b}_r$.

L' S_r $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1..\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r$ *è individuato da* r+1 *suoi punti indipendenti* $\mathbf{b}_0,\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{r-1},\mathbf{b}_r$; poichè, se $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_2..\mathbf{b}_r$ è un S_{r-1} individuato dai punti dati, che non passi per $\mathbf{a}_0$ (1), sarà $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1..\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r=$ $=\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{b}_0\mathbf{b}_2..\mathbf{b}_r=\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{a}_0\mathbf{b}_2..\mathbf{b}_r=\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2..\mathbf{b}_r$.

Quindi possiamo ancora aggiungere che *lo stesso* S_r *è pure individuato dallo spazio individuato da un gruppo qualunque* $\mathbf{b}_0,\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_i$ *degli* r+1 *punti indipendenti, e dallo spazio individuato dagli* r−i *punti rimanenti.*

9. — Senza bisogno di alcun nuovo postulato si possono dimostrare tutte le proprietà che citiamo in questo numero e nei seguenti n.[i] 10 e 11.

Se due spazii contenuti in un S_r *hanno* i+1 *punti comuni indipendenti fra loro, essi hanno a comune l'* S_i *individuato da questi punti.*

---

(1) Il punto $\mathbf{a}_0$ può trovarsi al massimo sopra r di questi S_{r-1}, ma allora coincide con uno dei punti $\mathbf{b}$ e si ricade nel teorema precedente.

Due spazii indipendenti S_k, $S_{k'}$ *individuano un* $S_{k+k'+1}$ *che li contiene, nè sono contenuti in uno spazio di dimensione minore.* Da questo teorema si ricavano i seguenti corollarii:

Dati due spazii indipendenti $S_k, S_{k'}$, *un gruppo di* $k+1$ *punti indipendenti dell'uno ed un gruppo di* $k'+1$ *punti indipendenti dell'altro formano un gruppo solo di* $k+k'+2$ *punti pure indipendenti.*

L'S_r *è pure individuato da un* S_k *e da un* S_{r-k-1} *indipendenti.*

L'S_r *è pure generato da un numero* s *di spazii* $S_k, S_{k'}, S_{k''}, ..$ *indipendenti a due a due, purchè sia* $\Sigma k = r+1-s$.

10. — *Due spazii* $S_k, S_{k'}$, *che hanno in comune un* S_i, *e non uno spazio maggiore, individuano un* $S_{k+k'-i}$, *e questo è il minimo spazio in cui essi sono contenuti.*

Dal quale teorema si deducono i seguenti:

Se $k+k'-i=r$, *i due spazii* $S_k, S_{k'}$, *individuano l'*S_r *in cui sono contenuti;* o altrimenti:

Se due spazii $S_k, S_{k'}$, *si segano in un* $S_{r-k-k'}$, *e non in uno spazio maggiore, essi individuano lo spazio* S_r.

Se $k+k'+2$ *punti sono indipendenti, gli spazii individuati da un gruppo di* $k+1$ *di questi punti, e lo spazio individuato dai rimanenti* $k'+1$ *punti, sono pure indipendenti.*

Se si ha un gruppo di punti indipendenti, e si suddivide in gruppi minori, gli spazii individuati da questi gruppi sono a due a due indipendenti.

11. — *Se la somma degli indici di due spazii* $S_k, S_{k'}$, *contenuti in* S_r *è maggiore di* $r-1$, *essi devono almeno avere a comune un* $S_{k+k'-r}$. Oppure più in generale:

Se $S_k, S_{k'}$, *sono due spazii contenuti in un* S_m *e non in uno spazio minore* $(m \leqq r)$, *essi hanno a comune un* $S_{k+k'-m}$.

E quindi si ha pure:

Se s *spazii* S_k, $S_{k'}$, $S_{k''}$, ... *sono contenuti in un* S_m *e non in uno spazio minore* $(m \leqq r)$, *essi devono avere a comune solo un* $S_{\Sigma k-(s-1)r}$. E come casi particolari:

Due S_{k-1} *se non coincidono hanno a comune un* S_{r-2}.

Un numero h *di* S_{r-1} *devono almeno avere a comune un* S_{r-h}; *ed* r S_{r-1} *devono almeno avere un punto comune.*

12. — *Proiettare* da un S_k (ente di *proiezione*) una figura (un insieme di enti dello S_r) composta di $S_0, S_1 \dots S_{r-k-2}$, vuol dire costruire tutti gli $S_{k+1}, S_{k+2} \dots, S_{r-1}$ (enti proiettanti) che congiungono il dato S_k rispettivamente agli $S_0, S_1 \dots, S_{r-k-2}$ della figura. In particolare la figura che si ottiene col proiettare un numero finito o infinito di punti di un S_1 (punteggiata) da un S_k che non sega l'S_1 si dirà *fascio* di S_{k+1}, e l'S_k di proiezione si dirà sostegno del fascio. Pel teorema 2° del n. 9, il fascio di S_{k+1} è contenuto insieme all'S_1 che proietta in uno S_{k+2}.

Segare con un S_k (ente di *sezione*) una figura, formata di $S_{r-1}, S_{r-2}, \dots, S_{r-k}$, vuol dire costruire tutti gli $S_{k-1}, S_{k-2}, \dots, S_0$, comuni rispettivamente all'S_k di sezione ed agli $S_{r-1}, S_{r-2}, \dots, S_{r-k}$ della figura data. In particolare un fascio di S_{k+1} si può segare con una retta che non sega il sostegno del fascio, e che è contenuto nell'S_{k+2} costituito dai punti degli S_{k+1} del fascio, e si otterrà per sezione una punteggiata su quello S_1.

Le *punteggiate* ed i *fasci* li diremo con una frase solo *forme semplici*.

§ 2.

Corrispondenza univoca continua fra i punti di una retta e la variabile numerica reale.

13. — Per stabilire una corrispondenza univoca continua fra i punti di una retta e la variabile numerica, non basta aver supposto che i punti della retta fossero in numero infinito, bisogna ammettere alcune altre proprietà che ci possono far pervenire a stabilire il concetto della continuità della retta. A tal fine ammetteremo che (1):

Post. $(r+3)$.^{mo} *I punti della retta sono disposti in modo che ogni punto di essa può, solamente in due direzioni (o versi), opposte l'una all'altra, passare dalla sua posizione a*

(1) Molti autorevoli matematici pervengono a stabilire il continuo rettilineo e le direzioni della retta, poggiandosi sul concetto delle grandezze; noi in questo punto non possiamo far ciò, essendo che pel momento per noi non ha significato la grandezza, ma perverremo fra poco al concetto di distanza fra due punti della retta.

quella di un altro punto della retta; e, in ciascuna di queste direzioni, può ogni punto della retta passare successivamente sopra tutte le posizioni dei punti della retta (descrivere la retta) *e ritornare alla primitiva posizione, senza passare due volte sopra alcun punto della retta.*

Diremo *segmento* o *parte* della retta, quell'insieme dei suoi punti che sono percorsi da un punto che, in un'assegnata direzione, passa da una posizione **a** ad una diversa posizione **b**; i punti **a**, **b** si diranno *estremi* del segmento, e più precisamente il punto **a** si dirà *origine* e **b** il termine del segmento. Tutti i punti del segmento si possono dire *compresi* nel segmento, o *interni*, e tutti gli altri punti della retta si diranno *esterni* al segmento. Se il punto **a** dopo aver percorso il segmento **ab**, continua a descrivere la retta nella stessa direzione, percorrerà le posizioni dei punti esterni al segmento **ab**, il loro insieme costituisce altro segmento che dicesi *complementare* del primo. Una coppia di punti **a**, **b** non basta ad individuare un segmento, bisogna inoltre assegnare la direzione colla quale il segmento è percorso, e la sua origine, oppure bisogna assegnare un punto compreso nel segmento che si vuole individuare.

Una coppia di punti **a**, **b** di una retta si dice *separata* da un'altra coppia di punti **c**, **d** della stessa retta, quando per andare da **a** a **b** si debba passare sopra l'una o sopra l'altra posizione dei punti **c**, **d**. In tal caso anche **cd** è separata da **ab**. Se **ab**, **cd** sono due coppie separate, il punto **d** è esterno al segmento **acb**.

Due punti interni o due punti esterni ad un segmento non sono separati dagli estremi del segmento.

Quattro punti **a**, **b**, **c**, **d** *di una retta non possono separarsi che in un modo solo.*

Mentre un punto **a** descrive nelle due direzioni possibili una data retta *R*, il raggio che lo congiunge ad un punto fisso **o** fuori della retta descrive nel piano *R***o** *tutte* le rette del fascio (**o**), e quando il punto **a** sarà tornato alla primitiva posizione, la retta **oa**, senza mai ripassare sopra alcuna retta del fascio (chè altrimenti un raggio del fascio avrebbe due punti comuni colla retta), avrà descritto il fascio; nè si può dire che il fascio potrebbe essere descritto dal suo raggio in più di due modi, perchè passando, con una sezione, dal fascio alla punteggiata, sarebbe anche questa percorsa in un altro modo diverso da quello supposto. Se il punto **a** per passare da **a** in **b** deve coincidere con **c** o con **d**, anche il raggio **oa** per passare da **oa** in **ob** deve coincidere o con **oc** o con **od**; quindi, come quattro punti si separano sulla retta, così i quattro raggi che proiettano quella punteggiata da **o** si separano nel fascio. E analogamente, se si sega il fascio con un'altra retta del piano che non passa per **o** i quattro raggi saranno segati in punti **a'**, **b'**, **c'**, **d'** che si separano allo stesso modo. Estendendo questo concetto a qualunque altro fascio di S_{k+1} che si ottenga per proiezione dalla retta, si ha che la separazione delle coppie è proprietà che non si altera per qualunque operazione proiettiva (insieme di proiezioni e sezioni).

14. — Quattro punti **a**, **b**, **c**, **d** di una retta disposti nell'ordine considerato si dicono *armonici*, se in un piano che passa per la retta si possa costruire un quadrangolo completo di cui due lati opposti passino per **a**, due altri lati opposti passino per **b**, uno per **c** e l'altro per **d**.

Dati tre punti **a**, **b**, **c**, *considerati nell'ordine in cui sono scritti, si può sempre trovare un altro punto* **d** *tale che il gruppo* **abcd** *sia armonico, e questo punto è unico.* La dimostrazione di questo teorema si può condurre come nello *Staudt* (*Geometrie der Lage*, tradotta in italiano da M. Pieri, 1889), astraendo come qui facciamo dal concetto di parallelismo.

Se **abcd** *sono quattro punti armonici di una retta, la coppia* **ab** *è separata necessariamente dalla coppia* **cd**. Infatti la tetrade armonica **abcd** è proiezione in due modi diversi di una medesima *tetrade* armonica **a'b'c'd'**, e quindi se **ac** separasse **bd**, ovvero **ad** separasse **bc**, si cadrebbe nell'assurdo che quattro punti di una retta si potrebbero separare in due modi diversi. Diremo, come al solito, elementi coniugati gli elementi di ciascuna coppia.

Se di quattro punti armonici di una retta due coincidono, uno degli altri due deve coincidere con essi.

Diremo *proiettive fra loro* due forme semplici quando sono *riferite fra loro* in modo tale che ad ogni forma armonica nell'una corrisponde una forma armonica nell'altra.

15. — Assegniamo sulla retta tre punti arbitrari **a**, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, e costruiamo i gruppi armonici $\mathbf{ab}_1\mathbf{b}_0\mathbf{b}_2$, $\mathbf{ab}_2\mathbf{b}_1\mathbf{b}_3$, $\mathbf{ab}_3\mathbf{b}_2\mathbf{b}_4$..., $\mathbf{ab}_\nu\mathbf{b}_{\nu-1}\mathbf{b}_{\nu+1}$...; il punto $\mathbf{b}_2$ sarà separato da $\mathbf{b}_0$ mediante $\mathbf{ab}_1$, e si trova quindi fuori del segmento $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$; il punto $\mathfrak{b}_3$ è separato da $\mathfrak{b}_1$, mediante $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_2$, e si trova fuori di $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_2$, ecc., ecc. In tal modo avremo assegnate sulla retta le posizioni di un numero illimitato di punti $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3 .. \mathfrak{b}_{\nu-1}\mathfrak{b}_\nu\mathfrak{b}_{\nu+1} ...$, che si succedono l'uno all'altro in modo che ciascuno, p. es. $\mathfrak{b}_{\mu+1}$, è esterno al segmento $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_\mu$ che contiene i precedenti; e intanto tutti devono essere contenuti nel segmento $\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}$, e di essi nessuno potrà coincidere con $\mathfrak{a}$. Ma si potrebbe dubitare che la serie di punti possa esser contenuta in un segmento $\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1\mathfrak{p}$ compreso nel segmento $\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}$, quindi abbiam bisogno di ammettere che:

Post. $(r+4)$.^{mo} *Se* $\mathfrak{p}$ *è un punto del segmento* $\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}$, *assegnato arbitrariamente fra* $\mathfrak{b}_1$ *ed* $\mathfrak{a}$, *fra i punti della serie* $\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3 ... \mathfrak{b}_4$ *ve ne è sempre uno che è compreso fra* $\mathfrak{p}$ *ed* $\mathfrak{a}$, *nel segmento* $\mathfrak{b}_0\mathfrak{p}\mathfrak{a}$, *anche se il punto* $\mathfrak{p}$ *non faccia parte della serie stessa* (1).

E quindi si deduce che fra $\mathfrak{p}$ ed $\mathfrak{a}$ vi è sempre un numero infinito di elementi della suddetta serie, e ciò esprimeremo con frase semplice dicendo che gli elementi di questa serie *si avvicinano indefinitamente ad* $\mathfrak{a}$ nella direzione $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3 ...$, che chiameremo *direzione positiva* della retta.

Con i medesimi tre punti $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$, costruiamo i gruppi armonici $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_{-1}$; $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_{-1}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_2$; $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_{-2}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3$ .. $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_{-\nu}\mathfrak{b}_{-\nu+1}\mathfrak{b}_{-\nu-1}$, sarà il punto $\mathfrak{b}_{-1}$ esterno al segmento $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_0$, il punto $\mathfrak{b}_{-2}$ esterno al segmento $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_{-1}$, e quindi al segmento $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_{-1}$, e così di seguito; quindi i punti $\mathfrak{b}_{-1}\mathfrak{b}_{-2}\mathfrak{b}_{-3} ... \mathfrak{b}_{-\nu}\mathfrak{b}_{-\nu-1} ...$ si succedono l'uno all'altro sulla retta in modo che ciascuno, p. es. $\mathfrak{b}_{-\nu-1}$, è esterno al segmento

(1) È precisamente in questo postulato che si ripercuote la differenza fra il nostro metodo e quello del Pasch. Lo stesso Pasch, riferendosi al modo come egli ricava questa proposizione dal postulato di Archimede, dice (V. l. c. p. 126): Das Axiom, durch welches Herrn F. Klein die Lücke in Staudt's Begründung der Projectivität ausfüllt, kommt auf den eben formulirten Satz hinaus. Diesen als Grundsatz anzunehmen, würde mit den hier festgehaltenen Anschauungen nicht in Einklang stehen. Diesen abgesehen davon, dass eine Beobachtung sich überhaupt nicht auf unendlich viele Dinge beziehen kann, ist die Aufstellung jenes Satzes von unserem Standpunkte aus auch deshalb noch nicht zulässig, weil wir (vgl. seite 18) in einer Strecke nicht unendlich viele Punkte annehmen dürfen, ohne dem Sinne des Wortes Punkt eine weitere als die bisherige Ausdehnung zu geben und uns mithin von seiner ursprünglichen Bedeutung noch mehr zu entfernen. Eine solche Ausdehnung wird erforderlich, wenn man die Punkte der Geraden in vollständige Analogie mit den Gliedern der aus den rationalen und irrationalen reellen Zahlen bestehenden Reihe bringen will; ...

$\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_{-\nu}$ che contiene i precedenti; tutti questi punti sono contenuti nel segmento $\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_{-1}\mathfrak{a}$, e di essi nessuno potrà coincidere con $\mathfrak{a}$.

Se $\mathfrak{q}$ *è un punto preso ad arbitrio nel segmento* $\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_{-1}\mathfrak{a}$ *fra* $\mathfrak{b}_{-1}$ *ed* $\mathfrak{a}$, *anche se esso non coincide con nessun punto della serie* $\mathfrak{b}_{-1}\mathfrak{b}_{-2}\ldots\mathfrak{b}_{-\nu}\ldots$ *vi sono infiniti punti di questa serie compresi fra* $\mathfrak{q}$ *ed* $\mathfrak{a}$ *nel segmento* $\mathfrak{b}_{-1}\mathfrak{q}\mathfrak{a}$. Difatti, si proietti la forma $\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_{-1}\mathfrak{a}$ nella forma $\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}$, ogni punto della serie $\mathfrak{b}_{-1}\mathfrak{b}_{-2}\ldots\mathfrak{b}_{-\nu}$ si proietterà nel punto della serie $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\ldots\mathfrak{b}_\nu$ di indice eguale, il punto $\mathfrak{q}$ si proietterà in un punto $\mathfrak{q}'$ compreso fra $\mathfrak{b}_1$ ed $\mathfrak{a}$ nel segmento $\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}$; ma fra $\mathfrak{q}'$ ed $\mathfrak{a}$ vi saranno infiniti punti della serie $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\ldots$, quindi infiniti punti della serie $\mathfrak{b}_{-1}\mathfrak{b}_{-2}\mathfrak{b}_{-3}\ldots$ sono compresi fra $\mathfrak{q}$ ed $\mathfrak{a}$ nel segmento $\mathfrak{b}_{-1}\mathfrak{q}\mathfrak{a}$. E quindi possiam dire che anche i punti della serie $\mathfrak{b}_{-2}\mathfrak{b}_{-3}\ldots\mathfrak{b}_{-\nu}\ldots$ si avvicinano, ma nella *direzione negativa*, indefinitamente al punto $\mathfrak{a}$.

Abbiam così, mediante i tre punti $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{b}_1$, determinata sulla retta una doppia serie di punti, che si succedono nelle due opposte direzioni nell'ordine dei loro indici, e si avvicinano in direzione contraria al punto $\mathfrak{a}$ (hanno per *limite* il punto $\mathfrak{a}$).

Conveniamo ora di far corrispondere ad ognuno dei punti di queste due serie, che diremo ora costituire una serie unica, il valore numerico reale intero, positivo o negativo, rappresentato dal suo indice e di far corrispondere al punto $\mathfrak{a}$ il valore ∞ della variabile numerica; avremo così stabilita una corrispondenza univoca fra i punti della retta e i valori reali interi positivi e negativi della variabile numerica, e tale che se la differenza tra due valori della variabile va diminuendo, va pure diminuendo il numero dei punti della serie compresi fra i punti da quelli rappresentati (i punti si vanno avvicinando), e fra essi non vi sarà alcun punto della serie quando la differenza fra i due valori numerici distinti è minima, cioè eguale ad uno.

Abbiamo in tal modo distesa sulla retta la variabile numerica reale ed intera.

16. — Si tenga fisso il punto $\mathfrak{a}$, e si trasporti la coppia $\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$, sulla coppia $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, o sulla coppia $\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3$, o sopra una qualunque altra coppia $\mathfrak{b}_\nu\mathfrak{b}_{\nu+1}$ di elementi consecutivi e della stessa direzione; la serie non si altera, ma solo si diminuisce l'indice di ciascun punto di tante unità per quante ne contiene l'indice del punto col quale si è fatto coincidere il punto $\mathfrak{b}_0$; solo l'indice del punto $\mathfrak{a}$ resta inalterato.

Per tal motivo noi diremo che tutti i segmenti della retta compresi fra due punti consecutivi della serie sono *eguali* nella serie costruita, oppure sono eguali per rispetto al punto **a**. E quindi il segmento 012 (qui e qualche volta in seguito indichiamo i punti della serie coi soli indici) è doppio del segmento 01, il segmento 01μ è μ-plo del segmento 01. Con ciò l'indice λ di ciascun punto della serie indica, non solo il posto che esso occupa nella serie costruita sulla retta, ma indica pure che *rapporto* havvi tra il segmento 0λ ed il segmento 01; per tal motivo diremo pure che il segmento 01, considerato nella direzione positiva, è il segmento *unità* della retta, e che λ è la *distanza* fra il punto $\mathfrak{b}_\lambda$ ed il punto $\mathfrak{b}_0$.

Ne segue quindi che *la distanza fra due punti qualunque della retta è eguale alla differenza degli indici di questi due punti.*

La distanza fra due punti della retta è funzione non solo della posizione dei due punti, ma anche dei tre punti fondamentali $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$ assegnati sulla retta stessa.

Segue pure da un teorema delle forme armoniche, che *la proiezione da un* S_k $(k<r-1)$ *dello* S_r *di una serie dei valori interi della variabile così costruita produce nel fascio* (S_k) *una serie analoga*; o più in generale: *la distanza fra due elementi di una forma semplice rimane inalterata per qualunque trasformazione proiettiva non degenere.*

Si noti che tenendo fisso il punto **a** ed il punto $\mathfrak{b}_0$, se si scambiano fra loro il punto $\mathfrak{b}_1$ ed il punto $\mathfrak{b}_{-1}$, la serie dei punti rimane inalterata, ma cambia il segno dell'indice di ogni punto (si scambia la direzione positiva colla direzione negativa).

17. — *Se tenendo fisso il punto* ∞ *ed il punto* 0, *il punto* 1 *passa al posto del punto* 2, *la serie perde tutti i punti di indici dispari positivi e negativi, e i rimanenti risulteranno numerati nell'ordine in cui si succedono.*

E più in generale: *se il punto* 1 *passa al posto del punto* μ, *la serie resterà costituita dei punti* $\ldots, -2\mu, -\mu, 0, \mu, 2\mu, 3\mu, \ldots$, *che prenderanno rispettivamente gl'indici* $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

Questo teorema è della massima importanza per quanto dobbiamo esporre in seguito, e noi lo dimostreremo per $\mu=2$; la dimostrazione per $\mu=3, 4, \ldots$ che si deduce facilmente da quella di $\mu=2$, la ometteremo per amor di brevità.

Sia **lmpq** il quadrangolo costruttore del gruppo armonico $ab_1b_0b_2$, e siano cioè **lm**, **pq** i lati che passano per **a**, **pm** quello che passa per b_0, **lp**, **mq** quelli che passano per b_1, **lq** quello che passa per b_2. Se, rimanendo fissi i lati che passano per **a**, conduciamo per b_0 la trasversale b_0q, che seghi **lm** in **n**, e chiamiamo **r** l'intersezione di nb_1 e **pq**, sarà **mnqr** un quadrangolo costruttore dello stesso gruppo, e quindi **mr** passerà per b_2. Se si assume **lmqr** per quadrangolo costruttore del gruppo armonico $ab_2b_1b_3$, si trova che **lr** passa per b_3; e se chiamiamo **s** l'intersezione di b_2n e **pq** ed assumiamo **mnrs** per quadrangolo costruttore del gruppo $ab_2b_1b_3$, si trova che **ms** passa per b_3; infine assumendo **lmrs** per quadrangolo costruttore del gruppo $ab_3b_2b_4$, si trova che **ls** passa per b_4. Considerando ora il quadrangolo **lqsn**, si trova che esso è quadrangolo costruttore del gruppo $ab_2b_0b_4$, dunque questo gruppo è armonico (1).

Con ciò resta pure dimostrato che:

Se tre punti b_λ, b_ν, b_ρ *della serie costruita, sono tali che la somma degli indici dei due punti estremi è eguale al doppio dell'indice del punto medio, il gruppo* $ab_\nu b_\lambda b_\rho$ *e armonico.*

Viceversa: *se* $ab_\nu b_\lambda b_\rho$ *è un gruppo armonico, deve essere* $\lambda + \rho = 2\nu$.

18. — Abbiam visto come, dati i punti ab_0b_1, si costruisce un punto qualsiasi di indice λ, vogliamo ora vedere come si possa *costruire il punto* b_1, *quando si conoscano i punti di* ab_0b_λ.

Pel punto b_0 si tiri una retta qualsiasi e sopra di essa si prendano due punti arbitrarii a', b'_1, e mediante i punti $a'b_0b'_1$, come terna fondamentale, si costruisca il punto b'_λ di indice λ, come nel n. 15. Sia quindi **m** il punto comune alle rette aa', $b_\lambda b_\lambda'$, la proiezione del punto b_1' da **m** sulla retta data, sarà il punto cercato b_1.

Evidentemente il punto b_1 è unico; poichè ogni altra analoga costruzione può ricondursi per proiezione alla precedente.

---

(1) Quantunque questa dimostrazione possa sembrare artifiziosa, è però molto più elementare di quelle riportate dal De Paolis, e dal Lindemann nelle opere citate. Il De Paolis per dimostrare questo teorema ricorre alle involuzioni, ed il Lindemann per dimostrare il solo caso di $\mu = 2$, a cui si limita, ricorre ai sistemi piani prospettivi.

Se inoltre sulla retta $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'_1$ si costruiscono tutti i punti dei valori interi delle variabili, ed in particolare $\mathfrak{b}'_{2\lambda}$, $\mathfrak{b}'_{3\lambda}\dots$, e sulla retta data si costruisce il punto coniugato armonico di $\mathfrak{b}_0$ rispetto ad $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_\lambda$, in esso si proietterà $\mathfrak{b}'_{2\lambda}$, ecc.

Premessa questa costruzione, se ora vogliamo che restando fissi i punti $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_0$ il punto $\mathfrak{b}_1$ diventi il μ^{mo} punto della serie, non dobbiamo fare altro che costruire un punto $\mathfrak{c}_1$ adeguato, ed allora i punti $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$ della serie primitiva diventeranno i punti $\mathfrak{c}_{2\mu}$, $\mathfrak{c}_{3\mu}$,..., e perciò ogni segmento compreso fra due punti consecutivi della nuova serie che si costruirà, sarà la μ^{ma} parte del segmento unità della prima serie. Se invece al punto $\mathfrak{b}_1$ si conserva il suo primitivo indice 1, ai punti $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, .. $\mathfrak{c}_{\mu-1}$ si dovrà dare un indice μ^{mo} di quello che essi hanno per non alterare il concetto già stabilito della distanza, e quindi essi diventano i punti $\mathfrak{b}_{\frac{1}{\mu}}$, $\mathfrak{b}_{\frac{2}{\mu}}$, $\mathfrak{b}_{\frac{\mu-1}{\mu}}$ della serie primitiva.

La nuova serie che così abbiamo costruita ha i suoi punti riferiti univocamente a tutti i valori frazionarii della variabile numerica di denominatore μ, da $-\infty$ a $+\infty$, e tale che se la differenza fra due valori distinti della variabile va diminuendo, e diventa minima, cioè $\frac{1}{\mu}$, i punti della serie costruita vanno avvicinandosi, cioè va diminuendo fra essi il numero dei punti interposti fino a che fra essi non vi sarà alcun altro punto della serie.

Dato un numero frazionario $\frac{\nu}{\mu}$, *si voglia costruire il punto che gli corrisponde nella serie data* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$.

Per far ciò basta dividere il segmento unità $\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$ in μ parti eguali e costruire il ν^{mo} punto della nuova serie che si ottiene quando restando fissi $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_0$, si prende per segmento unità la μ^{ma} parte del segmento unità primitivo.

Potendo estendere queste costruzioni a qualunque valore frazionario, possiamo affermare di aver distesa sulla retta la variabile numerica razionale, cioè di aver stabilita una corrispondenza univoca fra i punti della retta, e i valori interi e frazionarii, positivi e negativi, compreso l' ∞, della variabile numerica; e con la restrizione che, se la differenza fra due valori della variabile va diminuendo indefinitamente, i punti della retta si vanno avvicinando indefinitamente (1); oppure con frase più comune, che, se la differenza tra due valori della variabile diventa indefinitamente piccola, la distanza fra i punti della retta diventerà pure indefinitamente piccola, ed i punti della retta si avvicineranno indefinitamente l'uno all'altro.

19. — Vogliamo ora vedere *che cambiamento subiscono gli indici della serie quando si tenga fisso il punto* $\mathbf{b}_1$ *e si scambino fra loro i punti* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}_0$.

Basterà osservare che indice prenderà un qualunque punto, il quale nella serie $\mathbf{ab}_0\mathbf{b}_1$ abbia un determinato indice λ, che per ora supporremo intero.

Si dimostra nella teoria delle forme proiettive *semplici* coi soli concetti di proiezioni e sezioni che il gruppo $\mathbf{ab}_0\mathbf{b}_1\mathbf{b}_\lambda$ è proiettivo al gruppo $\mathbf{b}_0\mathbf{ab}_\lambda\mathbf{b}_1$. Ciò significa che nello stesso modo con cui nel primo gruppo si costruisce $\mathbf{b}_\lambda$ coi punti fondamentali $\mathbf{ab}_0\mathbf{b}_1$, nel secondo gruppo si costruisce $\mathbf{b}_1$ mediante i punti fondamentali $\mathbf{b}_0\mathbf{ab}_\lambda$; cioè nella serie che abbia $\mathbf{b}_0$ per punto infinito, $\mathbf{a}$ per punto zero, è il segmento $\mathbf{ab}_\lambda$ la λ^{ma} parte del segmento $\mathbf{ab}_1$; quindi se in questa serie si prende per punto unità anche il punto $\mathbf{b}_1$ il punto $\mathbf{b}_\lambda$ acquisterà l'indice $\frac{1}{\lambda}$.

Si supponga ora che il punto preso ad arbitrio nella prima serie abbia un indice frazionario $\frac{\lambda}{\mu}$; si trasporti il punto 1 da $\mathbf{b}_1$ in $\mathbf{b}_{\frac{1}{\mu}}$, e lo si chiami $\mathbf{c}_1$; con questo i punti $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_{\frac{\lambda}{\mu}}$, saranno nella serie $\mathbf{ab}_0\mathbf{c}_1$ rispettivamente indicati con $\mathbf{c}_\mu$ e $\mathbf{c}_\lambda$. Si scambi ora $\mathbf{a}$ con $\mathbf{b}_0$ rimanendo inalterato $\mathbf{c}_1$, i punti $\mathbf{c}_\mu$, $\mathbf{c}_\lambda$ acquisteranno gl'indici $\mathbf{c}_{\frac{1}{\mu}}$, $\mathbf{c}_{\frac{1}{\lambda}}$: e se infine si trasporta il punto 1 in $\mathbf{c}_{\frac{1}{\mu}}$, cioè in $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$ e $\mathbf{c}_{\frac{1}{\lambda}}$ acquisteranno rispettivamente gl'indici $\mathbf{c}_\mu$, $\mathbf{c}_{\frac{\mu}{\lambda}}$. Dunque:

---

(1) Intendiamo con questa frase di dire che, per ogni valore che si dà al denominatore della variabile frazionaria, sempre che la differenza fra i due valori è divenuta minima, fra i punti non vi è compreso altro punto della serie costruita con quel dato denominatore.

Se si scambia, nella serie costruita mediante i punti fondamentali $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$, *il punto* $\mathfrak{b}_0$ *col punto* $\mathfrak{a}$, *e si rimane inalterato il punto* $\mathfrak{b}_1$, *gli elementi della serie rimarranno gli stessi, ma ognuno acquisterà l'indice inverso di quello che aveva prima.*

20. — In questa nuova serie $\mathfrak{b}_0\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$ siano $\mathfrak{c}_\nu, \mathfrak{c}_\pi, \mathfrak{c}_\rho$ tre punti tali che fra i loro indici esista la relazione $\nu + \rho = 2\pi$ (gl'indici possono supporsi anche frazionarii), cioè siano $\mathfrak{c}_\nu$, $\mathfrak{c}_\rho$ simmetrici rispetto al punto $\mathfrak{c}_\pi$; il gruppo $\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_\pi\mathfrak{c}_\nu\mathfrak{c}_\rho$ sarà (v. n. 17) armonico; e poichè i punti $\mathfrak{c}_\nu\mathfrak{c}_\pi\mathfrak{c}_\rho$ sono rispettivamente i punti $\mathfrak{b}_{\frac{1}{\nu}}\ \mathfrak{b}_{\frac{1}{\pi}}\ \mathfrak{b}_{\frac{1}{\rho}}$ della serie $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$, si ha che pure il gruppo $\mathfrak{b}_0\ \mathfrak{b}_{\frac{1}{\pi}}\ \mathfrak{b}_{\frac{1}{\nu}}\ \mathfrak{b}_{\frac{1}{\rho}}$ è armonico; e siccome la reciproca è vera, ed il trasporto della coppia 01 non altera le distanze fra il punto $\mathfrak{b}_0$ ed i punti della serie, possiamo enunciare il teorema:

Se quattro punti $\mathfrak{b}_{\lambda_1}\mathfrak{b}_{\lambda_2}\mathfrak{b}_{\lambda_3}\mathfrak{b}_{\lambda_4}$ *della serie* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$ *sono armonici, fra i loro indici esiste la relazione* $\frac{2}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_3-\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_4-\lambda_1}$; e, viceversa, *se fra gli indici di quattro punti della serie* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$, *esiste la relazione suddetta, i quattro punti nell'ordine considerato sono armonici.*

21. — Finora abbiamo costruiti dei punti nella serie quando di essi conoscevamo l'indice intero o frazionario; ora vogliamo esaminare la questione inversa:

Dato sulla retta un punto $\mathfrak{p}$, *ed assegnati i tre punti fondamentali* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$, *vogliamo sapere quale indice ad esso corrisponde.*

Se il punto dato $\mathfrak{p}$ non coincide con nessuno dei punti di indice intero costruiti mediante i punti $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$, sia esso compreso nel segmento $\mathfrak{b}_\nu\mathfrak{b}_{\nu+1}$, allora supposta trasportata la coppia $\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$ (tenendo fisso il punto $\mathfrak{a}$) nella coppia $\mathfrak{b}_\nu\mathfrak{b}_{\nu+1}$, si divida il segmento di questa coppia in α_1 parti eguali; se il punto $\mathfrak{p}$ coincide con la β_1^{ma} divisione del segmento sarà $\nu + \frac{\beta_1}{\alpha_1}$ il suo indice nella serie data. Ma se $\mathfrak{p}$ è compreso fra la β_1^{ma} e la $(\beta_1+1)^{\text{ma}}$ divisione, si divida ancora questo segmento in α_2 parti eguali; se $\mathfrak{p}$ coincide con la β_2^{ma} divisione, sarà $\nu + \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_1\,\alpha_2}$ il suo indice, altrimenti si proseguirà allo stesso modo l'operazione. Ciò facendo se una volta si raggiungerà la posizione del punto $\mathbf{p}$, il punto avrà per suo indice un numero frazionario, e sarà uno dei punti della serie che si era costruita nel n. 18; ma se però non avverrà mai che si raggiunga la posizione del punto, avremo intanto segnati sulla retta una serie di punti che si vanno avvicinando indefinitamente al punto stesso e quindi nella variabile numerica avremo corrispondentemente una serie di valori frazionarii che soddisfà alle condizioni che abbisognano per avere un limite. In tal caso converremo di assegnare al punto $\mathbf{p}$ come indice il limite di quella serie di valori frazionarii.

Però la ricerca dell'indice del punto $\mathbf{p}$ con questo metodo ha troppo dell'arbitrio nella scelta del numero delle parti in cui bisogna dividere il segmento sempre più piccolo in cui si va racchiudendo il punto $\mathbf{p}$; in ciò si ha un inconveniente lieve che vogliamo evitare. Ci proponiamo di trovare l'indice del punto $\mathbf{p}$ sotto forma di frazione continua finita o infinita secondo che il punto $\mathbf{p}$ appartenga o non alla serie dei punti corrispondenti alla variabile frazionaria, cercando di costruire sulla retta una serie di punti nelle vicinanze del punto $\mathbf{p}$ che rappresentino le successive ridotte di queste frazioni continue.

Supponiamo dapprima che il punto $\mathbf{p}$ sia un punto appartenente alla serie della variabile frazionaria, e sia esso compreso nel segmento $\mathbf{b}_\nu\mathbf{b}_{\nu+1}$; il suo indice incognito che noi rappresenteremo con x, possiamo porlo eguale a $\nu + \dfrac{1}{x_1}$, e con ciò $\dfrac{1}{x_1}$ rappresenterà la distanza $\mathbf{b}_\nu\mathbf{p}$ riferita al segmento unità $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$ ed al punto infinito $\mathbf{a}$. Se si trasporta la coppia $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$ in $\mathbf{b}_\nu\mathbf{b}_{\nu+1}$, nella serie $\mathbf{a}\mathbf{b}_\nu\mathbf{b}_{\nu+1}$ il punto $\mathbf{p}$ avrà per indice $\dfrac{1}{x_1}$ e se si scambia il punto $\mathbf{a}$ col punto $\mathbf{b}_\nu$ e si lascia invariato il punto $\mathbf{b}_{\nu+1}$, nella serie $\mathbf{b}_\nu\mathbf{a}\mathbf{b}_{\nu+1}$ il punto $\mathbf{p}$ avrà per indice x_1 (v. n. 19). Si costruiscano i successivi quarti armonici di questa serie e siano $\mathbf{c}_2\,\mathbf{c}_3 \ldots \mathbf{c}_{\nu_1}\,\mathbf{c}^{\nu}_{1+1}$; e supponiamo che $\mathbf{p}$ sia compreso fra $\mathbf{c}_{\nu_1}$ e $\mathbf{c}_{\nu_1+1}$; si potrà porre $x_1 = \nu_1 + \dfrac{1}{x_2}$, e quindi $\dfrac{1}{x_2}$ indicherà la distanza $\mathbf{c}_{\nu_1}\mathbf{p}$ rispetto al segmento unità $\mathbf{a}\mathbf{b}_{\nu+1}$ ed al punto infinito $\mathbf{b}_\nu$. Se si trasporta la coppia $\mathbf{a}\mathbf{b}_{\nu+1}$ in $\mathbf{c}_{\nu_1}\mathbf{c}_{\nu_1+1}$, sarà $\dfrac{1}{x_2}$ l'indice del punto $\mathfrak{p}$ nella serie $\mathfrak{b}_\nu \mathfrak{c}_{\nu_1} \mathfrak{c}_{\nu_1+1}$, e quindi sarà x_2 l'indice di $\mathfrak{p}$ nella serie $\mathfrak{c}_{\nu_1} \mathfrak{b}_\nu \mathfrak{c}_{\nu_1+1}$. Si costruiscano i quarti armonici successivi di questa serie e siano $\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_3 \ldots \mathfrak{d}_{\nu_2} \mathfrak{d}_{\nu_2+1}$, e supponiamo che $\mathfrak{p}$ sia compreso fra $\mathfrak{d}_{\nu_2} \mathfrak{d}_{\nu_2+1}$, si potrà porre il suo indice $x_2 = \nu_2 + \dfrac{1}{x_3}$ ecc., ecc. I punti $\mathfrak{b}_\nu$, $\mathfrak{c}_{\nu_1}$, $\mathfrak{d}_{\nu_2}$, $\mathfrak{e}_{\nu_3}$ .., che si costruiscono successivamente hanno per indici, nella serie $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$, rispettivamente i numeri

$$\nu\,,\quad \nu \dot{+} \frac{1}{\nu_1}\,,\qquad \nu \dot{+} \frac{1}{\nu_1} \dot{+} \frac{1}{\nu_2}\,,\qquad \nu \dot{+} \frac{1}{\nu_1} \dot{+} \frac{1}{\nu_2} \dot{+} \frac{1}{\nu_3}\,, \ldots .$$

Con questa costruzione per l'ipotesi fatta, si deve raggiungere il punto $\mathfrak{p}$ dopo un numero finito μ di tali operazioni, e quindi il punto $\mathfrak{p}$ avrà per indice il valore della frazione continua

$$\nu \dot{+} \frac{1}{\nu_1} \dot{+} \frac{1}{\nu_2} \dot{+} \frac{1}{\nu_3} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{1}{\nu_\mu}\,.$$

Ora questa stessa operazione geometrica (indipendentemente dal suo significato analitico) può farsi per un punto qualunque $\mathfrak{p}$ della retta, anche non appartenente alla serie costruita degli indici razionali; in questo caso non si raggiungerà mai il punto $\mathfrak{p}$, ma i punti $\mathfrak{b}_\nu$, $\mathfrak{c}_{\nu_1}$ $\mathfrak{d}_{\nu_2}$, $\mathfrak{e}_{\nu_3} \ldots$ alternandosi da una parte e dall'altra del punto $\mathfrak{p}$, si andranno indefinitamente [nota (1) a p. 21], avvicinando ad esso, e quindi il punto $\mathfrak{p}$ resta come posizione limite della classe di punti $\mathfrak{b}_\nu \mathfrak{c}_{\nu_1} \mathfrak{d}_{\nu_2} \ldots$, allo stesso modo come il valore irrazionale della frazione continua infinita è il limite dei valori delle successive ridotte, onde possiamo assumere come indice del punto $\mathfrak{p}$ il valore di questa frazione continua infinita. E quindi deduciamo:

Ogni punto della retta, quando sopra di essa sono fissati i punti $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$, *o è un punto della serie* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$ *ed allora il suo indice è un numero frazionario, o è un punto limite di una classe determinata di punti della serie* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$ *ed allora il suo indice è un numero irrazionale rappresentato univocamente da una frazione continua infinita coi numeratori eguali ad uno* (1).

---

(1) Abbiamo voluto insistere a cercare di mettere l'indice irrazionale sotto forma di frazione continua, oltre che per il vantaggio in se stesso di avere una forma unica sempre possibile a ricercare, anche per dare un' effettiva

22. — Viceversa, dato un numero irrazionale qualunque, vi è sulla retta un punto che lo rappresenta?

Post. $(r+5)$.$^{\text{mo}}$ *Ad ogni numero irrazionale corrisponde sempre sulla retta un punto determinato ed unico*; o in altre parole: *dato un numero irrazionale, sia sotto forma di frazione continua infinita coi numeratori eguali ad uno, sia come limite di due classi di numeri convergenti, e costruiti sulla retta i punti della serie* $\mathbf{ab}_0\mathbf{b}_1$ *corrispondenti alle successive ridotte della frazione continua, o ai numeri di quelle classi, esiste sulla retta un punto, ed uno solo, a cui quei punti si avvicinano indefinitamente.*

Il modo stesso col quale si perviene a costruire questo punto mostra che l'indice irrazionale del punto rappresenta pur esso la distanza del punto stesso dal punto $\mathbf{b}_1$ relativamente al segmento unità $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$ ed al punto infinito $\mathbf{a}$.

In tal modo è distesa sulla retta tutta la variabile numerica reale, si è cioè stabilita fra i punti della retta e la variabile numerica reale una corrispondenza *univoca* e *continua*, nel senso che se la differenza fra due valori reali razionali o irrazionali della variabile diventa indefinitamente piccola, i punti della retta che a quelli corrispondono si avvicinano indefinitamente fra loro.

Ciò posto indichiamo con ν, ρ_1, $\rho_2, \ldots$, $\rho_\sigma \ldots$ le ridotte successive della frazione continua infinita che rappresenta il numero $\mathbf{p}$, e costruiamo sulla retta i punti che hanno per indici rispettivamente $2\nu_1$ $2\rho_1$, $2\rho_2, \ldots$ $2\rho_\sigma, \ldots$, essi sono coniugati armonici del punto $\mathbf{b}_0$ ordinatamente rispetto alle coppie $\mathbf{ab}_\nu$, $\mathbf{ab}_{\rho_1}$, $\mathbf{ab}_{\rho_2}, \ldots$, $\mathbf{ab}_{\rho_\sigma}$, o in altre parole, se del gruppo armonico $ab_\nu b_0 b_{2\nu}$ si tengono fissi i due punti non coniugati $\mathbf{ab}_0$, e si fa passare il terzo punto successivamente nelle posizioni $\mathbf{b}_{\rho_1}$, $\mathbf{b}_{\rho_2}, \ldots$, $\mathbf{b}_{\rho_\sigma}$ il quarto punto passerà rispettivamente nelle posizioni $\mathbf{b}_{2\rho_1}$, $\mathbf{b}_{2\rho_2}, \ldots$ $\mathbf{b}_{2\rho_\sigma}$, e poichè le classi di numeri

$$\nu,\ 2\rho_2,\ 2\rho_4,\ 2\rho_6 \ldots, \qquad 2\rho_1,\ 2\rho_3,\ 2\rho_5 \ldots$$

rappresentano il punto $\mathbf{p}_1$ di indice irrazionale doppio di quello del punto $\mathbf{p}$, anche il gruppo $\mathbf{apb}_0\mathbf{p}_1$ è armonico.

---

costruzione a molte proposizioni contenute nei noti lavori di G. Cantor (v. *Acta Math.*, vol. II). Ed è evidente che in tal modo noi possiamo rappresentare sulla retta tutte le grandezze numeriche di 2ª, 3ª .. νª specie, di cui fa parola il Cantor (v. p. 337).

Così continuando si ritrova che i teoremi dei n^i. 18, 19 e 20 dimostrati per punti d'indici frazionarii della serie $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$ valgono pure per i punti di indici irrazionali, e ciò permette di conchiudere:

Se due forme proiettive semplici sovrapposte hanno tre elementi omologhi uniti, tutti i rimanenti elementi sono uniti.

§ 3.

Birapporto, elementi immaginarii ed equazioni.

23. — Chiameremo *birapporto* di quattro punti $\mathbf{b}_{\lambda_1}\mathbf{b}_{\lambda_2}\mathbf{b}_{\lambda_3}\mathbf{b}_{\lambda_4}$ (dove λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 sono valori qualunque della variabile numerica razionale ed irrazionale) l'espressione numerica

$$\lambda' = \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2} : \frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2}$$

formata mediante gli indici dei quattro punti dati, e che indicheremo al solito col simbolo $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$.

Se i punti presi sulla retta sono $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{b}_\lambda$, il birapporto di essi è eguale a λ; cosicchè l'indice che noi abbiamo assegnato ad ogni punto rappresenta pure il birapporto di questo punto in ordine ai tre punti fondamentali $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$, e per tal motivo d'ora in poi chiameremo *birapporto* o *parametro* l'indice numerico del punto.

Il punto della retta che abbiamo come quarto armonico in ordine ai punti $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$ è il punto $\mathbf{b}_{-1}$, quindi il birapporto di questi quattro punti armonici è -1; e quindi anche eguale a -1 è il birapporto di ogni gruppo armonico del tipo $\mathbf{a}\mathbf{b}_{n-r}\mathbf{b}_n\mathbf{b}_{n+r}$. Ma l'importante è che *se mediante tre punti* $\mathbf{b}_{\lambda_1}\mathbf{b}_{\lambda_2}\mathbf{b}_{\lambda_3}$ *si costruisce il quarto armonico* $\mathbf{b}_{\lambda_4}$ *il birapporto dei punti* $\mathbf{b}_{\lambda_1}\mathbf{b}_{\lambda_2}\mathbf{b}_{\lambda_3}\mathbf{b}_{\lambda_4}$ *è sempre eguale a* -1. Difatti, trasportando il punto zero in $\mathbf{b}_{\lambda_1}$ ed il punto $\mathbf{b}_1$ nel punto $\mathbf{b}_{\lambda_1+1}$, i parametri degli altri tre punti saranno rispettivamente $\lambda_2-\lambda_1$, $\lambda_3-\lambda_1$, $\lambda_4-\lambda_1$; se ora si scambia il punto 0 col punto ∞, e si lascia invariato il punto 1, i parametri di quei tre punti diventano $\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}$, $\frac{1}{\lambda_3-\lambda_1}$, $\frac{1}{\lambda_4-\lambda_1}$. Ma essi sono armonici in ordine a b_λ, che ora è il punto infinito, dunque, pel teorema 20, deve avverarsi la relazione:

$$\frac{2}{\lambda_3-\lambda_1}=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_4-\lambda_1}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2}:\frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2}=-1\,.$$

Viceversa, *se quattro punti presi ad arbitrio nella serie* $\mathbf{a}\mathbf{b}_c\mathbf{b}_1$ *hanno per birapporto* -1 *essi sono armonici in quell'ordine considerato.*

24. — Questo teorema rientra nell'altro più generale: *Il birapporto di quattro punti della retta rimane inalterato qualunque sia la terna di punti della retta che si assume come terna fondamentale.* Infatti, il cambiamento di uno o due dei punti fondamentali fa subire ai parametri dei punti le trasformazioni $\lambda+h$, $h\lambda$, $\frac{1}{\lambda}$; quindi il cambiamento della terna fondamentale fa subire ai parametri di ciascun punto la più generale trasformazione lineare e perciò il *birapporto di quattro punti è invariantivo.*

Oppure, supposto che in una data retta siano assegnate due terne di elementi fondamentali $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$ ed $\mathbf{a}'\mathbf{b}'_0\mathbf{b}'_1$ ed un elemento qualunque $\mathbf{m}$ abbia il parametro λ rispetto alla terna fondamentale $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$, e λ' rispetto alla terna $\mathbf{a}'\mathbf{b}'_0\mathbf{b}'_1$, si dimostrerebbe al modo solito che $\lambda\lambda'$ sono legati dalla relazione

$$\lambda\lambda'-(\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{a}')\lambda'-(\mathbf{a}'\mathbf{b}'_0\mathbf{b}'_1\mathbf{a})\lambda-(\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{b}'_0)(\mathbf{a}'\mathbf{b}'_0\mathbf{b}'_1\mathbf{a})=0$$

che si riduce all'altra

$$\lambda'=\frac{a\lambda+b}{c\lambda+d}\,, \qquad (1$$

e quindi se $\mathbf{mnpq}$ sono quattro punti della retta, sarà il loro birapporto rispetto ai punti fondamentali $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$ uguale al birapporto degli stessi punti rispetto ai punti fondamentali $\mathbf{a}'\mathbf{b}_0'\mathbf{b}_1'$.

Se invece i valori λ e λ' rappresentano i parametri di due punti, in generale distinti, riferiti alla medesima terna fondamentale $\mathbf{a}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$, la relazione precedente stabilisce una corrispondenza univoca fra i punti della retta, tale che il birapporto di quattro punti arbitrarii $\mathbf{mnpq}$ è eguale al birapporto dei quattro punti

$\mathbf{m'n'p'q'}$ che ad essi corrispondono, ed in particolare che a quattro punti armonici corrispondono quattro punti armonici; quindi la corrispondenza rappresentata dalla relazione (1 è *proiettiva.*

25. — Possiamo ora introdurre per rappresentare i punti della retta le coordinate omogenee, porre cioè $\lambda = \frac{x_1}{x_2}$; ed allora ogni punto invece di essere rappresentato da un solo parametro sarà rappresentato dai valori proporzionali alle due coordinate x_1, x_2, le quali per mezzo della relazione $(\mathbf{ab}_0\mathbf{b}_1\mathbf{m}) = \frac{(\mathbf{ab}_0\mathbf{cm})}{(\mathbf{ab}_0\mathbf{cb}_1)}$ possono anche essere interpretate come birapporto dei punti $\mathbf{m}$, $\mathbf{b}_1$ rispetto ad una terna fondamentale che ha lo stesso zero, e lo stesso infinito, ed ha un altro arbitrario punto unità.

Le coordinate dei punti fondamentali $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$ potranno essere in tal caso (1,0) (0,1), (1,1); ogni punto della retta sarà rappresentato da una equazione omogenea di 1° grado $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ e la relazione di proiettività si trasformerà nel sistema di equazioni

$$\rho x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$\rho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

con la condizione che il determinante del sistema debba essere diverso da zero.

È quasi inutile avvertire che tutto ciò che abbiamo detto per la retta vale anche per qualunque forma semplice, e che la proiettività che si è stabilita per due forme sovrapposte vale anche per due forme distinte.

26. — Resterebbe a far vedere come si possano rappresentare sulla retta i punti che hanno per indici i valori immaginarii della variabile numerica; ma non crediamo opportuno di fermarci su questo punto; basterà far notare che tali punti li consideriamo *come punti uniti di infinite proiettività di un fascio* (v. *Omografie binarie*, 2ª ed., Napoli, 1889) *e quindi di una sola involuzione ellittica.*

E con questo abbiamo distesa sulla retta e quindi sopra ogni forma semplice (v. n. 16) tutta la variabile numerica reale ed immaginaria.

27. — Chiameremo *piramide* di un S_r la figura formata da $r+1$ punti indipendenti (*vertici*) e da tutti gli $\binom{r+1}{2}S_1$, $\binom{r+1}{3}S_2$ $\binom{r+1}{4}S_3, .., \binom{r+1}{r}S_{r-1}$ che congiungono questi punti a 2 a 2, a 3 a 3, a 4 a 4,... ad r ad r; gli S_{r-1} si diranno *facce* della piramide; un vertice ed una faccia della piramide si diranno *opposti* quando essi non si appartengono.

Siano dati, nello S_r, $r+1$ punti indipendenti $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, .., \mathbf{a}_r$, che diremo *fondamentali*, un punto $\mathbf{u}$, che non appartenga a nessuna delle facce della piramide costituita dai punti fondamentali, ed un punto arbitrario $\mathbf{m}$. Se indichiamo con $\mathbf{0}'$, $\mathbf{1}'$, $\mathbf{2}', \ldots \mathbf{r}'$ le facce della piramide, opposte rispettivamente ai punti fondamentali $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots$, $\mathbf{a}_r$, e con $\mathbf{0}'\mathbf{1}'$, $\mathbf{1}'\mathbf{2}'$, ecc., gli S_{r-2} secondo i quali si segano gli S_{r-1} $\mathbf{0}'$ e $\mathbf{1}'$, $\mathbf{1}'$ e $\mathbf{2}'$, ecc., sarà $\mathbf{1}'\mathbf{0}'$ l'S_{r-2} individuato da tutti i vertici della piramide esclusi i vertici $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, cioè dai vertici $\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 \ldots \mathbf{a}_r$; ecc.

Proiettando dall'S_{r-2} $\mathbf{1}'\mathbf{0}'$ i punti $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0\mathbf{u}\mathbf{m}$ si determina un fascio di S_{r-1}, nel quale i quattro S_{r-1} proiettanti individuano un birapporto, che non varia qualunque sia la terna fondamentale del fascio a cui ci vogliamo riferire, e che si potrà ottenere, p. es., prendendo come S_{r-1} ∞, 0, 1 rispettivamente quelli che passano per $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{u}$. Indicando questo birapporto in coordinate omogenee con $\frac{x_1}{x_0}$ avremo

$$\mathbf{0}'\mathbf{1}'(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0\mathbf{u}\mathbf{m}) = \frac{x_1}{x_0},$$

ed analogamente

$$\mathbf{0}'\mathbf{2}'(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{u}\mathbf{m}) = \frac{x_2}{x_0},\quad \mathbf{0}'\mathbf{3}'(\mathbf{a}_3\mathbf{a}_0\mathbf{u}\mathbf{m}) = \frac{x_3}{x_0}, \ldots,\quad \mathbf{0}'\mathbf{r}'(\mathbf{a}_r\mathbf{a}_0\mathbf{u}\mathbf{m}) = \frac{x_r}{x_0}.$$

Mediante questi r birapporti restano determinati tutti gli altri birapporti che si otterrebbero se da ogni altro S_{r-2} $\mathbf{i}'\mathbf{k}'$ si proiettano i rimanenti vertici $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{a}_i$ ed i punti $\mathbf{u}$, $\mathbf{m}$. Difatti, se con la retta $\mathbf{u}\mathbf{m}$ si sezionano i tre fasci $\mathbf{0}'\mathbf{i}'(\mathbf{a}_i\mathbf{a}_0\mathbf{u}\mathbf{m})$, $\mathbf{0}'\mathbf{k}'(\mathbf{a}_k\mathbf{a}_0\mathbf{u}\mathbf{m})$, $\mathbf{i}'\mathbf{k}'(\mathbf{a}_i\mathbf{a}_k\mathbf{u}\mathbf{m})$, si otterranno sulla retta tre tetradi di punti, che possiamo indicare con $\mathbf{i}_1\mathbf{o}_1\mathbf{u}\mathbf{m}$, $\mathbf{k}_1\mathbf{o}_1\mathbf{u}\mathbf{m}$, $\mathbf{i}_1\mathbf{k}_1\mathbf{u}\mathbf{m}$, e si ha

$$(\mathbf{i}_1\mathbf{k}_1\mathbf{u}\mathbf{m}) = \frac{(\mathbf{i}_1\mathbf{o}_1\mathbf{u}\mathbf{m})}{(\mathbf{k}_1\mathbf{o}_1\mathbf{u}\mathbf{m})} = \frac{x_i}{x_k}.$$

Di modo che, dato il punto **m** restano individuati gli $\binom{r+1}{2}$ birapporti, dei quali però **r** solamente sono indipendenti, e gli altri $\binom{r}{2}$ si ottengono da essi facendo i rapporti di questi a 2 a 2. Viceversa, dati gli r birapporti indipendenti sono individuati r S_{r-1} indipendenti, che individuano nella loro intersezione il punto **m**.

Siccome dato il punto sono individuati gli r birapporti, cioè è univocamente individuato un gruppo di r valori della variabile numerica, e dati gli r birapporti resta individuato un unico punto dello S_r, resta stabilita fra i punti dello S_r e i gruppi di r valori della variabile numerica una corrispondenza univoca.

Se gli r birapporti indipendenti sono dati sotto forma omogenea, si determinano, a meno di un fattore di proporzionalità, $r+1$ valori x_0, x_1, $x_2 \ldots x_r$ tutti finiti, e che non possono essere tutti nulli, che si possono assumere come coordinate omogenee dei punti dello S_r.

In particolare, se il punto **m** coincide col punto **u**, tutte le coordinate sono eguali fra loro, e quindi possono prendersi tutte eguali ad uno, per cui **u** si chiama *punto unità* dello S_r; se il punto **m** coincide con uno dei vertici della piramide fondamentale, saranno nulle tutte le coordinate omogenee, eccetto quella di indice eguale all'indice del punto, che si può assumere eguale ad uno; ed infine tutti i punti che stanno in una faccia della piramide fondamentale sono caratterizzati dall'avere eguale a zero la coordinata di indice eguale a quello della faccia stessa. Inoltre ogni raggio $\mathbf{a}_r\mathbf{m}$ che congiunge il punto fondamentale $\mathbf{a}_r$ al punto **m**, considerato nella stella di centro $\mathbf{a}_r$, è determinato da r coordinate x_0, $x_1, \ldots x_i$, $x_{i+1}, \ldots x_{r-1}$, che sono le stesse coordinate che individuano il punto **m** nello S_{r-1} **r**$'$.

28. — È facile dalle cose precedenti ricavare l'equazione della retta nel piano, e le equazioni della proiettività fra due piani, e così di seguito. Noi ora supporremo di aver dimostrato diggià che in una varietà ad $r-1$ dimensioni un S_{r-2} sia rappresentato da una equazione lineare

$$\Sigma a_i x_i = 0 \qquad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ r-1)$$

e che la proiettività fra due varietà lineari ad $r-1$ dimensioni sia rappresentata da un sistema di equazioni del tipo

$$\rho x'_i = \Sigma a_{ik} x_k \qquad (i,\ k = 0,\ 1, \ldots,\ r-1)$$

e dimostreremo che anche nella varietà lineare S_r un S_{r-1} è rappresentato da una equazione omogenea lineare fra le coordinate $x_0,\ x_1, \ldots\ x_r$, ed allora essendo il teorema dimostrato per l'S_1 e per l'S_2, vale per l'$S_3 \ldots$, quindi vale sempre.

Sia **P** un S_{r-1} contenuto nello S_r; se consideriamo come omologhi, nelle stelle che hanno per vertici fondamentali i punti $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{1}_1$, i raggi che proiettano uno stesso S_0 di **P**, si avranno due stelle fra loro prospettive. I raggi della prima stella hanno per coordinate $x_1 x_2 \ldots x_r$, quelli della seconda hanno per coordinate $x_0,\ x_2, \ldots x_r$, qualora si prendano in ciascuna di esse per raggi fondamentali e per raggio unità quelli che proiettano i rimanenti punti fondamentali ed il punto unità dello S_r.

Per la proiettività esistente fra le due rette si avranno le equazioni

$$\begin{aligned}
\rho x_0 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1r} x_r \\
\rho x_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2r} x_r \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\rho x_r &= a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \ldots + a_{rr} x_r
\end{aligned}$$

ma esse hanno per elementi uniti il raggio $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, e tutti gli $S_2 \ldots S_{r-1}$ che passano per esso; dunque le precedenti equazioni si riducono alla forma:

$$\begin{aligned}
\rho x_0 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1r} x_r \\
\rho x_2 &= a_{22} x_2 \\
&\cdots\cdots \\
\rho x_r &= a_{rr} x_r .
\end{aligned}$$

Di modo che le coordinate di ogni punto dello S_{r-1} **P** soddisfanno ad una equazione lineare del tipo

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_r x_r = 0 .$$

Viceversa, ogni equazione lineare omogenea fra le coordinate $x_0, x_1, .., x_r$ di un punto dello S_r determina nelle stelle di centro $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$ una omografia rappresentata dalle equazioni

$$a_0 x_0 = -(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_r x_r)$$
$$a_0 x_2 = a_0 x_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_0 x_r = a_0 x_r$$

e quindi è una prospettività, e perciò i punti che soddisfanno a quella equazione appartengono ad uno S_{r-1}.

Torino, Marzo 1891.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 31 Maggio 1891 . . . . *Pag* 487

RIZZO — Di un notevole tipo isobarico subalpino . . . . » 489

BERRUTI — Influenza dei cicloni sulla meteorologia locale . . . . » 503

AMODEO — Quali possono essere i postulati fondamentali della Geometria proiettiva di uno S_r . . . . » 505

Torino — Tip. Reale-Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVI, DISP. 15ª, 1890-91

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 21 Giugno 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci COSSA, Direttore della Classe, BRUNO, BERRUTI, D'OVIDIO, BIZZOZERO, FERRARIS, NACCARI, MOSSO, SPEZIA, GIBELLI, CAMERANO e BASSO Segretario.

Vien letto l'atto verbale dell'adunanza precedente che è approvato.

Il Socio COSSA presenta in dono un volume inviato dall'Accademia Reale di Scienze, Lettere e Belle Arti del Belgio, col titolo: *Manifestation en l'honneur de Jean-Servais Stas à l'occasion du cinquantième anniversaire de sa nomination comme membre titulaire à la Classe des Sciences.*

Vengono lette ed accolte per le pubblicazioni negli *Atti* le Note seguenti;

1° « *Sull'epidoto di Oulx e sui minerali che lo accompagnano* » del dott. Luigi COLOMBA; lavoro presentato dal Socio SPEZIA.

2° « *Uno sfigmomanometro per misurare la pressione del sangue nell'uomo* », del Socio Prof. Angelo MOSSO ».

3° « *Sulle correnti che si ottengono per l'allungamento di spirali o per la tensione di fili di nichel* », lavoro del Dott. Adolfo Campetti, Assistente al Laboratorio di Fisica della R. Università di Torino.

4° « *Dell'influenza della magnetizzazione sulla resistenza elettrica del ferro e del nichel* » ; Studio sperimentale del signor Antonio Garbasso, studente del secondo biennio nella Facoltà di Matematica della R. Università di Torino.

Questi due ultimi lavori sono presentati dal Socio Naccari.

Lo stesso Socio Naccari, condeputato col Socio Ferraris, legge una sua Relazione sulla parte III^{a} dello studio che il Prof. Angelo Battelli, della R. Università di Cagliari, prosegue sulle *Proprietà termiche dei vapori*. Tale studio ha per oggetto l'esame del vapore di solfuro di carbonio rispetto alle leggi di Boyle e di Gay-Lussac.

Il Socio Gibelli, condeputato col Socio Camerano, legge una sua Relazione sopra un lavoro dei Dottori O. Mattirolo e L. Buscalioni, il quale contiene *Ricerche anatomo-fisiologiche sui tegumenti delle Papilionacee*.

La classe accoglie le conclusioni favorevoli delle due accennate Relazioni, e mediante votazioni distinte, ammette prima alla lettura e poscia approva unanimemente per la pubblicazione nei volumi delle *Memorie*, tanto il lavoro del Prof. Battelli, quanto quello dei Dottori Mattirolo e Buscalioni.

Le Relazioni dei Soci Naccari e Gibelli saranno inserite negli *Atti*.

LETTURE

Sull'epidoto di Oulx e sui minerali che lo accompagnano;

Nota del Dott. LUIGI COLOMBA

Poche ed incerte sono anche ora le notizie che si hanno sui minerali dell'alta valle della Dora Riparia. Il Nicolis di Robilant (1), che pure si occupa abbastanza estesamente anche dei caratteri mineralogici delle nostre Alpi, limita le sue osservazioni sull'alta valle della Dora Riparia a pochi cenni su delle probabili cave abbandonate di minerali di argento e rame a Giaglione, Meana, Chiomonte ed al Seguret, oltre Salbertrand.

Il Barelli (2) cita un certo numero di campioni provenienti da queste località: gesso, calcare, calcopirite e malachite (Chiomonte), calcite e feldispati (Seguret), oro in pagliuzze (Oulx), antimoniuro di rame, malachite e calcite (Savoulx), galena argentifera (Beaulard), minerali di rame nei serpentini (Cesana) e della siderite a Giaglione.

Il Sismonda (3) non accenna che ai depositi di gesso che si trovano in vicinanza di Oulx e Cesana.

Il Gastaldi (4) accenna ad alcune specie mineralogiche esistenti nei terreni paleozoici della valle e precisamente all'ematite compatta del Melezet, a della limonite inclusa nelle dolomiti ed a certe miniere di argento abbandonate che sono probabilmente le medesime a cui accenna il Nicolis di Robilant.

In questi ultimi anni alcuni lavori del dott. Piolti hanno

(1) NICOLIS DI ROBILANT, *Essai géographique suivi d'une topographie sousteraine, mineralogique, etc.* Memorie dell'Accademia delle Scienze, anno 1786.

(2) BARELLI, *Cenni di statistica mineralogica degli Stati di S. M. il Re di Sardegna.*

(3) SISMONDA, *Notizie e schiarimenti sulla costituzione delle Alpi piemontesi.* Mem. Acc. d. Scienze di Torino, serie II, vol. IX.

(4) GASTALDI, *Studi geologici sulle Alpi Occidentali.* Memorie del R. Comitato Geologico, vol. II.

dato qualche notizia più precisa sui minerali di queste località; oltre alla descrizione dello gneiss tormalinifero di Villar-Focchiardo (1) e dei minerali dello gneiss di Borgone (2), egli ha compiuto lo studio completo di una cossaite di Bousson (3) ed in altro luogo (4) dà l'elenco dei minerali trovati nei dintorni di Cesana: anfibolo, augite, calcite, diallagio, dolomite, ematite, epidoto, idocrasia, malachite, pirrotina, prehnite, quarzo, steatite e talco.

Avendo avuto occasione, nel corso di questi ultimi anni, di frequentare questa valle dimenticata, ebbi pure modo di trovare i minerali notati dal Piolti, ad eccezione della cossaite, idocrasia e della pirrotina, e di osservare come questi minerali ed altri ancora, come la magnetite (in ottaedri nei serpentini), l'axinite, la galena, l'albite ed il gesso siano piuttosto sparsi per tutta la valle e per la massima parte concentrati nelle roccie cristalline della zona delle pietre verdi, senza che si abbiano mai dei giacimenti dell'importanza di quelli delle vicine valli di Lanzo e del Delfinato.

In queste mie gite mi sono incontrato in un piccolo giacimento di minerali, che suppongo sia ignoto a tutti, ed è dei minerali in esso contenuti che voglio occuparmi nel presente studio.

Questo piccolo giacimento affiora, a mezz'ora di distanza da Oulx, sulle basi del contrafforte di N. Dame de Catalovie, sul versante della Bardonnèche, ad un'altezza di neppure cento metri sul fondo della valle; vi si può giungere facilmente seguendo un sentiero che addossato alla montagna corre lungo la ferrovia.

La roccia appartiene alla zona delle pietre verdi, zona che in quel punto presenta uno sviluppo assai considerevole, formando quasi completamente il contrafforte di N. Dame de Catalovie; affiorando questa roccia a poca distanza dal fondo della valle è all'intorno circondata da terreni coltivati che rendono difficile la determinazione delle roccie circostanti; però si hanno nei dintorni, qua e là, dei piccoli affioramenti di roccie dioritiche e di schisti calciferi ed argillosi assai ricchi in quarzo.

---

(1) Piolti, *Lo gneiss tormalinifero di Villar-Focchiardo*, Atti Acc. delle Scienze di Torino. Seduta 12 maggio 1889.

(2) Piolti, *I minerali dello gneiss di Borgone*. Atti Acc. delle Scienze di Torino. Seduta 17 aprile 1880.

(3) Piolti, *Cossaite di Bousson*. Atti Acc. delle Scienze di Torino. Seduta 5 febbraio 1888.

(4) Piolti, *I dintorni di Cesana*. Bollettino d. Club Alpino, 1886.

La roccia apparisce di color verde grigiastro con larghe venature ora bianche ora giallo-verdastre, venature che corrispondono a delle litoclasi della roccia. Le venature bianche sono essenzialmente costituite da albite, quelle giallo-verdi da epidoto. È in queste venature che trovansi disseminate, con non grande abbondanza, le geodi cristallizzate contenenti i minerali del giacimento; si hanno pure, in alcuni punti, delle sottili venature di quarzo, più abbondanti alla periferia che al centro dell'affioramento, nelle quali però mancano quasi completamente gli altri minerali, trovandovisi solamente rari prismetti di epidoto, generalmente inclusi nel quarzo, qualche fibra di anfibolo bianco grigiastro, ed alcuni minutissimi aghetti neri di tormalina. I minerali trovati nelle venature sono: *epidoto*, *anfibolo*, *albite*, *calcite*, *quarzo*, *ematite* e *pirite*; l'albite e l'epidoto sono sparsi, si può dire, con ugual proporzione dappertutto, invece l'anfibolo, la calcite, l'ematite e la pirite si trovano specialmente nelle venature a base di epidoto; il quarzo trovasi qua e là disseminato ma sempre scarso.

Epidoto. — Questo minerale è piuttosto comune nelle roccie anfiboliche, pirosseniche e serpentinose della valle, ove generalmente si presenta o sotto forma di sottilissime patine costituite da minutissimi cristalli di origine secondaria (nei serpentini), o sotto forma di cristalli allungati ed aggregati (nelle roccie anfiboliche e dioritiche). — Lo trovai nei dintorni di Cesana, dove lo nota pure il Piolti (1), specialmente nell'alto vallone di Clavières, ove trovasi associato con pirite, anfibolo ed un minerale che sembra essere ilmenite, nelle roccie dioritiche che formano la base del Chaberton, in quelle che costituiscono il massiccio della Rognosa di Sestrières, nei serpentini del monte Fraiteve e nelle varioliti del Gran Gimont ove costituisce molte delle sferoliti.

Quello da me studiato si presenta generalmente sotto forma di cristalli di dimensioni piuttosto piccole, varianti fra un centimetro e pochi millimetri di lunghezza; talvolta esso assume una speciale struttura fibroso-raggiata; trovai diffatti un nodulo di epidoto così disposto, nel quale oltre ad esso notai soltanto dei minuti cristalli, per lo più cubici, di pirite alterata.

Tra i cristalli osservati quelli a dimensioni un po' grandi

(1) Piolti, *Nei dintorni di Cesana*, loc. cit.

sono colorati in verde-oliva intenso ed hanno le faccie tutte rugose e profondamente solcate da striature prodotte da fibre di anfibolo, sono opachi od appena translucidi sui bordi e le loro forme di cristallizzazione non sono determinabili, sebbene per la loro forma generale sembrino analoghi a quelli più piccoli; i quali, al contrario, hanno delle tinte di minima intensità (giallo-oliva pallidissimo), sono trasparenti e le loro faccie, sebbene piccolissime ed appena discernibili ad occhio nudo, sono assai lucide e poterono servire per le determinazioni goniometriche.

Le forme trovate sono 100, 010, 001, 101, $\bar{1}01$, 012, 201, 111, 011, 110 e 103 (orientazione secondo il Miller) (1); fra queste le più comuni sono le 001, 010, 100, 101 e 102 che compariscono sempre anche nei cristalli più poveri di forme; nei cristalli più ricchi si trovano anche le altre forme che qui riporto in ordine di frequenza: 201, 103, 111, 110, $\bar{1}01$ e 011.

I cristalli sono allungati parallelamente all'asse di simmetria; le faccie 012, 101, 100 e specialmente le 010 sono molto sviluppate mentre le 001 lo sono poco e le altre generalmente sono pressochè lineari; questo speciale sviluppo dà ai cristalli un aspetto schiacciato, quasi laminare, e per di più li fa apparire meno ricchi di forme di quello che realmente siano, poichè ad un'osservazione superficiale le forme 103, 011, 110, 111, $\bar{1}01$ e 201 e talvolta anche le 001, non sono quasi discernibili.

Ho fatto due analisi di questo epidoto avendo cura di scegliere dei cristalli che non presentassero traccie visibili di alterazione e che non avessero aderenti delle fibre di anfibolo; di esse qui riporto i risultati:

	1ª	2ª	Media
SiO_2	37,41	37,56	37,48
Al_2O_3	20,56	20,23	20,39
Fe_2O_3	15,22	15,39	15,30
CaO	24,01	23,98	23,99
MgO	0,45	0,52	0,48
El.vol.	1,97	1,81	1,89
	99,62	99,49	99,53

(1) Phillips, *An elementary, introduction to Mineralogy*, 1852.

di più notai tracce indeterminate di $Mn\,O$ e di acido carbonico (negli elementi volatili); il protossido di ferro non diede reazione sensibile.

Queste analisi condurrebbero ai rapporti molecolari :

$Si\,O_2$	6,53	6,5
$Al_2\,O_3$	2,09	2,0
$Fe_2\,O_3$	1	1
$Ca\,O$	4,48	4,5
El. vol.	1,09	1

d'onde si ricaverebbe come formola di quest'epidoto :

$$H_2O \,.\, Fe_2O_3 \,.\, 2\,Al_2O_3 \,.\, 4,5\,Ca\,O \,.\, 6,5\,Si\,O_2\,,$$

e se si assumesse come formola normale quella data dal Rammelsberg (1).

$$H_2\,Ca_4\,(R_2)_3\,Si_6\,O_{26} = H_2O \,.\, 4\,Ca\,O \,.\, 3\,R_2O_3\;6\,Si\,O_2$$

si avrebbe in questo epidoto un'eccesso di una mezza molecola di silicato di calcio:

$$H_2O \,.\, 4\,Ca\,O \,.\, Fe_2O_3 \,.\, 2Al_2O_3 \,.\, 6\,Si\,O_2 + {}^1/_2\; Ca\,Si\,O_3\,.$$

Ma noto che questo epidoto non è puro e che non si debbono considerare i risultati che come approssimativi; applicando ad esso l'ipotesi che l'epidoto comune sia il miscuglio, in proporzioni variabili, di due silicati, l'uno di allumina e calcio e l'altro di ferro e calcio (2) le quote centesimali ottenute per questo epidoto differiscono abbastanza di poco dai valori dati per la mescolanza di una molecola del silicato ferrico con due molecole di quello di allumina; posso quindi considerare questo epidoto come corrispondente ad un tal grado di mescolanza, come risulta dal confronto dei valori del Naumann con quelli trovati :

---

(1) Rammelsberg, *Handbuch der Mineralchemie.*

(2) Naumann, *Elemente der Mineralogie.*

	Valori dati dal Naumann.	Valori trovati medii
$Si\,O_2$	37,22	37,48
$Al_2\,O_3$	21,21	20,39
$Fe_2\,O_3$	16,54	15,30
$Ca\,O$	23,16	23,98
$H_2\,O$	1,87	1,85
	100	99

Anfibolo. — Questo minerale comunissimo in tutte le roccie dell'alta valle, specialmente allo stato di tremolite e di attinoto, si presenta in questo caso sotto l'aspetto di aggregati a fibra finissima, di una colorazione raramente bianca, generalmente grigiastra e sempre mescolato in varia proporzione con un minerale, pure fibroso, di colore giallo bruno, del quale avrò occasione di parlare in seguito.

Quando esso è discretamente puro le fibre assumono una speciale lucentezza setacea.

La sua struttura è *asbestoide;* l'analisi chimica, che potei fare su una piccola porzione scelta possibilmente senza grandi impurità, lo qualifica per un'*attinolite* :

$Si\,O_2$	54,65
$Al_2\,O_3$	0,47
$Fe\,O$	10,37
$Ca\,O$	16,13
$Mg\,O$	18,68
	100,30

da cui si ricavano come rapporti molecolari :

$Si\,O_2$	$Fe\,O$	$Ca\,O$	$Mg\,O$
6,32	1	2	3,31

che condurrebbero alla formola approssimativa :

$$Fe\,Si\,O_3 \;.\; 3\,Mg\,Si\,O_3 \;.\; 2\,Ca\,Si\,O_3$$

in cui il rapporto della magnesia alla calce, uguale a $\frac{3}{2}$, sarebbe inferiore al rapporto che si ricava dalla formola data dal Rammelsberg (1).

$$3\,CaSiO_3\ .\ 6\,MgSiO_3\ .\ FeSiO_3$$

Il minerale analizzato essendo impuro, anche in questo caso come già per l'epidoto, occorre assumere solo i risultati come approssimativi. Ad ogni modo ho ragione di credere, come farò vedere, che questo rapporto tenda realmente ad esser superiore di quello che risulta dai dati dell'analisi e che sul suo valore influisca assai il minerale fibroso giallo-bruno che trovasi mescolato coll'anfibolo in proporzioni variabili.

Ho fatto due analisi di questo minerale, o meglio del miscuglio di esso con l'anfibolo, avendo però cura di scegliere dei campioni che presentassero delle proporzioni differenti dei due componenti. La prima si riferisce al minerale giallo-bruno quasi mancante di anfibolo, la seconda ad un miscuglio in cui l'anfibolo entra in maggiore quantità :

	1ª	2ª
SiO_2	46,17	51,68
Fe_2O_3 / FeO (2)	10,51	10,34
Al_2O_3	8,03	4,21
MgO	12,92	17,80
CaO	22,63	16,37
	100,26	100,40

La composizione centesimale di questi due miscugli appare intermedia fra quella avuta per l'epidoto e quella avuta per l'anfibolo. Si può quindi considerare questo minerale giallo-bruno come uno speciale prodotto di alterazione fra l'epidoto e l'anfibolo. Ammessa questa ipotesi, di cui riparlerò, i miscugli di anfibolo e del minerale giallo-bruno non sarebbero che differenti gradi di alterazione tanto più vicini all'anfibolo quanto sono meno colorati e come si vede dai dati delle analisi quanto più la co-

(1) Rammelsberg, loc. cit.

(2) Stante le piccole quantità che avevo a disposizione di questi miscugli, non potei determinare separatamente il sesquiossido ed il protossido di ferro.

stituzione è prossima a quella dell'anfibolo tanto più abbonda la magnesia e sono scarsi il sesquiossido di ferro, l'allumina e la calce.

L'anfibolo da me studiato ed analizzato non sarebbe quindi altro che uno speciale grado di quell'alterazione come si può facilmente vedere paragonando insieme le composizioni centesimali dell'anfibolo e dei due miscugli ; ed in essi si vede come realmente il rapporto della magnesia alla calce vada crescendo coll'avvicinarsi della composizione chimica verso quella dell'anfibolo (cioè col diminuire della quantità del minerale giallo-bruno) e come questo rapporto vada tendendo verso quello che si ottiene dalla già citata formola del Rammelsberg.

	Prodotti intermedi 1°	2°	Anfibolo analizzato	Anfibolo secondo la formola del Rammelsberg.
$\frac{MgO}{CaO}$	0,8	1,52	1,65	2,0

La esiguità di questo rapporto dipende probabilmente dalla grande quantità di ferro che in questo anfibolo è ancora contenuto e dalla grande ricchezza in calce che in tutti questi minerali si nota.

Albite. — L'albite costituisce con la labradorite i tipi più comuni secondo cui i feldispati si presentano generalmente nelle roccie di queste località in cui per la mancanza delle roccie ortoclasiche l'ortosio manca generalmente. Non sono rare le druse cristallizzate di albite, generalmente mescolata a quarzo, specialmente nelle quarziti e nelle dioriti.

Come in generale in tutte le località ove ebbi agio di osservare dell'albite cristallizzata, in questo giacimento essa si presenta sotto forma di piccoli cristalli con aspetto poco complesso.

La zona d'inserzione dei cristalli è generalmente parallela alle facce $\bar{1}10$ e $\bar{1}30$, per modo che queste facce sono raramente visibili; i cristalli sono costantemente geminati secondo la legge dell'albite e non mi riuscì mai nè di trovare dei cristalli semplici nè delle altre leggi di geminazione.

Le forme trovate sono 010, 130, 110, $0\bar{2}1$, 001, 101, $\bar{1}30$ e $\bar{1}10$ delle quali l'ultima fu ammessa per analogia non essendosi mai potuta determinare.

Le facce 010, 001, 110, 101 sono le più comuni e si hanno in tutti i cristalli; sono più rare le faccie 130, $\bar{1}30$ e 021. Anche in questo caso, come già nell'epidoto, la forma quasi lineare ed appena visibile di queste ultime facce tende a dare spesso ai cristalli delle forme apparenti meno complesse.

Le faccie 110, 101 sono abitualmente rugose e quasi damascate, quelle 010 sono sempre striate parallelamente alle loro intersezioni con 110. Sfaldatura perfetta secondo 001.

Spessissimo l'albite è colorata in verdastro per inclusioni di cristalli microscopici di epidoto; la posizione reciproca dei cristalli di albite e di epidoto porta a stabilire che questi due minerali sono contemporanei ; abbondano diffatti i cristalli di albite che sembrano modellarsi su quelli di epidoto e viceversa non sono rari i cristalli di epidoto contorti, spezzati, spostati o schiacciati da cristalli di albite ; di più , come vedremo , oltre alle già notate inclusioni di epidoto nell'albite, si hanno anche dei casi di albite inclusa nell'epidoto.

Due analisi di questo minerale diedero i seguenti risultati :

	1ª	2ª	Media
$Si\,O_2$	67,73	67,59	67,66
$Fe_2\,O_3$	0,70	0,81	0,75
$Al_2\,O_3$	16,91	17,16	17,03
$Mg\,O$	0,18	0,10	0,14
$Ca\,O$	3,81	3,78	3,79
$K_2\,O$	0,81	0,87	0,85
$Na_2\,O$	9,21	9,11	9,16
	99,35	99,42	99,38

Come risulta da questi valori, quest'albite è ricchissima in calce ; la provenienza di questa calce non è però ben determinata. Come farò vedere quando parlerò dei caratteri microscopici della roccia incassante, anche per i suoi caratteri ottici quest'albite si presenta ricca in calce; per altra parte non occorre scordare che l'albite contiene sempre delle inclusioni, assai numerose di epidoto che tendono ad alterarne la formola aumentando la quota della calce.

Le piccole traccie di magnesia provengono probabilmente da qualche inclusione di anfibolo.

Per quest'albite quindi, senza dare una vera formola, mi limito ad ammettere in essa una grande ricchezza in calce che la fa tendere verso la costituzione dell'oligoclasio.

Calcite. — E forse il minerale più comune nelle località da me visitate. Si presenta in bellissime cristallizzazioni di tipo scalenoedrico nelle roccie paleozoiche che costituiscono le grandi formazioni calcari del Chaberton ed anche nelle roccie prepaleozoiche abbonda, specialmente negli schisti lucidi e nei serpentini che soventi passano a delle vere oficalci a cui appartengono i noti marmi verdi di Bousson e di Rochemolles. In questi casi la calcite assume generalmente un tipo romboedrico, sebbene non manchino però neppure i casi di cristalli scalenoedrici appartenenti a queste formazioni e sono appunto di questo tipo i cristalli che ho osservato nel giacimento studiato.

Questi cristalli sono generalmente di dimensioni piuttosto grandi superando anche i due o tre centimetri di lunghezza, ma si presentano quasi sempre aggregati. Le forme cristalline determinate sono solamente due: lo scalenoedro $20\bar{1}$ ed un romboedro ottuso indeterminabile perchè aveva le faccie curve e profondamente striate.

I cristalli di questa calcite sono trasparenti e perfettamente incolori; la loro posizione rispetto all'epidoto, all'albite ed all'anfibolo basta a dimostrarne la loro origine secondaria; essi sono sempre addossati ai cristalli di epidoto e di albite, modellandosi su di essi senza che mai abbia notato un caso solo in cui dei cristalli di epidoto e di albite o fossero spostati dalla calcite o fossero su di essa impiantati.

Chimicamente questa calcite è purissima ed ho stimato inutile farne un'analisi quantitativa, avendo avuto dei saggi qualitativi che mi accertavano della mancanza assoluta del protossido di ferro e della magnesia.

Quarzo. — Con la calcite costituisce i minerali che più si riscontrano nell'alta valle della Dora Riparia; oltre che nella zona gneissica dove furono determinate le sue poco complicate forme da Piolti (1) abbonda nelle roccie della zona delle pietre verdi, specialmente negli schisti argillosi.

Sopra Cesana esiste, sulla strada che conduce al colle di Sestrières, un affioramento di schisti rossi interessanti per le contorsioni delle loro stratificazioni, secati in ogni senso da numerosissime venature di quarzo cristallizzato. Grandi formazioni quarzitiche si hanno nel gruppo d'Ambin e specialmente alla Rognosa di Etiache dove le quarziti costituiscono una mole che si eleva a circa 3500 metri sul livello del mare; in esse abbondano i cristalli però, da quanto mi fu dato osservare, con poca complessità di forme.

Così pure nella zona sovrastante dei calcari trovasi generalmente il quarzo od in venature od in cristalli completi sparsi nella massa e che sembrano essersi formati per sospensione.

Nel giacimento studiato il quarzo lo si può solo considerare come elemento accessorio; rarissimo nei punti centrali dell'affioramento, abbonda di più verso la periferia vicino alla zona di contatto con i calceschisti e gli schisti lucidi circostanti assai ricchi in quarzo.

Esso si trova generalmente concentrato, come già notai, in piccole vene che partono dalle zone esterne e che riempiono probabilmente delle litoclasi della roccia; talvolta, ma raramente, trovasi pure impiantato nelle druse ma sempre a contatto con epidoto.

I cristalli sono assai piccoli, non superando mai i 6 od 8 millimetri; il loro aspetto esterno è variabilissimo essendo alle volte incolori, altre volte bianchi lattei, gialli per inclusioni ferruginose, bruni per patine di limonite che li ricoprono.

Le forme cristalline di questo quarzo sono affatto comuni; tutti presentano le solite forme $[100.22\bar{1}]$ $2\bar{1}\bar{1}$ a cui raramente si aggiunge la $4\bar{1}\bar{2}$; alcuni hanno sulle facce del prisma, in prossimità degli spigoli $2\bar{1}\bar{1}.100$ e $2\bar{1}\bar{1}.22\bar{1}$, delle striature parallele a tali spigoli, striature che possono far ammettere la presenza di qualche romboedro acutissimo non determinabile.

In un cristallo trovai una speciale e marcata tendenza a spaccarsi secondo superficie quasi piane, rugose, disposte, all'in-

(1) Piolti, *I minerali dello gneiss di Borgone*, loc. cit.

grosso, parallelamente alle faccie 100; ciò potrebbe far supporre in esso una sfaldatura parallela a tali faccie.

I cristalli hanno tutti forma prismatica e sono piuttosto allungati, seguendo in ciò la tendenza comune a tutti i cristalli di queste località e delle vicine, come lo attestano i numerosissimi cristalli del Delfinato e della Savoja. Credo quindi interessante e degno di nota l'abito speciale di un gruppo di cristalli provenienti da alcuni frammenti di calcare del Chaberton. In questi, che sono assai piccoli, si nota una tendenza spiccatissima alla scomparsa del prisma e secondariamente all'annullamento anche delle faccie $22\bar{1}$.

Quelli in cui si nota solo la mancanza quasi completa del prisma assumono il tipo di bipiramide esagona; quelli in cui anche le facce $22\bar{1}$ tendono a scomparire assumono una forma, abbastanza poco comune nel quarzo, costituita dal solo romboedro 100 sui cui vertici le faccie $22\bar{1}$ e $2\bar{1}\bar{1}$ compariscono come piccole smussature; oltre alle comuni forme ho in essi determinata la $4\bar{1}\bar{2}$.

Ematite. — Questo minerale non presenta alcun carattere interessante. È costituito da finissime scaglioline di aspetto lucente, un po' terroso, che in alcuni punti assumono un vero aspetto polverulento e si trova generalmente sotto forma di sottili patine che ricoprono i cristalli di albite e di epidoto; i suoi caratteri esterni e la sua posizione sono sufficienti a determinarne la origine secondaria.

Si trova pure, sempre sotto la medesima forma, in alcune spaccature e su alcune superficie di rottura che debbono essere recentissime e che corrispondono forse a delle antiche screpolature in cui già si era depositata l'ematite.

Pirite. — È questo il minerale più raro fra quelli appartenenti al giacimento studiato. Ad eccezione di pochi cristallini a contorni poco definiti sparsi presso la zona d' inserzione dei cristalli, non la trovai abbondante che nel nodulo di epidoto fibro-raggiato, nodulo che può considerarsi come una piccola geoda in cui le condizioni in cui la cristallizzazione avvenne determinarono la speciale disposizione dell'epidoto.

In quel nodulo la pirite ha tutti i caratteri di un minerale secondario e si presenta sotto forma di cristallini il cui massimo sviluppo non supera il millimetro, e che sono spesso quasi microscopici; in essi riconobbi come uniche forme il cubo ed un pentagonododecaedro indeterminabile.

Questi cristallini presentano la loro superficie alterata generalmente in limonite; rotti presentano nell' interno una colorazione gialla, metallica analoga a quella della pirite inalterata.

Terminata così la descrizione dei minerali notati nel giacimento descriverò brevemente le osservazioni microscopiche fatte su alcune lamine sottili della roccia incassante.

Queste sezioni furono fatte con frammenti poco lontani dalle druse cristallizzate ed alcune anzi furono fatte proprio presso la zona d'inserzione dei cristalli.

Questa roccia incassante è colorata in verde grigio; la presenza delle venature di cui già ho parlato dà ad essa un aspetto poco omogeneo sia per il colore che per la struttura che è alle volte micromera e necessita l'uso della lente per la determinazione degli elementi costitutivi ed alle volte abbastanza a grossa grana tale da potersi facilmente discernere gli elementi constitutivi ad occhio nudo.

Lo studio delle sezioni microscopiche di cui ho già parlato mette in evidenza gli stessi caratteri di eterogeneità in quanto si riferisce alla disposizione degli elementi e ciò specialmente nelle sezioni fatte proprio a contatto con le druse cristallizzate; in questi punti si notano degli addensamenti degli elementi corrispondenti agli addensamenti dei minerali nelle druse.

Unici elementi notati sono: un feldispato plagioclasico, epidoto ed anfibolo; gli altri minerali mancano completamente ad eccezione forse del quarzo che compare come elemento accessorio in prossimità delle venature quarzitiche. Questa mancanza assoluta degli altri minerali appoggia quanto già dissi sulla loro origine secondaria.

Il feldispato plagioclasico sembra esser costituito da *albite* come del resto è naturale, considerato l'intimo legame esistente fra le druse e la porzione della roccia incassante. La geminazione avviene sempre secondo la legge dell'albite; i geminati si presentano generalmente come grandi cristalli a contorni poco definiti che penetrano ripetutamente gli uni negli altri, presentando in alcuni punti dei caratteri che si avvicinano a quelli delle geminazioni polisintetiche.

Nessun altro tipo di geminazione fu osservato.

Le direzioni di estinzione diedero degli angoli varianti entro limiti poco estesi: 3° a 3°, 30′ e 15° a 16°, 30′. Questi angoli un po' inferiori a quelli dell'albite normale e tendenti verso quelli dell'anortite dimostrano che realmente questa albite è ricca in calce. Essa non presenta generalmente dei caratteri idiomorfi molto spiccati essendo generalmente in plaghe a contorni poco definiti; tuttavia in alcuni punti delle sezioni ed anche in queste plaghe non mancano dei cristalli a contorni piuttosto netti. Essa è ricca di inclusioni di epidoto e talora anche di anfibolo; a sua volta la si può vedere inclusa in cristalli di epidoto. Colorazioni nulle od appena sensibili con debole rilievo.

L'*epidoto* presenta dei caratteri idiomorfi più spiccati di quelli dell' albite; è, come già notai, pochissimo colorato e si rende poco sensibile il suo pleocroismo; presenta però delle colorazioni assai vivaci con forte rilievo. Le sezioni allungate si estinguono quasi longitudinalmente (ho determinato un angolo variante fra 1° e 2°); in alcuni punti i cristalli si presentano sotto forma di sezioni rombiche il cui carattere monoclino è però distintamente manifestato dall' inclinazione delle linee di estinzione; contiene, come già dissi, delle inclusioni di albite e spesso, nella sezioni fatte proprio alla base delle druse, si presenta avviluppato da fibre di anfibolo.

L'*anfibolo* presenta assai distinti i caratteri di minerale dicroico ; la sua fibra è finissima e come già nel minerale, ha struttura asbestoide. Si trova sparso ovunque occupando tutti i vani vuoti, rivestendo soventi i cristalli di epidoto e coprendo in certi punti delle plaghe assai vaste nelle quali oltre ad esso si notano solo pochi cristalli di epidoto.

Queste sezioni, come già dissi, furono fatte in prossimità delle druse e quindi i caratteri osservati non si possono considerare come riferentisi, in modo assoluto, alla massa della roccia, poichè è probabile che coll'allontanarsi dalle druse, gli elementi mineralogici subiscano delle modificazioni non solo in quanto si riferisce alle proporzioni relative secondo cui entrano a costituire la roccia, ma forse anche nella loro stessa struttura; queste sezioni fatte così vicine alle druse non si possono considerare come vere sezioni della roccia, poichè si deve considerare questa zona di inserzione come un addensamento degli elementi che nelle druse sono cristallizzati, e quindi come più prossima alle druse che alla roccia.

Così l'albite cristallizzata ha dato un quantitativo di calce molto forte, superiore alla grande maggioranza delle albiti analizzate; nelle sezioni fatte essa presenta pure dei fenomeni ottici che accertano la sua ricchezza in calce senza che in questo secondo caso si possa tale eccesso riferire, come nel primo, a delle inclusioni eterogenee.

Ora l'albite come elemento litico è piuttosto raro; molte roccie che nelle geodi presentano dell'albite, sono invece nella loro massa costituite da oligoclasio; non è quindi molto improbabile l'ammettere che il feldispato che nelle druse si manifesta come vera albite, che nelle zone prossime alle geodi si manifesta come albite assai calcifera, sia nella vera roccia sostituita da oligoclasio; e forse la formazione dell'epidoto è una conseguenza di questa eliminazione di calce (che avviene dall'interno all'esterno della roccia nella trasformazione dell'oligoclasio nell'albite).

Ma prima di classificare la roccia occorre ancora tornare qualche istante su quel minerale giallo-bruno, che ho ammesso essere il risultato di una possibile alterazione dei minerali della geoda, allo scopo di osservare se si abbiano delle ragioni per ammettere realmente questa alterazione e se quest' alterazione, qualora esista, debba essere considerata come generale o solo come limitata alle geodi ed alle zone di roccia incassante.

L'esistenza del minerale giallo-bruno non necessita l'ipotesi di questa alterazione perchè esso potrebbe essere il risultato di un miscuglio, a proporzioni variabili di anfibolo e di epidoto che abbia assunto una forma fibrosa.

I cristalli di epidoto notati nelle sezioni microscopiche appoggerebbero però, fino ad un certo punto, l'ipotesi di questa alterazione perchè essi si presentano spesso avvolti come da reti di anfibolo grigiastro: viceversa si hanno dei cristalli completamente inalterati ed abbastanza voluminosi; anche la formazione secondaria della calcite e del sesquiossido di ferro (e della pirite) potrebbe pure spiegarsi con quest' ipotesi: ammettendoli come i prodotti di eliminazione di questa alterazione; ma contro di essa sta un fatto piuttosto importante ed è la mancanza in tutto il giacimento di minerali capaci di cedere la magnesia necessaria per tale trasformazione, poichè le minime quantità di magnesia trovate nell'epidoto si debbono ascrivere a delle minime traccie di anfibolo e non ad un elemento costitutivo dell'epidoto.

Un altro fatto degno di esser ricordato e che non è certo fatto per sorreggere l'ipotesi dell'alterazione si è che in alcuni punti le fibre giallo-brune del minerale intermedio finiscono in fibre bianche, setacee che si possono considerare come vero amianto.

Tuttavia non credo si possa eliminare totalmente l' ipotesi di questa alterazione ridotta nei limiti di un fatto puramente particolare avendo avuto occasione di notare su un cristallino di albite molte piccole macchie verdi che terminavano al difuori con dei piccoli ciuffetti di fili d'anfibolo, macchiettine che, osservate con un ingrandimento di 30 diametri, si manifestavano per cristalli di epidolo.

Su questa alterazione concludo col dire che è probabile che esista, ma come già dissi, limitata solo ad alcuni punti e che essa non sia la comune trasformazione dell'anfibolo in epidoto, ma bensì la trasformazione inversa poichè, come già notai, l'epidoto ha dei caratteri che lo dimostrano come coetaneo dell'albite.

Ammesso che l'alterazione, nel caso in cui esista, sia solamente superficiale essa non avrà avuto nessuna influenza sulla costituzione della roccia, dove realmente, anche solo osservando le sezioni microscopiche fatte a qualche distanza dalla zona d'inserzione dei cristalli, non ci sono dei fenomeni che mi possano far ammettere questa alterazione, ed essa si potrà quindi considerare come una roccia costituita essenzialmente di albite, anfibolo ed epidoto. Sebbene in alcuni punti la ricchezza in anfibolo sia tale da dare alla roccia un'aspetto di vera anfibolite, tuttavia l'abbondanza del feldispato non mi permette di considerare la roccia come un anfibolite feldispatica ed epidotica, ma piuttosto come una *diorite attinolitica* ricca in epidoto, ammesso che nella roccia l'albite venga sostituita da oligoclasio.

Gabinetto Mineralogico dell' Università di Torino.

Sulle correnti che si ottengono per l'allungamento di spirali o per la torsione di fili di nichel;

Nota del Dott. ADOLFO CAMPETTI

I.

1° Scopo principale di questo lavoro era di esaminare l'influenza di temperature elevate sopra le correnti che si ottengono sia allungando od accorciando spirali di filo nichel, sia torcendo fili del metallo stesso ed in special modo di esaminare se queste correnti si annullino verso i 350°, temperatura alla quale il nichel perde le sue proprietà magnetiche.

Ho però creduto necessario premettere alcune esperienze sulle correnti che si hanno a temperatura ordinaria e specialmente confrontare le correnti che si ottengono per la torsione (correnti di torsione) con quelle ottenute per allungamenti di spirali e che potremo chiamare con Braun di deformazione. — Per le Memorie che più strettamente si riferiscono al presente argomento vedasi la nota a piè di pagina (1).

2° Il filo di nichel adoperato era dello stesso di cui già ho usato altra volta (V. Nuovo Cimento 1890) e il galvanometro era quello astaticor esistenza eguale a 0,34 Ohm. già da me adoperato che per una distanza di metri 2.40 dello specchio dalla scala dava una divisione della scala per 0,0000001 Ampère.

Nelle esperienze di torsione il filo veniva stretto alle sue estre-

(1) BRAUN, *Ueber Deformationströme, etc.*, W. A. 1889. *V.* 37. 38. — *Bemerkungen über Deformationströme.* W. A. 1890.

ZEHNDER, *Deformationströme.* W. A. 1890. *V.* 38. — *Ueber den Einfluss von Dehnung und Torsion auf das magnetische Moment von Nichel und Eisen-Drähte, etc.*, *W.* A. 1889. *V.* 41.

mità tra due morsette di ottone, di cui l'una fissa, l'altra avvitata sulla testa di un asse girevole, la cui rotazione era misurata sopra un cerchio graduato. Il filo teso orizzontalmente poteva essere disposto sia nel meridiano magnetico, sia perpendicolarmente ad esso.

La corrente non è proporzionale alla torsione che dentro limiti assai ristretti: per torsioni forti la corrente cresce meno rapidamente della torsione stessa: lo stesso vale per le correnti di deformazione.

Tanto nella torsione quanto nella deformazione di spirali ha luogo il fenomeno di isteresi; limitandoci al caso della torsione questa isteresi era più sensibile nel caso in cui il filo fosse teso nel meridiano magnetico.

Nelle due tabelle seguenti sono riassunte alcune osservazioni relative a questo fenomeno: le esperienze si eseguivano così. Si torceva ripetutamente il filo di uno stesso angolo, per es. di 95°, (V. I tabella) dopo alcune torsioni la direzione ottenuta al galvanometro era sempre la medesima (45 divisioni): si torceva allora il filo di un angolo maggiore (130°): anche qui, dopo le prime torsioni, in tutte le successive si aveva al galvanometro una stessa deviazione (61): allora si dava di nuovo al filo la torsione primitiva (95°): la deviazione era maggiore della primitiva, e dopo varie torsioni assumeva un valore (51,5) che restava poi lo stesso per tutte le successive torsioni. In questo modo sono state costruite le due tabelle seguenti.

I. *Filo torto con* 45.

Deviazione	95°	130°	95°	130°	95°	195°	95°
Torsione	45	61	51,5	61	52,5	87	54,5

II. *Filo torto con* 44.

Deviazione	95°	50°	95°	50°	95°	130°	150°	130°	150°	130°	95°
Torsione	121,5	80	119	81,5	118	139,5	181	169	179,5	169	153,5

Credo inutile di insistere maggiormente sopra queste esperienze perchè già ne è stato trattato ampiamente nella citata memoria di Zehnder; solo ho voluto riportare gli esempi sopra scritti per essere le condizioni dell'esperienza alquanto diverse.

Debbo pure aggiungere che alle indicazioni date dal galvanometro non è stata portata la correzione relativa allo smorzamento delle oscillazioni, che era del resto assai piccolo: quando se ne voglia tener conto basterà moltiplicare i numeri ottenuti per $1+\frac{1}{2}\lambda$ ove $\lambda=0{,}06$.

3° Poichè anche nelle esperienze seguenti ho esaminato, ora le correnti di torsione ora quelle di deformazione, così ho creduto opportuno di stabilire un confronto fra le une e le altre.

Dalle esperienze risulta che per deformazioni molto piccole i due modi di ottenere la corrente possono ritenersi come equivalenti (per esempio quando la torsione non superi i 100° per metro di filo); per deformazioni maggiori invece le differenze riescono assai sensibili. Sarà bene però premettere queste considerazioni.

Sia h l'allungamento che subisce una spira di un'elica avvolta sopra un cilindro di raggio R, cioè l'aumento di lunghezza del passo di essa elica, ed ω sia la torsione che per questo allungamento subisce l'unità di lunghezza del filo: allora se h è abbastanza piccolo di fronte ad R da poterne per una prima approssimazione trascurare le potenze superiori alla prima, tra queste quantità sussiste la relazione.

$$\omega=\frac{h}{2\pi R^2}\,.$$

Se l è la lunghezza totale del filo avvolto ad elica ed n il numero delle spire poichè $2\pi R\,.\,n=l$, la torsione totale sarà

$$\Omega=\frac{2\pi R\,.\,nh}{2\pi R^2}=\frac{nh}{R}=\frac{H}{R}$$

essendo H l'allungamento subìto dalla intera spirale.

Possiamo verificare questa formula in tal modo. Ad un filo di determinata lunghezza si dia una certa torsione e si noti la deviazione ottenuta al galvanometro: lo stesso filo poi si avvolga ad elica sopra un cilindro di raggio noto (in modo che l'allungamento della spirale produca nel filo una torsione dello stesso senso della precedente) e si osservi la corrente data da un allungamento di questa spirale. Supposto che si resti con queste deformazioni sempre in quei limiti dentro i quali si può ritenere sussista proporzionalità fra la deformazione e la corrente, possiamo calcolare la torsione che per effetto dell'allungamento della spirale ha subìto il filo e di qui la corrente: dovremo ottenere un numero uguale o poco differente da quello direttamente osservato. La verificazione fu fatta per tre fili diversi

I. Torsione del filo 55 gradi - Deviazione al galvanometro 19.

Lo stesso filo avvolto ad elica sopra un cilindro di 8 millimetri di raggio dette per un allungamento di mill. 10 una deviazione di 23.

Si ha quindi in questo caso:

Deviazione osservata	Calcolata
23	24,5

II. Torsione 50° — Deviazione 22.

Lo stesso filo avvolto ad elica sopra un cilindro di mill. 8,2 di raggio dette per un allungamento della spirale di mill. 11 una deviazione di 32.

Si ha quindi:

Deviazione osservata	Calcolata
32	33,8

III. Torsione del filo 95° — Deviazione 18,2

Lo stesso filo avvolto ad elica sopra un cilindro di mill. 8,2 di raggio dette per un allungamento di mill. 11 una deviazione di 16.

Si ebbe quindi:

Deviazione osservata	Calcolata
16	14,5

Quando si tratti invece di deformazioni assai maggiori le correnti ottenute per torsione o per allungamento di spirali si comportano assai diversamente; nè questo deve far meraviglia giacchè nel secondo caso alla torsione accompagnandosi la flessione, lo stato molecolare del filo deve risultare modificato in maniera differente. Il fatto più notevole, già osservato da Braun è questo. Se ad un filo si danno torsioni per esempio tutte fra loro uguali e *consecutive* in modo cioè che dopo la prima torsione si lasci il filo torto e la seconda torsione venga data al filo già torto per la prima e così via, le correnti, che rispettivamente si ottengono, vanno decrescendo fino ad annullarsi quasi completamente. Se invece si allunga una spirale dandole, per esempio, una serie di allungamenti uguali e *consecutivi*, nel senso di prima, le correnti rispettive vanno da principio decrescendo, ma quando per l'insieme di queste deformazioni la spirale abbia acquistata una certa lunghezza, la corrente cambia direzione nel filo e torna di nuovo a crescere etc.

Però secondo Braun questa inversione avverrebbe costantemente quando la lunghezza totale della spirale è divenuta la metà della lunghezza totale del filo. Invece, almeno per la qualità di filo da me adoperata, il fenomeno non avviene così: solamente per spirali di diametro sufficientemente grande l'inversione avviene in quelle condizioni; per spirali di diametro minore l'inversione ha luogo per allungamenti assai minori.

Per esempio:

I. Lunghezza del filo avvolto ad elica cm. 113 — Diametro della spirale mm. 22.

Lung. a cui avvenne l'inversione cm. $50 = \frac{110}{2}$ e $113 - 110 = 3$.

II. Lunghezza del filo avvolto cm. 172,4 — Diametro della spirale mm. 16,5.

Lunghezza d'inversione cm. $77{,}7 = \frac{155{,}4}{2}$ e $172{,}4 - 155{,}4 = 17$.

III. Lunghezza del filo avvolto cm. 56 — Diametro della spirale mm. 16,5.

Lunghezza di inversione cm. $19{,}5 = \frac{39{,}0}{2}$ e $56 - 39 = 17$.

IV. Lunghezza del filo avvolto cm. 85 — Diametro della spirale mm. 12.

Lunghezza di inversione $31 = \frac{62}{2}$ e $85 - 62 = 23$.

V. Lunghezza del filo avvolto cm. 83,4 — Diametro della spirale mm. 8,3.

Si ebbe una prima inversione quando la lunghezza della spirale fu di cm. $16 = \frac{32}{2}$ e $83{,}4 - 32 = 51{,}4$.

Si ebbe una seconda inversione della corrente, cioè la corrente riprese nel filo la direzione primitiva quando la lunghezza della spirale fu di cm. 54.

VI. Lunghezza del filo avvolto cm. 86 — Diametro della spirale mm. 8,3.

Lungh.	a cui avvenne	la I^a	inversione	nella	corrente cm.	14 circa.
»	»	la II^a	»	»	»	29 »
»	»	la III^a	»	»	»	74 »

Da ciò che precede risulta come l'inversione nella direzione della corrente avvenga tanto più presto quanto minore è il diametro della spirale non solo, ma che, quando il diametro è assai piccolo, alla prima inversione ne può succedere una seconda e una terza; la corrente però che la spirale dava dopo la prima inversione per un certo allungamento del filo non raggiungeva mai il valore della corrente data dalla spirale per un allungamento uguale al principio della deformazione.

Si deve anche notare che il filo adoperato precedentemente era ancora nuovo e quindi non aveva certo subito forti torsioni prima di essere avvolto a spirale. Chè, se si fa uso di filo già torto, il fenomeno dell'inversione può anche sparire. Per esempio con un filo torto poi avvolto ad elica, in modo che per l'allungamento della spirale si producesse nel filo una torsione dello stesso senso di quella già subita, non fu possibile ottenere l'inversione.

II.

Influenza della temperatura. — 1° L'apparecchio riscaldante di cui feci uso si componeva di due cilindri metallici di diametro differente posti l'uno dentro all'altro e riuniti fra loro alle estremità. Lo spazio lasciato vuoto tra i due tubi si riempiva con sabbia: nell'interno del tubo minore veniva posto il filo o la spirale da riscaldare: i capi del filo passando attraverso a tappi di amianto venivano poi opportunamente collegati al galvanometro.

Riscaldando direttamente il tubo esterno con fiamme a gas fu possibile di raggiungere i 350 gradi, mantenendo per un tempo sufficientemente lungo la stessa temperatura in tutti i punti del tubo.

In tutte queste esperienze, come nella maggior parte delle precedenti, non potendo essere evitate le correnti termo-elettriche, si faceva uso per la compensazione di una pila campione Daniell.

Perciò si ponevano i due capi di un circuito derivato della pila (contenente una cassetta di resistenza) in comunicazione, mediante contatti a mercurio, cogli estremi del filo di nichel e coi fili che andavano al galvanometro. Variando convenientemente la resistenza nella cassetta si poteva ridurre il galvanometro allo zero. Siccome poi nella cassetta la resistenza era sempre di qualche centinaio di Ohm, si poteva ritenere che la corrente data dal filo o dalla spirale di nichel passasse tutta attraverso il galvanometro.

Ciò posto, era prima di tutto necessario verificare se la temperatura abbia sulla intensità delle correnti un'influenza permanente; vale a dire se, quando il filo dopo il riscaldamento, è tornato alla temperatura ordinaria, dia ancora la medesima corrente che forniva prima del riscaldamento. Ora questo non avviene, cioè, dopo che il filo è stato riscaldato (qualunque sia la sua posizione rispetto al meridiano magnetico), la corrente alla temperatura ordinaria è in generale superiore alla primitiva; questa corrente però va decrescendo nelle prime torsioni che hanno luogo dopo il riscaldamento, finchè assume un valore definitivo differente dall'iniziale.

Fra le varie esperienze scelgo le seguenti: le osservazioni sono fatte tutte a 18° gradi:

1ª Spirale.

	18°	dopo 135°	dopo 232°	dopo 338°
Prima deviazione . .	106, 5	114	117, 5	132
Deviazione definitiva	106, 5	108, 5	110, 5	121

2ª Spirale.

	18°	dopo 200°	dopo 296°	dopo 350°
Prima deviazione . .	50	92	98	108
Deviazione definitiva	50	79	87	93

Correnti di Torsione.

	18°	dopo 260°	dopo 300°	dopo 200°	dopo 300°
Prima deviazione. .	. . . .	92, 5	94	90	93
	63, 5				
Deviazione definitiva	, . . .	83, 5	85, 5	85, 5	87

2. Volendo ora osservare le correnti date dal filo a diverse temperature ho trovato praticamente più conveniente di servirmi di spirali, giacchè nel caso delle correnti di torsione non essendo possibile di avere un riscaldamento perfettamente uniforme in tutto il filo, nascevano nell'atto della torsione delle correnti termo-elettriche variabilissime da esperienza ad esperienza, che rendevano impossibili le osservazioni. Si usò allora questa disposizione. Da un medesimo filo si formarono due spirali consecutive di ugual numero di giri, ma avvolte in senso opposto; la lunghezza totale delle due spirali era circa la metà di quella del tubo di riscaldamento; le estremità opposte delle due spirali, cioè le più vicine alle estremità del tubo, erano tenute fisse mediante bacchette di vetro; all'incontro delle altre due estremità contigue era fissata un'altra bacchetta di vetro che veniva all'esterno attraverso a uno dei tappi di amianto. Tirando la bacchetta una delle due spirali si allungava, l'altra si accorciava della stessa quantità; ma essendo avvolte in senso opposto, la corrente nel filo aveva in ambedue lo stesso senso.

Si fecero esperienze con due coppie di spirali: l'allungamento non superò i tre centimetri; quanto all'aumento di resistenza del filo riscaldato, risultò da varie esperienze doversi attribuire al coefficiente di temperatura il valore 0,0063 (almeno da 200° fin sopra i 300°).

Ecco ora i dati e i risultati delle esperienze:

1ª *coppia di spirali.* — Porzione di filo di nichel interna all'apparecchio riscaldante, metri 2,20.

Sua resistenza a 16° = Ohm 0,294.

Resistenza del rimanente circuito, compreso il galvanometro, a 16° = Ohm 1,046.

Resistenza totale a 16° = Ohm 1,340.

2ª *coppia di spirali.* — Filo di nichel interno, metri 2,74.

Sua resistenza a 18° = Ohm 0,350.

Resistenza del rimanente circuito Ohm 1,000.

Resistenza totale a 18° = Ohm 1,350.

Nelle tabelle seguenti sono riassunte tre serie di esperienze per la prima coppia di spirali e una sola serie per la seconda: nella prima colonna sono segnate le temperature (T); nella seconda le deviazioni calcolate dalla formola $D = d\,(1 + \frac{1}{2}\lambda)$ ove d è la deviazione osservata; nella terza colonna i prodotti (R D) di queste quantità per le rispettive resistenze del circuito calcolate in base al valore scritto sopra del coefficiente di temperatura. Nell'ultima linea di ciascuna tabella sono segnati due valori per D, quindi per $R\,D$, giacchè si è notata la deviazione ottenuta per la prima torsione data al filo raffreddato e la deviazione ottenuta nelle altre torsioni successive.

I.

T	D	$R\,D$
16°	87, 5	117, 2
170°	69	112, 1
235°	59	102, 6
280°	45, 5	83, 6
296°	42, 5	78, 9
20°	101 — 89, 5	135, 3 — 119, 9

II.

T	D	$R\,D$
20°	89, 5	119, 9
260°	49, 5	88, 6
278°	47, 5	86, 6
306°	43, 5	81, 6
350°	34	63, 6
16°	111 — 96	148. 7 — 128, 6

III.

T	D	$R\,D$
16°	96	128, 6
217°	61, 5	106, 4
280°	47, 5	87
317°	39	75
322°	38, 5	74, 1
280°	48	87, 9
16°	109 — 96	146, 1 — 128, 6

2ª coppia di spirali:

T	D	$R\,D$
18°	124, 5	168, 1
150°	91, 5	150, 5
208°	80, 5	141, 6
260°	66	125, 5
335°	42, 5	88, 6
16°	149 — 133, 5	201, 1 — 179, 5

Dalle tabelle precedenti risulta che la forza elettromotrice sviluppata nel filo per la torsione decresce colla temperatura: la diminuzione è più rapida a temperatura elevata (verso i 300°): però anche a 350° la corrente è ben lungi dall'annullarsi. Per conseguenza o le piccole impurità del nichel adoperato (traccie di ferro e arsenico) sono sufficienti a mantenergli le proprietà magnetiche anche oltre i 350 gradi, il che non è probabile, secondo l'esperienze del Berson, ovvero le correnti possono ottenersi ancora, quando le proprietà magnetiche del nichel siano scomparse.

Ho eseguito ancora alcune esperienze a temperatura ordinaria per esaminare l'influenza che la magnetizzazione trasversale del filo esercita sulle correnti da esso date per la torsione. A tale scopo si faceva attraversare il filo da una corrente fornita da pile Bunsen, della quale l'intensità poteva essere aumentata e diminuita gradatamente mediante una resistenza costituita da una colonna di lunghezza variabile di solfato di zinco. L'intensità della corrente veniva misurata col mezzo di una bussola dei seni. Sospesa questa corrente, si torceva il filo e si osservava quale corrente venisse prodotta dalla torsione. Nelle poche esperienze eseguite e con correnti di circa 3 Ampère, la corrente ottenuta per la prima torsione data al filo dopo che era stato attraversato dalla corrente, differiva assai dalla precedente, ma le torsioni successive davano effetto poco diverso da quello ottenuto prima del passaggio della corrente.

Per esempio:

1°. Torsione 125°.

Senso della corrente data dal filo *A-B*. . . . Deviazione $D = 52$.

Corrente esterna Ampère 3,228 (nel senso *B-A*).

Dopo il passaggio della corrente esterna. Prima deviazione $D_1 = 61$.

Deviazione definitiva $D_2 = 50$.

2°. Torsione 125°.

Senso della corrente data dal filo = *A-B* . . . . . $D = 50$.

Corrente esterna, senso *B-A*. Ampère 3,228

Si fece vibrare il filo durante il passaggio della corrente $D_1 = 69$. $D_2 = 48,5$.

3°.

Si inverte la direzione della corrente data dalle Bunsen $D = 50$.

Corrente Ampère 3,325 . . . . $D_1 = 44$. $D_2 = 47$.

4°.

Corrente Ampère 3,009 . . . . $D=47.$

Si fece vibrare il filo . . . . $D_1=43.$ $D_2=47,5.$

Lo stesso filo si torce in senso inverso. Torsione 125°.

1°. Corrente di torsione, senso *B-A* . . . . . . $D=44.$

Corrente delle Bunsen, senso *A-B*. Ampère 3,236 . . $D_1=55.$ $D_2=44.$

2°. Corrente delle Bunsen, senso *A-B*. Ampère 3,294 $D=44.$

Si fece vibrare il filo . . . . $D_1=68.$ $D_2=44.$

3°. Corrente delle Bunsen, senso *B-A*. Ampère 3,312 $D=44.$ $D_1=40.$ $D_2=44.$

$D=44.$

4° Corrente delle Bunsen, senso *B-A*. Ampère 3,335 $D_1=40.$

Con vibrazione del filo . . . . $D_2=44.$

In questo caso adunque la corrente esterna che diretta in un certo senso produce aumento nella corrente che si ottiene torcendo il filo in un senso dato, produce diminuzione nella corrente che si ha torcendo il filo in senso opposto e viceversa; ciò si accorda assai bene coll'idea dell'orientazione degli elementi magnetici nel filo.

È probabile che con correnti più intense, specialmente se attraversano il filo a temperatura elevata, si abbiano effetti permanenti assai notevoli.

Questo lavoro fu eseguito nel laboratorio di Fisica diretto dal ch. Prof. A. Naccari, cui, per l'aiuto datomi coi suoi consigli, rendo qui vive grazie.

Torino, Giugno 1891

Dell'influenza della magnetizzazione sulla resistenza elettrica del ferro e del nichel;

Studio sperimentale di A. GARBASSO

I.

La questione della influenza di un campo magnetico sulla resistenza elettrica dei metalli è una di quelle intorno a cui dai fisici si è discusso di più; ma, quantunque in trentacinque anni se ne siano occupati abilissimi sperimentatori, le conclusioni, a cui questi giunsero, sono molto discordi.

Ricorderò le principali esperienze fatte sui metalli magnetici.

Edlund (1) sperimentando su fili di ferro e magnetizzandoli con eliche percorse da correnti, conchiuse che in nessun caso v'è alterazione della resistenza o almeno che tale alterazione deve essere inferiore a 0,0002 della resistenza totale.

Due anni dopo, *W. Thomson* (2) trovò per lamine di ferro e di nichel poste in un campo magnetico aumento di resistenza in direzione parallela alle linee del campo, diminuzione in direzione perpendicolare.

G. Wiedemann però osservò (3) che, data la disposizione sperimentale di Thomson, è probabile che i suoi risultati siano stati prodotti da deformazioni dovute all'azione del campo.

Nel 1866 *Beetz* (4) dopo essersi occupato della variazione di lunghezza che avviene in un filo di ferro quando venga ma-

(1) E. Edlund, *Versuche über das Elektricitäts-Leitungsvermögen des magnetisirten Eisens, Pogg.* XCIII, 315, 1854.

(2) W. Thomson, *Math. and Phys. Papers,* II, 307.

(3) G. Wiedemann, *Die Lehre von der Elektricität. Dritter Band S.* 724. *Braunschweig,* 1883.

(4) W. Beetz, *Ueber den Einfluss der Magnetismus auf die Länge und den Leitungswiderstand von Eisenstäben. Pogg.* CXXVIII, 193, 1866.

gnetizzato longitudinalmente, passò a considerare la modificazione della resistenza che quel filo subisce. Trovò che « *la magnetizzazione aumenta la resistenza del ferro nella direzione dell'asse magnetico* ». I valori ottenuti da lui variano tra $\frac{1}{1650}$ e $\frac{1}{3220}$. Perpendicolarmente all'asse non potè osservare effetto alcuno.

Nel 1877 *Chwolson* (1) in una memoria sopra il reostata a mercurio di Jacobi si occupò incidentalmente delle variazioni di resistenza del ferro magnetizzato longitudinalmente. Egli per primo tenne conto delle modificazioni che il fenomeno subisce al variare della corrente magnetizzatrice e ne rappresentò con una curva l'andamento.

L'anno appresso *F. Auerbach* (2) trovò che la variazione della resistenza del ferro è positiva o negativa secondochè la corrente magnetizzatrice è più o meno grande rispetto a quella che passa nel filo magnetizzato.

I suoi valori variano tra $-0,0186$ e $+0,0281$; egli cercò di confermare con vedute teoriche i suoi risultati sperimentali.

Tomlinson (3) trovò che nel ferro la variazione della resistenza elettrica per l'azione del magnetismo importa il 6 % almeno (!) della resistenza totale. Per l'acciaio e per il nichel, come per il cobalto e per il bismuto trovò aumento di resistenza in direzione longitudinale.

Secondo *De Lucchi* (4) che sperimentò sopra dischi, la resistenza del ferro cresce in direzione assiale, diminuisce in direzione equatoriale; la variazione importa circa $^1/_{2765}$.

Il *Faè* (5) in una lunga serie di esperienze esaminò una

(1) O. Chwolson, *Ueber einen von M. H. von Jacobi construirten Quecksilber-Rheostaten. Carl's Repertorium*, XIII, 203, 1877.

(2) F. Auerbach, *Der Durchgang des galvanischen Stromes durch das Eisen. Wied. Annal.* V, 289, 1878.

(3) H. Tomlinson, *On the Alteration of the Thermal Conductivity of Iron and Steel caused by Magnetism. Proc. Roy. Soc.* XXVII, 109, 1878. — *The Influence of Stress and Strain on the Action of Physical Forces. Proc. Roy Soc.* XXXIII, 276, 1882.

(4) G. De Lucchi, *Intorno all'influenza della magnetizzazione sulla conducibilità elettrica del ferro in direzione assiale ed equatoriale.* Atti R. I. Veneto (5) VIII, 1475, 1882.

(5) G. Faè, *Influenza del magnetismo sulla resistenza elettrica dei conduttori solidi.* Atti dell'Ist. Veneto (6) II.

ventina fra metalli e leghe. Trovò per il ferro e per l'acciaio aumento di resistenza, maggiore nel caso in cui il rocchettino di filo, ch'egli adoperava, era perpendicolare alle linee del campo (e però la magnetizzazione in parte longitudinale, in parte trasversale). Notò nell'acciaio un aumento permanente.

Dopo i lavori di Faè s'incontrano quelli di *Goldhammer* e *von Wyss* che sono certamente i migliori su quest'argomento.

Il *Goldhammer*, in due memorie (1) esaminò sei metalli: bismuto, antimonio, tellurio, ferro, nichelio e cobalto. Per isfuggire alle obbiezioni del Wiedemann egli sperimentò su laminette deposte, in generale, elettroliticamente sul vetro platinato. Trovò per i metalli diamagnetici sempre aumento della resistenza, sia che la corrente passasse parallela, sia che passasse perpendicolare alle linee di forza. Pei metalli magnetici trovò aumento se la lamina e la corrente erano parallele alle linee, diminuzione se la lamina era parallela e la corrente perpendicolare. Inoltre tenendo lamina e corrente perpendicolari alle linee, ebbe sempre una diminuzione; osservò pure che una parte della variazione permane in ogni caso nel nichel e nel cobalto, nel caso della diminuzione nel ferro.

In seguito esaminò quantitativamente il fenomeno per il bismuto, il nichel ed il cobalto. Misurò le intensità dei campi impiegati generando delle correnti di induzione in un'elica di filo di rame. Trovò l'effetto proporzionale al quadrato dell'intensità del campo.

Il *von Wyss* (2) si limitò allo studio del ferro, diminuì ingegnosamente le difficoltà della misura ed eliminò le perturbazioni dovute al riscaldamento del filo. Egli misurò direttamente il momento magnetico del filo magnetizzato. Trovò in ogni caso aumento di resistenza; dimostrò la proporzionalità tra l'incremento della resistenza e l'incremento del momento magnetico. Trovò come massimo valore della variazione 0,00044; egli rappresentò con una curva l'andamento del fenomeno e tenne conto anche del magnetismo rimanente.

---

(1) D. Goldhammer, *Ueber den Einfluss der Magnetisirung auf die electrische Leitungsfähigkeit der Metalle. W. Annal.* XXXI, 360, 1887.
Id. id. id. W. Annal. XXXVI, 804, 1889.

(2) G. H. von Wyss, *Ueber den Einfluss der Stärke der Magnetisirung auf die Aenderung des electrischen Widerstandes des Eisens. W. Annal.* XXXVI, 447, 1889.

II.

Io ho studiato il comportamento del ferro, dell'acciaio e del nichel, fermandomi specialmente su quest'ultimo metallo che il von Wyss non aveva esaminato.

§ 1. *Produzione del fenomeno.* — In queste esperienze ho fatto uso di fili metallici avvolti in rocchetti. Per costruire questi rocchetti tagliavo una striscia di cartoncino lunga 20 cm. ed alta 2,5; quindi sui lembi più lunghi praticavo dei piccoli tagli lontani fra loro di 5 mm., ed avvolgevo il filo in modo che su una delle facce i tratti fossero paralleli ai lati corti del cartoncino, sull'altra inclinati di $^1/_5$. In seguito incollavo sulle due facce delle striscie di carta e rotolavo il cartone su sè stesso; avevo così un rocchetto cilindrico in cui metà del filo era parallela all'asse, metà un po' inclinata sull'asse stesso; come vedremo in seguito, questa inclinazione ha ben poca influenza sulla intensità del fenomeno.

Per magnetizzare i rocchetti tentai dapprima di far uso di semplici eliche di filo di rame, ma non ottenni risultato alcuno. Allora adottai l'espediente di magnetizzare per mezzo d'una potente elettrocalamita; l'apparecchio adoperato era di quelli che servono per le esperienze sul diamagnetismo, quali li costruiva Ruhmkorff, attivato da una pila Bunsen, composta da un numero di coppie, che variava secondo i casi fra due ed otto.

In queste condizioni il fenomeno si produceva in modo affatto regolare e soddisfacente.

§ 2. *Misura dell'effetto prodotto.* — Disposto il rocchetto fra i poli dell'elettromagnete e collegatolo con un ponte di Wheatstone, si poneva quest'ultimo in tali condizioni che il galvanometro non fosse attraversato da corrente e si osservava la resistenza.

Ciò fatto, tenendo sempre chiuso il circuito del ponte, si magnetizzava l'elettrocalamita e, dopo qualche minuto per evitare gli errori prodotti da correnti d'induzione, si leggeva la deviazione ottenuta nel galvanometro del ponte di Wheatstone. Essendosi preventivamente misurata (caso per caso) la deviazione che avveniva nel galvanometro per la variazione di un *Ohm* nella resistenza che si paragonava con quella del rocchetto e conoscendosi quest'ultima, si deduceva subito dalla deviazione la ragione, in cui variava la resistenza del rocchetto per effetto della magnetizzazione

In ciascun caso si aveva cura di accertare che sussistesse proporzionalità fra le deviazioni osservate nel galvanometro e le variazioni di resistenza corrispondenti.

Per il ponte di Wheatstone invece d'un galvanometro ordinario feci uso d'un galvanometro aperiodico di Deprez e d'Arsonval, il quale, mentre ha il vantaggio di esigere un brevissimo tempo nelle letture, presenta pure quello, importante in questo genere di ricerche, di non subire in modo sensibile le azioni magnetiche esterne; quindi la possibilità di adoperarlo in vicinanza dell'elettromagnete senza pericolo di errore. Noterò ancora che, per ottenere una sensibilità abbastanza grande nelle letture, invece di osservare direttamente col cannocchiale la scala riflessa nello specchietto del galvanometro si faceva subire al raggio una seconda riflessione.

§ **3.** *Misura del campo magnetico.* — Ottenuta così la grandezza dell'effetto prodotto, si trattava di misurare anche l'intensità della magnetizzazione adoperata nei singoli casi, onde dedurne la legge del fenomeno.

A tale scopo prima di ogni espezienza ponevo fra i poli dell'elettrocalamita Ruhmkorff un circuito formato di pochi giri di filo di rame, collegato con un galvanometro Thomson posto a tale distanza dall'elettrocalamita da togliere ogni sospetto di diretta influenza.

Il circuito indotto constava di dieci giri di filo della lunghezza totale di cm. 109.

Magnetizzando l'elettrocalamita si produceva nel circuito una corrente d'induzione, e quindi una deviazione nel galvanometro Thomson. Era poi opportuno di avere una misura almeno approssimativa dei campi magnetici adoperati in unità assolute.

A tal fine sostituii al campo dell'elettrocalamita Faraday quello generato da un'elica di filo di rame percorsa da una corrente nota, portai in questo campo il medesimo circuito che aveva servito durante le esperienze precedenti e misurai gli effetti che la corrente indotta produceva nel galvanometro Thomson.

Per l' elica inducente costruii una specie di tamburello di legno, su cui avvolsi 84 giri di filo di rame, disposti in 4 strati di 21 giri ciascuno e della lunghezza complessiva di metri 47. Il tamburo era attraversato, normalmente al suo asse, da una bacchetta di vetro che si poteva far girare con dolce sfregamento; a questa bacchetta era fissato il piccolo rocchetto prima descritto. Si teneva dapprima la bacchetta in posizione tale che il piano del rocchetto fosse perpendicolare all'asse del tamburo: al momento dell'esperienza poi la si faceva girare rapidamente di 180°.

Per misurare la corrente induttrice mi servii di una bussola delle tangenti, costruita da Siemens e Halske, il cui coefficiente di riduzione si determinò col metodo elettrolitico.

Da queste ricerche risultò che, in ogni esperienza bastava dividere per 0,046 la deviazione prodotta nel galvanometro dal campo magnetico impiegato per avere la intensità del campo stesso nel centro (in dine). I numeri ottenuti in questo modo sono quelli che figurano nelle tabelle seguenti sotto la lettera H.

III.

Esperienze e risultati.

§ 1. *Ferro.* — Le esperienze furono fatte sopra tre rocchetti di filo di ferro (A, B, C) di qualità e provenienza differenti, ricotti i primi due, crudo il terzo. Quando nelle tabelle non è detto nulla in contrario s'intende che i rocchetti erano tenuti con l'asse parallelo alle linee di forza del campo magnetico.

I risultati ottenuti sono riprodotti dalle tabelle 1, 2, 3 e rappresentati dalle curve I, II, III; in queste curve si prese come ordinata l'effetto, come ascissa l'intensità H del campo magnetico nel centro.

Il rocchetto C dopo una serie di esperienze fu ricotto e i nuovi risultati ottenuti sono riportati nella tabella 4.

Nelle due esperienze cui spetta la tabella 5, si studiò l'effetto prodotto da un campo magnetico sopra un rocchetto disposto prima parallelamente alle linee di forza e poi perpendicolarmente.

Non ebbi mai a riscontrare che la magnetizzazione producesse diminuzione di resistenza nel ferro o nell'acciaio.

Tabella 1.

Rocchetto *A* ricotto.
Resistenza 0,64 ohm.
Diametro del filo 0,05 cm.

H	$\frac{\Delta R}{R}$
1520	0,001439
2170	0,001953
2170	0,002053
2390	0,002103
2610	0,002349
3480	0,002614
3910	0,002487

Tabella 2.

Rocchetto *B* ricotto.
Resistenza 2,54 ohm.
Diametro del filo 0,02 cm.

H	$\frac{\Delta R}{R}$
460	0,000850
590	0,001045
760	0,001290
980	0,001561
1200	0,001914
2060	0,002587
3480	0,002591

Tabella 3.

Rocchetto *C* crudo.
Resistenza 2,35 ohm.
Diametro del filo cm. 0,52

H	$\frac{\Delta R}{R}$
980	0,001600
1410	0,001819
1520	0,001973
1740	0,002201
3260	0,002513

Tabella 4.

Rocchetto *C* ricotto.
Resistenza 2,28 ohm.
Diametro del filo cm. 0,02.

H	$\frac{\Delta R}{R}$
3500	0,002592
3910	0,002660

Tarella 5.

Rocchetto $B \, . \, H = 3480$

Parallelo alle linee	Perpendicolare alle linee
$\frac{\Delta R}{R}$	
0,002591	0,001150

§ 2. *Acciaio.* — Quanto all'acciaio sperimentai su fili di due diverse provenienze. La ricerca riesce in questo caso più difficile che nel precedente, poichè per la magnetizzazione permanente dell'acciaio è necessario ad ogni esperienza svolgere i rocchetti e ricuocere il filo; ne segue anche che i dati sperimentali sono più incerti che pel caso del ferro, poichè ciascuno è il risultato d'una sola esperienza, laddove ciascun numero delle tabelle precedenti risultava come media di 7 a 10 determinazioni.

Cercai di ovviare in parte a questo inconveniente sperimentando in ciascun caso su diversi rocchetti del medesimo filo (D_1, D_2, D_3; E_1, E_2); le tabelle 6 e 7 riproducono i risultati ottenuti.

TABELLA 6.

Rocchetti d'acciaio.

H	870	1300	1850	1850	3910
D_1	0,000828	0,000966	0,001019	0,000872?	0,001207
D_2	0,000942	0,000891	0,001065	0,001029	0,001274
D_3	0,000905	0,001073	0,001152	0,001070	0,001132
Media	0,000891	0,000977	0,001078	0,001049	0,001206

TABELLA 7.

Rocchetti d'acciaio.

H	760	1200	1850	3040
E_1	0,000833	0,001506	0,002118	0,002136
E_2	0,000732	0,001737	0,002121	
Media	0,000782	0,001621	0,002119	0,002136

Dall'insieme delle esperienze che ho eseguito sul ferro e sull'acciaio si possono dedurre le conclusioni seguenti:

1. In un filo di ferro o d'acciaio la magnetizzazione produce un aumento della resistenza elettrica, qualunque sia l'inclinazione del filo sulle linee di forza del campo magnetico.

2. A parità delle altre condizioni l'effetto cambia con l'inclinazione del filo sulle linee di forza; è massimo se questa inclinazione è nulla, minimo se è di 90°.

3. Entro certi limiti dell'intensità del campo l'effetto è proporzionale all'intensità stessa.

4. Il ferro crudo è un po' meno sensibile del ricotto, l'acciaio meno del ferro.

5. Esiste un massimo dell'effetto che nelle mie esperienze fu, pel ferro, di circa 0,0026 nelle migliori condizioni, e corrispose a un'intensità del campo di circa 3300 unità (C. G. S.).

§ 3. *Nichel.* — Le esperienze sul nichel, che qui riferisco, furono fatte sopra un rocchetto di filo (I) costruito in modo simile a quello descritto nel caso del ferro.

E notevole la intensità del fenomeno presentato da questo metallo tanto meno magnetico del ferro. La tabella 8 e la fig. IV rappresentano i risultati delle esperienze fatte sopra un rocchetto di filo di nichel disposto parallelamente alle linee di forza.

S'era già veduto nel caso del ferro come, disponendo il filo perpendicolarmente alle linee di forza del campo, l'aumento di resistenza fosse minore che nel caso del parallelismo; volli approfittare della sensibilità del nichel per studiare meglio quest'argomento; i risultati rappresentati dalla figura V, e dalla tabella 9 furono ottenuti tenendo il rocchetto I coll'asse perpendicolare alle linee di forza.

Vedendo la notevole differenza dell'effetto a seconda che si tratta di un filo parallelo o perpendicolare alle linee di forza era naturale che cercassi di determinare con qual legge varia l'effetto stesso col variare dell'inclinazione.

Per questo disposi del filo di nichel, fissato con cura sopra una tavoletta di legno, ripiegandolo a zig-zag in modo da formare tanti tratti rettilinei paralleli fra loro e ai lati maggiori della tavoletta, congiunti da brevissimi tratti perpendicolari. L'assicella era fissata ad un'asticciuola di ferro che giaceva nel piano stesso di quella ed era disposta perpendicolarmente ai lati maggiori. L'asta di ferro poteva girare sopra se stessa e le era rigidamente connesso un indice perpendicolare ad essa che si muoveva sopra un cerchio graduato.

Essendo l'asse di rotazione orizzontale e perpendicolare alle linee di forza, che erano pure orizzontali, era facile avere, in modo approssimato almeno, l'inclinazione della tavoletta rispetto alle linee.

Sperimentando con tale disposizione a campo costante si notò che s'otteneva una leggiera variazione nell'effetto se, partendo dalla posizione orizzontale della tavoletta, si aumentava l'angolo formato da questa con l'orizzonte fino a 65° circa, mentre poi l'effetto diminuiva rapidamente da questa inclinazione a quella di 90°. Il numero ottenuto come misura dell'effetto, in quest'ultimo caso è notevolmente minore, la metà circa di quello trovato sperimentando col rocchetto I, il che dipende probabilmente dal trovarsi in questo necessariamente una metà del filo inclinata sull'asse.

Tabella 8.
Rocchetto I di Nichel.
Resistenza 0,89 ohm.

H	$\frac{\Delta R}{R}$
240	0,0016
330	0,0023
480	0,0045
800	0,0068
1130	0,0090
1630	0,0110
2060	0,0119
2280	0,0123
2930	0,0123
4130	0,0123

Tabella 9
Rocchetto I di Nichel
Resistenza 0,89 ohm.

H	$\frac{\Delta R}{R}$
480	0,0009
760	0,0013
2040	0,0040
2330	0,0042
4780	0,0048

Due delle esperienze fatte su quest'argomento sono riprodotte nella tabella 10, la prima è anche rappresentata dalla curva VI. In questa curva sono ascisse gli angoli di inclinazione, ordinate gli aumenti di resistenza.

TABELLA 10.

Inclinazione sulle linee	$\frac{\Delta R}{R}$ $H=2040$	$H=2400$
0°	0,0118	0,0123
22° 30′	0,0114	0,0120
45°	0,0110	0,0113
67° 30′	0,0088	0,0098
90°	0,0021	0,0021

L'andamento della curva IV, analogo a quello della curva della magnetizzazione, fece nascere l'idea di ricercare se anche nel caso del fenomeno studiato si presentasse isteresi.

Per verificare questa supposizione operai nel modo seguente. Attivata l'elettrocalamita con 4 coppie Bunsen preparate nel modo più opportuno per ottenere correnti costanti, si misurarono tre campi diversi, ottenuti cambiando la distanza dei poli; si tenne nota di questi risultati e delle distanze dei poli in ciascun caso.

Ciò fatto e interrotta la corrente magnetizzante, si dispose il rocchetto fra i poli collocati alla distanza corrispondente al più debole dei campi misurati innanzi; e, fatta passare la corrente magnetizzante, si determinò l'aumento della resistenza.

Lasciato per cinque o sei minuti l'apparecchio in quiete, si avvicinarono i poli e si misurò il nuovo aumento: questo, sommato col precedente, dà l'aumento totale prodotto dal secondo campo; infine, avvicinati i poli ancora una volta (senza smagnetizzare mai), si ebbe in modo analogo l'effetto prodotto dal campo più forte.

Dopo qualche minuto si fece il cammino inverso e sottraendo la diminuzione di resistenza osservata dalla resistenza che il filo aveva prima che avvenisse la corrispondente diminuzione della intensità del campo, si ottennero le nuove ordinate di punti, aventi ordinatamente le stesse ascisse d'altri punti sperimentali determinati prima facendo crescere l'intensità del campo.

Due di tali esperienze sono riprodotte nelle tabelle 11 e 12; alla tabella 11 corrisponde la figura VII; la curva continua è quella trovata nella prima parte dell'esperienza, la curva punteggiata quella ottenuta nella seconda parte.

Oltre a queste esperienze se ne fecero altre in modo un po' diverso. Anzitutto si pose il rocchetto nel campo più intenso, quindi si allontanarono gradatamente i poli in modo da ottenere una diminuzione nella resistenza; giunti al campo più debole, si smagnetizzò e si lasciò per qualche tempo il rocchetto a sè.

In seguito, nuova magnetizzazione, nuovo avvicinamento dei poli alle distanze impiegate poco prima.

Tabella 11.

$\uparrow\downarrow$ Rocchetto I

H	$\frac{\Delta R}{R}$
0	—
650	+ 0,0050
1250	+ 0,0040
2390	+ 0,0044
1250	— 0,0027
650	— 0,0024
0	— 0,0037

Tabella 12

$\uparrow\downarrow$ Rocchetto I

H	$\frac{\Delta R}{R}$
0	—
540	+ 0,0055
1090	+ 0,0034
2390	+ 0,0043
1090	— 0,0034
540	— 0,0037
0	— 0,0050

Tabella 13.

$\downarrow\uparrow$ Rocchetto I

H	$\frac{\Delta R}{R}$
2390	—
1250	— 0,0042
650	— 0,0058
0	— 0,0038
650	+ 0,0037
1250	+ 0,0026
2390	+ 0,0046

Tabella 14.

$\downarrow\uparrow$ Rocchetto I.

H	$\frac{\Delta R}{R}$
2390	—
1090	— 0,0040
540	— 0,0032
0	— 0,0046
540	+ 0,0042
1090	+ 0,0030
2390	+ 0,0042

Dai risultati ottenuti con questo procedimento (↓↑) come da quelli ottenuti nel modo descritto più sopra (↑↓), (vedi tabelle 13 e 14; alla tabella 13 corrisponde la curva VIII), pare si possa conchiudere che, anche in questo fenomeno, vale a dire fra la forza magnetizzante e la variazione di resistenza si presenta isteresi come in quello della magnetizzazione.

Dalle esperienze sul nichel, ora descritte, si possono dedurre queste conclusioni:

1. L'effetto della magnetizzazione sopra un filo di nichel è sempre un aumento di resistenza.

2. Tale aumento è massimo quando l'inclinazione del filo sulle linee è nulla, decresce al crescere dell'inclinazione e raggiunge un minimo quando il filo s'è ridotto perpendicolare alle linee.

3. Il nichel presenta un massimo dell'effetto, che ho trovato uguale a 0,0125 circa, nelle condizioni migliori; il massimo fu raggiunto con un campo di 2200 unità (C. G. S.).

4. L'andamento della curva che rappresenta il fenomeno è analogo a quello della curva della magnetizzazione.

5. Tra la forza magnetizzante e la variazione di resistenza si riscontra isteresi.

§ 4. *Altre esperienze sul nichel, magnetizzando con spirali percorse da correnti.* — Oltre alle esperienze descritte precedentemente, altre ne feci con un metodo differente. Si sa che il momento magnetico indotto nell'unità di volume del ferro varia col variare della lunghezza del filo sottoposto alla magnetizzazione e precisamente dipende dal rapporto della lunghezza al diametro, divenendo costante, per una intensità costante del campo, quando questo rapporto ha raggiunto un certo limite.

Ora, nei miei rocchetti i tratti di filo erano necessariamente molto brevi e però era probabile che la saturazione non fosse ancora raggiunta quando si impiegavano campi che sarebbero stati sufficienti a saturare dei fili più lunghi.

E poichè pareva naturale che la variazione della resistenza raggiungesse il suo massimo con il momento magnetico indotto, queste considerazioni mi portavano a concludere che, impiegando dei fili più lunghi, l'aumento massimo di resistenza si sarebbe incontrato con campi molto meno intensi di quelli impiegati precedentemente, anzi, secondo ogni probabilità col campo stesso con cui Ewing (1) aveva raggiunto il massimo della magnetizzazione.

Per verificare queste supposizioni sperimentai sul nichel nel modo seguente:

Il filo impiegato aveva un millimetro di diametro e 40 cm. di lunghezza (400 diametri), doveva quindi ritenersi trascurabile su esso, secondo l'Ewing, l'azione dei suoi poli. Per magnetizzarlo costruii una spirale avvolta sopra un tubo di vetro, a quattro strati di filo, avente in tutto 32 giri per centimetro; onde ovviare all'inconveniente del riscaldamento prodotto dalla irradiazione della spirale magnetizzante, posi il filo di nichel in uno stretto tubo e fra questo e quello che portava la spirale feci circolare una corrente continua di acqua fredda.

Misuravo la corrente magnetizzante con una bussola, l'aumento di resistenza col metodo seguito nelle esperienze precedenti. Dall'intensità della corrente avevo subito quella del campo mediante la nota formola $H = 4\pi in$.

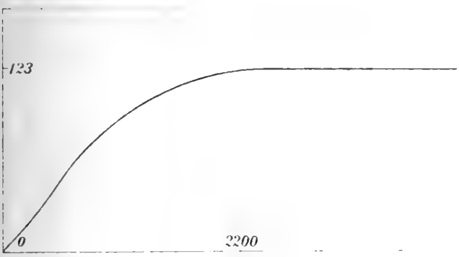
Con questa disposizione feci parecchie esperienze: scelgo tra gli altri i valori seguenti, che sono la media ciascuno di dieci o dodici determinazioni.

H	$\frac{\Delta R}{R}$
68,7	0,00051
89,5	0,00061
92,3	0,00066
103,8	0,00067
124	0,00105
152,6	0,00154
170,4	0,00177

La curva IX rappresenta queste esperienze. L'andamento di essa ed il valore trovato per la variazione di resistenza nell'ul-

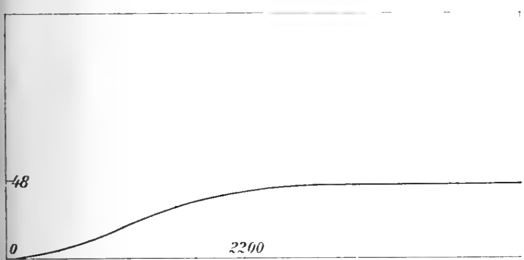
(1) EWING, *Phil. Trans. for* 1885 e *Phil. Trans. for* 1889.

IV

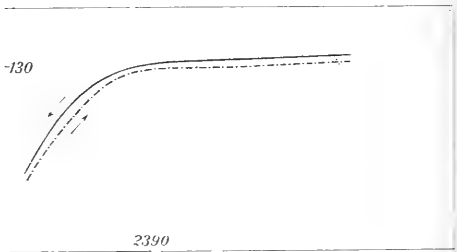


VII

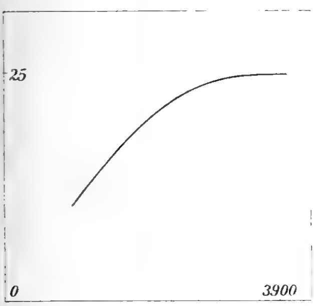
V



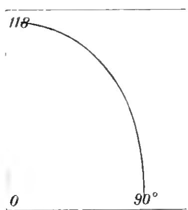
VIII



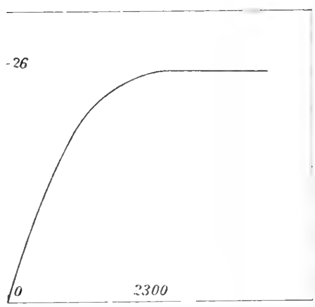
I



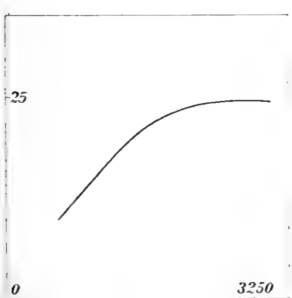
VI



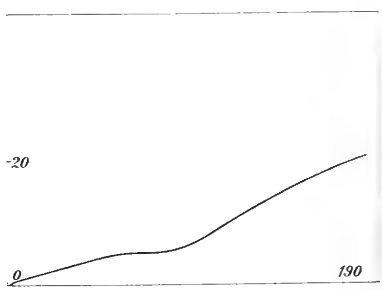
II



III



IX



Lit. Salussolia Torino

tima esperienza confrontato con quello trovato con l'uso dei rocchetti e della grande elettrocalamita mostrano che l'aumento di resistenza era ben lontano anche col campo di 170 unità dall'aver raggiunto il massimo, mentre invece la magnetizzazione del nichel, per le esperienze dell'Ewing, che anch'io verificai, doveva essere già prossima al massimo con un campo di 120 unità

Esaminai anche dei fili di ferro e dall'insieme di tutte le esperienze risultano due conseguenze che mi sembrano notevoli e cioè:

1. A pari intensità del campo l'effetto è maggiore su fili lunghi che su fili molto corti; nei due casi però i valori trovati, sono dello stesso ordine di grandezza.

2. L'aumento di resistenza non raggiunge il massimo insieme al momento magnetico indotto; ma solo con un campo di intensità molto maggiore di quella che si richiede per il massimo della magnetizzazione.

Al fine di questo lavoro è per me un gradito dovere ringraziare il prof. Naccari che, nel suo laboratorio, pose a mia disposizione tutti gli istrumenti che mi erano necessarii e, quel ch'è più, mi soccorse dei suoi consigli e della sua esperienza.

RELAZIONE sulla Memoria del Prof. ANGELO BATTELLI intitolata: *Studio del vapore di solfuro di carbonio rispetto alle leggi del Boyle e del Gay-Lussac.*

Nei volumi delle Memorie di quest'Accademia vennero già inserite due Memorie del Prof. Battelli sulle proprietà termiche dei vapori. La prima fu presentata nel 1889, l'altra nel 1890. Nella prima sono descritte l'esperienze fatte dall'Autore intorno al modo di comportarsi del vapore di etere dietilico, quando venga assoggettato a pressioni crescenti, restando costante la temperatura. Lo studio fu fatto a molte temperature in modo da poter dedurre la legge, secondo la quale varia il volume del vapore a pressione costante quando varia la temperatura.

La seconda Memoria tratta della temperatura critica del solfuro di carbonio e dell'acqua.

La terza Memoria, che nell'ultima seduta fu data a noi per esame, contiene l'esperienze fatte sul solfuro di carbonio con lo stesso metodo seguito per l'etere e al medesimo fine.

Per la distanza dei limiti di temperatura e di pressione, entro i quali furono eseguite queste esperienze, per la diligenza usatavi, per le grandi difficoltà superate e in fine per la importanza di tali studi la Memoria merita come le precedenti un favorevole giudizio e noi ne proponiamo la lettura alla Classe.

G. FERRARIS.
A. NACCARI, *Relatore.*

RELAZIONE sulla Memoria dei Dott. O. MATTIROLO e L. BUSCALIONI, che ha per titolo: *Ricerche anatomo-fisiologiche sui tegumenti seminali delle Papilionacee.* - Parte I. *Anatomia.*

Le ricerche, che formano oggetto della memoria presentata alla R. Accademia dai dottori O. Mattirolo e L. N. Buscalioni, interessano l'anatomia del tegumento seminale delle Papilionacee, e saranno seguite da ricerche fisiologiche sulla stesso argomento. Questo lavoro avrà valore di una vera monografia, diretta ad illustrare un capitolo molto importante di anatomia e biologia vegetale finora poco noto, malgrado i molti studii pubblicati in proposito.

Nella prima parte gli Autori descrivono nel tegumento seminale i seguenti strati:

1° Strato delle *cellule malpighiane;*
2° » » a *colonna;*
3° » profondo suddiviso in piani ed in serie cellulari.

Gli *elementi malpighiani* furono oggetto di un esame diligentissimo; in grazia del quale gli Autori poterono stabilire, che la cosidetta *cuticola*, rivestente l'estremità libera delle cellule, non è altro che uno strato di rivestimento, analogo a quello che ricopre la superfice degli spazi intercellulari; che le fronti delle malpighiane sono per lo più ricoperte da un reticolo di suberina; e che in fine il *corpo del Beck* non è un granulo siliceo, ma un residuo nucleare.

Non meno importanti sono i risultati ottenuti dallo studio dello strato profondo; avendo gli Autori potuto stabilire la linea di separazione fra albume e tegumento con criterii nuovi e sicuri: dimostrare la natura delle comunicazioni intercellulari: scoprire aggetti foggiati a bastoncini, analoghi a quelli delle *Marattiacee* negli spazi intercellulari, e descrivere per i primi i numerosi tubi cribrosi proprii del fascio basale del funicolo.

Interessantissimi sono i risultati ai quali gli Autori giunsero studiando la ragione *ilare* o *chilariale*. In essa riscontrarono una fossetta, circoscritta da due labbra mobili sotto l'influenza delle variazioni igrometriche; la quale fossetta conduce ad una laminetta composta di tracheidi, finora ritenute come espansioni del fascio vascolare, mentre ne sono assolutamente indipendenti. A quest'organo nuovo, la cui funzione verrà discussa nella 2ª parte del lavoro, fu dagli Autori dato il nome di *Chilario*.

In vicinanza al Chilario misero in rilievo la presenza di tubercoli appaiati posti a cavaliere del rafe, formati dal considerevole sviluppo delle Malpighiane, e spesso anche dei sottostanti tessuti; la funzione dei quali gli Autori dimostrarono consistere nello schiacciamento della porzione libera del fascio vasale, impedendone l'ulteriore sviluppo quando il seme è maturo.

Gli Autori hanno da ultimo investigato minutamente il micropilo e la regione micropilare, e ne misero in luce nuovi e interessanti risultati tanto dal lato dell'anatomia che della fisiologia.

Le ricerche degli Autori perdurarono tre anni; furono condotte e controllate col massimo rigore scientifico; e sono come è debito, accompagnate dalla critica e dalla letteratura scientifica la più copiosa, che possa desiderarsi intorno all'argomento. La Commissione quindi, incaricata di riferire intorno alla presente memoria, non può a meno di raccomandarne l'accettazione e la stampa, come di un lavoro molto pregevole, nei volumi delle *Memorie* di questa R. Accademia.

L. Camerano

Prof. G. Gibelli, *Relatore*.

L'Accademico Segretario

Giuseppe Basso.

INDICE

DEI LAVORI PUBBLICATI

dalla Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

CONTENUTI NEL VOL. XXVI DEGLI *ATTI*

☞ *La nota del Socio* Mosso (*v. pag.* 535) *sarà pubblicata nella Disp.* 1ª *del vol. XXVII.*

Brioschi (Francesco) — Sopra alcune formole ellittiche .... » 424

Camerano (Lorenzo) — Ricerche intorno allo sviluppo ed alle cause del polimorfismo dei girini degli Anfibi anuri .... » 72

— Relazione sulla Memoria « *I Molluschi dei terreni terziarii del Piemonte e della Liguria:* Parte VIII, *Galeodoliidae, Doliidae, Ficulidae e Naticidae* » del Dott. F. Sacco .... » 152

— Relazione intorno alla Memoria del signor Filippo Cantamessa « *Il Mastodonte di Cinaglio d'Asti e il Mastodon (tetralophodon) arvernensis* .... » 186

— Relazione sulle *Ricerche intorno alla sottofamiglia delle Solenophorinae* » dei Dottori F. S. Monticelli e G. Crety ..... » 311

Campetti (Adolfo) Sulle correnti che si ottengono per l'allungamento di spirali e per la torsione di fili di nichel .... » 553

Cano (G.) — Sviluppo postembrionale dei Gonoplacidi .... » 449

Interessantissimi sono i risultati ai quali gli Autori giunsero studiando la ragione *ilare* o *chilariale*. In essa riscontrarono una fossetta, circoscritta da due labbra mobili sotto l'influenza delle variazioni igrometriche; la quale fossetta conduce ad una laminetta composta di tracheidi, finora ritenute come espansioni del fascio vascolare, mentre ne sono assolutamente indipendenti. A quest'organo nuovo, la cui funzione verrà discussa nella 2ª parte del lavoro, fu dagli Autori dato il nome di *Chilario*.

In vicinanza al Chilario misero in rilievo la presenza di tubercoli appaiati posti a cavaliere del rafe, formati dal considerevole sviluppo delle Malpighiane, e spesso anche dei sottostanti tessuti; la funzione dei quali gli Autori dimostrarono consistere nello schiacciamento delle [illegible]

Prof. G. Gibelli, *Relatore*.

L'Accademico Segretario
Giuseppe Basso.

INDICE

DEI LAVORI PUBBLICATI

dalla Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

CONTENUTI NEL VOL. XXVI DEGLI *ATTI*

ADUNANZE della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali .. *Pag.* 1
103, 155, 189, 235, 313, 327, 339, 407, 423, 441, 467, 487, 535.

PROGRAMMA per l'ottavo Premio BRESSA .... » 233

AMODEO (Federico) — Quali possono essere i postulati fondamentali della Geometria proiettiva di uno S_r .... » 505

ASCHIERI (Tommaso) — Effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Torino e per l'anno 1891 .... » 5

BERRUTI (Giacinto) — Influenza dei cicloni sulla metereologia locale . » 503

BERTINI (Eugenio) — Intorno ad alcuni teoremi della Geometria sopra una curva algebrica .... » 104

BOTTIGLIA (Angelo) — Sulle velocità di massimo rendimento ed a vuoto delle turbine .... » 385

BRIOSCHI (Francesco) — Sopra alcune formole ellittiche .... » 424

CAMERANO (Lorenzo) — Ricerche intorno allo sviluppo ed alle cause del polimorfismo dei girini degli Anfibi anuri .... » 72

— Relazione sulla Memoria « *I Molluschi dei terreni terziarii del Piemonte e della Liguria:* Parte VIII, *Galeodoliidae, Doliidae, Ficulidae e Naticidae* » del Dott. F. SACCO .... » 152

— Relazione intorno alla Memoria del signor Filippo CANTAMESSA « *Il Mastodonte di Cinaglio d'Asti e il Mastodon (tetralophodon) arvernensis* .... » 186

— Relazione sulle *Ricerche intorno alla sottofamiglia delle Solenophorinae* » dei Dottori F. S. MONTICELLI e G. CRETY ..... » 311

CAMPETTI (Adolfo) Sulle correnti che si ottengono per l'allungamento di spirali e per la torsione di fili di nichel .... » 553

CANO (G.) — Sviluppo postembrionale dei Gonoplacidi .... » 449

CATTANEO (Carlo) — Sulla dilatazione termica di alcune amalgame allo stato liquido. Appendice alla Nota omonima (V. *Atti R. Accademia delle Scienze di Torino*, 1890, vol. XXV) .... *Pag.* 20

CHINI (M.) — Sopra alcune deformazioni delle superficie rigate .... » 418

COLOMBA (Luigi) — Sull' epidoto di Oulx e sui minerali che lo accompagnano .... » 537

DE VESCOVI (Pietro) — Ricerche anatomo-fisiologiche intorno all'apparato dei Teleostei .... » 287

D'OVIDIO (Enrico) — Felice Casorati; Cenno necrologico........... » 3

—— Altra addizione alla Nota « ~~Sui~~ determinanti di determinanti » 117

—— Le proprietà focali delle coniche nella metrica proiettiva.... » 237

—— Sulle coniche confocali nella metrica proiettiva............ » 314

—— Teoremi sulle coniche nella metrica proiettiva .... » 369

ERRERA (Giorgio) — Sulla distribuzione degli alogeni negli idrocarburi aromatici .... » 265

FARAVELLI (Emilio) — Su di un muscolo a fibre liscie osservato nella zona ciliare dell'occhio del *Thynnus vulgaris* .... » 190

FUSARI (Romeo) — Sulla terminazione delle fibre nervose nelle capsule surrenali dei mammiferi.............................. » 272

GARBASSO (A) — Dell'influenza della magnetizzazione sulla resistenza elettrica del ferro e del nichel .... » 565

GIBELLI (Giuseppe) — Relazione sulla Memoria dei Dottori O. MATTIROLO e S. BELLI, intitolata: *Ricerche anatomo-fisiologiche sui tegumenti seminali delle papilionacee, Parte I*.............. » 581

GIGLIO-TOS (E.) — Le specie europee del genere *Chrysotoxum* MEIG. » 120

JADANZA (Nicodemo) — Influenza della eccentricità dell' alidada sui vernieri, ed un microscopio ad ingrandimento costante...... » 380

—— Un prisma universale a riflessione......................... » 459

LORIA (Gino) — Le trasformazioni razionali dello spazio determinate da una superficie generale di terz'ordine .... » 197

MONTICELLI (F. S.) — Osservazioni intorno ad alcune forme del genere *Apoblema* DUJARD .... » 340

MYLIUS (Carlo) — Intorno ad alcune forme inedite di Molluschi miocenici dei colli torinesi, rinvenute a Santa Margherita ...... » 329

NACCARI (Andrea) — Relazione sulla Memoria del Prof. Angelo BATTELLI intitolata: *Studio del vapore di solfuro di carbonio rispetto alle leggi del Boyle e di Gay Lussac* .... » 580

NOVARESE (Enrico) — Sulla accelerazione di second'ordine nel moto rotatorio intorno a un punto . . . . *Pag.* 224

OVAZZA (Elia) — Sulla resistenza di attrito fra vite e madrevite . . . . » 157

PARONA (C. F.) — Fossili nel Lias medio nel conglomerato terziario di Lauriano (colli torinesi) . . . . » 468

PASTORE (Giuseppe) — La legge di Roberts sul quadrilatero articolato » 84

PEANO (Giuseppe) — Sopra alcune curve singolari . . . . » 221

REINA (Vincenzo) — Della compensazione del problema di Hansen. » 409

RIZZO (G. B.) — Variazioni prodotte dal calore in alcuni quadri d'assorbimento . . . . » 442

—— Di un notevole tipo isobarico subalpino . . . . » 489

SACCO (Federico) — Sopra un cranio di *Tursiops Cortesii* (DESM.) *var. astensis* (SACC.) dell'Astigiana . . . . » 477

SALVIOLI (Ignazio) — Contributo alla fisiologia degli epitelii: della struttura dell'epitelio razionale della coniglia e delle modificazioni che vi avvengono nella gravidanza . . . . » 395

SEGRE (Corrado) — Un nuovo campo di ricerche geometriche . . . . . » 35

—— Relazione intorno alla Memoria di Guido CASTELNUOVO « *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* . . . . » 433

VALLE (Guido) — Sopra un caso particolare di trasformazione delle funzioni ellittiche . . . . » 178

Torino Tip. Reale-Paravia.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

ADUNANZA del 21 Giugno 1891 . . . . *Pag.* 535

COLOMBA — Sull'epidoto di Oulx e sui minerali che lo accompagnano » 537

CAMPETTI — Sulle correnti che si ottengono per l'allungamento di spirali o per la torsione di fili di nichel . . . . » 553

GARBASSO — Dell'influenza della magnetizzazione sulla resistenza elettrica del ferro e del nichel . . . . » 565

NACCARI — Relazione sulla memoria del Prof. Angelo BATTELLI, intitolata: *Studio del vapore di solfuro di carbonio rispetto alle leggi del Boyle e del Gay-Lussac* . . . . » 580

GIBELLI — Relazione sulla memoria dei Dott. O. MATTIROLO e L. BUSCALIONI, che ha per titolo: *Ricerche anatomo-fisiologiche sui tegumenti seminali delle Papilionacee.* - Parte I. *Anatomia* . . » 581

INDICE del Volume XXVI . . . . » 583

☞ NB. *A questo fascicolo vanno unite le Tavole XI. XIII, XIV e XV relative alle Memorie dei sigg. Dott.* G. CANO, F. SACCO *e* G. B. RIZZO, *pubblicate nelle Dispense* 12ª, 13ª *e* 14ª.

Torino — Tip. Reale-Paravia.