Geometrie der Lage

von

Dr. Georg Karl Christian v. Staudt,
ord. Professor an der Universität Erlangen.

Nürnberg,
Verlag von Bauer und Raspe.
(Julius Merz.)
1847.

Vorwort.

Man hat in den neuern Zeiten wohl mit Recht die Geometrie der Lage von der Geometrie des Masses unterschieden, indessen gleichwohl Sätze, in welchen von keiner Grösse die Rede ist, gewöhnlich durch Betrachtung von Verhältnissen bewiesen. Ich habe in dieser Schrift versucht, die Geometrie der Lage zu einer selbstständigen Wissenschaft zu machen, welche des Messens nicht bedarf. Um jedoch diejenigen Eigenschaften der Curven und Flächen II. Ordnung, welche auf Mittelpunkte, Axen, Brennpunkte u. s. w. sich beziehen, nicht ganz unberührt zu lassen, habe ich das Wesentliche hievon in einen Anhang aufgenommen.

Jeder geometrische Unterricht muss von allgemeinen Betrachtungen ausgehen, welche den Schüler mit den verschiedenen Arten von geometrischen Gebilden bekannt machen und sein Anschauungsvermögen üben. Die meisten Lehrbücher der Geometrie gehen aber zu bald zum Besondern, nämlich zur Congruenz und Aehnlichkeit der Dreiecke über, daher sie auch manche Begriffe nicht in der gehörigen Allgemeinheit aufstellen. Aehnliche ebene Figuren sind nichts anderes als homologe Stücke von ähnlichen ebenen Systemen, ähnliche Körper aber homologe Stücke von ähnlichen räumlichen Systemen. Der Betrachtung von centrischen Figuren sollte die des centrischen ebenen Systems und der Betrachtung von symmetrischen Figuren die des symmetrischen ebenen Systems vorangeschickt werden. Uebrigens ist in vielen Lehrbüchern der Geometrie, obgleich Natur und Kunst in allen ihren Gebilden nach Symmetrie streben, dieser Begriff gar nicht entwickelt.

Wenn es für den Geübtern keine Uebung mehr ist, zu dem einen von zwei reciproken Sätzen den andern zu suchen, so ist diess doch für den Anfänger eine zweckmässige Aufgabe, welche ihn veranlasst, durch eigene Thätigkeit Gebilde zur Anschauung zu bringen. Dass aber das Gesetz der Reciprocität jeden für die Geometrie empfänglichen Schüler mehr anrege, als irgend ein einzelner Satz, wird jeder Lehrer erfahren, der seine Schüler auf dasselbe aufmerksam macht. Vielleicht wird diese Schrift einige Lehrer bestimmen, ihrem Unterrichte in der Geometrie des Masses das Wesentliche aus der Geometrie der Lage voranzuschicken, damit ihre Schüler gleich Anfangs denjenigen Ueberblick über die Wissenschaft gewinnen, ohne welchen das rechte Verständniss der einzelnen Sätze und ihrer Beziehung zum Ganzen nicht wohl möglich ist.

Erlangen, im August 1847.

Der Verfasser.

Inhalt.

Geometrie der Lage.

§. 1.

Einleitung. Der Strahlenbündel. Winkelräume und Winkelflächen.

1. Die Geometrie geht von der Vorstellung eines unbegrenzten Raumes aus; ein vollständig begrenztes Stück desselben heisst ein Körper.

Körper und überhaupt körperliche Räume werden durch Flächen, Flächen durch Linien, Linien durch Punkte getheilt und begrenzt. Oberfläche eines Körpers ist die Fläche, welche ihn einschliesst, oder der Inbegriff der Flächen, welche ihn begrenzen.

Jede Fläche hat zwei Seiten; dasselbe kann von jeder Linie in einer Fläche, so wie auch von jedem Punkte in einer Linie gesagt werden.

2. Ein Punkt ist untheilbar. Bewegt sich ein Punkt, so beschreibt er eine Linie; durch die Bewegung einer Linie kann eine Fläche, durch die Bewegung einer Fläche ein körperlicher Raum erzeugt werden. Eine Linie geht durch jeden in ihr liegenden Punkt, eine Fläche aber durch alle in ihr liegenden Punkte und Linien.

Körperliche Räume, Flächen, Linien, Punkte und Zusammensetzungen aus denselben sind geometrische Gebilde. Unter einer Figur versteht man gewöhnlich eine vollständig begrenzte Fläche. Umfang einer Figur ist die Linie, welche sie einschliesst, oder der Inbegriff der Linien, welche sie begrenzen.

3. Jeder Punkt einer geschlossenen (in sich zurückkehrenden) Linie kann als Anfang und Ende derselben betrachtet werden. Beschreibt ein Punkt eine geschlossene Linie, welcher die drei Punkte A, B, C angehören, so muss er entweder im Sinne ABC,

welcher mit dem von BCA oder CAB ganz einerlei ist, oder in dem dem erstern entgegengesetzten Sinne, welcher durch BAC oder ACB oder CBA angezeigt werden kann, sich bewegen.

Werden in einer Linie, welche sich nicht schliesst, drei Punkte angenommen, so sind die beiden äussern durch den mittlern getrennt. Unter vier Punkten einer geschlossenen Linie sind zwei Paar getrennte.

4. Von einer Fläche und einer Linie, welche durch einen und denselben Punkt gehen, sagt man, dass sie in diesem Punkte sich $\left\{\begin{matrix}\text{berühren}\\ \text{schneiden}\end{matrix}\right\}$, wenn die ihm zunächstliegenden Theile der Linie auf $\left\{\begin{matrix}\text{einerlei}\\ \text{entgegengesetzten}\end{matrix}\right\}$ Seite(n) der Fläche liegen. Werden in einem körperlichen Raume, welcher durch eine Fläche in zwei Theile getheilt ist, zwei ausserhalb dieser Fläche befindliche Punkte durch eine Linie verbunden, so schneidet diese die Fläche parmal (gar nicht oder zweimal oder viermal u. s. w.) oder unparmal, je nachdem jene Punkte auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten derselben liegen.

5. Zwei Linien, welche in einer und derselben Fläche liegen und durch einen und denselben Punkt gehen, $\left\{\begin{matrix}\text{berühren}\\ \text{schneiden}\end{matrix}\right\}$ sich in diesem Punkte, wenn die ihm zunächstliegenden Theile einer jeden von den beiden Linien auf $\left\{\begin{matrix}\text{einerlei}\\ \text{entgegengesetzten}\end{matrix}\right\}$ Seite(n) der andern liegen. Werden in einer Fläche, welche durch eine Linie in zwei Theile getheilt ist, zwei ausserhalb dieser Linie befindliche Punkte durch eine andere Linie verbunden, so schneidet diese die erstere parmal oder unparmal, je nachdem jene Punkte auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten derselben liegen.

Eine Linie kann auch sich selbst schneiden oder berühren und daher ein zweien Linien gemeinschaftlicher Punkt ein vielfacher (öfter als einmal zu zählender) Schnitt- oder Berührungspunkt oder auch beides zugleich seyn.

6. Zwei Flächen, welche durch eine und dieselbe Linie gehen, $\left\{\begin{matrix}\text{berühren}\\ \text{schneiden}\end{matrix}\right\}$ sich in dieser Linie, wenn die ihr zunächstliegenden

Theile einer jeden von den beiden Flächen auf $\left\{\begin{matrix}\text{einerlei}\\ \text{entgegengesetzten}\end{matrix}\right\}$ Seite(n) der andern liegen. Zwei Flächen berühren sich in einem Punkte, durch welchen beide gehen, wenn der zunächst um ihn herum liegende Theil einer jeden von den beiden Flächen ganz auf einerlei Seite der andern liegt.

Wenn eine Linie, welche in der einen von zwei sich schneidenden Flächen liegt, die Schnittlinie derselben in einem Punkte $\left\{\begin{matrix}\text{schneidet}\\ \text{berührt}\end{matrix}\right\}$, so $\left\{\begin{matrix}\text{schneidet}\\ \text{berührt}\end{matrix}\right\}$ sie in demselben Punkte auch die andere Fläche. Berühren sich zwei Flächen in einem Punkte oder in einer Linie, so wird auch jede von den beiden Flächen von allen Linien berührt, welche in der andern liegen und durch den Berührungspunkt oder einen Punkt der Berührungslinie gehen.

7. Eine Linie, welche, wenn sie in zwei Punkten festgehalten ist, ihre Lage nicht ändern kann, heisst gerade. Eine Linie heisst gebrochen, wenn sie aus geraden Linien zusammengesetzt ist, ohne gerade zu seyn; — krumm, wenn kein Theil derselben gerade ist; — gemischt, wenn sie aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt ist.

Ein gerades Gebilde ist im Allgemeinen der Inbegriff von allen Punkten (Elementen), welche eine Gerade (unbegrenzte gerade Linie) erfüllen, und von welchen man annehmen kann, dass jeder seine Stelle in der Geraden, auch wenn diese bewegt wird, unverrückt beibehalte. Ein gerades Gebilde im engern Sinne besteht aus einzelnen Punkten oder auch Stücken einer Geraden.

Eine Fläche, welche durch die Bewegung einer Geraden erzeugt werden kann, heisst eine Regelfläche.

8. Zwischen je zwei Punkten ist eine von ihnen begrenzte, durch je zwei Punkte eine unbegrenzte gerade Linie möglich. Zwei Gerade können hiernach, wenn sie nicht ganz in einander fallen sollen, höchstens einen Punkt gemein haben. Ist ein nicht gerades Gebilde nur in zwei Punkten festgehalten, so kann es noch um die durch diese beiden Punkte bestimmte Gerade gedreht werden.

Eine Gerade wird, wenn sie als Element erscheint, auch ein Strahl genannt und durch jeden in ihr angenommenen Punkt in zwei Halbstrahlen getheilt, welche eine gemeinschaftliche Spitze aber entgegengesetzte Richtungen haben, und von welchen jeder die Ergänzung des andern heissen soll.

Aus einem gegebenen Mittelpunkte A wird ein anderer Punkt B durch den Strahl AB projicirt, welcher durch beide Punkte geht. Der Halbstrahl AB projicirt den Punkt B aus der Spitze A.

9. Ein Strahlenbündel ist der Inbegriff von allen Strahlen, welche durch einen und denselben Punkt (Mittelpunkt) denkbar sind. Der Inbegriff von allen nur denkbaren Halbstrahlen, welche einen und denselben Punkt zur gemeinschaftlichen Spitze haben, soll ein Halbstrahlenbündel heissen. Bei einem Gebilde der erstern Art werden Strahlen, bei einem Gebilde der letztern Art aber Halbstrahlen als Elemente betrachtet.

10. Ein einfacher Winkelraum ist ein Theil von einem Halbstrahlenbündel und also so beschaffen, dass jeder Halbstrahl, welcher mit ihm (dem einfachen Winkelraume) einerlei Spitze hat und durch irgend einen Punkt in ihm geht, ganz in denselben fällt. Eine Fläche, welche die erwähnte Eigenschaft hat, welche man also von Halbstrahlen, die eine gemeinschaftliche Spitze haben, erfüllt sich denken kann, soll eine einfache Winkel- oder Kegelfläche heissen.

Einfache Winkelräume werden durch einfache Winkelflächen, einfache Winkelflächen durch Halbstrahlen begrenzt. Die Grenze eines Winkelraumes nennt man seinen Mantel, die Grenzen einer Winkelfläche aber ihre Schenkel.

Bewegt sich ein Halbstrahl um seine Spitze als festen Punkt, so beschreibt er eine einfache Winkelfläche. Jeder Halbstrahl in einer geschlossenen einfachen Winkelfläche kann als Anfang und Ende derselben betrachtet werden, daher unter vier Elementen einer solchen Fläche nur zwei Paar getrennte sind.

11. Wenn einfache Winkelflächen, welche eine gemeinschaftliche Spitze haben, sich schneiden oder berühren, so geschieht solches in Halbstrahlen. Würde gesagt, dass zwei geschlossene einfache Winkelflächen, welche nur die Spitze mit einander gemein haben, in diesem Punkte sich berühren, so würden nicht mehr Halbstrahlen sondern Punkte als Elemente der beiden Flächen betrachtet werden.

Werden in einem Halbstrahlenbündel, welcher durch eine einfache Winkelfläche in zwei Theile getheilt ist, zwei ausserhalb dieser Fläche liegende Halbstrahlen durch eine andere einfache Winkelfläche verbunden, so schneidet diese die erstere parmal oder unparmal, je nachdem jene Halbstrahlen auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten derselben liegen. Zwei geschlossene einfache Winkelflächen, welche eine gemeinschaftliche Spitze haben, schneiden sich also parmal.

12. Zwei einfache Winkel $\left\{\begin{matrix}\text{räume}\\ \text{flächen}\end{matrix}\right\}$ sollen Scheitel $\left\{\begin{matrix}\text{räume}\\ \text{flächen}\end{matrix}\right\}$ zu einander heissen, wenn jeder Halbstrahl, welcher dem einen von den beiden Gebilden angehört, seine Ergänzung im andern findet. Die Mäntel von Scheitelräumen sind Scheitelflächen zu einander. Jeder einfache Winkelraum, welcher ganz ausserhalb seines Scheitelraumes liegt, ohne dass der Mantel des einen den Mantel des andern berührt, heisst auch ein Halbstrahlenkegel.

13. Ein vollkommner Winkelraum ist ein Theil von einem Strahlenbündel und also so beschaffen, dass jeder Strahl, welcher mit ihm (dem vollkommnen Winkelraume) einerlei Mittelpunkt hat und durch irgend einen Punkt in ihm geht, ganz in denselben fällt. Eine Fläche, welche die erwähnte Eigenschaft hat, welche man also von Strahlen, die einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, erfüllt sich denken kann, soll eine vollkommne Winkel- oder Kegelfläche heissen.

Vollkommne Winkelräume werden durch vollkommne Winkelflächen, vollkommne Winkelflächen durch Strahlen begrenzt. Bewegt sich ein Strahl um seinen Mittelpunkt als festen Punkt, so beschreibt er eine vollkommne Winkelfläche. Unter vier Elementen einer geschlossenen vollkommnen Winkelfläche sind nur zwei Paar getrennte.

14. Ein vollkommner Winkelraum, welcher aus zwei Halbstrahlenkegeln (Scheitelkegeln) besteht, von welchen aber, wenn Strahlen als Elemente betrachtet werden, nur wie von einem Raume gesprochen wird, heisst auch ein Strahlenkegel. Von jedem Strahle, welcher mit einem Strahlenkegel einerlei Mittelpunkt hat, aber nicht im Mantel desselben liegt, kann man sagen, dass

er ganz auf einerlei, nämlich entweder der innern oder äussern Seite dieser Fläche liege.

Vollkommne Winkelflächen, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben (concentrisch sind), schneiden und berühren sich in Strahlen. Werden zwei Strahlen, welche mit einem Strahlenkegel einerlei Mittelpunkt haben, aber nicht im Mantel desselben liegen, durch eine vollkommne Winkelfläche verbunden, so schneidet diese die erstere parmal oder unparmal, je nachdem jene Strahlen auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten derselben liegen.

15. Eine vollkommne Winkelfläche heisst von parer Ordnung, wenn sie aus zwei geschlossenen einfachen Winkelflächen (Scheitelflächen) besteht, und also ein Strahl, welcher die Fläche beschreibt, zuletzt wieder in seine anfängliche Lage kommt; — von unparer Ordnung aber, wenn sie zugleich als eine einfache Winkelfläche betrachtet werden kann, und also ein Strahl, welcher die Fläche beschreibt, zuletzt in eine der anfänglichen entgegengesetzte Lage kommt, nämlich mit Verwechslung seiner beiden Hälften die ursprüngliche Stelle wieder einnimmt. Von der Ordnung einer Winkelfläche kann nur gesprochen werden, wenn die Fläche eine geschlossene vollkommne Winkelfläche ist.

Eine Winkelfläche $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, welche sich selbst schneidet oder berührt, kann als der Inbegriff von zwei oder mehreren geschlossenen vollkommnen Winkelflächen betrachtet werden, von welchen keine öfter als einmal durch einen und denselben Strahl geht, und unter welchen eine $\left\{\begin{matrix}\text{pare}\\ \text{unpare}\end{matrix}\right\}$ Anzahl von Winkelflächen unparer Ordnung sich befindet.

16. Durch eine Kegelfläche parer Ordnung, welche sich selbst weder schneidet noch berührt, wird ein Strahlenbündel in zwei Theile getheilt, von welchen der eine ein Strahlenkegel ist, während im andern unendlich viele Winkelflächen unparer Ordnung denkbar sind.

Durch eine Winkelfläche unparer Ordnung, welche sich selbst weder schneidet noch berührt, wird ein Strahlenbündel nicht getheilt, indem kein Strahl desselben von einem andern durch die

Fläche getrennt ist. Ein Halbstrahlenbündel wird durch eine Fläche der erwähnten Art in ein Paar Scheitelräume getheilt, welche einen gemeinschaftlichen Mantel haben, daher die beiden Hälften eines jeden Strahles, welcher der Fläche nicht angehört, aber durch ihren Mittelpunkt geht, auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen, und jede einfache Winkelfläche, welche zwei solche Halbstrahlen zu Schenkeln hat, die erstere unparmal schneidet.

Da eine Winkelfläche unparer Ordnung als einfache Winkelfläche betrachtet, durch jeden in ihr liegenden Strahl in ein Paar Scheitelflächen getheilt wird, und also die beiden Hälften eines jeden andern Strahles der Fläche auf entgegengesetzten Seiten des erstern liegen, so wird überhaupt von zwei Geraden, welche durch einen und denselben Punkt gehen, gesagt, dass sie in diesem Punkte sich schneiden.

17. Zwei geschlossene vollkommne Winkelflächen, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, schneiden sich parmal, wenn entweder beide von parer Ordnung sind, oder die eine von parer und die andere von unparer Ordnung ist; — unparmal aber, wenn beide von unparer Ordnung sind. Folgt aus 15 und 16.

---

§. 2.

Die Ebene. Der Strahlenbüschel und der Ebenenbüschel.

18. Eine Ebene ist eine Winkelfläche unparer (erster) Ordnung, in welcher jeder Punkt als Mittelpunkt betrachtet werden kann.

Geht also eine Gerade durch zwei Punkte einer Ebene, so fällt sie ganz in dieselbe. Von einer nicht in ihr liegenden Geraden kann hiernach eine Ebene höchstens einen Punkt enthalten.

Haben eine Ebene und eine ausserhalb derselben liegende Gerade einen Punkt gemein, so (16) schneiden sie sich in diesem Punkte, welcher die Spur der Geraden in der Ebene oder auch die Spur der Ebene in der Geraden heisst.

19. Durch zwei Punkte und also auch durch eine Gerade sind unendlich viele Ebenen denkbar. Durch drei Punkte, welche

nicht in einer und derselben Geraden liegen, also auch durch eine Gerade und einen ausserhalb derselben befindlichen Punkt, so wie auch durch zwei sich schneidende Gerade ist eine Ebene möglich. Von der Ebene, welche eine Gerade a mit einem ausserhalb derselben befindlichen Punkte P verbindet, soll gesagt werden, dass sie aus der Axe a den Punkt P oder aus dem Mittelpunkte P die Gerade a projicire.

Wird eine Ebene um eine in ihr liegende Gerade als feste Axe gedreht, bis sie mit Verwechslung ihrer beiden Hälften (der beiden Halbebenen) die ursprüngliche Stelle wieder einnimmt, so fällt sie nach und nach mit jeder durch jene Gerade gehenden Ebene zusammen.

20. Eine Winkelfläche $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung wird (17) von einer jeden durch ihren Mittelpunkt gehenden Ebene $\left\{\begin{matrix}\text{parmal}\\ \text{unparmal}\end{matrix}\right\}$ geschnitten; die Schnittlinien sind Strahlen. Eine geschlossene einfache Kegelfläche wird von einer jeden durch ihre Spitze gehenden Ebene parmal geschnitten.

Zwei Ebenen, welche durch einen und denselben Punkt gehen, schneiden sich in einer Geraden, welche ebenfalls durch jenen Punkt geht, ausserhalb welcher aber (19) die beiden Ebenen keinen Punkt mit einander gemein haben. Drei Ebenen, welche durch einen und denselben Punkt gehen, schneiden sich entweder in einer Geraden oder in drei Geraden. Im letztern Falle haben die drei Ebenen ausser jenem Punkte, welcher ihr Schnittpunkt heisst, weil in ihm jede der Ebenen die Schnittlinie der beiden übrigen schneidet, keinen Punkt mit einander gemein.

21. Jedes Gebilde, welches ganz in einer und derselben Ebene liegt, wird ein ebenes Gebilde, jedes Stück einer Ebene, so wie auch die Ebene selbst, eine ebene Fläche genannt. Eine Fläche heisst gebrochen, wenn sie aus ebenen Flächen zusammengesetzt ist, ohne eben zu seyn; — krumm, wenn kein Theil derselben eben ist; — gemischt, wenn sie aus ebenen und krummen Flächen zusammengesetzt ist.

Eine krumme Linie (Curve) heisst einfach gekrümmt, wenn sie ganz in einer und derselben Ebene liegt; — doppelt gekrümmt aber, wenn es keine Ebene giebt, welche durch alle

Punkte der Linie geht. Gewöhnlich versteht man unter einer doppelt gekrümmten oder gewundenen Curve eine Linie, von welcher kein Stück eben ist.

22. Der Inbegriff von allen Strahlen, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben und in einer und derselben Ebene liegen, heisst ein Strahlenbüschel. Ein Halbstrahlenbüschel ist der Inbegriff von allen Halbstrahlen, welche von einem und demselben Punkte ausgehen und in einerlei Ebene liegen. Bei einem Gebilde der erstern Art erscheint die Ebene als eine vollkommne, bei einem Gebilde der letztern Art aber als eine einfache Winkelfläche. Unter vier Elementen eines Gebildes der einen oder andern Art sind nur zwei Paar getrennte.

Jede von zwei Schenkeln begrenzte ebene Winkelfläche heisst auch ein ebener Winkel. Ein Halbstrahlenbüschel wird durch n Halbstrahlen in n einfache, ein Strahlenbüschel durch n Strahlen in n vollkommne ebene Winkel getheilt. Jede gebrochene $\left\{\begin{matrix}\text{einfache}\\ \text{vollkommne}\end{matrix}\right\}$ Winkelfläche ist aus $\left\{\begin{matrix}\text{einfachen}\\ \text{vollkommnen}\end{matrix}\right\}$ ebenen Winkeln zusammengesetzt. Unter einer Kegelfläche versteht man gewöhnlich eine krumme Winkelfläche.

23. Der Inbegriff von allen Ebenen (Elementen), welche durch eine und dieselbe Gerade (Axe) denkbar sind, heisst ein Ebenenbüschel. Alle Halbebenen (Elemente), welche von einer und derselben Geraden (Kante) begrenzt sind, bilden einen Halbebenenbüschel.

Ein einfacher Flächenwinkel ist ein Theil von einem Halbebenenbüschel und also so beschaffen, dass jede Halbebene, welche von seiner Kante begrenzt ist und durch irgend einen Punkt in ihm geht, ganz in denselben fällt. Man kann einen solchen Winkel auch als einen einfachen Winkelraum betrachten, dessen Mantel aus zwei Halbebenen zusammengesetzt ist. Ein vollkommner Flächenwinkel ist ein Theil von einem Ebenenbüschel oder ein von zwei Ebenen begrenzter vollkommner Winkelraum. Die beiden Grenzen eines Flächenwinkels heissen seine Schenkel.

Ein Halbebenenbüschel wird durch n Halbebenen in n einfache, ein Ebenenbüschel aber durch n Ebenen in n vollkommne Flächenwinkel getheilt. Unter vier Elementen eines Büschels der einen oder andern Art sind nur zwei Paar getrennte.

24. Ein einfacher Winkel heisst hohl, wenn die Ergänzungen seiner Schenkel ausserhalb desselben liegen; — flach oder auch gestreckt, wenn seine Schenkel zu einer Geraden oder Ebene sich ergänzen; — erhaben, wenn er die Ergänzungen seiner Schenkel in sich enthält. Die Schenkel eines flachen Winkel sind zugleich die Schenkel seines Scheitelwinkels. Durch zwei seiner Elemente wird ein Halbstrahlen- oder Halbebenenbüschel entweder in zwei gestreckte oder in einen hohlen und einen erhabenen Winkel getheilt.

Ein hohler ebener Winkel kann von einer durch seine Spitze gehenden Ebene höchstens in einem Halbstrahle und also nur dann geschnitten werden, wenn seine Schenkel auf entgegengesetzten Seiten der Ebene liegen. Der Schnitt eines hohlen Flächenwinkels mit einer Ebene, welche seine Kante und also auch seine beiden Schenkel schneidet, ist ein hohler ebener Winkel.

25. Zwei hohle Winkel heissen Nebenwinkel zu einander, wenn sie einen Schenkel gemein haben und ihre beiden übrigen Schenkel zu einer Geraden oder Ebene sich ergänzen.

Ein Strahlen- oder auch Ebenenbüschel wird durch zwei Elemente a, b in zwei vollkommne Winkel ab, a·b getheilt, welche Nebenwinkel zu einander heissen sollen. Unter den vier einfachen Winkeln, aus welchen zwei solche Winkel bestehen, sind vier Paar Nebenwinkel und zwei Paar Scheitelwinkel.

Sind a, b, c drei Elemente eines Büschels, so ist der Winkel ab, welcher das Element c nicht in sich enthält, im Sinne abc, welcher mit dem von bca oder cab ganz einerlei ist, der Winkel a·b aber, welcher das Element c in sich enthält, in dem dem erstern entgegengesetzten Sinne, welcher durch acb oder cba oder bac angedeutet werden kann, beschrieben.

26. Das gerade Gebilde, der Strahlenbüschel (oder auch Halbstrahlenbüschel) und der Ebenenbüschel (oder auch Halbebenenbüschel) sollen die einförmigen Grundgebilde oder die Grundgebilde der ersten Stufe heissen. Der Punkt kommt im geraden Gebilde, die Ebene aber im Ebenenbüschel als Element vor. Die

Gerade, welche zwischen Punkt und Ebene gleichsam die Mitte hält, erscheint im Strahlenbüschel als Element, während sie am geraden Gebilde der Träger von Punkten und am Ebenenbüschel die Schnittlinie von Ebenen ist.

27. Häufig wird ein Gebilde in einem Büschel, wenn es auch nur aus einzelnen Elementen des vollständigen Büschels besteht, selbst ein Büschel genannt. Indessen soll solches in der Folge nur geschehen, wenn durch nähere Angaben jede Zweideutigkeit beseitigt ist.

Ein aus vier Punkten bestehendes gerades Gebilde ABCD wird aus einem ausserhalb der Geraden befindlichen Punkte durch einen Strahlenbüschel abcd projicirt, welcher aus vier Strahlen besteht, und von welchem das gerade Gebilde ABCD ein Schnitt ist. Das gerade Gebilde BADC, welches vom ersten wohl zu unterscheiden ist, wird durch den Büschel badc, das gerade Gebilde CADB durch den Büschel cadb projicirt. Auf diese Weise muss allgemein, wenn für das eine von zwei Gebilden, welche auf einander bezogen sind, eine Permutation desselben gesetzt wird, auch die ihr entsprechende Permutation mit dem andern vorgenommen werden, wenn die vorige Beziehung noch fortbestehen soll.

28. Da in einem Strahlenbündel unendlich viele Strahlenbüschel oder Ebenen enthalten sind, alle Ebenen aber, welche einen Strahl mit einander gemein haben, einen Ebenenbüschel bilden, so erscheinen in einem Strahlenbündel nicht nur Strahlen sondern auch Ebenen als Elemente, obgleich das Gebilde gewöhnlich nach den Elementen der erstern Art genannt wird. Eben so enthält ein Halbstrahlenbündel nicht nur unendlich viele Halbstrahlenbüschel sondern auch unendlich viele Halbebenenbüschel.

Eine Ebene soll, in so ferne unendlich viele gerade Gebilde und Strahlenbüschel in ihr enthalten sind, auch ein ebenes System heissen. Das ebene System und der Strahlenbündel (oder auch Halbstrahlenbündel) sind die Grundgebilde der zweiten Stufe. Es entsprechen ihnen zwei besondere Theile der Geometrie, nämlich die Geometrie der Ebene und die des Strahlenbündels. Der Strahlenbüschel erscheint im ebenen Systeme als der Inbegriff von allen Geraden, welche durch einen und denselben Punkt gehen, im Strahlenbündel aber als der Inbegriff von allen Geraden, welche in einerlei Ebene liegen.

Das Grundgebilde der dritten Stufe ist das räumliche System oder der unbegrenzte Raum, in welchem unendlich viele Grundgebilde der ersten und zweiten Stufe denkbar sind. Jede Ebene ist der Träger eines ebenen Systems, jeder Punkt der Mittelpunkt eines Strahlenbündels, jede Gerade der Träger eines geraden Gebildes und die Axe eines Ebenenbüschels.

29. Wenn zwei Linien aus einem als Spitze angenommenen Punkte durch eine und dieselbe einfache Winkelfläche projicirt werden, so sagt man, dass die beiden Linien von jenem Standpunkte aus betrachtet nur eine und dieselbe Linie zu seyn scheinen oder dem Scheine nach einerlei seyen. Ein Gebilde im Halbstrahlen- oder auch Strahlenbündel soll daher ein Schein von einem andern Gebilde heissen, wenn jedes Element des erstern Gebildes aus seiner Spitze oder seinem Mittelpunkte ein Element des letztern projicirt, und jedes Element des letztern durch ein Element des erstern projicirt wird.

Der Schein einer begrenzten geraden Linie, aus einer nicht in derselben Geraden befindlichen Spitze genommen, ist ein hohler ebener Winkel, welchen die gerade Linie spannt. Der Schein einer ebenen Figur, aus einem ausserhalb der Ebene befindlichen Mittelpunkte genommen, ist ein Strahlenkegel, von welchem die ebene Figur ein Schnitt ist.

30. Der Schein einer unbegrenzten geraden Linie, aus einer nicht in ihr liegenden Spitze genommen, ist ein flacher ebener Winkel. Der Winkel kann nämlich nicht erhaben seyn, weil jedes Element desselben die Gerade schneidet und also keine zwei seiner Elemente zu einem Strahle sich ergänzen. Der Winkel kann aber auch nicht hohl seyn, weil, was als Grundsatz angenommen werden darf, eine Gerade oder ein flacher ebener Winkel nicht ganz in einem hohlen ebenen Winkel liegen kann.

Da die Schenkel des Winkels als Grenzen desselben die Gerade nicht schneiden, so folgt, dass jeder Strahlenbüschel, welcher mit einer Geraden in einerlei Ebene liegt, aber seinen Mittelpunkt ausserhalb der Geraden hat, einen Strahl enthält, welcher die Gerade nicht schneidet.

§. 3.

Von den Parallelen.

31. Zwei Gerade, welche in einerlei Ebene liegen, ohne sich zu schneiden, heissen zu einander parallel. Der zwischen zwei solchen Geraden (Schenkeln) liegende Theil einer Ebene soll ein Parallelstreifen heissen.

Zwei in einerlei Ebene liegende Gerade müssen entweder sich schneiden oder zu einander parallel seyn. Wenn zwei Gerade sich nicht schneiden, so sind sie entweder zu einander parallel oder sie liegen nicht in einerlei Ebene, je nachdem nämlich eine Ebene, welche die eine von den beiden Geraden mit irgend einem Punkte der andern verbindet, durch die andere geht oder die andere schneidet. 19.

32. Durch jeden ausserhalb einer Geraden befindlichen Punkt giebt es (30) eine zur erstern parallele Gerade. Da hiernach zwei sich schneidende Gerade nicht zu einer und derselben dritten Geraden parallel seyn können, so muss, wenn drei Gerade in einerlei Ebene liegen, einer von folgenden vier Fällen statt finden:

a) Die Geraden schneiden sich in drei Punkten.

b) Die Geraden schneiden sich alle drei in einem Punkte.

c) Zwei von den drei Geraden sind zu einander parallel, werden aber beide von der dritten geschnitten.

d) Die Geraden sind alle drei zu einander parallel.

33. Schneiden sich drei Ebenen in drei Geraden, so schneiden sich diese entweder alle drei in einem Punkte oder sie sind alle drei zu einander parallel. Wenn nämlich irgend zwei von den drei Geraden sich schneiden und also die drei Ebenen einen Punkt mit einander gemein haben, so geht durch diesen (20) auch die dritte Gerade.

34. Werden zwei zu einander parallele Gerade und noch eine dritte Gerade angenommen, so ist diese entweder zu jeder von den beiden erstern oder zu keiner derselben parallel. Liegen nämlich die drei Geraden in einerlei Ebene, so folgt der Satz aus 32. Wenn aber die Geraden nicht alle drei in einer und derselben Ebene liegen, so müssen zwei Ebenen, welche die bei-

den erstern Geraden mit einem ausserhalb ihrer Ebene befindlichen Punkte der dritten verbinden, entweder in der dritten oder in einer vierten Geraden sich schneiden. Im erstern von diesen beiden Fällen ist (33) die dritte, im andern aber die vierte Gerade zu den beiden erstern parallel, daher alsdann (32) die dritte zu keiner derselben parallel ist.

Wenn also von beliebig vielen Geraden die zweite zur ersten und so jede folgende zu einer der vorhergehenden parallel ist, so sind alle zu einander parallel.

35. Zwei gerade Linien, welche Stücke von parallelen Geraden sind, heissen einstimmig- oder entgegengesetzt-parallel, je nachdem sie auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten der durch ihre Anfangspunkte gehenden Geraden liegen. Da nun ein Halbstrahl durch seine Spitze und seine Richtung, diese aber durch irgend eine zu ihm einstimmig-parallele gerade Linie bestimmt ist, und hiebei jede von zwei einstimmig-parallelen geraden Linien die Stelle der andern vertreten kann, so kann von solchen Linien auch gesagt werden, dass sie einerlei Richtung haben oder darstellen.

Eine Richtung (die Richtung einer geraden Linie) soll in einer Winkelfläche oder einem Winkelraume enthalten heissen, wenn irgend ein Element dieses Gebildes jene Richtung hat. Alle nur denkbaren Richtungen werden durch einen Halbstrahlenbündel, alle Richtungen aber, welche in einer und derselben Ebene sich vorfinden, durch irgend einen in ihr liegenden Halbstrahlenbüschel dargestellt.

36. Von den beiden einander entgegengesetzten Richtungen, welche in einer Geraden enthalten sind, wird häufig nur wie von einer Richtung (mit einem Doppelsinne) gesprochen, so dass alsdann zwei Gerade einerlei oder verschiedene Richtungen haben, je nachdem sie parallel oder nicht parallel sind, und alle nur denkbaren Richtungen durch einen Strahlenbündel, alle Richtungen aber, welche in einer und derselben Ebene sich vorfinden, durch irgend einen in ihr liegenden Strahlenbüschel dargestellt werden. Es ergeben sich hieraus leicht folgende Sätze:

Wenn eine Gerade und eine Ebene sich schneiden, so ist in dieser die Richtung der Geraden nicht enthalten. — Enthält eine Ebene von einer Geraden einen Punkt und die Richtung, so liegt die Gerade in der Ebene. — Sind von einer Ebene ein Punkt und eine Richtung gegeben, so ist auch eine Gerade gegeben, durch welche die Ebene gehen muss. — Alle Ebenen, welche durch einen und denselben Punkt gehen und eine und dieselbe Richtung enthalten, bilden einen Ebenenbüschel, dessen Axe durch jenen Punkt geht und jene Richtung hat. — Zwei sich schneidende Ebenen enthalten nur eine Richtung gemeinschaftlich, nämlich die Richtung ihrer Schnittlinie. — Durch jede Gerade, welche eine gegebene Richtung nicht hat, ist eine Ebene möglich, welche die gegebene Richtung enthält. — Durch jeden Punkt ist eine Ebene möglich, welche zwei gegebene Richtungen enthält.

37. Eine Ebene und eine Gerade heissen zu einander parallel, wenn sie keinen Punkt mit einander gemein haben, und also jede Ebene, welche die Gerade mit einem Punkte der erstern Ebene verbindet, diese in einer zu jener Geraden parallelen Geraden schneidet.

Werden eine Ebene und eine Gerade angenommen, so muss die Gerade entweder in der Ebene liegen oder zu ihr parallel seyn oder sie schneiden. Da nun die Richtung der Geraden sowohl im ersten als auch (nach dem Obigen) im zweiten Falle in der Ebene enthalten, im dritten aber (36) nicht in ihr enthalten ist, so folgt, dass eine Ebene und eine Gerade sich nicht schneiden oder sich schneiden, je nachdem die Ebene die Richtung der Geraden enthält oder nicht enthält. Wenn daher eine Ebene zu der einen von zwei parallelen Geraden parallel ist oder durch die eine geht, so schneidet sie auch die andere nicht. Wenn aber eine Ebene und eine Gerade sich schneiden, so schneidet die Ebene auch jede zur erstern Geraden parallele Gerade.

Durch jede von zwei Geraden, welche nicht in einerlei Ebene liegen, giebt es eine zur andern parallele (die Richtung der andern enthaltende) Ebene. — Ist eine Gerade zu zwei sich schneidenden Ebenen parallel, so ist sie auch zur Schnittlinie derselben parallel. 36.

38. Zwei Ebenen, welche sich nicht schneiden und also keinen Punkt mit einander gemein haben, heissen zu einander pa-

rallel. Der zwischen zwei solchen Ebenen (Schenkeln) befindliche Raum soll ein Parallelraum heissen.

Wenn zwei Ebenen zwei Richtungen gemeinschaftlich enthalten, so sind sie (36) zu einander parallel. Da aber jede Gerade, welche in der einen von zwei parallelen Ebenen liegt, zur andern parallel ist, so folgt, dass parallele Ebenen alle Richtungen, welche in ihnen sich vorfinden, gemeinschaftlich enthalten. Es ergeben sich hieraus noch nachstehende Sätze:

Ist eine Gerade zu der einen von zwei parallelen Ebenen parallel, so ist sie entweder auch zur andern parallel oder sie liegt in der andern. Wenn aber eine Gerade und eine Ebene sich schneiden, so schneidet die Gerade auch jede zur erstern Ebene parallele Ebene. — Zwei Ebenen, welche zu einer und derselben dritten Ebene parallel sind, sind auch unter sich parallel. Wenn aber eine Ebene die eine von zwei parallelen Ebenen schneidet, so muss sie auch die andere schneiden; die Schnittlinien selbst sind zu einander parallel. — Durch jede zu einer gegebenen Ebene parallele Gerade, so wie auch durch jeden ausserhalb der Ebene befindlichen Punkt giebt es eine zur erstern parallele Ebene (eine Ebene, welche von der erstern zwei und folglich alle Richtungen enthält).

39. Werden drei Ebenen angenommen, so muss nach dem Bisherigen einer von folgenden fünf Fällen statt finden:

a) Die Ebenen schneiden sich in drei Geraden und in einem Punkte.
b) Die Ebenen schneiden sich in drei zu einander parallelen Geraden.
c) Die Ebenen schneiden sich alle drei in einer Geraden.
d) Zwei von den drei Ebenen sind zu einander parallel, werden aber beide von der dritten geschnitten.
e) Die Ebenen sind alle drei zu einander parallel.

40. Parallele Ebene haben etwas Gemeinschaftliches, was an jeder derselben aufgefasst werden kann und ihre Stellung heissen soll, so dass also die Stellung einer Ebene durch jede zu ihr parallele Ebene bestimmt ist, und zwei Ebenen einerlei oder verschiedene Stellungen haben, je nachdem sie parallel sind oder sich schneiden. Ob in einer Ebene eine gegebene Richtung enthalten

oder nicht enthalten ist, hängt (38) nur von der Stellung der Ebene ab, daher man sagen kann, dass diese Stellung in dem einen Falle jene Richtung enthalte, im andern aber sie nicht enthalte. Kommen mehrere Richtungen und Stellungen in Betrachtung, so ist es in der Regel vortheilhaft, sie durch Strahlen und Ebenen anzuzeigen, welche alle durch einen und denselben Punkt gehen. Alle Richtungen, welche in einer und derselben Stellung enthalten sind, werden alsdann durch einen Strahlenbüschel, alle Stellungen aber, welche eine und dieselbe Richtung enthalten, durch einen Ebenenbüschel angezeigt.

Durch zwei Richtungen ist eine Stellung bestimmt, welche nämlich beide Richtungen enthält. Durch zwei Stellungen ist eine Richtung bestimmt, welche nämlich in beiden Stellungen enthalten ist.

41. Der Inbegriff von allen Geraden, welche nach einerlei Richtung in einer und derselben Ebene liegen, heisst ein Parallelstrahlenbüschel, der Inbegriff von allen Ebenen aber, welche einerlei Stellung haben, ein Parallelebenenbüschel. Der Parallelstrahlenbüschel ist als eine besondere Art von Strahlenbüschel, der Parallelebenenbüschel als eine besondere Art von Ebenenbüschel zu betrachten. Ein Strahlenbüschel hat hiernach entweder einen Mittelpunkt oder eine bestimmte Richtung, ein Ebenenbüschel aber entweder eine Axe oder eine bestimmte Stellung.

Der Inbegriff von allen nur denkbaren Geraden, welche eine und dieselbe Richtung haben, soll ein Parallelstrahlenbündel heissen. In einem Parallelstrahlenbündel sind also nicht nur unendlich viele Parallelstrahlenbüschel, sondern auch unendlich viele gewöhnliche Ebenenbüschel und Parallelebenenbüschel enthalten. Eine Ebene gehört nämlich jedem Strahlenbündel an, dessen Mittelpunkt oder Richtung sie enthält.

42. Von einer $\left\{\begin{matrix}\text{Geraden}\\ \text{Ebene}\end{matrix}\right\}$ sagt man, dass sie nach ihrer $\left\{\begin{matrix}\text{Richtung}\\ \text{Stellung}\end{matrix}\right\}$ jeden in ihr liegenden Punkt projicire. Ein gerades Gebilde wird also nach einer von seiner Richtung verschiedenen Richtung durch einen Parallelstrahlenbüschel, nach einer Stellung aber, welche seine Richtung nicht enthält, durch einen Parallel-

ebenenbüschel projicirt. Jedes begrenzte Stück der Geraden wird im erstern Falle durch einen Parallelstreifen, im letztern aber durch einen Parallelraum projicirt, welchen dasselbe spannt.

Ein ebenes System wird nach einer Richtung, welche in ihm nicht enthalten ist, durch einen Parallelstrahlenbündel projicirt, von welchem das ebene System ein Schnitt ist. Jedem Punkte der Ebene entspricht ein Strahl des Bündels, jeder Geraden eine Ebene, jeder begrenzten geraden Linie ein Parallelstreifen, jedem Parallelstreifen ein Parallelraum, jedem ebenen Winkel ein Flächenwinkel, jeder Linie eine Cylinderfläche und jeder Figur ein Strahlencylinder, dessen Mantel dem Umfange der Figur entspricht.

Die Ebene kann man als eine unbegrenzte, die Halbebene als eine einseitig begrenzte und den Parallelstreifen als eine von zwei Schenkeln begrenzte Cylinderfläche betrachten. Gewöhnlich versteht man jedoch unter einer Cylinderfläche eine krumme Fläche, welche man von Parallelstrahlen erfüllt sich denken kann.

---

§. 4.

Von den nEcken, nKanten und Polyedern.

43. Eine ebene Figur, welche von geraden Linien (Seiten) eingeschlossen ist, wird geradlinig und entweder nach der Anzahl n der Ecken ein nEck oder nach der Anzahl der Seiten, deren eben so viele sind, ein nSeit genannt.

Ein Viereck, welches zwei zu einander parallele Seiten hat, heisst ein Trapez. Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in welchem je zwei Gegenseiten zu einander parallel sind oder in welchem zwei Parallelstreifen sich durchschneiden.

44. Statt Kegel sagt man lieber Pyramide, statt Cylinder aber Prisma, wenn der Mantel des Gebildes eine gebrochene Fläche ist. Der Mantel einer nseitigen Halbstrahlenpyramide ist aus n einfachen, der Mantel einer nseitigen Strahlenpyramide aus n vollkommnen ebenen Winkeln, der Mantel eines nseitigen Strahlenprismas aus n Parallelstreifen (Seiten) zusammengesetzt. Gewöhnlich wird aber ein solches Gebilde nach der Anzahl n

seiner Kanten ein nKant genannt, so dass also ein ebenes nEck aus jedem ausserhalb seiner Ebene befindlichen Punkte, so wie auch nach jeder Richtung, welche in seiner Ebene nicht enthalten ist, durch ein nKant projicirt wird.

45. Der unbegrenzte Raum wird durch drei Ebenen, welche in einem Punkte sich schneiden, in acht einfache oder vier vollkommne Dreikante getheilt. Durch vier Ebenen, welche durch seinen Mittelpunkt gehen, von welchen aber keine drei in einer und derselben Geraden sich schneiden, wird ein gewöhnlicher Strahlenbündel in vier Dreikante und drei Vierkante getheilt. Die vierte Ebene wird nämlich durch die drei Strahlen, in welchen die drei erstern Ebenen sie schneiden, in drei Winkel getheilt, deren jeder eines von den vier Dreikanten, welche die drei erstern Ebenen mit einander bilden, in ein Dreikant und ein Vierkant theilt.

46. Ein Körper, welcher von ebenen Flächen eingeschlossen ist, wird ebenflächig und nach der Anzahl n seiner Flächen, welche sämmtlich geradlinige Figuren sind, ein nFlach genannt. In jeder Kante eines Polyeders (ebenflächigen Körpers) stossen zwei seiner Flächen, in jedem Eckpunkte aber drei oder mehrere Flächen (eine Raumecke bildend) und eben so viele Kanten zusammen.

Der Mantel einer Pyramide, der ein nEck zur Grundfläche dient, ist aus n Dreiecken zusammengesetzt, welche die Seiten des nEcks zu Grundlinien und einen ausserhalb seiner Ebene befindlichen Punkt zur gemeinschaftlichen Spitze haben. Wird von einer Pyramide durch eine zu ihrer Grundfläche parallele Ebene ein Stück abgeschnitten, welches selbst wieder eine Pyramide ist, so bleibt eine abgestumpfte Pyramide übrig, deren Deckfläche zur Grundfläche parallel ist und deren Seitenflächen Trapeze sind. Ein nseitiges Strahlenprisma und ein Parallelraum, dessen Stellung die Richtung des erstern Gebildes nicht enthält, durchschneiden sich in einem nseitigen Prisma, dessen Mantel nämlich aus n Parallelogrammen zusammengesetzt ist.

47. Betrachtet man irgend eines von den vier Dreiecken, welche ein Tetraeder (Vierflach) begrenzen, als Grundfläche und also die übrigen als Seitenflächen, so erscheint der Körper als

eine dreiseitige Pyramide. Ein Tetraeder wird durch eine Ebene, welche dasselbe schneidet, entweder in zwei Tetraeder oder in eine dreiseitige und eine vierseitige Pyramide oder in ein Tetraeder und einen von zwei Dreiecken und drei Vierecken eingeschlossenen Körper oder in zwei solche Fünfflache getheilt, je nachdem nämlich die Ebene eine oder zwei oder drei oder vier Kanten des Tetraeders schneidet. In den drei erstern Fällen ist der Schnitt des Tetraeders mit der Ebene ein Dreieck, im vierten aber ein Viereck. Ist die schneidende Ebene zu zwei einander gegenüberliegenden Kanten parallel, so ist der Schnitt ein Parallelogramm.

48. Ein Parallelepipedon ist ein Körper, welcher von sechs Parallelogrammen eingeschlossen ist, oder in welchem drei Parallelräume, deren Stellungen nicht alle drei eine und dieselbe Richtung enthalten, sich durchschneiden. Je zwei von drei solchen Parallelräumen schneiden sich nämlich in einem vierseitigen Strahlenprisma, dessen Schnitt mit dem dritten ein Parallelepipedon ist.

Durch drei Gerade, deren Richtungen nicht in einer und derselben Stellung enthalten sind, und von welchen auch keine zwei sich schneiden, ist ein Parallelepipedon bestimmt, von welchem nämlich jede der drei Geraden eine Kante enthält, und welches entsteht, wenn man durch je zwei von den drei Geraden zwei zu einander parallele (die Richtungen beider enthaltende) Ebenen legt.

49. Wenn jeder Eckpunkt eines Polyeders mit jedem andern durch eine Kante oder eine aus Kanten zusammengesetzte Linie verbunden werden kann, und seine Oberfläche durch jede aus Kanten zusammengesetzte geschlossene Linie, welche nicht öfter als einmal durch einen und denselben Punkt geht, in zwei Theile getheilt wird, so ist die Anzahl E der Eckpunkte mehr der Anzahl F der Flächen gleich der Anzahl K der Kanten mehr zwei.

Wenn nämlich der Körper E Eckpunkte hat, so sind E — 1 Kanten, von welchen die erste zwei Eckpunkte unter sich, die zweite einen derselben mit einem dritten, die dritte einen der drei vorigen mit einem vierten u. s. w. verbindet, hinreichend um von jedem Eckpunkte auf jeden andern übergehen zu können. Da nun in einem solchen Systeme von Kanten keine geschlossene Linie enthalten ist, jede der übrigen (noch freien) Kanten aber mit zwei oder mehrern Kanten des Systems eine geschlossene Linie bildet, so sind die übrigen Kanten hinreichend aber auch alle erforderlich, um durch sie von jeder der F Flächen des Körpers auf jede andere übergehen zu können, woraus man schliessen kann, dass die Anzahl der übrigen Kanten $F-1$, mithin die Anzahl aller Kanten $E+F-2$ und demnach $E+F=K+2$ sey.

50. An den vorigen Satz lassen sich noch folgende Bemerkungen knüpfen.

I. Weil in jedem Eckpunkte wenigstens drei Kanten zusammenstossen, aber jede Kante nur zwei Eckpunkte verbindet, so ist $3E$ nicht grösser als $2K$. Weil ferner jede Fläche wenigstens von drei Kanten begrenzt ist, aber in jeder Kante nur zwei Flächen zusammenstossen, so ist auch $3F$ nicht grösser als $2K$. Da hiernach keine von den beiden Zahlen $3E$, $3F$, deren Summe $= 3K+6$ ist, grösser als $2K$ ist, so ist auch keine kleiner als $K+6$, folglich jede grösser als K, woraus man schliessen kann, dass weder in jedem Eckpunkte mehr als fünf Kanten zusammenstossen können, noch jede Fläche von mehr als fünf Kanten begrenzt seyn kann.

II. Wenn in jedem Eckpunkte m Kanten zusammenstossen, so ist $mE = 2K$ und mithin

$$E:F-2:K=2:m-2:m.$$

Ist jede Fläche von n Kanten begrenzt, so ist $nF=2K$ und mithin

$$F:E-2:K=2:n-2:n.$$

III. Wenn in jedem Eckpunkte m Kanten zusammenstossen und jede Fläche von n Kanten begrenzt, folglich $EF:(E-2)(F-2)=4:(m-2)(n-2)$ und mithin $(m-2)(n-2)<4$ ist, so muss entweder $m=3$ und $n=3$ oder $m=3$ und $n=4$ oder $m=4$ und $n=3$ oder $m=3$ und $n=5$ oder $m=5$ und $n=3$ seyn. Im ersten von diesen Fällen ist, wie aus II. leicht hervorgeht, der Körper ein Tetraeder, im zweiten ein 8eckiges

6Flach, im dritten ein 6eckiges 8Flach, im vierten ein 20eckiges 12Flach und im fünften ein 12eckiges 20Flach.

51. Da die aus den beiden Schenkeln eines einfachen ebenen Winkels zusammengesetzte Linie durch ein beliebiges die Spitze des Winkels in sich enthaltendes Stück derselben bestimmt ist, so sagt man, dass jede aus zwei geraden Linien zusammengesetzte gebrochene Linie einen hohlen und einen erhabenen ebenen Winkel und eben so jede aus zwei ebenen Flächen zusammengesetzte gebrochene Fläche einen hohlen und einen erhabenen Flächenwinkel bilde.

Von den beiden einfachen Winkeln, welche zwei aufeinanderfolgende Seiten eines ebenen nEcks oder einfachen nKants oder Strahlenprismas oder zwei aneinanderstossende Flächen eines Polyeders mit einander bilden, betrachtet man gewöhnlich entweder nur den innern oder nur den hohlen, welcher im Falle er zugleich der innere ist, ein ausspringender, im entgegengesetzten Falle aber ein einspringender Winkel genannt wird. Die Nebenwinkel eines ausspringenden Winkels sollen positive, die Nebenwinkel eines einspringenden Winkels aber negative Aussenwinkel heissen.

52. In der Folge ist, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, unter einem Winkel immer ein vollkommner Winkel und unter einem nKante immer ein nKant im Strahlenbündel zu verstehen.

Alle Strahlen, welche den Umfang eines ebenen nEcks in einem und demselben Eckpunkte berühren, erfüllen, je nachdem die Berührung auf der äussern oder innern Seite statt findet, einen positiven oder negativen Aussenwinkel, dessen Nebenwinkel im erstern Falle ein ausspringender, im letztern Falle aber ein einspringender Winkel der Figur ist und alle Strahlen enthält, welche den Umfang derselben in jedem Eckpunkte schneiden. Eben so erfüllen alle Ebenen, welche den Mantel eines nKants oder die Oberfläche eines Polyeders in einer und derselben Kante (von aussen oder von innen) berühren, einen Aussenwinkel, welcher von einem (ausspringenden oder einspringenden) Winkel des Gebildes der Nebenwinkel ist.

53. Wenn der Umfang eines ebenen nEcks oder der Mantel

eines nKants oder die Oberfläche eines Polyeders von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten wird, so hat das Gebilde offenbar lauter ausspringende Winkel. Umgekehrt kann man, wie man sich leicht überzeugt, aus der letztern Eigenschaft immer auf die erstere schliessen.

Der Umfang eines nEcks kann von einer Geraden höchstens in n Punkten und folglich, wenn n eine unpare Zahl ist, höchstens in n — 1 Punkten geschnitten werden. Hat ein ebenes nEck lauter ausspringende Winkel, so gilt diess auch von jeder Pyramide, welche das nEck zur Grundfläche hat. Hat ein Polyeder lauter ausspringende Winkel, so gilt diess auch von jedem Schnitte desselben, so wie auch von jedem der beiden Theile, in welche das Polyeder durch die schneidende Ebene getheilt wird.

---

§. 5.

Uuendlich ferne Elemente.

54. Aus den Sätzen des vorletzten §. ist zu ersehen, dass in vielen Fällen ein Punkt durch eine Richtung, eine Gerade aber durch eine Stellung vertreten wird, und dass also zu den Elementen einer Geraden auch noch ihre Richtung, zu den Elementen einer Ebene aber auch noch ihre Stellung und alle in derselben enthaltenen Richtungen gehören. Zwei Gerade, welche in einerlei Ebene liegen, haben entweder einen Punkt gemein oder einerlei Richtung. Zwei Ebenen haben entweder eine Gerade gemein oder einerlei Stellung. Eine Ebene enthält von einer nicht in ihr liegenden Geraden entweder nur einen Punkt oder nur die Richtung. Es wird hiernach nicht unzweckmässig seyn für Richtung und Stellung noch andere Ausdrücke einzuführen, welche an das, was sie vertreten, unmittelbar erinnern und Sätze, welche nur besondere Modifikationen von andern sind, auch als solche bezeichnen.

55. Wenn in einer Ebene die eine von zwei sich schneidenden Geraden um einen ausserhalb der andern befindlichen Punkt in unverändertem Sinne gedreht wird, so rückt der Schnitt-

punkt in der andern (festen) Geraden immer weiter fort, bis er bei der parallelen Lage der beiden Geraden sich ganz verliert. Von parallelen Geraden sagt man daher, dass sie in einem unendlich fernen (uneigentlichen) Punkte sich schneiden. Wird die Drehung im vorigen Sinne fortgesetzt, so kommt der Schnittpunkt der beiden Geraden auf der entgegengesetzten Seite zum Vorschein und gelangt am Ende, wenn die sich drehende Gerade einen Strahlenbüschel beschrieben hat, wieder an seine anfängliche Stelle. Eine Gerade erscheint hiernach, wenn man ihr einen unendlich fernen Punkt zuschreibt, in welchem sie von allen zu ihr parallelen Geraden und Ebenen geschnitten, als eine geschlossene Linie, daher alsdann unter vier Punkten in ihr nur zwei Paar getrennte sind.

56. Von allen unendlich fernen Punkten einer Ebene wird gesagt, dass sie in einer unendlich fernen (uneigentlichen) Linie liegen, welche, weil sie von einer jeden (andern) mit ihr in einerlei Ebene liegenden Geraden in einem Punkte geschnitten wird, selbst eine Gerade heisst. Gleichwie in jeder Richtung ein unendlich ferner Punkt liegt, so liegt in jeder Stellung eine unendlich ferne Gerade, in welcher alle Ebenen, die diese Stellung haben, sich schneiden.

Parallelstrahlenbüschel, welche in einerlei Ebene liegen, haben einen Strahl, nämlich die unendlich ferne Gerade, welche von jedem der Büschel den uneigentlichen Mittelpunkt enthält, mit einander gemein.

57. Von allen unendlich fernen Punkten und Linien wird gesagt, dass sie in einer unendlich fernen (uneigentlichen) Fläche liegen, welche, weil sie von einer jeden nicht in ihr liegenden Geraden in einem Punkte und von jeder (andern) Ebene in einer Geraden geschnitten wird, selbst eine Ebene heisst. Alle Parallelebenenbüschel haben hiernach ein Element, nämlich die unendlich ferne Ebene, in welcher alle ihre uneigentlichen Axen liegen, mit einander gemein. Eine Gerade, welche sich bewegt, ohne ihre Richtung zu ändern, dreht sich um einen unendlich fernen Punkt, eine Ebene aber, welche sich bewegt, ohne ihre Stellung zu ändern, um eine unendlich ferne Axe.

Ein unendlich ferner Punkt liegt in einer unendlich fernen

Geraden, wenn die Stellung, welcher diese Gerade entspricht, die Richtung enthält, welcher jener Punkt entspricht. Ein unendlich fernes (uneigentliches) gerades Gebilde entspricht also dem Inbegriffe von allen Richtungen, welche in einer und derselben Stellung enthalten sind, ein unendlich ferner (uneigentlicher) Strahlenbüschel aber dem Inbegriffe von allen Stellungen, welche eine und dieselbe Richtung enthalten. Zu den Elementen eines Parallelstrahlenbündels gehören auch die unendlich ferne Ebene und jede unendlich ferne Gerade, welche durch seinen (uneigentlichen) Mittelpunkt geht.

58. Durch die in diesem §. aufgestellte Ansicht, welche im Gegensatze zur gewöhnlichen die perspektivische heissen soll, werden oft anscheinend ganz verschiedene Sätze in eine Aussage zusammengefasst und die Ausnahmen beseitigt, welche ausserdem der Aufstellung allgemeiner Gesetze häufig im Wege stehen würden.

Der Satz, dass eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt sey, begreift zwei besondere Fälle in sich, indem der eine von den beiden Punkten oder auch beide im Unendlichen liegen können. Eine eigentliche Gerade ist nämlich auch durch einen Punkt und ihre Richtung, eine Stellung (unendlich ferne Gerade) aber durch zwei Richtungen bestimmt.

Von dem Satze, dass durch eine Gerade und einen ausserhalb derselben befindlichen Punkt eine Ebene bestimmt ist, ist der besondere Fall, in welchem der gegebene Punkt im Unendlichen liegt (statt des Punktes eine Richtung gegeben ist), in 36 und der besondere Fall, in welchem die gegebene Gerade im Unendlichen liegt (statt einer eigentlichen Geraden die Stellung der Ebene gegeben ist), in 38 enthalten. Liegen die gegebenen Elemente beide im Unendlichen, so ist die durch sie bestimmte Ebene die unendlich ferne Ebene selbst.

59. Zwei Grundgebilde heissen auf einander bezogen, wenn jedem Elemente eines jeden ein Element des andern zugewiesen ist, welches jenem entsprechend heisst. Wenn also von beliebig vielen Gebilden das zweite auf das erste und jedes folgende auf eines der vorhergehenden bezogen ist, so sind alle auf einander bezogen.

Die einfachste Art, ein gerades Gebilde s und einen Ebenenbüschel, dessen Axe das erstere Gebilde nicht schneidet, auf einander zu beziehen, besteht darin, dass man das gerade Gebilde als einen Schnitt des Ebenenbüschels (mit der Geraden s) betrachtet. Es liegt alsdann jeder Punkt des geraden Gebildes in der ihm entsprechenden Ebene des Büschels. Ist von einem Ebenenbüschel ein Strahlenbüschel und von diesem ein gerades Gebilde ein Schnitt, so ist auch das gerade Gebilde ein Schnitt des Ebenenbüschels.

In zwei Strahlenbüscheln, welche Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels sind, entsprechen einander je zwei Strahlen, welche in einer und derselben Ebene des Ebenenbüschels liegen, in zwei Strahlenbüscheln aber, welche Scheine eines und desselben geraden Gebildes sind, je zwei Strahlen, welche einen und denselben Punkt des geraden Gebildes projiciren.

60. Betrachtet man ein ebenes System S als Schnitt eines Strahlenbündels S_1, dessen Mittelpunkt nämlich ausserhalb der Ebene S liegt, und also den Strahlenbündel als einen Schein des ebenen Systems, so entspricht jedem Gebilde in S_1 ein Gebilde in S, welches vom erstern die Spur ist, und jedem Gebilde in S ein Gebilde in S_1, welches das erstere projicirt. Ist S_1 ein gewöhnlicher Strahlenbündel und S eine eigentliche Ebene, so entspricht der zu dieser Ebene parallelen Ebene P des Bündels die unendlich ferne Gerade des ebenen Systems, jeder andern Ebene eine eigentliche Gerade, jedem Ebenenbüschel, dessen Axe in der Ebene P liegt, ein Parallelstrahlenbüschel, jedem andern Ebenenbüschel ein gewöhnlicher Strahlenbüschel u. s. w. Ist S_1 ein Parallelstrahlenbündel, so entspricht jedem eigentlichen Elemente ein eigentliches Element und jedem uneigentlichen Elemente ein uneigentliches Element. Wenn endlich S die unendlich ferne Ebene ist, so entspricht jedem Strahle des Bündels ein unendlich ferner Punkt, jeder Ebene eine unendlich ferne Gerade, jedem Strahlenbüschel ein unendlich fernes gerades Gebilde und jedem Ebenenbüschel ein unendlich ferner Strahlenbüschel.

Nennt man in zwei gewöhnlichen Strahlenbündeln je zwei Strahlen, welche einerlei Richtung haben, einander entsprechend, so betrachtet man die Strahlenbündel als Scheine eines und desselben ebenen Systems, dessen Träger nämlich die unendlich ferne Ebene ist. Merkt man bei der Bewegung einer eigentlichen Geraden nur auf die Aenderung ihrer Richtung, so betrachtet man die (uneigentliche) Linie, welche ihr unendlich ferner Punkt beschreibt.

61. Jede Gerade wird durch je zwei in ihr befindliche Punkte A, B in zwei Strecken AB, A·B (oder AB, B·A) getheilt, von welchen jede die Ergänzung der andern heissen soll. Eine Strecke ist also entweder eine endliche oder ins Unendliche oder durch das Unendliche gehende oder im Unendlichen liegende Strecke. Eine eigentliche Gerade wird durch zwei eigentliche Punkte in eine Strecke der ersten und eine Strecke der dritten Art, durch einen eigentlichen und ihren unendlich fernen Punkt aber in zwei Strecken der zweiten Art (in zwei Halbstrahlen) getheilt. Jedes Stück einer unendlich fernen Geraden ist eine Strecke der vierten Art.

Nach der perspektivischen Ansicht sind Halbstrahlen und Halbebenen nicht Elemente sondern Stücke von Gebilden, daher auch in der Folge unter einem Büschel ein Strahlen- oder Ebenenbüschel und unter einer Kegelfläche, wenn sie nicht ausdrücklich eine einfache genannt wird, eine Fläche im Strahlenbündel zu verstehen ist. Eine Cylinderfläche ist eine (uneigentliche) Kegelfläche, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt.

62. Nach der perspektivischen Ansicht wird jeder Büschel durch je zwei seiner Elemente in ein Paar Nebenwinkel getheilt, so dass es fünf Arten von ebenen Winkeln und vier Arten von Flächenwinkeln giebt.

Zwei Gerade, welche in einem eigentlichen Punkte sich schneiden, bilden mit einander zwei ebene Winkel der ersten Art (eigentliche ebene Winkel). Ein Parallelstrahlenbüschel wird durch zwei eigentliche Strahlen in einen ebenen Winkel der zweiten Art (Parallelstreifen) und einen ebenen Winkel der vierten Art, welcher den unendlich fernen Strahl in sich enthält, durch einen eigentlichen Strahl und den unendlich fernen Strahl aber in zwei ebene Winkel der dritten Art (Halbebenen) getheilt. Je zwei unendlich ferne Gerade sind die Schenkel von zwei ebenen Winkeln der fünften Art.

Zwei Ebenen, welche in einer eigentlichen Geraden sich schneiden, bilden mit einander zwei Flächenwinkel der ersten Art (eigentliche Flächenwinkel). Ein Parallelebenenbüschel wird durch zwei eigentliche Ebenen in einen Flächenwinkel der zweiten Art (Parallelraum) und in einen Flächenwinkel der vierten Art, welcher die unendlich ferne Ebene in sich enthält, durch eine eigentliche Ebene und die unendlich ferne Ebene aber in zwei Flächenwinkel der dritten Art getheilt.

Ist ein ebenes System S ein Schnitt von einem Strahlenbündel S_1, so entspricht jeder Strecke in S ein ebener Winkel in S_1, jedem Winkel in S ein Flächenwinkel in S_1, jedem ebenen Winkel in S_1 eine Strecke in S und jedem Flächenwinkel in S_1 ein Winkel in S.

63. Hat man von zwei nicht in einerlei Ebene liegenden Geraden die eine als Axe, aus welcher und die andere als Projektionslinie, auf welche projicirt werden soll, angenommen, so versteht man unter der Projektion eines Punktes den Schnittpunkt der Projektionslinie mit der Ebene, welche aus der angenommenen Axe jenen Punkt projicirt. Die Projektion einer Strecke, welche mit der Projektionsaxe nicht in einerlei Ebene liegt, ist der Schnitt der Projektionslinie mit dem Flächenwinkel, welcher jene Strecke projicirt. Liegt eine Linie mit der Projektionsaxe in einerlei Ebene, so ist ihre Projektion nur ein Punkt. Wenn die Projektionsaxe im Unendlichen liegt und also nach einer bestimmten Stellung projicirt wird, so ist die Projektion einer jeden endlichen Strecke, deren Richtung in jener Stellung nicht enthalten ist, ebenfalls eine endliche Strecke.

Ein gerades Gebilde und seine Projektion auf eine andere Gerade aus einer Axe, welche mit keiner von den beiden erstern Geraden in einerlei Ebene liegt, sind nichts anderes als Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels mit zwei Geraden. Liegen diese in einerlei Ebene, so sind die geraden Gebilde zugleich Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels, so dass es alsdann einerlei ist, ob man sie aus jener Axe oder aus deren Spur in jener Ebene auf einander projicirt.

64. Unter der Projektion eines Gebildes auf eine Ebene (Projektionsebene) aus einem ausserhalb derselben gegebenen Mittelpunkte (Projektionscentrum) versteht man den Schnitt der Pro-

jektionsebene mit dem aus jenem Mittelpunkte genommenen Scheine des Gebildes. Die Projektion einer Strecke, welche mit dem Projektionscentrum nicht in einer und derselben Geraden liegt, ist also der Schnitt der Projektionsebene mit dem ebenen Winkel, welcher jene Strecke projicirt. Die Projektion eines ebenen Winkels, welcher mit dem Projektionscentrum nicht in einerlei Ebene liegt, ist der Schnitt der Projektionsebene mit dem Flächenwinkel, welcher jenen ebenen Winkel projicirt. Liegt eine gerade Linie mit dem Projektionscentrum in einer und derselben Geraden, so ist ihre Projektion nur ein Punkt. Liegt eine Fläche mit dem Projektionscentrum in einerlei Ebene, so ist ihre Projektion nur eine Linie.

Ein ebenes System und seine Projektion auf eine andere Ebene aus einem ausserhalb beider Ebenen befindlichen Punkte sind nichts anderes als Schnitte eines und desselben Strahlenbündels mit zwei Ebenen. Wenn diese Ebenen zu einander parallel sind oder der Mittelpunkt des Strahlenbündels im Unendlichen liegt (also nach einer bestimmten Richtung projicirt wird) oder beides zugleich der Fall ist, so entspricht jedem eigentlichen Punkte einer jeden von den beiden Ebenen ein eigentlicher Punkt in der andern, jeder endlichen Strecke eine endliche Strecke, jedem gewöhnlichen Strahlenbüschel ein gewöhnlicher Strahlenbüschel, jedem Parallelstrahlenbüschel ein Parallelstrahlenbüschel u. s. w. Wenn aber die Ebenen in einer eigentlichen Geraden sich schneiden und das Projektionscentrum ein eigentlicher Punkt ist, so entspricht der unendlich fernen Geraden einer jeden von den beiden Ebenen eine eigentliche Gerade in der andern, daher es alsdann nur ein Paar einander entsprechende Parallelstrahlenbüschel giebt, und weder zwei einander entsprechende Strecken noch zwei einander entsprechende Winkel nothwendig von einerlei Art sind.

65. In dem Satze, dass eine Fläche und eine Linie in einem Punkte sich schneiden, wenn die ihm zunächstliegenden Theile der Linie auf entgegengesetzten Seiten der Fläche liegen, wird vorausgesetzt, dass man unter den beiden Seiten der Fläche zwei körperliche Räume sich denken könne, welche in der Fläche, aber nicht zugleich in einer andern durch jenen Punkt gehenden Fläche zusammenstossen. Um daher zu entscheiden, ob eine Ebene E

und eine ausserhalb derselben befindliche Linie L, welche durch einen und denselben unendlich fernen Punkt P gehen, in diesem Punkte sich schneiden oder berühren, nehme man irgend eine Ebene F an, welche nicht durch P geht. Wenn nun die Linie L im Punkte P von einem der beiden Flächenwinkel EF, E'F in den andern übergeht, so ist P ein Schnittpunkt, im entgegengesetzten Falle aber ein Berührungspunkt der Ebene E und der Linie L.

Zwei zu einander parallele Halbstrahlen AP, BP treffen die unendlich ferne Ebene in einem und demselben Punkte und zwar auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten, je nachdem sie einstimmig- oder entgegengesetzt-parallel sind. Die gebrochene Linie APB wird nämlich im Punkte P von der unendlichen fernen Ebene im erstern Falle berührt, im letztern aber geschnitten. Ein Strahlenkegel wird durch das in ihm liegende Stück der unendlich fernen Ebene in zwei Halbstrahlenkegel getheilt, welche auf entgegengesetzten Seiten ihrer gemeinschaftlichen unendlich fernen Grundfläche liegen.

---

§. 6.

Gesetz der Reciprocität.

66. Schon die ersten Sätze der Geometrie lassen ein gewisses Gesetz der Reciprocität oder Dualität erkennen, nach welchem im Raume der Punkt und die Ebene einander gegenüberstehen (reciproke Begriffe sind), und jeder Satz, in welchem zwischen eigentlichen und uneigentlichen Elementen kein Unterschied gemacht wird, seine Ergänzung in einem andern findet, der aus dem erstern hervorgeht, wenn man Punkt und Ebene (also auch gerades Gebilde und Ebenenbüschel, Strecke und Flächenwinkel u. s. w.) mit einander vertauscht. Gewöhnlich werden zwei solche Sätze wie die beiden Seiten eines Satzes neben einander gestellt z. B.

α_1) Durch zwei Punkte A, B ist eine Gerade AB bestimmt, welche nämlich durch beide Punkte geht.	α_2) Durch zwei Ebenen A, B ist eine Gerade AB bestimmt, in welcher nämlich die beiden Ebenen sich schneiden.
β_1) Durch eine Gerade a und einen ausserhalb derselben be-	β_2) Durch eine Gerade a und eine nicht durch sie gehende

findlichen Punkt B ist eine Ebene aB bestimmt, welche die Gerade mit dem Punkte verbindet.

γ_1) Durch drei Punkte A, B, C, welche nicht in einer und derselben Geraden liegen, ist eine Ebene A B C bestimmt, welche durch die drei Punkte geht.

δ_1) Zwei Gerade, welche einen Punkt gemein haben, liegen auch in einerlei Ebene.

Ebene B ist ein Punkt aB bestimmt, in welchem die Gerade und die Ebene sich schneiden.

γ_2) Durch drei Ebenen A, B, C, welche nicht durch eine und dieselbe Gerade gehen, ist ein Punkt ABC bestimmt, in welchem die drei Ebenen sich schneiden.

δ_2) Zwei Gerade, welche in einerlei Ebene liegen, haben auch einen Punkt gemein.

67. Die vorigen Sätze führen auf folgende Aufgaben (Forderungen):

α_1) Durch zwei gegebene Punkte eine Gerade zu ziehen.

β_1) Durch eine gegebene Gerade und einen ausserhalb derselben gegebenen Punkt eine Ebene zu legen.

γ_1) Durch drei gegebene nicht in einer und derselben Geraden liegende Punkte eine Ebene zu legen.

δ_1) Durch zwei gegebene Gerade, welche einen Punkt mit einander gemein haben, eine Ebene zu legen.

α_2) Die Schnittlinie von zwei gegebenen Ebenen zu finden.

β_2) Den Schnittpunkt einer gegebenen Ebene mit einer nicht in ihr liegenden Geraden zu finden.

γ_2) Den Schnittpunkt von drei gegebenen nicht in einer und derselben Geraden sich schneidenden Ebenen zu finden.

δ_2) Den Schnittpunkt von zwei gegebenen in einerlei Ebene liegenden Geraden zu finden.

Legt man durch einen gegebenen eigentlichen Punkt eine Ebene, welche zwei gegebene Richtungen enthält, so hat man durch drei gegebene Punkte, von welchen zwei im Unendlichen liegen, eine Ebene gelegt. Weiss man von zwei Geraden, dass sie zu einander parallel sind, so ist durch die eine von beiden auch ihr Schnittpunkt gegeben.

68. Wenn A, B, C, D vier Punkte sind, und die Geraden AB, CD sich schneiden, so lie-

Wenn A, B, C, D vier Ebenen sind, und die Geraden AB, CD sich schneiden, so gehen gen die vier Punkte in einerlei Ebene, daher alsdann auch die Geraden A C, B D, so wie auch die Geraden A D, B C sich schneiden.

die vier Ebenen durch einen und denselben Punkt, daher alsdann auch die Geraden A C, B D, so wie auch die Geraden A D, B C sich schneiden.

69. Wenn von beliebig vielen Geraden je zwei sich schneiden, aber nicht alle in

einem Punkte sich schneiden, so liegen alle in einerlei Ebene.

einerlei Ebene liegen, so schneiden sich alle in einem Punkte.

70. Gleichwie ein Gebilde, welches aus den Elementen A, B, C, D besteht, gewöhnlich durch A B C D bezeichnet wird, so soll ein Gebilde, welches aus den Elementen S A, S B, S C, S D besteht, durch S (A B C D) bezeichnet werden. Sind A, B, C, D

Punkte, so muss S entweder ein Punkt oder eine Gerade seyn.

Ebenen, so muss S entweder eine Ebene oder eine Gerade seyn.

71. Soll in einer gegebenen Ebene durch einen in ihr gegebenen Punkt eine Gerade gezogen werden, welche eine ausserhalb der Ebene gegebene, nicht durch jenen Punkt gehende Gerade schneide, so wird man entweder den Schnittpunkt der gegebenen Ebene mit der gegebenen Geraden suchen und alsdann durch diesen nnd den gegebenen Punkt eine Gerade ziehen, oder man wird durch den gegebenen Punkt und die gegebene Gerade eine Ebene legen und alsdann die Schnittlinie dieser Ebene mit der gegebenen Ebene suchen. Jede von diesen beiden Auflösungsarten kann der andern, die Aufgabe aber sich selbst gegenüber gestellt werden.

72. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene Gerade, von welchen keine durch den gegebenen Punkt geht, und welche auch nicht beide mit ihm in einer und derselben Ebene liegen, schneide. — Man lege durch den gegebenen Punkt und die eine von den gegebenen Geraden eine Ebene, so ist die

In einer gegebenen Ebene eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene Gerade, von welchen keine in der gegebenen Ebene liegt, und welche auch nicht beide mit ihr einen und denselben Punkt gemein haben, schneide. — Man suche den Schnittpunkt der gegebenen Ebene mit der einen von den gegebenen Geraden, so ist die

Aufgabe auf die vorige zurückgeführt.

Aufgabe auf die vorige zurückgeführt.

Soll eine Gerade gezogen werden, welche drei gegebene Gerade, deren keine zwei in einerlei Ebene liegen, schneide, so wird man entweder in einer von den gegebenen Geraden einen beliebigen Punkt annehmen und alsdann durch diesen eine Gerade legen, welche die beiden andern schneidet; oder man wird, was das Reciproke ist, durch eine von den gegebenen Geraden eine beliebige Ebene legen und alsdann in dieser eine Gerade ziehen, welche die beiden andern schneidet.

73. Wenn zwei Gebilde auf einander bezogen sind und ein Element des einen Gebildes mit dem ihm entsprechenden Elemente des andern zusammenfällt (identisch ist), so soll von diesem Elemente gesagt werden, dass es den beiden Gebilden entsprechend gemein sey.

In zwei ebenen Systemen, welche Schnitte eines und desselben Strahlenbündels sind, entsprechen einander je zwei Elemente, welche von einem und demselben Elemente des Bündels die Spuren sind. Die Schnittlinie der beiden Ebenen entspricht sich selbst; dasselbe gilt von einem jeden in dieser Geraden befindlichen Punkte. Die beiden ebenen Systeme haben hiernach ein gerades Gebilde (alle Punkte desselben) entsprechend gemein.

In zwei Strahlenbündeln, welche Scheine eines und desselben ebenen Systems sind, entsprechen einander je zwei Elemente, welche ein und dasselbe Element des ebenen Systems projiciren. Der den beiden Bündeln gemeinschaftliche Strahl entspricht sich selbst; dasselbe gilt von einer jeden durch ihn gehenden Ebene. Die beiden Strahlenbündel haben hiernach einen Ebenenbüschel (alle Elemente desselben) entsprechend gemein.

74. Zwei Strahlenbüschel, welche Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels sind, haben entweder einen Strahl entsprechend gemein, oder sind zugleich Scheine eines und desselben geraden Gebildes, je

Zwei Strahlenbüschel, welche Scheine eines und desselben geraden Gebildes sind, haben entweder einen Strahl entsprechend gemein, oder sind zugleich Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels, je nachdem sie nachdem sie nämlich concentrisch oder nicht concentrisch sind.

nämlich in einerlei oder nicht in einerlei Ebene liegen.

75. Das System von allen im Raume denkbaren

Punkten wird durch zwei Ebenen A, B in zwei Systeme getheilt, welche die beiden Ebenen (als Träger von Punkten) zu gemeinschaftlichen Grenzen haben und von welchen das eine im Winkel AB und das andere im Winkel A·B enthalten ist.

Ebenen wird durch zwei Punkte P, Q in zwei Systeme getheilt, welche die Ebenenbündel P, Q zu gemeinschaftlichen Grenzen haben und von welchen das eine die Strecke PQ und das andere die Strecke P·Q schneidet.

Sind zwei Elemente durch zwei andere getrennt, so sind auch diese durch jene getrennt. Wenn z. B. der eine von den beiden Punkten P, Q in dem Winkel AB und der andere in dem Winkel A·B liegt, so schneidet auch die eine von den beiden Ebenen A, B die Strecke PQ und die andere die Strecke P·Q.

76. In der Ebene stehen der Punkt und die Gerade, im Strahlenbündel aber der Strahl und die Ebene einander gegenüber. Z. B.

Das System von allen in einer und derselben Ebene befindlichen

Punkten wird durch zwei Gerade A, B in zwei Systeme getheilt, welche die beiden Geraden zu gemeinschaftlichen Grenzen haben und von welchen das eine in dem Winkel AB und das andere in dem Winkel A·B enthalten ist.

Geraden wird durch zwei Punkte A, B in zwei Systeme getheilt, welche die beiden Strahlenbüschel A, B zu gemeinschaftlichen Grenzen haben und von welchen das eine die Strecke AB und das andere die Strecke A·B schneidet

Das System von allen einem Strahlenbündel zugehörigen

Strahlen wird durch zwei Ebenen A, B in zwei Systeme geheilt, welche die Eben en (Strahlenbüschel) A, B zu gemeinschaftlichen Grenzen haben und von welchen das eine in dem Winkel AB und das andere in dem Winkel A·B enthalten ist.

Ebenen wird durch zwei Strahlen A, B in zwei Systeme getheilt, welche die Ebenbüschel A, B zu gemeinschaftlichen Grenzen haben und von welchen das eine den Winkel AB und das andere den Winkel A·B schneidet.

77. α_1) Werden in einer Ebene zwei Punkte (als Mittelpunkte) angenommen, so ist jeder dritte Punkt der Ebene, welcher mit jenen beiden nicht in einer und derselben Geraden liegt, durch die beiden Strahlen bestimmt, welche ihn aus den angenommenen Punkten projiciren.

α_2) Werden in einer Ebene zwei Gerade angenommen, so ist jede dritte Gerade der Ebene, welche nicht durch den Schnittpunkt der beiden erstern geht, durch ihre Spuren in den angenommenen Geraden bestimmt.

α_3) Werden in einem Strahlenbündel zwei Strahlen als Axen angenommen, so ist jeder dritte Strahl desselben, welcher mit jenen beiden nicht in einer und derselben Ebene liegt, durch die beiden Ebenen bestimmt, welche ihn aus den angenommenen Axen projiciren.

α_4) Werden in einem Strahlenbündel zwei Ebenen angenommen, so ist jede dritte Ebene desselben, welche nicht durch die Schnittlinie der beiden erstern geht, durch ihre Spuren (Strahlen) in den angenommenen Ebenen bestimmt.

In der Folge werden von vier solchen zusammengehörigen Sätzen, von welchen zwei der Geometrie der Ebene und zwei der Geometrie des Strahlenbündels angehören, gewöhnlich nur die beiden erstern ausgesprochen werden, da aus ihnen die beiden letztern hervorgehen, wenn man ein ebenes System als Schnitt eines Strahlenbündels betrachtet, und also für die Ausdrücke: Punkt, Gerade, gerades Gebilde u. s. w. die Ausdrücke: Strahl, Ebene, Strahlenbüschel u. s. w. substituirt. Stellt man Punkt und Ebene einander gegenüber, so ist α_4 das Reciproke von α_1 und α_3 das Reciproke von α_2.

78. Die einfachsten Arten, die Elemente eines körperlichen Systems durch die Elemente von andern Grundgebilden zu bestimmen, sind in nachstehenden Sätzen enthalten.

α_1) Werden eine Gerade und ein Punkt angenommen, welcher mit der Geraden eine Ebene bestimmt, so ist jeder ausserhalb dieser Ebene befindliche Punkt durch die Ebene und den

α_2) Werden eine Gerade und eine Ebene angenommen, welche in einem Punkte sich schneiden, so ist jede nicht durch diesen Punkt gehende Ebene durch ihre Spuren in der angenommenen

Strahl bestimmt, welche ihn aus der angenommenen Geraden und dem angenommenen Punkte projiciren.

β_1) Werden in einer Ebene drei Gerade angenommen, welche nicht in einem und demselben Punkte sich schneiden, so ist jeder ausserhalb jener Ebene befindliche Punkt durch die drei Ebenen bestimmt, welche ihn aus den angenommenen Geraden projiciren.

γ_1) Werden zwei Punkte angenommen, so ist jede Gerade, welche nicht mit beiden in einer und derselben Ebene liegt, durch die beiden Ebenen bestimmt, welche sie aus den angenommenen Punkten projiciren.

Geraden und der angenommenen Ebene bestimmt.

β_2) Werden drei Gerade angenommen, welche nicht in einerlei Ebene liegen, aber durch einen und denselben Punkt gehen, so ist jede nicht durch diesen Punkt gehende Ebene durch ihre Spuren in den drei angenommenen Geraden bestimmt.

γ_2) Werden zwei Ebenen angenommen, so ist jede Gerade, welche nicht beide in einem und demselben Punkte schneidet, durch ihre Spuren in den angenommenen Ebenen bestimmt.

---

§. 7.

Von den nEcken, nKanten u. s. w. in einer andern Bedeutung.

79. Unter einem ebenen nEcke versteht man häufig nur den Inbegriff von n in einerlei Ebene liegenden Punkten (Eckpunkten) und den n Geraden (Seiten), deren jede zwei aufeinanderfolgende Eckpunkte verbindet. Man denkt sich hiebei die n Punkte in einer bestimmten Aufeinanderfolge, so dass auf den letzten wieder der erste folgt, und setzt voraus, dass keine drei aufeinanderfolgende in einer und derselben Geraden liegen.

Die 2nElemente des ebenen nEcks $A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_n$ sind der Ordnung nach der Punkt A_1, die Gerade $A_1\ A_2$, der Punkt A_2, die Gerade $A_2\ A_3$ u. s. w. Dem ersten Elemente heisst das $(n+1)^{te}$, dem zweitem das $(n+2)^{te}$ u. s. w. gegenüberliegend, so dass also, wenn n eine pare Zahl ist, jedem Eckpunkte ein

Eckpunkt und jeder Seite eine Seite gegenüberliegt, während im entgegengesetzten Falle das eine von zwei einander gegenüberliegenden Elementen ein Eckpunkt, das andere aber eine Seite ist.

Jede Gerade, welche zwei nicht aufeinanderfolgende Eckpunkte eines ebenen nEcks verbindet, heisst eine Diagonale desselben. Die beiden Diagonalen des ebenen Vierecks ABCD sind gemeinschaftliche Seiten der Vierecke ACBD, ACDB.

80. Ein vollständiges ebenes nEck besteht aus n Punkten (Eckpunkten), welche in einerlei Ebene, von welchen aber keine drei in einer und derselben Geraden liegen, und den $\frac{n(n-1)}{2}$ Geraden (Seiten), deren jede zwei von den n Punkten mit einander verbindet. In jedem Eckpunkte schneiden $n-1$ Seiten, daher die Anzahl aller Seiten $\frac{n(n-1)}{2}$ ist.

Ein vollständiges ebenes nSeit besteht aus n in einerlei Ebene liegenden Geraden (Seiten), von welchen keine drei durch einen und denselben Punkt gehen, und den $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkten (Eckpunkten), in deren jedem zwei von den n Geraden sich schneiden. In jeder Seite liegen $n-1$ Eckpunkte, daher die Anzahl aller Eckpunkte $\frac{n(n-1)}{2}$ ist.

81. Wenn in zwei reciproken Sätzen der ebenen Geometrie dem Ausdrucke nEck derselbe Ausdruck gegenübersteht, so versteht es sich von selbst, dass ein nEck gemeint sey, welches zugleich ein nSeit ist. Dasselbe ist der Fall, wenn von den Diagonalen eines nEcks gesprochen wird.

Die vier Seiten und die beiden Diagonalen eines Vierecks sind die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks. Je zwei Seiten, welche nicht durch einen und denselben Eckpunkt gehen, heissen einander gegenüberliegend.

Die vier Eckpunkte eines Vierecks und die beiden Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten sich schneiden, sind die sechs Eckpunkte eines vollständigen Vierseits. Je zwei Eckpunkte, welche nicht in einer und derselben Seite liegen, heissen einander gegenüberliegend.

82. Ist ein ebenes System ein Schnitt eines Strahlenbündels, so entspricht jedem nEcke, welches zugleich ein nSeit ist, ein

nKant, welches zugleich ein nSeit ist, jedem vollständigen nEcke ein vollständiges nKant, jedem vollständigen nSeite ein vollständiges nSeit. Ist von den Eckpunkten oder von den Kanten eines nSeits die Rede, so versteht es sich von selbst, dass im ersten Falle ein ebenes nSeit, im letztern aber ein nSeit im Strahlenbündel gemeint sey.

Die vier Seiten und die beiden Diagonalen (Diagonalebenen) eines Vierkants sind die sechs Seiten eines vollständigen Vierkants.

Die vier Kanten eines Vierkants und die beiden Geraden, in deren jeder ein Paar Gegenseiten sich schneiden, sind die sechs Kanten eines vollständigen Vierseits.

83. Unter einem nEcke, welches zugleich nFlach ist, versteht man den Inbegriff von n Punkten (Eckpunkten), den n Geraden (Seiten, Kanten), deren jede zwei aufeinanderfolgende Eckpunkte verbindet, und den n Ebenen (Flächen), deren jede durch drei aufeinanderfolgende Eckpunkte geht. Man denkt sich hiebei die n Punkte in einer bestimmten Aufeinanderfolge, so dass auf den letzten wieder der erste folgt, und setzt voraus, dass keine vier aufeinanderfolgende in einerlei Ebene liegen.

Wenn in einem Sechsecke, welches zugleich Sechsflach ist, je zwei einander gegenüberliegende Seiten (Kanten) sich schneiden, so gehen die drei Geraden, deren jede ein Paar Gegenpunkte verbindet, (als Schnittlinien von drei Ebenen) durch einen und denselben Punkt, während die drei Geraden, in deren jeder ein Paar Gegenflächen sich schneiden, (als Verbindungslinien von drei Punkten) in einer und derselben Ebene liegen.

84. Ein vollständiges nEck im Raume besteht aus n Punkten (Eckpunkten), von welchen keine vier in einerlei Ebene liegen, den Geraden (Kanten), deren jede zwei, und den Ebenen (Flächen), deren jede drei von den nPunkten verbindet. In jedem Eckpunkte schneiden sich n—1 Kanten, in jeder Kante n—2 Flä-

Ein vollständiges nFlach besteht aus n Ebenen (Flächen), von welchen keine vier durch einen und denselben Punkt gehen, den Geraden (Kanten), in deren jeder zwei, und den Punkten (Eckpunkten), in deren jedem drei von den nEbenen sich schneiden. In jeder Fläche liegen n—1 Kanten, in jeder Kanchen, daher die Anzahl aller Kanten $\frac{n(n-1)}{2}$ und die Anzahl aller Flächen $\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$ ist.

te $n-2$ Eckpunkte, daher die Anzahl aller Kanten $\frac{n(n-1)}{2}$ und die Anzahl aller Eckpunkte $\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$ ist.

Ist $n=4$, so wird das Gebilde gewöhnlich nach der Anzahl seiner Flächen ein Tetraeder genannt. — In der Bedeutung von §. 4 sind die Ausdrücke nEck, nKant, nFlach in der Folge nur dann zu nehmen, wenn solches ausdrücklich bemerkt wird, oder von einem Umfange oder Mantel u. s. w. die Rede ist.

85. Die vier Eckpunkte und sechs Kanten eines Tetraeders werden aus jedem Mittelpunkte, welcher in keiner seiner Flächen liegt, durch die vier Kanten und sechs Seiten eines vollständigen Vierkants projicirt.

Die vier Flächen und sechs Kanten eines Tetraeders werden von jeder Ebene, welche durch keinen seiner Eckpunkte geht, in den vier Seiten und sechs Eckpunkten eines vollständigen Vierseits geschnitten.

Anm. Wo Punkt und Ebene einander gegenüberstehen, steht das vollständige ebene nEck dem vollständigen nSeite im Strahlenbündel und das vollständige ebene nSeit dem vollständigen nKante gegenüber.

86. Die zehn Kanten und zehn Flächen eines vollständigen Fünfecks im Raume sind die Kanten und Flächen von fünf Tetraedern und zugleich (85) die Kanten und Seiten von fünf vollständigen Vierkanten, und werden daher von jeder Ebene, welche durch keinen der fünf Eckpunkte geht, in den zehn Eckpunkten und den zehn Seiten von fünf vollständigen Vierseiten und fünf vollständigen Vierecken geschnitten.

Die zehn Kanten und zehn Eckpunkte eines vollständigen Fünfflachs sind die Kanten und Eckpunkte von fünf Tetraedern und zugleich die Seiten und Eckpunkte von fünf vollständigen Vierseiten, und werden daher aus jedem Mittelpunkte, welcher in keiner der fünf Flächen liegt, durch die zehn Seiten und zehn Kanten von fünf vollständigen Vierkanten und fünf vollständigen Vierseiten projicirt.

87. Zwei ebene nEcke heissen auf einander bezogen, wenn

jedem Eckpunkte eines jeden ein Eckpunkt des andern, welcher jenem entsprechend (homolog) heisst, und dadurch auch jeder Seiten eines jeden eine Seite des andern zugewiesen ist. Analoges gilt von nSeiten, nKanten u. s. w.

Wenn zwei auf einander bezogene Dreiecke in zwei Ebenen liegen, deren Schnittlinie mit keiner der sechs Seiten zusammenfällt, aber je zwei homologe Seiten sich schneiden (in einerlei Ebene liegen), so sind die beiden Dreiecke Schnitte eines und desselben Dreikants.

Wenn zwei auf einander bezogene Dreikante zwei Strahlenbündeln angehören, deren gemeinschaftlicher Strahl mit keiner der sechs Kanten zusammenfällt, aber je zwei homologe Kanten sich schneiden (einen Punkt gemein haben), so sind die beiden Dreikante Scheine eines und desselben Dreiechs.

88. Wenn zwei auf einander bezogene vollständige ebene Vierecke in zwei Ebenen liegen, deren Schnittlinie durch keinen der acht Eckpunkte geht, und fünf Seiten des einen Vierecks die homologen Seiten des andern schneiden, so sind die beiden Vierecke Schnitte eines und desselben vollständigen Vierkants, daher auch ihre beiden übrigen Seiten sich schneiden.

Wenn zwei auf einander bezogene vollständige Vierseite zwei Strahlenbündeln angehören, deren gemeinschaftlicher Strahl in keiner der acht Seiten liegt, und fünf Kanten des einen Vierseits die homologen Kanten des andern schneiden, so sind die beiden Vierseite Scheine eines und desselben vollständigen ebenen Vierseits, daher auch ihre beiden übrigen Kanten sich schneiden.

Folgt aus 87, wenn man bemerkt, dass Dreikante, welche zwei Kanten gemein haben, concentrisch sind, Dreiecke aber, welche zwei Seiten gemein haben, in einerlei Ebene liegen.

89. Zwei in einerlei Ebene liegende nEcke oder nSeite, welche auf einander bezogen sind, heissen zu einander perspektivisch (perspektivisch liegend), wenn sie von einem und demselben dritten ebenen nEcke oder nSeite N die Projektionen (aus zwei Punkten M, M_1) sind, und also die Geraden, deren jede ein Paar homologe Eckpunkte jener Gebilde verbindet, alle durch einen und denselben Punkt (die Spur der Geraden MM_1) gehen,

die Punkte aber, in deren jedem ein Paar homologe Seiten sich schneiden, alle in einer und derselben Geraden (der Spur der Ebene N) liegen.

90. Wenn zwei auf einander bezogene Dreiecke ABC, $A_1 B_1 C_1$ in einerlei Ebene liegen, aber kein Element mit einander gemein haben, und

die drei Punkte, in deren jedem ein Paar homologe Seiten sich schneiden, in einer und derselben Geraden u liegen, welche von keinem der beiden Dreiecke eine Seite ist, so liegen die Dreiecke perspektivisch, daher auch die drei Geraden, deren jede ein Paar homologe Eckpunkte verbindet, in einem Punkte sich schneiden. — Projicirt man nämlich das Dreieck ABC auf irgend eine andere durch die Gerade u gehende Ebene, so erhält man ein drittes Dreieck $A_2 B_2 C_2$, von welchem (nach 87) auch das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ eine Projektion ist.

die drei Geraden, deren jede ein Paar homologe Eckpunkte verbindet, in einem und demselben Punkte S sich schneiden, welcher von keinem der beiden Dreiecke ein Eckpunkt ist, so liegen die Dreiecke perspektivisch, daher auch die drei Punkte, in deren jedem ein Paar homologe Seiten sich schneiden, in einer Geraden liegen. — Projicirt man nämlich das Dreieck ABC aus irgend einem Punkte M und das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ aus einem andern Punkte M_1 der Geraden MS, so erhält man zwei Dreikante, welche (87) Scheine eines und desselben dritten Dreiecks $A_2 B_2 C_2$ sind.

Es kommen in den obigen Sätzen, welche im Grunde nur durch die Form der Aussage sich von einander unterscheiden, zehn Punkte und zehn Gerade vor, welche die Spuren von den zehn Kanten und den zehn Flächen eines vollständigen Fünfecks im Raume und daher auch die Eckpunkte und Seiten von zehn Paar perspektivischen Dreiecken sind. Anstatt zu sagen: die drei Punkte D, E, F, in welchen die Seiten AB, AC, BC des Dreiecks ABC von den homologen Seiten des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ geschnitten werden, liegen in einer Geraden, kann man auch sagen: die drei Geraden, deren jede ein Paar homologe Eckpunkte der Dreiecke $B B_1 D$, $C C_1 E$ verbindet, schneiden sich in einem Punkte.

91. Wenn zwei auf einander bezogene vollständige Vierecke in einerlei Ebene liegen, und eine Gerade u, welche durch keinen ihrer Eckpunkte geht, von fünf Seiten des einen Vierecks in denselben Punkten geschnitten wird, in welchen die homologen Seiten des andern sie schneiden, so liegen die Vierecke perspektivisch, daher auch ihre beiden übrigen Seiten jene Gerade in einem und demselben Punkte schneiden u. s. w.

Wenn zwei auf einander bezogene vollständige Vierseite in einerlei Ebene liegen, und aus einem Punkte S, welcher in keiner ihrer Seiten liegt, fünf Eckpunkte des einen Vierseits durch dieselben Strahlen projicirt werden, welche aus ihm die homologen Eckpunkte des andern projiciren, so liegen die Vierseite perspektivisch, daher auch ihre beiden übrigen Eckpunkte aus jenem Punkte durch einen und denselben Strahl projicirt werden u. s. w.

Diese Sätze lassen sich eben so auf 88 zurückführen, wie die vorigen auf 87 zurückgeführt wurden.

92. Wenn zwei Tetraeder, welche kein Element mit einander gemein haben, auf einander bezogen sind, und die vier Geraden (p), deren jede ein Paar homologe Eckpunkte verbindet, durch einen und denselben Punkt gehen, welcher von keinem der beiden Tetraeder ein Eckpunkt ist, so liegen die vier Geraden (q), in deren jeder ein Paar homologe Flächen sich schneiden, in einer und derselben Ebene, welche von keinem der beiden Tetraeder eine Fläche ist; und umgekehrt. Zwei solche Tetraeder heissen zu einander perspektivisch.

Gehen die Geraden (p) durch einen und denselben Punkt, welcher von keinem der beiden Tetraeder ein Eckpunkt ist, so schneiden sich auch (68) je zwei homologe Kanten in einem Punkte, welcher von keinem der Tetraeder ein Eckpunkt ist. Da ferner von den sechs Punkten, in deren jedem ein Paar homologe Kanten sich schneiden, je

Liegen die Geraden (q) in einer und derselben Ebene, welche von keinem der beiden Tetraeder eine Fläche ist, so liegen auch (68) je zwei homologe Kanten in einerlei Ebene, welche von keinem der beiden Tetraeder eine Fläche ist. Da ferner von den sechs Ebenen, deren jede ein Paar homologe Kanten verbindet, je drei, welche drei, welche in einer und derselben Fläche des einen Tetraeders liegen, auch in der homologen Fläche des andern und mithin in einer und derselben Geraden liegen, so sind jene sechs Punkte die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits, dessen Seiten die Geraden (q) sind.

durch einen und denselben Eckpunkt des einen Tetraeders gehen, auch durch den homologen Eckpunkt des andern und mithin durch eine und dieselbe Gerade gehen, so sind jene sechs Ebenen die Seiten eines vollständigen Vierkants, dessen Kanten die Geraden (p) sind.

Es kommen hier 15 Punkte, 20 Gerade und 15 Ebenen in Betrachtung, welche die Eckpunkte, Kanten und Flächen von 15 Paar perspektivischen Tetraedern, dann von 6 vollständigen Fünfecken und 6 vollständigen Fünfflachen sind. Die 10 Eckpunkte und die 10 Kanten eines jeden dieser Fünfflache liegen in den 10 Kanten und den 10 Flächen des vollständen Fünfecks, welches die fünf übrigen von den 15 Punkten zu Eckpunkten hat.

§. 8.

Harmonische Gebilde.

93. Wenn in einer Geraden drei Punkte A, B, C gegeben sind, und alsdann ein Viereck so construirt wird, dass eine Diagonale durch den zweiten der gegebenen Punkte geht, in jedem der beiden übrigen aber zwei einander gegenüberliegende Seiten sich schneiden, so schneidet die andere Diagonale des Vierecks jene Gerade in einem vierten Punkte D, welcher durch die drei gegebenen Punkte bestimmt ist und zu denselben der vierte harmonische Punkt heisst. Ist nämlich EFGH ein anderes Viereck, von welchem eine Diagonale EG durch den Punkt B geht, ein Paar einander gegenüberliegende Seiten EF, GH im Punkte A und die beiden übrigen Seiten FG, HE im Punkte C sich schneiden, so schneidet seine andere Diagonale (nach 88 und 91) die Gerade AB in demselben Punkte D, in welchem diese Linie von der andern Diagonale des erstern Vierecks geschnitten wird.

Die Punkte A, C sind durch die Punkte B, D getrennt. Betrachtet man nämlich das ebene System, dessen Träger die Ebene ACE ist, als Schnitt eines gewöhnlichen Strahlenbündels S, so entspricht der aus den drei Strecken CHE, EFA, ABC zusammengesetzten Linie der Mantel der dreiseitigen Strahlenpyramide, welche die drei Strahlen SC, SE, SA zu Kanten hat und den Strahl SG in sich enthält Da nun die Gerade HF die Strecken CHE, EFA und also die Ebene SHF die diesen Strecken entsprechenden Seiten der erwähnten Strahlenpyramide schneidet, so folgt, dass die dritte Seite von der Ebene SHF und also auch die Strecke ABC von der Geraden HF nicht geschnitten werde.

94. Ein harmonisches gerades Gebilde ABCD wird aus jedem ausserhalb der Geraden befindlichen Punkte S durch einen harmonischen Strahlenbüschel projicirt, welcher nämlich von jeder Geraden, die mit ihm in einerlei Ebene liegt, aber nicht durch seinen Mittelpunkt geht, in einem harmonischen geraden Gebilde $A_1 B_1 C_1 D_1$ geechnitten wird.

Man construire in einer Ebene, welche durch die Gerade AB aber nicht durch den Punkt S geht, ein Viereck, so dass zwei einander gegenüberliegende Seiten desselben im Punkte A, die beiden übrigen Seiten im Punkte C sich schneiden, eine Diagonale durch den Punkt B und also die andere durch den Punkt D geht. Projicirt man nun dieses Viereck aus dem Punkte S auf eine durch die Gerade $A_1 B_1$ gehende Ebene, so erhält man ein Viereck, von welchem zwei einander gegenüberliegende Seiten im Punkte A_1, die beiden übrigen Seiten im Punkte C_1 sich schneiden, die eine Diagonale durch den Punkt B_1 und die andere durch den Punkt D_1 geht, was zu beweisen war.

95. Ein harmonisches gerades Gebilde ABCD wird aus jeder Axe s, welche mit ihm nicht in einerlei Ebene liegt, ein harmonischer Strahlenbüschel also aus jedem ausserhalb seiner Ebene befindlichen Punkte durch einen harmonischen Ebenenbüschel projicirt, welcher nämlich von jeder Geraden, die seine Axe nicht schneidet, in einem harmonischen geraden Gebilde $A_1 B_1 C_1 D_1$ und also von jeder Ebene, die nicht durch seine Axe geht, in einem harmonischen Strahlenbüschel geschnitten wird.

Man nehme in der Axe s zwei beliebige Punkte an und projicire aus dem einen das Gebilde ABCD und aus dem andern das Gebilde $A_1 B_1 C_1 D_1$, so erhält man zwei Strahlenbüschel welche (74) Scheine eines und desselben dritten geraden Gebildes $A_2B_2C_2D_2$ sind. Da nun das Gebilde ABCD harmonisch ist, so gilt diess auch (94) von dem Gebilde $A_2B_2C_2D_2$ und mithin auch von dem Gebilde $A_1B_1C_1D_1$.

96. Wenn ABCD ein harmonisches Gebilde ist, so sind auch BCDA, CDAB, DABC, DCBA, CBAD, BADC, ADCB harmonische Gebilde.

Es sey ABCD ein harmonisches gerades Gebilde, so kann man ein Viereck EFGH construiren, so dass die Seiten EF, GH im Punkte A, die Seiten FG, HE im Punkte C sich schneiden, die Diagonale EG durch den Punkt B und die Diagonale FH durch den Punkt D geht, woraus sogleich erhellt, dass auch ADCB, CDAB, CBAD harmonische Gebilde sind. Es sey ferner K der Schnittpunkt von EG und FH, so sind (90) EFC, DBK zwei zu einander perspektivische Dreiecke, daher die drei Geraden ED, FB, CK in einem und demselben Punkte L sich schneiden. Bemerkt man nun, dass von dem Vierecke EKFL zwei einander gegenüberliegende Seiten im Punkte B, die beiden übrigen im Punkte D sich schneiden, die eine Diagonale durch A und die andere durch C geht, so folgt, dass auch BADC, BCDA, DABC, DCBA harmonische Gebilde sind.

97. Nach dem Bisherigen ist durch drei Elemente eines harmonischen Gebildes und durch die Angabe, von welchem derselben das vierte getrennt ist, auch das vierte bestimmt. Wenn daher ABCD, abcd zwei ungleichartige harmonische Gebilde sind, und die Elemente A, B, C bezüglich in den Elementen a, b, c liegen, so ist das erstere Gebilde ein Schnitt des letztern.

Liegen drei Punkte A, B, C eines harmonischen geraden Gebildes ABCD in drei gegebenen Ebenen, welche in einer und derselben Geraden sich schneiden, so liegt auch der vierte Punkt in einer gegebenen, durch diese Gerade gehenden Ebene.

Schneiden drei Ebenen a, b, c eines harmonischen Ebenenbüschels abcd eine Gerade in gegebenen Punkten, so wird diese Gerade auch von der vierten Ebene in einem gegebenen Punkte geschnitten.

98. Je zwei getrennte Elemente eines harmonischen Gebildes sollen durch die beiden übrigen harmonisch getrennt heissen. Ist

das eine von zwei harmonischen Gebilden ein Schnitt des andern, so kann man auch sagen, dass je zwei getrennte Elemente eines jeden durch die ihnen nicht entsprechenden Elemente des andern harmonisch getrennt sind.

Durch zwei Ebenen und einen ausserhalb derselben befindlichen Punkt ist eine dritte Ebene bestimmt, welche durch die Schnittlinie der beiden erstern geht und jeden Punkt enthält, der von dem gegebenen Punkte durch die gegebenen Ebenen harmonisch getrennt ist.

Durch eine Ebene und zwei ausserhalb derselben befindliche Punkte ist ein dritter Punkt bestimmt, in welchem jede Ebene, welche von der gegebenen Ebene durch die gegebenen Punkte harmonisch getrennt ist, die durch diese Punkte bestimmte Gerade schneidet.

Man kann hier für die Ausdrücke: Ebene, Schnittlinie, die Ausdrücke: Gerade, Schnittpunkt setzen, wenn man nur Elemente einer und derselben Ebene betrachtet.

99. Die beiden Diagonalen eines ebenen Vierecks sind (93) durch die beiden Punkte, die beiden Diagonalen, eines Vierkants also durch die beiden Strahlen, in deren jedem ein Paar Gegenseiten sich schneiden, harmonisch getrennt.

In einem vollständigen ebenen Vierecke sind je zwei Gegenseiten durch die beiden Punkte, in deren jedem von den vier übrigen Seiten zwei einander gegenüberliegende sich schneiden, harmonisch getrennt.

In einem vollständigen Vierseite sind je zwei Gegenpunkte durch die beiden Geraden, deren jede von den vier übrigen Eckpunkten zwei einander gegenüberliegende verbindet, harmonisch getrennt.

100. Wenn von zwei zu einander perspektivischen Dreiecken das eine ABC um das andere $A_1 B_1 C_1$ und also dieses in das erstere beschrieben ist, so dass nämlich die Eckpunkte A_1, B_1, C_1 beziehlich in den Seiten BC, CA, AB liegen, so ist (99)

der Punkt S, welcher mit je zwei homologen Eckpunkten in einer und derselben Geraden liegt, von jedem Punkte, in welchem ein Paar homologe Seiten sich schneiden, sowohl durch die

die Gerade u, welche je zwei homologe Seiten in einem und demselben Punkte schneidet, von jeder Geraden, welche ein Paar homologe Eckpunkte verbindet, sowohl durch die übrigen Eck-übrigen Seiten des einen als auch durch die übrigen Seiten des andern Dreiecks harmonisch getrennt.

Projicirt man den Punkt S aus jedem Eckpunkte des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ auf die diesem Eckpunkte gegenüberliegende Seite, so erhält man die Eckpunkte eines Dreiecks $A_2 B_2 C_2$, welches mit den beiden Dreiecken ABC, $A_1 B_1 C_1$ perspektivisch liegt, und in das letztere beschrieben ist. Je drei homologe Seiten der drei Dreiecke schneiden sich in einem und demselben Punkte, weil es in jeder Seite des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ nur einen Punkt giebt, welcher durch die beiden übrigen Seiten desselben vom Punkte S harmonisch getrennt ist.

punkte des einen als auch durch die übrigen Eckpunkte des andern Dreiecks harmonisch getrennt.

Projicirt man jeden Punkt, in welchem die Gerade u von einer Seite des Dreiecks ABC geschnitten wird, aus dem dieser Seite gegenüberliegenden Eckpunkte, so erhält man die Seiten eines Dreiecks $A^1 B^1 C^1$, welches mit den beiden Dreiecken ABC, $A_1 B_1 C_1$ perspektivisch liegt, und um das erstere beschrieben ist. Je drei homologe Eckpunkte der drei Dreiecke liegen in einer und derselben Geraden, weil es durch jeden Eckpunkt des Dreiecks ABC nur eine Gerade giebt, welche durch die beiden übrigen Eckpunkte desselben von der Geraden u harmonisch getrennt ist.

Durch irgend eines von den beiden Dreiecken ABC, $A_1 B_1 C_1$ und irgend eines von den beiden Elementen S, u ist auch das andere Dreieck, so wie auch das andere der erwähnten Elemente bestimmt.

101. Wenn von zwei zu einander perspektivischen Tetraedern das eine $ABCD$ um das andere $A_1 B_1 C_1 D_1$ und also dieses in das erstere beschrieben ist, so dass nämlich die Eckpunkte A_1, B_1, C_1, D_1 beziehlich in den Flächen BCD, ACD, ABD, ABC liegen, so ist (99)

der Punkt S, welcher mit je zwei homologen Eckpunkten in einer und derselben Geraden liegt, von jedem Punkte, in welchem ein Paar homologe Kan-

die Ebene U, welche je zwei homologe Flächen in einer und derselben Geraden schneidet, von jeder Ebene, welche ein Paar homologe Kanten verbindet, soten sich schneiden, sowohl durch zwei Flächen des einen als auch durch zwei Flächen des andern Tetraeders harmonisch getrennt.

Projicirt man den Punkt S aus jedem Eckpunkte des Tetraeders $A_1 B_1 C_1 D_1$ auf die diesem Eckpunkte gegenüberliegende Fläche, so erhält man die Eckpunkte eines Tetraeders $A_2 B_2 C_2 D_2$, welches mit den beiden Tetraedern $ABCD$, $A_1 B_1 C_1 D_1$ perspektivisch liegt, und in das letztere beschrieben ist. Je drei homologe Kanten der drei Tetraeder schneiden sich in einem und demselben Punkte, weil es in jeder Kante des Tetraeders $A_1 B_1 C_1 D_1$ nur einen Punkt giebt, welcher durch die in der gegenüberliegenden Kante sich schneidenden Flächen vom Punkte S harmonisch getrennt ist.

wohl durch zwei Eckpunkte des einen als auch durch zwei Eckpunkte des andern Tetraeders harmonisch getrennt.

Projicirt man jede Gerade, in welcher die Ebene U von einer Fläche des Tetraeders $ABCD$ geschnitten wird, aus dem dieser Fläche gegenüberliegenden Eckpunkte, so erhält man die Flächen eines Tetraeders $A^1 B^1 C^1 D^1$, welches mit den beiden Tetraedern $ABCD$, $A_1 B_1 C_1 D_1$ perspektivisch liegt, und um das erstere beschrieben ist. Je drei homologe Kanten der drei Tetraeder liegen in einerlei Ebene, weil es durch jede Kante des Tetraeders $ABCD$ nur eine Ebene giebt, welche durch die in der gegenüberliegenden Kante befindlichen Eckpunkte von der Ebene U harmonisch getrennt ist.

Durch irgend eines von den beiden Tetraedern $ABCD$, $A_1 B_1 C_1 D_1$ und irgend eines von den beiden Elementen S, U ist auch das andere Tetraeder so wie auch das andere von den erwähnten Elementen bestimmt.

102. Versteht man unter der Projektion eines Punktes auf eine Seite eines Dreiecks seine Projektion aus dem dieser Seite gegenüberliegenden Eckpunkte und unter der Projektion eines Punktes auf eine Kante eines Tetraeders seine Projektion aus der derselben gegenüberliegenden Kante, so hat man (nach 100 und 101) folgende Sätze:

Wenn in jeder Seite eines Dreiecks zwei Punkte angenommen werden, welche durch die in derselben Seite befindlichen Eckpunkte harmonisch getrennt sind, und von den sechs angenommenen Punkten drei die Projektionen eines und desselben Punktes sind, so sind die drei übrigen die Spuren einer und derselben Geraden.

die Spuren einer und derselben Geraden sind, so sind die drei übrigen die Projektionen eines und desselben Punktes.

Wenn in jeder Kante eines Tetraeders zwei Punkte angenommen werden, welche durch die in derselben Kante befindlichen Eckpunkte harmonisch getrennt sind, und von den zwölf angenommenen Punkten sechs

die Projektionen eines und desselben Punktes sind, so sind die sechs übrigen die Spuren einer und derselben Ebene.

die Spuren einer und derselben Ebene sind, so sind die sechs übrigen die Projektionen eines und desselben Punktes.

---

§. 9.

Projektivische Verwandtschaft zwischen einförmigen Gebilden.

103. Zwei einförmige Grundgebilde heissen zu einander projektivisch ($\barwedge$), wenn sie so auf einander bezogen sind, dass jedem harmonischen Gebilde in dem einen ein harmonisches Gebilde im andern entspricht.

Wenn von beliebig vielen Gebilden das zweite dem ersten, jedes folgende einem der vorhergehenden projektivisch ist, so sind alle zu einander projektivisch. Dieser Satz gilt nicht nur von einförmigen, sondern auch, wie aus spätern Erklärungen hervorgehen wird, von andern Gebilden, daher er auch, um Wiederholungen zu vermeiden, sogleich allgemein ausgesprochen wurde.

104. Zwei projektivische einförmige Gebilde können überdiess perspektivisch liegen. Es heissen aber zu einander perspektivisch, nämlich projektivisch und zugleich perspektivisch liegend:

α) ein gerades Gebilde und ein Büschel oder ein Strahlenbüschel und ein Ebenenbüschel, wenn das eine Gebilde ein Schnitt des andern ist;

β) zwei gerade Gebilde, wenn sie Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sind;

γ) zwei Strahlenbüschel, wenn sie entweder Scheine eines und desselben geraden Gebildes oder Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels oder beides zugleich sind;

δ) zwei Ebenenbüschel, wenn sie Scheine eines und desselben Strahlenbüschels sind.

105. Projicirt man in einer Ebene

ein gerades Gebilde u aus zwei Punkten S_1, S_2 auf eine und dieselbe andere Gerade v, so erhält man zwei zu einander projektivische gerade Gebilde u_1, u_2, welche in einer und derselben Geraden v liegen und einen oder zwei Punkte entsprechend gemein haben, je nachdem die Geraden u, v, $S_1 S_2$ in einem Punkte oder in drei Punkten sich schneiden.

zwei gerade Gebilde, welche Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sind, aus einem und demselben andern Punkte, so erhält man zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel, welche concentrisch sind und einen oder zwei Strahlen entsprechend gemein haben, je nachdem der Schnittpunkt der geraden Gebilde mit den beiden Mittelpunkten der drei Büschel in einer oder nicht in einer und derselben Geraden liegt.

Dem Punkte A_1 des Gebildes u_1 entspricht der Punkt A_2 des Gebildes u_2, wenn die Strahlen $S_1 A_1$, $S_2 A_2$ die Gerade u in einem und demselben Punkte A schneiden. Die drei Gebilde u, u_1, u_2 haben also den Punkt uv, die beiden Gebilde u_1, u_2 aber, wenn die Gerade v von der Geraden $S_1 S_2$ in einem von uv verschiedenen Punkte geschnitten wird, auch noch diesen Punkt entsprechend gemein.

106. Wenn zwei projektivische einförmige Gebilde drei Elemente entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein.

Es ist hier hinreichend, zwei projektivische gerade Gebilde zu betrachten, welche in einer und derselben Geraden liegen. Haben nun die Gebilde die Punkte A, B und jeden Punkt der Strecke AB entsprechend gemein, so haben sie auch (103) jeden Punkt, welcher von einem Punkte dieser Strecke durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist, nämlich jeden Punkt der Strecke B·A entsprechend gemein. Würden aber die Gebilde keine stetige Aufeinanderfolge von Elementen, jedoch mehr als zwei einzelne Elemente entsprechend gemein haben, so würde, wenn A, B zwei aufeinanderfolgende sind, die eine von den beiden Strecken

AB, B·A gar kein, die andere aber wenigstens ein sich selbst entsprechendes Element P enthalten, was auf einen Widerspruch führt, da es in der Strecke AB einen Punkt Q giebt, welcher vom Punkte P durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist. Zwei projektivische einförmige Gebilde können also, wenn nicht jedes Element des einen mit dem homologen Elemente des andern zusammenfallen soll, höchstens zwei Elemente entsprechend gemein haben.

107. Wenn ein gerades Gebilde und ein Büschel oder ein Strahlenbüschel und ein Ebenenbüschel zu einander projektivisch sind, und drei Elemente des einen Gebildes in den ihnen entsprechenden Elementen des andern liegen (also das eine Gebiide mit einem Schnitte des andern drei Elemente entsprechend gemein hat), so ist (106) das eine Gebilde ein Schnitt des andern.

108. Wenn zwei projektivische gerade Gebilde u, u_1, welche in einerlei Ebene, aber nicht in einer und derselben Geraden liegen, ihren Schnittpunkt A entsprechend gemein haben, so sind sie Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels. — Es sey S der Schnittpunkt von zwei Geraden BB_1, CC_1, deren jede einen Punkt des Gebildes u mit dem homologen Punkte des Gebildes u_1 verbindet. Da nun (103) der Strahlenbüschel, welcher aus dem Punkte S das gerade Gebilde u_1 projicirt, auch dem geraden Gebilde u projektivisch ist, und drei Punkte A, B, C dieses Gebildes in den homologen Strahlen des Büschels liegen, so folgt der Satz aus 107.

Haben zwei projektivische Strahlenbüschel, welche concentrisch

Wenn zwei projektivische Strahlenbüschel S, S_1, welche in einerlei Ebene liegen, aber nicht concentrisch sind, den Strahl a, welcher ihre Mittelpunkte verbindet, entsprechend gemein haben, so sind sie Scheine eines und desselben geraden Gebildes. — Man verbinde den Schnittpunkt bb_1 von zwei homologen Strahlen mit dem Schnittpunkte cc_1 von zwei andern homologen Strahlen durch eine Gerade. Da nun (103) der Schnitt u des Büschels S_1 mit jener Geraden auch dem Büschel S projektivisch ist, und drei Strahlen a, b, c dieses Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte des geraden Gebildes u gehen, so folgt der Satz aus 107.

Haben zwei projektivische Ebenenbüschel, deren Axen sich sind, aber in zwei Ebenen liegen, die Schnittlinie dieser Ebenen entsprechend gemein, so sind sie Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels.

109. Wenn zwei projektivische gerade Gebilde in einerlei Ebene, aber nicht in einer und derselben Geraden liegen, und von den Geraden, deren jede ein Paar homologe Punkte verbindet, irgend drei in einem Punkte sich schneiden, so sind die beiden geraden Gebilde Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels. Sind also zwei sich schneidende gerade Gebilde projektivisch, ohne perspektivisch zu liegen, so schneiden sich von den Geraden, deren jede ein Paar homologe Punkte verbindet, keine drei in einem Punkte.

schneiden, die durch diese Linien bestimmte Ebene entsprechend gemein, so sind sie Scheine eines und desselben Strahlenbüschels.

Wenn zwei projektivische Strahlenbüschel in einerlei Ebene liegen, aber nicht concentrisch sind, und von den Punkten, in deren jedem ein Paar homologe Strahlen sich schneiden, irgend drei in einer Geraden liegen, so sind die beiden Büschel Scheine eines und desselben geraden Gebildes. Sind also zwei in einerlei Ebene liegende, nicht concentrische Strahlenbüschel projektivisch, ohne perspektivisch zu liegen, so liegen von den Punkten, in deren jedem ein Paar homologe Strahlen sich schneiden, keine drei in einer Geraden.

Die Beweise dieser Sätze, welchen zwei Sätze aus der Geometrie des Strahlenbündels entsprechen, stimmen mit den vorigen ganz überein.

110. Will man zwei einförmige Grundgebilde projektivisch auf einander beziehen, so kann man zu drei Elementen des einen drei Elemente des andern, welche jenen entsprechen sollen, nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Gebildes ein Element im andern zugewiesen ist.

I. Sollen zwei sich schneidende gerade Gebilde u, u_1 projektivisch so auf einander bezogen werden, dass sie ihren Schnittpunkt A entsprechend gemein haben und den Punkten B, C des einen die Punkte B_1, C_1 des andern entsprechen, so muss (108) das eine eine Projektion des andern aus dem Punkte seyn, in welchem die Geraden BB_1, CC_1 sich schneiden.

II. Sollen zwei gerade Gebilde u, u_2, welche nicht in einer und derselben Geraden liegen, projektivisch so auf einander bezogen werden, dass den Punkten A, B, C des erstern die Punkte A_2, B_2, C_2 des letztern entsprechen, so projicire man aus einem Punkte S, welcher ausserhalb der beiden Gebilde, aber mit zwei Punkten A, A_2, die einander entsprechen sollen, in einer und derelben Geraden liegt, das Gebilde u_2 auf eine Gerade u_1, welche die Gerade u im Punkte A und die Gerade u_2 in irgend einem von A_2 verschiedenen Punkte schneidet. Da nun die geraden Gebilde u_1, u_2 projektivisch auf einander bezogen sind, so ist dieser Fall auf den vorigen, nämlich darauf zurückgeführt, die Gebilde u, u_1 projektivisch so auf einander zu beziehen, dass den Punkten A, B, C des erstern die Punkte A, B_1, C_1 des letztern entsprechen, welche von den Punkten A_2, B_2, C_2 die Projektionen sind. Gehen die drei Geraden AA_2, BB_2, CC_2 durch einen und denselben Punht M, so muss (109) u eine Projektion von u_2 aus dem Punkte M seyn.

III. Sollen zwei gerade Gebilde u, u_3, welche in einer und derselben Geraden liegen, projektivisch so auf einander bezogen werden, dass den Punkten A, B, C des erstern die Punkte A_3, B_3, C_3 des letztern entsprechen, so darf man nur, um diesen Fall auf II zurückzuführen, das Gebilde u_3 auf irgend eine andere Gerade u_2 projiciren. Ist etwa A mit A_3 identisch, so kann man diesen Fall, indem man die Projektionslinie durch den Punkt A legt, sogleich auf I zurückführen.

IV. Die Fälle, in welchen ein gerades Gebilde und ein Büschel oder zwei Büschel projektivisch so auf einander bezogen werden sollen, dass drei bestimmten Elementen des einen Gebildes drei bestimmte Elemente des andern entsprechen, lassen sich, da für jeden Büschel sein Schnitt mit einer Geraden substituirt werden hann, auf die bereits betrachteten zurückführen.

111. Zwei projektivische gerade Gebilde u, u_1, welche in einer und derselben Geraden liegen und einen Punkt A entsprechend gemein haben, können als Projektionen eines und

Zwei projektivische concentrische Strahlenbüschel S, S_1, welche in einerlei Ebene liegen und einen Strahl a entsprechend gemein haben, können als Scheine von zwei geraden Gebilden be-desselben dritten geraden Gebildes betrachtet werden. Projicirt man nämlich das gerade Gebilde u aus irgend einem Punkte M und das gerade Gebilde u_1 aus einem andern Punkte M_1 der Geraden M A, so erhält man zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel, welche den Strahl $M M_1$ entsprechend gemein haben und also (108) Scheine eines und desselben dritten Gebildes u_2 sind.

trachtet werden, welche Schnitte eines und desselben dritten Büschels sind. Wird nämlich der Büschel S von irgend einer Geraden v und der Büschel S_1 von einer andern durch den Punkt a v gehenden Geraden v_1 geschnitten, so erhält man zwei zu einander projektivische gerade Gebilde, welche den Punkt $v v_1$ entsprechend gemein haben und also Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sind.

Wenn die Gerade u_2, welche von je zwei homologen Strahlen M B, M_1 B_1 der Büschel M, M_1 in einem und demselben Punkte geschnitten wird, nicht durch den Punkt A geht, so haben die Gebilde u, u_1 noch einen Punkt entsprechend gemein. Sollen also zwei in einer und derselben Geraden befindliche gerade Gebilde (oder zwei concentrische Strahlenbüschel, welche in einerlei Ebene liegen, oder zwei Ebenenbüschel, welche eine gemeinschaftliche Axe haben) projektivisch so aufeinander bezogen werden, dass sie nur ein Element A, welches gegeben ist, entsprechend gemein haben, so kann man nur noch zu einem Elemente B des einen Gebildes das homologe Element B_1 des andern nach Belieben annehmen.

In 104 wurde noch nicht beachtet, dass projektivische gerade Gebilde in einer und derselben Geraden liegen können. Zwei solche Gebilde heissen perspektivisch liegend, wenn wenigstens ein Element des einen mit dem homologen Elemente des andern zusammenfällt. Eben so heissen zwei Strahlenbüschel, welche concentrisch sind und zugleich in einerlei Ebene liegen, so wie auch zwei Ebenenbüschel, welche eine gemeinschaftliche Axe haben, perspektivisch liegend, wenn sie wenigstens ein Element entsprechend gemein haben.

112. Aus 110 geht hervor, dass zwei projektivische gerade Gebilde, wenn sie auch nicht Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sind, doch als das erste und letzte von drei oder vier

geraden Gebilden betrachtet werden können, von welchen jedes folgende eine Projektion des vorhergehenden aus einem Punkte ist. Es ist hierdurch nicht nur der Ausdruck „projektivisch“ erklärt, sondern zugleich bewiesen, dass jeder stetigen Aufeinanderfolge von Elementen in dem einen von zwei zu einander projektivischen einförmigen Gebilden eine stetige Aufeinanderfolge von Elementen im andern entspricht.

Wenn in zwei zu einander projektivischen einförmigen Gebilden u, u_1 zwei homologe Elemente sich bewegen, so dass sie nämlich immer homologe Elemente bleiben, so muss, wenn das eine Element das Gebilde u beschreibt, das andere das Gebilde u_1 beschreiben. Sind u, u_1 zwei in einer und derselben Geraden liegende gerade Gebilde oder zwei concentrische Strahlenbüschel, welche überdiess in einerlei Ebene liegen, oder zwei Ebenenbüschel, welche eine gemeinschaftliche Axe haben, so sollen sie einstimmig- oder entgegengesetzt-projektivisch heissen, je nachdem zwei sich bewegende homologe Elemente in einem und demselben Sinne oder im entgegengesetzten Sinne sich bewegen. Im letztern Falle haben die Gebilde offenbar zwei Elemente entsprechend gemein, durch welche je zwei homologe Elemente getrennt sind. Liegt ein Stück AB (eine Strecke AB oder ein Winkel AB) des Gebildes u in dem ihm entsprechenden Stücke A_1B_1 des Gebildes u_1, ohne dass eines von den beiden Elementen A, B mit dem ihm entsprechenden Elemente zusammenfällt, so kann man ebenfalls schliessen, dass die Gebilde zwei Elemente entsprechend gemein haben, von welchen das eine in dem Stücke AB und das andere in dem Stücke A_1B_1 liegt, welches dem Stücke AB entspricht.

113. Wenn einem Dreiecke ein anderes einbeschrieben ist, so giebt es unendlich viele Dreiecke, deren jedes in das letztere und zugleich um das erstere beschrieben ist.

Bezieht man nämlich (110) die drei geraden Gebilde, welche die Seiten des letztern Dreiecks zu Trägern haben, projektivisch so aufeinander, dass sie von jeder Seite des erstern Dreiecks in homologen Punkten geschnitten werden, so sind je drei andere homologe Punkte die Eckpunkte eines Dreiecks, welches in das letztere und zugleich (108) um das erstere beschrieben ist.

114. Wenn die n Eckpunkte eines ebenen n Ecks in festen Geraden sich bewegen, welche alle durch einen und denselben Punkt S gehen, während n — 1 Seiten desselben um feste Punkte sich drehen, so dreht sich auch (108) die noch übrige Seite um einen festen Punkt. Die n Eckpunkte des n Ecks sind nämlich homologe Punkte von n zu einander projektivischen geraden Gebilden, welche alle den Punkt S entsprechend gemein haben. — Zwei nicht aufeinanderfolgende Eckpunkte können auch in einer Geraden sich bewegen. Bewegen sie sich aber in zwei Geraden, so dreht sich auch die sie verbindende Diagonale um einen festen Punkt.

Wenn in einer Ebene die n Seiten eines n Ecks um feste Punkte sich drehen, welche alle in einer und derselben Geraden u liegen, während n—1 Eckpunkte in festen Geraden sich bewegen, so bewegt sich auch der noch übrige Eckpunkt in einer festen Geraden. Die Seiten des n Ecks sind nämlich homologe Strahlen von n zu einander projektivischen Strahlenbüscheln, welche alle den Strahl u entsprechend gemein haben. — Zwei nicht aufeinanderfolgende Seiten können auch um einen Punkt sich drehen. Drehen sie sich aber um zwei Punkte, so bewegt sich auch ihr Schnittpunkt in einer festen Geraden.

Ein besonderer Fall vom Satze rechter Hand ist:

Wenn die Richtungen der vier Seiten eines ebenen Vierecks gegeben sind, und drei Eckpunkte in gegebenen eigentlichen Geraden liegen, von welchen keine mit einer von den beiden Seiten, deren Schnittpunkt sie enthält, einerlei Richtung hat, so liegt auch der vierte Eckpunkt des Vierecks in einer gegebenen Geraden.

115. Wenn zwei projektivisch gerade Gebilde u, u_1 nicht in einerlei Ebene liegen, so erfüllen die Geraden (V), deren jede ein Paar homologe Punkte verbindet, eine geschlossene Regelfläche R, welche auch noch von einer andern Schaar U von Geraden erfüllt wird.

Jede Gerade der einen Schaar schneidet jede Gerade der andern Schaar, während von den Geraden, welche einer und derselben Schaar angehören, keine zwei sich schneiden.

Jeder Punkt, welcher in einer Geraden der einen Schaar liegt, liegt auch in einer Geraden der andern Schaar.	Jede Ebene, welche durch eine Gerade der einen Schaar geht, geht auch durch eine Gerade der andern Schaar.

Es seyen v, v_1, v_2 drei Gerade der Schaar V. Projicirt man nun die geraden Gebilde u, u_1 aus einer Axe u_2, welche die drei Geraden v, v_1, v_2 schneidet, so erhält man zwei zu einander projektivische Ebenenbüschel, welche die drei Ebenen u_2v, u_2v_1, u_2v_2 und folglich (106) alle ihre Elemente entsprechend gemein haben, daher jede Gerade der Schaar V, weil die homologen Punkte, die sie verbindet, mit der Geraden u_2 in einerlei Ebene liegen, diese Gerade schneidet, und umgekehrt jede Gerade, welche die drei Geraden u, u_1, u_2 schneidet, der Schaar V angehört, mithin jeder Punkt der Geraden u_2 in einer Geraden dieser Schaar liegt. Was aber so eben von der Geraden u_2 gesagt wurde, gilt von jeder Geraden, welche irgend drei Gerade der Schaar V schneidet (der Schaar U angehört).

Zwei projektivische Ebenenbüschel u, u_1, deren Axen u, u_1 nicht in einerlei Ebene liegen, erzeugen ebenfalls eine Regelfläche der obigen Art. Jede Gerade nämlich, in welcher ein Paar homologe Ebenen der Büschel sich schneiden, verbindet auch ein Paar homologe Punkte der geraden Gebilde u, u_1, von welchen das erstere ein Schnitt des Büschels u_1 mit der Geraden u und das letztere ein Schnitt des Büschels u mit der Geraden u_1 ist.

Anstatt von zwei zu einander projektivischen Gebilden auszugehen, kann man auch drei Gerade u, u_1, u_2 annehmen, von welchen keine zwei in einerlei Ebene liegen. Durch jede Gerade v, welche die drei angenommenen Geraden schneidet, sind drei Ebenen vu, vu_1, vu_2 und drei Punkte vu, vu_1, vu_2 bestimmt. Nennt man nun je sechs solche Elemente einander entsprechend, so hat man die drei Ebenenbüschel u, u_1, u_2 und die drei geraden Gebilden u, u_1, u_2 projektivisch aufeinander bezogen.

116. Werden zwei Gebilde G, G_1, von welchen etwa jedes nur aus einzelnen Elementen besteht, projektivisch genannt, so heisst diess nicht anderes, als dass zwei Grundgebilde projektivisch so aufeinander bezogen werden können, dass dem Gebilde G in dem einen das Gebilde G_1 im andern entspricht. Ist also $ABCD$

$\barwedge$ abcd, so ist auch BCDA $\barwedge$ BCDA, ACDB $\barwedge$ acdb u. s. w.

Zwei einförmige Gebilde, deren jedes aus drei Elementen besteht, sind (110) immer zu einander projektivisch. Die Aussage aber, dass zwei einförmige Gebilde ABCDE..., abcde..., deren jedes aus n Elementen besteht, zu einander projektivisch sind, vertritt, da durch das eine Gebilde und drei Elemente des andern auch die übrigen Elemente des andern bestimmt sind, die Stelle von n — 3 von einander unabhängigen Aussagen, in deren jeder nämlich nur vier Elemente des einen Gebildes und vier Elemente des andern in Betrachtung kommen. Ist z. B.

1) ABCD $\barwedge$ abcd
und 2) ACDE $\barwedge$ acde
so ist auch ABCDE $\barwedge$ abcde
mithin auch ABDE $\barwedge$ abde
BCDE $\barwedge$ bcde
u. s. w.
Ist ferner 3) CDEF $\barwedge$ cdef
so ist auch ABCDEF $\barwedge$ abcdef
ADEF $\barwedge$ adef
u. s. w.

117. Alle harmonischen Gebilde sind (nach 110 und 103) zu einander projektivisch. Und wenn das eine von zwei zu einander projektivischen einförmigen Gebilden, deren jedes aus vier Elementen besteht, harmonisch ist, so ist auch das andere harmonisch.

118. Wenn das eine von zwei zu einander projektivischen einförmigen Gebilden ABCD, CBAD, deren jedes aus vier Elementen besteht, aus dem andern durch Vertauschung zweier Elemente hervorgeht, so sind diese durch die beiden übrigen harmonisch getrennt.

Es sey ABCD ein gerades Gebilde und HKFD seine Projektion auf eine andere durch den Punkt D gehende Gerade aus einem Punkte G. Wenn nun CBAD $\barwedge$ ABCD und mithin auch CBAD $\barwedge$ HKFD ist, so schneiden sich (108) die Geraden CH, BK, AF in einem und demselben Punkte, woraus (93) der Satz folgt. Bemerkt wird noch, dass (116) die Aussagen: ABCD $\barwedge$

CBAD, ACBD $\barwedge$ CABD, BDAC $\barwedge$ BDCA u. s. w. alle mit einander übereinstimmen.

119. Jedes einförmige Gebilde ABCD, welches aus vier Elementen besteht, ist, wenn zwei derselben, so wie auch die beiden übrigen mit einander vertauscht werden, dieser seiner Permutation projektivisch.

Es sey ABCD ein gerades Gebilde, EFGD seine Projektion auf eine andere durch den Punkt D gehende Gerade aus einem Punkte M und N der Schnittpunkt der Geraden MC, AF, so ist von den vier Gebilden ABCD, EFGD, MNGC, BADC das zweite eine Projektion des ersten aus dem Punkte M, das dritte eine Projektion des zweiten aus dem Punkte A und das vierte eine Projektion des dritten aus dem Punkte F, daher auch ABCD $\barwedge$ BADC ist. Eben so wird bewiesen, dass ABCD $\barwedge$ CDAB $\barwedge$ DCBA (oder ACBD $\barwedge$ CADB und ADBC $\barwedge$ DACB) ist.

Ist also abcd $\barwedge$ ABCD, so ist auch abcd $\barwedge$ BADC $\barwedge$ CDAB $\barwedge$ DCBA.

120. Wenn zwei projektivische einförmige Gebilde MNAB, MNA_1B_1, deren jedes aus vier Elementen besteht, zwei Elemente entsprechend gemein haben, und von den vier übrigen Elementen zwei, welche weder einander entsprechen noch einem und demselben von den beiden Gebilden angehören, mit einander vertauscht werden, so entstehen wieder zwei projektivische Gebilde $MNAA_1$, $MNBB_1$.

Es seyen MNAB, MNA_1B_1 zwei projektivische gerade Gebilde, so sind die beiden Strahlenbüschel, von welchen der eine das gerade Gebilde MNAB aus einem Punkte S und der andere das gerade Gebild MNA_1B_1 aus einem andern Punkte S_1 der Geraden MS projicirt, Scheine eines und desselben dritten geraden Gebildes $M_2NA_2B_2$. Bemerkt man nun, dass die Gebilde $MNAA_1$, $MNBB_1$ Projektionen des Gebildes MM_2SS_1 aus den Punkten A_2, B_2 sind, so folgt der Satz.

Liegen die Punkte A, A_1 in der Strecke MN, die Punkte B, B_1 aber in der Strecke M·N, so muss, wenn in der erstern Strecke auf den Punkt A der Punkt A_1 folgt, in der letztern auf den Punkt B der Punkt B_1 oder, was dasselbe ist, in der

Strecke N·M auf den Punkt B_1 der Punkt B folgen. Es sind alsdann MANB, MA_1NB_1 homologe Gebilde von zwei einstimmig-perspektivischen, hingegen MAA_1N, MBB_1N homologe Gebilde von zwei entgegengesetzt-perspektivischen Grundgebilden.

---

§. 10.

Projektivische Verwandtschaft zwischen Grundgebilden der zweiten Stufe und zwischen räumlichen Systemen.

121. Zwei Grundgebilde der zweiten Stufe oder auch zwei räumliche Systeme heissen $\left\{\begin{matrix}\text{collineär}\\ \text{reciprok}\end{matrix}\right\}$, wenn sie so aufeinander bezogen sind, dass je zwei ungleichartigen Elementen P, q des einen Systems, von welchen das erstere P im letztern liegt, zwei ungleichartige Elemente P_1, q_1 des andern entsprechen, von welchen das erstere P_1 $\left\{\begin{matrix}\text{ebenfalls im letztern liegt}\\ \text{durch das letztere geht}\end{matrix}\right\}$. Wenn also den Elementen A, B des einen Systems die Elemente A_1, B_1 des andern entsprechen, und durch die beiden erstern Elemente ein drittes Element AB bestimmt ist, so muss auch durch die Elemente A_1, B_1 ein Element A_1B_1 bestimmt seyn, welches dem Elemente AB entspricht.

Zwei Systeme, welche einem und demselben dritten reciprok sind, sind unter sich collineär, daher in der Betrachtung von reciproken Systemen die Betrachtung von collineären Systemen, wenn nicht auf eine besondere Lage derselben Rücksicht genommen wird, begriffen ist. Handelt es sich nur von Grundgebilden der zweiten Stufe, so kann man, wenn ihre Lage zu einander nicht in Betrachtung kommt, für jeden Büschel irgend einen Schnitt desselben substituiren, damit man es nur mit ebenen Systemen zu thun habe.

In zwei reciproken ebenen Systemen entspricht jedem geraden Gebilde ein Strahlenbüschel, jedem vollständigen nEcke ein vollständiges nSeit u. s. w. In zwei reciproken räumlichen Systemen entspricht jedem geraden Gebilde ein Ebenenbüschel, jedem Strahlenbüschel ein Strahlenbüschel, jedem ebenen Systeme ein ihm reciproker Strahlenbündel, jedem vollständigen ebenen n Ecke ein vollständiges n Seit im Strahlenbündel, jedem vollständigen ebenen n Seite ein vollständiges n Kant u. s. w.

122. Zwei Systeme, welche entweder collineär oder reciprok sind, heissen auch zu einander projektivisch, weil in beiden Fällen jedem harmonischen Gebilde in dem einen Systeme ein harmonisches Gebilde im andern entspricht, und also (103) je zwei homologe einförmige Gebilde zu einander projektivisch sind. So entspricht z. B. in zwei reciproken ebenen Systemen jedem harmonischen geraden Gebilde $ABCD$ ein harmonischer Strahlenbüschel $A_1 B_1 C_1 D_1$, da jedem vollständigen Vierecke, von welchem ein Paar Gegenseiten im Punkte A, ein Paar Gegenseiten im Punkte C sich schneiden, eine Seite durch den Punkt B und eine Seite durch den Punkt D geht, ein vollständiges Vierseit entspricht, von welchem jede der Geraden A_1, C^1 ein Paar Gegenpunkte, jede der Geraden B_1, D^1 aber einen der übrigen Eckpunkte enthält.

In zwei reciproken ebenen Systemen entspricht jeder Strecke AB ein Winkel $A_1 B_1$, jeder Geraden, welche die Strecke AB schneidet, ein Punkt, welcher in dem Winkel $A_1 B_1$ liegt, u. s. w. In zwei reciproken räumlichen Systemen entspricht jeder Strecke AB ein Flächenwinkel $A_1 B_1$, jeder Ebene, welche die Strecke AB schneidet, ein Punkt, welcher in dem Fläckenwinkel $A_1 B_1$ liegt, jedem ebenen Winkel, welcher die Strecke AB projicirt, ein ebener Winkel, welcher von dem Flächenwinkel $A_1 B_1$ ein Schnitt ist, u. s. w.

Haben zwei projektivische Systeme drei Elemente eines und desselben einförmigen Gebildes entsprechend gemein, so haben sie (106) alle Elemente desselben entsprechend gemein.

123. Wenn zwei collineäre Grundgebilde der zweiten Stufe vier gleichartige Elemente, von welchen keine drei einem und demselben einförmigen Grundgebilde angehören, entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein. Haben z. B. zwei collineäre ebene Systeme die vier Eckpunkte und also auch (121) die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks entsprechend gemein, so haben sie (122) jede Gerade, welche

durch einen Eckpunkt des Vierecks geht, und mithin jeden Punkt (Schnittpunkt von zwei solchen Geraden) entsprechend gemein. Es gehört hieher auch noch folgender Satz:

Wenn ein ebenes System einem Strahlenbündel collineär ist, und vier gleichartige Elemente des erstern Systems, von welchen keine drei einem und demselben einförmigen Grundgebilde angehören, in den homologen Elementen des letztern liegen, so ist das ebene System ein Schnitt des Strahlenbündels.

124. Wenn zwei collineäre räumliche Systeme vier gleichartige Elemente, von welchen keine drei einem und demselben einförmigen Grundgebilde, welche aber alle vier einem und demselben Grundgebilde der zweiten Stufe angehören, entsprechend gemein haben, so haben sie (123) alle Elemente dieses Gebildes entsprechend gemein. Haben zwei collineäre Systeme fünf Punkte, von welchen keine vier in einerlei Ebene liegen, oder fünf Ebenen, von welchen keine vier durch einen und denselben Punkt gehen, entsprechend gemein, so haben sie alle Elemente entsprechend gemein. Die beiden Systeme haben nämlich, um nur den einen Fall zu betrachten, jede Gerade, welche zwei der fünf Punkte verbindet, mithin nach dem erstern Satze auch jede Gerade, welche durch einen der fünf Punkte geht, und folglich jeden Punkt (Schnittpunkt von solchen Geraden) entsprechend gemein.

125. Zwei collineäre Systeme können überdiess perspektivisch liegen. Es heissen nämlich zu einander perspektivisch:

a) ein ebenes System und ein Strahlenbündel, wenn das erstere System ein Schnitt des letztern ist.

b) Zwei ebene Systeme, welche nicht in einerlei Ebene liegen, wenn sie Schnitte eines und desselben Strahlenbündels sind.

c) Zwei in einerlei Ebene liegende collineäre Systeme, wenn sie ein gerades Gebilde und einen Strahlenbüschel (alle Elemente dieser Gebilde) entsprechend gemein haben.

d) Zwei nicht concentrische Strahlenbündel, wenn sie Scheine eines und desselben ebenen Systems sind.

e) Zwei collineäre concentrische Strahlenbündel, wenn sie einen Strahlenbüschel und einen Ebenenbüschel entsprechend gemein haben.

f) Zwei collineäre räumliche Systeme, wenn sie ein ebenes System und einen Strahlenbündel entsprechend gemein haben.

Aus diesen Erklärungen folgt, dass in zwei perspektivischen Systemen je zwei homologe einförmige Gebilde und in zwei perspektivischen räumlichen Systemen auch je zwei homologe Grundgebilde der zweiten Stufe zu einander perspektivisch sind.

126. Wenn zwei collineäre ebene Systeme, welche nicht in einerlei Ebene liegen, drei Punkte und folglich (122) alle Punkte ihrer Schnittlinie entsprechend gemein haben, so sind sie Schnitte eines und desselben Strahlenbündels. Da nämlich (68) von den Geraden, deren jede ein Paar homologe Punkte verbindet, je zwei sich schneiden, so gehen (69) alle durch einen und denselben Punkt.

Wenn zwei collineäre nicht concentrische Strahlenbündel drei Ebenen und folglich alle Ebenen, welche beiden angehören, entsprechend gemein haben, so sind sie Scheine eines und desselben ebenen Systems. Da nämlich von den Geraden, in deren jeder ein Paar homologe Ebenen sich schneiden, je zwei in einerlei Ebene liegen, so liegen alle in einer und derselben Ebene.

127. Projicirt man ein ebenes System aus zwei Punkten auf eine und dieselbe andere Ebene, so erhält man zwei perspektivische ebene Systeme, welche in einerlei Ebene liegen. Die drei Systeme haben ein gerades Gebilde, die beiden letztern auch noch den Strahlenbüschel entsprechend gemein, dessen Mittelpunkt mit den beiden Projektionspunkten in einer und derselben Geraden liegt.

Projicirt man zwei ebene Systeme, welche Schnitte eines und desselben Strahlenbündels sind, aus einem und demselben andern Punkte, so erhält man zwei perspektivische Strahlenbündel, welche concentrisch sind. Die drei Bündel haben einen Ebenenbüschel, die beiden letztern auch noch den Strahlenbüschel entsprechend gemein, welcher die Schnittlinie der beiden ebenen Systeme projicirt.

128. Zwei in einerlei Ebene liegende collineäre Systeme, welche

ein gerades Gebilde entsprechend gemein haben, haben auch einen Strahlenbüschel ent-

einen Strahlenbüschel S entsprechend gemein haben, haben auch ein gerades Gebilde entsprechend gemein. — Projicirt man nämlich das eine System auf eine andere durch die Gerade u gehende Ebene, so erhält man ein drittes System, von welchem (126) auch das zweite eine Projektion ist, woraus (127) der Satz folgt.

sprechend gemein. — Projicirt man nämlich das eine System aus irgend einem Punkte M und das andere aus einem andern Punkte der Geraden S M, so erhält man (126) zwei Strahlenbündel, welche Scheine eines und desselben dritten ebenen Systems sind, woraus (127) der Satz folgt.

Aus diesen Beweisen und dem vorigen Satze geht hervor, dass die Erklärung 125, c mit der in 89 übereinstimmt.

Haben zwei collineäre concentrische Strahlenbündel einen Strahlenbüschel entsprechend gemein, so haben sie auch einen Ebenenbüschel entsprechend gemein; und umgekehrt.

129. Will man zwei Grundgebilde der zweiten Stufe projektivisch aufeinander beziehen, so darf man nur auf zwei einförmige Grundgebilde A, B des einen, welche ein Element AB gemein haben, zwei einförmige Grundgebilde A_1, B_1 des andern, welche ebenfalls ein Element $A_1 B_1$ gemein haben, projektivisch so beziehen, dass das gemeinschaftliche Element $A_1 B_1$ der beiden letztern Gebilde als Element eines jeden dem gemeinschaftlichen Elemente der beiden erstern entspricht.

I. Sollen zwei ebene Systeme U, U_1 reciprok aufeinander bezogen werden, so darf man nur auf zwei Strahlenbüschel A, B des einen zwei gerade Gebilde A_1, B_1 des andern projektivisch so beziehen, dass der Schnittpunkt $A_1 B_1$ der beiden geraden Gebilde als Punkt eines jeden dem gemeinschaftlichen Strahle A B der beiden Büschel entspricht. Jedem Punkte, in welchem ein Strahl des Büschels A von einem Strahle des Büschels B geschnitten wird, entspricht eine Gerade, deren Spuren in den Geraden A_1, B_1 jenen Strahlen entsprechen. Jedem geraden Gebilde s, welches entweder ein Schnitt des Büschels A mit einer durch den Punkt B gehenden Geraden oder ein Schnitt des Büschels B mit einer durch den Punkt A gehenden Geraden oder ein gemeinschaftlicher Schnitt von beiden ist, entspricht ein Strahlenbüschel s_1, welcher im ersten Falle das gerade Gebilde A_1 aus einem Punkte der Geraden B_1, im zweiten das gerade Gebilde B_1 aus einem Punkte der Geraden A_1, im dritten aber (108) das eine von diesen Gebilden auf das andere projicirt. Im letzten Falle sind nämlich durch die Gerade s die beiden Büschel A, B und dadurch auch die geraden Gebilde A_1, B_1 projektivisch so auf einander bezogen, dass ihr gemeinschaftliches Element sich selbst entspricht. Schneiden zwei Gerade s, t des Systems U die Gerade A B in einem und demselben Punkte, so liegen die ihnen entsprechenden Punkte s_1, t_1 des Systems U_1 mit dem Punkte $A_1 B_1$ in einer und derselben Geraden, weil, wenn diess nicht der Fall wäre, die Gerade $s_1 t_1$ einem Punkte st ausserhalb der Geraden A B entsprechen würde. Es ist hiernach auch jedem Punkte in der Geraden A B eine durch den Punkt $A_1 B_1$ gehende Gerade zugewiesen.

II. Sollen zwei ebene Systeme collineär aufeinander bezogen werden, so muss man entweder auf zwei Strahlenbüschel A, B des einen zwei Strahlenbüschel A_1, B_1 des andern oder auf zwei gerade Gebilde A, B des einen zwei gerade Gebilde A_1, B_1 des andern projektivisch so beziehen, dass das gemeinschaftliche Element der Gebilde A_1, B_1 als Element eines jeden dem gemeinschaftlichen Elemente der Gebilde A, B entspricht. Im erstern Falle entspricht jedem Punkte, in welchem ein Strahl des Büschels A und ein Strahl des Büschels B sich schneiden, ein Punkt, in welchem die ihnen entsprechenden Strahlen der Büschel A_1, B_1 sich schneiden, u. s. w. Im letztern Falle entspricht jeder Geraden, welche die geraden Gebilde A, B in zwei Punkten schneidet, eine Gerade, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte der Gebilde A_1, B_1 bestimmt ist, u. s. w.

III. Will man ein ebenes System und einen Strahlenbündel reciprok aufeinander beziehen, so wird man entweder auf zwei Strahlenbüschel A, B des erstern Systems zwei Strahlenbüschel A_1, B_1 des letztern oder auf zwei gerade Gebilde A, B des erstern zwei Ebenenbüschel A_1, B_1 des letztern projektivisch so beziehen, dass das gemeinschaftliche Element $A_1 B_1$ der Gebilde A_1, B_1 als Element eines jeden dem gemeinschaftlichen Elemente AB der Gebilde A, B entspricht. Im erstern Falle entspricht jedem Punkte, in welchem ein Strahl des Büschels A und ein

Strahl des Büschels B sich schneiden, eine Ebene, deren Spuren in den Ebenen A_1, B_1 jenen Punkten entsprechen, u. s. w. Im letztern Falle entspricht jeder Geraden, welche die geraden Gebilde A, B in zwei Punkten schneidet, ein Strahl, in welchem die diesen Punkten entsprechenden Ebenen der Büschel A_1, B_1 sich schneiden, u. s. w.

In dem obigen allgemeinen Satze sind noch drei Sätze IV, V, VI enthalten, von welchen der eine von einem ebenen Systeme und einem ihm collineären Strahlenbündel, der andere von zwei reciproken und der dritte von zwei collineären Strahlenbündeln handelt.

130. Will man zwei Grundgebilde der zweiten Stufe projektivisch aufeinander beziehen, so kann man zu vier gleichartigen Elementen A, B, C, D des einen, von welchen keine drei einem und demselben einförmigen Grundgebilde angehören, vier solche Elemente A_1, B_1, C_1, D_1 im andern, welche jenen entsprechen sollen, nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Systems ein Element des andern zugewiesen ist.

Um sich hievon zu überzeugen, darf man nur bemerken, dass auf die einförmigen Gebilde A, B die einförmigen Gebilde A_1, B_1 projektivisch so bezogen werden können und müssen, dass den Elementen AB, AC, AD des Gebildes A die Elemente $A_1 B_1$, $A_1 C_1$, $A_1 D_1$ des Gebildes A_1 und den Elementen BA, BC, BD des Gebildes B die Elemente $B_1 A_1$, $B_1 C_1$, $B_1 D_1$ des Gebildes B_1 entsprechen.

Ein vollständiges ebenes Viereck und ein vollständiges Vierseit sind hiernach immer reciprok. In der Aussage, dass ein vollständiges ebenes nEck und ein vollständiges nSeit, welche aufeinander bezogen sind, reciprok seyen, sind (116) $2(n-4)$ von einander unabhängige einfache Aussagen enthalten. Es müssen nämlich zwei Strahlenbüschel, deren jeder aus $n-1$ Seiten des nEcks besteht, den ihnen entsprechenden geraden Gebilden, deren jedes aus nEckpunkten des nSeits besteht, projektivisch seyn.

131. Will man zwei in einerlei Ebene liegende Systeme perspektivisch so aufeinander beziehen, dass sie einen gegebenen Strahlenbüschel S und ein gegebenes gerades Gebilde u entsprechend gemein haben, so kann man noch in einem Strahle des

Büschels S zu einem Punkte A des einen Systems den homologen Punkt A_1 des andern nach Belieben annehmen. Wenn man nämlich jeden Strahl des Büschels S sich selbst entsprechend nennt, die Strahlenbüschel A, A_1 aber als Scheine des geraden Gebildes u betrachtet, so hat man auf zwei Strahlenbüschel S, A des einen Systems zwei Strahlenbüschel S, A_1 des andern projektivisch so bezogen, dass der gemeinschaftliche Strahl der beiden letztern als Strahl eines jeden dem gemeinschaftlichen Strahle der beiden erstern entspricht.

Der Punkt S, welcher mit je zwei homologen Punkten in einer und derselben Geraden liegt, kann das (perspektivische) Projectionscentrum, die Gerade u aber, welche von je zwei homologen Geraden in einem und demselben Punkte geschnitten wird, die (perspektivische) Spurlinie der beiden Systeme genannt werden.

132. Um zwei räumliche Systeme Σ, Σ_1 reciprok aufeinander zu beziehen, darf man nur irgend eine von folgenden drei Verfahrungsarten anwenden, die sich jedoch nicht wesentlich von einander unterscheiden:

I. Man beziehe auf drei Ebenenbüschel a, b, c, deren Axen die Seiten eines Dreiecks sind, drei gerade Gebilde a_1, b_1, c_1, deren Träger die Kanten eines Dreikants sind, projektivisch so, dass der Schnittpunkt der drei letztern Gebilde als Punkt eines jeden der gemeinschaftlichen Ebene der drei erstern und also jedem Punkte, in welchem eine Ebene des Büschels a, eine Ebene des Büschels b und eine Ebene des Büschels c sich schneiden, eine Ebene entspricht, deren Spuren in den Geraden a_1, b_1, c_1 jenen Ebenen entsprechen.

II. Man beziehe auf einen Strahlenbündel A und einen ausserhalb desselben befindlichen Ebenenbüschel a ein ebenes System A_1 und ein ausserhalb desselben befindliches gerades Gebildes a_1 projektivisch so, dass der Schnittpunkt der beiden letzten Gebilde als Punkt eines jeden der gemeinschaftlichen Ebene der beiden erstern und also jedem Punkte, in welchem ein Strahl des Bündels A von einer Ebene des Büschels a geschnitten wird, eine Ebene entspricht, deren Spuren in der Ebene A_1 und in der Geraden a_1 jenen Elementen entsprechen.

III. Man beziehe auf zwei Strahlenbündel A, B zwei ebene Systeme A_1, B_1 projektivisch so, dass jeder gemeinschaftlichen Ebene der beiden erstern Systeme, man mag sie als Ebene des einen oder als Ebene des andern betrachten, ein und derselbe gemeinschaftliche Punkt der beiden letztern und also jedem Punkte, in welchem ein Strahl des Bündels A und ein Strahl des Bündels B sich schneiden, eine Ebene entspricht, deren Spuren in den Ebenen A_1, B_1 jenen Strahlen entsprechen. Es entspricht alsdann ferner jedem ebenen Systeme U, welches entweder ein Schnitt des Strahlenbündels A mit einer durch den Punkt B gehenden Ebene oder ein Schnitt des Strahlenbündels B mit einer durch den Punkt A gehenden Ebene oder ein gemeinschaftlicher Schnitt von beiden ist, ein Strahlenbündel U_1, welcher im ersten Falle das ebene System A_1 aus einem Punkte der Ebene B_1, im zweiten das ebene System B_1 aus einem Punkte der Ebene A_1 und im dritten (126) das eine von diesen beiden Systemen auf das andere projicirt, da in diesem Falle durch die Ebene U die beiden Strahlenbündel A, B und dadurch auch die beiden ebenen Systeme A_1, B_1 collineär so aufeinander bezogen sind, dass sie jedes gemeinschaftliche Element entsprechend gemein haben. Schneiden zwei Ebenen U, V die Gerade AB in einem und demselben Punkte P oder, was dasselbe ist, eine durch die Gerade AB gehende Ebene R in einer und derselben Geraden, so gehen alle Ebenen, welche die den ebenen Systemen U, V entsprechenden Strahlenbündel U_1, V_1 mit einander gemein haben, durch einen und denselben Punkt R_1 der Geraden A_1B_1, woraus man schliessen kann, dass die beiden Punkte U_1, V_1, mit der Geraden A_1B_1 in einerlei Ebene P_1 liegen. Es ist hiernach auch jedem Punkte P in der Geraden AB eine durch die Gerade A_1B_1 gehende Ebene P_1 zugewiesen.

Da nach 129 ein Strahlenbündel A und ein ebenes System A_1 reciprok aufeinander bezogen sind, wenn auf zwei Ebenenbüschel b, c des erstern Systems zwei Gebilde b_1, c_1 des letztern projektivisch so bezogen sind, dass der Schnittpunkt dieser Geraden als Punkt einer jeden der gemeinschaftlichen Ebene der beiden Büschel entspricht, so sind in jedem der drei obigen Verfahrungsarten, aus welchen von selbst hervorgeht, wie man räumliche Systeme collineär aufeinander beziehen kann, die beiden übrigen enthalten.

133. Will man zwei räumliche Systeme reciprok aufeinander beziehen, so kann man zu fünf Punkten A, B, C, D, E des einen, von welchen keine vier in einerlei Ebene liegen, fünf Ebenen A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 des andern, von welchen keine vier durch einen und denselben Punkt gehen, nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Systems ein Element des andesn zugewiesen ist. Man kann und muss nämlich auf den Strahlenbündel A das ebene System A_1 projektivisch so beziehen, dass den Strahlen AB, AC, AD, AE die Geraden A_1B_1, A_1C_1, A_1D_1, A_1E_1 entsprechen. Ferner können und müssen der Ebenenbüschel BC (dessen Axe die Gerade BC ist) und das gerade Gebilde B_1C_1 projektivisch so aufeinander bezogen werden, dass den Ebenen BCA, BCD, BCE die Punkte $B_1C_1A_1$, $B_1C_1D_1$, $B_1C_1E_1$ entsprechen, woraus (132) der Satz folgt.

Sollen zwei räumliche Systeme collineär aufeinander bezogen werden, so kann man entweder zu fünf Punkten des einen, von welchen keine vier in einerlei Ebene liegen, fünf solche Punkte des andern, oder zu fünf Ebenen des einen, von welchen keine vier durch einen und denselben Punkt gehen, fünf solche Ebenen des andern nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Systems ein Element des andern zugewien ist.

Ein vollständiges räumliches Fünfeck und ein vollständiges Fünfflach sind nach dem Obigen immer reciprok. In der Aussage, dass ein vollständiges räumliches nEck und ein vollständiges nFlach, welche aufeinander bezogen sind, reciprok seyen, sind $3(n-5)$ von einander unabhängige einfache Aussagen enthalten. Es ist nämlich erforderlich, aber auch hinreichend, dass drei Ebenenbüschel, welche eine Ebene mit einander gemein haben, und von welchen jeder aus $n-2$ Flächen des vollständigen nEcks besteht, den ihnen entsprechenden geraden Gebilden, von welchen jedes aus $n-2$ Eckpunkten des vollständigen $n$flachs besteht, projektivisch sind.

134. Zwei collineäre räumliche Systeme, welche

ein ebenes System U entspre- | einen Strahlenbündel S entsprechend gemein haben, haben auch einen Strahlenbündel entsprechend gemein.

Die Ebene U wird von je zwei homologen Ebenen in einer und derselben Geraden und von je zwei homologen Geraden in einem und demselben Punkte geschnitten, daher (126) je zwei homologe ebene Systeme V, V_1 Schnitte eines und desselben Strahlenbündels S sind. Da nun jede Gerade, welche ein Paar homologe Punkt A, A_1 verbindet, weil sie auch durch einen Punkt R der Ebene U geht, sich selbst (die Gerade AR der Geraden A_1 R) entspricht, so folgt der Satz.

chend gemein haben, haben auch ein ebenes System entsprechend gemein.

Der Punkt S liegt mit je zwei homologen Punkten A, A_1 in einer und derselben Geraden und mit je zwei homologen Geraden in einerlei Ebene, daher (126) je zwei homologe Strahlenbündel A, A_1 Scheine eines und desselben ebenen Systems U sind. Da nun jede Gerade, in welcher ein Paar homologe Ebenen V, V_1 sich schneiden, weil sie auch in einer Ebene N des Strahlenbündels S liegt, sich selbst (die Gerade VN der Geraden V_1 N) entspricht, so folgt der Satz.

Auf analoge Weise hätten auch die in 128 enthaltenen Sätze bewiesen werden können.

135. Sollen zwei räumliche Systeme perspektivisch so aufeinander bezogen werden, dass sie einen gegebenen Strahlenbündel S und ein gegebenes ebenes System U entsprechend gemein haben, so kann man noch in einem Strahle des Bündels S zu einem Punkte A des einen Systems den homologen Punkt A_1 des andern nach Belieben annehmen. Wenn man nämlich jeden Strahl des Bündels S sich selbst entsprechend nennt, die Strahlenbündel A, A_1 aber als Scheine des ebenen Systems U betrachtet, so hat man auf zwei Strahlenbündel S, A des einen räumlichen Systems zwei Strahlenbündel S, A_1 des andern projektivisch so bezogen, dass jede gemeinschaftliche Ebene der beiden letztern Gebilde, man mag sie als ein Element des einen oder als ein Element des andern betrachten, einer und derselben gemeinschaftlichen Ebene der beiden erstern (und zwar sich selbst) entspricht.

Der Punkt S mag das (perspektivische) Projektionscentrum, die Ebene U aber die (perspektivische) Spurebene der beiden Systeme genannt werden.

136. Wenn zwei räumliche Systeme Σ, Σ_1 zu einander perspektivisch sind, so ist jedes gerade Gebilde $S A A_1 R$, welches aus dem Projektionscentrum S, einem Punkte A des Systems Σ, dem homologen Punkte A_1 des Systems Σ_1 und dem Punkt R besteht, in welchem die Gerade $A A_1$ die Spurebene U schneidet, jedem andern solchen Gebilde projektivisch. Sind nämlich $S B B_1 N$, $S C C_1 R$ zwei andere solche Gebilde, so ist $S B B_1 N$ eine Projektion von $S A A_1 R$ aus dem Punkte, in welchem die einander entsprechenden Geraden AB, $A_1 B_1$ die Spurebene schneiden, und eben so $S C C_1 R$ eine Projektion von $S B B_1 N$, woraus der Satz folgt. Sind die Punkte A, A_1 durch die Punkte S, R nicht getrennt, so sind je zwei homologe gerade Gebilde, welche in einem Strahle des Bündels S liegen, und also auch je zwei homologe Ebenenbüschel, deren Axe in der Ebene U liegt, einstimmig-perspektivisch, daher alsdann die Systeme selbst einstimmig-perspektivisch heissen sollen. Sind aber die Punkte A, A_1 durch die Punkte S, R getrennt, so sind die System entgegengesetzt-perspektivisch.

Alles diess gilt auch, wenn Spurlinie für Spurebene, Strahlenbüschel für Ebenenbüschel gesetzt wird, von zwei in einerlei Ebene liegenden perspektivischen Systemen.

137. Da zu jedem Systeme Σ ein ihm reciprokes System angenommen werden kann, und dadurch das in §. 6 angedeutete Gesetz der Reciprocität bewiesen ist, so ist es in der Folge hinreichend, wenn von zwei reciproken Sätzen der eine oder der andere bewiesen wird. Je zwei unter sich collineären Gebilden G, G^1 in Σ entsprechen zwei unter sich collineäre Gebilde G_1, G^1_1 in Σ_1. Jedem Elemente in Σ, welches die beiden ersten Gebilde entsprechend gemein haben, entspricht ein Element in Σ_1, welches die beiden letztern Gebilde entsprechend gemein haben u. s. w.

138. Zwei collineäre Systeme, deren jedes sowohl eigentliche als auch unendlich ferne Elemente enthält, heissen affin (eigentlich verwandt), wenn jedem eigentlichen Elemente ein eigentliches Element und also jedem unendlich fernen Elemente ein unendlich

fernes Element entspricht. Zwei zu einander collineäre eigentliche ebene Systeme sind also affin, wenn der unendlich fernen Geraden der einen Ebene die unendlich ferne Gerade der andern, folglich jedem Parallelstrahlenbüschel ein Parallelstrahlenbüschel, jedem Parallelstreifen ein Parallelstreifen, jedem Parallelogramme ein Parallelogramm entspricht u. s. w. Zwei collineäre räumliche Systeme sind affin, wenn sie die unendlich ferne Ebene entsprechend gemein haben, folglich jedem eigentlichen ebenen Systeme ein demselben affines System, jedem Parallelraume ein Parallelraum, jedem Parallelepipedon ein Parallelepipedon entspricht u. s. w. Sind zwei perspektivische räumliche Systeme affin, so muss entweder ihr Projektionscentrum im Unendlichen liegen, oder ihre Spurebene die unendlich ferne Ebene oder beides zugleich der Fall seyn.

Will man zwei eigentliche ebene Systeme collineär so aufeinder beziehen, dass sie affin sind, so kann man zu drei nicht in einer und derselben Geraden liegenden eigentlichen Punkten A, B, C des einen Systems drei solche Punkte A_1, B_1, C_1 des andern nach Belieben annehmen. Den unendlich fernen Punkten der Geraden AB, AC müssen die unendlich fernen Punkte der Geraden A_1B_1, A_1C_1 ensprechen. Sollen zwei räumliche Systeme projektivisch so aufeinander bezogen werden, dass sie affin sind, so kann man zu vier nicht in einerlei Ebene liegenden eigentlichen Punkten des einen Systems vier solche Punkte des andern nach Belieben annehmen.

---

§. 11.

Von den Linien, Flächen und den ihnen verwandten Gebilden.

139. Nimmt man den Begriff Büschel im weitern Sinne, so kann man jede stetige Aufeinanderfolge von Geraden, welche in einerlei Ebene liegen, einen Strahlenbüschel und jede stetige Aufeinanderfolge von Ebenen einen Ebenenbüschel nennen. Es entspricht alsdann in zwei reciproken ebenen Systemen jeder Linie (stetigen Aufeinanderfolge von Punkten) ein Strahlenbüschel, in zwei reciproken räumlichen Systemen aber jeder Linie ein Ebenen-

büschel, jeder Kegelfläche ein Strahlenbüschel und überhaupt jeder stetigen Aufeinanderfolge von Geraden wieder eine stetige Aufeinanderfolge von Geraden. Das Reciproke von einer aus Strecken zusammengesetzten Linie ist ein aus Winkeln zusammengesetzter Büschel.

Lässt man in dem einen von zwei reciproken ebenen Systemen zwei Strahlen um zwei feste Punkte A, B sich drehen, so dass ihr Schnittpunkt irgend eine Linie s beschreibt, so beschreibt die diesem Punkte entsprechende Gerade des andern Systems, indem ihre Spuren in zwei festen Geraden A_1, B_1 sich bewegen, den Strahlenbüschel s_1, welcher der Linie s entspricht, und, wenn diese geschlossen ist, ebenfalls sich schliesst. Ist kein Stück der Linie s gerade, so ist auch kein Stück des Strahlenbüschels s_1 ein Winkel. Wenn überdiess keine n Punkte der Linie s in einer und derselben Geraden liegen, so gehen auch keine n Strahlen des Büschels s_1 durch einen und denselben Punkt.

Lässt man in dem einen von zwei reciproken räumlichen Systemen drei Ebenen um die Seiten a, b, c eines Dreiecks als feste Axen sich drehen, so dass ihr Schnittpunkt irgend eine Linie s beschreibt, so beschreibt die diesem Punkte entsprechende Ebene des andern Systems, indem ihre Spuren in drei festen Geraden a_1, b_1, c_1 sich bewegen, den der Linie s entsprechenden Ebenenbüschel s_1. Liegen keine n Punkte der Linie s in einerlei Ebene, so gehen auch keine n Ebenen des Büschels s_1 durch einen und denselben Punkt.

140. In zwei reciproken räumlichen Systemen entspricht jeder Fläche F, deren Elemente Punkte sind, ein Ebenenbündel F_1, welcher der Inbegriff von allen den Ebenen ist, deren jede einem Punkte jener Fläche entspricht. Hat die Fläche F mit keiner Geraden mehr als n Punkte gemein, so können auch durch keine Gerade mehr als n Ebenen des Bündels F_1 gehen. Betrachtet man die Fläche F als eine stetige Aufeinanderfolge von Linien, so erscheint der Ebenenbündel F_1 als eine stetige Aufeinanderfolge von Ebenenbüscheln.

Wenn man unter einer Regelfläche nur eine stetige Aufeinanderfolge von Geraden als Elementen versteht, so entspricht jeder Regelfläche R eine Regelfläche R_1. Betrachtet man aber Punkte als Elemente der erstern Fläche, so entspricht derselben der Ebenenbündel R_1, dem jede Ebene angehört, welche durch eine Gerade der Regelfläche R_1 geht.

141. Jeder Punkt B in einer Curve s kann als der Endpunkt eines Stücks AB und als der Anfangspunkt eines Stückes BC betrachtet werden, so dass keines von diesen beiden Stücken der Curve von einer durch den Punkt B gehenden Ebene in mehr als zwei Punkten und, im Falle die Curve eben ist, von einer durch B gehenden Geraden in mehr als einem Punkte geschnitten wird. Projicirt man nun die Curve AB (das Stück AB der Curve s) aus dem Mittelpunkte B, so erhält man eine Winkelfläche (eine Kegelfläche oder einen ebenen Winkel), deren Anfangsschenkel die Gerade BA ist, während jeder in ihr liegende Strahl durch einen in der Curve AB befindlichen Punkt geht.

Von dem Endschenkel der Winkelfläche soll gesagt werden, dass er der Curve AB im Punkte B sich anschmiege oder aus dem Punkte B den mit diesem Punkte zusammenfallenden Punkt der Curve projicire. Wenn der Anfangsschenkel der Winkelfläche, welche aus dem Mittelpunkte B die Curve BC projicirt, von dem Endschenkel der erstern Winkelfläche verschieden ist, und es also zwei Gerade giebt, welche im Punkte B der Curve ABC sich anschmiegen, so bildet diese in jenem Punkte eine Ecke.

Eben so giebt es, wenn abc eine Kegelfläche ist, entweder eine oder zwei Ebenen, welche ihr im Strahle b sich anschmiegen, je nachdem nämlich der Endschenkel des Flächenwinkels, welcher aus der Axe b das Stück ab der Fläche projicirt, mit dem Anfangsschenkel des Flächenwinkels, welcher aus derselben Axe das Stück bc projicirt, zusammenfällt, oder von demselben verschieden ist.

Ist AB eine gewundene Curve, so versteht man unter der ihr im Punkte B sich anschmiegenden Ebene, den Endschenkel des Flächenwinkels, welcher die Curve aus der ihr im Punkte B sich anschmiegenden Geraden projicirt Fällt diese Ebene mit der Ebene, welche im Punkte B der Curve BC sich anschmiegt, nicht zusammen, so giebt es durch diesen Punkt zwei Ebenen, welche in ihm der Curve ABC sich anschmiegen. Von einer ebenen Curve kann man sagen, dass ihr in allen Punkten die Ebene sich anschmiege, in der sie liegt.

142. Schmiegt der Curve AB im Punkt B die Gerade b sich an, so schmiegt der Fläche S (AB), welche aus dem Punkte S die Curve AB projicirt, in dem Strahle SB, der auch mit b zusammenfallen kann, die Ebene Sb sich an, welche aus der Axe SB den mit dem Punkte B zusammenfallenden Punkt der Curve AB projicirt. Wenn daher der Curve ABC im Punkte B zwei Gerade b, β sich anschmiegen, so bildet jede Kegelfläche, welche die Curve ABC aus einem ausserhalb der Ebene bβ befindlichen Punkte projicirt, eine durch den Punkt B gehende Kante. Dasselbe ist der Fall, wenn der Curve ABC im Punkte B nur eine Gerade aber zwei Ebenen sich anschmiegen und aus einem in jener Geraden befindlichen Punkte projicirt wird.

In der Folge wird, wenn von einer Curve die Rede ist, und nicht ausdrückiich das Gegentheil bemerkt wird, immer vorausgesetzt, dass der Curve in jedem Punkte, durch welchen sie nämlich nur einmal geht, nur eine Gerade und eine Ebene sich anschmiegen.

143. Die stetige Aufeinanderfolge von Geraden, welche einer und derselben Curve sich anschmiegen, soll die der Curve sich anschmiegende Regelfläche oder auch, wenn die Curve eben ist, der ihr sich anschmiegende Strahlenbüschel, die stetige Aufeinanderfolge von Ebenen aber, welche einer und derselben gewundenen Curve oder auch einer und derselben Kegelfläche sich anschmiegen, der ihr sich anschmiegende Ebenenbüschel genannt werden.

Wird eine gewundene Curve durch s bezeichnet, so ist unter der Regelfläche s die der Curve s sich anschmiegende Regelfläche und unter dem Ebenenbüschel s der der Regelfläche s (oder der Curve s) sich anschmiegende Ebenenbüschel zu verstehen. Drei zusammengehörige Elemente B der drei Gebilde s sind ein Punkt B der Curve s, die in diesem Punkte der Curve sich anschmiegende Gerade B und die in dieser Geraden der Regelfläche s (also im Punkte B der Curve s) sich anschmiegende Ebene B. Der Punkt B ist als der Mittelpunkt der Geraden B, diese Gerade aber als die Axe der Ebene B zu betrachten. Bewegen sich drei zusammengehörige Elemente P, so dass der Punkt P die Curve s, also die Gerade P die Regelfläche s und die Ebene P den Ebenenbüschel s beschreibt, so bewegt sich der Punkt P in der Geraden P, während die Gerade P in der Ebene P um den Punkt P und die Ebene P um die Gerade P sich dreht.

Wenn s eine ebene Curve ist (alle Ebenen des Ebenenbüschels s in einander fallen), und der Punkt P die Curve s, also die Gerade P den Strahlenbüschel s beschreibt, so bewegt sich der Punkt P in der Geraden P, während diese Gerade in der festen Ebene s um jenen Punkt sich dreht. Wenn endlich die Regelfläche s eine Kegelfläche ist (alle Punkte der Curve s in einander fallen) und der Strahl P die Kegelfläche, folglich die Ebene P den derselben sich anschmiegenden Ebenenbüschel s beschreibt, so dreht sich die Gerade P um den festen Punkt s in der Ebene P, während diese Ebene um jene Gerade sich dreht.

144. Wenn AB (141) eine ebene Curve ist, der also ein Strahlenbüschel AB sich anschmiegt, so ist

der Strahl B der Endschenkel des Winkels, welcher die Curve AB aus dem Punkte B projicirt.	der Punkt B der Endpunkt der Strecke, in welcher der Strahlenbüschel AB von der Geraden B geschnitten wird.

145. In zwei reciproken ebenen Systemen entspricht jeder Curve ABC ein Strahlenbüschel $A_1 B_1 C_1$, welcher der Curve $A_1 B_1 C_1$ sich anschmiegt, die dem der erstern Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschel ABC entspricht. Da nämlich die Strecke, in welcher der Büschel AB von der Geraden B geschnitten wird, im Punkte B sich endigt, so muss auch der jener Strecke entsprechende Winkel, welcher aus dem Punkte B_1 die Curve $A_1 B_1$ projicirt, in dem Strahle B_1 sich endigen, welcher dem Punkte B entspricht.

Das Reciproke von einer geschlossenen Curve s, welcher, weil sie eine Ecke bildet, ein nicht geschlossener Strahlenbüschel sich anschmiegt, ist ein geschlossener Strahlenbüschel s_1, welcher einer nicht geschlossenen Curve sich anschmiegt. Dem Eckpunkte der Curve s, in welchem also derselben zwei Strahlen sich anschmiegen, entspricht der Strahl, welcher der Curve s_1 in ihren beiden Grenzpunkten sich anschmiegt und also zwei Mittelpunkte hat. Das Reciproke von einer geschlossenen Curve, welcher, weil sie drei Ecken bildet, drei unter sich nicht zusammenhängende Strahlenbüschel sich anschmiegen, ist ein Strahlenbüschel, welcher drei nicht mit einander zusammenhängenden Curven sich anschmiegt. Es folgt hieraus, dass jeder Strahlenbüschel, welcher keinen Winkel als Stück in sich enthält und folglich von einer krummen Linie das Reciproke ist, einer oder mehrern Curven sich anschmiegt. In der Regel wird aber, wenn von einem stetigen Gebilde, welches einem andern, oder welchem ein anderes Gebilde sich anschmiegt, die Rede ist, vorausgesetzt, dass auch in dem andern keine Unterbrechung der Stetigkeit statt finde.

Sind ein ebenes System und ein Strahlenbündel zu einander reciprok, so entspricht jeder Curve ein Ebenenbüschel, welcher der Kegelfläche sich anschmiegt, die dem jener Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschel entspricht.

146. Jede Regelfläche, welche entweder eine Kegelfläche ist, oder einer gewundenen Curve sich anschmiegt, heisst abwickelbar.

Eine Curve und die ihr sich anschmiegende Regelfläche werden (142) aus jedem Punkte, welcher, im Falle die Curve eben ist, ausserhalb ihrer Ebene liegt, durch eine Kegelfläche und den derselben sich anschmiegenden Ebenenbüschel projicirt.

Eine abwickelbare Regelfläche s und der ihr sich anschmiegende Ebenenbüschel s werden von jeder Ebene U, welche, im Falle die Fläche eine Kegelfläche ist, nicht durch den Mittelpunkt derselben geht, in einer Curve und den derselben sich anschmiegenden Strahlenbüschel geschnitten.

Nimmt man nämlich an, dass zwei zusammengehörige Elemente P der Gebilde s und also auch ihre Spuren p in der Ebene U sich bewegen, so bewegt sich der Punkt p in der Geraden p, während diese Gerade um jenen Punkt sich dreht, woraus man schliessen kann, dass der Punkt p eine Curve und die Gerade p den derselben sich anschmiegenden Strahlenbüschel beschreibt. Ob hiebei der Punkt P fest ist oder ebenfalls sich bewegt, ist ganz gleichgültig und kann auch an der Bewegung der Elemente p nicht erkannt werden. Der Fall, in welchem die Regelfläche s einer Curve sich anschmiegt und die schneidende Ebene durch eine Gerade der Regelfläche geht, kann vorläufig noch ausser

Acht gelassen werden, indem dieser Fall bei dem Beweise des folgenden Satzes nicht vorausgesetzt wird, aus dem folgenden Satze aber hervorgeht, dass die obigen Sätze zu einander reciprok sind und also, wenn man zwei reciproke Systeme sich denkt, aus dem einen sogleich der andere folgt.

147. In zwei reciproken räumlichen Systemen Σ, Σ_1 entspricht jeder Curve ABC einen Ebenenbüschel $A_1B_1C_1$, welcher der Regelfläche $A_1B_1C_1$ sich anschmiegt, die der jener Curve sich anschmiegenden Regelfläche ABC entspricht. Wenn ferner ABC eine gewundene Curve ist, so schmiegt die Regelfläche $A_1B_1C_1$ der Curve $A_1B_1C_1$ sich an, welche dem der Regelfläche ABC sich anschmiegenden Ebenenbüschel entspricht.

Der Fall, in welchem ABC eine ebene Curve ist, ist schon in 145 betrachtet worden. Da nun, wenn ABC eine gewundene Curve ist, der Ebenenbüschel AB von jeder nicht durch die Gerade B gehenden Ebene in einem Strahlenbüschel geschnitten wird, dessen Endschenkel die Spur der Geraden B zum Mittelpunkt hat, so folgt, dass jeder Kegelfläche, welche die Curve A_1B_1 aus einem ausserhalb der Geraden B_1 befindlichen Punkte projicirt, in ihrem Endschenkel die Ebene sich anschmiegt, welche aus demselben Punkte die Gerade B_1 projicirt, und dass also diese Gerade die der Curve A_1B_1 im Punkte B_1 sich anschmiegende Gerade sey. Da ferner die Regelfläche AB aus jedem ausserhalb der Geraden B befindlichen Punkte durch einen Ebenenbüschel projicirt wird, dessen Endschenkel die Gerade, welche aus demselben Mittelpunkte den Punkt B projicirt, zur Axe hat, so folgt, dass jeder Curve, in welcher die Regelfläche A_1B_1 von einer nicht durch die Gerade B_1 gehenden Ebene geschnitten wird, in ihrem Endpunkte die Spur der Ebene B_1 sich anschmiegt, und dass also diese Ebene die der Regelfläche A_1B_1 in der Geraden B_1 sich anschmiegende Ebene ist. Will man den obigen Satz nicht auf 146 zurückführen, so darf man nur bemerken, dass, wenn drei zusammengehörige Elemente P der Gebilde ABC diese Gebilde beschreiben, auch die ihnen entsprechenden Elemente P_1 der Gebilde $A_1B_1C_1$ sich so bewegen, dass die Ebene P_1 um die Gerade P_1 und diese Gerade in jener Ebene um den Punkt P_1 sich dreht, während der Punkt P_1 in jener Geraden sich bewegt.

Das Reciproke von einem Ebenenbüschel, von welchem kein Stück einem und demselben Strahlenbündel angehört, ist eine Curve, von welcher kein Stück eben ist. Findet in den beiden der Curve sich anschmiegenden Gebilden keine Unterbrechung der Stetigkeit statt, so gilt diess auch von den beiden Gebilden, welchen der Ebenenbüschel sich anschmiegt.

148. Wenn AB eine gewundene Curve ist, der also eine Regelfläche AB und ein Ebenenbüschel AB sich anschmiegen, so ist

die Gerade B der Endschenkel der Kegelfläche, welche die Curve AB aus dem Punkte B projicirt, die Ebene B aber der Endschenkel des Flächenwinkels, welcher die Curve AB aus der Axe B projicirt, und zugleich der Endschenkel des Ebenenbüschels, welcher die Regelfläche AB aus dem Punkte B projicirt.

die Gerade B der Endschenkel des Strahlenbüschels, in welchem der Ebenenbüschel AB von der Ebene B geschnitten wird, der Punkt B aber der Endpunkt der Strecke, in welcher der Ebenenbüschel AB die Gerade B schneidet, und zugleich der Endpunkt der Curve, in welcher die Regelfläche AB und die Ebene B sich schneiden.

149. Von einer Geraden soll gesagt werden, dass sie einer Fläche in einem Punkte sich anschmiege, wenn sie in diesem Punkte irgend einer in der Fläche liegenden Linie sich anschmiegt. Liegt also eine Gerade in einer Fläche, so schmiegt sich die Gerade in allen ihren Punkten der Fläche an.

Von einer Ebene soll gesagt werden, dass sie einer Fläche F in einem Punkte sich anschmiege, wenn die Ebene entweder eine stetige Aufeinanderfolge von Geraden, die der Fläche in jenem Punkte sich anschmiegen, in sich enthält, oder einer von solchen Geraden erfüllten Kegelfläche sich anschmiegt. Wenn übrigens ein Ebenenbüschel so beschaffen ist, dass nach der so eben gegebenen Erklärung alle seine Ebenen mit Ausnahme seines Endschenkels der Fläche F sich anschmiegen, so ist auch diese Ebene als eine der Fläche F sich anschmiegende Ebene zu betrachten.

Schmiegt eine Ebene einer abwickelbaren Regelfläche sich an, so geschieht solches (146) in einer Geraden (in allen Punkten einer Geraden), daher einer abwickelbaren Regelfläche nur ein Ebenenbüschel, einer andern krummen Fläche aber ein Ebenenbündel sich anschmiegt.

150. In zwei reciproken räumlichen Systemen entspricht jeder krummen Fläche F, von welcher kein Stück abwickelbar ist, ein Ebenenbündel F_1, welcher der Fläche F_1 sich anschmiegt, die dem der erstern Fläche sich anschmiegenden Ebenenbündel F entspricht.

Jede in der Fläche F_1 enthaltene Curve $A_1 B_1$ entspricht einem in dem Ebenenbündel F enthaltenen Ebenenbüschel A B. Gleichwie nun der Endschenkel der Regelfläche A B durch den Punkt geht, in welchen die Ebene B der Fläche F sich anschmiegt, so liegt auch der Endschenkel der Regelfläche $A_1 B_1$ in der jenem Punkte entsprechenden Ebene des Ebenenbündels F_1.

151. Wenn der Ebene U in dem einen von zwei collineären räumlichen Systemen Σ, Σ_1 die unendlich ferne Ebene des andern entspricht, so entspricht jeder Curve A B C, welche die Ebene U in einem Punkte B schneidet, eine Curve $A_1 B_1 C_1$, welche die unendlich ferne Ebene in einem Punkte B_1 schneidet, und jeder Kegelfläche, welche die erstere Curve aus einem ausserhalb der Ebene U befindlichen Punkte S projicirt, eine Kegelfläche, welche die letztere aus einem eigentlichen Punkte S_1 projicirt. Die beiden einfachen Kegelflächen, welche die Stüke $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ der Curve $A_1 B_1 C_1$ aus der Spitze S projiciren, hängen aus dem Grunde nicht zusammen, weil der Anfangsschenkel der letztern vom Endschenkel der erstern die Ergänzung ist. Wenn aber die Curve A B C die Ebene U im Punkte B und also die Curve $A_1 B_1 C_1$ die unendlich ferne Ebene im Punkte B_1 berührt, so findet auch zwischen den erwähnten einfachen Kegelflächen, da der Endschenkel der erstern zugleich der Anfangsschenkel der letztern ist, Zusammenhang statt.

Jeder geschlossenen Curve, welche mit der Ebene U n Punkte gemein hat, entspricht eine geschlossene Curve, welche aus n Aesten besteht, deren jeder in einem unendlich fernen Punkte anfängt und in einem unendlichen fernen Punkte (dem Anfangspunkte des folgenden) sich endigt.

Jeder Fläche F, welche die Ebene U in einer Linie s

$\left\{\begin{matrix}\text{schneidet}\\ \text{berührt}\end{matrix}\right\}$, entspricht eine Fläche F_1, welche die unendlich ferne Ebene in einer Linie s_1 $\left\{\begin{matrix}\text{schneidet}\\ \text{berührt}\end{matrix}\right\}$. Berührt die Fläche F die Ebene U nur in einem Punkte, so berührt auch die Fläche F_1 die unendlich ferne Ebene nur in einem Punkte. Wenn endlich die Fläche F mit der Ebene U gar keinen Punkt gemein hat, so sind alle Punkte der Fläche F_1 eigentliche Punkte

152. Jede eigentliche Gerade, welche einer Curve in einem unendlich fernen Punkte sich anschmiegt, heisst eine Assymptote derselben. Projicirt man eine ins Unendliche gehende gewundene Curve AB nach der Richtung, in welcher ihr unendlich ferner Endpunkt B liegt, so erhält man eine Cylinderfläche A^1B, welcher in ihrem Endschenkel B (dem Endschenkel der Regelfläche AB) der Endschenkel B des Ebenenbüschels AB sich anschmiegt. Jede Ebene, welche jene Richtung nicht enthält, schneidet die Cylinderfläche in einer Curve a^1b, welcher in ihrem Endpunkte b die Spur b der Ebene B sich anschmiegt. Ist die Gerade B eine Assymptote der Curve AB, so ist auch der Punkt b ein eigentlicher Punkt. Ist die Gerade B eine unendlich ferne Gerade, aber doch die Ebene B eine eigentliche Ebene, so ist die Gerade b eine Assymptote der ins Unendliche gehenden Curve a^1b. Wenn endlich die Ebene B die unendlich ferne Ebene ist, so sind die Elemente B, b sämmtlich uneigentliche Elemente.

Ist eine Curve der Schnitt einer eigentlichen Kegelfläche mit einer eigentlichen Ebene E, so entspricht jedem Strahle der Kegelfläche, welcher zur Ebene E parallel ist, ein unendlich ferner Punkt der Curve, und jeder Ebene, welche zur Ebene E nicht parallel ist, aber der Kegelfläche in einem zu dieser Ebene parallelen Strahle sich anschmiegt, eine Assymptote der Curve.

---

§. 12.

Eintheilung der geschlossenen Linien, Flächen u. s. w. in solche von parer und in solche von unparer Ordnung.

153. Eine geschlossene Linie s heisst von parer oder unparer Ordnung, je nachdem sie von einer Ebene U, welche kein

Stück derselben in sich enthält, parmal oder unparmal geschnitten wird.

Es werde die Linie s von der Ebene U in m Punkten und von einer andern Ebene V, welche kein Stück derselben in sich enthält, in n Punkten geschnitten. Da nun die Linie s sich schliesst und in jedem Punkte, in welchem sie die eine oder die andere von den beiden Ebenen schneidet, von einem der beiden Flächenwinkel UV, U·V in den andern übergeht, so folgt, dass $m+n$ eine pare Zahl sey, und dass also die Linie entweder von jeder der beiden Ebenen parmal oder von jeder unparmal geschnitten werde.

Eine geschlossene ebene Linie ist hiernach von parer oder unparer Ordnung, je nachdem sie von einer Geraden (Linie erster Ordnung), welche kein Stück derselben in sich enthält, aber mit ihr in einerlei Ebene liegt, parmal oder unparmal geschnitten wird.

154. Wenn drei Linien AMB, ANB, ARB von denselben zwei Punkten begrenzt sind, so sind diejenigen Linien, deren jede aus zweien der drei erstern zusammengesetzt ist, entweder alle drei von parer Ordnung oder es ist die eine von parer Ordnung, während die beiden übrigen von unparer Ordnung sind.

Es schneide eine Ebene, welche weder durch A noch durch B geht, die Linie AMB in m Punkten, die Linie ANB in n Punkten und die Linie ARB in r Punkten, so wird von derselben Ebene die eine der oben erwähnten geschlossenen Linien in $m+n$, die andern in $m+r$ und die dritte in $n+r$ Punkten geschnitten. Da nun die Summe $2m+2n+2r$ dieser drei Zahlen eine pare Zahl ist, und also entweder alle drei pare Zahlen, oder die eine pare, die beiden übrigen aber unpare Zahlen sind, so folgt der Satz.

Substituirt man in einer Linie $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, welche aus Strecken zusammengesetzt ist, für irgend eine dieser Strecken deren Ergänzung, so erhält man eine Linie $\left\{\begin{matrix}\text{unparer}\\ \text{parer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung.

Anm. Wird von einem Gebilde gesagt, dass es von parer ode unparer Ordnung ist, so versteht es sich von selbst, dass das Gebilde geschlossen ist.

155. Eine Fläche ist geschlossen, wenn sie von keiner Linie begrenzt ist. Das Reciproke von einer solchen Fläche ist ein geschlossener Ebenenbündel, welcher nämlich von keinem Ebenenbüschel begrenzt ist. Eine einfache Winkelfläche ist, wenn auch ihr Endschenkel mit ihrem Anfangsschenkel zusammenfällt, von einer unendlich fernen Linie begrenzt und also nicht als eine wirklich geschlossene Fläche, sondern nur als eine sich schliessende stetige Aufeinanderfolge von begrenzten Linien (Halbstrahlen) zu betrachten.

Wenn gesagt wird, dass zwei geschlossene Flächen F, G in einer Linie FG $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung sich schneiden, so heisst diess nichts anderes, als dass die Anzahl der Linien unparer Ordnung, in welchen die Flächen sich schneiden, eine $\left\{\begin{matrix}\text{pare}\\ \text{unpare}\end{matrix}\right\}$ Zahl sey. Man kann hier auch unter FG den Inbegriff aller Linien verstehen, welche die beiden Flächen mit einander gemein haben; nur ist alsdann jede Linie, in welcher sie sich berühren, doppelt zu zählen.

156. Eine geschlossene Fläche F heisst von parer oder unparer Ordnung, je nachdem eine Gerade a, von welcher kein Stück in der Fläche liegt, dieselbe parmal oder unparmal schneidet.

Es sey c eine andere Gerade, von welcher kein Stück in der Fläche F liegt. Man nehme ferner zwei Ebenen an, von welchen die eine G durch die Gerade a und die andere H durch die Gerade c geht, so dass aber die Fläche F weder von der Ebene G noch von der Ebene H noch von der Schnittlinie b der beiden Ebenen ein Stück in sich enthält. Wenn nun die Fläche F und die Ebene G in einer Linie parer Ordnung sich schneiden, so wird diese Linie und also auch die Fläche F von jeder der Geraden a, b parmal geschnitten. Ist aber die Linie FG von unparer Ordnung, so wird die Fläche F von jeder der Geraden a, b unparmal geschnitten. Eben so wird die Fläche F von der Geraden c parmal oder unparmal geschnitten, je nachdem sie von der Geraden b und also auch von der Geraden a parmal oder unparmal geschnitten wird.

Eine Fläche $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung wird hiernach von jeder Ebene (Fläche erster Ordnung), welche kein Stück derselben in sich enthält, in einer Linie $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung geschnitten.

Wird eine Winkelfläche von einer nicht durch ihren Mittelpunkt gehenden Geraden in n Punkten geschnitten, so wird sie von der Ebene, welche diese Gerade aus jenem Punkte projicirt, in n Strahlen geschnitten, woraus hervorgeht, dass die obige Erklärung mit 20 und also auch mit 17 in Uebereinstimmung ist. Der Mittelpunkt einer geschlossenen Winkelfläche parer Ordnung ist, wenn Punkte als Elemente der Fläche betrachtet werden, ein Punkt, in welchem sie sich selbst berührt, welcher also, wenn in ihm die Fläche von einer Geraden geschnitten wird, zweimal zu zählen ist.

157. Zwei geschlossene Linien, welche in einerlei Ebene liegen, schneiden sich parmal, wenn entweder beide von parer Ordnung sind, oder die eine von parer und die andere von unparer Ordnung ist; — unparmal aber, wenn beide von unparer Ordnung sind. Folgt aus 17, wenn man das ebene System als einen Schnitt eines gewöhnlichen Strahlenbündels betrachtet.

158. Eine geschlossene Fläche F und eine ausserhalb derselben befindliche geschlossene Linie s schneiden sich unparmal, wenn beide von unparer Ordnung sind, in jedem andern Falle aber parmal.

Es sey s t eine stetige Aufeinanderfolge von geschlossenen Linien, deren jede ausserhalb der Fläche F liegt, so wird diese Fläche entweder von jeder der Linien parmal oder von jeder unparmal geschnitten, indem die Anzahl der Schnittpunkte beim stetigen Uebergange von einer Linie zu einer andern nur um eine pare Zahl sich vermehren oder vermindern kann. Aus demselben Grunde sind die Linien entweder alle von parer oder alle von unparer Ordnung. Da man nun annehmen kann, dass die Linie t in einer Ebene G liege, welche von der Fläche F kein Stück enthält (etwa eine Projektion der Linie s auf die Ebene G sey), so folgt der Satz aus 156 und 157.

Durch die Betrachtung einer stetigen Aufeinanderfolge von Linien kann man auch, wenn ein Stück der Linie s in der Fläche F liegt, leicht entscheiden, ob dasselbe die Stelle eines Schnitt- oder eines Berührungspunktes vertritt.

159. Zwei geschlossene Flächen F, G, welche kein Stück mit einander gemein haben, schneiden sich, wenn beide von unparer Ordnung sind, in einer Linie unparer Ordnung, in jedem andern Falle aber in einer Linie parer Ordnung. Die Anzahl aller Punkte, in welcher drei geschlossene Flächen F, G, H, von welchen keine zwei ein Stück mit einander gemein haben, und welche auch nicht alle drei durch eine und dieselbe Linie gehen, sich schneiden, ist, wenn alle drei Flächen von unparer Ordnung sind, eine unpare, in jedem andern Falle aber eine pare Zahl.

Da in jedem der im letztern Satze erwähnten Punkte jede der drei Flächen von der Schnittlinie der beiden übrigen geschnitten wird, so folgt der letztere Satz aus dem erstern und aus 158. Um aber den erstern zu beweisen, darf man nur annehmen, dass H eine Ebene sey, und bemerken, dass nach 158 die Anzahl der Punkte, in welchen die Fläche F von der Linie GH und also auch die Ebene H von der Linie FG geschnitten wird, nur dann eine unpare Zahl ist, wenn jedes von den beiden Gebilden F, GH und also auch die Fläche G von unparer Ordnung ist.

160. Wenn zwei geschlossene Gebilde G, G_1 zu einander projektivisch sind, so sind entweder beide von parer oder beide von unparer Ordnung.

Sind nämlich G, G_1 zwei Linien oder eine Linie und eine Winkelfläche oder zwei Flächen, so folgt der Satz aus 153 und 156. Ist das eine von den beiden Gebilden G, G_1 eine Linie und das andere ein Büschel oder das eine eine Fläche und das andere ein Ebenenbündel, so ist der Satz als eine Erklärung zu betrachten. In den übrigen Fällen folgt alsdann der Satz aus 103.

Wird eine Gerade um einen festen Punkt in einer festen Ebene oder eine Ebene um eine feste Axe in unverändertem Sinne gedreht, bis sie wieder ihre anfängliche Stelle einnimmt, so beschreibt dieselbe einen Büschel erster Ordnung. Ein Ebenenbündel erster Ordnung ist der Inbegriff von allen Ebenen, welche durch einen und denselben Punkt gehen.

Substituirt man in einem Büschel $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, welcher aus Winkeln zusammengesetzt ist, für einen dieser Winkel seinen Nebenwinkel, so erhält man (154) einen Büschel $\left\{\begin{matrix}\text{unparer}\\ \text{parer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung.

161. Betrachtet man nur Gebilde, welche in einerlei Ebene liegen, so ist in der Regel die Anzahl der

Punkte, welche eine Linie s $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung mit einer Geraden gemein hat, eine $\left\{\begin{matrix}\text{pare}\\ \text{unpare}\end{matrix}\right\}$ Zahl. Die Geraden, welche in Hinsicht auf die Linie s von der Regel eine Ausnahme machen, gehören einem Strahlenbüschel an, welcher mit keinem Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt M ausserhalb der Linie s liegt, ein Stück gemein hat.

Strahlen, welche ein Stahlenbüschel s $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung mit einem Strahlenbüschel erster Ordnung gemein hat, eine $\left\{\begin{matrix}\text{pare}\\ \text{unpare}\end{matrix}\right\}$ Zahl. Die Mittelpunkte der Büschel erster Ordnung, welche in Hinsicht auf den Büschel s von der Regel eine Ausnahme machen, liegen in einer Linie, welche mit keiner ausserhalb des Büschels s befindlichen Geräden ein Stück gemein hat.

162. Die Anzahl der Punkte, welche eine Fläche U $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung mit einer Geraden gemein hat, ist in der Regel eine $\left\{\begin{matrix}\text{pare}\\ \text{unpare}\end{matrix}\right\}$ Zahl, so dass die Geraden, welche in Hinsicht auf die Fläche U von der Regel eine Ausnahme machen, und durch einen und denselben ausserhalb der Fläche befindlichen

Die Anzahl der Ebenen, welche ein Ebenenbündel U $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung mit einem Ebenenbüschel erster Ordnung gemein hat, ist in der Regel eine $\left\{\begin{matrix}\text{pare}\\ \text{unpare}\end{matrix}\right\}$ Zahl, so dass die Axen aller Ebenenbüschel erster Ordnung, welche in Hinsicht auf den Ebenenbündel U von der Regel eine Ausnahme machen, und eine aus-

Punkt gehen, einer oder einigen Winkelflächen angehören und also keinen Winkelraum erfüllen.

serhalb desselben befindliche Ebene mit einander gemein haben, einem oder einigen Strahlenbüscheln angehören.

163. Zu jeder Regelfläche R $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung gehört ein Ebenenbündel R $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, welcher nämlich der Inbegriff von allen Ebenen ist, deren jede durch eine Gerade der Regelfläche geht.

Es sey a eine Gerade, so dass weder die Regelfläche R und die Gerade a noch der Ebenenbündel R und der Ebenenbüschel a von den im Vorigen erwähnten Regeln eine Ausnahme machen. Bemerkt man nun, dass zu jedem Punkte, welchen die Fläche R mit der Geraden a gemein hat, weil in ihm diese Gerade von einer Geraden r der Fläche geschnitten wird, eine Ebene a r gehört, welche der Ebenenbündel R mit dem Ebenenbüschel a gemein hat, so folgt der Satz.

164. Wenn in einem einförmigen Grundgebilde ein Element P sich bewegt hat und während der Bewegung mit dem festen Elemente B zusammengefallen ist, ohne hiebei den Sinn der Bewegung geändert zu haben, so soll gesagt werden, dass das Element P über das Element B sich hinwegbewegt habe.

Beschreibt in einem einförmigen Grundgebilde u ein Element P ein Gebilde $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, so bewegt es sich, von welchem festen Elemente die Bewegung ausgehen mag, über jedes andere feste Element des einförmigen Grundgebildes $\left\{\begin{matrix}\text{parmal}\\ \text{unparmal}\end{matrix}\right\}$ hinweg.

Da hier statt eines Büschels sein Schnitt mit einer Geraden betrachtet werden kann, so kann man annehmen, dass u eine Gerade sey. Beschreibt aber in einer Geraden ein Punkt P von A ausgehend eine geschlossene Linie, welche eine nicht durch A gehende Ebene n mal schneidet, so muss er über die Spur der Ebene n mal sich hinwegbewegen, woraus der Satz folgt. Wenn z. B. ein Punkt zuerst die Strecke A B C und alsdann die Strecke

CBA beschreibt, so hat er eine Linie parer Ordnung beschrieben. Substituirt man für ein Stück AB dieser Linie dessen Ergänzung A·B, so erhält man eine Linie unparer Ordnung.

Anm. Wenn nicht ausdrücklich bemerkt wird oder aus dem Zusammenhange hervorgeht, dass ein Gebilde eine stetige Aufeinanderfolge von Elementen enthalte oder enthalten könne, deren jedes öfter als einmal zu zählen ist, so wird, wie bisher, so auch in der Folge angenommen, dass dem nicht so sey.

165. Eine Linie s $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung wird aus jedem ausserhalb derselben befindlichen Punkte S durch eine Winkelfläche S $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung projicirt.

Ein Ebenenbüschel $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung wird von jeder ihm nicht zugehörigen Ebene in einem Strahlenbüschel $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung geschnitten.

Schneidet nämlich die Linie s eine durch den Punkt S gehende Ebene n mal, so wird diese Ebene auch von der Winkelfläche S n mal geschnitten. In der Geometrie der Ebene steht dem Satze linker Hand folgender gegenüber:

Die Spur eines Strahlenbüschels $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung in einer Geraden u, welche ihm nicht angehört, ist eine Linie $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, so dass also, wenn ein Strahl den Büschel beschreibt, seine Spur in der Geraden u über jeden festen Punkt derselben $\left\{\begin{matrix}\text{parmal}\\ \text{unparmal}\end{matrix}\right\}$ hinweggeht.

166. Eine Linie s $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung wird aus jeder Axe a, welche weder mit der Linie einen Punkt gemein hat, noch mit ihr in einerlei Ebene liegt, durch einen Ebenenbüschel $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung projicirt.

Ein Ebenenbüschel $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung wird von jeder Geraden, welche weder in einer seiner Ebenen liegt, noch von allen in einem und demselben Punkte geschnitten wird, in einer Linie $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung geschnitten.

Schneidet nämlich eine durch a gehende Ebene E die Linie s in n Punkten, so muss auch, wenn ein Punkt P von einem ausserhalb der Ebene E befindlichen Punkte ausgehend die Linie s beschreibt, die Ebene a P. n mal über die Ebene E sich hinwegbewegen. Aus dem Satze rechter Hand folgt noch:

Wenn eine Ebene einen geschlossenen Ebenenbüschel beschreibt, welchem die unendlich ferne Ebene nicht angehört, so wendet sie am Ende jedem eigentlichen Punkte, der nun nicht in ihr liegt, dieselbe Seite zu, welche sie ihm Anfangs zugewendet hat, oder die entgegengesetzte Seite, je nachdem der Büschel von parer oder unparer Ordnung ist.

167. Eine Regelfläche R $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung wird aus jedem nicht in ihr liegenden Punkte S durch einen Ebenenbüschel $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung projicirt, welcher nämlich, wenn eine Gerade p die Regelfläche beschreibt, von der Ebene Sp beschrieben wird.

Es entspreche dem Ebenenbündel R in dem einen von den zwei reciproken Systemen die Regelfläche R_1 im andern und dem Punkte S im erstern die Ebene S_1 im letztern. Da nun die Regelflächen R, R_1 nach 160 und 163 entweder beide von parer oder beide von unparer Ordnung sind, und dasselbe von dem im Satze erwähnten Ebenenbüschel und der ihm entsprechenden Linie gilt, in welcher die Fläche R_1 von der Ebene S_1 geschnitten wird, so folgt der Satz aus 156.

168. Wird eine Regelfläche $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, der keine unendlich ferne Gerade angehört, von einer Geraden beschrieben, so nimmt diese zuletzt $\left\{\begin{matrix}\text{ohne}\\ \text{mit}\end{matrix}\right\}$ Verwechslung der beiden in ihr enthaltenen Richtungen die anfängliche Stelle wieder ein.

Da nämlich hier nur die Linie c in Betrachtung kommt, in welcher die endlich ferne Ebene von der Regelfläche geschnitten wird, so kann man für diese Fläche, wenn sie keine Winkelfläche ist, eine Winkelfläche substituiren, welche jene Linie c aus irgend einem eigentlichen Punkte projicirt. 15.

§. 13.

Von den ebenen Figuren und den ihnen verwandten Gebilden.

169. Jedes Stück einer Ebene, welches als der Schnitt eines Strahlenkegels betrachtet werden kann, soll eine ebene Figur heissen. Gleichwie nun in einem Strahlenkegel keine Winkelfläche unparer Ordnung, so ist auch in einer ebenen Figur keine Linie unparer Ordnung enthalten.

Ist von einem gewöhnlichen Strahlenbündel ein eigentliches ebenes System ein Schnitt, so entspricht jedem Strahlenkegel, dessen Mantel von der zum ebenen Systeme parallelen Ebene des Strahlenbündels weder berührt noch geschnitten wird, eine eigentliche (endliche) Figur. Wird der Mantel eines Strahlenkegels von jener Ebene in einem Strahle berührt, so geht die ihm entsprechende Figur ins Unendliche. Wird ein Strahlenkegel durch jene Ebene (einen in ihr befindlichen Winkel) in zwei Theile getheilt, so wird die ihm entsprechende Figur durch die in ihr befindliche unendlich ferne Strecke in zwei Theile getheilt, welche, weil ihr Zusammenhang im Unendlichen liegt, nach der gewöhnlichen Ansicht nicht zusamenhängen.

Jede ebene Figur, deren Umfang mit irgend einer Geraden a, welche in der nämlichen Ebene liegt, keinen Punkt gemein hat, kann, wenn sie auch keine eigentliche Figur ist, doch als die Projektion einer eigentlichen Figur betrachtet werden. Projicirt man nämlich die Figur aus irgend einem ausserhalb ihrer Ebene befindlichen eigentlichen Punkte M, so erhält man einen Strahlenkegel, welcher von jeder zur Ebene Ma parallelen Ebene in einer eigentlichen Figur geschnitten wird.

170. Eine Ebene wird (16) als System von Punkten durch jede in ihr befindliche Linie f parer Ordnung, welche durch keinen Punkt öfter als einmal geht, in zwei Systeme getheilt, von welchen das eine eine von der Linie f eingeschlossene Figur ist (keine Linie unparer

Durch jeden Strahlenbüschel f_1 parer Ordnung, in welchem kein Strahl öfter als einmal zu zählen ist, wird das System von allen mit ihm in einerlei Ebene befindlichen Geraden in zwei Systeme getheilt, von welchen das eine, welches von dem Büschel f_1 ausgeschlossen heissen soll, kei-

Ordnung in sich enthält), während im andern unendlich viele Linien unparer Ordnung enthalten sind. Jede Linie, welche in der Ebene liegt und einen Punkt des einen Systems mit einem Punkte des andern verbindet, hat mit der gemeinschaftlichen Grenze f der beiden Systeme, durch welche die Punkte von einander getrennt sind, wenigstens einen Punkt gemein.

nen Strahlenbüschel unparer Ordnung in sich enthält, während im andern unendlich viele solche Büschel enthalten sind. Jeder Strahlenbüschel, welcher eine Gerade des einen Systems mit einer Geraden des andern verbindet, hat mit der gemeinshaftlichen Grenze f_1 der beiden Systeme, durch welche die Geraden von einander getrennt sind, wenigstens einen Strahl gemein.

Von je zwei begrenzten Systemen, welche einerlei Grenze haben, soll jedes die Ergänzung des andern genannt werden. Sind ein ebenes System und ein Strahlenbündel zu einander reciprok, so entspricht in ihnen jeder Figur (jedem von einer Linie eingeschlossenen Systeme von Punkten) ein von einem Ebenenbüschel ausgeschlossenes System von Ebenen und jedem von einem Strahlenbüschel ausgeschlossenen Systeme von Geraden ein von einer Winkelfläche eingeschlossenes System von Strahlen. Die Ergänzungen von entsprechenden Systemen entsprechen einander ebenfalls.

171. Jede Linie f, durch welche eine Ebene als System von Punkten in zwei Systeme F, F^1 getheilt wird, die in jedem Stücke der Linie aneinander stossen, ist von parer Ordnung.

Jeder Strahlenbüschel, durch welchen das System von allen in einerlei Ebene liegenden Geraden, in zwei Systeme getheilt wird, die den Büschel zur gemeinschaftlichen Grenze haben, ist von parer Ordnung.

Die Linie f wird nämlich von jeder in der nämlichen Ebene befindlichen Geraden, da diese eben so oft von F in F^1 als von F^1 in F übergeht, parmal geschnitten.

172. Versteht man unter einem ebenen n Ecke eine ebene Figur, welche von n Strecken eingeschlossen ist, so giebt es sechs Arten von Dreiecken. Die drei Seiten eines Dreiecks können nämlich seyn:

1) Drei endliche Strecken, was beim endlichen Dreiecke der Fall ist.
2) Eine endliche Strecke und zwei (einstimmig-parallele) Halbstrahlen.
3) Zwei Halbstrahlen und eine im Unendlichen liegende Strecke.
4) Zwei (entgegengesetzt-parallele) Halbstrahlen und eine durch das Unendliche gehende Strecke.
5) Eine endliche und zwei durch das Unendliche gehende Strecken.
6) Drei im Unendlichen liegende Strecken, so dass also das Dreieck der Schnitt einer dreiseitigen Strahlenpyramide mit der unendlich fernen Ebene ist.

Durch die in ihm liegende unendlich ferne Strecke wird ein Dreieck der vierten Art in zwei Dreiecke der dritten Art, ein Dreieck der fünften Art aber in ein Dreieck und ein Viereck getheilt.

Eben so giebt es, wenn man unter einem n Kante eine (eigentliche) n seitige Strahlenpyramide oder ein n seitiges Strahlenprisma versteht, sechs Arten von Dreikanten, nämlich das gewöhnliche Dreikant, welches einen eigentlichen Mittelpunkt hat, und fünf Arten von dreiseitigen Strahlenprismen, welchen den fünf ersten Arten von Dreiecken entsprechen, wenn ein ebenes System als ein Schnitt eines Parallelstrahlenbündels betrachtet wird. Jedem Dreiecke der ersten Art entspricht ein eigentliches dreiseitiges Strahlenprisma. Jedem Dreiecke der dritten Art (hohlen ebenen Winkel) entspricht ein dreiseitiges Strahlenprisma der dritten Art (ein hohler Flächenwinkel).

173. Eine Ebene wird durch drei Gerade, welche nicht in einem und demselben Punkte sich schneiden, in vier Dreiecke getheilt, von welchen je zwei eine Seite und den ihr gegenüberliegenden Winkel mit einander gemein haben. Je zwei von den drei Geraden bilden nämlich mit einander zwei Winkel, deren jeder durch seinen Schnitt mit der dritten Geraden in zwei Dreiecke getheilt wird. Liegen zwei Punkte in einem und demselben von den vier Dreiecken, so wird von den beiden Strecken, welche sie verbinden, die eine von keiner der drei Geraden und also die andere von jeder derselben geschnitten.

Schneiden sich die drei Geraden in drei eigentlichen Punkten, so ist das eine von den vier Dreiecken ein endliches Dreieck, während die drei übrigen von der fünften Art sind. Sind zwei von den drei Geraden zu einander parallel, so sind zwei von den vier Dreiecken von der zweiten, die beiden übrigen aber von der vierten Art. Schneiden sich nur zwei von den drei Geraden in einem eigentlichen Punkte, so dass also die dritte Gerade die unendlich ferne Gerade der Ebene ist, so sind alle vier Dreiecke von der dritten Art. Ist die Ebene selbst die unendlich ferne Ebene, so sind alle vier Dreiecke von der sechsten Art.

174. Wenn die drei Eckpunkte eines Dreiecks und ein Punkt P, welcher in ihm liegt, oder eine Gerade p, welche mit seinem Umfange keinen Punkt gemein hat, aber mit ihm in einerlei Ebene liegt, gegeben sind, so ist das Dreieck bestimmt. Jede Strecke, welche zwei von den drei gegebenen Eckpunkten verbindet, und von der Geraden, die aus dem dritten Eckpunkte den Punkt P projicirt, geschnitten, oder von der Geraden p nicht geschnitten wird, ist eine Seite des Dreiecks.

Hat man irgend eines von den vier Dreiecken, welche die drei Punkte A, B, C zu Eckpunkten haben, durch ABC bezeichnet, so kann man die drei übrigen, von welchen das eine die Seite AB, das andere die Seite AC und das dritte die Seite BC mit dem erstern gemein hat, durch AB·C, AC·B, BC·A bezeichnen, so dass also von diesen drei letztern Dreiecken das erste und zweite die Seite B·C (oder C·B), das erste und dritte die Seite A·C und das zweite und dritte die Seite A·B gemein haben.

175. Zwei nicht concentrische Winkel ab, ac, welche in einerlei Ebene liegen und einen Schenkel gemein haben, durchschneiden sich in einem Dreiecke, dem jeder Punkt angehört, in welchem ein Strahl des einen Winkels von einem Strahle des andern geschnitten wird. Werden jene Winkel durch p, q und ihre Nebenwinkel durch p_1, q_1 bezeichnet, so kann man die vier Dreiecke, welche die Geraden a, b, c mit einander bilden, durch pq, pq_1, p_1q, p_1q_1 bezeichnen.

176. Wird in einem gewöhnlichen Strahlenbündel, von welchem ein ebenes System ein Schnitt ist, ein Vierkant angenom-

men, so entspricht diesem nur dann ein endliches Viereck, wenn die schneidende Ebene eine eigentliche Ebene ist, und die zu ihr parallele Ebene des Strahlenbündels den Mantel des Vierkants weder berührt noch schneidet. Da aber diese Ebene den Mantel des Vierkants in einer Kante oder in einer Seite berühren oder das Vierkant in zwei Dreikante oder in ein Dreikant und ein Vierkant oder in ein Dreikant und ein Fünfkant oder in zwei Vierkante theilen oder die schneidende Ebene die unendlich ferne Ebene seyn kann, so giebt es acht Arten von ebenen Vierecken, vorausgesetzt, dass nur Vierecke mit ausspringenden Winkeln betrachtet werden. Allgemein ist die Anzahl der verschiedenen Arten von ebenen nEcken, welche lauter ausspringende Winkel haben entweder $\frac{3n+3}{2}$ oder $\frac{3n+4}{2}$, je nachdem nämlich n eine unpare oder pare Zahl ist.

177. Vier Gerade a, b, c, d, welche durch einen und denselben Punkt gehen, von welchen aber keine drei in einerlei Ebene liegen, sind die Kanten von drei Vierkanten abcd, acdb, adbc, deren jedes lauter ausspringende Winkel hat, und von welchen je zwei in zwei einander gegenüberliegenden Seiten an einanderstossen. Man erhält die sechs Seiten dieser drei Vierkante, wenn man je zwei von den vier Geraden dnrch einen ebenen Winkel verbindet, welcher von der durch die beiden übrigen Geraden bestimmten Ebene nicht geschnitten wird. Eben so sind vier Punkte, welche in einerlei Ebene, von welchen aber keine drei in einer und derselben Geraden liegen, die Eckpunkte von drei Vierecken, deren jedes lauter ausspringende Winkel hat, und welche zusammen die ganze Ebene erfüllen.

178. Wenn die Grenze eines Strahlenkegels von keiner Ebene in mehr als zwei Strahlen geschnitten wird, so ist jeder Strahl a seiner Ergänzung die Axe eines um ihn beschriebenen Flächenwinkels. Man kann nämlich eine Ebene, welche durch die Gerade a geht und den Mantel des Strahlenkegels schneidet, in jedem Sinne um jene Gerade sich drehen lassen, bis die Schnittlinien in einander fallen. Geschieht diess bei der Drehung in dem einen Sinne in dem Strahle b und bei der Drehung im andern Sinne in dem Strahle c, so sind ab, ac die Schenkel des er-

wähnten Flächenwinkels. — Würden die drei Geraden a, b, c in einerlei Ebene liegen, so würde diese um jede vierte Gerade, welche durch die beiden letztern von der erstern getrennt, so gedreht werden können, dass sie den Mantel des Strahlenkegels in vier Strahlen schneiden müsste.

Wird der Umfang einer ebenen Figur von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten, so ist jeder Punkt ihrer Ergänzung der Mittelpunkt eines um sie beschriebenen ebenen Winkels, daher die Figur (169), wenn sie auch keine eigentliche Figur ist, doch als die Projektion einer eigentlichen Figur betrachtet werden kann.

179. Wenn der Umfang f einer ebenen Figur F von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten wird, so soll die stetige Aufeinanderfolge g von Geraden, welche die Linie f berühren, der diese Linie oder auch der die Figur F umhüllende Strahlenbüschel genannt werden. Durch den Strahlenbüschel g wird das System von allen in der Ebene befindlichen Geraden in zwei Systeme getheilt, von welchen das eine G von dem Büschel, so wie auch von der Linie f ausgeschlossen ist, das andere G^1 aber unendlich viele Strahlenbüschel erster Ordnung in sich enthält. Eine Gerade, welche nicht in der gemeinschaftlichen Grenze dieser beiden Systeme liegt, gehört dem erstern oder dem letztern an, je nachdem sie die Linie f nicht schneidet oder schneidet. Ist F eine geradlinige Figur, so ist der Büschel g aus den Aussenwinkeln derselben zusammengesetzt. Bildet aber die Linie f keine Ecke, so ist g der ihr sich anschmiegende Strahlenbüschel.

Eine Gerade hat mit der Linie f entweder zwei Punkte A, B oder gar keinen Punkt oder eine Strecke oder einen Punkt gemein, je nachdem sie nämlich in dem Systeme G^1 oder in dem Systeme G enthalten ist, oder die Linie f in einer Strecke oder in einem Punkte berührt. Im ersten Falle wird die Gerade

Ein Strahlenbüschel erster Ordnung hat mit dem Büschel g entweder zwei Strahlen a, b oder gar keinen Strahl oder einen Winkel oder einen Strahl gemein, je nachdem nämlich sein Mittelpunkt in dem Systeme F^1 oder in dem Systeme F enthalten oder ein Eckpunkt der Linie f oder ein anderer durch die beiden Punkte A, B in zwei Strecken getheilt, von welchen die eine in die Figur F beschrieben, die andere aber in der Ergänzung F^1 dieser Figur enthalten ist. In den übrigen Fällen liegt kein Punkt der Geraden in der Figur F.

Punkt derselben ist. Im ersten Falle wird der Strahlenbüschel erster Ordnung durch die beiden Strahlen a, b in zwei Winkel getheilt, von welchen der eine dem Systeme G angehört, der andere aber um die Figur F beschrieben ist. In den übrigen Fällen liegt kein Strahl des Strahlenbüschels in dem Systeme G.

180. In zwei reciproken ebenen Systemen Σ, Σ_1 entspricht jeder Figur F, deren Umfang f von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten wird, ein vom Umfange einer solchen Figur ausgeschlossenes System F_1 von Geraden. Gleichwie nämlich der die Linie f umhüllende Strahlenbüschel g mit einem Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt in der Linie f liegt, entweder nur einen Strahl oder einen Winkel, mit einem andern Strahlenbüschel erster Ordnung aber entweder gar keinen Strahl oder zwei Strahlen gemein hat, so hat die Linie g_1 mit einer Geraden, welche dem Büschel f_1 angehört, entweder nur einen Punkt oder eine Strecke, mit einer andern Geraden aber entweder gar keinen Punkt oder zwei Punkte gemein. Jeder Winkel, welcher um die von der Linie g_1 eingeschlossene Figur G_1 beschrieben ist, entspricht einer Strecke, welche von einer in die Figur F beschriebenen Strecke die Ergänzung ist, u. s. w.

Wenn die Linie f aus m Strecken und n Curven zusammengesetzt ist und r Ecken bildet, so muss die Linie g_1 aus r Strecken und n Curven zusammengesetzt seyn und m Ecken bilden. Ist F ein n Eck, so ist auch G_1 ein n Eck. Jeder Seite des einen entspricht ein Aussenwinkel des andern.

Nimmt man an, dass das zweite Σ_1 von den zu einander reciproken Systemen ein Strahlenbündel ist, so ist G_1 ein Strahlenkegel, dessen Mantel g_1 von keiner Ebene in mehr als zwei Geraden geschnitten wird, und F_1 das von der Fläche g_1 und dem sie umhüllenden Ebenenbüschel ausgeschlossene System von Ebenen. Je zwei Nebenwinkeln, von welcher der eine um die

Figur F beschrieben ist, und also der andere dem Systeme G von Geraden angehört, entsprechen zwei Nebenwinkel, von welchen der eine ein Schnitt des Systems F_1, der andere aber in den Strahlenkegel G_1 beschrieben ist, u. s. w.

181. Es sey wieder F eine ebene Figur, deren Umfang f von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten wird, und G das von der Linie f und den sie umhüllenden Strahlenbüschel g ausgeschlossene System von Geraden.

Dreht sich eine Gerade, welche die Linie f in zwei Punkten schneidet, um einen Punkt, der entweder in der Figur F oder in ihrer Ergänzung liegt, so bewegen sich die Schnittpunkte in der Linie f im letztern Falle im entgegengesetzten Sinne, im erstern Falle aber in einem und demselben Sinne, so dass, wenn die Gerade einen Strahlenbüschel erster Ordnung beschreibt, zuletzt jeder von den beiden Schnittpunkten die anfängliche Stelle des andern einnimmt.

In der Linie f sind zwei Punkte, in welchen sie von einer Geraden geschnitten wird, durch zwei andere solche Punkte getrennt oder nicht getrennt, je nachdem der Schnittpunkt der beiden Geraden in der Figur F oder ausserhalb derselben liegt.

Die Figur F wird durch jede Gerade, welche die Linie f schneidet, (durch jede in sie

Bewegt sich der Mittelpunkt eines um die Figur F beschriebenen Winkels in einer Geraden, welche entweder im Systeme G oder in der Ergänzung desselben enthalten ist, so bewegen sich seine Schenkel in dem Büschel g im letztern Falle im entgegengesetzten Sinne, im erstern Falle aber in einem und demselben Sinne, so dass, wenn der Mittelpunkt des Winkels jene Gerade beschreibt, zuletzt jeder seiner Schenkel die anfängliche Stelle des andern einnimmt.

In dem Büschel g sind die Schenkel eines um die Figur F beschriebenen Winkels durch zwei andere solche Strahlen getrennt oder nicht getrennt, je nachdem die Gerade, welche die Mittelpunkte der beiden Winkel verbindet, dem Systeme G oder seiner Ergänzung angehört.

Das System G wird durch jeden ausserhalb der Figur F befindlichen Punkt (durch den beschriebene Strecke) in zwei Figuren getheilt. Jede Strecke, welche einen Punkt der einen dieser Figuren mit einem Punkte der andern verbindet, und die Linie f nicht schneidet, wird von jener Geraden geschnitten.

Nebenwinkel eines jeden um die Figur F beschriebenen Winkels) in zwei Systeme getheilt. Jede Gerade des einen dieser Systeme bildet mit jeder Geraden des andern zwei Winkel, von welchen der eine die Figur F, der andere aber jenen Punkt in sich enthält.

182. Das System von allen in einer und derselben Ebene befindlichen Geraden wird durch drei Punkte A, B, C, welche nicht in einer und derselben Geraden liegen, in vier Systeme getheilt, deren jedes vom Umfange eines Dreiecks ausgeschlossen ist. Je zwei Gerade, welche einem und demselben von den vier Systemen angehören, können durch einen Winkel verbunden werden, welcher keinen der drei Punkte in sich enthält, während je zwei Gerade, welche verschiedenen Systemen angehören, durch jene Punkte getrennt sind.

Bezeichnet man die vier Dreiecke, welche die drei Punkte A, B, C zu Eckpunkten haben, durch ABC, AB·C, AC·B, BC·A, so kann man durch dieselben Ausdrücke auch die vier Systeme von Geraden bezeichnen. Dem Systeme BC·A von Geraden, welches nämlich vom Umfange des Dreiecks BC·A ausgeschlossen ist, gehört jede Gerade an, welche die beiden Seiten AB, AC des Dreiecks ABC schneidet.

183. Eine Ebene wird als System von Punkten durch n Gerade, von welchen keine drei durch einen und denselben Punkt gehen, in $\frac{n(n-1)}{2}+1$ Systeme getheilt. Ist $n > 2$, so ist jedes dieser Systeme eine geradlinige Figur, welche lauter ausspringende Winkel hat und von keiner der n Geraden ein Stück in sich enthält. Je-

Das System von allen in einer und derselben Ebene befindlichen Geraden wird durch n Punkte, von welchen keine drei in einer und derselben Geraden liegen, in $\frac{n(n-1)}{2}+1$ Systeme getheilt. Ist $n > 2$, so ist jedes dieser Systeme vom Umfange einer geradlinigen Figur ausgeschlossen, welche lauter ausspringende Winkel hat, der Winkel, welchen zwei der n Geraden mit einander bilden, ist von zwei solchen Figuren ein Aussenwinkel.

und diejenigen der n Punkte, welche keine Eckpunkte derselben sind, in sich enthält. Jede Strecke, welche zwei der n Punkte verbindet, ist eine gemeinschaftliche Seite von zwei solchen Figuren.

Der Ausdruck $\frac{n(n-1)}{2}$ stellt die Anzahl der Punkte vor, in welchen die n Geraden sich schneiden. Um sich nun zu überzeugen, dass die Anzahl der Systeme jene Zahl immer um eins übertreffe, darf man nur bemerken, dass diess für $n=2$ (auch für $n=1$) gilt, und dass, wenn zu m Geraden noch eine hinzukommt, jede von den beiden Zahlen um m vermehrt wird, indem die letzte Gerade durch die m Punkte, in welchen sie die m ersten schneidet, in m Strecken getheilt wird, deren jede eines der vorigen Systeme selbst wieder in zwei Systeme theilt. Es lassen sich hieran noch folgende Bemerkungen knüpfen.

I. Wenn die Ebene eine eigentliche Ebene ist, aber unter den n Geraden die unendlich ferne Gerade derselben sich befindet, und die Anzahl der übrigen durch r bezeichnet wird, so ist die Anzahl der ins Unendliche gehenden Figuren $=2r$ und also die Anzahl der endlichen Figuren $= \frac{r(r+1)}{2} + 1 - 2r = \frac{r(r-3)}{2} + 1$.

II. Ist unter den Figuren ein n Eck, so sind die übrigen Figuren n Dreiecke und $\frac{n(n-3)}{2}$ Vierecke.

Je zwei aufeinanderfolgende Aussenwinkel des n Ecks durchschneiden sich in einem Dreiecke, je zwei nicht aufeinanderfolgende Aussenwinkel aber in einem Vierecke.

Jedes System von Geraden, welches zwei aufeinaderfolgende Seiten des n Ecks schneidet, ist vom Umfange eines Dreiecks, jedes System aber, welches zwei nicht aufeinanderfolgende Seiten schneidet, vom Umfange eines Vierecks ausgeschlossen.

III. Ist $n = 4$, so sind die Figuren vier Dreiecke und drei Vierecke.

Die zwölf Seiten der vier Dreiecke sind zugleich die zwölf Seiten der drei Vierecke. Je zwei von den vier Geraden enthalten von einem der drei Vierecke zwei einander gegenüberliegende Seiten, von jedem der beiden übrigen aber zwei aufeinanderfolgende Seiten.

Die zwölf Aussenwinkel der vier Dreiecke sind zugleich die zwölf Aussenwinkel der drei Vierecke. Je zwei von den vier Punkten sind in einem der drei Vierecke zwei einander gegenüberliegende, in jedem der beiden übrigen aber zwei aufeinanderfolgende Eckpunkte.

IV. Ist $n = 5$, so sind die Figuren fünf Dreiecke, fünf Vierecke und ein Fünfeck. Kommt nämlich zu vier Geraden, durch welche die Ebene in vier Dreiecke und drei Vierecke getheilt wird, noch eine fünfte Gerade hinzu, welche die erstern in vier Punkten schneidet, so werden durch die fünfte Gerade zwei von den vier Dreiecken und zwei von den drei Vierecken getheilt. Dass aber nicht jedes von diesen beiden Vierecken in ein Fünfeck und ein Dreieck und auch nicht jedes in zwei Vierecke getheilt werde, folgt aus II und III.

§. 14.

Von den Körpern und den ihnen verwandten Gebilden.

184. Jeder körperliche Raum, welcher keine Linie unparer Ordnung in sich enthält, soll von nun an ein Körper und von der Fläche, welche ihn von dem übrigen Theile des unbegrenzten Raumes trennt, eingeschlossen heissen. Da hiernach der Schnitt eines Körpers mit einer Ebene entweder eine Figur oder der Inbegriff von zwei oder mehrern Figuren ist, und also ausserhalb eines Körpers unendlich viele Linien unparer Ordnung denkbar sind, so folgt, dass die Ergänzung eines Körpers kein Körper ist.

Das Reciproke von einem Körper ist ein von einem Ebenenbündel begrenztes System von Ebenen, welches keinen Ebenenbüschel unparer Ordnung in sich enthält und daher von jenem Ebenenbündel ausgeschlossen heissen soll.

185. Jede Fläche, durch welche der unbegrenzte Raum (als System von Punkten) in zwei Theile P, Q getheilt wird, die in jedem Stücke der Fläche aneinanderstossen, ist (156) von parer Ordnung.

Jeder Ebenenbündel, durch welchen das System von allen im Raume denkbaren Ebenen in zwei Systeme getheilt wird, die den Ebenenbündel zur gemeinschaftlichen Grenze haben, ist von parer Ordnung.

Eine Gerade geht nämlich eben so oft von P in Q als von Q in P über. Ist in dem einen von diesen Raumtheilen eine Ebene enthalten, welche mit der Fläche keinen Punkt gemein hat, so ist der andere, da keine Linie unparer Ordnung in ihm denkbar ist, ein Körper.

186. Durch jede Fläche F, welche von parer Ordnung, aber nicht aus zwei oder mehrern geschlossenen Flächen zusammengesetzt ist, wird das System von allen im Raume denkbaren Punkten in zwei Systeme getheilt. Jede Linie, welche einen Punkt des einen dieser Systeme mit einem Punkte des andern verbindet, hat mit der Fläche F wenigstens einen Punkt gemein.

Durch jeden Ebenenbündel parer Ordnung, welcher nicht aus zwei oder mehrern geschlossenen Ebenenbündeln zusammengesetzt ist, wird das System von allen im Raume denkbaren Ebenen in zwei Systeme getheilt. Jeder Ebenenbüschel, welcher eine Ebene des einen dieser Systeme mit einer Ebene des andern verbindet, hat mit jenem Ebenenbündel wenigstens eine Ebene gemein.

Es sey AB irgend eine Linie, welche die Fläche F in einem Punkte schneidet, so muss auch (158) jede andere Linie, welche den Punkt A mit dem Punkt B verbindet, da sie mit der erstern eine geschlossene Linie bildet, die Fläche F schneiden, woraus hervorgeht, dass durch diese Fläche der Punkt A vom Punkte B getrennt ist, und also der Raum getheilt wird. Da aber jeder Theil von einer geschlossenen Fläche begrenzt seyn muss, und diese keine andere als die Fläche F seyn kann, so folgt, dass es nur zwei Theile sind.

187. In zwei collineären Systemen entspricht jedem Körper

K ein Körper K_1, dessen Oberfläche F_1 der Oberfläche F des erstern entspricht. Hat die Fläche F mit derjenigen Ebene U des erstern Systems, welcher die unendlich ferne Ebene des andern entspricht, keinen Punkt gemein, so ist K_1 ein endlicher (eigentlicher) Körper. Es ist alsdann jeder Punkt in der Ebene U der Mittelpunkt eines um den Körper K beschriebenen Strahlenkegels, dem ein um den Körper K_1 beschriebener Strahlencylinder entspricht, und jede Gerade in der Ebene U die Axe eines um den Körper K beschriebenen Flächenwinkels, dem ein um den Körper K_1 beschriebener Parallelraum entspricht.

Wenn die Fläche F von der Ebene U in einem Punkte B oder in einer Linie oder in einem Stücke berührt wird, so geht der Körper K_1 ins Unendliche. Wenn ferner im ersten von diesen Fällen jede Gerade, welche die Ebene U im Punkte B schneidet, aus zwei Strecken besteht, von welchen die eine in dem Körper K, die andere aber ausserhalb desselben liegt, so wird jede eigentliche Gerade, welche durch den unendlich fernen Punkt B_1 geht, durch den eigentlichen Punkt, in welchem sie die Fläche F_1 schneidet, in zwei Halbstrahlen getheilt, von welchen der eine in dem Körper K_1, der andere aber ausserhalb desselben liegt.

Wird der Körper K durch die Ebene U in zwei Theile getheilt, so besteht der Körper K_1 aus zwei Theilen, welche in einem Stücke der unendlich fernen Ebene aneinanderstossen und also nach der gewöhnlichen Ansicht nicht zusammenhängen.

188. Versteht man unter einem Tetraeder einen von vier Dreiecken eingeschlossenen Körper, so giebt es acht Arten von Tetraedern.

Die Flächen eines Tetraeders können nämlich seyn:

1) Vier endliche Dreiecke, was beim endlichen Tetraeder der Fall ist.
2) Ein endliches Dreieck und drei Dreiecke der zweiten Art.
3) Zwei Dreiecke der zweiten und zwei Dreiecke der dritten Art.
4) Drei Dreiecke der dritten und ein Dreieck der sechsten Art.
5) Zwei Dreiecke der dritten und zwei Dreiecke der vierten Art.

6) Ein Dreieck der zweiten, zwei Dreiecke der vierten und ein Dreieck der fünften Art.

7) Ein endliches Dreieck und drei Dreiecke der fünften Art.

8) Vier Dreiecke der fünften Art.

Denkt man sich ein Tetraeder und eine Ebene, so wird die Ebene entweder mit der Oberfläche des Tetraeders gar keinen Punkt gemein haben, oder diese Fläche in einem Eckpunkte oder in einer Kante oder in einem Dreiecke berühren, oder eine oder zwei oder drei oder vier Kanten des Tetraeders schneiden. Nimmt man nun an, dass die Ebene die unendlich ferne Ebene sey, so führt diess auf die obigen acht Arten von Tetraedern.

189. Der unbegrenzte Raum wird durch vier Ebenen, welche nicht durch einen und denselben Punkt gehen, in acht Tetraeder, jedes von den vier Dreikanten nämlich, welche drei der vier Ebenen mit einander bilden, durch seinen Schnitt mit der vierten Ebene in zwei Tetraeder getheilt. Die acht Tetraeder bilden zwei Gruppen, von welchen jede aus vier Tetraedern besteht, so dass je zwei Tetraeder, welche einer und derselben Gruppe angehören, ein Paar Gegenkanten mit einander gemein haben, je zwei Tetraeder aber, welche nicht einer und derselben Gruppe angehören, in einem Dreiecke an einanderstossen und zusammen ein Dreikant erfüllen. Verbindet man zwei ausserhalb der vier Ebenen befindliche Punkte durch eine Strecke und dann auch durch deren Ergänzung, so wird entweder die eine dieser Strecken von keiner der vier Ebenen und also die andere von jeder derselben, oder jede von zweien, oder die eine von einer und die andere von den drei übrigen geschnitten werden, je nachdem nämlich jene Punkte in einem und demselben Tetraeder oder in zwei Tetraedern einer und derselben Gruppe oder nicht in einer und derselben Gruppe liegen.

Schneiden sich je drei der vier Ebenen in einem eigentlichen Punkte, so besteht die eine Gruppe aus einem endlichen Tetraeder und drei Tetraedern der achten Art, die andere aber aus vier Tetraedern der siebenten Art. Schneiden sich drei von den vier Ebenen in drei zu einander parallelen Geraden, so besteht jede von den beiden Gruppen aus einem Tetraeder der zweiten und drei Tetraeder der sechsten Art. Sind zwei der vier Ebenen zu einander parallel, so besteht jede Gruppe auz zwei Tetraedern der dritten und zwei Tetraedern der fünften Art. Ist unter den vier Ebenen die unendlich ferne Ebene, so sind alle acht Tetraeder von der vierten Art (einfache Dreikante.)

190. Wenn die vier Eckpunkte eines Tetraeders und ein Punkt P, welcher in ihm liegt, oder eine Ebene p, welche mit seiner Oberfläche keinen Punkt gemein hat, gegeben sind, so ist das Tetraeder bestimmt. Jede Strecke, welche zwei von den vier gegebenen Eckpunkten verbindet, und von der Ebene, die durch die beiden übrigen und den Punkt P bestimmt ist, geschnitten oder von der Ebene p nicht geschnitten wird, ist eine Kante des Tetraeders.

Hat man irgend eines der acht Tetraeder, welche die vier Punkte A, B, C, D zu Eckpunkten haben, durch ABCD bezeichnet, so können die drei übrigen Tetraeder derselben Gruppe durch AB·CD, AC·BD, AD·BC und die vier Tetraeder der andern Gruppe durch ABC·D, ABD·C, ACD·B, BCD·A bezeichnet werden, so dass also z. B. das erste und vierte die Kanten AD, BC gemein haben, das erste und letzte aber in dem Dreiecke BCD aneinanderstossen.

191. Drei Flächenwinkel ab, ac, ad, welche einen Schenkel a mit einander gemein haben, deren Axen aber nicht alle drei durch einen und denselben Punkt gehen, durchschneiden sich in einem Tetraeder, dem jeder Punkt angehört, in welchem eine Ebene des ersten, eine Ebene des zweiten und eine Ebene des dritten Winkels sich schneiden. Bezeichnet man die drei Winkel, von welchen je zwei in einem Dreikante sich durchschneiden, dessen Schnitt mit dem dritten jenes Tetraeder ist, durch p, q, r und ihre Nebenwinkel durch p_1, q_1, r_1, so kann man die acht Tetraeder, welche die vier Ebenen a, b, c, d mit einander bilden, durch pqr, pq_1r_1, p_1qr_1, p_1q_1r, pqr_1, pq_1r, p_1qr, $p_1q_1r_1$ bezeichnen, so dass also im letzten die drei Winkel p_1, q_1, r_1 sich durchschneiden.

192. Wenn die Oberfläche F eines Körpers K von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten wird, so gilt diess auch vom Umfange einer jeden ebenen Figur, welche ein Schnitt des Körpers ist. Jeder Punkt M, welcher ausserhalb des Kör-

pers liegt, ist der Mittelpunkt eines um ihn beschriebenen Strahlenkegels, dessen Mantel von keiner Ebene in mehr als zwei Strahlen geschnitten wird. Jede Gerade, welche mit der Oberfläche des Körpers keinen Punkt gemein hat, ist die Axe eines um ihn beschriebenen Flächenwinkels, welcher, wenn die Gerade durch den Punkt M geht, zugleich um jenen Strahlenkegel beschrieben ist. Jede Ebene E, welche durch den Punkt M geht und den Körper K schneidet, enthält einen Winkel, welcher den Punkt M zum Mittelpunkt hat und um den Schnitt beschrieben ist. Lässt man um eine in diesem Winkel liegende feste Gerade die Ebene E sich drehen, so dass sie einen Ebenenbüschel erster Ordnung beschreibt, so beschreiben die Schenkel des Winkels die erwähnte Kegelfläche.

Da es unendlich viele Ebenen giebt, welche die Oberfläche des Körpers K nicht schneiden, so kann man zu demselben, wenn er auch kein endlicher Körper ist, einen ihm collineären endlichen Körper sich denken.

193. Wird die Oberfläche k eines Körpers K von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten, so soll der Inbegriff s von allen Ebenen, welche die Fläche k berühren, der diese Fläche oder auch der den Körper K umhüllende Ebenenbündel genannt werden. Durch den Ebenenbündel k wird das System von allen im Raume denkbaren Ebenen in zwei Systeme getheilt, von welchen das eine S von der Fläche ausgeschlossen und (185) das Reciproke von einem Körper ist, das andere aber unendlich viele Ebenenbündel erster Ordnung in sich enthält. Eine Ebene, welche nicht in der gemeinschaftlichen Grenze dieser beiden Systeme liegt, gehört dem erstern oder dem letztern an, je nachdem sie die Fläche k nicht schneidet oder schneidet. Ist K ein ebenflächiger Körper, welcker n Ecken hat, so ist der Ebenenbündel s aus n Ebenenbündeln, deren jeder vom Mantel einer Strahlenpyramide (von einer Raumecke) ausgeschlossen ist, zusammengesetzt, so dass aber auch noch die Grenzen dieser Ebenenbündel ihm angehören. Wird die Fläche k in jedem ihrer Punkte nur von einer Ebene berührt, so ist s der ihr sich anschmiegende Ebenenbündel. Bezeichnet man das System von Geraden, welche die Fläche k schneiden durch V und das System

von Geraden, welche mit ihr keinen Punkt gemein haben, durch W, so gilt Folgendes:

Jede Gerade des Systems V wird durch die beiden Punkte, in welchen sie die Fläche k schneidet, in zwei Strecken getheilt, von welchen die eine in den Körper K beschrieben ist, die andere aber ausserhalb desselben liegt. Alle Ebenen, welche durch die Gerade gehen, liegen ausserhalb des Systems S.

Jeder Ebenenbüschel I. Ordnung, dessen Axe eine Gerade des Systems W ist, wird durch die beiden Ebenen, welche er mit dem Ebenenbündel s gemein hat, in zwei Winkel getheilt, von welchen der eine dem Systeme S angehört, der andere aber um den Körper K beschrieben ist. Alle Punkte der Geraden liegen ausserhalb des Körpers K.

Liegt eine Gerade h in der gemeinschaftlichen Grenze der beiden Systeme V, W, so hat

das gerade Gebilde h mit der Fläche k entweder α) nur einen Punkt oder β) eine Strecke gemein,

der Ebenenbüschel h mit dem Ebenenbündel s entweder α_1) nur eine Ebene oder β_1) einen Winkel gemein.

Wenn K ein ebenflächiger Körper ist, so findet der Fall $\alpha\alpha_1$ oder $\alpha\beta_1$ oder $\beta\alpha_1$ oder $\beta\beta_1$ statt, je nachdem die Gerade h die Fläche k in einem in einer Kante befindlichen Punkte oder in einem Eckpunkte oder in einer Strecke, welche keine Kante oder eine Kante ist, berührt.

Die gemeinschaftliche Grenze der beiden Systeme V, W hat mit

jeder Ebene, welche ausserhalb des Systems S liegt, einen Strahlenbüschel gemein, der die Linie umhüllt, in welcher die Ebene die Fläche k schneidet.

jedem Strahlenbündel, dessen Mittelpunkt ausserhalb des Körpers K liegt, eine Kegelfläche gemein, welche der dem Strahlenbündel und dem Ebenenbündel s gemeinschaftliche Ebenenbüschel umhüllt.

194. In zwei reciproken Systemen entspricht jedem Körper K, dessen Oberfläche k von keiner Geraden in mehr als zwei

zwei Punkten geschnitten wird, ein von der Oberfläche eines solchen Körpers ausgeschlossenes System K_1 von Ebenen.

Dem von der Fläche k ausgeschlossenen Systeme S von Ebenen entspricht nämlich ein Körper S_1, dessen Oberfläche s_1 dem die Fläche k umhüllenden Ebenenbündel s (der Grenze des Systems S) entspricht. Jeder Geraden, welche die Fläche k schneidet, durch welche also keine Ebene des Bündels s geht, entspricht eine Gerade, welche mit der Fläche s_1 keinen Punkt gemein hat. Jeder Geraden, welche mit der Fläche k keinen Punkt gemein hat, in welcher also zwei Ebenen des Bündels s sich schneiden, entspricht eine Gerade, welche mit der Fläche s_1 zwei Punkte gemein hat. Wenn eine Gerade a die Fläche k berührt, und also der Ebenenbüschel a mit dem Ebenenbündel s entweder nur eine Ebene oder einen Winkel gemein hat, so hat die ihr entsprechende Gerade mit der Fläche s_1 entweder nur einen Punkt oder eine Strecke gemein. Jedem Punkte, welcher in dem Körper K liegt, durch welchen also keine Ebene des Bündels s geht, entspricht eine Ebene, welche mit der Fläche s_1 keinen Punkt gemein hat. Liegt ein Punkt P in der Fläche k, so dass also der Ebenenbündel P erster Ordnung mit dem Ebenenbündel s entweder nur eine Ebene oder einen Winkel oder ein von einer Winkelfläche ausgeschlossenes System von Ebenen gemein hat, so gehört die jenem Punkte entsprechende Ebene P_1, da sie mit der Fläche s_1 entweder nur einen Punkt oder eine Strecke oder eine Figur gemein hat, dem diese Fläche umhüllenden Ebenenbündel an. Jedem Punkte M, welcher ausserhalb des Körpers K liegt und also der Mittelpunkt eines um denselben beschriebenen Strahlenkegels ist, entspricht eine Ebene M_1, welche den Körper S_1 schneidet. Gleichwie nun der Körper S_1 durch die Ebene M_1 (durch seinen Schnitt F_1 mit der Ebene M_1) in zwei Theile getheilt wird, so dass jede Strecke, welche irgend einen Punkt des einen Theils mit irgend einem Punkte des andern verbindet und die Fläche s_1 nicht schneidet, von der Ebene M_1 geschnitten wird, so wird das System S von Ebenen durch den Punks M (durch den von dem Mantel jenes Strahlenkegels ausgeschlossenen Ebenenbündel F) in zwei Systeme getheilt, so dass jede Ebene des einen dieser Systeme mit jeder Ebene des andern zwei Winkel bildet, von welchen der eine den Körper K, der andere aber den Punkt M in sich enthält.

Ist K ein ebenflächiger Körper, so ist auch S_1 ein ebenflächiger Körper. Jeder Kante des einen Körpers entspricht alsdann ein Aussenwinkel des andern, jedem Eckpunkte des einen, in welchem n Kanten zusammenstossen, eine Ebene, welche die Oberfläche des andern in einem n Ecke berührt.

195. Durch vier Punkte A, B, C, D, welche nicht in einerlei Ebene liegen, wird (189) das System von allen im Raume denkbaren Ebenen in acht Systeme getheilt, deren jedes von der Oberfläche eines Tetraeders ausgeschlossen ist, welches jene Punkte zu Eckpunkten hat. Jede Ebene, welche durch keinen der vier Punkte geht, bildet mit jeder andern solchen Ebene zwei Winkel, von welchen entweder der eine gar keinen der vier Punkte und also der andere alle vier, oder jeder zwei oder der eine einen und also der andere drei in sich enthält, je nachdem nämlich die beiden Ebenen in einem und demselben Systeme oder in zwei Systemen einer und derselben Gruppe oder nicht in einer und derselben Gruppe liegen.

Das System ABC·D, welches nämlich von der Oberfläche des Tetraeders ABC·D ausgeschlossen ist, schneidet die drei Kanten AD, BD, CD des Tetraeders ABCD, während das System AB·CD die vier Kanten AC, AD, BC, BD des Tetraeders ABCD schneidet. Jede Ebene des Systems ABCD bildet also mit jeder Ebene des Systems ABC·D zwei Winkel, von welchen der eine die drei Pnnkte A, B, C und der andere den Punkt D in sich enthält, mit jeder Ebene des Systems AB·CD aber zwei Winkel, von welchen der eine die Punkte A, B und der andere die Punkte C, D in sich enthält.

196. Der unbegrenzte Raum wird als System von Punkten durch n Ebenen, von welchen keine drei durch eine und dieselbe Gerade und keine vier durch einen und denselben Punkt gehen, in $n + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$

Das System von allen im Raume denkbaren Ebenen wird durch n Punkte, von welchen keine drei in einer und derselben Geraden und keine vier in einerlei Ebene liegen, in $n + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$ Systeme getheilt. Ist $n > 3$, so

Theile getheilt. Ist $n > 3$, so ist jeder der Raumtheile ein Polyeder, welches lauter ausspringende Winkel und lauter dreikantige Ecken hat, und durch keine der n Ebenen selbst wieder getheilt wird. Jede Ecke eines jeden dieser Polyeder ist von einer Ecke eines andern die Scheitelecke.

ist jedes dieser Systeme von der Oberfläche eines Polyeders ausgeschlossen, welches lauter ausspringende Winkel und lauter dreieckige Flächen hat, und diejenigen von den n Punkten, welnicht Eckpunkte desselben sind, in sich enhält. In jedem Dreiecke, welches drei der n Punkte zu Eckpunkten hat, stossen zwei der Polyeder aneinander.

Um sich zu überzeugen, dass für jeden Werth von n die Anzahl der Raumtheile der Anzahl der Ebenen mehr der Anzahl ihrer Schnittpunkte gleich sey, darf man nur bemerken, dass diess für $n = 3$ (auch für $n = 1$ und $n = 2$) der Fall ist, und dass, wenn zu m Ebenen noch eine hinzukommt, dadurch die Anzahl der Ebenen um 1, die Anzahl ihrer Schnittpunkte um $\frac{m(m-1)}{2}$ und die Anzahl der Raumtheile um die Summe $1 + \frac{m(m-1)}{2}$ sich vermehrt, indem die letzte Ebene (183) durch die Spuren der m erstern in $1 + \frac{m(m-1)}{2}$ Theile getheilt wird, deren jeder einen der vorigen Raumtheile selbst wieder in zwei Theile theilt.

Durch $r+1$ Ebenen, von welchen keine drei durch eine und dieselbe Gerade und keine vier durch einen und denselben Punkt gehen, wird also der Raum in $r + 1 + \frac{(r+1)\,r\,(r-1)}{2.3} = \frac{r(rr+5)}{6} + 1$ Theile getheilt. Ist unter den Ebenen die unendlich ferne Ebene, so dass r also die Anzahl der übrigen bezeichnet, so ist die Anzahl der ins Unendliche gehenden Raumtheile $= r(r-1) + 2$ und also die Anzahl der endlichen $= \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{2.3}$.

§. 15.

Rückkehrelemente.

197. Man nehme an, dass ein Punkt P in einer Geraden P sich bewege, oder die Gerade P in der Ebene P um den Punkt P oder die Ebene P um die Gerade P sich drehe, oder dass auf diese Weise zwei von den drei Elementen P oder alle drei zugleich sich bewegen. Hat nun der Punkt P sich bewegt und in der Stelle B den Sinn seiner Bewegung in der Geraden P geändert, so soll der Punkt B ein Rückkehrpunkt der vom Punkte P beschriebenen Linie oder auch, wenn diese krumm ist (die Gerade P zugleich um den Punkt P sich gedreht hat), eine Spitze derselben genannt werden. Hat die Gerade P sich gedreht und in der Stelle B den Sinn der Drehung geändert, so ist die Gerade B ein Rückkehrstrahl der von der Geraden P beschriebenen Regelfläche. Wenn endlich die Ebene P sich gedreht und in der Stelle B den Sinn der Drehung geändert hat, so ist die Ebene B eine Rückkehrebene des von der Ebene P beschriebenen Ebenenbüschels. Der Mittelpunkt eines Rückkehrstrahles in einem Strahlenbüschel, welcher einer ebenen Curve sich anschmiegt, heisst auch ein Wendepunkt dieser Curve.

198. Bezeichnet man den Fall, in welchem ein Element B kein Rückkehrelement ist, durch $-$, den Fall aber, in welchem dasselbe ein Rückkehrelement ist, durch $+$, so muss in Hinsicht auf jeden Punkt B einer ebenen Curve s und den dazu gehörigen Strahl B des ihr sich anschmiegenden Strahlenbüschels s einer von den vier Fällen

$$--,\ -+,\ +-,\ ++$$

Statt finden. Der Punkt B ist im ersten Falle ein gewöhnlicher Punkt der Curve, im zweiten ein gewöhnlicher Wendepunkt, im dritten eine gewöhnliche Spitze und im vierten, in welchem sowohl der Punkt B ein Rückkehrpunkt der Curve s als auch der Strahl B ein Rückkehrstrahl des Büschel s ist, Spitze und Wendepunkt zugleich. Die Curve s wird im $\left\{\begin{matrix}\text{ersten}\\ \text{dritten}\end{matrix}\right\}$ Falle im Punkte B von der Geraden B $\left\{\begin{matrix}\text{berührt}\\ \text{geschnitten}\end{matrix}\right\}$, von jeder andern durch den

Punkt B gehenden Geraden aber in ihm $\left\{\begin{matrix}\text{geschnitten}\\ \text{berührt}\end{matrix}\right\}$. Im $\left\{\begin{matrix}\text{zweiten}\\ \text{vierten}\end{matrix}\right\}$ Falle wird die Curve von jeder durch den Punkt B gehenden Geraden in diesem Punkte $\left\{\begin{matrix}\text{geschnitten}\\ \text{berührt}\end{matrix}\right\}$. Im ersten Falle heisst die Curve im Punkte B auf der Seite, auf welcher sie von der Geraden B berührt wird, erhaben, auf der entgegengesetzten Seite aber hohl.

Wenn der Curve s in dem einen von zwei reciproken ebenen Systemen der Strahlenbüschel s_1 im andern und also dem Strahlenbüschel s die Curve s_1 entspricht, und in Hinsicht auf den Punkt B und den Strahl B der Fall xy Statt findet, so findet in Hinsicht auf den dieser Geraden entsprechenden Punkt B_1 der Curve s_1 und den dazu gehörigen Strahl des Büschels s_1 der Fall yx Statt, daher die Anzahl der Wendepunkte in einer jeden von den beiden Curven der Anzahl der Rückkehrpunkte in der andern gleich ist. In collineären Systemen ist in dieser Beziehung zwischen zwei einander entsprechenden Fällen nie ein Unterschied.

Bezeichnet xy eine Combination aus den Zeichen $-$, $+$, so soll unter $\overline{xy}$ das Zeichen $-$ oder $+$ verstanden werden, je nachdem die Anzahl der in der Combination enthaltenen $-$ Zeichen eine unpare oder pare Zahl ist.

199. Bildet in einer Ebene eine krumme Linie eine Ecke, so wird sie in dem Eckpunkte von den Geraden, welche in ihm sich ihr anschmiegen, entweder berührt oder geschnitten oder von der einen berührt und von der andern geschnitten. Im letztern Falle ist der Eckpunkt zugleich ein Wendepunkt.

Ist von zwei aufeinanderfolgenden Stücken AB, BC das eine auf der einen Seite, das andere aber auf der entgegengesetzten Seite der Linie hohl, so muss der Punkt B ein Wendepunkt derselben seyn.

200. Wenn in einer Ebene die eine P von zwei sich schneidenden Geraden, um einen ausserhalb der andern Q befindlichen Punkte P sich drehend, einen Strahlenbüschel beschreibt, so beschreibt der Schnittpunkt Q der beiden Geraden eine Linie. Je-

der Rückkehrpunkt dieser Linie liegt in einem Rückkehrstrahle jenes Büschels. Es wird hiebei vorausgesetzt, dass der Punkt P entweder fest sey oder nur in der um ihn sich drehenden Geraden P sich bewege, und dass die Gerade Q entweder gar nicht oder nur um den in ihr sich bewegenden Punkt Q sich drehe.

201. Es bezeichne wieder xy den Fall, welcher in Hinsicht auf einen Punkt B einer ebenen Curve s und den dazu gehörigen Strahl B des ihr sich anschmiegenden Strahlenbüchels s Statt findet.

Beschreibt ein Punkt die Curve s, so beschreibt die Gerade, welche ihn mit einem festen Punkte S verbindet, einen Strahlenbüschel, der von der Curve ein Schein ist. In Hinsicht auf denjenigen Strahl dieses Büschels, welcher den Punkt B projicirt, findet der Fall x oder $\overline{xy}$ oder y Statt, je nachdem der Punkt S ausserhalb der Geraden B liegt, oder ein vom Punkte B verschiedener Punkt dieser Geraden oder der Punkt B selbst ist.

Beschreibt ein Strahl den Büschel s, so beschreibt seine Spur in jeder festen Geraden S_1 eine Linie, welche ein Schnitt des Strahlenbüschels ist. In Hinsicht auf denjenigen Punkt dieser Linie, welcher von dem Strahle B die Spur ist, findet der Fall y oder $\overline{xy}$ oder x Statt, je nachdem die Gerade S_1 die Gerade B in einem vom Punkte B verschiedenen Punkte oder im Punkte B schneidet, oder die Gerade B selbst ist.

202. Jedes geschlossene Gebilde, welche in einem einförmigen Grundgebilde enthalten ist, hat eine pare Anzahl von Rückkehrelementen. Hat z. B. in einer festen Geraden ein Punkt von A aus sich bewegt und den Sinn der Bewegung n mal geändert, so hat er zuletzt, wenn n eine pare Zahl ist, in dem anfänglichen, im entgegengesetzten Falle aber in dem entgegengesetzten Sinne sich bewegt. Ist nun die vom Punkte beschriebene Linie geschlossen, so ist der Punkt A als ein in ihr liegender Punkt im erstern der erwähnten Fälle kein Rückkehrpunkt, im letztern aber ein Rückkehrpunkt, und mithin in jedem Falle die Anzahl aller Rückkehrpunkte eine pare Zahl.

203. Eine geschlossene ebene Curve s, der also ein geschlos-

sener Strahlenbüschel s sich anschmiegt, hat eine pare oder unpare Anzahl von

Wendepunkten, je nachdem sie von parer oder unparer Ordnung ist.	Rückkehrpunkten, je nachdem der Strahlenbüschel s von parer oder unparer Ordnung ist.

Wenn nämlich die Curve m Wendepunkte hat, und von einer Geraden u, welche weder durch einen dieser Punkte geht, noch dem Strahlenbüschel s angehört, in n Punkten geschnitten wird, so enthält (201) der Schnitt dieses Büschels mit der Geraden u $m + n$ Rückkehrpunkte, woraus man (202) schliessen kann, dass die Zahlen m, n entweder beide pare oder beide unpare Zahlen sind.

204. Wenn in Hinsicht auf einen Punkt B einer ebenen Curve und den dazu gehörigen Strahl B des ihr sich anschmiegenden Strahlenbüschels der Fall xy Statt findet, und $\overline{xy}$ durch y_1 bezeichnet ($=y_1$ gesetzt) wird, so kann man an der Combination xy_1, in welcher das Zeichen $-$ Schneiden, das Zeichen $+$ aber Berühren bedeutet, sogleich erkennen, ob die Curve von einer durch den Punkt B gehenden Geraden in diesem Punkte geschnitten oder berührt wird. Das erstere Zeichen in der Combination bezieht sich auf eine von B verschiedene Gerade, das letztere aber auf diese Gerade. Will man umgekehrt aus der Combination xy_1 die Combination xy ableiten, so darf man nur bemerken, dass $y = \overline{xy_1}$ ist. Es sey z. B. $xy_1 = - -$, so dass also die Curve von jeder durch den Punkt B gehenden Geraden in diesem Punkte geschnitten wird, so ist $xy = - +$ und mithin der Punkt B ein gewöhnlicher Wendepunkt. Es sind hiedurch die in 198 enthaltenen Sätze unter ein einfaches Gesetz gebracht.

205. In Hinsicht auf einen Punkt B einer gewundenen Curve s, den dazu gehörigen Strahl B der ihr sich anschmiegenden Regelfläche und die dazu gehörige Ebene des beiden Gebilden sich anschmiegenden Ebenenbüschels muss einer von den acht Fällen

$$- - -,\ - - +,\ - + -,\ - + +$$
$$+ - -,\ + - +\quad + + -,\ + + +$$

Statt finden. Im ersten Falle heisst der Punkt B ein gewöhnlicher Punkt der Curve.

Wenn der Fall, welcher Statt findet, durch xyz bezeichnet wird, und dem Ebenenbüschel s in dem einen von zwei reciproken Systemen die Curve s_1 im andern entspricht, so findet in Hinsicht auf den der Ebene B entsprechenden Punkt B_1 der Curve s_1, den dazu gehörigen Strahl der ihr sich anschmiegenden Regelfläche und die dazu gehörige Ebene des beiden Gebilden sich anschmiegenden Ebenenbüschals der Fall zyx Statt.

206. Wenn in Hinsicht auf den Strahl B einer abwickelbaren Regelfläche und die Ebene B des ihr sich anschmiegenden Ebenenbüschels der Fall yz Statt findet, und $\overline{yz} = z^1$ gesetzt wird, so erkennt man an der Combination yz^1, in welcher das Zeichen — Schneiden, das Zeichen + aber Berühren bedeutet, ob die Fläche von einer durch die Gerade B gehenden Ebene in dieser Geraden geschnitten oder berührt wird. Das letztere Zeichen in der Combination bezieht sich auf die Ebene B, das erstere aber auf eine andere durch die Gerade B gehende Ebene.

Es ist hier ganz einerlei, ob ein die Fläche beschreibender Strahl um einen festen Punkt oder um einen in ihm sich bewegenden Punkt sich dreht. Im erstern Falle, in welchem die Fläche eine Kegelfläche ist, entspricht der Satz dem in 204 enthaltenen.

207. Wenn in Hinsicht auf den Punkt B einer gewundenen Curve s, den Strahl B der ihr sich anschmiegenden Regelfläche s und die Ebene B des beiden Gebilden sich anschmiegenden Ebenenbüschels s der Fall xyz Statt findet, und $\overline{xy} = y_1$, xyz (oder $\overline{y_1 z}$) $= z_1$ ist, so erkennt man an der Combination xy_1z_1, in welcher das Zeichen — Schneiden, das Zeichen + aber Berühren bedeutet, ob die Curve von einer durch den Punkt B gehenden Ebene in diesem Punkte geschnitten oder berührt wird. Das letzte Zeichen in der Combination bezieht sich auf die Ebene B, das mittlere auf eine andere durch die Gerade B gehende Ebene b und das erste auf eine Ebene a, welche die Gerade B im Punkte B schneidet. Ist z. B. $xyz = - - -$ und folglich $xy_1z_1 = - + -$, so wird die Curve im Punkte B von den Ebenen a, B geschnitten, von der Ebene b aber berührt. Ist $xyz = - + +$ und folglich $xy_1z_1 = - - -$, so wird

die Curve von jeder durch den Punkt B gehenden Ebene in diesem Punkte geschnitten.

Will man aus der Combination xy_1z_1 die Combination xyz ableiten, so darf man nur bemerken, dass $y = \overline{xy_1}$ und $z = \overline{y_1z_1}$ ist. Wenn z. B. die Curve im Punkte B von der Ebene B berührt, von jeder andern durch ihn gehenden Ebene aber geschnitten wird, und also $xy_1z_1 = - - +$ ist, so ist $xyz = - + -$.

208. Es bezeichne wieder xyz den Fall, welcher in Hinsicht auf einen Punkt B einer gewundenen Curve s, den Strahl B der ihr sich anschmiegenden Regelfläche und die Ebene B des beiden Gebilden sich anschmiegenden Ebenbüschels Statt findet.

Beschreibt ein Punkt P die Curve s, so beschreibt die Ebene h P, welche den Punkt mit einer festen Gerade verbindet, den Ebenenbüschel, welcher die Curve aus der Axe h projicirt.

In Hinsicht auf die Ebene h B dieses Büschels, welche nämlich den Punkt B der Curve projicirt, findet der Fall x oder $\overline{xy}$ oder y oder z oder $\overline{yz}$ oder $\overline{xyz}$ statt, je nachdem die Gerade h die Ebene B in einem ausserhalb der Geraden B befindlichen Punkte, oder in einem vom Punkte B verschiedenen Punkte der Geraden B oder im Punkte B schneidet, oder die Gerade B oder eine andere durch den Punkt B gehende Gerade der Ebene B oder eine nicht durch den Punkt B gehende Gerade der Ebene B ist. In den drei letztern Fällen fällt die Ebene h B mit der Ebene B zusammen.

Beschreibt eine Ebene P den Ebenenbüschel s, so beschreibt ihre Spur h P in einer festen Geraden h die Linie, in welcher der Ebenenbüschel von der Geraden h geschnitten wird.

In Hinsicht auf den Punkt h B dieser Linie, welcher nämlich der Schnittpunkt der Geraden h mit der Ebene B ist, findet der Fall z oder $\overline{yz}$ oder y oder x oder $\overline{xy}$ oder $\overline{xyz}$ statt, je nachdem die Gerade h die Ebene B in einem ausserhalb der Geraden B befindlichen Punkte oder in einem vom Punkte B verschiedenen Punkte der Geraden B schneidet, oder, ohne durch den Punkt B zu gehen, in der Ebene B liegt, oder die Gerade B oder eine andere durch den Punkt B gehende Gerade der Ebene B oder eine durch den Punkt B gehende, aber ausserhalb der Ebene B befindliche Gerade ist. In den drei letztern Fällen fällt der Punkt h B mit dem Punkte B zusammen.

Wenn z. B. h die Gerade B ist, und der Punkt P bei seinem Durchgange durch den Punkt B von der einen Seite der Ebene B auf die andere Seite dieser Ebene und in der Ebene hP von der einen Seite der Geraden h auf die andere Seite dieser Geraden übergeht, oder auch, wenn weder das eine noch das andere der Fall ist, so muss die Ebene B eine Rückkehrebene des Büschels h seyn.

209. Angenommen dass s, B, xyz das Vorige bedeuten, so werden

die Curve s und die Regelfläche s aus jedem Punkte M durch eine Kegelfläche S und den derselben sich anschmiegenden Ebenenbüschel S projicirt. In Hinsicht auf den Strahl MB der Kegelfläche, welcher nämlich den Punkt B projicirt, und die ihm zugehörige Ebene MB des Ebenenbüschels S findet der Fall yz oder $\overline{xy}z$ oder $x\overline{yz}$ oder xy statt, je nachdem der Punkt M der Punkt B oder ein anderer Punkt der Geraden B oder ein ausserhalb dieser Geraden befindlicher Punkt der Ebene B ist, oder ausserhalb dieser Ebene liegt. In den drei ersten Fällen fällt die Ebene MB mit der Ebene B, in den beiden ersten auch die Gerade MB mit der Geraden B zusammen.

die Regelfläche s und der Ebenenbüschel s von jeder Ebene N in einer Curve K und dem derselben sich anschmiegenden Strahlenbüschel K geschnitten. In Hinsicht auf den Punkt NB der Curve K, in welchem nämlich die Ebene N von der Geraden B geschnitten wird, und den ihm zugehörigen Strahl des Büschels K findet der Fall xy oder $x\overline{y}z$ oder $\overline{xy}z$ oder yz statt, je nachdem die Ebene N die Ebene B oder eine andere durch die Gerade B gehende Ebene ist, oder diese Gerade im Punkte B oder in einem andern Punkte schneidet. In den drei ersten Fällen fällt der Punkt NB mit dem Punkte B, in den beiden ersten auch die Gerade NB mit der Geraden B zusammen.

210. Eine Curve $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung wird aus jedem Punkte, welcher in ihr liegt, aber

Ein Ebenenbüschel $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\\text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, der einer Regelfläche sich anschmiegt, wird von jeder kein Rückkehrpunkt derselben ist, durch eine Winkelfläche $\left\{\begin{matrix}\text{unparer}\\ \text{parer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, aus jedem Rückkehrpunkte aber durch eine Winkelfläche $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung projicirt.

Ebene, die ihm angehört, aber keine Rückkehrebene desselben ist, in einem Strahlenbüschel $\left\{\begin{matrix}\text{unparer}\\ \text{parer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung, von jeder Rückkehrebene aber in einem Strahlenbüschel $\left\{\begin{matrix}\text{parer}\\ \text{unparer}\end{matrix}\right\}$ Ordnung geschnitten.

Wenn nämlich eine Ebene, welche durch den Punkt S der Curve, aber nicht durch die in diesem Punkte derselben sich anschmiegende Gerade geht, die Curve in n Punkten schneidet, so schneidet sie die Fläche, welche aus dem Punkte S die Curve projicirt, in n oder n — 1 Strahlen, je nachdem der Punkt S ein Rückkehrpunkt oder kein Rückkehrpunkt der Curve ist.

211. Die Anzahl m der Rückkehrpunkte einer geschlossenen gewundenen Curve s ist eine pare oder unpare Zahl, je nachdem die der Curve sich anschmiegende Regelfläche s von parer oder unparer Ordnung ist. Dasselbe gilt von der Anzahl n der Rückkehrebenen des der Regelfläche s sich anschmiegenden Ebenenbüschels s.

Die Regelfläche s wird nämlich nach 209 von jeder Ebene, welche durch keinen Strahl derselben geht, in einer Curve geschnitten, welche n Wendepunkte hat, woraus (203) der letztere Satz folgt. Es ist aber hiedurch auch der erstere (reciproke) Satz bewiesen. 167.

212. Die Anzahl r der Rückkehrstrahlen einer geschlossenen Regelfläche s, welche einer gewundenen Curve sich anschmiegt, ist eine pare Zahl, wenn die Curve s und der ihr sich anschmiegende Ebenenbüschel entweder beide von parer oder beide von unparer Ordnung sind. Ist aber das eine von diesen beiden Gebilden von parer und das andere von unparer Ordnung, so ist r eine unpare Zahl.

Es werde die Curve s von einer Ebene, welche weder durch einen ungewöhnlichen Punkt der Curve noch durch einen Strahl der Regelfläche s geht, in n Punkten geschnitten, so hat (209) die Curve K, in welcher die Regelfläche s von jener Ebene geschnitten wird, n + r Rückkehrpunkte, woraus man (203) schliessen kann, dass der der Curve K sich anschmiegende Strahlenbüschel und mithin auch (165) der Ebenenbüschel s von parer oder unparer Ordnung sey, je nachdem n + r eine pare oder unpare Zahl ist.

---

§. 16.

Involutionen.

213. Wenn in zwei zu einander projektivischen Grundgebilden je zwei homologe Elemente P, P_1 einander doppelt (abwechselnd) entsprechen, nämlich dem Elemente P des einen Gebildes das Element P_1 des andern und dem Elemente P_1 des erstern das Element P des letztern entspricht, so heissen die Gebilde involutorisch liegend ($\overline{\wedge}$). Es wird hiebei vorausgesetzt, dass die zu einander projektivischen Grundgebilde nicht alle ihre Elemente entsprechend gemein haben, aber doch jedes Element des einen auch ein Element des andern sey.

Gewöhnlich wird von zwei involutorisch liegenden Gebilden nur wie von einem Gebilde gesprochen, dessen Elemente involutorisch gepaart seyen, daher das Gebilde, wenn in ihm je zwei einander zugeordnete Elemente mit einander vertauscht werden, so dass dasjenige, welches vorher als das erstere betrachtet wurde, alsdann als das letztere erscheint, dieser seiner Permutation projektivisch sey. Sind z. B. AA_1, BB_1, CC_1 drei Elementenpaare, so ist $AA_1BB_1CC_1 \wedge A_1AB_1BC_1C$, $AB_1CA_1BC_1 \wedge A_1BC_1AB_1C$ u. s. w.

214. Zwei ungleichartige einförmige Gebilde oder ein ebenes System U und ein Strahlenbündel S, welche zu einander projektivisch sind, sollen involutorisch liegend heissen, wenn das eine Gebilde mit einem Schnitte des andern involutorisch liegt. Entspricht dem Elemente P des ebenen Systems das Element SP_1 des Strahlenbündels, welches nämlich die Ebene U in P_1 schneidet, so muss, wenn die Gebilde involutorisch liegen, dem Elemente P_1 des ebenen Systems das Element SP des Strahlenbündels entsprechen. Liegen ein gerades Gebilde u und ein Ebenen-

büschel s, welche zu einander projektivisch sind, involutorisch, so muss, wenn dem Punkte P des geraden Gebildes die Ebene sP_1 des Büschels entspricht, welche die Gerade u in dem Punkte P_1 schneidet, diesem Punkte des erstern Gebildes die Ebene sP des letztern entsprechen.

215. Wenn in zwei zu einander projektivischen einförmigen Gebilden irgend zwei Elemente A, A_1 einander doppelt entsprechen, so liegen die Gebilde involutorisch.

Wenn nämlich B ein drittes Element des einen Gebildes und B_1 das ihm entsprechende Element des andern ist, so muss, weil (119) $AA_1BB_1 \barwedge A_1AB_1B$ ist, auch dem Elemente B_1 des erstern Gebildes das Element B des letztern entsprechen. Da alsdann ferner dem Stücke ABA_1 das Stück A_1B_1A entspricht, so folgt noch, dass die beiden Gebilde entweder gar kein Element oder zwei Elemente entsprechend gemein haben, je nachdem nämlich die Elemente A, A_1 durch die Elemente B, B_1 getrennt oder nicht getrennt sind. 112.

Sind ein gerades Gebilde und ein Ebenenbüschel, desses Axe das gerade Gebilde nicht schneidet, projektivisch so aufeinander bezogen, dass von irgend zwei Punkten A, A_1 des geraden Gebildes jeder in der dem andern entsprechenden Ebene des Büschels liegt, so liegen die Gebilde involutorisch. Das gerade Gebilde enthält alsdann entweder gar keinen Punkt, welcher in der ihm entsprechenden Ebene des Büschels liegt, oder zwei solche Punkte, je nachdem nämlich der Winkel, welcher aus der Axe des Büschels die Strecke AA_1 projicirt, der Strecke $A_1 \cdot A$ oder der Strecke A_1A entspricht.

216. Ein involutorisches einförmiges Gebilde enthält entweder (215) gar kein Element, welches mit dem ihm zugeordneten Elemente zusammenfällt, oder zwei Elemente (Ordnungselemente), deren jedes sich selbst zugeordnet ist, je nachdem nämlich zwei einander zugeordnete Elemente durch zwei andere solche Elemente getrennt oder nicht getrennt sind. Im letztern Falle sind (118) die Ordnungselemente M, N durch je zwei einander zugeordnete Elemente P, P_1, da $MNPP_1 \barwedge MNP_1P$ ist, harmonisch getrennt.

217. Will man die Elemente eines einförmigen Grundgebildes

projektivisch paaren (das Gebilde als ein involutorisches betrachten), so kann man in ihm (nach 110 und 215) zwei Paare $A A_1$, $B B_1$ oder ein Paar $A A_1$ und ein Ordnungselement M, oder zwei Ordnungselemente nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente P ein Element P_1 zugeordnet ist. Werden im letztern Falle die Elemente M, N durch zwei Elemente A, A_1 harmonich getrennt, so ist derselbe auf den vorletzten zurückgeführt.

218. Wenn von zwei zu einander projektivischen Gebilden $A B C \ldots$, $A_1 B_1 C_1 \ldots$, deren jedes nur aus einzelnen Elementen besteht, gesagt wird, dass sie involutorisch liegen, so heisst diess nichts anderes, als dass sie homologe Gebilde von zwei involutorisch liegenden projektivischen Grundgebilden sind.

Ist nur von Elementen eines und desselben einförmigen Grundgebildes die Rede, so ist (215) die Aussage $A B C \barwedge A_1 B_1 C_1$ mit der Aussage $A A_1 B C \barwedge A_1 A B_1 C_1$, die Aussage $M A B \barwedge M A_1 B_1$ mit der Aussage $M A A_1 B \barwedge M A_1 A B_1$ und die Aussage $M N A \barwedge M N A_1$ mit der Aussage, dass $M A N A_1$ ein harmonisches Gebilde ($\barwedge M A_1 N A$) sey, ganz übereinstimmend. Ferner kann alsdann aus $A B C \barwedge A_1 B_1 C_1$ und $A B D \barwedge A_1 B_1 D_1$ auf $A B C D \barwedge A_1 B_1 C_1 D_1$, aus $M A B \barwedge M A_1 B_1$ und $M B C \barwedge M B_1 C_1$ auf $M A B C \barwedge M A_1 B_1 C_1$ und aus $M N A \barwedge M N A_1$ und $M N B \barwedge M N B_1$ auf $M N A B \barwedge M N A_1 B_1$ geschlossen werden.

219. Der Inbegriff von drei oder auch mehr als drei Elementenpaaren eines involutorischen einförmigen Grundgebildes heisst eine Involution. Wenn also die einförmigen Gebilde $A A_1 B C$, $A_1 A B_1 C_1$ zu einander projektivisch sind, so ist $A A_1 . B B_1 . C C_1$ eine Involution. Sind die einförmigen Gebilde $M A A_1 B$, $M A_1 A B_1$ zu einander projektivisch, so ist $M . A A_1 . B B_1$ eine Involution, in welcher das Element M die Stelle eines Paares vertritt. Ist $M A N A_1$ ein harmonisches Gebilde, so ist $M . N . A A_1$ eine Involution, in welcher jedes von den beiden Elementen M, N die Stelle eines Paares vertritt.

Durch zwei Elementenpaare einer Involution und ein Element eines dritten Paares ist auch das andere Element dieses Paares bestimmt. — Wenn von beliebig vielen Elementenpaaren eines einförmigen Gebildes das dritte mit den beiden ersten und jedes folgende mit zwei vorhergehenden eine Involution bildet, so bilden (218) alle und also auch je drei eine Involution. — Jeder Involution in dem einen von zwei zu einander projektivischen Gebilden entspricht (103) eine Involution im andern, daher namentlich jede Involution von Punkten aus jedem ausserhalb der Geraden befindlichen Mittelpunkte durch eine Involution von Strahlen projicirt wird.

220. Sucht man zu den drei Elementen A, B, C eines einförmigen Grundgebildes in jeder Anordnung das vierte harmonische Element, so erhält man drei andere Elemente, zu welchen in jeder Anordnung eines der drei erstern das vierte harmonische Element ist. Auch können die sechs Elemente auf viererlei Art zu einer Involution gepaart werden.

Wenn nämlich $ABCB_1$, $BCAC_1$, $CABA_1$ harmonische Gebilde sind, so ist (117) $ABCB_1 \barwedge ACBC_1$ und folglich (219) $A.BC.B_1C_1$ eine Involution, daher die Elemente A, A_1, welche durch die Elemente B, C harmonisch getrennt sind, auch durch die Elemente B_1, C_1 harmonisch getrennt seyn müssen. Eben so wird bewiesen, dass $A_1B_1C_1B$, $B_1C_1A_1C$ harmonische Gebilde sind. Da hiernach $AA_1BC \barwedge A_1AB_1C_1 \barwedge A_1AC_1B_1$, so sind $AA_1.BB_1.CC_1$, $AA_1.BC_1.B_1C$ und eben so $BB_1.AC_1.A_1C$, $CC_1.AB_1.A_1B$ Involutionen.

221. Werden in einer Ebene ein gerades Gebilde u, ein Strahlenbüschel H und ein Dreieck EFG angenommen, von welchem kein Eckpunkt in der Geraden u liegt und keine Seite durch den Punkt H geht, und alsdann das gerade Gebilde u und der Strahlenbüschel H projektivisch so aufeinander bezogen, dass den drei Punkten A, B, C des erstern Gebildes, welche von den Seiten EF, FG, GE des Dreiecks die Spuren sind, die drei Strahlen HG, HE, HF des letztern entsprechen, welche die jenen Seiten gegenüberliegenden Eckpunkte projiciren, so liegen die beiden Gebilde, wenn die Gerade u nicht durch den Punkt H geht, involutorisch. Geht aber die Gerade u durch den Punkt H, so entspricht diesem Punkte des geraden Gebildes der Strahl u des Strahlenbüschels. — Es schneide der Strahl HG die Gerade u im Punkte A_1 und die Gerade EF im Punkte K. Da nun der Strahlenbüschel H(GEFA) dem geraden Gebilde KEFA, also

auch dem geraden Gebilde $A_1 C B A$, welches vom erstern eine Projektion aus dem Punkte G ist, mithin auch (119) dem geraden Gebilde $A B C A_1$ projektivisch ist, so entspricht dem Punkte A_1 des geraden Gebildes u der Strahl HA des Büschels H, woraus (215) der Satz folgt.

Anm. Der Begriff n Eck wird in diesem § wieder in der Bedeutung von 79 genommen.

222. Die Seiten eines vollständigen ebenen Vierecks EFGH werden (221) von einer jeden Geraden, welche mit ihm in einerlei Ebene liegt, aber durch keinen seiner Eckpunkte geht, in einer Involution, nämlich je zwei Gegenseiten in zwei einander zugeordneten Punkten geschnitten.

Die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits werden aus jedem Punkte, welcher mit ihm in einerlei Ebene, aber in keiner seiner Seiten liegt, durch eine Involution, nämlich je zwei Gegenpunkte durch zwei einander zugeordnete Strahlen projicirt.

Wenn also zwei Vierecke aufeinander bezogen sind, und eine Gerade, welche durch keinen Eckpunkt derselben geht, von den vier Seiten und einer Diagonale des einen in denselben Punkten geschnitten wird, in welchen die homologen Seiten und irgend eine Diagonale des andern sich schneiden, so wird sie auch von den beiden übrigen Diagonalen in einem und demselben Punkte geschnitten. Ein besonderer Fall von diesem Satze heisst:

Wenn zu den vier Seiten eines Vierecks die vier Seiten eines andern der Ordnung nach parallel sind, und überdiess zu einer Diagonale des erstern irgend eine Diagonale des letztern parallel ist, so sind auch die beiden übrigen Diagonalen zu einander parallel.

223. Sind zwei Punkte M, N durch je zwei Gegenseiten eines Vierecks harmonisch getrennt, so sind sie entweder auch durch die beiden Diagonalen harmonisch getrent, oder sie liegen

Sind zwei Gerade durch je zwei Gegenpunkte eines Vierecks harmonisch getrennt, so sind sie entweder auch durch die beiden Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten sich in einer und derselben Diagonale. Folgt aus 219 und 222.

Wenn daher je zwei Gegenseiten eines vollständigen Vierecks durch zwei andere Gerade harmonisch getrennt werden, und von diesen sechs andern Geraden drei in einem und demselben Punkte M sich schneiden, so gehen auch die drei übrigen durch einen und denselben Punkt N.

224. Durch zwei projektivische gerade Gebilde s, s_1, welche in einerlei Ebene, aber nicht in einer und derselben Geraden liegen, ist eine Gerade v bestimmt, welche nämlich, wenn das eine von den beiden geraden Gebilden aus einem beliebigen Punkte des andern und das andere aus dem homologen Punkte des erstern projicirt wird, von je zwei homologen Strahlen der zu einander projektivischen Strahlenbüschel in einem und demselben Punkte geschnitten wird.

schneiden, harmonisch getrennt, oder sie schneiden sich selbst in einem dieser Punkte.

Wenn daher je zwei Gegenpunkte eines vollständigen Vierseits durch zwei andere Punkte harmonisch getrennt werden, und von diesen sechs andern Punkten drei in einer und derselben Geraden liegen, so liegen auch die drei übrigen in einer und derselben Geraden.

Durch zwei projektivische Strahlenbüschel S, S_1, welche in einerlei Ebene liegen, aber nicht concentrisch sind, ist ein Punkt V bestimmt, welcher nämlich, wenn der eine von den beiden Büscheln von einem beliebigen Strahle des andern und der andere von dem homologen Strahle des erstern geschnitten wird, mit je zwei homologen Punkten der zu einander projektivischen Schnitte in einer und derselben Geraden liegt.

Es entspreche der Schnittpunkt P_1, der Geraden s, s_1 als Punkt der letztern dem Punkte P der erstern und dem Punkte P_1 der erstern der Punkt P_2 der letztern. Ferner seyen A, B irgend zwei andere Punkte der Geraden s und A_1, B_1 die homologen Punkte der Geraden s_1, so sind (108) die beiden Strahlenbüschel, von welchen der eine das gerade Gebilde s aus dem Punkte A_1 und der andere das gerade Gebilde s_1 aus dem Punkte A projicirt, Scheine eines und desselben geraden Gebildes v und eben so die beiden Strahlenbüschel, von welchen der eine das gerade Gebilde s aus dem Punkte B_1 und der andere das gerade Gebilde s_1 aus dem Punkte B projicirt, Scheine eines und desselben geraden Gebildes w. Dass aber, was nur noch zu beweisen ist, die Geraden v, w in einanderfallen, geht daraus hervor, weil beide sowohl durch den Schnittpunkt N von AB_1 und A_1B als auch durch die Punkte P, P_2 gehen, welche übrigens, wenn die Gebilde s, s_1 Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels M sind, mit dem Punkte P_1 zusammenfallen. In diesem Falle ist die Gerade v von der Geraden PM durch die Geraden s, s_1 harmonisch getrennt. — Liegen die Büschel S, S_1 nicht perspektivisch, so ist der Punkt V der Schnittpunkt der beiden Strahlen, welche dem gemeinschaftlichen Strahle p_1 derselben entsprechen. Sind aber die Büschel S, S_1 Scheine eines und desselben geraden Gebildes u, so ist der Punkt V zu den Punkten S, up_1, S_1 der vierte harmonische Punkt.

Da aus dem Punkte N die Punkte A, B durch die Strahlen NA, NB, die Punkte A_1, B_1 aber durch die Strahlen NB, NA projicirt werden, so folgt noch:

Die geraden Gebilden s, s_1 werden aus jedem Punkte, welcher in der Geraden v aber in keiner von den beiden erstern Geraden liegt, durch zwei involutorisch liegende Strahlenbüschel projicirt.

Die Strahlenbüschel S, S_1 werden von jeder Geraden, welche durch den Punkt V, aber durch keinen von den Punkten S, S_1 geht, in zwei involutorisch liegenden geraden Gebilden geschnitten.

225. Wenn von einem Sechsecke $AB_1C\ A_1BC_1$ je drei Eckpunkte, unter welchen keine zwei aufeinanderfolgende sind, in einer und derselben Geraden liegen, so liegen auch die drei Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten sich schneiden, in einer und derselben Geraden. Aus jedem vierten Punkte, welcher in dieser Geraden, aber in keiner von den beiden erstern

Wenn von einem Sechsecke je drei Seiten, unter welche keine zwei aufeinanderfolgende sind, in einem und demselben Punkte sich schneiden, so schneiden sich auch die drei Diagonalen, deren jede ein Paar Gegenpunkte verbindet, in einem und demselben Punkte. Jede vierte Gerade, welche durch diesen Punkt, aber durch keinen von den beiden erstern Schnittpunkten geht, liegt, werden die drei Paar Gegenpunkte des Sechsecks durch eine Involution von drei Paar Strahlen projicirt.

schneidet die drei Paar Gegenseiten des Sechsecks in einer Involution von drei Paar Punkten.

Es folgen diese Sätze aus den vorigen, wenn man bemerkt, dass zwei einförmige Gebilde projektivisch so aufeinander bezogen werden können, dass drei gegebenen Elementen A, B, C des einen drei gegebene Elemente A_1, B_1, C_1 des andern entsprechen. Die erstern Theile der obigen Sätze können auch in folgenden zusammengefasst werden:

Wenn die Dreiecke $F F_1 F_2$, $G G_1 G_2$ perspektivisch liegen, und dasselbe von den Dreiecken $F F_1 F_2$, $G_1 G_2 G$ gilt, so gilt es auch von den Dreiecken $F F_1 F_2$, $G_2 G G_1$.

---

§. 17.

Involutorische Systeme.

226. Wird von zwei ebenen Systemen oder von zwei Strahlenbündeln oder von zwei räumlichen Systemen, welche projektivisch sind und überdiess involutorisch liegen, nur wie von einem Systeme gesprochen, so soll dieses, wenn die Systeme collineär sind, ein involutorisches System, im entgegengesetzten Falle aber ein Polarsystem genannt werden. Der Inbegriff von zwei einander zugeordneten Gebilden G, G_1 eines involutorischen Systems ist ein involutorisches Gebilde $G G_1$.

227. In zwei collineären ebenen Systemen, welche involutorisch liegen, ist durch je zwei einander entsprechende Elemente A, A_1 ein Element $A A_1$ bestimmt, welches sich selbst (dem Elemente $A_1 A$) entspricht, daher die beiden Systeme unendlich viele Elemente entsprechend gemein haben und mithin auch perspektivisch liegen. Und wenn zwei collineäre ebene Systeme einen Strahlenbüschel S und also auch ein gerades Gebilde u entsprechend gemein haben, und irgend zwei Punkte A, A_1 einander doppelt entsprechen, nämlich durch den Punkt S und einen Punkt R der Geraden u harmonisch getrennt sind, so gilt diess (136)

von je zwei homologen Punkten, daher die Systeme auch involutorisch liegen.

Will man ein ebenes System als ein involutorisches betrachten, so darf man nur in der Ebene eine Gerade u als Ordnungslinie und einen ausserhalb dieser Linie befindlichen Punkt S als Ordnungspunkt annehmen und alsdann in jeder Geraden, welche durch den Ordnungspunkt geht, den Punkt, in welchem sie die Ordnungslinie schneidet, als den andern Ordnungspunkt, in jedem Strahlenbüschel aber, dessen Mittelpunkt in der Ordnungslinie liegt, den Strahl, welcher durch den Ordnungspunkt geht, als den andern Ordnungsstrahl betrachten.

228. Jede Curve SAT, welche den Ordnungspunkt S eines involutorischen ebenen Systems mit einem Punkte T der Ordnungslinie u verbindet, bildet mit der ihr zugeordneten Curve SA_1T eine involutorische Curve unparer Ordnung, in welcher der Punkt S ein gewöhnlicher Wendepunkt, der Punkt T aber ein gewöhnlicher Punkt oder ein gewöhnlicher Rückkehrpunkt oder ein Eckpunkt ist, je nachdem in diesem Punkte der Curve SAT die Gerade TS oder die Gerade u oder eine dritte Gerade sich anschmiegt. Die Gerade u bildet nämlich mit jeder durch den Punkt S gehenden Geraden zwei einander zugeordnete Winkel, daher die involutorische Curve im Punkt S von jeder durch ihn gehenden Geraden geschnitten, im Punkte T hingegen von der Geraden ST berührt, von der Geraden u aber geschnitten wird. Schneidet eine durch den Punkt S gehende Gerade die Curve in dem einen von zwei einander zugeordneten Punkten, so schneidet sie dieselbe auch im andern, daher die Anzahl der von S verschiedenen Schnittpunkte eine pare Zahl ist.

Jede Linie TAU, welche von zwei Punkten der Ordnungslinie begrenzt ist, bildet mit der ihr zugeordneten Linie TA_1U eine involutorische Linie parer Ordnung, welche, wenn sie nicht öfter als einmal durch einen und denselben Punkt geht, der Umfang einer involutorischen Figur ist, die durch das in ihr liegende Stück der Ordnungslinie in zwei einander zugeordnete Theile getheilt wird. Der Ordnungspunkt S liegt ausserhalb der Figur.

Jede Linie ABA_1, welche von zwei einander zugeordneten Punkten begrenzt ist, bildet mit der ihr zugeordneten Linie A_1B_1A

eine geschlossene Linie parer Ordnung, welche, wenn sie durch keinen Punkt öfter, als einmal geht (also auch mit der Ordnungslinie keinen Punkt gemein hat), der Umfang einer involutorischen Figur ist, die den Ordnungspunkt S in sich enthält. Eine solche involutorische Figur wird durch jede in ihr liegende, zwei Punkte ihres Umfangs verbindende Linie $A S A_1$, welche nicht öfter als einmal durch einen und denselben Punkt geht und aus zwei einander zugeordneten Linien $S A$, $S A_1$ zusammengesetzt ist, in zwei einander zugeordnete Theile getheilt. In zwei collineären Systemen entsprechen einander nämlich zwei Figuren, wenn der Umfang der einen dem Umfange der andern entspricht.

229. Wenn in zwei collineären Systemen, welche einen Strahlenbündel S und also auch ein ebenes System U entsprechend gemein haben, irgend zwei Punkte A, A_1 einander doppelt entsprechen, und also durch den Punkt S und einen Punkt R der Ebene U harmonisch getrennt sind, so gilt diess (136) von je zwei homologen Punkten, daher die Systeme involutorisch liegen. In jeder Ebene, welche durch den Ordnungspunkt S eines solchen involutorischen Systems geht, erscheint die Spur der Ordnungsebene als Ordnungslinie, in jedem Strahlenbündel aber, welchem die Ordnungsebene angehört, der Strahl, welcher den Ordnungspunkt projicirt, als Ordnungsstrahl. Die Ordnungsebene bildet mit jeder durch den Ordnungspunkt gehenden Ebene zwei einander zugeordnete Winkel.

Jede gewundene Curve, welche den Punkt S mit einem Punkte T der Ebene U verbindet, bildet mit der ihr zugeordneten Curve eine involutorische Curve unparer Ordnung, welche im erstern Punkte von jeder durch ihn gehenden Ebene geschnitten, im letztern aber von der Ebene U geschnitten und von jeder durch die Gerade $S T$ gehenden Ebene berührt wird. Jede Linie, welche von zwei Punkten der Ebene U oder von zwei einander zugeordneten Punkten begrenzt ist, bildet mit der ihr zugeordneten Linie eine involutorische Linie parer Ordnung.

Wenn ein involutorischer Körper, welcher einem involutorischen Systeme der obigen Art angehört, durch ein Stück der Ordnungsfläche in zwei einander zugeordnete Theile getheilt wird, so liegt (184) der Ordnungspunkt ausserhalb desselben. Wenn hingegen der Körper den Ordnungspunkt in sich enthält, so hat seine Oberfläche mit der Ordnungsfläche keinen Punkt gemein. Im letztern Falle giebt es unendlich viele durch jenen Punkt gehende Flächen, deren jede den Körper in zwei einander zugeordnete Theile theilt.

230. Sollen zwei räumliche Systeme collineär so aufeinander bezogen werden, dass sie zwei nicht in einerlei Ebene liegende gerade Gebilde s, u und also auch die Ebenenbüschel s, u entsprechend gemein haben, so kann man noch in einer Geraden MN, welche einen Punkt M der Geraden s mit einem Punkte N der Geraden u verbindet, zu einem dritten Punkte A des einen Systems den homologen Punkt A_1 des andern nach Belieben annehmen. Wenn nämlich G, J noch zwei Punkte der Geraden s und H, K noch zwei Punkte der Geraden u sind und die Systeme projektivisch so auf einander bezogen werden, dass den Punkten G, H, J, K, A des einen die Punkte G, H, J, K, A_1 des andern entsprechen, so haben sie auch den Punkt M, in welchem die Gerade GJ von der Ebene HKA (oder HKA_1) geschnitten wird, mithin (122) das gerade Gebilde s und eben so das gerade Gebilde u entsprechend gemein, daher auch je zwei homologe ebene Systeme, welche in einer durch die Gerade s oder durch die Gerade u gehenden Ebene liegen, zu einander perspektivisch sind.

Da es durch jeden Punkt und in jeder Ebene eine Gerade giebt, welche die Geraden s, u schneidet, und also sich selbst entspricht, so muss auch jede Gerade, welche zwei homologe Punkte verbindet oder die Schnittlinie von zwei homologen Ebenen ist, die Geraden s, u schneiden. Jedes gerade Gebilde $MNAA_1$, welches aus einem Punkte der Geraden s, einem Punkte der Geraden u und zwei homologen Punkten besteht, ist jedem andern solchen geraden Gebilde $GHCC_1$ projektivisch. Sind nämlich B, B_1 zwei homologe Punkte der Geraden MH, so ist (136) $MNAA_1 \barwedge MHBB_1 \barwedge GHCC_1$.

Die Systeme können einstimmig- oder entgegengesetzt-projektivisch genannt werden, je nachdem die Punkte M, N durch die Punkte A, A_1 nicht getrennt oder getrennt sind. Im letztern Falle entspricht jede Strecke, welche einen Punkt der Geraden s mit einem

Punkte der Geraden u verbindet, ihrer Ergänzung, und jeder Flächenwinkel, welchen eine Ebene des Büschels s mit einer Ebene des Büschels u bildet, seinem Nebenwinkel.

231. Wenn in zwei collineären Systemen, welche zwei nicht in einerlei Ebene liegende gerade Gebilde s, u entsprechend gemein haben, irgend zwei homologe Punkte einander doppelt entsprechen und also durch einen Punkt der Geraden s und einen Punkt der Geraden u harmonisch getrennt sind, so gilt diess (230) von je zwei homologen Punkten, daher die Systeme involutorisch liegen. In jeder Ebene, welche durch die eine von den beiden Ordnungslinien s, u eines solchen involutorischen Systems geht, erscheint die Spur der andern als Ordnungspunkt, in jedem Strahlenbündel aber, welchem eine von den beiden Ordnunglinien angehört, die Ebene, welche die andere projicirt, als Ordnungsebene.

Jede gewundene Curve, welche einen Punkt M der Geraden s mit einem Punkte N der Geraden u verbindet, bildet mit der ihr zugeordneten Curve eine involutorische Curve unparer Ordnung, welche im Punkte M von jeder Ebene des Büschels s geschnitten, von der Ebene Mu aber berührt wird. Ist eine Linie von zwei Punkten einer und derselben Ordnungslinie oder von zwei einander zugeordneten Punkten begrenzt, so bildet sie mit der ihr zugeordneten Linie eine involutorische Linie parer Ordnung.

In jedem involutorischen Körper, welcher einem involutorischen Systeme der obigen Art angehört, sind unendlich viele Flächen enthalten, deren jede den Körper in zwei einander zugeordnete Theile theilt und durch das in ihm liegende Stück der einen Ordnungslinie in zwei einander zugeordnete Theile getheilt wird.

232. Will man zwei räumliche Systeme collineär so aufeinander beziehen, dass sie involutorisch aber nicht perspektivisch liegen, so darf man nur zwei nicht concentrische Strahlenbündel A, A_1 projektivisch so auf einander beziehen, dass zwei Ebenen, welche durch die Gerade AA_1 gehen, einander doppelt entsprechen, und alsdann die Strahlenbündel A, A_1 selbst als zwei einander doppelt entsprechende Gebilde der räumlichen Systeme betrachten. Jedem Punkts P, in welchem ein Strahl AP des Bün-

dels A und ein Strahl $A_1 P$ des Bündels A_1 sich schneiden, ist ein Punkt P_1 zugeordnet, in welchem die den beiden erstern Strahlen entsprechenden Strahlen $A_1 P_1$, $A P_1$ der Bündel A_1, A sich schneiden.

Enthält der involutorische Ebenenbüschel, dessen Axe die Gerade $A A_1$ ist, zwei Ebenen, deren jede sich selbst zugeordnet ist, so enthält (227) jede dieser Ebenen eine Ordnungslinie und also das involutorische System zwei Ordnungslinien. Enthält aber der erwähnte Ebenenbüschel keine Ebene, welche sich selbst zugeordnet ist, so enthält das involutorische System weder eine sich selbst zugeordnete Ebene noch einen sich selbst zugeordneten Punkt. Wäre nämlich eine Ebene, welche die Gerade $A A_1$ schneidet, sich selbst zugeordnet, so würde diess auch von jeder Ebene gelten, welche aus der Axe $A A_1$ einen sich selbst zugeordneten Punkt der erstern Ebene projicirt. Wäre ein Punkt M sich selbst zugeordnet, so würde diess auch von jeder Ebene gelten, welche durch zwei einander zugeordnete Strahlen des Strahlenbündels M bestimmt ist.

233. In einem involutorischen Systeme, in welchem kein Punkt und also auch keine Ebene sich selbst zugeordnet ist, ist jede Strecke ihrer Ergänzung und jeder Flächenwinkel seinem Nebenwinkel zugeordnet. Jede Linie $A B A_1$, welche zwei einander zugeordnete Punkte verbindet, bildet mit der ihr zugeordneten Linie $A_1 B_1 A$ eine involutorische Linie unparer Ordnung.

Wird nämlich die Linie $A B A_1$ von einer Ebene V, welche weder durch den Punkt A noch durch den Punkt A_1 geht, in m Punkten und von der der erstern zugeordneten Ebene V_1 in n Punkten geschnitten, so muss, weil der eine von den beiden Punkten A, A_1 in dem Winkel $V V_1$ und der andere in dem Winkel $V \cdot V_1$ liegt, $m + n$ eine unpare Zahl seyn. Bemerkt man nun, dass jedem Punkte, in welchem die Linie $A B A_1$ von der Ebene V_1 geschnitten wird, ein Punkt zugeordnet ist, in welchem die Linie $A_1 B_1 A$ von der Ebene V geschnitten wird, so folgt, dass auch die Anzahl der Punkte, in welchen die erwähnte involutorische Linie und die Ebene V sich schneiden, eine unpare Zahl nämlich $= m + n$ sey.

Verbindet man in einem involutorischen Körper zwei einander zugeordnete Punkte durch eine Linie, so bildet diese mit der ihr zugeordneten Linie eine geschlossene Linie, welche ganz in dem Körper liegt und also von parer Ordnung ist. Da nun ein involutorisches System der obigen Art keine solche Linie enthält, so enthält es auch keinen involutorischen Körper.

---

§. 18.

Polarsystem in der Ebene und im Strahlenbündel.

234. Wenn zwei reciproke Systeme in einerlei Ebene liegen, und den Eckpunkten irgend eines Dreiecks ABC die ihnen gegenüberliegenden Seiten entsprechen, so liegen die Systeme involutorisch.

Entsprechen nämlich den Punkten A, B, C des einen Systems die Geraden BC, AC, AB des andern, so entsprechen auch den Geraden BC, AC, AB des erstern Systems die Punkte A, B, C des letztern. Wenn ferner der Geraden AP des einen Systems, welche den Eckpunkt A mit dem Punkte P der Seite BC verbindet, der Punkt P_1 des andern entspricht, so entspricht auch (215) der Geraden AP_1 des erstern Systems der Punkt P des letztern und folglich auch dem Punkte P_1 des erstern die Gerade AP des letztern. Da hiernach je zwei homologe Elemente, von welchen das eine durch einen Eckpunkt des Dreiecks ABC geht, und also das andere in der diesem Eckpunkte gegenüberliegenden Seite liegt, einander doppelt entsprechen, so gilt diess auch von jedem Punkte, in welchem ein Strahl des Büschel A von einem Strahle des Büschels B geschnitten wird, und der Geraden, welche die jenen Strahlen entsprechenden Punkte verbindet.

235. In einem ebenen Polarsysteme heisst jeder Punkt der Pol der ihm zugeordneten Geraden und jede Gerade die Polare des ihr zugeordneten Punktes, so dass also die Pole von allen Geraden, welche in einem und demselben Punkte sich schneiden, in der Polare dieses Punktes liegen und die Polaren von allen Punkten, welche einer und derselben Geraden angehören, in dem Pole dieser Geraden sich schneiden. Liegt ein Punkt in seiner

Polare, so liegt jeder andere Punkt dieser Geraden ausserhalb seiner Polare.

Jedes gerade Gebilde P, welches nicht durch seinen Pol P_1 geht, liegt (215) mit dem ihm zugeordneten Strahlenbüschel P_1 involutorisch. Wenn nämlich der Punkt A der Geraden P der Pol der Geraden P_1A_1 ist, so ist auch der Punkt A_1, in welchem diese Gerade von der Geraden P geschnitten wird, der Pol der Geraden P_1A. Die Gerade P enthält entweder gar keinen Punkt, welcher in seiner Polare liegt, oder zwei solche Punkte, je nachdem der Winkel, welcher aus dem Punkte P_1 die Strecke AA_1 projicirt, der Strecke $A_1 \cdot A$ oder der Strecke A_1A zugeordnet ist.

Um noch, was hier vorausgesetzt wurde, zu beweisen, dass nämlich nicht jeder Punkt der Geraden P in seiner Polare liege, nehme man an, dass die Punkte A, B der Geraden P die Pole der Geraden P_1A, P_1B sind. Wenn nun dem Punkte G der Geraden P_1A die Gerade AH zugeordnet ist, so ist auch dem Punkte H, in welchem diese Gerade von der Geraden BP_1 geschnitten wird, die Gerade BG, folglich der Geraden GH der Schnittpunkt Q von AH und BG und mithin dem Schnittpunkte C von P und GH die Gerade P_1Q zugeordnet, deren Spur in der Geraden P vom Punkte C durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist.

Liegt ein Punkt P_1 in seiner Polare P, so giebt es nach dem Obigen in jeder andern Geraden, welche durch den Punkt P_1 geht, noch einen Punkt, welcher in seiner Polare liegt, und eben so in jedem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt ein von P_1 verschiedener Punkt der Geraden P ist, noch eine Gerade, welche durch ihren Pol geht.

236. In einem ebenen Polarsysteme sind unendlich viele (absolute) Polardreiecke enthalten.

Nimmt man nämlich in einer Geraden, welche nicht durch ihren Pol A geht, einen Punkt B an, dessen Polare die Gerade in einem andern Punkte C schneidet, so ist jeder Eckpunkt des Dreiecks ABC der Pol der ihm gegenüberliegenden Seite, daher dasselbe ein Polardreieck heisst.

Sind den Eckpunkten eines Dreiecks die Seiten eines andern und also den Seiten des erstern die Eckpunkte des letztern zugeordnet, so heissen die Dreiecke Polardreiecke zu einander (relative Polardreiecke).

237. Wenn in einer Ebene ein Dreieck ABC als Polardreieck angenommen und alsdann noch einem Punkte P, welcher in keiner Seite des Dreiecks liegt, eine Gerade P_1, welche durch keinen Eckpunkt desselben geht, zugeordnet wird, so ist dadurch ein Polarsystem bestimmt. Folgt aus 130 und 234.

Versteht man unter einem Dreiecke eine von drei Strecken begrenzte Figur, so sind die Punkte A, B, C die Eckpunkte von vier Dreiecken, von welchen das eine ABC den Punkt P in sich enthält. Wenn nun der Umfang dieses Dreiecks von der Geraden P_1 nicht geschnitten wird, so ist offenbar jedem der vier Dreiecke das von seinem Umfange ausgeschlossene System von Geraden zugeordnet, daher alsdann kein Punkt der Ebene in seiner Polare liegt. Wenn aber die Gerade P_1 die Seiten AB, AC des Dreiecks ABC schneidet, so ist jedes von den beiden Dreiecken ABC, BC·A und eben so jedes von den beiden Dreiecken AB·C, AC·B dem vom Umfange des andern ausgeschlossenen Systeme von Geraden zugeordnet. In diesem Falle enthält jede Strecke AH, welche den Punkt A mit einem Punkte der Geraden BC verbindet, einen Punkt, welcher in seiner Polare liegt, und jeder Winkel, welchen die Gerade BC mit einer durch den Punkt A gehenden Geraden bildet, welcher also einer in ihm liegenden Strecke AH zugeordnet ist, eine Gerade, welche durch ihren Pol geht.

238. Durch jedes ebene Fünfeck ABCDE ist ein Polarsystem bestimmt, in welchem nämlich jeder Eckpunkt des Fünfecks der Pol der ihm gegenüberliegenden Seite ist.

Es sey F der Schnittpunkt von AB und CD. Wenn man nun das Dreieck ADF als Polardreieck und den Punkt E als Pol der Geraden BC annimmt, so sind den Punkten B, C, in welchen diese Gerade von den Geraden AF, DF geschnitten wird, die Geraden ED, EA zugeordnet, welche den Punkt E mit den Punkten D, A verbinden.

239. Wenn der eine von zwei Punkten eines ebenen Polarsystems in der Polare des andern und also auch der andere in Polare des erstern liegt, so heissen sowohl die beiden Punkte als

auch die beiden Geraden, deren jede durch den Pol der andern geht, einander conjugirt. Liegt ein Punkt in seiner Polare, so kann man von jedem dieser Elemente sagen, dass es auch sich selbst conjugirt sey. Es ist hiernach jeder Punkt allen Punkten, welche in seiner Polare liegen, und jede Gerade allen Geraden, welche durch ihren Pol gehen, conjugirt. Sind zwei Punkte einem und demselben Punkte conjugirt, so ist dieser der Pol der durch die beiden erstern Punkte bestimmten Geraden. Sind zwei Gerade einer und derselben Geraden conjugirt, so ist diese die Polare des durch die beiden erstern Geraden bestimmten Punktes.

Jede Gerade P, welche nicht durch ihren Pol P_1 geht, ist (235) der Träger eines involutorischen geraden Gebildes, jeder Punkt P_1, welcher ausserhalb seiner Polare P liegt, der Mittelpunkt eines involutorischen Strahlenbüschels, in welchem je zwei in Hinsicht auf das Polarsystem conjugirte Elemente einander zugeordnet sind.

240. Wenn ein gerades Gebilde h und ein Strahlenbüschel H, welche zu einander projektivisch sind, entweder involutorisch liegen, oder die Gerade h durch den Punkt H geht und diesem Punkte des geraden Gebildes der Strahl h des Büschels entspricht, so können die Gebilde als zwei einander zugeordnete Gebilde eines und desselben Polarsystems betrachtet werden. Man hat nur noch, damit das Polarsystem bestimmt sey, zu einem von H verschiedenen, ausserhalb der Geraden h befindlichen Punkte V eine nicht durch den Punkt H gehende Gerade v, welche die Gerade u in dem Pole B der Geraden HV schneidet, als Polare anzunehmen.

Es seyen im erstern Falle A, A_1 zwei von B verschiedene Punkte der Geraden u, deren jeder in der Polare des andern liegt, so ist durch das Polardreieck HAA_1 und die einander zugeordneten Elemente V, v ein Polarsystem bestimmt, in welchem den Punkten A, A_1, B die Geraden HA_1, HA, HV zugeordnet sind. — Es sey im letztern Falle, in welchem nicht nur der Punkt B sondern auch der Punkt H in der Geraden h liegt, C ein dritter Punkt dieser Geraden, welchem der Strahl c des Büschels H entspreche. Bezieht man nun das gerade Gebilde c und den Strahlenbüschel C projektivisch so aufeinander, dass sie involutorisch liegen und den Punkten H, cv die Strahlen h, CV entsprechen, so ist durch sie und die einander zugeordneten Elemente B, HV nach dem erstern Falle ein Polarsystem bestimmt, in welchem die Punkte H, B, C, V die Pole der Geraden h, HV, c, v sind.

Soll der Punkt V in seiner Polare v liegen, so ist durch das eine von diesen beiden Elementen auch das andere bestimmt. Nur darf alsdann, wenn etwa zwei Punkte M, N des geraden Gebildes h von den ihnen entsprechenden Strahlen HM, HN des Büschels H die Spuren sind, der Punkt V in keinem dieser Strahlen liegen.

241. Durch zwei Dreiecke EFG, efg, welche weder einen Eckpunkt noch eine Seite mit einander gemein haben, aber in einerlei Ebene und überdiess perspektivisch liegen, ist ein Polarsystem bestimmt, in welchem nämlich die beiden Dreiecke Polardreiecke zu einander (den Eckpunkten eines jeden die ihnen gegenüberliegenden Seiten des andern zugeordnet) sind.

Nach der Annahme schneiden sich die drei Geraden Ee, Ff, Gg in einem Punkte H, während die drei Punkte B, C, A, in welchen die Seiten FG, GE, EF des einen Dreiecks von den homologen Seiten fg, ge, ef des andern geschnitten werden, in einer Geraden h liegen. Wenn nun das gerade Gebilde h und der Strahlenbüschel H projektivisch so aufeinander bezogen werden, dass den Punkten B, C, A die Strahlen HE, HF, HG entsprechen und dem Punkte E die Gerade fg zugeordnet wird, so hat man nach 221 und 240 ein Polarsystem, in welchem der Geraden EA der Schnittpunkt g von fg und HG, folglich dem Schnittpunkte F von EA und HF die Gerade gC oder ge und eben so dem Punkte G die Gerade ef zugeordnet ist.

Die zehn Punkte und die zehn Geraden, welche hier in Betrachtung kommen, sind die Eckpunkte und Seiten von zehn Paar relativen Polardreiecken und zugleich die Eckpunkte und Seiten von fünf vollständigen Vierecken und den ihnen zugeordneten vollständigen Vierseiten.

242. In jedem ebenen Polarsysteme liegt jedes Dreieck EFG, von dessen sechs Elementen keine zwei einander conjugirt sind, sind, mit seinem Polardreiecke efg perspektivisch.

Würde nämlich die Gerade HG, welche den Schnittpunkt H von Ee und Ff mit dem Punkte G verbindet, die Gerade fg in einem von g verschiedenen Punkte g_1 schneiden, so gäbe es (241) ein vom erstern Polarsysteme verschiedenes Polarsystem, in welchem den Geraden ef, fg, EG, FG, Ee dieselben Punkte zugeordnet wären, welche ihnen im erstern zugeordnet sind, was (130) nicht möglich ist.

243. Wenn ein Dreieck EFG und ein Polarsystem in einerlei Ebene liegen, aber kein Eckpunkt des Dreiecks der Pol der ihm gegenüberliegenden Seite ist, so schneiden sich die drei Geraden Ee, Ff, Gg, welche die Eckpunkte des Dreiecks mit den Polen der ihnen gegenüberliegenden Seiten verbinden, in einem und demselben Punkte H, während die Punkte, in welchen die Seiten des Dreiecks von den Polaren der ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte geschnitten werden, in einer und derselben Geraden h (der Polare jenes Schnittpunktes) liegen.

Sind die Seiten EF, EG des Dreiecks EFG einander conjugirt, so dass also der Punkt f in der Geraden EF und der Punkt g in der Geraden EG liegt, so fällt der Punkt H mit dem Punkte E und die Gerade h mit der Geraden fg zusammen. Sind die Eckpunkte F, G des Dreiecks EFG einander conjugirt, so fällt der Punkt H mit dem Punkte e und die Gerade h mit der Geraden FG zusammen. Ist keines von den sechs Elementen des Dreiecks EFG einem andern conjugirt, so liegen die Dreiecke EFG, efg perspektivisch, 242.

244. Sind in einem Vierecke EFGH, welches in der Ebene eines Polarsystems liegt,

je zwei Gegenseiten einander conjugirt, so sind es auch (243) die beiden Diagonalen,	je zwei Gegenpunkte einander conjugirt, so sind es auch die beiden Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten sich schneiden.

245. Jedes ebene Polarsystem wird aus jedem ausserhalb der Ebene befindlichen Punkte durch ein Polarsystem im Strahlenbündel projicirt, so dass je zwei einander zugeordnete Elemente A, A_1 des ebenen Systems von zwei einander zugeordneten Elementen a, a_1 des Strahlenbündels die Spuren sind. Werden je zwei ein-

ander zugeordnete Elemente des einen Systems mit einander vertauscht, so dass alsdann den Elementen A, A_1 die Elemente a_1, a entsprechen, so sind die beiden Systeme zu einander reciprok und involutorisch liegend. Und wenn ein ebenes System und ein Strahlenbündel zu einander reciprok sind und involutorisch liegen, so erscheint die Ebene als Träger eines Polarsystems, in welchem jedes von zwei einander zugeordneten Elementen durch das dem andern entsprechende Element des Strahlenbündels projicirt wird.

---

§. 19.

Curven und Kegelflächen II. Ordnung.

246. In einem ebenen Polarsysteme giebt es (nach 235 und 236) entweder gar kein Element, welches sich selbst conjugirt ist, oder es giebt eine Curve s parer Ordnung, welche dem ihr sich anschmiegenden Strahlenbüschel zugeordnet ist, so dass nämlich jeder Punkt, welcher der Curve angehört, in seiner Polare liegt, die in ihm der Curve sich anschmiegt, jeder Punkt aber, welcher jener Curve (der Ordnungscurve des Polarsystems) nicht angehört, ausserhalb seiner Polare liegt. Die Curve hat mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein und wird in jedem in ihr befindlichen Punkte von der Polare dieses Punktes berührt, von jeder andern durch denselben Punkt gehenden Geraden aber in ihm und in noch einem Punkte geschnitten.

Das von der Curve s eingeschlossene System F von Punkten ist dem von ihr ausgeschlossenen Systeme von Geraden zugeordnet. Von jedem Polardreiecke enthält die Figur F einen Eckpunkt; die ihm gegenüberliegende Seite hat mit der Curve s keinen Punkt gemein. Jedem geraden Gebilde V, welches die Curve s in zwei Punkten A, B schneidet, ist ein Strahlenbüschel V zugeordnet, welches mit dem Strahlenbüschel s zwei Strahlen A, B gemein hat. Durch diese Strahlen sind je zwei conjugirte Strahlen des Büschels V, durch jene Punkte je zwei conjugirte Punkte des geraden Gebildes V harmonisch getrennt.

247. Jede geschlossene $\left\{\begin{array}{l}\text{ebene Curve}\\ \text{Kegelfläche}\end{array}\right\}$, welche die Ordnungs-

$\left\{\begin{array}{l}\text{curve}\\ \text{fläche}\end{array}\right\}$ eines Polarsystems oder, was dasselbe ist, dem ihr sich anschmiegenden Büschel projektivisch ist, so dass jedem $\left\{\begin{array}{l}\text{Punkte der Curve}\\ \text{Strahle der Fläche}\end{array}\right\}$ das ihr in demselben sich anschmiegende Element des Büschels entspricht, heisst eine $\left\{\begin{array}{c}\text{Kegelfläche}\\ \text{Curve}\end{array}\right\}$ zweiter Ordnung.

Entspricht der geschlossenen Curve s in dem einen von zwei reciproken ebenen Systemen der Strahlenbüschel s des andern, so dass den Punkten A, B, C, D u. s. w. der Curve die ihr in denselben sich anschmiegenden Strahlen A, B, C, D u. s. w. entsprechen, so entsprechen auch (145) diesen Geraden des erstern Systems jene Punkte des letztern, woraus man (130) schliessen kann, dass je zwei homologe Elemente der Systeme einander doppelt entsprechen und also s die Ordnungscurve eines Polarsystems sey.

Jede Curve II. Ordnung wird aus jedem ausserhalb ihrer Ebene befindlichen Punkte durch eine Kegelfläche II. Ordnung projicirt, jede Kegelfläche II. Ordnung von jeder nicht durch ihren Mittelpunkt gehenden Ebene in einer Curve II. Ordnung geschnitten.

Wenn überhaupt ein ebenes System und ein Strahlenbündel zu einander collineär sind, so entspricht jeder Curve II. Ordnung s eine Kegelfläche II. Ordnung s_1. Werden in dem ebenen Systeme je zwei in Hinsicht auf die Curve s einander zugeordnete Elemente mit einander vertauscht, so entspricht der Curve s der Ebenenbüschel s_1 und dem Strahlenbüschel s die Kegelfläche s_1. In zwei reciproken ebenen Systemen entspricht jeder Curve II. Ordnung ein Strahlenbüschel II. Ordnung, welcher der Curve II. Ordnung sich anschmiegt, die dem der erstern sich anschmiegenden Strahlenbüschel entspricht.

248. Eine Curve II. Ordnung oder auch die von ihr eingeschlossene Figur heisst eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem die Curve mit der unendlich fernen Geraden der Ebene gar keinen Punkt gemein hat, oder diese Gerade in einem Punkte berührt oder in zwei Punkten schneidet. Jeder um die Figur beschriebene uneigentliche Winkel ist im ersten Falle ein Parallel-

streifen, im zweiten (62) ein Winkel der dritten und im dritten ein Winkel der vierten Art. Betrachtet man das ebene System als den Schnitt eines Parallelstrahlenbündels, so entspricht der Curve im ersten Falle eine elliptische, im zweiten eine parabolische und im dritten eine hyperbolische Cylinderfläche.

Der Schnitt einer eigentlichen Kegelfläche II. Ordnung mit einer Ebene, welche nicht durch den Mittelpunkt der Fläche geht, ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem die Kegelfläche mit der durch ihren Mittelpunkt gehenden zur erstern Ebene parallelen Ebene gar keinen Strahl oder einen Strahl oder zwei Strahlen gemein hat. Im letzten Falle schmiegen in diesen Strahlen der Kegelfläche die Ebenen sich an, von welchen die Assymptoten der Hyperbel die Spuren sind. Von den beiden Winkeln, welche die Assymptoten einer Hyperbel mit einander bilden, heisst derjenige, welcher um die Hyperbel beschrieben ist, der Assymptotenwinkel.

Eine Curve II. Ordnung kann auch, was im Obigen nicht angenommen wurde, im Unendlichen liegen, so dass sie also der Schnitt einer Kegelfläche II. Ordnung mit der unendlich fernen Ebene ist.

249. Wenn man (227) einen Punkt S, welcher mit einer Curve II. Ordnung in einerlei Ebene, aber nicht in der Curve liegt, als Ordnungspunkt und seine Polare u als Ordnungslinie annimmt, so erscheint die Curve als eine involutorische Curve. Je zwei Punkte A, B der Curve, welche mit dem Punkte S in einer und derselben Geraden V liegen, sind (246) durch diesen Punkt und einen Punkt R der Geraden u und eben so je zwei Tangenten A, B der Curve, welche (235) die Gerade u in einem und demselben Punkte schneiden, durch diese Gerade und eine durch den Punkt S gehende Gerade harmonisch getrennt. Wird die Gerade V um den Punkt S gedreht, so bewegen sich ihr Pol (der Schnittpunkt der Tangenten A, B) und ihre Spur in der Geraden u in einem und demselben oder im entgegengesetzten Sinne, je nachdem die Curve und die Gerade u sich nicht schneiden oder sich schneiden. Die von der Curve eingeschlossene in Hinsicht auf die Ordnungslinie u und den Ordnungspunkt S involutorische Figur wird im erstern Falle durch jede durch diesen

Punkt gehende Gerade, im letztern aber durch die Gerade u in zwei einander zugeordnete Theile getheilt.

250. Ein n Eck (79) heisst in eine Curve beschrieben, wenn alle seine Eckpunkte in der Curve liegen. Jedem einer Curve II. Ordnung einbeschriebenen vollständigen n Ecke ist ein um dieselbe beschriebenes vollständiges n Seit zugeordnet, dessen Seiten die Polaren von den Eckpunkten und dessen Eckpunkte die Pole von den Seiten des ersten Gebildes sind.

Jedes Dreieck EFG, welches in eine Curve II. Ordnung beschrieben ist, liegt mit dem Dreiecke efg, dessen Seiten fg, ge, ef die Curve in den Eckpunkten E, F, G des erstern berühren, perspektivisch.

Je zwei Eckpunkte des einbeschriebenen Dreiecks sind durch die Polare des dritten Eckpunktes und durch die Gerade, welche diesen Punkt mit dem Pole der ihm gegenüberliegenden Seite verbindet, harmonisch getrennt.

Je zwei Seiten des umbeschriebenen Dreiecks sind durch den Pol der dritten Seite und durch den Punkt, in welchem diese Seite von der Polare des ihr gegenüberliegenden Eckpunktes geschnitten wird, harmonisch getrennt.

Da nämlich (235) die Gerade Gg die Polare des Punktes A ist, in welchem die Geraden EF, ef sich schneiden, so sind (246) die Punkte E, F durch den Punkt A und durch den Schnittpunkt von EF und gG und also auch (94) die Punkte e, f durch die Punkte A, G harmonisch getrennt, daher auch (93) die Geraden Ee, Ff, Gg in einem und demselben Punkte sich schneiden müssen. Dasselbe folgt auch aus 242.

251. Die drei Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten eines in eine Curve II. Ordnung beschriebenen vollständigen Vierecks ABCD sich sichneiden, sind die Eckpunkte eines Polardreiecks, von dessen drei Seiten jede durch ein Paar Gegenpunkte des dem vollständigen Vierecke zugeordneten vollständigen Vierseits abcd geht.

Es werde die Gerade AB von der Geraden CD im Punkte P und von der Geraden p, welche den Schnittpunkt von AC und BD mit dem Schnittpunkte von AD und BC verbindet, im Punkte Q geschnitten, so sind (94) die Punkte P, Q durch die Punkte

A, B harmonisch getrennt und also in Hinsicht auf die Curve einander conjugirt. Da eben so der Schnittpunkt von CD und p dem Punkte P conjugirt ist, so folgt, dass die Gerade p die Polare des Punktes P ist und demnach auch durch die Pole ab, cd der Geraden AB, CD geht.

Die Diagonalen eines um eine Curve II. Ordnung beschriebenen Vierseits sind also einander conjugirt und durch die Diagonalen des ihm zugeordneten Vierecks harmonisch getrennt. Eben so sind die Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten dieses Vierecks sich schneiden, (die Pole der beiden erstern Diagonalen) einander conjugirt und durch die Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten jenes Vierseits sich schneiden, harmonisch getrennt.

252. Wenn man in der Ebene eines ebenen Polarsystems irgend zwei einander nicht conjugirte

Gerade annimmt und alsdann auf jeden Punkt der einen den ihm conjugirten Punkt der andern bezieht, so sind die geraden Gebilde, da jedes ein Schnitt des dem andern zugeordneten Strahlenbüschels ist, projektivisch und folglich, wenn ihr Schnittpunkt sich selbst conjugirt ist, perspektivisch.

Punkte als Mittelpunkte von Strahlenbüscheln annimmt und alsdann auf jeden Strahl des einen Büschels den ihm conjugirten Strahl des andern bezieht, so sind die Büschel, da jeder ein Schein des dem andern zugeordneten geraden Gebildes ist, projektivisch und folglich, wenn ihr gemeinschaftlicher Strahl sich selbst conjugirt ist, perspektivisch.

253. Jede Gerade, welche einer Seite AB eines in eine Curve II. Ordnung beschriebenen Dreiecks ABC conjugirt ist, schneidet die beiden andern Seiten in conjugirten Punkten. Und wenn eine Gerade zwei Seiten AC, BC des Dreiecks in zwei conjugirten Punkten

Jeder Punkt, welcher einem Eckpunkte eines um eine Curve II. Ordnung beschriebenen Dreiecks conjugirt ist, wird aus den beiden andern Eckpunkten durch conjugirte Strahlen projicirt. Und wenn ein Punkt aus zwei Eckpunkten des Dreiecks durch zwei conjugirte Strahlen projischneidet, so geht sie durch den Pol der dritten Seite.

cirt wird, so liegt er in der Polare des dritten Eckpunktes.

Da nämlich die Polare a des Punktes A die Geraden AC, BC in zwei conjugirten Punkten schneidet und dasselbe von der Polare b des Punktes B gilt, so ist (252) ab der Punkt, welcher mit je zwei conjugirten Punkten der Seiten AC, BC in einer und derselben Geraden liegt. Projicirt man aus den Eckpunkten A, B einen und denselben Punkt D der Curve auf die ihnen gegenüberliegenden Seiten, so erhält man (251) zwei einander conjugirte Punkte dieser Seiten, woraus hervorgeht, wie die obigen Sätze auch mit den in 251 enthaltenen zusammenhängen.

254. Wenn zwei Eckpunkte eines Dreiecks in einer Curve II. Ordnung liegen und die ihnen gegenüberliegenden Seiten von irgend einer Geraden, welche durch den Pol der dritten Seite, aber durch keinen von jenen beiden Punkten geht, in conjugirten Punkten geschnitten werden, so liegt auch der dritte Eckpunht des Dreiecks in der Curve. Folgt aus 109 und 252.

Wenn zwei Seiten eines Dreiecks eine Curve II. Ordnung berühren und die ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte aus irgend einem Punkte, welcher in der Polare des dritten Eckpunktes, aber nicht in der Curve liegt, durch conjugirte Strahlen projicirt werden, so wird die Curve auch von der dritten Seite des Dreiecks berührt.

255. Zwei Strahlenbüschel A B, welche eine Curve II. Ordnung aus zwei in ihr liegenden Punkten A, B projiciren, sind zu einander projektivisch.

Zwei gerade Gebilde, welche eine Curve II. Ordnung berühren und Schnitte des ihr sich anschmiegenden Strahlenbüschels sind, sind zu einander projektivisch.

Jeder Punkt C der Curve wird aus dem Punkte A durch einen Strahl AC des Büschels A und aus dem Punkte B durch den homologen Strahl BC des Büschels B projicirt. Da nun die Büschel (nach 239 und 253) von jeder Geraden, welche durch den Pol der Geraden AB, aber durch keinen von den beiden Punkten A, B geht, in zwei involutorisch liegenden projektivischen geraden Gebilden geschnitten werden, so folgt der Satz.

256. Zwei projektivische nicht concentrische Strahlenbüschel A, B, welche in einerlei Ebene, aber nicht perspektivisch liegen, erzeugen eine Curve II. Ordnung, der nämlich jeder Punkt angehört, in welchem ein Strahl des einen Büschels von dem homologen Strahle des andern geschnitten wird. Die Strahlen a, b, welche dem gemeinschaftlichen Strahle der beiden Büschel entsprechen, berühren die Curve in den Punkten A, B.

Zwei projektivische gerade Gebilde a, b, welche sich schneiden, aber nicht perspektivisch liegen, erzeugen einen Strahlenbüschel II. Ordnung, dem nämlich jede Gerade angehört, welche einen Punkt des einen geraden Gebildes mit dem homologen Punkte des andern verbindet. Die Punkte A, B, welche dem Schnittpunkte der beiden geraden Gebilde entsprechen, sind die Pole der Geraden a, b.

Es seyen G, H irgend zwei Punkte, welche durch die Punkte A, B harmonisch getrennt sind. Da nun (224) die Gerade h, welche den Punkt ab mit dem Punkte G verbindet, die Büschel A, B in zwei involutorisch liegenden geraden Gebilden schneidet, so kann man (240) das eine dieser Gebilde und den Strahlenbüschel, welcher das andere aus dem Punkte H projicirt, als zwei einander zugeordnete Gebilde eines Polarsystems betrachten, dessen Ordnungscurve die Gerade a im Punkte A berührt, folglich, weil die einander conjugirten Punkte G, H durch die Punkte A, B harmonisch getrennt sind, auch durch den Punkt B geht, und mithin (254) von je zwei homologen Strahlen AC, BC der Büschel A, B in einem und demselben Punkte geschnitten wird.

Eben so erzeugen zwei projektivische aber nicht perspektivische Ebenenbüschel, deren Axen sich schneiden, eine Kegelfläche II. Ordnung, und zwei projektivische Strahlenbüschel, welche concentrisch sind, aber weder in einerlei Ebene noch perspektivisch liegen, einen Ebenenbüschel II. Ordnung.

257. Die drei Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten eines in eine Curve II. Ordnung beschriebenen Sechsecks ABCDEF sich schneiden, liegen in einer und derselben Geraden.

Die drei Diagonalen, deren jede ein Paar Gegenpunkte eines um eine Curve II. Ordnung beschriebenen Sechsecks verbindet, schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Es werde die Seite AB von den Seiten CD, DE in den Punkten K, M und die Seite BC von den Seiten AF, EF in den Punkten L, N geschnitten. Da nun (255) die Strahlenbüschel D(BCEA), F(BCEA) und mithin auch ihre Schnitte BKMA, BCNL zu einander projektivisch sind, so liegen (108) die Punkte M, N mit dem Schnittpunkte von KC und AL (oder CD und AF) in einer und derselben Geraden.

Was oben von den sechs Seiten eines in eine Curve II. Ordnung beschriebenen Sechsecks gesagt wurde, gilt auch von den fünf Seiten eines einbeschriebenen Fünfecks und der Geraden, welche die Curve in einem Eckpunkte desselben berührt, dann auch von den vier Seiten eines einbeschriebenen Vierecks und den Tangenten an zwei Eckpunkten und endlich auch von den drei Seiten eines einbeschriebenen Dreiecks und den Tangenten an seinen drei Eckpunkten, vorausgesetzt dass man jede Tangente, welche in Betrachtung kommt, zwischen den beiden Seiten einschaltet, welche im Berührungspunkte derselben sich schneiden.

Was oben von den sechs Eckpunkten eines um eine Curve II. Ordnung beschriebenen Sechsecks gesagt wurde, gilt auch von den fünf Eckpunkten eines umbeschriebenen Fünfecks und dem Berührungspunkte einer Seite, dann auch von den vier Eckpunkten eines umbeschriebenen Vierecks und den Berührungspunkten zweier Seiten und endlich auch von den drei Eckpunkten eines unbeschriebenen Dreiecks und den Berührungspunkten seiner drei Seiten, vorausgesetzt dass man jeden Berührungspunkt, welcher in Betrachtung kommt, zwischen den beiden Eckpunkten einschalte, die mit ihm in einer und derselben Seite liegen.

258. Durch jedes ebene Fünfeck ABCDE sind zwei Curven II. Ordnung bestimmt, von welchen nämlich die eine k durch die fünf Eckpunkte des Fünfecks geht, die andere s aber die fünf Seiten desselben berührt. Betrachtet man (238) die Eckpunkte A, B, C, D, E des Fünfecks als die Pole der ihnen gegenüberliegenden Seiten, so erhält man ein Polarsystem, in welchem jeder von den beiden Curven der der andern sich anschmiegende Strahlenbüschel zugeordnet ist.

Die Strahlenbüschel A, B erzeugen die Curve k, wenn sie projektivisch so aufeinander bezogen werden, dass den Strahlen AC, AD, AE des erstern die Strahlen BC, BD, BE des letztern entsprechen. — Von den beiden Strecken AB, A·B ist diejenige von der Curve k eingeschlossen, welche von gar keiner der drei Geraden CD, CE, DE oder von zweien derselben geschnitten wird. Die Punkte A, B sind in der Curve k im erstern Falle durch die Punkte C, D, E nicht getrennt, im letztern aber getrennt.

Die geraden Gebilde a, b erzeugen den Strahlenbüschel s, wenn sie projektivisch so aufeinander bezogen werden, dass den Punkten ac, ad, ae des erstern die Punkte bc, bd, be des letztern entsprechen. — Von den beiden Winkeln ab, a·b ist derjenige von der Curve s ausgeschlossen, welcher gar keinen der drei Punkte cd, ce, de oder zwei derselben in sich enthält. Die Strahlen a, b sind in dem Büschel s im erstern Falle durch die Strahlen c, d, e nicht getrennt, im letztern aber getrennt.

Eine Curve II. Ordnung ist auch bestimmt, wenn ein einbeschriebenes Viereck und die Tangente an einem Eckpunkte desselben oder ein umbeschriebenes Viereck und der Berührungspunkt einer Seite oder ein einbeschriebenes Dreieck und die Tangenten an zwei Eckpunkten desselben oder ein umbeschriebenes Dreieck und die Beruhrungspunkte zweier Seiten gegeben sind.

259. Liegen die drei Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten eines Sechsecks ABCDEF sich schneiden, in einer und derselben Geraden, so liegen die sechs Eckpunkte des Sechsecks entweder in einer Curve II. Ordnung oder es liegen je drei, unter welcher keine zwei aufeinanderfolgende sind, in einer Geraden.

Schneiden sich die drei Diagonalen, deren jede ein Paar Gegenpunkte eines Sechsecks verbindet, in einem und demselben Punkte, so berühren die sechs Seiten des Sechsecks entweder eine Curve II. Ordnung, oder es schneiden sich je drei, unter welchen keine zwei aufeinanderfolgende sind, in einem Punkte.

Es werde die Gerade AB von den Geraden CD, DE in den Punkten K, M und BC von den Geraden AF, EF in den Punkten L, N geschnitten. Wenn nun der Schnittpunkt von KC und

AL (oder CD und AF) in der Geraden MN liegt, so sind die geraden Gebilde BKMA, BCNL und also auch die Strahlenbüschel D(BCEA), F(BCEA) zu einander projektivisch, woraus der Satz folgt.

260. Wenn von einer Curve II. Ordnung fünf Punkte A, B, C, D, E gegeben sind, so ist durch jede Gerade p, welche durch den Punkt A geht, ein Punkt F der Curve bestimmt, welcher nämlich aus dem Punkte A durch die Gerade p projicirt wird. Man erhält den Punkt F, wenn man den Schnittpunkt von AB und DE mit dem Schnittpunkte von CD und p durch eine Gerade verbindet und alsdann aus dem Punkte, in welchem diese Gerade die Gerade BC schneidet, den Punkt E auf die Gerade p projicirt. Soll der Punkt F mit dem Punkte A zusammenfallen und also die Gerade p die Curve im Punkte A berühren, so muss sie durch denjenigen Punkt der Geraden CD gehen, welcher mit dem Schnittpunkte von AB und DE und dem Schnittpunkte von BC und EA in einer und derselben Geraden liegt. Umgekehrt findet man, wenn von einer Curve II. Ordnung fünf Tangenten a, b, c, d, e gegeben sind, die Berührungspunkte dieser Tangenten, wenn man in irgend einem der Fünfseite abcde, abced u. s. w. aus jedem Eckpunkte auf die ihm gegenüberliegende Seite den Schnittpunkt der beiden Diagonalen projicirt, von welchen keine durch jenen Eckpunkt geht und auch keine die ihm benachbarten Eckpunkte verbindet.

Aehnliche Aufgaben vom ersten Grade, welche nämlich auf die in 67 enthaltenen sich zurückführen lassen, bieten sich dar, wenn von einer Curve II. Ordnung vier Punkte und die Tangente an einem dieser Punkte oder vier Tangenten und der Berührungspunkt einer dieser Tangenten u. s. w. gegeben sind.

261. Wenn die n Seiten a_1, $a_2, a_3, \ldots a_n$ eines ebenen n Ecks um feste Punkte A_1, A_2, $A_3 \ldots A_n$ sich drehen, während n − 1 Eckpunkte $a_1 a_2$, $a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n$ in festen Geraden sich bewegen, so bewegt sich der letzte Eckpunkt entweder auch in ei-

Wenn die n Eckpunkte eines ebenen n Ecks in festen Geraden sich bewegen, während n − 1 Seiten desselben um feste Punkte sich drehen, so dreht sich die letzte Seite entweder auch um einen festen Punkt, oder es beschreibt der Punkt, ner festen Geraden oder in einer Curve II. Ordnung, welche durch jene festen Elemente bestimmt ist.

um welchen sie sich dreht, indem derselbe in ihr sich bewegt, eine durch jene festen Elemente bestimmte Curve II. Ordnung.

Die Geraden a_1, a_2, a_3, ... a_n sind nämlich homologe Strahlen von n Strahlenbüscheln A_1, A_2, A_3, ... A_n, von welchen jeder folgende dem vorhergehenden und mithin auch der letzte dem ersten projektivisch ist. Stellt man das veränderliche n Eck in drei Zuständen dar, so hat man zu drei Strahlen des Büschels A_1 die homologen Strahlen des Büschels A_n. Da übrigens die Büschel A_1, A_2 auch projektivisch sind, wenn der Punkt $a_1 a_2$ in einer durch die beiden Punkte A_1, A_2 gehenden Curve II. Ordnung sich bewegt, und Analoges von den Büscheln A_2, A_3 u. s. w. gilt, so lassen sich die obigen Sätze und die in (311) enthaltenen Aufgaben leicht noch verallgemeinern.

262. Wenn von zwei zu einander projektivischen Strahlenbüscheln der eine gegeben ist, und vier Strahlen des andern, welche gegebenen Strahlen a, b, c, d des erstern entsprechen, durch vier gegebene Punkte A, B, C, D gehen, die nicht alle vier in einer und derselben Geraden liegen, so liegt der Mittelpunkt M des andern Büschels entweder in einer gegebenen Geraden oder in einer gegebenen Curve II. Ordnung.

Wenn von zwei zu einander projektivischen geraden Gebilden das eine gegeben, und vier Punkte des andern, welche gegebenen Punkten des erstern entsprechen, in vier gegebenen Geraden liegen, die nicht alle vier durch einen und denselben Punkt gehen, so geht die Gerade, in welcher das andere Gebilde liegt, entweder durch einen gegebenen Punkt oder sie berührt eine gegebene Curve II. Ordnung.

Liegen nämlich die Punkte A, B, C, in einer und derselben Geraden, so giebt es in dieser Geraden einen Punkt D_1, so dass $ABCD_1 \barwedge abcd$ ist. In diesem Falle ist offenbar die Gerade DD_1 der geometrische Ort des Punktes M. Liegen aber keine drei von den vier Punkten A, B, C, D in einer und derselben Geraden, so ist, wenn durch den Punkt D eine Gerade DD gelegt wird, so dass $D(ABCD) \barwedge abcd$ ist, auch $M(ABCD) \barwedge D(ABCD)$ und mithin (256) der geometrische Ort des Punktes M die Curve II. Ordnung, welche durch die vier gegebenen Punkte geht und im Punkte D die Gerade DD berührt. — Wenn umgekehrt der Mittelpunkt M des Strahlenbüschels M(ABCD), der dem gegebenen abcd projektivisch ist, in einer gegebenen Curve II. Ordnung liegt, und drei Strahlen desselben gegebene Punkte A, B, C der Curve projiciren, so projicirt auch der vierte Strahl einen gegebenen Punkt der Curve.

263. Es sind in einer Ebene fünf Punkte A, B, C, D, E gegeben, von welchen keine vier in einer und derselben Geraden liegen; man soll einen Punkt M finden, so dass der Strahlenbüschel M(A B C D E) einem gegebenen abcde projektivisch sey.

Es sind in einer Ebene fünf Gerade a, b, c, d, e gegeben, von welchen keine vier durch einen und denselben Punkt gehen; man soll eine sechste Gerade p finden, so dass das gerade Gebilde p(abcde) einem gegebenen projektivisch sey.

Liegen die Punkte A, B, C in einer und derselben Geraden, so nehme man in dieser Geraden die Punkte D_1, E_1 so, dass $ABCD_1E_1 \barwedge abcde$ ist. Zieht man alsdann die Geraden DD_1, EE_1, so schneiden sich diese in dem gesuchten Punkte. Wenn aber keine drei von den fünf gegebenen Punkten in einer und derselben Geraden liegen, so ziehe man durch den Punkt D zwei Gerade DD, DE_1, so dass $D(ABCDE_1) \barwedge abcde$ ist, und suche alsdann (260) in der Curve II. Ordnung, welche durch die vier Punkte A, B, C, D geht und im Punkte D die Gerade DD berührt, den Punkt E_2, welcher aus dem Punkte D durch die Gerade DE_1 projicirt wird. Wenn nun $M(ABCDE) \barwedge abcde \barwedge D(ABCDE_2)$ seyn soll, und E ein vom Punkte E_2 verschiedener Punkt ist, so muss M derjenige Punkt der Curve seyn, welcher aus dem Punkte E_2 durch die Gerade E_2E projicirt wird. Fallen aber die Punkte E, E_2 in einander, so leistet jeder Punkt der Curve der Aufgabe Genüge.

§. 20.

Projektivische Beziehungen zwischen Curven II. Ordnung.

264. Will man zwei gegebene Curven II. Ordnung s, s_1 projektivisch aufeinander beziehen, so kann man zu drei Punkten A, B, C der einen die homologen Punkte A_1, B_1, C_1 in der andern nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Punkte der einen ein Punkt der andern zugewiesen ist.

Sollen nämlich zwei ebene Systeme collineär so aufeinander bezogen werden, dass der Curve s und den Punkten A, B, C des einen die Curve s_1 und die Punkte A_1, B_1, C_1 des andern entsprechen, so muss auch dem Pole P der Geraden AB der Pol P_1 der Geraden $A_1 B_1$ entsprechen. Und wenn man die ebenen Systeme projektivisch so aufeinander bezieht, dass den Punkten A, B, C, P des einen die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 des andern entsprechen, so entspricht der Curve s, welche die Geraden PA, PB in den Punkten A, B berührt und durch den Punkt C geht, die Curve s_1, welche die Geraden $P_1 A_1$, $P_1 B_1$ in den Punkten A_1, B_1 berührt und durch den Punkt C_1 geht.

Vertauscht man in dem einen von den beiden Systemen jeden Punkt mit seiner Polare, so sind alsdann die Systeme projektivisch so aufeinander bezogen, dass der Curve s der der Curve s_1 sich anschmiegende Strahlenbüschel und den Punkten A, B, C die Strahlen entsprechen, welche die Curve s_1 in den Punkten A_1, B_1, C_1 berühren.

265. Jeder Strahlenbüschel P, welcher die eine s von zwei zu einander projektivischen Curven II. Ordnung aus einem in ihr befindlichen Punkte projicirt, ist jedem Strahlenbüschel Q_1 projektieisch, welcher die andere s_1 aus einem in ihr befindlichen Punkte projicirt, so dass nämlich je zwei Strahlen PA, $Q_1 A_1$, welche homologe Punkte A, A_1 der Curven projiciren, einander entsprechen. Der Büschel P ist nämlich dem ihm entsprechenden Büschel P_1, dieser aber nach 255 dem Büschel Q_1 projektivisch.

Eben so sind je zwei gerade Gebilde u, v_1, von welchen das eine ein Schnitt des Strahlenbüschels s mit einer Tangente der Curve s und das andere ein Schnitt des Strahlenbüschels s_1 mit einer Tangente der Curve s_1 ist, sowohl unter sich als auch

(264) jenen Strahlenbüscheln erster Ordnung projektivisch, so dass nämlich durch je zwei einander entsprechende Punkte A, A_1 der Curven und die Tangenten a, a_1 an diesem Punkte vier einander entsprechende Elemente PA, Q_1A_1, ua, v_1a_1 der Gebilde P, Q_1, u, v_1 bestimmt sind.

266. Will man zwei gegebene Curven II. Ordnung projektivisch aufeinander beziehen, so darf man nur nach 264 und 265

auf einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt in der einen Curve liegt, einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt in der andern liegt, projektivisch beziehen und alsdann je zwei Punkte der Curven, welche aus den Mittelpunkten der Büschel durch homologe Strahlen projicirt werden, einander entsprechend nennen.	auf ein gerades Gebilde, welches die eine Curve berührt, ein gerades Gebilde, welches die andere berührt, projektivisch beziehen und alsdann je zwei Tangenten der Curven, welche die geraden Gebilde in homologen Punkten schneiden, einander entsprechend nennen.
267. Wenn der Mittelpunkt eines Strahlenbüschels ein gemeinschaftlicher Punkt von zwei Curven II. Ordnung ist, und man je zwei Punkte der Curven, welche durch einen und denselben Strahl des Büschels projicirt werden, einander entsprechend nennt, so sind die Curven projektivisch aufeinander bezogen. Haben die Curven in jenem Punkte eine gemeinschaftliche Tangente, so sind sie zu einander perspektivisch, daher alsdann die Punkte, in deren jedem ein Paar homologe Tangenten derselben sich schneiden, alle in einer und derselben Geraden liegen.	Wenn eine Gerade u eine gemeinschaftliche Tangente von zwei Curven II. Ordnung ist, und man je zwei Tangenten der Curven, welche jene Gerade in einem und demselben Punkte schneiden einander entsprechend nennt, so sind die Curven (266) projektivisch aufeinander bezogen. Berühren die Curven jene Gerade in einem und demselben Punkte, so sind sie zu einander perspektivisch, daher alsdann die Strahlen, deren jeder ein Paar homologe Punkte derselben verbindet, alle in einem und demselben Punkte sich schneiden.

Der Satz rechter Hand gilt auch, wenn die Curven nicht in einerlei Ebene liegen. Die beiden collineären Systeme, von welchen die Curven homologe Gebilde sind, haben, wenn diese die Gerade u in einem und demselben Punkte berühren, jeden Punkt dieser Geraden entsprechend gemein.

268. Zwei Curven II. Ordnung, welche in zwei Ebenen liegen und die Schnittlinie dieser Ebenen in einem und demselben Punkte berühren, sind (267) Schnitte einer und derselben Kegelfläche II. Ordnung.

Zwei nicht concentrische Kegelflächen II. Ordnung, welche einen Strahl mit einander gemein haben und in ihm von einer und derselben Ebene berührt werden, schneiden sich in einer Curve II. Ordnung.

269. Zwei Curven II. Ordnung, welche in einen und denselben Winkel beschrieben sind, können auf zweierlei Art perspektivisch so aufeinander bezogen werden, dass je zwei homologe Punkte aus dem Mittelpunkte S des Winkels durch einen und denselben Strahl projicirt werden. Dasselbe gilt auch, wenn kein Strahl des Büschels S die Curven berührt, aber wie im erstern Falle je zwei Strahlen desselben, welche in Hinsicht auf die eine Curve einander conjugirt sind, es auch in Hinsicht auf die andere sind.

Zwei Curven II. Ordnung s, s_1, welche von einer Geraden u ein und dasselbe Stück einschliessen, können auf zweierlei Art perspektivisch so aufeinander bezogen werden, dass je zwei homologe Tangenten derselben jene Gerade in einem und demselben Punkte schneiden. Dasselbe gilt auch, wenn die Curven mit der Geraden gar keinen Punkt gemein haben, aber wie im erstern Falle je zwei Punkte dieser Linie, welche in Hinsicht auf die eine Curve einander conjugirt sind, es auch in Hinsicht auf die andere sind.

Es seyen P, P_1 die Pole der Geraden u in Hinsicht auf die Curven s, s_1. Man ziehe durch den Punkt P eine Gerade, welche die Curve s in zwei Punkten A, B schneidet, so wird auch die Gerade P_1E, welche den Punkt P_1 mit dem Schnittpunkte E von AB und u verbindet, die Curve s_1 in zwei Punkten A_1, B_1 schneiden. Es sey ferner in der Geraden u dem Punkte E der Punkt F und dem Punkte G der Punkt H conjugirt. Werden nun zwei ebene Systeme collineär so aufeinander bezogen, dass den Punkten G, H, A, B des einen die Punkte G, H, A_1, B_1 des andern entsprechen, so haben sie auch den Punkt E und folglich alle Punkte der Geraden u entsprechend gemein, woraus man schliessen kann, dass die beiden Systeme perspektivisch liegen, und dass der Curve s, welche die Geraden FA, FB in den Punkten A, B berührt und (254) durch den Schnittpunkt von GA und HB geht, die Curve s_1 entspricht, welche die Gerade FA_1, FB_1 in den Punkten A_1, B_1 berührt und durch den Schnittpunkt von GA_1 und HB_1 geht. Eben so entspricht der Curve s die Curve s_1, wenn zwei ebene Systeme perspektivisch so aufeinander bezogen werden, dass den Punkten G, H, A, B des einen die Punkte G, H, B_1, A_1 des andern entsprechen. Geht die Gerade AB nicht durch den Punkt P_1, so ist das perspektivische Projektionscentrum der beiden Systeme im erstern Falle der Schnittpunkt von AA_1, und BB_1, im letztern aber der Schnittpunkt von AB_1, und A_1B, welcher vom erstern Punkte durch die beiden Punkte P, P_1, die in jedem Falle einander entsprechen, harmonisch getrennt ist.

Aus diesem Beweise geht hervor, dass der obige Satz rechter Hand auch gilt, wenn die Curven nicht in einerlei Ebene liegen. Nur ist alsdann derselbe einem andern Satze gegenüberzustellen.

270. Wenn zwei Curven II. Ordnung in zwei Ebenen liegen und von der Schnittlinie dieser Ebenen ein und dasselbe Stück einschliessen, so giebt es (269) zwei Kegelflächen, deren jede durch beide Curven geht. Dasselbe gilt auch, wenn die Curven mit der Schnittlinie der Ebenen gar keinen Punkt gemein haben, aber wie im erstern Falle je zwei Punkte dieser Geraden, welche in Hinsicht auf die eine

Zwei nicht concentrische Kegelflächen II. Ordnung, welche in einen und denselben Winkel beschrieben sind, schneiden sich in zwei Curven II. Ordnung. Dasselbe gilt auch, wenn die Kegelflächen gar keine gemeinschaftliche Berührungsebene haben, aber wie im erstern Falle je zwei Ebenen, welche in Hinsicht auf die eine Fläche einander conjugirt sind und durch den Mittelpunkt der andern gehen, auch in Hinsicht auf

Curve einander conjugirt sind, es auch in Hinsicht auf die andere sind.

Durch je zwei Curven, welche Schnitte einer und derselben Kegelfläche II. Ordnung sind, aber keine gemeinschaftliche Tangente haben, lässt sich noch eine Kegelfläche II. Ordnung legen.

die andere einander conjugirt sind.

Je zwei Kegelflächen, welche eine und dieselbe Curve II. Ordnung projiciren, aber keinen Strahl mit einander gemein haben, schneiden sich in noch einer Curve II. Ordnung.

Die Pole der Geraden, in welcher die Ebenen der Curven sich schneiden, sind durch die Mittelpunkte der Kegelflächen, die Polaren der Geraden, welche diese Punkte verbindet, durch jene Ebenen harmonisch getrennt.

271. Wenn zwei collineäre ebene Systeme einen Strahlenbüschel S und also auch ein gerades Gebilde u entsprechend gemein haben, so entspricht jeder Curve s des einen Systems, welche die Gerade u in einem Punkte T berührt, eine Curve s_1 des andern, welche die Gerade u ebenfalls im Punkte T berührt. Wenn ferner der Geraden a des erstern Systems, welche durch keinen von den Punkten S, T geht, die Gerade a_1 des letztern entspricht, so entspricht auch dem Winkel au, welcher die dem Punkte T zunächstliegenden Theile der Curve s enthält, der Winkel a_1u, welche die dem Punkte T zunächstliegenden Theile der Curve s_1 enthält, woraus hervorgeht, dass die Curven im Punkte T die Gerade u auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten berühren, je nachdem die Systeme einstimmig- oder entgegengesetzt-perspektivisch sind. Man nehme nun an, dass die Systeme einstimmig-perspektivisch seyen und dass der Punkt T ein gewöhnlicher Punkt der Curven sey, so hat man folgende Fälle zu unterscheiden:

I. Wenn der Punkt S ausserhalb der Geraden u liegt, so wird die Curve s im Punkte T von der Curve s_1 auf ihrer hohlen oder erhabenen Seite berührt, je nachdem die Gerade h, welche den Punkt S mit dem Punkte aa_1 verbindet, von der Geraden a durch die Geraden a_1, u oder von der Geraden a_1 durch die Geraden a, u getrennt ist. — Jedes gerade Gebilde SPP_1R, welches aus dem Punkte S, einem Punkte P der Curve s, dem homologen Punkte P_1 der Curve s_1 und einem Punkte R der Geraden u besteht, ist (136) dem Strahlenbüschel $h a a_1 u$ projektivisch.

II. Wenn der Punkt S ein von T verschiedener Punkt der Geraden u ist, so schneiden sich die Curven s, s_1 im Punkte T. — Schneidet eine durch den Punkt S gehende Gerade die eine Curve in den Punkten C, D und die andere in den Punkten C_1, D_1, so ist (112) von den einander entsprechenden Strecken CD, C_1D_1 keine ganz in der andern enthalten.

III. Wenn der Punkt S mit dem Punkte T zusammenfällt, so wird in diesem Punkte die Curve s von der Curve s_1 auf der hohlen oder erhabenen Seite berührt, je nachdem der Winkel $a u$ den Winkel $a_1 u$ oder dieser den erstern in sich enthält. — Schneidet eine durch den Punkt S gehende Gerade die Curven s, s_1 in den Punkten c, c_1 und die Geraden a, a_1 in den Punkten A, A_1, so liegt von den einander entsprechenden Strecken CA, C_1A_1 keine ganz in der andern.

272. Wenn zwei collineäre ebene Systeme einen Strahlenbüschel S und also auch ein gerades Gebilde u entsprechend gemein haben, so entspricht jeder durch den Punkt S gehenden Curve s des einen Systems eine ebenfalls durch diesen Punkt gehende Curve s_1 des andern. Wenn ferner S ein gewöhnlicher Punkt der Curven ist, in welchem sie also von einem Strahle v des Büschels S berührt, von allen übrigen Strahlen desselben aber geschnitten werden, und dem Punkte A des erstern Systems, welcher in keiner der Geraden u, v liegt, der Punkt A_1 des letztern entspricht, so entspricht der Strecke AS, welche die Curve s auf der hohlen Seite trifft, die Strecke A_1S, welche die Curve s_1 auf der hohlen Seite trifft, woraus hervorgeht, dass die Curven die Gerade v auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten berühren, je nachdem die Systeme einstimmig- oder entgegengesetzt-perspektivisch sind. Sind die Systeme einstimmig-perspektivisch, so hat man folgende Fälle zu unterscheiden.

I. Wenn die Gerade u nicht durch den Punkt S geht, so wird die Curve s von der Curve s_1 auf der hohlen oder erhabenen Seite berührt, je nachdem der Schnittpunkt R von AA_1 und u vom Punkte A_1 durch die Punkte S, A oder vom Punkte A durch die Punkte S, A_1 getrennt ist. — Jedes gerade Gebilde SPP_1Q, welches aus dem Punkte S noch einem Punkte P der Curve s, dem entsprechenden Punkte P_1 der Curve s_1 und einem Punkte Q der Geraden u besteht, ist dem Gebilde SAA_1R projektivisch.

II. Wenn die Geraden u, v im Punkte S sich schneiden, so schneiden sich in diesem Punkte auch die beiden Curven. — Kein Winkel, welcher einen Punkt der Geraden u zum Mittelpunkt und zwei Tangenten der einen Curve zu Schenkeln hat, liegt ganz in dem ihm entsprechenden Winkel.

III. Wenn die Gerade u mit der Geraden v zusammenfällt, so wird (271) die Curve s von der Curve s_1 auf der hohlen oder erhabenen Seite berührt, je nachdem die Strecke AS die Strecke A_1S oder diese die erstere in sich enthält.

273. Es seyen k, k_1, k_2, k_3 homologe Curven von vier zu einander perspektivischen Systemen, welche in einerlei Ebene liegen und ein und dasselbe gerade Gebilde u entsprechend gemein. Wenn nun die Curven die Gerade u im Punkte T berühren, von jeder andern durch diesen Punkt gehenden Geraden aber in ihm geschnitten werden, und das gemeinschaftliche Projektionscentrum von k und k_1 der Punkt T, das von k und k_2 ein anderer Punkt T_1 der Geraden u, das von k und k_3 ein ausserhalb der Geraden u befindlicher Punkt T_2, folglich das von k_1 und k_2 ein dritter Punkt der Geraden u, das von k_1 und k_3 ein dritter Punkt der Geraden TT_2 und das von k_2 und k_3 ein dritter Punkt der Geraden T_1T_2 ist, so kann im Punkte T, in welchem die Curven k, k_1 sich berühren, die Curve k_2, welche beide in ihm schneidet, nicht zwischen den beiden erstern, und die Curve k_3, weil sie die drei erstern in T berührt, nicht zwischen zweien derselben durchgehen. Es ist hiedurch bewiesen, dass die Curven s, s_1 im zweiten der in 271 näher betrachteten Fälle inniger als im ersten und im dritten inniger als im zweiten sich aneinander anschmiegen. Eben so kann diess von den Curven s, s_1 in 272 bewiesen werden.

Man kann auch sagen, dass im zweiten Falle ein Berührungspunkt der Curven mit einem Schnittpunkte, im dritten aber zwei Berührungspunkte vereinigt seyen. Wenn z. B. in 272 die Curve s und die Punkte S, A, A_1 als gegeben betrachtet werden, so ist durch jede Gerade u, welche durch keinen von den beiden letztern Punkten geht, eine Curve s_1 bestimmt. Nimmt man nun an, dass die Gerade u um einen ausserhalb der beiden Geraden AA_1, v befindlichen Punkt sich drehe, so fällt einmal der Punkt R und zugleich ein Schnittpunkt der Curven s, s_1 mit dem Punkte S zusammen. Dieser Fall macht alsdann den Uebergang von dem einen der in I erwähnten Fälle zum andern. Nimmt man an, dass die Gerade u die Curve s in einem Punkte P berühre und alsdann den der Curve s sich anschmiegenden Strahlenbüschel beschreibe, so muss, wenn die Gerade u mit der Geraden v zusammenfällt, auch der Berührungspunkt P der beiden Curven s, s_1 mit ihrem Berührungspunkte S zusammenfallen. Endlich wird noch bemerkt, dass auch der Fall II, wenn man die Curve s und also auch die Curve s_1 in einem bestimmten Sinne sich beschrieben denkt, selbst wieder zwei Fälle in sich begreift, indem die Curve s_1 im Punkte S entweder von der hohlen Seite der Curve s auf die erhabene oder von der erhabenen auf die hohle übergeht. Wird die Gerade u durch den Punkt S gelegt und alsdann um diesen Punkt so gedreht, dass sie einmal über die Gerade v hinweggeht, so bildet der Fall III den Uebergang von dem einen der beiden in II enthaltenen Fälle zum andern.

274. Wenn zwei Curven II. Ordnung eine Gerade p in einem und demselben Punkte P berühren, so sind die geraden Gebilde p, p_1, von welchen das eine dem Strahlenbüschel P in Hinsicht auf die eine und das andere demselben Büschel in Hinsicht auf die andere Cnrve zugeordnet ist, einstimmig- oder entgegengesetzt projektivisch, je nachdem die Curven im Punkte P die Gerade p auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten berühren. Sind die geraden Gebilde p, p_1 einstimmig-projektivisch, so hat man ferner zu unterscheiden, ob sie zwei Punkte P, Q oder nur den Punkt P oder alle ihre Punkte entsprechend gemein haben. Im zweiten dieser Fälle schmiegen sich die Curven inniger als im ersten, im dritten inniger als in jedem der beiden erstern an einander an.

Im ersten Falle enthält nämlich der Strahlenbüschel P zwei Strahlen p, q deren Pole P, Q in Hinsicht auf beide Curven dieselben sind. Im zweiten Falle gilt diess nur von dem Strahle p, im dritten aber von allen Strahlen des Büschels P. Bezieht man daher die Curven perspektivisch so aufeinander, dass je zwei homologe Punkte mit dem Punkte P in einer und derselben Geraden liegen, so muss die Gerade u, welche von je zwei homologen Tangenten in einem und demselben Punkte geschnitten wird, im ersten Falle die Gerade p im Punkte Q, im zweiten Falle im Punkte P schneiden, im dritten Falle aber mit der Geraden p zusammenfallen. Bezieht man die Curven perspektivisch so aufeinander, dass je zwei homologe Tangenten die Gerade p in einem und demselben Punkte schneiden, so ist ihr gemeinschaftliches Projektionscentrum im ersten Falle ein ausserhalb der Geraden p befindlicher Punkt, im zweiten ein von P verschiedener Punkt der Geraden p und im dritten der Punkt P selbst.

275. Durch die drei Eckpunkte eines gegebenen Dreiecks SA_1B_1 eine Curve II. Ordnung zu legen, welche einer gegebenen Curve II. Ordnung, welche nicht durch alle drei Eckpunkte des Dreiecks geht, aber zwei Seiten desselben in einem Eckpunkte S schneidet, in diesem Punkte so innig als möglich sich anschmiege.

Es seyen A, B diejenigen Punkte der gegebenen Curve, welche aus dem Punkte S durch die Geraden SA_1, SB_1 projicirt werden. Bezieht man nun zwei ebene Systeme perspektivisch so aufeinander, dass sie den Strahlenbüschel S und das gerade Gebilde, welches den Punkt S mit dem Schnittpunkte von AB und A_1B_1 verbindet, entsprechend gemein haben und dass dem Punkte A des einen der Punkt A_1 des andern und also dem Punkte B des erstern der Punkt B_1 des letztern entspricht, so ist die Curve, welche der gegebenen entspricht, die gesuchte.

Sind eine Curve II. Ordnung und zwei Punkte S, A gegeben, von welchen der eine S in der Curve, der andere aber weder in der Curve noch in der Geraden u liegt, welche im erstern die Curve berührt, so findet man diejenige Curve II. Ordnung, welche durch die beiden gegebenen Punkte geht und im erstern der gegebenen Curve so innig als möglich sich anschmiegt, wenn man zwei ebene Systeme perspektivisch so aufeinander bezieht, dass sie den Strahlenbüschel S und das gerade Gebilde u entsprechend gemein haben, und dass der Punkt A_1 demjenigen Punkte der gegebenen Curve entspricht, welcher aus dem Punkt S durch die Gerade SA_1 projicirt wird. Eben so leicht lassen die reciproken Aufgaben sich auflösen.

276. Sollen zwei in einerlei Ebene liegende Systeme projektivisch so einander bezogen werden, dass sie eine gegebene Curve II. Ordnung entsprechend gemein haben, so kann man (264) in dieser Curve zu drei Punkten A, B, C des einen Systems die homologen Punkte A_1, B_1, C_1 des andern nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Systems ein Element des andern zugewiesen ist. Wenn nun die gegebene Curve als Gebilde des einen Systems durch s und als Gebilde des andern durch s_1 bezeichnet wird, und die Systeme nicht alle ihre Elemente entsprechend gemein haben, was nur der Fall wäre, wenn A mit A_1, B mit B_1 und C mit C_1 zusammenfiele, so gilt Folgendes.

I. Projicirt man die Curven s, s_1 aus einem und demselben in ihnen befindlichen Punkte M, so erhält man (265) zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel, welche zwei Strahlen oder nur einen Strahl oder gar keinen Strahl entsprechend gemein haben, je nachdem die Curven zwei Punkte oder nur einen Punkt oder gar keinen Punkt entsprechend gemein haben. Den Strahlen MA, MB, MC des einen Büschels entsprechen die Strahlen MA_1, MB_1, MC_1 des andern.

II. Projicirt man die Curve s_1 aus einem sich nicht selbst entsprechende Punkte A der Curve s und diese aus dem homologen Punkte A_1 der Curve s_1, so erhält man (noch 108 und 265) zwei zu einander perspektivische Strahlenbüschel. Den Strahlen AA_1, AB_1, AC_1 des erstern Büschels entsprechen die Strahlen A_1A, A_1B, A_1C des letztern. Die Gerade h, welche von je zwei homologen Strahlen dieser Büschel in einem und demselben Punkte geschnitten wird, geht, wenn die Curven s, s_1 zwei Punkte entsprechend gemein haben, durch diese beiden Punkte. Haben die Curven nur einen Punkt entsprechend gemein, so werden sie in diesem Punkte von der Geraden h berührt. Wenn aber die

Curven gar keinen Punkt entsprechend gemein haben, so haben sie auch mit der Geraden h keinen Punkt gemein.

III. Wenn irgend zwei Punkte der Curven s, s_1 und also auch zwei Strahlen der in I betrachteten Büschel, demnach (215) je zwei homologe Strahlen dieser Büschel und also auch je zwei homologe Punkte der Curven einander doppelt entsprechen, so müssen die Systeme, da jede Gerade, welche ein Paar homologe Punkte verbindet, sich selbst entspricht, einen Strahlenbüschel entsprechend gemein haben und folglich (227) involutorisch liegen.

IV. Wenn drei Gerade AA_1, BB_1, CC_1, deren jede einen Punkt der Curve s mit dem homologen Punkte der Curve s_1 verbindet, in einem und demselben Punkte sich schneiden, so kann man ebenfalls schliessen, dass die Systeme involutorisch liegen. Da nämlich (251) dieser Schnittpunkt sowohl dem Schnittpunkte von AB_1 und A_1B als auch dem Schnittpunkte von AC_1 A_1C conjugirt und mithin der Pol der Geraden h ist, folglich diese Gerade auch von den Geraden AB, A_1B_1 in einem und demselben Punkte geschnitten wird, so entspricht der Punkt B der Curve s_1 dem Punkte B_1 der Curve s. Dasselbe folgt auch aus 249 und 264.

V. Die zu einander collineären ebenen Systeme haben die Gerade h, die von je zwei Geraden PQ_1, P_1Q, von welchen die eine irgend zwei nicht homologe Punkte der Curven s, s_1 und die andere die ihnen entsprechenden Punkte verbindet, in einem und demselben Punkte geschnitten wird, und eben so den Punkt H (den Pol der Geraden h), welcher (251) mit dem Schnittpunkte pq_1 von je zwei nicht homologen Tangenten der Curven s, s_1 und dem Schnittpunkte p_1q der ihnen entsprechenden Tangenten in einer und derselben Geraden liegt, entsprechend gemein.

Projicirt man aus dem erstern von den beiden Punkten P, P_1 die Curve s_1 und aus dem letztern die Curve s, so erhält man zwei zu einander perspektivische Strahlenbüschel. Dass aber die Gerade, welche von je zwei homologen Strahlen dieser Büschel in einem und demselben Punkte geschnitten wird, mit der in II. erwähnten Geraden h zusammenfällt, geht, wenn auch die collineären Systeme nicht involutorisch liegen und die Curven s, s_1 keinen Punkt entsprechend gemein haben, daraus hervor, weil die drei Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten des Sechsecks $AP_1QA_1PQ_1$ sich schneiden, in einer und derselben Geraden liegen. Da ferner (251) der Schnittpunkt von PQ_1 und P_1Q mit dem Pole pq von PQ und dem Pole p_1q_1 von P_1Q_1 in einer und derselben Geraden liegt, und mithin die Gerade h, im Falle sie von zwei homologen Punkten pq, p_1q_1 der collineären Systeme den einen enthält, auch den andern enthalten muss, so folgt, dass die beiden Systeme die Gerade h und also auch ihren Pol H entsprechend gemein haben.

277. Wenn von den $2n+1$ Punkten, in deren jedem ein Paar Gegenseiten eines in eine Curve II. Ordnung beschriebenen $(4n+2)$ Ecks sich schneiden, $2n$ in einer und derselben Geraden h liegen, so liegt auch der letzte in dieser Geraden.

Wenn von den $2n+1$ Diagonalen, deren jede ein Paar Gegenpunkte eines um eine Curve II. Ordnung beschriebenen $(4n+2)$ Seits verbindet, $2n$ in einem und demselben Punkte sich schneiden, so geht auch die letzte durch diesen Punkt.

Man nehme an, dass die Punkte, in welchen die vier Seiten AB_1, B_1C, CD_1, D_1E eines in eine Curve II. Ordnung beschriebenen Zehnecks $AB_1CD_1EA_1BC_1DE_1$ von den ihnen gegenüberliegenden Seiten geschnitten werden, in einer und derselben Geraden h liegen. Bezieht man nun zwei Systeme collineär so aufeinander, dass sie die Curve entsprechend gemein haben, und dass den Punkten A, B, C des einen Systems die Punkte A_1, B_1, C_1 des andern entsprechen, so entsprechen auch (276) den Punkten D, E des erstern die Punkte D_1, E_1 des letztern, daher auch der Schnittpunkt der Seiten EA_1, E_1A in der Geraden h liegt.

278. Werden die Elemente einer Curve II. Ordnung s involutorisch gepaart, so dass nämlich die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 u. s. w., deren jede zwei einander zugeordnete Punkte der Curve verbindet, alle in einem und demselben Punkte H sich schneiden und also die Punkte aa_1, bb_1, cc_1 u. s. w., in deren jedem zwei einander zugeordnete Tangenten der Curve sich schneiden, alle in einer und derselben Geraden h liegen, so wird (276) jede Involution $AA_1.BB_1.CC_1$ von drei Paar Punkten der Curve aus

jedem in ihr befindlichen Punkte durch eine Involution von drei Paar Strahlen projicirt und jede Involution $a a_1 . b b_1 . c c_1$ von drei Paar Tangenten der Curve von jeder Tangente derselben in einer Involution von drei Paar Punkten geschnitten.

Wenn die Gerade h die Curve in zwei Punkten P, Q schneidet, so heissen in der Curve je zwei einander zugeordnete Punkte durch die Punkte P, Q und in dem der Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschel je zwei einander zugeordnete Strahlen durch die Strahlen HP, HQ harmonisch getrennt. Im erstern Gebilde vertritt jeder von den beiden Punkten P, Q, im letztern aber jeder von den beiden Strahlen die Stelle eines Paares.

Sind also die Diagonalen eines in eine Curve II. Ordnung beschriebenen Vierecks einander conjugirt, so liegen in der Curve die vier Eckpunkte des Vierecks, die Tangenten an diesen Punkten aber in dem der Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschel harmonisch. Die vier Eckpunkte des Vierecks werden aus jedem Punkte der Curve durch einen harmonischen Strahlenbüschel projicirt, die vier erwähnten Tangenten aber von jeder Tangente der Curve in einem harmonischen geraden Gebilde geschnitten.

279. Durch ein vollständiges Viereck sind (262) drei Curven II. Ordnung bestimmt, deren jede durch die vier Eckpunkte des Vierecks geht und in jedem dieser Punkte von einer Geraden berührt wird, welche mit den drei durch denselben Eckpunkt gehenden Seiten einen harmonischen Strahlenbüschel bildet. Jeder Punkt, aus welchem die Eckpunkte des Vierecks durch vier harmonisch liegende Strahlen projicirt werden, liegt in einer der drei Curven.

Durch ein vollständiges Vierseit sind drei Curven II. Ordnung bestimmt, deren jede Seite des Vierseits in einem Punkte berührt, welcher mit den in derselben Seite befindlichen Eckpunkten harmonisch liegt. Jede Gerade, welche die vier Seiten des Vierseits in vier harmonisch liegenden Punkten schneidet, berührt eine von den drei Curven.

280. Durch eine Curve II. Ordnung s und zwei Punkte H, P, von welchen der letztere weder

Durch eine Curve II. Ordnung s und zwei Gerade h, p, von welchen die letztere weder die in der Curve noch in der Polare des erstern noch mit dem erstern in einer und derselben Tangente der Curve liegt, ist eine andere Curve II. Ordnung k bestimmt, welche durch den letztern Punkt geht und die Bedingung erfüllt, dass der Pol einer jeden durch den erstern Punkt gehenden Geraden in Hinsicht auf beide Curven derselbe sey.

Curve berührt noch durch den Pol der erstern geht, noch die erstere in einem Punkte der Curve schneidet, ist eine andere Curve II. Ordnung k bestimmt, welche die letztere Gerade berührt und die Bedingung erfüllt, dass die Polare eines jeden in der erstern Geraden befindlichen Punktes in Hinsicht auf beide Curven dieselbe sey.

Durch die Curve s und die Gerade h ist auch der Pol H dieser Geraden und umgekehrt durch die Curve s und den Punkt H die Polare h dieses Punktes gegeben. Da nun das gerade Gebilde h und der Strahlenbüschel H eben so, wie sie in Hinsicht auf die Curve s einander zugeordnet sind, auch in Hinsicht auf die Curve k einander zugeordnet seyn sollen, die im Punkte P dieser Curve sich anschmiegende Gerade p durch den Pol der Geraden PH gehen und umgekehrt der Berührungspunkt der Tangente p in der Polare des Punktes ph liegen muss, mithin durch jedes von den beiden Elementen das andere bestimmt ist, so folgt der Satz aus 240.

In jeder Geraden, welche die eine von den beiden Curven in einem Punkte berührt und die andere in zwei Punkten schneidet, sind diese Punkte durch jenen Punkt und durch die Spur der Geraden h harmonisch getrennt. Schneidet eine Gerade die Gerade h im Punkte F, die eine Curve in den Punkten A, A_1 und die andere in den Punkten G, G_1, so ist $F.AA_1.GG_1$ eine Involution. Der Punkt, in welchem jene Gerade von der Po-

Die Schenkel eines jeden Winkels, welcher um die eine von den beiden Curven beschrieben ist und seinen Mittelpunkt in der andern hat, sind durch die Gerade, welche in diesem Punkte die andere berührt, und durch die Gerade, welche aus demselben Punkte den Punkt H projicirt, harmonisch getrennt. Schneiden sich zwei Tangenten a, a_1 der einen Curve und zwei Tangenten g, g_1 der andern Curve in einem und demselben lare des Punkes F geschnitten wird, ist nämlich von diesem sowohl durch die Punkte A, A_1 als auch durch die Punkte G, G_1 harmonisch getrennt.

Punkte, so ist, wenn die Gerade, welche aus diesem Punkte den Punkt H projicirt, durch f bezeichnet wird, $f.aa_1.gg_1$ eine Involution.

Es folgt hieraus ferner, dass die beiden Curven keinen ausserhalb der Geraden h befindlichen Punkt und also entweder gar keinen oder nur einen Punkt oder zwei Punkte mit einander gemein haben, je nachdem sie den Punkt H einschliessen oder in diesem Punkte die Gerade h berühren oder von dieser Geraden geschnitten werden, und dass im ersten so wie auch (274) im zweiten Falle die eine Curve von der andern eingeschlossen ist, im dritten Falle aber in ihren gemeinschaftlichen Punkten entweder die eine die andere von innen oder jede die andere von aussen berührt, je nachdem sie in einen und denselben oder nicht in einen und denselben von den beiden Winkeln beschrieben sind, welche ihre gemeinschaftlichen Tangenten mit einander bilden.

281. Wenn zwei collineäre ebene Systeme eine Curve II. Ordnung s aber nicht alle ihre Punkte entsprechend gemein haben und auch nicht involutorisch liegen, so berühren die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 u. s. w., deren jede ein Paar homologe Punkte der Curve s verbindet, eine andere Curve II. Ordnung k, während die Punkte aa_1, bb_1, cc_1 u. s. w., in deren jedem ein Paar homologe Tangenten der Curve s sich schneiden, in einer dritten Curve II. Ordnung liegen, welche in Hinsicht auf die Curve s dem der Curve k sich anschmiegenden Strahlenbüschel zugeordnet ist.

Nach dem vorigen Satze ist durch die Curve s, durch die in 276 erwähnte Gerade h und die Gerade AA_1 eine Curve II. Ordnung k bestimmt, welche die letztere Gerade berührt und die Bedingung erfüllt, dass die Polare eines jeden in der erstern befindlichen Punktes in Hinsicht auf beide Curven dieselbe sey. Um sich nun zu überzeugen, dass die Curve k auch von jeder andern Geraden BB_1, welche ein Paar homologe Punkte der Curve s verbindet, berührt werde, darf man nur bemerken, dass (251) der Punkt L, in welchem die Gerade h von den Geraden AB_1, A_1B geschnitten wird, der Pol der Geraden ist, welche den

Schnittpunkt M von AA_1 und BB_1 mit dem Schnittpunkte N von AB und A_1B_1 verbindet, und dass die einander conjugirten Geraden ML, MN durch die Geraden AA_1, BB_1 harmonisch getrennt sind.

282. Wenn die Eckpunkte eines Dreiecks in einer gegebenen Curve II. Ordnung sich bewegen, während zwei Seiten um zwei Punkte sich drehen, welche in Hinsicht auf die Curve einander conjugirt sind, so dreht sich (253) die dritte Seite um den Pol der Geraden, welche die beiden erstern Punkte verbindet.

Wenn die drei Seiten eines Dreiecks eine gegebene Curve II. Ordnung berühren und zwei Eckpunkte desselben in zwei gegebenen Geraden liegen, welche in Hinsicht auf die Curve einander conjugirt sind, so liegt der dritte Eckpunkt in der Polare des Punktes, in welchem die beiden erstern Geraden sich schneiden.

283. Wenn die Eckpunkte eines nEcks $A_1A_2A_3\ldots A_n$ in einer gegebenen Curve II. Ordnung liegen und $n-1$ Seiten desselben durch gegebene Punkte gehen, von welchen keiner in der Curve liegt, so geht die letzte Seite entweder ebenfalls durch einen gegebenen Punkt oder sie berührt eine gegebene Curve II. Ordnung.

Wenn die Seiten eines nEcks eine gegebene Curve II. Ordnung berühren, und $n-1$ Eckpunkte desselben in gegebenen Geraden liegen, von welchen keine die Curve berührt, so liegt der letzte Eckpunkt entweder ebenfalls in einer gegebenen Geraden oder in einer gegebenen Curve II. Ordnung.

Die Punkte A_1, A_2, A_3, $\ldots A_n$ sind nämlich homologe Punkte von n collineären Systemen, welche die gegebene Curve entsprechend gemein haben, und von welchen je zwei aufeinander folgende involutorisch liegen. Wenn nun auch das erste und letzte involutorisch liegen, so geht die Gerade A_nA_1 durch einen gegebenen Punkt. Ist aber diess nicht der Fall, so berührt (281) die Gerade A_nA_1 eine gegebene Curve II. Ordnung.

§. 21.

Von der Anzahl der gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten zweier Curven II. Ordnung.

284. Zwei Curven II. Ordnung haben (258) höchstens vier Punkte, die ihnen sich anschmiegenden Strahlenbüschel höchstens vier Strahlen mit einander gemein. Berühren zwei Curven II. Ordnung eine Gerade in einem und demselben Punkte, so haben sie höchstens noch zwei Punkte mit einander gemein und höchstens noch zwei gemeinschaftliche Tangenten. Berühren zwei Curven II. Ordnung zwei Gerade in denselben zwei Punkten, so haben sie weder einen dritten Punkt mit einander gemein noch eine dritte gemeinschaftliche Tangente.

Wenn zwei Curven II. Ordnung, welche zwei Gerade in denselben zwei Punkten berühren, perspektivisch so aufeinander bezogen werden, dass je zwei homologe Tangenten die eine gemeinschaftliche Tangente in einem und demselben Punkte schneiden, so liegen je zwei homologe Punkte mit dem Berührungspunkte der andern in einer und derselben Geraden. Da nämlich die andere gemeinschaftliche Tangente und also auch ihr Berührungspunkt sich selbst entspricht, so muss dieser Punkt das Projektionscentrum der zu einander perspektivischen Systeme seyn. Es folgt daher auch aus 271, dass in ihren gemeinschaftlichen Punkten entweder die eine von den beiden Curven die andere von innen oder jede die andere von aussen berührt, je nachdem sie nämlich in einen und denselben oder nicht in einen und denselben von den beiden Winkeln beschrieben sind, welche ihre gemeinschaftlichen Tangenten mit einander bilden.

285. Die Anzahl m der gemeinschaftlichen Punkte zweier Curven s, k II. Ordnung, welche in einerlei Ebene liegen, ist eine pare oder unpare Zahl, je nachdem die Anzahl n ihrer gemeinschaftlichen Tangenten eine pare oder unpare Zahl ist.

Es sey r die Anzahl der Punkte, in welchen die Curven sich berühren, so ist $m - r$ die Anzahl ihrer Schnittpunkte und $n - r$ die Anzahl derjenigen gemeinschaftlichen Tangenten, deren jede die Curven entweder in zwei verschiedenen Punkten oder in einem Schnittpunkte berührt. Bemerkt man nun, dass das System von allen in der Ebene befindlichen Geraden durch den Strahlenbüschel s in zwei Systeme getheilt wird, und dass eine Gerade, welche den Strahlenbüschel k beschreibt, in jeder der erwähnten n — r Tangenten von einem der beiden Systeme in das andere übergeht, so folgt, dass n — r eine pare Zahl sey, gleich wie m — r eine pare Zahl ist. Es sind also m, n, r entweder drei pare oder drei unpare Zahlen.

286. Versteht man unter einem n Ecke eine von n Strecken eingeschlossene Figur, so heisst ein n Eck in eine Curve II. Ordnung oder auch diese um das n Eck beschrieben, wenn das n Eck von der Curve eingeschlossen ist und alle seine Eckpunkte in derselben liegen. Umgekehrt heisst eine Curve II. Ordnung in ein n Eck oder auch das n Eck um die Curve beschrieben, wenn diese alle Seiten des n Ecks berührt, und also in dem n Ecke liegt. Jedes n Eck, welches in oder um eine Curve II. Ordnung beschrieben ist, hat lauter ausspringende Winkel.

287. Wenn zwei Curven II. Ordnung s, k vier gemeinschaftliche Tangenten a, b, c, d haben, so schneiden sie sich entweder in vier Punkten oder sie haben gar keinen Punkt mit einander gemein.

Wenn zwei Curven II. Ordnung in vier Punkten sich schneiden, so haben sie entweder vier gemeinschaftliche Tangenten oder gar keine gemeinschaftliche Tangente.

Durch die Geraden a, b, c, d wird die Ebene in drei Vierecke und vier Dreiecke getheilt. Sind nun die Curven s, k in ein und dasselbe Viereck beschrieben, so müssen sie sich in vier Punkten schneiden. Sind aber die Curven nicht in ein und dasselbe Viereck beschrieben, so haben sie keinen Punkt mit einander gemein.

Zwei Curven II. Ordnung, welche vier gemeinschaftliche Tangenten haben, berühren (284) keine dieser Geraden in einem und demselben Punkte. Eben so werden zwei Curven II. Ordnung, welche vier Punkte mit einander gemein haben, in keinem dieser Punkte von einer und derselben Geraden berührt.

288. Haben zwei Curven II. Ordnung s, k keinen Punkt mit einander gemein, so haben sie

Haben zwei Curven II. Ordnung keine gemeinschaftliche Tangente, so haben sie entwe-

entweder auch keine gemeinschaftliche Tangente oder vier gemeinschaftliche Tangenten.

der auch keinen Punkt mit einander gemein oder sie schneiden sich in vier Punkten.

Es kommt hier nur darauf an, ob die eine oder keine von den beiden Curven s, k die andere einschliesst. Im letztern Falle wird das System von allen in der Ebene befindlichen Geraden durch die beiden Strahlenbüschel s, k in fünf Systeme getheilt.

289. Wenn zwei Curven II. Ordnung s, k drei gemeinschaftliche Tangenten haben, so haben sie entweder (285) auch drei Punkte oder nur einen Punkt mit einander gemein.

Wenn zwei Curven II. Ordnung drei Punkte mit einander gemein haben, so haben sie entweder auch drei gemeinschaftliche Tangenten oder nur eine gemeinschaftliche Tangente.

Da die Anzahl der Punkte, welche die Curven s, k mit einander gemein haben, eine unpare Zahl ist, so müssen sie in einem Punkte sich berühren. Sind nun die beiden Curven in ein und dasselbe von den vier Dreiecken beschrieben, welche ihre gemeinschaftlichen Tangenten mit einander bilden, so schneiden sie sich in zwei Punkten. Sind aber die Curven nicht in ein und dasselbe Dreieck beschrieben, so haben sie nur jenen Punkt mit einander gemein.

290. Haben zwei Curven II. Ordnung zwei Punkte mit einander gemein, so haben sie auch nach 285, 287 und 288 zwei gemeinschaftliche Tangenten, und umgekehrt. Sind nun die Curven in einen und denselben von den beiden Winkeln beschrieben, welche ihre gemeinschaftlichen Tangenten mit einander bilden, so muss entweder die eine die andere in zwei Punkten von innen berühren oder sie müssen sich in zwei Punkten schneiden. Im letztern Falle kann man ferner unterscheiden, ob die Curven jede ihrer gemeinschaftlichen Tangenten in zwei verschiedenen Punkten oder ob sie die eine in einem ihrer Schnittpunkte berühren. Sind die Curven nicht in einen und denselben Winkel beschrieben, so berühren sie sich in zwei Punkten von aussen.

291. Nach 285 und 290 ist die Anzahl m der gemeinschaftlichen Punkte zweier Curven II. Ordnung, welche nämlich in einerlei Ebene liegen, entweder der Anzahl n ihrer gemein-

schaftlichen Tangenten gleich, oder es ist die Summe dieser beiden Zahlen $= 4$ oder es findet beides zugleich statt. Ist $m = n = 3$ oder $m = n = 1$, so berührt die eine von den beiden Curven die andere in einem Punkte von innen. Ist aber $m = 3$ und $n = 1$ oder $m = 1$ und $n = 3$, so berühren sich die Curven in einem Punkte von aussen.

292. Wenn von einer Curve II. Ordnung s fünf Punkte A, B, C, D, E und von einer andern Curve II. Ordnung k, welche durch die drei ersten Punkte, aber durch keinen der beiden übrigen geht, ebenfalls noch zwei Punkte D_1, E_1 gegeben sind, so kann man leicht finden, ob die Curven in einem ihrer gemeinschaftlichen Punkte sich berühren, oder in welchem vierten Punkte sie sich schneiden.

Man suche in der Curve s zuerst den Punkt D_2, so dass $E(ABCD_2) \barwedge E_1(ABCD_1)$ ist, und alsdann den Punkt F, welcher aus dem Punkte D_2 durch die Gerade $D_2 D_1$ projicirt ist. Da nun (255) $F(ABCD_2) \barwedge E(ABCD_2)$ und mithin auch $F(ABCD_1) \barwedge E_1(ABCD_1)$ ist, so folgt (256), dass der Punkt F auch in der Curve k liegt, und dass also dieser Punkt, wenn er mit keinem der drei Punkte A, B, C zusammenfällt, der vierte Schnittpunkt der beiden Curven ist. Fällt aber der Punkt F etwa mit dem Punkte A zusammen, so folgt auf dieselbe Weise, dass alsdann die Gerade, welche die Curve s im Punkte A berührt, in demselben Punkte auch die Curve k berühre.

293. Werden zwei vollständige Vierecke A B C D, $A_1 B_1 C_1 D_1$ angenommen, so dass jeder Punkt, in welchem ein Paar Gegenseiten des einen Vierecks sich schneiden, auch der Schnittpunkt von zwei solchen Seiten des andern ist, so haben die beiden Vierecke entweder zwei Seiten mit einander gemein, oder es liegen ihre acht Eckpunkte in einer Curve II. Ordnung.

Werden zwei vollständige Vierseite angenommen, so dass jede Gerade, welche ein Paar Gegenpunkte des einen Vierseits verbindet, auch durch zwei solche Punkte des andern geht, so haben die beiden Vierseite entweder ein Paar Gegenpunkte mit einander gemein, oder es berühren ihre acht Seiten eine Curve II. Ordnung.

Es sey M der Schnittpunkt von AB und CD, N der Schnittpunkt von AC und BD und R der Schnittpunkt von AD und BC. Wenn nun etwa der Punkt A_1 in der Geraden AB liegt, und A_1B_1 diejenige Seite des zweiten Vierecks ist, welche durch den Punkt M geht, so fällt diese Seite mit der Seite AB und folglich, da alsdann diese Gerade durch die Geraden MN, MR sowohl von CD als auch von C_1D_1 harmonisch getrennt ist, auch die Seite CD mit der Seite C_1D_1 zusammen. Lässt sich aber durch die fünf Punkte A, B, C, D, A_1 eine Curve II. Ordnung legen, so geht diese, da die Punkte A_1, B_1 durch den Punkt M und den Schnittpunkt von A_1B_1 und NR harmonisch getrennt und die letztern Punkte (251) einander conjugirt sind, auch durch den Punkt B_1 und eben so durch die Punkte C_1, D_1. Es ergeben sich hieraus und aus 251 noch folgende Sätze:

Haben zwei Curven II. Ordnung vier gemeinschaftliche Tangenten, so liegen die acht Berührungspunkte dieser Tangenten entweder in einer dritten Curve II. Ordnung oder in zwei Geraden. Der letztere Fall kann vorkommen, wenn die Curven sich nicht schneiden.

Schneiden sich zwei Curven II. Ordnung in vier Punkten, so berühren die acht Geraden, deren jede eine von den beiden Curven in einem jener Punkte berührt, entweder eine dritte Curve II. Ordnung, oder es schneiden sich vier in einem Punkte und die vier übrigen in einem andern Punkte.

294. Zwei collineäre Systeme, welche in einerlei Ebene, aber nicht perspektivisch liegen, haben entweder die drei Eckpunkte und die drei Seiten eines Dreiecks oder nur zwei Punkte und zwei Gerade, von welchen die eine durch beide Punkte, die andern aber durch einen derselben geht, oder nur einen Punkt und eine Gerade entsprechend gemein.

Es entspreche dem Punkte A des einen Systems der Punkt A_1 des andern, so entspricht der Geraden AA_1 des erstern Systems eine durch den Punkt A_1 gehende Gerade u des andern. Wenn nun, was man annehmen kann, diese Linien nicht in einander fallen, so erzeugen (256) die Strahlenbüschel A, A_1 eine Curve II. Ordnung k, welche offenbar durch jeden Punkt geht, welchen die collineären Systeme entsprechend gemein haben. Der Curve k des erstern Systems entspricht ferner eine Curve k_1 des andern, welche die Gerade u und die Curve k im Punkte A_1 schneiden muss, weil diese die Gerade $A A_1$ im Punkte A schneidet und die Gerade u im Punkte A_1 berührt. Da endlich je zwei homologe Punkte der beiden Curven aus dem Punkte A_1 durch einen und denselben Strahl projicirt werden, so folgt:

I. Wenn die beiden Curven in noch drei Punkten P, Q, R sich schneiden, so haben die collineären Systeme die Eckpunkte und also auch die Seiten des Dreiecks PQR entsprechend gemein.

II. Wenn die Curven nur noch in einem Punkte P sich schneiden, in einem Punkte Q aber sich berühren, so haben die Systeme zwei Punkte P, Q und zwei Gerade PQ, von welchen nämlich die letztere die Curven im Punkte Q berührt, entsprechend gemein.

III. Wenn die Curven nur noch in einem Punkte P sich schneiden und in diesem Punkte von einer und derselben Geraden p berührt werden, so haben die Systeme nur den Punkt P und die durch ihn gehende Gerade p entsprechend gemein. — Dass keine durch den Punkt P gehende, von p verschiedene Gerade PB mit der ihr entsprechenden Geraden PB_1 zusammenfällt, geht daraus hervor, weil je zwei homologe Punkte B, B_1 der Curven aus dem Punkte A_1 durch eine und dieselbe Gerade projicirt werden. Eine Gerade q aber, welche nicht durch den Punkt P geht, kann desshalb sich nicht selbst entsprechen, weil der Punkt pq sich nicht selbst entspricht.

IV. Wenn die Curven nur noch einen Punkt P gemein haben, in diesem Punkte aber nicht von einer und derselben Geraden berührt werden, so haben die Systeme nur den Punkt P und eine nicht durch ihn gehende Gerade entsprechend gemein. — Nach dem, was in III bemerkt wurde, haben die Systeme weder eine durch den Punkt P gehende Gerade noch mehr als eine Gerade entsprechend gemein. Um sich aber zu überzeugen, dass es eine Gerade giebt, welche sich selbst entspricht, darf man nur zwei homologe gerade Gebilde c, c_1 betrachten, welche im Punkte P sich schneiden und also Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels S sind. Wenn nun dem Punkte S des einen Systems der Punkt S_1 des andern entspricht und die Gerade $S S_1$ die Geraden c, c_1 in den Punkten C, C_1 schneidet, so entspricht die

Gerade $S_1 C_1$ der Geraden SC, also sich selbst. Eben so leicht findet man, wenn eine Gerade gegeben ist, welche die Systeme entsprechend gemein haben, einen sich selbst entsprechenden Punkt.

295. Wenn man in einer Ebene zwei Polarsysteme annimmt und je zwei Punkte V_1, V_2 der Ebene, welche von einer und derselben Geraden V die Pole in Hinsicht auf jene Systeme sind, einander entsprechend nennt, so hat man offenbar drei Systeme Σ, Σ_1, Σ_2 projektivisch so aufeinander bezogen, dass die beiden letztern dem erstern reciprok, also unter sich collineär sind und mithin entweder einen Strahlenbüschel S und ein durch seinen Mittelpunkt gehendes gerades Gebilde u, oder einen Strahlenbüschel S und ein nicht durch seinen Mittelpunkt gehendes gerades Gebilde u, oder nur die Eckpunkte und Seiten eines Dreiecks PQR, oder nur zwei Punkte P, Q und zwei Gerade PQ, p, welche im Punkte Q sich schneiden, oder nur einen Punkt P und eine durch ihn gehende Gerade p, oder nur einen Punkt P und eine nicht durch ihn gehende Gerade p entsprechend gemein haben.

Im ersten Falle berühren sich die Ordnungscurven s, k der Polarsysteme im Punkte S so innig, dass der Pol einer jeden durch den Punkt S gehenden Geraden in Hinsicht auf beide derselbe ist.

Im zweiten Falle haben die Polarsysteme unendlich viele Polardreiecke mit einander gemein. Die Curven s, k berühren sich (280) entweder in zwei Punkten, oder sie haben gar keinen Punkt mit einander gemein.

Im dritten Falle haben die Polarsysteme nur das Polardreieck PQR mit einander gemein. Die Curven s, k schneiden sich entweder in vier Punkten oder haben gar keinen Punkt mit einander gemein. Gehen nämlich beide Curven durch den Punkt A, so muss dieser, wenn nicht der zweite Fall Statt finden soll, ausserhalb der drei Geraden PQ, PR, QR liegen. Sucht man nun zu dem Punkte P, A und dem Schnittpunkte von PA und QR den vierten harmonischen Punkt B, so hat man noch einen gemeinschaftlichen Punkt der beiden Curven. Eben so kann man aber in jeder von den beiden Geraden QA, RA einen Punkt finden, in welchem die Curven sich schneiden.

Im vierten Falle berühren sich die Curven s, k im Punkte Q, so dass es aber nur noch einen Punkt P giebt, dessen Polare p in Hinsicht auf beide Polarsysteme dieselbe ist, daher die Curven entweder nur den Punkt Q oder noch zwei Punkte mit einander gemein haben, in welchen sie sich schneiden.

Im fünften Falle schneiden sich (274) die Curven s, k in dem Punkte P, in welchem beide von der Geraden p berührt werden, und also noch in einem andern Punkte.

Im sechsten Falle, in welchem es auch nur einen Punkt P giebt, dessen Polare p in Hinsicht auf beide Polarsysteme dieselbe ist, diese Gerade aber nicht durch jenen Punkt geht, haben die Curven s, k zwei Punkte mit einander gemein, so dass aber in keinem dieser Punkte beide von einer und derselben Geraden berührt werden. Da es nämlich in der Geraden p keine zwei Punkte giebt, welche in Hinsicht auf jedes der beiden Polarsysteme einander conjugirt sind, so schneiden sich (309) die Curve s und die Gerade p in zwei Punkten, die durch die Punkte, in welchen dieselbe Gerade von der Curve k geschnitten wird, getrennt sind, daher auch die beiden Curven sich schneiden müssen. Würden sie sich in vier Punkten schneiden, so hätten (251) die Polarsysteme ein Polardreieck mit einander gemein.

Wenn ein ebenes Polarsystem keine Ordnungscurve hat, so sagt man, dass seine Ordnungscurve imaginär sey. Ist also irgend eine von den beiden Curven s, k imaginär, so muss entweder der zweite oder dritte von den obigen Fällen Statt finden.

---

§. 22.

Von den Linien II. Ordnung überhaupt.

296. Unter einer Linie II. Ordnung versteht man entweder eine Curve II. Ordnung oder den Inbegriff von zwei in einerlei Ebene liegenden Geraden. Das Reciproke hievon ist in der Ebene ein Strahlenbüschel II. Ordnung, welcher nämlich entweder einer Curve II. Ordnung sich anschmiegt, oder der Inbegriff von zwei Strahlenbüscheln I. Ordnung ist.

Durch zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel, welche in einerlei Ebene liegen, aber nicht concentrisch sind, ist eine Linie II. Ordnung bestimmt, der nämlich jeder Punkt angehört, welchen ein Strahl des einen Büschels mit dem homologen Strahle des andern gemein hat. Liegen die Strahlenbüschel perspektivisch, so besteht die Linie II. Ordnung aus zwei Geraden, von welchen die eine die Mittelpunkte der beiden Büschel verbindet.

Durch zwei zu einander projektivische gerade Gebilde, welche sich schneiden, ist ein Strahlenbüschel II. Ordnung bestimmt, dem jeder Strahl angehört, welcher durch einen Punkt des einen Gebildes und zugleich durch den homologen Punkt des andern geht. Liegen die geraden Gebilde perspektivisch, so ist der Strahlenbüschel II. Ordnung der Inbegriff von zwei Strahlenbüscheln I. Ordnung, von welchen der eine den Schnittpunkt der geraden Gebilde zum Mittelpunkt hat.

297. Wenn in einer Ebene zwei Dreiecke perspektivisch liegen, aber weder einen Eckpunkt noch eine Seite mit einander gemein haben, so liegen (259) die Punkte, in deren jedem zwei nicht homologe Seiten der beiden Dreiecke sich schneiden, in einer Linie II. Ordnung s und die Geraden, deren jede zwei nicht homologe Eckpunkte der beiden Dreiecke verbindet, in einem Strahlenbüschel II. Ordnung s_1, welcher in dem (241) durch die beiden Dreiecke bestimmten Polarsysteme jener Linie zugeordnet ist.

Liegt ein Eckpunkt des einen Dreiecks in einer Seite des andern, so wird diese Gerade in jenem Punkte sowohl von den Curven s, s_1 als auch von der Ordnungscurve des erwähnten Polarsystems berührt. Ist das eine von den beiden Dreiecken in das andere beschrieben, so fallen die drei Curven in einander.

298. Jedem einer Curve II. Ordnung einbeschriebenen vollständigen Vierecke ABCD ist ein um dieselbe beschriebenes vollständiges Vierseit zugeordnet.

Je zwei Gegenpunkte des vollständigen Vierseits liegen mit den vier Eckpunkten des Vierecks in einer Linie II. Ordnung.

Je zwei Gegenseiten des vollständigen Vierecks liegen mit den vier Seiten des Vierseits in einem Strahlenbüschel II. Ordnung.

Es seyen E, F die Pole der Geraden AB, CD, so liegen (251) die drei Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten des Sechsecks AEBCFD sich schneiden, in einer und derselben Geraden, woraus (259) der Satz folgt.

299. Wenn man in einer Ebene ein vollständiges Viereck ABCD und eine Gerade d annimmt, welche durch keinen Eckpunkt desselben geht, und je zwei Punkte P, P_1 der Geraden d, welche mit den vier Eckpunkten des Vierecks in einer Linie II. Ordnung liegen, einander zugeordnet nennt, so sind die Elemente des geraden Gebildes d involutorisch gepaart.

Wenn man in einer Ebene ein vollständiges Vierseit abcd und einen Punkt D annimmt, welcher in keiner Seite desselben liegt, und je zwei Strahlen des Strahlenbüschels D, welche mit den vier Seiten des Vierseits in einem Strahlenbüschel II. Ordnung liegen, einander zugeordnet nennt, so sind die Elemente des Büschels D involutorisch gepaart.

Es werde die Gerade AB von der Geraden d oder PP_1 im Punkte G und von der Geraden PD im Punkte H geschnitten, so ist (119) ABGH $\barwedge$ BAHG $\barwedge$ P ($BADP_1$). Da aber nach der Annahme P ($BADP_1$) $\barwedge$ C ($BADP_1$) ist, so ist auch ABGH $\barwedge$ C ($BADP_1$), woraus hervorgeht, dass in dem Polarsysteme, in welchem (237) die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks ABC die Pole der ihnen gegenüberliegenden Seiten a, b, c sind, und dem Punkte D die Gerade d, folglich dem Punkte G oder cd die Gerade CD zugeordnet ist, der Punkt H der Pol der Geraden CP_1, mithin der Punkt P_1, in welchem diese Gerade von der Geraden d geschnitten wird, der Pol der Geraden HD oder DP ist, und dass also P, P_1 conjugirte Punkte und DP_1, DP conjugirte Gerade des erwähnten Polarsystems sind. Der Linie II. Ordnung s, welche durch die Punkte A, B, C, D, P, P_1 geht, ist ein Strahlenbüschel II. Ordnung s_1 zugeordnet, welchem die Geraden a, b, c, d, DP_1, DP angehören. Es bieten sich hier noch folgende Bemerkungen dar:

I. Wenn der Punkt P in einer Seite des vollständigen Vierecks ABCD liegt, so liegt der Punkt P_1 in der gegenüberliegenden Seite, so dass alsdann die Linie s der Inbegriff von zwei

Geraden und der Strahlenbüschel s_1 der Inbegriff von zwei Büscheln erster Ordnung ist.

II. Wenn die Gerade d von den sechs Seiten des vollständigen Vierecks A B C D nur in vier Punkten geschnitten wird, oder zwei einander zugeordnete Schnittpunkte durch zwei andere solche Punkte getrennt sind, so giebt es keine Curve II. Ordnung, welche durch die vier Punkte A, B, C, D geht und die Gerade d berührt, und eben so keine Curve II. Ordnung, welche die vier Geraden a, b, c, d berührt und durch den Punkt D geht. Im erstern Falle besteht nämlich jede Linie II. Ordnung, welche durch die Punkte A, B, C, D und einen Ordnungspunkt des involutorischen geraden Gebildes d geht, also mit dieser Geraden nur einen Punkt gemein hat, aus zwei Geraden. Im letztern Falle aber enthält das involutorische Gebilde keinen sich selbst zugeordneten Punkt.

III. Schneidet die Gerade d zwei Seiten AB, CD des vollständigen Vierecks ABCD in einem und demselben Punkte, die übrigen Seiten aber in vier verschiedenen Punkten, so giebt es eine Curve II. Ordnung s, welche durch die vier Punkte A, B, C, D geht und die Gerade d berührt, und eben so eine Curve II. Ordnung s_1, welche die vier Geraden a, b, c, d berührt und durch den Punkt D geht. Der Berührungspunkt N der Curve s mit der Geraden d liegt in der Geraden, welche den Schnittpunkt von AC und BD mit dem Schnittpunkte von AD und BC verbindet. Die Curve s_1 wird im Punkte D von der Geraden DN berührt.

IV. Wenn das involutorische Gebilde d zwei Ordnungspunkte enthält, aber in keinem derselben zwei Seiten des Vierecks ABCD schneidet, so sind die Punkte A, B, C, D die Schnittpunkte von zwei Curven II. Ordnung, welche die Gerade d berühren, und die Geraden a, b, c, d die gemeinschaftlichen Tangenten von zwei Curven, welche durch den Punkt D gehen.

300. Wenn von zwei Dreiecken ABC, DPP_1, welche weder einen Eckpunkt noch eine Seite mit einander gemein haben, irgend eine von folgenden drei Aussagen gilt, so gelten auch nach dem Beweise des vorigen Satzes die beiden übrigen.

I. Die sechs Eckpunkte der Dreiecke liegen in einer Linie II. Ordnung.

II. Die sechs Seiten der Dreiecke gehören einem Strahlenbüschel II. Ordnung an.

III. Die Dreiecke sind (absolute) Polardreiecke eines und desselben Polarsystems.

301. Die in 299 enthaltenen Sätze lassen sich, wenn man nicht auf die letztern Rücksicht nehmen will, noch etwas kürzer beweisen. Liegen nämlich die Punkte A, B, C, D, P, P_1 in einer Curve II. Ordnung, so ist A (PP_1CD) $\barwedge$ B (PP_1CD). Bezeichnet man also die Punkte, in welchen die Gerade PP_1 von den Geraden AC, AD, BC, BD geschnitten wird, durch Q, R, R_1, Q_1, so ist $PP_1QR \barwedge PP_1R_1Q_1$, also auch $PP_1QR \barwedge P_1P$ Q_1R_1 und mithin $PP_1 . QQ_1 . RR_1$ eine Involution.

Lässt man den Punkt D der Curve mit dem Punkte A zusammenfallen, so dass AD in eine Tangente übergeht, so wird die Gerade PP_1 in den Punkten Q, Q_1 von zwei Seiten des Dreiecks ABC, im Punkte R von der Geraden, welche die Curve im Schnittpunkte dieser Seiten berührt, und im Punkte R_1 von der dritten Seite geschnitten. Fällt überdiess C mit B und also auch Q mit Q_1 zusammen, so sind in der Geraden PP_1 die Punkte R, R_1 die Spuren von zwei Tangenten, deren Berührungspunkte mit dem Punkte Q in einer und derselben Geraden liegen.

302. Wenn zwei Punkte P, P_1 durch je zwei Gegenseiten eines Vierecks ABCD harmonisch getrennt sind, so sind sie in Hinsicht auf jede Curve II. Ordnung, welche durch die vier Eckpunkte des Vierecks geht, einander conjugirt, daher sie auch in Hinsicht auf das Viereck einander conjugirt heissen sollen.

Wenn zwei Gerade durch je zwei Gegenpunkte eines Vierseits harmonisch getrennt sind, so sind sie in Hinsicht auf jede Curve II. Ordnung, welche die vier Seiten des Vierseits berührt, einander conjugirt, daher sie auch in Hinsicht auf das Vierseit einander conjugirt heissen sollen.

Es sey M der Schnittpunkt von AB und CD, N der von AD und BC und S der von AC und BD, so sind die Geraden

NA, NB sowohl durch die Geraden NM, NS als auch durch die Geraden NP, NP_1 harmonisch getrennt, daher $N\,(ABMP) \barwedge N\,(ABSP_1)$ ist. Wenn also die Gerade MP von den Geraden NA, NB in den Punkten a, b und die Gerade MP_1 von den Geraden NA, NB, NS in den Punkten d, c, e geschnitten wird, so ist auch $abMP \barwedge dceP_1$. Da nun die Geraden MP, MP_1 durch die Geraden MA, MD, demnach auch die Punkte a, d durch die Punkte A, D harmonisch getrennt sind, folglich der Punkt a dem Punkte d und eben so der Punkt b dem Punkte c und überdiess der Punkt M dem Punkte e conjugirt ist, so sind auch (252) die Punkte P, P_1 einander conjugirt.

303. In Hinsicht auf ein vollständiges Viereck $ABCD$ ist jeder Geraden v, welche je zwei Gegenseiten in zwei Punkten schneidet, eine Curve II. Ordnung v_1 conjugirt, welche den Pol jener Geraden in Hinsicht auf jede durch die vier Eckpunkte des Vierecks gehende Curve II. Ordnung k enthält.

In Hinsicht auf ein vollständiges Vierseit ist jedem Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt nicht mit zwei Gegenpunkten in einer Geraden liegt, ein Strahlenbüschel II. Ordnung conjugirt, welcher die Polare jenes Punktes in Hinsicht auf jede die vier Seiten des Vierseits berührende Curve II. Ordnung enthält.

Wenn nämlich M, N, S das Vorige bedeuten und dem Punkte P der Geraden v der Punkt P_1 conjugirt ist, so sind MP, NP, MP_1, NP_1 homologe Strahlen von vier zu einander projektivischen Strahlenbüscheln, von welchen der erste und zweite ein und dasselbe gerade Gebilde v projiciren, der erste und dritte aber und eben so der zweite und vierte involutorisch liegen. Fällt der Punkt P mit dem Schnittpunkte von MN und v zusammen, so fällt der Punkt P_1 mit dem Punkte S zusammen. Die beiden letztern von den erwähnten vier Strahlenbüscheln erzeugen also eine Curve II. Ordnung v_1, welche die sechs Seiten des vollständigen Vierecks in den drei Punkten M, N, S und in den Punkten E, F, G, H, I, K schneidet, welche in Hinsicht auf dasselbe den Spuren seiner Seiten AB, CD, AD, BC, AC, BD in der Geraden v conjugirt sind. Ist Q_1 der Pol der Geraden v in Hinsicht auf die Curve k, so muss der Punkt Q, welchem der Punkt

Q_1 in Hinsicht auf das vollständige Viereck und also auch in Hinsicht auf die Curve k conjugirt ist, in der Geraden v und mithin der Punkt Q_1 in der Curve v_1 liegen.

Da die Punkte B, D vom Punkte A durch die Geraden v, EG harmonisch getrennt sind, so geht (98) die Gerade EG und eben so auch die Gerade FH durch den Schnittpunkt von v und BD. Eben so ist der Schnittpunkt von EH und FG zugleich der Schnittpunkt von v und AC. Man kann hieraus ferner schliessen, dass die Gerade v von je zwei Gegenseiten des vollständigen Vierecks in zwei Punkten geschnitten wird, welche in Hinsicht auf die Curve v_1 einander conjugirt sind, und dass die drei Geraden EF, GH, IK in einem und demselben Punkte sich schneiden, welcher nämlich der Pol der Geraden v in Hinsicht auf die Curve v_1 ist.

---

§. 23.

Aufgaben vom zweiten Grade.

304. Wenn irgend eine Curve II. Ordnung gegeben ist, so kann man mit Hilfe derselben leicht finden, ob und welche Elemente zwei projektivische einförmige Grundgebilde, welche in einer und derselben Geraden liegen, oder eine gemeinschaftliche Axe haben, oder concentrisch sind und in einerlei Ebene liegen, entsprechend gemein haben, vorausgesetzt, dass zu drei Elementen des einen Gebildes die homologen Elemente des andern gegeben sind.

Haben z. B. zwei projektivische Strahlenbüschel, welche mit der gegebenen Curve in einerlei Ebene liegen, einen Punkt M der Curve zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt, aus welchem drei Strahlen des einen Büschels die Punkte A, B, C und die ihnen entsprechenden Strahlen des andern Büschels die Punkte A_1, B_1, C_1 der Curve projiciren, so darf man nur (276) suchen, ob und welche Punkte die gegebene Curve mit der Geraden h gemein hat, die den Schnittpunkt von AB_1 und A_1B mit dem Schnittpunkte von AC_1 und A_1C verbindet. Liegen zwei projektivische gerade Gebilde in einer und derselben Geraden und mit der gegebenen

Curve in einerlei Ebene, so darf man nur, um diesen Fall auf den vorigen zurückzuführen, die beiden geraden Gebilde (drei Punkte des einen und die ihnen entsprechenden Punkte des andern) aus einem und demselben Punkte der Curve projiciren. Eben so kann jeder andere Fall durch Projiciren und Schneiden auf den zuerst betrachteten zurückgeführt werden.

Wenn die einförmigen Gebilde involutorisch liegen und also nach den Ordnungselementen eines involutorischen einförmigen Gebildes gefragt wird, so sind schon durch zwei Elementenpaare $a a_1$, $b b_1$ zu drei Elementen a, b, a_1 des einen Gebildes die homologen Elemente a_1, b_1, a des andern gegeben. Die oben erwähnte Gerade h ist alsdann die Polare des Punktes, in welchem die Geraden $A A_1$, $B B_1$ sich schneiden.

305. Es sind in einer Ebene fünf Punkte A, B, C, D, E, von welchen keine drei in einer Geraden liegen, und eine Gerade u gegeben, welche durch keinen der fünf Punkte geht; man soll die Punkte finden, welche diese Gerade mit der durch die fünf gegebenen Punkte bestimmten Curve II. Ordnung s gemein hat.

Es sind in einer Ebene fünf Gerade, von welchen keine drei in einem Punkte sich schneiden, und ein Strahlenbüschel erster Ordnung gegeben, dessen Mittelpunkt in keiner der fünf Geraden liegt; man soll die Strahlen finden, welche dieser Büschel mit dem durch die fünf gegebenen Geraden bestimmten Strahlenbüschel II. Ordnung gemein hat.

Man beziehe die Strahlenbüschel A, B projektivisch so aufeinander, dass den Strahlen AC, AD, AE des einen die Strahlen BC, BD, BE des andern entsprechen, so werden diese Büschel von der Geraden u in zwei zu einander projektivischen geraden Gebilden geschnitten, welche, wenn die Curve s und die Gerade u sich schneiden, diese Schnittpunkte entsprechend gemein haben. Haben die geraden Gebilde nur einen Punkt entsprechend gemein, so wird in ihm die Curve von der Geraden u berührt. Wenn aber die geraden Gebilde keinen Punkt entsprechend gemein haben, so hat auch die Gerade u mit der Curve keinen Punkt gemein. Wären statt der fünf Punkte A, B, C, D, E fünf Tangenten der Curve s gegeben, so dürfte man nur (260) von drei Tangenten a, b, c die Berührungspunkte A, B, C suchen und alsdann die Büschel A, B projektivisch so aufeinander beziehen, dass den Strahlen a, AB, AC des erstern die Strahlen BA, b, BC des letztern entsprechen. Ein anderes Verfahren, die obige Aufgabe auf 304 zurückzuführen, besteht in Folgendem:

Es seyen M, N die Spuren der Geraden AB, AC in der Geraden u. Man suche (260) den Punkt F der Curve s, welcher aus dem Punkte C durch die Gerade CM projicirt wird, so ist die Gerade, welche den Schnittpunkt von AF und BC mit dem Schnittpunkte von AC und BF verbindet, die Polare des Punktes M und mithin ihre Spur M_1 in der Geraden u dem Punkte M conjugirt. Sucht man auf diese Weise auch den Punkt N_1 der Geraden u, welcher dem Punkte N conjugirt ist, so kommt es alsdann nur darauf an, ob die Punkte N, N_1 in einer und derselben Strecke MM_1 liegen, oder ob der Punkt N_1 mit dem Punkte M_1 zusammenfällt, oder ob die Punkte N, N_1 durch die Punkte M, M_1 getrennt sind. Im ersten Falle schneiden sich die Curve s und die Gerade u in den Punkten, welche sowohl durch die Punkte M, M_1 als auch durch die Punkte N, N_1 harmonisch getrennt und also die Ordnungspunkte des involutorischen geraden Gebildes u sind. Im zweiten Falle haben die Curve s und die Gerade u nur den Punkt M_1, im dritten Falle aber gar keinen Punkt mit einander gemein.

306. Eine Gerade zu finden, welche vier gegebene Gerade a, b, c, d, von welchen keine zwei in einerlei Ebene liegen, schneide.

Man projicire das gerade Gebilde c sowohl aus der Axe a als auch aus der Axe b auf die Gerade d, so erhält man zwei projektivische gerade Gebilde, welche in einer und derselben Geraden d liegen. Haben diese Gebilde drei Punkte und also alle ihre Punkte entsprechend gemein, so giebt es durch jeden Punkt der Geraden d eine Gerade, welche die vier gegebenen Geraden schneidet. Ist aber diess nicht der Fall, so ist die Aufgabe auf 304 zurückgeführt.

307. In n gegebenen Geraden a_1, a_2, a_3, a_4, ... a_n, von welchen jede folgende die vorhergehende, die letzte aber auch die erste schneidet, n Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, ... P_n zu finden, so dass die n Geraden P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, ... P_nP_1 der Ordnung

nach durch n gegebene Punkte C_1, C_2, C_3, … C_n gehen. Es wird hiebei vorausgesetzt, dass der Punkt C_1 in der Ebene $a_1 a_2$, aber in keiner von den beiden Geraden a_1, a_2 liege, dass man also das gerade Gebilde a_1 aus dem Punkte C_1 auf die Gerade a_2, eben so das gerade Gebilde a_2 (die Projektion von a_1) aus dem Punkte C_2 auf die Gerade a_3, das gerade Gebilde a_3 aus dem Punkte C_3 auf die Gerade a_4 u. s. w. und das gerade Gebilde a_n aus dem Punkte C_n auf die Gerade a_1 projiciren könne. Man erhält alsdann $n+1$ zu einander projektivische gerade Gebilde, von welchen jedes folgende eine Projektion des vorhergehenden ist, das letzte aber mit dem ersten in einer und derselben Geraden liegt. Haben nun diese beiden Gebilde drei Punkte und also alle ihre Punkte entsprechend gemein, so kann jeder Punkt der Geraden a_1 der Punkt P_1 seyn. Ist aber diess nicht der Fall, so ist die Aufgabe auf 304 zurückgeführt. Wenn die gegebenen Geraden die Seiten eines n Ecks sind, so kann die Aufgabe auch so ausgesprochen werden:

In ein gegebenes n Eck ein n Eck zu beschreiben, dessen Seiten der Ordnung nach durch n gegebene Punkte gehen.

308. In eine gegebene Curve II. Ordnung s ein n Eck zu beschreiben, dessen Seiten der Ordnung nach durch n gegebene Punkte Q_1, Q_2, Q_3, … Q_n gehen, von welchen keiner in der gegebenen Curve liegt.

Um eine gegebene Curve II. Ordnung ein n Eck zu beschreiben, dessen Eckpunkte der Ordnung nach in n gegebenen Geraden liegen, von welchen keine die gegebene Curve berührt.

Nennt man $n+1$ Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, … P_n, P_{n+1} der Curve s einander entsprechend, wenn die Geraden P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, … P_nP_{n+1} der Ordnung nach durch die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, … Q_n gehen, so hat man $n+1$ ebene Systeme projektivisch so aufeinander bezogen, dass alle die Curve s entsprechend gemein haben und jedes folgende mit dem vorhergehenden involutorisch liegt. Wenn nun das erste und letzte drei Punkte der Curve s und also alle ihre Punkte entsprechend gemein haben, so lässt die Aufgabe unendlich viele Auflösungen zu. Ist aber diess nicht der Fall, so findet man auf die in 276 angegebene Weise, indem man nämlich zu drei in der Curve s befindlichen

Punkten A_1, B_1, C_1 des ersten Systems die homologen Punkte A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} des letzten sucht und alsdann den Schnittpunkt von $A_1 B_{n+1}$ und $A_{n+1} B_1$ mit dem Schnittpunkte von $A_1 C_{n+1}$ und $A_{n+1} C_1$ durch eine Gerade h verbindet, ob und welche Punkte der Curve s das erste und letzte System entsprechend gemein haben.

309. Es sind zwei involutorische einförmige Gebilde gegeben, welche entweder in einer und derselben Geraden liegen, oder concentrisch sind und in einerlei Ebene liegen, oder eine gemeinschaftliche Axe haben; man soll zwei Elemente finden, welche in jedem der beiden Gebilde einander zugeordnet sind.

Man nenne drei Elemente V, V_1, V_2 einander entsprechend, wenn in dem einen involutorischen Gebilde dem Elemente V das Element V_1 und im andern dem Elemente V das Element V_2 zugeordnet ist, so hat man offenbar drei projektivische Gebilde v, v_1, v_2, von welchen das erste mit jedem der beiden übrigen involutorisch liegt, daher es nur darauf ankommt, die Elemente zu finden, welche die Gebilde v_1, v_2 entsprechend gemein haben.

Ist irgend eine Curve II. Ordnung gegeben, so kann man ferner annehmen, dass die gegebenen involutorischen Gebilde Strahlenbüschel sind, welche einen Punkt M der Curve zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben und mit ihr in einerlei Ebene liegen, indem auf diesen Fall (wie in 304) jeder andere Fall zurückgeführt werden kann. Es seyen nun in dem einen involutorischen Büschel den Strahlen MA, MB, welche die Punkte A, B der Curve projiciren, die Strahlen MA_1, MB_1 zugeordnet, welche die Punkte A_1, B_1 der Curve projiciren, so werden (278) je zwei Punkte der Curve, welche mit dem Schnittpunkte H von AA_1 und BB_1 in einer Geraden liegen, durch zwei einander zugeordnete Strahlen jenes Büschels projicirt. Eben so findet man einen Punkt J, welcher mit je zwei Punkten A, A_2 der Curve, die aus dem Punkte M durch zwei einander zugeordnete Strahlen des andern involutorischen Büschels projicirt werden, in einer Geraden liegt. Wenn also die Gerade HJ die Curve in zwei Punkten P, Q schneidet, so sind die Strahlen MP, MQ in jedem der beiden involutorischen Büschel einander zugeordnet. Wird aber die Curve von der Geraden HJ nur in einem Punkte P berührt, so haben die involutorischen Büschel einen Ordnungsstrahl MP mit einander gemein. Wenn endlich die Gerade HJ mit der Curve gar keinen Punkt gemein hat, so giebt es auch kein Element, welches in beiden involutorischen Gebilden sich selbst oder einem und demselben andern Elemente zugeordnet ist. Dieser Fall findet offenbar nur dann Statt, wenn jedes von den beiden involutorischen Gebilden zwei Ordnungselemente hat, und überdiess die Ordnungselemente des einen durch die Ordnungselemente des andern getrennt sind.

310. Es sind in einer Ebene ein involutorischer Strahlenbüschel und ein involutorisches gerades Gebilde u gegeben, welches aber weder durch den Mittelpunkt des Büschels geht, noch ein Schnitt desselben ist; man soll in dem geraden Gebilde zwei einander zugeordnete Punkte finden, welche in zwei einander zugeordneten Strahlen des Büschels liegen.

Um diese Aufgabe auf die vorige zurückzuführen, darf man nur entweder das gerade Gebilde aus dem Mittelpunkte des Büschels projiciren oder den Schnitt des Büschels mit der Geraden u in Betrachtung ziehen. Wenn das eine von den beiden involutorischen Gebilden zwei Ordnungselemente hat und diese gegeben sind, so kann die obige Aufgabe, in welcher statt des Strahlenbüschels auch ein Ebenenbüschel gegeben seyn kann, dessen Axe das gerade Gebilde nicht schneidet, anders ausgesprochen werden. Z. B.

In einem gegebenen involutorischen Ebenenbüschel zwei einander zugeordnete Ebenen zu finden, welche durch zwei gegebene Punkte, die mit der Axe des Büschels nicht in einerlei Ebene liegen, harmonisch getrennt sind.

311. Um ein gegebenes Viereck, welches lauter ausspringende Winkel hat, eine Curve II. Ordnung zu beschreiben, welche eine gegebene Gerade, die mit dem Umfange des Vierecks keinen Punkt gemein hat, berühre. 299.	In ein gegebenes Viereck, welches lauter ausspringende Winkel hat, eine Curve II. Ordnung zu beschreiben, welche durch einen innerhalb des Vierecks gegebenen Punkt gehe.
312. Durch ein Dreieck ABC	Durch ein Dreieck und zwei

und zwei Punkte D, E, welche vom Umfange desselben eingeschlossen sind, aber mit keinem der drei Eckpunkte in einer und derselben Geraden liegen, ist ein vollständiges Viereck bestimmt, von dessen sechs Seiten je zwei einander gegenüberliegende sowohl durch zwei Seiten des Dreiecks als auch durch die beiden gegebenen Punkte harmonisch getrennt sind.

von seinem Umfange ausgeschlossene Gerade, deren Schnittpunkt nicht mit zwei Eckpunkten des Dreiecks in einer und derselben Geraden liegt, ist ein vollständiges Vierseit bestimmt, von dessen sechs Eckpunkten je zwei einander gegenüberliegende sowohl durch zwei Eckpunkte des Dreiecks als auch durch die beiden gegebenen Geraden harmonisch getrennt sind.

Nach 310 enthält der Strahlenbüschel A zwei Strahlen p, p_1, welche sowohl durch die Geraden AB, AC als auch durch die Punkte D, E harmonisch getrennt sind. Eben so kann man in dem Büschel B zwei Strahlen q, q_1 finden, welche sowohl durch die Geraden BA, BC als auch durch die Punkte D, E harmonisch getrennt sind. Bezeichnet man nun die Punkte pq, p_1q_1, pq_1, p_1q durch M, N, S, T, so sind A(BMCN), B(AMCN) zwei harmonische und also auch zu einander projektivische Strahlenbüschel, welche den Strahl AB gemein haben, daher die Punkte M, C, N in einer Geraden liegen. Eben so lässt sich beweisen, dass die Gerade ST durch den Punkt C geht. Dass aber die Seiten MN, ST des vollständigen Vierecks sowohl durch die Geraden CA, CB als auch durch die Punkte D, E harmonisch getrennt sind, folgt aus 99 und 223.

Anm. Würde die Gerade DE durch den Punkt C gehen, so würde eine von den Geraden MN, ST mit der Geraden DE zusammenfallen.

313. In ein gegebenes Dreieck ABC eine Curve II. Ordnung zu beschreiben, welche durch zwei innerhalb des Dreiecks gegebene Punkte D, E gehe.

Um ein gegebenes Dreieck eine Curve II. Ordnung zu beschreiben, welche zwei gegebene, vom Umfange des Dreiecks ausgeschlossene Gerade berühre.

Geht die Gerade DE durch keinen Eckpunkt des Dreiecks ABC, so führt jeder von den vier Eckpunkten des im Vorigen betrachteten Vierecks MNST (als Pol der Geraden DE) auf eine Auflösung der Aufgabe. Beschreibt man z. B. eine Curve II. Ordnung, welche die Geraden MD, ME in den Punkten D, E und überdiess auch die Gerade AB berührt, so ist in Hinsicht auf dieselbe der Schnittpunkt der Geraden AN, DE, welcher vom Schnittpunkte der Geraden AM, DE durch die Punkte D, E harmonisch getrennt ist, der Pol der Geraden AM und folglich die Gerade AM der Geraden AN conjugirt. Da aber diese Linien durch die Seiten AB, AC des Dreiecks ABC harmonisch getrennt sind und die Curve die Seite AB berührt, so muss sie auch die Seite AC und eben so die Seite BC berühren. Geht die Gerade DE durch einen Eckpunkt des Dreiecks ABC, so lässt die Aufgabe nur zwei Auflösungen zu.

314. Es sind in einer Ebene ein Dreieck ABC und ein involutorisches gerades Gebilde u gegeben, welches von den Seiten AB, AC, BC des Dreiecks in drei Punkten P, Q, R geschnitten wird, deren keiner sich selbst zugeordnet ist; man soll durch die Eckpunkte des gegebenen Dreiecks eine Curve II. Ordnung legen, so dass je zwei einander zugeordnete Punkte des involutorischen geraden Gebildes in Hinsicht auf dieselbe einander conjugirt sind.

Man projicire den Punkt P_2, welcher vom Punkte P durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist, aus dem Punkte R auf die Gerade AC und aus dem Punkte Q auf die Gerade BC, so erhält man noch zwei harmonische gerade Gebilde $AQCQ_2$, $BRCR_2$, daher auch R_2 eine Projektion von Q_2 aus dem Punkte P ist. Es seyen ferner in dem involutorischen geraden Gebilde u den Punkten P, Q, R, welche die Spuren der Geraden Q_2R_2, P_2R_2, P_2Q_2 sind, die Punkte P_1, Q_1, R_1 zugeordnet, so schneiden sich (222) die drei Geraden P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2 in einem Punkte M, welcher in keiner Seite des Dreiecks ABC liegt, daher die Gerade u von den Geraden MA, MB, MC in drei Punkten A_1, B_1, C_1 geschnitten wird, von welchen keiner, wie man sich leicht überzeugt, sich selbst zugeordnet ist. Würde nämlich der Punkt A_1 mit dem ihm zugeordneten Punkte A_2 zusammenfallen, so müsste auch, da $A_1PB_1P_1$ (als Projektion von $APBP_2$) ein harmonisches Gebilde ist, der Punkt B_1 und eben so der Punkt C_1 sich selbst zugeordnet seyn, was nicht möglich ist.

Wenn nun den Punkten P, Q, R, A die Geraden MP_1, MQ_1, MR_1, AA_2 zugeordnet werden, so erhält man (240) ein Polarsystem, dessen Ordnungscurve die Gerade AA_2 im Punkte A berührt, aber auch, weil dieser Punkt vom Punkte B durch die einander conjugirten Punkte P, P_2 harmonisch getrennt ist, durch den Punkt B und eben so durch den Punkt C geht.

Man betrachtet eine Curve II. Ordnung als gefunden, wenn man das Polarsystem gefunden hat, von welchem sie die Ordnungscurve ist. Die obige Aufgabe ist hiernach eine Aufgabe vom ersten Grade, die aber desshalb hier aufgenommen worden ist, um einige Bemerkungen über imaginäre Elemente daranknüpfen zu können.

315. Wenn in einem Satze zwei Elemente als Ordnungselemente eines involutorischen Gebildes erscheinen, so kann derselbe in der Regel dadurch allgemeiner aufgefasst werden, dass man von der Voraussetzung, das involutorische Gebilde habe zwei Ordnungselemente, abstrahirt. Um hieran zu erinnern, sagt man von einem involutorischen einförmigen Gebilde, in welchem kein (reelles) Element sich selbst zugeordnet ist, dass seine Ordnungselemente imaginär seyen.

Eine Gerade und eine Curve II. Ordnung, welche in einerlei Ebene liegen, aber keinen (reellen) Punkt mit einander gemein haben, schneiden sich in zwei imaginären Punkten, die gegeben heissen, wenn in der Geraden zu irgend zwei in Hinsicht auf die Curve einander nicht conjugirten Punkten die ihnen conjugirten Punkte gegeben sind.

Ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt von einer in derselben Ebene befindlichen Curve II. Ordnung eingeschlossen ist, hat mit dem dieser Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschel zwei imaginäre Strahlen gemein, welche gegeben heissen, wenn in dem erstern Büschel zu zwei in Hinsicht auf die Curve einander nicht conjugirten Strahlen die ihnen conjugirten Strahlen gegeben sind.

In der vorigen Aufgabe sind, wenn das involutorische gerade Gebilde keine (reellen) Ordnungselemente hat, von der gesuchten Curve drei reelle und zwei imaginäre Punkte gegeben. Die reciproke Aufgabe, in welcher von einer Curve II. Ordnung drei reelle und zwei imaginäre Tangenten gegeben sind, kann man, wenn der Ausdruck „imaginär“ vermieden werden soll, so aussprechen:

Es sind in einer Ebene ein involutorischer Strahlenbüschel, in welchem kein Strahl sich selbst conjugirt ist, und ein Dreieck gegeben, von dessen drei Seiten keine durch den Mittelpunkt des Büschels geht; man soll eine Curve II. Ordnung finden, welche die drei Seiten des Dreiecks berühre, so dass überdiess je zwei einander zugeordnete Strahlen des gegebenen involutorischen Strahlenbüschels in Hinsicht auf die Curve einander conjugirt seyen.

316. Eine Curve II. Ordnung zu finden, welche die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks ABC berühre und durch zwei gegebene imaginäre Punkte gehe, die in keiner Seite des Dreiecks, aber mit ihm in einerlei Ebene liegen.

Eine Curve II. Ordnung zu finden, welche durch die drei Eckpunkte eines gegebenen Dreiecks gehe und zwei gegebene imaginäre Gerade berühre, die in keinem Eckpunkte des Dreiecks sich schneiden, aber mit ihm in einerlei Ebene liegen.

Es seyen in dem involutorischen geraden Gebilde u, dessen Ordnungspunkte die gegebenen imaginären Punkte sind, den Spuren P, Q der Geraden AB, AC die Punkte P_1, Q_1 zugeordnet. Es sey ferner (312), wenn die Gerade u durch keinen Eckpunkt des gegebenen Dreiecks geht, MNST das vollständige Viereck, von dessen sechs Seiten je zwei einander gegenüberliegende durch zwei Seiten des Dreiecks harmonisch getrennt sind und die Gerade u in zwei einander zugeordneten Punkten schneiden. Wenn nun P_2 der Schnittpunkt von AB und MP_1 ist und den Punkten P, P_1, Q, P_2 die geraden MP_1, MP, MQ_1, AB zugeordnet werden, so ist dadurch (240) ein Polarsystem bestimmt, dessen Ordnungscurve die Gerade u in den gegebenen imaginären Punkten schneidet und die Gerade AB im Punkte P_2 berührt. Da aber die Geraden BM, BN die Gerade u in conjugirten Punkten schneiden, mithin der Schnittpunkt von BN uud u der Pol der Geraden BM ist, folglich die Geraden BM, BN einander conjugirt und überdiess nach der Construktion durch die Geraden BA, BC harmonisch getrennt sind, so berührt die Curve auch die Gerade BC und eben so auch die Gerade AC. — Eben so führt jeder andere Eckpunkt des vollständigen Vierecks MNST auf eine Auflösung der Aufgabe. Geht aber die Gerade u durch einen Eckpunkt des Dreiecks ABC, so lässt die Aufgabe nur zwei Auflösungen zu.

317. Durch eine Curve II. Ordnung s und ein in derselben Ebene befindliches Dreieck ABC, von dessen drei Seiten keine die Curve berührt, auch keine zwei durch zwei Tangenten der Curve getrennt sind, ist ein vollständiges Viereck bestimmt, von dessen sechs Seiten je zwei einander gegenüberliegende durch zwei Seiten des Dreiecks harmonisch getrennt und in Hinsicht auf die Curve einander conjugirt sind. Jeder Eckpunkt dieses Vierecks, in welchem zwei Tangenten der Curve, deren keine durch einen Eckpunkt des Dreiecks geht, sich schneiden, führt auf eine Auflösung der Aufgabe:

Eine Curve II. Ordnung zu finden, welche die gegebene Curve in zwei Punkten und überdiess die drei Seiten des gegebenen Dreiecks berühre.

Durch eine Curve II. Ordnung und ein in derselben Ebene befindliches Dreieck, von dessen drei Eckpunkten keiner in der Curve liegt, auch keine zwei durch die Curve getrennt sind, ist ein vollständiges Vierseit bestimmt, von dessen sechs Eckpunkten je zwei einander gegenüberliegende durch zwei Eckpunkte des Dreiecks harmonisch getrennt und in Hinsicht auf die Curve einander conjugirt sind. Jede Seite dieses Vierseits, welche die Curve in zwei Punkten schneidet, deren keiner in einer Seite des Dreiecks liegt, führt auf eine Auflösung der Aufgabe;

Eine Curve II. Ordnung zu finden, welche die gegebene Curve in zwei Punkten berühre und durch die drei Eckpunkte des gegebenen Dreiecks gehe.

Der Strahlenbüschel A enthält zwei Strahlen p, p_1, welche durch die Geraden AB, AC harmonisch getrennt und in Hinsicht auf die Curve s einander conjugirt sind. Eben so kann man in dem Büschel B zwei Strahlen q, q_1 finden, welche durch die Geraden BA, BC harmonisch getrennt und in Hinsicht auf die Curve s einander conjugirt sind. Bezeichnet man also die Punkte pp_1, p_1q_1, pq_1, p_1q durch M, N, S, T, so sind (312) die Geraden MN, ST durch die Geraden CA, CB harmonisch getrennt und (244) in Hinsicht auf die Curve s einander conjugirt. Wenn nun die Polare M_1 des Punktes M die Gerade AB in einem Punkte schneidet, welcher nicht in der Curve s liegt, so giebt es (280) eine Curve II. Ordnung k, welche die Gerade AB berührt und die Bedingung erfüllt, dass die Polare eines jeden in der Geraden M_1 befindlichen Punktes in Hinsicht auf beide Curven dieselbe sey. Da hiernach die Geraden AM, AN auch in Hinsicht auf die Curve k einander conjugirt und überdiess durch die Geraden AB, AC harmonisch getrennt sind, so berührt die Curve k auch die Gerade AC und eben so auch die Gerade BC.

Wird die Curve s von der Geraden M_1 in zwei (reellen) Punkten D, E geschnitten, so berühren sich die Curven s, k in diesen Punkten, daher auch keiner derselben in einer Seite des Dreiecks ABC liegt. Geht die Gerade M_1 durch ihren Pol M, so kann man sagen, dass die beiden Berührungspunkte D, E mit dem Punkte M zusammenfallen. Wenn endlich die Gerade M_1 mit der Curve s keinen Punkt gemein hat, so sagt man, dass die Curven s, k in zwei imaginären Punkten sich berühren, welche in der Geraden M_1 liegen und aus dem Punkte M durch zwei gemeinschaftliche imaginäre Tangenten der beiden Curven projicirt werden.

Aus dem Obigen folgt noch, dass die Punkte D, E, wenn irgend eine Seite AB des Dreiecks ABC durch keinen derselben geht, auch ausserhalb der beiden andern Seiten liegen. Wenn aber in jeder Seite des Dreiecks ABC wenigstens einer von den beiden Punkten D, E liegt, so muss wenigstens einer derselben mit einem Eckpunkte des Dreiecks zusammenfallen, so dass alsdann im Punkte M zwei Tangenten der Curve s sich schneiden, von welchen wenigstens eine durch einen Eckpunkt des Dreiecks ABC geht. In diesem Falle besteht der Strahlenbüschel II. Ordnung k, welchem die drei Seiten des Dreiecks ABC und die beiden Strahlen MD, ME des Strahlenbüschels s angehören (deren Mittelpunkte in Hinsicht auf beide Büschel die Punkte D, E sind), aus zwei Strahlenbüscheln D, E erster Ordnung.

§. 24.

Polarsysteme im Raume.

318. In einem räumlichen Polarsysteme ist jedem Punkte eine Ebene, jedem ebenen Systeme ein Strahlenbündel zugeordnet, dessen Strahlen und Ebenen den Geraden und Punkten des ebenen Systems zugeordnet sind. Jede Ebene wird die Polare des ihr zugeordneten Punktes und dieser der Pol jener Ebene genannt, so dass also die Polaren von allen Punkten, welche in einer und derselben Ebene liegen, durch den Pol dieser Ebene gehen, und die Pole von allen Ebenen, welche durch einen und denselben Punkt gehen, in der Polare dieses Punktes liegen. Ist der Geraden a die Gerade a_1 zugeordnet, so ist dem geraden Gebilde a der Ebenenbüschel a_1 und dem Ebenenbüschel a das gerade Gebilde a_1 zugeordnet. Da hiernach die Polaren von allen Punkten, welche in der einen von den beiden Geraden liegen, in der andern sich schneiden, so heisst auch jede von den beiden Geraden die Polare der andern.

Wenn die Pole A, B von zwei Ebenen A_1, B_1 in der Schnittlinie $A_1 B_1$ derselben liegen, so ist diese Gerade sich selbst (der Geraden A B) zugeordnet. Ist von zwei sich schneidenden Geraden die eine der andern oder jede sich selbst zugeordnet, so ist ihr Schnittpunkt der Pol der Ebene, in welcher sie liegen.

319. In einem räumlichen Polarsysteme heissen einander conjugirt:

Zwei Punkte, wenn der eine und also jeder in der Polare des andern liegt.	Zwei Ebenen, wenn die eine und also jede durch den Pol der andern geht.
Ein Punkt und eine Gerade, wenn die Gerade in der Polare des Punktes und also der Punkt in der Polare der Geraden liegt.	Eine Ebene und eine Gerade, wenn die Gerade durch den Pol der Ebene und also die Ebene durch die Polare der Geraden geht.

Es ist hiernach ein Punkt allen Punkten und Geraden, welche in seiner Polare liegen, eine Ebene allen Ebenen und Geraden, welche durch ihren Pol gehen, eine Gerade aber allen in ihrer Polare befindlichen Punkten und allen durch ihre Polare gehenden

Ebenen conjugirt. Liegt ein Punkt in seiner Polare, so ist jedes von diesen beiden Elementen auch sich selbst conjugirt.

320. Zwei Gerade a, b sollen in einem räumlichen Polarsysteme einander conjugirt heissen, wenn die eine und also jede mit der Polare der andern in einerlei Ebene liegt. Ist durch die Gerade a und die Polare b_1 der Geraden b eine Ebene $a b_1$ bestimmt, so schneiden sich die Polare a_1 der Geraden a und die Gerade b im Pole jener Ebene.

Eine Gerade ist hiernach sich selbst conjugirt, wenn sie entweder sich selbst zugeordnet ist, oder ihre Polare schneidet. Schneidet eine sich selbst zugeordnete Gerade c die eine a von zwei einander zugeordneten Geraden a, a_1, so muss sie auch die andere schneiden. Der Pol der Ebene ca muss sowohl in der Geraden c als auch in der Geraden a_1 liegen.

321. Ein räumliches Polarsystem soll, wenn nicht jeder Punkt sich selbst conjugirt ist, ein gewöhnliches Polarsystem, im Falle aber jeder Punkt in seiner Polare liegt, ein Nullsystem genannt werden. Wird irgend eine Gerade a eines Polarsystems von ihrer Polare a_1 geschnitten, so ist das System ein gewöhnliches Polarsystem. Der Punkt $a a_1$ ist nämlich der Pol der Ebene $a a_1$, jeder andere Punkt P der Geraden a aber der Pol von einer andern durch die Gerade a_1 gehenden Ebene, welche also nicht durch den Punkt P geht.

In einem Nullsysteme hat jeder Strahlenbündel S mit dem ihm zugeordneten ebenen Systeme U einen Strahlenbüschel entsprechend gemein. Jede Gerade, welche durch den Punkt S geht und in der Ebene U liegt, fällt mit ihrer Polare, da diese ebenfalls in der Ebene U liegt und durch den Punkt S geht, aber die erstere nicht schneidet, zusammen.

322. In einem gewöhnlichen räumlichen Polarsysteme liegt jeder Strahlenbündel S, dessen Mittelpunkt S ausser seiner Polare U sich befindet, mit dem ihm zugeordneten ebenen Systeme involutorisch, daher in dem räumlichen Polarsysteme unendlich viele ebene Polarsysteme, poläre Strahlenbündel, Polardreiecke, Polardreikante und Polartetraeder enthalten sind.

Wenn nämlich dem Punkte A der Ebene U die Ebene Sa zugeordnet ist, welche die Ebene U in der Geraden a schneidet, so ist dieser Geraden die Gerade SA zugeordnet, welche den Pol der Ebene Sa aus dem Pole der Ebene U projicirt. Es erscheint hiernach die Ebene U als Träger eines ebenen Polarsystems und der Punkt S als Mittelpunkt eines polären Strahlenbündels, so dass im erstern dieser Systeme ein Punkt und eine Gerade, im letztern aber ein Strahl und eine Ebene einander zugeordnet sind, wenn sie in dem räumlichen Polarsysteme einander conjugirt sind. Jedes Polardreieck ABC des ebenen Polarsystems wird aus dem Punkte S durch ein Polardreikant des Strahlenbündels projicirt und bildet mit diesem Dreikante ein Polartetraeder ABCS, in welchem jeder Eckpunkt der Pol der ihm gegenüberliegenden Fläche ist. Je zwei Gegenkanten des Tetraeders sind einander zugeordnet, je zwei sich schneidende Kanten aber einander conjugirt.

Hat das ebene Polarsystem U eine Ordnungscurve, so hat das Polarsystem im Strahlenbündel S eine Ordnungsfläche, von welcher jene Curve ein Schnitt ist. In dem räumlichen Polarsysteme ist die Curve dem der Kegelfläche sich anschmiegenden Ebenenbüschel, die Kegelfläche dem der Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschel, die von der Curve eingeschlossene Figur dem von der Kegelfläche ausgeschlossenen Systeme von Ebenen und der von der Kegelfläche eingeschlossene Strahlenkegel dem von der Curve ausgeschlossenen Systeme von Geraden zugeordnet.

Jede Tangente der Curve wird im Berührungspunkte von dem ihr zugeordneten Strahle der Kegelfläche geschnitten, in welchem diese Fläche von der durch die beiden Geraden bestimmten Ebene berührt wird.

323: In einem gewöhnlichen Polarsysteme liegt jedes gerade Gebilde a, dessen Träger weder sich selbst zugeordnet ist, noch von seiner Polare geschnitten wird, mit dem ihm zugeordneten Ebenenbüschel a_1 involutorisch.

Läge jeder Punkt F der Geraden a und eben so jeder Punkt G der Geraden a_1 in seiner Polare, so wäre (318) jede Gerade FG, welche die Geraden a, a_1 schneidet, sich selbst zugeordnet und also jede Ebene FGH sich selbst conjugirt, was gegen die Annahme ist. Es sei nun V ein Punkt, welcher in irgend einer von den beiden Geraden a, a_1, etwa in der Geraden a, aber nicht in seiner Polare a_1 Q liegt, so liegt in dieser Ebene (322) das gerade Gebilde a_1 mit dem ihm zugeordneten Strahlenbüschel Q und also in dem räumlichen Polarsysteme das gerade Gebilde a_1 mit dem ihm zugeordneten Ebenenbüschel a involutorisch. Dass aber auch das gerade Gebilde a und der ihm zugeordnete Ebenenbüschel a_1 involutorisch liegen, geht daraus hervor, weil den Punkten P, Q die Ebenen a_1Q, a_1P zugeordnet sind.

Ist dem Flächenwinkel, welcher aus der Axe a_1 die Strecke PQ projicirt, die Strecke Q·P zugeordnet, so liegt kein Punkt der Geraden a in seiner Polare. Ist aber dem erwähnten Winkel die Strecke QP zugeordnet, so enthält die Gerade a zwei sich selbst conjugirte Punkte, durch welche je zwei einander conjugirte Punkte derselben harmonisch getrennt sind.

324. In einem räumlichen Polarsysteme sind je zwei einander conjugirte Punkte P, Q die Mittelpunkte und je zwei einander conjugirte Ebenen die Träger von zwei einander zugeordneten Strahlenbüscheln P, Q. Jeder Geraden, welche durch den Punkt P geht und in der Polare des Punktes Q liegt, ist eine Gerade zugeordnet, welche in der Polare des Punktes P liegt und durch den Punkt Q geht.

Wenn ein Punkt A in seiner Polare A_1 liegt, und in dem Strahlenbüschel, welcher den Punkt A zum Mittelpunkt hat und in der Ebene A_1 liegt, jeder Strahl sich selbst zugeordnet ist, so liegt jeder Punkt der Ebene A_1 in seiner Polare, daher jedes gerade Gebilde, welches in der Ebene A_1 liegt, aber nicht durch den Punkt A geht, ein Schnitt des ihm zugeordneten Ebenenbüschels und also (323) das Polarsystem ein Nullsystem ist. Wenn aber irgend ein Strahl des erwähnten Büschels sich nicht selbst zugeordnet und also (321) das Polarsystem ein gewöhnliches ist, so enthält der Büschel entweder gar keinen Strahl, welcher sich selbst zugeordnet ist, oder zwei solche Strahlen, durch welche alsdann je zwei einander zugeordnete Strahlen desselben harmonisch getrennt sind. Im erstern von diesen beiden Fällen ist der Punkt A der einzige sich selbst conjugirte Punkt der Ebene A_1. Wäre nämlich noch ein anderer Punkt B dieser Ebene sich selbst conjugirt, so wäre (318) die Gerade AB sich selbst zugeordnet.

325. Durch jedes Fünfeck ABCDE, von dessen fünf Eck-

punkten keine vier in einerlei Ebene liegen, ist ein Nullsystem bestimmt, in welchem jeder Eckpunkt des Fünfecks der Pol (Nullpunkt) der Ebene ist, welche ihn mit den benachbarten Eckpunkten verbindet.

Bezieht man nämlich zwei räumliche Systeme projektivisch so aufeinander, dass den Punkten A, B, C, D, E des einen die Ebenen EAB, ABC, BCD, CDE, DEA des andern entsprechen, so entsprechen auch diesen Ebenen des erstern die Punkte A, B, C, D, E des letztern, woraus man (133) schliessen kann, dass je zwei homologe Elemente einander doppelt entsprechen. Da nun die Gerade DE, welche den Punkt D mit dem Punkte E verbindet, der Schnittlinie der Ebenen CDE, DEA, also sich selbst zugeordnet ist, so ist der Punkt P, in welchem diese Gerade die Ebene ABC schneidet, der Ebene BDE und mithin auch die Gerade BP, welche den Punkt B mit dem Punkte P verbindet und zugleich die Schnittlinie der Ebenen ABC, BDE ist, sich selbst zugeordnet. Da diess aber auch von den Geraden BA, BC gilt, so ist (324) das Polarsystem ein Nullsystem.

In einem Nullsysteme ist jedem vollständigen nFlache ein vollständiges nEck zugeordnet, so dass die Eckpunkte eines jeden von den beiden Gebilden in den ihnen zugeordneten Flächen des andern liegen.

326. Wenn in zwei reciproken Systemen den Eckpunkten eines Tetraeders ABCD die ihnen gegenüberliegenden Flächen entsprechen, so liegen die Systeme involutorisch.

Entsprechen nämlich den Punkten A, B, C, D des einen Systems die Ebenen BCD, ACD, ABD, ABC des andern, so entsprechen auch diesen Ebenen des erstern die Punkte A, B, C, D des letztern. Wenn ferner der Ebene ABP des erstern Systems, welche durch die Schnittlinie der Ebenen ABC, ABD geht und mithin die Gerade CD in einem Punkte P schneidet, der Punkt Q des letztern entspricht, welcher also in der Geraden CD liegt, so muss, weil der Ebenenbüschel AB (CDPQ) dem geraden Gebilde CDPQ und also auch (118) dem geraden Gebilde DCQP projektivisch ist, der Ebene ABQ des erstern Systems der Punkt P des letztern und mithin dem Punkte Q des erstern, in welchem die Ebene ABQ die Gerade CD schneidet, die Ebene ABP des letztern entsprechen, welche den Punkt P aus der Geraden AB projicirt. Indem so jede Ebene, welche durch eine Kante des Tetraeders ABCD geht, und der ihr entsprechende Punkt einander doppelt entsprechen, gilt diess auch von jedem Punkte, in welchem eine durch AB, eine durch AC und eine durch BC (oder eine durch AB, eine durch AD und eine durch BD) gehende Ebene sich schneiden, und der ihm entsprechenden Ebene.

327. Wird ein Tetraeder ABCD als Polartetraeder angenommen, so kann man noch zu einem Punkte E, welcher in keiner Fläche des Tetraeders liegt, eine Ebene E_1, welche durch keinen Eckpunkt desselben geht, als Polare jenes Punktes nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann nach 133 und 326 ein Polarsystem bestimmt ist. Durch die vier Flächen des Polartetraeders ABCD wird der unbegrenzte Raum in acht Tetraeder getheilt, deren jedes von vier Dreiecken eingeschlossen ist. Wenn nun das Tetraeder ABCD, welches den Punkt E in sich enthält, von der Ebene E_1 nicht geschnitten wird, so ist jedes der acht Tetraeder dem von seiner Oberfläche ausgeschlossenen Systeme von Ebenen zugeordnet, daher alsdann kein Punkt in seiner Polare liegt. Wird aber das Tetraeder ABCD von der Ebene E_1 geschnitten, so hat man folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Wenn die Ebene E_1 nur drei Kanten AB, AC, AD des Tetraeders ABCD schneidet und also von der Oberfläche des Tetraeders BCD·A ausgeschlossen ist, so ist jedem der acht Tetraeder ein System von Ebenen zugeordnet, welches von einem der übrigen Tetraeder ausgeschlossen ist, so dass je zwei solche zusammengehörige Tetraeder drei in der Ebene BCD befindliche Kanten mit einander gemein haben, während die übrigen Kanten des einen von den übrigen Kanten des andern die Ergänzungen sind. Da hiernach kein Punkt der Ebene BCD in seiner Polare liegt, so giebt es auch keine sich selbst zugeordnete Gerade und mithin (324) in keiner Ebene, welche durch ihren Pol geht, noch einen sich selbst conjugirten Punkt. Da aber jede Strecke, welche den Punkt A mit einem Punkte der Ebene BCD verbindet, in dem ihr zugeordneten Winkel liegt, so giebt es (323) in jeder durch den Punkt A gehenden Geraden zwei sich selbst conjugirte Punkte.

II. Wenn die Ebene E vier Kanten AB, BC, CD, DA des Tetraeders ABCD schneidet, also von der Oberfläche des Tetraeders AC·BD ausgeschlossen ist, so ist jedem der acht Tetraeder ein System von Ebenen zugeordnet, welches von einem der übrigen Tetraeder ausgeschlossen ist, so dass je zwei solche zusammengehörige Tetraeder zwei in den Geraden AC, BD liegende Kanten mit einander gemein haben, während die übrigen Kanten des einen von den übrigen Kanten des andern die Ergänzungen sind. Da hiernach jede Strecke, welche einen Punkt der Geraden AC mit einem Punkte der Geraden BD verbindet, in dem ihr zugeordneten Winkel liegt, so giebt es in jeder Geraden, welche die beiden Geraden AC, BD schneidet, zwei sich selbst conjugirte Punkte. Da ferner (318) jede Gerade, welche einen sich selbst conjugirten Punkt der Geraden AB mit einem sich selbst conjugirten Punkt der Geraden CD verbindet, sich selbst zugeordnet ist, folglich jede Ebene mehr als einen sich selbst conjugirten Punkt enthält, so schneiden sich (324) in jedem Punkte, welcher in seiner Polare liegt, zwei sich selbst zugeordnete Gerade.

---

§. 25.

Flächen II. Ordnung.

328. Wenn irgend ein Punkt P eines gewöhnlichen Polarsystems in seiner Polare P_1 liegt, so hat das System eine Ordnungsfläche F, welche nämlich dem ihr sich anschmiegenden Ebenenbündel zugeordnet ist, so dass jeder Punkt der Fläche in seiner Polare liegt, die in ihm der Fläche sich anschmiegt, jeder Punkt aber, welcher der Fläche nicht angehört, auch ausserhalb seiner Polare liegt. Ist keine Gerade des Polarsystems sich selbst zugeordnet, so soll die Fläche F eine gewöhnliche Fläche II. Ordnung heissen. Wenn aber in jedem Punkte P, welcher in seiner Polare P_1 liegt, zwei sich selbst zugeordnete Gerade p, ä sich schneiden, so ist die Fläche F eine Regelfläche II. Ordnung.

Eine gewöhnliche Fläche II. Ordnung F wird (328) in jedem in ihr befindlichen Punkte von der Polare dieses Punktes berührt, von jeder andern Ebene aber (322), welche durch denselben Punkt geht, in einer Curve II. Ordnung geschnitten, daher die Fläche mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat. Dem von der Fläche eingeschlossenen Körper K, welcher von jedem Polartetraeder einen Eckpunkt enthält, ist das von ihr ausgeschlossene System von Ebenen zugeordnet, welches von jedem Polartetraeder eine Fläche enthält. Jeder ausserhalb des Körpers K befindliche Punkt S ist der Mittelpunkt eines um ihn beschriebenen Strahlenkegels, dessen Mantel die Fläche F in der Curve s berührt, in welcher dieselbe von der Polare jenes Punktes geschnitten wird. Beschreibt der Punkt S eine Gerade a oder das ausserhalb des Körpers K befindliche Stück einer Geraden a, so beschreibt die Curve s, indem ihre Ebene um die Polare a_1 jener Geraden sich dreht, die Fläche F und die von der Curve s eingeschlossene Figur den Körper K. Liegen zwei einander zugeordnete Gerade nicht in einerlei Ebene, so ist die eine die Axe eines um den Körper K beschriebenen Flächenwinkels, welcher der ausserhalb des Körpers liegenden Strecke der andern zugeordnet ist. Wenn aber zwei einander zugeordnete Gerade sich schneiden, so berühren sie in ihrem Schnittpunkte die Fläche F.

Eine Regelfläche II. Ordnung wird von jeder Ebene P_1, welche durch ihren Pol P geht, obgleich die Ebene der Fläche in diesem Punkte sich anschmiegt, in zwei Geraden p, a, von jeder andern Ebene aber in einer Curve II. Ordnung geschnitten. Beschreibt der Punkt P das gerade Gebilde p und also die Ebene P_1 den Ebenenbüschel p, so beschreibt die Gerade a die Ordnungsfläche F des Polarsystems, welche jeden sich selbst conjugirten Punkt enthält und den unbegrenzten Raum in zwei Theile theilt, von welchen der eine vom Winkel pa und der andere vom Winkel p·a beschrieben wird. Da aber in einem solchen Polarsysteme jeder sich selbst conjugirte Punkt der Schnittpunkt von zwei sich selbst zugeordneten Geraden ist, so wird die Fläche F noch von einer andern Schaar der Geraden erfüllt, so dass in jedem Punkte derselben eine Gerade der einen Schaar und eine Gerade der andern Schaar sich schneiden. Jedes Polartetraeder hat vier Kanten, welche die Fläche F schneiden; die beiden übrigen Kanten, welche mit der Fläche keinen Punkt gemein haben, sind durch dieselbe getrennt. Jeder Punkt S, welcher nicht in der Fläche F liegt, ist der Mittelpunkt eines Strahlenkegels, dessen Mantel die Fläche F in der Curve s berührt, in welcher dieselbe von der Polare jenes Punktes geschnitten wird. Jede Ebene, welche die Kegelfläche S in einem Strahle h berührt und also auch durch eine Tangente h_1 der Curve s geht, schneidet die Fläche F in zwei Geraden, welche durch die einander zugeordneten Geraden h, h_1 harmonisch getrennt sind. Jede Ebene, welche die Kegelfläche S in zwei Geraden und also den Strahlenkegel S in einem Winkel schneidet, schneidet die Fläche F in einer Curve, welche in den Nebenwinkel jenes Winkels beschrieben ist. Wenn endlich eine durch den Punkt S gehende Ebene mit der Kegelfläche S gar keinen Strahl gemein hat, so schneidet sie die Fläche F in einer Curve, welche jenen Punkt einschliesst.

329. Jede Regelfläche F, welche noch von einer andern Schaar von Geraden erfüllt wird, ist eine Regelfläche II. Ordnung.

Es seyen a, b, c drei Gerade der einen Schaar und p, q, r drei Gerade der andern Schaar. Bezieht man nun zwei räumliche Systeme projektivisch so aufeinander, dass den Punkten ap, aq, bp, bq, cr des einen die Ebenen ap, aq, bp, bq, cr des andern entsprechen, so haben die beiden Systeme die Gerade a, welche den Punkt ap mit dem Punkte aq verbindet und zugleich die Schnittlinie der Ebenen ap, aq ist, und eben so die Geraden b, p, q entsprechend gemein. Da ferner der Geraden c, welche die Geraden p, q schneidet und durch den Punkt cr geht, eine Gerade entsprechen muss, welche die Geraden p, q schneidet und in der Ebene cr liegt, demnach die Systeme auch die Gerade c und eben so die Gerade r entsprechend gemein haben, so entsprechen den Ebenen ap, aq, bp, bq, cr des erstern Systems die Punkte ap, aq, bp, bq, cr des letztern, woraus man (133) schliessen kann, dass je zwei homologe Elemente einander doppelt entsprechen und dass die Fläche F die Ordnungsfläche des Polarsystems sey.

Zwei einander zugeordnete Gerade h, h_1, welche sich schneiden, berühren (328) in ihrem Schnittpunkte die Fläche F auf entgegengesetzten Seiten. Wenn aber zwei einander zugeordnete Gerade nicht in einerlei Ebene liegen, so hat die Fläche F entweder mit keiner von den beiden Geraden einen Punkt gemein oder sie wird von jeder derselben in zwei Punkten geschnitten. Der Geraden, welche den Punkt ap mit dem Punkte bq verbindet, ist die Schnittlinie der Ebenen ap, bq zugeordnet, welche durch die Punkte bp, aq geht.

330. Eine gewöhnliche Fläche II. Ordnung F oder auch der von ihr eingeschlossene Körper K heisst ein Ellipsoid oder ein elliptisches Paraboloid oder ein zweischaliges Hyperboloid, je nachdem die Fläche F mit der unendlich fernen Ebene gar keinen Punkt gemein hat oder diese Ebene in einem Punkte berührt oder in einer Curve s schneidet, oder, was dasselbe ist, je nachdem der Pol M der unendlich fernen Ebene in dem Körper K oder in seiner Oberfläche oder ausserhalb desselben liegt. Im letzten Falle ist der Punkt M der Mittelpunkt des Assymptotenkegels, dessen Mantel nämlich die Fläche F in der unendlich fernen Curve s berührt.

Eine Regelfläche II. Ordnung F heisst ein hyperbolisches Paraboloid oder ein einschaliges Hyperboloid, je nachdem sie die unendlich ferne Ebene in zwei Geraden oder in einer Curve II. Ordnung schneidet. Im erstern Falle sind die Richtungen von allen Geraden einer und derselben Schaar in der Stellung enthalten, in welcher die unendlich ferne Gerade der andern Schaar liegt. Im letztern Falle ist der Pol der unendlich fernen Ebene der Mittelpunkt des Assymptotenkegel, dessen Mantel nämlich (auf seiner äussern Seite) von der Fläche F in jener unendlich fernen Curve berührt wird.

Anm. Wird eine Fläche II. Ordnung nicht ausdrücklich eine Kegelfläche genannt, so ist gewöhnlich eine andere Fläche II. Ordnung (die Ordnungsfläche eines räumlichen Polarsystems) gemeint.

331. Da in jeder Geraden, welche eine Fläche II. Ordnung in zwei Punkten schneidet, diese Punkte durch je zwei einander conjugirte Punkte harmonisch getrennt sind, so kann man die Punkte der Fläche auf unendlich viele Arten involutorisch paaren. Man darf nur entweder irgend eine Ebene U, welche nicht durch ihren Pol geht, als Ordnungsebene und ihren Pol S als Ordnungspunkt, oder irgend zwei einander zugeordnete Gerade s, u, wel-

che nicht in einerlei Ebene liegen, als Ordnungslinien annehmen. Im erstern Falle sind je zwei einander zugeordnete Punkte der Fläche durch den Punkt S und einen Punkt der Ebene U, im letztern Falle aber durch einen Punkt der Geraden s und einen Punkt der Geraden u harmonisch getrennt.

332. Es sind eine Kegelfläche II. Ordnung, eine Ebene U, welche die Kegelfläche in einer Curve s schneidet, und ein Punkt A, welcher weder in dieser Ebene noch in der Kegelfläche liegt, gegeben; man soll eine Fläche II. Ordnung finden, welche die gegebene Kegelfläche in der gegebenen Curve s berührt und überdiess durch den gegebenen Punkt A geht.

Es werde die Ebene U von der Geraden, welche den Mittelpunkt S der gegebenen Kegelfläche mit dem Punkte A verbindet, in dem Punkte P geschnitten. Es sei ferner LMN in Hinsicht auf die Curve s ein Polardreieck, von dessen drei Eckpunkten keiner in der Polare p des Punktes P liegt. Wenn nun das Tetraeder LMNS als Polartetraeder angenommen und dem Punkte A die Ebene Ap zugeordnet wird, so ist dadurch ein Polarsystem bestimmt, dessen Ordnungsfläche F die gegebene Kegelfläche in der gegebenen Curve berührt und durch den gegebenen Punkt A geht.

Die Gerade SP schneidet die Fläche F in dem Punkte A und in dem Punkte B, welcher zu den drei Punkten S, A, P der vierte harmonische Punkt ist. Schneiden zwei Gerade, von welchen die eine durch den Punkt A und die andere durch den Punkt B geht, die Ebene U in zwei einander conjugirten Punkten, welche mit dem Punkte P in einer Geraden liegen, so schneiden sie sich selbst (254) in einem Punkte der Fläche F. Ist statt des Punktes A der gesuchten Fläche eine ihr sich anschmiegende Ebene A_1 gegeben, welche nicht durch den Punkt S geht und die Ebene U in einer sich nicht selbst conjugirten Geraden p schneidet, so findet man den Pol A der Ebene A_1, wenn man auf dieselbe den Pol P der Geraden p aus dem Punkte S projicirt.

Die Kegelfläche und die gegebene Curve können auch imaginär sein. Wenn nämlich ein ebenes Polarsystem U, welches in einem räumlichen Polarsysteme enthalten ist, keine (reelle) Ordnungscurve hat, so sagt man, dass die Ordnungsfläche des letztern Systems die Ebene U in der imaginären Ordnungscurve des erstern schneide und in dieser Curve die imaginäre Kegelfläche berühre, welche dieselbe aus dem Pole S der Ebene U projicire.

333. Eine Fläche II. Ordnung zu finden, welche durch eine gegebene Curve II. Ordnung s und durch die vier Eckpunkte eines gegebenen Tetraeders ABCD gehe, von welchen keiner in der Ebene U der gegebenen Curve liegt.

Eine Fläche II. Ordnung zu finden, welche eine gegebene Kegelfläche II. Ordnung in einer Curve berühre und den vier Flächen eines gegebenen Tetraeders sich anschmiege, von welcher keine durch den Mittelpunkt der gegebenen Kegelfläche geht.

Es werde die Ebene U von den Geraden AB, AC, AD in den Punkten P, Q, R geschnitten, deren Polaren in Hinsicht auf die gegebene Curve die Geraden p, q, r seien. Sucht man nun in den Geraden AB, AC, AD die Punkte P_1, Q_1, R_1, so dass $APBP_1$, $AQCQ_1$, $ARDR_1$ harmonische Gebilde sind, so schneiden sich die Ebenen P_1p, Q_1q, R_1r in dem Mittelpunkte S der Kegelfläche, welche die gesuchte Fläche in der gegebenen Curve berührt. Liegt nämlich der Punkt A nicht in der Kegelfläche S, welche aus dem Schnittpunkte S die Curve s projicirt, so kann man nach 332 eine Fläche II. Ordnung F finden, welche die Kegelfläche S in der Curve s berührt und durch den Punkt A geht. Da nun in Hinsicht auf die Fläche F der Punkt P der Pol der Ebene Sp, also dem Punkte P_1 conjugirt und $APBP_1$ ein harmonisches Gebilde ist, so geht die Fläche F auch durch den Punkt B und eben so durch die Punkte C, D. Liegt aber der Punkt A in der Kegelfläche S, so geht diese auch durch die Punkte B, C, D und ist also selbst die gesuchte Fläche.

334. Es sind ein Tetraeder ABCD und eine Curve II. Ordnung s gegeben, welche entweder mit keiner Fläche des Tetraeders einen Punkt gemein hat, oder von jeder dieser vier Ebenen geschnitten wird, man soll eine Fläche II. Ordnung finden, wel-

Es sind eine Kegelfläche II. Ordnung und ein Tetraeder gegeben, dessen Eckpunkte entweder alle vier in dem von der Kegelfläche eingeschlossenen Strahlenkegel oder alle vier ausserhalb desselben liegen; man soll eine Fläche II. Ordnung che durch die gegebene Curve gehe und den vier Flächen des gegebenen Tetraeders sich anschmiege.

finden, welche die gegebene Kegelfläche in einer Curve berühre und durch die vier Eckpunkte des gegebenen Tetraeders gehe.

Man lege durch die Gerade AB die Ebenen p, p_1, durch die Gerade BC die Ebenen q, q_1 und durch die Gerade CA die Ebenen r, r_1, so dass von diesen sechs Ebenen je zwei, welche durch eine und dieselbe Kante des Tetraeders ABCD gehen, durch zwei Flächen desselben harmonisch getrennt sind und die Ebene U der gegebenen Curve s in zwei in Hinsicht auf diese Curve einander conjugirten Geraden schneiden. Wenn nun der Punkt pqr ausserhalb der Ebene U liegt, und also die Curve s aus dem Punkte pqr durch eine Kegelfläche S projicirt wird, so kann man (332) eine andere Fläche II. Ordnung F finden, welche die erwähnte Kegelfläche in der gegebenen Curve berührt und der Ebene ABC sich anschmiegt. Da aber die Geraden pU, p_1U in Hinsicht auf die Curve s, mithin die Ebenen p, p_1 in Hinsicht auf die Kegelfläche S und folglich auch in Hinsicht auf die Fläche F einander conjugirt und durch die Ebenen ABC, ABD harmonisch getrennt sind, so muss die Fläche F auch der Ebene ABD und eben so den Ebenen BCD, CAD sich anschmiegen.

Was von dem Punkte pqr gesagt wurde, gilt von jedem Punkte, in welchem eine von den beiden Ebenen p, p_1, eine von den beiden Ebenen q, q_1 und eine von den beiden Ebenen r, r_1 sich schneiden, so dass also, wenn diese acht Punkte ausserhalb der Ebene U liegen, die Aufgabe acht Auflösungen zulässt.

335. Es sind eine Fläche II. Ordnung und ein Tetraeder gegeben, von dessen vier Flächen keine jener Fläche sich anschmiegt und auch keine zwei durch den jener Fläche sich anschmiegenden Ebenenbündel getrennt sind; man soll eine Fläche II. Ordnung finden, welche die gegebene Fläche in einer Curve be-

Es sind eine Fläche II. Ordnung G und ein Tetraeder ABCD gegeben, von dessen vier Eckpunkten keiner in jener Fläche liegt und auch keine zwei durch jene Fläche getrennt sind; man soll eine Fläche II. Ordnung finden, welche die gegebene Fläche in einer Curve berühre und durch die vier rühre und den vier Flächen des gegebenen Tetraeders sich anschmiege.

Eckpunkte des gegebenen Tetraeders gehe.

Man suche in der Geraden AB die Punkte P, P_1, in der Geraden AC die Punkte Q, Q_1 und in der Geraden AD die Punkte R, R_1, so dass von diesen sechs Punkten je zwei, welche in einer und derselben Kante des Tetraeders ABCD liegen, durch zwei Eckpunkte desselben harmonisch getrennt und in Hinsicht auf die Fläche G einander conjugirt sind. Wenn die Fläche G von einer Kegelfläche berührt wird, so kann man (332) eine Fläche II. Ordnung F finden, welche diese Kegelfläche und also auch die Fläche G in jener Curve berührt und durch den Punkt A geht. Da aber die Polare eines jeden in der Ebene PQR befindlichen Punktes in Hinsicht auf die beiden Flächen G, F dieselbe ist, und also den Punkten P, Q, R die Punkte P_1, Q_1, R_1 auch in Hinsicht auf die Fläche F conjugirt sind, so geht diese auch durch die Punkte B, C, D. — Was von der Ebene PQR gesagt wurde, gilt von jeder Ebene, welche durch einen von den beiden Punkten P, P_1, einen von den beiden Punkten Q, Q_1 und einen von den beiden Punkten R, R_1 geht.

Anhang.

336. Gleichwie Affinität ein besonderer Fall von collineärer Verwandtschaft ist, so ist Aehnlichkeit ein besonderer Fall von Affinität und Congruenz ein besonderer Fall von Aehnlichkeit. In ähnlichen Systemen sind je zwei homologe Winkel, in congruenten Systemen auch je zwei homologe Strecken einander gleich. Zwei zu einander projektivische Gerade sind ähnlich, wenn dem unendlich fernen Punkte der einen Geraden der unendlich ferne Punkt der andern entspricht. Ist überdiess irgend eine endliche Strecke in der einen Geraden der ihr entsprechenden Strecke in der andern gleich, so sind die Gebilde congruent.

Will man zwei ebene Systeme so auf einander beziehen, dass sie ähnlich sind, so kann man zu zwei eigentlichen Punkten A, B der einen Ebene zwei solche Punkte A_1, B_1 der andern Ebene, welche jenen entsprechen sollen, nach Belieben annehmen. Es ist alsdann nur noch festzusetzen, welche von beiden Seiten der Geraden $A_1 B_1$ einer bestimmten Seite der Geraden AB entsprechen soll. Sind die unendlichen Strecken AB, $A_1 B_1$ einander gleich, so werden die Systeme congruent.

337. Zwei congruente Strahlenbüschel, welche in einerlei Ebene, aber weder perspektivisch liegen noch concentrisch sind, erzeugen entweder einen Kreis oder eine Hyperbel, deren Assymptoten zu einander senkrecht sind. — Wenn in einer Ebene der Mittelpunkt eines Winkels, ohne dass dieser seine Grösse ändert, in einer festen Geraden sich bewegt, während der eine Schenkel um einen festen (eigentlichen) Punkt sich dreht, so beschreibt der andere Schenkel einen parabolischen Strahlenbüschel. Der Mittelpunkt des Winkels und der unendlich ferne Punkt des andern Schenkels sind nämlich homologe Punkte von zwei zu einander projektivischen geraden Gebilden, welche Schnitte von zwei congruenten Strahlenbüscheln sind.

338. Wenn man in einer Geraden einen Punkt als Mittelpunkt annimmt und je zwei Punkte, welche von ihm gleichweit abstehen, einander zugeordnet nennt, so sind die Punkte der Geraden involutorisch so gepaart, dass je zwei einander zugeordnete Strecken einander gleich sind. Der Mittelpunkt und der unendlich ferne Punkt sind die Ordnungspunkte eines solchen involutorischen Gebildes, welches centrisch oder auch symmetrisch genannt werden kann. In einer eigentlichen Geraden ist hiernach der unendlich ferne Punkt von jedem Punkte durch je zwei Punkte, welche von diesem gleichweit abstehen, harmonisch getrennt.

Die drei Geraden, welche die Eckpunkte eines endlichen Dreiecks mit den Mittelpunkten der ihnen gegenüberliegenden Seiten verbinden, schneiden sich (102) in einem Punkte. — Die beiden Punkte, in welchen die Assymptoten einer Hyperbel von einer dritten Tangente derselben geschnitten werden, stehen (250) vom Berührungspunkte dieser Tangente gleichweit ab.

339. Sind in einem involutorischen Strahlenbüschel je zwei einander zugeordnete Winkel einander gleich, so hat der Büschel entweder zwei zu einander senkrechte Ordnungsstrahlen (Axen), oder es sind je zwei einander zugeordnete Strahlen zu einander

senkrecht. Im erstern Falle soll der Büschel symmetrisch, im letztern aber rechtwinklig heissen.

Nennt man in einer unendlich fernen Geraden je zwei Punkte, welche in zwei zu einander senkrechten Richtungen liegen, einander zugeordnet, so sind die Elemente des geraden Gebildes involutorisch gepaart Wenn daher zwei Seiten eines vollständigen ebenen Vierecks, welche in einem Eckpunkte desselben sich schneiden, zu den ihnen gegenüberliegenden Seiten beziehlich senkrecht sind, so sind auch (222) die beiden übrigen Seiten zu einander senkrecht.

340. Will man die Elemente eines ebenen Systems involutorisch so paaren, dass je zwei einander zugeordnete Gebilde congruent sind, so darf man nur entweder einen Punkt als Mittelpunkt oder eine Gerade als Axe (Symmetrallinie) annehmen. Im erstern Falle sind je zwei Punkte, welche vom Mittelpunkte gleichweit abstehen und mit ihm in einer und derselben Geraden liegen, im letztern aber je zwei Punkte, welche von der Axe gleichweit abstehen und in einer zu ihr senkrechten Geraden liegen, einander zugeordnet. In einem centrischen ebenen Systeme ist also die Ordnungslinie die unendlich ferne Gerade, daher je zwei einander zugeordnete Gerade parallel sind und vom Mittelpunkte gleichweit abstehen. In einem symmetrischen ebenen Systeme ist der Ordnungspunkt der unendlich ferne Punkt, welcher in der zur Axe (Ordnungslinie) senkrechten Richtung liegt, daher je zwei einander zugeordnete Gerade einen Winkel einschliessen, welcher durch die Axe halbirt wird.

341. In einem ebenen Polarsysteme heisst jede Gerade, welche der unendlich fernen Geraden, aber nicht sich selbst conjugirt ist, ein Durchmesser und der Richtung zugeordnet, in welcher ihr unendlich ferner Pol liegt. Jeder Durchmesser einer Curve II. Ordnung halbirt also (249) jede endliche Strecke, welche die ihm zugeordnete Richtung hat und von zwei Punkten der Curve begrenzt ist. — Alle Durchmesser einer Parabel sind zu einander parallel und mithin zu einer und derselben Richtung senkrecht, welcher die Axe der Parabel zugeordnet ist.

342. Alle Durchmesser einer Ellipse oder Hyperbel schneiden sich in ihrem Mittelpunkte (dem Pole der unendlich fernen Gera-

den), welcher von je zwei Punkten der Curve, die mit ihm in einer und derselben Geraden liegen, gleichweit absteht. Wenn nun je zwei conjugirte Durchmesser, von welchen also jeder der Richtung des andern zugeordnet ist, zu einander senkrecht sind, folglich jeder Durchmesser eine Axe ist, so ist die Curve, da alle Punkte derselben vom Mittelpunkte gleichweit abstehen, ein Kreis. Wenn aber diess nicht der Fall ist, so hat die Curve (313) zwei Axen, nämlich zwei Durchmesser, welche einander conjugirt und zugleich zu einander senkrecht sind.

Man nehme an, dass den Durchmessern MA, MB die Durchmesser MA_1, MB_1 conjugirt und dass M, A, B, A_1, B_1 die Punkte sind, in welchen die vier Durchmesser von einem durch den Mittelpunkt der Curve gelegten Kreise geschnitten werden, so erhält man (278) die Axen der Curve, wenn man aus dem Punkte M diejenigen Punkte des Kreises projicirt, welche mit seinem Mittelpunkte und dem Schnittpunkte der Geraden AB_1, A_1B in einer und derselben Geraden liegen.

Die Hauptaxe einer Hyperbel halbirt den Assymptotenwinkel und schneidet die Curve in ihren beiden Scheitelpunkten. Eine Ellipse hat vier Scheitelpunkte und schliesst von ihrer Hauptaxe ein grösseres Stück ein, als von der andern Axe.

343. Die Mittelpunkte von allen Curven II. Ordnung, welche die vier Seiten eines gegebenen vollständigen Vierseits berühren, liegen in einer Geraden, welche (302) jede von zwei Gegenpunkten des vollständigen Vierseits begrenzte endliche Strecke halbirt.

Schneiden sich je zwei Gegenseiten eines vollständigen Vierecks in einem eigentlichen Punkte, so liegen (303) diese drei Punkte mit den Mittelpunkten der endlichen Strecken, deren jede von zwei Eckpunkten des Vierecks begrenzt ist, in einer Curve II. Ordnung, welche von jeder durch die vier Eckpunkte des Vierecks gehenden Curve II. Ordnung den Mittelpunkt enthält. Sind je zwei Gegenseiten des Vierecks zu einander senkrecht, so ist jene Curve ein Kreis.

344. Wenn von einem Dreiecke, dessen Eckpunkte in einer gegebenen Curve II. Ordnung s liegen, ein Eckpunkt S gegeben ist und die in ihm sich schneidenden Seiten zu einander senkrecht

sind, so geht (278) die dritte Seite durch einen gegebenen Punkt H. Wenn aber die beiden Seiten, deren Schnittpunkt gegeben ist, einen schiefen Winkel von gegebener Grösse mit einander bilden, so berührt (281) die dritte Seite eine gegebene Curve II. Ordnung.

Ist die Curve s kein Kreis, so ist die Polare des Punktes H eine eigentliche Gerade h, zu welcher also eine durch den Punkt S gehende Gerade u parallel ist. Bezieht man nun zwei ebene Systeme collineär so aufeinander, dass sie den Strahlenbüschel S und das gerade Gebilde u entsprechend gemein haben und dass der Geraden h des einen die unendlich ferne Gerade des andern entspricht, so entspricht der Curve s des erstern ein Kreis des letztern, dessen Mittelpunkt M dem Punkte H entspricht. Man findet also den Mittelpunkt M des Kreises, welcher der Curve s im Punkte S am Innigsten sich anschmiegt, wenn man irgend einen von S verschiedenen eigentlichen Punkt F der Geraden u aus dem Punkte H auf die Gerade h projicirt, die Projektion G mit dem Punkt S verbindet und alsdann durch F eine zu GS parallele Gerade FM zieht.

345. Wenn a die Axe einer Parabel oder eine von den beiden Axen einer andern Curve II. Ordnung ist, welche nämlich nur zwei Axen hat, so giebt es in der Geraden a zu jedem eigentlichen Punkte P, welcher nicht der Pol der unendlich fernen Geraden ist, einen eigentlichen Punkt P_1, so dass je zwei einander conjugirte Gerade, von welchen die eine durch den Punkt P und die andere durch den Punkt P_1 geht, zu einander senkrecht sind. Nennt man je zwei solche Punkte einander zugeordnet, so sind die Punkte der Geraden a involutorisch gepaart.

Es sey R der Pol der Axe a, p eine Gerade, welche diese Axe im Punkt P unter schiefen Winkeln schneidet, und P_1 der Punkt, in welchem die Axe a von der Geraden p_1 geschnitten wird, die durch den Pol der Geraden p geht und zu dieser Geraden senkrecht ist. Da nun drei Strahlen a, PR, p des Büschels P zu den ihnen conjugirten Strahlen P_1R, a, p_1 des Büschels P_1 senkrecht sind, so kann man aus 252 schliessen, dass jeder Strahl des einen Büschels zu dem ihm conjugirten Strahle des andern senkrecht ist. Da ferner auch die beiden Parallelstrahlenbüschel, von welchen der eine die Richtung der Geraden p und der andere die Richtung der Geraden p_1 hat, wenn auf jeden Strahl des einen der ihm conjugirte Strahl des andern bezogen wird, zu einander projektivisch sind, demnach von der Axe a in zwei zu einander projektivischen geraden Gebilden geschnitten werden, und je zwei homologe Punkte dieser Gebilde einander doppelt entsprechen, so folgt auch der letztere Theil des Satzes.

Wenn die Curve eine Parabel ist und also die beiden Parallelstrahlenbüschel die unendlich ferne Gerade entsprechend gemein haben, so ist der unendlich ferne Punkt G des involutorischen geraden Gebildes a sich selbst zugeordnet, daher der andere Ordnungspunkt F desselben, welcher der Brennpunkt der Parabel heisst, von je zwei einander zugeordneten Punkten gleichweit absteht. Ist aber die Curve eine Ellipse oder Hyperbel, so enthält das erwähnte Gebilde, da dem unendlich fernen Punkte U desselben der Mittelpunkt M der Curve zugeordnet ist, entweder zwei von diesem Punkte gleichweit abstehende Ordnungspunkte (Brennpunkte) oder gar keinen Ordnungspunkt, je nachdem die Gerade a die Hauptaxe oder die andere Axe der Curve ist (je nachdem die Geraden p, p_1 durch die Punkte M, U nicht getrennt oder getrennt sind).

Schneiden sich also zwei zu einander senkrechte Gerade im Brennpunkte F einer Parabel oder in einem von den beiden Brennpunkten F, G einer Ellipse oder Hyperbel, welche nämlich mit ihnen in einerlei Ebene liegt, so sind sie in Hinsicht auf die Curve einander conjugirt. Dasselbe ist der Fall, wenn die zu einander senkrechten Geraden SP, SP_1 durch die Punkte F, G harmonisch getrennt sind und also die von den beiden Geraden SF, SG eingeschlossenen Winkel halbiren. Liegt der Punkt S in der Curve, so ist die eine von den beiden Geraden SP, SP_1 eine Tangente derselben. Wenn aber im Punkte S zwei Tangenten der Curve sich schneiden, so werden auch die Winkel, welche diese Tangenten mit einander bilden, durch die Geraden SP, SP_1 halbirt.

346. Die $\left\{\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{matrix}\right\}$ von je zwei endlichen Strecken FS, GS,

welche die Brennpunkte einer $\left\{\begin{matrix}\text{Ellipse}\\ \text{Hyperbel}\end{matrix}\right\}$ mit einem Punkte der Curve verbinden, ist dem von derselben $\left.\begin{matrix}\text{ein}\\ \text{aus}\end{matrix}\right\}$ geschlossenem Stücke AB der Hauptaxe gleich. Jeder Punkt einer Parabel steht von ihrem Brennpunkte und der Polare dieses Punktes gleichweit ab.

Es wird hinreichend seyn, denjenigen von den obigen Sätzen zu beweisen, welcher auf eine Ellipse sich bezieht. Die Tangenten ST, BT bilden nach dem Vorigen einen Winkel, welcher durch die Geraden FT, GT in drei Theile α, β, γ getheilt wird, so dass $\alpha = \gamma$ und also $\alpha + \beta = \beta + \gamma$ ist. Man schneide nun in der Geraden AB vom Punkte B aus ein Stück $BJ = BG$ ab, so ist auch $TJ = TG$ und $FJ = FB + BG = FB + FA = AB$. Es werde ferner die Gerade FS von der Geraden, welche durch den Brennpunkt G geht und zur Tangente ST senkrecht ist, im Punkte K geschnitten, so ist, weil die geraden Linien SG, SK mit der Tangente ST gleiche Winkel bilden, $SG = SK$ und also auch $TG = TK$. Da endlich in dem Vierecke TJFK die Seiten TJ, TK einander gleich sind und der Winkel am Punkte T durch die Diagonale TF in zwei gleiche Theile $(2\alpha + \beta = 2\gamma + \beta)$ getheilt wird, so ist auch $FK = FJ$ d. i. $FS + GS = AB$.

347. Drei Gerade, welche in drei eigentlichen Punkten sich schneiden, bilden mit einander sechs Winkel, deren Halbirungslinien die Seiten eines vollständigen Vierecks sind. Die Eckpunkte dieses Vierecks sind die Mittelpunkte von vier Kreisen, deren jeder jene drei Geraden berührt. Hieher gehört auch (316) die erste von den drei folgenden Aufgaben, während die beiden übrigen besondere Fälle von 315 sind.

Eine Curve II. Ordnung zu finden, welche durch die drei Eckpunkte eines gegebenen Dreiecks gehe und einen vierten in derselben Ebene gegebenen Punkt zum Brennpunkt habe. — Um ein gegebenes endliches Dreieck einen Kreis zu beschreiben. — In ein gegebenes Dreieck eine Curve II. Ordnung zu beschreiben, welche einen innerhalb des Dreiecks gegebenen Punkt zum Brennpunkt habe.

348. Will man die Elemente eines räumlichen Systems involutorisch so paaren, dass je zwei einander zugeordnete einförmige

Gebilde congruent sind, so darf man nur entweder die unendlich ferne Ebene als Ordnungsebene und einen eigentlichen Punkt M als Ordnungspunkt, oder eine eigentliche Ebene S als Ordnungsebene und den unendlich fernen Punkt, welcher in der zur Ebene S senkrechten Richtung liegt, als Ordnungspunkt, oder eine eigentliche Gerade a und die unendlich ferne Gerade, welche in der zur erstern senkrechten Stellung liegt, als Ordnungslinien annehmen. Im ersten Falle sind je zwei Punkte, welche mit dem Mittelpunkte M in einer Geraden liegen und von ihm gleichweit abstehen, im zweiten Falle je zwei Punkte, welche in einer zur Symmetralebene S senkrechten Geraden liegen und von der Ebene S gleichweit abstehen, im dritten Falle je zwei Punkte, welche in einer zur Axe a senkrechten Geraden liegen und von der Axe gleichweit abstehen, einander zugeordnet. Zwei einander zugeordnete Körper sind im ersten und zweiten Falle symmetrisch-gleich, im dritten aber congruent.

349. Wird in einem gewöhnlichen Strahlenbündel jedem Strahle die zu ihm senkrechte Ebene zugeordnet, so soll derselbe rechtwinklig heissen. In einem solchen Polarsysteme sind also auch je zwei conjugirte Elemente zu einander senkrecht.

Sind in einem vollständigen Vierkante zwei einander nicht gegenüberliegende Seiten zu den ihnen gegenüberliegenden Seiten beziehlich senkrecht, so sind auch (244) die beiden übrigen Seiten zu einander senkrecht.

Sind in einem vollständigen Vierseite zwei einander nicht gegenüberliegende Kanten zu den ihnen gegenüberliegenden Kanten beziehlich senkrecht, so sind auch die beiden übrigen Kanten zu einander senkrecht.

350. Wenn zwei concentrische Strahlenbüschel in zwei Ebenen liegen, welche unter schiefen Winkeln sich schneiden, so ist zu jedem Strahle des einen Büschels ein Strahl des andern senkrecht. Nennt man je zwei solche Strahlen einander entsprechend, so sind (252) die Büschel projektivisch auf einander bezogen, daher die Ebenen, deren jede die Büschel in zwei zu einander senkrechten Strahlen schneidet, alle eine Kegelfläche II. Ordnung berühren. — Drehen sich zwei zu einander senkrechte Ebenen um zwei feste Axen, welche unter schiefen Winkeln sich schneiden, so beschreibt ihre Schnittlinie eine Kegelfläche II. Ordnung.

351. In einem gewöhnlichen polären Strahlenbündel, welcher eine Ordnungsfläche hat, ist jedem Strahle a, welcher nicht in dieser Fläche liegt, eine Ebene A zugeordnet, so dass die Mittelpunkte von allen endlichen Strecken, deren jede zu der Geraden a parallel und von zwei Punkten der Kegelfläche begrenzt ist, in der Ebene A, die Mittelpunkte von allen Curven aber, in welchen die Kegelfläche von den zur Ebene A parallelen Ebenen geschnitten wird, in der Geraden a liegen. Sind die Elemente a, A zu einander senkrecht, so ist die Gerade a eine Axe und die Ebene A eine Symmetralebene der Kegelfläche. Hat der poläre Strahlenbündel mit dem rechtwinkligen Strahlenbündel, der mit ihm concentrisch ist, nur (295) ein Polardreikant gemein, so hat die Kegelfläche nur drei Axen, von welchen die eine a (die Hauptaxe) von der Fläche eingeschlossen ist. Wenn aber jeder Ebene des Ebenenbüschels a in Hinsicht auf beide Polarsysteme ein und derselbe Strahl zugeordnet ist (die Kegelfläche die imaginäre Ordnungsfläche des rechtwinkligen Polarsystems in zwei imaginären Strahlen berührt), so ist die Kegelfläche eine Drehungsfläche, welche nämlich von jeder zu ihrer Hauptaxe senkrechten Ebene in einem Kreise geschnitten wird.

352. Die drei Seiten eines gewöhnlichen Dreikants bilden mit einander sechs Flächenwinkel, deren Halbirungsebenen die Seiten eines vollständigen Vierkants sind. Jede Kante dieses Vierkants ist die Axe eines Drehungskegels, dessen Mantel die drei Seiten des Dreikants berührt. 317.

Die drei Kanten eines gewöhnlichen Dreikants bilden mit einander sechs ebene Winkel, deren Halbirungslinien die Kanten eines vollständigen Vierseits sind. Jede Seite dieses Vierseits ist zur Axe eines Drehungskegels senkrecht, dessen Mantel durch die drei Kanten des Dreikants geht.

353. Wenn eine Kegelfläche II. Ordnung nur drei Axen a, b, c hat und also auch in der Hauptaxe a nur zwei Symmetralebenen sich schneiden, so schliesst die Fläche von der einen ab dieser Ebenen einen grössern Winkel AB ein als von der andern, dagegen dem Schnitte des Strahlenkegels mit der Ebene ac ein grösserer Flächenwinkel W zugeordnet ist. Der Winkel AB enthält

zwei Strahlen F, G, der Winkel W aber zwei Ebenen H, J, von welchen Folgendes gilt:

Je zwei Ebenen, welche in Hinsicht auf die Kegelfläche einander conjugirt sind und in einer von den beiden Geraden F, G sich schneiden, sind zu einander senkrecht. Die ebenen Winkel FG, F·G werden aus jeder Geraden S, welche durch den Mittelpunkt der Kegelfläche geht, aber ausserhalb der Ebene FG liegt, durch zwei Flächenwinkel projicirt, deren Halbirungsebenen zu einander senkrecht und einander conjugirt sind, folglich, wenn in der Geraden S zwei Berührungsebenen der Kegelfläche sich schneiden, auch die von diesen Ebenen gebildeten Winkel halbiren. Liegt aber die Gerade S in der Kegelfläche, so wird diese von der einen der erwähnten Halbirungsebenen berührt. Ferner ist alsdann die Summe der innerhalb des Strahlenkegels befindlichen ebenen Winkel FS, GS dem Winkel AB gleich.

Je zwei Gerade, welche in Hinsicht auf die Kegelfläche einander conjugirt sind und in einer von den beiden Ebenen H, J liegen, sind zu einander senkrecht. Die Flächenwinkel HJ, H·J werden von jeder Ebene U, welche durch den Mittelpunkt der Kegelfläche aber nicht durch die Axe b geht, in zwei ebenen Winkeln geschnitten, deren Halbirungslinien zu einander senkrecht und einander conjugirt sind, folglich, wenn die Ebene U die Kegelfläche in zwei Strahlen schneidet, auch die von diesen Geraden gebildeten Winkel halbiren. Wird aber die Kegelfläche von der Ebene U berührt, so ist der Berührungsstrahl die eine von den erwähnten Halbirungslinien. Ferner ist alsdann die Summe der von der Kegelfläche ausgeschlossenen Flächenwinkel HU, JU dem Winkel W gleich.

Die Beweise dieser Sätze sind denen von 345 und 346 ganz analog, daher nur noch bemerkt wird, dass die Kegelfläche von jeder zu H oder J parallelen Ebene in einem Kreise geschnitten wird.

354. In einem räumlichen Polarsysteme wird jede Ebene, welche einem nicht in ihr liegenden unendlich fernen Punkte zugeordnet ist, eine Diametralebene, jede Gerade aber, welche einer mit ihr nicht in einerlei Ebene liegenden unendlich fernen Geraden

zugeordnet ist, ein Durchmesser genannt. Jede Diametralebene halbirt also jede endliche Strecke, welche die ihr zugeordnete Richtung hat und von zwei Punkten der Ordnungsfläche F begrenzt ist. Jeder Durchmesser enthält den Mittelpunkt einer jeden Curve, in welcher die Fläche F von einer ihm conjugirten Ebene geschnitten wird. Ist F ein Paraboloid, so sind alle Durchmesser zu einander parallel und also zu einer und derselben Stellung senkrecht, welcher die Axe des Paraboloids zugeordnet ist. Wenn ferner jede durch die Axe a gehende Ebene eine Symmetralebene (zu der ihr zugeordneten Richtung senkrecht) ist, so ist die Fläche F ein (elliptisches) Drehungsparaboloid. Enthält aber der Ebenenbüschel a nur zwei Ebenen, welche einander conjugirt und zugleich zu einander senkrecht sind, so enthalten diese von jeder Curve, in welcher die Fläche von einer zu ihrer Axe senkrechten Ebene geschnitten wird, die beiden Axen. Die erwähnten Symmetralebenen selbst schneiden die Fläche in zwei Parabeln, welche in ihrem gemeinschaftlichen Scheitelpunkte die in diesem Punkte zur Axe a senkrechte Ebene auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten berühren, je nachdem das Paraboloid ein elliptisches oder hyperbolisches ist. Uebrigens wird das Paraboloid von jeder Diametralebene in einer Parabel geschnitten, in welcher demselben eine parabolische Cylinderfläche sich anschmiegt.

355. Alle Durchmesser und Diametralebenen eines Ellipsoids oder auch Hyperboloids gehen durch seinen Mittelpunkt, nämlich den Pol der unendlich fernen Ebene, welcher von je zwei Punkten der Fläche, die mit ihm in einer Geraden liegen, gleichweit absteht. Ist unter allen den Polardreikanten, deren jedes drei einander conjugirte Durchmesser zu Kanten hat, nur eines, dessen Kanten alle drei zu einander senkrecht sind, so hat die Fläche nur drei Axen und drei Symmetralebenen. Wenn aber ein Durchmesser a mit je zwei Durchmessern, die zu ihm und unter sich senkrecht sind, ein Polardreikant bildet, so ist die Fläche eine Drehungsfläche und jener Durchmesser die Drehungsaxe derselben. Wenn endlich jeder Durchmesser zu der ihm conjugirten Diametralebene senkrecht ist, so ist die Fläche, da alle Punkte derselben vom Mittelpunkte gleichweit abstehen, eine Kugelfläche.

356. Wenn ein Ellipsoid, welches nur drei Axen hat, von der

einen das Stück AB, von der andern das Stück CD und von der dritten das Stück EF einschliesst, so dass $AB > CD > EF$ ist, so wird die Fläche von der mit ihr concentrischen und durch die Punkte C, D gehenden Kugelfläche in zwei Kreisen geschnitten. Die Kugelfläche schneidet die Ebene AEBF in einem Kreise k, dieser Kreis aber die Ellipse AEBF in den vier Eckpunkten eines Rechtecks, dessen Diagonalen die zum Durchmesser CD senkrechten Durchmesser jener Kreise sind. Die gemeinschaftlichen Tangenten der Ellipse AEBF und des Kreises k bezeichnen die Richtungen von zwei um das Ellipsoid beschriebenen Drehungscylindern.

357. Jeder in einer Fläche II. Ordnung liegende Kreis s gehört einem Systeme von Parallelkreisen an, welche die Fläche erfüllen.

Es sey a derjenige Durchmesser der Fläche, welcher der Ebene E des Kreises s conjugirt ist. Da nun der in dem Polarsysteme enthaltene involutorische Ebenenbüschel a von der Ebene E und mithin auch von jeder zu dieser Ebene parallelen Ebene in einem rechtwinkligen Strahlenbüschel geschnitten wird, so folgt der Satz.

358. Jeder Durchmesser eines Hyperboloids ist der Diametralebene conjugirt, welche ihm in Hinsicht auf den Assymptotenkegel zugeordnet ist, daher die Axen des Assymptotenkegels zugleich die Axen des Hyperboloids sind. Ob eine Curve, in welcher das Hyperboloid von einer Ebene geschnitten wird, ein Kreis oder eine andere Ellipse oder eine Parabel oder eine Hyperbel sei, kann an der Curve erkannt werden, in welcher dieselbe Ebene oder eine zu ihr parallele Ebene den Assymptotenkegel schneidet.

Jede Ebene, welche den Assymptotenkegel eines einschaligen Hyperboloids in einer Geraden berührt, schneidet das Hyperboloid in zwei Geraden, welche zu jener Geraden parallel sind und von ihr gleichweit abstehen. Durch je drei Gerade, welche einer und derselben Schaar angehören, ist (48) ein Parallelepipedon bestimmt, dessen Mittelpunkt zugleich der Mittelpunkt des Hyperboloids ist. Zieht man zu jeder der drei Geraden eine Parallele, welche die beiden übrigen schneidet, so erhält man drei Parallelstreifen, deren Halbirungslinien in dem erwähnten Punkte sich schneiden.

359. Wird eine Curve II. Ordnung um ihre Hauptaxe gedreht, so erzeugt sie eine Fläche II. Ordnung S, welche zwei Brennpunkte F, G hat. Aus jedem dieser Punkte wird jede Curve s, in welcher die Fläche S von einer nicht durch ihn gehenden Ebene E geschnitten wird, durch eine Drehungsfläche K projicirt, deren Axe durch den Pol P jener Ebene geht.

In Hinsicht auf die Fläche S ist nämlich jeder durch den Punkt F gehenden Ebene Q ein Punkt Q_1 zugeordnet, welcher mit dem Punkte F in einer zur Ebene Q senkrechten Geraden FQ_1 liegt. Wenn nun die Ebene Q auch durch den Punkt P geht, folglich der Punkt Q_1 in der Ebene E liegt, so ist in Hinsicht auf die Curve s der Geraden EQ der Punkt Q_1, mithin in Hinsicht auf die Kegelfläche K jeder durch die Geraden FP gehenden Ebene Q eine zu dieser Ebene senkrechte Gerade FQ_1 zugeordnet.

360. Je zwei unendlich ferne $\left\{\begin{array}{c}\text{Punkte}\\ \text{Gerade}\end{array}\right\}$, welche in zwei zu einander senkrechten $\left\{\begin{array}{c}\text{Richtungen}\\ \text{Stellungen}\end{array}\right\}$ liegen, sind in Hinsicht auf die imaginäre Curve einander conjugirt, in welcher die unendlich ferne Ebene von allen Kugeln und den imaginären Ordnungsflächen aller rechtwinkligen Strahlenbündel geschnitten wird. Es heisst dies aber nichts anderes, als dass dasjenige unendlich ferne ebene Polarsystem, welches aus jedem eigentlichen Punkte durch einen rechtwinkligen Strahlenbündel projicirt wird, in jedem räumlichen Polarsysteme enthalten sei, dessen Ordnungsfläche eine Kugelfläche ist.

Durch vier gegebene eigentliche Punkte, welche nicht in einerlei Ebene liegen, eine Kugelfläche zu legen (eine Fläche II. Ordnung, welche durch die oben erwähnte imaginäre Curve gehe). 333.

Eine Kugel zu beschreiben, welche (334) die vier Flächen eines gegebenen Tetraeders ABCD

Eine Fläche II. Ordnung zu finden, welche die vier Flächen eines gegebenen Tetraeders berühre und einen ausserhalb dieser vier Ebenen gegebenen Brennpunkt habe.

Eine Fläche II. Ordnung zu finden, welche durch die vier Eckpunkte eines gegebenen Te-berühre, von dessen sechs Kanten keine im Unendlichen liegt. — Die vier Flächen des Tetraeders bilden zwölf Flächenwinkel, deren Halbirungsebenen die Seiten von zwölf vollständigen Vierkanten sind. Die Mittelpunkte dieser Vierkante sind die vier Eckpunkte des Tetraeders und acht andere Punkte. Wenn nun M irgend einen der acht letztern Punkte bezeichnet, so kommt es darauf an, ob er im Unendlichen oder nicht im Unendlichen liegt. Im erstern Falle ist die Gerade DM die Axe eines Drehungskegels, welcher die Ebenen DAB, DAC, DBC und die durch den Punkt D gehende, zur Ebene ABC parallele Ebene P berührt. Im letztern Falle ist der Punkt M der Mittelpunkt einer Kugel, welche die vier Flächen des Tetraeders ABCD berührt. Die Aufgabe lässt daher fünf oder sechs oder sieben oder acht Auflösungen zu, je nachdem es drei oder zwei oder einen oder keinen Drehungskegel giebt, welcher die vier Ebenen DAB, DAC, DBC, P berührt.

traeders ABCD gehe und einen gegebenen Brennpunkt F habe, der in keiner Kante des Tetraeders liegt. — Die vier Geraden FA, FB, FC, FD bilden mit einander zwölf ebene Winkel, deren Halbirungslinien die Kanten des Tetraeders in den zwölf Eckpunkten von zwölf vollständigen Vierseiten schneiden. Die Träger dieser Vierseite sind die vier Flächen des Tetraeders und acht andere Ebenen. Ist nun E irgend eine der acht letztern Ebenen, so kommt es darauf an, ob sie durch den Punkt F oder nicht durch ihn geht. Im erstern Falle ist die Ebene E zur Axe eines Drehungskegels senkrecht, dessen Mantel durch die vier Geraden FA, FB, FC, FD geht. Im letztern Falle ist die Ebene E die Polare des Punktes F in Hinsicht auf eine Fläche, welche der Aufgabe Genüge leistet. Die Aufgabe lässt daher fünf oder sechs oder sieben oder acht Auflösungen zu, je nachdem es drei oder zwei oder einen oder keinen Drehungskegel giebt, dessen Mantel durch die vier Geraden FA, FB, FC, FD geht.

Berichtigung.

In 277 ist $2n+1$ statt $n+1$ und $2n$ statt n zu lesen.

Beiträge

zur

Geometrie der Lage

von

Dr. Karl Georg Christian v. Staudt,
ordentl. Professor an der Universität Erlangen.

Erstes Heft.

NÜRNBERG.
Verlag der Fr. Korn'schen Buchhandlung.

Druck von E. Th. Jacob in Erlangen.

V o r w o r t.

Indem die Mathematik darnach strebt, Ausnahmen von Regeln zu beseitigen und verschiedene Sätze aus einem Gesichtspunkte aufzufassen, wird sie häufig genöthigt, Begriffe zu erweitern oder neue Begriffe aufzustellen, was beinahe immer einen Fortschritt in der Wissenschaft bezeichnet. Dahin gehört namentlich die Einführung von imaginären Grössen in der Analysis und die Einführung von imaginären Elementen in der Geometrie. Dass eine Ellipse oder Hyperbel durch ihre Brennpunkte und eine Tangente bestimmt ist, war schon den ältern Geometern bekannt. Dass aber die Curve aus dem Grunde bestimmt ist, weil von ihr eigentlich fünf Tangenten gegeben sind, und dass also der erwähnte Satz nur ein besonderer Fall von einem allgemeinern Satze ist, ergab sich erst aus der Betrachtung der imaginären Elemente. In meiner im Jahre 1847 erschienenen Geometrie der Lage aber konnte ich in die Lehre von den imaginären Elementen, deren Begründung der nächste Zweck dieser Beiträge ist, schon desshalb nicht tiefer eingehen, weil es mir damals noch nicht gelungen war, zwei einander conjungirte imaginäre Elemente von einander zu unterscheiden.

Dass die Theorie der imaginären Elemente, durch welche das Gebiet der Geometrie um ein Bedeutendes erweitert und zugleich die Uebersicht über die Sätze erleichtert wird, eine gewisse Ausführlichkeit in der Behandlung erfordert, liegt in der Natur der Sache. Sind ja selbst bei dem Satze, dass durch zwei Punkte eine Gerade bestimmt ist, sechs Fälle zu betrachten. In der analytischen Geometrie nennt man, was sehr einfach zu sein scheint, einen Punkt imaginär, wenn seine Coordinaten nicht sämmtlich reell sind. Indessen ist hiedurch nur die Sprache der Algebra auf die Geometrie übergetragen, keineswegs aber nachgewiesen, dass ein imaginärer Punkt, gleichwie ein reeller Punkt, etwas vom Coordinatensysteme Unabhängiges sei. Wo ist, fragt sich wohl Jeder, der imaginäre Punkt, wenn man vom Coordinatensysteme abstrahirt? So entbehrte denn bisher die Geometrie, wenn sich's von imaginären Elementen handelte, der Evidenz, welche man sonst an ihr rühmt und wohl auch mit Recht von ihr verlangt.

Erlangen, im Mai 1856.

Der Verfasser.

Inhalt.

Bemerkung. Wo der Verfasser auf einen in seiner Geometrie der Lage enthaltenen Satz sich beruft, ist der betreffenden Nummer der Buchstabe G vorgesetzt.

Beiträge

zur

Geometrie der Lage.

§. 1.

Elementargebilde.

1. Durch drei Gerade a, b, c, deren keine zwei in einerlei Ebene liegen, ist (G. 115) eine Regelschaar a b c bestimmt, welcher die drei gegebenen Geraden angehören, und welche von einer andern Regelschaar p q r die Leitschaar ist. Jede Gerade der einen Schaar schneidet jede Gerade der andern Schaar, während keine zwei Gerade, welche einer und derselben Schaar angehören, in einerlei Ebene liegen. Jeder Punkt, welcher in einer Geraden der einen Schaar liegt, liegt auch in einer Geraden der andern Schaar, daher die Fläche a b c mit der Fläche p q r zusammenfällt. Liegt eine Gerade ausserhalb der Regelfläche, so hat sie mit derselben höchstens zwei Punkte gemein, da jede Gerade, welche mehr als zwei Gerade der einen Schaar schneidet, ein Leitstrahl dieser Schaar und also eine Gerade der andern Schaar ist. Jede Ebene, welche durch eine Gerade a der einen Schaar geht, geht auch durch eine Gerade p der andern Schaar und schmiegt im Schnittpunkte der beiden Geraden der Regelfläche sich an, indem alle Punkte, welche diese Fläche mit der Ebene a p gemein hat, in den beiden Geraden a, p liegen und also jede dritte Gerade, welche der Ebene a p angehört und durch den Punkt a p geht, in diesem Punkte die Regelfläche berührt. Jede Gerade, welche die Fläche in zwei Punkten a p. b p schneidet ist zugleich die Schnittlinie

von zwei der Fläche sich anschmiegenden Ebenen ap, bq. Und wenn durch eine ausserhalb der Fläche liegende Gerade zwei derselben sich anschmiegende Ebenen gehen, so schneidet die Gerade die Fläche in zwei Punkten.

Der Ausdruck Regelschaar ist auch in der Folge immer in der obigen Bedeutung zu nehmen, so dass es also zu jeder Regelschaar eine andere giebt, welche von der erstern und von welcher die erstere die Leitschaar ist. Eine Regelschaar und ein gerades Gebilde sollen zu einander perspektivisch heissen, wenn der Träger des geraden Gebildes ein Leitstrahl der Regelschaar ist, und auf jeden Punkt desselben die durch ihn gehende Gerade der Regelschaar bezogen wird.

ein Ebenenbüschel I. Ordnung sollen zu einander perspektivisch heissen, wenn die Axe des Büschels ein Leitstrahl der Regelschaar ist, und auf jede Ebene desselben die in ihr liegende Gerade der Regelschaar bezogen wird.

2. Eine Curve II. Ordnung und ein Strahlenbüschel I. Ordnung, welche in einerlei Ebene liegen, sollen zu einander perspektivisch heissen, wenn der Mittelpunkt S des Büschels ein Punkt der Curve ist, und auf jeden andern Punkt P derselben der durch ihn gehende Strahl SP des Büschels bezogen wird. Dem Punkt S entspricht der Strahl SS, welcher durch keinen andern Punkt der Curve geht.

Ein Strahlenbüschel II. Ordnung und ein gerades Gebilde sollen zu einander perspektivisch heissen, wenn der Träger s des geraden Gebildes ein Strahl des Büschels ist und auf jeden andern Strahl p desselben der in ihm liegende Punkt des geraden Gebildes bezogen wird. Dem Strahle s entspricht der Punkt ss, durch welchen kein anderer Strahl des Büschels geht.

Werden zwei in einerlei Ebene liegende Gebilde, welche nach den obigen Erklärungen zu einander perspektivisch sind, aus einem und demselben ausserhalb der Ebene liegenden Punkte projicirt, so hat man vier Gebilde, unter welchen auch ein Ebenenbüschel ist. Das Punktgebilde und der Ebenenbüschel sollen nicht nur zu jedem der beiden übrigen Gebilde, sondern auch zu einander perspektivisch heissen.

3. Unter einem Elementargebilde ist entweder ein einförmiges

Gebilde oder eine Curve oder eine Kegelfläche oder ein Büschel II. Ordnung oder eine Regelschaar zu verstehen, so dass es also drei Arten von Elementargebilden I. Ordnung und fünf Arten von Elementargebilden II. Ordnung giebt. Eine Curve II. Ordnung kann auch ein Punktgebilde II. Ordnung genannt werden. Eine Kegelfläche II. Ordnung ist als Elementargebilde nichts anderes als der Inbegriff von allen in ihr liegenden Geraden.

Alle einförmigen Gebilde, welche zu einem und demselben Elementargebilde perspektivisch sind, sind zu einander projektivisch. — Es sind hiemit nur mehrere bekannte Sätze in eine Aussage zusammengefasst.

4. Zwei zu einander projektivische nicht in einander liegende gerade Gebilde erzeugen ein zu ihnen perspektivisches drittes Elementargebilde, welches entweder ein Strahlenbüschel erster oder zweiter Ordnung oder eine Regelschaar ist.

Zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel I. Ordnung, welche in einerlei Ebene liegen, aber nicht einerlei Mittelpunkt haben, erzeugen ein zu ihnen perspektivisches Punktgebilde erster oder zweiter Ordnung. Dasselbe gilt von einem Strahlenbüschel I. Ordnung und einem zu demselben projektivischen Ebenenbüschel I. Ordnung, dessen Achse weder durch den Mittelpunkt des Strahlenbüschels geht noch mit ihm in einerlei Ebene liegt.

Zwei zu einander projektivische nicht in einander liegende Ebenenbüschel I. Ordnung erzeugen ein zu ihnen perspektivisches drittes Elementargebilde, welches entweder ein Strahlenbüschel I. Ordnung oder eine Kegelfläche oder eine Regelschaar ist.

Zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel I. Ordnung, welche einerlei Mittelpunkt haben aber nicht in einerlei Ebene liegen, erzeugen einen zu ihnen perspektivischen Ebenenbüschel erster oder zweiter Ordnung. Dasselbe gilt von einem Strahlenbüschel I. Ordnung und einem zu demselben projektivischen geraden Gebilde, dessen Träger weder durch den Mittelpunkt des Büschels geht noch mit ihm in einerlei Ebene liegt.

5. Wenn in einem einförmigen Gebilde die Elemente A, C durch die Elemente B, D harmonisch getrennt sind, und ein Ele-

ment d, welches dem Gebilde nicht angehört, entweder durch D geht, ohne durch B zu gehen, oder in D liegt, ohne in B zu liegen, so sollen die Elemente A, C auch durch die Elemente B, d harmonisch getrennt heissen. Wenn ferner das Element b entweder durch B geht, ohne durch D zu gehen, oder in B liegt, ohne in D zu liegen, so sollen die Elemente A, C auch durch die Elemente b, d harmonisch getrennt heissen.

Ist also F eine Fläche II. Ordnung und S ein ausserhalb derselben befindlicher Punkt, so sind je zwei Punkte der Fläche, welche mit dem Punkte S in einer und derselben Geraden liegen, so wie auch je zwei der Fläche sich anschmiegende Ebenen, welche die Polare U des Punktes S in einer und derselben Geraden schneiden, durch den Punkt S und die Ebene U harmonisch getrennt. — Durch zwei nicht in einerlei Ebene liegende Gerade und

einen Punkt, welcher in keiner von den beiden Geraden liegt, ist ein anderer Punkt bestimmt, welcher vom erstern durch die gegebenen Geraden harmonisch getrennt ist.

eine Ebene, welche durch keine von den beiden Geraden geht, ist eine andere Ebene bestimmt, welche von der erstern durch die gegebenen Geraden harmonisch getrennt ist.

6. In einem Elementargebilde II. Ordnung sollen vier Elemente harmonisch liegend heissen, wenn diess von den ihnen entsprechenden Elementen irgend eines und also eines jeden einförmigen Gebildes gilt, welches zu dem Gebilde II. Ordnung perspektivisch ist. Es ist hiernach in jedem Elementargebilde durch drei Elemente A, B, C ein viertes Element D bestimmt, welches nämlich zu den drei gegebenen Elementen das vierte harmonische Element ist.

Berührt eine Curve II. Ordnung in den Punkten A, C die Geraden a, c, so sind in der Curve je zwei Punkte B, D, welche mit dem Punkte ac in einer und derselben Geraden liegen, durch die Punkte A, C und in dem der Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschel je zwei Strahlen b, d, welche die Gerade AC in einem und demselben Punkte schneiden, durch die Strahlen a, c harmonisch getrennt. Bezieht man nämlich den Strahlenbüschel A auf die Curve perspektivisch, so entsprechen den Punkten A, B, C, D die Strahlen a, AB, AC, AD, welche harmonisch liegen, weil die Punkte B, D durch den Punkt a c und die Gerade A C harmonisch getrennt sind.

7. Gleichwie zwei einförmige Gebilde, so sollen überhaupt zwei Elementargebilde zu einander projektivisch heissen, wenn sie so auf einander bezogen sind, dass je vier harmonisch liegenden Elementen in dem einen Gebilde vier harmonisch liegende Elemente im andern entsprechen. Zwei ungleichartige Elementargebilde sind zu einander perspektivisch, heisst nun nichts anderes, als dass sie zu einander projektivisch sind und überdies jedes Element des einen von den beiden Gebilden in dem ihm entsprechenden Elemente des andern liegt. Es ergeben sich hieraus und aus der Lehre von den einförmigen Gebilden nachstehende Sätze:

Ist von beliebig vielen Elementargebilden das zweite zum ersten, jedes folgende zu einem der vorhergehenden projektivisch, so sind alle zu einander projektivisch. — Zwei zu einander projektivische Elementargebilde, welche in einander liegen, haben, wenn nicht jedes Element des einen Gebildes mit dem ihm entsprechenden Elemente des andern zusammenfällt, höchstens zwei Elemente entsprechend gemein. — Will man zwei Elementargebilde projektivisch auf einander beziehen, so kann man zu drei Elementen des einen Gebildes drei Elemente des andern, welche jenen entsprechen sollen, nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Gebildes ein Element des andern zugewiesen ist. — Sind zwei Elementargebilde zu einander projektivisch aber nicht perspektivisch, so kann man sie doch als das erste und letzte von drei oder mehreren Elementargebilden betrachten, von welchen das zweite zum ersten und so jedes folgende zum vorhergehenden perspektivisch ist. — Sind zwei Systeme zu einander projektivisch, so entspricht, da je zwei homologe einförmige Gebilde derselben zu einander projektivisch sind, überhaupt jedem Elementargebilde, welches in dem einen Systeme enthalten ist, ein zu demselben projektivisches Elementargebilde im andern.

Wenn von zwei zu einander projektivischen Elementargebilden A B C..., a b c ... die Rede ist, so versteht es sich von selbst, dass den Elementen A, B, C des einen Gebildes die Elemente a, b, c des andern entsprechen. Will man andeuten, dass ferner dem Elemente D des erstern Gebildes das Element d des letztern entspreche, so darf man nur die Gebilde durch A B C D..., a b c d... bezeichnen.

8. Will man zwei räumliche Systeme projektivisch so auf einander beziehen, dass den drei Geraden a, b, c des einen Systems, von welchen keine zwei sich schneiden, die drei Geraden a_1, b_1, c_1 des andern Systems entsprechen, von welchen ebenfalls keine zwei in einerlei Ebene liegen, so kann man noch zu drei Leitstrahlen p, q, r der Regelschaar a b c drei Leitstrahlen p_1, q_1, r_1, der Regelschaar a_1 b_1 c_1, welche jenen entsprechen sollen, nach Belieben annehmen, und es ist alsdann nur noch festzusetzen, ob die Systeme collineär oder reciprok zu einander sein sollen.

Bezieht man nämlich die räumlichen Systeme projektivisch so auf einander, dass den Punkten a p, a q, b p, b q, c r des einen Systems die Punkte (oder die Ebenen) $a_1 p_1$, $a_1 q_1$, $b_1 p_1$, $b_1 q_1$, $c_1 r_1$ des andern entsprechen, so entsprechen den Geraden a, b, p, q des erstern Systems die Geraden a_1, b_1, p_1, q_1 des letztern. Ferner entspricht der Geraden c, welche durch den Punkt c r geht und die Geraden p, q schneidet, die Gerade c_1, welche durch den Punkt $c_1 r_1$ geht (in der Ebene $c_1 r_1$ liegt) und die Geraden p_1, q_1 schneidet. Eben so entspricht der Geraden r die Gerade r_1. Jeder Geraden d der Regelschaar a b c entspricht eine Gerade d_1 der Regelschaar a_1 b_1 c_1, so dass die einförmigen Gebilde p (abcd), p_1 (a_1 b_1 c_1 d_1) zu einander projektivisch sind, daher der obige Satz auch so ausgesprochen werden kann.

Will man zwei zu einander projektivische Regelschaaren a b c d ..., a_1 b_1 c_1 d_1 ... als homologe Gebilde von zwei zu einander projektivischen räumlichen Systemen betrachten, so kann man zu drei Leitstrahlen p, q, r der einen Regelschaar drei Leitstrahlen p_1, q_1, r_1 der andern, welche jenen entsprechen sollen, nach Belieben annehmen und hat alsdann nur noch festzusetzen, ob die Systeme collineär oder reciprok zu einander sein sollen.

Auch zwei (nach 7) zu einander projektivische Elementargebilde II. Ordnung, von welchen keines eine Regelschaar ist, sind nichts anderes als homologe Gebilde von zwei zu einander projektivischen Systemen. Man nehme an, dass eine Kegelfläche abcde... und ein Strahlenbüschel a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 ... II. Ordnung zu einander projektivisch sind, so sind auch der zur Kegelfläche perspektivische

Ebenenbüschel a (abcde...) und das zu dem Strahlenbüschel perspektivische gerade Gebilde a_1 (a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 ...) zu einander projektivisch. Bezieht man also den Strahlenbündel, welcher den Punkt ab zum Mittelpunkt hat, und das ebene System, dessen Träger die Ebene a_1 b_1 ist, projektivisch so auf einander, dass den Geraden a, b, c, d die Geraden a_1, b_1, c_1, d_1 entsprechen, so entspricht derKegelfläche abcde... der Strahlenbüschel a_1 b_1 c_1 d_1 e_1...

9. Wenn ein Strahlenbüschel abcd... I. Ordnung und eine Curve ABCD... II. Ordnung zu einander projektivisch sind, der Mittelpunkt des Büschels aber ausserhalb der Curve liegt, so gehen höchstens drei Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der Curve.

Wenn ein gerades Gebilde und ein Strahlenbüschel II. Ordnung zu einander projektivisch sind, der Träger des erstern Gebildes aber kein Strahl des letztern ist, so liegen höchstens drei Punkte des geraden Gebildes in den ihnen entsprechenden Strahlen des Büschels.

Man nehme an, dass die Strahlen a, b, c beziehlich durch die Punkte A, B, C gehen. Es sei ferner S derjenige Punkt der Curve, welcher aus dem Punkte A durch den Strahl a projicirt wird. Da nun der zur Curve ABCD ... perspektivische Strahlenbüschel S (ABCD...) auch zu dem Büschel abcd... projektivisch ist, so liegt der Schnittpunkt der Geraden S D, d in der Geraden BC, also ausserhalb der Curve und mithin der Punkt D ausserhalb der Geraden d.

Wenn also ein einförmiges Gebilde und ein Elementargebilde II. Ordnung, welches keine Regelschaar ist, zu einander projektivisch sind, und mehr als drei Elemente des einen Gebildes in den ihnen entsprechenden Elementen des andern liegen, so sind die Gebilde zu einander perspektivisch. Ist ein einförmiges Gebilde zu einer Regelschaar projektivisch, so kann man schon, wenn drei Elemente des einen Gebildes in den ihnen entsprechenden Elementen des andern liegen, daraus schliessen, dass die Gebilde zu einander perspektivisch sind.

10. Wenn ein gerades Gebilde ABC... und eine Curve ABC_1... II. Ordnung, welche

Wenn ein Strahlenbüschel erster und ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung, welche zu ein-zu einander projektivisch sind, zwei Punkte A,B entsprechend gemein haben, so erzeugen sie einen zu ihnen perspektivischen Strahlenbüschel I. Ordnung.

ander projektivisch sind, zwei Strahlen entsprechend gemein haben, so sind sie zu einem und demselben geraden Gebilde perspektivisch.

Das gerade Gebilde und die Curve können nämlich nur auf eine Art projektivisch so auf einander bezogen werden, dass den Punkten A, B, C der Geraden die Punkte A, B, C_1 der Curve entsprechen. Dies geschicht aber, wenn man beide Gebilde auf den Strahlenbüschel perspektivisch bezieht, dessen Mittelpunkt S in der Curve liegt und aus dem Punkte C_1 derselben durch die Gerade C_1 C projicirt wird.

Anm. Aus jedem Satze, in welchem von zwei in einerlei Ebene liegenden zu einander projektivischen Gebilden die Rede ist, welche ein zu ihnen perspektivisches Gebilde erzeugen, ergeben sich zwei oder drei ihm verwandte Sätze, wenn man jene Gebilde aus einem und demselben ausserhalb der Ebene befindlichen Punkte projicirt.

Man hat dann vier zu einander projektivische Gebilde, von welchen je zwei, deren keines das andere projicirt, ein zu ihnen perspektivisches Gebilde erzeugen.

11. Zwei zu einander projektivische Curven II. Ordnung, welche drei Punkte A, B, C entsprechend gemein haben aber nicht in einander liegen, erzeugen einen zu ihnen perspektivischen Strahlenbüschel I. Ordnung.

Zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel II. Ordnung, welche drei Strahlen entsprechend gemein haben aber nicht in einander liegen, erzeugen ein zu ihnen perspektivisches gerades Gebilde.

Es bezeichne S, im Falle die Curven noch einen Punkt mit einander gemein haben, diesen vierten Schnittpunkt, im Falle aber die Curven in einem der drei Punkte sich berühren, diesen Berührungspunkt. Bezieht man nun beide Curven auf den Strahlenbüschel S perspektivisch, so sind sie projektivisch so auf einander bezogen, dass sie die drei Punkte A, B, C entsprechend gemein haben, woraus der Satz folgt. — Im ersteren der erwähnten Fälle hat die Gerade, welche im Punkte S die eine Curve berührt, mit der andern noch einen Punkt gemein, der dem Punkte S der erstern entspricht. Wenn also auch zwei zu einander projektivische nicht in einander liegende Elementargebilde II. Ordnung vier Elemente mit einander gemein haben, so haben sie doch höchstens drei von diesen Elementen entsprechend gemein.

Aus dem obigen Satze ergibt sich ein einfaches Verfahren, durch welches man, wenn zwei Curven II. Ordnung und drei Schnittpunkte A, B, C derselben gegeben sind, ihren vierten Schnittpunkt S finden kann. Ein anderes Verfahren besteht in Folgendem:

Es sei P der Pol der Geraden A B in Hinsicht auf die eine Curve und P_1 der Pol der Geraden A B in Hinsicht auf die andere Curve. Es sei ferner F der Punkt, welcher vom Schnittpunkte der Geraden A B, P P_1 durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist. Da nun der Punkt F in Hinsicht auf beide Curven der Pol der Geraden PP_1 ist, so ist S derjenige Punkt der Geraden FC, welcher vom Punkte C durch den Punkt F und die Gerade PP_1 hormonisch getrennt ist. Würde die Gerade PP_1 durch einen der drei Punkte A, B, C gehen, so würden in diesem Punkte die Curven sich berühren.

12. Jede Regelschaar a b c d... wird von jeder der Regelfläche sich nicht anschmiegenden Ebene U in einer zu ihr perspektivischen Curve U (a b c d...) geschnitten und aus jedem ausserhalb der Regefläche befindlichen Punkte S durch einen zu ihr perspektivischen Ebenenbüschel S (a b c d..) II. Ordnung projicirt.

Je zwei zur Regelschaar perspektivische Ebenenbüschel I. Ordnung werden von der Ebene U in zwei zu einander projektivischen Strahlenbüscheln I. Ordnung geschnitten. Die Curve, welche diese Strahlenbüschel erzeugen, ist auch zu den beiden Ebenenbüscheln und daher auch zur Regelschaar perspektivisch.	Je zwei zur Regelschaar perspektivische gerade Gebilde werden aus dem Punkte S durch zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel projicirt. Der Ebenenbüschel II. Ordnuug, welchen diese Strahlenbüschel erzeugen ist auch zu den beiden geraden Gebilden und daher auch zur Regelschaar perspektivisch.
13. Wenn eine Curve II. Ordnung zu einer Regelschaar oder zu einer Kegelfläche II. Ordnung projektivisch ist, und vier	Wenn ein Ebenenbüschel II. Ordnung zu einer Regelschaar oder zu einem Strahlen-

Punkte der Curve in den ihnen entsprechenden Geraden des andern Gebildes liegen, so sind die beiden Gebilde zu einander perspektivisch.

büschel II. Ordnung projektivisch ist und vier Ebenen des erstern Gebildes durch die ihnen entsprechenden Geraden des letztern gehen, so sind die beiden Gebilde zu einander perspektivisch.

Denn die Ebene, in welcher die Curve liegt, schneidet die Regelschaar oder Kegelfläche in einer zu diesem Gebilde perspektivischen Curve. Da nun die beiden Curven zu einander projektivisch sind und vier Punkte entsprechend gemein haben, so liegen sie in einander und haben alle ihre Punkte entsprechend gemein. — Weiss man von einer Curve II. Ordnung, welche zu einer Regelschaar oder Kegelfläche projektivisch ist, dass sie in der Fläche liegt, so kann man schon, wenn drei Punkte der Curve in den ihnen entsprechenden Geraden des andern Gebildes liegen, daraus schliessen, dass die Gebilde zu einander perspektivisch sind.

14. Zwei zu einander projektivische Regelschaaren $a\,b\,c\ldots$, $a_1\,b_1\,c_1\ldots$, von welchen jede die Leitschaar der andern ist, erzeugen eine zu ihnen perspektivische Curve II. Ordnung und zugleich einen zu ihnen perspektivischen Ebenenbüschel II. Ordnung.

Die beiden Regelschaaren können nämlich nur auf eine Art projektivisch so auf einander bezogen werden, dass den Geraden a, b, c der einen Schaar die Geraden a_1, b_1, c_1 der andern entsprechen. Diess geschieht aber, wenn man je zwei in der Regelfläche liegende Gerade, welche die durch die drei Punkte $a\,a_1$, $b\,b_1$, $c\,c_1$ gehende Ebene U in einem und demselben Punkte schneiden oder aus dem Schnittpunkte S der drei Ebenen $a\,a_1$, $b\,b_1$, $c\,c_1$ durch eine und dieselbe Ebene projicirt werden, einander entsprechend nennt. — Da die Curve, in welcher die Regelfläche von der Ebene U geschnitten wird, mit jeder Ebene des der Regelfläche sich anschmiegenden Ebenenbüschels S nur einen Punkt gemein hat, so folgt noch, dass der Ebenenbüschel ein Schein des der Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschels und die Curve ein Schnitt der dem Ebenenbüschel sich anschmiegenden Kegelfläche ist.

Anm. In G. 329 war noch nachzuweisen, dass das daselbst erwähnte Polarsystem kein Nullsystem sei, was nun daraus hervorgeht, weil jeder ausserhalb der Regelfläche liegende Punkt S auch ausserhalb seiner Polare U liegt.

15. Durch eine Curve II. Ordnung und zwei nicht in einerlei Ebene liegende Gerade a, b, welche den Träger der Curve in zwei in ihr befindlichen Punkten schneiden, ist eine zur Curve perspektivische Regelschaar bestimmt, von welcher die beiden gegebenen Geraden Leitstrahlen sind.

Durch einen Ebenenbüschel II. Ordnung und zwei sich nicht schneidende Gerade, welche aus dem Mittelpunkte des Büschels durch zwei Ebenen desselben projicirt werden, ist eine zu dem Büschel perspektivische Regelschaar bestimmt, von welcher die gegebenen Geraden Leitstrahlen sind.

Bezieht man die beiden Ebenenbüschel a, b auf die Curve perspektivisch, so erzeugen sie die im Satze erwähnte Regelschaar, welche von einer andern zur Curve perspektivischen Regelschaar, der die beiden Geraden a, b angehören, die Leitschaar ist. — Unter dem Träger eines ebenen nicht geraden Gebildes ist die Ebene zu verstehen, in der das Gebilde liegt.

16. Wenn ein gerades Gebilde $ABC\ldots$ und eine Curve $AB_1C_1\ldots$ II. Ordnung, welche zu einander projektivisch sind, einen Punkt A entsprechend gemein haben aber nicht in einerlei Ebene liegen, so erzeugen sie eine zu ihnen perspektivische Regelschaar.

Wenn ein Ebenenbüschel erster und ein Ebenenbüschel zweiter Ordnung, welche zu einander projektivisch sind, eine Ebene entsprechend gemein haben, aber der Mittelpunkt des letztern Büschels nicht in der Axe des erstern liegt, so erzeugen sie eine zu ihnen perspektivische Regelschaar.

Denn die zur Curve $A\,B_1\,C_1\ldots$ perspektivische Regelschaar, welcher die Geraden $B\,B_1$, $C\,C_1$ angehören, ist auch (9) zu dem geraden Gebilde $ABC\ldots$ perspektivisch.

17. Zwei zu einander projektivische Curven $ABCD\ldots$ $ABC_1\,D_1\ldots$ II. Ordnung, welche zwei Punkte A, B entsprechend gemein haben aber nicht in einerlei Ebene liegen, erzeu-

Zwei zu einander projektivische Ebenenbüschel II. Ordnung, welche zwei Ebenen entsprechend gemein aber nicht einerlei Mittelpunkt haben, erzeugen ein zu ihnen perspektigen ein zu ihnen perspektivisches Gebilde, welches entweder eine Regelschaar oder eine Kegelfläche II. Ordnung ist.

visches Gebilde, welches entweder eine Regelschaar oder ein Strahlenbüschel II. Ordnung ist.

Denn die zur Curve ABCD... perspektivische Regelschaar oder Kegelfläche, welcher die beiden Geraden CC_1, DD_1 angehören, ist (13) auch zur Curve ABC_1D_1... perspektivisch. Die Curven erzeugen eine Kegelfläche oder Regelschaar, je nachdem die Geraden, welche denselben in den Punkten C, C_1 sich anschmiegen, die Gerade AB in einem und demselben Punkte oder in zwei Punkten schneiden.

18. Wenn ein gerades Gebilde ABCD... und eine Regelschaar a b c d... projektivisch aber nicht perspektivisch zu einander sind, und irgend ein Punkt A des erstern Gebildes in der ihm entsprechenden Geraden a des letztern liegt, so erzeugen die beiden Gebilde einen zu ihnen perspektivischen Ebenenbüschel erster oder zweiter Ordnung.

Wenn ein Ebenenbüschel I. Ordnung und eine Regelschaar projektivisch aber nicht perspektivisch zu einander sind, und irgend eine Ebene des erstern Gebildes durch die ihr entsprechende Gerade des letztern geht, so erzeugen die beiden Gebilde ein zu ihnen perspektivisches Punktgebilde erster oder zweiter Ordnung.

Denn der Ebenenbüschel, welcher die Regelschaar a b c d... aus der Schnittlinie oder dem Schnittpunkte der Ebenen B b, C c, D d, projicirt, ist, da vier Ebenen desselben durch die ihnen entsprechenden Punkte A, B, C, D des geraden Gebildes gehen, auch (9) zu diesem Gebilde perspektivisch.

In dem Satze linker Hand kann ein Strahlenbüschel II. Ordnung, welcher mit dem geraden Gebilde nicht in einerlei Ebene liegt, in dem Satze rechter Hand aber eine Kegelfläche II. Ordnung, deren Mittelpunkt nicht in der Axe des Ebenenbüschels liegt, die Stelle der Regelschaar vertreten. Nur ist alsdann das Gebilde, welches die zu einander projektivischen Gebilde erzeugen, nothwendig ein Gebilde II. Ordnung.

19. Wenn ein gerades Gebilde ABC... und eine Curve AB_1C_1 ... II. Ordnung, wel-

Wenn ein Strahlenbüschel erster und ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung, welche zu che zu einander projektivisch sind, in einerlei Ebene liegen, und einen Punkt A entsprechend gemein haben, so erzeugen sie einen zu ihnen perspektivischen Strahlenbüschel erster oder zweiter Ordnung.

einander projektivisch sind, in einerlei Ebene liegen und einen Strahl entsprechend gemein haben, so erzeugen sie ein zu ihnen perspektivisches Punktgebilde erster oder zweiter Ordnung.

Betrachtet man die Curve $AB_1 C_1 \ldots$ als den Schnitt einer Regelschaar, so folgt der Satz aus dem vorigen.

20. Wenn eine Curve und ein Büschel II. Ordnung oder eine Kegelfläche und ein Ebenenbüschel II. Ordnung zu einander projektivisch sind und fünf Elemente A, B, C, D, E des einen Gebildes in den ihnen entsprechenden Elementen A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 des andern liegen, so sind die Gebilde zu einander perspektivisch.

Es sei das eine Gebilde eine Curve und das andere ein Ebenenbüschel II. Ordnung, so ist nur zu beweissen, dass es ein aus Geraden bestehendes Elementargebilde giebt, welches zu den beiden erstern perspektivisch ist.

Liegt der Mittelpunkt S des Ebenenbüschels in der Curve, so ist (9) der zur Curve perspektivische Strahlenbüschel S (ABCDE...) auch zum Ebenenbüschel perspektivisch, woraus zugleich hervorgeht, dass in diesem Falle der Träger U der Curve ein Element des Ebenenbüschels ist. Und wenn die Ebene U dem Ebenenbüschel angehört, so ist der zu diesem Büschel perspektivische Strahlenbüschel U (A_1 B_1 C_1 D_1 $E_1 \ldots$) auch zur Curve perspektivisch und daher S ein Punkt der Curve. Wenn aber der Punkt S nicht in der Curve liegt, und also auch die Ebene U kein Element des Ebenenbüschels ist, so erzeugt jedes zu diesem Büschel perspektivische und also auch zur Curve projektivische gerade Gebilde p (A_1 B_1 C_1 D_1 $E_1 \ldots$), dessen Träger p die Ebene U im Punkte A schneidet und, im Falle durch den Punkt A nur die Ebene A_1 des Büschels geht, in dieser Ebene, im Falle aber durch den Punkt A noch eine Ebene des Büschels geht, in dieser andern Ebene liegt, mit der Curve eine Regelschaar, welche nicht nur (16) zu den beiden Punktgebilden, sondern auch (13) zu dem Ebenenbüschel perspektivisch ist. Bemerkt man noch, dass auch jeder Leitstrahl der erwähnten Regelschaar durch einen Punkt der Curve geht und in einer Ebene des Ebenenbüschels liegt, so folgt:

Wenn eine Curve und ein Ebenenbüschel II. Ordnung, dessen Mittelpunkt nicht in der Curve liegt, zu einander perspektivisch sind, so bleiben sie es auch, wenn man jede Ebene des Büschels, welche die Curve in dem ihr entsprechenden Punkte und also in noch einem Punkte schneidet, auf diesen andern Punkt oder, was dasselbe ist, auf jeden Punkt der Curve, durch welchen nicht nur die ihm entsprechende Ebene, sondern noch eine Ebene des Büschels geht, diese andere Ebene bezieht.

21. Wenn eine Curve ABCDE... II. Ordnung und eine Regelschaar a b c d e... projektivisch aber nicht perspektivisch zu einander sind, und irgend zwei Punkte A, B der Curve in den ihnen entsprechenden Geraden a, b der Regelschaar liegen, so erzeugen die Gebilde einen zu ihnen perspektivischen Ebenenbüschel erster oder zweiter Ordnung.

Wenn ein Ebenenbüschel II. Ordnung und eine Regelschaar projektivisch aber nicht perspektivisch zu einander sind, und irgend zwei Ebenen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Geraden der Regelschaar gehen, so erzeugen die beiden Gebilde ein zu ihnen perspektivisches Punktgebilde erster oder zweiter Ordnung.

Denn der Ebenenbüschel, welcher die Regelschaar abcde... aus der Schnittlinie oder dem Schnittpunkte der Ebenen Cc, Dd, Ee projicirt, ist auch zur Curve ABCDE... perspektivisch.

In dem Satze linker Hand kann ein Strahlenbüschel II. Ordnung, welcher mit der Curve nicht in einerlei Ebene liegt, in dem Satze rechter Hand aber eine Kegelfläche II. Ordnung, welche mit dem Ebenenbüschel nicht einerlei Mittelpunkt hat, die Stelle der Regelschaar vertreten. Nur ist alsdann das Gebilde, welches die zu einander projektivischen Gebilde erzeugen, nothwendig ein Gebilde II. Ordnung.

22. Haben zwei zu einander projektivische Curven II. Ordnung, welche in einerlei Ebene U liegen, zwei Punkte entsprechend gemein, so erzeugen sie entweder einen zu ihnen perspektivischen Strahlenbüschel erster

Haben zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel II. Ordnung zwei Strahlen entsprechend gemein, so erzeugen sie entweder ein zu ihnen perspektivisches Punktgebilde erster oder zweiter Ordnung, oder es oder zweiter Ordnung, oder es giebt ausserhalb der beiden Curven einen Punkt, welcher mit je zwei homologen Punkten derselben in einer und derselben Geraden liegt.

giebt eine Gerade, welche keinem der Büschel angehört, aber von je zwei homologen Strahlen derselben in einem und demselben Punkte geschnitten wird.

Denn jede Regelschaar, welche zu der einen Curve perspektivisch ist, erzeugt (21) mit der andern einen zu allen drei Gebilden perspektivischen Ebenenbüschel, welcher, wenn er ein Büschel I. Ordnung ist oder sein Mittelpunkt ausserhalb der Ebene U liegt, von dieser Ebene in einem zu den beiden Curven perspektivischen Strahlenbüschel geschnitten wird. Liegt aber der Mittelpunkt des Ebenenbüschels in der Ebene U, so findet der letzte der im Satze erwähnten Fälle statt.

23. Zwei zu einander projektivische Curven II. Ordnung, welche in einander aber nicht involutorisch liegen, erzeugen einen zu ihnen perspektivischen Strahlenbüschel II. Ordnung.

Zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel II. Ordnung, welche in einander aber nicht involutorisch liegen, erzeugen eine zu ihnen perspektivische Curve II. Ordnung.

Denn jede zu der einen Curve perspektivische Regelschaar erzeugt (14) mit ihrer zur andern Curve perspektivischen Leitschaar einen zu allen vier Gebilden perspektivischen Ebenenbüschel, welcher von der Ebene, in der die Punktgebilde liegen, in einem zu beiden perspektivischen Strahlenbüschel geschnitten wird.

24. Der Inbegriff von vier Elementen A, B, C, D eines und desselben Elementargebildes, mit Rücksicht auf die Ordnung, in der dieselben angeschrieben werden, und mit Rücksicht auf das Elementargebilde selbst, soll ein Wurf heissen. Es ist hiernach nicht nur der Wurf ABCD von dem Wurfe ABDC sondern auch, im Falle zwei nicht in einander liegende Elementargebilde die Elemente A, B, C, D, mit einander gemein haben, der Wurf ABCD in dem einen von dem Wurfe ABCD in dem andern zu unterscheiden.

Zwei Würfe ABCD, $A_1B_1C_1D_1$, nämlich der Wurf ABCD in dem Elementargebilde G und der Wurf $A_1 B_1 C_1 D_1$ in dem Elementargebilde G_1 sollen zu einander projektivisch heissen, wenn die Gebilde G, G_1 projektivisch so auf einander bezogen werden können, dass den Elementen A, B, C, D des einen die Elemente A_1, B_1, C_1, D_1 des andern entsprechen. Da hiernach je zwei Würfe, welche zu einem und demselben dritten Wurfe projektivisch sind, auch unter sich projektivisch sind, und da jedes Elementargebilde II. Ordnung auf jedes einförmige Gebilde projektivisch bezogen werden kann, so folgt aus der Lehre von den einförmigen Gebilden:

Unter den 24 Würfen, welche in einem Elementargebilde aus vier Elementen A, B, C, D desselben sich bilden lassen, indem man diese Elemente in jeder Ordnung anschreibt, sind entweder acht harmonische Würfe oder es ist keiner derselben harmonisch. Im ersteren Falle ist jeder der 24 Würfe zu sieben andern, im letztern Falle aber zu drei andern projektivisch. In jedem Falle ist nämlich $ABCD \barwedge BADC \barwedge CDAB \barwedge DCBA$.

25. Durch zwei nicht in einerlei Ebene liegende Gerade a, c und zwei

Punkte B, D, welche mit keiner der Geraden in einerlei Ebene liegen, sind zwei Gerade b, d bestimmt, welche durch die gegebenen Geraden harmonisch getrennt sind und beziehlich durch die gegebenen Punkte gehen.	Ebenen, welche die Geraden in vier verschiedenen Punkten schneiden, sind zwei Gerade bestimmt, welche durch die gegebenen Geraden harmonisch getrennt sind und beziehlich in den gegebenen Ebenen liegen.

Es sei B_1 derjenige in der Schnittlinie der Ebenen Da, Dc befindliche Punkt, welcher vom Punkte D durch die Geraden a, c harmonisch getrennt ist, so ist b die Gerade, welche die Punkte B, B_1 mit einander verbindet und d die durch den Punkt D gehende Gerade der Regelschaar a b c. Die Geraden b, d sind übrigens auch bestimmt, wenn der Wurf a b c d, anstatt harmonisch zu sein, zu irgend einem gegebenen Wurfe projektivisch ist.

26. Wenn zwei nicht in einerlei Ebene liegende Gerade a, c zwei Kanten p, q eines Tetraeders schneiden und durch zwei andere Kanten b, d desselben harmonisch getrennt sind, so sind sie auch durch die beiden übrigen Kanten harmonisch getrennt.

Da nämlich p (a b c d), q (a d c b) harmonische Würfe sind, so sind die Geraden a, c auch durch die Geraden harmonisch getrennt, von welchen die eine den Punkt pb mit dem Punkte qd und die andere den Punkt p d mit dem Punkte q b verbindet.

27. Wenn zwei Kanten b, d eines Tetraeders der einen und zwei andere Kanten b_1, d_1 desselben Tetraeders der andern von zwei Regelschaaren angehören, welche zwei Gerade a, c mit einander gemein haben, so sind diese sowohl durch die beiden erstern als auch durch die beiden letztern Kanten des Tetraeders harmonisch getrennt, während die beiden übrigen Kanten desselben zwei gemeinschaftliche Leitstrahlen der Regelschaaren sind.

Denn da die Gerade p, welche durch den Punkt $b\,b_1$ geht und die Geraden a, c schneidet, auch die Geraden d, d_1 schneidet, aber nicht in der Ebene dd_1 liegt, so muss sie durch den Punkt $d\,d_1$ gehen. Eben so geht ein anderer gemeinschaftlicher Leitstrahl q der beiden Regelschaaren durch die beiden Punkte $b\,d_1$, $b_1\,d$. Da nun der Wurf p (abcd) sowohl zu dem Wurfe q (abcd) als auch zu dem Wurfe q $(ab_1\ cd_1)$ projektivisch, so ist auch q (abcd) $\barwedge$ q (adcb), woraus man schliessen kann, dass die Punkte q a q c durch die Punkte q b, q d und mithin die Geraden a, c sowohl durch die Geraden b, d als auch durch die Geraden b_1, d_1 harmonisch getrennt sind.

28. Durch einen Wurf abcd und vier gleichartige Elemente A, B, C, D, welche entweder in einerlei Ebene liegen oder durch einen und denselben Punkt gehen, von welchen aber keine drei in einem und demselben einförmigen Gebilde enthalten sind, ist ein Elementargebilde II. Ordnung bestimmt, welchem die vier gegebenen Elemente angehören, so dass überdies der Wurf ABCD in demselben zu dem gegebenen Wurfe projektivisch ist.

Es seien A, B, C, D die vier Eckpunkte eines Vierecks, so giebt es in jeder durch den Punkt D gehenden Geraden u, welche die drei Geraden BC, AC, AB in drei verschiedenen Punkten A_1, B_1, C_1, schneidet, einen Punkt D_1, so dass der Wurf $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ zu dem Wurfe a b c d projektivisch ist. Legt man nun durch die Punkte A, B, C eine Curve K II. Ordnung, welche die Gerade u in den Punkten D, D_1 schneidet oder, wenn D_1 mit D zusammenfällt, in diesem Punkte berührt, so ist der Wurf ABCD in der Curve K zu dem Wurfe D_1 (ABCD), also auch (G. 221) zu dem Wurfe $A_1 B_1 C_1 D_1$ und mithin auch zu dem gegebenen Wurfe projektivisch. Ist K_1 eine andere Curve II. Ordnung, welche durch die vier Punkte A, B, C, D geht, und D_2 derjenige Punkt derselben, welcher aus dem Punkte D durch die Gerade u projicirt wird, so ist der Wurf ABCD in der Curve K_1 zu dem Wurfe $A_1 B_1 C_1 D_2$ projektivisch und also zu dem Wurfe abcd nicht projektivisch.

---

§. 2.

Flächen II. Ordnung.

29. Durch zwei sich nicht schneidende Gerade p, q und drei Punkte A, B, C, von welchen keine zwei mit einer der Geraden in einerlei Ebene liegen, ist eine Regelfläche F bestimmt, welche durch die beiden gegebenen Geraden und durch die drei gegebenen Punkte geht.

Durch zwei nicht in einerlei Ebene liegende Gerade und drei Ebenen, welche die Geraden in sechs verschiedenen Punkten schneiden, ist eine Regelfläche bestimmt, welche durch die beiden gegebenen Geraden geht und den drei gegebenen Ebenen sich anschmiegt.

Unter einer Regelfläche ist hier und auch in der Folge immer eine Fläche II. Ordnung zu verstehen, welche zwei Schaaren von Geraden enthält. Bezieht man die Ebenenbüschel p, q projektivisch so aufeinander, dass den Ebenen pA, pB, pC des einen die Ebenen qA, qB, qC des andern entsprechen, so erzeugen sie diejenige in der Fläche F enthaltene Regelschaar, von welcher die Geraden p, q Leitstrahlen sind. Durch ein Tetraeder und einen Punkt, welcher in keiner Seite desselben liegt, sind drei Regelflächen bestimmt, deren jede durch vier Kanten des Tetraeders und durch den gegebenen Punkt geht.

Durch ein Tetraeder und eine Ebene, welche durch keinen Eckpunkt desselben geht, sind drei Regelflächen bestimmt, deren jede durch vier Kanten des Tetraeders geht und der gegebenen Ebene sich anschmiegt.

30. Von zwei Regelflächen soll gesagt werden, dass sie in einer Geraden p, welche sie mit einander gemein haben, sich berühren, wenn jede durch diese Gerade gehende Ebene beiden Flächen

in einem und demselben Punkte sich anschmiegt, mithin jede Gerade, welche in der einen Fläche aber ausserhalb der andern liegt und mit der Geraden p einen Punkt gemein hat, in diesem die andere berührt.

Werden zwei Regelschaaren, von welchen die Gerade p ein gemeinschaftlicher Leitstrahl ist, auf den Ebenenbüschel p perspektivisch bezogen, so sind sie auch unter sich projektivisch und werden also von der Geraden p in zwei zu einander projektivischen geraden Gebilden geschnitten, welche, wenn die Regelflächen in der Geraden p sich nicht berühren höchstens zwei Punkte entsprechend gemein haben. In diesem Falle enthält also jede von beiden Regelschaaren höchstens zwei Gerade, welche die andere Regelfläche nicht schneiden.

31. Durch eine Regelfläche F, eine in ihr liegende Gerade p und drei Punkte A, B, C, von welchen keine zwei mit der Geraden p in einerlei Ebene und wenigstens einer ausserhalb der Fläche F liegt, ist eine andere Regelfläche F_1 bestimmt, welche die gegebene in der gegebenen Geraden berührt und durch die drei gegebenen Punkte geht.

Durch eine Regelfläche, eine in ihr liegende Gerade und drei Ebenen, welche die Gerade in drei verschiedenen Punkten schneiden und nicht alle drei der Regelfläche sich anschmiegen, ist eine andere Regelfläche bestimmt, welche die gegebene in der gegebenen Geraden berührt und den drei gegebenen Ebenen sich anschmiegt.

Es seien A_1, B_1, C_1 die Punkte, in welchen die Ebenen pA, pB, pC der Fläche F sich anschmiegen, so ist F_1 die Regelfläche, welche durch die drei Geraden AA_1, BB_1, CC_1 geht.

32. Wenn zwei Regelflächen, welche in einer Geraden sich berühren, in einem ausserhalb dieser Geraden liegenden Punkte einer und derselben Ebene sich anschmiegen, so berühren sie sich in noch einer Geraden.

Haben nämlich zwei Regelflächen, welche in einer Geraden p sich berühren, irgend einen ausserhalb dieser Geraden liegenden Punkt A mit einander gemein, so haben sie auch, da die Ebene pA beiden in einem und demselben Punkte sich anschmiegt, die Gerade a mit einander gemein, welche diesen Punkt mit dem Punkte A verbindet. Wenn nun alle gemeinschaftlichen Punkte der beiden Flächen in den Geraden p, a liegen, folglich jede dritte Gerade, welche in der einen Fläche liegt, mit der andern nur einen Punkt gemein hat, so berühren sich die Flächen auch in der Geraden a. Wenn aber die Flächen irgend einen ausserhalb der Geraden a,p befindlichen Punkt B und also noch eine Gerade b, welche die Gerade p schneidet, mit einander gemein haben, so haben sie doch keine dritte solche Gerade und also auch keinen ausserhalb der drei Geraden p, a, b liegenden Punkt mit einander gemein, daher in diesem Falle jede Gerade q, welche in der einen Fläche aber mit der Geraden p nicht in einerlei Ebene liegt, die andere Fläche in zwei Punkten aq, bq schneidet und also keine Ebene beiden Flächen in einem und demselben ausserhalb der Geraden p liegenden Punkte sich anschmiegt.

33. Durch eine Regelfläche F, zwei in ihr liegende sich schneidende Gerade a, p und

einen Punkt Q, welcher weder in der Fläche noch mit den beiden Geraden in einerlei Ebene liegt, ist eine andere Regelfläche bestimmt, welche nämlich die gegebene in den gegebenen Geraden berührt und durch den gegebenen Punkt geht.	eine Ebene, welche weder der Fläche sich anschmiegt noch durch den Schnittpunkt der beiden Geraden geht, ist eine andere Regelfläche bestimmt, welche nämlich die gegebene in den gegebenen Geraden berührt und der gegebenen Ebene sich anschmiegt.

Es sei Q_1 der Punkt, in welchem die Ebene aQ der Fläche F sich anschmiegt. Legt man nun (31) durch die beiden Geraden p, QQ_1 eine Regelfläche, welche die gegebene in der Geraden p berührt, so berühren sich (32) die beiden Flächen auch in den Geraden a.

34. Wenn von zwei Geraden u, v, welche einen Punkt S mit einander gemein haben, die eine u

die drei Seiten BC, AC, AB eines Dreiecks ABC in drei verschiedenen Punkten A_1, B_1, C_1 schneidet, die andere v aber mit keiner Seite desselben in einerlei Ebene liegt, so ist der Wurf $A_1B_1C_1$ S zu dem Wurfe v (ABCu) projektivisch.	die drei Seiten b c, a c, a b eines Dreikants in drei verschiedenen Punkten A_1, B_1, C_1, die andere v aber alle drei Seiten im Mittelpunkte desselben schneidet, so ist der Wurf $A_1B_1C_1S$ zu dem Wurfe v (a b c u) projektivisch.

Denn der Wurf A_1 B_1 C_1 S ist (G 221) zu dem Wurfe S ($ABCA_1$) projektivisch, welcher von dem Wurfe v (ABCu) ein Schnitt ist.

35. Wenn eine Gerade u die Seiten BCD, ACD, ABC eines Tetraeders ABCD in vier verschiedenen Punkten A_1, B_1, C_1, D_1 schneidet, so ist der Wurf $A_1 B_1 C_1 D_1$ zu dem Wurfe u (ABCD) projektivisch.

Projicirt man nämlich den Wurf $A_1B_1C_1D_1$ aus dem Punkte D auf die Ebene ABC, so erhält man einen Wurf $A_2 B_2 C_2 D_1$, welcher zu dem erstern projektivisch ist. Da nun die Punkte A_2,B_2, C_2 beziehlich in den Geraden BC,AC,AB liegen, mithin (34) $A_2B_2C_2D_1$ $\barwedge$ u (A B C D) ist, so ist auch $A_1 B_1 C_1 D_1$ $\barwedge$ u (A B C D). — Wenn das Tetraeder ABCD gegeben, der Wurf $A_1 B_1 C_1 D_1$ aber und also auch der Wurf u (ABCD) zu einem gegebenen Wurfe projektivisch ist, und die Gerade u

durch einen gegebenen Punkt geht, welcher in keiner Seite des Tetraeders liegt, so liegt sie (28) in einer gegebenen Kegelfläche II. Ordnung.

in einer gegebenen Ebene liegt, welche durch keinen Eckpunkt des Tetraeders geht, so berührt sie eine gegebene Curve II. Ordnung.

36. Durch ein Tetraeder ABCD, eine Gerade u, welche keine Kante desselben schneidet und

eine Ebene uE, welche durch die Gerade u aber durch keinen Eckpunkt des Tetraeders geht, ist eine Kegelfläche II. Ordnung bestimmt, welche durch die vier Eckpunkte des gegebenen Tetraeders geht und in der gegebenen Geraden die gegebene Ebene berührt.

einen Punkt, welcher in der Geraden u aber in keiner Seite des Tetraeders liegt, ist eine Curve II. Ordnung bestimmt, welche die vier Seiten des gegebenen Tetraeders und überdiess in dem gegebenen Punkte die gegebene Gerade berührt.

Bezieht man den Ebenenbüschel u und das gerade Gebilde u projektivisch so auf einander, dass den Ebenen uA, uB, uC die Punkte A_1, B_1, C_1 entsprechen, in welchen die Gerade u die Ebenen BCD, ACD, ABD schneidet, so ist der Punkt E_1, welcher der Ebene uE entspricht, der Mittelpunkt der im Satze erwähnten Kegelfläche. Denn nach 34 ist, wenn man die Gerade DE_1 durch v bezeichnet, der Wurf $A_1 B_1 C_1 E_1$ zu dem Wurfe v (AB Cu) projektivisch. Da nun $A_1 B_1 C_1 E_1 \barwedge$ u (ABCE), so ist auch v (ABCu) $\barwedge$ u (ABCE), woraus man schliessen kann, dass die Kegelfläche II. Ordnung, welche durch die fünf Geraden u, v, E_1 A, E_1 B, E_1 C geht, in der Geraden u die Ebene uE berührt. Diese Ebene ist zugleich der Träger derjenigen Curve II. Ordnung, welche die vier Seiten des Tetraeders ABCD und überdies im Punkte E_1 die Gerade u berührt.

Anm. Das Reciproke von einer Kegelfläche II. Ordnung, als deren Elemente die in ihr liegenden Punkte betrachtet werden, ist ein durch eine Curve II. Ordnung bestimmter Ebenenbündel II. Ordnung, welchem nämlich der Träger der Curve und jede Ebene angehört, die die Curve berührt.

37. Durch zwei sich schneidende Gerade g, h und ein Tetraeder ABCD, dessen vier

Eckpunkte aus den zwei Geraden durch acht verschiedene Ebenen projicirt werden, ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche durch die beiden gegebenen Geraden und durch die vier Eckpunkte des gegebenen Tetraeders geht.	Seiten von den zwei Geraden in acht verschiedenen Punkten geschnitten werden, ist ein Ebenenbündel II. Ordnung bestimmt, in welchem die beiden Ebenenbüschel f, g und die vier Seiten des gegebenen Tetraeders enthalten sind.

In der Geraden g, welche von den Ebenen BCD, ACD, ABD in den Punkten A_1, B_1, C_1 geschnitten werde, gibt es einen Punkt S, so dass der Wurf $A_1 B_1 C_1$ S und also auch (34), wenn man die Gerade DS durch v bezeichnet, der Wurf v (ABCg) zu dem Wurfe h (ABCg) projektivisch ist. Fällt nun der Punkt S mit dem Punkte gh zusammen, so ist die im Satze erwähnte Fläche eine Kegelfläche, im entgegengesetzten Falle aber eine Regelfläche.

38. Wenn in einem Polarsysteme jedem Eckpunkte des Tetraeders ABCD die ihm gegenüberliegende Seite und der Geraden u, welche keine Kante des Tetraeders schneidet, die Gerade v zugeordnet ist, so sind die Würfe u (ABCD), v (ABCD) zu einander projektivisch.

Da nämlich den Ebenen vA, vB, vC, vD die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 zugeordnet sind, in welchen die Gerade u die Ebenen BCD, ACD, ABD, ABC schneidet, so ist der Wurf v (ABCD) zu dem Wurfe $A_1 B_1 C_1 D_1$ und also auch (35) zu dem Wurfe u (ABCD) projektivisch. Eben so ist, wenn die Gerade v die Ebenen BCD, ACD, ABD, ABC in den Punkten A_2, B_2, C_2, D_2 schneidet, auch der Wurf $A_2 B_2 C_2 D_2$ zu den erwähnten drei Würfen projektivisch.

Haben also die Geraden u,v einen Punkt mit einander gemein, so gibt es eine Kegelfläche II. Ordnung, welche durch die beiden Geraden und die vier Eckpunkte des Tetraeders geht, und eine Curve II. Ordnung, welche die beiden Geraden und die vier Seiten des Tetraeders berührt. Liegen aber die Geraden u, v nicht in einerlei Ebene, so gibt es eine Regelfläche, welche durch die beiden Geraden und die vier Eckpunkte des Tetraeders geht, und eine andere Regelfläche, welche ebenfalls durch die beiden Geraden geht und den vier Seiten des Tetraeders sich anschmiegt.

39. Durch ein Tetraeder ABCD und zwei Gerade, u, v, aus welchen die Eckpunkte des Tetraeders durch zwei zu einander projektivische Würfe u (ABCD), v (ABCD) projicirt werden, ist ein Polarsystem bestimmt, in welchem jedem Eckpunkte des Tetraeders die ihm gegenüberliegende Seite und jeder von den beiden gegebenen Geraden die andere zugeordnet ist.

Es schneide die Gerade u die Ebenen BCD, ACD, ABD, ABC in den Punkten A_1, B_1, C_1, D_1, so ist der Wurf $A_1 B_1 C_1 D_1$ zu dem Wurfe u (ABCD) und daher auch zu dem Wurfe v (ABCD) projektivisch. Es sei ferner E_1 irgend ein fünfter Punkt der Geraden u und vE eine durch die Gerade v gehende Ebene, so dass v (ABCE) $\barwedge$ $A_1 B_1 C_1 E_1$ ist, so ist auch v (ABCDE) $\barwedge$ $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$. Da nun der Punkt E_1 in keiner Seite des Tetraeders liegt und die Ebene vE durch keinen Eckpunkt desselben geht, so gibt es ein aber auch nur ein Polarsystem, in welchem jedem Eckpunkte des Tetraeders die ihm gegenüberliegende Seite, und dem Punkte E_1 die Ebene vE, mithin dem geraden Gebilde $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ ein Ebenenbüschel s (ABCDE) zugeordnet ist, dessen Axe s in der Ebene vE liegt. Weil aber s (ABCDE) $\barwedge$ $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ $\barwedge$ v (ABCDE) ist und die Ebene vE durch keinen Eckpunkt des Tetraeders geht, so folgt, dass die Gerade s mit der Geraden v zusammenfällt. Auf analoge Art werden nachstehende Sätze bewiesen:

Durch ein Tetraeder ABCD und eine Gerade u, welche keine Kante desselben schneidet, ist ein Polarsystem bestimmt, in welchem jeder Eckpunkt des gegebenen Tetraeders der ihm gegenüberliegenden Seite, die gegebene Gerade u aber sich selbst zugeordnet ist. — Durch ein Tetraeder ABCD und zwei Gerade u, v, welche zwei einander gegenüberliegende Kanten AB, CD desselben beziehlich schneiden, so dass nämlich die Gerade u nur die Kante AB und die Gerade v nur die Kante CD schneidet, ist ein Polarsystem bestimmt, in welchem jedem Eckpunkte des Tetraeders die ihm gegenüberliegende Seite und der Geraden u die Gerade v zugeordnet ist.

40. Durch ein Tetraeder ABCD, eine Gerade u, welche keine Kante des Tetraeders schneidet, und

einen Punkt S, welcher in keiner Seite desselben liegt, ist eine Kegelfläche II. Ordnung bestimmt, so dass in jedem Polarsysteme, in welchem das gegebene Tetraeder als Polartetraeder enthalten und dem gegebenen Punkte die gegebene Gerade conjugirt ist, dieser Geraden eine in der Kegelfläche liegende Gerade zugeordnet ist.	eine Ebene, welche durch keinen Eckpunkt desselben geht, ist ein Strahlenbüschel II. Ordnung bestimmt, so dass in jedem Polarsysteme, in welchem das gegebene Tetraeder als Polartetraeder enthalten und der gegebenen Ebene die gegebene Gerade conjugirt ist, dieser Geraden ein Strahl des Büschels zugeordnet ist.

Nach 28 gibt es eine Kegelfläche S, welche durch die vier Geraden SA, SB, SC, SD geht, so dass überdiess der Wurf S (ABCD) in derselben zu dem Wurfe u (ABCD) projektivisch ist. Wenn nun in einem Polarsysteme, in welchem das Polartetraeder ABCD enthalten ist, dem Punkte S eine durch die Gerade u gehende Ebene uE und also der Geraden u eine durch den Punkt S gehende Gerade v zugeordnet ist, so liegt diese, da v (ABCD) $\barwedge$ u (ABCD) ist, in der Kegelfläche S. — Schneidet die Gerade v die Ebenen BCD, ACD, ABD in den Punkten A_1, B_1, C_1, so ist der Wurf $A_1 B_1 C_1 S$ dem Wurfe u (ABCE) zugeordnet und also zu diesem projektivisch. Da aber auch (36), wenn die der Kegelfläche S in der Geraden v sich anschmiegende Ebene durch vP bezeichnet wird, $A_1 B_1 C_1 S \barwedge$ v (ABCP) und daher auch v (ABCP) $\barwedge$ u (ABCE) ist, so folgt, dass die Ebene uE und die Gerade v homologe Elemente der zu einander projektivischen Gebilde u (ABCD...), S (ABCD...) sind.

Will man durch sechs gegebene Punkte A, B, C, D, E, S, von welchen keine vier in einerlei Ebene liegen, und eine gegebene Gerade u, welche nicht mit zwei von den sechs Punkten in einer und derselben Ebene liegt, eine Fläche II. Ordnung legen, so kommt es nur darauf an, eine durch den Punkt S gehende Gerade s zu finden, so dass s (ABCDE) $\barwedge$ u (ABCDE) ist. Man suche zu dem Ende in dem Polarsysteme, in welchem das Polartetraeder ABCD enthalten und dem Punkte S die Ebene uE zugeordnet ist, die der Geraden u zugeordnete und also durch den Punkt S gehende Gerade v. Geht nun diese Gerade auch durch den Punkt E, so kann s jede Gerade der Kegelfläche II. Ordnung sein, welche durch die fünf Geraden SA, SB, SC, SD, v geht, daher es in diesem Falle unendlich viele Flächen II. Ordnung gibt, welche durch die sechs gegebenen Punkte und durch die gegebene Gerade u gehen. Wenn aber die Gerade v nicht durch den Punkt E geht, so ist s diejenige Gerade der erwähnten Kegelfläche, welche aus der Axe v durch die Ebene vE projicirt wird.

41. Durch eine Curve K II. Ordnung, eine Gerade p, welche den Träger der Curve in einem in ihr liegenden Punkte schneidet, und zwei Punkte A, B, welche ausserhalb der erwähnten Ebene und auch mit der Geraden p nicht in einerlei Ebene liegen, ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die gegebene Curve, durch die gegebene Gerade und durch die beiden gegebenen Punkte geht.

Es seien A_1, B_1 diejenigen Punkte der Curve K, welche aus der Axe p durch die Ebenen pA, pB projicirt werden. Wenn nun die Geraden AA_1, BB_1 die Gerade p in einem und demselben Punkte schneiden, so ist F die Kegelfläche, welche aus diesem Punkte die Curve K projicirt. Wenn aber die Geraden AA_1, BB_1 nicht in einerlei Ebene liegen, so ist (15) die Fläche F eine Regelfläche.

Geht eine Fläche II. Ordnung durch eine Gerade und durch zwei Punkte, welche ausserhalb dieser Geraden aber mit ihr in einerlei Ebene liegen, so geht sie auch durch die Gerade, welche die beiden Punkte mit einander verbindet. Geht eine Fläche II. Ordnung durch die vier Eckpunkte eines vollständigen ebenen Vierecks und durch eine Gerade, welche keine Seite desselben schneidet, so geht sie auch durch die Curve II. Ordnung, welche die vier Eckpunkte des Vierecks enthält und mit der Geraden einen Punkt gemein hat.

Anm. Die Sätze, welche den in dieser und den nächstfolgenden Nummern enthaltenen Sätzen nach dem Gesetze der Reciprocität gegenüberstehen, werden der Kürze wegen übergangen.

42. Durch eine Curve K II. Ordnung, dann zwei Ebenen U, V, welche die Curve in zwei verschiedenen Punkten A, B berühren, und zwei Punkte C, D, von welchen keiner in dem Träger der Curve liegt und welche auch nicht beide mit jenen Punkten in einer und derselben Ebene liegen, ist eine Fläche II. Ordnung bestimmt, welche den gegebenen Ebenen in den beiden erstern Punkten sich anschmiegt, oder die gegebenen Ebenen berührt und überdiess durch die gegebene Curve und die beiden letztern Punkte geht.

Es werde der Träger der Curve von der Geraden C D im Punkte P geschnitten, dessen Polare in Hinsicht auf die Curve die Gerade p sei. Es sei ferner Q der Punkt, welcher vom Punkte P durch die Punkte C, D harmonisch getrennt ist, und S der Punkt, in welchem die Ebene Qp und die Gerade UV sich schneiden, so dass also die Ebene Sp entweder durch die beiden Punkte C, D geht oder diese Punkte durch den Punkt P und die Ebene Sp harmonisch getrennt sind. Wenn nun die Kegelfläche, welche aus dem Punkte S die Curve K projicirt, durch den einen von den beiden Punkten C, D geht, so geht sie auch durch den andern. Wenn aber diese Punkte ausserhalb der erwähnten Kegelfläche liegen, so gibt es (G. 232) eine Fläche II. Ordnung, welche die Kegelfläche in der Curve K berührt und überdiess durch den Punkt C, mithin auch, da in Hinsicht auf dieselbe die Ebene Sp die Polare des Punktes P ist, durch den Punkt D geht.

43. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche nicht in einerlei Ebene liegen aber zwei Punkte A, B mit einander gemein haben, und einen Punkt C, welcher mit keiner von den beiden Curven in einerlei Ebene liegt, ist eine Fläche II. Ordnung be-

stimmt, welche durch die beiden gegebenen Curven und durch den gegebenen Punkt geht.

Es seien U, V die Ebenen, von welchen die eine im Punkte A und die andere im Punkte B die beiden Curven K, K_1 berührt. Legt man nun durch die Curve K, den Punkt C und einen ausserhalb der Geraden AB liegenden Punkt D der Curve K_1 eine Fläche II. Ordnung, welche in den Punkten A, B den Ebenen U, V sich anschmiegt oder die Ebenen U, V berührt, so geht diese Fläche auch durch die Curve K_1. Denn die Fläche schneidet den Träger der Curve K_1 in einer Curve II. Ordnung, welche die Ebenen U, V in den Punkten A, B berührt und durch den Punkt D geht, folglich mit K_1 zusammenfällt.

Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche in zwei verschiedenen Ebenen liegen aber die Schnittlinien dieser Ebenen in einem und demselben Punkte berühren, und durch einen ausserhalb der beiden Ebenen liegenden Punkt C ist ebenfalls eine Fläche II. Ordnung bestimmt, welche durch die beiden gegebenen Curven und durch den gegebenen Punkt geht. Legt man nämlich durch den Punkt C eine Ebene, welche die Curven K, K_1 in vier Punkten schneidet, so ist durch diese Punkte und den Punkt C eine dritte Linie K_2 II. Ordnung bestimmt. Legt man nun durch die beiden Linien K, K_2 und irgend einen ausserhalb derselben liegenden Punkt der Curve K_1 eine Fläche II. Ordnung, so geht diese auch durch die Curve K_1.

44. Wenn eine Fläche F, welche mit der Ebene U nur den Punkt S gemein hat, von jeder andern durch diesen Punkt gehenden Ebene H in einer Curve II. Ordnung geschnitten wird, in der aber auch alle in der Ebene H liegenden Punkte der Fläche F enthalten sind, so ist diese Fläche eine Fläche II. Ordnung, welche die Ebene U im Punkte S berührt.

Es seien A, B, C drei Punkte, welche in der Fläche F aber mit dem Punkte S nicht in einerlei Ebene liegen, so schneiden die Ebenen SAB, SAC, SBC die Fläche F in drei Curven K, K_1, K_2 II. Ordnung, welche im Punkte S die Ebene U berühren, daher die Fläche F_1 II. Ordnung, welche durch zwei von diesen drei Curven und irgend einen ausserhalb derselben liegenden Punkt der dritten geht, auch durch die dritte geht. Es sei ferner D irgend ein ausserhalb der Ebenen S A B, S A C, S B C liegender Punkt, so kann man durch diesen eine Ebene H legen, welche die Curven K, K_1, K_2 im Punkte S und in noch drei andern Punkten P, P_1, P_2 schneidet. Da nun die Ebene H die beiden Flächen F, F_1 in einer und derselben Curve II. Ordnung schneidet, welche nämlich durch die vier Punkte S, P, P_1, P_2 geht und im Punkte S die Ebene U berührt, so folgt, dass jeder Punkt D, welcher in irgend einer von den beiden Flächen F, F_1 liegt, auch in der andern liegt und dass also F mit F_1 identisch ist. Der obige Satz kann auch so ausgesprochen werden:

Wenn ein System F von Punkten mit dem ebenen Systeme U nur den Punkt S, mit jeder andern durch diesen Punkt gehenden Ebene aber eine Curve II. Ordnung und zwar nur die in der Curve liegenden Punkte gemein hat, so ist das System F nichts anderes als der Inbegriff von allen Punkten, welche in einer und derselben Fläche II. Ordnung die im Punkte S die Ebene U berührt, enthalten sind. Eben so kann auch in den nächstfolgenden Sätzen F ein System von Punkten genannt werden, da in denselben mehr angenommen ist, als unter der Voraussetzung, dass F eine (zusammenhängende) Fläche sei, nothwendig wäre.

45. Wenn eine Fläche F, welche mit der Ebene U die Geraden a, p aber keinen ausserhalb dieser Geraden liegenden Punkt gemein hat, auch von jeder andern Ebene, welche durch a oder durch p geht, in noch einer Geraden, von jeder Ebene H aber, welche die Geraden a, p im Punkte a p schneidet, in einer Curve II. Ordnung geschnitten wird, die alle in der Ebene H befindlichen Punkte der Fläche F enthält, so ist diese Fläche eine Regelfläche.

Wie vorhin lässt sich eine Fläche F_1 II. Ordnung finden, so dass jeder ausserhalb der Ebene U liegende Punkt, welcher der einen von den beiden Flächen F, F_1 angehört, ein gemeinschaftlicher Punkt von beiden ist. Da hiernach auch jede Gerade, welche ausserhalb der Ebene U aber in der Fläche F liegt, beiden Flächen gemeinschaftlich ist, so ist F_1 eine Regelfläche und mit F identisch.

Wenn eine Fläche F, welche mit der Ebene U die Gerade p aber keinen ausserhalb dieser Geraden liegenden Punkt gemein hat, von jeder andern durch die Gerade p gehenden Ebene in noch einer Geraden und von jeder Ebene H, welche die Gerade p im Punkte

S schneidet, in einer Curve II. Ordnung geschnitten wird, welche alle in der Ebene H befindlichen Punkte der Fläche F enthält, so ist diese Fläche eine Kegelfläche II. Ordnung.

46. Durch zwei zu einander reciproke Strahlenbündel S, S_1, welche nicht einerlei Mittelpunkt haben, ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, der nämlich jeder Punkt P angehört, welchen zwei homologe Elemente der zu einander projektivischen Grundgebilde (ein Strahl des einen und die ihm entsprechende Ebene des andern) mit einander gemein haben.

Liegt der Strahl S_1 P in der Ebene, welche dem Strahle S P entspricht, so liegt auch der Strahl S P in der Ebene, welche dem Strahle S_1 P entspricht. Geht eine Ebene, welche die beiden Strahlenbündel mit einander gemein haben, durch den ihr entsprechenden Strahl des einen, so geht sie auch durch den ihr entsprechenden Strahl des andern. Wenn nun der gemeinschaftliche Strahl der beiden Bündel S, S_1 als Strahl des erstern der Ebene U_1 des letztern und als Strahl des letztern der Ebene U des erstern entspricht, so hat man folgende Fälle zu unterscheiden:

Ist der Strahlenbüschel (S, U), welcher den Punkt S zum Mittelpunkt hat und in der Ebene U liegt, ein Schnitt des ihm entsprechenden Ebenenbüschels, so besteht die Fläche F aus den beiden Ebenen U, U_1. — Liegen nur zwei Strahlen a, p des Büschels (S, U) in den ihnen entsprechenden Ebenen, so ist die Fläche F eine Regelfläche, welche die Ebene U in den Geraden a, p schneidet. — Liegt nur ein Strahl p des Büschels (S U) in der ihm entsprechenden Ebene, so ist die Fläche F eine Kegelfläche, welche der Ebene U in der Geraden p sich anschmiegt. — Liegt kein Strahl des Büschels (S, U) in der ihm entsprechenden Ebene, so hat die Fläche F mit der Ebene U nur den Punkt S, mit jeder andern durch diesen Punkt gehenden Ebene H aber eine Curve II. Ordnung gemein, welche nämlich der Strahlenbüschel (S, H) mit dem ihm entsprechenden Ebenenbüschel erzeugt.

§. 3.

Vom Sinne der Gebilde.

47. Durch drei Elemente A, B, C eines geschlossenen Gebil-

des, welches aus einer stetigen Aufeinanderfolge von Punkten oder Geraden oder Ebenen besteht, ist ein Stück A B C desselben bestimmt, welches von dem Elemente A ausgeht, das Element B in sich enthält und in dem Elemente C sich endigt. Wird das ganze Gebilde durch A B C bezeichnet, so kann dadurch zugleich der Sinn angedeutet sein, in welchem man dasselbe beschrieben sich denkt, und welcher, auch wenn die Elemente A, B, C in dem Gebilde sich bewegen, so lange keine zwei derselben in einander fallen, unverändert derselbe bleibt. Der Sinn A B C kann auch durch B C A oder C A B, der demselben entgegengesetzte Sinn C B A auch durch B A C oder A C B bezeichnet werden; auch ist es ganz einerlei, ob man sagt, dass die Gebilde A B C, P Q R in einem und demselben Sinne, oder dass die Gebilde A B C, R Q P in entgegengesetztem Sinne beschrieben seien.

Sind zwei Elementargebilde zu einander projektivisch, so entspricht jedem Sinne A B C in dem einen ein Sinn $A_1B_1C_1$ im andern, so dass, wenn man das eine Gebilde im Sinne A B C beschrieben sich denkt, man alsdann das andere im Sinne $A_1B_1C_1$ beschrieben sich zu denken hat. Liegen die Gebilde in einander, so sind sie in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem der Sinn $A_1B_1C_1$ mit dem Sinne A B C oder mit dem Sinne C B A übereinstimmt.

48. Ein gerades Gebilde A B C und ein Ebenenbüschel P Q R dessen Axe s mit dem Träger u des geraden Gebildes keinen Punkt gemein hat, sollen in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn in dem geraden Gebilde der Sinn u (P Q R) mit dem Sinne A B C und also in dem Ebenenbüschel der Sinn s (A B C) mit dem Sinne P Q R übereinstimmt.

Ein Strahlenbüschel p q r und ein gerades Gebilde A B C, welches mit dem Büschel in einerlei Ebene liegt aber nicht durch seinen Mittelpunkt S geht, sollen in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn der Sinn S (A B C) mit dem Sinne p q r übereinstimmt.

Ein Strahlenbüschel p q r und ein Ebenenbüschel A B C, dessen Axe die Ebene U des Strahlenbüschels im Mittelpunkte desselben schneidet, sollen in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn der Sinn U (A B C) mit dem Sinne p q r übereinstimmt.

Anm. Wird von dem Mittelpunkte eines Strahlenbüschels oder der Axe eines Ebenenbüschels gesprochen, so ist dadurch von selbst angedeutet, dass der Büschel ein Büschel I. Ordnung ist.

49. Zwei in einerlei Ebene liegende gerade Gebilde A B C, PQR sollen in Hinsicht auf einen Punkt S, welcher in der nämlichen Ebene aber in keiner von den beiden Geraden liegt, in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn der Sinn S (A B C) mit dem Sinne S (P Q R) übereinstimmt.

Zwei Strahlenbüschel a b c, p q r, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, sollen in Hinsicht auf eine Gerade s, welche durch diesen Punkt geht aber keinem der Büschel angehört, in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn der Sinn s (a b c) mit dem Sinne s (p q r) übereinstimmt.

50. Zwei Seiten A B, B C eines Dreiecks, deren gemeinschaftlicher Grenzpunkt als Endpunkt der einen und als Anfangspunkt der andern betrachtet wird, sind (47) in Hinsicht auf einen Punkt S, welcher in der nämlichen Ebene aber mit keiner von den beiden Seiten in einer und derselben Geraden liegt, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem die Gerade S B, welche diesen Punkt mit jenem Eck-

Zwei in einerlei Ebene liegende Strahlenbüschel a b c, p q r sollen in Hinsicht auf eine Gerade u, welche in der nämlichen Ebene liegt aber von keinem der Büschel den Mittelpunkt enthält, in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn der Sinn u (a b c) mit dem Sinne u (p q r) übereinstimmt.

Zwei Ebenenbüschel A B C, P Q R, deren Axen einen Punkt mit einander gemein haben, sollen in Hinsicht auf eine Ebene U, welche durch diesen Punkt geht aber keinem der Büschel angehört, in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn der Sinn U (A B C) mit dem Sinne U (P Q R) übereinstimmt.

Zwei Winkel eines Dreiecks, deren gemeinschaftlicher Schenkel als Endschenkel des einen und als Anfangsschenkel des andern betrachtet wird, sind in Hinsicht auf eine Gerade, welche in der nämlichen Ebene liegt aber von keinem der Winkel den Mittelpunkt enthält, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem diese Gerade diejenige Seite des Dreiecks, welche in dem gemeinschaftlichen Schen-punkte des Dreiecks verbindet, den Umfang desselben schneidet oder berührt.

kel der beiden Winkel liegt, nicht schneidet oder schneidet.

Zwei Seiten eines Dreikants, deren gemeinschaftlicher Schenkel als Endschenkel der einen und als Anfangsschenkel der andern betrachtet wird, sind in Hinsicht auf eineGerade, welche durch den Mittelpunkt des Dreikants geht aber mit keiner von den beiden Seiten in einerlei Ebene liegt, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem die durch diese Gerade und jene Kante des Dreikants gehende Ebene den Mantel desselben schneidet oder nicht schneidet.

Zwei Winkel eines Dreikants, deren gemeinschaftlicher Schenkel als Endschenkel des einen und als Anfangsschenkel des andern betrachtet wird, sind in Hinsicht auf eine Ebene, welche durch den Mittelpunkt des Dreikants aber weder durch die Axe des einen noch durch die Axe des andern Winkels geht, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem diese Ebene diejenige Seite des Dreikants, welche in dem gemeinschaftlichen Schenkel derbeiden Winkel liegt, nicht schneidet oder schneidet.

51. Zwei sich schneidende gerade Gebilde ABC, PQR sind in Hinsicht auf einen Punkt S, welcher in keiner der Geraden aber mit beiden in einerlei Ebene liegt, in einem und demselben oder in entgegengesetztemSinne beschrieben, je nachdem (50) dieser Punkt in dem einen oder in dem andern von den beiden Winkeln liegt, welche die Geraden mit einander bilden.

Zwei Strahlenbüschel abc, pqr, welche in einerlei Ebene liegen, aber nicht einerlei Mittelpunkt haben, sind in Hinsicht auf eine Gerade, welche der nämlichen Ebene aber keinem der Büschel angehört, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem diese Gerade die eine oder die andere von den beiden Strecken schneidet, welche die Mittelpunkte der Büschel mit einander verbinden.

ZweiStrahlenbüschel abc, pqr, welche einerlei Mittelpunkt haben aber nicht in einerlei Ebene

Zwei Ebenenbüschel ABC, PQR, deren Axen sich schneiden, sind in Hinsicht auf eine liegen, sind in Hinsicht auf eine Gerade, welche durch jenen Punkt geht aber keinem der Büschel angehört, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem die Gerade in dem einen oder in dem andern von den beiden Winkeln liegt, welche die Träger der Büschel mit einander bilden.

52. Zwei gerade Gebilde ABC, PQR sollen in Hinsicht auf eine Gerade s, welche weder mit dem einen noch mit dem andern Gebilde in einerlei Ebene liegt, in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn der Sinn s (ABC) mit dem Sinne s (PQR) übereinstimmt.

Sind also zwei gerade Gebilde, welche in einerlei Ebene liegen, in Hinsicht auf einen Punkt dieser Ebene in einem und demselben Sinne beschrieben, so sind sie es auch in Hinsicht auf jede Gerade, welche die Ebene in jenem Punkte schneidet.

Ebene, welche keinem der Büschel angehört aber durch den Schnittpunkt ihrer Axen geht, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem die Ebene den einen oder den andern von den beiden Winkeln schneidet, welche die Axen der Büschel mit einander bilden.

Zwei Ebenenbüschel ABC, PQR sollen in Hinsicht auf eine Gerade u, welche weder mit der Axe des einen noch mit der Axe des andern Büschels in einerlei Ebene liegt, in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn der Sinn u (ABC) mit dem Sinne u (PQR) übereinstimmt.

Sind zwei Ebenenbüschel, deren Axen sich schneiden, in Hinsicht auf eine durch den Schnittpunkt gehende Ebene in einem und demselben Sinne beschrieben, so sind sie es auch in Hinsicht auf jede in dieser Ebene liegende aber nicht durch jenen Punkt gehende Gerade.

53. Zwei Winkel $D\overline{AB}C$, $\overline{ABC}D$ eines Tetraeders ABCD, welche einen Schenkel ABC, der als Endschenkel des einen und als Anfangsschenkel des andern betrachtet wird, mit einander gemein haben, sind in Hinsicht auf eine Gerade s, welche weder mit der Axe des einen noch mit der Axe des andern Winkels einen Punkt gemein hat, in entgegengesetztem oder in einem und demselben Sinne beschrieben, je nachdem die in den Axen der Winkel liegenden Kanten AB, BC des Tetraeders, deren gemeinschaftlicher Grenzpunkt als Endpunkt der einen und als Anfangspunkt der an-

dern zu betrachten ist, in Hinsicht auf jene Gerade in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind.

Denn der ebene Winkel, welcher aus dem Punkte B die Kante A C des Tetraeders projicirt, wird von der Ebene s B geschnitten oder nicht geschnitten, je nachdem diese Ebene die gebrochene Linie A B C im Punkte B schneidet oder berührt. Der erwähnte ebene Winkel ist aber diejenige Seite des durch die Flächenwinkel $DA\overline{B}C$, $A\overline{B}CD$ bestimmten Dreikants, welche in dem gemeinschaftlichen Schenkel derselben liegt.

54. Wenn zwei gerade Gebilde A B C, E F G, deren Träger p, q nicht in einerlei Ebene liegen, in Hinsicht auf eine dritte Gerade r in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so sind in Hinsicht auf diese Gerade auch die Ebenenbüschel q(A B C), p (E F G), welche die geraden Gebilde, jedes aus dem Träger des andern, projiciren, in einem und demselben Sinne beschrieben.

Es seien a, b, c diejenigen Leitstrahlen der Regelschaar p q r, welche beziehlich durch die Punkte A, B, C gehen, so stimmt nach der Annahme in dem Ebenenbüschel r der Sinn r(a b c) mit dem Sinne r(E F G), demnach in dem geraden Gebilde q der Sinn q (a b c) mit dem Sinne E F G und mithin in dem Ebenenbüschel p der Sinn p(a b c) mit dem Sinne p(E F G) überein, woraus, da die Ebenenbüschel p(a b c), q(a b c) in Hinsicht auf die Gerade r in einem und demselben Sinne beschrieben sind, der Satz folgt.

Anm. Will man das gerade Gebilde p(a b c) von dem Ebenenbüschel p (a b c) durch Zeichen unterscheiden, so kann man das erstere Gebilde durch $\dot{p}$ (a b c) und das letztere durch $\overline{p}$ (a b c) bezeichnen.

55. Wenn zwei gerade Gebilde A B C, E F G, deren Träger p, q nicht in einerlei Ebene liegen, und mithin auch die Ebenenbüschel q (ABC), p(E F G) in Hinsicht auf eine dritte Gerade r in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so sind sie nicht nur in Hinsicht auf jede vierte Gerade der Regelschaar p q r, sondern auch in Hinsicht auf jede Gerade, welche mit der Regelfläche gar keinen Punkt gemein hat oder dieselbe in einem ausserhalb der Geraden p, q liegenden Punkte berührt, in einem und demselben Sinne, in Hinsicht auf eine Gerade aber, welche die Regelfläche in zwei ausserhalb der Geraden p, q liegenden Punkten schneidet, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne be-

schrieben, je nachdem diese Punkte in der Fläche durch die Geraden p, q nicht getrennt oder getrennt sind.

Es seien a, b, c diejenigen Leitstrahlen der Regelschaar p q r, welche beziehlich durch die Punkte A, B, C gehen, so stimmt in dem geraden Gebilde q der Sinn E F G mit dem Sinne q(a b c) überein. Es sei ferner s irgend eine Gerade, welche mit keiner von den Geraden p, q in einerlei Ebene liegt, so werden die zur Regelschaar a b c ... perspektivischen und also auch unter sich projektivischen geraden Gebilde p (a b c ...), q(a b c ...) aus der Axe s durch zwei zu einander projektivische Ebenenbüschel projicirt, welche nur dann in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind, wenn sie zwei Ebenen s m, s n entsprechend gemein haben, welche durch je zwei einander entsprechende Ebenen getrennt sind. Diess ist aber nur der Fall, wenn die Gerade s zwei Gerade der Regelschaar a b c und also auch zwei Gerade m, n der Regelschaar p q r schneidet und überdiess in der Regelfläche die Geraden m, n, mithin auch die Punkte s m, s n durch die Geraden p, q getrennt sind.

56. Durch zwei Gerade p, q, welche als Träger von zwei geraden Gebilden A B C, E F G (oder auch als Axen von zwei Ebenenbüscheln A B C, E F G) betrachtet werden, wird das System von allen Geraden, welche keine der gegebenen Geraden schneiden, in zwei Systeme getheilt, so dass nämlich eine Gerade r, welche weder mit der Geraden p noch mit der Geraden q einen Punkt gemein hat, dem einen oder dem andern dieser beiden Systeme angehört, je nachdem in Hinsicht auf dieselbe die Gebilde A B C, E F G in einem und demselben oder in entgegengesetzem Sinne beschrieben sind, was, im Falle die Geraden p, q in einerlei Ebene liegen und also zwei Winkel mit einander bilden, nur davon abhängt, welchen von diesen beiden Winkeln die Gerade r schneidet. Liegen aber die Geraden p, q nicht in einerlei Ebene, so ist durch sie und jede Gerade r des einen (gleichviel welchen) Systems eine Regelfläche p q r bestimmt, welche (55) von jeder Geraden des andern Systems in zwei Punkten geschnitten wird, die in der Fläche durch die Geraden p, q getrennt sind, woraus hervorgeht, dass auch in diesem Falle eine sich bewegende Gerade nicht von dem einen Systeme in das andere übergehen kann, ohne während ihrer Bewegung wenigstens einmal mit einer Geraden zusammenzufallen, welche der ge-

meinschaftlichen Grenze der beiden Systeme angehört, nämlich die eine oder die andere der gegebenen Geraden oder auch beide schneidet. Zwei Gerade, welche einem und demselben von den beiden Systemen angehören, sind im Raume, wie man sich leicht überzeugt, durch die Geraden p, q nicht getrennt.

57. Wenn im Raume zwei Gerade r, s durch zwei andere Gerade p, q getrennt sind, so sind auch die beiden letztern durch die beiden erstern getrennt.

Man kann nämlich (56) die Geraden p, q als Träger von zwei geraden Gebilden A B C, E F G betrachten, welche in Hinsicht auf die Gerade r in einem und demselben Sinne, in Hinsicht auf die Gerade s aber in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind. Da nun die Ebenenbüschel r (A B C), s (A B C) in Hinsicht auf die Gerade p in einem und demselben Sinne, in Hinsicht auf die Gerade q aber in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind, so sind auch die Geraden p, q durch die Geraden r, s getrennt. Der Satz kann übrigens auch so bewiesen werden:

Die Geraden r, s sind durch die Geraden p, q und eben so diese durch jene getrennt, wenn es (56) zwei Gerade f, g giebt, welche die vier Geraden p, q, r, s schneiden, so dass die Punkte fp, fq durch die Punkte fr, fs getrennt, hingegen die Punkte gp, gq durch die Punkte gr, gs nicht getrennt sind.

58. Eine Curve A B C II. Ordnung und ein in derselben Ebene befindlicher Strahlenbüschel pqr, dessen Mittelpunkt S entweder in der Curve liegt oder von ihr eingeschlossen ist, sollen in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn, während ein Punkt T in der Curve im Sinne A B C sich bewegt, der ihn projicirende Strahl S T des Büschels um den Punkt S im Sinne pqr sich dreht.

Ein Strahlenbüschel a b c II. Ordnung und ein gerades Gebilde P Q R, dessen Träger s entweder ein Strahl des Büschels ist oder in jedem seiner Punkte von zwei Strahlen desselben geschnitten wird, sollen in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn, während im Büschel ein Strahl t im Sinne a b c sich bewegt, seine Spur s t in der Geraden s im Sinne P Q R sich bewegt.

In dieser und den nächstfolgenden Nummern kann jede Linie, welche eine ebene Figur einschliesst und von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten wird, die Stelle einer Curve II. Ordnung und der die Figur umhüllende Strahlenbüschel die Stelle eines Strahlenbüschels II. Ordnung vertreten. — Werden zwei in einerlei Ebene liegende Gebilde A B C, p q r, welche in einem und demselben Sinne beschrieben sind, aus einem ausserhalb der Ebene befindlichen Punkte M projicirt, so hat man vier Gebilde A B C, p q r, M (A B C), M (p q r), welche sämmtlich in einem und demselben Sinne beschrieben sind.

59. Wenn ein Punkt T und eine durch ihn gehende Gerade t eine Curve II. Ordnung und den derselben sich anschmiegenden Strahlenbüschel beschreiben, so sind die Curve und der Strahlenbüschel in einem und demselben Sinne beschrieben. Jedes dritte Gebilde, welches im Sinne des einen von den beiden erstern beschrieben ist, soll auch im Sinne des andern beschrieben heissen. Es können hiernach auch ein gerades Gebilde und eine Curve II. Ordnung (oder auch ein Strahlenbüschel erster und ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung), welche in einerlei Ebene liegen aber höchstens ein Element mit einander gemein haben, in einem und demselben Sinne beschrieben sein.

Vertritt im Obigen der Umfang einer geradlinigen Figur die Stelle der Curve II. Ordnung, so ruht die Gerade t, während der Punkt T eine Seite beschreibt, der Punkt T aber, während die Gerade t einen Aussenwinkel beschreibt.

60. Zwei Gebilde ABC, EFG sollen in Hinsicht auf ein drittes Gebilde, welches nur an sich gegeben ist, in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn das dritte Gebilde im Sinne A B C beschrieben werden kann und alsdann auch im Sinne EFG beschrieben ist. Wird von zwei in einerlei Ebene liegenden Gebilden A B C, E F G gesagt, dass sie in Hinsicht auf eine Gerade s in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so versteht es sich von selbst, dass die Gebilde ABC, EFG in Hinsicht auf das gerade Gebilde s oder in Hinsicht auf den Ebenenbüschel s in einem und demselben Sinne beschrieben sind, je nachdem die Gerade s in jener Ebene oder ausserhalb derselben liegt. Wäre es aber zweifelhaft, ob die Gerade s als Träger von Punkten oder als Schnittlinie von Ebenen zu betrachten sei, so müsste solches ausdrücklich bemerkt werden.

Sagt man von zwei in einerlei Ebene liegenden Winkeln, welche nicht einerlei Mittelpunkt haben, dass sie in einem und demselben Sinne beschrieben sind, ohne ein drittes Gebilde anzugeben, welches dabei in Betrachtung zu ziehen ist, so heisst diess nichts anderes als dass die beiden Winkel in Hinsicht auf die unendlich ferne Gerade der Ebene in einem und demselben Sinne beschrieben sind.

61. Wenn ein Strahlenbüschel p q r und ein gerades Gebilde E F G, dessen Träger s mit dem Büschel in einerlei Ebene liegt aber nicht durch seinen Mittelpunkt S geht, in Hinsicht auf eine in der nämlichen Ebene liegende Curve K II. Ordnung in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so sind sie auch abgesehen von der Curve in einem und demselben Sinne beschrieben.

Nach der Annahme können ein Punkt T und eine durch ihn gehende Gerade t die Curve K und den derselben sich anschmiegenden Strahlenbüschel so beschreiben, dass die Gerade S T um den Punkt S im Sinne p q r sich dreht und der Punkt s t in der Geraden s im Sinne E F G sich bewegt. Fällt nun während dieser Bewegung der Punkt s t höchstens einmal in die Gerade S T, so kann man schon daraus schliessen, dass die Gebilde p q r, E F G in einem und demselben Sinne beschrieben sind. Wenn aber der Punkt S in der Curve K liegt und die Gerade s die Curve in einem Punkte F berührt, so nehme man in der Gerade S F einen Punkt S_1 an, welcher von der Curve eingeschlossen ist. Da nun, wenn der Punkt T im vorigen Sinne die Curve K beschreibt, nach dem bereits betrachteten Falle die Gerade S_1T um den Punkt S_1 im Sinne S_1 (EFG) sich dreht und die Geraden S_1T, S T sowie auch die Punkte, in welchen sie die Gerade s schneiden, nur einmal in einander fallen, so muss auch die Gerade S T um den Punkt S im Sinne S (E F G) sich drehen. Von andern hiemit zusammenhängenden Sätzen soll nur folgender angeführt werden.

Sind zwei Curven II. Ordnung in Hinsicht auf eine Gerade, welche mit beiden in einerlei Ebene liegt, in einem und demselben Sinne beschrieben, so sind sie in Hinsicht auf eine andere in dieser Ebene liegende Gerade, welche ebenfalls keine von den beiden Curven schneidet, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem die Geraden durch die Curven nicht getrennt oder getrennt sind.

62. Eine Regelschaar abc und ein gerades Gebilde EFG, dessen Träger s entweder ein Leitstrahl der Regelschaar ist oder mit der Regelfläche nur einen oder gar keinen Punkt gemein hat, sollen in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenndiess von dem geraden Gebilde und irgend einem, also jedem, zur Regelschaar perspektivischen Ebenenbüschel gilt, dessen Axe mit dem geraden Gebilde nicht in einerlei Ebene liegt.

Eine Regelschaar und ein Ebenenbüschel, dessen Axe entweder ein Leitstrahl der Regelschaar ist oder mit der Regelfläche nur einen oder gar keinen Punkt gemein hat, sollen in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn diess von dem Ebenenbüschel und irgend einem, also jedem, zur Regelschaar perspektivischen geraden Gebilde gilt, welches mit der Axe des Ebenenbüschels nicht in einerlei Ebene liegt.

Es seien p, q, r drei Leitstrahlen der Regelschaar abc, von welchen keiner mit der Geraden s einen Punkt gemein hat, so sind die Ebenenbüschel p(abc), q(abc) in Hinsicht auf die Gerade r und mithin (55) auch in Hinsicht auf die Gerade s in einem und demselben Sinne beschrieben, woraus hervorgeht, dass das gerade Gebilde EFG und der Ebenenbüschel q(abc) in einem und denselben Sinne beschrieben sind, wenn diess von dem geraden Gebilde EFG und dem Ebenenbüschel p(abc) gilt.

63. Wenn eine Regelschaar abc und ein gerades Gebilde EFG, welches ausserhalb der Regelfläche liegt, in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so gilt diess auch von dem geraden Gebilde und jeder zur Regelschaar perspektivischen Curve U (abc) II. Ordnung, welche mit dem geraden Gebilde in einerlei Ebene U liegt.

Wenn eine Regelschaar und ein Ebenenbüschel, dessen Axe ausserhalb der Regelfläche liegt, in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so gilt diess auch von diesem Ebenenbüschel erster und jedem zur Regelschaar perspektivischen Ebenenbüschel zweiter Ordnung, dessen Mittelpunkt in der Axe des erstern Büschels liegt.

Es sei p ein Leitstrahl der Regelschaar abc, welcher die Gerade EF nicht schneidet. Da nun das gerade Gebilde EFG und die Curve U(abc) in Hinsicht auf den Ebenenbüschel p in einem und demselben Sinne p(abc) beschrieben sind, so sind sie, wie aus 61 leicht hervorgeht, auch abgesehen von dem Ebenenbüschel in einem und demselben Sinne beschrieben.

64. Sind zwei zusammengehörige Regelschaaren a b c, p q r, von welchen nämlich jede die Leitschaar der andern ist, in Hinsicht auf eine Gerade s als Träger von Punkten in einem und demselben Sinne beschrieben, so sind sie in Hinsicht auf die nämliche Gerade als Schnittlinie von Ebenen in entgegengesetztem Sinne beschrieben.

Man kann annehmen, dass die Gerade s weder mit der Geraden c noch mit der Geraden p in einerlei Ebene liege. Da nun die Strecken p (a b c), c (p q r), r (c b a), a (r q p), welche sämmtlich von der Ebene bq geschnitten werden, vier Kanten eines Tetreanders sind, und da die Winkel p (a b c), c (p q r) in Hinsicht auf das gerade Gebilde s in einem und demselben Sinne sind, so sind (53) die Strecken p (a b c), c (p q r) in Hinsicht auf den Ebenenbüschel s in entgegengesetztem Sinne beschrieben, woraus der Satz folgt. Die Regelschaaren a b c, r q p sind in Hinsicht auf das gerade Gebilde s in entgegengesetztem Sinne, hingegen in Hinsicht auf den Ebenenbüschel s in einem und demselben Sinne beschrieben.

65. Zwei zusammengehörige Regelschaaren a b c, p q r sollen in Hinsicht auf

eine der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebene U in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn in der Curve, in welcher die Ebene U und die Regelfläche sich schneiden, der Sinn U (a b c) mit dem Sinne U (p q r) übereinstimmt und mithin (63) die Regelschaaren in Hinsicht auf jedes gerade Gebilde, welches in der Ebene U liegt aber die Regelfläche nicht schneidet, in einem und demselben Sinne beschrieben sind.

einem ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkt S in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn in dem der Regelfläche sich anschmiegenden Ebenenbüschel, welcher den Punkt S zum Mittelpunkt hat, der Sinn S (abc) mit dem Sinne S (p q r) übereinstimmt und mithin die Regelschaaren in Hinsicht auf jeden Ebenenbüschel I. Ordnung, dessen Axe durch den Punkt S geht aber die Regelfläche nicht schneidet, in einem und demselben Sinne beschrieben sind.

Sind zwei zusammengehörige Regelschaaren in Hinsicht auf eine Gerade als Träger von Punkten in einem und demselben Sinne und also in Hinsicht auf dieselbe Gerade als Schnittlinie von Ebenen in entgegengesetztem Sinne beschrieben, so sind sie nach dem Obigen auch in Hinsicht auf jede durch die Gerade gehende der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebene in einem und demselben Sinne und in Hinsicht auf jeden ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkt der Geraden in entgegengesetztem Sinne beschrieben.

66. Sind zwei zusammengehörige Regelschaaren a b c, p q r in Hinsicht auf

eine Ebene U in einem und demselben Sinne beschrieben, so sind sie in Hinsicht auf einen ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkt S der Ebene in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem dieser Punkt von der Curve K, in welcher die Regelfläche und die Ebene sich schneiden, eingeschlossen oder nicht eingeschlossen ist.

einen Punkt in einem und demselben Sinne beschrieben, so sind sie in Hinsicht auf eine durch ihn gehende der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebene in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem die Curve, in welcher diese Ebene die Regelfläche schneidet, jenen Punkt einschliesst oder nicht einschliesst.

Man kann annehmen, dass die Punkte Ua, Uc mit dem Punkte S in einer und derselben Geraden liegen, und dass die Geraden p, q, r die Ebene U beziehlich in den Punkten Ua, Ub, Uc schneiden. Es sei ferner d diejenige Gerade der Regelschaar abc, welche in der Ebene Sq liegt, so liegen auch die Punkte Ub, Ud mit dem Punkte S in einer und derselben Geraden. Da nun die Ebenen Sp, Sq, Sr beziehlich mit den Ebenen Sc, Sd, Sa zusammenfallen, so ist nur zu beweisen, dass in dem der Regelfläche sich anschmiegenden Ebenenbüschel S der Sinn S (abc) mit dem Sinne S (cda) oder mit dem Sinne S (adc) übereinstimmt, je nachdem der Punkt S von der Curve K eingeschlossen oder nicht eingeschlossen ist. Es geht diess aber daraus hervor, weil im erstern Falle in der Curve K die Punkte Ua, Uc durch die Punkte Ub, Ud, demnach in der Regelschaar abc die Geraden a, c durch die Geraden b, d und mithin in dem Ebenenbüschel S die Ebenen Sa, Sc durch die Ebenen Sb, Sd getrennt, im letztern

Falle aber nicht getrennt sind. Bemerkt wird noch, dass die Ebene U und die dem Ebenenbüschel S sich anschmiegende Kegelfläche im erstern Falle keine Gerade mit einander gemein haben, im letztern aber in zwei Geraden sich schneiden.

67. Sind zwei zusammengehörige Regelschaaren a b c, p q r in Hinsicht auf

den einen von zwei ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkten in einem und demselben Sinne beschrieben, so sind sie (66) in Hinsicht auf den andern in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem die Punkte durch die Regelfläche nicht getrennt oder getrennt sind. Das letztere ist nur der Fall, wenn jede von den beiden Strecken, welche die Punkte mit einander verbinden, von der Regelfläche geschnitten wird.

die eine von zwei der Regelfläche sich nicht anschmiegenden Ebenen in einem und demselben Sinne beschrieben, so sind sie in Hinsicht auf die andere in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem die Ebenen durch den der Regelfläche sich anschmiegenden Ebenenbündel nicht getrennt oder getrennt sind. Das letztere ist nur der Fall, wenn jeder von den beiden Winkeln, welche die Ebenen mit einander bilden, eine der Regelfläche sich anschmiegende Ebene enthält.

Wenn daher eine Gerade s die Regelfläche in zwei Punkten A, B schneidet und also auch die Schnittlinie von zwei der Regelfläche sich anschmiegenden Ebenen P, Q ist, so wird der Ebenenbüschel s durch diese Ebenen in zwei Winkel P Q, P.Q und das gerade Gebilde s durch jene Punkte in zwei Strecken A B, A.B getheilt, so dass die Regelschaaren a b c, p q r in Hinsicht auf jede Ebene des Winkels P Q und jeden Punkt der Strecke A B in einem und demselben Sinne, hingegen in Hinsicht auf jede Ebene des Winkels P.Q und jeden Punkt der Strecke A.B in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind. Jede durch die Gerade s gehende der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebene schneidet dieselbe in einer Curve II. Ordnung, welche die Strecke A B oder A.B einschliesst, je nachdem die Ebene dem Winkel P Q oder P.Q angehört. Jeder ausserhalb der Regelfläche liegende Punkt der Geraden s ist der Mittelpunkt einer Kegelfläche, welche die Regelfläche in einer Curve II. Ordnung berührt und in den Winkel P Q oder P' Q beschrieben ist, je nachdem ihr Mittelpunkt in der Strecke A'B oder A B liegt.

68. Sind zwei zusammengehörige Regelschaaren a b c, p q r in Hinsicht auf eine Gerade s in einem und demselben Sinne beschrieben, so sind sie in Hinsicht auf eine andere Gerade u, welche ebenfalls mit der Regelfläche höchstens einen Punkt gemein hat, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem die Geraden auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten der Regelfläche liegen, vorausgesetzt, dass entweder beide Gerade als Schnittlinien von Ebenen oder beide als Träger von Punkten betrachtet werden.

Man nehme an, dass die Regelschaaren a b c, p r q in Hinsicht auf den Ebenenbüschel s und also auch (65) in Hinsicht auf jeden ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkt der Geraden s in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so sind sie in Hinsicht auf den Ebenenbüschel u und jeden ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkt der Geraden u in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem (67) die Geraden s, u durch die Regelfläche nicht getrennt oder getrennt sind. Die Regelschaaren a b c, r p q, welche (64) in Hinsicht auf das gerade Gebilde s und jede durch die Gerade s gehende der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebene in einem und demselben Sinne beschrieben sind, sind in Hinsicht auf das gerade Gebilde u und jede durch diese Gerade gehende der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebene im erstern Falle in einem und demselben Sinne, im letztern aber in entgegengesetztem Sinne beschrieben, daher in letzterm Falle auch je zwei der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebenen, von welchen die eine durch die Gerade s und die andere durch die Gerade u geht, durch den der Regelfläche sich anschmiegenden Ebenenbündel getrennt sind.

69. Wenn die Geraden a, b, c, a_1, b_1, c_1 einer und derselben Regelschaar angehören, von welcher die Geraden p, q, r, p_1, q_1, r_1 Leitstrahlen sind, und man bezieht zwei räumliche Systeme projektivisch so aufeinander, dass den Geraden a,b,c,p,q,r des einen Systems die Geraden a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1 des andern

entsprechen, so entspricht jeder Geraden s des erstern Systems, welche mit der Regelfläche höchstens einen Punkt gemein hat, eine Gerade s_1 des letztern, welche ebenfalls mit der Regelfläche höchstens einen Punkt gemein hat, so dass, wenn die Regelschaaren a b c, p q r in Hinsicht auf das Gebilde s in einem und demselben Sinne beschrieben sind, die Regelschaaren a_1 b_1 c_1, p_1 q_1 r_1 in Hinsicht auf das gerade Gebilde s_1 oder in Hinsicht auf den Ebenenbüschel s_1 in einem und demselben Sinne beschrieben sind, je nachdem die Systeme collineär oder reciprok zu einander sind. Wenn also die Systeme collineär zu einander sind und überdiess entweder der Sinn a b c mit dem Sinne a_1 b_1 c_1 und zugleich der Sinn p q r mit dem Sinne p_1 q_1 r_1 übereinstimmt oder der Sinn a b c dem Sinne a_1 b_1 c_1 und zugleich der Sinn p q r dem Sinne p_1 q_1 r_1 entgegengestzt ist, so liegen die Geraden s, s_1 auf einerlei Seite der Regelfläche. Dasselbe ist der Fall, wenn die Systeme reciprok zu einander sind und überdiess entweder der Sinn a b c mit dem Sinne a_1 b_1 c_1 und zugleich der Sinn p q r mit dem Sinne r_1 q_1 p_1 oder der Sinn a b c mit dem Sinne c_1 b_1 a_1 und zugleich der Sinn p q r mit dem Sinne p_1 q_1 r_1 übereinstimmt. In allen übrigen Fällen sind die Geraden s, s_1 durch die Regelfläche getrennt.

---

§. 4.

Involutorische Gebilde.

70. Wenn in zwei zu einander projektivischen Elementargebilden, welche in einander liegen, irgend zwei und mithin (G. 215) je zwei homologe Elemente einander abwechselnd entsprechen, so heissen die Gebilde involutorisch liegend und je zwei homologe Elemente derselben einander zugeordnet. Gewöhnlich wird aber von zwei solchen Gebilden nur wie von einem Gebilde gesprochen, dessen Elemente involutorisch gepaart seien.

Will man die Elemente eines Elementargebildes involutorisch paaren, so kann man zwei Elementenpaare $A\,A_1$, $B\,B_1$ nach Belieben annehmen und das hiedurch bestimmte involutorische Gebilde durch $A\,A_1 . B\,B_1 \ldots$ bezeichnen. Wird das Gebilde durch $A\,A_1$.

$BB_1 . CC_1 \ldots$ bezeichnet, so ist angedeutet, dass CC_1 ein drittes Elementenpaar desselben und also $AA_1 . BB_1 . CC_1$ eine Involution ist.

Anm. Der in G. 215 für einförmige Gebilde geführte Beweis gilt auch (24) für Elementargebilde II. Ordnung.

71. In einem involutorischen Elementargebilde $AA_1 . BB_1 \ldots$ ist entweder jeder Sinn sich selbst oder dem ihm entgegengesetzten Sinne zugeordnet. Im erstern Falle, wenn nämlich der Sinn ABA_1 mit dem ihm zugeordneten Sinne $A_1 B_1 A$ übereinstimmt, wird das Gebilde durch je zwei einander zugeordnete Elemente in zwei einander zugeordnete Theile getheilt, daher jedes Elementenpaar durch jenes andere Elementenpaar getrennnt und kein Element sich selbst zugeordnet ist. Im letztern Falle, wenn nämlich der Sinn ABA_1 dem Sinne $A_1 B_1 A$ entgegengesetzt und also kein Elementenpaar durch ein anderes Elementenpaar getrennt ist, enthält das Gebilde zwei Elemente M, N, welche sich selbst zugeordnet und daher (24) durch je zwei einander zugeordnete Elemente harmonisch getrennt sind. In diesem Falle kann das involutorische Gebilde, da es durch seine Ordnungselemente M, N, so wie auch durch das eine dieser Elemente und zwei einander zugeordnete A, A_1 bestimmt ist, auch durch $MM . NN \ldots$ oder $MM . AA_1 \ldots$ bezeichnet werden. Vorausgesetzt wird hiebei, dass das Elementargebilde an sich gegeben und also nur anzudeuten ist, wie seine Elemente involutorisch gepaart sind.

In der Involution $MM . AA_1 . BB_1$ vertritt das Element M, welches sich selbst zugeordnet ist, die Stelle eines Elementenpaares. Die Involution $MM . NN . AA_1$ sagt nichts anderes aus, als dass die Elemente M, N durch die Elemente A, A_1 harmonisch getrennt sind.

Sind A, B, F, G, P fünf Elemente eines und desselben Elementargebildes, so ist entweder $AB . FG . PP$ eine Involution, oder es giebt ein von P verschiedenes Element Q, so dass $AB . GF . PQ$ eine Involution ist. Ist $AFBP$ kein harmonischer Wurf, so enthält das Gebilde auch ein von P verschiedenes Element R, so dass $AB . FF . PR$ ein Involution ist.

72. Sind zwei Elementargebilde $ABC \ldots, abc \ldots$ zu einander projektivisch, so entspricht jeder Involution $AA_1 . BB_1 . CC_1$ in dem einen eine Involution $aa_1 . bb_1 . cc_1$ im andern. Denn von

den vier Würfen $a a_1$ $b c$, $A A_1$ $B C$, $A_1 A B_1 C_1$, $a_1 a b_1 c_1$ ist jeder folgende zum vorhergehenden, mithin auch der letzte zum ersten projektivisch. Wenn man also die Elemente des einen von zwei zu einander projektivischen Elementargebilden $ABC\ldots$, $abc\ldots$ involutorisch paart und alsdann je zwei Elemente des andern, welche zwei einander zugeordneten Elementen des erstern entsprechen, ebenfalls einander zugeordnet nennt, so sind auch die Elemente des andern involutorisch gepaart. Sind $ABC\ldots$, $abc\ldots$ zwei ungleichartige zu einander perspektivische Gebilde, so sollen auch die involutorischen Gebilde, welche man auf die angegebene Weise erhält, zu einander perspektivisch heissen.

Ein involutorisches gerades Gebilde $A A_1 . B B_1 \ldots$ und ein involutorischer Strahlenbüschel $e e_1 . f f_1 \ldots$ I. Ordnung, dessen Mittelpunkt S nicht in dem Träger u des geraden Gebildes liegt, sind also zu einander perspektivisch, wenn in dem Strahlenbüschel dem Strahle SA der Strahl SA_1 und dem Strahle SB der Strahl SB_1 zugeordnet ist, mithin der involutorische Strahlenbüschel auch durch $S(A A_1 . B B_1 \ldots)$ und das involutorische gerade Gebilde auch durch $u(e e_1 . f f_1 \ldots)$ bezeichnet werden kann.

73. Ein involutorisches Punktgebilde $A A_1 . B B_1 . C C_1 \ldots$ II. Ordnung wird aus jedem Punkte S der Curve durch einen involutorischen Strahlenbüschel $S(A A_1 . B B_1 . C C_1 \ldots)$ projicirt.

Eine involutorische Regelschaar wird von jedem ihrer Leitstrahlen in einem involutorischen geraden Gebilde und von jeder der Regelfläche sich nicht anschmiegenden Ebene in einem involutorischen Punktgebilde II. Ordnung geschnitten.

Ein involutorischer Strahlenbüschel $a a_1 . b b_1 \ldots$ II. Ordnung wird von jeder Geraden s, die ihm angehört, in einem involutorischen geraden Gebilde $s(a a_1 . b b_1 . c c_1 \ldots$ geschnitten.

Eine involutorische Regelschaar wird aus jedem ihrer Leitstrahlen durch einen involutorischen Ebenenbüschel I. Ordnung und aus jedem ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkte durch einen involutorischen Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt.

74. Wenn ein Punkt S mit einer Curve II. Ordnung in einerlei Ebene aber nicht in der Curve liegt, und man je zwei Punkte A, A_1 der Curve, welche mit jenem Punkte in einer und

derselben Geraden liegen, einander zugeordnet nennt, so sind die Elemente der Curve involutorisch gepaart. Dasselbe gilt von den Elementen des der Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschels, wenn man je zwei Strahlen a, a_1, welche die Curve in zwei einander zugeordneten Punkten berühren und also die Polare s des Punktes S in einem und demselben Punkte schneiden, einander zugeordnet nennt. Es sind nämlich sowohl die Punkte A, A_1 als auch die Geraden a, a_1 durch den Punkt S und die Gerade s harmonisch getrennt und daher in dem involutorischen ebenen Systeme einander zugeordnet, dessen Ordnungspunkt der Punkt S und dessen Ordnungslinie die Gerade s ist.

Wenn im Punkte S zwei Tangenten der Curve sich schneiden und also die Gerade s mit der Curve zwei Punkte gemein hat, so sind diese Punkte die Ordnungspunkte des involutorischen Punktgebildes und jene Tangenten die Ordnungsstrahlen des involutorischen Strahlenbüschels. Wenn hingegen durch den Punkt S keine Tangente der Curve geht und also die Gerade s mit derselben keinen Punkt gemein hat, so enthält keines von den beiden involutorischen Gebilden zwei sich selbst zugeordnete Elemente. In beiden Fällen aber soll der Punkt S das Involutionscentrum und die Gerade s die Involutionsaxe sowohl des einen als auch des andern involutorischen Gebildes heissen. Projicirt man beide Gebilde aus einem und demselben ausserhalb der Ebenen liegenden Punkte M, so erhält man eine involutorische Kegelfläche (eine Kegelfläche, deren Elemente involutorisch gepaart sind) und einen ihr sich anschmiegenden involutorischen Ebenenbüschel. Die gemeinschaftliche Involutionsaxe MS dieser Gebilde liegt mit je zwei einander zugeordneten Geraden der Kegelfläche in einerlei Ebene, während ihre gemeinschaftliche Involutionsebene Ms von je zwei einander zugeordneten Ebenen des Ebenenbüschels in einer und derselben Geraden geschnitten wird.

Indirekt folgt aus dem Obigen und aus 70, dass die Geraden, deren jede zwei einander zugeordnete Punkte einer involutorischen Curve II. Ordnung verbindet, alle durch einen und denselben Punkt gehen, und dass die Punkte, in deren jedem zwei einander zugeordnete Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels II. Ordnung sich schneiden, alle in einer und derselben Geraden liegen.

75. Sind eine involutorische Curve II. Ordnung und ein involutorisches gerades Gebilde, welches in der Involutionsaxe des erstern Gebildes liegt, zu einem und demselben involutorischen Strahlenbüschel I. Ordnung perspektivisch, so sind (G. 253) je zwei einander zugeordnete Punkte des geraden Gebildes in Hinsicht auf die Curve einander conjugirt. Und wenn je zwei einander zugeordnete Punkte eines involutorischen geraden Gebildes, welches in der Involutionsaxe einer involutorischen Curve II. Ordnung liegt, in Hinsicht auf die Curve conjugirt sind, so werden beide Gebilde aus jedem ausserhalb des erstern liegendem Punkte des letztern durch einen und denselben involutorischen Strahlenbüschel projicirt.

Sind ein involutorischer Strahlenbüschel II. Ordnung und ein involutorischer Strahlenbüschel I. Ordnung, dessen Mittelpunkt das Involutionscentrum des erstern Büschels ist, zu einem und demselben involutorischen geraden Gebilde perspektivisch, so sind je zwei einander zugeordnete Strahlen des letztern Büschels in Hinsicht auf den erstern einander conjugirt. Und wenn je zwei einander zugeordnete Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels I. Ordnung, dessen Mittelpunkt das Involutionscentrum eines involutorischen Strahlenbüschels II. Ordnung, in Hinsicht auf diesen Büschel einander conjugirt sind, so schneidet jede nicht durch den Mittelpunkt des erstern Büschels gehende Gerade des letztern beide Büschel in einem und demselben involutorischen geraden Gebilde.

Anm. Zwei Elemente heissen in Hinsicht auf eine Curve K II. Ordnung so wie auch in Hinsicht auf den derselben sich anschmiegenden Strahlenbüschel einander conjugirt, wenn sie in dem Polarsysteme einander conjugirt sind, dessen Ordnungscurve die Curve K ist.

76. Wenn zwei nicht in einerlei Ebene liegende Gerade f, g in Hinsicht auf eine Regelfläche R einander zugeordnet sind, so giebt es zu jeder in der Fläche liegenden Geraden a, welche jene Geraden nicht schneidet, eine andere in der Fläche liegende Gerade a_1, welche von der erstern durch jene Geraden harmonisch getrennt ist.

Da nämlich in dem Polarsysteme, dessen Ordnungsfläche die Fläche R ist, die Gerade f der Geraden g, die Gerade a aber sich selbst zugeordnet ist, so gilt diess auch von der Geraden a_1, welche zu den drei Geraden f, a, g (oder g, a, f) die vierte harmonische Gerade ist.

Hat also eine Gerade s, welche die Geraden f, g in zwei ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkten schneidet, mit der Fläche irgend einen Punkt a p gemein, so muss sie mit derselben noch einen Punkt a_1 p_1 gemein haben und in diesen Punkten zwei Gerade a, a_1 der einen Regelschaar und zwei Gerade p, p_1 der andern Regelschaar schneiden, so dass sowohl die Geraden a, a_1 als auch die Geraden p, p_1 durch die Geraden f, g harmonisch getrennt sind.

77. Will man die Elemente einer gegebenen Regelschaar involutorisch paaren, so darf man nur (nach 72 und 74) irgend eine der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebene U und in dieser Ebene, aber ausserhalb der Regelfläche, einen Punkt S annehmen und alsdann zwei Gerade a, a_1 der Regelschaar einander zugeordnet nennen, wenn die Punkte U a, U a_1, in welchen sie die angenommene Ebene schneiden, mit dem angenommenen Punkte S in einer und derselben Geraden s liegen und also die Ebenen S a, S a_1 die Ebene U in einer und derselben Geraden s schneiden. Je zwei einander zugeordnete Gerade dieser involutorischen Regelschaar sind (76) durch die Gerade f, welche den Punkt S mit dem Pole der Ebene U verbindet, und durch die Gerade g, in welcher die Ebene U von der Polare des Punktes S geschnitten wird, harmonisch getrennt.

Der Punkt S ist das Involutionscentrum, die Gerade g aber die Involutionsaxe der involutorischen Curve, in welcher die involutorische Regelschaar von der Ebene U geschnitten wird.

Die Ebene U ist die Involutionsebene, die Gerade f aber die Involutionsaxe des involutorischen Ebenenbüschels, welcher die involutorische Regelschaar aus dem Punkte S projicirt.

78. Wenn zwei nicht in einerlei Ebene liegende Gerade f, g in Hinsicht auf eine Regelfläche einander zugeordnet sind, und man nennt je zwei in der Fläche liegende Gerade, welche durch die Geraden f, g harmonisch getrennt sind, einander zugeordnet, so sind sowohl die Geraden der einen als auch die Geraden der andern Re-

gelschaar involutorisch gepaart. Die beiden involutorischen Regelschaaren werden

von jeder der Regelfläche sich nicht anschmiegenden Ebene, welche durch eine der Geraden f, g geht, in einer und derselben involutorischen Curve geschnitten, deren Involutionsaxe jene Gerade ist und deren Involutionscentrum in der andern liegt.

aus jedem Punkte, welcher in einer der Geraden f, g aber ausserhalb der Regelfläche liegt, durch einen und denselben involutorischen Ebenenbüschel projicirt, dessen Involutionsaxe jene Gerade ist, und dessen Involutionsebene durch die andere geht.

Wenn die Geraden f, g die Regelfläche schneiden, so sind sie zwei Kanten eines Tetraeders, dessen vier übrige Kanten (26) die Ordnungselemente der involutorischen Regelschaaren sind. Wird aber die Regelfläche von den Geraden f, g nicht geschnitten, so haben die involutorischen Regelschaaren keine Ordnungselemente.

79. Eine Gerade soll eine Involutionsaxe von einer involutorischen Regelschaar heissen, wenn sie von ihrer Polare (der ihr in Hinsicht auf die Regelfläche zugeordneten Geraden) durch je zwei einander zugeordnete Gerade der Regelschaar harmonisch getrennt ist. Eine involutorische Regelschaar wird

von jeder der Regelfläche sich nicht anschmiegenden Ebene in einer involutorischen Curve geschnitten, deren Involutionsaxe (77) zugleich eine Involutionsaxe der involutorischen Regelschaar ist, daher in jeder der Regelfläche sich nicht anschmiegenden Ebene eine, aber auch (78) nur eine, Involutionsaxe der involutorischen Regelschaar liegt.

aus jedem ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkte durch einen involutorischen Ebenenbüschel projicirt, dessen Involutionsaxe zugleich eine Involutionsaxe der involutorischen Regelschaar ist, daher durch jeden ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkt eine aber auch nur eine Involutionsaxe der involutorischen Regelschaar geht.

Enthält eine involutorische Regelschaar zwei Ordnungselemente, so werden diese von jeder Involutionsaxe derselben geschnitten. Und wenn eine ausserhalb der Regelfläche liegende Gerade die beiden Ordnungselemente der involutorischen Regelschaar schneidet, so ist sie eine Involutionsaxe derselben. Hat eine involutorische Regelschaar keine Ordnungelemente, so liegen je zwei zusammengehörige Involutionsaxen derselben, welche nämlich in Hinsicht auf die Regelfläche einander zugeordnet sind, auf entgegengesetzten Seiten dieser Fläche.

80. Wenn $aa_1 . bb_1 \ldots$ eine involutorische Regelschaar ist und zwei ausserhalb der Regelfläche liegende Gerade f, g sowohl durch das Elementenpaar aa_1 als auch durch das Elementenpaar bb_1 harmonisch getrennt sind, so sind jene Geraden zwei zusammengehörige Involutionsaxen der involutorischen Regelschaar und daher auch durch jedes dritte Elementenpaar derselben harmonisch getrennt.

Es sei U irgend eine durch die Gerade f gehende der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebene, so schneidet diese die involutorische Regelschaar in einer involutorischen Curve $U(aa_1 . bb_1 \ldots)$, deren Involutionsaxe die Gerade f ist, welche vom Punkte Ug sowohl durch die Punkte Ua, Ua_1 als auch durch die Punkte Ub, Ub_1 harmonisch getrennt ist. Da hiernach (79) die Gerade f auch die eine von zwei zusammengehörigen Involutionsaxen der involutorischen Regelschaar ist, so ist die andere die Gerade g, welche von der erstern durch die Geraden a, a_1 harmonisch getrennt ist.

81. Sind eine involutorische Regelschaar und ein involutorisches gerades Gebilde, dessen Träger eine Involutionsaxe des erstern Gebildes ist, zu einem und demselben involutorischen Ebenenbüschel I. Ordnung perspektivisch, so sind (75) je zwei einander zugeordnete Punkte des geraden Gebildes in Hinsicht auf die Regelfläche einander conjugirt. Und wenn je zwei einander zugeordnete Punkte eines involutorischen geraden Gebildes, dessen Träger ein Involutionsaxe einer involutorischen Regel-

Sind eine involutorische Regelschaar und ein involutorischer Ebenenbüschel I. Ordnung, dessen Axe eine Involutionsaxe des erstern Gebildes ist, zu einem und demselben involutorischen geraden Gebilde perspektivisch, so sind je zwei einander zugeordnete Ebenen des Ebenenbüschels in Hinsicht auf die Regelfläche einander conjugirt. Und wenn je zwei einander zugeordnete Ebenen eines involutorischen Ebenenbüschels I. Ordnung, dessen Axe eine Involutionsaxe einer involutorischen Regelschaar ist, in Hinsicht auf die Regelfläche einander conjugirt sind, so werden die beiden involutorischen Gebilde aus jedem Leitstrahle der Regelschaar, welcher das gerade Gebilde nicht schneidet, durch einen und denselben involutorischen Ebenenbüschel projicirt.

schaar ist, in Hinsicht auf die Regelfläche einander conjugirt sind, so werden die beiden involutorischen Gebilde von jedem Leitstrahle der Regelschaar, welcher die Axe des Ebenenbüschels nicht schneidet, in einem und demselben involutorischen geraden Gebilde geschnitten.

82. Durch zwei in einander liegende involutorische Elementargebilde $AA_1 . BB_1 \ldots$, $EE_1 . FF_1 \ldots$, von welchen wenigstens das eine keine Ordnungselemente hat, sind zwei Elemente bestimmt, welche nämlich sowohl in dem einen als auch in dem andern der gegebenen Gebilde einander zugeordnet sind.

Es seien die gegebenen Gebilde zwei in einer und derselben Curve II. Ordnung liegende involutorische Punktgebilde, so schneidet die Gerade, welche das Involutionscentrum des einen Gebildes mit dem Involutionscentrum des andern verbindet, die Curve in den beiden Punkten, welche sowohl in dem einen als auch in dem andern Gebilde einander zugeordnet sind. Jeder andere Fall kann (72) auf den betrachteten zurückgeführt werden.

83. Ein Wurf a b c d soll ein ordentlicher Wurf heissen, wenn das erste und dritte seiner Elemente durch das zweite und vierte getrennt sind. In jedem involutorischen Elementargebilde $A A_1 . B B_1 \ldots$, welches keine Ordnungselemente hat, giebt es zu je zwei einander zugeordneten Elementen P, P_1 zwei einander zugeordnete Elemente Q, Q_1, so dass der Wurf $P Q P_1 Q_1$ zu einem gegebenen ordentlichen Wurfe a b c d projektivisch ist und überdiess der Sinn $P Q P_1$ mit dem Sinne $A B A_1$ übereinstimmt. Eben so giebt es zwei einander zugeordnete Elemente R, R_1, so dass der Wurf $P R P_1 R_1$ zu dem Wurfe abcd projektivisch, der Sinn $P R P_1$ aber dem Sinne $A B A_1$ entgegengesetzt ist.

Es sei das gegebene Gebilde $A A_1 . B B_1 \ldots$ ein involutorische Curve II. Ordnung und S das Involutionscentrum derselben, so giebt es in der Geraden $P P_1$ einen Punkt S_1, so dass $P S P_1 S_1 \barwedge$ abcd ist. Die Polare des Punktes S_1 schneidet die Curve in zwei Punkten Q_1, R_1, so dass der Sinn $P_1 Q_1 P$ mit dem Sinne $A B A_1$

übereinstimmt, der Sinn P_1R_1P aber demselben entgegengesetzt ist. Sind also Q, R die Punkte, welche in dem involutorischen Gebilde $AA_1 . BB_1 \ldots$ den Punkten Q_1, R_1 zugeordnet sind, so stimmt auch der Sinn PQP_1 mit dem Sinne ABA_1 überein, während der Sinn PRP_1 demselben entgegengesetzt ist. Die Würfe PQP_1Q_1, PRP_1R_1 aber sind beide zu dem Wurfe PSP_1S_1 und also auch zu dem gegebenen Wurfe projektivisch, weil $PQP_1Q_1 \barwedge Q_1\ (PSP_1S_1)$ und $PRP_1R_1 \barwedge R_1\ (PSP_1S_1)$ ist. Ist $abcd$ ein harmonischer Wurf, so fällt Q mit R_1 und R mit Q_1 zusammen.

84. Zwei involutorische Regelschaaren $aa_1 . bb_1 \ldots$, $pp_1 . qq_1 \ldots$, von welchen jede die Leitschaar der andern ist und entweder jede oder keine zwei Ordnungselemente enthält, haben zwei zusammengehörige Involutionsaxen mit einander gemein.

Enthält nämlich jede von den beiden Regelschaaren zwei sich selbst zugeordnete Gerade, so sind diese vier Geraden vier Kanten eines Tetraeders, dessen zwei übrige Kanten (79) die im Satze erwähnten Involutionsaxen sind.

Enthält keine von den beiden involutorischen Regelschaaren zwei Ordnungselemente, so kann man (83) annehmen, dass die Würfe aba_1b_1, pqp_1q_1 zu einander projektivisch sind. Da nun (14) die durch die drei Punkte ap, bq, a_1p_1 gehende Ebene U auch durch den Punkt b_1q_1 geht, so schneidet dieselbe die beiden involutorischen Regelschaaren in einer und derselben involutorischen Curve $U\,(aa_1 . bb_1 \ldots)$, deren Involutionsaxe f eine gemeinschaftliche Involutionsaxe der beiden erstern Gebilde ist. Eine andere gemeinschaftliche Involutionsaxe derselben ist die Gerade g, welche der Geraden f in Hinsicht auf die Regelfläche zugeordnet ist, folglich durch den Schnittpunkt der beiden Geraden geht, von welchen die eine u den Punkt ap mit dem Punkte a_1p_1 und die andere v den Punkt bq mit dem Punkte b_1q_1 verbindet. Und wenn h eine gemeinschaftliche Involutionsaxe der beiden involutorischen Regelschaaren ist, so geht die durch die Gerade h und den Punkt ap bestimmte Ebene, da sie beide Gebilde in einer und derselben involutorischen Curve schneidet, deren Involutionsaxe nämlich die Gerade h ist, auch durch den Punkt a_1p_1. Da hiernach die Gerade h die Gerade u und eben so die Gerade v schneidet, so muss sie entweder in der Ebene U liegen oder durch den Punkt u v gehen, also (79) entweder mit der Geraden f oder mit der Geraden g zusammenfallen.

85. Wenn P, Q, A, B, A_1, B_1 sechs Elemente eines und desselben Elementargebildes sind, und der Wurf $PQAB$ zu dem Wurfe PQA_1B_1 mithin auch (24) zu dem Wurfe QPB_1A_1 projektivisch ist, so ist (70) $PQ\,.\,AB_1\,.\,A_1B$ eine Involution und daher auch $PQAA_1 \barwedge QPB_1B \barwedge PQBB_1$. Sind die Elemente P, Q durch die Elemente A, B und also auch durch die Elemente A_1, B_1 harmonisch getrennt, so ist auch $PQ\,.\,AA_1\,.\,BB_1$ eine Involution und daher auch $PQAB_1 \barwedge QPA_1B_1 \barwedge PQBA_1$.

Haben zwei zu einander projektivische Elementargebilde, welche in einander liegen, das Element P aber kein anderes Element entsprechend gemein, während den Elementen A, B des einen die Elemente A_1, B_1 des andern entsprechen, was durch $\overline{P}AB \barwedge \overline{P}A_1B_1$ bezeichnet werden soll, so ist $PP\,.\,AB_1\,.\,A_1B$ eine Involution und auch $\overline{P}AA_1 \barwedge \overline{P}BB_1$. Gäbe es nämlich ein von P verschiedenes Element Q, so dass $PQAA_1 \barwedge PQBB_1$ und also $PQ\,.\,AB_1\,.\,A_1B$ eine Involution wäre, so hätten die zu einander projektivischen Gebilde $PAB\ldots$, $PA_1B_1\ldots$ noch ein Element Q entsprechend gemein, was gegen die Annahme ist. — Will man also zwei in einander liegende Elementargebilde projektivisch so auf einander beziehen, dass sie das Element P, aber kein anderes Element entsprechend gemein haben, so kann man nur noch zu einem Elemente A des einen Gebildes das ihm entsprechende Element A_1 des andern nach Belieben annehmen.

86. Wenn P, Q, A, A_1, A_2 fünf Elemente eines und desselben Elementargebildes sind, und der Wurf $PQAA_1$ zu dem Wurfe PQA_1A_2, mithin auch zu dem Wurfe QPA_2A_1 projektivisch ist, so ist $PQ\,.\,AA_2\,.\,A_1A_1$ eine Involution. Und wenn $PQ\,.\,AA_2\,.\,A_1A_1$ eine Involution ist, so ist $PQAA_1 \barwedge QPA_2A_1 \barwedge PQA_1A_2$. Indirekt folgt hieraus:

Haben zwei zu einander projektivische Elementargebilde, welche in einander liegen, das Element P und zwar nur dieses Element entsprechend gemein, während den Elementen A, A_1 des einen Gebildes die Elemente A_1, A_2 des andern entsprechen, so ist $PP\,.\,AA_2\,.\,A_1A_1$ eine Involution und also PAA_1A_2 ein harmonischer

Wurf. Und wenn die Elemente P, A_1 durch die Elemente A, A_2 harmonisch getrennt sind, so ist $\overline{P}AA_1 \barwedge \overline{P}A_1A_2$.

87. Aus 85 ergeben sich noch nachstehende Sätze, in welchen ebenfalls nur Elemente eines und desselben Elementargebildes betrachtet werden:

Wenn $PQABC \barwedge PQA_1B_1C_1 \barwedge PQA_2B_2C_2$ ist, so ist auch $PQAA_1A_2 \barwedge PQBB_1B_2 \barwedge PQCC_1C_2$. — Ist $\overline{P}ABC \barwedge \overline{P}A_1B_1C_1 \barwedge \overline{P}A_2B_2C_2$, so ist auch $\overline{P}AA_1A_1 \barwedge \overline{P}BB_1B_2 \barwedge \overline{P}CC_1C_2$.

---

§. 5.

Involutorische Regelschaaren in Polarsystemen.

88. Wenn zwei Systeme projektivisch so auf einander bezogen sind, dass je zwei homologe Elemente einander abwechselnd entsprechen, so heissen die Systeme involutorisch liegend und je zwei homologe Elemente derselben einander zugeordnet. Spricht man von den beiden Systemen nur wie von einem Systeme, so heisst dieses, wenn je zwei einander zugeordnete Elemente gleichartig sind, ein involutorisches System, ausserdem aber ein Polarsystem. In beiden Fällen ist jedem Elementargebilde $ABC\ldots$ ein zu ihm projektivisches Elementargebilde $A_1B_1C_1\ldots$ zugeordnet. Liegen nun diese Gebilde in einander, ohne dass jedoch jedes Element des einen mit dem ihm zugeordneten Elemente des andern zusammenfällt, so ist $AA_1 . BB_1 . CC_1\ldots$ ein involutorisches Elementargebilde, welches, da je zwei einander zugeordnete Elemente desselben auch in dem Systeme einander zugeordnet sind, in diesem enthalten heissen soll. So sind in einem involutorischen ebenen Systeme unendlich viele involutorische Punktgebilde und Strahlenbüschel erster und zweiter Ordnung enthalten.

89. Durch zwei involutorische Regelschaaren $aa_1 . bb_1 . cc_1\ldots$ $pp_1 . qq_1 . rr_1\ldots$, von welchen jede die Leitschaar der andern ist, ist ein gewöhnliches Polarsystem bestimmt, in welchem die beiden involutorischen Regelschaaren enthalten sind.

Bezieht man nämlich (8) zwei räumliche Systeme reciprok so auf einander, dass den Geraden a, b, a_1, p, q, p_1 des einen Systems die Geraden a_1, b_1, a, p_1, q_1, p des andern entsprechen, so hat man ein Polarsystem, in welchem je zwei einander zugeordnete Gerade sowohl der einen als auch der andern involutorischen Regelschaar ebenfalls einander zugeordnet sind. Dem Punkte $a p$ ist die Ebene $a_1 p_1$, dem Schnittpunkte der drei Ebenen ap, bq, cr die durch die drei Punkte $a_1 p_1$, $b_1 q_1$, $c_1 r_1$ gehende Ebene zugeordnet. Je zwei einander zugeordnete Punkte des involutorischen geraden Gebildes $p\,(a a_1 . b b_1 . c c_1 \ldots)$, so wie auch je zwei einander zugeordnete Ebenen des involutorischen Ebenenbüschels $p\,(a a_1 . b b_1 . c c_1 \ldots)$ sind in dem Polarsysteme einander conjugirt.

Wenn die eine von den beiden Regelschaaren oder jede derselben zwei sich selbst zugeordnete Elemente enthält, so hat das Polarsystem eine Ordnungsfläche, welche mit der gegebenen Regelfläche im erstern Falle zwei, im letztern aber vier Gerade gemein hat, folglich selbst eine Regelfläche ist. Wenn aber keine von den beiden involutorischen Regelschaaren zwei Ordnungselemente und also keine der vier Geraden a, a_1, p, p_1 zwei sich selbst conjugirte Punkte enthält, so liegt jeder Punkt des Polarsystems ausserhalb seiner Polare. — Hat ein Polarsystem eine Ordnungsfläche, die weder mit der einen noch mit der andern von zwei einander zugeordneten Geraden a, a_1 einen Punkt gemein hat, so ist die Fläche eine Regelfläche, welche, da die Geraden a, a_1 auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen, von jeder Geraden, welche die beiden Geraden a, a_1 schneidet, geschnitten wird.

90. In jedem gewöhnlichen räumlichen Polarsysteme, dessen Ordnungsfläche entweder eine Regelfläche ist oder in welchem kein Punkt sich selbst conjugirt ist, sind unendlich viele involutorische Regelschaaren enthalten.

Wenn nämlich in einem Polarsysteme die Gerade p der Geraden p_1 zugeordnet aber weder ein Punkt der Geraden p noch ein Punkt der Geraden p_1 sich selbst conjugirt ist, so kann man (83) in der Geraden p einen harmonischen Wurf $A B A_1 B_1$ und in der Geraden p_1 einen harmonischen Wurf $E F E_1 F_1$ annehmen, so dass in dem Polarsysteme den Punkten A, B, E, F die Punkte A_1, B_1, E_1, F_1 conjugirt sind. Da nun die Geraden a, b, a_1, b_1, welche die Punkte A, B, A_1, B_1 beziehlich mit den Punkten E, F, E_1, F_1 verbinden, einer und derselben Regelschaar angehören, dem Punkte A aber die Ebene $p_1 A_1$, dem Punkte E die Ebene

$p E_1$, mithin der Geraden a die Gerade a_1 und eben so der Geraden b die Gerade b_1 zugeordnet ist, so ist $a a_1 . b b_1 \ldots$ eine in dem Polarsysteme enthaltene involutorische Regelschaar. — Ist in einem Polarsysteme die Gerade a der Geraden a_1, die Gerade m aber sich selbst zugeordnet, so ist, wenn nämlich keine zwei von den drei Geraden m, a, a_1 sich schneiden, auch $m m . a a_1 \ldots$ eine in dem Systeme enthaltene involutorische Regelschaar.

Jede in einem gewöhnlichen Polarsysteme enthaltene involutorische Regelschaar $a a_1 . b b_1 \ldots$ ist von einer andern in demselben Systeme enthaltenen involutorischen Regelschaar die Leitschaar. Denn jeder sich nicht selbst zugeordnete Leitstrahl p der erstern Regelschaar ist einem andern Leitstrahle p_1 derselben zugeordnet.

91. Durch eine Regelfläche F und vier in ihr liegende Gerade m, n, s, t, von welchen zwei m, n der einen, die beiden übrigen aber der andern Regelschaar angehören, ist eine andere Regelfläche F_1 bestimmt, welche mit der erstern die vier gegebenen Geraden gemein hat, so dass überdies je zwei Gerade, welche in irgend einer von den beiden Regelflächen liegen und durch zwei von jenen vier Geraden harmonisch getrennt sind, in Hinsicht auf die andere Fläche einander zugeordnet sind.

Es seien in der Fläche F die Geraden m, n durch die Geraden a, a_1 und die Geraden s, t durch die Geraden p, p_1 harmonisch getrennt, so ist F_1 die Ordnungsfläche desjenigen Polarsystems, in welchem (89) die beiden involutorischenRegelschaaren $m m . a a_1 \ldots$, $s s . p p_1 \ldots$ enthalten sind. Die Geraden s, t, a, a_1 sind zwei Paar Gegenkanten eines Tetraeders, dessen beide übrigen Kanten ebenfalls durch die Geraden m, n harmonisch getrennt sind, aber in der Fläche F_1 liegen und in Hinsicht auf die Fläche F einander zugeordnet sind.

Jede Ebene U, welche keiner von den beiden Flächen F, F_1 sich anschmiegt, schneidet dieselben in zwei Curven II. Ordnung, so dass je zwei Punkte, welche in irgend einer dieser Curven liegen und in ihr durch die Punkte U m, U n oder durch die Punkte U s, U t harmonisch getrennt sind, in Hinsicht auf die andere einander conjugirt sind.

92. Durch eine involutorische Regelschaar $a a_1 . b b_1 \ldots$ ist ein

Nullsystem $aa_1 . bb_1 \dots$ bestimmt, in welchem nämlich die gegebene involutorische Regelschaar enthalten ist.

Es seien p, q, r irgend drei Leitstrahlen der gegebenen Regelschaar. Bezieht man nun zwei räumliche Systeme reciprok so auf einander, dass den Geraden p, q, r, a, a_1, b des einen Systems die Geraden p, q, r, a_1, a, b_1 des andern entsprechen, so hat man das im Satze erwähnte Nullsystem. Der Punkt ap ist der Ebene $a_1 p$, der Punkt $a_1 q$ der Ebene aq und demnach die Gerade, welche den Punkt $a p$ mit dem Punkte $a_1 q$ verbindet, weil sie zugleich die Schnittlinie der Ebenen $a_1 p, a q$ ist, sich selbst zugeordnet. Da eben so jede andere Gerade, welche zwei einander zugeordnete Gerade der involutorischen Regelschaar $a a_1 . b b_1 \dots$ schneidet, sich selbst zugeordnet ist, so folgt:

Jeder Ebene, welche der Regelfläche sich nicht anschmiegt, also die involutorische Regelschaar in einem involutorischen Punktgebilde II. Ordnung schneidet, ist das Involutionscentrum dieses Gebildes zugeordnet.

Jedem ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkte, aus welchen also die involutorische Regelschaar durch einen involutorischen Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt wird, ist die Involutionsebene dieses Büschels zugeordnet.

Ist in einem Nullsysteme der Geraden g eine andere Gerade g_1 zugeordnet, so ist das gerade Gebilde g ein Schnitt des ihm zugeordneten Ebenenbüschels g_1, daher die Geraden g, g_1 nicht in einerlei Ebene liegen. Jede Gerade h, welche die beiden Geraden g, g_1 schneidet, ist sich selbst zugeordnet, weil dem Punkte $g h$ die Ebene $g_1 h$ und dem Punkte $g_1 h$ die Ebene $g h$ zugeordnet ist. Und wenn eine sich selbst zugeordnete Gerade f die eine g von zwei einander zugeordneten Geraden g, g_1 schneidet, so muss sie auch die andere schneiden, indem die dem Punkte $f g$ zugeordnete Ebene sowohl durch die Gerade f als auch durch die Gerade g_1 gehen muss.

93. Ist in einem Nullsysteme dem Punkte S die Ebene U zugeordnet, so ist jeder Geraden, welche diese Ebene im Punkte S schneidet, eine Gerade zugeordnet, welche in der Ebene U liegt aber nicht durch den Punkt S geht, während jede Gerade, welche

in der Ebene U liegt und zugleich durch den Punkt S geht, sich selbst zugeordnet ist.

Durch eine Regelschaar pqr, einen ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkt S und eine Ebene U, welche durch diesen Punkt geht aber der Regelfläche sich nicht anschmiegt, ist ein Nullsystem bestimmt, in welchem jede Gerade der gegebenen Regelschaar sich selbst und der gegebene Punkt der gegebenen Ebene zugeordnet ist. — Sind a, a_1, b, b_1 vier Leitstrahlen der Regelschaar pqr, so dass die beiden Geraden, von welchen die eine den Punkt Ua mit dem Punkte Ua_1 und die andere den Punkt Ub mit dem Punkte Ub_1 verbindet, im Punkte S sich schneiden, so ist $aa_1 . bb_1 \ldots$ das erwähnte Nullsystem. Dem Punkte Ua ist die Ebene Sa_1 zugeordnet, welche die Regelfläche in der Geraden a_1 und in einer durch den Punkt Ua gehenden Geraden der Regelschaar pqr schneidet.

94. Jede Gerade, welche in einem Nullsysteme sich selbst zugeordnet ist, soll ein Leitstrahl des Systems heissen, so dass hiernach jede Gerade, welche irgend zwei einander zugeordnete Gerade schneidet, ein Leitstrahl des Systems ist und jeder Leitstrahl des Systems, welcher die eine von zwei einander zugeordneten Geraden schneidet, auch die andere schneidet.

Wenn also in einem Nullsysteme der Geraden a die Gerade a_1 und der Geraden b die Gerade b_1 zugeordnet ist, so schneidet jede Gerade, welche drei von den vier Geraden a, a_1, b, b_1 schneidet, auch die vierte, daher entweder $aa_1 . bb_1 \ldots$ eine in dem Systeme enthaltene involutorische Regelschaar ist oder die Gerade b die eine a und die Gerade b_1 die andere a_1 von den Geraden a, a_1 scheidet. Im letztern Falle ist dem Punkte ab die Ebene $a_1 b_1$ und der Ebene ab der Punkt $a_1 b_1$ zugeordnet.

95. In jedem Nullsysteme sind unendlich viele involutorische Regelschaaren enthalten. Durch je drei Leitstrahlen p, q, r des Systems, von welchen keine zwei sich schneiden, ist eine Regelschaar pqr bestimmt, deren Gerade sämmtlich Leitstrahlen des Systems sind, und welche daher von einer im Systeme enthaltenen involutorischen Regelschaar die Leitschaar ist.

Ist in einem Nullsysteme der Geraden a die Gerade a_1 zugeordnet und U eine Ebene, welche die beiden Geraden a, a_1 schneidet, so liegen die Schnittpunkte mit dem Nullpunkte S der Ebene in einer und derselben Geraden p. Jeder Geraden b, welche in der Ebene U liegt und die Gerade p in einem vierten Punkte schneidet, ist eine durch den Punkt S gehende Gerade b_1 zugeordnet, so dass $a a_1 . b b_1 \ldots$ eine in dem Nullsysteme enthaltene involutorische Regelschaar ist, welche keine Ordnungselemente oder zwei Ordnungselemente hat, je nachdem die Punkte S, pb durch die Punkte Ua, Ua_1 getrennt oder nicht getrennt sind. Im erstern Falle ist der Nullpunkt einer jeden der Regelfläche $a b a_1$ sich nicht anschmiegenden Ebene von der Curve eingeschlossen, in welcher die Ebene die Regelfläche schneidet, daher diese Fläche von jedem nicht in ihr liegenden Leitstrahle des Systems in zwei Punkten geschnitten wird. Im letztern Falle liegen in jeder der Regelfläche $a b a_1$ sich nicht anschmiegenden Ebene zwei Leitstrahlen r, s des Nullsystems, welche die Regelfläche berühren, so dass ein dritter in derselben Ebene liegende Leitstrahl des Systems die Regelfläche in zwei Punkten schneidet oder mit ihr gar keinen Punkt gemein hat, je nachdem er dem einen oder dem andern von den beiden Winkeln angehört, welche die Geraden r, s mit einander bilden.

96. Durch drei in einer und derselben Geraden m liegende Punkte A, B, C, dann drei in dieser Geraden sich schneidende Ebenen A_1, B_1, C_1 und eine Gerade n, welche mit der erstern Geraden keinen Punkt gemein hat, ist ein Nullsystem bestimmt, in welchem nämlich jede der Geraden m, n sich selbst zugeordnet ist und überdiess den Punkten A, B, C die Ebenen A_1, B_1, C_1 zugeordnet sind.

Es seien b, q, r die Geraden, welche die Punkte A, B, C beziehlich mit den Punkten $n A_1$ $n B$, $n C_1$ verbinden. Sind nun a, a_1 zwei Leitstrahlen der Regelschaar p q r, welche durch die Gerade n m, n harmonisch getrennt sind, so ist $m\, m . n\, n . a\, a_1 \ldots$ das im Satze erwähnte Nullsystem. Denn in dem Nullsysteme, in welchem die involutorische Regelschaar $m\, m . n\, n . a\, a_1$ enthalten und also jede der Geraden m, n, p, q, r sich selbst zugeordnet ist, sind den Punkten mp, mq, mr die Ebenen mp, mq, mr zugeordnet. Da übrigens jedem Punkte der Geraden m eine durch diese Gerade gehende Ebene zugeordnet ist, welche also mit der Geraden n nur einen Punkt gemein hat, mithin durch jeden Punkt der Geraden m nur der Leitstrahl des Systems geht, welcher auch die Gerade n schneidet, so folgt noch:

Alle Leitstrahlen eines Nullsystems, welche zwei gegebene nicht in einerlei Ebene liegende Leitstrahlen m, n schneiden, gehören einer und derselben Regelschaar an.

97. Durch eine involutorische Regelschaar $a a_1 . b b_1 \ldots$ und eine ausserhalb der Regelfläche liegende Gerade u ist eine Gerade u_1 bestimmt, welche nämlich in dem Nullsysteme $a a_1 . b b_1 \ldots$ der Geraden u zugeordnet ist.

Die involutorische Regelschaar $a a_1 . b b_1 \ldots$ wird von jeder durch die Gerade u gehenden der Regelfläche sich nicht anschmiegenden Ebene in einer involutorischen Curve geschnitten, deren Involutionscentrum (92) in der Geraden u_1 liegt, und aus jedem ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkte der Geraden u durch einen involutorischen Ebenenbüschel projicirt, dessen Involutionsebene durch die Gerade u geht. Ist die Gerade u in dem Nullsysteme $a a_1 . b b_1 \ldots$ sich selbst zugeordnet, so fällt u_1 mit u zusammen.

98. Wenn a, a_1, b, b_1 vier Gerade einer und derselben Regelschaar sind, die Gerade u aber dieser Regelschaar nicht angehört und auch keine der vier erstern Geraden schneidet, so berühren sich die Regelflächen $a a_1 u$, $b b_1 u$ entweder in der Geraden u oder es haben die Regelschaaren $a a_1 u$, $b b_1 u$ noch eine Gerade u_1 mit einander gemein.

Ist nämlich in dem Nullsysteme $a a_1 . b b_1 \ldots$ der Geraden u eine andere Gerade u_1 zugeordnet, so ist diese (94) eine Gerade der Regelschaar $a a_1 u$ und zugleich eine Gerade der Regelschaar $b b_1 u$. Wenn aber in dem erwähnten Nullsysteme die Gerade u sich selbst zugeordnet ist, so schneiden je zwei Gerade, welche mit der Geraden u in einerlei Ebene liegen und von welchen die eine ein Leitstrahl der Regelschaar $a a_1 u$, die andere ein Leitstrahl der Regelschaar $b b_1 u$ ist, die Gerade u in einem und demselben Punkte, nämlich in dem Nullpunkte der Ebene.

99. Wenn zwei Regelschaaren zwei Gerade a, a_1 mit einander gemein haben und eine Gerade p, welche weder durch einen beiden Regelflächen gemeinschaftlichen Punkt geht noch in einer

beiden Regelflächen sich anschmiegenden Ebene liegt, zwei Gerade b, b_1 der einen Regelschaar und zwei Gerade c, c_1 der andern Regelschaar schneidet, so gehören diese vier Geraden einer und derselben dritten Regelschaar an.

Es sei g der durch den Punkt $p\,c$ gehende Leitstrahl der Regelschaar $a\,a_1\,c$. Da nun in dem Nullsysteme $a\,a_1 . b\,b_1 \ldots$ jede der Geraden p, g sich selbst zugeordnet ist, die Gerade c aber ausserhalb der Ebene $p\,g$ liegt, so ist der Geraden c eine andere Gerade c_1 zugeordnet, welche die Gerade p in einem vom Punkte $p\,c$ verschiedenen Punkte schneidet und (94) sowohl der Regelschaar $a\,a_1\;c$ als auch der Regelschaar $b\,b_1\,c$ angehört.

100. Wenn zwei zu einander projektivische Regelschaaren $a\,a_1\,b \ldots$, $a_1\,a\,b_1 \ldots$ zwei Gerade a, a_1, welche einander abwechselnd entsprechen, aber keinen Leitstrahl mit einander gemein haben, so giebt es ihnen zu je zwei homologen Geraden b, b_1 zwei homologe Gerade c, c_1, so dass die vier Geraden b, b_1, c, c_1 einer und derselben Regelschaar angehören und in dieser die Geraden b, c durch die Geraden b_1, c_1 getrennt sind.

Es sei f irgend ein Leitstrahl der Regelschaar $a_1\,a\,b_1$, so geben durch den Punkt $b_1\,f$ zwei Tangenten der Curve, in welcher die Regelfläche $a\,a_1\;b$ von der Ebene $b_1\;f$ geschnitten wird. Da nun die Berührungspunkte dieser Tangenten durch die Geraden b_1, f getrennt sind, so sind auch der Berührungspunkt C der einen Tangente und der Punkt B, in welchem die Ebene $b_1\;f$ die Gerade b schneidet, durch die Geraden b_1, f getrennt, daher die Gerade BC zwei Gerade b, c der Regelschaar $a\,a_1\;b$ und zwei Gerade b_1, c_1 der Regelschaar $a_1\;a\;b_1$ schneidet und in der Regelfläche, in welcher (94) die vier Geraden b, c, b_1, c_1 liegen, die beiden erstern durch die beiden letztern getrennt sind. Da endlich der Punkt $b_1\;f$, die Gerade c und der durch den Punkt C gehende Leitstrahl p der Regelschaar $a\,a_1\;b$ in einerlei Ebene liegen, folglich der Wurf $p\;(a\,a_1\;b\,c)$ zu dem Wurf $f\;(a\,a_1\;c_1\;b_1)$ perspektivisch ist, so ist auch $a\,a_1\;b\,c \;\overline{\wedge}\; a\,a_1\;c_1\;b_1 \;\overline{\wedge}\; a_1\;a\,b_1\;c_1$.

§ 6.

Involutorische Systeme.

101. Ein involutorisches räumliches System soll, wenn es einen Ordnungspunkt und eine Ordnungsebene hat, perspektivisch-involutorisch, im entgegengesetzten Falle aber geschaart-involutorisch heissen. In einem perspektivisch-involutorischen Systeme sind je zwei einander zugeordnete Elemente durch den Ordnungspunkt und die Ordnungsebene harmonisch getrennt, daher jede sich selbst zugeordnete Gerade entweder der Träger eines im Systeme enthaltenen involutorischen geraden Gebildes oder die Axe eines im Systeme enthaltenen involutorischen Ebenenbüschels ist, je nachdem nämlich die Gerade durch den Ordnungspunkt geht oder in der Ordnungsebene liegt. Und wenn irgend eine in einem involutorischen räumlichen Systeme sich selbst zugeordnete Gerade u entweder der Träger eines im Systeme enthaltenen involutorischen geraden Gebildes oder die Axe eines im Systeme enthaltenen involutorischen Ebenenbüschels aber nicht beides zugleich ist, so ist das System perspektivisch-involutorisch. Im erstern Falle sind nämlich (G. 126) je zwei einander zugeordnete Strahlenbündel, welche zwei einander zugeordnete Punkte der Geraden u zu Mittelpunkten und also jede durch diese Gerade gehende Ebene entsprechend gemein haben, Scheine eines und desselben ebenen Systems, während im letztern Falle je zwei einander zugeordnete ebene Systeme, welche in der Geraden u sich schneiden, da sie alle Punkte dieser Geraden entsprechend gemein haben, Schnitte eines und desselben Strahlenbündels sind.

Wenn also in einem geschaart-involutorischen Systeme eine Gerade sich selbst zugeordnet ist, so ist entweder jeder in ihr liegende Punkt und jede durch sie gehende Ebene sich selbst zugeordnet, oder es ist die Gerade der Träger eines im Systeme enthaltenen involutorischen geraden Gebildes und zugleich die Axe eines im Systeme enthaltenen involutorischen Ebenenbüschels. Im erstern Falle soll die Gerade eine Ordnungslinie des involutorischen Systems, im letztern aber ein Leitstrahl desselben heissen.

Ist von einer in einem involutorischen Systeme enthaltenen involutorischen Regelschaar die Rede, so versteht es sich von selbst, dass das System ein geschaart-involutorisches ist, da in einem perspektivisch-involutorischen Systeme je zwei einander zugeordnete Gerade sich schneiden, demnach keine involutorische Regelschaar enthalten ist. Dass in einem geschaart-involutorischen Systeme nicht je zwei einander zugeordnete Gerade sich schneiden, geht daraus hervor, weil, wenn E, E_1 zwei einander zugeordnete Ebenen und P, P_1 zwei einander zugeordnete Punkte ihrer Schnittlinie sind, jeder Geraden, welche in der Ebene E liegt und durch den Punkt P geht, eine Gerade zugeordnet ist, welche in der Ebene E_1 liegt und durch den Punkt P_1 geht. Von welcher Art aber auch ein involutorisches räumliches System sein möge, so ist, wenn zwei Gerade, deren jede entweder sich selbst oder der andern zugeordnet ist, sich schneiden, sowohl ihr Schnittpunkt als auch die Ebene, in welcher sie liegen, sich selbst zugeordnet, daher durch jeden Punkt P, welcher einem andern Punkte P_1 zugeordnet ist, nur eine sich selbst zugeordnete Gerade $P\,P_1$ geht und in jeder Ebene, welche einer andern Ebene zugeordnet ist, nur eine sich selbst zugeordnete Gerade liegt.

102. Durch zwei involutorische Regelschaaren $a\,a_1 \,.\, b\,b_1 \,.\, c\,c_1 \ldots$, $p\,p_1 \,.\, q\,q_1 \,.\, r\,r_1 \ldots$, von welchen jede die Leitschaar der andern ist, ist ein involutorisches System bestimmt, in welchem die beiden ivolutorischen Regelschaaren enthalten sind.

Bezieht man nämlich zwei räumliche Systeme collineär so auf einander, dass den Geraden a, a_1, b, p, p_1, q des einen Systems die Geraden a_1, a, b_1, p_1, p, q_1 des andern entsprechen, so hat man ein involutorisches System, in welchem je zwei einander zugeordnete Gerade sowohl der einen als auch der andern Regelschaar ebenfalls einander zugeordnet sind. Dem Punkte $a\,p$ ist daher der Punkt $a_1\,p_1$, der Ebene $a\,p$ die Ebene $a_1\,p_1$, dem Schnittpunkte der drei Ebenen $a\,p$, $b\,q$, $c\,r$ der Schnittpunkt der drei Ebenen $a_1\,p_1$, $b_1\,q_1$, $c_1\,r_1$ und der durch die drei Punkte $a\,p$, $b\,q$, $c\,r$ gehenden Ebene die durch die drei Punkte $a_1\,p_1$, $b_1\,q_1$, $c_1\,r_1$ bestimmte Ebene zugeordnet. — Haben die involutorischen Regelschaaren (84) zwei Involutionsaxen f, g mit einander gemein, so ist jede dieser Geraden eine Ordnungslinie des Systems, indem die beiden involutorischen Regelschaaren.

von jeder der Regelfläche sich nicht anschmiegenden Ebene U, welche durch irgend eine von den Geraden f, g geht, in einem und demselben in dem involutorischen Systeme enthaltenen involutorischen Punktgebilde II. Ordnung geschnitten werden, daher die Ebene U sich selbst zugeordnet.

aus jedem ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkte, welcher der einen oder andern von den beiden Geraden f, g angehört, durch einen und denselben in dem involutorischen Systeme enthaltenen involutorischen Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt werden, daher der Punkt S sich selbst zugeordnet ist.

Hat die eine $a a_1 . b b_1 \ldots$ von den beiden involutorischen Regelschaaren zwei Ordnungselemente m, n, die andere aber keine Ordnungselemente, so ist in dem involutorischen Systeme kein Punkt und keine Ebene sich selbst zugeordnet. Denn jedem Punkte m p des geraden Gebildes m ist ein anderer Punkt $m p_1$ desselben, folglich jeder Ebene, welche die Gerade m schneidet, eine andere Ebene zugeordnet. Eben so ist jeder Ebene m p des Ebenenbüschels m eine andere Ebene $m p_1$ desselben und daher auch jedem ausserhalb der Geraden m liegenden Punkte ein anderer Punkt zugeordnet.

103. Durch zwei involutorische Regelschaaren $a a_1 . b b_1 \ldots$, $p p_1 . q q_1 \ldots$, von welchen jede die Leitschaar der andern ist, sind ein involutorisches System und ein gewöhnliches Polarsystem bestimmt, so dass sowohl in dem einen als auch in dem andern dieser Systeme die beiden involutorischen Regelschaaren enthalten sind. Wenn nun irgend einem Elemente P in dem ersten Systeme das Element P_1, im zweiten das Element P_2 und in dem Polarsysteme, dessen Ordnungsfläche die Regelfläche ist, das Element P_3 zugeordnet ist, so ist in dem ersten Systeme dem Elemente P_2 das Element P_3, im zweiten dem Elemente P_1 das Element P_3 und im dritten dem Elemente P_1 das Element P_2 zugeordnet. Fallen zwei der Elemente P, P_1, P_2, P_3 in einander, so fallen auch die beiden übrigen in einander. Wenn endlich das Element P in zweien der drei Systeme sich selbst zugeordnet ist, so ist es auch im dritten sich selbst zugeordnet.

In dem involutorischen Systeme ist dem Punkte ap der Punkt $a_1 p_1$ und der Ebene $a_1 p_1$ die Ebene ap zugeordnet, während in dem erstern Polarsysteme dem Punkte ap die Ebene $a_1 p_1$ und dem Punkte $a_1 p_1$ die Ebene ap, im letztern aber dem Punkte ap die Ebene a p und dem Punkte a_1 p_1 die Ebene a_1 p_1 zugeordnet ist. Da nun jede der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebene durch drei Punkte, welche sie mit der Regelfläche gemein hat, bestimmt ist, jeder ausserhalb der Regelfläche liegende Punkt aber als Schnittpunkt von drei dieser Fläche sich anschmiegenden Ebenen und jede Gerade als Träger von Punkten oder als Schnittlinie von Ebenen betrachtet werden kann, so folgt, dass der obige Satz für jedes Element P gilt. Die Gerade, welche den Punkt a p mit dem Punkte $a_1 p_1$ verbindet, ist in dem involutorischen Systeme sich selbst, in den beiden Polarsystemen aber der Schnittlinie der Ebenen a p, $a_1 p_1$ zugeordnet, welche in jenem Systeme ebenfalls sich selbst zugeordnet ist.

104. Durch eine involutorische Regelschaar $a a_1 . b b_1 . c c_1 \ldots$ ist ein involutorisches System $a_1 a . b b_1 . c c_1 \ldots$ bestimmt, in welchem nämlich die involutorische Regelschaar enthalten und jeder Leitstrahl derselben sich selbst zugeordnet ist.

Es seien p, q, r irgend drei Leitstrahlen der gegebenen Regelschaar. Bezieht man nun zwei räumliche Systeme collineär so auf einander, dass den Geraden a, a_1, b, p, q, r des einen Systems die Geraden a_1, a, b_1, p, q, r des andern entsprechen, so hat man das im Satze erwähnte involutorische System. Dem Punkte a p ist der Punkt a_1p, der Ebene a p die Ebene a_1p, dem Schnittpunkte der drei Ebenen a p, b q, c r der Schnittpunkt der drei Ebenen a_1p, b_1 q, c_1 r und der durch die drei Punkte a p, b q, c r bestimmten Ebene die durch die drei Punkte a_1 p, b_1 q, c_1 r gehende Ebene zugeordnet.

Enthält die involutorische Regelschaar zwei sich selbst zugeordnete Gerade m, n, so ist jede dieser Geraden eine Ordnungslinie des Systems, indem, was auch p für ein Leitstrahl der Regelschaar sein mag, jeder von den beiden Punkten m p, n p und jede von den beiden Ebenen m p, n p sich selbst zugeordnet ist. Hat aber die gegebene involutorische Regelschaar keine Ordnungselemente, so ist in dem involutorischen Systeme kein Punkt und keine Ebene sich selbst zugeordnet. Denn jedem Punkte der Geraden p ist ein anderer Punkt derselben, demnach jeder Ebene, welche die Gerade p schneidet, eine andere Ebene zugeordnet. Eben so ist jeder

Ebene des Ebenenbüschels p eine andere Ebene desselben und also auch jedem ausserhalb der Geraden p liegenden Punkte ein anderer Punkt zugeordnet.

105. Durch eine involutorische Regelschaar $aa_1 . bb_1 \ldots$ und ein Element P, welches weder in dem involutorischen Systeme $aa_1 . bb_1 \ldots$ noch in dem Nullsysteme $aa_1bb_1 \ldots$ noch in dem durch die Regelfläche bestimmten gewöhnlichen Polarsysteme sich selbst zugeordnet ist, sind drei andere Elemente P_1, P_2, P_3 bestimmt, so dass in dem ersten der erwähnten Systeme dem Elemente P das Element P_1 und dem Elemente P_2 das Element P_3, im zweiten dem Elemente P das Element P_2 und dem Elemente P_1 das Element P_3, im dritten endlich dem Elemente P das Element P_3 und dem Elemente P_1 das Element P_2 zugeordnet ist. Jedes Element, welches in irgend einem aber auch nur in einem der drei Systeme sich selbst zugeordnet ist, ist in den beiden übrigen Systemen einem und demselben andern Elemente zugeordnet, welches in jenem Systeme ebenfalls sich selbst zugeordnet ist. Ist ein Element in zweien der drei Systeme sich selbst zugeordnet, so ist es auch im dritten sich selbst zugeordnet.

Je zwei zusammengehörige Involutionsaxen der involutorischen Regelschaar sind sowohl in dem Nullsysteme als auch in dem gewöhnlichen Polarsysteme einander zugeordnet, daher nicht nur jeder Leitstrahl der involutorischen Regelschaar sondern auch jede Involutionsaxe derselben ein Leitstrahl des involutorischen Systems und jeder Leitstrahl dieses Systems entweder ein Leitstrahl der involutorischen Regelschaar oder eine Involutionsaxe derselben ist. Je zwei in dem involutorischen Systeme einander zugeordnete

Ebenen sind in dem Polarsysteme einander conjugirt, indem der Pol einer jeden der Nullpunkt der andern ist, mithin in der andern liegt. Und wenn zwei Ebenen, deren Schnittlinie ein ausserhalb der Regelfläche liegender Leitstrahl des involutorischen Systems ist, in dem Polarsysteme einander conjugirt

Punkte sind in dem Polarsysteme einander conjugirt, indem die Polare eines jeden die Nullebene des andern ist, also durch den andern geht. Und wenn zwei Punkte, welche einem und demselben ausserhalb der Regelfläche liegenden Leitstrahle des involutorischen Systems angehören, in dem Polarsysteme einander sind, so sind sie in dem involutorischen Systeme einander zugeordnet.

conjugirt sind, so sind sie in dem involutorischen Systeme einander zugeordnet.

106. Durch drei Gerade p, q, r, welche einer und derselben Regelschaar angehören, und eine vierte Gerade s, welche entweder die Regelfläche in zwei Punkten schneidet oder mit derselben gar keinen Punkt gemein hat, ist eine involutorische Regelschaar $a\,a_1$ $b\,b_1 \ldots$, von welcher die Regelschaar p q r die Leitschaar und die Gerade s eine Involutionsaxe ist, und mithin auch (105) ein involutorisches System $a\,a_1 . b\,b_1 \ldots$ bestimmt, von welchem die vier gegebenen Geraden Leitstrahlen sind.

Wenn die Gerade s die gegebene Regelfläche und also auch zwei Gerade m,n der Regelschaar $a\,a_1\,b$ schneidet, so hat das involutorische System zwei Ordnungslinien m,n. Giebt es aber keine Gerade, welche die vier gegebenen Geraden schneidet, so ist in dem involutorischen Systeme kein Punkt und keine Ebene sich selbst zugeordnet.

107. Jedes geschaart-involutorische System enthält unendlich viele involutorische Regelschaaren, deren Leitstrahlen sämmtlich Leitstrahlen des Systems sind, so wie auch unendlich viele involutorische Regelschaaren, deren jede von einer andern in dem Systeme enthaltenen involutorischen Regelschaar die Leitschaar ist.

Denn je zwei einander zugeordnete gerade Gebilde E F G H ..., $E_1 F_1 G_1 H_1 \ldots$, welche nicht in einerlei Ebene liegen, erzeugen eine zu ihnen perspektivische Regelschaar, deren Gerade sämmtlich Leitstrahlen des Systems sind, und welche daher von einer im Systeme enthaltenen involutorischen Regelschaar die Leitschaar ist. Da ferner der Wurf E F G H auch zu dem Wurfe $F_1 E_1 H_1 G_1$ projektivisch ist, folglich auch die Geraden e, e_1, g, g_1, welche die Punkte E,F,G,H beziehlich mit den Punkten F_1, E_1, H_1, G_1, verbinden, einer und derselben Regelschaar angehören und den Geraden e, g die Geraden e_1, g_1 zugeordnet sind, so ist auch $e\,e_1 . g\,g_1 \ldots$ eine in dem Systeme enthaltene involutorische Regelschaar, welche aber von einer andern in demselben enthaltenen involutorischen Regelschaar die Leitschaar ist.

Alle Leitstrahlen eines geschaart-involutorischen Systems, welche eine und dieselbe Gerade, die mit der ihr zugeordneten Geraden nicht in einerlei Ebene liegt, schneiden, gehören nach dem Obigen einer und derselben Regelschaar an. Durch je drei Leitstrahlen p,qr des Systems, von welchen keine zwei sich schneiden, ist eine Regelschaar pqr bestimmt, deren Gerade sämmtlich Leitstrahlen des Systems sind, und welche daher von einer im Systeme enthaltenen involutorischen Regelschaar die Leitschaar ist. — Wenn in einem involutorischen Systeme die Gerade a der Geraden a_1 zugeordnet, die Gerade h aber entweder ein Leitstrahl oder eine Ordnungslinie des Systems ist und keine zwei von den drei Geraden a, a_1, h in einerlei Ebene liegen, so ist $h\,h\,.\,a\,a_1 \ldots$ eine im Systeme enthaltene involutorische Regelschaar, welche im erstern Falle von einer andern im Systeme enthaltenen involutorischen Regelschaar die Leitschaar ist, während im letztern Falle alle Leitstrahlen der Regelschaar $h\,a\,a_1$ Leitstrahlen des Systems sind.

108. Ein geschaart-involutorisches System hat entweder zwei nicht in einerlei Ebene liegende Ordnungslinien m,n, oder es ist in demselben kein Punkt und keine Ebene sich selbst zugeordnet, je nachdem nämlich (104) irgend eine in dem Systeme enthaltene involutorische Regelschaar, deren Leitstrahlen sämmtlich Leitstrahlen des Systems sind, zwei Ordnungselemente m,n oder keine Ordnungselemente hat. Ist eine in dem Systeme enthaltene involutorische Regelschaar von einer andern im Systeme enthaltenen involutorischen Regelschaar die Leitschaar, so hat (102) im erstern Falle entweder jedes dieser Gebilde zwei Leitstrahlen des Systems zu Ordnungselementen oder es hat keines derselben zwei Ordnungselemente, während im letztern Falle das eine von den beiden involutorischen Gebilden zwei Ordnungselemente das andere aber keine solche Elemente hat.

Hat ein involutorisches System zwei Ordnungslinien, so ist jede Ebene, welche durch eine dieser Geraden geht, der Träger eines in dem involutorischen räumlichen Systeme enthaltenen involutorischen ebenen Systems und jeder Punkt, welcher in irgend einer von den beiden Ordnungslinien liegt, der Mittelpunkt eines in dem involutorischen räumlichen Systeme enthaltenen involutorischen Strahlenbündels, daher in dem involutorischen räumlichen Systeme unendlich viele involutorische Elementargebilde jeder Art enthalten sind und jedes in ihm enthaltene involutorische Elementargebilde, welches keine Regelschaar ist, zwei Ordnungselemente hat. Jede Gerade, welche beide Ordnungslinien schneidet, ist ein Leitstrahl des Systems, während jede Gerade, welche entweder mit keiner von den beiden Ordnungslinien einen Punkt gemein hat oder nur die eine schneidet, einer andern Geraden zugeordnet ist. Im erstern dieser Fälle sind die einander zugeordneten Geraden durch die beiden Ordnungslinien harmonisch getrennt, durch welche auch je zwei einander zugeordnete Punkte und je zwei einander zugeordnete Ebenen harmonisch getrennt sind. Im letztern Falle, wenn nämlich die einander zugeordneten Geraden sich schneiden, sind sie durch die Ordnungslinie, welche ihren Schnittpunkt enthält und mit ihnen in einerlei Ebene liegt, und den in dieser Ebene befindlichen Punkt der andern Ordnungslinie harmonisch getrennt. Das involutorische System, dessen Ordnungslinien die Geraden m,n sind, kann auch, da es durch diese Linien bestimmt ist, durch (m,n) bezeichnet werden.

Ist in einem involutorischen Systeme kein Punkt und keine Ebene sich selbst zugeordnet, so liegen weder zwei einander zugeordnete Gerade noch zwei Leitstrahlen des Systems in einerlei Ebene, daher durch jeden Punkt nur ein Leitstrahl des Systems geht und in jeder Ebene nur ein Leitstrahl desselben liegt. Jedes in dem Systeme enthaltene involutorische Elementargebilde, welches keine Regelschaar ist, ist entweder ein Punktgebilde oder ein Ebenenbüschel I. Ordnung, in welchem jedes Elementenpaar durch jedes andere Elementenpaar getrennt ist. Durch je drei Leitstrahlen p,q,r des Systems ist eine Regelschaar pqr bestimmt, deren Gerade sämmtlich Leitstrahlen des Systems sind. Da nun durch jeden Punkt nur ein Leitstrahl des Systems geht, mithin die Regelfläche pqr mit keinem ausserhalb derselben liegenden Leitstrahle des Systems einen Punkt gemein hat, so folgt, dass je zwei einander zugeordnete Gerade, welche weder Leitstrahlen der Regelschaar pqr sind noch die Regelfläche schneiden, auf einerlei Seite derselben liegen. Hat eine andere Regelschaar stu, deren Gerade sämmtlich Leitstrahlen des Systems sind, mit der erstern zwei Gerade gemein, so wird durch diese jede von den beiden Regelflächen in zwei Theile getheilt, welche auf entgegengesetzten Seiten der andern liegen. Haben aber die Regelschaaren pqr, stu nur eine

Gerade mit einander gemein, so berühren sich die Regelflächen in dieser Geraden, da sie keinen ausserhalb derselben liegenden Punkt mit einander gemein haben. Wenn endlich die Regelschaaren pqr, stu keine Gerade mit einander gemein haben, so haben auch die beiden Regelflächen keinen Punkt mit einander gemein.

109. Wenn $aa_1 . bb_1 \ldots$, $pp_1 . qq_1 \ldots$ zwei involutorische Regelschaaren sind, von welchen jede die Leitschaar der andern ist, und dem Elemente P in dem involutorischen Systeme $aa_1 . bb_1 \ldots$ das Element P_1, in dem involutorischen Systeme $pp_1 . qq_1 \ldots$ das Element P_2 und in dem involutorischen Systeme, in welchem (102) die beiden involutorischen Regelschaaren enthalten sind, das Element P_3 zugeordnet ist, so ist auch in dem ersten Systeme dem Element P_2 das Element P_3, im zweiten dem Elemente P_1 das Element P_3 und im dritten dem Element P_1 das Element P_2 zugordnet. Da nämlich der Satz, wie man sich leicht überzeugt, für jedes Element P gilt, welches entweder in der Regelfläche liegt oder derselben sich anschmiegt, so folgt, wie in 103, dass er auch für jedes andere Element gelte. Hat jede von den beiden involutorischen Regelschaaren zwei Ordnungselemente, so hat auch jedes der drei involutorischen Systeme zwei Ordnungslinien und zwar sind diese drei Paar Ordnungslinien die drei Paar Gegenkanten eines Tetraeders. In jedem andern Falle hat nur das eine der drei Systeme zwei Ordnungslinien.

Durch jedes Element Q, welches weder in dem involutorischen Systeme $aa_1 . bb_1 \ldots$, noch in dem Nullsysteme $pp_1\, qq_1 \ldots$, noch in dem gewöhnlichen Polarsysteme, in welchem die beiden involutorischen Regelschaaren enthalten sind, sich selbst zugeordnet ist, sind auch drei andere Elemente Q_1, Q_2, Q_3 bestimmt, so dass in dem ersten dieser Systeme sowohl die Q, Q_1 als auch die Elemente Q_2, Q_3, im zweiten sowohl die Elemente Q, Q_2 als auch die Elemente Q_1, Q_3 und im dritten sowohl die Elemente Q, Q_3 als auch die Elemente Q_1, Q_2 einander zugeordnet sind. Ist ein Element S in irgend einem der drei Systeme sich selbst zugeordnet, so ist es entweder in den beiden übrigen einem und demselben andern Elemente zugeordnet, welches in jenem Systeme ebenfalls sich selbst zugeordnet ist, oder es ist das Element S in jedem der drei Systeme sich selbst zugeordnet.

110. Wenn p, q, r, s, t fünf Leitstrahlen eines und desselben

involutorischen Systems sind, welches keine Ordnungslinien hat, und die Geraden s, t ausserhalb der Regelfläche p q r und zwar auf einerlei Seite derselben liegen, so giebt es zwei Regelflächen, deren jede durch die beiden Geraden s, t geht und die Regelfläche p q r in einer Geraden der Regelschaar p q r berührt.

Es sei U irgend eine durch die Gerade s gehende Ebene, so schneidet diese die Regelfläche p q r in einer Curve K, von welcher zwei Tangenten f, g durch den Punkt U t gehen. Sind nun m, n diejenigen Geraden der Regelschaar p q r, welche beziehlich die Geraden f, g schneiden, so sind (108) m s t, n s t die im Satze erwähnten Regelflächen. — Je zwei Gerade der Regelschaar p q r, welche durch die Geraden m, n harmonisch getrennt sind, liegen mit den beiden Geraden s, t in einer und derselben Regelfläche, weil alle Leitstrahlen des involutorischen Systems, welche eine und dieselbe Gerade schneiden, einer und derselben Regelschaar angehören. Sind zwei Leitstrahlen s, u des involutorischen Systems durch die Regelfläche p q r getrennt, so kann man zwar auch die Geraden der Regelschaar p q r involutorisch so paaren, dass je zwei einander zugeordnete Gerade mit den beiden Geraden s, u in einer und derselben Regelfläche liegen; die involutorische Regelschaar hat aber in diesem Falle keine Ordnungselemente. Uebrigens hängen mit dem obigen Satze noch nachstehende zusammen:

Haben zwei Regelschaaren p q r, p q s zwei Gerade p, q aber keinen Leitstrahl mit einander gemein, so gehen durch je zwei auf einerlei Seite der einen Regelfläche liegende Gerade s, t der andern zwei Regelflächen, deren jede die erstere in einer Geraden der Regelschaar p q r berührt. Denn die Gerade t ist ein Leitstrahl des involutorischen Systems, welches (106) durch die vier Geraden p, q, r, s bestimmt ist. — Haben zwei Regelschaaren p s t, p q r eine Gerade p mit einander gemein, in welcher alle gemeinschaftlichen Punkte der beiden Regelflächen liegen, so geht durch je zwei andere Gerade s, t der einen Regelschaar noch eine Regelfläche, welche die andere Regelfläche in einer Geraden der Regelschaar p q r berührt. Denn in dem durch die vier Leitstrahlen p, q, r, s bestimmten involutorischen Systeme ist jeder Geraden, welche die Regelfläche p q r in einem Punkte der Geraden p berührt und die Gerade s schneidet, folglich ein Leitstrahl der Regelschaar p s t ist, ein anderer Leitstrahl dieser Regelschaar zugeordnet, woraus man schliessen kann, dass auch jede Gerade der Regelschaar ps t ein Leitstrahl des erwähnten Systems ist.

111. Wenn $a a_1 b c \ldots$, $a_1 a b_1 c_1 \ldots$ zwei zu einander projektivische Regelschaaren sind und auch die Geraden b, b_1, c, c_1 einer und derselben Regelschaar angehören, so ist in dem involutorischen Systeme $b b_1 . c c_1 \ldots$ der Geraden a die Gerade a_1 zugeordnet.

Wenn nämlich die Geraden a, a_1 der Regelschaar $b b_1 c$ angehören, so ist $a a_1 . b b_1 . c c_1$ eine Involution. Wenn aber die Geraden a, a_1 ausserhalb der Regelfläche $b b_1 c$ liegen, so enthält jede dieser Fläche sich nicht anschmiegende Ebene U, welche durch die Gerade a_1 geht, zwei in einem Punkte der Geraden a sich schneidende Gerade, von welchen die eine f ein Leitstrahl der Regelschaar $a b c$ und die andere g ein Leitstrahl der Regelschaar $a b_1 c_1$ ist. Da nun der Wurf $f(a a_1 b c)$ zu dem Wurfe $g(a_1 a b_1 c_1)$ und also auch zu dem Wurfe $g(a a_1 c_1 b_1)$ projektivisch ist, so liegt der Schnittpunkt P der Geraden, welche die Punkte Ub, Uc beziehlich mit den Punkten Uc_1, Ub_1 verbinden, in der Geraden a_1. Da ferner die Gerade, welche den Punkt Ua mit dem Punkte P verbindet, die Involutionsaxe der involutorischen Curve ist, in welcher die Ebene U die involutorische Regelschaar $b b_1 . c c_1 \ldots$ schneidet, so ist sie auch eine Involutionsaxe dieser involutorischen Regelschaar und daher ein Leitstrahl des involutorischen Systems $b b_1 . c c_1 \ldots$. Da endlich die Punkte Ua, P in Hinsicht auf die erwähnte Curve und also auch in Hinsicht auf die Regelfläche $b b_1 c$ einander conjugirt sind, so ist (105) in dem involutorischen Systeme $b b_1 . c c_1 \ldots$ dem Punkte Ua der Punkt P und so jedem Punkte der Geraden a ein Punkt der Geraden a_1, folglich der Geraden a die Gerade a_1 zugeordnet.

112. Durch vier Gerade a, a_1, b, b_1, welche nicht von einer und derselben fünften Geraden geschnitten werden, sind zwei Gerade bestimmt, welche nämlich sowohl durch die beiden erstern als auch durch die beiden letztern der vier gegebenen Geraden harmonisch getrennt sind.

Nach 100 enthält die Regelschaar $a a_1 b$ eine Gerade c und die Regelschaar $a_1 a b_1$ eine Gerade c_1, so dass der Wurf $a a_1 b c$ zu dem Wurfe $a_1 a b_1 c_1$ projektivisch und $b b_1 . c c_1 \ldots$ eine involutorische Regelschaar ist, welche zwei Ordnungselemente m, n hat. Da nun (111) in dem involutorischen Systeme $b\, b_1 . c\, c_1 \ldots$, dessen Ordnungslinien die Geraden m, n sind, der Geraden a die Gerade a_1 zugeordnet ist, so sind die Geraden m, n auch durch die Geraden a, a_1 harmonisch getrennt. Und wenn zwei Gerade s, t sowohl durch die Geraden a, a_1 als auch durch die Geraden b, b_1 harmonisch getrennt sind, so ist in dem involutorischen Systeme (s, t) der Regelschaar $a\, a_1\, b$ die Regelschaar $a_1\, a\, b_1$ und also auch, da $a\, a_1\, b\, c \barwedge a_1\, a\, b_1\, c_1$ ist, der Geraden c die Gerade c_1, mithin jede der Geraden m, n sich selbst zugeordnet. Wären nun s, t zwei von m, n verschiedene Gerade und also m, n zwei Leitstrahlen des Systems (s, t), so wären m, n, s, t vier Kanten eines und desselben Tetraeders, dessen beide übrigen Kanten (27) sowohl die Geraden a, a_1 als auch die Geraden b, b_1 schneiden müssten, was gegen die Annahme ist. Es giebt also ausser den Geraden m, n nicht noch zwei Gerade, welche durch die Geraden a, a_1 und zugleich durch die Geraden b, b_1 harmonisch getrennt sind.

Bemerkt wird noch, dass alle Geraden der Regelschaaren $a\, a_1\, b$, $a\, a_1\, b_1$, $b\, b_1\, c$ und also auch die Geraden m, n Leitstrahlen desjenigen involutorischen Systems sind, welches (106) durch die vier Leitstrahlen a, a_1, b, b_1 bestimmt ist.

113. In jedem geschaart-involutorischen Systeme Σ, welches keine Ordnungslinien hat, sind durch vier Leitstrahlen a, a_1, b, b_1 zwei Leitstrahlen bestimmt, welche nämlich sowohl durch die beiden erstern als auch durch die beiden letztern der vier gegebenen Leitstrahlen harmonisch getrennt sind.

Da durch jeden Punkt nur ein Leitstrahl des Systems Σ geht, so haben die Regelfläche $a\, a_1\, b$ und die Gerade b_1 entweder gar keinen Punkt mit einander gemein, in welchem Falle der Satz aus dem vorigen folgt, oder es gehören die vier Geraden a, a_1, b, b_1 einer und derselben Regelschaar an. Enthält nun die involutorische Regelschaar $a\, a_1 . b\, b_1 \ldots$ zwei sich selbst zugeordnete Gerade m, n, so sind diess die im Satze erwähnten Leitstrahlen des involutorischen Systems Σ. Je zwei ausserhalb der Regelfläche liegende Gerade, welche sowohl durch die Geraden a, a_1 als auch durch die Geraden b, b_1 harmonisch getrennt sind, schneiden (78) die Geraden m, n und sind daher keine Leitstrahlen des involutorischen

Systems Σ. Wenn aber die involutorische Regelschaar $aa_1 . bb_1 \ldots$ keine Ordnungselemente hat, so hat sie (84) mit der in dem Systeme Σ enthaltenen involutorischen Regelschaar, von welcher sie die Leitschaar ist, zwei aber auch nur zwei Involutionsaxen m, n gemein, so dass es also auch in diesem Falle nur zwei Gerade m,n giebt, welche sowohl durch die Geraden a, a_1 als auch durch die Geraden b, b_1 harmonisch getrennt und zugleich Leitstrahlen des involutorischen Systems Σ sind.

114. Wenn p, q, r irgend drei Leitstrahlen eines geschaart-involutorischen Systems sind, welches keine Ordnungslinien hat, und zwei gerade Gebilde A B C, E F G, von welchen das erstere in der Geraden p, das letztere aber in der Geraden q liegt, in Hinsicht auf die Gerade r in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so sind sie auch (55) in Hinsicht auf jeden vierten Leitstrahl des Systems in einem und demselben Sinne beschrieben, daher man sagen kann, dass in dem involutorischen Systeme der Sinn A B C mit dem Sinne E F G und ebenso der Sinn q(A B C) mit dem Sinne p(E F G) übereinstimme. Wenn ferner (62) eine Regelschaar a b c, deren Leitstrahlen s, t, u u. s. w. sämmtlich Leitstrahlen des Systems sind, im Sinne A B C beschrieben ist, so ist sie auch im Sinne E F G so wie auch im Sinne q (A B C) und im Sinne p(E F G) beschrieben.

Denn nach der Annahme und nach dem Obigen sind die drei geraden Gebilde t(a b c), A B C, E F G in Hinsicht auf die Gerade s in einem und demselben Sinne beschrieben, daher das erste und zweite auch in Hinsicht auf die Gerade q, das erste und dritte aber auch in Hinsicht auf die Gerade p in einem und demselben Sinne beschrieben sind.

115. Wenn ein geschaart-involutorisches System keine Ordnungslinien hat und zwei Regelschaaren a b c, e f g, deren Leitstrahlen sämmtlich Leitstrahlen des Systems sind, in Hinsicht auf irgend einen Leitstrahl p desselben in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so sind sie auch in Hinsicht auf jeden andern Leitstrahl q des Systems in einem und demselben Sinne beschrieben, daher man sagen kann, dass in dem involutorischen Systeme der Sinn a b c mit dem Sinne e f g übereinstimme.

Es seien A, B, C drei Punkte der Geraden p und E, F, G drei Punkte der Geraden q, so dass (114) in dem involutorischen Systeme der Sinn ABC mit dem Sinne EFG übereinstimmt. Sind nun die beiden Regelschaaren abc, efg im Sinne ABC beschrieben, so sind auch beide im Sinne EFG so wie auch im Sinne $q(ABC)$ und im Sinne $p(EFG)$, also in Hinsicht auf jeden Leitstrahl des involutorischen Systems, man mag denselben als Träger von Punkten oder als Schnittlinie von Ebenen betrachten, in einem und demselben Sinne beschrieben.

---

§. 7.

Imaginäre Elemente.

116. Wenn man mit einem involutorischen einförmigen Gebilde, $AA_1 . BB_1 \ldots$, welches keine Ordnungselemente hat, einen bestimmten in demselben enthaltenen Sinn ABA_1 verbindet, so hat man ein imaginäres Element ABA_1B_1 I. Art, nämlich einen imaginären Punkt, oder eine imaginäre Gerade I. Art oder eine imaginäre Ebene, je nachdem das einförmige Gebilde ein Punktgebilde oder ein Strahlenbüschel oder ein Ebenenbüschel ist. Verbindet man mit demselben involutorischen Gebilde den entgegengesetzten Sinn, so erhält man das imaginäre Element A_1BAB_1, welches dem erstern conjungirt heissen soll. Elemente werden aber dergleichen Verbindungen zweier Begriffe nur aus dem Grunde genannt, weil sie häufig die Stelle von wirklichen (reellen) Elementen vertreten.

Ist von einem imaginären Elemente ABA_1B_1 I. Art die Rede, so versteht es sich von selbst, dass A, B, A_1,B_1 vier reelle Elemente eines und desselben einförmigen Gebildes und in diesem die Elemente A, A_1 durch die Elemente B, B_1 getrennt sind. Das imaginäre Element EFE_1F_1 fällt mit dem erstern zusammen, so dass also ABA_1B_1, EFE_1F_1 nur verschiedene Darstellungen eines und desselben imaginären Elements sind, wenn das involutorische Gebilde $EE_1 . FF_1 \ldots$ mit dem involutorischen Gebilde $AA_1 . BB_1 \ldots$ identisch ist und überdiess der Sinn EFE_1 mit dem Sinne ABA_1 übereinstimmt. Namentlich kann also das imaginäre Element ABA_1B_1 auch durch BA_1B_1A oder A_1B_1AB oder B_1ABA_1 und das demselben conjungirte Element A_1BAB_1 auch durch BAB_1A_1 oder AB_1A_1B oder B_1A_1BA dargestellt werden.

117. Verbindet man mit einem geschaart-involutorischen Systeme $aa_1 . bb_1 \ldots$, welches keine Ordnungslinien hat, einen bestimmten in der involutorischen Regelschaar $aa_1 . bb_1 \ldots$ enthaltenen Sinn aba_1, so hat man eine imaginäre Gerade aba_1b_1 II. Art. Verbindet man mit demselben Systeme den entgegengesetzten Sinn, so erhält man die der erstern Geraden conjungirte Gerade a_1bab_1.

Ist von einer imaginären Geraden aba_1b_1 II. Art die Rede, so versteht es sich von selbst, dass a, b, a_1, b_1 vier reelle Gerade einer und derselben Regelschaar und in dieser die Geraden a, a_1 durch die Geraden b, b_1 getrennt sind. Die imaginäre Gerade efe_1f_1 fällt mit der erstern zusammen, so dass also aba_1b_1, efe_1f_1 nur verschiedene Darstellungen einer und derselben imaginären Geraden sind, wenn das involutorische System $ee_1 . ff_1 \ldots$ mit dem involutorischen Systeme $aa_1 . bb_1 \ldots$ identisch ist und überdiess der Sinn efe_1 mit dem Sinne aba_1 übereinstimmt. Namentlich kann also die imaginäre Gerade aba_1b_1 auch durch ba_1b_1a oder a_1b_1ab oder b_1aba_1 und die ihr conjungirte Gerade a_1bab_1 auch durch bab_1a_1 oder ab_1a_1b oder b_1a_1ba dargestellt werden.

Ausser den in dieser und der vorigen Nummer erwähnten imaginären Elementen giebt es keine andern.

118. Die Darstellungen aba_1b_1, efe_1f_1 von zwei imaginären Elementen oder auch zwei Darstellungen aba_1b_1, efe_1f_1 eines und desselben imaginären Elements sollen zu einander projektivisch heissen, wenn die beiden Würfe aba_1b_1, efe_1f_1 zu einander projektivisch sind. Ist ein imaginäres Element durch einen harmonischen Wurf aba_1b_1 dargestellt, so soll diese Darstellung desselben eine harmonische heissen. — Unter allen Darstellungen eines und desselben imaginären Elements ghg_1h_1, welche von einem und demselben Elemente e ausgehen, ist eine aber auch nur eine, welche zu einer gegebenen Darstellung aba_1b_1 eines andern oder auch desselben imaginären Elements projektivisch, und also auch nur eine, welche harmonisch ist.

Ist ghg_1h_1 ein imaginäres Element I. Art, so giebt es (83) zu jedem reellen Elemente e, welches dem einförmigen Gebilde $ghg_1 \ldots$ angehört, drei andere reelle Elemente e_1, f, f_1, so dass efe_1f_1 eine zu aba_1b_1 projektivische Darstellung des imaginären

Elements $g h g_1 h_1$ ist. Ist $g h\ g_1 h_1$ eine imaginäre Gerade II. Art, so sind durch jede reelle Gerade e, welche kein Leitstrahl des involutorischen Systems $g g_1 . h h_1 \ldots$ ist, drei andere reelle Gerade e_1, f, f_1 bestimmt, so dass $e f e_1 f_1$ eine zu $a b a_1 b_1$ projektivische Darstellung der imaginären Geraden $g h g_1 h_1$ ist. Alle Leitstrahlen des involutorischeu Systems $g g_1 . h h_1 \ldots$, welche die Gerade e schneiden, gehören einer und derselben Regelschaar an, welche von einer in dem Systeme enthaltenen involutorischen Regelschaar $e e_1\ .\ f f_1 \ldots$ die Leitschaar ist.

119. Von einem imaginären Elemente $A B A_1 B_1$ soll gesagt werden, dass es

in dem reellen Elemente u liege, wenn in diesem alle Elemente des involutorischen Gebildes $A A_1 . B B_1 \ldots$ liegen. Jeder imaginäre Punkt liegt daher in e i n e r reellen Geraden und in allen den reellen Ebenen, welche in dieser Geraden (dem reellen Träger des imaginären Punkts) sich schneiden.

durch das reelle Element s gehe, wenn durch dieses alle Elemente des involutorischen Gebildes $A A_1 . B B_1 \ldots$ gehen. Jede imaginäre Ebene geht hiernach durch e i n e reelle Gerade und durch alle die reellen Punkte, welche in dieser Geraden (der reellen Axe der imaginären Ebene) sich befinden.

Jede imaginäre Gerade I. Art liegt in einer reellen Ebene und geht durch einen reellen Punkt, während eine imaginäre Gerade II. Art weder in einer reellen Ebene liegt noch durch einen reellen Punkt geht. — Ob man sagt, dass ein Element in einem andern liege oder dass dieses durch jenes gehe, ist ganz einerlei.

Geht ein reelles Element durch das eine von zwei einander conjungirten imaginären Elementen, so geht es auch durch das andere.

Liegt ein reelles Element in dem einen von zwei einander conjungirten imaginären Elementen, so liegt es auch im andern.

120. Von einem imaginären Punkte $A B A_1\ B_1$ soll gesagt werden, dass er in der imaginären Ebene $E F E_1 F_1$ liege, wenn entweder der reelle Träger u des imaginären Punkts mit der reellen Axe s der imaginären Ebene zusammenfällt, oder wenn das involutorische gerade Gebilde $A A_1 . B B_1 \ldots$ und der involutorische

Ebenenbüschel $EE_1.FF_1\ldots$ zu einander perspektivisch sind und überdiess der Sinn ABA_1 mit dem Sinne EFE_1 übereinstimmt. Im letztern Falle ist zu jeder Darstellung ABA_1B_1 des imaginären Punkts eine Darstellung $s\,(ABA_1B_1)$ der imaginären Ebene und zu jeder Darstellung EFE_1F_1 der imaginären Ebene eine Darstellung $u\,(EFE_1F_1)$ des imaginären Punkts perspektivisch.

Ein imaginärer Punkt AB A_1B_1 wird aus jeder reellen Geraden s, welche mit ihm nicht in einer und derselben reellen Ebene liegt, durch eine imaginäre Ebene $s(ABA_1B_1)$ projicirt.

Eine imaginäre Ebene EF E_1F_1 wird von jeder reellen Geraden u, welche mit der Ebene keinen reellen Punkt gemein hat, in einem imaginären Punkte $u(EFE_1F_1)$ geschnitten.

Anm. So wie hier, so soll auch in der Folge, wenn durch zwei Elemente ein drittes Element bestimmt ist, welches nämlich entweder durch die beiden erstern geht oder in den beiden erstern liegt, gesagt werden, dass im erstern Falle das dritte Element aus jedem der beiden erstern Elemente das andere projicire, im letztern Falle aber die beiden erstern Elemente im dritten sich schneiden.

121. Von einer imaginären Geraden $ghg_1h_1\ldots$ I. Art soll gesagt werden, dass sie

durch den imaginären Punkt ABA_1B_1 gehe, wenn der involutorische Strahlenbüschel $gg_1.hh_1\ldots$ und das involutorische gerade Gebilde $AA_1.BB_1\ldots$ zu einander perspektivisch sind und überdiess der Sinn ghg_1 mit dem Sinne ABA_1 übereinstimmt, mithin zu jeder Darstellung des einen von den beiden imaginären Elementen eine Darstellung des andern perspektivisch ist.

in der imaginären Ebene EF E_1F_1 liege, wenn der involutorische Strahlenbüschel $gg_1.hh_1\ldots$ und der involutorische Ebenenbüschel $EE_1.FF_1\ldots$ zu einander perspektivisch sind und überdiess der Sinn ghg_1 mit dem Sinne EFE_1 übereinstimmt, demnach zu jeder Darstellung des einen von den beiden imaginären Elementen eine Darstellung des andern perspektivisch ist.

Jeder imaginäre Punkt AB A_1B_1 wird aus jedem reellen Punkte S, welcher mit ihm nicht

Jede imaginäre Ebene EF E_1F_1 wird von jeder reellen Ebene U, welche nicht durch die in einer und derselben reellen Geraden liegt, durch eine imaginäre Gerade $S(ABA_1B_1)$ I. Art, jede imaginäre Gerade aba_1b_1 I. Art aus jedem reellen Punkte M, welcher mit ihr nicht in einer und derselben reellen Ebene liegt, durch eine imaginäre Ebene $M(aba_1b_1)$ projicirt. Dieselbe Ebene projicirt auch die imaginäre Gerade aus der reellen Geraden, welche den reellen Punkt der erstern mit dem Punkte M verbindet.

Zwei imaginäre Gerade I. Art, welche einen imaginären Punkt mit einander gemein haben, liegen in einer und derselben reellen oder imaginären Ebene, je nachdem die Gerade, welche ihre reellen Punkte mit einander verbindet, den reellen Träger jenes imaginären Punktes schneidet oder nicht schneidet.

reelle Axe der erstern Ebene geht, in einer imaginären Geraden $U(EFE_1F_1)$ I. Art, jede imaginäre Gerade efe_1f_1 I. Art von jeder reellen Ebene V, welche nicht durch den reellen Punkt der imaginären Geraden geht, in einem imaginären Punkte $V(efe_1f_1)$ geschnitten. In demselben Punkte schneiden sich auch die imaginäre Gerade und die reelle Gerade, in welcher der reelle Träger der erstern von der Ebene V geschnitten wird.

Zwei imaginäre Gerade I. Art, welche in einer und derselben imaginären Ebene liegen, haben einen reellen oder imaginären Punkt mit einander gemein, je nachdem die Schnittlinie ihrer reellen Träger die reelle Axe jener imaginären Ebene schneidet oder nicht schneidet.

122. Von einer imaginären Geraden ghg_1h_1 II. Art soll gesagt werden, dass sie

durch den imaginären Punkt ABA_1B_1 gehe, wenn das involutorische gerade Gebilde $AA_1.BB_1\ldots$ in dem involutorischen Systeme $gg_1.hh_1\ldots$ enthalten ist und überdiess der Sinn ABA_1. mit dem Sinne ghg_1 übereinstimmt, mithin zu jeder Darstellung ABA_1B_1 des imaginären Punkts unendlich viele Darstel-

in der imaginären Ebene EFE_1F_1 liege, wenn der involutorische Ebenenbüschel $EE_1.FF_1\ldots$ in dem involutorischen Systeme $gg_1.hh_1\ldots$ enthalten ist und überdiess der Sinn EFE_1 mit dem Sinne ghg_1 übereinstimmt, mithin zu jeder Darstellung EFE_1F_1 der imaginären Ebene unendlich viele Darstellungen

lungen der imaginären Geraden perspektivisch sind. | der imaginären Geraden perspektivisch sind.

Es sei a irgend eine reelle Gerade, welche den Träger p des involutorischen Gebildes $AA_1 . BB_1 \ldots$ im Punkte A schneidet. Es seien ferner q, r noch zwei Leitstrahlen des involutorischen Systems $gg_1 . hh_1 \ldots$, welche die Gerade a schneiden. Sind nun b, a_1, b_1 diejenigen Leitstrahlen der Regelschaar pqr, welche beziehlich durch die Punkte B, A_1, B_1 gehen, so ist $a\,b\,a_1\,b_1$ eine zu $A\,B\,A_1\,B_1$ perspektivische Darstellung der imaginären Geraden $g\,h\,g_1\,h_1$. Eben so giebt es zu jeder reellen Geraden e, welche in der Ebene E liegt und die Gerade EF schneidet, drei andere reelle Gerade f, e_1, f_1, so dass $e\,f\,e_1\,f_1$ eine zu $E\,F\,E_1\,F_1$ perspektivische Darstellung der imaginären Geraden $g\,h\,g_1\,h_1$ ist.

123. Eine imaginäre Gerade II. Art und eine reelle Gerade haben entweder einen imaginären Punkt mit einander gemein und liegen in einer und derselben imaginären Ebene, oder sie haben keinen Punkt mit einander gemein und liegen nicht in einerlei Ebene, je nachdem nämlich (122) die reelle Gerade ein Leitstrahl oder kein Leitstrahl des der imaginären Geraden zu Grunde liegenden involutorischen Systems ist. Eine imaginäre Gerade $g\,h\,g_1\,h_1$ II. Art wird also

von jeder reellen Ebene in einem imaginären Punkte geschnitten, dessen reeller Träger der in der Ebene befindliche Leitstrahl des involutorischen Systems $gg_1 . hh_1 \ldots$ ist. | aus jedem reellen Punkte durch eine imaginäre Ebene projicirt, deren reelle Axe der durch den Punkt gehende Leitstrahl des involutorischen Systems $gg_1 . hh_1 \ldots$ ist.

Zwei einander conjungirte imaginäre Gerade II. Art haben keinen Punkt mit einander gemein und liegen auch nicht in einerlei Ebene. Durch vier reelle Gerade, welche nicht von einer und derselben fünften reellen Geraden geschnitten werden, sind (106) zwei einander conjungirte imaginäre Gerade II. Art bestimmt, deren jede die vier gegebenen Geraden schneidet.

124. Von einem reellen Elemente kann man sagen, dass es sich selbst conjungirt sei und daher mit dem ihm conjungirten Elemente zusammen falle. Liegt ein Element in einem andern Elemente, so liegt nach den in diesem § enthaltenen Erklärungen auch

das dem erstern conjungirte Element in dem dem letztern conjungirten Elemente. Wenn daher durch zwei Elemente ein drittes bestimmt ist, welches nämlich entweder in den beiden erstern liegt oder durch die beiden erstern geht, so ist auf dieselbe Weise auch das dem dritten conjungirte Element durch die Elemente bestimmt, welche beziehlich den erstern conjungirt sind.

Aus 118, 120, 121 und 122 folgt noch, dass, wenn das imaginäre Element $A B A_1 B_1$ in dem imaginären Elemente $a b a_1 b_1$ und das reelle Element A in dem reellen Elemente a liegt und die Darstellungen der beiden imaginären Elemente zu einander projektivisch sind, auch die reellen Elemente B, A_1, B_1 beziehlich in den reellen Elementen b, a_1, b_1 liegen.

125. Jeder in einer Geraden befindliche Punkt liegt auch in jeder durch diese Gerade gehenden Ebene.

Es sei $a b a_1 b_1$ eine imaginäre Gerade II. Art, p der reelle Träger eines in ihr liegenden Punkts P und u die reelle Axe einer durch sie gehenden Ebene U. Wenn nun, was man annehmen kann, die reelle Gerade a, von welcher die Darstellung der imaginären Geraden ausgeht, die Geraden p, u schneidet, diese also Leitstrahlen der Regelschaar $a b a_1$ sind, so ist $p(a b a_1 b_1)$ eine Darstellung des imaginären Punkts P und $u (a b a_1 b_1)$ eine Darstellung der imaginären Ebene U, woraus hervorgeht, dass der Punkt P in der Ebene U liegt. Noch leichter überzeugt man sich von der Richtigkeit des Satzes, wenn die gegebene Gerade eine reelle Gerade oder eine imaginäre Gerade I. Art ist.

126. Durch zwei imaginäre Punkte $A B A_1 B_1$, $A F E_1 F_1$, welche in einer und derselben reellen Ebene aber nicht in einer und derselben reellen Geraden liegen, ist eine imaginäre Gerade I. Art bestimmt, welche die gegebenen Punkte mit einander verbindet.

Durch zwei imaginäre Gerade, welche in einer und derselben reellen Ebene liegen aber nicht durch einen und denselben reellen Punkt gehen, ist ein imaginärer Punkt bestimmt, in welchem die gegebenen Geraden sich schneiden.

Wenn nämlich, was man annehmen kann, die Darstellungen der gegebenen imaginären Punkte vom Schnittpunkte A ihrer reellen Träger ausgehen und zu einander projektivisch sind, so schneiden sich die drei Geraden BF, A_1E_1, B_1F_1 in einem und demselben Punkte, aus welchem die beiden imaginären Punkte durch eine und dieselbe imaginäre Gerade I. Art projicirt werden. Und wenn eine Gerade durch die beiden gegebenen Punkte gehen soll, so muss sie eine imaginäre Gerade I. Art sein, deren reeller Punkt S in der Ebene ABF liegt, so dass $S(ABA_1B_1)$ eine zu ABA_1B_1 und also auch (124) eine zu AFE_1F_1 perspektivische Darstellung derselben ist, daher der Punkt S kein anderer Punkt als der Schnittpunkt der Geraden BF, A_1E_1, B_1F_1 sein kann. Auf analoge Weise werden der Satz rechter Hand und die beiden nachstehenden Sätze bewiesen.

Durch zwei imaginäre Gerade, welche durch einen und denselben reellen Punkt gehen aber nicht in einer und derselben reellen Ebene liegen, ist eine imaginäre Ebene bestimmt, in welcher die beiden gegebenen Geraden liegen.

Durch zwei imaginäre Ebenen, welche einen reellen Punkt mit einander gemein haben aber nicht durch eine und dieselbe reelle Gerade gehen, ist eine imaginäre Gerade I. Art bestimmt, in welcher die gegebenen Ebenen sich schneiden.

127. Durch zwei imaginäre Punkte ABA_1B_1, EFE_1F_1, welche nicht in einer und derselben reellen Ebene liegen, ist eine imaginäre Gerade II. Art bestimmt, welche die gegebenen Punkte mit einander verbindet.

Durch zwei imaginäre Ebenen, welche keinen reellen Punkt mit einander gemein haben, ist eine imaginäre Gerade II. Art bestimmt, in welcher die gegebenen Ebenen sich schneiden.

Man kann annehmen, dass die Darstellungen der gegebenen Punkte zu einander projektivisch sind. Bezeichnet man nun die Geraden AE, BF, A_1E_1, B_1F_1 beziehlich durch a, b, a_1, b_1, so stellt aba_1b_1 eine imaginäre Gerade II. Art dar, welche sowohl durch den Punkt ABA_1B_1 als auch durch den Punkt EFE_1F_1 geht. Und wenn eine Gerade durch die beiden gegebenen Punkte geht, so giebt es eine von a ausgehende Darstellung derselben, welche zu ABA_1B_1 und also auch (124) zu EFE_1F_1 perspektivisch, folglich mit aba_1b_1 identisch ist.

128. Durch zwei Punkte P, Q ist eine Gerade PQ bestimmt,

Durch zwei Ebenen P, Q ist eine Gerade PQ bestimmt, in welche durch beide Punkte geht.

Liegen die Punkte P, Q nicht in einer und derselben reellen Geraden, so ist P Q eine imaginäre Gerade erster oder (127) zweiter Art, je nachdem die Punkte in einer und derselben oder nicht in einer und derselben reellen Ebene liegen.

welcher die Ebenen sich schneiden.

Gehen die Ebenen P, Q nicht durch eine und dieselbe reelle Gerade, so schneiden sie sich in einer imaginären Geraden erster oder zweiter Art, je nachdem sie einen oder keinen reellen Punkt mit einander gemein haben.

129. Haben eine Gerade und eine Ebene mehr als einen Punkt mit einander gemein, so liegt die Gerade in der Ebene. Alle Punkte, welche zwei Ebenen mit einander gemein haben, liegen in der Schnittlinie dieser Ebenen.

Es seien ABA_1B_1, EFE_1F_1 zwei nicht in einer und derselben reellen Ebene liegende imaginäre Punkte und GHG_1H_1 eine imaginäre Ebene, welche durch beide Punkte geht. Wenn nun, was man annehmen kann, die Darstellungen der drei imaginären Elemente zu einander projektivisch sind und die Gerade AE in der Ebene G liegt, so liegen auch (124) die Geraden BF, A_1E_1, B_1F_1 beziehlich in den Ebenen H, G_1, H_1. Da hiernach die von AE ausgehende und zu ABA_1B_1 perspektivische Darstellung der durch die beiden imaginären Punkte bestimmten imaginären Geraden auch zu GHG_1H_1 perspektivisch ist, so folgt, dass die Ebene GHG_1H_1 durch die erwähnte imaginäre Gerade geht. Eben so leicht überzeugt man sich, dass, wenn P, Q zwei in einer und derselben reellen Ebene liegende Punkte sind, nicht nur diese Ebene sondern auch jede andere Ebene, welche durch beide Punkte geht, auch durch die Gerade PQ gehe. Sind also U, V irgend zwei Ebenen und P, Q irgend zwei gemeinschaftliche Punkte derselben, so fällt die Gerade PQ, da sie in jeder von den beiden Ebenen liegt, mit der Geraden U V zusammen, woraus hervorgeht, dass jeder Punkt, welchen die Ebenen mit einander gemein haben, in ihrer Schnittlinie liegt.

130. Durch eine Gerade s und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt P ist eine Ebene

Durch eine Ebene U und eine ausserhalb derselben liegende Gerade s ist ein Punkt Us be-sP bestimmt, welche durch die gegebene Gerade und durch den gegebenen Punkt geht.

stimmt, in welchem die gegebene Ebene und die gegebene Gerade sich schneiden.

Die Fälle, in welchen eines von den beiden gegebenen Elementen reell ist, sind bereits betrachtet worden. Ist s eine imaginäre Gerade und P ein imaginärer Punkt, dessen reeller Träger p die Gerade s schneidet, so liegen die Geraden s, p entweder in einer und derselben reellen oder (121, 123) in einer und derselben imaginären Ebene. Wenn aber die imaginäre Gerade s von dem reellen Träger des imaginären Punkts P nicht geschnitten wird, so sei H irgend eine durch den Punkt P gehende reelle Ebene, welche die Gerade s in einem imaginären Punkte Q schneidet. Da nun die Ebene, welche die Gerade s aus dem reellen Punkte S der Geraden P Q projicirt, durch den Punkt Q geht, so geht sie auch (129) durch die Gerade SQ und mithin auch durch den Punkt P. Dass es aber nur eine Ebene giebt, welche durch die Gerade s und zugleich durch den Punkt P geht, folgt ebenfalls aus 129.

131. Durch drei Punkte P, Q, R, welche nicht in einer und derselben Geraden liegen, ist (130) eine Ebene PQR bestimmt, welche durch die drei gegebenen Punkte geht, also aus jedem derselben die durch die beiden übrigen bestimmte Gerade projicirt.

Zwei Gerade, welche einen Punkt P mit einander gemein haben, liegen auch in einer und derselben Ebene, welche aus jeder von den beiden Geraden jeden von P verschiedenen Punkt der andern projicirt.

Durch die Ebenen P, Q, R, welche nicht durch eine und dieselbe Gerade gehen, ist ein Punkt PQR bestimmt, in welchem die drei Ebenen sich schneiden, also auch jede der drei Ebenen die Schnittlinie die beiden übrigen schneidet.

Zwei Gerade, welche in einerlei Ebene P liegen, haben auch einen Punkt mit einander gemein, in welchem jede von P verschiedene Ebene, welche durch die eine Gerade geht, die andere schneidet.

132. Aus dem Bisherigen geht hervor, dass die in G. §. 6 enthaltenen Sätze, mit Ausnahme von 75 und 76, sich nicht auf reelle Elemente beschränken, sondern allgemein gelten. Dieselbe

allgemeine Gültigkeit kommt daher auch den in G. §. 7 aufgestellten Sätzen zu, so dass weder in den Aussagen derselben noch in den Beweisen etwas abzuändern ist, wenn nun unter Elementen nicht blos reelle Elemente sondern Elemente überhaupt verstanden werden. — Ein Dreieck, welches in einer imaginären Ebene liegt, hat höchstens eine reelle Seite, während ein imaginäres Dreieck, welches in einer reellen Ebene liegt, zwei reelle Seiten haben kann.

Sind zwei Eckpunkte eines vollständigen ebenen Vierecks den beiden übrigen beziehlich conjungirt, so hat das Viereck zwei reelle und vier imaginäre Seiten, von welchen (124) je zwei einander gegenüberliegende einander conjungirt sind und daher in einem reellen Punkte sich schneiden.

Sind zwei Seiten eines vollständigen ebenen Vierseits den beiden übrigen beziehlich conjungirt, so hat das Vierseit zwei reelle und vier imaginäre Eckpunkte, von welchen je zwei einander gegenüberliegende einander conjungirt sind und also in einer und derselben reellen Geraden liegen.

§. 8.

Von der Menge der Elemente.

133. Ein einförmiges Gebilde enthält entweder eine sich schliessende stetige Aufeinanderfolge von reellen Elementen oder nur ein reelles Element oder gar kein reelles Element. Im erstern Falle soll das Gebilde selbst reell heissen, obgleich in demselben auch unendlich viele imaginäre Elemente enthalten sind.

Wenn man die Menge aller in einem und demselben reellen einförmigen Gebilde enthaltenen reellen Elemente durch $n+1$ bezeichnet und mit diesem Ausdrucke, welcher dieselbe Bedeutung auch in den acht folgenden Nummern hat, wie mit einer endlichen Zahl verfährt, so findet man, dass in jedem reellen einförmigen Gebilde n^2-n imaginäre Elemente enthalten sind. Man kann nämlich alle imaginären Elemente des Gebildes von einem und demselben reellen Elemente A aus harmonisch dargestellt sich denken. Da nun das Gebilde n von A verschiedene reelle Elemente und, wenn B irgend eines dieser Elemente ist, auch noch $n-1$ von

A und B verschiedene reelle Elemente enthält, durch drei Elemente A, B, A_1 aber das vierte zu denselben harmonische Element B_1 bestimmt ist, so ergiebt sich für die Menge der in dem Gebilde enthaltenen imaginären Elemente das Produkt $n(n-1)$.

Anm. Die in diesem §. enthaltenen Sätze sollen nur dazu dienen, die unendlich vielen in einem und demselben Grundgebilde enthaltenen Elemente zur klaren Anschauung zu bringen.

134. In jedem reellen ebenen Systeme, dessen Träger nämlich eine reelle Ebene ist, sind n^2+n+1 reelle Punkte und eben so viele reelle Gerade, dann n^4-n imaginäre Punkte und eben so viele imaginäre Gerade enthalten.

In jedem reellen Strahlenbündel, welcher nämlich einen reellen Mittelpunkt hat, sind n^2+n+1 reelle Strahlen und eben so viele reelle Ebenen, dann n^4-n imaginäre Strahlen und eben so viele imaginäre Ebenen enthalten.

In einem und demselben reellen Punkte der Ebene schneiden sich nämlich $n+1$ in ihr liegende reelle Gerade, deren jede noch n reelle Punkte enthält, daher die Anzahl aller reellen Punkte der Ebene $n(n+1)+1$ ist. Eben so ist die Anzahl aller in der Ebene befindlichen reellen Geraden $n(n+1)+1$, da jede derselben in jedem ihrer $n+1$ reellen Punkte von n andern geschnitten wird. Bemerkt man nun noch, dass jedes reelle einförmige Gebilde $n(n-1)$ imaginäre Elemente enthält, so ergiebt sich auch der letztere Theil des Satzes.

Sind M, N die Mittelpunkte von zwei in einer und derselben reellen Ebene liegenden reellen Strahlenbüscheln, so schneiden sich in jedem ausserhalb der Geraden MN liegenden reellen Punkte der Ebene ein reeller Strahl des einen Büschels und ein reeller Strahl des andern. Da nun jeder der Büschel n von MN verschiedene reelle Strahlen enthält, so sind in der Ebene n^2 ausserhalb der Geraden MN liegende reelle Punkte enthalten, was mit dem Obigen übereinstimmt.

135. In jedem Strahlenbüschel, welcher in einer reellen Ebene liegt aber einen imaginären Mittelpunkt hat, sind n^2 imaginäre Strahlen und in jeder

In jedem Strahlenbüschel, welcher einen reellen Mittelpunkt hat aber in einer imaginären Ebene liegt, sind n^2 imaginäre Strahlen und in jedem Ebeimaginären Geraden I. Art n^2 imaginäre Punkte enthalten.

Denn jede reelle Ebene projicirt (134) aus jeder in ihr liegenden reellen Geraden n^2 reelle Punkte und aus jedem in ihr liegenden reellen Punkte n^2 reelle Gerade.

nenbüschel, dessen Axe eine imaginäre Gerade I. Art ist, n^2 imaginäre Ebenen enthalten.

Denn jede reelle Gerade wird in jedem ihrer reellen Punkte von n^2 reellen Ebenen und jede reelle Ebene in jedem ihrer reellen Punkte von n^2 reellen Geraden geschnitten.

136. Jede imaginäre Gerade u II. Art wird von n^2+1 reellen Geraden geschnitten, daher in jeder imaginären Geraden II. Art n^2+1 imaginäre Punkte liegen und eben so viele imaginäre Ebenen sich schneiden.

Jede reelle Ebene enthält nämlich eine reelle Gerade h, welche die Gerade u schneidet, und wird in jedem ihrer n^2 reellen Punkte, welche ausserhalb der Geraden h liegen, von einer reellen Geraden geschnitten, welche auch die Gerade u schneidet.

137. Ein Strahlenbüschel, welcher in einer imaginären Ebene U liegt und einen imaginären Mittelpunkt hat, enthält entweder einen reellen Strahl und n^2 imaginäre Strahlen II. Art oder $n+1$ imaginäre Strahlen erster und n^2-n imaginäre Strahlen zweiter Art, je nachdem nämlich die reelle Axe p der Ebene U durch den Mittelpunkt des Büschels oder nicht durch diesen Punkt geht.

Im erstern Falle wird der Strahlenbüschel von jeder nicht durch seinen Mittelpunkt gehenden reellen Ebene in einem imaginären geraden Gebilde geschnitten, dessen reeller Punkt in dem reellen Strahle p des Büschels liegt, während jeder der n^2 imaginären Punkte des geraden Gebildes aus dem Mittelpunkte des Büschels durch einen imaginären Strahl II. Art projicirt wird. Im letztern Falle ist ein Strahl des Büschels eine imaginäre Gerade erster oder zweiter Art, je nachdem er die Gerade p in einem ihrer $n+1$ reellen oder in einem ihrer n^2-n imaginären Punkte schneidet. — Jedes einförmige Gebilde enthält also im Ganzen n^2+1 Elemente.

138. Jede imaginäre Ebene U enthält eine reelle Gerade p, n^3+n^2 imaginäre Gerade

Jeder imaginäre Strahlenbündel enthält einen reellen Strahl, n^3+n^2 imaginäre Strahlen

I. Art und n^4-n^3 imaginäre Gerade II. Art, dann $n+1$ reelle und n^4+n^2-n imaginäre Punkte, also im Ganzen, gleichwie jede reelle Ebene, n^4+n^2+1 Punkte und eben so viele Gerade.

Art und n^4-n^3 imaginäre Strahlen II. Art, dann $n+1$ reelle und n^4+n^2-n imaginäre Ebenen, also im Ganzen, gleichwie jeder reelle Strahlenbündel, n^4+n^2+1 Ebenen und eben so viele Strahlen.

Die Gerade p wird nämlich (135) in jedem ihrer $n+1$ reellen Punkte von n^2 in der Ebene U liegenden imaginären Geraden I. Art und (137) in jedem ihrer n^2-n imaginären Punkte von n^2 in der Ebene U liegenden imaginären Geraden II. Art geschnitten. Da ferner jede der n^2 reellen Ebenen, welche die Gerade p in einem und demselben reellen Punkte schneiden, aus diesem Punkte n^2 reelle Gerade projicirt, so giebt es n^4 reelle Gerade, welche die Gerade p nicht schneiden, und also auch n^4 imaginäre Punkte, welche in der Ebene U aber ausserhalb der Geraden p liegen.

139. Im Raume sind n^3+n^2+n+1 reelle Punkte und eben so viele reelle Ebenen, dann $n^6+n^4-n^3-n$ imaginäre Punkte und eben so viele imaginäre Ebenen, im Ganzen also $n^6+n^4+n^2+1$ Punkte und eben so viele Ebenen enthalten. Ferner sind im Raume $n^4+n^3+2n^2+n+1$ reelle Gerade, dann $n^7+n^6+n^5-n^3-n^2-n$ imaginäre Gerade I. Art und $n^8-n^7-n^5+n^4$ imaginäre Gerade II. Art, also im Ganzen $n^8+n^6+2n^4+n^2+1$ Gerade enthalten.

Da nämlich eine reelle Gerade in jedem ihrer $n+1$ reellen Punkte von n^2 reellen Ebenen geschnitten wird und die Schnittlinie von $n+1$ reellen Ebenen ist, deren jede n^2 ausserhalb der Geraden liegende reelle Punkte enthält, so sind im Raume $(n+1)(n^2+1)$ reelle Ebenen und eben so viele reelle Punkte enthalten. Da ferner eine reelle Ebene n^2+n+1 reelle Gerade enthält und in jedem ihrer n^2+n+1 reellen Punkte von n^2 reellen Geraden geschnitten wird, so sind im Raume $(n^2+1)(n^2+n+1)$ reelle Gerade enthalten. Bemerkt man nun noch, dass in jeder reellen Geraden n^2-n imaginäre Punkte liegen und eben so viele imaginäre Ebenen sich schneiden, dass ferner (134) durch jeden reellen Punkt n^4-n imaginäre Gerade I. Art gehen, und dass endlich

(138) eine reelle Ebene in jedem ihrer n^4-n imaginären Punkte von n^4-n^3 imaginären Geraden II. Art geschnitten wird, so ergeben sich auch die übrigen Theile des Satzes.

140. Ist U irgend eine Ebene, p irgend eine in ihr liegende Gerade und S irgend ein in dieser Geraden liegender Punkt, so ist

n^2 die Anzahl aller Punkte, welche aus dem Punkte S durch die Gerade p projicirt werden, n^4 die Anzahl aller Punkte, welche in der Ebene U aber ausserhalb der Geraden p liegen, und n^6 die Anzahl aller Punkte, welche ausserhalb der Ebene U liegen.	n^2 die Anzahl aller Ebenen, welche die Ebene U in der Geraden p schneiden, n^4 die Anzahl aller Ebenen, welche die Gerade p im Punkte S schneiden, und n^6 die Anzahl aller Ebenen, von welchen keine durch den Punkt S geht.

Die Anzahl aller Geraden, welche die Gerade p schneiden, ist $n^2(n^2+1)^2$, während die Anzahl der Geraden, welche die Gerade p nicht schneiden, n^8 ist. — Versteht man unter Elementen nur reelle Elemente, so hat man in diesen Ausdrücken n^m statt n^{2m} zu setzen.

141. Gleichwie von reellen Geraden, so soll von Geraden überhaupt gesagt werden, dass sie zu einander parallel sind oder einerlei Richtung haben, wenn sie die unendlich ferne Ebene in einem und demselben Punkte schneiden. Ebenen sind zu einander parallel oder haben einerlei Stellung, wenn sie die unendlich ferne Ebene in einer und derselben Geraden schneiden. Da es nun (134) n^4+n^2+1 unendlich ferne Punkte und eben so viele unendlich ferne Gerade giebt, so giebt es auch n^4+n^2+1 verschiedene Richtungen und eben so viele verschiedene Stellungen. Da ferner in jeder unendlich fernen Geraden n^2+1 unendlich ferne Punkte liegen und in jedem unendlich fernen Punkte n^2+1 unendlich ferne Gerade sich schneiden, so sind in jeder Stellung n^2+1 Richtungen enthalten, während jede Richtung in n^2+1 Stellungen enthalten ist. Eine imaginäre Gerade hat nur dann eine reelle Richtung, wenn ihr ein involutorischer Parallelstrahlenbüschel zu Grunde liegt. Die Stellung einer imaginären Ebene ist reell, wenn die reelle Axe der Ebene im Unendlichen liegt.

Durch jeden imaginären Punkt P, welcher nicht in der unendlich fernen Ebene liegt, ist ein harmonischer Wurf ABCD bestimmt, welcher nämlich die von dem unendlich fernen Punkte A seines reellen Trägers ausgehende harmonische Darstellung des imaginären Punktes ist. Da nun durch die Punkte B, D auch der unendlich ferne Punkt A der Geraden B D und der Punkt C bestimmt sind, welcher vom Punkte A durch die Punkte B, D harmonisch getrennt ist, so könnte man den imaginären Punkt P auch nur durch (B, D) und den ihm conjungirten Punkt, welcher von dem unendlich fernen Punkte A aus durch A D C B harmonisch dargestellt wird, durch (D,B) bezeichnen. Ausserhalb der unendlich fernen Ebene liegen n^3 reelle und $n^3(n^3-1)$ imaginäre Punkte.

---

§. 9.

Harmonische Würfe.

142. Die drei Punkte, in deren jedem zwei einander gegenüberliegenden Seiten eines vollständigen ebenen Vierecks E F G H sich schneiden, sind die drei Eckpunkte eines Dreiecks.

Schneiden sich nämlich die Geraden E F, G H in einem reellen Punkte A, so kann man ausserhalb der Ebene E F G vier reelle Punkte E_1, F_1, G_1, H_1 annehmen, so dass auch die Geraden $E_1 F_1$, $G_1 H_1$ durch den Punkt A gehen aber mit der Geraden E F nicht in einerlei Ebene liegen. Da nun das Viereck E F G H eine Projektion von E F G_1 H_1 (aus dem Schnittpunkte der Geraden G G_1, H H_1) und das Viereck E F G_1 H_1 eine Projektion von E_1 F_1 G_1 H_1 ist, und da der Satz von dem reellen Vierecke E_1 F_1 G_1 H_1 gilt, so gilt er auch von dem Vierecke E F G_1 H_1 und mithin auch von dem Vierecke E F G H. Ist A ein imaginärer Punkt, so darf man nur, um diesen Fall auf den betrachteten zurückzuführen, ausserhalb der Ebene E F G einen reellen Punkt A_1 annehmen und alsdann das Viereck E F G H aus einem Punkte der Geraden A A_1 auf eine durch den Punkt A_1 gehende Ebene projiciren.

Die Gerade, welche den Punkt A mit dem Schnittpunkte C von E H und F G verbindet, schneidet also, auch wenn das Viereck E F G H imaginär ist, die Seiten E G, F H in zwei verschiedenen Punkten B, D. Sagt man nun auch von jedem imaginären harmonischen Wurfe A B C D, dass das erste und dritte seiner Elemente durch das zweite und vierte getrennt seien, weil diess von jedem reellen harmonischen Wurfe gilt, so ist in den in G. §. 8 enthaltenen Sätzen durchaus nichts abzuändern, wenn nun der Begriff Element im weitern Sinne genommen wird.

143. Vier in einer und derselben imaginären Geraden II. Art sich schneidende Ebene P, Q, R, S liegen harmonisch, wenn ihre reellen Axen p, q, r, s harmonisch liegen. | befindliche Punkte liegen harmonisch, wenn ihre reellen Träger harmonisch liegen.

Es sei a irgend ein reeller Leitstrahl der Regelschaar $p\,q\,r$. Da nun die Gerade a die Ebenen P, Q, R, S beziehlich in den Punkten $a\,p$, $a\,q$, $a\,r$, $a\,s$ schneidet und $a\,(p\,q\,r\,s)$ ein harmonisches gerades Gebilde ist, so ist $P\,Q\,R\,S$ ein harmonischer Ebenenbüschel.

144. Wenn $A\,B\,C\,D$ ein harmonischer Wurf ist und den Elementen A, B, C, D die Elemente A_1, B_1, C_1, D_1 conjungirt sind, so ist auch $A_1\;B_1\;C_1\;D_1$ ein harmonischer Wurf.

Ist $A\,B\,C\,D$ ein harmonisches gerades Gebilde, so seien u, u_1 zwei einander conjungirte imaginäre Gerade II. Art, von welchen die erstere die Gerade $A\,B$ nicht schneidet. Da nun (143) die reellen Axen der Ebenen $u\,A$, $u\,B$, $u\,C$, $u\,D$ harmonisch liegen und (124) zugleich die reellen Axen der Ebenen u_1A_1, u_1B_1, u_1C_1, u_1D_1 sind, so ist auch $u_1\;(A_1B_1C_1D_1)$ ein harmonischer Ebenenbüschel und mithin auch $A_1B_1C_1D_1$ ein harmonisches gerades Gebilde.

145. Zwei einander conjungirte imaginäre Elemente P, P_1 I. Art sind durch je zwei einander zugeordnete (reelle) Elemente A, A_1 des ihnen zu Grunde liegenden involutorischen Gebildes harmonisch getrennt.

Es seien P, P_1 zwei einander conjungirte imaginäre Punkte und $A\,B\,A_1B_1$, $A\,B_1A_1B$ die von A ausgehenden harmonischen Darstellungen derselben. Nimmt man nun in einer andern reellen Geraden, welche durch den Punkt A geht, noch drei reelle Punkte F, E_1, F_1 an, so dass auch $A\,F\,E_1F_1$ ein harmonischer Wurf ist, so schneiden sich die drei Geraden $B\,F$, A_1E_1, $B_1\;F_1$ in einem und demselben Punkte S und die drei Geraden $B\,F_1$, A_1E_1, B_1F in einem und demselben Punkte T. Bezeichnet man endlich die einander conjungirten imaginären Punkte AFE_1F_1, AF_1E_1F durch Q, Q_1, so ist $Q\,Q_1\,S\,T$ ein vollständiges Viereck, von welchen zwei Seiten QS, Q_1T im Punkte P, zwei Seiten Q_1S, QT im Punkte P_1 sich schneiden, eine Seite QQ_1 durch den Punkt A und eine Seite ST durch den Punkt A_1 geht, woraus der Satz folgt.

146. Durch drei Gerade a, b, c, von welchen keine zwei sich schneiden, ist eine vierte Gerade d bestimmt, welche nämlich zu den drei gegebenen Geraden die vierte harmonische Gerade ist.

Es seien p, q, r irgend drei Gerade, deren jede die drei gegebenen Geraden schneidet. Man suche in der Geraden p zu den drei Punkten pa, pb, pc den vierten harmonischen Punkt D und in der Geraden q zu den drei Punkten qa, qb, qc den vierten harmonischen Punkt D_1. Weil nun, wenn man die Gerade DD_1 durch d bezeichnet, $\overline{p}(abcd)$ $\overline{q}(abcd)$ zwei harmonische Ebenenbüschel sind, so schneidet die Gerade r die Ebenen pd, qd in einem und demselben Punkte, der nämlich zu den drei Punkten ra, rb, rc der vierte harmonische Punkt ist. Da hiernach jede Gerade r, welche die drei Geraden a, b, c schneidet, auch die Gerade d schneidet, so dass $r\,(abcd)$ ein harmonisches gerades Gebilde und $\overline{r}(abcd)$ ein harmonischer Ebenenbüschel ist, so kann man sagen, dass die Geraden a, c durch die Geraden b, d harmonisch getrennt seien.

147. Zwei einander conjungirte imaginäre Gerade u, v II. Art sind durch je zwei einander zugeordnete reelle Gerade a, a_1 des ihnen zu Grunde liegenden involutorischen Systems harmonisch getrennt.

Es sei $a\,b\,a_1\,b_1$ irgend eine von a ausgehende Darstellung der Geraden u, so ist $ab_1\,a_1\,b$ eine Darstellung der Geraden v. Es seien ferner p, q irgend zwei reelle Leitstrahlen der Regelschaar $a\,b\,a_1$. Da nun (145) die Punkte pu, pv durch die Punkte pa, pa_1 und die Punkte qu, qv durch die Punkte qa, qa_1 harmonisch getrennt sind, so sind (146) auch die Geraden u, v durch die Geraden a, a_1 harmonisch getrennt.

148. Durch vier Elemente A, A_1, B, B_1 eines und desselben einförmigen Gebildes sind zwei Elemente M, N dieses Gebildes bestimmt, welche nämlich sowohl durch die beiden erstern als auch durch die beiden letztern der vier gegebenen Elemente harmonisch getrennt sind.

Sind A, A_1, B, B_1 vier in einer und derselben imaginären Gerade u II. Art sich schneidende Ebenen, so sind (123) die reellen Axen a, a_1, b, b_1 dieser Ebenen Leitstrahlen des der Geraden u zu Grunde liegenden involutorischen Systems. Wenn nun m, n diejenigen Leitstrahlen des Systems sind, welche (113) sowohl durch die Geraden a, a_1 als auch durch die Geraden b, b_1 harmonisch getrennt sind, so sind (143) um, un die im Satze erwähnten Ebenen. Sind A, A_1, B, B_1 vier in einer und derselben Geraden liegende Punkte, so darf man nur, um diesen Fall auf den eben betrachteten zurückzuführen, eine imaginäre Gerade u II. Art annehmen, welche die Gerade AB nicht schneidet. Die Ebenen, welche sowohl durch die Ebenen uA, uA_1 als auch durch die Ebenen uB, uB_1 harmonisch getrennt sind, schneiden die Gerade AB in zwei Punkten, welche sowohl durch die Punkte A, A_1 als auch durch die Punkte B, B_1 harmonisch getrennt sind. Jeder dritte Fall lässt sich auf den letztern zurückführen.

Sind die gegebenen Elemente sämmtlich reell, so sind M, N entweder zwei reelle oder (145) zwei einander conjungirte imaginäre Elemente, je nachdem nämlich der Sinn ABA_1 mit dem Sinne AB_1A_1 übereinstimmt oder demselben entgegengesetzt ist. Sind A, A_1 zwei einander conjungirte imaginäre Elemente und B, B_1 entweder zwei reelle oder ebenfalls zwei einander conjungirte imaginäre Elemente, so sind (82) M, N zwei reelle Elemente.

---

§. 10.

Homologe imaginäre Elemente in Grundgebilden, welche reell-projektivisch zu einander sind.

149. Wenn zwei reelle einförmige Gebilde, was ihre reellen Elemente anbelangt, projektivisch auf einander bezogen sind, so ist dadurch von selbst jedem imaginären Elemente $ABCD$ in dem einen Gebilde ein imaginäres Element $A_1B_1C_1D_1$ im andern zugewiesen, indem jedem ordentlichen reellen Wurfe $ABCD$ in dem einen Gebilde ein ordentlicher reeller Wurf $A_1B_1C_1D_1$ im andern entspricht. Ist $EFGH$ eine andere Darstellung des imaginären Elements $ABCD$ und $E_1F_1G_1H_1$ der dem Wurfe $EFGH$ entsprechende Wurf, so ist auch $E_1F_1G_1H_1$ eine andere Darstellung des imaginären Elements $A_1B_1C_1D_1$. Da nämlich in dem involutori-

schen Gebilde $A\,C \,.\, BD \ldots$ dem Elemente E das Element G und dem Elemente F das Element H zugeordnet ist, so ist auch (72) in dem involutorischen Gebilde $A_1C_1 \,.\, B_1D_1 \ldots$ dem Elemente E_1 das Element G_1 und dem Elemente F_1 das Element H_1 zugeordnet. Da ferner der Sinn $E\,F\,G$ mit dem Sinne $A\,B\,C$ übereinstimmt, so stimmt auch der Sinn $E_1F_1G_1$ mit dem Sinne $A_1B_1C_1$ überein. Es entspricht hiernach jeder Darstellung $E\,F\,G\,H$ des einen von zwei homologen imaginären Elementen eine Darstellung $E_1F_1G_1H_1$ des andern, so dass nämlich dem Wurfe $E\,F\,G\,H$ der Wurf $E_1F_1G_1H_1$ entspricht. Liegt jedes reelle Element des einen Gebildes in dem ihm entsprechenden Elemente des andern, so liegt auch jedes imaginäre Element des erstern Gebildes in dem ihm entsprechenden Elemente des letztern. Dass aber auch jedem imaginären harmonischen Wurfe in dem einen Gebilde ein harmonischer Wurf im andern entspricht, geht daraus hervor, weil die Gebilde, wenn sie auch nicht selbst perspektivisch zu einander sind, doch als das erste und letzte von drei oder mehrern einförmigen Gebilden betrachtet werden können, von welchen jedes folgende zum vorhergehenden perspektivisch ist.

Sind zwei reelle einförmige Gebilde auf die obige Weise projektivisch auf einander bezogen, so sollen sie reell-projektivisch zu einander heissen. Je zwei einander conjungirten imaginären Elementen in dem einen von zwei solchen Gebilden entsprechen zwei einander conjungirte imaginäre Elemente im andern. Haben also die Gebilde ein imaginäres Element entsprechend gemein, so haben sie auch das demselben conjungirte Element entsprechend gemein. Entspricht dem imaginären Elemente $PQRS$ das imaginäre Element $P_1Q_1R_1S_1$ und dem reellen Elemente P das reelle Element P_1, so entspricht auch dem Elemente R das Element R_1. Wenn überdiess die Darstellungen der beiden imaginären Elemente zu einander projektivisch sind, so entspricht auch (118) dem Elemente Q das Element Q_1 und dem Elemente S das Element S_1.

Anm. Dass je zwei einförmige Gebilde projektivisch auf einander bezogen und zu drei aber auch nur zu drei Elementen des einen drei Elemente des andern, welche jenen entsprechen sollen, nach Belieben angenommen werden können, kann hier noch nicht nachgewiesen werden.

150. Will man zwei reelle einförmige Gebilde reell-projekti-

visch so auf einander beziehen, dass einem gegebenen imaginären Elemente P des einen Gebildes ein gegebenes imaginäres Element P_1 des andern entspreche, so kann man noch zu einem reellen Elemente A des einen Gebildes ein reelles Element A_1 des andern, welches nämlich jenem entsprechen soll, nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente in dem einen Gebilde ein Element im andern zugewiesen ist.

Es sei $ABCD$ irgend eine von A ausgehende Darstellung des imaginären Elements P und $A_1B_1C_1D_1$ die von A_1 ausgehende und zu $ABCD$ projektivische Darstellung des imaginären Elements P_1. Bezieht man nun die gegebenen einförmigen Gebilde reell-projektivisch so auf einander, dass dem Wurfe $ABCD$ der Wurf $A_1B_1C_1D_1$ entspricht, so entspricht dem reellen Elemente A das reelle Element A_1 und dem imaginären Elemente P das imaginäre Element P_1. Und wenn den Elementen A, P die Elemente A_1, P_1 entsprechen sollen, so muss auch (149) dem Wurfe $ABCD$ der Wurf $A_1B_1C_1D_1$ entsprechen.

Haben also zwei reelle in einander liegende einförmige Gebilde, welche reell-projektivisch zu einander sind, ein reelles und ein imaginäres Element entsprechend gemein, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein.

151. Zwei reelle einförmige Gebilde können höchstens auf eine Art reell-projektivisch so auf einander bezogen werden, dass zwei gegebenen einander nicht conjungirten imaginären Elementen P, R des einen Gebildes zwei gegebene einander nicht conjungirte imaginäre Elemente P_1, R_1 des andern entsprechen.

Es seien den Elementen P, R die Elemente Q, S und den Elementen P_1, R_1 die Elemente Q_1, S_1 conjungirt. Es seien ferner M, N die reellen Elemente, welche (148) sowohl durch die Elemente P, Q als auch durch die Elemente R, S harmonisch getrennt sind, und ebenso M_1, N_1 die reellen Elemente, welche sowohl durch die Elemente P_1, Q_1 als auch durch die Elemente R_1, S_1 harmonisch getrennt sind. Es seien endlich $MANC$, $MBND$ die von M ausgehenden harmonischen Darstellungen der Elemente P, R und $M_1A_1N_1C_1$, $M_1B_1N_1D_1$ die von M_1 ausgehenden harmonischen Darstellungen der Elemente P_1, R_1. Wenn nun den Elementen P, R die Elemente P_1, R_1 entsprechen sollen, so müssen auch (149) den Elementen Q, S die Elemente Q_1, S_1 und mithin den Elementen M, N entweder die Elemente M_1, N_1 oder die Elemente N_1, M_1 entsprechen. Im erstern Falle muss dem Wurfe M A N C der Wurf $M_1A_1N_1C_1$ und dem Wurfe M B N D der Wurf $M_1B_1N_1D_1$ entsprechen, folglich $MNAB \barwedge M_1N_1A_1B_1$ sein. Im zweiten Falle muss dem Wurfe M A N C der Wurf $N_1C_1M_1A_1$ und dem Wurfe M B N D der Wurf $N_1D_1M_1B_1$ entsprechen, folglich $MNAB \barwedge N_1M_1C_1D_1$ sein. Dass aber die Würfe $M_1N_1A_1B_1$, $N_1M_1C_1D_1$ nicht projektivisch zu einander sind und also höchstens einer derselben zu dem Wurfe M N A B projektivisch sein kann, geht daraus hervor, weil in dem involutorischen Gebilde A_1C_1. B_1D_1... das Element M_1 nicht dem Elemente N_1 sondern sich selbst zugeordnet ist.

Haben also zwei reelle in einander liegende einförmige Gebilde, welche reell-projektivisch zu einander sind, zwei imaginäre einander nicht conjungirte Elemente entsprechend gemein, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein.

152. Wenn zwei reelle einförmige Gebilde, welche reell-projektivisch zu einander sind, in einander liegen und irgend zwei homologe imaginäre Elemente P, P_1 derselben einander conjungirt sind, so liegen die Gebilde involutorisch und haben zwei reelle Elemente entsprechend gemein, welche durch je zwei einander zugeordnete Elemente harmonisch getrennt sind.

Es entspreche dem Wurfe ABCD in dem einen Gebilde, welcher das imaginäre Element P desselben darstellt, der Wurf $A_1B_1C_1D_1$ im andern, so ist $A_1B_1C_1D_1$ eine Darstellung des imaginären Elements P_1 und also der Sinn $A_1B_1C_1$ dem Sinne A B C entgegengesetzt, woraus man schliessen kann, dass die zu einander projektivischen Gebilde zwei reelle Elemente M, N entsprechend gemein haben. Es sei nun $MFGF_1$ die von M ausgehende harmonische Darstellung des Elements P, so ist MF_1GF die von M ausgehende harmonische Darstellung des Elements P_1, daher (149) dem Wurfe $MFGF_1$ der Wurf MF_1GF entspricht. Da hiernach die reellen Elemente F, F_1 einander abwechselnd entsprechen, so gilt diess von je zwei homologen reellen Elementen, folglich auch von je zwei homologen reellen Würfen und mithin auch von je zwei homologen imaginären Elementen. Da endlich, wenn Q, Q_1 irgend zwei einander zugeordnete Elemente sind, das Element R, welches zu den drei Elementen Q, M, Q_1 und daher auch zu den drei Elementen Q_1, M, Q das vierte harmonische Element ist, sich selbst entspricht, die zu einander projektivischen Gebilde aber weder mehr als zwei reelle Elemente noch (150) ein imaginäres Element entsprechend gemein haben, so folgt, dass das Element R (und eben so das vorhin durch G bezeichnete Element) mit dem Elemente N zusammenfällt, und dass also je zwei einander zugeordnete Elemente Q, Q_1 durch die Elemente M, N harmonisch getrennt sind.

153. Wenn zwei reelle einförmige Gebilde, welche reell-projektivisch zu einander sind, in einander liegen und irgend zwei homologe Elemente P, P_1 derselben einander abwechselnd entsprechen, so liegen die Gebilde involutorisch und haben zwei Elemente entsprechend gemein, welche durch je zwei einander zugeordnete Elemente harmonisch getrennt und entweder beide reell oder beide imaginär und im letztern Falle einander conjungirt sind.

Sind nämlich P, P_1 entweder zwei reelle oder zwei einander conjungirte imaginäre Elemente, so folgt wie vorhin, dass je zwei homologe Elemente der zu einander projektivischen Gebilde einander abwechselnd entsprechen. Wenn aber P, P_1 zwei einander nicht conjungirte imaginäre Elemente und Q, Q_1 die ihnen conjungirten Elemente sind, so entsprechen (149) den Elementen P, Q, P_1, Q_1 des einen Gebildes die Elemente P_1, Q_1, P, Q des andern, daher die reellen Elemente M, N, welche sowohl durch die Elemente P, Q als auch durch die Elemente P_1, Q_1 harmonisch getrennt sind, entweder einander abwechselnd entsprechen oder jedes dieser Elemente sich selbst entspricht, in welchem letztern Falle je zwei von M ausgehende zu einander projektivische Würfe, von welchen der eine das Element P und der andere das Element P_1 darstellt, einander abwechselnd entsprechen. Da es hiernach in jedem Falle reelle Elemente giebt, welche einander abwechselnd entsprechen, so gilt diess von je zwei homologen Elementen. Sind nun A, B irgend zwei einander nicht zugeordnete reelle Elemente und A_1, B_1 die ihnen zugeordneten Elemente, so hat man zu unterscheiden, ob der Sinn ABA_1 mit dem Sinne A_1B_1A übereinstimmt oder demselben entgegengesetzt ist. Im letztern Falle haben die zu einander projektivischen Gebilde zwei reelle Elemente entsprechend gemein, während im erstern Falle das imaginäre Element ABA_1B_1 dem imaginären Elemente $A_1 B_1 A B$ also sich selbst zugeordnet ist und diess eben so von dem imaginären Elemente $A B_1 A_1 B$ gilt. Dass endlich die sich selbst zugeordneten Elemente S, T, deren es (150, 151) nicht mehr als zwei giebt, durch je zwei homologe Elemente E, E_1 harmonisch getrennt sind, geht daraus hervor, weil das Element, welches zu den drei Elementen E, S, E_1 und daher auch zu den drei Elementen E_1, S, E das vierte harmonische Element ist, sich selbst entspricht und daher mit T zusammenfällt.

Zwei einander conjungirte imaginäre Elemente I. Art sind also nichts anderes als die Ordnungselemente des ihnen zu Grunde liegenden involutorischen Gebildes.

Aus dem Satze selbst geht nun hervor, dass, wenn P, Q irgend zwei einander nicht zugeordnete Elemente eines involutorischen einförmigen Gebildes und P_1, Q_1 die ihnen zugeordneten Elemente sind, diejenigen Elemente des Gebildes, welche sowohl durch die Elemente P, Q als auch durch die Elemente P_1, Q_1 harmonisch getrennt sind, einander zugeordnet sind und also der letztere der oben in Hinsicht auf die Elemente M, N angenommenen Fälle gar nicht statt finden kann. Die sich selbst zugeordneten Elemente sind nämlich durch die Elemente P, P_1 und also nicht durch die Elemente P, Q harmonisch getrennt.

154. Zwei in einander liegende reelle einförmige Gebilde u, u_1, welche reell-projektivisch zu einander sind, haben, wenn nämlich nicht jedes Element des einen Gebildes mit dem ihm entsprechenden Elemente des andern zusammenfällt, entweder ein reelles oder zwei reelle oder zwei einander conjungirte imaginäre Elemente entsprechend gemein.

Liegen die Gebilde involutorisch, so findet (153) einer von den beiden letztern der im Satze erwähnten Fälle statt. Wenn aber dem reellen Elemente A des Gebildes u das Element A_1 des Gebildes u_1 und dem Elemente A_1 des erstern Gebildes ein von A verschiedenes Element A_2 des letztern entspricht, so kommt es darauf an, ob die zu einander projektivischen Gebilde das reelle Element H_1, welches zu den drei Elementen A, A_1, A_2 das vierte harmonische Element ist, entsprechend gemein haben oder ob dem Elemente H_1 des Gebildes u ein anderes Elemente H_2 des Gebildes u_1 entspricht. Im erstern dieser Fälle haben die

Gebilde (nach 86 und 150) nur das Element H_1, im letztern aber, wie sogleich bewiesen werden soll, die beiden Elemente M, N entsprechend gemein, welche sowohl durch die Elemente A_1, H_1 als auch durch die Elemente A_2, H_2 harmonisch getrennt sind. Entspricht nämlich dem Elemente A_2 des Gebildes u das Element A_3 des Gebildes u_1, so sind $AA_1A_2H_1, A_2A_1AH_1, A_1A_2A_3H_2$ homologe harmonische Würfe von drei zu einander projektivischen Gebilden u, v, u_1, von welchen sowohl die beiden erstern als auch die beiden letztern involutorisch liegen. Da nun (153) den Elementen M, N des Gebildes u die Elemente N, M des Gebildes v und den Elementen N, M des Gebildes v die Elemente M, N des Gebildes u_1 entsprechen, so folgt, dass die Gebilde u, u_1 die Elemente M, N entsprechend gemein haben.

155. Wenn ein reelles gerades Gebilde u und ein reeller Ebenenbüschel s reell-projektivisch zu einander sind, aber das gerade Gebilde weder zu dem Ebenenbüschel perspektivisch ist noch mit der Axe s desselben einen Punkt gemein hat, so giebt es (154) in der Geraden u entweder nur einen und zwar einen reellen Punkt, der in der ihm entsprechenden Ebene des Büschels liegt, oder es enthält die Gerade u zwei reelle oder zwei einander conjungirte imaginäre Punkte, deren jeder in der ihm entsprechenden Ebene des Büschels liegt. Giebt es in der Geraden u irgend zwei Punkte, deren jeder in der dem andern entsprechenden Ebene liegt, so liegen die zu einander projektivischen Gebilde involutorisch. Die Gerade u enthält alsdann nicht nur zwei Punkte, deren jeder in der ihm entsprechenden Ebene liegt, sondern es sind überdiess diese Punkte durch jeden dritten Punkt der Geraden und die ihm entsprechende Ebene harmonisch getrennt.

Analoges gilt, wenn ein reeller Strahlenbüschel und ein reelles gerades Gebilde, welches mit dem Büschel in einerlei Ebene liegt aber nicht durch seinen Mittelpunkt geht, oder ein reeller Strahlenbüschel und ein reeller Ebenenbüschel, dessen Axe durch den Mittelpunkt des Strahlenbüschels geht aber mit ihm nicht in einerlei Ebene liegt, reell-projektivisch jedoch nicht perspektivisch zu einander sind.

156. Wenn zwei räumliche Systeme, was ihre reellen Elemente anbelangt, projektivisch auf einander bezogen sind, so ist

dadurch von selbst auch jedem imaginären Elemente in dem einen Systeme ein imaginäres Element im andern zugewiesen. Da nämlich jedem reellen einförmigen Gebilde in dem einen Systeme ein reelles einförmiges Gebilde im andern entspricht, so entspricht auch (149) jedem imaginären Elemente I. Art in dem einen Systeme ein imaginäres Element I. Art im andern. Namentlich entspricht, wenn die Systeme reciprok zu einander sind, jedem imaginären Punkte $ABCD$ in dem einen Systeme eine imaginäre Ebene $A_1 B_1 C_1 D_1$ im andern, jeder durch den Punkt $ABCD$ gehenden imaginären Geraden $S(ABCD)$ I. Art eine in der Ebene $A_1 B_1 C_1 D_1$ liegende imaginäre Gerade $S_1 (A_1 B_1 C_1 D_1)$ I. Art und jeder durch den Punkt $ABCD$ gehenden imaginären Ebene ein in der Ebene $A_1 B_1 C_1 D_1$ liegender imaginärer Punkt. Es entspreche nun dem Wurfe $abcd$ in dem einen Systeme, welcher eine imaginäre Gerade II. Art darstellt, der Wurf $a_1 b_1 c_1 d_1$ im andern. Es seien ferner p, q zwei reelle Leitstrahlen der Regelschaar abc und p_1, q_1 die ihnen entsprechenden Leitstrahlen der Regelschaar $a_1 b_1 c_1$. Da nun den imaginären Punkten $p(abcd)$, $q(abcd)$ die imaginären Ebenen $p_1(a_1 b_1 c_1 d_1)$, $q_1 (a_1 b_1 c_1 d_1)$ entsprechen, so entspricht jeder Ebene, welche durch die Gerade $abcd$ und also auch durch jene Punkte geht, ein Punkt, welcher in der Geraden $a_1 b_1 c_1 d_1$ liegt, und eben so jedem in der Geraden $abcd$ befindlichen Punkte eine durch die Gerade $a_1 b_1 c_1 d_1$ gehende Ebene, mithin der Geraden $abcd$ die Gerade $a_1 b_1 c_1 d_1$. Bemerkt man noch, dass jedem vollständigen ebenen Vierseite in dem einen Systeme ein vollständiges Vierkant im andern entspricht, so folgt, dass auch jedem harmonischen Wurfe in dem einen Systeme, es mag derselbe einem reellen oder imaginären einförmigen Gebilde angehören, ein harmonischer Wurf im andern entspricht, daher auch je vier harmonisch liegenden Geraden in dem einen Systeme, deren keine zwei sich schneiden, vier solche harmonisch liegende Gerade im andern entsprechen. Dasselbe ist der Fall, wenn die Systeme collineär zu einander sind, folglich jedem vollständigen Vierseite in dem einen Systeme ein vollständiges Vierseit im andern entspricht.

Sind zwei räumliche Systeme auf die obige Art auf einander bezogen, so sollen sie reell-projektivisch zu einander heissen. Es geht aber hieraus von selbst hervor, was es heisst, wenn von zwei reellen Grundgebilden der zweiten Stufe gesagt wird, dass sie reell-projektivisch zu einander sind.

157. Sollen zwei reelle ebene Systeme reell-projektivisch so auf einander bezogen werden, dass einem gegebenen imaginären Punkte P des einen Systems eine gegebene imaginäre Gerade p des andern entspreche, so kann man noch zu zwei reellen Punkten M, N des einen Systems, von welchen keiner in dem reellen Träger s des imaginären Punkts liegt, zwei reelle Gerade m, n des andern Systems, von welchen keine durch den reellen Punkt S der imaginären Geraden geht, nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Systems ein Element des andern zugewiesen ist.

Dem Punkte A, in welchem die Gerade s von der Geraden M N geschnitten wird, muss die Gerade a entsprechen, welche den Punkt S mit dem Punkte m n verbindet. Ist also A B C D irgend eine von A ausgehende Darstellung des Punktes P und a b c d die von a ausgehende zu A B C D projektivische Darstellung der Geraden p, so müssen auch den Punkten B, C, D die Geraden b, c, d entsprechen. Und wenn man die ebenen Systeme projektivisch so auf einander bezieht, dass den Punkten M, N, B, C des einen Systems die Geraden m, n, b, c des andern entsprechen, so entspricht dem Punkte A die Gerade a, folglich dem Punkte D die Gerade d und mithin dem imaginären Punkte A B C D die imaginäre Gerade a b c d. Man kann hiernach auch zwei reelle ebene Systeme reell-projektivisch so auf einander beziehen, dass zwei gegebenen imaginären Geraden M(A B C D), N(A B C D) des einen Systems, welche in einem imaginären Punkte sich schneiden, zwei gegebene imaginäre Punkte m (a b c d), n (a b c d) des andern Systems, welche nicht in einer und derselben reellen Geraden liegen, entsprechen. Aber auch in diesem Falle sind eigentlich zu vier Elementen des einen Systems vier Elemente des andern gegeben, da durch ein imaginäres Element auch das demselben conjungirte imaginäre Element bestimmt ist und je zwei einander conjungirten imaginären Elementen des einen Systems zwei einander conjungirte imaginäre Elemente des andern entsprechen müssen.

Haben zwei ebene Systeme, welche reell-projektivisch zu einander sind, einen imaginären Punkt und zwei reelle Punkte, von welchen keiner in dem reellen Träger des imaginären Punktes liegt, oder eine imaginäre Gerade und zwei reelle Gerade, von welchen keine durch den reellen Punkt der imaginären Geraden geht, oder zwei nicht in einer und derselben reellen Geraden liegende imaginäre Punkte oder zwei nicht durch einen und denselben reellen Punkt gehende imaginäre Gerade entsprechend gemein, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein.

158. Sollen zwei räumliche Systeme reell-projektivisch so auf einander bezogen werden, dass einem gegebenen imaginären Punkte P des einen Systems eine gegebene imaginäre Ebene P_1 des andern entspreche, so kann man noch zu drei nicht in einer und derselben Geraden liegenden reellen Punkten A, B, C des einen Systems, von welchen keine zwei mit dem reellen Träger s des gegebenen imaginären Punkts in einerlei Ebene liegen, drei nicht in einer und derselben Geraden sich schneidende reelle Ebenen A_1, B_1, C_1 des andern Systems, von welchen keine zwei die reelle Axe s_1 der gegebenen imaginären Ebene in einem und demselben Punkte schneiden, nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Systems ein Element des andern zugewiesen ist.

Dem Punkte E, in welchem die Gerade s von der Ebene ABC geschnitten wird, muss die Ebene E_1 entsprechen, welche die Gerade s_1 aus dem Punkte $A_1 B_1 C_1$ projicirt. Ist also $EFGH$ irgend eine von E ausgehende Darstellung des imaginären Punktes P und $E_1 F_1 G_1 H_1$ die von E_1 ausgehende zu $EFGH$ projektivische Darstellung der imaginären Ebene P_1, so müssen auch den Punkten F, G, H die Ebenen F_1, G_1, H_1 entsprechen. Und wenn man die Systeme projektivisch so auf einander bezieht, dass den Punkten A, B, C, F, G des einen Systems die Ebenen A_1, B_1, C_1, F_1, G_1 des andern entsprechen, so entspricht auch dem Punkte E die Ebene E_1, folglich dem Punkte H die Ebene H_1 und mithin dem imaginären Punkte $EFGH$ die imaginäre Ebene $E_1 F_1 G_1 H_1$.

159. Sollen zwei räumliche Systeme reell-projektivisch so auf einander bezogen werden, dass zwei gegebenen imaginären Punkten P, Q des einen Systems, deren reelle Träger p, q nicht in einerlei Ebene liegen, zwei gegebene imaginäre Ebenen P_1, Q_1 des andern Systems, deren reelle Axen p_1, q_1 keinen Punkt mit einander gemein haben, entsprechen, so kann man noch zu einem reellen

Punkt A des einen Systems, welcher in keiner der Geraden p, q liegt, eine reelle Ebene A_1 des andern Systems, welche durch keine der Geraden p_1, q_1 geht, nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Systems ein Element des andern zugewiesen ist.

Dem Punkte E, in welchem die Gerade p von der Ebene A q geschnitten wird, muss die Ebene E_1 entsprechen, welche die Gerade p_1 aus dem Punkte A_1 q_1 projicirt. Ist also E F G H irgend eine von E ausgehende Darstellung des imaginären Punktes P und $E_1F_1G_1H_1$ die von E_1 ausgehende zu EFGH projektivische Darstellung der Ebene P_1, so müssen auch den Punkten F, G, H die Ebenen F_1, G_1, H_1 entsprechen. Und wenn man die Systeme reell-projektivisch so auf einander bezieht, dass (158) den Punkten Q, A, F, G des einen Systems die Ebenen Q_1, A_1, F_1, G_1 des andern entsprechen, so entspricht der Ebene A q der Punkt A_1 q_1, dem Punkte E die Ebene E_1 und dem Punkte P die Ebene P_1. Die mit diesem und dem vorigen Satze verwandten Sätze, welche von zwei zu einander collineären Systemen handeln, ergeben sich aus ihnen von selbst.

Haben zwei räumliche Systeme, welche reell-projektivisch zu einander sind, drei reelle Punkte, welche die Eckpunkte eines Dreiecks sind, und einen imaginären Punkt, dessen reeller Träger mit keiner Seite des Dreiecks in einerlei Ebene liegt, oder drei reelle Ebenen, welche die Seiten eines Dreikants sind, und eine imaginäre Ebene, deren reelle Axe mit keiner Kante des Dreikants in einerlei Ebene liegt, oder zwei imaginäre Punkte, deren reelle Träger nicht in einerlei Ebene liegen, und einen reellen Punkt, welcher in keiner von diesen Geraden liegt, oder zwei imaginäre Ebenen, deren reelle Axen nicht in einerlei Ebene liegen, und eine reelle Ebene, welche durch keine dieser Geraden geht, entsprechend gemein, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein.

160. Will man zwei räumliche Systeme reell-projektivisch so auf einander beziehen, dass der reellen Geraden a die reelle Gerade a_1 und der imaginären Geraden u II. Art, welche die Gerade a nicht schneidet, die imaginäre Gerade u_1 II. Art, welche die Gerade a_1 nicht schneidet, entspreche, so kann man noch zu drei reellen Punkten P, Q, R der Geraden a oder zu drei reellen Ebenen des Ebe-

nenbüschels a drei reelle Punkte der Geraden a_1 oder drei reelle Ebenen P_1, Q_1, R_1 des Ebenenbüschels a_1 nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Systems ein Element des andern zugewiesen ist.

Es sei a b c d irgend eine von a ausgehende Darstellung der imaginären Geraden u und $a_1 b_1 c_1 d_1$ die von a_1 ausgehende zu a b c d projektivische Darstellung der imaginären Geraden u_1. Es seien ferner p, p, r diejenigen Leitstrahlen der Regelschaar a b c, welche durch die Punkte P, Q, R gehen, und p_1, q_1, r_1 diejenigen Leitstrahlen der Regelschaar a_1 b_1 c_1, welche in den Ebenen P_1, Q_1, R_1 liegen. Bezieht man nun zwei räumliche Systeme projektivisch so auf einander, dass den reellen Elementen P, Q, R, b, c des einen Systems die reellen Elemente P_1, Q_1, R_1, b_1, c_1 des andern entsprechen, so entspricht auch der imaginären Geraden u des erstern Systems die imaginäre Gerade u_1 des letztern. Und wenn den Elementen P, Q, R, u die Elemente P_1, Q_1, R_1, u_1 entsprechen sollen, so müssen auch den Geraden b, c die Geraden b_1, c_1 entsprechen.

161. Wenn man zwei räumliche Systeme reell-projektivisch so auf einander bezieht, dass je zwei homologe reelle Elemente, also auch je zwei homologe reelle Würfe und mithin auch je zwei homologe imaginäre Elemente einander abwechselnd entsprechen, so hat man entweder ein reelles involutorisches System oder ein reelles Polarsystem. Ist von vier harmonisch liegenden Geraden a, m, a_1, n die erste der dritten, die zweite aber sich selbst zugeordnet, so gilt dies auch von der vierten, da diese auch zu den drei Geraden a_1, m, a die vierte harmonische Gerade ist.

Zwei einander conjungirte imaginäre Gerade II. Art sind nichts anderes als die Ordnungslinien des ihnen zu Grunde liegenden involutorischen Systems a a_1 . b b_1 ... Denn die einander zugeordneten Würfe a b a_1 b_1, a_1 b_1 a b stellen eine und dieselbe imaginäre Gerade m dar, daher diese sich selbst zugeordnet ist. Dasselbe gilt von der ihr conjungirten Geraden n. Da ferner jeder reelle Leitstrahl p des Systems sich selbst zugeordnet ist, so gilt diess auch von jedem Punkte m p oder n p, welcher in der einen oder in der andern von den beiden Geraden m, n liegt, und von jeder Ebene, welche durch irgend eine dieser Geraden geht, mithin auch von jeder Geraden, welche die beiden Geraden m, n schneidet. Jedem Punkte aber, welcher in keiner von den beiden Geraden m, n liegt, ist ein anderer Punkt, jeder Ebene, welche durch keine dieser Geraden geht, eine andere Ebene und jeder Geraden, welche nicht beide Ordnungslinien schneidet, eine andere Gerade zugeordnet. Je zwei einander zugeordnete sich nicht schneidende Gerade, also auch je zwei einander zugeordnete Punkte und je zwei einander zugeordnete Ebenen sind durch die Ordnungslinien harmonisch getrennt.

---

§. 11.

Reelle Polarsysteme.

162. Die Ordnungscurve eines ebenen Polarsystems ist nichts anderes als der Inbegriff von allen denjenigen Punkten der Ebene, deren jeder in seiner Polare liegt. Der Inbegriff von allen Geraden, deren jede durch ihren Pol geht, ist der der Curve sich anschmiegende Strahlenbüschel. Geht eine Gerade p durch ihren Pol P, so hat das gerade Gebilde p, da jeder andere Punkt desselben ausserhalb seiner Polare liegt, mit der Curve nur den Punkt P und eben so der Strahlenbüschel P mit dem der Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschel nur den Strahl p gemein.

163. Jede reelle Gerade s, welche in der Ebene eines reellen ebenen Polarsystems liegt, aber der Ordnungscurve K desselben sich nicht anschmiegt, schneidet diese Curve entweder in zwei reellen oder in zwei einander conjungirten imaginären Punkten. Im Pole S der Geraden s schneiden sich im erstern Falle zwei reelle, im letztern aber zwei einander conjungirte imaginäre Strahlen des der Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschels.

Wenn nämlich $S A A_1$, $S B B_1$ zwei reelle Polardreiecke sind, welche den Eckpunkt S und also auch die ihm gegenüberliegende Seite s mit einander gemein haben, und der Punkt B_1 in der Strecke $A B A_1$ liegt, so schneidet die Gerade s die Curve K in zwei reellen Punkten, in welchen dieselbe zwei reelle im Punkte S sich schneidende Gerade berührt. Wenn aber die Punkte A, A_1 durch die Punkte B, B_1 getrennt sind, so liegt der imaginäre Punkt $A B A_1 B_1$ in der ihm zugeordneten Geraden $S (A_1 B_1 A B)$

und eben so der imaginäre Punkt AB_1A_1B in der ihm zugeordneten Geraden $S(A_1BAB_1)$.

Ist die Ordnungscurve eines ebenen Polarsystems reell, so hat jedes in dem Systeme enthaltene reelle Polardreieck zwei Seiten, welche die Curve in reellen Punkten schneiden, während dieselbe von der dritten Seite des Dreiecks in imaginären Punkten geschnitten wird. Die Ordnungscurve eines reellen Polarsystems, welches in einer eigentlichen Ebene liegt, heisst eine Parabel oder eine Hyperbel oder eine Ellipse, je nachdem sie die unendlich ferne Gerade der Ebene in einem Punkte berührt oder in zwei reellen oder in zwei imaginären Punkten schneidet. Eine Ellipse kann also auch imaginär sein.

164. Wenn eine imaginäre Gerade $abcd$ und eine reelle Curve II. Ordnung, welche in einerlei Ebene liegen, durch einen und denselben reellen Punkt gehen, so schneiden sie sich auch noch in einem imaginären Punkte.

Durch jeden imaginären Punkt $ABCD$, dessen reeller Träger eine reelle Curve II. Ordnung berührt, geht auch eine imaginäre Tangente der Curve.

Es seien A_1, B_1, C_1, D_1 diejenigen Punkte der Curve, welche aus dem Punkte ab durch die Geraden a, b, c, d projicirt werden. Ist nun p die Involutionsaxe des in der Curve enthaltenen involutorischen Gebildes $A_1C_1 . B_1D_1 \ldots$, so ist $p(abcd)$ ein imaginärer Punkt, welcher sowohl in der Geraden $abcd$ als auch (75) in der Curve liegt. Und wenn ein imaginärer Punkt $s(abcd)$ der Geraden $abcd$, dessen reeller Träger nämlich die Gerade s ist, in der Curve liegen soll, so muss in Hinsicht auf dieselbe der Punkt sa dem Punkte sc und der Punkt sb dem Punkte sd, mithin (G. 253) die Gerade s sowohl der Geraden A_1C_1 als auch der Geraden B_1D_1 conjungirt sein und also s mit p zusammenfallen. Eben so ist das Involutionscentrum desjenigen der Curve sich anschmiegenden involutorischen Strahlenbüschels, welcher zu dem involutorischen geraden Gebilde $AC . BD \ldots$ perspektivisch ist, der reelle Punkt der durch den imaginären Punkt $ABCD$ gehenden imaginären Tangente.

165. Jede imaginäre Gerade, welche mit einem reellen Polarsysteme in einerlei Ebene liegt,

In jedem imaginären Punkte $ABCD$, welcher mit einem reellen Polarsysteme in einerlei aber weder mit der Ordnungscurve des Systems einen reellen Punkt gemein hat noch derselben sich anschmiegt, schneidet die Curve in zwei imaginären Punkten, deren reelle Träger durch den reellen Punkt der imaginären Geraden und dessen Polare harmonisch getrennt sind.

Ebene aber weder in der Ordnungscurve des Systems noch in einer reellen Tangente derselben liegt, schneiden sich zwei imaginäre Tangenten der Curve, deren reelle Punkte durch den reellen Träger A B des imaginären Punkts und den Pol S dieser Geraden harmonisch getrennt sind.

Da die Gerade A B zwei reelle Punkte enthält, welche (82) in dem involutorischen geraden Gebilde A C . B D . . . einander zugeordnet und zugleich in dem Polarsysteme einander conjungirt sind, so kann man annehmen, dass S A C ein Polardreieck ist. Da alsdann die Punkte B, D einander nicht conjungirt sind, so wird das dem Strahlenbüschel B zugeordnete gerade Gebilde aus dem Punkte D durch einen Strahlenbüschel D projicirt, welcher zum erstern projektivisch ist. Weil ferner je zwei homologe Strahlen dieser Büschel einander conjungirt sind, folglich den Strahlen BS, BD des einen die Strahlen DB, DS des andern entsprechen, so erzeugen sie eine Curve K II. Ordnung, welche die Geraden S B, S D in den Punkten B, D berührt und daher die eine von den beiden Geraden S A, S C in zwei reellen Punkten F, G, die andere aber in zwei imaginären Punkten schneidet. Da nun in dem Polarsysteme der Geraden F A die Gerade F C und der Geraden F B die Gerade F D conjungirt ist, so berührt die Ordnungscurve des Systems die imaginäre Gerade F(ABCD) und eben so die imaginäre Gerade G (ABCD). Und wenn eine durch den imaginären Punkt A B C D gehende imaginäre Gerade in dem Polarsysteme sich selbst conjungirt sein soll, so müssen, wenn man ihren reellen Punkt durch H bezeichnet, sowohl die Geraden H A, H C als auch die Geraden H B, H D einander conjungirt sein, woraus man schliessen kann, dass der Punkt H in einer von den beiden Geraden S A, S C und zugleich in der Curve K liegt, demnach entweder mit F oder mit G zusammenfällt. Bemerkt man noch, dass die zu einander projektivischen Strahlenbüschel B, D von der Geraden F G in zwei zu einander projektivischen geraden Gebilden geschnitten werden, welche die Punkte F, G entsprechend gemein haben, während die Punkte S, A oder S, C einander abwechselnd entsprechen, so folgt, dass die Punkte F, G durch je zwei homologe Strahlen, deren Schnittpunkt ausserhalb der Geraden F G liegt, harmonisch getrennt sind.

166. Jede Gerade s, welche mit einer Curve II. Ordnung in einerlei Ebene liegt, aber der Curve sich nicht anschmiegt, schneidet dieselbe in zwei Punkten M, N, daher auch durch den Pol S der Geraden s zwei der Curve sich anschmiegende Gerade S M, S N gehen. Durch jeden dritten Punkt P der Geraden s und dessen Polare p sind die Punkte M, N und eben so die Geraden S M, S N harmonisch getrennt. Denn dem Punkte N_1, welcher zu den drei Punkten P, M, sp der vierte harmonische Punkt ist, ist in Hinsicht auf die Curve die durch ihn gehende Gerade S N_1 zugeordnet, welche zu den drei Geraden p, S M, S P die vierte harmonische Gerade ist, woraus man schliessen kann, dass N_1 mit N zusammenfällt. Wenn also eine Curve II. Ordnung

durch die vier Eckpunkte eines vollständigen Vierecks geht, so sind die drei Punkte, in deren jedem zwei einander gegenüberliegende Seiten des Vierecks sich schneiden, die Eckpunkte eines zur Curve gehörigen Polardreiecks.

die vier Seiten eines vollständigen Vierseits berührt, so sind die drei Geraden, deren jede zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte des Vierseits verbindet, die Seiten eines zur Curve gehörigen Polardreiecks.

Anm. Durch das Bisherige ist die Gültigkeit der obigen Sätze nur für die Ordnungscurven reeller Polarsysteme bewiesen.

167. Die Ordnungsfläche F eines räumlichen Polarsystems, welches nämlich kein Nullsystem ist, ist nichts anderes als der Inbegriff von allen Punkten, deren jeder in seiner Polare liegt. Der Inbegriff von allen Ebenen, deren jede durch ihren Pol geht, ist der der Fläche sich anschmiegende Ebenenbündel. Wird eine Gerade p von der ihr zugeordneten Geraden p_1 geschnitten, so hat das gerade Gebilde p mit der Fläche F nur den Punkt $p p_1$ und der Ebenenbüschel p mit dem der Fläche F sich anschmiegenden Ebenenbündel nur die Ebene $p p_1$ gemein.

Von einer Fläche II. Ordnung und einer ausserhalb derselben liegenden Geraden wird gesagt, dass sie in einem gemeinschaftlichen Punkte sich berühren oder schneiden, je nachdem sie nur diesen Punkt oder noch einen Punkt mit einander gemein haben.

168. Jede reelle Gerade a, welche in einem reellen räumlichen Polarsysteme weder sich selbst zugeordnet ist noch von der ihr zugeordneten Geraden a_1 geschnitten wird, schneidet die Ordnungsfläche F des Systems entweder in zwei reellen oder in zwei einander conjungirten imaginären Punkten. Eben so schneiden sich in der Geraden a entweder zwei reelle oder zwei einander conjungirte imaginäre Ebenen des der Fläche F sich anschmiegenden Ebenenbündels.

Da nämlich das gerade Gebilde a und der ihm zugeordnete Ebenenbüschel a_1 reell-projektivisch zu einander sind und überdiess involutorisch liegen, so liegen (155) zwei Punkte M, N der Geraden a, welche entweder beide reell oder beide imaginär und im letztern Falle einander conjungirt sind, in den ihnen zugeordneten Ebenen und also auch in der Fläche F, während durch jeden dritten in der Geraden a befindlichen Punkt und dessen Polare die Punkte M, N und daher auch die Ebenen a_1M, a_1N harmonisch getrennt sind. Eben so hat die Fläche F mit der Geraden a_1 zwei Punkte S, T gemein, in welchen derselben zwei reelle oder zwei einander conjungirte imaginäre Ebenen a S, a T des Ebenenbüschels a sich anschmiegen. Zu bemerken ist noch, dass die Gerade M S, welche die Punkte M, S mit einander verbindet, der Schnittlinie der Ebenen a_1 M, a S, also sich selbst zugeordnet ist und mithin in der Fläche F liegt. Dasselbe gilt von den Geraden MT, NS, NT.

169. Jede reelle Fläche F, welche die Ordnungsfläche eines räumlichen Polarsystems ist, wird von jeder ihr sich anschmiegenden reellen Ebene P entweder in zwei reellen oder in zwei einander conjungirten imaginären Geraden geschnitten, je nachdem nämlich die Fläche F zwei reelle Regelschaaren enthält oder mit keiner reellen Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat.

Da jeder Geraden a, welche in der Ebene P liegt und durch deren Pol P_1 geht, eine Gerade a_1 zugeordnet ist, welche ebenfalls durch den Punkt P_1 geht und in der Ebene P liegt, so ist diese Ebene der Träger und ihr Pol P_1 der Mittelpunkt eines in dem Polarsysteme enthaltenen involutorischen Strahlenbüschels $aa_1.b\,b_1\ldots$, dessen Ordnungsstrahlen m, n in der Fläche F liegen und (153) entweder beide reell oder beide imaginär und in diesem Falle einander conjungirt sind. Dass übrigens alle Punkte, welche die Fläche F mit der Ebene P gemein hat, in den Geraden m, n liegen und jede von P verschiedene Ebene, welche durch den Punkt P_1 geht und der Fläche F sich anschmiegt, die Ebene P in einer von den beiden Geraden m, n schneidet, geht daraus hervor, weil diese Linien durch je zwei einander zugeordnete Strahlen des erwähnten involutorischen Strahlenbüschels harmonisch getrennt sind.

170. Wenn in einem Polarsysteme jedem Eckpunkte des reellen Tetraeders ABCD die ihm gegenüberliegende Seite und dem reellen Punkte P, welcher in keiner Seite des Tetraeders liegt, die reelle Ebene P_1 zugeordnet ist, so schneidet diese entweder vier oder drei oder keine der sechs Strecken, deren jede zwei Eckpunkte des Tetraeders verbindet und von der durch den Punkt P und die beiden übrigen Eckpunkte des Tetraeders gehenden Ebene geschnitten wird. Im ersten Falle, wenn nämlich die Ordnungsfläche F des Polarsystems zwei Paar Gegenkanten des Tetraeders in reellen Punkten schneidet, enthält dieselbe zwei reelle Regelschaaren. Im zweiten Falle, wenn nämlich die Fläche F drei durch einen und denselben Eckpunkt gehende Kanten des Tetraeders in reellen Punkten schneidet und daher einen Eckpunkt des Tetraeders einschliesst, ist dieselbe zwar reell, hat aber mit keiner reellen Geraden mehr als zwei Punkte gemein. Im dritten Falle ist jeder Punkt der Fläche imaginär.

Jede reelle Ebene Q, welche nicht durch ihren Pol Q_1 geht, schneidet die Fläche F in der Ordnungscurve K eines reellen ebenen Polarsystems, in welchem ein Punkt A und eine Gerade a einander zugeordnet sind, wenn in dem räumlichen Polarsysteme dem Punkte A die Ebene Q_1a und also der Geraden a die Gerade Q_1A zugeordnet ist. Dem der Curve K sich anschmiegenden Strahlenbüschel ist also in dem räumlichen Polarsysteme die Kegelfläche zugeordnet, welche die Curve K aus dem Punkte Q_1 projicirt. Da nun je zwei einander zugeordnete Elemente dieser Gebilde sich schneiden, folglich jede Gerade, welche der Kegelfläche angehört, mit der Fläche F nur einen Punkt gemein hat, so kann man sagen, dass die beiden Flächen in der Curve K sich berühren. Gleichwie endlich diese Curve der Inbegriff von allen Punkten ist, welche die

Fläche F mit der Ebene Q gemein hat, so ist der der erwähnten Kegelfläche sich anschmiegende Ebenenbüschel der Inbegriff von allen denjenigen der Fläche F sich anschmiegenden Ebenen, welche durch den Punkt Q_1 gehen. — In dem zweiten der oben betrachteten Fälle wird die Fläche F von drei Seiten des Tetraeders ABCD in reellen Curven, von der vierten Seite aber in einer imaginären Curve geschnitten.

171. Jede imaginäre Ebene ABCD, deren reelle Axe s in einer reellen Regelfläche F liegt, schneidet die Fläche auch noch in einer imaginären Geraden II. Art.

Es seien a, b, c, d diejenigen in der Regelfläche liegenden Geraden, welche aus der Axe s durch die Ebenen A, B, C, D projicirt werden, so ist a b c d eine imaginäre II. Art, welche sowohl in der imaginären Ebene A B C D als auch, da der Wurf a b c d in Hinsicht auf die Fläche F sich selbst zugeordnet ist, in dieser Fläche liegt. Um noch zu beweisen, dass jede dritte Gerade u, welche in der Ebene A B C D liegt und durch deren Pol s (a b c d) geht, von der ihr zugeordneten Geraden u_1 durch die Geraden s, abcd harmonisch getrennt ist, nehme man irgend eine reelle Ebene H an, welche die Fläche F in einer Curve K schneidet. Da nun die Punkte H u, Hu_1 in Hinsicht auf die Fläche F und also auch in Hinsicht auf die Curve K einander conjungirt, folglich (166) durch den Punkt H s und den in der Geraden a b c d befindlichen Punkt der Ebene H harmonisch getrennt sind, so sind auch die Geraden u, u_1 durch die Geraden s, a b c d harmonisch getrennt.

172. Die Ordnungsfläche F eines reellen räumlichen Polarsystems wird von jeder ihr sich anschmiegenden imaginären Ebene P, deren reelle Axe a nicht in der Fläche liegt, entweder in zwei imaginären Geraden I. Art oder in zwei imaginären Geraden II. Art geschnitten.

Da nämlich (167) die Gerade a mit der ihr zugeordneten Geraden a_1, in welcher der imaginäre Pol S der Ebene P liegt, keinen Punkt gemein hat, so schneidet sie (168) die Fläche F in zwei Punkten M, N, welche entweder beide reell oder beide imaginär sind. Diese Punkte werden aber aus dem Punkte S durch zwei Gerade SM, SN projicirt, welche sowohl in der Ebene P als auch (168) in der Fläche F liegen. Jede dritte Gerade u, welche in der Ebene P liegt und durch deren Pol S geht, ist von der ihr zugeordneten Geraden u_1 durch die Geraden SM, SN harmonisch getrennt, weil die Punkte a u, a u_1 durch die Punkte M, N harmonisch getrennt sind. Der erste der im Satze erwähnten Fälle findet nur statt, wenn die Fläche F reell ist aber mit keiner reellen Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat.

173. Jede Gerade, welche mit der Ordnungsfläche F eines räumlichen Polarsystems mehr als zwei Punkte gemein hat oder durch welche mehr als zwei der Fläche sich anschmiegende Ebenen gehen, ist sich selbst zugeordnet.

Es seien P, Q die Pole von irgend zwei der Fläche F sich anschmiegenden Ebenen P_1, Q_1. Wenn nun die Gerade PQ nicht sich selbst zugeordnet ist, so hat sie (167) mit der ihr zugeordneten Geraden $P_1 Q_1$ keinen Punkt gemein und alsdann sind, da die Ebene P_1 die Fläche F in zwei Geraden PS, PT schneidet, die Geraden PQ, $P_1 Q_1$ zwei Kanten eines Tetraeders PQST, dessen vier übrige Kanten in der Fläche F liegen. Die Geraden SP, SQ sind durch jeden Punkt, welcher ausserhalb derselben aber mit ihnen in einerlei Ebene liegt, und dessen Polare harmonisch getrennt, daher die Gerade PQ mit der Fläche F nur die Punkte P, Q und der Ebenenbüschel, dessen Axe die Gerade $P_1 Q_1$ ist, mit dem der Fläche F sich anschmiegenden Ebenenbündel nur die Ebenen P_1, Q_1 gemein hat.

Anm. Da die in 169—172 enthaltenen Sätze reelle Polarsysteme voraussetzen, so ist auch die Gültigkeit des obigen Satzes vorläufig nur für reelle Polarsysteme bewiesen. Dasselbe ist in Hinsicht auf den nächstfolgenden Satz zu bemerken.

174. In jeder Fläche F, welche die Ordnungsfläche eines räumlichen Polarsystems ist, sind zwei Regelschaaren enthalten, von welchen jede die Leitschaar der andern ist, so dass nämlich jede Gerade der einen Schaar von jeder Geraden der andern Schaar geschnitten wird, während je zwei Gerade, welche einer und derselben Schaar angehören, keinen Punkt mit einander gemein haben. Jede der Fläche F sich anschmiegende Ebene schneidet dieselbe in einer Geraden der einen Schaar und in einer Geraden der andern Schaar, daher auch in jedem Punkte der Fläche F eine Gerade der einen Schaar von einer Geraden der andern Schaar geschnitten wird.

Da nämlich je zwei in der Fläche F liegende sich schneidende Gerade a, p durch jeden Punkt, welcher in der Ebene ap aber in keiner der Geraden a, p liegt, und dessen Polare harmonisch getrennt sind, so folgt, dass jede dritte in der Fläche F liegende Gerade die eine von den beiden erstern schneidet mit der andern aber keinen Punkt gemein hat.

Wenn die Fläche F reell ist aber mit keiner reellen Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat, so ist jede in ihr liegende Gerade eine imaginäre Gerade I. Art. Enthält die Fläche F zwei reelle Regelschaaren, so ist jede in ihr liegende imaginäre Gerade eine imaginäre Gerade II. Art. Ist kein Punkt der Fläche reell, so ist jede in ihr liegende Gerade eine imaginäre Gerade II. Art. Die Ordnungsfläche eines reellen räumlichen Polarsystems, in welchem keine reelle Gerade sich selbst zugeordnet ist, heisst ein Ellipsoid oder Parabaloid oder Hyperboloid, je nachdem sie die unendlich ferne Ebene in einer imaginären Curve oder in zwei einander conjungirten imaginären Geraden oder in einer reellen Curve schneidet. Ein Ellipsoid kann also auch imaginär sein.

---

§. 12.

Imaginäre Elemente in reellen Elementargebilden.

175. Geht die Ordnungsfläche eines reellen räumlichen Polarsystems durch die reelle Gerade a und durch die imaginäre Gerade abcd, so geht sie auch durch die reellen Geraden b, c, d. Denn wäre dem Wurfe abcd ein anderer Wurf $a b_1 c_1 d_1$ zugeordnet, so wäre auch (118) der imaginären Geraden abcd eine andere imaginäre Gerade $a b_1 c_1 d_1$ zugeordnet, was gegen die Annahme ist.

Durch eine reelle Gerade a und eine imaginäre Gerade u II. Art, welche die reelle Gerade nicht schneidet, ist eine reelle Regelschaar bestimmt, der nämlich die beiden gegebenen Geraden und also auch, wenn abcd irgend eine von a ausgehende Darstellung der Geraden u ist, die Geraden b, c, d angehören. Ist v ein imaginärer Leitstrahl der Regelschaar und pqrs irgend eine von einem reellen Leitstrahle p ausgehende Darstellung desselben, so haben die involutorischen Regelschaaren ac.bd..., pr.qs...zwei gemeinschaftliche Involutionsaxen, welche sich auch dadurch von einander unterscheiden, dass in Hinsicht auf die eine als Träger von Punkten, in Hinsicht auf die andere aber als Schnittlinie von Ebenen die Regelschaaren a b c, p q r in einem und demselben Sinne beschrieben sind. Die erstere der erwähnten Geraden ist der reelle Träger des Punktes u v, die letztere aber die reelle Axe der Ebene u v.

176. Durch eine reelle Curve K II. Ordnung und eine reelle Gerade p, welche mit der Curve in einerlei Ebene liegt aber derselben sich nicht anschmiegt, ist ein in der Curve enthaltenes involutorisches Punktgebilde $AA_1 . BB_1 \ldots$ bestimmt, von welchem nämlich die gegebene Gerade die Involutionsaxe und also der Pol P derselben das Involutionscentrum ist. Wenn nun die Curve K und die Gerade p in zwei imaginären Punkten $EFE_1 F_1 . EF_1 E_1 F$ sich schneiden und der Sinn ABA_1 mit dem Sinne EFE_1 übereinstimmt, so kann der imaginäre Punkt $EFE_1 F_1$ als Punkt der Curve K durch $ABA_1 B_1$ und der demselben conjungirte Punkt durch $AB_1 A_1 B$ dargestellt und gesagt werden, dass man den einen oder den andern dieser Punkte, in welchen die Curve K von der Involutionsaxe des involutorischen Gebildes $AA_1 . BB_1 \ldots$ geschnitten wird, erhalte, je nachdem man mit diesem Gebilde den Sinn ABA_1 oder den Sinn $AB_1 A_1$ verbindet. Eben so können, wenn die Curve K in den Punkten A, B, A_1, B_1 von den Geraden a, b, a_1, b_1 berührt wird, die imaginären Tangenten $P\ (EFE_1 F_1)$, $P(EF_1 E_1 F)$, welche in dem Involutionscentrum des involutorischen Gebildes $aa_1 . bb_1 \ldots$ sich schneiden, als Strahlen des der Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschels durch $aba_1 b_1$, $a b_1 a_1 b$ dargestellt werden. Aus jedem ausserhalb der Ebene liegenden reellen Punkte S wird die Curve K durch eine reelle Kegelfläche projicirt, welcher in den imaginären Geraden $S(A B A_1 B_1)$, $S(A B_1 A_1 B)$ die imaginären Ebenen $S(a b a_1 b)$, $S(a b_1 a_1 b)$ sich anschmiegen.

Anm. Bisher wurde, wenn von einem imaginären Elemente I. Art die Rede war, immer vorausgesetzt, dass dasselbe durch vier reelle Elemente eines einförmigen Gebildes dargestellt sei.

177. Jedes imaginäre Element, welches in einem reellen Elementargebilde enthalten ist, kann durch vier reelle Elemente dieses Gebildes dargestellt werden, so dass überdies die Darstellung von

einem gegebenen reellen Elemente des Gebildes ausgeht und zu einem gegebenen ordentlichen Wurfe projektivisch ist.

Sind zwei Elementargebilde, was ihre reellen Elemente anbelangt, projektivisch auf einander bezogen, so ist dadurch von selbst jedem imaginären Elemente ABCD in dem einen ein imaginäres Element a b c d im andern zugewiesen, indem jedem Wurfe ABCD in dem einen Gebilde ein Wurf a b c d im andern entspricht. Wenn überdiess jedes reelle Element des einen Gebildes in dem ihm entsprechenden Elemente des andern liegt, so liegt auch jedes imaginäre Element des erstern Gebildes in dem ihm entsprechenden Elemente des letztern. Es wird hinreichend sein, folgende Fälle zu betrachten, in welchen angenommen ist, dass ABCD... eine Curve II. Ordnung sei.

Ist a b c d... ein Strahlenbüschel I. Ordnung, so schneidet (164) die imaginäre Gerade a b c d die Curve in dem imaginären Punkte p (a b c d), welcher in der Involutionsaxe p des involutorischen Gebildes AC.BD... liegt und als Punkt der Curve durch ABCD dargestellt wird. — Ist a b c d... eine Regelschaar, so seien p, q irgend zwei reelle Leitstrahlen derselben. Da nun der Punkt ABCD in den beiden Geraden liegt, in welchen die reelle Ebene ABC die imaginären Ebenen p (a b c d), q (a b c d) schneidet, so liegt er auch in diesen beiden Ebenen und also auch in ihrer Schnittlinie a b c d. — Ist a b c d ein Strahlenbüschel II. Ordnung und S irgend ein ausserhalb der Ebene ABC liegender reeller Punkt, so kann man (20) eine reelle Regelschaar $a_1\, b_1\, c_1\, d_1$ ... annehmen, welche zu der Curve ABCD... und daher auch zu dem Ebenenbüschel S (a b c d ...) projektivisch ist, so dass überdies jede reelle Gerade der Regelschaar durch den ihr entsprechenden Punkt der Curve geht und in der ihr entsprechenden Ebene des Ebenenbüschels liegt. Da aber alsdann auch jede imaginäre Gerade der Regelschaar durch den ihr entsprechenden Punkt der Curve geht und in der ihr entsprechenden Ebene des Ebenenbüschels liegt, so liegt auch der imaginäre Punkt ABCD in der imaginären Ebene S (a b c d) und also auch in der imaginären Geraden a b c d.

Wo also auch früher von zwei zu einander projektivischen Elementargebilden die Rede war, welche ein zu ihnen perspektivisches drittes Elementargebilde erzeugen, so gilt diess nun mit Rücksicht auf die imaginären Elemente der Gebilde, so dass nämlich durch je zwei homologe imaginäre Elemente P, P_1 der beiden erstern Gebilde das ihnen entsprechende imaginäre Element $P P_1$ des dritten bestimmt ist.

178. Wenn zwei reelle Elementargebilde reell-projektivisch zu einander sind, so entspricht auch jedem imaginären harmonischen Wurfe abcd in dem einen Gebilde ein imaginärer harmonischer Wurf ABCD im andern.

Da es, wie in 149, hinreichend ist, die Fälle zu betrachten, in welchen die Gebilde perspektivisch zu einander sind, so nehme man an, dass das erstere Gebilde eine Regelschaar und das letztere eine zu dieser Regelschaar perspektivische Curve K sei. Weil nun der Wurf abcd aus jedem Leitstrahle p der Regelschaar durch einen harmonischen Ebenenbüschel p(abcd) und also der Wurf ABCD aus jedem Punkte pK der Curve durch einen harmonischen Strahlenbüschel projicirt wird, so sind in der Curve die Punkte A, C durch die Punkte B, D harmonisch getrennt. Uebrigens lässt sich leicht auch noch beweisen, dass die Geraden AC, BD in Hinsicht auf die Curve K einander conjugirt sind.

Die in 150—154 über einförmige Gebilde aufgestellten Sätze gelten also nun von Elementargebilden überhaupt.

179. Durch einen imaginären Punkt ABCD, eine durch denselben gehende imaginäre Gerade S(ABCD) und

einen reellen Punkt P, welcher mit den beiden erstern Elementen in einer und derselben reellen Ebene aber weder in dem reellen Träger AB des imaginären Punkts noch in der imaginären Geraden liegt, ist eine reelle Curve K II. Ordnung bestimmt, welche nämlich in dem gegebenen imaginären Punkte die gegebene imaginäre Gerade berührt und überdiess durch den gegebenen reellen Punkt geht.

eine reelle Gerade, welche mit den beiden erstern Elementen in einer und derselben reellen Ebene liegt aber weder durch den imaginären Punkt ABCD noch durch den reellen Punkt S der imaginären Geraden geht, ist eine reelle Curve II. Ordnung bestimmt, welche nämlich die gegebene imaginäre Gerade in dem gegebenen imaginären Punkt berührt und auch der gegebenen reellen Geraden sich anschmiegt.

Geht die Gerade SA, was man annehmen kann, durch den

Punkt P, so ist K die Ordnungscurve desjenigen Polarsystems, in welchem jedem Eckpunkte des Dreiecks SBD die ihm gegenüberliegende Seite und dem Punkte P die Gerade PC zugeordnet ist.

180. Durch ein reelles Dreieck ABC und einen imaginären Punkt P, dessen reeller Träger die Seiten des Dreiecks in drei Punkten schneidet, ist eine reelle Curve K II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die drei Eckpunkte des gegebenen Dreiecks und durch den gegebenen imaginären Punkt geht.

Durch ein reelles Dreieck und eine imaginäre Gerade, welche die Seiten des Dreiecks in imaginären Punkten schneidet, ist eine reelle Curve II. Ordnung bestimmt, welche nämlich die drei Seiten des gegebenen Dreiecks und die gegebene imaginäre Gerade berührt.

Bezieht man (150) die Strahlenbüschel A, B reell-projektivisch so aufeinander, dass den Strahlen AC, AP des erstern die Strahlen BC, BP des letztern entsprechen, so erzeugen sie die im Satze erwähnte Curve K. Bezieht man aber die Strahlenbüschel A, B reell-projektivisch so auf einander, dass den Strahlen AC, AP des erstern die Strahlen BA, BP des letztern entsprechen, so erzeugen sie diejenige reelle Curve II. Ordnung, welche die Gerade AC im Punkte A berührt und überdiess durch die beiden Punkte B, P geht.

181. Durch einen reellen Punkt A und vier imaginäre Punkte P, P_1, Q, Q_1, welche paarweise einander conjungirt sind, ist eine reelle Curve II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die fünf gegebenen Punkte geht, vorausgesetzt dass diese in einerlei Ebene aber keine drei derselben in einer und derselben Geraden liegen.

Durch eine reelle Gerade und vier imaginäre Gerade, welche paarweise einander conjungirt sind, ist eine reelle Curve II. Ordnung bestimmt, welche nämlich die fünf gegebenen Geraden berührt, vorausgesetzt dass diese in einerlei Ebene liegen aber keine drei derselben in einem und demselben Punkte sich schneiden.

Es seien F, G, H die reellen Punkte, in welchen die Geraden PP_1, PQ, PQ_1 beziehlich von den Geraden QQ_1, P_1Q_1, P_1Q geschnitten werden, so muss (166) in Hinsicht auf die Curve jeder Eckpunkt des Dreiecks FGH der ihm gegenüberliegenden Seite zugeordnet sein und daher die Curve auch durch die beiden Punkte B, C gehen, von welchen der erstere durch den Punkt F und die Gerade G H, der letztere aber durch den Punkt G und die Gerade FH vom Punkte A harmonisch getrennt ist. Und wenn K die reelle Curve II. Ordnung ist, welche durch die drei reellen Punkte A, B, C und die einander conjungirten imaginären Punkte P, P_1 geht, so ist in Hinsicht auf dieselbe dem Punkte F die Gerade GH zugeordnet, indem diese Elemente sowohl durch die Punkte A, B als auch durch die Punkte P, P_1 harmonisch getrennt sind. Da endlich die Punkte A, C durch den Punkt G und die Gerade FH harmonisch getrennt sind, also in Hinsicht auf die Curve K dem Punkt G die Gerade FH zugeordnet ist, so geht dieselbe auch durch die Punkte Q, Q_1.

---

§. 13.

Gemeinschaftliche Punkte und Tangenten zweier Curven II. Ordnung.

182. Wenn zwei reelle Polarsysteme ein imaginäres Polardreieck FGH mit einander gemein haben, so hat dieses einen reellen Eckpunkt und zwei in einer und derselben reellen Geraden liegende imaginäre Eckpunkte.

Ist nämlich G ein imaginärer Punkt, so ist auch die ihm zugeordnete Gerade FH imaginär, daher das Dreieck wenigstens noch einen imaginären Eckpunkt H hat. Würden nun die reellen Träger der Punkte G, H sich schneiden, so gäbe es (157) nur ein reelles Polarsystem, in welchem den Punkten G, H die Geraden FH, FG zugeordnet sind. Da hiernach die Punkte G, H in einer und derselben reellen Geraden liegen, so ist auch der Punkt F reell.

Haben die Polarsysteme nur das Polardreieck FGH mit einander gemein, so sind die Punkte G, H einander conjungirt, indem die zu einander projektivischen geraden Gebilde, von welchen das eine in dem einen Polarsysteme und das andere in dem andern Polarsysteme dem Strahlenbüschel F zugeordnet ist, nur die Punkte G, H entsprechend gemein haben.

183. Wenn zwei reelle Polarsysteme mehr als ein Polardreieck mit einander gemein haben, so berühren sich die Ordnungs-

curven der Systeme entweder in zwei reellen oder in zwei einander conjungirten imaginären Punkten.

Man nehme an, dass in beiden Polarsystemen jedem Eckpunkte des Dreiecks F GH die ihm gegenüberliegende Seite und dem Punkte P die Gerade p zugeordnet ist, so muss der Punkt P in einer Seite des Dreiecks FGH liegen, weil es, wenn dem nicht so wäre, nur ein Polarsystem geben würde, in welchem den Punkten F, G, H, P die Geraden GH FH, FG, p zugeordnet sind. Wenn nun der Punkt P in der Geraden GH liegt, so hat man zu unterscheiden, ob diese Gerade von der Geraden p im Punkte P oder in einem andern Punkte Q geschnitten wird. Im erstern Falle berühren sich die Ordnungscurven der Polarsysteme im Punkte P und in dem Punkte, welcher vom Punkte P durch die Punkte G, H harmonisch getrennt ist. Im letzteren Falle berühren sich die Curven in den Punkten, welche sowohl durch die Punkte G, H als auch die P, Q harmonisch getrennt sind. Hätten die Curven einen ausserhalb der Geraden GH liegenden Punkt A mit einander gemein, so würden sie, da jeder durch den Punkt F gehenden Geraden in beiden Polarsystemen ein und derselbe Punkt zugeordnet ist, auch im Punkt A und in dem Punkte B sich berühren, welcher vom Punkte A durch den Pnnkt F und die Gerade GH harmonisch getrennt ist. Alsdann würde aber auch jedem in der Geraden A B befindlichen Punkte in beiden Systemen eine und dieselbe Gerade zugeordnet sein, was nicht möglich ist. Da hiernach die Curven nur zwei Punkte mit einander gemein haben, so sind diese entweder beide reell oder beide imaginär und einander conjungirt.

Schneiden sich die Ordnungscurven von zwei reellen Polarsystemen in vier Punkten, so sind diese entweder sämmtlich reell oder sämmtlich imaginär, oder es sind zwei reell, die beiden übrigen aber imaginär. Das Polardreieck, welches (166) die Systeme mit einander gemein haben, ist in den beiden erstern Fällen reell, im letztern aber imaginär.

184. Wenn zwei reelle Polarsysteme ein reelles Polardreieck F G H aber nicht noch ein Polardreieck mit einander gemein haben, so schneiden sich (183) ihre Ordnungskurven entweder in vier reellen oder in vier imaginären Punkten. Eben so haben die

Curven vier gemeinschaftliche Tangenten, welche entweder sämmtlich reell oder sämmtlich imaginär sind.

Zu jedem reellen Punkte P, welcher in keiner Seite des Dreiecks FGH liegt, giebt es einen reellen Punkt Q, welcher dem Punkte P in beiden Polarsystemen conjugirt ist und daher ebenfalls in keiner Seite des Dreiecks FGH liegt. Läge nämlich der Punkt Q in einer Seite dieses Dreiecks, so wäre ihm in beiden Polarsystemen die Gerade zugeordnet, welche den Punkt P mit dem jener Seite gegenüberliegenden Eckpunkte verbindet, was gegen die Annahme ist. Da nun die zu einander projektivischen Strahlenbüschel, von welchen der eine in dem einen Polarsysteme und der andere in dem andern Polarsysteme dem durch die beiden Punkte G, P gehenden geraden Gebilde p zugeordnet ist, den Strahl F H entsprechend gemein haben, so erzeugen sie ein zu ihnen perspektivisches und also auch zu dem Gebilde p projektivisches gerades Gebilde q, welches durch die beiden Punkte G, Q geht. Aus dem Punkte F werden die zu einander projektivischen geraden Gebilde p, q durch zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel projicirt, welche, da die Strahlen FG, FH derselben einander abwechselnd entsprechen, involutorisch liegen und daher zwei Strahlen m, n entsprechend gemein haben. Da nun in beiden Polarsystemen dem Punkte m p der Punkt m q und dem Schnittpunkte der Geraden m, GH der Punkt F conjugirt ist, so schneidet die Gerade m die Ordnungscurven der Systeme in denselben zwei Punkten. Dasselbe gilt von der Geraden n. Die sechs Seiten des vollständigen Vierecks, in dessen vier Eckpunkten die Curven sich schneiden, sind also nichts anders als die Ordnungsstrahlen der drei involutorischen Strahlenbüschel F (G H. P Q...), G (F H. P Q...), H (F G. P Q...).

Schliessen beide Curven einen und denselben Eckpunkt des Dreiecks F G H ein, so schneiden sie sich in reellen oder imaginären Punkten, je nachdem ihre gemeinschaftlichen Tangenten reell oder imaginär sind. Wenn hingegen die eine von den beiden Curven einen Eckpunkt des Dreiecks FGH einschliesst, in welchem zwei reelle Tangenten der andern sich schneiden, so sind entweder die Schnittpunkte der Curven reell und ihre gemeinschaftlichen Tangenten imaginär, oder es sind die Schnittpunkte imaginär und die gemeinschaftlichen Tangenten reell.

185. Wenn zwei reelle Polarsysteme ein imaginäres Polardreieck FGH aber nicht noch ein Polardreieck mit einander gemein haben, so schneiden sich (183) ihre Ordnungscurven in zwei reellen und in zwei imaginären Punkten. Eben so haben die den Curven sich anschmiegenden Strahlenbüschel zwei reelle und zwei imaginäre Strahlen mit einander gemein.

Es sei der reellen Geraden s, welche die Seiten des Dreiecks FGH in einem reellen und (182) zwei einander conjungirten imaginären Punkten schneidet, in dem einen Polarsysteme der Punkt S und im andern der Punkt S_1 zugeordnet, so erzeugen die zu einander projektivischen Strahlenbüschel S, S_1, von welchen der eine in dem einen Polarsysteme und der andere in dem andern Polarsysteme dem geraden Gebilde s zugeordnet ist, eine zu ihnen perspektivische und daher auch zu dem Gebilde s projektivische Curve K II. Ordnung, welche durch die drei Eckpunkte des Dreiecks FGH geht. Aus dem reellen Punkte F dieses Dreiecks werden die zu einander projektivischen Punktgebilde s, K durch zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel projicirt, welche, da die Strahlen FG, FH derselben einander abwechselnd entsprechen, involutorisch liegen und (152) zwei reelle Strahlen m, n entsprechend gemein haben. Wenn nun die Gerade m die Curve K in zwei Punkten F, L schneidet, so ist in beiden Polarsystemen dem Punkte s m der Punkt L und dem Schnittpunkte R der Geraden m, GH der Punkt F zugeordnet, woraus man schliessen kann, dass die Gerade m die Ordnungscurven der Polarsysteme in denselben zwei Punkten schneidet. Eben so wird dies von der Geraden n bewiesen, wenn nämlich auch diese mit der Curve K zwei Punkte gemein hat. Wenn aber die Gerade n die Curve K im Punkte F berührt, als die drei Geraden FG, s, n in einem und demselben Punkte sich schneiden, so darf man nur für s eine Gerade nun annehmen, welche durch den Punkt R geht.

186. Wenn die Ordnungscurven von zwei in einerlei Ebene liegenden reellen Polarsystemen eine reelle Gerade m in denselben zwei Punkten A, B schneiden, aber durch keinen dieser Punkte eine gemeinschaftliche Tangente der Curven geht, so giebt es eine andere reelle Gerade n, welche beide Curven entweder in einem

und demselben Punkte berührt oder in denselben zwei ausserhalb der erstern Geraden liegenden Punkten schneidet.

Es sei der Geraden m in dem einen Polarsysteme der Punkt P und im andern der Punkt P_1 zugeordnet, so ist in beiden Systemen der Geraden PP_1 der Punkt F zugeordnet, welcher vom Schnittpunkte S der Geraden m, PP_1 durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist. Wenn nun in dem erstern Systeme der Geraden FP_1 der Punkt Q und im letztern der Geraden FP der Punkt Q_1 zugeordnet ist und T den von S verschiedenen Ordnungspunkt des involutorischen geraden Gebildes $SS.QQ_1\ldots$ bezeichnet, so ist FT die im Satze erwähnte Gerade n. Denn die zu einander projektivischen geraden Gebilde $PQS\ldots, P_1SQ_1\ldots$, von welchen das eine in dem einen Polarsysteme und das andere in dem andern Polarsysteme dem Strahlenbüschel $F(SP_1P\ldots)$ zugeordnet ist, haben (154) entweder nur den Punkt T oder zwei Punkte G, H entsprechend gemein, welche durch die Punkte S, T harmonisch getrennt sind. Im erstern Falle berührt die Gerade FT im Punkte T die Ordnungscurven der beiden Polarsysteme, während im letztern Falle die Polarsysteme das Polardreieck FGH mit einander gemein haben und daher auch in der Geraden n zwei gemeinschaftliche Punkte der Curven liegen.

187. Wenn zwei in einerlei Ebene liegende Curven II. Ordnung eine Gerade s in einem und demselben Punkte S berühren, so vertritt dieser Punkt die Stelle von zwei oder drei oder vier gemeinschaftlichen Punkten derselben und die Gerade s die Stelle von zwei oder drei oder vier gemeinschaftlichen Tangenten, je nachdem nämlich die zu einander projektivischen geraden Gebilde, von welchen das eine in Hinsicht auf die eine Curve und das andere in Hinsicht auf die andere Curve dem Strahlenbüschel S zugeordnet ist, zwei Punkte S, T oder nur den Punkt S oder alle ihre Punkte — oder, was dasselbe ist, je nachdem die zu einander projektivischen Strahlenbüschel, von welchen der eine in Hinsicht auf die eine Curve und der andere in Hinsicht auf die andere Curve dem geraden Gebilde s zugeordnet ist, zwei Strahlen s, t oder nur den Strahl s oder alle ihre Strahlen — entsprechend gemein haben. Im ersten Falle berühren nämlich die Curven entweder noch eine zweite Gerade in einem und demselben Punkte oder sie haben noch

zwei Punkte mit einander gemein und noch zwei gemeinschaftliche Tangenten, so dass aber keine dieser Tangenten beide Curven in einem und demselben Punkte berührt. Im zweiten Falle haben die Curven nur noch einen Punkt mit einander gemein und nur noch eine gemeinschaftliche Tangente, welche aber nicht durch diesen zweiten gemeinschaftlichen Punkt geht. Im dritten Falle haben die Curven keinen andern Punkt mit einander gemein und keine andere gemeinschaftliche Tangente. Man darf nur, um sich hievon zu überzeugen, die Curven als homologe Gebilde von zwei zu einander projektivischen ebenen Systemen betrachten, welche alle

Strahlen des Strahlenbüschels S und daher auch alle Punkte eines geraden Gebildes u entsprechend gemein haben. Die Gerade u, welche entweder beide Curven in einem und demselben Punkte berührt oder durch zwei gemeinschaftliche Punkte derselben geht, schneidet die Gerade s im ersten der oben erwähnten Fälle im Punkte T, im zweiten aber im Punkte S, während im dritten Falle u mit s identisch ist.

Punkte des geraden Gebildes s und daher auch alle Strahlen eines Strahlenbüschels entsprechend gemein haben. Der Mittelpunkt dieses Büschels, in welchem entweder beide Curven eine und dieselbe Gerade berühren oder zwei gemeinschaftliche Tangenten derselben sich schneiden, ist im ersten der oben erwähnten Fälle ein Punkt der Geraden t, im zweiten ein Punkt der Geraden s aber nur im dritten der Punkt S selbst.

Man kann daher auch sagen, dass die Curven in dem Punkte S im ersten Falle nur zweipunktig, im zweiten Falle aber dreipunktig und im dritten vierpunktig einander sich anschmiegen, weil im Punkte S im dritten Falle ein Berührungspunkt und ein Schnittpunkt, im vierten Falle hingegen zwei Berührungspunkte vereinigt seien. Uebrigens ist der obige Satz vorderhand nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass die beiden Curven und die Gerade s, mithin auch der Punkt S reell sind.

188. Wenn zwei Systeme, welche reell-projektivisch und zwar collineär zu einander sind, in einerlei Ebene aber nicht perspektivisch liegen, so haben sie entweder die Eckpunkte und Seiten eines reellen Dreiecks oder die Eckpunkte und Seiten eines imaginären Dreiecks, in welchem jedoch ein Eckpunkt und die demsel-

ben gegenüberliegende Seite reell sind, oder nur vier Elemente, nämlich zwei reelle Punkte und zwei reelle Gerade, oder nur zwei Elemente, nämlich einen reellen Punkt und eine durch ihn gehende reelle Gerade entsprechend gemein.

Es entspreche dem reellen Punkte S des einen Systems der Punkt S_1 des andern und der Geraden SS_1 des erstern die Gerade s_1 des letztern. Wenn nun, was man annehmen kann, die Gerade s_1 nicht mit SS_1 zusammenfällt, so erzeugen die zu einander projektivischen Strahlenbüschel S, S_1 eine Curve K II. Ordnung, welche die Gerade SS_1 in den Punkten S, S_1 schneidet, die Gerade s_1 aber im Punkt S_1 berührt. Der Curve K des erstern Systems entspricht eine Curve K_1 des letztern, welche im Punkte S_1 die Gerade s_1 und also auch die Curve K schneidet, demnach mit dieser Curve wenigstens noch einen reellen Punkt gemein hat. Je zwei homologe Punkte P, P_1 der Curven werden aus den Punkten S, S_1 durch zwei homologe Gerade SP, $S_1 P_1$ und also aus dem Punkte S_1 durch eine und dieselbe Gerade projicirt. Da hiernach die zu einander collineären Systeme jeden von S_1 verschiedenen gemeinschaftlichen Punkt der beiden Curven und jede nicht durch den Punkt S_1 gehende Gerade, welche beide Curven in denselben zwei Punkten schneidet oder in einem und demselben Punkte berührt, ausserdem aber kein Element entsprechend gemein haben, so findet der erste, zweite, dritte oder vierte der im Satze erwähnten Fälle statt, je nachdem die Curven in vier reellen Punkten oder in zwei reellen und in zwei imaginären Punkten sich schneiden, oder in zwei reellen Punkten sich schneiden und in einem dritten reellen Punkte sich berühren, oder nur einen von S_1 verschiedenen Punkt, in welchem sie also dreipunktig einander sich anschmiegen, mit einander gemein haben.

189. Wenn zwei Polarsysteme in einerlei Ebene liegen und dem Fünfseite a b c d e in dem einen das Fünfeck A B C D E, in dem andern aber das Fünfeck $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ zugeordnet ist, so sind A B C D E, $A_1B_1C_1D_1E_1$ homologe Gebilde von zwei zu einander collineären Systemen, welche in einerlei Ebene liegen und also entweder alle Punkte eines geraden Gebildes s und alle Strahlen eines Strahlenbüschels S oder (188) nur die drei Eckpunkte und Seiten eines Dreiecks FGH oder nur zwei Punkte S, T und zwei

Gerade, von welchen die eine s durch beide Punkte, die andere t durch den einen S geht, oder nur einen Punkt S und eine durch ihn gehende Gerade s entsprechend gemein haben. Da nun zu jedem Elemente, welches die zu einander collineären Systeme entsprechend gemein haben, ein anderes solches Element es giebt, welches dem erstern in beiden Polarsystemen zugeordnet ist, so folgt, dass die Ordnungscurven K, K_1 derselben im ersten der vier erwähnten Fälle entweder in zwei Punkten sich berühren oder in einem Punkte vierpunktig einander sich anschmiegen, je nachdem nämlich der Punkt S ausserhalb oder in der Geraden s liegt. Im zweiten Falle, wenn nämlich die Polarsysteme das Polardreieck FGH aber auch nur dieses Polardreieck mit einander gemein haben, haben die Curven vier Punkte mit einander gemein und vier gemeinschaftliche Tangenten. Im dritten Falle berühren die Curven (185) in dem Punkte S eine und dieselbe Gerade s, haben aber noch zwei Punkte mit einander gemein und noch zwei gemeinschaftliche Tangenten. Im vierten Falle endlich, in welchem keinem von S verschiedenen Punkte in beiden Polarsystemen eine und dieselbe Gerade zugeordnet ist, schmiegen die Curven in diesem Punkte dreipunktig einander sich an. Uebrigens gelten diese Schlüsse vorderhand nur unter der Voraussetzung, dass die Polarsysteme reell sind.

Anhang.

190. In einem rechtwinkligen Strahlenbündel sollen auch je zwei imaginäre Elemente, welche einander entweder zugeordnet oder conjugirt sind, zu einander senkrecht heissen. Jedem imaginären Strahle $a\,b\,a_1\,b_1$ ist eine imaginäre Ebene $A\,B\,A_1\,B_1$ zugeordnet, deren reelle Axe zu dem reellen Träger der imaginären Geraden senkrecht ist. Sind die Geraden a_1, b_1 zu den Geraden a, b beziehlich senkrecht, so liegt die imaginäre Gerade $a b a_1\,b_1$ in der ihr zugeordneten Ebene, daher alsdann jedes dieser Elemente auch zu sich selbst senkrecht ist. Jeder reelle Büschel I. Ordnung, dessen Mittelpunkt oder dessen Axe nicht im Unendlichen liegt, enthält also zwei einander conjungirte imaginäre Elemente, deren jedes

zu sich selbst senkrecht ist. Zwei solche einander conjungirte imaginäre Elemente sind aber nichts anderes als die Ordnungselemente eines rechtwinkligen Büschels.

191. Wenn zwei congruente Strahlenbüschel $abc\ldots$, $a_1\,b_1\,c_1\ldots$, welche in einerlei Ebene liegen und einen gemeinschaftlichen eigentlichen Mittelpunkt haben, in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so haben sie zwei einander conjungirte imaginäre Strahlen entsprechend gemein, deren jeder zu sich selbst senkrecht ist.

Sind nämlich die Geraden a, a_1 zu einander senkrecht, so liegen die Büschel involutorisch, welcher Fall bereits im Vorigen betrachtet worden ist. Wenn aber der Geraden a_1 des erstern Büschels eine von a verschiedene Gerade a_2 des letztern entspricht, so seien h_1, h_2 diejenigen homologen Strahlen derselben, welche zu den Geraden a_1, a_2 beziehlich senkrecht sind. Da nun $a\,a_1\,a_2\,h_1$ ein harmonischer Wurf ist, so folgt der Satz aus 154. Nennt man je zwei unendlich ferne Punkte der Ebene, welche in zwei zu einander senkrechten Richtungen liegen, einander zugeordnet, so hat man ein involutorisches Punktgebilde, dessen Träger die unendlich ferne Gerade der Ebene ist. Die Ordnungspunkte dieses Gebildes werden aus jedem reellen eigentlichen Punkte durch zwei einander conjungirte imaginäre Gerade projicirt, deren jede zu sich selbst senkrecht ist, und sollen daher die Normalpunkte der Ebene heissen. Liegen zwei ebene Systeme, welche einander ähnlich sind, in einerlei Ebene aber nicht perspektivisch, so haben sie einen reellen eigentlichen Punkt und zwei unendlich ferne Punkte entsprechend gemein. Die beiden letztern Punkte sind entweder die Normalpunkte der Ebene oder zwei durch diese Punkte harmonisch getrennte reelle Punkte, je nachdem nämlich je zwei homologe Winkel der Systeme in einem und demselben Sinne oder im entgegengesetztem Sinne beschrieben sind. Wenn jedoch die Systeme nicht blos ähnlich sondern congruent sind, so haben sie im letztern der erwähnten Fälle keinen eigentlichen Punkt und daher auch nur eine eigentliche Gerade entsprechend gemein.

192. Jeder Strahlenbüschel II. Ordnung, welcher einer Parabel sich anschmiegt, enthält (164) zwei imaginäre Strahlen, deren jeder zu sich selbst senkrecht ist. Der gemeinschaftliche reelle

Punkt dieser Strahlen heisst der Brennpunkt der Parabel. Hat die Ordnungscurve eines reellen ebenen Polarsystems mit der unendlich fernen Geraden der Ebene zwei Punkte gemein, so hat man zu unterscheiden, ob diess die Normalpunkte der Ebene oder zwei andere Punkte sind. Im erstern Falle ist die Curve, da je zwei einander conjungirteDurchmesser derselben zu einander senkrecht sind, ein Kreis. Im letztern Falle, wenn nämlich nur zwei einander conjungirte Durchmesser zu einander senkrecht sind, enthält (165) der der Curve sich anschmiegende Strahlenbüschel vier Strahlen, deren jeder zu sich selbst senkrecht ist. Die beiden reellen Punkte dieser vier imaginären Geraden sind die Brennpunkte der Curve.

Ist die Ebene gegeben, in welcher ein Kreis liegt, so sind auch zwei Punkte gegeben, durch welche derselbe geht. Concentrische Kreise, welche in einerlei Ebene liegen, berühren sich in den Normalpunkten dieser Ebene.

193. Zwei in einerlei Ebene liegende congruente Strahlenbüschel, welche keinen Strahl entsprechend gemein haben, erzeugen entweder einen Kreis oder eine gleichseitige Hyperbel, je nachdem sie nämlich in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind.

Die unendlich ferne Gerade der Ebene schneidet die Strahlenbüschel in zwei zu einander projektivischen geraden Gebilden, welche im erstern Falle die Normalpunkte der Ebene, im letztern aber zwei durch diese Punkte harmonisch getrennte reelle Punkte entsprechend gemein haben. Im letztern Falle liegen (152) die erwähnten Punktgebilde involutorisch, daher in diesem Falle der Mittelpunkt der Curve in dem gemeinschaftlichen Strahle der beiden Büschel liegt. Und wenn zwei reelle Strahlenbüschel I. Ordnung zu einem und demselben Kreise oder zu einer und derselben gleichseitigen Hyperbel perspektivisch sind und überdiess im letztern Falle der gemeinschaftliche Strahl der Büschel durch den Mittelpunkt der Curve geht, so sind sie congruent.

194. Die Ordnungsfläche eines rechtwinkligen Strahlenbündels hat die Eigenschaft, dass jede in ihr liegende Gerade und jede ihr sich anschmiegende Ebene zu sich selbst senkrecht ist. Die imaginäre Curve, in welcher die unendlich ferne Ebene von

allen solchen Kegelflächen geschnitten wird, soll der Normalkreis heissen. Jede Fläche II. Ordnung, welche durch diesen Kreis geht aber keine Kegelfläche ist, ist eine Kugelfläche, indem je zwei einander conjugirte Durchmesser derselben zu einander senkrecht sind. Auch jede in einer Kugelfläche liegende Gerade ist zu sich selbst senkrecht.

Jede reelle Fläche II. Ordnung, welche den Normalkreis in zwei Punkten berührt, ist eine Drehungsfläche, deren Drehungsaxe dem reellen Träger der Berührungspunkte zugeordnet ist.

195. Wenn eine reelle Fläche II. Ordnung den Normalkreis in vier Punkten A, B, C, D schneidet, deren reelle Träger AB, CD nicht in der Fläche liegen, so wird sie von jeder Ebene, welche durch die eine oder andere der erwähnten unendlich fernen Geraden aber nicht zugleich durch zwei in der Fläche liegende Gerade geht, in einem Kreise geschnitten. Die drei Punkte, in deren jedem zwei einander gegenüberliegende Seiten des vollständigen Vierecks ABCD sich schneiden, werden, wenn die Fläche einen Mittelpunkt hat, aus diesem Punkte durch die drei Axen derselben projicirt.

Durch zwei reelle Ebenen und eine reelle Gerade, welche beide Ebenen in einem und demselben eigentlichen Punkte schneidet und höchstens von einer andern Geraden durch die Ebenen harmonisch getrennt ist, ist (181) eine reelle Kegelfläche II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die gegebene Gerade geht und von jeder reellen Ebene, die zu irgend einer der gegebenen Ebenen parallel ist, in einem Kreise geschnitten wird.

Beiträge

zur

Geometrie der Lage

von

Dr. Karl Georg Christian v. Staudt,
ordentl. Professor an der Universität Erlangen.

Zweites Heft.

NÜRNBERG.
Verlag der Fr. Korn'schen Buchhandlung.

Druck von E. Th. Jacob in Erlangen.

Inhalt.

Bemerkung. Die fünf letzten §§. sind, da sie den Begriff der Grösse voraussetzen, als Anhang zu betrachten.

Beiträge

zur

Geometrie der Lage.

---

§. 14.

Vom Sinne.

196. Wenn P, Q, R, S vier Elemente eines und desselben einförmigen Gebildes sind, so liegt das Element S entweder im Sinne PQR, der auch durch QRP oder RPQ bezeichnet werden kann, oder im Sinne RQP, der dem erstern entgegengesetzt ist, oder es verhält sich das Element S zum Sinne PQR und daher auch zum Sinne RQP neutral. — Es seien, da vorderhand die Betrachtung nachstehender Fälle hinreichend ist, P, Q, R, S vier in einer und derselben imaginären Geraden abcd II. Art

liegende Punkte. Wenn nun die reellen Träger p, q, r, s dieser Punkte einer und derselben Regelschaar angehören, so soll gesagt werden, dass der Punkt S zum Sinne PQR neutral sich verhalte oder dass PQRS ein neutraler Wurf sei. Wenn aber die Gerade s der Regelschaar pqr nicht angehört und EFGH eine Darstellung des Punktes S ist, so soll von ihm gesagt werden, dass er im Sinne PQR oder

sich schneidende Ebenen. Wenn nun die reellen Axen p, q, r, s dieser Ebenen einer und derselben Regelschaar angehören, so soll gesagt werden, dass die Ebene S zum Sinne PQR neutral sich verhalte oder dass PQRS ein neutraler Wurf sei. Wenn aber die Gerade s der Regelschaar pqr nicht angehört, und EFGH eine Darstellung der Ebene S ist, so soll von ihr gesagt werden, dass sie im Sinne PQR im Sinne RQP liege, je nachdem die Regelschaar pqr oder die Regelschaar rqp im Sinne EFG beschrieben ist. Die Regelschaaren abc, pqr sind im erstern dieser beiden Fälle in Hinsicht auf das gerade Gebilde s in einem und demselben Sinne, im letztern aber in entgegengesetztem Sinne beschrieben.

oder im Sinne RQP liege, je nachdem die Regelschaar pqr oder die Regelschaar rqp im Sinne EFG beschrieben ist. Die Regelschaaren abc, pqr sind im erstern dieser beiden Fälle in Hinsicht auf den Ebenenbüschel s in einem und demselben Sinne, im letztern aber in entgegengesetztem Sinne beschrieben.

197. Zwei Würfe PQRS, $P_1Q_1R_1S_1$ sollen, was den Sinn anbelangt, von einerlei Art heissen, wenn das Element S im Sinne PQR oder im Sinne RQP liegt oder zum Sinne PQR neutral sich verhält, je nachdem das Element S_1 im Sinne $P_1Q_1R_1$ oder im Sinne $R_1Q_1P_1$ liegt oder zum Sinne $P_1Q_1R_1$ neutral sich verhält. Man kann dann auch sagen, dass das Element S zum Sinne PQR sich verhalte, wie das Element S_1 zum Sinne $P_1Q_1R_1$ sich verhält.

Sind u, v zwei einander conjungirte imaginäre Gerade II. Art und p, q, r, s vier sie schneidende reelle Gerade, so sind die Würfe $\dot{u}(pqrs)$, $\dot{v}(rqps)$, $\overline{u}(rqps)$, $\overline{v}(pqrs)$, was den Sinn anbelangt, sämmtlich von einer und derselben Art. Wenn nämlich die Geraden p, q, r, s einer und derselben Regelschaar angehören, so sind die erwähnten Würfe neutrale Würfe. Wenn aber die Gerade s der Regelschaar pqr nicht angehört und abcd irgend eine von einem Leitstrahle der Regelschaar pqr ausgehende Darstellung der Geraden u, folglich cbad eine Darstellung der Geraden v ist, so sind die Regelschaaren abc, pqr und also auch die Regelschaaren cba, rqp entweder in Hinsicht auf das gerade Gebilde s in einem und demselben Sinne und in Hinsicht auf den Ebenenbüschel s in entgegengesetztem Sinne, oder in Hinsicht auf das gerade Gebilde s in entgegengesetztem Sinne und in Hinsicht auf den Ebenenbüschel s in einem und demselben Sinne beschrieben. Im erstern dieser Fälle liegt der Punkt us im Sinne $\dot{u}(pqr)$, der Punkt vs im Sinne $\dot{v}(rqp)$, die Ebene us im Sinne $\overline{u}(rqp)$ und die Ebene vs im Sinne $\overline{v}(pqr)$, während im letztern Falle der Punkt us im Sinne $\dot{u}(rqp)$, der Punkt vs im Sinne $\dot{v}(pqr)$, die Ebene us im Sinne $\overline{u}(pqr)$ und die Ebene vs im Sinne $\overline{v}(rqp)$ liegt.

198. Wenn zwei räumliche Systeme reell-projektivisch zu einander sind, so sind je zwei homologe Würfe PQRS, $P_1Q_1R_1S_1$, was den Sinn anbelangt, von einer und derselben Art.

Es seien P, Q, R, S vier in einer und derselben imaginären Geraden II. Art befindliche Punkte. Wenn nun die reellen Träger p, q, r, s dieser Punkte einer und derselben Regelschaar angehören, so gilt dies auch von den ihnen entsprechenden Geraden p_1, q_1, r_1, s_1 und alsdann sind PQRS, $P_1Q_1R_1S_1$ zwei neutrale Würfe. Wenn aber die Gerade s der Regelschaar pqr nicht angehört, und EFGH, $E_1F_1G_1H_1$ Darstellungen der Elemente S, S_1 sind, so ist die Regelschaar pqr im Sinne EFG oder im Sinne GFE beschrieben, je nachdem die Regelschaar $p_1q_1r_1$ im Sinne $E_1F_1G_1$ oder im Sinne $G_1F_1E_1$ beschrieben ist, daher auch das Element S im Sinne PQR oder im Sinne RQP liegt, je nachdem das Element S_1 im Sinne $P_1Q_1R_1$ oder im Sinne $R_1Q_1P_1$ liegt. Eben so wird der Satz bewiesen, wenn P, Q, R, S vier in einer und derselben imaginären Geraden II. Art sich schneidende Ebenen sind. Die Betrachtung anderer Fälle aber ist vorderhand noch nicht nothwendig.

199. Wenn u, u_1 zwei imaginäre Gerade II. Art und P, Q, R, S vier in einer und derselben dritten Geraden f, welche mit keiner von den beiden erstern einen Punkt gemein hat, befindliche Punkte oder sich schneidende Ebenen sind, so sind die Würfe u(PQRS), u_1 (PQRS), was den Sinn anbelangt, von einerlei Art.

I. Ist f eine reelle Gerade, so kann man (160) zwei räumliche Systeme reell-projektivisch so auf einander beziehen, dass sie drei reelle Punkte der Geraden f, mithin alle Punkte dieser Geraden und also auch die Punkte P, Q, R, S entsprechend gemein haben, und dass der Geraden u des einen Systems die Gerade u_1 des andern entspricht. Da alsdann dem Wurfe u(PQRS) der Wurf u_1(PQRS) entspricht, so folgt der Satz in diesem Falle aus dem vorigen.

II. Ist die Gerade f imaginär aber keiner von den beiden Geraden u, u_1 conjungirt, so sei M ein Punkt der Geraden u und M_1 ein ausserhalb der Ebene Mf liegender Punkt der Geraden u_1, so dass jedoch die reellen Träger der Punkte M, M_1 nicht in einerlei Ebene liegen und keine dieser Geraden die Gerade f schneidet. Da nun die Gerade u_2, welche den Punkt M mit dem Punkte M_1

verbindet, eine imaginäre Gerade II. Art ist und die reelle Axe der Ebene Mf die Ebenen uP, uQ, uR, uS in denselben vier Punkten schneidet, in welchen sie die Geraden MP, MQ, MR, MS und also die Ebenen u_2P, u_2Q, u_2R, u_2S schneidet, so sind nach dem vorigen Falle die Würfe u(PQRS), u_2(PQRS) und eben so die Würfe u_1 (PQRS), u_2 (PQRS), mithin auch die Würfe u(PQRS), u_1(PQRS), was den Sinn anbelangt, von einerlei Art.

III. Ist die Gerade f der einen u von den beiden Geraden u, u_1 conjungirt, so sei u_2 irgend eine imaginäre Gerade II. Art, welche die Gerade u in einem Punkte M schneidet, aber mit der Geraden f keinen Punkt gemein hat. Bemerkt man nun, dass auch jede von f verschiedene Gerade, welche in der Ebene Mf liegt, ohne durch den Puukt M zu gehen, die Ebenen uP, uQ, uR, uS in den vier Punkten schneidet, in welchen sie die Ebenen u_2P, u_2Q, u_2R, u_2S, schneidet, so folgt aus II, dass die Würfe u(PQRS), u_2(PQRS), was den Sinn anbelangt, von einerlei Art sind. Dasselbe gilt aber auch von den Würfen u_1(PQRS), u_2(PQRS) und mithin auch von den Würfen u(PQRS), u_1(PQRS). — Eben so hat man drei Fälle zu unterscheiden, wenn P, Q, R, S vier in der Geraden f sich schneidende Ebenen sind.

200. Wenn P, Q, R, S vier in einer und derselben reellen Geraden oder in einer und derselben imaginären Geraden I. Art

befiudliche Punkte sind, u aber eine imaginäre Gerade II. Art ist, welche die erstere Gerade nicht schneidet, so soll vom Punkte S gesagt werden, dass er im Sinne PQR oder im Sinne RQP liege oder zum Sinne PQR neutral sich verhalte, je nachdem die Ebene uS im Sinne u(PQR) oder im Sinne u(RQP) liegt oder zum Sinne u(PQR) neutral sich verhält.	sich schneidende Ebenen sind, u aber eine imaginäre Gerade II. Art ist, welche die erstere Gerade nicht schneidet, so soll von der Ebene S gesagt werden, dass sie im Sinne PQR oder im Sinne RQP liege oder zum Sinne PQR neutral sich verhalte, je nachdem der Punkt uS im Sinne u(PQR) oder im Sinne u(RQP) liegt oder zum Sinne u(PQR) neutral sich verhält.

Dass diess von der Wahl der Geraden u unabhängig ist, nämlich jede andere imaginäre Gerade u_1 II. Art, welche die Gerade PQ nicht schneidet, die Stelle der Geraden u vertreten kann, folgt aus 199. — Wenn die Elemente P, Q, R reell sind, S aber ein imaginäres Element und ABCD eine Darstellung desselben ist, so liegt (nach 62 und 196) das Element S im Sinne PQR oder im Sinne RQP, je nachdem der Sinn ABC mit dem Sinne PQR oder mit dem Sinne RQP übereinstimmt. Sind P, Q, R, S vier reelle Elemente, so ist PQRS ein neutraler Wurf.

201. Wenn die vier Ebenen P, Q, R, S in einer und derselben Geraden u sich schneiden und von einer andern Geraden u_1, welche mit der erstern keinen Punkt gemein hat, in den Punkten P_1, Q_1, R_1, S_1 geschnitten werden, so verhält sich der Punkt S_1 zum Sinne $P_1R_1S_1$, wie die Ebene S zum Sinne PQR sich verhält.

Sind u, u_1 zwei imaginäre Gerade II. Art, so sei v die Gerade, welche der erstern conjungirt ist. Da nun nach 197 und 199 sowohl die Würfe PQRS, v(PQRS) als auch die Würfe $P_1Q_1R_1S_1$, v(PQRS), was den Sinn anbelangt, von einerlei Art sind, so gilt diess auch von den Würfen PQRS, $P_1Q_1R_1S_1$. Ist nur die eine von den beiden Geraden u, u_1 eine imaginäre Gerade II. Art, so folgt der Satz aus 200. Wenn endlich jede von den beiden Geraden u, u_1 wenigstens einen reellen Punkt enthält, so nehme man in der Geraden u einen imaginären Punkt M an, aus welchem die Gerade u_1 durch eine imaginäre Ebene projicirt wird. Es seien ferner v, v_1 zwei imaginäre Gerade II. Art, von welchen die eine v die Ebene Mu_1 im Punkte M schneidet, die andern v_1 aber in der Ebene Mu_1 liegt, ohne durch den Punkt M zu gehen. Da nun nach den bereits betrachteten Fällen je zwei auf einander folgende der vier Würfe PQRS, v_1(PQRS), v($P_1Q_1R_1S_1$), $P_1Q_1R_1S_1$, was den Sinn anbelangt, von einer und derselben Art sind, so gilt diess auch vom ersten und vierten.

202. Wenn p, q, r, s vier Strahlen eines und desselben Strahlenbüschels sind und u irgend eine Gerade ist, welche mit dem Büschel in einerlei Ebene liegt aber nicht durch seinen Mittelpunkt geht, so soll vom Strahl s gesagt werden, dass er im Sinne pqr oder im Sinne rqp liege oder zum Sinne pqr neutral sich verhalte, je nachdem der Punkt us im Sinne u (pqr) oder im Sinne u(rqp) liegt oder zum Sinne u (pqr) neutral sich verhält.

Um sich zu überzeugen, dass hier jede andere Gerade u_1, welche in der Ebene pq liegt, ohne durch den Punkt pq zu gehen, die Stelle der Geraden u vertreten kann, nehme man eine Gerade v an, welche die Ebene pq im Punkte pq schneidet. Nun verhält sich (201) der Punkt u_1s zum Sinne $u_1(pqr)$ wie die Ebene vs zum Sinne v(pqr) und die Ebene vs zum Sinne v(pqr) wie der Punkt us zum Sinne u(pqr), mithin auch der Punkt u_1s zum Sinne $u_1(pqr)$ wie der Punkt us zum Sinne u(pqr). Es sind hiemit alle Fälle des in 196 aufgestellten Satzes erschöpft.

203. Nach den beiden letztern Nummern sind je zwei zu einander perspektivische Würfe, was den Sinn anbelangt, von einerlei Art. Dasselbe gilt also auch, wenn zwei reelle einförmige Gebilde u, u_1 reell-projektivisch zu einander sind, von je zwei homologen Würfen derselben. Wenn nämlich die Gebilde u, u_1 nicht perspektivisch zu einander sind, so kann man sie doch als das erste und letzte von mehreren Gebilden betrachten, von welchen jedes folgende zum vorhergehenden perspektivisch ist.

Sind zwei reelle Grundgebilde der zweiten Stufe oder zwei räumliche Systeme reell-projektivisch zu einander, so sind auch je zwei homologe Würfe, was den Sinn anbelangt, von einer und derselben Art. Man nehme an, dass zwei räumliche Systeme reell-projektivisch zu einander sind und dass den Punkten P, Q, R, S des einen Systems, welche in einer und derselben Geraden liegen, die Ebenen P_1, Q_1, R_1, S_1 des andern entsprechen. Es entspreche ferner der reellen Geraden u des erstern Systems, welche die Gerade PQ nicht schneidet, die Gerade u_1 des letztern, so entspricht auch dem Ebenenbüschel u das gerade Gebilde u_1. Da nun diese Gebilde reell-projektivisch zu einander sind, so verhält sich nach dem Obigen die Ebene uS zum Sinne u(PQR) wie der Punkt u_1S_1 zum Sinne $u_1(P_1Q_1R_1)$ und also auch der Punkt S zum Sinne PQR wie die Ebene S_1 zum Sinne $P_1Q_1R_1$.

204. Wenn den Elementen P, Q, R, S, welche einem und demselben einförmigen Gebilde angehören, die Elemente P_1, Q_1, R_1, S_1 conjungirt sind, so verhält sich das Element S zum Sinne PQR, wie das Element S_1 zum Sinne $R_1Q_1P_1$ sich verhält.

Ist PQR... ein gerades Gebilde, so seien u, u_1 zwei einander conjungirte imaginäre Gerade II. Art, von welchen die erstere die Gerade PQ nicht schneidet. Da nun (124) den Ebenen uP, uQ, uR, uS die Ebenen u_1P_1, u_1Q_1, u_1R_1, u_1S_1 conjungirt sind, so sind (197) die Würfe $u(PQRS)$, $u_1(R_1Q_1P_1S_1)$ und folglich auch die Würfe $PQRS$, $R_1Q_1P_1S_1$, was den Sinn anbelangt, von einer und derselben Art. Jeder andere Fall kann auf den betrachteten zurückgeführt werden.

205. Wenn P, Q, R, S vier Elemente eines und desselben einförmigen Gebildes sind, so sind die Würfe PQRS, QPSR, was den Sinn anbelangt, von einerlei Art.

Sind P, Q, R, S vier in einer und derselben Geraden liegende Punkte, so nehme man in einer andern durch den Punkt P gehenden Geraden noch drei Punkte Q_1, R_1 S_1 an, so dass die Geraden QQ_1, RR_1, SS_1 in einem und demselben Punkte F sich schneiden. Ist nun G der Schnittpunkt der Geraden QQ_1, SR_1, so ist jeder folgende der vier Würfe PQRS, $PQ_1R_1S_1$, QQ_1GF, QPSR eine Projection vom vorhergehenden, daher auch der erste und vierte, was den Sinn anbelangt, von einerlei Art sind. Jeder andere Fall kann auf den betrachteten zurückgeführt werden. Wenn also das Element S im Sinne PQR liegt, so liegt das Element R im Sinne QPS, das Element Q im Sinne RSP und das Element P im Sinne SRQ.

§. 15.

Von den Ketten.

206. Von nun an soll, wenn P, Q, R drei Elemente eines und desselben einförmigen Gebildes sind, auch von jedem dieser Elemente gesagt werden, dass es zum Sinne PQR neutral sich verhalte. — Durch drei Elemente P, Q, R eines einförmigen Gebildes ist eine in demselben enthaltene Kette PQR... bestimmt, welche nämlich der Inbegriff von allen denjenigen Elementen des Gebildes ist, die zum Sinne PQR neutral sich verhalten. Sind P, Q, R drei in einer und derselben imaginären Geraden u II. Art

befindliche Punkte und p, q, r die reellen Träger derselben, so besteht die Kette PQR... aus allen denjenigen Punkten der Geraden u, deren reelle Träger der	sich schneidende Ebenen und p, q, r die reellen Axen derselben, so besteht die Kette PQR .. aus allen denjenigen Ebenen des Ebenenbüschels u, deren reelle Axen

Regelschaar pqr angehören. Ein Punkt, welcher dem geraden Gebilde u aber nicht der Kette PQR... angehört, liegt im Sinne PQR oder im Sinne RQP, je nachdem (68) sein reeller Träger auf der einen oder andern Seite der Regelfläche pqr liegt.

der Regelschaar pqr angehören. Eine Ebene, welche dem Ebenenbüschel u aber nicht der Kette PQR... angehört, liegt im Sinne PQR oder im Sinne RQP, je nachdem ihre reelle Axe auf der einen oder andern Seite der Regelfläche pqr liegt.

207. Wenn in einem einförmigen Gebilde der Sinn PQR mit dem Sinne $P_1Q_1R_1$ übereinstimmt, also jedes Element des Gebildes zum Sinne PQR wie zum Sinne $P_1Q_1R_1$ sich verhält, so fallen die Ketten PQR..., $P_1Q_1R_1$... in einander. Und wenn die Elemente P, Q, R, P_1, Q_1, R_1 einer und derselben Kette angehören, so stimmt der Sinn $P_1Q_1R_1$ entweder mit dem Sinne PQR oder mit dem Sinne RQP überein. — Stimmt der Sinn PQR mit dem Sinne RSP überein, so stimmt hiemit auch der Sinn QRS, so wie auch der Sinn SPQ überein, und alsdann heissen die Elemente P, R durch die Elemente Q, S getrennt. Unter vier Elementen einer und derselben Kette sind immer zwei Paar getrennte. Namentlich sind, wenn PQRS ein harmonischer Wurf ist, die Elemente P, R durch die Elemente Q, S getrennt. — Jede Kette wird durch je zwei in ihr liegende Elemente M, N in zwei Stücke getheilt, so dass also, wenn das Element A in dem einen und das Element B in dem andern dieser Stücke liegt, die Elemente A, B durch die Elemente M, N getrennt sind, mithin MANB ein ordentlicher Wurf ist. Durch n in ihr liegende Elemente wird eine Kette in n Stücke getheilt.

Von einem Elemente, welches dem einförmigen Gebilde PQR... aber nicht der Kette PQR... angehört, soll gesagt werden, dass es auf der einen oder andern Seite dieser Kette liege, je nachdem es im Sinne PQR oder im Sinne RQP liegt. Liegen zwei Elemente F, G, welche dem einförmigen Gebilde PQR... angehören, auf entgegengesetzten Seiten der Kette PQR..., so kann man auch sagen, dass sie durch diese Kette getrennt seien, indem jede Kette, welche in dem einförmigen Gebilde PQR... enthalten ist und die beiden Elemente F, G enthält, mit der Kette PQR... zwei Elemente gemein hat, durch welche die Elemente F, G getrennt sind. Und wenn zwei verschiedene Ketten, welche in einem und demselben einförmigen Gebilde enthalten sind, zwei Elemente mit einander gemein haben, so wird durch diese Elemente jede von den beiden Ketten in zwei Stücke getheilt, die auf entgegengesetzten Seiten der andern liegen.

Sind zwei einförmige Gebilde zu einander perspektivisch, so entspricht jedem Sinne in dem einen ein Sinn im andern und jeder Kette in dem einen eine Kette im andern. Da nun (206) die obigen Sätze für jedes gerade Gebilde gelten, dessen Träger eine imaginäre Gerade II. Art ist, so gelten sie auch für jeden Ebenenbüschel und daher auch für jedes andere einförmige Gebilde. Bemerkt wird noch, dass je zwei Punkte die gemeinschaftlichen Grenzpunkte von unendlich vielen Strecken, je zwei in einerlei Ebene liegende Gerade die gemeinschaftlichen Schenkel von unendlich vielen ebenen Winkeln und je zwei Ebenen die gemeinschaftlichen Schenkel von unendlich vielen Flächenwinkeln sind. Der Punkt Q_1 gehört der Strecke PQR an, wenn der Sinn PQ_1R mit dem PQR übereinstimmt.

208. Durch eine in einem einförmigen Gebilde enthaltene Kette ABC... und zwei Elemente A, P des Gebildes, von welchen das eine A der gegebenen Kette angehört, das andere P aber ihr nicht angehört, ist eine andere in demselben Gebilde enthaltene Kette bestimmt, welche nämlich die beiden Elemente A, P enthält und mit der erstern nur das Element A gemein hat.

Es seien A, B, C, P vier in einer und derselben imaginären Geraden u II. Art befindliche Punkte und a, b, c, p die reellen Träger derselben. Es sei ferner H eine durch die Gerade p gehende reelle Ebene, so schneidet diese die Regelfläche abc in einer Curve, welcher im Punkte Ha eine Gerade s sich anschmiegt. Alle Punkte der Geraden u, deren reelle Träger die Gerade s schneiden, gehören einer und derselben Kette an, welche mit der Kette ABC... nur den Punkt A gemein hat und überdiess den Punkt P enthält.

209. Durch eine in einem einförmigen Gebilde enthaltene Kette ABC... und zwei Elemente P, Q des Gebildes, welche auf einerlei Seite der Kette liegen, sind zwei andere in demselben Gebilde enthaltene Ketten bestimmt, deren jede die beiden Elemente

P, Q enthält und mit der gegebenen Kette ein, aber auch nur ein Element gemein hat.

Es seien A, B, C, P, Q fünf in einer und derselben imaginären Geraden II. Art befindliche Punkte und a, b, c, p q die reellen Träger derselben. Legt man nun durch die Gerade p eine reelle Ebene H, so schneidet diese die Regelfläche abc in einer Curve, von welcher zwei reelle Tangenten durch den Punkt Hq gehen, woraus der Satz folgt.

210. Wenn in einem einförmigen Gebilde u die Elemente M, N sowohl durch die Elemente A, A_1 als auch durch die Elemente B, B_1 harmonisch getrennt sind, aber die erwähnten sechs Elemente nicht sämmtlich einer und derselben Kette angehören, so haben die Ketten MAB..., MA_1B_1... und eben so die Ketten MAB_1..., MA_1B... nur das Element M mit einander gemein.

Es sei u ein imaginäres gerades Gebilde II. Art, so sind die reellen Träger m, n der Punkte M, N sowohl durch die reellen Träger a, a_1 der Punkte A, A_1 als auch durch die reellen Träger b, b_1 der Punkte B, B_1 harmonisch getrennt. Da nun in dem involutorischen Systeme (m, n) der Regelschaar mab die Regelschaar ma_1b_1 und also auch jedem Leitstrahle p der erstern Regelschaar ein Leitstrahl p_1 der letztern zugeordnet ist, welcher in der Ebene mp liegt und durch den Punkt mp geht, mithin die Regelfläche mab in diesem Punkte berührt, so haben die Regelschaaren mab, ma_1 b_1 nur die Gerade m und also die Ketten MAB..., MA_1B_1... nur den Punkt M mit einander gemein.

211. Wenn M, A, A_1, B, B_1 fünf Elemente eines und desselben einförmigen Gebildes sind, aber weder die Ketten MAB..., MA_1B_1... noch die Ketten MAB_1..., MA_1B... ein von M verschiedenes Element mit einander gemein haben, so ist das Element N, welches vom Elemente M durch die Elemente A, A_1 harmonisch getrennt ist, auch zu den drei Elementen B, M, B_1 das vierte harmonische Element.

Es sei B_2 das Element, welches vom Elemente B durch die Elemente M, N harmonisch getrennt ist, so haben auch (210) die Ketten MAB..., MA_1B_2... nur das Element M mit einander gemein, woraus man (208) schliessen kann, dass die Ketten MA_1 B_1..., MA_1B_2... in einander fallen. Da eben so bewiesen werden kann, dass das Element B_2 der Kette MAB_1... angehört, so folgt, dass B_2 mit B_1 zusammenfällt.

212. Zwei Elemente F, G eines einförmigen Gebildes sollen durch eine in demselben enthaltene Kette harmonisch getrennt heissen, wenn jede Kette, welche in dem einförmigen Gebilde enthalten ist und die Elemente F, G enthält, mit jener Kette zwei Elemente gemein hat, durch welche die Elemente F, G harmonisch getrennt sind.

Durch eine in einem einförmigen Gebilde enthaltene Kette ABC... und Element F des Gebildes, welches der Kette nicht angehört, ist ein anderes Element G bestimmt, welches vom erstern durch die gegebene Kette harmonisch getrennt ist. Sind A, B, C, F vier in einer und derselben imaginären Geraden n II. Art befindliche Punkte und a, b, c, f die reellen Träger derselben, so ist (76) G derjenige Punkt der Geraden n, dessen reeller Träger g der Geraden f in Hinsicht auf die Regelfläche abc zugeordnet ist. Jeder andere Fall kann auf den betrachteten zurückgeführt werden.

213. Wenn die Elemente A, A_1, B, B_1 eines einförmigen Gebildes einer und derselben Kette angehören, so sind diejenigen Elemente des Gebildes, welche sowohl durch die Elemente A, A_1 als auch durch die Elemente B, B_1 harmonisch getrennt sind, entweder beide in jener Kette enthalten oder durch dieselbe harmonisch getrennt, je nachdem nämlich der Sinn ABA_1 mit dem Sinne AB_1A_1 oder mit dem Sinne A_1B_1A übereinstimmt.

Es seien A, A_1, B, B_1 vier in einer und derselben imaginären Geraden II. Art befindliche Punkte und a, a_1, b, b_1 die reellen Träger derselben. Wenn nun in der Regelschaar aba_1 der Sinn aba_1 mit dem Sinne ab_1a_1 übereinstimmt, so gehören die reellen Träger m, n der Punkte M, N, welche sowohl durch die Punkte A, A_1 als auch durch die Punkte B, B_1 harmonisch getrennt sind, der Regelschaar aba_1 an. Wenn aber der Sinn aba_1 dem Sinne ab_1a_1 entgegengesetzt ist, so sind die Geraden m, n in Hinsicht auf die Regelfläche aba_1 einander zugeordnet, woraus der Satz folgt. — Je zwei einander conjungirte imaginäre Elemente eines reellen einförmigen Gebildes sind also durch die in dem Gebilde enthaltene reelle Kette harmonisch getrennt.

214. Wenn zwei einförmige Gebilde so auf einander bezogen sind, dass jedem Elemente des einen ein Element des andern, jedem neutralen Wurfe in dem einen ein neutraler Wurf im andern und also auch jeder Kette in dem einen eine Kette im andern entspricht, so entspricht auch jedem harmonischen Wurfe MANC in dem einen Gebilde ein harmonischer Wurf im andern.

Es seien B, D zwei Elemente des erstern Gebildes, welche der Kette MAN... nicht angehören aber ebenfalls durch die Elemente M, N harmonisch getrennt sind, so haben (210) die Ketten MAB..., MCD... und eben so die Ketten MAD..., MBC... nur das Element M mit einander gemein. Wenn nun den Elementen M, N, A, B, C, D des erstern Gebildes die Elemente M_1, N_1, A_1, B_1, C_1, D_1 des letztern entsprechen, so haben die Ketten $M_1A_1B_1$..., $M_1C_1D_1$... und eben so die Ketten $M_1A_1D_1$..., $M_1B_1C_1$... nur das Element M_1 mit einander gemein, woraus man (211) schliessen kann, dass die Elemente M_1, N_1, welche die Ketten $M_1A_1C_1$... $M_1B_1D_1$... mit einander gemein haben, sowohl durch die Elemente A_1, C_1, als auch durch die Elemente B_1, D_1 harmonisch getrennt sind. — Jedem ordentlichen Wurfe in dem einen Gebilde entspricht (213) ein ordentlicher Wurf im andern und daher auch jedem Stücke in dem einen ein Stück im andern.

---

§. 16.

Projecktivische Verwandtschaft zwischen einförmigen Gebilden.

215. Zwei einförmige Gebilde sollen nun zu einander projektivisch heissen, wenn sie so auf einander bezogen sind, dass jedem Elemente des einen Gebildes ein Element des andern entspricht und überdiess je zwei homologe Würfe, was den Sinn anbelangt, von einerlei Art sind. Da alsdann jedem neutralen Wurfe in dem einen Gebilde ein neutraler Wurf im andern und also auch jeder Kette in dem einen eine Kette im andern entspricht, so entspricht auch (214) jedem harmonischen Wurfe in dem einen Gebilde ein harmonischer Wurf im andern.

Ist von beliebig vielen einförmigen Gebilden das zweite zum ersten und so jedes folgende zu einem der vorhergehenden projektivisch, so sind alle zu einander projektivisch. Einförmige Gebilde, welche perspektivisch zu einander sind, sind auch projektivisch zu einander.

216. Wenn zwei reelle einförmige Gebilde zu einander projektivisch sind und irgend drei reellen Elementen des einen Gebildes reelle Elemente des andern entsprechen, so sind die Gebilde reell-projektivisch zu einander.

Jedem reellen Elemente des einen Gebildes entspricht nämlich (215) ein reelles Element des andern und jedem harmonischen Wurfe in dem einen Gebilde ein harmonischer Wurf im andern. Entspricht also dem reellen Wurfe ABCD in dem einen Gebilde, welcher ein imaginäres Element desselben darstellt, der Wurf $A_1B_1C_1D_1$ im andern, so entsprechen den einander conjungirten imaginären Elementen, welche sowohl durch die Elemente A, C als auch durch die Elemente B, D harmonisch getrennt sind, die einander conjungirten imaginären Elemente, welche sowohl durch die Elemente A_1, C_1 als auch durch die Elemente B_1, D_1 harmonisch getrennt sind, und zwar entspricht dem Elemente ABCD, welches im Sinne ABC liegt, das Element $A_1B_1C_1D_1$, welches im Sinne $A_1B_1C_1$ liegt und eben so dem Elemente DCBA das Element $D_1C_1B_1A_1$.[1]

217. Wenn zwei zu einander projektivische einförmige Gebilde, welche in einander liegen, drei Elemente entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein.

Haben nämlich zwei zu einander projektivische Ebenenbüschel, deren gemeinschaftliche Axe eine imaginäre Gerade II. Art ist, drei Ebenen entsprechend gemein, so werden sie von jeder reellen Geraden, welche die reellen Axen dieser drei Ebenen schneidet, in zwei zu einander projektivischen geraden Gebilden geschnitten, welche drei reelle Punkte und also (216) alle ihre Punkte entsprechend gemein haben, daher auch jede Ebene des einen Ebenenbüschels mit der ihr entsprechenden Ebene des andern zusammenfällt. Haben zwei zu einander projektivische gerade Gebilde drei Punkte P, Q, R entsprechend gemein, so werden sie aus jeder imaginären Geraden u II. Art, welche mit ihnen nicht in einerlei Ebene liegt, durch zwei zu einander projektivische Ebenenbüschel projicirt, welche die Ebenen uP, uQ, uR und also alle ihre Ebenen entsprechend gemein haben, daher auch die geraden Gebilde alle ihre Punkte entsprechend gemein haben. Jeder andere Fall lässt sich auf den eben betrachteten zurückführen.

218. Will man zwei einförmige Gebilde projektivisch auf einander beziehen, so kann man zu drei Elementen A, B, C des einen Gebildes drei Elemente A_1, B_1, C_1 des andern, welche jenen entsprechen sollen, nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Gebildes ein Element des andern zugewiesen ist.

Die in G. 107—120 enthaltenen Sätze haben nämlich, wie man sich leicht überzeugt, allgemeine Gültigkeit, so dass weder in den Aussagen noch in den Beweisen derselben etwas abzuändern ist, wenn nun der Begriff Element im weitern Sinne genommen wird. Nur kann nicht mehr gesagt werden, dass zwei zu einander projektivische einförmige Gebilde, welche in einander liegen, entweder in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben seien, da kein einförmiges Gebilde von einem sich bewegenden Elemente beschrieben werden kann. Sollte ein Strahl einen Strahlenbüschel beschreiben, welcher in einer reellen Ebene liegt aber einen imaginären Mittelpunkt hat, so müsste der reelle Punkt des Strahls die ganze Ebene beschreiben, was nicht möglich ist.

Haben zwei zu einander projektivische einförmige Gebilde, welche in einander liegen, das Element M entsprechend gemein, während die Elemente A, A_1 derselben einander abwechselnd entsprechen, so haben sie auch noch (und nur noch) das Element N entsprechend gemein, welches zu A,M,A_1 und daher auch zu A_1,M,A das vierte harmonische Element ist. Und wenn M, A, A_1, N vier Elemente eines und desselben einförmigen Gebildes sind und $MAA_1N \barwedge MA_1AN$ ist, so sind die Elemente M, N durch die Elemente A, A_1 harmonisch getrennt.

219. Wenn man in einem einförmigen Gebilde irgend zwei Elemente M, N als Ordnungselemente annimmt und alsdann je zwei Elemente, welche durch jene Elemente harmonisch getrennt sind, einander zugeordnet nennt, so sind die Elemente des Gebildes involutorisch gepaart.

Es sei das einförmige Gebilde ein gerades Gebilde. Man nehme in einer andern durch den Punkt M gehenden Geraden noch drei Punkte P, Q, R an, so dass MPQR ein harmonischer Wurf ist. Projicirt man nun das gerade Gebilde, dessen Träger die Gerade MQ ist, aus den Punkten P, R auf die Gerade MN, so erhält man zwei zu einander projektivische gerade Gebilde, welche die Punkte M, N entsprechend gemein haben, während je zwei Punkte, welche durch die Punkte M, N harmonisch getrennt sind, einander abwechselnd entsprechen. — Sind also in einem einförmigen Gebilde die Elemente M, N sowohl durch die Elemente A, A_1 als auch durch die Elemente B, B_1 harmonisch getrennt, so ist $MNABA_1B_1 \barwedge MNA_1B_1AB$.

220. Wenn zwei zu einander projektivische einförmige Gebilde $AA_1B\ldots$, $A_1AB_1\ldots$ in einander liegen und irgend zwei homologe Elemente A, A_1 derselben einander abwechselnd entsprechen, so liegen die Gebilde involutorisch. Jedes involutorische einförmige Gebilde aber enthält zwei Ordnungselemente, welche durch je zwei einander zugeordnete Elemente harmonisch getrennt sind.

Es seien M, N die Elemente, welche sowohl durch die Elemente A, A_1 als auch durch die Elemente B, B_1 harmonisch getrennt sind, so ist (219) $AA_1BMNB_1 \barwedge A_1AB_1MNB$, woraus man schliessen kann, dass die zu einander projektivischen Gebilde $AA_1B\ldots$, A_1AB_1 die Elemente M, N entsprechend gemein haben, und dass dem Elemente B_1 des erstern das Element B des letztern entspricht. — Sind also A, A_1, B, B_1 irgend vier Elemente eines und desselben einförmigen Gebildes, so ist $AA_1BB_1 \barwedge A_1AB_1B$. Eben so ist aber auch $AA_1BB_1 \barwedge BB_1AA_1 \barwedge B_1BA_1A$.

221. Wenn M, A, B, A_1, B_1 fünf Elemente eines und desselben einförmigen Gebildes sind, so ist entweder $MM.AB_1\,A_1B$ eine Involution oder es gibt ein von M verschiedenes Element N, so dass $MN.AB_1.A_1B$ eine Involution ist. Im erstern Falle haben die zu einander projektivischen Gebilde $MAB\ldots$, $MA_1,B_1\ldots$ nur das Element M, im letztern aber, da $MABN \barwedge NB_1A_1M \barwedge MA_1B_1N$ ist, auch noch das Element N entsprechend gemein.

Sind M, A, A_1, A_2 vier Elemente eines und desselben einförmigen Gebildes, so ist entweder MAA_1A_2 ein harmonischer Wurf und also $MM.AA_2.A_1A_1$ eine Involution, oder es gibt ein von M verschiedenes Element N, so dass $MN.A_1A_1$ eine Involution ist. Im erstern Falle haben die zu einander projektivischen Gebilde $MAA_1..$, $MA_1A_2...$ nur das Element M, im letztern aber, da $MAA_1N \barwedge NA_2A_1M \barwedge MA_1A_2N$ ist, auch noch das Element N entsprechend gemein.

Anm. Ist von zwei zu einander projektivischen Gebilden ABC..., PQR... die Rede, so versteht es sich von selbst, dass den Elementen A, B, C des erstern die Elemente P, Q, R des letztern entsprechen.

222. Zwei zu einander projektivische einförmige Gebilde, welche in einander liegen aber nicht alle ihre Elemente entsprechend gemein haben, haben entweder ein Element oder zwei Elemente entsprechend gemein.

Liegen die Gebilde involutorisch, so haben sie zwei Elemente entsprechend gemein, welche durch je zwei einander zugeordnete Elemente harmonisch getrennt sind. Wenn aber dem Elemente A des einen Gebildes das Element A_1 des andern und dem Elemente A_1 des erstern ein von A verschiedenes Element A_2 des letztern entspricht, so kommt es darauf an, ob die Gebilde das Element H_1, welches zu den drei Elementen A, A_1, A_2 das vierte harmonische Element ist, entsprechend gemein haben oder ob dem Elemente H_1 des erstern Gebildes ein anderes Element H_2 des letztern entspricht. Im erstern dieser Fälle haben die Gebilde (221) nur das Element H_1, im letztern aber die beiden Elemente M, N entsprechend gemein, welche sowohl durch die Elemente A_1, H_1 als auch durch die Elemente A_2, H_2 harmonisch getrennt sind. Da nämlich $MN.AA_2.A_1A_1$ eine Involution ist, so ist $MNAA_1 \barwedge NMA_2A_1 \barwedge MNA_1A_2$. Da ferner $MNA_1H_1 \barwedge MNA_2H_2$, so ist $MNAA_1H_1 \barwedge MNA_1A_2H_2$.

223. Wenn drei zu einander projektivische einförmige Gebilde, welche in einander liegen, das Element M, aber weder das erste und zweite noch das erste und dritte noch ein Element entsprechend gemein haben, so haben das zweite und dritte entweder ebenfalls nur das Element M oder alle ihre Elemente entsprechend gemein.

Wenn nämlich das zweite und dritte Gebilde irgend ein von M verschiedenes Element A_1 entsprechend gemein haben und dieses dem Elemente A des ersten entspricht, so haben sie auch das

Element A_2 entsprechend gemein, welches zu den drei Elementen M, A, A_1 das vierte harmonische Element ist und daher (221) dem Elemente A_1 des ersten Gebildes entspricht, woraus (217) der Satz folgt.

224. Wenn ein gerades Gebilde u und ein Ebenenbüschel, dessen Axe s mit dem geraden Gebilde keinen Punkt gemein hat, projektivisch aber nicht perspektivisch zu einander sind, so liegt (222) entweder nur ein Punkt des geraden Gebildes in der ihm entsprechenden Ebene des Büschels oder es enthält die Gerade u zwei Punkte M, N, deren jeder in der ihm entsprechenden Ebene liegt. Liegt von irgend zwei Punkten der Geraden u jeder in der dem andern entsprechenden Ebene, so liegen (220) die zu einander projektivischen Gebilde involutorisch. In diesem Falle sind die Punkte M, N durch jeden dritten Punkt der Geraden u und die demselben entsprechende Ebene harmonisch getrennt.

Analoges gilt, wenn ein Strahlenbüschel und ein gerades Gebilde, welches mit dem Büschel in einerlei Ebene liegt, aber nicht durch seinen Mittelpunkt geht, oder ein Strahlenbüschel und ein Ebenenbüschel, dessen Axe durch den Mittelpunkt des Strahlenbüschels geht aber mit ihm nicht in einerlei Ebene liegt, projektivisch aber nicht perspektivisch zu einander sind.

225. Wenn der Geraden u die Gerade u_1 conjungirt ist, so ist auch jedem Punkte der Geraden u ein Punkt der Geraden u_1 conjungirt. Nennt man je zwei solche Punkte einander entsprechend, so sind die geraden Gebilde u, u_1 so auf einander bezogen, dass (144) jedem harmonischen Wurfe in dem einen Gebilde ein harmonischer Wurf im andern und (204) jeder Kette in dem einen eine Kette im andern entspricht. Dass aber die Gebilde gleichwohl nicht projektivisch zu einander sind, geht daraus hervor, weil je zwei homologe nicht neutrale Würfe, was den Sinn anbelangt, von entgegengesetzter Art sind. — Wenn die Gerade u reell ist und daher mit u_1 zusammenfällt, so haben die Gebilde u, u_1 alle ihre reellen Punkte entsprechend gemein, während je zwei einander conjungirte imaginäre Punkte derselben einander abwechselnd entsprechen.

§. 17.

Projektivische Verwandtschaft zwischen Systemen.

226. Versteht man unter Elementen nicht blos reelle Elemente, so können zwei Grundgebilde der zweiten Stufe oder auch zwei räumliche Systeme nur dann projektivisch (collineär oder reciprok) zu einander genannt werden, wenn nicht nur die in G. 121 aufgestellten Bedingungen erfüllt, sondern überdiess je zwei homologe (einförmige) Würfe, was den Sinn anbelangt, von einerlei Art und also je zwei homologe einförmige Gebilde zu einander projektivisch sind. Dass zwei zu einander perspektivische ebene Systeme, welche in einerlei Ebene liegen, so wie auch zwei zu einander perspektivische räumliche Systeme entweder einstimmig- oder entgegengesetzt perspektivisch sind, kann nun (218) nicht mehr gesagt werden. Ausserdem aber ist in G. §. 10 nichts abzuändern, wenn nun der Begriff Element im weitern Sinne genommen wird.

Wenn zwei räumliche Systeme reciprok zu einander sind, so entspricht jeder Strecke ABC in dem einen Systeme ein Flächenwinkel $A_1 B_1 C_1$ im andern und jeder Ebene P des erstern, welche die Strecke A B C schneidet, ein Punkt P_1 des letztern, welcher in dem Winkel $A_1 B_1 C_1$ liegt. Schneidet nämlich die Ebene P die Gerade AC in einem Punkte D, welcher der Strecke ABC angehört, so wird der Punkt P_1 aus der Geraden A_1 C_1 durch eine Ebene D_1 projicirt, welche dem Winkel $A_1 B_1 C_1$ angehört, daher man sagen kann, dass der Punkt P_1 in dem Winkel A_1 B_1 C_1 liege. Eben so entspricht, wenn zwei ebene Systeme reciprok zu einander sind, jeder Strecke A B C in dem einen Systeme ein Winkel a b c im andern und jeder Geraden des erstern Systems, welche die Strecke ABC schneidet, ein Punkt des letztern, welcher in dem Winkel a b c liegt.

Ist der Ebene u die Ebene u_1 conjungirt, so ist auch jedem Elemente der Ebene u ein Element der Ebene u_1 conjungirt. Nennt man je zwei solche Elemente einander entsprechend, so sind die ebenen Systeme u, u_1 zwar so auf einander bezogen, dass jedem einförmigen Gebilde in dem einen ein einförmiges Gebilde im andern entspricht, projektivisch aber sind die Systeme (225) nicht zu einander.

227. Sind zwei reelle Grundgebilde der zweiten Stufe projektivisch so auf einander bezogen, dass vier reellen gleichartigen Elementen des einen Gebildes, von welchen keine drei einem und demselben einförmigen Gebilde angehören, vier reelle Elemente des andern entsprechen, so sind die Gebilde reell-projektivisch zu einander. Werden zwei reelle ebene Systeme projektivisch so auf einander bezogen, dass dem reellen Vierseite abcd in der einen Ebene das reelle Viereck ABCD in der andern entspricht, so entspricht jedem reellen Punkte der erstern Ebene, welcher in einer Seite des Vierseits abcd liegt, eine reelle Gerade der letztern Ebene, welche durch einen Eckpunkt des Vierecks ABCD geht. Da hiernach auch jeder reellen Geraden der erstern Ebene ein reeller Punkt der letztern und jedem reellen Punkte der erstern eine reelle Gerade der letztern entspricht, so folgt (216), dass die Systeme reell-projektivisch zu einander sind.

Eben so leicht überzeugt man sich, dass zwei zu einander projektivische räumliche Systeme reell-projektivisch zu einander sind, so wie irgend fünf reellen Punkten des einen Systems, von welchen keine vier in einerlei Ebene liegen, oder fünf reellen Ebenen des einen Systems, von welchen keine vier durch einen und denselben Punkt gehen, fünf reelle Elemente des andern entsprechen.

228. Jedes geschaart-involutorische System hat zwei Ordnungslinien.

Da nämlich jedes involutorische einförmige Gebilde zwei Ordnungselemente hat, so schneiden sich in jedem Leitstrahle des Systems zwei Ebenen, deren jede sich selbst zugeordnet ist, gleichwie auch in jedem Leitstrahle des Systems zwei sich selbst zugeordnete Punkte liegen. Da ferner keine Ebene es gibt, deren Punkte sämmtlich sich selbst zugeordnet sind, so ist jede sich selbst zugeordnete Ebene der Träger eines in dem involutorischen räumlichen Systeme enthaltenen involutorischen ebenen Systems, dessen Ordnungslinie zugleich eine Ordnungslinie des räumlichen Systems ist, woraus der Satz folgt.

229. Wenn zwei zu einander reciproke ebene Systeme in einander liegen und ein gerades Gebilde ABC... des einen Systems zu dem ihm entsprechenden Strahlenbüschel S(ABC...) des andern perspektivisch ist, so hat man zu unterscheiden, ob der Träger u

des geraden Gebildes und der Mittelpunkt S des Büschels einander abwechselnd entsprechen oder ob dem Punkte S des erstern Systems eine von u verschiedene Gerade u_1 des letztern entspricht.

Entsprechen die Elemente u, S einander abwechselnd, so gilt diess auch von den Gebilden ABC..., S(ABC...). In diesem Falle entsprechen je zwei Punkten M, N des einen Systems, welche durch den Punkt S und die Gerade u harmonisch getrennt sind, zwei Gerade m, n des andern, welche ebenfalls durch den Punkt S und die Gerade u harmonisch getrennt sind und welchen als Geraden des erstern Systems die Punkte N, M des letztern entsprechen. Da nämlich die Gerade MN durch den Punkt S geht, so geht sie auch durch den ihr entsprechenden Punkt L, in welchem die drei Geraden u, m, n sich schneiden. Wenn man also in der Geraden u zwei Punkte E, F und in der Geraden m zwei Punkte G, H annimmt, so dass die Gerade FG durch den Punkt M geht und die Geraden EG, FH im Punkte S sich schneiden, so geht die Gerade EH durch den Punkt N. Da nun den Geraden MF, SE des erstern Systems die Punkte H, E des letztern entsprechen, so entspricht dem Punkte G des erstern die Gerade EH des letztern und also der Geraden LG des erstern der Punkt N des letztern. Sollen also zwei von S, u verschiedene Elemente einander abwechselnd entsprechen, so muss das eine ein Punkt der Geraden u und das andere der durch ihn gehende Strahl des Büschels S sein.

Entspricht dem Punkte S des erstern Systems die Gerade u_1 des letztern, so entsprechen den Geraden SA, SB, SC des erstern die Punkte A_1, B_1, C_1, des letztern, in welchen dieselben von der Geraden u_1 geschnitten werden. Wenn ferner der Geraden u_1 des erstern Systems der Punkt S_1 des letztern entspricht, so entsprechen den Punkten A_1, B_1, C_1 des erstern die Geraden $S_1 A_1$, $S_1 B_1$, $S_1 C_1$ des letztern und den Geraden $S_1 A$, $S_1 B$, $S_1 C$ des erstern die Punkte A, B, C des letztern. Der Punkt A_1 ist nämlich der Schnittpunkt von u_1 und SA, daher ihm die Gerade $S_1 A_1$ entspricht, die Gerade $S_1 A$ aber verbindet den Schnittpunkt von u_1 und $S_1 A$ mit dem Punkte A, daher ihr der Schnittpunkt der Geraden $S_1 A$, SA entspricht. Der Punkt $u u_1$ und die durch ihn gehende Gerade $S S_1$ entsprechen einander abwechselnd, dasselbe gilt nur noch, wie man sich leicht überzeugt, von dem Punkte, welcher vom

Punkte $u\,u_1$ durch die Punkte S, S_1 harmonisch getrennt ist, und der Geraden, welche von der Geraden $S\,S_1$ durch die Geraden u, u_1 harmonisch getrennt ist.

230. Jedes ebene Polarsystem, es mag reell oder imaginär sein, hat eine Ordnungscurve, welche (224) von jeder ihr sich nicht anschmiegenden aber in der nämlichen Ebene liegenden Geraden s in zwei Punkten M, N geschnitten wird. Jeder dritte Punkt der Geraden s ist von seiner Polare durch die Punkte M, N, mithin auch durch die Geraden MS, NS harmonisch getrennt, welche die Curve in den Punkten M, N berühren und also im Pole S der Geraden s sich schneiden. Dass nämlich das gerade Gebilde s kein Schnitt des ihm zugeordneten Strahlenbüschels S ist, folgt aus 229. Sind also in Hinsicht auf eine Curve II. Ordnung

die Punkte P, Q einander conjugirt, so müssen die Curve und die Gerade PQ entweder im Punkte P oder im Punkte Q sich berühren oder in zwei Punkten, welche durch die Punkte P, Q harmonisch getrennt sind, sich schneiden.

die Geraden p, q einander conjugirt, so berührt entweder die Curve im Punkte pq die Gerade p oder die Gerade q oder es schneiden sich im Punkte pq zwei Tangenten der Curve, welche durch die Geraden p, q harmonisch getrennt sind.

Aus dem Obigen geht hervor, was im G. §. 18 und §. 19 zu berichtigen oder zu unterdrücken ist, wenn der Begriff Element im weitern Sinne genommen wird, wonach eine Curve II. Ordnung weder von einem sich bewegenden Elemente beschrieben noch von ihr gesagt werden kann, dass sie einen Punkt einschliesse oder in einem Winkel liege.

231. Wenn man in der einen u von zwei nicht in einerlei Ebene liegenden Geraden drei Punkte A, B, C und in der andern v zwei Punkte S, T annimmt und alsdann zwei räumliche Systeme projektivisch so auf einander bezieht, dass den Punkten A, B, C, S, T des einen Systems die Ebenen vA, vB, vC, uT, uS des andern entsprechen, so liegen die Systeme nicht involutorisch, obgleich je zwei homologe Elemente, von welchen das eine in der Geraden u oder in der Geraden v liegt, und also das andere durch die Gerade v oder durch die Gerade u geht, einander abwechselnd entsprechen. Wenn nämlich die Punkte M, N durch den Punkt S

und die Gerade u harmonisch getrennt sind und dem Punkte M des einen Systems die Ebene Tm des andern entspricht, so entspricht (229) der Ebene Tm des erstern der Punkt N des letztern.

Ist in einem Polarsysteme irgend ein gerades Gebilde u ein Schnitt des ihm zugeordneten Ebenenbüschels v, so ist das System ein Nullsystem. Nach dem Obigen ist nämlich auch das gerade Gebilde v zu dem ihm zugeordneten Ebenenbüschel u perspektivisch. Da hiernach jede Gerade, welche die beiden Geraden u, v schneidet, sich selbst zugeordnet ist, so liegt jeder Punkt in der ihm zugeordneten Ebene.

232. Ist in einem gewöhnlichen räumlichen Polarsysteme der Geraden u die Gerade u_1 zugeordnet, welche mit der erstern keinen Punkt gemein hat, so liegen (231) das gerade Gebilde u und der ihm zugeordnete Ebenenbüschel u_1 involutorisch, daher (224) die Gerade u zwei Punkte M, N enthält, deren jeder in der ihm zugeordneten Ebene und also auch in der Ordnungsfläche F des Polarsystems liegt. Jeder dritte Punkt der Geraden u ist von der ihm zugeordneten Ebene durch die Punkte M, N und also auch durch die Ebenen u_1 M, u_1 N harmonisch getrennt. Eben so schneidet die Gerade u_1 die Fläche F in zwei Punkten S, T, in welchen derselben die Ebenen u S, u T sich anschmiegen. Jede der vier Geraden MS, MT, NS, NT ist sich selbst zugeordnet, weil jede zwei Punkte verbindet, deren Polaren in ihr sich schneiden.

Jede Gerade p, welche von der ihr zugeordneten Geraden p_1 geschnitten wird, hat mit der Fläche F nur einen Punkt gemein, daher man sagt, dass die Gerade in diesem Punkte die Fläche berühre. Eben so enthält der Ebenenbüschel p nur eine der Fläche F sich anschmiegende Ebene. Wenn also eine Gerade mehr als zwei Punkte enthält, deren jeder in seiner Polare liegt, oder durch dieselbe mehr als zwei der Fläche F sich anschmiegende Ebenen gehen, so ist die Gerade sich selbst zugeordnet und liegt daher in der Fläche F.

Jede Ebene U, welche durch ihren Pol S geht, ist der Träger eines in dem Polarsysteme enthaltenen involutorischen Strahlenbüschels. Da nämlich jeder Geraden, welche die Ebene U im Punkte S schneidet, eine Gerade zugeordnet ist, welche in der Ebene U liegt aber nicht durch Punkt S geht, mithin die Fläche F in zwei Punkten M, N schneidet, so haben die Ebene U und die Fläche F zwei im Punkte S sich schneidende Gerade SM, SN mit einander gemein. Da ferner jeder Punkt P der Ebene U, welcher in keiner der Geraden SM, SN liegt, durch diese Linien von seiner Polare P_1 harmonisch getrennt ist, so gilt diess auch von jeder in der Ebene U liegenden Geraden SP, welche die Geraden SM, SN im Punkte S schneidet, und der ihr zugeordneten Geraden U P_1. Bemerkt man noch, dass auch jeder Geraden, welche mit keiner von den beiden Geraden SM, SN einen Punkt gemein hat, eine andere Gerade zugeordnet ist, so folgt, dass, wenn von drei in der Fläche F liegenden Geraden zwei sich schneiden, die dritte die eine von den beiden erstern schneidet, mit der andern aber keinen Punkt gemein hat. Es enthält hiernach jede Fläche F, welche die Ordnungsfläche eines räumlichen Polarsystems ist, zwei Regelschaaren, deren jede die Leitschaar der andern ist. In jedem Punkte der Fläche schneiden sich eine Gerade der einen Schaar und eine Gerade der andern Schaar, während jede der Fläche sich anschmiegende Ebene durch eine Gerade der einen Schaar und durch eine Gerade der andern Schaar geht. – Sind A, B zwei in Hinsicht auf die Fläche F einander conjugirte

Punkte, so muss die Gerade AB entweder in der Fläche F liegen, oder es müssen die Fläche F und die Gerade AB im Punkte A oder im Punkte B sich berühren oder in zwei Punkten, welche durch die Punkte A, B harmonisch getrennt sind, sich schneiden.

Ebenen, so liegt ihre Schnittlinie s entweder in der Fläche F oder es hat der Ebenenbüschel s mit dem der Fäche F sich anschmiegenden Ebenenbündel nur die Ebene A oder nur die Ebene B oder zwei Ebenen gemein, welche durch die Ebenen A, B harmonisch getrennt sind.

233. Jede Ebene H, welche in einem Polarsysteme einem ausser ihr liegenden Punkte H_1 zugeordnet ist, schneidet die Ordnungsfläche F des Systems in einer Curve K II. Ordnung. Ist in dem räumlichen Polarsysteme dem Punkte A, welcher in der Ebene H liegt, die Ebene A_1 und also der Geraden A H_1 die Gerade A_1 H zugeordnet, so ist in Hinsicht auf die Curve K dem Punkte A die Gerade A_1 H und in Hinsicht auf die Kegelfläche H_1 K, welche die Curve K aus dem Punkte H_1 projicirt, der Geraden AH_1 die Ebene

A_1 zugeordnet. Jeder Tangente p der Curve K ist in dem räumlichen Polarsysteme ein Strahl p_1 der Kegelfläche H_1K zugeordnet, welcher nämlich durch den Berührungspunkt der Tangente geht, daher auch in diesem Punkte die Fläche F von jeder der Geraden p, p_1 berührt wird. Der der Kegelfläche H_1 K sich anschmiegende Ebenenbüschel schmiegt auch der Fläche F sich an.

Aus dieser und der vorigen Nummer geht hervor, was in G. §. 24 und §. 25 zu berichtigen oder zu unterdrücken ist, wenn man nicht mehr auf reelle Polarsysteme und reelle Elemente sich beschränkt. Enthält ein Polarsystem irgend ein reelles Polartetraeder und ist überdiess irgend einem reellen Punkte, welcher in keiner Seite des Tretraeders liegt, eine reelle Ebene zugeordnet, so ist jedem reellen Elemente ein reelles Element zugeordnet und also das Polarsystem selbst reell.

---

§. 18.

Projektivische Verwandtschaft zwischen Elementargebilden.

234. Sind P, Q, R, S vier Elemente eines und desselben Elementargebildes II. Ordnung und p, q, r, s die ihnen entsprechenden Elemente eines einförmigen Gebildes, welches zum erstern perspektivisch ist, so soll vom Elemente S gesagt werden, dass es im Sinne PQR oder im Sinne RQP liege oder zum Sinne PQR neutral sich verhalte, je nachdem das Element s im Sinne pqr oder im Sinne rqp liegt oder zum Sinne pqr neutral sich verhält. Welches von den unendlich vielen einförmigen Gebilden, die zu dem Elementargebilde II. Ordnung perspektivisch sind, hier in Betrachtung gezogen wird, ist, da alle zu einander projektivisch sind, ganz einerlei.

Was nach 206—223 von einförmigen Gebilden jeder Art gilt, gilt nun von Elementargebilden überhaupt. Hiemit ist zugleich angegeben, was im Anfange von 7 abzuändern ist, wenn man sich nicht mehr auf reelle Elemente beschränkt. In Hinsicht auf 42, 43, 44 und 46 ist zu bemerken, dass nicht eine Ebene mit einer Fläche II. Ordnung nur einen Punkt gemein haben kann. Die übrigen in §. 1 und §. 2 enthaltenen Sätze aber erleiden keine Abänderung. Ferner ist nun auch klar, was in §. 4 zu berichtigen oder zu unterdrücken ist, wenn der Begriff Element im weiteren Sinne genommen wird, wonach jedes involutorische Gebilde zwei Ordnungselemente hat. Liegen zwei involutorische Elementargebilde in einander, so haben sie entweder ein Ordnungselement mit einander gemein, oder es gibt zwei Elemente, welche sowohl in dem einen als auch in dem andern Gebilde einander zugeordnet sind.

235. Will man die Ordnungselemente eines involutorischen Elementargebildes $aa_1 . bb_1 . cc_1 ...$ mit Hilfe einer gegebenen reellen Curve K II. Ordnung finden, so wird man das Gebilde $aa_1 b ...$ und die Curve K projektivisch so auf einander beziehen, dass den drei Elementen a, a_1, b des erstern Gebildes drei reelle Punkte A, A_1, B des letztern entsprechen. Wenn nun dem Elemente b_1 des erstern Gebildes der Punkte B_1 der Curve K entspricht und die Gerade, welche den Schnittpunkt von AB und $A_1 B_1$ mit dem Schnittpunkte von AB_1 und $A_1 B$ verbindet, die Curve K in den Punkten M, N schneidet, so entsprechen diese Punkte denjenigen Elementen m, n des Gebildes $aa_1 b ...$, welche sowohl durch die Elemente a, a_1 als auch durch die Elemente b, b_1 harmonisch getrennt sind. Bemerkt wird noch, dass die Gebilde $aa_1 b ...$, $AA_1 B ...$, wenn sie auch nicht selbst zu einander perspektivisch sind, doch als das erste und letzte von drei oder mehrern Elementargebilden betrachtet werden können, von welchen je zwei auf einander folgende zu einander perspektivisch, und welche überdiess mit Ausnahme des letzten und etwa noch des ersten sämmtlich einförmige Gebilde sind.

236. Wenn den Elementen A. B des einen von zwei zu einander projektivischen Gebilden u, u_1, welche in einander liegen, die Elemente A_1, B_1 des andern entsprechen und die Elemente M, N derselben sowohl durch die Elemente A, B_1 als auch durch die Elemente A_1, B harmonisch getrennt sind, so haben die zu einander projektivischen Gebilde entweder nur das Element M oder nur das Element N oder zwei Elemente, welche durch die Elemente M, N harmonisch getrennt sind, entsprechend gemein.

Haben nämlich die Gebilde u, u_1 nur ein Element P entsprechend gemein, so ist (85) $PP.AB_1 . A_1 B$ eine Involution, daher P entweder mit M oder mit N identisch ist. Haben aber die Gebilde u, u_1 zwei Elemente P, Q entsprechend gemein, so ist $PQ.AB_1 . A_1 B$ eine Involution, daher die Elemente M, N auch durch die Elemente P, Q harmonisch getrennt sind.

237. Wenn den Geraden a, b, c, von welchen keine zwei in einerlei Ebene liegen, die Geraden a_1, b_1, c_1 conjungirt sind, so ist (124) jedem Leitstrahle der Regelschaar abc ein Leitstrahl der Regelschaar $a_1 b_1 c_1$ und daher auch jeder Geraden der Regelschaar abc eine Gerade der Regelschaar $a_1 b_1 c_1$ conjungirt. Wenn ferner die Ebene U die Regelfläche abc in einer Curve schneidet, so ist dieser die Curve conjungirt, in welcher die Regelfläche $a_1 b_1 c_1$ und die der Ebene U conjungirte Ebene U_1 sich schneiden. Auf diese Weise ist jedem Elementargebilde G ein Elementargebilde G_1 conjungirt, so dass nämlich jedem Elemente des einen Gebildes ein Element des andern conjungirt ist. Nennt man je zwei solche Elemente einander entsprechend, so sind (225) die Gebilde G, G_1, welche übrigens auch in einander fallen können, nicht projektivisch auf einander bezogen, obgleich jeder Kette pqr... in dem einen Gebilde eine Kette $p_1 q_1 r_1$... im andern, jedem harmonischen Wurfe in dem einen ein harmonischer Wurf im andern entspricht und daher auch je zwei durch die Kette pqr... harmonisch getrennten Elementen des erstern Gebildes zwei durch die Kette $p_1 q_1 r_1$... harmonisch getrennte Elemente des letztern entsprechen. Jedem zu G perspektivischen einförmigen Gebilde u ist ein zu G_1 perspektivisches einförmiges Gebilde u_1 conjungirt.

238. Wenn zwei Würfe zu einander projektivisch sind, so sind es auch die ihnen conjungirten Würfe.

Es seien den Elementargebilden U, u die Elementargebilde U_1, u_1 conjungirt. Wenn man nun die beiden erstern Gebilde projektivisch auf einander bezieht und alsdann je zwei Elemente der letztern, welche homologen Elementen der erstern conjungirt sind, ebenfalls einander entsprechend nennt, so sind auch je zwei homologe Würfe $A_1 B_1 C_1 D_1$, $a_1 b_1 c_1 d_1$ der Gebilde U_1, u_1, was den Sinn anbelangt, von einerlei Art. Weil nämlich die Würfe $A_1 B_1 C_1 D_1$, $a_1 b_1 c_1 d_1$ homologen Würfen ABCD, abcd der Gebilde U, u conjungirt, mithin (204) je zwei auf einander folgende von den vier Würfen $A_1 B_1 C_1 D_1$, CBAD, cbad, $a_1 b_1 c_1 d_1$, was den Sinn anbelangt, von einerlei Art sind, so gilt diess auch vom ersten und vierten. Da hiernach die Gebilde U_1, u_1 projektivisch auf einander bezogen sind, so folgt der Satz.

239. Je zwei einander conjungirte neutrale Würfe ABCD,

$A_1B_1C_1D_1$ sind zu einander projektivisch. Wenn aber ABCF, $A_1B_1C_1F_1$ zwei einander conjungirte nicht neutrale Würfe sind, mithin das Element F von einem andern Elemente G durch die Kette ABC... und eben so das Element F_1 von einem andern Elemente G_1, welches dem Elemente G conjungirt ist, durch die Kette $A_1B_1C_1$... harmonisch getrennt ist, so ist der Wurf ABCF zu dem Wurfe $A_1B_1C_1G_1$ und der Wurf ABCG zu dem Wurfe $A_1B_1C_1F_1$ projektivisch.

Es seien a, b, c drei reelle Elemente eines reellen Elementargebildes, so gibt es in diesem ein reelles Element d und zwei durch die Kette abc... harmonisch getrennte, also einander conjungirte imaginäre Elemente f, g, so dass die Würfe abcd, abcf, abcg zu den Würfen ABCD, ABCF, ABCG und also (238) auch die Würfe abcd, abcg, abcf zu den Würfen $A_1B_1C_1D_1$, $A_1B_1C_1F_1$, $A_1B_1C_1G_1$ projektivisch sind, woraus der Satz sich ergibt.

240. Wenn die eine K von zwei Ketten K, K_1, welche einem und demselben Elementargebilde angehören, irgend zwei Elemente A, B enthält, welche durch die andere K_1 harmonisch getrennt sind, so sind je zwei Elemente, welche in irgend einer von den beiden Ketten enthalten und durch die gemeinschaftlichen Elemente M, N derselben harmonisch getrennt sind, auch durch die andere Kette harmonisch getrennt.

Es seien A_1, B_1 zwei durch die Elemente M, N harmonisch getrennte Elemente der Kette K_1. Da nun (85) $MN.AA_1.BB_1$ eine Involution ist und die Elemente A, B durch die Kette MNA_1... harmonisch getrennt sind, so sind auch die Elemente A_1, B_1 durch die Kette NMA... harmonisch getrennt.

241. Durch drei Elemente M, N, A eines Elementargebildes ist eine in demselben enthaltene Kette bestimmt, welche nämlich die beiden erstern der gegebenen Elemente harmonisch trennt, das dritte aber in sich enthält.

Soll eine Kette, durch welche die Elemente M, N harmonisch getrennt sind, das Element A enthalten, so muss sie auch das Element A_1 enthalten, welches zu den drei Elementen M, A, N das vierte harmonische Element ist. Sind nun B, B_1 diejenigen Elemente des Gebildes, welche sowohl durch die Elemente M, N als auch durch die Elemente A, A_1 harmonisch getrennt sind, so ist (213) ABA_1B_1... die im Satze erwähnte Kette. Jede andere in dem gegebenen Gebilde enthaltene Kette K, welche die Elemente A, A_1 enthält, hat mit der Kette M B N..., welche diese Elemente harmonisch trennt, zwei Elemente gemein, welche durch die Elemente A, A_1 aber nicht durch die Elemente M, N harmonisch getrennt sind, daher auch nicht die Elemente M, N durch die Kette K harmonisch getrennt sind.

242. Wenn zwei zu einander projektivische Elementargebilde u, u_1, welche in einander liegen, eine Kette K entsprechend gemein haben, so entsprechen je zwei Elementen M, N des einen Gebildes, welche durch die Kette K harmonisch getrennt sind, zwei Elemente M_1, N_1 des andern, welche ebenfalls durch die Kette K harmonisch getrennt sind. Fällt M_1 mit M zusammen, so fällt auch N_1 mit N zusammen. Haben also die Gebilde u, u_1 zwei Elemente entsprechend gemein, so sind diese entweder durch die Kette K harmonisch getrennt oder beide in ihr enthalten. Haben aber die Gebilde u, u_1 nur ein Element entsprechend gemein, so ist dieses in der Kette K enthalten.

Jedes involutorische Elementargebilde MM.NN.AA_1... enthält unendlich viele involutorische Ketten. Jede Kette MNA..., welche die beiden Ordnungselemente enthält, fällt mit der ihr zugeordneten Kette MNA_1 ... zusammen. Dasselbe gilt von jeder Kette, welche durch die Ordnungselemente harmonisch getrennt ist, indem jedem Elemente einer solchen Kette ein anderes Element derselben zugeordnet ist.

243. Haben zwei zu einander projektivische Elementargebilde MNAB..., MNA_1B_1.., welche in einander aber nicht involutorisch liegen, zwei Elemente M, N entsprechend gemein, so haben sie entweder jede Kette, welche diese Elemente enthält, oder jede Kette, durch welche die Elemente M, N harmonisch getrennt sind, oder gar keine Kette entsprechend gemein. Da nämlich (85) $MNAA_1$ $\barwedge$ $MNBB_1$ ist, so folgt, dass wenn das Element A_1 der Kette MNA... angehört, auch die Kette MNB... mit der ihr entsprechenden Kette MNB_1... zusammenfällt. Gehört das Element A_1 der Kette K an, welche das Element A enhält und die Elemente M, N harmonisch trennt, so fällt auch die Kette, welche das Element B enthält und die Elemente M N harmonisch trennt, mit der ihr entsprechenden Kette zusammen. Wenn endlich das Element A_1,

welches höchstens einer von den beiden Ketten $MNA_1 \ldots$, K angehören kann, keiner derselben angehört, so haben die zu einander projektivischen Gebilde keine Kette entsprechend gemein.

244. Haben zwei zu einander projektivische Elementargebilde, welche in einander liegen, nur ein Element M entsprechend gemein, so haben sie jede Kette entsprechend gemein, welche dieses Element und irgend zwei homologe Elemente enthält. Entspricht nämlich dem Elemente A des einen Gebildes das Element A_1 des andern und dem Elemente A_1 des erstern das Element A_2 des letztern, so ist (221) $M A A_1 A_2$ ein harmonischer Wurf, daher die Kette $MAA_1 \ldots$ mit der Kette $MA_1A_2 \ldots$ zusammenfällt.

245. Wenn ein Strahlenbüschel S in einer reellen Ebene U liegt, aber einen imaginären Mittelpunkt S hat, so liegen die reellen Punkte von allen imaginären Strahlen des Büschels, welche einer und derselben Kette angehören, entweder in einer und derselben Geraden oder in einer und derselben durch den Mittelpunkt des Büschels gehenden Curve II. Ordnung, je nachdem nämlich der reelle Strahl desselben der Kette angehört oder nicht angehört.

Die reellen Träger von allen imaginären Punkten, welche einer und derselben in einer imaginären Geraden I. Art enthaltenen Kette angehören, schneiden sich entweder alle in einem und demselben Punkte oder berühren alle eine und dieselbe Curve II. Ordnung, der auch die imaginäre Gerade sich anschmiegt, je nachdem nämlich der reelle Punkt dieser Geraden der Kette angehört oder nicht angehört.

Es sei dem Punkte S der Punkt S_1 conjungirt, so ist SS_1 der reelle Strahl des Büschels S. Ist nun u irgend eine andere in der Ebene U liegende reelle Gerade, so wird die in dieser Geraden enthaltene reelle Kette PQR... aus dem Punkte S durch eine in dem Büschel S enthaltene Kette S(PQR...) projicirt, der auch der Strahl SS_1 angehört. Zu jedem reellen Punkte F der Ebene U, welcher in keiner von den beiden Geraden u, SS_1 liegt, gibt es einen andern reellen Punkt G, so dass die Geraden u, FG durch die Punkte S, S_1 und die Geraden u, $S S_1$ durch die Punkte F, G harmonisch getrennt sind. Da alsdann die Gerade u von den Geraden SF, S_1G in einem und demselben Punkte, mithin von den

Geraden S F, S G in zwei einander conjungirten imaginären Punkten geschnitten wird, so sind die Strahlen S F, S G durch die Kette S (P Q R...) harmonisch gstrennt.

Ist in Hinsicht auf eine reelle Curve K II. Ordnung, welche in der Ebene U liegt und durch den Punkt S also auch durch den Punkt S_1 geht, der Geraden SS_1 der Punkt M zugeordnet, so sind die Strahlen SS_1, S M durch die Kette S (A B C...) harmonisch getrennt, welche aus dem Punkte S die in der Curve K enthaltene reelle Kette ABC... projicirt. Denn da jede reelle Gerade, welche in der Ebene U liegt und durch den Punkt M geht, die Curve K in zwei reellen Punkten schneidet, welche durch den Punkt M und die Gerade $S S_1$ harmonisch getrennt sind, so hat jede in dem Büschel S enthaltene Kette, der die Strahlen S M, $S S_1$ angehören, mit der Kette S (A B C...) zwei Strahlen gemein, durch welche die Strahlen SM, SS_1 harmonisch getrennt sind. Zwei imaginäre Strahlen SF_1, SG_1 des Büschels S sind (240) durch die Kette S (ABC...) harmonisch getrennt, wenn ihre reellen Punkte F_1, G_1 mit dem Punkte M in einer und derselben Geraden liegen und zugleich in Hinsicht auf die Curve K einander conjugirt sind.

246. Jedes involutorische Punktgebilde II. Ordnung wird aus jedem Punkte S seiner Involutionsaxe p durch einen involutorischen Strahlenbüschel projicirt, dessen Ordnungsstrahlen die erwähnte Gerade p und der durch das Involutionscentrum P des erstern Gebildes gehende Strahl SP des Büschels S sind. Denn je zwei einander zugeordnete Punkte des Punktgebildes sind durch die Gerade p und den Punkt P harmonisch getrennt und werden daher, wenn sie mit dem Punkte S nicht in einer und derselben Geraden liegen, aus diesem Punkte durch zwei Gerade projicirt, welche durch die Geraden p, SP harmonisch getrennt sind. Eben so wird jeder involutorische Strahlenbüschel II. Ordnung von jeder Geraden, welche durch sein Involutionscentrum geht und mit ihm in einerlei Ebene liegt, in einem involutorischen geraden Gebilde geschnitten.

247. Je zwei zu einander projektivische Punktgebilde, welche in einer und derselben Curve II. Ordnung liegen und zwei Punkte entsprechend ge-

Je zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel, welche einer und derselben Curve II. Ordnung sich anschmiegen und zwei Strahlen entsprechend gemein

mein haben, werden aus dem Schnittpunkte, der durch diese Punkte gehenden Tangenten durch zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel projicirt.

haben, werden von der Geraden, welche die Berührungspunkte dieser Strahlen verbindet, in zwei zu einander projektivischen geraden Gebilden geschnitten.

Je zwei zu einander projektivische Curven $ABCDE\ldots, A_1B_1C_1D_1 E_1\ldots$ II. Ordnung können nämlich als homologe Gebilde von zwei zu einander projektivischen ebenen Systemen betrachtet werden. Wenn daher zwei Tangenten der erstern Curve im Punkte S und die ihnen entsprechenden Tangenten der letztern im Punkte S_1 sich schneiden, so sind auch die Strahlenbüschel $S(ABCDE\ldots), S_1(A_1B_1C_1D_1E_1\ldots)$ zu einander projektivisch, welche die Curven aus den Punkten S, S_1 projiciren. Die im Obigen und in der vorigen Nummer ausgesprochenen Sätze sind also nur besondere Fälle von allgemeineren Sätzen.

248 Wenn man in einer Curve II. Ordnung, welche in den Punkten M, N die Geraden SM, SN berührt, drei andern Punkte A_1, B, C annimmt, so dass der Wurf MNAB zu dem Wurfe MNBC projektivisch, als MN.AC.BB eine Involution ist, so sind die Würfe S (MNAB), S (MNBC) zu dem Wurfe MNAC projektivisch.

Es werde die Gerade NA von den Geraden MC, MS in den Punkten P, Q geschnitten. Da nun dem Schnittpunkte der Geraden MN, AC in Hinsicht auf die Curve jeder der drei Punkte S, P, B conjugirt ist, diese also in einer und derselben Geraden liegen, so ist $S(MNAB) \barwedge QNAP \barwedge M(SNAC) \barwedge MNAC$. Ebenso wird bewiesen, dass $S(MNBC) \barwedge MNAC$ ist, was aber auch daraus folgt, weil (247) die Würfe S (MNAB), S (MNBC) zu einander projektivisch sind.

249. Alle Punkte einer Curve II. Ordnung, welche in einem und demselben Winkel liegen, dessen Schenkel die Curve berühren, gehören einer und derselben Kette an.

Alle Tangenten einer Curve II. Ordnung, welche eine und dieselbe Strecke schneiden, die von zwei Punkten der Curve begrenzt ist, gehören einer und derselben Kette an.

Es werde eine Curve II. Ordnung, welche in den Punkten M, N die Geraden SM, SN berührt, von einem dritten Strahle des Büschels S in den Punkten A, A_1 und von einem vierten in den Punkten B, B_1 geschnitten. Es seien ferner die Punkte B, B_1

durch die Punkte A, C harmonisch getrennt, so dass also (248) S (MNAB) $\barwedge$ MNAC ist. Wenn nun die Gerade SB in dem Winkel S (MAN) liegt, folglich der Sinn S (MAN) mit dem Sinne S (MBN) übereinstimmt, so stimmt auch der Sinn MAN mit dem Sinne MCN überein, woraus man (213) schliessen kann, dass die Punkte B, B_1 der Kette MAN... angehören. Und wenn der Punkt B, demnach auch die Punkte B_1, C in der Kette MAN... enthalten sind, so stimmt der Sinn MAN mit dem Sinne MCN und also auch der Sinn S(MAN) mit dem Sinne S (MBN) überein. — Die Gerade SP, welche von der Geraden SA durch die Tangenten SM, SN harmonisch getrennt ist, schneidet die Curve in zwei Punkten P, P_1, welche sowohl durch die Punkte M, N als auch durch die Punkte A, A_1 und mithin auch durch die Kette MAN... harmonisch getrennt sind. Nach 240 sind also je zwei Punkte, welche mit dem Punkte S in einer und derselben Geraden liegen und irgend einer von den beiden Ketten MAN..., MPN... angehören, durch die andere harmonisch getrennt. Die Kette MPN... liegt in dem Winkel S (MPN), welcher von dem Winkel S (MAN) der Nebenwinkel ist. Jede imaginäre Kette, welche in einer reellen Curve II. Ordnung enthalten ist und irgend zwei einander conjungirte imaginäre Punkte enthält, liegt in einem reellen Winkel, dessen Schenkel die Curve in zwei reellen Punkten der Kette berühren.

250. Dass die drei Punkte, in deren jedem zwei einander gegenüberliegende Seiten eines in eine Curve II. Ordnung beschriebenen Sechsecks $AB_1CA_1BC_1$ sich schneiden, in einer und derselben Geraden liegen, geht auch hervor, wenn man bemerkt, dass die zu einander projektivischen Gebilde ABC..., $A_1B_1C_1$.. entweder zwei Punkte M, N oder einen Punkt M entsprechend gemein haben. Im erstern Falle ist nämlich MN.AB_1.A_1B eine Involution, daher der Schnittpunkt F von AB_1 und A_1B in der Geraden MN liegt und dasselbe vom Schnittpunkte G der Geraden AC_1, A_1C so wie auch vom Schnittpunkte H der Geraden BC_1, B_1C gilt. Im letztern Falle ist MM.AB_1.A_1B eine Involution, daher die Gerade, welche die Curve im Punkte m berührt, durch den Punkt F und eben so durch die Punkte G, H geht. Lässt man A_1 mit B, B_1 mit C und C_1 mit A zusammenfallen, so folgt:

Die drei Punkte, in welchem die Seiten eines in die Curve beschriebenen Dreiecks ABC von den Polaren der ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte geschnitten werden, liegen in einer und derselben Geraden, welche die Curve in zwei Punkten schneidet. Bezeichnet man diese Punkte durch M, N und den Schnittpunkt der durch sie gehenden Tangenten durch S, so ist $MNABC \barwedge MNBCA \barwedge S(MNACB) \barwedge S(MNCBA)$.

251. Wenn die zu einander projektivischen Elementargebilde ABC..., $A_1 B_1 C_1$ ... in einander liegen, aber keines von den beiden Elementen A, B entsprechend gemein haben, so lässt die Aufgabe: zwei homologe Elemente P, P_1 der Gebilde zu finden, so dass der Wurf $ABPP_1$ zu einem gegebenen Wurfe efgh projektivisch sei, entweder eine oder zwei Auflösungen zu.

Es sei $ABCC_2 \barwedge efgh$. Soll nun $ABCP \barwedge A_1 B_1 C_1 P_1$ und zugleich $ABPP_1 \barwedge ABCC_2$ sein, so muss auch $ABC_2 P_1 \barwedge ABCP \barwedge A_1B_1C_1P_1$ sein. Gibt es also (222) nur ein Element P_1, so dass $ABC_2P_1 \barwedge A_1 B_1 C_1 P_1$ ist, so lässt die Aufgabe nur eine Auflösung zu. Gibt es aber zwei Elemente P_1, Q_1, so dass $ABC_2 P_1 Q_1 \barwedge A_1 B_1 C_1 P_1 Q_1$ ist, so lässt die Aufgabe zwei Auflösungen zu. — Wenn die zu einander projektivischen Gebilde ABC..., $A_1 B_1 C_1$ ... das Element A entsprechend gemein haben, also A_1 mit A identisch ist, jedoch B, B_1 zwei verschiedene Elemente sind, so lässt die Aufgabe entweder gar keine oder eine Auflösung zu, je nachdem nämlich in dem involutorischen Gebilde $BC_1.B_1C_2$... das Element A sich selbst oder einem andern Elemente P_1 zugeordnet ist.

Sollen die homologen Elemente P, P_1 durch die Elemente A, B harmonisch getrennt sein, so hat man zu den drei Elementen A, C, B das vierte harmonische Element C_2 zu suchen. Uebrigens bleibt Alles wie vorhin.

252. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche eine Gerade h in einem und demselben Punkte berühren aber nicht in einerlei Ebene liegen, ist eine Kegelfläche II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch beide Curven geht.

Durch zwei Kegelflächen II. Ordnung, welche eine Ebene in einer und derselben Geraden berühren aber nicht einerlei Mittelpunkt haben, ist eine Curve II. Ordnung bestimmt, in welcher nämlich die Kegelflächen sich schneiden.

Bezieht man die Curven K, K_1 projektivisch so auf einander, dass je zwei homologe Tangenten derselben die Gerade h in einem und demselben Punkte schneiden, so erzeugen sie die im Satze erwähnte Kegelfläche.

253. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche zwei Punkte A, B mit einander gemein haben aber nicht in einerlei Ebene liegen, sind zwei Kegelflächen II. Ordnung bestimmt, deren jede durch beide Curven geht.

Durch zwei Kegelflächen II. Ordnung, welche dieselben zwei Ebenen berühren aber nicht einerlei Mittelpunkt haben, sind zwei Curven II. Ordnung bestimmt, in welchen nämlich die Kegelflächen sich schneiden.

Es sei der Geraden AB in Hinsicht auf die Curve K der Punkt P und in Hinsicht auf die Curve K_1 der Punkt P_1 zugeordnet. Schneidet nun eine durch die Gerade PP_1 gehende Ebene die Curve K in den Punkten C, D und die Curve K_1 in den Punkten C_1, D_1, so ist der Schnittpunkt S der Geraden CC_1, DD_1 der Mittelpunkt der einen und der Schnittpunkt S_1 der Geraden CD_1, C_1D der Mittelpunkt der andern der im Satze erwähnten Kegelflächen. Die Punkte P, P_1 sind durch die Punkte S, S_1 harmonisch getrennt. Die Ebenen SS_1A, SS_1B berühren die eine Kegelfläche in den Geraden SA, SB und die andere in den Geraden S_1A, S_1B.

Wenn also zwei Curven II. Ordnung Schnitte einer und derselben Kegelfläche sind aber keine Tangente mit einander gemein haben, so gibt es noch eine Kegelfläche, welche durch beide Curven geht.

Wenn also zwei Kegelflächen Scheine einer und derselben Curve II. Ordnung sind aber keine Gerade mit einander gemein haben, so schneiden sie sich in noch einer Curve II. Ordnung.

254. Zwei Regelschaaren abc, abc_1, welche zwei Gerade a, b mit einander gemein haben, haben entweder einen Leitstrahl p oder zwei Leitstrahlen p, q mit einander gemein, je nachdem nämlich irgend eine dritte Gerade c der einen Regelschaar die andere Regelfläche berührt oder schneidet. Im erstern Falle berühren sich die Regelflächen in der Geraden p, da jede durch diese Gerade gehende Ebene beiden Flächen in einem und demselben Punkte sich anschmiegt.

Zwei Regelschaaren abc, ab_1c_1, welche eine Gerade a mit einander gemein haben, in der die Regelflächen sich berühren, haben auch entweder einen Leitstrahl p, in welchem die Regelflächen sich berühren, oder zwei Leitstrahlen p, q mit einander gemein, je nachdem nämlich irgend eine von a verschiedene Gerade der einen Regelschaar die andere Regelfläche in einem Punkte P berührt oder in zwei Punkten P, Q schneidet. Die Gerade p geht durch den Punkt P und den Pol der Ebene aP und eben so im letztern der erwähnten Fälle die Gerade q durch den Punkt Q und den Pol der Ebene aQ.

Haben zwei Regelflächen die Gerade u mit einander gemein, ohne in dieser Geraden sich zu berühren, so haben die zu einander projektivischen geraden Gebilde, von welchen das eine in Hinsicht auf die eine Fläche und das andere in Hinsicht auf die andere Fläche dem Ebenenbüschel u zugeordnet ist, entweder nur einen Punkt oder zwei Punkte entsprechend gemein. Im erstern Falle geht durch die Gerade u nur eine Ebene, welche beiden Flächen in einem und demselben Punkte sich anschmiegt, während im letztern Falle zwei solche Ebenen in der Geraden u sich schneiden.

255. Wenn von den vier Geraden a, a_1, b, b_1 keine zwei sich schneiden, aber auch nicht alle vier einer und derselben Regelschaar angehören, so gibt es entweder nur ein involutorisches System, in welchem der Geraden a die Gerade a_1 und der Geraden b die Gerade b_1 zugeordnet ist, oder es giebt zwei solche Systeme, je nachdem nämlich die Regelschaaren aa_1b, aa_1b_1, abb_1, a_1bb_1 nur einen Leitstrahl p oder zwei Leitstrahlen p, q mit einander gemein haben.

Es seien M, N die Punkte, welche sowohl durch die Punkte pa, pa_1 als auch durch die Punkte pb, pb_1 harmonisch getrennt sind. Wenn nun die durch den Punkt M gehenden Geraden h, h_1 der Regelschaaren aa_1b, aa_1b_1 mit der Geraden p in einerlei Ebene liegen also durch diese Gerade und eine Gerade m harmonisch getrennt sind, so ist in dem involutorischen Systeme (m, n), dessen andere Ordnungslinie n von der erstern m durch die Geraden a, a_1 harmonisch getrennt ist, der Geraden h die Gerade h_1, der Geraden a die Gerade a_1 und also, da $haa_1b \barwedge p\,(haa_1b) \barwedge p\,(h_1a_1ab_1) \barwedge h_1a_1ab_1$ ist, der Geraden b die Gerade b_1 zugeordnet. Wenn es aber noch eine Gerade q gibt, welche die vier Geraden a, a_1, b, b_1 schneidet und S, T die Punkte sind, welche durch die Punkte qa, qa_1 und zugleich durch die Punkte qb, qb_1 harmonisch getrennt sind, so ist sowohl in dem involutorischen Systeme (MS, NT) als auch in dem involutorischen Systeme (MT, NS) der Geraden a die Gerade a_1 und der Geraden b die Gerade b_1 zugeordnet. Auch gibt es in diesem Falle ein involutorisches System (p, q), in welchem jede der Geraden a, a_1, b, b_1 sich selbst zugeordnet ist.

Anm. Man wird nun auch leicht entscheiden, was in §. 5 und §. 6 zu berichtigen ist, wenn der Begriff Element im weitern Sinne genommen wird.

§. 19.

Summen von Würfen.

256. Von nun an werden Würfe, welche zu einander projektivisch sind, als gleich betrachtet, daher auch von einem Wurfe gesagt wird, dass er bestimmt sei, wenn irgend ein zu ihm projektivischer Wurf gegeben ist. Ist von einem eigentlichen Wurfe abcd die Rede, so versteht es sich von selbst, dass a, b, c, d vier verschiedene Elemente eines und desselben Elementargebildes sind. Der Inbegriff von drei verschiedenen Elementen eines und desselben Elementargebildes, von welchen aber das eine zweimal angeschrieben ist, soll ein uneigentlicher Wurf heissen und zwar ein uneigentlicher Wurf I. Art, wenn er die Form abca oder baac hat, ein uneigentlicher Wurf II. Art, wenn er die Form abcb oder babc hat, ein uneigentlicher Wurf III. Art endlich, wenn er die Form abcc oder ccab hat.

Obgleich die Würfe ABCA, baac nicht projektivisch zu einander sind, so sollen doch alle uneigentlichen Würfe, welche nach dem Obigen von einer und derselben Art sind, einander gleich heissen. Ein uneigentlicher Wurf I. Art soll auch durch 0, ein uneigentlicher Wurf II. Art durch 1, ein uneigentlicher Wurf III. Art durch ∞ bezeichnet werden. Bemerkt wird noch, dass jeder uneigentliche Wurf, da seine Elemente einer und derselben Kette angehören, ein neutraler Wurf ist.

257. Wenn man Würfe, welche zu einander projektivisch sind, als gleich, demnach nur als verschiedene Darstellungen eines und desselben Wurfes betrachtet, so kann man zwei Würfe U, U_1 schon dann einander conjungirt nennen, wenn sie irgend zwei den Elementen nach einander conjungirten Würfen $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ beziehlich gleich sind und also (238) zu jedem Wurfe $abcd$, welcher dem Wurfe U und daher auch dem Wurfe $ABCD$ gleich ist, einen Wurf $a_1b_1c_1d_1$ es gibt, welcher dem Wurfe $A_1B_1C_1D_1$ und daher auch dem Wurfe U_1 gleich ist, so dass überdiess $abcd$, $a_1b_1c_1d_1$ homologe Würfe von zwei einander conjungirten Elementargebilden sind. Ist $U = ABCD$ ein neutraler Wurf, so ist (239) auch $U = A_1 B_1 C_1 D_1$, daher man von jedem neutralen Wurfe sagen kann, dass er sich selbst conjungirt sei.

Was auch $ABCD$ für ein Wurf sein mag, so ist $ABCD = BADC = CDAB = DCBA$. In der Folge aber ist unter einem Wurfe, wenn nicht ausdrücklich gesagt wird, dass er ein uneigentlicher Wurf III. Art sei, entweder ein eigentlicher Wurf oder ein uneigentlicher Wurf I. oder II. Art zu verstehen.

258. Durch drei Elemente A, B, C eines Elementargebildes und zwei Würfe U, U_1 sind drei Elemente D, D_1, S des Gebildes bestimmt, so dass nämlich $ABCD = U$, $ABCD_1 = U_1$ und in dem involutorischen Gebilde $CC.\ DD_1 \ldots$ dem Elemente A das Element S zugeordnet ist. Der Wurf $ABCS$, welcher auf diese Weise durch die Würfe U, U_1 bestimmt ist, soll ihre Summe heissen, und diess durch $ABCS = U + U_1$ ausgedrückt werden. Sucht man in demselben oder in einem andern Elementargebilde zu drei Elementen a, b, c die Elemente d, d_1, s, so dass die Würfe $abcd$, $abcd_1$ den Würfen U, U_1 gleich sind und in dem involutorischen Gebilde $cc.dd_1 \ldots$ dem Elemente a das Element s zugeordnet ist, so ist $abcdd_1 s \barwedge ABCDD_1S$ und also $abcs = ABCS$, woraus eben hervorgeht, dass durch die beiden Würfe U, U_1 ein Wurf $U + U_1$ bestimmt ist. Auch ist offenbar, dass $U\ U_1 = U_1 + U$ ist. Fällt D mit A zusammen, so fällt S mit D_1 zusammen. Wenn also der eine von zwei Würfen $= 0$ ist, so ist ihre Summe dem andern gleich.

259. Setzt man für irgend zwei von m Würfen U, U_1, $U_2, \ldots U_{m-1}$ ihre Summe, so hat man einen Wurf weniger als vorher. Fährt man so fort, bis man nur noch einen Wurf hat, so ist dieser die Summe der m Würfe.

Ist nämlich irgend einer von den drei Würfen U, U_1, U_2 ein uneigentlicher Wurf I. Art, so folgt schon aus dem Vorigen, dass die Summe $(U+U_1)+U_2$ welche auch durch $U+U_1+U_2$ bezeichnet werden kann, dieselbe bleibt, wenn man die Würfe U_1, U_2 mit einander vertauscht. Ist $U_1=U_2$, so ist offenbar $U+U_1+U_2=U+U_2+U_1$. Wenn aber keiner von den erwähnten Fällen stattfindet, so suche man in irgend einem Elementargebilde zu drei Elementen A, B, C die Elemente D, D_1, D_2, P, Q, so dass $ABCD=U$, $ABCD_1=U_1$, $ABCD_2=U_2$, $ABCP=U+U_1$ und $ABCQ=U+U_2$ ist. Da alsdann $CC.DD_1.AP$, $CC.DD_2.AQ$ Involutionen sind, folglich (85, 221) $\overline{CD_1P} \barwedge \overline{CAD}$ und eben so $\overline{CD_2Q} \barwedge \overline{CAD}$ ist, so ist auch (223) $\overline{CD_1P} \barwedge \overline{CD_2Q}$ und mithin auch $CC.D_1Q.D_2P$ eine Involution. Ist nun R das Element, welches in dem involutorischen Gebilde $CC.D_1Q.D_2P\ldots$ dem Elemente A zugeordnet ist, so ist $ABCR=ABCP+ABCD_2=U+U_1+U_2$ und eben so $ABCR=ABCQ+ABCD_1=U+U_2+U_1$, folglich auch $U+U_1+U_2=U+U_2+U_1$. Da hiernach auch $(U+U_1 \ldots +U_{r-1})+U_r+U_{r+1}=(U+U_1 \ldots +U_{r-1})+U_{r+1}+U_r$ ist, so folgt, dass man nicht nur die beiden ersten sondern je zwei auf einander folgende Würfe mit einander vertauschen und daher die m Würfe beliebig unter einander versetzen, mithin auch für irgend zwei, da man sie als die beiden ersten betrachten kann, ihre Summe setzen darf. Dasselbe gilt aber auch von dem $m-1$ Würfen, aus welchen alsdann die Summe noch besteht.

Sind die Würfe $U, U_1, \ldots U_{m-1}$ den Würfen $V, V_1, \ldots V_{m-1}$ beziehlich gleich, so ist auch die Summe aus den m erstern Würfen der Summe aus dem m letztern gleich.

260. Wenn die Würfe $U, U_1, \ldots U_{m-1}$ den Würfen V, $V_1, \ldots V_{m-1}$ conjungirt sind, so ist auch die Summe der m ererstern Würfe der Summe der m letztern conjungirt.

Man suche in einer reellen Curve II. Ordnung zu drei reellen Punkten A, B, C die Punkte D, D_1, P, so dass $ABCD=U$, $ABCD_1=U_1$ und $ABCP=U+U_1$ ist. Es seien ferner E, E_1, Q die Punkte, welche den Punkten D, D_1, P conjungirt sind. Weil nun der Punkt R, in welchem die Tangente CC von der Geraden DD_1 geschnitten wird, in der Geraden AP liegt, so liegt auch der dem Punkte R conjungirte Punkt, in welchem die Geraden CC, EE_1 sich schneiden, in der Geraden AQ, woraus hervorgeht, dass der dem Wurfe ABCP conjungirte Wurf ABCQ $= V + V_1$ ist. Da hiernach der Satz für $m = 2$ gilt, so gilt er auch für jedes grössere m.

Die Summe von neutralen Würfen ist ein neutraler Wurf. Eben so ist aber auch die Summe von zwei einander conjungirten Würfen ein neutraler Wurf.

261. Durch zwei Würfe U, U_1 ist ein Wurf U_2 bestimmt, so dass nämlich $U = U_1 + U_2$ ist.

Man suche in einem Elementargebilde zu drei Elementen A, B, C die Elemente S, D, E, so dass die Würfe ABCS, ABCD den Würfen U, U_1 gleich sind und in dem involutorischen Gebilde CC.AS .. dem Elemente D das Element E zugeordnet ist. Bezeichnet man nun den Wurf ABCE durch U_2, so ist $U = U_1 + U_2$. Und wenn ABCS = ABCD + ABCE sein soll, so muss in dem involutorischen Gebilde CC.AS... dem Elemente D das Element E zugeordnet sein. Sind U, U_1 neutrale Würfe, so ist auch U_2 ein neutraler Wurf. Ist $U_1 + U_2 = V_1 + V_2$ und $U_1 = V_1$, so ist auch $U_2 = V_2$.

262. Die Summe zweier Würfe ABCD, BACD, von welchen der eine aus dem andern durch Vertauschung der beiden ersten oder auch durch Vertauschung der beiden letzten Elemente entsteht, ist ein uneigentlicher Wurf II. Art.

Es sei in dem involutorischen Gebilde CC.AB... dem Elemente D das Element E zugeordnet, so ist ABCD + ABCE = A BCB = 1 und A B C E = B A C D = ABDC, woraus der Satz folgt.

263. Wenn die Involution CC.BD.AE und das Element P einem und demselben Elementargebilde angehören, so ist AB CP + EDCP = ABCE = EDCA und ABCP = DECP + ABCD = DEC P + EDCB.

Da nämlich CC . B D . A E eine Involution ist, so ist ABCE = EDCA und ABCD = EDCB. Wenn nun in dem involutorischen Gebilde CC.BD.AE... dem Elemente P das Element Q zugeordnet ist, so ist A B C P + A B C Q = A B C E und ABCQ = EDCP, woraus der erste Theil des Satzes folgt. Es seien ferner N, P homologe

Elemente der zu einander projektivischen Gebilde ABC..., DEC... welche (221) nur das Element C entsprechend gemein haben, so ist ABCN=DECP und in dem involutorischen Gebilde CC.DN.., dem Elemente A das Element P zugeordnet, mithin ABCP=ABCN + ABCD, woraus der letztere Theil des Satzes sich ergiebt.

264. Zwei Würfe, deren Summe = 0 ist, sollen einander entgegengesetzt heissen. Ist CC.BD.AE eine Involution, so ist (263) DECA+EDCB=ABCA = 0 und also der Wurf DECA dem Wurfe EDCB entgegengesetzt.

Sind in einem Elementargebilde, welchem das Element P angehört, die Elemente A, C durch die Elemente B, D harmonisch getrennt, so ist (263) ABCP+ADCP=ABCA und mithin dem Wurfe ABCP der Wurf ADCP entgegengesetzt. Namentlich ist also der harmonische Wurf ABCD dem Wurfe 1 entgegengesetzt.

Wenn den Würfen U, V die Würfe U_1, V_1 entgegengesetzt sind, und $U+V=W$ ist, so ist $U=U+V+V_1=W+V_1$ und eben so $V=W+U_1$.

265. Es seien in dem einen von zwei Elementargebilden g, g_1 die Elemente E, D, C und im andern die Elemente A_1, B_1, C_1 gegeben. Es sei ferner der Wurf EDCA einem gegebenen Wurfe U gleich und EDCF ein harmonischer Wurf. Nennt man nun zwei Elemente P, P_1 der Gebilde g, g_1 einander entsprechend, wenn $EDCP+A_1B_1C_1P_1=U$ und also (264) $A_1B_1C_1P_1=EFCP+U$ ist, so sind die Gebilde g, g_1 projektivisch auf einander bezogen.

Ist nämlich B das Element, welches in dem involutorischen Gebilde CC.AE... dem Elemente D zugeordnet ist, so ist (263) $ABCP+EDCP=U=EDCP+A_1B_1C_1P_1$, mithin $ABCP=A_1B_1 C_1P_1$, woraus der Satz folgt.

Wenn die Gebilde g, g_1 in einander liegen, aber C_1 nicht mit C zusammenfällt, so lässt die Aufgabe: ein Element P zu finden, sodass $EDCP+A_1B_1C_1P=U$ ist, eine oder zwei Auflösungen zu, je nachdem die zu einander projektivischen Gebilde ABC..., $A_1B_1C_1$... ein Element oder zwei Elemente entsprechend gemein haben.

266. Die Summe von m Würfen, deren jeder = U ist, soll das m fache dieses Wurfes heissen und durch m U bezeichnet wer-

den. Es ist hienach $m(U+U_1)=mU+mU_1$, $m(U+U_1+U_2)=mU+mU_1+mU_2$, $(m+n)U=mU+nU$, u. s. w.

Ist $U=U_1$, so ist auch $mU=mU_1$. Ist $U=0$, so ist auch $mU=o$. Sind die Würfe U, U_1 einander entgegengesetzt, so sind es auch die Würfe mU, mU_1, weil, wenn $U+U_1=0$ ist, auch $mU+mU_1=0$ ist. Sind die Würfe U, V einander conjungirt, so gilt diess auch (260) von den Würfen mU, mV.

267. Durch drei reelle Elemente C, A, A_1 eines reellen Elementargebildes g ist in ihm eine Reihe $C, A, A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ von reellen Elementen bestimmt, so dass nämlich CAA_1A_2, $CA_1A_2A_3$, $CA_2A_3A_4$, u. s. w. harmonische Würfe sind, daher auch keine zwei auf einander folgende Glieder der Reihe, so weit man dieselbe fortsetzen mag, durch ihre übrigen Glieder in dem Gebilde g getrennt sind. Ist nun B irgend ein von A verschiedenes Element des Gebildes g, so ist $ABCA_m = m(ABCA_1)$. Denn nach 221 haben die zu einander projektivischen Gebilde $CAA_1\ldots$, $CA_1A_2\ldots$ nur das Element C entsprechend gemein. Da ferner den Elementen $A, A_1, A_2, A_3 \ldots$ des erstern die Elemente $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots$ des letztern entsprechen, mithin $CC.AA_{r+1}.A_1A_r$ eine Involution ist, so ist $ABCA_{r+1}=ABCA_r+ABCA_1$, woraus, wenn für r nach und nach die Zahlen 1, 2, 3,...m gesetzt werden, der Satz sich ergiebt.

Sucht man in dem Gebilde g das Element B, so dass $ABCA_1=U$ ist, so ist $ABCA_m=mU$. Sind also U, U_1 zwei einander nicht gleiche Würfe, so sind auch die Würfe mU, mU_1 einander nicht gleich. Sucht man das Element B, so dass $ABCA_m=V$ ist, so ist $ABCA_1$ der Wurf, von welchem der Wurf V das m fache ist. Ist $V=mU=0$, so ist auch $U=0$. Der Wurf AA_1CA_m ist das m fache von 1, der Wurf 1 aber das m fache von AA_mCA_1.

---

§. 20.

Produkte aus Würfen.

268. Durch drei Elemente M, A, N eines Elementargebildes und zwei Würfe U, U_1, von welchen keiner ein uneigentlicher Wurf I. oder III. Art ist, sind zwei Elemente A_1, A_2 des Gebildes bestimmt, so dass nämlich $MANA_1=U$ und $MA_1NA_2=U_1$ ist. Der Wurf $MANA_2$, welcher auf diese Weise durch die Würfe U, U_1

bestimmt, soll das Produkt aus denselben heissen und durch UU_1 bezeichnet werden. Sucht man in demselben oder in einem andern Elementargebilde zu drei Elementen F, B, G die Elemente B_1, B_2, so dass $FBGB_1 = U$ und $FB_1GB_2 = U_1$ ist, so ist $FGBB_1B_2 \barwedge MNAA_1A_2$, mithin $FBGB_2 = MANA_2$, woraus eben hervorgeht, dass durch die Würfe U, U_1 ein Wurf UU_1 bestimmt ist.

Da den Würfen U_1, U auch die Würfe $NA_2\,MA_1$, $NA_1\,MA$ gleich sind, so ist $U_1U = NA_2MA = MANA_2 = UU_1$. Ist irgend einer von den beiden Würfen U, U_1 ein uneigentlicher Wurf II. Art, so ist ihr Produkt dem andern gleich.

269. Durch drei Elemente M, A, N eines Elementargebildes und m Würfe U, U_1, $U_2 \ldots U_{m-1}$, von welchen keiner ein uneigentlicher Wurf I. oder III. Art ist, sind m Elemente A_1, A_2, $A_3, \ldots A_m$ des Gebildes bestimmt, so dass nämlich die Würfe $MANA_1$, MA_1NA_2, $MA_2NA_3, \ldots MA_{m-1}\,NA_m$ den Würfen U, U_1, $U_2, \ldots U_{m-1}$ gleich sind. Der Wurf $MANA_m$, welcher auf diese Weise durch die gegebenen Würfe bestimmt ist, soll das Produkt aus denselben heissen.

Setzt man für irgend zwei der m Würfe ihr Produkt, so hat man einen Wurf weniger als vorher. Fährt man so fort, bis man nur noch einen Wurf hat, so ist dieser das Produkt aus den sämmtlichen Würfen. Da nämlich $MANA_{r+2} = (MANA_r)(MA_r\,NA_{r+2})$ ist, so folgt, dass das Produkt aus den gegebenen Würfen dasselbe bleibt, wenn man für irgend zwei auf einander folgende Faktoren ihr Produkt setzt. Da man hiernach auch zwei auf einander folgende Faktoren mit einander vertauschen darf, so kann man mit den Faktoren eines Produkts jede beliebige Versetzung vornehmen und daher auch für irgend zwei derselben ihr Produkt setzen.

Sind die Würfe U, U_1, $U_2, \ldots U_{m-1}$ den Würfen V, V_1, $V_2, \ldots V_{m-1}$ conjungirt, so ist auch das Produkt aus den m erstern Würfen dem Produkte aus den m letztern conjungirt. Wenn man nämlich von drei reellen Elementen M, A, N eines reellen Elementargebildes ausgeht und den Elementen A_1, A_2, $A_3 \ldots A_m$ die Elemente B_1, B_2, $B_3, \ldots B_m$ conjungirt sind, so ist auch der Wurf $MANA_m$ dem Wurfe $MANB_m$ conjungirt, welcher das Produkt aus den Würfen V, V_1, $V_2, \ldots V_{m-1}$ ist. Jedes Produkt aus neutralen Würfen ist selbst ein neutraler Wurf.

Uneigentliche Würfe III. Art bleiben auch in der Folge, wenn von Summen oder Produkten die Rede ist, ausgeschlossen. Ist aber irgend ein Faktor eines Produkts ein uneigentlicher Wurf I. Art, so ist unter dem Produkte ebenfalls ein solcher Wurf zu verstehen.

270. Wenn das Produkt aus zwei Würfen $=1$ ist, so soll jeder derselben das Umgekehrte vom andern heissen. Ist der eine von zwei solchen Würfen $= MANA_1$, so ist der andere $= MA_1NA = NAMA_1$. Ist ein Wurf $MANA_1$ dem Wurfe MA_1NA, welcher das Umgekehrte von ihm ist, gleich, so ist er entweder ein uneigentlicher Wurf II. Art oder ein harmonischer Wurf, je nachdem nämlich die Elemente A, A_1 in einander fallen oder durch die Elemente M, N harmonisch getrennt sind.

Wenn V_1 das Umgekehrte von U_1, V_2 das Umgekehrte von U_2 und $U = U_1 U_2$ ist, so ist $U V_1 = V_1 U_1 U_2 = U_2$ und ebenso $U V_2 = U_1$. Vorausgesetzt wird hiebei, dass keiner von den beiden Würfen U_1, U_2 ein uneigentlicher Wurf I. Art ist, weil das Umgekehrte von einem solchen Wurfe nur ein uneigentlicher Wurf III. Art sein könnte.

271. Durch zwei Würfe U, U_1, von welchen der letztere nicht $=0$ ist, ist ein Wurf U_2 bestimmt, so dass $U = U_1 U_2$ ist.

Es sei V_1 das Umgekehrte von U_1. Bezeichnet man nun das Produkt UV_1 durch U_2, so ist $U_1U_2 = U$. Und wenn $U_1U_2 = U$ sein soll, so muss $U_2 = UV_1$ sein. — Ist der Wurf U_1, welcher nicht gleich $=0$ ist, dem Wurfe W_1 und der Wurf $U_1 U_2$ dem Wurfe $W_1 W_2$ gleich, so ist auch $U_2 = W_2$.

272. Wenn $MN.AD.BC$ eine Involution folglich $MANC = NDMB = MBND$ ist, so ist $(MANB)(MANC) = MAND$. Das m fache $ABCA_m$ eines Wurfes $ABCA_1$ ist (267) nichts anderes als das Produkt aus diesem Wurfe in den Wurf AA_1CA_m, welcher das m fache von 1 ist.

273. Das Produkt aus zwei einander conjungirten Würfen U, V ist ein neutraler Wurf.

Wenn nämlich U, V zwei nicht neutrale Würfe sind, so suche man in einer reellen Curve II. Ordnung zu drei reellen Punkten M, A, N die Punkte B, C, so dass $MANB = U$ und $MANC = V$ ist. Da nun die Punkte B, C einander conjungirt sind, mithin die Geraden MN, BC in einem reellen Punkte sich schneiden, so enthält die Curve einen reellen Punkt D, so dass $MN.BC.AD$ eine Involution und also (272) $MAND = UV$ ist. Es geht hieraus zugleich hervor, dass in der Curve die Punkte M, N durch die Punkte A, D nicht getrennt sind.

Ist das Produkt aus zwei einander conjungirten Würfen U, V ein uneigentlicher Wurf II. Art, so gibt es in jedem reellen Elementargebilde zu zwei einander conjungirten imaginären Elementen M, N und einem reellen Elemente A ein reelles Element B, so dass $U = MANB$ und also $V = MBNA$ ist. Es sei nämlich $U = MANF$ und dem Elemente F das Element G conjungirt, so ist $V = NAMG = MGNA$ und also $VU = MGNF$, woraus hervorgeht, dass die Elemente F, G mit einem und demselben reellen Elemente B zusammenfallen.

274 Wenn U, U_1, V, V_1, V_2 beliebige Würfe sind, so ist $U(V+V_1) = UV + UV_1$, also auch $U(V+V_1+V_2) = UV + UV_1 + UV_2$, $(U+U_1)(V+V_1) = UV + UV_1 + U_1 V + U_1 V_1$, u. s. w.

Es sei $U = ABCD$, $V = ADCE$ und $V_1 = ADCE_1$, so ist $UV = ABCE$ und $UV_1 = ABCE_1$. Ist nun in dem involutorischen Gebilde $CC.EE_1\ldots$ dem Elemente A das Element P zugeordnet, so ist $V + V_1 = ADCP$ und $UV + UV_1 = ABCP = (ABCD)\,(ADCP)$, woraus der Satz folgt.

275. Es seien in dem einen von zwei Elementargebilden g, g_1 die Elemente C, D, A und im andern die Elemente A_1, B_1, C_1 gegeben. Es sei ferner ein Wurf $U = ABCD$ gegeben, welcher nicht $= 0$ ist. Nennt man nun zwei Elemente P, P_1 der Gebilde g, g_1 einander entsprechend, wenn $(CDAP)\,(A_1B_1C_1P_1) = U$ und also $A_1B_1C_1P_1 = U.(ADCP)$ ist, so sind die Gebilde g, g_1 projektivisch auf einander bezogen. Da nämlich $U\,(ADCP) = ABCP$ ist, so ist auch $ABCP = A_1B_1C_1P_1$, woraus der Satz folgt.

Wenn die Gebilde g, g_1 in einander liegen, aber weder A mit A_1 noch C mit C_1 zusammenfällt, so lässt die Aufgabe: ein Element P zu finden, so dass $(CDAP)\,(A_1B_1C_1P) = U$ ist, eine oder zwei Auflösungen zu, je nachdem die zu einander projektivischen Gebilde $ABC\ldots$, $A_1B_1C_1\ldots$ ein Element oder zwei Elemente entsprechend gemein haben.

276. Durch zwei Würfe U, V sind zwei Würfe $ABCP$, $ABCQ$

bestimmt, deren Summe dem erstern und deren Produkt dem letztern der gegebenen Würfe gleich ist.

Man suche in einer Curve II. Ordnung zu drei Punkten A, B, C die Punkte D, E, so dass $ABCD=U$ und $ABCE=V$ ist. Es werde ferner die Gerade, welche die Curve im Punkte C berührt, von der Geraden AD im Punkte F und die Gerade AC von der Geraden BE im Punkte G geschnitten. Wenn nun die Gerade FG die Curve in den Punkten P, Q schneidet, so ist in dem involutorischen Gebilde CC.AD... dem Punkte P der Punkt Q zugeordnet, folglich (258) $ABCP+ABCQ=U$. Da ferner die Punkte P, Q auch in dem involutorischen Gebilde AC.BE... einander zugeordnet sind, so ist (272) $(ABCP)(ABCQ)=V$. Und wenn $ABCP+ABCQ=ABCD$ und zugleich $(ABCP)(ABCQ)=ABCE$ sein soll, so müssen P, Q die Punkte sein, welche sowohl in dem involutorischen Gebilde CC.AD... als auch in dem involutorischen Gebilde AC.BE... einander zugeordnet sind. Wenn die Gerade FG die Curve in einem Punkte P berührt, also Q mit P zusammenfällt, so ist $ABCP=ABCQ$.

277. Wenn U, V, U_1, V_1 neutrale Würfe sind, J aber ein nicht neutraler Wurf und $U+VJ=U_1+V_1J$ ist, so ist $U=U_1$ und $V=V_1$.

Es sei $V=V_1+V_2=$, so ist (261) auch V_2 ein neutraler Wurf. Da nun $U+V_1J+V_2J=U_1+V_1J$ ist, so ist $U+V_2J=U_1$ und mithin auch V_2J ein neutraler Wurf. Da aber das Produkt MANC aus einem neutralen Wurfe MANB, welcher nicht$=0$ ist, in einen nicht neutralen Wurf MBNC ebenfalls ein nicht neutraler Wurf ist, so muss $V_2=0$, folglich $U=U_1$ und $V=V_1$ sein.

278. Durch einen nicht neutralen Wurf J und noch einen Wurf W sind zwei neutrale Würfe U, V bestimmt, so dass nämlich $W=U+VJ$ ist.

Ist W ein neutraler Wurf, so ist $U=W$ und $V=0$. Wenn aber dieser Fall nicht stattfindet, so nehme man in der einen von zwei reellen Geraden, welche in einem Punkte C sich schneiden, noch zwei reelle Punkte A, B, in der andern aber einen imaginären Punkt M an. Man suche ferner in der Ebene ABM die reellen Punkte P, Q, so dass der Wurf M (ABCP) dem Wurfe W und der Wurf M (ABCQ) dem Wurfe J gleich ist. Wenn nun die Gerade AQ von den Geraden CM, CP in den Punkten E, F und die Gerade AC von der Geraden EP im Punkte D geschnitten wird, und man die neutralen Würfe ABCD, AQEF durch U V bezeichnet, so ist $W = U + VJ$. Da nämlich (G. 222) in dem involutorischen Strahlenbüschel M (CC.AP...) dem Strahle MD der Strahl MF zugeordnet ist, so ist $M(ABCP) = M(ABCD) + M(ABCF) = U + M(ABCF)$ Der Wurf M (ABCF) aber ist das Produkt aus dem Wurfe J in den Wurf M (AQCF), welcher $= V$ ist. Geht die Gerade AQ durch dem Punkt P, so ist F mit P, folglich D mit A identisch und daher $U = 0$.

---

§. 21.

Potenzen von Würfen.

279. Ein Produkt aus m Würfen, deren jeder $= U$ ist, soll die mte Potenz dieses Wurfes heissen und durch U_m bezeichnet werden. Jede Potenz von 0 ist also $= 0$, jede Potenz von 1 ebenfalls $= 1$. Ist U ein neutraler Wurf, so ist auch U_m ein neutraler Wurf.

Gleichnamige Potenzen U^m, V^m von gleichen Würfen U, V sind einander gleich. Gleichnamige Potenzen von zwei einander conjungirten Würfen sind (269) einander conjungirt. Ist $U = U_1 U_2$, so ist $U_m = U_1{}^m U_2{}^m$. Ist also U_2 das Umgekehrte von U_1, so ist auch U_{2m} das Umgekehrte von $U_1{}^m$.

280. Wenn MN.AC.BB eine Involution ist, so ist $(MANB)^2 = (MANB)(MBNC) = (MBNC)^2 = MANC$. Ist MANB ein harmonischer Wurf, so ist $(MANB)^2 = 1$. Die mte Potenz eines harmonischen Wurfes ist also entweder $= 1$ oder selbst ein harmonischer Wurf, je nachdem nämlich m eine pare oder unpare Zahl ist.

Aus 264 geht hervor, dass das Produkt aus einem harmonischen Wurfe ABCD in einen beliebigen Wurf ABCP das entgegengesetzte von diesem Wurfe ist. Und wenn zwei Würfe U, V einander entgegengesetzt sind, so ist jeder das Produkt aus dem andern in einen harmonischen Wurf. Gleichnamige Potenzen U^m, V^m von zwei solchen Würfen sind also einander gleich oder ebenfalls einander entgegengesetzt, je nachdem der Exponent m eine pare oder unpare Zahl ist.

281. Wenn $MANA_1$ ein neutraler eigentlicher Wurf ist, jedoch die Elemente M, N durch die Elemente A, A_1 nicht getrennt sind, so ist keine Potenz des Wurfes $MANA_1$ einer andern Potenz desselben gleich und daher auch keine $=1$.

Sucht man nämlich in dem Elementargebilde, in welchem der Wurf $MANA_1$ enthalten ist, die Elemente A_2, A_3, A_4..., so dass Würfe $MANA_1$, MA_1NA_2, MA_2NA_3, MA_3NA_4..., sämmtlich einander gleich sind, so ist $MANA_2=(MANA_1)^2$, $MANA_3=(MANA_1)^3$, $(MANA_4)=(MANA_1)^4$, u. s. w. Da nun, wie man sich leicht überzeugt, die Elemente M, N, A, A_1, A_2, A_3, A_4,... in der Kette, welcher sie angehören, entweder die angeschriebene Ordnung oder die Ordnung N, M, A, A_1, A_2, A_3, A_4... befolgen, so fallen keine zwei derselben in einander, woraus der Satz folgt.

282. Wenn irgend eine Potenz U^m eines Wurfes U dem Wurfe 1 gleich ist, so ist der dem Wurf U conjungirte Wurf V zugleich das Umgekehrte von demselben.

Sind nämlich die Würfe U, V einander conjungirt, so ist das Produkt UV aus denselben einem neutralen Wurfe $MAND$ gleich. Wenn ferner $U^m=1$ ist, so ist (279) auch $V^m=1$ und folglich auch $(MAND)^m=1$. Diess ist aber, da (273) die Elemente M, N durch die Elemente A, D nicht getrennt sind, nach dem vorigen Satze nur möglich, wenn D mit A zusammenfällt und also $UV=1$ ist.

283. Durch jeden Wurf $MANC$, welcher nicht $=0$ ist, sind zwei einander entgegengesetzte Würfe $MANB$, $MANB_1$ bestimmt, so dass $(MANB)^2=(MANB_1)^2=MANC$ ist.

Soll nämlich $(MANP)^2=MANC$ sein, so muss (270) $MANP$ $=MPNC=NCMP$ und also in dem involutorischen Gebilde $MN.AC$... das Element P sich selbst zugeordnet sein. Und wenn B, B_1 die Ordnungselemente des erwähnten involutorischen Gebildes sind, so ist $(MANB)^2=(MANB_1)^2=MANC$. Auch ist jeder von den beiden Würfe $MANB$, $MANB_1$ das Produkt aus dem andern in den harmonischen Wurf $MBNB_1$, folglich dem andern entgegengesetzt.

Ist $MANC=1$, also C mit A identisch, so ist der eine von den beiden Würfen $MANB$, $MANB_1$ ebenfalls $=1$ und der andere ein harmonischer Wurf. Wenn überhaupt $MANC$ ein neutraler Wurf ist und die Elemente M, N durch die Elemente A, C nicht getrennt sind, so sind auch $MANB$, $MANB_1$ neutrale Würfe. In jedem andern Falle aber sind MANB, $MANB_1$ zwei nicht neutrale Würfe.

284. Wenn M, N, A, B, A_1, B_1 sechs Punkte einer und derselben Curve II. Ordnung sind und S den Schnittpunkt der Geraden AA_1, BB_1 bezeichnet, so ist der Wurf S (MANB) das Produkt aus den beiden in der Curve enthaltenen Würfen MANB, MA_1NB_1.

Es werde die Gerade MN von den Geraden AA_1, BB_1, A_1B in den Punkten A_2, B_2, C geschnitten, so ist $S(MANB)=MA_2NB_2 =(MA_2NC)(MCNB_2)$. Nun ist aber $MA_2NC=A_1(MANB)=MANB$ und $MCNB_2=B(MA_1NB_1)=MA_1NB_1$, woraus der Satz sich ergibt. Der Satz gilt übrigens auch noch, wenn A_1 mit A zusammenfällt und man unter AA_1 die der Curve im Punkte A sich anschmiegende Gerade versteht. Lässt man auch noch B_1 mit B zusammenfallen, so folgt:

Wenn eine Curve, welche durch die vier Punkte M, N, A, B geht, in den Punkten A, B die Geraden SA, SB berührt, so ist $S(MANB)=(MANB)^2$ und also auch $S(AMBN)=(AMBN)^2$. Eben so ist, wenn die durch die Punkte M, N gehenden Tangenten der Curve im Punkte S_1 sich schneiden, $S_1(MANB)=(MANB)^2$, daher auch $S(MANB)=S_1(MANB)$.

285. In jedem Elementargebilde sind durch drei Elemente A, C, E drei harmonische Würfe ABCE, CDEA, EFAC bestimmt. Nach G. 220 sind alsdann auch BCDF, DEFB, FABD harmonische Würfe, während AD.BE.CF eine Involution ist. Sind nun M, N die Ordnungselemente des involutorischen Gebildes AD.BE.CF..., so ist MNABCDEF $\barwedge$ MNBCDEFA.

Da nämlich in dem involutorischen Gebilde BB.EE.. dem Elemente M das Element N und dem Elemente A das Element C zugeordnet ist, so ist MNAB=NMCB=MNBC. Eben so wird bewiessen, dass MNBC=MNCD=MNDE=MNEF=MNFA ist, woraus der Satz folgt.— Wenn das Gebilde und die Elemente A, C, E, mithin auch die Elemente B, D, F reell sind, so sind M, N zwei einander conjungirte imaginäre Elemente, woraus hervorgeht, dass der Wurf MANB, welcher von dem Wurfe MBNA=NAMB das Umgekehrte ist, diesem zugleich conjungirt ist. Dasselbe gilt von den Würfen MANC, MCNA.

286. Durch drei Elemente A, C, E eines Elementargebildes sind zwei Elemente M, N desselben bestimmt, so dass nämlich MNACE⊼MNCEA ist.

Es seien wieder ABCE, CDEA, EFAC harmonische Würfe. Soll nun MNAC⊼MNCE⊼NMEC, mithin MN.AE.CC eine Involution sein, so müssen die Elemente M, N durch die Elemente C, F und eben so, da auch MNCE⊼MNEA sein soll, auch durch die Elemente E, B harmonisch getrennt sein. Und wenn M, N die Ordnungselemente des involutorischen Gebildes AD.BE.CF...sind, so ist MNAC=MNCE=MNEA und also MNACE⊼MNCEA.

287. Durch drei Elemente M, N, A eines Elementargebildes sind zwei Elemente C, E desselben bestimmt, so dass nämlich MNACE⊼MNCEA ist.

Man suche die Elemente D, C, E, so dass MAND ein harmonischer Wurf und (286) CEMND⊼CENDM ist. Da alsdann die Elemente A, D auch durch die Elemente C, E harmonisch getrennt sind, so ist (85) AD.MC.NE eine Involution, folglich MNAC=CEDM. Da ferner MNCE=CEMN ist, so ist MNACE⊼CEDMN⊼CEMND ⊼ MNCEA. Und wenn MNACE⊼MNCEA sein soll, so muss auch CEMND⊼CENDM sein, woraus hervorgeht, dass die Elemente C, E durch die gegebenen bestimmt sind.

Wenn das Gebilde eine Curve II. Ordnung ist und diese in den Punkten M, N die Geraden SM, SN berührt, so ist (248) S(MNAC)=MNAE=NMEA=NMAC und eben so S(MNAE)=NMAE, folglich S (MNACE)⊼NMACE⊼D(NMACE), woraus man schliessen kann, dass die Punkte C, E in der Geraden liegen, welche den Schnittpunkt von SM und DN mit dem Schnittpunkte von SN und DM verbindet, folglich von der Geraden MN durch die Punkte S, D harmonisch getrennt ist und durch den in der Geraden MN befindlichen Pol der Geraden SD geht. Wenn also die Curve und die Punkte M, N, A reell sind, so sind C, E zwei einander conjungirte imaginäre Punkte. Sind die Curve und der Punkt A reell, hingegen M, N zwei einander conjungirte imaginäre Punkte, so sind C, E reelle Punkte.

288. Wenn die Elemente M, N, A, C, E einem und demselben Elementargebilde angehören und MNACE⊼MNCEA ist, so ist $(MANC)^2$=(MANC) (MCNE)=MANE=MCNA, folglich

$(MANC)^3 = 1$ und eben so $(MCNA)^3 = 1$. Und wenn die dritte Potenz eines Wurfes W dem Wurfe 1 gleich ist, ohne dass W selbst $= 1$ ist, so ist der Wurf W einem von den beiden Würfen MANC, MCNA gleich. Es sei nämlich $W = MANP = MPNQ$, so ist $W^2 = MANQ$ Da nun W das Umgekehrte von W^2 ist, so ist auch $MANP = MQNA$, folglich $MNAPQ \barwedge MNPQA$, woraus man (287) schliessen kann, dass entweder P mit C und Q mit E oder P mit E und Q mit C zusammenfällt, also entweder $W = MANC$ oder $W = MANE = MCNA$ ist.

Sind die dritten Potenzen von zwei Würfen U, U_1 einander gleich, ohne dass $U = U_1$ ist, so ist der Wurf U entweder das Produkt aus dem Wurfe U_1 in den Wurf MANC oder das Produkt aus dem Wurfe U_1 in den Wurf MCNA. Ist nämlich $U = U_1 U_2$, so ist auch $U_1{}^3 U_2{}^3 = U_1{}^3$, mithin $U_2{}^3 = 1$, ohne dass $U_2 = 1$ ist, woraus der Satz folgt.

Bezeichnet B wieder das Element, welches vom Elemente E durch die Elemente M, N harmonisch getrennt ist, so ist MANB das Produkt aus $MCNA = MANE$ in den harmonischen Wurf MENB und eben so der Wurf MBNA dem Wurfe MANC entgegengesetzt, daher $(MANB)^3$, $(MBNA)^3$ harmonische Würfe sind. Und wenn die dritte Potenz eines Wurfes V ein harmonischer Wurf ist, so ist der Wurf V entweder selbst ein harmonischer Wurf oder einem von den beiden Würfen MANB, MBNA gleich.

289. Durch jeden neutralen Wurf U, welcher nicht $= 0$ ist, sind ein neutraler Wurf V und zwei einander conjungirte nicht neutrale Würfe V_1, V_2 bestimmt, so dass $V^3 = V_1{}^3 = V_2{}^3 = U$ ist.

Die Fälle, in welchen $U^2 = 1$ ist, sind bereits in der vorigen Nummer betrachtet worden. Wenn aber U weder $= 1$ noch ein harmonischer Wurf ist, so suche man in einer reellen Curve K II. Ordnung zu drei reellen Punkten M, A, N den Punkt D, so dass $MAND = U$ ist. Es sei ferner S der Schnittpunkt der der Curve in den Punkten M, N sich anschmiegenden Geraden, so erzeugen die zu einander projektivischen Strahlenbüschel S(MAN...), A(NDM...) eine andere reelle Curve II. Ordnung, welche die erstere im Punkte A und daher in noch einem reellen Punkte P schneidet. Da nun (284) $(MANP)^2 = S(MANP)$ $A(NDMP) = NDMP = MPND$ ist, so ist $(MANP)^3 = MAND = U$. Die

Curve K enthält ferner (287) zwei einander conjungirte imaginäre Punkte P_1, P_2, so dass $MNPP_1P_2 \barwedge MNP_1P_2P$ ist. Da alsdann $(MPNP_1)^3 = (MPNP_2)^3 = 1$ ist, so ist $(MANP_1)^3 = (MANP_2)^3 = (MANP)^3 = U$. Zugleich geht hieraus hervor, dass die beiden Curven auch in den Punkten P_1, P_2 sich schneiden.

290. Durch jeden nicht neutralen Wurf U, welcher von dem ihm conjungirten Wurfe das Umgekehrte ist, sind drei andere solche Würfe V, V_1, V_2 bestimmt, so dass $V^3 = V_1{}^3 = V_2{}^3 = U$ ist.

Man suche in einer reellen Curve K II. Ordnung zu zwei einander conjungirten imaginären Punkten M, N und einem reellen Punkte A den Punkt D, so dass $MAND = U$ ist. Da alsdann auch der Pol S der Geraden MN und (273) der Punkt D reelle Punkte sind, so erzeugen, wie aus 150 leicht hervorgeht, die zu einander projektivischen Strahlenbüschel S (MAN...), A (NDM...) eine andere reelle Curve II. Ordnung, welche die erstere im Punkte A und daher wenigstens in noch einem reellen Punkte P schneidet. Ferner enthält (287) die Curve K zwei reelle Punkte P_1, P_2, so dass $MNPP_1P_2 \barwedge MNP_1P_2P$ ist, und nun lässt sich wie in der vorigen Nummer beweisen, dass $(MANP_1)^3 = (MANP_2)^3 = (MANP)^3 = U$ ist. Die beiden Curven schneiden sich daher auch in den Punkten P_1, P_2.

291. Durch jeden Wurf U, welcher nicht $= 0$ ist, sind drei Würfe V, V_1, V_2 bestimmt, so dass $V^3 = V_1{}^3 = V_2{}^3 = U$ ist.

Man nehme in der einen von zwei reellen Geraden, welche in einem Punkte C sich schneiden, noch zwei reelle Punkte S, B, in der andern aber zwei einander conjungirte imaginäre Punkte M, N an und suche alsdann in der Ebene SMN den reellen Punkt D, so dass der Wurf M (SBCD) dem gegebenen Wurfe U gleich ist. Es sei ferner A irgend ein Schnittpunkt der Geraden SC und der reellen Curve, welche in den Punkten M, N die Geraden SM, SN berührt und durch den Punkt D geht, so giebt es (289) in der Geraden SC einen reellen Punkt R und (290) in der erwähnten Curve drei reelle Punkte P, P_1, P_2, so dass $(SRCA)^3 = SBCA$ und $(MANP)^3 = (MANP_1)^3 = (MANP_2)^3 = MAND$ ist. Bezeichnet man nun den Wurf M (SRCP), welcher das Produkt aus dem Wurfe $M(SRCA) = SRCA$ in den Wurf $M(SACP) = MANP$ ist, durch V, so ist $V^3 = (SRCA)^3\,(MANP)^3 = (SBCA)\,(MAND) =$

$M(SBCD) = U$. Eben so wird bewiesen, dass, wenn man die Würfe $M(SRCP_1)$, $M(SRCP_2)$ durch V_1, V_2 bezeichnet, $V^3_1 = V_2^3 = U$ ist.

---

§. 22.

Gemeinschaftliche Punkte und Tangenten zweier Curven II. Ordnung.

292. Wenn zwei in einerlei Ebene liegende Curven II. Ordnung in einem gemeinschaftlichen Punkte S eine und dieselbe Gerade berühren, so findet irgend einer von den in 187 betrachteten Fällen statt. Dass die Curven und der Punkt S reell sind, musste in der erwähnten Nummer nur desshalb vorausgesetzt werden, weil vorläufig nur, was reell-projektivisch heisse, erklärt und daher auch noch nicht nachgewiesen war, dass je zwei Elementargebilde projektivisch so auf einander bezogen werden können, dass drei gegebenen Elementen des einen drei gegebene Elemente des andern entsprechen. Haben zwei Curven II. Ordnung drei Punkte A, B, C mit einander gemein, ohne in einem dieser Punkte eine und dieselbe Gerade zu berühren, so schneiden sie sich noch in einem vierten Punkte, der (11) schon durch die drei Punkte A, B, C und die Gerade bestimmt ist, welche in Hinsicht auf beide Curven der Geraden AB conjugirt ist.

293. Wenn man die eine K von zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche in einerlei Ebene liegen und die Punkte A, B mit einander gemein haben, aus jedem dieser Punkte auf die andere projicirt, so hat man zwei zu einander projektivische Punktgebilde, welche beide in der Curve K_1 liegen. Dem Punkte P_1 des einen dieser Gebilde entspricht der Punkt P_2 des andern, wenn die Strahlen AP_1, BP_2 einen und denselben Punkt P der Curve K projiciren. Haben nun die zu einander projektivischen Gebilde zwei ausserhalb der Geraden AB liegende Punkte C, D entsprechend gemein, so schneiden sich die Curven K, K_1 in den vier Punkten A, B, C, D. Wenn aber der Punkt D mit einem der drei Punkte A, B, C zusammenfällt, so berühren sich die Curven in diesem Punkte, während sie in den beiden übrigen sich schneiden. Haben die zu einander projektivischen Gebilde die Punkte A, B entsprechend gemein, so berühren sich die Curven K, K_1 in diesen

Punkten. Wenn endlich die erwähnten Gebilde keinen ausserhalb der Geraden AB liegenden Punkt und auch nur den einen von den beiden Punkten A, B entsprechend gemein haben, so schmiegen in diesem Punkte die Curven K, K_1 dreipunktig einander sich an.

294. Wenn eine Curve II. Ordnung und ein Strahlenbüschel durch dessen Mittelpunkt S zwei Tangenten SM, SN der Curve gehen, projektivisch so auf einander bezogen sind, dass den Punkten M, N der Curve die Strahlen SN, SM des Büschels entsprechen, so liegen drei Punkte des erstern Gebildes in den ihnen entsprechenden Strahlen des letztern.

Es entspreche der Strahl SA des Büschels, welcher nämlich durch den Punkt A der Curve geht, dem Punkte D derselben, so sind (291) in der Curve durch die Punkte M, N, A, D drei Punkte P, P_1, P_2 bestimmt, so dass $(MANP)^3 = (MANP_1)^3 = (MANP_2)^3 = MAND$ ist. Da nun (284) $S\,(MANP) = (MANP)^2 = (MPNA)(MAND) = MPND = NDMP$ ist, so entspricht dem Punkte P der Curve der durch ihn gehende Strahl SP des Büschels. Eben so entsprechen den Punkten P_1, P_2 die Strahlen SP_1, SP_2.

Da hiernach $S\,(MNPP_1P_2) \barwedge M\,(NSPP_1P_2)$ ist, so folgt noch, dass die Curve II. Ordnung, welche durch die fünf Punkte M, S, P, P_1, P_2 geht, in den Punkten M, S die Geraden MN, SN, und eben so die Curve II. Ordnung, welche durch die fünf Punkte N, S, P, P_1, P_2 geht, in den Punkten N, S die Geraden NM, SM berührt.

295. Wenn die eine K von zwei Curven II. Ordnung in den Eckpunkten M, N des Dreiecks MNS die Seiten MS, NS und die andere K_1 in den Eckpunkten M, S die Seiten MN, SN berührt, so schneiden sich die Curven in vier Punkten.

Es sei D irgend ein ausserhalb der Geraden MN liegender Punkt der Curve K und D_1 derjenige Punkt der Curve K_1, welcher aus dem Punkte M durch die Gerade MD projicirt wird. Sucht man nun (294) in der Curve K die Punkte P, P_1, P_2, so dass $MNDPP_1P_2 \barwedge S\,(NMD_1PP_1P_2)$ ist, so ist auch $M\,(SNDPP_1P_2) \barwedge S\,(NMD_1PP_1P_2)$, woraus hervorgeht, dass die Punkte P, P_1, P_2 auch in der Curve K_1 liegen und dass also die Curven K, K_1 in den vier Punkten M, P, P_1, P_2 sich schneiden. Zu bemerken ist noch, dass es auch eine Curve II. Ordnung giebt, welche die Geraden NM, SM in den Punkten N, S berührt und überdiess durch die drei Punkte P, P_1, P_2 geht.

296. Wenn eine Curve II. Ordnung in den Punkten A, B, M, N die Geraden AF, BF, MS, NS berührt, so ist der in der Curve enthaltene Wurf $MNAB$ dem Wurfe $S(MNAF)$ gleich.

Da nämlich die Polare des Punktes, in welchem die Geraden MN, AB sich schneiden, durch den Schnittpunkt von MB und NA und durch die beiden Punkte S, F geht, mithin die Gerade NA von den Geraden SF, MB in einem und demselben Punkte geschnitten wird, so ist $S(MNAF) = M(SNAB) = MNAB$.

Schneidet eine Gerade, welche die Curve in einem fünften Punkte C berührt, die Tangenten AF, BF in den Punkten D, E, so ist auch $S(MNDE) = MNAB$, indem $S(MNCD) = MNCA$, $S(MNCE) = MNCB$ und mithin $S(MNCDE) \barwedge MNCAB$ ist. Dasselbe ergiebt sich, wenn man bemerkt, dass die Curve, der ihr sich anschmiegende Strahlenbüschel, dass in der Tangente CD enthaltene gerade Gebilde und der Strahlenbüschel S vier Gebilde sind, von welchen jedes folgende auf das vorhergehende perspektivisch bezogen werden kann, und dass alsdann den Punkten M, N, A, B, C der Curve die Strahlen SM, SN, SD, SE, SC des Büschels S entsprechen.

297. In jedem Elementargebilde sind durch drei Elemente A, B, C zwei Elemente P, Q bestimmt, so dass $ABPQ$, $CBQP$ harmonische Würfe sind.

Man suche in irgend einem Elementargebilde zu drei Elementen b, p, q die Elemente a, c, so dass $abpq$, $cbqp$ harmonische Würfe sind. Da nun $ABPQ = abpq$ und $CBQP = cbqp$ sein soll, so muss auch $ABCPQ \barwedge abcpq$ sein. Und wenn man in dem gegebenen Gebilde die Elemente P, Q sucht, so dass $ABCPQ \barwedge abcpq$ ist, so sind $ABPQ$, $CBQP$ harmonische Würfe.

298. Durch eine Curve K II. Ordnung, zwei in ihr liegende Punkte A, B und einen Punkt G, welcher in der durch den Punkt B gehenden Tangente liegt, aber weder mit dem Punkte B noch mit dem Pole F der Geraden AB zusammenfällt, sind zwei Punkte P, Q der Curve bestimmt, so dass $ABPQ$ ein harmonischer Wurf ist und die Gerade PQ durch den Punkt G geht.

Die Gerade AG schneidet nämlich die Curve K im Punkte A

und in noch einem Punkte C. Soll nun die Gerade PQ durch den Punkt G gehen, so muss BB.AC.PQ eine Involution und also CBQP=ABPQ sein. Und wenn man (297) in der Curve die Punkte P, Q sucht, so dass ABPQ, CBQP harmonische Würfe sind, so ist BB.AC.PQ eine Involution, daher die Gerade PQ durch Punkt G geht.

Die Curve K wird von den Geraden FP, FQ in den Punkten P, Q und in noch zwei Punkten P_1, Q_1 geschnitten, so dass auch $APBP_1$, $AQBQ_1$, ABP_1Q_1 harmonische Würfe sind. Da hiernach $ABQP = P_1ABP$, $ABQQ_1 = P_1ABQ_1$ und $BQPC = ABPQ$, demnach $ABQPQ_1C \barwedge P_1ABPQ_1Q$ ist, so folgt noch, dass diejenige Curve II. Ordnung, welche durch den Schnittpunkt von AQ und BP und durch die vier Punkte A, P, Q_1, G geht, mithin von den zu einander projektivischen Strahlenbüscheln $A(QQ_1C\ldots)$, $P(BQ_1Q\ldots)$ erzeugt wird, im Punkte A die Gerade AB, im Punkte P aber die Curve K berührt und die Gerade BF auch noch im Punkte F schneidet.

299. Wenn die eine K von zwei Curven II. Ordnung in den Punkten A, B die Geraden FA, FB berührt, die andere K_1 aber im Punkte A die Gerade AB berührt und die Gerade FB im Punkte F und in noch einem Punkte G schneidet, so haben die beiden Curven wenigstens drei Punkte mit einander gemein.

Man suche (298) in der Curve K die Punkte P, Q, so dass ABPQ ein harmonischer Wurf ist und die Gerade PQ durch den Punkt G geht. Wenn nun die Curven K, K_1 den Punkt P mit einander gemein haben, so berühren sie sich in diesem Punkte, während sie im Punkte A und in einem Punkte Q_1, welcher aus dem Punkte Q durch die Gerade QF projicirt wird, sich schneiden. Wenn aber die Curve K_1 die Gerade AP in einem Punkte S schneidet, durch welchen zwei Tangenten SM, SN der Curve K gehen, so bemerke man, dass in dieser die Punkte A, P sowohl durch die Punkte B, Q als auch durch die Punkte M, N harmonisch getrennt sind, folglich MNAB=NMAQ ist. Da ferner (296) S(MNAF)=MNAB=NMBA, S(MNFB)=MNAB=NMAQ, mithin $S(MNAFB) \barwedge NMBAQ$ ist, so giebt es (294) in der Curve K drei Punkte R, R_1, R_2, so dass $S(AFBRR_1R_2) \barwedge BAQRR_1R_2 \barwedge A(BFQRR_1R_2)$ ist. Da endlich jeder Involution BB.AC.PQ in der Curve K, wenn man dieselbe aus dem Punkte A auf die Curve K_1 projicirt, eine Involution AA.FG.ST in der Curve K_1 entspricht, mithin die Geraden AQ, BS in einem Punkte T der Curve K_1 sich schneiden, so folgt, dass diese Curve von den zu einander projektivischen Strahlenbüscheln S(AFB...), A (BFQ...) erzeugt wird und also die Curve K auch noch in den Punkten R, R_1, R_2 schneidet.

300. Wenn die eine K von zwei Curven II. Ordnung durch die Punkte A, A_1 geht und im Punkte A_1 die Gerade A_1A_2 berührt, die andere K_1 hingegen durch die Punkte A_1, A_2 geht und im Punkte A_1 die Gerade AA_1 berührt, so haben die Curven wenigstens noch einen Punkt mit einander gemein.

Da die Fälle, in welchen die Gerade AA_2 die Curven K, K_1 oder doch eine derselben berührt, bereits betrachtet worden sind, so kann man annehmen, dass es in der Curve K_1 einen harmonischen Wurf $A_2B_1D_1A_1$ giebt, so dass die Gerade B_1D_1 durch den Punkt A geht. Es seien ferner B, D diejenigen Punkte der Curve K, welche aus dem Punkte A_1 durch die Geraden A_1B_1, A_1D_1 projicirt werden, so ist A_1BDA ein harmonischer Wurf in der Curve K, daher der Punkt F, welcher in Hinsicht auf dieselbe der Pol der Geraden AB ist, in der Geraden A_1D_1 liegt. Bezieht man nun die Strahlenbüschel A, A_1, D_1 projektivisch so auf einander, dass der erste und zweite die Curve K, der zweite und dritte die Curve K_1 erzeugen, so erzeugen der erste und dritte ein zu ihnen perspektivisches Punktgebilde K_2, welches durch den Punkt F und durch den Schnittpunkt F_1 der Geraden AA_1, D_1A_2 geht, der in Hinsicht auf die Curve K_1 der Pol der Geraden A_1B_1 ist. Ist K_2 eine Curve II. Ordnung, so hat diese, da sie im Punkte A die Gerade AB berührt, nach den vorigen Sätzen mit der Curve K wenigstens zwei von A verschiedene Punkt gemein. Durch jeden solchen Punkt geht aber, da in ihm drei homologe Strahlen der erwähnten Büschel sich schneiden, auch die Curve K_1. Ist B mit B_1 identisch und also K_2 eine Gerade, so schneidet diese entweder die Curven K, K_1 in denselben zwei Punkten oder sie berührt beide in dem Punkte B, in welchem alsdann die Curven dreipunktig einander sich anschmiegen.

301. Zwei zu einander collineäre ebene Systeme, welche in

einerlei Ebene aber nicht perspektivisch liegen, haben entweder die drei Eckpunkte und Seiten eines Dreiecks oder nur zwei Punkte und zwei Gerade oder nur einen Punkt und eine Gerade entsprechend gemein.

Es entspreche dem Punkte A des einen Systems der Punkt A_1 des andern und dem Punkte A_1 des erstern der Punkt A_2 des letztern. Wenn nun, was man annehmen kann, die Punkte A, A_1, A_2 nicht in einer und derselben Geraden liegen, so erzeugen die zu einander projektivischen Strahlenbüschel A, A_1 eine Curve K II. Ordnung und die zu einander projektivischen Strahlenbüschel A_1, A_2 die der erstern entsprechende Curve K_1. Bemerkt man noch, dass je zwei homologe Punkte der Curven K, K_1 aus dem Punkte A_1 durch eine und dieselbe Gerade projicirt werden, mithin die zu einander collineären Systeme jeden von A_1 verschiedenen gemeinschaftlichen Punkt der beiden Curven und jede nicht durch den Punkt A_1 gehende Gerade, welche beide Curven in denselben zwei Punkten schneidet, oder in einem und demselben Punkte berührt, ausserdem aber kein Element entsprechend gemein haben, so folgt, dass der erste, zweite oder dritte der im Satze erwähnten Fälle statt findet, je nachdem die Curven K, K_1, von welchen die eine im Punkte A_1 die Gerade A_1A_2, die andere aber in demselben Punkte die Gerade AA_1 berührt, in noch drei Punkten sich schneiden, oder in einem Punkte sich berühren und daher nur noch einen von A_1 verschiedenen Punkt mit einander gemein haben, oder in einem Punkte dreipunktig einander sich anschmiegen.

302. Wenn zwei zu einander collineäre ebene Systeme die Eckpunkte und also auch die Seiten des Dreiecks EFG entsprechend gemein haben und den Elementen P, P_1 des einen Systems die Elemente P_1, P_2 des andern entsprechen, so ist in jedem Polarsysteme, in welchem EFG ein Polardreieck und dem Elemente P das Element P_2 conjugirt ist, das Element P_1 sich selbst conjugirt.

Es sei in einem Polarsysteme, in welchem den Eckpunkten E, F, G des Dreiecks EFG die ihnen gegenüberliegenden Seiten e, f, g zugeordnet sind, dem Elemente P das Element p und dem Elemente P_1 das Element p_1 zugeordnet, so ist $efgpp_1 \barwedge EFGPP_1 \barwedge EFGP_1P_2$. Da es hiernach auch ein Polarsystem giebt, in welchem EFG ein Polardreieck ist und den Elementen p, p_1 die Elemente P_1, P_2 zugeordnet sind, so folgt, dass, wenn P_2 in p liegt oder durch p geht, auch P_1 in p_1 liegt oder durch p_1 geht.

303. Wenn zwei Polarsysteme ein Polardreieck EFG aber auch nur dieses Polardreieck mit einander gemein haben, so haben die Ordnungscurven K, K_1 der Polarsysteme vier Punkte mit einander gemein und eben so vier gemeinschaftliche Tangenten.

Es sei dem Punkte P, welcher in keiner Seite des Dreiecks EFG liegt, in dem einen Polarsysteme die Gerade p und im andern die Gerade p_1 zugeordnet, so ist der Schnittpunkt Q dieser Geraden in beiden Systemen dem Punkte P conjugirt. Sind nun A, B C, D die Punkte, in welchen die Ordnungsstrahlen des involutorischen Strahlenbüschels E(FG.PQ...) von den Ordnungsstrahlen des involutorischen Strahlenbüschels F(EG.PQ...) geschnitten werden, so ist E (FGPA)$=$E (GFQA)$=$E (FGAQ) und F (EGPA)$=$ F (EGAQ), mithin EFGPA$\barwedge$EFGAQ. Da hiernach (302) in beiden Polarsystemen der Punkt A und eben so jeder der Punkte B, C, D sich selbst conjugirt ist, so schneiden sich die Curven K, K_1, in den vier Eckpunkten des vollständigen Vierecks ABCD, von welchem auch die Ordnungsstrahlen des involutorischen Strahlenbüschels G (EF.PQ...) zwei einander gegenüberliegende Seiten sind. Eben so lässt sich beweisen, dass die Curven K, K_1 die vier Seiten eines vollständigen Vierseits, von dessen Eckpunkten je zwei einander gegenüberliegende durch zwei Eckpunkte des Dreiecks EFG harmonisch getrennt sind, zu gemeinschaftlichen Tangenten haben.

Wenn zwei Polarsysteme des Polardreiecks EFG mit einander gemein haben und in beiden Systemen einem Punkte P, welcher in keiner der Geraden EF, EG liegt, ein in der Geraden FG befindlicher Punkt Q conjugirt, mithin diesem Punkte die Gerade EP zugeordnet ist, so ist jedes Polardreieck des einen Systems, von welchem E ein Eckpunkt und also FG eine Seite ist, zugleich ein Polardreieck des andern. In diesem Falle berühren sich die Ordnungscurven der Polarsysteme in den beiden Punkten M, N der Geraden FG, welche in ihren Polaren EM, EN liegen und durch jeden dritten Punkt der Geraden FG und dessen Polare harmonisch getrennt sind.

304. Wenn die Ordnungscurven von zwei in einerlei Ebene

liegenden Polarsystemen in einem gemeinschaftlichen Punkte M eine und dieselbe Gerade m berühren und auch einem ausserhalb dieser Geraden liegenden Punkte P in beiden Systemen eine und dieselbe Gerade SP_1 zugeordnet ist, welche nämlich die Geraden m, MP in den Punkten S, P_1 schneidet, so berühren die Curven auch in dem andern Ordnungspunkte N des involutorischen geraden Gebildes $MM.PP_1$... eine und dieselbe Gerade NS, daher die Curven selbst in den beiden Punkten M, N sich berühren. Haben also zwei Curven II. Ordnung, welche in einem gemeinschaftlichen Punkte eine und dieselbe Gerade berühren, nicht noch eine gemeinschaftliche Tangente, welche beiden Curven in einem und demselben Punkte sich anschmiegt, so ist keinem ausserhalb jener Geraden liegenden Punkte in Hinsicht auf beide Curven eine und dieselbe Gerade zugeordnet.

305. Da die in 189 enthaltenen Schlüsse nun auch für imaginäre Polarsysteme gelten, so findet, wenn zwei Curven II. Ordnung in einerlei Ebene liegen, einer von folgenden fünf Fällen statt:

a) Die den Curven zu Grunde liegenden Polarsysteme haben ein aber auch nur ein Polardreieck mit einander gemein, daher die Curven in vier Punkten sich schneiden und vier gemeinschaftliche Tangenten haben.

b) Die Polarsysteme haben unendlich viele Polardreiecke mit einander gemein, daher die Curven in zwei Punkten M, N sich berühren. Die Gerade MN ist eine Seite, ihr Pol aber, in welchem die gemeinschaftlichen Tangenten der Curven sich schneiden, ein Eckpunkt von jedem der erwähnten Dreiecke.

c) Die Curven berühren in einem gemeinschaftlichen Punkte A eine und dieselbe Gerade a, haben aber noch zwei Punkte B, C mit einander gemein und noch zwei gemeinschaftliche Tangenten f, g. Es ist diess (187) der Fall, wenn es zwei aber auch nur zwei Punkte A, P gibt, welchen in beiden Polarsystemen dieselben Geraden a, p zugeordnet sind. Schneiden sich nun die Curven in dem Punkte B, so schneiden sie sich auch in dem Punkte, welcher vom erstern durch den Punkt P und die Gerade p harmonisch getrennt ist, woraus man schliessen kann, dass die Schnittpunkte B, C und eben so die gemeinschaftlichen Tangenten f, g durch den Punkt P, welcher in der Geraden a liegt, und seine Polare p, welche durch den Punkt A geht, harmonisch getrennt sind.

d) Die Curven schmiegen in einem Punkte A, in welchem sie eine und dieselbe Gerade a berühren, dreipunktig einander sich an und haben daher nur noch einen Punkt mit einander gemein und nur noch eine gemeinschaftliche Tangente. In diesem Falle ist keinem von A verschiedenen Punkte in beiden Polarsystemen eine und dieselbe Gerade zugeordnet.

e) Die Curven schmiegen in einem Punkte A, in welchem sie eine und dieselbe Gerade a berühren, vierpunktig einander sich an und haben daher nur den Punkt A mit einander gemein und nur eine gemeinschaftliche Tangente. Jedem Punkte dieser Geraden ist in beiden Polarsystemen ein und derselbe Strahl des Büschels A zugeordnet.

306. Wenn zwei von drei Curven K, K_1, K_2 II. Ordnung der dritten in einem und demselben Punkte S wenigstens dreipunktig sich anschmiegen, so schmiegen sie sich auch selbst wenigstens dreipunktig an einander. Schmiegen zwei der dritten vierpunktig sich an, so schmiegen sie sich auch selbst vierpunktig an einander.

Die durch den Punkt S gehende gemeinschaftliche Tangente der drei Curven ist der Träger von drei zu einander projektivischen geraden Gebilden s, s_1, s_2, von welchen das erste in Hinsicht auf die Curve K, das zweite in Hinsicht auf die Curve K_1 und das dritte in Hinsicht auf die Curve K_2 dem Strahlenbüschel S zugeordnet ist. Wenn nun die Curven K_1, K_2 der Curve K dreipunktig sich anschmiegen, also weder die Gebilde s, s_1 noch die Gebilde s, s_2 einen von S verschiedenen Punkt entsprechend gemein haben, so haben (223) die Gebilde s_1, s_2, entweder auch nur den Punkt S oder alle ihre Punkte entsprechend gemein, daher auch die Curven K_1, K_2 wenigstens dreipunktig einander sich anschmiegen. Schmiegt der Curve K die Curve K_1 vierpunktig, die Curve K_2 aber dreipunktig sich an, so haben die Gebilde s, s_1 alle ihre Punkte, die Gebilde s, s_2 aber und also auch die Gebilde s_1, s_2 nur den Punkt S entsprechend gemein, daher in diesem Falle die Curven K_1, K_2 dreipunktig einander sich anschmiegen. Wenn endlich die Curve K die Curven K_1, K_2 vierpunktig sich anschmiegen, also jedem Strahle des Büschels S in Hinsicht auf alle drei Curven ein und derselbe Punkt zugeordnet ist, so schmiegen auch die Curven K_1, K_2 vierpunktig einander sich an.

307. Zwei in einerlei Ebene liegende Curven II. Ordnung können entweder auf zwölf oder auf sieben oder auf vier oder auf drei verschiedene Arten oder nur auf eine Art projektivisch so auf einander bezogen werden, dass sie homologe Gebilde von zwei zu einander collineären und überdiess perspektivisch liegenden ebenen Systemen sind, je nachdem nämlich die Curven in vier Punkten sich schneiden, oder in zwei Punkten sich schneiden und in einem dritten sich berühren, oder in zwei Punkten sich berühren, oder in einem Punkte dreipunktig einander sich anschmiegen und also in noch einem Punkte sich schneiden, oder in einem Punkte vierpunktig einander sich anschmiegen.

Schneidet nämlich eine Gerade beide Curven in denselben zwei Punkten A, B, so gehen durch jeden dritten Punkt F dieser Geraden zwei Tangenten FC, FD der einen Curve und zwei Tangenten FC_1, FD_1 der andern Curve. Bezieht man nun die Curven projektivisch so auf einander, dass dem harmonischen Wurfe ACBD in der einen der harmonische Wurf AC_1BD_1 in der andern entspricht, so sind sie homologe Gebilde von zwei zu einander projektivischen ebenen Systemen, welche die Punkte A, B, F, demnach alle Punkte der Geraden AB entsprechend gemein haben und mithin perspektivisch liegen. Dasselbe ist aber auch der Fall, wenn die Curven projektivisch so auf einander bezogen werden, dass dem Wurfe ACBD in der einen der Wurf AD_1BC_1 in der andern entspricht.

308. Durch zwei in einerlei Ebene liegende Curven K, K_1 II. Ordnung, welche eine Gerade in denselben zwei Punkten A, B schneiden, aber nicht in jedem dieser Punkte sich berühren, sind zwei durch die Pole der Geraden AB harmonisch getrennte Punkte S, T bestimmt, so dass entweder in jedem dieser Punkte zwei gemeinschaftliche Tangenten der Curven sich schneiden, oder in dem einen von den beiden Punkten S, T beide Curven eine und dieselbe Gerade berühren, während durch den andern zwei gemeinschaftlichen Tangenten derselben gehen.

Es sei der Geraden AB in Hinsicht auf die Curve K der Punkt P und in Hinsicht auf die Curve K_1 der Punkt P_1 zugeordnet. Es sei ferner Q irgend ein Punkt, welcher in der Geraden AB aber in keiner der Geraden PA, PB, PP_1 liegt. Wenn nun die Curve K und die Gerade PQ in den Punkten C, D, die Curve K_1 und die Gerade P_1 Q in den Punkten C_1, D_1, die Geraden $CC_1.DD_1$ im Punkte S und die Geraden CD_1, C_1D im Punkte T sich schneiden, so sind S, T die im Satze erwähnten Punkte. Bezieht man nämlich die Curven K, K_1 projektivisch so auf einander, dass dem Wurfe ACBD in der einen der Wurf AC_1BD_1 in der andern entspricht, so sind sie homologe Gebilde von zwei zu einander collineären ebenen Systemen, welche die Punkte A, B, Q folglich alle Punkte der Geraden AB und mithin auch alle Strahlen des Strahlenbüschels S, dem auch die Gerade PP_1 angehört, entsprechend gemein haben, daher jede durch den Punkt S gehende Gerade, welche die eine von den beiden Curven berührt, auch die andere berührt. Eben so lässt sich beweisen, dass auch der Punkt T in der Geraden PP_1 liegt und jede durch ihn gehende Tangente der einen Curve eine gemeinschaftliche Tangente von beiden ist. Da aber die Curven höchstens in einem Punkte sich berühren, so müssen entweder in jedem der Punkte S, T zwei gemeinschaftliche Tangenten derselben sich schneiden, oder durch den einen zwei gemeinschaftliche Tangenten der Curven gehen, während im andern beide Curven einer und derselben Geraden sich anschmiegen. Dass die Punkte S, T durch die Punkte P, P_1 harmonisch getrennt, geht aus der Betrachtung des vollständigen Vierecks CDC_1D_1 hervor.

Geht die Gerade PP_1 durch keinen von den Punkten A, B, so schneidet sie die Curve K in zwei Punkten M, N, die Curve K_1 in zwei Punkten M_1, N_1 und die Gerade AB in einem Punkte U, so dass (85) $SU.MN_1.M_1N$, $TU.MM_1.NN_1$ Involutionen sind. Haben die Curven K, K_1 vier Punkte A, B, C_2, D_2 mit einander gemein, so schneiden sich (303) die Geraden AB, C_2D_2 im Pole E der Geraden PP_1 und die Geraden PP_1, C_2D_2 in dem Punkte, welcher in dem involutorischen Gebilde $MN.M_1N_1\ldots$, dessen Ordnungspunkte F, G in Hinsicht auf beide Curven einander conjugirt sind, dem Punkte U zugeordnet ist. Ferner sind alsdann die Punkte S, T auch durch die Pole der Geraden C_2D_2 harmonisch getrennt.

Wenn die Curven K, K_1 im Punkte A dreipunktig einander sich anschmiegen, so fällt der eine von den Punkten S, T mit dem Punkte A zusammen, während im andern die beiden gemeinschaftlichen Tangenten der Curven sich schneiden. Wenn hingegen die Curven K, K_1 zwar im Punkte A eine und dieselbe Gerade berühren, aber noch zwei Punkte, B, C_2 und daher auch noch zwei Tangenten mit einander gemein haben, so schneiden diese jene Gerade in den Punkten S, T.

309. Wenn drei in einerlei Ebene liegende Curven II. Ordnung K, K_1, K_2 eine Gerade in denselben zwei Punkten A, B schneiden und dieser Geraden in Hinsicht auf die Curve K der Punkt P, in Hinsicht auf die Curve K_1 ein anderer Punkt P_1 und in Hinsicht auf die Curve K_2 ein dritter Punkt P_2 zugeordnet ist, so sind die Punkte P, P_1 durch zwei Punkte S_2, T_2, die Punkte P, P_2 durch zwei Punkte S_1, T_1 und die Punkte P_1, P_2 durch zwei Punkte S, T harmonisch getrennt, so dass in jedem der Punkte S_2, T_2, S_1, T_1, S, T, wenn in ihm nicht zwei der Curven eine und dieselbe Gerade berühren, zwei gemeinschaftliche Tangenten von zweien der drei Curven sich schneiden. Liegen die Punkte P, P_1, P_2 nicht in einer und derselben Geraden, so sind die Punkte S_2, T_2, S_1, T_1, S, T die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits. Wenn aber die Punkte P, P_1 P_2 in einer und derselben Geraden liegen, so ist entweder $S_2T_2.S_1T_1.ST$ eine Involution oder es fallen drei der Punkte S_2, T_2, S_1, T_1, S, T in einem zusammen, in welchem alsdann entweder die drei Curven eine und dieselbe Gerade berühren oder zwei gemeinschaftliche Tangenten der drei Curven sich schneiden.

Es sei Q irgend ein Punkt, welcher in der Geraden AB aber in keiner von den Geraden PP_1, PP_2, P_1P_2, PA, PB liegt. Wenn nun die Gerade QP die Curve K in den Punkten C, D, die Gerade QP_1 die Curve K_1 in den Punkten C_1, D_1 und die Gerade QP_2 die Curve K_2 in den Punkten C_2, D_2 schneidet, so sind (308) S_2, T_2, S_1, T_1, S, T die Punkte, in welchen die Geraden CC_1, CD_1, CC_2, CD_2, C_1C_2, C_1D_2 beziehlich von den Geraden DD_1, DC_1, DD_2, DC_2, D_1D_2, D_1C_2 geschnitten werden. Liegen die drei Punkte P, P_1, P_2 nicht in einer und derselben Geraden, so liegen doch (G. 90) die Punkte S, S_1, S_2 in einer und derselben Geraden. Dasselbe gilt von den drei Punkten S, T_1, T_2, dann von den drei Punkten S_1, T, T_2 und von den drei Punkten S_2, T, T_1. Wenn aber die Punkte P, P_1, P_2 in einer und derselben Geraden liegen, so liegen die Punkte C, D, C_1, D_1, C_2, D_2, da je zwei derselben, welche aus dem Punkte Q durch eine und dieselbe Gerade projicirt werden, durch den Punkt Q und die Gerade PP_1 harmonisch getrennt sind, entweder in zwei Geraden oder in einer Curve II. Ordnung, in Hinsicht auf welche dem Punkte S der Punkt T, dem Punkte S_1 der Punkt T_1 und dem Punkte S_2 der Punkt T_2 conjugirt ist. Im erstern von diesen beiden Fällen fallen drei von den sechs Punkten S, T, S_1, T_1, S_2, T_2 in einander, letztern aber ist $ST.S_1T_1.S_2T_2$ eine Involution.

Liegen von drei Curven II. Ordnung, welche eine Gerade in denselben zwei Punkten schneiden, keine zwei in einerlei Ebene und auch nicht alle drei in einer und derselben Kegelfläche II. Ordnung, so gibt es sechs Kegelflächen II. Ordnung, deren jede durch zwei der drei Curven geht. Die Mittelpunkte dieser sechs Kegelflächen sind entweder die sechs Eckpunkte eines vollständigen Vierseits oder sechs Punkte einer Involution.

---

§. 23.

Linien und Strahlenbüschel II. Ordnung.

310. In diesem und den nächstfolgenden §§. ist nur von Elementen und Gebilden die Rede, welche alle in einer und derselben Ebene liegen, daher solches bei den einzelnen Sätzen in der Regel nicht besonders bemerkt wird.

In Hinsicht auf eine Linie II. Ordnung, welche der Inbegriff von zwei Geraden a, b ist sollen ein Punkt P und eine Gerade p einander zugeordnet heissen, wenn sie entweder durch die Geraden a, b harmonisch getrennt sind, oder wenn der Punkt P in der Geraden p liegt

In Hinsicht auf einen Strahlenbüschel II. Ordnung, welcher der Inbegriff von zwei Strahlenbüscheln M, N I. Ordnung ist, sollen eine Gerade p und ein Punkt P einander zugeordnet heissen, wenn sie entweder durch die Punkte M, N harmonisch getrennt sind, oder wenn die und diese mit einer der Geraden a, b zusammenfällt, oder wenn im Punkte P die Geraden a, b sich schneiden und p eine beliebige Gerade der Ebene ist. Wenn also zwei Seiten eines Dreiecks durch die Geraden a, b harmonisch getrennt sind, so sind je zwei einander gegenüberliegende Elemente des Dreiecks in Hinsicht auf die Linie a+b einander zugeordnet.

Zwei Punkte P, Q sind in Hinsicht auf die Linie a+b einander conjugirt, wenn sie entweder durch die Geraden a, b harmonisch getrennt sind, oder wenn beide in der Geraden a oder beide in der Geraden b liegen, oder wenn der eine mit dem Punkte ab zusammenfällt und der andere ein beliebiger Punkt der Ebene ist.

311. Wenn man jeden Punkt einer Geraden a doppelt sich denkt, so hat man auch eine Linie II. Ordnung. In Hinsicht auf eine solche Linie sollen ein Punkt P und eine Gerade p einander zugeordnet heissen, wenn entweder der Punkt P in der Geraden a liegt oder p mit a zusammenfällt oder beides zugleich der Fall ist. Liegen also zwei Eckpunkte eines Dreiecks

Gerade p durch den Punkt P geht und dieser mit einem der Punkte M, N zusammenfällt, oder wenn die Gerade p durch die beiden Punkte M, N geht und P ein beliebiger Punkt der Ebene ist. Wenn also zwei Eckpunkte eines Dreiecks durch die Punkte M, N harmonisch getrennt sind, so sind je zwei einander gegenüberliegende Elemente des Dreiecks in Hinsicht auf den Büschel M+N einander zugeordnet.

Zwei Gerade p, q sind in Hinsicht auf den Büschel MN einander conjugirt, wenn sie entweder durch die Punkte M, N harmonisch getrennt sind, oder im Punkte M oder im Punkte N sich schneiden, oder wenn die eine durch die beiden Punkte M, N geht und die andere eine beliebige Gerade der Ebene ist.

Wenn man jeden Strahl eines Strahlenbüschels M I. Ordnung doppelt sich denkt, so hat man auch einen Büschel II. Ordnung. In Hinsicht auf einen solchen Büschel sollen eine Gerade p und ein Punkt P einander zugeordnet heissen, wenn entweder die Gerade p durch den Punkt M geht oder P mit M zusammenfällt oder beides zugleich der Fall ist. Schneiden in der Geraden a, so sind je zwei einander gegenüberliegende Elemente des Dreiecks in Hinsicht auf die Linie a einander zugeordnet. Zwei Punkte sind in Hinsicht auf die Linie a einander conjugirt, wenn der eine oder jeder in der Geraden a liegt.

sich also zwei Seiten eines Dreiecks im Punkte M, so sind je zwei einander gegenüberliegende Elemente des Dreiecks in Hinsicht auf den Büschel M einander zugeordnet. Zwei Gerade sind in Hinsicht auf den Büschel M einander conjugirt, wenn die eine oder jede durch den Punkt M geht.

In Hinsicht auf eine Linie K II. Ordnung sind nach dem Bisherigen zwei Punkte P, Q einander conjugirt, wenn entweder alle Punkte der Geraden PQ der Linie K angehören, oder wenn die Linie K und die Gerade PQ nur den Punkt P oder nur den Punkt Q mit einander gemein haben oder in zwei Punkten sich schneiden, welche durch die Punkte P, Q harmonisch getrennt sind.

312. Durch ein Dreieck EFG, einen Punkt P, welcher in keiner Seite des Dreiecks liegt, und eine Gerade p ist eine Linie K II. Ordnung bestimmt, in Hinsicht auf welche jedem Eckpunkte des Dreiecks die ihm gegenüberliegende Seite desselben und dem Punkte P die Gerade p zugeordnet ist.

Durch ein Dreieck EFG, eine Gerade q, welche durch keinen Eckpunkt des Dreiecks geht, und einen Punkt Q ist ein Strahlenbüschel II. Ordnung bestimmt, in Hinsicht auf welchen jeder Seite des Dreiecks der ihr gegenüberliegende Eckpunkt desselben und der Geraden q der Punkt Q zugeordnet ist

Geht die Gerade p durch keinen Eckpunkt des Dreiecks EFG, so ist K eine Curve II. Ordnung. Schneidet die Gerade p zwei Seiten EF, EG des Dreiecks in einem und demselben Punkte, so besteht die Linie K aus den beiden Ordnungsstrahlen desjenigen involutorischen Strahlenbüschels E, in welchem dem Strahle EF der Strahl EG und dem Strahle EP der Strahl p zugeordnet ist. Wenn endlich die Gerade p mit einer Seite des Dreiecks EFG zusammenfällt, so fällt in diese Seite auch die Linie K.

313. Ist in Hinsicht auf eine Linie K II. Ordnung dem Punkte P eine durch ihn gehende Gerade p zugeordnet, so ist die Linie K entweder eine Curve II. Ordnung, welche im Punkte P die Gerade

p berührt, oder eine durch den Punkt P gehende Gerade oder der Inbegriff von zwei im Punkte P sich schneidenden Geraden, oder sie besteht aus der Geraden p und einer nicht durch den Punkt P gehenden Geraden.

Ist in Hinsicht auf eine Linie K II. Ordnung der Geraden p ein ausserhalb derselben liegender Punkt P zugeordnet, so ist K entweder eine Curve II. Ordnung, welche die Gerade p in zwei Punkten M, N schneidet und in diesen Punkten die Geraden PM, PN berührt, oder der Inbegriff von zwei im Punkte P sich schneidenden Geraden oder der Inbegriff von zwei Geraden, welche durch den Punkt P und die Gerade p harmonisch getrennt sind, oder eine durch den Punkt P gehende Gerade oder die Gerade p. Geht die Linie K durch den einen von zwei Punkten, welche durch den Punkt P und die Gerade p harmonisch getrennt sind, so geht sie auch durch den andern.

314. Durch ein Dreieck ABC, eine Gerade p und einen Punkt P, welcher weder ein in der Geraden p liegender Eckpunkt des Dreiecks noch von einem Punkte der Geraden p durch zwei Eckpunkte des Dreiecks harmonisch getrennt ist, ist eine durch die drei Eckpunkte des Dreiecks gehende Linie K II. Ordnung bestimmt, in Hinsicht auf welche der Geraden p der Punkt P zugeordnet ist.

Wenn die Gerade p eine Seite AB des gegebenen Dreiecks ist, der Punkt P aber in keiner Seite desselben liegt, so ist K die Curve II. Ordnung, welche in den Punkten A, B die Geraden PA, PB berührt und überdiess durch den Punkt C geht. Wenn die Gerade p die Seiten des Dreiecks ABC in drei verschiedenen Punkten schneidet und P ein vierter Punkt derselben ist, so ist K die Curve II. Ordnung, welche durch die vier Punkte A, B, C, P geht und im Punkte P die Gerade p berührt. Liegt der Punkt P in einer Seite AB des Dreiecks ABC, so ist K der Inbegriff von zwei Geraden AB, CP. Dasselbe ist der Fall, wenn die Gerade p durch den Punkt P und zugleich durch einen Eckpunkt C des Dreiecks ABC geht. Wenn endlich der Punkt P weder in einer Seite des Dreiecks ABC noch in der Geraden p liegt und diese Gerade durch keinen oder doch nur durch einen Eckpunkt C des Dreiecks ABC geht, so seien A_1 B_1, die Punkte, welche in dem involutorischen

Systeme (P, p), dessen Ordnungspunkt der Punkt P und dessen Ordnungslinie die Gerade p ist, den Punkten A, B zugeordnet sind, alsdann ist K diejenige Linie II. Ordnung, welche durch die fünf Punkte A, B, C, A_1, B_1 geht.

315. Wenn eine aus zwei Geraden a, b bestehende Linie und eine Curve K II. Ordnung nicht in vier Punkten sich schneiden, so haben sie entweder drei Punkte, von welchen der eine die Stelle von zwei gemeinschaftlichen Punkten vertritt, oder zwei Punkte, deren jeder die Stelle von zwei gemeinschaftlichen Punkten vertritt, oder zwei Punkte, von welchen der eine die Stelle von drei gemeinschaftlichen Punkten vertritt, mit einander gemein. Der erste dieser Fälle findet statt, wenn die Curve K durch den Punkt a b geht und jede der Geraden a, b in noch einem Punkte schneidet, so wie auch, wenn die Curve K die eine von den beiden Geraden a, b in zwei Punkten schneidet, die andere aber in einem dritten Punkte berührt. Der zweite Fall findet statt, wenn die Curve von jeder der Geraden a, b berührt wird. Der letzte Fall findet statt, wenn die Curve im Schnittpunkte der Geraden a, b die eine dieser Linien berührt.

Zwei Linien II. Ordnung, deren jede aus zwei Geraden besteht, haben, wenn sie nicht in vier Punkten sich schneiden, entweder drei Punkte, von welchen der eine die Stelle von zwei gemeinschaftlichen Punkten vertritt, oder nur einen Punkt, der die Stelle von vier gemeinschaftlichen Punkten vertritt, oder alle Punkte einer Geraden aber keinen ausserhalb derselben liegenden Punkt, oder alle Punkte einer Geraden und auch noch einen ausserhalb derselben liegenden Punkt mit einander gemein. Ist die eine von zwei Linien II. Ordnung eine Gerade a, so haben die beiden Linien entweder zwei Punkte, deren jeder die Stelle von zwei gemeinschaftlichen Punkten vertritt, oder einen Punkt, der die Stelle von vier gemeinschaftlichen Punkten vertritt, oder alle Punkte der Geraden a mit einander gemein. Der letzte Fall findet statt, wenn die andere Linie aus zwei Geraden besteht und die eine dieser Geraden mit a zusamenfällt.

316. Durch eine Curve K II. Ordnung und zwei Punkte, von welchen der eine A in der Curve, der andere B aber nicht in ihr liegt, ist eine Linie K_1 II. Ordnung bestimmt, welche nämlich

durch die beiden gegebenen Punkte geht und im erstern der gegebenen Curve vierpunktig sich anschmiegt.

Liegt der Punkt B in der Geraden a, welche die Curve K in A berührt, so fällt K_1 mit a zusammen. Wenn aber die Gerade AB die Curve K im Punkte A und also in noch einem Punkte S schneidet und man die Strahlenbüschel A, S, B projektivisch so auf einander bezieht, dass der erste und zweite die Curve K, der zweite und dritte das gerade Gebilde a erzeugen, so erzeugen der erste und dritte die Curve K_1, welche durch die beiden Punkte A, B geht und mit der Curve K nur den Punkt A gemein hat. Dass es nur eine solche Curve gibt, folgt aus 306.

317. Durch eine Curve K II. Ordnung und drei Punkte A, B, C, von welchen zwei A, B in der Curve liegen, der dritte aber nicht in ihr liegt, ist eine Linie K_1 II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die drei gegebenen Punkte geht und im erstern der gegebenen Curve dreipunktig sich anschmiegt.

Liegt der Punkt C in der Geraden a, welche der Curve K im Punkte A sich anschmiegt, oder in der Geraden b, welche den Punkt A mit dem Punkte B verbindet, so besteht die Linie K_1 aus den beiden Geraden a, b. Wenn aber die Gerade AC die Curve K im Punkte A und in einem von B verschiedenen Punkte S schneidet und man die Strahlenbüschel A, S, C projektivisch so auf einander bezieht, dass der erste und zweite die Curve K, der zweite und dritte das gerade Gebilde b erzeugen, so erzeugen der erste und dritte die Curve K_1, welche der Curve K im Punkte A dreipunktig sich anschmiegt und überdiess durch die beiden Punkte B, C geht. Die Curven K, K_1 sind nämlich homologe Gebilde von zwei zu einander collineären ebenen Systemen, welche jeden Strahl des Büschels A und jeden Punkt der Geraden b entsprechend gemein haben.

318. Wenn man die gemeinschaftliche Tangente a von zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche in einem Punkte A vierpunktig einander sich anschmiegen, als eine Linie II. Ordnung betrachtet, so sind je zwei Punkte P, Q, welche in Hinsicht auf zwei der drei Linien K, K_1, a einander conjugirt sind, auch in Hinsicht auf die dritte einander conjugirt.

Durch jeden Punkt P der Geraden a ist eine durch den Punkt A gehende Gerade p bestimmt, welche dem Punkte P in Hinsicht auf jede der drei Linien K, K_1, a zugeordnet ist. Liegt aber der Punkt P ausserhalb der Geraden a, so ist ihm in Hinsicht auf die Linie a diese Gerade, in Hinsicht auf die Curve K eine andere Gerade p und (304) in Hinsicht auf die Curve K_1 eine dritte Gerade p_1 zugeordnet. Bemerkt man nun, dass die drei Geraden in dem Punkte sich schneiden, welcher der Geraden AP in Hinsicht auf jede der Linien K, K_1, a zugeordnet ist, so folgt der Satz. Zugleich geht hieraus hervor, dass wenigstens der eine von den Punkten P, Q in der Geraden a liegt.

319. Wenn zwei Curven K, K_1 II. Ordnung im Punkte A, in welchem sie eine und dieselbe Gerade a berühren, dreipunktig einander sich anschmiegen, also noch einen Punkt B mit einander gemein haben und man bezeichnet den Inbegriff der Geraden a, AB durch K_2, so sind je zwei Punkte P, Q, welche in Hinsicht auf zwei der drei Linien K, K_1, K_2 einander conjugirt sind, auch in Hinsicht auf die dritte einander conjugirt.

Dem Punkte A ist in Hinsicht auf jede der Linien K, K_1, K_2 die Gerade a zugeordnet. Ist aber P ein von A verschiedener Punkt, so ist ihm in Hinsicht auf keine zwei von den drei Linien K, K_1, K_2 eine und dieselbe Gerade zugeordnet, daher man nur zu beweisen hat, dass die drei Geraden p, p_1, p_2, von welchen die erste in Hinsicht auf die Linie K, die zweite in Hinsicht auf die Linie K_1 und die dritte in Hinsicht auf die Linie K_2 dem Punkte P zugeordnet ist, in einem und demselben Punkte Q sich schneiden, oder, was das Nämliche ist, dass es einen Punkt Q gibt, welcher dem Punkte P in Hinsicht auf jede der Linien K, K_1, K_2, conjugirt ist. Liegt der Punkt P in der Geraden a, so fällt Q mit A zusammen. Fällt der Punkt P mit B zusammmen, so fällt auch Q mit B zusammen. Ist P ein ausserhalb der beiden Curven liegender Punkt der Geraden AB, so ist Q der Punkt, welcher vom Punkte P durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist. Wenn endlich der Punkt P in keiner der Geraden a, AB liegt, so projiciren die Geraden AP, p_2, welche durch die Geraden a, A B harmonisch getrennt sind, aus dem Punkte A zwei Punkte C, D der Curve K und zwei Punkte C_1, D_1 der Curve K_1. Da nun die Geraden CD, C_1 D_1 homologe Elemente von zwei zu einander collineären ebenen Systemen sind, welche alle Punkte der Geraden AB entsprechend gemein haben, so schneiden sie die Gerade AB in einem und demselben Punkte M. Da ferner in der Curve K die Punkte A, B durch die Punkte C, D harmonisch getrennt sind, so ist in Hinsicht auf dieselbe der Geraden CD und eben so in Hinsicht auf die Curve K_1 der Geraden $C_1 D_1$ der Punkt N zugeordnet, welcher vom Punkte M durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist, woraus man (G. 253) schliessen kann, dass jede Gerade, welche die Gerade AB im Punkte N schneidet, namentlich also die Gerade NP die Geraden AP, p_2 in zwei Punkten P, Q schneidet, welche in Hinsicht auf jede der drei Linien K, K_1, K_2 einander conjugirt sind.

Nach dem obigen Satze sind die Punkte, in welchen die Curven K, K_1 von ihrer andern gemeinschaftlichen Tangente h berührt werden, durch die Geraden a, AB und eben so nach dem reciproken Satze die Geraden, von welchen die eine im Punkte B die Curve K und die andere in demselben Punkte die Curve K_1 berührt, durch die Punkte A, ah harmonisch getrennt.

320. Wenn zwei Curven K, K_1 II. Ordnung in zwei Punkten A, B sich berühren und man bezeichnet den Inbegriff ihrer gemeinschaftlichen Tangenten AS, BS durch K_2 und die Gerade AB als Linie II. Ordnung durch K_3, so sind je zwei Punkte P, Q, welche in Hinsicht auf zwei der vier Linien K, K_1, K_2, K_3 einander conjugirt sind, auch in Hinsicht auf die beiden übrigen einander conjugirt.

Ist dem Punkte P in Hinsicht auf zwei der vier Linien K, K_1, K_2, K_3 eine und dieselbe Gerade p zugeordnet, so ist diese Gerade dem Punkte P auch in Hinsicht auf die beiden übrigen Linien zugeordnet, sei es nun, dass der Punkt P mit dem Punkte S zusammenfällt oder in der Geraden AB liegt. Wenn aber der Punkt P weder in der Geraden AB liegt noch mit dem Punkte S zusammenfällt, so ist Q derjenige Punkt der Geraden AB, welcher in Hinsicht auf jede der vier Linien K, K_1, K_2, K_3 der Geraden SP zugeordnet ist. Es geht hieraus zugleich hervor, dass wenigstens einer von den beiden Punkten P, Q in der Geraden AB liegt.

321. Wenn ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ homologe Würfe von zwei zu einander projektivischen geraden Gebilden und in Hinsicht auf eine Linie K II. Ordnung den Punkten A, B, C die Punkte A_1, B_1, C_1 conjugirt sind, so sind in Hinsicht auf dieselbe Linie auch die Punkte D, D_1 einander conjugirt.

Ist K eine Gerade, so muss, da in Hinsicht auf dieselbe den Punkten A, B, C die Punkte A_1, B_1, C_1 conjugirt sind, wenigstens die eine der Geraden AB, A_1B_1 mit K zusammenfallen und alsdann ist in Hinsicht auf die Linie K jedem Punkte der Geraden AB jeder Punkt der Geraden A_1B_1 conjugirt. Besteht die Linie K aus zwei Geraden f, g, deren Schnittpunkt in der Geraden AB liegt, so fallen die Geraden AB, A_1B_1 entweder beide mit der Geraden f oder beide mit der Geraden g zusammen oder sie sind durch die Geraden f, g, harmonisch getrennt, daher wieder in Hinsicht auf die Linie K jedem Punkte der Geraden AB jeder Punkt der Geraden A_1B_1 conjugirt ist. Wenn endlich die Linie K eine Curve II. Ordnung oder der Inbegriff von zwei Geraden ist, deren Schnittpunkt ausserhalb der Geraden AB liegt, so ist in Hinsicht auf die Linie K dem Wurfe ABCD ein Wurf abcd zugeordnet, welcher zu dem erstern und also auch zu dem Wurfe $A_1B_1C_1D_1$ projektivisch ist. Da nun die Punkte A_1, B_1, C_1 bezüglich in den Geraden a, b, c liegen, so liegt der Punkt D_1 in der Geraden d, woraus der Satz folgt.

322. Wenn zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche im Punkte A eine und dieselbe Gerade a berühren, noch zwei Punkte B, C mit einander gemein haben, so sind je zwei Punkte P, Q welche in Hinsicht auf zwei der vier Linien K, K_1, AB+AC, a+BC einander conjugirt sind, auch in Hinsicht auf die beiden übrigen einander conjugirt.

Dem Punkte A ist in Hinsicht auf jede der vier Linien die Gerade a, dem Schnittpunkte F von a und BC die Gerade f zugeordnet, welche vom Punkte F durch die Geraden AB, AC harmonisch getrennt ist. Ist aber P irgend ein dritter Punkt der Ebene, so ist ihm, wie man sich leicht überzeugt, in Hinsicht auf keine zwei der vier Linien K, K_1, AB+AC, a+BC eine und dieselbe Gerade zugeordnet und daher nur nachzuweisen, dass es einen Punkt Q giebt, welcher dem Punkte P in Hinsicht auf jede der vier Linien conjugirt ist. Liegt nun P in der Geraden a, so fällt Q mit A zusammen. Liegt P in der Geraden f, so fällt Q mit F zusammen. Ist P einer von den Punkten B, C, so fällt Q mit P zusammen. Liegt der Punkt P in einer Seite des Dreiecks ABC, ohne ein Eckpunkt desselben zu sein, so sind die Punkte P, Q durch zwei Eckpunkte des Dreiecks ABC harmonisch getrennt. Wenn endlich keiner der erwähnten Fälle stattfindet und p die Gerade bezeichnet, welche vom Punkte P durch die Geraden a, BC harmonisch getrennt ist, so ist in Hinsicht auf jede der erwähnten vier Linien II. Ordnung dem Schnittpunkte H von AB und FP der Schnittpunkt H_1 von AB und p, dem Punkte F aber sowohl der Schnittpunkt M von f und FP als auch der Schnittpunkt N von f und p, folglich (321) dem Punkte P derjenige Punkt Q der Geraden p zugeordnet, welcher mit den Punkten F, N, H_1 einen zu dem Wurfe MFHP projektivischen Wurf FNH_1Q bildet.

323. Die drei Punkte, in deren jedem zwei einander gegenüberliegende Seiten eines vollständigen Vierecks ABCD sich schneiden, sind die Eckpunkte eines Dreiecks, welches, da je zwei einander gegenüberliegende Elemente desselben in Hinsicht auf jede Linie II. Ordnung, welche durch die vier Eckpunkte des Vierecks geht, einander zugeordnet sind, das zu dem vollständigen Vierecke gehörige Polardreieck genannt werden soll. Je zwei einander gegenüberliegende Seiten des Vierecks sind durch zwei Seiten des Dreiecks, je zwei Eckpunkte des Vierecks durch einen Eckpunkt des Dreiecks und die ihm gegenüberliegende Seite desselben harmonisch getrennt.

Die drei Geraden, deren jede zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte eines vollständigen Vierseits verbindet, sind die drei Seiten eines Dreiecks, welches, da je zwei einander gegenüberliegende Elemente desselben in Hinsicht auf jeden Strahlenbüschel II. Ordnung, welchem die vier Seiten des Vierseits angehören, einander zugeordnet sind, das zu dem vollständigen Vierseite gehörige Polardreieck genannt werden soll. Je zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte des Vierseits sind durch zwei Eckpunkte des Dreiecks, je zwei Seiten des Vierseits durch eine Seite des Dreiecks und den ihr gegenüberliegenden Eckpunkt desselben harmonisch getrennt.

Schneiden sich die Geraden AB, CD im Punkte E und die Geraden AC, BD im Punkte F, so sind A, B, C, D, E, F die sechs Eckpunkte eines vollständigen Vierseits und AD, BC, EF die drei Seiten des zu demselben gehörigen Polardreiecks.

324. Wenn zwei Punkte P, Q in Hinsicht auf zwei Linien K, K_1 II. Ordnung, welche die vier Eckpunkte eines vollständigen Vierecks $ABCD$ mit einander gemein haben, einander conjugirt sind, so sind sie auch in Hinsicht auf jede dritte Linie K_2 II. Ordnung, welche durch die vier Eckpunkte des Vierecks geht, einander conjugirt und sollen daher in Hinsicht auf das Viereck selbst einander conjugirt heissen.

Wenn zwei Gerade in Hinsicht auf zwei Büschel II. Ordnung, welche die vier Seiten eines vollständigen Vierseits mit einander gemein haben, einander conjugirt sind, so sind sie auch in Hinsicht auf jeden dritten Büschel II. Ordnung, welchem die vier Seiten des Vierseits angehören, einander conjugirt und sollen daher in Hinsicht auf das Vierseit selbst einander conjugirt heissen.

Je zwei einander gegenüberliegende Elemente des zu dem vollständigen Vierecke $ABCD$ gehörigen Polardreiecks EFG sind in Hinsicht auf jede der drei Linien K, K_1, K_2 einander zugordnet. Wenn aber P kein Eckpunkt des Dreiecks EFG ist, so ist ihm in Hinsicht auf keine zwei der erwähnten Linien eine und dieselbe Gerade zugeordnet und daher nur nachzuweisen, dass es einen Punkt Q giebt, welcher dem Punkte P in Hinsicht auf jede der drei Linien conjugirt ist. Liegt der Punkt P in einer Seite des Dreiecks EFG, so ist Q der dieser Seite gegenüberliegende Eckpunkt desselben. Ist P ein Eckpunkt des Vierecks $ABCD$, so fällt Q mit P zusammen. Liegt der Punkt P in einer Seite des Vierecks $ABCD$, ohne ein Eckpunkt desselben zu sein, so ist Q der Punkt, welcher vom Punkte P durch zwei Eckpunkte des Vierecks harmonisch getrennt ist. Wenn endlich keiner von diesen Fällen stattfindet und p die Gerade bezeichnet, welche vom Punkte P durch die Geraden AB, CD, die im Punkte E sich schneiden, harmonisch getrennt ist, so ist in Hinsicht auf jede der Linien K, K_1, K_2 dem Schnittpunkte H von AC und EP der Schnittpunkt H_1 von AC und p, dem Punkt E aber sowohl der Schnittpunkt M von FG und EP als auch der Schnittpunkt N von FG und p, folglich (321) dem Punkte P derjenige Punkt Q der Geraden p zugeordnet, welcher mit den Punkten E, N, H_1 einen zu dem Wurfe $MEHP$ projektivischen Wurf ENH_1Q bildet.

325. Sind in Hinsicht auf eine Linie K II. Ordnung zwei einander nicht gegenüberliegende Eckpunkte S, S_1 eines vollständigen Vierseits V den ihnen gegenüberliegenden Eckpunkten T, T_1 conjugirt, so sind in Hinsicht auf dieselbe Linie auch die beiden übrigen Eckpunkte S_2, T_2 des Vierseits einander conjugirt.

Sind in Hinsicht auf einen Büschel II. Ordnung zwei einander nicht gegenüberliegende Seiten eines vollständigen Vierecks den ihnen gegenüberliegenden Seiten conjugirt, so sind in Hinsicht auf denselben Büschel auch die beiden übrigen Seiten des Vierecks einander conjugirt.

Wenn nämlich die Mittelpunkte M, N von zwei Büscheln I. Ordnung in Hinsicht auf eine Linie einander conjugirt sind, welche aus zwei Geraden besteht, so sind diese (310) in Hinsicht auf den Büschel $M+N$ einander conjugirt, welcher aus jenen Büscheln zusammengesetzt ist, und umgekehrt. Besteht also die Linie K aus zwei Geraden, so sind diese sowohl in Hinsicht auf den Büschel $S+T$ als auch in Hinsicht auf den Büschel S_1+T_1, folglich (324) in Hinsicht auf jeden Büschel II. Ordnung einander conjugirt, welchem die vier Seiten des Vierseits V angehören, daher auch die Punkte S_2, T_2 in Hinsicht auf die Linie K einander conjugirt sind. Ist K eine Curve II. Ordnung, so kann man in ihr vier Punkte A, B, C, D annehmen, so dass die Geraden AB, CD durch zwei Seiten des Vierseits V harmonisch getrennt und also je zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte desselben in Hinsicht auf die Linie $AB+CD$ einander conjugirt sind. Da alsdann (324) auch in Hinsicht auf die Linie $AC+BD$ dem Punkte S der Punkt T, dem Punkte S_1 der Punkt T_1 und mithin nach dem bereits betrachteten Falle dem Punkte S_2 der Punkt T_2 conjugirt ist, so sind die Punkte S_2, T_2 auch in Hinsicht auf die Curve K einander conjugirt. Wenn endlich die Linie K eine Gerade ist, so muss diese mit einer Seite des Vierseits V zusammenfallen, daher in Hinsicht auf dieselbe auch in diesem Falle die Punkte S_2, T_2 einander conjugirt sind.

326. Durch ein Dreieck EFG und einen Punkt A, welcher in keiner Seite des Dreiecks

Durch ein Dreieck und eine Gerade, welche durch keinen Eckpunkt des Dreiecks geht, liegt, ist ein vollständiges Viereck bestimmt, von welchem das gegebene Dreieck das Polardreieck und der gegebene Punkt ein Eckpunkt ist.

ist ein vollständiges Vierseit bestimmt, von welchem das gegebene Dreieck das Polardreieck und die gegebene Gerade eine Seite ist.

Es sei dem Punkte A in dem involutorischen Systeme (E, FG) der Punkt B, in dem involutorischen Systeme (F, EG) der Punkt C und in dem involutorischen Systeme (G, EF) der Punkt D zugeordnet, so ist ABCD das im Satze erwähnte Viereck. Da nämlich die Punkte B, C in der Geraden liegen, welche von der Geraden GA durch die Geraden GE, GF harmonisch getrennt ist, so schneiden sich die Geraden AD, BC im Punkte G. Eben so ist E der Schnittpunkt der Geraden AB, CD und F der Schnittpunkt der Geraden AC, BD. — Geht eine Linie II. Ordnung, in Hinsicht auf welche je zwei einander gegenüberliegende Elemente des Dreiecks EFG einander zugeordnet sind, durch irgend einen Eckpunkt des Vierecks ABCD, so geht sie auch (313) durch die drei übrigen Eckpunkte desselben.

327. Die acht Eckpunkte von zwei vollständigen Vierecken, welche ein gemeinschaftliches Polardreieck EFG haben, liegen in einer und derselben Linie II. Ordnung.

Die acht Seiten von zwei vollständigen Vierseiten, welche ein gemeinschaftliches Polardreieck haben, sind in einem und demselben Büschel II. Ordnung enthalten.

Denn die Linie II. Ordnung, welche durch die vier Eckpunkte des einen Vierecks und irgend einen Eckpunkt des andern geht, enthält, da in Hinsicht auf dieselbe je zwei einander gegenüberliegende Elemente des Dreiecks EFG einander zugeordnet sind, auch die drei übrigen Eckpunkte des andern Vierecks.

328. Wenn ein vollständiges Viereck und ein vollständiges Vierseit ein gemeinschaftliches Polardreieck haben, so ist in jedem Polarsysteme, in welchem diess Dreieck als Polardreieck enthalten und irgend einem Eckpunkte des Vierecks eine Seite des Vierseits zugeordnet ist, auch jedem andern Eckpunkte des Vierecks eine Seite des Vierseits zugeordnet. Und wenn ein vollständiges Viereck und ein vollständiges Vierseit zwei einander zugeordnete Gebilde eines Polarsystems sind und das zu dem einen dieser Gebilde ge-

hörige Polardreieck zugleich Polardreieck des Systems ist, so haben das Viereck und das Vierseit ein gemeinschaftliches Polardreieck. Sind nämlich zwei Punkte durch zwei einander zugeordnete Elemente eines Polarsystems harmonisch getrennt, so sind durch diese Elemente auch die Polaren jener Punkte harmonisch getrennt.

Haben zwei Curven II. Ordnung die vier Eckpunkte eines Vierecks mit einander gemein, so ist das zu diesem vollständigen Vierecke gehörige Polardreieck zugleich Polardreieck der beiden vollständigen Vierseite, von welchen das eine in Hinsicht auf die eine und das andere in Hinsicht auf die andere Curve dem Vierecke zugeordnet ist, daher (327) die acht Seiten der Vierseite in einem und demselben Strahlenbüschel II. Ordnung enthalten sind. Eben so liegen die acht Punkte, in welchen die Curven von ihren vier gemeinschaftlichen Tangenten berührt werden, in einer und derselben Linie II. Ordnung.

329. Zu jedem vollständigen Vierecke ABCD giebt es ein vollständiges Vierseit V, zu jedem vollständigen Vierseite ein vollständiges Viereck, so dass nicht nur beide Gebilde ein gemeinschaftliches Polardreieck haben, sondern überdiess jeder Eckpunkt des Vierseits in einer Seite des Vierecks liegt.

Es sei E der Schnittpunkt von AB und CD, F der Schnittpunkt von AC und BD und G der Schnittpunkt von AD und BC. Es werde ferner die Gerade FG von den Geraden AB, CD in den Punkten S, T, die Gerade EG von den Geraden BD, AC in den Punkten S_1, T_1 und die Gerade EF von den Geraden AD, BC in den Punkten S_2, T_2 geschnitten. Da nun die Geraden AF, BG, DE in einem und demselben Punkte C sich schneiden, so liegen (G. 90) die Punkte S, S_1, S_2 in einer und derselben Geraden. Eben so liegt der Punkt S_2 in der Geraden TT_1, der Punkt S_1 in der Geraden TT_2 und der Punkt S in der Geraden T_1T_2, so dass also S, T, S_1, T_1, S_2, T_2 die Eckpunkte des im Satze erwähnten vollständigen Vierseits V sind.

Da das vollständige Viereck STT_1S_1 und das vollständige Vierseit, dessen Seiten die Geraden AB, CD, AC, BD sind, auch ein gemeinschaftliches Polardreieck GS_2T_2 haben, so berührt die Curve II. Ordnung, welche durch die vier Punkte S, T, S_1, T_1

geht und im Punkte S der Geraden AB sich anschmiegt, in den Punkten T, S_1, T_1 die Geraden CD, BD, AC. Eben so giebt es noch zwei Curven II. Ordnung, deren jede durch vier Eckpunkte des Vierseits V geht und in jedem dieser Punkte die durch ihn gehende Seite des Vierecks ABCD berührt.

---

§. 24.

Einfache Systeme von Gebilden II. Ordnung.

330. Ein System von Linien II. Ordnung soll ein einfaches heissen, wenn jeder Punkt, welchen zwei Linien des Systems mit einander gemein haben, ein gemeinschaftlicher Punkt von allen ist, und je zwei Elemente, welche in Hinsicht auf zwei Linien des Systems einander zugeordnet sind, in Hinsicht auf jede Linie des Systems einander zugeordnet sind.

Ein System von Büscheln II. Ordnung soll ein einfaches heissen, wenn jeder Strahl, welchen zwei Büschel des Systems mit einander gemein haben, ein gemeinschaftlicher Strahl von allen ist, und je zwei Elemente, welche in Hinsicht auf zwei Büschel des Systems einander zugeordnet sind, in Hinsicht auf jeden Büschel des Systems, einander zugeordnet sind.

Die einfachen Systeme von Linien II. Ordnung zerfallen in acht Arten, von welchen aber nur die fünf erstern Curven enthalten.

I. Durch ein Viereck ist ein System bestimmt, welchem nämlich jede durch die vier Eckpunkte des Vierecks gehende Linie II. Ordnung angehört. Ein solches System enthält drei Linien, deren jede aus zwei Geraden besteht, während jede vierte Linie des Systems eine Curve ist. Jedem Eckpunkte des zu dem vollständigen Vierecke gehörigen Polardreiecks ist in dem Systeme (in Hinsicht auf jede Linie des Systems) die ihm gegenüberliegende Seite des Dreiecks zugeordnet.

II. Durch ein Dreieck ABC und eine Gerade a, welche zwei Seiten AB, AC des Dreiecks in einem und demselben Punkte A schneidet, ist ein System bestimmt, welchem die Linie AB+AC die Linie BC+a und jede Curve II. Ordnung angehört, welche im Punkte A die Gerade a berührt und auch durch die Punkte B, C geht. Dem Punkte A ist die Gerade a, dem Schnittpunkte von a und BC aber die Gerade zugeordnet, welche von der Geraden a durch die Geraden AB, AC harmonisch getrennt ist.

III. Durch zwei Gerade SA, SB und eine dritte Gerade AB, welche die erstern in zwei Punkten A, B schneidet, ist ein System bestimmt, welchem die Linie SA+SB, die Gerade AB und jede Curve II. Ordnung angehört, welche die Geraden SA, SB in den Punkten A, B berührt. Dem Punkte S ist die Gerade AB zugeordnet. Aber auch zu jedem in der Geraden AB liegenden Punkte P giebt es eine Gerade p, welche dem Punkte P in dem Systeme zugeordnet ist.

IV. Durch eine Curve K II. Ordnung und zwei Gerade, von welchen die eine a die Curve in einem Punkte A berührt, die andere aber die Curve in diesem Punkte und also in noch einem Punkte B schneidet, ist ein System bestimmt, welchem die Linie a+AB, die Curve K und jede andere Curve II. Ordnung angehört, welche durch die Punkte A, B geht und im erstern dieser Punkte der gegebenen Curve dreipunktig sich anschmiegt Dem Punkt A ist in dem Systeme die Gerade a zugeordnet.

V. Durch eine Curve K II. Ordnung und eine Gerade a, welche die Curve in einem Punkte A berührt, ist ein System bestimmt, welchem die Gerade a, die Curve K und jede andere Curve II. Ordnung angehört, welche der gegebenen im Punkte A vierpunktig sich anschmiegt. Zu jedem in der Geraden a liegenden Punkte P giebt es eine Gerade p, welche dem Punkte P in dem Systeme zugeordnet ist.

VI. Durch zwei Gerade m, n ist ein System bestimmt, welchem sowohl die eine als auch die andere der gegebenen Geraden angehört. Jede dritte Linie des Systems ist der Inbegriff von zwei Geraden, welche durch die Geraden m, n harmonisch getrennt sind. Jedem Punkte, welcher in der einen von den beiden Geraden m, n liegt, ist die andere, dem Punkte mn aber jede Gerade der Ebene zugeordnet.

VII. Durch eine Gerade a und einen in ihr liegenden Punkt S ist ein System bestimmt, welchem die Gerade a und jede Linie angehört, welche aus der Geraden a und noch einer durch den Punkt S gehenden Geraden besteht. Jedem Punkte der Geraden a ist diese Gerade, dem Punkte S aber jede Gerade der Ebene zugeordnet.

VIII. Durch eine Gerade a und einen ausserhalb derselselben liegenden Punkt S ist ein System bestimmt, welchem jede Linie angehört, welche aus der Geraden a und einer durch den Punkt S gehenden Geraden besteht. Jedem Punkte der Geraden a ist diese Gerade zugeordnet.

Eben so zerfallen die einfachen Systeme von Büscheln II. Ordnung in acht Arten. Ein System II. Art enthält zwei Büschel $A+B$, $C+M$, deren jeder aus zwei Büscheln I. Ordnung zusammengesetzt ist. Die Mittelpunkte dieser Büschel sind die Eckpunkte eines Dreiecks ABC und ein Punkt M, welcher in der Seite AB des Dreiecks liegt, aber kein Eckpunkt desselben ist. Jeder dritte Büschel des Systems schmiegt einer Curve II. Ordnung sich an, welche die drei Seiten des Dreiecks ABC und zwar die Seite AB im Punkte M berührt.

331. Durch zwei Linien K, K_1 II. Ordnung ist ein einfaches System (K, K_1) von Linien II. Ordnung bestimmt, welchem nämlich die beiden gegebenen Linien angehören. Durch zwei Linien II. Ordnung und einen Punkt, welcher in keiner von beiden liegt, ist eine dritte Linie II. Ordnung bestimmt, welche nämlich dem durch die beiden erstern Linien bestimmten einfachen Systeme von Linien II. Ordnung angehört und durch den gegebenen Punkt geht.

Ist K der Inbegriff von zwei Geraden a, b und K_1 der Inbegriff von zwei andern Geraden c, d, so ist (K, K_1) ein System erster oder zweiter oder sechster Art, je nachdem die Geraden a, b, c, d in vier oder in drei Punkten oder in einem Punkte sich schneiden. Sind K, K_1 zwei Curven II. Ordnung, welche nur zwei Punkte A, B mit einander gemein haben, so ist (K, K_1) ein System dritter oder vierter Art, je nachdem die Curven in den beiden Punkten A, B sich berühren oder in einem derselben dreipunktig einander sich anschmiegen.

332. Wenn zwei Punkte in Hinsicht auf zwei Linien K, K_1 eines einfachen Systems von Linien II. Ordnung einander conjugirt sind, so sind sie auch in Hinsicht auf jede dritte Linie des Sy-

stems einander conjugirt, daher man sagen kann, dass sie in dem Systeme einander conjugirt sind. Durch jeden Punkt P, welchem nicht im Systeme eine Gerade zugeordnet ist, ist ein Punkt Q bestimmt, welcher im Systeme dem Punkte P conjugirt ist.

Da nämlich dem Punkte P in Hinsicht auf keine zwei Linien des Systems eine und dieselbe Gerade zugeordnet ist, so ist nur nachzuweisen, dass es einen Punkt Q giebt, welcher dem Punkte P in Hinsicht auf jede Linie des Systems conjugirt ist. Ist dieses ein System sechster oder siebenter Art, so ist Q der Punkt, welchem jede Gerade der Ebene zugeordnet und also jeder Punkt der Ebene conjugirt ist. Haben die Linien des Systems alle Punkte einer Geraden a und noch einen ausserhalb derselben liegenden Punkt S mit einander gemein, so sind die Punkte P, Q, wenn sie nicht mit dem Punkte S zusammenfallen, durch diesen Punkt und die Gerade a harmonisch getrennt. Die übrigen Fälle, in welchen nämlich das System auch Curven II. Ordnung enthält, sind bereits im vorigen §. betrachtet worden. Eben so ist durch ein einfaches System von Büscheln II. Ordnung und eine Gerade p, welcher nicht im Systeme ein Punkt zugeordnet ist, eine Gerade q bestimmt, welche im Systeme der Geraden p conjugirt ist.

333. Durch ein Dreieck EFG und einen Punkt A ist ein einfaches System von Linien II. Ordnung bestimmt, in welchem nämlich jedem Eckpunkte des gegebenen Dreiecks die ihm gegenüberliegende Seite desselben zugeordnet und der gegebene Punkt A sich selbst conjugirt ist.

Das erwähnte System ist, wie man sich leicht überzeugt, entweder ein System sechster oder dritter oder erster Art, je nachdem nämlich der Punkt A ein Eckpunkt des Dreiecks EFG ist, oder nur in einer oder (326) in gar keiner Seite desselben liegt.

334. Durch ein Dreieck EFG und zwei Punkte A, P, welche durch keine zwei einander gegenüberliegende Elemente des Dreiecks harmonisch getrennt sind, ist eine Linie K II. Ordnung bestimmt, in Hinsicht auf welche jeder Eckpunkt des gegebenen Dreiecks der ihm gegenüberliegenden Seite desselben zugeordnet und jeder von den beiden gegebenen Punkten A, P sich selbst conjugirt ist.

Denn in dem nach dem vorigen Satze durch das Dreieck EFG und den Punkt A bestimmten Systeme von Linien II. Ordnung ist eine aber auch nur eine Linie enthalten, welche durch den Punkt P geht.

335. Durch zwei Linien K, K_1 II. Ordnung und eine Gerade h, welche durch keinen gemeinschaftlichen Punkt derselben geht, sind zwei Punkte P, Q bestimmt, welche nämlich in der gegebenen Geraden liegen und in Hinsicht auf jede der gegebenen Linien, folglich auch in dem durch dieselben bestimmten Systeme (K, K_1) von Linien II. Ordnung einander conjugirt sind.

Durch zwei Büschel U, U_1 II. Ordnung und einen Punkt S, welcher in keinem gemeinschaftlichen Strahle derselben liegt, sind zwei Gerade p, q bestimmt, welche nämlich in dem gegebenen Punkte sich schneiden und in Hinsicht auf jeden der Büschel, folglich auch in dem durch dieselben bestimmten Systeme (U, U_1) von Büscheln II. Ordnung einander conjugirt sind.

Es habe die Gerade h mit der Linie K die Punkte A, B und mit der Linie K_1 die Punkte A_1, B_1 gemein, so sind (311) die Ordnungspunkte P, Q des involutorischen Gebildes $AB.A_1B_1$... in Hinsicht auf jede der Linien K, K_1 und also in dem Systeme (K, K_1) einander conjugirt, daher auch in dem Systeme zwei Linien enthalten sind, deren jede mit der Geraden h nur einen Punkt, nämlich die eine nur den Punkt P und die andere nur den Punkt Q, gemein hat.

Die Punkte P, Q sind also die Ordnungspunkte eines involutorischen geraden Gebildes, in welchem je zwei Punkte der Geraden h, welche in einer und derselben Linie des Systems (K, K_1) liegen, einander zugeordnet sind. Eben so sind die im Satze rechter Hand erwähnten Geraden p, q die Ordnungsstrahlen eines involutorischen Strahlenbüschels, in welchem je zwei durch den Punkt S gehende Gerade, welche einem und demselben Büschel des Systems (U, U_1) angehören, einander zugeordnet sind.

336. Durch ein vollständiges Viereck und eine Gerade, welche die Seiten des Vierecks in sechs Punkten schneidet, sind (335) zwei Curven II. Ordnung bestimmt, deren jede durch die vier Eckpunkte des gegebenen Vierecks geht und die gegebene Gerade berührt. — Durch ein Dreieck und zwei Gerade, welche die Seiten desselben in fünf Punkten schneiden, sind zwei Curven II. Ordnung bestimmt, deren jede durch die drei Eckpunkte des gegebenen

Dreiecks geht und die beiden gegebenen Geraden berührt. — Durch eine Curve II. Ordnung, zwei in ihr liegende Punkte A, B und eine Gerade, welche weder durch einen dieser Punkte geht noch der Curve sich anschmiegt, sind zwei andere Curven II. Ordnung bestimmt, deren jede durch die beiden gegebenen Punkte A, B geht, im erstern dieser Punkte der gegebenen Curve dreipunktig sich anschmiegt und überdiess die gegebene Gerade berührt.

Werden die drei Seiten eines Dreiecks ABC von zwei Geraden f, g in fünf Punkten geschnitten, so muss entweder die eine dieser Geraden durch einen Eckpunkt des Dreiecks gehen oder der Schnittpunkt fg der Geraden in einer Seite AB des Dreiecks liegen. Um auch im letztern dieser Fälle den zweiten der obigen Sätze auf 335 zurückzuführen, darf man nur bemerken, dass in Hinsicht auf jede Curve K II. Ordnung, welche durch die Punkte A, B geht und die Geraden f, g berührt, dem Punkte S, welcher zu den drei Punkten A, fg, B der vierte harmonische Punkt ist, die Gerade s zugeordnet ist, welche vom Punkte S durch die Geraden f, g harmonisch getrennt ist. Soll nun die Curve K durch den Punkt C gehen, so muss sie, wenn dieser Punkt in der Geraden s liegt, in ihm die Gerade SC berühren, im entgegengesetzten Falle aber auch durch den Punkt D gehen, welcher vom Punkte C durch den Punkt S und dessen Polare s harmonisch getrennt ist.

Wenn ein vollständiges Viereck und ein vollständiges Vierseit ein gemeinschaftliches Polardreieck haben, so liegt entweder jeder Eckpunkt des Vierecks in einer Seite des Vierseits oder es liegt kein Eckpunkt des Vierecks in einer Seite des Vierseits. Im ersteren Falle giebt es eine Curve II. Ordnung, welche die Seiten des Vierseits in den Eckpunkten des Vierecks berührt. Im letztern Falle giebt es zwei Curven II. Ordnung, welche in den vier Eckpunkten des Vierecks sich schneiden und die Seiten des Vierseits zu gemeinschaftlichen Tangenten haben.

337. Durch zwei Linien K, K_1 II. Ordnung und einen ausserhalb beider liegenden Punkt S ist, wie schon früher bemerkt wurde, eine dritte Linie K_2 II. Ordnung bestimmt, welche nämlich dem durch die beiden erstern Linien bestimmten Systeme von Linien II. Ordnung angehört und durch den gegebenen Punkt geht. Wenn nun von einem involutorischen geraden Gebilde, dessen Träger h

durch den Punkt S geht, zwei einander zugeordnete Punkte in der Linie K, zwei andere ebenfalls einander zugeordnete Punkte in der Linie K_1 liegen, so liegt (335) der dem Punkte S zugeordnete Punkt S_1 in der Linie K_2. Ist K_2 eine Gerade oder der Inbegriff von zwei im Punkte S sich schneidenden Geraden, so fällt S_1 mit S zusammen. Dasselbe ist der Fall, wenn K_2 eine Curve und h die ihr im Punkte S sich anschmiegende Gerade ist.

Wenn eine Curve II. Ordnung in den Punkten A, B, M, N die Geraden AF, BF, MS, NS berührt, so ist (296) der Wurf S(MNAF) zu dem Wurfe S(NMBF) projektivisch und daher S(MN.AB.FF) eine Involution. Dasselbe ergiebt sich, wenn man bemerkt, dass der der Curve sich anschmiegende Büschel, dann der Büschel A+B und der Büschel F einem und demselben einfachen Systeme von Büscheln II. Ordnung angehören.

338. Durch zwei Gerade m, n und zwei ausserhalb derselben gegebene Punkte A, B, welche nicht mit dem Schnittpunkte S der gegebenen Geraden in einer und derselben Geraden liegen, sind zwei Punkte P, Q bestimmt, welche nämlich sowohl durch die Punkte A, B als auch durch die Geraden m, n harmonisch getrennt sind. Wenn nun eine Curve K II. Ordnung durch die gegebenen Punkte A, B geht und die gegebenen Geraden m, n berührt, so ist in Hinsicht auf dieselbe entweder dem Punkte P die Gerade SQ oder dem Punkte Q die Gerade SP, folglich der Geraden AB ein Punkt der Linie SP+SQ und dem Punkte S ein Strahl des Büschels P+Q zugeordnet.

Es sei in Hinsicht auf die Curve K der Geraden m der Punkt M, der Geraden n der Punkt N und der Geraden AB der Punkt F zugeordnet, so ist (337) S(MN.AB.FF) eine Involution, woraus man schliessen kann, dass der Punkt F entweder in der Geraden SP oder in der Geraden SQ liegt. Im erstern Falle ist dem Punkte Q die Gerade SP und daher dem Punkte S ein Strahl des Büschels Q, im letztern Falle aber dem Punkte P die Gerade SQ und daher dem Punkte S ein Strahl des Büschels P zugeordnet. Und wenn in Hinsicht auf eine Curve II. Ordnung, welche

durch die beiden Punkte A, B geht, der Geraden AB ein Punkt der Linie SP+SQ zugeordnet

die beiden Geraden m, n berührt, dem Punkte S ein Strahl des Büschels P+Q zugeordnet ist

ist und die Curve die eine von den beiden Geraden m, n berührt, so berührt sie auch die andere.

und die Curve durch den einen von den beiden Punkten A, B geht, so geht sie auch durch den andern.

339. Durch ein Dreieck EFG und zwei Punkte P, Q, von welchen, im Falle der eine ein Eckpunkt des Dreiecks ist, der andere nicht in der diesem Punkte gegenüberliegenden Seite desselben liegt, ist ein einfaches System von Linien II. Ordnung bestimmt, in welchem nämlich je zwei einander gegenüberliegende Elemente des gegebenen Dreiecks einander zugeordnet und die gegebenen Punkte einander conjugirt sind.

Wenn einer von den beiden Punkten P, Q mit dem Punkte E zusammenfällt oder der eine in der Geraden EF und der andere in der Geraden EG liegt, so ist jede dieser Geraden eine Linie des Systems, während jede dritte Linie desselben aus zwei Geraden besteht, welche durch die Geraden EF, EG harmonisch getrennt sind. Wenn keiner von den beiden Punkten P, Q in der Geraden EF, auch keiner in der Geraden EG aber wenigstens einer in der Geraden FG liegt, so ist diese Gerade eine Linie des Systems. Eine andere Linie desselben besteht aus den Ordnungsstrahlen m, n des involutorischen Strahlenbüschels E (FG.PQ...). Jede dritte Linie des Systems ist eine Curve II. Ordnung, welche die Geraden m, n in den Punkten berührt, in welchen sie von der Geraden FG geschnitten werden. Wenn endlich keiner von den Punkten P, Q in einer Seite des Dreiecks EFG liegt, so schneiden sich die Linien des im Satze erwähnten Systems in den vier Eckpunkten eines vollständigen Vierecks ABCD, von welchem zwei einander gegenüberliegende Seiten AB, CD die Ordnungsstrahlen des involutorischen Strahlenbüschels E(FG.PQ...), zwei ebenfalls einander gegenüberliegende Seiten AC, BD die Ordnungsstrahlen des involutorischen Strahlenbüschels F (EG.PQ...) und daher die beiden übrigen Seiten die Ordnungsstrahlen des involutorischen Büschels G (EF.PQ...) sind. Eben so ist durch ein Dreieck und zwei Gerade, von welchen keine durch einen Eckpunkt des Dreiecks geht, ein vollständiges Vierseit bestimmt, in Hinsicht auf welches je zwei einander gegenüberliegende Elemente des gegebenen Dreiecks einander zugeordnet und die gegebenen Geraden einander conjugirt sind.

340. Durch ein Dreieck ABC und zwei Gerade m, n, welche die Seiten des Dreiecks in sechs Punkten schneiden, sind vier Curven II. Ordnung bestimmt, deren jede durch die drei Eckpunkte des gegebenen Dreiecks geht und die beiden gegebenen Geraden berührt.

Durch ein Dreieck und zwei Punkte, welche aus den Eckpunkten des Dreiecks durch sechs Gerade projicirt werden, sind vier Curven II. Ordnung bestimmt, deren jede die drei Seiten des gegebenen Dreiecks berührt und durch die beiden gegebenen Punkte geht.

Nach dem vorigen Satze giebt es ein vollständiges Vierseit, von welchem ABC das Polardreieck ist, so dass überdiess die Geraden m, n durch je zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte des Vierseits harmonisch getrennt sind. Jede Seite s dieses Vierseits schneidet die gegebenen Geraden m, n in zwei Punkten, in welchen sie von einer der vier im Satze erwähnten Curven berührt werden. Es sei nämlich P der Schnittpunkt von AB und s und Q derjenige Eckpunkt des vollständigen Vierseits, welcher dem Punkte P gegenüberliegt. Da nun die Punkte P, Q sowohl durch die Punkte A, B als auch durch die Geraden m, n harmonisch getrennt sind, so geht (338) die Curve K, welche die Geraden m, n in den Punkten ms, ns berührt und durch den Punkt A geht, auch durch den Punkt B. Eben so lässt sich aber beweisen, dass die Curve K auch durch den Punkt C geht.

Unter den vier Curven ist noch eine, in Hinsicht auf welche dem Punkte P die Gerade p zugeordnet ist, welche den Punkt mn mit dem Punkte Q verbindet. Geht nun diese Gerade durch den Punkt C, so berühren beide Curven im Punkte C die Gerade PC. Wenn aber die Gerade p nicht durch den Punkt C geht, so schneiden sich die beiden Curven auch noch in dem Punkte D, welcher vom Punkte C durch den Punkt P und die Gerade p harmonisch getrennt ist. Auf diese Weise kann man, indem man statt des vollständigen Vierseits nur die Punkte P, Q in Betrachtung zieht, welche sowohl durch die Punkte A, B als auch durch die Geraden m, n harmonisch getrennt sind, den Satz auch auf 336 zurückführen.

341. Durch eine Linie K II. Ordnung und ein Dreieck ABC, von dessen drei Eckpunkten keiner in der Linie K liegt und höch-

stens einer in Hinsicht auf diese Linie der ihm gegenüberliegenden Seite des Dreiecks zugeordnet ist, ist eine andere Linie K_2 II. Ordnung bestimmt, so dass, wenn von zwei Punkten, welche durch zwei Eckpunkte des gegebenen Dreiecks harmonisch getrennt sind, der eine in der einen von den beiden Linien K, K_2 liegt, alsdann der andere in der andern liegt.

Man suche in der Geraden AB zu den Punkten M, N, welche dieselbe mit der Linie K gemein hat, die Punkte P, Q, so dass AMBP, ANBQ harmonische Würfe sind. Da nun in dem involutorischen Gebilde AB.MN... dem Punkte P der Punkt Q zugeordnet ist, so enthält (337) das einfache System (K, AC+BC) von Linien II. Ordnung eine Linie K_1, welche durch die Punkte P, Q geht. Sind die Punkte A, B durch die Punkte M, N harmonisch getrennt, so fällt P mit N, Q mit M und also K_1 mit K zusammen. Hat die Linie K mit der Geraden AB nur einen Punkt gemein, so dass also N mit M zusammenfällt, so hat die Linie K_1, weil alsdann auch Q mit P zusammenfällt, mit der Geraden AB nur den Punkt P gemein. In jedem Falle aber ist K_2 diejenige Linie II. Ordnung, welche in dem involutorischen Systeme (C,AB) der Linie K_1 zugeordnet ist. — Ist K eine Gerade, so ist K_2 eine Curve II. Ordnung, welche die drei Seiten des Dreiecks ABC berührt.

342. Wenn zwei vollständige Vierecke drei Eckpunkte mit einander gemein haben, so liegen die Eckpunkte ihrer Polardreiecke in einer und derselben Linie K II. Ordnung. Liegen auch die vierten Eckpunkte der Vierecke in einer gemeinschaftlichen Seite derselben, so hat die ihr gegenüberliegende Seite mit jener Linie nur einen Punkt gemein.

Wenn zwei vollständige Vierseite drei Seiten mit einander gemein haben, so sind die Seiten ihrer Polardreiecke in einem und demselben Büschel II. Ordnung enthalten. Schneiden sich die vierten Seiten der Vierseite in einem gemeinschaftlichen Eckpunkte derselben, so geht durch den gegenüberliegenden Eckpunkt nur ein Strahl des erwähnten Büschels.

Der Satz folgt aus dem vorigen und aus G. 102. Die im vorigen Satze durch K_2 bezeichnete Linie ist hier der Inbegriff von zwei Geraden.

343. In jedem einfachen Systeme von Linien II. Ordnung ist jedem geraden Gebilde ABC..., dessen Träger nicht im Systeme einem Punkte zugeordnet ist, ein Punktgebilde erster oder zweiter Ordnung projektivisch conjugirt.

In jedem einfachen Systeme von Büscheln II. Ordnung ist jedem Büschel I. Ordnung, dessen Mittelpunkt nicht im Systeme einer Geraden zugeordnet ist, ein Büschel erster oder zweiter Ordnung projektivisch conjugirt.

Es sei dem Geraden Gebilde ABC... in Hinsicht auf die eine L von zwei Linien des Systems der Büschel abc... und in Hinsicht auf die andere L_1 der Büschel $a_1b_1c_1$... zugeordnet, so erzeugen diese zu einander projektivischen Büschel ein zu ihnen perspektivisches und daher auch zu dem geraden Gebilde ABC... projektivisches Punktgebilde $A_1B_1C_1$..., welches in einer Geraden oder in einer Curve II. Ordnung liegt, je nachdem die beiden Büschel ihren gemeinschaftlichen Strahl entsprechend oder nicht entsprechend gemein haben. Da nun je zwei homologe Elemente der zu einander projektivischen Punktgebilde sowohl in Hinsicht auf die Linie L als auch in Hinsicht auf die Linie L_1 einander conjugirt sind, so sind sie auch in dem Systeme (L, L_1) einander conjugirt. Dass das System (L, L_1) weder ein System sechster noch ein System siebenter Art sei, versteht sich von selbst, da nach der Annahme der Geraden AB in Hinsicht auf keine zwei Linien des Systems ein und derselbe Punkt zugeordnet ist. Soll der letztere der im Satze erwähnten Fälle statt finden, so darf auch keinem Punkte der Geraden AB in Hinsicht auf alle Linien des Systems eine und dieselbe Gerade zugeordnet sein, was nur in Systemen erster, zweiter und vierter Art möglich ist.

344. Durch ein einfaches System von Linien II. Ordnung und eine Gerade h, welche nicht im Systeme einem Punkte zugeordnet ist, ist eine Linie II. Ordnung bestimmt, welche nämlich jeden Punkt enthält, der in Hinsicht auf irgend eine Linie des Systems der gegebenen Geraden zugeordnet ist.

Durch ein einfaches System von Büscheln II. Ordnung und einen Punkt, welchem nicht im Systeme eine Gerade zugeordnet ist, ist ein Büschel II. Ordnung bestimmt, welchem nämlich jede Gerade angehört, die in Hinsicht auf irgend einen Büschel des Systems dem gegebenen Punkte zugeordnet ist.

Nach dem vorigen Satze ist in dem Systeme dem geraden Gebilde h entweder ein gerades Gebilde g oder ein Punktgebilde K II. Ordnung projektivisch conjugirt. Im erstern Falle, wenn nämlich die Gerade h durch einen Punkt P geht, welchem in Hinsicht auf alle Linien des Systems eine und dieselbe Gerade p zugeordnet ist, ist der Geraden h in Hinsicht auf eine Linie des Systems jeder Punkt der Geraden g, in Hinsicht auf jede andere Linie des Systems aber ein Punkt der Geraden p zugeordnet, so dass also in diesem Falle die im Satze erwähnte Linie aus zwei Geraden g, p besteht. Im letztern Falle ist in Hinsicht auf jede Linie des Systems der Geraden h ein Punkt der Curve K zugeordnet.

345. Durch ein vollständiges Viereck und eine Gerade h, welche keine zwei Seiten des Vierecks in einem und demselben Punkte schneidet, sind sechs in einer und derselben Curve K II. Ordnung liegende Punkte bestimmt, deren jeder von der gegebenen Geraden durch zwei Eckpunkte des Vierecks harmonisch getrennt ist. Dieselbe Curve geht auch durch die drei Eckpunkte des zu dem vollständigen Vierecke gehörigen Polardreiecks und durch diejenigen Punkte P, Q der gegebenen Geraden, welche in Hinsicht auf das Viereck einander conjugirt sind. Die drei Geraden, welche jene sechs Punkte paarweise verbinden, schneiden sich in dem Punkte, welcher in Hinsicht auf die erwähnte Curve der Pol der gegebenen Geraden h ist

Durch ein vollständiges Vierseit und einen Punkt H, mit welchem keine zwei Eckpunkte des Vierseits in einer und derselben Geraden liegen, sind sechs einer und derselben Curve II. Ordnung sich anschmiegende Gerade bestimmt, deren jede von dem gegebenen Punkte durch zwei Seiten des Vierseits harmonisch getrennt ist. Dieselbe Curve berührt auch die drei Seiten des zu dem vollständigen Vierseite gehörigen Polardreiecks und diejenigen in dem gegebenen Punkte sich schneidenden Geraden, welche in Hinsicht auf das Vierseit einander conjugirt sind. Die drei Punkte, in welchen jene sechs Geraden paarweise sich schneiden, liegen in der Geraden, welche dem gegebenen Punkte in Hinsicht auf die erwähnte Curve zugeordnet ist.

Die Curve K ist nämlich das Punktgebilde II. Ordnung, welches (343) in Hinsicht auf das vollständige Viereck dem geraden Gebilde h projektivisch conjugirt ist. Den Punkten, in welchen die Gerade h die Seiten des zu dem vollständigen Vierecke gehörigen Polardreiecks schneidet, entsprechen die denselben gegenüberliegenden Eckpunkte des Dreiecks. Je zwei einander gegenüberliegende Seiten des Vierecks projiciren aus ihrem Schnittpunkte zwei Punkte der Curve, welche (335) durch die Punkte P, Q harmonisch getrennt sind und daher mit dem Pole der Geraden h in einer und derselben Geraden liegen.

Schneidet eine Gerade h drei Seiten eines vollständigen Vierecks in einem Eckpunkte desselben, so ist jedem andern Punkte der Geraden in Hinsicht auf das Viereck ein ausserhalb derselben liegender Punkt conjugirt, daher in diesem Falle die Gerade h und die Curve K, deren Punkte den Punkten der Geraden in Hinsicht auf das vollständige Viereck conjugirt sind, in jenem Eckpunkte des Vierecks sich berühren. Aber auch in diesem Falle geht die Curve K durch die drei Eckpunkte des zu dem vollständigen Vierecke gehörigen Polardreiecks und durch jeden Punkt, welcher von der Geraden h durch zwei Eckpunkte des Vierecks harmonisch getrennt ist.

346. Wenn die Curven eines einfachen Systems von Linien II. Ordnung nur drei Punkte A, B, C mit einander gemein haben, also in dem einen A dieser Punkte eine und dieselbe Gerade a berühren, so ist in dem Systeme jedem geraden Gebilde h, welches weder durch den Punkt A noch durch den Schnittpunkt F von a und BC geht, ein Punktgebilde K II. Ordnung projektivisch conjugirt. Geht die Gerade h durch keinen Eckpunkt des Dreiecks ABC, so hat sie mit der Curve K zwei Punkte P, Q gemein, welche einander abwechselnd entsprechen. Wenn aber die Gerade durch einen von den beiden Punkten B, C geht, so berührt sie in demselben die Curve K. Dass aber in beiden Fällen die Curve K die Gerade a in den Punkten A, F schneidet und im erstern dieser Punkte die Gerade f berührt, welche vom letztern durch die Geraden AB, AC harmonisch getrennt ist, geht daraus hervor, weil in dem Systeme dem Punkte ah der Punkt A, dem Punkte fh

der Punkt F, jedem dritten Punkte der Geraden h aber ein Punkt conjugirt ist, welcher ausserhalb der Geraden a, f liegt.

347. Wenn die Curven eines einfachen Systems von Linien II. Ordnung in einem Punkte A, in welchem sie eine und dieselbe Gerade a berühren, dreipunktig einander sich anschmiegen und also nur noch in einem Punkte B sich schneiden, so ist in dem Systeme jedem geraden Gebilde h, welches nicht durch den Punkt A geht, ein Punktgebilde K II. Ordnung projektivisch conjugirt. Dem Punkte ah ist der Punkt A, jedem andern Punkte der Geraden h ein ausserhalb der Geraden a liegender Punkt conjugirt, daher die Curve K im Punkte A die Gerade a berührt. Geht die Gerade h durch den Punkt B, so berührt sie in diesem Punkt die Curve K. Wenn aber die Gerade h nicht durch den Punkt B geht, so schneidet sie die Curve K in zwei im Systeme einander conjugirten Punkten. Dass aber die Curve K jeder Curve des Systems im Punkte A nur zweipunktig sich anschmiegt, geht aus Folgendem hervor.

Es sei h_1 eine andere nicht durch den Punkt A gehende Gerade und K_1 die Curve, deren Punkte den Punkten der Geraden h_1 conjugirt sind. Liegt nun der Punkt hh_1 in der Geraden a, so haben die Curven K, K_1 keinen von A verschiedenen Punkt mit einander gemein, daher sie in diesem Punkte vierpunktig einander sich anschmiegen. Da aber, wenn die Gerade h_1 durch den Punkt B geht, das System eine Curve enthält, welche die Gerade h_1 im Punkte B und daher die Curve K_1 in den beiden Punkten A, B berührt, so folgt (306), dass auch die Curve K im Punkte A den Curven des Systems nur zweipunktig sich anschmiegt. Liegt der Punkt hh_1 ausserhalb der Geraden a, so schmiegen die Curven K, K_1 im Punkte A dreipunktig einander sich an. Würden sie nämlich in ihrem andern gemeinschaftlichen Punkte G, der im Systeme dem Punkte hh_1 conjugirt ist, eine und dieselbe Gerade g berühren, so müsste jedem von G verschiedenen Punkte dieser Geraden ein ausserhalb der Linie $h+h_1$ liegender Punkt conjugirt sein und also diejenige Curve, deren Punkte den Punkt der Geraden g conjugirt sind, im Punkte hh_1 jede der Geraden h, h_1 berühren, was nicht möglich ist.

348. Durch fünf Punkte A, B, C, P, Q, welche nicht alle

in einer und derselben Geraden liegen und von welchen die beiden letztern durch keine zwei der drei erstern harmonisch getrennt sind, ist ein einfaches System von Linien II. Ordnung bestimmt, in welchem nämlich jeder der drei erstern Punkte sich selbst conjugirt ist, die beiden letztern aber einander conjugirt sind.

Wenn nämlich ABC ein Dreieck ist und die Punkte P, Q weder in einer und derselben Seite des Dreiecks liegen noch durch zwei Seiten des Dreiecks harmonisch getrennt sind, so gibt es einen Punkt D, so dass die Punkte P, Q in Hinsicht auf das vollständige Viereck ABCD einander conjugirt sind. Sind die Punkte P, Q durch zwei Seiten des Dreiecks ABC, aber nicht durch einen Eckpunkt des Dreiecks und die demselben gegenüberliegende Seite harmonisch getrennt, so ist das im Satze erwähnte System ein System zweiter Art. In allen übrigen Fällen ist das System ein System siebenter oder achter Art.

349. Durch ein einfaches System von Linien II. Ordnung und zwei Punkte S, T, welche in dem Systeme einander nicht conjugirt sind, ist eine Linie L des Systems bestimmt, in Hinsicht auf welche die gegebenen Punkte einander conjugirt sind.

Geht die Gerade ST durch keinen sich selbst conjugirten Punkt, so seien (335) P, Q diejenigen Punkte derselben, welche in dem Systeme einander conjugirt sind. Wenn nun der eine P von den beiden Punkten P, Q mit dem einen S von den beiden Punkten S, T zusammenfällt, so ist L diejenige Linie des Systems, welche mit der Geraden ST nur jenen Punkt gemein hat. Wenn aber P, Q, S, T vier verschiedene Punkte sind, so schneidet die Linie L die Gerade ST in den Punkten, welche sowohl durch die Punkte P, Q als auch durch die Punkte S, T harmonisch getrennt sind. Enthält das System eine Linie L, welche durch alle Punkte der Geraden S, T geht, so sind in Hinsicht auf diese Linie des Systems die Punkte S, T einander conjugirt. Wenn endlich keiner der bereits betrachteten Fälle statt findet, so haben die Gerade ST und die im Satze erwähnte Linie L entweder nur den Punkt S oder nur den Punkt T mit einander gemein oder sie schneiden sich in zwei Punkten, M, N, welche durch die Punkte S, T harmonisch getrennt sind, je nachdem derjenige Punkt der Geraden S T, welcher im Systeme sich selbst conjugirt ist, mit dem Punkte S oder mit dem Punkte T zusammenfällt oder ein dritter Punkt M der Geraden ST ist. Bemerkt wird noch, dass, wenn im Systeme dem Punkt S der Punkt S_1 conjugirt ist, in Hinsicht auf die Linie L der Punkt S und die Gerade S_1 T einander zugeordnet sind.

350. Wenn ein Punkt S und eine Gerade u in Hinsicht auf jede von drei Linien K, K_1, K_2 II. Ordnung einander zugeordnet sind, aber keine dieser Linien durch jenen Punkt geht und auch nicht alle drei einen Punkt mit einander gemein haben, so bilden die Geraden a, b, welche aus dem Punkte S die gemeinschaftlichen Punkte der Linien K_1, K_2 projiciren, mit den Geraden a_1, b_1, welche aus dem Punkte S die gemeinschaftlichen Punkte der Linien K, K_2 projiciren, und den Geraden a_2, b_2, welche aus dem Punkte S die gemeinschaftlichen Punkte der Linien K, K_1 projiciren, eine Involution $ab.a_1 b_1.a_2 b_2$.

Haben nämlich die Linien K_1, K_2 irgend einen ausserhalb der Geraden u liegenden Punkt mit einander gemein, so haben sie auch den Punkt mit einander gemein, welcher vom erstern durch den Punkt S und die Gerade u harmonisch getrennt ist, woraus hervorgeht, dass diejenige Linie des Systems (K_1, K_2), welche durch den Punkt S geht, entweder aus zwei Geraden a, b besteht oder selbst eine Gerade ist, in welchem Falle b und daher auch $a+b$ mit a identisch ist. Eben so ist a_1+b_1 die durch den Punkt S gehende Linie des Systems (K, K_2) und a_2+b_2 die durch den Punkt S gehende Linie des Systems (K, K_1). Da ferner die Linien K, K_1, K_2 nicht alle drei durch einen und denselben Punkt gehen, so haben keine zwei der drei Linien $a+b$, a_1+b_1, a_2+b_2 eine Gerade mit einander gemein, daher das System ($a+b$, a_1+b_1) ein System sechster Art ist und also in demselben zwei Gerade m, n enthalten sind. Ist nun M irgend ein von S verschiedener Punkt der Geraden m, welchem im Systeme ($K_2, m+n$) nicht der Punkt S, folglich ein anderer Punkt N der Geraden n conjugirt ist, so hat man zwei von S verschiedene Punkte M, N, welche in Hinsicht auf jede der drei Linien $a+b$, a_1+b_1, K_2, folglich auch (332) in Hinsicht auf die Linien K, K_1 und mithin auch in Hinsicht auf die Linie a_2+b_2 einander conjugirt sind, woraus man schliessen kann, dass in dem involutorischen Strahlenbüschel $ab.a_1b_1\ldots$, dessen Ordnungsstrahlen die Geraden m, n sind, dem Strahle a_2 der Strahl b_2 zugeordnet ist.

351. Durch drei Linien K, K_1, K_2 II. Ordnung, welche nicht einem und demselben einfachen Systeme von Linien II. Ordnung angehören, sind drei solche Systeme bestimmt, deren jedes nämlich zwei von den drei gegebenen Linien enthält. Wenn nun drei andere Linien II. Ordnung, deren jede einem der drei erwähnten Systeme angehört, irgend einen ausserhalb der drei erstern Linien liegenden Punkt mit einander gemein haben, so sind sie in einem und demselben vierten einfachen Systeme von Linien II. Ordnung enthalten.

Durch jeden Punkt A, welcher in keiner der drei Linien K, K_1, K_2 liegt, gehen drei andere Linien II. Ordnung, von welchen die eine L in dem Systeme (K_1, K_2), die andere L_1 in dem Systeme (K, K_2) und die dritte L_2 in dem Systeme (K, K_1) enthalten ist. Haben nun die Linien L, L_1 irgend einen von A verschiedenen Punkt B mit einander gemein, so gibt es (311) entweder zwei Punkte P, Q, welche durch die Punkte A, B harmonisch getrennt und zugleich in Hinsicht auf die Linie K_2 einander conjugirt sind, oder es liegt der Punkt B in der Linie K_2. Da aber, wenn zwei Punkte P, Q in Hinsicht auf jede der drei Linien L, L_1, K_2 einander conjugirt sind, sie auch (332) in Hinsicht auf die Linien K_1, K und mithin auch in Hinsicht auf die Linie L_2 einander conjugirt sind, und da eben so, wenn die drei Linien L, L_1, K_2 einen Punkt mit einander gemein haben, dieser auch in den Linien K, K_1, L_2 liegt, so folgt, dass in jedem Falle auch die Linie L_2 durch den Punkt B geht. Ist dem Punkte A eine durch ihn gehende Gerade a in Hinsicht auf die beiden Linien L, L_1 zugeordnet, so ist derjenige Punkt dieser Geraden, welche dem Punkte A in Hinsicht auf die Linie K_2 conjugirt ist, demselben Punkte auch in Hinsicht auf die Linien K, K_1, L_2 conjugirt, woraus man schliesen kann, dass der Punkt A und die Gerade a auch in Hinsicht auf die Linie L_2 einander zugeordnet sind. Durch das Bisherige ist bewiesen, dass jeder Punkt, welchen zwei der drei Linien L, L_1, L_2 mit einander gemein haben, auch in der dritten liegt, und dass, wenn einem solchen Punkte eine durch ihn gehende Gerade in Hinsicht auf zwei der drei Linien L, L_1, L_2 zugeordnet ist, sie demselben Punkte auch in Hinsicht auf die dritte zugeordnet ist. Da nun, wenn (L, L_1) ein System sechster Art ist, der im vorigen Satze betrachtete Fall statt findet, in welchem nämlich die Linien L, L_1, L_2 nur den Punkt A mit einander gemein haben und jeder diesem Punkte in Hinsicht auf die Linie K_2 conjugirte Punkt demselben auch in Hinsicht auf die Linien K, K_1 conjugirt ist, so sind die drei Linien L, L_1, L_2 in jedem Falle in einem und demselben einfachen Systeme von Linien II. Ordnung enthalten.

352. Durch drei Linien K, K_1, K_2 II. Ordnung, welche nicht einem und demselben einfachen Systeme von Linien II. Ordnung angehören aber eine Gerade h in denselben zwei Punkten P, Q schneiden, sind drei in einem Punkte sich schneidende Gerade p, p_1, p_2 bestimmt, so dass die Linie $h+p$ dem Systeme (K_1, K_2) die Linie $h+p_1$ dem Systeme (K, K_2) und die Linie $h+p_2$ dem Systeme (K, K_1) angehört.

Es sei A irgend ein dritter Punkt der Geraden h, so besteht diejenige Linie des Systems (K_1, K_2), welche durch den Punkt A geht, aus der Geraden h und einer Geraden p, die jedoch mit h zusammenfällt, wenn die Linien K_1, K_2 in den Punkten P, Q sich berühren. Von den Geraden p, p_1, p_2 können keine zwei in einander fallen, weil, wenn p mit p_1 identisch wäre, jede der drei Linien K, K_1, K_2 in dem Systeme $(K_2, h+p)$ enthalten sein würde, was gegen die Annahme ist. Dass aber die drei Geraden p, p_1, p_2 in einem und demselben Punkte sich schneiden, geht daraus hervor, weil (351) die drei Linien $h+p$, $h+p_1$, $h+p_2$ in einem und demselben einfachen Systeme von Linien II. Ordnung enthalten sind und also jeder Punkt, welchen irgend zwei derselben mit einander gemein haben, auch in der dritten liegt.

Der obige Satz gilt auch, wenn die drei Linien K, K_1, K_2 durch einen und demselben Punkt der Geraden h gehen aber keine mit dieser Geraden noch einen Punkt gemein hat. Wenn also drei Curven II. Ordnung, welche nicht in einem und demselben einfachen Systeme von Linien II. Ordnung enthalten sind, eine Gerade entweder in denselben zwei Punkten schneiden oder in einem und demselben Punkte berühren, und je zwei von den drei Curven noch zwei Punkte mit einander gemein haben, so schneiden sich die drei Geraden, welche diese Punkte paarweise verbinden, in einem und demselben Punkte.

353. Durch ein einfaches System von Linien II. Ordnung und noch eine Linie L II. Ordnung, welche mit keiner Linie des Sy-

stems mehr als vier Punkte gemein hat und irgend eine Linie desselben in vier Punkten schneidet, deren zwei, aber auch nur zwei, nämlich A, B gemeinschaftliche Punkte von allen Linien des Systems sind, ist ein Punkt S bestimmt, so dass je zwei Punkte der gegebenen Linie L, welche aus dem Punkte S durch eine und dieselbe Gerade projicirt werden, in einer und derselben Linie des gegebenen Systems liegen.

Haben alle Linien des Systems die Gerade AB mit einander gemein, so ist der Satz offenbar. Wenn aber nur eine Linie $AB+h$ des gegebenen Systems durch alle Punkte der Geraden AB geht, so seien K, K_1 irgend zwei andere Linien desselben und q, q_1 die Geraden, so dass die Linie $AB+q$ in dem Systeme (K, L) und die Linie $AB+q_1$ in dem Systeme (K_1, L) enthalten ist. Bemerkt man nun, dass (352) die Gerade q_1 durch den Schnittpunkt S von h und q geht und jeder Punkt, welchen sie mit der einen von den beiden Linien K_1, L gemein hat, auch in der andern liegt, so folgt der Satz. — Wenn die Gerade h durch keinen von den beiden Punkten A, B geht und mit den Linien des gegebenen Systems die Punkte C, D mit der Linie L aber die E, F gemein hat, so ist (335) S der Punkt, welcher in dem involutorischen Gebilde CD.EF... dem Schnittpunkte von AB und h zugeordnet.

Der obige Satz gilt auch, wenn A mit B zusammenfällt, nämlich dem Punkte A in Hinsicht auf alle Linien des gegebenen Systems eine und dieselbe durch ihn gehende Gerade zugeordnet ist, mit welcher die Linie L nur den Punkt A gemein hat, und diese Linie irgend eine Linie des Systems in zwei Punkten schneidet, welche ausserhalb der übrigen Linien desselben liegen.

354. Ein einfaches System von Linien II. Ordnung und ein gerades Gebilde g sollen zu einander perspektivisch heissen, wenn eine Linie des Systems mit der Geraden g nur einen Punkt P gemein hat, jede andere Linie des Systems aber die Gerade g in dem Punkte P und in noch einem Punkte schneidet, und wenn auf jeden von P verschiedenen Punkt des geraden Gebildes die durch ihn gehende Linie des Systems auf den Punkt P aber diejenige Linie desselben bezogen wird, welche durch keinen andern Punkt der Geraden g geht.

Ist also von einem einfachen Systeme von Linien II. Ordnung und einem zu demselben perspektivischen geraden Gebilde g die Rede, so versteht es sich von selbst, dass das System kein System sechster Art ist und dass die Gerade g durch einen im Systeme sich selbst conjugirten Punkt P aber weder durch noch einen solchen Punkt geht noch im Systeme dem Punkte P zugeordnet ist.

355. Gerade Gebilde $PP_1P_2P_3\ldots$, $QQ_1Q_2Q_3\ldots$, welche zu einem und demselben einfachen Systeme $KK_1K_2K_3\ldots$ von Linien II. Ordnung perspektivisch sind, sind zu einander projektivisch.

Wenn nämlich durch den Schnittpunkt der Geraden entweder nur eine Linie des Systems oder eine Gerade geht, welche ihm in Hinsicht auf jede Linie des Systems zugeordnet ist, so sind (353) die geraden Gebilde Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels S. Wenn aber keiner der erwähnten Fälle statt findet, so darf man nur noch ein zu dem Systeme perspektivisches gerades Gebilde annehmen, welches aber nicht durch den gemeinschaftlichen Punkt der beiden erstern geht. Da nun das dritte Gebilde zu jedem der beiden erstern projektivisch ist, so sind auch diese zu einander projektivisch.

Sind die Punkte P, P_2 durch die Punkte P_1, P_3 und also auch die Punkte Q, Q_2 durch die Punkte Q_1, Q_3 harmonisch getrennt, so sollen auch die Linien K, K_2 durch die Linien K_1, K_3 harmonisch getrennt heissen. Ein beliebiges Elementargebilde $qq_1q_2q_3\ldots$ soll zu dem Gebilde $KK_1K_2K_3\ldots$, welches aus Linien II. Ordnung besteht, projektivisch heissen, wenn das erstere Gebilde zu irgend einem und daher zu jedem geraden Gebilde projektivisch ist, welches zum letztern perspektivisch ist.

356. Wenn der Mittelpunkt A eines Strahlenbüschels A in einem einfachen Systeme von Linien II. Ordnung sich selbst, aber auch nur sich selbst, conjugirt ist, und man bezieht auf jede Linie des Systems denjenigen Strahl des Büschels, welcher in Hinsicht auf dieselbe jenem Punkte zugeordnet ist, so sind das System von Linien und der Strahlenbüschel projektivisch auf einander bezogen.

Besteht jede Linie des Systems aus zwei Geraden, so ist der Satz offenbar. Schneiden sich die Linien des Systems in vier Punkten A, B, C, D, so sei g ein zu dem Systeme perspektivisches gerades Gebilde, welches durch den Punkt A geht und die Geraden CD, BD, BC in den Punkten P, P_1, P_2 schneide. Es seien ferner L, L_1, L_2 die durch diese Punkte gehenden Linien des Systems, deren jede aus zwei Geraden besteht. Endlich seien K, K_1, zwei Curven des Systems, von welchen die erstere dem Punkte A, die letztere also einem andern Punkte R des geraden Gebildes g entspricht, und Q, Q_1, Q_2 die Punkte, in welchen die der Curve K_1 im Punkte A sich anschmiegende Gerade die Geraden CD, BD, BC schneidet, so ist (355) $QQ_1Q_2A \barwedge PP_1P_2R$. Da aber (G. 221) auch $A(BCDP) \barwedge PP_1P_2A$ und $A(BCDQ) \barwedge QQ_1Q_2A \barwedge PP_1P_2R$ ist, so ist $A(BCDPQ) \barwedge PP_1P_2AR \barwedge LL_1L_2KK_1$. — Wenn die Curven des Systems in zwei Punkten A, B sich schneiden und in einem dritten C sich berühren, so nehme man ein zu dem Systeme perspektivisches gerades Gebilde $CPRR_1$... an, welches durch den Punkt C geht und also die Gerade AB in einem Punkte P schneidet. Es seien ferner L, L_1, K, K_1 die den Punkten C, P, R, R_1 des geraden Gebildes entsprechenden Linien des Systems und T, T_1 diejenigen Punkte der Geraden CP, in welchen dieselbe von den im Punkte A den Curven K, K_1 sich anschmiegenden Geraden geschnitten wird. Da nun die Curven K, K_1 homologe Gebilde von zwei zu einander collineären ebenen Systemen sind, welche alle Strahlen des Büschels C und alle Punkte der Geraden AB entsprechend gemein haben, so ist $CPRT \barwedge CPR_1T_1$, folglich (85) $CPTT_1 \barwedge CPRR_1$ und mithin $A(CPTT_1) \barwedge CPRR_1 = LL_1KK_1$. — Wenn die Curven des Systems in einem Punkte B dreipunktig einander sich anschmiegen, so sei BRR_1R_2... ein durch diesen Punkt gehendes zu dem Systeme perspektivisches gerades Gebilde. Ferner seien L, K, K_1, K_2 die den Punkten B, R, R_1, R_2 des geraden Gebildes entsprechenden Linien des Systems und T, T_1, T_2 diejenigen Punkte der Geraden BR, in welchen dieselbe von den im Punkte A den Curven K, K_1, K_2 sich anschmiegenden Geraden geschnitten wird. Da nun K, K_1 homologe Curven von zwei zu einander collineären ebenen Systemen sind, welche alle Strahlen des Büschels B aber keinen ausserhalb der Geraden AB liegenden Punkt entsprechend gemein haben, so ist $\overline{BRT} \barwedge \overline{BR_1T_1}$, also auch (85) $\overline{BTT_1} \barwedge \overline{BRR_1}$. Da eben so $\overline{BTT_2} \barwedge \overline{BRR_2}$ ist, so ist $\overline{B}TT_1T_2 \barwedge \overline{B}RR_1R_2$ und demnach $A(BTT_1T_2) \barwedge BRR_1R_2 \barwedge LKK_1K_2$.

357. Wenn in einem einfachen Systeme von Linien II. Ordnung dem Punkte M der Punkt S aber auch nur dieser Punkt conjugirt ist, und man bezieht auf jede Linie des Systems denjenigen Strahl des Büschels S, welcher in Hinsicht auf dieselbe dem Punkte M zugeordnet ist, so ist der Büschel S auf das System von Linien projektivisch bezogen.

Enthält das System einen sich selbst conjugirten Punkt M_1, welcher ausserhalb der Geraden MS liegt, so kann man das gerade Gebilde, welches durch die beiden Punkte M, M_1 geht, auf das gegebene System von Linien perspektivisch beziehen. Wenn nun den Punkten M, M_1, M_2, M_3 des erwähnten geraden Gebildes die Linien L, L_1, L_2, L_3 des Systems entsprechen, so sind in Hinsicht auf diese Linien dem Punkte M bezüglich die Geraden SM, SM_1, SQ_2, SQ_3 zugeordnet, so dass $MM_1Q_2M_2$, $MM_1Q_3M_3$ harmonische Würfe sind. Da hiernach $MM_1Q_2Q_3 \barwedge MM_1M_2M_3$ ist, so ist auch $S(MM_1Q_2Q_3) \barwedge MM_1M_2M_3 \barwedge LL_1L_2L_3$. Gilt aber der Satz für irgend einen Punkt M und den ihm zugeordneten Büschel S, so gilt er, wie sogleich bewiesen werden soll, auch von jedem andern Punkte N und den demselben zugeordneten Büschel T, sei es nun, dass der Punkt N, welchem im Systeme nur der Punkt T conjugirt ist, mit dem Punkte T zusammenfällt, welcher Fall in der vorigen Nummer betrachtet worden ist, oder dass N, T zwei verschiedene Punkte sind. Wenn nämlich L, L_1, L_2, L_3 irgend vier Linien des Systems und in Hinsicht auf dieselben dem Punkte M die Geraden m, m_1, m_2, m_3, dem Punkte N die Geraden n, n_1, n_2, n_3, mithin der Geraden MN die Punkte mn, m_1n_1, m_2n_2, m_3n_3 zugeordnet sind, so liegen diese Punkte nach 343 und 344 entweder in einer und derselben Geraden p oder sie liegen mit den Punkten S, T in einer und derselben Curve K II. Ordnung, daher in jedem Falle der Wurf $mm_1m_2m_3$ zu dem Wurfe $nn_1n_2n_3$ projektivisch ist. Zugleich geht hieraus hervor, dass das Punktgebilde, welches die zu einander projektivischen Strahlenbüschel $mm_1m_2\ldots$, $nn_1n_2\ldots$ erzeugen, ebenfalls zu dem gegebenen Systeme von Linien projektivisch ist, wenn nämlich auf jede dieser Linien derjenige Punkt jenes Gebildes bezogen wird, welcher in Hinsicht auf dieselbe der Geraden MN zugeordnet ist. Angenommen wird hier, dass die Punkte S, T nicht in einander fallen.

Der für den Punkt M und den Büschel S unter der Voraussetzung giltige Beweis, dass die Gerade MS nicht durch jeden im Systeme sich selbst conjugirten Punkt gehe, kann auf den Punkt N und den Büschel T nur dann nicht angewendet werden, wenn entweder die Punkte N, T in einander fallen oder alle Curven des Systems die Gerade NT in denselben zwei Punkten schneiden und in dem einen dieser Punkte dreipunktig einander sich anschmiegen. Ist das gegebene System ein System sechster Art, so ist der obige Satz als eine Erklärung zu betrachten.

358. Durch ein Viereck ABCD, dann eine Curve K II. Ordnung, welche durch drei Eckpunkte A, B, C des Vierecks aber nicht durch den vierten geht, und ein gerades Gebilde DPQ..., welches durch den vierten Eckpunkt des Vierecks aber durch keinen der drei erstern geht, ist ein Punkt S der gegebenen Curve bestimmt, so dass, wenn man aus ihm die Curve und das gegebene gerade Gebilde auf einander projicirt, je zwei homologe Punkte der zu einander projektivischen Gebilde mit den vier Eckpunkten des Vierecks in einer und derselben Linie II. Ordnung liegen.

Die Curve K enthält nämlich (9) einen ausserhalb der Geraden DP liegenden Punkt S, so dass der Wurf ABCS zu dem Wurfe D(ABCP) projektivisch ist. Ist also P_1 derjenige Punkt der Curve K, welcher aus dem Punkte S durch die Gerade SP projicirt wird, so ist $P_1(ABCP) \barwedge D(ABCP)$, woraus man schliessen kann, dass die Punkte A, B, C, D, P, P_1 in einer und derselben Linie II. Ordnung liegen, welche, im Falle der Punkt P_1 mit einem der drei Punkte A, B, C zusammenfällt, in diesem Punkte die Curve K berührt.

359. Durch ein Dreieck ABC, dann eine Curve K II. Ordnung, welche durch zwei Eckpunkte A, B des Dreiecks geht, mit der Seite AC aber auch noch einen ausserhalb der beiden andern Seiten liegenden Punkte P_1 gemein hat, und ein gerades Gebilde CPQ..., welches durch den dritten Eckpunkt des Dreiecks aber durch keinen der beiden erstern geht, ist ein Punkt S der gegebenen Curve bestimmt, so dass, wenn man aus diesem Punkte das gegebene ge-

rade Gebilde und die Curve auf einander projicirt, je zwei homologe Punkte der zu einander projektivischen Punktgebilde mit den drei Eckpunkten des Dreiecks in einer und derselben Linie L II. Ordnung, welche mit der durch den Punkt A gehenden Tangente AT der gegebenen Curve entweder nur den Punkt A gemein hat oder durch alle Punkte dieser Geraden geht.

Es sei P der Schnittpunkt von AB und CP, so ist S derjenige Punkt der Curve K, welcher aus dem Punkte P_1 durch die Gerade P_1P projicirt wird. Wenn nämlich der Punkt Q der Geraden CP und der Punkt Q_1 der Curve K aus dem Punkt S durch eine und dieselbe Gerade projicirt werden, so ist $Q(ABCQ_1) \barwedge S(ABP_1Q_1) \barwedge A(TBCQ_1)$, woraus der Satz folgt. Ist Q der Schnittpunkt von AT und CP, so besteht die Linie L aus den beiden Geraden AT, BC. Fällt Q mit P zusammen, so ist L der Inbegriff der Geraden AB, AC.

360. Durch ein Dreieck ABH und eine Curve K II. Ordnung, welche in dem Eckpunkte A des Dreiecks die Seite AH berührt, mit der Seite AB aber auch einen Punkt H_1 gemein hat, der kein Eckpunkt des Dreiecks ist, ist ein Punkt S der Curve bestimmt, so dass, wenn man aus diesem Punkte die dritte Seite des Dreiecks und die gegebene Curve auf einander projicirt, je zwei homologe Punkte der zu einander projektivischen Punktgebilde mit den beiden Eckpunkten A, B, des Dreiecks in einer und derselben Linie L II. Ordnung liegen, welche im erstern dieser Punkte der gegebenen Curve wenigstens dreipunktig sich anschmiegt.

Die Gerade H_1H projicirt aus dem Punkte H_1 den im Satze erwähnten Punkt S. Wenn nämlich aus diesem Punkte ein Punkt Q der Geraden BH und ein Punkt Q_1 der Curve K durch eine und dieselbe Gerade projicirt werden und man denjenigen Punkt der Curve, welcher aus dem Punkte A durch die Gerade AQ projicirt wird, durch R bezeichnet, so ist $Q(RSH_1H) \barwedge A(RSH_1H) \barwedge Q_1(RSH_1A)$. Da hiernach die Punkte R, H_1 mit dem Schnittpunkte von BH und AQ_1 in einer und derselben Geraden liegen, so giebt es, wenn Q nicht mit H zusammenfällt, eine Curve L II. Ordnung, welche durch die Punkte A, B, Q, Q_1 geht und (187) im Punkte A der gegebenen Curve drei oder vierpunktig sich anschmiegt, je nachdem die Gerade SQ durch den Punkt A oder nicht durch diesen Punkt geht. Fällt Q mit Q_1 zusammen, so berührt die Curve L in diesem Punkte die Gerade SQ. Fällt Q mit B zusammen, so berührt die Curve L in diesem Punkte die Gerade HB. Wenn endlich Q mit H und also Q_1 mit H_1 zusammenfällt, so besteht die im Satze erwähnte Linie L aus den beiden Geraden AH, AB.

361. Durch eine Curve K II. Ordnung, vier in ihr liegende Punkte A, B, C, T und eine Gerade g, welche durch den ersten der gegebenen Punkte aber durch keinen der drei übrigen geht, ist ein Punkt S der Curve bestimmt, so dass, wenn man aus diesem Punkte das gegebene gerade Gebilde g und die Curve K auf einander projicirt, je zwei homologe Punkte der zu einander projektivischen Punktgebilde mit den drei erstern der gegebenen Punkte in einer Linie L II. Ordnung liegen, welche mit der durch den ersten und vierten Punkt gehenden Geraden AT entweder nur jenen Punkt A gemein hat oder durch alle Punkte dieser Geraden geht.

Es sei H der Schnittpunkt von BC und g, so ist S derjenige Punkt der Curve K, welcher aus dem Punkte T durch die Gerade TH projicirt wird. Wenn nämlich ein Punkt P der Geraden AH und ein Punkt P_1 der Curve K aus dem erwähnten Punkte S durch eine und dieselbe Gerade projicirt werden, so ist A(TBCP) $\barwedge$ T(ABCS) $\barwedge$ P_1(ABCS), woraus der Satz folgt. Fällt der Punkt P_1 mit einem von den beiden Punkten B, C zusammen, so berührt in diesem Punkte die Curve L die gegebene Curve K. Fällt P mit H und also P_1 mit T zusammen, so besteht die Linie L aus den beiden Geraden BC, AT. Fällt P mit P_1 zusammen, ohne dass die Gerade SP durch A geht, so berührt die Curve L im Punkte P die Gerade SP. Wenn aber die Punkte P, P_1 mit dem Punkte A zusammenfallen, so ist L der Inbegriff der Geraden AB, AC.

362. Durch eine Curve K II. Ordnung, drei in ihr liegende Punkte A, B, T und eine Gerade g, welche durch den ersten der gegebenen Punkte aber durch keinen der beiden übrigen geht, ist ein Punkt S der Curve bestimmt, so dass, wenn man aus ihm die Curve K und das gerade Gebilde g auf einander projicirt, durch je zwei homologe ausserhalb der Geraden AT liegende Punkte der zu einander projektivischen Punktgebilde eine Curve L II. Ordnung geht, welche im ersten der drei gegebenen Punkte die eben er-

erwähnte durch den ersten und dritten gehende Gerade berührt, im zweiten aber der gegebenen Curve sich anschmiegt.

Es werde die der Curve K im Punkte B sich anschmiegende Gerade von der Geraden g im Punkte H geschnitten, so ist S derjenige Punkt der Curve K, welcher aus dem Punkte T durch die Gerade TH projicirt wird. Wenn nämlich ein Punkt P der Geraden AH und ein Punkt P_1 der Curve K aus dem erwähnten Punkte S durch eine und dieselbe Gerade projicirt werden, so enthält, wie sogleich gezeigt werden soll, das einfache System (AB, AT+BH) von Linien II. Ordnung eine Linie L, welche mit der Geraden SP die Punkte P, P_1 und zwar nur diese Punkte gemein hat. Geht die Gerade SP durch keinen der drei Punkte A, B, T, so seien M, F, G die Punkte, in welchen sie die Geraden AB, AT, BH schneidet. Da nun die zu einander projektivischen geraden Gebilde, in welchen die zur Curve K perspektivischen Strahlenbüschel A, S von der Geraden BH geschnitten werden, nur den Punkt B und also ihre Projektionen auf die Gerade SP aus dem Punkte A nur den Punkt M entsprechend gemein haben, so ist (85) MM.FG.PP_1 eine Involution, woraus man (335) schliessen kann, dass die durch den Punkt P gehende Curve des erwähnten Systems auch durch den Punkt P_1 geht und, im Falle P_1 mit P identisch ist, in diesem Punkte die Gerade SP berührt. Geht die Gerade SP durch den Punkt B, so hat die Curve II. Ordnung, welche durch den Punkt P geht und die Geraden AT, BH in den Punkten A, B berührt, mit der gegebenen Curve keinen dritten Punkt gemein, daher in diesem Falle die Curven K, L im Punkte B dreipunktig einander sich anschmiegen. Geht die Gerade SP durch den Punkt A, so fällt die Linie L mit der Geraden AB zusammen. Wenn endlich die Gerade SP durch den Punkt T geht, so ist L der Inbegriff der Geraden AT, BH.

363. Eine Curve K II. Ordnung und ein einfaches System von Linien II. Ordnung sollen zu einander perspektivisch heissen, wenn die Curve mit keiner Linie des Systems mehr als einen ausserhalb der übrigen liegenden Punkt gemein hat und auf jeden Punkt der Curve, durch welchen nur eine Linie des Systems geht, eben diese Linie bezogen wird. Es ist alsdann von selbst auch jedem Punkte der Curve K, welchen die Linien des Systems mit

einander gemein haben, eine dieser Linien zugewiesen. Um aber zu beweisen, dass die Curve zu dem Systeme von Linien projektivisch sei, darf man nur (355) zeigen, dass es ein zu demselben perspektivisches gerades Gebilde giebt, welches zu der Curve K projektivisch ist, wenn man nämlich je zwei Punkte dieser Gebilde, welche einer und derselben Linie des Systems entsprechen, einander entsprechend nennt. Haben die Linien des Systems mehr als vier Punkte mit einander gemein, so ist der Satz von selbst offenbar. Sind aber in dem Systeme Curven enthalten, so hat man, da fünf Fälle bereits in den vorigen Nummern betrachtet worden sind, nur noch nachstehende zwei zu betrachten.

I. Wenn die Curven des Systems in einem Punkte A, in welchem sie eine und dieselbe Gerade a berühren, dreipunktig einander sich anschmiegen, folglich nur noch einen Punkt B mit einander gemein haben, und die Curve K durch diese beiden Punkte geht, so entspricht dem Punkte A der Curve K der Inbegriff der Geraden a, AB, dem Punkte B aber diejenige Curve L des Systems, welche die Curve K, die von allen Curven des Systems im Punkte A berührt wird, auch im Punkte B berührt. Es seien nun C, P zwei ausserhalb der Geraden AB liegende Punkte der Curve K und D, Q ihre Projektionen auf die Curve L aus dem Punkte A. Es sei ferner S derjenige Punkt der Curve K, welcher aus dem Punkte B durch die Gerade BD projicirt wird, so schneiden sich die drei Geraden AB, DQ, PS in einem und demselben Punkte, welcher nämlich (320) in Hinsicht auf jede der drei Linien AB, K, L dem Schnittpunkte der Geraden AP, BS conjugirt ist, woraus man schliessen kann, dass diejenige Curve des Systems, welche dem Punkte P der Curve K entspricht, auch durch den Schnittpunkt von AD und SP geht. Es liegen hiernach, wenn man die Curve K und das gerade Gebilde ADC... aus dem Punkte S auf einander projicirt, je zwei homologe Punkte der zu einander projektivischen Gebilde in einer und derselben Linie des gegebenen Systems.

II. Wenn die Curven des Systems in einem Punkte A, in welchem sie die Gerade a berühren, einander vierpunktig, also in demselben Punkte der Curve K dreipunktig sich anschmiegen, und B, P irgend zwei andere Punkte dieser Curve sind, so wird die durch den Punkt B gehende Curve L des Systems von der Geraden AP im Punkt A und in noch einem Punkte Q und die Curve K von der im Punkte B der Curve L sich anschmiegenden Geraden, im Punkte B und in noch einem Punkte S geschnitten. Bezieht man nun die drei Büschel B, S, A projektivisch so auf einander, dass der erste und zweite das gerade Gebilde a, der zweite und dritte aber die Curve K erzeugen, so erzeugen der erste und dritte die Curve L, welche nämlich im Punkte B die Gerade BS berührt und mit der Curve K nur noch den Punkt A gemein hat. Da hiernach die Geraden SP, BQ die Gerade a in einem und demselben Punkte schneiden, so geht diejenige Curve des Systems, welche durch den Bunkt P geht, auch durch den Schnittpunkt P_1 von AB undSP. Wenn man also die Curve K und das gerade Gebilde ABP_1... aus dem Punkte S auf einander projicirt, so liegen je zwei homologe Punkte der zu einander projektivischen Gebilde in einer und derselben Linie des gegebenen Systems.

---

§. 25.

Curven II. Ordnung, welche in zwei Punkten, die jedoch auch in einander fallen können, sich berühren.

364. Wenn eine Gerade mit der einen von drei Linien, welche einem und demselben einfachen Systeme von Linien II. Ordnung angehören, die Punkte A, B, mit der andern aber die Punkte A_1, B_1 und mit der dritten die Punkte A_2, B_2 gemein hat, so dass die Gerade durch keinen gemeinschaftlichen Punkt der drei Linien geht, so ist (335) $AB.A_1B_1.A_2B_2$ eine Involution. Fällt B_1 mit A_1 und zugleich B_2 mit A_2 zusammen, so sind die Punkte A, B durch die Punkte A_1, A_2 harmonisch getrennt. Wenn also zwei Curven II. Ordnung in zwei Punkten M, N sich berühren, so schneidet jede Gerade, welche der einen Curve in einem dritten Punkte sich anschmiegt, die andere in zwei Punkten, welche durch jenen dritten Punkt der erstern Curve und die Gerade MN harmonisch getrennt sind, die die Berührungspunkte der Curven mit einander verbindet. Dasselbe gilt auch noch, wenn die Punkte M, N

in einander fallen, nämlich die Curven in einem Punkte vierpunktig einander sich anschmiegen und also die Gerade MN die gemeinschaftliche Tangente derselben wird.

365. Durch eine Curve K II. Ordnung und zwei Punkte A, B, welche ausserhalb der Curve aber in einer und derselben ihr sich anschmiegenden Geraden liegen, ist eine andere Curve K_1 II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die gegebenen Punkte geht und der gegebenen Curve vierpunktig sich anschmiegt.

Durch eine Curve II. Ordnung und zwei Gerade, welche die Curve in drei Punkten schneiden, ist eine andere Curve II. Ordnung bestimmt, welche nämlich die beiden gegebenen Geraden berührt und der gegegebenen Curve vierpunktig sich anschmiegt.

Die gemeinschaftliche Tangente der Curven K, K_1 muss die Gerade AB in dem Punkte S schneiden, der von dem Punkte, welchen diese Gerade mit der Curve K gemein hat, durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist. Uebrigens ist die Gerade, welche jenem Punkte S in Hinsicht auf die Curven K, K_1 zugeordnet ist, demselben Punkte auch in Hinsicht auf jede Curve II. Ordnung zugeordnet, welche durch die gegebenen Punkte A, B geht und die gegebene Curve in zwei Punkten berührt. Die Berührungspunkte liegen mit dem Punkte S in einer und derselben andern Geraden. Und wenn eine Curve II. Ordnung die Curve K in zwei Punkten berührt, welche mit dem Punkte S in einer und derselben Geraden liegen, und durch den einen von den beiden Punkten A, B geht, so geht sie auch durch den andern.

366. Durch eine Curve K II. Orduung nnd zwei Punkte A, B, in welchen vier Tangenten der Curve paarweise sich schneiden, sind vier andere Curven II. Ordnung bestimmt, deren jede durch die beiden gegebenen Punkte geht und der gegegebenen Curve vierpunktig sich anschmiegt.

Durch eine Curve II. Ordnung und zwei Gerade, welche die Curve in vier Punkten schneiden, sind vier andere Curven II Ordnung bestimmt, deren jede die beiden gegebenen Geraden berührt und der gegebenen Curve vierpunktig sich anschmiegt.

Die Gerade AB enthält zwei Punkte S, T, welche durch die Punkte A, B harmonisch getrennt und zugleich in Hinsicht auf die Curve K einander conjugirt sind. Aus dem Pole P der Geraden AB werden die Punkte S, T durch zwei Gerade projicirt, welche die Curve K in vier Punkten schneiden. Jede Curve II. Ordnung, welche in irgend einem dieser Schnittpunkte der gegebenen Curve vierpunktig sich anschmiegt und durch den Punkt A geht, geht auch (364) durch den Punkt B. Berührt eine Curve K_1 II. Ordnung, welche durch die beiden Punkte A, B geht, die gegebene in zwei Punkten, so liegen diese entweder mit dem Punkte S oder mit dem Punkte T in einer und derselben Geraden, daher auch in Hinsicht auf die Curve K_1 im erstern Falle dem Punkte S die Gerade PT, im letztern dem Punkte T die Gerade PS zugeordnet ist. Und wenn eine Curve II. Ordnung die gegebene in zwei Punkten berührt, welche mit irgend einem von den beiden Punkten S, T in einer und derselben Geraden liegen, so schneidet sie entweder die Gerade AB in den Punkten A, B oder sie geht durch keinen dieser Punkte.

367. Durch ein Dreieck ABC und eine Curve K II. Ordnung, welche zwei Seiten AB, AC des Dreiecks berührt aber durch keinen seiner Eckpunkte geht, ist eine andere Curve II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die drei Eckpunkte des Dreiecks geht und die gegebene Curve in zwei Punkten berührt.

Durch ein Dreieck und eine Curve II. Ordnung, welche durch zwei Eckpunkte des Dreiecks geht, aber keine Seite desselben berührt, ist eine andere Curve II. Ordnung bestimmt, welche nämlich die drei Seiten des Dreiecks und überdiess in zwei Punkten die gegebene Curve berührt.

Es seien P, Q die Punkte, in welchen die Curve K die Geraden AB, AC berührt, so giebt es in denselben Geraden zwei andere Punkte P_1, Q_1, so dass $APBP_1$, $AQCQ_1$ harmonische Würfe sind. Da nun in dem Systeme (K, P_1Q_1) dem Punkte P der Punkt P_1 und dem Punkte Q der Punkt Q_1 conjugirt ist, so geht diejenige Curve des Systems, welche durch den Punkt A geht, auch durch die Punkte B, C. Und wenn eine Curve II. Ordnung die gegebene in zwei Punkten berühren und zugleich durch die drei Eckpunkte des Dreiecks ABC gehen soll, so muss die Gerade, welche die Berührungspunkte M, N der Curven mit einander verbindet, sowohl durch den Punkt P_1 als auch durch den Punkt Q_1 gehen, folglich mit P_1Q_1 zusammenfallen. Hat die Gerade P_1Q_1 mit der Curve K nur einen Punkt gemein, so dass also M mit N zusammenfällt, so schmiegen die beiden Curven in diesem Punkte vierpunktig einander sich an. Bemerkt wird noch, dass in Hinsicht auf beide Curven auch dem Schnittpunkte der Geraden PQ, P_1Q_1 der Schnittpunkt der Geraden PQ_1, P_1Q conjugirt ist und dass diese Punkte durch die Punkte A, B harmonisch getrennt sind.

368. Durch ein Dreieck ABC und eine Curve K II. Ordnung, welche eine aber auch nur eine Seite AB des Dreiecks berührt und durch keinen Eckpunkt desselben geht, sind zwei andere Curven II. Ordnung bestimmt, deren jede durch die drei Eckpunkte des Dreiecks geht und die gegebene Curve in zwei Punkten berührt.

Durch ein Dreieck und eine Curve II. Ordnung, welche durch einen aber auch nur durch einen Eckpunkt des Dreiecks geht und keine Seite desselben berührt, sind zwei andere Curven II. Ordnung bestimmt, deren jede die drei Seiten des Dreiecks und überdiess in zwei Punkten die gegebene Curve berührt.

Es sei P der Punkt, in welchem die Curve K und die Gerade AB sich berühren, und P_1 der Punkt, welcher vom erstern durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist. Es seien ferner S, T diejenigen Punkte der Geraden AC, welche durch die Punkte A, C harmonisch getrennt und in Hinsicht auf die Curve K einander conjugirt sind. Soll nun eine Curve II. Ordnung durch die drei Punkte A, B, C gehen und die gegebene in zwei Punkten berühren, so muss die Gerade, welche die Berührungspunkte verbindet, durch den Punkt P_1 und zugleich durch einen von den beiden Punkten S, T gehen. Und wenn eine Curve II. Ordnung die gegebene in den Punkten, welche dieselbe mit der Geraden P_1S oder P_1T gemein hat, berührt und durch den Punkt A geht, so geht sie auch durch die Punkte B, C.

369. Durch ein Dreieck ABC und eine Curve K II. Ordnung, welche die Seiten des Dreiecks in sechs Punkten schneidet, sind vier andere Curven II. Ordnung bestimmt, deren jede die gegebene in zwei Punkten berührt und

durch die drei Eckpunkte des gegebenen Dreiecks geht. | den drei Seiten des gegebenen Dreiecks sich anschmiegt.

Nach 325 giebt es ein vollständiges Vierseit, so dass je zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte desselben durch zwei Eckpunkte des Dreiecks ABC harmonisch getrennt und in Hinsicht auf die Curve K einander conjugirt sind. Soll nun eine Curve II. Ordnung durch die drei Punkte A, B, C gehen und die gegebene in zwei Punkten berühren, so muss die durch die Berührungspunkte bestimmte Gerade mit einer Seite des erwähnten Vierseits zusammenfallen. Und wenn diese Bedingung erfüllt ist und die Curve durch irgend einen von den drei Punkten A, B, C geht, so geht sie auch durch die beiden übrigen.

Anm. Eine Curve II. Ordnung schneidet die Seiten eines Dreiecks in sechs Punkten. wenn sie weder durch einen Eckpunkt des Dreiecks geht noch eine Seite desselben berührt.

370. Wenn von drei Linien K, K_1, K_2 II. Ordnung die erste und dritte in zwei Punkten M, N, die zweite und dritte in zwei andern Punkten M_1, N_1 sich berühren, so sind die Geraden MN, M_1N_1, welche die Berührungspunkte paarweise verbinden, durch zwei Gerade harmonisch getrennt, deren Inbegriff in dem durch die erste und zweite Linie bestimmten einfachen Systeme von Linien II. Ordnung enthalten ist. Der Punkt N kann auch mit dem Punkte M und eben so der Punkt N_1 mit dem Punkte M_1 zusammenfallen; vorausgesetzt wird jedoch, dass keine der drei Linien K, K_1, K_2 eine Gerade sei und dass also der Schnittpunkt S von MN und M_1N_1, welchem in Hinsicht auf alle drei Linien eine und dieselbe Gerade zugeordnet ist, in keiner der drei Linien liege. Da nun die Gerade MN in dem Systeme (K, K_2) und die Gerade M_1N_1 in dem Systeme (K_1, K_2) enthalten ist, so besteht (351) die durch den Punkt S gehende Linie des Systems (K, K_1) aus zwei Geraden, welche durch die Geraden MN, M_1N_1 harmonisch getrennt sind. Haben also die Linien K, K_1 die vier Eckpunkte eines vollständigen Vierecks mit einander gemein, so sind die Geraden MN, M_1N_1 durch zwei einander gegenüberliegende Seiten desselben harmonisch getrennt. Haben die Linien K, K_1 nur drei Punkte A, B, C mit einander gemein, so dass dem Punkte A in Hinsicht auf beide eine und dieselbe Gerade a zugeordnet ist, so sind die Geraden MN,

M_1N_1 durch die Geraden a, BC harmonisch getrennt. Wenn endlich auch die Curven K, K_1 in zwei Punkten M_2, N_2 sich berühren, so ist jede der drei Geraden MN, M_1N_1, M_2N_2 die Polare vom Schnittpunkte der beiden übrigen in Hinsicht auf jede der drei Curven K, K_1, K_2.

371. Wenn die eine von zwei Curven II. Ordnung, welche in zwei Punkten sich berühren,

zwei einander gegenüberliegende Seiten eines vollständigen Vierecks berührt, dessen Eckpunkte in der andern liegen, so sind (370) zwei andere Seiten des Vierecks, welche ebenfalls einander gegenüberliegen, durch die beiden Geraden harmonisch getrennt, von welchen die eine die gemeinschaftlichen Punkte der Curven, die andere aber die Berührungspunkte jener Seiten des Vierecks mit einander verbindet.

durch zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte eines vollständigen Vierseits geht, dessen Seiten die andere berühren, so sind zwei andere Eckpunkte des Vierseits, welche ebenfalls einander gegenüberliegen, durch den Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten der Curven und durch den Schnittpunkt der Geraden harmonisch getrennt, welche die erstere Curve in jenen Eckpunkten des Vierseits berühren.

Berührt die eine von den beiden Curven zwei Seiten eines Dreiecks, dessen Eckpunkte in der andern liegen, so sind die beiden Geraden, von welchen die eine die Berührungspunkte dieser Seiten und die andere die Berührungspunkte der Curven mit einander verbindet, durch die dritte Seite des Dreiecks und diejenige Tangente der andern Curve harmonisch getrennt, welche durch den Schnittpunkt jener Dreiecksseiten geht.

372. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche in vier Punkten A, B, C, D sich schneiden, sind sechs andere Curven II. Ordnung bestimmt, deren jede der erstern von den gegebenen Curven vierpunktig sich anschmiegt und die letztere in zwei Punkten, die jedoch ebenfalls in einander fallen können.

Es seien m, m_1 zwei Gerade, welche durch die Geraden AB, CD harmonisch getrennt sind, so dass überdiess die Gerade m die Curve K in einem Punkte M berührt. Es sei ferner M_1 irgend ein Punkt, welchen die Gerade m_1 mit der Curve K_1 gemein hat, und K_2 diejenige Curve II. Ordnung, welche der Curve K im Punkte M vierpunktig sich anschmiegt und durch den Punkt M_1 geht. Da nun die drei Linien K_1, m_1, K_2, von welchen die erste in dem Systeme (K, AB+CD), die zweite in dem Systeme (m, AB+CD) und die dritte in dem Systeme (K, m) enthalten ist, den Punkt M_1 mit einander gemein haben, so sind sie in einem und demselben vierten Systeme enthalten, daher die Curve K_2 die Curve K_1 in den Punkten berührt, welche diese mit der Geraden m_1 gemein hat. Und wenn eine Curve K_2 II. Ordnung der Curve K vierpunktig sich anschmiegen und überdiess die Curve K_1 in zwei Punkten berühren soll, so müssen (370) die beiden Geraden, von welchen die eine im Systeme (K, K_2) und die andere im Systeme (K_1, K_2) enthalten ist, durch zwei einander gegenüberliegende Seiten des vollständigen Vierecks ABCD harmonisch getrennt sein. Sind die gegebenen Curven reell, so sind von den im Satze erwähnten sechs Curven entweder vier oder zwei reell, je nachdem nämlich das zu dem Vierecke ABCD gehörige Polardreieck reell ist oder nur einen reellen Eckpunkt hat.

373. Wenn zwei zu einander collineäre Systeme eine Curve K II. Ordnung entsprechend gemein haben, so haben sie auch jede Curve K_1 II. Ordnung entsprechend gemein, welche die erstere in ihren sich selbst entsprechenden Punkten M, N berührt.

Es seien A, B zwei Punkte, in welchen die Curve K von einer Tangente der Curve K_1 geschnitten wird. Wenn nun den Punkten A, B des einen Systems die Punkte A_1, B_1 des andern entsprechen, so ist (85) $MN.AB_1.A_1B$ eine Involution, daher die drei Geraden MN, AB_1, A_1B in einem und demselben Punkte P sich schneiden. Weil ferner die Gerade, welche vom Punkte P durch die Geraden AB, A_1B_1 harmonisch getrennt ist, dem Punkte P in Hinsicht auf die Curve K und also auch in Hinsicht auf die Curve K_1 zugeordnet ist, so wird diese auch von der Geraden A_1B_1 berührt. Da hiernach jeder Geraden des einen Systems, welche die Curve K_1 berührt, eine Gerade des andern Systems entspricht, welche ebenfalls die Curve K_1 berührt, so haben die zu einander collineären Systeme den der Curve K_1 sich anschmiegenden Strahlenbüschel und also auch diese Curve entsprechend gemein. Haben die Systeme nur einen Punkt entsprechend gemein, so dass also N mit M zusammenfällt, so muss in diesem Punkte die Curve K_1 der Curve K vierpunktig sich anschmiegen.

374. Zwei zu einander projektivische Punktgebilde ABC.., $A_1B_1C_1$..., welche in einer und derselben Curve K II. Ordnung aber nicht involutorisch liegen, erzeugen einen zu ihnen perspektivischen Strahlenbüschel II. Ordnung. Die Curve, welcher dieser Büschel sich anschmiegt, berührt die erstere in den Punkten M, N, welche jene Gebilde entsprechend gemein haben.

Zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel, welche einer und derselben Curve II. Ordnung sich anschmiegen, aber nicht involutorisch liegen, erzeugen eine zu ihnen perspektivische Curve II. Ordnung. Diese Curve berührt die erstere in den Polen der Geraden, welche jene Büschel entsprechend gemein haben.

Es sei K_1 diejenige Curve II. Ordnung, welche die Curve K in den Punkten M, N und überdiess auch die Gerade AA_1 berührt, so dass, wenn der Punkt N mit dem Punkte M zusammenfällt, die Curven K, K_1 in diesem Punkte vierpunktig einander sich anschmiegen. Da es nun nach 85 und 373 zwei zu einander collineäre Systeme giebt, welche die Punkte M, N und die Curven K, K_1 entsprechend gemein haben, während den Punkten A, A_1 des einen Systems die Punkte B, B_1 des andern entsprechen, so berührt die Gerade BB_1 die Curve K_1 in einem Punkte B_2, welcher dem Berührungspunkte A_2 der Geraden AA_1 entspricht. Da ferner die erwähnten Systeme die durch den Punkt M gehende gemeinschaftliche Tangente MM der beiden Curven entsprechend gemein haben, so ist $M(MNAA_1A_2) \barwedge M(MNBB_1B_2)$. Eben so wird bewiesen, dass die Gerade CC_1 die Curve K_1 in einem Punkte C_2 berührt, so dass $M(MNAA_1A_2) \barwedge M(MNCC_1C_2)$ ist. Nach 87 ist also auch $M(MNABC) \barwedge M(MNA_2B_2C_2)$, demnach $MNABC \barwedge MNA_2B_2C_2$ und mithin, wenn man die der Curve K_1 in den Punkten M, N, A_2, B_2, C_2 sich anschmiegenden Geraden, durch m, n, a, b, c bezeichnet, $MNABC \barwedge mnabc$, woraus der Satz folgt. Bemerkt wird noch, dass a, b, c die drei Geraden sind, deren jede zwei Gegenpunkte des Sechsecks $AB_1CA_1BC_1$ verbindet, während je zwei Gegenseiten desselben in einem Punkte der Geraden MN sich schneiden.

375. Wenn zwei Curven K, K_1 II. Ordnung in zwei Punkten M, N sich berühren, so kann man jede derselben auf zweierlei Art auf den der andern sich anschmiegenden Strahlenbüschel perspektivisch beziehen.

Es seien A, B, A_1, B_1 vier Punkte der Curve K, so dass die Geraden AA_1, BB_1 die Curve K_1 berühren und (371) die Geraden AB_1, A_1B die Gerade MN in einem und demselben Punkte schneiden, mithin $MN.AB_1.A_1B$ eine Involution ist. Wenn man nun zwei in der Curve K liegende Punktgebilde projektivisch so auf einander bezieht, dass den Punkten A, B des einen die Punkte A_1, B_1 des andern entsprechen und dass sie den Punkt M, also auch den Punkt N, entsprechend gemein haben, so erzeugen sie (374) einen zu ihnen perspektivischen Strahlenbüschel, welcher der Curve K_1 sich anschmiegt. Dass aber nicht noch ein drittes in der Curve K liegendes Punktgebilde zu dem der Curve K_1 sich anschmiegenden Büschel perspektivisch ist, geht daraus hervor, weil zwei zu einander projektivische Elementargebilde, welche in einander liegen und mehr als zwei Elemente entsprechend gemein haben, alle ihre Elemente entsprechend gemein haben. Uebrigens gilt auch der obige Satz, wenn die Punkte M, N in einander fallen und also die Curven K, K_1 vierpunktig einander sich anschmiegen.

376. Wenn eine Curve K II. Ordnung und ein Strahlenbüschel U II. Ordnung zu einander projektivisch sind und fünf Punkte A, B, C, D, E der Curve in den ihnen entsprechenden Strahlen a, b, c, d, e des Büschels liegen, so sind die beiden Gebilde zu einander perspektivisch. Die dem Büschel sich anschmiegende Curve aber berührt die erstere entweder in zwei Punkten oder schmiegt derselben in einem Punkte vierpunktig sich an, wenn nämlich nicht die Curve K selbst dem Büschel sich anschmiegt.

Da nicht jede Seite des vollständigen Fünfecks $ABCDE$ dem Strahlenbüschel U angehört, so kann man annehmen, dass DE kein Strahl desselben ist. Es seien nun A_1, B_1, C_1 diejenigen Punkte der Curve K, welche aus den Punkten A, B, C beziehlich durch die Geraden a, b, c projicirt werden, so erzeugen die in dieser Curve enthaltenen zu einander projektivischen Punktgebilde $ABC\ldots$, $A_1B_1C_1\ldots$ einen Strahlenbüschel U_1, welcher zu beiden perspektivisch und daher auch zu dem Büschel U projektivisch ist. Hätten nun die

Büschel U, U_1 nur die drei Strahlen a, b, c entsprechend gemein, so würden in jedem der Punkte D, E zwei homologe Strahlen derselben sich schneiden, daher (11) die Gerade DE der Träger eines zu beiden Büscheln perspektivischen geraden Gebildes sein müsste, was aber mit der Annahme, dass die Gerade DE kein Strahl des Büschels U sei, im Widerspruche steht. Es fällt hiernach jeder Strahl des Büschels U mit dem ihm entsprechenden Strahle des Büschels U_1 zusammen, woraus der Satz folgt. Dass nämlich, wie angenommen wurde, A_1, B_1, C_1 drei verschiedene Punkte sind, geht daraus hervor, weil, wenn etwa A_1 mit B_1 zusammenfiele, die zu einander projektivischen Büschel A_1(ABCDE), abcde zwei Strahlen a, b entsprechend gemein hätten und also (10) die Punkte C, D, E in einer und derselben Geraden liegen müssten.

377. Wenn zwei zu einander reciproke ebene Systeme zwar in einerlei Ebene liegen aber kein gerades Gebilde ein Schnitt des ihm entsprechenden Strahlenbüschels ist, so gibt es eine Curve II. Ordnung, welche zu dem ihr entsprechenden Strahlenbüschel perspektivisch ist.

Jedes gerade Gebilde des einen Systems enthält wenigstens einen Punkt, welcher in der ihm entsprechenden Geraden des andern Systems liegt. Sind nun A, B, C, D, E fünf Punkte des einen Systems, welche in den ihnen entsprechenden Geraden a, b, c, d, e des andern liegen, so ist (376) die Curve K, welche durch jene fünf Punkte geht, zu dem ihr entsprechenden Büschel U perspektivisch. Jeder Punkt, welcher ausserhalb der Curve K liegt, liegt auch ausserhalb der ihm entsprechenden Geraden, weil kein gerades Gebilde mehr als zwei Punkte enthält, deren jeder in der ihm entsprechenden Geraden liegt. Dem Büschel U des erstern Systems entspricht ein in der Curve K enthaltenes zu ihm perspektivisches Punktgebilde des letztern. Wenn nämlich die Gerade a die Curve K im Punkte A und also in noch einem Punkte A_1 schneidet und diesem Punkte des erstern Systems die Gerade a_1 des letztern entspricht, so entspricht der Geraden a des erstern, welche die Punkte A, A_1 mit einander verbindet, der Punkt A_1 des letztern, in welchem die Geraden a, a_1 sich schneiden. Enthält der Büschel U mehr als zwei Strahlen, welche der Curve K sich anschmiegen, so sind je zwei homologe Elemente der zu einander projektivischen Systeme in dem Polarsysteme einander zugeordnet, dessen Ordnungscurve die Curve K ist.

Sind eine Curve II. Ordnung und ein Strahlenbüschel II. Ordnung zu einander perspektivisch, so bleiben sie es auch, wenn man jeden Strahl des Büschels, welcher die Curve in dem ihm entsprechenden Punkte und also in noch einem Punkte schneidet, auf diesen andern Punkt, oder, was dasselbe ist, auf jeden Punkt der Curve, in welchem der ihm entsprechende Strahl von einem andern Strahle des Büschels geschnitten wird, diesen andern Strahl bezieht.

378. Durch eine Curve K II. Ordnung, drei in ihr liegende Punkte A, B, C und drei Gerade a, b, c, welche beziehlich durch die gegebenen Punkte gehen und in drei ausserhalb der Curve liegenden Punkten sich schneiden, ist ein Strahlenbüschel U II. Ordnung bestimmt, welcher die drei gegebenen Geraden enthält und auf die Curve K perspektivisch so bezogen werden kann, dass den Punkten A, B, C der Curve die Strahlen a, b, c des Büschels entsprechen.

Es seien A_1, B_1, C_1 diejenigen Punkte der Curve K, welche aus den Punkten A, B, C beziehlich durch die Geraden a, b, c projicirt werden. Bezieht man nun zwei in der Curve liegende Punktgebilde projektivisch so auf einander, dass den Punkten A, B, C des einen die Punkte A_1, B_1, C_1 des andern entsprechen, so erzeugen sie den im Satze erwähnten Büschel. Der Satz gilt übrigens auch noch, wenn die Geraden a, b, c in einem Eckpunkte des Dreiecks ABC und zwei ausserhalb der Curve K liegenden Punkten oder in zwei Eckpunkten des Dreiecks ABC und einem ausserhalb der Curve K liegenden Punkte oder auch in den drei Eckpunkten des Dreiecks ABC sich schneiden. Für die in 367, 368 und 369 aufgestellten Sätze ergeben sich hieraus noch andere Beweise.

Wenn die Curve K und die Geraden a, b, c reell, die Punkte A, B, C aber imaginär und also den Punkten A_1, B_1, C_1 conjungirt sind, so sind (239) je zwei homologe Punkte der oben erwähnten zu einander projektivischen Gebilde, von welchen der eine der Kette ABC... und also der andere der Kette $A_1B_1C_1$... angehört, einander conjungirt. Hiernach berühren die reellen Träger von allen imaginären Punkten, welche einer und derselben in einer reellen Curve II. Ordnung enthaltenen imaginären Kette angehören, wenn sie nämlich nicht (249) Strahlen eines

eines und desselben Winkels sind, eine und dieselbe andere Curve II. Ordnung, welche die erstere entweder in zwei reellen oder in zwei einander conjungirten imaginären Punkten berührt oder derselben in einem Punkte vierpunktig sich anschmiegt, je nachdem nämlich die Kette zwei reelle Punkte oder gar keinen reellen oder einen reellen Punkt enthält.

379. Auf den vorigen Satz lassen auch die in 19 und 22 aufgestellten Sätze sich zurückführen. Wenn nämlich zwei zu einander projektivische Curven II. Ordnung zwei Punkte A, B entsprechend gemein haben und irgend drei Gerade CC_1, DD_1, EE_1, deren jede zwei homologe Punkte der Curven verbindet, in drei ausserhalb derselben liegenden Punkten sich schneiden, so gibt es einen Strahlenbüschel, welcher die drei Geraden in sich enthält und auf die eine Curve perspektivisch so bezogen werden kann, dass den Punkten C, D, E derselben die Strahlen CC_1, DD_1, EE_1 des Büschels entsprechen. Dieser Büschel ist aber nach 376 auch zur andern Curve perspektivisch.

Wenn zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche zu einem und demselben Büschel II. Ordnung perspektivisch sind, in vier Punkten sich schneiden, so haben sie zwei von diesen Punkten entsprechend, die beiden übrigen aber nicht entsprechend gemein. Bezieht man nämlich auf jeden Strahl des Büschels, welcher die Curve K in dem ihm entsprechenden Punkte und also in noch einem Punkte schneidet, diesen andern Punkt, so haben nun die Curven diejenigen ihrer Schnittpunkte entsprechend gemein, welche sie vorher nicht entsprechend gemein hatten. Nach 11 können aber die Curven nicht mehr als zwei Punkte entsprechend gemein haben, woraus der Satz sich ergibt.

380. Durch zwei Curven II. Ordnung, welche vier Punkte mit einander gemein haben, und

eine Gerade h, welche die Curven in vier Punkten schneidet, aber nicht durch den Schnittpunkt von zwei gemeinschaftlichen Tangenten derselben geht, sind sechs andere Curven II. Ordnung bestimmt, deren jede der

einen Punkt, in welchem zwei Tangenten der einen Curve von zwei Tangenten der andern geschnitten werden, welcher aber nicht mit zwei von jenen vier Punkten in einer und derselben Geraden liegt, sind sechs an-gegebenen Geraden sich anschmiegt und überdiess jede der gegebenen Curven in zwei Punkten, die jedoch in einander fallen können, berührt.

dere Curven II. Ordnung bestimmt, deren jede durch den gegebenen Punkt geht und überdiess jede der gegebenen Curven in zwei Punkten, die jedoch auch in einander fallen können, berührt.

Es schneide die Gerade h die eine Curve in den Punkten F, G und die andern in den Punkten F_1, G_1. Bezieht man nun die Curven projektivisch so auf einander, dass sie irgend zwei ihrer Schnittpunkte entsprechend gemein haben und dass einem von den beiden Punkten F, G einer von den beiden Punkten F_1, G_1 entspricht, so erzeugen sie einen zu ihnen perspektivischen Strahlenbüschel II. Ordnung. Die Curve, welche diesem Büschel sich anschmiegt, ist eine der im Satze erwähnten Curven.

---

§. 26.

Noch einige Sätze über Curven II. Ordnung.

381. Wenn eine Curve K II. Ordnung durch zwei Eckpunkte A, B eines Vierecks ABCD und durch zwei Eckpunkte F, G des zu demselben gehörigen Polardreiecks geht, so sind je zwei Punkte P, Q der Curve, welche durch die beiden erstern Punkte in ihr harmonisch getrennt sind, in Hinsicht auf das Viereck einander conjugirt, weil sie sowohl in Hinsicht auf die Linie FA + FB als auch in Hinsicht auf die Linie GA + GB einander conjugirt sind. In Hinsicht auf die Curve K ist der Geraden CD der Schnittpunkt von AB und FG und daher der Geraden AB ein Punkt S der Geraden CD zugeordnet. Jede Curve K_1 II. Ordnung, welche durch die vier Eckpunkte des Vierecks ABCD geht, berührt ihre beiden im Punkte S sich schneidenden Tangenten in Punkten, welche sie mit der Curve K gemein hat. Da nämlich jede Gerade u, welche durch den Punkt S aber durch keinen von den beiden Punkten A, B geht, die Curve K in zwei Punkten P, Q schneidet, welche in Hinsicht auf das Viereck ABCD und also auch in Hinsicht auf

die Curve K_1 einander conjugirt sind, so muss, wenn diese von der Geraden u berührt wird, der Berührungspunkt mit einem der Punkte P, Q zusammenfallen.

382. Durch ein vollständiges Viereck ABCD und zwei Punkte P, Q, welche durch je zwei Gegenseiten des Vierecks harmonisch getrennt sind, sind sechs Curven II. Ordnung bestimmt, deren jede durch zwei Eckpunkte des Vierecks, dann durch zwei Eckpunkte des zu dem Vierecke gehörigen Polardreiecks EFG und durch die beiden gegebenen Punkte P, Q geht.

Wenn nämlich eine Curve II. Ordnung durch zwei Eckpunkte des Vierecks ABCD, dann durch zwei Eckpunkte des Dreiecks EFG und durch den Punkt P geht, so enthält sie auch (381) den Punkt Q, welcher dem Punkte P in Hinsicht auf das Viereck conjugirt ist.

383. Durch ein Viereck ABCD und eine Curve K II. Ordnung, welche durch zwei Eckpunkte F, G des zu dem vollständigen Vierecke gehörigen Polardreiecks, aber weder durch den dritten Eckpunkt dieses Dreiecks noch durch zwei Eckpunkte des Vierecks geht, ist eine andere Curve II. Ordnung bestimmt, welche ebenfalls durch jene Punkte geht und der gegebenen in Hinsicht auf das Viereck projektivisch conjugirt ist.

Es sei wieder F der Schnittpunkt von AC und BD, G der Schnittpunkt von AD und BC, so kann man vier Strahlenbüschel, von welchen zwei den Punkt F und zwei den Punkt G zum Mittelpunkt haben, projektivisch so auf einander beziehen, dass je zwei homologe Strahlen des ersten und zweiten in dem involutorischen Büschel F(AA.BB...), je zwei homologe Strahlen des dritten und vierten aber in dem involutorischen Büschel G(AA.BB...) einander zugeordnet sind, und der erste und dritte die Curve K erzeugen. Der zweite und vierte der zu einander projektivischen Büschel erzeugen alsdann eine zur Curve K projektivische Curve K_1, so dass je zwei homologe Punkte dieser Curven in Hinsicht auf das Viereck ABCD einander conjugirt sind.

384. Wenn eine Curve K II. Ordnung durch drei Eckpunkte A, B, C eines vollständigen Vierecks ABCD und durch zwei in Hinsicht auf dasselbe einander conjugirte Punkte P, Q geht, so wird jede durch den vierten Eckpunkt des Vierecks gehende Seite

desselben von der ihr gegenüberliegenden Seite und der Geraden PQ, welche die einander conjugirten Punkte verbindet, in Punkten geschnitten, welche durch den vierten Eckpunkt des Vierecks und einen Punkt der Curve K harmonisch getrennt sind.

Es werde die Gerade CD von der Geraden AB im Punkte E, von der Geraden PQ im Punkte S und von derjenigen Curve II. Ordnung, welche durch die Punkte A, B, P, Q und den Schnittpunkt von AC und BD, mithin auch (382) durch den Schnittpunkt von AD und BC geht, in den Punkten M, N geschnitten, so sind diese Punkte sowohl (381) durch die Punkte S, E als auch durch die Punkte C, D harmonisch getrennt, daher $MNSEC \barwedge MNESD$ ist. Bezeichnet nun H den Punkt, welcher vom Punkte D durch die Punkte S, E harmonisch getrennt ist, so ist auch $NMESH \barwedge MNESD$ und mithin MN.SE.CH eine Involution, woraus man (335) schliessen kann, dass die Curve K und die Gerade CD entweder in den Punkten C, H sich schneiden, oder, wenn H mit C zusammenfällt, in diesem Punkte sich berühren.

Sind in einem Elementargebilde die Elemente M, N sowohl durch die Elemente S, E als auch durch die Elemente C, D und die Elemente S, E auch durch die Elemente D, H harmonisch getrennt, so ist, wie aus dem obigen Beweise hervorgeht, MN. SE.CH eine Involution.

385. Wenn eine Curve K II. Ordnung durch drei Eckpunkte A, B, C eines Vierecks ABCD geht, so schneiden die durch diese Punkte gehenden Tangenten a, b, c der Curve die ihnen gegenüberliegenden Seiten EF, EG, FG des zu dem Vierecke gehörigen Polardreiecks in drei Punkten G_1, F_1, E_1 einer und derselben Geraden, welche die Curve entweder in einem Eckpunkte des Vierecks berührt oder in zwei in Hinsicht auf das Viereck einander conjugirten Punkten schneidet.

Geht die Curve K auch durch den Punkt D, so liegen die Punkte G_1, F_1, E_1 als Pole der Gerade AG, BF, CE in der durch den Punkt D gehenden Tangente. Wenn aber die Curve K nicht durch den Punkt D geht, so seien A_1, B_1, C_1 diejenigen Punkte derselben, welche aus den Punkten A, B, C beziehlich durch die Geraden AD, BD, CD projicirt werden. Da nun (G. 257) der Schnittpunkt von c und A_1B_1 mit den Punkten F, G in einer und derselben Geraden liegt, mithin im Punkte E_1 die Geraden FG, A_1B_1 und eben so im Punkte F_1 die Geraden EG, A_1C_1 und im Punkte G_1 die Geraden EF, B_1C_1 sich schneiden, die drei Geraden GA_1, FB_1, EC_1 aber durch einen und denselben Punkt gehen, so liegen (G. 90) die drei Punkte E_1, F_1, G_1 in einer und derselben Geraden, welche, wenn sie durch einen Eckpunkt des Dreiecks ABC geht, in diesem Punkte die Curve K berührt, im entgegengesetzten Falle aber, wie sogleich bewiesen werden soll, die Curve K in zwei in Hinsicht auf das Viereck $ABCD$ einander conjugirten Punkten schneidet. Weil nämlich die Geraden EF,EG durch die Geraden AB, CD harmonisch getrennt sind, so sind auch die Punkte G_1, F_1 durch die Punkte M, N harmonisch getrennt, in welchen die Gerade F_1G_1 von den Geraden AB, CD geschnitten wird. Da hiernach die Punkte M, N sowohl in Hinsicht auf die Linie AB als auch in Hinsicht auf die Linie $a+b$ einander conjugirt sind, so sind sie auch in Hinsicht auf die Curve K einander conjugirt. Eben so schneidet die Gerade F_1G_1 je zwei andere Gegenseiten des vollständigen Vierecks $ABCD$ in zwei in Hinsicht auf die Curve K einander conjugirten Punkten, woraus der letztere Theil des Satzes sich ergibt.

Wenn die Curve K nicht durch den Punkt D geht, so ist die Gerade F_1G_1 vom Punkte E durch die Punkte D, C_1, vom Punkte F durch die Punkte D, B_1 und vom Punkte G durch die Punkte D, A_1 harmonisch getrennt. Es folgt diess, im Falle die Gerade F_1G_1 die Curve K in zwei Punkten schneidet, aus dem vorigen Satze. Wenn aber die Gerade F_1G_1 die Curve K in einem Eckpunkte C des Dreiecks ABC berührt, also die Gerade A_1C_1 durch den Punkt bc und die Gerade B_1C_1 durch den Punkt ac geht, so sind in der Curve die Punkte B, C durch die Punkte A_1, C_1 und die Punkte A, C durch die Punkte B_1,C_1 harmonisch getrennt, daher auch $A(CDEC_1)$, $C(DFB_1G_1)$, $C(DGA_1F_1)$ harmonische Würfe sind.

386. Durch eine Curve K II. Ordnung und zwei Gerade p, q, deren Schnittpunkt S in der Curve liegt, ist ein Punkt T bestimmt, welcher mit je zwei Punkten der Curve, die durch

Durch eine Curve II. Ordnung und zwei Punkte, welche in einer und derselben Tangente der Curven liegen, ist eine Gerade bestimmt, welche von je zwei Tangenten der Curve, die

die gegebenen Geraden harmonisch getrennt sind, in einer und derselben Geraden liegt, oder, was dasselbe ist, durch welchen jede Gerade geht, welche die gegebenen Geraden in zwei in Hinsicht auf die Curve einander conjugirten Punkten schneidet.

durch die gegebenen Punkte harmonisch getrennt sind, in einem und demselben Punkte geschnitten wird und also jeden Punkt enthält, aus welchem die gegebenen Punkte durch zwei in Hinsicht auf die Curve einander conjugirte Gerade projicirt werden.

Es seien A, B diejenigen Punkte der Curve K, welche aus dem Punkte S durch die Geraden p, q projicirt werden. Wenn nun zwei Punkte der Curve durch die Geraden p, q und also auch in der Curve durch die Punkte A, B harmonisch getrennt sind, so liegen sie mit dem Pole T der Geraden AB in einer und derselben Geraden.

387. Durch eine Curve K II. Ordnung und zwei Gerade p, q, deren Schnittpunkt ausserhalb der Curve liegt, ist ein Büschel U II. Ordnung bestimmt, welchem jede Gerade angehört, die die gegebenen Geraden in zwei in Hinsicht auf die gegebene Curve einander conjugirten Punkten schneidet.

Durch eine Curve II. Ordnung und zwei Punkte, welche nicht in einer und derselben Tangente der Curve liegen, ist eine Linie II. Ordnung bestimmt, der jeder Punkt angehört aus welchem die gegebenen Punkte durch zwei in Hinsicht auf die gegebene Curve einander conjugirte Gerade projicirt werden.

Sind die Geraden p, q in Hinsicht auf die Curve K einander conjugirt, so besteht der Büschel U aus zwei Büscheln I. Ordnung, von welchen der eine den Pol P der Geraden p und der andere den Pol Q der Geraden q zum Mittelpunkt hat. Wenn aber der Punkt P ausserhalb der Geraden q liegt, so erzeugen die zu einander projektivischen geraden Gebilde p, q, von welchen das eine p in Hinsicht auf die Curve K dem Büschel P zugeordnet, das andere hingegen ein Schnitt dieses Büschels mit der Geraden q ist, einen zu ihnen perspektivischen Büschel U, welcher einer Curve K_1 II. Ordnung sich anschmiegt. Diese Curve berührt die Geraden p, q in den Punkten, in welchen sie von der Geraden PQ geschnitten werden. Jede Gerade, welche die Curve K in einem in der Geraden p oder in der Geraden q befindlichen Punkte berührt, ist eine gemeinschaftliche Tangente beider Curven.

388. Durch eine Curve K II. Ordnung und zwei in Hinsicht auf dieselbe einander nicht conjugirte Gerade AB, CD, welche die Curve in vier Punkten A, B, C, D schneiden, ist eine andere durch diese vier Punkte gehende Curve K_1 II. Ordnung bestimmt, so dass nämlich die Punkte P, Q, welche die Pole der gegebenen Geraden AB, CD in Hinsicht auf die eine K der beiden Curven sind, verwechselt die Pole derselben Geraden in Hinsicht auf die andere K_1 sind. Jede Gerade, welche durch den Punkt P oder durch den Punkt Q geht, aber keiner der Curven K, K_1 sich anschmiegt, schneidet dieselben in vier harmonisch liegenden Punkten.

Da nämlich die Gerade PQ den Schnittpunkt von AC und BD mit dem Schnittpunkte von AB und BC verbindet, so gibt es eine Curve K_1 II. Ordnung, welche durch die vier Punkte A, B, C, D geht und in den Punkten A, B die Geraden AQ, BQ berührt. Da ferner die Curve K in den Punkten A, B, C die Geraden AP, BP, CQ berührt, so sind (G. 250) die Punkte A, B durch die Geraden CP, CQ harmonisch getrennt, daher die Curve K_1 im Punkte C die Gerade CP und eben so im Punkte D die Gerade DP berührt, während die Curve K von der Geraden CP im Punkte C und in noch einem Punkte C_1 und eben so von der Geraden DP im Punkte D und in noch einem Punkte D_1 geschnitten wird. Nimmt man nun in der Curve K noch zwei Punkte M, M_1 an, welche mit dem Punkte P in einer und derselben Geraden liegen und daher durch die Punkte A, B harmonisch getrennt sind, so ist $ABMM_1C \barwedge ABM_1MC_1$, mithin $D(ABMM_1C) \barwedge C(ABM_1MC_1)$, woraus man schliessen kann, dass die Curve K_1 sowohl durch den Schnittpunkt N von DM und CM_1 als auch den Schnittpunkt N_1 von DM_1 und CM geht und dass also die Punkte M, M_1, in deren jedem zwei einander gegenüberliegende Seiten des Vierecks $CNDN_1$ sich schneiden, in Hinsicht auf die Curve K_1 einander conjugirt, demnach durch die Punkte, in welchen diese Curve von der Geraden MM_1 geschnitten wird, harmonisch getrennt sind. Die Punkte N, N_1 sind in Hinsicht auf die Curve K einander conjugirt und liegen da $D(CQMM_1) \barwedge C(QDMM_1) \doublebarwedge C(DQM_1M)$ ist, mit dem Punkte Q in einer und derselben Geraden.

Eben so gibt es eine Curve K_2 II. Ordnung, die die Geraden PA, PB in den Punkten, in welchen sie von der Geraden CD geschnitten werden, und die Geraden QC, QD in den Punkten, in welchen sie von der Geraden AB geschnitten werden, berührt. In jedem Punkte, welcher in der Geraden AB oder in der Geraden CD aber ausserhalb der Curven K, K_2 liegt, schneiden sich zwei Tangenten der Curve K, welche durch zwei Tangenten der Curve K_2 harmonisch getrennt sind.

389. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung ist

ein Strahlenbüschel II. Ordnung bestimmt, dem nämlich jede Gerade angehört, welche irgend eine von den beiden Curven in zwei in Hinsicht auf die andere einander conjugirten Punkten schneidet.

eine dritte Linie II. Ordnung bestimmt, in der nämlich der Schnittpunkt von je zwei Geraden liegt, welche die eine von den beiden gegebenen Curven berühren und in Hinsicht auf die andere einander conjugirt sind.

Wenn die Curven K, K_1 in vier Punkten A, B, C, D sich schneiden, so sind die acht Geraden a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1, von welchen die vier erstern der Curve K, die vier letztern aber der Curve K_1 in jenen Punkten sich anschmiegen, nach 328 in einem und demselben Strahlenbüschel U II. Ordnung enthalten. Der Fall, in welchem dieser Büschel aus zwei Büscheln I. Ordnung besteht, ist in der vorigen Nummer betrachtet worden. Schmiegt aber der Büschel U einer Curve sich an, so giebt es zu jedem Strahle s desselben einen Punkt S der Curve K, so dass der Wurf ABCS in dieser Curve zu dem Wurfe abcs in dem Büschel U projektivisch ist. Da nun die Gerade g, welche den Schnittpunkt E von AB und CS mit dem Schnittpunkte F von AC und BS verbindet, in Hinsicht auf die Curve K dem Schnittpunkte G von BC und AS zugeordnet ist, mithin durch den Punkt bc geht, so ist, wenn N den Schnittpunkt von c und AB bezeichnet, der Wurf a_1 (abcg) eine Projektion des Wurfes ABNE aus dem Punkte bc. Da ferner der Wurf ABNE eine Projektion von ABCS aus dem Punkte C ist, so ist a_1 (abcg) $\barwedge$ ABCS $\barwedge$ abcs $\barwedge$ a_1 (abcs), woraus man schliessen kann, dass die Gerade s durch den Punkt a_1g und eben so durch den Schnittpunkt von b_1 und EG und durch den Schnittpunkt von c_1 und FG geht, mithin (385) die Curve

K_1, wenn nämlich der Punkt S ausserhalb derselben liegt, in zwei in Hinsicht auf das Viereck ABCS und also auch in Hinsicht auf die Curve K einander conjugirten Punkten schneidet. Und wenn eine Gerade, welche durch keinen der Punkte A, B, C geht, die Curve K_1 in zwei in Hinsicht auf die Curve K einander conjugirten Punkten P, Q schneidet, so giebt es in der Curve K einen Punkt S, so dass die Punkte P, Q auch in Hinsicht auf die Linie AB+CS, mithin in Hinsicht auf das Viereck ABCS einander conjugirt sind. Da es aber (384) nur eine Gerade giebt, welche die Curve K_1 in zwei in Hinsicht auf das Viereck ABCS einander conjugirten Punkten schneidet, so muss die Gerade PQ derjenige Strahl s des Büschels U sein, welcher mit den Strahlen a, b, c einen zu ABCS projektivischen Wurf abcs bildet. Die Fälle, in welchen die Curven K, K_1 weniger als vier Punkte mit einander gemein haben, werden der Kürze wegen übergangen.

390. Wenn der eine P von zwei Punkten P, P_1, welche in Hinsicht auf eine gegebene Curve K II. Ordnung einander conjugirt sind und aus einem gegebenen Punkte S durch eine und dieselbe Gerade projicirt werden, in einer gegebenen Geraden g liegt, welche weder durch den Punkt S geht noch diesem Punkte in Hinsicht auf die Curve K zugeordnet ist, so liegt der andere P_1 entweder ebenfalls in einer gegebenen Geraden g_1 oder in einer gegebenen Curve K_1 II. Ordnung, je nachdem nämlich die zu einander projektivischen Büschel, von welchen der eine aus dem Punkte S das gerade Gebilde g projicirt, der andere aber diesem Gebilde in Hinsicht auf die Curve K zugeordnet ist, ein Punktgebilde erster oder zweiter Ordnung erzeugen. Der erstere Fall findet nur statt, wenn der gemeinschaftliche Strahl der erwähnten Büschel die Curve K berührt.

391. Wenn der Mittelpunkt S eines Strahlenbüschels S(ABFT), welcher zu einem gegebenen abcd projektivisch ist, in einer gegebenen Curve K II. Ordnung liegt, und drei Strahlen des Büschels durch gegebene Punkte gehen, von welchen zwei A, B der Curve K angehören, der

Wenn der Träger eines geraden Gebildes MNPQ, welches zu einem gegebenen projektivisch ist, eine gegebene Curve II. Ordnung berührt, und drei Punkte M, N, P des Gebildes in gegebenen Geraden liegen, von welchen zwei m, n die Curve berühren, die dritte p dritte F aber weder in dieser Curve noch mit den beiden erstern in einer und derselben Geraden liegt, so berührt der vierte Strahl des Büschels eine gegebene Curve K_1 II. Ordnung, welche entweder mit der erstern zusammenfällt oder dieselbe in zwei Punkten, die jedoch auch in einander fallen können, berührt.

aber weder die Curve berührt noch durch den Schnittpunkt der beiden erstern geht, so liegt der vierte Punkt Q des geraden Gebildes in einer gegebenen Curve II. Ordnung, welche entweder mit der erstern zusammenfällt oder dieselbe in zwei Punkten, die jedoch auch in einander fallen können, berührt.

Es seien C, D zwei Punkte der Curve K, so dass der Wurf ABCD in derselben zu dem gegebenen Wurfe abcd projektivisch ist. Es seien ferner A_1, B_1, D_1, P, Q diejenigen Punkte der Curve, welche aus den Punkten A, B, C, S, S beziehlich durch die Geraden AF, BF, CF, SF, ST projicirt werden, so ist ABPQ S(ABFT) $\overline{\wedge}$ ABCD und also auch ABDQ $\overline{\wedge}$ ABCP $\overline{\wedge}$ $A_1B_1D_1S$, woraus hervorgeht, dass die Gerade ST dem Strahlenbüschel U angehört, welchen die in der Curve K enthaltenen zu einander projektivischen Punktgebilde ABD..., $A_1B_1D_1$... erzeugen. Die Curve K_1, welche dem Büschel U sich anschmiegt, fällt nur dann mit K zusammen, wenn die Geraden FA, FB, welche die Curve K_1 berühren, zugleich Tangenten der Curve K sind und überdiess der gegebene Wurf abcd ein harmonischer Wurf ist. Uebrigens gilt der Satz auch, wenn die Linie K aus zwei Geraden besteht, von welchen nämlich die eine durch die beiden Punkte A, B, die andere aber (der Ort des Punktes S) durch keinen Eckpunkt des Dreiecks ABF geht.

392. Wenn vier Curven K, K_1, K_2, K_3 II. Ordnung drei Punkte A, B, C und je zwei derselben noch einen vierten Punkt mit einander gemein haben, welcher ausserhalb der beiden übrigen liegt, so werden die sechs Punkte, in deren jedem nur zwei der vier Curven sich

Wenn vier Curven II. Ordnung drei Tangenten und je zwei derselben noch eine vierte Tangente mit einander gemein haben, welche die beiden übrigen Curven nicht berührt, so schneiden die sechs Geraden, deren jede nur zwei von den vier Curven berührt, jede jener drei schneiden, aus jedem jener drei Punkte durch eine Involution von drei paar Strahlen projicirt.

Tangenten in einer Involution von drei Paar Punkten.

Es seien P, P_1, P_2, P_3 die Pole der Geraden AB in Hinsicht auf die Curven K, K_1, K_2, K_3, so ist (11) in Hinsicht auf die Linie $CA + CB$ dem Schnittpunkte von AB und PP_1 die Gerade zugeordnet, welche aus dem Punkte C den vierten gemeinschaftlichen Punkt der Curven K, K_1 projicirt. Bemerkt man nun, dass die Gerade AB von den Seiten des vollständigen Vierecks $PP_1P_2P_3$ in drei Paar Punkten einer Involution geschnitten wird, so folgt der Satz.

---

§. 27.

Von den Werthen der neutralen Würfe.

393. Durch jeden neutralen Wurf abcd ist eine Zahl bestimmt, welche sein Werth genannt werden kann. Wenn man nämlich zu zwei reellen eigentlichen Punkten A, B und dem unendlich fernen Punkt C der Geraden AB den Punkt D sucht, so dass $ABCD \barwedge$ abcd ist, und nun den Quotienten $\frac{AD}{AB}$ als positiv oder negativ betrachtet, je nachdem die endlichen Strecken AB, AD in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne liegen, so soll der auf diese Weise bestimmte Werth desselben zugleich der Werth des Wurfes abcd heissen. Ist also abcd ein eigentlicher neutraler Wurf, so ist sein Werth negativ oder positiv und <1 oder positiv und >1, je nachdem in der Kette abc... die Elemente a, c durch die Elemente b, d oder die Elemente a, b durch die Elemente c, d oder die Elemente a, d durch die Elemente b, c getrennt sind. Ist aber abcd ein uneigentlicher Wurf, so ist sein Werth $=0$ oder $=1$ oder $=\infty$, je nachdem der Punkt D mit dem Punkte A oder mit dem Punkte B oder mit dem Punkte C zusammenfällt.

Sucht man zu zwei andern reellen eigentlichen Punkten A_1, B_1 und dem unendlichen fernen Punkte C_1, der mit ihnen in einer und derselben Geraden liegt, den Punkt D_1, so dass $A_1B_1C_1D_1$ $\barwedge$ abcd ist, so sind $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ homologe Würfe von zwei einander ähnlichen geraden Gebilden. Sind zwei Strecken AB,EF in der einen Geraden einander gleich, so dass AF.BE.CC eine Involution ist, so sind auch die ihnen entsprechenden Strecken in der andern einander gleich. Da hiernach auch ungleiche Strecken in der einen Geraden sich zu einander verhalten, wie die ihnen entsprechenden Strecken in der andern, so ist $\frac{AD}{AB}=\frac{A_1D_1}{A_1B_1}$, was noch zu beweisen war.

394. Zwei neutrale eigentliche Würfe haben (393) gleiche oder ungleiche Werthe, je nachdem sie projektivisch oder nicht projektivisch zu einander sind. Ist ein Wurf die Summe von neutralen Würfen, so erhält man auch seinen Werth, wenn man die Werthe der Summanden zu einander addirt. Ist ein Wurf dàs Produkt aus neutralen Würfen, so erhält man seinen Werth, wenn man die Werthe der Faktoren mit einander multiplicirt.

Es seien U, U_1 zwei neutrale Würfe. Man suche zu zwei reellen eigentlichen Punkten A, B und dem unendlich fernen Punkte C der Geraden AB die Punkte D, D_1, so dass $ABCD=U$ und $ABCD_1=U_1$ ist. Man suche ferner den Punkt S, welcher in dem involutorischen Gebilde $CC.DD_1...$ dem Punkte A zugeordnet ist, so ist (258) $ABCS=U+U_1$. Da nun $AD=D_1S$ ist, so ist $AD+AD_1=AS$ und also auch $\frac{AD}{AB}+\frac{AD_1}{AB}=\frac{AS}{AB}$. Sucht man noch den Punkt E, so dass $ADCE=U_1$ ist, so ist (268) $ABCE=UU_1$, gleichwie auch $\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AB}\cdot\frac{AE}{AD}$ ist.

Ist q der Werth des Wurfes U und m eine positive ganze Zahl, so ist mq der Werth des Wurfes mU, der nämlich das mfache von U ist, und q^m der Werth des Wurfes U^m.

395. Wenn A, B, C, D vier reelle eigentliche Punkte sind, welche in einer und derselben Geraden liegen, so ist $\frac{AD}{AB}\cdot\frac{CB}{CD}$ der Werth des Wurfes ABCD.

Es sei Ê der unendlich ferne Punkt der Geraden AB, so ist $\frac{AD}{AB}$ der Werth des Wurfes ABED und $\frac{CB}{CD}$ der Werth des Wurfes CDEB. Bemerkt man nun, dass ABCD=BADC=(BADÊ)(BEDC)

$=(ABED)\,(CDEB)$ ist, so folgt der Satz. Sind die Punkte A, C durch die Punkte B, D getrennt, so ist der eine von den beiden Quotienten $\frac{AD}{AB}, \frac{CB}{CD}$ positiv, der andere aber und also auch ihr Produkt negativ. Uebrigens gilt der obige Satz auch noch, wenn einer von den vier Punkten A, B, C, D ins Unendliche fällt. Ist z. B. B der unendlich ferne Punkt der Geraden AC, so ist $\frac{CB}{AB} = 1$ und also $\frac{AD}{AB} \cdot \frac{CB}{CD} = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{CB}{AB} = \frac{AD}{CD}$. Diess ist aber in dem erwähnten Falle der Werth des Wurfes DCBA, der dem Wurfe ABCD gleich ist.

396. Wenn a, b, c, d vier reelle Gerade sind, welche in einerlei Ebene liegen und in einem und demselben eigentlichen Punkte S sich schneiden, so ist der Werth des Wurfes abcd $= \pm \frac{\mathrm{Sin}\,(ad).\mathrm{Sin}\,(cb)}{\mathrm{Sin}\,(ab).\mathrm{Sin}\,(cd)}$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Geraden a, c durch die Geraden b, d nicht getrennt oder getrennt sind.

Man nehme irgend eine reelle Gerade an, welche die Gerade c in ihrem unendlich fernen Punkte C, die Geraden a, b, d aber in eigentlichen Punkten A, B, D schneide, so ist der Wurf abcd zu dem Wurfe ABCD projektivisch, dessen Werth $\frac{AD}{AB}$ das Produkt aus den Quotienten $\frac{AD}{AS}, \frac{AS}{AB}$ ist. Bemerkt man nun, dass $\frac{AD}{AS} = \frac{\mathrm{Sin}\,(ad)}{\mathrm{Sin}\,(cd)}$ und $\frac{AS}{AB} = \frac{\mathrm{Sin}(cb)}{\mathrm{Sin}(ab)}$ ist, so folgt der Satz. Derselbe gilt übrigens auch, wenn a, b, c, d vier reelle Ebenen sind, welche in einer und derselben eigentlichen Geraden sich schneiden.

397. Der Werth eines jeden harmonischen Wurfes ist (393) $= -1$. Besteht ein harmonischer Wurf ABCD aus vier reellen eigentlichen Punkten, so ist (395) $AB.CD = AD.BC$. Besteht ein harmonischer Wurf abcd aus vier in einerlei Ebene liegenden reellen Geraden, welche in einem und demselben eigentlichen Punkte sich schneiden, oder aus vier reellen Ebenen, welche in einer und

derselben reellen Geraden sich schneiden, so ist Sin(ab).Sin(cd) =Sin(ad).Sin(bc).

Ist von einem Wurfe q die Rede, wo q irgend eine, sei es rationale oder irrationale, Zahl bezeichnet, so ist der Wurf gemeint, dessen Werth =q ist. Dem Wurf q ist der Wurf —q entgegengesetzt, welcher das Produkt aus dem erstern in den Wurf —1 ist.

---

§. 28.

Complexe Zahlen.

398. Ein Wurf MANB, dessen Quadrat (283) ein harmonischer Wurf also =—1 ist, soll durch +i oder —i bezeichnet werden, je nachdem das vierte Element B desselben im Sinne MAN oder im Sinne NAM liegt. Wenn nämlich MANC ein harmonischer Wurf ist, so liegen die Ordnungselemente B, B_1 des involutorischen Gebildes MN.AC... auf entgegengesetzten Seiten der Kette MAN.... Liegt nun das Element B im Sinne MAN... und also das Element B_1 im Sinne NAM, so ist MANB= +i und $MANB_1$ =—i, indem $(MANB)^2=(MANB_1)^2=(MANC)=-1$ ist.

Von einem Wurfe soll gesagt werden, dass er =vi sei, wo v eine rationale oder irrationale Zahl bedeutet, wenn er das Produkt aus dem Wurfe v in den Wurf i ist. Der Wurf —i ist das Produkt aus dem Wurfe in den Wurf —1.

399. Durch jeden Wurf W, welcher nämlich nicht = ∞ ist, sind (278) zwei neutrale Würfe U, V bestimmt, so dass W=U+Vi ist. Ist nun u der Werth des Wurfes U und v der Werth des Wurfes V, so soll der Ausdruck u+vi der Werth des Wurfes W oder auch die dem Wurfe W entsprechende complexe Zahl heissen.

Wenn v=o, so ist u+vi=u, daher unter den complexen Zahlen von selbst auch die reellen (rationalen und irrationalen) Zahlen begriffen sind. Ist u=o, so ist u+vi=vi. Wenn aber weder u noch v=o ist, so besteht der Wurf W aus zwei ungleichartigen Theilen, von welchen der eine zum Wurfe 1 (zu der reellen Einheit) wie u:1, der andere aber zum Wurfe i (zu der imaginären Einheit) wie v:1 sich verhält. In den beiden letztern

Fällen, wenn nämlich v nicht Null ist, heisst die complexe Zahl $u+vi$ imaginär.

400. Um auf eine einfache Weise einen Wurf zu construiren, dessen Werth einer gegebenen imaginären Zahl $u+vi$ gleich ist, suche man zu zwei reelen eigentlichen Punkten A, B und dem unendlich fernen Punkte C der Geraden AB die Punkte D, F, F_1, so dass $\frac{AD}{AB}=u$, $\frac{DF}{AB}=v$ und $\frac{DF_1}{AB}=-v$ ist. Bezeichnet man nun den imaginären Punkt, von welchem $DFCF_1$ eine harmonische Darstellung ist, durch P und den ihm conjungirten Punkt durch P_1, so ist der Werth des Wurfes $ABCP=u+vi$ und der Werth des Wurfes $ABCP_1=u-vi$.

Es sei E der Punkt, welcher in dem involutorischen Gebilde CC.BD... dem Punkte A zugeordnet ist, so ist (263) $ABCP=ABCD+DECP=ABCD+(DECF)\,(DFCP)$. Da nun $ABCD=\frac{AD}{AB}=u$, $DECF=\frac{DF}{DE}=\frac{DF}{AB}=v$ und (398) $DFCP=i$ ist, so ist $ABCP=u+vi$. Eben so ist $ABCP_1=ABCD+(DECF_1)\,(DF_1CP_1)=u-vi$. Die Strecken AB, DE sind einander gleich und in einem und demselben Sinne beschrieben. Die endlichen Strecken AB, DF sind in einem und demselben oder im entgegengesetzten Sinne beschrieben, je nachdem v positiv oder negativ ist. Die complexen Zahlen $u+vi$, $u-vi$ heissen einander conjungirt, weil sie zwei einander conjungirten Würfen entsprechen.

401. Die in 394 für neutrale Würfe aufgestellten Sätze gelten auch für nicht neutrale Würfe, wenn man complexe Zahlen als Binomien betrachtet, beim Addiren gleichartige Theile zusammenfasst und beim Multipliciren für i^2 seinen Werth -1 setzt. Entsprechen den Würfen W, W_1 die complexen Zahlen $u+vi$, u_1+v_1i, so entspricht nach 259, 269 und 274 ihrer Summe die complexe Zahl $(u+u_1)+(v+v_1)i$, und ihrem Produkte die complexe Zahl $(uu_1-vv_1)+(uv_1+u_1v)i$.

402. Wenn B, Q, R drei reelle Punkte eines Kreises sind, so liegt der eine M von den beiden imaginären Punkten, in welchen der Kreis die unendlich ferne Gerade der Ebene schneidet, im Sinne BQR und der andere N im Sinne BRQ. Bezeichnet man

nun den Bogen BQ, welcher von dem Bogen BQR ein Theil ist, durch φ, so ist $\cos\varphi + i\sin\varphi$ der Werth des Wurfes MBNQ.

Es sei A der Mittelpunkt des Kreises, C der unendlich ferne Punkt der Geraden AB und CF_1DF die von C ausgehende harmonische Darstellung des imaginären Punktes P, in welchem die Gerade AB von der Geraden QM geschnitten wird, so ist DQ zu AB senkrecht und $F_1D = DQ = DF$, folglich $\frac{AD}{AB} = \cos\varphi$ und $\frac{DF}{AB} = \sin\varphi$, mithin (400) die dem Wurfe ABCP entsprechende Zahl $= \cos\varphi + i\sin\varphi$. Bemerkt man nun, dass MBNQ $\bar{\wedge}$ M(MBNQ) $\bar{\wedge}$ ABCP ist, so folgt der Satz.

Bezeichnet man den andern Theil QR des Bogens BQR durch ψ, so ist $\cos\psi + i\sin\psi$ der Werth des Wurfes MQNR und $\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)$ der Werth des Wurfes MBNR, welcher das Produkt aus dem Wurfe MBNQ in den Wurf MQNR ist. Es ist daher auch die (complexe) Zahl $\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)$ das Produkt aus der Zahl $\cos\varphi + i\sin\varphi$ in die Zahl $\cos\psi + i\sin\psi$.

403. Wenn ABCD ein eigentlicher Wurf ist und q die ihm entsprechende complexe Zahl bezeichnet, so ist (nach 262 und 270) $BACD = 1 - q$, $CBAD = \frac{1}{q}$, $BCAD = 1 - \frac{1}{q} = \frac{q-1}{q}$, $CABD = \frac{1}{1-q}$ und $ACBD = \frac{q}{q-1}$. Ist $q = u + vi$, so ist $\frac{1}{q} = \frac{u}{u^2+v^2} - \frac{vi}{u^2+v^2}$, $1 - q = (1-u) - vi$, u. s. w.

Anm. Das Rechnen mit complexen Zahlen kann als bekannt vorausgesetzt werden, da es in diesem § hauptsächlich nur darum zu thun war, den Begriff der complexen Zahl, damit in ihm nichts Unklares bleibe, auf den Begriff des Wurfes zurückzuführen.

---

§ 29.

Von den Abscissen.

404. Wenn man in einem Elementargebilde drei Elemente A, B, C annimmt, die Abscisse des ersten $= 0$, die des zweiten $= 1$ und die des dritten $= \infty$ setzt, so ist unter der Abscisse eines vierten Elements P des Gebildes der Werth des Wurfes ABCP zu

verstehen. Durch drei Elemente A, B, C eines Elementargebildes ist also ein in demselben enthaltenes Abscissensystem (A, B, C) bestimmt. Ist die Abscisse des Elements P in Hinsicht auf dieses System $=x$, so ist (403) die Abscisse desselben Elements in Hinsicht auf das System (B, A, C) $=1-x$, in Hinsicht auf das System (C, B, A) $=\frac{1}{x}$ u. s. w.

405. Wenn P, P_1, P_2, P_3 irgend vier Elemente eines Elementargebildes und x, x_1, x_2, x_3 die Abscissen derselben in Hinsicht auf ein in dem Gebilde enthaltenes Abscissensystem (A, B, C) sind, so ist $\frac{x-x_3}{x-x_1}.\frac{x_2-x_1}{x_2-x_3}$ der Werth des Wurfes $PP_1P_2P_3$.

Da nämlich $ABCP.APCP_3=ABCP_3=x_3$ und $ABCP=x$ ist, so ist $APCP_3=\frac{x_3}{x}$, demnach (403) $PACP_3=1-\frac{x_3}{x}=\frac{x-x_3}{x}$. Da eben so $PACP_1=\frac{x-x_1}{x}$ und $PACP_3=PACP_1.PP_1CP_3$ ist, so ist $PP_1CP_3=\frac{x-x_3}{x-x_1}$ und eben so $CP_1P_2P_3=P_2P_3CP_1=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_3}$. Bemerkt man nun noch, dass $PP_1P_2P_3=PP_1CP_3.CP_1P_2P_3$ ist, so folgt der Satz. Fällt P mit A zusammen, so ist $x=o$ und $PP_1CP_3=\frac{x_3}{x_1}$. Fällt P mit C zusammen, so ist $x=\infty$ und $PP_1CP_3=1$.

406. Wenn man in einem Elementargebilde zwei Abscissensysteme (A, B, C), (E, F, G) annimmt und die Abscisse eines und desselben Elements P in Hinsicht auf das erstere System durch x, in Hinsicht auf das letztere aber durch y bezeichnet, so ist (405) $y=\frac{f-g}{f-e}.\frac{x-e}{x-g}$ und $x=\frac{b-c}{b-a}.\frac{y-a}{y-c}$, wo e, f, g die Abscissen der Elemente E, F, G in Hinsicht auf das System (A, B, C) und a, b, c die Abscissen der Elemente A, B, C in Hinsicht das System (E, F, G) sind. Es ist hiernach $a=\frac{f-g}{f-e}.\frac{e}{g}$, $b=\frac{f-g}{f-e}.\frac{1-e}{1-g}$, $c=\frac{f-g}{f-e}$, $e=\frac{b-c}{b-a}.\frac{a}{c}$, $f=\frac{b-c}{b-a}.\frac{1-a}{1-c}$, $g=\frac{b-c}{b-a}$.

Durch drei Elemente E, F, G eines Elementargebildes und durch drei (complexe) Zahlen e, f, g ist ein in dem Gebilde enthaltenes Abscissensystem (A, B, C) bestimmt, in Hinsicht auf welches die Abscissen der Elemente E, F, G beziehlich den Zahlen e, f, g gleich sind. Ist P irgend ein Element des Gebildes, x seine Abscisse in Hinsicht auf das erwähnte System und y der Werth des Wurfes EFGP, so ist $y = \frac{f-g}{f-e} \cdot \frac{x-e}{x-g}$ und also $x = \frac{gy(f-e)-e(f-g)}{(f-e)y-(f-g)}$.

407. Wenn man in dem einen von zwei Elementargebilden ein Abscissensystem (A, B, C) und in dem andern ebenfalls ein Abscissensystem (E_1, F_1 G_1) annimmt, so ist die Abscisse x von einem Elemente P des ersten Gebildes der Werth des Wurfes ABCP und die Abscisse x_1 von einem Elemente P_1 des letztern der Werth des Wurfes $E_1F_1G_1P_1$. Nennt man nun die Elemente P, P_1 einander entsprechend, wenn zwischen ihren Abscissen die Gleichung

$$\alpha x x_1 - \beta x - \gamma x_1 + \delta = 0$$

statt findet, wo α, β, γ, δ bestimmte Zahlen sind und $\alpha\delta - \beta\gamma$ nicht Null ist, so sind die beiden Gebilde projektivisch auf einander bezogen.

Es seien A_1, B_1, C_1 diejenigen Elemente des letztern Gebildes, deren Abscissen beziehlich den Zahlen $\frac{\delta}{\gamma}$, $\frac{\beta-\delta}{\alpha-\gamma}$, $\frac{\beta}{\alpha}$ gleich sind, so ist (405) der Werth des Wurfes $A_1B_1C_1P_1 = \frac{\gamma x_1 - \delta}{\alpha x_1 - \beta} = x$. Da hiernach die Würfe ABCP, $A_1B_1C_1P_1$ einander gleich sind, so sind P, P_1 homologe Elemente der zu einander projektivischen Gebilde ABC..., $A_1B_1C_1$....

208. Wenn man zwei in einander liegende Elementargebilde projektivisch so auf einander bezieht, dass den Elementen A, B, C des einen die Elemente A_1, B_1, C_1 des andern entsprechen, deren Abscissen in Hinsicht auf das Abscissensystem (A, B, C) den Quotienten $\frac{\delta}{\gamma}$, $\frac{\beta-\delta}{\alpha-\gamma}$, $\frac{\beta}{\alpha}$ gleich sind, und nun x, x_1 die Abscissen von irgend zwei homologen Elementen P, P_1 der Gebilde in Hinsicht auf das erwähnte System bezeichnen, so ist (405) $x_1 = \frac{\beta x - \delta}{\alpha x - \gamma}$ und also $\alpha x x_1 - \beta x - \gamma x_1 + \delta = 0$. Auch hier wird vorausgesetzt, dass $\alpha\delta - \beta\gamma$ nicht Null sei.

Wenn $(\beta+\gamma)^2-4\alpha\delta$ nicht Null ist, so haben die zu einander projektivischen Gebilde zwei Elemente entsprechend gemein, deren Abscissen die Wurzeln der quadratischen Gleichung $\alpha x^2-(\beta+\gamma)x+\delta=0$ sind. Ist $(\beta+\gamma)^2-4\alpha\delta=0$, ohne dass jede der Zahlen $\alpha, \beta+\gamma, \delta$ Null ist, so haben die Gebilde nur ein Element entsprechend gemein. Wenn endlich $\alpha=\beta+\gamma=\delta=0$ ist, so haben die Gebilde alle ihre Elemente entsprechend gemein. Sollen die Gebilde involutorisch liegen, so muss $\beta=\gamma$ sein. Wenn $\alpha=0$ ist, so wird für $x=\infty$ auch $x_1=\infty$, daher man sagen kann, dass in diesem Falle eine Wurzel der erwähnten quadratischen Gleichung $=\infty$ sei.

409. Wenn $PP_1.QQ_1.RR_1$ eine Involution ist und die Abscissen der Elemente P, P_1, Q, Q_1, R, R_1 in Hinsicht auf irgend ein in dem Elementargebilde enthaltenes Abscissensystem (A, B, C) den Zahlen p, p_1, q, q_1, r, r_1 gleich sind, so findet zwischen diesen die Gleichung statt:

$$pp_1(q+q_1-r-r_1)+qq_1(r+r_1-p-p_1)+rr_1(p+p_1-p-p_1=0.$$

Da nämlich die Würfe PP_1QR, $P_1PQ_1R_1$ zu einander projektivisch sind, so ist (405) $\frac{(p-r)(q-p_1)}{(p-p_1)(q-r)}=\frac{(p_1-r_1)(q_1-p)}{(p_1-p)(q_1-r_1)}$, woraus die obige Gleichung leicht sich ergibt.

Ist $PP_1.QQ_1.CC$ eine Involution, so ist $q-p_1=p-q_1$, mithin $q+q_1=p+p_1$. Ist $PP_1.QQ_1.AC$ eine Involution, ist $p(q-q_1)=q(p-q_1)$ und also $pp_1=qq_1$. Sind die Elemente P, Q durch die Elemente R, R_1 harmonisch getrennt, so ist $2pq+2rr_1=(p+q)(r+r_1)$. Ist $PRQC$ ein harmonischer Wurf, so ist $2r=p+q$. Ist $PRQA$ ein harmonischer Wurf, so ist $\frac{2}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. Wenn endlich $PAQC$ ein harmonischer Wurf ist, so ist $p=-q$.

410. Hat man es nur mit Punkten zu thun, welche in einer und derselben reellen eigentlichen Geraden h liegen, so nimmt man in ihr gewöhnlich einen reellen eigentlichen Punkt A als Nullpunkt an, während man die Abscisse eines andern reellen eigentlichen Punktes $B=1$ und die Abscisse des unendlich fernen Punktes $C=\infty$ setzt. Häufig zieht man aber auch noch eine durch die Gerade h gehende reelle Ebene H und den einen M von den beiden Normalpunkten M, N dieser Ebene in Betrachtung. Es ist alsdann durch jeden eigentlichen Punkt P der Geraden h ein reeller Punkt S der Ebene H

bestimmt, welcher nämlich mit den beiden Punkten M, P in einer und derselben Geraden liegt. Ist P selbst reell, so fällt S mit P zusammen. Ist aber P ein imaginärer Punkt, so liegt der Punkt S auf der einen oder andern Seite der Geraden h, je nachdem der Punkt P im Sinne ABC oder im Sinne BAC liegt. Ist CF_1DF die von C ausgehende harmonische Darstellung des imaginären Punktes P und also $S(CF_1DF)$ die von SC ausgehende harmonische Darstellung der zu sich selbst senkrechten imaginären Geraden SM, so halbirt die zu SC und also auch zu h senkrechten Gerade SD den rechten Winkel F_1SF, daher $F_1D = DS = DF$ ist. Die Abscisse des Punktes P ist (400) $= \frac{AD}{AB} + \frac{DF}{AB}i = \frac{AD}{AB} + \frac{DS}{AB}i$, wo $\frac{DS}{AB}$ als positiv oder als negativ zu betrachten ist, je nachdem der Punkt P im Sinne ABC oder im Sinne BAC liegt. Es seien nun p, p_1, q, q_1 die Abscissen von vier eigentlichen Punkten P, P_1, Q, Q_1 der Geraden h und S, S_1, T, T_1 die reellen Punkte der imaginären Geraden MP, MP_1, MQ, MQ_1, so hat man nachstehende Sätze:

I. Wenn die Punkte P, P_1, Q, Q_1 einer und derselben Kette angehören, also $\frac{(p-q_1)(q-p_1)}{(p-p_1)(q-q_1)}$ eine reelle Zahl ist, so liegen (245) die Punkte S, S_1, T, T_1 entweder in einer und derselben Geraden oder in einem und demselben Kreise. In beiden Fällen ist der Wurf PP_1QQ_1 zu dem reellen Wurfe SS_1TT_1 projektivisch.

II. Wenn $2q = p + p_1$ ist, mithin (409) die Punkte P, P_1 durch die Punkte Q, C und also auch die Geraden MS, MS_1 durch die Geraden MT, MC harmonisch getrennt sind, so ist der Punkt T der Mittelpunkt der Strecke SS_1.

III Wenn $p + p_1 = q + q_1$ und also (409) $PP_1.QQ_1.CC$ eine Involution ist, so ist die Strecke ST der Strecke T_1S_1 und die Strecke ST_1 der Strecke TS_1 gleich, sei es nun, dass die Punkte S, T, S_1, T_1 in einer und derselben Geraden liegen oder die vier Eckpunkte eines Parallelogramms sind. Nach der Annahme gibt es nämlich einen Punkt R, welcher vom Punkte C sowohl durch die Punkte P, P_1 als auch durch die Punkte Q, Q_1 harmonisch getrennt ist. Bemerkt man nun, dass der reelle Punkt der imaginären Geraden MR der Mittelpunkt sowohl der Strecke SS_1 als auch der

Strecke TT_1 ist, so folgt der Satz. Ist $q=p+p_1$ und also $PP_1.AQ.CC$ eine Involution, so ist die Strecke AS der Strecke S_1T und die Strecke AS_1 der Strecke ST gleich.

IV. Wenn $pp_1=qq_1$ und also (409) $AC.PP_1.QQ_1$ eine Involution ist, so ist das Produkt aus den Strecken AS, AS_1 dem Produkte aus den Strecken AT, AT_1, der Winkel SAT dem Winkel T_1AS_1 und der Winkel SAT_1 dem Winkel TAS_1 gleich. Bezieht man nämlich zwei ebene Systeme projektivisch so auf einander, dass den Punkten M, N, A, S des einen Systems die Punkte M, N, A, T des andern entsprechen, so sind sie einander ähnlich und je zwei homologe reelle Winkel derselben in einem und demselben Sinne beschrieben. Da nun $M(AC.SS_1.TT_1)$ eine Involution, folglich $M(ACST_1) \barwedge M(CAS_1T) \barwedge M(ACTS_1)$ ist, und da den Geraden MA, MC, MS des erstern Systems die Geraden MA, MC, MT des letztern entsprechen, so entspricht der Geraden MT^1 die Gerade MS_1 und also dem Punkte T_1 des erstern Systems der Punkt S_1 des letztern, woraus der Satz sich ergibt. Ist $q=pp_1$ und also $AC.PP_1.BQ$ eine Involution, so ist das Produkt aus den Strecken AS, AS_1 dem Produkte aus den Strecken AB, AT, der Winkel SAT dem Winkel BAS_1 und der Winkel S_1AT dem Winkel BAS gleich.

411. Durch vier in einerlei Ebene liegende Punkte A, B, C, C_1, von welchen keine drei einer und derselben Geraden angehören, ist ein ebenes Coordinatensystem (A, B, C, C_1) bestimmt. Jeder ausserhalb der Geraden CC^1 liegende Punkt P der Ebene ist durch die Geraden bestimmt, welche ihn aus den Punkten C_1, C projiciren. Die Werthe der Würfe $C_1(ABCP)$, $C(ABC_1P)$ sind die Coordinaten des Punktes P in Hinsicht auf das erwähnte System.

Durch fünf Punkte A, B, C, C_1, C_2, von welchen keine vier in einerlei Ebene liegen, ist ein räumliches Coordinatensystem (A, B, C, C_1, C_2) bestimmt. Die Geraden c, c_1, c_2, von welchen die erste den Punkt C_1 mit dem Punkte C_2, die zweite den Punkt C_2 mit dem Punkte C und die dritte den Punkt C mit dem Punkte C_1 verbindet, sind die Projektionsaxen des Systems. Jeder ausserhalb der Ebene CC_1C_2 liegende Punkt P ist durch die drei Ebenen bestimmt, welche ihn aus den Geraden c, c_1, c_2 projiciren. Die Werthe der Würfe c(ABCP), $c_1(ABC_1P)$, $c_2(ABC_2P)$, durch welche diese Ebenen bestimmt sind, sind die

Coordinaten des Punktes P in Hinsicht auf das erwähnte System. Der Punkt A ist der Nullpunkt des Systems, der Punkt B aber derjenige Punkt, dessen Coordinaten alle drei $=1$ sind. Wenn die fünf gegebenen Punkte reell sind und die drei letztern in der unendlich fernen Ebene liegen, so ist das Coordinatensystem ein gewöhnliches.

Eben so ist durch fünf Ebenen A, B, C, C_1, C_2, von welchen keine vier durch einen und denselben Punkt gehen, ein Coordinatensystem für Ebenen bestimmt. Bezeichnet man die Geraden C_1C_2, CC_2, CC_1 durch c, c_1, c_2, so sind die Coordinaten einer Ebene P, welche nicht durch den Punkt Cc geht, die Werthe der Würfe c(ABCP), $c_1(ABC_1P)$, $c_2(ABC_2P)$.

412. Durch drei Gerade a, b, c einer Regelschaar und drei Leitstrahlen s, s_1, s_2 derselben ist auch ein Coordinatensystem bestimmt. Die Coordinaten eines Punktes P in Hinsicht auf dieses System sind die Werthe der Würfe s(abcP), s_1(abcP), s_2(abcP), wodurch der Punkt P, wenn er nämlich nicht in der Regelfläche liegt, bestimmt ist. Liegt aber der Punkt P in der Fläche, so dass also in ihm eine Gerade p der einen Regelschaar und eine Gerade u der andern Regelschaar sich schneiden, so ist er durch die Werthe der Würfe abcp, ss_1s_2u bestimmt.

§. 30.

Besondere Fälle von allgemeinen Sätzen.

413. In diesem und dem folgenden §. ist nur von reellen Gebilden die Rede. Eben so hat man unter Elementen, wenn solche nicht ausdrücklich imaginär genannt werden, reelle Elemente zu verstehen.

Schneidet eine Gerade eine Hyperbel in zwei eigentlichen Punkten A, A_1, so schneidet sie die Asymptoten der Curve in zwei Punkten B, B_1, welche mit jenen symmetrisch liegen. Da nämlich (335) der unendlich ferne Punkt der Geraden AB in dem involutorischen Gebilde $AA_1.BB_1$... sich selbst zugeordnet ist, so ist $AB=B_1A_1$ und $AB_1=B_1A$. — Jede Gerade, welche eine Hyperbel in einem eigentlichen Punkte berührt, schneidet die Asymptoten der Curve in zwei Punkten, welche vom Berührungspunkte gleichweit abstehen.

414. Wenn zwei Gerade SA, SB, welche im Punkte S sich schneiden und eine Curve K II. Ordnung in den Punkten A, B berühren, von einer dritten Tangente der Curve in den Punkten C, C_1 und von einer vierten Tangente in den Punkten D, D^1 geschnitten werden, so ist (3) $SACD \barwedge BSC_1D_1 \barwedge SBD_1C_1$.

Ist K eine Parabel und CC_1 die unendlich ferne Gerade der Ebene, so sind D, D_1 homologe Punkte von zwei einander ähnlichen geraden Gebilden SAC..., BSC_1.... Ist überdiess $SA=BS$, so sind die Gebilde congruent und also auch die Strecken SD, AD den Strecken BD_1, SD_1 gleich. — Wenn K eine Hyperbel ist und SA, SB die Asymptoten derselben sind, so ist $SC:SD=SD_1:SC_1$, folglich $SC.SC_1=SD.SD_1$ und mithin auch Dreieck SCC_1 = Dreieck SDD_1. — Sind die Tangenten AS, BS zu einander parallel, so ist $AC:AD=BD_1:BC_1$ und also $AC.BC_1=AD.BD_1$.

415. Durch eine Curve II. Ordnung und einen in ihr liegenden Punkt S ist (386) ein Punkt T bestimmt, welcher mit je zwei Punkten der Curve, die aus dem erstern Punkte durch zwei zu einander senkrechte Gerade projicirt werden, in einer und derselben Geraden liegt. — Die Directrix einer Parabel wird von je zwei zu einander senkrechten Tangenten derselben in einem und demselben Punkte geschnitten.

416. Durch eine Curve II. Ordnung und eine Gerade, welche die Curve in zwei eigentlichen Punkten schneidet, aber nicht durch den Mittelpunkt derselben geht, ist (387) eine Parabel bestimmt, die jede Gerade berührt, welche die erstere Curve in zwei auf entgegengesetzten Seiten der gegebenen Geraden liegenden und von ihr gleichweit abstehenden Punkten schneidet. — Wenn von einem rechtwinkligen Dreiecke der Schnittpunkt der zu einander senkrechten Seiten gegeben ist, die beiden übrigen Eckpunkte aber in einer gegebenen nicht durch jenen Punkt gehenden Curve II. Ordnung liegen, so berührt die Hypotenuse des Dreiecks eine andere gegebene Curve II. Ordnung. — Zu jeder Ellipse so wie auch zu jeder Hyperbel, deren Asymptotenwinkel ein spitzer Winkel ist, gibt es einen

Kreis, dem jeder Punkt angehört, in welchem zwei zu einander senkrechte Tangenten jener Curve sich schneiden.

417. Wenn von einem in eine gegebene Curve K II. Ordnung beschriebenen Dreiecke SPQ ein Eckpunkt S gegeben ist und die durch diesen Punkt gehenden Seiten einen schiefen Winkel von gegebener Grösse mit einander bilden, so berührt die dritte Seite des Dreiecks eine andere gegebene Curve II. Ordnung, welche die erstere in zwei einander conjungirten imaginären Punkten F, G berührt.

Da nämlich die Geraden SP, SQ homologe Strahlen von zwei congruenten Strahlenbüscheln sind, so sind die Punkte P, Q homologe Punkte von zwei zu einander projektivischen Punktgebilden, woraus (374) der Satz sich ergibt. Jede der imaginären Geraden SF, SG ist zu sich selbst senkrecht. Die Gerade FG aber ist die Polare des in 415 erwähnten Punktes T.

418. Wenn zwei Gerade AC, BC, welche im Punkte C sich schneiden und eine Curve II. Ordnung in den Punkten A, B berühren, von einer dritten Tangente derselben in den Punkten P, Q geschnitten werden und S ein Brennpunkt der Curve ist, so sind diejenigen Winkel ASC, CSB, PSQ, welche in einem und demselben Sinne beschrieben sind, auch einander gleich. Denn die zu einander projektivischen geraden Gebilde ABP..., CBQ... werden aus dem Punkte S durch zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel projicirt, welche zwei imaginäre Strahlen, deren jeder zu sich selbst senkrecht ist, entsprechend gemein haben, mithin congruent und in einem und demselben Sinne beschrieben sind. Je zwei homologe Strahlen SP, SQ der Büschel bilden zwei vollkommene Winkel mit einander, welche, wenn der erstere Strahl als gemeinschaftlicher Anfangsschenkel von beiden betrachtet wird, in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind.

Ist die Curve eine Parabel, B der unendlich ferne Punkt derselben und R der Berührungspunkt der Tangente PQ, so ist SC zu PA und SQ zu PR parallel, daher auch die hohlen Winkel SAP, SPR einander gleich sind. Da dasselbe von den Winkeln SRP, SPA gilt, so folgt noch, dass derjenige einfache Winkel RSA, welcher den Punkt P nicht in sich enthält, das Doppelte von dem hohlen Winkel APR ist.

Jede Gerade, welche eine Hyperbel in einem eigentlichen Punkte berührt, schneidet die Asymptoten CA, CB der Curve in zwei Punkten P, Q, welche mit den beiden Brennpunkten in einem und demselben Kreise liegen. Von den beiden Winkeln, welche die endliche Strecke PQ aus den Brennpunkten projiciren, ist der eine der Hälfte des Asymptotenwinkels, der andere aber dem Nebenwinkel des erstern gleich.

419. Die Brennpunkte von allen Parabeln, welche drei gegebene Gerade berühren, die in drei eigentlichen Punkten A, B, C sich schneiden, liegen mit diesen Punkten in einem und demselben Kreise. In demselben Kreise liegt auch der Mittelpunkt einer jeden gleichseitigen Hyperbel, in Hinsicht auf welche die Eckpunkte des Dreiecks ABC die Pole der ihnen gegenüberliegenden Seiten sind.

Es ergeben sich diese Sätze aus G. 300, wenn man die Normalpunkte M, N der Ebene in Betrachtung zieht. Ist nämlich S der Brennpunkt einer Parabel, so berührt dieselbe die drei Seiten des Dreiecks MNS. Wenn nun die Parabel auch die drei Seiten des Dreiecks ABC berührt, so liegen die sechs Eckpunkte der beiden Dreiecke in einer und derselben Curve II. Ordnung, welche, da sie durch die Normalpunkte der Ebene geht, ein Kreis ist. Die Fusspunkte der aus dem Punkte S auf die Seiten des Dreiecks ABC gefällten Lothe liegen (418) in der Geraden, welche die Parabel in ihrem Scheitelpunkte berührt. Ist S der Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel, in Hinsicht auf welche die Eckpunkte des Dreiecks ABC die Pole der ihnen gegenüberliegenden Seiten sind, so sind ABC, MNS Polardreiecke eines und desselben Polarsystems, daher auch in diesem Falle die Punkte A, B, C, S in einem und demselben Kreise liegen. Die unendlich fernen Punkte der Hyperbel sind in Hinsicht auf das vollständige Viereck ABCS einander conjugirt, daher je zwei einander gegenüberliegende Seiten desselben, welche in einem eigentlichen Punkte sich schneiden, zwei Winkel mit einander bilden, deren Halbirungslinien zu den Asymptoten der Hyperbel parallel sind.

420. Durch ein vollständiges Vierseit, dessen Eckpunkte sämmtlich eigentliche Punkte sind, sind (419) vier Kreise bestimmt, deren jeder durch die Schnittpunkte von drei Seiten des Vierseits und durch den Brennpunkt S der Parabel geht, welche

die vier Seiten des Vierseits berührt. Die Fusspunkte der von dem Punkte S auf die Seiten des Vierseits gefällten Lothe liegen in einer und derselben Geraden, welche die Parabel in ihrem Scheitelpunkte berührt.

Die drei endlichen Strecken AA_1, BB_1, CC_1, deren jede zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte des Vierseits verbindet, sind die Durchmesser von drei Kreisen, welche die Direktrix d der erwähnten Parabel entweder in einem und demselben Punkte berühren oder in denselben zwei reellen oder imaginären Punkten schneiden. Liegt nämlich der Punkt P in der Geraden d und zugleich in dem Kreise, dessen Durchmesser die Strecke AA_1 ist, so sind sowohl die im Punkte P sich schneidenden Tangenten der Parabel als auch die Geraden PA, PA_1 und folglich je zwei einander zugeordnete Strahlen des involutorischen Strahlenbüschels $P(AA_1.BB_1.CC_1...)$ zu einander senkrecht, daher durch den Punkt P auch die beiden Kreise gehen, deren Durchmesser die Strecken BB_1, CC_1 sind. Die Mittelpunkte der drei Kreise liegen in der Geraden, welche in Hinsicht auf das vollständige Vierseit der unendlich fernen Geraden conjugirt ist.

421. Durch ein vollständiges Vierseit und einen eigentlichen Punkt P, welcher in keiner Seite des Vierseits liegt und aus welchem keine zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte desselben durch zwei zu einander senkrechte Gerade projicirt werden, ist eine Curve II. Ordnung bestimmt, welche die vier Seiten des Vierseits und zwei im Punkte P sich schneidende zu einander senkrechte Gerade berührt.

Der Punkt S ist der Mittelpunkt eines involutorischen Strahlenbüschels, in welchem je zwei Strahlen einander zugeordnet sind, die mit den vier Seiten des Vierseits in einem und demselben Büschel II. Ordnung enthalten sind. Bemerkt man nun, dass jener Büschel zwei einander zugeordnete Strahlen enthält, welche zu einander senkrecht sind, so folgt der Satz.

422. Wenn eine Gerade PC, welche zu einer Curve II. Ordnung in einem Punkte P senkrecht ist, von zwei Tangenten AC, BC der Curve in einem und demselben Punkte C geschnitten wird, so bildet sie mit den Geraden PA, PB, welche aus jenem Punkte die Berührungspunkte projiciren, gleiche Winkel.

Die Geraden PA, PB sind nämlich (G. 250) durch die Gerade PC und durch die Gerade PQ, welche die Curve im Punkte P berührt, harmonisch getrennt. Da nun überdiess die Geraden PC, PQ zu einander senkrecht sind, so halbiren sie die Winkel, welche die Geraden PA, PB mit einander bilden.

423. Wenn zwei zu einander senkrechte Gerade PQ, PR in Hinsicht auf eine Ellipse oder Hyperbel einander conjugirt sind, aber weder der Schnittpunkt der Geraden mit einem Brennpunkte der Curve noch die eine Gerade mit der Hauptaxe derselben zusammenfällt, so sind sie durch die Brennpunkte F, G harmonisch getrennt und also die Halbirungslinien der beiden Nebenwinkel, deren gemeinschaftliche Schenkel PF, PG aus dem Punkte P die Brennpunkte der Curve projiciren.

Es seien M, N die Normalpunkte der Ebene. Da nun die Geraden PQ, PR in Hinsicht auf zwei Büschel II. Ordnung, welche die vier Geraden FM, FN, GM, GN mit einander gemein haben, nämlich in Hinsicht auf den der Curve sich anschmiegenden Büschel und in Hinsicht auf den Büschel $M + N$ einander conjugirt sind, so sind sie auch in Hinsicht auf den Büschel $F + G$ einander conjugirt, woraus der Satz sich ergiebt. Derselbe gilt übrigens auch, wenn die Curve eine Parabel und der eine von den beiden Punkten F, G der Brennpunkt, der andere aber der unendlich ferne Punkt derselben ist.

Liegt der Punkt P in der Curve, so ist die eine der Geraden PQ, PR die durch den Punkt P gehende Tangente derselben und also die andern in diesem Punkte zur Curve senkrecht. Schneiden sich im Punkte P zwei Tangenten der Curve, so bilden auch diese zwei Winkel mit einander, deren Halbirungslinien die Geraden PQ, PR sind. Es sind daher auch die Winkel, welche die eine (gleichviel welche) von den beiden Tangenten mit der Geraden PF bildet, den Winkeln gleich, welche die andere mit der Geraden PG bildet.

424. Die Fahrstrahlen FP, FP_1, welche aus einem und demselben Brennpunkte F einer Curve II. Ordnung an Punkte P, P_1 der Curve selbst gehen, verhalten sich wie die Abstände, welche diese Punkte von der jenem Brennpunkte zugehörigen Direktrix f haben.

Es seien Q, Q_1 die Fusspunkte der aus den Punkten P_1 P_1

auf die Gerade f gefällten Lothe, M, N die Normalpunkte der Ebene und S der Schnittpunkt von f und PP_1. Da nun (246) F ($MN.PP_1.SS$) eine Involution ist, mithin die Geraden FP, FP_1 mit der Geraden FS gleiche Winkel bilden, so ist, wie man sich leicht überzeugt, $FP:FP_1=SP:SP_1=PQ:P_1Q_1$ und also auch $\frac{FP}{PQ}=\frac{EP_1}{P_1Q_1}$.

Ist die Curve eine Parabel, so sind ihre Scheitelpunkte und ihr unendlich ferner Punkt durch den Brennpunkt und die Direktrix harmonisch getrennt, daher der Scheitelpunkt und folglich jeder Punkt der Curve vom Brennpunkte eben so weit absteht als von der Direktrix. Hat aber die Curve zwei Brennpunkte F, G, so schneidet die durch diese Punkte gehende Gerade die Curve in zwei Punkten A, B und die Direktricen f, g derselben in zwei Punkten C, D, so dass $AC=DB$ und $AD=CB$ ist. Da nun $\frac{FP}{PQ}=\frac{FA}{AC}=\frac{FB}{BC}$, ist, so ist auch $\frac{FP}{PQ}=\frac{FA\pm FB}{AC\pm BC}=\frac{AB}{CD}=\frac{FG}{AB}$. Da eben so, wenn R den Schnittpunkt von g und PQ bezeichnet, $\frac{GP}{PR}=\frac{AB}{CD}$ ist, so folgt, dass bei einer Elipse die Summe, bei einer Hyperbel aber die Differenz von je zwei Fahrstrahlen FP, GP, welche aus den Brennpunkten an einen und denselben Punkt der Curve gehen, der Axe AB gleich ist. Der Quotient $\frac{FG}{AB}$ ist im letztern Falle der Secante des halben Asymptotenwinkels gleich.

425. Sucht man in einem involutorischen nicht rechtwinkligen Strahlenbüschel $aa_1.bb_1\ldots$ zwei einander zugeordnete Strahlen, welche einen Winkel von gegebener Grösse einschliessen, so lege man durch den Mittelpunkt S des Büschels einen Kreis K und suche auf demselben die Punkte A, A_1, B, B_1, welche aus dem Punkte S durch die Strahlen a, a_1, b, b_1 projicirt werden, und dann zwei Punkte D, E, so dass der Winkel DSE dem gegebenen gleich ist. Zieht man nun in dem Kreise eine der Sehne DE gleiche Sehne PP_1, die oder deren Verlängerung durch den Schnittpunkt N von AA_1 und BB_1 geht, so sind SP, SP_1 zwei einander zugeordnete Strahlen des gegebenen involutorischen Büschels, welche einen Winkel von der gegebenen Grösse mit einander bilden.

Ist der gegebene Winkel ein rechter, so sind DE, PP_1 Durchmesser des Kreises K. Ist aber der gegebene Winkel ein schiefer Winkel, so muss derjenige Kreis, welcher mit dem Kreise K concentrisch ist und die Sehne DE berührt, auch von der Sehne PP_1 berührt werden. In diesem Falle lässt also die Aufgabe zwei oder eine oder gar keine Auflösung zu, je nachdem das von dem Mittelpunkte des Kreises K auf die Sehne DE gefällte Loth kleiner, eben so gross oder grösser als der Abstand ist, welchen jener Punkt vom Punkte N hat.

Wenn die Ordnungsstrahlen des gegebenen involutorischen Büschels imaginär sind, so enthält der Kreis K eine Sehne QQ_1, welche im Punkte N halbirt und daher unter allen durch diesen Punkt gehenden Sehnen desselben die kleinste ist. Es ist hiernach auch der spitze Winkel, welchen die einander zugeordneten Stralen SQ, SQ_1 des Büschels mit einander bilden, kleiner, sein Nebenwinkel aber grösser als jeder andere Winkel, welcher von zwei einander zugeordneten Strahlen desselben eingeschlossen ist. Auf diese Weise findet man diejenigen einander conjugirten Durchmesser einer Ellipse, welche den kleinsten spitzen und daher den grössten stumpfen Winkel mit einander bilden. Die Hauptaxe der Ellipse halbirt den erstern, die andere Axe aber den letztern der erwähnten Winkel. Auch sind jene Durchmesser zu den Seiten der Raute parallel, welche die Scheitelpunkte der Ellipse zu Eckpunkten hat.

426. Will man um ein gegebenes Viereck EFGH, welches lauter ausspringende Winkel hat, eine Ellipse beschreiben, welche einer gegebenen K ähnlich sei, so suche man zuerst die beiden unendlich fernen Punkte A, A_1, welche in Hinsicht auf das Viereck EFGH einander conjugirt sind. Hierauf ziehe man in der Ellipse K zwei einander conjugirte Durchmesser a, a_1, so dass die Winkel, welche sie mit einander bilden, den Winkeln gleich sind, unter welchen die Geraden EA, EA_1 sich schneiden. Alsdann ziehe man in der Ellipse K noch zwei einander conjugirte Durchmesser b, b_1 und suche in der unendlich fernen Geraden AA_1 die Punkte B, B_1, so dass die Würfe $E(ABA_1B_1)$, aba_1b_1, deren jeder aus vier Strahlen besteht, einander congruent sind. Da nun die Punkte A, A_1 durch die einander conjungirten imaginären Punkte ABA_1B_1, AB_1A_1B harmonisch getrennt sind, so liegen diese mit dem vier

Eckpunkten des Vierecks EFGH in einer und derselben Ellipse, welche wegen Congruenz der erwähnten Würfe der gegebenen ähnlich ist.

Die Halbirungslinien der Winkel, welche die Geraden EA, EA_1 mit einander bilden, schneiden die unendlich ferne Gerade AA_1 in zwei Punkten C, C_1. Die einander conjugirten imaginären Punkte ACA_1C_1, AC_1A_1C liegen mit den vier Eckpunkten des Vierecks EFGH in der Ellipse, welche unter allen um dasselbe beschriebenen Ellipsen die kleinste Excentricität hat. Hat also die Ellipse K eine noch kleinere Excentricität, so lässt die obige Aufgabe keine Auflösung zu.

Sind keine zwei Seiten des Vierecks EFGH zu einander parallel, so giebt es zwei Parabeln, deren jede durch die vier Eckpunkte desselben geht. Die unendlich ferne Gerade wird von der einen im Punkte A, von der andern im Punkte A_1 berührt.

427. Durch ein Dreieck ABC und einen eigentlichen Punkt F, welcher mit dem Dreiecke in einerlei Ebene aber in keiner seiner Seiten liegt, sind (340) vier Curven II. Ordnung bestimmt, welche nämlich die drei Eckpunkte des Dreiecks mit einander gemein und überdiess den gegebenen Punkt F zum gemeinschaftlichen Brennpunkt haben. Je zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte des vollständigen Vierseits, dessen Seiten die zu dem gemeinschaftlichen Brennpunkte F gehörigen Direktricen der vier Curven sind, sind durch zwei Eckpunkte des Dreiecks ABC harmonisch getrennt und werden aus dem Punkte F durch zwei zu einander senkrechte Gerade projicirt, daher jede Gerade, welche mit zwei von den drei Geraden FA, FB, FC gleiche Winkel bildet, durch einen Eckpunkt des Vierseits geht.

428. Durch eine Ellipse sind (366) vier Kreise bestimmt, deren jeder der Ellipse vierpunktig sich anschmiegt. Die Punkte S, S_1, S_2, S_3, in welchen die Kreise die Ellipse berühren, sind die Scheitelpunkte dieser Curve und daher die Eckpunkte eines in dieselbe beschriebenen gleichseitigen Vierecks, dessen eine Diagonale SS_2 durch die beiden Brennpunkte F, G geht. Die Mittelpunkte C, C_1, C_2, C_3 der vier Kreise sind die Eckpunkte eines andern gleichseitigen Vierecks. Die Geraden CC_1, C_1C_2, C_2C_3, C_3C sind in Hinsicht auf die Ellipse den Geraden SS_1, S_1S_2,

S_2S_3, S_3S conjugirt und zu diesen beziehlich senkrecht. Die Brennpunkte der Ellipse sind durch die Punkte S, C und eben so durch die Punkte S_2, C_2 harmonisch getrennt, während die Punkte S_1, C_1 und eben so die Punkte S_3, C_3 aus jedem der Brennpunkte durch zwei zu einander senkrechte Gerade projicirt werden. Die beiden Kreise, welche der Ellipse in den Scheitelpunkten der Hauptaxe vierpunktig sich anschmiegen, sind von dieser Curve eingeschlossen, während die beiden übrigen die Ellipse einschliessen.

Da nämlich dem Schnittpunkte P der Geraden, welche die Ellipse in den Punkten S, S_1 berühren, die Gerade SS_1 auch in Hinsicht auf die beiden Kreise zugeordnet ist, welche der Ellipse in den Punkten S, S_1 vierpunktig sich anschmiegen, so liegen die Punkte P, C, C_1 in einer und derselben zu SS_1 senkrechten Geraden. Nach 423 sind also die Brennpunkte durch die Geraden SS_1, PC und also auch durch die Punkte S, C harmonisch getrennt. Eben so sind aber auch die imaginären Punkte, in welchen die Gerade S_1S_3 von den zu sich selbst senkrechten Tangenten der Ellipse geschnitten wird, durch die Geraden SS_1,PC_1 und also auch durch die Punkte S_1, C_1 harmonisch getrennt, daher diese Punkte aus jedem der Brennpunkte durch zwei zu einander senkrechte Gerade projicirt werden.

In dem involutorischen geraden Gebilde FF. GG. CS... ist dem unendlich fernen Punkte der Mittelpunkt M der Ellipse zugeordnet, daher (409) $MC . MS = MF^2$ ist. Da ferner die Dreiecke CSP, SPS_1, PS_1C_1 einander ähnlich sind, so ist $CS : SP = SP : PS_1 = PS_1 : S_1C_1$ und folglich, wenn man die halbe grosse Axe der Ellipse durch a und die halbe kleine Axe durch b bezeichnet, $SC = \frac{b^2}{a}$ und $S_1C_1 = \frac{a^2}{b}$. Auch hieraus kann man schliessen, dass die Geraden FC_1, FS_1 zu einander senkrecht sind.

Schmiegt ein Kreis einer Hyperbel in einem Punkte vierpunktig sich an, so ist auch dieser Punkt vom Mittelpunkte des Kreises durch die Brennpunkte der Hyperbel harmonisch getrennt. Der Brennpunkt einer Parabel aber liegt in der Mitte zwischen dem Scheitelpunkte dieser Curve und dem Mittelpunkte des Kreises, welcher derselben vierpunktig sich anschmiegt.

429. Wenn der Mittelpunkt S eines der Grösse nach gegebenen und in einem gegebenen Sinne beschriebenen Winkels FST in einem gegebenen Kreise K liegt und der eine Schenkel durch einen gegebenen nicht in dieser Linie liegenden Punkt F geht, so berührt (391) der andere Schenkel ST eine gegebene Curve K_1 II. Ordnung, welche entweder) mit dem gegebenen Kreise zusammenfällt oder denselben in zwei Punkten, die jedoch auch in einander fallen können, berührt.

Ist F der Mittelpunkt des Kreises K, so berührt die Gerade ST entweder diesen Kreis oder einen andern gegebenen Kreis, der den Punkt F zum Mittelpunkt hat, je nachdem nämlich der gegebene Winkel ein rechter oder schiefer Winkel ist. Wenn aber der Mittelpunkt M des Kreises K und der Punkt F zwei verschiedene Punkte sind, so ist die Curve K_1, wie sogleich bewiesen werden soll, eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem der Punkt F, welcher ein Brennpunkt derselben ist, vom Kreise K eingeschlossen oder nicht eingeschlossen ist.

Ist der gegebene Winkel ein rechter Winkel, so suche man in den Verlängerungen der Strecken FM, FS die Punkte G, P, so dass $FG = 2FM$, $FP = 2FS$ und also $GP = 2MS$ ist. Es sei ferner Q der Schnittpunkt der Geraden ST, GP, so ist $FQ = PQ$. Da hiernach entweder die Summe oder die Differenz der Strecken FQ, GQ dem Durchmesser des Kreises K gleich ist, je nachdem nämlich die Punkte F, G auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten der Geraden ST liegen, welche den Winkel FQP halbirt, so schmiegt die Gerade ST im Punkte Q derjenigen Curve II. Ordnung sich an, welche die Punkte F, G zu Brennpunkten hat und den Kreis K in den Punkten berührt, in welchen derselbe von der Geraden FG geschnitten wird.

Ist der gegebene Winkel ein schiefer Winkel, so sei A irgend einer von den beiden Punkten, in welchen der Kreis K von der Geraden MF geschnitten wird, und FAA_1 ein bei A_1 rechtwinkliges Dreieck, dessen spitzer Winkel FAA_1 dem spitzen Winkel FST gleich und im Sinne dieses Winkels beschrieben ist. Es sei ferner FS_1 das aus F auf die Gerade ST und MM_1 das aus M auf die Gerade FA_1 gefällte Loth, so sind die Dreiecke FSS_1, FAA_1, FMM_1 einander ähnlich und in einem und demselben Sinne beschrieben, daher diess auch von den Dreiecken FM_1S_1, FMS gilt. Da hiernach $M_1S_1 : MS = FM_1 : FM = M_1A_1 : MA$ ist, mithin der Punkt S_1 auf dem um den Punkt M_1 mit dem Halbmesser M_1A_1 beschriebenen Kreise liegt, so berührt nach dem Obigen die Gerade ST diejenige Curve K_1 II. Ordnung, von welcher M_1 der Mittelpunkt, F ein Brennpunkt und A_1 ein Scheitelpunkt ist. Man suche nun noch in der Geraden MM_1, die Punkte B, C und in der Geraden MF den Punkt D, so dass MFB ein rechter Winkel und in Hinsicht auf den Kreis K dem Punkte B der Punkt C und dem Punkte F der Punkt D conjugirt ist. Da alsdann $MB.MC = MA^2 = MF.MD$ ist, so ist auch MCD ein rechter Winkel und also dem unendlich fernen Punkte der Geraden CD in Hinsicht auf jede der Curven, K, K_1 die Gerade MM_1 zugeordnet. Da ferner $\frac{CD}{M_1F} = \frac{MD}{MF} = \left(\frac{MA}{MF}\right)^2 = \left(\frac{M_1A_1}{M_1F}\right)^2$ ist, folglich der Punkt D in der zum Brennpunkte F gehörigen Directrix der Curve K_1 liegt, so ist auch dem Punkte D in Hinsicht auf jede der Curven K, K_1 eine und dieselbe Gerade FB zugeordnet, woraus man schliessen kann, dass die Curven K, K_1, wenn der Punkt B mit dem Punkte C zusammenfällt, in diesem Punkte vierpunktig einander sich anschmiegen im entgegengesetzten Falle aber in den reellen oder imaginären Punken sich berühren, in welchen sie von der Geraden CD geschnitten werden.

430. Wenn ein Kreis K eine andere Curve K_1 II. Ordnung in zwei Punkten, die auch in einander fallen können, berührt, ohne von dieser Curve eingeschlossen zu sein, so schneiden sich in jedem Punkte S des Kreises, welcher weder in der Curve K_1 noch in ihrer Hauptaxe liegt, vier Gerade SF, SG, ST, SU, von welchen zwei aus dem Punkte S die Brennpunkte F, G der Curve K_1 projiciren, die beiden übrigen aber diese Curve berühren. Liegen nun die Berührungspunkte der Curven K, K_1 mit den Brennpunkten der letztern in einer und derselben Geraden, so sind (429) je zwei von den vier Geraden SF, SG, ST, SU, welche durch die beiden übrigen getrennt sind, zu einander senkrecht. Wenn aber die Berührungspunkte der Curven K, K_1 in einer Geraden liegen, welche mit der Hauptaxe der letztern einen Parallelstreifen einschliesst, so hat man zu unterscheiden, ob der Punkt S ausserhalb desselben

oder in demselben liegt. Im erstern dieser Fälle schneiden sich von den vier Geraden SF, SG, ST, SU je zwei getrennte, im letztern aber je zwei nicht getrennte, von welchen jedoch die eine die Curve K_1 berührt und die andere durch einen Brennpunkt derselben geht, unter denselben Winkeln, welche die Gerade MM_1 die die Mittelpunkte der Curven K, K_1 verbindet, mit jeder der Geraden MF, MG bildet, die aus dem Mittelpunkte der erstern die Brennpunkte der letztern projiciren.

431. Um zwischen zwei der Grösse nach gegebenen geraden Linien a, d zwei mittlere Proportionallinien zu finden, trage man auf einer Geraden g, welche die unendlich ferne Ebene im Punkte N schneide, von einem andern Punkte M aus die Stücke MA$=$a, MD$=$d ab und suche (289) in einer Curve II. Ordnung zu irgend drei Punkten M_1, A_1, N_1 die Punkte D_1, P, so dass $(M_1A_1N_1P)^3 = M_1A_1N_1D_1 = MAND$ ist. Sucht man nun in der Geraden g die Punkte B, C, so dass $MANB = MBNC = M_1A_1N_1P$ ist, so ist $(MANB)^3 = MAND = (MANB)(MBNC)(MCND)$, folglich auch $MANB = MCND$ und mithin $MA:MB = MB:MC = MC:MD$.

432. Um einen Kreisbogen AHD, welchem ein hohler Centriwinkel ASD entspricht, in drei gleiche Theile zu theilen, darf man nur die Strahlenbüschel S, A projektivisch so auf einander beziehen, dass sie congruent, aber in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind und dass dem Strahle SA des erstern der Strahl AD des letztern entspricht. Die zu einander projektivischen Büschel erzeugen eine gleichseitige Hyperbel, welche die Gerade AD im Punkte A auf derjenigen Seite berührt, auf welcher der Bogen AHD liegt, daher der durch den Punkt A gehende Ast der Hyperbel den Kreis im Punkte A und in einem Punkte P des Bogens AHD schneidet. Da nun die Winkel ASP, DAP einander gleich sind, so ist der Bogen AP halb so gross als der Bogen PD und folglich, wenn man auf diesem den Punkt Q sucht, so dass PQ$=$AP ist, der gegebene Bogen durch die Punkte P, Q in drei gleiche Theile getheilt. Bemerkt wird noch, dass der ganze Kreis durch den Punkt P und die Punkte P_1, P_2, in welchen derselbe vom andern Aste der Hyperbel, der durch seinen Mittelpunkt S geht, geschnitten wird, in drei gleiche Theile getheilt ist, und dass die in 290 durch M, N bezeichneten Punkte hier die Normalpunkte der Ebene sind.

Wenn die Gerade, welche den unendlich fernen Punkt U der Geraden SA mit dem Punkte D verbindet, den gegebenen Kreis K in diesem Punkte und also in noch einem Punkte C schneidet, so liegen die Punkte P, P_1, P_2 auch in der gleichseitigen Hyperbel K_1, welche durch die drei Punkte C, S, U geht und mit der endlichen Strecke CS einerlei Mittelpunkt hat, folglich im Punkte S die Gerade SD und im Punkte C eine zu SD parallele Gerade CE berührt. Um endlich die obige Aufgabe auch mit Hülfe einer Parabel aufzulösen, sei DB die im Punkte D zu CD senkrechte Sehne des Kreises K, T der Pol dieser Sehne, V der unendlich ferne Punkt, welcher in ihrer Richtung liegt, und F der Punkt, in welchem die durch den Punkt B gehende zu DT parallele und also zu SD und CE senkrechte Gerade von der Geraden CD geschnitten wird. Bezieht man nun die drei Strahlenbüschel C, B, U projektivisch so auf einander, dass der erste und zweite den Kreis K, der erste und dritte aber die Hyperbel K_1 erzeugen, so erzeugen auch der zweite und dritte eine Curve K_2 II. Ordnung, welche durch die drei Punkte P, P_1, P_2 geht. Den Strahlen CV, CB, CE des ersten Büschels entsprechen die Strahlen BU, BT, BF des zweiten und die Strahlen UV, US, UC des dritten, daher die Curve K_2, im Punkte U die unendlich ferne Gerade UV berührt und auch durch die beiden Punkte T, F geht, mithin, da die Gerade TU die Sehne BF halbirt, im Punkte T der Geraden DT sich anschmiegt.

---

§. 31.

Krümmungshalbmesser.

433. Wenn Kreis, dessen Halbmesser $=r$ ist, im Punkte A die Gerade a berührt und zwei andern Punkten B, C dieser Geraden in Hinsicht auf den Kreis die Geraden b, c zugeordnet sind, so ist

$$r = \frac{AB.AC.\mathrm{Sin}(bc)}{BC.\mathrm{Sin}\,(ab).\mathrm{Sin}\,(ac).}$$

Da nämlich $\frac{r}{AB} = \mathrm{cotg}\,(ab)$, $\frac{r}{AC} = \mathrm{cotg}\,(ac)$, so ist $\frac{r}{AB} \pm \frac{r}{AC} = \mathrm{cotg}\,(ab) \pm \mathrm{cotg}\,(ac)$, mithin $\frac{r.BC}{AB.AC} = \frac{\mathrm{Sin}(bc)}{\mathrm{Sin}(ab).\mathrm{Sin}(ac)}$, woraus der Satz folgt.

434. Durch eine Curve K II. Ordnung und einen in ihr befindlichen Punkt A ist ein Kreis K_1 bestimmt, welcher der gegebenen Curve in dem gegebenen Punkte so innig als möglich, also vierpunktig oder dreipunktig sich anschmiegt, je nachdem dieser Punkt ein Scheitelpunkt oder ein anderer Punkt der Curve K ist. Der Halbmesser r des erwähnten Kreises heisst der Halbmesser der Krümmung, welche die Curve K im Punkte A hat. Die Krümmung selbst ist das Umgekehrte von r nämlich $\frac{1}{r}$. Wenn nun in Hinsicht auf die Curve K, welche im Punkte A die Gerade a berühre, zwei andern Punkten B, C dieser Geraden die Geraden b, c zugeordnet sind, so ist

$$r = \frac{AB.AC.Sin(bc)}{BC.Sin(ab).Sin(ac)}$$

Es seien den Geraden b, c in Hinsicht auf den Kreis K_1 die Punkte B_1, C_1 zugeordnet, so ist nur zu beweisen, dass $\frac{AB.AC}{BC} = \frac{AB_1.AC_1}{B_1C_1}$ ist. Schmiegen die Curven K, K_1 im Punkte A vierpunktig einander sich an, so fällt B_1 mit B und C_1 mit C zusammen. Wenn aber die Curven im Punkte A nur dreipunktig einander sich anschmiegen, so ist $AA.BC_1.B_1C$ eine Involution, mithin $ABCB_1 \barwedge AC_1B_1C$, demnach $\frac{AB_1.CB}{AB\,CB_1} = \frac{AC.B_1C_1}{AC_1.B_1C}$, woraus hervorgeht, dass die obige Gleichung auch in diesem Falle gilt.

Wenn man in der Geraden a noch einen vierten Punkt P annimmt und seine Polare in Hinsicht auf die Curve K durch p bezeichnet, so ist $ABCP \barwedge abcp$, demnach $\frac{AP.BC}{AB.PC} = \frac{Sin(ap).Sin(bc)}{Sin(ap).Sin(pc)}$ und mithin $\frac{Sin(ap)}{AP} = \frac{BC.Sin(ab)Sin(pc)}{AB.PC.Sin(bc)}$. Die Grenze, der diese einander gleichen Quotienten immer mehr sich nähern, wenn der Punkt P dem Punkte A und also die Gerade p der Geraden a immer mehr sich nähert, ist die Krümmung der Curve K im Punkte A.

435. Wenn MA, MB zwei einander conjugirte Halbmesser einer Ellipse sind, so ist $\frac{MA.Sin(AMB)}{MB^2}$ die Krümmung der Curve im Punkte A.

Man vollende das Parallelogramm AMBC, so ist in Hinsicht auf die Ellipse dem Punkte C die Gerade AB und dem unendlich fernen Punkte D der Tangente AC die Gerade AM zugeordnet. Bemerkt man nun, dass $AC = MB$, $\frac{CD}{AD} = 1$, $\operatorname{Sin} CAM = \operatorname{Sin} AMB$ und $\frac{\operatorname{Sin} CAB}{\operatorname{Sin} BAM} = \frac{MA}{MB}$ ist, so ergibt sich der Satz.

Ist S der Mittelpunkt des Kreises, welcher der Ellipse im Punkte A so innig als möglich sich anschmiegt, so ist nach dem Obigen $MA.AS.\operatorname{cosin} MAS = MB^2$. Bezeichnet man also den Schnittpunkt der Geraden AS, MB durch N, so ist auch $AN.AS = MB^2$.

436. Wenn eine Gerade eine Hyperbel, deren Mittelpunkt M ist, im Punkte A berührt und die Asymtoten derselben in den Punkten B, C schneidet, so ist $\frac{MA.\operatorname{Sin} MAB}{AB^2}$ die Krümmung der Curve im Punkte A.

Bezeichnet man nämlich den Mittelpunkt des Kreises, welcher der Hyperbel im Punkte A so innig als möglich sich anschmiegt, durch S, so ist (434) $AS = \frac{AB.AC.\operatorname{Sin} BMC}{BC.\operatorname{Sin} MBC.\operatorname{Sin} MCB} = \frac{AB^2}{MC.\operatorname{Sin} MCB}$ $= \frac{AB^2}{MA.\operatorname{Sin} MAB}$, woraus der Satz folgt.

Nimmt man in der Geraden MU, welche den Punkt M mit dem unendlich fernen Punkte U der Geraden BC verbindet, die Punkte D, E an, so dass $DM = ME = AB$ ist, so ist DA die Polare des Punktes C, folglich CE die Polare des Punktes D und mithin DMEU eine harmonische Darstellung des einen P von den beiden imaginären Punkten, in welchen die Hyperbel von der Geraden MU geschnitten wird. Da hiernach die Abscisse des Punktes P in Hinsicht auf das Abscissensystem $(M, E, U) = i$ ist, so kann man sagen, dass der dem reellen Halbmesser MA conjugirte imaginäre Halbmesser $MP = ME.i = AB.i$ und mithin $MP^2 = -AB^2 = MA.AS.\operatorname{cosin} MAS$ sei.

437. Die Krümmungshalbmesser r, r_1 einer Curve II. Ordnung an zwei verschiedenen Punkten A, B verhalten sich wie die dritten Potenzen der Abstände, welche diese Punkte vom Schnittpunkte S der durch sie gehenden Tangenten haben.

Es seien D, E die Punkte, in welchen die Tangenten AS, BS von einer dritten Tangente, die die Curve im Punkte C berühre, geschnitten werden, so ist

$$\frac{\mathrm{Sin}ABS}{\mathrm{Sin}BAS}=\frac{AS}{BS}, \quad \frac{\mathrm{Sin}BAC}{\mathrm{Sin}ABC}=\frac{BC}{AC}, \quad \frac{BC.\mathrm{Sin}CBE}{AC.\mathrm{Sin}CAD}=\frac{CE.\mathrm{Sin}CEB}{CD.\mathrm{Sin}CDA}=\frac{CE.SD}{CD.SE},$$

mithin (434) $\frac{r}{r_1}=\frac{AS.AS.AD.CE}{BS.BS.BE.CD}$. Weil aber die drei Geraden AE, BD, CS in einem und demselben Punkte sich schneiden, so ist nach einem bekannten Satze $\frac{AD.CE}{BE.CA}=\frac{AS}{BS}$ und folglich $\frac{r}{r_1}=\left(\frac{AS}{BS}\right)^3$.

Die Gerade FS, welche den Punkt S aus einem Brennpunkte F der Curve projicirt, bildet (418) mit den Fahrstrahlen FA, FB gleiche Winkel, daher AS.SinFAS=BS.SinFBS und also auch $\frac{r}{r_1}=\left(\frac{\mathrm{Sin}FBS}{\mathrm{Sin}FAS}\right)^3$ ist. Ist FAS ein rechter Winkel, so ist r dem halben Parameter der Curve gleich. Man erhält hiernach die Krümmung der Curve an einem beliebigen Punkte B, wenn man den Sinus des Winkels, welchen der nach diesem Punkte gehende Fahrstrahl FB mit der Curve bildet, zur dritten Potenz erhebt und diese durch den halben Parameter der Curve dividirt.

Berichtigung.

In 195 ist statt: höchstens von einer andern Geraden, zu lesen: höchstens von einer zu ihr senkrechten Geraden.

Beiträge

zur

Geometrie der Lage

von

Dr. Karl Georg Christian v. Staudt,

ord. Professor an der Universität Erlangen.

Drittes Heft.

NÜRNBERG.

Verlag der Fr. Kornschen Buchhandlung.

Beiträge

zur

Geometrie der Lage.

Indem die Verlagshandlung hiemit das dritte Heft von Staudt's „Beiträgen zur Geometrie der Lage“ dem Publikum übergibt, glaubt sie auf den Inhalt des ganzen Werkes hinweisen zu müssen. Derselbe ist folgender:

Vorwort.

Dieses dritte Heft von Beiträgen zur Geometrie der Lage ist vorzugsweise den Flächen II. Ordnung gewidmet, mit deren Betrachtung aber die Betrachtung von unebenen Linien III. und IV. Ordnung im innigsten Zusammenhange steht. Die unebenen Curven III. Ordnung sind in vieler Hinsicht für den Raum, was die Curven II. Ordnung für die Ebene sind. Gleichwie nämlich jede Curve II. Ordnung zu dem ihr sich anschmiegenden Strahlenbüschel projektivisch ist, so ist jede unebene Curve III. Ordnung zu dem ihr sich anschmiegenden Ebenenbüschel projektivisch. Unter einer Regelfläche ist auch in diesem Hefte eine Fläche mit zwei, sei es nun reellen oder imaginären Regelschaaren zu verstehen. Ist in dem durch die Fläche bestimmten Polarsysteme jeder reelle Punkt einer reellen Ebene, aber keine reelle Gerade sich selbst zugeordnet, so sind alle in der Fläche liegenden Curven III. Ordnung imaginär.

Jedem einfachen Flächensysteme steht nach dem Gesetze der Reciprocität ein einfaches System von Ebenenbündeln II. Ordnung gegenüber. Besondere Fälle von Systemen XXI. und XXII. Art werden in 596 betrachtet.

Liegen die drei Punkte M, B, G in einer und derselben Geraden, welche die unendlich ferne Ebene in einem vierten Punkte H schneidet, so kann, auch wenn jene Punkte nicht sämmtlich reell sind, der Werth des Wurfes MGHB zugleich der Werth des Quotienten $\frac{MB}{MG}$ genannt werden. Wenn also eine durch den Mittelpunkt M einer Hyperbel gehende reelle Gerade die Curve in zwei imaginären Punkten B, B_1 schneidet und $MGHG_1$ die von M ausgehende harmonische Darstellung des Punktes B ist, so ist $\frac{MB}{MG} = i$. Jede zu der Geraden MB parallele Tangente der Curve schneidet die Asymptoten derselben in zwei Punkten, deren Abstand von einander $= 2\ MG$ ist. Es geht hieraus hervor, was in 601 die Länge b für eine Bedeutung hat, wenn daselbst die imaginäre halbe Axe MB einer Hyperbel durch bi bezeichnet wird. Uebrigens wird es kaum nothwendig sein, zu bemerken, dass die 20 letzten Nummern dieses Heftes, da sie den Begriff der Grösse voraussetzen, als Anhang zu betrachten sind.

Erlangen, im März 1860.

Der Verfasser.

Inhalt.

§. 32.

Flächen II. Ordnung.

438. In Hinsicht auf eine Kegelfläche II. Ordnung soll dem Mittelpunkte S derselben jede Ebene, einem andern Punkte P aber die Ebene zugeordnet heissen, welche in dem polären Strahlenbündel, dessen Ordnungsfläche die Kegelfläche ist, dem Strahle SP zugeordnet ist. Besteht eine Fläche II. Ordnung aus zwei Ebenen A, B, so soll in Hinsicht auf dieselbe jedem Punkte, welcher in der Schnittlinie S der beiden Ebenen liegt, jede Ebene, einem ausserhalb der Geraden S liegenden Punkte P aber die Ebene zugeordnet heissen welche in dem involutorischen Ebenenbüschel AA.BB... der Ebene SP zugeordnet ist. Wenn endlich eine Ebene A, doppelt gedacht, als eine Fläche II. Ordnung betrachtet wird, so soll in Hinsicht auf dieselbe jedem in ihr liegenden Punkte jede Ebene, jedem nicht in ihr liegenden Punkte aber die Ebene A zugeordnet heissen.

Durch eine Fläche F II. Ordnung und einen Punkt P ist entweder eine Ebene E bestimmt, welche dem Punkte P in Hinsicht auf die Fläche F zugeordnet ist, oder es ist in Hinsicht auf diese Fläche dem Punkte P jede Ebene zugeordnet. Im erstern Falle geht die Ebene E durch den Punkt P oder nicht durch den Punkt P, je nachdem dieser in der Fläche F oder ausserhalb derselben liegt. Im letztern Falle ist die Fläche F in dem Strahlenbündel P enthalten, also entweder eine Kegelfläche, welche den Punkt P zum Mittelpunkt hat, oder der Inbegriff von zwei durch den Punkt P gehenden Ebenen oder eine durch den Punkt P gehende Ebene. — In einem Ebenenbüschel S ist eine Fläche II. Ordnung enthalten, wenn sie entweder aus zwei Ebenen des Büschels besteht oder eine Ebene des Büschels ist.

439. Zwei Punkte P, Q sind in Hinsicht auf eine Fläche F II. Ordnung einander conjungirt, so dass nämlich der eine und daher jeder in der dem andern zugeordneten Ebene liegt, wenn die Gerade PQ entweder in der Fläche F liegt oder mit derselben nur den Punkt P oder nur den Punkt Q gemein hat oder dieselbe in zwei Punkten schneidet, welche durch die Punkte P, Q harmonisch getrennt sind. Ist einem Punkte in Hinsicht auf eine Fläche II. Ordnung jede Ebene zugeordnet, so ist ihm auch in Hinsicht auf dieselbe jeder Punkt conjungirt. Jeder in einer Fläche II. Ordnung liegende Punkt ist in Hinsicht auf dieselbe auch sich selbst conjungirt.

Einem Punkte ist in Hinsicht auf eine Fläche II. Ordnung eine Gerade conjungirt, wenn irgend zwei Punkte und also alle Punkte dieser Geraden in Hinsicht auf die Fläche jenem Punkte conjungirt sind. Durch zwei Flächen II. Ordnung und einen Punkt P, welchem nicht in Hinsicht auf beide Flächen eine und dieselbe Ebene zugeordnet ist, ist eine Gerade bestimmt, welche nämlich dem gegebenen Punkte in Hinsicht auf beide Flächen conjungirt ist. Es schneiden sich in dieser Geraden die beiden Ebenen, von welchen die eine in Hinsicht auf die eine, die andere aber in Hinsicht auf die andere der gegebenen Flächen dem Punkte P zugeordnet ist.

440. Eine Fläche F II. Ordnung und eine ausserhalb derselben liegende Gerade S schneiden sich entweder in zwei Punkten oder haben nur einen Punkt A mit einander gemein. Im erstern Falle ist unter SF der Inbegriff der beiden Schnittpunkte, im letztern aber der Punkt A, doppelt gedacht, zu verstehen. Dasselbe gilt, wenn F eine Linie II. Ordnung und S eine Gerade ist, welche nicht in der Linie F aber mit ihr in einerlei Ebene liegt.

Durch zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung und eine Gerade S, welche durch keinen gemeinschaftlichen Punkt derselben geht, sind zwei Punkte bestimmt, welche nämlich in der Geraden S liegen und in Hinsicht auf beide Flächen einander conjungirt, also die Ordnungspunkte des involutorischen Gebildes SF. SF_1 ... sind.

441. Durch eine Fläche F II. Ordnung und eine nicht in ihr liegende Ebene U ist eine Linie UF II. Ordnung bestimmt, welche nämlich die Fläche F und die Ebene U mit einander gemein haben. Je zwei in Hinsicht auf die Linie UF einander conjungirte Punkte

sind auch in Hinsicht auf die Fläche F einander conjungirt. Und wenn zwei in der Ebene U liegende Punkte in Hinsicht auf die Fläche F einander cojungirt sind, so sind sie auch in Hinsicht auf die Linie UF einander conjungirt. Ist F eine Kegelfläche, der die Ebene U sich anschmiegt, oder der Inbegriff von zwei Ebenen, durch deren Schnittlinie die Ebene U geht, oder selbst eine Ebene, so ist UF eine Gerade, welche man aber als eine Linie II. Ordnung zu betrachten hat. In allen andern Fällen ist UF entweder eineCurve oder der Inbegriff von zwei Geraden. Ist V eine andere ausserhalb der Fläche F liegende Ebene, so liegt jeder Punkt, welchen die Gerade UV mit einer der Linien UF, VF gemein hat, auch in der andern.

442. Durch eine Fläche F II. Ordnung und ein gerades Gebilde, dessen Träger nicht mit der Fläche F in einem und demselben Strahlenbündel enthalten ist, ist ein Ebenenbüschel bestimmt, welcher nämlich in Hinsicht auf die gegebene Fläche dem gegebenen geraden Gebilde zugeordnet und daher zu demselben projektivisch ist.

Ist einem geraden Gebilde ABC... in Hinsicht auf zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung ein und derselbe Ebenenbüschel $A_1B_1C_1$... zugeordnet und U eine durch die Gerade AB gehende Ebene, so fällt entweder UF mit UF_1 zusammen, oder es bestimmen die Linien UF, U F_1 ein einfaches Liniensystem (UF, UF_1), welchem die Gerade AB angehört und haben daher keinen ausserhalb dieser Geraden liegenden Punkt mit einander gemein.

443. Durch ein Tetraeder ABCD, einen Punkt P, welcher in keiner Seite des Tetraeders liegt, und eine Ebene U ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, in Hinsicht auf welche jedem Eckpunkte des Tetraeders ABCD die ihm gegenüber liegende Seite desselben, dem Punkte P aber die Ebene U zugeordnet ist.

Die Fläche F ist eine Regelfläche oder eine Kegelfläche oder der Inbegriff von zwei Ebenen oder die Ebene U, je nachdem diese Ebene durch keinen oder durch einen oder durch zwei oder durch drei Eckpunkte des gegebenen Tetraeders geht.

444. Durch eine Ebene U, eine in ihr liegende Linie K II. Ordnung und zwei ausserhalb der Ebene liegende Punkte P, S ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche nämlich mit der

gegebenen Ebene die gegebene Linie gemein hat und durch den erstern der gegebenen Punkte geht, während dem letztern in Hinsicht auf dieselbe die gegebene Ebene zugeordnet ist.

Liegt der Punkt Q, in welchem die Gerade SP von der Ebene U geschnitten wird, in der Linie K, so ist F die Fläche SK, welche aus dem Punkte S die Linie K projicirt. Wenn aber der Punkt Q ausserhalb dieser Linie liegt, so nehme man in der Ebene U ein Dreieck ABC an, so dass in Hinsicht auf die Linie K jedem Eckpunkte des Dreiecks die ihm gegenüberliegende Seite desselben zugeordnet ist, aber keine Seite des Dreiecks durch den Punkt Q geht. Ist q die dem Punkte Q in Hinsicht auf die Linie K zugeordnete Gerade, so ist F diejenige Fläche II. Ordnung, in Hinsicht auf welche jedem Eckpunkte des Tetraeders ABCS die ihm gegenüberliegende Seite desselben, dem Punkte P aber die Ebene Pq zugeordnet ist. In diesem Falle hat die Fläche F mit der Fläche SK nur die Linie K gemein.

445. Durch zwei Paar Gegenkanten AB, CD, AC, BD eines Tetraeders und einen Punkt P, welcher in keiner dieser Geraden liegt, ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die vier gegebenen Geraden und durch den gegebenen Punkt geht.

Liegt der Punkt P in einer Seite des Tetraeders ABCD, so ist F der Inbegriff von zwei Ebenen. Wenn aber die Schnittlinie der Ebenen PAB, PCD keine der Geraden AC, BD schneidet, so ist F eine Regelfläche.

446. Durch zwei sich schneidende Gerade g, h, dann eine Curve K II. Ordnung, welche im Punkte gh die Ebene gh berührt aber keiner der Geraden g, h sich anschmiegt, und einen Punkt P, welcher weder in der gegebenen Curve noch in einer der gegebenen Geraden liegt, ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche, nämlich durch die drei gegebenen Linien und durch den gegebenen Punkt geht.

Liegt der Punkt P in der Ebene gh oder in der Ebene K, so ist F der Inbegriff dieser Ebenen. Wenn aber die Ebene gP die Curve K im Punkte gh und in noch einem Punkte Q schneidet und die Gerade PQ ausserhalb der Ebene K liegt, so ist F die Regelfläche, welche (15) durch die Curve K und die beiden Geraden h, PQ geht.

447. Durch zwei sich schneidende Gerade g, h, dann eine Curve K II. Ordnung, welche mit den gegebenen Geraden nicht in einerlei Ebene liegt aber mit jeder derselben einen ausserhalb der andern liegenden Punkt gemein hat, und einen Punkt P, welcher keiner der gegebenen Linien angehört, ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die drei gegebenen Linien und durch den gegebenen Punkt P geht.

Liegt der Punkt P in der Ebene gh oder in der Ebene K, so ist F der Inbegriff dieser Ebenen. Wenn aber der Punkt P in keiner der erwähnten Ebenen liegt, so sei Q derjenige Punkt der Curve K, welcher aus der Axe g durch die Ebene gP projicirt wird. Geht nun die Gerade PQ durch den Punkt gh, so ist F die Kegelfläche, welche aus diesem Punkte die Curve K projicirt. Liegen aber die Geraden h, PQ nicht in einerlei Ebene, so ist F die Regelfläche, welche durch diese beiden Linien und durch die Curve K geht.

448. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche nicht in einerlei Ebene liegen aber die Schnittlinie S ihrer Ebenen entweder in denselben zwei Punkten A, B schneiden oder in einem und demselben Punkte A berühren, ist eine Gerade u bestimmt, welche nämlich der Geraden S in Hinsicht auf jede durch die beiden gegebenen Curven gehende Regelfläche zugeordnet ist.

Die zu einander projektivischen Strahlenbüschel, von welchen der eine in Hinsicht auf die Curve K, der andere aber in Hinsicht auf die Curve K_1 dem geraden Gebilde S zugeordnet ist, erzeugen den diesem Gebilde in Hinsicht auf jede durch beide Curven gehende krumme Fläche II. Ordnung zugeordneten Ebenenbüschel u. Im erstern der im Satze erwähnten Fälle liegen in der Geraden u die Mittelpunkte der beiden Kegelflächen, welche in den Curven K, K_1 sich schneiden, während im letztern Falle die Gerade u den Mittelpunkt der durch die beiden Curven K, K_1 gehenden Kegelfläche mit dem Punkte A verbindet. — Geht eine Fläche II. Ordnung, in Hinsicht auf welche dem geraden Gebilde S der Ebenenbüschel u zugeordnet ist, durch die Curve K aber nicht durch die Curve K_1, so schneidet sie die Ebene K_1 in einer andern Linie II. Ordnung, welche dem einfachen Liniensysteme (S, K_1) angehört und daher mit der Curve K_1 keinen ausserhalb der Geraden S liegenden Punkt gemein hat.

449. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche nicht

in einerlei Ebene liegen aber einer Geraden S in einem und demselben Punkte A sich anschmiegen, und einen Punkt P, welcher in keiner von den beiden Curven liegt, ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die beiden gegebenen Curven und durch den gegebenen Punkt geht.

Liegt der Punkt P in der Ebene K oder in der Ebene K_1, so ist F der Inbegriff dieser Ebenen. Liegt der Punkt P in der durch die beiden Curven K, K_1 gehenden Kegelfläche, so ist diese Kegelfläche, deren Mittelpunkt durch M bezeichnet werden soll, die im Satze erwähnte Fläche. Liegt der Punkt P in einer von zwei Geraden g, h, welche durch die Geraden S, AM harmonisch getrennt sind, so geht (448) die Regelfläche F, welche durch die drei Linien g, h, K und irgend einen von A verschiedenen Punkt der Curve K_1 geht, auch durch diese Linie. Wenn endlich keiner der betrachteten Fälle statt findet, so giebt es in der Ebene AMP eine durch den Punkt P gehende Curve K_2 II. Ordnung, welche im Punkte A die Gerade AM berührt, mit der Curve K noch einen Punkt B und ebenso mit der Curve K_1 noch einen Punkt B_1 gemein hat. Ist nun Q irgend ein ausserhalb der Geraden AB liegender Punkt der Curve K und S der Punkt, welcher in Hinsicht auf diese Curve der Geraden AB, mithin in Hinsicht auf die Curve K_1 der Geraden AB_1 zugeordnet ist, so schneidet die Regelfläche F, welche in der Curve K_2 die Kegelfläche SK_2 berührt und durch den Punkt Q geht, die Ebene K in der Curve K und also (448) die Ebene K_1 in der Curve K_1.

450. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche nicht in einerlei Ebene liegen aber zwei Punkte A, B mit einander gemein haben, ist eine durch beide Curven gehende Regelfläche bestimmt, in Hinsicht auf welche die Ebenen K, K_1 einander conjungirt sind. Es sei der Geraden AB in Hinsicht auf die Curve K der Punkt S zugeordnet, so geht die Regelfläche, welche in der Curve K_1 die Kegelfläche SK_1 berührt und mit der Curve K irgend einen ausserhalb der Geraden AB liegenden Punkt gemein hat, auch durch diese Curve.

451. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche nicht in einerlei Ebene liegen aber zwei Punkte A, B mit einander gemein haben, und einen Punkt P, welcher keiner von den beiden Curven

angehört, ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die gegebenen Curven und durch den gegebenen Punkt geht.

Es sei der Geraden AB in Hinsicht auf die Curve K der Punkt S und in Hinsicht auf die Curve K_1 der Punkt S_1 zugeordnet. Liegt der Punkt P in der Ebene K oder in der Ebene K_1, so ist F der Inbegriff dieser Ebenen. Liegt der Punkt P ausserhalb der Ebenen K, K_1, aber in irgend einer von den beiden Ebenen SS_1A, SS_1B, etwa in der Ebene SS_1A, so sei h eine Gerade, welche mit AP in einerlei Ebene liegt und mit jeder von den beiden Curven K, K_1 einen ausserhalb der andern liegenden Punkt gemein hat. Legt man nun durch die Geraden AP, h und die Curve K und irgend einen ausserhalb dieser Linien liegenden Punkt der Curve K_1 eine Fläche II. Ordnung, so geht dieselbe, da sie im Punkte A die Gerade AS_1 berührt, auch durch die Curve K_1. Wenn endlich keiner der bereits betrachteten Fälle statt findet, so gibt es eine Linie K_2 II. Ordnung, welche durch den Punkt P geht und die Ebenen K, K_1 in den vier Punkten schneidet, in welchen die Curven K, K_1 von der Ebene SS_1P geschnitten werden. Ist nun M der Punkt, welcher von der Ebene SS_1P durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist, so ist F diejenige durch den Punkt A gehende Fläche II. Ordnung, welche in der Linie K_2 die Fläche MK_2 berührt.

452. Durch zwei Linien K, K_1 II. Ordnung, von welchen die eine in der Ebene U, die andere in einer andern Ebene U_1 liegt, keine aber mit der Schnittlinie s dieser Ebenen einen ausserhalb der andern liegenden Punkt oder mehr als zwei Punkte gemein hat, und einen ausserhalb der beiden Ebenen U, U_1 liegenden Punkt P ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche nämlich mit der Ebene U die Linie K, mit der Ebene U_1 die Linie K_1 gemein hat und durch den gegebenen Punkt P geht.

Ist K eine Gerade und K_1 ebenfalls eine Gerade, so ist F entweder die Ebene KK_1 oder eine Kegelfläche, welche die Ebenen U, U_1 in den Geraden K, K_1 berührt. Ist K eine Gerade und K_1 der Inbegriff von zwei Geraden, so ist F entweder der Inbegriff von zwei Ebenen oder wieder eine Kegelfläche, deren Mittelpunkt in der Geraden $_5$ liegt. Dasselbe ist der Fall, wenn jede von den beiden Linien K, K_1 aus zwei Geraden besteht, deren Schnittpunkt der Geraden $_5$ angehört. Ist K eine Gerade und K_6 eine Curve, so dass also die Linie K_1 von der Ebene KP im Punkte K_5 und in noch einem Punkte Q geschnitten wird, so ist F die Kegelfläche, welche die Curve K_1 aus dem Schnittpunkte der Geraden K, PQ projicirt. Die übrigen Fälle sind in den vorigen Nummern betrachtet worden.

453. Durch eine Linie K II. Ordnung, welche in der Ebene U liegt, und vier ausserhalb dieser Ebene liegende Punkte A, B, C, D, welche die Eckpunkte eines Tetraeders sind, ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche nämlich mit der Ebene U die Linie K gemein hat und durch die vier gegebenen Punkte geht.

Liegt die Gerade $_5$, in welcher die Ebene U von der Ebene ABC geschnitten wird, in der Linie K, so besteht die Fläche F aus der Ebene ABC und einer durch den Punkt D gehenden Ebene. Wenn aber die Gerade $_5$ mit der Linie K höchstens zwei Punkte gemein hat, so gibt es in der Ebene ABC eine durch die drei Punkte A, B, C gehende Linie K_1 II. Ordnung, so dass sK_1 mit sK zusammenfällt, und alsdann ist F diejenige durch den Punkt D gehende Fläche II. Ordnung, welche mit der Ebene U die Linie K und mit der Ebene ABC die Linie K_1 gemein hat.

454. Wenn eine Kegelfläche II. Ordnung und eine Regelfläche in zwei Geraden a, p sich schneiden, so schneiden sie sich auch noch in einer Curve II. Ordnung.

Legt man durch irgend drei ausserhalb der Ebene a p liegende Punkte, welche die Kegelfläche mit der Regelfläche gemein hat, eine Ebene U, so schneidet diese beide Flächen in einer und derselben Curve, nämlich in der Curve II. Ordnung, welche durch jene drei Punkte und durch die Punkte Ua, Up geht. — Wenn also eine Kegelfläche und eine Regelschaar, welche zu einem und demselben Ebenenbüschel p I. Ordnung perspektivisch sind, eine Gerade a mit einander gemein haben, so sind sie auch zu einer und derselben Curve II. Ordnung perspektivisch.

455. Wenn eine Kegelfläche und eine Regelfläche in einer Curve K II. Ordnung sich schneiden, so schneiden sie sich entweder auch in zwei Geraden oder in noch einer Curve II. Ordnung, je nachdem nämlich der Mittelpunkt S der Kegelfläche in der Regelfläche oder ausserhalb derselben liegt.

Es sei dem Punkte S in Hinsicht auf die Regelfläche die

Ebene U zugeordnet, so schneidet diese im erstern der erwähnten Fälle die Regelfläche in zwei Geraden, welche, da jede derselben mit der Curve K einen Punkt gemein hat, auch in der Kegelfläche liegen. Wenn aber die Ebene U nicht durch den Punkt S geht, so schneidet auch die Ebene V, welche von der Ebene K durch den Punkt S und die Ebene U harmonisch getrennt ist, beide Flächen in einer und derselben Curve.

456. Zwei Regelflächen, welche in zwei in einerlei Ebene liegenden Geraden a, p sich schneiden, schneiden sich entweder auch in einer Curve II. Ordnung oder in noch zwei Geraden.

Es seien A, B, C irgend drei ausserhalb der Ebene ap liegende Punkte, welche die beiden Regelflächen mit einander gemein haben. Liegen nun diese drei Punkte in einer und derselben Geraden, so haben die Regelflächen nach 254 noch eine vierte Gerade mit einander gemein. Ist aber durch die drei Punkte A, B, C eine Ebene U bestimmt, so schneidet diese die beiden Regelflächen in einer und derselben nämlich derjenigen Linie II. Ordnung, welche durch die drei Punkte A, B, C geht und mit der Ebene ap die Punkte Ua, Up oder, wenn diese in einander fallen, nur den Punkt ap gemein hat. — Wenn also zwei Regelschaaren, welche zu einem und demselben Ebenenbüschel p I. Ordnung perspektivisch sind, eine Gerade a mit einander gemein haben, so sind sie auch zu einem und demselben Punktgebilde I. oder II. Ordnung perspektivisch.

457. Zwei Regelflächen, welche in einer Curve K II. Ordnung sich schneiden, schneiden sich entweder auch in zwei Geraden oder in noch einer Curve II. Ordnung.

Jede Ebene, welche der einen Regelfläche in einem Punkte der Curve K sich anschmiegt, die andere aber in einer Curve schneidet, enthält zwei gemeinschaftliche Punkte der Flächen, welche ausserhalb der Ebene K und mit keinem Punkte der Curve K in einer und derselben Geraden liegen. Es seien nun A, B, C drei ausserhalb der Ebene K liegende gemeinschaftliche Punkte der beiden Regelflächen, so dass die Gerade AB durch keinen Punkt der Curve K und also auch nicht durch den Punkt C geht, so schneidet die Ebene ABC, sie mag nun mit der Curve K zwei Punkte D, E oder nur einen Punkt D gemein haben, beide Regelflächen in einer und derselben nämlich derjenigen Linie II. Ordnung, welche durch die drei Punkte

A, B, C geht und mit der Ebene K im erstern der erwähnten Fälle die Punkte D, E, im letztern aber nur den Punkt D gemein hat.

458. Den bisherigen Sätzen stehen nach dem Gesetze der Reciprocität eben so viele andere gegenüber, von welchen aber nur folgende ausgesprochen werden sollen:

I. Durch eine Kegelfläche II. Ordnung, dann zwei Gerade, welche die Kegelfläche in einem und demselben Punkte berühren, und eine Ebene, welche weder durch den Mittelpunkt der Kegelfläche noch durch den Schnittpunkt der beiden Geraden geht, ist (446) eine Regelfläche bestimmt, welche nämlich die gegebene Kegelfläche in einer Curve II. Ordnung berührt, durch die beiden gegebenen Geraden geht und die gegebene Ebene in zwei Geraden schneidet.

II. Durch zwei Kegelflächen, welche (253) in zwei Curven K, K_1 II. Ordnung sich schneiden, und eine Ebene, welche beide Curven schneidet, aber von keiner der Kegelflächen den Mittelpunkt enthält, ist eine Regelfläche bestimmt, welche nämlich jede von den beiden Kegelflächen in einer Curve II. Ordnung berührt und die gegebene Ebene in zwei Geraden schneidet. — Die beiden Kegelflächen bestimmen (451) mit jeder Ebene U, welche keiner derselben sich anschmiegt, einen Ebenenbündel E II. Ordnung, in welchem die den Kegelflächen sich anschmiegenden Ebenenbüschel und die Ebene U enthalten sind. Wenn nun diese Ebene von keiner der Kegelflächen den Mittelpunkt enthält und die beiden Curven K, K_1 schneidet, so schmiegt der Ebenenbündel E einer Regelfläche sich an. Wenn aber die Ebene U die eine Curve berührt, so ist E der durch diese Curve (36) bestimmte Ebenenbündel. Wenn endlich die Ebene U von irgend einer der Kegelflächen den Mittelpunkt enthält, so ist E der Inbegriff von zwei Ebenenbündeln I. Ordnung.

459. Zwei Regelflächen F, F_1, welche eine Ebene in denselben zwei Geraden a, p schneiden, können als homologe Gebilde von zwei zu einander collineären räumlichen Systemen betrachtet werden, welche alle Punkte jener Ebene entsprechend gemein haben.

Es seien $a\,b\,c$, $p\,q\,r$ die in F enthaltenen Regelschaaren und b_1, c_1, q_1, r_1 diejenigen in F_1 liegenden Geraden, welche die Ebene ap in den Punkten pb, pc, aq, ar schneiden. Bezieht man nun zwei räumliche Systeme collineär so auf einander, dass den Geraden a, b, c, p, q, r des einen Systems die Geraden a, b_1, c_1, p, q_1, r_1 des andern entsprechen, so haben die beiden Systeme alle Elemente der Ebene ap und daher auch (G. 134) alle Elemente eines Strahlenbündels S entsprechend gemein, während der Fläche F des erstern Systems die Fläche F_1 des letztern entspricht. Jede Ebene, welche sowohl der Fläche F als auch der Fläche F_1 sich anschmiegt, ohne durch den Punkt ap zu gehen, geht durch zwei ausserhalb der Ebene ap liegende Gerade der Fläche F und die ihnen entsprechenden Geraden der Fläche F_1, mithin durch den Punkt S. Und wenn eine durch diesen Punkt gehende Ebene der einen von den beiden Regelflächen sich anschmiegt, so schmiegt sie auch der andern sich an. Berühren sich die Flächen F, F_1 in den Geraden a, p, so fällt der Punkt S mit dem Punkte ap zusammen. Berühren sich die Flächen F, F_1 in der einen a von den beiden Geraden a,p, während sie in der andern p und also in noch einer Geraden q sich schneiden, so fällt der Punkt S mit dem Punkte aq zusammen. Schneiden sich die Flächen F, F_1 in den Geraden a, p und in noch zwei Geraden b, q, so fällt der Punkt S mit dem Punkte bq zusammen. Wenn endlich die Flächen F, F_1 in den Geraden a, p und in einer Curve K II. Ordnung sich schneiden, so ist S der Mittelpunkt einer Kegelfläche, welche in einer Curve L II. Ordnung die Fläche F, mithin in der der Curve L entsprechenden Curve L_1 die Fläche F_1 berührt. — Wenn also zwei Regelschaaren, welche eine Gerade a mit einander gemein haben, zu einem und demselben geraden Gebilde p perspektivisch sind, so sind sie auch zu einem und demselben Ebenenbüschel I. oder II. Ordnung perspektivisch.

Die Fläche F_1 wird von den Ebenen pb, pc in der Geraden p und in noch zwei Geraden b_2, c_2 und eben so von den Ebenen aq, ar in der Geraden a und in noch zwei Geraden q_2, r_2 geschnitten. Bezieht man nun zwei räumliche Systeme collineär so auf einander, dass den Geraden a, b, c, p, q, r des einen Systems die Geraden a, b_2, c_2, p, q_2, r_2 des andern entsprechen, so haben die beiden Systeme alle Elemente des Strahlenbündels, dessen Mittelpunkt der Punkt ap ist, und daher auch alle Elemente einer Ebene U entsprechend gemein, während der Fläche F des erstern Systems die Fläche F_1 des letztern entspricht. Die Ebene U fällt im ersten der oben betrachteten Fälle mit der Ebene ap, im zweiten mit der Ebene a q, im dritten mit der Ebene b q und im vierten mit der Ebene K zusammen.

460. Durch zwei Regelflächen F, F_1, welche in zwei Geraden a, p und in einer Curve K II. Ordnung sich schneiden, ist (459) eine Kegelfläche bestimmt, welche nämlich jede von den beiden Regelflächen in einer Curve II. Ordnung berührt. Der Mittelpunkt dieser Kegelfläche ist vom Punkte a p durch die beiden Punkte M, M_1 harmonisch getrennt, von welchen der eine M in Hinsicht auf die Fläche F, der andere M_1 aber in Hinsicht auf die Fläche F_1 der Ebene K zugeordnet ist.

Nach dem Vorigen kann man die Flächen F, F_1 als homologe Gebilde von zwei zu einander collineären Systemen betrachten, welche jedes durch den Punkt a p gehende und jedes in der Ebene K liegende Element entsprechend gemein haben, daher die beiden Punkte M, M_1 mit dem Punkte a p in einer und derselben Geraden liegen. Ist ferner H ein ausserhalb der Curve K und der Geraden $M M_1$ liegender Punkt der Ebene K, so wird die Fläche F von der Geraden MH in zwei Punkten A, B und die Fläche F_1 von der Geraden $M_1 H$ in zwei Punkten A_1, B_1 geschnitten, so dass auch die Geraden AA_1, BB_1 durch den Punkt a p gehen, während die Geraden AB_1, A_1B, da $HAMB$, $HA_1M_1B_1$ harmonische Würfe sind, in dem Punkte S sich schneiden, welcher vom Punkte a p durch die Punkte M, M_1 harmonisch getrennt ist und ausserhalb der beiden Flächen F, F_1 liegt, weil in Hinsicht auf keine derselben die Punkte M, M_1 einander conjungirt sind. Bezieht man nun zwei räumliche Systeme collineär so auf einander, dass sie alle Elemente des Strahlenbündels S und alle Elemente der Ebene K entsprechend gemein haben und dass dem Punkte A des einen Systems der Punkt B_1 des andern entspricht, so entspricht wieder dem Punkte M des erstern Systems der Punkt M_1 des letztern und der Regelfläche F, welche in der Curve K die Kegelfläche MK berührt und durch den Punkt A geht, die Regelfläche F_1, welche in der Curve K die Kegelfläche M_1 K berührt und durch den Punkt B_1 geht, daher der der Regelfläche F sich anschmiegende Ebenenbüschel, welcher den Punkt S zum Mittelpunkt hat, auch der Regelfläche F_1 sich anschmiegt und der Punkt S mit dem in der vorigen Nummer durch S bezeichneten Punkte identisch ist.

Gleichwie die Punkte a p, S durch die Punkte M, M_1 harmonisch getrennt sind, so sind auch die Ebenen a p, K durch die Ebenen L, L_1 harmonisch getrennt, von welchen die eine in Hinsicht auf die Fläche F, die andere aber in Hinsicht auf die Fläche F_1 dem Punkte S zugeordnet ist. Der Schnittlinie dieser vier Ebenen ist in Hinsicht auf beide Flächen die Gerade M M_1 zugeordnet, welche in der Ebene a p oder ausserhalb der Ebene a p liegt, je nachdem der Punkt a p der Curve K angehört oder nicht angehört.

461. Durch zwei Regelflächen F, F_1, welche in zwei Curven K, K_1 II. Ordnung sich schneiden, sind zwei Kegelflächen bestimmt, deren jede jede von den beiden Regelflächen in einer Curve II. Ordnung berührt.

Es sei der Ebene K in Hinsicht auf die Fläche F der Punkt M, in Hinsicht auf die Fläche F_1 der Punkt M_1 zugeordnet und H irgend ein ausserhalb der Curve K und auch ausserhalb der Geraden MM_1 liegender Punkt der Ebene K. Es werde ferner die Fläche F von der Geraden M H in den Punkten A, B und die Fläche F_1 von der Geraden M_1 H in den Punkten A_1, B_1 geschnitten, so sind H A M B, H A_1 M_1 B_1 harmonische Würfe, daher die Gerade M M_1 von den Geraden AA_1, BB_1 in einem und demselben Punkte S und von den Geraden A B_1, A_1 B in dem Punkte S_1 geschnitten wird, welcher vom erstern durch die Punkte M, M_1 harmonisch getrennt ist. Bezieht man nun zwei räumliche Systeme collineär so auf einander, dass sie alle Elemente der Ebene K und alle Elemente des Strahlenbündels S entsprechend gemein haben und dass dem Punkte M des einen Systems der Punkt M_1 des andern, folglich dem Punkte A des erstern der Punkt A_1 des letztern entspricht, so entspricht der Regelfläche F, welche in der Curve K die Kegelfläche M K berührt und durch den Punkt A geht, die Regelfläche F_1, welche in der Curve K die Kegelfläche M_1K berührt und durch den Punkt A_1 geht. Es ist hiernach und weil die Flächen F, F_1 keine Gerade mit einander gemein haben, der Punkt S der Mittelpunkt einer Kegelfläche, welche in einer Curve L II. Ordnung die Fläche F und in der der erstern entsprechenden Curve L_1 die Fläche F_1 berührt. Werden je zwei mit dem Punkte S in einer und derselben Geraden liegende Punkte der Fläche F mit einander vertauscht, so sind F, F_1 homologe Gebilde von zwei zu einander collineären Systemen, welche alle Elemente des Strahlenbündels S und alle Elemente der Ebene K_1 entsprechend gemein haben. Eben so können F, F_1 als homologe Gebilde von zwei zu einander collineären Systemen betrachtet werden, welche alle Elemente des Strahlenbündels S_1 und alle Elemente der Ebene K oder der Ebene K_1 entsprechend gemein haben, daher auch der Punkt S_1 der Mittelpunkt einer Kegelfläche ist, welche in der einen L_2 von zwei Curven II. Ordnung die Regelfläche F und in der andern L_3 die Regelfläche F_1 berührt. Die Ebenen K, K_1 sind sowohl durch die Ebenen L, L_1 als auch durch die Ebenen L_2, L_3 harmonisch getrennt, gleichwie die Punkte S, S_1 auch durch die beiden Punkte M_2, M_3 harmonisch getrennt sind, von welchen der eine in Hinsicht auf die Fläche F und der andere in Hinsicht auf die Fläche F_1 der Ebene K_1 zugeordnet ist.

Die im Satze erwähnten Kegelflächen berühren sich entweder in der Geraden SS_1, oder es haben die ihnen sich anschmiegenden Ebenenbüschel zwei Ebenen S_1SP, SS_1Q mit einander gemein, je nachdem nämlich die Schnittlinie der Ebenen K, K_1, welche in Hinsicht auf jede der Flächen F, F_1 der Geraden SS_1 zugeordnet ist, die Curven K, K_1 in einem und demselben Punkte berührt oder in denselben zwei Punkten P, Q schneidet. Im letztern Falle schneidet die Gerade SS_1 die Fläche F in zwei Punkten C, D, die Fläche F_1 in zwei Punkten C_1, D_1 und die Ebenen K, K_1 in zwei Punkten N, N_1, so dass (85) $CD_1 . C_1D . NS . N_1S_1$, $CC_1 . DD_1 . NS_1 . N_1S$, $CD . C_1D_1 . NN_1 . SS_1$ Involutionen sind. Die Punkte S, S_1 liegen also entweder beide ausserhalb der Ebenen K, K_1 oder es fällt der eine mit dem Punkte N und der andere mit dem Punkte N_1 zusammen. — Haben zwei Regelflächen keine Curve II. Ordnung mit einander gemein, so gibt es auch, wie leicht indirekt folgt, keine Kegelfläche, welche jede von den beiden Regelflächen in einer Curve II. Ordnung berührt.

---

§. 33.

Unebene Linien III. Ordnung.

462. Zwei Kegelflächen F, F_1 II. Ordnung, welche nicht einerlei Mittelpunkt haben, aber in einer Geraden SS_1 sich schnei-

den, schneiden sich auch noch in einer Curve K, welche durch die Mittelpunkte S, S_1 der Kegelflächen geht und aus jedem in ihr liegenden Punkte durch eine Kegelfläche II. Ordnung projicirt wird.

Es sei S_2 irgend ein ausserhalb der Geraden SS_1 liegender gemeinschaftlicher Punkt der Flächen F, F_1. Bezieht man nun die drei Ebenenbüschel, deren Axen die Geraden SS_1, SS_2, S_1S_2 sind, projektivisch so auf einander, dass der erste und zweite die Kegelfläche F, der erste und dritte aber die Kegelfläche F_1 erzeugen, so erzeugen der zweite und dritte die Kegelfläche F_2, welche die Curve K aus dem Punkte S_2 projicirt. In jedem Punkte dieser Curve schneiden sich drei homologe Ebenen der zu einander projektivischen Ebenenbüschel und daher auch drei homologe Strahlen der zu einander projektivischen Kegelflächen, von welchen je zwei zu einem der drei Ebenenbüschel perspektivisch sind. Der Ebene SS_1T des ersten Büschels, welche nämlich die Kegelfläche F_1 in der Geraden SS_1 berührt und also die Kegelfläche F in dieser Geraden und in noch einer Geraden ST schneidet, entspricht die Ebene SS_2T des zweiten und die Ebene SS_1S_2 des dritten, daher die Ebene SS_2T in der Geraden SS_2 die Kegelfläche F_2 berührt.

Jeder von ST verschiedene Strahl der Kegelfläche F projicirt aus dem Punkte S einen andern Punkt der Curve K. Der Strahl ST, welcher im Punkte S jede Kegelfläche berührt, die die Curve K aus einem andern in ihr liegenden Punkte projicirt, und daher mit der Curve K nur den Punkt S gemein hat, ist die derselben in diesem Punkte sich anschmiegende Gerade. Die Ebene, welche die Kegelfläche F in der Geraden SS_1 berührt, schneidet die Kegelfläche F_1 in dieser Geraden und in der Geraden S_1T_1, welche der Curve K im Punkte S_1 sich anschmiegt.

463. Eine Curve, welche aus jedem in ihr liegenden Punkte durch eine Kegelfläche II. Ordnung projicirt wird, folglich mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte und mit keiner Ebene mehr als drei Punkte gemein hat, soll eine unebene Curve III. Ordnung heissen. Je zwei Kegelflächen, welche eine solche Curve aus zwei in ihr liegenden Punkten projiciren, schneiden sich auch noch (252) in der Geraden, welche sie mit einander gemein haben.

Ist von einer unebenen Curve K III. Ordnung und einer zu derselben perspektivischen Kegelfläche MK die Rede, so versteht es sich von selbst, dass der Mittelpunkt M der Kegelfläche in der Curve K liegt und dass auf jeden andern Punkt N der Curve der durch ihn gehende Strahl MN der Kegelfläche MK bezogen wird. Dem Punkte M der Curve entspricht derjenige Strahl m der Kegelfläche, welcher durch keinen andern Punkt der Curve geht, also im Punkte M der Curve K sich anschmiegt und jede andere zu derselben perspektivische Kegelfläche berührt, mithin weder mit zwei andern Punkten der Curve noch mit einer andern ihr sich anschmiegenden Geraden in einerlei Ebene liegt. Jede Ebene, welche nicht durch die Gerade m geht aber die Kegelfläche MK in zwei Geraden MN, MP schneidet, schneidet die Curve K im Punkte M und in noch zwei Punkten N,P. Schneidet eine Ebene die Kegelfläche MK in der Geraden m und in noch einer Geraden MN, so berühren sich die Ebene und die Curve K im Punkte M, während sie in einem andern Punkte N sich schneiden. Berührt eine Ebene die Kegelfläche MK in einer von m verschiedenen Geraden MN, so schneidet sie die Curve K im Punkte M, während sie dieselbe in einem andern Punkte N berührt. Die Ebene aber, welche die Kegelfläche MK in der Geraden m berührt, hat mit der Curve K nur den Punkt M gemein und ist die in diesem Punkte der Curve sich anschmiegende Ebene. Geht eine Ebene U durch keinen von den beiden Punkten M, N der Curve K, so schneidet sie die Kegelflächen MK, NK in zwei Curven II. Ordnung, welche einen Punkt H der Geraden MN mit einander gemein haben aber in ihm nicht eine und dieselbe Gerade berühren, folglich entweder in noch drei Punkten A, B, C sich schneiden, oder in einem Punkte A sich berühren und in einem andern von H verschiedenen Punkte B sich schneiden oder in einem Punkte A dreipunktig einander sich anschmiegen. Im ersten dieser drei Fälle schneiden sich die Ebene U und die Curve K in den drei Punkten A, B, C, während sie im zweiten Falle im Punkte A sich berühren und im Punkte B sich schneiden, im dritten Falle aber im Punkte A einander sich anschmiegen.

Alle Kegelflächen, welche zu einer und derselben unebenen Curve III. Ordnung perspektivisch sind, sind zu einander projektivisch, da je zwei derselben auch zu einem und demselben Ebenenbüschel perspektivisch sind. Und wenn zwei Kegelflächen II. Ordnung zu einem und demselben Ebenenbüschel I. Ordnung perspektivisch sind, aber weder einerlei Mittelpunkt noch die Axe des Büschels entsprechend gemein haben, so sind sie auch zu einer und derselben Curve III. Ordnung perspektivisch.

464. Durch sechs Punkte M, N, A, B, C, D, von welchen keine vier in einerlei Ebene liegen, ist eine unebene Curve K III. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die sechs gegebenen Punkte geht.

Jede von den beiden Kegelflächen MK, NK, welche in der Geraden MN und in der Curve K sich schneiden, ist durch die fünf Strahlen bestimmt, welche aus ihrem Mittelpunkte die fünf übrigen der gegebenen Punkte projiciren. — Soll eine Curve K III. Ordnung durch die fünf Punkte M, N, A, B, C gehen und im Punkte M der Geraden MD sich anschmiegen, so ist die Kegelfläche MK, wie vorhin, durch die fünf Strahlen MN, MA, MB, MC, MD, die Kegelfläche NK aber durch die vier Strahlen NM, NA, NB, NC und die ihr in der Geraden NM sich anschmiegende Ebene NMD bestimmt. — Soll eine Curve K III. Ordnung durch die vier Punkte M, N, A, B gehen und in den erstern den Geraden MD, NC sich anschmiegen, so ist die Kegelfläche MK durch die vier Geraden MN, MA, MB, MD und die ihr in der Geraden MN sich anschmiegende Ebene MNC, die Kegelfläche NK aber, wie vorhin, durch die Geraden NM, NA, NB, NC und die ihr in der Geraden NM sich anschmiegende Ebene NMD bestimmt. — Soll eine Curve K III. Ordnung in den Punkten M, N, A den Geraden MD, NC, AB sich anschmiegen, so muss die Kegelfläche MK in den Geraden MN, MA die Ebenen MNC, MAB die Kegelfläche NK aber in der Geraden NM, NA die Ebenen NMD, NAB berühren und überdies die erstere durch die Gerade MD, die letztere aber durch die Gerade NC gehen. — Soll eine Curve K III. Ordnung im Punkte M der Geraden MD und der Ebene MDB, im Punkte N der Geraden NC und der Ebene NCB sich anschmiegen und überdies durch den Punkt A gehen, so muss die Kegelfläche MK in den Geraden MN, MD die Ebenen MNC, MDB, die Kegelfläche NK aber in den Geraden NM, NC die Ebenen NMD, NCB berühren und überdies die erstere durch die Gerade MA, die letztere aber durch die Gerade NA gehen.

465. Eine unebene Linie III. Ordnung, welche aus andern Linien zusammengesetzt ist, besteht entweder aus den drei Kanten eines Dreikants oder aus drei Geraden, von welchen zwei nicht in einerlei Ebene liegen, während jedoch beide von der dritten ge-

schnitten werden, oder aus einer Curve II. Ordnung und einer Geraden, welche mit der Curve einen Punkt gemein hat aber mit ihr nicht in einerlei Ebene liegt. — Durch sechs Punkte M, N, A, B, C, D, von welchen keine drei in einer und derselben Geraden und keine fünf in einerlei Ebene liegen, ist eine Linie K III. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die sechs gegebenen Punkte geht.

Liegen die vier Punkte A, B, C, D in einerlei Ebene, so besteht die Linie K aus der Geraden M N und derjenigen Linie II. Ordnung, welche durch die Punkte A, B, C, D und den Punkt geht, den die Ebene A B C mit der Geraden M N gemein hat. Liegen aber keine vier von den sechs gegebenen Punkten in einerlei Ebene, so ist K eine Curve III. Ordnung.

466. Ist von einer unebenen Curve K III. Ordnung und einem zu ihr perspektivischen Ebenenbüschel u I. Ordnung die Rede, so versteht es sich von selbst, dass die Axe u des Ebenenbüschels entweder mit der Curve K zwei Punkte A, B gemein hat oder derselben in einem Punkte A sich anschmiegt und dass auf jeden ausserhalb der Geraden u liegenden Punkt der Curve die durch ihn gehende Ebene des Büschels bezogen wird. Dem Punkte A entspricht im erstern Falle die Ebene, welche die Curve K im Punkte A berührt und im Punkte B schneidet, und eben so dem Punkte B die Ebene, welche die Curve im Punkte B berührt und im Punkte A schneidet. Im letztern Falle aber entspricht dem Punkte A die Ebene, welche durch keinen andern Punkt der Curve geht also derselben im Punkte A sich anschmiegt. Umgekehrt ist durch jede Ebene des Büschels u ein Punkt der Curve K bestimmt, welchem nämlich die gegebene Ebene entspricht.

Alle Ebenenbüschel I. Ordnung, welche zu einer und derselben unebenen Curve III. Ordnung perspektivisch sind, sind zu einander projektivisch. Haben nämlich die Axen u, v von zwei zur Curve K perspektivischen Ebenenbüscheln I. Ordnung einen Punkt S mit einander gemein, so liegt dieser in der Curve K, daher die beiden Büschel zu einer und derselben Kegelfläche S K II. Ordnung perspektivisch sind. Haben aber die Geraden u, v keinen Punkt mit einander gemein, so darf man nur, um diesen Fall auf den so eben betrachteten zurückzuführen, einen dritten zur Curve K perspektivischen Ebenenbüschel I. Ordnung annehmen, dessen Axe die beiden Geraden u, v schneidet.

467. Wenn ein Strahlenbüschel S I. Ordnung und eine Curve

K II. Ordnung zu einander projektivisch sind und überdies in einerlei Ebene liegen, so geht wenigstens ein Strahl des Büschels durch den ihm entsprechenden Punkt der Curve. Wenn nämlich weder der Punkt P der Curve K in dem ihm entsprechenden Strahle des Büschels S liegt, noch der Strahl S P dieses Büschels durch den ihm entsprechenden Punkt der Curve geht, so erzeugt der Strahlenbüschel P, welcher zur Curve K perspektivisch und in Folge dessen auch zu dem Büschel S projektivisch ist, mit diesem eine Curve K_1 II. Ordnung, welche die erstere im Punkte P schneidet und daher mit derselben wenigstens noch einen Punkt gemein hat. Bemerkt man nun, dass jeder von P verschiedene gemeinschaftliche Punkt der Curven K, K_1 in dem ihm entsprechenden Strahle des Büschels S liegt, so folgt der Satz.

Geht die Axe eines Ebenenbüschels I. Ordnung, welcher zu einer Kegelfläche II. Ordnung projektivisch ist, durch den Mittelpunkt derselben, so geht wenigstens eine Ebene des Büschels durch den ihr entsprechenden Strahl der Kegelfläche.

468. Wenn ein Ebenenbüschel u I. Ordnung und eine Kegelfläche F II. Ordnung zu einander projektivisch sind, aber keine Ebene des Büschels durch den ihr entsprechenden Strahl der Kegelfläche geht, so erzeugen die zu einander projektivischen Gebilde eine zu ihnen perspektivische Curve K III. Ordnung, welche mit der Axe u des Ebenenbüschels zwei Punkte A, B gemein hat oder derselben in einem Punkte A sich anschmiegt, je nachdem diese Gerade die Kegelfläche F in zwei Punkten A, B schneidet oder in einem Punkte A berührt.

Es sei v der durch den Punkt A gehende Strahl der Kegelfläche F. Bezieht man nun den Ebenenbüschel v auf die Kegelfläche F perspektivisch, so ist derselbe dadurch auch auf den Ebenenbüschel u projektivisch bezogen und erzeugt mit diesem eine Kegelfläche F_1, welche die erstere in der Geraden v und in der im Satze erwähnten Curve K schneidet. Der Ebene u v des Büschels u entspricht diejenige Ebene des Büschels v, welche die Kegelfläche F in dem Strahle v und in dem der Ebene u v des erstern Büschels entsprechenden Strahle schneidet. Die der Kegelfläche F in dem Strahl v sich anschmiegende Ebene V des Büschels v entspricht derjenigen Ebene U des Büschels u, welcher der Strahl v der Kegelfläche F entspricht, daher die Ebene V die Kegelfläche F_1 in der Geraden v und in noch einer Geraden U V schneidet.

469. Eine Regelschaar soll zu einer in der Regelfläche liegenden Curve III. Ordnung perspektivisch heissen, wenn jede Gerade der Regelschaar durch einen ihr entsprechenden Punkt der Curve geht, aber weder der Curve in diesem Punkte sich anschmiegt noch mit derselben einen zweiten Punkt gemein hat. Ist eine Regelschaar R zu einem Ebenenbüschel u I. Ordnung projektivisch, ohne dass eine Gerade der Regelschaar in der ihr entsprechenden Ebene des Büschels liegt, so erzeugen die zu einander projektivischen Gebilde eine zu ihnen perspektivische Curve K III. Ordnung, welche mit der Axe u des Ebenenbüschels zwei Punkte A, B gemein hat oder derselben in einem Punkte A sich anschmiegt, je nachdem diese Gerade die Regelfläche in zwei Punkten A, B schneidet oder in einem Punkte A berührt.

Es sei v der durch den Punkt A gehende, w aber irgend ein anderer Leitstrahl der Regelschaar R. Wenn man nun die Ebenenbüschel v, w auf die Regelschaar R perspektivisch bezieht, so hat man drei zu einander projektivische Ebenenbüschel u, v, w, von welchen keine zwei eine Ebene entsprechend gemein haben und keine drei homologe Ebenen in einer und derselben Geraden sich schneiden. Die Kegelfläche, welche die beiden erstern Büschel erzeugen, erzeugt (468) mit dem dritten eine zu jedem der drei Büschel perspektivische Curve K III. Ordnung, welche auch die Regelschaar R mit dem Büschel u erzeugt. Es folgt aber hieraus zugleich, dass jeder Leitstrahl der Regelschaar R und daher keine Gerade dieser Schaar die Axe eines zur Curve K perspektivischen Ebenenbüschels ist.

470. Je drei zu einander projektivische Ebenenbüschel I. Ordnung, von welchen keine zwei eine Ebene entsprechend gemein haben und keine drei homologe Ebenen in einer und derselben Geraden sich schneiden, erzeugen eine zu ihnen perspektivische Curve K III. Ordnung. Je zwei der drei Büschel erzeugen nämlich ein zu ihnen perspektivisches Gebilde G II. Ordnung, welches mit dem dritten die Curve K erzeugt. Ist G eine Regelschaar, so entspricht jeder Geraden derselben ein Punkt der Curve, während jeder Leitstrahl der Regelschaar die Axe eines zur Curve perspektivischen Ebenenbüschels ist. Ist aber G eine Kegelfläche, so sind in jedem Strahle derselben die beiden erwähnten Eigenschaften vereinigt.

471. Je zwei zu einer und derselben unebenen Curve K III. Ordnung perspektivische Ebenenbüschel u, v I. Ordnung,

deren Axen sich nicht schneiden, erzeugen eine zur Curve perspektivische Regelschaar.

Es sei w ein zur Curve K perspektivischer Ebenenbüschel I. Ordnung, dessen Axe w die beiden Geraden u, v schneidet. Da nun (466) die drei Ebenenbüschel u, v, w zu einander projektivisch sind, so erzeugen die beiden erstern eine Regelschaar, welche mit dem dritten die Curve K erzeugt und zu dieser Curve perspektivisch ist. Jeder Leitstrahl der erwähnten Regelschaar ist (469) die Axe eines zur Curve K perspektivischen Ebenenbüschels. Diejenige Ebene U des Büschels u, welcher die Ebene v w des Büschels v entspricht, schmiegt der Regelfläche im Punkte u w sich an und geht durch die der Curve K in diesem Punkte sich anschmiegende Gerade s. Wenn also die Gerade u mit der Curve K zwei Punkte gemein hat, so berührt die Gerade s die Regelfläche im Punkte u w. Fallen aber die Geraden s, u in einander, so schmiegt die Ebene U im Punkte u w auch der Curve K sich an.

Durch eine unebene Curve III. Ordnung und zwei Gerade, welche die Axen von zwei zur Curve perspektivischen Ebenenbüscheln sind, ist eine Fläche II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die drei gegebenen Linien geht und eine Kegelfläche oder Regelfläche ist, je nachdem die gegebenen Geraden in einerlei oder nicht in einerlei Ebene liegen. Dass es im erstern Falle keine Regelfläche giebt, welche durch die drei gegebenen Linien geht, folgt aus 454.

472. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung und eine Gerade a, welche mit der Curve einen Punkt A gemein hat, aber weder ihr in diesem Punkte sich anschmiegt noch durch einen zweiten Punkt derselben geht, ist eine zur Curve perspektivische Regelschaar R bestimmt, der nämlich die gegebene Gerade angehört.

In jeder durch den Punkt A gehenden Ebene U liegt die Axe u eines zur Curve K perspektivischen Ebenenbüschels, so dass dem Punkte A der Curve die Ebene U des Büschels entspricht. Schneidet die Ebene U die Curve K im Punkte A und in noch zwei Punkten B, C, so geht die Gerade u durch die beiden letztern Punkte. Berühren sich die Ebene U und die Curve K im Punkte A, während sie in einem andern Punkte B sich schneiden, so geht die Gerade u durch die beiden Punkte A, B. Schneiden sich die Ebene U und die Curve K im Punkte A, während sie in einem andern Punkte B sich berühren, so schmiegt die Gerade u im Punkte B der Curve K sich an. Wenn endlich die Ebene U der Curve K im Punkte A sich anschmiegt, so ist u die in diesem Punkte der Curve K sich anschmiegende Gerade. Die Gerade u hat also mit der Curve K zwei Punkte gemein oder schmiegt derselben in einem Punkte sich an, je nachdem die Ebene U die Kegelfläche AK schneidet oder berührt. Es seien nun U, U_1, U_2 drei durch die Gerade a gehende Ebenen, so giebt es in der Ebene U eine Gerade u, in der Ebene U_1 eine Gerade u_1 und in der Ebene U_2 eine Gerade u_2, so dass u, u_1, u_2 die Axen von drei zur Curve K perspektivischen Ebenenbüscheln sind und dem Punkte A der Curve K die Ebenen ua, u_1a, u_2a der Büschel entsprechen, daher je zwei derselben eine zur Curve K perspektivische Regelschaar erzeugen, der die Gerade a angehört. Da es aber nur eine Fläche II. Ordnung giebt, welche durch die Curve K und die Gerade a, mithin auch durch jede Gerade geht, welche zwei Punkte mit der Curve K und einen dritten mit der Geraden a gemein hat, so folgt, dass u, u_1, u_2 drei Leitstrahlen einer und derselben zur Curve K perspektivischen Regelschaar R sind und dass auch jeder vierte Leitstrahl dieser Regelschaar, der also in einer vierten durch die Gerade a gehenden Ebene liegt, die Axe eines zur Curve K perspektivischen Ebenenbüschels ist, welcher mit jedem der drei erstern Büschel die Regelschaar erzeugt.

473. Jede Regelfläche F, welche durch eine Curve K III. Ordnung geht, enthält eine zur Curve perspektivische Regelschaar R. Zwei Leitstrahlen g, h dieser Regelschaar schmiegen der Curve K sich an, während jeder dritte Leitstrahl der Regelschaar mit der Curve K zwei Punkte gemein hat und jede dritte dieser Curve sich anschmiegende Gerade die Regelfläche berührt. Schmiegt eine Ebene dieser Fläche in einem Punkte A der Curve K sich an, so schmiegt sie entweder auch der Curve sich an oder sie berührt die Curve im Punkte A, während sie in einem andern Punkte B dieselbe schneidet, je nachdem nämlich der durch den Punkt A gehende Leitstrahl der Regelschaar R mit der Curve K nur den Punkt A oder noch einen Punkt B gemein hat.

In jedem Punkte A der Curve K schneiden sich nämlich zwei in der Fläche F liegende Gerade a, p, von welchen nach 454 wenigstens die eine a ausserhalb der Kegelfläche A K liegt, also die Schnittlinie von zwei dieser Fläche sich anschmiegenden Ebenen ist. Da es nun (472) nur eine Fläche II. Ordnung giebt, welche durch die Curve K und die Gerade a geht, so ist diejenige zur Curve K perspektivische Regelschaar, welcher die Gerade a angehört, in der Fläche F enthalten, folglich die Gerade p die Axe eines zur Curve K perspektivischen Ebenenbüschels und mithin ein Strahl der Kegelfläche A K. Auch die übrigen Theile des Satzes ergeben sich aus den vorigen Betrachtungen und wenn man bemerkt, dass die Ebene p a des Büschels p dem Punkte A der Curve K entspricht.

Ist die Curve K reell und a eine reelle Gerade, so ist diese entweder von der Kegelfläche AK eingeschlossen oder die Axe eines um die Kegelfläche A K beschriebenen reellen Flächenwinkels. Im erstern Falle hat jeder reelle Leitstrahl der Regelschaar R mit der Curve K zwei reelle Punkte gemein, während im letztern Falle die Geraden g, h reell sind, ein dritter reeller Leitstrahl der Regelschaar R aber mit der Curve K zwei reelle oder zwei einander conjungirte imaginäre Punkte gemein hat, je nachdem er in dem einen oder in dem andern von den beiden Theilen liegt, in welche die Fläche durch die Geraden g, h getheilt wird.

474. Alle Ebenenbüschel I. Ordnung, Kegelflächen und Regelschaaren, welche zu einer und derselben unebenen Curve K III Ordnung perspektivisch sind, sind (466) zu einander projektivisch, da jeder zu irgend einem der erwähnten Gebilde II. Ordnung perspektivische Ebenenbüschel I. Ordnung auch zur Curve perspektivisch ist. — Durch eine Gerade h und fünf Punkte A, B, C, D, E, von welchen keine zwei mit der gegebenen Geraden und auch keine vier mit einander in einerlei Ebene liegen, ist eine Curve K III. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die fünf gegebenen Punkte geht und mit der gegebenen Geraden entweder zwei Punkte gemein hat oder derselben in einem Punkte sich anschmiegt.

Der Wurf A (BCDE) in der Kegelfläche AK muss zu dem Wurfe h (BCDE) projektivisch sein. Und wenn man durch die vier Geraden AB, AC, AD, AE eine Kegelfläche II. Ordnung legt, so dass der Wurf A (BCDE) in derselben zu dem Wurfe h (BCDE) projektivisch ist, und alsdann die Kegelfläche und den Ebenenbüschel h projektivisch so auf einander bezieht, dass den Strahlen AB, AC AD des erstern Gebildes die Ebenen hB, hC, hD des letztern entsprechen, so erzeugen sie die im Satze erwähnte Curve. Dass nämlich die Ebene hA des Ebenenbüschels nicht durch den ihr entsprechenden Strahl der Kegelfläche geht, folgt, da die vier Punkte B, C, D, E nicht in einerlei Ebene liegen, indirekt aus 18.

475. Wenn eine Regelschaar R und eine Kegelfläche F II. Ordnung oder zwei Regelschaaren R, F zu einem und demselben Ebenenbüschel u I. Ordnung perspektivisch sind, aber keine Gerade mit einander gemein haben, so sind sie auch zu einer und derselben Curve K III. Ordnung perspektivisch.

Jeder andere Ebenenbüschel v I. Ordnung, welcher zur Regelschaar R perspektivisch und daher auch zu dem Gebilde F projektivisch ist, erzeugt mit diesem die im Satze erwähnte Curve, da jede Gerade p der Regelschaar R die ihr entsprechende Gerade q des Gebildes F in demselben Punkte schneidet, in welchem diese Gerade von der ihr entsprechenden Ebene vp des Büschels v geschnitten wird.

Haben also eine Kegelfläche und eine Regelfläche oder zwei Regelflächen eine, aber auch nur eine Gerade u mit einander gemein, so schneiden sie sich auch noch in einer Curve III. Ordnung, welche im erstern Falle durch den Mittelpunkt der Kegelfläche geht, in jedem Falle aber mit der Geraden u entweder zwei Punkte gemein hat oder derselben in einem Punkte sich anschmiegt.

476. Wenn eine unebene Curve K III. Ordnung mit einer Fläche F II. Ordnung mehr als sechs Punkte, nämlich den Punkt A und wenigstens noch sechs Punkte gemein hat, so liegt die Curve K in der Fläche F.

Da eine unebene Curve III. Ordnung mit keiner Ebene und also auch mit keiner Linie II. Ordnung mehr als drei Punkte gemein hat, so folgt, dass die Fläche F, wenn sie mit der Kegelfläche AK mehr als eine Gerade gemein hat, mit dieser Fläche zusammenfällt. Giebt es hingegen in der Fläche F eine durch den Punkt A gehende Gerade a, welche ausserhalb der Kegelfläche AK liegt, so fällt die Fläche F mit der Regelfläche zusammen, welche durch die Curve K und die Gerade a geht, weil, wenn zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung eine Gerade a und sechs ausserhalb derselben liegende Punkte, von welchen keine vier in einerlei Ebene liegen, mit einander gemein haben, sie in der Geraden a und in der durch jene sechs Punkte bestimmtenCurveKIII.Ordnung sich schneiden, alsdann aber die Gerade a mit der Curve K entweder zwei Punkte gemein hat oder derselben in einem Punkte sich anschmiegt, was gegen die Annahme ist. Findet keiner der bereits betrachteten Fälle statt, so ist F eine Kegelfläche, welche die Kegelfläche AK in einer Geraden u und in einer Curve III. Ordnung schneidet, die durch die Mittelpunkte der beiden Kegelflächen geht und mit der Curve K wenigstens fünf ausserhalb der Geraden u liegende Punkte gemein hat, demnach mit K zusammenfällt. Es ergiebt sich hieraus zugleich, dass die Curve K, im Falle die Fläche F eine Kegelfläche ist, durch den Mittelpunkt derselben geht.

477. Wenn eine Kegelfläche F und eine Regelschaar R oder zwei Regelschaaren F, R zu einer und derselben unebenen Curve K III. Ordnung perspektivisch sind, so sind sie auch zu einem und demselben Ebenenbüschel I. Ordnung perspektivisch.

Es sei A irgend ein Punkt der Curve K, a die ihm entsprechende Gerade des Gebildes F und a_1 die ihm entsprechende Gerade der Regelschaar R, so gibt es in der Ebene aa_1 eine Gerade u, welche die Axe eines zur Curve K perspektivischen Ebenenbüschels ist, so dass dem Punkte P der Curve die Ebene aa_1 des Büschels entspricht. Bemerkt man nun, dass dieser Büschel (472) auch zu jedem der Gebilde F, R perspektivisch ist, so folgt der Satz.

Zwei Flächen II. Ordnung, welche durch eine und dieselbe Curve III. Ordnung gehen, schneiden sich auch noch in einer Geraden, welche mit der Curve entweder zwei Punkte gemein hat oder derselben in einem Punkte sich anschmiegt.

478. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt P ist eine Gerade u bestimmt, welche nämlich durch den gegebenen Punkt geht und mit der gegebenen Curve entweder zwei Punkte gemein hat oder derselben in einem Punkte sich anschmiegt.

Es sei A ein beliebiger Punkt der Curve K. Wenn nun die Gerade AP in der Kegelfläche AK liegt, so fällt u mit AP zusammen. Wenn aber (472) die Gerade AP einer zur Curve K perspektivischen Regelschaar angehört, so ist u der durch den Punkt P gehende Leitstrahl dieser Regelschaar. — Jede Fläche II. Ordnung, welche durch die Curve K und durch den Punkt P geht, geht auch durch die Gerade u. Geht nämlich eine Fläche II. Ordnung durch die Curve K aber nicht durch die Gerade u, so hat sie mit dieser Geraden keinen ausserhalb der Curve K liegenden Punkt gemein.

479. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung, eine Gerade u, welche die Axe eines zur Curve perspektivischen Ebenenbüschels ist, und einen Punkt Q, welcher in keiner der gegebenen Linien liegt, ist eine Fläche II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die beiden gegebenen Linien K, u und durch den gegebenen Punkt Q geht. Diese Fläche ist eine Kegelfläche oder eine Regelfläche, je nachdem diejenige durch den Punkt Q gehende Gerade, welche mit der Curve K entweder zwei Punkte gemein hat oder derselben in einem Punkte sich anschmiegt, die Gerade u schneidet oder nicht schneidet.

Durch eine unebene Curve III. Ordnung und zwei ausserhalb derselben liegende Punkte ist entweder eine Fläche II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die gegebene Curve und durch die beiden gegebenen Punkte geht, oder es ist die Gerade, welche diese Punkte verbindet, die Axe eines zu der gegebenen Curve perspektivischen Ebenenbüschels.

480. Durch eine Regelfläche F und fünf in dieser Fläche aber nicht zugleich in einer und derselben Ebene liegende Punkte A, B, C, D, E, von welchen keine drei einer und derselben Geraden angehören, sind zwei Linien III. Ordnung bestimmt, deren jede in der gegebenen Fläche liegt und durch die fünf gegebenen Punkte geht.

Da von den zehn Geraden, deren jede zwei der fünf gegebenen Punkte mit einander verbindet, höchstens vier in der Fläche F liegen, so kann man annehmen, dass diese von den Geraden AB, AC, AD, AE geschnitten wird. Liegen nun keine vier von den fünf gegebenen Punkten in einerlei Ebene, so schneiden sich in den vier Geraden AB, AC, AD, AE zwei Flächen II. Ordnung, deren jede mit der Fläche F eine durch den Punkt A gehende Gerade und eine durch die fünf gegebenen Punkte gehende Linie III. Ordnung gemein hat. Wenn aber vier von diesen Punkten in einer und derselben Ebene U liegen, so besteht jede der im Satze erwähnten Linien aus der Linie UF und einer durch den fünften Punkt gehenden Geraden. Aus dem Beweise und aus 475 folgt noch:

Zwei zu einer und derselben Regelschaar perspektivische Curven III. Ordnung haben höchstens vier Punkte mit einander gemein.

---

§. 34.

Elementargebilde III. und IV. Ordnung.

481. Durch drei Gerade a, b, c, welche einer unebenen Curve K III. Ordnung in den Punkten A, B, C sich anschmiegen, ist eine Regelfläche abc bestimmt, welche nämlich durch die drei gegebenen Geraden geht. Die Ebenen A_1, ap, von welchen die erstere im Punkte A der Curve K, die letztere in demselben Punkte der erwähnten Regelfläche sich anschmiegt, sind durch die Punkte B, C harmonisch getrennt.

Da nämlich die Ebenen A_1, Ab, Ac die Kegelfläche AK in den Geraden a, AB, AC berühren, so sind (G. 250) die Geraden AB, AC durch die Ebene A_1 und die Ebene ap, welche die Gerade a mit der Schnittlinie p der Ebenen Ab, Ac verbindet, harmonisch getrennt, woraus der Satz folgt. — Die Ebenen ap, bp, cp, welche in den Punkten A, bp, cp der Regelfläche abc sich anschmiegen, schmiegen in denselben Punkten auch der Regelfläche sich an, welche durch die Curve K und die beiden Geraden b, c, mithin (473) nicht durch die Gerade a geht, woraus man schliessen kann, dass die beiden Flächen in der Geraden p sich berühren.

482. Durch zwei nicht in einerlei Ebene liegende Gerade a, a_1, einen ausserhalb derselben liegenden Punkt P und eine Ebene E, welche durch keine der gegebenen Geraden aber durch die Schnittlinie der Ebenen Pa, Pa_1 geht, ist ein Nullsystem bestimmt, in welchem nämlich der Geraden a die Gerade a_1 und dem Punkte P die Ebene E zugeordnet ist.

Es sei b irgend eine durch den Punkt P gehende Gerade, welche keine von den beiden Geraden a, a_1 schneidet, und b_1 die in der Ebene E liegende Gerade der Regelschaar aa_1b, so ist, wie aus 92 und 94 leicht hervorgeht, $a a_1 . b b_1 \ldots$ das im Satze erwähnte Nullsystem. Liegt die Gerade b in der Ebene E, so fällt b_1 mit b zusammen.

483. Durch ein Dreieck ABC und ein Dreikant, dessen Mittelpunkt S in der Ebene des Dreiecks liegt und dessen Seiten A_1, B_1, C_1 bezüglich durch die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks gehen, ohne dass eine Kante des Dreikants und eine Seite des Dreiecks sich schneiden, ist ein Nullsystem bestimmt, in welchem nämlich jedem Eckpunkte des gegebenen Dreiecks die durch ihn gehende Seite des gegebenen Dreikants und also der Ebene ABC der Punkt S zugeordnet ist.

Es ergiebt sich dieser Satz aus dem vorigen, wenn man bemerkt, dass der Geraden AB die Gerade $A_1 B_1$ zugeordnet sein muss und dass die Ebene C_1 durch die Gerade CS geht, welche die beiden erstern schneidet.

484. Je drei Ebenen A_1, B_1, C_1, welche einer und derselben unebenen Curve K III. Ordnung sich anschmiegen, schneiden sich in einem Punkte S, welcher mit den drei Anschmiegungspunkten A, B, C in einer und derselben Ebene liegt.

Die der Curve K in den Punkten A, B, C sich anschmiegenden Geraden a, b, c sind drei Leitstrahlen einer Regelschaar, von welcher drei Gerade p, q, r bezüglich durch die Punkte A, B, C gehen und drei andere Gerade p_1, q_1, r_1 bezüglich in den Ebenen A_1, B_1, C_1 liegen. Da nun (481) die Ebenen ap, $a p_1$ durch die Punkte B, C und also auch durch die Geraden q, r harmonisch getrennt sind, so ist $r p q p_1$ ein harmonischer Wurf. Da eben so $p q r q_1$, $q r p r_1$ harmonische Würfe sind, so ist (G. 220) $p p_1 . q q_1 . r r_1$ eine Involution. Betrachtet man nun das Nullsystem $p p_1 . q q_1 \ldots$, in welchem den Punkten a p, b q, c r die Ebenen $a p_1$, $b q_1$, $c r_1$ zugeordnet sind, so folgt, dass der Schnittpunkt S dieser Ebenen in der durch jene drei Punkte gehenden Ebene ABC liegt. Dasselbe ergibt sich auch, wenn man die Curve in Betrachtung zieht, in welcher die Ebene ABC und die Regelfläche a b c sich schneiden. Diese Curve berührt in den Punkten A, B, C die Geraden EF, DF, DE, in welchen die Ebene ABC von den Ebenen a p, b q, c r geschnitten wird, daher die Geraden

A D, B E, C F, welche (481) bezüglich in den Ebenen A_1, B_1, C_1 liegen, in einem und demselben Punkte S sich schneiden.

485. Eine unebene Curve III. Ordnung soll eine Ordnungscurve von einem Nullsysteme heissen, wenn in demselben jede der Curve sich anschmiegende Ebene ihrem Anschmiegungspunkte zugeordnet ist. — Schmiegen einer unebenen Curve K III. Ordnung in den Punkten A, B, C die Ebenen A_1, B_1, C_1 sich an, so ist die Curve K eine Ordnungscurve des Nullsystems, in welchem (483) den Punkten A, B, C die Ebenen A_1, B_1, C_1 zugeordnet sind.

Es sei D irgend ein vierter Punkt der Curve K und D_1 die in ihm derselben sich anschmiegende Ebene, so schneiden sich (484) die Ebenen A_1, B_1, D_1 in einem Punkte P der Ebene ABD und die Ebenen A_1, C_1, D_1 in einem Punkte Q der Ebene A C D. Da nun in dem erwähnten Nullsysteme der Geraden A B die Gerade $A_1 B_1$ zugeordnet ist, so ist (92) die Gerade DP, welche die beiden erstern schneidet, sich selbst zugeordnet. Eben so ist die Gerade D Q sich selbst und also die Ebene D_1, welche durch die beiden Geraden DP, DQ geht, dem Schnittpunkte D derselben zugeordnet.

486. Durch ein Nullsystem N, dann drei nicht in einer und derselben Geraden liegende Punkte A, B, C, deren Nullebenen A_1, B_1, C_1 in drei ausserhalb der Ebene ABC liegenden Geraden sich schneiden und eine durch den Punkt A gehende Gerade a, welche in der Ebene A_1 aber ausserhalb der Ebene A B C liegt, ist eine Ordnungscurve des Nullsystems bestimmt, welche nämlich durch die drei gegebenen Punkte geht und der gegebenen Geraden a sich anschmiegt.

Man suche in der Geraden C S, welche den Punkt C mit dem Schnittpunkte S der Ebenen A_1, B_1, C_1 verbindet und also die Gerade A B in einem Punkte H schneidet, die Punkte F, G, so dass CSHF, FCHG harmonische Würfe sind. Man verbinde ferner den Punkt G mit dem Punkte aC_1 durch eine Gerade r_1 und den Punkt B mit dem Punkte $r_1 B_1$ durch eine Gerade b. Legt man nun (464) durch die Punkte A, B, C eine Curve K III. Ordnung, welche den Geraden a, b und den Ebenen A_1, B_1 sich anschmiegt, so ist diese die im Satze erwähnte Ordnungscurve des gegebenen Nullsystems. Wenn nämlich c die der Curve K im Punkte C sich anschmiegende Gerade bezeichnet und p, q, r die durch die Punkte A, B, C gehenden Leitstrahlen der Regelschaar abc sind, so geht (481) die Ebene ap durch die Gerade AF, welche von der Geraden AS durch die Punkte B, C harmonisch getrennt ist, und eben so die Ebene bq durch die Gerade BF, daher die Curve L, in welcher die Regelfläche abc von der Ebene ABC geschnitten wird, in den Punkten A, B die Geraden AF, BF berührt. Da ferner die Punkte C, G durch den Punkt F und die Gerade AB harmonisch getrennt sind, so folgt, dass auch der Punkt G in der Curve L liegt und die Schnittlinie r_1 der Ebenen Ga, Gb, ein Leitstrahl der Regelschaar abc ist. Da endlich ACBG ein harmonischer Wurf in der Curve L und also $prqr_1$ ein harmonischer Wurf in der Regelschaar pqr ist, so schmiegt die Ebene C_1, welche aus dem Punkte C die Gerade r_1 projicirt und daher auch durch die Gerade c geht, im Punkte C der Curve K sich an. — Die Geraden r, r_1 sind auch durch die in den Ebenen A_1, B_1 liegenden Leitstrahlen p_1, q_1 der Regelschaar abc, folglich die Ebenen A_1, B_1 durch die Punkte C, cr_1 harmonisch getrennt, in deren letzterm die Ebene C_1 der Regelfläche abc sich anschmiegt.

487. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung ist (485) ein Nullsystem bestimmt, von welchem nämlich die gegebene Curve eine Ordnungscurve ist. Der Curve K ist der ihr sich anschmiegende Ebenenbüschel K_1 zugeordnet, während der der Curve sich anschmiegende Strahlenbüschel k sich selbst zugeordnet ist.

Jedem zur Curve k perspektivischen Ebenenbüschel u I. Ordnung ist ein zu dem Ebenenbüschel K_1 perspektivisches gerades Gebilde u_1 zugeordnet, dessen Träger entweder mit der Axe u jenes Ebenenbüschels zusammenfällt oder mit ihr nicht in einerlei Ebene liegt, je nachdem nämlich die Gerade u der Curve K in einem Punkte sich anschmiegt oder mit derselben zwei Punkte gemein hat. — Jeder zur Curve K perspektivischen Kegelfläche MK ist ein zu dem Ebenenbüschel K_1 perspektivischer Strahlenbüschel $M_1 K_1$ II. Ordnung zugeordnet, welcher mit der Kegelfläche MK den der Curve K im Punkte M sich anschmiegenden Strahl m gemein hat. Gleichwie nun jeder von m verschiedene Strahl der Kegelfläche MK aus dem Punkte M einen andern Punkt A der Curve K projicirt, so wird in jedem von m verschiedenen Strahle des Strahlenbüschels M_1K_1 die Ebene M_1 von einer andern Ebene A_1 des Ebenenbüschels K_1 geschnitten. — Dem der Kegelfläche MK sich anschmiegenden und daher zu dem Strahlenbüschel K perspektivischen Ebenenbüschel MK ist die dem Strahlenbüschel M_1K_1 sich anschmiegende und zu dem Strahlenbüschel k perspektivische Curve M_1k zugeordnet, welche den Strahl m im Punkte M berührt, während in jedem andern Punkte derselben die Ebene M_1 von einem Strahle des Büschels k geschnitten wird. — Jeder zur Curve K perspektivischen Regelschaar R ist eine zu dem Ebenenbüschel K_1 perspektivische Regelschaar R_1 zugeordnet, welche mit der erstern zwei Gerade und die der Curve K sich anschmiegenden Leitstrahlen gemein hat. Geht die Gerade α der Regelschaar R durch den Punkt A der Curve K, so liegt die ihr zugeordnete Garade α_1 der Regelschaar R_1 in der dem Punkte A zugeordneten Ebene A_1. Gleichwie nun in der Geraden α zwei Ebenen des Büschels Ak sich schneiden, so hat die Gerade α_1 mit der Curve A_1k zwei Punkte gemein. Schmiegt der durch den Punkt A gehende Leitstrahl der Regelschaar R der Curve K sich an, so ist auch die Gerade α, da sie (473) in diesem Falle in der Ebene A_1 liegt, sich selbst zugeordnet, folglich α_1 mit α identisch.

In jedem Punkte P, welcher in keinem Strahle des Büschels K liegt, schneiden sich drei Ebenen des Büschels K_1. Diese Ebenen schmiegen der Curve K in den Punkten sich an, in welchen dieselbe von der Nullebene des Punktes P geschnitten wird. Jeder Strahl a des Büschels k geht durch einen Punkt A der Curve K und liegt in einer Ebene A_1 des Büschels K_1. Durch jeden von A verschiedenen Punkt Q der Geraden a geht noch eine Ebene des Büschels K_1. Diese Ebene schmiegt der Curve K in dem Punkte sich an, in welchem dieselbe von der Nullebene des Punktes Q geschnitten wird.

488. Jeder unebenen Curve III. Ordnung schmiegt (487) ein Ebenenbüschel III. Ordnung sich an. Sind zwei räumliche Systeme reciprok zu einander, so entspricht jeder unebenen Curve K III. Ordnung in dem einen Systeme ein Ebenenbüschel K_1 III. Ordnung im andern. Die Curve, welcher dieser Büschel sich anschmiegt, entspricht dem der Curve K sich anschmiegenden Ebenenbüschel. Jeder Kegelfläche MK, welche die Curve K aus einem in ihr liegenden Punkte M projicirt, entspricht ein Strahlenbüschel M_1K

II. Ordnung, in welchem der Ebenenbüschel K_1 von der dem Punkte M entsprechenden Ebene M_1 geschnitten wird.

Jeder Curve K III. Ordnung, welche in der Ordnungsfläche F eines räumlichen Polarsystems liegt, ist ein dieser Fläche sich anschmiegender Ebenenbüschel K_1 III. Ordnung zugeordnet. Jede Ebene des Büschels K_1 schmiegt der Fläche F in einem Punkte der Curve K sich an, während nur zwei Ebenen des Büschels K_1 der Curve K sich anschmiegen. Die in der Fläche F enthaltene zur Curve K perspektivische Regelschaar ist auch zu dem Ebenenbüschel K_1 perspektivisch.

489. Je zwei zu einem und demselben geraden Gebilde s perspektivische Strahlenbüschel G, G_1 II. Ordnung, welche weder in einerlei Ebene liegen, noch den Strahl S entsprechend gemein haben, erzeugen einen Ebenenbüschel, welcher einer Curve K III. Ordnung sich anschmiegt. Die zu einander projektivischen Curven L, L_1, welche den Büscheln G, G_1 sich anschmiegen, erzeugen den der Curve K sich anschmiegenden Strahlenbüschel k.

Dem Punkte P, in welchem die Curve L die Gerade s berührt, entspricht ein ausserhalb dieser Geraden liegender Punkt P_1 der Curve L_1, welche die Gerade s in einem Punkte Q_1 berührt, der einem ausserhalb derselben liegenden Punkte Q der Curve L entspricht. Die Gerade PP_1 und die Ebene sP_1 schmiegen der Curve K im Punkte P_1 sich an, in welchem die Gerade PP_1 die Curve L_1 berührt. Eben so schmiegen die Gerade QQ_1 und die Ebene sQ der Curve K im Punkte Q sich an, in welchem die Gerade QQ_1 die Curve L berührt. Jede dritte der Curve K sich anschmiegende Ebene M_1 berührt die Curven L, L_1 in homologen Punkten R, R_1 und schneidet die Geraden s, QQ_1, PP_1 in drei Punkten S, T, U. Die Gerade RR_1 und die Ebene M_1 schmiegen der Curve K in dem Punkte M sich an, in welchem die Gerade RR_1 die Curve M_1k berührt. Diese Curve berührt aber die Geraden SR, SR_1 in den Punkten T, U, daher der Punkt M durch die Punkte R, R_1 vom Schnittpunkte der Geraden RR_1, TU harmonisch getrennt ist und mithin in der Geraden liegt, welche den Punkt S mit dem Schnittpunkte der Geraden RU, TR_1 verbindet.

490. Sind ein gerades Gebilde und ein Strahlenbüschel II. Ordnung oder ein gerades Gebilde und eine Regelschaar zu

einander projektivisch, ohne dass ein Punkt des geraden Gebildes in der ihm entsprechenden Geraden des andern liegt, so erzeugen die zu einander projektivischen Gebilde einen Ebenenbüschel, welcher einer unebenen Curve III. Ordnung sich anschmiegt. Einen solchen Ebenenbüschel erzeugen auch drei zu einander projektivische gerade Gebilde, von welchen keine zwei einen Punkt entsprechend gemein haben und keine drei homologe Punkte in einer und derselben Geraden liegen. Durch sechs Ebenen, von welchen keine vier durch einen und denselben Punkt gehen, ist ein Ebenenbüschel III. Ordnung bestimmt, welchem nämlich die sechs gegebenen Ebenen angehören.

Sind ein Strahlenbüschel II. Ordnung und eine Regelschaar, welche mit dem Büschel keine Gerade gemein hat, oder zwei Regelschaaren, welche keine Gerade mit einander gemein haben zu einem und demselben geraden Gebilde perspektivisch, so sind sie auch zu einem und demselben Ebenenbüschel III. Ordnung perspektivisch. Und wenn zwei Strahlenbüschel II. Ordnung oder ein Strahlenbüschel II. Ordnung und eine Regelschaar oder zwei Regelschaaren zu einem und demselben Ebenenbüschel III. Ordnung perspektivisch sind, so sind sie auch zu einem und demselben geraden Gebilde perspektivisch. — Schneiden sich zwei Regelflächen in einer Geraden s und in einer Curve III. Ordnung, so haben die ihnen sich anschmiegenden Ebenenbündel einen Ebenenbüschel s I. und einen Ebenenbüschel III. Ordnung mit einander gemein.

491. Je zwei zu einem und demselben Ebenenbüschel K_1 III. Ordnung, der einer unebenen Curve K sich anschmiegt, perspektivische gerade Gebilde erzeugen ein drittes zu dem Büschel K_1 perspektivisches Gebilde, welches entweder ein Strahlenbüschel II. Ordnung oder eine Regelschaar ist, je nachdem nämlich die geraden Gebilde in einerlei oder nicht in einerlei Ebene liegen. Jede Gerade r, welche in einer Ebene M_1 des Büschels K_1 liegt, aber nicht der Träger eines zu demselben perspektivischen geraden Gebildes ist, gehört einer zu dem Büschel K_1 perspektivischen Regelschaar R an. Zwei Leitstrahlen dieser Regelschaar sind zugleich Strahlen des der Curve K sich anschmiegenden Strahlenbüschels k; sie schneiden die Gerade r in den Punkten, in welchen diese die Curve M_1 k schneidet. Jeder dritte Leitstrahl s der Regelschaar R ist die Schnittlinie von zwei Ebenen des Büschels K_1, welchen die durch den Punkt rs

gehenden Strahlen des Büschels $M_1 K_1$ entsprechen. — Jede der Curve K sich nicht anschmiegende Ebene U enthält nur ein zu dem Ebenenbüschel K_1 perspektivisches gerades Gebilde. Der Träger u dieses Gebildes ist ein Leitstrahl von jeder zu dem Ebenenbüschel K_1 perspektivischen Regelschaar, welche mit der Ebene U eine Gerade gemein hat. Geht die Ebene U durch einen Strahl des Büschels k, so fällt u mit diesem Strahle zusammen. Wenn aber die Ebene U mit der Curve K drei Punkte gemein hat, so schneiden sich in der Geraden u zwei Ebenen des Büschels K_1.

492. Wenn einer unebenen Curve K III. Ordnung in den Punkten A, B, C, D die Geraden a, b, c, d und die Ebenen A_1, B_1, C_1, D_1 sich anschmiegen, so ist A B C D ein Wurf in der Curve K, a b c d ein Wurf in dem der Curve K sich anschmiegenden Strahlenbüschel k und $A_1 B_1 C_1 D_1$ ein Wurf in dem der Curve K sich anschmiegenden Ebenenbüschel K_1. Ist ferner s die Axe eines zur Curve K perspektivischen Ebenenbüschels, u der Träger eines zu dem Büschel K_1 perspektivischen geraden Gebildes, M ein Punkt der Curve K, U eine Ebene des Büschels K_1, $\alpha \beta \gamma \delta$ der dem Wurfe A B C D entsprechende Wurf einer zur Curve K perspektivischen Regelschaar R und $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1$ der dem Wurfe $A_1 B_1 C_1 D_1$ entsprechende Wurf einer zu dem Büschel K_1 perspektivischen Regelschaar R_1, so sind, wie aus dem Bisherigen leicht hervorgeht, s (ABCD), u ($A_1 B_1 C_1 D_1$), M (A B C D), U ($A_1 B_1 C_1 D_1$), M (a b c d), U (a b c d), $\alpha \beta \gamma \delta$, $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1$ homologe Würfe von acht zu einander projektivischen Gebilden s, u, M K, U K_1, M k, U k, R, R_1. Sind nun die erwähnten acht einander gleichen Würfe neutrale Würfe, was nur von den Würfen A B C D, a b c d, $A_1 B_1 C_1 D_1$ abhängt, so sollen auch diese Würfe neutrale Würfe heissen. Wenn aber die Ebene s D im Sinne s (ABC), folglich der Punkt u D_1 im Sinne u ($A_1 B_1 C_1$) liegt u. s. w., so soll auch der Punkt D im Sinne A B C, die Ebene D_1 im Sinne $A_1 B_1 C_1$ und die Gerade d im Sinne a b c liegend heissen. Es versteht sich hiernach von selbst, dass der Punkt D im Sinne CBA liegend heisst wenn die Ebene s D im Sinne s (CBA) liegt. Da also homologe Würfe der Gebilde K, k, K_1, s, u, MK u. s. w., was den Sinn anbelangt, von einerlei Art sind, so kann man sagen, dass diese Gebilde sämmtlich zu einander projektivisch und daher auch homologe Würfe derselben einander gleich seien.

493. Jede unebene Curve III. Ordnung und jeder Ebenenbüschel, welcher einer solchen Curve sich anschmiegt, soll ein Elementargebilde III. Ordnung, jeder einer unebenen Curve III. Ordnung sich anschmiegende Strahlenbüschel aber ein Elementargebilde IV. Ordnung genannt werden. Diese Erweiterung des Begriffs: Elementargebilde erscheint dadurch als gerechtfertigt, weil Alles, was von Elementargebilden I. wie II. Ordnung gilt, auch für die erwähnten Gebilde III. und IV. Ordnung gültig ist.

Will man zwei unebene Curven K, K_1 III. Ordnung projektivisch so auf einander beziehen, dass den Punkten A, B, C der erstern die Punkte A_1, B_1, C_1 der letztern entsprechen, so darf man nur zwei Ebenenbüschel I. Ordnung, von welchen der eine s zur Curve K, der andere u aber zur Curve K_1 perspektivisch ist, projektivisch so auf einander beziehen, dass den Ebenen sA, sB, sC des erstern die Ebenen uA_1, uB_1, uC_1 des letztern entsprechen und zwei Punkte D, D_1, von welchen der eine D in der Curve K, der andere D_1 aber in der Curve K_1 liegt, einander entsprechend nennen, wenn sie homologen Ebenen der Büschel entsprechen. Man hat dann vier Gebilde K, s, u, K_1, von welchen jedes folgende zum vorhergehenden und daher auch das letzte zum ersten projektivisch ist. Uebrigens lässt sich leicht noch nachweisen, dass die zu einander projektivischen Punktgebilde K, K_1 homologe Gebilde von zwei zu einander collineären räumlichen Systemen sind. Wenn nämlich der Curve K in den Punkten A, B, C die Geraden a, b, c und der Curve K_1 in den Punkten A_1, B_1, C_1 die Geraden a_1, b_1, c_1 sich anschmiegen, so kann man zwei räumliche Systeme collineär so auf einander beziehen, dass den Elementen A, B, C, a, b, c des einen Systems die Elemente A_1, B_1, C_1, a_1, b_1, c_1 des andern entsprechen. Da alsdann der Geraden v, welche den Punkt A mit dem Punkte B verbindet, die Gerade v_1 entspricht, welche durch die beiden Punkte A_1, B_1 geht, mithin den Ebenen va, vb, vC die Ebenen v_1a_1, v_1b_1, v_1C_1 entsprechen, die Würfe $v\,(abCD)$, $v_1\,(a_1b_1C_1D_1)$ aber den Würfen $s\,(ABCD)$, $u\,(A_1B_1C_1D_1)$ und also auch einander gleich sind, so entspricht der Ebene vD die Ebene v_1D_1 und eben so der Ebene ACD die Ebene $A_1C_1D_1$ und der Ebene BCD die Ebene $B_1C_1D_1$, mithin auch dem Punkte D der Punkt D_1.

494. Sind die Punkte einer unebenen Curve K III. Ordnung

involutorisch gepaart, so sind die Geraden, welche der Curve in den Ordnungs-Punkten M,N des involutorischen Gebildes sich anschmiegen, und die Geraden AA_1, BB_1 u. s. w., deren jede zwei einander zugeordnete Punkte verbindet, Leitstrahlen einer und derselben zur Curve K perspektivischen Regelschaar R. Das involutorische Punktgebilde MM. NN. AA_1. BB_1... wird nämlich aus jedem Punkte S der Curve K durch eine involutorische Kegelfläche S (MM. NN. AA_1. BB_1...) projicirt, deren Involutionsaxe (472) eine Gerade der Regelschaar R ist. Die den Punkten M, N entsprechenden Geraden der Regelschaar R sind die Ordnungslinien des geschaart-involutorischen Systems, in welchem das involutorische Punktgebilde enthalten ist.

495. Wenn in einer unebenen Curve K III. Ordnung die Punkte A, C durch die Punkte B, D harmonisch getrennt sind und der Curve in den Punkten A, B, C, D die Geraden a, b, c, d sich anschmiegen, so schneiden sich (494) die beiden Regelflächen, von welchen die eine durch die drei Geraden a, c, BD, die andere aber durch die drei Geraden b, d, AC geht, in der Curve K und in einer Geraden. Diese Gerade geht durch die beiden Punkte, welche in der Curve K sowohl durch die Punkte A, C als auch durch die Punkte B, D harmonisch getrennt, mithin in jedem der involutorischen Punktgebilde AA. CC. BD..., BB. DD. AC... einander zugeordnet sind.

496. Die drei Regelflächen, deren jede durch zwei einander gegenüberliegenden Kanten eines in eine unebene Curve K III. Ordnung beschriebenen Sechsecks $AB_1CA_1BC_1$ und durch die Curve geht, schneiden sich auch noch in einer und derselben Geraden.

Bezieht man nämlich zwei in der Curve K liegende Punktgebilde projektivisch so auf einander, dass den Punkten A, B, C des einen Gebildes die Punkte A_1, B_1, C_1 des andern entsprechen, so haben dieselben entweder zwei Punkte M, N oder nur einen Punkt M entsprechend gemein. Im letztern Falle kann man sagen, dass der Punkt N mit dem Punkte M zusammenfalle und die Gerade MN der Curve K im Punkte M sich anschmiege. Da nun (85) MN. AB_1. A_1B eine Involution ist, so sind die Geraden MN, AB_1, A_1B drei Leitstrahlen einer zur Curve K perspektivischen Regelschaar. Dasselbe gilt von den Geraden MN, AC_1, A_1C, sowie auch von den Geraden MN, BC_1, B_1C, woraus der Satz folgt. Bemerkt wird noch, dass je zwei Seiten (Flächen) des Sechsecks, welche weder auf einander folgen noch einander gegenüberliegen, in einer Geraden sich schneiden, welche einer der drei erwähnten Regelschaaren angehört, daher die Gerade MN durch die beiden Punkte geht, in deren jedem drei Seiten des Sechsecks, unter welchen keine zwei auf einander folgende sind, sich schneiden.

Eben so giebt es drei Regelflächen, deren jede durch zwei einander gegenüberliegende Kanten des Sechsecks und durch die Schnittlinie s der Ebenen ABC, $A_1B_1C_1$ geht. Die diesen Flächen sich anschmiegenden Ebenenbündel haben alle drei den Ebenenbüschel s und noch einen Ebenenbüschel III. Ordnung, welchem die sechs Seiten des Sechsecks angehören, mit einander gemein.

497. Zwei Punkte P, Q sollen in Hinsicht auf eine unebene Curve K III. Ordnung einander conjungirt heissen, wenn die Gerade P Q entweder der Curve in einem von den beiden Punkten P, Q sich anschmiegt, oder mit der Curve zwei Punkte gemein hat, durch welche die Punkte P, Q harmonisch getrennt sind. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt P ist ein anderer Punkt Q bestimmt, welcher nämlich dem Punkte P in Hinsicht auf die Curve K conjungirt ist. Eben so giebt es zu jeder Ebene P_1, welche dem der Curve K sich anschmiegenden Ebenenbüschel K_1 nicht angehört, eine andere Ebene Q_1, welche der erstern in Hinsicht auf den Büschel K_1 conjungirt ist, so dass nämlich entweder die Gerade P_1 Q_1 und die Ebene Q_1 der Curve K sich anschmiegen oder in der Geraden P_1 Q_1 zwei Ebenen des Büschels K_1 sich schneiden, welche durch die Ebenen P_1, Q_1 harmonisch getrennt sind.

In dem Nullsysteme, von welchem K eine Ordnungscurve ist, sind je zwei in Hinsicht auf diese Curve einander conjungirten Punkten P, Q zwei in Hinsicht auf den Ebenenbüschel K_1 einander conjungirte Ebenen P_1, Q_1 zugeordnet.

498. Wenn in einer unebenen Curve K III. Ordnung die Punkte A, C durch die Punkte B, D harmonisch getrennt sind, so sind auch die Ebenen A_1, C_1, welche der Curve in den Punkten A, C sich anschmiegen, durch die Punkte B,D harmonisch getrennt, daher die Gerade BD die Ebenen A_1, C_1 in zwei in Hinsicht auf die Curve K einander conjungirten Punkten schneidet, die Ebenen aber, welche die Punkte B, D aus der Geraden A_1 C_1 projiciren,

in Hinsicht auf den der Curve K sich anschmiegenden Ebenenbüschel einander conjungirt sind.

Denn die Gerade BD und die Geraden a, c, welche der Curve K in den Punkten A, C sich anschmiegen, sind Leitstrahlen einer und derselben zur Curve K perspektivischen Regelschaar. Sind nun $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ diejenigen Geraden der erwähnten Regelschaar, welche den Punkten A, B, C, D der Curve entsprechen, so ist auch $\alpha\beta\gamma\delta$ ein harmonischer Wurf, daher die Gerade BD von den Geraden α, γ in zwei Punkten P, Q geschnitten wird, welche durch die Punkte B, D harmonisch getrennt sind. In denselben Punkten wird aber die Gerade BD auch von den Ebenen A_1, C_1 geschnitten, da (473) die erstere durch die Gerade α und die letztere durch die Gerade γ geht.

499. Sucht man in einer unebenen Curve K III. Ordnung zu den drei Punkten A, B, C die Punkte A_1, B_1, C_1, so dass $CABA_1$, $ABCB_1$, $BCAC_1$ harmonische Würfe sind, so sind die Ebenen ABC, $A_1B_1C_1$ in Hinsicht auf den der Curve K sich anschmiegenden Ebenenbüschel K_1 einander conjungirt.

Bezieht man nämlich zwei in der Curve K liegende Punktgebilde projektivisch so auf einander, dass den Punkten A, B, C des einen die Punkte B, C, A des andern und also den Punkten A_1, B_1, C_1 des erstern die Punkte B_1, C_1, A_1 des letztern entsprechen, so haben dieselben die Ordnungspunkte M, N des involutorischen Gebildes $AA_1 . BB_1 . CC_1 \ldots$ entsprechend gemein. Die zu einander collineären räumlichen Systeme, von welchen MNABC ..., MNBCA ... homologe Gebilde sind, haben auch die Ebenen ABC, $A_1B_1C_1$, mithin auch die Punkte P, Q in welchen diese Ebenen von der Geraden MN geschnitten werden und folglich jeden Punkt dieser Geraden entsprechend gemein. Da hiernach je zwei homologe Ebenen, welche nicht durch die Gerade MN gehen, diese Gerade in einem und demselben Punkte schneiden, so folgt, dass der Schnittpunkt der drei Ebenen, welche der Curve K in den Punkten A, B, C sich anschmiegen, in der Geraden MN liegt und also der Punkt P ist. Da eben so die Ebenen, welche der Curve K in den Punkten A_1, B_1, C_1 sich anschmiegen, im Punkte Q sich schneiden, so sind (498) die Punkte P, Q in Hinsicht auf die Curve K und daher die Ebenen ABC, $A_1B_1C_1$ in Hinsicht auf den Ebenenbüschel K_1 einander conjungirt. Die Ebenen, welche der Curve K in den Punkten M, N sich anschmiegen, gehen durch die Schnittlinie der Ebenen ABC, $A_1B_1C_1$ und sind durch diese harmonisch getrennt.

500. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung und einen Punkt P, welcher ausserhalb der Curve liegt, aber in Hinsicht auf dieselbe einem in ihr liegenden Punkte M conjungirt ist, sind zwei in der Curve liegende zu einander projektivische Gebilde MNA ..., M NA_1 ... bestimmt, so dass jede Ebene, welche die Curve K in einem Punkte A des erstern Gebildes berührt und in dem entsprechenden Punkte A_1 des letztern schneidet, durch den Punkt P geht.

Die Ebene, welche in dem durch die Curve K bestimmten Nullsysteme dem Punkte P zugeordnet ist und also durch die Gerade MP geht, schneidet die Curve K in einem Punkte N, in welchem derselben eine durch den Punkt P gehende Ebene sich anschmiegt. Wenn man nun in der Curve zu den Punkten M,N und einem dritten Punkte A die Punkte A_2, A_1 sucht, so dass $MANA_2$, MNA_2A_1 harmonische Würfe sind, und alsdann zwei in der Curve K liegende Punktgebilde projektivisch so auf einander bezieht, dass den Punkten M, N, A des einen die Punkte M, N, A_1 des andern entsprechen, so geht jede Ebene, welche die Curve in einem Punkte des erstern Gebildes berührt und in dem entsprechenden Punkte des letztern schneidet, durch den Punkt P. Denn die Gerade MP und die der Curve K in den Punkten N,A sich anschmiegenden Geraden n, a sind drei Leitstrahlen einer Regelschaar, von welcher eine Gerade r durch den Punkt M, eine andere Gerade p durch den Punkt N, eine dritte Gerade q durch den Punkt A und eine vierte Gerade p_1 durch den Punkt P geht, so dass $r\,p\,q\,p_1$ ein harmonischer Wurf ist. Da ferner die der Curve K im Punkte A sich anschmiegende Ebene von der Ebene a A_2 durch die Punkte M, N harmonisch getrennt ist, so geht die Ebene aA_2 durch die Gerade q, mithin die Ebene aA_1 durch die Gerade p_1 und also auch durch den Punkt P. Ist B ein vierter Punkt des Gebildes M N A ..., und B_1 der ihm entsprechende Punkt des Gebildes M N A_1 ..., so ist $MNAB \barwedge MNA_1B_1$, folglich auch $MNAA_1 \barwedge MNBB_1$, daher es einen Punkt B_2 giebt, so dass $MNAA_1A_2 \barwedge MNBB_1B_2$ ist und also auch $MBNB_2$, MNB_2B_1 harmonische Würfe sind, woraus man schliessen kann, dass auch die Ebene, welche die Curve K im Punkte B berührt und im Punkte B_1 schneidet, durch den Punkt P geht. Bemerkt wird noch, dass der Wurf $NAMA_1$ das Doppelte eines harmonischen Wurfes, also $=-2$ ist und dass jede Ebene, welche die Curve K in einem Punkte A des Gebildes MNA... schneidet und in dem entsprechenden Punkte A_1 des Gebildes MNA_1... berührt, durch den Punkt geht, in welchem die Gerade n von der der Curve K im Punkte M sich anschmiegenden Ebene geschnitten wird.

501. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt P ist ein zur Curve perspektivischer Ebenenbüschel M II. Ordnung bestimmt, so dass, was auch A_1 für ein Punkt der Curve sei, die ihm entsprechende Ebene des Büschels M in Hinsicht auf die Kegelfläche A_1 K dem Punkte P zugeordnet ist.

Liegt der Punkt M, welcher dem Punkte P in Hinsicht auf die Curve K conjungirt ist, in der Curve, so werden aus ihm die im vorigen Satze betrachteten zu einander projektivischen Punktgebilde M NA..., MNA_1... durch zwei zu einander projektivische Kegelflächen projicirt, welche (574) einen zu allen vier Gebilden perspektivischen Ebenenbüschel M II. Ordnung erzeugen. Dem Punkte A_1 des zweiten Gebildes entspricht die Ebene A_1 M A des Büschels, welche dem Punkte P in Hinsicht auf die Kegelfläche A_1 K zugeordnet ist, da diese in den Strahlen A_1 M, A_1 A die Ebenen A_1 MP, A_1 A P berührt. Sind aber die Punkte M, P durch zwei Punkte G, H der Curve K harmonisch getrennt, so projicirt der im Satze erwähnte Ebenenbüschel aus dem Punkte M diejenige zur Curve K perspektivische Regelschaar R, von welcher ein Leitstrahl g im Punkte G, ein anderer h im Punkte H der Curve K sich anschmiegt. Ist nämlich A_1 ein Punkt der Curve und a_1 die durch ihn gehende Gerade der Regelschaar R, so ist in Hinsicht auf die Kegelfläche A_1 K jedem Punkte der Geraden G H eine durch die Gerade a_1 gehende Ebene und also dem Punkte P die Ebene Ma_1 zugeordnet.

Wenn also zwei Punkte in Hinsicht auf irgend drei zu einer und derselben unebenen Curve III. Ordnung perspektivische Kegelflächen einander conjungirt sind, so sind sie in Hinsicht auf die Curve und also auch in Hinsicht auf jede durch dieselbe gehende Fläche II. Ordnung einander conjungirt.

502. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung und eine Gerade h, welche mit der Curve keinen Punkt gemein hat, ist eine andere unebene Curve III. Ordnung bestimmt, welche nämlich zu den

gegebenen geraden Gebilden projektivisch ist, so dass je zwei homologe Punkte dieser Gebilde in Hinsicht auf die gegebene Curve einander conjungirt sind.

Es seien F, F_1, F_2 irgend drei zur Curve K perspektivische Kegelflächen, so giebt es (501) zu jedem Punkte der Geraden h nur einen Punkt, welcher dem erstern in Hinsicht auf alle drei Flächen conjungirt ist, daher die drei zu einander projektivischen Ebenenbüschel, von welchen der eine in Hinsicht auf die Fläche F, der andere in Hinsicht auf die Fläche F_1 und der dritte in Hinsicht auf die Fläche F_2 dem geraden Gebilde h zugeordnet ist, eine zu diesem Gebilde projektivische unebene Curve III. Ordnung erzeugen, so dass jeder Punkt dieser Curve dem ihm entsprechenden Punkte der Geraden h in Hinsicht auf die Curve K conjungirt ist.

Gehört die Gerade g einer zur Curve K perspektivischen Regelschaar R an, so gibt es auch ein zu dem geraden Gebilde g projektivisches Punktgebilde g_1, so dass je zwei homologe Punkte dieser Gebilde in Hinsicht auf die Curve K einander conjungirt sind. Das Gebilde g_1, ist entweder ebenfalls ein gerades Gebilde, dessen Träger eine Gerade der Regelschaar R ist, oder eine in der Regelfläche R liegende Curve II. Ordnung, je nachdem nämlich die Gerade g zwei oder drei der Curve K sich anschmiegende Gerade schneidet.

503. Durch zwei zu einander collineäre Strahlenbündel S, S_1, welche keine Ebene entsprechend gemein haben, ist eine unebene Curve K III. Ordnung bestimmt, welche nämlich von je zwei in einerlei Ebene liegenden homologen Strahlen der Bündel den Schnittpunkt enthält und daher durch die Mittelpunkte S, S_1 der Bündel geht.

Es sei u_1 die durch die beiden Punkte S, S_1 gehende Gerade. Wenn nun dem Ebenenbüschel u des Bündels S der Ebenenbüschel u_1 des Bündels S_1 und dem Ebenenbüschel u_1 des erstern Bündels der Ebenenbüschel u_2 des letztern entspricht, so erzeugen die drei zu einander projektivischen Ebenenbüschel u, u_1, u_2 die im Satze erwähnte Curve K. In jedem Punkte dieser Curve schneiden sich drei homologe Ebenen U, U_1, U_2 der Büschel u, u_1, u_2 und daher auch zwei homologe Strahlen UU_1, U_1U_2 der Bündel S, S_1. Und wenn zwei homologe Strahlen dieser Bündel in einerlei Ebene, mithin in einer und derselben Ebene U_1 des Büschels u_1 liegen, so liegt ihr Schnittpunkt in der Curve K. — Je zwei homologe Ebenen der

Bündel S, S_1 schneiden sich in der Axe eines zur Curve K perspektivischen Ebenenbüschels. Und wenn eine Gerade mit der Curve K entweder zwei Punkte gemein hat oder derselben in einem Punkte sich anschmiegt, so ist sie von zwei homologen Ebenen der Bündel S, S_1 die Schnittlinie. — Je zwei homologe Strahlen p, p_1 der Bündel S, S_1 liegen mit der Curve K in einer und derselben Fläche II. Ordnung. Die Geraden p, p_1 sind nämlich die Axen von zwei homologen Ebenenbüscheln und diese Büschel erzeugen, wenn ihre Axen sich schneiden, eine zur Curve K perspektivische Kegelfläche, im entgegengesetzten Falle aber eine Regelschaar, welche von einer zur Curve K perspektivischen Regelschaar die Leitschaar ist.

Haben zwei zu einander collineäre Strahlenbündel S, S_1 eine Ebene, aber keinen Strahl entsprechend gemein, so giebt es auch eine Linie K III. Ordnung, welche von je zwei in einerlei Ebene liegenden homologen Strahlen der Bündel S, S_1 den Schnittpunkt enthält. Die Linie K besteht aber in diesem Falle, in welchem die zu einander projektivischen Ebenenbüschel u, u_1, u_2 die Ebene $u u_1$ entsprechend gemein haben und also ein gerades Gebilde erzeugen, aus dieser Geraden und einer in der Ebene $u u_1$ liegenden Curve II. Ordnung.

Dass die Strahlenbündel S, S_1 nicht einerlei Mittelpunkt haben, liegt in der Annahme. Haben nämlich zwei zu einander collineäre Strahlenbündel einerlei Mittelpunkt, so haben sie (301) entweder unendlich viele Strahlen und Ebenen oder die Kanten und Seiten eines Dreikants oder zwei Strahlen und zwei Ebenen oder einen Strahl und eine Ebene entsprechend gemein.

504. Durch zwei zu einander collineäre ebene Systeme U, U_1, welche keinen Punkt entsprechend gemein haben, ist ein Ebenenbüschel III. Ordnung bestimmt, so dass nämlich jede Ebene desselben durch zwei homologe Gerade der zu einander collineären Systeme geht und je zwei sich schneidende homologe Gerade der Systeme in einer Ebene des Büschels liegen. Entspricht der Geraden s des einen Systems die Gerade s_1 des andern, in welcher nämlich die Ebenen U, U_1 sich schneiden, und der Geraden s_1 des erstern die Gerade s_2 des letztern, so sind s, s_1, s_2 die Träger von drei zu einander projektivischen geraden Gebilden, welche den erwähnten Ebenenbüschel erzeugen. Dem Strahlenbüschel, welchen

dieGebilde s, s_1 erzeugen, entspricht der Strahlenbüschel, welchen das Gebilde s_1 mit dem Gebilde s_2 erzeugt.

Haben zwei zu einander collineäre ebene Systeme einen Punkt P, aber ausser diesem kein Element entsprechend gemein, so giebt es einen Ebenenbüschel II. Ordnung und einen Ebenenbüschel I. Ordnung, dessen Axe in einer Ebene des erstern Büschels liegt, aber nicht durch den Mittelpunkt P desselben geht, so dass jede Ebene, welche irgend einem der beiden Büschel angehört, durch zwei homologe Gerade der zu einander collineären Systeme geht.

505. Wenn zwei zu einander projektivische Kegelflächen F, F_1 II. Ordnung keinen Strahl entsprechend gemein haben, so giebt es in ihnen wenigstens ein Paar homologe Strahlen, welche sich schneiden.

Haben nämlich die zu einander collineären Strahlenbündel S, S_1, von welchen F, F_1 homologe Gebilde sind, irgend eine Ebene entsprechend gemein, so liegen in dieser Ebene wenigstens ein Paar homologe Strahlen der zu einander projektivischen Kegelflächen. Liegen aber (503) die Punkte, in deren jedem ein Paar homologe Strahlen der Bündel S, S_1 sich schneiden, in einer Curve K III. Ordnung, so wird jeder Strahl, welchen die Kegelfläche F mit der Kegelfläche SK gemein hat, von dem ihm entsprechenden Strahle der Kegelfläche F_1 geschnitten.

506. Zwei unebene Curven K, K_1 III. Ordnung, welche in einer und derselben Kegelfläche F II.Ordnung liegen, aber im Mittelpunkte S dieser Fläche nicht einer und derselben Geraden sich anschmiegen, haben wenigstens noch einenPunkt miteinander gemein.

Es sei M ein Punkt der Curve K und N_1 ein Punkt der Curve K_1, so dass jedoch die drei Punkte S, M, N_1 nicht in einer und derselben Geraden liegen. Bezieht man nun die drei Kegelflächen F, MK, N_1K_1 projektivisch so auf einander, dass die erste und zweite die Curve K, die erste und dritte aber die Curve K_1 erzeugen, so liegen keine drei homologe Strahlen der Flächen in einerlei Ebene. Da aber jeder Strahl der Kegelfläche F die ihm entsprechenden Strahlen der Kegelflächen MK, N_1 K_1 schneidet und auch (505) wenigstens ein Paar homologe Strahlen p, p_1 dieser Flächen sich schneiden, so haben die Curven K, K_1 wenigstens einen von S verschiedenen Punkt pp_1 mit einander gemein.

507. Durch fünf Punkte A, B, C, D, E, von welchen keine vier in einerlei Ebene liegen und zwei einander nicht gleiche eigentliche Würfe w, w_1, ist eine durch die gegebenen Punkte gehende Curve K III. Ordnung bestimmt, so dass die Würfe ABCD, ABCE in derselben den gegebenen Würfen w, w_1 bezüglich gleich sind. In der Geraden u, welche durch die beiden Punkte D, E geht, schneiden sich zwei Ebenen u P, u Q, so dass der Wurf u (AB CP) dem Wurfe w und der Wurf u (A B C Q) dem Wurfe w_1 gleich ist. Die Kegelfläche, welche durch die vier Geraden EA, EB, EC, ED geht und die Ebene u P berührt, schneidet die Kegelfläche, welche durch die vier Geraden DA, DB, DC, DE geht und die Ebene u Q berührt, in der Geraden u und in der im Satze erwähnten Curve K. — Zwei zu einander projektivische unebene Curven III. Ordnung haben also höchstens vier Punkte entsprechend gemein. Und wenn sie vier Punkte entsprechend und noch einen fünften Punkt mit einander gemein haben, so werden sie aus diesem Punkte durch eine und dieselbe Kegelfläche projicirt.

---

§. 35.

Räumliche Systeme, welche collineär zu einander sind.

508. Zwei zu einander collineäre räumliche Systeme haben wenigstens einen Punkt, eine Gerade und eine Ebene entsprechend gemein.

Es entspreche dem Punkte S des einen Systems der Punkt S_1 des andern und dem Punkte S_1 des erstern der Punkt S_2 des letztern. Haben nun die Systeme die Gerade S S_1 entsprechend gemein, so haben sie auch wenigstens einen in ihr liegenden Punkt und eine durch sie gehende Ebene entsprechend gemein. Haben die Systeme zwar nicht die Gerade SS_1 aber die Ebene SS_1 S_2 entsprechend gemein, so haben sie nach 301 wenigstens einen Punkt und eine Gerade, welche in der Ebene SS_1S_2 liegen, entsprechend gemein. Wenn aber keiner der erwähnten Fälle statt findet, so giebt es (503) eine durch die beiden Punkte S, S_1 gehende unebene Curve K III. Ordnung, so dass, was auch P für ein Punkt derselben sein mag, der Geraden SP des einen Systems die Gerade S_1P des andern entspricht, daher der dem Punkte P entsprechende Punkt P_1 in der Geraden S_1P liegt, der die Gerade S_2P_1 entspricht. Da hiernach die Curve K und die ihr entsprechende Curve K_1, welche durch die beiden Punkte S_1, S_2 geht, während die erstere der Geraden S_1S_2 im Punkte S_1 sich anschmiegt, aus diesem Punkte durch eine und dieselbe Kegelfläche projicirt werden, so haben sie (506) wenigstens einen von S verschiedenen Punkt A mit einander gemein und also die zu einander collineären Systeme wenigstens einen Punkt A entsprechend gemein. Bemerkt man noch, dass zwei zu einander collineäre Strahlenbündel, welche einerlei Mittelpunkt A haben, wenigstens einen Strahl und eine Ebene entsprechend gemein haben, so folgt der Satz.

509. Wenn keiner von den beiden Punkten P, P_1 in einer Seite des Tetraeders ABCD liegt und man zwei räumliche Systeme collineär so auf einander bezieht, dass den Punkten A, B, C, D, P des einen die Punkte A, B, C, D, P_1 des andern entsprechen, so hat man folgende Fälle zu unterscheiden:

Geht die Gerade PP_1 durch einen Eckpunkt A des Tetraeders ABCD, so haben die Systeme nicht nur den Punkt A sondern auch jedes durch ihn gehende Element und eben so die Ebene BCD und jedes in ihr liegendes Element entsprechend gemein. — Schneidet die Gerade PP_1 zwei einander gegenüberliegende Kanten AB, CD des Tetraeders, so haben die Systeme jede Ebene, welche durch irgend eine dieser Kanten geht, also auch jeden Punkt, welcher in irgend einer dieser Kanten liegt, und nicht nur die beiden Geraden AB, CD selbst, sondern auch jede Gerade, welche beide schneidet, entsprechend gemein. — Schneidet die Gerade PP_1 nur eine Kante AB des Tetraeders ABCD, so haben die Systeme die Ebenen ACD, BCD und jede durch die Gerade AB gehende Ebene, die Punkte A, B und jeden in der Geraden CD liegenden Punkt, dann die Geraden AB, CD und jede Gerade, welche durch irgend einen von den beiden Punkten A, B geht und die Gerade CD schneidet, entsprechend gemein. — Wenn endlich die Gerade PP_1 keine Kante des Tetraeders ABCD schneidet, so haben die zu einander collineären Systeme nur die vier Eckpunkte, die vier Seiten und die sechs Kanten des Tetraeders ABCD entsprechend gemein.

510. Will man zwei räumliche Systeme collineär so auf einander beziehen, dass sie die Eckpunkte des Dreiecks ABC, aber keinen ausserhalb der Ebene ABC liegenden Punkt entsprechend gemein haben, so nehme man in einer Geraden, welche die Ebene ABC in einem Eckpunkte A des Dreiecks ABC schneidet, noch dreiPunkte D, D_1, D_2 an, so dass $ADD_1 D_2$ ein harmonischer Wurf ist. Es sei ferner P ein ausserhalb der drei Geraden BC, BD_1, CD_1 liegender Punkt der Ebene BCD_1 und P_1 ein ausserhalb der drei Geraden BC, BD_2, CD_2 liegender Punkt der Ebene BCD_2. Bezieht man nun die Systeme collineär so auf einander, dass den Punkten A, B, C, D, P des einen die Punkte A, B, C, D_1, P_1 des andern entsprechen, so entspricht dem Punkte D_1 des erstern der Punkt D_2 des letztern, daher die Systeme (86) keinen von A verschiedenen Punkt der Geraden AD, also keine durch die Gerade BC gehende von ABC verschiedene Ebene und mithin auch keinen ausserhalb der Ebene ABC liegenden Punkt entsprechend gemein haben.

Geht die Gerade PP_1 durch den Punkt A, so haben die Systeme jedes durch diesen Punkt gehende Element und jedes in der Ebene ABC liegende Element entsprechend gemein. — Schneidet die Gerade PP_1 die Gerade AD in einem ausserhalb der Ebene A B C liegenden Punkte, so haben die Systeme die Ebene ABC und jede durch die Gerade AD gehende Ebene, den Punkt A und jeden in der Geraden BC liegenden Punkt, die beiden Geraden AD, BC und jede Gerade, welche in der Ebene ABC liegt und durch den Punkt A geht, entsprechend gemein. — Schneidet die Gerade PP_1 die eine AB von den beiden Geraden AB, AC in einem von A verschiedenen Punkte, so haben die Systeme die Ebene ACD und jede durch die Gerade AB gehende Ebene, den Punkt B und jeden in der Geraden AC liegenden Punkt, dann jede durch den Punkt A gehende Gerade der Ebene ACD und jede durch den Punkt B gehende Gerade der Ebene ABC entsprechend gemein. — Liegt die Gerade PP_1 mit keiner der drei Geraden AB, AC, AD in einerlei Ebene, so haben die Systeme nur die drei Ebenen ABC, ABD, ACD, die drei Punkte A,B, C und die vier Geraden AB, AC, AD, BC entsprechend gemein.

511. Wenn p, q, q_1, q_2 vier harmonisch liegende Leitstrahlen der Regelschaar abc sind und man bezieht zwei räumliche Sy-

steme collineär so auf einander, dass den Geraden a, b, c, p, q, q_1 des einen Systems die Geraden a, b, c, p, q_1, q_2 des andern entsprechen, so haben die Systeme jeden Punkt der Geraden p, jede Ebene des Ebenenbüschels p und nicht nur die Gerade p und jede Gerade der Regelschaar abc, sondern auch jede Gerade, welche die Regelfläche in einem Punkte der Geraden p berührt, entsprechend gemein. Da nämlich die Systeme jede Gerade der Regelschaar abc aber (86) keinen von p verschiedenen Leitstrahl derselben entsprechend gemein haben, so erscheint jede Ebene des Büschels p als der Träger von zwei zu einander collineären ebenen Systemen, welche alle Punkte der Geraden p und alle Strahlen eines Strahlenbüschels, dessen Mittelpunkt in der Geraden p liegt, entsprechend gemein haben.

Wenn c_1 eine vierte Gerade der Regelschaar abc ist und man zwei räumliche Systeme collineär so auf einander bezieht, dass den Geraden a, b, c, p, q, q_1 des einen Systems die Geraden a, b, c_1, p, q_1 q_2 des andern entsprechen, so haben die Systeme nur die beiden Punkte ap, bp, die beiden Ebenen, ap, bp und die drei Geraden a, b, p entsprechend gemein.

512. Wenn man ausserhalb der Geraden AD, in welcher die vier Punkte A, D, D_1, D_2 harmonisch liegen, fünf Punkte B, C, E, E_1 E_2 annimmt, so dass die Gerade BC und die Ebene ADE im Punkte A sich schneiden, die Gerade EE_1 durch den Punkt D_1, die Gerade E_1 E_2 durch den Punkt D_2 geht und A (DEE_1 E_2) ein harmonischer Wurf ist, und wenn man nun zwei räumliche Systeme collineär so auf einander bezieht, dass den Punkten B, C, D, E, E_1 des einen Systems die Punkte B, C, D_1, E_1, E_2 des andern entsprechen, so haben die Systeme jeden in der Geraden AB liegenden Punkt, jede durch den Punkt A gehende Gerade der Ebene ABD und jede durch die Gerade AD gehende Ebene entsprechend gemein.

Wenn man hingegen in der Gerade AB noch einen vierten Punkt C_1 annimmt und zwei räumliche Systeme collineär so auf einander bezieht, dass den Punkten B, C, D, E, E_1 des einen die Punkte B, C_1, D_1, E_1, E_2 des andern entsprechen, so haben die Systeme nur die Punkte A, B, die Geraden AB, AD und die Ebenen ABD, ADE entsprechend gemein.

513. Sollen zwei zu einander collineäre räumliche Systeme nur drei Elemente nämlich einen Punkt A, eine durch ihn gehende

Gerade s und eine durch diese Gerade gehende Ebene U entsprechend gemein haben, so nehme man in der Geraden s noch drei Punkte B, B_1, B_2 an, so dass $ABB_1 B_2$ ein harmonischer Wurf ist. Es seien ferner C, C_1, C_2 drei ausserhalb der Geraden s liegende Punkte der Ebene U, so dass die Gerade CC_1 durch den Punkt B_1, die Gerade C_1C_2 aber durch den Punkt B_2 geht und $A\ (BCC_1 C_2)$ ein harmonischer Wurf ist. Endlich seien D, D_1, D_2 drei ausserhalb der Ebene U liegende Punkte, so dass die Gerade DD_1 durch den Punkt C_1 die Gerade $D_1 D_2$ aber durch den Punkt C_2 geht und $s\ (CDD_1 D_2)$ ein harmonischer Wurf ist. Bezieht man nun die Systeme collineär so auf einander, dass den Punkten A, B, C, D, D_1 des einen die Punkte A, B_1, C_1, D_1, D_2 des andern entsprechen, so haben sie nur die drei Elemente A, s, U, entsprechend gemein.

514. Sind zwei räumliche Systeme zu einander collineär, so findet, wie man sich leicht überzeugt, irgend einer der in den fünf vorigen Nummern betrachteten 13 Fälle statt. Haben die Systeme eine unebene Curve K III. Ordnung entsprechend gemein, so haben sie entweder nur einen Punkt dieser Curve oder zwei Punkte A, B derselben entsprechend gemein. Im erstern Falle haben die Systeme nur drei Elemente, im letztern aber die Eckpunkte, Seiten und Kanten eines Tetraeders ABCD entsprechend gemein. In den Punkten C, D wird die Schnittlinie der Ebenen, welche der Curve K in den Punkten A, B sich anschmiegen, von den der Curve in diesen Punkten sich anschmiegenden Geraden geschnitten.

515. Wenn zwei zu einander collineäre Systeme die Elemente des Tetraeders ABCD entsprechend gemein haben und den Punkten P, Q des einen Systems, von welchen keiner in einer Seite des Tetraeders liegt, die Punkte P_1, Q_1 des andern entsprechen, so ist $ABCDPP_1 \barwedge ABCDQQ_1$.

Nach der Annahme ist, wenn die Gerade AB durch u bezeichnet wird, $u\ (CDPQ) \barwedge u\ (CDP_1 Q_1)$, mithin auch $u\ (CDPP_1) \barwedge u\ (CDQQ_1)$. Bezieht man also zwei räumliche Systeme collineär so auf einander, dass den Punkten A, B, C, D, P des einen Systems die Punkte A, B, C, D, Q des andern entsprechen, so entspricht der Ebene uP_1 des erstern Systems die Ebene uQ_1 des letztern. Eben so entspricht der Ebene ACP_1 die Ebene ACQ_1, der Ebene BCP_1 die Ebene BCQ_1 und folglich dem Punkte P_1 der Punkt Q_1.

Auf dieselbe Weise kann, wenn U, V, U_1, V_1 vier Ebenen sind, von welchen keine durch einen Eckpunkt des Tetraeders ABCD geht, aus ABCDUV $\barwedge$ ABCD$U_1 V_1$ auf ABCDUU_1 $\barwedge$ ABCD VV_1 geschlossen werden.

516. Wenn in einem Polarsysteme den Eckpunkten des Tetraeders ABCD die ihnen gegenüberliegenden Seiten desselben, den Punkten P, Q aber, von welchen keiner in einer Seite des Tetraeders liegt, die Ebenen P_1 Q_1 zugeordnet sind, so ist A BCDPQ_1 $\barwedge$ ABCDQP_1.

Es werde die Gerade AB von den Ebenen P_1, Q_1 in den Punkten G, H geschnitten, so ist, wenn man die Gerade CD durch s bezeichnet, der Wurf ABGH dem Wurfe s (BAPQ) zugeordnet, daher s (ABGH) $\barwedge$ s (ABQP) und mithin auch s (ABPH) $\barwedge$ s (ABQG) ist. Bezieht man also zwei räumliche Systeme collineär so auf einander, dass den Punkten A, B, C, D, P des einen Systems die Punkte A, B, C, D, Q des andern entsprechen, so entspricht dem Punkte H des erstern der Punkt G des letztern. Da auf diese Weise, was auch u für eine Kante des Tetraeders ABCD sein mag, dem Punkte uQ_1 der Punkt uP_1 entspricht, so entspricht der Ebene Q_1 die Ebene P_1.

---

§. 36.

Einfache Systeme von Flächen II. Ordnung.

517. Ein System von Flächen II. Ordnung soll ein einfaches heissen, wenn jeder Punkt, welchen zwei Flächen des Systems mit einander gemein haben, ein gemeinschaftlicher Punkt von allen ist und je zwei in Hinsicht auf zwei Flächen des Systems einander conjugirte Punkte auch in Hinsicht auf die übrigen einander conjugirt sind. Es sind hiernach auch ein Punkt und eine Ebene in Hinsicht auf alle Flächen des Systems einander zugeordnet, so wie sie in Hinsicht auf zwei Flächen des Systems einander zugeordnet sind.

Ist in der Folge von einem einfachen Linien- oder Flächensysteme die Rede, so sind immer Linien oder Flächen II. Ordnung gemeint, wenn auch dieses nicht ausdrücklich bemerkt wird.

518. Wenn jeder Punkt, welchen irgend zwei von drei Flächen II. Ordnung mit einander gemein haben, auch in der dritten liegt und zwei der drei Flächen in einem und demselben Strahlenbündel enthalten sind, so ist in diesem auch die dritte enthalten. Denn die drei Flächen haben jede Gerade mit einander gemein, welche den Mittelpunkt des Strahlenbündels mit einem andern gemeinschaftlichen Punkte derselben verbindet. Gehören die drei Flächen einem und demselben einfachen Flächensysteme an, so folgt der Satz auch aus 517.

Jedes einfache Liniensystem (K, K_1) wird aus jedem ausserhalb seiner Ebene liegenden Punkte S durch ein einfaches Flächensystem $S(K, K_1)$ projicirt, welches in dem Strahlenbündel S enthalten ist und ein System erster oder zweiter oder dritter Art u. s. w. heissen soll, je nachdem (K, K_1) ein System erster oder zweiter oder dritter Art u. s. w. ist. Ist in dem Systeme (K, K_1), also in Hinsicht auf jede Linie dieses Systems dem Punkte P die Gerade p zugeordnet, so ist in dem Systeme $S(K, K_1)$ jedem Punkte der Geraden SP die Ebene Sp zugeordnet. Sind in dem Systeme (K, K_1) die Punkte P, Q einander conjugirt, so ist in dem Systeme $S(K, K_1)$ jedem Punkte der Geraden SP jeder Punkt der Geraden SQ conjugirt. Ist das System (K, K_1) in einem Strahlenbüschel enthalten, also ein System VI. oder VII. Art, so ist das System $S(K, K_1)$ in einem Ebenenbüschel und daher in jedem Strahlenbündel enthalten, dessen Mittelpunkt in der Axe des Ebenenbüschels liegt.

519. Wenn jeder Punkt, welchen irgend zwei von drei in einerlei Ebene liegenden Linien II. Ordnung mit einander gemein haben, auch in der dritten liegt, aber dennoch die drei Linien nicht einem und demselben einfachen Liniensysteme angehören, so findet einer von folgenden vier Fällen statt:

a) Die drei Linien sind drei Curven II. Ordnung, welche drei Punkte A, B, C in deren jedem zwei derselben sich berühren, mit einander gemein haben.

b) Zwei von den drei Linien sind Curven II. Ordnung, welche in einem Punkte A sich berühren und in zwei Punkten B, C sich schneiden. Die dritte Linie besteht aus der Geraden BC und einer der Geraden AB, AC.

c) Zwei von den drei Linien sind Curven II. Ordnung, welche in einem Punkte A dreipunktig einander sich anschmiegen und daher noch einen Punkt B mit einander gemein haben. Die dritte Linie ist die Gerade AB.

d) Die drei Linien sind in einem und demselben Strahlenbüschel enthalten und haben nur den Mittelpunkt S desselben mit einander gemein.

Sind zwei Punkte P, Q in Hinsicht auf jede der drei Linien einander conjugirt, so geht die Gerade PQ wenigstens durch einen gemeinschaftlichen Punkt derselben. In den beiden erstern der obigen Fälle sind nämlich, wie man sich leicht überzeugt, die Punkte P, Q durch zwei Eckpunkte des Dreiecks ABC harmonisch getrennt. Im dritten Falle sind die Punkte P, Q entweder durch die Punkte A, B harmonisch getrennt, oder es fällt der eine mit dem Punkte A zusammen und der andere in die diesem Punkte in Hinsicht auf alle drei Linien zugeordnete Gerade. Im vierten Falle endlich fällt der eine von den beiden Punkten P, Q mit dem Punkte S zusammen.

520. Wenn jeder Punkt, welchen irgend zwei von drei Flächen F, F_1, F_2 II. Ordnung mit einander gemein haben, auch in der dritten liegt, und irgend zwei Punkte M, N, welche mit keinem gemeinschaftlichen Punkte der Flächen in einer und derselben Geraden liegen, in Hinsicht auf alle drei einander conjugirt sind, so gehören die drei Flächen einem und demselben einfachen Flächensysteme an.

Jede durch die Gerade MN gehende Ebene U bestimmt mit den drei Flächen drei Linien UF, UF_1, UF_2 II. Ordnung, welche (518) einem und demselben einfachen Liniensysteme angehören, woraus sogleich hervorgeht, dass je zwei mit der Geraden MN in einerlei Ebene liegende und in Hinsicht auf zwei der drei gegebenen Flächen einander conjugirte Punkte auch in Hinsicht auf die dritte einander conjugirt sind. Liegen zwei Punkte P, Q, welche in Hinsicht auf zwei der drei Flächen einander conjugirt sind, mit der Geraden MN nicht in einerlei Ebene, so haben die drei Flächen entweder die Gerade PQ mit einander gemein, daher die Punkte P, Q auch in Hinsicht auf die dritte einander conjugirt sind, oder man kann durch die Gerade MN eine Ebene U und durch die Gerade PQ eine Ebene V legen, so dass die Schnittlinie dieser Ebenen durch keinen gemeinschaftlichen Punkt der drei Flächen geht. Da es nun in der Geraden UV zwei Punkte giebt, welche in Hinsicht auf jede der Linien UF, UF_1, UF_2 und also auch in Hinsicht auf jede der Flächen F, F_1, F_2 einander conjugirt sind, so sind auch die Punkte P, Q in Hinsicht auf alle drei Flächen einander conjugirt.

Bestimmt irgend eine Ebene mit drei Flächen II. Ordnung, deren keine zwei einen ausserhalb der dritten liegenden Punkt mit einander gemein haben, drei Linien, welche einem und demselben einfachen Liniensysteme angehören und höchstens vier Punkte mit einander gemein haben, so gehören die drei Flächen, wie aus dem obigen Satze folgt, einem und demselben einfachen Flächensysteme an.

521. Wenn jeder Punkt, welchen irgend zwei von drei Flächen F, F_1, F_2 II. Ordnung mit einander gemein haben, auch in der dritten liegt und die Flächen nicht in einem und demselben Strahlenbündel enthalten sind, so gehören sie einem und demselben einfachen Flächensysteme an.

Giebt es eine Ebene U, welche irgend eine der drei Flächen in zwei Geraden schneidet, deren Schnittpunkt ausserhalb der beiden andern liegt, so gehören (519) die drei Linien UF, UF_1, UF_2 einem und demselben einfachen Liniensysteme und daher (520) die drei Flächen F, F_1, F_2 einem und demselben einfachen Flächensysteme an. Sind F, F_1, F_2 drei Kegelflächen, welche eine Gerade h mit einander gemein haben, so berührt die in dieser Geraden der Fläche F sich anschmiegende Ebene E schon desshalb auch wenigstens eine von den Flächen F_1, F_2, weil diese keinen ausserhalb der Geraden h liegenden Punkt der Ebene E mit einander gemein haben. Da hiernach (252) zwei der drei Kegelflächen und folglich alle drei in einer Curve II. Ordnung sich schneiden, so schmiegt die Ebene E in der Geraden h auch der dritten sich an. Ist nun U eine Ebene, welche die eine von den drei Kegelflächen in zwei Geraden, die beiden andern aber in Curven schneidet, so gehören wieder, da diese im Punkte hU eine und dieselbe Gerade EU berühren, die drei Linien UF, UF_1, UF_2 einem und demselben einfachen Liniensysteme und also die Flächen F, F_1, F_2 einem und demselben einfachen Flächensysteme an.

522. Wenn drei Flächen II. Ordnung nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, aber doch jeder Punkt, welchen irgend zwei derselben mit einander gemein haben, auch in der dritten liegt, so findet nach 519 und 521 einer von folgenden vier Fällen statt:

a) Die drei Flächen sind drei Kegelflächen, welche drei Strahlen, in deren jedem zwei derselben sich berühren, mit einander gemein haben.

b) Zwei von den drei Flächen sind Kegelflächen, welche in einer Geraden a sich berühren und in zwei Geraden b, c sich schneiden. Die dritte Fläche besteht aus der Ebene bc und einer der Ebenen ab, ac.

c) Zwei von den drei Flächen sind Kegelflächen, welche in einem Strahle a dreistrahlig einander sich anschmiegen und daher noch einen Strahl b mit einander gemein haben. Die dritte Fläche ist die Ebene ab.

d) Die drei Flächen sind in einem und demselben Ebenenbüschel enthalten und haben nur die Axe dieses Büschels mit einander gemein.

Sind zwei Punkte P, Q in Hinsicht auf alle drei Flächen einander conjugirt, ohne durch zwei gemeinschaftliche Punkte derselben harmonisch getrennt zu sein, so haben die drei Flächen einen von den beiden Punkten P, Q mit einander gemein.

523. Schneidet eine Gerade u zwei in einerlei Ebene liegende Linien K, K_1 II. Ordnung in denselben zwei Punkten, so gehört dem einfachen Liniensystem (K, K_1) entweder die Gerade u oder eine Linie an, welche aus der Geraden u und noch einer Geraden besteht. Dasselbe ist der Fall, wenn die Gerade u nur durch einen gemeinschaftlichen Punkt der Linien K, K_1 geht und mit keiner derselben, ob sie gleich mit beiden in einerlei Ebene liegt, noch einen Punkt gemein hat.

Ist dem Punkte S in Hinsicht auf die beiden Linien K, K_1 eine und dieselbe Gerade zugeordnet, so ist, wenn nicht das Liniensystem (K, K_1) selbst, doch eine Linie desselben in dem Strahlenbüschel S enthalten.

524. Wenn eine Ebene U mit zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung eine und dieselbe Linie bestimmt, so dass also UF mit U F_1 identisch ist, so gehört dem einfachen Flächensysteme (F, F_1) entweder die Ebene U oder eine Fläche an, welche aus der Ebene U und noch einer Ebene V besteht.

Sind nämlich die beiden Flächen F, F_1 in einem und demselben Strahlenbündel enthalten, so liegt der Mittelpunkt S desselben in der Ebene U. Ist nun E eine Ebene, welche nicht durch den Punkt S geht, so findet der erstere oder letztere der im Satze erwähnten Fälle statt, je nachdem (523) dem einfachen Liniensysteme (EF, EF_1) die Gerade EU oder eine Linie angehört, welche aus dieser Geraden und noch einer Geraden besteht. Sind aber die Flächen F, F_1 nicht in einem und demselben Strahlenbündel enthalten, so hat man zu unterscheiden, ob jeder gemeinschaftliche Punkt derselben in der Linie UF liegt, oder ob sie auch Punkte, welche ausserhalb der Ebene U liegen, mit einander gemein haben. Im erstern dieser Fälle gehört (521) dem Flächensysteme (F, F_1) die Ebene U an. Im letztern Falle giebt es eine Ebene V, welche durch jeden ausserhalb der Ebene U liegenden gemeinschaftlichen Punkt der Flächen F, F_1 geht und mit keiner derselben einen ausserhalb der andern liegenden Punkt gemein hat, woraus der Satz folgt.

Anmerkung. Gehören die Flächen F, F_1, F_2 einem und demselben einfachen Flächensysteme an, so ist es einerlei, ob man dasselbe, da es durch zwei seiner Flächen bestimmt ist, durch (F, F_1) oder (F, F_2) oder (F_1, F_2) bezeichnet.

525. Wenn in Hinsicht auf zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung einem ausserhalb derselben liegenden Punkte S eine und dieselbe Ebene U zugeordnet ist, so ist eine Fläche F_2 des einfachen Flächensystems (F, F_1) in dem Strahlenbündel S enthalten.

Haben nämlich die Flächen F, F_1 keinen ausserhalb der Ebene U liegenden Punkt mit einander gemein, so bestimmt diese Ebene entweder mit den beiden Flächen eine und dieselbe Linie, oder es fällt die Ebene U mit der einen von den beiden Flächen F, F_1 zusammen, oder es sind F, F_1 zwei Kegelflächen, welche eine in der Ebene U liegende Gerade aber keinen ausserhalb dieser Geraden liegenden Punkt mit einander gemein haben. In jedem dieser Fälle wird die den beiden Flächen F, F_1 gemeinschaftliche Linie FF_1 aus dem Punkte S durch eine Fläche F_2 projicirt, welche mit keiner von den beiden Flächen F, F_1 einen ausserhalb der Ebene U, folglich auch mit keiner einen ausserhalb der andern liegenden Punkt gemein hat und daher dem einfachen Flächensysteme (F,F_1) angehört. Wenn aber die Flächen F, F_1 irgend einen ausserhalb der Ebene U liegenden Punkt A mit einander gemein haben, so haben sie auch den Punkt B mit einander gemein, welcher vom erstern durch den Punkt S und einen Punkt T der Ebene U harmonisch getrennt ist. In diesem Falle ist F_2 die Fläche, welche aus dem Punkte S die durch den Punkt T gehende Linie K des einfachen Liniensystems (UF, UF_1) projicirt. Dass nämlich UF, UF_1 zwei verschiedene Linien sind, folgt aus 444. Um aber zu beweisen, dass auch jeder ausserhalb der Ebene U und ausserhalb der Geraden SA liegende Punkt C, welchen zwei der drei Flächen F, F_1, SK miteinander gemein haben, auch in der dritten liege, sei P der Punkt, in welchem die Gerade AC und die Ebene U sich schneiden, und p die Gerade, welche vom Punkte P durch die Geraden SA, SC harmonisch getrennt und daher dem Punkte P in Hinsicht auf jene zwei Flächen conjugirt ist. Da nun in Hinsicht auf zwei der drei Linien UF, UF_1, K, folglich auch in Hinsicht auf die dritte dem Punkte P der Punkt Up conjugirt ist, so sind diese Punkte und mithin auch der Punkt P und die Gerade p auch in Hinsicht auf die dritte Fläche einander conjugirt, daher auch diese durch den Punkt C geht.

526. Wenn zwei Ebenen U, V mit zwei Flächen F, F_1 II Ordnung vier verschiedene Linien UF, UF_1, VF, VF_1 bestimmen und zwei Linien II. Ordnung, von welchen die eine dem einfachen Liniensysteme (UF, UF_1) und die andere dem einfachen Liniensysteme (VF, VF_1) angehört, irgend einen ausserhalb der beiden Flächen F, F_1 liegenden Punkt S mit einander gemein haben, so haben sie entweder die Schnittlinie h der Ebene U, V mit einander gemein, oder sie schneiden diese Gerade in denselben zwei Punkten S, T oder es hat keine von den beiden Linien mit der Geraden h einen von S verschiedenen Punkt gemein. Der erste dieser drei Fälle findet statt, wenn die Gerade h die Flächen F, F_1 in denselben zwei Punkten schneidet, so wie auch, wenn die Gerade h durch einen gemeinschaftlichen Punkt der Flächen F, F_1 geht und mit keiner derselben noch einen Punkt gemein hat. Der zweite Fall findet statt, wenn die Gerade h durch einen gemeinschaftlichen Punkt T der Flächen F, F_1 geht und wenigstens die eine auch in einem ausserhalb der andern liegenden Punkte schneidet, so wie auch, wenn die Gerade h durch keinen gemeinschaftlichen Punkt der Flächen F, F_1 geht und in dem involutorischen Gebilde $hF \,.\, hF_1 \ldots$ dem Punkte S ein anderer Punkt T zugeordnet ist. Der dritte Fall findet statt, wenn die Gerade h durch keinen gemeinschaftlichen Punkt der Flächen F, F_1 geht und in dem involutorischen

Gebilde $hF.hF_1$ ... der Punkt S sich selbst zugeordnet ist. Nur im ersten und dritten Falle giebt es in der Geraden h einen Punkt, welcher dem Punkte S in Hinsicht auf jede der beiden Flächen F, F_1 conjugirt ist, daher im zweiten Falle die Gerade h mit der Schnittlinie derjenigen zwei Ebenen, von welchen die eine in Hinsicht auf die Fläche F und die andere in Hinsicht auf die Fläche F_1 dem Punkte S zugeordnet ist, keinen Punkt gemein hat.

527. Wenn in Hinsicht auf zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung einem ausserhalb derselben liegenden Punkte S nur eine Gerade s conjugirt ist, so gehört dem einfachen Flächensysteme (F, F_1) eine Fläche F_2 an, welche von jeder durch den Punkt S gehenden aber ausserhalb der Ebene Ss liegenden Geraden im Punkte S und in noch einem Punkte geschnitten wird.

I. Bestimmt die Ebene U, welche aus dem Punkte S die Gerade s projicirt, mit den beiden Flächen F, F_1 eine und dieselbe Linie, so besteht (524) die im Satze erwähnte Fläche aus der Ebene U und einer nicht durch den Punkt S gehenden Ebene, weil, wenn eine Fläche F_2 des einfachen Flächensystems (F, F_1) in dem Strahlenbündel S enthalten wäre, die dem Punkte S in Hinsicht auf die Fläche F zugeordnete Ebene demselben Punkt (517) auch in Hinsicht auf die Fläche F_1 zugeordnet sein würde, was gegen die Annahme ist.

II. Sind UF, UF_1 zwei verschiedene Linien, so hat man zu unterscheiden, ob die durch den Punkt S gehende Linie L des einfachen Liniensystems (UF, UF_1) eine Gerade f oder (523) der Inbegriff von zwei im Punkte S sich schneidenden Geraden f, g ist. In jedem dieser Fälle bestimmt indessen jede durch den Punkt S gehende von U verschiedene Ebene V mit den Flächen F, F_1 ein einfaches Liniensystem (VF, VF_1), in welchem dem Punkt S nur der Punkt Vs conjugirt ist, daher die durch den Punkt S gehende Linie des Systems entweder aus der Geraden UV und einer nicht durch den Punkt S gehenden Geraden besteht oder eine Curve II. Ordnung ist, welche die Ebene U im Punkte S berührt, je nachdem nämlich (526) die Gerade UV in die Linie L fällt oder mit dieser Linie nur den Punkt S gemein hat. Sind also A, B, C drei Ebenen, welche die Ebene U in der Geraden f schneiden, so liegen in ihnen drei Gerade a, b, c, so dass $f + a$ eine Linie des Systems (AF, AF_1), $f + b$ eine Linie des Systems (BF, BF_1) und $f + c$ eine

Linie des Systems (CF, CF_1) ist. Ist ferner E eine Ebene, welche mit der Linie L nur den Punkt S gemein hat, so ist die durch diesen Punkt gehende Linie K des einfachen Liniensystems (EF, EF_1) eine Curve II. Ordnung, welche die Ebene U im Punkte S berührt und (526) durch die drei Punkte Ua, Ub, Uc geht, woraus man schliessen kann, dass diese Punkte nicht in einer und derselben Geraden und mithin die drei Geraden a, b, c nicht in einerlei Ebene liegen. Wenn nun die Linie L die Gerade f selbst ist, mithin jede durch den Punkt S aber nicht durch die Gerade f gehende Ebene die Geraden a, b, c in drei nicht in einer und derselben Geraden liegenden Punkten schneidet, so wird die Gerade f von den Geraden a, b, c in einem und demselben Punkte M geschnitten. In diesem Falle gehört dem einfachen Flächensysteme (F, F_1) die Kegelfläche F_2 an, welche aus dem Punkte M die Curve K projicirt, weil, was auch V für eine durch den Punkt S gehende Ebene sein mag, die durch den Punkt S gehende Linie des einfachen Liniensystems (VF, VF_1) mit der Linie VF_2 zusammenfällt. Wenn aber die Linie L aus der Geraden f und noch einer Geraden g besteht, so liegt in jeder Ebene H, welche die Ebene U in der Geraden g schneidet, eine nicht durch den Punkt S gehende Gerade, welche mit der Geraden g eine Linie des einfachen Liniensystems (HF, HF_1) bildet und daher (526) mit jeder der Linien a, b, c, K einen Punkt gemein hat. In diesem Falle liegen also die Linien f, g, a, b, c, K in einer und derselben Regelfläche F_2, welche dem einfachen Flächensysteme (F, F_1) angehört, weil, was auch V für eine durch den Punkt S gehende Ebene sein mag, die Linien VF, VF_1, VF_2 einem und demselben einfachen Liniensysteme angehören.

528. Durch zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt S ist eine dritte Fläche F_2 II. Ordnung bestimmt, welche nämlich dem einfachen Flächensysteme (F, F_1) angehört und durch den gegebenen Punkt geht.

Ist dem Punkte S in Hinsicht auf die beiden Flächen F, F_1 eine und dieselbe Ebene zugeordnet, so ist (525) die Fläche F_2 in dem Strahlenbündel S enthalten. Giebt es aber nur eine Gerade s, welche dem Punkte S in Hinsicht auf die beiden Flächen F, F_1, mithin auch in Hinsicht auf jede dritte Fläche des Systems (F, F_1) conjugirt ist, so ist (527) in Hinsicht auf die Fläche F_2 dem Punkte S nur die

Ebene $S s$ zugeordnet. In diesem Falle schneidet jede durch den Punkt S gehende aber ausserhalb der Ebene $S s$ liegende Gerade h die Fläche F_2 im Punkte S und in noch einem Punkte T, welcher entweder ein gemeinschaftlicher Punkt der Flächen F, F_1 oder, wenn die Gerade h durch keinen solchen Punkt geht, in dem involutorischen Gebilde $hF.\ hF_1 \ldots$ dem Punkte S zugeordnet ist.

Durch ein einfaches Flächensystem (F, F_1) und eine Gerade h, welche durch keinen gemeinschaftlichen Punkt der Flächen geht, sind (440) zwei Punkte P, Q bestimmt, welche nämlich in der gegebenen Geraden liegen und in Hinsicht auf alle Flächen des Systems einander conjugirt sind, daher diesem zwei Flächen angehören, deren jede mit der Geraden h nur einen Punkt, die eine nur den Punkt P, die andere nur den Punkt Q gemein hat. Jede dritte Fläche des Systems schneidet die Gerade h in zwei Punkten, welche durch die Punkte P, Q harmonisch getrennt sind. Sind F, F_1, F_2 irgend drei Flächen des Sytems, so ist $hF.\ hF_1.\ hF_2$ eine Involution.

529. Durch ein einfaches Flächensystem (F, F_1) und zwei in diesem Systeme einander nicht conjugirte Punkte A, B ist eine Fläche F_2 des Systems bestimmt, in Hinsicht auf welche die gegebenen Punkte einander conjugirt sind.

Es sei U eine durch die Gerade AB gehende Ebene, welche mit den Flächen F, F_1 zwei verschiedene Linien UF, UF_1 bestimmt, und K diejenige Linie des einfachen Liniensystems (UF, UF_1), in Hinsicht auf welche (349) die Punkte A, B einander conjugirt sind. Giebt es nun in der Linie K irgend einen Punkt C, durch welchen keine andere Linie des Systems (UF, UF_1) geht, so ist F_2 die durch den Punkt C gehende Fläche des Systems (F, F_1). Diese Fläche bestimmt nämlich mit der Ebene U eine Linie UF_2, welche (441) dem einfachen Liniensysteme (UF, UF_1) angehört und durch den Punkt C geht, mithin mit K zusammenfällt, daher die Punkte A, B auch in Hinsicht auf die erwähnte Fläche einander conjugirt sind. Wenn aber, was auch U für eine durch die Gerade A, B gehende Ebene sein mag, (UF, UF_1) ein Liniensystem VII. Art und diejenige Linie des Systems, in Hinsicht auf welche die Punkte A, B einander conjugirt sind, eine Gerade ist, so ist (F, F_1) ein Flächensystem VII. Art und F_2 die Ebene, welche alle Flächen desselben mit einander gemein haben.

530. Wenn in Hinsicht auf zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung einem Punkte S eine und dieselbe Ebene U zugeordnet und keine von den beiden Flächen F, F_1 selbst in dem Strahlenbündel S enthalten ist, so ist in diesem doch eine Fläche des einfachen Flächensystems (F, F_1) enthalten.

Es sei P irgend ein ausserhalb der Ebene U liegender Punkt, so ist diejenige Fläche des einfachen Flächensystems (F, F_1), in Hinsicht auf welche (529) dem Punkte S der Punkt P conjugirt ist, in dem Strahlenbündel S enthalten.

Ist S ein Punkt und (F, F_1) irgend ein einfaches Flächensystem, so ist in diesem dem Punkte S entweder jede Ebene oder nur eine Ebene zugeordnet oder nur eine Gerade u conjugirt, je nachdem nämlich jede Fläche oder nur eine Fläche oder gar keine Fläche des Systems (F, F_1) in dem Strahlenbündel S enthalten ist. Im letzten Falle ist, wenn der Punkt P ausserhalb der Geraden u liegt, dem Punkte S nur in Hinsicht auf eine Fläche des Systems (F, F_1) der Punkt P conjugirt und also die Ebene u P zugeordnet.

531. Durch zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung und eine Gerade h, welche beide Flächen in einem gemeinschaftlichen Punkte S aber jede derselben auch in einem ausserhalb der andern liegenden Punkte schneidet, ist eine dritte Fläche II. Ordnung bestimmt, welche nämlich dem einfachen Flächensysteme (F, F_1) angehört und mit der Geraden h nur den Punkt S gemein hat.

Es sei P irgend ein von S verschiedener Punkt der Geraden h, so hat diejenige Fläche F_2 des Systems (F, F_1) in Hinsicht auf welche dem Punkte S der Punkt P und also jeder Punkt der Geraden h conjugirt ist, mit dieser Linie nur den Punkt S gemein. Würde nämlich die Fläche F_2 durch die Gerade h gehen, so wäre jeder Punkt, welchen diese Linie mit einer andern Fläche des Systems (F, F_1) gemein hat, ein gemeinschaftlicher Punkt von allen Flächen desselben, was gegen die Annahme ist.

532. Wenn (F, F_1) ein einfaches Flächensystem, h aber eine Gerade ist, welche wenigstens durch einen gemeinschaftlichen Punkt S der Flächen geht, so findet einer von folgenden vier Fällen statt:

a) Die Flächen des Systems (F, F_1) haben die Gerade h mit einander gemein.

b) Die Gerade h liegt in einer Fläche des Systems (F, F_1)

und wird von allen andern Flächen desselben in denselben zwei Punkten geschnitten. Schneiden die Flächen F, F_1 die Gerade h in denselben zwei Punkten, so geht diejenige Fläche des Systems (F, F_1), welche mit der Geraden h irgend einen dritten Punkt gemein hat, durch die Gerade h.

c) Die Gerade h liegt in einer Fläche des Systems (F, F_1) hat aber mit keiner andern Fläche desselben einen von S verschiedenen Punkt gemein. Wenn keine von den beiden Flächen F, F_1 mit der Geraden h einen von S verschiedenen Punkt gemein hat, und also diesem Punkte in dem Systeme (F, F_1) die Gerade h conjugirt ist, so geht diejenige Fläche des Systems, welche mit der Geraden h irgend einen von S verschiedenen Punkt gemein hat, durch die Gerade h.

d) Eine Fläche des Systems (F, F_1) hat mit der Geraden h nur den Punkt S gemein, während jede andere Fläche desselben die Gerade h im Punkte S und noch einem Punkte schneidet. In diesem Falle sollen das Flächensystem (F, F_1) und das gerade Gebilde h zu einander perspektivisch heissen, wenn auf jeden von S verschiedenen Punkt dieses Gebildes die durch ihn gehende Fläche des Systems, auf den Punkt S aber diejenige Fläche desselben bezogen wird, welche mit der Geraden h keinen andern Punkt gemein hat.

533. Wenn (F, F_1) ein einfaches Flächensystem, U aber eine Ebene ist, so findet einer von folgenden drei Fällen statt:

a) Die Flächen des Systems (F, F_1) haben die Ebene U mit einander gemein.

b) Die Ebene U liegt in einer Fläche des Systems (F, F_1) und bestimmt mit allen übrigen Flächen desselben eine und dieselbe Linie.

c) Die Ebene U bestimmt mit dem Flächensysteme (F, F_1) ein einfaches Liniensystem (UF, UF_1), welches auch durch $U(F, F_1)$ bezeichnet werden kann und zu dem Flächensysteme perspektivisch heissen soll, indem nicht nur jede Fläche des Systems (F, F_1) durch eine Linie des Systems (UF, UF_1) geht, sondern auch jeder Linie K dieses Systems eine Fläche des Systems (F, F_1) entspricht, welche nämlich mit der Ebene U die Linie K bestimmt. Sind die Punkte A, B nur in Hinsicht auf die Linie K des Systems (UF, UF_1) einander conjugirt, so sind sie auch nur in Hinsicht auf eine Fläche des Systems (F, F_1) einander conjugirt und diese Fläche bestimmt mit der Ebene U die Linie K.

534. Wenn drei Flächen F, F_1, F_2 II. Ordnung nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören und drei andere Flächen G, G_1, G_2 II. Ordnung, von welchen die erste dem Systeme (F_1, F_2), die zweite dem Systeme (F, F_2) und die dritte dem Systeme (F, F_1) angehört, irgend einen ausserhalb der drei erstern liegenden Punkt S mit einander gemein haben, so gehören die drei Flächen G, G_1, G_2 einem und demselben vierten einfachen Flächensysteme an.

Es sei U irgend eine durch den Punkt S gehende Ebene. Bestimmt diese Ebene mit den drei Flächen F, F_1, F_2 eine und dieselbe Linie, so haben (533) die Flächen G, G_1, G_2 die Ebene U mit einander gemein. Fallen nur zwei der Linien UF, UF_1, UF_2 in einander, so liegt die Ebene U nur in einer der drei Flächen G, G_1, G_2, bestimmt aber mit den beiden übrigen eine und dieselbe Linie. Sind UF, UF_1, UF_2 drei verschiedene Linien, welche einem und demselben einfachen Liniensysteme angehören, so bestimmt die Ebene U mit den drei Flächen G, G_1, G_2 eine und dieselbe Linie. Wenn endlich UF, UF_1, UF_2 drei verschiedene Linien sind, welche nicht einem und demselben einfachen Liniensysteme angehören, so sind (351) UG, UG_1, UG_2 drei Linien eines und desselben einfachen Liniensystemes. Da hiernach jeder in der Ebene U liegende Punkt, welchen zwei der drei Flächen G, G_1, G_2 mit einander gemein haben, auch in der dritten liegt, und je zwei in der Ebene U liegende Punkte, welche in Hinsicht auf zwei der drei Flächen G, G_1, G_2 einander conjugirt sind, auch in Hinsicht auf die dritte einander conjugirt sind, U aber jede durch den Punkt S gehende Ebene sein kann, so folgt der Satz.

535. Durch drei Flächen F, F_1, F_2 II. Ordnung, welche nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, aber mit einer Ebene U eine und dieselbe Linie bestimmen, sind (534) drei in einer und derselben Geraden sich schneidende Ebenen V, V_1, V_2 bestimmt, so dass die Fläche $U + V$ dem Systeme (F_1, F_2), die Fläche $U + V_1$ dem Systeme (F, F_2) und die Fläche $U + V_2$ dem Systeme (F, F_1) angehört. Jeder Punkt, welchen die Gerade V, V_1 mit irgend einer der drei Flächen F, F_1, F_2 gemein hat, liegt auch in den beiden übrigen. Schneidet eine Gerade h die Ebene U in

einem ausserhalb der Linie UF liegenden Punkte A und die drei Ebenen V, V_1, V_2 in einem und demselben ebenfalls ausserhalb der Flächen F, F_1, F_2 liegenden Punkte B, so sind $AB . hF . hF_1$, $AB . hF . hF_2$ Involutionen, daher auch $AB . hF_1 . hF_2$ eine Involution ist.

536. Jedem einfachen Flächensysteme (F, F_1) gehört wenigstens eine Fläche an, welche keine Regelfläche, also entweder eine Kegelfläche oder der Inbegriff von zwei Ebenen oder eine Ebene ist.

Wenn nämlich F, F_1 zwei Regelflächen sind, so kann man drei räumliche Systeme projektivisch so auf einander beziehen, dass von je drei homologen Elementen P, P_1, P_2 derselben das erste und zweite in Hinsicht auf die Regelfläche F, das erste und dritte aber in Hinsicht auf die Fläche F_1 einander zugeordnet sind, mithin jedem Elemente, welches das zweite und dritte System entsprechend gemein haben, in Hinsicht auf beide Regelflächen ein und dasselbe Element zugeordnet ist. Da nun (508) zwei zu einander collineäre räumliche Systeme wenigstens einen Punkt entsprechend gemein haben, so giebt es wenigstens einen Punkt S, welchem in Hinsicht auf die beiden Flächen F, F_1 eine und dieselbe Ebene zugeordnet ist, woraus (530) der Satz folgt.

---

§. 37.

Verschiedene Arten von einfachen Flächensystemen. — Linien IV. Ordnung.

537. Die in Strahlenbündeln enthaltenen einfachen Flächensysteme zerfallen (518) in 8, die übrigen aber in 14 Arten, so dass es im Ganzen 22 Arten von einfachen Flächensystemen giebt.

Bestimmt eine Linie L, welche auch der Inbegriff von mehrern Linien sein kann, mit jedem nicht in ihr liegenden Punkte P eine Fläche II. Ordnung, welche nämlich durch die Linie L und durch den Punkt P geht, so gehören alle Flächen F, F_1, F_2 u. s. w. II. Ordnung, welche durch die Linie L gehen, einem und demselben einfachen Flächensysteme an. Denn durch jeden ausserhalb der Linie L liegenden Punkt P geht nur eine Fläche des Systems (F, F_1) und diess ist die Fläche, welche durch die Linie L und den Punkt P bestimmt ist.

538. Durch zwei Paar Gegenkanten AB, CD, AC, BD eines Tetraeders ist ein einfaches Flächensystem IX. Art bestimmt, welchem nämlich jede Fläche angehört, welche durch die vier gegebenen Geraden geht. Eine Fläche F dieses Systems besteht aus den Ebenen BCA, BCD, eine andere F_1 aus den Ebenen ADB, ADC, während alle übrigen Flächen desselben Regelflächen sind. Sind die Punkte B, C durch die Punkte M, N und die Punkte A, D durch die Punkte P, Q harmonisch getrennt, so ist in Hinsicht auf jede der Flächen F, F_1 und also in dem Systeme (F, F_1) jedem Eckpunkte des Tetraeders MNPQ die ihm gegenüberliegende Seite desselben zugeordnet, woraus hervorgeht, dass in dem Systeme unendlich viele Polartetraeder enthalten sind.

Jede Ebene U, welche mit keiner Seite des Tetraeders ABCD zusammenfällt, bestimmt mit dem einfachen Flächensysteme (F, F_1) ein einfaches Liniensystem U (F, F_1) und zwar ein Liniensystem I. oder II. oder III. oder VIII. Art, je nachdem die Ebene durch keinen oder nur durch einen Eckpunkt des Tetraeders ABCD oder durch eine von den beiden Kanten AD, BC oder durch eine der vier übrigen Kanten geht. — Sind A, D zwei reelle, B, C aber zwei einander conjungirte imaginäre Punkte, so geht durch jeden reellen Punkt, welcher weder in der Geraden AD noch in einer von den beiden Ebenen ABC, DBC liegt, eine reelle Fläche des Systems (F, F_1), welche die Ebene ABC im Punkte A und die Ebene DBC im Punkte D berührt.

539. Durch eine Fläche F, welche aus zwei Ebenen G, H besteht, und eine Regelfläche F_1, welche durch die Schnittlinie s der beiden Ebenen geht, also die eine G in noch einer Geraden g und ebenso die andere H in noch einer Geraden h schneidet, ist ein einfaches Flächensystem (F, F_1) X. Art bestimmt, dessen Flächen mit Ausnahme der Fläche F sämmtlich Regelflächen sind, welche (521) in der Geraden s sich berühren und in den Geraden g h, sich schneiden, daher in dem Systeme jedem Punkte der Geraden s eine durch dieselbe gehende Ebene zugeordnet ist.

Jede ausserhalb der Fläche F liegende Ebene U bestimmt mit dem einfachen Flächensysteme (F, F_1) ein einfaches Liniensystem

U (F, F_1) und zwar ein System II. oder IV. oder VII. oder VIII Art, je nachdem die Ebene U die drei Geraden s, g, h in drei Punkten oder in zwei Punkten schneidet, oder durch die Gerade s oder durch eine von den beiden Geraden g, h geht.

540. Durch eine Ebene F und eine Regelfläche F_1, welche die Ebene F in zwei Geraden p, q schneidet, ist ein einfaches Flächensystem (F, F_1) XI. Art bestimmt, dessen Flächen mit Ausnahme der Fläche F sämmtlich Regelflächen sind, welche in den Geraden p, q sich berühren. Jedem Punkte der Ebene F ist in dem Systeme eine durch den Punkt p q gehende Ebene zugeordnet.

Jede von F verschiedene Ebene U bestimmt mit dem Flächensystem (F, F_1) ein einfaches Liniensystem und zwar ein System III. oder V. oder VII. Art, je nachdem die Ebene U die Geraden p, q in zwei Punkten oder im Punkte p q schneidet oder durch eine dieser Geraden geht.

541. Durch eine Curve K II. Ordnung und zwei Gerade SA, SB, welche zwei Punkte A, B der Curve aus einem ausserhalb ihrer Ebene liegenden Punkte S projiciren, ist ein einfaches Flächensystem XII. Art bestimmt, welchem nämlich jede Fläche II. Ordnung angehört, die durch die gegebene Curve und durch die beiden gegebenen Geraden geht. Eine Fläche F dieses Systems besteht aus den beiden Ebenen K, SAB, eine andere F_1 ist die Kegelfläche, welche aus dem Punkte S die Curve K projicirt, jede dritte Fläche des Systems ist eine Regelfläche. Dem Punkte S ist in dem Systeme die Ebene S A B, jedem Punkte der Geraden AB aber die Ebene zugeordnet, welche ihm in Hinsicht auf die Kegelfläche F_1 zugeordnet ist.

Jede Ebene U, welche ausserhalb der Fläche F liegt, bestimmt mit dem Flächensysteme (F, F_1) ein einfaches Liniensystem, welches, wenn die Ebene U durch den Punkt S geht, ein System II. oder III. oder VII. oder VIII. Art, im entgegengesetzten Falle aber ein System I. oder II. oder III. oder IV. Art ist.

542. Durch zwei sich schneidende Gerade p, q und eine Curve K II. Ordnung, welche die Ebene, in der die beiden Geraden liegen, im Schnittpunkte derselben berührt aber in diesem Punkte keiner der Geraden sich anschmiegt, ist ein einfaches Flächensystem XIII. Art bestimmt, welchem nämlich jede Fläche II. Ordnung angehört, die durch die gegebene Curve und durch die beiden gegebenen Geraden

geht. Die Flächen dieses Systems sind mit Ausnahme derjenigen, welche aus den beiden Ebenen K, pq besteht, sämmtlich Regelflächen. Jedem Punkte, welcher in der Schnittlinie der erwähnten Ebenen liegt, ist in dem Systeme die Ebene zugeordnet, welche ihm in Hinsicht auf irgend eine Regelfläche des Systems zugeordnet ist.

Jede Ebene U, welche mit keiner der Ebenen K, pq zusammenfällt, bestimmt mit dem obigen Flächensysteme ein einfaches Liniensystem, welches, wenn die Ebene U durch den Punkt pq geht, ein System IV. oder V. oder VIII. Art, im entgegengesetzten Falle aber ein System I. oder II. Art ist.

543. Durch eine Fläche F, welche aus zwei Ebenen G, H besteht, und eine Kegelfläche F_1, welche die eine G dieser Ebenen in einer Geraden g berührt, die andere aber H in einer Curve K II. Ordnung schneidet, ist ein einfaches Flächensystem (F, F_1) XIV. Art bestimmt, dessen Flächen mit Ausnahme der Fläche F sämmtlich Kegelflächen sind, welche die Ebene G in der Geraden g berühren und durch die Curve K gehen. Jedem Punkte der Geraden g ist in dem Systeme die Ebene G, jedem Punkte der Geraden GH aber die Ebene zugeordnet, welche ihm in Hinsicht auf irgend eine Kegelfläche des Systems zugeordnet ist.

Jede ausserhalb der Fläche F liegende Ebene U bestimmt mit dem Systeme (F, F_1) ein einfaches Liniensystem, welches, wenn die Ebene U durch den Punkt gH geht, ein System IV. oder V. oder VIII. Art, im entgegengesetzten Falle aber ein System II. oder III. Art ist.

544. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche zwei Punkte A, B mit einander gemein haben aber nicht in einerlei Ebene liegen, ist ein einfaches Flächensystem XV. Art bestimmt, welchem nämlich jede Fläche II. Ordnung angehört, die durch die beiden gegebenen Curven geht. Eine Fläche dieses Systems besteht aus den beiden Ebenen K, K_1, zwei andere Flächen F, F_1 desselben sind Kegelflächen, alle übrigen Flächen des Systems aber Regelflächen. Sind S, S_1 die Mittelpunkte der erwähnten Kegelflächen und P, Q irgend zwei Punkte, welche durch die Punkte A, B harmonisch getrennt sind, so ist in dem Systeme jedem Eckpunkte des Tetraeders $PQSS_1$ die ihm gegenüberliegende Seite desselben zugeordnet, daher in dem Systeme unendlich viele Polartetraeder enthalten sind.

Jede Ebene U, welche mit keiner der Ebenen K, K_1 zusammenfällt, bestimmt mit dem obigen Flächensysteme ein einfaches Liniensystem, welches, wenn die Ebene U durch keinen von den beiden Punkten A, B geht, ein System I. oder II. oder III. Art ist. Schneidet die Ebene U die Gerade AB in einem der Punkte A, B so ist U (F, F_1) ein System II. oder IV. oder VI. Art. Wenn endlich die Ebene U durch die Gerade AB geht, so ist U (F, F_1) ein System III. Art.

545. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche einer Geraden s in einem und demselben Punkte A sich anschmiegen aber nicht in einerlei Ebene liegen, ist ein einfaches Flächensystem XVI. Art bestimmt, welchem nämlich jede Fläche II. Ordnung angehört, die durch die beiden gegebenen Curven geht. Eine Fläche F dieses Systems besteht aus den beiden Ebenen K, K_1, eine andere Fläche F_1 desselben ist eine Kegelfläche, die übrigen Flächen des Systems sind Regelflächen. Jedem Punkte der Geraden s ist in dem Systeme die Ebene zugeordnet, welche ihm in Hinsicht auf irgend eine krumme Fläche desselben zugeordnet ist. Dem Mittelpunkte der Kegelfläche F_1 ist die Ebene zugeordnet, welche von ihm durch die Ebenen K, K_1 harmonisch getrennt ist.

Jede ausserhalb der Fläche F liegende Ebene U bestimmt mit dem Flächensysteme (F, F_1) ein einfaches Liniensystem, welches, wenn die Ebene U durch den Punkt A geht, ein System II. oder V. oder VI. Art, im entgegengesetzten Falle aber ein System I. oder II. oder III. Art ist.

546. Durch eine Ebene F und eine Kegelfläche F_1, welche die gegebene Ebene in einer Curve K II. Ordnung schneidet, ist ein einfaches Flächensystem (F, F_1) XVII. Art bestimmt. Jede dritte Fläche dieses Systems ist eine Regelfläche, welche die Kegelfläche F_1 in der Curve K berührt. Je zwei in Hinsicht auf die Curve K einander conjugirte Punkte A, B, von welchen keiner in der Curve liegt, sind zwei Eckpunkte eines in dem Systeme (F, F_1) enthaltenen Polartetraeders ABCS. Der Punkt C ist der Pol der Geraden A B in Hinsicht auf die Curve K, der Punkt S aber der Mittelpunkt der Kegelfläche F_1.

Jede von F verschiedene Ebene U bestimmt mit dem Flächensysteme (F, F_1) ein einfaches Liniensystem, welches, wenn die Ebene

U der Kegelfläche F_1 sich anschmiegt, ein System VI. Art, im entgegengesetzten Falle aber ein System III. oder V. Art ist.

547. Wenn F eine Ebene und F_1 entweder der Inbegriff von zwei Ebenen oder ebenfalls eine Ebene ist, so ist (F, F_1) ein einfachesFlächensystemIII. oderVI. oderVII.Art. — Gehören einem einfachenFlächensysteme wenigstens zwei Flächen an, deren jede aus zwei Ebenen besteht, während keine Fläche des Systems eine Ebene ist, so ist dasselbe ein System I. oder II. oder VIII. oder IX. Art.— Ist eine Fläche eines einfachen Flächensystems eine Ebene, jede andere Fläche desselben aber eine krummeFläche, so ist dasselbe ein System V. oder XI. oder XVII. Art. — Ist eine Fläche eines einfachen Flächensystems der Inbegriff von zwei Ebenen, jede andere Fläche desselben aber eine krumme Fläche, so unterscheide man, ob die krummen Flächen desSystems durch die Schnittlinie jenerEbenen gehen oder diese Gerade in zwei Punkten schneiden oder in einem Punkte berühren. Im ersten dieser Fälle ist das Flächensystem ein System IV. oder X. Art, im zweiten ein System XII. oder XV. Art, im dritten ein System XIII. oder XIV. oder XVI. Art.

Es sind hiernach nur noch einfache Flächensysteme zu betrachten, deren Flächen sämmtlich krumme Flächen sind.

548. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung und eine Gerade, welche mit der Curve zwei Punkte A, B gemein hat, ist ein einfaches Flächensystem XVIII. Art bestimmt, welchem nämlich jede Fläche II. Ordnung angehört, welche durch die beiden gegebenen Linien geht. Zwei Flächen F, F_1 dieses Systems sind Kegelflächen, alle übrigen Flächen desselben aber Regelflächen. Die Ebene, welche die Curve K im Punkte A berührt und im Punkte B schneidet, ist in dem Flächensysteme dem Punkte A, die Ebene aber, welche die Curve im Punkte B berührt und im Punkte A schneidet, dem Punkte B zugeordnet. Jede Ebene U bestimmt mit dem Flächensysteme ein einfaches Liniensystem.

Geht die Ebene U durch keinen von den beiden Punkten A, B, so ist U (F, F_1) ein Liniensystem I. oder II oder IV. Art, je nachdem nämlich die Ebene mit der Curve K drei Punkte oder zwei Punkte oder nur einen Punkt gemein hat. Wenn aber die Ebene U die Gerade AB in einem von den beiden Punkten A, B schneidet, so ist U (F, F_1) ein Liniensystem II. oder III. oder IV. oder V. Art

Wenn endlich die Ebene U durch die Gerade A B geht, so ist U (F, F_1) ein Liniensystem VII. oder VIII. Art.

549. Durch eine unebene Curve K III. Ordnung und eine Gerade h, welche der Curve in einem Punkte A sich anschmiegt, ist ein einfaches Flächensystem (F, F_1) XIX. Art bestimmt, welchem nämlich jede Fläche II. Ordnung angehört, welche durch die beiden gegebenen Linien geht. Die Flächen dieses Systems sind mit Ausnahme der Kegelfläche AK sämmtlich Regelflächen. Dem Punkte A ist in dem Systeme die Ebene zugeordnet, welche in ihm der Curve k sich anschmiegt.

Jede Ebene U bestimmt mit dem obigen Flächensysteme ein einfaches Liniensystem, welches, wenn die Ebene U nicht durch den Punkt A geht, ein System I. oder II. oder IV. Art ist. Schneidet aber die Ebene U die Gerade h im Punkte A, so ist U (F, F_1) ein System II. oder III. Art. Wenn endlich die Ebene U durch die Gerade h geht, so ist U (F, F_1) ein System VII. oder VIII. Art.

550. Wenn drei Flächen F, F_1, F_2 II. Ordnung nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, aber doch die dritte durch alle gemeinschaftlichen Punkte der beiden erstern geht, so liegen diese entweder alle in einerlei Ebene oder in einer Linie III. Ordnung, welche aus drei Geraden oder aus einer Geraden und einer Curve II. Ordnung zusammengesetzt ist.

Wenn nämlich die erwähnten Punkte nicht alle in einerlei Ebene liegen, so sei S ein Punkt, welcher ausserhalb der drei Flächen aber mit zwei gemeinschaftlichen Punkten A, B derselben in einer und derselben Geraden liegt. Es sei ferner G_2 die durch den Punkt S gehende Fläche des einfachen Flächensystems (F, F_1) und G_1 die durch den Punkt S gehende Fläche des einfachen Flächensystems (F, F_2). Da nun die Flächen G_1, G_2 die Gerade AB und unendlich viele ausserhalb dieser Geraden und überdiess nicht in einerlei Ebene liegende Punkte mit einander gemein haben, so schneiden sie sich in der Geraden AB und in einer Linie FF_1 III. Ordnung, welche entweder aus drei Geraden oder aus einer Geraden und einer Curve II. Ordnung besteht. Dass nämlich FF_1 keine Curve III. Ordnung ist, folgt aus 477.

551. Die Schnittlinie F, F_1 von zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung, deren gemeinschaftliche Punkte weder in einerlei Ebene noch

in einer Ebene und einer Geraden liegen, soll eine unebene Linie IV. Ordnung heissen. Alle Flächen II. Ordnung, welche durch eine und dieselbe unebene Linie K IV. Ordnung gehen, gehören (550) einem und demselben einfachen Flächensysteme an, welches also durch die Linie K bestimmt ist. Mit jedem nicht in ihr liegenden Punkte bestimmt die Linie K eine Fläche II. Ordnung, welche nämlich durch die gegebene Linie und durch den gegebenen Punkt geht.

Besteht eine unebene Linie IV. Ordnung aus vier Geraden, so sind diese entweder die vier Kanten eines Vierkants oder zwei Paar Gegenkanten eines Tetraeders. Die übrigen Fälle, in welchen eine unebene Linie IV. Ordnung aus andern Linien zusammengesetzt ist, nämlich entweder aus zwei Geraden und einer Curve II. Ordnung oder aus zwei Curven II. Ordnung oder aus einer Geraden und einer Curve III. Ordnung besteht, sind in 541, 542, 544, 545, 548 und 549 betrachtet worden. Eine unebene Curve IV. Ordnung hat mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte und mit keiner Ebene mehr als vier Punkte gemein.

552. Zwei Punkte oder auch ein Punkt und eine Gerade sollen in Hinsicht auf eine unebene Linie IV. Ordnung einander conjugirt heissen, wenn sie in dem durch die Linie bestimmten Flächensysteme einander conjugirt sind. Ist in Hinsicht auf eine unebene Curve K IV. Ordnung einem in ihr liegenden Punkte P nur eine Gerade p conjugirt, so schmiegt diese im Punkte P der Curve sich an. Eine Fläche F des durch die Linie K bestimmten Flächensystems (F, F_1) geht (532) durch die Gerade p, während alle übrigen Flächen desselben die Gerade p im Punkte P berühren. Die dem Punkte P in Hinsicht auf die Fläche F zugeordnete Ebene U schneidet die Fläche F entweder in der Geraden p und in noch einer durch den Punkt P gehenden Geraden oder hat mit derselben nur die Gerade p gemein, je nachdem nämlich F eine Regelfläche oder eine Kegelfläche ist. Im erstern Falle ist U (F, F_1) ein Liniensystem IV., im letztern aber ein Liniensystem V. Art. Der Curve K schmiegt die Ebene U im erstern Falle nur dreipunktig, im letztern aber vierpunktig sich an. Jede andere durch die Gerade p gehende Ebene hat mit der Fläche F auch eine nicht durch den Punkt P gehende Gerade q gemein und bestimmt daher mit dem Flächensysteme (F, F_1) ein Linien-

system II. oder III. Art, je nachdem nämlich die Gerade q mit der Curve K zwei Punkte oder nur einen Punkt gemein hat,

553. In jeder unebenen Curve K IV. Ordnung schneiden sich wenigstens zwei Kegelflächen II. Ordnung.

Da die Flächen des durch die Curve K bestimmten einfachen Flächensystems (F, F_1) sämmtlich krumme Flächen sind so ist nach 536 wenigstens eine Fläche F desselben eine Kegelfläche. Wenn nun der Mittelpunkt S dieser Fläche in der Curve K und also auch in der Ebene U liegt, welche ihm in Hinsicht auf alle Flächen des Systems (F, F_1) zugeordnet ist, so ist U (F, F_1) ein Liniensystem VI. Art, daher dem Systeme (F, F_1) zwei Kegelflächen angehören, welche die Ebene U berühren. Ist die eine von diesen Kegelflächen die Fläche F, so ist jede dritte Fläche des Systems (F, F_1) eine Regelfläche. Wenn aber die Ebene U die Kegelfläche F in zwei Geraden schneidet, so schneiden sich in der Curve K drei Kegelflächen II. Ordnung. Liegt der Punkt S ausserhalb der Curve K und also auch ausserhalb der Ebene U, so schneidet diese die Kegelfläche F und jede Regelfläche des Systems (F, F_1) in einer Curve II. Ordnung, jede von F verschiedene Kegelfläche aber, welche dem Systeme (F, F_1) angehört, in zwei Geraden, woraus hervorgeht, dass U (F, F_1) ein einfaches Liniensystem I. oder II. oder IV. Art ist und dass m ersten dieser Fälle vier, im zweiten drei, im dritten aber zwei Flächen des Systems (F, F_1) Kegelflächen sind.

In einer unebenen Curve IV. Ordnung schneiden sich also entweder zwei oder drei oder vier Kegelflächen II. Ordnung. In den beiden erstern Fällen hat eine der Kegelflächen ihren Mittelpunkt in der Curve, während im letzten Falle die Mittelpunkte der vier Kegelflächen ausserhalb der Curve liegen und jedem derselben in dem durch die Curve bestimmten Flächensysteme die Ebene zugeordnet ist, welche durch die drei übrigen geht.

554. Durch zwei Kegelflächen F, F_1 II. Ordnung, welche einer und derselben Ebene E sich anschmiegen und zwar die eine F in einer Geraden SS_1, welche durch den Mittelpunkt S_1 der andern geht, die andere F_1 aber in einer Geraden S_1T, welche nicht durch den Mittelpunkt S der erstern geht, ist ein einfaches Flächensystem (F, F_1) XX. Art bestimmt, dessen Flächen in einer unebenen Curve K

IV. Ordnung sich schneiden und mit Ausnahme der Flächen F, F_1 sämmtlich Regelflächen sind.

Dem Punkte S_1 ist in dem Flächensysteme (F, F_1) die Ebene E zugeordnet, welche, da $E\ (F, F_1)$ ein Liniensystem VI. Art ist, jede Regelfläche des Systems (F, F_1) in zwei Geraden schneidet, die durch die Geraden $S_1 S$, $S_1 T$ harmonisch getrennt sind. Jede durch die Gerade $S_1 T$ gehende von E verschiedene Ebene bestimmt mit dem Flächensysteme (F, F_1) ein Liniensystem IV. Art und schneidet daher die Curve K nur in einem von S_1 verschiedenen Punkte, woraus man schliessen kann, dass die Curve im Punkte S_1 eine Spitze bildet und dass in diesem Punkte der Curve die Gerade $S_1 T$ und die Ebene E sich anschmiegen. Ist U eine durch den Punkt S_1 aber nicht durch die Gerade $S_1 T$ gehende Ebene, so ist $U\ (F, F_1)$ ein Liniensystem II. oder III. Art, je nachdem die Ebene U die Kegelfläche F_1 schneidet oder berührt. — Die dem Punkte S zugeordnete und also durch die Gerade $S_1 T$ gehende Ebene H schneidet die Curve K in einem von S_1 verschiedenen Punkte A, in welchem derselben (552) die Gerade SA sich anschmiegt. Jeder ausserhalb der Ebene $SS_1 A$ liegende Strahl der Kegelfläche F hat mit der Kegelfläche F_1 und also auch mit der Curve K zwei Punkte gemein, welche durch den Punkt S und die Ebene H harmonisch getrennt sind. Schneidet eine Ebene U, welche nicht durch den Punkt S_1 geht, die Kegelfläche F in zwei Geraden, so ist $U\ (F, F_1)$ ein Liniensystem II. oder I. Art, je nachdem die Ebene U durch die Gerade SA oder nicht durch diese Gerade geht. Wenn aber eine Ebene U die Kegelfläche F in einer Geraden berührt, so ist $U\ (F, F_1)$ ein Liniensystem V. oder III. Art, je nachdem die Berührungslinie die Gerade SA oder eine andere Gerade ist. Jm erstern Falle schmiegen die Ebene U und die Curve K im Punkte A vierpunktig einander sich an, während sie im letztern Falle in zwei Punkten sich berühren. — Ist U eine Ebene, welche durch keinen der Punkte S, S_1 geht, so ist $U\ (F, F_1)$ ein Liniensystem I. oder II. oder IV. Art. Im ersten dieser Fälle schneiden sich die Ebene U und die Curve K in vier Punkten, während sie im zweiten in einem Punkte sich berühren und in zwei Punkten sich schneiden, im dritten aber in einem Punkte einander sich anschmiegen und noch in einem andern Punkte sich schneiden.

555. Durch zwei nicht einer und derselben Ebene sich anschmiegende Kegelflächen F, F_1 II. Ordnung, von welchen die eine F durch den Mittelpunkt S_1 der andern, die andere F_1 aber nicht durch den Mittelpunkt S der erstern geht, ist ein einfaches Flächensystem (F, F_1) XXI. Art bestimmt, dessen Flächen in einer unebenen Curve K IV. Ordnung sich schneiden und mit Ausnahme der Flächen F, F_1 und noch einer dritten Kegelfläche F_2 sämmtlich Regelflächen sind. Die der Kegelfläche F in der Geraden SS_1 sich anschmiegende Ebene E schneidet nämlich die Fläche F_1 in zwei andern Geraden p, q, daher $E\ (F, F_1)$ ein Liniensystem VI. Art ist, mithin eine Fläche F_2 des Flächensystem (F, F_1) die Ebene E in der Geraden $S_1 S_2$ berührt, welche von der Geraden $S_1 S$ durch die Geraden p, q harmonisch getrennt ist.

Schneidet eine Ebene U die Ebene E in einer der Geraden p, q, so ist $U\ (F, F_1)$ ein Liniensystem IV. und V. Art, je nachdem die Ebene U die Kegelfläche F_1 schneidet oder berührt, woraus man schliessen kann, dass im Punkte S_1 der Curve K jede der Geraden p, p sich anschmiegt und also S_1 ein Knotenpunkt der Curve ist. Geht eine Ebene U durch den Punkt S_1 aber durch keine der Geraden p, q, so ist $U\ (F, F_1)$ ein Liniensystem II. oder III. Art, je nachdem die Ebene U die Kegelfläche F_1 schneidet oder berührt. — Die dem Punkte S in dem Systeme (F, F_1) zugeordnete und also durch die Gerade $S_1\ S_2$ gehende Ebene H schneidet die Curve K auch in zwei von S_1 verschiedenen Punkten A, B, in welchen derselben die Geraden SA, SB sich anschmiegen. Die Ebene $S\,A\,B$ berührt die Kegelfläche F_2 in der Geraden AB und bestimmt daher mit dem Flächensysteme (F, F_1) ein Liniensystem III. Art. Ist U eine andere nicht durch den Punkt S_1 gehende Ebene, welche die Fläche F in zwei Geraden schneidet, so ist $U\ (F, F_1)$ ein Liniensystem I. oder II. Art, je nachdem die Ebene U durch keine oder durch eine der Geraden SA, SB geht. Wenn aber eine Ebene U die Kegelfläche F in einer von $S\,S_1$ verschiedenen Geraden berührt, so bestimmt sie mit dem Flächensysteme (F, F_1) ein Liniensystem III. oder V. Art, je nachdem die Berührungslinie ausserhalb der Ebene SAB liegt oder eine der Geraden SA, SB ist. Im erstern Falle berühren sich die Ebene U und die Curve K in zwei Punkten, welche durch den Punkt S und die Ebene H harmonisch getrennt sind, während sie im letztern in einem der Punkte A, B vierpunktig einander sich anschmiegen. — Was von der Fläche F gilt, gilt auch von der Fläche F_2. Namentlich schneidet auch die Ebene H_2, welche in dem Flächensysteme (F, F_1) dem Mittelpunkte S_2 der Fläche F_2 zugeordnet ist, die Curve K in zwei von S_1 verschiedenen Punkten A_2, B_2, in deren jedem der Curve K eine Ebene, welche die Kegelfläche F_2 berührt, vierpunktig sich anschmiegt. — Geht eine Ebene U durch keinen der drei Punkte S, S_1, S_2, so ist $U(F, F_1)$ ein Liniensystem I. oder II. oder IV. Art, je nachdem die Ebene U drei oder zwei oder nur eine Regelfläche der Systeme (F, F_1) in Geraden schneidet.

556. Durch zwei nicht einer und derselben Ebene sich anschmiegende Kegelflächen F, F_1 II. Ordnung, von welchen keine durch den Mittelpunkt der andern geht, ist ein einfaches Flächensystem (F, F_1) XXII. Art bestimmt, dessen Flächen in einer unebenen Curve K IV. Ordnung sich schneiden und mit Ausnahme von vier Kegelflächen F, F_1, F_2, F_3 sämmtlich Regelflächen sind.

Die Ebene H, welche in dem Flächensysteme (F, F_1) dem Mittelpunkte S der Kegelfläche F zugeordnet ist, schneidet die Kegelfläche F_1 in zwei Geraden, welche die Curve HF in vier Punkten A, B, C, D schneiden, daher $H(F, F_1)$ ein Liniensystem I. Art ist. Da nun die Ebene H in je zwei einander gegenüberliegenden Seiten des vollständigen Vierecks ABCD eine Kegelfläche schneidet, welche dem Flächensysteme (F, F_1) angehört, so folgt, dass durch die Curve K vier Kegelflächen F, F_1, F_2, F_3 II. Ordnung gehen. Die Mittelpunkte dieser Kegelflächen liegen ausserhalb der Curve K und sind die Eckpunkte eines in dem Flächensysteme (F, F_1) enthaltenen Polartetraeders $S S_1 S_2 S_3$.

Schneidet eine Ebene die Fläche F in zwei Geraden, so ist $U(F, F_1)$ ein Liniensystem I. oder II. oder III. Art, je nachdem die Ebene U durch keinen oder durch einen oder durch zwei Eckpunkte des Vierecks ABCD geht. Ist aber U eine Ebene, welche die Fläche F in einer Geraden berührt, so ist $U(F, F_1)$ ein Liniensystem V. oder III. Art, je nachdem die Berührungslinie die Ebene H in einem der Punkte A, B, C, D oder in einem fünften Punkte schneidet. Im erstern dieser Fälle schmiegen die Ebene U und die Curve K in einem Eckpunkte des Vierecks ABCD vierpunktig einander sich an, während sie im letztern Falle in zwei Punkten, welche durch den Punkt S und die Ebene H harmonisch getrennt sind, sich berühren. Was aber von der Fläche F gilt, gilt auch von den Flächen F_1, F_2, F_3, daher es 16 Punkte giebt, in deren jedem der Curve K eine Ebene vierpunktig sich anschmiegt. Man kann diese Punkte, in welchen die Curve K von den Seiten des Tetraeders $S S_1 S_2 S_3$ geschnitten wird, die Wendepunkte derselben nennen.

Sind die Flächen eines einfachen Flächensystems sämmtlich krumme Flächen, so schneiden sich dieselben entweder in einer Geraden und in einer unebenen Curve III. Ordnung oder in einer unebenen Curve IV. Ordnung. Im erstern Falle ist das Flächensystem ein System XVIII. oder XIX. Art, im letztern Falle aber (553) ein System XX. oder XXI. oder XXII. Art. Es folgt hieraus und aus 547, dass es ausser den betrachteten Arten von einfachen Flächensystemen keine andere giebt.

557. Durch ein Tetraeder $S S_1 S_2 S_3$, einen Punkt P, welcher in keiner Seite des Tetraeders liegt, und eine Gerade p ist ein einfaches Flächensystem bestimmt, in welchem nämlich jedem Eckpunkte des Tetraeders die ihm gegenüberliegende Seite desselben zugeordnet, dem Punkte P aber die Gerade p conjugirt ist.

Es seien U, U_1 irgend zwei in der Geraden p sich schneidende Ebenen, so giebt es (443) zwei Flächen F, F_1 II. Ordnung, so dass in Hinsicht auf jede dieser Flächen und also auch in Hinsicht auf jede dritte Fläche des einfachen Flächensystems (F, F_1) das Tetraeder $S S_1 S_2 S_3$ ein Polartetraeder ist und dass überdiess dem Punkte P in Hinsicht auf die Fläche F die Ebene U, in Hinsicht auf die Fläche F_1 aber die Ebene U_1 zugeordnet, mithin in dem Systeme (F, F_1) die Gerade p conjugirt ist.

Je nachdem die Gerade p eine Kante des gegebenen Tetraeders ist, oder nur durch einen Eckpunkt desselben geht und nur in einer Seite desselben liegt, oder durch einen Eckpunkt geht, ohne in einer Seite zu liegen, oder in einer Seite liegt, ohne durch einen Eckpunkt zu gehen oder nur zwei Kanten oder nur eine oder gar keine Kante des Tetraeders schneidet, ist (F, F_1) ein Flächensystem VI. oder III. oder I. oder XVII. oder IX. oder XV. oder XXII. Art.

558. Wenn F, F_1 zwei Regelflächen sind, so kann man (536) zwei räumliche Systeme collineär so auf einander beziehen, dass,

was auch P, P_2 für zwei homologe Elemente derselben sein mögen, das dem Elemente P in Hinsicht auf die Fläche F zugeordnete Element in Hinsicht auf die Fläche F_1 dem Elemente P_2 zugeordnet ist. Haben die zu einander collineären Systeme irgend vier nicht in einerlei Ebene liegende Punkte entsprechend gemein, so findet der erste oder zweite oder dritte oder vierte der in 509 betrachteten Fälle statt, je nachdem (F, F_1) ein Flächensystem XVII. oder IX. oder XV. oder XXII. Art ist. Haben die zu einander collineären Systeme irgend drei nicht in einer und derselben Geraden liegende Punkte A, B, C aber keinen ausserhalb der Ebene ABC liegenden Punkt entsprechend gemein, so findet der erste oder zweite oder dritte oder vierte der in 510 betrachteten Fälle statt, je nachdem (F, F_1) ein Flächensystem XI. oder XII. oder XVI. oder XXI. Art ist. Haben die zu einander collineären Systeme keinen ausserhalb der Geraden p liegenden Punkt entsprechend gemein, so findet der erste oder zweite der in 511 oder der erste oder zweite der in 512 betrachteten Fälle oder der in 513 betrachtete Fall tatt, je nachdem (F, F_1) ein Flächensystem X. oder XVIII. oder XIII. oder XX. oder XIX. Art ist.

559. Wenn in einer reellen Curve K IV. Ordnung drei Kegelflächen F, F_1, F_2, II. Ordnung sich schneiden, so sind entweder alle drei reell oder es ist nur diejenige F_1 reell, deren Mitielpunkt S_1 in der Curve liegt, je nachdem nämlich die Mittelpunkte S, S_2 der beiden andern Kegelflächen zwei reelle oder zwei einander conjungirte imaginäre Punkte sind. Im letztern Falle schneidet die Ebene $S S_1 S_2$ jede durch die Curve K gehende reelle Fläche II. Ordnung und also auch die Kegelfläche F_1 in zwei reellen Geraden, weil in einem reellen Elementargebilde, wie aus der Betrachtung einer reellen Curve II. Ordnung hervorgeht, keine zwei einander conjungirte imaginäre Elemente durch zwei andere solche Elemente harmonisch getrennt sind.

Sind alle drei Kegelflächen reell, so hat man zu unterscheiden, ob die Kegelfläche F_1 die Ebene SS_1S_2 in zwei reellen oder in zwei einander conjungirten imaginären Geraden schneidet. Im erstern dieser Fälle schliesst die Kegelfläche F_1 den einen S von den beiden Punkten S, S_2 ein, daher jeder von SS_1 verschiedene reelle Strahl der Kegelfläche F mit der Curve K zwei reelle Punkte gemein hat.

Die Kegelfläche F_2 wird, da die in 555 durch A_2, B_2 bezeichneten Wendepunkte der Curve K reell sind, durch die Strahlen S_2A_2, S_2B_2 in zwei Theile getheilt, so dass jeder von $S_2 S_1$ verschiedene reelle Strahl des einen Theils durch zwei reelle, jeder reelle Strahl des andern Theils aber durch zwei imaginäre Punkte der Curve K geht. Wenn hingegen die Ebene SS_1S_2 und die Kegelfläche F_1 in imaginären Geraden sich schneiden und daher auch die beiden übrigen Wendepunkte A, B der Curve K reell sind, so enthält jede von den beiden Kegelflächen F, F_2 drei reelle Strahlen, deren jeder mit der Curve K nur einen Punkt gemein hat. Ein vierter reeller Strahl der Fläche F hat mit der Curve K zwei reelle oder zwei einander conjungirte imaginäre Punkte gemein, je nachdem er vom Strahle SS_1 durch die Strahlen SA, SB getrennt oder nicht getrennt ist. Eben so liegen in einem vierten reellen Strahle der Fläche F_2 zwei reelle oder zwei imaginäre Punkte der Curve K, je nachdem derselbe vom Strahle $S_2 S_1$ durch die Strahlen $S_2 A_2$, $S_2 B_2$ getrennt oder nicht getrennt ist. Der Punkt S_1 ist in diesem Falle, da die in ihm der Curve K sich anschmiegenden Geraden imaginär sind, mit der stetigen Aufeinanderfolge, welche die übrigen reellen Punkte der Curve bilden, in keinem Zusammenhange und daher ein isolirter Punkt der Curve.

560. Jede unebene Curve K IV. Ordnung, in welcher vier reelle Kegelflächen F, F_1, F_2, F_3 II. Ordnung sich schneiden, hat acht reelle Wendepunkte.

Es seien S, S_1, S_2 S_3 die Mittelpunkte der Kegelflächen F, F_1, F_2, F_3, so schneidet jede dieser Flächen eine Seite des Tetraeders $SS_1 S_2S_3$ in zwei einander conjungirten imaginären Geraden, jede der drei übrigen Seiten aber in einer reellen Linie II. Ordnung. Da nun jede Seite des Tetraeders, welche irgend eine der vier Kegelflächen in zwei imaginären Geraden und also die Curve K in vier imaginären Punkten schneidet, auch noch eine der drei übrigen Kegelflächen in imaginären Geraden schneidet, und da unter den 16 Linien II. Ordnung, in welchen die vier Kegelflächen von den vier Seiten des Tetraeders geschnitten werden, nur vier imaginäre sind, so folgt, dass diese in zwei Seiten $SS_1 S_2$, $SS_1 S_3$ des Tetraeders liegen und dass also jede der beiden übrigen Seiten die Curve K in vier reellen Punkten schneidet.

Die reellen Punkte der Curve K bilden zwei geschlossene Linien L, N, welche durch keinen Punkt mit einander zusammenhängen. Zwei Punkte AB der Linie L liegen in der Ebene $S_1 S_2 S_3$, zwei andere A_1, B_1 in der Ebene SS_2S_3. Eben so wird die Linie N von der Ebene $S_1 S_2 S_3$ in zwei Punkten C, D und von der Ebene SS_2S_3 in zwei andern Punkten C_1, D_1 geschnitten. Die Kegelfläche F wird durch die vier Strahlen SA, SB, SC, SD in vier Theile S (AB), S (BC), S (CD), S (DA) getheilt, so dass ein fünfter reeller Strahl der Fläche durch zwei Punkte der Linie L oder durch zwei Punkte der Linie N oder durch zwei imaginäre Punkte der Curve K geht, je nachdem er dem ersten oder dem dritten oder einem der beiden übrigen Theile angehört. Eben so wird die Kegelfläche F_1 durch die vier Strahlen S_1A_1, S_1B_1, S_1C_1, S_1D_1 in vier Theile getheilt, so dass ein fünfter reeller Strahl der Fläche durch zwei Punkte der Linie L oder durch zwei Punkte der Linie N oder durch zwei imaginäre Punkte der Curve K geht, je nachdem er dem Theile S_1 (A_1B_1) oder dem Theile S_1 (C_1D_1) oder einem der beiden übrigen Theile angehört. Jede reelle Gerade aber, welche in irgend einer von den beiden Kegelflächen F_2, F_3 liegt, geht durch einen Punkt der Linie L und durch einen Punkt der Linie N.

561. Wenn in einer reellen unebenen Curve K IV. Ordnung vier Kegelflächen F, F_1, F_2, F_3 II. Ordnung sich schneiden, so sind diese entweder sämmtlich reell oder sämmtlich imaginär oder es sind zwei reell und zwei imaginär.

Wird nämlich die Curve K aus dem einen S_2 von zwei einander conjungirten imaginären Punkten durch eine Kegelfläche F_2 II. Ordnung projicirt, so wird sie auch aus dem andern S_3 durch eine Kegelfläche F_3 II. Ordnung projicirt. Die Gerade S_2S_3 aber schneidet jede durch die Curve gehende reelle Fläche II. Ordnung in zwei reellen Punkten. Wenn nun auch die Kegelflächen F, F_1 imaginär sind und also zwei einander conjungirte imaginäre Punkte S, S_1 zu Mittelpunkten haben, so enthält jede durch die Curve K gehende reelle Fläche II. Ordnung, da sie zwei einander gegenüberliegende Kanten des Polartetraeders $SS_1S_2S_3$ in reellen Punkten schneidet, zwei reelle Regelschaaren. Wenn aber die Kegelflächen F, F_1 und also auch ihre Mittelpunkte S, S_1 reell sind, so gehen durch die Curve K auch unendlich viele reelle Flächen II. Ordnung, welche die Gerade SS_1 in imaginären Punkten schneiden. Die Ebene H, welche durch die drei Punkte S_1, S_2, S_3 geht, schneidet in diesem Falle die Kegelfläche F_1 in zwei reellen Geraden, von welchen die eine mit der Curve HF und also auch mit der Curve K zwei reelle Punkte A, B gemein hat. Die Kegelfläche F wird durch die Geraden SA, SB in zwei Theile getheilt, so dass ein dritter reeller Strahl der Fläche durch zwei reelle oder durch zwei imaginäre Punkte der Curve K geht, je nachdem er dem einen oder dem andern von den beiden Theilen angehört. Eben so wird die Kegelfläche F_1 durch die Gerade S_1A_1, S_1B_1, welche der Curve K in ihren in der Ebene SS_2S_3 liegenden reellen Wendepunkten A_1, B_1 sich anschmiegen, in zwei Theile getheilt, so dass ein dritter reeller Strahl der Fläche mit der Curve K zwei reelle oder zwei imaginäre Punkte gemein hat, je nachdem er in dem einen oder in dem andern von den beiden Theilen liegt.

---

§. 38.

Projektivische Beziehungen, welche aus der Betrachtung von einfachen Flächensystemen sich ergeben.

562. Gerade Gebilde $PP_1P_2P_3\ldots$, $QQ_1Q_2Q_3\ldots$, welche (532) zu einem und demselben einfachen Flächensysteme $FF_1F_2F_3\ldots$ perspektivisch sind, sind zu einander projektivisch.

Liegen die Geraden PP_1, QQ_1 in einerlei Ebene, so folgt der Satz aus 355. Wenn aber die Geraden PP_1, QQ nicht in einerlei Ebene liegen, so seien M, N diejenigen Punkte derselben, welche alle Flächen des Flächensystems mit einander gemein haben. Es sei ferner R ein ausserhalb der Geraden MN liegender Punkt, so dass auch die Geraden MR, NR Träger von zwei zu dem Flächensysteme perspektivischen geraden Gebilden sind. Da nun je zwei auf einander folgende der vier Geraden PP_1, MR, NR, QQ_1 in einerlei Ebene liegen, so ist der Satz auf den zuerst betrachteten Fall zurückgeführt.

Von der Fläche F_3 soll gesagt werden, dass sie im Sinne $F\,F_1\,F_2$ oder im Sinne $F_2\,F_1\,F$ liege oder zum Sinne $F\,F_1\,F_2$ neutral sich verhalte, je nachdem der Punkt P_3 im Sinne

PP_1P_2 oder im Sinne P_2P_1P liegt oder zum Sinne PP_1P_2 neutral sich verhält. Es geht hieraus von selbst hervor, was es heisst, wenn gesagt wird, dass ein einfaches Flächensystem zu einem Elementargebilde oder zu einem einfachen Liniensysteme oder zu einem andern einfachen Flächensysteme projektivisch sei. Der Wurf $FF_1F_2F_3$ ist dem Wurfe $ff_1f_2f_3$ gleich, wenn dieser dem Wurfe $PP_1P_2P_3$ gleich ist. — Flächensysteme VI. Art sind in diesem §. von der Betrachtung ausgeschlossen.

563. Wenn in einem einfachen Flächensysteme dem Punkte A nur die Gerade a conjugirt ist und man auf jede Fläche des Systems die in Hinsicht auf dieselbe dem Punkte A zugeordnete Ebene bezieht, so sind das Flächensystem und der Ebenenbüschel a projektivisch auf einander bezogen.

Es folgt dieser Satz aus 357, wenn man durch den Punkt A eine Ebene E legt, welche die Gerade a schneidet. Sind dem Punkt A in Hinsicht auf die Flächen F, F_1, F_2, F_3 des gegebenen Flächensystems bezüglich die Ebenen U, U_1, U_2, U_3 zugeordnet, so ist $FF_1F_2F_3 \barwedge E(FF_1F_2F_3) \barwedge E(UU_1U_2U_3) \barwedge UU_1U_2U_3$.

564. Ist in einem einfachen Flächensysteme (F, F_1) dem Punkte A nur die Gerade a, dem Punkte B eine andere Gerade b und zwar nur diese Gerade conjugirt, so giebt es ein aus Geraden bestehendes Gebilde abcd..., welches zu dem geraden Gebilde ABCD... projektivisch und demselben in dem Flächensysteme (F, F_1) conjugirt ist. Hiemit hängt ein anderes aus Geraden bestehendes Gebilde $ff_1f_2f_3$... zusammen, welches nämlich zu dem gegebenen Flächensysteme $FF_1F_2F_3$... projektivisch ist und von jedem dem geraden Gebilde ABCD... in Hinsicht auf eine Fläche F_n des Systems zugeordneten Ebenenbüschel f_n (abcd...) die Axe f_n als die dieser Fläche entsprechende Gerade enthält. Werden die Ebenenbüschel a, b auf die in der vorigen Nummer angegebene Weise auf das Flächensystem $FF_1F_2F_3$... projektivisch bezogen, so erzeugen sie das Gebilde $ff_1f_2f_3$..., während je zwei Ebenenbüschel f, f_1, deren jeder dem geraden Gebilde ABCD... in Hinsicht auf eine Fläche des Systems zugeordnet ist, das Gebilde abcd... erzeugen. Es sind hiernach abcd..., $ff_1f_2f_3$... entweder zwei Regelschaaren, deren jede die Leitschaar der andern ist, oder zwei Strahlenbüschel, welche einerlei Mittelpunkt haben aber nicht in einerlei Ebene liegen, oder

es liegen die Gebilde $a\,b\,c\,d \ldots$, $f f_1 f_2 f_3 \ldots$ in einer und derselben Kegelfläche II. Ordnung. Der zweite Fall findet nur statt, wenn es in der Geraden AB einen Punkt S giebt, welchem in Hinsicht auf alle Flächen des Systems (F, F_1) eine und dieselbe Ebene $f f_1$ zugeordnet ist. In diesem Falle entspricht dem Punkte S des geraden Gebildes ABC... der in der Ebene $f f_1$ liegende Strahl des Büschels $a\,b\,c \ldots$ und der in dem Strahlenbündel S enthaltenen Fläche des Flächensystems $F F_1 F_2 \ldots$ der in der Ebene $a b$ liegende Strahl des Büschels $f f_1 f_2 \ldots$. In Hinsicht auf die erwähnte Fläche ist dem Punkte S jede Ebene, jedem andern Punkt der Geraden AB aber die Ebene $a b$ zugeordnet, daher diese durch den Punkt S geht. Wenn einer von den beiden letztern Fällen statt findet und dem Punkte $a b$ in dem Systeme (F, F_1) nur die Gerade AB conjugirt ist, so enthält die Fläche II. Ordnung, in welcher die beiden Gebilde $a\,b\,c \ldots$, $f f_1 f_2 \ldots$ liegen, jede Gerade, welche durch den Punkt $a b$ geht und in dem Systeme (F, F_1) einem Punkte conjugirt ist.

565. Durch ein einfaches Flächensystem $F F_1 F_2 F_3 \ldots$, dessen Flächen sämmtlich krumme Flächen sind, und eine Ebene U, welche von keiner Kegelfläche des Systems den Mittelpunkt enthält, ist ein zu demselben projektivisches in einer unebenen Curve K III. Ordnung liegendes Punktgebilde $P P_1 P_2 P_3 \ldots$ bestimmt, welchem nämlich jeder der Ebene U in Hinsicht auf eine Fläche des Systems zugeordnete Punkt als der dieser Fläche entsprechende Punkt angehört. Bezieht man (563) jeden Ebenenbüschel, dessen Axe a einem Punkte A der Ebene U conjugirt ist, auf das Flächensystem projektivisch, so dass jeder Fläche des Systems die in Hinsicht auf dieselbe dem Punkte A zugeordnete Ebene entspricht, so erzeugen je drei solche zu dem Flächensysteme und daher auch zu einander projektivische Ebenenbüschel, deren Axen drei nicht in einer und derselben Geraden liegenden Punkten der Ebene U conjugirt sind, die erwähnte Curve K.

Die Ebene U enthält eine zur Curve K projektivische Curve L II. Ordnung, so dass, wenn P, Q homologe Punkte dieser Curven sind, in dem Flächensysteme (F, F_1) dem Punkte P die der Curve L im Punkte Q sich anschmiegende Gerade und dem Punkte Q die der Curve K im Punkte P sich anschmiegende Gerade, mithin jeder von den beiden Curven der der andern sich anschmiegende Strahlenbüschel conjugirt ist. Jedem geraden Gebilde, dessen Träger der Curve L sich anschmiegt, ist eine zur Curve K perspektivische Kegelfläche, jedem geraden Gebilde aber, welches mit der Curve L zwei Punkte gemein hat, eine Regelschaar conjugirt, welche von einer zur Curve K perspcktivischen Regelschaar die Leitschaar ist. Der Curve L ist in Hinsicht auf jede Fläche des Systems (F, F_1) ein Ebenenbüschel II. Ordnung zugeordnet, welcher nämlich aus dem der Fläche entsprechenden Punkte der Curve K den dieser Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschel projicirt. Der Curve K ist in Hinsicht auf jede Regelfläche des Flächensystems ein Ebenenbüschel III. Ordnung zugeordnet, welcher von der Ebene U in dem der Curve L sich anschmiegenden Strahlenbüschel geschnitten wird.

Die Mittelpunkte von allen Flächen eines einfachen Flächensystems, welches weder eine Cylinderfläche noch eine Fläche enthält, die der Inbegriff von zwei Ebenen oder selbst eine Ebene ist, liegen nach dem obigen Satze in einer und derselben unebenen Curve III. Ordnung.

566. Wenn in einem einfachen Flächensysteme dem Punkte S der Ebene U die Ebene H zugeordnet aber keinem von S verschiedenen Punkte der Ebene U eine in der Ebene H liegende Gerade conjugirt ist, so giebt es in dieser Ebene eine Curve K II. Ordnung, welche auf das Flächensystem projektivisch so bezogen werden kann, dass jedem Punkte derselben in Hinsicht auf die Ihm entsprechende Fläche des Systems die Ebene U zugeordnet ist. ist ABC... ein gerades Gebilde, welches in der Ebene U liegt aber nicht durch den Punkt S geht, so liegen die in 564 durch abc..., $ff_1 f_1$ ... bezeichneten Gebilde in einer krummen Fläche II. Ordnung, welche die Ebene H in der Curve K schneidet.

Ist in einem einfachen Flächensysteme keinem Punkte die Ebene U aber einem in dieser Ebene liegenden Punkte S die Ebene H zugeordnet und einem andern Punkte A der Ebene U eine in der Ebene H liegende Gerade a conjugirt, so kann man das Flächensystem auf das gerade Gebilde a projektivisch so beziehen, dass jedem Punkte dieses Gebildes in Hinsicht auf die ihm entsprechende Fläche des Systems die Ebene U zugeordnet ist.

§. 39.

Bestimmung von Flächen II. Ordnung durch gegebene Punkte.

567. Durch sieben Punkte A, B, C, D, M, N, P sind unendlich viele Flächen II. Ordnung möglich, welche nicht alle einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören.

Da nämlich durch zwei Gerade und drei Punkte wenigstens eine Fläche II. Ordnung möglich ist, so giebt es mehr als eine und daher unendlich viele Flächen II. Ordnung, welche durch die Gerade A B und durch die fünf Punkte C, D, M, N, P gehen. Gehören alle diese Flächen einem und demselben einfachen Flächensysteme an, so sei u eine Gerade, welche nur in einer Fläche F des Systems liegt und durch zwei der sieben gegebenen Punkte geht. Legt man nun durch die Gerade u und durch die fünf übrigen Punkte eine von F verschiedene Fläche II. Ordnung, so gehört diese jenem Flächensysteme nicht an.

Liegt irgend einer von acht gegebenen Punkten in jeder Fläche II. Ordnung, welche durch die sieben übrigen geht, so lassen sich durch die acht Punkte unendlich viele Flächen II. Ordnung legen, welche nicht alle einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören.

568. Wenn R, S zwei Punkte, F, F_1, F_2 aber drei Flächen II. Ordnung sind, welche nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, so giebt es wenigstens eine Fläche F_3 II. Ordnung, welche durch die beiden gegebenen Punkte und durch jeden gemeinschaftlichen Punkt der drei gegebenen Flächen geht, so dass überdiess je zwei in Hinsicht auf diese drei Flächen einander conjugirte Punkte auch in Hinsicht auf die Fläche F_3 einander conjugirt sind.

Durch den Punkt R kann man nämlich zwei Flächen G, G_1 II. Ordnung legen, von welchen die eine dem Systeme (F, F_1), die andere aber dem Systeme (F, F_2) oder (F_1, F_2) angehört. Bemerkt man nun, dass wenigstens eine Fläche F_3 des Systems (G, G_1) durch den Punkt S geht, so folgt der Satz.

Aus dem obigen und dem vorhergehenden Satze kann man schliessen, dass durch neun gegebene Punkte wenigstens eine

Fläche II. Ordnung möglich ist, daher durch acht gegebene Punkte unendlich viele Flächen II. Ordnung gelegt werden können.

569. Ist von der Bestimmung einer Fläche II. Ordnung durch gegebene Punkte die Rede, so heissen Punkte, deren Anzahl n nicht grösser als neun ist, von einander unabhängig, wenn keiner derselben in jeder Fläche II. Ordnung liegt, welche durch die n — 1 übrigen geht. Sind also n Punkte von einander unabhängig, so sind auch je n — 1 derselben von einander unabhängig.

Wenn durch neun gegebene Punkte nur eine Fläche II. Ordnung möglich ist, so kann man durch je acht derselben unendlich viele Flächen II. Ordnung legen, welche nicht durch den neunten gehen, daher die neun Punkte von einander unabhängig sind. — Gehören alle Flächen II. Ordnung, welche durch dieselben acht gegebenen Punkte gehen, einem und demselben einfachen Flächensysteme (F, F_1) an, so sind (567) die acht Punkte von einander unabhängig. Der letztere Satz folgt auch aus dem erstern, wenn man bemerkt, dass die acht Punkte mit jedem Punkte, der nur in einer Fläche des Systems (F, F_1) liegt, neun von einander unabhängige Punkte bilden.

570. Sieben Punkte sind, wie man sich leicht überzeugt, von einander unabhängig, wenn keine vier in einer und der selben Geraden, keine sechs in einer und derselben Linie II. Ordnung und auch nicht alle sieben in einerlei Ebene liegen.

In jeder Fläche F II. Ordnung, welche durch sieben gegebene von einander unabhängige Punkte A, B, C, D, M, N, P geht, kann man noch zwei Punkte R, S annehmen, so dass von den neun Punkten, welche man alsdann hat, keine vier in einer und derselben Geraden, aber fünf in einer und derselben Linie K II. Ordnung liegen, während die vier übrigen die Eckpunkte eines Tetraeders sind, so dass überdiess keiner dieser Punkte in der Linie K und höchstens einer derselben mit der Linie K in einerlei Ebene liegt, folglich durch die neun Punkte keine von F verschiedene Fläche II. Ordnung möglich ist.

571. Wenn vier Flächen F, F_1, F_2, F_3 II. Ordnung durch dieselben sieben von einander unabhängigen Punkte A, B, C, D, M, N P gehen und die drei erstern Flächen nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, so liegt jeder Punkt, welchen diese mit einander gemein haben, auch in der vierten Fläche. Eben so

sind je zwei in Hinsicht auf die drei erstern Flächen einander conjugirte Punkte auch in Hinsicht auf die vierte einander conjugirt.

Man nehme (570) in der Fläche F_3 zwei Punkte R, S an, welche mit den sieben gegebenen Punkten in keiner andern Fläche II. Ordnung liegen, so folgt der Satz aus 568. — Gehen drei Flächen II. Ordnung, welche nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, durch dieselben acht Punkte, so liegt entweder der achte Punkt in jeder Fläche II. Ordnung, welche durch die sieben erstern geht, oder es sind schon die sieben erstern Punkte nicht unabhängig von einander.

572. Durch acht von einander unabhängige Punkte ist (571) ein einfaches Flächensystem bestimmt, welchem nämlich jede Fläche II. Ordnung angehört, die durch die acht gegebenen Punkte geht. Die Flächen des erwähnten Systems haben entweder eine Ebene und eine ausserhalb derselben liegende Gerade oder eine unebene Linie IV. Ordnung, welche durch die acht gegebenen Punkte bestimmt ist, mit einander gemein. Der erstere Fall findet statt, wenn sechs von den acht Punkten in einerlei Ebene liegen, so wie auch, wenn nur fünf von den acht Punkten in einerlei Ebene und die drei übrigen in einer und derselben Geraden liegen.

573. Durch neun von einander unabhängige Punkte ist eine Fläche II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die neun gegebenen Punkte geht. Denn je acht von den neun Punkten bestimmen ein einfaches Flächensystem, von welchem nur eine Fläche durch den neunten Punkt geht. — Eine Gerade vertritt die Stelle von drei Punkten. Zwei Gerade vertreten die Stelle von fünf oder sechs von einander unabhängigen Punkten je nachdem sie in einerlei oder nicht in einerlei Ebene liegen.

Gleichwie acht von einander unabhängige Punkte mit jedem Punkte, der nur in einer durch sie gehenden Fläche II. Ordnung liegt, neun von einander unabhängige Punkte bilden, so bilden auch, wie indirekt aus 567 und 571 folgt, sieben von einander unabhängige Punkte mit jedem Punkte, der nicht in jeder durch sie gehenden Fläche II. Ordnung liegt, acht von einander unabhängige Punkte.

574. Liegen sieben von einander unabhängige Punkte in einer und derselben Linie K III. Ordnung, so geht jede Fläche II. Ordnung, welche durch die sieben Punkte geht, auch durch

die Linie K, sei es nun, dass diese (476) eine Curve III. Ordnung ist, oder aus einer Geraden und einer Curve II. Ordnung oder aus drei Geraden besteht.

Sind zwei Punkte in Hinsicht auf drei Flächen II. Ordnung einander conjugirt, welche durch eine und dieselbe unebene Linie K III. Ordnung gehen aber nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, so sind sie (571) in Hinsicht auf jede durch die Linie K gehende Fläche II. Ordnung einander conjugirt, daher man auch sagen kann, dass die beiden Punkte in Hinsicht auf die Linie K einander conjugirt sind.

Durch eine unebene Linie K III. Ordnung und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt P ist ein einfaches Flächensystem bestimmt, dem nämlich jede Fläche II. Ordnung angehört, welche durch die gegebene Linie und durch den gegebenen Punkt geht. Die Flächen des erwähnten Systems haben entweder eine Ebene und eine ausserhalb derselben liegende Gerade oder eine Linie IV. Ordnung mit einander gemein, welche aus der Linie K und einer durch den Punkt P gehenden Geraden besteht. Im letztern Falle giebt es nur einen Punkt, welcher dem Punkte P in Hinsicht auf die Linie K conjugirt ist.

575. Durch eine Gerade u und fünf ausserhalb derselben liegende Punkte A, B, C, D, E welche mit je drei Punkten der gegebenen Geraden acht von einander unabhängige Punkte bilden ist ein einfaches Flächensystem bestimmt, welchem nämlich jede Fläche II. Ordnung angehört, die durch die gegebene Gerade und durch die gegebenen Punkte geht. Die Flächen dieses Systems haben entweder eine Ebene und eine ausserhalb derselben liegende Gerade oder eine Linie IV. Ordnung mit einander gemein, welche aus der Geraden u und einer durch die fünf gegebenen Punkte gehenden Linie III. Ordnung zusammengesetzt ist.

Wenn es nur eine Fläche F II. Ordnung giebt, welche durch die Gerade u und durch die sechs Punkte A, B, C, D, E, P geht und diese Fläche eine krumme Fläche ist, so liegen die fünf Punkte A, B, C, D, E in einer unebenen Linie K III. Ordnung, welche sowohl mit der Geraden u als auch mit einer durch den Punkt P gehenden Geraden v eine Linie IV. Ordnung bildet. Je nachdem nun die Geraden u, v sich schneiden oder nicht in einerlei Ebene liegen, ist die Fläche F, welche durch die drei Linien u, K, v geht, eine Kegelfläche oder Regelfläche.

576. Wenn zwei Punkte R, S in Hinsicht auf eine unebene Linie K III. Ordnung und in Hinsicht auf eine Fläche F II. Ordnung, welche die Linie K in sechs Punkten A, B, C, D, M, N schneidet, einander conjugirt sind, so sind sie auch in Hinsicht auf jede andere durch diese sechs Punkte gehende Fläche F_1 II. Ordnung einander conjugirt.

Wenn nämlich die Fläche F_1 nicht durch die Linie K geht, so sei P ein siebenter Punkt dieser Linie und F_2 diejenige Fläche des einfachen Flächensystems (F, F_1), welche durch den Punkt P und also auch (574) durch die Linie K geht. Da nun die drei Flächen F, F_1, F_2 einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören und die Punkte R, S sowohl in Hinsicht auf die erste als auch in Hinsicht auf die dritte einander conjugirt sind, so sind sie auch in Hinsicht auf die zweite einander conjugirt.

577. Durch sechs Punkte A, B, C, D, M, N, von welchen keine drei in einer und derselben Geraden und keine fünf in einerlei Ebene liegen, und eine Gerade u, welche durch keinen der gegebenen Punkte geht aber mit der durch diese Punkte gehenden Linie K III. Ordnung eine Linie IV. Ordnung bildet, sind zwei Punkte R, S bestimmt, welche nämlich in der gegebenen Geraden liegen und in Hinsicht auf jede durch die sechs gegebenen Punkte gehende Fläche II. Ordnung einander conjugirt sind.

Es sei F irgend eine Fläche II. Ordnung, welche die Linie K in den sechs gegebenen Punkten schneidet, so sind die Ordnungspunkte R, S des involutorischen Gebildes u K. u F... sowohl in Hinsicht auf die Linie K als auch in Hinsicht auf die Fläche F und mithin (576) in Hinsicht auf jede durch die sechs gegebenen Punkte gehende Fläche II. Ordnung einander conjugirt. In Hinsicht auf jede Fläche II. Ordnung, welche durch die sechs gegebenen Punkte und durch den Punkt R geht, ist diesem Punkte die Gerade u conjugirt.

578. Wenn in Hinsicht auf jede Fläche II. Ordnung, welche durch die sieben Punkte A, B, C, D, M, N, R geht, dem Punkte R die Gerade u conjugirt ist, so giebt es wenigstens eine Fläche II. Ordnung, welche durch die Geraden RA, RB, RC, RD, RM, RN geht.

Liegen nämlich irgend zwei RA, RB dieser Geraden mit der Geraden u nicht in einerlei Ebene, so sei F diejenige oder eine

Fläche II. Ordnung, welche durch die beiden Geraden RA, RB und durch die vier Punkte C, D, M, N geht. Da nun in Hinsicht auf die Fläche F dem Punkte R jede der drei Geraden RA, RB, u conjugirt ist, diese aber nicht in einerlei Ebene liegen, so ist die Fläche F in dem Strahlenbündel R enthalten.

579. Wenn aus dem einen R von sieben Punkten A, B, C, D, M, N, R, deren keine drei in einer und derselben Geraden und keine fünf in einerlei Ebene liegen, die sechs übrigen durch Gerade projicirt werden, welche einer und derselben Fläche F II. Ordnung angehören, so giebt es eine aber auch nur eine Gerade u, welche jenem Punkte R in Hinsicht auf jede durch die sieben gegebenen Punkte gehende Fläche II. Ordnung conjugirt ist.

Liegen die sieben gegebenen Punkte in einer und derselben Curve III. Ordnung, so ist u die dieser Curve im Punkte R sich anschmiegende Gerade. Wenn aber der Punkt R ausserhalb der durch die sechs Punkte A, B, C, D, M, N gehende Linie K III. Ordnung liegt, so haben alle Flächen II. Ordnung, welche durch die Linie K und durch den Punkt R gehen, auch noch eine durch diesen Punkt gehende Gerade u mit einander gemein. Da nun der Punkt R und die Gerade u auch in Hinsicht auf die Fläche F einander conjugirt sind, welche nicht durch die Linie K geht, so sind sie (571) in Hinsicht auf jede durch die sieben gegebenen Punkte gehende Fläche II. Ordnung einander conjugirt. Bemerkt wird noch, dass die Gerade u einen Punkt S enthält, welcher dem Punkte R in Hinsicht auf jede durch die sechs Punkte A, B, C, D, M, N gehende Fläche II. Ordnung conjugirt ist.

580. Wenn drei Flächen F, F_1, F_2 II. Ordnung, welche nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, acht Punkte A, B, C, D, M, N, P, Q, deren keine drei in einer und derselben Geraden und keine fünf in einerlei Ebene liegen, mit einander gemein haben, so haben sie entweder eine Curve III. Ordnung, oder nur jene acht Punkte mit einander gemein. Aber auch im letztern Falle bildet jede Gerade, welche durch zwei von den acht Punkten geht, mit der durch die sechs übrigen Punkte gehenden Linie III. Ordnung, eine Linie IV. Ordnung.

Es seien G, G_1 zwei Flächen II. Ordnung, deren jede durch die Gerade PQ und die fünf Punkte A, B, C, D, M, mithin auch

(571) durch den Punkt N geht, so schneiden sich dieselben in einer Linie IV. Ordnung, welche aus der Geraden PQ und der durch die sechs Punkte A, B, C, D, M, N gehenden Linie III. Ordnung zusammengesetzt ist. Da nun wenigstens eine der drei Flächen F, F_1, F_2 dem einfachen Flächensysteme (G, G_1) nicht angehört und also nicht durch die Gerade PQ geht, jeder Punkt aber, welchen die drei Flächen F, F_1, F_2 mit einander gemein haben, auch ein gemeinschaftlicher Punkt der Flächen G, G_1 ist, so folgt der Satz.

Haben also eine Linie IV. Ordnung und eine nicht durch diese Linie gehende Fläche II. Ordnung acht Punkte mit einander gemein, von welchen keine drei in einer und derselben Geraden und keine fünf in einerlei Ebene liegen, so haben sie entweder eine Curve III. Ordnung oder nur jene acht Punkte mit einander gemein. In beiden Fällen geht (571) jede Fläche II. Ordnung, welche durch sieben von den acht Punkten geht, auch durch den achten.

581. Durch sieben Punkte A, B, C, D, M, N, P, deren keine sechs aus dem siebenten durch Gerade projicirt werden, welche einer und derselben Fläche II. Ordnung angehören, ist ein achter Punkt Q bestimmt, der nämlich in jeder Fläche II. Ordnung liegt, welche durch die sieben gegebenen Punkte geht.

Denn in der Geraden, welche durch den Punkt P geht und mit der durch die sechs Punkte A, B, C, D, M, N gehenden Linie III. Ordnung eine Linie IV. Ordnung bildet, giebt es zwei Punkte R, S, welche in Hinsicht auf jede durch die sechs Punkte A, B, C, D, M, N gehende Fläche II. Ordnung einander conjugirt sind, daher jede Fläche II Ordnung, welche durch die sieben gegebenen Punkte geht, auch durch den Punkt Q geht, welcher vom Punkte P durch die Punkte R, S harmonisch getrennt ist. Da es hiernach unendlich viele Flächen II. Ordnung giebt, welche nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören und die acht Punkte A, B, C, D, M, N, P, Q, von welchen keine drei in einer und derselben Geraden, keine fünf in einerlei Ebene und keine sieben in einer und derselben Linie III. Ordnung liegen, mit einander gemein haben so folgt noch, dass jede Fläche II. Ordnung und also auch jede Linie IV. Ordnung, welche durch irgend sieben von den acht Punkten geht, auch durch den achten geht, aber keine zwei solche Linien einen neunten Punkt mit einander gemein haben.

Liegen die vier Punkte A, B, C, D in einerlei Ebene, so liegen auch die vier Punkte M, N, P, Q in einerlei Ebene. Die in der Schnittlinie der beiden Ebenen liegenden und in Hinsicht auf das Viereck ABCD einander conjugirten Punkte sind alsdann in Hinsicht auf jede durch alle acht Punkte gehende Fläche II. Ordnung und also auch in Hinsicht auf das Viereck MNPQ einander conjugirt.

582. Wenn ABCD, MNPQ Polartetraeder eines und desselben Polarsystems sind, so geht jede Fläche II. Ordnung, welche durch die vier Eckpunkte des einen und drei Eckpunkte des andern Tetraeders geht, auch durch den vierten Eckpunkt des andern.

Haben die Tetraeder eine Kante mit einander gemein, so haben sie auch die derselben gegenüberliegende Kante mit einander gemein. — Haben die Tetraeder keine Kante aber einen Eckpunkt mit einander gemein, so dass etwa M mit A zusammenfällt, so sind BCD, NPQ Polardreiecke eines und desselben ebenen Polarsystems, daher (G. 300) jede Fläche II. Ordnung, welche durch die drei Eckpunkte des einen dieser Dreiecke und zwei Eckpunkte des andern geht, auch durch den dritten Eckpunkt des andern geht. Wenn die Tetraeder weder eine Kante noch einen Eckpunkt und also auch keine Seite mit einander gemein haben, aber der Punkt Q in der Geraden AB liegt, so geht die Ebene MNP durch die Gerade CD und schneidet die Gerade AB in einem Punkte H, so dass HCD, MNP Polardreiecke eines und desselben ebenen Polarsystems sind, woraus leicht folgt, dass der Satz auch in diesem Falle gilt. — Wenn endlich die Polartetraeder weder einen Eckpunkt mit einander gemein haben noch drei von den acht Eckpunkten in einer und derselben Geraden und also auch keine fünf in einerlei Ebene liegen, so giebt es doch eine Fläche F II. Ordnung, die durch die vier Punkte A, B, M, N und durch die beiden Geraden u, v geht, von welchen die eine u den Punkt C mit dem Punkte D, die andere v aber den Punkt P mit dem Punkte Q verbindet. Liegen nämlich zwei von den vier Punkten A, B, M, N mit der u in einerlei Ebene, so liegen die beiden übrigen mit der Geraden v in einerlei Ebene. Wenn aber die Gerade MN die Ebenen u A, u B in zwei verschiedenen Punkten B_1, A_1, schneidet und keiner dieser Punkte mit einem der Punkte M, N zusammenfällt, so bemerke man, dass in dem Polarsysteme dem Wurfe $A_1 B_1 N M$ der Wurf v (ABMN) zugeordnet ist. Da hiernach v (ABMN) $\barwedge$ $A_1 B_1 N M$ $\barwedge$ $B_1 A_1 M N$ $\barwedge$ u (ABMN) ist, so liegen auch in diesem Falle die vier Punkte A, B, M, mit den beiden Geraden u, v in einer und derselben Fläche F II. Ordnung. Eben so kann man durch die Eckpunkte der Tetraeder ABCD, MNPQ auch zwei Flächen II. Ordnung legen, von welchen die eine F_1 durch die Gerade u und eine ausserhalb der Fläche F liegende Kante w des Tetraeders MNPQ, die andere F_2 aber durch die Gerade w und eine ausserhalb der Fläche F_1 liegende Kante des Tetraeders ABCD geht. Da nun die Flächen F_1, F_2 die Gerade w mit einander gemein haben, welche die Fläche F in zwei Punkten schneidet, mithin die Flächen F, F_1, P_2 nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, so geht (571) jede Fläche II. Ordnung, welche durch die vier Eckpunkte des einen Tetraeders und drei Eckpunkte des andern geht, auch durch den vierten Eckpunkt des andern.

583. Wenn MNPQ, ABCD Polartetraeder eines und desselben Polarsystems sind, so schneidet jede Gerade PQ, welche von irgend einem der beiden Tetraeder zwei Eckpunkte verbindet, die Ordnungsfläche des Polarsystems in zwei Punkten R, S, welche in Hinsicht auf jede Fläche II. Ordnung, die durch die beiden übrigen Eckpunkte jenes Tetraeders und durch die vier Eckpunkte des andern Tetraeders geht, einander conjugirt sind.

Es seien F, F_1 zwei Flächen II. Ordnung, welche durch die Punkte M, N, A, B, C, D gehen und von welchen die eine F auch noch durch den Punkt R, die andere F_1 aber durch keinen von den beiden Punkten R, S gehe. Haben nun die Fläche F_1 und die Gerade RS den Punkt P_1 mit einander gemein, so schneiden sie sich auch (582) in dem Punkte Q_1, welcher vom erstern durch die Punkte R, S harmonisch getrennt und daher in dem Polarsysteme der Ebene MNP_1 zugeordnet ist, woraus hervorgeht, dass die Punkte R, S in Hinsicht auf die Fläche F_1 einander conjugirt sind. Geht die Fläche F durch die Gerade RS, so sind schon deshalb die Punkte R, S in Hinsicht auf dieselbe einander conjugirt. Wenn aber die Fläche F nicht durch die Gerade RS geht und P_2 irgend ein von S verschiedener und ausserhalb der beiden Flächen F, F_1 liegender Punkt der Geraden RS ist, so schneidet diese die durch den Punkt P_2 gehende Fläche F_2 des einfachen Flächensystems (F, F_1) im Punkte P_2 und in dem Punkte Q_2, welcher vom erstern durch die Punkte R, S harmonisch getrennt ist. Da hiernach die Punkte R, S sowohl in Hinsicht auf die Fläche F_1 als auch in Hinsicht auf die Fläche F_2 einander conjugirt sind, so sind sie auch in Hinsicht auf die Fläche F einander conjugirt.

Eben so sind, wenn in Hinsicht auf eine Curve II. Ordnung, welche durch die Punkte R, S geht, jedem Eckpunkte des Dreiecks ABC die ihm gegenüberliegende Seite desselben und der Geraden RS der Punkt M zugeordnet ist, die Punkte R, S in Hinsicht auf jede durch die vier Punkte A, B, C, M gehende Linie II. Ordnung einander conjugirt.

584. Wenn in einem Polarsysteme jedem Eckpunkte des Tetraeders ABCD die ihm gegenüberliegende Seite desselben zugeordnet ist und auch der Punkt M ausserhalb der ihm zugeordneten Ebene U liegt, so schneidet diese je zwei durch den Punkt M gehende und in dem Polarsysteme einander conjugirte Ebenen in zwei Geraden g, h, welche mit den fünf Punkten A, B, C, D, M in einer und derselben Fläche II. Ordnung liegen.

Die Ebene U schneidet die Ordnungsfläche des Polarsystems in einer Curve K II. Ordnung, welche wenigstens mit der einen g von den beiden Geraden g, h zwei Punkte R, S gemein hat. Wenn nun P, Q irgend zwei durch die Punkte R, S harmonisch getrennte Punkte sind und N denjenigen in der Geraden h liegenden Punkt bezeichnet, welcher in Hinsicht auf die Curve K der Geraden g zugeordnet ist, so ist auch MNPQ ein Polartetraeder des im Satze angenommenen Polarsystems, daher (582) die durch die beiden Geraden g, h und durch die vier Punkte A, B, C, D gehende Fläche II. Ordnung auch durch den Punkt M geht.

585. Wenn von den fünf Punkten A, B, C, D, M keine vier in einerlei Ebene liegen und eine durch sie gehende Fläche F II. Ordnung eine Ebene U, welche durch keinen derselben geht, in zwei Geraden g, h schneidet, so sind in dem Polarsysteme, in welchem jedem Eckpunkte des Tetraeders ABCD die ihm gegenüberliegende Seite desselben und dem Punkte M die Ebene U zugeordnet ist, die Ebenen Mg, Mh einander conjugirt.

Es seien H_1, H_2 irgend zwei Ebenen, welche durch den Punkt M gehen und in dem erwähnten Polarsysteme der Ebene Mg conjugirt sind, so giebt es (584) zwei durch die Gerade g und durch die fünf Punkte A, B, C, D, M gehende Flächen II. Ordnung, von welchen überdiess die eine F_1 durch die Gerade U H_1, die andere F_2 aber durch die Gerade UH_2 geht. Da nun (575) die Flächen F, F_1, F_2 einem und demselben einfachen Flächensysteme und also die Linien UF, UF_1, UF_2 einem und demselben einfachen Liniensysteme angehören, so geht die Gerade h und mithin auch die Ebene Mh durch den Punkt $UH_1 H_2$, welcher in dem Polarsysteme der Ebene Mg zugeordnet ist.

586. Wenn jede Fläche II. Ordnung, welche durch die vier Eckpunkte des Tetraeders ABCD und irgend drei Eckpunkte des Tetraeders MNPQ geht, auch durch den vierten Eckpunkt dieses Tetraeders geht, so sind die beiden Tetraeder Polartetraeder eines und desselben Polarsystems.

Haben die Tetraeder eine Kante mit einander gemein, so haben sie nach der Annahme auch die derselben gegenüberliegende Kante mit einander gemein. Haben die Tetraeder keine Kante aber einen Eckpunkt mit einander gemein, so dass etwa der Punkt M mit dem Punkte A zusammenfällt, so sind die Dreiecke BCD, NPR, da ihre sechs Eckpunkte in einer und derselben Linie II. Ordnung liegen, Polardreiecke eines und desselben ebenen Polarsystems. Sowohl in diesem als auch im erstern Falle giebt es, wie man sich leicht überzeugt, unendlich viele Polarsysteme, von welchen die gegebenen Tetraeder Polartetraeder sind. Es sind hiernach nur noch die Fälle zu betrachten, in welchen die Tetraeder weder eine Kante noch einen Eckpunkt mit einander gemein haben.

Liegt der Punkt M ausserhalb der vier Ebenen ABC, ABD, ACD, BCD, so geht, wie aus der Annahme sich ergiebt, die Ebene NPQ durch keinen der vier Punkte A, B, C, D. Da nun jede Fläche II. Ordnung, welche durch zwei Seiten des Dreiecks NPQ und durch die vier Eckpunkte des Tetraeders ABCD geht, auch durch den Punkt M geht, so sind (585) in dem Polarsysteme, in welchem jedem Eckpunkte des Tetraeders ABCD die ihm gegenüberliegende Seite desselben und dem Punkte M die Ebene NPQ zugeordnet ist, die drei Ebenen MNP, MNQ, MPQ einander conjugirt, daher auch MNPQ ein Polartetraeder des erwähnten Systems ist. Eben so folgt der Satz aus 585, wenn irgend ein Eckpunkt des Tetraeders ABCD ausserhalb der vier Seiten des Tetraeders MNPQ liegt. Die Fälle, in welchen eine Kante des einen Tetraeders durch einen Eckpunkt des andern geht, sind unter den bereits betrachteten begriffen. Liegen nämlich die drei Punkte M, N, A in einer und derselben Geraden, so liegen die fünf Punkte B, C, D, P, Q mit einem Punkte der Geraden MN in einer und derselben Linie II. Ordnung und wenigstens zwei von den drei Punkten B, C, D ausserhalb der vier Ebenen MNP, MNQ, MPQ, NPQ. Wenn endlich jeder Eckpunkt eines jeden von den beiden Tetraedern ABCD, MNPQ in einer Seite des andern und zwar der Punkt M in der Ebene ABC, mithin der Punkt D in der Ebene NPQ liegt, so sei K die Curve II. Ordnung, in Hinsicht auf welche jedem Eckpunkte des Dreiecks ABC die ihm gegenüberliegende Seite desselben und dem Punkte M die Schnittlinie u der Ebenen ABC, NPQ zugeordnet ist. Es sei ferner K_1 die Curve II. Ordnung, in Hinsicht auf welche jedem Eckpunkte des Dreiecks NPQ die ihm gegenüberliegende Seite desselben und dem Punkte D die Gerade u zugeordnet ist. Da nun die Curven K, K_1 diejenigen Punkte der Geraden u, welche (581) in Hinsicht auf die beiden Vierecke ABCM, DNPQ einander conjugirt sind, mit einander gemein haben, so giebt es ein Polarsystem, dessen Ordnungsfläche durch die beiden Curven K, K_1 geht und in welchem überdies (450) die Ebenen ABC, NPQ einander conjugirt, folglich je zwei einander gegenüberliegende Elemente sowohl des Tetraeders ABCD als auch des Tetraeders MNPQ einander zugeordnet sind.

587. Wenn in einem Nullsysteme den Seiten BCD, ACD, ABD, ABC des Tetraeders ABCD die Eckpunkte A_1, B_1, C_1, D_1 des Tetraeders $A_1 B_1 C_1 D_1$ und also den Seiten des letztern die Eckpunkte der erstern zugeordnet sind, die beiden Tetraeder aber keine Kante mit einander gemein haben, so sind dieselben Polartetraeder eines und desselben Polarsystems.

Da nämlich eine Fläche II. Ordnung, welche durch die acht Eckpunkte der Tetraeder ABCD, $A_1 B_1 C_1 D_1$ geht, aus den Ebenen DAB, $D_1 A_1 B_1$, eine andere solche Fläche aus den Ebenen DAC, $D_1 A_1 C_1$ und eine dritte aus den Ebenen DBC, $D_1 B_1 C_1$ besteht, diese drei Flächen aber nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, so geht (571) jede Fläche II. Ordnung, welche durch sieben von den acht Punkten geht, auch durch den achten, woraus der Satz folgt.

588. Wenn die acht Eckpunkte von zwei Tetraedern ABCD,

MNPQ, welche nämlich keinen Eckpunkt mit einander gemein haben, in einer und derselben Curve K III. Ordnung liegen, so schmiegen ihre acht Seiten einer und derselben Curve III. Ordnung sich an.

Denn nach 586 sind ABCD, MNPQ Polartetraeder eines und desselben Polarsystems. In diesem Systeme aber ist der Curve K ein Ebenenbüschel III. Ordnung zugeordnet, welchem die acht Seiten der Tetraeder angehören.

589. Wenn durch die sechs Punkte A, B, C, D, M, N und die Gerade u nur eine Fläche F II. Ordnung möglich ist und diese Fläche nicht aus zwei Ebenen besteht, so schneidet sie die Ebene uN in der Geraden u und in einer durch den Punkt N gehenden Geraden v, welche man auf folgende Art finden kann:

Geht die Ebene uN durch einen der fünf Punkte A, B, C, D, M, so geht durch diesen auch die Gerade v. — Liegen vier von den fünf Punkten A, B, C, D, M in einerlei Ebene und also in einer Linie II. Ordnung, welche mit der Geraden u eine Linie K III. Ordnung bildet, so ist v diejenige durch den Punkt N gehende Gerade, welche mit der Linie K eine Linie IV. Ordnung bildet. — Findet keiner der betrachteten Fälle statt, so ist (585) in dem Polarsysteme, in welchem jedem Eckpunkte des Tetraeders ABCD die ihm gegenüberliegende Seite desselben und dem Punkte M die Ebene uN zugeordnet ist, der Ebene Mu ein von N verschiedener Punkt P der Geraden v zugeordnet. Die Ebene uN erscheint in diesem Falle als Träger eines ebenen Polarsystems, in welchem jeder Geraden, die von einer Seite des Tetraeders ABCD die Spur ist, die Projektion des dieser Seite gegenüberliegenden Eckpunktes aus dem Projektionscentrum M, der Geraden u aber der Punkt P zugeordnet ist.

590. Wenn von den sieben Punkten A, B, C, D, M, N, P keine drei in einer und derselben Geraden und keine fünf in einerlei Ebene liegen, ABCD aber ein ebenes Viereck ist, so giebt es ein einfaches Liniensystem I. oder II. Art, welchem nämlich jede Linie II. Ordnung angehört, in der die Ebene MNP von einer durch die sieben gegebenen Punkte gehenden Fläche II. Ordnung geschnitten wird. Es werde die Ebene MNP durch U, der Inbegriff der Ebenen MNP, ABC aber durch F bezeichnet. Es seien ferner F_1, F_2, F_3 drei Flächen II. Ordnung, welche durch sieben gegebenen Punkte gehen und die Ebene U in drei verschiedenen Linien schneiden. Da nun die drei

Flächen F, F_1, F_2 nicht einem und demselben einfachen Flächensysteme angehören, so liegt (571) jeder Punkt, welchen die Linie UF_1, UF_2 mit einander gemein haben, auch in der Linie UF_3. Eben so sind je zwei Punkte, welche in Hinsicht auf die beiden Linien UF_1, UF_2 einander conjugirt sind, auch in Hinsicht auf die Linie UF_3 einander conjugirt. — Zu jeder Linie K II. Ordnung, welche durch die vier Punkte A, B, C, D geht, giebt es eine Linie K_1, welche dem einfachen Liniensytseme (UF_1, UF_2) angehört und mit der erstern eine Linie IV. Ordnung bildet. Geht die Linie K durch einen der Punkte, in welchen die Ebene ABC die Geraden MN, MP, NP schneidet, so besteht die Linie K_1 aus zwei Geraden.

591. Wenn von den acht Punkten A, B, C, D, M, N, P, Q keine vier in einerlei Ebene liegen, so ist die Ebene U, welche durch die drei Punkte N, P, Q geht, der Träger eines ebenen Polarsystems, in welchem jeder Geraden, die von einer Seite des Tetraeders $ABCD$ die Spur ist, die Projektion des dieser Seite gegenüberliegenden Eckpunktes aus dem Punkte M zugeordnet ist. Geht nun jede Fläche II. Ordnung, welche durch sieben von den acht gegebenen Punkten geht, auch durch den achten, so ist (586) NPQ ein Polardreieck des erwähnten Polarsystems. Wenn aber alle Flächen II. Ordnung, welche durch die acht gegebenen Punkte gehen, einem und demselben einfachen Flächensysteme (F, F_1) angehören und also NPQ kein Polardreieck des Polarsystems ist, so hat man folgende drei Fälle zu unterscheiden:

Ist in dem Polarsysteme einer Seite NP des Dreiecks NPQ der ihr gegenüberliegende Eckpunkt Q zugeordnet, so schneidet (584) die Ebene U jede Fläche des Systems (F, F_1) in der Geraden NP und in einer durch den Punkt Q gehenden Geraden, daher $U(F, F_1)$ ein Liniensystem VIII. Art ist. — Sind in dem Polarsysteme zwei Seiten NP, NQ des Dreiecks NPQ einander conjugirt, während der Pol N_1 der dritten Seite ausserhalb der beiden erstern liegt, so schneidet die Ebene U eine Fläche des Systems (F, F_1) in den Geraden NP, NQ, eine andere in den Geraden NN_1, PQ, daher U (F, F_1) ein Liniensystem II. Art ist. — Findet keiner der betrachteten Fälle statt, so sind N, P, Q drei Eckpunkte eines vollständigen Vierecks $NPQS$, von welchem je zwei einander gegenüberliegende Seiten in dem Polarsysteme einander conjugirt und zugleich Spuren von einer Fläche des Flächensystems (F, F_1) sind, daher in diesem Falle $U (F, F_1)$ ein Liniensystem I. Art ist.

592. Wenn durch die neun Punkte A, B, C, D, M, N, P, Q, R nur eine Fläche F II. Ordnung möglich ist und diese mit der Ebene U, welche durch die drei Punkte N, P, Q geht, eine Linie UF bestimmt, so kann man diese Linie auf folgende Weise finden:

Alle Flächen II. Ordnung, welche durch die acht Punkte A, B, C, D, M, N, P, Q gehen, gehören einem und demselben einfachen Flächensysteme (F_1, F_2) und eben so alle Flächen II. Ordnung, welche durch die acht Punkte A, B, C, D, N, P, Q, R gehen, einem und demselben andern einfachen Flächensysteme (F_3, F_4) an. Wenn nun irgend eine Fläche des einen oder des andern dieser Systeme aus der Ebene U und noch einer Ebene besteht, so schneiden alle übrigen Flächen desselben die Ebene U in der Linie UF. Wenn aber die Ebene U mit jedem der beiden Flächensysteme ein Liniensystem bestimmt, so ist UF diejenige Linie II. Ordnung, welche die Liniensysteme $U (F_1, F_2)$, $U (F_3, F_4)$ mit einander gemein haben.

---

§. 40.

Noch einige Sätze über unebene Curven III. Ordnung.

593. Durch ein Tetraeder ABCD, dann eine Curve K III. Ordnung, welche durch die vier Eckpunkte des Tetraeders geht, und eine Ebene U, welche durch keinen dieser Punkte geht, ist ein einfaches Flächensystem XXII. Art bestimmt, so dass nämlich in Hinsicht auf jede Fläche dieses Systems der gegebenen Ebene ein Punkt der gegebenen Curve und jeder Seite des gegebenen Tetraeders der ihr gegenüberliegende Eckpunkt desselben zugeordnet ist.

Die vier Geraden, in welchen die Ebene U die vier Seiten des Tetraeders ABCD schneidet, sind Tangenten der in 565 durch L bezeichneten Curve II. Ordnung. Diese Curve berührt auch jede in der Ebene U liegende Gerade, welche mit der Curve K zwei Punkte gemein hat oder derselben in einem Punkte sich anschmiegt. Die Ebene U bestimmt mit dem Flächensysteme (F, F_1) ein einfaches Liniensystem I. oder II. oder IV. Art, je nachdem sie die Curve K in drei Punkten schneidet oder in einem Punkte M schneidet und in einem andern berührt oder mit derselben nur einen Punkt M gemein hat. In den beiden letztern Fällen geht die Curve L durch den Punkt M. In der Ebene U ist zu jedem geraden Gebilde g, welches mit der Curve K keinen Punkt gemein hat, eine Curve K_1 II. Ordnung projektivisch, so dass je zwei homologe Punkte dieser Gebilde in Hinsicht auf alle Flächen des Systems (F, F_1) einander conjugirt sind. Haben die Curven K_1, L vier Punkte mit einander gemein, so schneidet die Gerade g vier der Curve K sich anschmiegende Gerade.

594. Jede Ebene U, welche eine unebene Curve K III. Ordnung in drei Punkten M, N, P schneidet, geht durch die Schnittlinie h von zwei der Curve sich anschmiegenden Ebenen und schneidet den der Curve K sich anschmiegenden Strahlenbüschel in einer Curve K_1 IV. Ordnung, welche in jedem der drei Punkte M, N, P eine Spitze bildet und die Gerade h in zwei Punkten H, H_1 berührt. Den der Curve K sich anschmiegenden Ebenenbüschel schneidet die Ebene U in einem Strahlenbüschel III. Ordnung, welcher der Curve K_1 sich anschmiegt. Die dieser Curve in den Punkten M, N, P sich anschmiegenden Geraden schneiden sich 484 in einem und demselben vierten Punkte. Wenn die Curve K und die Ebene U reell sind, so sind die Punkte M, N, P entweder alle drei reell oder es ist nur einer derselben reell. Im erstern dieser Fälle sind H, H_1 zwei einander conjungirte imaginäre, im letztern aber zwei reelle Punkte.

Wenn eine unebene Curve K III. Ordnung von einer Ebene U in einem Punkte M geschnitten und in einem andern Punkte N berührt wird, so geht die Ebene U durch einen Strahl n des der Curve K sich anschmiegenden Strahlenbüschels und schneidet überdiess diesen Büschel in einer Curve K_1 III. Ordnung, welche im Punkte M eine Spitze bildet, während der Punkt N ein Wendepunkt derselben ist. Der der Curve K sich anschmiegende Ebenenbüschel wird wieder von der Ebene U in einem Strahlenbüschel III. Ordnung geschnitten, welcher der Curve K_1 sich anschmiegt.

595. Jede unebene Curve K III. Ordnung wird aus jedem nicht in ihr liegenden Punkte S durch eine Kegelfläche SK III. Ordnung projicirt, der ein Ebenenbüschel III. oder IV. Ordnung sich anschmiegt, je nachdem der Punkt S in einem Strahle s des der

Curve K sich anschmiegenden Strahlenbüschels oder in einer Geraden h liegt, welche mit der Curve K zwei Punkte H, H_1 gemein hat. Im erstern Falle bildet die Kegelfläche SK in dem Strahle s eine Schneide, während ihr diejenige der Curve K sich anschmiegende Ebene, welche die Gerade s im Punkte S schneidet, in einem Wendestrahle sich anschmiegt. Im letztern Falle ist die Gerade h ein Knotenstrahl der Kegelfläche SK, während in der Ebene, die in dem durch die Curve K bestimmten Nullsysteme dem Punkte S zugeordnet ist, drei Wendestrahlen derselben liegen. Wenn ferner die Curve K und der Punkt S reell sind, so sind H, H_1 entweder zwei reelle oder zwei einander conjungirte imaginäre Punkte. Im erstern dieser Fälle schmiegen der Kegelfläche SK in der Geraden h zwei reelle Ebenen sich an, während nur einer von ihren drei Wendestrahlen reell ist, dagegen im letztern Falle alle drei Wendestrahlen reell sind, die Gerade h aber ein isolirter Strahl der Fläche ist, in welchem nämlich derselben zwei einander conjungirte imaginäre Ebenen sich anschmiegen.

---

§. 41.

Vermischte Sätze.

596. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, deren jede die Ebene, in der die andere liegt, in zwei ausserhalb der andern liegenden Punkten schneidet, sind (556) zwei andere Curven K_2, K_3 II. Ordnung bestimmt, so dass jede Ebene, welche zwei der vier Curven K, K_1, K_2, K_3 berührt, auch die beiden übrigen berührt und die vier Berührungspunkte in einer und derselben Geraden liegen. Jede Ebene, welche durch eine der vier Curven geht, schneidet die drei übrigen in den sechs Eckpunkten eines vollständigen Vierseits, dessen Seiten jene Curve berühren. Die vier Ebenen U, U_1, U_2, U_3, in welchen die Curven K, K_1, K_2, K_3 liegen, sind die Seiten eines Tetraeders T von dessen vier Eckpunkten je zwei in Hinsicht auf zwei der vier Curven einander conjugirt sind. Durch jede Ebene V, welche durch keinen Eckpunkt des Tetraeders T geht, ist eine Gerade v bestimmt, welche keine Kante desselben schneidet, so dass

in Hinsicht auf die Curve K der Geraden U V der Punkt U v, in Hinsicht auf die Curve K_1 der Geraden U_1 V der Punkt U_1 v, in Hinsicht auf die Curve K_2 der Geraden U_2V der Punkt U_2 v und in Hinsicht auf die Curve K_3 der Geraden U_3 V der Punkt U_3 v zugeordnet ist. Jede Regelfläche, in Hinsicht auf welche jeder Seite des Tetraeders T der ihr gegenüberliegende Eckpunkt desselben, der Ebene V aber ein Punkt der Geraden v zugeordnet ist, schmiegt dem durch die Curven K, K_2 bestimmten Ebenenbüschel sich an; welchem nämlich jede Ebene angehört, die die beiden Curven K, K_1 und daher auch die Curven K_2, K_3 berührt.

597. Durch jede reelle Fläche F II. Ordnung, welche die Ordnungsfläche eines räumlichen Polarsystems, aber keine Drehungsfläche ist, sind zwei reelle Curven K, K_1 II. Ordnung bestimmt, so dass nämlich jede der Fläche F sich anschmiegende Ebene, welche zu sich selbst senkrecht ist und also den unendlich fernen Normalkreis berührt, auch die beiden Curven K, K_1 berührt. Die Ebenen U, U_1, in welchen die Curven K, K_1 liegen, sind zwei Symmetralebenen der Fläche F und daher zu einander senkrecht. Hat die Fläche F einen Mittelpunkt und also noch eine dritte Symmetralebene, so liegt auch in dieser eine Curve II. Ordnung, welche jede Ebene des durch die beiden Curven K, K_1 bestimmten Ebenenbüschels E berührt, aber imaginär ist. Ferner haben in diesem Falle die Curven UF, K zwei gemeinschaftliche Brennpunkte, welche Scheitelpunkte der Curve K_1 sind, und eben so die Curven U_1 F, K_1 zwei gemeinschaftliche Brennpunkte, welche Scheitelpunkte der Curve K sind. Wenn aber die Fläche F keinen Mittelpunkt hat, so sind UF, K, U_1 F, K_1 vier Parabeln, von welchen die vierte den gemeinschaftlichen Brennpunkt der beiden ersteren und eben so die zweite den gemeinschaftlichen Brennpunkt der beiden letzteren zum Scheitelpunkt hat.

Zu jeder eigentlichen Ebene V, welche nicht in Hinsicht auf die Fläche F der unendlich fernen Ebene conjugirt ist, ist eine Gerade v senkrecht, die der Ebene V in Hinsicht auf jede dem Ebenenbüschel E sich anschmiegende Fläche II. Ordnung conjugirt ist und durch die beiden Punkte geht, von welchen der eine in Hinsicht auf die Curve K der Geraden U V, der andere aber in Hinsicht auf die Curve K_1 der Geraden U_1 V zugeordnet ist. Aus jedem

Punkte, welcher einer von den beiden Curven K, K_1 angehört, aber mit der andern nicht in einerlei Ebene liegt, wird die andere durch eine Drehungskegelfläche projicirt, deren Axe der ersteren sich anschmiegt. Eben so ist jede Kegelfläche, welche die Fläche F in einer Curve II Ordnung berührt und ihren Mittelpunkt in einer von den Curven K, K_1 hat, eine Drehungsfläche. Die Beziehungen, welche diese Curven zur Fläche F haben, haben sie aber auch zu jeder andern reellen Fläche F_1 II. Ordnung, welche dem Ebenenbüschel E sich anschmiegt, daher sowohl U F, U F_1 als auch U_1 F, U_1 F_1 confocale Curven sind.

598. Durch ein Dreikant a b s, dessen dritte Kante s nicht die beiden ersteren unter gleichen Winkeln schneidet, ist eine Kegelfläche K II. Ordnung bestimmt, welche nämlich auf den Strahlenbüschel S, der in der Ebene a b liegt und den Punkt a b zum Mittelpunkt hat, projektivisch so bezogen werden kann, dass je zwei homologe Strahlen der zu einander projektivischen Gebilde zu einander senkrecht und in Hinsicht auf die Fläche, welche aus den beiden Ebenen a s, b s besteht mithin auch in Hinsicht auf jede Kegelfläche II. Ordnung, welche die Ebenen a s, b s in den Geraden a b berührt, einander conjugirt sind. In jedem Strahle u der Fläche K schneiden sich zwei Ebenen, von welchen die eine im Punkte S zu einem Strahle u_1 des Büschels S senkrecht, die andere aber demselben Strahle in dem einfachen Flächensysteme (a b, a s + b s) conjugirt ist. Jede Kegelfläche F dieses Systems hat drei Axen, welche, weil jede derselben zu dem Strahle des Büschels S, der mit den beiden übrigen in einerlei Ebene liegt, senkrecht und überdiess demselben Strahle in Hinsicht auf die Fläche F conjugirt ist, in der Fläche K liegen.

Bezeichnet man die Ebenen a s, b s durch A, B und die Schnittlinie der Ebenen a b, s u durch v, so ist sin. A u : sin. B u = sin. A v : sin. B v. Nun ist aber sin. A v = sin. a v . sin. s a v, sin. B v = sin. b v . sin. s b v, sin. a v : sin. b v = sin. a u_1 : sin. b u_1, sin. s a v : sin. s b v = sin. b s : sin. a s, also auch sin. A u : sin. B u = sin. a u_1 . sin. b s : sin. b u_1 . sin. a s. Bemerkt man endlich, dass sin. u u_1 = 1, cosin. u u_1 = 0 und daher cosin. a u : cosin. b u = sin. a u_1 : sin. b u_1 ist, so erhält man die Gleichung:

sin. A u : sin. B u = cosin. a u . sin. b s : cosin. b u . sin. a s.

Anmerkung. Gleich wie hier, so ist auch in den noch folgenden Sätzen unter einem Elemente, wenn es nicht ausdrücklich imaginär genannt wird, ein reelles und zwar eigentliches Element und unter einer Fläche eine reelle Fläche zu verstehen.

599. Wenn A, B, C, D vier in einer und derselben Kreislinie K liegende Punkte sind, so hat der Wurf $ABCD$ in der Curve K den Werth $\mp \frac{AD \,.\, BC}{AB \,.\, CD}$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Punkte A, C durch die Punkte B, D getrennt oder nicht getrennt sind.

Es folgt dieser Satz aus 396, wenn man in der Curve K einen beliebigen Punkt S annimmt und bemerkt, dass die Sinusse der Peripheriewinkel ASD, BSC, ASB, CSD sich zu einander verhalten, wie die Sehnen AD, BC, AB, CD. Ist $ABCD$ ein harmonischer Wurf, so ist $AD \,.\, BC = AB \,.\, CD$. In jedem Falle aber ist (262), wenn die Punkte A, C, durch die Punkte B, D getrennt sind, $AB \,.\, CD + AD \,.\, BC = AC \,.\, BD$.

600. In jedem in einen Kreis beschriebenen Sechsecke $ABC\,A_1B_1C_1$, dessen drei Hauptdiagonalen AA_1, BB_1, CC_1 in einem und demselben Punkte sich schneiden, ist das Produkt aus drei Seiten AB, CA_1, B_1C_1, unter welchen keine zwei auf einander folgende sind, dem Produkte aus den drei übrigen Seiten gleich.

Da nämlich $AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1$ eine Involution ist, so ist $A_1B_1C_1A \barwedge ABCA_1$, demnach $\frac{AA_1 \,.\, B_1C_1}{A_1B_1 \,.\, C_1A} = \frac{AA_1 \,.\, BC}{AB \,.\, CA_1}$ und mithin $AB \,.\, CA_1 \,.\, B_1C_1 = BC \,.\, A_1B_1 \,.\, C_1A$.

Wenn die Geraden AA_1, BB_1 die durch den Punkt C gehende Tangente des Kreises in einem und demselben Punkte schneiden und also C_1 mit C zusammenfällt, so ist $AB \,.\, CA_1 \,.\, CB_1 = A_1B_1 \,.\, CA \,.\, CB$.

601. Wenn zwei Kugelflächen K, K_1 projektivisch auf einander bezogen sind und in Folge dessen den Punkten A, B, C, D der einen Fläche die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 der andern entsprechen, so ist

$AB \,.\, CD : AC \,.\, BD : AD \,.\, BC = A_1 B_1 \,.\, C_1 D_1 : A_1 C_1 \,.\, B_1 D_1 : A_1 D_1 \,.\, B_1 C_1.$

Es schneide die Gerade CD die Ebenen, welche die Kugelfläche K in den Punkten A, B berühren, in den Punkten P, Q, so ist $\frac{PC}{PA} = \frac{PA}{PD} = \frac{AC}{AD}$, folglich $\frac{PC}{PD} = \frac{AC^2}{AD^2}$ und eben so $\frac{QC}{QD} = \frac{BC^2}{BD^2}$, mithin $\frac{AC^2 \,.\, BD^2}{AD^2 \,.\, BC^2}$ der Werth des Wurfes PDQC. Es schneide ferner die Gerade $C_1 D_1$ die Ebenen, welche die Kugelfläche K_1 in den Punkten A_1 B_1 berühren, in den Punkten P_1, Q_1, so ist $\frac{A_1 C_1{}^2 \,.\, B_1 D_1{}^2}{A_1 D_1{}^2 \,.\, B_1 C_1{}^2}$ der Werth des Wurfes $P_1 D_1 Q_1 C_1$. Da nun die Würfe PDQC, $P_1 D_1 Q_1 C_1$ als homologe Würfe von zwei zu einander collineären räumlichen Systemen einander gleich sind, so ist auch $\frac{AC \,.\, BD}{AD \,.\, BC} = \frac{A_1 C_1 \,.\, B_1 D_1}{A_1 D_1 \,.\, B_1 C_1}$ und eben so $\frac{AB \,.\, CD}{AD \,.\, BC} = \frac{A_1 B_1 \,.\, C_1 D_1}{A_1 D_1 \,.\, B_1 C_1}$.

---

§. 42.

Ueber Krümmungen.

602. Die Krümmungen einer Ellipse oder Hyperbel an zwei verschiedenen Punkten A, B verhalten sich zu einander wie die dritten Potenzen der Abstände, welche die Polaren AS, BS dieser Punkte vom Mittelpunkte M der Curve haben.

Es seien MP, MQ die aus dem Punkte M auf die Geraden AS, BS gefällten Lothe, so ist MP : MQ = sin. MSA : sin. MSB. Da aber die Gerade MS die Strecke AB halbirt, so ist sin. MSA : sin. MSB = SB : SA, mithin auch MP : MQ = SB : SA, woraus (437) der Satz folgt.

Wenn a, b die halben Axen einer Ellipse oder a, bi die halben Axen einer Hyperbel sind, so ist $\frac{a}{b^2}$ die Krümmung der Curve an jedem der Scheitelpunkte, deren Polaren vom Mittelpunkte den Abstand a haben. Die Krümmung der Curve an einem Punkte, dessen Polare vom Mittelpunkte den Abstand d hat, ist also $\frac{a}{b^2} \cdot \frac{d^3}{a^3} = \frac{d^3}{a^2 b^2}$.

603. Wenn einer Kegelfläche F II. Ordnung im Strahle a die Ebene A sich anschmiegt, so ist auch jeder andern Geraden p, welche in der Ebene A liegt und durch den Mittelpunkt der Kegelfläche geht in Hinsicht auf dieselbe eine durch die Gerade a gehende Ebene P zugeordnet. Die Grenze K, welcher der Quotient $\frac{\sin. AP}{\sin. ap}$ sich nähert, wenn sein Dividend und sein Divisor der Null sich nähern, soll die Krümmung der Kegelfläche F im Strahle a heissen. Werden in der Ebene A noch zwei durch den Mittelpunkt der Kegelfläche gehende Gerade s, u angenommen und die ihnen in Hinsicht auf die Fläche zugeordneten Ebenen durch S, U bezeichnet, so ist $APSU \barwedge apsu$, folglich

$$\frac{\sin. AP}{\sin. ap} = \frac{\sin. su \,.\, \sin. AS \,.\, \sin. PU}{\sin. as \,.\, \sin. pu \,.\, \sin. SU} \text{ und mithin}$$

$$K = \frac{\sin. su \,.\, \sin. AS \,.\, \sin. AU}{\sin. as \,.\, \sin. au \,.\, \sin. SU}.$$

604. Die Krümmungen k, k_1 einer Kegelfläche F II. Ordnung in zwei verschiedenen Strahlen a, b verhalten sich zu einander umgekehrt wie die dritten Potenzen der Sinusse der Winkel, welche diese Strahlen mit der Schnittlinie s der in ihnen der Kegelfläche sich anschmiegenden Ebenen bilden.

Es schneide eine Ebene, welche der Kegelfläche in einem dritten Strahle c sich anschmiegt, die Ebenen ab, as, bs in den Geraden d, u, v, so ist

$$k = \frac{\sin. su \,.\, \sin. sab \,.\, \sin. sac}{\sin. as \,.\, \sin. au \,.\, \sin. bac}$$

$$k_1 = \frac{\sin. sv \,.\, \sin. sba \,.\, \sin. sbc}{\sin. bs \,.\, \sin. bv \,.\, \sin. abc}$$

Da nun $\frac{\sin. abc}{\sin\ bac} = \frac{\sin. ac}{\sin. bc}$ ist, so ist

$$\frac{\sin. sac \cdot \sin. abc}{\sin. sbc \cdot \sin. bac} = \frac{\sin. sac \cdot \sin. ac}{\sin. sbc \cdot \sin. bc} =$$

$$\frac{\sin. suc \cdot \sin. cu}{\sin svc \cdot \sin. cv} = \frac{\sin. sv \cdot \sin. cu}{\sin. su \cdot \sin. cv}$$

Da ferner die Geraden u, v durch die Geraden c, d harmonisch getrennt sind, so ist $\frac{\sin. cu}{\sin. cv} = \frac{\sin. du}{\sin. dv}$, folglich

$$\frac{\sin. cu \cdot \sin. bv}{\sin cv \cdot \sin. au} = \frac{\sin. du \cdot \sin. bv}{\sin. au \cdot \sin. dv} =$$

$$\frac{\sin. sab \cdot \sin. adu}{\sin. adu \cdot \sin. sba} = \frac{\sin. sab}{\sin. sba}, \text{ mithin}$$

$$\frac{\sin. su \cdot \sin. sac \cdot \sin. abc \cdot \sin. bv}{\sin. sv \cdot \sin. sbc \cdot \sin. bac \cdot \sin. au} = \frac{\sin. sab}{\sin. sba}.$$

Bemerkt man nun noch, dass $\frac{\sin. sab}{\sin. sba} = \frac{\sin. bs}{\sin. as}$ ist, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{k}{k_1} = \left(\frac{\sin. bs}{\sin. as}\right)^3$$

Wenn ac eine durch die Hauptaxe m der Kegelfläche gehende Symmetralebene derselben und die Ebene mb zur erstern senkrecht ist, so ist sin. au = sin. sac = 1, folglich

$$k = \frac{\sin. su \cdot \sin. sab}{\sin. as \cdot \sin. bac} = \frac{tg. su}{tg. mab} =$$

$$\frac{tg. bu \cdot \sin. ma}{tg. mb \cdot cosin. bus} = \frac{tg. ma}{tg. mb^2}$$

und eben so $k_1 = \frac{tg. mb}{tg. ma^2}$.

Ist nun h ein beliebiger Strahl der Fläche, H die in ihm derselben sich anschmiegende Ebene und t die Gerade, in welcher diese Ebene die Ebene as schneidet, so ist (598) $\frac{\sin. at}{\sin. ht} =$ $\frac{\sin. mH \cdot cosin. ma}{\sin. ma \cdot cosin. mh}$ und mithin $\frac{\sin. mH^3 \cdot sec. mb^3}{tg. ma^2 \cdot tg. mb^2}$ die Krümmung der Kegelfläche im Strahle h. Die Krümmung einer Drehungskegelfläche ist in allen ihren Strahlen von derselben Grösse nämlich der Contangente des Winkels gleich, den die Axe der Fläche mit jedem Strahle derselben bildet.

605. Wenn eine Fläche F II. Ordnung und eine Gerade g in einem Punkte S sich berühren, so ist in Hinsicht auf die Fläche F dem geraden Gebilde g ein Ebenenbüschel g_1 zugeordnet, dessen Axe g_1 entweder in der Fläche F liegt oder dieselbe im Punkte S berührt, je nachdem nämlich die Fläche F eine Kegelfläche oder keine Kegelfläche ist. In jedem dieser Fälle aber ist, wenn den Punkten S, P, A, B des geraden Gebildes g die Ebenen S_1. P_1, A_1, B_1 des Büschels g_1 zugeordnet sind, $S_1\ P_1\ A_1\ B_1 \barwedge SPAB$, folglich

$$\frac{\sin.\ S_1 P_1}{SP} = \frac{AB\ .\ \sin.\ S_1 A_1\ .\ \sin.\ P_1 B_1}{SA\ .\ \ \ PB\ \ .\ \sin.\ A_1 B_1}$$

Die Grenze, welcher der Quotient $\frac{\sin.\ S_1 P_1}{SP}$ sich nähert, wenn sein Dividend und sein Divisor der Null sich nähern, soll, da ihr Werth durch die Fläche F und die Gerade g bestimmt ist, durch (F, g) bezeichnet werden. Es ist hiernach

$$(F, g) = \frac{AB\ .\ \sin.\ S_1 A_1\ .\ \sin.\ S_1 B_1}{SA\ .\ SB\ .\ \sin.\ A_1 B_1}$$

Jede Ebene U, welche durch die Gerade g aber nicht durch die Gerade g_1 geht, also die Ebene P_1 in einer andern Geraden p schneidet, schneidet die Fläche F in einer Curve UF II. Ordnung. Da nun

$\frac{\sin.\ gp}{SP} : \frac{\sin.\ S_1 P_1}{SP} = \sin.\ gp : \sin.\ S_1 P_1 = \sin.\ gg_1 : \sin.\ UP_1$ ist, so ist, wenn man die Krümmung der Curve UF im Punkte S durch k bezeichnet,

$$k : (F, g) = \sin.\ gg_1 : \sin.\ US_1.$$

Ist also die Ebene U zur Ebene gg_1 senkrecht, so ist $k = (F, g)\ .\ \sin.\ gg_1$.

606. Wenn eine Kegelfläche F II. Ordnung, deren Mittelpunkt M ist, von einer Geraden g im Punkte A berührt wird und die Kegelfläche in dem Strahle a, welcher durch den Punkt A geht, die Krümmung k hat, so ist $(F, g) = \frac{k\ .\ \sin.\ ag}{MA}$.

Es sei P irgend ein von A verschiedener Punkt der Geraden g. Bezeichnet man nun die Ebene ag durch A_1, die Gerade MP durch p und die dem Punkte P und daher auch der

Geraden p in Hinsicht auf die Fläche F zugeordnete Ebene durch P_1, so ist

$$\frac{\sin.\ A_1 P_1}{AP} = \frac{\sin.\ A_1 P_1}{\sin.\ ap} \cdot \frac{\sin.\ ap}{AP} = \frac{\sin.\ A_1 P_1}{\sin.\ ap} \cdot \frac{\sin.\ ag}{MP},$$

woraus der Satz folgt.

607. Wenn einer Curve K II. Ordnung im Punkte A die Gerade g sich anschmiegt, so schmiegt der Kegelfläche F, welche die Curve K aus dem Punkte M projicirt, in der Geraden a, welche diesen Punkt mit dem Punkte A verbindet, die Ebene Mg sich an. Ist nun k die Krümmung der Curve K im Punkte A, k_1 die Krümmung der Kegelfläche F im Strahle a und d der Abstand des Punktes M von der Ebene K, so ist $dk = k_1 \sin.\ ag^3$.

Da nämlich $\frac{d}{MA \sin.\ ag}$ der Sinus des Winkels ist, welchen die Ebene Mg mit der Ebene K bildet, so ist (605) $\frac{dk}{MA\ .\ \sin.\ ag^2} = (F, g)$. Nun ist aber nach dem vorigen Satze $(F, g) = \frac{k_1 \sin.\ ag}{MA}$, woraus der Satz sich ergiebt.

Ist F eine Drehungskegelfläche und w der Winkel, welchen die Axe der Fläche mit jedem Strahle derselben bildet, so ist $k_1 = \text{cotg.}\ w$ und folglich $k = \frac{\sin.\ ag^3}{d\ .\ \text{tg.}\ w}$. Das Produkt d . tg. w ist, wie aus 437 und 596 hervorgeht, aber auch ausserdem leicht nachgewiesen werden kann, dem halben Parameter der Curve K gleich.

608. Wenn die Geraden g, g_1, h, h_1 die Ordnungsfläche F eines räumlichen Polarsystems in einem und demselben Punkte A berühren, so dass überdiess in Hinsicht auf die Fläche der Geraden g die Gerade g_1 und der Geraden h die Gerade h_1 zugeordnet ist, so ist

$(F, g) : (F, h) = \sin.\ gh_1 : \sin.\ hg_1$ und

$(F, g) : (F, g_1) = \sin.\ gh.\ \sin.\ gh_1 : \sin.\ g_1 h.\ \sin.\ g_1 h_1$.

Es seien u, u_1 zwei in Hinsicht auf die Fläche F einander zugeordnete Gerade, von welchen die eine u die Geraden g, h in zwei verschiedenen Punkten P, Q und also die andere u_1 die Ebene gh im Punkte A schneidet, so ist

$$\frac{\sin. h_1 g_1 u_1}{AP} : \frac{\sin. g_1 h_1 u_1}{AQ} = \frac{\sin. h_1 g_1 u_1}{\sin. g_1 h_1 u_1} : \frac{AP}{AQ} = \frac{\sin. h_1 u_1}{\sin. g_1 u_1} : \frac{\sin. hu}{\sin. gu}$$

Lässt man nun die Geraden u, u_1 sich bewegen und dann u mit g_1 und u_1 mit g zusammenfallen, so erhält man die Gleichung $(F, g) : (F, h) = \sin. gh_1 : \sin. hg_1$.
Eben so ist $(F, g_1) : (F, h) = \sin. g_1 h_1 : \sin. hg$, demnach $(F, g) : (F, g_1) = \sin. gh. \sin. gh_1 : \sin. g_1 h. \sin. g_1 h_1$.
Legt man durch den Punkt A noch zwei in Hinsicht auf die Fläche F einander zugeordnete Gerade v, v_1, so ist $gg_1 hv \barwedge g_1 g h_1 v_1$ und also

$$\frac{\sin. gv}{\sin. g_1 v_1} = \frac{\sin. gh_1 . \sin. vh}{\sin. g_1 h_1 . \sin. v_1 h_1}$$

woraus hervorgeht, dass $\frac{\sin. gh . \sin. gh_1}{\sin. g_1 h . \sin. g_1 h_1}$ und folglich auch $\frac{(F, g)}{(F, g_1)}$ die Grenze ist, welcher der Quotient $\frac{\sin. gv}{\sin. g_1 v_1}$ sich nähert, wenn sein Dividend und sein Divisor der Null sich nähern.

609. Durch eine Fläche F II. Ordnung und zwei Gerade g, g_1, welche die Fläche in einem und demselben Punkte A berühren und zugleich in Hinsicht auf dieselbe einander zugeordnet sind, sind zwei Grössen (F, g), (F, g_1) bestimmt, deren Produkt schon durch die Fläche F und den Punkt A bestimmt ist und daher durch (F, A) bezeichnet werden soll. Sind nämlich h, h_1 irgend zwei andere durch den Punkt A gehende und in Hinsicht auf die Fläche F einander zugeordnete Gerade, so ist (608)

$(F, g) : (F, h) = \sin. gh_1 : \sin. hg_1$ und ebenso
$(F, g_1) : (F, h_1) = \sin. g_1 h : \sin. h_1 g$, folglich
$(F, g) . (F, g_1) = (F, h) . (F, h_1)$.

Nach dem Vorigen ist nun auch $(F, A) =$

$$\frac{(F, g) . (F, h) . \sin. g_1 h_1}{\sin. gh} = \frac{(F, g)^2 . \sin. g_1 h . \sin. g_1 h_1}{\sin. gh . \sin. gh_1}.$$

610. Wenn in Hinsicht auf eine Regelfläche F, welche durch die Gerade s geht, den Punkten A, B, C dieser Geraden die Ebenen A_1, B_1, C_1 zugeordnet sind, so ist

$$(F, A) = \left(\frac{BC \;.\; \sin.\; A_1 B_1 \;.\; \sin.\; A_1 C_1}{AB \;.\; AC \;.\; \sin.\; B_1 C_1}\right)^2$$

Es seien g, g_1 zwei in Hinsicht auf die Fläche F einander zugeordnete Gerade, welche durch den Punkt A gehen und also in der Ebene A_1 liegen. Es seien ferner u, u_1 zwei in Hinsicht auf die Fläche F einander zugeordnete Gerade, von welchen die eine u die Geraden g, s in zwei Punkten P, S schneidet und also die andere u_1 die Schnittlinie der diesen Punkten zugeordneten Ebenen P_1, S_1 ist, so hat man die Gleichungen

$$\frac{\sin.\; A_1 P_1}{AP} : \frac{\sin.\; A_1 S_1}{AS} = \frac{\sin.\; A_1 P_1}{\sin.\; A_1 S_1} : \frac{A\;P}{A\;S} = \frac{\sin.\; s u_1}{\sin. g_1 u_1} : \frac{\sin.\; su}{\sin.\; gu}$$

$$\frac{\sin.\; A_1 S_1}{AS} = \frac{BC \;.\; \sin.\; A_1 B_1 \;.\; \sin.\; S_1 C_1}{AB \;.\; SC \;.\; \sin.\; B_1 C_1}$$

Lässt man nun u mit g_1 und also u_1 mit g zusammenfallen, so folgt, dass

$$\frac{\sin.\; s g_1}{\sin.\; s g} \cdot \left(F, g\right) = \frac{BC \;.\; \sin\; A_1 B_1 \;.\; \sin.\; A_1 C_1}{AB \;.\; AC \;.\; \sin.\; B_1 C_1}$$

die Grenze ist, welcher der Quotient $\frac{\sin.\; A_1 S_1}{AS}$ sich nähert, wenn sein Dividend und sein Divisor der Null sich nähern. Eben so ist

$$\frac{\sin.\; s g}{\sin.\; s g_1} \cdot \left(F, g_1\right) = \frac{BC \;.\; \sin.\; A_1 B_1 \;.\; \sin.\; A_1 C_1}{AB \;.\; AC \;.\; \sin.\; B_1 C_1}.$$

Bemerkt man nun noch, dass (F, A) = (F, g) . (F, g_1) ist, so folgt der obige Satz. Aus dem Beweise ergiebt sich noch die Gleichung: (F, g) : (F, g_1) = $\sin.\; s g^2 : \sin.\; s g_1^2$.

611. Wenn in Hinsicht auf eine Fläche F II. Ordnung, welche durch den Punkt A geht und die Ordnungsfläche eines räumlichen Polarsystems ist, dem Punkte A die Ebene A_1 zugeordnet ist und man auf jeden Punkt P dieser Ebene diejenige durch den Punkt A gehende Gerade p bezieht, welche zu der dem Punkte P in Hinsicht auf die Fläche F zugeordneten Ebene senkrecht ist, so sind das ebene System A_1 und der Strahlenbündel A projektivisch so auf einander bezogen, dass jedem in der Ebene A_1 liegenden Dreiecke APQ, von welchem A ein Eckpunkt ist, ein Dreikant apq entspricht, dessen eine Kante a die zur Ebene A_1 im Punkte A senkrechte Gerade a ist. Dem

Umfange des Dreiecks APQ entspricht der Mantel des Dreikants apq. Jede Kugelfläche K, welche den Punkt A zum Mittelpunkt hat, schneidet das Dreikant apq in zwei einander gleichen sphärischen Dreiecken. Bezeichnet man nun den Inhalt des Dreiecks APQ durch $\triangle$, den Halbmesser der Kugelfläche K durch r und den Inhalt eines der erwähnten sphärischen Dreiecke durch $\triangle_1$, so ist der Werth des Quotienten $\frac{\triangle}{r^2}$ und also auch der Werth des Quotienten $\frac{\triangle_1}{r^2\triangle}$ von der Grösse des Halbmessers r unabhängig, die Grenze aber welcher der Werth des letztern Quotienten sich nähert, wenn die Seite der Dreiecke $\triangle$, $\triangle_1$ der Null sich nähern, ist, wie aus den beiden letzten Nummern hervorgeht, $=$ (F, A). Hat die Fläche F mit keiner (reellen) Geraden mehr als zwei Punkte gemein, so heisst die Grösse (F, A) die Krümmung der Fläche F im Punkte A.

Legt man durch die Gerade a zwei Ebenen U, U_1, welche die Ebene A_1 in zwei in Hinsicht auf die Fläche F einander zugeordneten Geraden g, g_1 schneiden, und bezeichnet man durch k, k_1 die Krümmungen der Curven UF, U_1F am Punkte A, so ist nach 604 $(F, g) = \frac{k}{\sin. gg_1}$, $(F, g_1) = \frac{k_1}{\sin. gg_1}$ und demnach $(F, A) = \frac{kk_1}{\sin. gg_1{}^2}$.

612. Wenn die vier Geraden g, g_1, h, h_1 eine Fläche F II. Ordnung in einem und demselben Punkte A berühren und überdiess in Hinsicht auf die Fläche der Geraden g die Gerade g_1 und der Geraden h die Gerade h_1 zugeordnet ist, so ist (608)

$$(F, g) : (F, h) = \sin. gh_1 : \sin. g_1h.$$

Es seien nun U, U_1, U_2 die zur Ebene gh in den Geraden g, g_1, h senkrechten Ebenen und k, k_1, k_2 die Krümmungen der Curven UF, U_1F, U_2F im Punkte A, so ist (604)

$k \sin. hh_1 : k_2 \sin. gg_1 = (F, g) : (F, h) = \sin. gh_1 : \sin. g_1h$, also

$k \sin. g_1h^2 : k_2 \sin. gg_1{}^2 = \sin. gh_1 \,.\, \sin. g_1h : \sin. gg_1 \,.\, \sin. hh_1$ und eben so

$k_1 \sin. gh^2 : k_2 \sin. gg_1{}^2 = \sin. g_1h_1 \,.\, \sin. gh : \sin. gg_1 \,.\, \sin. hh_1$, mithin

$$k \sin. g_1 h^2 : k_1 \sin. g h^2 : k_2 \sin. g g_1{}^2 = \sin. g_1 h \,.\, \sin. g h_1 : \sin. g h \,.\, \sin. g_1 h_1 : \sin. g g_1 \,.\, \sin. h h_1.$$

Weil ferner entweder das erste oder das zweite oder das dritte von den drei Produkten rechter Hand der Summe der beiden übrigen gleich ist, je nachdem nämlich die Geraden g_1, h durch die Geraden g, h_1 oder die Geraden g, h durch die Geraden g_1, h_1 oder die Geraden g, g_1 durch die Geraden h, h_1 getrennt sind, so ist im ersten dieser drei Fälle

$k_2 \sin. g g_1{}^2 = k \sin. g_1 h^2 - k_1 \sin. g h^2$, im zweiten aber

$k_2 \sin. g g_1{}^2 = k_1 \sin. g h^2 - k \sin. g_1 h^2$ und im dritten

$k_2 \sin. g g_1{}^2 = k \sin. g_1 h^2 + k_1 \sin. g h^2$.

Sind die Geraden g, g_1, was nun angenommen werden soll, zu einander senkrecht, so ist im dritten Falle, in welchem die Fläche F mit keiner (reellen) Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat, $k k_1$ die Krümmung der Fläche F im Punkte A und

$$k_2 = k \operatorname{cosin.} g h^2 + k_1 \sin. g h^2$$

mithin entweder k_2 ein Mittel zwischen k und k_1 oder $k = k_1 = k_2$.

613. Wenn in Hinsicht auf eine Fläche F II. Ordnung, welche in den Eckpunkten A, B des Tetraeders ABCD die Kanten AC, BC desselben berührt, diesen Kanten die Kanten AD, BD zugeordnet sind und man die Längen der aus den Punkten A, B auf die Kante CD gefällten Lothe durch m, n bezeichnet, so ist

$$(F, AC) : (F, BC) = n^2 \,.\, BC \,.\, AD : m^2 \,.\, AC \,.\, BD$$

Die Ebene ABC schneidet die Fläche F in einer Curve II. Ordnung. Bezeichnet man die Krümmungen dieser Curve in den Punkten A, B durch k, k_1, so ist (604)

$$(F, AC) = \frac{k \,.\, \sin. B\overline{AC}D}{\sin. CAD}, \quad (F, BC) = \frac{k_1 \,.\, \sin. A\overline{BC}D}{\sin. CBD}$$

Bemerkt man nun, dass (437)

$$k : k_1 = BC^3 : AC^3$$

$$\sin. CBD : \sin. CAD = n \,.\, AC \,.\, AD : m \,.\, BC \,.\, BD \text{ und}$$

$$\sin. B\overline{AC}D : \sin. A\overline{BC}D = \sin. BCD : \sin. ACD = n \,.\, AC : m \,.\, BC$$

ist, so folgt der Satz.

614. Wenn die Ordnungsfläche F eines räumlichen Polarsystems die eine u von zwei einander zugeordneten Geraden in

zwei Punkten A, B schneidet, welche von der andern u_1 die Abstände m, n haben, so ist

$$(F, A) : F, B) = n^4 : m^4$$

Sind nämlich C, D irgend zwei in Hinsicht auf die Fläche F einander conjugirte Punkte der Geraden u_1, so (612)

$$(F, AC) : (F, BC) = n^2 . BC . AD : m^2 . AC . BD$$

$$(F, AD) : (F, BD) = n^2 . BD . AC : m^2 . AD . BC$$

woraus (608) der Satz folgt.

Die Krümmungen einer durch keine reelle Gerade gehenden Fläche II. Ordnung in zwei verschiedenen Punkten A, B verhalten sich also umgekehrt wie die vierten Potenzen der Abstände, welche diese Punkte von der Schnittlinie ihrer Polaren haben.

615. Die Krümmungen eines Ellipsoids oder eines zweischaaligen Hyperboloids in zwei verschiedenen Punkten A, B verhalten sich wie die vierten Potenzen der Abstände, welche die Polaren As, Bs dieser Punkte vom Mittelpunkte M der Fläche haben.

Es seien m, n die Abstände der Punkte A, B von der Geraden s und MP, MQ die aus dem Punkte M auf die Ebenen As, Bs gefällten Lothe. Da nun die Ebene Ms die Strecke AB halbirt, so ist n : m = sin. AsM : sin. BsM = MP : MQ, woraus (614) der Satz sich ergiebt.

Sind a, b, c die halben Axen eines Elipsoids oder a, bi, ci die halben Axen eines zweischaaligen Hyperboloids, so ist $\frac{a}{b^2} \cdot \frac{a}{c^2} = \frac{a^2}{b^2 c^2}$ die Krümmung der Fläche an jedem der Scheitelpunkte, deren Polaren vom Mittelpunkte den Abstand a haben. Die Krümmung der Fläche in einem Punkte, dessen Polare vom Mittelpunkte den Abstand d hat, ist also $\frac{a^2}{b^2 c^2} \cdot \frac{d^4}{a^4} = \frac{d^4}{a^2 b^2 c^2}$.

Eben so ist, wenn a, b, ci die halben Axen eines einschaaligen Hyperboloids F sind, und d den Abstand bezeichnet, welchen die Polare eines Punktes D der Fläche vom Mittelpunkte derselben hat, $(F, D) = \frac{d^4}{a^2 b^2 c^2}$.

616. Die Krümmungen eines elliptischen Paraboloids in zwei verschiedenen Punkten A, B verhalten sich zu einander wie die vierten Potenzen der Sinusse der Winkel α, β, unter welchen die Polaren As, Bs jener Punkte die Axe der Fläche schneiden.

Es seien m, n die Abstände der Punkte A, B von der Geraden s. Da nun die Richtung, welche die Axe der Fläche hat, in der Ebene Ns enthalten ist, welche die Gerade s mit dem Mittelpunkte N der Strecke AB verbindet, so ist sin. α : sin. β = sin. AsN : sin. BsN = n : m, woraus (614) der Satz folgt. Ist also K die Krümmung der Fläche in ihrem Scheitelpunkte, so ist K sin. α^4 ihre Krümmung im Punkte A.